ВИНИТИ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Фундаментальные направления

Том 81

РГАСНТИ 27.21.19 ISSN 0233—6723

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР ПО НАУКЕ И ТЕХНОЛОГИЯМ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ВСЕСОЮЗНЫЙ ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ (ВИНИТИ)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Фундаментальные направления

Том 81

Научный редактор и составитель
член-корреспондент АН СССР Р. В. Гамкрелидзе

Серия издается с 1985 г.

МОСКВА 1991

УДК 519.21

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ - 6

Предельные теоремы теории вероятностей

Консультирующие редакторы-составители тома
академик АН СССР *Ю. В. Прохоров*,
академик АН Литвы *В. Статулявичус*

Рецензент
доктор физико-математических наук,
профессор *Л. Б. Клебанов*

1–2

Научный редактор-составитель тома
доктор физико-математических наук, профессор *Н. М. Остиану*

Авторы
*В. Бенткус, Ф. Гетце, П. Гудинас, В. Паулаускас, В. В. Петров,
А. Рачкаускас, Й. Сунклодас, Л. Саулис, В. Статулявичус*

УДК 519.21

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая читателю книга состоит из пяти частей, посвященных разным проблемам предельных теорем теории вероятностей и написанных разными авторами.

В первой части „Предельные теоремы классического типа для сумм независимых случайных величин" (В. В. Петров) содержится изложение ряда классических предельных теорем для сумм независимых случайных величин и примыкающих к ним более новых результатов. Изложение концентрируется вокруг трех основных тем: центральной предельной теоремы, законов больших чисел и закона повторного логарифма для последовательностей независимых случайных величин, принимающих значения на действительной прямой. Обзор может служить введением для читателя, желающего в короткое время ознакомиться с предельными теоремами классического типа для сумм независимых случайных величин.

Во второй части „Точность гауссовской аппроксимации в банаховых пространствах" (В. Бенткус, Ф. Гетце, В. Паулаускас, А. Рачкаускас) приведен обзор результатов и методов, применяемых для оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме и построения асимптотических разложений в бесконечномерных пространствах. Авторы ограничились случаем независимых одинаково распределенных слагаемых и не стремились приводить исчерпывающие и наиболее общие формулировки результатов, а лишь ставили перед собой цель оттенить отличия от конечномерного случая и объяснить некоторые новые явления, связанные с более сложной геометрической структурой банаховых пространств. Также отражена усиливающая в последние годы тенденция применения к асимптотическим задачам математической статистики результатов, полученных для банаховых пространств.

В третьей части „Аппроксимация распределений сумм слабо зависимых случайных величин нормальным распределением " (Й. Сунклодас) дается обзор известных результатов, а также приводятся полученные автором некоторые новые результаты об аппроксимации нормальным распределением сумм слабо зависимых случайных величин и случайных полей, определенных на целочисленной решетке Z^d. Наряду с такими универсальными методами, как методы С. Н. Бернштейна, семиинвариантов и др., при исследовании предельных законов и оценке скорости сходимости к ним для распределений сумм слабо зависимых случайных величин оказались весьма плодотворными методы Ч. Стейна и А. Н. Тихомирова, а также Л. Хейнриха для m-зависимых случайных величин. Поэтому основное внимание уделяется трем методам доказательства: Ч. Стейна, А. Н. Тихомирова и Л. Хейнриха. Показано, как эти методы работают при оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме в различных метриках (равномерной, L_1, ограниченной метрики Липшица и др.) сверху, когда последовательность случайных величин удовлетворяет некоторому условию слабой зависимости, выраженному через коэффициент перемешивания (сильного перемешивания, абсолютной регулярности, равномерно сильного перемешивания, ψ-перемешивания, m-зависимости).

В четвертой части „Уточнения центральной предельной теоремы для однородных цепей Маркова" (П. Гудинас) обсуждаются два наиболее разработанных метода доказательства предельных теорем для сумм случайных величин, связанных в однородную цепь Маркова. Первый из них – спектральный метод. Как показал в своих работах автор, он позволяет использовать в доказательствах мощный аналитический аппарат теории возмущений линейных операторов. Второй метод – регенеративный. Его суть состоит в переходе к суммам независимых случайных величин. С одной стороны, результаты, полученные спектральным методом, более разнообразны, а с другой стороны, регенеративный метод помогает ослабить накладываемые условия. Сопоставление этих методов приводит к мысли о необходимости синтетического подхода, объединяющего их преимущества.

Пятая часть „Предельные теоремы о больших уклонениях" (Л. Саулис, В. Статулявичус) посвящена применению метода семиинвариантов в предельных теоремах, учитывающих большие уклонения. Читатель может убедиться, что этот метод хорошо работает при исследовании вероятностей больших уклонений для сумм как независимых, так и зависимых случайных величин, полиномиальных форм, кратных стохастических интегралов от случайных процессов и полей, полиномиальных статистик, в функциональных предельных теоремах.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ КЛАССИЧЕСКОГО ТИПА ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В. В. Петров

Цель настоящей работы – изложение ряда классических предельных теорем для сумм независимых случайных величин и примыкающих к ним более новых результатов. Изложение концентрируется вокруг трех основных тем – центральная предельная теорема, законы больших чисел и закон повторного логарифма для последовательностей независимых случайных величин, принимающих значения на действительной прямой. За пределами работы остались многие разделы классической теории суммирования независимых случайных величин, в частности, предельные теоремы с предельными распределениями, отличными от нормального закона, многомерные предельные теоремы, граничные задачи теории суммирования независимых случайных величин, локальные предельные теоремы. Обзор может служить введением для читателя, желающего в короткое время ознакомиться с предельными теоремами классического типа для сумм независимых случайных величин. Более подробное изложение этого круга вопросов можно найти, например, в монографии автора [29], а также более ранних книгах [3], [9], [11], [28], [40], [46], [60], [62].

Глава 1

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА И ЕЕ УТОЧНЕНИЯ

§ 1.1. Теоремы Ляпунова, Линдеберга и Феллера

Рассмотрим последовательность случайных величин X_1, $X_2, \ldots$ и положим $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. В соответствии с установившейся терминологией, будем называть *центральной предельной* *теоремой* любое предложение о том, что, при некоторых условиях, распределения надлежащим образом центрированных и нормированных сумм S_n сходятся к нормальному распределению при неограниченном росте числа слагаемых n. Первые результаты этого типа были получены для схемы Бернулли Муавром и Лапласом, а для существенно более общих схем суммирования независимых случайных величин – Чебышевым и Ляпуновым.

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность независимых случайных величин, $\mathbf{E}X_n = 0$, $\mathbf{E}|X_n|^{2+\delta} < \infty$ для всех n и некоторого $\delta > 0$. Положим

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}X_k^2, \qquad F_n(x) = \mathbf{P}(S_n < x\sqrt{B_n}),$$

$$L_n = B_n^{-1-\delta/2} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}|X_k|^{2+\delta}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\{-t^2/2\}\, dt.$$

Ляпунов показал, что если $L_n \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$F_n(x) \to \Phi(x) \quad \text{для любого} \quad x. \tag{1}$$

Моментные условия теоремы Ляпунова были ослаблены Линдебергом, показавшим, что соотношение (1) имеет место для последовательности независимых случайных величин с математическими ожиданиями, равными нулю, и конечными дисперсиями, если выполнено следующее условие (*условие Линдеберга*):

$$\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x| > \varepsilon\sqrt{B_n}} x^2 dV_k(x) \to 0$$

для любого $\varepsilon > 0$, где ${}_k(x)$ – функция распределения случайной величины X_k. Легко показать, что выполнение *условия Ляпунова* $L_n \to 0$ влечет за собой выполнение условия Линдеберга, поэтому теорема Линдеберга представляет собой обобщение теоремы Ляпунова. В частном случае, когда величины $X_1, X_2, \ldots$ имеют одно и то же распределение с конечной дисперсией, условие Линдеберга выполняется тривиальным образом, так что из теоремы Линдеберга вытекает следующая *теорема Леви*: если $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин

$$\mathbf{E}X_1 = 0, \quad \mathbf{E}X_1^2 = \sigma^2 \quad (0 < \sigma^2 < \infty),$$

то
$$\mathbf{P}(S_n < x\sigma\sqrt{n}) \to \Phi(x)$$
для любого x.

Феллер показал, что условие Линдеберга необходимо для того, чтобы имели место соотношения (1) и
$$B_n^{-1} \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbf{E}X_k^2 \to 0$$
при $n \to \infty$.

Имеются более общие формы центральной предельной теоремы для последовательности независимых случайных величин, в которых отсутствуют какие бы то ни было предположения о существовании моментов у рассматриваемых случайных величин. Еще более общие формы центральной предельной теоремы без моментных условий относятся к схеме последовательности серий независимых в каждой серии случайных величин $\{X_{nk};\ k = 1, 2, \ldots, k_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ как в предположении о выполнении *условия бесконечной малости* слагаемых
$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant k\leqslant k_n} \mathbf{P}(|X_{nk}| \geqslant \varepsilon) = 0$$
для любого $\varepsilon > 0$, так и без этого предположения. Подробное изложение результатов этого рода, а также история вопроса содержится, например, в книгах [3], [7], [11] и [29].

Центральную предельную теорему можно получить как следствие более общих теорем, указывающих необходимые и достаточные условия сходимости к заданному безгранично делимому закону распределений сумм независимых случайных величин в схеме серий. Вырожденное и нормальное распределения безгранично делимы, поэтому из теорем о необходимых и достаточных условиях сходимости к произвольному безгранично делимому распределению можно получить общие формы слабого закона больших чисел (предельный закон – вырожденный) и центральной предельной теоремы (предельный закон – нормальный).

Для доказательства центральной предельной теоремы Ляпунов и его последователи использовали метод характеристических функций; впоследствии, наряду с этим методом, стали применять метод композиций (сверток) распределений и метод операторов.

§ 1.2. Неравенства Эссеена и Берри–Эссеена

Ценность любой предельной теоремы повышается, если она сопровождается оценками скорости сходимости. Особый интерес представляют оценки, оптимальные в том или другом смысле. Хронологически первыми оценками скорости сходимости в центральной предельной теореме для сумм независимых случайных величин являются оценки, полученные Ляпуновым. В дополнение к введенным ранее обозначениям положим

$$\Delta_n = \sup_{x \in R} |F_n(x) - \Phi(x)|.$$

Ляпунов показал, что при выполнении перечисленных выше условий теоремы, носящей его имя, справедливы соотношения $\Delta_n = O(L_n)$ в случае $0 < \delta < 1$, и $\Delta_n = O(L_n |\log L_n|)$ в случае $\delta = 1$. Попытки улучшения этих оценок привели к существенным усовершенствованиям метода характеристических функций и к большому прогрессу в области предельных теорем теории вероятностей. Оптимальные по порядку оценки для Δ_n были получены Крамером для частного случая одинаковых распределений, удовлетворяющих *условию* (C) *Крамера* $\limsup_{|t| \to \infty} |\mathbf{E}e^{itX_1}| < 1$, а затем Берри [39] и Эссееном [41] для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин, обладающих конечным абсолютным моментом третьего порядка.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – взаимно независимые случайные величины, имеющие общую функцию распределения, и пусть $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 = \sigma^2 > 0$, $\mathbf{E}|X_1|^3 < \infty$. Тогда

$$\sup_x \left| \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} < x \right) - \Phi(x) \right| \leqslant \frac{A\mathbf{E}|X_1|^3}{\sigma^3\sqrt{n}},$$

где A – абсолютная положительная постоянная (*неравенство Берри–Эссеена*).

В общем случае неодинаковых распределений справедлива следующая теорема (Эссеен [42]). Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – взаимно независимые случайные величины, $\mathbf{E}X_k = 0$, $\mathbf{E}|X_k|^3 < \infty$ $(k = 1, \ldots, n)$. Положим

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}X_k^2, \quad L_n = B_n^{-3/2} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}|X_k|^3,$$

$$\Delta_n = \sup_x |\mathbf{P}(S_n < x\sqrt{B_n}) - \Phi(x)|.$$

Тогда $\Delta_n \leqslant AL_n$, где A – абсолютная положительная постоянная (*неравенство Эссеена*).

В частном случае одинаковых распределений неравенство Эссеена сводится к неравенству Берри–Эссеена. Заметим, что сделанное при формулировке результатов этой главы предположение о том, что математические ожидания рассматриваемых случайных величин равны нулю, не ограничивает общности. Если это условие не выполнено, то случайные величины $Y_k = X_k - \mathbf{E}X_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ будут иметь математические ожидания, равные нулю, и к ним уже можно применить сформулированные теоремы.

Порядок оценок, доставляемых неравенствами Эссеена и Берри–Эссеена, нельзя улучшить, не вводя дополнительных предположений о распределениях рассматриваемых случайных величин. Это утверждение можно доказать с помощью элементарных средств. Рассмотрим последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, каждая из которых имеет лишь два значения -1 и $+1$, принимаемых с вероятностями, равными $1/2$. Имеем $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 = 1$ и $\mathbf{E}|X_1|^3 = 1$, так что $L_n = n^{-1/2}$ (с помощью неравенства Ляпунова для моментов нетрудно доказать, что для произвольно распределенных случайных величин справедливо неравенство $L_n \geqslant n^{-1/2}$). Событие $S_n = 0$ происходит тогда и только тогда, когда половина слагаемых в сумме S_n принимает значение $+1$, а другая половина – значение -1. Поэтому $\mathbf{P}(S_n = 0) = C_n^{n/2} 2^{-n}$ для четных n. Применяя формулу Стирлинга, получим асимптотическое равенство $P(S_n = 0) \sim 2/\sqrt{2\pi n}$. Таким образом, функция $F_n(x) = \mathbf{P}(S_n < x\sqrt{n})$ в точке $x = 0$ имеет скачок, равный $2/\sqrt{2\pi n}(1 + o(1))$. Отсюда следует, что в окрестности точки $x = 0$ функцию $F_n(x)$ нельзя аппроксимировать никакой непрерывной функцией с точностью, превышающей $1/\sqrt{2\pi n}(1 + o(1))$.

Из приведенного рассуждения вытекает, что абсолютные постоянные A в неравенствах Берри–Эссеена и Эссеена не меньше, чем $1/\sqrt{2\pi}$. Можно показать, что эти неравенства верны при $A = 0,8$. Более точную информацию о постоянных в неравенствах этого типа можно найти, например, в [7] и [29].

§ 1.3. Обобщения неравенства Эссеена

Неравенство Эссеена установлено в предположении конечности абсолютных моментов третьего порядка рассматриваемых случайных величин. Представляет интерес получение оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме при ослаблении этих моментных условий.

Пусть G – множество функций $g(x)$, определенных на действительной прямой R и удовлетворяющих следующим условиям:

(а) $g(x)$ – неотрицательная, четная функция, которая не убывает и положительна в области $x > 0$;

(б) функция $x/g(x)$ не убывает в области $x > 0$.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – взаимно независимые случайные величины, $\mathbf{E}X_k = 0$, $\mathbf{E}X_k^2 g(X_k) < \infty$ для $k = 1, \ldots, n$ и некоторой функции $g \in G$. Определим Δ_n так же, как в теореме Эссеена из § 2. Тогда

$$\Delta_n \leqslant \frac{A}{B_n g(\sqrt{B_n})} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}X_k^2 g(X_k),$$

где A – абсолютная положительная постоянная.

Если $0 < \delta \leqslant 1$, то функция $g(x) = |x|^\delta$ принадлежит множеству G. Поэтому из сформулированного результата вытекает теорема Эссеена, а также следующее предложение, обобщающее теорему Эссеена: если $\mathbf{E}X_k = 0$, $\mathbf{E}|X_k|^{2+\delta} < \infty$ $(k = 1, \ldots, n)$ для некоторого положительного $\delta \leqslant 1$, то

$$\Delta_n \leqslant AB_n^{-1-\delta/2} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}|X_k|^{2+\delta}.$$

Этот результат представляет собой усиление оценок Ляпунова, справедливое для любого числа слагаемых n.

Таким образом, при исследовании скорости сходимости в центральной предельной теореме условие конечности третьих абсолютных моментов удалось заменить менее ограничительным условием конечности абсолютных моментов порядка $2+\delta$ при некотором $\delta > 0$. Можно получить оценки для Δ_n, не требуя существования моментов порядка выше второго.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – взаимно независимые случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю, и конечными дисперсиями. Положим $B_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}X_k^2$,

$$V_k(x) = \mathbf{P}(X_k < x), \qquad \Lambda_n(\varepsilon) = \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x| \geqslant \varepsilon\sqrt{B_n}} x^2 dV_k(x),$$

$$l_n(\varepsilon) = \frac{1}{B_n^{3/2}} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x| < \varepsilon\sqrt{B_n}} |x|^3 dV_k(x).$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\Delta_n \leqslant A(\Lambda_n(\varepsilon) + l_n(\varepsilon)),$$

где A – абсолютная положительная постоянная.

Этот результат при $\varepsilon = 1$ следует из сформулированного выше обобщения неравенства Эссеена, если положить

$$g(x) = \begin{cases} |x| & \text{при } |x| < \sqrt{B_n}, \\ \sqrt{B_n} & \text{при } |x| \geqslant \sqrt{B_n}. \end{cases}$$

Из определения $l_n(\varepsilon)$ следует неравенство $l_n(\varepsilon) \leqslant \varepsilon$, поэтому $\Delta_n \leqslant A(\varepsilon + \Lambda_n(\varepsilon))$ для любого $\varepsilon > 0$. В свою очередь, отсюда следует, что если $\Lambda_n(\varepsilon) \to 0$ при $n \to \infty$ для любого $\varepsilon > 0$, то $F_n(x) \to \Phi(x)$ (*теорема Линдеберга*).

Можно сделать следующий шаг при исследовании оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме и уже не предполагать существования у рассматриваемых случайных величин моментов какого-либо порядка.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – случайные величины с функциями распределения $V_1(x), \ldots, V_n(x)$ (здесь мы не делаем предположения о независимости рассматриваемых случайных величин). Пусть $t_1, \ldots, t_n$ – положительные числа. Введем усеченные случайные величины

$$\overline{X}_k = \begin{cases} X_k, & \text{если } |X_k| < t_k, \\ 0, & \text{если } |X_k| \geqslant t_k, \end{cases}$$

где $k = 1, \ldots, n$. Положим

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\overline{X}_k = \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|<t_k} x\,dV_k(x),$$

$$N_n = \mathbf{E}\Big(\sum_{k=1}^{n} \overline{X}_k - M_n\Big)^2,$$

$$\Delta_n = \sup_x \Big|\mathbf{P}\Big(N_n^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{n} (\overline{X}_k - \mathbf{E}\overline{X}_k) < x\Big) - \Phi(x)\Big|,$$

$$\Gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(|X_k| \geqslant t_k).$$

Для любых $a > 0$ и b имеет место неравенство

$$\sup_x \Big|\mathbf{P}\Big(\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n} X_k - b < x\Big) - \Phi(x)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Delta_n + \Gamma_n + \frac{|ab - M_n|}{\sqrt{2\pi N_n}} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi e}}\left|1 - \frac{N_n}{a^2}\right| \max\left(1, \frac{a^2}{N_n}\right).$$

Этот результат был получен Л. В. Осиповым и В. В. Петровым [23] (два предыдущих результата, сформулированных в этом разделе, принадлежат соответственно В. В. Петрову [25], обобщившему теорему Каца [51] для одинаково распределенных независимых слагаемых, и Л. В. Осипову [19]). Хейди [48] обнаружил оптимальное асимптотическое поведение последней из приведенных здесь оценок. Результаты, близкие к этой оценке, были получены позднее Феллером [44].

В работе Л. В. Осипова [21] доказаны смыкающиеся по порядку верхние и нижние оценки для остаточного члена в центральной предельной теореме для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин, обладающих конечными дисперсиями. Впоследствии подобные результаты были получены Л. В. Розовским [32], [33], Холлом [45], [46], Хейди и Накатой [50]. В частности доказано, что для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, удовлетворяющей условиям $\mathbf{E}X_1 = 0$ и $\mathbf{E}X_1^2 = 1$, справедливо соотношение

$$\sup_x \left|\mathbf{P}\Big(\sum_{k=1}^n X_k < x\sqrt{n}\Big) - \Phi(x)\right| + \frac{1}{\sqrt{n}} \asymp \psi_n + \frac{1}{\sqrt{n}},$$

где

$$\psi_n = \mathbf{E}X_1^2 I(|X_1| \geqslant \sqrt{n}) + \\ + n^{-\frac{1}{2}}|\mathbf{E}X_1^3 I(|X_1| < \sqrt{n})| + n^{-1}\mathbf{E}X_1^4 I(|X_1| < \sqrt{n}),$$

$I(A)$ – индикатор события A.

§ 1.4. Асимптотические разложения в центральной предельной теореме

Замысел асимптотических разложений в центральной предельной теореме для сумм независимых случайных величин принадлежит Чебышеву и нашел воплощение в работах Крамера, Эссеена и других авторов. Сформулируем два результата, принадлежащих Эссеену и относящихся к последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ с математическим ожиданием, равным нулю, и конечной положительной дисперсией σ^2. Как и ранее, полагаем $F_n(x) = \mathbf{P}\big(\sum_{k=1}^n X_k < x\sigma\sqrt{n}\big)$. Если $\mathbf{E}|X_1|^3 < \infty$ и случайная величина X_1 имеет *нерешетчатое распределение* (т.е. значения, принимаемые величиной X_1 с вероятностью 1, не могут быть записаны в виде $a+kh$, где k – целые числа, ни при каких фиксированных a и h), то

$$F_n(x) = \Phi(x) + \frac{\alpha_3(1-x^2)\exp\{-x^2/2\}}{6\sigma^3\sqrt{2\pi n}} + o\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big) \ (n \to \infty)$$

равномерно относительно $x \in R$. Здесь $\alpha_3 = \mathbf{E}X_1^3$. Если $\mathbf{E}|X_1|^p < \infty$ для некоторого целого $p \geqslant 3$ и выполнено условие (C) Крамера $\limsup\limits_{|t|\to\infty} |\mathbf{E}e^{itX_1}| < 1$, то

$$F_n(x) = \Phi(x) + \sum_{\nu=1}^{p-2} \frac{Q_\nu(x)}{n^{\nu/2}} + o\Big(\frac{1}{n^{(p-2)/2}}\Big),$$

где $Q_\nu(x) = P_{3\nu-1}(x)\exp\{-x^2/2\}$, $P_{3\nu-1}(x)$ – полином степени $3\nu-1$ относительно x с коэффициентами, зависящими только от моментов случайной величины X_1 до порядка $\nu+2$ включительно. В частности, $Q_1(x) = \big(\alpha_3(1-x^2)/(6\sigma^3\sqrt{2\pi n})\big)\exp\{-x^2/2\}$. Явные формулы для функций $Q_\nu(x)$ получены В. В. Петровым [24]. Асимптотическое разложение функции распределения нормированной суммы независимых случайных величин, имеющих одинаковое решетчатое распределение, отличается от написанного выше добавлением дополнительных членов. Соответствующие асимптотические разложения найдены для последовательностей независимых неодинаково распределенных случайных величин. Для случая одинаковых распределений Л. В. Осипов [22] получил одинаковые по порядку верхние и нижние оценки остаточного члена в асимптотических разложениях в центральной предельной теореме. Методы и результаты Л. В. Осипова были в дальнейшем использованы и развиты Л. В. Розовским, Холлом и другими (см. [29] и [46]).

§ 1.5. Неравномерные оценки

Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ такую, что $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 = \sigma^2 > 0$ и $\mathbf{E}|X_1|^3 = \beta_3 < \infty$. Положим $F_n(x) = \mathbf{P}\big(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k < x\sigma\sqrt{n}\big)$. В § 2 и § 3 приведены оценки разности $F_n(x) - \Phi(x)$, равномерные относительно x. Более точную информацию дают неравномерные оценки этой разности, учитывающие ее зависимость не только от n, но и от x.

Неравномерное уточнение неравенства Берри–Эссеена имеет следующий вид:

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{A\beta_3}{\sigma^3\sqrt{n}(1+|x|^3)}$$

для любого $x \in R$ (С. В. Нагаев [17]). Сформулируем принадлежащее А. Бикялису [1] обобщение этого неравенства на случай неодинаковых распределений.

Пусть $X_1, \dots, X_n$ – взаимно независимые случайные величины, $\mathbf{E}X_k = 0$, $\mathbf{E}|X_k|^{2+\delta} < \infty$ для некоторого положительного $\delta \leqslant 1$ $(k = 1, \dots, n)$. Положим

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}X_k^2, \quad F_n(x) = \mathbf{P}\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k < x\sqrt{B_n}\Big),$$

$$L_n = B_n^{-1-\delta/2} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}|X_k|^{2+\delta}.$$

Тогда

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{AL_n}{1+|x|^{2+\delta}}$$

для любого $x \in R$, где A – абсолютная положительная постоянная.

Имеются неравномерные усиления других неравенств из § 2 и § 3, а также неравномерные оценки остаточных членов асимптотических разложений в центральной предельной теореме. К числу наиболее важных результатов последнего типа принадлежит теорема Л. В. Осипова [20] об асимптотических разложениях для распределений сумм независимых одинаково распределенных слагаемых, из которой вытекает следующий просто формулируемый результат: если выполнены условия теоремы Берри–Эссеена и, кроме того, $\mathbf{E}|X_1|^r < \infty$ для некоторого $r \geqslant 3$, то

$$|\mathbf{P}(S_n < x\sigma\sqrt{n}) - \Phi(x)| \leqslant \frac{C(r)}{1+|x|^r}\Big(\frac{\mathbf{E}|X_1|^r}{\sigma^3\sqrt{n}} + \frac{\mathbf{E}|X_1|^r}{\sigma^r n^{(r-2)/2}}\Big)$$

для любого x, где $C(r)$ – положительная постоянная, зависящая только от r.

Неравномерные оценки остаточного члена в центральной предельной теореме последующим интегрированием по действительной прямой позволяют получить так называемую глобальную форму центральной предельной теоремы, содержащую утверждения типа

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F_n(x) - \Phi(x)|^p \, dx \to 0$$

8822

при $n \to \infty$ и некотором $p > 0$. Весьма общие глобальные предельные теоремы доказаны В. М. Кругловым [10].

§ 1.6. Оценки скорости сходимости: необходимые и достаточные условия

Представляют интерес условия, необходимые и достаточные для заданной скорости сходимости распределений сумм независимых случайных величин к нормальному распределению. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, и пусть существуют такие числовые последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, что

$$F_n(x) = \mathbf{P}\Big(\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} X_k - b_n < x\Big) \to \Phi(x).$$

Положим

$$r_n = \inf_{a_n, b_n} \sup_x |F_n(x) - \Phi(x)|,$$

$$V(x) = \mathbf{P}(X_1 < x).$$

Как показал И. А. Ибрагимов [8], для того чтобы $r_n = O(n^{-\delta/2})$, где $0 < \delta < 1$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dV(x) < \infty, \qquad \int_{|x| \geqslant z} x^2 dV(x) = O(z^{-\delta}) \ (z \to \infty).$$

В случае $\delta = 1$ систему условий, необходимых и достаточных для соотношения $r_n = O(n^{-1/2})$, образуют два последних условия при $\delta = 1$ и условие

$$\int_{-z}^{z} x^3 dV(x) = O(1) \quad (z \to \infty).$$

Возникает естественный вопрос о том, какого рода оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме равносильны существованию моментов того или иного порядка. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 = 1$. Положим $\Delta_n = \sup_x |\mathbf{P}(\sum_{k=1}^{n} X_k < x\sqrt{n}) - \Phi(x)|$. Хейди [50] доказал, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)\Delta_n$ сходится тогда и только тогда, когда

$\mathbf{E}X_1^2\log(1+|X_1|)<\infty$. Если $0<\delta<1$, то сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1+\delta/2}\Delta_n$ равносильна условию $\mathbf{E}|X_1|^{2+\delta}<\infty$.

Дальнейшие результаты об эквивалентности моментных условий и сходимости рядов из взвешенных остатков в центральной предельной теореме были получены Хейди [48], [49] и В. А. Егоровым [6]. В этих работах отсутствуют априорные предположения о существовании каких-либо моментов у рассматриваемых случайных величин.

Глава 2

ЗАКОНЫ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

§ 2.1. Слабый закон больших чисел

Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – последовательность случайных величин, заданных на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Последовательность $\{X_n\}$ сходится по вероятности к X, если $\mathbf{P}(|X_n-X|<\varepsilon)\to 1$ при $n\to\infty$ для любого $\varepsilon>0$. В этом случае будем пользоваться записью $X_n\xrightarrow{\mathbf{P}}X$. Последовательность $\{X_n\}$ называется устойчивой, если существует такая последовательность постоянных $\{b_n\}$, что $X_n-b_n\xrightarrow{\mathbf{P}}0$.

Рассмотрим последовательность случайных величин $\{X_n\}$ и положим $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$. Пусть $\{a_n\}$ – не содержащая нулей последовательность действительных чисел. Будем говорить, что последовательность $\{X_n\}$ удовлетворяет слабому закону больших чисел с последовательностью нормирующих постоянных $\{a_n\}$, если последовательность $\{S_n/a_n\}$ устойчива.

К числу наиболее важных теорем о слабом законе больших чисел для последовательности независимых случайных величин принадлежит следующая теорема Феллера, в которой отсутствуют какие-либо предположения о существовании моментов рассматриваемых случайных величин.

Пусть $\{X_n\}$ – последовательность независимых случайных величин, $\{a_n\}$ – последовательность положительных чисел такая, что $a_n\uparrow\infty$. Положим $V_n(x)=\mathbf{P}(X_n<x)$. Для того чтобы

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}X_k\xrightarrow{\mathbf{P}}0,$$

необходимо и достаточно выполнение условий

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(|X_k| \geqslant a_n) \to 0,$$

$$\frac{1}{a_n^2} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int\limits_{|x|<a_n} x^2 dV_k(x) - \left(\int\limits_{|x|<a_n} x dV_k(x) \right)^2 \right\} \to 0,$$

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|<a_n} x dV_k(x) \to 0.$$

В частном случае одинаковых распределений из теоремы Феллера вытекает следующий просто формулируемый результат. Если $\{X_n\}$ – последовательность независимых случайных величин с общей функцией распределения $V(x)$, то соотношение $(1/n) \sum\limits_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ равносильно условиям $n\mathbf{P}(|X_1| \geqslant n) \to 0$ и $\int\limits_{|x|<n} x dV(x) \to 0$.

В свою очередь, непосредственным следствием этого предложения является теорема Хинчина, согласно которой для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием a имеем $(1/n) \sum\limits_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\mathbf{P}} a$.

Среди многочисленных результатов, относящихся к оценкам скорости сходимости в слабом законе больших чисел, отметим лишь некоторые. Пусть $\{X_n\}$ – последовательность независимых случайных величин с общей функцией распределения $V(x)$ и пусть $t \geqslant 0$. Для того чтобы $\mathbf{P}(|S_n| \geqslant n\varepsilon) = o(n^{-t})$ для любого $\varepsilon > 0$, необходимо и достаточно выполнение условий $\mathbf{P}(|X_1| \geqslant n) = o(n^{-t-1})$ и $\int\limits_{|x|<n} x dV(x) = o(1)$. Отсюда следует, что условия $\mathbf{E}X_1 = 0$ и $\mathbf{E}|X_1|^p < \infty$ для некоторого $p \geqslant 1$ достаточны для оценки $\mathbf{P}(|S_n| \geqslant n\varepsilon) = o(n^{-p})$, каково бы ни было $\varepsilon > 0$. Если $pr > 1$ и $r > 1/2$, то равносильны следующие условия:

(а) $\mathbf{E}|X_1|^p < \infty$ и (в случае $p \geqslant 1$) $\mathbf{E}X_1 = 0$,

(б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{pr-2} \mathbf{P}(|S_n| \geqslant n^r \varepsilon) < \infty$ для любого $\varepsilon > 0$.

Сформулированные результаты получены Баумом и Кацем [37].

§ 2.2. Усиленный закон больших чисел

Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – последовательность случайных величин, заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Последовательность $\{X_n\}$ сходится к X почти наверное (п.н.), если $X_n(\omega) \to X(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$, за исключением множества точек ω нулевой $\mathbf{P}$-меры. Последовательность $\{X_n\}$ называется *усиленно устойчивой*, если существует такая последовательность постоянных $\{b_n\}$, что $X_n - b_n \to 0$ п.н.

Пусть $\{X_n\}$ – последовательность случайных величин, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, $\{a_n\}$ – не содержащая нулей последовательность постоянных. Будем говорить, что последовательность $\{X_n\}$ удовлетворяет *усиленному закону больших* чисел с последовательностью нормирующих постоянных $\{a_n\}$, если последовательность $\{S_n/a_n\}$ усиленно устойчива.

К числу наиболее известных теорем об усиленном законе больших чисел относятся следующие две теоремы Колмогорова. Если $\{X_n\}$ – последовательность независимых случайных величин, такая, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{D}X_n/n^2 < \infty$, то $(S_n - \mathbf{E}S_n)/n \to$ $\to 0$ п.н. Если $\{X_n\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, то для существования такой постоянной b, что $S_n/n \to b$ п.н., необходимо и достаточно условие $\mathbf{E}|X_1| < \infty$; при выполнении этого условия $b = \mathbf{E}X_1$.

В последней теореме Колмогорова условие независимости можно заменить более слабым условием попарной независимости [43]. Первая теорема допускает следующее обобщение, в котором ослабляются моментные условия и рассматриваются последовательности нормирующих постоянных более общего вида. Если $\{X_n\}$ – последовательность независимых случайных величин, $a_n \uparrow \infty$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{-p}\mathbf{E}|X_n|^p < \infty$ для некоторого положительного $p \leqslant 2$, то $S_n/a_n \to 0$ п.н. в случае $p \leqslant 1$, а в случае $1 < p \leqslant 2$ – при дополнительном условии $\mathbf{E}X_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Последний результат можно обобщить. Пусть $\{X_n\}$ – последовательность независимых случайных величин, $g(x)$ – четная функция, положительная и неубывающая в области $x > 0$ и такая, что выполнено хотя бы одно из условий:

(а) $x/g(x)$ не убывает в области $x > 0$,

(б) $x/g(x)$ и $g(x)/x^2$ не возрастают в области $x > 0$, причем дополнительно предполагается, что $\mathbf{E}X_n = 0$ для всех n.

Пусть $a_n \uparrow \infty$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}g(X_n)/g(a_n) < \infty$. Тогда $S_n/a_n \to 0$ п.н.

Заметим, что функция $g(x) = |x|^p$ удовлетворяет условию (а) при $0 < p \leqslant 1$ и условию (б) при $1 \leqslant p \leqslant 2$. Теорема Колмогорова соответствует выбору $g(x) = x^2$ и $a_n = n$.

Для классической нормирующей последовательности $a_n = n$ следующая теорема проясняет связь между *слабым* и *усиленным законами больших чисел*. Пусть $\{X_n\}$ – последовательность независимых случайных величин. Тогда соотношение $S_n/n \to 0$ п.н. равносильно системе условий $S_n/n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|S_{2^{n+1}} - S_{2^n}| \geqslant 2^n\varepsilon) < \infty$ для любого $\varepsilon > 0$. Интересно сопоставить с теоремой Феллера о слабом законе больших чисел следующую теорему. Пусть $\{X_n\}$ – последовательность независимых случайных величин с функциями распределения $\{V_n(x)\}$, $\{a_n\}$ – последовательность положительных чисел, $a_n \uparrow \uparrow \infty$. Пусть выполнено условие $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1/a_n^2) \int\limits_{|x|<a_n} x^2 dV_n(x) < \infty$. Для соотношения $S_n/a_n \to 0$ п.н. необходимо и достаточно выполнение условий

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|X_n| \geqslant a_n) < \infty$$

и

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|<a_n} x dV_k(x) \to 0.$$

Необходимые и достаточные условия применимости усиленного закона больших чисел с классической нормировкой $a_n = n$ были получены Ю. В. Прохоровым в терминах дисперсий рассматриваемых случайных величин в предположении, что эти величины удовлетворяют условию $|X_n| = O(n/\log\log n)$. Это условие существенно, как показано в [31]. Для общего случая неограниченных величин $a_n = n$ другие наборы необходимых и достаточных условий были получены Ю. В. Прохоровым [30] и С. В. Нагаевым [18], а для произвольной (не обязательно монотонной) последовательности нормирующих постоянных – А. И. Мартикайненом [14] и В. В. Булдыгиным [2]. Сформулируем результат А. И. Мартикайнена.

Пусть $\{a_n\}$ – не содержащая нулей последовательность действительных чисел. Зафиксируем выбранное произвольным образом число $c > 1$. Обозначим через i_n наибольший индекс, для которого $|a_{i_n}| \leqslant c^n$, если таких индексов конечное множество; в противном случае положим $i_n = 0$. Положим еще $a_0 = 0$ и $S_0 = 0$. Для того чтобы последовательность независимых случайных величин $\{X_n\}$ удовлетворяла усиленному закону больших чисел с последовательностью нормирующих постоянных $\{a_n\}$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

(а) $|a_n| \to \infty$ или все X_n вырождены;

(б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(|S_{i_n} - S_{i_{n-1}} - m(S_{i_n} - S_{i_{n-1}})| \geqslant \varepsilon c^n) < \infty$

для любого $\varepsilon > 0$, где mX означает медиану случайной величины X.

А. И. Мартикайненом [13] найдены также необходимые и достаточные условия применимости усиленного закона больших чисел к последовательности независимых случайных величин с произвольной нормирующей последовательностью, выраженные в терминах распределений индивидуальных случайных величин, а не их сумм.

Предположение о неубывании последовательности нормирующих постоянных не ограничивает общности при исследовании условий применимости усиленного закона больших чисел, поскольку, как показано в [14], последовательность независимых случайных величин $\{X_n\}$ удовлетворяет усиленному закону больших чисел с произвольной, не содержащей нулей, последовательностью нормирующих постоянных $\{a_n\}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет усиленному закону больших чисел с последовательностью нормирующих постоянных $c_n = \inf\limits_{k \geqslant n} |a_k|$.

Представляют интерес оценки порядка роста сумм S_n в терминах суммы моментов слагаемых при условии существования каких-либо моментов у рассматриваемых случайных величин. Для формулировки результатов этого типа, полученных в [27], нам понадобятся некоторые дополнительные обозначения. Множество функций $\psi(x)$ таких, что каждая $\psi(x)$ положительна и не убывает в области $x > x_0$ при некотором x_0(не обязательно одном и том же для различных функций ψ) и ряд $\sum 1/(n\psi(n))$ сходится (расходится), будет обозначаться Ψ_c (соответственно Ψ_d). Например, $\psi(x) = |x|^\alpha \in \Psi_c$ для любого $\alpha > 0$, $\psi(x) = (\log x)^{1+\alpha} \in \Psi_c$ для любого $\alpha > 0$, $\psi(x) = \log x \in \Psi_d$.

Пусть $g(x)$ – четная непрерывная функция, положительная и строго возрастающая в области $x > 0$, причем $g(x) \to \infty$ при $x \to \infty$, $\{X_n\}$ – последовательность независимых величин такая, что $\mathrm{E}g(X_n) < \infty$ для всех n. Пусть выполнено какое-нибудь из следующих двух условий:

(а) $x/g(x)$ не убывает в области $x > 0$;

(б) $x/g(x)$ и $g(x)/x^2$ не возрастают в области $x > 0$, причем дополнительно предполагается, что $\mathbf{E}X_n = 0$ для всех n.

Пусть, далее, $M_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}g(X_k) \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда $S_n = o(g^{-1}(M_n\psi(M_n)))^n$ п.н. для любой $\psi \in \Psi_c$, где g^{-1} означает функцию, обратную к g.

Если вместо $\psi \in \Psi_c$ взять медленнее растущую функцию $\psi \in \Psi_d$, то сделанное утверждение может не выполняться.

Формулировки сильно упрощаются, если положить $g(x) = |x|^p$, где $0 < p \leqslant 2$. В частности, для $p = 2$ получаем следующее предложение.

Пусть $\{X_n\}$ – последовательность независимых случайных величин с конечными дисперсиями. Положим $B_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}X_k$. Если $B_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то

$$S_n - \mathbf{E}S_n = o\left(\sqrt{B_n\psi(B_n)}\right) \text{ п.н.}$$

для любой функции $\psi \in \Psi_c$. Если $\psi \in \Psi_d$, то утверждение может не выполняться.

Отсюда следует, что для суммы S_n независимых случайных величин с конечными дисперсиями и неограниченно возрастающей дисперсией суммы $B_n = \mathbf{D}S_n$ справедливы следующие оценки порядка роста, каждая из которых является более сильной, чем предыдущие: при любом $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned} S_n - \mathbf{E}S_n &= o(B_n^{1/2+\varepsilon}) \text{ п.н.,} \\ S_n - \mathbf{E}S_n &= o\left(B_n^{1/2}(\log B_n)^{1/2+\varepsilon}\right) \text{ п.н.,} \\ S_n - \mathbf{E}S_n &= o\left(B_n^{1/2}(\log B_n)^{1/2}(\log\log B_n)^{1/2+\varepsilon}\right) \text{ п.н.} \end{aligned}$$

и т.д. В этих оценках нельзя заменить ε нулем, не делая дополнительных предположений.

Многие работы посвящены оценкам скорости сходимости в усиленном законе больших чисел. Приведем некоторые результаты, принадлежащие Бауму и Кацу [37] и относящиеся к последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $\{X_n\}$. Если $t > 0$, то соотношение $\mathbf{P}(\sup_{k \geqslant n}(S_k/k) \geqslant \varepsilon) = o(n^{-t})$ для любого $\varepsilon > 0$ равносильно системе условий $\mathbf{P}(|X_1| \geqslant n) = o(n^{-t-1})$ и $\int_{|x|<n} x dV(x) = o(1)$, где $V(x)$ – функция распределения случайной величины X_1. Если $0 < t < 2$, то равносильны условия:

(А) $\mathbf{E}|X_1|^t \log(1+|X_1|) < \infty$ и (в случае $t \geqslant 1$) $\mathbf{E}X_1 = 0$;

(Б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1/n)\mathbf{P}(\sup\limits_{k \geqslant n} k^{-1/t}|S_k| \geqslant \varepsilon) < \infty$ для любого $\varepsilon > 0$;

(В) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\log n/n)\mathbf{P}(|S_n| \geqslant n^{1/t}\varepsilon) < \infty$ для любого $\varepsilon > 0$.

§ 2.3. Приближение сумм независимых случайных величин суммами независимых нормально распределенных случайных величин

Пусть $V(x)$ – функция распределения, удовлетворяющая условиям

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,dV(x) = 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\,dV(x) = 1 \tag{1}$$

и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\,dV(x) < \infty \text{ для } |t| < b \text{ и некоторого } b > 0. \tag{2}$$

Тогда существует вероятностное пространство, на котором можно построить последовательность независимых случайных величин $\{X_n\}$ с общей функцией распределения $V(x)$ и последовательность независимых случайных величин $\{Y_n\}$, имеющих стандартное нормальное распределение, такие, что суммы

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k \tag{3}$$

удовлетворяют соотношению

$$S_n - T_n = O(\log n) \text{ п.н.} \tag{4}$$

Если функция распределения $V(x)$ удовлетворяет условиям (1) и более слабому по сравнению с (2) условию $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^r dV(x) < \infty$ для некоторого $r > 3$, то сформулированное выше предложение останется верным с заменой (4) более слабым соотношением

$$S_n - T_n = o(n^{1/r}) \text{ п.н.}$$

Эти результаты были получены Комлошем, Майором и Тушнади [53]; последний результат является усилением одной теоремы Штрассена.

В случае, когда функция распределения $V(x)$ удовлетворяет лишь условиям (1) и отсутствуют предположения о существовании моментов порядка выше второго, сформулированное предложение имеет место с заменой соотношения (4) соотношением

$$S_n - T_n = o\left(\sqrt{n\log\log n}\right) \text{ п.н.}$$

(Штрассен [63]; другое доказательство получено Майором [55]). Оптимальность этой оценки иллюстрируется следующим предложением.

Пусть $f(n)$ – произвольная положительная функция такая, что $f(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда существует функция распределения $V(x)$, удовлетворяющая условиям (1) и обладающая тем свойством, что для любой пары последовательностей независимых случайных величин $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ с функциями распределения $V(x)$ и $\Phi(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\{-\frac{1}{2}t^2\}dt$, соответственно, справедливо соотношение

$$\limsup_{n\to\infty} f(n)\frac{|S_n - T_n|}{\sqrt{n\log\log n}} = \infty \text{ п.н.}$$

(Майор [55]). Здесь S_n и T_n определены равенствами (3).

Обобщения и усиления теорем этого типа для последовательностей независимых неодинаково распределенных случайных величин были доказаны А.И. Саханенко [35], [36]. Для случая одинаковых распределений отметим еще два результата Майора [54], [56].

