ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ—8

Консультирующий редактор-составитель тома
доктор физико-математических наук *М. А. Шубин*

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук *Ф. Ф. Воронов*,
доктор технических наук *С. Г. Крейн*,
кандидат физико-математических наук *Г. В. Розенблюм*

„Итоги Науки и Техники".
Современные проблемы математики
Фундаментальные направления
том 65

Москва, ВИНИТИ, 1991

Научный редактор-составитель тома
С. А. Вахрамеев

Авторы
П. И Дубников, Б. С. Павлов, С. Н. Самборский, Б. В. Федосов

УДК 517.951+517.954+517.956

I. ЛИНЕЙНЫЕ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ, ГРАНИЧНЫЕ И НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НИХ

П. И. Дудников, С. Н. Самборский

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Пусть задан линейный дифференциальный оператор с частными производными A, его действие на вектор-функцию $y=(y_1, \ldots, y_m)$ приводит к вектор-функции $f=(f_1, \ldots, f_l)$. Будем считать сначала, что все функции, а также коэффициенты дифференциального оператора заданы в открытой области Ω n-мерного евклидова пространства $\mathbf{R}^n$ и являются гладкими (бесконечно дифференцируемыми). Оператор A называется *переопределенным*, если существует такой ненулевой дифференциальный оператор A', что композиция $A'A$ — нулевой оператор (и *недоопределенным*, если существует такой ненулевой оператор A'', что $AA''=0$). Если оператор A переопределен, то условие $A'f=0$ является необходимым для разрешимости системы $Ay=f$ с неизвестной вектор-функцией y.

Простейший пример в $\mathbf{R}^3$ — оператор grad, переводящий скалярную функцию y в вектор-функцию $(\partial y/\partial x_1, \partial y/\partial x_2, \partial y/\partial x_3)$. Необходимое условие разрешимости системы $\operatorname{grad} y=f$ имеет вид $\operatorname{rot} f=0$. Оператор rot, переводящий $f=(f_1, f_2, f_3)$ в

$$\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}-\frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3}-\frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right),$$

также является переопределенным, поскольку $\operatorname{div}\operatorname{rot}=0$, где

$$\operatorname{div}(h_1, h_2, h_3)=\frac{\partial h_1}{\partial x_1}+\frac{\partial h_2}{\partial x_2}+\frac{\partial h_3}{\partial x_3}.$$

Обозначая через $C^\infty(\Omega, Y)$ пространство гладких функций на Ω со значениями в евклидовом пространстве Y, приходим к последовательности пространств и дифференциальных операторов

$$C^\infty(\Omega, \mathbf{R}^1)\xrightarrow{\operatorname{grad}}C^\infty(\Omega, \mathbf{R}^3)\xrightarrow{\operatorname{rot}}C^\infty(\Omega, \mathbf{R}^3)\xrightarrow{\operatorname{div}}C^\infty(\Omega, \mathbf{R}^1)\to 0,$$

которая является *комплексом* (т. е. композиция двух подряд следующих операторов равна нулевому оператору).

Обобщение, в котором в роли Ω выступает конечномерное многообразие, приводит к хорошо известному *комплексу де Рама*

$$\begin{gathered}C^\infty(\Lambda^0(T^*(\Omega))\xrightarrow{d}C^\infty(\Lambda^1(T^*(\Omega))\xrightarrow{d}\\ \xrightarrow{d}C^\infty(\Lambda^2(T^*(\Omega))\xrightarrow{d}\ldots\xrightarrow{d}C^\infty(\Lambda^n(T^*\Omega)),\end{gathered}\tag{0.1}$$

где $C^\infty(\Lambda^i(T^*\Omega))$ — пространства гладких дифференциальных форм на Ω степени i, т. е. гладких сечений векторных расслоений внешних форм $\Lambda^i(T^*\Omega)$ над Ω, которые строятся по Ω. В этом комплексе все операторы d, кроме последнего, переопределены и все, кроме первого, недоопределены.

В общем случае для заданного дифференциального оператора $A_0: C^\infty(\Omega, Y_0)\to C^\infty(\Omega, Y_1)$ возникает задача построения комплекса дифференциальных операторов

$$C^\infty(\Omega, Y_0)\xrightarrow{A_0}C^\infty(\Omega, Y_1)\xrightarrow{A_1}C^\infty(\Omega, Y_2)\to\ldots$$

и изучения его пространств *когомологий*, т. е. пространств

$$H_i=\operatorname{Ker}A_i/\operatorname{Im}A_{i-1}.$$

Наиболее желателен был бы комплекс, у которого когомологии нулевые (такие комплексы называют *точными*), однако такой комплекс не всегда существует. Например, когомологии комплекса (0.1) совпадают с когомологиями многообразия Ω и ни для какого комплекса дифференциальных операторов, начинающегося с оператора

$$d: C^\infty(\Lambda^0(T^*\Omega))\to C^\infty(\Lambda^1(T^*\Omega)),$$

размерность этих когомологий не может быть уменьшена. Таким образом, задача состоит в том, чтобы с каждым дифференциальным оператором связать комплекс, являющийся в определенном смысле «наилучшим»: его когомологии должны иметь «наименьшую» размерность, а условия $A_{i+1}f=0$ должны давать «полный набор» необходимых дифференциальных условий на f для существования решений системы $A_iy=f$. Существование такого комплекса для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами давно и хорошо известно.

В случае операторов с переменными коэффициентами при некоторых дополнительных условиях «невырожденности» коэффициентов такой комплекс в шестидесятые годы был построен Спенсером. Если все функции и коэффициенты оператора A_0 вещественно аналитичны, то так построенный комплекс *локально* (т. е. в достаточно малой окрестности каждой точки) *точен*. Поэтому необходимые условия совместности являются в вещественно-аналитическом случае и достаточными (локально).

В теории уравнений с частными производными переопределенные и недоопределенные операторы играют роль, аналогичную роли необратимых матриц в линейной алгебре. Однако они часто служат и естественным инструментом изучения определенных (т. е. ни пере- ни недоопределенных) операторов, но не принадлежащих к таким хорошо изученным классам, как эллиптические, параболические, гиперболические. Возьмем, для примера, в $\mathbf{R}^3$ систему стационарных уравнений Максвелла

$$A_0(u, v) \equiv (\operatorname{rot} u+v, \ \operatorname{rot} v-u) = (f_1, f_2), \tag{0.2}$$

которая является определенной. Применяя к равенствам (0.2) операцию div и дописывая к исходной системе возникающие следствия, получаем систему

$$A_0'(u, v) \equiv (\operatorname{rot} u+v, \operatorname{rot} v-u, \operatorname{div} v, -\operatorname{div} u) = \\ = (f_1, f_2, h_1, h_2), \tag{0.3}$$

которая переопределена: $A_1' A_0' = 0$, где

$$A_1'(f_1, f_2, h_1, h_2) = (\operatorname{div} f_1 - h_1, \operatorname{div} f_2 - h_2).$$

Система (0.2) и, при выполнеиии условия $A_1'(f_1, f_2, h_1, h_2) = 0$, система (0.3) имеют один и тот же набор гладких решений. Таким образом все равно: изучать ли ядро и коядро оператора A_0 или изучать когомологии комплекса

$$0 \to C^\infty(\Omega, \mathbf{R}^6) \xrightarrow{A_0'} C^\infty(\Omega, \mathbf{R}^8) \xrightarrow{A} C^\infty(\Omega, \mathbf{R}^2) \to 0.$$

Однако вторая задача представляется более удобной для изучения, поскольку оператор A_0' является эллиптическим (в смысле переопределенных систем, точные определения приведены в тексте).

Операторы A_0 и A_0' соответствуют двум разным формам записи одного и того же математического объекта. Такие свойства систем уравнений как эллиптичность, параболичность, гиперболичность и др. являются лишь свойствами формы записи и могут появляться или исчезать при изменении формы записи. Свойства разрешимости при этом неизменны, меняются лишь пространства, в которых системы разрешимы.

Если информация о разрешимости системы содержится в членах «старшего» порядка, то это сразу позволяет применять хорошо развитую технику преобразования Фурье, априорных, энергетических оценок, возмущений. Приведенный пример системы Максвелла показывает, что при выборе подходящей в этом смысле формы записи система может стать переопределенной, даже если в исходной записи она таковой не была.

Пусть теперь Ω — замкнутая область в $\mathbf{R}^n$ с гладкой границей Γ. Тогда обычным изучаемым объектом в математической физике является *граничная задача*:

$$A_0 y = f, \ By = g,$$

где A_0 — дифференциальный оператор и B — композиция дифференциального оператора и оператора сужения на Γ отображения, заданного на Ω. Такая задача в общем случае требует для

разрешимости условий совместности вида

$$\Phi(f, g) = 0.$$

Возникает вопрос: в каком классе операторов искать «подходящий» оператор Φ? С одной стороны, необходимо иметь явную эффективную (т. е. проводимую в конечное число шагов) процедуру получения оператора Φ, исходя из коэффициентов операторов A и B. Это сужает возможности. С другой стороны, условия $\Phi(f, g) = 0$ должны быть достаточны или близки к достаточным (например в смысле конечномерности когомологии $\operatorname{Ker}\Phi / \operatorname{Im}(A, B)$) для разрешимости в широких классах граничных задач, возникающих в математической физике. Обратимся к простейшему примеру — задаче Дирихле для оператора grad в области $\Omega = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_3 \geqslant 0\}$

$$\operatorname{grad} y = f, \ y|_\Gamma = g \qquad (f = (f_1, f_2, f_3)).$$

Очевидными условиями совместимости являются следующие:

$$\operatorname{rot} f = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x_1} - f_1|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} - f_2|_\Gamma = 0,$$

(здесь и выше знак $|_\Gamma$ означает сужение на

$$\Gamma = \{x \in \Omega \subset \mathbf{R}^3 \mid x_3 = 0\}).$$

Обобщая этот пример на случай многообразия Ω с границей Γ и используя комплекс де Рама (0.1), получаем следующий комплекс

$$0 \to C^\infty(\Lambda^0(T^*(\Omega)) \xrightarrow{(d_0, \gamma_0)} C^\infty(\Lambda^1(T^*\Omega)) \times C^\infty(\Lambda^0(T^*\Gamma)) \xrightarrow{\Phi_1} \\ \xrightarrow{\Phi_1} C^\infty(\Lambda^2(T^*\Omega)) \times C^\infty(\Lambda^1(T^*\Gamma)) \xrightarrow{\Phi_2} \ldots \to 0 \tag{0.4}$$

в котором, обозначая через γ_i оператор сужения формы i-го порядка $\varphi \in C^\infty(\Lambda^i(T^*\Omega))$ до формы $\gamma_i\varphi \in C^\infty(\Lambda^i(T^*\Omega))$ и через d_i' — оператор из комплекса де Рама для Γ, имеем

$$\Phi_i(\varphi, \psi) = (d_i\varphi, d_i'\varphi - \gamma_i\psi).$$

(Заметим, что когомологии этого комплекса совпадают с относительными когомологиями пары (Ω, Γ)).

Операторы Φ_i из комплекса (0.4) принадлежат классу *дифференциально-граничных* (ДГ-) операторов, т. е. отображений из

$$C^\infty(\Omega, Y_1) \times C^\infty(\Gamma, W_1) \text{ в } C^\infty(\Omega, Y_2) \times C^\infty(\Gamma, W_2)$$

вида

$$(f, g) \mapsto (A_{11} f, A_{21} f + A_{22} g),$$

где A_{11} и A_{22} — дифференциальные операторы на Ω и Γ соответственно, A_{21} — композиция дифференциального оператора на Ω и оператора сужения на Γ отображения, заданного на Ω.

Вернемся к вопросу о классе операторов, в котором уместно искать операторы совместности. Оказывается, что для широкого круга задач математической физики подходящим является класс ДГ-операторов. Такое заключение вытекает из следующих результатов, около которых и концентрируется изложение в данном обзоре.

1. Для всякого оператора граничной задачи (A, B): $C^\infty(\Omega, Y_0)\to C^\infty(\Omega, Y_1)\times C^\infty(\Gamma, W_0)$, удовлетворяющего условиям «невырожденности коэффициентов», существует и строится в конечное число шагов (не выходящих за рамки дифференцирований коэффициентов и линейной алгебры при фиксации $x\in\Omega$) комплекс ДГ-операторов

$$C^\infty(\Omega, Y_0)\xrightarrow{(A,B)}C^\infty(\Omega, Y_1)\times C^\infty(\Gamma, W_0)\xrightarrow{\Phi_1}$$
$$\xrightarrow{\Phi_1}C^\infty(\Omega, Y_2)\times C^\infty(\Gamma, W_1)\xrightarrow{\Phi_2}\ldots\to 0, \tag{0.5}$$

который фигурирует в следующих утверждениях.

2. Пусть коэффициенты операторов A и B и граница Γ вещественно аналитичны, U окрестность в $\mathbf{R}^n$ точки $x\in\Gamma$ $\Omega'=\Omega\cap U$, $\Gamma'=\Gamma\cap U$ и $\mathfrak{A}(\Omega', H)$ $(\mathfrak{A}(\Gamma', H))$ — множества вещественно аналитических вектор-функций на $\Omega'(\Gamma')$ со значениями в евклидовом пространстве H. Тогда комплекс (0.5) порождает комплекс

$$\mathfrak{A}(\Omega', Y_0)\xrightarrow{(A,B)}\mathfrak{A}(\Omega', Y_1)\times\mathfrak{A}(\Gamma', W_0)\xrightarrow{\Phi_1}$$
$$\xrightarrow{\Phi_1}\mathfrak{A}(\Omega', Y_2)\times\mathfrak{A}(\Gamma', W_1)\xrightarrow{\Phi_2}\ldots\to 0,$$

который для достаточно малой окрестности U является точным (обобщение теоремы Коши-Ковалевской).

3. Пусть $H^i(\Omega, Y)$ — гильбертовы пространства С. Л. Соболева функций на Ω со значениями в Y (имеющих обобщенные производные до порядка i, суммируемые в квадрате), $H^T(\Gamma, W)=\bigoplus\limits_{i=1}^{m} H^{t_i}(\Gamma, W^{(i)})$ — гильбертовы пространства С. Л. Соболева функций со значениями в $W=\bigoplus\limits_{i=1}^{m} W^{(i)}$, $T=(t_1, \ldots, t_m)$ — мультииндекс. Тогда, если оператор A эллиптичен и оператор (A, B) удовлетворяет условию коэрцитивности (обобщенному условию Я. Б. Лопатинского, точные определения — в тексте), то конечномерны когомологии комплекса

$$0\to H^i(\Omega, Y_0)\xrightarrow{(A,B)}H^{i-k_1}(\Omega, Y_1)\times H^{i-T_1}(\Gamma, W_1)\xrightarrow{\Phi_1}$$
$$\xrightarrow{\Phi_1}H^{i-k_2}(\Omega, Y_2)\times H^{i-T_2}(\Gamma, W_2)\xrightarrow{\Phi_2}\ldots\to 0,$$

порожденного комплексом (0.5) (числа $k_1, k_2, \ldots$ и мультииндексы $T_1, T_2, \ldots$ связаны с оператором (A, B)).

4. Пусть A — параболический оператор (в смысле переопределенных систем), оператор (A, B) коэрцитивен (удовлетворяет условию Я. Б. Лопатинского). Тогда точен комплекс анизотропных гильбертовых пространств С. Л. Соболева, порожденный комплексом (0.5).

5. Пусть A — гиперболический оператор (в смысле переопределенных систем), оператор (A, B) удовлетворяет равномерному условию Я. Б. Лопатинского и не содержит переопределенности на границе (т. е. Φ_1 — дифференциальный оператор). Тогда точен порожденный комплексом (0.5) комплекс гильбертовых пространств вида $H_\gamma^{q,s}$ (точные определения ниже, эти пространства обычны в теории квадратных гиперболических систем).

В пунктах 3, 4 и 5 оператор A предполагается дополнительно формально интегрируемым, что является свойством формы записи операторов. Если это не так, то утверждения этих пунктов справедливы в измененных нормах. Эти нормы находятся в процессе изменения формы записи оператора при переходе к эквивалентному формально интегрируемому оператору (что всегда возможно). Вообще, формальные свойства оператора играют исключительно важную роль даже в решении вопроса о том, какого рода задачи свойственны данному оператору. Вне рамок типовых систем это далеко не всегда определяется старшими однородными членами дифференциального оператора. Вот пример. Рассмотрим оператор $A: y\mapsto \operatorname{rot} y+b\times y$, где b — векторное поле в области $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ с границей Γ. Если $b=0$, то ядро и коядро любой граничной задачи для этого оператора — бесконечномерны. Если $b\neq 0$, но $\operatorname{rot} b=0$, то существуют *нётеровы* (т. е. с конечномерными ядром и коядром) граничные задачи. Причина этого заключается в том, что при переходе к формально интегрируемому оператору, т. е. при изменении формы записи, оператор становится переопределенным эллиптическим. Если $\operatorname{rot} b\neq 0$, то возможны случаи, когда соответствующий эквивалентный формально интегрируемый оператор является гиперболическим и поэтому для исходного оператора естественно ставить не граничные, а начально-граничные задачи. Такое разнообразие возможностей (при одной и той же старшей части) соответствует разнообразию формальных свойств дифференциальных операторов. Поэтому в обзоре значительное место занимает подробное обсуждение формальной теории линейных дифференциальных операторов, изложенное с разных точек зрения. Их логически независимое изложение позволит читателю, знакомящемуся с предметом впервые, выбрать подход наиболее соответствующий его вкусу. В особенности мы надеемся удовлетворить тех, кто не слишком склонен к непростым экскурсиям в глубины полилинейной алгебры предлагая в п. 3.3 и п. 3.6 главы 1 новый подход к изложению формальной теории.

Глава 1

КОМПЛЕКСЫ, СВЯЗАННЫЕ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

§ 1. Струи, дифференциальные операторы

Пусть Ω — многообразие с краем, Γ — его граница, E — векторное расслоение над Ω (если класс гладкости Ω и E не указывается, то считаем, что Ω и E бесконечно дифференцируемы). Будем обозначать через $C^r(E)$, $C^\infty(E)$ линейные пространства сечений расслоения E класса гладкости r, соответственно ∞. Через $T\Omega$ и $T^*\Omega$ обозначаем касательное и кокасательное расслоения многообразия Ω. Слои расслоений над точкой $x \in \Omega$ обозначаются так: $E|_x$, $T_x\Omega$, $T_x^*\Omega$. Через $S^k(T^*\Omega)$ обозначается расслоение симметричных k-форм над Ω и через $\Lambda^k(T^*\Omega)$ — расслоение кососимметричных k-форм.

Зафиксируем точку $x \in \Omega$ и назовем два сечения $s_1, s_2 \in C^\infty(E)$ *k-эквивалентными в точке x*, если для любой гладкой кривой $\varphi: \mathbf{R}^1 \to \Omega$ с $\varphi(0) = x$ и любой гладкой функции $\psi: E \to \mathbf{R}^1$, линейной на слоях расслоения E, функции

$$\frac{d^\nu}{dt^\nu}[\psi \circ (s_2 - s_1) \circ \varphi](t)$$

равны нулю при $t = 0$ и всех $\nu = 0, 1, \ldots, k$.

Пусть $J^k(E)|_x$ — множество классов эквивалентности и $J^k(E)$ — дизъюнктное объединение по всем $x \in \Omega$ множеств $J^k(E)|_x$. Множество $J^k(E)$ снабжается естественной структурой векторного расслоения над Ω, которое называется *расслоением k-струй* расслоения E [3], [35], [41], [44]. Класс эквивалентности сечения $s \in C^\infty(E)$ в $J^k(E)|_x$ называется k-струей сечения s в точке x и обозначается через $j^k s(x)$.

Отображение $x \mapsto j^k s(x)$ является сечением расслоения $J^k(E)$ и называется *k-струей сечения s*.

Приведем локализацию этих объектов. Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^n$; Y_1, Y_2 — евклидовы пространства. Тогда расслоения E, F отождествляются с прямым произведением $\Omega \times Y_1$, $\Omega \times Y_2$. *Отображение расслоений* $E \to F$ — это такое отображение $f: \Omega \times Y_1 \to \Omega \times Y_2$, что $f(x, y) = (x, F(x)y)$, где $F(x)$ — линейный оператор из Y_1 в Y_2 при каждом $x \in \Omega$, т. е. это семейство $\{F(\cdot)\}$ линейных операторов, зависящее от параметра из Ω. Пространства сечений $C^r(E)$, $C^\infty(E)$ расслоения $E = \Omega \times Y$ отождествляются с линейными пространствами функций на Ω со значениями в Y соответствующей гладкости. В этом случае, т. е. когда $E = \Omega \times Y$, мы пользуемся обозначением $C^r(\Omega, Y)$ (вместо $C^r(\Omega \times Y)$), подчеркивая, что при этом отождествлении мы имеем дело с отображениями из Ω в Y. Евклидова структура $\mathbf{R}^n$ позволяет отождествлять касательные и кокасательные вектора (т. е. элементы из $T\Omega$, $T_x^*\Omega$) с векторами из $\mathbf{R}^n$. Обозначая через $L(\mathbf{R}^n, Y)$, $(L^k_{\mathrm{sym}}(\mathbf{R}^n, Y))$ пространства линейных (k-линейных симметричных) отображений из $\mathbf{R}^n$ в Y (из $\mathbf{R}^n \times \ldots \times \mathbf{R}^n$ в Y), мы получаем для $E = \Omega \times Y$ очевидные отождествления $S^k(T^*\Omega) = \Omega \times L^k_{\mathrm{sym}}(\mathbf{R}^n, Y)$ и $J^k(E) = \Omega \times Y \times L(\mathbf{R}^n, Y) \times \ldots \times L^k_{\mathrm{sym}}(\mathbf{R}^n, Y)$.

Сечение $f \in C^r(E)$ в тривиализации $E = \Omega \times Y$ имеет вид $(x, f(x))$ и будет всегда далее отождествляться с отображением $x \mapsto f(x)$ из Ω в Y, обозначаемым также через f.

Оператор j^k, сопоставляющий функции f ее k-струю, является дифференциальным и имеет вид

$$j^k f(x) = (f(x), Df(x), \ldots, D^k f(x)), \tag{1.1}$$

где $Df(D^i f)$ — производная (i-я производная) отображения $f: \Omega \to Y$, которая является отображением из Ω в $L(\mathbf{R}^n, Y)$ (в $L^i_{\mathrm{sym}}(\mathbf{R}^n, Y)$).

Теперь, пользуясь локализацией, введем два важных отображения расслоений струй. (Их глобальное задание на языке струй является простым упражнением.) Пусть $\varepsilon_k: S^k(T^*\Omega) \otimes E \to J^k(E)$ — вложение и $\pi_{k,m}: J^k(E) \to J^m(E)$ — проекция $(k > m)$ в локализациях задающиеся так:

$$S^k(T^*\Omega) \otimes E = \Omega \times L^k_{\mathrm{sym}}(\mathbf{R}^n, Y) \ni (x, u) \overset{\varepsilon_k}{\mapsto}$$

$$\overset{\varepsilon_k}{\mapsto} (x, 0, 0, \ldots, 0, u) \in \Omega \times Y \times L(\mathbf{R}^n, Y) \times \ldots \times L^k_{\mathrm{sym}}(\mathbf{R}^n, Y) = J^k(E)$$

$$J^k(E) = \Omega \times Y \times \ldots \times L^k_{\mathrm{sym}}(\mathbf{R}^n, Y) \ni (x, y, u_1, \ldots, u_k) \overset{\pi_{k,m}}{\mapsto}$$

$$\overset{\pi_{k,m}}{\mapsto} (x, y, u_1, \ldots, u_m) \in \Omega \times Y \times \ldots \times L^m_{\mathrm{sym}}(\mathbf{R}^n, Y) = J^m(E).$$

Получаем последовательность расслоений

$$0 \to S^k(T^*\Omega) \otimes E \xrightarrow{\varepsilon_k} J^k(E) \xrightarrow{\pi_{k,k-1}} J^{k-1}(E) \to 0,$$

которая является *точной*, т. е. $\operatorname{Ker} \varepsilon_k = 0$, $\operatorname{Im} \varepsilon_k = \operatorname{Ker} \pi_{k,k-1}$, $\operatorname{Coker} \pi_{k,k-1} = 0$.

Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^n$ с координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Y_1 = \mathbf{R}^{m_1}$, $Y_2 = \mathbf{R}^{m_2}$ и $a^\alpha_{ij}: \Omega \to \mathbf{R}_1$ — функции класса гладкости не менее k; $j = 1, \ldots, m_1$, $i = 1, \ldots, m_2$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс. Тогда линейный дифференциальный оператор A с коэффициентами a^α_{ij} задается следующим правилом

$$(Ay)_i(x) = \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant k \\ 1 \leqslant j \leqslant m_1}} a^\alpha_{ij}(x) \frac{\partial^{|\alpha|} y_j}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}. \tag{1.2}$$

Если есть локализации расслоений $E = \Omega \times Y_1$, $F = \Omega \times Y_2$, то, пользуясь отображением $j^k: C^\infty(E) \to C^\infty(J^k(E))$ в его локальной записи (1.2) это же правило можно записать так:

$$(Ay)(x)=p(x,A)(j^k y)(x),$$

где $p(x, A)$ при каждом фиксированном x — линейное отображение из $J^k(E)|_x=Y_1\times L(\mathbf{R}^n, Y_1)\times\ldots\times L^k_{\mathrm{sym}}(\mathbf{R}^n, Y_1)$ в $F|_x=Y_2$ с матрицей из коэффициентов $a^\alpha_{ij}(x)$, соответствующей выбору базисов в Y_1 и Y_2 (т. е. отождествлению Y_i с $\mathbf{R}^{m_i}$ $(i=1, 2)$).

Наконец, если E и F — произвольные векторные расслоения над Ω и $p: J^k(E)\to F$ — отображение векторных расслоений, то определен линейный дифференциальный оператор A порядка k правилом $y\mapsto Ay=pj^ky$. Локально (т. е. при каждой локальной тривиализации расслоений E и F) дифференциальный оператор записывается в виде (1.2). Для связи обозначений будем в этом случае вместо p писать $p(A)$. Удобно также далее при фиксированном $x\in\Omega$ отображение слоев над x обозначать через $p(x, A)$. Таким образом, $p(x, A): J^k(E)|_x\to F|_x$.

Символом σA (или, как еще говорят, *главным символом*) оператора $A=p(A)j^k$ называется отображение расслоений $p(A)\varepsilon_k: S^k(T^*\Omega)\otimes E\to F$, а при фиксированном ковекторе $\xi\in T_x{}^*\Omega$, *символом на ковекторе* ξ называется отображение расслоений $E\to F$, задаваемое при каждом $x\in\Omega$ правилом $y\mapsto(\sigma A)(x, \xi)y=\sigma A(x)(\xi\otimes\xi\otimes\ldots\otimes\xi)y$. Отображение $\sigma A(x, \xi)$ называют также *главным однородным символом на ковекторе* ξ *в точке* x.

В локализациях $E=\Omega\times Y_1$, $F=\Omega\times Y_2$ для дифференциального оператора A, действующего по правилу (1.2), полагая, $\xi=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, получаем

$$((\sigma A)(x, \xi)y)_i=\sum_{\substack{|\alpha|=k\\ 1\leqslant j\leqslant m_1}} a^\alpha_{ij}\xi^\alpha y_j,$$

где $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\ldots\xi_n^{\alpha_n}$.

Таким образом *дифференциальный оператор* порядка k — это отображение $C^{k+r}(E)\to C^r(F)$ $(0\leqslant r\leqslant\infty)$, а связанные с ним отображения $p(A): J^k(E)\to F$ и $\sigma^k A$, $\sigma^k A(\cdot, \xi)$ — это отображения конечномерных расслоений (матрицы, зависящие от $x\in\Omega$ при локализациях этих расслоений).

Вместе с дифференциальным оператором $A: C^\infty(E)\to C^\infty(F)$ (вместо ∞ возможны, разумеется, и соответствующие порядку A конечные числа) рассматриваются и дифференциальные операторы $A^{(l)}$ при $l\geqslant 1$, называемые его *l-ми продолжениями*, действующие из $C^\infty(E)$ в $C^\infty(J^l(F))$ и определенные композицией $A^{(l)}=j^l\circ A$. В локализациях $E=\Omega\times Y_1$, $F=\Omega\times Y_2$ оператор $A^{(l)}$ получается из A следующим образом: $(A^{(l)}y)(x)=((Ay)(x), D(Ay)(x), \ldots, D^l(Ay)(x))$.

§ 2. Комплексы, эквивалентность морфизмов, морфизмы совместности

Поскольку в дальнейшем придется иметь дело с комплексами, составленными из разного вида пространств и отображений, удобно выделить чисто алгебраическую часть, привлекая язык категорий [43]. Ограничимся подкатегориями категории линейных пространств и линейных отображений (над полем вещественных или комплексных чисел).

Пусть $\mathfrak{A}$ — такая категория, так что ее объекты — линейные пространства, обозначаемые далее $H, H', H_1, H_2, \ldots$ и для каждой пары объектов (H_1, H_2) множество морфизмов $\mathrm{Mor}(H_1, H_2)$ состоит из некоторого множества линейных операторов из H_1 в H_2.

Пример 1.1. *Категория* $\mathrm{D}(\Omega)$. Пусть Ω — многообразие. Объектами категории $\mathrm{D}(\Omega)$ являются линейные пространства $C^\infty(E)$ бесконечно дифференцируемых сечений расслоений E над Ω, а морфизмами — линейные дифференциальные операторы с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами. Если $E=\Omega\times Y_1$, $F=\Omega\times Y_2$, то $A\in\mathrm{Mor}(C^\infty(E), C^\infty(F))$ имеет локально вид (1.2).

Пример 1.2. *Категория* $\mathrm{D}_a(\Omega)$. Пусть Ω вещественно-аналитическое многообразие. Объектами категории $\mathrm{D}_a(\Omega)$ являются линейные пространства вещественно-аналитических сечений вещественно-аналитических расслоений над Ω, а морфизмами — линейные дифференциальные операторы с вещественно-аналитическими коэффициентами.

Пример 1.3. *Категория* $\mathrm{DB}(\Omega)$. Предположим теперь, что многообразие Ω замкнуто и его граница Γ является бесконечно дифференцируемым многообразием. Объектами категории $\mathrm{DB}(\Omega)$ являются линейные пространства $C^\infty(E)\times C^\infty(G)$, где E и G — расслоения над Ω и Γ соответственно, а морфизмами — линейные *дифференциально-граничные операторы* с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, т. е. операторы Φ вида

$$\Phi(f, g)=(\Phi^{11}f, \gamma(\Phi^{21}f)+\Phi^{22}g),$$

где Φ^{11}, Φ^{21} и Φ^{22} — линейные дифференциальные операторы в соответствующих пространствах, а γ — оператор сужения на Γ сечения, определенного на Ω.

Пример 1.4. *Категория* $\mathrm{DB}_a(\Omega)$. Пусть Ω — замкнутое вещественно-аналитическое многообразие и его граница Γ является вещественно-аналитическим многообразием. Объекты категории $\mathrm{DB}_a(\Omega)$ — пары линейных пространств вещественно-аналитических сечений расслоений над Ω и Γ, как в примере 1.3, а морфизмы — дифференциально-граничные операторы с вещественно-аналитическими коэффициентами.

Пример 1.5. *Категория* $\mathrm{D}_c(\Omega)$. Предположим, что $\Omega\subset\mathbf{R}^n$. Категория $\mathrm{D}_c(\Omega)$ является подкатегорией категории $\mathrm{D}(\Omega)$ (см.

пример 1.1), морфизмами которой являются дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.

Зафиксируем категорию $\mathfrak{A}$.

Определение 1.1. Последовательность объектов $\{H_i\}$ и морфизмов $\{A_i \in \mathrm{Mor}(H_i, H_{i+1})\}$

$$0 \to H_0 \xrightarrow{A_0} H_1 \xrightarrow{A_1} H_2 \xrightarrow{A_2} \ldots \tag{1.3}$$

называется *комплексом*, если $A_{i+1}A_i=0$ для всех $i=0, 1, 2, \ldots$.

Для каждого $A \in \mathrm{Mor}(H_1, H_2)$ множества $\mathrm{Ker}\, A=\{x \in H_1 | Ax=0\}$ и $\mathrm{Im}\, A=\{y \in H_2 | \exists x \in H_1 : y=Ax\}$ являются линейными пространствами и поэтому для комплекса (1.3) определены факторпространства $\mathscr{H}_i=\mathrm{Ker}\, A_i/\mathrm{Im}\, A_{i-1}$, называемые *пространствами когомологий комплекса* (1.3). Комплекс (1.3) называется *точным*, если его когомологии — нулевые, т. е. если $\mathrm{Ker}\, A_i=\mathrm{Im}\, A_{i-1}$, ($i\geqslant 0, A_{-1}=0$).

Определение 1.2. Комплексы

$$0 \to H_0 \xrightarrow{A_0} H_1 \xrightarrow{A_1} H_2 \xrightarrow{A_2} \ldots \tag{1.4}$$

и

$$0 \to H_0' \xrightarrow{A_0'} H_1' \xrightarrow{A_1'} H_3' \xrightarrow{A_2'} \ldots \tag{1.5}$$

называются *коцепно эквивалентными* в категории $\mathfrak{A}$, если существуют такие морфизмы $p_i : H_i \to H_i'$, $q_i : H_i' \to H_i$, $s_i : H_{i+1} \to H_i$, $s_i' : H_{i+1}' \to H_i'$ ($i=0, 1, \ldots$), что выполнены следующиэ условия:

а) диаграмма

$$\begin{tikzcd} H_i \arrow[r, "A_i"] \arrow[d, shift right, "p_i"'] & H_{i+1} \arrow[d, shift right, "p_{i+1}"'] \\ H_i' \arrow[r] \arrow[u, shift right, "q_i"'] & H_{i+1}' \arrow[u, shift right, "q_{i+1}"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна, т. е. $p_{i+1}A_i=A_i'p_i$, $q_{i+1}A_i'=A_iq_i$;

б) справедливы равенства

$$q_ip_i-1-s_iA_i=0, \quad p_iq_i-1-s_i'A_i'=0.$$

У эквивалентных комплексов соответствующие пространства когомологий изоморфны (в категории $\mathfrak{A}$).

В практике переопределенных систем комплексы редко возникают как исходный объект исследования. Обычно задан только морфизм A_0 и задача состоит в построении подходящего комплекса, начинающегося с морфизма A_0. Следующее определение придает точный смысл употребленному в этой фразе слову «подходящий». Пусть зафиксирована категория $\mathfrak{A}$.

Определение 1.3. Морфизм $A_1 \in \mathrm{Mor}(H_1, H_2)$ называется *морфизмом* (*оператором*) *совместности* для морфизма (оператора) $A_0 \in \mathrm{Mor}(H_0, H_1)$ в категории $\mathfrak{A}$, если $A_1A_0=0$ и для любого морфизма $\alpha \in \mathrm{Mor}(H_1, H_2')$, удовлетворяющего условию $\alpha A_0=0$, существует такой морфизм $c \in \mathrm{Mor}(H_2, H_2')$, что $\alpha=cA_1$.

Пример 1.6. Положим $\mathfrak{A}=\mathrm{D}(\Omega)$, где $\Omega\subset\mathbf{R}^2$. Пусть оператор $A_0 : C^\infty(\Omega, \mathbf{R}^1)\to C^\infty(\Omega, \mathbf{R}^2)$ определен правилом $y \mapsto A_0y= (\partial y/\partial x_1, \partial y/\partial x_2)=(f_1, f_2)$. Тогда оператор $(f_1, f_2)\mapsto A_1(f_1, f_2)= =\partial f_1/\partial x_2-\partial f_2/\partial x_1$ является оператором совместности для A_0.

Пример 1.7. Пусть $\mathfrak{A}=\mathrm{D}(\Omega)$, $\Omega\subset\mathbf{R}^3$. Определим оператор $A_0 : C^\infty(\Omega, \mathbf{R}^3)\to C^\infty(\Omega, \mathbf{R}^3)$ правилом

$$A_0 : y \mapsto \mathrm{rot}\, y=f.$$

Тогда оператор $A_1 : f \mapsto \mathrm{div}\, f$ является оператором совместности для оператора A_0.

Определение 1.4. Комплекс

$$0 \to H_0 \xrightarrow{A_0} H_1 \xrightarrow{A_1} H_2 \xrightarrow{A_2} \ldots$$

называется *комплексом совместности* морфизма A_0, если каждый морфизм A_i, при $i\geqslant 1$ является морфизмом совместности для A_{i-1}.

Пример 1.8 (*комплекс де Рама* [48]). Пусть Ω гладкое многообразие, $\Lambda^r(T^*\Omega)$ ($r\geqslant 0$, $\Lambda^0(T^*\Omega)=\Omega\times\mathbf{R}^1$) — расслоение r-форм над Ω. Для каждой точки $x\in\Omega$ выберем такую окрестность $U\subset\Omega$ точки x, в которой расслоение $\Lambda^r(T^*\Omega)|_U$ тривиализуемо. Тогда существует такой конечный набор r-форм $\{dx^\alpha | dx^\alpha \in C^\infty(\Lambda^r(T^*\Omega))\}$, что всякая r-форма $\omega \in C^\infty\Lambda^r(T^*\Omega))$ в окрестности U однозначно представляется в виде $\omega(x)= =\Sigma_\alpha\omega_\alpha(x)\, dx^\alpha$ ($x\in U$, $\omega_\alpha \in C^\infty(U, \mathbf{R}^1)$). Определим дифференциальный оператор $d_U : C^\infty(\Lambda^r(T^*\Omega)|_U)\to C^\infty(\Lambda^{r+1}(T^*\Omega)|_U)$, полагая в U

$$d_U\omega(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\omega_\alpha(x)}{\partial x_i}\, dx_i\wedge dx^\alpha,$$

где $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — некоторая система координат в U. Известно, что семейство операторов $\{d_U | U\subset\Omega\}$ определяет глобально дифференциальный оператор $d : C^\infty(\Lambda^r(T^*\Omega))\to \to C^\infty(\Lambda^{r+1}(T^*\Omega))$, при этом выполнено тождество $d\circ d=0$. Получаемый комплекс дифференциальных операторов

$$0 \to C^\infty(\Lambda^0(T^*\Omega)) \xrightarrow{d} C^\infty(\Lambda^1(T^*\Omega)) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} C^\infty(\Lambda^r(T^*\Omega)) \xrightarrow{d}$$

$$\xrightarrow{d} C^\infty(\Lambda^{r+1}(T^*\Omega)) \to \ldots \xrightarrow{d} C^\infty(\Lambda^n(T^*\Omega)) \to 0$$

является комплексом совместности для дифференциального оператора $d : C^\infty(\Lambda^0(T^*\Omega))=C^\infty(\Omega, \mathbf{R}^1)\to C^\infty(\Lambda^1(T^*\Omega))$.

Пример 1.9. *Комплекс Дольбо* является комплексом совместности оператора $\bar{\partial}$. Подробное описание этого важного (но не используемого далее в обзоре) комплекса имеется в [48].

Как уже упоминалось, исходным объектом исследования бывает обычно сам морфизм A_0. Поэтому введем на множестве морфизмов такое отношение эквивалентности, что для эквивалентных морфизмов одновременно существуют (и коцепно эквивалентны) комплексы совместности.

Определение 1.5. Морфизмы $A_0 \in \mathrm{Mor}(H_0, H_1)$ и $A_0' \in \mathrm{Mor}(H_0', H_1')$ назовем *эквивалентными*, если коцепно эквивалентны комплексы

$$0 \to H_0 \xrightarrow{A_0} H_1$$

и

$$0 \to H_0' \xrightarrow{A_0'} H_1'$$

Пример 1.10. Пусть $\mathfrak{A} = D(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, операторы $A_0: C^\infty(\Omega, \mathbf{R}^3) \to C^\infty(\Omega, \mathbf{R}^3)$ и $A_0': C^\infty(\Omega, \mathbf{R}^3) \to C^\infty(\Omega, \mathbf{R}^4)$ определены соотношениями

$$A_0: y \mapsto \mathrm{rot}\, y + y = f,$$

$$A_0': y \to (\mathrm{rot}\, y + y,\ \mathrm{div}\, y) = (f', g).$$

Тогда операторы A_0 и A_0' — эквивалентны.

Дифференциальные операторы, устанавливающие эквивалентность соответствующих комплексов (определение 1.2) имеют вид:

$p_0 = q_0 = \mathrm{Id}$ — тождественное отображение пространства $C^\infty(\Omega, \mathbf{R}^3)$,

$p_1: C^\infty(\Omega, \mathbf{R}^3) \ni f \mapsto (f, \mathrm{div}\, f) \in C^\infty(\Omega, \mathbf{R}^4)$,

$q_1: C^\infty(\Omega, \mathbf{R}^4) \ni (f', g) \mapsto f' \in C^\infty(\Omega, \mathbf{R}^3)$;

s_0 и s_0' — нулевые операторы.

Пример 1.11 (*система стационарных уравнений Максвелла*). Пусть $\mathfrak{A} = D(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbf{R}^3$. Тогда операторы A_0 и A_0', определенные с помощью равенств

$$A_0(u, v) = (\mathrm{rot}\, u + v,\ \mathrm{rot}\, v - u)$$

и

$$A_0'(u, v) = (\mathrm{rot}\, u + v,\ \mathrm{rot}\, v - u,\ \mathrm{div}\, v,\ \mathrm{div}\, u),$$

эквивалентны.

Пример 1.12. Пусть $\mathfrak{A} = D(\Omega)$ $(\Omega \subset \mathbf{R}^n)$ и A, P — произвольные операторы. Тогда операторы A и (A, PA) эквивалентны.

На примерах 1.11 и 1.12 видно, что эквивалентные дифференциальные операторы — это разные способы записи математического объекта, описывающего один и тот же физический или какой-либо иной процесс.

Предложение 1.1. Пусть морфизмы $A_0 \in \mathrm{Mor}(H_0, H_1)$ и $A_0' \in \mathrm{Mor}(H_0', H_1')$ эквивалентны. Если для морфизма A_0 существует комплекс совместности, то и для морфизма A_1' также существует комплекс совместности.

Предложение 1.2. Если морфизмы A_0 и A_0' эквивалентны и (1.4), (1.5) — некоторые комплексы совместности для них, то эти комплексы коцепно эквивалентны.

Пусть дифференциальный оператор A имеет постоянные коэффициенты. Тогда он всегда имеет комплекс совместности в категории $D_c(\Omega)$ из примера 1.5 [13].

Если дифференциальный оператор имеет переменные коэффициенты, то в категории $D(\Omega)$ он не обязательно имеет оператор совместности.

Пример 1.13. Пусть $\mathfrak{A} = D(\mathbf{R}^1)$, оператор A_0 является оператором умножения на гладкую функцию $\alpha(x)$ такую, что $\alpha(x) = 0$ при $x \leqslant 0$ и $\alpha(x) > 0$ при $x > 0$:

$$(A_0 y)(x) = \alpha(x) y(x).$$

Оператор A_0 в категории $D(\mathbf{R}^1)$ не имеет оператора совместности. Действительно, если бы для оператора A_0 существовал оператор совместности A_1, то из равенства $A_1 A_0 = 0$ и вида функции $\alpha(x)$ следовало бы, что коэффициенты оператора A_1 обращаются в нуль при $x > 0$. Тогда оператор $A_1' = A_1/x$, имеющий гладкие коэффициенты, удовлетворяет условию $A_1' A_0 = 0$. Однако можно показать, что оператор A_1' нельзя представить в виде $A_1' = CA_1$ ни для какого дифференциального оператора C с гладкими коэффициентами.

В этом примере несуществование оператора совместности в категории $D(\Omega)$ является следствием сильной «вырожденности» коэффициентов оператора A_0. Однако, если на коэффициенты оператора A_0 наложить некоторые условия невырожденности (регулярности), то для оператора A_0 всегда будет существовать оператор совместности. Эти условия регулярности будут описаны в § 3.

§ 3. Дифференциальные операторы с переменными коэффициентами

3.1. Условия регулярности. Введем те условия регулярности, о необходимости рассмотрения которых шла речь в конце § 2.

Пусть E_0, E_1 — расслоения над Ω и $A: C^\infty(E_0) \to C^\infty(E_1)$ — дифференциальный оператор порядка k.

Рассмотрим семейство подпространств

$$\mathfrak{R}_{k+l}'(x) = \mathrm{Ker}\, p(x, A^{(l)}) \subseteq J^{k+l}(E_0)|_x\ (x \in \Omega).$$

Пример 1.14. Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, $E_0 = E_1 = \Omega \times \mathbf{R}^1$ и $Ay = \partial^2 y/\partial x_1^2 + \partial^2 y/\partial x_2^2$. Представим элемент $l \in J^2(E_0) = \Omega \times \mathbf{R}^1 \times$

$\times L(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^1)\times L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^1)$ в виде $l=(x, y, p, A)$, где $x\in\Omega$, $y\in\mathbf{R}^1$, $p=(p_1, p_2)\in\mathbf{R}^2$, $A=(a_{ij})$, $(i, j=1, 2;\ a_{12}=a_{21})$.

Тогда соответствующее оператору A семейство пространств $\mathfrak{R}_2(x)$ определяется равенством

$$\mathfrak{R}_2(x)=\{e=(x, y, p, A)\in J^2(E_0)\,|\,a_{11}+a_{22}=0\}.$$

Пример 1.15. Пусть $\Omega\subset\mathbf{R}^3$, $b(x)=(b^1(x),\ b^2(x),\ b^3(x))$ — гладкое векторное поле на Ω и дифференциальный оператор $A: C^\infty(\Omega, \mathbf{R}^3)\to C^\infty(\Omega, \mathbf{R}^3)$ действует на векторные поля по правилу $A: y\mapsto \operatorname{rot} y+b\times y$, где $\times$ — векторное умножение в $\mathbf{R}^3$.

Опишем соответствующее семейство подпространств $\mathfrak{R}_1(x)$. Элементы расслоения $J^1(\Omega, \mathbf{R}^3)$ представимы в виде

$$e=(x, \{y^i,\ i=1, 2, 3\}, \{u^i_k;\ i, k=1, 2, 3\}).$$

Тогда семейство подпространств $\mathfrak{R}_1(x)$ является множеством таких наборов $e=(x, \{y^i, i=1, 2, 3\}, \{u^i_k, i, k=1, 2, 3\})$, которые удовлетворяют равенствам

$$u^i_k-u^k_i+b^i(x)\,y^k-b^k(x)\,y^i=0 \quad (i, k=1, 2, 3;\ i\neq k).$$

Точки расслоения $J^2(\Omega, \mathbf{R}^3)=\Omega\times\mathbf{R}^3\times L(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)\times L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$ представимы в виде

$$e'=(x, \{y^i, i=1, 2, 3\}, \{u^i_k, i, k=1, 2, 3\}, \{u^i_{ks}\,|\,u^i_{ks}=u^i_{sk},\ i, k, s=1, 2, 3\}).$$

Соответствующие уравнения, описывающие $\mathfrak{R}_2(x)=\operatorname{Ker} p(x, A^{(1)})$, имеют вид

$$\begin{cases} u^i_{ks}-u^k_{is}+b^i(x)\,u^k_s-b^k(x)\,u^i_s+\dfrac{\partial b^i}{\partial x_s}(x)\,y^k-\dfrac{\partial b^k}{\partial x_s}(x)\,y^i=0,\\ u^i_k-u^k_i+b^i(x)\,y^k-b^k(x)\,y^i=0,\\ i, k, s=1, 2, 3:\ i\neq k. \end{cases} \tag{1.6}$$

Определение 1.7. Дифференциальный оператор A называется *достаточно регулярным*, если при каждом x размерности подпространств $\mathfrak{R}_{k+l}(x)$ не зависят от x и отображения $\pi_{i+r,i}: \mathfrak{R}_{i+r}(x)\to\mathfrak{R}_i(x)$ имеют при каждых $r\geqslant 0$, $i\geqslant k$ постоянный ранг.

Пример 1.16. Если $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ и оператор A — с постоянными коэффициентами, то он, очевидно, достаточно регулярен.

Пример 1.17. Пусть Ω, E_0, E_1 и A — те же что и в примере 1.15. Размерности подпространств $\mathfrak{R}_1(x)$ и $\mathfrak{R}_2(x)$ не зависят от x. Из уравнений (1.6) вытекает соотношение

$$(\operatorname{rot} b, y)\equiv\left(\frac{\partial b^3}{\partial x_2}-\frac{\partial b^2}{\partial x_3}\right)y^1+\left(\frac{\partial b^1}{\partial x_3}-\frac{\partial b^3}{\partial x_1}\right)y^2+\left(\frac{\partial b^2}{\partial x_1}-\frac{\partial b^1}{\partial x_2}\right)y^3=0.$$

Рассмотрим проекцию $\pi_{2,1}: \mathfrak{R}_2(x)\to\mathfrak{R}_1(x)$. Легко проверить, что ее образом является линейное пространство точек

$(x, y, u)\in\mathfrak{R}_1(x)$, для которых выполнено равенство $(\operatorname{rot} b, y)=0$. Отсюда следует, что отображение $\pi_{2,1}: \mathfrak{R}_2(x)\to\mathfrak{R}_1(x)$ может иметь постоянный ранг только в следующих двух случаях:

1) $\operatorname{rot} b(x)=0$ для всех $x\in\Omega$;
2) $\operatorname{rot} b(x)\neq 0$ для всех $x\in\Omega$.

Можно показать, что в каждом из этих случаев оператор A является достаточно регулярным.

3.2. Формально точные комплексы. Пусть задан комплекс достаточно регулярных дифференциальных операторов

$$C^\infty(E_0)\xrightarrow{A_0}C^\infty(E_1)\xrightarrow{A_1}C^\infty(E_2), \tag{1.7}$$

в котором порядки операторов A_0 и A_1 равны соответственно k_0 и k_1.

Определение 1.8. Комплекс (1.7) называется *формально точным*, если при любом целом $l\geqslant 0$ точны комплексы

$$J^{k_0+k_1+l}(E_0)\xrightarrow{p\left(A_0^{(l+k_1)}\right)}J^{k_1+l}(E_1)\xrightarrow{p\left(A_1^{(l)}\right)}J^l(E_2).$$

Обратим внимание на то, что в комплексе (1.7) его члены — бесконечномерные пространства, в то время как при каждом x в определении 1.8 рассматривается комплекс конечномерных расслоений.

Предложение 1.3. Всякий формально точный комплекс является комплексом совместности (в смысле определения 1.4, действие происходит в категории $\mathrm{D}(\Omega)$ из примера 1.1).

Доказательством этого простого предложения мы проиллюстрируем технику применения введенных понятий. Пусть A' — такой оператор, что $A'A_0=0$. Без ограничения общности можно считать, что порядок k' оператора A' не меньше порядка k_1 оператора A_1 (в противном случае в дальнейшем вместо оператора A' достаточно взять оператор j^lA' для некоторого $l>0$). Нужно показать, что существует такой дифференциальный оператор C, что $A'=CA_1$. Из условия $A'A_0=0$ вытекает, что последовательность

$$J^{k_0+k'}(E_0)\xrightarrow{p\left(A_0^{(k')}\right)}J^{k'}(E_1)\xrightarrow{p(A')}E_2'$$

является комплексом, а из формальной точности следует, что

$$\operatorname{Ker} p\left(A_1^{(k'-k_1)}\right)=\operatorname{Im} p\left(A_0^{(k')}\right)\subset\operatorname{Ker}(p(A')).$$

Поэтому существует такое отображение расслоений (т. е. дифференциальный оператор нулевого порядка) $\varphi: J^{k_0-k_1}(E_2)\to E_2'$, что $p(A')=\varphi\circ p\left(A_1^{(k'-k_1)}\right)$. Из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(J^{k'}(E_1)) \arrow[r, "p(A')"] \arrow[dr, "p(A_1^{(k'-k_1)})"] & C^\infty(E_2') \\
 & C^\infty(J^{k'-k_1}(E_2)) \arrow[u, "\varphi"'] \\
C^\infty(E_1) \arrow[uu, "j^{k'}"] \arrow[r, "A_1"] & C^\infty(E_2) \arrow[u, "j^{k'-k_1}"']
\end{tikzcd}$$

вытекает, что $A' = p(A')\, j^{k'} = \varphi j^{k'-k_1} A_1 = CA_1$. Предложение 1.3 доказано.

Следствие 1.1. Пусть

$$C^\infty(E_0) \xrightarrow{A_0} C^\infty(E_1) \xrightarrow{A_1} C^\infty(E_2)$$

и

$$C^\infty(E_0) \xrightarrow{A_0} C^\infty(E_1) \xrightarrow{A_1'} C^\infty(E_2')$$

— два формально точных комплекса, в которых порядки операторов A_1 и A_1' совпадают и $p(A_1)$, $p(A_1')$ — эпиморфизмы. Тогда существует такой изоморфизм расслоений $\Psi: E_2 \to E_2'$, что

$$(A_1'y)(x) = \Psi((A_1 y)(x))$$

для всех $x \in \Omega$, $y \in C^\infty(E_1)$.

Действительно, из приведенного доказательства предложения 1.3 следует, что существуют такие операторы нулевого порядка Φ и Ψ, что $A_1' = \Psi A_1$ и $A_1 = \Phi A_1'$. Поскольку $p(\Phi A_1') = \Phi \circ p(A_1')$, $p(\Psi A_1) = \Psi \circ p(A_1')$, а отображения $p(A_1')$ и $p(A_1)$ — эпиморфизмы, то

$$\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_{E_2'}, \quad \Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}_{E_2}.$$

Это следствие позволяет «склеивать» глобально определенный на Ω оператор совместности из локально определенных. Действительно, пусть $\Omega = \bigcup U_i$, $\Psi_i: U_i \times Y \to E_0|_{U_i}$ — локальные тривиализации расслоения E_0 над Ω, $A: C^\infty(E_0) \to C^\infty(E_1)$ — дифференциальный оператор, $A_{(i)}$ — сужение A на сечения над U_i и при каждом i

$$C^\infty(E_0|_{U_i}) \xrightarrow{A_{(i)}} C^\infty(E_1|_{U_i}) \xrightarrow{A'_{(i)}} C^\infty(E_i')$$

— формально точный комплекс, где $E_i' = U_i \times Y'_{(i)}$. Можно считать, не теряя в общности, что порядки всех операторов $A'_{(i)}$ одинаковы и отображения $p(x, A'_{(i)})$ — эпиморфизмы при $x \in \Omega$. На $U_i \cap U_j$ при $i \neq j$ для сужения оператора A определены два оператора совместности $A'_{(s)}: C^\infty(E_1|_{U_i \cap U_j}) \to C^\infty(U_i \cap U_j, Y'_{(s)})$, где $s = i$ или $s = j$. Тогда, согласно следствию 1.1, определены изоморфизмы $\alpha_{ij}(x): Y'_{(i)} \to Y'_{(j)}$; $x \in U_i \cap U_j$, задающие структуру векторного расслоения E' над Ω. При этом, операторы $A'_{(i)}$ однозначно с точностью до изоморфизма расслоения E' определяют дифференциальный оператор $A': C^\infty(E_1) \to C^\infty(E')$, являющийся, ввиду предложения 1.3, оператором совместности для A.

Закончим этот пункт важным примером формально точного комплекса (а значит и комплекса совместности). В этом комплексе формальная точность обозначает формальную точность любого фрагмента из трех объектов и связывающих их двух морфизмов.

Пример 1.18 ([46]). Пусть E_0 — расслоение над Ω, $E_1 = J^k(E_0)$. Для дифференциального оператора $j^k: C^\infty(E_0) \to C^\infty(J^k(E_0))$ существуют расслоения $C_i^k(E_0)$ и дифференциальные операторы первого порядка D_i^k такие, что последовательность

$$C^\infty(E_0) \xrightarrow{j^k} C^\infty(J^k(E_0)) \xrightarrow{D_1^k} C^\infty(C_1^k(E_0)) \xrightarrow{D_2^k} \ldots \tag{1.8}$$

является формально точным комплексом и отображения

$$p(D_1^k): J^1(J^k(E_0)) \to C_1^k(E_0), \quad p(D_i^k): J^1(C_{i-1}^k(E_0)) \to C_i^k(E_0)$$

— эпиморфизмы. Этими свойствами комплекс (1.8) определяется однозначно с точностью до изоморфизмов расслоений $C_i^k(E_0)$.

3.3. Формальная интегрируемость. Ближайшая цель — описание процедуры построения оператора совместности для достаточно регулярного дифференциального оператора.

Мы приведем два способа по существу внутренне связанных между собой. В каждом из них исходный оператор заменяется эквивалентным в смысле определения 1.5 оператором первого порядка с дополнительными формальными свойствами.

Определение 1.9. Достаточно регулярный дифференциальный оператор $A: C^\infty(E_0) \to C^\infty(E_1)$ порядка k называется *формально интегрируемым*, если отображения

$$\pi_{i+k+1,\, i+k}: \mathfrak{R}_{i+k+1}(x) \to \mathfrak{R}_{i+k}(x)$$

являются сюръекциями при всех $i \geqslant 0$ (напомним, что для $A = p(A)\, j^k$ через $\mathfrak{R}_k$ обозначено расслоение (в достаточно регулярном случае) $\operatorname{Ker} p(A)$, а $\pi_{m,r}: J^m(E_0) \to J^r(E_0)$ — проекция, определенная в п. 1.1 этой главы).

Определение 1.10. Дифференциальный достаточно регулярный оператор $A_0: C^\infty(E_0) \to C^\infty(E_1)$ порядка k называется *формально интегрируемым*, если для всякого дифференциального оператора $A': C^\infty(E_1) \to C^\infty(E_2)$ порядка k' такого, что порядок оператора $A'A$ меньше, чем $k+k'$, существует такой дифференциальный оператор $A'' : C^\infty(E_1)\to C^\infty(E_2)$ порядка меньшего, чем k', что $A'A_0=A''A_0$.

Формальная интегрируемость оператора A_0 порядка k означает, что при любом $l\geqslant 1$ все дифференциальные следствия из соотношений $A_0y=0$ порядка $k+l$ (т. е. следствия, извлекаемые путем дифференцирований любого порядка, приравниванием смешанных производных и применения линейной алгебры при каждом $x\in\Omega$) могут быть получены только путем дифференцирований порядка не выше l и применения линейной алгебры.

Пример 1.19. Пусть $\Omega\subset\mathbf{R}^3$, y — векторное поле на Ω и $A_0y=\operatorname{rot}y+\lambda y$, где $\lambda\in\mathbf{R}^1$. Оператор A_0 формально интегрируем только при $\lambda=0$. Если $\lambda\neq 0$, то оператор A_0 эквивалентен оператору $A_0'y=(\operatorname{rot}y+\lambda y, \operatorname{div}y)$, который является уже формально интегрируемым.

Пример 1.20. Пусть снова $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ и $b(x)$ — векторное поле на Ω и $A_0y=\operatorname{rot}y+b\times y$. Формальная интегрируемость оператора A_0 эквивалентна равенству $\operatorname{rot}b(x)=0$ для всех $x\in\Omega$. Если $\operatorname{rot}b(x)\neq 0$ при всех $x\in\Omega$ (это условие обеспечивает достаточную регулярность оператора A_0), то оператор A_0 эквивалентен оператору

$$A_0'y=(\operatorname{rot}y+b\times y,\ \operatorname{grad}(\operatorname{rot}b,y),\ (\operatorname{rot}b,y)),$$

который формально интегрируем ($(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbf{R}^3$).

Пример 1.21. Пусть A_0 — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами в области $\Omega\subset\mathbf{R}^n$. Если оператор A_0 содержит члены только старшего порядка, то он всегда формально интегрируем.

Пример 1.22. Пусть $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ и $A_0 : C^\infty(\Omega,\mathbf{R}^m)\to C^\infty(\Omega,\mathbf{R}^m)$ — оператор, имеющий *нехарактеристический ковектор*. т. е. такой ковектор $\xi\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$, что отображение $\sigma_\xi(x,A) : \mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^m$ является изоморфизмом при каждом $x\in\Omega$ (например, A_0 — эллиптичен или гиперболичен [9]), тогда оператор A_0 формально интегрируем. Действительно, пусть оператор A_0 имеет порядок k и A_1 такой оператор порядка $k'\geqslant 0$, что оператор A_1A_0 имеет порядок меньше, чем $k+k'$. В достаточно малой окрестности $U\subset\Omega$ произвольной точки $x_0\in\Omega$ выберем такую систему координат $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, что ковектор dx_n является нехарактеристическим для A_0 в каждой точке $x\in U$. Тогда в окрестности U оператор A_0 локально записывается в виде $A_0y=l(x)\cdot\partial^k y/\partial x_n^k+$ $+My$, где дифференциальный оператор M порядка k не содержит производной $\partial^k y/\partial x_n^k$, а матрица $l(x)$ — изоморфизм. Не ограничивая общности, можно считать, что $l(x)$ — тождественная матрица для всех $x\in U$. Тогда $A_1A_0y=A_1(\partial^k y/\partial x_n^k)+A_1My$. Поскольку порядок оператора A_1A_0 строго меньше чем $k+k'$, то для произвольной функции $y\in C^\infty(\Omega,\mathbf{R}^m)$ должно выполняться

равенство $A_1(\partial^k y/\partial x_n^k)=0$, откуда следует, что $A_1=0$. Отсюда немедленно вытекает формальная интегрируемость оператора A_0.

Предложение 1.4. Пусть $A_0 : C^\infty(E_0)\to C^\infty(E_1)$ — достаточно регулярный оператор. Тогда существует расслоение F и дифференциальный оператор $p : C^\infty(E_1)\to C^\infty(F)$, которые могут быть определены в конечное число шагов такие, что справедливы следующие утверждения:

(i) оператор $A_0'=pA_0$ формально интегрируем;

(ii) $\operatorname{Ker}A_0'=\operatorname{Ker}A_0$;

(iii) если E_2 — векторное расслоение и

$$C^\infty(E_0)\xrightarrow{A_0}C^\infty(E_1)\xrightarrow{A_1}C^\infty(E_2)$$

— комплекс дифференциальных операторов, то существуют такие расслоения F' и дифференциальные операторы A_1' и Q, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
C^\infty(E_0) & \xrightarrow{A_0} & C^\infty(E_1) & \xrightarrow{A_1} & C^\infty(E_2)\\
\| & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle Q}\\
C^\infty(E_0) & \xrightarrow{A_0'} & C^\infty(F) & \xrightarrow{A_1'} & C^\infty(F'),
\end{array}$$

причем оператор p индуцирует изоморфизм когомологий верхней и нижней строк этой диаграммы.

По существу, как в примерах 1.21 и 1.22, действие оператора p можно представить как дописывание дифференциальных следствий, вытекающих из соотношения $A_0y=0$. Поэтому можно без ограничения общности считать, что $p=(\mathrm{Id},p')$. В этом случае утверждения (ii) и (iii) предложения 1.5 становятся немедленными следствиями мономорфности p. Легко также видеть, что операторы A_0 и pA_0 эквивалентны в смысле определения 1.5 в категории $\mathrm{D}(\Omega)$.

3.4. Инволютивность по Спенсеру. В этом пункте излагается важное понятие инволютивности. Другими способами это же понятие вводится в п. 3.5 и 3.6, которые могут быть прочитаны независимо друг от друга и от чтения настоящего пункта.

Пусть V конечномерное векторное пространство, Λ^pV, S^kV — внешняя и, соответственно, симметричная степени V, $\otimes$ — знак тензорного произведения.

Определим следующее линейное отображение

$$\delta : \Lambda^pV\otimes S^mV\to\Lambda^{p+1}V\otimes S^{m-1}V,$$

При $p=0$ это отображение δ есть композиция естественного вложения S^mV в $\otimes^mV=V\otimes(\otimes^{m-1}V)$ и отображения $V\otimes(\otimes^{m-1}V)\to V\otimes S^{m-1}V$, порожденного проекцией $\otimes^{m-1}V\to$ $\to S^{m-1}V$. При $p>0$ отображение δ переводит $w\otimes u$ в $\delta(w\otimes u)=(-1)^p w\wedge\delta u$, где $w\in\Lambda^pV$, $u\in S^mV$. Полагая

$\delta(w\otimes u\otimes y)=\delta(w\otimes u)\otimes y$, получаем отображение

$$\delta : \Lambda^p V\otimes S^m V\otimes Y\to\Lambda^{p+1}V\otimes S^{m-1}V\otimes Y.$$

Легко видеть, что $\delta^2=0$. Полагая $V=T^*_x\Omega$, $Y=E|_x$ при каждом $x\in\Omega$ получаем отображение

$$\delta : \Lambda^p (T^*_x\Omega)\otimes S^m (T^*_x\Omega)\otimes E|_x\to \Lambda^{p+1}(T^*_x\Omega)\otimes S^{m-1}(T^*_x\Omega)\otimes E|_x,$$

которое описанным выше действием в слоях порождает комплекс морфизмов расслоений над Ω (при каждых i и k)

$$0\to \Lambda^i (T^*\Omega)\otimes S^k (T^*\Omega)\otimes E\xrightarrow{\delta}\Lambda^{i+1}(T^*\Omega)\otimes S^{k-1}(T^*\Omega)\otimes E\xrightarrow{\delta}$$
$$\xrightarrow{\delta}\Lambda^{i+2}(T^*\Omega)\otimes S^{k-2}(T^*\Omega)\otimes E\to\ldots\to 0. \tag{1.9}$$

Этот комплекс точен.

Пусть теперь $A : C^\infty(E_0)\to C^\infty(E_1)$ — дифференциальный оператор порядка k, который достаточно регулярен. Тогда ядро морфизма $\pi_{k+l,\,k+l-1} : \mathfrak{R}_{k+l}\to\mathfrak{R}_{k+l-1}$ является расслоением, которое обозначим через g_{k+l}. Оно является подрасслоением в $S^{k+l}(T^*\Omega)\otimes E_0$ и называется *символическим расслоением* или просто *символом оператора* A. По определению точна последовательность расслоений

$$0\to g_{k+l}\to\mathfrak{R}_{k+l}\xrightarrow{\pi_{k+l,k+l-1}}\mathfrak{R}_{k+l-1}.$$

Если обозначить через σ_l символ (в смысле п. 1.2) дифференциального оператора $A^{(l)}$ — l-го продолжения оператора A, то σ_l — отображение расслоений $s^{k+l}(T^*\Omega)\otimes E_0\to S^l(T^*\Omega)\otimes E^1$. Очевидно, что g_{k+l} также ядро отображения σ_l, т. е. точна последовательность

$$0\to g_{k+l}\to S^{k+l}(T^*\Omega)\otimes E_0\xrightarrow{\sigma_l} S^l(T^*\Omega)\otimes E_1.$$

Поскольку g_{k+l} — подрасслоения расслоений $S^{k+l}(T^*\Omega)\otimes E_0$, то они могут быть подставлены тензорными сомножителями в комплекс (1.9) вместо расслоений $S^{k+l}(T^*\Omega)\otimes E_0$. При этом, как оказывается, сужения на $\Lambda^r(T^*\Omega)\otimes g_s$ отображения δ порождает корректно определенный комплекс

$$0\to g_{k+l}\xrightarrow{\delta} T^*\Omega\otimes g_{k+l+1}\xrightarrow{\delta}\Lambda^2(T^*\Omega)\otimes g_{k+l+2}\xrightarrow{\delta}\ldots$$
$$\ldots\xrightarrow{\delta}\Lambda^l(T^*\Omega)\otimes g_k\to\delta(\Lambda^l(T^*\Omega)\otimes g_k)\to 0. \tag{1.10}$$

Этот комплекс, в отличие от комплекса (1.9), уже не обязан быть точным во всех членах, но ои точен в первых двух членах.

Определение 1.11. Оператор A порядка k, а также его символ σ и его символическое расслоеиие g_k называются *инволютивными*, если комплекс (1.10) точен при всех $l\geqslant 0$.

Пример 1.23. Пусть $\Omega\subset\mathbf{R}^2$, $Y=\mathbf{R}^1$ и $Ay=(\partial^2y/\partial x_1^2, \partial^2y/\partial x_2^2)$. Слой символического расслоения g_2 в произвольной точке $x\in\Omega$ задается в $S^2(T^*\Omega)|_x=L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^1)$ следующим образом

$$g_2|_x=\{A=(a_{ij})\in L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^1)\,(i,\ j=1,2)\mid a_{11}=a_{22}=0\}.$$

Таким образом, расслоение g_2 — одномерно. Легко проверить, что при всех $l>0$ расслоения g_{2+l} нулевые. Записывая комплекс (1.10) при $l=2$, $k=2$ получаем комплекс

$$0\to g_4\xrightarrow{\delta} T^*\Omega\otimes g_3\xrightarrow{\delta}\Lambda^2(T^*\Omega)\otimes g_2\to 0,$$

который не является точным, так как $g_4|_x=0$, $g_3|_x=0$ и $(\Lambda^2(T^*\Omega)\otimes g_2)|_x\cong g_2|_x\neq 0$ для любой точки $x\in\Omega$. Отсюда следует, что оператор A не является инволютивным. Однако, поскольку g_{2+l} — нулевое расслоение для всех $l>0$, то нетрудно убедиться, что первое продолжение $A^{(1)}$ оператора A, задаваемое равенством

$$A^{(1)}y=\left(\frac{\partial^3y}{\partial x_1^3},\ \frac{\partial^3y}{\partial x_1^2\partial x_2},\ \frac{\partial^3y}{\partial x_1\partial x_2^2},\ \frac{\partial^3y}{\partial x_2^3},\ \frac{\partial^2y}{\partial x_1^2},\ \frac{\partial^2y}{\partial x_2^2}\right),$$

является инволютивным оператором.

Приведенный пример является также иллюстрацией к следующему важному результату, который называется *δ-леммой Пуанкаре* (по аналогии с леммой Пуанкаре о локальной точности комплекса де Рама (пример 1.8) для оператора внешнего дифференцирования).

Теорема 1.1. Существует целое число $\mu\geqslant 0$, зависящее только от размерности n многообразия Ω, порядка k дифференциального оператора и размерности d слоя расслоения E_0, такое, что комплекс (1.10) точен при всех $l\geqslant\mu$ и $i\geqslant 0$.

Таким образом для каждого достаточно регулярного оператора A некоторое его продолжение, т. е. оператор $A^{(\mu)}=j^\mu A$ является инволютивным оператором. Заметим, что если A — формально интегрируемый оператор, то $A^{(\mu)}$ также формально интегрируем. Поскольку очевидно, что оператор $A^{(\mu)}$ эквивалентен оператору A (в смысле определения 1.5), то теорема 1.1. и предложение 1.4 показывают, что всякий достаточно регулярный оператор может быть заменен эквивалентным формально интегрируемым и инволютивным.

Представляют интерес оценки сверху для числа μ из теоремы 1.1 через числа n, k и d из формулировки этой же теоремы.

Такие оценки могут быть получены из следующих соотношений

$$\mu(0, d, 1)=0,$$

$$\mu(n, d, 1)=d\binom{a+n}{n-1}+a+1, \quad \text{где} \quad a=\mu(n-1, d, 1),$$

$$\mu(n, d, k)=\mu(n, b, 1), \quad \text{где} \quad b=\sum_{\nu=0}^{k}\binom{\nu+n-1}{n-1}d.$$

Вернемся к примеру 1.18. Дифференциальный оператор D_p^k в комплексе (1.8) действует следующим образом

$$D_p^k: C^\infty(\Lambda^p(T^*\Omega)\otimes J^k(E))\to C^\infty(\Lambda^{p+1}(T^*\Omega)\otimes J^{k-1}(E))$$

и однозначно определяется из условий:

(i) для каждого сечения s расслоения $\Lambda^i(T^*\Omega)\otimes J^k(E)$, дифференциальной формы Φ порядка j (т. е. сечения расслоения $\Lambda^j(T^*\Omega)$) выполнено равенство

$$D_{i+j}^k(\Phi\wedge s)=d\Phi\wedge\pi_{k,k-1}s+(-1)^j\Phi\wedge D_i^k;$$

(ii) точен комплекс

$$0 \quad C^\infty(E)\xrightarrow{j^k}C^\infty(J^k(E))\xrightarrow{D_0^k}C^\infty(T^*\Omega\otimes J^{k-1}(E)).$$

Пусть теперь $A=p(A)j^k: C^\infty(E_0)\to C^\infty(E_1)$ — некоторый формально интегрируемый оператор (если он всего лишь достаточно регулярен, то следует заменить его эквивалентным формально интегрируемым). Пусть, как и ранее, расслоения $\mathfrak{R}_k\subset J^k(E_0)$, $\mathfrak{R}_{+l}\subset J^{k+l}(E_0)$ соответствуют операторам A и $A^{(l)}$.

Рассматривая следующую коммутативную (ввиду свойств (i) и (ii) оператора D) диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
C^\infty(\Lambda^i(T^*\Omega)\otimes J^{k+l+1}(E_0)) & \xrightarrow{p_{l+1}(A)} & C^\infty(\Lambda^i(T^*\Omega)\otimes J^{l+1}(E_1)) \\
\downarrow D_i^{k+l+1} & & \downarrow D_i^{l+1} \\
C^\infty(\Lambda^{i+1}(T^*\Omega)\otimes J^{k+l}(E_0)) & \xrightarrow{p_l(A)} & C^\infty(\Lambda^{i+1}(T^*\Omega)\otimes J^l(E_1)),
\end{array}$$

в строках которой — отображения сечений, порожденные отображениями расслоений, убеждаемся, что оператор D_p^k порождает дифференциальный оператор

$$D: C^\infty(\Lambda^i(T^*\Omega)\otimes\mathfrak{R}_{k+l+1})\to C^\infty(\Lambda^{i+1}(T^*\Omega)\otimes\mathfrak{R}_{k+l}).$$

Возникает следующий комплекс

$$0\to\theta\xrightarrow{j^m}C^\infty(\mathfrak{R}_m)\xrightarrow{D}C^\infty((T^*\Omega)\otimes\mathfrak{R}_{m-1})\xrightarrow{D}C^\infty(\Lambda^2(T^*\Omega)\otimes\mathfrak{R}_{m-2})\xrightarrow{D}\dots$$
$$\dots\xrightarrow{D}C^\infty(\Lambda^n(T^*\Omega)\otimes\mathfrak{R}_{m-n})\to 0, \qquad (1.11)$$

когомологии которого при достаточно больших m не зависят от m. Этот комплекс носит название *первого комплекса Спенсера*, порожденного оператором A (или соответствующим ему «уравнением» $\mathfrak{R}_m$). Его также называют *первой резольвентой Спенсера* решений однородного уравнения, однако в общепринятом смысле резольвентой (а, тем самым, по определению, точным комплексом) этот комплекс для произвольного оператора A не является.

Определим *второй комплекс* («*резольвенту*») *Спенсера* следующим образом.

При $m\geqslant\mu$, где μ — число из теоремы 1.1, определены множества

$$C^0=C_m^0=\mathfrak{R}_m, \quad C^l=C_m^l=(\Lambda^l(T^*\Omega)\otimes\mathfrak{R}_m)/\delta(\Lambda^{l-1}(T^*\Omega)\otimes g_{m+1}).$$

Тогда C^l являются расслоениями. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
0\to & \Lambda^i(T^*\Omega)\otimes g_{m+1} & \to & \Lambda^i(T^*\Omega)\otimes\mathfrak{R}_{m+1} & \to & \Lambda^i(T^*\Omega)\otimes\mathfrak{R}_m & \to 0 \\
 & \downarrow -\delta & & \downarrow D & & \downarrow \tilde{D} & \\
0\to & \delta(\Lambda^i(T^*\Omega)\otimes g_{m+1}) & \to & \Lambda^{i+1}(T^*\Omega)\otimes\mathfrak{R}_m & \to & C^{i+1} & \to 0
\end{array}$$

в которой строки точны, а отображение $\tilde{D}$ в правом столбце порождено отображением D так, чтобы диаграмма была коммутативной. Из этой диаграммы следует, что отображение $\tilde{D}$ действует «через C^i», т. е. порождает дифференциальный оператор

$$D^i: C^\infty(C^i)\to C^\infty(C^{i+1}).$$

Возникает комплекс

$$0\to\theta\xrightarrow{j^m}C^\infty(C^0)\xrightarrow{D^0}C^\infty(C^1)\xrightarrow{D^1}\dots\xrightarrow{D^{n-1}}C^\infty(C^n)\to 0, \qquad (1.12)$$

порожденный формально интегрируемым дифференциальным оператором $A: C^\infty(E_0)\to C^\infty(E_1)$. Этот комплекс, называемый *вторым комплексом Спенсера*, однозначно (с точностью до изоморфизма расслоений) определен следующими свойствами

(i) $C^0=C_m^0=\mathfrak{R}_m$;

(ii) Для любого i $(0\leqslant i\leqslant n-1)$, отображение $D^i: C^\infty(C^i)\to C^\infty(C^{i+1})$ есть дифференциальный оператор первого порядка, отвечающий отображению $\rho^i: J^1(C^i)\to C^{i+1}$ векторных расслоений, чей символ есть эпиморфизм $\sigma(D^i): T^*\Omega\otimes C^i\to C^{i+1}$, порожденный отображением $T^*\Omega\otimes\Lambda^i(T^*\Omega)\to\Lambda^{i+1}(T^*\Omega)$.

(iii) Последовательность

$$0\to\theta\xrightarrow{j^m}C^\infty(C^0)\xrightarrow{D^0}C^\infty(C^1)$$

точна.

(iv) Последовательность (1.12) формально точна.

3.5. Инволютивность по Кураниши. Ниже формулируется другое определение инволютивности для операторов первого порядка, эквивалентное вышеприведенному.

Пусть $A: C^\infty(E_0) \to C^\infty(E_1)$ — дифференциальный оператор первого порядка, $g_1 \subset T^*\Omega \otimes E_0$ — его символическое расслоение, $g_2 \subset S^2(T^*\Omega) \otimes E_0$ — первое продолжение расслоения g_1. Для каждой точки $x \in \Omega$ определим числа $\tau_i(x)$ $(i=0, 1, 2, \ldots, \dim\Omega - 1)$ следующим образом

$$\tau^i(x) = \min_{H_i} \dim (g_1|_x \cap (H_i \otimes E_0|_x)),$$

где H_i — $n-i$-мерные подпространства в $T_x^*\Omega$.

Нетрудно показать, что справедливо неравенство

$$\dim g_2|_x \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \tau^i(x).$$

Определение 1.12. Базис $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ в $T_x^*\Omega$ называется *квазирегулярным* для g_1 в точке $x \in \Omega$, если

$$\dim g_2|_x = \sum_{i=0}^{n-1} \tau(x, (t_{i+1}, t_{i+2}, \ldots, t_n)),$$

где $\tau(x, (t_{i+1}, t_{i+2}, \ldots, t_n)) = \dim (g_1|_x \cap (\{t_{i+1}, \ldots, t_n\} \otimes E_0|_x))$ ($\{t_{i+1}, \ldots, t_n\}$ — подпространство в $T_x^*\Omega$ порожденное векторами $t_{i+1}, t_{i+2}, \ldots, t_n$.

Определение 1.13. Система координат $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в Ω называется *регулярной* для дифференциального оператора A, если в каждой точке $x \in \Omega$ ковекторы $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ образуют квазирегулярный базис для g_1. Оператор A называется *инволютивным*, если в окрестности каждой точки $x \in \Omega$ существует регулярная система координат.

3.6. Коммутационные соотношения и операторы совместности. В комплексах Спенсера информация об исходном операторе A: $C^\infty(E_0) \to C^\infty(E_1)$ «зашифрована» в структуре расслоений (т. е. в соотношениях, определяющих их как под- и фактор-расслоения), в то время как дифференциальные операторы предельно униформизованы. При локализации получаются «простые» дифференциальные операторы, но на множестве функций, связанных недифференциальными линейными соотношениями. Исключение этих соотношений приводит к уменьшению числа функций с одновременым «усложнением» дифференциальных операторов. Поэтому, по крайней мере практически, полезно уметь непосредственно по коэффициентам оператора A в локальной тривиализации строить коэффициенты операторов из его комплекса совместности. Опишем такой путь, в основе которого лежит использование коммутационных соотношений, свойственных формально интегрируемым дифференциальным операторам.

Фигурирующее в пп. 3.4—3.5 понятие инволютивности будет ниже определено иным, независимым от этих пунктов, способом. Заметим также, что из п. 3.2 следует, что при построении операторов совместности можно сосредоточиться на локальных рассмотрениях. Для этого будем записывать оператор A локально в удобной для этой цели форме. Нам удобно свести дело только к операторам первого порядка и для этого воспользуемся некоторой модификацией стандартного приема, с помощью которого понижают порядок дифференцирования путем введения новых функций, обозначающих производные от исходных. Точно это обозначает следующее. Пусть $A: C^\infty(E_0) \to C^\infty(E_1)$ — дифференциальный оператор порядка k. Определим оператор первого порядка $\bar{A}: C^\infty(J^{k-1}(E_0) \to C^\infty(E_1)$ так, чтобы выполнялось соотношение $\bar{A} j^{k-1} = A$. Зададим теперь оператор первого порядка $A': C^\infty(J^{k-1})(E_0)) \to C^\infty(E_1 \times C^1(E_0))$, где $C^1(E_0)$ — расслоение из примера 1.18, правилом

$$A'y = (\bar{A}y, D_1^k y),$$

в котором D_1^k — оператор из комплекса (1.8).

Пример 1.24. Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^2$, A — оператор Лапласа: $Ay = \partial^2 y/\partial x_1^2 + \partial^2 y/\partial x_2^2$.

Сечения расслоения $J^1(\Omega \times \mathbf{R}^1)$ представляются в виде $s = (y, y_1, y_2) \in \mathbf{R}^3$. Операторы $j^1: C^\infty(\Omega, \mathbf{R}^1) \to C^\infty(J^1(\Omega \times \mathbf{R}^1))$ и $D_1^1: C^\infty(J^1(\Omega \times \mathbf{R}^1)) \to C^\infty(C^1(\Omega \times \mathbf{R}^1))$ действуют по правилам:

$$j^1: y \mapsto (y, \partial y/\partial x_1, \partial y/\partial x_2),$$

$$D_1^1: (y, y_1, y_2) \mapsto (\partial y/\partial x_1 - y_1, \partial y/\partial x_2 - y_2, \partial y_1/\partial x_2 - \partial y_2/\partial x_1).$$

(Отметим, что в равенстве $D_1{}^1 s = 0$ первые два уравнения соответствуют введению новых неизвестных функций в стандартном методе перехода к оператору первого порядка, а третье уравнение есть запись симметричности смешанных производных.)

Выбирая в качестве оператора $\bar{A}: C^\infty(J^1(E_0)) \to C^\infty(E_1)$ оператор $\bar{A}: (y, y_1, y_2) \mapsto \partial y_1/\partial x_1 + \partial y_2/\partial x_2$, получаем, что оператор первого порядка A' задается равенством

$$A'(y, y_1, y_2) = \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x_2}, \frac{\partial y}{\partial x_1} - y_1, \frac{\partial y}{\partial x_2} - y_2, \frac{\partial y_1}{\partial x_2} - \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \right).$$

Легко убедиться, что операторы A и A' эквивалентны в категории $\mathrm{D}(\Omega)$ и что, если оператор A достаточно регулярен, то таков же и оператор A'.

Будем считать далее, что в Ω взяты координатная окрестность U с координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и тривиализации над U расслоений $E_0 = U \times Y$ и $E_1 = U \times W$, где Y, W — евклидовы пространства. Пусть в U выбрана одна координата, скажем — x_n, такая, что в локальную запись (1.2) дифференциального оператора A входит явно $\partial/\partial x_n$. Тогда можно разложить евклидовы пространства Y и W на прямые суммы подпространств $Y=$

$=Y^+\oplus Y^-$ и $W=W^+\oplus W^-$ (причем $\dim Y^+$ и $\dim W^+$ совпадают), так чтобы после применения подходящего (при каждом x из достаточно малой окрестности $U'\subset U$) изоморфизма между Y^+ и W^+, оператор A записывался в виде

$$Ay=A(y^+,y^-)=\begin{cases}\dfrac{\partial y^+}{\partial x_n}+L(y^+,y^-),\\ M(y^+,y^-)\equiv M^+y^++M^-y^-,\end{cases} \tag{1.13}$$

где L и M — дифференциальные выражения, не содержащие $\partial/\partial x_n$. Важнейший факт формальной теории состоит в том, что в каждом классе эквивалентности (в категории $\mathrm{D}(\Omega)$) можно выбрать представитель, локальная запись которого (1.13) в подходящей системе координат обладает тем свойством, что ядро $\operatorname{Ker} M$ оператора M переводится оператором $y\mapsto\partial y^+/\partial x_n+$ $+Ly$ в ядро $\operatorname{Ker} M^+$. Тогда такое «расчленение» оператора A позволяет легко распутывать сложную систему неявных зависимостей между функциями и их смешанными частными производными. Более того, такими «подходящими координатами» являются «почти все» координаты (смысл этой фразы будет разъяснен ниже), если «правильно» записать оператор. Сейчас мы сначала проиллюстрируем сказанное на простейших примерах, затем, предполагая упомянутый факт выполненым (в форме определенных коммутационных соотношений) извлечем из него следствия, касающиеся построения оператора совместности. Затем покажем, как следует выбирать в классе эквивалентности представитель (т. е. как записывать оператор), чтобы эти коммутационные соотношения всегда выполнялись.

Пример 1.24. Определим над пространством $\mathbf{R}^2$ тривиальные расслоения $E_0=\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^m$ и $E_1=\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^{2m}$ и пусть дифференциальный оператор первого порядка задан следующим образом

$$A_0y=\begin{cases}\dfrac{\partial y}{\partial x_1}+L_1(x)\,y=f_1,\\ \dfrac{\partial y}{\partial x_2}+L_2(x)\,y=f_2,\end{cases} \tag{1.14}$$

где (x_1, x_2) система координат в $\mathbf{R}^2$, а $L_1(x)$ и $L_2(x)$ — $m\times m$-матрицы. Предположим также, что выполнены следующие *условия Фробениуса*

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_2}-\frac{\partial L_2}{\partial x_1}-L_1L_2+L_2L_1=0.$$

Условия Фробениуса эквивалентны следующим коммутационным соотношениям

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+L_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_2}+L_2\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x_2}+L_2\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+L_1\right). \tag{1.15}$$

Из коммутационных соотношений (1.15) следует, что для разрешимости системы (1.14) необходимо выполнение следующих условий совместности на f_1 и f_2

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+L_1\right)f_2-\left(\frac{\partial}{\partial x_2}+L_2\right)f_1=0.$$

Легко видеть, что возникающий оператор

$$A_1(f_1,f_2)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+L_1\right)f_2-\left(\frac{\partial}{\partial x_2}+L_2\right)f_1$$

является оператором совместности для оператора A из (1.14).

Пример 1.24 имеет следующее важное обобщение, которое является ключевым в локальном построении операторов совместности.

Пусть A_0 — достаточно регулярный дифференциальный оператор первого порядка в локальной системе координат $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в $U\subset\Omega$, записанный в виде

$$A_0y=\begin{cases}\dfrac{\partial y^+}{\partial x_n}+L_0y=f,\\ M_0^+y^++M_0^-y^-=g,\end{cases} \tag{1.16}$$

где L_0, M_0^+, M_0^- — дифференциальные выражения относительно $(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \ldots, \partial/\partial x_{n-1})$. Предположим, что существует такой дифференциальный оператор L_1, содержащий дифференцирования только по $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, что справедливы коммутационные соотношения

$$M_0^+\left(\frac{\partial y^+}{\partial x_n}+L_0y\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x_n}+L_1\right)(M_0^+y^++M_0^-y^-). \tag{1.17}$$

Очевидно тогда, что для разрешимости системы (1.16) необходимо выполнение следующего условия совместности

$$\frac{\partial g}{\partial x_n}+L_1g-M_0^+f=0.$$

Предложение 1.5. Пусть дифференциальный оператор A_0 записан локально в форме (1.16) и выполнены коммутационные соотношения (1.17) с некоторым оператором L_1. Предположим, что M_1 — оператор совместности для оператора $y\mapsto M_0y=M_0^+y^++M_0^-y^-$. Тогда оператор A_1, определенный правилом

$$A_1(f,g)=\left(\frac{\partial g}{\partial x_n}+L_1g-M_0^+f,\ M_1g\right),$$

является оператором совместности для оператора A_0.

Заметим, что в оператор M_0 переменная x_n входит только как параметр, поэтому применение предложения 1.5 в задаче построения оператора совместности уменьшает размерность аргумента (а одновременно и количество уравнений в системе). Следовательно, возможно (при выполнении на каждом шаге коммутационных соотношений) последовательное уменьшение размерности x так, что после не более чем $n-1$ шага задача сведется к построению оператора совместности для дифференциального оператора вида

$$y \mapsto \frac{\partial y_s^+}{\partial x_s} + By,$$

где B не содержит дифференцированный по x_s. Очевидно, что оператор совместности для такого оператора — нулевой.

Займемся выяснением условий, которым должен удовлетворять дифференциальный оператор, чтобы для него в подходящей системе координат выполнялись коммутационные соотношения (1.17).

Следующее предложение показывает, что формальная интегрируемость является тем свойством, которое позволяет свести выяснение наличия коммутационных соотношений (1.17) к наличию коммутационных соотношений только для символов операторов. А это — важный шаг, переводящий вопрос из сложной (ввиду обилия неявных соотношений) дифференциальной алгебры к намного более простой линейной алгебре. Точнее, справедливо

Предложение 1.6. Пусть $A: C^\infty(E_0) \to C^\infty(E_1)$ — формально интегрируемый дифференциальный оператор первого порядка, записанный локально в окрестности $U \subset \Omega$ в виде (1.16). Предположим, что существует такой гладко зависящий от $x \in U$ символ $\tau(x, \xi')$, что справедливы коммутационные соотношения

$$\sigma M^+(x, \xi')(\xi_n y^+ + \sigma L_0(x, \xi')\, y) = (\xi_n + \tau(x, \xi')\, \sigma M_0(x, \xi')\, y, \quad (1.18)$$

где $\xi' = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})$; $\sigma M_0^+(x, \xi')$, $\sigma M_0(x, \xi')$ и $\sigma L_0(x, \xi')$ — символы соответствующих операторов в точке $x \in U$ на ковекторе $\xi' \neq 0$.

Тогда существует такой дифференциальный оператор L_1, что $\tau(x, \xi')$ — символ L_1 и выполняется коммутационное соотношение (1.17).

Ввиду предложения 1.6, сосредоточим внимание на символах дифференциальных операторов.

Определение 1.14. Пусть $\sigma A_0(x, \xi)$ — символ дифференциального оператора A_0 порядка k. Символ $\sigma(A_0)$ (и дифференциальный оператор A_0) называется *инволютивным*, если для всякого символа $\sigma'(x, \xi)$ порядка $k_1 > 1$ такого, что $\sigma'(x, \xi)\sigma A_0(x, \xi) = 0$ существует символ $\overline{\sigma}(x, \xi)$ первого порядка и символ $\tau(x, \xi)$ порядка $k_1 - 1$ такие, что $\overline{\sigma}(x, \xi)\sigma A_0(x, \xi) = 0$ и $\sigma'(x, \xi) = \tau(x, \xi)\overline{\sigma}(x, \xi)$.

Полезно сравнить это определение с определением 1.10 формальной интегрируемости.

Мы утверждаем, что для всякого инволютивного дифференциального оператора в подходящей системе координат справедливы коммутационные соотношения (1.18) и приступим к описанию такой системы координат.

Определение 1.15. Ковектор $\xi \in T_x^*\Omega$ называется *квазирегулярным* ковектором для символа σA_0 (и оператора A_0) в точке $x \in \Omega$, если

$$\dim \operatorname{Ker} \sigma A_0(x, \xi) = \min_{\eta \neq 0} \dim \operatorname{Ker} \sigma A_0(x, \eta)$$

и *нехарактеристическим*, если $\operatorname{Ker} \sigma A_0(x, \xi) = 0$.

Всякий нехарактеристический ковектор очевидно является квазирегулярным.

Определение 1.16. Оператор A_0 называется *оператором с постоянным дефектом*, если число $\dim \operatorname{Ker} \sigma A_0(x, \xi)$ не зависит от (x, ξ) $(\xi \neq 0)$. Для оператора с постоянным дефектом всякий ковектор является квазирегулярным.

Пример 1.25. Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ и оператор A_0 задан правилом $A_0(y) = \operatorname{rot} y$. Тогда оператор A_0 имеет постоянный дефект.

Предложение 1.7. Пусть $\sigma(x, \xi)$ — инволютивный символ и $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ система координат в $U \subset \Omega$ такая, что ковектор dx_n — квазирегулярен в каждой точке $x \in U$ для символа $\sigma(x, \xi)$. Тогда для символа $\sigma(x, \xi)$ в U справедливы коммутационные соотношения (1.18).

Определение 1.17. Назовем дифференциальный оператор A: $C^\infty(E_0) \to C^\infty(E_1)$ *нормализованным*, если

(i) порядок оператора A равен 1;
(ii) A — формально интегрируем;
(iii) A — инволютивен;
(iv) символ $\sigma A: T^*\Omega \otimes E_0 \to E_1$ оператора A сюръективен.

Первые три условия уже обсуждались, четвертое означает, что среди соотношений $Ay = 0$ нет (явно или неявно) чисто алгебраических (т. е. недифференциальных) соотношений между функциями $(y_1, y_2, \ldots, y_m) = y$. Если такие соотношения имеются, их, конечно, можно исключить, уменьшая количество функций $y_1, y_2, \ldots, y_m$. При этом преобразованный оператор эквивалентен исходному в категории $\mathrm{D}(\Omega)$.

Теорема 1.2. Всякий достаточно регулярный дифференциальный оператор A в конечное число шагов (не выходящих за рамки дифференцирований и линейной алгебры в слоях расслоений) может быть преобразован к нормализованному оператору, эквивалентному ему в категории $\mathrm{D}(\Omega)$.

Реально указанное в теореме 1.2 преобразование сводится к последовательному выполнению следующих шагов.

Первый шаг — переход к формально интегрируемому оператору дописыванием недостающих соотношений; второй шаг — переход к эквивалентному инволютивному оператору путем продолжения достаточно большого порядка (т. е. оператор A заменяется оператором $A^{(m)} = j^m A$, число m во всяком случае не больше числа μ, оценки для которого приведены после теоремы 1.1). Полученный инволютивный оператор очевидно остается формально интегрируемым. Третий шаг — переход к эквивалентному оператору первого порядка, как это описано в начале данного пункта. Наконец — четвертый шаг — (исключение недифференциальных соотношений) обсуждался перед формулировкой теоремы 1.2.

Предложение 1.8. Пусть $A_0: C^\infty(E_0)\to C^\infty(E_1)$ — нормализованный дифференциальный оператор. Тогда для каждой точки $x\in\Omega$ существует окрестность $U\subset\Omega$ такая, что $E_0|_U\cong \cong U\times Y$ и $E_1|_U\cong U\times W$ и в которой может быть выбрана система координат $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, называемая *регулярной* системой координат со следующими свойствами:

(i) Существует такое разложение $Y_1\oplus Y_2\oplus\ldots\oplus Y_{n+1}$ пространства Y, что, вводя обозначения $Y_i^+=\oplus_{j\leqslant i}Y_j$, оператор A может быть записан в этой окрестности U в виде

$$A_0: y\mapsto\left\{A_{(i)}y=\frac{\partial y_i^+}{\partial x_i}+L_i y_i^+ + M_i(y_{i+1}, \ldots, y_{n+1})\right\} \qquad (1.19)$$

$$(i=1, 2, \ldots, n),$$

где $y_i\in Y_i$, $y_i^+\in Y_i^+$, дифференциальные выражения L_i (соответственно M_i) не содержат частных производных по $x_i, \ldots, x_n$ (соответственно по $x_{i+1}, \ldots, x_n$).

(ii) при каждом $i\leqslant n$ оператор $y\mapsto(A_{(1)}y, A_{(2)}y, \ldots, A_{(i)}y)$ (в которой переменные $x_{i+1}, \ldots, x_n$ входят как параметры) является нормализованным и ковектор dx_i является квазирегулярным для него.

В множестве систем координат $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в U с естественной топологией регулярные системы координат для нормализованного оператора A_0 образуют открытое плотное множество.

Если в пространстве Y заранее зафиксирован базис $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$, то его всегда можно так перенумеровать $(e_1', e_2', \ldots, e_m')$, что разложение $Y=\oplus Y_i$ имеет вид

$$Y_1=(e_1', e_2', \ldots, e_{k_1}'),$$

$$Y_2=(e_{k_1+1}', e_{k_1+2}', \ldots, e_{k_2}'), \ldots, Y_{n+1}=(e_{k_n+1}', e_{k_n+2}', \ldots, e_m')$$

$$(1\leqslant k_1\leqslant k_2\leqslant\ldots\leqslant k_n\leqslant m).$$

Для открытого плотного множества базисов эта перенумерация может быть произвольной. Таким образом, в ситуации «общего положения» приведение локально записанного в координатах оператора A_0 к форме (1.19) не требует ни замены координат, ни даже замен искомых функций. Специальный выбор координат позволяет еще более упростить запись оператора. Например, можно добиться того, чтобы операторы M_i не зависели от $y_{i+2}, y_{i+3}, \ldots, y_{n+1}$.

Форма записи (1.19) нормализованного оператора A в регулярной системе координат называется *нормальной формой Картана.*

Из предложений 1.6, 1.7 и 1.8 немедленно вытекает

Предложение 1.9. Пусть (1.19) — нормальная форма Картана для нормализованного оператора A_0 и операторы $A_{(i)}^+$, $A_{(i)}^-$ определены из соотношения

$$(A_{(i)}, A_{(i-1)}, \ldots, A_{(1)})y=A_{(i)}^+ y_{i+1}^+ + A_{(i)}^-(y_{i+2}, y_{i+3}, \ldots, y_{n+1}),$$

где $y_i(x)\in Y_i$, $y_i^+(x)\in Y_i^+$ для $x\in U$. Тогда существуют такие дифференциальные операторы первого порядка $\hat A_{(i)}$, что справедливы соотношения

$$\hat A_{(i)}(A_{(i-1)}, \ldots, A_{(1)})=A_{(i-1)}^+ A_{(i)}.$$

Операторы $A_{(i)}$ имеют вид $f\mapsto\frac{\partial f}{\partial x_i}+\ldots$, где многоточием обозначены члены, не содержащие $\partial f/\partial x_i$. Эти члены находятся из коммутационных соотношений, например, методом неопределенных коэффициентов.

Из предложений 1.5 и 1.9 следует

Теорема 1.3. Пусть (1.19) — нормальная форма Картана для нормализованного оператора первого порядка $A_0: C^\infty(U, Y)\to C^\infty(U, W)$ и $W_1\oplus W_2\oplus\ldots\oplus W_n$ — соответствующее разложение пространства W такое, что оператор $A_{(i)}$ действует из $C^\infty(U, Y)$ в $C^\infty(U, W)$, $A_{(i)}^+$ и $\hat A_{(i)}$ — операторы из предложения 1.9. Тогда оператор A_1 действующий из $C^\infty(U, W)$ в $C^\infty\left(U, \overset{n}{\underset{j=1}{\oplus}}\overset{n-j}{\underset{l=1}{\oplus}}W_l\right)$ по правилу

$$(f_1, f_2, \ldots, f_n)\mapsto\hat A_{(n)}(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})-A_{n-1}^+ f_n, \ldots$$

$$\ldots, \hat A_{(3)}(f_1, f_2)-A_{(2)}^+ f_3, \ \hat A_{(2)}f_1-A_{(1)}^+ f_2),$$

где $f_i(x)\in W_i$ при $x\in U$, является оператором совместности для оператора A_0. ◆

Оператор совместности A_1 для нормализованного оператора A_0, вычисленный по теореме 1.3 сразу записан в нормальной форме Картана (для него система координат $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является регулярной). Это позволяет записать для него оператор совместности A_2 и т. д.

Возникает комплекс совместности

$$C^\infty(E_0)\xrightarrow{A_0}C^\infty(E_1)\xrightarrow{A_1}C^\infty(E_2)\xrightarrow{A_2}\ldots\to 0. \qquad (1.20)$$

Если A_0 — оператор с постоянным дефектом и s — число операторов, отличных от нулевого среди операторов $A_{(n)}, A_{(n-1)}, \ldots, A_{(1)}$ в нормальной форме Картана, то комплекс совместности (1.20) для оператора A_0 содержит точно s ненулевых членов. Этот комплекс, разумеется, обладает свойством формальной точности (определение 1.8).

Для произвольного достаточно регулярного оператора A построение комплекса совместности состоит в переходе сначала (согласно теореме 1.2) к эквивалентному нормализованному оператору A_0, построению последовательным применением теоремы 1.3 его комплекса совместности, и, наконец, переходе к комплексу

$$C^\infty(E_0)\xrightarrow{A}C^\infty(E_1)\xrightarrow{A'}C^\infty(E_2)\to\ldots,\tag{1.21}$$

коцепно эквивалентному комплексу совместности для A_0 согласно предложению 1.2.

Заметим, что формальная интегрируемость и инволютивность очень существенные свойства формы записи оператора и от числа дифференцирований, с помощью которых (согласно предложению 1.4 и теореме 1.1) мы переходим от оператора A к эквивалентному формально интегрируемому и инволютивному, существенно зависит даже порядок оператора совместности.

В то же время, требования первого порядка и эпиморфности символа в определении нормализованного оператора носят чисто технический характер и приняты для упрощения изложения. В конкретных задачах не всегда удобно заменять оператор эквивалентным оператором первого порядка. Этого можно избежать, если пользоваться коммутационными соотношениями, имеющими место для формально интегрируемых операторов порядка выше первого. Такие соотношения приведены в [7].

3.7. Вещественно-аналитический случай. Пусть действие происходит в категории $D_a(\Omega)$ и $\mathfrak{A}(\Omega, Y)$ — множество вещественно-аналитических функций, определенных на открытом множестве $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ и принимающих значения в евклидовом пространстве Y. Тогда для достаточно регулярного дифференциального оператора $A:\mathfrak{A}(\Omega, Y)\to\mathfrak{A}(\Omega, Y_1)$ комплекс (1.21) порождает при каждом $\Omega'\subset\Omega$ комплекс

$$\mathfrak{A}(\Omega', Y_0)\xrightarrow{A_0}\mathfrak{A}(\Omega', Y_1)\xrightarrow{A'}\mathfrak{A}(\Omega', Y_2)\to\ldots\tag{1.22}$$

Теорема 1.4. Пусть $x\in\Omega$ и Ω' — достаточно малая окрестность точки x, гомеоморфная открытому шару в $\mathbf{R}^n$. Тогда комплекс (1.22) точен.

Иными словами: для локальной разрешимости системы $A_0y=f$ условия $A_1f=0$ являются необходимыми и достаточными. Подчеркнем еще раз, что оператор A' строится по оператору A_0 в конечное число шагов.

Приведем доказательство теоремы 1.4, которое легко получается индукцией (по $n=\dim\Omega$) и применением коммутационных соотношений (1.17). Действительно, можно, ввиду теоремы 1.2 и предложения 1.2, считать, что оператор A_0 нормализован и имеет локально вид (1.16). Предположение индукции позволяет считать точным комплекс

$$\mathfrak{A}(\Omega'', Y)\xrightarrow{M_0}\mathfrak{A}(\Omega'', G)\xrightarrow{M_1}\mathfrak{A}(\Omega'', W)\tag{1.23}$$

где $M_0y=M_0^+y^++M_0^-y^-$, Ω'' — некоторая окрестность точки $x^0\in\Omega$, при любом x_n достаточно близком к x_n^0 (напомним, что, согласно записи (1.16), x_n входит в операторы M_0 и M_1 как параметр).