Пусть $V(x)$ – функция распределения, удовлетворяющая условиям (1) и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 g(x)dV(x) < \infty$, где функция $g(x)$ такова, что $x/g(x)$ и $g(x)/x^\varepsilon$ не убывают в области $x > 0$ при некотором $\varepsilon > 0$. Тогда можно построить последовательность независимых случайных величин $\{X_n\}$, имеющих общую функцию распределения $V(x)$, и последовательность независимых случайных величин $\{Y_n\}$, имеющих стандартное нормальное распределение, такие, что

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n - T_n|}{h(n)} \leqslant C \text{ п.н.},$$

где C – некоторая постоянная, $h(x)$ – функция, обратная к функции $x^2 g(x)$. В частности, отсюда следует, что при выполнении условия $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^r dV(x) < \infty$, где $2 < r \leqslant 3$, справедливо соотношение $S_n - T_n = o(n^{1/r})$ п.н.

Пусть $V(x)$ удовлетворяет условиям (1). Положим

$$\sigma_k^2 = \int\limits_{|x|<2^{n/2}} x^2 dV(x) - \Big(\int\limits_{|x|<2^{n/2}} x dV(x)\Big)^2,$$

если $2^n \leqslant k < 2^{n+1}$. Тогда на одном и том же вероятностном пространстве можно построить последовательность независимых случайных величин $\{X_n\}$ с общей функцией распределения $V(x)$ и последовательность независимых нормально распределенных случайных величин $\{Y_n\}$ такие, что $\mathbf{E}Y_k = 0$, $\mathbf{E}Y_k^2 = \sigma_k^2$ для всех k и $S_n - T_n = O(\sqrt{n})$ п.н.

Глава 3

ЗАКОН ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА

Теоремы о законе повторного логарифма для последовательности случайных величин $\{X_n\}$ указывают условия, при которых справедливы соотношения типа $\limsup\limits_{n\to\infty} |S_n|/a_n = 1$ п.н. или $\limsup\limits_{n\to\infty} |S_n|/a_n \leqslant 1$ п.н., где $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ и $\{a_n\}$ – некоторая последовательность положительных чисел. Эти соотношения являются уточнениями более грубых оценок типа $S_n = o(b_n)$ п.н., где $b_n/a_n \to \infty$, доставляемых теоремами об усиленном законе больших чисел.

§ 3.1. Теоремы Колмогорова и Хартмана–Винтнера

Эти две теоремы представляют собой важнейшие результаты в рассматриваемой области.

Теорема Колмогорова. *Пусть $\{X_n\}$ – последовательность независимых случайных величин с математическими ожиданиями, равными нулю, и конечными дисперсиями. Положим $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{E}X_k^2$. Пусть $B_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и существует такая последовательность положительных постоянных $\{M_n\}$, что*

$$|X_n| \leqslant M_n, \tag{1}$$

$$M_n = o\left(\left(\frac{B_n}{\log\log B_n}\right)^{1/2}\right). \tag{2}$$

Тогда

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{(2B_n \log\log B_n)^{1/2}} = 1 \text{ п.н.} \tag{3}$$

Если последовательность случайных величин $\{X_n\}$ удовлетворяет условиям Колмогорова, то ясно, что и последовательность $\{-X_n\}$ обладает тем же свойством. Поэтому при выполнении условий теоремы Колмогорова справедливо равенство

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{(2B_n \log\log B_n)^{1/2}} = -1 \text{ п.н.}$$

и, следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{(2B_n \log\log B_n)^{1/2}} = 1 \text{ п.н.} \tag{4}$$

Теорема Колмогорова является первым результатом в области закона повторного логарифма, имеющим общий характер. Впервые соотношение (4) было получено Хинчиным для последовательности независимых случайных величин, имеющих одинаковое распределение с двумя значениями (схема Бернулли). Условие (2) теоремы Колмогорова нельзя ослабить. Марцинкевич и Зигмунд построили последовательность независимых случайных величин, имеющих симметричные распределения с двумя значениями, для которой $B_n \to \infty$,

$$M_n = O\big((B_n / \log\log B_n)^{1/2}\big),$$

но

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{(2B_n \log\log B_n)^{1/2}} < 1 \text{ п.н.}$$

В работах Уэйсс [66] и В. А. Егорова [5] построены последовательности независимых случайных величин, для которых имеют место первые два из этих соотношений и

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{(2B_n \log\log B_n)^{1/2}} > 1 \text{ п.н.}$$

Теорема Хартмана–Винтнера. *Пусть $\{X_n\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\mathrm{E}X_1 = 0$, $\mathrm{E}X_1^2 = \sigma^2 < \infty$. Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{(2n \log\log n)^{1/2}} = \sigma \text{ п.н.}$$

Как показал Штрассен [64], если $\{X_n\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин и $\mathbf{E}X_1^2 = \infty$, то

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{(n \log\log n)^{1/2}} = \infty \text{ п.н.}$$

Оптимальность этого результата иллюстрируется следующей теоремой Беркеша [38].

Если $f(n)$ – произвольная функция, удовлетворяющая условию $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$, то существует последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\{X_n\}$, такая, что $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 = \infty$ и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{f(n)(n \log\log n)^{1/2}} = 0 \text{ п.н.}$$

А. И. Мартикайнен [15], Розальский [61] и Пруитт [59] доказали следующее обращение закона повторного логарифма.

Если $\{X_n\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин и

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{(2n \log\log n)^{1/2}} = 1 \text{ п.н.},$$

то $\mathbf{E}X_1 = 0$ и $\mathbf{E}X_1^2 = 1$.

§ 3.2. О связи между законом повторного логарифма и центральной предельной теоремой

Условия теоремы Хартмана–Винтнера совпадают с условиями теоремы Леви – одной из форм центральной предельной теоремы. Таким образом, к последовательности независимых случайных величин, имеющих одинаковое распределение с конечной дисперсией, применимы и центральная предельная теорема, и закон повторного логарифма. Возникает естественный вопрос о связи между применимостью центральной предельной теоремы и применимостью закона повторного логарифма к последовательности независимых неодинаково распределенных случайных величин, обладающих конечными дисперсиями. Оказывается, что если такая последовательность удовлетворяет центральной предельной теореме, то она может не подчиняться закону повторного логарифма (при классических нормировках сумм случайных величин), и наоборот. Примерами последовательностей, не подчиняющихся закону повторного логарифма, но удовлетворяющих центральной предельной теореме, могут служить последовательности независимых ограниченных случайных величин с неодинаковыми распределениями, построенные для других целей Марцинкевичем и Зигмундом [57] и Уэйсс [66]. Если выполнено условие несколько более сильное, чем применимость центральной предельной теоремы, а именно, если имеет место некоторая (весьма слабая для большинства стандартных приложений) оценка остаточного члена в центральной предельной теореме, то к рассматриваемой последовательности случайных величин уже будет применим закон повторного логарифма. Именно, справедлива следующая теорема.

Пусть $\{X_n\}$ – последовательность независимых случайных величин, $\mathrm{E}X_n = 0$, $\mathrm{E}X_n^2 < \infty$ для всех n. Положим $B_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}X_k^2$, $R_n = \sup_x |\mathrm{P}(S_n < x\sqrt{B_n}) - \Phi(x)|$. Пусть $B_n \to \infty$ и $B_{n+1}/B_n \to 1$ при $n \to \infty$. Если $R_n = O((\log B_n)^{-1-\delta})$ для некоторого $\delta > 0$, то справедливо соотношение (3).

Достаточными для выполнения условий этой теоремы, принадлежащей В. В. Петрову [26], являются условия $\liminf\limits_{n\to\infty} B_n/n > 0$ и

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}X_k^2 \left|\log|X_k|\right|^{1+\delta} < \infty$$

для некоторого $\delta > 0$. Можно указать другие достаточные условия типа условия Линдеберга, которые уже не содержат предположений о существовании моментов выше второго порядка.

В. А. Егоров [4] показал, что в сформулированной теореме нельзя заменить положительное число δ нулем. Существует последовательность независимых случайных величин $\{X_n\}$ с математическими ожиданиями, равными нулю, и конечными дисперсиями, такая, что $\mathrm{E}X_n^2 \asymp 1$, $R_n = O((\log B_n)^{-1})$, для которой соотношение (3) не имеет места. Отсюда следует, что применимость центральной предельной теоремы к последовательности независимых случайных величин (т.е. соотношение $R_n \to 0$ при $n \to \infty$) не влечет за собой применимость к этой последовательности закона повторного логарифма.

§ 3.3. Обобщенный закон повторного логарифма

Можно освободиться от каких бы то ни было предположений о существовании моментов у рассматриваемых случайных величин и получить обобщения классического закона повторного логарифма, установленного при условии существования моментов второго порядка.

Пусть $\{X_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ – последовательность независимых случайных величин, $\{a_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ – неубывающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию $a_n \to \infty$. Положим $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ для $n \geqslant 1$, $S_0 = 0$, $a_0 = 0$. Введем в рассмотрение следующее условие (В): для любого $\delta > 0$ существует $\lambda > 0$ такое, что для всех неотрицательных $j \leqslant n$ и всех достаточно больших n имеет место неравенство

$$\mathbf{P}(S_n - S_j \geqslant -\delta a_n) \geqslant \lambda.$$

Для любого целого $n \geqslant 0$ и фиксированного $c > 1$ определим число $i_n = i_n(c)$ как наибольшее целое, для которого $a_{i_n} \leqslant c^n$.

Заметим, что введенное выше условие (В) выполнено, если случайные величины X_n имеют симметричные распределения, а также в случае, когда $S_n/a_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$.

Если условие (В) выполнено, то соотношение

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{a_n} \leqslant 1 \text{ п.н.}$$

равносильно любому из следующих двух условий:

(Д_1) для любого $\varepsilon > 0$ и любой неубывающей последовательности целых положительных чисел $k_n \to \infty$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \mathbf{P}\left(S_{k_n} - S_{k_{n-1}} > (1+\varepsilon)a_{k_n}\right) < \infty; \tag{5}$$

(Е_1) для любого $\varepsilon > 0$, любого целого $r \geqslant 1$ и любого $c > 1$

$$\sum_{n=r}^{\infty} \mathbf{P}\left(S_{i_n} - S_{k_{n-r}} > (1+\varepsilon)c^n\right) < \infty. \tag{6}$$

При выполнении условия (В) соотношение

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{a_n} = 1 \text{ п.н.}$$

равносильно любому из следующих двух условий:

(Д_2) для любого $\varepsilon > 0$ и любой неубывающей последовательности целых положительных чисел $k_n \to \infty$ имеет место (5); для любого $\varepsilon > 0$ существует такая неубывающая последовательность целых положительных чисел $k_n \to \infty$, что

$$\sum_{n=2}^{\infty} \mathbf{P}\left(S_{k_n} - S_{k_{n-1}} > (1-\varepsilon)a_{k_n}\right) = \infty;$$

(E_2) для любого $\varepsilon > 0$, любого целого $r \geqslant 1$ и любого $c > 1$ имеет место (6); для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $c > 1$ и целое $r \geqslant 1$, что

$$\sum_{n=r}^{\infty} \mathbf{P}\left(S_{i_n} - S_{i_{n-r}} > (1-\varepsilon)c^n\right) = \infty.$$

Эти результаты получены А. И. Мартикайненом и В. В. Петровым [16]. Аналогичные результаты были впоследствии установлены Томкинсом [65] в несколько иных терминах. А. И. Мартикайнен [12] нашел обобщения этих теорем для случая необязательно монотонной последовательности нормирующих постоянных.

Представляет интерес нахождение необходимых и достаточных условий применимости обобщенного закона повторного логарифма, выраженных в терминах распределений индивидуальных случайных величин, а не их сумм, без каких-либо предположений о существовании моментов слагаемых. Такие условия были найдены А. И. Мартикайненом [13]. Достаточные условия этого типа были получены Классом и Томкинсом [52].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бикялис А.* Оценки остаточного члена в центральной предельной теореме // Liet. matem. rink.—1966.—*6*, № 3.—С. 323—246.
2. *Булдыгин В. В.* Усиленный закон больших чисел и сходимость к нулю гауссовских последовательностей // Теория вероятн. и мат. статист.—1978.— № 19.—С. 33—41.
3. *Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин.—М.—Л.: Гостехиздат, 1949.—264с.
4. *Егоров В. А.* О законе повторного логарифма // Теория вероятн. и ее примен.—1969.—*14*, № 4.—С. 722—729.
5. — К теореме Колмогорова о законе повторного логарифма // Вестн. ЛГУ.—1972.— № 13.—С. 140—142.
6. — О скорости сходимости к нормальному закону, эквивалентной существованию второго момента // Теория вероятн. и ее примен.—1973.—*18*, № 1.—С. 180—185.
7. *Золотарев В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин.—М.: Наука, 1986.—415с.
8. *Ибрагимов И. А.* О точности аппроксимации функций распределения сумм независимых величин нормальным распределением // Теория вероятн. и ее примен.— 1966.—*11*, № 4.—С. 632—655.
9. —, *Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины.— М.: Наука, 1965.—524с.
10. *Круглов В. М.* Глобальные предельные теоремы // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1976.—*61*. —С. 84—101.
11. *Лоэв М.* Теория вероятностей.—М.: ИЛ, 1962.—719с.
12. *Мартикайнен А. И.* Три теоремы о верхнем пределе сумм независимых случайных величин // Вестн. ЛГУ.—1979.— № 1.—С. 45—51.
13. — Экспоненциальный критерий для закона повторного логарифма // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1979.—*85*. —С. 158—168.
14. — О необходимых и достаточных условиях для усиленного закона больших чисел // Теория вероятн. и ее примен.—1979.—*24*, № 4.— С. 814—821.
15. — Обращение закона повторного логарифма для случайного блуждания // Теория вероятн. и ее примен.—1980.—*25*, № 2.— С. 364—366.
16. —, *Петров В. В.* О необходимых и достаточных условиях для закона повторного логарифма // Теория вероятн. и ее примен.—1977.—*22*, № 1.—С. 18—26; № 2.—С. 442.
17. *Нагаев С. В.* Некоторые предельные теоремы для больших уклонений // Теория вероятн. и ее примен.—1965.—*10*, № 2.—

С. 231—254.
18. — О необходимых и достаточных условиях для усиленного закона больших чисел // Теория вероятн. и ее примен.— 1972.—*17*, № 4.— С. 609—618.
19. *Осипов Л. В.* Уточнение теоремы Линдеберга // Теория вероятн. и ее примен.—1966.—*11*, № 2.—С. 339—342.
20. — Асимптотические разложения в центральной предельной теореме // Вестн. ЛГУ.—1967.— № 19.—С. 45—62.
21. — О точности приближения распределения суммы независимых случайных величин к нормальному распределению // Докл. АН СССР.—1968.—*178*, № 5.—С. 1013—1016.
22. — Об асимптотических разложениях для распределений сумм независимых случайных величин // Теория вероятн. и ее примен.—1971.—*16*, № 2.—С. 328—338.
23. —, *Петров В. В.* Об оценке остаточного члена в центральной предельной теореме // Теория вероятн. и ее примен.—1967. —*12*, № 2.— С. 322—329.
24. *Петров В. В.* О некоторых полиномах, встречающихся в теории вероятностей // Вестн. ЛГУ.—1962.— № 19.—С. 150 —153.
25. — Одна оценка отклонения распределения суммы независимых случайных величин от нормального закона // Докл. АН СССР.—1965.—*160*, № 5.— С. 1013—1015.
26. — О связи между оценкой остаточного члена в центральной предельной теореме и законом повторного логарифма // Теория вероятн. и ее примен.— 1966.—*11*, № 3.—С. 514—518.
27. — Об усиленном законе больших чисел // Теория вероятн. и ее примен.— 1969.—*14*, № 2.—С. 193—202.
28. — Суммы независимых случайных величин.—М.: Наука, 1972.— 414с.
29. — Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.— М.: Наука, 1987.—317с.
30. *Прохоров Ю. В.* Об усиленном законе больших чисел // Изв. АН СССР. Мат.—1950.—*14*, № 6.—С. 523—536.
31. — Несколько замечаний к усиленному закону больших чисел // Теория вероятн. и ее примен.—1959.—*4*, № 2.—С. 215—220.
32. *Розовский Л. В.* Асимптотические разложения в центральной предельной теореме // Теория вероятн. и ее примен.—1975. —*20*, № 4.— С. 810—820.
33. — О нижней оценке остаточного члена в центральной предельной теореме // Мат. заметки.—1978.—*24*, № 3.—С. 411 —418.
34. — О точности оценки остаточного члена в центральной предельной теореме // Теория вероятн. и ее примен.—1978.— *23*, № 4.— С. 744—761.

35. *Саханенко А. И.* Скорость сходимости в принципе инвариантности для разнораспределенных величин с экспоненциальными моментами // Предельные теоремы для сумм случайных величин. Тр. ин-та мат. Сиб. отд. АН СССР.—1984.—*3.* —С. 4—49.
36. — Оценки в принципе инвариантности // Тр. ин-та мат. Сиб. отд. АН СССР.—1985.—*5.* —С. 27—44.
37. *Baum L. E., Katz M.* Convergence rates in the law of large numbers // Trans. Amer. Math. Soc.—1965.—*120,* № 1.— С. 108—123.
38. *Berkes I.* A remark to the law of the iterated logarithm // Stud. Sci. math. hung.—1972.—*7,* № 1—2.—С. 189—197.
39. *Berry A. C.* The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates // Trans. Amer. Math. Soc.—1941.—*49,* № 1.— С. 122—136.
40. *Csörgő M., Révész P.* Strong approximations in probability and statistics.—Budapest: Akad. Kiadó, 1981.—284с.
41. *Esseen C.—G.* On the Liapounoff limit of error in the theory of probability // Ark. mat., astr. fysik.—1942.—*28 A,* № 2.— С. 1—19.
42. — Fourier analysis of distribution functions // Acta Math.— 1945.—*77.* —С. 1—125.
43. *Etemadi N.* An elementary proof of the strong law of large numbers // Z. Wahrsch. und verw. Geb.—1981.—*55,* № 1.— С. 119—122.
44. *Feller W.* On the Berry—Esseen theorem // Z. Wahrsch. und verw. Geb.—1968.—*10,* № 3.—С. 261—268.
45. *Hall P.* Characterizing the rate of convergence in the central limit theorem // Ann. Probab.—1980.—*8,* № 6.—С. 1037—1048.
46. — Rates of convergence in the central limit theorem.—Boston, London and Melbourne: Pitman, 1982.—251с.
47. *Heyde C. C.* On the influence of moments on the rate of convergence to the normal distribution // Z. Wahrsch. und verw. Geb.—1967.—*8,* № 1.—С. 12—18.
48. — On the uniform metric in the context of convergence to normality // Z. Wahrsch. und verw. Geb.—1973.—*25,* № 2.— С. 83—95.
49. — Some properties of metrics in a study on convergence to normality // Z. Wahrsch. und verw. Geb.—1969.—*11,* № 3.— С. 181—192.
50. —, *Nakata T.* On the asymptotic equivalence of L_p metrics for convergence to normality // Z. Wahrsch. und verw. Geb.—1984.—*68,* № 1.—С. 97—106.
51. *Katz M.* Note on the Berry—Esseen theorem // Ann. Math. Statist. — 1963.—*34,* № 3.—С. 1107—1108.
52. *Klass M. J., Tomkins R. J.* On the limiting behavior of normed sums of independent random variables // Z. Wahrsch. und verw. Geb.—1984.—*68,* № 1.—С. 107—120.
53. *Komlós J., Major P., Tusnády G.* An approximation of partial sums of independent RV's, and the sample DF. I, II // Z. Wahrsch. und

verw. Geb.—1975.—*32*, № 1—2.— C. 111—131; *34*, № 1.—C. 33 —58.

54. *Major P.* The approximation of partial sums of independent RV's // Z. Wahrsch. und verw. Geb.—1976.—*35*, № 3.— C. 213—220.

55. — Approximation of partial sums of i.i.d.r.v.s when the summands have only two moments // Z. Wahrsch. und verw. Geb.—1976.—*35*, № 3.—C. 221—229.

56. — An improvement of Strassen's invariance principle // Ann. Probab. —1979.—*7*, № 1.—C. 55—61.

57. *Marcinkiewicz J., Zygmund A.* Remarque sur la loi du logarithme iterée // Fundam. math.—1937.—*29.* —C. 215—222.

58. *Petrov V. V.* Sums of independent random variables.— Berlin—Heidelberg—New York: Springer, 1975.—345c.

59. *Pruitt W. E.* General one—sided laws of the iterated logarithm // Ann. Probab.—1981.—*9*, № 1.—C. 1—48.

60. *Révész P.* The laws of large numbers.—Budapest: Akad. Kiadó, 1967. —175c.

61. *Rosalsky A.* On the converse to the iterated logarithm law // Sankhya. —1980.—*A42*, № 1—2.—C. 103—108.

62. *Stout W. F.* Almost sure convergence.—New York: Academic Press, 1974.—381c.

63. *Strassen V.* An invariance principle for the law of the iterated logarithm // Z. Wahrsch. und verw. Geb.—1964.—*3*, № 3.— C. 211—226.

64. — A converse to the law of the iterated logarithm // Z. Wahrsch. und verw. Geb.—1966.—*4*, № 4.—C. 265—268.

65. *Tomkins R. J.* Limit theorems without moment hypotheses for sums of independent random variables // Ann. Probab.—1980.—*8*, № 2. — C. 314—324.

66. *Weiss M.* On the law of the iterated logarithm // J. Math. Mech.— 1959.—*8*, № 1.—C. 121—132.

ТОЧНОСТЬ ГАУССОВСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В. Бенткус, Ф. Гетце, В. Паулаускас, А. Рачкаускас

Введение и обозначения

Обозначим через B вещественное банахово пространство с нормой $\|\cdot\| = \|\cdot\|_B$. Пусть независимые одинаково распределенные (н.о.р.) случайные элементы (с.э.) $X, X_1, X_2, \ldots$ принимают значения в B. Далее, предположим, что $\mathbf{E}X = 0$ и существует такой гауссовский с.э. $Y \in B$ со средним нуль, что ковариации X и Y совпадают. Обозначим

$$S_n = S_n(X) = n^{-1/2}(X_1 + \ldots + X_n).$$

Пусть функция $f : B \to R$ (или $f : B \to F$, где F – банахово пространство) такова, что математические ожидания $\mathbf{E}f(S_n)$, $\mathbf{E}f(Y)$ можно корректно определить. *Центральную предельную теорему* (ЦПТ) можно сформулировать как утверждение, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}f(S_n) = \mathbf{E}f(Y) \tag{0.1}$$

для всех функций $f \in \mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ – некоторый класс функций $f : B \to R$. В классическом определении ЦПТ класс $\mathcal{F}$ совпадает с классом $C_b(B)$ всех ограниченных непрерывных функций $f : B \to R$. В более современных определениях $\mathcal{F}$ может отличаться от $C_b(B)$, а математическое ожидание можно понимать не только как классические интегралы Лебега, Бохнера, но и по-другому.

Обозначим через ρ некоторую полуметрику (т.е., $\rho(x, y) = 0$ не обязательно влечет $x = y$) на некотором классе вероятностных мер на B. Другой формулировкой ЦПТ может служить соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \rho\bigl(\mathcal{L}(S_n),\ \mathcal{L}(Y)\bigr) = 0, \tag{0.2}$$

где $\mathcal{L}(Y)$ – распределение с.в. Y. Если ρ является метрикой Прохорова, то (0.2) эквивалентно классической ЦПТ. В последующем ЦПТ понимается в классическом смысле.

Нашей целью является обзор результатов и методов, применяемых для оценки скорости сходимости в ЦПТ в бесконечномерных пространствах. Включены также результаты об асимптотических разложениях. Уместно отметить, что книги В. В. Сазонова [189], В. С. Королюка, Ю. В. Боровских [61], В. Паулаускаса, А. Рачкаускаса [84] содержат родственные обзоры. Здесь мы ограничиваемся случаем н.о.р. слагаемых и суммами, имеющими гауссовский предел. Мы не пытались дать наиболее точные и общие формулировки результатов, поскольку таковые можно найти в цитируемых оригинальных работах. Нашей целью было подчеркнуть отличия от конечномерного случая, а также объяснить некоторые новые явления, связанные с более сложной геометрической структурой банаховых пространств. Поэтому мы приводим только наброски доказательств, а технические детали отсутствуют. Нашим намерением было также отразить усиливающуюся тенденцию применения к некоторым асимптотическим задачам математической статистики результатов, полученных в банаховых пространствах.

Обозначим

$$\begin{aligned}
&\varepsilon = \varepsilon(n) = n^{-1/2}, \quad n = 1, 2, \dots,\\
&g(\varepsilon) = g(\varepsilon, f) = \mathbf{E} f(S_n),\\
&g(0) = g(0, f) = \mathbf{E} f(Y),\\
&h(\varepsilon) = h(\varepsilon, \rho) = \rho\big(\mathcal{L}(S_n),\ \mathcal{L}(Y)\big).
\end{aligned}$$

Тогда (0.1) означает, что функция $g(\varepsilon)$ с дискретным аргументом $\varepsilon = n^{-1/2}$, $n = 1, 2, \dots$, непрерывна в точке $\varepsilon = 0$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} g(\varepsilon) = g(0). \tag{0.3}$$

Подобным образом, соотношение (0.2) эквивалентно

$$\lim_{\varepsilon \to 0} h(\varepsilon) = 0. \tag{0.4}$$

Более сильным, чем (0.3), является утверждение, что функция g в точке $\varepsilon = 0$ удовлетворяет условию Гельдера (с показателем $\alpha > 0$ и константой $C < \infty$)

$$|g(\varepsilon) - g(0)| \leqslant C\varepsilon^{\alpha} \tag{0.5}$$

(соответственно
$$h(\varepsilon) \leqslant C\varepsilon^{\alpha} \tag{0.6}$$
в случае (0.4)). Оценки (0.5), (0.6) обычно называют оценками скорости сходимости в ЦПТ. Ясно, что (0.5) и (0.6) можно переписать в следующем виде:
$$|\mathbf{E}f(S_n) - \mathbf{E}f(Y)| \leqslant Cn^{-\alpha/2}, \tag{0.7}$$
$$\rho(\mathcal{L}(S_n),\ \mathcal{L}(Y)) \leqslant Cn^{-\alpha/2}. \tag{0.8}$$

Более точной, чем (0.5) или (0.7), аппроксимацией функции g является асимптотическое разложение
$$g(\varepsilon) = g(0) + a_1\varepsilon + \ldots + a_k\varepsilon^k + R \tag{0.9}$$
с коэффициентами $a_1, \ldots, a_k$ и остаточным членом $R = R_k(\varepsilon)$ таким, что $R_k(\varepsilon) = o(\varepsilon^k)$ при $\varepsilon \to 0$. Ясно, что (0.9) можно переписать в следующем виде:
$$\mathbf{E}f(S_n) = \mathbf{E}f(Y) + a_1 n^{-1/2} + \ldots + a_k n^{-k/2} + R. \tag{0.10}$$

Соотношение (0.10) называют обычно *асимптотическим разложением в ЦПТ.*

В первой главе приводится обзор методов и результатов, касающихся оценки (0.7) в случае, когда f совпадает с индикаторной функцией множества $A \subset B$, $f(x) = \chi_A(x)$, тогда (0.7) превращается в оценку для вероятностей
$$|\mathbf{P}\{S_n \in A\} - \mathbf{P}\{Y \in A\}| \leqslant Cn^{-\alpha/2}. \tag{0.12}$$

Если пространство B конечномерно, то (0.12) можно получить для относительно богатых классов множеств A, например, для класса всех выпуклых множеств (см., например, Р. Н. Бхаттачария и Р. Р. Рао [123], В. В. Сазонов [189]). Ситуация сильно изменяется в бесконечномерном случае, поскольку тогда нельзя получить равномерную оценку даже для таких относительно небогатых классов, как класс всех шаров или класс всех полупространств (см. В. В. Сазонов [189]). Поэтому мы уточним выбор множеств A. Рассмотрим функционал $F : B \to R$ и положим $A = A_r(F) = \{x \in B : F(x) < r\}$. Тогда (0.12) превращается в
$$|\mathbf{P}\{F(S_n) < r\} - \mathbf{P}\{F(Y) < r\}| \leqslant Cn^{-\alpha/2}. \tag{0.13}$$

Оказывается, что в бесконечномерном случае оценка (0.13) сильно зависит от степени гладкости F, при этом метод Фурье и метод интегрирования по частям (см. § 1.1 и § 1.3) хорошо работают в случае гладкого функционала F, а метод Линдеберга и метод конечномерных аппроксимаций (см. § 1.2 и § 1.4) – в случае негладкого F. В последнем параграфе первой главы приведены результаты об оценках скорости сходимости в метрике Прохорова и в ограниченной метрике Липшица (BL-метрике).

Вторая глава посвящена асимптотическим разложениям. В § 2.1 и § 2.2 рассматриваются асимптотические разложения для математического ожидания $\mathbf{E}f(S_n)$ с достаточно гладкой функцией $f : B \to R$, а также для функции f, имеющей изолированные точки недифференцируемости. Типичный пример представляет математическое ожидание $\mathbf{E}||S_n||^p$, $p > 0$, с достаточное число раз дифференцируемой нормой $||\cdot||$. Результаты этих параграфов получены без явных условий, похожих на классическое условие Крамера для характеристической функции. В § 2.3 дан обзор асимптотических разложений для вероятности $\mathbf{P}\{F(S_n) < r\}$. В § 2.4 рассматриваются асимптотические разложения для плотности $(d/dr)\mathbf{P}\{F(S_n) < r\}$.

В третьей главе представлены примеры применения методов и результатов предыдущих глав. Хотелось бы подчеркнуть, что мы не претендуем на полноту обзора этих применений. Применения общей теории в банаховых пространствах условно можно разбить на следующие классы:

1) случай, когда предельную теорему для статистического критерия можно интерпретировать как частный случай общего результата в банаховом пространстве. Типичный пример такого рода – ω^2-статистика (см. § 3.1). Каждую такую статистику можно представить как норму суммы н.о.р. с.э. в пространстве L_2;

2) случай, когда проблема может быть редуцирована к известным фактам из теории вероятностей в банаховых пространствах. Типичный пример – L-статистика (см. § 3.2). Эту статистику можно представить в виде суммы н.о.р. вещественных с.в. с некоторым дополнительным остаточным членом. Остаточный член же можно оценить через норму некоторой суммы банаховозначных с.э.;

3) случай, когда методы и идеи из теории вероятностей в банаховых пространствах могут быть применены к статистической задаче. Типичный пример – U-статистика;

4) случай, когда требуется применить комбинацию предыдущих подходов. Примером является оценка сходимости для эмпирических процессов (см. § 3.3 и § 3.4).

Ниже мы всегда предполагаем, что все с.э. и с.в. независимы в совокупности (если явно не сказано обратное). Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, на котором определены с.э.

и с.в., как правило, не указывается. Общие факты из теории распределений и ЦПТ в банаховых пространствах читатель может найти в книгах Н. Н. Вахании, В. И. Тариеладзе, С. А. Чобаняна [38] и А. Араужо, Е. Жине [109] соответственно.

Следующие обозначения используются на протяжении всей работы.

$B, F, \ldots$ – вещественные сепарабельные банаховы пространства с нормами $\|\cdot\| = \|\cdot\|_B$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_F, \ldots$.

B^* – пространство, сопряженное к B и состоящее из всех линейных непрерывных функционалов со стандартной нормой, $x^*(y) = < x^*, y >$, если $x^* \in B^*$, $y \in B$.

H – вещественное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\| = \|\cdot\|_H$.

R – вещественная прямая.

R^k – k-мерное евклидово пространство со скалярным произведением $(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_k y_k$.

l_p, c_0 – классические банаховы пространства последовательностей.

$L_p(S, \mathcal{S}, \nu), L_p, C[0,1], D[0,1]$ – классические пространства функций.

п.вс. – почти всюду.

н.о.р. – независимые одинаково распределенные.

с.э. – случайный элемент.

B-с.э. – с.э. со значениями в B.

с.в. – случайная величина.

х.ф. – характеристическая функция.

$X, X_1, X_2, \ldots \in B$ – последовательность н.о.р. B-с.э. таких, что $X = 0$.

$Y, Y_1, Y_2, \ldots \in B$ – последовательность гауссовских с.э. таких, что $\mathbf{E}Y = 0$ и ковариации X и Y совпадают, т.е. $\mathbf{E}f(X)g(X) = \mathbf{E}f(Y)g(Y)$ для всех $f, g \in B^*$.

$S_n = S_n(X) = n^{-1/2}(X_1 + \ldots + X_n)$ – нормированная сумма.

$\mu = \mathcal{L}(X)$ – распределение X.

$\nu = \mathcal{L}(Y)$ – распределение Y.

$\mathrm{cov}X$ – ковариационный оператор X. Согласно определению, $\mathrm{cov}X : B^* \to B$ и $\mathrm{cov}X(f) = \mathbf{E}f(X)X$ для всех $f \in B^*$.

$\beta_s = \mathbf{E}||X||^s$, $s \in R$ – s-ый момент X.

$\nu_s = \nu_s(\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y)) = \int_B ||x||^s |\mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y)|(dx)$ – s-ый псевдомомент.

$|\mu - \nu|$ – вариация (знакопеременной) меры $\mu - \nu$.

$\chi_A(t)$ – индикаторная функция множества A.

$f^{(s)}(x)$ – s-ая производная Фреше функции f в точке x.

$f^{(s)}(x)h_1 \ldots h_s$ – значение в точке $(h_1, \ldots, h_s)$ производной $f^{(s)}(x)$ как s-непрерывной формы.

$||f^{(s)}(x)|| = \sup\{||f^{(s)}(x)h^s|| : ||h|| \leqslant 1\}$ – норма s-линейной формы $f^{(s)}$.

$C^s = C^s(B; F)$ – пространство всех s раз непрерывно дифференцируемых по Фреше функций $f : B \to F$.

$C_b^s = C_b^s(B; F)$ – пространство всех ограниченных функций из C^s, имеющих ограниченные производные.

Глава 1

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ

§ 1.1. Метод Фурье

Метод Фурье занимает важное место в математике и, в частности, в теории вероятностей. При исследовании сумм независимых с.в. этот метод работает весьма эффективно. В теории чисел он применялся Гауссом для исследования квадратичных законов взаимности, а также для исследования представлений целых чисел суммами квадратов (проблема Варинга), при этом использовался так называемый круговой метод Харди–Литлвуда из аналитической теории чисел [155]. А. М. Ляпунов (см. [159], [160]) приспособил метод Фурье для доказательства ЦПТ на вещественной прямой при выполненных так называемых моментных условиях Ляпунова. Этот метод основывается на неравенствах следующего типа, связывающих разност. вероятностных мер и ее преобразование Фурье. Пусть μ – вероятностная мера на R, а ν – мера ограниченной вариации на R. Если ν абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и ее плотность p ограничена, $m =$

$= \sup_x |p(x)| < \infty$, то для каждого $T > 0$ выполняется неравенство

$$\sup_{x\in R} |\mu((-\infty, x)) - \nu((-\infty, x))| \leqslant C_1 \int_{-T}^{T} \frac{|\hat{\mu}(t) - \hat{\nu}(t)|}{|t|} dt + C_2 \frac{m}{T}, \quad (1.1)$$

где C_1 и C_2 – абсолютные постоянные, а характеристическая функция (х.ф.)

$$\hat{\nu}(t) = \int_R \exp\{itx\}\nu(dx).$$

Это неравенство называется *леммой Берри–Эссеена* (см. [119], [136]). Оно применяется для оценки скорости сходимости, а также для оценки аппроксимаций более высокого порядка меры μ мерой ν с гладкой плотностью, при этом оценка сводится к сравнению х.ф. Число T обычно выбирается так, чтобы величина T^{-1} имела порядок желаемой погрешности. Преимущество метода Фурье в подходе Ляпунова видна из доказательства классического неравенства Берри–Эссеена

$$\sup_{x\in R} |\mathbf{P}\{S_n < x\} - \mathbf{P}\{Y < x\}| = O(n^{-1/2}), \quad (1.2)$$

где $S_n = n^{-1/2}(X_1 + \ldots + X_n)$, $X, X_1, X_2, \ldots$ – н.о.р. вещественные с.в. такие, что

$$\mathbf{E}X = 0, \quad \beta_3 := \mathbf{E}|X|^3 < \infty.$$

Пусть Y – гауссовская с.в. такая, что $\mathbf{E}Y = 0$ и $\beta_2 = \mathbf{E}X^2 = \mathbf{E}Y^2 > 0$. Подстановка в (1.1) $\mu = \mu_n = \mathcal{L}(S_n)$, $\nu = \mathcal{L}(Y)$ и $T = A\sqrt{n}$ с некоторым $A = A(\mathcal{L}(Y)) > 0$, которое мы выберем позднее, сводит оценку (1.2) к следующей:

$$\int_{-T}^{T} \frac{|\hat{\mu}_n(t) - \hat{\nu}(t)|}{|t|} dt = O(n^{-1/2}). \quad (1.3)$$

Обычно оценка разности $\hat{\mu}_n(t) - \hat{\nu}(t)$ проводится по-разному для „малых" и „больших" значений $|t| \leqslant T$. Ясно, что

$$\hat{\mu}_n(t) = \mathbf{E}\exp\{itS_n\} = \left(\mathbf{E}\exp\{itn^{-1/2}X\}\right)^n.$$

Разлагая экспоненту в ряд Тейлора, получаем

$$|\mathbf{E}\exp\{itn^{-1/2}X\}| \leqslant 1 - \frac{\beta_2 t^2}{2n} + \frac{\beta_3 |t|^3}{6n^{3/2}} \leqslant \exp\left\{-\frac{\beta_2 t^2}{3n}\right\},$$

$$|\hat{\mu}_n(t)| \leqslant \exp\{-\beta_2 t^2/3\} \quad (1.4)$$

для $|t| \leqslant An^{1/2}$ с числом $A = \min\{\beta_2/\beta_3, \sqrt{2/\beta_2}\}$. Неравенство (1.4) и равенство $\hat{\nu}(t) = \exp\{-\beta_2 t^2/2\}$ позволяют показать, что на каждом интервале $n^\epsilon \leqslant |t| \leqslant A\sqrt{n}$ интеграл (1.3) имеет порядок $O(n^{-1/2})$, если только число $\epsilon > 0$ фиксировано. Для „малых" значений $|t| \leqslant n^\epsilon$ следует учесть дополнительно, что средние и дисперсии X и Y совпадают, т.е.

$$\frac{d^s}{dt^s}\left(\hat{\mu}_n(t) - \hat{\nu}_n(t)\right)\Big|_{t=0} = 0, \quad s = 0, 1, 2.$$

Например, можно разложить функцию

$$\ln \hat{\mu}_n(t) = n \ln \mathbf{E} \exp\{itn^{-1/2}X\}$$

в ряд Тейлора в точке нуль,

$$n \ln \mathbf{E} \exp\{itn^{-1/2}X\} = -\beta_2 t^2/2 + O(\beta_3 |t|^3 n^{-1/2}),$$

и получить

$$\frac{|\hat{\mu}_n(t) - \hat{\nu}(t)|}{|t|} = O(t^2 \exp\{-t^2\beta_2/2\} n^{-1/2}),$$

что обеспечивает искомую оценку $O(n^{-1/2})$ интеграла (1.3) на интервале $|t| \leqslant n^\epsilon$. Более подробную информацию о методе Фурье в одномерном случае можно найти в работах А. М. Ляпунова [159], Ц. Г. Эссеена [137], в монографиях И. А. Ибрагимова, Ю. В. Линника [43], В. В. Петрова [85].

Подобные соображения применимы и в конечномерном случае, где получено обобщение леммы Берри–Эссеена [123], [121], [200], [189]. Характеристическая функция

$$\hat{\mu}_n(t) = \mathbf{E} \exp\{i(t, S_n)\} = \left(\mathbf{E} \exp\{in^{-1/2}(t, X)\}\right)^n,$$

где случайный вектор $X \in R^k$, а стандартное скалярное произведение $(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_k y_k$, $x, y \in R^k$, сохраняет мультипликативную структуру. Поэтому можно применить схему одномерного доказательства, если не вдаваться в некоторые, иногда весьма сложные технические изменения.

Пусть теперь $X, X_1, X_2, \ldots$ – с.э., принимающие значения в измеримом пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. Вместо сумм можно исследовать более общие статистики

$$T = t_n(X_1, \ldots, X_n), \tag{1.5}$$

симметричные относительно $X_1, \ldots, X_n$ и такие, что влияние каждого X_i в отдельности асимптотически пренебрежимо. Одним из примеров (1.5) может служить U-статистика (см., например, [145], [151], [124]).

Другой пример $T = F(S_n)$, где слагаемые $X, X_1, X_2, \ldots$ и сумма S_n принимают значения в сепарабельном банаховом пространстве B, при этом $\mathbf{E}X = 0$, $\mathbf{E}||X||^s < \infty$ с некоторым $s \geqslant 2$. Здесь $F: B \to R$ – некоторая дифференцируемая достаточное число раз по Фреше функция. Теперь уже T не является суммой н.о.р. с.в. и х.ф. не имеет мультипликативной структуры. Поэтому для анализа х.ф. T требуется новая техника, если мы по-прежнему хотим применять лемму Берри–Эссеена. Позволим себе начать с самого простого бесконечномерного случая, когда $B = H$ является гильбертовым пространством, а функция $F(x) = ||x||^2$. Следующее исключительно полезное *неравенство симметризации* позволяет редуцировать исследование х.ф. $\mathbf{E}\exp\{it||S_n||^2\}$ к анализу некоторого произведения характеристических функций (см. также лемму 1.7).

Симметризация $\bar{U}$ с.в. U определяется при помощи равенства $\bar{U} = U_1 - U_2$, где U_1 и U_2 – независимые копии U.

Лемма 1.1 (Ф. Гетце [145]). *Для произвольных независимых с.в. $U, V, W \in H$ и $t \in R$ выполняется*

$$|\mathbf{E}\exp\{it||U + V + W||^2\}|^4 \leqslant \mathbf{E}\exp\{2it(\bar{U}, \bar{V})\}.$$

Доказательство. Заметим, что для произвольной вещественнозначной функции $f(u, v)$ выполняется

$$|\mathbf{E}\exp\{itf(U, V)\}|^2 \leqslant \mathbf{E}\exp\{it\Delta_2(V_1 - V_2)f(U, V_2)\}, \tag{1.6}$$

где V_1, V_2 – независимые копии V, а разностный оператор $\Delta_2(h)f(u, v) = f(u, v + h) - f(u, v)$ действует на вторую переменную функции f. Действительно, применяя неравенство Гельдера и замечая, что V, V_1, V_2 – н.о.р., имеем

$$|\mathbf{E}\exp\{itf(U, V)\}|^2 \leqslant \mathbf{E}|\mathbf{E}\exp\{-itf(U, V)\}|U)|^2 =$$
$$= \mathbf{E}\exp\{itf(U, V_1)\}\exp\{itf(U, V_2)\},$$

что совпадает с (1.6). Применив (1.6) дважды с $f(U, V) = ||U + V + W||^2$ и заметив, что в этом случае

$$\Delta_1(h_1)\Delta_2(h_2)f(u, v) = 2(h_1, h_2),$$

где разностный оператор Δ_1 действует на первый аргумент функции f, завершаем доказательство.

В качестве иллюстрации к применению неравенства симметризации докажем следующую теорему.

Теорема 1.2. *Пусть $X, Y \in H$. Предположим, что с.в. X ограничен, $\mathbf{P}\{\|X\| \leqslant M\} = 1$, и что X не сосредоточен в конечномерном подпространстве пространства H. Тогда*

$$\Delta_n := \sup_{x>0} |\mathbf{P}\{\|S_n\|^2 < x\} - \mathbf{P}\{\|Y\|^2 < x\}| = O(n^{-1/2}).$$

В течение доказательства теоремы будем предполагать, что X не сосредоточен в подпространстве пространства H. Это не ограничивает общности, так как в противном случае H можно заменить на это подпространство. Поэтому существует ортонормированный базис $\{e_k, k \in N\}$ пространства H такой, что

$$Y = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \eta_k e_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 < \infty,$$

где $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots \in R$ – н.о.р. стандартные нормальные с.в., $\mathbf{E}\eta = 0, \mathbf{E}\eta^2 = 1$, при этом $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots > 0$

Лемма 1.3. *Для всех $t \in R$ и $l = 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства*

$$|\mathbf{E}\exp\{it\|Y\|^2\}| \leqslant (1 + 4t^2\sigma_l^4)^{-l/4}, \tag{1.7}$$

$$|\mathbf{E}\exp\{it(Y_1, Y_2)\}| \leqslant (1 + t^2\sigma_l^4)^{-l/2}. \tag{1.8}$$

Доказательство. Легко проверить, что

$$\mathbf{E}\exp\{it\eta^2\} = 1/\sqrt{1-2it}.$$

Поэтому

$$\mathbf{E}\exp\{it\|Y\|^2\} = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - 2it\sigma_k^2)^{-1/2},$$

что очевидным образом влечет (1.7). Далее, поскольку $\mathbf{E}\exp\{it(X, Y)\} = \mathbf{E}\exp\{-\frac{1}{2}(Dx, x)\}$, где $D = \mathrm{cov} Y$, то

$$\mathbf{E}\exp\{it(Y_1, Y_2)\} = \mathbf{E}\exp\{-t^2(DY, Y)/2\} \leqslant \{\mathbf{E}\exp\{-t^2\sigma_l^4\eta^2\}\}^l,$$

что влечет (1.8).