Если $A_1(f, g)=0$, где A_1 — оператор совместности, определенный в предложении 1.5, то $M_1g=0$, что определяет, ввиду точности комплекса (1.23), функцию $(x_1, x_2,\ldots,x_n)\mapsto(z^+(x_1,x_2,\ldots,x_n), z^-(x_1,x_2,\ldots,x_n))$ удовлетворяющую уравнению $M_0z=0$.

Согласно теореме Коши—Ковалевской, существует функция

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n)\to(y^+(x_1,\ldots,x_n), y^-(x_1,\ldots,x_n)),$$

удовлетворяющая верхнему из уравнений системы (1.16) и такая, что y^- совпадает с z^- всюду, а y^+ совпадает с z^+ при $x_n=x_n{}^0$. Осталось показать, что такая новая функция y удовлетворяет и нижнему уравнению системы (1.16) при всех x_n, а не только при $x_n=x_n{}^0$.

Обозначая через w функцию $M_0^+y^++M_0^-y^--g$, видим, что $w=0$ при $x_n=x_n^0$.

Ввиду соотношений $\partial g/\partial x_n+L_1g-M_0{}^+f=0$ (вытекающих из равенства $A_1(f, g)=0$) и коммутационных соотношений (1.17), получаем, что $(\partial/\partial x_n+L_1)w=0$ при всех x из достаточно малой окрестности точки x^0. Поэтому в этой окрестности $w=0$.

Точность в остальных членах комплекса (1.22) доказывается точно так же. Теорема доказана.

Следуя Э. Картану дадим описание множества решений однородного уравнения $Ay=0$. Такое явное описание получается для нормализованного оператора A использованием его нормальной формы Картана (1.19).

Пусть $A:\mathfrak{A}(E_0)\to\mathfrak{A}(E_1)$ — нормализованный дифференциальный оператор, записанный в некоторой регулярной системе координат $(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ в окрестности U в нормальной форме Картана

$$Ay=\left\{A_{(i)}y=\frac{\partial y_i^+}{\partial x_i}+L_iy_i^++M_i(y_{i+1},\ldots,y_{n+1})\right\}=0,\tag{1.24}$$

где $i=1, 2,\ldots,n$; $y=y_1\oplus y_2\oplus\ldots\oplus y_{n+1}$, $y_i^+=\oplus_{j<i}y_j$.

Следующая задача была рассмотрена Э. Картаном и носит название *задачи Коши—Картана*. Зададим следующие функции:

y_{n+1}^0 от переменных $x_1, x_2,\ldots,x_n$ со значениями в Y_{n+1},

y_n^0 от переменных $x_1, x_2,\ldots,x_{n-1}$ со значениями в Y_n,

. . . .

y_2^0 от переменной x_1 со значениями в Y_2,

и пусть y_1^0 — произвольный вектор из Y_1.

Задача состоит в нахождении такого решения системы (1.24), что в окрестности точки $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ справедливы равенства

$$y_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_{n+1}^0(x_1, x_2, \ldots, x_n);$$
$$y_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = y_n^0(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1});$$
$$\cdots \qquad \cdots$$
$$y_2(x_1, x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0) = y_2^0(x_1);$$
$$y_1(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = y_1^0.$$

Теорема 1.5. Пусть $A: \mathfrak{A}(E_0) \to \mathfrak{A}(E_1)$ — нормализованный дифференциальный оператор и $(y_{n+1}^0, y_n^0, \ldots, y_1^0)$ — данные Коши—Картана в регулярной системе координат в U — вещественно-аналитические функции своих переменных. Тогда для всякого f, удовлетворяющего условию $A_1 f = 0$, (A_1 — оператор совместности оператора A) задача Коши—Картана с данными y_{n+1}^0, $y_n^0, \ldots, y_2^0, y_1^0$) имеет локально вещественно-аналитическое решение, причем единственное.

Эта теорема — частный случай, соответствующий линейным уравнениям, *теоремы Картана—Кэлера*, справедливой и для квазилинейных уравнений (в приведенной формулировке — при $f=0$).

Ее доказательство легко может быть получено (аналогично доказательству теоремы 1.4) индуктивным применением коммутационных соотношений (1.17).

3.8. Добавления. Если рассматривать не вещественно-аналитический, как в п. 3.7, а C^∞-случай, то вопросы разрешимости становятся очень сложными. Локальная точность комплекса совместности имеет место в случае оператора A с постоянными коэффициентами, причем в разнообразных пространствах (подробное описание этого в монографии [13]). В случае операторов с переменными коэффициентами — это не всегда так, в том числе и для операторов с «хорошими» формальными свойствами (в смысле предыдущего изложения). Первый пример такого рода принадлежит Г. Леви [42] и в нем оператор A определен (т. е. имеет нулевой оператор совместности). Уравнение $Ay=f$ оказывается локально разрешимым только при вещественно-аналитической правой части f. Вот этот пример, в записи которого использованы обозначения: $z=x_1+ix_2$, $u=u_1+iu_2$, $f=f_1+if_2$, $\partial/\partial\bar{z} = (\partial/\partial x_1 + i\partial/\partial x_2)/2$:

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + iz\frac{\partial u}{\partial x_3} = \frac{1}{2} f.$$

Подробнее об этом примере см [42], [46], другие подобные примеры имеются в [40].

Подробно изучались системы вида

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = F_i(x, y) \quad (i=1, 2, \ldots, n). \qquad (1.25)$$

Существование и единственность решения задачи Коши $y(x^0)=y^0$ имеет место не только в случае вещественно-аналитических функций, но и в пространствах функций конечной гладкости. Этот результат, называемый *теоремой Фробениуса*, справедлив по следующей причине: если подходить к построению решений системы (1.25) так же как и при доказательстве теоремы Картана—Кэлера, (индуктивно по i), то получаемые на каждом шаге дифференциальные уравнения — обыкновенные, а для них имеются теоремы существования решений.

Если в (1.25) вектор-функции y зависят не только от переменных $x_1, \ldots, x_n$, но и от дополнительных переменных x_{n+1}, $x_{n+2}, \ldots, x_m$, а выражения в правой части содержат $\partial/\partial x_{n+1}, \ldots, \partial/\partial x_m$, то к таким системам теорема Фробениуса уже не применима. В этом случае часто удобно смотреть на y как на отображение из $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ в банахово пространство B, состоящее из функций от переменных $x_{n+1}, \ldots, x_m$, а на $F_i(x, \cdot)$ — как на неограниченные отображения в B. Необходимые теоремы существования решений в этом случае являются следствиями предположений об операторах $F_i(x, \cdot)$, обычно формулируемых в терминах спектральных свойств. В случае, если отображения $y \mapsto F_i(x, y)$ линейные — см. работы [10], [31], если нелинейны — [17]. На таком же пути, т. е. в банаховых пространствах, рассматривалась и теорема Картана—Кэлера [18]. В этом случае по исходной инволютивной системе ставилась задача Коши—Картана, но с данными Коши—Картана y_j^0 — элементами банаховых функциональных пространств B_j, состоящих из функций от переменных $x_1, x_1, \ldots, x_{j-1}$. В [18] указаны конструкции операторов в пространствах $\oplus_{l\leqslant j} B_l$, инфинитезимальность которых эквивалентна разрешимости задачи Коши—Картана в множестве гладких функций со значениями в B_i. Иногда теория возмущений позволяет явно выделить «главную часть» этих операторов [18].

§ 4. Дифференциально-граничные операторы

4.1. Операторы совместности. Пусть E_1 и E_2 — гладкие векторные расслоения над гладким многообразием Ω, G_0 и G_1 — гладкие векторные расслоения над Г. В примере 1.3 была введена категория DB(Ω), морфизмы которой — дифференциально-граничные (ДГ-) операторы. Напомним, что *ДГ-оператор* действует из $C^\infty(E_0) \times C^\infty(G_0)$ в $C^\infty(E_1) \times C(^\infty(G_1)$ по правилу:

$$\Phi: (f, g) \mapsto (\Phi^{11}f, \Phi^{21}f + \Phi^{22}g),$$

где Φ^{11} и Φ^{22} — дифференциальные операторы и Φ^{21} — композиция дифференциального оператора и оператора γ сужения на Г сечения расслоения над Ω. Если $G_0=0$, то ДГ-оператор, имеющий в этом случае вид (A, B), будем называть *оператором граничной задачи.*

Применяя к категории $DB(\Omega)$, определение 1.5 будем говорить об эквивалентных ДГ-операторах. Как и в случае дифференциальных операторов возникает вопрос о выборе в каждом классе эквивалентности представителя, форма записи которого наиболее удобна для целей построения операторов совместности и исследования разрешимости граничных задач.

Определение 1.17. ДГ-оператор $\Phi: C^\infty(E_0)\times C^\infty(G_0)\to C^\infty(E_1)\times C^\infty(G_1)$ называется *нормализованным*, если дифференциальный оператор $\Phi^{11}: C^\infty(E_0)\to C^\infty(E_1)$ является нормализованным (в смысле определения 1.17), а граничный оператор $\Phi^{21}: C^\infty(E_0)\to C^\infty(G_1)$ содержит дифференцирования лишь по направлениям, касательным к границе.

Предложение 1.10. Каждый ДГ-оператор $\Phi: C^\infty(E_0)\times C^\infty(G_0)\to C^\infty(E_1)\times C^\infty(G_1)$, у которого компонента $\Phi^{11}: C^\infty(E_0)\to C^\infty(E_1)$ — достаточно регулярный оператор, эквивалентен в категории $DB(\Omega)$ нормализованному ДГ-оператору.

Мы не будем приводить явный вид отображений, участвующих в указанной в предложении 1.10 эквивалентности (это простое упражнение), а сделаем лишь следующие поясняющие замечания. Во-первых, можно считать, что дифференциальный оператор Φ^{11} формально интегрируем и инволютивен, а также то, что порядок оператора Φ^{11} строго выше порядка оператора Φ^{21}. В противном случае мы заменим Φ^{11} эквивалентным ему в категории $D(\Omega)$ оператором $j^l\Phi^{11}$ при подходящем l. Теперь при переходе к эквивалентному оператору первого порядка путем введения новых функций, обозначающих производные от исходных, получим, что оператор Φ^{21} вообще не содержит дифференцирований и, тем самым, является нормализованным.

Для построения операторов совместности выделим для всякого дифференциального оператора на многообразии Ω с краем его «касательную часть».

Пусть A — дифференциальный оператор первого порядка и система координат $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ такова, что в окрестности $U\subset\Omega$ точки $x\in\Gamma=\partial\Omega$ граница Γ локально описывается уравнением $x_n=0$.

Как это обсуждалось в п. 3.3, дифференциальный оператор A может быть записан в виде

$$(Ay)(x)=\left(\frac{\partial y^+}{\partial x_n}(x)+L(x)\,y(x),\ M(x)\,y(x)\right),$$

где дифференциальный оператор $M(x)=M(x_1,\ldots,x_n)$ содержит дифференцирования только по $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, а переменная x_n входит в него как параметр.

Определение 1.19 (локальное). Дифференциальный оператор $y\mapsto M(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0)\,y$ (содержащий дифференцирования по $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$), назовем *касательной частью оператора* A и обозначим через A^τ.

Покрывая границу $\Gamma=\partial\Omega$ окрестностями, мы получаем в каждой окрестности касательную часть оператора A, и при «склеивании» это однозначно определяет глобально на Γ определенный дифференциальный оператор A^τ. В этом нетрудно убедиться непосредственно, но мы получим это сейчас как следствие определения глобального оператора A^τ на языке струй.

Пусть γ — оператор сужения сечения расслоения над Ω до сечения над Γ. Вложение ξ края Γ в Ω индуцирует в сечениях расслоений струй отображение $\zeta_0: J^1(E_0)|_\Gamma\to J^1(E_0|_\Gamma)$ такое, что

$$\zeta_0((j^1S)|_x)=j^1(\gamma S)(x)\quad (x\in\Gamma,\ S\in C^\infty(E_0)).$$

Пусть $A=p(A)\,j^1$ — дифференциальный оператор первого порядка из $C^\infty(E_0)$ в $C^\infty(E_1)$, расслоение $\overline{E}_1$ над Γ определено правилом

$$\overline{E}_1=E_1|_\Gamma/(p(A)\operatorname{Ker}\zeta_0)$$

и ζ' — проекция $E_1\to\overline{E}_1$. Возникает однозначно определенное отображение $\overline{p}: J^1(E_0|_\Gamma)\to\overline{E}_1$ такое, что $\overline{p}\zeta_0=\zeta' p(A)$.

Определение 1.20 (глобальное). Дифференциальный оператор $A^\tau: C^\infty(E_0|_\Gamma)\to C^\infty(\overline{E}_1)$, определяемый правилом $A^\tau=\overline{p}\gamma^1$, называется *касательной частью оператора* A.

Пример 1.26. Пусть d_Ω — оператор из комплекса де Рама для многообразия Ω с гладкой границей Γ. Тогда касательной частью оператора d_Ω является оператор d_Γ из комплекса де Рама для многообразия Γ.

Если дифференциальный оператор A является нормализованным, то оператор A^τ также нормализован.

Обозначая через γ оператор сужения сечений расслоений над Ω до сечений над Γ, всякий нормализованный (в смысле определения 1.18) ДГ-оператор $\Phi: C^\infty(E_0)\times C^\infty(G_0)\to C^\infty(E_1)\times C^\infty(G_1)$ можно записать в виде

$$\Phi(f, g)=(Af,\ B\gamma f+Cg),$$

где B — дифференциальный оператор в сечениях расслоений над Γ (т. е. содержащий дифференцирования лишь в направлениях, касательных к Γ). Определим в течениях расслоений над Γ дифференциальный оператор $\overline{\theta}: C^\infty(E_0|_\Gamma)\times C^\infty(G_0)\to C^\infty(\overline{E})\times C^\infty(G_1)$ правилом

$$\overline{\theta}(f', g)=(A^\tau f',\ Bf'+Cg). \tag{1.26}$$

Определение 1.21. Нормализованный оператор Φ назовем *регулярным*, если достаточно регулярен определенный формулой (1.26) оператор $\overline{\theta}$.

Таким образом, регулярность ДГ-оператора Φ определяется двумя условиями: 1) достаточной регулярностью дифференциального оператора Φ^{11}; 2) достаточной регулярностью однозначно определенного через операторы Φ^{11} и Φ^{21} дифференциального оператора $\bar{\theta}$ на границе Γ. Этот оператор $\bar{\theta}$ мы получаем используя переход от Φ^{11} к эквивалентному нормализованному. Конечно, свойство регулярности оператора может быть определено и в исходных терминах операторов Φ^{11} и Φ^{21} без перехода к эквивалентному нормализованному, но для упрощения изложения приведем следующее определение.

Определение 1.22. ДГ-оператор Φ назовем *регулярным*, если достаточно регулярны операторы Φ^{11} и $\bar{\theta}$, где $\bar{\theta}$ определен формулой (1.26), в которой A, B и C — компоненты нормализованного ДГ-оператора, эквивалентного оператору Φ.

Приступим к построению оператора совместности. Достаточно рассмотреть регулярные нормализованные ДГ-операторы. Затем, как обычно, можно воспользоваться предложениями 1.1 и 1.10, которые позволяют определить (и явно выписать) оператор совместности для произвольного регулярного ДГ-оператора.

Пусть $\Phi : (y, w) \mapsto (Ay, B\gamma y + Cw)$ — регулярный нормализованный ДГ-оператор, A^{τ} — касательная часть оператора Φ (определение 1.20) и $\bar{\theta}$ — оператор, определенный правилом (1.26).

Пусть $\bar{\theta}'$ — оператор совместности для оператора θ и ζ' — введенное выше отображение расслоений — проектор $E_1 \to \bar{E}_1$.

Тогда ДГ-оператор Φ_1', заданный формулой

$$\Phi'(f, g) = (A_1 f, \bar{\theta}'(\zeta' f, g)),$$

является естественным кандидатом на роль оператора совместности для оператора Φ. Однако, мы не остановимся на операторе Φ_1', а произведем небольшую его «подправку». Для объяснения приведем пример

Пример 1.27. *Задача Дирихле для оператора* grad. Пусть $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_3 \geqslant 0\}$, граница Γ описывается уравнением $x_3 = 0$. Касательная часть A^{τ} оператора $A = \mathrm{grad}$ совпадает с двумерным градиентом:

$$A^{\tau} y = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}\right).$$

Отображение ζ' сопоставляет заданной на Ω вектор-функции $f = (f_1, f_2, f_3)$ вектор-функцию $\zeta' f = (f_1|_\Gamma, f_2|_\Gamma)$, заданную на Γ. Оператор $\bar{\theta}$, таким образом, действует по правилу

$$\bar{\theta} y = \left(\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}\right), y\right),$$

где y — скалярная функция на Γ.

Соответственно, оператор $\bar{\theta}'$ имеет вид

$$\bar{\theta}'(f_1', f_2', g) = \left(\frac{\partial f_1'}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2'}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_1} - f_1', \frac{\partial g}{\partial x_2} - f_2'\right).$$

Наконец запишем оператор Φ_1':

$$\Phi_1'(f_1, f_2, f_3, g) = (\mathrm{rot}(f_1, f_2, f_3), \partial(f_1|_\Gamma)/\partial x_2 - \\ - \partial(f_2|_\Gamma)/\partial x_1, \partial g/\partial x_1 - f_1|_\Gamma, \partial g/\partial x_2 - f_2|_\Gamma).$$

Здесь очевидно, что в условиях совместности $\Phi_1'(f, g) = 0$ условие $\partial(f_1|_\Gamma)/\partial x_2 - \partial(f_2|_\Gamma)/\partial x_1 = 0$ является лишним, поскольку оно вытекает из условия $\mathrm{rot}\, f = 0$. Упомянутая выше «подправка» как раз и заключается в устранении таких лишних условий. Подправленный оператор в данном примере имеет вид

$$\Phi_1(f, g) = \left(\mathrm{rot}\, f, \frac{\partial g}{\partial x_1} - f_1|_\Gamma, \frac{\partial g}{\partial x_2} - f_2|_\Gamma\right).$$

В общем случае, в операторе совместности $\bar{\theta}'$ также возникают лишние компоненты, которые уместно устранить. Для этого заметим, что оператор $\bar{\theta}'$ всегда может быть записан в виде

$$\bar{\theta}'(f', g) = ((A^{\tau})' f', \theta'(f', g)),$$

где $(A^{\tau})'$ — оператор совместности для оператора A^{τ}, а оператор θ' не содержит соотношений только между компонентами f', т. е. θ' не может быть записан в виде

$$\theta'(f', g) = (\theta_1' f', \theta_2'(f', g))$$

с ненулевым θ_1'.

Теперь определим оператор

$$\Phi_1 : C^{\infty}(\Omega, Y_1) \times C^{\infty}(\Gamma, W_1) \to C^{\infty}(\Omega, Y_2) \times C^{\infty}(\Gamma, W_2)$$

правилом

$$\Phi_1(f, g) = (A_1 f, \theta'(\zeta' f, g)). \qquad (1.27)$$

(Напомним, что локально в регулярной системе координат $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, в которой граница Γ описывается уравнением $x_n = 0$, а оператор A имеет вид $y \mapsto (\partial y^+/\partial x_n + Ly, My) = (f_1, f_2)$ отображение ζ' сопоставляет векторному полю $f = (f_1, f_2)$ сужение $f_2|_\Gamma$ на Γ его компоненты f_2.)

Предложение 1.11. Пусть Φ регулярный нормализованный ДГ-оператор и конормаль к границе Γ квазирегулярна (определение 1.15) для оператора Φ^{11}. Тогда ДГ-оператор Φ_1, определенный формулой (1.25) является оператором совместности для Φ (в категориях $\mathrm{DB}(\Omega)$ и $\mathrm{DB}_a(\Omega)$).

Оператор Φ_1 для регулярного нормализованного оператора сам является регулярным и нормализованным, а конормаль к границе Γ, квазирегулярная для Φ^{11}, обладает этим же свойством и для $(\Phi_1)^{11}$. Это позволяет продолжать построение операторов совместности. Таким образом приходим к комплексу совместности

$$C^\infty(E_0)\times C^\infty(G_0)\xrightarrow{\Phi} C^\infty(E_1)\times C^\infty(G_1)\xrightarrow{\Phi_1} C^\infty(E_2)\times C^\infty(G_2)\to \ldots.$$

Пример 1.28. Комплекс совместности задачи Дирихле для оператора d дифференцирования 0-форм на многообразии Ω с границей Γ имеет вид

$$0\to C^\infty(\Lambda^0(T^*\Omega))\xrightarrow{\Phi_1} C^\infty(\Lambda^1(T^*\Omega))\times C^\infty(\Lambda^0(T^*\Gamma))\xrightarrow{\Phi_1}$$
$$\xrightarrow{\Phi_1} C^\infty(\Lambda^2(T^*\Omega))\times C^\infty(\Lambda^1(T^*\Gamma))\xrightarrow{\Phi_2}\ldots,$$

где $C^\infty(\Lambda^i(T^*\Omega))$ и $C^\infty(\Lambda^i(T^*\Gamma))$ пространства гладких дифференциальных форм порядка i на многообразиях Ω и Γ соответственно, а оператор

$$\Phi_i: C^\infty(\Lambda^i(T^*\Omega))\times C^\infty(\Lambda^{i-1}(T^*\Gamma))\to C^\infty(\Lambda^{i+1}(T^*\Omega))\times C^\infty(\Lambda^i(T^*\Gamma))$$

действует по правилу $\Phi_i(f,g)=(d_\Omega f,\ \gamma f - d_\Gamma g)$, d_Ω, d_Γ — операторы дифференцирования форм на Ω и Γ соответственно, γ — оператор сужения формы на границу.

Пример 1.29. Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^3$ с границей Γ, $f\in C^\infty(\Omega,\mathbf{R}^3)$, $h\in C^\infty(\Omega,R^1)$, N_Γ — нормальное расслоение над Γ и $g\in C^\infty(N_\Gamma)$ — сечение нормального расслоения. Рассмотрим граничную задачу

$$A: y\mapsto(\operatorname{rot} y,\ \operatorname{div} y)=(f,h),\quad By\equiv y_n=g,$$

где y_n — нормальная компонента вектора y на границе Γ. Комплекс совместности этой задачи имеет вид

$$0\to C^\infty(\Omega,\mathbf{R}^3)\xrightarrow{(A,B)} C^\infty(\Omega,\mathbf{R}^4)\times C^\infty(N_\Gamma)\xrightarrow{\Phi_1} C^\infty(\Omega,\mathbf{R}^1)\to 0,$$

где $\Phi_1(f,g,h)=\operatorname{div} f$.

Пример 1.30. Поставим для оператора A из предыдущего примера другую граничную задачу: $By\equiv y_\tau=g$, где y_τ — касательная компонента вектора y на Γ, $g\in C^\infty(T\Gamma)$ — гладкое касательное к Γ векторное поле. Обозначим через D_Γ дифференциальный оператор, переводящий касательное к Γ векторное поле g в сечение $D_\Gamma g$ нормального расслоения (в данном случае — в скалярную функцию на Γ) по правилу

$$D_\Gamma g=(\beta\circ d_\Gamma\circ\alpha)g,$$

где $\alpha: T\Gamma\to\Lambda^1(T^*\Gamma)$ и $\beta:\Lambda^{n-1}(T^*\Gamma)\to N_\Gamma=\Gamma\times\mathbf{R}^1$ — отождествления описываемые соответствиями $\partial/\partial x_i\to dx_i$ и $dx_1\wedge dx_2\wedge\ldots\wedge dx_n\to 1$.

Комплекс совместности оператора (A,B) имеет вид

$$0\to C^\infty(\Omega,\mathbf{R}^3)\xrightarrow{(A,B)} C^\infty(\Omega,\mathbf{R}^4)\times C^\infty(T\Gamma)\xrightarrow{\Phi}$$
$$\xrightarrow{\Phi} C^\infty(\Omega,\mathbf{R}^1)\times C^\infty(N_\Gamma)\to 0,$$

где $\Phi(f,h,g)=(\operatorname{div} f,\ D_\Gamma g - f_n)$ и f_n — нормальная компонента на Γ поля f.

Таким образом, для нормализованных ДГ-операторов Φ оператор совместности строится по формуле (1.27). Если оператор Φ удовлетворяет условию регулярности, но не является нормализованным, то его следует заменить эквивалентным нормализованным оператором Φ' (предложение 1.10), для оператора Φ' построить комплекс совместности. По этому комплексу, согласно предложению 1.1 строится комплекс совместности для Φ. Это позволяет сопоставлять каждому регулярному ДГ-оператору Φ комплекс ДГ-операторов, являющийся его комплексом совместности.

4.2. Вещественно-аналитический случай. Продолжим пользоваться обозначениями п. 3.7. Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^n$ с вещественно-аналитической границей Γ и U — открытое множество в $\mathbf{R}^n$. Через Ω' и Γ' обозначим соответственно пересечения $\Omega\cap U$ и $\Gamma\cap U$.

Если ДГ-оператор (A,B) имеет вещественно-аналитические коэффициенты и регулярен, то, согласно изложенной в п. 4.1 схеме, он порождает для каждого открытого множества U, такого, что $U\cap\Gamma\neq\varnothing$ комплекс

$$\mathfrak{A}(\Omega',Y_0)\xrightarrow{(A,B)}\mathfrak{A}(\Omega',Y_1)\times\mathfrak{A}(\Gamma',W_0)\xrightarrow{\Phi_1}$$
$$\xrightarrow{\Phi_1}\mathfrak{A}(\Omega',Y_2)\times\mathfrak{A}(\Gamma',W_1)\xrightarrow{\Phi_2}\ldots. \tag{1.28}$$

Теорема 1.6. Пусть в точке $x\in\Gamma$ конормаль к границе Γ квазирегулярна для оператора $\tilde{A}$ — эквивалентного A нормализованного оператора. Тогда для достаточно малой окрестности U, содержащей точку x и гомеоморфной шару в $\mathbf{R}^n$, комплекс (1.28) — точен.

Иными словами, для локальной разрешимости граничной задачи $Ay=f$, $By=g$ в вещественно-аналитическом случае с квазирегулярной конормалью, условия $\Phi_1(f,g)=0$ (которые строятся в конечное число шагов) необходимы и достаточны.

Следующий пример показывает, что предположение квазирегулярности конормали для $\tilde{A}$ не может быть, вообще говоря, заменено таким же предположением для A. Однако, если конормаль нехарактеристична для A, то это достаточное предположение о конормали для справедливости теоремы.

Пример 1.31. Пусть $A: C^\infty(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^3)\to C^\infty(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^4)$ действует по правилу

$$y=(y_1,y_2,y_3)\mapsto Ay=(\partial y_1/\partial x_1+\partial y_2/\partial x_2,$$
$$\partial y_1/\partial x_2-\partial y_2/\partial x_1+y_3,\ \partial y_1/\partial x_3,\ \partial y_2/\partial x_3).$$

Для этого оператора каждый ковектор квазирегулярен. После перехода к эквивалентному оператору $\tilde{A}$, получим

$$\tilde{A}y=\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}+\frac{\partial y_2}{\partial x_2},\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2}-\frac{\partial y_2}{\partial x_1}+y_3,\ \frac{\partial y_1}{\partial x_3},\ \frac{\partial y_2}{\partial x_3},\ \frac{\partial y_3}{\partial x_3}\right),$$

т. е. ковектор dx_3 стал нехарактеристичным, а ковекторы dx_1 и dx_2 перестали быть квазирегулярными.

Набросок доказательства теоремы 1.6. Можно считать, что (A, B) — нормализованный ДГ-оператор, который локально имеет вид:

$$A: y \mapsto (\partial y^+ \partial x_n + L_0 y,\ M_0 y) = (f_1, f_2) = f,$$
$$B: y \mapsto \beta(y|_\Gamma) = g,$$

где dx_n — конормаль.

Тогда $\overline{\theta} = (M_0|_\Gamma, \beta)$ и, согласно теореме 1.4, для некоторой окрестности U точен комплекс совместности

$$\mathfrak{A}(\Gamma', Y') \xrightarrow{\overline{\theta}} \mathfrak{A}(\Gamma', Y'') \xrightarrow{\overline{\theta}'} \mathfrak{A}(\Gamma', Y'''),$$

где Y', Y'', Y''' евклидовы пространства, возникающие при построении операторов $\overline{\theta}$ и $\overline{\theta}'$. Следовательно, если $\Phi(f, g) = 0$, то существует на Γ' функция z, такая, что $M_0|_\Gamma z = f_2|_\Gamma$, $\beta z = g$. Приняв z за данные Коши для уравнения

$$\frac{\partial y^+}{\partial x_n} + L_0 y = f_1$$

получим в Ω' функцию y, которая будет искомым локальным решением задачи $Ay = f$, $By = g$, если показать, что $M_0 y = f_2$ в Ω', а не только на Γ'. Рассмотрим для этого разность $w = M_0 y - f_2$, которая равна нулю на Γ' и, в силу явного вида (1.27) оператора совместности, предложения 1.5 и коммутационных соотношений (1.17), удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial x_n} + \ldots$$

где многоточие обозначает члены не содержание $\partial/\partial x_n$. Поэтому $w = 0$. Точность в остальных членах комплекса (1.25) показывается полностью аналогично.

Специальный вид локальных граничных задач, не содержащих переопределенности на границе (т. е. с оператором $\Phi(f, g)$ не зависящем от g) был рассмотрен в [15].

Глава 2

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

§ 1. Операторы с постоянным дефектом

Будем обозначать через $H^s(E)$ гильбертово пространство С. Л. Соболева сечений расслоения E (если Ω — область в $\mathbf{R}^n$ и $E = \Omega \times \mathbf{R}^m$, то $H^s(E)$ — гильбертово пространство векторнозначных функций, определенных на Ω со значениями в $\mathbf{R}^m$,

обобщенные производные которых до порядка s суммируемы в квадрате). Если имеется разложение в прямую сумму $E = \bigoplus_{j=1}^{m'} E_j$ (E_j — расслоения над Ω) и мультииндекс $T = (t_1, t_2, \ldots, t_{m'})$, то через $H^T(E)$ будем обозначать пространство $\bigoplus_{j=1}^{m'} H^{t_j}(E_j)$.

Определение 2.1. Дифференциальный оператор $A_0 : C^\infty(E_0) \to C^\infty(E_1)$ называется *оператором с постоянным дефектом*, если для любых $x \in \Omega$, $\xi \in T_x^*\Omega$ ($\xi \neq 0$) вектор ξ — квазирегулярен, т. е. если $\dim \operatorname{Ker} \sigma A_0(x, \xi)$ не зависит от x, $\xi \neq 0$. Дифференциальный оператор A_0 называется *эллиптическим оператором*, если для любых $x \in \Omega$, $\xi \in T_x^*\Omega$ ($\xi \neq 0$) вектор ξ — нехарактеристичен, т. е. если $\dim \operatorname{Ker} \sigma A_0(x, \xi) = 0$.

Пример 2.1. Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ и $A_0 y = \operatorname{rot} y$. Оператор A_0 имеет постоянный дефект.

Пример 2.2. Пусть опять $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ и оператор A_0 задан следующим образом

$$A_0(u, v) = (\operatorname{rot} u + \lambda_1 v,\ \operatorname{rot} v + \lambda_2 u),$$

где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}^1$ — некоторые константы. Оператор A_0 имеет постоянный дефект.

Пример 2.3. Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ и $A_0 y = (\operatorname{rot} y,\ \operatorname{div} y)$. Тогда оператор A_0 является эллиптическим.

§ 2. Случай многообразий без края

Пусть сначала Ω — компактное многообразие без края. В теории квадратных эллиптических систем хорошо известен следующий факт.

Теорема 2.1 [47]. Если размерности слоев расслоений E_0 и E_1 одинаковы и $A_0 : C^\infty(E_0) \to C^\infty(E_1)$ — эллиптический оператор, то ядро $\operatorname{Ker} A_0$ и коядро $\operatorname{Coker} A_0 = C^\infty(E_1)/\operatorname{Im} A_0$ оператора A_0 конечномерны. Если k — порядок оператора A_0, то при всяком s оператор A_0 действует непрерывно из $H^s(E_0)$ в $H^{s-k}(E_1)$ и имеет конечномерное ядро и коядро тогда и только тогда, когда оператор A_0 эллиптичен. Размерности ядра и коядра не зависят от s.

Рассмотрим теперь переопределенный достаточно регулярный дифференциальный оператор $A_0 : C^\infty(E_0) \to C^\infty(E_1)$ и пусть

$$0 \to C^\infty(E_0) \xrightarrow{A_0} C^\infty(E_1) \xrightarrow{A_1} C^\infty(E_2) \to \ldots \tag{2.1}$$

— его комплекс совместности, дополненный слева нулевым отображением.

Теорема 2.2. Если A_0 — достаточно регулярный эллиптический оператор, то когомологии комплекса (2.1) конечномерны.

Теорема 2.3. Если A_0 — формально интегрируемый эллиптический оператор порядка k_0 и оператор A_i из комплекса совместности имеет порядок k_i, то комплекс гильбертовых пространств

$$0 \to H^s(E_0) \xrightarrow{A_0} H^{s-k_0}(E_1) \xrightarrow{A_1} H^{s-k_0-k_1}(E_2) \xrightarrow{A_2} \ldots$$

имеет конечномерные когомологии для всякого $s \in \mathbf{R}^1$, причем их размерности не зависят от s.

Доказательство этих теорем может быть сведено к теореме 2.1 простым приемом, который мы сейчас опишем. Сначала рассмотрим общий случай комплекса гильбертовых пространств.

Утверждение 2.1. Пусть

$$H_1 \xrightarrow{\alpha} H_2 \xrightarrow{\beta} H_3 \tag{2.2}$$

комплекс гильбертовых пространств и линейных отображений (т. е. $\beta\alpha=0$). Тогда размерность пространства когомологий $\operatorname{Ker}\beta/\operatorname{Im}\alpha$ совпадает с размерностью ядра оператора $\Delta = \alpha\alpha^*+\beta^*\beta : H_2 \to H_2$, где звездочка обозначает сопряженный оператор.

Оператор Δ называется *лапласианом комплекса* (2.2). В случае многообразий без края сопряженные к дифференциальным операторам в утверждении 2.1 можно заменить формально сопряженными операторами и тем самым лапласиан оказывается дифференциальным квадратным оператором. Следующее утверждение дает условие эллиптичности лапласиана. Пусть в (2.2) $H_i = H^{s_i}(E_i)$ и α, β — дифференциальные операторы.

Утверждение 2.2. Если для каждых $x \in \Omega$ и $\xi \in T_x^*\Omega$ $(\xi \neq 0)$ точен комплекс символов

$$E_1|_x \xrightarrow{\sigma\alpha(x,\xi)} E_2|_x \xrightarrow{\sigma\beta(x,\xi)} E_3|_x,$$

то лапласиан $\Delta=\alpha\alpha^*+\beta^*\beta$ является эллиптическим оператором (α^* и β^* — операторы, формально сопряженные к α и β).

Таким образом, доказательство теорем 2.2 и 2.3 сводится к проверке точности комплекса символов, порожденного комплексом совместности (2.1). Поэтому основным является следующее предложение.

Предложение 2.1. Если A_0 — нормализованный дифференциальный оператор (в смысле определения 1.17), $\xi \in T_x^*\Omega$ $(\xi \neq 0)$ — квазирегулярный ковектор, то точен комплекс символов

$$E_0|_x \xrightarrow{\sigma A_0(x,\xi)} E_1|_x \xrightarrow{\sigma A_1(x,\xi)} E_2|_x \xrightarrow{\sigma A_2(x,\xi)} E_3|_x \to \ldots,$$

где A_i — оператор совместности для A_{i-1}, построенный в § 3 гл. 1.

Доказательство этого важного предложения немедленно следует из явных выражений для операторов совместности (см. предложение 1.5) при выборе регулярной системы координат $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, в которой $\xi = dx_n$.

Таким образом, если оператор A_0 — нормализован и эллиптичен, то из предложения 2.1 и утверждений 2.1 и 2.2 немедленно вытекают теоремы 2.2 и 2.3.

Пусть оператор A_0 всего лишь достаточно регулярен. Тогда, согласно теореме 1.2, его можно заменить эквивалентным ему нормализованным оператором. При этом когомологии комплексов совместности будут изоморфны в соответствующих членах. Пространства гладких сечений в теореме 2.2 при этой эквивалентности снова переходят в такие же пространства, меняются только расслоения. Легко показать, что при процедурах, применяемых при переходе от достаточно регулярного оператора к эквивалентному нормализованному (переход к формально интегрируемому оператору, затем продолжение для перехода к инволютивному, переход к первому порядку, исключение линейных (недифференциальных) соотношений) нехарактеристический ковектор остается нехарактеристическим. Тем самым достаточно регулярно эллиптические операторы переходят в эквивалентные им нормализованные эллиптические операторы. Поэтому теорема 2.2. справедлива для произвольного достаточно регулярного оператора. Что касается теоремы 2.3, то при переходе от достаточно регулярного оператора к формально интегрируемому (согласно предложению 4) свойство пространств быть соболевскими может не сохраняться. В этом случае следует проследить за тем, какие нормы в пространствах из комплекса совместности для A_0 должны быть выбраны, чтобы в комплексе совместности эквивалентного нормализованного оператора фигурировали соболевские нормы. В общем случае справедливо предложение, в формулировке которого ограничимся только оператором A_0 и его оператором совместности.

Предложение 2.2. Пусть $A_0 : C^\infty(E_0) \to C^\infty(E_1)$ — достаточно регулярный оператор и $P : C^\infty(E_1) \to C^\infty(E_1')$ такой дифференциальный оператор, что оператор $A' = (A_0, PA_0)$ формально интегрируем. Пусть оператор A' имеет порядок k и является эллиптическим и банахово пространство $\mathscr{H}^s$ является пополнением пространства $C^\infty(E_1)$ по норме

$$\|y\|_{\mathscr{H}^s} = \|(y, Py)\|_{H^{s-k}(E_1 \oplus E_1')}.$$

Тогда конечномерны и не зависят от s когомологии комплекса

$$0 \to H^s(E_0) \xrightarrow{A_0} \mathscr{H}^s \xrightarrow{A_1} H^{s-k_1}(E_2)$$

при некотором k'.

Конечно, если оператор A_0 был эллиптическим, то и оператор A' из предложения 2.2 будет таковым. Однако более интересен и важен в приложениях случай, когда A_0 не является эллиптическим, а A' — является, как это видно из следующего примера.

Пример 2.3. Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^4$ — сфера в $\mathbf{R}^4$ и оператор определен соотношением $A_0 y = \operatorname{rot} y + y$.

Оператор A_0 не является ни эллиптическим ни формально интегрируемым, однако эквивалентный ему нормализованный оператор

$$A'y = (\mathrm{rot}\, y + y,\ \mathrm{div}\, y) = (f, g)$$

является эллиптическим. Оператор совместности для A' имеет вид $A_1'(f, g) = \mathrm{div}\, f - g$. Из теоремы 2.3 следует конечномерность при всех $s \geqslant 2$ когомологий комплекса

$$0 \to H^s(\Lambda^1(T^*\Omega)) \xrightarrow{A'} H^{s-1}(\Lambda^2(T^*\Omega)) \oplus$$

$$\oplus H^{s-1}(\Lambda^3(T^*\Omega)) \xrightarrow{A_1'} H^{s-2}(\Lambda^3(T^*(\Omega)) \to 0, \qquad (2.3)$$

где $\Lambda^i(T^*\Omega)$ — расслоение i-форм над Ω. Из конечномерности когомологий комплекса (2.2), в силу предложения 2.2, следует конечномерность (при всех $s \geqslant 2$) когомологий комплекса

$$0 \to H^s(\Lambda^1(T^*\Omega)) \xrightarrow{A} \mathscr{H}^{s-1} \to 0,$$

где $\mathscr{H}^s$ — пополнение пространства $H^s(\Lambda^2(T^*\Omega))$ по норме

$$\| y \|_{\mathscr{H}^s} = \| y \|_{H^s(\Lambda^2(T^*\Omega))} + \| \mathrm{div}\, y \|_{H^s(\Lambda^2(T^*\Omega))}$$

(оператор P из предложения 2.2 в этом случае совпадает с оператором div).

§ 3. Граничные задачи для операторов с постоянным дефектом

3.1. Переходим к граничным задачам. Предположим, что Ω — многообразие с гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$. Пусть $(A, B): C^\infty(E_0) \to C^\infty(E_1) \times C^\infty(G_1)$ — оператор граничной задачи (здесь E_0, E_1 — векторные расслоения над Ω и G_1 — векторное расслоение над Γ). Рассмотрим эти объекты локально в достаточно малой окрестности U точки $x \in \Gamma$.

Пусть $U \subset \mathbf{R}^n$ и в системе координат $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в $\mathbf{R}^n$ окрестность U локально задается неравенством $x_n \geqslant 0$ так что $U \cap \Gamma$ задается уравнением $x_n = 0$. Пусть оператор (A, B) в этих координатах (и соответствующих тривиализациях расслоений $E_i|_U$, $G_1|_{U\cap\Gamma}$) имеет вид

$$(Ay)(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant k} a^\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|} y}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

$$(By)(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant l} b^\alpha(x) \left. \frac{\partial^{|\alpha|} y}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right|_{x_n = 0} \quad (x \in U \cap \Gamma). \qquad (2.3)$$

Зафиксируем точку $x^0 \in U \cap \Gamma$ и вектор $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1}$. Заменим в выражениях (2.3) $\partial/\partial x_j$ на $i\eta_j$ $(j = 1, 2, \dots, n-1)$, фиксируя в точке x^0 коэффициенты a^α и b^α и отбрасывая члены по-

рядка ниже k в A и ниже l в B. Получим следующий оператор граничной задачи на полуоси

$$\hat{A}(x^0, \eta)\, y(x_n) = \sum_{|\alpha| = k} a^\alpha(x^0)(i\eta)^{\alpha'} \frac{d^{\alpha_n} y}{d x_n^{\alpha_n}},$$

$$\hat{B}(x^0, \eta)\, y(x_n) = \sum_{|\alpha| = l} b^\alpha(x^0)(i\eta)^{\alpha'} \left. \frac{d^{\alpha_n} y}{d x_n^{\alpha_n}} \right|_{x_n = 0},$$

в котором $\hat{A}$ — обыкновенный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$.

Нетрудно описать на инвариантном языке конструкцию, сопоставляющую дифференциальному оператору A и граничному оператору B операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ с постоянными коэффициентами на полуоси для всякого риманова многообразия Ω с границей Γ с помощью выбора ортогонального разложения слоя $T_x^*\Omega = T_x^*\Gamma \oplus N$ кокасательного расслоения. Ограничимся приведенной локальной конструкцией, заметив, что используемые ниже свойства операторов $\hat{A}$, $\hat{B}$ не зависят от выбора локальной системы координат.

Пусть $\Phi: C^\infty(E_0) \times C^\infty(G_0) \to C^\infty(E_1) \times C^\infty(G_1)$ — дифференциально-граничный оператор, $\Phi(u, v) = (Au, Bu + Cv)$ и пусть расслоения G_0, G_1 являются прямыми суммами $G_0 = \bigoplus_{j=1}^{r} G^j$, $G_1 = \bigoplus_{j=1}^{r'} G'^j$. Тогда граничный оператор β может быть записан столбцом $(B^j \mid j = 1, 2, \dots, r')$, а дифференциальный оператор C — матрицей $(c^{ij} \mid i = 1, 2, \dots, l;\ j = 1, 2, \dots, r')$, так, что $B^j: C^\infty(E_0) \to C^\infty(G'^j)$ и $c^{ij}: C^\infty(G^j) \to C^\infty(G'^i)$. Пусть целые числа k, k' и мультииндексы $\beta = (\beta^1, \beta^2, \dots, \beta^r)$, $\beta' = (\beta'^1, \beta'^2, \dots, \beta'^{r'})$, в которых дробные части β^j и β'^j равны $\frac{1}{2}$, таковы, что для ненулевых B^j и c^{ij} справедливы неравенства

$$\mathrm{ord}\, B^j \leqslant k - \beta'^j - \frac{1}{2}, \quad \mathrm{ord}\, c^{ij} = \beta^j - \beta'^i, \quad \mathrm{ord}\, A \leqslant k - k'.$$

Зафиксируем $x \in \Gamma$ и $\eta \in T_x^*\Gamma$ $(\eta \neq 0)$. Применение описанной выше процедуры к каждому из операторов A, B^j, c^{ij}, рассматриваемым как операторы порядков $k - k'$, $k - \beta'^j - \frac{1}{2}$ и $\beta^j - \beta'^i$ соответственно, приводит при фиксированных $x \in \Gamma$ и $\eta \in T_x^*\Gamma$ $(\eta \neq 0)$ к обыкновенному дифференциально-граничному оператору с постоянными коэффициентами в сечениях расслоений над полуосью

$$\hat{\Phi}(x, \eta)(u, v) = (\hat{A}(x, \eta)\, u,\ \hat{B}(x, \eta)\, u + \hat{C}(x, \eta)\, v),$$

где

$$\hat{B}(x, \eta)u = (\hat{B}^1(x, \eta)u, \hat{B}^2(x, \eta)u, \ldots, \hat{B}^{r'}(x, \eta)u)$$

и $\hat{C}(x, \eta)v = ((-i)^{(\beta'^s - \beta^j)}\, \sigma c^{sj}(x, \eta)v \mid s = 1, 2, \ldots, r';\ j = 1, \ldots, r)$.

Пусть $(A, B): C^\infty(E_0) \to C^\infty(E_1) \times C^\infty(G_1)$ — оператор граничной задачи, $\Phi_1: C^\infty(E_1) \times C^\infty(G_1) \to C^\infty(E_2) \times C^\infty(G_2)$ — его оператор совместности, $G_1 = \overset{r_1}{\underset{j=1}{\oplus}} G_1^j$ и $G_2 = \overset{r_2}{\underset{j=1}{\oplus}} G_2^j$ разложения в прямые суммы расслоений G_1 и G_2.

Разложениям $G_1 = \oplus G_1^j$ и $G_2 = \overset{r_2}{\underset{j=1}{\oplus}} G_2^j$ соответствует и разложение $(\varphi^{ij} \mid i = 1, 2, \ldots, r_2;\ j = 1, 2, \ldots, r_1)$ оператора Φ_1^{22} (компоненты оператора совместности Φ_1, действующей из $C^\infty(G_1)$ в $C^\infty(G_2)$). Пусть $\operatorname{ord} B^j = \beta_1^j - \frac{1}{2}$ и $\max\limits_j (\beta_1^j + \operatorname{ord} \varphi^{ij}) = \beta_2^i$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_+$ множество гладких векторно-значных функций на полуоси, стремящихся к нулю на бесконечности.

Теорема 2.4. Пусть $(A, B): C^\infty(E_0) \to C^\infty(E_1) \times C^\infty(G_1)$ — нормализованный оператор граничной задачи, оператор A и его касательная часть A^τ (определение 1.20) имеют постоянный дефект и выполнено следующее условие коэрцитивности: при $x \in \Gamma$ $\eta \in T_x^*\Gamma$ $(\eta \neq 0)$ точен комплекс

$$\operatorname{Ker} \hat{A}(x, \eta) \cap \mathfrak{M}_+ \xrightarrow{\hat{B}(x,\eta)} G_1|_x \xrightarrow{\hat{\Phi}_1^{22}(x,\eta)} G_2|_x.$$

Тогда, если $s - \beta_1 > \frac{1}{2}$ и оператор Φ_1 действует ограничено из $H^{s-1}(E_1) \times H^{s-\beta_1}(G_1)$ в $H^{s-2}(E_2) \times H^{s-\beta_2}(G_2)$, то конечномерно пространство $\operatorname{Ker} \Phi_1 / \operatorname{Im}(A, B)$ и его размерность не зависит от замены s на $s' > s$.

Доказательство этой теоремы может быть получено применением того же приема перехода к лапласиану комплекса, как и в теореме 2.3. Однако в отличие от случая многообразия Ω без края, при построении лапласиана, мы выходим из множества дифференциально-граничных операторов. Лапласианы являются операторами Буте де Монвеля, образующими алгебру операторов на многообразии с краем. Основные сведения об этой алгебре приведены в добавлении к этой главе (§ 6), а сейчас продолжим изложение, считая что эти сведения известны.

Эллиптичность лапласиана вытекает из предложения 2.1 и следующего предложения.

Предложение 2.3. Пусть граничная задача $(A, B): C^\infty(E_0) \to C^\infty(E_1) \times C^\infty(G_1)$ удовлетворяет предположениям теоремы 2.4. Тогда при каждом $x \in \Gamma$, $\eta \in T_x^*\Gamma\ (\eta \neq 0)$ $(s > l)$ точен комплекс ДГ-операторов с постоянными коэффициентами на

полуоси

$$H^s(\mathbf{R}^1_+, C^{m_0}) \xrightarrow{(\hat{A}, \hat{B})} H^{s-1}(\mathbf{R}^1_+, C^{m_1}) \times C^{r_1} \xrightarrow{\tilde{\Phi}_1} H^{s-2}(\mathbf{R}^1_+, C^{m_2}) \times C^{r_2},$$

где m_i, r_i — размерности слоев расслоений E_i и G_i.

Для доказательства рассмотрим следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 & 0 & 0 \\
H^s(R^1_+, C^{m_0})/\operatorname{Ker}\hat{A} \arrow[u] \arrow[r, "\hat{A}"] & H^{s-1}(R^1_+, C^{m_1}) \arrow[u] \arrow[r, "\hat{\Phi}_1^{11}"] & H^{s-2}(R^1_+, C^{m_2}) \arrow[u] \\
H^s(R^1_+, C^{m_0}) \arrow[u] \arrow[r, "(\hat{A}, \hat{B})"] & H^{s-1}(R^1_+, C^{m_1}) \times C^{r_1} \arrow[u] \arrow[r, "\hat{\Phi}_1"] & H^{s-2}(R^1_+, C^{m_2}) \times C^{r_2} \arrow[u] \\
\operatorname{Ker}\hat{A}(x, \eta) \cap \mathfrak{M}_+ \arrow[u] \arrow[r] & C^{r_1} \arrow[u] \arrow[r] & C^{r_2} \arrow[u] \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

столбцы которой точны. Из явного вида операторов совместности (предложение 1.5) и коммутационных соотношений (1.17) следует точность верхней строки. Тогда из точности нижней строки (условие коэрцитивности) вытекает точность средней строки, что доказывает предложение 2.3.

§ 4. Граничные задачи для эллиптических операторов

Пусть (A, B) — оператор граничной задачи и $L \geqslant 1$ — тот номер, для которого в комплексе совместности оператора (A, B) расслоение G_L — ненулевое, а расслоение G_{L+1} (а, следовательно, и G_{L+i} при $i \geqslant 1$) — нулевое.

Зафиксируем целое число $l \geqslant 1$ и предположим, что мультииндексы β^i и разложения $G_i = \underset{j}{\oplus} G_i^j$ $(i = 1, 2, \ldots, l+1)$ таковы, что в комплексе

$$0 \to H^s(E_0) \xrightarrow{(A,B)} H^{s-1}(E_1) \times H^{s-\beta_1}(G_1) \xrightarrow{\Phi_1} \ldots$$
$$\ldots \xrightarrow{\Phi_l} H^{s-l-1}(E_{l+1}) \times H^{s-\beta_l+1}(G_{l+1}) \qquad (2.3)$$

все отображения ограничены (достаточно это предполагать при $l \leqslant L$).

Теорема 2.5. Пусть $(A, B): C^\infty(E_0) \to C^\infty(E_1) \times C^\infty(G_1)$ — нормализованный оператор граничной задачи, оператор A —

эллиптический, выполнено следующее условие коэрцитивности: при $x \in \Gamma$, $\eta \in T_x{}^*\Gamma$ $(\eta \neq 0)$ точен комплекс

$$0 \to \operatorname{Ker} \hat{A}(x, \eta) \cap \mathfrak{M}_+ \xrightarrow{\hat{B}} G_1|_x \xrightarrow{\hat{\Phi}_1^{22}} \dots \xrightarrow{\hat{\Phi}_l^{22}} G_{l+1}|_x \tag{2.4}$$

и, в случае, если $l < L$, то $\dim \operatorname{Ker} \hat{A}(x, \eta)$ не зависит от $x \in \Gamma$, $\eta \in T_x^*\Gamma$ $(\eta \neq 0)$. Тогда когомологии комплекса (2.3) конечномерны и их размерности не меняются при замене s на $s' > s$.

Наоборот, пусть оператор (A, B) нормализован, когомологии комплекса (2.3) конечномерны и выполнено одно из следующих условий:

(i) размерность пространства $\operatorname{Ker} \hat{A}(x, \eta)$ не зависит от $x \in \Gamma$, $\eta \in T_x{}^*\Gamma$ $(\eta \neq 0)$.

(ii) касательная часть оператора A имеет постоянный дефект.

Тогда оператор (A, B) удовлетворяет условию коэрцитивности (2.4) и оператор A эллиптичен.

Эта теорема сводится к теореме 2.4, если заметить, что в случае, когда оператор граничной задачи (A, B) удовлетворяет ее условиям, то касательные части операторов A_i (равных $\Phi_i{}^{11}$ при $i > 0$) имеют постоянный дефект.

Следствие 2.1. Пусть $(A, B) : C^\infty(E_0) \to C^\infty(E_1) \times C^\infty(G)$ такой оператор граничной задачи, для которого эквивалентный нормализованный оператор (строящийся в конечное число шагов конструкцией § 4 гл. 1) удовлетворяет условиям теоремы 2.5. Тогда когомологии комплекса совместности

$$0 \to C^\infty(E_0) \xrightarrow{(A,B)} C^\infty(E_1) \times C^\infty(G_1) \xrightarrow{\Phi_1} C^\infty(E_2) \times C^\infty(G_2) \to \dots$$

конечномерны.

В приведенной формулировке теоремы 2.5 для проверки условия коэрцитивности нормализованного оператора (A, B) следует знать все операторы Φ_i из его комплекса совместности. Это лишнее. Проверка точности комплекса (2.4) может быть произведены только в терминах оператора (A, B). Имеет место такой результат [24]:

Если (A, B) — нормализованный оператор граничной задачи, оператор A эллиптический и A^τ — оператор с постоянным дефектом. Тогда конечномерность когомологий комплекса (2.4) эквивалента следующему условию коэрцитивности:

Оператор (A^τ, B) имеет постоянный дефект, отображение $(\hat{A}(x, \eta), \hat{B}(x, \eta))$ мономорфно на $\mathfrak{M}_+$ при всех $x \in \Gamma$, $\eta \in T_x^*\Gamma$ $(\eta \neq 0)$ и выполняется равенство

$$\hat{B}(x, \eta)(\operatorname{Ker} \hat{A}^\tau(x, \eta)) = \hat{B}(x, \eta)[\operatorname{Ker} \hat{A}(x, \eta) \cap \mathfrak{M}_+|_{x_n=0}]$$

при всех $x \in \Gamma$, $\eta \in T_x^*\Gamma$ $(\eta \neq 0)$.

§ 5. Регулярные ДГ-операторы

В предыдущих пунктах исходным объектом был нормализованный оператор граничной задачи. В приложения это обычно не так из-за более высокого, чем единица, порядка дифференцирования оператора, невыполнения требований на формальные свойства, а также из-за более общего вида граничных операторов. Однако, как это следует из результатов § 3 гл. 1, каждый достаточно регулярный оператор эквивалентен нормализованному и для исследования свойств разрешимости исходной граничной задачи можно пользоваться результатами предыдущего пункта. Более того, переход к эквивалентному нормализованному оператору во многих случаях является существенным моментом для построения операторов совместности. Но даже в случае определенных операторов (т. е. операторов с нулевым оператором совместности) переход к эквивалентному нормализованному оператору важен для правильного понимания того с какого сорта задачами мы имеем дело, как это было проиллюстрировано примером в конце введения к этому обзору. Отличительные особенности задач ясно проявляются только при переходе к эквивалентному нормализованному оператору. Однако при произвольном переходе к эквивалентному нормализованному оператору граничной задачи можно «потерять» условие коэрцитивности. Вот пример:

Пример 2.4 (*задача Дирихле для уравнения Лапласа*). Пусть $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geqslant 0\}$ и оператор граничной задачи имеет вид $(A, B)y = (\partial^2 y/\partial x_1^2 + \partial^2 y/\partial x_2^2,\ y|_{x_2=0})$. Оператор (A, B) удовлетворяет условию коэрцитивности, однако не является нормализованным. Вводя новые неизвестные $y_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1}$ и $y_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2}$, получаем следующий нормализованный оператор

$$\tilde{A}(y, y_1, y_2) = \begin{cases} \partial y/\partial x_1 - y_1, \\ \partial y/\partial x_2 - y_2, \\ \partial y_1/\partial x_1 + \partial y_2/\partial x_2, \\ \partial y_2/\partial x_1 - \partial y_1/\partial x_2. \end{cases} \quad \tilde{B}(y, y_1, y_2) = y|_{x_2=0},$$

Легко проверить, что полученный оператор не удовлетворяет условию коэрцитивности (2.4).

Сейчас приведем конструкцию «правильного» перехода к нормализованному оператору, заключающегося в подправке граничных условий, из-за чего сохраняется выполнение условия коэрцитивности. В случае примера 2.4 такая подправка заключается в дописывании еще одного граничного условия $y_1|_{x_2=0} = 0$, являющегося дифференциальным следствием выражения $y|_{x_2=0} = 0$ (граничное условие) и выражения $(\partial y/\partial x_1 - y_1)|_{x_2=0} = 0$ (касательная часть оператора $\tilde{A}$).

Опишем указанную процедуру «подправки» локально. Пусть $U \subset X$, $E_0 = U \times X$, где X и Y — евклидовы пространства. Пусть в U имеются координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ — соответствующий базис в $T_x^*U = X^*$. Пространство $J^{k-1}(E_0)|_x$ тогда представимо в виде прямого произведения

$$J^{k-1}(E_0)|_x = X \times L(X, Y) \times L^2_{\mathrm{sym}}(X, Y) \times \ldots \times L^{k-1}_{\mathrm{sym}}(X, Y) \quad (2.5)$$

(см. § 1 гл. 1).

Согласно описанному в § 4 гл. 1, исходя из произвольного достаточно регулярного оператора граничной задачи (A, B) мы можем перейти к эквивалентному ему оператору $(\tilde{A}, \tilde{B})$, где $\tilde{A}$ дифференциальный формально интегрируемый инволютивный оператор первого порядка и $\tilde{B}$ не содержит дифференцирований. Оператор $(\tilde{A}, \tilde{B})$ при этом определен на пространстве $C^\infty(J^{k-1}(E_0))$ расслоения E_0 при некотором k и расслоении E_1. Если записывать элементы из $J^{k-1}(E_0)$ (используя структуру прямого произведения (2.5)) в виде $(y, u^1, u^2, \ldots, u^{k-1})$, где $y \in Y$, $u^i \in L^i_{\mathrm{sym}}(X, Y)$, то отображение нулевого порядка $\tilde{B}$, всегда может быть записано в виде

$$(y, u^1, u^2, \ldots, u^{k-1}) \mapsto (b_0(y), b_1(y, u^1), \ldots, b_{k-1}(y, u^1, \ldots, u^{k-1})),$$

где $b_i : \Gamma \times Y \times L(X, Y) \times \ldots \times L^i_{\mathrm{sym}}(X, Y) \to G^i$ (G^i — некоторые евклидовы пространства), причем отображения $(x, u^i) \mapsto b_i(x, 0, \ldots, 0, u^i)$ из $L^i_{\mathrm{sym}}(X, Y)$ в G^i являются сюръекциями. Для построения отображения $\tilde{B}$ сначала запишем дифференциальный оператор

$$\begin{gathered}(x, y, u^1, \ldots, u^{k-1}) \mapsto (b_0(x, y), Db_0(x, y), \ldots, D^{k-1}b_0(x, y),\\ b_1(x, y, u^1), Db_1(x, y, u^1), \ldots, D^{k-2}b_1(x, y, u^1), \ldots\\ \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots\\ \ldots, b_{k-2}(x, y, \ldots, u^{k-2}), Db_{k-2}(x, y, \ldots, u^{k-2}), b_{k-1}(x, y, \ldots, u^{k-1})\end{gathered}$$

(здесь, как обычно, в наших локальных рассмотрениях, $x \in \Gamma = \partial\Omega = \{x \mid x_n = 0\}$, $D = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \ldots, \partial/\partial x_n)$. Затем в этом дифференциальном операторе везде сделаем следующие замены, превращающие его в оператор нулевого порядка: $Dy = u^1$, $Du^1 = u^2, \ldots, Du^{k-1} = u^k$. Получаемый граничный оператор нулевого порядка и является нужным оператором $\tilde{B}$. Теперь для перехода к нормализованному оператору граничной задачи $(\tilde{A}, \tilde{B})$ осталось в операторе $(A', \tilde{B})$ проделать процедуру исключения строк, «не содержащих дифференцирований».

Приведенная конструкция (ее инвариантное изложение имеется в [22]) вместе с аккуратным слежением за пространствами, в которых происходит действие эквивалентных преобразований § 3 гл. 1 позволяет из теоремы 2.5 получить следующую

теорему, в которой для краткости ограничимся только изучением ядра и коядра оператора граничной задачи.

Теорема 2.6. Пусть $(A, B) : C^\infty(E_0) \to C^\infty(E_1) \times C^\infty(G_1)$ — регулярный оператор граничной задачи, оператор A формально интегрируем, эллиптичен и выполнено следующее условие коэрцитивности: для любых $x \in \Gamma$, $\eta \in T_x^*\Gamma$ $(\eta \neq 0)$ число $\dim \operatorname{Ker} \hat{A}(x, \eta)$ не зависит от (x, η) и точен комплекс

$$0 \to \operatorname{Ker} \hat{A}(x, \eta) \cap \mathfrak{M}_+ \xrightarrow{\hat{B}(x,\eta)} G_1|_x \xrightarrow{\hat{\Phi}_1^{22}(x,\eta)} G_2|_x,$$

где Φ_1 — оператор совместности оператора (A, B). Тогда, если в комплексе

$$0 \to H^s(E_0) \xrightarrow{(A,B)} H^{s-k}(E_1) \times H^{s-\beta_1}(G_1) \xrightarrow{\Phi_1} H^{s-k'}(E_2) \times H^{s-\beta_2}(G_2)$$

все отображения ограничены, то его когомологии конечномерны и их размерности не меняются при замене s на $s' > s$.

Если в комплексе совместности для оператора (A, B) пространство G_1 нулевое, т. е. отсутствует переопределенность на границе, то предположение теоремы 2.5 о независимости $\dim \operatorname{Ker} \hat{A}(x, \eta)$ от x, $\eta \neq 0$ излишне. Такая независимость вытекает из условия коэрцитивности, имеющего в этом случае такой же вид, как и в случае квадратных эллиптических систем: Краевая задача для системы обычных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами на полуоси $\hat{A}(x, \eta)\, y = 0$. $\hat{B}(x, \eta) y = g$ имеет при всяком g единственное стремящееся к нулю на бесконечности решение.

Если оператор A в теореме 2.5 не является формально интегрируемым, то вообще говоря нельзя утверждать конечномерность когомологий комплекса совместности в соболевских пространствах. Зато справедливо такое предложение

Предложение 2.4. Пусть $(A, B) : C^\infty(E_0) \to C^\infty(E_1) \times C^\infty(G_1)$ — регулярный оператор граничной задачи (см. определение 1.22) и $P : C^\infty(E_1) \to C^\infty(\bar{E}_1)$ такой дифференциальный оператор, что оператор $A' = (A, PA)$ формально интегрируем. Пусть оператор (A', B) удовлетворяет условиям теоремы 2.5 и банахово пространство $\mathscr{H}^s$ является пополнением пространства $C^\infty(E_1)$ по норме

$$\|y\|_{\mathscr{H}^s} = \|(y, Py)\|_{H^{s-k}(E_1 \oplus \bar{E}_1)}.$$

Тогда конечномерны когомологии комплекса совместности

$$0 \to H^s(E_0) \xrightarrow{(A,B)} \mathscr{H}^s \times H^{s-B_1}(G_1) \xrightarrow{\Phi_1} H^{s-k'}(E_2) \times H^{s-\beta_2}(G_2).$$

Разные формулировки условия коэрцитивности рассмотрены В. А. Солонниковым в [27].

Эллиптические переопределенные задачи изучались также в пространствах Головкина В. А. Солонниковым в [30]. В классах

Жевре П. И. Дудников исследовал свойства гладкости решений эллиптических граничных задач в зависимости от гладкости правых частей и граничных условий (теоремы регулярности) [6].

В работах С. Г. Крейна, С. Я. Львина предлагается аппроксимационная постановка линейных переопределенных краевых задач (переопределенность может быть как в системе уравнений, так и в краевых условиях). Под аппроксимационным решением понимается вектор-функция, точно удовлетворяющая краевым условиям и при подстановке в систему уравнений дающая минимальную в некоторой норме невязку с правыми частями. Оказывается, что нахождение аппроксимационного решения переопределенной краевой задачи более высокого порядка, которая при определенных условиях является уже «хорошо поставленной». Проблема нахождения условий совместности на правые части при этом отпадает. В [11] изучены переопределенные эллиптические задачи в аппроксимационной постановке. В [12] такой подход применен к другим переопределенным задачам, в частности, параболическим и вырождающимся эллиптическим.

§ 6. Добавление. Операторы Буте де Монвеля

6.1. Обозначим через H^+ (соответственно через H_0^-) пространство комплекснозначных функций $f(\cdot)\in C^\infty(\mathbf{R}^1)$, которые можно продолжить аналитически в нижнюю (соответственно верхнюю) комплексную полуплоскость, так, что это продолжение непрерывно вплоть до границы и допускает асимптотическое разложение

$$f(\zeta)=\sum_{k\leqslant -1} a_k\zeta^k, \quad |\zeta|\to\infty$$

$\left(\text{соответственно } f(\zeta)=\sum_{k<0} a_k\zeta^k, \quad |\zeta|\to\infty\right).$

Обозначим через P пространство полиномов от переменной t и через P_d — пространство полиномов степени не выше d. Пусть $H_d^-=H_0^-\oplus P_d$ и $H=H^+\oplus H_0^-\oplus P$, $H^-=H_0^-\oplus P$.

Обозначим через $\mathcal{S}_+(\mathbf{R}^1)$ (соответственно через $\mathcal{S}_-(\mathbf{R}^1)$) множество функций на $\mathbf{R}^1$, равных нулю при $t<0$ (соответственно при $t>0$), гладких при $t>0$ (соответственно при $t<0$) вплоть до точки $t=0$ и быстро убывающих при $t\to+\infty$ (соответственно при $t\to-\infty$). Тогда функции из пространства H^+ являются образами преобразования Фурье функций из пространства $\mathcal{S}_+(\mathbf{R}^1)$. Функции из пространства H_d^- являются образами преобразования Фурье функций из пространства

$$\mathcal{S}_-(\mathbf{R}^1)\oplus\left\{\sum_{k=0}^{d-1} a_k\delta^{(k)}(t)\right\}.$$

6.2. Символы операторов Буте де Монвеля в области $\Omega'\times\mathbf{R}^1_+$, $\Omega'\subset\mathbf{R}^{n-1}$ с координатами (x', x_n), $x'=(x_1,\ldots,x_{n-1})$. Функция $a(x,\xi)\in S^m(\Omega'\times\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^n)$ называется *символом*, удовлетворяющим *условию трансмиссии* относительно гиперплоскости $\{x_n=0\}$, если выполнены включения:

$$a(x', +0, \xi', \langle\xi'\rangle\nu)\in H_\nu^+\otimes S^m(\Omega'\times\mathbf{R}^{n-1}),$$

$$\partial_\nu^k a(x', +0, \xi', \langle\xi'\rangle\nu)\in H_\nu^+\otimes S^m(\Omega'\times\mathbf{R}^{n-1}), \quad k=1,\ldots,$$

где $\langle\xi'\rangle=(1+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Функция $k(x',\xi',\nu)\in C^\infty(\Omega'\times\mathbf{R}^{n-1}\times\mathbf{R}^1)$ называется *потенциальным символом порядка m*, если

$$k(x',\xi',\langle\xi'\rangle\nu)\in H_\nu^+\otimes S^m(\Omega'\times\mathbf{R}^{n-1}).$$

Функция $t(x',\xi',\nu)\in C^\infty(\Omega'\times\mathbf{R}^{n-1}\times\mathbf{R}^1)$ называется *следовым символом* порядка m и типа d, если

$$t(x',\xi',\langle\xi'\rangle\nu)\in H_d^-\otimes S^m(\Omega'\times\mathbf{R}^{n-1}).$$

Функция $b(x',\xi',\nu,\tau)\in C^\infty(\Omega'\times\mathbf{R}^{n-1}\times\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^1)$ называется *символом Грина порядка m* и *типа d*, если

$$b(x',\xi',\langle\xi'\rangle\nu, \langle\xi'\rangle\tau)\in H_\nu^+\otimes H_{d,\tau}^-\otimes S^m(\Omega'\times\mathbf{R}^{n-1}).$$

6.3. Псевдодифференциальные операторы на $\Omega'\times\overline{\mathbf{R}}^1_+$. Обозначим через $j^+: C^\infty(\Omega'\times\overline{\mathbf{R}}^1_+)\to\mathcal{D}'(\Omega'\times\mathbf{R}^1)$ оператор продолжения функций нулем при $x_n<0$ и через $r^+:\mathcal{D}'(\Omega'\times\mathbf{R}^1)\to\mathcal{D}'(\Omega'\times\mathbf{R}^1_+)$ — оператор ограничения распределения с $\Omega'\times\mathbf{R}^1$ на открытое подмножество $\Omega'\times\mathbf{R}^1_+$.

Пусть A — псевдодифференциальный оператор (ПДО) в области $\Omega'\times\mathbf{R}^1$. Определим псевдодифференциальный оператор $A': C_0^\infty(\Omega'\times\mathbf{R}^1_+)\to\mathcal{D}'(\Omega'\times\overline{\mathbf{R}}^1_+)$ равенством $A'u=r^+Aj^+u$. Оператор A' удовлетворяет *условию трансмиссии* если ему удовлетворяет символ оператора A.

Предложение 2.5. ПДО в области $\Omega'\times\overline{\mathbf{R}}^1_+$, обладающий свойством трансмиссии, определяет отображение $C^\infty(\Omega'\times\overline{\mathbf{R}}^1_+)\to C^\infty(\Omega'\times\overline{\mathbf{R}}^1_+)$.

6.4. Потенциальные операторы. Оператор $K_0: C_0^\infty(\Omega')\to C^\infty(\Omega'\times\overline{\mathbf{R}}^1_+)$, действующий по правилу

$$v(x', x_n)\to(K_0v)(x', x_n)=\int_{\Omega'} k_0(x', x_n, y')v(y')\,dy',$$

где $k_0\in C^\infty(\Omega'\times\overline{\mathbf{R}}^1_+\times\Omega')$, $v\in C_0^\infty(\Omega')$, называется *сглаживающим потенциальным оператором*.

Пусть $k(x', \xi', \nu)$ — потенциальный символ. Оператор $K: C_0^\infty(\Omega') \to C^\infty(\Omega' \times \overline{\mathbf{R}}^1_+)$ вида

$$(Kv)(x', x_n) = (2\pi)^{-n+1} \mathcal{F}^{-1}_{\nu \to x_n} \int e^{ix'\xi'} k(x', \xi', \nu) \hat{v}(\xi')\, d\xi' + K_0 v$$

называется *потенциальным оператором.* (Здесь K_0 — сглаживающий потенциальный оператор, $\mathcal{F}^{-1}: H^+ \to \mathcal{S}_+(\mathbf{R}^1)$ — обратное преобразование Фурье на полуоси).

Обозначим через Π^+ и Π^- проекторы $H \to H^+$ и $H \to H^-$, являющиеся преобразованиями Фурье операторов r^+ и r^- сужения функции на положительную (соответственно отрицательную) полуось, т. е. $\Pi^\pm = \mathcal{F} r^\pm \mathcal{F}^{-1}$. Определим линейный оператор

$$r': \mathcal{S}_+(\mathbf{R}^1) \oplus \mathcal{S}_-(\mathbf{R}^1) \oplus \left\{ \sum_{k=0}^{m} c_k \delta^{(k)}(t) \right\} \to C^1$$

следующим образом: если $u \in \mathcal{S}_+(\mathbf{R}^1) \oplus \mathcal{S}_-(\mathbf{R}^1)$, то положим $r'u = \lim\limits_{t \to +0} u(t)$; если $u \in \left\{ \sum\limits_{k=0}^{m} c_k \delta^{(k)}(t) \right\}$, то $r'u = 0$. Определим оператор $\Pi': H \to C$ как композицию $\Pi' = r' \mathcal{F}^{-1}$. Интегральные формулы для операторов $\Pi^\pm$, Π' приведены в работах [36], [45].

6.5. Следовые операторы и операторы Грина. *Сглаживающим следовым оператором* называется оператор $r'T_0: C_0^\infty(\Omega' \times \mathbf{R}^1_+) \to C^\infty(\Omega')$, действующий по правилу

$$u \mapsto r'T_0 u(x') = \sum_{k=0}^{d-1} B_k (r' D^k_{x_n} u)(x') + \int\limits_{\Omega' \times \mathbf{R}^1_+} t_0(x', y', y_n) u(y', y_n)\, dy' dy_n,$$

где $t \in C^\infty(\Omega' \times \Omega' \times \mathbf{R}^1)$, B_k — сглаживающие операторы в Ω', $u \in C_0^\infty(\Omega' \times \overline{\mathbf{R}}^1_+)$.

Пусть $t(x', \xi', \xi_n)$ — следовый символ. *Следовым оператором* называется оператор $T: C_0^\infty(\Omega' \times \overline{\mathbf{R}}^1_+) \to C^\infty(\Omega')$ вида

$$(Tu)(x') = \int e^{ix'\xi'} \Pi'_\nu [t(x', \xi', \nu)] (\widehat{j^+ u})(\xi', \nu)]\, d\xi' + T_0 u,$$

где T_0 — сглаживающий следовый оператор.

Сглаживающим оператором Грина называется оператор $r'B_0: C_0^\infty(\Omega' \times \overline{\mathbf{R}}^1_+) \to C^\infty(\Omega' \times \overline{\mathbf{R}}^1_+)$ вида

$$(r'B_0 u)(x', x_n) = \sum_{k=0}^{d-1} K_k (r' D^k_{x_n} u)(x', x_n) + \int\limits_{\Omega' \times \mathbf{R}^1_+} b(x, y) u(y)\, dy,$$

где K_k — сглаживающие потенциальные операторы, $b(x, y) \in C^\infty(\Omega' \times \overline{\mathbf{R}}^1_+ \times \Omega' \times \overline{\mathbf{R}}^1_+)$, $u \in C_0^\infty(\Omega' \times \mathbf{R}^1_+)$.

Пусть $g(x', y', \xi', \nu, \tau)$ — символ Грина. *Оператором Грина* называется оператор $G: C_0^\infty(\Omega' \times \overline{\mathbf{R}}^1_+) \to C^\infty(\Omega' \times \overline{\mathbf{R}}^1_+)$ вида

$$(Gu)(x', x_n) = \mathcal{F}^{-1}_{\nu \to x_n} \int e^{ix'\xi'} \Pi_\tau [g(x', \xi', \nu, \tau) (\widehat{j^+ u})(\xi', \tau)]\, d\xi' + (G_0 u)(x', x_n),$$

где G_0 — сглаживающий оператор Грина.

6.6. Алгебра операторов Буте де Монвеля. Оператор $\mathcal{A}: C_0^\infty(\Omega' \times \mathbf{R}^1_+) \times C_0^\infty(\Omega') \to C_0^\infty(\Omega' \times \mathbf{R}^1_+) \times C_0^\infty(\Omega')$ вида

$$(u, v) \mapsto ((A + G) u + Kv, Tu + Qv), \tag{2.6}$$

где A — псевдодифференциальный оператор на $\Omega' \times \overline{\mathbf{R}}^1_+$, удовлетворяющий условию трансмиссии, K, T, G — потенциальный, следовый и оператор Грина, Q — ПДО на Ω', называется *оператором Буте де Монвеля.*

Эти операторы образуют *алгебру,* т. е. композиция таких операторов, сопряженный и обратный к такому оператору (если он существует) снова являются операторами вида (2.6).

Внутренним символом оператора $\mathcal{A}$ называется символ оператора A.

Граничный символ $\alpha(x', \xi')$, является отображением пространства $H \oplus C^1$ в себя и определяется равенством

$$\alpha(x', \xi')(u(\nu), v) = (\Pi^+_\nu [a(x', \xi', \nu) u(\nu)] + \Pi'_\tau [g(x', \xi', \nu, \tau) u(\tau)] + k(x', \xi', \nu) v, \Pi'_\nu [t(x', \xi', \nu) u(\nu)] + q(x', \xi') v),$$

где $a(x', \xi', \nu)$, $k(x', \xi', \nu)$, $t(x', \xi', \nu)$, $g(x', \xi', \nu, \tau)$ и $q(x', \xi')$ — символы операторов A, K, T, G и Q из (2.6).

Операторы Буте де Монвеля и их символы, действующие в сечениях векторных расслоений, определяются при помощи тривиализаций стандартным образом.

Если символы операторов A, K, T, G, Q представляются в виде асимптотической суммы однородных символов, то определены главные внутренний и граничный символы оператора $\mathcal{A}$.

Операторы вида (2.6) непрерывно действуют в пространствах Соболева с индексами, определяемыми порядками операторов.

Оператор $\mathcal{A}$ называется *эллиптическим,* если его главные внутренний и граничный символы обратимы при всех x и $\xi \neq 0$ (соответственно x' и $\xi' \neq 0$). Эллиптические операторы являются фредгольмовыми в пространствах С. Л. Соболева (т. е. их ядра и коядра — конечномерны).

Дифференциально-граничные операторы вида $\Phi(u, v) = (\Phi^{11}u, \Phi^{22}u+\Phi^{22}v)$ принадлежат алгебре операторов Буте де Монвеля, при этом операторы Φ^{11}, Φ^{21} и Φ^{22} соответствуют операторам A, T, Q в (2.6). Внутренний символ оператора Φ — символ оператора Φ^{11}, главный граничный символ — преобразование Фурье на полуоси обыкновенного ДГ-оператора с постоянными коэффициентами $\Phi(x', \eta)$, определенного при формулировке условия коэрцитивности: $\alpha(x', \eta) = \mathcal{F}\Phi(x', \eta)\mathcal{F}^{-1}$.

Глава 3

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ*

§ 1. Параболические операторы

Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^n$ с координатами $x=(x_1, \ldots, x_n)$, Y_1 и Y_2 — евклидовы пространства размерностей m_1 и m_2 соответственно. Пусть $y=(y_1, \ldots, y_{m_1})$ — координаты в пространстве Y_1. Обозначим через Ω' множество $\Omega\times\mathbf{R}^1$. Координатами на Ω' будут пары (x, t), где $x\in\Omega$, $t\in\mathbf{R}^1$. Дифференциальный оператор $A: C^\infty(\Omega', Y_2)\to C^\infty(\Omega', Y_2)$ записывается в виде

$$(Ay)_j(x, t) = \sum_{r, |\alpha|\leqslant k} \sum_{s=1}^{m_1} a_{r\alpha js}(x, t) \frac{\partial^{|\alpha|+r} y_s}{\partial x^\alpha \partial t^r}(x, t), \qquad (3.1)$$

где $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $a_{r\alpha js}$ — гладкие функции. Пусть b — натуральное число. Назовем A *оператором порядка* (l, b) (*порядка* l *с весом* b *по* t), если в выражении (3.1) функции $a_{r\alpha js}$ не равны тождественно нулю только при $|\alpha|+br\leqslant l$, причем существуют такие r, α, j, s, что $|\alpha|+br=l$ и $a_{r\alpha js}(x, t)\not\equiv 0$.

Определение 3.1. Пусть A — дифференциальный оператор порядка (l, b) вида (3.1). *Главным b-однородным символом оператора* A в точке $(x, t)\in\Omega'$, $(\xi, \tau)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^1$ назовем отображение $\sigma_A^b(x, t, \xi, \tau): Y_1\otimes\mathbf{C}^1\to Y_2\otimes\mathbf{C}^1$

$$(\sigma_A^b(x, t, \xi, \tau)\, y)_j = \sum_{br+|\alpha|=l} i^{r+|\alpha|} \sum_{s=1}^{m_1} a_{r\alpha js}(x, t)\, \tau^r \xi^\alpha y_s.$$

Обозначим через $\mathbf{C}^-$ — нижнюю комплексную полуплоскость $\{z\in\mathbf{C}^1 \mid \operatorname{Im} z<0\}$ и пусть $\bar{\mathbf{C}}^-$ — замыкание $\mathbf{C}^-$. Главный b-однородный символ оператора (3.1) определен той же формулой и для (ξ, τ) при $\tau\in\mathbf{C}^-$.

* Эта глава написана при участии М. А. Фельдмана.

Определение 3.2. Дифференциальный оператор $A: C^\infty(\Omega', Y_1)\to C^\infty(\Omega', Y_2)$ называется *параболическим*, если при всех $(x, t)\in\Omega'$, $(\xi, \tau)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{C}^-$ отображение $\sigma_A^b(x, t, \xi, \tau): Y_1\otimes C^1 - Y_2\otimes C^1$ является мономорфизмом.

§ 2. Формальная теория параболических систем

В этом параграфе приводится формальная теория дифференциальных операторов, приспособленная для параболического случая. Поясним зачем нужна такая специальная формальная теория.

В эллиптической теории главы 2 основные результаты были получены рассмотрением комплекса главных однородных символов, порожденного комплексом совместности. Для параболических операторов естественно рассматривать не однородные (как в гл. 2) символы, а определенные выше главные b-однородные символы. В формальной теории гл. 1 комплекс символов порожденный комплексом совместности для формальио интегрируемого оператора был точен на квазирегулярных ковекторах и это было ключевым моментом при исследовании эллиптических операторов. В параболическом же случае ковектор dt, вообще говоря, не является квазирегулярным, а нам придется рассматривать комплексы символов и с таким ковектором. Поэтому мы изменим соответственно определение формальной интегрируемости. Фактически это будет обозначать при извлечении дифференциальных следствий подсчет порядка с учетом различных весов для x и t. Следствием этого будет точность комплекса главных b-однородных символов порождаемого комплекса совместности для оператора, формально интегрируемого в этом новом смысле, в том числе и на ковекторе dt. Заметим, что для заданного дифференциального оператора существует много комплексов совместности, но такие комплексы совместности единственны при фиксации того или иного понятия формальной точности. Этот смысл, естественно, различен для эллиптической и параболической теорий и для реализации этого различия вводятся анизотропные расслоения струй.

Пусть Ω — гладкое многообразие, E — векторное расслоение над Ω. Обозначим через $\Omega'=\Omega\times\mathbf{R}^1$ и пусть расслоение E' является обратным образом расслоения E относительно проекции $\Omega'\to\Omega$, действующей по правилу $(x, t)\mapsto x$ (локально, если $E=\Omega\times Y$, то $E'=(\Omega\times\mathbf{R})\times Y$).

Пусть $U\subset\Omega$ — окрестность с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$, и расслоение $E|_U$ изоморфно произведению $U\times Y$. Обозначим через U' окрестность в Ω' вида $U\times\mathbf{R}^1$. В окрестности U' будут координаты вида $(x_1, \ldots, x_n, t)$. Тогда $E'|_{U'}$ изоморфно произведению $U'\times Y$. Сечения s_1 и s_2 расслоения E' назовем (l, b)-эквивалентными в точке $(x, t)\in U'$, если $(s_1-s_2)(x, t)=0$ и $(\partial^{|\alpha|+r}/\partial x_\alpha \partial t^r)(s_1-s_2)(x, t)=0$ при всех таких (α, r), что $|\alpha|+$

$+br \leqslant l$, где $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс. Очевидно, что это определение не зависит от выбора тривиализации расслоения $E'|_{U'}$ и от выбора системы координат на U'. Множество классов эквивалентности обозначим через $J^{l,b}_{x,t}(E')$ и пусть

$$J^{l,b}(E')=\bigcup_{(x,t)\in\Omega'} J^{l,b}_{x,t}(E').$$

Предложение 3.1. Множество $J^{l,b}(E')$ может быть снабжено структурой векторного расслоения над Ω'.

Укажем структуру расслоения $J^{l,b}(E')$ над Ω' в локализации E'. Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^n$, расслоение E имеет вид $E=\Omega\times Y$, где Y — евклидово пространство. Тогда $\Omega'=\Omega\times\mathbf{R}^1$ и $E'=\Omega'\times Y$. Сечения E' имеют вид $(x, t, f(x, t))$, и отождествляются с функциями $(x, t)\mapsto f(x, t)$ из Ω' в Y.

Обозначим через $D^k_x f$ производную порядка k функции f по переменным x. Производная $D^k_x\left(\frac{\partial^r}{\partial t^r} f\right)$ является отображением из Ω' в пространство $L^k_{\mathrm{sym}}(\mathbf{R}^n, Y)$. Обозначим через $L^m_{an}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^1, Y)$ прямую сумму

$$\bigoplus_{r=0}^{[m/b]} L^{m-rb}_{\mathrm{sym}}(\mathbf{R}^n, Y)$$

(здесь предполагается, что $L^0_{\mathrm{sym}}(X, Y)=Y$). Расслоение $J^{l,b}(\Omega'\times Y)$ имеет локально тривиализацию:

$$J^{l,b}(\Omega'\times Y)=\Omega'\times Y\times L^1_{an}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^1, Y)\times\ldots\times L^l_{an}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^1, Y).$$

Обозначим через $j^{l,b}$ отображение $C^\infty(E')\to C^\infty(J^{l,b}(E'))$ такое, что для сечения $s\in C^\infty(E')$ значением сечения $j^{l,b}s$ в точке $(x, t)\in\Omega'$ будет класс (l, b)-эквивалентности сечения s в точке (x, t). В локализации $j^{l,b}$ — дифференциальный оператор вида

$$(j^{l,b}f)(x, t)=\left(f(x, t), \left\{\frac{\partial^{|\alpha|+r}}{\partial x^\alpha\partial t^r} f \,\Big|\, |\alpha|+br\leqslant l\right\}\right).$$

Определим проекцию $\pi^b_{l+r,l}: J^{l+r,b}(E')\to J^{l,b}(E')$, $r>0$. Пусть s — сечение расслоения E_1, являющееся представителем класса $\alpha\in J^{l+r,b}_{x,t}(E')$. Пусть $\beta\in J^{l,b}_{x,t}(E')$ — класс (l, b)-эквивалентности сечения s в точке (x, t). Тогда, по определению, $\pi^b_{l+r}(\alpha)=\beta$. Определение корректно, так как если два сечения $(l+r, b)$-эквивалентны в точке (x, t), то эти сечения (l, b)-эквивалентны в точке (x, t). В локальных координатах, если

$$\alpha=(x, t, y, \{y_{\gamma s}\,|\,\gamma=(\gamma_1, \ldots, \gamma_n),$$
$$|\gamma|+bs\leqslant l+r\})\in J^{l+r,b}(\Omega'\times Y),$$

где $y, y_{\gamma s}\in Y$, то $\pi_{l+r,l}\alpha=(x, t, y, \{y_{\gamma s}|\ |\gamma|+bs\leqslant l\})$.

Пусть $A: C^\infty(E_0')\to C^\infty(E_1')$ — дифференциальный оператор. Назовем A *оператором порядка* (l, b), если существует такой

морфизм расслоений $p^b(A): J^{l,b}(E_0')\to E_1'$, что $A=p^b(A)j^{l,b}$. Локализацией этого определения является определение оператора порядка (l, b), приведенное в § 1.

Введем обозначения: при $m\geqslant 0$ положим

$$R_{l+m,b}=\operatorname{Ker} p^b(j^{m,b}A).$$

Проекция

$$\pi^b_{l+m_1,l+m_2}: J^{l+m_1,b}(E_0')\to J^{l+m_2,b}(E_0'),$$

где $m_1>m_2$, индуцирует проекцию $\pi^b_{l+m_1,l+m_2}: R_{l+m_1,b}\to R_{l+m_2,b}$.

Определение 3.3. Дифференциальный оператор $A: C^\infty(E_0')\to C^\infty(E_1')$ называется *b-регулярным*, если A — достаточно регулярный оператор (определение 1.7) и при всех $m\geqslant 0$ множества $R_{l+m,b}$ являются подрасслоениями расслоений $J^{l+m,b}(E_0')$.

Пример 3.1. Всякий оператор с постоянными коэффициентами является b-регулярным оператором.

Пример 3.2. Пусть $\Omega\subset\mathbf{R}^3$, $E_0'=\Omega'\times\mathbf{R}^3$, $E_1'=\Omega'\times\mathbf{R}^6$, $A: u\mapsto(\partial u/\partial t-a(x, t)\Delta u, \operatorname{rot} u)$, где $a:\Omega'\to\mathbf{R}^1$, $a(x, t)\geqslant\delta>0$. Если ранг отображения $F:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ вида $y\mapsto[\operatorname{grad}_x a(x, t)\times y]$ не зависит от точки $(x, t)\in\Omega'$, то оператор A — 2-регулярен.

Определение 3.4. b-регулярный дифференциальный оператор $A: C^\infty(E_0')\to C^\infty(E_1')$ порядка (l, b) называется *b-формально интегрируемым*, если при всех целых $m>0$ отображения $\pi^b_{l+mb,l+(mb-1)}: R_{l+mb,b}\to R_{l+(mb-1),b}$ являются сюръективными.

Пример 3.3. Оператор A из примера 3.2 не является 2-формально интегрируемым. Дописывая к соотношениям $Au=0$ дифференциальные следствия, можно получить 2-формально интегрируемый оператор. Пусть функция $a(x, t)$ не зависит от x, т. е. $a(x, t)=a(t)$. Пусть $f, g\in C^\infty(\Omega', \mathbf{R}^3)$. Тогда определим оператор $P: C^\infty(\Omega'\times\mathbf{R}^6)\to C^\infty(\Omega'\times\mathbf{R}^{15})$ формулой $P(f, g)=(f, g, \{\partial g_k/\partial x_l\,|\,k, l=1, 2, 3\})$. Оператор $\tilde{A}=PA$ (эквивалентный оператору A в категории $\mathrm{D}(\Omega')$) будет 2-формально интегрируемым.

Пример 3.4. Пусть A оператор из примера 3.2 и ранг отображения $F:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ вида $y\mapsto[\operatorname{grad}_x a(x, t)\times y]$ равен 2 при всех (x, t). Определим оператор

$$P_1: C^\infty(\Omega'\times\mathbf{R}^6)\to C^\infty(\Omega'\times\mathbf{R}^{18})$$

формулой $P_1(f, g)=(f, g, \partial g/\partial t-a\Delta g-\operatorname{rot} r, \{\partial g_k/\partial x_l\})$. Оператор $A_1=P_1A$, эквивалентный оператору A в категории $\mathrm{D}(\Omega')$, является 2-формально интегрируемым и записывается в виде

$$u\mapsto(\partial u/\partial t-a(x, t)\Delta u, [\operatorname{grad}_x a(x, t)\times\Delta u],$$
$$\operatorname{rot} u, \{\partial(\operatorname{rot} u)_k/\partial x_l\,|\,k, l=1, 2, 3\}).$$

Определение 3.5. Комплекс

$$C^\infty(E_0')\xrightarrow{A}C^\infty(E_2')\xrightarrow{A_1}C^\infty(E_2') \tag{3.2}$$

называется *b-формально точным*, если при всяком $m\geqslant 0$ точен комплекс

$$J^{l+l_1+mb,b}(E_0')\xrightarrow{p^b(J^{l_1+mb,}\ A)}J^{l_1+mb,b}(E_1')\xrightarrow{p^b(J^{mb,b}A_1)}J^{mb,b}(E_2').$$

Предложение 3.2. Если комплекс (3.2) — формально точен, то ои является комплексом совместности для оператора A (в категории $D(\Omega')$, определение 1.4).

Операторы совместности, удовлетворяющие свойству b-формальной точности, будем называть *b-операторами совместности.*

В § 1 определен главный b-однородный символ дифференциального оператора, действующего на функциях $f:\Omega\times\mathbf{R}^1\to Y$, где $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ и Y — векторное пространство. В случае оператора $A:C^\infty(E_0')\to C^\infty(E_1')$ определим главный b-однородный символ оператора A на ковекторе $(\xi,\tau)\in T^*_{x,t}\Omega'$ как отображение

$$\sigma_A^b(x,t,\xi,\tau):E_0|_{(x,t)}\otimes C^1\to E_1|_{(x,t)}\otimes C^1,$$

используя локальные тривиализации расслоений и определение 3.1.

Непосредственное (без локализации) определение символа следующее. Обозначим через $J^k_\Omega(E')$ обратный образ расслоения $J^k(E)$ над Ω относительно проекции $\Pr:\Omega'\to\Omega$, действующей x. Тогда расслоение $J^{l,b}(E')$ изоморфно прямой сумме $\underset{r=0}{\oplus} J_\Omega^{-rb}(E')$, как это следует из определений расслоений $J^{l,b}$, J^k и J^k_Ω. Обозначим через $\mathrm{pr}^*S^k(\Omega')$ обратный образ расслоения $S^k(T^*\Omega)$ относительно проекции $\mathrm{pr}:\Omega'\to\Omega$ и через $S^{l,b}(\Omega')$ прямую сумму $\overset{[l/b]}{\underset{r=0}{\oplus}}\mathrm{pr}^*S^{l-rb}(\Omega')$. Операторы вложений $\varepsilon:S^k(T^*\Omega)\otimes\otimes E\to J^k(E)$ индуцируют оператор вложения $\varepsilon_b:S^{l,b}(\Omega')\otimes E'\to\to J^{l,b}(\Omega')$. Пусть $p^b(A):J^{lb,b}(E_0')\to E_1'$ — морфизм расслоений, соответствующий дифференциальному оператору A. *Главным b-однородным символом* оператора A назовем отображение $\sigma^b(A):S^{l,b}(\Omega')\otimes E_0'\to E_1'$ вида $\sigma^b(A)=p^b(A)\circ\varepsilon_b$. Кокасательное расслоение $T^*\Omega'$ имеет структуру прямого произведения $T^*\Omega'==\mathrm{pr}^*T^*\Omega\times\mathbf{R}^1$, где $\mathrm{pr}\,T^*\Omega$ — обратный образ расслоения $T^*\Omega$ относительно проекции $\mathrm{pr}:\Omega'\to\Omega$. Определим вложение $\varphi:T^*\Omega'\to S^{l,b}(\Omega)\otimes C^1$ следующим образом. Пусть (ξ,τ) — элемент расслоения $T^*\Omega'=\mathrm{pr}^*\,T^*\Omega\times\mathbf{R}^1$. Тогда

$$\varphi(\xi,\tau)=\overset{[l/b]}{\underset{r=0}{\oplus}} i^{l-r(b-1)}\tau^r\cdot\xi\otimes\ldots\otimes\xi.$$

Главным b-однородным символом оператора A на ковекторе $(\xi,\tau)\in T^*_{(x,t)}\Omega'$ назовем отображение $\sigma_A^b(x,t,\xi,\tau)$: $E_0'|_{(x,t)}\otimes C^1\to E_1'|_{(x,t)}\otimes C^1$ вида $y\mapsto\sigma^b(A)(\varphi(\xi,\tau)\otimes y)$.

Обозначим через $p^*\Omega'$ обратный образ расслоения $T^*\Omega\times\bar{\mathbf{C}}^-$ относительно проекции $\Omega'\to\Omega$ (Здесь $\bar{\mathbf{C}}^-$ — замкнутая нижняя комплексная полуплоскость $\{z\in\mathbf{C}^1|\operatorname{Im}z\leqslant 0\}$). В случае $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ слой $p^*\Omega'|_{(x,t)}$ состоит из пар (ξ,τ), где $\xi\in\mathbf{R}^n$, $\tau\in\mathbf{C}^-$. Определение главного b-однородного символа на ковекторе $(\xi,\tau)\in T_{(x,t)}{}^*\Omega'$ без изменений переносится на случай $(\xi,\tau)\in p^*\Omega'$.

Определение 3.6. Дифференциальный оператор $A:C^\infty(E_0')\to C^\infty(E_1')$ называется *параболическим с весом b*, если при всех $(x,t)\in\Omega'$, $(\xi,\tau)\in p^*\Omega'|_{(x,t)}(\xi)\neq 0$, отображение $\sigma_A{}^b(x,t,\xi,\tau):E_0'|_{(x,t)}\otimes C^1\to E_1'|_{(x,t)}\otimes C^1$ является мономорфизмом.

Пусть A — b-формально интегрируемый дифференциальный оператор порядка (lb,b) и его главный b-однородный символ на ковекторе $(0,\tau)$ является мономорфизмом (это условие всегда выполнено для параболического оператора). Такой оператор, возможно после применения изоморфизма расслоений, можно записать в виде

$$Ay=\left(\frac{\partial^l y}{\partial t^l}+Ly,\ My\right), \tag{3.3}$$

где операторы L и M порядка (lb,b) не содержат дифференцирований по t порядка l.

Построим b-оператор совместности оператора вида (3.3). При этом будут использованы коммутационные соотношения, описываемые в следующем предложении.

Предложение 3.3. Пусть оператор A вида (3.3) является b-формально интегрируемым. Тогда существует целое число $l_1>0$ и операторы K и R порядка (l_1b,b), не содержащие дифференцирований порядка l_1 по t такие, что справедливы коммутационные соотношения

$$\frac{\partial^{l_1}}{\partial t^{l_1}}\qquad\qquad\left(\frac{\partial^l}{\partial t^l}+L\right). \tag{3.4}$$

Если в выражении (3.3) $l=1$, то операторы L и M не содержат $\partial/\partial t$ и зависят от переменной t как от параметра. В этом случае можно показать, что если оператор A удовлетворяет условиям предложения 3.3, то оператор M, рассматриваемый как дифференциальный оператор по x, достаточно регулярен. Условие $l_1=1$ в соотношениях (3.4) является аналогом условия инволютивности. Рассмотрим сначала случай операторов порядка (b,b), удовлетворяющих этому условию.

Предложение 3.4. Пусть A—b-формально интегрируемый оператор порядка (b,b) вида (3.3). Пусть оператор M в (3.3), рассматриваемый как дифференциальный оператор по переменным x, инволютивен. Предположим также, что в соотношениях (3.4), записанных для оператора A, $l_1=1$. Тогда b-оператор совместности оператора A задается формулой

$$A_1(f, g)=\left(\frac{\partial g}{\partial t}-Kg-Rf,\ M'g\right), \tag{3.5}$$

где K и R — операторы из соотношений (3.4), M' — оператор совместности оператора M порядка b, зависящий от t как от параметра.

В условиях предложения 3.4 оператор R совпадает с M, а коэффициенты оператора K находятся из коммутационных соотношений (3.4). Следовательно, формула (3.4) задает явный вид b-оператора совместности.

Построим b-оператор совместности оператора (3.3) порядка (lb, b) в случае, когда $l, l_1\neq 1$. Рассмотрим сначала пример.

Пример 3.5. Построим b-оператор совместности оператора $j^{lb,b}:C^\infty(E')\to C^\infty(J^{lb,b}(E'))$. Расслоение $J^{lb,b}(E')$ изоморфно прямой сумме расслоений $\bigoplus_{r=0}^{l} J_\Omega^{rb}(E')$, где $J_\Omega^{rb}(E')$ — обратный образ расслоения $J^{rb}(E)$ относительно проекции $\mathrm{pr}:\Omega'\to\Omega$ и $J_\Omega^0(E')$ отождествляется с E'. Пусть $D_{rb}^1:C^\infty(J^{rb}(E))\to C^\infty(C_{rb}^1)$ — оператор совместности оператора $j^{rb}:C^\infty(E)\to C^\infty(J^{rb}(E))$, описанный в примере 1.18. Обозначим через $\hat{C}_{rb}$ обратный образ расслоения C_{rb}^1 (из этого же примера) относительно проекции $\Omega'\to\Omega$. Пусть $j_\Omega^{rb}:C^\infty(E')\to C^\infty(J_\Omega^{rb}(E'))$ и $\hat{D}_{rb}:C^\infty(J_\Omega^{rb}(E'))\to C^\infty(\hat{C}_{rb})$ — операторы, порожденные операторами j^{rb} и D_{rb}^1 в обратных образах. Обозначим через $C_{lb,b}$ расслоение

$$\left(\bigoplus_{r=1}^{l} J_\Omega^l(\hat{C}_{rb})\right)\oplus\left(\bigoplus_{r=0}^{l-1} J_\Omega^{rb}(E')\right).$$

Используя изоморфизм расслоений $J^{lb,b}(E')$ и $\bigoplus_{r=0}^{l} J_\Omega^{rb}(E')$, представим элемент $f\in C^\infty(J^{lb,b}(E'))$ в виде $(f_0, \ldots, f_l)$, где $f_r\in C^\infty(J_\Omega^{rb}(E'))$, $r=0, \ldots, l$. Пусть $\pi'_{m_1,m_2}:J_\Omega^{m_1}(E')\to J_\Omega^{m_2}(E')$, где $m_1>m_2$, морфизм, индуцированный морфизмом $\pi_{m_1,m_2}:J^{m_1}(E)\to J^{m_2}(E)$. Оператор $D_{lb,b}:C^\infty(J^{lb,b}(E'))\to C^\infty(C_{lb,b})$ вида

$$f\mapsto\Big(j_\Omega^{b-1}\hat{D}_b f_{l-1}, \ldots, j_\Omega^{b-1}\hat{D}_{eb} f_0,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}f_0-\pi'_{b,0}f_1, \ldots, \frac{\partial}{\partial t}f_{l-1}-\pi'_{lb,(l-1)b}f_l\Big)$$

является b-оператором совместности оператора $j^{lb,b}$. (Это легко проверить записывая операторы $j^{lb,b}$ и $D_{lb,b}$ в локальных коорди-

натах. Локализация оператора $D_{lb,b}$ непосредственно получается из вида оператора $D_{lb,b}$ и локализации оператора D_k^1).

Для построения b-оператора совместности оператора A вида (3.3) строится оператор $\tilde{A}$ эквивалентный оператору A в категории $\mathrm{D}(\Omega')$ и удовлетворяющий условиям предложения 3.4.

Обозначим через $A^{(k,b)}:C^\infty(E_0')\to C^\infty(I^{kb,b}(E_1'))$ оператор $j^{kb,b}A$.

Предложение 3.5. Оператор $A^{(k,b)}$ эквивалентен оператору A в категории $\mathrm{D}(\Omega')$. Если A — b-формально интегрируемый оператор, то оператор $A^{(k,b)}$ при всех $k\geqslant 0$ также b-формально интегрируем. В этом случае существует такое число k_0, что при $k\geqslant k_0$ в соотношениях (3.4), записанных для оператора $A^{(k,b)}$ число l равняется единице.