Лемма 1.4. *Пусть $\mathbf{P}\{\|X\| \leqslant M\} = 1$. Тогда для всех $p > 0$ и m, l таких, что $m + l \leqslant n$, выполняется*

$$\mathbf{E}\|n^{-1/2}(X_1 + \ldots + X_m + Y_1 + \ldots + Y_l)\|^p \leqslant C(p)M^p.$$

Доказательство. Достаточно проверить, что

$$\mathbf{E}||n^{-1/2}(Y_1 + \ldots + Y_l)||^p \leqslant C(p)M^p, \tag{1.9}$$

$$\mathbf{E}||n^{-1/2}(X_1 + \ldots + X_m)||^p \leqslant C(p)M^p. \tag{1.10}$$

Неравенство (1.9) получим, если заметим, что

$$\mathcal{L}(Y_1 + \ldots + Y_l) = \mathcal{L}(\sqrt{l}Y)$$

и что

$$\mathbf{E}||Y||^p \leqslant C(p)(\mathbf{E}||Y||^2)^{p/2} = C(p)(\mathbf{E}||X||^2)^{p/2} \leqslant C(p)M^p.$$

Для доказательства (1.10) следует применить *неравенство Зигмунда–Марцинкевича* (см., например, [38])

$$\mathbf{E}||Z_1 + \ldots + Z_m||^p \leqslant C(p)\mathbf{E}(||Z_1||^2 + \ldots + ||Z_m||^2)^{p/2},$$

имеющее место для произвольных н.о.р. с.э. $Z_1, \ldots Z_n \in H$ с нулевым средним. Поэтому (1.10) сводится к очевидному неравенству

$$n^{-p/2}\mathbf{E}(||X_1||^2 + \ldots + ||X_m||^2)^{p/2} \leqslant M^p.$$

Лемма 1.5. *Пусть* $\mathbf{P}\{||X|| \leqslant M\} = 1$. *Обозначим* $\bar{U} = n^{-1/2}(\bar{X}_1 + \ldots + \bar{X}_m)$, $m \leqslant n$. *Предположим, что с.э.* $Z, \bar{U} \in H$ *независимы. Тогда для всех* $s \in R$ *и* $L > 0$ *таких, что*

$$|s|LM \leqslant \sqrt{n}, \tag{1.11}$$

выполняется

$$0 \leqslant \mathbf{E}\exp\{is(Z,\bar{U})\} \leqslant \mathbf{P}\{||Z|| > L\} + \mathbf{E}\exp\left\{-\frac{s^2m}{2n}(DZ,Z)\right\}, \tag{1.12}$$

где $D = \mathrm{cov}X = \mathrm{cov}Y$.

Доказательство. Поскольку с.э. $\bar{U}$ является симметризацией с.э. $U = n^{-1/2}(X_1 + \ldots + X_m)$, то левое неравенство в (1.12) выполняется. Для доказательства правого неравенства в (1.12) достаточно проверить, что для каждого (неслучайного) $z \in H$ выполняется

$$\mathbf{E}\exp\{is(z,\bar{U})\} \leqslant \mathcal{X}\{||z|| > L\} + \exp\left\{-\frac{s^2m}{2n}(Dz,z)\right\}. \tag{1.13}$$

Если $\|z\| > L$, то (1.13) очевидно. Поэтому предположим, что $\|z\| \leqslant L$. Тогда (1.13) сводится к

$$\mathbf{E}\exp\{is(z,\bar{U})\} \leqslant \exp\left\{-\frac{s^2m}{2n}(Dz,z)\right\}. \tag{1.14}$$

Благодаря симметричности и одинаковой распределенности $\bar{X}, \bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots$, имеем

$$\mathbf{E}\exp\{is(z,\bar{U})\} = \left[\mathbf{E}\cos\left\{\frac{s}{\sqrt{n}}(z,\bar{X})\right\}\right]^m. \tag{1.15}$$

Обозначим $x = s(z,\bar{X})/\sqrt{n}$. Тогда (1.11) вместе с $\|z\| \leqslant L$, $\|\bar{X}\| \leqslant 2M$ гарантирует, что $|x| \leqslant 2$. Поэтому в (1.15) можно применить очевидное неравенство $\cos x \leqslant 1 - x^2/4$, справедливое при $|x| \leqslant 2$. Заметив еще, что $\mathbf{E}(z,\bar{X})^2 = 2(Dz,z)$, имеем

$$\mathbf{E}\exp\{is(z,\bar{U})\} \leqslant \left[1 - \frac{s^2}{2n}(Dz,z)\right]^m \leqslant \exp\left\{-\frac{s^2m}{2n}(Dz,z)\right\},$$

что завершает доказательство леммы.

Доказательство теоремы 1.2. Функция распределения $r \to \mathbf{P}\{\|Y\|^2 < r\}$ имеет ограниченную плотность, если только собственное значение $\sigma_3 > 0$. Действительно, из леммы 1.3 вытекает, что х.ф.

$$|\mathbf{E}\exp\{it\|Y\|^2\}| \leqslant \min(1,\ \sigma_3^{-3}|t|^{-3/2})$$

интегрируема. Это позволяет применить лемму Берри–Эссеена с $T = \sqrt{n}$. Поэтому оценка $\Delta_n = O(n^{-1/2})$ вытекает из следующих четырех оценок:

$$I_1 := \int_{n^\varepsilon < |t| < \sqrt{n}} \frac{1}{|t|}|g(t)|dt = O(n^{-1/2});$$

$$I_2 := \int_{n^\varepsilon < |t| < \sqrt{n}} \frac{1}{|t|}|f_n(t)|dt = O(n^{-1/2});$$

$$I_3 := \int_{|t| \leqslant 1} \frac{1}{|t|}|f_n(t) - g(t)|dt = O(n^{-1/2});$$

$$I_4 := \int_{1 \leqslant |t| \leqslant n^\varepsilon} \frac{1}{|t|}|f_n(t) - g(t)|dt = O(n^{-1/2}),$$

где $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$,

$$g(t) := \mathbf{E}\exp\{it\|Y\|^2\}, \quad f_n(t) := \mathbf{E}\exp\{it\|S_n\|^2\}.$$

Сначала оценим I_1. Из леммы 1.3 вытекает, что $|g(t)| \leqslant \leqslant 1/(\sigma_l^l |t|^{l/2})$. Поэтому $I_1 \leqslant 2/(l\sigma_l^l n^{\varepsilon l/2}) = O(n^{-1/2})$, если $\varepsilon l > 1$. Но такое $l = l(\varepsilon)$ существует, поскольку $\sigma_l > 0$ для всех l.

Теперь оценим I_2. Достаточно показать, что для $1 \leqslant |t| \leqslant \sqrt{n}$ и для каждого фиксированного $A > 0$ выполняется

$$|f_n(t)| = O(|t|^{-A} + n^{-A}). \tag{1.16}$$

Пусть $S_n = U + V + W$, где

$$U = n^{-1/2}(X_1 + \ldots + X_m),$$
$$V = n^{-1/2}(X_{m+1} + \ldots + X_{m+k}), \quad W = S_n - U - V,$$

а $k+m \leqslant n$. Тогда неравенство симметризации (см. лемму 1.1) сводит (1.16) к следующей оценке:

$$\mathbf{E}\exp\{it(\tilde{V}, \tilde{U})\} = O(|t|^{-A} + n^{-A}). \tag{1.17}$$

Из леммы 1.5 вытекает, что для всех $L > 0$ выполняется

$$\mathbf{E}\exp\{it(\tilde{V}, \tilde{U})\} \leqslant \mathbf{P}\{\|\tilde{V}\| > L\} + \mathbf{E}\exp\left\{-\frac{t^2 m}{2n}(D\tilde{V}, \tilde{V})\right\}, \tag{1.18}$$

при условии $|t|LM \leqslant \sqrt{n}$. Выберем

$$L = 1/(M|t|^{1/4}), \quad k \sim n/(2|t|), \quad m = n - k \sim n(1 - 1/(2|t|)).$$

Тогда неравенство Чебышева и лемма 1.4 приводят к

$$\mathbf{P}\{\|\tilde{V}\| > L\} = \mathbf{P}\{\|\tilde{S}_k\| > L\sqrt{n/k}\} \leqslant$$
$$\leqslant C(M, A)(k/(nL^2))^{2A} = O(|t|^{-A}). \tag{1.19}$$

Аналогично

$$\mathbf{E}\exp\left\{-\frac{t^2 m}{2n}(D\tilde{V}, \tilde{V})\right\} \leqslant \mathbf{E}\exp\left\{-\frac{|t|}{8}(D\tilde{S}_k, \tilde{S}_k)\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}\{(D\tilde{S}_k, \tilde{S}_k) \leqslant 8/\sqrt{|t|}\} + \exp\{-\sqrt{|t|}\}. \tag{1.20}$$

Оценки (1.18) – (1.20) сводят (1.17) к

$$\mathbf{P}\{(D\tilde{S}_k, \tilde{S}_k) \leqslant 8/\sqrt{|t|}\} = O(|t|^{-A} + n^{-A}), \tag{1.21}$$

где $k = n/(2|t|)$, а $1 \leqslant |t| \leqslant \sqrt{n}$. Оценка (1.21) вытекает из следующего неравенства концентрации (если заметить, что $k \geqslant \sqrt{n}/2$):

$$\mathbf{P}\{(D\bar{S}_k, \bar{S}_k) < \varepsilon^2\} = O(\varepsilon^l + k^{-l/2}), \tag{1.22}$$

имеющего место для всех $\varepsilon > 0$ и $l = 1, 2, \ldots$. Такие неравенства концентрации для шаров в гильбертовом пространстве могут быть сведены к неравенствам в R^l при помощи оценки $\|x\|^2 \geqslant \sum_{s=1}^{l}(x, e_s)^2$. В R^l неравенства концентрации доказывались в статьях К. Г. Эссеена [138], В. Паулаускаса [79], Ф. Гетце [145] и др., в бесконечномерном случае – в работах Г. Зигеля [50], В. Бенткуса [18] и др. Оценку (1.22) в R^l можно доказать следующим образом. Очевидно, что для $s \geqslant 0$ выполняется

$$\mathbf{P}\{\|S_n\|^2 \leqslant \varepsilon^2\} \leqslant \exp\{\varepsilon^2 s^2/2\}\mathbf{E}\exp\left\{-\frac{s^2}{2}\|S_n\|^2\right\}.$$

Обозначим через $Z \in R^l$ с.э., имеющий стандартное нормальное распределение. Тогда

$$\mathbf{E}\exp\left\{-\frac{s^2}{2}\|S_n\|^2\right\} = \mathbf{E}\exp\{is(Z, S_n)\}.$$

Поэтому можно применить лемму 1.5.

Оценим I_3. Обозначим $G(x) = \exp\{it\|x\|^2\}$. Тогда $G \in C^\infty$ и

$$G'''(x)h^3 = -8t^2 G(x)[it(x,h)^3 + (x,h)(h,h)]. \tag{1.23}$$

Ясно, что оценка $I_3 = O(n^{-1/2})$ вытекает из

$$|\mathbf{E}G(S_n) - \mathbf{E}G(Y)| = O(|t|n^{-1/2}). \tag{1.24}$$

Для доказательства (1.24) применим метод Линдеберга (см. начало § 1.2). Очевидно, что

$$|\mathbf{E}G(S_n) - \mathbf{E}G(Y)| \leqslant J_1 + \ldots + J_n,$$

где

$$J_k = |\mathbf{E}G(W_k + n^{-1/2}X) - \mathbf{E}G(W_k + n^{-1/2}Y)|,$$
$$W_k = n^{-1/2}(X_1 + \ldots + X_{k-1} + Y_{k+1} + \ldots + Y_n).$$

Для оценки J_k воспользуемся формулой Тейлора

$$G(x+h) = G(x) + G'(x)h + \frac{1}{2}G''(x)h^2 + \frac{1}{2}\mathbf{E}(1-\tau)^2 G'''(x+\tau h)h^3$$

с $x = W_k$, $h = n^{-1/2}X$ и $h = n^{-1/2}Y$ соответственно. Здесь с.в. τ равномерно распределена на $[0,1]$. Заметив, что члены, содержащие производные функции G до второго порядка включительно, исчезают ввиду совпадения средних и ковариаций X и Y, получим

$$J_k \leqslant n^{-3/2}(J_k' + J_K''),$$

где

$$\begin{aligned} J_k' &= |\mathbf{E}(1-\tau)^2 G'''(W_k + \tau n^{-1/2}X)X^3|, \\ J_k'' &= |\mathbf{E}(1-\tau)^2 G'''(W_k + \tau n^{-1/2}Y)Y^3|. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Ввиду (1.23), для $|t| \leqslant 1$ выполняется

$$|G'''(x)h^3| = O(|t| \cdot \|h\|^3(1 + \|x\|^3)).$$

Поэтому

$$J_k' = O\Big(|t|\mathbf{E}\|X\|^3(1 + \|W_k + \tau n^{-1/2}X\|^3)\Big) = O(|t|),$$

поскольку $\|X\| \leqslant M$ и, согласно лемме 1.4, выполняется соотношение $\mathbf{E}\|W_k\|^s = O(1)$. Аналогично $J_k'' = O(|t|)$, если заметить, что с.в. $\|Y\|$ имеет все моменты. Поэтому $J_k = O(n^{-3/2}|t|)$, что влечет (1.24).

Осталось оценить I_4. Будем комбинировать способы оценки I_2 и I_3. Повторяя выкладки, проведенные при оценке I_3, приходим, например, к интегралу J_k' (см. (1.25)). При этом достаточно показать, что для $|t| \geqslant 1$ и каждого фиксированного $A > 0$ имеет место соотношение

$$J_k' = O(|t|^3(|t|^{-A} + n^{-A})). \tag{1.26}$$

Из явной формулы (1.23) для G''' следует, что

$$\begin{aligned} &G'''(W_k + \tau n^{-1/2}X)X^3 = \\ &= \mathbf{E}P(t, X, W_k, \tau n^{-1/2}X)\exp\{it\|W_k + n^{-1/2}\tau X\|^2\}, \end{aligned}$$

где $P(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ – полином, имеющий по каждой из переменных степень, не превышающую 3. Применение неравенства треугольника сводит оценку J_k' к оценке суммы некоторых величин, например, таких как $|t|^3\gamma$, где

$$\gamma := |\mathbf{E}(W_k, X)^3 \exp\{it\|W_k + \tau n^{-1/2}X\|^2\}|,$$

и оценка (1.26) вытекает из следующей:

$$\gamma = O(|t|^{-A} + n^{-A}). \tag{1.27}$$

Разобъем сумму $W_k = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ на сумму четырех сумм таким образом, чтобы каждая из сумм имела приблизительно одинаковое число (эквивалентное $n/4$) слагаемых X_j или Y_j. Тогда

$$(W_k, X)^3 = \sum_{1 \leqslant l_1, l_2, l_3 \leqslant 4} (T_{l_1}, X)(T_{l_2}, X)(T_{l_3}, X),$$

и оценка величины γ сводится к оценке величины

$$\gamma_1 := |\mathbf{E}((T_{l_1}, X)(T_{l_2}, X)(T_{l_3}, X) \exp\{it||W_k + \tau n^{-1/2} X||^2\}|.$$

Но среди $T_{l_1}, T_{l_2}, T_{l_3}$ (с фиксированными l_1, l_2, l_3) отсутствует хотя бы одно из T_1, T_2, T_3, T_4. Пусть это будет T_1. Тогда

$$\gamma_1 \leqslant \mathbf{E}||X||^3 \cdot ||T_{l_1}|| \cdot ||T_{l_2}|| \cdot ||T_{l_3}|| \gamma_2,$$

где

$$\gamma_2 = |\mathbf{E}_{T_1} \exp\{it||T_1 + W||^2\}, \quad W = W_k + \tau n^{-1/2} X - T_1,$$

а знак $\mathbf{E}_{T_1}$ означает, что математическое ожидание берется только относительно с.э. T_1. Для оценки моментов с.э. T_{l_1}, T_{l_2}, T_{l_3} применим лемму 1.4. Для оценки γ_2 следует повторить рассуждения, проведенные при оценке $\mathbf{E}\exp\{it||S_n||^2\}$ для доказательства $I_2 = O(n^{-1/2})$. Это возможно, если мы заменим S_n на T_1 и заметим, что сумма T_1 содержит не менее чем $n/4$ слагаемых и что T_1 и W независимы. Таким образом мы придем к оценке $\gamma_2 = O(|t|^{-A} + n^{-A})$, что влечет (1.27). Теорема доказана.

Обозначим

$$\Delta_n(a, r) = |\mathbf{P}\{||S_n - a||^2 < r\} - \mathbf{P}\{||Y - a||^2 < r\}|,$$
$$\Delta_n(a) = \sup_{r \geqslant 0} \Delta_n(a, r).$$

Оценкам величины $\Delta_n(a, r)$ в гильбертовом пространстве посвящены многочисленные статьи, при этом применялись различные методы. В случае $\beta_3 = \mathbf{E}||X||^3 < \infty$ и фиксированного $a \in H$ оценки величины $\Delta_n(a)$ постепенно улучшались, начиная с логарифмического порядка (см. работу Н. П. Кандела-ки [58]) до $O(n^{-1/6})$ в работе В. Паулаускаса [81] и до $O(n^{-1/4})$

В. В. Юринским (см. В. В. Сазонов [189]). Предположив дополнительно, что координаты с.э. X независимы, С. В. Нагаев, В. И. Чеботарев [70] показали, что $\Delta_n(0) = O(n^{-1/2})$. Ту же оценку получили Ю. В. Боровских, А. Рачкаускас [36], А. Рачкаускас [87] при более слабом ограничении, а именно, что только семь координат не зависят от остальных. Существенный шаг был сделан в статье Ф. Гетце [145], где было предложено неравенство симметризации (лемма 1.1), очень полезное для оценки $\Delta_n(a, r)$ методом Фурье. Ф. Гетце [145] показал, что $\Delta_n(a) = O(n^{-1/2})$ для фиксированного $a \in H$ в случае $\beta_6 < \infty$ и что $\Delta_n(0) = O(n^{-1+\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, в случае $\beta_8 < \infty$. В. В. Юринский [105] привлек дополнительно технику урезания и получил следующий результат.

Теорема 1.6. *Существует постоянная $C = C(\alpha(Y))$ такая, что для всех $a \in H$ выполняется*

$$\Delta_n(a) \leqslant C(1 + \|a\|^3)\beta_3 n^{-1/2}. \tag{1.28}$$

Позже метод Фурье применялся многими авторами, и были получены различные уточнения и обобщения. Отметим работы [44], [45], [168], [67], [69], [12], [13], [195], [71], [97], [98], [91], [92], [193], [4], [190], [191]. Интересно отметить, что в бесконечномерном гильбертовом пространстве можно получить оценки лучше, чем $O(n^{-1/2})$, без условий, аналогичных классическому условию Крамера для х.ф. Именно, если $\mathbf{E}\|X\|^{2+2\delta} < \infty$, $0 \leqslant \delta < 1$, то $\Delta_n(a) = o(n^{-\delta})$, если $a = 0$ либо если с.э. X симметричен (подробности см. в § 2.3). Этот результат восходит к одному результату К. Г. Эссеена [137] в R^k и был получен Б. А. Залесским [44] в случае $a = 0$ и В. Бенткусом [13] в общем случае. Отметим, что все еще остается нерешенной следующая проблема: верно ли, что для бесконечномерного с.э. $X \in H$, $\mathbf{E}\|X\|^4 < \infty$, выполняется $\Delta_n(0) = O(n^{-1})$.

Большое внимание было уделено структуре постоянной в (1.28), в особенности ее зависимости от собственных значений σ_i^2 ковариационного оператора $\operatorname{cov} Y$. Число собственных значений было редуцировано с 13 (В. В. Юринский [105]) до 7 (С. В. Нагаев [168], В. В. Сазонов, В. В. Ульянов и Б. А. Залесский [192], и т.д.). Недавно С. В. Нагаевым [69], Б. А. Залесским, В. В. Сазоновым и В. В. Ульяновым [49] была объявлена оценка

$$\Delta_n(a) \leqslant \frac{C_1\beta_3}{\sigma_1 \ldots \sigma_6}(\sigma^3 + \|a\|^3)n^{-1/2}, \tag{1.29}$$

где $\sigma^2 = \mathbf{E}\|X\|^2$. В. В. Сенатов [98] объявил, что

$$\Delta_n(a, r) \leqslant \frac{C_1\beta_3}{\sigma_1 \ldots \sigma_6}(r^3 + \beta_3 n^{-1/2})n^{-1/2}. \tag{1.30}$$

В обоих оценках постоянная C_1 абсолютна. Доказательство (1.29) уже появилось в работе [47].

Оценки снизу скорости сходимости в гильбертовом пространстве строились В. В. Сенатовым [95], [96], [97], С. С. Барсовым [7], Ф. А. Алиевым [3], М. Блознялисом [29]. В. В. Сенатов [97] показал, что присутствие шести собственных значений в (1.24) и (1.30) необходимо. С. С. Барсов [6], [7] показал, что из $\Delta_n(0) = O(n^{-(s-2)/2})$, $s > 2$, вытекает $\mathbf{E}||X||^{s-\varepsilon} < \infty$ для каждого $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leqslant s$.

Лемма урезания, приспособленная к доказательству неравномерных оценок для $\Delta_n(a,r)$, была предложена В. В. Сазоновым и Б. А. Залесским в работе [195]. Неравномерные оценки для $\Delta_n(a,r)$ были получены в работах [195], [26], [49], [92]. Пример такой оценки представляет

$$\Delta_n(a,r) = O\Big(\frac{1+||a||^3}{(1+\rho)^s\sqrt{n}}\Big),$$

где $\mathbf{E}||X||^s < \infty$, $s \geqslant 3$, а $\rho = \big|\sqrt{r} - ||a||\big|$ – расстояние между точкой $0 \in H$ и границей шара $\{x \in H : ||x-a|| \leqslant \sqrt{r}\}$.

Случай неодинаково распределенных слагаемых рассматривался В. Бенткусом [13], В. В. Ульяновым [100]. Локальная предельная теорема рассматривается в § 2.4.

В заключение обзора результатов в гильбертовом пространстве, полученных методом Фурье, сформулируем одну теорему о больших уклонениях.

Теорема 1.7 (В. В. Юринский [107]). *Предположим, что*

$$\mathbf{E}\exp\{c||X||\} < \infty$$

с некоторой постоянной $c > 0$. Тогда существуют постоянные $A_i = A_i(\mathcal{L}(X)) > 0$ такие, что

$$\mathbf{P}\{||S_n|| > r\} = \mathbf{P}\{||Y|| > r\}I(r,n,\mathcal{L}(X))(1+\theta A_1 r n^{-1/2})$$

для $A_2 \leqslant r \leqslant A_3 n^{1/2}$. Здесь $|\theta| \leqslant 1$, а $I(r,n,\mathcal{L}(X))$ – некоторый аналог классического ряда Крамера в теоремах больших уклонений. Кроме того,

$$\mathbf{P}\{||S_n|| > r\} = \mathbf{P}\{||Y|| > r\}(1+\theta A_4 r^3 n^{-1/2})$$

для $A_2 \leqslant r \leqslant A_5 n^{1/6}$.

Более подробно конструкция ряда Крамера $I(r,n,\mathcal{L}(X))$ описана в работе В. В. Юринского [107]. Теорема 1.6 в случае гильбертова пространства уточняет соответствующие результаты Л. В. Осипова [76], [77], В. Бенткуса и А. Рачкаускаса [20], [115], [88], Б. А. Залесского [47].

Обсудим теперь результаты в банаховых пространствах. Обозначим

$$\Delta_{n,F}(r) = |\mathbf{P}\{F(S_n) < r\} - \mathbf{P}\{F(Y) < r\}|,$$

где X и Y принимают значения в банаховом пространстве B, а функция $F : B \to R$. Как и в случае гильбертова пространства, оценки $\Delta_{n,F}$ опираются на неравенства симметризации. Пример такого неравенства представляет следующая лемма.

Лемма 1.8. *Если функция $f(u_1, \ldots, u_k)$ от переменных $u_1, \ldots, u_k \in B$ вещественнозначна и с.в. $U_1, \ldots, U_k \in B$ независимы, то*

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\exp\{it\, f(U_1, \ldots, U_k)\}|^{2^k} \leqslant \\ &\quad \leqslant \mathbf{E}\exp\{i\Delta_1(U_1' - U_1)\ldots\Delta_k(U_k' - U_k)f(U_1, \ldots, U_k)\}, \end{aligned}$$

где U_s' – независимая копия U_s, а разностный оператор

$$\Delta_s(h)f(\ldots, u_s, \ldots) = f(\ldots, u_s + h, \ldots) - f(\ldots, u_s, \ldots)$$

действует на s-ую переменную функции f.

В частности, для произвольных независимых $U_1, \ldots, U_{k+1} \in B$ и для каждого полинома $\pi(x) = \pi_k(x) + \cdots + \pi_0(x)$, где $\pi_s(x) = \pi_s(x, \ldots, x)$, $s = 0, \ldots, k$ – непрерывная s-линейная симметричная форма на B, выполняется

$$|\mathbf{E}\exp\{i\pi(U_1 + \ldots + U_{k+1})\}|^{2^k} \leqslant \mathbf{E}\exp\{ik!\pi_k(\bar{U}_1, \ldots, \bar{U}_k)\}, \qquad (1.31)$$

где $\bar{U}$ – симметризованный с.в. U.

Лемма 1.8 является простым обобщением леммы 1.1. Для доказательства достаточно k раз применить оценку типа (1.6). Неравенство (1.31) было предложено в несколько иной форме в статье Г. Вейля [206] для полиномов $\pi(x)$, где x имеет равномерное распределение на дискретном множестве $\{1, \ldots, N\}$. Там нужно было представить величину x в виде $x = x_1 + \ldots + x_k + x_{k+1}$, где $x_1, \ldots, x_k$ распределены равномерно, а x_{k+1} – некоторая функция этих переменных такая, что сумма имеет равномерное распределение. Общность неравенства Вейля позволила в аналитической теории чисел применить многомерную технику (см., например, [196]). Для полиномов от одной переменной известны более точные оценки И. М. Виноградова [39]. Похоже, однако, что эти оценки невозможно обобщить на случай общих вероятностных распределений. Неравенство (1.31) для вероятностных распределений в случае $k = 2$ было получено в статье Ф. Гетце [145]. Непосредственное обобщение для $k > 2$ было указано В. В. Юринским [106].

Теорема 1.9 [106]. *Пусть* $B = l_p$ *и пусть* p *четно* ($p = 2, 4, \ldots$). *Тогда*

$$|\mathbf{P}\{||S_n - a|| < r\} - \mathbf{P}\{||Y - a|| < r\}| \leqslant C\beta_3\sigma^{-3}(1 + ||a/\sigma||^{3p-3})n^{-1/2},$$

где $\sigma^2 = \mathbf{E}||X||^2$, *а постоянная* $C = C(\mathcal{L}(Y))$.

Для формулировки теоремы 1.10 требуются следующие условия.

Условие гладкости (D_5). Существует $p \geqslant 0$ такое, что

$$\sup_{x \in B}(1 + ||x||)^{-p}||F^{(s)}(x)|| < \infty, \ s = 0, \ldots, 5.$$

Условие на дисперсию (V). Для достаточно больших $M > 0$ и каждого фиксированного $c > 0$ выполняется

$$\sup_{||a|| \leqslant c} \mathbf{P}\{\sigma(Y + a) < \delta\} = O(\delta^M),$$

где $\sigma^2(x) = \mathbf{E}(F'(x)Y)^2$.

Теорема 1.10 (Ф. Гетце [147]). *Если* $\mathbf{E}||X||^3 < \infty$ *и выполняются условия* (D_5), (V), *то*

$$\sup_{r \in R}|\mathbf{P}\{F(S_n) < r\} - \mathbf{P}\{F(Y) < r\}| = O(n^{-1/2}). \tag{1.32}$$

На самом деле в работе Ф. Гетце [147] получен несколько более точный результат. При некоторых естественных условиях Б. А. Залесский [45] в гильбертовом пространстве $B = H$ сделал оценку (1.32) неравномерной. Доказательство теоремы 1.10 основано на методе Фурье, при этом применяется одно неравенство симметризации, обобщающее лемму 1.8. В статье Ф. Гетце [150] предложен метод интегрирования по частям (см. § 1.3), который позволяет получить результаты более точные, чем теорема 1.9. Тем не менее, обобщения и уточнения метода Фурье, применяемого для доказательства теоремы 1.9, оказываются полезными для построения асимптотических разложений (см. § 2.3).

Замечание. По-видимому, проверка условия на дисперсию (V) не всегда представляет собой простую задачу. Например, все еще не известно, выполняется ли условие (V) (или некоторые другие подходящие условия) для каждого бесконечномерного $Y \in B = L_p$, $1 < p < \infty$, когда $F(x) = ||x||$ или $F(x) = ||x||^s$ с некоторым $s > 0$.

§ 1.2. Метод Линдеберга

Доказательство Линдеберга центральной предельной теоремы появилось в 1920 и 1922 годах. Это доказательство очень простое и может быть легко обобщено для оценки скорости сходимости в случае с.э., принимающих значения в банаховых пространствах. Аналогичное замечание касается и доказательства Троттера (1959 г.). В действительности подход Троттера отличается от линдеберговского только терминологией, однако при этом метод представлен интуитивно более понятным образом. Изложение этого метода можно найти в оригинальных статьях Я. В. Линдеберга [161], [162] и Х. Троттера [203], а также в монографиях П. Биллингсли [125], А. Томасиана [202] и В. Феллера [139].

В настоящем параграфе мы обсудим некоторые обобщения метода Линдеберга, применявшиеся к исследованию скорости сходимости в ЦПТ в банаховых пространствах. Напомним, что с.э. X, Y принимают значения в B, при этом $\mathbf{E}X = \mathbf{E}Y = 0$, $\operatorname{cov}X = \operatorname{cov}Y$, а с.э. Y является гауссовским. Далее, $S_n = n^{-1/2}(X_1 + \ldots + X_n)$, где с.э. X, X_1, $X_2, \ldots$ – н.о.р.

Обсудим кратко подход Линдеберга. Предположим, что требуется оценить разность мер $\mu_n = \mathcal{L}(S_n)$ и $\nu = \mathcal{L}(Y)$ на некотором измеримом множестве $A \subset B$, т.е. требуется оценить величину

$$\mu_n(A) - \nu(A) = \int_B \mathcal{X}_A(x)(\mu_n - \nu)(dx).$$

Первым шагом является замена разрывной индикаторной функции $\mathcal{X}_A$ на некоторую достаточно гладкую функцию, скажем, $g = g_{A,\varepsilon}$, совпадающую с $\mathcal{X}_A$ всюду, кроме ε-окрестности $(\partial A)_\varepsilon = \{x \in B : \inf_{y \in \partial A} \|x - y\| < \varepsilon\}$ границы ∂A множества A. Такая замена (обычно называемая леммой сглаживания) приводит к необходимости оценить следующие величины: интеграл $I = \int_B g(x)(\mu_n - \nu)(dx)$ и меру $\nu((\partial A)_\varepsilon)$. Оценка I основывается на применении формулы Тейлора, при этом предварительно следует воспользоваться очевидным тождеством

$$\begin{aligned}\mu_n - \nu =& \mathcal{L}(S_n(X)) - \mathcal{L}(S_n(Y)) = \\ =& \sum_{k=1}^{n} \left[\mathcal{L}(W_{n,k} + n^{-1/2}X_k) - \mathcal{L}(W_{n,k} + n^{-1/2}Y_k)\right], \qquad (2.1)\end{aligned}$$

где

$$W_{n,k} = n^{-1/2}\Big(\sum_{i=1}^{k-1} X_i + \sum_{i=k+1}^{n} Y_i\Big).$$

Если g три раза непрерывно дифференцируема по Фреше и $\sup_{x\in B}\|g'''(x)\| \leqslant C\varepsilon^{-3}$, то, разложив $g(W_{n,k}+n^{-1/2}X_k)$ и $g(W_{n,k}+ +n^{-1/2}Y_k)$ в точке $W_{n,k}$, получаем

$$g(W_{n,k}+n^{-1/2}X_k) = g(W_{n,k}) + g'(W_{n,k})[X_k]n^{-1/2}+ \\ +\frac{1}{2}g''(W_{n,k})[X_k^2]n^{-1} + \frac{1}{6}g'''(W_{n,k} + \theta X_k n^{-1/2})[X_k^3]n^{-3/2},$$

где $|\theta| \leqslant 1$. Ввиду совпадения средних и ковариаций с.э. X_k и Y_k, разность $\mathbf{E}g(W_{n,k}+n^{-1/2}X_k)-\mathbf{E}g(W_{n,k}+n^{-1/2}Y_k)$ будет содержать только члены с третьей производной (см. лемму 2.2), и мы легко получим оценку

$$I \leqslant Cn^{-1/2}\varepsilon^{-3}\nu_3,$$

где

$$\nu_3 = \int_B \|x\|^3|\mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y)|(dx).$$

Величина $\nu((\partial A)_\varepsilon)$ обычно имеет порядок $C\varepsilon$. Поэтому, выбрав $\varepsilon^4 = n^{-1/2}\nu_3$, мы получим оценку

$$|\mu_n(A) - \nu(A)| \leqslant C\nu_3^{1/4}n^{1/8}.$$

В случае гильбертова пространства скорость $O(n^{-1/8})$ методом Линдеберга впервые была получена в статье Д. Кэлбса и Т. Курца [158]. Ясно, однако, что для получения оценок лучших, чем $O(n^{-1/8})$, требуются дополнительные аргументы.

Начнем с того, что сглаживающую функцию можно строить по разному. В конечномерном случае можно свертывать индикаторную функцию с гауссовским распределением. Такое сглаживание приводит к методу композиций, позволяющему получать оценки типа Берри–Эссеена. Впервые этот метод в явном виде был применен в работе Г. Бергстрема [117]. Более детально метод изложен в книге В. В. Сазонова [189]. В. Бенткус [8] применил прямую конструкцию аппроксимаций индикаторной функции некоторой функцией, один раз дифференцируемой и имеющей производную, удовлетворяющую условию Гельдера с константой, не зависящей от размерности. С учетом сглаживающих свойств гауссовской компоненты в (2.1) это привело к лучшей зависимости оценок от размерности.

Тем не менее, вышеупомянутые методы не удается прямо перенести на бесконечномерный случай ввиду того, что предельная гауссовская мера обладает ограниченной сглаживающей способностью (например, в бесконечномерных банаховых пространствах не существует аналога меры Лебега). Попытка такого обобщения была предпринята Л. В. Осиповым и

В. И. Ротарем [78]. Они рассматривали скорость сходимости на шарах и получили оценки типа Берри–Эссеена с некоторым излишним логарифмическим множителем. К этому времени неулучшаемые оценки уже были получены при помощи метода характеристических функций (§ 1.1). Однако подход Л. В. Осипова и В. И. Ротаря оказывается полезным в случае зависимых случайных элементов (см., например, работу А. Рачкаускаса [183], где рассматриваются мартингалы).

Если сглаживающая функции g такова, что $g(x) = 1$ при $x \in A$ и $g(x) = 0$ при $x \in B \backslash A_\epsilon$, то при оценке скорости сходимости можно воспользоваться тем, что производные функции g равны нулю вне ε-окрестности границы ∂A. Это наблюдение использовалось в нескольких работах наряду с итерациями оценок или в объединении с индукцией. В наилучшем случае, при конечном третьем моменте, это приводит к оценке $O(n^{-1/6})$. В общем случае в банаховых пространствах такая оценка неулучшаема (см. теорему 2.6 ниже). Это резко контрастирует с соответствующими результатами в конечномерном случае. Итерации появились в работе В. Паулауска-са [81] и при некоторых ограничениях позволили получить на шарах оценку $O(n^{-1/6})$. Обобщения и уточнения получены в работах [126], [99], [37], [24], [25]. В. Бенткус и А. Рачкаускас [24] применили различные определения дифференцируемости, что привело к оценкам для множеств с весьма негладкой границей, например, для шаров пространств $C[0,1]$, c_0 и т.д. В большинстве случаев в вышеупомянутых работах исследовалась скорость сходимости на шарах при предположении, что для $a \in B$ плотность $r \to (d/dr)\mathbf{P}\{\|Y + a\| < r\}$ ограничена и допускает некоторую оценку. В гильбертовом пространстве и в некоторых других „хороших" банаховых пространствах такое предположение можно проверить, однако в общих банаховых пространствах (в частности, в $C[0,1]$, c_0) это предположение обычно не выполняется. А. Рачкаускас (см. В. Паулаускас, А. Рачкаускас [84]) показал, что оценка $O(n^{-1/6})$ сохраняется при более естественном предположении об ограниченности плотности $r \to (d/dr)\mathbf{P}\{\|Y\| < r\}$ и при существовании третьего момента.

Приведем более точные оценки величины

$$\Delta_{n,q} := \sup_{r \geqslant 0} |\mathbf{P}\{q(S_n(X)) < r\} - \mathbf{P}\{q(Y) < r\}|,$$

где $q : B \to R$ – непрерывная полунорма. Без ограничения общности можно предполагать, что $q(x) \leqslant \|x\|$ для всех $x \in B$.

Сформулируем условия, которые используются при применении метода Линдеберга с индукцией.

Условие гладкости (A_3). Для всех $r \geqslant 0$ и $\varepsilon > 0$ существует функция $g_{r,\varepsilon} : B \to R$ такая, что:

1) для всех $x \in B$ выполняется

$$\chi\big(q(x) < r\big) \leqslant g_{r,\varepsilon}(x) \leqslant \chi\big(q(x) < r + \varepsilon\big);$$

2) функция $g_{r,\varepsilon}$ три раза дифференцируема по Фреше, при этом существует постоянная $C > 0$ такая, что для всех $r \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$ и $i = 1, 2, 3$ выполняется

$$\sup_{x \in B} \|g_{r,\varepsilon}^{(i)}(x)\| \leqslant C\varepsilon^{-i}.$$

Условие на плотность (D). Существует постоянная $C = C\big(q, \mathcal{L}(Y)\big) > 0$ такая, что для всех $\varepsilon > 0$ выполняется

$$\sup_{r \geqslant 0} \mathbf{P}\{r - \varepsilon \leqslant q(Y) \leqslant r + \varepsilon\} \leqslant C\varepsilon.$$

Ясно, что условие (D) эквивалентно тому, что функция распределения $\mathbf{P}\{q(Y) < r\}$ имеет ограниченную плотность.

Теорема 2.1. *Предположим, что выполняются условия* (A_3), (D) *и что гауссовский с.в. Y бесконечномерен. Тогда существует постоянная $C = C\big(q, \mathcal{L}(Y)\big) > 0$ такая, что*

$$\Delta_{n,q} \leqslant C\nu_3^{1/3} n^{-1/6}.$$

Доказательство. Пусть при $k = 1, \ldots, n$

$$\Delta_{n,k,q} = \sup_{r \geqslant 0} |\mathbf{P}\{q(U_{k,n} < r\} - \mathbf{P}\{q(Y) < r\}|,$$

где $U_{k,n} = n^{-1/2}\big(\sum_{i=1}^{k} X_i + \sum_{i=k+1}^{n} Y_i\big)$, причем $\sum_{i \in \varnothing} = 0$.

Применим индукцию для доказательства оценки

$$\delta_n := \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta_{n,k,q} \leqslant C_0 \nu_3^{1/3} n^{-1/6},$$

из которой следует нужный результат, поскольку $\Delta_{n,q} \leqslant \delta_n$.

Так как гауссовский с.в. Y бесконечномерен, то $\delta_1 \leqslant C_0\nu_3^{1/3}$ (см., например, теорему 5.1.11 в книге В. Паулаускаса и А. Рачкаускаса [84]). Поэтому пусть $n > 1$ и пусть, согласно индукционному предположению, выполняется

$$\delta_{n-1} \leqslant C_0 \nu_3^{1/3} (n-1)^{-1/6}. \tag{2.2}$$

Обозначим через $\varepsilon > 0$ параметр, значение которого будет выбрано в конце доказательства. Если $r \leqslant 2\varepsilon$, то, как очевидно, $\Delta_{n,k,q}(r) \leqslant \Delta_{n,k,q}(2\varepsilon) + C\varepsilon$, где

$$\Delta_{n,k,q}(r) := |\mathbf{P}\{q(U_{k,n} < r\} - \mathbf{P}\{q(Y) < r\}|.$$

Поэтому мы будем оценивать $\Delta_{n,k,q}(r)$ только для $r \geqslant 2\varepsilon$. Определим $g_1(x) = g_{r,\varepsilon}(x)$, $g_2(x) = g_{r-\varepsilon,\varepsilon}(x)$, где $g_{r,\varepsilon}$ – функция из условия (A_3). Обозначим

$$G_{n,k} = \mathcal{L}(U_{n,k}),\ P_{n,k} = \mathcal{L}(W_{n,k}),\ H = \mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y),\ G = \mathcal{L}(Y).$$

Нетрудно вывести следующее *неравенство сглаживания* (см., например, [158]):

$$\Delta_{n,k,q}(r) \leqslant \max_{i=1,2} \left| \int_B g_i(x)(G_{n,k}-G)(dx)\right| + \mathbf{P}\{r-\varepsilon \leqslant q(Y) \leqslant r+\varepsilon\}. \quad (2.3)$$

Последняя вероятность не превосходит $C\varepsilon$ благодаря условию (D). Для оценки интегралов в (2.3) используем метод Линдеберга. Применив тождество (2.1), получаем

$$\left| \int_B g_i(x)(G_{n,k} - G)(dx)\right| \leqslant \sum_{j=1}^{k} \left| \int_B \int_B g_i(y + xn^{-1/2}) P_{n,j}(dy) H(dx)\right|.$$

Разложим $g_i(y + xn^{-1/2})$ в ряд Тейлора в точке y:

$$g_i(y + xn^{-1/2}) = g_i(y) + g_i'(y)[x]n^{-1/2} + \frac{1}{2}n^{-1}g_i''(y)[x^2] + \\ + \frac{1}{2}n^{-3/2}\int_0^1 (1-\theta)^2 g_i'''(y + \theta n^{-1/2}x)[x^3]d\theta. \quad (2.4)$$

Заметим, что $\int_B g_i'(y)[x]H(dx) = 0$, так как $\mathbf{E}X = \mathbf{E}Y = 0$. Более того, $\int_B g_i''(y)[x^2]H(dx) = 0$, так как ковариации X и Y совпадают. Последнее не тривиально, так как $\mathrm{cov}X = \mathrm{cov}Y$ влечет всего лишь $\mathbf{E}f(X)g(X) = \mathbf{E}f(Y)g(Y)$ для $f, g \in B^*$. Вторая производная $g_i''(y)$ является непрерывной билинейной формой на B и в общем случае не генерируется линейными функционалами. Однако И. С. Борисов [33] получил следующий результат.

Лемма 2.2. *Пусть B – сепарабельное банахово пространство. Пусть с.в. $X, Y \in B$, $\mathbf{E}\|X\|^2 < \infty$, при этом пусть Y – гауссовский. Если $\mathbf{E}X = \mathbf{E}Y = 0$ и $\mathrm{cov}X = \mathrm{cov}Y$, то для каждой непрерывной билинейной формы T на B выполняется*

$$\mathbf{E}T(X, X) = \mathbf{E}T(Y, Y).$$

Продолжаем доказательство теоремы. Проинтегрируем (2.4) по мере $P_{n,j}(dy)H(dx)$. Получим

$$I_j := \int_B \int_B g_i(y + xn^{-1/2}) P_{n,j}(dy) H(dx) = \tag{2.5}$$

$$= \frac{1}{2} n^{-3/2} \int_0^1 (1-\theta)^2 \int_B \int_B g_i'''(y + \theta n^{-1/2} x)[x^3] P_{n,j}(dy) H(dx) d\theta.$$

Интеграл по $H(dx)$ в (2.5) распадается на два интеграла – один (обозначим $I_{j,1}$) по области $\{\|x\| \leqslant \varepsilon\sqrt{n}\}$, другой (обозначим $I_{j,2}$) – по области $\{\|x\| > \varepsilon\sqrt{n}\}$. Для $I_{j,1}$ воспользуемся оценкой третьей производной функции g_i в 1) условия (A_3), а также неравенством $q(x) \leqslant \|x\| \leqslant \varepsilon n^{1/2}$. Получим

$$|g_i'''(y + \theta n^{-1/2} x)[x^3]| \leqslant C\|x\|^3 \varepsilon^{-3} \chi(r - \varepsilon \leqslant q(y + \theta n^{-1/2} x) \leqslant r + \varepsilon) \leqslant$$
$$\leqslant C\|x\|^3 \varepsilon^{-3} \chi(r - 2\varepsilon \leqslant q(y) \leqslant r + 2\varepsilon).$$

Поэтому

$$|I_{j,1}| \leqslant C\varepsilon^{-3} n^{-3/2} \nu_3 P_{n,j}\{r - 2\varepsilon \leqslant q(y) \leqslant r + 2\varepsilon\}. \tag{2.6}$$

Согласно условию (D),

$$P_{n,j}\{r - 2\varepsilon \leqslant q(y) \leqslant r + 2\varepsilon\} \leqslant 2\delta_{n-1} + \mathbf{P}\{(r - 2\varepsilon)(n/n-1)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant q(Y) \leqslant (r + 2\varepsilon)(n/n-1)^{1/2}\} \leqslant 2\delta_{n-1} + C\varepsilon, \tag{2.7}$$

и получаем

$$|I_{j,1}| \leqslant C\varepsilon^{-3} n^{-3/2} \nu_3 (\delta_{n-1} + \varepsilon). \tag{2.8}$$

В случае $\{\|x\| > \varepsilon\sqrt{n}\}$ имеем

$$\chi(r - \varepsilon \leqslant q(y + \theta n^{-1/2} x) \leqslant r + \varepsilon) \leqslant$$
$$\leqslant \chi(r - 2\|x\| n^{-1/2} \leqslant q(y) \leqslant r + 2\|x\| n^{-1/2}),$$

и точно так же как и в случае $I_{j,1}$ можно показать, что интеграл этой индикаторной функции по мере $P_{n,j}(dy)$ имеет порядок $C(\delta_{n-1} + n^{-1/2}\|x\|)$. Однако мы можем использовать только третьи псевдомоменты. Поэтому желательно третью производную функции g_i понизить до второй. Интегрируя по частям, остаточный член в (2.4) можно переписать в виде

$$-\frac{1}{2} g_i''(y + n^{-1/2} x)[x^2] n^{-1} + \int_0^1 (1-\theta) g_i''(y + \theta n^{-1/2} x)[x^2] d\theta$$

и действовать, как и ранее. Таким образом, $I_{j,2}$ удовлетворяет оценке (2.8). Собрав оценки, получим

$$\Delta_{n,k,q}(r) \leqslant C\varepsilon^{-3}n^{-1/2}\nu_3(\delta_{n-1}+\varepsilon)+C\varepsilon. \tag{2.9}$$

Неравенство (2.9) выполняется для всех $r \geqslant 0$. Поэтому имеет место рекуррентная оценка

$$\delta_n \leqslant C\varepsilon^{-3}n^{-1/2}\nu_3(\delta_{n-1}+\varepsilon). \tag{2.10}$$

Воспользовавшись индукционным предположением (2.2) и выбрав $\varepsilon = C_1\nu_3^{1/3}n^{-1/6}$ с подходящей постоянной C_1, мы завершаем доказательство теоремы.

Теорема 2.1 содержится в книге В. Паулаускаса и А. Рачкаускаса [84], где можно найти также другие результаты, полученные методом Линдеберга с индукцией, а также некоторые обобщения такого подхода.

Тем же методом можно получить неравномерные оценки, а также можно исследовать вероятности больших уклонений. Это возможно ввиду „хорошего поведения" гауссовской меры множества $\{r-\varepsilon \leqslant q(x) \leqslant r+\varepsilon\}$, где q – произвольная непрерывная полунорма. Например, если с.в. $q(Y)$ имеет ограниченную плотнось, то известный результат Ферника позволяет утверждать, что для всех $\lambda > 0, \varepsilon > 0, r \geqslant 0$ выполняется

$$\mathbf{P}\{r-\varepsilon \leqslant q(Y) \leqslant r+\varepsilon\} \leqslant C\varepsilon\exp(-\lambda r),$$

где $C = C(\lambda, \mathcal{L}(Y))$.Более точные результаты такого рода требуются при исследовании вероятностей больших уклонений. Следующая лемма доказана М. Лифшицем (доказательство приводится в статье В. Бенткуса и А. Рачкаускаса [115].)

Лемма 2.3. *Пусть q – непрерывная полунорма на B. Тогда:*

1) *существует постоянная $C = C(\mathcal{L}(Y)) > 0$ такая, что для всех $\varepsilon > 0$, $r \geqslant 0$ выполняется*

$$\mathbf{P}\{q(Y) > r-\varepsilon\} \leqslant C\exp(Cr\varepsilon)\mathbf{P}\{q(Y) > r\};$$

2) *для каждого $r_0 > 0$ существует постоянная $C = C(r_0, \mathcal{L}(Y)) > 0$ такая, что для всех $\varepsilon > 0$, $r \geqslant r_0$ выполняется*

$$\mathbf{P}\{r-\varepsilon \leqslant q(Y) \leqslant r+\varepsilon\} \leqslant C\varepsilon(r+1)\mathbf{P}\{q(Y) > r-\varepsilon\}. \tag{2.11}$$

Более того, неравенство (2.11) выполняется для всех $r \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$ с постоянной $C = C(\mathcal{L}(Y)) > 0$ тогда и только тогда, когда распределение с.в. $q(Y)$ имеет ограниченную плотность.

Из формул (2.6), (2.7) видно, что, применяя лемму 2.3, можно выделить степенную неравномерность в оценках для $|I_{j,1}|$ и $|I_{j,2}|$. Если добавить еще некоторые технические соображения (см. [177]), то можно получить следующий результат.

Теорема 2.4. *Пусть $m \geqslant 3$. Предположим, что выполняются условия* (A_3) *и* (D). *Тогда существует постоянная $C = C(m, \mathcal{L}(Y)) > 0$ такая, что*

$$\sup_{r \geqslant 0} r^m |\mathbf{P}\{q(S_n(X)) < r\} - \mathbf{P}\{q(Y) < r\}| \leqslant$$

$$\leqslant C \max\{\nu_m n^{-m/2+1}, \nu_m^{1/m} n^{-1/6}\}.$$

Можно получить и экспоненциальные неравномерности (см. [177]). Справедливость леммы 2.3 в гильбертовом пространстве была отмечена В. Бенткусом [20], который исследовал вероятность $\mathbf{P}\{\|S_n(X)\| > r\}$ при $0 \leqslant r \leqslant r_n = O(n^{1/6})$. Его результат уточнен и обобщен на случай банаховых пространств в статье [115] при помощи того же метода Линдеберга, дополненного индукцией и итерациями. В качестве примера сформулируем следующую теорему.

Теорема 2.5 [115]. *Предположим, что $q : B \to R$ – непрерывная полунорма. Пусть $E\|X\|^3 < \infty$ и пусть выполняются условия* (A_3), (D). *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *существует $h > 0$ такое, что*

$$\mathbf{E}\exp\{hq^{1/2}(X)\} < \infty;$$

2) *существуют постоянные C_1, $C_2 > 0$ такие, что*

$$\mathbf{P}\{q(S_n) > r\} \leqslant C_1 \mathbf{P}\{q(Y) > r\},$$

при $0 \leqslant r \leqslant C_2 n^{1/6}$;

3) *существуют постоянные C_1, $C_2 > 0$ такие, что*

$$\mathbf{P}\{q(S_n) > r\} = \mathbf{P}\{q(Y) > r\}(1 + \theta C_1 n^{-1/6}(1 + r)),$$

при $0 \leqslant r \leqslant C_2 n^{1/6}$; $|\theta| \leqslant 1$;

4) *для каждой функции $f : B \to R$ такой, что $f(x) \to 0$ при $x \to \infty$, выполняется $\mathbf{P}\{q(S_n) > r\}/\mathbf{P}\{q(Y) > r\} \to 1$ при $n \to \infty$ равномерно по r, удовлетворяющим $0 \leqslant r \leqslant f(n)n^{1/6}$.*

Замечания к доказательсву. Из 1) выводится 2). При этом оценивая $|I_{j,1}|$ и $|I_{j,2}|$ вместо (2.7) следует применить лемму 2.3. Получится

$$|\mathbf{P}\{q(S_n) > r\} - \mathbf{P}\{q(Y) > r\}| \leqslant C\mathbf{P}\{q(Y) > r\} n^{-1/8}(1 + r)^{3/4}$$

для $0 \leqslant r \leqslant C_2 n^{1/6}$, что влечет 2). Оценку 2) можно рассматривать как первую итерацию для доказательства 3). Для доказательства 4)$\Rightarrow$2) нужно исследовать последовательность $\sup[\mathbf{P}\{q(S_n) > r\}/\mathbf{P}\{q(Y) > r\} : r \leqslant f(n)n^{1/6}]$, $n \in \mathbb{N}$, при этом нужно показать, что если 2) не выполняется, то эта последовательность неограничена. Для доказательства 2)$\Rightarrow$1) применяется неравенство Леви.

Как уже отмечалось, оценка теоремы 2.1 точна в общем случае. Соответствующий пример можно построить в гильбертовом пространстве.

Теорема 2.6 [19]. *Пусть последовательность $b_n \downarrow 0$, при этом $\limsup_{n\to\infty} \sqrt{n}b_n = \infty$. Тогда существуют гауссовский с.э. $Y \in l_2$, $\mathbf{E}Y = 0$, и симметричный с.э. $X \in l_2$, а также непрерывная полунорма q на l_2 такие, что:*

1) $\operatorname{cov}X = \operatorname{cov}Y$, $\mathbf{P}\{\|X\| \leqslant 1\} = 1$;

2) *выполняются оба условия* (A_3) *и* (D);

3) *для бесконечно многих n выполняется* $\Delta_{n,q} \geqslant b_n n^{-1/6}$.

Схема доказательства. Пусть I_s – блоки ряда натуральных чисел, имеющие длину k_s, $s \geqslant 1$. Пусть $\lambda_i = 2^{-3i/2}k_i^{-2/3}$, $i \in \mathbb{N}$. Определим

$$q(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s \sum_{k\in I_s} |x_k|.$$

Проверка условия (A_3) для полунормы q проведена, например, в книге В. Паулаускаса и А. Рачкаускаса [84] (теорема 2.2.31). С.э. X и Y определяются при помощи с.э. $X^{(j)}$, $j \in \mathbb{N}$ таких, что

$$\mathbf{P}\{X^{(j)} = a_j\lambda_j^{-1}e_i\} = \mathbf{P}\{X^{(j)} = -a_j\lambda_j^{-1}e_i\} = (2k_j)^{-1}, \ i \in I_j,$$

где $\{e_i, i \in \mathbb{N}\}$ – стандартный базис в l_2, а числа $a_j = 2^{-5j/3}k_j^{-2/3}$, $j \in \mathbb{N}$. Положим $X = \sum_{j=1}^{\infty} X^{(j)}$. Нетрудно убедиться, что $X \in l_2$. Соответствующий гауссовский с.э. определяется рядом

$$Y = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\sigma}_i \gamma_i e_i,$$

где $\gamma_i, i \in \mathbb{N}$, – последовательность н.о.р. вещественных стандартных нормальных с.в., $\tilde{\sigma}_i = a_j\lambda_j^{-1}k_j^{-1/2}$ при $i \in I_j$, $j \in \mathbb{N}$. Поскольку Y имеет независимые координаты, то нетрудно проверить, что распределение с.в. $q(Y)$ имеет ограниченную плотность. Поэтому выполняется условие (D). Для доказательства 3) заметим, что

$$\mathrm{P}\{q(S_n(X)) < r\} \geqslant \mathrm{P}\{q(S_n(\tilde{X}^{(s)})) < r - \alpha_s\},$$

где

$$\tilde{X}^{(s)} = \sum_{i=1}^{s-1} X^{(i)}, \quad \alpha_s = n^{1/2} \sum_{i=s}^{\infty} a_i.$$

Применив известный результат о скорости сходимости в ЦПТ в $(k_1 + \cdots + k_{s-1})$-мерном пространстве (например, из статьи В. Бенткуса [19]), можно получить

$$\Delta_{n,q} \geqslant \sup_{r \geqslant 0} \left[\mathrm{P}\{q(\tilde{Y}^{(s)}) < r-\alpha_s\} - \mathrm{P}\{q(Y) < r\}\right] - C(k_1+\ldots+k_{s-1})^2 n^{-1/2},$$

где $\tilde{Y}^{(s)} = \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{k \in I_i} \tilde{\sigma}_k \gamma_k e_k$. Для завершения доказательства следует учесть свойства гауссовского с.э. Y, а также выбрать подходящим образом последовательность k_i, $i \in \mathbb{N}$.

Если условия (A_3) или (D) не выполняются, то скорость сходимости может быть произвольно медленной. Соответствующие примеры построены в работах [9], [184], [32].

Проверку условий (A_3), (D) следует рассматривать как отдельную проблему. Свойства плотности распределения с.в. $q(Y)$ рассматриваются в обзорной статье Ю. А. Давыдова и М. А. Лифшица [41], в работах М. А. Лифшица [64], В. С. Ри и М. Талаграна [184] и др. Гладкие аппроксимации индикаторной функции в контексте разных определений дифференцируемости рассматриваются в работах [24], [84], [177].

В заключение параграфа приведем два результата, касающихся условий (A_3), (D). *Модуль выпуклости* непрерывной полунормы q на B определяется следующим образом:

$$\tau_q(\varepsilon) = \inf\{1 - q(x - y/2);\ q(x) = q(y) = 1,\ q(x-y) \geqslant \varepsilon\}.$$

Теорема 2.7 [185]. *Если существуют постоянные $C > 0$, $\beta \geqslant 2$ такие, что для всех $0 < \varepsilon \leqslant 2$ выполняется $\tau_q(\varepsilon) \geqslant C\varepsilon^\beta$, то выполняется условие* (D).

Заметим, что норма пространства L_p, $p > 1$, удовлетворяет условию теоремы 2.7. Следующий результат можно применить при построении гладких аппроксимаций индикаторных функций.

Теорема 2.8 [25]. *Условие (A_3) выполняется тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ существует функция $f_\varepsilon : B \to R$, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) *для всех* $x \in B$

$$|q(x) - f_\varepsilon(x)| \leqslant \varepsilon;$$

2) *функция* f_ε *три раза дифференцируема по Фреше, и*

$$\sup_{x \in B} \|f_\varepsilon^{(i)}(x)\| \leqslant C\varepsilon^{-i+1}, \quad i = 1, 2, 3.$$

§ 1.3. Метод интегрирования по частям

Этот метод впервые появился в работе Ф. Гетце [150]. Он позволил получить оценки типа Берри–Эссеена скорости сходимости в ЦПТ для множеств $\{x \in B : F(x) < r\}$, $r \in R$, где $F : B \to R$ – гладкая функция. В случае линейной функции F этот метод сводится к методу Стейна дифференциальных уравнений. Дальнейшее развитие подхода Гетце было предложено Б. А. Залесским [46]. Начнем с формулировки условий, нужных в дальнейшем.

Условие гладкости (D_m). Функция $F : B \to R$ m раз дифференцируема по Фреше, при этом с некоторыми постоянными $C_F > 0$, $p \geqslant 0$ выполняется

$$\|F^{(i)}(x)\| \leqslant C_F(1 + \|x\|^p), \quad i = 1, \ldots, m.$$

Для формулировки следующего условия предположим, что F дифференцируема по Фреше и определим $\sigma^2(x) = \mathbf{E}\big(F'(x)(Y)\big)^2$.

Условие на дисперсию (V). Для каждого $c > 0$ и для достаточно больших $M > 0$ существует постоянная $C = C\big(c, M, \mathcal{L}(Y)\big)$ такая, что для всех $t \in R$ выполняется

$$\sup_{\|a\| \leqslant c} \mathbf{E}\exp\{-t^2\sigma^2(Y + a)\} \leqslant C(1 + |t|)^{-M}.$$

Теперь мы можем сформулировать результат.

Теорема 3.1. *Если* $E\|X\|^3 < \infty$ *и выполняются условия* (D_3), (V), *то*

$$\Delta_n := \sup_{r \in R} \big|\mathbf{P}\{F(S_n) < r\} - \mathbf{P}\{F(Y) < r\}\big| = O(n^{-1/2}).$$

В работе Ф. Гетце [150] теорема 3.1 доказана при дополнительном условии, что третья производная функции F удовлетворяет

$$\|F'''(x + y) - F'''(y)\| \leqslant C_F(1 + \|x\|^p + \|y\|^p)\|x\|^\varepsilon$$

с некоторым $\varepsilon > 0$, при этом накладывалось еще более сложное условие на дисперсию. Теорема 3.1 доказана Б. А. Залесским [46]. На самом деле Б. А. Залесский получил неравномерную оценку. Обозначим через $\rho = \inf\{\|x\| : F(x) < r\}$ расстояние от точки $0 \in B$ до границы множества $\{x \in B : F(x) < < r\}$.

Теорема 3.2 [46]. *Предположим, что $E\|X\|^3 < \infty$ и что выполняются условия* (D_3), (V). *Тогда для каждого $s \geqslant 0$ существует постоянная $C = C(\mathcal{L}(X), s)$ такая, что*

$$\left|\mathbf{P}\{F(S_n) < r\} - \mathbf{P}\{F(Y) < r\}\right| \leqslant Cn^{-1/2}\left[(1+\rho)^{-3} + (1+|r|)^{-s}\right].$$

Изложим основные моменты доказательства теоремы 3.1 (более детальное изложение см. в работах [150], [46]).

Первым шагом служит замена X_j на его срезку на уровне $\sqrt{n}$. Нетрудно убедится, что $\Delta_n \leqslant \overline{\Delta}_n + Cn^{-1/2}$, где

$$\overline{\Delta}_n = \sup_{r \in R}\left|\mathbf{P}\{F(\overline{S}_n) < r\} - \mathbf{P}\{F(Y) < r\}\right|,$$

$$\overline{S}_n = n^{1/2}(\overline{X}_1 + \cdots + \overline{X}_n); \qquad \overline{X}_j = X_j\chi\{\|X_j\| \leqslant \sqrt{n}\}.$$

Вторым шагом служит замена индикаторной функции множества $\{F(x) < r\}$ на гладкую. Пусть монотонно неубывающая функция $f = f_{r,n} : R \to R$ удовлетворяет следующим условиям: $f(t) = 0$ при $t < r - n^{-1/2}$; $f(t) = 1$ при $t > r$; функция f три раза дифференцируема и $|f^{(i)}(t)| \leqslant Cn^{i/2}$, $i = 1, 2, 3$. Пусть $f_1(x) = f(F(x))$, $f_2(x) = f(F(x) - n^{-1/2})$. Тогда

$$\overline{\Delta}_n \leqslant \max_{i=1,2}\sup_{r \in R}|I_i| + \sup_{r \in R}\mathbf{P}\{r \leqslant F(Y) \leqslant r + n^{-1/2}\},$$

где

$$I_i = I_i(r) = \mathbf{E}f_i(F(\overline{S}_n)) - \mathbf{E}f_i(F(Y)), \quad i = 1, 2.$$

Ограниченность плотности распределения с.в. $F(Y)$ вытекает из следующей леммы.

Лемма 3.3. *Пусть $m \geqslant 2$, функция $F : B \to R$ удовлетворяет условиям* (D_{m+1}) *и* (V), *а функция $\varphi : B \to R$ удовлетворяет* (D_m). *Тогда для всех $\varepsilon > 0$ и $a \in R$*

$$\sup_{\|x\| \leqslant a}\left|\mathbf{E}\exp\{itF(Y+x)\}\varphi(Y+x))\right| \leqslant C(1+|t|)^{-m+\varepsilon}.$$

Из леммы 3.3 легко получается, что

$$\sup_{r \in R} P\{r \leqslant F(Y) \leqslant r + \varepsilon\} \leqslant C\varepsilon.$$

Поэтому остается оценить I_i, $i = 1, 2$.

Если воспользоваться неравенством (2.1) и рядом Тейлора, то появляются производные функции f, а эти производные слишком большие, чтобы получить $O(n^{-1/2})$. Основная идея метода интегрирования по частям заключается в том, что сначала следует под знаком интеграла для I_i добавить некоторые множители с тем чтобы можно было при помощи интегрирования по частям заменить производные $f^{(k)}$, $k = 1,2,3$, на функцию f. Займемся определением этих множителей. Пусть $X_{n+1}, X_{n+2}, X_{n+3}$ (соответственно $Y_{n+1}, Y_{n+2}, Y_{n+3}$) – независимые копии с.в. X (соответственно Y). Пусть с.в. θ равномерно распределена на $[0, 1]$. Определим случайные функции

$$g_{1,j}(x) = F'(x)[X_{n+j}],\ g_{2,j}(x) = F'(x)[Y_{n+j}], \quad j = 1,2,3,$$

а также функции

$$\sigma_1^2(x) = \mathbf{E}\big(F'(x+\theta n^{-1/2}X)[X]\big)^2,\ \sigma_2^2(x) = \mathbf{E}\big(F'(x+\theta n^{-1/2}Y)[Y]\big)^2.$$

Вышеупомянутые множители определяются следующим образом:

$$h_i(x) = \prod_{j=1}^{3} g_{i,j}^2(x)\big(\sigma_i^2(x) + n^{-a}\big)^{-3}, \quad i = 1,2, \quad a > 1/2.$$

Обозначим

$$\overline{U}_{k,n} = n^{-1/2}(\overline{X}_1 + \ldots + \overline{X}_k + Y_{k+1} + \ldots + Y_n),$$

$$Z_1 = t_1X_{n+1} + t_2X_{n+2} + t_3X_{n+3},\ Z_2 = t_1Y_{n+1} + t_2Y_{n+2} + t_3Y_{n+3}.$$

Лемма 3.4. *Для произвольного k такого, что $[n/2] \leqslant k \leqslant n$, выполняется*

$$\big|\mathbf{E}f\big(F(\overline{U}_{k,n})\big) - \mathbf{E}f\big(F(\overline{U}_{k,n} + Z_1)\big)h_1(\overline{U}_{k,n} + Z_1)\big| = O(n^{-1/2}).$$

Лемма 3.5. *Для произвольного k, удовлетворяющего $1 \leqslant k \leqslant [n/2]$, выполняется*

$$\big|\mathbf{E}f\big(F(\overline{U}_{k,n})\big) - \mathbf{E}f\big(F(\overline{U}_{k,n} + Z_2)\big)h_2(\overline{U}_{k,n} + Z_2)\big| = O(n^{-1/2}).$$

Из этих лемм вытекает

$$I_1 \leqslant J_1 + J_2 + Cn^{-1/2},$$

где

$$J_1 = |\mathbf{E}h(\overline{U}_{n,n_0} + Z_1) - \mathbf{E}h(\overline{U}_{n,n} + Z_1)|,$$

$$J_2 = |\mathbf{E}h(\overline{U}_{n,n_0} + Z_2) - \mathbf{E}h(\overline{U}_{n,n} + Z_2)|,$$

$h(z) = f(F(z))h_1(z)$, а $n_0 = [n/2]$.

Теперь можно применить метод Линдеберга. Используя тождество (2.1) и разложив функцию h в ряд Тейлора с остаточным членом второго порядка, получим

$$J_1 \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} \left[|J_{1,k}^{(1)}| + |J_{1,k}^{(2)}| + |J_{1,k}^{(3)}|\right],$$

где

$$J_{1,k}^{(1)} = \int_B \int_B \chi(\|x\| \geqslant \sqrt{n}) h(y) Q_{k,n}(dy) H(dx),$$

$$J_{1,k}^{(2)} = \int_B \int_B \chi(\|x\| \geqslant \sqrt{n}) h'(y)[x] n^{-1/2} Q_{k,n}(dy) H(dx),$$

$$J_{1,k}^{(3)} = \int_B \int_B h''(y + \lambda n^{-1/2} x)[x^2] n^{-1} Q_{k,n}(dy) \overline{H}(dx), \quad \lambda \in [0,1],$$

$$H = \mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y), \ \overline{H} = \mathcal{L}(\overline{X}) - \mathcal{L}(Y),$$

а $Q_{k,n}$ – распределение с.э. $\overline{U}_{k,n}$.

Для дальнейшего оценивания применяется следующая лемма. Обозначим

$$\overline{W}_{n,k} = n^{-1/2}\left(\sum_{i=1}^{k-1} \overline{X}_i + \sum_{i=k+1}^{n} Y_1\right),$$

$$\sigma_0^2(x) = \mathbf{E}\big(F'(x)[\overline{X}_1]\big)^2.$$

Лемма 3.6. *Для всех $c > 1/2$, $b > 0$, $a \in R$ существует постоянная $C > 0$ такая, что для $k = 1, 2, \ldots, n$ выполняется*

$$\sup_{\|x\| \leqslant a} \mathbf{E}\big(\sigma_0^2(\overline{W}_{n,k} + x) + n^{-c}\big)^{-b} \leqslant C.$$

Перед тем как интегрировать по частям, полезно заметить, что

$$g_{1,1}(y + Z_1) f'\big(F(y + Z_1)\big) = \frac{\partial}{\partial t_1} f\big(F(y + Z_1)\big),$$

$$g_{1,1}(y + Z_1) g_{1,2}(y + Z_1) f''\big(F(y + Z_1)\big) = \frac{\partial}{\partial t_1}\frac{\partial}{\partial t_2} f\big(F(y + Z_1)\big),$$

и что производные функции f всегда сопровождаются множителями $g_{1,j}(y + Z_1)$. Поэтому к интегралу

$$J_{1,k}^{(i)} = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 J_{1,k}^{(i)} dt_1 dt_2 dt_3$$

можно применить интегрирование по частям.

Метод интегрирования по частям можно применить также и для исследования вероятностей больших уклонений. В качестве иллюстрации приведем следующий результат (ср. с теоремой 2.5).

Теорема 3.7 [88]. *Пусть X, Y принимают значения в гильбертовом пространстве H. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

а) *существует $\lambda > 0$ такое, что*

$$\mathbf{E} \exp \{\lambda \|X\|^{1/2}\} < \infty;$$

б) *существуют постоянные $C_i = C_i(\mathcal{L}(Y)) > 0$, $i = 1, 2$, такие, что*

$$\mathbf{P}\{\|S_n\| > r\} = \mathbf{P}\{\|Y\| > r\}(1 + C_1\theta(1 + r)n^{-1/2})$$

для $0 \leqslant r \leqslant C_2 n^{1/6}$. Здесь $|\theta| \leqslant 1$.

Ранее Б. А. Залесским [47] было доказано б) при несколько более сильном условии $\mathbf{E} \exp \{\lambda \|X\|\} < \infty$.

§ 1.4. Метод конечномерной аппроксимации

В этом параграфе мы попробуем описать основную идею *метода конечномерной аппроксимации*, применяемого при оценке скорости сходимости в предельных теоремах в бесконечномерных пространствах. В конце седьмого десятилетия казалось, что этот метод дает меньшую точность по сравнению с другими методами. Так уж получилось, что первая оценка скорости сходимости в ЦПТ в бесконечномерном гильбертовом пространстве, полученная Н. П. Канделаки [58] (см. также Н. Н. Вахания, Н. П. Канделаки [59]) методом конечномерной аппроксимации, имела очень медленный – а именно, логарифмический – порядок убывания. Позже В. В. Сазонов [188], [90] использовал конечномерную аппроксимацию в ЦПТ в гильбертовом пространстве для слагаемых со специальной структурой (случай ω^2-критерия) и смог получить скорость сходимости порядка $O(n^{-1/6+\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$. В работах Э. Жине [143] и В. Паулаускаса [80] этот метод был использован для оценки скорости сходимости в ЦПТ в $C(S)$ где S – метрический компакт, но даже в случае $S = [0,1]$ и предельного винеровского процесса при „естественных" условиях (мы здесь не будем придавать строгий смысл слову „естественный") этот метод позволял получать довольно медленную скорость сходимости порядка $n^{-1/20}$ (или даже более медленную). Здесь следует отметить, что для специального компакта $S = \{1, 1/2, 1/3, \dots 1/n, \dots, 0\}$ и при очень сильных ограничениях на слагаемые (субгаусовость приращений процесса, очень медленный порядок возрастания метрической энтропии и т.д.) скорость сходимости, полученная в цитированных статьях, имела порядок $n^{-1/6+\epsilon}$, (а в более поздней работе В. Паулаускаса [175] даже $n^{-1/2+\epsilon}$).

Имеются и другие работы, где в различных задачах по предельным теоремам в бесконечномерных пространствах использовался метод конечномерной аппроксимации. Однако общей чертой всех оценок, полученных в них, был довольно медленный порядок убывания. Это можно объяснить тем, что все известные тогда оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме (не говоря уже о теоремах с устойчивым предельным законом; напоминаем, что термин ЦПТ в данной статье используется в узком смысле – им обозначены предельные теоремы с гауссовским предельным законом) в конечномерном пространстве R^k имели довольно плохую зависимость от размерности k. Действительно, рассмотрим типичную оценку остаточного члена в ЦПТ в R^k

$$\sup_{A \in \mathcal{A}} \left| \mathbf{P}\{S_n(X) \in A\} - \mathbf{P}\{Y \in A\} \right| \leqslant C(k) C(\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y))\, n^{-1/2},$$

где $\mathcal{A}$ – некоторый класс борелевских множеств в R^k (например, класс прямоугольников или класс всех выпуклых множеств). Все известные в настоящее время оценки константы $C(k)$ имеют вид $C(k) \leqslant Ck^{\beta}$ с некоторой абсолютной постоянной C и некоторым показателем β, в общем случае зависящих от рассматриваемого класса множеств $\mathcal{A}$ и формы константы $C(\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y))$. В случае выпуклых множеств и единичной ковариационной матрицы у $\mathcal{L}(X)$ С. В. Нагаев [167] и В. В.Сенатов [197] доказали оценку с $\beta = 1$. В. Бенткус [114] улучшил этот результат до $\beta = 1/2$. Отметим, что в методе конечномерной аппроксимации обычно используются оценки в R^k для класса прямоугольников, но без предположений о ковариационной структуре векторов. Для этой цели полезным оказался результат В. Бенткуса [11], [114], где были построены гладкие функции, хорошо аппроксимирующие индикаторные функции шаров пространства l^k_∞, с точными оценками производных этих функций (см. лемму 4.6 ниже). Это позволило получить новую оценку остаточного члена в ЦПТ в пространстве l^k_∞ для класса шаров, имеющую худшую зависимость от n ($n^{-1/6}$ вместо традиционного $n^{-1/2}$ при конечном третьем моменте), но со значительно лучшей – логарифмической зависимостью от k. Это, в свою очередь, позволило получить оценки скорости сходимости в бесконечномерных сепарабельных банаховых пространствах (см. В. Бенткус [8], В. Паулаускас и А. Рачкаускас [84], где можно найти довольно полную информацию по этому вопросу) и даже в других бесконечномерных пространствах: в работе В. Паулаускаса и Д. Юкнявичене [83] была оценена скорость сходимости в ЦПТ в пространстве Скорохода $D[0,1]$. Та же схема позже была применена Р. Норвайшой и В. Паулаускасом [171] для получения оценки скорости сходимости для общих эмпирических процессов, индексированных некоторыми классами функций.

Теперь непосредственно перейдем к методу, о котором идет речь. Предположим, что рассматриваемые случайные элементы $X, X_1, X_2, \ldots$ являются случайными процессами, заданными на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ и индексированными некоторым множеством T, которое, предположим, является метрическим компактом, т.е. $X : \Omega \times T \to R$. В большинстве случаев мы можем рассматривать X как отображение из Ω в $l_\infty(T)$ – пространство всех ограниченных функций на T с нормой супремума – или в некоторое меньшее подпространство, как, например, $C(T)$. Пусть для $x \in l_\infty(T)$ $\|x\|_\infty \equiv \|x\|_{T,\infty} := \sup_{t\in T} |x(t)|$ и пусть $\mathbf{E}X(t) = 0$, $\mathbf{E}X^2(t) < \infty$ для всех $t \in T$. Предположим, что соответствующий гауссовский случайный элемент $Y = \{Y(t),\ t \in T\}$ с $\mathbf{E}Y(t) \equiv 0$ и $\mathbf{E}Y(t)Y(s) = \mathbf{E}X(t)X(s)$ для всех $t, s \in T$ сосредоточен в пространстве $l_\infty(T)$ (или в меньшем подпространстве, если в нем сосредоточен X). Наконец, чтобы не привлекать понятие внешней меры, предположим, что все величины $\|S_n(X)\|_\infty$, $n \geqslant 1$, и $\|Y\|_\infty$ измеримы. Тогда мы можем определить величины

$$\Delta_n(r) = \Delta_n(T, r) = \left|\mathbf{P}\left\{\|S_n(X)\|_\infty < r\right\} - \mathbf{P}\left\{\|Y\|_\infty < r\right\}\right|, \qquad (4.1)$$

$$\Delta_n = \sup_{r \geqslant 0} \Delta_n(T, r).$$

Прежде чем приступить к оценке величины (4.1), приведем важные примеры, подпадающие под указанную схему.

а) $T = [a, b]$, X и Y как процессы на $[a, b]$ являются п.н. непрерывными. Тогда (4.1) дает оценку скорости сходимости в ЦПТ в $C[a, b]$.

б) $T = [a,b]$, X и Y не имеют разрывов второго рода п.н. В этом случае (4.1) дает оценку скорости сходимости в ЦПТ в $D[a,b]$ на шарах по отношению к норме супремума. Позже мы рассмотрим этот пример более подробно.

в) Можно обобщить б) и рассматривать пространство $D(\mathsf{A})$ функций $x : \mathsf{A} \to R$, определенных на некотором классе замкнутых борелевских подмножеств множества $I^d \equiv [0,1]^d$ и являющихся снаружи непрерывными и имеющими внутренние пределы. Это пространство было введено Р. Бассом и Р. Пайком [111], [112], где были доказаны общие предельные теоремы для схемы серий. Полагая $T = \mathsf{A}$ в (4.1), можно попробовать получить оценку скорости сходимости в этих общих теоремах.

г) Пусть $Z, Z_1, Z_2, \ldots$ – н.о.р. случайные величины со значениями в измеримом пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ и с распределением m. *Эмпирический процесс*, соответствующий мере m, определяется формулой

$$E_n = \sqrt{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{Z_i} - m\Big),$$

и рассматриваем этот процесс на некотором классе $\mathcal{F}$ вещественных измеримых функций на $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ таких, что $\mathcal{F} \subset \subset L_2(\mathcal{X}, \mathcal{A}, m)$. В частном случае это могут быть индикаторные функции некоторого класса $\mathfrak{A} \subset \mathcal{A}$. В дальнейшем будем пользоваться следующим обозначением: для меры m и $f \in \mathcal{F}$ $m(f) = \int f(x)m(dx)$. Пусть $\{G_m(f),\ f \in \mathcal{F}\}$ предельный гауссовский процесс (подробности см., например, у Э. Жине и Д. Зинна [144]). Для простоты предположим, что класс $\mathcal{F}$ является счетно-порожденным, т.е. существует счетный подкласс $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ такой, что $\sup\limits_{f\in\mathcal{F}} |E_n(f)| = \sup\limits_{f\in\mathcal{F}_0} |E_n(f)|$ п.н. для всех $n \geqslant 1$. Тогда одним из возможных способов оценки скорости сходимости в ЦПТ для эмпирического процесса E_n является оценка величины

$$\delta_n(\mathcal{F}, r) = \Big|\mathbf{P}\Big\{\sup_{f\in\mathcal{F}} |E_n(f)| < r\Big\} - \mathbf{P}\Big\{\sup_{f\in\mathcal{F}} |G_m(f)| < r\Big\}\Big|,$$

которая совпадает с $\Delta_n(T, r)$ из (4.1), если положить $T = \mathcal{F}$ и $X = \delta_Z - m$. Этот пример, важный для математической статистики, имеет еще и теоретическое значение. Известно, что в любом банаховом пространстве B оценка остаточного члена в ЦПТ на шарах эквивалентна оценке остаточного члена в ЦПТ для эмпирического процесса, если в качестве класса $\mathcal{F}$ выбрана единичная сфера сопряженного пространства (это вытекает из равенства $\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in B^*,\ \|f\| = 1\}$). Оценки скорости сходимости в этом примере, полученные Р. Норвайшой и В. Паулаускасом [171], будут приведены в последнем разделе, посвященном применениям.

Теперь вернемся к величине $\Delta_n(T,r)$ из (4.1). Пусть ρ – некоторая псевдометрика на T, относительно которой T является вполне ограниченным множеством. Как правило, эта псевдометрика ρ связана с процессом X – одним из примеров является псевдометрика $r(s,t) = \left(\mathbf{E}(X(t) - X(s))^2\right)^{1/2}$, s, $t \in T$. Пусть $\delta > 0$ – произвольное число и $N = N_\rho(\delta)$ – число элементов в минимальной δ-сети $T(\delta) = \{t_1, t_2, \ldots, t_N\}$ вполне ограниченного множества (T,ρ). Для $x \in l_\infty(T)$ и $\delta > 0$ обозначим

$$\omega_\rho(x,\delta) = \sup\left\{\left|x(t) - x(s)\right| : t, s \in T, \rho(t,s) < \delta\right\};$$

$$\|x\|_N := \max_{t \in T(\delta)} |x(t)| = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} |x(t_i)|;$$

$$\Delta_n^N(r) = \Delta_n\big(T(\delta), r\big) = \left|\mathbf{P}\left\{\|S_n\|_N > r\right\} - \mathbf{P}\left\{\|Y\|_N > r\right\}\right|.$$

Для каждого целого n и любого $0 < \varepsilon < r$ имеем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left\{\|S_n\|_\infty > r\right\} - \mathbf{P}\left\{\|Y\|_\infty > r\right\} = \\
&\quad = \mathbf{P}\left\{\|S_n\|_\infty > r\right\} - \mathbf{P}\left\{\|S_n\|_N > r - \varepsilon\right\} + \mathbf{P}\left\{\|S_n\|_N > r - \varepsilon\right\} - \\
&\quad - \mathbf{P}\left\{\|Y\|_N > r - \varepsilon\right\} + \mathbf{P}\left\{\|Y\|_N > r - \varepsilon\right\} - \mathbf{P}\left\{\|Y\|_\infty > r\right\} \leqslant \\
&\quad \leqslant \mathbf{P}\left\{\|S_n\|_\infty > r,\ \|S_n\|_N \leqslant r - \varepsilon\right\} + \Delta_n^N(r - \varepsilon) + \\
&\quad + \mathbf{P}\left\{\|Y\|_N > r - \varepsilon,\ \|Y\|_\infty \leqslant r\right\} \leqslant \mathbf{P}\left\{\omega_\rho(S_n,\delta) > \varepsilon,\ \|S_n\|_\infty > r\right\} + \\
&\quad + \Delta_n^N(r - \varepsilon) + \mathbf{P}\left\{r - \varepsilon \leqslant \|Y\|_\infty \leqslant r\right\}.
\end{aligned}$$

Аналогично получаем оценку снизу:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left\{\|S_n\|_\infty > r\right\} - \mathbf{P}\left\{\|Y\|_\infty > r\right\} \geqslant \\
&\quad \geqslant -\Delta_n^N(r) - \mathbf{P}\left\{r \leqslant \|Y\|_\infty \leqslant r + \varepsilon\right\} - \mathbf{P}\left\{\omega_\rho(Y,\delta) > \varepsilon,\ \|Y\|_\infty > r\right\}.
\end{aligned}$$

Из этих оценок вытекает следующее неравенство, которое выражает сущность метода конечномерной аппроксимации и поэтому сформулировано в виде леммы.

Лемма 4.1. *Для всех целых n и любых $\delta > 0$, $0 < \varepsilon < r$ имеет место неравенство*

$$\begin{aligned}
\Delta_n(T,r) &\leqslant \Delta_n^N(r - \varepsilon) + \Delta_n^N(r) + \\
&+ \mathbf{P}\left\{\omega_\rho(S_n,\delta) > \varepsilon,\ \|S_n\|_\infty > r\right\} + \mathbf{P}\left\{\omega_\rho(Y,\delta) > \varepsilon,\ \|Y\|_\infty > r\right\} + \\
&+ \mathbf{P}\left\{r - \varepsilon \leqslant \|Y\|_\infty \leqslant r + \varepsilon\right\}. \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

Замечание 4.2. Последний член в (4.2) является гауссовская мера ε-полоски шара в пространстве $l_\infty(T)$ (члены такого типа присутствуют во всех методах, используемых при оценках остаточных членов, (см. (1.1), (2.3)). В дальнейшем будем предполагать, что для любого $m > 0$ существует постоянная $C_1 = C_1(\mathcal{L}(Y), m)$ такая, что для всех $\varepsilon > 0$, $r > 0$

$$\mathbf{P}\{r \leqslant \|Y\|_\infty \leqslant r + \varepsilon\} \leqslant C_1\varepsilon(1+r)^{-m}. \tag{4.3}$$

Замечание 4.3. Заметим, что (4.2) доказано для $r > \varepsilon$, и если мы хотим получить общую оценку для $\Delta_n(T, r)$, охватывающую равномерную и неравномерную оценки одновременно, нам необходимо оценить $\sup\{(1+r)^m\Delta_n(T,r) : r \geqslant 0\}$. Но нетрудно видеть, что для этой цели достаточно уметь оценить рассматриваемую величину только для $r > \varepsilon$. Действительно, для любого $0 < r < 2\varepsilon$ имеем

$$\begin{aligned}(1+r)^m\Delta_n(T,r) &\leqslant (1+\varepsilon)^m\Delta_n(T,\varepsilon) + 2\mathbf{P}\{\|Y\|_\infty \leqslant \varepsilon\} \leqslant \\ &\leqslant \sup_{r>\varepsilon}(1+r)^m\Delta_n(T,r) + C\varepsilon.\end{aligned}$$

В последнем неравенстве мы воспользовались (4.3).

Замечание 4.4. Иногда удобно оценивать величину $\mathbf{P}\{\|S_n\|_\infty > r,\ \|S_n\|_N \leqslant r - \varepsilon\}$ не через величину $\mathbf{P}\{\omega_\rho(S_n,\delta) > \varepsilon,\ \|S_n\|_\infty > r\}$, а через меньшую

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{1\leqslant i\leqslant N}\ \sup_{\rho(t,t_i)<\delta}|S_n(t) - S_n(t_i)| > \varepsilon,\ \|S_n\|_\infty > r\Big\}.$$

Обсудим кратко оценки всех членов, входящих в (4.2) (за исключением последнего, для которого мы имеем оценку (4.3)). Третье и четвертое слагаемые в правой части (4.2) учитывают флуктуации процессов S_n и Y, и мы должны оценить эти члены, когда ε и δ заменены некоторыми стремящимися к нулю последовательностями ε_n и δ_n. Сначала, используя элементарную оценку

$$\mathbf{P}\{A\cap B\} \leqslant (\mathbf{P}\{A\})^\gamma(\mathbf{P}\{B\})^{1-\gamma}, \tag{4.4}$$

справедливую для любого $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$, мы отделяем флуктуации от неравномерности, и сводим задачу к оценке членов

$$\begin{gathered}\mathbf{P}\{\omega_\rho(S_n,\delta) > \varepsilon\},\ \mathbf{P}\{\omega_\rho(Y,\delta) > \varepsilon\},\\ \mathbf{P}\{\|S_n\|_\infty > r\},\ \mathbf{P}\{\|Y\|_\infty > r\}.\end{gathered}$$

Тогда для последних двух членов достаточно применить оценки чебышевского типа. Поскольку мы предполагаем, что Y как процесс на параметрическом множестве T является ограниченным гауссовским процессом, мы вправе использовать экспоненциальные оценки хвостов распределения супремума гауссовского процесса (см. Х. Ферник [140], М. Маркус, Л. Шепп [163]): существует постоянная $C_2 > 0$ такая, что для всех $\varepsilon, \delta \in R^+$ имеет место неравенство

$$\mathbf{P}\left\{\omega_\rho(Y,\delta) > \varepsilon\right\} \leqslant C_2 \exp\left\{-\varepsilon^2/4\sigma_\rho^2(\delta)\right\}, \tag{4.5}$$

где $\sigma_\rho^2(\delta) = \sup\left\{\mathbf{E}(Y(t)-Y(s))^2; \rho(s,t) \leqslant \delta\right\}$. Единственным членом, для которого мы не в состоянии предложить общий подход к оцениванию, является $\mathbf{P}\left\{\omega_\rho(S_n,\delta) > \varepsilon\right\}$ (или $\mathbf{P}\left\{\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\ \sup\limits_{\rho(t,t_i)<\delta} |S_n(t)-S_n(t_i)| > \varepsilon\right\}$, если воспользоваться замечанием 4.4), и при различных предположениях о распределении $\mathcal{L}(X)$ этот член будем оценивать по-разному.