Для построения оператора $\tilde{A}$ остается выбрать достаточно большое число k и понизить порядок оператора $A^{(k,b)}$ так, чтобы при этом сохранились свойства оператора $A^{(k,b)}$ приведенные в предложении 3.5. Для этого определим оператор

$$\bar{A}:C^\infty(J^{(l+k-1)b,b}(E_0'))\to C^\infty(J^{kb,b}(E_1'))$$

порядка (b, b) из соотношения $\bar{A}j^{(l+k-1)b,b}=A^{(k,b)}$, где l — такое число, что (lb, b) — порядок оператора A. Определим оператор $\tilde{A}:C^\infty(J^{(l+k-1)b,b}(E_0'))\to C^\infty(J^{kb,b}(E_1')\oplus C_{(l+k-1)b,b})$ формулой $\tilde{A}y=(\bar{A}y, D_{(l+k-1)b,b}y)$, где $C_{(l+k-1)b,b}$ и $D_{(l+k-1)b,b}$ — расслоение и оператор, построенные в примере 3.5.

Предложение 3.6. Существует такое число k, что построенный выше оператор $\tilde{A}$ удовлетворяет условиям предложения 3.4. Оператор $\tilde{A}$ эквивалентен оператору A в категории $\mathrm{D}(\Omega')$.

Из предложений 3.4 и 3.6 вытекает следующий результат.

Предложение 3.7. Пусть A — b-формально интегрируемый оператор вида (3.3). Тогда существует и строится в конечное число шагов b-оператор совместности оператора A.

Явные выражения для b-оператора совместности оператора A (формула (3.5)) и способ построения оператора $\tilde{A}$ дают явную процедуру построения b-оператора совместности оператора A.

Следующее свойство b-оператора совместности является основным для изучения параболических переопределенных операторов.

Предложение 3.8. Пусть A_0 — параболический b-формально интегрируемый оператор, A_1 — его b-оператор совместности. Тогда при всех $(x, t)\in\Omega'$, $(\xi, \tau)\in p^*\Omega'|_{(x,t)}$, $(\xi, \tau)\neq 0$ точен комплекс

$$0\to E_0'|_{(x,t)}\xrightarrow{\sigma^b_{A_0}(x,t,\xi,\tau)}E_1'|_{(x,t)}\xrightarrow{\sigma^b_{A_1}(x,t,\xi,\tau)}E_2'|_{(x,t)}, \tag{3.6}$$

в котором $\sigma^b_{A_i}(\cdot)$ — главный b-однородный символ оператора A_i.

Пример 3.6. Рассмотрим оператор A из примера 3.2 и пусть $a=a(t)$. Тогда b-оператор совместности оператора A имеет вид

$$A_1:(f,\ g)\mapsto(\partial g/\partial t-a\Delta g-\operatorname{rot} f,\ \operatorname{div} f,$$
$$\{(\partial/\partial x_k)\operatorname{div} g\,|\,k\quad ,\ 3\}).$$

Для оператора $\tilde{A}=PA$ из примера 3.3 b-оператор совместности задается соотношением

$$\tilde{A}_1:(f,\ g,\ \{\varphi_{kl}\,|\,k,\ l=1,\ 2,\ 3\})\mapsto$$
$$\mapsto(\{\partial\varphi_{kl}/\partial t-a\Delta\varphi_{kl}-(\partial/\partial x_l)(\mathrm{pr}_k \operatorname{rot} f)\},\ \partial g/\partial t-a\Delta g-\operatorname{rot} f,$$
$$D^1(g,\ \{\varphi_k \quad /\partial x_k)(D^1(g,\ \{\varphi_{kl}\})\,|\,k=1,\ 2,\ 3\},\ j^1_x \operatorname{div} g,\ \ j^1_x \operatorname{div}\varphi_{kl}),$$

где $k,\ l=1,\ 2,\ 3$; pr_k — оператор проекции вектора на его k-ю компоненту, D^1 — оператор из примера 1.18. Оператор $\tilde{\boldsymbol{A}}$ — параболический и b-формально интегри уем , поэтому точность комплекса (3.6) для операторов $\tilde{A}$ и $\tilde{A}_1$ следует из предложения 3.8 (для данных операторов точность комплекса (3.6) легко проверяется непосредственно). Заметим, что оператор совместности оператора $\tilde{A}$ построенный по схеме главы 1 действует следующим образом

$$\tilde{A}_1':(f,\ g,\ \{\varphi_{kl}\})\mapsto\left(\left\{\partial g_k/\partial t-a\sum_{l=1}^{3}\partial\varphi_{kl}/\partial x_l-\mathrm{pr}_k \operatorname{rot} f\right\},\right.$$
$$D^1(g,\ \{\varphi_{kl}\}),\ \operatorname{div} g,\ \{\operatorname{div}\varphi_l\})$$

и комплекс главных b-одно дных символов операторов $\tilde{A}$ и $\tilde{A}_1'$ не является точным.

§ 3. Дифференциально-граничные параболические операторы

Пусть Ω — гладкое многообразие с гладкой границей Γ, $\Omega'=\Omega\times\mathbf{R}^1$, $\Gamma'=\Gamma\times\mathbf{R}^1$, E_k и G_k — векторные расслоения над Ω и Γ соответственно; E_k' и G_k' — векторные расслоения над Ω' и Γ', являющиеся обратными образами расслоений E_k и G_k относительно проекций $\Omega'\to\Omega$ и $\Gamma'\to\Gamma$. Будем рассматривать ДГ-операторы, т. е. операторы категории $\mathrm{DB}(\Omega',\ \Gamma')$. Если Φ — такой оператор, то $\Phi(f,g)=(\Phi^{11}f,\ \Phi^{21}f+\Phi^{22}g)$, где $\Phi^{11}:C^\infty(E_0')\to C^\infty(E_1')$ и $\Phi^{22}:C^\infty(G_0')\to C^\infty(G_1')$ — дифференциальные операторы на Ω' и Γ' соответственно, $\Phi^{21}:C^\infty(E_0')\to C^\infty(G_0')$ — локальный граничный оператор.

Приведем условия достаточные для построения оператора совместности ДГ-оператора Φ обладающего «хорошими» формальными свойствами, учитывающими различие весов для x и t.

Пусть порядки операторов Φ^{11}, Φ^{21}, Φ^{22} (компонент оператора Φ) равны соответственно $(lb,\ b)$, $(k,\ b)$ и $(k,\ b)$.

Введем обозначения:

$$R^b_{lb+m}=\operatorname{Ker} p^b(j^{m,b}\Phi^{11})\subset J^{lb+m,b}(E_1')$$
$$\tilde{R}^b_{k+m}=\operatorname{Ker} p^b(j^{m,b}(\Phi^{21}+\Phi^{22}))\subseteq J^{k+m,b}(E_0')\big|_{\Gamma'}\oplus J^{k+m,b}(G_0').$$

Определение 3.7 ДГ-оператор Φ назовем *b-регулярным*, если: (i) он регулярен (в смысле определения 1.22); (ii) оператор Φ^{11} эквивалентен в категории $\mathrm{D}(\Omega')$ оператору вида (3.3) и b-формально интегрируем; (iii) конормаль к границе Γ' квазирегулярна для оператора Φ^{11} в каждой точке $x\in\Gamma'$; (iv) множества

$$(R^b_{lb+m_1}|_{\Gamma'}\oplus J^{k+m_2,b}(G_0'))\cap\tilde{R}^b_{k+m_2}$$

являетс одрасслоениями расслоений

$$J^{bl+m_1,b}(E_0')\ \ _{\Gamma'}\oplus J^{k+m_2,b}(G_0')$$

при всех таких натуральных m_1 и m_2, что $m_1-m_2=k-lb$.

Если Φ^{11} — b-формально интегрируемый параболический оператор, то он удовлетворяет пунктам (ii) и (iii) определения 3.7.

Пример 3.7. Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^3$ с границей Γ, Φ^{11} — оператор A из примера 3.2, $\Phi^{21}:C^\infty(\Omega',\ \mathbf{R}^3)\to C^\infty(\Omega',\ \mathbf{R}^3)$ — оператор сужения функции на границу Γ'. Оператор

$$\Phi:C^\infty(\Omega',\ \mathbf{R}^3)\to C^\infty(\Omega',\ \mathbf{R}^6)\times C^\infty(\Gamma',\ \mathbf{R}^3),$$

переводящий функцию u в функцию $(\Phi^{11}u,\ \Phi^{21}u)$ не является b-регулярным, так как не выполнено условие (ii) определения 3.7. Пусть $\tilde{\Phi}^{11}$ — оператор $\tilde{A}$, определенный в примере 3.3. Оператор

$$\tilde{\Phi}:C^\infty(\Omega',\ \mathbf{R}^3)\to C^\infty(\Omega',\ \mathbf{R}^{15})\times C^\infty \qquad ^3)$$

вида $\tilde{\Phi}u=(\tilde{\Phi}^{11}u,\ \Phi^{21}u)$ уже является b-регулярным ДГ-оператором.

Пример 3.8. Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^3$ с границей Γ, $\Phi^{11}:C^\infty(\Omega',\ \mathbf{R}^2)\to C^\infty(\Omega',\ \mathbf{R}^2)$ — оператор действующий по правилу $u\mapsto\partial u/\partial t-\Delta u$ и $\Phi^{21}:C^\infty(\Omega',\ \mathbf{R}^2)\to C^\infty(\Gamma',\ \mathbf{R}^2)$ — оператор, записываемый формулой $(\Phi^{21}u)\ (x',\ t)=a_{j1}(x',\ t)\,u_1(x',\ t)+a_{j2}(x',\ t)\,u_2(x',\ t)$, где $j=1,\ 2$, $x'\in\Gamma$, $a_{ij}(x',\ t)$ — гладкие функции на Γ'. Пусть определитель матрицы $A=(a_{ij})$ в некоторых точках $(x',\ t)\in\Gamma'$ обращается в нуль, но не равен тождественно нулю. Тогда оператор $\Phi:C^\infty(\Omega',\ \mathbf{R}^2)\to C^\infty(\Omega',\ \mathbf{R}^2)\times C^\infty(\Gamma',\ \mathbf{R}^2)$ вида $\Phi u:(\Phi^{11}u,\ \Phi^{21}u)$ не будет b-регулярным, поскольку не выполняется условие (iv) определения 3.7.

Определим *b-оператор совместности оператора граничной задачи.* Пусть $(A,B):C^\infty(E_0')\to C^\infty(E_1')\times C^\infty(G_1')$ — b-регулярный оператор граничной задачи. Тогда оператор (A,B) регулярен, поэтому существует его оператор совместности (построенный в главе 1)

$$\tilde{\Phi}:C^\infty(E_1')\times C^\infty(G_1')\to C^\infty(E_2')\times C^\infty(G_2')$$

вида $\tilde{\Phi}(f,g)=(\tilde{\Phi}^{11}f,\ \tilde{\Phi}^{21}f+\tilde{\Phi}^{22}g)$. Пусть C — порядок оператора $\tilde{\Phi}^{22}$ и r — такое натуральное число, что $d=rbc+k-lb\geqslant 0$. Из b-регулярности оператора (A,B) следует существование такого дифференциального оператора $D:C^\infty(\tilde{G}_2')\to C^\infty(G_2')$, что $\operatorname{Ker}p^b(D\tilde{\Phi}^{22})=p^b(j^{rbc,b}B)(\operatorname{Ker}p^b(j^{d,b}A))$. Обозначим через Φ оператор

$$(f,g)\mapsto(A_1f,\ D\tilde{\Phi}^{21}f+D\tilde{\Phi}^{22}g),$$

где A_1 — b-оператор совместности оператора A. Оператор Φ назовем *b-оператором совместности оператора* (A,B).

Предложение 3.8. Оператор Φ удовлетворяет следующим условиям:

(i) Φ — оператор совместности в категории $\mathrm{DB}(\Omega',\Gamma')$ оператора (A,B);

(ii) точен комплекс векторных расслоений

$$R^l_{lb+d}\xrightarrow{p^b(j^{rbc}_{r'}B)}J^{rbc,b}(G_1')\xrightarrow{p^b(\Phi^{22})}G_2',$$

где $\Phi^{22}=D\tilde{\Phi}^{22}$.

§ 4. Разрешимость начально-граничных задач для параболических операторов

4.1. Условие коэрцитивности. Пусть $(A,B):C^\infty(E_0')\to C^\infty(E_1')\times C^\infty(G_1')$ — регулярный ДГ-оператор, A — параболический оператор,

$$\Phi:C^\infty(E_1')\times C^\infty(G_1')\to C^\infty(E_2')\times C^\infty(G_2')$$

— оператор совместности оператора (A,B). Пусть имеются разложения $G_j'=\oplus_{k=1}^{r_j}G_{jk}'$ $(j=1,2)$. Тогда операторы B и Φ^{22} принимают вид $B=(B_1,B_2,\dots,B_{r_1})$, $\Phi^{22}=\{\Phi^{22}_{km}\mid m=1,\dots,r_1;\ k=1,\dots,r_2\}$, где

$$B_k:C^\infty(E_0')\to C^\infty(G_{1k}'),\ \Phi^{22}_{km}:C^\infty(G_{1m}')\to C^\infty(G_{2k}').$$

Пусть порядки операторов B_k равны (β_{1k},b) и пусть $\beta_{2k}=\max_m\{\alpha_{km}\}$, где α_{km} такие числа, что $(\alpha_{km}-\beta_{1m},b)$ — порядок оператора Φ^{22}_{km}. Обозначим мультииндекс $(\beta_{11},\dots,\beta_{1r_1})$ через β_1, а мультииндекс $(\beta_{21},\dots,\beta_{2r_2})$ — через β_2.

В окрестности $U'=U\times\mathbf{R}^1$ точки $\tilde{x}=(x',t)\in\partial\Omega'$ выберем такую систему координат $(x_1,x_2,\dots,x_n,t)$, что множество $\partial\Omega'\cap U'$ задается уравнением $x_n=0$ и множество $\Omega'\cap U'$ — неравенством $x_n\geqslant 0$. Запишем операторы A и B в этой системе координат (в соответствующих тривиализациях расслоений $E_i'|_{U'}$, $G_i'|_{U'\cap\partial\Omega'}$):

$$(Ay)(x,t)=\sum_{|\alpha|+rb<lb}a_{\alpha r}(x,t)\left(\frac{\partial^{|\alpha|+r}}{\partial x^\alpha\partial t^r}y\right)(x,t),$$

$$(B_ky)(x',t)=\sum_{|\alpha|+rb\leqslant\beta_{1k}}b_{k\alpha r}(x',t)\left(\frac{\partial^{|\alpha|+r}}{\partial x^\alpha\partial t^r}y\right)(x',t),\qquad(3.7)$$

где $k=1,\dots,r_1$; $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ — мультииндекс, $a_{\alpha r}(\cdot)$ и $\beta_{k\alpha r}(\cdot)$ — матрицы. Зафиксируем точку $(x^0,t^0)\in U'\cap\partial\Omega'$ и вектор $(\eta_1,\dots,\eta_{n-1},\tau)\in\mathbf{R}^{n-1}\times\mathbf{C}^-$. Заменим в выражениях (3.7) $\partial/\partial x_j$ на $i\eta_j$ $(j=1,\dots,n-1)$ и $\partial/\partial t$ на $i\tau$, зафиксируем в точке (x^0,t^0) коэффициенты $a_{\alpha r}$, $\beta_{k\alpha r}$. Отбрасывая члены порядка ниже (lb,b) в A и ниже (β_{1k},b) в B_k, получим следующий оператор граничной задачи с постоянными коэффициентами на полуоси:

$$(A(x^0,t^0,\eta,\tau)y)(\nu)=\sum_{|\alpha|+rb=lb}i^{|\alpha'|+r}a_{\alpha r}(x^0,t^0)\tau^r\eta^{\alpha'}\left(\frac{d^{\alpha_n}}{d\nu^{\alpha_n}}y\right)(\nu),$$

$$B_k(x^0,t^0,\eta,\tau)y=\sum_{|\alpha|+rb=\beta_{1k}}b_{k\alpha r}(x^0,t^0)\tau^r\eta^{\alpha'}\left(\frac{d^{\alpha_n}}{d\nu^{\alpha_n}}y\right)(0),\qquad(3.8)$$

где $\alpha'=(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})$.

Применим описанную выше процедуру к операторам Φ^{22}_{km}, рассматриваемым как операторы порядков $(\alpha_{km}-\beta_{1m},b)$. Получим линейные отображения слоев:

$$\Phi^{22}_{km}(x^0,t^0,\eta,\tau):G_1'|_{(x^0,t^0)}\to G_2'|_{(x^0,t^0)}.$$

Рассматривая изменение выражений (3.8) при заменах координат, получаем, что (η,τ) является элементом слоя $p^*\partial\Omega'|_{(x^0,t^0)}$ расслоения $p^*\partial\Omega'$ (обратного образа расслоения $T^*\Gamma\times\bar{\mathbf{C}}^-$ относительно проекции $\partial\Omega'\to\Gamma$ вида $(x',t)\mapsto x'$).

Определение 3.8. Оператор (A,B) удовлетворяет *условию коэрцитивности* с мультииндексами (β_1,β_2), если:

(i) число $\dim\operatorname{Ker}A(\tilde{x},\tilde{\eta})$ не зависит от точки $\tilde{x}=(x^0,t^0)\in\partial\Omega'$, $\tilde{\eta}=(\eta',\tau)\in p^*\partial\Omega'|_{\tilde{x}}$, $(\tilde{\eta}\neq 0)$;

(ii) при всех $\tilde{x}\in\partial\Omega'$, $\tilde{\eta}\in p^*\partial\Omega'|_{\tilde{x}}$ $(\tilde{\eta}\neq 0)$ точна последовательность конечномерных пространств

$$0\to \operatorname{Ker} A(\tilde{x},\tilde{\eta})\cap\mathfrak{M}^+\xrightarrow{(A(\tilde{x},\tilde{\eta}),B(\tilde{x},\tilde{\eta}))} G_1'|_{\tilde{x}}\oplus C^1\xrightarrow{\Phi^{22}(\tilde{x},\tilde{\eta})} G_2'|_{\tilde{x}}\otimes C^1,$$

где $\mathfrak{M}^+=\{f\in C^\infty(\overline{\mathbf{R}}^1_+)\mid f(x)\to 0 \text{ при } x\to+\infty\}$.

4.2. Пространства $H^{s,b}$. Пусть $H^{s,b}$ $(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^1)$ — пополнение пространства $C_0^\infty(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^1)$ по норме

$$\|u\|^2_{s,t}=\int(1+|\xi|^{2b}+|\tau|^2)^{s/b}|\hat{u}(\xi,\tau)|^2d\xi d\tau,$$

где $\hat{u}(\xi,\tau)$ — преобразование Фурье функции $u(x,t)$.

Обозначим через $\overset{+}{H}{}^{s,b}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^1)$ множество, состоящее из функций, принадлежащих $H^{s,b}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^1)$ и равных нулю при $t<0$. Очевидно, что $\overset{+}{H}{}^{s,b}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^1)$ — замкнутое подпространство в $\overset{+}{H}{}^{s,b}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^1)$.

Пусть $\mathbf{R}^n_+=\{(x_1,\ldots,x_n)\mid x_n>0\}$. Обозначим через $\overset{+}{H}{}^{s,b}(\overline{\mathbf{R}}^n_+\times\mathbf{R}^1)$ множество, состоящее из всех таких функций f на $\overline{\mathbf{R}}^n_+\times\mathbf{R}^1$, что существует продолжение f на $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^1$, принадлежащее пространству $\overset{+}{H}{}^{s,b}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^1)$. Норма в пространстве $\overset{+}{H}{}^{s,b}(\overline{\mathbf{R}}^n_+\times\mathbf{R}^1)$ определяется формулой

$$\|f\|^+_{s,b}=\inf_{\varphi\in\overset{+}{H}{}^{s,b}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^1),\ \varphi|_{\mathbf{R}^n_+\times\mathbf{R}^1}=f}\|f_{s,b}\|,$$

где в правой части — норма в $\overset{+}{H}{}^{s,b}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^1)$.

Пусть $\gamma>0$. Обозначим через $\overset{+}{H}{}^{s,b,\gamma}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^1)$ (соответственно через $\overset{+}{H}{}^{s,b,\gamma}(\overline{\mathbf{R}}^n_+\times\mathbf{R}^1)$) множество, состоящее из всех таких функций $f(x,t)$, что функции $e^{-\gamma t}f(x,t)$ принадлежат пространству $\overset{+}{H}{}^{s,b}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^1)$ (соответственно пространству $\overset{+}{H}{}^{s,b}(\overline{\mathbf{R}}^n_+\times\mathbf{R}^1)$).

Норма в пространствах $\overset{+}{H}{}^{s,b,\gamma}$ определяется формулой:

$$\|f\|_{s,b,\gamma}=\|f_\gamma\|_{s,b}, \text{ где } f_\gamma(x,t)=e^{-\gamma t}f(x,t).$$

Используя покрытия многообразий Ω' и $\partial\Omega'$ координатными окрестностями U' вида $U\times\mathbf{R}^1$ и разбиение единицы стандартным образом определяются пространства $\overset{+}{H}{}^{s,b}(E')$, $\overset{+}{H}{}^{s,b}(G')$, $\overset{+}{H}{}^{s,b,\gamma}(E')$, $\overset{+}{H}{}^{s,b,\gamma}(G')$ сечений векторных расслоений E' над Ω' и G' над $\partial\Omega'$.

Пусть $T>0$. Обозначим: $\Omega_T'=\Omega\times(-\infty,T)$, $\partial\Omega_T'=\partial\Omega'\times(-\infty,T)$, пусть E_{iT}' и G_{iT}' — ограничения расслоений E_i' и G_i' на Ω_T' и $\partial\Omega_T'$. Пусть $\overset{+}{H}{}^{s,b}(E_{iT}')$ — множество всех сечений расслоения E_{iT}', каждое из которых можно продолжить до сечения расслоения E_i', принадлежащего $\overset{+}{H}{}^{s,b}(E_i')$. Аналогично определяется пространство $\overset{+}{H}{}^{s,b}(G_{iT}')$. Норма элемента $f\in\overset{+}{H}{}^{s,b}(E_{iT}')$ определяется формулой

$$\|f\|^+_{s,b}=\operatorname{Inf}_{\varphi\in\overset{+}{H}{}^{s,b}(E_i'),\ \varphi|_{\Omega_T'}=f}\|\varphi\|^+_{s,b}.$$

Норма в пространстве $\overset{+}{H}{}^{s,b}(G_{iT}')$ определяется аналогично.

Для разложения $G'=\bigoplus_{j=1}^k G_j'$ и мультииндексов $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_k)$ обозначим через $H^\beta(G')$ пространство $\bigoplus_{j=1}^k H^{\beta_j}(G_j')$.

4.3. Теоремы разрешимости начально-граничных задач для параболических операторов. В этом случае многообразие Ω (с краем) предполагается компактным. Рассмотрим случай конечного временного интервала $[0,T]$. Параболичность оператора и коэрцитивность граничной задачи на интервале $\{0,T]$ по t означает, что в определениях 2.1, 3.5 рассматриваются только такие точки (x,t), в которых $t\in[0,T]$.

Пусть в комплексе

$$0\to\overset{+}{H}{}^{s,b}(E_{0T}')\xrightarrow{(A,B)}\overset{+}{H}{}^{s-lb,b}(E_{1T}')\times$$
$$\times\overset{+}{H}{}^{s-\beta_1-\frac{1}{2},b}(G_{1T}')\xrightarrow{\Phi}\overset{+}{H}{}^{s-(l+l_1)b,b}(E_{2T}')\times\overset{+}{H}{}^{s-\beta_2-\frac{1}{2},b}(G_{2T}') \qquad (3.9)$$

(где Φ — b-оператор совместности оператора (A,B), (lb,b) и (l_1b,b) — порядки операторов A и Φ^{11}) все отображения ограничены.

Теорема 3.1. Пусть (A,B) — b-регулярный оператор граничной задачи, для $t\in[0,T+\varepsilon]$ оператор A-параболический с весом b по t и оператор (A,B) удовлетворяет условию коэрцитивности с мультииндексами (β_1,β_2) (в смысле определения 3.8). Тогда комплекс (3.9) точен, и выполнена оценка

$$\|u\|^+_{s,b}\leqslant C\left(\|Au\|^+_{s-lb,b}+\|bu\|^+_{s-\beta_1-\frac{1}{2},b}\right), \qquad (3.10)$$

где C не зависит от $u\in\overset{+}{H}{}^{s,b}(E_{0T}')$.

Рассмотрим случай бесконечного по t интервала. Предположим, что коэффициенты оператора (A,B) не зависят от t при $t>T$, где T — некоторое положительное число. Тогда этим свойством обладают и коэффициенты оператора Φ (b-оператора совместности оператора (A, B)). Пусть в комплексе

$$0\to \overset{+}{H}{}^{s,b,\gamma}(E_0')\xrightarrow{(A,B)}\overset{+}{H}{}^{s-lb,b,\gamma}(E_1')\times \overset{+}{H}{}^{s-\beta_1-\frac{1}{2},b,\gamma}(G_1')\xrightarrow{\Phi}$$

$$\xrightarrow{\Phi}\overset{+}{H}{}^{s-(l+l_1)b,b,\gamma}(E_2')\times \overset{+}{H}{}^{s-\beta_2-\frac{1}{2},b,\gamma}(G_2') \qquad (3.11)$$

все отображения ограничены.

Теорема 3.2. Пусть (A, B) — b-регулярный оператор граничной задачи, коэффициенты оператора (A, B) не зависят от t при $t>T$, оператор A параболический с весом b по t, оператор (A, B) удовлетворяет условию коэрцитивности с мультииндексами (β_1, β_2). Тогда найдется такое число $\gamma_0\geqslant 0$, что для любого $\gamma\geqslant\gamma_0$ комплекс (3.11) точен, и выполнена оценка

$$\|u\|^{+}_{s,b,\gamma}\leqslant C\left(\|Au\|^{+}_{s-lb,b,\gamma}+\|Bu\|_{s-\beta_1-\frac{1}{2},b,\gamma}\right),$$

где C не зависит от $u\in\overset{+}{H}{}^{s,b,\gamma}(E_0')$ и от $\gamma\geqslant\gamma_0$.

Доказательство теорем 3.1 и 3.2 получается применением теории параболических операторов Буте де Монвеля, аналогичной изложенной в § 6 гл. 2 теории эллиптических операторов Буте де Монвеля.

Пусть параболический дифференциальный оператор A не является b-формально интегрируемым и существует дифференциальный оператор P, такой, что оператор PA является b-формально интегрируемым (такие операторы рассмотрены в примерах 3.2, 3.3, 3.4). Пусть оператор граничной задачи (PA, B) удовлетворяет условиям теоремы 3.1 и Φ — b-оператор совместности оператора (PA, B). Тогда для исходного оператора (A, B) выполнено следующее утверждение: точен комплекс

$$0\to \overset{+}{H}{}^{s,b}(E_{0T}')\xrightarrow{(A,B)}\mathscr{H}^s\times$$

$$\times H^{s-\beta_1-\frac{1}{2},b}(G_{1T}')\xrightarrow{\widetilde{\Phi}_1}\overset{+}{H}{}^{s-(l+l_1)b,b}(E_{2T}')\times \overset{+}{H}{}^{s-\beta_2-\frac{1}{2},b}(G_{2T}'),$$

где $\mathscr{H}^s=\{f\in H^{s-lb,b}(\widetilde{E}_1')\,|\,Pf\in H^{s-lb,b}(E_1')\}$, оператор $\widetilde{\Phi}_1'$ определяется формулой $\widetilde{\Phi}_1(f, g)=\Phi_1(Pf, g)$.

Пример 3.8. Пусть A — оператор из примера 3.2 и $a(x, t)=a(t)$. Пусть $\Phi_0: C^\infty(\Omega', \mathbf{R}^3)\to C^\infty(\Omega', \mathbf{R}^6)\times C^\infty(\partial\Omega', \mathbf{R}^1)$ — оператор вида $u\mapsto(Au, u_n)$, где u_n — нормальная компонента на Γ' векторного поля u.

Пусть $\Phi_1: C^\infty(\Omega', \mathbf{R}^6)\times C^\infty(\partial\Omega', \mathbf{R}^1)\to C^\infty(\Omega', \mathbf{R}^4)$ оператор вида $(f, g, h)\mapsto(\partial g/\partial t-a\Delta g-\operatorname{rot} f, \operatorname{div} g)$, где $f, g\in C^\infty(\Omega', \mathbf{R}^3)$, $h\in C^\infty(\partial\Omega', \mathbf{R}^1)$. Обозначим через $\mathscr{H}^s$ пространство $\{(f, g)\,|\,f, g, \partial g/\partial x_k\in\overset{+}{H}{}^{s-2,2}(\Omega', \mathbf{R}^3), k=1, 2, 3\}$. Тогда точен комплекс

$$0\to \overset{+}{H}{}^{s,2}(\Omega', \mathbf{R}^3)\xrightarrow{\Phi_0}\mathscr{H}^s\times \overset{+}{H}{}^{s-\frac{1}{2},2}(\partial\Omega', \mathbf{R}^1)\xrightarrow{\Phi_1}\overset{+}{H}{}^{s-4,2}(\Omega', \mathbf{R}^4).$$

Заметим, в заключение, что априорные оценки (3.10) или (3.11) могут быть получены и в более общей ситуации, причем для их получения нет необходимости развивать сложную формальную теорию. Конечномерность ядра и замкнутость образа параболической граничной задачи была впервые получена А. Г. Хачатряном в [33]. Теоремы 3.1 и 3.2 устанавливают намного более трудный результат — точность комплексов совместности.

Глава 4

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 1. Строго гиперболические операторы

Пусть Ω — гладкое многообразие, $\Omega'=\mathbf{R}^1\times\Omega$, $E_i\,(i=0, 1)$ — гладкие вещественные конечномерные векторные расслоения над Ω, E_i' $(i=0, 1)$ — обратный образ расслоения E_i при естественной проекции $\Omega'\to\Omega$ (см. локализацию в § 1 гл. 3) и $A_0: C^\infty(E_0')\to C^\infty(E_1')$ — нормализованный оператор (в смысле определения 1.17). Обозначая точки многообразия Ω' через (t, x) $(t\in\mathbf{R}^1, x\in\Omega)$ и предполагая ковектор dt нехарактеристическим для A_0 оператор A_0 можно записать в виде

$$A_0y=\left(\frac{\partial y}{\partial t}+L_0\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)y, M_0\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)y\right), \qquad (4.1)$$

где дифференциальные операторы L_0 и M_0 не содержат дифференцирований по t. Пусть $\sigma L_0(t, x, \xi): Y_0\to Y_1$ и $\sigma M_0(t, x, \xi): Y_0\to\overline{Y}_1$ (Y_0 и $Y_1=Y_0\oplus\overline{Y}_1$ — слои расслоений E_0' и E_1' соответственно) — символы операторов L_0 и M_0 в точке (t, x) на ковекторе $(0, \xi)\in T^*_{(t,x)}\Omega'=\mathbf{R}^1\times T^*_x\Omega$. Поскольку оператор A_0 нормализован, то из коммутационных соотношений главы 1 следует, что оператор $\sigma L_0(t, x, \xi)$ переводит пространство $F_{t,x,\xi}=\operatorname{Ker}\sigma M_0(t, x, \xi)$ в себя. Обозначим через $\overline{\sigma L_0}(t, x, \xi)$ сужение оператора $\sigma L_0(t, x, \xi)$ на подпространство $F_{t,x,\xi}$.

Определение 4.1. Нормализованный оператор A_0 называется *строго гиперболическим*, если для всех точек $(t, x)\in\Omega'$ и ковекторов $\xi\in T_x{}^*\Omega$ $(\xi\neq 0)$ выполнены следующие условия:

(i) Размерность d пространства $F_{t,x,\xi}$ не зависит от точки $(t, x)\in\Omega'$ и ковектора ξ.

(ii) Пространство $F_{t,x,\xi}$ имеет базис, состоящий из собственных векторов оператора $\overline{\sigma L_0}(t, x, \xi)$.

(iii). Все собственные значения оператора $\overline{\sigma L_0}(t, x, \xi)$ вещественны и их кратности не зависят от точки $(t, x)\in\Omega'$ и ковектора ξ.

Пример 4.1. Пусть $A_0: \overset{\circ}{C}^\infty(E_0') \to C^\infty(E_1')$ — нормализованный оператор, имеющий вид (4.1). Предположим, что оператор M_0 — эллиптический по пространственным переменным. Тогда оператор A_0 строго гиперболический.

Пример 4.2. Оператор, определяющий левую часть системы уравнений Максвелла

$$\begin{cases} -\varepsilon_0\varepsilon\partial E/\partial t + \operatorname{rot} H = j, \\ \mu_0\mu\partial H/\partial t + \operatorname{rot} E = 0, \\ \operatorname{div} H = 0, \\ \varepsilon_0\varepsilon \operatorname{div} E = \rho, \end{cases}$$

является строго гиперболическим оператором.

Для квадратных операторов (т. е. таких операторов, для которых $\dim Y_0 = \dim Y_1$) принято следующее определение строгой гиперболичности [1].

Определение 4.2. Оператор $A: C^\infty(E_0') \to C^\infty(E_1')$ порядка k называется *строго гиперболическим*, если выполнены следующие два условия

(i) Ковектор dt нехарактеристичен для оператора A в каждой точке $(t, x) \in \Omega'$.

(ii) Пусть $\sigma A(t, x, \lambda, \xi): Y_0 \to Y_1$ — символ оператора A в точке $(t, x) \in \Omega'$ на ковекторе $(\lambda, \xi) \in T^*_{(t,x)}\Omega' = \mathbf{R}^1 \times T^*_x\Omega$. Тогда в каждой точке $(t, x) \in \Omega'$ для каждого ненулевого ковектора $\xi \in T^*_x\Omega$ все корни уравнения относительно λ

$$\det \sigma A(t, x, \lambda, \xi) = 0$$

вещественны и различны.

Связь между определениями 4.1 и 4.2 описывается следующим предложением.

Предложение 4.1. Пусть $A: C^\infty(E_0') \to C^\infty(E_1')$ — квадратный оператор порядка k, строго гиперболический в смысле определения 4.2. Тогда существует нормализованный оператор A_0 эквивалентный оператору A (в категории $D(\Omega')$) и строго гиперболический в смысле определения 4.1.

§ 2. Разрешимость начально-граничных задач для строго гиперболических операторов

2.1. Равномерное условие Лопатинского. Предположим, теперь, что многообразие Ω является гладким с гладкой границей Γ. Через $E|_{\partial\Omega'}$ будем обозначать сужение расслоения E на многообразие $\partial\Omega' = \mathbf{R}^1 \times \Gamma$ ($\partial\Omega'$ — граница многообразия Ω'). Пусть, кроме расслоений E_0' и E_1' над Ω' имеется вещественное конечномерное расслоение G' над $\partial\Omega'$, являющееся обратным образом некоторого расслоения G над Γ при проекции $\partial\Omega' = \mathbf{R}^1 \times \Gamma \to \Gamma$ и, кроме оператора $A_0: C^\infty(E_0') \to C^\infty(E_1')$, — граничный оператор нулевого порядка $B: C^\infty(E_0') \to C^\infty(G')$ так, что оператор B совпадает с композицией отображения сужения на $\partial\Omega'$ сечений расслоения E_0' и морфизма расслоений $\beta: E_0'|_{\partial\Omega'} \to G'$.

Пусть $A_0(\lambda, \pi, t, x, d/dx_n)$ — обыкновенный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, полученный из оператора A_0 (в некоторой системе координат в окрестности точки $(t, x) \in \partial\Omega'$, в которой dx_n — конормаль и dx_i ($i < n$) касательные к Γ ковекторы) отбрасыванием членов нулевого порядка, фиксацией коэффициентов в точке (t, x) и заменой $\partial/\partial x_j$ на $i\eta_j$ при $j = 1, 2, \ldots, n-1$ и $\partial/\partial t$ на $\lambda = \gamma + i\tau$. Пусть $S_+ = \{(\lambda, \eta) \in C^1 \times \mathbf{R}^{n-1} \mid |\lambda|^2 + |\eta|^2 = 1, \operatorname{Re}\lambda > 0\}$ и $\overline{S_+}$ — замыкание в $C^1 \times \mathbf{R}^{n-1}$ множества S_+.

Определение 4.3. Будем говорить, что оператор $(A_0, B): C^\infty(E_0') \to C^\infty(E_1') \times C^\infty(G')$ удовлетворяет *равномерному условию Лопатинского*, если выполнены следующие условия:

(i) Размерность пространства $\operatorname{Ker} A_0(\lambda, \eta, t, x, d/dx_n)$ не зависит от точек $(t, x) \in \Omega'$ и $(\lambda, \eta) \in \overline{S_+}$.

(ii) Краевая задача на полуоси

$$\begin{cases} A_0(\lambda, \eta, t, x, d/dx_n)\, y(x_n) = 0, \\ (By)|_{x_n=0} = g, \end{cases}$$

однозначно разрешима в пространстве $\mathfrak{M}_+$ функций, стремящихся к нулю при $x_n \to +\infty$, для всех точек $(t, x) \in \partial\Omega'$, $(\lambda, \eta) \in S_+$ и векторов $g \in C^r$.

(iii) Существует такая константа $c > 0$, не зависящая от точек $(t, x) \in \partial\Omega'$ и $(\lambda, \eta) \in S_+$, что для всех функций $y(x_n) \in \operatorname{Ker} A_0(\lambda, \eta, t, x, d/dx_n) \cap \mathfrak{M}_+$ справедливо неравенство

$$|y(0)| \leqslant C\, |(By)|_{x_n=0}|.$$

2.2. Пространства $H^{q,s}_\gamma(E')$ и $H^s_\gamma(G')$. Пусть $\mathbf{R}^{n+1}$ и Y — евклидовы пространства. Точки пространства $\mathbf{R}^{n+1}$ будем записывать в виде $(t, x) = (t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $t \in \mathbf{R}^1$, $x \in \mathbf{R}^n$. «Двойственные» переменные относительно преобразования Лапласа — Фурье будем записывать в виде $(-i\lambda, \xi) = (-i\lambda, \eta, \xi_n)$, где $\lambda \in C^1$, $\xi \in \mathbf{R}^n$, $\eta \in \mathbf{R}^{n-1}$. Через $\hat{y}(\lambda, \eta, \xi_n)$, $\hat{y}(\lambda, \eta, x_n)$ будем обозначать соответственно преобразование Фурье и частичное преобразование Фурье по переменной $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ функции $y(t, x) \exp(-\gamma t)$.

Обозначим через $H^s_\gamma(\mathbf{R}^{n+1}, Y)$ ($s, \gamma \in \mathbf{R}^1$) пополнение пространства $C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+1}, Y)$ гладких финитных функций, определенных на

$\mathbf{R}^{n+1}$ и принимающих значения в пространстве Y, по норме

$$\|y\|^2_{s,\gamma}=\int\limits_{\mathbf{R}^{n+1}}(\rho^2+|\xi|^2)^s|\hat{y}(\lambda,\xi)|^2 d\xi d\tau,$$

где $\rho^2=|\lambda|^2=\tau^2+\gamma^2$.

Пусть $\mathbf{R}^{n+1}_+$ — полупространство $\{(t,x)\in\mathbf{R}^{n+1}\,|\,x_n>0\}$ и $\bar{\mathbf{R}}^{n+1}_+$ — замыкание в $\mathbf{R}^{n+1}$ полупространства $\mathbf{R}^{n+1}_+$. Для $q=0,1,2,\ldots$; γ, $s\in\mathbf{R}^1$ обозначим через $H^{q,s}_\gamma(\mathbf{R}^{n+1},Y)$ пополнение пространства $C^\infty(\bar{\mathbf{R}}^{n+1}_+,Y)$ гладких финитных функций, определенных на $\bar{\mathbf{R}}^{n+1}_+$ и со значениями в пространстве Y по норме

$$\|y\|^2_{q,s,\gamma}=\sum_{k=0}^{q}\int\limits_{x_n\geqslant 0}\left\|\frac{\partial^{q-k}y}{\partial x_n^{q-k}}\right\|^2_{s+k,\gamma}dx_n.$$

Выберем теперь на каждом из расслоений E'_i и G' некоторую евклидову структуру. Тогда с помощью разбиения единицы стандартным образом определяются пространства $H^{q,s}_\gamma(E'_i)$ и $H^s_\gamma(G')$ [1].

2.3. Разрешимость начально-граничных задач для строго гиперболических операторов. Пусть

$$C^\infty(E'_0)\xrightarrow{A_0}C^\infty(E'_1)\xrightarrow{A_1}C^\infty(E'_2)\xrightarrow{A_2}\ldots \tag{4.2}$$

комплекс совместности для нормализованного оператора A_0 построенный в главе I. Положим

$$\mathscr{H}^0_{q,s,\gamma}=H^{q,s}_\gamma(E'_0)\times H^{s+q}_\gamma(E'_0|_{\partial\Omega'}),\quad \mathscr{H}^1_{q,s,\gamma}=H^{q,s}_\gamma(E'_1)\times H^{q+s}_\gamma(G')$$

и

$$\mathscr{H}^j_{q,s,\gamma}=H^{q,s}_\gamma(E'_j),\quad (j=1,2,\ldots,m+1).$$

Определим семейство неограниченных операторов $U^j_{q,s,\gamma}$: $\mathscr{H}^j_{q,s,\gamma}\to\mathscr{H}^{j+1}_{q,s,\gamma}$ $(j=0,1,\ldots,m)$ следующим образом:

(i) Область определения $D(U^0_{q,s,\gamma})$ оператора $U^0_{q,s,\gamma}$ состоит из таких пар функций

$$(u,v)\in H^{q+1,s}_\gamma(E'_0)\times H^{q+s}_\gamma(E'_0|_{\partial\Omega'})\subset\mathscr{H}^0_{q,s,\gamma},$$

что $u|_{\partial\Omega'}=V$. На множестве $D(U^0_{q,s,\gamma})$ оператор $U^0_{q,s,\gamma}$ определен правилом $U^0_{q,s,\gamma}(u,v)=(A_0u,\beta v)$.

(ii) Область определения $D(U^1_{q,s,\gamma})$ оператора $U^1_{q,s,\gamma}$ состоит из пар функций $(f,g)\in H^{q+1,s}_\gamma(E'_1)\times H^{q+s}_\gamma(G')\subset\mathscr{H}^1_{q,s,\gamma}$ причем на $D(U^1_{q,s,\gamma})$ оператор $U^1_{q,s,\gamma}$ определен правилом $U^1_{q,s,\gamma}(f,g)=A_1f$.

(iii) При $j>1$ область определения $D(U^j_{q,s,\gamma})$ оператора $U^j_{q,s,\gamma}$ совпадает с пространством $H^{q+1,s}_\gamma(E'_j)$ и на $D(U^j_{q,s,\gamma})$ оператор $U^j_{q,s,\gamma}$ определен правилом $U^j_{q,s,\gamma}f=A_jf$, где

$A_j:C^\infty(E'_j)\to C^\infty(E'_{j+1})$ — операторы из комплекса совместности (4.2) для оператора A_0.

Предложение 4.2 (i) При всех $j\geqslant 0$ оператор $U^j_{q,s,\gamma}$ допускает замыкание $\bar{U}^j_{q,s,\gamma}$.

(ii) Образ оператора $\bar{U}^{j-1}_{q,s,\gamma}$ принадлежит области определения $D(\bar{U}^j_{q,s,\gamma})$ оператора $\bar{U}^j_{q,s,\gamma}$.

(iii) Для $y\in D(\bar{U}^{k-1}_{q,s,\gamma})$ справедливо равенство

$$\bar{U}^k_{q,s,\gamma}\circ\bar{U}^{k-1}_{q,s,\gamma}y=0.$$

Таким образом, корректно определен следующий комплекс замкнутых линейных неограниченных операторов

$$0\to\mathscr{H}^0_{q,s,\gamma}\xrightarrow{\bar{U}^0_{q,s,\gamma}}\mathscr{H}^1_{q,s,\gamma}\xrightarrow{\bar{U}^1_{q,s,\gamma}}\mathscr{H}^2_{q,s,\gamma}\xrightarrow{\bar{U}^2_{q,s,\gamma}}\ldots \tag{4.3}$$

Теорема 4.1. Пусть $A_0:C^\infty(E'_0)\to C^\infty(E'_1)$ — нормализованный строго гиперболический оператор, $B:C^\infty(E'_0)\to C^\infty(G')$ — граничный оператор нулевого порядка. Предположим, также, что выполнены следующие условия

(i). Коэффициенты операторов A_0 и B не зависят от переменной t.

(ii) Конормаль к границе $\partial\Omega'$ многообразия Ω' является нехарактеристическим ковектором для оператора A_0.

(iii) Оператор $(A_0,B):C^\infty(E'_0)\to C^\infty(E'_1)\times C^\infty(G')$ удовлетворяет равномерному условию Лопатинского.

Тогда для произвольных чисел $q=0,1,2,\ldots$ и $s\in\mathbf{R}^1$ существует такое число $\gamma_0(q,s)>0$, что при всех $\gamma>\gamma_0(q,s)$ комплекс (4.3) точен.

Теорема 4.1 остается справедливой, если вместо пространств $\mathscr{H}^k_{q,s,\gamma}$ рассматривать подпространства $\overset{0}{\mathscr{H}}{}^k_{q,s,\gamma}$, состоящие из функций, равных нулю при $t>0$. Такие пространства отвечают задаче Коши с нулевыми начальными условиями.

Условие 1 теоремы 4.1 независимости от t коэффициентов операторов A_0 и B может быть ослаблено с сохранением утверждения теоремы 4.1, если предполагать независимость от t коэффициентов операторов A_0 и B при больших t.

Добавление. Связанные системы*)

5.1. Наряду с изучением физических процессов, приводящих при математическом описании к типовым системам уравнений с частными производными (таким, как эллиптические, парабо-

*) Написана при участии М. А. Фельдмана.

лические, гиперболические), давно исследуются и явления, в которых два (или более) типовых процесса, взаимодействуя между собой, ведут к математическим моделям, не укладывающимся в принятую классификацию. Например, взаимодействие теплопередачи и упругих колебаний приводит к системе термоупругости, в которой достаточно сложное поведение искомых функций не позволяет применить технику типовых систем. Фиксация внимания на одном из участвующих процессов приводит к рассмотрению переопределенных систем. Действительно, пусть $A: C^\infty(\Omega, Y)\to C^\infty(\Omega, W)$ — линейный дифференциальный оператор и имеется разложение $Y=Y_1+Y_2$. Тогда $Ay=A_1y_1+A_2y_2$ (где $A_i: C^\infty(\Omega, Y_i)\to C^\infty(\Omega, W)$, $i=1, 2$). В случае, если A — квадратный оператор (т. е. если $\dim Y=\dim W$), операторы A_1 и A_2 являются очевидно переопределенными. Исследование задачи $A_1y_1=f_1$ может оказаться полезным для изучения исходной задачи $Ay=f$. Это относится и к граничным задачам. Рассмотрим примеры.

Пример 5.1. В области $\Omega'=\Omega\times\mathbf{R}^1$, где $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ рассмотрим следующую систему уравнений

$$A(u, v)=\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\alpha\Delta v-\beta\operatorname{grad}\operatorname{div} v+\gamma\operatorname{grad} u=f_1,\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial t}-a\Delta u+b\dfrac{\partial}{\partial t}\operatorname{div} v=f_2,\end{cases}\tag{5.1}$$

где v, $f_1\in C^\infty(\Omega', \mathbf{R}^3)$, u, $f_2\in C^\infty(\Omega', \mathbf{R}^1)$, α, β, γ, a, b — положительные константы. К такой системе приводится система уравнений термоупругости. Система уравнений (5.1) имеет вид $A_1u+A_2v=f$, где $f=(f_1, f_2)$, операторы $A_1: C^\infty(\Omega', \mathbf{R}^1)\to C^\infty(\Omega', \mathbf{R}^4)$ и $A_2: C^\infty(\Omega', \mathbf{R}^3)\to C^\infty(\Omega', \mathbf{R}^4)$ имеют вид

$$A_1: u\mapsto\left(\gamma\operatorname{grad} u,\ \frac{\partial u}{\partial t}-a\Delta u\right),$$

$$A_2: v\mapsto\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\alpha\Delta v-\beta\operatorname{grad}\operatorname{div} v,\ b\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div} v\right).$$

Операторы A_1 и A_2 — переопределенные, A_1 — параболический переопределенный оператор.

Переопределенные системы могут появиться и в более сложной ситуации.

Пример 5.2. Система уравнений магнетогидродинамики может быть записана в следующей форме. Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^3$, S — граница Ω, $\Omega_T=\Omega\times[0, T]$; H, v, f, j — функции $\Omega_T\to\mathbf{R}^3$, p — функция $\Omega_T\to\mathbf{R}^1$, a — функция $S\times[0, T]\to\mathbf{R}^3$. Рассматривается начально-граничная задача

$$\begin{gathered}\frac{\partial v}{\partial t}-\nu\Delta v-\sum_{k=1}^{3} v_k\frac{\partial v}{\partial x_k}-\frac{\mu}{\rho}\sum_{k=1}^{3} H_k\frac{\partial H}{\partial x_k}+\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}\left(p+\frac{\mu H^2}{2}\right)=f,\\ \frac{\partial H}{\partial t}-\frac{1}{\sigma\mu}\Delta H-\operatorname{rot}[v\times H]=\frac{1}{\sigma\mu}\operatorname{rot} j,\\ \operatorname{div} v=0,\quad \operatorname{div} H=0,\\ v|_S=a,\quad H_n|_S=0,\quad \operatorname{rot}_\tau H|_S=j\tau|_S,\\ v|_{t=0}=v_0(x),\quad H|_{t=0}=H_0(x)\end{gathered}\tag{5.2}$$

относительно неизвестных функций H, v, p. При исследовании задачи (5.2) в работе [26] рассматривается начально-краевая задача для линейной переопределенной параболической системы

$$\begin{gathered}\sigma\mu\frac{\partial H}{\partial t}-\Delta H=\operatorname{rot} j,\quad \operatorname{div} H=0,\\ H_n|_S=0,\quad \operatorname{rot}_\tau H|_S=j\tau|_S,\\ H|_{t=0}=H_0(x).\end{gathered}\tag{5.3}$$

Показана разрешимость задачи (5.3) в пространствах W_p^{kl}, $p\geqslant 3$, и приведены оценки нормы решения, подобные оценкам (3.9) (но в нормах пространств W_p^{kl}, $p\geqslant 3$). Эти результаты использованы в работе [26] при доказательстве разрешимости задачи (5.2).

В ситуации, подобной примеру 5.1, использование теории переопределенных систем может быть продолжено. Рассмотрим сначала абстрактную алгебраическую ситуацию.

5.2. Пусть $\mathfrak{A}=\{\operatorname{Ob}\mathfrak{A}, \operatorname{Mor}\mathfrak{A}\}$ — абелева подкатегория категории линейных пространств и линейных отображений, H_i $(i=1, 2, 3)$ — объекты и $A_i: H_i\to H_3$ $(i=1, 2)$ — морфизмы из $\mathfrak{R}$. Пусть

$$Ay=A_1y_1+A_2y_2=f\tag{5.4}$$

— линейное уравнение, где $y=(y_1, y_2)\in H_1\oplus H_2$, $f\in H_3$. Для описания условий однозначной разрешимости (5.4) рассмотрим также уравнение

$$A_1y_1=\varphi.\tag{5.5}$$

Морфизм A_1, вообще говоря, является переопределенным в категории $\mathfrak{A}$, поэтому для разрешимости (5.5) необходимо выполнение условий совместности на $\varphi: A_1'\varphi=0$, где A_1' — некоторый морфизм из $\mathfrak{A}$. Следовательно, для разрешимости (5.4) необходимо, чтобы имело решение уравнение

$$A_1'A_2y_2=A_1'f.\tag{5.6}$$

Обозначим через $\tilde{A}_2$ морфизм $A_1'A_2$, который, вообще говоря, также переопределен, так что существование y_2, удовлетворяющего (5.6), требует выполнения условий совместности на $A_2'f$: $\tilde{A}_2'A_2'f=0$.

Предложение 5.1. Пусть в категории $\mathfrak{A}$ точны комплексы

$$0\to H_1\xrightarrow{A_1}H_2\xrightarrow{A_1'}H_4, \tag{5.7}$$

$$0\to H_2\xrightarrow{\tilde{A}_2}H_4\xrightarrow{\tilde{A}_2'}H_5, \tag{5.8}$$

где $\tilde{A}_2=A_1'A_2$, H_i — некоторые объекты из $\mathfrak{A}$. Тогда условие $\tilde{A}_2'A_1'f=0$ является необходимым и достаточным для существования и единственности решения $y=(y_1, y_2)$ уравнения (5.4). В частности, если морфизм A является определенным (в $\mathfrak{A}$), то уравнение (5.4) однозначно разрешимо с любым $f\in H_3$.

5.3. Перейдем к дифференциальным уравнениям, и для иллюстрации проблем, возникающих при применении схемы пункта 5.2, рассмотрим случай многообразий без края. В этом случае категория $\mathfrak{A}$ из пункта 5.2 превращается в категорию $\mathrm{D}(\Omega_+')$ (из примера 1.1, где $\Omega_+'=\Omega\times\mathbf{R}_+^1$, Ω — компактное многообразие без края, $\overset{0}{C}{}^\infty(E')=\{f\in C^\infty(E')\,|\,(\partial^k f/\partial t^k)\,|_{t=0}=0,\ k=0,\ 1,\dots\}$.

Если A — параболический или гиперболический оператор, то комплекс совместности

$$0\to\overset{0}{C}{}^\infty(E_0')\xrightarrow{A}\overset{0}{C}{}^\infty(E_1')\xrightarrow{A_1}\overset{0}{C}{}^\infty(E_2') \tag{5.9}$$

точен в категории $\mathrm{D}(\Omega')$ — это следует из результатов глав 3 и 4 как частный случай для многообразий без края.

Введем еще один класс дифференциальных операторов, для которых точен комплекс совместности. Заметим, сначала, что если C — параболический оператор, то существует левый обратный к C оператор вида $L+R$, где L — псевдодифференциальный оператор, R — оператор с малой нормой (в пространствах $\overset{+}{H}{}^{s,b}$ определенных в главе 3). Главный b — однородный символ оператора L равен левому обратному главного b-однородного символа оператора C, и в локальных координатах имеет вид $p^{-1}(\xi,\tau)L(\xi,\tau)$, где $p(\xi,\tau)$ — полином, который не обращается в нуль при $\xi\in\mathbf{R}^n$, $\tau\in\mathbf{C}^-$, $L(\xi,\tau)$ — матрица, состоящая из полиномов (такой оператор построен в работе [33]). Обозначим этот символ через $\sigma_c^{-1}(x, t, \xi, \tau)$. Символ $\sigma_c^{-1}(x, t, \xi, \tau)$ принадлежит классу символов N_ρ^{-m}, $m=\operatorname{ord}C$, $\rho=b^{-1}$, определяемых следующим образом [47]:

Определение 5.1. Символ $a(x, t, \xi, \tau)$ принадлежит *классу* N_ρ^m, если при $|\xi|<|\tau|$

$$|D_{x,t}^\beta D_\xi^\gamma D_\tau^r a(x, t, \xi, \tau)|\leqslant C_{r,\beta,\gamma}\tau^{m-r}(|\tau|^\rho+|\xi|)^{-|\gamma|}$$

и $a\in S_{1,0}^m$ на любом множестве $\Pi\subset T^*\Omega'$, не пересекающем множество $\{(x, t, \xi, \tau)\in T^*\Omega'\setminus 0\,|\,\xi=0\}$.

Определение 5.2. Дифференциальный оператор A принадлежит *классу* $\mathfrak{B}$, если $A=MC+K$, где M, C, K — дифференциальные операторы, и выполнены следующие условия:

(i) C — параболический оператор (с оператором совместности C');

(ii) оператор $u\mapsto(Mu,\ C'u)$ — строго гиперболический;

(iii) K — слагаемое «меньшего порядка» в том смысле, что символ $K(x, t, \xi, \tau)\sigma_c^{-1}(x, t, \xi, \tau)$ принадлежит классу N_ρ^r, где $r\leqslant\operatorname{ord}B-1$, а $K(\cdot)$ — полный символ оператора K.

Предложение 5.2. Если A — регулярный дифференциальный оператор, принадлежащий классу $\mathfrak{B}$, то комплекс совместности (5.9) точен.

Рассмотрим систему диференциальных уравнений вида (5.4).

Определение 5.3. Систему дифференциальных уравнений (5.4) назовем *связанной параболически-гиперболической системой* (*ПГ-системой*), если A_1 — параболический оператор, а $\tilde{A}_2=A_1'A_2$ — оператор из класса $\mathfrak{B}$ (A_1' — оператор совместности оператора A_1).

Из точности комплекса (5.9) для параболических, гиперболических операторов и операторов класса $\mathfrak{B}$ и предложения 5.1 следует.

Предложение 5.3. Пусть (5.4) — связанная ПГ-система, являющаяся определенной. Тогда она однозначно разрешима в $\overset{0}{C}{}^\infty$-сечениях при любом $\overset{0}{C}{}^\infty$-сечении f.

5.4. Пусть теперь Ω — компактное гладкое многообразие с гладким краем Γ. Обозначим через Ω_+' многообразие $\Omega\times\mathbf{R}_+^1$, через Γ_+' многообразие $\Gamma\times\mathbf{R}_+^1$. Через $\overset{0}{C}{}^\infty(E')$, $\overset{0}{C}{}^\infty(G')$ будем обозначать подпространства пространств $C^\infty(E')$, $C^\infty(G')$, состоящие из сечений, равных нулю над $\Omega\times\mathbf{R}_-^1$, $\Gamma\times\mathbf{R}_-^1$ ($\mathbf{R}_-^1=(-\infty,\ 0]$).

Пусть $(A, B):\overset{0}{C}{}^\infty(E_0')\to\overset{0}{C}{}^\infty(E_1')\times\overset{0}{C}{}^\infty(G_1')$ — оператор граничной задачи, и

$$0\to\overset{0}{C}{}^\infty(E_0')\xrightarrow{(A,B)}\overset{0}{C}{}^\infty(E_1')\times\overset{0}{C}{}^\infty(G_1')\xrightarrow{\Phi_1}\overset{0}{C}{}^\infty(E_2')\times\overset{0}{C}{}^\infty(G_2') \tag{5.10}$$

— его комплекс совместности. Если (A, B) удовлетворяет условиям теорем глав 3 или 4, то комплекс (5.10) — точен. В параболическом случае левым обратным к оператору (A, B) является оператор вида $L+R$, где L — оператор Буте де Монвеля, R — оператор с малой нормой в пространствах $\overset{+}{H}{}^{s,b}$, определенных в гл. 3, § 5.

Главные b-однородные внутренний и граничный символы оператора L строятся явно по главным b-однородным символам оператора (A, B) [32]. В случае, когда краевой оператор сам является следовым оператором алгебры Буте де Монвеля, процедура построения символа L остается без изменения. Эта процедура также может быть проведена при ослабленном условии коэрцитивности: требуется точность комплекса из определения 3.8 лишь в члене $\operatorname{Ker} A(\tilde{x}, \eta) \cap \mathfrak{M}^+$. Граничную задачу (A, B) с параболическим оператором A, удовлетворяющую этому ослабленному условию коэрцитивности будем называть *параболической граничной задачей.*

Нам понадобятся следующие обозначения: для оператора параболической краевой задачи (C, E) пусть $L: (f, g) \mapsto L_1 f + L_2 g$ его левый обратный оператор (f — сечение расслоения над Ω', g — над Γ'), и C' — b-оператор совместности оператора C.

Определение 5.4. Оператор граничной задачи (A, E) принадлежит *классу* $\mathfrak{B}$, если: (i) оператор $A = MC + K$ принадлежит классу $\mathfrak{B}$ в смысле определения 5.3;

(ii) (C, E) — параболический оператор краевой задачи;

(iii) гиперболический оператор $N: u \quad (Mu, C'u)$ — является определенным и граничная задача для него $u \mapsto EL_2 u|_{T\times \mathbf{R}}$ однозначно разрешима в пространстве гладких сечений.

Заметим, что условие (iii) выполняется, например, если указанная в нем краевая задача удовлетворяет условию равномерной коэрцитивности. При этом проверка этого условия требует знания только главного символа оператора L_1, который может быть выписан в явном виде.

Пусть имеется граничная задача

$$Ay = A_1 y_1 + A_2 y_2 = f, \quad By = B_1 y_1 + B_2 y_2 = g, \tag{5.11}$$

где A_i — дифференциальные, B_i — граничные операторы. Обозначим через Φ_1 b-оператор совместности оператора (A_1, B_1), оператор Φ_1 имеет вид $(f, g) \mapsto (A_1' f, \Phi_1^{21} f + \Phi_1^{22} g)$.

Определение 5.5 Задачу (5.11) назовем *параболически-гиперболической граничной задачей (ПГ-задачей)*, если A_1 — параболический оператор, оператор граничной задачи (A_1, B_1) b-регулярен и удовлетворяет условию коэрцитивности (определение 3.8), и оператор граничной задачи $y_2 \mapsto (A_1' A_2 y_2, [(\Phi_1^{21} A_2 y_2)|_{\Gamma'} + \Phi_1^{22}(B_2 y_2)|_{\Gamma'}])$ принадлежит классу $\mathfrak{B}$.

Теорема 5.1. Пусть (A, B) — регулярный оператор граничной задачи, являющийся определенным в категории DB (Ω'_+, Γ'_+),

и пусть (5.11) является ПГ-задачей. Тогда задача (5.11) имеет единственное решение при любых f и g из пространств $\overset{\circ}{C}{}^\infty$ — сечений соответствующих расслоений над Ω' и Γ'.

Следовательно, приведенная схема позволяет свести исследование разрешимости ПГ-задачи к исследованию разрешимости краевой задачи для гиперболического оператора.

Помимо доказательств теорем разрешимости приведенную схему расщепления исходной нетиповой задачи на переопределенные «типовые» применяется для описания волновых фронтов решений ПГ-задач, [25], в частности в случае краевых задач для уравнения термоупругости в случае некасательных бихарактеристик.

Пример 5.3. Пусть Ω — компактная область в $\mathbf{R}^3$ с гладкой границей Γ, A — оператор системы (5.1) из примера 5.1. Рассмотрим краевую задачу для оператора A:

$$\begin{gathered} A(u, v) = f, \\ u|_{\Gamma'} = g_1, \quad v|_{\Gamma'} = g_2, \end{gathered} \tag{5.12}$$

где $f = (f_1, f_2)$, $g_1 \in \overset{0}{C}{}^\infty(\Gamma', \mathbf{R}^1)$, $g_2 \in \overset{0}{C}{}^\infty(\Gamma', \mathbf{R}^3)$. Пусть A_1 — параболический оператор, определенный в примере 5.1. Для него 2-оператором совместности является оператор $\hat{A}_1' : (\varphi_1, \varphi_2) \mapsto (j^1_\Omega \operatorname{rot} \varphi_1, \partial\varphi_1/\partial t - a\Delta\varphi_1 - \gamma \operatorname{grad} \varphi_2)$, где $\varphi_1 \in \overset{0}{C}{}^\infty(\Omega'_+, \mathbf{R}^3)$, $\varphi_2 \in \overset{0}{C}{}^\infty(\Omega'_+, \mathbf{R}^1)$. Покажем, что из условий

$$\begin{gathered} \partial\varphi_1/\partial t - a\Delta\varphi_1 - \gamma \operatorname{grad} \varphi_2 = 0, \\ (\operatorname{rot} \varphi_1)_\tau|_{\Gamma'} = 0, \end{gathered} \tag{5.13}$$

ледует, что $\operatorname{rot} \varphi_1 = 0$ в Ω'. Обозначим $\operatorname{rot} \varphi_1$ через F, тогда F принадлежит пространству $\overset{0}{C}{}^\infty(\Omega'_+, \mathbf{R}^3)$. Из определения F следуют равенства

$$\begin{gathered} \partial F/\partial t - a\Delta F = 0, \\ \operatorname{div} F = 0. \end{gathered} \tag{5.14}$$

Это переопределенная параболическая система. Добавляя к ней граничное условие $F_\tau|_{\Gamma'} = 0$, получаем коэрцитивную граничную задачу. Единственным решением этой задачи будет $F \equiv 0$, т. е. $\operatorname{rot} \varphi_1 \equiv 0$. Поэтому уравнение $\hat{A}_1'(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ в Ω' эквивалентно граничной задаче $\hat{\Phi}(\varphi_1, \varphi_2) = 0$, где

$$\hat{\Phi}(\varphi_1, \varphi_2) = (\partial\varphi_1/\partial t - a\Delta\varphi_1 - \gamma \operatorname{grad} \varphi_2, (\operatorname{rot} \varphi_2)_\tau|_\Gamma).$$

Следовательно оператором совместности оператора A_1 при применении схемы пунктов 5.3 и 5.4 можно считать дифференциально-граничный оператор $\hat{\Phi}$. Непосредственно проверяется, что задача (5.14) является ПГ-задачей (вместо пункта (iii) определения 5.4 можно взять его ослабленную формулировку: из $\psi u \in C^\infty$ следует $u \in C^\infty$). Операторами M, C, K из определения 5.2 являются следующие операторы: $M: v \mapsto (\partial^2 v/\partial t^2 - \alpha\Delta v -, -\beta \operatorname{grad} \operatorname{div} v)$, $C: y \mapsto (\partial y/\partial t - a\Delta y)$, где $y \in \overset{0}{C}{}^\infty(\Omega', \mathbf{R}^3)$, и $K: v \mapsto (\partial/\partial t) \operatorname{grad} \operatorname{div} v$. Оператор совместности оператора (A_1, B_1) — имеет вид

$$(\varphi_1, \varphi_2, g_1, g_2) \mapsto \Big(\partial\varphi_1/\partial t - a\Delta\varphi_1 - \gamma \operatorname{grad}\varphi_2,\ g_2,\ \operatorname{grad}_\Gamma g_1 - \varphi_1\tau,$$

$$\partial g_1/\partial t - a\Delta_{\Gamma'} g_1 - \frac{a}{\gamma}\frac{\partial\varphi_{1n}}{\partial n}\Big|_{\Gamma'} - \varphi_2|_{\Gamma'}\Big).$$

КОММЕНТАРИИ К ЛИТЕРАТУРЕ

Общие системы квазилинейных уравнений с частными производными изучались Рикье и Картаном [37]. Картан сформулировал свойство инволютивности на языке пфаффовых систем, которое, как показал Кураниши [41], эквивалентно принадлежащему Кураниши определению 1.13. Картан предположил также, что операция продолжения систем в достаточно широком классе систем приводит к инволютивным системам. Это было впоследствии показано в частном случае П. К. Рашевским [16], а в общем — Кураниши [41]. В шестидесятые годы работы Спенсера, Квиллена, Гольдшмидта придали формальной теории элегантный вид. Спенсеру принадлежит определение инволютивности, приведенное в п. 3.4 гл. 1. Эквивалентность определений 1.11 и 1.13 была показана Серром. Приведенное в обзоре определение 1.14 принадлежит П. И. Дудникову и эквивалентно определениям Э. Картана, Кураниши и Спенсера (хотя доказательство этого не тривиально).

Важность коммутационных соотношений была понята Гийемином [39]. Обобщения этих соотношений для квазирегулярных ковекторов и использование их для явной процедуры построения операторов совместности и для доказательства теорем существования, изложенное в пп. 3.6—3.8 главы 1 взяты из работ С. Н. Самборского [19—21].

В случае дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами процедуры построения операторов совместности имеются в работах И. С. Гудович, С. Г. Крейна [4] и В. А. Солонникова [28], [29].

Построение комплексов Спенсера почерпнуто из обзора Спенсера [46], где оно приведено более подробно, см. также [44].

Разные доказательства локальной точности комплекса совместности в вещественно-аналитическом случае (результат Спенсера) имеются в работах [38], [44], [46]. Приведенное в обзоре — является тривиальным следствием коммутационных соотношений [19], [20].

Отношение эквивалентности определение 1.5 главы 1, в той форме, в которой оно постоянно применяется в обзоре к дифференциальным и дифференциально-граничным операторам, взято из работ С. Н. Самборского [21], [22], хотя коцепная эквивалентность в разных ситуациях постоянно использовалась в работах круга Спенсера (о концепной эквивалентности — см. [43]).

Результаты, приведенные в § 4 главы 1, ДГ-операторы взяты из работы С. Н. Самборского [20], основные теоремы главы 2 эллиптическая теория — теоремы 2.5 и 2.6 — из работы С. Н. Самборского [22] (частный случай без переопределенности на границе имеется в работе П. И. Дудникова и С. Н. Самборского [7]). Результаты главы 3 (параболическая теория) взяты из работ С. Н. Самборского [21, 23] и М. А. Фельдмана [25] (§ 6

главы 2 — дополнение — приводит сведения, почерпнутые в работе Буте де Монвеля [36], см. также монографию [45] и обзор [2]). Результаты главы 4 (гиперболическая теория) принадлежит П. И. Дудникову [5], содержание дополнения почерпнуто из работы С. Н. Самборского и М. А. Фельдмана [25].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агранович М. С.* Граничные задачи для систем с параметром // Мат. сб.— 1971.— *84*, № 1.— С. 27—65
2. *Бреннер А. В.* Псевдодифференциальные эллиптические краевые задачи // Итоги науки и техи. ВИНИТИ. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления (В печати)
3. *Виноградов А. М., Красильщик И. С., Лычагин В. В.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений— М.: Наука, 1987.— 335 с.
4. *Гудович И. С., Крейн С. Г.* Краевые задачи для переопределенных систем уравнений в частных производных // Тр. семинара по диф. уравнениям, сек. 1.— Вильнюс, Ин-т физ. и мат. АН ЛитССР.— 1974.— 145 с.
5. *Дудников П. И.* Разрешимость начально-краевых задач для переопределенных систем уравнений с частными производными гиперболического типа // Киев. политехн. ин-т.— Киев, 1985.— 40 с.— Библиогр. 5 назв.— Рус.— Деп. в УкрНИИНТИ 25.12.85, № 2679-Ук85
6. — О регулярности решений краевых задач для переопределенных систем уравнений эллиптического типа // Киев. политехн. ин-т.— Киев, 1985.— 20 с.— Библиогр.: 4 назв.— Рус.— Деп. в УкрНИИНТИ 25.12.85, № 2678-Ук85
7. —, *Самборский С. Н.* О нётеровых краевых задачах для переопределенных систем уравнений с частными производными // Препр. / АН УССР. Инст. матем.— 1981.— № 81. 47.— С. 1—24
8. —, — Граничные задачи для систем с rot в главной части // Укр. мат. ж.— 1986.— *38,* № 6.— С. 782—785
9. *Егоров Ю. В., Шубин М. А.* Линейные дифференциальные уравнения с частными производными // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления / ВИНИТИ, 1987.— *30*.— С. 5—262
10. *Крейн С. Г., Шихватов А. М.* Линейные дифференциальные уравнения на группе Ли // Функц. анализ и его прил.— 1970.— *4*.— С. 52—61
11. —, *Львин С. Я.* Переопределенные и недоопределенные эллиптические задачи // Функциональный анализ и математическая физика (Новосибирск).— 1985.— С. 106—116
12. —, — Переопределенные краевые задачи // Дифференц. уравнения.— 1987.— *23,* № 6.— С. 1081—1084
13. *Паламодов В. П.* Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М.: Наука, 1967.— 488 с.
14. — Системы линейных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. Мат. анализ.— 1969.— С. 5—37
15. — Дифференциальные операторы в классе сходящихся степенных рядов и подготовительная лемма Вейерштрасса // Функц. анализ и его прил.— 1968.— *2,* № 3.— С. 58—69
16. *Рашевский П. К.* Геометрическая теория уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения— 1980.— *16*.— С. 516—524
17. *Самборский С. Н.* О слабой разрешимости систем нелинейных уравнений в банаховых пространствах // Укр. мат. ж.— 1977.— *25*.— С. 685—689
18. — О задаче Коши для инволютивных систем уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения.— 1980.— *16*.— С. 516—524
19. — О формальных свойствах краевых задач для переопределенных систем уравнений с частными производными // Докл. АН УССР.— 1981.— № 12.— С. 18—22

20. — Формальные свойства краевых задач для переопределенных систем уравнений с частными производными // Зап. научн. семинаров ЛОМИ.— 1981.— *110.*— С. 203—216
21. — О переопределенных эллиптических с параметром и параболических граничных задачах // Докл. АН СССР.— 1983.— *271,* № 3.— С. 544—549
22. — Коэрцитивные граничные задачи для переопределенных систем. Эллиптические задачи // Укр. мат. ж.— 1984.— *36,* № 3.— С. 340—346
23. — Коэрцитивные граничные задачи для переопределенных систем. Параболические задачи // Укр. мат. ж.— 1984.— *36,* № 4.— С. 473—479
24. —, *Фельдман М. А.* Об условии коэрцитивности для переопределенных граничных задач // Укр. мат. ж.— 1985.— *37,* № 5.— С. 616—622.
25. —, — Связанные системы уравнений с частными производными (начально-краевые задачи и распространение особенностей) // Изв. вузов. Мат. — 1987.— № 10.— С. 14—23
26. *Сахаев Ш.* Оценка решений одной краевой задачи магнитогидродинамики // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1975.— *127.*— С. 58—75
27. *Солонников В. А.* Об условии дополнительности для переопределенных систем // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.— 1969.— *14.*— С. 237—255
28. — Переопределенные эллиптические краевые задачи // Зап. научн. семинаров ЛОМИ.— 1971.— *21.*— С. 112—158
29. — Об одном классе нётеровых переопределенных эллиптических краевых задач // Зап. научн. семинаров ЛОМИ.— 1974.— *47.*— С. 138—154
30. — Исследование переопределенных эллиптических краевых задач в дробных пространствах К. К. Головкина // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1975. — *127.*— С. 93—114
31. *Сысоев Ю. С.* Линейные неоднородные уравнения на группе Ли // Дифференц. уравнения.— 1974.— *10.*— С. 364—366
32. *Фельдман М. А.* Коэрцитивные краевые задачи для параболических переопределенных систем с переменными коэффициентами // Укр. мат. ж.— 1987.— *39,* № 4.— С. 493—500
33. *Хачатрян А. Г.* Переопределенные параболические краевые задачи // Зап. научн. семинаров ЛОМИ.— 1977.— *69.*— С. 240—272
34. *Atiyah M., Bott R.* A Lefschets fixed point formula for elliptic complexes I. // Ann Math.— 1967.— *86.*— С. 374—407
35. *Bourbaki N.* Varietes differentialles et analitiques / Paris: Hermann, 1971. (Пер. на рус. яз.: *Бурбаки Н.* Дифференцируемые и аналитические многообразия.— М.: Мир, 1975.— 220 с.)
36. *Boutet de Monvel L.* Boundary problems for pseudodifferential operators // Acta Math.— 1971.— *126.*— С. 11—51
37. *Cartan E.* Les systemes differentiels exterieurs et leurs applications geometriques / Paris, 1945.— 214 с. (Пер. на рус. яз.: *Картан Э.* Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения.— М.: Изд-во МГУ.— 1962.— 237 с.)
38. *Goldshmidt H.* Existence theorem for analytic linear differential equations // Ann. Math.— 1967.— *86.*— С. 246—270
39. *Guillemin V.* Some algebraic results concerning the characteristics of overdetermined partial differential equations // Amer. J. Math.— 1968.— *90.*— С. 270—284
40. *Hörmander L.* Linear partial differential operators — Berlin-Kottingen—Heidelberg: Springer-Verlag, 1963.— 287 s. (Пер. на рус. яз.: *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными.— М.: Мир, 1965.— 380 с.)
41. *Kuranishi M.* Lestures on involutive systems of partial differential equations / Publ. Soc. Math. Saô Paulo.— 1967
42. *Lewy H.* An example of a smooth linear differential equation without solution // Ann. Math.— 1957.— *66.*— С. 155—158
43. *Maclane S.* Homology—Berlin etc.: Springer, 1963. (Пер. на рус. яз.: *Маклейн С.* Гомология— М.: Мир, 1966.— 543 с.)
44. *Pommaret J. F.* Systems of partial differential equations and Lie pseudo-groups / New York-London-Paris: Gordon and Breach Science Publishers.— 398 с. (Пер. на рус. яз.: *Поммаре Ж.* Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли.— М.: Мир, 1983.— 398 с.)
45. *Rempel S., Shultce B.-W.* Index theory of elliptic boundary problems.— Berlin: Akad. Verl., 1982.— (Пер. на рус. яз.: *Ремпель С., Шульце Б.-В.* Теория индекса эллиптических краевых задач— М.: Мир.— 1986.— 575 с.)
46. *Spencer D. C.* Overdetermined systems of linar partial differential equations // Bull. Amer. Math. Soc.— 1965.— *75.*— С. 1—114 (Пер. на рус. яз.: *Спенсер Д.* Переопределенные системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных // Математика.— 1970.— *14,* № 2.— С. 66—90;— 1970.— 14, № 3.— С. 99—126)
47. *Taylor M. E.* Pseudodifferential operators.— Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1983. (Пер. на рус. яз.: *Тейлор М.* Псевдодифференциальные операторы.— М.: Мир.— 1985.— 469 с.)
48. *Wells R. O.* Differential analysis on complex manifolds.— Prentice—Hall. 1973 (Пер. на рус. яз.: Уэллс Р. Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях.— М.: Мир, 1976.— 283 с.)

УДК 517.956.227+517.984

II. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИССИПАТИВНОГО СИНГУЛЯРНОГО ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА В ТЕРМИНАХ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ МОДЕЛИ

Б. С. Павлов

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение

1.1. Спектральный анализ в терминах резольвенты. Исторически первым общим методом спектрального анализа несамосопряженных дифференциальных операторов был интеграл Рисса, дополненный тонкой техникой оценки резольвенты на контурах, разделяющих спектр. На этом пути В. Б. Лидскому удалось [10] доказать суммирование по группам («со скобками») спектрального разложения общего регулярного дифференциального оператора второго порядка. С тех пор так называемые «базисы со скобками» были предметом анализа в многочисленных работах последователей (см. библиографию в [45]). К сожалению, расстановка «скобок», т. е. объединение в одну группу набора собственных и присоединенных векторов, отвечающих нескольким соседним точкам спектра, определяется неоднозначно и большей частью неконструктивно. Таким образом, теоремы о базисах со скобками носят, как правило, характер теорем существования.

В случае сингулярных дифференциальных операторов дело обстоит еще хуже: здесь, наряду с непрерывным спектром, могут встретиться точки накопления собственных чисел на конечном расстоянии. Попытка оценить резольвенту оператора на серии контуров, разделяющих спектр вблизи множества таких точек, приводит уже к необозримым аналитическим трудностям. Представление о них можно получить, вспомнив, что для регулярных операторов базу соответствующих оценок дают теоремы о поведении модуля целой функции заданного порядка вне фиксированной окрестности множества корней [18]. Аналогичные факты для общих аналитических функций вблизи точек границы области голоморфности неизвестны.

По-видимому, это обстоятельство явилось главной причиной того, что в ранних работах, посвященных исследованию спектра несамосопряженного сингулярного оператора Шрёдингера пытались выделить случаи, когда собственных чисел лишь конечное число [3], [11], [12], [13], [17]. Однако даже исключение точек накопления собственных чисел само по себе еще не обеспечивало применимости стандартной техники интеграла Рисса для получения спектральных разложений — эта техника работала лишь при условии линейного роста резольвенты вблизи спектра σ:

$$\|R_\lambda\| \leqslant \{\mathrm{dist}(\lambda, \sigma)\}^{-1}\mathrm{const}. \qquad (1)$$

Даже в простейших случаях (в частности, для одномерного оператора Шрёдингера с финитным комплексным потенциалом) на непрерывном спектре имеются точки — так называемые *спектральные особенности* — где условие (1) нарушается. Это не позволяет строить с помощью обычной техники интеграла Рисса спектральные проекторы на участки спектра, содержащие их.

В ранних работах [13], [17] было выяснено, что грубые условия, обеспечивающие конечность числа собственных значений, одновременно гарантируют конечность числа спектральных особенностей и даже конечность порядка роста резольвенты в каждой из них.

Какие-либо эффективные условия отсутствия спектральных особенностей, кроме малости потенциала, для несамосопряженного оператора Шрёдингера до сих пор отсутствуют.

В дальнейшем были разработаны [11], [12] приемы построения неограниченных спектральных проекторов на промежутки спектра, содержащие спектральные особенности типа кратного полюса. Эти приемы сводятся, в сущности, к выделению в точках спектральных особенностей фиктивных «собственных» и «присоединенных» функций, которые уже не обладают свойством квадратичной суммируемости, и потому должны были бы входить в полную в L_2 систему лишь в составе пакета, а не индивидуально. Ясно, что при искусственном их выделении оставшаяся часть разложения теряет спектральный характер.

1.2. Спектральный анализ и характеристическая функция. Безнадежность попыток построить спектральное разложение для несамосопряженного дифференциального оператора в том же виде, что и для самосопряженного, следовала уже из опубликованной в 1960 году работы В. А. Марченко [14], где показано, что спектральная функция в такой конструкции оказывается распределением, и тем самым, класс элементов пространства, допускающих спектральное представление, заведомо весьма узок. Выясненные вскоре в [20], [21] точные условия конечности числа собственных значений и спектральных особенностей, оказавшиеся весьма жесткими, и построенные там же примеры одномерных сингулярных операторов Шрёдингера с богатейшей структурой спектра поставили на повестку дня разыскание иных подходов к задаче спектрального анализа.

К тому моменту уже была ясно осознана недостаточность аналитической «инструментальной» базы спектрального анализа несамосопряженных операторов, сводившейся, в сущности, к интегралу Коши. В своем выступлении на Международном конгрессе математиков в Москве (1966 г.) М. Г. Крейн предсказал, что все дальнейшие успехи спектральной теории несамосопряженных операторов будут связаны с прогрессивным использованием ею самых последних достижений теории аналитических функций.

Так оно и оказалось.

Еще до Московского конгресса стали появляться работы венгерских математиков Б. С. Надя и Ч. Фойаша (см. [59]), посвященные исследованию спектральных свойств весьма несложного на вид оператора, оказавшегося в действительности универсальной моделью линейного сжатия в гильбертовом пространстве. Основным параметром этой модели, несущим полную информацию об ее свойствах, является не резольвента оператора, а гораздо более простой объект — его характеристическая функция, введенная задолго до того в работах харьковского математика М. С. Лившица (см. [9]). Это — сжимающая функция, аналитическая в единичном круге на плоскости спектрального параметра. Для создателей модели было чрезвычайно важно то обстоятельство, что свойства таких функций к указанному моменту были уже основательно изучены. — Их систематическое исследование началось в начале столетия работами Р. Неванлинны, а уже в 1926 году В. И. Смирновым был получен решающий результат о факторизации, пригодный даже для значительно более широкого класса функций с суммируемым логарифмом модуля (см. [60]): всякая такая функция получается перемножением трех факторов: произведения Бляшке, сингулярной внутренней функции и внешней функции, имеющей тот же модуль на окружности, что и исходная:

$$f(\zeta)=\prod_{l=1}^{\infty}\frac{\zeta_l-\zeta}{1-\bar{\zeta}_l\zeta}\frac{\bar{\zeta}_l}{|\zeta_l|}\exp\left\{-\int\frac{e^{i\varphi}+\zeta}{e^{i\varphi}-\zeta}\,d\mu\right\}, \qquad (2)$$

$$\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int\frac{e^{i\varphi}+\zeta}{e^{i\varphi}-\zeta}\,[\lim_{r\to 1}\ln|f(re^{i\varphi})]\,d\varphi\right\},\quad f(\xi_l)=0.$$

Передоказанная позже Берлингом, эта теорема послужила ему базой для описания инвариантных подпространств [49] оператора сдвига в пространстве квадратично-суммируемых функций на окружности. В дальнейшем В. П. Потаповым был найден многомерный аналог факторизации (2), позволивший решить аналогичную задачу для кратного сдвига [44].

1.3. Спектральный анализ и теория рассеяния. Одновременно с работами Надя и Фойаша появились на свет работы американских математиков Лакса и Филлипса, посвященные исследованию убывания энергии в ограниченной области вблизи компактного препятствия $R^3\setminus\Omega$ при акустическом рассеянии в неограниченной области Ω, $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ [57]. В этих работах эволюция волнового поля вблизи препятствия описывалась с помощью сжимающей полугруппы $Z_t=\exp\{iBt\}$ в гильбертовом пространстве данных Коши $U=(u_0, u_1)$ акустической задачи с *энергетической метрикой*:

$$|U|_E^2=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}(|\nabla u_0|^2+|u_1|^2)\,d^3x,$$

а соответствующая матрица рассеяния S оказалась сжимающей аналитической оператор-функцией в верхней полуплоскости спектрального параметра, роль которого играет волновое число.

Комплексные корни S-матрицы — резонансы — совпали с собственными числами генератора сжимающей полугруппы Z_t — диссипативного оператора B.

Почти немедленно вслед за этим двум одесским математикам, ученикам М. Г. Крейна, В. М. Адамяну и Д. З. Арову [1] удалось расшифровать нестандартное определение S-матрицы, данное Лаксом и Филлипсом, записав ее обычным образом через волновые операторы. При этом был установлен замечательный факт: оказалось, что матрица рассеяния совпадает с характеристической функцией полугруппы, описывающей эволюцию волнового поля вблизи препятствия. Тем самым была обнаружена прямая связь между асимптотическими свойствами волнового поля и его поведением вблизи препятствия.

Указанный абстрактный факт был установлен в общей ситуации, лишь при условии ортогональности приходящих и уходящих инвариантных подпространств $D_{\mp}$ рассматриваемой унитарной группы U_t:

$$U_tD_-\subset D_-,\ t<0;\ U_tD_-\to 0,\ t\to-\infty,$$
$$U_tD_+\subset D_+,\ t>0;\ U_tD_+\to 0,\ t\to+\infty. \qquad (3)$$

Это позволяет пользоваться им не только в случае компактного препятствия, но и в общей ситуации, когда спектр диссипативного оператора имеет непрерывную «лебеговскую» компоненту. Требуется лишь, чтобы рассматриваемый диссипативный оператор был генератором некоторой сжимающей полугруппы, полученной вполне определенным способом — компрессией некоторой унитарной группы на ее *трансляционно-инвариантное подпространство* K, являющееся ортогональным дополнением пары взаимно ортогональных приходящих и уходящих подпространств $K=H\ominus\{D_-\oplus D_-\}$:

$$Z_t=e^{iBt}=P_KU_t|K.$$

Указанное условие выполнено для многих интересных задач математической и теоретической физики. Пользуясь перечисленными результатами Надя — Фойаша — Лакса — Филлипса — В. Н. Адамяна — Д. З. Арова удается сразу свести возникающие в них диссипативные операторы к модельным, записывая их в спектральном представлении исходной унитарной группы (см. ниже § 5). Замечательно, что в ряде случаев можно, исходя из уже имеющегося диссипативного оператора B, построить такую унитарную группу в более широком пространстве, из которой оператор B может быть получен описанной выше процедурой. На этом пути удается дать адекватное решение задачи спектрального анализа для известного классического объекта — диссипативного оператора Шрёдингера с поглощающим комплексным потенциалом q, $\operatorname{Im} q(x)=2\rho^2(x)\geqslant 0$. Оказалось, что существует канонический набор собственных функций абсолютно-непрерывного спектра этого оператора, который получается срезкой на исходное пространство решений задачи рассеяния для генератора построенной унитарной группы — самосопряженного оператора, действующего в более широком пространстве — так называемой *дилатации* исходного оператора. Различные виды функциональных моделей получаются просто при записи исходного оператора в различных спектральных представлениях дилатации. Так, при использовании в качестве собственных функций абсолютно-непрерывного спектра дилатации решений Иоста получается симметричная форма модели, описанная в [27], [33]. Она оказалась удобной во многих вопросах спектрального анализа (см. [34], [35], [36], [38]) и тщательно изучалась в последние годы [19]. В частности, на ее базе была построена новая универсальная модель недиссипативного несамосопряженного оператора в пространстве с дефинитной метрикой [16].

1.4. Спектральный анализ в терминах функциональной модели — обзор. В настоящее время можно считать общепринятой, ставшую привычной в Ленинграде уже пятнадцать лет назад (см., например, [35]), точку зрения, согласно которой функциональная модель оператора является адекватной заменой спектрального представления. Теперь даже стало обычным, наоборот, называть спектральное представление самосопряженного (или унитарного) оператора его функциональной моделью. Преимущества такой точки зрения для аналитика неоспоримы: переходя к представлению, в котором оператор имеет модельный вид, мы обнажаем аналитические механизмы, обуславливающие геометрические черты оператора как объекта гильбертова пространства.

При этом, важнейшие теоретико-операторные задачи сводятся к вопросам теории аналитических функций в *классах Харди* $H_{\pm}^{2}$, состоящих из квадратично-суммируемых на вещественной оси функций, допускающих аналитическое продолжение в верхнюю (нижнюю) полуплоскость с ограниченной нормой на каждой прямой, параллельной вещественной оси. Так, задача о разложении по собственным функциям дискретного спектра заменяется задачей интерполяции, задача о полноте — задачей факторизации, вопрос о совместной полноте собственных функций оператора и его сопряженного — вопросом о положительности угла между выделенными подпространствами в классе Харди H_{+}^{2}, задача об отделимости спектральных компонент — задачей об ограниченной обратимости некоторого оператора Тёплица — срезки оператора умножения на аналитическую функцию (см. [26], [33], [35], [56], [19]). Замечательно, что установление названных связей между геометрическими (операторными) задачами и задачами теории функций привело также и к проникновению в теорию функций идей и наблюдений из теории дифференциальных операторов и даже из теоретической физики. Так, использованное в [30] при исследовании экспоненциальных базисов условие косой связанности пары подпространств в $L_2(0, \infty)$ в сущности совпадает с условием полноты резонансных состояний, возникшим в одной из ранних работ Редже по теории рассеяния [58]. Дальнейший анализ этого

условия привел к открытию критерия базисности экспонент на отрезке [37] и, кроме того, большого набора соответствующих факторов для общих систем из воспроизводящих ядер [56].

Целью настоящего обзора является введение читателя в круг идей и методов, произрастающих на плодородном пятачке между спектральной теорией сингулярных диссипативных дифференциальных операторов, теорией функциональных моделей, теорией аналитических функций и математической физикой. Схема обзора такова. Во втором параграфе дается краткое описание симметричной функциональной модели диссипативного оператора. В третьем обсуждаются теоремы об отделимости спектральных компонент, о разложении по собственным функциям и о суммировании спектральных разложений при наличии спектральных особенностей, а также результаты о совместной полноте собственных функций оператора и его сопряженного. Четвертый параграф посвящен анализу примеров диссипативных операторов, возникающих в задачах резонансного рассеяния. В пятом описана локализация спектра одномерного сингулярного оператора Шрёдингера и методами функциональной модели проанализирован классический пример одномерного оператора Шрёдингера с вещественным потенциалом и комплексным граничным условием. В последней его части, выходя за пределы круга задач с конечным дефектом несамосопряженности, мы проводим методами функциональной модели спектральный анализ для трехмерного диссипативного оператора Шрёдингера.

Ввиду ограниченности объема настоящего обзора, мы не коснемся результатов, полученных при анализе других интересных операторов, встречающихся в математической физике. В той области спектрального анализа, о которой пойдет речь, эти результаты подобны описанным ниже и достигаются аналогичными методами.

§ 2. Функциональная модель

2.1. Полугруппа. Пусть S — голоморфная в верхней полуплоскости $\mathbf{C}_{+}=\{k : \operatorname{Im} k>0\}$ — сжимающая оператор-функция, принимающая значения $S(k)$, $S(k)\colon E\to E$, в кольце ограниченных операторов над комплексным евклидовым пространством[1] E, $\dim E=d<\infty$. Мы допустим, что эта функция обратима хотя бы в одной точке $k_0=s_0+i\tau_0$, $k_0\in\mathbf{C}_{+}$. Тогда она обратима всюду на $\mathbf{C}_{+}$, за исключением, быть может, некоторого дискретного множества $\sigma_p(S)$. Условимся продолжать функцию S в нижнюю полуплоскость $\mathbf{C}_{-}$ по принципу симметрии $S(k)=\{S^{+}(\bar{k})\}^{-1}$, $\operatorname{Im} k>0$, $\bar{k}\notin\sigma_p$, и полученную аналитическую в $\mathbf{C}_{-}\cup\mathbf{C}_{+}$ функцию

[1] Большинство из перечисляемых ниже результатов сохраняют силу и в бесконечномерном случае, $\dim E=\infty$. В тексте обзора в необходимых местах сделаны замечания на этот счет.

будем по-прежнему обозначать через S. Множество всех особенностей функции S^{-1} будем обозначать $\sigma(S)$ и называть *спектром функции* S. Ясно, что $\sigma_p(S) \subset \sigma(S)$, и, вообще, спектр лежит в замкнутой верхней полуплоскости. Согласно известным теоремам о предельных значениях, функция S почти всюду на вещественной оси имеет конечные нормальные предельные значения сверху, дающие измеримую ограниченную функцию. Мы обозначим их через $S(s)$:

$$S(s) = \lim_{\tau \to +0} S(s + i\tau).$$

Рассмотрим линеал всех измеримых комплексных двухкомпонентных вектор-функций $f = (f_0, f_1)$, для которых конечен интеграл

$$\langle\langle f \rangle\rangle^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \begin{pmatrix} I & S^+(s) \\ S(s) & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} \right\rangle ds.$$

Задаваемая этим интегралом метрика на рассматриваемом линеале вырождена. Его факторпространство по множеству элементов с нулевой нормой обозначим через $H = L_2 \begin{pmatrix} I & S^+ \\ S & I \end{pmatrix}$. Оно является сепарабельным гильбертовым пространством. В дальнейшем элементы этого пространства — классы — мы будем отождествлять с их двухкомпонентными представителями и обозначать по-прежнему $f = (f_0, f_1)$.

В пространстве H рассмотрим унитарную *группу сдвигов* $U_t : f(s) \mapsto \exp(ist) f(s)$, генератором которой служит оператор умножения на независимую переменную. Легко проверяется с учетом аналитичности S

Теорема 1. Группа сдвигов имеет *приходящее подпространство* $D_- = (0, H^2_-)$ и *уходящее подпространство* $D_+ = (H^2_+, 0)$, эти подпространства ортогональны и порождают все пространство H:

$$\overline{\bigcup_{-\infty < t < \infty} U_t (D_- \oplus D_+)} = H.$$

Решающее значение в дальнейших построениях имеет следующая

Теорема 2 ([59]). Семейство операторов Z_t, полученное *срезкой группы сдвигов* на *трансляционно-инвариантное подпространство* K,

$$K = H \ominus (D_- \oplus D_+),$$
$$Z_t = P_K U_t | K, \quad t \geqslant 0,$$

является сильно непрерывной вполне неунитарной полугруппой с *диссипативным генератором* B, $B = \lim_{t \to 0} (it)^{-1} \{Z_t - I\}$.

Доказательство полугруппового свойства следует из основных свойств (3) приходящих и уходящих подпространств.

Действительно, по определению K, выполнено $P_K U_{t_1} | D_+ = 0$ при $t_1 \geqslant 0$ и $D_- U_{t_2} | K = \{P_K U_{-t_2} | D_-\}^+ = 0$ при $t_2 \geqslant 0$, поскольку $U_{t_1} D_+ \subset D_+$, $U_{-t_2} D_- \subset D_-$, $D_\pm \perp K$. Таким образом,

$$Z_{t_1} Z_{t_2} = Z_{t_1 + t_2} - P_K U_{t_1} P_{D_+} U_{t_2} | K - P_K U_{t_1} P_{D_-} U_{t_2} | K = Z_{t_1 + t_2}.$$

Полная неунитарность следует из условия порождаемости, а сильная непрерывность — из сильной непрерывности унитарной группы. В свою очередь, следствием сильной непрерывности полугруппы Z_t является наличие у нее диссипативного генератора B, $Z_t = \exp(iBt)$, $t > 0$.

Иногда наряду с непрерывной группой $\{U_t\}$ удобно рассматривать дискретную группу $\{V^n\}$, порожденную умножением на дробь $\zeta = (k - i)(k + i)^{-1}$. Она унитарна в соответствующем пространстве двухкомпонентных функций на окружности, где роль весовой функции играет $\hat{S}(\zeta) = S(i(1+\zeta)(1-\zeta)^{-1})$.

Срезка (компресия) группы V^n на соответствующее трансляционно-инвариантное подпространство $\hat{K}$ дает полугруппу $\hat{T}^n = P_{\hat{K}} V^n | \hat{K}$, порождающий элемент которой $\hat{T} = P_{\hat{K}} V | \hat{K}$ служит преобразованием Кэли генератора непрерывной полугруппы, $T = (B - iI)(B + iI)^{-1}$.

2.2. Сжимающая оператор-функция. Основным параметром, задающим свойства обеих полугрупп является сжимающая в полуплоскости функция S или, с равным правом, соответствующая сжимающая функция $\hat{S}$ в круге.

Обозначим через Δ_T, Δ_{T^+} *дефектные операторы сжатия* T; их образы $\Delta_T \hat{H}$. $\Delta_{T^+} \hat{H}$ будем называть *дефектными подпространствами*, а размерности образов — *дефектами несамосопряженности*. В рассматриваемом случае индекс сжатия T нулевой, а дефекты совпадают и равны d.

Основная теорема (М. С. Лившиц—Надь—Фойаш). С точностью до постоянных правых и левых изометрических факторов, отображающих дефектные подпространства на $\mathbf{C}^d$, характеристическая функция θ_T сжатия T,

$$\Theta_T(\zeta) = \Delta_{T^+} (1 - \zeta T^+)^{-1} (\zeta - T) \Delta_T$$

совпадает с основным параметром $\hat{S}(\zeta)$. Всякий сжимающий оператор T', характеристическая функция которого с точностью до постоянных изометрических факторов совпадает с $\hat{S}$, унитарно эквивалентен сжатию T. Обратно, если сжимающий оператор унитарно эквивалентен оператору T, то его характеристическая функция совпадает с $S(\zeta)$ с точностью до постоянных изометрических факторов.

Эта классическая теорема содержится в книге Надя и Фойаша [59], где использованы другие спектральные представления группы сдвигов: приходящее $\mathcal{T}_-$

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{T}_-} \begin{pmatrix} S & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}, \quad L_2 \begin{pmatrix} 1 & S^+ \\ S & I \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{T}_-} L_2 \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I - S^+S \end{pmatrix},$$

$$D_- = \begin{pmatrix} 0 \\ H^2_- \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{T}_-} \begin{pmatrix} H^2_- \\ 0 \end{pmatrix}; \quad D_+ = \begin{pmatrix} H^2_+ \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{T}_-} \left\{ \begin{pmatrix} Sg \\ g \end{pmatrix}, g \in H^2_+ \right\}, \qquad (4)$$

либо уходящее $\mathcal{T}_+$: $\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{T}_+} \begin{pmatrix} I & S^+ \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}$.

Аналогичное утверждение справедливо и для диссипативного генератора B полугруппы $\{Z_t\}$ и всех унитарно-эквивалентных ему операторов.

Отметим, что высказанное с самого начала требование конечномерности и обратимости оператор-функции S, т. е. конечномерности и равенства размерностей (дефектов неунитарности) $\dim \Delta_T H = d = \dim \Delta_{T_+} H$ является излишним. Все построения и основная теорема сохраняются полностью в гораздо более широком классе ситуаций, например, когда дефектные операторы Δ_T, Δ_{T_+} ядерны, однако и это далеко не является пределом — максимально общие условия, в которых сохраняет силу описанная конструкция, очень широки, и, в сущности, лимитируются лишь требованием обратимости оператор-функции S почти всюду в области регулярности и условием существования почти всюду на ее границе конечных предельных значений (см. [59]). Современное состояние вопроса отражено в [19].

Универсальный характер описанных выше операторов B и T дал повод Надю и Фойашу считать их *функциональными моделями* диссипативных операторов и сжатий соответственно. Подробный анализ различных способов записи модели содержится также в статье [19]. Мы далее пользуемся симметричной формой, введенной выше.

2.3. Факторизации. Оставшаяся часть второго параграфа посвящается подготовке к спектральному анализу модельного диссипативного оператора. Аналитическую базу для него образуют теоремы о факторизации, аналогичные теореме В. И. Смирнова.

Будем называть аналитическую оператор-функцию S_i *внутренней в единичном круге* (соответственно в верхней полуплоскости), если она является там сжимающей, и унитарна почти всюду на окружности (соответственно, на вещественной оси).

Пример 1. Задав счетный набор точек ζ_l, $|\zeta_l| < 1$, $\Sigma(1 - |\zeta_l|) < \infty$, и упорядоченное семейство ортопроекторов $\{P_l\}$ в E, можно построить *произведение Бляшке—Потапова* — многомерный аналог произведения Бляшке:

$$\Pi(\zeta) = \prod_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{\zeta_l - \zeta}{1 - \bar\zeta_2 \zeta} \cdot \frac{\bar\zeta_l}{|\zeta_R|} P_l + (I - P_l) \right\}$$

в случае круга $|\zeta| < 1$. Аналогичный объект в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ также задается набором точек z_l, $\operatorname{Im} z_l > 0$, $\Sigma \operatorname{Im} z_l (1 + |z_l|^2)^{-1}$ и упорядоченным семейством ортопроекторов P_l:

$$\Pi(z) = \prod_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{z - z_l}{z - \bar z_l} \cdot \frac{i - \bar z_l}{i - z_l} \frac{|i - z_l|}{|i - \bar z_l|} P_l + (I - P_l) \right\}.$$

Видно, что построенные указанным образом произведения Бляшке—Потапова являются внутренними функциями.

Отметим, что в бесконечномерном случае, $\dim E = \infty$, сходимость подобных произведений уже не обязательно связана с выполнением условия $\Sigma(1 - |\zeta_l|) < \infty$, в чем легко убедиться на простейших примерах.

Пример 2. Задав на единичной окружности (соответственно на вещественной оси) неотрицательную сингулярную операторно-значную меру μ_φ, построим *мультипликативный интеграл*

$$\theta(\zeta) = \int \exp\left\{ -\frac{e^{i\varphi} + \zeta}{e^{i\varphi} - \zeta} d\mu_\varphi \right\} \equiv$$

$$\equiv \lim_{\Delta_l \varphi \to 0} \prod_l \exp\left\{ -\frac{e^{i\varphi_l} + \zeta}{e^{i\varphi_l} - \zeta} \mu(\Delta_l \varphi) \right\}, \qquad (5)$$

соответственно, для полуплоскости — интеграл,

$$\theta(z) = \int \exp\left\{ i \frac{1 + sz}{s - z} d\mu_s \right\} =$$

$$= \lim_{\Delta_l s \to 0} \prod_l \exp\left\{ i \frac{1 + z s_l}{s_l - z} \mu(\Delta_l s) \right\}. \qquad (6)$$

При определённых условиях на меру μ (см. [44]) функции, построенные указанным образом, существуют и являются внутренними. Они носят название *сингулярных внутренних функций*.

Будем называть аналитическую сжимающую в круге функцию *внешней*, если оператор умножения на нее обратим в H^2_+ в расширенном понимании: $\overline{S_e H^2_+} = H^2_+$.

В. П. Потапов в работе [44] детально исследовал факторизацию сжимающих аналитических матриц-функций. В частности он показал, что всякая конечномерная сжимающая аналитическая функция в круге S допускает *каноническую факторизацию*, то есть представима в виде произведения внутренней и внешней, а внутренняя функция в свою очередь получается перемножением некоторого произведения Бляшке и некоторой сингулярной функции. Конкретный вид элементарных сомножителей зависит от способа фиксации последовательности корней ζ_l и соответствующих проекторов (для произведения Бляшке) и способа исчерпывания сингулярной меры для сингулярной функции.