Третий и четвертый члены в (4.2) представляют собой остаточный член в ЦПТ в конечномерном банаховом пространстве l_∞^N. При оценке величины $\Delta_n^N(r)$ необходимо иметь ввиду, что N как функция от $\delta_n \downarrow 0$ будет неограниченно расти с ростом n. Другая особенность оценок величины $\Delta_n^N(r)$, построенных в рамках рассматриваемого метода, заключается в следующем. При оценке остаточного члена всегда естественно появляется величина

$$\mathbf{P}\left\{r \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant N} |Y(t_i)| \leqslant r+\varepsilon\right\}, \tag{4.6}$$

и если к этой величине применять оценку (4.3), то появится постоянная C_1, зависящая от ковариации вектора $\{Y(t_i),\ i=1,2,\ldots,N\}$. В настоящее время поведение этой постоянной при неограниченном росте N исследовано недостаточно, поэтому в процессе оценивания $\Delta_n^N(r)$ мы возвращаемся от величины (4.6) к величине в левой части (4.3), и это приводит к появлению члена, учитывающего флуктуацию процесса Y.

Приведем оценку величины $\Delta_n^N(r)$ в предположении конечности момента $\mathbf{E}\|X\|_\infty^3$. Для этой цели нам понадобится дополнительные обозначения:

$$W_\rho(\alpha(Y),\delta,t) := \sup_{r\geqslant 0}(1+r)^3 P\left\{\omega_\rho(Y,\delta) > t, \|Y\|_\infty > r\right\},$$

$$M_3(n) = n^{-1/6}\left\{1 \vee (\mathbf{E}\|X\|_\infty^3 + \mathbf{E}\|Y\|_\infty^3)^{1/3}\right\},$$

$$D_n(\delta) = \left\{M_3(n) \vee W_\rho\left(\alpha(Y),\delta, M_3(n)\right)\right\},$$

$$H_\rho(u) = \log N_\rho(u),$$

где, как обычно, $a \vee b = \max(a,b)$, $a \wedge b = \min(a,b)$.

Теорема 4.5. *Существует абсолютная постоянная $C_3 < \infty$ такая, что для любого положительного числа δ, любых $n \in \mathbf{N}$ и $r \in R^+$ имеет место оценка*

$$\Delta_n^N(r) \leqslant C(1+r)^{-3} H_\rho^2(\delta)\left[D_n(\delta) \vee D_n^3(\delta)\right], \tag{4.7}$$

где $N = N_\rho(\delta)$.

Этот результат взят из работы Р. Норвайши и В. Паулаускаса [171], в которой он использовался при оценке скорости в ЦПТ для эмпирических процессов. Раньше оценки такого типа (дающие порядок $n^{-1/6}$) были доказаны в монографии В. Паулаускаса и А. Рачкаускаса [84] (теорема 5.2.6) и в работе В. Паулаускаса и Д. Юкнявичене [83]. В формулировке этого результата мы не стремились к наиболее точным характеристикам, выражающим зависимость остаточного члена от распределений $\mathcal{L}(X)$ и $\mathcal{L}(Y)$. А именно, нетрудно видеть, что в (4.7) вместо величины $\mathbf{E}\|X\|_\infty^3 + \mathbf{E}\|Y\|_\infty^3$ мы можем подставить величину

$$\int \max_{t \in T(\delta_n)} |x(t)|^3 \left|\mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y)\right|(dx),$$

но тогда в окончательной оценке величины $\Delta_n(T, r)$ будет присутствовать величина

$$\sup_N \sup \left\{ \int \max_{t \in T(\delta)} |x(t)|^3 \left|\mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y)\right|(dx) : T(\delta) \subset T,\ \operatorname{card} T(\delta) = N \right\},$$

которая не превышает величину $\int \|x\|_\infty^3 \left|\mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y)\right|(dx)$, а последняя, в свою очередь – величину $\mathbf{E}\|X\|_\infty^3 + \mathbf{E}\|Y\|_\infty^3$. Но так как при оценке членов, учитывающих флуктуацию процессов S_n и Y мы не можем избежать появления величины $\mathbf{E}\|X\|_\infty^p$ и $\mathbf{E}\|Y\|_\infty^p$ даже в случае $p > 3$, то мы используем эти величины уже в (4.7). Более важный вопрос касается степени, с которой метрическая энтропия $H_\rho(\delta_n)$ входит в (4.7). Эта степень может быть снижена с 2 до 2/3 в следующих двух случаях: если ограничиться доказательством равномерной оценки $\Delta_n^N = \sup_r \Delta_n^N(r)$ или если согласиться, что в конечной оценке величины $\Delta_n^N(r)$ может присутствовать величина $\sup_n \mathbf{E}\|S_n\|_\infty^2$.

Доказательство теоремы 4.5 проводится по схеме метода Линдеберга с индукцией, описанной в предыдущем параграфе, поэтому приведем только набросок доказательства, стараясь отразить основное отличие – возврат от ε-полоски для $\|Y\|_N$ к ε-полоске для $\|Y\|_\infty$. Обозначим

$$\xi_j = \left(X_j(t_1), \ldots, X_j(t_N)\right), \quad \eta_j = \left(Y_j(t_1), \ldots, Y_j(t_N)\right),$$

где Y_j, $j = 1,2,\ldots,n$, – н.о.р. случайные элементы с $\mathcal{L}(Y_j) = \mathcal{L}(Y)$. Вместо $\Delta_n^N(r)$ рассмотрим величину

$$\delta_n^N = \sup_{1\leqslant j\leqslant n}\sup_{r\geqslant 0} r^3 \Big|\mathbf{P}\{n^{-1/2}\|\xi_1+\ldots+\xi_j+\eta_{j+1}+\ldots+\eta_n\|_N \geqslant r\} - \\ - \mathbf{P}\{\|\eta\|\geqslant r\}\Big|,$$

которая мажорирует $\Delta_n^N(r)r^3$. В первом этапе оценивания, обычно называемого сглаживанием, мы используем упоминавшийся выше результат В. Бенткуса [114] (см. также [11]).

Лемма 4.6. *Для любого $r\geqslant 0$ и $\varepsilon>0$ существуют функции $f_{r,\varepsilon}: l_\infty^N \to [0,1]$, $f_{r,\varepsilon}\in C^\infty$, и конечные постоянные $C_4(m)$ такие, что*

$$\chi\{\|x\|_N\leqslant r\}\leqslant f_{r,\varepsilon}(x)\leqslant \chi\{\|x\|_N\leqslant r+\varepsilon\},$$
$$\|f_{r,\varepsilon}^{(m)}(x)\|\leqslant C_4(m)\varepsilon^{-m}\ln^{m-1}(N+1),\ m=1,2,\ldots.$$

Дальнейшие шаги доказательства стандартны: используется тождество (2.1) и разложение Тейлора до третьего порядка. Единственное изменение состоит в том, что мы применяем следующее неравенство, справедливое для любого $t\geqslant 0$:

$$\mathbf{P}\{r-\varepsilon\leqslant\|\eta\|_N\leqslant r+\varepsilon\}\leqslant \mathbf{P}\{r-\varepsilon-t\leqslant\|Y\|_\infty\leqslant r+\varepsilon+t\}+ \\ +\mathbf{P}\{\omega_\rho(Y,\delta)>t,\|Y\|_\infty>r-\varepsilon\}.$$

После этого в рекуррентном неравенстве появляется величина $W_\rho(Y,\delta,t)$. Действительно, используя (4.3), получаем, что для любого $t\geqslant 0$ и всех $n\geqslant 2$ имеет место следующее рекуррентное неравенство:

$$\delta_n^N \leqslant M_3^3(n)\{C+CH_\rho^2(\delta)t^{-3}[\delta_{n-1}^N+t+W_\rho(Y,\delta,t)]\}+ \\ +C[t+t^3+W_\rho(Y,\delta,t)].$$

Опираясь на рекуррентное неравенство, с помощью индукции заканчиваем доказательство оценки величины δ_n^N, что дает нам оценку для $\sup_{r\geqslant 0} r^3\Delta_n^N(r)$. Оценку величины $\sup_{r\geqslant 0}\Delta_n^N(r)$ можно получить вполне аналогично. Здесь следует отметить, что метод конечномерной аппроксимации применим не только в случае нормы супремума. Например, при оценке остаточного члена в ЦПТ в пространстве l_p, $1\leqslant p\leqslant\infty$, на шарах, естественно в качестве конечномерной аппроксимации взять первые N координат и оценить остаточный член в ЦПТ в l_p^N на шарах этого пространства, одновременно оценивая вес оставшихся координат. Такой подход использовался, например, в работе В. Паулаускаса [82], а также в уже упоминавшихся работах В. В. Сазонова [90], [188] в случае пространства l_2.

Здесь также следует упомянуть работу А. В. Асриева и В. И. Ротаря [5], в которой для случая пространства l^k_∞ приведена оценка на параллелепипедах, имеющая порядок $n^{-1/2}$ с логарифмическим множителем. Форма приведеной оценки позволяет перейти к пределу при $k \to \infty$ и получить оценку (того же порядка) в пространстве R^N. К сожалению, мы не сумели применить эту оценку для конечномерной аппроксимации из-за присутствия в ней весьма сильного предположения о диагональности ковариации рассматриваемого случайного вектора $X = (X_1, X_2, \ldots)$. Впрочем, такое предположение не является ограничительным при рассмотрении остаточного члена в ЦПТ в R^k в классе всех выпуклых множеств, так как посредством ортогонального преобразования ковариационную матрицу можно привести к диагональному виду, но это невозможно, когда рассматриваются параллелепипеды со сторонами, параллельными координатным осям.

Прежде чем показать, как общую схему конечномерной аппроксимации можно применить в ЦПТ в пространстве Скорохода $D[0,1]$, приведем короткий (а поэтому далеко не полный) обзор результатов по самой ЦПТ в пространстве $D[0,1]$ (случай н.о.р. слагаемых), тем более, что этот вопрос освещен в литературе не так полно, как ЦПТ в банаховых пространствах (см., например, монографии А. Араужо и Е. Жине [109], В. Паулаускаса и А. Рачкаускаса [84]).

Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – н.о.р. случайные элементы со значениями в пространстве $D[0,1]$, наделенном топологией Скорохода и метрикой, относительно которой оно является сепарабельным метрическим пространством. Предположим, что $\mathbf{E}X(t) = 0$, $\mathbf{E}X^2(t) < \infty$ для всех $t \in [0,1]$. Пусть, как обычно, $S_n = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n X_i$. Будем говорить, что X удовлетворяет ЦПТ в $D[0,1]$ ($X \in \mathrm{CLT}(D)$ для краткости), если существует гауссовский $D[0,1]$-значный случайный элемент Y такой, что $\mathbf{E}Y(t) \equiv 0$, $\mathbf{E}X(t)X(s) = \mathbf{E}Y(t)Y(s)$ для всех $s, t \in [0,1]$ и $\mathcal{L}(S_n)$ слабо сходится к $\mathcal{L}(Y)$ (см., например, [125]). ЦПТ в пространстве D рассматривалась в работах М. Фиша [141], М. Г. Хан [154], Р. Пайка [112], Д. Юкнявичене [102], В. Паулаускаса, Х. Штиве [178], Р. Безандри и Х. Ферника [120]. Отметим, что многие прикладные задачи непосредственно сводится к ЦПТ в пространстве $D[0,1]$. Один из примеров такой прикладной задачи имеется в работе С. Л. Феникса и М. Тейлора [179], в которой исследовано асимптотическое распределение прочности волоконных связок. По существу эти исследования берут начало в ранней работе Е. Даниелса [132].

В цитированной статье Феникса и Тейлора была доказана (хотя явно и не сформулирована) ЦПТ в $D[0,1]$ для н.о.р. случайных процессов со специальной структурой. Под влиянием этого результата М. Хан [154] доказала следующую теорему.

Теорема 4.7. *Пусть X является случайным элементом в $D[0,1]$, $\mathbf{E}X(t)=0$, $\mathbf{E}X^2(t)<\infty$ для всех $t\in[0,1]$. Предположим, что существуют неубывающие непрерывные функции F_1 и F_2 на $[0,1]$ и числа $\alpha_1>1/2$, $\alpha_2>1$ такие, что для всех $0\leqslant s\leqslant t\leqslant u\leqslant 1$ имеют место неравенства*

$$\mathbf{E}\big(X(t)-X(s)\big)^2\leqslant\big(F_1(t)-F_1(s)\big)^{\alpha_1}, \tag{4.8}$$

$$\mathbf{E}\big(X(u)-X(t)\big)^2\big(X(t)-X(s)\big)^2\leqslant\big(F_2(u)-F_2(s)\big)^{\alpha_2}. \tag{4.9}$$

Тогда $X\in\mathrm{CLT}(D)$ и $\mathcal{L}(Y)(C[0,1])=1$, где Y – предельный гауссовский процесс для $S_n(X)$.

Условие (4.9) имеет тот недостаток, что оно требует конечности моментов $\mathbf{E}X^4(t)$ для всех $t\in[0,1]$. Этот недостаток отчетливо виден при рассмотрении взвешенных эмпирических процессов (см. В. Паулаускас [176] и раздел 3.3 ниже). Он устранен в следующих двух теоремах.

Теорема 4.8 [178]. *Предположим, что X является случайным элементом в $D[0,1]$, $\mathbf{E}X(t)=0$, $\mathbf{E}X^2(t)<\infty$ для всех $t\in[0,1]$. Предположим, что (4.8) выполнено с $\alpha_1>2/3$, а вместо (4.9) выполняется следующее неравенство с $\alpha_2>1$*

$$\mathbf{E}\big((X(t)-X(s))^2\wedge 1\big)(X(u)-X(t))^2\leqslant\big(F_2(u)-F_2(s)\big)^{\alpha_2}, \tag{4.10}$$

Тогда $X\in\mathrm{CLT}(D)$ и $\mathcal{L}(Y)(C[0,1])=1$.

Теорема 4.9 [120]. *Пусть X – вещественнозначная случайная функция на $[0,1]$, определенная на некотором вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$. Предположим, что существуют непрерывные возрастающие функции δ, η и θ из $[0,1]$ в R, равные нулю в нуле, а θ, кроме того, вогнутая, такие, что для всех $0\leqslant s\leqslant t\leqslant u\leqslant 1$ и всех $A\in\mathcal{A}$ имеют место следующие неравенства*

$$\mathbf{E}|X(0)|^2<\infty,\quad \mathbf{E}|X(t)-X(s)|^2\leqslant\delta^2(t-s), \tag{4.11}$$

$$\int_0^1 u^{-5/4}\big(\log(1+1/u)\big)^{1/4}\delta(u)\,du<\infty, \tag{4.12}$$

$$E\{|X(s)-X(t)|^2\wedge|X(t)-X(u)|^2\}\chi_A\leqslant\eta^2(u-s)\theta(P(A)), \tag{4.13}$$

8822

$$\int_0^1 u^{-3/2}\theta^{1/2}\big(u\log_2(1+1/u)\big)\eta(u)du < \infty. \qquad (4.14)$$

Тогда $X \in \mathrm{CLT}(D)$ *и* $\mathcal{L}(Y)(C[0,1]) = 1$.

Интересно отметить, что по, всей видимости, все три теоремы 4.7 – 4.9 не сравнимы. Здесь следует отметить, что если мы на процесс X наложим весьма сильное условие ограниченности (тем не менее, это условие, вообще говоря, не влечет ЦПТ ни в пространстве $D[0,1]$, ни в $C[0,1]$), то относительно слабое условие на приращения процессов уже влечет ЦПТ. Это демонстрирует следующий результат.

Теорема 4.10 [144]. *Пусть X – стохастически непрерывный центрированный равномерно ограниченный процесс с траекториями в $D[0,1]$. Предположим, что для некоторой константы $C > 0$ и неубывающей функции $F \in D[0,1]$ для всех $s,t \in [0,1]$ выполнено неравенство*

$$\mathbf{E}|X(t) - X(s)| \leqslant C|F(t) - F(s)|.$$

Тогда $X \in \mathrm{CLT}(D)$ *и если* $\mathcal{L}(X)(C[0,1]) = 1$, *то* $X \in \mathrm{CLT}(C[0,1])$.

Эта теорема является следствием более общей теоремы, сформулированной в терминах p-вариации, которая, в свою очередь, следует из общей ЦПТ для эмпирических процессов (см. работу Э. Жине и Д. Зинна [144]).

Еще один результат (по-видимому, тоже не сравнимый с уже приведенными) о ЦПТ в D, следует из общего результата Р. Баса и Р. Пайка [112], но мы не будем его приводить, поскольку для его формулировки пришлось бы вводить новые понятия, не используемые далее.

Завершая обзор ЦПТ в $D[0,1]$, сформулируем и приведем набросок доказательства одного результата В. Паулаускаса и Х. Штиве [178], дающего оценку скорости сходимости в теореме 4.8. Как обычно, *модуль непрерывности* для непрерывной функции F определяется формулой

$$\omega_F(\delta) = \sup\left\{|F(t) - F(s)| : |s-t| < \delta\right\}.$$

Теорема 4.11 [178]. *Пусть X удовлетворяет условиям теоремы 4.8. Дополнительно предположим, что существует непрерывная неубывающая функция F_3 и числа $\alpha_3 \geqslant 1$, $\beta_i > 0$, $i = 1,2,3$ и $0 \leqslant \varkappa \leqslant 1$ такие, что для всех $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$ имеют место следующие неравенства*

$$\mathrm{E}\left|X(t) - X(s)\right|^{3+\varkappa} \leqslant \left(F_3(t) - F_3(s)\right)^{\alpha_3}, \qquad (4.15)$$

$$\omega_{F_i}(\delta) \leqslant C\delta^{\beta_i}, \quad i = 1,2,3. \qquad (4.16)$$

Предположим также, что $\mathbf{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|X(t)|^3<\infty$ *и выполнено условие* (4.3) *с* $T=[0,1]$. *Тогда существует постоянная* $\overline{C}=\overline{C}(m,\mathcal{L}(Y),\ \mathcal{L}(X))$ *такая, что*

$$\Delta_n(\lambda):=\left|\mathbf{P}\left\{\|S_n(X)\|_\infty<\lambda\right\}-\mathbf{P}\left\{\|Y\|_\infty<\lambda\right\}\right|\leqslant$$
$$\leqslant Cn^{-\varphi(\varkappa)}(1+\lambda)^{-3}\left(\ln n+\ln(1+\lambda)\right)^2, \qquad (4.17)$$

где $\varphi(\varkappa)=1/6$, *если* $\alpha_3>1$, *и* $\varphi(\varkappa)=\left(1/6\vee\frac{1+\varkappa}{10}\right)$, *если* $\alpha_3=1$.

Набросок доказательства. Во избежание некоторых технических сложностей мы предположим, что выполнены условия более сильные, чем сформулированные в теореме: будем считать, что вместо (4.10) выполнено условие (4.9), а (4.15) выполнено с $\varkappa=1$ (поэтому в (4.8) можем считать, что $\alpha_1>1/2$). При выполнении этих условий остаточный член был оценен в работе В. Паулаускаса и Д. Юкнявичене [83]. Более того, предположим, что $\alpha_3>1$ и что $\mathbf{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|X(t)|^p<\infty$ для некоторого $p>3$. Пусть $0<\delta<1$ – некоторое число, выбором которого мы распорядимся позже, и пусть $N=\left[1/\delta\right]+1$, а числа t_i такие, что $0=t_1<t_2<\ldots<t_N=1$ и $t_k-t_{k-1}<\delta$. Как и раньше, $\|x\|_N=\sup_{1\leqslant i\leqslant N}|x(t_i)|$ и индекс N всюду указывает на соответствующую величину в пространстве l_∞^N. Применяя лемму 4.1 и замечание 4.4, для любых $0<\delta<1$ и $0<\varepsilon<\lambda$, получаем неравенство

$$\Delta_n(\lambda)\leqslant I_1+I_2+I_3+\Delta_n^N(\lambda-\varepsilon)+\Delta_n^N(\lambda), \qquad (4.18)$$

где

$$I_1=\mathbf{P}\Big\{\sup_{1\leqslant i\leqslant N-1}\ \sup_{t_i\leqslant t\leqslant t_{i+1}}|S_n(t)-S_n(t_i)|>\varepsilon,\|S_n\|_\infty>\lambda\Big\},$$
$$I_2=\mathbf{P}\Big\{\sup_{1\leqslant i\leqslant N-1}\ \sup_{t_i\leqslant t\leqslant t_{i+1}}|Y(t)-Y(t_i)|>\varepsilon,\|Y\|_\infty>\lambda\Big\},$$
$$I_3=\mathbf{P}\left\{\lambda-\varepsilon\leqslant\|Y\|_\infty\leqslant\lambda+\varepsilon\right\}.$$

Теперь оценим величины

$$I_{1,1}=\mathbf{P}\Big\{\sup_{1\leqslant i\leqslant N-1}\ \sup_{t_i\leqslant t\leqslant t_{i+1}}|S_n(t)-S_n(t_i)|>\varepsilon,\Big\},$$
$$I_{2,1}=\mathbf{P}\Big\{\sup_{|t-s|<\delta}|Y(t)-Y(s)|>\varepsilon\Big\}.$$

Вторая из них может быть оценена с помощью экспоненциального неравенства (4.5), но для наших целей достаточно воспользоваться следующим результатом (см., например, [164]).

Лемма 4.12. *Пусть η является гауссовским $C[0,1]$-значным случайным элементом с нулевым средним, $\tau^2(s,t) = \mathbf{E}(\eta(t) - \eta(s))^2$. Для любого $\varepsilon > 0$ и $0 < \delta < 1$ имеет место неравенство*

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{\tau(s,t)<\delta} |\eta(s) - \eta(t) > \varepsilon\Big\} \leqslant$$

$$\leqslant C\varepsilon^{-1}\Big(\int_0^\delta (H([0,1],\tau,x))^{1/2}dx + \delta \ln(4d\delta^{-1})^{1/2}\Big),$$

где

$$d = \sup\{\tau(s,t): \ s,t \in [0,1]\},$$

$$\ln^+ u = \begin{cases} 0, & u \leqslant 1, \\ \ln u, & u > 1. \end{cases}$$

Так как

$$\tau(s,t) = (\mathbf{E}|Y(t) - Y(s)|^2)^{1/2} \leqslant (F_1(t) - F_1(s))^{\alpha_1/2} \leqslant C|t - s|^{\beta_1\alpha_1/2},$$

то несложно получить оценку

$$I_{2,1} \leqslant C\varepsilon^{-1}\delta^{\beta_1\alpha_1/4}.$$

Для оценки величины $I_{1,1}$ нам потребуются следующие леммы. (Первые две можно найти в книге П. Биллингсли [125], а третью – в работе М. Хан [154].)

Лемма 4.13. *Пусть $[a,b] \subset [0,1]$. Для $x \in D[0,1]$ справедливо неравенство*

$$\sup_{t\in[a,b]} |x(t) - x(a)| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} \min\{|x(t) - x(a)|, \ |x(b) - x(t)|\} + |x(b) - x(a)|.$$

Лемма 4.14. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ – случайные величины, $S_0 = 0$, $S_k = \sum_{i=1}^k \xi_i$, $k = 1, \ldots, m$. Предположим, что существуют неотрицательные числа $u_1, \ldots, u_m$ такие, что для любого $\lambda > 0$, $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant m$ имеет место неравенство*

$$\mathbf{P}\{|S_j - S_i| \geqslant \lambda, \ |S_k - S_j| \leqslant\} \leqslant \lambda^{-\gamma}\Big(\sum_{n=1}^k u_n\Big)^\alpha$$

с некоторым $\gamma \geqslant 0$ *и* $\alpha > 1$. *Тогда для всех* $\lambda > 0$

$$\mathbf{P}\Big\{\max_{0\leqslant j\leqslant m} \min\left(|S_j|,\ |S_m - S_j|\right) \geqslant \lambda\Big\} \leqslant K_{\gamma,\alpha}\,\lambda^{-\gamma}\Big(\sum_{i=1}^{m} u_i\Big)^{\alpha}.$$

Лемма 4.15. *Предположим, что* X *удовлетворяет условиям* (4.8)*и* (4.9). *Тогда для всех* $\lambda > 0$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant u \leqslant 1$

$$\lambda^4\mathbf{P}\left\{|S_n(t) - S_n(s)| \geqslant \lambda,\ |S_n(u) - S_n(t)| > \lambda\right\} \leqslant \left(G(u) - G(s)\right)^{\mu_1},$$

где $\mu_1 = (\alpha_2 \vee 2\alpha_1) > 1$ и $G(u) = 2^{1/\mu_1}\left(n^{-1/\mu_1}F_2(u) + 3^{1/\mu_1}F_1(u)\right)$.

Применяя эти леммы, имеем

$$I_{1,1} \leqslant \sum_{i=1}^{N-1}\Big(\mathbf{P}\{R_i > \varepsilon/2\} + \mathbf{P}\{|S_n(t_{i+1}) - S_n(t_i)| > \varepsilon/2\}\Big),$$

$$\mathbf{P}\{R_i > \varepsilon/2\} \leqslant C\varepsilon^{-4}\left(G(t_{i+1}) - G(t_i)\right)^{\mu_1}, \tag{4.19}$$

где $R_i = \sup\limits_{t_i\leqslant t\leqslant t_{i+1}} \min\left\{|S_n(t) - S_n(t_i)|,\ |S_n(t_{i+1}) - S_n(t)|\right\}$. Для оценки второго члена в правой части оценки (4.19) воспользуемся (4.15) с $\varkappa = 1$. Тогда

$$\mathbf{P}\left\{|S_n(t_{i+1}) - S_n(t_i)| > \varepsilon/2\right\} \leqslant C\varepsilon^{-4}\mathbf{E}\left(S_n(t_{i+1}) - S_n(t_i)\right)^4 \leqslant$$
$$\leqslant C\varepsilon^{-4}\left\{n^{-1}\left(F_3(t_{i+1}) - F_3(t_i)\right)^{\alpha_3} + 3\left(F_1(t_{i+1}) - (F_1(t_i)\right)^{2\alpha_1}\right\}.$$

Наконец, применяя (4.16) для всех функций F_i, $i = 1,2,3$, получим

$$I_{1,1} \leqslant C\varepsilon^{-4}\left\{\left(\delta^{\beta_2}n^{-1/\mu_1} + \delta^{\beta_1}\right)^{\mu_1-1} + \delta^{\beta_3(\alpha_3-1)}n^{-1}\right\}. \tag{4.20}$$

Прежде чем применить теорему 4.5 для оценки членов $\Delta_n^N(\lambda)$ и $\Delta_n^N(\lambda - \varepsilon)$, нам нужно оценить величину $D_n(\delta)$. Для этого можно воспользоваться уже имеющейся оценкой величины I_2. Нетрудно удостовериться в справедливости оценки

$$D_n(\delta) \leqslant C\max\left(n^{-1/6},\ n^{1/12}\delta^{\beta_1\alpha_1/8}\right).$$

Теперь остается собрать оценки величин, входящих в (4.8), и соответствующим образом подобрать параметры ε и δ. Нетрудно видеть, что если положить $\varepsilon \sim n^{-1/6}$ и $\delta \sim n^{-\rho}$ с некоторой положительной константой ρ, зависящей от β_i, α_i, $i = 1,2,3$, и p, то все члены не будут превосходить $n^{-1/6}\lambda^{-3}$.

Можно привести оценки снизу для ρ, но так как при вычислении $H(\delta)$ параметр ρ влияет только на константы, мы не будем этого делать, но отметим, что $\rho \to \infty$ в любом из следующих случаев: либо $\min \beta_i \to 0$, либо α_i сходится к величинам, ограничивающим их снизу, либо $p \to 3$. Впрочем, при этих более сильных предположениях, в окончательной оценке не будет члена $\ln(1+\lambda)$.

§ 1.5. Скорость сходимости в метрике Прохорова и в BL-метрике

Пусть $\mathcal{P}(B)$ – множество вероятностных распределений на B. Напомним, что *метрика Прохорова* π и *BL-метрика* ϱ_{BL} на $\mathcal{P}(B)$ определяются следующим образом: для $\mu, \nu \in \mathcal{P}(B)$

$$\pi(\mu,\nu) := \inf\{\varepsilon > 0 : \mu(F) \leqslant \nu(F_\varepsilon) + \varepsilon \text{ для всех замкнутых} F \subset B\},$$

$$\varrho_{BL}(\mu,\nu) := \sup\{|\int_B f(x)(\mu-\nu)(dx)| : ||f||_{BL} \leqslant 1\},$$

где F_ε обозначает ε-окрестность множества $F \subset B$, а

$$||f||_{BL} := \sup_{x\in B}|f(x)| + \sup_{x\neq y}|f(x)-f(y)|/||x-y||.$$

Для краткости, обозначим $\pi(\xi,\eta) = \pi(\mu,\nu)$ и $\varrho_{BL}(\xi,\eta) = \varrho_{BL}(\mu,\nu)$, если $\mathcal{L}(\xi) = \mu$, $\mathcal{L}(\eta) = \nu$. Напомним, что обе метрики π и ϱ_{BL} метризуют слабую сходимость распределений. Поэтому представляется важным получить оценки скорости сходимости в ЦПТ в этих метриках. В конечномерном случае оценки метрики Прохорова можно найти, например, в работах В. В. Юринского [103], А. Зайцева [207], В. Бенткуса [14], Г. Дэлинга [133]. В бесконечномерном случае имеется следующий отрицательный результат.

Теорема 5.1 [93]. *Для каждой монотонной последовательности $b_n \downarrow 0$ существуют с.в. $X \in l_2$ и гауссовский с.в. $Y \in l_2$ такие, что*

1) $\mathbf{E}X = \mathbf{E}Y = 0$, $\mathrm{cov}X = \mathrm{cov}Y$;
2) $\mathbf{P}\{||X|| \leqslant 1\} = 1$;
3) $\liminf_{n\to\infty} \pi(S_n(X),Y)b_n^{-1} > 0$;
4) $\liminf_{n\to\infty} \varrho_{BL}(S_n(X),Y)b_n^{-1} > 0$.

Заметим, что условия 1), 2) гарантируют выполнение ЦПТ, поэтому $\pi(S_n(X),Y) \to 0$ и $\varrho_{BL}(S_n(X),Y) \to 0$ при $n \to \infty$. Теорема 5.1 указывает на то, что для получения оценки скорости сходимости в метриках π и ϱ_{BL} следует накладывать условия более жесткие, чем конечность третьего момента. Следующий результат указывает вариант таких условий.

Напомним, что с.в. X, $Y \in B$ удовлетворяют $\mathbf{E}X = \mathbf{E}Y = 0$, $\operatorname{cov} X = \operatorname{cov} Y$, при этом Y является гауссовским.

Теорема 5.2. *Пусть X, $Y \in l_2$. Предположим, что*

$$\mathbf{E}\|X\|_\lambda^3 < \infty,$$

где $\|x\|_\lambda^2 = \sum_{i=1}^\infty (x_i/\lambda_i)^2$, а последовательность $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$, $\lambda_i > 0$, удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^\infty \lambda_i^2 < \infty. \tag{5.1}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \pi\big(S_n(X), Y\big) &= O(n^{-1/6}); \\ \varrho_{BL}\big(S_n(X), Y\big) &= O(n^{-1/6}). \end{aligned}$$

Теорема 5.3. *Пусть с.в. X, $Y \in c_0$. Предположим, что*

$$\mathbf{E}\|X\|_2^3 < \infty,$$

где $\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^\infty x_i^2$. Тогда

$$\begin{aligned} \pi\big(S_n(X), Y\big) &= O(n^{-1/6}); \\ \varrho_{BL}\big(S_n(X), Y\big) &= O(n^{-1/6}). \end{aligned}$$

Следовательно, конечность третьего момента относительно подходящей (более сильной чем исходная) нормы, достаточна для того, чтобы получить оценку скорости сходимости в метрике Прохорова или в BL-метрике. Теорема 5.2 получена В. Бенткусом и А. Рачкаускасом [25]. Теорема 5.3 доказана В. Бенткусом (доказательство содержится в книге В. Паулаускаса и А. Рачкаускаса [84]), при этом из нее вытекает теорема 5.2.

Перейдем к формулировке результатов, более общих, чем теорема 5.2. Пусть гильбертово пространство $H \subset B$ линейно и непрерывно вложено в банахово пространство B (поэтому без потери общности можно предполагать, что $\|x\|_H \geqslant \|x\|_B$ для всех $x \in H$). Оператор вложения $H \hookrightarrow B$ называется *γ-радонифицирующим*, если гауссовская мера ν цилиндрических множеств пространства B, имеющая характеристический функционал

$$\int_B \exp\{ix(y)\}\nu(dy) = \exp\{-\|x\|_H^2/2\}$$

для $x \in B^* \subset H^* = H$, является счетно-аддитивной мерой (см., например, [110]). Обозначим

$$\nu_{H,m} = \int_B \|x\|_H^m |\mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y)|(dx).$$

Теорема 5.4 [25]. *Предположим, что вложение $H \hookrightarrow B$ является γ-радонифицирующим оператором. Тогда существует конечная постоянная C такая, что*

$$\pi(S_n(X), Y) \leqslant C\nu_{H,3}^{1/4} n^{-1/8}, \tag{5.2}$$

$$\varrho_{BL}(S_n(X), Y) \leqslant C \max\{\nu_{H,3} n^{-1/2}; \nu_{H,3}^{1/3} n^{-1/6}\}. \tag{5.3}$$

Заметим, что соответствующее гильбертово пространство H в случае $B = l_2$ может быть выбрано следующим образом:

$$H = l_2(\lambda) := \left\{x \in l_2 : |x|_H^2 := \sum_{i=1}^{\infty} (x_i/\lambda_i)^2 < \infty\right\},$$

где последовательность $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ положительных чисел удовлетворяет (5.1).

В случае гильбертова пространства В. В. Юринский [103] получил оценку

$$\pi(S_n(X), Y) = O(n^{-\alpha/(6+8\alpha)} \log n)$$

при условии, что существует третий конечный момент, где $\alpha > 0$ – некоторый параметр, характеризующий скорость убывания собственных значений оператора $\operatorname{cov} Y$. Условия, влекущие логарифмический порядок убывания $\pi(S_n(X), Y)$ в случае X, $Y \in l_2$, можно найти в работе А. Г. Кукуша [62]. Р. Лапинскас [63] исследовал скорость сходимости в ЦПТ в банаховых пространствах с базисом Шаудера и, при некоторых ограничениях на координаты X и Y, получил оценку $O(n^{-1/21})$. В случае X, $Y \in c_0$ и $\mathbf{E}\|X\|_1^3 < \infty$, где $\|\cdot\|_1$ – норма пространства l_1, В. В. Сенатов [93] получил оценку $\pi(S_n(X), Y) = O(n^{-1/8} \log^{3/4} n)$ (ср. с теоремой 5.2).

Заметим, что оценки (5.2), (5.3) не улучшаемы в общем случае. Соответствующие примеры построены в работе В. Бенткуса [113] (см. также теорему 2.6 в статье В. Бенткуса и А. Рачкаускаса [25]). Следует отметить, что условие $\nu_{H,3} < \infty$ является довольно ограничительным. Например, можно показать, что если предельным гауссовским с.э. Y является винеровский процес в пространстве $B = C[0,1]$, то автоматически выполняется $\nu_{H,3} = \infty$, если только $\mathcal{L}(X) \neq \mathcal{L}(Y)$. В. Бенткус и А. Рачкаускас [25] предложили метод, позволяющий получать оценки при менее ограничительных предположениях. Однако при этом порядок оценок относительно n несколько ухудшается. Не вдаваясь в детали, приведем один конкретный пример в пространстве $B = C[0,1]$. Если ω – модуль непрерывности, то через H_ω будем обозначать пространство всех функций на [0,1], удовлетворяющих условию

$$||x||_\omega := \sup_{t\in[0,1]} |x(t)| + \sup_{t\neq s} |x(t) - x(s)|/\omega(|t-s|) < \infty.$$

В случае $\omega(s) = s^\alpha$ вместо $||\cdot||_\omega$ и H_ω будем писать $||\cdot||_\alpha$ и H_α соответственно. В теоремах 5.5 и 5.6 предполагается, что вместо $\mathbf{E}X = \mathbf{E}Y = 0$, $\mathrm{cov}X = \mathrm{cov}Y$ выполняется $\mathbf{E}X(t) = \mathbf{E}Y(t) = 0$, $\mathbf{E}X(t)X(s) = \mathbf{E}Y(t)Y(s)$ для всех t, $s \in [0,1]$. Следующая теорема несколько улучшает соответствующий результат из [25] (см. [84]).

Теорема 5.5. *Пусть X, $Y \in C[0,1]$. Предположим, что*

$$\mathbf{P}\{X \in H_\alpha\} = \mathbf{P}\{Y \in H_\alpha\} \doteq 1$$

и

$$\nu_{\alpha,3} :\doteq \int_{C[0,1]} ||x||_\alpha^3 |\mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y)|(dx) < \infty.$$

Если $1/2 < \alpha \leqslant 1$, то существует постоянная $C(\alpha)$ такая, что

$$\pi(S_n(X), Y) = C(\alpha)\nu_\alpha^{1/4} n^{-1/8},$$
$$\varrho_{BL}(S_n(X), Y) = C(\alpha)\nu_\alpha^{1/3} n^{-1/6}.$$

Если $0 < \alpha \leqslant 1/2$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $C(\alpha,\varepsilon)$ такая, что

$$\pi(S_n(X), Y) \leqslant C(\alpha,\varepsilon)\max\{\nu_{\alpha,3}^{1/3} n^{-1/6},\ (\nu_{\alpha,3} n^{-1/2})^{4\alpha/(9-2\alpha)-\varepsilon}\}, \quad (5.4)$$
$$\varrho_{BL}(S_n(X), Y) \leqslant C(\alpha,\varepsilon)\max\{\nu_{\alpha,3}^{1/3} n^{-1/6},\ (\nu_{\alpha,3} n^{-1/2})^{2\alpha/3-\varepsilon}\}. \quad (5.5)$$

Отметим, что если Y – винеровский процесс и $E||X||_\alpha^3 < \infty$ с $\alpha = 1/2 + \delta$, $\delta < 0$, то в качестве следствия теоремы 5.5 получаем

$$\pi(S_n(X), Y) = o(n^{-1/8+\varepsilon}),$$
$$\varrho_{BL}(S_n(X), Y) = o(n^{-1/6+\varepsilon}),$$

где $\varepsilon = \varepsilon(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \uparrow 0$.

Комбинируя методы из статьи [25] с результатами В. И. Богачева [30], можно уточнить (5.4) и (5.5) в случае $\alpha = 1/2$. Именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 5.6. *Пусть X, $Y \in C[0,1]$ и пусть*

$$\omega(t) = t^{1/2}\left(\log(1/t)\right)^{-\beta}, \quad \beta > 3/2.$$

Предположим, что

$$\mathbf{P}\{X \in H_\omega\} = \mathbf{P}\{Y \in H_\omega\} = 1$$

и что

$$\nu_{\omega,3} := \int_{C[0,1]} \|x\|_\omega^3 |\mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y)|(dx) < \infty.$$

Тогда существует постоянная $C = C(\omega)$ такая, что

$$\begin{aligned} \pi\left(S_n(X), Y\right) &= C\nu_\omega^{1/4} n^{-1/8}; \\ \varrho_{BL}\left(S_n(X), Y\right) &= C\nu_\omega^{1/3} n^{-1/6}. \end{aligned}$$

Разумеется, скорость сходимости в ЦПТ в банаховых пространствах оценивалась не только в метрике Прохорова или в BL-метрике. Например, оценки в других метриках получены в работах [55], [56], [57], [89], [25], [65], [182], [181]. Оценки скорости сходимости в бесконечномерном принципе инвариантности в метрике Прохорова и других получены в [34], [35], [187], [22].

Глава 2

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

§ 2.1. Короткие разложения

В настоящей главе мы будем обозначать $\varepsilon = \varepsilon(n) = n^{-1/2}$. Пусть функция $f : B \to F$ такова, что математические ожидания $\mathbf{E}f(S_n)$, $\mathbf{E}f(Y)$ можно корректно определить. Обозначим

$$\begin{aligned} g(\varepsilon) &= g(\varepsilon; f) = \mathbf{E}f(S_n), \\ g(0) &= g(0; f) = \mathbf{E}f(Y). \end{aligned}$$

Будем исследовать *асимптотическое разложение*

$$g(\varepsilon) = g(0) + a_1\varepsilon + \ldots + a_k\varepsilon^k + R \tag{1.1}$$

или, что эквивалентно,

$$\mathbf{E}f(S_n) = \mathbf{E}f(Y) + a_1 n^{-1/2} + \ldots + a_k n^{-k/2} + R \tag{1.2}$$

(так называемый степенной асимптотический ряд). Здесь $a_1, a_2, \ldots a_k$ – „известные" коэффициенты, а остаточный член $R = R_k(\varepsilon)$ обычно удовлетворяет $\varepsilon^{-k}R_k(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Выбирая различные f в (1.2), можно получить асимптотические разложения для моментов, вероятностей и т.д. Отметим, что вид наших асимптотических разложений совпадает с видом асимптотических разложений в R и не зависит ни от f или Y, ни от размерности и структуры банаховых пространств B и F.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 1.1. *Если остаточный член $R = R_k(\varepsilon)$ удовлетворяет $\varepsilon^{-k}R_k(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то коэффициенты $a_1, a_2, \ldots a_k$ в разложении (1.1) единственны и для $s = 1, \ldots, k$ имеет место*

$$a_s = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-s}\left(g(\varepsilon) - g(0) - a_1\varepsilon - \ldots - a_{s-1}\varepsilon^{s-1}\right).$$

Полностью мы приведем только конструкцию короткого асимптотического разложения

$$\mathbf{E}f(S_n) = \mathbf{E}f(Y) + a_1\varepsilon + R.$$

Общий случай отличается от него лишь более громоздкими техническими деталями и сложными обозначениями. Мы ограничимся также случаем гладкой и ограниченной вместе со своими производными функцией $f : B \to F$. Это ограничение существенно упрощает технику оценки остаточного члена. Заметим однако, что, нестрого говоря, для оценки остаточного члена в случае негладкой f следует дополнительно привлечь методы, разработанные при оценке скорости сходимости в ЦПТ.

Теорема 1.2. *Пусть $f : B \to F$ является функцией класса C_b^6. Если $\mathbf{E}\|X\|^4 < \infty$, то*

$$\mathbf{E}f(S_n) = \mathbf{E}f(Y) + \frac{1}{6}\varepsilon\mathbf{E}f'''(Y)X^3 + R, \tag{1.3}$$

где

$$\begin{aligned}||R|| \leqslant &\varepsilon^2 C(f)\{\mathbf{E}||X||^4 + \mathbf{E}||Y||^4 + (\mathbf{E}||X||^3 + \mathbf{E}||Y||^3)^2 + \\ &+\mathbf{E}||X||^3\mathbf{E}||Y||\}, \\ C(f) =&||f^{(4)}||_\infty + ||f^{(6)}||_\infty.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Если пространство В гильбертово, то

$$||R|| \leqslant C\varepsilon^2(||f^{(4)}||_\infty + ||f^{(6)}||_\infty)(1 + \mathbf{E}||Y||^2)\mathbf{E}||X||^4,$$

где C – абсолютная постоянная.