Сжимающая внешняя функция также может быть представлена в виде мультипликативного интеграла (5) в круге либо (6) в полуплоскости, однако уже с абсолютно-непрерывной мерой, которая связана с функцией θ равенством

$$(1+s^2)\frac{d}{ds}\operatorname{Sp}\mu_s=\frac{1}{\pi}\ln|\det\Theta|.$$

На дополнении носителя меры внешняя функция унитарнозначна.

Несмотря на то, что конкретный вид сомножителей, дающих каноническую факторизацию рассматриваемой сжимающей оператор-функции зависит от порядка, в котором они расставлены (вообще говоря)

$$S=S_i\tilde{S}_e=S_e\tilde{S}_i,\quad S_{i(e)}\neq\tilde{S}_{i(e)},$$

и даже сами элементарные факторы, из которых набираются эти сомножители, зависит от принятого порядка их расстановки, тем не менее их определители в рассматриваемом конечномерном случае находятся однозначно с точностью до несущественного постоянного множителя θ_0, равного по модулю единице:

$$\Theta_0\cdot\det S_e=\det\tilde{S}_e,\quad \det S_i=\det\tilde{S}_i\cdot\Theta_0.$$

При этом определитель внешнего сомножителя оказывается внешней функцией, а определитель внутреннего — внутренней. Более того, для всякого представления внутреннего сомножителя в виде произведения фактора Бляшке и сингулярного фактора

$$S_i=\Pi\hat{\Theta}=\Theta\hat{\Pi},\quad \tilde{S}_i=\tilde{\Pi}\hat{\tilde{\Theta}}=\tilde{\Theta}\hat{\tilde{\Pi}}.$$

Определители факторов Бляшке совпадают с точностью до унитарной константы и являются скалярными произведениями Бляшке. Аналогичный факт верен и для сингулярных факторов. Более того, все эти элементарные факты сохраняют силу и в бесконечномерном случае, когда рассматриваемая функция имеет определитель (см. [59]). Тем самым скалярная сжимающая функция — определитель характеристической функции, становится инструментом для исследования спектральных свойств оператора.

Более тонкой скалярной характеристической сжимающей функции является *скалярное кратное.*

Говорят, что сжимающая аналитическая функция S обладает *скалярным кратным*, если существует такая «дополнительная» сжимающая аналитическая функция $\tilde{S}$ и такая скалярная аналитическая сжимающая функции s, что тождественно выполнено равенство

$$\tilde{S}S=sI.$$

В этом случае скалярная функция s называется *скалярным кратным функции* S.

Наибольший общий делитель всех скалярных кратных данной сжимающей функции называется *минимальным скалярным кратным.* Этот объект наиболее удобен в спектральном анализе ввиду своей «экономности». Так, ясно, что определитель произведения Бляшке является скалярным кратным, но минимальным — лишь в случае, когда проекторы P_l одномерны. В частности, скалярным кратным *элементарного фактора Бляшке*

$$\frac{\zeta_l-\zeta}{1-\bar{\zeta}_l\zeta}\cdot\frac{\bar{\zeta}_l}{|\zeta_l|}P_l+(I-P_l)$$

служит просто *скалярный множитель Бляшке*

$$\frac{\zeta_l-\zeta}{1-\bar{\zeta}_l\zeta}\,\frac{\zeta_l}{|\zeta_l|}$$

поскольку роль дополнительной функции играет просто элементарный фактор с переставленными проекторами $P_l\leftrightarrow I-P_l$. В то же время определитель этого элементарного фактора есть *кратный множитель Бляшке*

$$\frac{\zeta_l-\zeta}{1-\bar{\zeta}_l\zeta}\cdot\frac{\bar{\zeta}_l}{|\zeta_l|}.$$

Понятие скалярного кратного и свойства бесконечномерных сжимающих аналитических функций, обладающих скалярным кратным, детально исследованы в книге Надя и Фойаша [59]. В частности там доказано, что внутренний и внешний факторы сжимающей функции, обладающей минимальным скалярным кратным s, также обладают скалярными кратными и соответствующие минимальные скалярные кратные s_i, s_e являются соответственно внутренним и внешним фактором функции s. Аналогичный факт верен и отдельно для внутреннего фактора: его минимальное скалярное кратное s_i есть произведение минимальных скалярных кратных соответствующего фактора Бляшке и сингулярного фактора, которые оказываются соответственно скалярным произведением Бляшке и скалярной сингулярной функцией.

В книге [59] выделен и подробно изучен замечательный класс C_0 сжимающих операторов, характеристические функции которых обладают скалярным кратным. Эти операторы допускают наиболее полное спектральное описание. Поэтому при анализе конкретных дифференциальных операторов важно выделение случаев, когда они входят в класс C_0 (см. ниже, п. 5.3)

§ 3. Спектральный анализ в терминах функциональной модели

3.1. Задача рассеяния. Единственным параметром функциональной модели диссипативного оператора, описанной в предыдущем параграфе, является ее характеристическая функция S — сжимающая оператор-функция, аналитическая в верхней полуплоскости спектрального параметра. Она же, в силу результата В. М. Адамяна — Д. З. Арова [1], служит матрицей рассеяния для дилатации рассматриваемого диссипативного оператора. Этот замечательный результат легко проверить в терминах симметричной модели.

Рассмотрим, наряду с основной группой $\{U_t\}=\{e^{ikt}\}$ сдвигов в H, еще одну — группу сдвигов в ортогональной сумме $D_-\oplus D_+=H_0$

$$\overset{0}{U}_t\begin{pmatrix} f_+ \\ f_-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_+e^{ikt}f_+ + P_+e^{ikt}f_- \\ P_-e^{ikt}f_- + P_-e^{ikt}f_+\end{pmatrix},\quad t\gtrless 0.$$

Она очевидно изоморфна группе сдвигов в L_2 и может играть роль невозмущенной группы в задаче рассеяния для пары $\{U_t, \overset{0}{U}_t\}$. *Волновые операторы* $W_\pm$ определим, следуя В. М. Адамяну — Д. З. Арову, как сильные пределы

$$W_+=s\text{-}\lim_{t\to\infty}\overset{0}{U}_{-t}P_{D_+}U_t,\quad W_-=s\text{-}\lim_{t\to-\infty}\overset{0}{U}_{-t}P_{D_-}U_t. \tag{7}$$

Теорема 3. Волновые операторы (7) существуют и отображают соответственно подпространства $H_+=\begin{pmatrix} L_2 \\ 0\end{pmatrix}$ и $H_-=\begin{pmatrix} 0 \\ L_2\end{pmatrix}$ из H на H_0 изометрическим образом и аннулируют их ортогональные дополнения в H. *Оператор рассеяния* $W_-W_+^+$ сводится в H_0 к умножению на характеристическую функцию.

Доказательство сводится к прямому вычислению на основании формул для проекторов на $D_\pm$. Обозначая через $P_\pm$ ортогональные проекторы в L_2 на классы Харди $H^2_\pm$, например:

$$P_+f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}(\zeta-z)^{-1}f(\zeta)\,d\zeta,\quad \operatorname{Im} z>0,$$

можно записать $P_{D_\pm}$ в виде

$$P_{D_+}\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1\end{pmatrix}=\begin{Bmatrix} P_+(f_0+S^+f_1) \\ 0\end{Bmatrix},$$

$$P_{D_-}\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1\end{pmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ P_-(Sf_0+f_1)\end{Bmatrix},$$

что дает немедленно

$$W_+=s\text{-}\lim_{t\to\infty}e^{-ikt}P_+e^{ikt}(f_0+S^+f_1)=f_0+S^+f_1,$$

$$W_-=s\text{-}\lim_{t\to\infty}e^{-ikt}P_-e^{ikt}(Sf_0+f_1)=Sf_0+f_1.$$

Непосредственно из определения видно, что W_+ переводит $(L_2, 0)$ в L_2, а W_- — $(0, L_2)$ в L_2. Тогда оператор рассеяния $W_-W_+^+$, заданный на прообразе W_+, действует как умножение на S, а оператор $W_+W_-^+$ на прообразе W_- — как умножение на S^+.

3.2. Спектральный анализ дилатации. Собственные функции ψ_+ группы сдвигов, образующие полную ортонормированную систему функций в инвариантном подпространстве H_+, играют роль *уходящих рассеянных волн*:

$$\psi_s^+(e)=\begin{pmatrix} \delta(k-s)e \\ 0\end{pmatrix},\quad e\in E.$$

Аналогичным образом собственные функции, образующие полную систему в инвариантном подпространстве H_-, играют роль *приходящих рассеянных волн*:

$$\psi_s^-(e)=\begin{pmatrix} 0 \\ \delta(k-s)e\end{pmatrix},\quad e\in E.$$

Связанные с ними спектральные представления группы сдвигов называются соответственно *приходящим* и *уходящим*. Для доконструирования этих спектральных представлений нужно дополнить каждую из систем рассеянных волн соответствующей системой собственных функций в ортогональном подпространстве к H_+ или H_-:

$$H\ominus H_+\equiv H^>=\left\{\begin{pmatrix} -S^+g \\ g\end{pmatrix},\ \langle(1-SS^+)g, g\rangle_{L_2(E)}<\infty\right\},$$

$$H\ominus H_-\equiv H^<=\left\{\begin{pmatrix} h \\ -Sh\end{pmatrix},\ \langle(1-S^+S)h, h\rangle_{L_2(E)}<\infty\right\}.$$

В книге [59] подпространства $H^<$ и $H^>$ названы соответственно *дополнительным* и *$*$-дополнительным*. Исходя из физического смысла собственных функций сдвига в этих подпространствах мы назовем $H^<$ *излучающим*, а $H^>$ *поглощающим*. В качестве полной ортогональной системы собственных функций сдвига в $H^{>}$ можно использовать семейство обобщенных функций

$$\psi^{>}(s)=\begin{pmatrix} -S^{+}(k)\,\delta(k-s)\,\pi_s \\ \delta(k-s)\,\pi_s \end{pmatrix}(\Delta_s^{+})^{-1}, \tag{8}$$

где π_s — собственный вектор, отвечающий ненулевому собственному числу Δ_s^{+} дефектного оператора $\Delta^{+}=I-SS^{+}$:

$$(I-SS^{+})\,\pi_s=\Delta_s^{+}\pi_s,\quad \Delta_s^{+}>0,\quad |\pi_s|_E=1.$$

В $H^{<}$ соответствующая система собственных функций может быть выбрана в виде

$$\psi^{<}(s)=\begin{pmatrix} \delta(k-s)\,\nu_s \\ -S(k)\,\delta(k-s)\,\nu_s \end{pmatrix}(\Delta_s)^{-1}, \tag{9}$$

где ν_s — собственный вектор, отвечающий ненулевому собственному числу Δ_s дефектного оператора $\Delta=I-S^{+}S$:

$$(I-S^{+}S)\,\nu_s=\Delta_s\nu_s,\quad |\nu_s|_E=1,\quad \Delta_s>0.$$

Собственные функции $\psi^{<}$ будем называть *излучающими*, а собственные функции $\psi^{>}$ — *поглощающими* собственными функциями группы сдвигов в H.

Прямое вычисление показывает, что построенные системы полны и ортогональны в $H^{>}$, $H^{<}$ сответственно и нормированы «на δ-функцию» с подходящим весом: в $H^{>}$ и $H^{<}$ имеют место ортогональные разложения для произвольных элементов $G^{\gtrless}$: $G^{>}\in H^{>}$, $G^{<}\in H^{<}$:

$$\begin{aligned} G^{>}&\equiv\begin{pmatrix} -S^{+}g \\ g \end{pmatrix}=\int\sum_{e_S^{+}}(I-SS^{+})\,\psi^{>}\langle G^{>},\psi^{>}\rangle_H\,dS,\\ G^{<}&\equiv\begin{pmatrix} g \\ -Sg \end{pmatrix}=\int\sum_{e_S}(I-S^{+}S)\,\psi^{<}\langle G^{<},\psi^{<}\rangle_H\,dS. \end{aligned} \tag{10}$$

В бесконечномерном случае, $d=\infty$, имеют место совершенно аналогичные формулы с естественными изменениями, учитывающими то обстоятельство, что спектр дефектных операторов Δ, Δ^{+} может иметь в этом случае более сложную структуру. В качестве полного ортогонального и нормированного «на δ-функцию» набора собственных функций группы сдвигов в H можно использовать один из двух $\{\psi^{-},\psi^{>}\}$ либо $\{\psi^{+},\psi^{>}\}$ с весами $\mathrm{diag}(I,\Delta)$, $\mathrm{diag}(I,\Delta^{+})$. Излучающие собственные функции послужат нам заготовкой для построения канонического набора собственных функций абсолютно-непрерывного спектра модельного оператора B. Аналогичным образом из поглощающих собственных функций можно изготовить канонический набор собственных функций абсолютно-непрерывного спектра сопряженного оператора B^{+}.

3.3. Спектр и резольвента генератора полугруппы. Унитарная в H группа сдвигов $\{U_t\}=\{e^{ikt}\}$, срезанная на трансляционно-

инвариантное подпространство $K=H\ominus\{D_{+}\oplus D_{-}\}$ с помощью соответствующего ортопроектора:

$$P_K\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_0-P_{+}(f_0+S^{+}f_1) \\ f_1-P_{-}(Sf_0+f_1) \end{pmatrix}, \tag{11}$$

дает две сильно непрерывные полугруппы

$$Z_t=P_KU_t\,|\,K=\exp(iBt),\quad t\geqslant 0,$$

$$Z_t=P_KU_t^{+}\,|\,K=\exp(-iB^{+}t),\quad t\geqslant 0,$$

которые в дальнейшем играют роль модельных полугрупп. Характеристическая функция диссипативного оператора B совпадает с S, а характеристическая функция $-B^{+}$ — с $S^{+}(-\bar{\lambda})$. Ясно, что каноническая факторизация характеристической функции определяет соответствующую каноническую факторизацию характеристической функции сопряженного оператора $-B^{+}$; в частности:

$$S^{+}(-\bar{\lambda})=\tilde{S}_i^{+}(-\bar{\lambda})\cdot S_e^{+}(-\bar{\lambda})=\tilde{S}_e^{+}(-\bar{\lambda})\cdot S_i^{+}(-\bar{\lambda}).$$

Решая неоднородное уравнение в K

$$(B-\lambda I)\,u=f,\quad f\in K,$$

можно построить резольвенту модельного оператора в явном виде

$$u=(B-\lambda I)^{-1}f=\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}=\begin{cases} \dfrac{1}{z-\lambda}\begin{pmatrix} f_0(z)-(f_0+S^{+}f_1)(\lambda) \\ f_1(z) \end{pmatrix}, & \mathrm{Im}\,\lambda<0,\\[2mm] \dfrac{1}{z-\lambda}\begin{pmatrix} f_0(z)-S^{-1}(\lambda)(Sf_0+f_1)(\lambda) \\ f_1(z) \end{pmatrix}, & \mathrm{Im}\,\lambda>0. \end{cases} \tag{12}$$

Из этих формул видно, что спектр модельного оператора B совпадает с множеством особенностей S^{-1} — т. е. её спектром в теоретико-функциональном смысле. Решая соответствующее однородное уравнение в K,

$$(B-\lambda I)\,u_\lambda=0,$$

получаем собственные функции модельного оператора: если $\tilde{e}\in\mathrm{Ker}\,S(\lambda)$, $\mathrm{Ker}\,S(\lambda)\neq 0$, $\mathrm{Im}\,\lambda>0$, $\tilde{e}\neq 0$, то вектор $u_\lambda=((z-\lambda)^{-1}\tilde{e},\,0)$ является собственным. Если корень характеристической функции является кратным, то есть S содержит элементарный фактор Бляшке $\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\tilde{P}+(1-\tilde{P})$ в степени r, $r>1$, то наряду с собственными векторами явно строятся и присоединенные — решения уравнений $(B-\lambda I)^l u_\lambda^l=0$, $l\leqslant r$. Они имеют вид $((z-\lambda)^{-l}\tilde{e},\,0)$, $\tilde{e}\in\tilde{P}E$. Сопряженное однородное уравнение $(B^{+}-\bar{\lambda}I)\,v_\lambda=0$ имеет нетривиальные решения в сопряженных точках спектрального параметра, $v_\lambda=(0,\,(z-\bar{\lambda})^{-1}e)$,

$e \in \operatorname{Ker} S^{+}(\lambda)$. В конечномерном случае размерность собственных подпространств операторов B и B^{+} в сопряженных точках одинакова, и система собственных векторов может быть выбрана биортогональной (если алгебраическая краткость r собственного числа λ равна единице). Для этого достаточно, отщепив элементарный фактор Бляшке

$$S(z)=S_{\lambda}(z)\left(\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\tilde{P}+(1-\tilde{P})\right),$$

пересчитать базис $\{\tilde{e}_{\lambda}^{(k)}\}$ из $\operatorname{Ker} S(\lambda)$ в базис $\{\tilde{e}_{\lambda}^{(k)}\}$ з $\operatorname{Ker} S^{+}(\lambda)$ с помощью обратимого оператора $S_{\lambda}(\lambda)$ и построить в $\operatorname{Ker} S^{+}$ биортогональный к нему базис $\{e_{\lambda}^{(l)}\}$. Тогда окажется

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left\langle\begin{pmatrix} I & S^{+}(z)\\ S(z) & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\tilde{e}_{\lambda}^{(k)}}{z-\lambda}\\ 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\ \dfrac{e_{\lambda}^{(l)}}{z-\bar{\lambda}}\end{pmatrix}\right\rangle dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left\langle\frac{S(z)\,\tilde{e}_{\lambda}^{(k)}}{z-\lambda},\ \frac{e_{\lambda}^{(l)}}{z-\bar{\lambda}}\right\rangle dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left\langle\frac{\tilde{e}_{\lambda}^{\prime(k)}}{z-\lambda},\ e_{\lambda}^{(l)}\right\rangle dz=\left\langle\tilde{e}_{\lambda}^{\prime(k)},\ e_{\lambda}^{(l)}\right\rangle=\delta_{kl}$$

На базе этих явных формул и аналогичных им явных формул для собственных функций непрерывного спектра (см. ниже) строится спектральный анализ модельного оператора (см. [34], [35]).

3.4. Спектральные компоненты. Приступая к спектральному анализу модельного оператора, мы будем исходить из того, что уже решена серия задач факторизации для характеристической функции S на почти всюду обратимые взаимно простые сомножители, задаваемые в рассматриваемом конечномерном случае сжимающими квадратными матрицами-функциями, аналитически зависящими от спектрального параметра

$$S=S_i\tilde{S}_e=S_e\tilde{S}_i;\quad S_i=\Pi\hat{\theta}=\theta\hat{\Pi},\quad \tilde{S}_i=\tilde{\Pi}\hat{\tilde{\theta}}=\tilde{\theta}\hat{\tilde{\Pi}}.$$

Эти задачи уже сами по себе достаточно трудны (см., например, [59]). К счастью, в конечномерном случае все возникающие факторы являются двусторонними: если $S_i(z)$ внутренняя функция в верхней полуплоскости, то $S_i^{+}(z)$ — внутренняя в нижней... и т. д. В бесконечномерном случае нужно специально следить за тем, чтобы указанные свойства факторизацией были выполнены (см. [59]). Будем называть *внутренним подпространством* N_i диссипативного оператора B максимальное из инвариантных подпространств его в K, часть оператора B в

которых имеет внутреннюю характеристическую функцию. При этом сужение $B|_{N_i}=B_i$ называется *внутренней частью оператора B*.

Аналогичным образом *внешним подпространством* оператора B назовем максимальное из инвариантных подпространств N_e, части оператора B в которых имеют внешние характеристические функции. Часть $B|N_e=B_e$ оператора B в N_e называется *внешней частью оператора*. Л. А. Сахнович предложил называть диссипативный оператор, совпадающий со своей внешней компонентой, *абсолютно-непрерывным* (см. [46]). Далее мы увидим, что для этого термина имеются серьезные основания. Следуя Л. А. Сахновичу, мы будем иногда называть внешнюю часть диссипативного оператора его *абсолютно-непрерывной частью*. Следующее утверждение устанавливает вид и главное свойство внутренних и внешних подпространств модельных операторов.

Теорема 4. [33]. Внутреннее N_i и внешнее N_e подпространства модельного оператора B имеют вид:

$$N_i=\left\{\begin{pmatrix} f_0\\ 0\end{pmatrix},\ f_0\in H_{-}^{2}(E)\ominus\tilde{S}_i^{+}H_{-}^{2}(E)\right\},$$

$$N_e=\bar{\tilde{N}}_e,\quad \tilde{N}_e=P_K H^{<}.$$

При этом имеют место соотношения линейной независимости и полноты:

$$N_i\cap N_e=0,\quad \overline{N_i+N_e}=K.$$

Аналогичным образом, внутреннее N_i^{+} и внешнее N_e^{+} подпространства оператора $-B^{+}$ имеют вид

$$N_i^{+}=\left\{\begin{pmatrix} 0\\ g_1\end{pmatrix},\ g_1\in H_{+}^{2}(E)\ominus S_i H_{+}^{2}(E)\right\},$$

$$N_e^{+}=\bar{\tilde{N}}_e^{+},\quad \tilde{N}_e^{+}=P_K H^{>}.$$

Для них справедливы соотношения линейной независимости и полноты:

$$N_i^{+}\cap N_e^{+}=0,\quad \overline{N_i^{+}+N_e^{+}}=K,$$

и соотношения биортогональности: $N_i^{+}\perp N_e$, $N_i\perp N_e^{+}$, $N_i^{+}\oplus\oplus N_e=N_i\oplus N_e^{+}=K$.

Спектр σ_i внутренней компоненты, характеристической функцией которой служит внутренний фактор $\tilde{S}_i$, совпадает с множеством точек, где он необратим, а *спектр σ_e внешней* — с замыканием множества точек вещественной оси, через которое характеристическая функция S_e не продолжается непрерывным образом по принципу симметрии, то есть не унитарна, или, иначе говоря, дефектные операторы $\Delta=I-\tilde{S}_e^{+}\tilde{S}_e$ и $\Delta^{+}=I=S_e S_e^{+}$ не исчезают.

Спектр внешней компоненты мы будем, следуя Л. А. Сахновичу [46], называть *абсолютно-непрерывным спектром оператора B*.

3.5. Спектральные особенности и разделение внешней и внутренней компоненты. Спектральные компоненты диссипативного оператора не всегда удается разделить с помощью ограниченного проектора $\mathscr{P}_{ie}$ на N_i параллельно N_e. Дело в том, что условие линейной независимости $N_i \cap N_e = 0$ еще не обеспечивает положительности угла между подпространствами N_i, N_e, т. е. не обеспечивает существования соответствующего ограниченного проектора. Этот проектор существует лишь при дополнительных условиях, формулировка которых требует выделения некоторого особого подмножества абсолютно-непрерывного спектра σ_e.

Будем говорить, что точка λ, $\lambda \in \sigma_e$, $|\lambda| < \infty$, есть *правильная точка* абсолютно-непрерывного спектра модельного оператора, если в некоторой ее окрестности $\omega_\lambda^\varepsilon = \{|k-\lambda| < \varepsilon, \operatorname{Im} k > 0\}$ характеристическая функция внешней компоненты $\tilde{S}_e(\lambda)$ равномерно ограниченно-обратима

$$\sup_{k \in \omega_\lambda^\varepsilon} |\tilde{S}_e^{-1}(k)| < \infty.$$

Если же точка λ, $\lambda \in \sigma_e$, не является правильной, то назовем ее *точкой спектральной особенности*. Для бесконечно-удаленной точки понятие трансформируется естественным образом путем введения соответствующей системы окрестностей. Множество всех спектральных особенностей обозначим через σ_0.

Из теоремы единственности для скалярных функций класса H^∞ следует, что в наиболее интересном с практической точки зрения случае, когда характеристическая функция имеет скалярное кратное, соответствующее множество σ_0 замкнуто и имеет нулевую меру Лебега, а вблизи его дополнения — множества правильных точек — резольвента внешней компоненты B_e имеет, в силу известной оценки Надя—Фойаша ([59, гл. IV])

$$|(B_e - \lambda I)^{-1}| \leqslant (\operatorname{Im} \lambda)^{-1} |\tilde{S}_e^{-1}(\lambda)|, \quad \operatorname{Im} \lambda > 0,$$

первый степенной порядок роста. Важную роль спектральных особенностей в теории сингулярных дифференциальных несамосопряженных операторов отмечал еще М. А. Наймарк [17]. В. Э. Лянце в [11], [12] предлагал способ перенормировки спектрального разложения с целью избежать неприятных эффектов, возникающих в этих точках.

Из следующего примера видно, что спектральные особенности играют важную роль в задаче об отделимости спектральных компонент.

Пример 3. Пусть k_α — собственные числа оператора B,

$$e_\alpha \in \operatorname{Ker} S(k_\alpha) = \operatorname{Ker} \tilde{S}_i(k_\alpha), \quad |e_\alpha| = 1.$$

Тогда угол β между нормированным собственным вектором f_α оператора B:

$$f_\alpha = ((k - k_\alpha)^{-1} e_\alpha \sqrt{\operatorname{Im} k_\alpha}, 0),$$

и внешним («абсолютно-непрерывным») подпространством вычисляется по формуле

$$\sin \beta = |PSf_\alpha| = |\tilde{S}_e(k_\alpha) e_\alpha|$$

и стремится к нулю, если существует последовательность собственных чисел k_α, скапливающаяся к точке спектральной особенности $k_\alpha \to k_0$, так, что $\tilde{S}_e(k_\alpha) e_\alpha \to 0$. Отсюда видно, что в одномерном случае, когда характеристическая функция скалярна и непрерывна, дизъюнктность σ_i и σ_e является необходимым и достаточным условием отделимости спектральных компонент.

Достаточные условия отделимости спектральных компонент удобно формулировать в терминах, введенных Карлесоном при исследовании эквивалентности различных гильбертовых нормировок классов аналитических функций.

Будем называть спрямляемый контур γ, лежащий в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} k \geqslant 0$, *карлесоновским*, если лебегова мера $|d\gamma|$, сосредоточенная на нем (т. е. его длина), обладает свойством

$$\sup_{-\infty < \varkappa < \infty} \sup_{\varepsilon} \int_{|\varkappa - k| < \varepsilon} |d\gamma(k)| = C_0(\gamma) < \infty. \tag{13}$$

Из результатов Карлесона [51] следует, что при условии (13) скалярные аналитические функции из H_+^2 квадратично суммируемы по γ и

$$\int_\gamma |f(k)|^2 |d\gamma(k)| \leqslant C(\gamma) \int_{-\infty}^{\infty} |f(k)|^2 dk.$$

Теорема 5 [33]. Если существует гомотопный вещественной оси карлесоновский контур, отделяющий σ_0 и σ_i, и такой, что почти всюду на нем выполнена оценка

$$\sup_{k \in \gamma} |S^{-1}(k)| \leqslant C < \infty,$$

то существует ограниченный спектральный проектор $\mathscr{P}_{ie}$ на N_i параллельно N_e

$$\mathscr{P}_{ie} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{\tilde{K}_-} S^{-1} P_{K_+} (Sf_0 + f_1) \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $P_{\tilde{K}_-}$, P_{K_+} — ортопроекторы на $H_-^2 \ominus \tilde{S}_i^+ H_-^2$, $H_+^2 \ominus S_i H_+^2$ соответственно; при этом $|\mathscr{P}_{ie}| \leqslant C$.

Критерий отделимости спектральных компонент в терминах линий уровня S_i сформулирован в [19].

Условия отделимости спектральных компонент модельных операторов класса C_0 можно дать и в терминах скалярного кратного s_e внешнего фактора S_e:

Теорема 6. Если $B_i = B|_{N_i}$, то

$$\sin(N_e, N_i) \geqslant |s_e^{-1}(B_i)|^{-1}.$$

Следствие. Если γ — карлесоновский контур, отделяющий σ_i от σ_0 и s — скалярное кратное характеристической функции, то

$$\sin(N_e, N_i) \geqslant \inf_{k \in \gamma} |s(k)|.$$

3.6. Расщепление внутренней компоненты. Обратимся теперь к задаче дальнейшего расщепления внутренней компоненты оператора. Допустим, что уже построены канонические факторизации для $\widetilde{S}_i$:

$$\widetilde{S}_i = \Theta\hat{\Pi} = \Pi\hat{\Theta}.$$

Здесь Π, $\hat{\Pi}$ — произведения Бляшке, Θ, $\hat{\Theta}$ — сингулярные функции.

Сингулярным N_s и *дискретным* N_d подпространствами диссипативного оператора будем называть максимальные инвариантные подпространства его внутренней компоненты, в которой части ее имеют в качестве характеристической функции произведение Бляшке и, соответственно, сингулярную внутреннюю функцию. Эти подпространства легко вычисляются через канонические факторизации

$$N_s = H_-^2 \ominus \hat{\Theta}^+ H_-^2, \quad N_d = H_-^2 \ominus \hat{\Pi}^+ H_-^2.$$

При этом $\overline{N_s + N_d} = N_i$, $N_d \cap N_s = 0$. Ортогональные дополнения N_s, N_d в N_i суть

$$N_s^{\perp} = \hat{\Theta}^+ (H_-^2 \ominus \Pi^+ H_-^2), \quad N_d^{\perp} = \hat{\Pi}^+ (H_-^2 \ominus \Theta^+ H_-^2).$$

Обозначая через P_s, P_d, $P_s^{\perp}$, $P_d^{\perp}$ ортопроекторы на N_s, N_d, $N_s^{\perp}$ и $N_d^{\perp}$ соответственно, можно сформулировать следующий критерий отделимости сингулярной и дискретной компонент модельного оператора B.

Теорема 7 [33]. Для того, чтобы угол β между N_s, N_d был положителен, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из операторов

$$\Delta_{ds} = P_d^{\perp}|_{N_s} \to N_d^{\perp},$$

$$\Delta_{sd} = P_s^{\perp}|_{N_d} \to N_s^{\perp}$$

был обратим. Тогда $|\sin\beta| \geqslant (\inf |\Delta_{ds}^{-1}|, |\Delta_{sd}^{-1}|)^{-1}$, и проекторы $\mathscr{P}_{ds}$ на N_d параллельно N_s и $\mathscr{P}_{sd}$ на N_s параллельно N_d задаются

формулами

$$\mathscr{P}_{sd} = \Delta_{ds}^{-1} P_d^{\perp}, \quad \mathscr{P}_{ds} = \Delta_{sd}^{-1} P_s^{\perp}.$$

Указанные здесь операторы легко записываются в терминах канонических факторизаций. Например,

$$\Delta_{ds} = \hat{\Pi}^+ P_{H_-^2 \ominus \Theta^+ H_-^2} \Pi P_{H_-^2 \ominus \hat{\Theta}^+ H_-^2},$$

так что обратимость Δ_{ds} эквивалентна требованию обратимости оператора $P_{H_-^2 \ominus \Theta^+ H_-^2} \Pi P_{H_-^2 \ominus \hat{\Theta}^+ H_-^2}$ из $H_-^2 \ominus \hat{\Theta}^+ H_-^2$ в $H_-^2 \ominus \Theta^+ H_-^2$.

Теорема 8 ([33]). Если произведение Бляшке Π обладает скалярным кратным π и оператор $\pi(B_\Theta) = P_{H_+^2 \ominus \Theta H_+^2} \pi | H_+^2 \ominus \Theta H_+^2$ обратим, то $\sin\beta \geqslant |\pi^{-1}(B_\Theta)|^{-1}$.

Из последней оценки следует, в частности, одномерная оценка, полученная В. И. Васюниным (см. [19])

$$|\sin\beta| \geqslant \prod_i |\Theta(\lambda_i)|^{m_i}.$$

Дальнейшее обсуждение вопросов об отделимости спектральных компонент см. в [19].

3.7. Спектральный анализ на дискретном спектре. Разделив спектральные компоненты, можно приступить к спектральному анализу каждой из них. Мы ограничимся здесь спектральным анализом дискретной и абсолютно-непрерывной компонент. Спектральный анализ сингулярной компоненты также может быть проделан в теоретико-функциональных терминах, как следует из недавних работ Н. К. Никольского (см. в [19]).

Спектральный анализ дискретной компоненты модельного оператора мы проведем предполагая, что алгебраическая кратность собственных чисел $\{\lambda\}$ равна единице, т. е. уже после выделения элементарного фактора Бляшке в точке λ оставшаяся часть характеристической функции обратима:

$$S = S_e \widetilde{\Theta} \widetilde{\Pi} = S_e \widetilde{\Theta} \widetilde{\Pi}_\lambda \left[\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}} \widetilde{P}_\lambda + (I - \widetilde{P}_\lambda) \right] =$$

$$= \left[\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}} P_\lambda + (1 - P_\lambda) \right] \Pi_\lambda \Theta \widetilde{S}_e = \Pi \Theta \widetilde{S}_e,$$

$S_e \widetilde{\Theta} \widetilde{\Pi}_\lambda$, $\Pi_\lambda \Theta \widetilde{S}_e$ — обратимые операторы и

$$S_e \widetilde{\Theta} \widetilde{\Pi}_\lambda : \operatorname{Ker} S(\lambda) = \widetilde{P}_\lambda E \to P_\lambda E = \operatorname{Ker} S^+(\lambda),$$

$$\Pi_\lambda \Theta \widetilde{S}_e : \operatorname{Ker} S^+(\lambda) = \widetilde{P}_\lambda E \to P_\lambda E = \operatorname{Ker} S(\lambda).$$

В качестве собственных функций дискретного спектра оператора B в точке λ удобно взять векторы $u_\lambda = ((z-\lambda)^{-1} \widetilde{e}_\lambda^{(k)}, 0)$, где $\widetilde{e}_\lambda^{(k)}$ — какой-либо базис в $\operatorname{Ker} S(\lambda)$, а в качестве собственных функций B^+ в сопряженной точке — векторы $v_\lambda = (0, (z-$

$-\bar{\lambda})^{-1}e_\lambda^{(l)})$, где $e_\lambda^{(l)}$ — базис в $\operatorname{Ker} S^+(\lambda)$. Для того, чтобы выполнялось условие биортогональности собственных функций дискретного спектра B и B^+:

$$\left\langle \begin{pmatrix} \dfrac{\tilde{e}_\lambda^{(k)}}{z-\lambda} \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{e_{\lambda'}^{(l)}}{z-\bar{\lambda}'} \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{cases} \langle S(\lambda)\tilde{e}_\lambda^{(k)}, e_{\lambda'}^{(l)}\rangle_E \dfrac{2\pi i}{\lambda-\lambda'} = 0, & \lambda \neq \lambda', \\ \langle S_e(\lambda)\tilde{\Theta}(\lambda)\tilde{\Pi}_\lambda \tilde{e}_\lambda^{(k)}, e_{\lambda'}^{(l)}\rangle \dfrac{\pi}{\operatorname{Im}\lambda} = \delta_{kl}, & \lambda = \lambda', \end{cases}$$

следует выбрать базис $\{e_\lambda^{(l)}\}$ в $\operatorname{Ker} S^+(\lambda)$ биортогональным к базису $\{S_e(\lambda)\tilde{\Theta}(\lambda)\tilde{\Pi}_\lambda e_\lambda^{(k)}\}$ в $\operatorname{Ker} S(\lambda)$.

Так же, как и в случае чисто дискретного спектра ряд по обственным функциям оператора B, имеет вид биортогонального разложения: если $F=(f_0, 0)\in N_d$, $f_0\in H_-^2 \ominus \tilde{\Pi}^+ H_-^2$, то

$$\mathcal{F} \sim \sum_{k,\lambda} \begin{pmatrix} \dfrac{\tilde{e}_\lambda^{(k)}}{z-\lambda} \\ 0 \end{pmatrix} \left\langle \begin{pmatrix} f_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{e_\lambda^{(k)}}{z-\bar{\lambda}} \end{pmatrix} \right\rangle_H .$$

Он является интерполяционным рядом в следующем обобщенном смысле: его коэффициенты определяются значениями разлагаемой функции в точках спектра (точнее, их проекциями на $\operatorname{Ker} S^+(\lambda)$):

$$\left\langle \begin{pmatrix} f_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{e_\lambda^{(k)}}{z-\bar{\lambda}} \end{pmatrix} \right\rangle_H = \langle Sf_0(\lambda), e_\lambda^{(k)} \rangle_E ,$$

и ряд составленный из первых компонент, умноженных на S

$$\sum_{k,\lambda} (z-\lambda)^{-1} \, S\tilde{e}_\lambda^{(k)} \, \langle Sf_0(\lambda), e_\lambda^{(k)} \rangle \quad (14)$$

служит интерполяционным рядом для функции Sf_0. Сходимость интерполяционных рядов вида (14) изучалась различными авторами, начиная с работ Карлесона [51]. Спектральный характер этих объектов подробно исследован в работах [7], [18], далее см. [19]. В скалярном случае, когда размерность вспомогательного пространства единична, ряд (14) приобретает следующий вид для функции f_0, $f_0\in S_-^2 \ominus \tilde{\Pi} H_-^2$:

$$f_0(z) = \sum_\lambda \frac{1}{z-\lambda} \frac{(\tilde{\Pi} f_0)(\lambda)}{\tilde{\Pi}_\lambda(\lambda)} \cdot 2\operatorname{Im}\lambda .$$

Безусловная сходимость этого ряда для произвольной функции f_0 из $H_-^2 \ominus \tilde{\Pi} H_-^2$ обеспечивается *условием Карлесона*

$$|\tilde{\Pi}_\lambda(\lambda)| = \prod_{\mu\neq\lambda} \left| \frac{\lambda-\mu}{\lambda-\bar{\mu}} \right| \geqslant \delta > 0.$$

Это условие совпадает с *условием равномерной минимальности* семейства нормированных собственных функций $\sqrt{2\operatorname{Im}\lambda}\,(z-\lambda)^{-1} = u_\lambda$ модельного оператора

$$\sin[u_\lambda, \bigvee_{\mu\neq\lambda} \{u_\mu\}] = |\tilde{\Pi}_\lambda(\lambda)| \geqslant \delta > 0,$$

и, таким образом, является необходимым и достаточным условием того, что базис из собственных векторов модельного диссипативного оператора со скалярной характеристической функцией, являющейся произведением Бляшке, эквивалентен ортонормированному (см. [18]).

В конечномерном случае $\dim E = d$ условие равномерной минимальности уже не обеспечивает *базисности*. В [18] исследован случай «серийных» базисов, для которых семейство «*направляющих*» *векторов* $\{\tilde{e}_\lambda\}$ распадается на несколько последовательностей, $\tilde{e}_{\lambda_s^{(l)}}^{(l)} \to \tilde{e}_\infty^{(l)}$, $l=1, 2, \ldots, d$. Если векторы $\tilde{e}_\infty^{(l)}$, $l=1, 2, \ldots, d$, линейно независимы и каждая из последовательностей соответствующих собственных чисел $\{\lambda_s^{(l)}\}$, $s\to\infty$, удовлетворяет условию Карлесона, то собственные элементы $\{u_s^{(l)}\}$ соответствующего модельного оператора образуют базис, эквивалентный ортонормированному. Связь между равномерной минимальностью и базисностью семейств собственных векторов модельных операторов с дискретным спектром до конца проанализировал Трейль [47], который доказал следующий общий результат.

Теорема 9. Если семейство направляющих векторов $\{e_\lambda\}$, отвечающих собственным функциям $u_\lambda = (z-\lambda)^{-1} e_\lambda \sqrt{2\operatorname{Im}\lambda}$ модельного оператора с дискретным спектром компактно во вспомогательном пространстве, то семейство $\{u_\lambda\}$ образует *безусловный базис* (эквивалентный ортонормированному) в том и только в том случае, когда оно равномерно минимально.

В частности, отсюда следует, что равномерная минимальность семейства собственных векторов диссипативного оператора с конечномерным дефектом несамосопряженности (т. е. с конечномерной характеристической функцией) всегда эквивалентна безусловной базисности.

К сожалению, для дифференциальных операторов выполнение условия равномерной минимальности является исключительной ситуацией, и поэтому особое значение приобретают приемы суммирования спектральных разложений.

Простейший пример такого рода утверждений дает следующее утверждение для дискретных операторов.

Если элемент u из N_d таков, что при каждом положительном t ряд $\sum_\lambda e^{-\operatorname{Im}\lambda t}|u_\lambda|\,|\langle u, v_\lambda\rangle|$ сходится, то спектральное разложение элемента суммируется по Абелю

$$\lim_{t\to+0}\sum_\lambda e^{i\lambda t}u_\lambda\langle u, v_\lambda\rangle = u.$$

Доказательство немедленно следует из сильной непрерывности модельной полугруппы.

3.8. Спектральный анализ на абсолютно-непрерывном спектре. Согласно известному результату Надя — Фоиаша, абсолютно-непрерывная компонента B_e модельного оператора *«квазиэквивалентна»* остаточной — излучающей — компоненте дилатации. Этот факт прямо связан с теоремой 4. Именно, пользуясь тем, что $\bar{N}_e = P_K H^<$ плотно в абсолютно-непрерывном (внешнем) подпространстве N_e, заметим, что для всякого элемента $f^< = (f, -Sf)$, $f^< \in H^<$, такого, что $(1 - S_e^+ S)f = \Delta f \neq 0$, выполнено

$$P_K e^{ikt} f^< - e^{iBt} P_K f^< = P_K e^{ikt}\begin{pmatrix} P_+\Delta f \\ 0\end{pmatrix} = 0,\quad t \geqslant 0, \tag{15}$$

поскольку $D_+ = (H_+^2, 0)$ инвариантно относительно группы сдвигов и $K \perp D_+$. Из теоремы 4 непосредственно видно, что квазиэквивалентность между излучающей компоненты дилатации и внешней (абсолютно-непрерывной) компонентой модельного оператора осуществляется оператором ортогонального проектирования

$$P_K : \begin{pmatrix} f \\ -Sf\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f - P_+\Delta f \\ -Sf\end{pmatrix}.$$

Этот оператор не является ограниченно-обратимым, однако он обратим в слабом смысле. Заметив, что $S^+S = \tilde{S}_e^+\tilde{S}_e$ и $\|(f, -Sf)\|_H^2 = \langle \Delta f, f\rangle_{L_2}$, видим, что $\langle \tilde{S}_e^+\tilde{S}_e\Delta f, f\rangle_{L_2} \leqslant \left\| P_K\begin{pmatrix} f \\ -Sf\end{pmatrix}\right\|_H^2 \leqslant \langle \Delta f, f\rangle_{L_2}$, т. е. обратимость имеет место на множестве элементов таких, что на носителе соответствующей функции f оператор-функция $\tilde{S}_e^+\tilde{S}_e$ обратима. Это множество плотно в $\tilde{N}_e$, а значит и в N_e, поскольку аналитическая в верхней полуплоскости матрица функции $\tilde{S}_e$ не может обращаться в нуль на множестве положительной меры.

Абсолютно-непрерывный спектр модельного оператора B совпадает с замыканием множества вещественных точек λ, для которых дефектный оператор $\Delta(\lambda) \equiv 1 - S^+S(\lambda)$ или $\Delta^+(\lambda) \equiv 1 - SS^+(\lambda)$ положителен. Спектральные проекторы и собственные функции вычисляются по формулам, содержащим собственные векторы дефектных операторов π, ν: $\Delta^+(\lambda)\pi = \Delta_\pi^+\pi$, $\Delta(\lambda)\nu = \Delta_\nu\nu$, отвечающие положительным собственным числам Δ_π^+, Δ_ν. Пользуясь полярным представлением характеристической функции, можно связать семейства $\{\pi\}$, $\{\nu\}$ при данном ν: $S^+(\lambda)\pi = s_\pi\cdot\nu$, $S(\lambda)\nu = s_\nu\pi$, $s_\nu = s_\pi = \sqrt{1-\Delta_\pi} = \sqrt{1-\Delta_\nu^+}$.

Теорема 10 ([34]). Пусть χ_ω — индикатор замкнутого промежутка ω вещественной оси, не содержащего спектральных особенностей, $\omega \cap \sigma_0 = \varnothing$. Тогда спектральный проектор модельного оператора на инвариантное подпространство, отвечающее порции $\sigma_e(\omega)$ абсолютно-непрерывного спектра, содержащейся в ω, $\sigma_e(\omega) = \sigma_e \cap \omega$, ограничен и дается формулой

$$\mathscr{E}_\omega\begin{pmatrix} f - P_+\Delta f \\ -Sf\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\chi_\omega f - P_+\chi_\omega\Delta f \\ -S\chi_\omega f\end{pmatrix}$$

на любых элементах $P_k\{f, -Sf\}$ из $\tilde{N}_e$.

Собственные φ_ν абсолютно-непрерывного спектра модельного оператора B задаются обобщенными функциями

$$\varphi_\nu(k, \lambda) = P_K\psi_\nu^< = \Delta_\nu^{-1}(\lambda)\begin{pmatrix}\delta(k-\lambda)\nu + \dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{\Delta(\lambda)\nu}{k-\lambda+i0} \\ -S(\lambda)\delta(k-\lambda)\nu\end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом, спектральный проектор на инвариантное подпространство сопряженного оператора B^+, отвечающее той же порции спектра, ограничен и дается формулой

$$\mathscr{E}_\omega^+\begin{pmatrix} -S^+f \\ f - P_-\Delta^+ f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -S^+\chi_\omega f \\ \chi_\omega f - P_-\chi_\omega\Delta^+ f\end{pmatrix}$$

на любых элементах $P_K\{-S^+f, f\}$ из $\tilde{N}_e^+$.

Собственные функции ψ_π абсолютно-непрерывного спектра оператора B^+ задаются формулами

$$\psi_\pi(k, \lambda) = P_K\psi_\pi^> = \Delta_\pi^{-1}\begin{pmatrix} -S^+(\lambda)\delta(k-\lambda)\pi \\ \delta(k-\lambda)\pi - \dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{\Delta(\lambda)\pi}{k-\lambda-i0}\end{pmatrix}.$$

Если ортонормированные системы векторов $\{\pi\}$, $\{\nu\}$ связаны при каждом λ с помощью полярного представления характеристической функции $S^+(\lambda)\pi = s_\pi\nu$, $S\nu = s_\nu\pi$, $\Delta_\pi = 1 - s_\pi^2$, то семейства φ, ψ биортогональны

$$\langle \varphi_\nu(\cdot, \lambda), \psi_{\pi'}(\cdot, \lambda)\rangle_H = -\delta(\lambda-\lambda')\, s_{\frac{\pi}{1-s_\pi^2}}\langle \pi, \pi'\rangle_E,$$

и спектральный проектор на инвариантное подпространство, отвечающее порции спектра $\sigma_e(\omega)$, может быть записан через собственные функции в виде интегрального оператора с ядром

$$\mathscr{E}(k, k') = -\int_\omega \sum_{\nu\perp\operatorname{Ker}\Delta}(1 - s_\pi^2)\, s_\pi^{-1}\varphi_\nu(k, \lambda)\bar{\psi}_\pi(k', \lambda)\, d\lambda.$$

Присутствие спектральных особенностей существенно ухудшает сходимость спектральных разложений. Тем не менее можно указать различные процедуры, дающие спектральные представления и при наличии спектральных особенностей.

Пусть $\{\sigma_\varepsilon\}$ семейство подмножеств вещественной оси $\mathbf{R}$, не содержащее спектральных особенностей и такое, что

1. $|S_e^{-1}(\lambda)|<1/\varepsilon,\quad \lambda\in\sigma_\varepsilon,$
2. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sigma_\varepsilon=R.$

Пусть, кроме того $\mathscr{E}(\sigma_\varepsilon)$ — спектральные проекторы на инвариантные подпространства, отвечающие порциям абсолютно-непрерывного спектра $\sigma_e\cap\sigma_\varepsilon$. Тогда справедлива

Теорема 11 ([33], [35]). Если $\mathscr{F}\in\tilde{N}_e$, то $s\text{-}\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathscr{E}(\sigma_\varepsilon)\mathscr{F}=\mathscr{F}$. Для всего множества N_e сходимость спектрального разложения имеет место уже в более слабой метрике

$$\left|P_K\begin{pmatrix} f\\ -Sf\end{pmatrix}\right|_{W}=|S_e\Delta^{1/2}f|_{L_2}:$$

$$|\mathscr{E}(\sigma_\varepsilon)\mathscr{F}-\mathscr{F}|_W\to 0,\quad \varepsilon\to 0.$$

При наличии спектральных особенностей можно указать также процедуру суммирования спектральных разложений по абсолютно-непрерывному спектру. Опишем такую процедуру, используя скалярное кратное s_e внешнего фактора характеристической функции. Для этого сконструируем семейство внешних функций $\{s_e^\delta\}$, $\delta>0$, которое обладает двумя свойствами.

1. s_e^δ, $\delta>0$, делится на s_e в классе ограниченных функций,
2. $s_e^\delta\to 1$ при $\delta\to 0$.

Можно, например, взять внешние функции, модуль которых мажорируется модулем скалярного кратного вблизи спектральных особенностей, скажем, используя гладкую срезающую вблизи σ_0 функцию η:

$$\eta(x)=\begin{cases}1, & |x|>2,\\ 0, & |x|<1,\end{cases}$$

положить

$$s_e^\delta(z)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int\frac{1+z\lambda}{\lambda-z}\ln|s(\lambda(|\frac{1-\eta[\delta^{-1}\operatorname{dist}(\lambda,\sigma_0)]}{1+\lambda^2}d\lambda.$$

Ясно, что условия 1, 2 при этом будут выполнены.

Теорема 12 ([38]). Оператор $s_e^\delta(B)$ ограничен и $s_e^\delta(B)N_e\subset\tilde{N}_e$. Для любого элемента $\mathscr{F}$ из N_e спектральное разложение сходится по норме

$$s_e^\delta(B)\mathscr{F}=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{\nu\perp\operatorname{Ker}\Delta}\Delta_\nu(\lambda)s_\nu^{-1}\varphi_\nu(*,\lambda)\langle s_e^\delta(B)\mathscr{F},\psi_\pi\rangle_H d\lambda$$

и суммируется к $\mathscr{F}$ при $\delta\to 0$:

$$\mathscr{F}=s\text{-}\lim_{\delta\to 0}-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{\nu\perp\operatorname{Ker}\Delta}\Delta_\nu(\lambda)s_\nu^{-1}(\lambda)s_e^\delta(\lambda)\varphi_\nu(*,\lambda)\langle\mathscr{F},\psi_\pi\rangle_H d\lambda.$$

3.9. Совместная полнота и базисность. Пусть B — модельный диссипативный оператор с внутренней характеристической функцией S, оба фактора которой — произведение Бляшке Π, $\tilde{\Pi}$ и сингулярный Θ, $\tilde{\Theta}$ в канонической факторизации $S=\Pi\tilde{\Theta}-\Theta\tilde{\Pi}$ нетривиальны. В этом случае семейство корневых векторов оператора B не полно в K, но может оказаться, что полна в K объединенная система корневых векторов B и B^+. В этом случае говорят, что имеет место *совместная полнота семейств корневых векторов* B и B^+. В случае, когда объединенное семейство служит базисом Рисса в K, говорят, что имеет место *совместная базисность* (см. [26], [5]).

Рассматривая операторы с внутренней характеристической функцией $S=\Theta\tilde{\Pi}$, всегда можно работать в терминах однокомпонентной модели, где $K=H_+^2\ominus SH_+^2$ и подпространства дискретного спектра N_d, N_d^+ модельных операторов B, B^+ имеют вид $N_d=\Theta(H_+^2\ominus\tilde{\Pi}H_+^2)$, $N_d^+=H^2\ominus\Pi H_+^2$, а их ортогональные дополнения суть $N_s^+=H_+^2\ominus\Theta H_+^2$, $N_s=\Pi(H_+^2\ominus\tilde{\Theta}H_+^2)$ соответственно. Очевидно, что полнота объединенной системы корневых векторов B и B^+—совместная полнота—заведомо имеет место, когда угол между N_s^+ и N_s положителен. Добавляя к N_d, N_s подпространство SH_+^2, а к N_d^+, $N_s^+-H_-^2$ можно свести вопрос о положительности углов между указанными подпространствами к более простому вопросу о положительности углов между ΘH_+^2 и ΠH_-^2 в первом случае и угла между ΘH_-^2 и ΠH_+^2 во втором.

Обычно в задачах спектральной теории дифференциальных операторов, где возникает вопрос о совместной полноте (например, в *задаче Редже*, см. [5], [58]), имеется аналитическая, либо даже целая функция, умножение на которую в $L_2(\mathbf{R})$ переводит классы Харди $H_\pm^2$ в подпространства, образующие нетривиальный угол. Мы сформулируем условия совместной полноты и базисности в терминах такой функции — она называется *производящей*.

Пусть F — целая матрица-функция $F:E\to E$ с определителем, не равным нулю тождественно, допускающая факторизации

$$\begin{aligned}&F=\Pi\tilde{F}_e^{(+)}\ \text{относительно верхней полуплоскости},\\ &F=\Theta\tilde{F}_e^{(-)}\ \text{относительно нижней полуплоскости}.\end{aligned}\qquad(16)$$

Здесь П, $(\Pi^+)^{-1}$ — произведения Бляшке Θ, $(\Theta^+)^{-1}$ — сингулярные целые функции, $F_e^{(\pm)}$ — двусторонне внешние функции в верхней и нижней полуплоскости соответственно. Внутренние факторы П, Θ предполагаются сжимающими в верхней полуплоскости.

Лемма 1. [6]. Пусть D, D' — область определения оператора умножения на F, $(F^{-1})^+$ в $L_2(\mathbf{R}, E)$, $D_\pm = D \cap H^2_\pm$. $D'_\pm = D' \cap H^2_\pm$. Тогда $\overline{D}_\pm = H^2_\pm$, $\overline{D}'_\pm = H^2_\pm$, $\overline{FD_+} = \Pi H^2_+$, $\overline{FD_-} = \theta H^2_-$, $\overline{(F^+)^{-1}D'_+} = \theta H^2_+$, $\overline{(F^+)^{-1}D'_-} = \Pi H^2_-$. Если, кроме того, оператор Гильберта, окаймленный умножением на F, F^{-1} ограничен в L_2

$$\left| \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x) F^{-1}(y)}{x-y} u(y)\, dy \right|_{L_2} \leqslant C_F |\varphi|_{L_2}, \qquad (17)$$

то углы β, β' между парами подпространств $(\Pi H^2_+, \theta H^2_-)$ и $(\theta H^2_+, \Pi H^2_-)$ положительны $\sin\beta$, $\sin\beta' \geqslant C_F^{-1}$ и соответствующие косые проекторы получаются замыканием с плотных множеств в $L_2(\mathbf{R}, E)$ конструкций, полученных окаймлением операторами умножения на F, F^{-1} и, соответственно на $F^{+^{-1}}$, F^+ ортопроектора P_- на класс Харди H^2_-:

$$\mathscr{P}^{\|\Pi H^2_+\|}_{\theta H^2_-} = F P_- F^{-1}, \quad \mathscr{P}^{\|\theta H^2_+\|}_{\Pi H^2_-} = (F^+)^{-1} P_- F^+.$$

В скалярном случае условие (17) эквивалентно известному *условию Макенхаупта* для весовой функции $w = |F|^2$:

$$\sup_{\Delta \in \mathbf{R}} \frac{1}{|\Delta|} \int_\Delta w\, dt \cdot \frac{1}{|\Delta|} \int_\Delta w^{-1} dt < \infty.$$

В матричном случае, выполнение условия Макенхаупта с весовой матрицей $w = F^+F$ достаточно для ограниченности окаймленного оператора Гильберта лишь при дополнительных требованиях (см., например, [6]). В рассматриваемых далее задачах резонансного рассеяния производящая функция F возникает с самого начала как значение в нуле решения Иоста. В этой ситуации нужда в тонких признаках ограниченности преобразования Гильберта отпадает, ибо в большинстве интересных случаев F и F^{-1} равномерно ограничены на вещественной оси.

Пусть $B : K \to K$ — диссипативный модельный оператор, обладающий внутренней характеристической функцией S, $S = \Pi\tilde{\Theta} = \Theta\tilde{\Pi}$.

Теорема 13 ([37], [56]). Если существует производящая функция F обладающая факторизациями (16), и для нее выполнено условие (17), то объединенная система корневых векторов операторов B и B^+ полна (совместно полна) в K и ω-линейно независима. Если, кроме того, каждая из систем корневых векторов образует базис Рисса в своей линейной оболочке, то объединенная система является базисом Рисса в K.

Отметим, что геометрическая идея применения производящей целой функции для оценки угла между подпространствами в скрытом виде присутствует в давней работе Редже [58]. Плодотворность этой идеи трудно переоценить — на ней основаны критерии базисности семейств экспонент и воспроизводящих ядер, полученные в [37], [56].

Вопрос, аналогичный разобранному, можно задать и в случае операторов, обладающих абсолютно-непрерывным спектром: когда объединенная система собственных функций абсолютно-непрерывного спектра модельных операторов B и B^+ полна во всем пространстве? Этот вопрос для абстрактных операторов решен в [41]. Там показано, что совместная полнота на абсолютно-непрерывном спектре имеет место всегда, однако подпространства абсолютно-непрерывного спектра всегда пересекаются и потому совместной базисности в этом случае нет. Этому обстоятельству можно дать прозрачное физическое объяснение.

3.10. Парциальное рассеяние и рассеяние для диссипативных операторов. Схема Лакса—Филлипса в задаче рассеяния для унитарной группы $U_t = e^{i\mathscr{L}t}$, обладающей приходящими и уходящими подпространствами может быть реализована следующим стандартным образом.

Пусть $\overset{0}{U}_t = e^{i\mathscr{L}^0 t}$ — унитарная группа в $D_- \oplus D_+$, совпадающая на $D_\pm$ с U_t (*«тривиальное сцепление»*):

$$U_t - \overset{0}{U}_t|_{D_+} = 0, \quad t > 0; \quad U_t - \overset{0}{U}_t|_{D_-} = 0, \quad t < 0.$$

Пусть, далее $U^1_t = e^{i\mathscr{L}^0 t}$ — некоторая унитарная группа, действующая в трансляционно-инвариантном подпространстве $K = H \ominus \{D_- \oplus D_+\} \equiv H_1$. Если оператор $\mathscr{L}$ *«сравним»* с $\mathscr{L}^0 \oplus \mathscr{L}^1$, т. е. существуют волновые операторы $W_\pm(\mathscr{L}^0 \oplus \mathscr{L}^1, \mathscr{L})$, то существует и соответствующий оператор рассеяния

$$\underset{t\to\infty}{s\text{-}\lim}\, e^{-i(\mathscr{L}^0 \oplus \mathscr{L}^1)t} e^{2i\mathscr{L}t} e^{-i(\mathscr{L}^0 \oplus \mathscr{L}^1)t},$$

который имеет блочную форму $S = \{S_{l,k}\}$ $l, k = 0, 1$:

$$S_{lk} = \underset{t\to\infty}{s\text{-}\lim}\, e^{-i\mathscr{L}^l t} P_{H_l} e^{2i\mathscr{L}t} P_{H_k} e^{-i\mathscr{L}^k t}, \quad l, k = 0, 1.$$

Блочную форму имеет, конечно, и соответствующая S-матрица. Ее блок S_{00} совпадает с *матрицей рассеяния в смысле Лакса—Филлипса*, т. е. с характеристической функцией генератора полугруппы срезок $Z_t = \exp iBt = P_K e^{i\mathscr{L}t}|_K$, действующей в $K = H_1$. В случае, когда оператор $\mathscr{L}^0 \oplus \mathscr{L}^1$ отличается от $\mathscr{L}$ лишь на конечномерный, полная S-матрица, конечно, унитарна, но ее блоки могут быть сжимающими операторами. Мы будем называть их *парциальными* S-матрицами, отвечающими данному разложению невозмущенного оператора на ортогональные слагаемые.

В том случае, когда диссипативный генератор срезки Z_t, имеет абсолютно-непрерывный спектр, $N_e \neq 0$, можно ставить вопрос о сравнении средствами теории рассеяния унитарной группы U_t^1 с полугруппой Z_t. В этом случае удобно пользоваться следующим определением волновых операторов и матрицы рассеяния (см. [39])

$$W_+(\mathscr{L}^1, B) = s\text{-}\lim_{t\to\infty} P_{H_1} U_{-t}^1 Z_t \mathscr{P}_{N_e},$$

$$W_-(B, \mathscr{L}^1) = s\text{-}\lim_{t\to\infty} \mathscr{P}_{N_e} Z_t U_{-t}^1 P_{H_1},$$

$$S(\mathscr{L}^1, \mathscr{B}) = W_+(\mathscr{L}^1, \mathscr{B}) W_-(\mathscr{B}, \mathscr{L}^1).$$

Теорема 14. Если пара $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}^0 \oplus \mathscr{L}^1$ сравнима и внешняя компонента $\mathscr{B}_e$ отделима с помощью ограниченного проектора $\mathscr{P}_e$, то оператор рассеяния $S(\mathscr{L}^1, \mathscr{B})$ существует и равен сильному пределу

$$S(\mathscr{L}^1, \mathscr{B}) = s\text{-}\lim_{t\to\infty} e^{-i\mathscr{L}^1 t} P_{H_1} e^{2iBt} P_{H_1} e^{-i\mathscr{L}^1 t}.$$

Он совпадает с элементом s_{11} полного оператора рассеяния, т. е.

$$S(\mathscr{L}^1, \mathscr{B}) = s\text{-}\lim_{t\to\infty} e^{-i\mathscr{L}^1 t} P_{H_1} e^{2i\mathscr{L}t} P_{H_1} e^{-i\mathscr{L}^1 t}.$$

Доказательство основано на том, что H_1 служит трансляционно-инвариантным подпространством для унитарной группы $e^{i\mathscr{L}t}$ и вклад от внутренней компоненты $\mathscr{B}$ в пределе исчезает:

$$s\text{-}\lim_{t\to\infty} e^{i\mathscr{B}t} \mathscr{P}_i = 0.$$

То обстоятельство, что S-матрица пары $(\mathscr{L}^1, \mathscr{B})$ является объектом самосопряженной теории, служит основанием для вычисления таких важных характеристик диссипативного оператора, как функция спектрального сдвига и для записи формул следов.

§ 4. Спектральный анализ операторов, возникающих в задачах резонансного рассеяния

Все эти задачи связаны с анализом гиперболических уравнений

$$u_{tt} + Lu = 0, \tag{18}$$

где L — эллиптический самосопряженный оператор второго порядка, действующий в гильбертовом пространстве H. В большинстве случаев, рассмотренных далее, оператор L положителен. Тогда в пространстве данных Коши $U = (u, u_t) = (u_0, u_1)$ можно ввести *энергетическую метрику*

$$|U|_{\mathscr{E}}^2 = \frac{1}{2}\{|\sqrt{L}\, u|_H^2 + |u_t|^2\},$$

превращая его в гильбертово пространство $\mathscr{E}$. *Разрешающий оператор* U_t, пересчитывающий данные Коши от начального момента времени $t=0$ к произвольному t, унитарен в энергетической метрике и восстанавливает обобщенное решение с «конечной энергией» уравнения (18), которое можно записать для данных Коши в виде

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t} U = i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ L & 0 \end{pmatrix} U \equiv \mathscr{L} U. \tag{19}$$

Оператор $\mathscr{L}$, который мы будем далее называть условно *лаксовским квадратным корнем* из оператора L, самосопряжен в пространстве данных Коши с конечной энергией, и его спектральные характеристики непосредственно связаны со спектральными характеристиками оператора L.

Описанная в предыдущем параграфе схема Лакса—Филлипса анализа задачи рассеяния применима к гиперболическому уравнению (18) в том случае, когда разрешающая группа $U_t = \exp i\mathscr{L}t$ имеет ортогональные приходящие и уходящие подпространства. В классической задаче для акустического уравнения $u_{tt} - \Delta u = 0$ вне компактного препятствия в $\mathbf{R}^3$ Лакс и Филлипс исследовали экспоненциальное убывание энергии в ближней зоне (см. [57]). Роль приходящих и уходящих подпространств D здесь играют классы данных Коши, порождающих вне фиксированного шара $K_a = \{x : |x| < a\}$, содержащего препятствие, решения типа приходящих и уходящих волн

$$D_- = \{U = (u_0, u_1) : u(x, t) = 0, \ |x| + t \geqslant a\},$$

$$D_+ = \{u = (u_0, u_1) : u(x, t) = 0, \ |x| - t \geqslant a\}.$$

Лакс и Филлипс доказали экспоненциальное убывание энергии решений уравнения (19) в шаре K_a, в случае звездных препятствий, опираясь на компактность срезки $Z_t = P_K U_t | K$ оператора эволюции, $t \geqslant 0$, на трансляционно инвариантное подпространство $K = \mathscr{E} \ominus \{D_- \oplus D_+\}$, состоящее из данных Коши с конечной энергией, сосредоточенной целиком в шаре K_a, то есть таких, что первая их компонента вне шара K_a гармонична, а вторая равна нулю. Лакс и Филлипс доказали, что s — матрица, отвечающая задаче рассеяния для группу U_t, то есть характеристическая функция генератора B соответствующей полугруппы сжатий $Z_t = \exp(iBt)$, $t > 0$, совпадает с точностью до экспоненциального множителя с *квантово-механической s-матрицей* $s(\omega, \nu, k)$, задающей асимптотику на бесконечности рассеянных волн $\psi(x, \nu, k)$:

$$\psi(x, \nu, k) \underset{x\to\omega\cdot\infty}{\cong} e^{-ik\langle x,\nu\rangle} + f(\omega, \nu, k)\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|},$$

$$s(\omega, \nu, k) = \delta(\omega+\nu) + \frac{ik}{2\pi} f(\omega, \nu, k),$$

$$s_a = \exp(2ika)\, s.$$

Тем самым исследование спектральных свойств генератора сведено к исследованию аналитических свойств соответствующей матрицы рассеяния, что само по себе представляет весьма трудную задачу. Для классической задачи Лакса—Филлипса в $\mathbf{R}^3$ полное исследование спектральных свойств оператора B до сих пор отсутствует. В случаях, когда оператор является обыкновенным дифференциальным оператором в пространстве $L_2(\mathbf{R}, E)$, с конечной векторной размерностью, $\dim E < \infty$, удается продвинуть спектральный анализ генератора достаточно далеко. Отметим, что первый шаг в исследовании свойств собственных функций генератора B в простейшем случае был сделан Редже [58], который фактически доказал совместную полноту для операторов B, B^+ (см. ниже п. 4.1).

Все обсуждаемые далее задачи резонансного рассеяния включают в себя спектральный анализ соответствующих диссипативных операторов. С точки зрения теории диссипативных операторов эти задачи выделены тем, что в них с самого начала присутствует дилатация рассматриваемого диссипативного оператора B — самосопряженный генератор унитарной группы эволюции, срезкой которой получается полугруппа $\exp(iBt), t\geqslant 0$. В соответствии с теоремой В. М. Адамяна — Д. З. Арова [1], характеристическая функция диссипативного оператора, возникающего в задачах резонансного рассеяния, появляется как объект самосопряженной теории — она служит матрицей рассеяния для пары самосопряженных операторов. Соответствующие собственные функции абсолютно-непрерывного спектра (п. 4.2) также получаются простой срезкой на трансляционно-инвариантное подпространство собственных функций исходного самосопряженного оператора.

4.1. Резонансное рассеяние для матричного полярного оператора. Пусть $A(x)$ — строго положительная конечная $d\times d$-матрица-функция, заданная на полуоси $0\leqslant x<\infty$, обращающаяся в единичную при $x>a$ и гладкая на промежутке $0<x<a$.

Рассмотрим в пространстве всех квадратично-суммируемых на полуоси с весом A вектор-функций $L_2(\mathbf{R}^+, A)$ самосопряженный оператор L, заданный дифференциальным выражением $-A^{-1}(x)\frac{d^2}{dx^2}$ и граничным условием $u(0)=0$. Разрешающая группа соответствующего волнового уравнения $A(x)\,u_{tt}=u_{xx}$, $u(0, t)=0$, унитарна в пространстве $\mathscr{E}$ данных Коши с энергетической метрикой $\|U\|^2_{\mathscr{E}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \{|u_0'|^2 + \langle A(x)u_1, u_1\rangle\}\,dx$ и обладает ортогональными приходящими и уходящими подпространствами $D_\mp$, которые состоят из данных Коши, порождающих приходящие и уходящие даламберовские волны при $x\geqslant a$

$$D_-^a = \{(u_0, u_1)\colon u(x, t) = u(x+t),\ x\geqslant a,\ t>0\},$$

$$D_+^a = \{(u_0, u_1)\colon u(x, t) = u(x-t);\ x\geqslant a,\ t>0\}.$$

Трансляционно-инвариантное подпространство $K = \mathscr{E}\ominus\{D_-\oplus D_+\}$ состоит из всех данных, обладающих конечной энергией, первая компонента которых постоянна, а вторая обращается в нуль при $x>0$.

Спектральный анализ генератора B полугруппы срезок

$$Z_t = \exp(iBt) = P_K U_t | K,\ t\geqslant 0$$

был проведен в § 3 в приходящем спектральном представлении дилатации — т. е. оператора $\mathscr{L}$ — которое теперь будет построено с помощью специальной системы собственных функций абсолютно-непрерывного спектра — рассеянных волн.

Пусть $E_a(x, k)$ — *решение Йоста* (см. [2]), т. е. решение однородного уравнения — $E'' = k^2 AE$, обращающееся в экспоненту $\exp[-ik(x-a)]I$ при $x\geqslant a$. Значение $E(x, k)$ в нуле называется *функцией Йоста*, $E_a(0, k) \equiv M_a(k)$. *Рассеянной волной* называется решение однородного уравнения

$$\psi_a^-(x, k) = E_a(x, -k) - E_a(x, k)\, M_a^{-1}(k)\, M_a(-k).$$

Матричный коэффициент перед вторым слагаемым называется *коэффициентом отражения*

$$S_a(-k) = M_a^{-1}(k)\, M_a(-k).$$

В [5] показано, что приходящее спектральное представление группы $\mathscr{T}_-$ задается формулой

$$U = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathscr{T}_-} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R\to\infty} \int\limits_0^R [iku_0 + u_1]\, \psi^-(x, k)\, A(x)\, dx \equiv \widetilde{U}(k),$$

а обратное отображение — формулой

$$\widetilde{U} \xrightarrow{\mathscr{T}_-^{-1}} U(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^R \begin{pmatrix} 1/ik \\ 1 \end{pmatrix} \psi^-(x, k)\, \widetilde{U}(k)\, dk,$$

где интеграл берется по контуру, обходящему точку $k=0$ сверху. Отображение $\mathscr{T}_-$ устанавливает следующие изометрические соответствия (эпиморфизмы)

$$L_2(\mathbf{R}^+,\ A)\xrightarrow{\mathcal{T}_-}L_2(\mathbf{R}),$$

$$D^a_-\to H^2_-(E),$$

$$D^a_+\to S_a H^2_+(E).$$

Из последнего результата видно, что коэффициент отражения служит характеристической функцией диссипативного генератора B полугруппы срезок, как это и должно быть, согласно результату В. М. Адамяна — Д. З. Арова [1]. Из теоремы существования и единственности для дифференциальных уравнений следует, что решение Иоста, а вместе с ним и функция Иоста — целая функция экспоненциального типа. Ровно так же, как и в случае матричного оператора Шрёдингера (см. [28]), доказывается, что ее корни, лежащие в нижней полуплоскости, отвечают экспоненциально убывающим решениям Иоста, удовлетворяющие граничным условиям в нуле. В нашем случае таких решений нет, поэтому все корни лежат в верхней полуплоскости. Ввиду вещественности коэффициентов уравнения, коэффициент отражения обладает свойством $S(k)=S^+(-\bar{k})$ и следовательно, корни s-матрицы расположены симметрично относительно мнимой оси, а соответствующие корневые подпространства совпадают $\operatorname{Ker} S(k_n)=\operatorname{Ker} S^+(-\bar{k}_n)$. Наконец, s-матрица унитарна на вещественной оси и аналитична в верхней полуплоскости, т. е. является внутренней функцией и факторизуется в виде произведения сингулярного внутреннего фактора и фактора Бляшке. Мера, отвечающая сингулярному фактору, имеет единственную нагрузку на бесконечности.

Факторизация матрицы рассеяния является трудной аналитической задачей. Для матричного уравнения Шрёдингера она решена при условии, что потенциал является гладкой финитной эрмитовой матрицей-функцией, обращающейся в нуль в самой правой точке своего минимального носителя негладким образом (см. [28]). Сформулируем здесь аналогичную теорему в применении к полярному оператору.

Свяжем с матрицей-функцией $A(x)$ — монотонно возрастающее семейство ортопроекторов в E, максимальное по отношению к свойству

$$\{A(x')-I\}P(x)=0,\ x'>x.$$

Это семейство нормировано на непрерывность слева, и, ввиду конечномерности пространства E имеет конечное число скачков P_S в точках роста a_S, расположенных между нулем и точкой a, правее которой $P(x)=I$. Это семейство назовем *индикаторным семейством* весовой матрицы A. Не ограничивая общности можно считать, что $P(0)=0$.

Индикаторное семейство показывает как нарастает размерность пространства, где весовая матрица нетривиальна, по мере движения справа налево по оси x.

Допустим, что весовая матрица обладает следующими свойствами в дополнение к условиям положительности и финитности $(A(x)=I,\ x>a)$:

I. Функция $\{A(x)-I\}P_S$ принадлежит C_l' на $(0,\ a_S)$.

II. Существует целое число $l,\ l<l'$ такое, что вблизи каждой точки роста a_S, $0\leqslant a_S-x\leqslant 1$, индикаторного семейства выполнено условие невырожденности $\forall e,\ e\in E$:

$$\left|\sum_{r=0}^{l}(a_S-x)^r\frac{d^r(A(x)-I)}{dx^r}(a_S)P_Se\right|\geqslant\delta_S|a_S-x|^l|P_Se|,\quad \delta_S>0.$$

Условия I, II означают, что в каждом подпространстве P_SE весовая функция обращается в единицу в самой правой точке носителя a_S, испытывая разрыв непрерывности достаточно низкого порядка. Весовые функции, обладающие указанными свойствами, получаются, например, срезкой гладких эрмитовых матриц-функций $Q(x)$ с помощью индикаторных семейств проекторов:

$$A(x)-I=P(x)Q(x)P(x),$$

таких, что в точках скачков $P(x)$ порядок вырождения $P(x)Q(x)P(x)$ ниже гладкости.

Теорема 15 (см. [28]). Если весовая функция $A(x)$ удовлетворяет условиям I, II, то s-матрица факторизуется в виде

$$S^a(k)=e^{ik\sum\limits_S(a-a_S)P_S}\Pi_0(k)e^{ik\sum\limits_S(a-a_S)P_S},$$

где $\Pi_0(k)$ — фактор Бляшке, а экспоненты — сингулярные факторы.

Из этой теоремы видно, что системы собственных векторов операторов B, B^+ полны в том и только том случае, когда весовая функция обрывается сразу в крайней правой точке промежутка $(0,a)$, т. е. $P_a=I$.

Теорема 16 ([5], [28]). Операторы B, $-B^+$ имеют дискретный спектр, совпадающий с множеством точек k_n верхней полуплоскости таких, что $\operatorname{Ker} S(k_n)\neq 0$. Это множество точек расположено симметрично относительно мнимой оси и при выполнении условий I, II все они, кроме, быть может, конечного числа являются простыми полюсами соответствующих резольвент. Если $e_n\in\operatorname{Ker} S(k_n)=\operatorname{Ken} S^+(-k_n)$, $f_n\in\operatorname{Ken} S^+(k_n)$, то собственные функции операторов B, B^+ нормированные на единицу, даются формулами

$$\psi_{k_n}(x)=\begin{cases} i\sqrt{\dfrac{\operatorname{Im} k_n}{\pi}}\begin{pmatrix}1/ik_n\\ 1\end{pmatrix}E(x,k_n)e_n, & x\leqslant a,\\ i\sqrt{\dfrac{\operatorname{Im} k_n}{\pi}}\begin{pmatrix}1/ik_n\\ 0\end{pmatrix}e_n, & x>a,\end{cases}$$

$$\psi_{k_n}(x)=\begin{cases} i\sqrt{\dfrac{\operatorname{Im} k_n}{\pi}}\begin{pmatrix}1/ik_n\\ 1\end{pmatrix}E(x,k_n)e_n, & x\leqslant a,\\ i\sqrt{\dfrac{\operatorname{Im} k_n}{\pi}}\begin{pmatrix}1/ik_n\\ 0\end{pmatrix}e_n, & x>a;\end{cases}$$

$$\varphi_{-\bar k_n}(x)=\begin{cases} i\sqrt{\dfrac{\operatorname{Im} k_n}{\pi}}\begin{pmatrix}1/i\bar k_n\\ 1\end{pmatrix}E(x,-\bar k_n)f_n, & x\leqslant a,\\ i\sqrt{\dfrac{\operatorname{Im} k_n}{\pi}}\begin{pmatrix}1/i\bar k_n\\ 0\end{pmatrix}f_n, & x>a.\end{cases}$$

Эти функции удовлетворяют следующему условию биортогональности

$$\langle \psi_{k_n}, \varphi_{\bar k_n}\rangle_{\mathscr{E}}=\begin{cases}0, & n\neq m,\\ \langle S'(k_n)e_n, f_n\rangle 2\operatorname{Im} k_n, & n=m.\end{cases}$$

Спектральные проекторы на собственные подпространства оператора B, отвечающие простым корням характеристической функции, даются формулами

$$\mathscr{P}_{k_n}\begin{pmatrix}u_0\\ u_1\end{pmatrix}=\frac{1}{2\pi}\begin{pmatrix}1/ik_n\\ 1\end{pmatrix}\sum_{e_n\in\operatorname{Ker} S(k_n)}\langle S'(k_n)e_n, f_n\rangle^{-1}\cdot E(x,k_n)e_n\times$$

$$\times\langle ik_nu_0+u_1, E(\cdot,-\bar k_n)f_n\rangle_{L_2(A)}$$

Поскольку генератор $\mathscr{L}$ унитарной группы является дилатацией диссипативного оператора B, имеет место равенство

$$(B-\lambda I)^{-1}=P_K(\mathscr{L}-\lambda I)^{-1}|K,\ \operatorname{Im}\lambda<0.$$

Замечательно, что аналогичное равенство более сложной природы имеет место и для оператора L, чья резольвента в точке $\lambda=k^2$, $\operatorname{Im} k>0$, связана с резольвентой $\mathscr{L}$ по правилу (см. [6])

$$P_K\begin{pmatrix}(L-k^2I)^{-1} & 0\\ 0 & (L-k^2I)^{-1}\end{pmatrix}P_K=-\frac{\{(B+kI)^{-1}+(-B^{+}+kI)^{-1}\}}{2k}. \quad (20)$$

Из этой формулы следует, что резольвента исходного оператора L аналитически продолжима на нефизический лист $\operatorname{Im} k<0$ спектральной переменной, однако на этом листе уже не является резольвентой какого-либо оператора, а лишь линейной комбинацией резольвент операторов $-B$, B^{+}. Тем не менее, равенство (20) позволяет вычислить главные части резольвенты через корневые векторы операторов $-B$, B^{+}.

Теорема 17 ([35] [5]). **Главная часть резольвенты оператора L в полюсе $\bar k_n$ на гладкой функции u_0, $\operatorname{supp} u_0\subset[0,a]$**

имеет вид

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2k(\bar k_n-k)}\sum_{e_n}\frac{E(x,-\bar k_n)f_n\langle u, E(\cdot,k_n)e_n\rangle_{L_2}}{\langle S'(k_n)e_n, f_n\rangle}.$$

Здесь e_n — ортонормированный базис в $\operatorname{Ker} S(k_n)$, $f_n=S(k_n,e_n|S(k_n)e_n|^{-1}$.

Тонкий анализ спектральных свойств оператора B основывается на более сильных предположениях о коэффициенте A.

Теорема 18[5]. Если матрица $\sqrt{A}$ вещественно-аналитична на промежутке $[0,a]$ и среди ее собственных чисел нет тождественно равных, все собственные числа $\lambda_j(a)$ оператора $A(a-0)$ отличны от единицы, а все числа

$$\beta_j=\frac{1}{2\int\limits_0^a \lambda_j(\xi)\,d\xi}\ln\left|\frac{\lambda_j(a)+1}{\lambda_j(a)-1}\right|\equiv\frac{1}{2\alpha_j}\ln\left|\frac{\lambda_j(a)+1}{\lambda_j(a)-1}\right|$$

различны, то

1. Все достаточно далекие корни k_n S-матрицы являются простыми, множество далеких корней распадается в конечное число серий

$$q_l^j=\frac{\pi}{\alpha_j}l+\gamma_l+i\beta_j+o(1),\quad \gamma_j=\begin{cases}0, & \lambda_j(a)>1,\\ \dfrac{\pi}{2\alpha_j}, & \lambda_j(a)<1,\end{cases}$$

$$j=1,2,\ldots,\dim E,\quad l=0,\pm 1,\ldots$$

2. Соответствующие этим корням корневые векторы $e_l^j\in\operatorname{Ker} S(q_l^j)$ асимптотически ортогональны $e_l^j\to e^j$, $l\to\infty$; $\langle e^j, e^{j'}\rangle=0$, $j\neq j'$ и подпространства $\operatorname{Ker} S(q_l^j)$ одномерны.

3. Система корневых векторов оператора B полна и образует базис Рисса в трансляционно-инвариантном подпространстве.

В одномерном случае, $\dim E=1$ полярное уравнение изучалось в работах [56] и [43]. В работе [43] исследовано резонансное рассеяние акустических волн на сферически-симметричной неоднородности плотности в $\mathbf{R}^3$. Переменные в этой задаче делятся и она распадается на бесконечную серию задач, отвечающих фиксированным угловым моментом, для коэффициентов u_l в разложении решения по сферическим функциям Y_l, $u=\sum_{l=0}^{\infty}u_l(r)Y_l$. При этом, для функций $v_l=ru_l$ записываются волновые уравнения

$$\frac{\partial^2 v_l}{\partial t^2}=\frac{1}{\rho^2(r)}\left[\frac{\partial^2 v_l}{\partial r^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}v_l\right],\quad l=0,1,\ldots,$$

задающих в пространствах $\mathscr{H}_l$ данных Коши $V\equiv(v, v_t)\equiv(v^0, v^1)$ с метрикой

$$|V|^2_{\mathscr{H}_l}=\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty\left\{|v^0|^2+\frac{l(l+1)}{r^2}|v^0|^2+\rho^2(r)|v^t|^2\right\}dr$$

унитарную динамику, обладающую ортогональными приходящими и уходящими подпространствами $D_\pm^l$ состоящими из данных Коши приходящих и уходящих решений с носителями на (a,∞). Плотность $\rho^2(r)$ предполагается положительной дважды непрерывно дифференцируемой на промежутке $[0,\infty)$, равной единице тождественно при $x>a$, а в точке a имеющей поведение одного из следующих трех типов.

1. ρ дважды непрерывно дифференцируема на замкнутом промежутке $[0,a]$, и двусторонне ограничена $0<c_1\leqslant\rho(x)\leqslant C_2<$ $<\infty$, $\rho(a-0)\neq1$.

2. $\rho(x)=(a-x)^{g-1}\rho_1(x)$, $1/2<g<1$, и $\rho_1(x)$ — дважды непрерывно дифференцируема и двусторонне ограничена на промежутке $[0,a]$.

3. $\rho(x)=(a-x)^g\rho_1(x)$, $1<g<\infty$ при тех же условиях на ρ_1.

В случае поведения типа 1 распределение резонансов, в том числе и для высших моментов, $l>0$, остается таким же, как и при $l=0$ и дается предыдущей теоремой. В случае поведения типов 2, 3 имеет место.

Теорема 19 ([43]). Независимо от номера момента l резонансы $k_n^{(2)}$, $k_n^{(3)}$ асимптотически приближаются из верхней полуплоскости к вещественной оси вдоль целочисленных решеток:

$$k_n^{(2)}=-\left[\pi n+\frac{\pi}{2}(1+1/g)\right]\left(\int\limits_0^a\rho(s)\,ds\right)^{-1}+O(1/n),$$

$$k_n^{(3)}=-\left[\pi n+\frac{\pi}{2}(1-1/g)\right]\left(\int\limits_0^a\rho(s)\,ds\right)^{-1}+O(1/n^{\alpha}),$$

где $\alpha=1$ при $g<2$, $\alpha=2/g$ при $g>2$.

Соответствующие системы резонансных состояний являются базисами Рисса в своих линейных оболочках и полны в трансляционно-инвариантных подпространствах $K_l=\mathscr{H}_l\ominus\{D^l_+\oplus D^l_-\}$, а отвечающие им ортогонализаторы Φ^l представляются в виде $I+V^l$, где V^l — компактные операторы из симметрично-нормированных идеалов $\mathfrak{S}_\alpha$, $\alpha=\alpha(g)$.

В работах [5], [26], [43] обсуждается также *задача Редже* в исходной постановке (см. [58]). Редже искал условия полноты семейства решений задачи Штурма—Лиувилля со спектральным параметром в граничном условии

$$\begin{cases}-u''=k^2A^2(x)u,\quad 0<x<b,\quad b\geqslant a,\\ u(0)=0,\quad u'(b)+iku(b)=0.\end{cases}\qquad(21)$$

Из теоремы 16 видно, что решения задачи (21) существуют при совпадении k с резонансами k_n, независимо от выбора b, и представляют собою просто вторые компоненты собственных функций соответствующего оператора B^b — генератора срезки унитарной группы эволюции волнового уравнения на трансляционно-инвариантное подпространство — ортогональное дополнение $K_b=\mathscr{E}\ominus\{D^b_-\oplus D^b_+\}$ приходящих и уходящих подпространств $D^b_\mp$, состоящих из данных Коши приходящих и уходящих решений с носителями на (b,∞). Из теоремы 18 видно также, что, ввиду совпадения ядер $\operatorname{Ker}S(k_n)=\operatorname{Ker}S^+(-\bar{k}_n)$ в симметричных относительно мнимой оси резонансах k_n, $\hat{k}_n=-\bar{k}_n$, собственные функции оператора $-B^+$ в точке k_n имеют вид

$$\varphi_{k_n}(x)+\begin{cases}-i\sqrt{\dfrac{\operatorname{Im}k_n}{\pi}}\begin{pmatrix}-1/ik_n\\1\end{pmatrix}E(x,k_n)e_n, & x\leqslant b,\\ -i\sqrt{\dfrac{\operatorname{Im}k_n}{\pi}}\begin{pmatrix}-1/ik_n\\0\end{pmatrix}e_n, & x>b,\end{cases}$$

и значит

$$\frac{1}{2}\{\psi_{k_n}(x)+\varphi_{k_n}(x)\}=\begin{cases}-i\sqrt{\dfrac{\operatorname{Im}k_n}{\pi}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}E(x,k_n)e_n, & x\leqslant b,\\ 0, & x>b,\end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\{\psi_{k_n}(x)-\varphi_{k_n}(x)\}=\begin{cases}-i\sqrt{\dfrac{\operatorname{Im}k_n}{\pi}}\begin{pmatrix}1/ik_n\\0\end{pmatrix}E(x,k_n)e_n, & x\leqslant b,\\ -\sqrt{\dfrac{\operatorname{Im}k_n}{\pi}}\begin{pmatrix}1/ik_n\\0\end{pmatrix}e_n, & x>b.\end{cases}$$

Отсюда следует

Теорема 20. Для того чтобы однокомпонентная система $\{E(x,k_n)e_n\}$ была полна в $L_2(0,b)$ и в $W_2^1(0,b)$, необходимо и достаточно, чтобы объединенная система собственных векторов операторов B_b, $-B_b^+$ была полна в трансляционно-инвариантном подпространстве, т. е. имела место совместная полнота.

Последнее утверждение открывает путь к исследованию полноты (а также базисности) системы решений уравнения (21]. Решая соответствующую задачу для уравнения Шрёдингера с финитным потенциалом, исчезающим вне промежутка $(0,a]$, Редже показал [58], что семейство решений аналогичной задачи образует полную систему в $L_2(0,b)$ если $b\leqslant2a$. В [56] доказано следующее утверждение об одномерной полярной задаче (21), $\dim A=1$:

Если $a\leqslant b\leqslant a+\alpha$, то система решений задачи (21) полна в $L_2(0,b)$, если же $b=a+\alpha$, она является базисом Рисса, $\alpha=$ $=\int_0^a A(x)\,dx$.

Доказательство этого факта в [56] основано на описанной теоремой эквивалентности задачи Редже задаче о совместной полноте, о которой шла речь в предыдущем параграфе. Более изощренные факты см. в [55].

4.2. Задача резонансного рассеяния для одномерного оператора Шрёдингера с матричным потенциалом изучалась в [28]. Там описана факторизация S-матрицы и серийная структура ее корней.

Теорема 21 ([28]). Допустим, что матричный потенциал V одномерного оператора Шрёдингера в $L_2(0,\infty)$, $Ly=-y''+V(x)y$; $y(0)=0$, является эрмитовым, финитным: $V(x)=0$, $x>a$, и связанная с ним матрица-функция $\sigma_0(x)=\int_x^\infty V(s)\,dS$ удовлетворяет условиям I, II из п. 4.1 с заменой l на $l+1$. Тогда функция Иоста $M_a(k)$, нормированная условием $E_a(k)=1$, $E_a'(a,k)=-ik$ имеет асимптотику при $|k|\to\infty$:

$$M_a(k)=e^{ika}\Big[1+o(1)+\sum_j \exp(-2ika_j)\Big]\times$$

$$\times\frac{1}{(2ik)^2}\left[V(a_j)+\frac{V'(a_j)}{2ik}+\ldots+\frac{V^{(e)}(a_j)}{(2ik)^e}\right]p_j.$$

Здесь через a_j обозначены точки роста индикаторного семейства $P(x)$ потенциала, а p_j — соответствующие им скачки $p_j=P(a_j+0)-P(a_j)$.

Если, кроме того $N_j^r=\bigcap_{0\leqslant j<r}\operatorname{Ker}V^{(s)}(a_j)$ и $\Pi_j^r\equiv\Pi_{N_j^r}$ соответствующая цепочка ортопроекторов, $\Pi_j^{r-1}-\Pi_j^r=\pi_j^r$, $r\geqslant 1$, $p_j=\sum_{r=1}^{l+1}\pi_j^r$ и выполнено условие II:

операторы $\pi_j^s V^{(s)}\pi_j^s$ обратимы в $\pi_j^s E$,

то корни k_n функции Иоста $M_a(k)$ лежат вблизи корней матрицы-функции

$$f(k)=I+\sum_j \exp(-2ika_j)\frac{1}{(2ik)^2}\sum_{s=0}^{l}\frac{\pi_j^s V^{(s)}\pi_j^s}{(2ik)^s}=$$

$$=\sum_{a_j>0}\sum_{s=0}^{l}\left\{\pi_j^s+e^{-2ika_j}\frac{\pi_j^s V^{(s)}(a_j)\,\pi_j^s}{(2ik)^{s+2}}\right\},$$

и, таким образом, распадаются на серии, асимптотически близкие к сериям корней $k_n\sim\frac{n\pi}{a_j}+\ln\frac{n\pi}{a_j}\cdot\frac{s+2}{2}+O(1)$ скалярных уравнений

$$1+\exp(-2ika_j)(2ik)^{-s-2}\lambda_j^s=0,$$

где λ_j^s — собственные числа операторов $\pi_j^s V^{(s)}(a_j)\pi_j^s$. Соответствующие корневые векторы e_{k_n}, $|k_n|\gg 1$, функции Иоста близки к собственным векторам операторов $\pi_j^s V^{(s)}(a_j)\pi_j^s$.

Из теоремы 21 видно, что все собственные числа операторов B, $-B^+$ кроме, быть может, конечного числа, являются простыми, и распадаются на серии, которые асимптотически ортогональны. Видно также, что эти серии не карлесоновы, поэтому семейства корневых векторов операторов B, $-B^+$ в шрёдингеровом случае не образуют базис Рисса и даже не обладают свойством равномерной минимальности. Однако разложения по этим системам для элементов из трансляционно-инвариантного подпространства, обладающих достаточно высокой гладкостью (и достаточно быстро исчезающих вблизи правой границы носителя потенциала) сходятся по энергетической норме.

Теорема 22. Если l — число, участвующее в условии невырожденности скачков потенциала и u — элемент из $\mathscr{D}(\mathscr{L}^s)\cap\cap N_d$, $s\geqslant 2(l+2)+1$, то ряд Фурье элемента u по биортогональной системе корневых векторов операторов B, $-B^+$ сходится по энергетической норме.

Из п. 3.7 следует, что этот ряд для всякого элемента из K суммируется по Абелю.

Важный вопрос о полноте систем корневых векторов операторов B, $-B^+$ решается на базе признака Хелсона, полнота гарантируется отсутствием сингулярного сомножителя у характеристической функции (см. [52]).

Теорема 23 ([27]). Для одномерного оператора Шрёдингера с эрмитовым финитным матричным потенциалом, удовлетворяющим условиям I, II, имеет место факторизация характеристической функции оператора B^a в виде

$$S_a=\Pi\exp 2ik\sum_j(a-a_j)\,p_j=\exp 2ik\sum_j(a-a_j)\,p_j\cdot\tilde{\Pi},$$

где Π, $\tilde{\Pi}$ — произведения Бляшке—Потапова, а p_j — индикаторное семейство потенциала. В частности, системы собственных функций операторов B, $-B^+$ полны в K в том и только том случае, когда индикаторное семейство тривиально, т. е. $a_j=a$.

4.3. Резонансное рассеяние на произвольном потенциале. Рассмотрим в $L_2(-\infty,\infty)$ одномерный скалярный оператор Шрёдингера с неотрицательным локально ограниченным измеримым потенциалом, обращающимся в нуль на левой полуоси,

$$Ly=-y''+q(x)y;\ q(x)=0,\ x<0.$$

Соответствующее волновое уравнение $u_{tt}+Lu$ порождает в энергетическом пространстве $\mathscr{E}$ данных Коши $U=(u,u_t)$ с нормой

$$|U|_{\mathscr{E}}^2=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(|u_0'|^2+q|u_0|^2+|u_1|^2)\,dx$$

унитарную динамику $U_t: U(0)\to U(t)$ обладающую приходящими и уходящими подпространствами $D_\mp$, которые состоят из данных Коши приходящих и уходящих даламберовских волн $U(x\mp t)$ с носителями на левой полуоси. Соответствующее трансляционно-инвариантное подпространство K состоит из данных с конечной энергией, носитель которых лежит на правой полуоси, при этом на левую полуось u_0 продолжается константой a, u_1 — нулем, так что вся энергия данных из K локализована на правой полуоси. Уходящее спектральное представление генератора $\mathscr{L}$ динамики $U_t=\exp i\mathscr{L}t$ строится на базе спектрального представления оператора L, связанного с рассеянными волнами — решениями однородного уравнения $Lu=k^2u$, имеющими на левой полуоси вид $(\operatorname{Im} k=0)$:

$$\psi_+=\chi_+(k,x)+S(k)\chi_-(k,x)=\exp(ikx)+S(k)\exp(-ikx).$$

Коэффициент отражения S определяется из условия, чтобы это решение на правой полуоси было пропорционально решению Вейля $\psi(x,\lambda)=\theta(x,\lambda)+m(\lambda)\varphi(x,\lambda)$; $\theta(0,\lambda)=1$, $\theta'(0,\lambda)=0$; $\varphi(0,\lambda)=0$, $\varphi'(0,\lambda)=1$. При этом оказывается, что $S(k)$ связан с функцией Вейля $m(\lambda)$ равенством

$$S(k)=\frac{m(k^2)-i/k}{m(k^2)+i/k},\quad k^2=\lambda, \tag{22}$$

и, значит, оказывается аналитической сжимающей функцией в верхней полуплоскости.

Решения ψ_+, построенные таким способом, оказываются аналитическими функциями переменной k в верхней полуплоскости при всяком фиксированном $x>0$. Наряду с ними можно рассмотреть комплексно-сопряженные решения $\psi_-=\bar{S}_+=\bar{S}\chi_++\chi_-$ при вещественных k. Они являются предельными значениями функций, аналитических в нижней полуплоскости, $\operatorname{Im} k<0$.

Возникшая здесь функция $S(k)$ — *коэффициент отражения* — аналитически продолжим в нижнюю полуплоскость по принципу симметрии через промежутки вещественной оси k, где он унитарен, то есть через дополнение абсолютно-непрерывного спектра оператора L_1, заданного в $L_2(0,\infty)$ тем же дифференциальным выражением, что и L с нулевым граничным условием в нуле. Наряду с операторами L, L_1 рассмотрим также оператор $L_0=-\frac{d^2}{dx^2}$ с условием $y'=0$ в нуле. Операторам L_0, L_1 также сопоставим волновые уравнения, задающие унитарные динамики $U_t^{0,1}$ в сответствующих энергетических пространствах $\mathscr{E}_0$, $\mathscr{E}_1$. Генераторами этих унитарных групп служат операторы

$$\mathscr{L}_r=i\begin{pmatrix}0 & -1\\ L_r & 0\end{pmatrix},\quad L_r=L,\ L_0,\ L_1.$$

Теорема 24 ([29]). Формулы обращения для операторов L_r, самосопряженных в соответствующих энергетических пространствах данных Коши, выглядят следующим образом

а) Для произвольных данных Коши с конечной энергией

$$\begin{pmatrix}u_0\\ u_1\end{pmatrix}\overset{\mathscr{T}}{\mapsto}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(iku_0+u_1,\ \chi_+(k,\ *))\\ (iku_0+u_1,\ \chi_-(k,\ *))\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{u}_0\\ \tilde{u}_1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\tilde{u}_0\\ \tilde{u}_1\end{pmatrix}\overset{\mathscr{T}^{-1}}{\mapsto}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{pmatrix}\frac{1}{ik}\chi_+(k,\ x) & \frac{1}{ik}\chi_-(k,\ x)\\ \chi_+(k,\ x) & \chi_-(k,\ x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \bar{S}(k)\\ S(k) & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{u}_0\\ \tilde{u}_1\end{pmatrix}dk,$$

$$E\overset{\mathscr{T}}{\mapsto}L_2\left(\frac{1}{2\pi}\begin{pmatrix}1 & \bar{S}\\ S & 1\end{pmatrix}\right),$$

$$U_t\mapsto e^{ikt}.$$

(Все интегралы следует понимать как сильные пределы соответствующих интегралов по конечным промежуткам.)

б) Для произвольных данных из абсолютно-непрерывного подпространства A_1, оператора L_1, $A_1\subset H_1$,

$$\begin{pmatrix}u_0\\ u_1\end{pmatrix}\overset{\mathscr{T}_1}{\mapsto}(iku_0+u_1,\ (1-s)^{-1}\varphi)=\tilde{u},$$

$$\tilde{u}\overset{\mathscr{T}_1^{-1}}{\mapsto}\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1-|S(k)|^2)\begin{pmatrix}\frac{1}{ik}\cdot\frac{\varphi}{1-S}\\ \frac{\varphi}{1-S}\end{pmatrix}\tilde{u}(k)\,dk,$$

$$A_1\overset{\mathscr{T}_1}{\mapsto}L_2\left(\frac{2}{\pi}(1-|S(k)|^2)\right),$$

$$U_t^1\overset{\mathscr{T}_1}{\mapsto}e^{ikt}.$$

в) Для произвольных данных Коши из H_0

$$\begin{pmatrix}u_0\\ u_1\end{pmatrix}\overset{\mathscr{T}_0}{\mapsto}\left(iku_0+u_1,\ \frac{\chi_++\chi_-}{2}\right)=\tilde{u},$$

$$\tilde{u}\overset{\mathscr{T}_0^{-1}}{\mapsto}\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{pmatrix}\frac{\cos kx}{ik}\\ \cos kx\end{pmatrix}\tilde{u}(k)\,dk,$$

$$H_0\overset{\mathscr{T}_0}{\mapsto}L_2,$$

$$U_t^0\overset{\mathscr{T}_0}{\mapsto}e^{ikt}.$$

Видно, что унитарные группы U_t, U_t^0 имеют общие приходящие и уходящие подпространства, состоящие из данных Коши приходящих и уходящих волн на левой полуоси. Это позволяет определить для пары динамик U_t, U_t^0 волновые операторы и построить матрицу рассеяния $S(U_0, U)$. Можно также сравнить пару динамик $\{U_t^0\oplus U_t^1\}$, U_t и, построив волновые операторы, вычислить соответствующую «полную» матрицу рассеяния $S(U^0\oplus U^1,\ U;\ k)$

Теорема 25 [35].

$$S(U^0 \oplus U^1,\ U;\ k) = \begin{pmatrix} S(k) & 1-|S(k)|^2 \\ \dfrac{1-S(k)}{1-\bar{S}(k)} & -\bar{S}(k)\dfrac{1-S(k)}{1-\bar{S}(k)} \end{pmatrix},$$

$$S(U^0,\ U) = S(k).$$

Полная S-матрица унитарна относительно метрики $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-|S|^2 \end{pmatrix}$.

Переходя к исследованию диссипативного генератора полугруппы срезок динамики U_t на трансляционно-инвариантное подпространство $K = \mathscr{E} \ominus \{D_- \oplus D_+\}$, заметим, прежде всего, что оператор обращения $\mathscr{T}$ в теореме, связанный с решениями Иоста, дает симметричное спектральное представление унитарной группы. Пользуясь теоремами о спектральном анализе модельного оператора из § 3 и формулами обращения, получаем следующий результат.

Теорема 26 ([27], [35]). Коэффициент отражения S является характеристической функцией оператора B. Абсолютно-непрерывный спектр оператора B состоит из набора сегментов вещественной оси полученных замыканием промежутков, где $1-|S(k)|^2 > 0$. Роль собственных функций непрерывного спектра оператора B играют функции

$$\psi_k(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{1}{ik} \\ 1 \end{pmatrix} \chi_+(x,\ k), & x > 0,\quad k = k + i0, \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{ik} \\ 0 \end{pmatrix}, & x < 0, \end{cases}$$

собственные функции оператора $-B^+$ суть

$$\varphi_{-k}(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{1}{ik} \\ 1 \end{pmatrix} \chi_-(x,\ k), & x > 0,\quad k = k + i0, \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{ik} \\ 0 \end{pmatrix}, & x < 0. \end{cases}$$

Спектральные проекторы, отвечающие промежуткам абсолютно-непрерывного спектра, не содержащим спектральных особенностей, записываются в виде $(x > 0)$:

$$\mathscr{E}^B_\Delta \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_\Delta \begin{pmatrix} Y_{ik} \\ 1 \end{pmatrix} \chi_+(x,\ k) \left\langle iku_0 + u_1,\ \frac{1}{2}\chi_-(*,\ k) \right\rangle \times$$

$$\times \frac{1-|S(k)|^2}{S(k)}\, dk.$$

Собственные числа оператора B совпадают с корнями s-матрицы k_n, $S(k_n) = 0$. Они расположены в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} k_n > 0$ и соответствующие им собственные функции суть

$$\psi_{k_n}(x) = \begin{cases} i\begin{pmatrix} 1/ik_n \\ 1 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{\operatorname{Im} k_n}{\pi}}\, \chi_+(k_n,\ x), & x > 0, \\ i\begin{pmatrix} 1/ik_n \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{\operatorname{Im} k_n}{\pi}}, & x < 0. \end{cases}$$

Собственные функции оператора $-B^+$, отвечающие собственным числам $-\bar{k}_n$, суть

$$\varphi_{-\bar{k}_n}(x) = \begin{cases} i\begin{pmatrix} 1/i\bar{k}_n \\ 1 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{\operatorname{Im} k_n}{\pi}}\, \chi_-(\bar{k}_n,\ x), & x > 0, \\ i\begin{pmatrix} 1/i\bar{k}_n \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{\operatorname{Im} k_n}{\pi}}, & x < 0. \end{cases}$$

Они биортогональны при условии простоты корней, $S'(k_n) \neq 0$:

$$\langle \psi_{k_n},\ \varphi_{-\bar{k}_m} \rangle_{\mathscr{E}} = -2i \operatorname{Im} k_n S'(k_n)\, \delta_{mn},$$

и в этом случае собственные проекторы оператора B записываются в виде

$$\mathscr{P}_{k_n}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{ik_n} \\ 1 \end{pmatrix} \chi_+(k_n,\ x) \left\langle iku_0 + u_1,\ \frac{1}{2}\chi_-(\bar{k}_n,\ x) \right\rangle \frac{1}{\pi i S'(k_n)},$$

$$x < 0.$$

Из теоремы 26 видно, что собственные функции абсолютно-непрерывного спектра рассматриваемого диссипативного оператора получаются просто срезкой на трансляционно-инвариантное подпространство собственных функций $\begin{pmatrix} \frac{1}{ik} \\ 1 \end{pmatrix} \chi_+$ генератора $\mathscr{L}$ исходной динамики. Этот факт является отражением общего результата (теорема 10), согласно которому каноническая система собственных функций диссипативного оператора получается срезкой на трансляционно-инвариантное подпространство излучающих собственных функций дилатации.

Теорема 26 открывает путь применения к оператору B общих теорем о спектральных свойствах диссипативных операторов из § 3. Видно, что центральным вопросом спектрального анализа является детальное изучение аналитических свойств коэффициента отражения, исследование расположения его корней в комплексной плоскости (собственных чисел оператора B) и на вещественной оси — спектральных особенностей. На ее базе можно развить теорию рассеяния для пары B, $\mathscr{L}_1$ в соответствии с теоремой 14 (из п. 3.10). Возникающая S-матрица лишь унитарным множителем отличается от s-матрицы в «лаксовском канале»,

$$S(\mathscr{L}, B)=s\text{-}\lim_{t\to\infty} e^{-i\mathscr{L}_1 t} P_K e^{2i\mathscr{L}t} P_K e^{-i\mathscr{L}_1 t}=$$

$$=\mathscr{T}_1^{-1}\left\{-\overline{S}(k)\frac{1-S(k)}{1-\overline{S}(k)}\right\}\mathscr{T}_1.$$

Этот факт имеет общий характер и может быть доказан в терминах модели для абстрактных операторов вида $\mathscr{L}_0\oplus\mathscr{L}_1$, сравнимых с $\mathscr{L}$ [132].

В работе [40] проведено детальное исследование комплексных корней коэффициента отражения для гладкого, вещественного и периодического на правой полуоси потенциала, $q(x)=q(x+1)$, имеющего разрывы в целых точках $q(1-0)\neq q(1+0)=q(0)$. В этом случае *функция Вейля* на правой полуоси вычисляется через стандартные решения по формуле

$$m(k)=-\frac{\varphi'+\theta}{\varphi}\pm\sqrt{\left(\frac{\varphi'-\theta}{2\varphi}\right)^2-\frac{1}{\varphi^2}},\quad \varphi=\varphi(1-0),\quad \theta=\theta(1-0)$$

Здесь радикал определяется условием: $\operatorname{Im}\left\{\sqrt{\left(\frac{\varphi'-\theta}{2}\right)^2-1}+\frac{i}{k}\theta'\right\}>0$. Характеристическая функция оператора B в этом случае равна

$$S(k)=\frac{k\left[\varphi'+\theta+\sqrt{(\varphi'-\theta)^2-4}+i\theta'\right]}{k\left[\varphi'+\theta+\sqrt{(\varphi'-\theta)^2-4}-i\theta'\right]}.$$

Теорема 27 ([40]). Пусть $q(0)=q_0$, $q(1)=q_1$, $q'(0)=q_0'$, $q'(1)=q_1'$, $\int_0^1 q\,dx=Q$. Если $q_0/q_1>1$, то в верхней полуплоскости имеется бесконечная последовательность корней, $n\to\infty$

$$k_n=n\pi+\frac{i}{2}\ln\frac{q_0}{q_1}-\frac{1}{2\pi n}\left\{\frac{q_0'}{2q_0}-\frac{q_1'}{\alpha q_1}+\frac{Q}{q_0}(q_0+q_1)\right\}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Кроме того, могут быть корни k_n' вблизи точек $k_n^0=n\pi-Q/2n\pi$. При этом разве лишь конечное число корней k_n' вещественны.

Заметим, что первая серия корней лежит над левыми концами лакун, на конечной высоте $\frac{i}{2}\ln\frac{q_0}{q_1}$, а вторая — вблизи левых концов лакун.

Если в качестве потенциала на правой полуоси взять отрезок периодического потенциала $[0, N]$, то соответствующий коэффициент имеет вид

$$S_N=\frac{\rho^{-N}(k)-\rho^N(k)}{\rho^{-N}(k)S_1^{-1}(k)-\rho^N S_2^{-1}(k)},$$

где $S_l=\frac{m_l+ik}{m_l-ik}$, и m_l, $l=1, 2$, — функции Вейля для соответствующих периодических задач на промежутках $(0, \infty)$, $(-\infty, 0)$ соответственно и $-i\ln\rho=p(k)$ — квазиимпульс, отвечающий данному периодическому потенциалу. Видно, что коэффициент отражения обращается в нуль в точках, где $\sin Np(k)=0$. На каждой зоне периодического потенциала, где p меняется на промежутке длиной π, имеется ровно N таких точек, и они делят зону на равные части в масштабе квазиимпульса (см. [40]).

В работе [31] обсуждаются спектральные свойства диссипативного оператора, чьей характеристической функцией является, наоборот, коэффициент прохождения в задаче одномерного рассеяния на произвольном вещественном потенциале, удовлетворяющим условию $\int|q(x)|(1+|x|)dx<\infty$. Спектр этого оператора всегда содержит абсолютно-непрерывную компоненту и может содержать дискретную, отвечающую корням коэффициента прохождения, лежащим в комплексной плоскости. Собственные функции этого оператора получаются из стандартных решений Иоста операцией ортогонального проектирования в классах Харди функций, зависящих от спектральной переменной k.

4.4. Автоморфное волновое уравнение. Известно, что плоскость Лобачевского, реализованная как верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ с мерой $y^{-2}dxdy=d\mu$ является однородным пространством группы $G=\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ всех 2×2-матриц с единичным определителем. На этом пространстве указанная группа действует как группа дробно-линейных преобразований $z\mapsto gz=(az+c)(bz+d)^{-1}$ с вещественными коэффициентами и единичным определителем $ad-bc=1$. Мера μ и оператор $-q^2\Delta-\frac{1}{4}=L$ инвариантны относительно действия группы G. Пусть Γ — подгруппа из G, такая, что ее фундаментальная область F некомпактна — имеет единственную точку на «абсолюте» $y=0$ — и объем F конечен: $\int_F d\mu<\infty$. Примером такой подгруппы служит модулярная группа с образующими $z\mapsto-1/z$, $z\mapsto z+1$. Соответствующая фундаментальная область есть отрезок полосы, $F=\{z: |\operatorname{Re} z|<1/2, |z|>1\}$.

Рассмотрим в области F функции, являющиеся сужениями на F гладких автоморфных функций u заданных на плоскости: $u(z)=u(\gamma z)$, $\gamma\in\Gamma$. Оператор L существенно самосопряжен на таких функциях (см. [48]), его замыкание мы обозначим через L и рассмотрим *автоморфное волновое уравнение* $u_{tt}-Lu=0$. В пространстве всех данных Коши $U=(u, u_t)=(u_0, u_1)$ с конечной энергией

$$|U|^2_{\mathscr{E}}=\frac{1}{2}\int_F\{|\nabla u_0|^2-(4y^2)^{-1}|u_0|+y^{-2}|u_1|^2\}\,dxdy \tag{23}$$

волновое уравнение задает формально унитарную динамику $U_t: (u, u_t)(0)\mapsto(u, u_t)(t)$, обладающую ортогональными приходящими и уходящими подпространствами $D_{\mp}$, состоящими из данных Коши приходящих и уходящих волн

$$u_{\mp}(y, t) = \exp(\mp t/2)\,\Phi(ye^{\pm t})$$

с носителем на полуполосе $F \cap \{y > 1\}$. К сожалению, энергетическая метрика (23) индефинитна, поскольку оператор L_Γ имеет в рассматриваемом случае единственное отрицательное собственное число $\lambda = -1/4$ с тождественно постоянной собственной функцией. Наложим покомпонентно на данные Коши с конечной энергией (23) условие ортогональности к единице, получим энергетическое пространство $\hat{\mathscr{E}}$ с положительной метрикой, в котором рассматриваемое волновое уравнение также задает унитарную динамику U_t, обладающую приходящими и уходящими подпространствами $\hat{D}_{\pm} = \{(u_0, u_1) \in D_{\pm},\ u_{0,1} \perp 1\}$ (см [42]). Наряду с описанной динамикой, рассмотрим невозмущенную U_t^0, определяемую одномерным волновым уравнением $u_{tt} - y^2 u_{yy} + 1/4u = 0$ в пространстве всех данных Коши $U = (u, u_t)$ с энергетической метрикой

$$|U|^2_{\hat{\mathscr{E}}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \left\{|u_y|^2 - \frac{1}{4y^2}|u|^2 + \frac{1}{y^2}|u_t|^2\right\} dy,$$

покомпонентно ортогональных к единице. Приходящие и уходящие подпространства $D_{\pm}$ групп U_t, U_t^0 совпадают, что позволяет применить к этим группам подход Лакса—Филлипса. Соответствующая матрица рассеяния явно вычисляется в виде коэффициента отражения (см. [48]). Она выражается через ζ-функцию Римана или, лучше, через введенную Риманом же целую *функцию* $\xi(s)$

$$\xi(s) = s(s-1)\,\pi^{-s/2}\,\Gamma(1/2s)\,\zeta(s)$$

следующим образом

$$S(k) = \frac{\xi(-2ik)}{\xi(2ik)} \cdot \frac{k - i/2}{k + i/2}. \tag{24}$$

Отметим, что все нули ξ-функции лежат в полосе $0 < \mathrm{Re}\, s < 1$ и совпадают с «критическими» нулями ζ-функции. Множество корней имеет две оси симметрии $\mathrm{Re}\, s = 1/2$ и $\mathrm{Im}\, s = 0$.

Из общей теории, развитой в [3], следует, что S-матрица (24) аналитична в верхней полуплоскости и все ее корни k_n, за исключением $i/2$, лежат в полосе $0 < \mathrm{Im}\, k < 1/2$ и расположены симметрично относительно прямых $\mathrm{Im}\, k = 1/4$, $\mathrm{Pe}\, k = 0$. Они однозначно связаны с корнями s_n ζ-функции в «критической полосе»: $k_n = i\,\mathrm{Sn}/2$. На мнимой бесконечности S-матрица имеет асимптотику

$$S(i\varkappa) \approx (\varkappa/\pi)^{1/2},$$

и, значит, не содержит экспоненциального фактора — сингулярного внутреннего множителя, то есть является чистым произведением Бляшке. Иными словами система корневых

векторов диссипативного генератора срезок $Z_t = e^{iBt} = P_{\hat{K}} U_t \,|\, \hat{K}$ полна.

Теорема 28 ([42]). Для того, чтобы была справедлива *гипотеза Римана* о корнях ζ-функции, необходимо и достаточно, чтобы энергия полугруппы Z_t при $t \to \infty$ убывала экспоненциально с показателем $1/4$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln |Z_t (B + iI)^{-1}| = -1/4.$$

Гипотеза Римана в ослабленном варианте $2\gamma < \mathrm{Re}\, S_n < 1 - 2\gamma$ эквивалентна экспоненциальному убыванию полугруппы Z_t с показателем γ, $\gamma < 1/4$.

4.5. Парциальная s-матрица для акустического уравнения и уравнения Шрёдингера. В п. 3.10 было введено понятие парциальной s-матрицы как блока полной s-матрицы, которая предполагалась существующей. В действительности подход Лакса—Филлипса позволяет определить понятие парциальной s-матрицы и доказать ее существование независимо от существования полной.

Допустим, что две унитарные группы $U_t = e^{i\mathscr{L}t}$, $U_t^0 = e^{i\mathscr{L}^0 t}$ имеют в паре гильбертовых пространств H, H^0 приходящие и уходящие подпространства $D_{\pm}$, $D_{\pm}^0$, отождествляемые с помощью асимптотически изометрического оператора $\mathscr{J}$: $|\mathscr{J} U^0_{\pm t} f_{\pm}|_H \to |f|_{H_0}$, $f_{\pm} \in D^0_{\pm}$,

$$D_+ = \lim_{t\to\infty} \overline{U(-t)\, J U^0(t)\, D^0_+},$$

$$D_- = \lim_{t\to\infty} \overline{U(t)\, J\, (U^0(-t)\, D^0_-}.$$

Обозначим через $\mathscr{H}_{\pm}$, $\mathscr{H}^0_{\pm}$ минимальные приводящие подпространства групп U_t, U_t^0, содержащие $D_{\pm}$, $D^0_{\pm}$ соответственно.

Теорема 29 [39]. Если выполнено условие

$$\int\limits_0^\infty |(\mathscr{L}\mathscr{J} - \mathscr{J}\mathscr{L}^0)(\mathscr{L}^0 \mp \mu I)^{-1} \exp(\pm i\mathscr{L}^0 t)\, P^0_{\pm}|\, dt < \infty, \tag{25}$$

то существуют, изометричны и полны *«парциальные» волновые операторы*

$$W_+(\mathscr{L}, \mathscr{L}^0) = s\text{-}\lim_{t\to\infty} U(-t)\, \mathscr{J} P^0_+ U^0(t),$$

$$W_-(\mathscr{S}, \mathscr{L}^0) = s\text{-}\lim_{t\to\infty} U(t)\, \mathscr{J} P^0_- U^0(-t),$$

$$|W_{\pm} f|_{\mathscr{H}} = |P_{\mathscr{H}^0_{\pm}} f|_{\mathscr{H}_0}; \quad W_{\pm}\mathscr{H}^0_{\pm} = \mathscr{H}_{\pm},$$

соответствующий *парциальный оператор рассеяния*

$$S = W_-^{+} W_+ : \mathscr{H}_+^0 \to \mathscr{H}_-^0$$

коммутирует с $\mathscr{L}^0$ и, значит, действует как умножение на операторнозначную сжимающую функцию $s(k)$ — *парциальную матрицу рассеяния.*

Если каналы $D_\pm^0$ ортогональны, $\mathscr{J} D_\pm^0 = D_\pm$, и

$$U(\pm t)\mathscr{J} - \mathscr{J} U^0(\pm t)\big|_{D_\pm^0} = 0, \quad t > 0, \tag{26}$$

то *парциальная s-матрица* аналитична и ограничена в верхней полуплоскости.

Если же выполнены условия экспоненциальной асимптотической ортогональности $D_\pm^0$:

$$|P_-^0 U^0(t) I^+ \mathscr{J} U^0(T) P_+^0|_{\mathscr{H}^0} < Ce^{-\gamma(t-T)}, \quad t > T, \tag{27}$$

и условие экспоненциальной близости U_t, U_t^0 на $D_\pm^0$:

$$|(\mathscr{L}\mathscr{J} - \mathscr{J}\mathscr{L}^0)(\mathscr{L}^0 - \mu J \pm i\delta])^{-1} U^0(\pm t) P_\pm^0|_{\mathscr{H}} \leqslant$$
$$\leqslant C\delta^{-1} e^{-\gamma t}, \quad t > T, \tag{28}$$

то парциальная s-матрица аналитически продолжима в полосу $0 < \operatorname{Im} k < \gamma/2$ и равномерно ограничена в каждой внутренней полосе $0 < \operatorname{Im} k \leqslant \gamma'/2$, $0 < \gamma' < \gamma$.

Отметим, что замена в последних двух условиях экспонент степенными функциями в правой части t^{-l}, $l > 2$, приводит к гладкости соответствующей парциальной s-матрицы, $S \in C^{l-2}$.

Сформулированная теорема непосредственно применима к волновым уравнениям в $\mathbf{R}^3$: $u_{tt} - \Delta u + qu$, $q \geqslant 0$ или $\rho^2 u_{tt} = \Delta u$, коэффициенты которых — потенциал q или плотность ρ обладают правильным поведением в пространственных конусах, опирающихся на области $\omega_\pm$, лежащие на единичной сфере в $\mathbf{R}^3$:

$$\Omega_\pm = \{x : \langle x, \nu \rangle \geqslant R^\pm(\nu),\ \nu \in \omega_\pm\}.$$

Так, условия (27), (28) выполнены для уравнения $-\Delta u + qu + u_{tt} = 0$, $q \geqslant 0$, если в конусах $\Omega_\pm$ потенциал удовлетворяет требованию

$$0 \leqslant q(x) \leqslant C_\pm \exp\{-\gamma \sup_{\nu \in \omega_\pm} \langle x, \nu \rangle\} \cdot |x|^{-2},$$

и в качестве $\mathscr{J}$ взят естественный оператор отождествления.

«Парциальная» точка зрения на s-матрицу полезна при решении задач факторизации

Так, например, если плотность ρ в уравнении $\rho^2 u_{tt} = \Delta u$ обращается в единицу вне выпуклой области Ω с границей $|x| = R(\nu)$, которая служит выпуклой оболочкой носителя $\operatorname{supp}\{\rho - 1\}$, то шрёдингеровская матрица рассеяния существует (см. [39]) и задается обобщенным ядром $s(\nu, \nu', k)$, которое выражается обычным образом через амплитуду рассеяния,

$$s(\nu, \nu', k) = \delta(\nu + \nu') + \frac{ik}{2\pi} f(\nu, \nu', k).$$

Введем инфинитезимальные приходящие и уходящие подпространства $D_\pm^{\nu_\pm}$ (в направлениях $\nu_\pm$), состоящие из данных Коши волн, приходящих и уходящих в этих направлениях.

Теорема 30 [39]. Парциальная s-матрица, отвечающая подпространствам $D_\mp^{\nu_\mp}$ связана с полной шрёдингеровской S-матрицей равенством

$$\hat{S}(\nu, \nu', k) = \exp ik\{R(\nu) + R(\nu')\} S(\nu, \nu', k), \quad \nu, \nu' \in \omega_\pm,$$

и является внутренней функцией в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} k > 0$.

Формальный интегральный оператор с обобщенным ядром $\hat{S}(\nu, \nu', k)$ является полной S-матрицей в схеме рассеяния Лакса—Филлипса, ассоциированной с приходящими и уходящими подпространствами вне области Ω с границей $(x) = R(\nu)$.

§ 5. Диссипативный оператор Шрёдингера

В задачах резонансного рассеяния с самого начала присутствует самосопряженный оператор, служащий дилатацией исследуемого диссипативного. Иначе обстоит дело для *диссипативного оператора Шрёдингера*

$$Lu = -\Delta u + qu.$$

Обычный путь спектрального анализа такого оператора состоял в последовательном построении резольвенты и исследовании ее знаменателя. Для комплексных (не обязательно диссипативных) потенциалов, достаточно быстро убывающих на бесконечности, на этом пути выяснены условия конечности дискретного спектра, [20], [21]. Эти условия оказываются, в определенном смысле, точными [22], [23], [24]. Однако следующий шаг, связанный с доказательством какого-либо аналога спектральной теоремы, оказывается на этом пути необозримо сложным. Его удается преодолеть лишь в случае, когда общее число собственных чисел и спектральных особенностей конечно.

В случае диссипативных операторов Шрёдингера имеется иной путь к спектральному разложению — через построение дилатации и соответствующей функциональной модели (см. § 3). На этом пути центральным вопросом оказывается построение минимальной самосопряженной дилатации и исследование соответствующей матрицы рассеяния — характеристической функции исследуемого оператора.

Этапы реализации этого пути описаны в третьей и четвертой части этого параграфа. Первая часть посвящена исследованию структуры спектра оператора Шрёдингера с быстроубывающим комплексным потенциалом.

5.1. Спектр и теоремы единственности. Для обыкновенного дифференциального оператора $L_h y = -y'' + qy$ в $L_2(0, \infty)$ с ограниченным комплексным убывающим потенциалом и комплексным граничным условием в нуле $y'(0) - hy(0) = 0$ важным объектом является так называемое *решение Вейля* — аналитически зависящее от спектрального параметра λ решение однородного уравнения $Ly = \lambda y$, квадратично суммируемое на $(0, \infty)$. Оно определяется однозначно при подходящей нормировке (см. [61]). Например, для суммируемых потенциалов в качестве такого решения удобно взять решение Иоста $f(k, x)$, $k = \sqrt{\lambda}$, обладающее экспоненциальной асимптотикой на бесконечности: $f(x, k) e^{-ikx} \to 1$ при $x \to \infty$. Это решение удовлетворяет вольтерровскому интегральному уравнению

$$f(x, k) = \exp ikx + \int_x^\infty k^{-1} \sin k(t - x) q(t) f(t, k) dt, \quad \operatorname{Im} k \geqslant 0.$$

Собственные числа $\lambda_s = k_s^2$ оператора l_h отвечают комплексным корням функции Иоста $D_h(k) = f'(0, k) - hf(0, k)$, а спектральные особенности — вещественным корням его. Гладкость функции Иоста определяется скоростью убывания потенциала. Так, для потенциалов, имеющих несколько конечных моментов, верна

Лемма 2 ([22]). $\sup\limits_{\operatorname{Im} k \geqslant 0} |D_h(k) - ik| < \infty$, $\sup\limits_{\operatorname{Im} k \geqslant 0} \left| \frac{dD_h(k)}{dk} \right| < \infty$,

$$\sup_{\operatorname{Im} k \geqslant 0} \left| \frac{d^r}{dk^r} D_h(k) \right| \leqslant 2^r \left[\frac{1}{2} \int_0^\infty |q| \, x^r dx + \frac{b}{r+1} \int_0^\infty |q| \, x^{r+1} dx \right].$$

Здесь $b = 2 \int\limits_0^\infty |q| \, dx + |h| \exp \left(\int\limits_0^\infty |q| \, x dx \right)$.

В частности, если $|q(x)| \leqslant \operatorname{const} \exp(-\delta x^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, то функция Иоста входит в класс Жевре G_β, $\beta = \alpha(1 - \alpha)^{-1}$:

$$\sup_{\operatorname{Im} k \geqslant 0} |D_h^{(k)}(k)| \leqslant CQ^r r! \; r^{2/\beta}.$$

Из неравенства Иенсена по аналогии с рассуждением Берлинга — Карлесона (см. [50]) получается

Лемма 3 ([22]). Если f — функция, регулярная в единичном круге и непрерывная вплоть до окружности со всеми производными до порядка N, $\sup\limits_{|z| < 1} |g^{(r)}(z)| \leqslant A_r$, $r = 0, 1, \ldots, N \leqslant \infty$. Тогда $g(z) \equiv 0$, если $g(z)$ обращается в нуль вместе со всеми производными до порядка N на нульмерном множестве F на окружности, удовлетворяющем условию

$$\int_0^1 \ln T(s) \, d\varphi_F(s) = -\infty,$$

где $T(s) = \inf\limits_{0 \leqslant r \leqslant N} (r!)^{-1} A_r s^r$ и $\varphi_F(s)$ — мера s-окрестности множества F.

Аналогичное утверждение имеет место для полуплоскости — оно получается из цитированной леммы конформным отображением аргумента и обеспечивает, как теперь принято говорить «квазианалитичность в полуплоскости».

Из последних двух лемм получается серия утверждений о структуре множества σ_∞^h спектральных особенностей «бесконечного порядка» оператора l_h, где функция Иоста D_h исчезает вместе со всеми производными. Отметим, что в этом множестве содержатся также все точки накопления собственных чисел. Например:

Теорема 31 ([22]). Если потенциал q удовлетворяет условию $|q(x)| \leqslant C \exp(-\delta x^\alpha)$, $0 < \alpha < 1/2$, то образ множества σ_∞^h в плоскости k лежит на вещественной оси, ограничен, замкнут, имеет меру нуль, а семейство всех его конечных интервалов смежности l_ν удовлетворяет условию $\sum |l_\nu|^{\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}} < \infty$.

Если же условие убывания выполнено с показателем $\alpha = 1/2$, то все спектральные особенности оператора L_h имеют конечный порядок а общее число спектральных особенностей и собственных значений оператора L_h конечно.

В трехмерном случае справедлив аналог теоремы 31 (см. [22]). Ее доказательство также опирается на теорему единственности, но роль функции Иоста играет *знаменатель Фредгольма* $D(\sqrt{\lambda})$ уравнения Липпмана — Швингера, проинтегрированного один раз

$$v(x, y, \lambda) = v_0(x, y, \lambda) + \int_{R^3} I(x, z, \lambda) q(z) v(z, y, \lambda) dz,$$

где

$$I(x, z, \lambda) = \frac{1}{16\pi^2} \int \frac{e^{i\sqrt{\lambda}(|x-s| + |s-z|)}}{|x-s| \, |s-z|} q(s) ds,$$

а место леммы 1 занимает

Лемма 4 ([22]). Если потенциал q удовлетворяет серии оценок

$$\sup_x |q(x)| (1 + |x|^{3+\varepsilon}) |x|^r = C_r < \infty, \quad r = 0, 1, \ldots$$

то знаменатель Фредгольма $D(k)$ есть регулярная функция переменной k в верхней полуплоскости, для которой верна серия оценок

$$\sup_{\operatorname{Im} k\geqslant 0} |D^{(r)}(k)|\leqslant F_0 6^{2r} e^r r!\ Q(r),$$

где F_0 — постоянная, зависящая лишь от C_0 й

$$Q(r)=\max_{\substack{r_i\geqslant 1\\ \Sigma r_i=r}} \prod_i (r_i!)^{-1}[C_{r_i}+\sqrt{C_{2r_i}}].$$

Цитированный результат (теорема из [31]) в действительности может быть усилен, если воспользоваться более точными теоремами единственности (см. [53]). На этом пути получается уже точное описание (см. [54]) множеств спектральных особенностей операторов с потенциалами, убывающими быстрее $\exp(-\delta x^\alpha)$, $0<\alpha<{}^1/_2$.

Описанная здесь схема применения теорем единственности для исследования накопления дискретного спектра и спектральных особенностей бесконечной кратности применима и для других несамосопряженных операторов, в частности для операторов высокого порядка. Более интересные результаты относятся к периодическому оператору Шрёдингера с быстроубывающим комплексным возмущением потенциала (см. [4]) и к модели Фридрихса с комплексным ядром [15].

Интересно, что перечисленные результаты оказываются точными уже в классе одномерных операторев Шрёдингера с вещественным быстроубывающим потенциалом и комплексным граничным условием. Построение соответствующих примеров использует технику обратной задачи теории рассеяния и основано на том, что функции Вейля, отвечающие разным граничным условиям связаны дробно-линейным образом (см. [61]). Поэтому спектр оператора L_h вычисляется как множество особенностей *функции Вейля* $m_h(\lambda)$:

$$m_h(\lambda)=-hD_h^{-1}(k)\,D_{-1/h}(k)=-\frac{1+hm_\infty(\lambda)}{m_\infty(\lambda)-h}.$$

Функция Вейля m_∞ самосопряженного оператора с первым однородным краевым условием $y(0)=0$ строится таким образом, чтобы по ее мнимой части — спектральной мере

$$\rho_\infty(\lambda)=-\lim_{\delta\to 0}\int_0^\infty \operatorname{Im} m_\infty(u+i\delta)\,du$$

восстанавливался потенциал нужного класса. Оказывается, достаточно построить функцию $m(k)$, удовлетворяющую следующим условиям

1. m регулярна в верхней полуплоскости и в некоторых окрестностях точек $k=0$, $k=\infty$.
2. $m(0)\neq 0$, $m'(0)\neq 0$,
3. $km(k)\to -i$, $|k|\to\infty$,
4. $\operatorname{Im} m(i\varkappa)=0$, $\varkappa>0$,
5. $\operatorname{Im} m(-k)=-\operatorname{Im} m(k)>0$, $k>0$.

Лемма 5 ([23]). Если функция m удовлетворяет условиям 1—5 и является гладкой, $m\in C^N$, $N\geqslant 3$, то существует дифференциальный оператор типа Шрёдингера с гладким вещественным потенциалом q, имеющим $N-2$ конечных моментов, и такое вещественное число a_0, что функция

$$-[m(\sqrt{\lambda})]^{-1}+a_0$$

служит функцией Вейля этого оператора с нулевым граничным условием, $y(0)=0$.

Если же функция $m(k)$ входит в класс Жевре G_β

$$\sup_{\operatorname{Im} k\geqslant 0} |m^{(r)}(k)|\leqslant Ar!\ r^{2/\beta}B^r,\ 0<\beta<1,$$

то восстановленный потенциал обладает свойством

$$|q(x)|\leqslant c\exp\{-\delta x^\alpha\},\ \alpha=\beta/\beta+1.$$

С помощью последнего утверждения доказывается существование одномерных операторов Шрёдингера с вещественным быстро убывающим потенциалом и комплексным граничным условием в нуле, спектральная структура которых весьма экзотична. Простейший пример (см. [23]) получается, если в качестве m взять

$$iA\left[U\left(\frac{\varkappa k-i}{ik\varkappa-1}\right)-U(-i)\right],\ \varkappa>0,$$

где U — регулярная функция в круге $|z|<1$, заданная интегралом

$$U(z)=\int_0^z e^{-\frac{a}{(1-\zeta^2)^\beta}}\cos\frac{b}{(1-\zeta^2)^\beta}\,d\zeta,\ 0<\beta<1,$$

где $\beta=\alpha(1-\alpha)^{-1}$, $a={}^1/_{32}$, $b=1-\beta/32$, и ветвь $(1-\zeta^2)^\beta$ выбирается из условия положительности на диаметре $1-\zeta^2>0$. Функции U и m входят в класс Жерве G_β. При специальном выборе постоянной A, $A=\varkappa[2U'(-i)]^{-1}$, $\varkappa>0$, функция m удовлетворяет условиям 1—5 и бесконечное число раз принимает значение

$$\frac{i}{2}\varkappa[U(1)-U(-i)][U'(-1)]^{-1}.$$

Соответствующий построенной функции m оператор Шрёдингера с гладким вещественным потенциалом q, $|q(x)|\leqslant\leqslant C\exp[-\delta x^\alpha]$, $0<\alpha<{}^1/_2$, имеет счетную последовательность простых собственных чисел, накапливающуюся из нижней полуплоскости к точке $\lambda=\varkappa^{-2}$.

Более изощренные примеры операторов, имеющих бесконечные (совершенные!) множества точек накопления собственных чисел приведены в [24]). В работе [54] показано, что практически произвольное множество «неединственности» класса Жерве G_β, $\beta=\frac{\alpha}{1-\alpha}$, может служить множеством точек накопления собственных чисел оператора с потенциалом q, $|q(x)|\leqslant \leqslant C\exp[-\delta x^\alpha]$.

5.2. Дилатация и характеристическая функция. Из материала предыдущего пункта видно, что структура дискретного спектра простейшего оператора Шрёдингера с быстро убывающим вещественным потенциалом и комплексным граничным условием может быть нетривиальна. В этом пункте будет развита спектральная теория такого оператора в терминах функциональной модели. При этом мы следуем изложению [35], [36].

Рассмотрим в $L_2(0,\infty)$ дифференциальное выражение $-y''+q(x)y$ с вещественным локально ограниченным потенциалом, для которого имеет место случай предельной точки. Задавая в нуле еще и комплексное граничное условие

$$y'-hy|_0=0,\ 2\operatorname{Im}h=g^2,\ g>0,$$

мы получим плотно определенный оператор L_h, который является простым диссипативным оператором, лишь на одномерный, отличающийся от самосопряженного L_0. Сузив оператор L_0 до симметрического оператора L_{00}, заданного на линеале D_0 всех функций из $D(L_0)$, обращающихся в нуль вместе с производной в точке $x=0$, образуем сопряженный оператор L^+. Затем достроим его до самосопряженного оператора $\mathscr{L}$ в пространстве $\mathscr{H}$ следующим образом. Пусть $v_+\in W_2^1(0,\infty)\subset \subset L_2(0,\infty)=D_+$, $v_-\in W_2^1(-\infty,0)\subset L_2(-\infty,0)=D_-$. Определим действие оператора $\mathscr{L}$ на линеале $D(\mathscr{L})$ всех векторов $u= =(v_-,v,v_+)$ из $\mathscr{H}=D_-\oplus L_2(0,\infty)\oplus D_+$, удовлетворяющем граничным условиям

$$v'-hv|_0=gv_-(0),\quad v'-\bar{h}v|_0=gv_+(0),$$

по формуле

$$\mathscr{L}\begin{pmatrix}v_-\\ v\\ v_+\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-dv_-/id\xi\\ L^+v\\ -dv_+/id\xi\end{pmatrix},$$

задавая таким образом расширение симметрического оператора L_{00} с выходом из $L_2(0,\infty)$ в $\mathscr{H}$.

Теорема 32 ([35]). Оператор $\mathscr{L}$ является минимальной самосопряженной дилатацией оператора L_h.

Для построения модели оператора L_h и вычисления его характеристической функции требуется построить спектральное представление дилатации. Мы начнем с построения рассеянных

волн $U_\lambda^\mp$, инициированных падением монохроматической волны из $D_-(D_+)$.

Пусть m_∞ — функция Вейля самосопряженного оператора L_0 и χ — соответствующее решение Вейля $\chi=\theta+m\varphi$; $\theta(0)= =\varphi'(0)=1$, $\theta'(0)=\varphi(0)=0$. Легко проверяется, что при всяком вещественном λ вектор-функция

$$u_\lambda^-(x,\xi)=\begin{pmatrix}e^{-\lambda\xi}\\ \dfrac{g\chi(x,\lambda-i0)}{m_\infty(\lambda-i0)-h}\\ \dfrac{m_\infty(\lambda-i0)-\bar{h}}{m_\infty(\lambda-i0)-h}e^{-i\lambda\xi}\end{pmatrix};$$

$$u_\lambda^+(x,\xi)=\begin{pmatrix}\dfrac{m_\infty(\lambda+i0)-h}{m_\infty(\lambda+i0)-\bar{h}}e^{-i\lambda\xi}\\ \dfrac{g\chi(x,\lambda+i0)}{m_\infty(\lambda+i0)-\bar{h}}\\ e^{-i\lambda\xi}\end{pmatrix},$$

удовлетворяют уравнению $\mathscr{L}u_\lambda^\pm=\lambda u_\lambda^\pm$ и граничным условиям. Точно так же проверяются соответствующие факты для вектор-функций

$$u_\lambda^<(x,\xi)=\begin{pmatrix}0\\ \varphi_h\\ e^{-i\lambda\xi}\end{pmatrix},\quad u_\lambda^>(x,\xi)=\begin{pmatrix}e^{-i\lambda\xi}\\ \varphi_{\bar{h}}\\ 0\end{pmatrix},$$

где φ_h, $\varphi_{\bar{h}}$ удовлетворяют уравнению $L^+\varphi_h=\lambda\varphi_h$, граничным условиям

$$\varphi_h'-h\varphi_h|_0=0;\quad \varphi_{\bar{h}}'-\bar{h}\varphi_{\bar{h}}|_0=0,$$

и условиям нормировки

$$\varphi_h'-\bar{h}\varphi_h|_0=g;\quad \varphi_{\bar{h}}'-h\varphi_{\bar{h}}|_0=g.$$

Обозначим отношение $\dfrac{m_\infty-h}{m_\infty-\bar{h}}$ через S. Тогда верна

Теорема 33 ([35]). Каждая из следующих систем является полной в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ дилатаций

$$\{u_\lambda^-,u_\lambda^<\};\quad \{u_\lambda^+,u_\lambda^>\};\quad \{u_\lambda^<,u_\lambda^>\}.$$

При этом первые две ортонормированы с весовой матрицей $\operatorname{diag}\{1,1-|S|^2\}$, а последняя — с весовой матрицей $\begin{pmatrix}1&\bar{S}\\ S&1\end{pmatrix}$ и с ними связаны следующие спектральные представления

1. Приходящее $\mathcal{T}_-$:

$$\mathcal{T}_-: U \mapsto \tilde{U}_-(\lambda) = \begin{pmatrix} \langle u, u_\lambda^- \rangle_{\mathscr{H}} \\ \langle u, u_\lambda^< \rangle_{\mathscr{H}} \end{pmatrix}; \quad D_- \mapsto \begin{pmatrix} H_-^2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$e^{i\mathscr{L}t} \mapsto e^{i\lambda t}, \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-|S|^2 \end{pmatrix} \tilde{f}_-(\lambda), \tilde{g}_-(\lambda) \right\rangle d\lambda,$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_\lambda^- \langle f, u_\lambda^- \rangle_{\mathscr{H}} d\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_{1-|S|^2>0} (1-|S|^2) u_\lambda^< \langle f, u_\lambda^< \rangle_{\mathscr{H}} d\lambda.$$

2. Уходящее $\mathcal{T}_+$

$$\mathcal{T}_+: U \mapsto \tilde{U}_+(\lambda) = \begin{pmatrix} \langle u, u_\lambda^+ \rangle_{\mathscr{H}} \\ \langle u, u_\lambda^> \rangle_{\mathscr{H}} \end{pmatrix}; \quad D_+ \mapsto \begin{pmatrix} H_+^2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$e^{i\mathscr{L}t} \to e^{i\lambda t}; \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-|S|^2 \end{pmatrix} \tilde{f}_-(\lambda), \tilde{g}_-(\lambda) \right\rangle d\lambda,$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_\lambda^+ \langle f, u_\lambda^+ \rangle_{\mathscr{H}} d\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_{1-|S|^2>0} (1-|S|^2) u_\lambda^> \langle f, u_\lambda^> \rangle_{\mathscr{H}} d\lambda.$$

3. Симметричное $\mathcal{T}$.

$$\mathcal{T}: U \mapsto \tilde{U}(\lambda) = \begin{pmatrix} \langle u, u_\theta^< \rangle \\ \langle u, u_\lambda^> \rangle \end{pmatrix}, \quad D_+ \to \begin{pmatrix} H_+^2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$D_- \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ H_-^2 \end{pmatrix}, \quad e^{i\mathscr{L}t} \mapsto e^{i\lambda t},$$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \begin{pmatrix} 1 & \bar{S} \\ S & 1 \end{pmatrix} \tilde{f}_\lambda, \tilde{g}_\lambda \right\rangle d\lambda,$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{U_\lambda^<, U_\lambda^>\} \begin{pmatrix} 1 & \bar{S} \\ S & 1 \end{pmatrix} \tilde{U}_\lambda d\lambda.$$

Видно, что коэффициент $S = (m_\infty - h)(m_\infty - \bar{h})$, играющий роль коэффициента прохождения из приходящего в уходящий канал, является главным параметром записанных спектральных представлений. Прямо из результатов § 3 следует

Теорема 34 ([35]). Коэффициент прохождения $S(\lambda)$ является характеристической функцией оператора L_h, а семейство φ_h срезок на $L_2(0, \infty)$ его излучающих собственных функций — каноническим семейством собственных функций абсолютно-непрерывного спектра.

Все факты спектрального анализа, перечисленные в § 3, теперь переносятся на случай оператора L_h. Видно, что полная информация о спектральных свойствах оператора L_h содержится в его характеристической функции. В [19] дано точное описание класса всех характеристических функций операторов Шрёдингера L_h с комплексным граничным условием в нуле и вещественным быстро убывающим потенциалом.

Теорема 34 ([19]). Если потенциал оператора L_h является вещественной функцией и удовлетворяет условию

$$|q(x)| < C \exp(-\delta x^\alpha), \; 0 < \alpha < 1,$$

то его характеристическая функция S как функция спектрального параметра λ обладает следующими свойствами

1. $|S_{(\lambda)}^{(r)}| \leqslant C Q^r r! r^{r/\beta}, \quad \beta = \alpha/1-\alpha,$
2. $|S(\lambda)| = 1, \; \lambda > 0,$
3. $|S(\lambda)| < 1, \; \operatorname{Im} \lambda > 0,$
4. $|S'(0)| \neq 0,$
5. $S(\lambda) = 1 + \frac{a}{i\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right), \; \lambda \to \infty, \; a > 0.$

Обратно, всякая функция, обладающая свойствами 1—5 и аналитическая в бесконечно удаленной точке, является характеристической функцией некоторого диссипативного оператора Шрёдингера с потенциалом указанного класса, являющимся сужением на вещественную ось мероморфной функции.

Опираясь на последний результат, можно дать полное описание класса множеств собственных чисел операторов типа L_h с быстроубывающими потенциалами как множества корней соответствующих характеристических функций (см. [19]). Например, верна

Теорема 35 ([19]). Пусть E — произвольное компактное подмножество из верхней полуплоскости, такое что все его точки накопления лежат на положительной полуоси и

$$\sum_{\lambda \in E} \operatorname{Im} \lambda + \int_{\mathbb{R}} \log \frac{1}{\operatorname{dist}(x, E)} \cdot \frac{dx}{1+x^2} < \infty.$$

Тогда существует диссипативный оператор Шрёдингера с убывающим вещественным потенциалом, множество собственных чисел которого совпадает с E.

Условие убывания потенциала накладывает очень существенный отпечаток на спектральные свойства оператора L_h.

Теорема 36 ([33]). Если L_h дифференциальный оператор с вещественным потенциалом q, обладающим конечным моментом $\int_0^\infty x|q(x)|dx < \infty$, то внутренняя компонента отделима с помощью ограниченного проектора в том и только том случае, когда она конечномерна.

Это утверждение означает, что пытаясь добиться отделимости компонент оператора L_h лишь за счет требований к убыванию потенциала мы вынуждены наложить на него требования теоремы 31, гарантирующие квазианалитичность характеристической функции в полуплоскости. Отметим, что квазианалитичность характеристической функции в полуплоскости (обеспеченная, например, быстрым убыванием потенциала $|q(x)|\leqslant\leqslant C\exp\{-\delta x^{1/2}\}$, гарантирует отсутствие у нее сингулярных делителей с особенностями на конечном расстоянии. Особенности же на бесконечности исключены благодаря асимптотике функции Вейля m_∞. Таким образом верна

Теорема 37 ([33]). Если вещественный потенциал q оператора L_h удовлетворяет условию $|q(x)|\leqslant c\exp\{-\delta x^{1/2}\}$, то система его собственных, присоединенных функций дискретного спектра вместе с системой собственных функций абсолютно-непрерывного спектра полна в $L_2(0,\infty)$ и внутреннее подпространство отделимо с помощью ограниченного проектора.

С другой стороны, для любого α, $\alpha\in(0, 1/2)$ и всякого числа λ_0, $\lambda_0\in(0,\infty)$ существует оператор вида Lh с вещественным потенциалом, удовлетворяющим условию $|q(x)|\leqslant C\exp\{-\delta x^\alpha\}$ такой, что при некотором комплексном граничном условии он имеет бесконечное множество простых собственных значений с точкой накопления λ_0 и объединенное семейство собственных функций непрерывного и дискретного спектра оператора L_h не полно в $L_2(0,\infty)$.

Отметим, что доказательство второго утверждения теоремы получается лишь незначительной модификацией построения леммы 5. Оказывается, что при замене использованной там функции $U(z)$ новой

$$U_\varepsilon(z)=\int_0^z \exp\{-\varepsilon(1-\zeta^2)^{-1}\}U'(\zeta)\,d\zeta$$

в формуле для $m(k)$, $m(k)\to m_\varepsilon(k)$, получается характеристическая функция

$$S_{\varepsilon,h}(\lambda)=\frac{m_\infty^\varepsilon(\lambda)-h}{m_\infty^\varepsilon(\lambda)-\bar h}=\frac{1+m^\varepsilon(\sqrt{\lambda})(a_0-h)}{1+m^\varepsilon(\sqrt{\lambda})(a_0-\bar h)},$$

имеющая сингулярный внутренний делитель $S^0(\lambda)=\exp\{i\varepsilon(1-\lambda\varkappa^2)^{-1}\}$. Более того, оказывается, что после выделения этого множителя $S_{\varepsilon,h}$ факторизуется в произведение внешнего фактора и фактора Бляшке. Отмеченная тесная связь между поведением различных факторов характеристической функции типична лишь для случая, когда она является гладкой, т. е. для убывающих потенциалов. В общем случае даже для вещественных потенциалов все обстоит иначе: множество точек накопления собственных чисел может заполнять отрезок, и это совместимо с отделимостью и полнотой.

Теорема 38 ([33]). Существует вещественный бесконечно-дифференцируемый потенциал q такой, что для оператора L_0 имеет место случай предельной точки, а при некотором комплексном граничном условии $y'(0)=hy(0)$ собственные числа оператора L_h заполняют отрезок и объединенная система собственных функций дискретного и непрерывного спектра полна

в $L_2(0,\infty)$ и сам оператор L_h подобен нормальному оператору.

Приведем в заключение формулы для спектральных проекторов оператора L_h.

Теорема 39 ([35]). Пусть L_h — диссипативный оператор с вещественным потенциалом q таким, что для оператора L_0 имеет место случай предельной точки Вейля. Тогда каноническую систему собственных функций его абсолютно-непрерывного спектра составляют решения v_λ однородного уравнения $-y''+q(x)y=\lambda y$, подчиненные граничному условию $v_\lambda'(0)-hv_\lambda(0)=0$ и условию нормировки $v_\lambda'(0)-\bar h v_\lambda(0)=g=\sqrt{2\operatorname{Im} h}$. Спектральные проекторы на промежутке ω абсолютно-непрерывного спектра, не содержащие спектральных особенностей, ограничены и их ядра даются формулой

$$\mathscr{E}_\omega(x,x')=\frac{1}{2\pi}\int_\omega \varphi_h(x,\lambda)\varphi_h(x',\lambda)\frac{1-|S(\lambda)|^2}{S(\lambda)}\,d\lambda$$

(здесь мы учли, что, ввиду вещественности потенциала $\overline{\varphi_h}(x',\lambda)=\varphi_{\bar h}(x',\lambda)$).

Собственные функции дискретного спектра оператора L_h совпадают с квадратично суммируемыми решениями типа φ_h, а ядра соответствующих им проекторов вычисляются по формуле (для простых собственных чисел λ, $s'(\lambda)\neq 0$:

$$\mathscr{P}_\lambda(x,x')=i\,\frac{\varphi_h(x,\lambda)\varphi_h(x',\lambda)}{S'(\lambda)}.$$

5.3. Трехмерный оператор Шрёдингера с комплексным потенциалом. В этом случае дефект несамосопряженности уже бесконечен, однако предположив, что потенциал $q(x)+i\rho(x)$ ограничен, а его мнимая часть $\rho(x)=g^2(x)\geqslant 0$ стремится к нулю на бесконечности, можно показать, что нижняя полуплоскость $\operatorname{Im}\lambda<0$ свободна от спектра, а в верхней лежит лишь счетное множество собственных чисел. Из теоремы единственности Хольмгрена следует, что оператор Шрёдингера

$$L=-\Delta+[q(x)+ig^2(x)]$$

с потенциалом описанного класса прост в $L_2(\mathbf{R}^3)$. Достроив это пространство приходящими и уходящими каналами $D_-=L_2(-\infty,0;\ L_2(\operatorname{supp} g))$, $D_+=L_2(0,\infty;\ L_2(\operatorname{supp} g))$, рассмотрим в $\mathscr{H}=D_-\oplus L_2(\mathbf{R}^3)\oplus D_+=\{U: U=(v_-, v, v_+)\}$ оператор, действующий на вектор-функции $U=(v_-, v, v_+)$ по правилу

$$\mathscr{L}\begin{pmatrix} v_-\\ v\\ v_+\end{pmatrix}=\begin{cases}-\dfrac{1}{i}\dfrac{dv_-}{d\xi}(\xi,x),\\ Lv+\dfrac{g(x)}{2}[v_-(0,x)+v_+(0,x)],\\ -\dfrac{1}{i}\dfrac{dv_+}{d\xi}(\xi,x).\end{cases}$$

Теорема 40 ([36]). Оператор $\mathscr{L}$ является минимальной самосопряженной дилатацией оператора L.

Собственные функции дилатации $\mathscr{L}$ записываются через предельные значения ядра резольвенты операторов L, L^*

$$\lim_{\lambda \to \lambda + i0} \{(L - \lambda I)^{-1}\}(x, s) = R^L_{\lambda+i0}(x, s).$$

Эти предельные значения существуют, если существуют предельные значения для ядра резольвенты оператора $-\Delta + q$. Далее мы предполагаем это условие выполненным.

Теорема 41 ([36]). Вектор-функции

$$U^-(x, \xi; \lambda, s) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} \delta(x-s)\exp(-i\lambda\xi) \\ -R^L_{\lambda-i0}(x, s)\, g(s) \\ [\delta(x-s) - ig(x) R^L_{\lambda-i0}(x, s)\, g(s)]\exp(-i\lambda\xi) \end{pmatrix}$$

являются приходящими собственными функциями дилатации. Система $\{U^-(\cdot, \cdot; \lambda s)\}\lambda \in \mathbf{R}$, $s \in \operatorname{Supp} g$ ортонормирована

$$\langle U^-(\cdot, \cdot; \lambda s),\ U^-(\cdot, \cdot; \lambda', s')\rangle = \delta(\lambda - \lambda')\,\delta(s - s')$$

и полна в $\mathscr{H}_- = \bigvee_t \exp(i\mathscr{L}t) D_-$

Вектор-функции

$$U^+(x, \xi; \lambda, s) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} [\delta(x-s) + ig(x) R^{L^*}_{\lambda+i0}(x, s)\, g(s)]\exp(-i\lambda\xi) \\ -R^{L^*}_{\lambda+i0}(x, s)\, g(s) \\ \delta(x-s)\exp(-i\lambda\xi) \end{pmatrix}$$

являются уходящими собственными функциями дилатации. Система $\{U^+\}$ ортонормирована и полна в $\mathscr{H}^+ = V_t \exp(i\mathscr{L}t) D_+$

Оператор-функция S с ядром

$$s(x, s, z) = \delta(x-s) + ig(x) R^{L^*}_z(x, s)\, g(s)$$

аналитична, является сжимающей в верхней полуплоскости и обладает скалярным кратным, если некоторая степень оператора $T_z = gR^{L^*}_z g$ имеет конечный след. Она служит характеристической функцией оператора L и устанавливает соответствие между приходящими и уходящими собственными функциями на области σ_1, $\sigma_1 \in \mathbf{R}$, унитарности S:

$$U^+(\cdot, \cdot, \lambda, t) = \int_{\operatorname{supp} g} U^-(\cdot, \cdot, \lambda, h)\, s(h, t, \lambda)\, dh$$

(последнее равенство понимается как равенство обобщенных функций).

Излучающие собственные функции дилатации имеют вид

$$U^<_\pi(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} 0 \\ u_\pi(x, \lambda) \\ \pi \exp(-i\lambda\xi) \end{pmatrix},$$

где $u^<_\pi$ — единственное решение уравнения $Lu^< = \lambda u^<$, нормированное условием $igu^< = \pi$. Поглощающие собственные функции дилатации конструируются аналогичным образом на базе решений сопряженного уравнения $L^* u^> = \lambda u^>$, подчиненных условию нормировки $igu^> = -\nu$:

$$U^>_\nu(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} \nu \exp(-i\lambda\xi) \\ u^>_\lambda(x, \nu) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\{\pi\}$, $\{\nu\}$ — ортонормированные семейства, задающие полярное представление характеристической функции $S(\lambda) = \sum s_\pi \nu \langle\ ;\ \pi\rangle$, $s_\pi > 0$.

Теорема 42 ([36]). Срезки $U_\pi^<$, $u_\nu^>$ излучающих и поглощающих собственных функций дилатации на $L_2(\mathbf{R}^3)$ образуют канонические системы собственных функций абсолютно непрерывного спектра операторов L и L^* соответственно. При этом

1. Абсолютно-непрерывный спектр σ_e операторов L, L^* совпадает с подмножеством вещественной оси, где характеристическая функция не является унитарной, т. е. $\Delta(\lambda) > 0$, $\tilde{\Delta}(\lambda) > 0$.

2. Функции $u^<_\pi$, $u^>_\nu$ удовлетворяют условиям биортогональности, т. е. равенству в обобщенном смысле

$$\langle u^>_\pi(\cdot, \lambda), u^<_{\nu'}(\cdot, \lambda')\rangle = -\delta(\lambda - \lambda') \frac{\langle S\pi, \nu'\rangle}{1 - s^2_\pi}, \quad s_\pi < 1.$$

3. Спектральные проекторы оператора L, отвечающие промежуткам ω абсолютно-непрерывного спектра, не содержащим спектральных особенностей, записываются в виде интегральных операторов с ядрами

$$\mathscr{E}_\omega(x, x') = -\int_\omega \sum_{s_\pi < 1} u^<_\pi(x, \lambda)\, \overline{u^>_\nu(x', \lambda)}\, \frac{1 - s^2_\pi}{s_\pi}\, d\lambda.$$

4. Собственные функции $u_\pi^<$ дискретного спектра оператора L, отвечающие простым собственным числам λ_k (простым корням характеристической функции) биортогональны к собственным функциям дискретного спектра $u_\nu^>$ оператора L^*, отвечающим сопряженным собственным числам и соответствующие спектральные проекторы задаются ядрами

$$\mathscr{P}_{\lambda_k}(x, x') = 2\pi i \sum_\pi \frac{u^<_\pi(x, \lambda_k)\, \overline{u^>_\nu(x', \lambda_k)}}{\langle S'(\lambda_k)\pi, \nu\rangle}.$$

Здесь суммирование распространяется на те векторы π, образующие ортонормированный базис полярного представления характеристической функции в точке λ_k, $S(\lambda_k)=\Sigma s_\pi \nu\langle, \pi\rangle$, которым отвечают нулевые сингулярные числа. Векторы ν достраиваются по непрерывности с использованием полярного представления вблизи точки λ_k.

Дальнейшее исследование спектральных свойств операторов L, L^* проводится по программе, намеченной в § 2, 3. Мы не будем формулировать здесь соответствующих теорем — они получаются непосредственным применением заготовленных в § 2, 3 абстрактных утверждений к рассматриваемому случаю. Отметим лишь, что детальное исследование спектральных свойств L, L^* базируется на предварительном изучении соответствующей характеристической функции, которая записывается через резольвенту оператора L^*

$$S_\lambda = I + igR^{L^*}_{\lambda+i0}g; \quad S: L_2(\operatorname{supp} g) \to L_2(\operatorname{supp} g).$$

Важно, что эта характеристическая функция возникает как объект самосопряженной теории в качестве матрицы рассеяния дилатации — коэффициента прохождения из приходящего канала в уходящий. Пользуясь тем, что пространство $L_2(\operatorname{supp} g)$ вложено как подпространство в $L_2(\mathbf{R}^3)$, можно заменить $R^*_{\lambda+i0}$ на резольвенту самосопряженной дилатации $R^{\mathscr{L}}_{\lambda+i0}$:

$$S_\lambda = I + igR^{\mathscr{L}}_{\lambda+i0}g.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Адамян В. М., Аров Д. З.* Об унитарных сцеплениях полуунитарных операторов // Мат. исследования— 1966.— *1*, № 2.— С. 3—64
2. *Агранович З. С., Марченко В. А.* Обратная задача теории рассеяния.— Харьков.: Изд-во Харьковского университета, 1960.— 268 с.
3. *Гельфанд И. М.* О спектре несамосопряженных дифференциальных операторов // Успехи мат. наук— 1952.— *7*, № 6.— С. 183—184
4. *Желудев В. А.* О собственных значениях возмущенного оператора Шрёдингера с периодическим потенциалом. // Пробл. мат. физ.— 1967.— *2*.— С. 108—123
5. *Иванов С. А., Павлов Б. С.* Карлесоновские серии резонансов в задаче Редже // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1978.— *42*, № 1.— С. 26—55.
6. —, — Векторные системы экспонент и нули целых матриц-функций // Вестн. ЛГУ. Сер. мат.— 1980.— № 1.— С. 25—30
7. *Кацнельсон В. Э.* Об условиях базисности системы корневых векторов некоторых классов операторов // Функц. анал. и его прил.— 1967.— *1*, № 2.— С. 39—51
8. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.— М.: ГИТТЛ, 1956.— 632 с.
9. *Лидский В. Б.* О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов // Труды Моск. мат. Об-ва.— 1962.— *11*.— С. 3—35
10. *Лифшиц М. С.* Операторы, колебания, волны (открытые системы).— М.: Наука, 1966.— 268 с
11. *Лянце В. Э.* О дифференциальном операторе со спектральными особенностями I // Мат. сб.— 1964.— *64*, № 4.— С. 521—561

12. — О дифференциальном операторе со спектральными особенностями II // Мат. сб.— 1964.— *65*, № 1.— С. 47—103
13. *Мартиросян Р. М.* О спектре несамосопряженного дифференциального оператора $-\Delta+q$ в трехмерном пространстве // Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат.— 1957.— *10*, № 1.— С. 85—111
14. *Марченко В. А.* Разложение по собственным функциям несамосопряженных сингулярных дифференциальных операторов второго порядка // Мат. сб.— 1960.— *52*, № 2.— С. 739—788
15. *Набоко С. Н.* О несамосопряженной модели Фридрихса // Зап. научн. семинаров ЛОМИ.— 1974.— *39*.— С. 40—58
16. — Функциональная модель в теории возмущений и ее приложения к теории рассеяния // Труды Мат. ин-та АН СССР.— 1980.— *147*.— С. 86—114
17. *Наймарк М. А.* Исследование спектра и разложение по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора на полуоси // Труды Моск. мат. об-ва.— 1954.— *3*.— С. 187—270
18. *Никольский Н. К., Павлов Б. С.* Базисы из собственных векторов вполне неунитарных сжатий и характеристическая функция // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1970.— *34*, № 1.— С. 9—133
19. —, *Хрущев С. В.* Функциональная модель и некоторые задачи спектральной теории функций // Труды Мат. ин-та АН СССР.— 1987.— *176*.— С. 97—210
20. *Павлов Б. С.* О несамосопряженном операторе $-y''+q(x)y$ на полуоси // Докл. АН СССР.— 1961.— *141*, № 4.— С. 807—810
21. — К спектральной теории несамосопряженных дифференциальных операторов // Докл. АН СССР.— 1962.— *146*, № 6.— С. 1267—1270
22. — О несамосопряженном операторе Шрёдингера // Пробл. мат. физ.— 1966.— *1*.— С. 102—132
23. — О несамосопряженном операторе Шрёдингера II // Пробл. мат. физ.— 1967.— *2*.— С. 133—157
24. — О несамосопряженном операторе Шрёдингера III // Пробл. мат. физ. — 1968.— *3*.— С. 59—79
25. — О полноте набора резонансных состояний для системы дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР.— 1971.— *196*, № 1.— С. 1272—1275
26. — О совместной полноте системы собственных функций сжатия и его сопряженного // Пробл. мат. физ.— 1971.— *5*.— С. 101—112
27. — Непрерывный спектр резонансов на нефизическом листе // Докл. АН СССР.— 1972.— *206*, № 6.— С. 1301—1304
28. — Факторизация матрицы рассеяния и серийная структура ее корней // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1973.— *37*.— С. 217—246
29. — Об одномерном рассеянии плоских волн на произвольном потенциале // Теор. и мат. физ.— 1973.— *16*, № 1.— С. 105—114
30. — Спектральный анализ дифференциального оператора с «размазанным» граничным условием // Пробл. мат. физ.— 1973.— С. 101—119
31. — О теоретико-операторском смысле коэффициента прохождения // Пробл. мат. физ.— 1974.— *7*.— С. 102—125
32. — Учет потерь в задачах рассеяния // Мат. сб.— 1975.— *97*, № 1.— С. 77—93
33. — Об условиях отделимости спектральных компонент диссипативного оператора // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1975.— *39*, № 1.— С. 123—148
34. — Разложение по собственным функциям абсолютно-непрерывного спектра диссипативного оператора // Вестн. ЛГУ. Сер. мат.— 1975.— № 1. — С. 130—137
35. — Теория дилатаций и спектральный анализ несамосопряженных дифференциальных операторов // В кн. Труды Седьмой зимней школы, Дрогобыч.— 1974.— М.: ЦЭМИ, 1976.— С. 3—69
36. — Самосопряженная дилатация диссипативного оператора Шрёдингера и

разложение по его собственным функциям. // Мат. сб.— 1977.— *102*, № 4.— С. 511—536
37. — Базисность системы экспонент и условие Макенхаупта // Докл. АН СССР.— 1979.— *247*, № 1.— С. 37—40
38. — Функциональная модель и спектральные особенности // Пробл. мат. физ.— 1979.— *6*.— С. 113—121
39. — Условия аналитичности парциальной матрицы рассеяния // Пробл. мат. физ.— 1982.— *10*.— С. 183—208
40. —, *Смирнов Н. В.* Резонансное рассеяние на одномерном кристалле и тонкой пленке // Вестн. ЛГУ. Сер. мат.— 1977.— № 13.— С. 70—80
41. —, *Стрепетов А. В.* Совместная полнота в случае непрерывного спектра // Функц. анализ и его прил.— 1986.— *20*, № 1.— С. 33—36
42. —, *Фаддеев Л. Д.* Теория рассеяния и автоморфные функции // Зап. научн. семинаров ЛОМИ.— 1972.— *27*.— С. 161—193
43. *Пеккер М. А.* Резонансы при рассеянии акустических волн сферической неоднородностью плотности // В кн. Труды Седьмой зимней школы, Дрогобыч 1974.— М.: ЦЭМИ, 1976.— С. 70—100
44. *Потапов В. П.* Мультипликативная структура аналитических нерастягивающих матриц—функций // Труды Моск. мат. об-ва.— 1955.— *4*.— С. 125—236
45. *Садовничий В. А.* Аналитические методы в спектральной теории дифференциальных операторов.— М.: Изд-во МГУ, 1973.— 154 с.
46. *Сахнович Л. А.* Диссипативные операторы с абсолютно-непрерывным спектром // Труды Моск. мат. об-ва.— 1968.— *19*.— С. 213—270
47. *Трейль С. Р.* Пространственно-компактная система собственных векторов образует базис Рисса, если она равномерно-минимальная // Докл. АН СССР.— 1986.— *288*, № 2.— С. 308—312
48. *Фаддеев Л. Д.* Разложение по собственным функциям оператора Лапласа на фундаментальной области дискретной группы на плоскости Лобачевского // Труды Моск. мат. об-ва.— 1967.— *17*.— С. 323—350
49. *Beurling A.* On two problems, concerning linear transformation in Hilbert Space // Acta Math.— 1949.— *81*.— С. 239—255
50. *Carleson L.* Sets of uniqueness for functions regular in the unit circle // Acta Math.— 1952.— *87*, № 3—4
51. — Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem // Ann. Math.— 1962.— *76*.— С. 547—559
52. *Helson H.* Lectures on invariant subspaces— N.-Y.-London: Acad. Press, 1964.— 115 с.
53. *Hruščev S. V.* Sets of uniqueness for Gevrey classes // Ark. mat.— 1977.— *15*, № 2.— С. 253—304
54. — Spectral singularities of dissipative Schrödinger operator with rapidly decreasing potential // Indiana Univ. Math. J.— 1984.— *33*, № 4.— С. 613—638
55. — The Regge problem for strings, unconditionally convergent eigenfunction expansions and unconditional bases of exponentials in $L_2(-T, T)$ // J. Operator Theory.— 1985.— *14*.— С. 67—85
56. —, *Nicolškii N. K., Pavlov B. S.* Unconditional bases of exponentials and reproducing kernels // Lect. Notes Math.— 1981.— *864*.— С. 214—335
57. *Lax P. D., Phillips R.* Scattering theory.— Acad.: N.-Y., London 1967.— 276 с. (Пер. на рус. яз.: *Лакс П., Филлипс Р.* Теория рассеяния— М.: Мир, 1971.— 312 с.)
58. *Regge T.* Analytic properties of the Scattering matrix // Nuovo Cimento.— 1958.— *8*, № 5.— С. 671—679 (Пер. на рус. яз.: *Редже Т.* Аналитические свойства матрицы рассеяния // Математика.— 1963.— *7*, № 4.— С. 83—89)
59. *Sz.-Nagy B., Foias C.* Analyse harmonique des operateurs de l'espace de Hilbert.— Budapest: Academiai Kiado, 1970.— 387 с. (Пер. на рус. яз.: *Секефальви-Надь Б., Фойаш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве.— М.: Мир, 1970.— 431 с.)
60. *Smirnov V. I.* Sur les formules de Cauchy et de Green et quelques problemes qui s'y rattachent // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1932.— *7*, № 3.— С. 337—372
61. *Titchmarsh S. C.* Eigenfunction expansions associated with second order differential equations— Oxford: Clarendon press, 1946.— 175 с. (Пер. на русск. яз.: *Титчмарш Э. Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка 1.— М.: ИИЛ, 1960.— 278 с.)

УДК 517.954

III. ТЕОРЕМЫ ОБ ИНДЕКСЕ

Б. В. Федосов

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теория индекса эллиптических операторов долгое время развивалась параллельно в рамках двух математических дисциплин, традиционно считавшихся далекими друг от друга. С одной стороны — это теория эллиптических уравнений и краевых задач, в частности, теория сингулярных интегральных уравнений. С другой стороны — это топология и алгебраическая геометрия, где рассматривались весьма специальные эллиптические операторы. Мощным толчком к сближению послужила статья И. М. Гельфанда [2], в которой ставилась задача о топологической классификации эллиптических операторов, в частности, задача о вычислении индекса в топологических терминах. Последняя была полностью решена Атьей и Зингером в 1963 году. Теорема Атьи—Зингера вызвала настоящий бум, не прекращающийся и по сей день, и оказала огромное влияние на дальнейшее развитие и сближение теории дифференциальных уравнений и топологии. Так, например, необходимость расширить класс деформаций эллиптических операторов стимулировала появление новых алгебр псевдодифференциальных операторов (п. д. о.). В топологии теорема Атьи—Зингера стимулировала дальнейшее развитие K-теории.

Подробное доказательство теоремы Атьи—Зингера изложено в статьях [23], [24], а также в книге [51], где приведены все необходимые сведения из топологии и теории уравнений в частных производных. В этих источниках разобраны также примеры эллиптических операторов, ставшие уже классическими: комплексы де Рама, Дольбо, оператор сигнатуры Хирцебруха и оператор Дирака. Более доступное для начинающего читателя (но и менее полное) изложение содержится в монографии [31].

Много работ посвящено поиску других доказательств теоремы об индексе. Прежде всего, это важная работа [21], в которой развит так называемый метод уравнения теплопроводности. Этот метод неоднократно применялся в различных вариантах другими авторами. Вероятностный подход, основанный также на уравнении теплопроводности, предложен в недавних работах [30]. Непосредственное доказательство, не использующее топологической техники, дано в [7], [46]. Недавно предложено еще одно интересное непосредственное доказательство теоремы об индексе, для оператора Дирака [45], использующее квантование на супермногообразиях.

Вслед за теоремой Атьи—Зингера стали появляться различные ее обобщения. Укажем основные из них.

1. Эквивариантная теорема об индексе [22], в частности, теорема Атьи—Ботта о неподвижных точках [19].
2. Индекс семейства эллиптических операторов [25].
3. Индекс вещественных эллиптических операторов [26].
4. L^2-индекс эллиптических операторов на некомпактных многообразиях и применения к теории представлений групп [17], [27], [41].
5. Индекс почти-периодических и случайных операторов, теория индекса в факторах типа II фон Неймана [11], [39].
6. Теорема об индексе на многообразии с краем, которая была анонсирована Атьей и Боттом в 1964 г. Доказательство было дано значительно позже Буте де Монвелем [34]. Подробное изложение вопроса дано в недавней монографии [52]. Отметим, что замечательная алгебра краевых задач Буте де Монвеля была введена главным образом для нужд теории индекса.
7. Индекс тёплицевых операторов [35], [36].
8. Недавно были обнаружены интересные связи теории индекса эллиптических операторов с геометрическим квантованием [6], методом орбит в теории представлений [5] и спектральной теорией операторов с периодическими бихарактеристиками [40]. Так, в работе [29] формула А. А. Кириллова для характеров интерпретируется как формула для эквивариантного индекса оператора Дирака. В [36] кратность собственных значений гамильтонианов с периодическими траекториями выражается как индекс некоторого эллиптического оператора на многообразии орбит.
9. В недавних работах автора [9], [10] предложен новый подход к деформационному квантованию [28]. В частности, строится теория индекса в алгебре квантовых наблюдаемых. Условия целочисленности индекса дают условия квантования, которые в деформационном подходе отсутствовали.
10. Теория индекса эллиптических операторов нашла различные интересные применения в современной физике. С ними можно познакомиться в работах [12], [15], [45].

Скажем несколько слов о характере приложений теоремы об индексе. Большинство из них — это теоремы существования решений, которые выводятся из положительности индекса. Классический пример такого рассуждения дает теорема Римана—Роха. Более современные примеры: доказательство Атьи и Шмида существования дискретных серий неприводимых представлений или доказательство А. С. Шварца существования инстантонов и вычисление размерности многообразия инстантонов [12].

Имеются также приложения совершенно другого типа, основанные на целочисленности индекса. Их можно пояснить на примере оператора Дирака. Индекс оператора, согласно формуле Атьи—Зингера, равен так называемому $\hat{A}$-роду многообразия, который, вообще говоря, не является целым числом. Следовательно, если $\hat{A}$-род не является целым, то на многообразии не существует спинорной структуры. Более содержательный пример относится к упомянутому в п. 9 деформационному квантованию: если индекс не является целым, то не существует операторного представления алгебры квантовых наблюдаемых.

Объем настоящей статьи не позволяет рассмотреть все перечисленные выше вопросы. Так, совершенно не затронуты пункты 3, 4, 8, 10. Первая и вторая главы, в которых излагается теорема Атьи—Зингера и ее обобщения, упомянутые в пунктах 1, 2, 5, помимо популяризаторских целей имеют цель подготовить читателя к главе 3, в которой достаточно подробно излагаются результаты пункта 9. Это накладывает отпечаток на характер изложения. В частности, систематически используется аппарат связностей и характеристический классов.

Глава 1

ТЕОРЕМА АТЬИ — ЗИНГЕРА

§ 1. Индекс фредгольмовых операторов

1.1. Фредгольмовы операторы. Пусть H^0, H^1 — гильбертовы пространства. Будем рассматривать замкнутые линейные операторы $A: H^0 \to H^1$ с плотной областью определения $D(A)$. Подпространство $\operatorname{Ker} A = \{u \in H^0 : Au = 0\}$ называется *ядром* оператора A, а факторпространство $\operatorname{Coker} A = H^1/\operatorname{Im} A$, где $\operatorname{Im} A$ — образ оператора, называется *коядром.* Оператор A называется *фредгольмовым,* если его ядро и коядро конечномерны. *Индекс* фредгольмова оператора определяется по формуле

$$\operatorname{ind} A = \dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Coker} A.$$

Укажем простейшие свойства фредгольмовых операторов.

1. Оператор $A^*: H^1 \to H^0$, сопряженный фредгольмову, также фредгольмов.

2. Имеют место прямые ортогональные разложения $H^0 = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A^*$, $H^1 = \operatorname{Ker} A^* \oplus \operatorname{Im} A$. В частности, образы $\operatorname{Im} A$ и $\operatorname{Im} A^*$ — замкнутые подпространства.

3. Существует такой ограниченный оператор $R_0: H^1 \to H^0$, что $1 - R_0 A$ и $1 - AR_0$ являются ортогональными проекторами на $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Ker} A^*$.

Из свойства 2 следует, что пространства $\operatorname{Coker} A$ и $\operatorname{Ker} A^*$ изоморфны, так что для индекса имеем эквивалентное выражение

$$\operatorname{ind} A = \dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Ker} A^* = \\ = \dim \operatorname{Ker} A^*A - \dim \operatorname{Ker} AA^* = -\operatorname{ind} A^* \qquad (1.1)$$

Наметим доказательство этих свойств. Равенство $\dim \operatorname{Coker} A = d$ означает, что существуют такие элементы $v_1, v_2, \ldots, v_d \in H^1$, что любой элемент $v \in H^1$ однозначно представим в виде $v = Au + c_1 v_1 + \ldots + c_d v_d$, где u ортогонален $\operatorname{Ker} A$. Оператор $\hat{A}: (\operatorname{Ker} A)^\perp \oplus \mathbf{C}^d \to H^1$, действующий по правилу $(u, c_1, c_2, \ldots, c_d) \mapsto Au + c_1 v_1 + \ldots + c_d v_d$, плотно определен, замкнут и имеет всюду определенный обратный. По теореме Банаха, обратный оператор $\hat{A}^{-1}$ ограничен. Отсюда вытекает существование такой константы $k > 0$, что для любого $u \in D(A) \cap (\operatorname{Ker} A)^\perp$ справедлива априорная оценка $\|u\|_0 \leqslant k\|Au\|_1$ (индексы 0 и 1 относятся к нормам в H^0 и H^1). В силу этой оценки, следует замкнутость $\operatorname{Im} A$ и тем самым, справедливость разложения $H^1 = \operatorname{Ker} A^* \oplus \operatorname{Im} A$. Оператор R_0 совпадает с $\hat{A}^{-1}$ на $\operatorname{Im} A$ и доопределяется нулем на $\operatorname{Ker} A^*$. Из априорной оценки, переписанной в виде $(A^*Au, u) \geqslant (u, u)/k^2$, следует замкнутость образа $\operatorname{Im} A^*$ и, тем самым, справедливость разложения $H^0 = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A^*$, откуда вытекает фредгольмовость A^*.

Отметим, что понятие фредгольмовости и индекса имеет смысл и для операторов в банаховых пространствах, но мы ограничимся случаем гильбертовых пространств. Отметим также, что в определение фредгольмовости часто включается требование ограниченности оператора A. Это требование не уменьшает общности, так как замкнутый плотно определенный оператор ограничен в норме графика, но иногда вызывает неудобства. Вместо термина фредгольмов оператор употребляются также термины Ф-оператор, нётеров оператор.

Нам понадобятся некоторые сведения о ядерных операторах. Подробное изложение можно найти в [3], см. также [13, добавление 3]. Пусть $T: H^0 \to H^1$ — компактный оператор в гильбертовых пространствах. Обозначим через $s_i > 0$ ненулевые собственные значения оператора T^*T и введем *ядерную норму* $\|T\|_{\mathrm{tr}}$, полагая $\|T\|_{\mathrm{tr}} = \sum_{i=1}^{\infty} s_i^{1/2}$. Оператор T называется *ядерным,* если его ядерная норма конечна. Ядерные операторы образуют двусторонний идеал в алгебре ограниченных операторов: если в последовательности

$$H^0 \xrightarrow{A} H^1 \xrightarrow{T} H^2 \xrightarrow{B} H^3$$

операторы A и B ограничены, а T — ядерный, то $\|BTA\|_{\mathrm{tr}} \leqslant \|A\|\,\|B\|\,\|T\|_{\mathrm{tr}}$, где $\|\ \|$ — операторная норма. Оператор, сопряженный ядерному, также является ядерным и имеет ту же ядерную норму.

Для ядерного оператора $T: H \to H$ определяется *след*

$$\operatorname{tr} T = \sum_{i=1}^{\infty} (Te_i, e_i) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k,$$

где e_i — произвольный ортонормированный базис в H, λ_k — собственные значения оператора T с учетом кратности. Первое равенство является определением следа (оно не зависит от выбора базиса), а второе — это теорема В. Б. Лидского о следе. След — это линейный функционал на пространстве ядерных операторов, ограниченный по ядерной норме, обладающий свойством $\operatorname{tr} AT = \operatorname{tr} TA$ для любого ограниченного оператора A

и ядерного оператора T. Это свойство можно усилить: если AB и BA — ядерные операторы (A и B могут быть неограниченными), то $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$. Равенство вытекает из теоремы В. Б. Лидского, поскольку ненулевые собственные значения операторов AB и BA и их кратности совпадают. Очевидно также свойство $\operatorname{tr} T^* = \overline{\operatorname{tr} T}$.

Для ядерного оператора T в пространстве $L^2(\mathbf{R}^n)$ с непрерывным ядром $T(x, y)$ след выражается в виде интеграла

$$\operatorname{tr} T = \int T(x, x)\, dx.$$

Исходным пунктом многих исследований по индексу являются следующие две теоремы, выражающие индекс в виде разности следов. Первая лежит в основе *«метода уравнения теплопроводности»* [21], вторая встречается столь часто, что ее можно отнести к математическому фольклору.

Теорема 1.1. Пусть A — фредгольмов оператор, операторы A^*A и AA^* имеют дискретный спектр, и для любого $t>0$ операторы e^{-A^*At} и e^{-AA^*t} — ядерные. Тогда

$$\operatorname{ind} A = \operatorname{tr} e^{-A^*At} - \operatorname{tr} e^{-AA^*t}. \qquad (1.2)$$

Равенство (1.2) следует из того, что ненулевые собственные значения операторов A^*A и AA^* совпадают, а кратность нулевых собственных значений равна соответствено $\dim \operatorname{Ker} A^*A$ и $\dim \operatorname{Ker} AA^*$.

Теорема 1.2. Замкнутый, плотно определенный оператор $A: H^0 \to H^1$ является фредгольмовым тогда и только тогда, когда существует такой оператор $R: H^1 \to H^0$, что операторы $1-RA$ и $1-AR$ — ядерные. При этом

$$\operatorname{ind} A = \operatorname{tr}(1-RA) - \operatorname{tr}(1-AR). \qquad (1.3)$$

Необходимость доказана в свойстве 3. Достаточность следует из включений $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} RA$ и $\operatorname{Im} A \supset \operatorname{Im} AR$ и того, что для операторов RA и AR справедливы теоремы Фредгольма, поскольку они отличаются от единичного оператора на компактный. Равенство (1.3) справедливо для $R=R_0$ из свойства 3 и не зависит от выбора R, так как операторы $(R-R_0)A$ и $A(R-R_0)$ — ядерные и имеют равные следы.

Оператор R называется *параметриксом* (*регуляризатором*). Иногда термин параметрикс употребляют для операторов с более слабым свойством: $1-RA$ и $1-AR$ — компактные операторы.

1.2. Свойства индекса. Из формулы (1.1) вытекает, что индекс самосопряженного фредгольмова оператора равен 0. Для операторов в конечномерных пространствах, как следует из (1.3), индекс равен $\dim H^0 - \dim H^1$ и не зависит от оператора. Очевидно также, что $\operatorname{ind} A_1 \oplus A_2 = \operatorname{ind} A_1 + \operatorname{ind} A_2$. Здесь $A_1: H_1^0 \to H_1^1$, $A_2: H_2^0 \to H_2^1$, $A_1 \oplus A_2: H_1^0 \oplus H_2^0 \to H_1^1 \oplus H_2^1$ — прямая сумма операторов.

Свойство устойчивости. Пусть A, R — фредгольмов оператор и его параметрикс, и пусть $B: H^0 \to H^1$ удовлетворяет условию $\|RB\| < 1$, $\|BR\| < 1$. Тогда оператор $A-B$ также фредгольмов, и $\operatorname{ind}(A-B) = \operatorname{ind} A$.

Для доказательства заметим, что параметрикс R_1 оператора $A-B$ можно задать рядом Неймана

$$R_1 = R \sum_{n=0}^{\infty} (BR)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (RB)^n R.$$

Тогда

$$1 - R_1(A-B) = \sum_{n=0}^{\infty} (RB)^n (1-RA);$$

$$1 - (A-B)R_1 = (1-AR) \sum_{n=0}^{\infty} (BR)^n.$$

Эти операторы ядерные, так как содержат ядерные множители. Кроме того, при $n \geqslant 1$ следы операторов $(RB)^n(1-RA)$ и $(1-AR)(BR)^n$ совпадают, так как под знаком следа возможна циклическая перестановка множителей.

Как следствие получаем, что индекс семейства $A(t)$ ограниченных фредгольмовых операторов, непрерывного по операторной норме, не зависит от параметра t, хотя размерности ядра и коядра могут меняться. Короче говоря, индекс является гомотопическим инвариантом.

Логарифмическое свойство. Пусть в последовательности

$$H^0 \xrightarrow{A_1} H^1 \xrightarrow{A_2} H^2$$

операторы A_1 и A_2 — фредгольмовы. Тогда A_2A_1 — фредгольмов, и $\operatorname{ind} A_2A_1 = \operatorname{ind} A_1 + \operatorname{ind} A_2$.

Действительно, пусть R_1, R_2 — параметриксы. Тогда $R = R_1R_2$ будет параметриксом для A_2A_1. Далее

$$\operatorname{tr}(1-R_1R_2A_2A_1) = \operatorname{tr}(1-R_1A_1) + \operatorname{tr} R_1(1-R_2A_2)A_1 =$$
$$= \operatorname{tr}(1-R_1A_1) + \operatorname{tr}(1-R_2A_2) - \operatorname{tr}(1-R_2A_2)(1-A_1R_1).$$

Аналогично

$$\operatorname{tr}(1-A_2A_1R_1R_2) = \operatorname{tr}(1-A_2R_2) + \operatorname{tr}(1-A_1R_1) -$$
$$- \operatorname{tr}(1-R_2A_2)(1-A_1R_1),$$

откуда следует утверждение.

Мультипликативное свойство. Пусть $H_1 \otimes H_2$ — *тензорное произведение гильбертовых пространств*, т. е. гильбертово пространство, порожденное формальными произведениями $u_1 \otimes u_2$, $u_1 \in H_1$, $u_2 \in H_2$, удовлетворяющими соотношениям билинейности, со скалярным произведением $(u_1 \otimes u_2, v_1 \otimes v_2) = (u_1, v_1)(u_2, v_2)$. Если A_1 и A_2 — линейные операторы в H_1 и

H_2, то оператор $A_1 \otimes A_2$ определяется на элементах вида $u_1 \otimes u_2$, $u_1 \in D(A_1)$, $u_2 \in D(A_2)$ по формуле $(A_1 \otimes A_2)(u_1 \otimes u_2) = A_1 u_1 \otimes A_2 u_2$. Если при этом A_1 и A_2 — ядерные операторы, то $A_1 \otimes A_2$ также ядерный, и $\operatorname{tr} A_1 \otimes A_2 = \operatorname{tr} A_1 \operatorname{tr} A_2$.

Пусть $A_1 : H_1^0 \to H_1^1$ и $A_2 : H_2^0 \to H_2^1$ — фредгольмовы операторы. Определим произведение $\#$ формулой

$$A_1 \# A_2 = \begin{pmatrix} A_1 \otimes 1 & -1 \otimes A_2^* \\ 1 \otimes A_2 & A_1^* \otimes 1 \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

где символом 1 обозначается единичный оператор в соответствующем пространстве.

Этот оператор действует из пространства $(H_1^0 \otimes H_2^0) \oplus (H_1^1 \otimes H_2^1)$ в пространство $(H_1^1 \otimes H_2^0) \oplus (H_1^0 \otimes H_2^1)$. Оператор $A_1 \# A_2$ также фредгольмов, и его индекс равен $\operatorname{ind} A_1 \operatorname{ind} A_2$. Действительно, операторы $(A_1 \# A_2)^* (A_1 \# A_2)$ и $(A_1 \# A_2)(A_1 \# A_2)^*$ задаются матрицами

$$\begin{pmatrix} A_1^* A_1 \otimes 1 + 1 \otimes A_2^* A_2 & 0 \\ 0 & A_1 A_1^* \otimes 1 + 1 \otimes A_2 A_2^* \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} A_1 A_1^* \otimes 1 + 1 \otimes A_2^* A_2 & 0 \\ 0 & A_1^* A_1 \otimes 1 + 1 \otimes A_2 A_2^* \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что ядро оператора $A_1^* A_1 \otimes 1 + 1 \otimes A_2^* A_2$ порождено элементами вида $u_1 \otimes u_2$, где $u_1 \in \operatorname{Ker} A_1$, $u_2 \in \operatorname{Ker} A_2$ и следовательно, его размерность равна $\dim \operatorname{Ker} A_1 \dim \operatorname{Ker} A_2$. Аналогично для остальных диагональных элементов этих матриц. Отсюда легко следует равенство $\operatorname{ind} A_1 \# A_2 = \operatorname{ind} A_1 \operatorname{ind} A_2$. Его можно получить также и из формулы (1.2).

Отметим также важные свойства произведений $A_1 \# A_2$ для ограниченных фредгольмовых операторов. С точностью до гомотопий эти произведения коммутативны и дистрибутивны относительно прямой суммы по каждому множителю. Кроме того, если один из множителей обратим, то обратимо и произведение.

§ 2. Эллиптические псевдодифференциальные операторы

2.1. Основные факты из теории п. д. о. В дальнейшем, если не оговорено противное, рассматриваются гладкие компактные многообразия без края, снабженные римановой метрикой. Используются стандартные обозначения TM, T^*M, $T^*M \setminus 0$, $S(M)$, $B(M)$ для касательного и кокасательного расслоения (они отождествляются с помощью римановой метрики), расслоения ненулевых ковекторов $\xi \neq 0$, расслоения единичных сфер $|\xi| = 1$ и шаров $|\xi| < 1$, π — проекция этих расслоений на M.

Пусть E — гладкое комплексное векторное расслоение над M, $C^\infty = C^\infty(E) = C^\infty(M, E)$ — пространство его гладких сечений. Расслоение предполагается *эрмитовым*, т. е. в слоях задано эрмитово скалярное произведение $\langle , \rangle$, что позволяет ввести скалярное произведение в пространстве сечений $(u, v) = \int \langle u(x), v(x) \rangle dx$, где dx — риманов элемент объема на M, и рассмотреть пространство $L^2 = L^2(E) = L^2(M, E)$ квадратично интегрируемых сечений. Поднятие расслоения E на T^*M или $T^*M \setminus 0$ будет обозначаться $\pi^* E$ или просто E, если это не вызовет недоразумений.

По теории псевдодифференциальных операторов (п. д. о.) имеются прекрасные руководства, к которым мы и отсылаем читателя [13], [47], [54]. Нам понадобится определение главного символа и основные теоремы о действии п. д. о. в соболевских пространствах. Мы ограничимся рассмотрением так называемых классических п. д. о. Типичными представителями классических п. д. о являются дифференциальные операторы и обратные к ним. *Главным символом* п. д. о. $A : C^\infty(E^0) \to C^\infty(E^1)$ порядка m называется функция $\sigma(A) = a(x, \xi)$ на $T^*M \setminus 0$, положительно однородная по ξ степени m, со значениями в гомоморфизмах слоев $a(x, \xi) : E_x^0 \to E_x^1$, которая строится следующим образом. Пусть $(x_0, \xi_0) \in T^*M \setminus 0$, u_0 — вектор слоя $E_{x_0}^0$, $u(x)$ — сечение расслоения E^0 с носителем в окрестности точки x_0, такое что $u(x_0) = u_0$, $f(x)$ — функция, дифференциал которой $df|_{x_0} = \xi_0$. Тогда

$$a(x_0, \xi_0) u_0 = \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^{-m} e^{-i\lambda f(x_0)} A(u(x) e^{i\lambda f(x)})|_{x = x_0}. \tag{1.5}$$

В локальных реперах расслоений E^0 и E^1 $a(x, \xi)$ задается матричной функцией. В частности, если A — дифференциальный оператор, заданный в локальных координатах выражением $A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$, $\left(D = -i \frac{\partial}{\partial x}\right)$, то $a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$.

Соответствие между операторами и их главными символами $\sigma : A \mapsto a$ обладает свойствами:

1. σ сюръективно, причем два оператора порядка m с одинаковым главным символом отличаются на оператор порядка $m-1$;
2. $\sigma(AB) = \sigma(A)\sigma(B)$;
3. если $A^* : C^\infty(E_1) \to C^\infty(E^0)$ — формально сопряженный к A оператор, определяемый равенством $(Au, v) = (u, A^* v)$ для любых $u, v \in C^\infty$, то $\sigma(A^*) = a^*$, где a^* — гомоморфизм, сопряженный к a относительно эрмитовой метрики $\langle , \rangle$ в слоях.

П. д. о. $A : C^\infty(E^0) \to C^\infty(E^1)$ порядка m продолжается до замкнутого оператора из $L^2(E^0)$ в $L^2(E^1)$, при этом формально сопряженный A^* продолжается до сопряженного оператора $A^* : L^2(E^1) \to L^2(E^0)$. Если $m \leq 0$, то п. д. о. ограничен в L^2, при

$m<0$ — компактен, а при $m<-n$, где $n=\dim M$, является ядерным.

Удобно рассматривать п. д. о. в *соболевских пространствах* $H^s=H^s(E)=H^s(M, E)$. Они определяются как пополнение C^∞ относительно скалярного произведения $(u, v)_s=(\Lambda_s u, \Lambda_s v)$, $s\in\mathbf{R}$, где Λ_s — некоторый самосопряженный положительно определенный п. д. о. с главным символом $|\xi|^s$. В частности, H^0 совпадает с L^2, при $s_2>s_1$ пространство H^{s_2} компактно вложено в H^{s_1}, пересечение всех H^s совпадает с C^∞, а объединение совпадает с пространством обобщенных функций $\mathcal{D}'$.

Из свойств п. д. о. в пространствах L^2 вытекают следующие свойства п. д. о. в соболевских пространствах:

1. при любых s_0, s_1, m оператор A порядка m продолжается до замкнутого оператора $A\colon H^{s_0}(E^0)\to H^{s_1}(E^1)$.

2. при $m\leqslant s_0-s_1$ оператор ограничен, при $m<s_0-s_1$ компактен, а при $m\leqslant s_0-s_1-n$ является ядерным.

3. сопряженным $(A)^*\colon H^{s_1}(E^1)\to H^{s_0}(E^0)$ оператору $A\colon H^{s_0}(E^0)\to H^{s_1}(E^1)$ является замыкание оператора $(A)^*=\Lambda_{s_0}^{-2}A^*\Lambda_{s_1}^2$, где A^* — формально сопряженный п. д. о.

В частности, оператор A порядка m ограничен из H^s в H^{s-m} при любом s.

2.2. Индекс эллиптических п. д. о. П. д. о. A называется *эллиптическим*, если его главный символ обратим на $T^*M\setminus 0$, т. е. гомоморфизм $a\colon \pi^*E^0\to\pi^*E^1$ является изоморфизмом. Замечательным свойством эллиптических операторов является их фредгольмовость в соболевских пространствах. Для доказательства построим параметрикс элиптического оператора $A\colon H^{s_0}(E^0)\to H^{s_1}(E^1)$. Пусть R_0 — п. д. о. с главным символом a^{-1}. Тогда операторы $1-R_0A$ и $1-AR_0$ имеют порядок -1. Положим

$$R=R_0\sum_{k=0}^{N}(1-AR_0)^k=\sum_{k=0}^{N}(1-R_0A)^kR_0, \tag{1.6}$$

где $N\geqslant\dim M$. Тогда операторы

$$(1-RA)=(1-R_0A)^{N+1},\quad (1-AR)=(1-AR_0)^{N+1}$$

имеют порядок $-(N+1)<-\dim M$, и следовательно, будут ядерными соответственно в пространствах H^{s_0} и H^{s_1}.

Оказывается, что индекс оператора A не зависит от того, в каких соболевских пространствах рассматривать оператор. Действительно, если $u\in H^s$ является решением эллиптического уравнения $Au=0$, то $u=(1-RA)u$, откуда получаем, что $u\in H^{s+N+1}$. Итерируя, получим, что u принадлежит всем соболевским пространствам, т. е. $u\in C^\infty$. Это рассуждение носит название *теоремы регулярности*. Таким образом, ядро A в соболевских пространствах совпадает с ядром оператора $A\colon C^\infty(E^0)\to C^\infty(E^1)$.

Аналогично можно показать, что ядро сопряженного оператора изоморфно ядру формально сопряженного $A^*\colon C^\infty(E^1)\to C^\infty(E^0)$, так что

$$\operatorname{ind} A=\dim\operatorname{Ker} A-\dim\operatorname{Ker} A^*,$$

где A и формально сопряженный A^* рассматриваются в пространствах C^∞.

Помимо свойств, перечисленных в п. 1.1, индекс эллиптического оператора обладает еще специфическим *свойством устойчивости*.

Теорема 1.3. Индекс эллиптического оператора A зависит только от сужения главного символа a на многообразие $S(M)$ и остается постоянным при любых деформациях оператора A, сохраняющих эллиптичность, если при этом функция $a|_{S(M)}$ деформируется непрерывно.

Для доказательства заметим прежде всего, что порядок оператора можно считать равным 0. Действительно, умножив эллиптический оператор A порядка m на эллиптический самосопряженный оператор Λ_{-m} с главным символом $|\xi|^{-m}$, мы получим оператор порядка 0. Индекс при этом не изменится в силу логарифмического свойства, так как Λ_{-m} самосопряжен. Для оператора нулевого порядка главный символ не зависит от $|\xi|$, и его можно рассматривать как функцию на $S(M)$.

Пусть теперь A_1 и A_2 — эллиптические операторы порядка 0 с главными символами a_1 и a_2. Предположим, что главные символы достаточно близки, а именно, функция $a(t)=(1-t)a_1+ta_2$ обратима на $S(M)\times[0, 1]$. Тогда $A(t)=(1-t)A_1+tA_2$ будет непрерывным по операторной норме семейством фредгольмовых операторов в пространстве L^2 и, по свойству устойчивости из п. 1.1, имеет постоянный индекс. Отсюда следует утверждение теоремы.

Доказанная теорема приводит к новой, топологической точке зрения на индекс эллиптических операторов. Пусть для простоты расслоения E^0 и E^1 тривиальны. Тогда главный символ $a(x, \xi)$ эллиптического оператора A порядка 0 — это невырожденная матрица порядка $N=\dim E^0=\dim E^1$, зависящая от точки $(x, \xi)\in S(M)$ Таким образом, мы имеем отображение $a\colon S(M)\to\mathrm{GL}(N, \mathbf{C})$, и индекс зависит только от гомотопического класса этого отображения. Порядок N матрицы a можно при желании увеличить. Для этого нужно перейти от оператора A к оператору $A\oplus 1$, где 1 — тождественный оператор в тривиальном одномерном расслоении, который, очевидно, эллиптичен и имеет нулевой индекс. Тогда $\operatorname{ind}(A\oplus 1)=\operatorname{ind} A$, а главный символ оператора $A\oplus 1$ равен $a\oplus 1\in\mathrm{GL}(N+1, \mathbf{C})$. Это означает, что при деформациях главного символа мы можем произвольно увеличивать порядки матриц. Такие гомотопические классы, когда при деформациях допускается увеличение порядка матриц, называются *стабильными*. Таким образом, мы приходим к выводу, что индекс является целочисленной функцией на множестве стабильных гомотопических классов отображений $S(M)$ в группу невырожденных матриц. Возникает задача о явном выражении этой функции через топологические инварианты. Такое выражение принято называть *топологическим индексом* $\mathrm{ind}_t A$ оператора A, в отличие от аналитического индекса, определяемого формулой (1.1).

В общем случае нетривиальных расслоений E^0 и E^1 топологический индекс определяется стабильным гомотопическим классом отображения $a: S(M)\to \mathrm{Iso}(\pi^*E^0, \pi^*E^1)$ в пространство изоморфизмов расслоений π^*E^0 и π^*E^1.

Мы закончим этот пункт замечанием о мультипликативном свойстве индекса эллиптических операторов. Пусть $A_i: C^\infty(E_i^0, M_i)\to C^\infty(E_i^1, M_i)$, $(i=1, 2)$ — эллиптические п. д. о. одного порядка на многообразиях M_1 и M_2. Поднимем расслоения E_i^0 и E_i^1 на прямое произведение $M_1\times M_2$ и определим расслоения $\mathscr{E}^0=(E_1^0\otimes E_2^0)\oplus(E_1^1\otimes E_2^1)$, $\mathscr{E}^1=(E_1^1\otimes E_2^0)\oplus(E_1^0\otimes E_2^1)$ над $M_1\times M_2$. Как и в п. 1.1, рассмотрим оператор $A_1\# A_2: C^\infty(\mathscr{E}^0, M_1\times M_2)\to C^\infty(\mathscr{E}^1, M_1\times M_2)$, задаваемые матрицей (1.4). Оператор $A_1\otimes 1$ действует на сечения $u_1(x)\otimes u_2(y)$ только по переменной x, т. е. $(A_1\otimes 1)u_1(x)\otimes u_2(y)=(A_1u_1)(x)\otimes u_2(y)$, и аналогично остальные элементы матрицы (1.4). Тогда, как доказано в п. 1.1, $\mathrm{ind}\, A_1\# A_2=\mathrm{ind}\, A_1 \mathrm{ind}\, A_2$. Здесь возникает, однако, техническое затруднение, связанное с тем, что оператор $A_1\# A_2$ не является п. д. о. Действительно, естественный кандидат на роль главного символа

$$a_1\# a_2=\begin{pmatrix} a_1(x, \xi)\otimes 1 & -1\otimes a_2^*(y, \eta)\\ 1\otimes a_2(y, \eta) & a_1(x, \xi)\otimes 1\end{pmatrix}$$

не является гладкой функцией на $T^*(M_1\times M_2)\setminus 0$, она даже не определена при $\xi=0$, $\eta\neq 0$ или $\xi\neq 0$, $\eta=0$ (за исключением случая дифференциальных операторов). Тем самым мы не можем сопоставить оператору $A_1\# A_2$ гомотопический класс отображения $S(M_1\times M_2)$ в группу невырожденных матриц, в терминах которого должен определяться топологический индекс.

Это затруднение преодолевается следующим образом. Будем рассматривать операторы A_1 и A_2 порядка $m\geqslant 1$. Тогда, доопределив главные символы нулем на нулевых сечениях расслоений T^*M_1 и T^*M_2, мы получим непрерывные и даже липшицевы функции a_1 и a_2 на T^*M_1 и T^*M_2 и тем самым липшицеву функцию $a_1\# a_2$ на $T^*(M_1\times M_2)$. Эта функция обратима на $S(M_1\times M_2)$ и определяет гомотопический класс отображений $S(M_1\times M_2)\to \mathrm{Iso}(\pi^*\mathscr{E}^0, \pi^*\mathscr{E}^1)$. Пусть A — какой-либо эллиптический п. д. о. на $M_1\times M_2$ с главным символом из этого гомотопического класса. Возникает вопрос, будут ли равны индексы операторов A и $A_1\# A_2$. Этот вопрос решается утвердительно с помощью техники сглаживания: строится последовательность

гладких функций $a_n(x, \xi, y, \eta)$ на $T^*(M_1\times M_2)\setminus 0$, положительно однородных по ξ, η степени m, которая равномерно сходится к $a_1\# a_2$ на $S(M_1\times M_2)$ и соответствующая последовательность п. д. о. A_n, которая сходится к $A_1\# A_2$ по норме операторов из $H^s(M_1\times M_2, \mathscr{E}^0)$ в $H^{s-m}(M_1\times M_2, \mathscr{E}^1)$. Тогда свойства устойчивости индекса из п. 1.1 и теоремы 1.3 обеспечивают совпадение индексов A и $A_1\# A_2$. Подробности см. в [51].

2.3. Эллиптические комплексы. Последовательность п. д. о. одного порядка m

$$0\to C^\infty(E^0)\xrightarrow{A_0} C^\infty(E^1)\xrightarrow{A_1}\dots\xrightarrow{A_{n-1}} C^\infty(E^n)\to 0$$

называется *комплексом*, если $A_{i+1}A_i=0$. Комплекс называется *эллиптическим*, если соответствующая последовательность символов

$$0\to \pi^*E^0\xrightarrow{a_0}\pi^*E^1\xrightarrow{a_1}\dots\xrightarrow{a_{n-1}}\pi^*E^n\to 0$$

точна при $(x, \xi)\in T^*M\setminus 0$. Напомним, что точность последовательности означает, что уравнение $a_iu_i=u_{i+1}$ относительно u_i разрешимо тогда и только тогда, когда $a_{i+1}u_{i+1}=0$.

Эллиптический оператор можно рассматривать как частный случай двучленного эллиптического комплекса

$$0\to C^\infty(E^0)\xrightarrow{A} C^\infty(E^1)\to 0$$

Обратно, эллиптическому комплексу можно сопоставить эллиптический оператор в некотором смысле эквивалентный комплексу. Это сопоставление осуществляется с помощью теории Ходжа.

Рассмотрим расслоения $\mathscr{E}=\bigoplus_{i=0}^{n}E^i$, $\mathscr{E}^+=\bigoplus_{k\geqslant 0}E^{2k}$ и $\mathscr{E}^-=\bigoplus_{k\geqslant 0}E^{2k+1}$, и пусть A и A^* — операторы в $C^\infty(\mathscr{E})$, определяемые матрицами

$$A=\begin{pmatrix} 0 & & & & 0\\ A_0 & 0 & & & \\ & A_1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & A_{n-1} & 0\end{pmatrix};\quad A^*=\begin{pmatrix} 0 & A_0^* & & & 0\\ & 0 & A_1^* & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & A_{n-1}^*\\ 0 & & & & 0\end{pmatrix},$$

где $A_i^*: C^\infty(E^{i+1})\to C^\infty(E^i)$ — формально сопряженные к A_i. Из определения комплекса следует, что $A^2=(A^*)^2=0$. Оператор $\Delta=(A+A^*)^2=AA^*+A^*A$ называется *оператором Ходжа — Лапласа*. Он задается диагональной матрицей с элементами

$\Delta_0=A_0^*A_0$, $\Delta_n=A_{n-1}A_{n-1}^*$ и $\Delta_k=A_k^*A_k+A_{k-1}A_{k-1}^*$ при $k=1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1$. Ясно, что операторы A и A^* коммутируют с Δ.

Можно убедиться, что условие эллиптичности комплекса эквивалентно эллиптичности оператора Δ, а также эллиптичности оператора $A+A^*$. Сечения $u\in\operatorname{Ker}\Delta$ называются *гармоническими*. В силу эллиптичности Δ, гармонические сечения образуют конечномерное пространство $\operatorname{Ker}\Delta\subset C^\infty(\mathscr{E})$. Условие $\Delta u=0$, в силу равенства $(\Delta u, u)=(Au, Au)+(A^*u, A^*u)$, означает, что $Au=0$ и $A^*u=0$. Таким образом, $\operatorname{Ker}\Delta=\operatorname{Ker}A\cap\operatorname{Ker}A^*$.

Для любого сечения $u\in C^\infty(\mathscr{E})$ обозначим через u_0 ортогональную проекцию u на $\operatorname{Ker}\Delta$ в $L^2(\mathscr{E})$. Уравнение $\Delta v=u-u_0$, в силу самосопряженности и эллиптичности оператора Δ, имеет гладкое решение. Тем самым получаем разложение u в сумму трех ортогональных слагаемых

$$u=u_0+AA^*v+A^*Av, \tag{1.7}$$

называемое *разложением Ходжа—де Рама*. Из этого разложения вытекает *теорема Ходжа*, утверждающая, что пространства $\operatorname{Ker}\Delta_i$ изоморфны факторпространствам $H^i=\operatorname{Ker}A_i/\operatorname{Im}A_{i-1}$, называемым *когомологиями комплекса*. Действительно, если $u\in\operatorname{Ker}A$, то, применяя оператор A к разложению (1.7), получим $A\Delta v=\Delta Av=0$, откуда следует, что $Av\in\operatorname{Ker}\Delta\subset\operatorname{Ker}A^*$. Тогда $A^*(Av)=0$, и в разложении (1.7) остается два члена $u=u_0+$ $+A(A^*v)$. Это равенство означает, что u и u_0 принадлежат одному классу смежности в $\operatorname{Ker}A/\operatorname{Im}A$, что и доказывает теорему. В частности, из теоремы Ходжа следует конечномерность когомологий H^i.