Доказательство теоремы 1.2 состоит из нескольких шагов (см. 1.3 – 1.6). При оценке скорости сходимости весьма полезным (см. § 1.2) было следующее очевидное алгебраическое тождество:

$$\mu_1 \ldots \mu_n = \nu_1 \ldots \nu_n + \sum_{i=1}^{n} \mu_1 \ldots \mu_{i-1}(\mu_i - \nu_i)\nu_{i+1} \ldots \nu_n, \tag{1.5}$$

где $\mu_1, \ldots, \mu_n$, $\nu_1, \ldots, \nu_n$ – произвольные меры, а произведение понимается как свертка мер. В случае асимптотических разложений следует применять (1.5) итеративно несколько раз. Число итераций зависит от желаемой оценки остаточного члена. В случае короткого разложения достаточно применить (1.5) два раза, т. е. воспользоваться тождеством

$$\mu_1 \ldots \mu_n = \nu_1 \ldots \nu_n + \sum_{i=1}^{n} \nu_1 \ldots \nu_{i-1}(\mu_i - \nu_i)\nu_{i+1} \ldots \nu_n + R, \tag{1.6}$$

где остаточный член

$$R = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} \mu_1 \ldots \mu_{j-1}(\mu_j - \nu_j)\nu_{j+1} \ldots \nu_{i-1}(\mu_i - \nu_i)\nu_{i+1} \ldots \nu_n.$$

В случае одинаково распределенных слагаемых $\mu = \mu_1 = \ldots = \mu_n$, $\nu = \nu_1 = \ldots = \nu_n$, и (1.6) сводится к

$$\begin{aligned}\mu^n =&\nu^n + n\nu^{n-1}(\mu - \nu) + R, \\ R =& \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\mu^{i-1}(\mu - \nu)^2\nu^{n-i-1}.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Проинтегрировав f по мере (1.7) и выбрав $\mu = \mathcal{L}(\varepsilon X)$, $\nu = \mathcal{L}(\varepsilon Y)$, получаем

$$\mathbf{E}f(S_n) = \mathbf{E}f(Y) + n\int_B \mathbf{E}f(\varepsilon\sqrt{n-1}Y + \varepsilon x)H(dx) + R, \tag{1.8}$$

где

$$H = \mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y),$$

$$R = \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\int_B\int_B f(a_i + \varepsilon x + \varepsilon y)H(dx)H(dy),$$

а с.э. a_i имеет распределение

$$\mathcal{L}(a_i) = \mathcal{L}(\varepsilon X_1 + \ldots + \varepsilon X_{i-1} + \varepsilon\sqrt{n-i-1}Y).$$

Лемма 1.3. *Для всех $a \in B$, $\varepsilon > 0$ выполняется*

$$\left\| \int_B f(a+\varepsilon x)H(dx) - \frac{1}{6}\varepsilon^3\int_B f'''(a)x^3H(dx)\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{24}\varepsilon^4\|f^{(4)}\|_\infty(\mathbf{E}\|X\|^4 + \mathbf{E}\|Y\|^4), \tag{1.9}$$
$$\left\|\int_B\int_B f(a+\varepsilon x+\varepsilon y)H(dx)H(dy)\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{36}\varepsilon^6\|f^{(6)}\|_\infty(\mathbf{E}\|X\|^3 + \mathbf{E}\|Y\|^4)^2. \tag{1.10}$$

Доказательство. В случае (1.9) достаточно применить формулу Тейлора (см. А. Картан [60])

$$h(u+v) = \sum_{j=0}^{s} h^{(j)}(u)v^j/j! + \int_0^1 (1-\tau)^s h^{(s+1)}(u+\tau v)v^{s+1}d\tau/s!$$

с $h=f$, $u=a$, $v=\varepsilon x$, $s=3$ и заметить, что средние и ковариации X и Y совпадают.

В случае (1.10) достаточно применить формулу Тейлора дважды с $s=2$, $v=\varepsilon x$ и $v=\varepsilon y$ соответственно.

Лемма 1.4. *Имеет место*

$$\mathbf{E}f(S_n) = \mathbf{E}f(Y) + \varepsilon\mathbf{E}f'''(\varepsilon\sqrt{n-1}Y)X^3/6 + R,$$

где

$$\|R\| \leqslant \varepsilon^2(\|f^{(4)}\|_\infty + \|f^{(6)}\|_\infty)\{\mathbf{E}\|X\|^4 + \mathbf{E}\|Y\|^4 +$$
$$+ (\mathbf{E}\|X\|^3 + \mathbf{E}\|Y\|^3)^2/3\}/24.$$

Доказательство. Результат леммы является следствием представления (1.8) и леммы 1.3. К интегралу в (1.8) следует применить оценку (1.9) с $a = \varepsilon\sqrt{n-1}Y$. Остаточный член R в (1.8) можно оценить при помощи неравенства (1.10) с $a = a_i$. Наконец,

$$\int_B f'''(a)x^3 H(dx) = \mathbf{E} f'''(a)X^3$$

благодаря симметрии Y.

Лемма 1.5. *Имеет место неравенство*

$$\|\mathbf{E} f'''(Y)X^3 - \mathbf{E} f'''(\varepsilon\sqrt{n-1}Y)X^3\| \leqslant \varepsilon\|f^{(4)}\|_\infty \mathbf{E}\|X\|^3\mathbf{E}\|Y\|.$$

Доказательство. С.в. Y имеет распределение такое же, как и $\varepsilon\sqrt{n-1}Y + \varepsilon_1 Y_1$, где Y_1 – независимая копия с.в. Y. Поэтому достаточно к $\mathbf{E} f'''(Y)X^3$ применить формулу Тейлора с $h = f'''$, $u = \varepsilon\sqrt{n-1}Y$, $v = \varepsilon Y_1$ и $s = 0$.

Лемма 1.6. *Если пространство B гильбертово, то* $\mathbf{E}\|X\|^2 = \mathbf{E}\|Y\|^2$ *и* $\mathbf{E}\|Y\|^p \leqslant C(p)\mathbf{E}\|X\|^p$, $p > 0$.

Доказательство. Равенство $\mathbf{E}\|X\|^2 = \mathbf{E}\|Y\|^2$ очевидно, так как норма гильбертова пространства является квадратичной формой. Поэтому применение известного неравенства $\mathbf{E}\|Y\|^p \leqslant C(p)(\mathbf{E}\|Y\|^2)^{p/2}$ и неравенства Гелдера завершает доказательство леммы.

§ 2.2. Гладкий случай

В этом параграфе обсудим результаты, полученные без явных условий, аналогчных классическому условию Крамера

$$\limsup_{|t|\to\infty} |\mathbf{E}\exp(itX)| < 1$$

для характеристической функции с.в. $X \in R$. В гладком случае формулировки результатов не слишком перегружены условиями и техническими деталями. Поэтому рассмотрим как различные виды разложений, так и некоторые технические аспекты. Начнем с описания коэффициентов $a_1, \dots, a_k$ в асимптотическом разложении общего вида. Оказывается, что

$$a_s = \mathbf{E} P_s f(Y), \quad s = 0, 1, 2, \dots, \tag{2.1}$$

где P_s – некоторый случайный дифференциальный оператор. Отметим еще раз, что конструкция P_s универсальна и не зависит от конкретного вида X, Y, f или пространств B, F.

Коэффициенты a_s имеют вид (2.1) даже в случае недифференцируемой f, например, в случае когда, $f(x) = X_A(x)$ является индикаторной функцией множества $A \subset B$. Единственным отличием в случае негладкой f является то, что формулу (2.1) следует надлежащим образом интерпретировать (см. § 2.3).

Полиномы Эджворта-Крамера $E_k = E_k(m_2, \ldots, m_{k+2})$ от формальных коммутирующих переменных $m_2, \ldots, m_{k+2}$ (так называемых „моментных" переменных) определяются как коэффициенты формального разложения

$$\exp\left\{t^{-2}\left[\ln(1+\sum_{k=2}^{\infty} m_k t^k/k!) - m_2 t^2/2\right]\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} E_k(m_2, \ldots, m_{k+2}) t^k.$$

Например,

$$\begin{aligned} E_0 &= 1, \ E_1 = m_3/6, \\ E_2 &= -m_2 m_2/8 + m_3 m_3/72 + m_4/24, \\ E_3 &= -m_2 m_3/12 - m_2 m_2 m_3/48 - m_3 m_3 m_3/1296 + \\ &\quad + m_3 m_4/144 + m_5/120. \end{aligned}$$

Запишем

$$E_k = \sum a_k(i_1, \ldots, i_s) m_{i_1} \cdots m_{i_s},$$

где сумма берется по всем целым $i_1, \ldots, i_s$ таким, что $2 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_s$. Ясно, что только конечное число коэффициентов $a_k(\ldots)$ не равно нулю. Определим полиномы

$$P_k = P_k(z_1, \ldots, z_k) = \sum a_k(i_1, \ldots, i_s) z_1^{i_1} \ldots z_s^{i_s} \tag{2.2}$$

от коммутирующих переменных $z_1, \ldots, z_k$. Например,

$$P_2 = -z_1^2 z_2^2/8 + z_1^3 z_2^3/72 + z_1^4/24.$$

Если $h \in B$, то можно рассмотреть дифференциальный оператор

$$D(h)f(x) = f'(x)h = \lim_{t \to 0} t^{-1}(f(x+th) - f(x))$$

(так называемая производная по направлению h). Всевозможные дифференциальные операторы $D(h)$, $h \in B$ и $1 \in R$ генерируют естественную коммутативную алгебру над полем вещественных чисел. Поэтому можно определить *случайные дифференциальные операторы*

$$P_k = P_k(D(X_1), \ldots, D(X_k)),$$

а также коэффициенты $a_s = \mathbf{E}P_s f(Y)$. Например,

$$P_2 = -D^2(X_1)D^2(X_2)/8 + D^3(X_1)D^3(X_2)/72 + D^4(X_1)/24.$$

Лемма 2.1. *Пусть* $\mathbf{E}||X||^{k+2} < \infty$, *функция* $f \in C^{3k}(B;F)$. *Тогда существует число* $\alpha = \alpha(\mathcal{L}(Y)) > 0$ *такое, что коэффициенты*

$$a_s = \mathbf{E}P_s f(Y), \quad s = 0,1,2,\dots,k,$$

корректно определены, если

$$\max_{0\leqslant i\leqslant 3k}\sup_{x\in B}\exp\{-\alpha||x||^2\}||f^{(i)}(x)|| < \infty. \tag{2.3}$$

Сепарабельность B и F требуется для того, чтобы не вдаваться в подробности, связанные с вопросами измеримости. Условие $\mathbf{E}||X||^{k+2} < \infty$ позволяет понимать математические ожидания в смысле Бохнера. Условие (2.3) связано с хорошо известными свойствами интегрируемости нормы гауссовского с.э. (теорема Скорохода–Ферника–Ландау–Шеппа [140], [163]). Условие $f \in C^{3k}$ излишне сильно и будет ослаблено позже.

Теорема 2.2. *Предположим, что с.в.* $X \in B$ *удовлетворяет ЦПТ. Пусть* $\mathbf{E}||X||^{k+3} < \infty$, *функция* $f \in C^{3k+3}(B;F)$ *и*

$$\sup_{x\in B}(1+||x||)^{-k-3}||f(x)|| < \infty. \tag{2.4}$$

Тогда существует число $\alpha = \alpha(\mathcal{L}(Y)) > 0$ *такое, что асимптотическое разложение*

$$\mathbf{E}f(S_n) = \mathbf{E}f(Y) + \sum_{s=1}^{k} n^{-s/2}\mathbf{E}P_s f(Y) + R \tag{2.5}$$

корректно определено, при этом остаточный член R *допускает оценку* $||R|| = O(n^{-(k+1)/2})$, *если для всех* $i = 1,\dots,3k+3$

$$\sup_{x\in B}\exp(-\alpha||x||_B)||f^{(i)}(x)|| < \infty. \tag{2.6}$$

Перейдем к обсуждению результата теоремы 2.2 и приведем ссылки. Мы не будем касаться конечномерного случая (см., например, [85], [123], [153] и т.д.), однако заметим, что формальный степенной ряд полиномов Эджворта–Крамера содержится в работе А. Бикялиса [28]. Определение членов $\mathbf{E}P_k f(Y)$ асимптотического разложения через случайные дифференциальные операторы P_k можно найти в работе Ф. Гетце [146]. Разложение (2.5) в случае $k = 0$ (т.е.

оценка скорости сходимости) при условии $f \in C_b^3(B;R)$ получено В. Паулаускасом [81], В. М. Золотаревым [56]. В статье [146] разложение (2.5) получено при предположении $f \in C_b^{3k+3}(B;R)$. В. Бенткус [10] показал, что короткое асимптотическое разложение (2.5) имеет место при более слабых условиях $E\|X\|^3 < \infty$ и $f \in C_b^3(H;R)$ (H – гильбертово пространство). В то же время оценка остаточного члена R ухудшается: $R = O(n^{-1/2})$ вместо $R = O(n^{-1})$. В случае, когда B является гильбертовым пространством, теорема 2.2 доказана В. Бенткусом [12]. В общем случае теорема 2.2 вытекает из более общих и точных результатов В. Бенткуса [21]. Следует отметить, что все перечисленные статьи содержат более или менее явные оценки остаточного члена.

Конструкция асимптотических разложений обычно основывается на формуле (которая легко выводится повторным применением (1.6))

$$\mu_1 \cdots \mu_n = \nu_1 \cdots \nu_n + A_1 + \cdots + A_k + R, \tag{2.7}$$

где $\mu_1, \ldots, \mu_n$, $\nu_1, \ldots, \nu_n$ – произвольные меры,

$$A_s = \sum_{\operatorname{card} \alpha = s} \prod_{i \in \alpha} (\mu_i - \nu_i) \prod_{j \notin \alpha} \nu_j, \tag{2.8}$$

сумма берется по всевозможным множествам $\alpha = \{i_1, \ldots, i_s\}$ целых чисел $1 \leqslant i_s < i_{s-1} < \cdots < i_1 \leqslant n$, второе произведение берется по всем целым $j \notin \alpha$ таким, что $1 \leqslant j \leqslant n$. Остаточный член

$$R = \sum_{\operatorname{card} \alpha = k+1} \prod_i \mu_i \prod_{j \in \alpha} (\mu_j - \nu_j) \prod_{l \notin \alpha} \nu_l,$$

где суммирование аналогично суммированию в (2.8), первое произведение берется по всем целым $i \geqslant 1$, $i < i_{k+1}$, третье произведение берется по всем целым $l \notin \alpha$ таким, что $i_{k+1} < l \leqslant n$. В случае одинаково распределенных слагаемых $\mu = \mu_1 = \cdots = \mu_n$, $\nu = \nu_1 = \cdots = \nu_n$, и формулы для A_s и R принимают следующий вид:

$$A_s = \binom{n}{s} \nu^{n-s} (\mu - \nu)^s, \quad \binom{n}{s} = n!/[s!(n-s)!],$$

$$R = \sum_{i=1}^{n-k} \binom{n-i}{k} \mu^i (\mu - \nu)^{k+1} \nu^{n-i-k-1}.$$

В случае н.о.р. слагаемых интегрирование по мерам в (2.7) приводит к равенству

$$\mathbf{E} f(S_n) = \mathbf{E} f(Y) + \sum_{s=1}^{k} \binom{n}{s} \varphi_s(\varepsilon) + R, \tag{2.9}$$

где

$$\varphi_s(\varepsilon) = \mathbf{E}\int_B \cdots \int_B f(\varepsilon W_s + \varepsilon x_1 + \cdots + \varepsilon x_s) H(dx_1)\cdots H(dx_s),$$

$$R = \sum_{i=1}^{n-k} \binom{n}{s} R_i,$$

$$R_i = \mathbf{E}\int_B \cdots \int_B f(\varepsilon T_s + \varepsilon x_1 + \cdots + \varepsilon x_{k+1}) H(dx_1)\cdots H(dx_{k+1}),$$

с.э. W_s и T удовлетворяют соответственно равенствам

$$\mathcal{L}(W_s) = \mathcal{L}(\sqrt{n-s}\,Y) = \mathcal{L}(Y_1 + \cdots + Y_{n-s}),$$

$$\mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(X_1 + \cdots + X_i + Y_1 + \cdots + Y_{n-i-k-1}).$$

По-видимому, разложения типа (2.7), (2.8) впервые явно выписаны в статье Г. Бергстрема [118]. Во всяком случае, их обычно называют разложениями Бергстрема.

Перейдем к обсуждению методов и результатов статьи [146]. Основная идея этой статьи заключается в том, что для построения асимптотического разложения для $\mathbf{E}f(S_n)$ не обязательно нужна дифференцируемость функции f. На самом деле, достаточно иметь дифференцируемость функций φ_s и R_i из (2.9). Выигрыш получается на замене порядка интегрирования и дифференцирования и на свойстве операции интегрирования как сглаживающей операции. Обозначим

$$U(\eta_1, \ldots, \eta_q) = \mathbf{E}f(Y + \eta_1 X_1 + \cdots + \eta_q X_q),$$

$$U_i(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q | \eta_1, \ldots, \eta_q) = \mathbf{E}f(\varepsilon W_i + \varepsilon_1 Y_1 + \cdots + \varepsilon_q Y_q + \eta_1 X_1 + \cdots + \eta_q X_q),$$

где с.э. W_i удовлетворяет

$$\mathcal{L}(W_i) = \mathcal{L}(X_1 + \cdots + X_i + Y_{i+1} + \cdots + Y_n), \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Теорема 2.3 [146]. *Предположим, что функции U_i дифференцируемы. Обозначим*

$$C_n := \sup \left| \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_1}\right)^i \left(\frac{\partial}{\partial \eta_1}\right)^{j_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial \eta_q}\right)^{j_q} U_i(\varepsilon_1, 0, \ldots, 0 | 0, \eta_2, \ldots, \eta_q) \right|,$$

где sup *берется по всем* $1 \leqslant i \leqslant n$, *всем* $0 \leqslant \varepsilon_1, \eta_2, \ldots, \eta_q \leqslant n^{-1/2}$ *и всем* $i, j_1, \ldots, j_q \leqslant k+3$ *таким, что* $k+3 \leqslant i + j_1 + \cdots + j_q \leqslant 3(k+1)$. *Предположим кроме того, что если* $i_1 j_1 = \cdots = i_q j_q = 0$, *то*

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_1}\right)^{i_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_q}\right)^{i_q} \left(\frac{\partial}{\partial \eta_1}\right)^{j_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial \eta_q}\right)^{j_q} U_i(0, \ldots, 0 | 0, \ldots, 0) = \left(\frac{\partial}{\partial \eta_1}\right)^{i_1 + j_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial \eta_q}\right)^{i_q + j_q} U_i(0, \ldots, 0 | 0, \ldots, 0)$$

для всех $1 \leqslant i \leqslant n$, *всех* $i_1, \ldots, i_q \leqslant 2$ *таких, что* $i_1 + j_1 \leqslant k + 3, \ldots, i_q + j_q \leqslant k + 3$ *и* $i_1 + \ldots + i_q + j_1 + \ldots + j_q \leqslant 3(k+1)$. *Тогда*

$$|\mathbf{E} f(S_n) - \sum_{s=0}^{k} n^{-s/2} P_s U(0, \ldots, 0)| \leqslant c(k) C_n n^{-(k+1)/2},$$

где (*не случайный*) *дифференциальный оператор*

$$P_s = P_s\left(\frac{\partial}{\partial \eta_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \eta_s}\right)$$

определяется при помощи полиномов P_s *из* (2.2).

Теорему 2.3 можно обобщить так, чтобы этот результат можно было применять в ситуациях, не связанных непосредственно с суммированием независимых с.э. Оказывается также, что и доказательство такого обобщения не вероятностное. Это было отмечено в работе Ф. Гетце [149]. Предположим, что дана последовательность чисел h_n, $n = 1, 2, \ldots$, например, $h_n = \mathbf{E} f(S_n)$ или h_n является вероятностями некоторым образом построенным по n независимым наблюдениям и т.п. Далее, предположим, что можно каким-нибудь образом ввести веса $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ для наблюдений и определить последовательность $h_n(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ функций от переменных $0 \leqslant \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \leqslant n^{-1/2}$ так, чтобы было

$$h_n = h_n(n^{-1/2}, \ldots, n^{-1/2}) + O(n^{-(k+1)/2}).$$

Например, в случае $h_n = \mathbf{E} f(S_n)$ естественно положить

$$h_n(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \mathbf{E} f(\varepsilon_1 X_1 + \ldots + \varepsilon_n X_n).$$

В статье Ф. Гетце [149] доказано, что при некоторых естественных условиях (в частности, условиях, аналогичных условию дифференцируемости в теореме 2.3 в случае $k = 0$) имеет место „ЦПТ", т.е. существуют пределы

$$h_\infty = \lim_{n \to \infty} h_n(n^{-1/2}, \ldots, n^{-1/2}),$$
$$h_\infty(\eta_1, \ldots, \eta_r) = \lim_{m \to \infty} h_{m+r}(\eta_1, \ldots, \eta_r, n^{-1/2}, \ldots, n^{-1/2})$$

при фиксированных $\eta_1, \ldots, \eta_r$. Имея функции $h_n(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ и $h_\infty(\eta_1, \ldots, \eta_r)$, можно определить функции, аналогичные функциям U и U_i в теореме 2.3. Это позволяет показать, что при некоторых условиях, аналогичных условиям дифференцируемости в теореме 2.3, можно получить асимптотическое разложение, аналогичное разложению в теореме 2.3. Дальнейшие детали в этом направлении, а также некоторые приложения в математической статистике см. в работе [149].

Теорема 2.3 применима и в случае негладкой функции f. Она доказана без явного условия, аналогичного классическому условию Крамера. Роль условия Крамера в этой теореме выполняют условия дифференцируемости, проверка которых в приложениях зачастую вызывает затруднения.

Асимптотические разложения с полиномами Эджворта–Крамера имеют классический вид степенного асимптотического ряда. В качестве недостатка этих разложений можно отметить тот факт, что они существуют лишь тогда, когда с.э. имеет все моменты до порядка $k+2$ включительно. Также и структура этих разложений не во всех случаях прозрачна и удобна. Например, очевидный факт, что $\mathbf{E}P_k f(Y) = 0$, если $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y)$, требует специального доказательства, если мы отправляемся от определения P_k. Конечно, наиболее общими и прозрачными являются разложения Бергстрема (2.7), (2.9). К сожалению, эти разложения не слишком информативны. В. Бенткус [12] предложил разложение промежуточного типа

$$\mathbf{E}f(S_n) = \mathbf{E}f(Y) + a_1(\varepsilon) + \ldots + a_k(\varepsilon) + R, \qquad (2.10)$$

где функции $a_s(\varepsilon)$ удовлетворяют условию

$$|a_s(\varepsilon)| \leqslant C_s \varepsilon^s$$

с некоторыми постоянными $C_s < \infty$. Отметим некоторые свойства этих разложений: они существуют чаще, чем разложение Эджворта; возникают естественным способом из разложений Бергстрема; учитывается близость $\mathcal{L}(X)$ к $\mathcal{L}(Y)$, и поэтому возможно обобщение на устойчивый случай; из них нетрудно вывести разложения Эджворта; они позволяют получить более точные и общие результаты. Однако особенностью этих разложений является то, что члены $a_s(\varepsilon)$ разложения не единственны, в отличие от степенного асимптотического ряда.

Перейдем к описанию $a_s(\varepsilon)$. Рассмотрим случайный дифференциальный оператор

$$Q_i = Q_i(l^{(i)}) = (D^{l_1}(X_1) - D^{l_1}(Y_1)) \ldots (D^{l_i}(X_i) - D^{l_i}(Y_i)),$$

где мультииндекс $l^{(i)} = (l_1, \ldots, l_i)$ неотрицателен. Если отображение $f : B \to F$ имеет достаточно много ограниченных производных, то можно определить

$$a_s(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{|l^{(i)}|=2i+s}{}' \left(n^{-i} \binom{n}{i} \Big/ l^{(i)}! \right) n^{-s/2} \mathbf{E} Q_i f(\tau Y),$$

где $|l^{(i)}| = l_1 + \ldots + l_i$, $\tau = (1 - i/n)^{1/2}$, сумма $\sum'$ берется по всем $l^{(i)}$, удовлетворяющим $l_1 \geqslant 3, \ldots, l_i \geqslant 3$, и

$$l^{(i)}! = l_1! \ldots l_i!, \quad \binom{n}{i} = n!/[i!(n-i)!].$$

Обозначим

$$X^t = X_\chi\{\|X\| \leqslant \sqrt{n}\}, \qquad X_t = X - X^t,$$
$$L_p = n^{-(p-2)/2}\mathbf{E}\|X^t\|^p, \qquad \Lambda_p = n^{-(p-2)/2}\mathbf{E}\|X_t\|^p.$$

Заметим, что

$$\Lambda_{k+2} + L_{k+3} \leqslant \varepsilon^{k+1}\mathbf{E}\|X\|^{k+3}.$$

Лемма 2.4. *В условиях леммы* 2.1 *справедливо*

$$\|a_s(\varepsilon)\| \leqslant C\varepsilon^s \mathbf{E}\|X\|^{s+2},$$

$$\left\| \sum_{s=1}^{k} [a_s(\varepsilon) - \varepsilon^s \mathbf{E} P_s f(Y)] \right\| \leqslant C(\Lambda_{k+2} + L_{k+3}),$$

где постоянная $C = C(k, \mathcal{L}(Y))$.

Иногда весьма полезной оказывается так называемая процедура урезания, т.е. замена $\mathbf{E}f(S_n)$ на $\mathbf{E}f(S_n^t)$, где $S_n^t = n^{-1/2}(X_1^t + \ldots + X_n^t)$. Обычно разность $\mathbf{E}f(S_n) - \mathbf{E}f(S_n^t)$ можно сравнительно легко оценить. В качестве примера мы сформулируем следующую почти очевидную лемму 2.5 для ограниченной f (случай неограниченной f рассматривается в работах В. В. Сазонова и Б. А. Залесского [195], В. Бенткуса [21]).

Лемма 2.5. *Имеет место*

$$\|\mathbf{E}f(S_n) - \mathbf{E}f(S_n^t)\| \leqslant 2n\|f\|_\infty \mathbf{P}\{\|X\| \geqslant \sqrt{n}\}.$$

Лемма 2.5 (а также ее обобщения) позволяет вместо асимптотического разложения для $\mathbf{E}f(S_n)$ исследовать асимптотическое разложение

$$\mathbf{E}f(S_n) = \mathbf{E}f(Y) + a_1^t(\varepsilon) + \ldots + a_k^t(\varepsilon) + R, \tag{2.11}$$

где $a_s^t(\varepsilon)$ получается при замене $X_1, X_2, \ldots$ в определении $a_s(\varepsilon)$ на $X_1^t, X_2^t, \ldots$.

Лемма 2.6. *Существует число $\alpha = \alpha(\mathcal{L}(Y)) > 0$ такое, что условие*

$$\sup_{x \in B} \exp(-\alpha \|x\|^2) \|f^{(i)}(x)\| < \infty, \quad 0 \leqslant i \leqslant 3k,$$

обеспечивает существование асимптотического разложения (2.11). Более того,

$$\|\mathbf{E}f(Y)\| \leqslant C,$$
$$\|a_s^t(\varepsilon)\| \leqslant C(\Lambda_2 + L_{s+2}), \quad 1 \leqslant s \leqslant k,$$

где $C = C(k, \mathcal{L}(Y))$.

Теорема 2.7. *Предположим, что с.в. X удовлетворяет ЦПТ и что $E\|X\|^2 < \infty$. Тогда существует число $\alpha = \alpha(\mathcal{L}(Y)) > 0$ такое, что условие*

$$\sup_{x \in B} \exp(-\alpha \|x\|^2) \|f^{(i)}(x)\| < \infty, \quad 0 \leqslant i \leqslant 3k + 3$$

обеспечивает оценку

$$\|R\| \leqslant C(\mathcal{L}(X), k)(\Lambda_2 + L_{k+3})$$

остаточного члена в (2.11). Если к тому же $\mathbf{E}\|X\|^{k+2} < \infty$, то

$$\|a_s^t(\varepsilon) - a_s(\varepsilon)\| \leqslant C\Lambda_{s+2}, \quad 1 \leqslant s \leqslant k.$$

Дальнейшие детали и результаты о разложениях (2.10), (2.11) можно найти в работах [12], [21].

Будем говорить, что банахово пространство B является пространством класса C_b^s (кратко $B \in C_b^s$), если норма $g(x) = \|x\|$ дифференцируема в смысле Фреше s раз на открытом множестве $B \setminus \{0\}$ и $\sup\{\|g^{(i)}(x)\| : \|x\| = 1\} < \infty$, $1 \leqslant i \leqslant s$. В следующей теореме, касающейся асимптотических разложений для моментов, мы предполагаем, что с.в. X (или Y) не является конечномерным. Это означает, что $\mathbf{P}(Y \in E) = 0$, если $\mathbf{E} \subset B$ – конечномерное подпространство пространства B. Это предположение не ограничивает общности, так как в противном случае можно применить конечномерные результаты.

Теорема 2.8. *Предположим, что банахово пространство $B \in C_b^{3k+3}$. Тогда асимптотическое разложение*

$$\mathbf{E}f(S_n) = \mathbf{E}f(Y) + \sum_{s=1}^{k} \varepsilon^s \mathbf{E}P_s f(Y) + R$$

корректно определено и остаточный член допускает оценку $R = O(n^{-(k+1)/2})$ *в следующих случаях:*

1) $f(x) = ||x||^p$ *с некоторыми* $p > 0$, $p < k+3$ *и* $\mathbf{E}||X||^{k+3} < \infty$;

2) $f(x) = ||x||^p$ *с некоторым* $p \geqslant k+3$ *и* $\mathbf{E}f(X) < \infty$;

3) $f(x) = \exp(a||x||^\alpha)$ *с некоторыми* $a > 0$, $0 < \alpha < 1$ *и* $\mathbf{E}f(X) < \infty$.

Впервые оценка скорости сходимости для моментов в гильбертовом бесконечномерном пространстве была получена Б. А. Залесским и В. В. Сазоновым [48]. Их доказательство включало интегрирование неравномерной оценки для вероятностей и основывалось на методе Фурье. В статье В. С. Ри, М. Талаграна [185] построен пример, показывающий, что только моментные ограничения не могут обеспечить никакой скорости сходимости для вероятностей даже в банаховом пространстве с неограниченно гладкой нормой. Следовательно, методы работы [48] не могут быть прямолинейно обобщены на случай банаховых пространств. Применив другой метод, В. Бенткус [15], [21] обобщил результат Б. А. Залесского и В. В. Сазонова на случай банаховых пространств с достаточно гладкой нормой, а также отказался от одного излишнего ограничения. Асимптотическое разложение теоремы 2.8 вытекает из более общих и точных результатов [21].

§ 2.3. Асимптотические разложения для вероятностей

Пусть A – подмножество банахова пространства B. В настоящем параграфе рассматриваются асимптотические разложения для вероятности $\mathbf{P}\{S_n \in A\}$. Если выбрать $f(x) = \mathcal{X}_A(x)$, то в н.о.р. случае короткое разложение Бергстрема (1.8) можно переписать в следующем виде:

$$\mathbf{P}\{S_n \in A\} = \mathbf{P}\{Y \in A\} + n\int_B \mathbf{E}f(Z+\varepsilon x)H(dx) + R = \\ = \nu(A) + n\int_B \Phi(A - \varepsilon x)H(dx) + R, \tag{3.1}$$

где гауссовская мера $\Phi = \mathcal{L}(Z)$ и $Z = \varepsilon\sqrt{n-1}Y$, $H = \mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y)$. Построение асимптотического разложения в случае гладкой f основывалось на преобразовании интеграла $\mathbf{E}\int_B f(Z+\varepsilon x)\times H(dx)$ в математическое ожидание $\varepsilon\mathbf{E}D^3(X)f(Y)/6$ (если оставить в стороне проблему оценки остатка R). Это преобразование базировалось на разложении гладкой функции $x \to f(Z+\varepsilon x)$ в ряд Тейлора по степеням εx. В случае негладкой f такое прямое разложение невозможно. Однако если предположить, что функция

$$x \to \Phi(A - \varepsilon x) \tag{3.2}$$

достаточное число раз дифференцируема, то ввиду (3.1) можно повторить прежние рассуждения. Желание продифференцировать функцию (3.2) естественным образом приводит к понятию дифференцируемой меры (см. В. И. Авербух, О. Г. Смолянов, С. В. Фомин [1], Ю. Л. Далецкий, С. В. Фомин [42]). Предположим, что $\Phi : \mathcal{A} \to R$ является функцией множества, необязательно аддитивной (или σ-адитивной), определенной на некотором классе $\mathcal{A}$ подмножества $A \subset B$. Пусть класс $\mathcal{A}$ инвариантен относительно сдвигов, $A \in \mathcal{A}$, $h \in B \Rightarrow A + h \in \mathcal{A}$. Тогда можно определить производную по направлению h (если она существует)

$$D(h)\Phi(A) = \lim_{t\to 0}\{\Phi(A - th) - \Phi(A)\}/t. \tag{3.3}$$

Заметим, что, согласно традиции, в (3.3) должно присутствовать $\Phi(A+th)$. Мы выбираем $\Phi(A-th)$, поскольку желаем сохранить в асимптотических разложениях обозначения предыдущих параграфов. Первая производная $D(h)\Phi : \mathcal{A} \to R$ является функцией множества. Поэтому можно последовательно определить производные высших порядков $D(h_1)\cdots D(h_s)\Phi(A)$. Это позволяет корректно определить, например, $\mathbf{E}P_s\nu(A)$, где $P_s = P_s(X_1, \ldots, X_s)$ – полином Эджворта–Крамера. На том же пути все формулы предыдущих параграфов можно корректно проинтерпретировать и в случае негладкой функции $f(x) = \mathcal{X}_A(x)$.

В асимптотических разложениях в бесконечномерном случае общепринято определять множество A через некоторую функцию $F : B \to R$, т.е. $A = A_{r,F} = \{x \in B : F(x) < r\}$. Результаты, полученные к моменту написания настоящей статьи, касаются случая, когда функция F достаточно гладкая или $F(x) = \|x\|^p$, $p > 0$, в банаховом пространстве с достаточное число раз дифференцируемой нормой. Начнем со случая, когда $F(x) = \|x\|$ является нормой гильбертова пространства H. Обозначим $V_{r,a} = \{x \in H : \|x - a\| < r\}$.

Теорема 3.1. *Предположим, что с.в. $X \in H$ не сосредоточен в конечномерном подпространстве. Если $\mathbf{E}\|X\|^p < \infty$ с некоторым $2 \leqslant p < 3$, то для произвольных $a \in H$, $r \in R$ выполняется*

$$\mathbf{P}\{S_n \in Y_{r,a}\} = \mathbf{P}\{Y \in V_{r,a}\} + R \tag{3.4}$$

с $R = o(n^{-(p-2)/2})$. Если $\mathbf{E}\|X\|^p < \infty$ для некоторого $3 \leqslant p < 4$, то

$$\mathbf{P}\{S_n \in Y_{r,a}\} = \mathbf{P}\{Y \in V_{r,a}\} + \frac{1}{6}\,\varepsilon\,\mathbf{E}D^3(X)\nu(V_{r,a}) + R \tag{3.5}$$

с $R = o(n^{-(p-2)/2})$. *Кроме того,* $\mathbf{E}D^3(X)\nu(V_{r,a}) = 0$, *если* $a = 0$ *или* $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(-X)$.

Заметим, что теорема справедлива без каких-либо условий, аналогичных классическому условию Крамера на характеристическую функцию. В работе В. Бенткуса и Б. А. Залесского [26] построен пример с бесконечномерным $X \in H$ такой, что функция распределения $r \to \mathbf{P}\{\|S_n(X)\| < r\}$ имеет скачок, больший чем c/n, где $c > 0$ – некоторая постоянная. Поэтому, если мы хотим удлинить асимптотическое разложение теоремы 3.1, мы должны либо добавить некоторые новые члены, разрывные по r, либо наложить некоторые условия, похожие на классическое условие Крамера. Следующее условие было введено В. Бенткусом [13], С. В. Нагаевым и В. И. Чеботаревым [71].

Условие типа Крамера: существует оператор $K \geqslant 0$ такой, что оператор $K\operatorname{cov} X$ не является конечномерным и

$$\limsup_{r\to\infty} \sup\left\{|\mathbf{E}\exp\{i(x,X)\}| : (Kx,x) = r\right\} < 1. \qquad (3.6)$$

З а м е ч а н и е. Все дальнейшие результаты остаются справедливыми, если оператор $K\operatorname{cov} X$ конечномерен и имеет образ достаточно большой размерности.

Заметим, что в качестве K нельзя брать единичный оператор, поскольку в этом случае для каждого с.э. X в бесконечномерном пространстве H, а также для каждого $r \geqslant 0$ выполняется

$$\sup\left\{|\mathbf{E}\exp\{(x,X)\}| : \|x\| = r\right\} = 1.$$

Рассмотрим еще условие

$$\int_{n^{3/4}\leqslant|t|\leqslant T} \frac{1}{|t|}\left|\mathbf{E}\exp\{it\|S_n(X)\|^2\}\right|dt = O(1/T). \qquad (3.7)$$

Число T позднее будет выбрано таким, чтобы величина T^{-1} имела порядок остаточного члена.

Как правило, (3.7) удается проверить, если выполняется условие Крамера (3.6) (см. [13], [17]). Условие (3.7) выражается в терминах всей суммы $S_n(X)$. Это не является общепринятым, и предпочтительнее считается оценка, выраженная в терминах одного слагаемого. Все же мы формулируем результаты с условием (3.7), поскольку оказывается, что в приложениях (см., например, § 3.1, посвященный ω^2-критериям) это удобнее, и мы можем проверить (3.7), но не условие Крамера (3.6).

Теорема 3.2. *Пусть с.в. $X \in H$, целое число $k \geqslant 2$. Предположим, что $\mathbf{E}\|X\|^{k+2} < \infty$. Тогда асимптотическое разложение*

$$\mathbf{P}\{S_n \in V_{a,r}\} = \mathbf{P}\{Y \in V_{a,r}\} + \sum_{s=1}^{k} \varepsilon^s \mathbf{E} P_s \nu(V_{a,r}) + R \tag{3.8}$$

корректно определено (здесь, как обычно, P_s – полиномы Эджворта–Крамера). Пусть, кроме того, выполняется условие Крамера (3.6). Тогда в случае $\mathbf{E}\|X\|^{k+2+\alpha} < \infty$, где $0 \leqslant \alpha < 1$, выполняется $R = o(n^{-(k+\alpha)/2})$. Если же $\mathbf{E}\|X\|^{k+3} < \infty$, то $R = O(n^{-(k+1)/2})$. Более того, результат теоремы сохраняет силу, если вместо условия (3.6) выполняется (3.7) при $T = o(n^{(k+\alpha)/2})$, $0 \leqslant \alpha < 1$, или $T = O(n^{(k+1)/2})$ соответственно.

Метод доказательства теорем 3.1 и 3.2 разрабатывался в статьях [145], [146], [148], [104], [105], [44], [168], [13]. В этих и более поздних статьях были получены оценки остаточного члена. Приведем здесь краткий обзор, не касаясь первой части теоремы 3.1 (обсуждение оценок скорости сходимости см. в § 1.1). Статья Ф. Гетце [145] содержит очень важное неравенство симметризации (см. § 1.1), позволящее оценить х.ф. $\mathbf{E}\exp\{it\|S_n + a\|^2\}$ при $|t| \leqslant n^{1-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Полученные в этой статье оценки остатка правильно зависят от n, однако при этом накладываются излишне строгие моментные условия. Б. А. Залесский [44] доказал теорему 3.1 в случае $a = 0$. Теоремы 3.1 и 3.2 в том виде, в каком они сформулированы здесь, вытекают из результатов В. Бенткуса [13]. В этой статье эти теоремы доказаны для более общих множеств $V_{a,r} = \{x \in H : \omega(x + a) < r\}$, где $\omega : H \to R$ – полином второго порядка, и при некоторых условиях получена оценка

$$R = O_s\big((1 + \|a\|^{3k+3})(n^{-s} + \mathbf{E}\|X_t\|^2 + n^{-(k+1)/2}\mathbf{E}\|X^t\|^{k+3})\big), \tag{3.9}$$

имеющая место для произвольного $s > 0$. Напомним, что $X^t = X\chi\{\|X\| \leqslant n^{1/2}\}$ и $X_t = X - X^t$. В работах [48], [195] развита техника урезания, приспособленная к доказательству неравномерных оценок. Применив эту технику, В. Бенткус и Б. А. Залесский [26] дополнили оценку (3.9) множителем $(1+\rho)^{-m}, m > 0$, в случае $\mathbf{E}\|X\|^m < \infty$, где ρ обозначает расстояние между $0 \in H$ и границей множества $V_{a,r}$. С. В. Нагаев и В. И. Чеботарев [71], [72], [73] заметно усилили оценку остатка в теоремах 3.1 и 3.2. Эти статьи содержат также разложение Бергстрема в случае гильбертова пространства (разложения промежуточного типа содержатся также в работах [13], [26]). Работы [192], [194], [191] посвящены детальному исследованию равномерных и неравномерных оценок остаточных членов 3.1 и 3.2. Неодинаково распределенный случай рассматривался В. Бенткусом [13], а В. В. Ульянов [100] снял некоторые излишние ограничения, имеющиеся в статье В. Бенткуса, и сделал оценку остаточного члена более точной. Асимптотические разложения исследуются также в книге В. С. Королюка и Ю. В. Боровских [61].

Сформулируем один результат об асимптотических разложениях в банаховых пространствах. Обозначим $A_r = \{x \in B : F(x) < r\}$, где функционал $F : B \to R$. Пусть

$$\sigma_{k+1}^2 = E_{k+1}\left(F^{(k+1)}(Y)Y_1 \cdots Y_{k+1}\right)^2,$$

где символ E_{k+1} означает, что математическое ожидание берется только относительно с.э. Y_{k+1}.

Теорема 3.3. *Пусть с.э. $X \in B$ удовлетворяет ЦПТ. Зафиксируем число $\gamma > 0$ и целое $k \geqslant 0$. Предположим, что F дифференцируем по Фреше $3k+3$ раза, при этом существует постоянная $M \geqslant 0$ такая, что*

$$\sup_{x \in B}(1 + ||x||)^{-M}||F^{(j)}(x)|| < \infty$$

для всех $j = 0, \dots, 3k+3$. Если для некоторого достаточно большого $m = m(\varepsilon, k)$ выполняется

$$\mathbf{P}\{\sigma_{k+1}^2 < \delta\} = O(\delta^m)$$

при $\delta \downarrow 0$, то условие $\mathbf{E}||X||^{k+1} < \infty$ обеспечивает существование асимптотического разложения

$$\mathbf{P}\{S_n \in A_r\} = \mathbf{P}\{Y \in A_r\} + \sum_{s=1}^{k} \varepsilon^s \mathbf{E} P_s \nu(A_r) + R,$$

причем если $\mathbf{E}||X||^{k+3} < \infty$, то $R = o(\varepsilon^{k+1-\gamma})$.

Эта теорема содержится в работе Ф. Гетце [152], где получены более общие и точные результаты. Ранее тот же автор (см. [146]) доказал теорему 3.3 в случае $k = 0$. В работе [148] теорема 3.3 доказана в случае $B = L_{k+1}$ и $F(x) = ||x||^{k+1}$. Т. Р. Виноградова [40] доказала теорему 3.3 в случае симметричного F и $k = 1$.

§ 2.4. Асимптотические разложения в локальной теореме

Рассмотрим следующую модификацию условия Крамера: существует неотрицательный оператор $K : H \to H$ и постоянные $\rho < \infty$, $\delta > 0$ такие, что для $r > 0$ выполняется

$$\sup\left\{|\mathbf{E}\exp\{i(x,X)\}| : (Kx,x) \geqslant r^2\right\} \leqslant \rho r^{-\delta}. \tag{4.1}$$

Ясно, что это условие сильнее условия Крамера (3.6) из предыдущего параграфа. Обозначим $A_{a,r} = \{x \in H : ||x+a||^2 < r\}$.

Теорема 4.1. *Предположим, что* $\mathbf{E}||X||^{k+2} < \infty$ *для некоторого* $k = 0, 1, \dots$ *и что для некоторого* $\varepsilon > 0$ *интеграл*

$$J_\varepsilon = \int_{|t| \geqslant n^{1-\varepsilon}} |\mathbf{E}\exp\{it||S_n + a||^2\}|\, dt$$

существует. Тогда асимптотическое разложение

$$\frac{d}{dr}\mathbf{P}\{S_n \in A_{a,r}\} = \frac{d}{dr}\mathbf{P}\{Y \in A_{a,r}\} + \sum_{s=1}^{k} \varepsilon^s \frac{d}{dr}\mathbf{E}P_s\nu(A_{a,r}) + R$$

корректно определено. Если

$$J_\varepsilon = O\big((1+||a||^{k+3})n^{-(k+1)/2}\big) \tag{4.2}$$

и $\mathbf{E}||X||^{k+3} < \infty$, *то*

$$R = O\big((1+||a||^{k+3})n^{-(k+1)/2}\big). \tag{4.3}$$

Если выполняется условие Крамера (4.1) *с некоторым оператором* $K \geqslant 0$ *таким, что оператор* $K \operatorname{cov} X$ *имеет образ бесконечной или достаточно большой конечной размерности, то для достаточно больших* n *интеграл* J_ε *существует, выполняется* (4.2) *и тем самым остаточный член* R *допускает оценку* (4.3).

Из этой теоремы можно получить также асимптотические разложения для $\mathbf{P}\{||S_n + a|| < r\}$. Теорема является следствием более точных и общих результатов В. Бенткуса [16]. Ранее В. И. Чеботарев [101] доказал, что

$$\left|\frac{d}{dr}\left\{\mathbf{P}\{||S_n||^2 < r\} - \mathbf{P}\{||Y||^2 < r\}\right\}\right| = O(n^{-1/2}),$$

если $\mathbf{E}\|X\|^3 < \infty$, координаты с.э. X независимы и выполняется некоторое дополнительное условие.

Глава 3

ПРИМЕНЕНИЯ

§ 3.1. Статистики Крамера–фон Мизеса

В этом параграфе мы рассматриваем статистики

$$\omega_n^p(q) = n^{p/2} \int_0^1 |F_n(t) - t|^p \, q(t) dt. \tag{1.1}$$

Здесь $p > 0$, весовая функция $q : [0,1] \to [0,\infty)$ измерима по Лебегу, $F_n(t)$ обозначает эмпирическую функцию распределения, построенную по независимой случайной выборке $x_1, \ldots, x_n$ из равномерного распределения на $[0, 1]$,

$$F_n(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \chi\{x_i < t\}.$$

Если из контекста ясно, какая функция q имеется в виду, то мы будем писать $\omega_n^p = \omega_n^p(q)$ и называть ω_n^p *статистикой Крамера–фон Мизеса*. Обозначим через

$$U_n^p(x) = U_n^p(x;q) = \mathbf{P}\{\omega_n^p < x\},$$
$$U^p(x) = U^p(x;q) = \lim_{n\to\infty} U_n^p(x)$$

соответствующие функции распределения. Заметим, что статистики более общего вида

$$\omega_n^p = n^{p/2} \int_{-\infty}^{\infty} |F_n(t) - F(t)|^p \, q(F(t)) dF(t),$$

построенные по произвольной непрерывной функции распределения F, могут быть сведены к (1.1) при помощи замены переменной.

Начнем с обсуждения результатов, касающихся хорошо известного ω^2-критерия,

$$\omega_n^2 = n \int_0^1 (F_n(t) - t)^2 dt, \tag{1.2}$$

поскольку в этом случае из общих результатов в банаховых пространствах можно получить почти полный набор традиционных оценок скорости сходимости. Известно, что ω_n^2 сходится слабо к

$$\omega^2 = \int_0^1 (W(t) - tW(1))^2 dt,$$

где $W(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, – винеровский процесс. Ю. В. Прохоров и В. В. Сазонов [86] заметили, что ω_n^2 можно представить в следующем виде:

$$\omega_n^2 = \|S_n\|^2, \quad S_n = n^{-1/2}(X_1 + \cdots + X_n), \tag{1.3}$$

где $X, X_1, X_2, \ldots \in L_2(0,1)$ – последовательность н.о.р. с.э. со значениями в гильбертовом пространстве $L_2(0,1)$. Далее,

$$X(t) = \chi\{x < t\} - t, \tag{1.4}$$

где с.в. x равномерно распределена на $[0, 1]$. Ясно, что с.э. X из (1.4) как с.э. в пространстве L_2 имеет нулевое среднее и ограничен : $\|X\| \leqslant 1/3$.

Поэтому к ω_n^2 можно применить общие результаты, полученные в гильбертовом пространстве. И действительно, следующая теорема вытекает из результатов работы [145].

Теорема 1.1. *Существует абсолютная постоянная $C > 0$ такая, что*

$$\Delta_n := \sup_{x \in R} |U_n^2(x) - U^2(x)| \leqslant Cn^{-1}. \tag{1.5}$$

Более того,

$$U_n^2(x) = U^2(x) + \sum_{s=1}^{k} a_s(x) n^{-s} + R_k, \tag{1.6}$$

где $a_s(x)$ – некоторые известные функции, а остаточный член $|R_k| \leqslant C(k) n^{-k-1}$.

Доказательство теоремы существенно опирается на следующую оценку: для достаточно больших $A > 0$

$$|\mathbf{E} \exp(it\,\omega_n^2)| \leqslant C(k, A)(1 + |t|)^{-A}, \tag{1.7}$$

где $|t| \leqslant n$ и $k = 0$ в случае (1.5), $|t| \leqslant n^{k+1}$ в случае (1.6). В настоящее время известно (см. В. Бенткус, Р. Зитикис [27]), что для каждого $A > 0$ существуют постоянные $C_1(A)$, $C_2(A)$ такие, что

$$|\mathbf{E}\exp(it\omega_n^2)| \leqslant C(A)(1+|t|)^{-A} \tag{1.8}$$

выполняется для всех $t \in R$ и $n \geqslant C_2(A)$.

Остаточный член R_k в (1.6) можно сделать неравномерным, т.е. для каждого $A > 0$

$$|R_k| = |R_k(x)| \leqslant C(k,A)n^{-k-1}(1+|x|)^{-A}.$$

Это вытекает из известных оценок, аналогичных (1.7), для производных характеристической функции $\mathbf{E}\exp\{it\omega_n^2\}$ (см., например, [27]) и общих результатов в гильбертовом пространстве, касающихся неравномерных оценок (см. [195], [26]).

Следует отметить, что доказательство теоремы 1.1 имеет продолжительную историю. Например, в работах [188], [90], [186], [157], [74], [75], [130], содержатся оценки $\Delta_n = O(n^{-\beta})$ с различными $\beta < 1/2$. Статистики ω_n^2 рассматриваются также в книге В. С. Королюка и Ю. В. Боровских [61].

Теорема 1.2. *Существуют абсолютные константы $C_1, C_2 > 0$ и функция $I(n,t)$ (которую следует рассматривать как аналог классического ряда Крамера в теоремах больших уклонений) такие, что*

$$1 - U_n^2(x) = (1-U^2(x))I(n,x)(1+C_1\theta(1+\sqrt{x})/\sqrt{n}) \tag{1.9}$$

для $0 \leqslant x \leqslant C_2 n$. Далее, если $x \leqslant C_2 n^{1/3}$, то

$$1 - U_n^2(x) = (1-U^2(x))(1+C_1\theta(1+x^{3/2}/\sqrt{n}). \tag{1.10}$$

Величина θ удовлетворяет $|\theta| \leqslant 1$.

Работы Л. В. Осипова [76], [77], [78] оказали заметное влияние на исследования больших уклонений для ω_n^2 и в гильбертовом пространстве. Теорема 1.2 является частным случаем общего результата, полученного В. В. Юринским [107]. В этой работе содержится конструкция ряда Крамера $I(n,t)$. Оценка (1.10) вытекает также из результатов Б. А. Залесского [47], А. Рачкаускаса [88], а с менее точной оценкой остаточного члена $O((1+\sqrt{x})n^{-1/6})$ – из результатов В. Бенткуса [20].

Напомним, что C_b^k обозначает класс функций, имеющих k ограниченных и непрерывных производных.

Теорема 1.3 [27]. *Функция распределения $U_n^2 \in C_b^k$ и $U_n^2 \notin C_b^{k+1}$, где $k = (n-2)/2$, если n четно, и $k = (n-1)/2$, если n*

нечетно. Более того, для всех $m > 0$, $p = 0, 1, \ldots$, $n \geqslant 2(p+1)$ и $k = 0, 1, \ldots$ выполняется

$$\sup_{x \geqslant 0}(1 + x^m)\left|\left(\frac{d}{dx}\right)^p \{U_n^2(x) - U^2(x) - \sum_{s=1}^{k} a_s(x)n^{-s}\}\right| \leqslant C(m, p, k)n^{-k-1}.$$

Доказательство теоремы 1.3 (т.е. локальной теоремы для ω_n^2 с асимптотическим разложением) основано на детальном анализе характеристической функции, приводящем к некоторым оценкам, обобщающим (1.8). Утверждение, что $U_n^2 \in C_b^k$, $U_n^2 \notin C_b^{k+1}$ несколько уточняет соответствующий результат работы [131].

Условие $\mathrm{E}\|X\|^2 < \infty$ необходимо и достаточно для выполнения ЦПТ в гильбертовом пространстве (см., например, [109]).

В случае $\omega_n^2(q)$ условие

$$\int_0^1 t(1-t)q(t)dt < \infty \tag{1.11}$$

очевидным образом эквивалентно $E\|X\|^2 < \infty$ со с.э. X из (1.4), рассматриваемым в пространстве

$$L_2(q) = L_2((0,1), q(t)dt), \quad \|x\|^2 = \int_0^1 x^2(t)q(t)dt.$$

Поэтому (1.11) гарантирует существование предела

$$\lim_{n\to\infty} U_n^2(x, q) = U^2(x, q).$$

Этот хорошо известный результат был получен Д. М. Чибисовым [127] при помощи других методов. Если (1.11) выполняется, то условие $E\|X\|^{2m} < \infty$, $m \geqslant 0$, эквивалентно следующему (см. Р. Зитикис [52]):

$$\int_0^1 \left\{\int_0^x tq(t)dt\right\}^m dx < \infty,$$

$$\int_0^1 \left\{\int_x^1 (1-t)q(t)dt\right\}^m dx < \infty. \tag{1.12}$$

Однако нетрудно убедится, что существование интегралов

$$\int_0^{1/2} \left(\int_x^{1/2} q(t)dt\right)^m dx < \infty,$$

$$\int_{1/2}^1 \left(\int_{1/2}^x q(t)dt\right)^m dx < \infty \tag{1.13}$$

эквивалентно (1.11) и (1.12) при $m \geqslant 1$. Например, если функция q симметрична относительно точки $t = 1/2$ и $q(t) = t^{-\delta}$ с некоторым δ для $0 < t \leqslant 1/2$, то (1.13) выполняется тогда и только тогда, когда $\delta < 1 + 1/m$.

Теорема 1.4. *Предположим, что* (1.13) *выполняется с некоторым* $1 \leqslant m < 2$. *Тогда*

$$\Delta_n(q) := \sup_{x \geqslant 0} |U_n^2(x;q) - U^2(x;q)| \leqslant C(q,m)n^{1-m}.$$

Более того, $\Delta_n(q) = o(n^{1-m})$ *при* $n \to \infty$.

Результат теоремы 1.4 вытекает из известных оценок скорости сходимости в гильбертовом пространстве (см. Ф. Гетце [145], Б. А. Залесский [44]). Следует только проверить, что соответствующий с.э. $X \in L_2(q)$ или, что эквивалентно, предельный гауссовский процесс $Y(t) = W(t) - tW(1)$, где $W(t)$, $t \in [0,1]$ – стандартный винеровский процесс, не сосредоточенный в конечномерном подпространстве пространства $L_2(q)$. Достаточно показать, что W не является конечномерным, так как $tW(1)$ сосредоточен в одномерном подпространстве. Ясно, что для этого достаточно для каждого целого $m \geqslant 1$ построить линейные измеримые функционалы $l_1, \ldots, l_m : L_2(q) \to R$ такие, что гауссовские с.в. $l_1(W), \ldots, l_m(W)$ являются независимыми и невырожденными. Без потери общности можно предположить, что $\mathrm{mes}\{t : q(t) > 0\} > 0$. Поэтому существуют попарно непересекающиеся интервалы $(a_i, b_i) \subset (0,1), 1 \leqslant i \leqslant m$, такие, что $\int_{a_i}^{b_i} q(t)dt > 0$. Следовательно, можно положить

$$l_i(W) = \int_{a_i}^{b_i} (W(t) - W(a_i))q(t)dt.$$

Рассмотрим условие

$$\inf\{\ (t) : t \in (0,1)\} > 0. \tag{1.14}$$

На весовую функцию q будем также накладывать следующее условие: существует конечное число точек $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_N < t_{N+1} = 1$ таких, что функция q монотонна и либо выпукла, либо вогнута на каждом из интервалов (t_{i-1}, t_i). Кроме того, предположим, что существуют числа $\alpha \geqslant 0$ и $c(\alpha) < \infty$ такие, что

$$\max\{q(t_{i-1} + \varepsilon);\ q(t_i - \varepsilon)\} \leqslant c(\alpha)\varepsilon^{-\alpha} \tag{1.15}$$

для всех $\varepsilon > 0$, удовлетворяющих $2\varepsilon < t_i - t_{i-1}$.

Теорема 1.5 [52]. *Предположим, что выполняются условия* (1.13) *с* $m=2$ *и* (1.14), (1.15). *Тогда*

$$\Delta_m(q) \leqslant c(q)n^{-1}.$$

Кроме того, если (1.13) *выполняется с* $m = \mu(1+\varepsilon) \geqslant 2$ *при некотором* $\varepsilon > 0$ *и* $\mu = 1, 2, \ldots$, *то*

$$\sup_{x>0} x^{\mu}|U_n^2(x;q) - U^2(x;q)| \leqslant c(q,\varepsilon,\mu)n^{-1}.$$

Статья Р. Зитикиса [52] содержит также асимптотические разложения функции $U_n^2(\cdot, q)$ и ее производных. Приведены как равномерные, так и неравномерные оценки остаточных членов. Эти разложения получены при дополнительном условии, что q' удовлетворяет неравенству (1.15).

Что касается больших уклонений, то в теореме 1.2 U_n^2 можно заменить на $U_n^2(\cdot, q)$, если выполняется следующее условие: существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\int_{1/2}^{1} \exp\left\{C\left[\int_{1/2}^{r} q(t)dt\right]^{1/2}\right\}dr < \infty;$$

$$\int_{0}^{1/2} \exp\left\{C\left[\int_{r}^{1/2} q(t)dt\right]^{1/2}\right\}dr < \infty. \tag{1.16}$$

Такая замена возможна, поскольку общий результат В. В. Юринского [107] имеет место при условии $\mathbf{E}\exp\{c\|X\|\} < \infty$ с некоторым $c > 0$, что в нашем случае эквивалентно (1.16).

Перейдем к обсуждению случая $p \neq 2$. Аналогично представлению (1.13), можно записать

$$\omega_n^p(q) = \|S_n\|^p \tag{1.17}$$

со с.в. X из (1.4), но рассматриваемом сейчас в пространстве $L_p = L_p(q)$, $p \geqslant 1$, функций $f : [0,1] \to R$ с конечным интегралом

$$\|f\|^p = \int_0^1 |f(t)|^p q(t)dt.$$

Слабая сходимость распределений $U_n^p(x;q)$ к $U^p(x;q)$ исследовалась в работах М. Черге и Л. Хорвата [129] и Р. Норвайши [170]. Соответствующие глубокие и общие результаты о скорости сходимости в банаховых пространствах ([152],

[148], [46]) получены при известном условии на дисперсию (см. § 1.3). К сожалению, это условие все еще не выражено в терминах весовой функции q, за исключением некоторых частных случаев, таких как $q(t) \equiv 1$. В этом последнем случае имеется следующий результат.

Теорема 1.6 [148]. *Предположим, что четное число $p \geqslant 4$ и что функция $q(t) \equiv 1$. Тогда*

$$\sup_{x \geqslant 0} |U_n^p(x) - U^p(x)| \leqslant C(p)n^{-1}.$$

Более того, функцию $U_n^p(x)$ можно разложить в асимптотический ряд с остаточным членом, имеющим порядок $o(n^{\varepsilon - p/2})$, $\varepsilon > 0$.

Некоторые дальнейшие результаты в этом направлении см. в работе [148]. Для U_n^p, $p \neq 2$, мы можем сформулировать пока лишь оценки Берри–Эссеена и результаты о больших уклонениях с остатком $O(n^{-1/6})$.

Теорема 1.7. *Если $p \geqslant 3$ и*

$$\int_0^1 t^p(1-t)^p q(t)dt < \infty,$$

$$\int_{1/2}^1 \left(\int_{1/2}^x q(t)dt\right)^{3/p} dx < \infty,$$

$$\int_0^{1/2} \left(\int_x^{1/2} q(t)dt\right)^{3/p} dx < \infty, \tag{1.18}$$

то

$$\sup_{x \geqslant 0} (1 + x^{3/p})|U_n^p(x;q) - U^p(x;q)| \leqslant C(q)n^{-1/6}. \tag{1.19}$$

В случае $1 < p < 3$ оценка (1.19) сохраняется, если существует число $0 < \alpha < p/2$ такое, что

$$\int_0^1 t^\alpha(1-t)^\alpha q(t)dt < \infty.$$

В случае $p \in (1,3)$ результат теоремы содержится в статье В. Паулаускаса и А. Рачкаускаса [177]. При $p \geqslant 3$ теорема вытекает из результатов той же статьи, однако при этом надо, что функция распределения $x \to (U_p(x : q))^{1/p}$ имеет ограниченную плотность, а также соответствующий с.э. $X \in L_p$ имеет третий момент. Первое является следствием известных общих результатов (см. [41], [185]), второе можно проверить отправляясь от тождества

$$\mathrm{E}\varphi(\|X\|) = \int_0^1 \varphi\left(\left\{\int_0^x t^p q(t)dt + \int_x^1 (1-t)^p q(t)dt\right\}^{1/p}\right)dx, \tag{1.20}$$

имеющего место для каждой функции $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$. В случае $\varphi(t) = t^3$ соотношение (1.20) эквивалентно (1.18).

Следующая теорема является следствием результатов статьи [115] (в случае $1 < p < 3$ дополнительно нужно применить один результат о дифференцируемых функциях в L_p из работы [177]).

Теорема 1.8. *Если*

$$\int_0^1 t(1-t)q(t)dt < \infty$$

при $p \geqslant 3$, *и*

$$\int_0^1 t^\alpha (1-t)^\alpha q(t)dt < \infty$$

для некоторого $\alpha > 0$, $\alpha < p/3$, *при* $1 < p < 3$, *то существует предельная функция распределения* $U^p(x;q)$, *и следующие три утверждения эквивалентны:*

а) *существует* $h > 0$ *такое, что*

$$\int_{1/2}^1 \exp\left\{h\Big[\int_{1/2}^x q(t)dt\Big]^{1/2p}\right\}dx < \infty,$$

$$\int_0^{1/2} \exp\left\{h\Big[\int_x^{1/2} q(t)dt\Big]^{1/2p}\right\}dx < \infty;$$

б) *существуют постоянные* $M_i = M_i(p,q)$, $i = 1,2$, *такие, что*

$$\left|\frac{1-U_n^p(x;q)}{1-U^p(x;q)} - 1\right| \leqslant M_1(1 + x^{1/p})n^{-1/6}$$

при $0 \leqslant x \leqslant M_2 n^{p/6}$;

в) *для каждой функции* $f : R \to R$ *такой, что* $f(n) \to 0$ *при* $n \to \infty$, *имеет место*

$$\frac{1-U_n^p(x;q)}{1-U^p(x;q)} \to 1$$

при $n \to \infty$ *равномерно по* x, *удовлетворяющим* $0 \leqslant x \leqslant f(n)n^{p/6}$.

§ 3.2. L-статистики

В этом параграфе мы обсуждаем только результаты о больших уклонениях для L-статистик, полученные путем сведения задачи к известным результатам в банаховых пространствах или при помощи применения соответствующей техники. Другие результаты, касающиеся L-статистик, можно найти в работах [199], [198], [156], [122], [172] и др.

Пусть $X, X_1, X_2, \ldots \in R$ – н.о.р. вещественные с.в. с общей функцией распределения F. Рассмотрим *L-статистику*

$$l_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} c_{in} X_{i:n},$$

где $X_{1:n} \leqslant \ldots \leqslant X_{n:n}$ – порядковые статистики выборки $X_1, \ldots, X_n$, а $c_{1n}, \ldots, c_{nn}$ – некоторые вещественные коэффициенты.

Если коэффициенты генерируются некоторой весовой функцией $J : [0,1] \to R$ (см., например, [199]), т.е. если

$$c_{in} = c_{in}^0 = n \int_{(i-1)/n}^{i/n} J(u)du,$$

то соответствующую L-статистику будем обозначать l_n^0. Предположим, что существует $L \geqslant 0$ такое, что для всех $u, v \in [0,1]$ выполняется

$$|J(u) - J(v)| \leqslant L|u - v|.$$

Известно (см. [199]), что условие $\mathbf{E}X^2 < \infty$ обеспечивает существование конечных пределов

$$\mu = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}l_n^0, \ \sigma^2 = \lim_{n\to\infty} n\mathbf{E}(l_n^0 - \mu)^2,$$

где

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xJ(F(x))dF(x),$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} J(F(x))J(F(y))\{F(x \wedge y) - F(x)F(y)\}dxdy.$$

Мы будем предполагать, что $\sigma > 0$. В этом случае с.в. $n^{-1/2}(l_n^0 - \mu)/\sigma$ имеет в пределе стандартное нормальное распределение $\Phi(x)$.

Теорема 2.1. *Если для некоторого $h > 0$*

$$\mathbf{E} \exp(h|X|^{1/2}) < \infty, \tag{2.1}$$

то для каждой последовательности $b_n \to 0$ выполняется

$$\mathbf{P}\{\sqrt{n}\,(l_n^0 - \mu) > \sigma x\}/[1 - \Phi(x)] \to 1 \tag{2.2}$$

равномерно по $0 \leqslant x \leqslant b_n n^{1/6}$.

Заметим, что теорема, а также и другие результаты, приводимые ниже, остаются справедливыми для

$$\mathbf{P}\{\sqrt{n}(l_n^0 - \mu) < \sigma x\}/\Phi(x)$$

при $-b_n n^{1/6} \leqslant x \leqslant 0$. Действительно, чтобы убедится в этом, достаточно заменить J на $-J$.

Утверждения (2.1) и (2.2) эквивалентны, если $J \equiv \mathrm{const} \neq \neq 0$. В этом случае статистика l_n^0 сводится к сумме н.о.р.с.в., и эквивалентность известна (см., например, [115]). То же замечание касается теоремы 2.2.

Фиксируем число a, $0 < a \leqslant 1/2$, и обозначим $x_n = n^{a/(4-2a)}$.

Теорема 2.2. *Если для некоторого* $h > 0$

$$\mathbf{E}\exp(h|X|^a) < \infty, \tag{2.3}$$

то для каждой последовательности $b_n \to 0$ *выполняется*

$$\mathbf{P}\{\sqrt{n}(l_n^0 - \mu) > \sigma x\}/[1 - \Phi(x)] \to 1$$

равномерно по $0 \leqslant x \leqslant b_n x_n$.

Результаты теорем 2.1, 2.2 устойчивы относительно малых возмущений коэффициентов $c_{1,n}^0, \ldots, c_{n,n}^0$ в следующем смысле.

Теорема 2.3. *Теоремы* 2.1 *и* 2.2 *сохраняют силу, если коэффициенты* $c_{1n}^0, \ldots, c_{nn}^0$ *заменить на* $c_{1n}, \ldots, c_{nn}$ *такие, что*

$$\sum_{i=1}^{n} |c_{in} - c_{in}^0|^3 = O(n^{-1}) \tag{2.4}$$

в случае теоремы 2.1, *и*

$$\sum_{i=1}^{n} |c_{in} - c_{in}^0|^{(2-a)/(1-a)} = O(n^{a/(a-1)}) \tag{2.5}$$

в случае теоремы 2.2. *В обоих случаях статистику* l_n^0 *следует заменить на* l_n.

Применение неравенства Гельдера показывает, что из (2.4) вытекает (2.5). Теоремы 2.1 – 2.3 доказаны в статье В. Бенткуса и Р. Зитикиса [116]. Доказательство основывается на представлении $l_n = S_n + \omega_n^2 + R$, где S_n – сумма н.о.р. вещественных с.в., ω_n^2 – некоторая ω^2-статистика, а R – остаточный член. Для оценки S_n применяются известные одномерные результаты (см., например, И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник [43], В. В. Петров [85], В. Бенткус, А. Рачкаускас [115]).

Оценка ω_n^2 основывается на результатах о больших уклонениях в гильбертовом пространстве из работы [115] (см. также §3.1). Применив аналогичную технику, Р. Зитикис [208], [209] показал, что скорость сходимости в теоремах 2.1 и 2.2 имеет порядок $(1+x^3)n^{-1/2}\ln n$. Впоследствии, комбинируя методы и технику, развитую для исследования скорости сходимости в ЦПТ в работах [145], [148], [105], [84], а также для исследования больших уклонений в банаховых пространствах в статьях [20], [115], [88], [47] и др., Р. Зитикис [208] получил следующий результат.

Теорема 2.4. *Условие* (2.3) *обеспечивает существование постоянных $C = C(a, J)$ и $A = A(a, J) > 0$ таких, что*

$$\left|1 - P\{\sqrt{n}(l_n^0 - \mu) > \sigma x\}/[1 - \Phi(x)]\right| \leqslant C(1+x^3)n^{-1/2}$$

для $0 \leqslant x \leqslant Ax_n$.

Большие уклонения крамеровского типа для L-статистик исследовались ранее в работах [2], [180], [204].

§ 3.3. Статистики Колмогорова–Смирнова

Пусть F_n – эмпирическая функция распределения, построенная по выборке $x_1, \ldots, x_n$ из равномерного на $[0, 1]$ распределения, $D_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - t)$. В предыдущих параграфах мы видели, что последовательность $\{D_n,\ n \geqslant 1\}$ полезно рассматривать как последовательность с.э. в пространстве L_p. Здесь мы будем рассматривать D_n как с.э. в пространстве Скорохода $D[0,1]$,

$$D_n(t) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} X_i(t),$$

где $X, X_1, X_2, \ldots,$ – н.о.р.с.э. в пространстве $D[0,1]$, при этом случайный процесс $X(t) = \chi(x < t) - t,\ t \in [0,1]$, а случайная величина x равномерно распределена в $[0, 1]$. Поэтому слабую сходимость D_n (т.е. классическую теорему Донскера) в данном случае можно понимать как ЦПТ в $D[0,1]$ для н.о.р. слагаемых специального вида. Каждую из теорем 4.7 – 4.10 главы 1 нетрудно применить к D_n. Например, для применения теоремы 4.7 достаточны следующие два неравенства:

$$\mathbf{E}\big(X(t) - X(s)\big)^2 \leqslant t - s;$$

$$\mathbf{E}\big(X(u) - X(t)\big)^2\big(X(t) - X(s)\big)^2 \leqslant (u-s)^2 \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant u \leqslant 1.$$

Конечно, возможность такого применения представляет лишь методологический интерес. Далее мы будем применять результаты § 1.4 к взвешенным эмпирическим процессам. Для этого нам понадобятся некоторые новые определения.

Пусть Q – обозначает класс функций $q : [0,1] \to R^+$, непрерывных и возрастающих на $[0, 1/2]$ и симметричных относительно точки $t = 1/2$, $q(t) = q(1-t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1/2$. Обозначим через

$$W_0(t) = W(t) - tW(1), \ 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

броуновский мост, где W – стандартный винеровский процесс. Взвешенные эмпирический процесс и броуновский мост определяются при помощи формул

$$D_{n,q}(t) = D_n(t)/q(t) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} X_{i,q}(t),$$

$$W_{0,q}(t) = W_0(t)/q(t)$$

соответственно, где $X_{i,q}(t) = X_i(t)/q(t)$. В работе Д. М. Чибисова [127] (см. также [173]) доказано, что для $q \in Q$ распределения $\mathcal{L}(D_{n,q})$ сходятся слабо к $\mathcal{L}(W_{0,q})$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{1/2} \exp\{-\varepsilon q^2(t)/t\} t^{-1} dt < \infty \tag{3.1}$$

для всех $\varepsilon > 0$. Можно сравнить этот результат с результатом, вытекающим из теоремы 4.8 главы 1. Предположим еще дополнительно, что $t^{1/2}q(t)$ является неубывающей функцией. После несложных выкладок (детали см. в [178]) для $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant u \leqslant 1$ получаем

$$\mathbf{E}(X_q(t) - X_q(s))^2 \leqslant C \int_s^t v^{-1/2}/q(v)dv, \tag{3.2}$$

$$\mathbf{E}\big((X_q(t)-X_q(s))^2 \wedge 1\big)(X_q(u)-X_q(t))^2 \leqslant C\Big(\int_s^u v^{-1/2}/q(v)dv\Big)^2, \tag{3.3}$$

где $X_q(t) = X(t)/q(t)$. Поэтому условие

$$\int_0^{1/2} v^{-1/2}/q(v)dv < \infty \tag{3.4}$$

обеспечивает выполнение требования теоремы 4.8 с $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$ и $F_1(t) = F_2(t) = c \int_0^t v^{-1/2}(q(v))^{-1}dv$ и тем самым обеспечивает слабую сходимость распределений $\mathcal{L}(D_{n,q})$. Очевидно, что условие (3.4) весьма близко к оптимальному условию О'Рейля–Чибисова (3.1).

В заключение параграфа приведем результат об эмпирических взвешенных процессах, полученный применением теоремы 4.11 главы 1. Обозначим

$$\Delta_{n,q}(x) = |\mathbf{P}\{\|D_{n,q}\|_\infty < x\} - \mathbf{P}\{\|W_{0,q}\|_\infty < x\}|.$$

Теорема 3.1 [178]. *Предположим, что $q \in Q$ и что для некоторых $0 \leqslant \delta \leqslant 2/3$ и $0 < \gamma < 1$ функция $t^{1/3+\delta}/q(t)$ возрастает и*

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1/2} t^{(1-\gamma)/(3+\delta)}/q(t) < C.$$

Тогда существует постоянная $C = C(q)$ такая, что

$$\Delta_{n,q}(x) \leqslant Cn^{-(1+\delta)/10}(1+x)^{-3}(\ln n + \ln(1+x))^2. \tag{3.5}$$

Для доказательства следует проверить условия теоремы 4.11 первой главы, в частности, условие (4.3) главы 1 для $W_{0,q}$ (см. статьи [176], [178]).

Необходимо отметить, что существует обширная литература о взвешенных эмпирических и квантильных процессах (см., например, [128] и ссылки в ней). В большинстве статей применяется так называемая венгерская (или КМТ) конструкция. Из результатов указанной статьи нетрудно вывести, что если $q(t) = t^\alpha$, $1/4 < \alpha < 1/2$, и $W_{0,q}$ удовлетворяет условию (4.3) из первой главы, то

$$\sup_{x\in R} \Delta_{n,q}(x) \leqslant Cn^{-1/2+\alpha}. \tag{3.6}$$

Видим, что скорость $n^{-1/6}$ в (3.6) соответствует относительно естественной весовой функции $t^{1/3}$, а в (3.5) для той же скорости надо взять $t^{3/11}$.

§ 3.4. Скорость сходимости для общих эмпирических процессов

В этом параграфе сформулируем две оценки скорости сходимости в ЦПТ для эмпирических процессов. Отметим, что имеется большое число работ, посвященных собственно ЦПТ (см., например, обзорные статьи Р. М. Дадли [134], П. Гэнслера и В. Штуте [142], Э. Жине и Д. Зина [144]).

Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – н.о.р. с.э. со значениями в измеримом пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, $\mu = \mathcal{L}(X)$ и

$$\mu(f) = \int_{\mathcal{X}} f(x)\mu(dx).$$

Пусть μ_n и E_n обозначают эмпирическую меру и *эмпирический процесс*, соответствующие мере μ,

$$\mu_n = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\delta_{X_i}, \quad E_n = \sqrt{n}\,(\mu_n - \mu),$$

где δ_x обозначает меру единичной массы, сосредоточенную в точке $x \in \mathcal{X}$. Мы будем рассматривать эмпирический процесс $E_n(f)$, $f \in \mathcal{F}$, индексированный некоторым классом $\mathcal{F} \subset L_2(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ измеримых функций $f : \mathcal{X} \to R$. Определим псевдометрики ρ_μ и $e_{\mu,p}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, на классе $\mathcal{F}$ следующим образом:

$$\rho_\mu(f,g) = \left(\mu(f-g)^2 - \mu^2(f-g)\right)^{1/2},$$

$$e_{\mu,p}(f,g) = \left(\mu|f-g|^p\right)^{1/2}, \qquad 1 \leqslant p < \infty,$$

$$e_{\mu,\infty}(f,g) = \operatorname{ess\,sup} |f-g|,$$

где ess sup берется относительно меры μ. Будем предполагать, что класс $\mathcal{F}$ является предгауссовским. Это означает, что существует гауссовский процесс $B_\mu(f)$, $f \in \mathcal{F}$, с ковариацией

$$\mathbf{E}B_\mu(f)B_\mu(g) = \mu(fg) - \mu(f)\mu(g), \quad f,g \in \mathcal{F},$$

имеющий модификацию с ограниченными и равномерно непрерывными выборочными реализациями. Для того чтобы избежать обсуждения вопросов измеримости, предположим, что класс $\mathcal{F}$ счетно определен (относительно μ),т.е. существует некоторый счетный подкласс $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ такой, что $\|E_n\|_{\mathcal{F}} := \sup_{f\in\mathcal{F}} |E_n(f)| = \|E_n\|_{\mathcal{F}_0}$ почти всюду для всех $n \geqslant 1$. Если класс $\mathcal{F}$ является вполне ограниченным множеством относительно некоторой псевдометрики d, то покрывающее число $N_d(u)$ и *метрическая энтропия* $H_d(u)$ класса $\mathcal{F}$ определяются следующим образом:

$$N_d(u) = N(\mathcal{F}, d, u) := \\ = \min\left\{k : \exists f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{F} : \min_{1\leqslant i\leqslant k} d(f, f_i) < u \quad \forall f \in \mathcal{F}\right\},$$

$$H_d(u) = \log N_d(u), \quad u \geqslant 0.$$

Последним нужным нам понятием является понятие *класса Вапника–Червоненкис* (кратко ВЧ-класса). Пусть $\mathfrak{A}$ – некоторый класс подмножеств множества $\mathcal{X}$. Говорят, что $\mathfrak{A}$ разделяет конечное множество $\Gamma \subset \mathcal{X}$, если каждое подмножество $A \subset \Gamma$ можно представить в виде $A = \Gamma \cap C$ с некоторым

$C \in \mathfrak{A}$. Класс $\mathfrak{A}$ называется ВЧ-классом, если для некоторого $n \geqslant 1$ не существует подмножества Γ из n элементов, разделяемого классом $\mathfrak{A}$. Наименьшее такое n называется индексом класса $\mathfrak{A}$ и обозначается $v(\mathfrak{A})$. Напомним, что множество $\operatorname{sub}(f) := \{(x,t) \in \mathcal{X} \times R : 0 \leqslant t \leqslant f(x)\}$ называется подграфиком неотрицательной функции $f : X \to R$. Обозначим также

$$\operatorname{sub}(\mathcal{F}) = \{\operatorname{sub}(f),\ f \in \mathcal{F}\}.$$

Как обычно, для оценки скорости сходимости в ЦПТ нам нужно следующее условие на ε-полосу предельного гауссовского процесса: существует постоянная C такая, что для всех $\varepsilon > 0$, $r \geqslant 0$ выполняется

$$\mathbf{P}\{r \leqslant \|B_\mu\|_{\mathcal{F}} \leqslant r + \varepsilon\} \leqslant C\varepsilon(1+r)^{-3}. \tag{4.1}$$

Теорема 4.1 [171]. *Пусть класс $\mathcal{F}$ счетно определен и $0 \leqslant f \leqslant 1$ для всех $f \in \mathcal{F}$. Предположим, что выполняется (4.1) и что $\operatorname{sub}(\mathcal{F})$ является ВЧ-классом. Тогда*

$$\Delta_n(\mathcal{F}, r) := \big|\mathbf{P}\{\|E_n\|_{\mathcal{F}} < r\} - \mathbf{P}\{\|B_\mu\| < r\}\big| = \\ = O\big((1+r)^{-3} n^{-1/6} \ln^2 n\big). \tag{4.2}$$

Теорема 4.2 [171]. *Пусть $\mathcal{F}$ – счетно определенный класс и $0 \leqslant f \leqslant 1$ для всех $f \in \mathcal{F}$. Предположим, что выполняется (4.1). Пусть для некоторого $s \in (0, 1/2)$ существует постоянная C такая, что*

$$H(\mathcal{F}, e_{\mu,\infty}, u) \leqslant C u^{-s},\quad u > 0.$$

Тогда

$$\Delta_n(\mathcal{F}, r) = O\big((1+r)^{-3} n^{-(1-2s)/6} \ln^s n\big). \tag{4.3}$$

В качестве примера рассмотрим многомерный эмпирический процесс. Именно, пусть

$$\mathcal{X} = R^d,\ (-\infty, t] = \{s = (s_1, \dots, s_d) \in R^d : s_1 \leqslant t_1, \dots, s_d \leqslant t_d\},$$

$$\mathcal{F} = \{\chi_{(-\infty,t]},\ t \in R^d\},\ E_n(t) = \sqrt{n}\,(F_n(t) - F(t)),\ t \in R^d,$$

где $F(t)$ обозначает функцию распределения меры μ, а $F_n(t)$ обозначает эмпирическую функцию, соответствующую F. В работе [171] доказано, что условие (4.1) выполняется при некоторых не слишком сильных ограничениях на F. Кроме того, известно (см. [205]), что класс нижних левых ортантов в R^d

является ВЧ-классом и всегда счетно определен. Поэтому из теоремы 4.1 вытекает следующий результат.

Теорема 4.3. *Пусть существует возрастающая бесконечная последовательность* $t_k \in R^d$ *такая, что функция распределения* F *удовлетворяет* $0 < F(t_1) < F(t_2) < \ldots < F(t_k) < < \ldots < 1$. *Тогда*

$$\Big|\mathbf{P}\{\sup_{t\in R^d}|E_n(t)| < r\} - \mathbf{P}\sup_{t\in R^d}|B_F(t)| < r\}\Big| = = O\big((1+r)^{-3}n^{-1/6}\ln^2 n\big). \tag{4.4}$$

Теорему 4.3 можно сравнить с результатами, вытекающими из слабого (или сильного) принципа инвариантности (см., например, П. Массарт [165], [166] и список литературы там). Здесь мы заметим только, что порядок оценки в (4.4) не зависит от d. В то же время оценки, полученные при помощи *венгерской конструкции*, имеют порядок $n^{-1/2d}$. Следовательно, (4.4) точнее этих оценок при $d > 3$. Более подробное сравнение этих результатов, а также более полный список литературы см. в работах [165], [166], [171].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Авербух В. И., Смолянов О. Г., Фомин С. В.* Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах I. Дифференцируемые меры // Тр. Московского мат. об-ва.—1971.—*24*.— С. 133—174.
2. *Алешкявичене А.* О больших уклонениях для линейных комбинаций порядковых статистик // Liet. matem. rink.—1984.—*29*.— С. 212—222.
3. *Алиев Ф. А.* Оценка снизу скорости сходимости в центральной предельной теореме в гильбертовом пространстве // Теория вероятн. и ее примен.—1987.— *31*.— С. 825—828.
4. — О скорости сходимости в центральной предельной теореме в гильбертовом пространстве // Теория вероятн. и ее примен.—1989.— *34*.— С. 407—409.
5. *Асриев А. В., Ротарь В. И.* О скорости сходимости в бесконечномерной центральной предельной теореме для вероятностей попадания в параллелепипеды // Теория вероятн. и ее примен.—1985.— *30*.— С. 652—661.
6. *Барсов С. С.* О точности нормального приближения распределения суммы случайного числа случайных векторов // Теория вероятн. и ее примен.—1985.— *30*.— С. 351—354.
7. — Скорость сходимости к нормальному распределению и убывание "хвоста" распределения слагаемых // Теория вероятн. и ее примен.—1987.— *32*.— С. 356—358.

8. *Бенткус В.* Оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме в пространстве $C(S)$ // Докл. АН СССР.— 1982.— *266*.— С. 526—529.
9. — Оценки снизу точности нормальной аппроксимации в банаховых пространствах // Liet. matem. rink.—1984.— *24*.— С. 12—18.
10. — Асимптотика остаточного члена в центральной предельной теореме в гильбертовом пространстве // Liet. matem. rink. —1984.— *24*.— С. 5—11.
11. — О дифференцируемых функциях в пространствах c_0 и R^k // Liet. matem. rink.—1984.—*24*, № 2.—С. 26—36.
12. — Асимптотические разложения в центральной предельной теореме в гильбертовом пространстве // Liet. matem. rink.— 1984.— *24*, № 3.—С. 29—50.
13. — Асимптотические разложения для распределения сумм независимых элементов пространства Гильберта // Liet. matem. rink.—1984.— *24*, № 4.—С. 29—48.
14. — Асимптотический анализ сумм независимых случайных элементов пространства Банаха.— Докт. дисс., Вильнюс, 1984.
15. — Асимптотика моментов в центральной предельной теореме в банаховых пространствах // Liet. matem. rink.—1984.— *24*, № 2.—С. 49—64.
16. — Асимптотические разложения в локальной предельной теореме в гильбертовом пространстве // Liet. matem. rink.— 1985.— *25*, № 1.—С. 9—22.
17. — О функциях концентрации сумм независимых случайных элементов пространства Банаха // Liet. matem. rink.—1985.— *25*, № 2.—С. 32—39.
18. — Оценки снизу скорости сходимости в центральной предельной теореме в банаховых пространствах // Liet. matem. rink.—1985.— *25*, № 4.—С. 10—21.
19. — О зависимости оценки Берри—Эссеена от размерности // Liet. matem. rink.—1986.— *25*, № 2.—С. 205—211.
20. — О больших уклонениях в банаховых пространствах // Теория вероятн. примен.—1986.— *31*, № 4.—С. 710—716.
21. — Асимптотические разложения для моментов в центральной предельной теореме в пространствах Банаха // Liet. matem. rink.—1986.— *26*, № 1.—С. 10—26.
22. —, *Любинскас К.* О скорости сходимости в принципе инвариантности в банаховых пространствах // Liet. matem. rink.— 1987.— *27*, № 3.—С. 423—434.
23. —, *Рачкаускас А.* О скорости сходимости в центральной предельной теореме в бесконечномерных пространствах // Liet. matem. rink.—1981.— *21*, № 4.—С. 9—18.

24. —, — Оценки скорости сходимости сумм независимых случайных величин в банаховом пространстве. I и II // Liet. matem. rink.—1982.— *22*, № 3.— С. 12—28; 1982.—*22*, № 4.— С. 8—20.

25. —, — Оценки расстояния между суммами независимых случайных элементов в банаховых пространствах // Теория вероятн. и ее примен.—1984.— *29*, № 1.—С. 49—64.

26. —, *Залесский Б. А.* Асимптотические разложения с неравномерными остатками в центральной предельной теореме в гильбертовом пространстве // Liet. matem. rink.— 1985.—*25*, № 3.—С. 3—16.

27. —, *Зитикис Р.* Замечание о критерии Крамера—Мизеса—Смирнова // Liet. matem. rink.— 1988.—*28*, № 1.— С. 14—22.

28. *Бикялис А.* Об остаточных членах в асимптотических разложениях для характеристических функций // Liet. matem. rink. —1967.—*7*, № 4.—С. 571—582.

29. *Блознялис М.* Одна нижняя оценка скорости сходимости в ЦПТ в гильбертовом пространстве // Liet. matem. rink.— 1989.—*29*, № 4.—С. 674—681.

30. *Богачев В. И.* Подпространства дифференцируемости гладких мер на бесконечномерных пространствах // Докл. АН СССР .—1988.—*299*, № 1.—С. 18—22.

31. *Борисов И. С.* К вопросу о точности приближения в центральной предельной теореме для эмпирических мер // Сиб. мат. ж. —1983.—*24*, № 6.—С. 14—25.

32. — Замечание о скорости сходимости в центральной предельной теореме в банаховых пространствах // Сиб. мат. ж.— 1985.—*26*, № 2.—С. 29—35.

33. — Аппроксимация распределений гладких функционалов от сумм независимых случайных элементов в банаховых пространствах. В кн.: Асимптотический анализ распределений стохастических процессов.— Новосибирск; 1989.—С. 3—45.

34. *Боровков А. А., Саханенко А. И.* Об оценках скорости сходимости в принципе инвариантности для банаховых пространств // Теория вероятн. и ее примен.—1980.— *25*, № 4.—С. 734—744.

35. *Боровков К. А.* — О скорости сходимости в принципе инвариантности для гильбертова пространства // Теория вероятн. и ее примен.—1984.— *29*, № 3.—С. 532—535.

36. *Боровских Ю. В., Рачкаускас А.* Асимптотика распределений в банаховых пространствах // Liet. matem. rink.—1979.—*19*, № 4.—С. 39—54.

37. *Бярнотас В.* Равномерная и неравномерная оценка близости распределений двух сумм независимых случайных величин

со значениями в некоторых пространствах Банаха // Liet. matem. rink.—1979.—*19*, № 4.—С. 55—68.
38. *Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах.—Москва: Наука, 1985.
39. *Виноградов И. М.* Новая оценка $G(n)$ в проблеме Варинга // Докл. АН СССР.— 1934.—*5*.— С. 49—253.
40. *Виноградова Т. Р.* О точности нормальной аппроксимации на множествах, задаваемых гладкой функцией. I, II // Теория вероятн. и ее примен.— 1985.—*30*, № 2.— С. 219—229; 1985. —*30*, № 3.—С. 554—557.
41. *Давыдов Ю. А., Лифшиц М. А.* Метод расслоений в некоторых вероятносных задачах // Итоги науки и техники.—Теория вероятн. Мат. стат. Теорет. кибернетика / ВИНИТИ 1984. —*22*.— С. 61—157.
42. *Далецкий Ю. Л., Фомин С.В.* Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах.—М: Наука, 1983.—383с.
43. *Ибрагимов И. А., Линник Ю.В.* Независимые и стационарно связанные величины.—Москва: Наука, 1985.
44. *Залесский Б. А.* Оценка точности нормальной аппроксимации в гильбертовом пространстве // Теория вероятн. и ее примен.— 1982.—*27*, № 2.—С. 278—285.
45. — О скорости сходимости в центральной предельной теореме на некотором классе множеств гильбертова пространства // Теория вероятн. и ее примен.— 1985.—*30*, № 4.—С. 662—670.
46. — О точности нормального приближения в банаховых пространствах // Теория вероятн. и ее примен.— 1988.—*33*, № 2.—С. 257—265.
47. — Вероятности больших уклонений в гильбертовом пространстве // Теория вероятн. и ее примен.— 1989.—*34*, № 3.—С. 650—655.
48. —, *Сазонов В. В.* О близости моментов при нормальной аппроксимации в гильбертовом пространстве // Теория вероятн. и ее примен.— 1983.—*28*, № 2.—С. 251—263.
49. —, —, *Ульянов В. В.* Асимптотически правильная оценка точности нормального приближения в гильбертовом пространстве // Теория вероятн. и ее примен.— 1988.—*33*, № 4.— С. 753—754.
50. *Зигель Г.* Верхние оценки для функции концентрации в гильбертовом пространстве // Теория вероятн. и ее примен. — 1981.—*26*, № 2.—С. 335—349.
51. *Зитикис Р.* Асимптотические разложения в локальной предельной теореме для статистик ω_n^2 // Liet. matem. rink.— 1988. —*28*, № 3.—С. 461—474.