Сопоставим эллиптическому комплексу эллиптический оператор $\mathscr{A}: C^\infty(\mathscr{E}^+)\to C^\infty(\mathscr{E}^-)$, определив его как сужение $A+A^*$ на $C^\infty(\mathscr{E}^+)\subset C^\infty(\mathscr{E})$. Тогда $\mathscr{A}^*: C^\infty(\mathscr{E}^-)\to C^\infty(\mathscr{E}^+)$ совпадает с сужением $A+A^*$ на $C^\infty(\mathscr{E}^-)$. Имеем

$$\operatorname{Ker}\mathscr{A}=\bigoplus_{k\geqslant0}\operatorname{Ker}(A+A^*)|_{C^\infty(E^{2k})}=\bigoplus_{k\geqslant0}\operatorname{Ker}\Delta_{2k},$$

$$\operatorname{Ker}\mathscr{A}^*=\bigoplus_{k\geqslant0}\operatorname{Ker}(A+A^*)|_{C^\infty(E^{2k+1})}=\bigoplus_{k\geqslant0}\operatorname{Ker}\Delta_{2k+1}.$$

Отсюда получаем

$$\operatorname{ind}\mathscr{A}=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\dim\operatorname{Ker}\Delta_i=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\dim H^i.$$

Это число называется также *эйлеровой характеристикой* комплекса.

§ 3. Характеристические классы и элементы K-теории

В этом параграфе вводится топологический аппарат, необходимый для построения топологического индекса. Подробное изложение теории связностей содержится в [50], характеристических классов — в [42], K-теории — в лекциях Атьи [16], лекциях Ботта [32], а также в книге [49].

3.1. Связности и характеристические классы. Пусть E комплексное m-мерное расслоение над n-мерным многообразием M, не обязательно компактным, $\operatorname{Hom}(E, E)$ — расслоение послойных гомоморфизмов E, $\Lambda=\bigoplus_{p=0}^{n}\Lambda^p$ — расслоение внешних дифференциальных форм, $\Lambda^\pm$ — прямая сумма Λ^p по четным, соответственно нечетным p. Мы будем рассматривать дифференциальные p-формы со значениями в E и в $\operatorname{Hom}(E, E)$ — это сечения расслоений $E\otimes\Lambda^p$ и $\operatorname{Hom}(E, E)\otimes\Lambda^p$ соответственно. В локальном репере $e=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ над окрестностью $U\subset M$ p-форма $u\in$ $\in C^\infty(E\otimes\Lambda^p)$ записывается в виде $u=e_\alpha u^\alpha$ (суммирование по α от 1 до m), где u^α — скалярные комплексные p-формы на U, или короче $u=e\{u\}$, где e — строка из базисных векторов, а $\{u\}$ — столбец из форм u^α. Аналогично, $A\in C^\infty(\operatorname{Hom}(E, E)\otimes\Lambda^q)$ в локальном репере задается матрицей $\{A\}$, элементы A^α_β которой являются скалярными q-формами на U. Если $u\in C^\infty(E\otimes\Lambda^p)$, а A и B дифференциальные q- и r-формы со значениями в $\operatorname{Hom}(E, E)$, то произведение $A\wedge u$ определяется как произведение матрицы на столбец: $(A\wedge u)^\alpha=A^\alpha_\beta\wedge u^\beta$, а произведение $A\wedge B$ — как произведение матриц: $(A\wedge B)^\alpha_\beta=A^\alpha_\gamma\wedge B^\gamma_\beta$, *коммутатором* форм A и B называется форма $[A, B]=A\wedge B-(-1)^{qr}B\wedge A$. При переходе к другому реперу $e'=ef$, где f — невырожденная матричная функция перехода, имеем $\{u\}'=f^{-1}\{u\}$, $\{A\}'=f^{-1}\{A\}f$. Аналогично вводятся дифференциальные формы со значениями в $\operatorname{Hom}(E^0, E^1)$ и действия над ними.

Связностью ∂ в расслоении E называется линейный дифференциальный оператор первого порядка $\partial: C^\infty(E)\to C^\infty(E\otimes\Lambda^1)$, удовлетворяющий условию (*правилу Лейбница*)

$$\partial(\varphi u)=d\varphi u+\varphi\partial u,$$

где $u\in C^\infty(E)$, φ — скалярная функция, $d\varphi$ — ее дифференциал. При этом 1-форма ∂u называется *ковариантным дифференциалом* сечения u. Если в расслоении задано эрмитово скалярное произведение $\langle\ ,\ \rangle$, то связность называется *эрмитовой* (сохраняющей эрмитову структуру), если для любых сечений $u, v\in C^\infty(E)$

$$d\langle u, v\rangle=\langle\partial u, v\rangle+\langle u, \partial v\rangle.$$

В локальном репере e ковариантный дифференциал однозначно определяется правилом Лейбница, если заданы ковариантные дифференциалы ∂e_α базисных сечений. Разлагая ∂e_α по базису e_α, получим $\partial e_\alpha=e_\beta\Gamma_\alpha{}^\beta$, или короче $\partial e=e\Gamma$, где Γ — матрица из 1-форм на U, называемая локальной *формой связности*. Отметим, что матрицы Γ не определяют глобального сечения расслоения $\operatorname{Hom}(E, E)\otimes\Lambda^1$, поскольку при переходе к другому реперу имеем

$$\Gamma' = f^{-1}\Gamma f + f^{-1}df,$$

т. е. закон преобразования не такой, как для сечений $A\in C^\infty(\mathrm{Hom}(E, E)\otimes\Lambda^1)$. Если связность ∂ эрмитова, то матрица Γ в ортонормированном репере косоэрмитова: $\Gamma^* = -\Gamma$.

Если ∂_0 и ∂_1 — две связности в расслоении E с локальными формами связности Γ^0 и Γ^1, то из закона преобразования следует, что разность $\Delta\Gamma=\Gamma^1-\Gamma^0$ является глобально определенным сечением расслоения $\mathrm{Hom}(E, E)\otimes\Lambda^1$. Обратно, если ∂_0 — какая-либо связность, то любая другая имеет вид $\partial_1 u=\partial_0 u + Au$, где $A\in C^\infty(\mathrm{Hom}(E, E)\otimes\Lambda^1)$. Как следствие получаем, что множество связностей выпукло. Отметим без доказательства, что на любом расслоении существует связность, причем эрмитова, если расслоение эрмитово.

С помощью связности можно дифференцировать не только сечения расслоения E, но и ассоциированные с ними объекты, например, сечения расслоений $E\otimes\Lambda$ или $\mathrm{Hom}(E, E)\otimes\Lambda$. На них ковариантный дифференциал распространяется с сохранением правила Лейбница

$$\partial(A\wedge B) = (\partial A)\wedge B + (-1)^p A\wedge\partial B$$

(p — степень формы A). При этом, если A или B — скалярные формы, то ковариантный дифференциал полагается равным внешнему дифференциалу d. Так, например, для $u=e_\alpha u^\alpha\in C^\infty(E\otimes\Lambda)$

$$\partial u = \partial e_\alpha\wedge u^\alpha + e_\alpha du^\alpha = e_\alpha(du^\alpha+\Gamma^\alpha_\beta\wedge u^\beta) = e(d\{u\}+\Gamma\wedge\{u\}).$$

Для $A\in C^\infty(\mathrm{Hom}(E, E)\otimes\Lambda^p)$ ковариантный дифференциал определяется равенством

$$(\partial A)u = \partial(Au) - (-1)^p A\partial u,$$

где u — любое сечение расслоения E. В локальном репере это дает

$$\{\partial A\} = d\{A\}+\Gamma\wedge\{A\} - (-1)^p\{A\}\wedge\Gamma = d\{A\} + [\Gamma, \{A\}].$$

Аналогично, если $A\in C^\infty(\mathrm{Hom}(E^0, E^1)\otimes\Lambda^p)$, где E^0 и E^1 — расслоения со связностями ∂_0 и ∂_1, то ∂A определяется равенством

$$(\partial A)u = \partial_1(Au) - (-1)^p A\partial_0 u.$$

Для сечений $A\in C^\infty(\mathrm{Hom}(E, E)\otimes\Lambda)$ определяется скалярная форма $\mathrm{tr}\,A$, равная, по определению $\mathrm{tr}\{A\}$ — сумме диагональных элементов матрицы $\{A\}$, которая не зависит от выбора локального репера в силу закона преобразования. Так как след коммутатора матричных форм равен 0, то

$$\mathrm{tr}\,\partial A = \mathrm{tr}\,d\{A\} = d\,\mathrm{tr}\,A.$$

Аналогично определяется форма $\det A$ для сечений $A\in C^\infty(\mathrm{Hom}(E, E)\otimes\Lambda^+)$. Четность форм здесь существенна, а

именно, ввиду коммутативности алгебры Λ^+ порядок множителей при вычислении детерминанта не играет роли.

Определим *кривизну связности* ∂. Оператор $\partial^2=\partial\partial: C^\infty(E\otimes\Lambda^p)\to C^\infty(E\otimes\Lambda^{p+2})$, который на первый взгляд должен быть дифференциальным оператором второго порядка, на самом деле является оператором нулевого порядка: $\partial^2 u=\Omega u$, где Ω — 2-форма со значениями в $\mathrm{Hom}(E, E)$, называемая кривизной связности. Действительно, в локальном репере имеем

$$\{\partial^2 u\} = d\{\partial u\}+\Gamma\wedge\{\partial u\} = d(d\{u\}+\Gamma u) + \Gamma\wedge(d\{u\}+\Gamma\{u\}) = (d\Gamma+\Gamma\wedge\Gamma)\{u\}.$$

Таким образом, в локальном репере

$$\{\Omega\} = d\Gamma+\Gamma\wedge\Gamma = d\Gamma+\frac{1}{2}[\Gamma, \Gamma].$$

Для сечений $A\in C^\infty(\mathrm{Hom}(E, E)\otimes\Lambda^p)$ имеем тогда $\partial^2A=[\Omega, A]$, для $A\in C^\infty(\mathrm{Hom}(E^0, E^1)\otimes\Lambda^p)$ $\partial^2A=\Omega_1\wedge A - A\wedge\Omega_0$, где Ω_0 Ω_1 — кривизны связностей ∂_0 и ∂_1.

Связкость называется *плоской*, если ее кривизна равна 0, и *абелевой*, если кривизна кратна скалярной форме. Для абелевой связности имеем $\partial^2A=0$ для любого $A\in C^\infty(\mathrm{Hom}(E, E)\otimes\Lambda)$, поскольку коммутатор со скалярной формой Ω равен 0. В тривиальном расслоении с глобально определенным репером e можно задать плоскую связность, полагая $\Gamma=0$. Отметим также, что любая связность в одномерном расслоении абелева.

Основные свойства кривизны выражаются тождеством Бьянки и формулой для вариации кривизны. Пусть $u\in C^\infty(E)$ — любое сечение. Тогда для формы $\partial^3 u$ можно получить два выражения:

$$\partial^3u=\partial(\partial^2u)=\partial\Omega u+\Omega\wedge\partial u,$$

$$\partial^3u=\partial^2(\partial u)=\Omega\wedge\partial u,$$

откуда, сравнивая, получаем *тождество Бьянки* $\partial\Omega=0$.

Пусть теперь $\partial_t u=\partial_0u+\Delta\Gamma(t)u$ — гладкое семейство связностей, зависящее от параметра $t\in[0, 1]$. Тогда $(\partial_t u)^\cdot=\Delta\dot\Gamma(t)u=\dot\Gamma(t)u$, где $\dot\Gamma(t)$ — глобально определенное сечение расслоения $\mathrm{Hom}(E, E)\otimes\Lambda^1$, и точка обозначает производную по t. Отсюда получаем

$$(\Omega(t)u)^\cdot = (\partial_t\partial_t u)^\cdot = \dot\Gamma(t)\wedge\partial_t u+\partial_t(\dot\Gamma(t)u) = (\partial_t\dot\Gamma(t))u.$$

Следовательно, для вариации кривизны получаем $\dot\Omega(t)=\partial_t\dot\Gamma(t)$.

Определим теперь *характеристические классы* векторных расслоений. Пусть ∂ — связность в расслоении E, Ω — ее кривизна, $\omega=-\Omega/2\pi i$. Положим $\omega^k=\omega\wedge\omega\wedge\ldots\wedge\omega$ (k множителей) и введем скалярные $2k$-формы $\psi_k=\mathrm{tr}\,\omega^k$, которые будем называть *формами Адамса*. Из тождества Бьянки вытекает замкнутость этих форм: $d\psi_k=\mathrm{tr}\,\partial\omega^k=k\,\mathrm{tr}\,\omega^{k-1}\partial\omega=0$. Следовательно, они определяют $2k$-мерные классы когомологий многообразия M. Покажем, что от выбора связности ∂ эти классы не зависят. Действительно, любые две связности ∂_0 и ∂_1 можно соединить линейной гомотопией $\partial_t=(1-t)\partial_0+t\partial_1$ и пусть $\Omega(t)$ — кривизна связности ∂_t. Тогда, по формуле для вариации кривизны,

$$(\operatorname{tr}\Omega^k(t))^{\cdot}=k\operatorname{tr}\Omega^{k-1}(t)\wedge\partial_t\dot{\Gamma}(t)=k\operatorname{tr}\partial_t(\Omega^{k-1}(t)\wedge\dot{\Gamma}(t))=$$
$$=kd\operatorname{tr}\Omega^{k-1}(t)\wedge\dot{\Gamma}(t),$$

откуда следует, что вариации форм Адамса являются точными формами.

Наряду с формами Адамса рассматривают также *формы Чженя*, определяемые как коэффициенты характеристического полинома $\det(\lambda-\omega)=\sum_{k=0}^{m}\lambda^{m-k}c_k$. Ясно, что формы ψ_k и c_k выражаются друг через друга полиномиально по формулам Ньютона (формулы, связывающие суммы степеней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ с элементарными симметрическими функциями). Таким образом, формы Чженя c_k также определяют классы когомологий, не зависящие от связности. Они называются *характеристическими классами Чженя* расслоения E.

Вообще, для любой аналитической функции $f(z)$ или формального степенного ряда определяются неоднородные четномерные классы когомологий $\operatorname{tr}f(\omega)$ и $\det f(\omega)$, называемые соответственно *аддитивным и мультипликативным характеристическим классом расслоения* E (ряды обрываются из-за конечномерности M). Мы будем обозначать их через $f(E)$, добавляя при необходимости индекс $+$ для аддитивных и индекс $\times$ для мультипликативных классов. Все они выражаются полиномиально через классы Адамса или Чженя и потому не зависят от связности.

Наиболее часто встречаются следующие характеристические классы:

$C(E)=1+c_1+c_2+\ldots+c_m=\det(1-\omega)$ — *полный класс Чженя*;

$\operatorname{ch}E=\operatorname{tr}e^{\omega}$ — *характер Чженя*:

$\mathcal{T}(E)=\det(\omega/1-e^{-\omega})$ — *класс Тодда*;

$A(E)=\det(\omega/2/\operatorname{sh}\omega/2)^{1/2}$ — *A-класс*.

Перечислим свойства характеристических классов.

1. Естественность при отображениях. Пусть $\varphi: M\to N$ гладкое отображение многообразий. Для любого расслоения E над N отображение φ индуцирует расслоение φ^*E над M. Кроме того, φ определяет гомоморфизм когомологий $\varphi^*: H(N)\to H(M)$. Тогда для любого характеристического класса имеем

$$f(\varphi^*E)=\varphi^*f(E).$$

2. При операции прямой суммы расслоений аддитивные классы складываются, а мультипликативные перемножаются.

3. Пусть E^* — двойственное к расслоению E. Слоем E_x^* в точке x является пространство линейных форм на E_x. Тогда характеристический класс расслоения E^* для функции $f(z)$ совпадает с характеристическим классом расслоения E для функции $f(-z)$.

Класс $\operatorname{ch}E$ помимо перечисленных свойств обладает еще важными специфическими свойствами.

4. Мультипликативность относительно тензорных произведений: $\operatorname{ch}E_1\otimes E_2=\operatorname{ch}E_1\operatorname{ch}E_2$. Действительно, если ∂_1 и ∂_2 — связности в расслоениях E_1, E_2, то в расслоении $E=E_1\otimes E_2$ имеем связность $\partial=\partial_1\otimes 1+1\otimes\partial_2$, действующую на сечения вида $u_1\otimes u_2$ по правилу

$$\partial(u_1\otimes u_2)=\partial_1 u_1\otimes u_1+u_1\otimes\partial_2 u_2,$$

откуда

$$\partial^2(u_1\otimes u_2)=\Omega_1 u_1\otimes u_2+u_1\otimes\Omega_2 u_2.$$

Пусть ω_1, ω_2 и ω — соответствующие формы для расслоений E_1, E_2 и $E=E_1\otimes E_2$. Тогда $\omega=\omega_1\otimes 1+1\otimes\omega_2$, откуда

$$e^{\omega}=e^{\omega_1}\otimes e^{\omega_2}. \tag{1.8}$$

Беря следы, получаем нужное равенство.

5. Пусть $\Lambda^k(E)$ — k-я внешняя степень расслоения E, т. е. расслоение антисимметрических тензоров в k-й тензорной степени $\overset{k}{\otimes}E=E\otimes E\otimes\ldots\otimes E$ (k множителей), $\Lambda^{\pm}(E)$ — прямая сумма $\Lambda^k(E)$ по четным (нечетным) k, $\Lambda(E)$ — прямая сумма по всем k. Тогда

$$\operatorname{ch}\Lambda^+(E^*)-\operatorname{ch}\Lambda^-(E^*)=C_m(E)\mathcal{T}^{-1}(E). \tag{1.9}$$

Действительно, вычислим $\operatorname{ch}\Lambda^k(E)$. Пусть ω_k — форма кривизны (деленная на $-2\pi i$) для расслоения $\overset{k}{\otimes}E$. Аналогично (1.8) получим

$$e^{\omega_k}=e^{\omega}\otimes e^{\omega}\otimes\ldots\otimes e^{\omega}\ (k \text{ множителей})$$

Проектируя это равенство на пространство косимметрических тензоров и беря след, получим $\operatorname{ch}\Lambda^k(E)=\operatorname{tr}\Lambda^k e^{\omega}$ — сумма диагональных миноров k-го порядка матрицы e^{ω}. Тогда

$$\operatorname{ch}\Lambda^+(E)-\operatorname{ch}\Lambda^-(E)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\operatorname{tr}\Lambda^k e^{\omega}=\det(1-e^{\omega}).$$

Записывая это равенство для расслоения E^* и пользуясь свойством 3, приходим к (1.9).

Для вещественных расслоений E характеристические классы определяются как характеристические классы комплексификации, т. е. формально теми же равенствами $f_+(E)=$

$=\operatorname{tr} f(-\Omega/2\pi i)$, $f_\times(E)=\det f(-\Omega/2\pi i)$, только матрица Ω теперь вещественна. Специфика вещественных расслоений состоит в том, что расслоения E и E^* изоморфны: любая линейная форма на E_x имеет вид $\langle\cdot, u\rangle$, где $u\in E_x$, а $\langle,\rangle$ — евклидово скалярное произведение. Поэтому характеристические классы, соответствующие функциям $f(z)$ и $f(-z)$ совпадают. В частности, отсюда следует, что все нечетные классы Чженя c_{2k+1} равны 0. Класс $(-1)^k c_{2k}$ называется k-м *классом Л. С. Понтрягина* p_k.

Для четномерных ориентированных вещественных расслоений ($\dim E=2k$) вводится специфический характеристический класс $\chi(E)\in H^{2k}(M)$, называемый *классом Эйлера*. Будем рассматривать ориентированные реперы расслоения, ортонормированные относительно евклидова скалярного произведения $\langle,\rangle$. Матрица кривизны евклидовой связности в таком репере кососимметрична. Положим $\chi(E)=\mathrm{Pf}(\Omega/2\pi)$, где Pf — пфаффиан кососимметрической матрицы. Так как функции перехода принимают значения в группе $SO(2k)$, то пфаффиан не зависит от выбора репера. Можно доказать, что $\chi(E)$ — замкнутая форма и ее класс когомологий не зависит от выбора связности.

Очевидно, что эйлеров класс мультипликативен: $\chi(E_1\oplus E_2)=\chi(E_1)\chi(E_2)$. Ясно также, что $\chi^2(E)=p_m$, в силу свойства пфаффиана $(\mathrm{Pf}\, A)^2=\det A$.

По определению характеристическими классами многообразия M называются характеристические классы касательного расслоения TM, или изоморфного ему кокасательного расслоения T^*M. Обозначения $f(TM)$ (или $f(T^*M)$) для характеристических классов многообразия будем упрощать до $f(M)$.

3.2. Элементы K-теории. *Виртуальным расслоением* над многообразием M (не обязательно компактным) называется набор $\xi=\{E^0, E^1\}$ из двух комплексных векторных расслоений над M. Допускаются и нульмерные расслоения, обозначаемые символом 0. Символ 1 будет обозначать тривиальное одномерное расслоение. Виртуальное расслоение называется *тривиальным*, если E^0 и E^1 изоморфны. Два виртуальных расслоения $\xi_1=\{E_1^0, E_1^1\}$ и $\xi_2=\{E_2^0, E_2^1\}$ называются *изоморфными*, если изоморфны E_1^0 и E_2^0, а также E_1^1 и E_2^1. Очевидным образом определяется прямая сумма: $\xi_1\oplus\xi_2=\{E_1^0\oplus E_2^0, E_1^1\oplus E_2^1\}$. Определим также тензорное произведение $\xi_1\otimes\xi_2=\{(E_1^0\otimes E_2^0)\oplus(E_1^1\otimes E_2^1), (E_1^1\otimes E_2^0)\oplus(E_1^0\otimes F_2^1)\}$. При этом считаем $E\oplus 0=E$, $E\otimes 0=0$, $E\otimes 1=E$.

В множестве виртуальных расслоений введем отношение эквивалентности: $\xi_1\sim\xi_2$, если существуют такие тривиальные расслоения η_1 и η_2, что $\xi_1\oplus\eta_1$ изоморфно $\xi_2\oplus\eta_2$. Такие виртуальные расслоения будем называть *стабильно изоморфными*. Классы эквивалентности образуют коммутативное кольцо $K(M)$ с единицей, где операция сложения $\xi_1+\xi_2$ определяется прямой суммой, а умножения $\xi_1\xi_2$ — тензорным произведением. Элемент, обратный к элементу $\xi=\{E^0, E^1\}$ задается виртуальным расслоением $-\xi=\{E^1, E^0\}$, а единицей служит класс $\{1, 0\}$.

Отображению многообразий $g: M\to N$ соответствует гомоморфизм колец $g^!: K(N)\to K(M)$, при котором класс виртуального расслоения $\xi=\{E^0, E^1\}$ над N переходит в класс $g^!\xi=\{g^*E^0, g^*E^1\}$, где g^*E — расслоение над M, индуцированное отображением g. Таким образом, соответствие $M\to K(M)$ — это контравариантный функтор, называемый *K-функтором Гротендика*.

Характеристический класс ch можно распространить на виртуальные расслоения, полагая $\mathrm{ch}\,\xi=\mathrm{ch}\,E^0-\mathrm{ch}\,E^1\in H^+(M)$, где $H^+(M)$ — кольцо четномерных когомологий. Из свойств характера Чженя вытекает, что класс когомологий $\mathrm{ch}\,\xi$ зависит только от класса ξ в $K(M)$ и отображение $\mathrm{ch}: K(M)\to H^+(M)$ является гомоморфизмом колец.

Для теории индекса важна модификация K-функтора, называемая *K-функтором с компактными носителями*. *Виртуальное расслоение с компактным носителем* задается набором $\xi=\{E^0, E^1, a\}$, где E^0, E^1 — расслоения над M одинаковой размерности, а $a: E^0\to E^1$ — изоморфизм расслоений над $M\setminus X$, где X — некоторый компакт в M, называемый *носителем* ξ. Такая тройка называется *тривиальной*, если a можно продолжить до изоморфизма над всем M. Очевидным образом определяется прямая сумма троек. Две тройки $\xi_1=\{E_1^0, E_1^1, a_1\}$ и $\xi_2=\{E_2^0, E_2^1, a_2\}$ называются *изоморфными*, если существуют такие изоморфизмы $\varphi^i: E_1^i\to E_2^i$ над M, что над $M\setminus X$ $\varphi^1 a_1=a_2\varphi^0$.

Введем отношение эквивалентности: $\xi_1\sim\xi_2$, если существуют такие тривиальные тройки η_1 и η_2, что $\xi_1\oplus\eta_1$ изоморфна $\xi_2\oplus\eta_2$. Классы эквивалентности образуют коммутативную полугруппу $K^{\mathrm{comp}}(M)$ относительно прямой суммы. На самом деле $K^{\mathrm{comp}}(M)$ является группой, как будет показано ниже.

Иногда удобно считать функцию a в тройке $\xi=\{E^0, E^1, a\}$ определенной всюду на M, причем вне компакта X a — изоморфизм, а на X, вообще говоря, нет. Другими словами, изоморфизм a, определенный на $M\setminus X$, нужно продолжить на все M как гомоморфизм. Такое продолжение достигается с помощью *срезающей функции* $\rho\geqslant 0$, которая равна нулю на X и равна 1 вне некоторого большего компакта. Тогда ρa задает искомое продолжение.

Отметим три свойства виртуальных расслоений с компактным носителем и их классов в $K^{\mathrm{comp}}(M)$.

1. Устойчивость. Пусть $\xi(t)=\{E^0, E^1, a(t)\}$ — гладкое семейство, зависящее от параметра $t\in[0, 1]$ с носителем в компакте X, не зависящем от t. Тогда при любом t тройки $\xi(0)$ и $\xi(t)$ изоморфны, т. е. класс тройки ξ в $K^{\mathrm{comp}}(M)$ не меняется при гомотопиях. В самом деле, определим изоморфизмы $\varphi^i(t)$:

$E^i \to E^i$ $(i=0, 1)$, полагая $\varphi^1(t)\equiv 1$, а $\varphi^0(t)$ зададим как фундаментальную матрицу решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{\varphi}^0+\rho a^{-1}(t)\dot{a}(t)\varphi^0=0$, $\varphi^0(0)=1$ (ρ — срезающая функция). Вне компакта, где $\rho\equiv 1$, это решение совпадает с $a^{-1}(t)a(0)$, в силу единственности, так что $a(t)\varphi^0(t)=a(0)$. Это доказывает изоморфность троек $\xi(0)$ и $\xi(t)$. Отметим, что если в расслоениях E^0 и E^1 заданы эрмитовы скалярные произведения, и a — унитарный изоморфизм, то $\varphi^0(t)$ — также унитарен.

2. Логарифмическое свойство. Пусть $\xi=\{E^0, E^1, a\}$ и $\eta=\{E^1, E^2, b\}$ — виртуальные тройки с компактным носителем. Тогда $\zeta=\{E^0, E^2, ba\}$ определяет элемент $\xi+\eta$ в $K^{\mathrm{comp}}(M)$. Действительно, $\zeta\oplus\{E^1, E^1, 1\}$ и $\xi\oplus\eta$ — изоморные тройки, ввиду того, что матрицы

$$\begin{pmatrix} ba & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$$

гомотопны.

В частности, элемент, обратный к $\xi=\{E^0, E^1, a\}\in K^{\mathrm{comp}}(M)$ задается тройкой $\{E^1, E^0, a^{-1}\}$, так что $K^{\mathrm{comp}}(M)$ является группой.

3. Группа $K^{\mathrm{comp}}(M)$ является модулем над $K(M)$. Произведение $\eta=\{F^0, F^1\}\in K(M)$ и $\xi=\{E^0, E^1, a\}\in K^{\mathrm{comp}}(M)$, задающее структуру модуля, определяется как класс, равный разности $F^0\otimes\xi-F^1\otimes\xi=\{F^0\otimes E^0, F^0\otimes E^1, 1\otimes a\}-\{F^1\otimes E^0, F^1\otimes E^1, 1\otimes a\}$ в $K^{\mathrm{comp}}(M)$.

Определим характеристический класс $\mathrm{ch}\,\xi$ для $\xi\in K^{\mathrm{comp}}(M)$. Пусть $\xi=\{E^0, E^1, a\}$ — виртуальное расслоение с компактным носителем, ∂^0 и ∂^1 — связности в E^0 и E^1. Напомним, что для любого гомоморфизма $b: E^0\to E^1$ определен ковариантный дифференциал: $(\partial b)u=\partial^1(bu)-b\partial^0 u$, где $u\in C^\infty(E^0)$. Покажем, что связности ∂^0 и ∂^1 всегда можно выбрать так, чтобы $\partial a=0$ вне компакта. Действительно, исходя из произвольных связностей ∂^0 и ∂^1, введем связность $\tilde{\partial}^0$, действующую на сечения $u\in C^\infty(E^0)$ по правилу $\tilde{\partial}^0 u=\partial^0 u+(\rho a^{-1}\partial a)u$, т. е. формы связностей ∂^0 и $\tilde{\partial}^0$ отличаются на $\Delta\Gamma=\rho a^{-1}\partial a$, где ρ — срезающая функция. Тогда для ковариантного дифференциала $\tilde{\partial} b$, определяемого связностями $\tilde{\partial}^0$, ∂^1, имеем $\tilde{\partial} b=\partial b-b(\rho a^{-1}\partial a)$, откуда следует, что $\tilde{\partial} a=0$ вне компакта, где $\rho\equiv 1$. Отметим, что если ∂^0, ∂^1 — эрмитовы связности и a — унитарен, то связность $\tilde{\partial}^0$ также эрмитова. Для кривизны $\tilde{\Omega}_0$ связности $\tilde{\partial}^0$ имеем

$$\tilde{\Omega}_0=\Omega_0+\partial(\rho a^{-1}\partial a)+(\rho a^{-1}\partial a)^2. \tag{1.10}$$

Определим форму $\mathrm{ch}\,\xi$, полагая

$$\mathrm{ch}\,\xi=\mathrm{tr}\, e^{\tilde{\omega}_0}-\mathrm{tr}\, e^{\omega_1}$$

и покажем, что она имеет компактный носитель. Действительно, дифференцируя равенство $\tilde{\partial} a=0$, получим $0=\tilde{\partial}(\tilde{\partial} a)=\Omega_1 a-a\tilde{\Omega}_0$, откуда $\tilde{\Omega}_0=a^{-1}\Omega_1 a$ вне компакта X, так что следы $e^{\tilde{\omega}_0}$ и e^{ω_1} совпадают вне компакта. Мы получаем тем самым класс когомологий $\mathrm{ch}\,\xi\in H^{+\mathrm{comp}}(M)$. Нетрудно показать, что этот класс не меняется при гомотопиях a, $\tilde{\partial}^0$, ∂^1 с соблюдением условия $\tilde{\partial} a=0$ вне компакта.

Ясно, что группа $H^{+\mathrm{comp}}(M)$ является модулем над $H^+(M)$ Из свойств характера Чженя вытекает, что гоморофизм $\mathrm{ch}: K^{\mathrm{comp}}(M)\to H^{+\mathrm{comp}}(M)$ является гомоморфизмом модулей.

3.3. Изоморфизм Тома. Пусть M — компактное многообразие размерности n, E — m-мерное комплексное расслоение над M. Чтобы избежать возможных недоразумений, будем обозначать через N пространство расслоения E, которое является некомпактным $n+2m$-мерным многообразием. Точки многообразия N — это пары (x, z), где $x\in M$, $z\in E_x$. Определено вложение $i: M\to N$, $i(x)=(x, 0)$, и проекция $p: N\to M$, $p(x, z)=x$. Так как N стягивается к M, то вложение и проекция индуцируют взаимно обратные изоморфизмы $i^*: H(N)\to H(M)$ $p^*: H(M)\to H(N)$, а также изоморфизмы $i^!: K(N)\to K(M)$ $p^!: K(M)\to K(N)$. *Теоремы об изоморфизме Тома* описывают структуру $K^{\mathrm{comp}}(N)$ как модуля над $K(N)\approx K(M)$ и структуру $H^{\mathrm{comp}}(N)$ как модуля над $H(N)\approx H(M)$. Они утверждают, что эти модули порождаются одной свободной образующей. Нам понадобятся конструкции этих образующих и соотношения между ними.

Рассмотрим сначала *изоморфизма Тома в K-теории*. Поднятия расслоений E и E^* на многообразие N с помощью проекции p будем обозначать теми же буквами. В каждой точке $(x, z)\in N$ определен комплекс

$$0\to\Lambda^0(E^*)\xrightarrow{\varepsilon(z)}\Lambda^1(E^*)\xrightarrow{\varepsilon(z)}\dots\xrightarrow{\varepsilon(z)}\Lambda^n(E^*)\to 0, \tag{1.12}$$

где $\varepsilon(z)$ — гомоморфизм внешнего умножения p-формы $u\in\Lambda^p(E_x^*)$ на форму $\langle\cdot, z\rangle$ (мы считаем, что в E задана эрмитова структура). Ясно, что этот комплекс точен при $z\neq 0$. Подобно тому, как в п. 2.3 эллиптическому комплексу сопоставляется эллиптический оператор, сопоставим комплексу (1.12) виртуальное расслоение с компактным носителем над N

$$\beta_E=\{\Lambda^+(E^*),\ \Lambda^-(E^*),\ b(z)\},$$

где $b(z)=\varepsilon(z)+\varepsilon^*(z)$, где $\varepsilon^*(z)$ — гомоморфизм, сопряженный к $\varepsilon(z)$. Отметим, что $\varepsilon^*(z)$ совпадает с гомоморфизмом подстановки $i(z): \Lambda^p\to\Lambda^{p-1}$, который определяется следующим образом. Форма $u\in\Lambda^p(E_x^*)$ — это антисимметрическая полилинейная функция $u(z_1, z_2, \dots, z_p)$, где $z_i\in E_x$. Тогда

$$(i(z)u)(z_1, z_2, \dots, z_{p-1})=u(z, z_1, z_2, \dots, z_{p-1}).$$

Ясно, что гомоморфизм $i(z)$ является антидифференцированием, т. е. $i(z)(u\wedge v)=(i(z)u)\wedge v+(-1)^p u\wedge(i(z)v)$, где p — степень формы u. Отсюда получаем

$$i(z)\varepsilon(z)+\varepsilon(z)i(z)=|z|^2. \qquad (1.13)$$

Таким образом, гомоморфизм $b^2(z)=i(z)\varepsilon(z)+\varepsilon(z)i(z)$ является гомоморфизмом умножения на скаляр $|z|^2$, аналогичным оператору Лапласа из п. 2.3.

Из основной теоремы K-теории — *теоремы периодичности Ботта* [16] — вытекает, что β_E задает образующую модуля $K^{\mathrm{comp}}(N)$ над кольцом $K(M)$. Другими словами, гомоморфизм $i_!: K(M)\to K^{\mathrm{comp}}(N)$, задаваемой формулой $i_!\xi=\beta_E(p^!\xi)$, является изоморфизмом, называемым *изоморфизмом Тома* в K-теории.

Элемент $\beta_E\in K^{\mathrm{comp}}(N)$ называется *образующей Ботта*. Иногда удобнее задавать его в виде

$$\beta_E=\{\Lambda^+(E^*),\ \Lambda^-(E^*),\ b(\rho v)\}, \qquad (1.14)$$

где $v=z/|z|$ — единичный вектор, $\rho(z)$ — срезающая функция, равная 1 при $|z|\geqslant 1$.

Перейдем теперь к когомологиям. Пусть ψ — замкнутая форма на N с компактным носителем. В локальных координатах ее можно записать в виде суммы слагаемых вида $\psi_{i_1\ldots i_k}\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$, где $\psi_{i_1\ldots i_k}$ — это формы на слое E_x. Определим операцию p_* *послойного интегрирования* формы, полагая

$$p_*(\psi_{i_1\ldots i_k}\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k})=\left(\int_{E_x}\psi_{i_1\ldots i_k}\right)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k},$$

где интеграл по E_x берется от компоненты старшей степени $2m$ относительно dz^i, $d\bar z^i$. Ориентация E_x — это стандартная ориентация комплексного пространства, определяемая формой $i^m dz^1\wedge d\bar z^1\wedge\ldots\wedge dz^m\wedge d\bar z^m$. Ясно, что от выбора локальных координат $(x, z^1, \bar z^1,\ldots, z^m, \bar z^m)$ на N эта операция не зависит и определяет гомоморфизм $p_*: H^{\mathrm{comp}}(N)\to H(M)$, понижающий степени форм на $2m$. *Теорема Тома* утверждает, что p_* — изоморфизм. Обозначим $i_*: H(M)\to H^{\mathrm{comp}}(N)$ обратный изоморфизм. Образ $1\in H(M)$ при этом отображении называется *образующей Тома* $U_E=i_*1\in H^{2m\,\mathrm{comp}}(N)$. Дадим явную конструкцию U_E.

Пусть ∂ — эрмитова связность в расслоении E, Γ — форма связности в локальном репере. Она определяет также связность и в поднятии E на многообразие N с той же формой связности Γ. Мы будем называть ее поднятием связности ∂ и обозначать той же буквой. В расслоении E над N имеется сечение $v=z/|z|$, определенное при $z\neq 0$. Исходя из связности ∂, построим связность $\tilde\partial$ в расслоении E над многообразием N, для

которой $\tilde\partial v=0$ при $|z|\geqslant 1$. Ее можно задать, например, по формуле

$$\tilde\partial u=\partial u+\rho(-\partial v\langle u, v\rangle+v\langle u, \partial v\rangle+\langle\partial v, v\rangle u). \qquad (1.15)$$

Дифференцируя равенство $\tilde\partial v=0$, получим $\tilde\Omega v=0$, откуда следует, что $\det\tilde\omega=0$ при $|z|\geqslant 1$. Таким образом m-я форма Чженя $\det\tilde\omega$, определяемая связностью $\tilde\partial$, задает $2m$-мерный класс когомологий с компактным носителем. Можно доказать, что $p_*\det\tilde\omega=1$ (см., например, [29] [33],), откуда следует, что эта форма задает образующую Тома U_E.

Вычислим теперь $p_*\operatorname{ch}\beta_E$. Со связностью $\tilde\partial$ в расслоении E над N ассоциируются связности в E^* и во внешних степенях $\Lambda^k(E^*)$. При этом $\tilde\partial b(v)=0$, так как $\tilde\partial v=0$. Форма $\operatorname{ch}\beta_E$ задается формулой (1.11), где $\tilde\omega_0$ и ω_1 — это кривизны связности $\tilde\partial$ в расслоениях $\Lambda^+(E^*)$ и $\Lambda^-(E^*)$ соответственно. Из (1.9) получаем

$$\operatorname{ch}\beta_E=\operatorname{ch}\Lambda^+(E^*)-\operatorname{ch}\Lambda^-(E^*)=\det\tilde\omega\cdot\det\frac{1-e^{-\tilde\omega}}{\tilde\omega}. \qquad (1.16)$$

Первый сомножитель — это форма с компактным носителем на N, определяющая класс $U_E\in H^{\mathrm{comp}}(N)$. Во втором сомножителе заменим кривизну ω связности $\tilde\partial$ кривизной ω связности ∂, что не изменит его класса когомологий в $H(N)$, а следовательно и класса всего произведения в $H^{\mathrm{comp}}(N)$. Так как форма ω не содержит дифференциалов dz^i, $d\bar z^i$, то интегрирование по слоям дает

$$p_*\operatorname{ch}\beta_E=\mathcal{T}^{-1}(E). \qquad (1.17)$$

Сделаем несколько замечаний о гомоморфизме Тома в случае вещественных расслоений. Пусть E — вещественное ориентированное $2m$-мерное расслоение с евклидовой структурой над компактным многообразием M, N — пространство расслоения. Точки многообразия N имеют вид (x, y), где $x\in M$, $y\in E_x$. Пусть ∂ евклидова связность в E, а также в его поднятии на N, $\tilde\partial$ — евклидова связность в поднятии E, удовлетворяющая условию $\tilde\partial v=$ вне компакта, где $v=y/|y|$ — сечение расслоения E над N, определенное при $y\neq 0$. Такая связность определяется той же формулой (1.15), что и в комплексном случае, но при этом $\langle\partial v, v\rangle=0$. Гомоморфизм послойного интегрирования p_* по-прежнему будет изоморфизмом, причем обратный изоморфизм i_* задается умножением на класс Тома U_E, который в вещественном случае определяется формой $\operatorname{Pf}(\frac{1}{2\pi}\tilde\Omega)$, где $\tilde\Omega$ — кривизна $\tilde\partial$. Непосредственно проверяется, что $p_*U_E=1$, $i^*U_E=\chi(E)$ — эйлеров класс расслоения E.

В K-теории ситуация сложнее. Как и в комплексном случае определяется элемент β_E по формуле (1.14), но он уже не будет образующей в $K^{comp}(N)$. Равенство (1.16) справедливо по-прежнему, но послойное интегрирование дает несколько иной результат. Действительно,

$$\det \bar{\omega} = (-1)^m (\mathrm{Pf}(\bar{\Omega}/2\pi))^2 \sim (-1)^m v_E \chi(E)$$

в $H^{comp}(N)$. Таким образом, вместо (1.17) получаем

$$p_* \mathrm{ch}\, \beta_E = (-1)^m \chi(E) \mathcal{T}^{-1}(E) \qquad (1.18)$$

§ 4. Формула Атьи — Зингера

Пусть $A: C^\infty(E^0) \to C^\infty(E^1)$ — эллиптический п. д. о. на компактном n-мерном многообразии M, $a: E^0 \to E^1$ — его главный символ, который определяет изоморфизм расслоений E^0 и E^1 (точнее, их поднятий на T^*M) над $T^*M \setminus 0$. Тем самым эллиптический оператор определяет элемент $d(A) \in K^{comp}(T^*M)$ задаваемый виртуальным расслоением с компактным носителем $\{E^0, E^1, a\}$. Он называется *различающим элементом эллиптического оператора*.

Теорема 1.4. Индекс эллиптического оператора вычисляется по формуле

$$\mathrm{ind}\, A = \int_{T^*M} \mathrm{ch}\, d(A) \mathcal{T}(M), \qquad (1.19)$$

где ориентация T^*M задается формой $d\xi_1 \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge d\xi_n \wedge dx^n$.

Выражение в левой части называют *топологическим индексом*.

Класс Тодда $\mathcal{T}(M)$ задается формой $\det \omega/(1-e^{-\omega})$, причем ω выражается через тензор кривизны R^i_{jkl} римановой метрики

$$\omega = -\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{2} R^i_{jkl}\, dx^k \wedge dx^l\right).$$

Как уже упоминалось во введении, существует много способов доказательства этой теоремы. Не имея возможности подробно на них останавливаться, ограничимся лишь беглыми набросками основных подходов. Один из них, основанный на изоморфизме Тома, будет более подробно рассмотрен в главе 3 для доказательства более общей теоремы об индексе.

Левая и правая части (1.19) являются стабильными гомотопическими инвариантами символа эллиптического оператора на $S(M)$. Возникает естественное желание с помощью этих операций (деформации, прямые суммы, тензорные произведения) привести оператор к некоторому простейшему виду, для которого равенство (1.19) проверялось бы непосредственно. К сожалению, указанных свойств индекса недостаточно для осуществления этой программы. Так, в первом доказательстве Атьи и Зингера дополнительно использовалась инвариантность индекса относительно бордизмов, и основная трудность состояла в доказательстве этого свойства для аналитического индекса [51]. Второе доказательство основывалось на изоморфизме Тома в K-теории. Если N — нормальное расслоение размерности m при вложении M в $\mathbf{R}^{n+m}$, то T^*N можно рассматривать как комплексное m-мерное расслоение над T^*M. Элементу $d(A) \in K^{comp}(T^*M)$ с помощью изоморфизма Тома в K-теории сопоставляется элемент $\alpha \in K^{comp}(T^*N)$ с тем же топологическим индексом. И снова основная трудность состоит в том, чтобы проинтерпретировать α как класс символа эллиптического оператора на компактификации N и доказать, что его аналитический индекс совпадает с индексом A [23], [24].

Упомянем также об аналитических доказательствах. Пользуясь теоремами 1.1 или 1.2, нетрудно получить выражение для аналитического индекса через так называемый полный символ оператора и производные от него по локальным координатам. Однако привести полученное выражение к инвариантному виду (1.19) далеко не просто. Это удается сделать для операторов, обладающих некоторым специфическим свойством инвариантности, с помощью операции усреднения по группе. К их числу относятся классические операторы $d+d^*$, оператор сигнатуры, оператор Дирака. Чтобы распространить теорему на произвольные операторы, приходится пользоваться результатом K-теории о том, что ch определяет изоморфизм когомологий $H^+(M)$ с вещественными коэффициентами и кольца $K(M) \otimes \mathbf{R}$. Такое доказательство дано в [21]. Идея усреднения по группе используется в главе 3, причем без использования упомянутого результата K-теории, где он неприменим.

Сделаем несколько замечаний по поводу формулы Атьи—Зингера.

1. Мы знаем, что индекс зависит только от главного символа на $S(M)$, поэтому возникает естественное желание преобразовать интеграл в формуле (1.19) в интеграл по $S(M)$. Для этого найдем явное выражение для формы $\mathrm{ch}\, d(A)$. Пусть ∂^0 и ∂^1 — связности в E^0, E^1, а также их поднятия на T^*M, $\tilde{\partial}^0 = \partial^0 + (\rho a^{-1} \partial a)$. Тогда $\mathrm{ch}\, d(A)$ вычисляется по формуле (1.11). Рассмотрим гомотопию связностей $\tilde{\partial}_t^0 = \partial^0 + t(\rho a^{-1}\partial a)$, соединяющую ∂^0 с $\tilde{\partial}^0$. Пусть $\omega_0(t)$ — кривизна $\tilde{\partial}_t^0$ (деленная на $-2\pi i$). Тогда формулу (1.11) можно переписать в виде

$$\mathrm{ch}\, d(A) = \mathrm{tr}\, e^{\omega_0} - \mathrm{tr}\, e^{\omega_1} + \int_0^1 \frac{d}{dt}(\mathrm{tr}\, e^{\tilde{\omega}_0(t)})\, dt.$$

Так как носитель $\mathrm{ch}\, d(A)$ содержится в $B(M)$ (расслоение единичных шаров $|\xi| \leqslant 1$), то интегрировать в (1.19) можно по $B(M)$. Первые два слагаемых в выражении для $\mathrm{ch}\, d(A)$ дают 0, так как эти формы не содержат $d\xi_i$. Третье слагаемое по формуле для вариации кривизны (п. 3.2) можно записать в виде дифференциала

$$-\frac{1}{2\pi i} d \int_0^1 \rho \operatorname{tr} a^{-1} \partial a e^{\tilde{\omega}_0(t)} dt.$$

Пользуясь формулой Стокса, получим

$$\operatorname{ind} A = -\frac{1}{2\pi i} \int_{S(M)} \mathcal{T}(M) \int_0^1 \operatorname{tr} a^{-1} \partial a e^{\tilde{\omega}_0(t)} dt, \tag{1.20}$$

при этом из (1.10) следует, что

$$\tilde{\omega}_0(t) = \omega_0 - \frac{1}{2\pi i} \{t \partial (a^{-1} \partial a) + t^2 (a^{-1} \partial a)^2\}.$$

Учитывая, что $\partial a^{-1} = -a^{-1} \partial a a^{-1}$ и $\partial^2 a = \Omega_1 a - a \Omega_0$, можно последнюю формулу переписать в виде

$$\tilde{\omega}_0(t) = (1-t)\omega_0 + t a^{-1} \omega_1 a + \frac{1}{2\pi i} t(1-t)(a^{-1} \partial a)^2. \tag{1.21}$$

2. Из (1.20), (1.21) получается простое следствие: если размерности расслоений E^0, E^1 равны 1, а $\dim M > 2$, то $\operatorname{ind} A = 0$ для любого эллиптического оператора. В самом деле, для одномерных расслоений $(a^{-1} \partial a)^2 = 0$, и интеграл по t можно явно вычислить, что дает

$$\operatorname{ind} A = -\frac{1}{2\pi i} \int_{S(M)} \mathcal{T}(M) \frac{e^{\omega_1} - e^{\omega_0}}{\omega_1 - \omega_0} a^{-1} \partial a.$$

Если $\dim M > 2$, то размерность слоя $S(M)$ больше 1. Интеграл по слою $S(M)$ равен нулю, так как дифференциалы $d\xi_i$ содержатся только в форме $a^{-1} \partial a$ первой степени.

В случае $\dim M = 2$ интеграл по слою $S(M)$ $\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} a^{-1} \partial a = k$ — константа, поэтому для ориентированного многообразия получаем

$$\operatorname{ind} A = k \int_M \frac{\omega_1 + \omega_0}{2}. \tag{1.22}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\mathcal{T}(M) = 1$ для двумерных многообразий, так как классы Понтрягина имеют размерности, кратные 4. Изменение знака связано с изменением ориентации при послойном интегрировании.

3. Индекс равен 0 для любого эллиптического дифференциального оператора на нечетномерном многообразии. Действительно, при антиподальном отображении $(x, \xi) \mapsto (x, -\xi)$ многообразия $S(M)$ подынтегральная форма в (1.20) не меняется, а ориентация $S(M)$ меняется на противоположную. Отметим, что для п. д. о. индекс может быть отличен от нуля, так как форма $a^{-1} \partial a$ при антиподальном отображении может измениться.

4. Пусть расслоения E^0 и E^1 тривиальны (случай системы). Тогда в (1.21) отлично от нуля только последнее слагаемое, и интеграл по t можно вычислить. Если $\mathcal{T}(M) = 1$, то приходим к следующему результату

$$\operatorname{ind} A = -\frac{1}{(2\pi i)^n} \frac{(n-1)!}{(2n-1)!} \int_{S(M)} \operatorname{tr} (a^{-1} da)^{2n-1}. \tag{1.23}$$

Отметим без доказательства, что для матриц порядка $n < \dim M$ этот интеграл равен 0, а при $n = \dim M$ допускает следующую топологическую интерпретацию: пусть $\deg a$ — степень сквозного отображения в сферу

$$S(M) \xrightarrow{a} \mathrm{GL}(n, \mathbf{C}) \to S^{2n-1},$$

где последнее отображение задается первым столбцом матрицы a, тогда

$$\operatorname{ind} A = -\frac{1}{(n-1)!} \deg a$$

(см. [24]).

§ 5. Примеры

5.1. Теорема Гаусса—Бонне. Пусть M — компактное ориентированное многообразие размерности $2n$, Λ — расслоение внешних дифференциальных форм, $\Lambda^{\pm}$ — расслоения форм четных и нечетных степеней. Оператор внешнего дифференцирования $d: C^\infty(\Lambda^k) \to C^\infty(\Lambda^{k+1})$ определяет *комплекс де Рама* многообразия M. Главный символ оператора d (с точностью до множителя i) задается внешним умножением на ковектор ξ, так что последовательность символов

$$0 \to \Lambda^0 \xrightarrow{\xi\wedge} \Lambda^1 \xrightarrow{\xi\wedge} \ldots \xrightarrow{\xi\wedge} \Lambda^{2n} \to 0$$

точна при $\xi \neq 0$. Стандартным образом (п. 2.3) комплексу де Рама сопоставляется эллиптический оператор $A = d + d^*: C^\infty(\Lambda^+) \to C^\infty(\Lambda^-)$. Индекс этого оператора называется *эйлеровой характеристикой многообразия* M. Вычислим индекс по формуле Атьи—Зингера. Различающий элемент $d(A) \in K^{\mathrm{comp}}(T^*M)$ — это в точности элемент β_E для вещественного расслоения $E = T^*M$ (п. 3.3). Пользуясь (1.18), получим

$$\operatorname{ind} A = \int_{T^*M} (-1)^n U_E \chi(E) \mathcal{T}^{-1}(E) \mathcal{T}(E) = \int_M \chi(E)$$

(смена знака вызвана изменением ориентации при послойном интегрировании). Таким образом, эйлерова характеристика многообразия равна интегралу от эйлерова класса. Эта формула носит название *формулы Гаусса—Бонне.*

5.2. Теорема Римана—Роха. Пусть M — комплексное компактное многообразие комплексной размерности n. Комплексификация $\mathbf{C}\otimes TM$ вещественного касательного расслоения разлагается в прямую сумму голоморфного касательного расслоения $T_{\mathbf{C}}M$ с локальным репером $\frac{\partial}{\partial z^i}$ и антиголоморфного $\overline{T}_{\mathbf{C}}M$ с локальным репером $\frac{\partial}{\partial \overline{z}^i}$. Через $\Lambda^{p,q}$ обозначаются расслоения внешних дифференциальных форм степени p по dz^i и степени q по $d\overline{z}^i$. В частности, $\Lambda^{0,1}$ — это расслоение, двойственное к $\overline{T}_{\mathbf{C}}M$. Все расслоения TM, T^*M, $T_{\mathbf{C}}M$, $\overline{T}_{\mathbf{C}}M$ изоморфны как вещественные расслоения. Для упрощения обозначений будем писать $\overline{T}M$ вместо $\overline{T}_{\mathbf{C}}M$ и отождествлять его как многообразие с T^*M.

Пусть E — голоморфное расслоение над M; это означает, что матричные функции перехода являются голоморфными. Тогда оператор Коши—Римана d'' корректно определен на сечениях E, и мы получаем *комплекс Дольбо*

$$0\to C^\infty(E)\xrightarrow{d''}C^\infty(E\otimes\Lambda^{0,1})\xrightarrow{d''}\ldots\xrightarrow{d''}C^\infty(E\otimes\Lambda^{0,n})\to 0.$$

Этот комплекс эллиптичен, так как для любого $v\neq 0\in\overline{T}_xM$, последовательность символов

$$0\to E\xrightarrow{\zeta\wedge}E\otimes\Lambda^{0,1}\xrightarrow{\zeta\wedge}\ldots\xrightarrow{\zeta\wedge}E\otimes\Lambda^{0,n}\to 0,$$

где $\zeta=\langle\,\cdot\,,v\,\rangle\in\Lambda_x^{0,1}$, точна. *Теорема Хирцебруха* [38], обобщающая классическую теорему Римана—Роха, утверждает, что эйлерова характеристика χ этого комплекса выражается по формуле

$$\chi=\int_M \operatorname{ch}E\mathcal{T}(T_{\mathbf{C}}M).$$

Для доказательства применим теорему Атьи—Зингера к эллиптическому оператору $A=d''+(d'')^*$, соответствующему комплексу Дольбо (см. 2.3). Из определения изоморфизма Тома в K-теории и сравнения последовательности символов с последовательностью (1.12) видно, что различающий элемент $d(A)\in K^{\mathrm{comp}}(\overline{T}M)$ — это в точности образ $[E]\in K(M)$ при изоморфизме Тома $i_!:K(M)\to K(\overline{T}M)$. По формуле (1.17) получаем

$$p_*\operatorname{ch}d(A)=\operatorname{ch}Ep_*\beta_{\overline{T}M}=\operatorname{ch}E\mathcal{T}^{-1}(\overline{T}M).$$

Учитывая также, что

$$\mathcal{T}(M)=\mathcal{T}(\mathbf{C}\otimes TM)=\mathcal{T}(T_{\mathbf{C}}M)\mathcal{T}(\overline{T}_{\mathbf{C}}M),$$

и интегрируя послойно в формуле Атьи—Зингера, получим

$$\chi=\operatorname{ind}A=\int_{\overline{T}M}\operatorname{ch}d(A)\mathcal{T}(T_{\mathbf{C}}M)\mathcal{T}(\overline{T}_{\mathbf{C}}M)=\int_M\operatorname{ch}E\mathcal{T}(T_{\mathbf{C}}M).$$

В классическом случае, когда $\dim_{\mathbf{C}}M=1$ и одномерное голоморфное расслоение E порождается дивизором $D=\sum n_ix_i$ на римановой поверхности M (см. [44], [53]), комплекс Дольбо содержит два члена, т. е., оператор d'' — это оператор Коши—Римана d'', и для его индекса получаем

$$\operatorname{ind}d''=\dim\operatorname{Ker}d''-\dim\operatorname{Coker}d''=\int_M c_1(E)+\frac{1}{2}c_1(T_{\mathbf{C}}M)=$$
$$=\deg D+1-g,$$

где $\deg D=\Sigma n_i$ — степень дивизора D, g — род римановой поверхности, равный половине размерности $H^1(M)$. Мы воспользовались тем, что интеграл

$$\int_M c_1(T_{\mathbf{C}}M)=\int_M\chi(TM)$$

равен эйлеровой характеристике $2-2g$ поверхности M, в силу теоремы Гаусса—Бонне.

Отметим, что $\operatorname{Ker}d''$ — это пространство голоморфных сечений расслоения E, т. е., пространство мероморфных функций f, таких что $z^{n_i}f$ голоморфны в окрестности точки x_i, где z — локальный параметр в точке x_i.

Классическая *теорема Римана—Роха* может служить иллюстрацией применения теоремы об индексе для доказательства существования решений эллиптических уравнений. Так, если $\deg D>g-1$, то из нее получается *неравенство Римана* $\dim\operatorname{Ker}d''\geqslant\deg D+1-g>0$, откуда, в частности, следует существование мероморфных функций с полюсами не выше предписанных порядков в данных точках. При $\deg D>2g-2$ можно доказать, что $\operatorname{Coker}d''$ пусто, и неравенство Римана превращается в равенство, определяющее размерность пространства решений.

5.3. Спинорная структура и оператор Дирака. Рассматриваемый в этом пункте пример очень важен по той причине, что здесь впервые появляются объекты, с которыми мы постоянно будем иметь дело в главе 3. Имеются в виду расслоения алгебр и связности в них, ассоциированные с векторными расслоениями, снабженными дополнительными структурами. Кроме того, иллюстрируется применение теории индекса, основанное на целочисленности, которое также играет важную роль в главе 3.

Алгеброй Клиффорда C_n называется ассоциативная алгебра над $\mathbf{C}$ с единицей, порожденная образующими $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и соотношениями $e_ie_j+e_je_i=-2\delta_{ij}$. Любой элемент $a \in C_n$ однозначно представляется в виде

$$a=\sum a_{i_1i_2\ldots i_n}e_1^{i_1}e_2^{i_2}\ldots e_n^{i_n}, \tag{1.24}$$

где индексы i_k принимают два значения 0 и 1, а суммирование производится по всем таким наборам индексов. Размерность C_n как линейного пространства над **C** равна 2^n. В C_n вводится инволюция, порожденная действием на образующие $e_i^*=-e_i$, а также след, определяемый по правилу $\operatorname{tr} a=ca_{00\ldots0}$, где c — нормировочная константа. Легко проверяется, что $\operatorname{tr} ab=\operatorname{tr} ba$. Таким образом, C_n — это C^*-алгебра с нормой $\|a\|^2=\operatorname{tr} aa^*$.

Пусть $\alpha \in so(n)$ — вещественная кососимметрическая матрица. Сопоставим ей элемент $a=\varphi(\alpha)=\frac{1}{4}\alpha_{ij}e_ie_j$ (здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование). Вещественное подпространство в C_n, состоящее из элементов $\varphi(\alpha)$ обозначим $\operatorname{spin}(n)$. Из перестановочных соотношений легко получаем для $a=\varphi(\alpha)$

$$[a, e_i]=ae_i-e_ia=\alpha_{ij}e_j, \tag{1.25}$$

а также

$$[\varphi(\alpha), \varphi(\beta)]=\varphi([\alpha, \beta]),$$

где слева берется коммутатор в алгебре Клиффорда, а справа — в алгебре матриц. Таким образом, $\operatorname{spin}(n)$ изоморфна $so(n)$ как алгебра Ли. Элементы вида e^a, где $a=\operatorname{spin}(n)$, а экспонента вычисляется в алгебре Клиффорда как степенной ряд, порождают группу $\operatorname{Spin}(n)$, называемую *спинорной группой*. Из (1.25) и известной формулы

$$e^ae_ie^{-a}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\underbrace{[a, [a,\ldots,[a}_{k}, e_i]]\ldots]$$

получаем, что для $a=\varphi(\alpha)$ $e^ae_ie^{-a}=(e^\alpha)_{ij}e_j$. Отображение $\psi: e^{\varphi(\alpha)}\mapsto e^\alpha$ определяет гомоморфизм групп $\psi:\operatorname{Spin}(n)\to SO(n)$, при этом, как нетрудно видеть, $\psi^{-1}(1)=\pm1$. Таким образом, ψ — двулистное накрытие.

Замена образующих $e_i'=g_{ij}e_j$ с помощью ортогональной матрицы не меняет соотношений, инволюции и следа, таким образом можно говорить об алгебре Клиффорда $C(E)$ евклидова n-мерного пространства E, и в качестве образующих рассматривать элементы ортонормированного базиса в E.

Далее будем рассматривать случай четного $n=2m$. Образующие алгебры C_{2m} обозначим $e_1,\ldots,e_m$, $e_1',\ldots,e_m'$ и введем новые образующие $z_k=\frac{1}{2}(e_k+ie_k')$, $z_k^*=\frac{1}{2}(-e_k+ie_k')$. Они удовлетворяют *каноническим антиперестановочным соотношениям*

$$z_iz_j+z_jz_i=z_i^*z_j^*+z_j^*z_i^*=0,\quad z_i^*z_j+z_jz_i^*=\delta_{ij}. \tag{1.26}$$

В частности, $z_i^2=(z_i^*)^2=0$. Легко видеть, что элементы $z_i^*z_i$ являются идемпотентами: $(z_i^*z_i)^2=z_i^*z_i$. Введем элемент $p_0=z_1^*z_1z_2^*z_2\ldots z_m^*z_m$, который также является идемпотентом, причем $z_i^*p_0=0$. Используя физическую терминологию, будем называть p_0 — *вакуумным проектором*, z_i^* — *операторами уничтожения*, а z_i — *операторами рождения*. Любой элемент $a \in C_{2m}$ однозначно записывается в виковской нормальной форме, т. е. в виде некоммутативного полинома от z_i, z_i^*, где все операторы рождения стоят слева от операторов уничтожения.

Пусть S — левый идеал алгебры C_{2m}, порожденный вакуумным проектором. Любой элемент $s \in S$ имеет вид ap_0, где $a \in C_{2m}$ и однозначно записывается в виде $F(z_1, z_2,\ldots,z_m)p_0$, где F — полином от операторов рождения не выше первой степени по каждой переменной, откуда $\dim S=2^m$. S называется *спинорным пространством*, а его элементы — *спинорами*. Алгебра C_{2m} действует в S умножением слева: для $s=ap_0$ и $b \in C_{2m}$ $bs=bap_0$. Это действие называется *клиффордовым умножением*. При этом алгебра C_{2m}, рассматриваемая как алгебра линейных преобразований S, изоморфна $\operatorname{Hom}(S, S)$ — полной матричной алгебре порядка 2^m. Это единственное неприводимое представление алгебры C_{2m}. Выберем нормировочный множитель в определении следа равным 2^m, так что $\operatorname{tr} p_0=1$, и введем в пространстве S скалярное произведение $\langle s_1, s_2\rangle=\operatorname{tr} p_0a_2^*a_1p_0$. Тогда инволюция в алгебре C_{2m} соответствует эрмитову сопряжению линейных преобразований в S, и след в алгебре C_{2m} совпадает со следом линейного преобразования. Данная конструкция спинорного представления — это частный случай конструкции ГНС (И. М. Гельфанд, М. А. Наймарк, Сигал) в теории C^*-алгебр [43].

Пусть теперь E — вещественное евклидово ориентированное $2m$-мерное расслоение над многообразием M. Оно определяет расслоение $C(E)$ алгебр Клиффорда, слоем которого в точке x является алгебра Клиффорда пространства E_x. Если $e_1, e_2,\ldots,e_{2m}$ — локальный ортонормированный ориентированный репер, то в каждом слое $C(E_x)$ он задает систему образующих. Сечения расслоения $C(E)$ локально задаются в виде (1.24), где $a_{i_1i_2\ldots i_{2m}}$ — комплексные функции от x. Пусть ∂ — евклидова связность в расслоении E с локальной формой связности Γ, которая принимает значения в $so(2m)$. С ней ассоциируется связность в расслоении $C(E)$, обозначаемая той же буквой ∂, которая на образующих e_i действует так же, как и на базисные сечения расслоения E, а именно

$$\partial e_i=\Gamma_{ij}e_j=[\varphi(\Gamma), e_i],$$

и однозначно продолжается на любые сечения по правилу Лейбница $\partial(ab)=(\partial a)b+a\partial b$, так что для сечения (1.24)

$$\partial a=da+[\varphi(\Gamma), a], \tag{1.27}$$

где d — внешнее дифференцирование коэффициентов. Поскольку $\varphi : \mathrm{so}(2m) \to \mathrm{spin}(2m)$ — изоморфизм, то $\partial^2 a = [\varphi(\Omega), a]$, где Ω — кривизна связности ∂.

Пусть далее $S(E)$ — 2^m-мерное комплексное расслоение над M, в слоях которого $S(E_x)$ алгебра $C(E_x)$ действует клиффордовым умножением, т. е. $S(E)$ — расслоение спиноров, а $C(E)$ изоморфно $\mathrm{Hom}(S(E), S(E))$. Если ∇ — какая-либо связность в $S(E)$, то она индуцирует также связность в $C(E) = \mathrm{Hom}(S, S)$ по обычному правилу $(\nabla a)s = \nabla(as) - a\nabla s$. Кривизна связности ∇ в $S(E)$ Ω_∇ — это 2-форма со значениями в $C(E)$. Говорят, что расслоение E с евклидовой связностью ∂ допускает *спинорную структуру*, если существует такое расслоение $S(E)$ со связностью ∇, для которой $\Omega_\nabla = \varphi(\Omega)$ и ∇ индуцирует в $C(E)$ связность ∂.

Приведем также эквивалентное определение в терминах функций перехода, хотя в дальнейшем оно нам не понадобится. Пусть $\{U_i\}$ — покрытие M окрестностями, для которых любые пересечения стягиваемы. Пусть $g_{UV} \in \mathrm{SO}(2m)$ — функция перехода расслоения E в пересечении $U \cap V$. Тогда в $U \cap V \cap W$ имеем $g_{UV} g_{VW} g_{WU} = 1$. Так как $\psi : \mathrm{Spin}(2m) \to \mathrm{SO}(2m)$ — двулистное накрытие, то над пересечениями $U \cap V$ можно выбрать однозначный прообраз $\psi^{-1}(g_{UV}) \in \mathrm{Spin}(2m)$. Расслоение E имеет спинорную структуру, если эти прообразы можно выбрать так, чтобы $\psi^{-1}(g_{UV})\psi^{-1}(g_{VW})\psi^{-1}(g_{WU}) = 1$ (вообще говоря, это произведение равно ± 1).

Разберем поучительный случай, когда расслоение E обладает комплексной структурой, т. е. является вещественной формой некоторого комплексного эрмитова расслоения F. Это означает, что можно выбрать локальные образующие в $C(E)$ из операторов рождения и уничтожения $z_1, \ldots, z_m$, $z_1^*, \ldots, z_m^*$, так что при переходах операторы рождения преобразуются с помощью унитарной матрицы: $z_i' = u_{ij} z_j$, $u = (u_{ij}) \in U(m)$. Тогда вакуумный проектор $p_0 = z_1^* z_1 z_2^* z_2 \ldots z_m^* z_m$ не зависит от выбора образующих и определяет глобальное сечение расслоения $C(E)$, для которого $\partial p_0 = 0$, где ∂ — вещественная форма эрмитовой связности в расслоении F, а также ассоциированная связность в $C(E)$. Конструкция спинорного пространства, данная выше, переносится на расслоения, и мы получаем расслоение $S(E)$ с действием $C(E)$. Любое сечение $S(E)$ имеет вид $s = ap_0$, где $a \in C(E)$. Естественным образом вводится связность в расслоении $S(E)$: для сечения $s = ap_0$ мы полагаем

$$\partial s = \partial(ap_0) p_0 = (\partial a) p_0. \tag{1.28}$$

Однако, кривизна этой связности, вообще говоря, не будет совпадать с $\varphi(\Omega)$. Действительно,

$$\partial^2 s = [\varphi(\Omega), a] p_0 = \varphi(\Omega) a p_0 - a\varphi(\Omega) p_0 = (\varphi(\Omega) - \mathrm{tr}\, p_0 \varphi(\Omega) p_0) s.$$

Последнее выражение получается следующим образом. Форма $\varphi(\Omega)$ коммутирует с p_0, так как $\partial^2 p_0 = 0$. Следовательно,

$\varphi(\Omega) p_0 = \varphi(\Omega) p_0 p_0 = p_0 \varphi(\Omega) p_0$. Так как p_0 — одномерный проектор в $S(E)$, то $p_0 \varphi(\Omega) p_0 = p_0 \mathrm{tr}\, p_0 \varphi(\Omega) p_0$ что и дает нужное выражение. Кривизну $\varphi(\Omega) - \mathrm{tr}\, p_0 \varphi(\Omega) p_0$ мы будем называть *виковской* (*нормальной*) *кривизной* и обозначать $\varphi_n(\Omega)$ в отличие от $\varphi(\Omega)$, которую будем называть *вейлевской кривизной*. Терминология мотивируется тем, что у $\varphi(\Omega)$ свободный член в записи (1.24) равен 0, в то время как у $\varphi_n(\Omega)$ равен нулю свободный член в виковской нормальной форме. Эквивалентные условия нормировки: $\mathrm{tr}\, \varphi(\Omega) = 0$, $\mathrm{tr}\, p_0 \varphi_n(\Omega) p_0 = 0$. Все дело в том, что в алгебре $C(E)$ и форма связности $\varphi(\Gamma)$ и форма кривизны $\varphi(\Omega)$ определены неоднозначно, а с точностью до скалярных форм, в то время как связность в $S(E)$ однозначно определяет кривизну.

В случае $\varphi_n(\Omega) \neq \varphi(\Omega)$ можно попытаться исправить положение, домножив расслоение $S(E)$ тензорно на одномерное комплексное расслоение L и определив связность ∇ в $L \otimes S(E)$ обычным образом $\nabla = \partial_L \otimes 1 + 1 \otimes \partial$. Тогда $\Omega_\nabla = \varphi_n(\Omega) + \Omega_L$. Если подобрать L так, чтобы $\Omega_L = \mathrm{tr}\, p_0 \varphi(\Omega) p_0$, то цель будет достигнута. Для этого необходимо и достаточно, чтобы форма $-\frac{1}{2\pi i} \mathrm{tr}\, p_0 \varphi(\Omega) p_0$ была целочисленной. Можно показать, что она определяет класс когомологий ${}^1/_2 c_1(F)$, и целочисленность этого класса когомологий является необходимым и достаточным условием существования спинорной структуры.

Продолжим наши рассмотрения для вещественного ориентированного четномерного расслоения, допускающего спинорную структуру. Связность ∇ в $S(E)$ будем в этом случае обозначать той же буквой ∂. Элемент $r = i^{-m} e_1 e_2 \ldots e_{2m}$ не меняется при заменах базиса с помощью матрицы $g \in \mathrm{SO}(2m)$ и потому определяет глобальное сечение расслоения $C(E)$, для которого $\partial r = 0$. Его квадрат равен 1. Следовательно, расслоение $S(E)$ расщепляется в прямую сумму $S^+ \oplus S^-$ собственных подпространств r с собственными значениями ± 1 (четные и нечетные спиноры) и связность ∂ в $S(E)$ сохраняет это расщепление. Легко видеть, что $e_i r = -r e_i$, поэтому умножение на e_i отображает $S^\mp$ в $S^\pm$.

Пусть M — четномерное ориентированное компактное многообразие. Говорят, что оно допускает спинорную структуру, если его касательное (или кокасательное) расслоение TM допускает спинорную структуру. Таким образом, касательные векторы e_i в точке $x \in M$ можно рассматривать и как элементы $C(T_x M)$, действующие клиффордовым умножением на $S(T_x M)$. Пусть $\partial_i = i(e_i)\partial$ — ковариантное дифференцирование сечений $S(TM)$ вдоль вектора e_i. Определим *оператор Дирака* $D : C^\infty(S) \to C^\infty(S)$ по формуле $Ds = e_i \partial_i s$ (суммирование по повторяющимся индексам). Здесь e_i — элементы ортонормированного базиса, действующие клиффордовым умножением. Ясно, что оператор D от выбора базиса не зависит. Главный символ оператора D равен $a(x, \xi) = e_i \xi_i$, где ξ_i координаты ковектора ξ в базисе e_i (с точностью до множителя i). Его квадрат равен $-\xi_i \xi_i = -|\xi|^2$, следовательно, D — эллиптический оператор. Квадрат оператора Дирака называется *оператором Лапласа* Δ, сечения $s \in \operatorname{Ker} \Delta$ называются *гармоническими спинорами*. Очевидно, что D отображает $C^\infty(S^\pm)$ в $C^\infty(S^\mp)$, поэтому пространство H гармонических спиноров распадается в прямую сумму подпространств $H^\pm$ четных и нечетных гармонических спиноров.

Рассмотрим сужение оператора Дирака $D: C^\infty(S^+) \to C^\infty(S^-)$ и вычислим его индекс, равный по определению

$$\operatorname{ind} D = \dim H^+ - \dim H^- = \operatorname{tr} r|_H.$$

Применим формулу Атьи—Зингера. Различающий элемент $d(D) \in K^{\mathrm{comp}}(T^*M)$ задается виртуальным расслоением с компактным носителем $d(D) = \{S^+, S^-, \rho\nu\}$, где $\nu = \xi_i e_i / |\xi|$, ρ — срезающая функция на T^*M, рассматриваемый как сечение расслоения $C(E)$ над T^*M. Во избежание недоразумений будем обозначать касательное расслоение, а также его поднятие на T^*M буквой E. Пусть ∂ — риманова связность в E, а также ее поднятие в расслоение E над T^*M. Через $\tilde\partial$ обозначим такую связность в поднятии E на T^*M, для которой $\tilde\partial\nu = 0$ вне компакта (см. (1.15)), $\tilde\Omega$ — ее кривизна. Той же буквой $\tilde\partial$ обозначим ассоциированные связности в расслоениях $C(E)$ и $S(E)$, поднятых на T^*M. Тогда $\varphi(\tilde\Omega)$ — кривизна $\tilde\partial$ в $S(E)$, а через $\varphi^\pm(D)$ обозначим ее сужение на $S^\pm(E)$. Класс когомологий $\operatorname{ch} d(D)$ задается формой с компактным носителем

$$\operatorname{ch} d(D) = \operatorname{tr} e^{-\frac{1}{2\pi i}\varphi^+(\tilde\Omega)} - \operatorname{tr} e^{-\frac{1}{2\pi i}\varphi^-(\tilde\Omega)} = \operatorname{tr} r e^{-\frac{1}{2\pi i}\varphi(\tilde\Omega)} =$$

$$= i^{-m} \operatorname{tr} e_1 e_2 \ldots e_{2m} e^{\frac{1}{4}\tilde\omega_{ij} e_i e_j},$$

где $\tilde\omega = -\frac{1}{2\pi i}\tilde\Omega$. Это выражение вычисляется следующим стандартным приемом. Обозначим его через $f(\tilde\Omega)$ и вычислим в предположении, что $\tilde\Omega$ — числовая матрица из $so(2m)$. Тогда можно выбрать базис, в котором матрица $\tilde\Omega$ будет иметь блочно-диагональный вид с блоками $\begin{pmatrix} 0 & \lambda_k \\ -\lambda_k & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_k \in \mathbf{R}$. Учитывая, что $e^{-\frac{\lambda}{4\pi i} e_1 e_2} = \operatorname{ch} \frac{\lambda}{4\pi} + i e_1 e_2 \operatorname{sh} \frac{\lambda}{4\pi}$ в силу того, что $(ie_1e_2)^2 = 1$, получим

$$f(\tilde\Omega) = (-1)^m 2^m \prod_{k=1}^m \operatorname{sh} \frac{\lambda_k}{4\pi} = (-1)^m \prod_{k=1}^m \frac{\lambda_k}{2\pi} \prod_{k=1}^m \frac{\operatorname{sh} \frac{\lambda_k}{4\pi}}{\frac{\lambda_k}{4\pi}},$$

где множитель 2^m — это нормировочная константа в определении следа $\operatorname{tr} a$ в алгебре Клиффорда. Это выражение допускает

инвариантную запись в виде

$$f(\tilde\Omega) = (-1)^m \operatorname{Pf} \frac{\tilde\Omega}{2\pi} \left(\det \frac{\operatorname{sh} \frac{\tilde\omega}{2}}{\frac{\tilde\omega}{2}} \right)^{1/2} \tag{1.29}$$

и является аналитической функцией от элементов матрицы $\tilde\Omega$. Следовательно, формула (1.29) верна и для матриц $\tilde\Omega$ с элементами из коммутативной алгебры четномерных дифференциальных форм. Аналогично (1.18), получаем, что в $H^{+\mathrm{comp}}(T^*M)$ форма $\operatorname{ch} d(D)$ когомологична $(-1)^m U_E A^{-1}(E)$, где U_E — класс Тома расслоения E, $A^{-1}(E) = \left(\det \operatorname{sh} \frac{\omega}{2} \Big/ \frac{\omega}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ — обратный к A-классу расслоения E над M. Для вещественных расслоений имеем $\mathcal{T}(E) = A^2(E)$, поскольку

$$\det \frac{\omega}{1 - e^{-\omega}} = \det \frac{\frac{\omega}{2}}{\operatorname{sh} \frac{\omega}{2}} \det e^{\frac{\omega}{2}} = \det \frac{\frac{\omega}{2}}{\operatorname{sh} \frac{\omega}{2}}, \tag{1.30}$$

в силу того, что $\det e^{\frac{\omega}{2}} = e^{\frac{1}{2}\operatorname{tr}\omega} = 1$, так как ω — кососимметрическая матрица. По формуле Атьи—Зингера,

$$\operatorname{ind} D = \int_{T^*M} (-1)^m U_E A^{-1}(E) A^2(E) = \int_M A(E),$$

где множитель $(-1)^m$ исчезает за счет изменения ориентации при послойном интегрировании.

Число в правой части, называемое *A-родом* многообразия определено независимо от того, допускает ли многообразие M спинорную структуру или нет. Однако, оно, вообще говоря, не является целым. Так, например, для $M = \mathbf{CP}^2$ A-род равен $-\frac{1}{8}$. Поскольку индекс оператора Дирака обязан быть целым, то это означает, что необходимым условием существования спинорной структуры является целочисленность A-рода.

В заключение отметим, что имеется необходимое и достаточное условие существования спинорной структуры: второй класс Штифеля—Уитни [46] равен нулю.

Глава 2

ОБОБЩЕНИЯ

§ 1. Теорема Атьи — Ботта о неподвижной точке

Пусть $g: M \to M$ — гладкое отображение компактного многообразия, E — векторное расслоение над M. Отображение g определяет *индуцированное расслоение* g^*E, слоем которого

$(g^*E)_x$ в точке x является слой $E_{g(x)}$ расслоения E в точке $g(x)$, а также действие на сечениях $g^*: C^\infty(M,E)\to C^\infty(M,g^*E)$ по формуле $(g^*u)(x)=u(g(x))$. Пусть, кроме того, задан гомоморфизм расслоений $\Phi: g^*E\to E$. Тогда композиция $T_g=\Phi\circ g^*$ определяет действие $T_g: C^\infty(M,E)\to C^\infty(M,E)$

$$(T_g u)(x)=\Phi(x)u(g(x)).$$

Отображение T_g, полученное таким образом, называется *геометрическим эндомофизмом* пространства сечений.

Пусть E^0, E^1 — два расслоения, $T_g{}^0=\Phi^0\circ g^*$, $T_g{}^1=\Phi^1\circ g^*$ — геометрические эндоморфизмы с одним и тем же отображением g. П. д. о. $A: C^\infty(M,E^0)\to C^\infty(M,E^1)$ называется ***g*-*инвариантным***, если он коммутирует с операторами T_g, т. е.

$$AT_g{}^0=T_g{}^1A. \tag{2.1}$$

Для эллиптического g-инвариантного п. д. о. пространства $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Coker} A$ конечномерны, при этом $T_g{}^0$ и $T_g{}^1$ действуют в $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Coker} A$ соответственно, в силу (2.1). *Числом Лефшеца* отображения g для g-инвариантного эллиптического оператора A называется число

$$L_A(g)=\operatorname{tr} T_g{}^0|_{\operatorname{Ker} A}-\operatorname{tr} T_g{}^1|_{\operatorname{Coker} A}.$$

В случае тождественных отображений g, $T_g{}^0$, $T_g{}^1$ число Лефшеца — это в точности индекс оператора A.

Введенные понятия обобщаются на случай эллиптических комплексов. *Геометрическим эндоморфизмом* эллиптического комплекса

$$0\to C^\infty(M,E_0)\xrightarrow{A_0}C^\infty(M,E^1)\xrightarrow{A_1}\dots\xrightarrow{A_{k-1}}C^\infty(M,E^k)\to 0$$

называется набор $T_g^p=\Phi^p\circ g^*: C^\infty(M,E^p)\to C^\infty(M,E^p)$ геометрических эндоморфизмов пространств сечений, удовлетворяющий условиям коммутирования

$$A_pT_g^p=T_g^{p+1}A_p.$$

В этом случае T_g^p действуют в когомологиях H^p комплекса, и *число Лефшеца* определяется по формуле

$$L(g)=\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\operatorname{tr}T_g^p|_{H^p}.$$

Классическим примером является комплекс де Рама. Если $g: M\to M$ любое гладкое отображение, то $T_g^p: C^\infty(M,\Lambda^p)\to\to C^\infty(M,\Lambda^p)$ — это обратный образ p-форм при отображении g, при этом соответствующие гомоморфизмы Φ^p — это внешние степени $\Lambda^p(dg)^*$, где dg — дифференциал отображения, а $(dg)^*$ — сопряженное отображение в кокасательных пространствах.

Аналогично (1.3) для числа Лефшеца легко получается следующая формула

$$L_A(g)=\operatorname{tr}(T_g^0-RT_g^1A)-\operatorname{tr}(T_g^1-ART_g^1), \tag{2.2}$$

где R — параметрикс оператора A. Учитывая (2.1), первое слагаемое можно переписать в виде $\operatorname{tr}(1-RA)T_g{}^0$, однако запись (2.2) имеет то преимущество, что в ней оператор A не обязан в точности удовлетворять равенству (2.1), а лишь с точностью до ядерного оператора. Более того, изменение операторов A и R на ядерные слагаемые не влияет на разность следов.

В теореме Атьи—Ботта, обобщающей классическую теорему Лефшеца о неподвижной точке, рассматривается отображение g, имеющее конечное число невырожденных неподвижных точек. Неподвижная точка x называется *невырожденной*, если дифференциал $dg(x): T_xM\to T_xM$ в этой точке не имеет собственных значений, равных 1.

Теорема 2.1 (Атья, Ботт [19]). Пусть A — эллиптический g-инвариантный п. д. о. на компактном многообразии, и отображение g имеет конечное число невырожденных неподвижных точек. Тогда

$$L_A(g)=\sum_x\frac{\operatorname{tr}\Phi^0(x)-\operatorname{tr}\Phi^1(x)}{|\det(1-dg(x))|}, \tag{2.3}$$

где суммирование ведется по всем неподвижным точкам.

Отметим любопытный факт, что от оператора A формула не зависит.

Для эллиптических комплексов аналог формулы (2.3) имеет вид

$$L(g)=\sum_x\frac{\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\operatorname{tr}\Phi^p(x)}{|\det(1-dg(x))|}.$$

В частности для комплекса де Рама сумма в числителе дает $\det(1-(dg(x))^*)=\det(1-dg(x))$, так что каждое слагаемое равно ±1 в зависимости от сохранения или несохранения ориентации касательного пространства в неподвижной точке отображением $dg(x)$. Таким образом, правая часть равна алгебраической сумме неподвижных точек.

Теорема 2.1 доказывается значительно проще теоремы об индексе. Наметим вкратце доказательство, использующее так называемое микролокальное разбиение единицы и асимптотическое вычисление интегралов методом стационарной фазы. Эта техника часто используется в теории п. д. о. и интегральных операторов Фурье [13], [48], [54].

Пусть $\{\rho_i(x)\}$ — разбиение единицы на M, причем в окрестностях неподвижных точек все функции равны либо 0, либо 1. Пусть далее $\psi_0(\xi)$ — функция на T^*M с компактным носителем, равная 1 в окрестности $\xi=0$, $\psi_\infty=1-\psi_0$. В локальных координатах на M определим операторы ψ_{ij} $(j=0,\infty)$, полагая $\psi_{ij}u=T^{-1}\psi_j(h\xi)F\rho_i(x)u(x)$, где F — преобразование Фурье, h — положительное число. Операторы ψ_{ij} дают разбиение единичного оператора, причем ψ_{i0} — бесконечно сглаживающие, т. е., являются ядерными в любых соболевских пространствах. Учитывая, что $\operatorname{tr} RT_g{}^1\psi_{i0}A=\operatorname{tr} ART_g{}^1\psi_{i0}$, можно переписать формулу (2.2) в виде

$$L_A(g)=\sum_i\{\operatorname{tr} T^0_g\psi_{i0}-\operatorname{tr} T^1_g\psi_{i0}\}+$$
$$+\sum_i\{\operatorname{tr}(T^0_g-RT^1_gA)\psi_{i\infty}-\operatorname{tr}(T^1_g-ART^1_g)\psi_{i\infty}\}-$$
$$-\sum_i\operatorname{tr} RT^1_g[A,\psi_{i0}]. \qquad (2.4)$$

Оператор $T^0_g\psi_{i0}$ в локальных координатах записывается в виде повторного интеграла

$$T^0_g\psi_{i0}u=(2\pi h)^{-n}\int\int e^{\frac{i\xi}{h}(g(x)-y)}\Phi^0(x)\psi_0(\xi)\rho_i(y)u(y)\,dyd\xi,$$

и его след равен

$$\operatorname{tr} T^0_g\psi_{i0}=(2\pi h)^{-n}\int\int e^{\frac{i\xi}{h}(g(x)-x)}\operatorname{tr}\Phi^0(x)\psi_0(\xi)\rho_i(x)\,d\xi dx. \qquad (2.5)$$

При $h\to0$ интеграл (2.5) вычисляется методом стационарной фазы, причем стационарные точки — это точки, где $\xi=0$, $g(x)-x=0$. В главном члене, не зависящем от h, вклад неподвижной точки x равен

$$\frac{\operatorname{tr}\Phi^0(x)}{|\det(1-dg(x))|}.$$

Аналогичный вклад дают следы операторов $T_g{}^1\psi_{i0}$, а их разность дает правую часть формулы (2.3). Остальные слагаемые в (2.4) также представляются в виде интегралов с быстро осциллирующей экспонентой, в которой показатель не имеет критических точек в силу того, что функция $1-\psi_0(\xi)$ равна 0 в окрестности $\xi=0$. Поэтому они стремятся к нулю быстрее любой степени h. Так как на самом деле число Лефшеца от h не зависит, то приходим к формуле Атьи—Ботта.

Подобный метод применим и к теореме об индексе. Однако, при этом требуются дальнейшие члены асимптотических разложений, и получающаяся формула содержит не только главные символы, но и их производные высших порядков, а также младшие члены. На основании теоремы Атьи—Зингера можно утверждать, что все неинвариантные члены должны удивительным образом сократиться и дать в результате инвариантное выражение, входящее в формулу Атьи—Зингера. Проследить за

этим сокращением удается только в весьма специальных случаях [7], [21], [30], [46].

Теорема Атьи—Ботта имеет многочисленные обобщения. Так, если диффеоморфизм g и его поднятия $T_g{}^0$, $T_g{}^1$ пробегают группу G преобразований и оператор A инвариантен относительно G, то число Лефшеца является функцией на группе, равной разности характеров двух конечномерных представлений G в $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Coker} A$. Эта функция обозначается $\operatorname{ind}_G A$ и называется *G-индексом* оператора A. Для конечных и компактных групп G получена общая формула [22] для G-индекса, содержащая как частные случаи и формулу Атьи—Ботта (2.3) и формулу Атьи—Зингера (1.19). Исследования по G-индексу стимулировали развитие соответствующего аппарата: эквивариантная K-теория [16], эквивариантные когомологии [29], [20], локализационные формулы [29], [33]. Упомянем также исследования по индексу так называемых трансверсально эллиптических операторов [18], где G-индекс является обобщенной функцией на группе G, равной разности двух обобщенных характеров бесконечномерных представлений группы G.

Интересное обобщение формулы Атьи—Ботта для многообразий с краем получено в [1]. Неподвижные точки отображения g на границе классифицируются на устойчивые и неустойчивые, и вклад в число Лефшеца дают только устойчивые неподвижные точки.

§ 2. Индекс семейства эллиптических операторов

Пусть $A(x):E^0\to E^1$ — семейство ограниченных фредгольмовых операторов в гильбертовых пространствах, параметризованное точками компактного многообразия M, непрерывное по операторной норме. Такому семейству сопоставляется элемент $\operatorname{ind} A(x)\in K(M)$ следующим образом. Как доказано в [16], существует такое подпространство $L^0\subset E^0$ конечной коразмерности, что пересечение $\operatorname{Ker} A\cap L^0$ состоит только из нуля, образ $L_x{}^1=A(x)L^0\subset E^1$ подпространства L^0 при действии оператора $A(x)$ имеет конечную коразмерность в E^1 и факторпространство $E^1/L_x{}^1$ является локально тривиальным векторным расслоением над M. Элемент $\operatorname{ind} A(x)\in K(M)$ задается виртуальным расслоением $\{E^0/L^0, E^1/L_x{}^1\}$ и зависит только от гомотопического класса отображения M в пространство фредгольмовых операторов. В случае, если $\operatorname{Ker} A(x)$ и $\operatorname{Coker} A(x)$ образуют локально тривиальные расслоения, $\operatorname{ind} A(x)$ совпадает с классом $\{\operatorname{Ker} A(x), \operatorname{Coker} A(x)\}$ в $K(M)$.

Мы получим формулу для $\operatorname{ch}(\operatorname{ind} A(x))$, аналогичную формулам (1.3) и (2.2). Кроме того, имея в виду приложения в главе 3, мы строим несколько более общую теорию индекса фредгольмовых семейств на локально компактном многообразии M, которые можно рассматривать как бесконечномерные аналоги виртуальных расслоений с компактным носителем (гл. 1, п. 3.2). Для семейства эллиптических п. д. о. будет приведена формула Атьи—Зингера, выражающая $\mathrm{ch}(\mathrm{ind}\, A(x))$ через топологические инварианты эллиптического семейства.

Пусть M локально компактное многообразие, $\mathscr{E}$ — локально тривиальное *гильбертово расслоение* над M. Это означает, что слоем расслоения является гильбертово пространство E, а функции перехода $f_{ij}(x)$ принимают значения в структурной группе, которая либо совпадает с $GL(E)$, либо является ее подгруппой, и гладко зависят от x по операторной норме. (Отметим, что над компактным многообразием бесконечномерное гильбертово расслоение со структурной группой $GL(E)$ тривиально [16]). Нам понадобится также понятие связности в расслоении $\mathscr{E}$. Как и в конечномерном случае (см. определение в п. 3.1 гл. 1), *связность* сопоставляет сечению $u \in C^\infty(\mathscr{E})$ его *ковариантный дифференциал* $\partial u \in C^\infty(\mathscr{E} \otimes \Lambda^1)$, который локально задается в виде $du + \Gamma u$, где Γ — 1-форма со значениями в $\mathrm{Hom}(E, E)$ — пространстве ограниченных операторов в гильбертовом пространстве E. *Кривизна* Ω связности ∂ — это операторнозначная 2-форма, определяемая соотношением $\partial^2 u = \Omega u$. Мы полагаем $\omega = -\frac{1}{2\pi_i}\Omega$.

Фредгольмово семейство Ξ задается набором $\{\mathscr{E}^0, \mathscr{E}^1, A, R\}$, где $\mathscr{E}^0$, $\mathscr{E}^1$ — гильбертовы расслоения над M, а $A = A(x) : \mathscr{E}_x{}^0 \to \mathscr{E}_x{}^1$ — ограниченный фредгольмов оператор в слоях, $R = R(x) : \mathscr{E}_x{}^1 \to \mathscr{E}_x{}^0$ — его параметрикс. Предполагается, что $A(x)$ и $R(x)$ гладко зависят от x по операторной норме, а $1 - R(x)A(x)$ и $1 - A(x)R(x)$ — гладкие по ядерной норме. Множество $X \subset M$, где $1 - R(x)A(x)$, $1 - A(x)R(x)$ отличны от нуля, называется *носителем семейства* Ξ. Множество фредгольмовых семейств с носителем в X будем обозначать $F_X(M)$. Множество семейств с компактным носителем будет обозначаться $F^{\mathrm{comp}}(M)$. Обозначение $T(x) \sim 0 \pmod X$ будет применяться для ядерного оператора, гладко зависящего от x по ядерной норме, который вне множества X тождественно равен 0. Если X компакт, то будем писать просто $T(x) \sim 0$.

Семейство $\Xi \in F_X(M)$ или $F^{\mathrm{comp}}(M)$ называется *тривиальным*, если $1 - RA = 0$ и $1 - AR = 0$ на всем M, т. е. его носитель пуст. Два семейства Ξ_1, $\Xi_2 \in F_X(M)$ называются *изоморфными*, если существуют послойные изоморфизмы $U^i = U^i(x) : \mathscr{E}_{1x}{}^i \to \mathscr{E}_{2x}{}^i$ такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E}_1^0 \arrow[r, shift left, "A_1"] \arrow[d, "U^0"'] & \mathscr{E}_1^1 \arrow[l, shift left, "R_1"] \arrow[d, "U^1"] \\ \mathscr{E}_2^0 \arrow[r, shift left, "A_2"] & \mathscr{E}_2^1 \arrow[l, shift left, "R_2"] \end{tikzcd}$$

почти коммутативна. Это означает, что $U^1 A_1 - A_2 U^0 \sim 0$ и $U^0 R_1 - R_2 U^1 \sim 0 \pmod X$. Семейства называются *стабильно изоморфными*, если существуют такие тривиальные семейства Z_1 и Z_2, что $\Xi_1 \oplus Z_1$ и $\Xi_2 \oplus Z_2$ — изоморфны.

Пусть $\Xi(t) = \{\mathscr{E}^0, \mathscr{E}^1, A(x, t), R(x, t)\} \in F_X(M)$ — гладкая гомотопия фредгольмовых семейств, $t \in [0, 1]$. Тогда при любом t семейство $\Xi(t)$ изоморфно $\Xi(0)$. При этом U^1 можно положить равным 1, а $U^0(t)$ определить как решение дифференциального уравнения $\dot{U}^0 + R\dot{A}U^0 = 0$, $U^0(0) = 1$. Действительно, соотношение $A(t)U^0(t) - A(0) \sim 0 \pmod X$, очевидное при $t = 0$, будет выполнено при всех t, так как $\dot{A}U^0 - A\dot{U}^0 = \dot{A}U^0 - AR\dot{A}U^0 = (1 - RA)\dot{A}U^0 \sim 0 \pmod X$.

Как указывалось в начале параграфа, для бесконечномерных гильбертовых расслоений над компактным многообразием M существует семейство подпространств $L_x^0 \subset \mathscr{E}_x^0$ конечной коразмерности такое, что $\mathrm{Ker}\, A(x) \cap L_x^0 = 0$, $L_x^1 = A(x) L_x^0$ имеет конечную коразмерность в $\mathscr{E}_x^1$ и факторпространства $\mathscr{E}_x^0 / L_x^0$, $\mathscr{E}_x^1 / L_x^1$ образуют локально тривиальные расслоения. Отсюда следует, что над компактным многообразием любое фредгольмово семейство Ξ изоморфно прямой сумме конечномерного семейства $\{\mathscr{E}_x^0 / L_x^0, \mathscr{E}_x^1 / L_x^1, 0, 0\}$ и тривиального бесконечномерного семейства, определяемого расслоениями L_x^0, L_x^1 и обратимым оператором $A(x)\colon L_x^0 \to L_x^1$.

Пусть $\Xi_1 \in F_{X_1}(M)$ и $\Xi_2 \in F_{X_2}(M)$, и пусть $X_1 \cap X_2$ предкомпактное множество. Определим *тензорное произведение* $\Xi_1 \otimes \Xi_2 \in F^{\mathrm{comp}}(M)$, задавая его набором $\{(\mathscr{E}_1^0 \otimes \mathscr{E}_2^0) \oplus (\mathscr{E}_1^1 \otimes \mathscr{E}_2^1), (\mathscr{E}_1^1 \otimes \mathscr{E}_2^0) \oplus (\mathscr{E}_1^0 \otimes \mathscr{E}_2^1), \mathscr{A}, \mathscr{R}\}$, где $\mathscr{A}$ и $\mathscr{R}$ задаются матрицами

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} A_1 \otimes (1 - R_2 A_2) - 1 \otimes R_2 \\ 1 \otimes A_2 & R_1 \otimes 1 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{R} = \begin{pmatrix} R_1 \otimes 1 & 1 \otimes R_2 \\ -1 \otimes A_2 & A_1 \otimes (1 - A_2 R_2) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Легко видеть, что $\Xi_1 \otimes \Xi_2$ является фредгольмовым семейством с носителем в $X_1 \cap X_2$, причем семейства $\Xi_1 \otimes \Xi_2$ и $\Xi_2 \otimes \Xi_1$ гомотопны. Гомотопия задается формулами

$$\mathscr{A}(t) = \begin{pmatrix} A_1 \otimes (1 - t R_2 A_2) - 1 \otimes R_2 \\ (1 - (1-t) R_1 A_1) \otimes A_2 & R_1 \otimes 1 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{R}(t) = \begin{pmatrix} R_1 \otimes 1 & 1 \otimes R_2 \\ -(1 - (1-t) A_1 R_1) \otimes A_2 & A_1 \otimes (1 - t A_2 R_2) \end{pmatrix}$$

Действительно, перемножая матрицы, получим

$$1 - \mathscr{R}(t)\mathscr{A}(t) = \begin{pmatrix} (1 - R_1 A_1) \otimes (1 - R_2 A_2) & 0 \\ 0 & (1 - A_1 R_1) \otimes (1 - A_2 R_2) \end{pmatrix} \sim 0,$$

$$1 - \mathscr{A}(t)\mathscr{R}(t) = \begin{pmatrix} (1 - A_1 R_1) \otimes (1 - R_2 A_2) & 0 \\ 0 & (1 - R_1 A_1) \otimes (1 - A_2 R_2) \end{pmatrix} \sim 0.$$

Таким образом, тензорное произведение с точностью до изоморфизма коммутативно и дистрибутивно относительно прямой суммы.[1)]

Для фредгольмова семейства $\Xi \in F^{\mathrm{comp}}(X)$ определим класс когомологий $\mathrm{ch}\,\Xi \in H^{+\mathrm{comp}}(M)$, аналогичный характеру виртуальных раслоений с компактным носителем. Пусть ∂_0 и ∂_1 связности в гильбертовых расслоениях $\mathscr{E}^0$, $\mathscr{E}^1$. Ковариантный дифференциал ∂A определяется соотношением $(\partial A)u = \partial_1(Au) - A(\partial_0 u)$ для любого сечения $u \in C^\infty(\mathscr{E}^0)$ и аналогично определяется ∂R. При этом $\partial^2 A = \Omega_1 A - A\Omega_0$. Покажем, что связности ∂_0 и ∂_1 можно выбрать так, чтобы

$$\partial A \sim 0,\ \partial R \sim 0,\ \Omega_1 A - A\Omega_0 \sim 0. \qquad (2.7)$$

(второе и третье соотношение следует из $\partial A \sim 0$). Действительно, если ∂_0 и ∂_1 произвольны, определим ∂_0, полагая $\tilde{\partial}_0 u = \partial_0 u + R\partial A u$. Тогда $\tilde{\partial} A = \partial A - AR\partial A = (1 - AR)\partial A \sim 0$.

Считая, что ∂_0 и ∂_1 выбраны так, что выполнено (2.7), положим

$$\mathrm{ch}\,\Xi = \mathrm{tr}\,(e^{\omega_0} - Re^{\omega_1}A) - \mathrm{tr}\,e^{\omega_1}(1 - AR). \qquad (2.8)$$

Из (2.7) вытекает, что $e^{\omega_1}A - Ae^{\omega_0} \sim 0$, так что операторы под знаком следа ядерные и форма (2.8) имеет компактный носитель. Для конечномерного семейства $\mathrm{tr}\,Re^{\omega_1}A = \mathrm{tr}\,ARe^{\omega_1}$, так что в этом случае (2.8) переходит в формулу (1.11), определяющую характер виртуального расслоения с компактным носителем. Формула (2.8) имеет смысл и для $\Xi \in F_X(M)$, и в этом случае она определяет форму с носителем в X.

Теорема 2.2. Форма $\mathrm{ch}\,\Xi$ замкнута и обладает свойствами:

1) класс когомологий $\mathrm{ch}\,\Xi \in H^{+\mathrm{comp}}(M)$ не меняется при гомотопиях семейства и связностей ∂_0, ∂_1 при сохранении условия (2.7);

2) если $\Xi = \xi \oplus Z$, где ξ — конечномерно, Z — тривиально, то классы $\mathrm{ch}\,\Xi$ и $\mathrm{ch}\,\xi$ в $H^{+\mathrm{comp}}(M)$ совпадают;

3) если $\Xi_1 \in F_{X_1}(M)$, $\Xi_2 \in F_{X_2}(M)$ и множество $X_1 \cap X_2$ предкомпактно, то классы когомологий $\mathrm{ch}\,\Xi_1 \otimes \Xi_2$ и $\mathrm{ch}\,\Xi_1\,\mathrm{ch}\,\Xi_2$ в $H^{+\mathrm{comp}}(M)$ совпадают.

Доказательство. В силу тождества Бьянки $\partial_i \omega_i = 0$, получим

$$d\,\mathrm{ch}\,\Xi = \mathrm{tr}\,e^{\omega_1}\partial AR + \mathrm{tr}\,e^{\omega_1}A\partial R - \mathrm{tr}\,\partial Re^{\omega_1}A - \mathrm{tr}\,Re^{\omega_1}\partial A = 0,$$

поскольку $\partial A \sim 0$, $\partial R \sim 0$ и под знаком следа можно циклически переставлять множители.

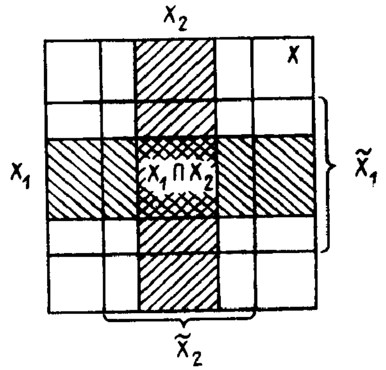
Докажем свойство 1). Гомотопия $\Xi(t) = \{\mathscr{E}^0, \mathscr{E}^1, A(t), R(t)\}$

[1)] Можно показать, что фредгольмов оператор $\mathscr{A}$, определенный формулой (2.6), гомотопен фредгольмову оператору, определенному формулой (1.4). Преимущество (2.6) перед (1.4) в том, что в (2.6) операторная природа A_1, R_1, A_2, R_2 несущественна. Это обстоятельство важно для главы 3.

определяет фредгольмово семейство на $M \times [0, 1]$, а гомотопия связности ∂_{0t} и ∂_{1t} определяет связности $\mathscr{D}_0 u(x, t) = \partial_{0t}u + dt(u + R\dot{A}u)$, $\mathscr{D}_1 u(x, t) = \partial_{1t}u + dtu$ в поднятиях расслоений $\mathscr{E}^0$ и $\mathscr{E}^1$ на $M \times [0, 1]$. Тогда $\mathscr{D}A = \partial_t A + dt(\dot{A} - AR\dot{A}) \sim 0$ на $M \times [0, 1]$ в силу $\partial_t A \sim 0$ и $(1 - AR) \sim 0$. Форма $\mathrm{ch}\,\Xi$ на $M \times [0, 1]$, построенная по связностям $\mathscr{D}_0$, $\mathscr{D}_1$ замкнута и имеет компактный носитель на $M \times [0, 1]$. Отсюда вытекает, что ее сужения на $M \times \{0\}$ и $M \times \{1\}$ принадлежат одному классу когомологий с компактным носителем. Действительно, если $a + dt \wedge b$ — замкнутая форма на $M \times [0, 1]$ с компактным носителем, где a не содержит dt, то $\dot{a} - db = 0$, где d — внешний дифференциал на M, так что $\dot{a} = 0$ в $H^{+\mathrm{comp}}(M)$.

Докажем 2). Если связности ∂_0 и ∂_1 сохраняют расщепление в прямую сумму, то утверждение очевидно. В общем случае пусть $p^0(x)$ и $p^1(x)$ — конечномерные проекторы, расщепляющие Ξ в прямую сумму. Тогда связности $\tilde{\partial}_0$ и $\tilde{\partial}_1$, определяемые равенствами $\tilde{\partial}_i u = \partial_i u + (2p^i - 1)\partial_i p^i u$, обладают свойством $\tilde{\partial}_i p^i = 0$, т. е. сохраняют расщепление, и по-прежнему выполнено условие $\partial A \sim 0$. Утверждение следует теперь из того, что класс $\mathrm{ch}\,\Xi$ в $H^{+\mathrm{comp}}(M)$ не зависит от выбора связностей.

Докажем 3). Пусть ∂_1^0, ∂_1^1 — связности в $\mathscr{E}_1^0$, $\mathscr{E}_1^1$, удовлетворяющие условию $\partial A_1 \sim 0 \pmod{X_1}$, аналогично ∂_2^0, ∂_2^1 — связности в $\mathscr{E}_2^0$, $\mathscr{E}_2^1$, $\partial A_2 \sim 0 \pmod{X_2}$. В тензорных произведениях $\mathscr{E}_j^i \otimes \mathscr{E}_l^k$ ($i, k = 0, 1$; $j, l = 1, 2$) связности вводятся естественным образом по правилу $\partial_j^i \otimes 1 + 1 \otimes \partial_l^k$. Обозначим $\mathscr{D}_0$, $\mathscr{D}_1$ соответствующие связности в $(\mathscr{E}_1^0 \otimes \mathscr{E}_2^0) \oplus (\mathscr{E}_1^1 \otimes \mathscr{E}_2^1)$ и $(\mathscr{E}_1^1 \otimes \mathscr{E}_2^0) \oplus (\mathscr{E}_1^0 \otimes \mathscr{E}_2^1)$ и пусть $\tilde{\mathscr{D}}_0$, как обычно, определяется соотношением $\tilde{\mathscr{D}}_0 u = \mathscr{D}_0 u + \mathscr{R}\mathscr{D}\mathscr{A}u$. Тогда $\tilde{\mathscr{D}}\mathscr{A} \sim 0 \pmod{X_1 \cap X_2}$. Формы $\mathrm{ch}\,\Xi_1$ и $\mathrm{ch}\,\Xi_2$ имеют носители в X_1, X_2 соответственно, а $\mathrm{ch}\,\Xi_1 \otimes \Xi_2$ и $\mathrm{ch}\,\Xi_1\,\mathrm{ch}\,\Xi_2$ — в $X_1 \cap X_2$. Пусть X — компактная окрестность $X_1 \cap X_2$ (см. рис.). Покажем, что разность $\mathrm{ch}\,\Xi_1 \otimes \Xi_2 - \mathrm{ch}\,\Xi_1\,\mathrm{ch}\,\Xi_2$ в X яв-



ляется дифференциалом формы с носителем в $X_1 \cap X_2$, тем самым утверждение 3) будет доказано. Над компактом X семейства Ξ_1 и Ξ_2 расщепляются в прямую сумму $\xi_1 \oplus Z_1$, $\xi_2 \oplus Z_2$, где ξ_i — конечномерные семейства с носителями в X_i, а Z_i — тривиальные семейства. Так как тензорное умножение на тривиальное семейство дает тривиальное семейство, то классы когомологий форм $\operatorname{ch} \Xi_1 \otimes \Xi_2$ и $\operatorname{ch} \xi_1 \otimes \xi_2$ в $H(X, X \setminus (X_1 \cap X_2))$ совпадают. Совпадают также классы форм $\operatorname{ch} \Xi_i$ и $\operatorname{ch} \xi_i$ в $H(X, X \setminus X_i)$. Поэтому утверждение достаточно доказать для конечномерных семейств.

В конечномерном случае имеем (см. (1.11)) $\operatorname{ch} \xi_1 \otimes \xi_2 = \operatorname{tr} e^{\tilde{\omega}_0} - \operatorname{tr} e^{\omega_1}$, где $\tilde{\Omega}_0$ и Ω_1 — кривизны связностей $\tilde{\mathscr{D}}_0$ и $\mathscr{D}_1$. При этом (1.10)

$$\tilde{\Omega}_0 = \Omega_0 + \mathscr{D}(\mathscr{R}\mathscr{D}\mathscr{A}) + (\mathscr{R}\mathscr{D}\mathscr{A})^2, \tag{2.9}$$

где Ω_0 — кривизна $\mathscr{D}_0$, а $\mathscr{R}$ и $\mathscr{A}$ задаются матрицами (2.6). Прямые вычисления дают

$$\mathscr{R}\mathscr{D}\mathscr{A} \sim \begin{pmatrix} -1 \otimes \partial R_2 A_2 & \partial R_1 \otimes R_2 - R_1 \otimes \partial R_2 \\ A_1 \otimes (\partial A_2 + A_2 \partial R_2 A_2) & 1 \otimes A_2 \partial R_2 \end{pmatrix} (\operatorname{mod} X_1 \cap X_2).$$

Пусть φ_i $(i = 1, 2)$ — срезающие функции на X, равные 0 в X_i и равные 1, вне некоторой окрестности $\tilde{X}_i \supset X_i$, причем $\tilde{X}_1 \cap \tilde{X}_2 \subset X$ (см. рис. 1). Пользуясь конечномерностью, заменим A_i, R_i на $\tilde{A}_i = \varphi_i A_i$, $\tilde{R}_i = \varphi_i R_i$, соответственно по формулам (2.6) получим $\tilde{\mathscr{A}}$ и $\tilde{\mathscr{R}}$. Такая замена сводится к изменению связности $\tilde{\mathscr{D}}_0$ и не влияет на класс когомологий $\operatorname{ch} \xi_1 \otimes \xi_2$ в $H(X, X \setminus (\tilde{X}_1 \cap \tilde{X}_2))$. Так как $\partial A_i = 0$, $\partial R_i = 0$ вне X_i, то $\partial A_i = A_i d\varphi_i$, $\partial R_i = R_i d\varphi_i$. Таким образом,

$$\mathscr{R}\mathscr{D}\mathscr{A} \sim \tilde{\mathscr{R}}\mathscr{D}\tilde{\mathscr{A}} \sim \begin{pmatrix} -\varphi_2 d\varphi_2 & R_1 \otimes R_2 (\varphi_2 d\varphi_1 - \varphi_1 d\varphi_2) \\ A_1 \otimes A_2 \varphi_1 (d\varphi_2 + \varphi_2{}^2 d\varphi_2) & \varphi_2 d\varphi_2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что матрица $S = \mathscr{D}(\tilde{\mathscr{R}}\mathscr{D}\tilde{\mathscr{A}}) + (\tilde{\mathscr{R}}\mathscr{D}\tilde{\mathscr{A}})^2$ содержит только произведения дифференциалов $d\varphi_1 \wedge d\varphi_2$, и потому ее степени равны 0. Следовательно,

$$\operatorname{ch} \xi_1 \otimes \xi_2 = \operatorname{tr} e^{\omega_0} - \operatorname{tr} e^{\omega_1} + \operatorname{tr} e^{\omega_0} S'.$$

Первые два члена дают $\operatorname{ch} \xi_1 \operatorname{ch} \xi_2$, а третий когомологичен 0 в $H(X, X \setminus (\tilde{X}_1 \cap \tilde{X}_2))$. Действительно, e^{ω_0} — диагональная матрица, и вычисляя диагональные элементы, получим

$$\operatorname{tr} e^{\omega_0} S = (\operatorname{tr} e^{\omega_1^0} \operatorname{tr} e^{\omega_2^0} - \operatorname{tr} e^{\omega_1^1} \operatorname{tr} e^{\omega_2^1}) \varphi_1 d\varphi_1 \wedge \varphi_2 (d\varphi_2 + \varphi_2^2 d\varphi_2).$$

Множитель в скобках — замкнутая форма, а остальные множители можно записать в виде $-\frac{1}{4} d(1 - \varphi_1^2) \wedge d\left(\varphi_2^2 + \frac{1}{4}\varphi_2^4\right)$ откуда следует, что $\operatorname{tr} e^{\omega_0} S'$ когомологичен 0 в $H(X, X \setminus (\tilde{X}_1 \cap \tilde{X}_2))$. Теорема доказана.

Несколько более общее определение фредгольмова семейства, позволяющее рассматривать случай нульмерного расслоения $\mathscr{E}^0$ или $\mathscr{E}^1$, получится, если задавать фредгольмово семейство набором $\{P^0, P^1, A, R\}$, где P^i — проекторы в $\mathscr{E}^i$, т. е. $(P^i)^2 = P^i$, а A и R удовлетворяют условиям:

$$P^1 A = A P^0 = A, \quad P^0 R = R P^1 = R, \tag{2.10}$$

$$P^0 - RA \sim 0, \quad P^1 - AR \sim 0. \tag{2.11}$$

Это означает, что вместо расслоений $\mathscr{E}^0$ и $\mathscr{E}^1$ мы рассматриваем фредгольмово семейство в подрасслоениях $P^0\mathscr{E}^0$ и $P^1\mathscr{E}^1$. Обобщение теоремы 2.2 на этот случай предоставляется читателю.

В заключение параграфа сформулируем *теорему Атьи — Зингера об индексе семейства эллиптических операторов* [25]. Пусть N — локально тривиальное расслоенное многообразие с базой X, слоем M, а структурная группа — это группа диффеоморфизмов M (X и M — компактные многообразия). Пусть далее E^0 и E^1 — векторные расслоения над N. Для точки $x \in X$ будем обозначать через $E_x{}^i$ сужения расслоений E^i на слой M_x. Пусть далее $A(x) : C^\infty(E_x{}^0) \to C^\infty(E_x{}^1)$ — гладкое семейство эллиптических операторов порядка m (гладкость понимается по норме операторов из H^s в H^{s-m} в соболевских пространствах) с главным символом $a(x, y, \eta)$, где $(y, \eta) \in T^*M_x \setminus 0$. Через T^*M будем обозначать расслоение над N, слоем которого в точке $(x, y) \in N$ является кокасательное пространство к M_x в точке $y \in M_x$ (кокасательное расслоение вдоль слоев). Тройка $\xi = \{E^0, E^1, a\}$ определяет различающий элемент $d(A) \in K^{\mathrm{comp}}(T^*M)$. Пусть $\mathscr{T}(T^*M)$ — класс Тодда (комплексифицированного) расслоения T^*M.

Теорема 2.3. Класс когомологий $\operatorname{ch} \operatorname{ind} A(x) \in H^+(X)$ задается формой

$$\int\limits_{T^*M_x} \operatorname{ch} d(A) \mathscr{T}(T^*M), \tag{2.12}$$

где интеграл берется вдоль слоев.

§ 3. Индекс почти периодических операторов

Начнем с простого примера. Пусть $A = a(x, D)$ — п. д. о. в пространстве вектор-функций на $\mathbf{R}^n$, т. е. оператор, действующий на вектор-функции $u(x) \in C_0^\infty$ по формуле

$$(Au)(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x, \xi)} a(x, \xi) \hat{u}(\xi) \, d\xi, \tag{2.13}$$

где $\hat{u}$ — преобразование Фурье функции u. Функция $a(x, \xi)$ называется *полным символом* оператора A в $\mathbf{R}^n$. Предполагается, что $a(x, \xi)$ принадлежит *классу* S^m символов, который определяется условием: для любого компакта $X \subset \mathbf{R}^n$ и любых мультииндексов α и β выполняются оценки

$$\| \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi) \| \leqslant C_{\alpha\beta x}(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|\alpha|}{2}}, \tag{2.14}$$

где $\| \ \|$ — какая-либо норма матрицы. Говорят, что оператор A имеет *порядок* m, если существует такая функция $a_m(x, \xi)$, $x \in \mathbf{R}^n$, $\xi \in \mathbf{R}^n \setminus 0$, положительно однородная по ξ степени m, что $a(x, \xi) - \rho(\xi) a_m(x, \xi) \in S^{m-1}$, где $\rho(\xi)$ — срезающая функция, равная 1 вне окрестности $\xi=0$. При этом $a_m(x, \xi)$ называется *главным символом* оператора. Оператор называется *эллиптическим*, если его главный символ обратим при $\xi \neq 0$. По сравнению с операторами на многообразии операторы в $\mathbf{R}^n$ устроены проще, так как они глобально задаются с помощью полного символа, в то время как для оператора на многообразии представление (2.13) лишь локально. Формула (1.5) главы 1 для главного символа справедлива, разумеется, и для операторов в $\mathbf{R}^n$.

Предположим, что полный символ эллиптического оператора является периодической по x функцией, т. е. инвариантен относительно сдвигов по целочисленной решетке $\mathbf{Z}^n$ в $\mathbf{R}^n$. Если рассматривать оператор A в соболевских пространствах $H^s(\mathbf{R}^n)$, то он и его формально сопряженный имеют бесконечномерное ядро (из-за некомпактности $\mathbf{R}^n$), так что A не является фредгольмовым, и его индекс не определен. Однако, мы можем определить индекс оператора A в обобщенном смысле, полагая его равным индексу этого оператора в пространстве периодических функций, т. е. рассматривая его как оператор на торе $\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n / \mathbf{Z}^n$.

Можно взглянуть на этот пример несколько по-другому. Пусть R — параметрикс оператора A, *инвариантный* относительно сдвигов по решетке, т. е. такой оператор, что $1-RA$ и $1-AR$ имеют порядок $<-n$. Из-за некомпактности $\mathbf{R}^n$ они не будут ядерными в $L^2(\mathbf{R}^n)$. Тем не менее для них можно определить *обобщенный след* $\widetilde{\mathrm{tr}}$, полагая его равным следу этих операторов на торе. Для оператора T с гладким ядром $T(x, y)$, инвариантным относительно одновременных сдвигов x и y по решетке след $\widetilde{\mathrm{tr}}$ определяется по формуле

$$\widetilde{\mathrm{tr}}\, T = \int_{\mathbf{T}^n} T(x, x)\, dx = \langle T(x, x) \rangle,$$

где $\langle \ \rangle$ обозначает среднее значение периодической функции в $\mathbf{R}^n$. В этих обозначениях обобщенный индекс периодического оператора A в $\mathbf{R}^n$ задается формулой

$$\operatorname{ind} A = \widetilde{\mathrm{tr}}\,(1-RA) - \widetilde{\mathrm{tr}}\,(1-AR).$$

Теперь рассмотрим более общий случай операторов в $\mathbf{R}^n$ с почти периодическими коэффициентами. Теория таких операторов подробно рассмотрена в [14], а теория индекса в [39] и [14]. Пусть $a(x, D)$ — п. д. о. в $\mathbf{R}^n$ с полным символом $a(x, \xi) \in S^m$, который при любом ξ является *равномерной почти периодической функцией* по x. Это означает, что множество $a(x+\omega, \xi)$ получающееся сдвигами на всевозможные векторы $\omega \in \mathbf{R}^n$ предкомпактно в пространстве непрерывных ограниченных функций с топологией равномерной сходимости. Такой оператор будем называть *почти периодическим* (п.-п.) п. д. о. *Эллиптичность* п.-п. д. п. о. порядка m означает что главный символ $a_m(x, \xi)$ обратим при $\xi \neq 0$ и выполняется оценка $\|a_m^{-1}(x, \xi)\| \leqslant C|\xi|^{-m}$, равномерно по x. Для эллиптического п.-п. п. д. о. существует *параметрикс* $R = r(x, D)$ — п.-п. оператор, для которого операторы $1-RA$ и $1-AR$ имеют порядок $<-n$. П.-п. оператор T порядка, меньшего $-n$ имеет непрерывное ядро $T(x, y)$, обладающее свойством, что для любого $z \in \mathbf{R}^n$ функция $T(x, x+z)$ является равномерной п.-п. функцией x. Определим *обобщенный след* оператора T, полагая

$$\mathrm{tr}\, T = \langle T(x, x) \rangle$$

Здесь $\mathrm{tr}\, T(x, x)$ — след матрицы, $\langle f \rangle$ — среднее значение по $\mathbf{R}^n$ п.-п. функции $f(x)$

$$\langle f \rangle = \lim_{l \to \infty} \frac{1}{|Q_l|} \int_{Q_l} f(x)\, dx,$$

где Q_l — куб $|x^i| \leqslant l/2$, $|Q_l|$ — объем куба. *Индекс эллиптического п.-п. п. д. о.* можно определить теперь по формуле

$$\operatorname{ind} A = \mathrm{tr}\,(1-RA) - \mathrm{tr}\,(1-AR). \tag{2.15}$$

На самом деле исходное определение индекса выглядит иначе, и формула (2.15) — это теорема. Однако, не желая вдаваться в подробности, мы примем (2.15) за определение.

Доказывается, что индекс эллиптического п.-п. оператора обладает обычными свойствами (устойчивость в классе п.-п. операторов, логарифмическое свойство), но теперь он не обязан быть целым числом. Получена также [14] формула для индекса, аналогичная (1.22)

$$\operatorname{ind} A = -\frac{(n-1)!}{(2n-1)!} \frac{1}{(2\pi i)^n} \left\langle \int_{|\xi|=1} \mathrm{tr}\,(a_m^{-1} d a_m)^{2n-1} \right\rangle,$$

а также аналогичная формула для семейств эллиптических п.-п. п. д. о.

Имеется много различных обобщений, затронутых здесь вопросов. Отметим теорию индекса для эллиптических операторов на некомпактном многообразии, инвариантных относительно дискретной группы движений с компактной фундаментальной областью, — обобщение периодических п. д. о. [17], [27]. Дальнейшее обобщение с важными приложениями к теории представлений групп рассмотрено в [41]. Второе направление — это теория индекса однородных случайных п. д. о. [11]. Наконец, третье направление — K-теория в алгебрах фон Неймана [37].

Примеры, рассмотренные в этой главе, могут служить иллюстрацией некой общей схемы построения теории индекса. Во всех случаях рассматриваются алгебры операторов со следом, обладающим свойством $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$. Для операторов, у которых существует параметрикс, наличие следа позволяет ввести индекс, по формуле, аналогичной (1.3). Оказывается, то обстоятельство, что элементы алгебры — это операторы, часто оказывается несущественным. Достаточно продвинутая теория индекса возможна и для абстрактных алгебр со следом [8]. В следующей главе эта схема используется для алгебры квантовых наблюдений в деформационном квантовании.

§ 4. Индекс краевых задач

Классический дифференциальный оператор $\mathscr{A} = \begin{pmatrix} A \\ \gamma' T \end{pmatrix}$ на компактном многообразии M_+ с краем ∂M_+ (употребляется также термин краевая задача) сопоставляет функции $u \in C^\infty(M_+)$ пару функций $f = Au \in C^\infty(M_+)$ и $g = \gamma' Tu \in C^\infty(\partial M_+)$. Здесь A и T дифференциальные операторы с гладкими коэффициентами, причем коэффициенты A зависят от $x \in M_+$, а коэффициенты T — от $x' \in \partial M_+$, γ' — оператор сужения функции на границу. В общем случае u, f, g — это сечения расслоений над M_+ и ∂M_+. Оператор $\gamma' T$, называемый *следовым* или *граничным оператором*, задает краевые условия, которым должна удовлетворять функция u. В общем случае он задается столбцом $\begin{pmatrix} \gamma' T_1 \\ \vdots \\ \gamma' T_k \end{pmatrix}$, где операторы $T_1, \ldots, T_k$ имеют, вообще говоря, различные порядки $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

Оператор $\mathscr{A}$ называется *эллиптическим*, если главный символ $a(x, \xi)$ оператора A обратим при всех $x \in M_+$, $\xi \neq 0$, и, кроме того, в точках границы главные символы $a(x', \xi)$, $t(x', \xi) = \begin{pmatrix} t_1(x', \xi) \\ \vdots \\ t_k(x', \xi) \end{pmatrix}$ операторов A и T удовлетворяют условию З. Я. Шапиро — Я. Б. Лопатинского (см. далее). Как и в случае многообразий без края, эллиптический оператор является фредгольмовым в соответствующих функциональных пространствах, его индекс зависит только от главных символов $a(x, \xi)$, $t(x', \xi)$ и не меняется при деформациях, сохраняющих эллиптичность.

Классические краевые задачи образуют очень узкий класс операторов на многообразии с краем, явно недостаточный для теории индекса. В работе [34] Буте де Монвель ввел и исследовал алгебру п. д. о. на многообразии с краем, содержащую классические краевые задачи и параметриксы эллиптических краевых задач, а также построил теорию индекса.

Оператор Буте де Монвеля задается матрицей

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} \gamma^+ A + \gamma' B & K \\ \gamma' T & Q \end{pmatrix} : \begin{matrix} C^\infty(M_+, E^0) \\ \oplus \\ C^\infty(\partial M_+, F^0) \end{matrix} \to \begin{matrix} C^\infty(M_+, E^1) \\ \oplus \\ C^\infty(\partial M_+, F^1), \end{matrix} \tag{2.16}$$

где E^0, E^1 — расслоения над M_+, F^0, F^1 — расслоения над ∂M_+. Оператор $\gamma^+ A$ определяется следующим образом. Предполагается, что M_+ вложено в более широкое многообразие M той же размерности, и п. д. о. A действует на функциях определенных на M. Функция $u \in C^\infty(M_+)$ продолжается нулем вне M_+, к этому продолжению применяется оператор A, а затем оператор γ^+ сужения на M_+. Естественное условие на п. д. о. A состоит в том, чтобы $\gamma^+ Au$ принадлежала $C^\infty(M_+)$ для любой функции $u \in C^\infty(M_+)$. Это свойство гладкости обеспечивается так называемым *условием трансмиссии*. В частности, порядок оператора A может быть только целым числом (положительным или отрицательным). Остальные операторы носят названия: $\gamma' B$ — оператор Грина, $\gamma' T$ — следовой (граничный) оператор, K — потенциальный (кограничный) оператор, Q — п. д. о. на границе ∂M_+. Для классических краевых задач A и T — дифференциальные операторы, а $\gamma' B$, K, Q — нулевые.

Оператору $\mathscr{A}$ вида (2.16) сопоставляется *внутренний главный символ* $\sigma_i(\mathscr{A}) = a(x, \xi)$ — главный символ п. д. о. A на $T^*(M_+) \setminus 0$ и *граничный главный символ* $\sigma_b(\mathscr{A}) = a_b(x', \xi')$, который является операторнозначной функцией на $T^*(\partial M_+) \setminus 0$. В фиксированной точке $(x', \xi') \in T^*(\partial M_+) \setminus 0$ символ a_b задается матрицей

$$a_b = \begin{pmatrix} \Pi^+ a(\xi_n) + \Pi'_{\eta_n} b(\xi_n, \eta_n) & k(\xi_n) \\ \Pi' t(\xi_n) & q \end{pmatrix} : \begin{matrix} E^0_{x'} \otimes H^+ \\ \oplus \\ E^0_{x'} \end{matrix} \to \begin{matrix} E^1_{x'} \otimes H^+ \\ \oplus \\ E^1_{x'}. \end{matrix} \tag{2.17}$$

Здесь $H^+ = \{F[\theta_+(x^n) u(x^n)],\ u(x^n) \in S(\mathbf{R})\}$ — пространство образов Фурье функций вида $\theta_+(x^n) u(x^n)$, где $u(x^n)$ принадлежит пространству Шварца $S(\mathbf{R})$, а $\theta_+(x^n)$ — характеристическая функция полуоси $\mathbf{R}_+ (x^n \geqslant 0)$. Введем также пространство $H^- = \{F[\theta_-(x^n) u(x^n)],\ u(x^n) \in S(\mathbf{R})\} \oplus H'$, где H' — пространство полиномов от ξ_n, и $H = H^+ \oplus H^-$, Пусть $\Pi^\pm$ — проекторы в H на прямые слагаемые $H^\pm$ (отметим, что Π^+ — это образ Фурье оператора умножения на характеристическую функцию $\theta_+(x^n)$). Введем функционал Π' на пространстве H, равный 0 на H^- и равный $\lim\limits_{\xi_n \to \infty} i \xi_n \hat{u}(\xi_n)$ для функций $\hat{u}(\xi_n) \in H^+$ (образ Фурье функционала $\gamma' u(x) = \lim\limits_{x^n \to +0} u(x^n)$). Для абсолютно интегрируемых функций $\hat{u}(\xi_n) \in H$ функционал Π' имеет вид $\Pi' \hat{u} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\xi_n)\, d\xi_n$. При вычислениях удобно считать все функции $\hat{u}(\xi_n) \in H$ рациональными с полюсами, не лежащими на вещественной оси (они плотны в соответствующих пространствах). Тогда проекторы $\Pi_{\pm}$ и функционал Π' задаются интегралами по замкнутому контуру Γ в комплексной плоскости, содержащему внутри все полюса функции $\hat{u}(\xi_n)$ в верхней полуплоскости

$$(\Pi^{\pm} u)(\xi_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\hat{u}(\eta)}{\eta - \xi_n} d\eta,$$

причем для Π^+ точка ξ_n лежит вне Γ, а для Π^- — внутри Γ,

$$\Pi' \hat{u} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \hat{u}(\xi_n)\, d\xi_n.$$

Таким образом $\Pi^+ \hat{u}(\xi_n) \in H^+$ — это рациональная функция, не имеющая полюсов в нижней полуплоскости и стремящаяся к 0 при $\xi_n \to \infty$, $\Pi^- \hat{u}(\xi_n)$ — это рациональная функция, не имеющая полюсов в верхней полуплоскости. На элементы матрицы (2.17) накладываются следующие условия. В окрестности границы внутренний символ $a(x, \xi)$ записывается в виде $a(x', x^n, \xi', \xi_n)$, и функция $a(\xi_n)$ в матрице (2.17) равна $a(x', 0, \xi', \xi_n)$, где $(x', \xi') \in T^*(\partial M_+)$ рассматриваются как параметры. Упомянутое выше *условие трансмиссии* означает, что $a(\xi_n) \in H$. Функция $b(\xi_n, \eta_n)$ (*символ Грина*) принадлежит H^+ по переменной ξ_n и H^- по переменной η_n, $k(\xi_n) \in H^+$ — потенциальный символ, $t(\xi_n) \in H^-$ — следовой символ, q — гомоморфизм. Таким образом, оператор (2.17) действует на вектор-функцию $\hat{u}(\xi_n) \in E_{x'}{}^0 \otimes H^+$ и вектор $v \in F_{x'}{}^0$ по формуле

$$a_b \begin{pmatrix} \hat{u}(\xi_n) \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi^+ a(\xi_n)\, \hat{u}(\xi_n) + \Pi'_{\eta_n} b(\xi_n, \eta_n)\, \hat{u}(\eta_n) + k(\xi_n)\, v \\ \Pi' t(\xi_n)\, \hat{u}(\xi_n) + q v \end{pmatrix}.$$

Операторы a_b вида (2.17) образуют алгебру, то есть произведение двух таких операторов будет оператором того же вида. Эту алгебру будем обозначать $\mathfrak{A}_b$.

Оператор $\mathscr{A}$ называется *эллиптическим*, если его внутренний и граничный главный символ обратимы. Отметим, что граничный символ — это оператор в бесконечномерном пространстве функций, и его обратимость понимается в операторном смысле. Для классических краевых задач условие обратимости граничного символа известно под названием *условия Шапиро—Лопатинского*.

Определим след tr' на алгебре $\mathfrak{A}_b$ (в случае, когда $E^0 = E^1$ и $F^0 = F^1$). Рассматривая (2.17) как оператор в пространстве $(E \otimes H^+) \oplus F$, легко видеть, что он не является ядерным и поэтому не имеет операторного следа, за исключением случая, когда $\Pi^+ a(\xi_n) = 0$. В последнем случае след существует и равен

$$\Pi' \mathrm{tr}\, b(\xi_n, \xi_n) + \mathrm{tr}\, q, \qquad (2.18)$$

где tr обозначает след эндоморфизма (матрицы).

Определим граничный след $\mathrm{tr}' a_b$ для оператора (2.17) с помощью формулы (2.18), даже если $\Pi^+ a(\xi_n) \neq 0$. Тогда след tr' существует для любого оператора $a_b \in \mathfrak{A}_b$, однако, в отличие от операторного следа, он не равен 0 на коммутаторах.

Лемма 2.1. Для любых $a_1, a_2 \in \mathfrak{A}_b$

$$\mathrm{tr}' [a_1, a_2] = -i \Pi' \mathrm{tr} \frac{\partial a_1(\xi_n)}{\partial \xi_n} a_2(\xi_n) = i \Pi' \mathrm{tr}\, a_1(\xi_n) \frac{\partial a_2(\xi_n)}{\partial \xi_n}. \qquad (2.19)$$

Доказательство. Из явных формул для произведения операторов в алгебре $\mathfrak{A}_b$ следует, что

$$\mathrm{tr}'[a_1, a_2] = \Pi' (\mathrm{tr}\, g_{12}(\xi, \xi) - \mathrm{tr}\, g_{21}(\xi, \xi)),$$

где g_{12} и g_{21} — символы Грина

$$g_{12}(\xi, \eta) = -\Pi_\xi^+ \Pi_\eta^- \frac{(a_1^+(\xi) - a_1^+(\eta))(a_2^-(\xi) - a_2^-(\eta))}{i(\xi - \eta)},$$

а g_{21} получается перестановкой индексов. Здесь $a^{\pm}(\xi) = \Pi^{\pm} a(\xi)$. Так как $\dfrac{a_1^+(\xi) - a_1^+(\eta)}{i(\xi - \eta)} a_2^-(\xi) \in H^+$ как функция η при фиксированном ξ, то раскрывая скобки, получим

$$g_{12}(\xi, \eta) = \Pi_\eta^- \frac{a_1^+(\xi) - a_1^+(\eta)}{i(\xi - \eta)} a_2^-(\eta) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{a_1^+(\xi) - a_1^+(\zeta)}{i(\xi - \zeta)(\zeta - \eta)} a_2^-(\zeta) d\zeta,$$

где контур Γ охватывает все полюса функции $a_1^+(\xi)$ и не охватывает полюсов функции $a_2^-(\zeta)$ (в точке $\zeta = \xi$ особенности нет). Последнее равенство справедливо, если a_1 и a_2 — рациональны, что не уменьшает общности. Далее

$$\Pi' \mathrm{tr}\, g_{12}(\xi, \xi) = -\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_1} d\xi \int_{\Gamma_2} \mathrm{tr} \frac{a_1^+(\xi) - a_1^+(\zeta)}{(\xi - \zeta)^2} a_2^-(\zeta)\, d\zeta,$$

где Γ_1 содержится внутри Γ_2. Вычисляя сначала интеграл по Γ_1 с помощью вычетов вне контура Γ_1 (вычет в ∞ равен 0), получим

$$\Pi' \mathrm{tr}\, g_{12}(\xi, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \mathrm{tr} \frac{\partial a_1^+(\zeta)}{\partial \zeta} a_2^-(\zeta)\, d\zeta =$$

$$= -i \Pi' \mathrm{tr} \frac{\partial a_1^+(\zeta)}{\partial \zeta} a_2^-(\zeta) = i \Pi' \mathrm{tr}\, a_1^+(\zeta) \frac{\partial a_2^-(\zeta)}{\partial \zeta}.$$

Аналогичное выражение справедливо и для $\Pi' \mathrm{tr}\, g_{21}(\xi, \xi)$.

Окончательно

$$\operatorname{tr}'(a_1a_2-a_2a_1)=-i\Pi'\operatorname{tr}\left(\frac{\partial a_1^+(\xi)}{\partial\xi}a_2^-(\xi)+\frac{\partial a_1^-(\xi)}{\partial\xi}a_2^+(\xi)\right)=$$

$$=-i\Pi'\operatorname{tr}\frac{\partial a_1(\xi)}{d\xi}a_2(\xi),$$

так как на слагаемых вида $\dfrac{\partial a_1^+(\xi)}{\partial\xi}a_2^+(\xi)$ и $\dfrac{\partial a_1^-(\xi)}{\partial\xi}(a_2^-(\xi)$ функционал Π' равен 0.

Формула для индекса эллиптической краевой задачи пишется в терминах характера фредгольмовых семейств (глава 2, § 2). Внутренний главный символ $a(x,\xi)$ и обратный к нему $a^{-1}(x,\xi)$ продолжим с $T^*(M_+)\setminus 0$ на все кокасательное расслоение $T^*(M_+)$, домножив их на срезающую функцию $\rho(\xi)$, равную 0 в окрестности нулевого сечения. Полученные функции будем обозначать $a(x,\xi)$ и $r(x,\xi)$. Они определяют конечномерное фредгольмово семейство с компактным носителем на $T^*(M_+)$ $d_i(\mathscr{A})=\{E^0, E^1, a, r\}\in K^{\mathrm{comp}}(TM_+)$ — различающий элемент эллиптического оператора A.

Граничные главные символы a_b и a_b^{-1} оператора $\mathscr{A}$ и его параметрикса также определяют фредгольмово семейство с компактным носителем на $T^*(\partial M_+)$

$$d_b(\mathscr{A})=\{(E^0\otimes H^+)\oplus F^0,\ (E^1\otimes H^+)\oplus F^1,\ a_b(x',\xi'),\ r_b(x',\xi')\},$$

но, в отличие от d_i это семейство бесконечномерно (так как H^+ — бесконечномерное пространство). Здесь a_b и r_b — гладкие продолжения главных граничных символов оператора $\mathscr{A}$ и его параметрикса на все $T^*(\partial M_+)$. Единственное условие, которому эти продолжения должны удовлетворять, состоит в том, чтобы в матрице (2.17) $a(\xi_n)$ совпадала с $a(x',0,\xi',\xi_n)$ — сужением внутреннего (продолженного) символа на границу, и аналогично $r(\xi_n)=r(x',0,\xi',\xi_n)$.

Зададим связности во всех расслоениях: ∂_i в расслоениях $E^i(i=0,1)$ над M_+, ∂_i' в расслоениях $(E^i\otimes H^+)\oplus F^i$ над ∂M_+. При этом ∂_i' на сомножителе H^+ действует тривиально, а на сомножителе E^i совпадает с ∂_i. Они определяют связности в поднятиях E^i на $T^*(M_+)$ и соответственно в поднятиях $(E^i\otimes H^+)\oplus F^i$, которые обозначаются теми же буквами ∂_i и ∂_i'. Как описано в § 2.2 (ср, также п. 1.3.2) определим связности $\tilde\partial_i$ в поднятиях E^i на $T^*(M_+)$, полагая $\tilde\partial_1=\partial_1$; $\tilde\partial_0u=\partial_0u+(r\partial a)u$ и (здесь ∂a — ковариантный дифференциал гомоморфизма a; $E^0\to E^1$, относительно связностей ∂_0 и ∂_1). Аналогично положим $\tilde\partial_1'=\partial_1'$ и $\tilde\partial_0'u=\partial_0'u+(r_b\partial'a_b)u$. Кривизны этих связностей (деле-

нные на $-2\pi i$), обозначим ω_i, $\tilde\omega_i\omega_i'$, $\tilde\omega_i'$. Таким образом,

$$\tilde\omega_0=\omega_0-\frac{1}{2\pi i}(\partial(r\partial a)+(r\partial a)^2), \tag{2.20}$$

$$\tilde\omega_0'=\omega_0'-\frac{1}{2\pi i}(\partial'(r_b\partial'a_b)+(r_b\partial'a_b)^2. \tag{2.21}$$

Обозначая $\tilde\partial$, $\tilde\partial'$ ковариантные дифференциалы гомоморфизмов относительно связностей $\tilde\partial_i$, ∂_i' будем иметь (см. (2.7))

$$\tilde\partial a\sim\tilde\partial r\sim\tilde\omega_1a-a\tilde\omega_0\sim 0,$$

$$\tilde\partial'a_b\sim\tilde\partial'r_b\sim\tilde\omega_1'a_b-a_b\tilde\omega_0'\sim 0,$$

где знак $\sim$ обозначает равенство вне некоторого компакта.

Введем дифференциальные формы с компактным носителем

$$\operatorname{ch}d_i(\mathscr{A})=\operatorname{tr}e^{\tilde\omega_0}-\operatorname{tr}e^{\omega_1}, \tag{2.22}$$

$$\operatorname{ch}'d_b(\mathscr{A})=\operatorname{tr}'(e^{\tilde\omega_0'}-e^{\tilde\omega_0'}r_ba_b)-\operatorname{tr}'(e^{\omega_1'}-a_be^{\tilde\omega_0'}r_b). \tag{2.23}$$

(ср. формулу (2.8) для характера фредгольмовых семейств), где tr' — след в алгебре $\mathfrak{A}_b$, определенный формулой (2.18). Отметим, что в (2.33) мы не можем перейти к укороченной форме (2.22), а должны пользоваться полной формулой для характера бесконечномерного фредгольмова семейства. Это связано с тем, что tr' не аннулирует коммутаторы: $\operatorname{tr}'[a_b, e^{\tilde\omega_0'}r_b]\neq 0$. Отметим также некоторое внешнее отличие (2.23) от формулы (2.8) для характера семейства. Дело в том, что формула (2.8) допускает различные формы записи, приводящие к одному результату (в том числе и запись вида (2.23), так как операторный след аннулирует коммутаторы. Поскольку tr' не обладает этим свойством, то форма записи становится существенной.

Теорема 2.4. Индекс граничной задачи выражается формулой

$$\operatorname{ind}\mathscr{A}=\int\limits_{T^*(M_+)}\operatorname{ch}d_i(\mathscr{A})\mathscr{T}(M_+)+\int\limits_{T^*(\partial M_+)}\operatorname{ch}'d_b(\mathscr{A})\mathscr{T}(M_+), \tag{2.24}$$

где $\mathscr{T}(M_+)$ — дифференциальная форма, задающая класс Тодда касательного расслоения.

Для доказательства, в силу результатов Буте де Монвеля ([34], см. также [52]) достаточно проверить два свойства функционала (2.24): 1) инвариантность относительно гомотопий, 2) если символы $a(x,\xi)$, $a^{-1}(x,\xi)$, $a_b(x',\xi')$, $a_b^{-1}(x',\xi')$ можно продолжить на все кокасательное расслоение $T^*(M_+)$ и $T^*(\partial M_+)$ так, что семейство $d_b(\mathscr{A})$ будет тривиальным, а семейство $d_i(\mathscr{A})$ тривиальным в окрестности границы, то формула (2.24) должна переходить в формулу Атьи—Зингера (1.19) для многообразия без края.

В проверке нуждается только первое свойство, так как второе очевидно. Гомотопия определяет фредгольмовы семейства d_i и d_b на многообразиях $T^*(\partial M_+)\times[0,1]$ и $T^*(\partial M_+)\times[0,1]$, а также связности ∂_i, ∂_i, ∂_i', $\tilde\partial_i'$ в поднятиях расслоений E^i и $(E^i\otimes H^+)\oplus F^i$ на эти многообразия.

Вычислим изменение первого слагаемого в (2.24). Кокасательное расслоение $T^*(M_+)$ при сужении на ∂M_+ разлагается в прямую сумму $T^*(\partial M_+)$ и тривиального одномерного расслоения, соответствующего координате ξ_n: $T^*(M_+)|_{\partial M_+} = T^*(\partial M_+)\oplus 1$. Так как форма $\mathrm{ch}\, d_i(\mathscr{A})$ замкнута на многообразии $T^*(M_+)\times[0,1]$, то интеграл по границе этого многообразия равен 0, то есть

$$\int_{T^*(M_+)\times\{1\}} - \int_{T^*(M_+)\times\{0\}} = -\int_{\{T^*(\partial M_+)\oplus 1\}\times[0,1]} \mathrm{ch}\, d_i(\mathscr{A})\,\mathscr{T}(M_+) =$$

$$= -\int_{T^*(\partial M_+)\times[0,1]}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi_n i\left(\frac{\partial}{\partial\xi_n}\right)\mathrm{ch}\, d_i(\mathscr{A})\,\mathscr{T}(M_+),$$

где $i\left(\frac{\partial}{\partial\xi_n}\right)$ обозначает оператор внутреннего произведение формы на векторного поле $\frac{\partial}{\partial\xi_n}$. В силу (2.22) и (2.20), имеем

$$i\left(\frac{\partial}{\partial\xi_n}\right)\mathrm{ch}\, d_i(\mathscr{A}) = \mathrm{tr}\, e^{\tilde\omega_0} i\left(\frac{\partial}{\partial\xi_n}\right)\tilde\omega_0 =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{tr}\, e^{\tilde\omega_0}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_n}(r\partial a) - \tilde\partial\left(r\frac{\partial a}{\partial\xi_n}\right)\right),$$

где ξ_n рассматривается как параметр, а ∂ и $\tilde\partial$ — это связности на многообразии $T^*(\partial M_+)\times[0,1]$. Таким образом, изменение первого слагаемое равно

$$\int_{T^*(\partial M_+)\times[0,1]} \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi_n \mathscr{T}(M_+)\,\mathrm{tr}\, e^{\tilde\omega_0}\times$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial\xi_n}(r\partial a) - \tilde\partial\left(r\frac{\partial a}{\partial\xi_n}\right)\right).$$

Вычислим теперь изменение второго слагаемого

$$\int_{T^*(\partial M_+)\times\{1\}} - \int_{T^*(\partial M_+)\times\{0\}} \mathrm{ch}' d_b(\mathscr{A})\,\mathscr{T}(M_+) =$$

$$\int_{T^*(\partial M_+)\times[0,1]} d\,\mathrm{ch}'\, d_b(\mathscr{A})\,\mathscr{T}(M_+).$$

Форма $\mathrm{ch}' d_b(\mathscr{A})$ не замкнута, так как tr' не аннулирует коммутаторы. Имеем

$$d\,\mathrm{ch}'\, d_b(\mathscr{A}) = d\,\mathrm{tr}'\, e^{\tilde\omega_0'} - d\,\mathrm{tr}'\, e^{\omega_1'} + d\,\mathrm{tr}'\left[a_b, e^{\tilde\omega_0'}r\right].$$

Далее,

$$d\,\mathrm{tr}' e^{\omega_1'} = \mathrm{tr}'\,\partial' e^{\omega_1'} = 0,$$

$$d\,\mathrm{tr}' e^{\tilde\omega_0'} = \mathrm{tr}'\,\partial_0' e^{\tilde\omega_0'} = \mathrm{tr}\,\tilde\partial_0' e^{\tilde\omega_0'} - \mathrm{tr}'\left[r_b\partial a_b, e^{\tilde\omega_0'}\right] = -\mathrm{tr}'\left[r_b\partial a_b, e^{\tilde\omega_0'}\right],$$

так как, в силу тождества Бьянки, $\partial_1' e^{\omega_1'} = \tilde\partial_0' e^{\tilde\omega_0'} = 0$. Пользуясь леммой 2.1, получим

$$d\,\mathrm{ch}'\, d_b(\mathscr{A}) = i\Pi'\,\mathrm{tr}\,\frac{\partial}{\partial\xi_n}(r\partial a)\,e^{\tilde\omega_0} - i\,d\Pi'\,\mathrm{tr}\,\frac{\partial a}{\partial\xi_n}\,e^{\tilde\omega_0}r =$$

$$= \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi_n\,\mathrm{tr}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_n}(r\partial a) - \tilde\partial\left(r\frac{\partial a}{\partial\xi_n}\right)\right)e^{\tilde\omega_0}.$$

Мы воспользовались тем, что

$$d\,\mathrm{tr}\,\frac{\partial a}{\partial\xi_n}\,e^{\tilde\omega_0}r = \mathrm{tr}\,\tilde\partial\left(r\frac{\partial a}{\partial\xi_n}\,e^{\tilde\omega_0}\right) = \mathrm{tr}\,\tilde\partial\left(r\frac{\partial a}{\partial\xi_n}\right)e^{\tilde\omega_0},$$

в силу тождества Бьянки.

Отсюда видим, что суммарное изменение равно 0

Аналогичные рассуждения позволяют преобразовать формулу (2.24) к интегралам по $S(M_+)$ и $S(\partial M_+)$, как и в случае многообразия без края. Опуская подробности, приведем окончательный результат. На многообразиях $S(M_+)\times[0,1]$ и $S(\partial M_+)\times\times[0,1]$ введем формы

$$\tilde\omega_0 = \omega_0 - \frac{1}{2\pi i}\left(\partial(ta^{-1}\partial a) + (ta^{-1}\partial a)^2\right),$$

$$\tilde\omega_0' = \omega_0' - \frac{1}{2\pi i}\left(\partial'(ta_b^{-1}\partial' a_b) + (ta_b^{-1}\partial a_b)^2\right).$$

Тогда

$$\mathrm{ind}\,\mathscr{A} = \int_{S(M_+)\times[0,1]}\mathrm{tr}\, e^{\tilde\omega_0}\mathscr{T}(M_+) + \int_{S(\partial M_+)\times[0,1]}\{(1-t)\,\mathrm{tr}' e^{\omega_0'} +$$

$$+ t\,\mathrm{tr}'\, a_b e^{\omega_0'} a_b^{-1}\}\,\mathscr{T}(M_+), \qquad (2.25)$$

где ориентация многообразия $S(M_+)\times[0,1]$ задается формой $\prod_{i=1}^{n} d(t\xi_i)\wedge dx^i$ и аналогично для $S(\partial M_+)\times[0,1]$. Отметим, что первый член в (2.25) такой же, как и для многообразия без края.

Формулы (2.24), (2.25) естественным образом обобщаются на случай семейства эллиптических операторов на многообразии с краем. Результат здесь полностью аналогичен теореме 2.3.

Во многих случаях при вычислении индекса полезным оказывается прием сведения на границу. Проиллюстрируем его на примере классических краевых задач. Пусть

$$\mathcal{A}_1=\begin{pmatrix}\gamma^+A\\ \gamma'T_1\end{pmatrix};\quad \mathcal{A}_2=\begin{pmatrix}\gamma^+A\\ \gamma,T_2\end{pmatrix}$$

— две эллиптические краевые задачи, отличающиеся только краевыми условиями, и $\mathcal{R}_1=(\gamma^+R+\gamma'G_1,\ K_1)$ — параметрикс оператора $\mathcal{A}_1$. Тогда с точностью до бесконечно сглаживающих операторов имеем

$$\mathcal{A}_2\mathcal{R}_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ * & \gamma'T_2K_1\end{pmatrix}.$$

Оператор $S=\gamma'T_2K_1$ — это эллиптический п. д. о. на границе. Из логарифмического свойства индекса имеем

$$\operatorname{ind}\mathcal{A}_2=\operatorname{ind}\mathcal{A}_1+\operatorname{ind}\mathcal{A}_2\mathcal{R}_1=\operatorname{ind}S+\operatorname{ind}\mathcal{A}_1. \qquad (2.26)$$

Таким образом, если известен индекс $\mathcal{A}_1$, то вычисление индекса $\mathcal{A}_2$ сводится к вычислению индекса п. д. о. S на границе. Формула (2.26) носит название *формулы М. С. Аграновича—А. С. Дынина.*

Проиллюстрируем применение формул (2.25) и (2.26) на конкретном примере. Пусть A — дифференциальный оператор на единичном круге $M_+: x_1^2+x_2^2\leqslant 1$ с символом

$$a(x,\xi)=b(x)c(\xi)=\begin{pmatrix}i & \mu(x^1+ix^2)\\ -\mu(x^1-ix^2) & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1+i\xi_2 & 0\\ 0 & \xi_1-i\xi_2\end{pmatrix},$$

где μ вещественное число. Краевые условия задаются оператором $T=(\alpha(x'),\ \beta(x'))$, где α и β — комплексные функции на окружности, нигде не равные нулю.

Для двумерного многообразия M_+ формула (2.25) после интегрирования по $t\in[0,1]$ принимает вид

$$\operatorname{ind}\mathcal{A}=-\frac{1}{6(2\pi i)^2}\int\limits_{S(M_+)}\operatorname{tr}(a^{-1}da)^3-$$

$$-\frac{1}{2(2\pi i)}\int\limits_{S(\partial M_+)}\operatorname{tr}'a_b^{-1}da_b+\operatorname{tr}'da_ba_b^{-1}. \qquad (2.27)$$

Несложные вычисления дают для первого члена выражение $\mu^2/(1+\mu^2)$. Граничный член вычислим сначала для частного случая $T_1=(1,1)$. В окрестности границы в качестве x^1 возьмем полярный угол, а в качестве x^2 расстояние до границы. При $x^2=0$ получим

$$a(x^1,0,\xi_1,\xi_2)=b(x^1)c(\xi_1,\xi_2)=\begin{pmatrix}-ie^{ix^1} & -\mu\\ \mu & ie^{-ix^1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_2-i\xi_1 & 0\\ 0 & \xi_2+i\xi_1\end{pmatrix}.$$

Граничный символ оператора $\mathcal{A}$ равен

$$a_b=\begin{pmatrix}\Pi^+a(\xi_2)\\ \Pi'(1,1)\end{pmatrix}$$

(зависимость от x^1, ξ_1 не указывается). При $\xi_1\neq 0$ он обратим в алгебре $\mathfrak{A}_b$, при этом

$$a_b^{-1}=(\Pi^+a^{-1}(\xi_2)+k(\xi_2)\Pi'_\eta(1,1)(a^{-1}(\eta))^-,\ k(\xi_2)),$$

где $k(\xi_2)$ — столбец высоты 2 с элементами из H^+, удовлетворяющий условиям

$$\Pi^+c_2(\xi_2)k(\xi_2)=0,\qquad \Pi'(1,1)k(\xi_2)=1.$$

Явное выражение для $k(\xi_2)$ имеет вид

$$k(\xi_2)=-i\begin{pmatrix}(\xi_2-i\xi_1)^{-1}\ \theta(\xi_1)\\ (\xi_2+i\xi_1)^{-1}\ \theta(-\xi_1)\end{pmatrix},$$

где θ — функция Хевисайда. Отсюда

$$da_ba_b^{-1}=\begin{pmatrix}\Pi^+da(\xi_2)a^{-1}(\xi_2) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

так как $da_b=(db(x^1))c(\xi_1,\xi_2)$ и $\Pi^+ck=0$. В частности, $da_bb_b^-$ не содержит символов Грина, поэтому $\operatorname{tr}'da_ba_b^{-1}=0$. Отсюда следует, в силу леммы 2.1, что

$$\operatorname{tr}'a_b^{-1}da_b=\operatorname{tr}'[a_b^{-1},da_b]=\frac{i}{2\pi}\int\limits_\Gamma d\xi_2\operatorname{tr}a^{-1}d\left(\frac{\partial a}{\partial\xi_2}\right)=$$

$$=-\operatorname{tr}\begin{pmatrix}\theta(\xi_1) & 0\\ 0 & \theta(-\xi_1)\end{pmatrix}b^{-1}(x^1)\,db(x^1)=-\frac{idx^1}{1+\mu^2}\operatorname{sgn}\xi_1.$$

Таким образом, граничный член в (2.27) равен $1/(1+\mu^2)$, и $\operatorname{ind}\mathcal{A}_1=1$ при краевом условии $T_1=(1,1)$.

В случае краевого условия $T=(\alpha(x^1),\ \beta(x^1))$ воспользуемся формулой (2.26). Оператор $S=\Pi'TK$ имеет символ

$$s=(\alpha(x^1)\theta(\xi_1)+\beta(x^1)\theta(-\xi_1)),$$

и тогда

$$\operatorname{ind}S'=\frac{1}{2\pi}(\Delta\arg\alpha(x^1)-\Delta\arg\beta(x^1)),$$

откуда

$$\operatorname{ind}\mathcal{A}=1+\frac{1}{2\pi}(\Delta\arg\alpha(x^1)-\Delta\arg\beta(x^1)).$$

§ 5. Индекс тёплицевых операторов

В этом параграфе кратко излагаются результаты Буте де Монвеля [35], см. также [36].

Прежде всего напомним определение строго псевдовыпуклой области. Пусть $\mathbf{C}^n$ — n-мерное комплексное пространство с координатами $z_j=x_j+iy_j$, Ω — ограниченная область в $\mathbf{C}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть область Ω задается неравенством $\rho<0$, где $\rho=\rho(z,z)$ — гладкая действительная функция, $d\rho\neq 0$ на $\partial\Omega$. Комплексное векторное поле X, определенное на границе и в некоторой ее окрестности, называется *касательным голоморфным* (соответственно *антиголоморфным*) векторным полем, если оно имеет вид

$$X=\sum_{j=1}^{n} a_j(z,\bar z)\frac{\partial}{\partial z_j}$$

$\left(\text{соответственно } \sum_{j=1}^{n} a_j(z,\bar z)\frac{\partial}{\partial \bar z_j}\right)$, где a_j — комплексные функции, и $X\rho|_{\partial\Omega}=0$. Если $X=\sum_{j=1}^{n} a_j\frac{\partial}{\partial z_j}$ — голоморфное касательное поле, то $\bar X=\sum_{j=1}^{n}\bar a_j\frac{\partial}{\partial \bar z_j}$ является антиголоморфным касательным полем и наоборот.

Эрмитова форма

$$L(X,Y)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\rho}{\partial z_i\partial \bar z_j}a_i\bar b_j$$

рассматриваемая на голоморфных (или антиголоморфных) векторных полях X, Y, называется *формой Леви*. Область Ω называется *строго псевдовыпуклой*, если для любого голоморфного касательного векторного поля X квадратичная форма $L(X,X)>0$ во всех точках границы.

Определим *касательный оператор Коши — Римана* d_b'' на $\partial\Omega$. Функцию $u\in C^\infty(\partial\Omega)$ продолжаем гладким образом в окрестность границы, применяем к ней оператор Коши — Римана $d''u$ (d' и d'' — голоморфная и антиголоморфная часть дифференциала $d=d'+d''$), сужаем эту форму на границу и рассматриваем ее только на антиголоморфных касательных векторных полях. Таким образом, для любого касательного антиголоморфного векторного поля $X=\sum_{j=1}^{n} a_j\frac{\partial}{\partial \bar z_j}$ мы полагаем

$$\langle d_b''u, X\rangle=\langle d''u, X\rangle|_{\partial\Omega}=Xu|_{\partial\Omega}=\sum_{j=1}^{n} a_j\frac{\partial u}{\partial \bar z_j}\Big|_{\partial\Omega}.$$

Результат не зависит от способа продолжения функции u, так как любое другое продолжение имеет вид $u+\rho v$ и $\rho|_{\partial\Omega}=X\rho|_{\partial\Omega}=0$. Фундаментальный результат теории функций многих комплексных переменных состоит в том, что для строго псевдовыпуклой области функция $u\in C^\infty(\partial\Omega)$ допускает голоморфное продолжение в Ω тогда и только тогда, когда $d_b''u=0$ (функция u удовлетворяет касательным уравнениям Коши—Римана).

Введенные определения локальны и инвариантны относительно голоморфных замен переменных. В окрестности точки $z_0\in\partial\Omega$ (которую линейной заменой можно сдвинуть в 0), где $\frac{\partial\rho}{\partial \bar z_n}\neq 0$, функция ρ голоморфной заменой приводится к виду

$$\rho=z_n+\bar z_n+cz_n\bar z_n+\sum_{j=1}^{n-1} z_j\bar z_j+O(|z|^3). \tag{2.28}$$

Антиголоморфные касательные векторные поля порождаются операторами $D_j=\frac{\partial}{\partial \bar z_j}-b_j\frac{\partial}{\partial \bar z_n}$, где $b_j=\partial\rho/\partial\bar z_j/\partial\rho/\partial\bar z_n=z_j+O(|z|^2)$, и для любого поля $X=\sum_{j=1}^{n-1} a_jD_j$ форма Леви в точке z_0 имеет вид $\sum_{j=1}^{n-1} a_j\bar a_j>0$.

В качестве локальных координат на $\partial\Omega$ можно взять $(n-1)$ комплексных координат z_j, $j=1,2,\ldots,n-1$ (или вещественные координаты x_j, y_j) и y_n. Тогда касательный оператор Коши — Римана имеет вид $d_b''u=\sum_{j=1}^{n-1} D_ju d\bar z_j$, где $D_ju=\frac{\partial u}{\partial \bar z_j}-\frac{i}{2}b_j\frac{\partial u}{\partial y_n}$.

В кокасательном расслоении $T^*(\partial\Omega)$ в окрестности точки z_0 вводим двойственные координаты ξ_j, η_j и η_n. Тогда для символов операторов D_j получаем $\sigma_j=\sigma(D_j)=\frac{i}{2}(\zeta_j-ib_j\eta_n)$,

где $\zeta_j=\xi_j+i\eta_j$. *Характеристическим множеством* касательного оператора Коши — Римана называется множество Σ в $T^*(\partial\Omega)\setminus 0$, на котором все $\sigma_j=0$. В слое над точкой z_0 имеем $\zeta_j=ib_j\eta_n=0$, так как $l_j=0$ при $z=z_0$, так что Σ_{z_0} состоит из двух полупрямых $\Sigma_{z_0}^+$: $\zeta_j=0$, $\eta_n>0$ и $\Sigma_{z_0}^-$: $\zeta_j=0$, $\eta_n<0$. Более инвариантно: $\Sigma_{z_0}^+$ — это полупрямая, определяемая ковектором $dy_n=\frac{1}{2i}(d'\rho-d''\rho)|_{z_0}=\alpha(z_0)$. Таким образом, множество Σ состоит из двух расслоений полупрямых Σ^+ и Σ^-. Расслоение Σ^+ — это конус над $\partial\Omega$: точки из Σ^+ имеют вид $\lambda\alpha$ $(\lambda>0)$, где $\alpha=\frac{1}{2i}(d'\rho-d''\rho)|_{\partial\Omega}=\frac{1}{i}d'\rho|_{\partial\Omega}=-\frac{1}{i}d''\rho|_{\partial\Omega}$. В силу невырожденности формы Леви, форма α является *контактной формой* на $\partial\Omega$. Это означает, что $(2n-1)$-форма $\nu=\alpha\wedge(d\alpha)^{n-1}$ нигде не обращается в нуль. Отсюда в свою очередь следует, что 2-форма $\omega=d(\lambda\alpha)$ на Σ^+ является *симплектической*, то есть замкнутой невырожденной 2-формой, поскольку $\omega^n = n\lambda^{n-1} d\lambda \wedge \wedge \nu \neq 0$. При этом форма ω является сужением на Σ^+ стандартной симплектической формы

$$\sum_{j=1}^{n-1} \operatorname{Re} d\zeta_j \wedge d\bar{z}_j + d\eta_n \wedge dy_n = \sum_{j=1}^{n-1} d\xi_j \wedge dx_j + \sum_{j=1}^{n} d\eta_j \wedge dy_j. \quad (2.29)$$

Все эти утверждения легко проверяются локально в точке z_0 с помощью представления (2.28).

В конической окрестности V точки $(z_0, \alpha(z_0)) \in T^*(\partial\Omega) \setminus 0)$ с помощью канонической замены (диффеоморфизма, сохраняющего симплектическую форму (2.29), можно ввести новые координаты (t, q, τ, p), $t \in \mathbf{R}^n$, $q \in \mathbf{R}^{n-1}$, τ, p — двойственные переменные, так, чтобы $c_j = \frac{1}{2}(ip_j + q_j|\tau|)$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$. В окрестности точки z_0 имеем

$$\sigma_j = \frac{i}{2}(\xi_j + (y_j + O(|z|^2)\eta_n) + \frac{1}{2}(x_j + O(|z|^2)\eta_n - \eta_j) =$$

$$= \frac{i}{2} p_j + \frac{1}{2}|\tau| q_j.$$

Так как скобки Пуассона[1] при каноническом преобразовании сохраняются, то мы должны иметь при $z = z_0$

$$\{\operatorname{Im} \sigma_j, \operatorname{Re} \sigma_k\} = \frac{1}{2}\delta_{jk}\eta_k = \frac{1}{4}\delta_{jk}|\tau| = \left\{\frac{1}{2}p_j, \frac{|\tau|}{2}q_k\right\},$$

что будет выполнено, если положить $|\tau| = 2\eta_n$.

В случае, когда b_j в точности равны z_j без остаточного члена, нетрудно написать явный вид производящей функции $S(x, y, \tau, p)$ такого преобразования, первой степени однородности по τ, p. В конической окрестности точки $x = y = p = 0$, $\tau = (0, \ldots, 0, 2)$ можно взять, например,

$$S = \frac{|\tau|}{2} y_n + \sum_{j=1}^{n-1}\left(p_j x_j + p_j \frac{\tau_j}{|\tau|} - \tau_j y_j - \frac{|\tau|}{2} x_j y_j\right).$$

Тогда обычные формулы

$$q_j = \frac{\partial S}{\partial p_j}, \quad t_i = \frac{\partial S}{\partial \tau_i}, \quad \xi_j = \frac{\partial S}{\partial x_j}, \quad \eta_i = \frac{\partial S}{\partial y_i}$$

$j = 1, 2, \ldots, n-1$; $i = 1, 2, \ldots, n$) задают невырожденное каноническое преобразование φ конической окрестности $U \subset T^*(\mathbf{R}^{2n-1}) \setminus 0$ точки $t_j = \tau_j = q_j = p_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$, $t_n = 0$, $\tau_n = 2$ на коническую окрестность $V \subset T^*(\partial\Omega) \setminus 0$ точки $(z_0, \alpha(z_0))$. При этом преобразовании подмногообразие $\Sigma^+ \cap V$ отображается на $\Sigma_0^+ \cap U \subset T^*(\mathbf{R}^{2n-1}) \setminus 0$, где Σ_0^+ определяется уравнениями $p_j = q_j = 0$, то есть совпадает с $T^*(\mathbf{R}^n)$. Симплектическая форма $\omega = d(\lambda\alpha)$ на Σ^+ переходит в стандартную симплектическую форму на $T^*(\mathbf{R}^n)$

$$\varphi^*\omega = \sum_{i=1}^{n} d\tau_i \wedge dt_i.$$

[1] Относительно скобок Пуассона на симплектическом многообразии см. введение к гл. 3.

С каноническим преобразованием φ стандартным образом ассоциируется интегральный оператор Фурье F такой, что $D_j F \sim F D_j^0$, где $D_j^0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial q_j} + q_j|D_t|\right)$ — оператор в $\mathbf{R}^{2n-1}$ с символом $\frac{1}{2}(ip_j + |\tau| q_j)$. Знак $\sim$ обозначает микролокальное равенство в конической окрестности V с точностью до бесконечно сглаживающих операторов. Коротко говоря, в конической окрестности точки многообразия Σ^+ касательное уравнение Коши—Римана $d_b'' u = 0$ микролокально эквивалентно системе $D_j^0 u = 0$. Аналогичное утверждение справедливо и для точек Σ^-, но с операторами $(D_j^0)^* = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial}{\partial q_j} + q_j|D_t|\right)$.

Определим теперь тёплицевы операторы на $\partial\Omega$. Пусть S — *проектор Сегё* — ортогональный проектор в $L^2(\partial\Omega)$ по мере, определяемой формой ν, на подпространство решений касательного уравнения Коши—Римана. Классическому п. д. о. Q на $\partial\Omega$ сопоставим *тёплицев оператор* $T_Q = SQS : C^\infty(\partial\Omega) \to C^\infty(\partial\Omega)$. *Порядок тёплицева оператора*, по определению, считается равным порядку оператора Q. *Главным символом* $\sigma(T_Q)$ тёплицева оператора называется сужение $\sigma(Q)|_{\Sigma^+}$ главного символа п. д. о. Q на многообразие Σ^+.

Справедливы следующие утверждения.

1. Тёплицевы операторы образуют алгебру, при этом

$$\sigma(T_{Q_1} \cdot T_{Q_2}) = \sigma(T_{Q_1})\sigma(T_{Q_2});$$

2. $$\sigma([T_{Q_1}, T_{Q_2}]) = -i\{\sigma(T_{Q_1}), \sigma(T_{Q_2})\}.$$

(скобки Пуассона рассматриваются на Σ^+ относительно симплектической формы ω).

3. Если Q — п. д. о. порядка m и $\sigma(Q)|_\Sigma = 0$, то T_Q — оператор порядка $m-1$, то есть существует такой п. д. о. Q_1 порядка $m-1$, что $T_Q = T_{Q_1}$ с точностью до бесконечно сглаживающих операторов.

Эти свойства легко вытекают из вышеупомянутой микролокальной модели оператора d_b''. Мы поясним их, заменив для простоты оператор d_b'' системой операторов D_j^0 и проектор Сегё S его *микролокальной моделью* S_0 — ортогональным проектором в $L^2(\mathbf{R}^{2n-1})$ на подпространство решений уравнений $D_j^0 u = 0$.

Введем *оператор Эрмита*

$$(H_0 f)(t, q) = (2\pi)^{-n} \int e^{it\tau - \frac{1}{2}|q||\tau|} \left(\frac{|\tau|}{2\pi}\right)^{\frac{n-1}{4}} \hat{f}(\tau)\, d\tau,$$

где $\hat{f}$ — преобразование Фурье функции $f(t)$. Непосредственно проверяется, что для любой функции $\hat{f}(t) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ функция $u(t, q) = H_0 f$ удовлетворяет системе уравнений $D_j^0 = 0$ и оператор H_0 изометрически отображает $L^2(\mathbf{R}^n)$ на подпространство решений этой системы в $L^2(\mathbf{R}^{2n-1})$. Таким образом, $H_0^* H_0 = 1$ в $L^2(\mathbf{R}^n)$, а $H_0 H_0^* = S_0$ — ортогональный проектор в $L^2(\mathbf{R}^{2n-1})$ — аналог проектора Сегё. Для аналогов тёплицевых операторов имеем

$$T_Q^0 = H_0 H_0^* Q H_0 H_0^* = H_0 P_0 H_0^*,$$

где $P_0 = H_0^* Q H_0$: $C^\infty(\mathbf{R}^n) \to C^\infty(\mathbf{R}^n)$. Непосредственно проверяется, что P_0 — п. д. о. на $\mathbf{R}^n$, причем $\sigma(P_0) = \sigma(Q)|_{\Sigma_0^+}$, где $\Sigma_0^+ = T^*(\mathbf{R}^n) \setminus 0 \subset T^*(\mathbf{R}^{2n-1}) \setminus 0$. Таким образом, соответствие $T_Q^0 \mapsto P_0 = H_0^* P_0 H_0$ определяет изоморфизм алгебры тёплицевых операторов T_Q^0 и алгебры п. д. о. на $\mathbf{R}^n$, что влечет за собой свойства 1) — 3).

Отметим, что микролокальная модель оператора d_b'' в точках многообразия Σ^- приводит к системе $(D_j^0)^* u = -\frac{\partial u}{\partial q_j} + y_j |D_t| u = 0$, которая не имеет решений из L^2, так что соответствующий аналог проектора Сегё равен 0. Этим объясняется, почему многообразие Σ^- — несущественно при определении символа теплицева оператора. Отметим также аналогию операторов D_j^0 с операторами уничтожения, а операторов $(D_j^0)^*$ с операторами рождения (ср. § 1 гл. 3).

В силу свойств 1)—3) на теплицевы операторы очевидным образом обобщается эллиптическая теория. Оператор T_Q называется эллиптическим, если $\sigma(T_Q) \neq 0$ всюду на Σ^+. Из эллиптичности вытекает существование параметрикса, то есть такого тёплицевого оператора R, что $S - RT_Q$ и $S - T_Q R$ бесконечно сглаживающие. Отсюда получаем фредгольмовость T_Q, рассматриваемого на подпространстве значений проектора S, и формулу для индекса

$$\operatorname{ind} T_Q = \operatorname{tr}(S - RT_Q) - \operatorname{tr}(S - T_Q R).$$

Теорема об индекве для тёплицевых операторов аналогична теореме Атьи—Зингера об индексе эллиптических п. д. о. В простейшем варианте она выглядит так

Теорема 2.5. Пусть T_Q — эллиптическая матрица из теплицевых операторов на границе строго псевдовыпуклой области $\Omega \subset \mathbf{C}^n$, и пусть $\sigma(z)$ — матричная функция на $\partial\Omega$, равная символу $\sigma(T_Q)$ в точке $(z, \alpha(z)) \in \Sigma^+$. Тогда

$$\operatorname{ind} T_Q = -\frac{1}{(2\pi i)^n} \frac{(n-1)!}{(2n-1)!} \int_{\partial\Omega} (\sigma^{-1} d\sigma)^{2n-1}. \tag{2.30}$$

Понятия касательного оператора Коши—Римана, проектора Сегё, тёплицевых операторов естественным образом обобщаются на случай голоморфных расслоений над строго псевдовыпуклой областью Ω в многообразии Штейна. Пусть E^0, E^1 — голоморфные векторные расслоения над Ω и $\sigma(z)$ — функция на $\partial\Omega$ со значениями в $\operatorname{Hom}(E^0|_{\partial\Omega}, E^1|_{\partial\Omega})$, равная символу эллиптического тёплицевого оператора

$$T_Q: C^\infty(\partial\Omega, E^0|_{\partial\Omega}) \to C^\infty(\partial\Omega, E^1|_{\partial\Omega}).$$

Функция $\sigma(z)$ продолжается до гомоморфизма расслоений E^0 в E^1 над $\bar{\Omega}$ с помощью срезающей функции ρ и определяет различающий элемент $d(T_Q)$ — виртуальное расслоение $\{E^0, E^1, \rho\sigma\} \in K^{\mathrm{comp}}(\Omega)$ с компактным носителем в Ω.

Теорема 2.6.

$$\operatorname{ind} T_Q = \int_\Omega \operatorname{ch} d(T_Q)\, \mathcal{T}(\Omega),$$

где $\mathcal{T}(\Omega)$ — класс Тодда комплексного касательного расслоения многообразия Ω.

Глава 3

ДЕФОРМАЦИОННОЕ КВАНТОВАНИЕ И ИНДЕКС

Многообразие M называется *симплектическим*, если на нем существует *симплектическая форма* — замкнутая невырожденная 2-форма $\sigma = 1/2\sigma_{ij} dx^i \wedge dx^j$. Такое многообразие обязательно четномерно, $\dim M = 2n$. В пространстве функций $C^\infty(M)$ определена операция *скобки Пуассона* $\{f, g\} = \sigma^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial g}{\partial x^j}$, где σ^{ij} — элементы матрицы обратной к σ_{ij}, задающая структуру алгебры Ли в пространстве $C^\infty(M)$. Кроме того, в пространстве функций имеется также структура коммутативной алгебры.

Обозначим через $Z = C^\infty(M)[[h]]$ множество формальных степенных рядов

$$a(x, h) = \sum_{k=0}^\infty h^k a_k(x)$$

относительно формальной переменной h с коэффициентами $a_k(x) \in C^\infty(M)$. *Деформационным квантованием* на симплектическом многообразии M называется структура ассоциативной алгебры над $\mathbf{C}$ с единицей в множестве Z с обычными линейными операциями и с ассоциативной операцией умножения $a*b$, удовлетворяющей условиям:

1) коэффициенты ряда $a*b$ полиномиально выражаются через коэффициенты a и b, их частные производные по локальным координатам;

2) $a*b = a_0(x)\,b_0(x) + \ldots$;

3) $[a, b] = a*b - b*a = -ih\{a_0(x),\, b_0(x)\} + \ldots$,

где многоточием обозначены члены с более высокими степенями h. Эта алгебра называется *алгеброй квантовых наблюдаемых*. Условия 1) означает, что она является деформацией коммутативной алгебры функций, а условие 2) выражает так называемый *принцип соответствия*.

Деформационное квантование подробно рассмотрено в [28], см. также обзор [4]. В [28] предложена конструкция квантования и получены условия на M, при которых она возможна. Эти условия в общем случае трудно проверить, достаточным условием является тривиальность $H_3(M)$.

Мы предлагаем другую конструкцию квантования, которая возможна на любом симплектическом многообразии. Затем в алгебре квантовых наблюдаемых вводится след, принимающий значения в множестве формальных рядов Лорана по h с конечным числом отрицательных степеней. С помощью следа по формуле (1.8) вводится понятие индекса. Доказывается формула для индекса, аналогичная формуле Атьи—Зингера. При этом индекс представляет собой полином от $1/h$ степени, не выше n. Отсюда получаются необходимые условия существования операторного представления алгебры квантовых наблюдаемых: h может принимать только такие численные значения, для которых любые индексы являются целыми числами. В п. 5.3 главы 1 подобные соображения давали необходимое условие существования спинорной структуры. В конкретных примерах условия целочисленности индексов совпадают с известными условиями квантования, полученными в операторных конструкциях.

§ 1. Алгебра квантовых наблюдаемых

1.1. Символы Вейля. Материал этого пункта имеет много общего с п. 5.3. Пользуясь физической терминологией, можно сказать, что алгебра символов Вейля является бозонным аналогом алгебры Клиффорда.

Пусть Σ — вещественное симплектическое пространство размерности $2n$, σ — невырожденная кососимметрическая билинейная форма на Σ, называемая *симплектической формой*. Будем предполагать также, что на Σ задана симметрическая положительно определенная форма g.

Введем *алгебру символов Вейля* $S^\infty(\Sigma)$. Пусть $S^m = S^m(\Sigma)$ — пространство комплекснозначных функций $a(y) \in C^\infty(\Sigma)$, кото-

рые для любого мультииндекса $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2n})$ удовлетворяют оценкам

$$\left|\frac{\partial^\gamma a}{\partial y^\gamma}\right| \leqslant C_\gamma (1 + |y|^2)^{\frac{m-|\gamma|}{2}},$$

где $|y|^2 = g(y, y)$. Эти оценки аналогичны (2.14) с той разницей, что переменные x и ξ здесь равноправны и пара (x, ξ) обозначается одной буквой y. Через S^∞ и $S^{-\infty}$ обозначим объединение и пересечение всех S^m, $m \in \mathbb{R}$. В частности, $S^{-\infty}$ — это пространство Шварца.

Для фиксированного $\lambda > 0$ определим умножение в S^∞ по формуле

$$(a \circ b)(y) = \\ = \frac{(\pi\lambda)^{-2n}}{(2n)!} \int\limits_{\Sigma\times\Sigma} \exp\left(\frac{2i}{\lambda}\,\sigma(t, \tau)\right) a(y+t)\, b(y+\tau)\, \sigma^{2n}(dt, d\tau), \quad (3.1)$$

где $\sigma^{2n}(dt, d\tau)$ — внешняя степень 2-формы $\sigma_{ij}\,dt^i \wedge d\tau^j$ (ориентация $\Sigma\times\Sigma$ задается формой σ^{2n}). Интеграл понимается как предел при $\varepsilon \to +0$ аналогичного интеграла с отрицательной добавкой $-\varepsilon g(t, t) - \varepsilon g(\tau, \tau)$ в показателе экспоненты. Если разложить $a(y+t)\,b(y+\tau)$ в формальный ряд Тейлора по t, τ и почленно проинтегрировать, то получится следующее разложение

$$(a \circ b)(y) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(-\frac{i\lambda}{2}\right)^k \sigma^{i_1 j_1}\sigma^{i_2 j_2} \ldots \\ \ldots \sigma^{i_k j_k} \frac{\partial^k a(y)}{\partial y^{i_1}\partial y^{i_2} \ldots \partial y^{i_k}} \frac{\partial^k b(y)}{\partial y^{j_1}\partial y^{j_2} \ldots \partial y^{j_k}},$$

которое для краткости будем записывать в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(-\frac{i\lambda}{2}\right)^k \langle \overset{k}{\otimes}\sigma^{-1},\, \partial^k a \otimes \partial^k b \rangle. \quad (3.2)$$

Здесь y^i, $i = 1, 2, \ldots, 2n$, — координаты вектора y в фиксированном базисе, через σ^{ij} обозначаются элементы матрицы σ^{-1}, обратной матрице σ_{ij} симплектической формы σ, по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до $2n$. Разложение является асимптотическим в том смысле, что для $a \in S^{m_1}$, $b \in S^{m_2}$ разность между $a \circ b$ и N-й частичной суммой ряда (3.2) принадлежит $S^{m_1+m_2-2N}$. Для многочленов разложение (3.2) является точным равенством. В частности,

$$y^i \circ y^j = y^i y^j - \frac{i\lambda}{2}\,\sigma^{ij},$$

откуда следуют перестановочные соотношения

$$[y^i,\ y^j] = y^i \circ y^j - y^j \circ y^i = -i\lambda\, \sigma^{ij}. \quad (3.3)$$

Умножение $\cdot$ задает в S^∞ структуру ассоциативной алгебры с единицей (функция, равная 1) и инволюцией, задаваемой комплексным сопряжением. Центр алгебры состоит, как легко видеть, только из констант.

Вещественные симплектические преобразования s пространства Σ порождают автоморфизмы A_s алгебры $S^\infty : (A_s a)(y) = a(s^{-1}y)$.

Для символов $a(y) \in S^m$, $m < -2n$, определим *след*

$$\operatorname{tr} a(y) = \frac{(2\pi\lambda)^{-n}}{n!} \int_\Sigma a(y)\, \sigma^n,$$

где σ^n — внешняя степень 2-формы $\sigma = \frac{1}{2}\sigma_{ji} dy^i \wedge dy^j$ (ориентация Σ задается формой σ^n). Пользуясь формулой для умножения (3.1), можно показать, что $\operatorname{tr} a \circ b = \operatorname{tr} a(y) b(y)$, где $a(y)b(y)$ — обычное произведение функций. Отсюда получаем, что след произведения не зависит от порядка двух сомножителей. Символы из $S^{-\infty}$ образуют идеал в S^∞, на котором след заведомо определен. Мы будем называть его *следовым идеалом*.

Введем теперь зависимость от параметра $x \in M$. Пусть M — многообразие, Σ — симплектическое расслоение над M. Тогда над M определяется локально тривиальное расслоение $S^\infty(\Sigma)$, слоем которого в точке x является алгебра $S^\infty(\Sigma_x)$, а функции перехода задаются автоморфизмами $A_{s(x)}$, где $s(x)$ — функция перехода расслоения Σ, принимающая значения в группе $\mathrm{Sp}(2n)$ симплектических линейных преобразований. Сечения расслоения $S^\infty(\Sigma)$ задаются гладкими функциями $a(x, y)$, $x \in M$, $y \in \Sigma_x$, которые при фиксированном x принадлежат $S^\infty(\Sigma_x)$ как функции y. Ясно, что послойное умножение $\circ$ инвариантно определено формулой (3.1), поскольку σ не меняется при симплектических преобразованиях.

Пусть ∂ — *симплектическая связность* в расслоении Σ, т. е. связность, сохраняющая симплектическую форму σ. Последнее означает, что для любых сечений u_1, u_2 расслоения Σ выполняется равенство

$$d\sigma(u_1, u_2) = \sigma(\partial u_1, u_2) + \sigma(u_1, \partial u_2).$$

Локальный репер $e_1, e_2, \ldots, e_{2n}$ расслоения Σ называется *симплектическим*, если коэффициенты $\sigma_{ij} = \sigma(e_i, e_j)$ постоянны. В локальном симплектическом репере связность ∂ задается матричной 1-формой Γ с элементами $\Gamma_j^{\,i}$, и условие симплектичности связности ∂ означает, что формы $\Gamma_{ij} = \sigma_{ik}\Gamma_j^{\,k}$ симметричны по индексам i, j.

Со связностью ∂ в расслоении Σ ассоциируется связность в расслоении алгебр $S^\infty(\Sigma)$ (обозначаемая той же буквой), которая в локальном симплектическом репере определяется аналогично (1.27)

$$\partial a = da + [\Gamma_w, a], \tag{3.4}$$

где d — дифференциал по переменным x, а $\Gamma_w = \frac{i}{2\lambda}\Gamma_{ij} y^i y^j$ — локальная 1-форма со значениями в $S^\infty(\Sigma)$, называемая *вейлевской формой связности*. Для локальных линейных форм $y^i = \sigma^{ik}\sigma(e_k, y)$, рассматриваемых как локальное сечение расслоения $S^\infty(\Sigma)$, ковариантный дифференциал ∂y^i, определяемый (3.4), совпадает с $-\Gamma^i_j y^j$ — ковариантным дифференциалом формы y^i, рассматриваемой как сечение расслоения, двойственного Σ. Для любого сечения $a \in C^\infty(S^\infty(\Sigma))$ имеем $\partial^2 a = [\Omega_w, a]$, где

$$\Omega_w = d\Gamma_w + \Gamma_w^2 = \frac{i}{2\lambda}\Omega_{ij} y^i y^j \tag{3.5}$$

— глобальная 2-форма со значениями в $S^\infty(\Sigma)$, называемая *вейлевской кривизной* связности ∂. Здесь $\Omega_{ij} = \sigma_{ik}\Omega_j^{\,k}$, где $\Omega_j^{\,k}$ — кривизна симплектической связности в расслоении Σ. Отметим, что форма Γ_w (а также и Ω_w) определяется неоднозначно, а с точностью до слагаемого со значениями в центре, и эта неоднозначность устраняется условием $\Gamma_w|_{y=0} = 0$ $(\Omega_w|_{y=0} = 0)$, которое будем называть *вейлевским условием нормировки*.

Рассмотрим теперь вопрос об операторных представлениях $S^\infty(\Sigma)$. Существует известное представление алгебры $S^\infty(\Sigma)$ с помощью вейлевских п. д. о. в $\mathbf{R}^n$ [46], но нам понадобится другое, а именно, представление в пространстве В. А. Фока.

На любом симплектическом расслоении существует эрмитова структура [50]. Это означает, что существует такое n-мерное комплексное расслоение E над M с эрмитовым скалярным произведением $\langle\ ,\ \rangle$, что Σ изоморфно овеществлению E, при этом $\sigma(u, v) = \operatorname{Im}\langle u, v\rangle$, а $g(u, v) = \operatorname{Re}\langle u, v\rangle$. На Σ имеется тем самым оператор J комплексной структуры, соответствующий умножению на i в комплексном расслоении E. При этом, очевидно,

$$g(u, v) = \sigma(Ju, v) = \sigma(u, Jv), \quad \sigma(u, v) = g(u, Jv) = -g(Ju, v)$$

и $J^2 = -1$.

Пусть z^α, $\bar{z}^\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ — комплексные координаты вектора $y \in \Sigma_x$ в ортонормированном репере e_α расслоения E. Рассматривая их как локальные сечения расслоения $S^\infty(\Sigma)$, получим

$$z^\alpha \circ z^\beta = z^\alpha z^\beta, \quad \bar{z}^\alpha \circ z^\beta = z^\alpha z^\beta + \lambda\delta^{\alpha\beta},$$

откуда получаем канонические перестановочные соотношения

$$[z^\alpha, z^\beta] = [z^\alpha, z^\beta] = 0, \quad [z^\alpha, z^\beta] = 2\lambda\delta^{\alpha\beta} \tag{3.6}$$

(ср. (1.26)).

Из формулы (3.1) для умножения следует равенство

$$\exp\left(-\frac{t_1}{\lambda}|y|^2\right) \circ \exp\left(-\frac{t_2}{\lambda}|y|^2\right) = (1 + t_1 t_2)^{-n} \exp\left(-\frac{t_1 + t_2}{1 + t_1 t_2}|y|^2\right).$$

при $t_1>0$, $t_2>0$, где $|y|^2=g(y,y)=z^\alpha\bar{z}^\alpha$. Разлагая по степеням t_1, получим равенство

$$|y|^2\circ\exp\left(-\frac{t}{\lambda}|y|^2\right)=\{(1-t^2)|y|^2+n\lambda t\}\exp\left(-\frac{t}{\lambda}|y|^2\right). \tag{3.7}$$

При $t_1=t_2=1$ получаем также, что функция $p_0(y)=2^n\exp\left(-\frac{1}{\lambda}|y|^2\right)\in S^{-\infty}$ обладает свойствами: $p_0\circ p_0=p_0$, $\operatorname{tr} p_0=1$, $\bar{z}^\alpha\circ p_0=p_0\circ z^\alpha=0$. Используя физическую терминологию, будем называть p_0 — *вакуумным проектором*, а z^α и $\bar{z}^\alpha$ — *операторами рождения и уничтожения*. При симплектических преобразованиях Σ, соответствующих унитарным преобразованиям пространства E, вакуумный проектор не меняется, так что p_0 определяет глобальное сечение расслоения $S^\infty(\Sigma)$. Для симплектической связности ∂ в расслоении Σ, соответствующей эрмитовой связности в расслоении E, ассоциированная связность в $S^\infty(\Sigma)$ обладает свойством $\partial p_0=0$.

Для симплектического пространства Σ с эрмитовой структурой определим *пространство Фока* F как левый идеал алгебры $S^\infty(\Sigma)$, порожденный вакуумным проектором. Для $u=a(y)\circ p_0(y)\in F$ и $v=b(y)\circ p_0(y)\in F$ определим скалярное произведение $(u,v)=\operatorname{tr} a(y)\circ p_0(y)\circ b^*(y)$. Пополняя F по этому скалярному произведению, получим гильбертово пространство F^2. Элементы вида $P(z^\alpha)\circ p_0$, где P — полином от операторов рождения, образуют плотное множество в F^2. Символ $b(y)\in S^\infty(\Sigma)$ определяет оператор в F, который на векторах $u=a(y)\circ p_0(y)$ действует левым умножением $bu=b(y)\circ a(y)\circ p_0(y)$. В частности, символ $p_0(y)$ определяет оператор проектирования на вектор $1\circ p_0(y)\in F$, называемый вакуумным вектором. Можно доказать, что при таком представлении символы из S^m $(m<-2n)$ переходят в ядерные операторы в F^2, и след в алгебре S^∞ совпадает с операторным следом.

Очевидным образом эти конструкции переносятся и на расслоения Σ, снабженные эрмитовой структурой, в результате получаем *расслоение Фока* над M, обозначаемое той же буквой F (или F^2). Вакуумный вектор определяет глобальное ненулевое сечение p_0 расслоения F.

Связность ∂ в расслоении $S^\infty(\Sigma)$, определенная формулой (3.4), порождает связность в расслоении F. Для сечения $u=a\circ p_0\in C^\infty(F)$ мы полагаем, аналогично (1.28), $\partial u=\partial(a\circ p_0)\circ p_0$. Если ∂ ассоциирована с эрмитовой связностью, то $\partial p_0=0$, и в локальном ортонормированном репере эрмитова расслоения E получаем

$$\partial u=du+\Gamma_w\circ a\circ p_0-a\circ p_0\circ\Gamma_w\circ p_0=du+(\Gamma_w-\operatorname{tr} p_0\circ\Gamma_w\circ p_0)\,u.$$

Форму $\Gamma_n=\Gamma_w-\operatorname{tr} p_0\circ\Gamma_w\circ p_0$ будем называть *виковской (нормальной) формой связности*. Она однозначно определяется виковским условием нормировки $\Gamma_n\circ p_0=p_0\circ\Gamma_n=0$. Соответствующая кривизна

$$\Omega_n=d\Gamma_n+\Gamma_n^2=\Omega_w-\operatorname{tr} p_0\circ\Omega_w\circ p_0$$

также удовлетворяет виковской нормировке $\Omega_n\circ p_0=p_0\circ\Omega_n=0$ и называется *виковской (нормальной) кривизной*. Если Ω^α_β — кривизна эрмитовой связности в комплексном расслоении E и $\Omega_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\gamma}\Omega^\gamma_\beta$, то

$$\Omega_n=-\frac{1}{2\lambda}\Omega_{\alpha\beta}z^\beta\circ\bar{z}^\alpha=\Omega_w+\frac{1}{2}\Omega^\alpha_\alpha. \tag{3.8}$$

Дадим теперь конструкцию фредгольмова семейства (см. § 2 главы 2) в фоковских расслоениях, связанного с образующей Ботта. Пусть E — комплексное эрмитово расслоение, Σ — симплектическое расслоение, полученное овеществлением E. На пространстве расслоения Σ рассмотрим гомоморфизм $b(z)=\varepsilon(z)+i(z)\colon\ \Lambda^+(E^*)\to\Lambda^-(E^*)$ (см. определение образующей Ботта в п. 3.3 главы 1). Вектор z рассматривается как вектор слоя E_x и одновременно его можно рассматривать как вектор слоя Σ_x. В ортонормированном репере e_α расслоения E имеем $b(z)=z^\alpha i(e_\alpha)+\bar{z}^\alpha\varepsilon(e_\alpha)$.

Рассмотрим теперь $b(z)$ как сечение расслоения алгебр Вейля $S^\infty(\Sigma)$, т. е. будем считать z^α и $\bar{z}^\alpha$ символами. Тогда мы получим семейство операторов

$$\beta=\{F^2\otimes\Lambda^+(E^*),\ F^2\otimes\Lambda^-(E^*),\ b\}. \tag{3.9}$$

Мы покажем, что ядро оператора $b(z)$ одномерно и порождается вакуумным вектором, а коядро тривиально. Вычислим квадрат оператора $b(z)$ в $F^2\otimes\Lambda(E^*)$, пользуясь (1.13) и перестановочными соотношениями (3.6). Имеем

$$\Delta=b\circ b=|z|^2+\lambda\delta^{\alpha\beta}(\varepsilon(e_\beta)i(e_\alpha)-i(e_\alpha)\varepsilon(e_\beta)).$$

Этот оператор отображает подпространство $F^2\otimes\Lambda^k(E^*)$ в себя и совпадает на нем с оператором $\Delta_k=|z|^2+\lambda(2k-n)$. При $k\neq 0$ оператор Δ_k обратим, и для обратного оператора имеем представление

$$\Delta_k^{-1}=\frac{1}{\lambda}\int_0^1 e^{-\frac{t}{\lambda}|z|^2}(1+t)^{n-k-1}(1-t)^{k-1}dt.$$

Проверка равенств $\Delta_k\circ\Delta_k^{-1}=\Delta_k^{-1}\circ\Delta_k=1$ несложно проводится с помощью формулы (3.7) и интегрирования по частям. При $k=0$ обратного не существует, так как Δ_0 аннулирует вакуумный вектор. Мы определяем квазиобратный оператор, полагая

$$\Delta_0^{-1}=\frac{1}{\lambda}\int_0^1\frac{e^{-\frac{t}{\lambda}|z|^2}-e^{-\frac{1}{\lambda}|z|^2}}{1-t}(1+t)^{n-1}dt,$$

который, как легко проверить, удовлетворяет соотношениям $\Delta_0\circ\Delta_0^{-1}=\Delta_0^{-1}\circ\Delta_0=1-p_0$.

Определим Δ^{-1} как прямую сумму $\overset{n}{\underset{k=0}{\oplus}}\Delta_k^{-1}$ и положим

$$b^{-1}=b\circ\Delta^{-1}:F^2\otimes\Lambda^-(E^*)\to F^2\otimes\Lambda^+(E^*).$$

Мы приходим к следующей теореме.

Теорема 3.1. Фредгольмово семейство $B=\{F^2\otimes\Lambda^+(E^*),\ F^2\otimes\Lambda^-(E^*),\ b(z),\ b^{-1}(z)\}$ расщепляется в прямую сумму $B=B_0\oplus B_1$, где $B_0=\{1,0,0,0\}$ и 1 обозначает тривиальное одномерное расслоение, порожденное вакуумным вектором в F^2, а B_1 — тривиальное бесконечномерное семейство в ортогональном дополнении. Связность ∂ сохраняет это расщепление и аннулирует вакуумный вектор.

1.2. Расслоение формальных алгебр Вейля. Пусть Σ — симплектическое расслоение размерности $2n$ над многообразием M, σ — симплектическая форма на слоях Σ. Определим *расслоение $W=W(\Sigma)$ формальных алгебр Вейля* над M следующим образом. Сечениями расслоения W являются «функции» $a(x,y,h)$, $x\in M$, $y\in\Sigma_x$, h — формальная переменная, понимаемые как формальные степенные ряды по h

$$a(x,y,h)=\sum h^k a_{k,l}(x,y)=\sum h^k a_{ki_1i_2\ldots i_l}(x)y^{i_1}y^{i_2}\ldots y^{i_l},\quad (3.10)$$

где $a_{k,l}(x,y)$ — гладкие комплексные функции на пространстве расслоения Σ, которые на слоях Σ_x являются однородными полиномами степени l (по повторяющимся индексам $i_1, i_2,\ldots,i_l$ производится суммирование от 1 до $2n$). Переменным y^i приписывается степень 1, переменной h — степень 2, члены ряда упорядочиваются по полной степени $2k+l$. Степени h могут быть положительными и отрицательными, но с условием, что все полные степени $2k+l$ ограничены снизу и для данной полной степени имеется лишь конечное число членов ряда. Сечения образуют ассоциативную алгебру над **C** с единицей относительно обычных операций сложения и умножения на число и произведения $a\circ b$, которое определяется по формуле, аналогичной (3.2), где ряды понимаются как формальные:

$$a(x,y,h)\circ b(x,y,h)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{ih}{2}\right)^k\frac{1}{k!}\left\langle \overset{k}{\otimes}\sigma^{-1},\ \partial_y^k a\otimes\partial_y^k b\right\rangle=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{ih}{2}\right)^k\frac{1}{k!}\sigma^{i_1j_1}\sigma^{i_2j_2}\ldots\sigma^{i_kj_k}\frac{\partial^k a}{\partial y^{i_1}\partial y^{i_2}\ldots\partial y^{i_k}}\,\frac{\partial^k b}{\partial y^{j_1}\partial y^{j_2}\ldots\partial y^{j_k}}.$$

Фиксируя точку $x\in M$, мы получим алгебру W_x — слой расслоения W в точке x.

Расслоение $W(\Sigma)$ имеет много общего с расслоением $S^\infty(\Sigma)$ вейлевских символов, которое рассматривалось в предыдущем пункте. Разница лишь в том, что числовой параметр $\lambda>0$ заменяется формальной переменной h, и рассматриваются «функции» h, которые являются формальными рядами Лорана по h с полиномиальными по y коэффициентами. Символ $b(z)$ из семейства Ботта B можно рассматривать и как сечение $W(\Sigma)$, в то время как его параметрикс $b^{-1}(z)\in C^\infty(S^\infty(\Sigma))$ нельзя рассматривать как сечение $W(\Sigma)$.

Для упрощения записи алгебра сечений $C^\infty(W)$ будет обозначаться просто через W, если это не вызовет недоразумений. Центр Z алгебры W состоит из сечений $a(x,h)$, не зависящих от y. Через $\varepsilon:W\to Z$ обозначим проекцию на центр: $\varepsilon(a(x,y,h))=a(x,0,h)$. В алгебре W имеется фильтрация $\ldots\supset W_{-1}\supset W_0\supset W_1\supset W_2\supset\ldots$ по наименьшей полной степени членов ряда. Аналогичная фильтрация имеется и в центре, но только по четным степеням.

В локальном репере расслоения Σ координаты векторов y $(i=1,2,\ldots,2n)$, рассматриваемые как линейные формы на слоях Σ_x, являются некоммутативными образующими алгебры W над центром, в том смысле, что любой моном $y^{i_1}y^{i_2}\ldots y^{l}$ равен симметризованному произведению $\circ$ образующих y^{i_1} $y^{i_2},\ldots,y^k$, т. е.

$$y^{i_1}y^{i_2}\ldots y^{i_k}=\frac{1}{k!}\sum_s y^{i_{s(1)}}\circ y^{i_{s(2)}}\circ\ldots\circ y^{i_{s(k)}},$$

где s — перестановка индексов $1,2,\ldots,k$. Следовательно, ряд 3.10) можно переписать также в виде

$$a=\sum a_{i_1i_2\ldots i_k}y^{i_1}\circ y^{i_2}\circ\ldots\circ y^{i_k},\quad (3.11)$$

где коэффициенты $a_{i_1i_2\ldots i_k}\in Z$ симметричны по индексам $i_1, i_2,\ldots,i_k$, и это представление единственно. Образующие y^i удовлетворяют перестановочным соотношениям, аналогичным (3.3):

$$[y^i,y^j]=-ih\sigma^{ij}(x).$$

Мы будем рассматривать также расслоение $W\otimes\Lambda$ дифференциальных форм со значениями в W. Рассмотрим сначала центральные формы. Дифференциальная p-форма со значениями в Z — это формальный ряд $\varphi=\sum_{k=-N}^{\infty}h^k\varphi_k$, где φ_k — скалярные дифференциальные p-формы на M. Внешнее произведение и внешний дифференциал таких форм определяются почленно.

Дифференциальная p-форма a со значениями в W локально задается рядом вида (3.11), где коэффициенты $a_{i_1i_2\ldots i_k}$ — локальные p-формы на M со значениями в Z и при линейной замене образующих y^i преобразуются как тензоры. Умножение

$a\circ b$ двух форм $a\in W\otimes\Lambda^p$ и $b\in W\otimes\Lambda^q$ определяется почленно

$$a\circ b=\sum_{k,l=0}^{\infty}a_{i_1i_2\ldots i_k}\wedge b_{j_1j_2\ldots j_l}\,y^{i_1}\circ y^{i_2}\circ\ldots\circ y^{i_k}\circ y^{j_1}\circ y^{j_2}\circ\ldots\circ y^{j_l},$$

а их коммутатор определяется равенством

$$[a,b]=a\circ b-(-1)^{pq}b\circ a.$$

Фильтрация W_k в алгебре W порождает фильтрацию $W_k\otimes\Lambda$ в алгебре $W\otimes\Lambda$ дифференциальных форм. Проекция $\varepsilon:W\otimes\Lambda\to Z\otimes\Lambda$ на центральные формы сопоставляет форме a вида (3.11) с симметричными коэффициентами $a_{i_1i_2\ldots i_k}$ член ряда с $k=0$.

Связностью в расслоении W называется линейное отображение $\mathscr{D}:W\otimes\Lambda^p\to W\otimes\Lambda^{p+1}$, удовлетворяющее условиям

1) $\mathscr{D}(a\circ b)=(\mathscr{D}a)\circ b+(-1)^p a\circ\mathscr{D}b$, где a — p-форма,

2) для центральных форм $\mathscr{D}$ совпадает с внешним дифференцированием.

Как и в п. 1.1 этой главы, с симплектической связностью ∂ в расслоении Σ ассоциируется связность, обозначаемая также через ∂, действующая на образующие y^i по правилу $\partial y^i=-\Gamma_j^i y^j$. Свойства 1), 2) обеспечивают однозначное распространение ∂ на любые сечения расслоения $W\otimes\Lambda$. В симплектическом локальном репере (для которого коэффициенты $\sigma_{ij}=\mathrm{const}$) связность ∂ записывается в виде, аналогичном (3.4),

$$\partial a=da+\left[\frac{i}{2h}\Gamma_{ij}y^iy^j,\ a\right],\quad \Gamma_{ij}=\sigma_{ik}\Gamma^k_j.$$

Произвольную связность $\mathscr{D}$ в расслоении $W\otimes\Lambda$ можно записать в виде

$\mathscr{D}a=d+[\Gamma,a]=\partial a+[\Delta\Gamma,a]$,

где $\Delta\Gamma$ — глобально определенная 1-форма со значениями в W, а $\Gamma=\frac{i}{2h}\Gamma_{ij}y^iy^j+\Delta\Gamma$ — локальная 1-форма, называемая *формой связности*. Формы Γ и $\Delta\Gamma$ определяются, вообще говоря, неоднозначно, а с точностью до центральных форм. Если не оговорено противное, мы будем считать, что Γ и $\Delta\Gamma$ удовлетворяют вейлевскому условию нормировки $\varepsilon\Gamma=\varepsilon\Delta\Gamma=0$. При необходимости подчеркнуть эту нормировку, будем писать Γ_w и $\Delta\Gamma_w$.

Кривизна (*вейлевская*) *связности* $\mathscr{D}$ определяется, как обычно, равенством

$$\Omega=\Omega_W=d\Gamma_W+\Gamma_W^2=\frac{i}{2h}\Omega_{ij}y^iy^j+\partial\Delta\Gamma_W+(\Delta\Gamma_W)^2,$$

где $\Omega_{ij}=\sigma_{ik}\Omega_j^k$ — кривизна симплектической связности ∂ в расслоении Σ с опущенным верхним индексом. Для кривизны справедливо тождество Бьянки $\mathscr{D}\Omega=0$ и соотношение $\mathscr{D}^2a=[\Omega,a]$, что устанавливается непосредственной проверкой.

1.3. Абелевы связности и квантование. В дальнейшем мы будем рассматривать связности $\mathscr{D}=\partial+[\Delta\Gamma,\cdot]$ более специального вида, где

$$\Delta\Gamma=\frac{i}{h}\sigma_{ij}y^i\theta^j+\zeta,$$

где θ^j — локальные скалярные 1-формы на M, а ζ — сечение расслоения $W_0\otimes\Lambda^1$, $\varepsilon\zeta=0$. Такие связности понижают фильтрацию не более, чем на 1. Таким образом,

$$\mathscr{D}a=-\delta a+\partial a+[\zeta,a],\tag{3.12}$$

где $\delta a=-\left[\frac{i}{h}\sigma_{ij}y^i\theta^j,\ a\right]=\theta^i\wedge\frac{\partial a}{\partial y^i}$. В частности,

$$\mathscr{D}y^i=-\theta^i-\Gamma^i_jy^j+[\zeta,y^i],$$

откуда видно, что при переходе к другому реперу $e_i'=e_js_i^j$ — расслоения Σ формы θ^i заменяются на формы $(\theta^i)'$, так что $\theta^i=s^i_j(\theta^j)'$. Следовательно, связность $\mathscr{D}$ вида (3.12) определяет гомоморфизм $\delta:\Sigma^*\to T^*M$ расслоения линейных форм Σ^* по формуле $\delta:y^i\mapsto\theta^i$. Связность $\mathscr{D}$ вида (3.12) называется *невырожденной*, если этот гомоморфизм является изоморфизмом. Таким образом, если в расслоении $W(\Sigma)$ над многообразием существует невырожденная связность $\mathscr{D}$, то касательное расслоение TM изоморфно Σ. В частности, $\dim M=\dim\Sigma=2n$. Расслоение Σ можно отождествить с TM, однако, по многим причинам удобнее этого не делать.

Для кривизны связности $\mathscr{D}$ получаем

$$\Omega=-\frac{i}{2h}\sigma_{ij}\theta^i\wedge\theta^j+\partial\left(\frac{i}{h}\sigma_{ij}y^i\theta^j\right)+\frac{i}{2h}\Omega_{ij}y^iy^j-\delta\zeta+\partial\zeta+\zeta^2.\tag{3.13}$$

Конструкция квантования, предлагаемая ниже, основана на понятии абелевой связности. Связность $\mathscr{D}$ в расслоении $W(\Sigma)$ называется *абелевой*, если ее кривизна является центральной формой (ср. п. 3.1 главы 1). Абелевость связности эквивалентна тому, что для любого сечения $\mathscr{D}^2a=0$.

Если связность $\mathscr{D}$ невырождена и абелева, то, в силу тождества Бьянки, $\mathscr{D}\Omega=0$ главный член в (3.13) $\frac{i}{2h}\sigma_{ij}\theta^i\wedge\theta^j$ степени -2 определяет невырожденную замкнутую 2-форму $\delta\sigma=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\theta^i\wedge\theta^j$ на M. Таким образом, невырожденная абелева связность может существовать только на симплектическом многообразии M. В этом пункте будет доказано существование невырожденных абелевых связностей для любого симплектического многообразия. Вырожденными абелевыми связностями мы специально заниматься не будем, хотя они представляют большой интерес. В следующем пункте в качестве побочного результата будет построена вырожденная абелева связность на многообразии вида $M\times\mathbf{R}$, где M — симплектическое многообразие. Отметим, что в расслоениях символов $S^\infty(\Sigma)$, рассматриваемых в п. 1, как правило, не существует абелевых связностей, и этим вызван переход к расслоениям формальных алгебр Вейля $W(\Sigma)$.

Теорема 3.2. Пусть отображение $\delta:\Sigma^*\to T^*M$ изоморфизм расслоений, и 2-форма $\delta\sigma=1/2\sigma_{ij}\theta^i\wedge\theta^j$ замкнута. Тогда для любой замкнутой центральной формы $\varphi\in Z_0\otimes\Lambda^2$ существует абелева связность $\mathscr{D}$ в расслоении $W(\Sigma)$ с вейлевской кривизной

$$\Omega=-\frac{i}{h}\delta\sigma+\varphi. \qquad (3.14)$$

Дадим доказательство теоремы. Введем локальный базис X_i векторных полей на M, так что $\theta^i(X_j)=\delta^i_j$, и определим два оператора δ и δ^* в расслоении форм $W\otimes\Lambda$. Оператор δ уже введен: $\delta a=\theta^i\wedge\frac{\partial a}{\partial y^i}$. Положим $\delta^* a=y^i i(X_i)a$, где $i(X_i)$ оператор подстановки вектора X_i в форму a (см. п. 3.3 главы 1), а умножение на y^i понимается в смысле обычного (коммутативного) произведения функций. Ясно, что $\delta^2=0$ и $(\delta^*)^2=0$. Определим также оператор $(\delta+\delta^*)^2=\delta\delta^*+\delta^*\delta$ аналогичный оператору Лапласа.

Любую форму $a\in W\otimes\Lambda$ можно записать в виде суммы слагаемых вида

$$a_{pq}=a_{i_1i_2\ldots i_p j_1j_2\ldots j_q}(x,h)\,y^{i_1}y^{i_2}\ldots y^{i_p}\theta^{j_1}\wedge\theta^{j_2}\wedge\ldots\wedge\theta^{j_q},$$

где коэффициенты принадлежат центру алгебры W. Непосредственный подсчет дает

$$(\delta\delta^*+\delta^*\delta)\,a_{pq}=(p+q)\,a_{pq}.$$

Определим теперь оператор δ^{-1}, полагая $\delta^{-1}a_{pq}=\frac{1}{p+q}\delta^* a_{pq}$ при $p+q>0$ и $\delta^{-1}a_{00}=0$. Операторы δ и δ^{-1} обладают свойствами

1) $\delta^2=0$, $(\delta^{-1})^2=0$;

2) δ понижает фильтрацию на 1, а δ^{-1} повышает фильтрацию на 1;

3) для любой формы справедливо разложение

$$a=\delta\delta^{-1}a+\delta^{-1}\delta a+a_{00}, \qquad (3.15)$$

аналогичное разложению Ходжа—де Рама (1.7). Отметим также, что δ является антидифференцированием алгебры $W\otimes\Lambda$, т. е. $\delta(a\circ b)=(\delta a)\circ b+(-1)^p a\circ\delta b$, где a — p-форма, а δ^{-1} таким свойством не обладает.

Пусть теперь $\mathscr{D}=-\delta+\partial+[\zeta,\cdot]$, где $\zeta\in W_0\otimes\Lambda^1$. Найдем ζ из условия совпадения выражений (3.13) и (3.14), и кроме того, потребуем, чтобы ζ удовлетворяла дополнительному условию

$$\delta^{-1}\zeta=0, \qquad (3.16)$$

которое автоматически обеспечивает вейлевскую нормировку $\varepsilon\zeta=0$. Тогда для ζ получаем уравнение

$$\delta\zeta=-\varphi+\partial\left(\frac{i}{h}\sigma_{ij}\theta^i y^j\right)+\frac{i}{2h}\Omega_{ij}y^iy^j+\partial\zeta+\zeta^2. \qquad (3.17)$$

Применяя оператор δ^{-1} и учитывая, что $\delta^{-1}\delta\zeta=\zeta$, в силу (3.15) и (3.16), получим

$$\zeta=\zeta_0+\delta^{-1}(\partial\zeta+\zeta^2), \qquad (3.18)$$

где

$$\zeta_0=\delta^{-1}\left(-\varphi+\partial\left(\frac{i}{h}\sigma_{ij}\theta^iy^j\right)+\frac{i}{2h}\Omega_{ij}y^iy^j\right).$$

Последнее уравнение решается итерациями

$$\zeta_{n+1}=\zeta_0+\delta^{-1}(\partial\zeta_n+\zeta_n^2)$$

с начальным членом ζ_0. Для разности $\zeta_{n+1}-\zeta_n$ имеем

$$\zeta_{n+1}-\zeta_n=\delta^{-1}\left(\partial(\zeta_n-\zeta_{n-1})+\frac{1}{2}[\zeta_n+\zeta_{n-1},\zeta_n-\zeta_{n-1}]\right),$$

откуда видно, что $\zeta_{n+1}-\zeta_n\in W_n\otimes\Lambda^1$, так что итерации сходятся.

Покажем, что форма ζ, определяемая таким образом, действительно дает абелеву связность с кривизной (3.14), т. е. удовлетворяет уравнению (3.17). Обозначим через Ω и Ω_0 выражения (3.13) и (3.14), и пусть $A=\Omega-\Omega_0$. Из конструкции ζ следует, что $\delta^{-1}A=0$. Действительно, из (3.18) получаем, что

$$\delta^{-1}(\Omega-\Omega_0)=\zeta-\delta^{-1}\delta\zeta=\delta\delta^{-1}\zeta=0,$$

в силу разложения (3.15). Из тождества Бьянки и замкнутости формы Ω_0 получаем $\mathscr{D}A=\mathscr{D}\Omega-d\Omega_0=0$, что в подробной записи дает

$$\delta A=\partial A+[\zeta,A].$$

Применяя оператор δ^{-1} и учитывая, что $\delta^{-1}\delta A=A$, в силу (3.15), получим уравнение

$$A=\delta^{-1}(\partial A+[\zeta,A]),$$

из которого следует, что $A=0$ в силу тех же итерационных соображений. Теорема доказана.

Сделаем несколько замечаний относительно обобщений теоремы 3.2 и свойств конструкции абелевой связности.

1. Конструкция связности $\mathscr{D}$ гладко зависит от параметра: если изоморфизм $\delta(t):\Sigma^*\to T^*M$ с замкнутой формой $\delta(t)\sigma$, симплектическая связность $\partial(t)$ в расслоении Σ и замкнутая 2-форма $\varphi(t)\in Z_0\otimes\Lambda^2$ гладко зависят от параметра t, то связность $\mathscr{D}(t)$ также гладко зависит от параметра.

2. Конструкция связности $\mathscr{D}$ обладает свойством «исправлять ошибки». Мы имеем в виду следующее. Выделим в ζ чле-

ны нулевой степени квадратичные по y^i, т. е. запишем ζ в виде $\frac{i}{2h}\zeta_{ij}y^iy^j+\Delta\zeta$. Тогда, как следует из конструкции $\Delta\zeta\in W_1\otimes\Lambda^1$. Квадратичные члены можно включить в симплектическую связность ∂. Другими словами, $\mathcal{D}=-\delta+\tilde{\partial}+[\Delta\zeta,\cdot]$, где $\tilde{\partial}=\partial+\left[\frac{i}{2h}\zeta_{ij}y^iy^j,\cdot\right]$ — другая симплектическая связность на Σ. Она удовлетворяет условию $\delta\tilde{\partial}+\tilde{\partial}\delta=0$ и индуцирует на M при отображении $\Sigma\to TM$ симплектическую связность без кручения.

Более внимательный анализ итераций показывает, что форма $\delta\sigma$ не обязана быть замкнутой, а лишь должна быть достаточно близкой к замкнутой форме. Точнее, теорема 3.2 справедлива в следующей усиленной форме.

Теорема 3.3. Пусть $\delta:\Sigma^*\to T^*M$ — изоморфизм, и пусть существует замкнутая форма $\varkappa=\frac{1}{2}\varkappa_{ij}\theta^i\wedge\theta^j$ такая, что форма $\delta\sigma-\varkappa$ и ее внешний дифференциал имеют достаточно малые коэффициенты. Тогда для любой замкнутой формы $\varphi\in Z_0\otimes\otimes\Lambda^2$ итерации уравнения (3.18), где

$$\zeta_0=\delta^{-1}\Big(-\frac{i}{h}(\delta\sigma-\varkappa)-\varphi+$$
$$+\partial\Big(\frac{i}{h}\sigma_{ij}\theta^iy^j\Big)+\frac{i}{2h}\Omega_{ij}y^iy^j\Big)$$

сходятся и определяют форму $\zeta\in W_{-1}\otimes\Lambda^1$, для которой связность (3.12) абелева с кривизной $-\frac{i}{h}\delta\sigma+\varphi$.

3. Конструкция обобщается на расслоения W с коэффициентами, которые сами образуют расслоение алгебр, например, с матричными коэффициентами, или с коэффициентами, которые являются гомоморфизмами векторных расслоений. Важный случай, используемый в дальнейшем — алгебра W с коэффициентами из расслоения символов Вейля $S^\infty(E)$, где E некоторое комплексное расслоение над M. Рассмотрим, например, алгебру W с коэффициентами в $\mathrm{Hom}(E,E)$ где E — комплексное векторное расслоение над M со связностью ∇. Абелева связность $\mathcal{D}$ в расслоении алгебр $W\otimes\mathrm{Hom}(E,E)$ ищется в виде, аналогичном (3.12).

$$\mathcal{D}a=-\delta a+(\partial\otimes1+1\otimes\nabla)a+[\zeta,a].$$

Для ζ получаем уравнение, аналогичное (3.18)

$$\zeta=\zeta_0+\delta^{-1}((\partial\otimes1+1\otimes\nabla)\zeta+\zeta^2),$$

где

$$\zeta_0=\delta^{-1}\Big(\varphi+\Omega_\nabla+\partial\Big(\frac{i}{h}\sigma_{ij}\theta^iy^j\Big)+\frac{i}{2h}\Omega_{ij}y^iy^j\Big).$$

Отметим, что в случае расслоения W с коэффициентами в расслоении $\mathrm{Hom}(E,E)$ понятие вейлевской нормировки локальной формы связности $\Gamma_\mathcal{D}$ требует некоторого уточнения. В дальнейшем мы считаем, что если связность $\mathcal{D}$ записывается локально в виде

$$\mathcal{D}=d+[\Gamma_\mathcal{D},\cdot],$$

то вейлевская нормировка означает, что $\Gamma_\mathcal{D}$ удовлетворяет условию $\varepsilon\Gamma_\mathcal{D}=\Gamma_\mathcal{D}|_{y=0}=\Gamma_\nabla$, где Γ_∇ — локальная форма связности ∇ в расслоении E, так что

$$\mathcal{D}=\nabla+[\Delta\Gamma_\mathcal{D},\cdot],$$

где $\varepsilon(\Delta\Gamma_\mathcal{D})=0$. При такой нормировке имеем

$$\Omega_\mathcal{D}=d\Gamma_\mathcal{D}+\Gamma_\mathcal{D}^2=\Omega_\nabla+\nabla(\Delta\Gamma_\mathcal{D})+$$
$$+(\Delta\Gamma_\mathcal{D})^2=-\frac{i}{h}\delta\sigma+\varphi,$$

и эту форму мы называем *вейлевской кривизной связности* $\mathcal{D}$.

4. Определим также абелеву связность $\mathcal{D}$ в расслоении W с коэффициентами в $\mathrm{Hom}(E^0,E^1)$. Пусть $\mathcal{D}_i=-\delta+(\partial\otimes1+1\otimes\nabla_i)+[\zeta_i,\cdot]$ — абелевы связности в $W\otimes\mathrm{Hom}(E^i,E^i)$, где $\delta^{-1}\zeta_i=0$, с одинаковой вейлевской кривизной $\Omega_0=\Omega_1=\Omega$. Положим для сечения $a\in W\otimes\mathrm{Hom}(E^0,E^1)$

$$\mathcal{D}a=-\delta a+(\partial\otimes1+1\otimes\nabla)a+\zeta_1\circ a-a\circ\zeta_0,$$

где ∇ — ковариантный дифференциал в $\mathrm{Hom}(E^0,E^1)$, определяемый ∇_0 и ∇_1. Тогда $\mathcal{D}^2a=\Omega_1a-a\circ\Omega_0=\Omega\circ a-a\circ\Omega=0$, так как Ω — центральная форма.

Замечание о вейлевской нормировке формы связности $\Gamma_\mathcal{D}$ из предыдущего пункта относится и к случаю расслоения W с коэффициентами в $\mathrm{Hom}(E^0,E^1)$. Именно, мы записываем связность $\mathcal{D}$ локально в виде

$$\mathcal{D}a=da+\Gamma_1\circ a-a\circ\Gamma_0$$

и вейлевская нормировка означает, что $\varepsilon\Gamma_1=\Gamma_{\nabla_1}$, $\varepsilon\Gamma_0=\Gamma_{\nabla_0}$, где Γ_{∇_i} — формы связности ∇_i в расслоении E^i. Тогда

$$\Omega_\mathcal{D}=d\Gamma_0+\Gamma_0^2=d\Gamma_1+\Gamma_1^2$$

называется *вейлевской кривизной связности* $\mathcal{D}$ в $W\otimes\otimes\mathrm{Hom}(E^0,E^1)$.

Продолжим изучение невырожденных абелевых связностей, построенных в теореме 3.2. Абелева связность порождает комплекс

$$\mathcal{D}:0\to W\to W\otimes\Lambda^1\to W\otimes\Lambda^2\to\ldots\to W\otimes\Lambda^{2n}\to0$$

и возникает вопрос о когомологиях этого комплекса.

Теорема 3.4. В условиях теоремы 3.2 существует биективное отображение $Q: W\otimes\Lambda^p\to W\otimes\Lambda^p$, сохраняющее фильтрацию, такое что $\mathscr{D}=-Q\delta Q^{-1}$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$a=b+\delta^{-1}(\mathscr{D}+\delta)a$$

относительно p-формы a, где b — заданная p-форма. Ясно, что оператор $\delta^{-1}(\mathscr{D}+\delta)$ повышает фильтрацию на 1, поскольку $\mathscr{D}+\delta$ сохраняет фильтрацию. Отсюда следует, что для любой формы $b\in W_k\otimes\Lambda^p$ существует единственное решение $a\in W_k\otimes\Lambda^p$ получаемое итерациями. Определим оператор Q, полагая $a=Qb$. Обратный к нему задается формулой

$$Q^{-1}a=a-\delta^{-1}(\mathscr{D}+\delta)a.$$

Докажем равенство $Q^{-1}\mathscr{D}+\delta Q^{-1}=0$, т. е. что

$$\mathscr{D}a-\delta^{-1}(\mathscr{D}+\delta)\mathscr{D}a+\delta a-\delta\delta^{-1}(\mathscr{D}+\delta)a=0$$

для любой формы a. Имеем $(\mathscr{D}+\delta)\mathscr{D}a=\delta\mathscr{D}a=\delta(\mathscr{D}+\delta)a$, так как $\mathscr{D}^2a=\delta^2a=0$. Тогда доказываемое равенство перепишется в виде

$$(\mathscr{D}+\delta)a=\delta^{-1}\delta(\mathscr{D}+\delta)a+\delta\delta^{-1}(\mathscr{D}+\delta)a.$$

Его справедливость вытекает из разложения (3.15), так как компонента типа $(0, 0)$ для формы $(\mathscr{D}+\delta)a$ равна 0.

Следствие. Комплекс $\mathscr{D}: W\otimes\Lambda^p\to W\otimes\Lambda^{p+1}$ точен при $p>0$, а при $p=0$ $\operatorname{Ker}\mathscr{D}$ совпадает с QZ, где Z — центр W.

Справедливость следствия вытекает из того, что оператор Q отображает комплекс $\mathscr{D}$ в комплекс $-\delta$, для которого утверждение очевидно в силу разложения (3.15).

Для заданной абелевой связности $\mathscr{D}$ назовем *квантовыми наблюдаемыми* плоские сечения $a\in W$, т. е. такие сечения, для которых $\mathscr{D}a=0$. Подалгебру $W_{\mathscr{D}}=\operatorname{Ker}\mathscr{D}\subset W$ плоских сечений назовем *алгеброй квантовых наблюдаемых.*

Обратимся теперь к примерам. Пусть M — симплектическое многообразие с симплектической формой $\sigma=1/2\sigma_{ij}dx^i\wedge dx^j$ $\Sigma=TM$, $\delta:\Sigma^*\to T^*M$ — тождественное отображение, ∂ — симплектическая связность на многообразии M без кручения, формы θ^i совпадают с dx^i, где x^i — локальные координаты на M. Уравнение (3.18) для ζ при $\varphi=0$ принимает вид

$$\zeta=\frac{i}{4h}\Omega_{ijkl}y^iy^jy^kdx^l+\delta^{-1}(\partial\zeta+\zeta^2),$$

где $\Omega_{ijkl}=\sigma_{im}\Omega^m_{jkl}$ — тензор кривизны связности ∂ с опущенным верхним индексом. Итерации дают разложение

$$\zeta=\frac{i}{4h}\Omega_{ijkl}y^iy^jy^kdx^l+\ldots$$

Для любого сечения $a\in Z$ плоское сечение $\hat{a}=Qa$ находится из уравнения

$$\hat{a}=a+\delta^{-1}(\partial\hat{a}+[\zeta, a]),$$

откуда итерациями получается разложение

$$\hat{a}=a+(\partial_ia)y^i+\frac{1}{2}(\partial_i\partial_ja)y^iy^j+\frac{1}{6}(\partial_i\partial_j\partial_ka)y^iy^jy^k-$$

$$-\frac{1}{24}\Omega_{ijkl}\sigma^{lm}(\partial_ma)y^iy^jy^k+\ldots,$$

где $\partial_i=i(X_i)\partial$ — ковариантная производная в направлении вектора $X_i=\dfrac{\partial}{\partial x^i}$.

Отображением, обратным к $Q:Z\to W_{\mathscr{D}}$, является $\varepsilon:\hat{a}\mapsto a=\varepsilon(\hat{a})=\hat{a}|_{y=0}$. С помощью этих отображений алгебру квантовых наблюдаемых можно отождествить с Z, при этом умножение $\circ$ в $W_{\mathscr{D}}$ переходит в умножение $*$ в Z, упомянутое во введении к этой главе: для $a, b\in Z$ мы полагаем $a*b=\varepsilon(\hat{a}\circ\hat{b})$. Из разложения для $\hat{a}=Qa$ вытекает, что

$$a*b-b*a=-ih\sigma^{ij}\partial_ia\partial_jb+\ldots=-ih\{a, b\}+\ldots,$$

т. е., что умножение $*$ удовлетворяет принципу соответствия. Отметим, однако, что удобнее работать непосредственно с алгеброй $W_{\mathscr{D}}$ и умножением $\circ$, чем с умножением $*$ в Z.

В случае, если связность ∂ имеет нулевую кривизну, можно написать полное разложение

$$\hat{a}=\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha!}(\partial^\alpha a)y^\alpha, \tag{3.19}$$

(α — мультииндекс), откуда для умножения $*$ получаем

$$a*b=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(-\frac{ih}{2}\right)^k\langle\overset{k}{\otimes}\sigma^{-1},\ \partial^k_xa\otimes\partial^k_xb\rangle. \tag{3.20}$$

Для $M=\mathbf{R}^{2n}$ или для тора $M=\mathbf{T}^{2n}$ со стандартной симплектической структурой и связностью $\partial=d$ ряд (3.19) совпадает с формальным рядом Тейлора для функции $a(x+y, h)$, а формула (3.20) совпадает с формулой композиции вейлевских символов (3.2). В общем случае плоские сечения не допускают такого простого истолкования. На интуитивном уровне истолкование состоит в следующем: связность $\mathscr{D}$ в алгебре W служит для того, чтобы сдвиги в слоях, которые для формальных алгебр Вейля не имеют смысла, заменить сдвигами по базе, и плоские сечения — это такие сечения, для которых такая замена допустима.

1.4. Автоморфизмы и гомотопии. Пусть $f: M\to M$ — диффеоморфизм многообразия M, $s=s_f:\Sigma\to\Sigma$ — симплектическое поднятие f на пространство расслоения Σ. Это означает, что слой Σ_x отображается в слой $\Sigma_{f(x)}$, причем отображение $s:\Sigma_x\to\Sigma_{f(x)}$ является изоморфизмом, сохраняющим симплектическую форму σ на слоях. Отображение s индуцирует автоморфизм A_s алгебры сечений расслоения $W(\Sigma)$

$$(A_s a)(x,y,h)=a(s^{-1}(x,y),h) \tag{3.21}$$

Помимо автоморфизмов (3.21) будем рассматривать *внутренние автоморфизмы* алгебры W, т. е. автоморфизмы вида $A_U a = U\circ a\circ U^{-1}$, где $U=1+V$, $V\in W_1$ — обратимый элемент алгебры W. Сечение U определяется автоморфизмом A неоднозначно, а с точностью до множителя вида $1+z$, где $z\in Z_2$. Мы всегда будем предполагать, что U — сечение, заданное глобально. При необходимости рассматривать локальные внутренние автоморфизмы мы будем это специально оговаривать.

Под *автоморфизмом алгебры* W будем понимать композицию автоморфизмов вида A_s и A_U. Те из них, для которых s является симплектическим поднятием тождественного отображения f, будем называть послойными. Любой автоморфизм можно распространить и на алгебру $W\otimes\Lambda$, полагая на центральных формах $A\varphi=(f^{-1})^*\varphi$.

Пусть ∂ — фиксированная симплектическая связность в расслоении Σ и ассоциированная с ней связность в расслоении W ($\partial y^i=-\Gamma^i_j y^j$), и пусть $A(t)$ — гладкое семейство автоморфизмов алгебры $W\otimes\Delta$. Непосредственное вычисление показывает, что если $a(t)=A(t)a$, где $a\in W\otimes\Lambda$, то производную $\dot a(t)=\frac{d}{dt}a(t)$ можно представить в виде

$$\dot a(t)=[H(t),a(t)]+(i(X(t))\partial+\partial i(X(t)))\,a(t), \tag{3.22}$$

где $X(t)=\dot f(t)$ — векторное поле на M, $H(t)=\frac{i}{2h}H_{ij}y^iy^j+\Delta H$, где $\Delta H\in W_1$ — некоторое сечение расслоения W, зависящее от t.

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 3.5. *Для любого векторного поля $X(t)$ на M и любого сечения $H(t)=\frac{i}{2h}H_{ij}y^iy^j+\Delta H$, $\Delta H\in W_1$ уравнение (3.22) имеет единственное решение $a(t)$ при данном начальном условии $a(0)\in W\otimes\Lambda$. При этом отображение $a\mapsto a(t)$ является автоморфизмом алгебры $W\otimes\Lambda$.*

Доказательство. Пусть сначала $\Delta H=0$, т. е. H — квадратично по y. Определим диффеоморфизм $s(t):\Sigma\to\Sigma$ как сдвиг по решениям системы дифференциальных уравнений

$$\dot x=X(t);\quad \frac{\partial y}{\partial t}=A(t)\,y,$$

где $\frac{\partial y}{\partial t}=i(X)\partial y$ — ковариантная производная вектора $y\in\Sigma_x$ вдоль кривой $x(t)$, $A(t)$ — голоморфизм Σ, задаваемый матрицей $A^i_j=-\sigma^{ik}H_{kj}$. Легко видеть, что $s(t)$ — симплектическое поднятие отображения $f(t)=x(t)$, определяемого векторным полем $X(t)$.

В общем случае сделаем в (3.22) замену $a(t)=A_{s(t)}b(t)$ где $s(t):\Sigma\to\Sigma$ — отображение, определяемое векторным полем $X(t)$ и квадратичной частью $H(t)$. Тогда для $b(t)$ получим уравнение

$$\dot b(t)=[\tilde H(t),b(t)],$$

где $\tilde H(t)\in W_1$. Такое уравнение сводится к интегральному

$$b(t)=b(0)+\int_0^t[\tilde H(\tau),b(\tau)]\,d\tau$$

и решается итерациями, которые сходятся и определяют единственное решение. Результат можно записать в виде $b(t)=U(t)b(0)U^{-1}(t)$ где $U(t)$ — решение уравнения

$$U(t)=1+\int_0^t\tilde H(\tau)\circ U(\tau)\,d\tau,$$

для которого итерации также сходятся, так как $\tilde H(\tau)\in W_1$.

Таким образом, отображение $a(0)\mapsto a(t)$ есть композиция внутреннего автоморфизма $A_{U(t)}$ и автоморфизма $A_{s(t)}$. Теорема доказана.

Выбор связности ∂ в (3.22) несущественен. Изменение формы связности на $\Delta\Gamma$ приводит к изменению H на $-i(X)\Delta\Gamma$.

Пусть $\mathscr{D}$ — невырожденная абелева связность вида (3.12) на симплектическом многообразии M. Для любого автоморфизма A связность $\mathscr{D}_A$, определяемая равенством $\mathscr{D}_A a=A\mathscr{D}(A^{-1}a)$ снова будет невырожденной абелевой связностью вида (3.12). Она называется *образом связности $\mathscr{D}$ при автоморфизме A*. Пусть далее $A(t)$ — семейство автоморфизмов и $A(0)$ — тождественный автоморфизм. Тогда получаем семейство связностей $\mathscr{D}_t=\mathscr{D}_{A(t)}=\partial+[\Delta\Gamma,\ \cdot]$. Мы подчиняем $\Delta\Gamma$ вейлевскому условию нормировки $\varepsilon(\Delta\Gamma)=0$ и определяем семейство вейлевских кривизн

$$\Omega(t)=\Omega_\partial+\partial(\Delta\Gamma)+(\Delta\Gamma)^2\in Z_{-2}\otimes\Lambda^2.$$

Все эти формы замкнуты и невырождены в том смысле, что члены $\Omega_0(t)$ нулевой степени формы $ih\Omega(t)$ определяют симплектическую форму на многообразии M.

Следующая теорема является основной в этом пункте.

Теорема 3.6. *Пусть $\Omega(t)\in Z_{-2}\otimes\Lambda^2$ — семейство невырожденных замкнутых форм, причем $\Omega(0)$ является кривизной не-*

вырожденной абелевой связности $\mathcal{D}$. Для того, чтобы существовало семейство автоморфизмов $A(t)$, $A(0)=1$, такое что форма $\Omega(t)$ является кривизной вязности $\mathcal{D}_t=\mathcal{D}_{A(t)}$, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое семейство центральных форм $\psi(t)\in Z_{-2}\otimes\Lambda^1$, что $\dot\Omega(t)=d\psi(t)$.

Другими словами, класс когомологий вейлевской кривизны связности $\mathcal{D}_{A(t)}$ постоянен.

Доказательство. Пусть $A(t)$ — семейство автоморфизмов, определяемое уравнением (3.22), $\mathcal{D}_t=\mathcal{D}_{A(t)}$ — семейство образов связности $\mathcal{D}$ при автоморфизмах $A(t)$. Заменяя в (3.22) связность ∂ связностью $\mathcal{D}_t$, получим уравнение аналогичного типа

$$\dot a(t)=[H(t),a(t)]+(i(X(t))\mathcal{D}_t+\mathcal{D}_t i(X(t))a(t), \qquad (3.23)$$

где $H(t)$ — сечение расслоения W вида

$$H(t)=\frac{i}{h}H_i y^i+\frac{i}{2h}H_{ij}y^iy^j+\Delta H,$$

$$\Delta H(t)\in W_1, \quad H(t)+i(X(t))\Delta\Gamma(t)\in W_0.$$

Такое сечение определяется однозначно семейством автоморфизмов, если наложить вейлевское условие нормировки $\varepsilon H(t)=0$.

Рассмотрим форму $A(t)\mathcal{D}a=\mathcal{D}_t a(t)$. Имеем $\frac{d}{dt}\mathcal{D}_t a(t)=$ $=[\Delta\dot\Gamma(t), a(t)]+\mathcal{D}_t\dot a(t)$. Подставляя для $\dot a$ выражение (3.23) и пользуясь тем, что $\mathcal{D}_t^2=0$, получим

$$\frac{d}{dt}\mathcal{D}_t a(t)=[\Delta\dot\Gamma(t), a(t)]+[\mathcal{D}_t H(t), a(t)]+$$
$$+[H(t),\mathcal{D}_t a(t)]+\mathcal{D}_t i(X)\mathcal{D}_t a(t).$$

С другой стороны, записывая (3.23) непосредственно для формы $A(t)\mathcal{D}a$, будем иметь

$$\frac{d}{dt}A(t)\mathcal{D}a=[H(t),\mathcal{D}_t a]+\mathcal{D}_t i(X)\mathcal{D}_t a(t).$$

Сравнивая эти два выражения, получим

$$[\mathcal{D}_t H(t)+\Delta\dot\Gamma(t), a(t)]=0$$

для любого сечения $a(t)$. Следовательно, 1-форма

$$\psi(t)=\mathcal{D}_t H(t)+\Delta\dot\Gamma(t)\in W_{-2}\otimes\Lambda^1$$

является центральной. Отсюда, в силу формулы для вариации кривизны связности (см. п. 3.1 главы I), $\dot\Omega(t)=\mathcal{D}_t\Delta\dot\Gamma(t)$, учитывая, что $\mathcal{D}_t^2H=0$, получаем $\dot\Omega(t)=d\psi(t)$. Таким образом, в одну сторону теорема доказана.

Для доказательства в обратную сторону установим сначала вспомогательное предложение, которое будет использоваться и в дальнейшем.

Лемма 3.1. Пусть $\mathcal{D}$ — невырожденная абелева связность с вейлевской кривизной Ω, $\Omega(t)\in Z_{-2}\otimes\Lambda^2$ — семейство невырожденных замкнутых 2-форм, $\Omega(0)=\Omega$. Тогда существует семейство невырожденных абелевых связностей $\mathcal{D}_t$, $\mathcal{D}_0=\mathcal{D}$ с вейлевской кривизной $\Omega(t)$.

Для доказательства достаточно построить изоморфизмы $\delta(t):\Sigma^*\to T^*M$, $\delta(0)=\delta$ так, чтобы $\Omega+\frac{i}{h}\delta(t)\sigma\in Z_0\otimes\Lambda^2$ (см. замечание 1 к теореме 3.2). Определим $\delta(t)$ как композицию $B(t)\delta$, где $B(t):T^*M\to T^*M$ — решение дифференциального уравнения $\dot B=C(t)B$, $B(0)=1$. $C(t)$ задается матрицей $C^i_j(t)=$ $=\frac{1}{2}\omega^{ik}(t)\dot\omega_{kj}(t)$, где ω_{ij} — матрица коэффициентов формы $\Omega_0(t)$ (член нулевой степени формы $ih\Omega(t)$), ω^{ij} — элементы обратной матрицы. Легко проверить, что $\delta(t)$ — требуемый изоморфизм.

Пусть $\mathcal{D}_t=\partial+[\Delta\Gamma(t),\ \cdot\,]$ — семейство связностей, построенное в лемме 3.1. Покажем, что если $\dot\Omega=d\psi$, то это семейство имеет вид $\mathcal{D}_{A(t)}$. Определим $H(t)$ из уравнения

$$\mathcal{D}_t H(t)=\psi(t)-\Delta\dot\Gamma(t).$$

Для его разрешимости, в силу следствия из теоремы 3.4, необходимо и достаточно, чтобы форма в правой части была плоской. Это условие выполнено, так как

$$\mathcal{D}_t(\psi(t)-\Delta\dot\Gamma(t))=d\psi(t)-\mathcal{D}_t\Delta\dot\Gamma(t)=d\psi(t)-\dot\Omega(t)=0.$$

В качестве $H(t)$ можно взять

$$\mathcal{D}_t^{-1}(\psi(t)-\Delta\dot\Gamma(t))=-Q_t\delta^{-1}Q_t^{-1}(\psi(t)-\Delta\dot\Gamma(t)).$$

Векторное поле $X(t)$ однозначно определяется из условия $i(X)\Delta\Gamma+H(t)\in W_0$. Уравнение (3.23) при таком выборе $H(t)$ и $X(t)$ сводится к (3.22) и тем самым определяет семейство автоморфизмов $A(t)$.

Осталось показать, что связности $\mathcal{D}_t$ и $\mathcal{D}_{A(t)}$ совпадают, т. е. что для любого сечения $a\in W\otimes\Lambda$ выполнено равенство $\mathcal{D}_t A(t)a=A(t)\mathcal{D}_0 a$. Так как форма $\mathcal{D}_t H(t)+\Delta\dot\Gamma(t)$ — центральная, то уравнения (3.23) для форм $\mathcal{D}_t A(t)a$ и $A(t)\mathcal{D}_0 a$ совпадают. Тогда из единственности решения вытекает требуемое равенство. Теорема доказана.

Применим теорему для исследования автоморфизмов, сохраняющих невырожденную абелеву связность $\mathcal{D}$, т. е. $\mathcal{D}_{A(t)}=\mathcal{D}$. Уравнение

$$\dot a=[H(t),a]+(i(X(t))\mathcal{D}+\mathcal{D}i(X(t)))a$$

определяет автоморфизм $A(t)$, сохраняющий связность $\mathcal{D}$, тогда и только тогда, когда форма $\mathcal{D}H$ является центральной. В частности, если

$$H=\frac{i}{h}H_0+\frac{i}{h}H_iy^i+\ldots\in W_{\mathcal{D}},$$

то $\mathcal{D}H=0$, а $X(t)$ — гамильтоново векторное поле на M с гамильтонианом H_0. На сечениях $a\in W_{\mathcal{D}}$ второй член в уравнении исчезает, и оно переходит в *уравнение Гейзенберга*

$$\dot{a}=[H, a]. \tag{3.24}$$

Как следствие получаем, что уравнение Гейзенберга в алгебре $W_{\mathcal{D}}$ однозначно разрешимо при данном начальном условии.

В общем случае условие $\mathcal{D}H=\varphi\in Z\otimes\Lambda^1$ означает следующее. Форма φ замкнута, так как $d\varphi=\mathcal{D}^2H=0$, следовательно, она локально имеет вид dH_0, где $H_0\in Z$. Тогда $H-H_0$ локально принадлежит алгебре $W_{\mathcal{D}}$. Добавка H_0 не влияет на уравнение Гейзенберга. Мы приходим к следующему утверждению.

Следствие. Любой автоморфизм $A(t)$ алгебры W, сохраняющий связность $A(t)$, локально определяется гамильтонианом $H(t)\in W_{\mathcal{D}}$.

В заключение этого пункта дадим интересную интерпретацию решений уравнения Гейзенберга в $W_{\mathcal{D}}$. Пусть $H(t)=\frac{i}{h}H_0+\frac{i}{h}H_iy^i+\frac{i}{2h}H_{ij}y^iy^j+\Delta H\in W_{\mathcal{D}}$, $\Delta H\in W_1$. Поднимем расслоения Σ и $W(\Sigma)$ на многообразие $M\times\mathbf{R}$. Введем в расслоении W над $M\times\mathbf{R}$ связность $\tilde{\mathcal{D}}=\mathcal{D}+dt\wedge\left(\frac{\partial}{\partial t}-[H(t), \cdot]\right)$. Легко видеть, что она абелева. Алгебра квантовых наблюдаемых $W_{\tilde{\mathcal{D}}}$ над $M\times\mathbf{R}$ состоит из сечений $a(x, y, t, h)$, для которых $\mathcal{D}a=0$ и $\dot{a}-[H, a]=0$. Таким образом, уравнение движения Гейзенберга можно записать как $\tilde{\mathcal{D}}a=0$ в расслоении W над $M\times\mathbf{R}$.

1.5. След в алгебре квантовых наблюдаемых. Пусть M, Σ, W, $\mathcal{D}$, $W_{\mathcal{D}}$ обозначают то же, что и выше, и пусть $W_{\mathcal{D}}^{\mathrm{comp}}$ — идеал в алгебре $W_{\mathcal{D}}$, состоящий из плоских сечений с компактным носителем. Через $L(h)$ обозначим множество формальных рядов Лорана по h с постоянными комплексными коэффициентами, содержащих конечное число членов с отрицательными степенями h. Мы построим линейный функционал $\mathrm{tr}: W_{\mathcal{D}}^{\mathrm{comp}}\to L(h)$, потребовав, чтобы выполнялись два условия:

1) tr — *функционал локального типа*, т. е. имеет вид $\int\limits_M G(a, \mathcal{D})$, где плотность G зависит от коэффициентов a и коэффициентов связности $\mathcal{D}$ и их производных полиномиально,

2) если A — автоморфизм алгебры W, $\mathcal{D}_A$ — образ связности $\mathcal{D}$ при этом автоморфизме, то

$$\int\limits_M G(a, \mathcal{D})=\int\limits_M G(Aa, \mathcal{D}_A).$$

Другими словами, при автоморфизмах след не меняется. В частности, если A не меняет связность $\mathcal{D}$, то a и Aa имеют одинаковые следы в алгебре $W_{\mathcal{D}}$. Поскольку инфинитезимально любой автоморфизм, сохраняющий связность $\mathcal{D}$, определяется гамильтонианом H с $\mathcal{D}H\in Z\otimes\Lambda^1$, то это приводит к условию $\mathrm{tr}[H, a]=0$. Отсюда следует, что $\mathrm{tr}[a, b]=0$ для любых $b\in W_{\mathcal{D}}$, $a\in W_{\mathcal{D}}^{\mathrm{comp}}$.

Из свойства линейности и локальности вытекает, что след достаточно определить для сечений $a\in W_{\mathcal{D}}$ с малыми носителями. В самом деле, если $\rho_i(x)$ — разбиение единицы на M, то полагая $\hat{\rho}_i=Q\rho_i(x)$ (определение Q см. в п. 1.3 этой главы), получим разбиение единицы в алгебре $W_{\mathcal{D}}$, при этом след сечения a равен сумме следов $\hat{\rho}_i\circ a$, имеющих малые носители.

Итак, рассмотрим сечения $a\in W_{\mathcal{D}}^{\mathrm{comp}}$ с носителями в достаточно малой координатной окрестности U многообразия M с локальными координатами x^i $(i=1, 2, \ldots, 2n)$. Выберем репер расслоения Σ над U, в котором симплектическая форма σ имеет постоянные коэффициенты σ_{ij}. Невырожденная абелева связность $\mathcal{D}$ в расслоении W в этом репере записывается в виде

$$\mathcal{D}=-\delta+d+[\zeta, \cdot],$$

где $\delta y^i=\theta^i=\theta^i_j(x)\,dx^j$, $\zeta\in W_0\otimes\Lambda^1$. Пусть $\Omega=-\frac{i}{h}\delta\sigma+\varphi$ — вейлевская кривизна $\mathcal{D}$, $\delta\sigma=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\theta^i\wedge\theta^j$ — замкнутая 2-форма, $\varphi\in Z_0\otimes\Lambda^2$ — также замкнута. Не ограничивая общности, считаем, что локальные координаты выбраны так, что $\theta^i_j(0)=\delta^i_j$. Введем стандартную абелеву связность $\mathcal{D}_0=-\delta_0+d$, где $\delta_0y^i=dx^i$, в расслоении W над U с кривизной

$$\Omega_0=-\frac{i}{h}\delta_0\sigma=-\frac{i}{2h}\sigma_{ij}dx^i\wedge dx^j.$$

Положим

$$\delta(t)=(1-t)\delta+t\delta_0,\quad \Omega(t)=(1-t)\Omega+t\Omega_0.$$

В достаточно малой окрестности U отображение $\delta(t)$ невырождено, форма $\delta(t)\sigma-ih\Omega(t)$ и ее дифференциал имеют достаточно малые коэффициенты, поэтому, в силу теоремы 3.3, существует абелева связность $\mathcal{D}_t$ с кривизной $\Omega(t)$, соединяющая связности $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_0$. При этом $\dot{\Omega}(t)=\Omega-\Omega_0=d\psi$, поскольку в окрестности U любая замкнутая форма точна. По теореме 3.6, существует семейство автоморфизмов $A(t)$ расслоения W над окрестностью U, такое, что $\mathcal{D}_t$ есть образ связности $\mathcal{D}_0$ при автоморфизме $A(t)$.

В силу свойства 2) следа, получим, что следы сечений $a\in W_{\mathcal{D}}^{\mathrm{comp}}$ и $A(1)a\in W_{\mathcal{D}_0}^{\mathrm{comp}}(U)$ обязаны совпадать. Таким образом, задача о построении следа в алгебре $W_{\mathscr{D}}$ сводится к локальной задаче о построении следа в алгебре $W_{\mathscr{D}_0}(U)$, инвариантного относительно автоморфизмов $A(t)$, сохраняющих связность $\mathscr{D}_0$. Свойство инвариантности эквивалентно условию $\operatorname{tr}[a, b]=0$ для любых $a\in W^{\mathrm{comp}}_{\mathscr{D}_0}(U)$ и $b\in W_{\mathscr{D}_0}(U)$ в силу следствия из теоремы 3.6. Решение такой задачи единственно с точностью до нормировки и дается формулой

$$\operatorname{tr} a=\frac{1}{(2\pi h)^n}\int\limits_U \varepsilon(a)\frac{(\delta_0\sigma)^n}{n!}$$

где интеграл от формального ряда $\varepsilon(a)\in Z$ понимается как почленный. Действительно, для связности $\mathscr{D}_0$ алгебра $W_{\mathscr{D}_0}$ с умножением $\circ$ изоморфна алгебре Z с умножением $*$ (см. п. 1.3). Имеем $x^i\circ a-a\circ x^i=-ih\frac{\partial a}{\partial x^j}\sigma^{ij}$. Так как след коммутатора должен равняться 0, то это значит, что следы элементов вида $\frac{\partial a}{\partial x^i}\in Z$ равны 0. Но тогда $\operatorname{tr} a$ должен иметь вид $c(h)\int\limits_U a(x, h)\,dx$. Множитель $c(h)$ выбран так, чтобы выражение для следа совпадало с выражением для следа в алгебре символов Вейля $S^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ с заменой параметра λ на формальный параметр h.

Так определенный след действительно обладает свойством $\operatorname{tr}[a, b]=0$, поскольку $\varepsilon(a\circ b)=\varepsilon(a)*\varepsilon(b)$, что совпадает с обычным коммутативным произведением $\varepsilon(a)\varepsilon(b)$ с точностью до членов, которые являются полными производными.

Конструкция следа и его свойства остаются в силе и для алгебры $W_{\mathscr{D}}$ с коэффициентами в алгебре матриц, или в расслоениях $\operatorname{Hom}(E, E)$. Единственное изменение состоит в том, что вместо $\varepsilon(a)$ нужно интегрировать $\operatorname{tr}_0\varepsilon(a)$, где tr_0 — след в алгебре коэффициентов.

§ 2. Теорема об индексе в алгебре квантовых наблюдаемых

2.1. Индекс в алгебре $W_{\mathscr{D}}$ и его свойства. В этом параграфе мы будем рассматривать расслоения формальных алгебр Вейля $W(\Sigma)\otimes\operatorname{Hom}(E^i, E^j)$ $(i, j=0, 1)$ над симплектическим многообразием M с коэффициентами в расслоении $\operatorname{Hom}(E^i, E^j)$, где E^i, E^j — векторные расслоения над M. Для краткости будем обозначать их через $W(E^i, E^j)$. Пусть $\delta:\Sigma^*-T^*M$ — изоморфизм, и 2-форма $\delta\sigma=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\theta^i\wedge\theta^j$ замкнута. Тогда (см. замечание 4 к теореме 3.2) существует невырожденная абелева связность в расслоении $W(E^i, E^j)$

$$\mathscr{D}=-\delta+\partial\otimes 1+1\otimes\nabla+[\zeta, \cdot],$$

где ∇ — связность в $\operatorname{Hom}(E^i, E^j)$, $\zeta\in W_0\otimes\Delta^2$, $\varepsilon\zeta=0$ с вейлевской кривизной $\Omega=-\frac{1}{h}\delta\sigma$. Соответствующая алгебра плоских сечений $W_{\mathscr{D}}(E^i, E^j)$ называется *алгеброй квантовых наблюдаемых с коэффициентами* в $\operatorname{Hom}(E^i, E^j)$.

Сечение $A\in W_{\mathscr{D}}(E^0, E^1)$ назовем *эллиптическим*, если существует такое сечение $R\in W_{\mathscr{D}}(E^1, E^0)$, для которого $1-R\circ A\in W^{\mathrm{comp}}_{\mathscr{D}}(E^0, E^0)$ и $1-A\circ R\in W^{\mathrm{comp}}_{\mathscr{D}}(E^1, E^1)$. Таким образом, эллиптическое сечение определяет набор $\Xi=\{1, 1, A, R\}$, аналогичный семейству фредгольмовых операторов (см. § 2 главы 2). По аналогии с формулой (1. 8) определим

$$\operatorname{ind} A=\operatorname{tr}(1-R\circ A)-\operatorname{tr}(1-A\circ R),$$

где след берется в $W^{\mathrm{comp}}_{\mathscr{D}}$. Будет употребляться также обозначение $\operatorname{ind}\Xi$.

Можно рассматривать и более общие наборы $\Xi=\{P^0, P^1, A, R\}$, где $P^i\in W_{\mathscr{D}}(E^i, E^i)$ — идемпотенты: $(P^i)^2=P^i$, а $A\in W_{\mathscr{D}}(E^0, E^1)$ и $R\in W_{\mathscr{D}}(E^1, E^0)$ удовлетворяют условиям, аналогичным (2.10), (2.11). Для простоты изложения мы ограничимся случаем $P^i=1$. Результаты остаются справедливыми и в общем случае.

Пусть $\varepsilon A=h^{-N}a(x)+\ldots$, где многоточием обозначены члены более высоких степеней по h. Функция $a(x)$ со значениями в $\operatorname{Hom}(E^0, E^1)$ называется *главным членом сечения* A. Легко видеть, что эллиптичность A эквивалентна тому, что $a(x)$ является изоморфизмом вне компакта. Таким образом, главный член аналогичен главному символу эллиптического оператора.

Точно так же, как и для эллиптических операторов, доказывается, что индекс обладает логарифмическим свойством и свойством устойчивости (п. 1.2 главы 1). Специфическим свойством индекса является устойчивость при деформациях абелевой связности $\mathscr{D}$, при которых сохраняется класс когомологий кривизны и ее невырожденность. Это вытекает из соответствующего свойства следа. Таким образом, индекс зависит только от класса когомологий вейлевской кривизны, т. е. от класса когомологий симплектической формы $\delta\sigma$ на M и от класса виртуальной тройки $\xi=\{E^0, E^1, a(x)\}$ в $K^{\mathrm{comp}}(M)$.

Свойство мультипликативности также имеет место, но в редакции, более близкой к § 2 главы 2. Рассмотрим два симплектических многообразия с соответствующими квантовыми структурами: M_i, Σ_i, E^j_i, $\mathscr{D}_i$, $W_{\mathscr{D}_i}(E^j_i, E^k_i)$ $(i=1, 2;\ j, k=0, 1)$. Пусть $\mathscr{E}^0=(E^0_1\otimes E^0_2)\oplus(E^1_1\otimes E^1_2)$, $\mathscr{E}^1=(E^1_1\otimes E^0_2)\oplus(E^0_1\otimes E^1_2)$. Тогда над многообразием $M=M_1\times M_2$ определены расслоения формальных алгебр Вейля $W(\mathscr{E}^i, \mathscr{E}^j)$, которые можно задать с помощью тензорных произведений $W(E_1{}^i, E_1{}^j)\otimes W(E_2{}^k, E_2{}^l)$ и их прямых сумм. Абелевы связности $\mathscr{D}$ в расслоениях $W(\mathscr{E}^i, \mathscr{E}^j)$ определяются как связности в тензорных произведениях: $\mathscr{D}=\mathscr{D}_1\otimes 1+1\otimes\mathscr{D}_2$. Для эллиптических наборов $\Xi_i=\{1, 1, A_i, R_i\}$ в алгебрах $W\mathscr{D}_i$ над многообразиями M_i определим тензорное произведение по формулам, аналогичным (2.6):

$$\Xi=\Xi_1\otimes\Xi_2=\{1, 1, \mathscr{A}, \mathscr{R}\}, \quad \text{где}$$

$$\mathscr{A}=\begin{pmatrix} A_1\otimes(1-R_2\circ A_2)-1\otimes R_2 \\ 1\otimes A_2 \quad R_1\otimes 1\end{pmatrix},$$

$$\mathscr{R}=\begin{pmatrix} R_1\otimes 1 & 1\otimes R_2 \\ -1\otimes A_2 & A_1\otimes(1-A_2\circ R_2)\end{pmatrix}. \tag{3.25}$$

Тогда, учитывая очевидное равенство $\operatorname{tr} T_1\otimes T_2=\operatorname{tr} T_1 \operatorname{tr} T_2$, где $T_i\in W_{\mathscr{D}_i}^{\text{comp}}$, получаем, что $\operatorname{ind}\Xi=\operatorname{ind}\Xi_1 \operatorname{ind}\Xi_2$.

Сформулируем теперь теорему об индексе в алгебре квантовых наблюдаемых, аналогичную теореме Атьи—Зингера. Пусть $d(A)$ — класс в $K^{\text{comp}}(M)$ виртуального расслоения с компактным носителем $\xi=\{E^0, E^1, a(x)\}$, определяемого главным членом $a(x)$. Через ω обозначим, как обычно, форму $-\frac{1}{2\pi i}\Omega=\frac{\delta\sigma}{2\pi h}$.

Теорема 3.7. Справедлива формула

$$\operatorname{ind} A=\int_M \operatorname{ch} d(A)\, e^{\omega} A(\Sigma), \tag{3.26}$$

где $A(\Sigma)$ — A-класс расслоения Σ.

Здесь e^{ω} — степенной ряд по степеням $1/2\pi h$, который обрывается из-за конечномерности многообразия M. Таким образом, $\operatorname{ind} A$ — это полином от $1/h$, степени не выше $n=\frac{1}{2}\dim M$.

В общем случае, когда $\Omega=-\frac{i}{h}\delta\sigma+\varphi$, где $\varphi\in Z_0\otimes\Lambda^2$, формула (3.26) также справедлива, и в этом случае индекс — это формальный ряд Лорана, начинающийся со степени h^{-n}.

Формула (3.26) может быть записана в другом виде, иногда более удобном для приложений. Напомним, что симплектическое расслоение Σ допускает эрмитову структуру, т. е. является овеществлением n-мерного комплексного эрмитова расслоения E. Тогда комплексификация Σ изоморфна $E\oplus E^*$, и в силу мультипликативности A-класса получим $A(\Sigma)=A(E)A(E^*)$. Так как функция $t/2/\operatorname{sh} t/2$ — четная, то $A(E^*)=A(E)$ (см. свойства характеристических классов п. 3.1 главы 1). Таким образом, класс $A(\Sigma)$ задается формой

$$\det\frac{\omega(E)}{e^{\omega(E)/2}-e^{-\omega(E)/2}}=\det e^{-\frac{\omega(E)}{2}}\mathscr{T}(E)=e^{-\frac{1}{2}c_1(E)}\mathscr{T}(E),$$

где $\omega(E)$ — кривизна эрмитовой связности в расслоении E, деленная на $-2\pi i$, $c_1(E)$ — первый класс Чженя, расслоения E. Формула (3.26) переписывается в виде

$$\operatorname{ind} A=\int_M \operatorname{ch} d(A)\, e^{\omega-\frac{1}{2}c_1(E)}\mathscr{T}(E). \tag{3.27}$$

Покажем, что если многообразие M является пространством кокасательного расслоения T^*X n-мерного многообразия X с симплектической формой $d\xi_i\wedge dx^i$ (суммирование от 1 до n), то формула (3.27) переходит в формулу Атьи—Зингера. Действительно, расслоение Σ изоморфно $TM=T(T^*X)\approx TX\oplus TX$. Форма $\delta\sigma=d\xi_i\wedge dx^i$ точна, так что ее класс когомологий в $H(M)$ равен 0. Расслоение E изоморфно вещественному расслоению TX, откуда следует, что $c_1(E)=0$. Таким образом, форма $\omega-\frac{1}{2}c_1(E)$ когомологична 0, и мы получаем формулу Атьи—Зингера. Индекс в этом случае не зависит от h и является целым числом.

2.2. Набросок доказательства теоремы. Основные шаги доказательства теоремы такие же, как в доказательстве теоремы Атьи—Зингера [23]. Имеется, однако, своя специфика, связанная с тем, что элементы алгебры $W\mathscr{D}$ не являются операторами, поэтому все соображения, основанные на существовании конечномерного ядра и коядра, здесь неприменимы. С другой стороны некоторые вопросы при чисто алгебраическом подходе проще, чем при операторном. Так, например, обычные трудности, связанные с отсутствием спинорной структуры (см. [29], [41]), здесь не возникают.

В основе доказательства лежит конструкция *гомоморфизма Тома* в алгебре квантовых наблюдаемых, аналогичная гомоморфизму Тома в K-теории (п. 3.3 главы 1).

Первый шаг. Пусть над симплектическим многообразием M задана квантовая структура, состоящая из симплектического расслоения Σ, изоморфизма $\delta:\Sigma^*\to T^*M$, для которого форма $\delta\sigma=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\theta^i\wedge\theta^j$ замкнута, расслоений алгебр коэффициентов $\operatorname{Hom}(E^i, E^j)$ и расслоения формальных алгебр Вейля $W=W(M)$ с коэффициентами в этих алгебрах. Кроме того, в W задана невырожденная абелева связность $\mathscr{D}=-\delta+\partial+[\zeta, \cdot]$ с вейлевской кривизной $\Omega=\Omega_W=-\frac{i}{h}\delta\sigma$.

Рассмотрим также комплексное эрмитово расслоение E над M с эрмитовой связностью ∇. Тогда (см. п. 1.1 этой главы) определено расслоение Фока $F(E)$ и вакуумный вектор p_0. В расслоении $F=F(E)\otimes\Lambda(E^*)$ действует расслоение алгебр $S^\infty(E)$ с коэффициентами в $\operatorname{Hom}(\Lambda(E^*), \Lambda(E^*))$. Со связностью ∇ в расслоении E ассоциируются связности в расслоении F и в расслоении $S^\infty(E)$, для которых используется то же обозначение ∇. Кривизна $\Omega_\nabla\in S^\infty(E)\otimes\Delta^2$ удовлетворяет виковской нормировке: $\Omega_\nabla \circ p_0 = p_0 \circ \Omega_\nabla = 0$, где p_0 — вакуумный проектор в $S^\infty(E)$. Такому же условию удовлетворяет и локальная форма связности Γ_∇ в расслоении F.

Рассмотрим теперь расслоение алгебр Вейля $W(M)\otimes S^\infty(E)$ с коэффициентами в $S^\infty(E)$. Его сечения a — это «функции» $a(x, y, z, h, \lambda)$ ($x\in M$, $y\in\Sigma_x$, $z\in E_x$, $\lambda>0$ — параметр алгебр $S^\infty(E)$), которые по y, h являются формальными степенными рядами. Построим в $W(M)\otimes S^\infty(E)$ невырожденную абелеву связность $\mathscr{D}_1$ с той же кривизной $\Omega_{\mathscr{D}_1} = \Omega_{\mathscr{D}} = -\frac{1}{h}\delta\sigma$, полагая

$$\mathscr{D}_1(a\otimes b) = \mathscr{D}a\otimes b + a\otimes\nabla b + [\zeta_1, a\otimes b],$$

где ζ_1 — 1-форма на M со значениями в $W_0\otimes S^\infty(E)$, удовлетворяющая условию $\delta^{-1}\zeta_1=0$. Как и в теореме 3.2 (см. также замечание 3 к этой теореме), ζ_1 находится итерациями из уравнения

$$\zeta_1 = \delta^{-1}(1\otimes\Omega_\nabla) + \delta^{-1}\{((\mathscr{D}+\delta)\otimes 1 + 1\otimes\nabla)\,\zeta_1 + \zeta_1^2.\}$$

Из (3.8) видно, что начальная итерация $\delta^{-1}(1\otimes\Omega_\nabla)$ является комбинацией вейлевских символов вида $z^\alpha\circ\bar z^\beta$, где на первом месте стоит оператор рождения, а на последнем — оператор уничтожения. Отсюда следует, что форма ζ_1 также будет состоять из слагаемых, содержащих произведения вида $z^{\alpha_1}\circ\bar z^{\beta_1}\circ\ldots\circ z^{\alpha_k}\circ\bar z^{\beta_k}$, где на первом месте стоит оператор рождения, а на последнем — уничтожения. Отсюда также видно, что параметр λ входит в члены ζ_1 данной степени по y, h в виде лорановского полинома. Если $a\in W$ и $p_0\in S^\infty(E)$ — вакуумный проектор, то из сказанного следует, что $\zeta_1\circ(a\otimes p_0) = (a\otimes p_0)\circ\zeta_1 = 0$. Таким образом, для любого плоского сечения $a\in W_{\mathscr{D}}$ имеем

$$\mathscr{D}_1(a\otimes p_0) = \mathscr{D}a\otimes p_0 + a\otimes\nabla p_0 = 0, \tag{3.28}$$

т. е. $a\otimes p_0\in(W\otimes S^\infty)_{\mathscr{D}_1}$ является плоским сечением относительно связности $\mathscr{D}_1$. Ясно также, что $\operatorname{tr}(a\otimes p_0)$ в алгебре $(W\otimes S^\infty)_{\mathscr{D}_1}$ совпадает со следом $\operatorname{tr} a$ в алгебре $W_{\mathscr{D}}$ для $a\in W_{\mathscr{D}}^{\mathrm{comp}}$, так как $\operatorname{tr} p_0 = 1$ в алгебре коэффициентов $S^\infty(E_x)$.

Пусть теперь $\Xi=\{1, 1, A, R\}$ — *эллиптический набор* в $W_{\mathscr{D}}$, $B=\{F(E)\otimes\Lambda^+(E^*), F(E)\otimes\Lambda^-(E^*), b(z), b^{-1}(z)\}$ — фредгольмово семейство, соответствующее образующей Ботта (п. 1.1 этой главы). По теореме 3.1, оно расщепляется в прямую сумму $B_0\oplus B_1$, где $B_0=\{p_0, 0, 0, 0\}$, а $B_1=\{1-p_0, 1, b, b^{-1}\}$ — тривиальное бесконечномерное семейство. Тогда тензорное произведение $\Xi\otimes B$ в расслоении $W\otimes S^\infty$, определенное формулами (3.25), также расщепляется в прямую сумму $\Xi\otimes B_0$ и $\Xi\otimes B_1$. Сечения $\mathscr{A}$ и $\mathscr{R}$ в наборе $\Xi\otimes B$, вообще говоря, не будут плоскими, т. е. не принадлежат алгебре $(W\otimes S^\infty)_{\mathscr{D}_1}$. Поэтому мы определяем сечение $\hat{\mathscr{A}}$ процедурой квантования (теорема 3.4) с помощью итераций

$$\hat{\mathscr{A}} = \mathscr{A} + \delta^{-1}((\mathscr{D}_1+\delta)\,\hat{\mathscr{A}}).$$

В результате получаем эллиптический набор $\Xi\hat\otimes B\in(W\otimes S^\infty)_{\mathscr{D}_1}$. При этом слагаемое $\Xi\otimes B_0$ не меняется, так как оно уже является плоским относительно связности $\mathscr{D}_1$, в силу (3.28), а слагаемое $\Xi\otimes B_1$, хотя и меняется, но остается тривиальным. Отсюда получаем

$$\operatorname{ind}\Xi\hat\otimes B = \operatorname{ind}\Xi\otimes B_0 = \operatorname{ind}\Xi, \tag{3.29}$$

где левая часть вычисляется в алгебре $(W\otimes S^\infty)_{\mathscr{D}_1}$, а правая часть — в алгебре $W_{\mathscr{D}}$. Отметим, что левая часть тем самым не зависит от параметра λ.

Второй шаг. Прежде всего заменим точный параметрикс $b^{-1}(z)$, построенный в п. 1.1 этой главы, приближенным параметриксом $r(z)$, в который параметр λ входит в виде лорановского полинома. Для этого умножим $b^{-1}(z)$ на срезающий символ $\rho(z)$, равный 0 в окрестности $z=0$, не зависящий от λ. Тогда $\rho\circ b^{-1}$ допускает асимптотическое разложение по степеням λ при $\lambda\to 0$. В качестве приближенного параметрикса $r(z,\lambda)$ берем достаточно большой конечный отрезок этого разложения. В силу устойчивости индекса такая замена не повлияет на $\operatorname{ind}\Xi\hat\otimes B$, но теперь $\Xi\hat\otimes B$ является лорановским полиномом по λ.

В каждом слое E_x расслоение E рассмотрим расслоение $W(E_x)$ формальных алгебр Вейля относительно симплектической формы $\sigma(\eta_1, \eta_2) = \operatorname{Im}\langle\eta_1, \eta_2\rangle$, где $\langle\ ,\ \rangle$ — эрмитово скалярное произведение в слоях. Сечения $W(E_x)$ — это формальные ряды $a(z, \eta, \lambda)$ вида (3.10) (мы пишем здесь z, η, λ вместо x, y, h). Рассмотрим также стандартную абелеву связность в слоях $W(E_x)$

$$\mathscr{D}_f = d + \left[\frac{i}{\lambda}\operatorname{Im}\langle\eta, dz\rangle, \cdot\right]$$

где d — дифференциал по z, $\bar z$. Вейлевскому символу $a(z,\lambda)\in S^\infty(E_x)$, который по λ является лорановским полиномом, сопоставив плоское сечение $a(z+\eta,\lambda)\in W_{\mathscr{D}_f}(E_x)$, рассматриваемое как формальный ряд Тейлора по η, $\bar\eta$. Будем называть это отображение *формализацией*. Связность $\mathscr{D}_f$ не меняется при унитарных заменах $z'=U(x)z$, $\eta'=U(x)\eta$, поэтому формализация определена и для расслоений алгебр $S^\infty(E)$. Тем самым мы получаем отображение $W(M)\otimes S^\infty(E)$ в расслоение формальных алгебр Вейля с коэффициентами в расслоении алгебр $W_{\mathscr{D}_f}(E_x)$, которое будем обозначать через $W(M)\otimes W_{\mathscr{D}_f}(E_x)$. С помощью формализации (т. е. замены $z\mapsto z+\eta$) из абелевой связности $\mathscr{D}_1$ в расслоении $W(M)\otimes S^\infty(E)$ получаем абелеву связность $\mathscr{D}_2$ в расслоении $W(M)\otimes W_{\mathscr{D}_f}(E_x)$. Таким образом, формализация дает отображение $(W(M)\otimes S^\infty(E))_{\mathscr{D}_1}\to(W(M)\otimes W_{\mathscr{D}_f}(E_x))_{\mathscr{D}_2}$. Алгебра $(W(M)\otimes W_{\mathscr{D}_f}(E_x))_{\mathscr{D}_2}$

совпадает с алгеброй плоских сечений расслоения $W(M)$ с коэффициентами в $W(E_x)$, обозначаемого далее через $W(M)\otimes W(E_x)$ относительно абелевой связности $\mathscr{D}_3=\mathscr{D}_2\otimes 1+1\otimes\mathscr{D}_f$. Таким образом, окончательно мы получаем отображение $(W(M)\otimes S^\infty(E))_{\mathscr{D}_1}\to(W(M)\otimes W(E_x))_{\mathscr{D}_3}$, которое плоскому сечению $a(x, y, z, \lambda, h)$, являющемуся полиномом Лорана по λ, сопоставляет плоское сечение $a(x, y, z+\eta, \lambda, h)\in(W(M)\otimes W(E_x))_{\mathscr{D}_3}$. Тем самым с помощью формализации мы получаем эллиптический набор $\Xi\hat{\otimes}B$ в алгебре $(W(M)\otimes W(E_x))_{\mathscr{D}_3}$ с тем же индексом, поскольку следы в алгебре $S^\infty(E_x)$ и в $W_{\mathscr{D}_f}(E_x)$ согласованы (см. п. 1.5 этой главы).

Поскольку индекс $\Xi\hat{\otimes}B$ не зависит от λ, то естественно положить $\lambda=h$. При таком отождествлении расслоение $W(M)\otimes W(E_x)$ переходит в расслоение формальных алгебр Вейля $W(E)$ над пространством расслоения E, а алгебра плоских сечений $(W(M)\otimes W(E_x))_{\mathscr{D}_3}$ — в алгебру $W_{\widetilde{\mathscr{D}}}(E)$ плоских сечений расслоения $W(E)$ относительно связности $\widetilde{\mathscr{D}}=\mathscr{D}_3|_{\lambda=h}$. При этом коэффициенты при заданной степени h оказываются бесконечными степенными рядами по z, $\bar{z}$, но они сходятся при достаточно малых $|z|$. Поэтому на самом деле нужно рассматривать не алгебру $W_{\widetilde{\mathscr{D}}}(E)$, не имеющую смысла, а алгебру $W_{\widetilde{\mathscr{D}}}(U)$, где U — некоторая окрестность нулевого сечения расслоения E. Так как носитель набора $\Xi\hat{\otimes}B$ содержится в достаточно малой окрестности $z=0$, то в результате мы получаем эллиптический набор $\Xi\hat{\otimes}B$ в алгебре $W_{\widetilde{\mathscr{D}}}(U)$.

Таким образом, композиция первого и второго шагов сопоставляет эллиптическому набору Ξ в алгебре $W_{\mathscr{D}}(M)$ эллиптический набор $\Xi\hat{\otimes}B$ в алгебре $W_{\widetilde{\mathscr{D}}}(U)$ с тем же индексом. Это отображение мы называем *гомоморфизмом Тома* в алгебре квантовых наблюдаемых.

Вычислим вейлевскую кривизну связности $\widetilde{\mathscr{D}}$. Запишем связность $\mathscr{D}_1$ в виде

$$\mathscr{D}_1=\mathscr{D}\otimes 1+[\Gamma(z), \cdot],$$

где $\Gamma(z)=1\otimes\Gamma_\nabla+\zeta_1$, а Γ_∇ — форма связности в расслоении $S^\infty(E)$, удовлетворяющая виковской нормировке:

$$\Gamma_\nabla=-\frac{1}{2\lambda}\Gamma_{\alpha\beta}z^\beta\circ\bar{z}^\alpha=-\frac{1}{2\lambda}\Gamma_{\alpha\beta}\bar{z}^\alpha z^\beta+\frac{1}{2}\Gamma^\alpha_\alpha,$$

где $\Gamma_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\gamma}\Gamma^\gamma_\beta$ — форма эрмитовой связности ∇ в ортонормированном репере расслоения E. Из конструкции $\mathscr{D}_1$ следует, что

$$(\mathscr{D}\otimes 1)\Gamma(z)+\Gamma(z)\circ\Gamma(z)=0.$$

Формализация дает связность $\mathscr{D}_2$, которая записывается в виде

$$\mathscr{D}_2=\mathscr{D}\otimes 1+[\Gamma(z+\eta), \cdot],$$

и по-прежнему

$$(\mathscr{D}\otimes 1)\Gamma(z+\eta)+\Gamma(z+\eta)\circ\Gamma(z+\eta)=0. \tag{3.30}$$

Далее запишем связность $\mathscr{D}_3$

$$\mathscr{D}_3=\mathscr{D}\otimes 1+1\otimes\mathscr{D}_f+[\Gamma(z+\eta), \cdot],$$

при этом

$$(1\otimes\mathscr{D}_f)\Gamma(z+\eta)=0. \tag{3.31}$$

Связность $\widetilde{\mathscr{D}}$ имеет тот же вид, что и $\mathscr{D}_2$, но λ заменяется на h. Пусть

$$\varepsilon\Gamma(z+\eta)=\Gamma(z+\eta)|_{y=0,\eta=0,\lambda=h}=-\frac{1}{2h}\Gamma_{\alpha\beta}\bar{z}^\alpha z^\beta+\frac{1}{2}\Gamma^\alpha_\alpha.$$

Тогда связность $\widetilde{\mathscr{D}}$ можно переписать также в виде

$$\widetilde{\mathscr{D}}=\mathscr{D}\otimes 1+1\otimes\mathscr{D}_f+[\Gamma(z+\eta)-\varepsilon\Gamma, \cdot],$$

где мы уже считаем, что $\lambda=h$. При этом $\Gamma(z+\eta)-\varepsilon\Gamma$ удовлетворяет вейлевской нормировке, поэтому для вейлевской кривизны $\Omega_{\widetilde{\mathscr{D}}}$ получаем, в силу (3.30) и (3.31),

$$\Omega_{\widetilde{\mathscr{D}}}=\Omega_{\mathscr{D}}\otimes 1+1\otimes\Omega_{\mathscr{D}_f}-(\mathscr{D}\otimes 1)\varepsilon\Gamma-\mathscr{D}_f\varepsilon\Gamma=$$

$$=-\frac{i}{h}\Big\{\delta\sigma-\frac{1}{2i}d\bar{z}^\alpha\wedge dz^\alpha+\frac{1}{2i}\Gamma_{\alpha\beta}\wedge(d\bar{z}^\alpha z^\beta+\bar{z}^\alpha dz^\beta)-$$

$$-\frac{1}{2i}d\Gamma_{\alpha\beta}\bar{z}^\alpha z_\beta\Big\}-\frac{1}{2}\Omega^\alpha_\alpha=$$

$$=-\frac{i}{h}\Big\{\delta\sigma-\frac{1}{2i}\overline{(dz^\alpha+\Gamma^\alpha_\beta z^\beta)}\wedge(dz^\alpha+\Gamma^\alpha_\beta z^\beta)-\frac{1}{2i}\Omega_{\alpha\beta}\bar{z}^\alpha z^\beta\Big\}-\frac{1}{2}\Omega^\alpha_\alpha,$$

где Ω^α_β и $\Omega_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\gamma}\Omega^\gamma_\beta$ — кривизна связности ∇ в расслоении E. Член в фигурных скобках дает симплектическую форму на пространстве расслоения E. Отметим, что кривизна $\Omega_{\widetilde{\mathscr{D}}}$ помимо главного члена степени -2, содержит и член нулевой степени, равный $-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\Omega_\nabla$. Таким образом, при гомоморфизме Тома однородная вейлевская кривизна $\Omega_{\mathscr{D}}=-\frac{i}{h}\delta\sigma$ переходит в неоднородную форму $\Omega_{\widetilde{\mathscr{D}}}$. Именно по этой причине мы с самого начала рассматривали неоднородные кривизны.

Обозначив через σ_E симплектическую форму на U, мы получаем для $\omega_{\widetilde{\mathscr{D}}}=-\frac{1}{2\pi i}\Omega_{\widetilde{\mathscr{D}}}$ выражение

$$\omega_{\widetilde{\mathscr{D}}}=\frac{1}{2\pi h}\sigma_E-\frac{1}{2}c_1(E), \tag{3.32}$$

где $c_1(E)=\operatorname{tr}\omega_\nabla$ первая форма Чженя расслоения E.

Третий шаг. Как и в доказательстве формулы Атьи—Зингера воспользуемся гомоморфизмом Тома для сведения задачи к случаю, когда M есть область U в $\mathbf{R}^{2k}$. Пусть X — область в M с компактным замыканием, содержащая носитель эллиптического набора Ξ. Пусть $i_1 : X \to \mathbf{R}^k$ — гладкое вложение с нормальным расслоением N. Тогда имеем также вложение $T^*X \to T^*\mathbf{R}^k = \mathbf{R}^{2k}$. Вкладывая X в T^*X как нулевое сечение, получим

$$i_2 : X \to T^*X \to \mathbf{R}^{2k}.$$

Нормальным расслоением при вложении i_2 является $N_2 = N \oplus N \oplus T^*X$, на котором естественно вводится комплексная структура. Следовательно, определен гомоморфизм Тома в алгебре квантовых наблюдаемых, и мы получаем желаемое сведение, где U — окрестность X, вложенного в $\mathbf{R}^{2k}$.

Четвертый шаг. Пусть $\Xi = \{1, 1, A, R\}$ — эллиптический набор в алгебре квантовых наблюдаемых $W_{\widetilde{\mathscr{D}}}(U)$ в области $U \subset \mathbf{R}^{2k}$. Не ограничивая общности, алгебру коэффициентов можно считать алгеброй матриц. Легко показать, что индекс выражается в виде функционала

$$\operatorname{ind} \Xi = \int_U F(a, r, \Omega_{\widetilde{\mathscr{D}}}),$$

где плотность F полиномиально зависит от главных членов a и r сечений $A, R \in W_{\widetilde{\mathscr{D}}}(U)$ и их производных, а также от коэффициентов формы $\Omega_{\widetilde{\mathscr{D}}}$ и их производных. При этом плотность обращается в нуль вне компакта $U_0 \subset U$.

Деформацией, аналитически зависящей от параметра, форму кривизны $\widetilde{\Omega}$ можно стянуть по невырожденным замкнутым 2-формам на U к форме Ω_0 с постоянными коэффициентами. Поэтому в дальнейших рассуждениях можно ограничиться формами $\widetilde{\Omega}$, близкими к Ω_0, т. е. $\widetilde{\Omega} = \Omega_0 + \Omega_1$, где Ω_1 — замкнутая форма с малыми переменными коэффициентами. Общий случай получается отсюда в силу принципа аналитического продолжения.

Пусть g — линейное преобразование $\mathbf{R}^{2n}$, мало уклоняющееся от тождественного, так что $gU_0 \subset U$. Формы Ω_0 и $g^*\Omega_0$ точны в U (так как их коэффициенты постоянны), поэтому классы когомологий $\Omega_0 + \Omega_1$ и $g^*\Omega_0 + \Omega_1$ в U совпадают. Отсюда в силу устойчивости индекса (см. п. 2.1 этой главы) получаем

$$\operatorname{ind} \Xi = \int F(a, r, g^*\Omega_0 + \Omega_1)$$

Подынтегральное выражение аналитически зависит от g, поэтому равенство справедливо для любых $g \in \mathrm{GL}(2n, \mathbf{C})$. Усреднение по унитарной группе (ср. [7], [21], [46]) приводит к формуле (3.27) в случае $M = U \subset \mathbf{R}^{2k}$. Применяя обратный изоморфизм Тома в когомологиях (т. е. интегрируя послойно вдоль слоев нормального расслоения N_2) и пользуясь (3.32), приходим к формуле (3.27) в общем случае. На этом доказательство заканчивается.

2.3. Асимптотическое операторное представление Пусть $W_{\mathscr{D}}$ алгебра квантовых наблюдаемых с числовыми коэффициентами на симплектическом многообразии M, $W^s_{\mathscr{D}} \subset W_{\mathscr{D}}$ — подалгебра, состоящая из плоских сечений $a \in W_{\mathscr{D}}$, стабилизирующихся вне компакта в M, т. е. $a(x, y, h) \equiv a(h)$ вне компакта. Вместо условия стабилизации можно рассматривать более общие условия, обеспечивающие «правильное» поведение на бесконечности, но мы ограничиваемся простейшим вариантом. Пусть задано ограниченное подмножество Λ положительных чисел с предельной точкой 0. Пусть далее каждой квантовой наблюдаемой $a \in W^s_{\mathscr{D}}$ при любом натуральном N и любом $\lambda \in \Lambda$ сопоставляется ограниченный оператор $\mathrm{Op}_N(a)$ в гильбертовом пространстве так, что отображение $a \mapsto \mathrm{Op}_N(a)$ линейно и удовлетворяет условиям:

1) $\|\mathrm{Op}_N(a)\| \leqslant C$, $\|\mathrm{Op}_N(a) - \mathrm{Op}_{N+1}(a)\| \leqslant C\lambda^{N+1}$;
2) $\|\mathrm{Op}_N(a)\,\mathrm{Op}_N(b) - \mathrm{Op}_N(a \circ b)\| \leqslant C\lambda^{N+1}$;
3) если $a \in W^{\mathrm{comp}}_{\mathscr{D}}$, то оператор $\mathrm{Op}_N(a)$ — ядерный, при этом

$$\|\mathrm{Op}_N(a)\|_{\mathrm{tr}} \leqslant C\lambda^{-n}, \quad |\mathrm{tr}\,\mathrm{Op}_N(a) - \mathrm{tr}\,a|_N| \leqslant C\lambda^{-n+N+1}.$$

Здесь $\|\ \|_{\mathrm{tr}}$ ядерная норма, $\mathrm{tr}\,\mathrm{Op}_N(a)$ — след оператора, $\mathrm{tr}\,a|_N$ — это усеченный формальный ряд $\mathrm{tr}\,a$, в котором h заменяется на число $\lambda \in \Lambda$, $n = \frac{1}{2}\dim M$. Константы C в оценках зависят от N, a, b. Отображение $a \mapsto \mathrm{Op}_N(a)$ будем называть *асимптотическим операторным представлением* (АОП).

Приведем тривиальный пример АОП. Пусть $M = \mathbf{R}^{2n}$ со стандартной симплектической структурой и связностью $\mathscr{D} = -\delta + d$. Квантовые наблюдаемые имеют вид $a(x+y, h)$ (см. п. 1.3 этой главы). В качестве Λ возьмем интервал $(0, 1)$. Сопоставим квантовой наблюдаемой $a \in W^s_{\mathscr{D}}$ п. д. о. в $L^2(\mathbf{R}^n)$ с вейлевским символом $a|_N$ (см. [46]). Тогда все условия определения будут выполнены.

Теорема об индексе позволяет получить необходимые условия существования АОП. Для простоты будем рассматривать алгебру $W^s_{\mathscr{D}}$ на M, где кривизна связности $\mathscr{D}$ состоит только из старшего члена: $\Omega = -\frac{i}{h}\delta\sigma$, где $\delta\sigma$ — симплектическая форма на M. Тогда для любого $\xi \in K^{\mathrm{comp}}(M)$ выражение (3.26) является полиномом от $1/h$ степени не выше $n = \frac{1}{2}\dim M$. В частности, имеет смысл подстановка $h = \lambda$ в $\operatorname{ind} A$.

Теорема 3.8. Пусть существует АОП алгебры $W^s_{\mathscr{D}}$. Тогда для любого $\xi \in K^{\mathrm{comp}}(M)$ правая часть формулы (3.26) на множестве Λ принимает целые значения по модулю $O(\lambda^\infty)$ при $\lambda \to 0$.

Для доказательства заметим, что если существует АОП алгебры $W^s_{\mathscr{D}}$ с коэффициентами в $\mathbf{C}$, то существует и АОП алгебры $W^s_{\mathscr{D}}$ с матричными коэффициентами. Любой элемент $\xi \in K^{\mathrm{comp}}(M)$ можно реализовать в виде $\{1, 1, a(x)\}$ с матричной функцией $a(x)$. Сопоставляя ей с помощью квантования эллиптический элемент $A \in W^s_{\mathscr{D}}$ с главным членом $a(x)$ и пользуясь далее АОП, получим фредгольмовы операторы $A_N = \mathrm{Op}_N(a)$ с индексом

$$\operatorname{ind} A_N = \operatorname{tr}(1 - R_N A_N) - \operatorname{tr}(1 - A_N R_N) \in \mathbf{Z}.$$

При N достаточно больших и малых λ $\operatorname{ind} A_N$ не будет зависеть от N, так как разность $A_N - A_{N+1}$ мала по норме. С другой стороны, в силу свойства 3) АОП, $|\operatorname{tr}(1 - R_N A_N) - \operatorname{tr}(1 - R \circ A)|_N - \operatorname{tr}(1 - A_N R_N) + \operatorname{tr}(1 - A \circ R)|_N| \leqslant C\lambda^{-n+N+1}$. Отсюда видно, что при любом N дробная часть $\operatorname{ind} A$ при $\lambda \to 0$ по множеству Λ не превосходит $C\lambda^{-n+N+1}$, т. е. является величиной типа $O(\lambda^\infty)$.

С небольшими изменениями это доказательство проходит и для более общих эллиптических наборов $\Xi = \{P^0, P^1, A, R\}$ в алгебре квантовых наблюдаемых $W_{\mathscr{D}}{}^s$.

Для каждой аддитивной образующей $K^{\mathrm{comp}}(M)$ теорема 3.6 дает условие целочисленности, необходимое для существования АОП. Тем самым получается набор необходимых условий вида $P(1/\lambda) \in \mathbf{Z} \bmod O(\lambda^\infty)$ при $\lambda \to 0$ по множеству Λ, где P — полином степени не выше n. Отметим, что эти условия не зависят от конструкции АОП.

Опишем, как из теоремы 3.8 можно получить простые условия целочисленности с линейным полиномом P. Пусть E — n-мерное комплексное расслоение над M, овеществление которого совпадает с TM.

Теорема 3.9. Для существования АОП необходимо, чтобы форма

$$\omega_n = \frac{\delta\sigma}{2\pi h} - \frac{1}{2} c_1(E) \tag{3.33}$$

была асимптотически целочисленной при $\lambda \to 0$ по множеству Λ, т. е. для любого ориентированного двумерного компактного подмногобразия $S \subset M$ интеграл от этой формы по S был целым числом по модулю $O(\lambda^\infty)$.

Доказательство. Пусть V — окрестность S в M с компактным замыканием, $i: V \to \mathbf{R}^k$ — вложение с нормальным расслоением N. Тогда, как в пункте 2.2, имеем вложение i_2: $v \to TV \to \mathbf{R}^{2k}$ с нормальным расслоением $N_2 = N \oplus N \oplus TM$, которое обладает комплексной структурой. Кроме того, имеем вложения $i_3: S \to V \to \mathbf{R}^k$ с нормальным расслоением N_3 и $i_4: S \to TS \to \mathbf{R}^{2k}$ с

нормальным расслоением $N_4 = N_3 \oplus N_3 \oplus TS$, на котором также определена комплексная структура, поскольку на TS комплексная структура существует. Следовательно, с помощью изоморфизма Тома вложения i_2 и i_4 определяют изоморфизмы $i_{2!}: K^{\mathrm{comp}}(V) \to K^{\mathrm{comp}}(\mathbf{R}^{2k})$ и $i_{4!}: K(S) \to K^{\mathrm{comp}}(\mathbf{R}^{2k})$. Пусть $\xi = (i_{2!})^{-1} i_{4!} 1 \in K^{\mathrm{comp}}(V)$ и $\Xi = \{P^0, P^1, A, R\}$ — эллиптический набор в алгебре $W_{\mathscr{D}}{}^s$ с носителем в V, главные члены которого $\{p^0, p^1, a, r\}$ задают элемент ξ. Тогда, по формуле (3.27),

$$\operatorname{ind} \Xi = \int_V \operatorname{ch} \xi \mathscr{T}(E) e^{\omega_n}.$$

В силу формулы (1.17), имеем $\operatorname{ch} \xi \mathscr{T}(E) = (i_{2*})^{-1} \operatorname{ch} i_{4!} 1$, где $(i_{2*})^{-1}$ — изоморфизм Тома в когомологиях (послойное интегрирование вдоль слоев N_2). Так как $i_{2!}\xi = i_{4!}1$, то

$$\operatorname{ind} \Xi = \int_V (i_{2*})^{-1} \operatorname{ch} i_4 1 \cdot e^{\omega_n} = \int_S (i_{4*})^{-1} \operatorname{ch} i_{4!} 1,$$

что, опять-таки, в силу формулы (1.17), приводится в виду

$$\operatorname{ind} \Xi = \int_S \mathscr{T}(S) e^{\omega_n} = \int_S \omega_n + \frac{1}{2} \int_S c_1(TS),$$

где $\mathscr{T}(S) = 1 + \frac{1}{2} c_1(TS)$ — класс Тодда одномерного комплексного касательного расслоения римановой поверхности S. Последнее слагаемое равно половине эйлеровой характеристики поверхности S и потому является целым числом. Отсюда по теореме 3.8 следует асимптотическая целочисленность $\int_S \omega_n$ ■

Условие целостности формы ω_n на множестве Λ является также и достаточным для существования АОП (доказательство будет вскоре опубликовано в журнале «Функциональный анализ и его приложения»). Отсюда легко вытекает известная теорема целочисленности [51], обратная к теореме 3.9. Она утверждает, что из целочисленности формы ω_n следует, что для любого $\xi \in K^{\mathrm{comp}}(M)$ число (3.26) является целым.

Отметим также, что условие целочисленности формы ω_n неоднократно возникало в других конструкциях квантования, например, в асимптотическом квантовании М. В. Карасева и В. П. Маслова [4], а также в геометрическом квантовании Костанта и А. А. Кириллова [5].

2.4. Примеры. Достаточно богатый запас примеров симплектических многообразий и квантовых структур на них дает метод орбит А. А. Кириллова [5] в теории представлений. Рассматриваемые ниже два примера — это орбиты унитарной группы.

1. Пусть $M = M_n = M_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ — многообразие эрмитовых матриц порядка n с заданными простыми собственными

значениями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (орбита общего положения). Пусть $E_1, E_2, \ldots, E_n$ — собственные подпространства, $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — ортогональные проекторы на собственные подпространства. Они определяют комплексные линейные расслоения над M. Сечения расслоения E_i — это такие вектор-функции $u(x)$ со значениями в $\mathbf{C}^n$, что $P_i(x)u(x)=u(x)$. Мы вводим связность в расслоении E_i, полагая $\partial u = P_i du$. Кривизна этой связности равна $P_i dP_i dP_i$, и мы полагаем

$$c_1(E_i) = -\frac{1}{2\pi i} \operatorname{tr} P_i dP_i dP_i.$$

Эти формы определяют первый класс Чженя расслоений E_i.

Рассмотрим симплектическую структуру на M, определяемую *формой А. А. Кириллова*

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_1(E_i) = \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_{n-1}) c_1(E_i),$$

которая, как легко видеть, невырождена на M. Пусть $\mathscr{D}$ — абелева связность в расслоении формальных алгебр Вейля с кривизной $\Omega_w = -\frac{i}{h}\sigma$, $W_{\mathscr{D}}$ — алгебра квантовых наблюдаемых.

Многообразие M_n задается в пространстве $\mathbf{R}^{n^2}$ всех эрмитовых матриц уравнениями

$$f_k(A) = \operatorname{tr} A^k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \ldots + \lambda_n^k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Дифференциалы этих функций линейно независимы, так как $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — различны. Отсюда следует, что нормальное расслоение при вложении $M_n \to \mathbf{R}^{n^l}$ тривиально, и A — класс касательного расслоения TM равен 1. Формула (3.26) для индекса эллиптического набора Ξ в алгебре $W_{\mathscr{D}}$ приобретает вид

$$\operatorname{ind} \Xi = \int_M \operatorname{ch} \xi e^{\sigma/2\pi h}, \tag{3.34}$$

где $\xi \in K(M)$ — различающий элемент набора Ξ.

Возьмем $\xi = \xi_1^{n-1} \xi_2^{n-2} \ldots \xi_{n-2}^2 \in K(M)$, где ξ_i — виртуальное расслоение $\{1, E_i^*\}$. Учитывая мультипликативность характера Чженя, получим, что подынтегральная форма в (3.34) равна

$$c_1^{n-1}(E_1) \wedge c_1^{n-2}(E_2) \wedge \ldots \wedge c_1^2(E_{n-2}) \wedge c_1(E_{n-1}) \frac{\lambda_{n-1} - \lambda_n}{2\pi h}.$$

Для вычисления интеграла заметим, что многообразие $M = M_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ является расслоенным пространством с базой $\mathbf{CP}^{n-1}$ и слоем $M_{n-1}(\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n)$. Проекция $M_n \to \mathbf{CP}^{n-1}$ сопоставляет матрице $A \in M_n$ одномерное подпространство E_1 в $\mathbf{C}^n$. Аналогично, M_{n-1} является расслоением с базой $\mathbf{CP}^{n-2}$ и слоем

M_{n-2} и т. д. Пользуясь тем, что

$$\int_{\mathbf{CP}^{n-1}} c_1^{n-1}(E_1) = 1, \tag{3.35}$$

получим

$$\operatorname{ind} \Xi = \frac{\lambda_{n-1} - \lambda_n}{2\pi h}.$$

Теорема 3.8, а также соображения симметрии приводят к условиям целочисленности: $\frac{\lambda_i - \lambda_j}{2\pi\lambda} \in \mathbf{Z}$. При этих условиях по методу орбит можно построить унитарные представления группы $\mathrm{SU}(n)$. Из формулы А. А. Кириллова для характеров следует, что размерность этого представления равна

$$\operatorname{tr} 1 = \int_M e^{\sigma/2\pi\lambda},$$

что в точности совпадает с индексом эллиптического набора $\Xi = \{1, 0, 0, 0\}$ вычисленным по формуле (3.34) при $h = \lambda$.

2. Пусть $M = \mathbf{CP}^n$. Это вырожденная орбита группы $\mathrm{SU}(n+1)$ с $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_{n+1} = 0$. Симплектическая структура задается формой $\sigma = c_1(E_1)$, и пусть $W_{\mathscr{D}}$ — алгебра квантовых наблюдаемых с $\Omega_W = -\frac{i}{h}\sigma$.

Кольцо $K(\mathbf{CP}^n)$ порождается одной образующей $\xi = \{1, E_1^*\}$ и соотношением $\xi^{n+1} = 0$ [16]. Комплексное касательное расслоение E к многообразию $\mathbf{CP}^n$ стабильно изоморфно $(n+1)E_1$. Отсюда получаем $c_1(E) = (n+1)c_1(E_1) = (n+1)\sigma$, $\mathscr{T}(E) = \left(\frac{\sigma}{1 - e^{-\sigma}}\right)^{n+1}$.

Применим формулу (3.27) для вычисления индекса эллиптического набора Ξ_k с различающим элементом $\xi^k \in K(M)$

$$\operatorname{ind} \Xi_k = \int_M e^{\sigma\left(\frac{1}{2\pi h} - \frac{n+1}{2}\right)} (1 - e^{-\sigma})^k \left(\frac{\sigma}{1 - e^{-\sigma}}\right)^{n+1}.$$

В силу (3.35), интеграл равен вычету функции $e^{\left(\frac{1}{2\pi h} - \frac{n+1}{2}\right)z} \times (1 - e^{-z})^{k-n-1}$ при $z = 0$. При $k = n-1$ получаем условие целочисленности

$$\frac{1}{2\pi\lambda} - \frac{n-1}{2} = m \in \mathbf{Z}. \tag{3.36}$$

Целочисленность $\operatorname{ind} \Xi_k$ при остальных k следует из (3.36). Для индекса эллиптического набора $\Xi_0 = \{1, 0, 0, 0\}$ при условии (3.36) получаем из (3.27)

$$\operatorname{tr} 1 = \int_M e^{(m-1)\sigma} \mathscr{T}(E). \tag{3.37}$$

Форма $(m-1)\sigma$ определяет первый класс Чженя тензорной степени E_1^{m-1}. Таким образом, формула (3.37) по внешнему виду совпадает с формулой для кратности спектра операторов с периодическими бихарактеристиками из [36]. Вычисление интеграла (3.37) дает

$$\operatorname{tr} 1 = \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!},$$

т. е. кратность собственных значений $(n+1)$-мерного гармонического осциллятора.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бреннер А. В., Шубин М. А.* Теорема Атьи—Ботта—Лефшеца для многообразий с краем // Функц. анал. и его прил.— 1981.— *15,* № 4.— С. 67—68
2. *Гельфанд И. М.* Об эллиптических уравнениях // Успехи мат. наук.— 1960.— *15,* № 3.— С. 121—132
3. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.— М.: Наука, 1965.— 448 с.
4. *Карасев М. В., Маслов В. П.* Асимптотическое и геометрическое квантование // Успехи мат. наук.— 1984.— *39,* № 6.— С. 115—173
5. *Кириллов А. А.* Элементы теории представлений.— М.: Наука, 1978.— 344 с.
6. — Геометрическое квантование // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. Совр. пробл. мат. Фунд. напр.— 1985.— *4.*— С. 141—178
7. *Федосов Б. В.* Аналитические формулы индекса // Тр. Моск. мат. об-ва. — 1974.— *30.*— С. 159—240
8. — Теорема периодичности в алгебре символов // мат. сб.— 1978.— *105,* № 3.— С. 431—462
9. — Квантование и индекс // Докл. АН СССР.— 1986.— *291,* № 1.— С. 82—86
10. — Теорема об индексе в алгебре квантовых наблюдаемых // Докл. АН СССР.— 1989.— *305,* № 4.— С. 835—838.
11. —, *Шубин М. А.* Индекс случайных эллиптических операторов. I, II // Мат. сб.— 1978.— *106,* № 1.— С. 108—140;— № 3.— С. 455—483
12. *Шварц А. С.* Эллиптические операторы в квантовой теории поля // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. Совр. пробл. мат.— 1981.— *17.*— С. 113—117
13. *Шубин М. А.* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория.— М.: Наука, 1978.— 280 с.
14. — Спектральная теория и индекс эллиптических операторов с почти периодическими коэффициентами // Успехи мат. наук.— 1979.— *34,* № 2.— С. 95—135
15. *Alvarez-Gaume L.* Supersimmetry and the Atiyah-Singer index theorem // Physica. A.— 1984.— *124,* № 1—3.— С. 29—45
16. *Atiyah M. F.* *K*-theory.— New York: Benjamin, 1967. (Пер. на рус. яз.: *Атья М.* Лекции по *K*-теории.— М.: Мир, 1967.— 262 с.)
17. — Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras // Asterisque.— 1976.— № 32—33.— С. 43—72
18. — Elliptic operators and compact groups // Lect. Notes Math.— 1974.— *401.*— С. 1—93
19. — , *Bott R.* A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. I. // Ann. Math.— 1967.— *87.*— С. 374—407

20. —, — The moment map and equivariant cohomology // Topology.— 1984.— *23,* № 1.— С. 1—28
21. —, —, *Patody V. K.* On the heat equation and the index theorem // Invent. math.— 1973.— 19.— С. 279—330; Errata ibid.— 1975.— *29.*— С. 277—280
22. — , *Segal G. B.* The index of elliptic operators. II. // Ann. Math.— 1968. — *87.*— С. 531—545 (Пер. на рус. яз.: *Атья М., Сегал Г.* Успехи мат. наук.— 1968.— *23,* № 6.— С. 135—149)
23. —, *Singer I. M.* The index of elliptic operators. I. // Ann. Math.— 1968.— *87.*— С. 484—530 (Пер. на рус. яз.: *Атья М., Зингер И.* Успехи мат. наук.— 1968.— *23,* № 5.— С. 99—182)
24. —, — The index of elliptic operators. III. // Ann. Math.— 1968.— *87.*— С. 127—182 (Пер. на рус. яз.: *Атья М., Зингер И.* Успехи мат. наук.— 1969.— *24,* № 1.— С. 127—182)
25. —, — The index of elliptic operators. IV. // Ann. Math.— 1971.— 93.— С. 119—138 (Пер. на рус. яз.: *Атья М., Зингер И.* Успехи мат. наук.— 1972.— *27,* № 4.— С. 161—178)
26. —, — The index of elliptic operators. V. // Ann. Math.— 1971.— 93.— С. 139—149 (Пер. на рус. яз.: *Атья М., Зингер И.* Успехи мат. наук.— 1972.— *27,* № 4.— С. 179—188.)
27. —, *Schmid W.* A geometric construction of the discrete series for semi-simple Lie groups // Invent. math.— 1979.— *50.*— С. 219—248.
28. *Bayen F., Flato M., Fronsdal C., Linchnerowicz A., Sternheimer D.* Deformation theory and quantization // Ann. Phys. (USA).— 1978.— *111,* № 1.— С. 61—151
29. *Berline N., Vergne M.* The equivariant index and Kirillov's Character formula // Amer. J. Math.— 1985.— *109,* № 5.— С. 1159—1190
30. *Bismut J.-M.* The Atiyah-singer theorems: a probablistic approach. I: The index theorem. II: The Lefschetz fixed point formulas // J. Funct. Anal.— 1984.— *57,* № 1.— С. 56—99; № 3.— С. 329—348
31. *Boos B.* Topology und Analysis. Eine Einführung in die Atiyah-Singer Indexformel.— Berlin etc.: Springer, 1977.— 352 с.
32. *Bott R.* Lectures on K(X).— Harward Univ., Cambridge, preprint (Пер. на рус. яз.: *Ботт Р.* Математика.— 1967.— *11,* № 2.— С. 3—36)
33. — A residue formuls for holomorphic vector fields // J. Different. Geom. — 1967.— *1,* № 4.— С. 311—332
34. *Boutet de Monvel L.* Boundary problems for pseudodifferential operators // Acta Math.— 1971.— *126.*— С. 11—51
35. — On the index of Toeplitz operators of several complex variables // Invent. math.— 1979.— *50,* № 3.— С. 249—272
36. —, *Guillemin V.* The spectral theory of Toeplitz operators // Ann. Math. Studies.— 1989.— *99*
37. *Breuer M.* Fredholm theories in von Neumann algebras I, II // Math. Ann. — 1968.— *178.*— С. 243—254;— 1969.— *180.*— С. 313—325
38. *Chern S. S.* Complex manifolds.— Chicago: Univ. Press, 1956 (Пер. на рус. яз.: *Чжень Шен шень.* Комплексные многообразия.— М.: ИЛ, 1961.— 240 с.)
39. *Coburn L. A. Moyer R. D., Singer I. M. The* C^*-algebras of almost periodic pseudo-differential operators // Acta Math.— 1973.— *130.*— С. 279—307
40. *Colin de Verdier Y.* Sur le spectre des opérators a bicaracteristiques périodiques // Commun. Math. Helv.— 1979.— *54.*— С. 508—522
41. *Connes A., Moskovichi H.* The L^2-index theorem for homogeneous spaces of Lie groups // Ann. Math.— 1982.— *115.*— С. 291—330
42. *Dupont J. L.* Curvature and characteristic classes // Lect. Notes Math.— 1978.— *640*
43. *Emch G.* Algebraic methods in statistical mechanics and quantum field theory.— New York etc.: Willey-Interscience, 1972 (Пер. на рус. яз.: *Эмх Ж.* Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля.— М.: Мир, 1976.— 424 с.)

44. *Forster O.* Riemannsche Flächen.— Berlin etc.: Springer, 1977 (Пер. на рус. яз.: *Форстер О.* Римановы поверхности.— М.: Мир, 1980.— 248 с.)
45. *Getzler E.* Pseudodifferential operators on supermanifold and the Atiyah-Singer index theorem // Commun. Math. Phys.— 1983.— *92,* № 2.— С. 163—178
46. *Hörmander L.* The Weyl calculus of pseudodifferential operators // Commun. Pure and Appl. Math.— 1979.— *32,* № 8.— С. 360—444
47. — The analysis of linear partial differential operators. 1—4. Berlin: Springer, 1984—1985.— 391 с.;— 391 с.;— 525 с.;— 352 с. (Пер. на рус. яз.: *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными.— М.: Мир, 1986—1987.— 462 с.;— 455 с.)
48. — Fourier integral operators I // Acta Math.— 1971.— 127.— С. 79—183 (Пер. на рус. яз.: *Хёрмандер Л.* Математика,— 1972.— *16,* № 1.— С. 17—61; № 2.— С. 67—136)
49. *Husemoller D.* Fibre bundles.— New York etc.: McGraw Hill, 1966 (Пер. на рус. яз.: *Хьюзмоллер Д.* Расслоенные пространства.— М.: Мир, 1970. — 442 с.)
50. *Lichnerowicz A.* Théorie globale des connexions et des groups d'holonomie. — Roma: Edizioni Cremonese, 1955 (Пер. на рус. яз.: *Лихнерович А.* Теория связностей в целом и группы голономии.— М.: ИЛ, 1960.— 360 с.)
51. *Palais R.* Seminar on the Atiyah-Singer index theorem.— Princeton Univ. Press, 1965 (Пер. на рус. яз.: *Пале Р.* Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе.— М.: Мир, 1970.— 360 с.)
52. *Rempel S., Schulze B-W.* Index theory of elliptic boundary problems.— Berlin: Academic—Verlag, 1982 (Пер. на рус. яз.: *Ремпель Ш., Шульце Б.-В.* Теория индекса эллиптических краевых задач— М.: Мир, 1986.— 576 с.)
53. *Springer G.* Introduction to Riemann surfaces.— Addison-Wesly, 1957 (Пер. на рус. яз.: *Спрингер Дж.* Введение в теорию римановых поверхностей.— М.: ИЛ, 1960)
54. *Treves F.* Introduction to pseudodifferental and Fourier integral operators. — New York: Plenum Press, 1980.— 338 с.; 374 с. (Пер. на рус. яз.: *Трев Ф.* Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье.— М.: Мир., 1984.— 359 с.; 398 с.)

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Технический редактор *С. М. Сурикова* Корректор *Т. М. Трохина*

Сдано в набор 21.03.91 Подписано в печать 0 1.10.91
Формат бумаги $60\times90^1/_{16}$. Бум. тип. № 2 Литературная гарнитура
Высокая печать. Усл. печ. л. 17,25 Усл. кр.-отт. 17,25 Уч.-изд. л. 16,16
Тираж 1000 экз. Заказ 2245 Цена 2 р. 60 к.
Адрес редакции: 125219, Москва, ул. Усиевича, 20а. Тел. 155-42-29
Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ
140010, Люберцы, 10, Московской обл., Октябрьский просп., 403

Индекс 56865

ISSN 0233—6723. ИНТ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 65. 1991. 1—726

АННОТАЦИИ

I. **П. И. Дудников, С. Н. Самборский. Линейные переопределенные системы уравнений с частными производными, граничные и начально-граничные задачи для них** // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. фундам. направления / ВИНИТИ, 1991.— 65.— С. 6—94

Статья посвящена вопросам формальной теории и разрешимости линейных переопределенных систем уравнений с частными производными. Излагаются процедуры построения операторов совместности и комплексов, связанных с граничными задачами. Обсуждаются классические результаты о локальной разрешимости в вещественно-аналитическом случае. Изложение доведено до недавних результатов о разрешимости краевых в эллиптическом и начально-краевых в параболическом и гиперболическом случаях коэрцитивных задач. Библ. 34.

II. **Б. С. Павлов. Спектральный анализ диссипативного оператора Шрёдингера в терминах функциональной модели.** Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. фундам. направления / ВИНИТИ, 1991.— 65.— С. 95—163

Обзор идей и методов в области, лежащей на стыке теорий аналитических функций, математической физики, теории функциональных моделей и спектральной теории сингулярных диссипативных дифференциальных операторов. Дается описание симметричной функциональной модели диссипативного оператора, описываются его спектральные свойства. Методами функциональной модели описаны спектральные свойства трехмерного оператора Шрёдингера. Библ. 61.

III. **Б. В. Федосов. Теоремы об индексе** // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. фундам. направления / ВИНИТИ, 1991.— 65.— С. 165—268

Излагается теорема Атьи — Зингера об индексе и ее обобщения (эквивариантная теорема об индексе, теорема об индексе семейства эллиптических операторов, теорема об индексе почти периодических операторов). Строится теория индекса в алгебре квантовых наблюдаемых. Библ. 54.