52. — Асимптотические разложения для производных функции распределения статистики Андерсона—Дарлинга // Liet. matem. rink.— 1989.—*29*, № 1.—С. 35—53.
53. — О гладкости функции распределения FL-статистики. I, II // Liet. matem. rink.—1990.—*30*, № 2.— С. 233—244; Liet. matem. rink 1990.—*30*, № 3.—С. 500—512.
54. — Равномерная предельная теорема для плотностей L-статистик // Liet. matem. rink.— 1990.—*30*, № 4.—С. 728—740.
55. *Золотарев В. М.* Метрические расстояния в пространствах случайных величин и их распределений // Мат. сб.— 1976. —*101*, № 3.—С. 416—450.
56. — Аппроксимация распределений независимых случайных величин со значениями из бесконечномерных пространств // Теория вероятн. и ее примен.— 1976.—*21*, № 4.—С. 741—758.
57. — Идеальные метрики в проблеме аппроксимации распределений сумм независимых случайных величин // Теория вероятн. и ее примен.— 1977.—*22*, № 3.—С. 449—465.
58. *Канделаки Н. П.* О предельной теореме в гильбертовом пространстве // Тр. ВЦ АН ГССР.— 1965.—*11*.— С. 46—55.
59. —, *Вахания Н. Н.* Об оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме в пространстве Гильберта // Тр. ВЦ АН ГССР.— 1969.—*9*.— С. 150—160.
60. *Картан А.* Дифференциальные формы.—М.: Мир, 1971.— 392с,
61. *Королюк В. С., Боровских Ю. В.* Асимптотический анализ распределений статистик.—Киев: Наукова думка, 1984.
62. *Кукуш А. Г.* Слабая сходимость мер и сходимость семиинвариантов // Теория вероятн. и мат. стат.— 1981.—*25*.— С. 55—62.
63. *Лапинскас Р.* Об аппроксимации частичных сумм в некоторых пространствах Банаха // Liet. matem. rink.— 1978.—*18*, № 4.—С. 65—71.
64. *Лифшиц М. А.* Плотность максимума гауссовского процесса // Теория вероятн. и ее примен.— 1984.—*29*, № 4.—С. 814—815.
65. *Любинскас К.* О близости моментов в центральной предельной теореме в банаховых пространствах // Liet. matem. rink. — 1987.—*27*, № 2.—С. 285—302.
66. *Мартынов Г. В.* Критерии омега-квадрат.—М.: Наука, 1978. —80с.
67. *Нагаев С. В.* О скорости сходимости к нормальному закону в гильбертовом пространстве // Теория вероятн. и ее примен. — 1985.—*30*, № 1.—С. 19—32.
68. — Оценка типа Берри—Эссеена для сумм случайных величин со значениями в гильбертовом пространстве // Сиб.

мат. ж.— 1989.—*30*, № 3.—С. 84—96.

69. — О новом подходе к изучению распределения нормы случайного элемента в гильбертовом пространстве // Пятая Вильнюсская конф. по теории вероятн. мат. стат., тезисы докладов.— Вильнюс; 1989.—*4*.— С. 77—78.

70. —, *Чеботарев В. И.* Оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме в гильбертовом пространстве l_2 // Математический анализ и смежные вопросы математики.— Новосибирск; 1978.—С. 153—182.

71. —, — Уточнение оценки погрешности нормальной аппроксимации в гильбертовом пространстве // Сиб. мат. ж.— 1986. —*27*, № 3.—С. 154—173.

72. —, — Об асимптотическом разложении типа Бергстрема в гильбертовом пространстве. — В кн.: Асимптотический анализ распределений случайных процессов.— Новосибирск: Наука1989.—С. 66—77.

73. —, — Разложения Эджворта в гильбертовом пространстве. — Препринт, 1989.

74. *Никитин Я. Ю.* О граничной задаче для эмпирического процесса // Докл. АН СССР.— 1972.—*205*, № 5.—С. 1043—1045.

75. *Орлов А. И.* Скорость сходимости распределения статистики Мизеса—Смирнова // Теория вероятн. и ее примен.— 1974. —*19*, № 4.—С. 766—786.

76. *Осипов Л. В.* О вероятностях больших уклонений для независимых случайных векторов // Теория вероятн. и ее примен. — 1978.—*23*, № 3.—С. 510—526.

77. — Вероятности больших уклонений для сумм независимых случайных векторов // Докторская дисс.— Ленинград, 1978.

78. —, *Ротарь В. И.* О бесконечномерной центральной предельной теореме // Теория вероятн. и ее примен.— 1984.—*29*, № 2.—С. 366—373.

79. *Паулаускас В. И.* Ф. икции концентрации конечномерных и бесконечномерных случайных векторов // Liet. matem. rink. — 1973.—*13*, № 1.—С. 137—157.

80. — Оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме в $C(S)$ // Liet. matem. rink.— 1976.—*16*, № 4.— С. 167—201.

81. — О скорости сходимости в центральной предельной теореме в некоторых банаховых пространствах // Теория вероятн. и ее примен.— 1976.—*21*, № 4.—С. 775—791.

82. — Оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме в пространствах l_p // Liet. matem. rink.— 1981.—*21*, № 1.—С. 109—119.

8822

83. —, *Юкнявичене Д.* О скорости сходимости в центральной предельной теореме в пространстве $D[0,1]$ // Liet. matem. rink. — 1988.—*28*, № 3.—С. 507—519.

84. —, *Рачкаускас А.* Точность аппроксимации в центральной предельной теореме в банаховых пространствах.—Вильнюс: Мокслас, 1987.—188с.

85. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин.—Москва: Наука, 1972.—416с.

86. *Прохоров Ю. В., Сазонов В. В.* Об оценках скорости сходимости в центральной предельной теореме в бесконечномерном пространстве. — В кн.: Советско-японский симп. теории вероятн.— Хабаровск; Тез. докл.— Новосибирск: Наука, 1969.—*1*.— С. 223—230.

87. *Рачкаускас А.* О сближении в равномерной метрике сумм независимых случайных величин со значениями в гильбертовом пространстве // Liet. matem. rink.— 1981.—*21*, № 3.—С. 83—90.

88. — Вероятности больших уклонений в зонах Линника в гильбертовом пространстве // Liet. matem. rink.— 1988.—*28*, № 3.—С. 520—533.

89. *Сакалаускас В.* Об аппроксимации устойчивым законом в неравномерных метриках типа Леви—Прохорова и типа χ // Liet. matem. rink.— 1983.—*23*, № 4.—С. 40—49.

90. *Сазонов В. В.* Улучшение одной оценки скорости сходимости // Теория вероятн. и ее примен.— 1969.—*14*, № 4.—С. 667—678.

91. —, *Ульянов В. В., Залесский Б. А.* Нормальная аппроксимация в гильбертовом пространстве I. // Теория вероятн. и ее примен.— 1988.—*33*, № 2.—С. 225—245. II, 1988.—*33*, № 4.—С. 753—754.

92. —, —, — Точная оценка скорости сходимости в гильбертовом пространстве // Мат. сб.— 1989.—*180*, № 12.—С. 1587—1613.

93. *Сенатов В. В.* Некоторые нижние оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР.— 1981.—*256*, № 6.—С. 1318—1321.

94. — Об оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме по системе шаров в R^k // Теория вероятн. и ее примен.— 1983.—*28*, № 2.—С. 440—445.

95. — О зависимости оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме от ковариационного оператора слагаемых // Теория вероятн. и ее примен.— 1985.—*30*, № 2.—С. 354—357.

96. — Четыре примера нижних оценок в многомерной центральной предельной теореме // Теория вероятн. и ее примен.—

1985.—*30*, № 4.—С. 750—758.

97. — О зависимости оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме по шарам с центром в нуле от ковариационного оператора слагаемых // Теория вероятн. и ее примен.— 1986.—*31*, № 1.—С. 128—132.

98. — Об оценках скорости сходимости в центральной предельной теореме в гильбертовом пространстве // Пятая вильнюская конф. теории вероятн. матем. стат., Тезисы докладов.— 1989.—*4*.— 222с.

99. *Ульянов В. В.* К оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме в сепарабельном гильбертовом пространстве // Мат. заметки.— 1981.—*29*, № 1.—С. 145—153.

100. — Асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин в H // Теория вероятн. и ее примен.— 1986.—*31*, № 1.—С. 31—46.

101. *Чеботарев В. И.* Оценки скорости сходимости в локальной предельной теореме для квадрата нормы в l_2 // Предельные теоремы в теории вероятностей и смежные вопросы.— Новосибирск; 1982.—С. 122—126.

102. *Юкнявичене Д.* Центральная предельная теорема в пространстве $D[0,1]$ // Liet. matem. rink.— 1985.—*25*, № 3.— С. 198—205.

103. *Юринский В. В.* О погрешности гауссовской аппроксимации сверток // Теория вероятн. и ее примен.— 1977.—*22*, № 2. —С. 242—253.

104. — Оценка погрешности нормального приближения вероятности попадания в шар // Докл. АН СССР.— 1981.—*258*, № 3.—С. 557—558.

105. — О точности нормального приближения вероятностей попадания в шар // Теория вероятн. и ее примен.— 1982.—*27*, № 2.—С. 270—278.

106. — О погрешности нормального приближения // Сиб. мат. ж.— 1983.—*24*, № 6.—С. 188—199.

107. — Об асимптотике больших уклонений в гильбертовом пространстве // Теория вероятн. и ее примен.—1991.—*36*, № 1. —С. 78—92.

108. *Acosta de, A., Giné E.* Convergence of moments and related functionals in the general central limit theorem in Banach spaces // Z. Wahrsch. und verw. Geb.—1979.—*48*.— С. 213—231.

109. *Araujo A.*, — The Central Limit Theorem for Real and Banach Valued Random Variables.—New York: Wiley, 1980.—233с.

110. *Badrikian A., Chevet S.* Measures Cylindriques. Espaces de Wiener et Functions Aléatoires Gaussiennes // Lect. Notes Math.— *379*.— Heidelberg, 1974.

111. *Bass R., Pyke R.* The space $D(A)$ and weak convergence for set-indexed processes // Ann. Probab.—1985.—*13*.— С. 860—884.

112. —, — A central limit theorem for $D(A)$-valued processes // Stoch. Proc. Appl.—1987.—*24*.— C. 109—131.
113. *Bentkus V.* Lower estimates of the convergence rate in the CLT in Banach spaces // Theory Math. Stat.—1985.— Vilnius. VNU Science Press,1987.— The Netherlands: Utrecht.— C. 171—187.
114. — Smooth approximations of the norm and differentiable functions with bounded support in Banach space l^k_∞ // Liet. matem. rink.—1990.—*30*.— C. 489—499.
115. —, *Račkauskas A.* On probabilities of large deviations in Banach spaces // Probab. Th. Rel. Fields.—1990.—*86*.— C. 131—154.
116. —, *Zitikis R.* Probabilities of large deviations for L-statistics // Liet. matem. rink.—1990.—*30*.— C. 479—488.
117. *Bergström H.* On the central limit theorem // Skand. Aktuarietidskrift.—1944.—*27*.— C. 139—153.
118. — On asymptotic expansions of probability functions // Skand. Aktuarietidskrift.—1951.—*1*, № 2.—C. 1—34.
119. *Berry A. C.* The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates // Trans. Amer. Math. Soc.—1941.—*49*.— C. 122—136.
120. *Bézandry P. H., Fernique X.* Sur la proprieté de la limite centrale dans $D[0,1]$.—1990.— (Preprint).
121. *Bhattacharya R. N.* Refinements of the multidimensional central limit theorem and its applications // Ann. Probab.—1977.—*5*.— C. 1—27.
122. —, *Denker M.* Asymptotic Statistics.—Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1990.
123. —, *Ranga Rao R.* Normal Approximation and Asymptotic Expansions.—New York: Wiley, 1976.—274c. (Пер. на рус. яз.: Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения.—М.: Наука, 1982.—286с.).
124. *Bickel P. J., Götze F., van Zwet W. R.* The Edgeworth expansion for U-statistics of degree two // Ann. Stat.—1986.—*14*.— C. 1463—1484.
125. *Billingsley P.* Convergence of Probability Measures.—New York: Wiley, 1968 (Пер. на рус. яз.: Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер.—М.: Наука, 1977.—351с.).
126. *Butzer P. L., Hahn L., Roeckerath M. Th.* General theorems on "little-o" rates of convergence of two weighted sums of independent Hilbert space valued random variables with applications // J. Multivar. Anal.—1979.—*9*.— C. 487—510.
127. *Chibisov D. M.* Some theorems on the limiting behaviour of empirical distribution functions, Selected Transl. // Math. Stat. Probab.—1964.—*6*.— C. 147—156.
128. *Csörgő M., Csörgő S., Horváth L., Mason D. M.* Weighted empirical and quantile processes // Ann. Probab.—1986.—*14*.— C. 31—85.

129. —, *Horváth L.* On the distributions of L_p norms of weighted uniform empirical and quantile processes // Ann. Probab.—1988.—*16.*— C. 142—161.
130. *Csörgő S.* On an asymptotic expansion for the von Mises ω^2-statistics // Acta Sci. Math.—1976.—*38.*— C. 45—67.
131. —, *Stachó L.* A step toward asymptotic expansions for the Cramér-von Mises statistic.— In: Analytic function methods in probability theory.— 1980.—C. 45—67.
132. *Daniels H. E.* The statistical theory of the strength of bundles of threads // Proc, Roy. Soc. Ser A.—1945.—*183.*— C. 404—435.
133. *Dehling H.* Limit theorems for sums of weakly dependent Banach space valued random variables // Z. Wahrsch. und verw. Geb.—1983.—*63.*— C. 383—432.
134. *Dudley R. M.* Central limit theorem for empirical measures // Ann. Probab.—1978.—*6.*— C. 899—923.
135. — Universal Donsker classes and metric entropy // Ann. Probab.—1987.—*15.*— C. 1306—1326.
136. *Esseen C. G.* On the Liapounoff limit of error in the theory of probability // Arkiv. Mat., Astroch. Fysik.—1942.—*28A.*— C. 1—19.
137. — Fourier analysis of distribution functions // Acta Math.—1945.—*77.*— C. 1—125.
138. — On the concentration function of a sum of independent random variables // Z. Wahrsch. verw. Geb.—1968.—*9.*— C. 290—308.
139. *Feller W.* An introduction to probability theory and its applications.—*2.*— 2nd ed.— New York: Wiley, 1971 (Пер. на рус. яз.: Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, Т.2. —М.: Наука, 1967.—752с.).
140. *Fernique X.* Regularité de processus Gaussien // Invent. Math.—1971.—*12.*— C. 304—320.
141. *Fisz M.* A central limit theorem for stochastic processes with independent increments // Stud. Math.—1959.—*18.*— C. 223—227.
142. *Gaenssler P., Stute W.* Empirical processes: a survey of results for independent identically distributed random variables // Ann. Probab.—1979.—*7.*— C. 193—242.
143. *Giné E.* Bounds for the speed of convergence in the central limit theorem in $C(S)$ // Z. Wahrsch. und verw. Geb.—1976.—*36.*— C. 317—331.
144. —, *Zinn J.* Some limit theorems for empirical processes // Ann. Probab.—1984.—*12.*— C. 929—989.
145. *Götze F.* Asymptotic expansions for bivariate von Mises functionals // Z. Wahrsch. verw. Geb.—1979.—*50.*— C. 333—355.
146. — On Edgeworth expansions in Banach spaces // Ann. Probab.—1981.—*9.*— C. 852—859.
147. — On the rate of convergence in the CLT in Banach spaces.— 1983. — Preprints in Stat., Uni. Cologne 68.

148. — Expansions for von Mises functionals // Z. Wahrsch. und verw. Geb.—1984. *65*.— C. 599—625.
149. — Asymptotic expansion in functional limit theorem // J. Multivar. Anal.—1985.—*16*.— C. 1—20.
150. — On the rate of convergence in the central limit theorem in Banach spaces // Ann. Probab.—1986.—*14*.— C. 922—942.
151. — Approximations for multivariate U-statistics // J. Multivar. Anal.—1987.—*22*.— C. 212—229.
152. — Edgeworth expansions in functional limit theorems // Ann. Probab.—1989.—*17*.— C. 1602—1634.
153. —, *Hipp C.* Asymptotic expansions in the CLT under moment conditions // Z. Wahrsch. und verw. Geb.—1982.—*42*.— C. 67—87.
154. *Hahn M. G.* Central limit theorem in $D[0,1]$ // Z. Wahrsch. verw. Geb.—1978.—*44*.— C. 89—101.
155. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* A new solution of Waring's problem // Quarterly J. Math.—1920.—*48*.— C. 272—293.
156. *Helmers R.* Edgeworth expansions for linear combination of order statistics // Amsterdam Math. Center Tracts.—*105*.— 1982.
157. *Kiefer J.* Skorohod embedding of multivariate r.v.'s and sample d.f. // Z. Wahrsch. und verw. Geb.—1972.—*24*.— C. 1—35.
158. *Kuelbs J., Kurtz T.* Berry—Esseen estimates in Hilbert space and an application to the law of iterated logarithm // Ann. Probab.—1974. —*2*.— C. 387—407.
159. *Liapounoff A. M.* Sur une proposition de la théorie des probabilités // Bull. Acad. Sci. St. Pétérbourg.—1900.—*5*, № 13.— C. 359—386.
160. — Nouvel forme du théorème sur la limite de theorie des probabilites // Mem. Acad. Sci. St. Peterbourg.—1901.—*8*, № 12.— C. 1—24.
161. *Lindeberg J. W.* Über das Exponentialgesetz in der Wahrscheinlichkeitsrechnung // Ann. Acad. Sci. Fennic.—1920.—*16*.— C. 1—23.
162. — Eine neue Herleitung des Exponentialgesetzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung // Math. Z.—1922.—*15*.— C. 211—225.
163. *Marcus M. B., Shepp L. A.* Sample behaviour of Gaussian processes // Proc. Sixth Berkely Symp. Math. Stat. Probab.—1972.—*3*.— C. 423—442.
164. —, *Pisier G.* Random Fourier series with applications to harmonic analysis // Ann. Math. Studies.—*101*.— 1981.
165. *Massart P.* Rates of convergence in the central limit theorem for empirical processes // Ann. Inst. Henri Poincaré .—1986.—*22*.— C. 381—423.
166. — Strong approximation for multivariate empirical and related processes, via KMT construction // Ann. Probab.—1989.—*17*.— C. 266—291.
167. *Nagaev S. V.* An estimate of the remainder term in the multidimensional central limit theorem // Proc. third Japan—USSR symp.

Probab. theory. Springer Ser. Lect. Notes Math.—1976.—*550.*—С. 419—438.

168. — On accuracy of normal approximation for distribution of sum of independent Hilbert space valued random variables.— In: Springer Ser. Lect. Notes Math.— 1983.—*1021.*— С. 461—473.

169. —, *Chebotarev V. I.* Asymptotic expansions for the distribution of the sum of i.i.d. Hilbert space valued r.v. // Probab. Theory. Math. Stat.—1985.— Vilnius; 1987.—The Netherlands: VNU Science Press, Utrecht, *2.*— С. 357—363.

170. *Norvaiša R.* The central limit theorem for empirical and quantile processes in some Banach spaces.—1990.— (Preprint).

171. —, *Paulauskas V.* Rate of convergence in the central limit theorem for empirical processes // J. Theoretical Probab.—1991.—*4*, № 3.—С. 511—534.

172. —, *Zitikis R.* Asymptotic behaviour of linear combinations of functions of order statistics // J. of Stat. plan. infer.—1991.—С. 305—317.

173. *O'Reilly N.* On the convergence of empirical processes in supnorm metrics // Ann. Probab.—1974.—*2.*— С. 642—651.

174. *Osipov L. V.* On large deviations of sums of independent random vectors // II Vilnius conf. Probab. Th. Math. Stat. Abs. com.—1977.—*2.*— С. 95—96.

175. *Paulauskas V.* On the central limit theorem in Banach space c_0 // Probab. Math. Stat.—1984.—*3.*— С. 127—141.

176. — On the rate of convergence for the weighted empirical process // Probability in Banach spaces.—*7.*— 1990.— Birkhäuser.

177. —, *Račkauskas A.* Nonuniform estimates in the central limit theorem in Banach spaces // Liet. matem. rink.—1991.—*31*, № 3.—С. 483—496.

178. —, *Stieve Ch.* On the central limit theorem in $D[0,1]$ and $D([0,1],H)$ // Liet. matem. rink.—1990.—*30*, № 3.—С. 567—579.

179. *Phoenix S. L., Taylor H. M.* The asymptotic strength distribution of general fiber bundle // Adv. Appl. Probab.—1973.—*5.*— С. 200—216.

180. *Puri M. L., Seoh M.* On the rate of convergence in normal approximation and large deviation probabilities for a class of statistics // Theory Probab. Appl.—1987.—*33.*— С. 736—750.

181. *Rachev S. T., Ruschendorf L.* Rate of convergence for sums and maxima and doubly ideal metrics // Theory Probab. Appl.—1990.—(submitted).

182. —, *Yukich J. E.* Rates for the CLT via new ideal metrics // Ann. Probab.—1989.—*17.*— С. 775—788.

183. *Račkauskas A.* On the convergence rate in martingale CLT in Hilbert space // Liet. matem. rink.—1991.—*31*, № 3.—С. 497—512.

184. *Rhee W. S., Talagrand M.* Bad rates of convergence for the CLT in Hilbert space // Ann. Probab.—1984.—*12.*— С. 843—850.

185. —, — Uniform convexity and the distribution of the norm for a Gaussian measure // Probab. Th. Rel. Fields.—1986.—*71.*— C. 59—68.

186. *Rosenkrantz W. A.* A rate of convergence for the von Mises statistic // Trans. Amer. Math. Soc.—1969.—*139.*— C. 329—337.

187. *Sakhanenko A. I.* Simple method of obtaining estimates in the invariance principle // Probab. Theory Math. Stat.—1986.— Kyoto; Springer Ser. Lect. Notes Math. 1988.—*1299.*— C. 430—443.

188. *Sazonov V. V.* On ω^2-criterion // Sankhya, Ser. A.— 1968.—*30.*— C. 205—209.

189. — Normal Approximation — Some Recent Advances.— Springer Ser. Lect. Notes Math.— Heidelberg, 1981.

190. —, *Uljanov V. V.* Speed of convergence in the CLT in Hilbert space under weakened moment conditions.—In: Probab. Theory and Math. Stat.—1989.— Vilnius; Proc. 5 Vilnius conf.—1990.—*2,*— Vilnius: Mokslas C. 394—410.

191. —, — An improved estimate of the accuracy of the Gaussian approximation in Hilbert space.—In: New Trends in Probab. and Stat.—1991.—Vilnius: VSP Mokslas, C. 123—136.

192. —, —, *Zalesskii B. A.* On normal approximation in Hilbert space. —In: Probab. Theor. Math. Stat.—1985.— Vilnius; 1987.— The Netherlands: Proc. 4 Vilnius conf. VNU Science Press, Utrecht, C. 561—580.

193. —, —, — Asymptotically precise estimate of the accuracy of Gaussian approximation in Hilbert space // J. Multivar. Anal.— 1989.—*28.*— C. 304—330.

194. —, —, — Asymptotic expansions refining the central limit theorem in Hilbert space.—In: Probab. Theory and Appl. Edit. Yu. A. Prohorov and V. V. Sazonov.—1987.— The Netherlands: VNU Science Press, Utrecht.

195. —, *Zalesskii B. A.* On the CLT in Hilbert space // J. Multivar. Anal. —1985.— C. 495—526.

196. *Schmidt W.* Bounds for exponential sums // Acta Arith.— 1984.— *44.*— C. 208—297.

197. *Senatov V. V.* On the estimate of the rate of convergence in the central limit theorem in Hilbert space // Springer Ser. Lect. Notes Math.— 1989.—*1412.*— C. 309—327.

198. *Serfling R. J.* Approximation theorems of mathematical statistics.— New York: Wiley, 1980.

199. *Stigler S. M.* Linear functions of order statistics with smooth weight functions // Ann. Stat.— 1974.—*2.*— C. 676—693.

200. *Sweeting T. J.* Speed of convergence for the multidimensional central limit theorem // Ann. Probab.— 1977.—*5.*— C. 28—41.

201. — Speeds of convergence and asymptotic expansions in the CLT. A treatment by operators // Ann. Probab.— 1980.—*8.*— C. 279—281.

202. *Thomasian A.* The Structure of Probability Theory with Applications.—New York: McGraw—Hill, 1969.
203. *Trotter H. F.* Elementary proof of the central limit theorem // Arch. math.— 1959.—*10.*— C. 229—234.
204. *Vandemaele M., Veraverbeke N.* Cramér type large deviations for linear combinations of order statistics // Ann. Probab.— 1982.—*10.*— C. 433—434.
205. *Wenocur R. S., Dudley R. M.* Some special Vapnik-Chervonenkis classes // Discrete Math.— 1981.—*33.*— C. 313—318.
206. *Weyl H.* Über die Gleichverteilung der Zahlen mod. Eins // Math. Ann.—1915/16.—*77.*— C. 313—352.
207. *Zaitsev A. Yu.* On the Gaussian approximation of convolutions under multidimensional analogues of S. N. Bernstein's inequality conditions // Probab. Th. Rel. Fields.— 1987.—*74.*— C. 535—566.
208. *Zitikis R.* On large deviations for *L*-estimates // New Trends in Probability and Statistics.— Vol. 1. (Eds. V. V. Sazonov, T. Shervashidze).— 1991.—Vilnius: VSP Mokslas, C. 137—164.
209. — Cramér type large deviations for a class of statistics // Liet. matem. rink.— 1991.—*31*, № 2.—C. 302—310.

8822

АППРОКСИМАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ СЛАБО ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Й. Сунклодас

В настоящей работе дается обзор известных результатов, а также приводятся некоторые новые результаты, полученные автором, об аппроксимации распределений сумм слабо зависимых случайных величин (с.в.) и случайных полей, определенных на целочисленной решетке Z^d, нормальным распределением. Основное внимание уделяется трем методам доказательства: Ч. Стейна, А. Н. Тихомирова и Л. Хейнриха.

§ 1. Условия слабой зависимости и неравенства для ковариаций

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность вещественных с.в., $\mathcal{F}_a^b$ – σ-алгебра, порожденная с.в. X_i, $a \leqslant i \leqslant b$, R – вещественная прямая, $N = \{1, 2, \ldots\}$.

Далее будем предполагать, что последовательность с.в. $X_1, X_2, \ldots$ удовлетворяет одному из следующих условий слабой зависимости:

1) m-зависимость: σ-алгебры $\mathcal{F}_1^r$ и $\mathcal{F}_{r'}^\infty$ независимы при всех целых r и r' таких, что $1 \leqslant r < r' < \infty$, $r' - r > m$;

2) ψ-перемешивание:

$$\psi(\tau) = \sup_{t \in N} \sup_{\substack{A \in \mathcal{F}_1^t,\ B \in \mathcal{F}_{t+\tau}^\infty \\ \mathbf{P}(A)>0,\ \mathbf{P}(B)>0}} |\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|/\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) \downarrow 0, \ \tau \to \infty;$$

3) равномерно сильное перемешивание (р.с.п.):

$$\varphi(\tau) = \sup_{t \in N} \sup_{\substack{A \in \mathcal{F}_1^t,\ B \in \mathcal{F}_{t+\tau}^\infty \\ \mathbf{P}(A)>0}} |\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|/\mathbf{P}(A) \downarrow 0, \ \tau \to \infty;$$

4) **абсолютная регулярность** (а.р.):

$$\beta(\tau) = \sup_{t\in N} \mathbf{E}\{ \sup_{B\in\mathcal{F}_{t+\tau}^{\infty}} |\mathbf{P}(B/\mathcal{F}_1^t) - \mathbf{P}(B)|\} \downarrow 0, \ \tau \to \infty;$$

5) **сильное перемешивание** (с.п.):

$$\alpha(\tau) = \sup_{t\in N} \sup_{A\in\mathcal{F}_1^t,\ B\in\mathcal{F}_{t+\tau}^{\infty}} |\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \downarrow 0, \ \tau \to \infty.$$

Условие с.п. введено Розенблаттом [235], а.р. – А. Н. Колмогоровым [17], р.с.п. – И. А. Ибрагимовым [48], ψ-перемешивание – Блюмом, Хэнсоном и Купменсом [134], m-зависимость – Хеффдингом и Роббинсом [195] (и восходит к работе С. Н. Бернштейна [133]).

Все эти условия означают требование слабой зависимости конца и начала последовательности с.в.

Сведения об этих и некоторых других коэффициентах слабой зависимости (соответствующих коэффициентах перемешивания), а также соответствующую библиографию можно найти, например, в работах [51], [52], [246], [225], [146], [141], [150], [13].

Определенные выше коэффициенты перемешивания связаны между собой следующими неравенствами [51], [192]:

$$\begin{gathered} 2\alpha(\tau) \leqslant \varphi^{1/2}(\tau), \\ \alpha(\tau) \leqslant \beta(\tau) \leqslant \varphi(\tau) \leqslant \psi(\tau), \\ \alpha(\tau) \leqslant 1/4, \quad \varphi(\tau) \leqslant 1. \end{gathered}$$

Важные уточнения этих неравенств, а также сравнение коэффициентов перемешивания и других мер зависимости содержатся в работах [54], [51], [52], [216], [140], [10], [145], [146], [141], [64], [13].

Обозначим через $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \mathbf{E}\xi\eta - \mathbf{E}\xi\mathbf{E}\eta$ ковариацию действительных с.в. ξ и η. Далее нам понадобятся некоторые оценки ковариации через коэффициенты перемешивания α, β, φ и ψ.

Лемма 1. *Пусть с.в. ξ является $\mathcal{F}_1^t$-измеримой, с.в. η – $\mathcal{F}_{t+\tau}^{\infty}$-измеримой, $t,\tau \in N$. Тогда:*

1) *если* $\mathbf{E}|\xi| < \infty$, $\mathbf{E}|\eta| < \infty$, *то* (см. [222])

$$|\operatorname{cov}(\xi,\eta)| \leqslant \mathbf{E}|\xi|\mathbf{E}|\eta|\psi(\tau); \tag{1}$$

2) *если* $\mathbf{E}|\xi| < \infty$, $\mathbf{P}(|\eta| > C) = 0$, *то* (см. [5])

$$|\operatorname{cov}(\xi,\eta)| \leqslant 2C\mathbf{E}|\xi|\varphi(\tau); \tag{2}$$

3) *если* $\mathbf{E}|\xi|^q < \infty$, $\mathbf{E}|\eta|^r < \infty$, $q, r > 1$, $q^{-1} + r^{-1} = 1$, *то* (см. [48])

$$|\mathrm{cov}(\xi, \eta)| \leqslant 2\mathbf{E}^{1/q}|\xi|^q \mathbf{E}^{1/r}|\eta|^r \varphi^{1/q}(\tau); \tag{3}$$

4) *если* $\mathbf{P}(|\xi| > C_1) = \mathbf{P}(|\eta| > C_2) = 0$, *то* (см. [17], [48])

$$|\mathrm{cov}(\xi, \eta)| \leqslant 4C_1C_2\alpha(\tau); \tag{4}$$

5) *если* $\mathbf{E}|\xi|^r < \infty$, $r > 1$, $\mathbf{P}(|\eta| > C) = 0$, *то* (см. [29], [192])

$$|\mathrm{cov}(\xi, \eta)| \leqslant 4C\mathbf{E}^{1/r}|\xi|^r(\alpha(\tau))^{1-r^{-1}}; \tag{5}$$

6) *если* $\mathbf{E}|\xi|^q < \infty$, $\mathbf{E}|\eta|^r < \infty$, $q, r > 1$, $q^{-1} + r^{-1} < 1$, *то* (см. [29], [192])

$$|\mathrm{cov}(\xi, \eta)| \leqslant 6\mathbf{E}^{1/q}|\xi|^q \mathbf{E}^{1/r}|\eta|^r (\alpha(\tau))^{1-q^{-1}-r^{-1}}. \tag{6}$$

Методом индукции неравенства (1) – (6) легко переносятся на случай любого конечного числа с.в. (см., например, [17], [239]). Далее нам понадобится результат, который следует из неравенств (4) и (5).

Лемма 2. *Пусть с.в.* ξ_j *является* $\mathcal{F}_{s_j}^{t_j}$*-измеримой,* $j = 1, 2, \ldots, k$, *где*

$$1 \leqslant s_1 \leqslant t_1 < s_2 \leqslant t_2 < \ldots < s_k \leqslant t_k < \infty,$$
$$\tau = \min_{1 \leqslant j < k} (s_{j+1} - t_j).$$

Тогда:

1) *если* $\mathbf{P}(|\xi_j| > C_j) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, k$, *то для* $k \geqslant 2$

$$\left|\mathbf{E}\Big(\prod_{j=1}^{k} \xi_j\Big) - \prod_{j=1}^{k} \mathbf{E}\xi_j\right| \leqslant 4(k-1)\prod_{j=1}^{k} C_j\alpha(\tau); \tag{7}$$

2) *если* $\mathbf{E}|\xi_1|^r < \infty$, $r > 1$, $\mathbf{P}(|\xi_j| > C_j) = 0$, $j = 2, 3, \ldots, k$, *то для* $k \geqslant 2$

$$\left|\mathbf{E}\Big(\prod_{j=1}^{k} \xi_j\Big) - \prod_{j=1}^{k} \mathbf{E}\xi_j\right| \leqslant 4(k-1)\mathbf{E}^{1/r}|\xi_1|^r \prod_{j=2}^{k} C_j(\alpha(\tau))^{1-r^{-1}}. \tag{8}$$

Иногда полезно иметь оценки ковариации с.в. через коэффициенты перемешивания, когда σ-алгебры $\mathcal{F}_1^t$ ("прошлое") и

$\mathcal{F}_{t+\tau}^{\infty}$ ("будущее") заменены σ-алгебрами более сложной структуры (см., например, лемму 3).

Через $\sigma\{\mathcal{G} \cup \mathcal{H}\}$ обозначим σ-алгебру, порожденную σ-алгебрами $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$.

Лемма 3 [253]. *Пусть с.в. ξ является $\mathcal{F}_{t+\tau}^{t+\tau+n-1}$ - измеримой, с.в. η - $\sigma\{\mathcal{F}_1^t \cup \mathcal{F}_{t+2\tau+n-1}^{\infty}\}$ - измеримой, $t, \tau, n \in N$. Тогда:*

1) *если* $\mathbf{E}|\xi|^q < \infty$, $\mathbf{E}|\eta|^r < \infty$, $q, r > 0$, $q^{-1} + r^{-1} = 1$, *то*

$$|\mathrm{cov}(\xi, \eta)| \leqslant 6\mathbf{E}^{1/q}|\xi|^q \mathbf{E}^{1/r}|\eta|^r \psi^{1/q}(\tau); \tag{9}$$

2) *если* $\mathbf{E}|\xi|^q < \infty$, $\mathbf{E}|\eta|^r < \infty$, $q, r > 0$, $q^{-1} + r^{-1} < 1$, *то*

$$|\mathrm{cov}(\xi, \eta)| \leqslant 18\mathbf{E}^{1/q}|\xi|^q \mathbf{E}^{1/r}|\eta|^r (\beta(\tau))^{1-q^{-1}-r^{-1}}. \tag{10}$$

Если в неравенствах (1) – (10) ξ и η являются комплексными с.в., то правые части этих неравенств следует умножить на число 4 (см., например, [51], [239]).

§ 2. Оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме для слабо зависимых случайных величин

2.1. Введение и обозначения

Мы будем рассматривать оценку скорости сходимости только в одномерной центральной предельной теореме (ЦПТ).

Условия применимости ЦПТ для слабо зависимых с.в. исследовались многими авторами.

Специально случаю m-зависимых с.в. посвящены работы Хеффдинга и Роббинса [195], Диананды [163], Каллианпура [53], Орея [214], Зарембы [270], Берка [132]; функционалам, заданным на цепях Маркова, – С.Н. Бернштейна [133], С.Х. Сираждинова [91], Р.Л. Добрушина [32], С.В. Нагаева [72], [73], В. Статулявичуса [93], [95], П. Гудинаса [26], Б.А. Лифшица [66]. Для стационарных в узком смысле последовательностей слабо зависимых с.в. основополагающей является статья И.А. Ибрагимова [48]. Впоследствии результаты этой работы уточнялись и обобщались в работах Розена [234], Серфлинга [243], Филиппа [222], Берка [132], И.А. Ибрагимова [50], Брэдли [139], [142], Пелигра [215], [217] – [221], Херрндорфа [189] – [191], С.А. Утева [109], [111], [257], Самура [241], А.Г. Гриня [24], [25] и др. Бергстрем [129] – [131] исследовал эту проблему при помощи введенного им метода сравнений. Новейшие результаты, а также библиографию по этой тематике, можно найти, например, в указанных работах Пелигра, Брэдли, С.А. Утева и

А. Г. Гриня. Отметим, что в результатах С. А. Утева [111], [257] продвижение достигнуто за счет оценок вероятностей больших уклонений, предложенных Пелигра [217], которые в модифицированном виде использовались и в работе А. Г. Гриня [24] (см. также [25]).

В настоящее время имеется много работ, посвященных исследованию скорости сходимости в ЦПТ для слабо зависимых с.в.

Для m-зависимых с.в. этот вопрос впервые исследовался В. В. Петровым в работе [78], где в предположении равномерной ограниченности абсолютных моментов слагаемых порядка s, $2 < s \leqslant 3$, и линейном росте дисперсии их суммы в равномерной метрике была получена оценка порядка $O(n^{-(s-2)/(6s-4)})$; здесь и далее n – число слагаемых. Позднее эта задача для m-зависимых с.в. исследовалась в работах И. А. Ибрагимова [49], В. А. Егорова [37], Стейна [249], Эриксона [167] – [169], А. Н. Тихомирова [106], В. В. Шергина [112] – [114], Маеджимы [206], М. Д. Юдина [117], [120], Т. М. Зупарова [44], Хейнриха [179] – [182], [184], Й. Сунклодаса [100], [101], [103], Ри [230], [231], Н. М. Зуева [42] и др. Первая оптимальная, т.е. порядка $O(n^{-(s-2)/2})$, оценка в равномерной метрике для m-зависимых с.в. в ЦПТ была получена И. А. Ибрагимовым [49]. Им рассматривалась последовательность m-зависимых с.в. вида $f(\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}, \ldots, \varepsilon_{i+m-1})$, $i = 1, 2, \ldots$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных с.в. с $\mathbf{E}|\varepsilon_1|^s < \infty$, $2 < s \leqslant 3$.

При иных условиях слабой зависимости оценка скорости сходимости в одномерной ЦПТ исследовалась в работах В. Статулявичуса [94], [246] – [248], Иосифеску [196], Филиппа [223], Стейна [249], В. Т. Дубровина [34], А. В. Булинского [6], Иосихары [265], Негиси [212], А. Н. Тихомирова [105], [106], В. Т. Дубровина и Д. А. Москвина [36], Шнейдера [242], Т. М. Зупарова [44], Такахаты [253], М. Д. Юдина [118], [119], [121] – [123], Й. Сунклодаса [98], [100], [101], [103], П. М. Лаппо [59] и др.

В этих работах были использованы разные методы доказательства.

Метод семиинвариантов и логарифмических производных характеристической функции (х.ф.) первоначальной суммы был разработан В. Статулявичусом в работах [93] и [95], где для неоднородных цепей Маркова были получены точные оценки. При других условиях слабой зависимости этот метод использовался в работах [94], [246] – [248].

Во многих из упомянутых выше работ (см., например, [78], [196], [223], [37], [6]) методы доказательства были основаны на плодотворной идее С. Н. Бернштейна представления суммы с.в. Z_n в виде двух сумм, $Z_n = U_n + V_n$, где сумма U_n в силу условий слабой зависимости ведет себя так, будто слагаемые независимы, а сумма V_n имеет относительно малую дисперсию. Например, в случае центрированной и нормированной суммы Z_n это как правило осуществлялось при помощи следующего неравенства [78]:

для любого $\varepsilon > 0$ и $x \in R$

$$|\mathbf{P}(U_n + V_n < x) - \Phi(x)| \leqslant \sup_x |\mathbf{P}(U_n < x) - \Phi(x)| + \\ + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} + \mathbf{P}(|V_n| \geqslant \varepsilon), \qquad (11)$$

где $\Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du$.

Однако полученные на этом пути оценки в одномерном случае не были оптимальными и порядок оценки в равномерной метрике был не лучше $O(n^{-1/4})$.

Тем не менее в последние годы классический метод С. Н. Бернштейна получил дальнейшее развитие при оценке скорости сходимости в ЦПТ для слабо зависимых многомерных и бесконечномерных с.в. Именно в бесконечномерном случае проявилась универсальность этого метода. Но поскольку мы ограничиваемся рассмотрением только лишь одномерного (т.е. R-значного) случая, то читателя, интересующегося методом С. Н. Бернштейна в многомерном и бесконечномерном случаях, отсылаем к работам Хиппа [193] и Т. М. Зупарова [45], [46] (см. также [35], [57], [18], [99]). Многомерный и бесконечномерный аналоги неравенства (11) можно найти в работах Р. Лапинскаса [57], Й. Сунклодаса [99], Хиппа [193], Т. М. Зупарова [46], а переход к независимым бесконечномерным с.в., например, при условии абсолютной регулярности осуществить можно при помощи соответствующих аппроксимационных неравенств из работ П. Гудинаса [28] и Эберлейна [166] (см. также [263], [193], [45], [46]).

Стейн в работе [249] предложил новый метод оценки скорости сходимости в ЦПТ для слабо зависимых с.в. Метод Стейна заключается в использовании линейного дифференциального уравнения, построенного с помощью разности функций распределений (ф.р.) суммы слабо зависимых с.в. и нормального закона. При помощи этого метода Стейну удалось получить равномерную оценку скорости сходимости в ЦПТ порядка $O(n^{-1/2} \ln^2 n)$ при условии полной регулярности (это более слабое требование, нежели условие р.с.п.) и оптимального порядка $O(n^{-1/2})$ – в случае m-зависимости. Однако здесь требовалась конечность моментов слагаемых восьмого порядка и стационарность в узком смысле исходной последовательности с.в.

Развивая идею Стейна, А. Н. Тихомиров [106] построил аналогичное дифференциальное уравнение для х.ф. суммы слабо зависимых одномерных с.в., при помощи которого удалось получить нужную оценку близости этой х.ф. к х.ф. нормального закона. В итоге при минимальных ограничениях на моменты (конечность абсолютных моментов слагаемых порядка s, $2 < s \leqslant 3$,) А. Н. Тихомировым, в частности, получены следующие равномерные оценки скорости сходимости в ЦПТ:

а) при экспоненциальном убывании коэффициента с.п. – порядка $O(n^{-(s-2)/2}(\ln n)^{s-1})$,

в) для m-зависимых с.в. – оптимальная оценка порядка $O(n^{-(s-2)/2})$.

Для последовательности с.в., удовлетворяющих условию с.п., А. Н. Тихомировым [106] получена и неравномерная оценка (теорема 11).

Тем не менее и в работе [106] класс рассматриваемых с.в. сужался требованием их стационарности в узком смысле. Для последовательности с.в., удовлетворяющих условию р.с.п., условие стационарности в узком смысле и требование конечности абсолютных моментов слагаемых s-го порядка, $2 < s \leqslant 3$, Шнейдер [242] заменил условием равномерной ограниченности абсолютных моментов слагаемых третьего порядка и требованием линейного роста дисперсии их суммы, и при экспоненциальном убывании коэффициента р.с.п. получил равномерную оценку скорости сходимости в ЦПТ порядка $O(n^{-1/2}\ln n)$.

Специально m-зависимому случаю посвящены работы В. В. Шергина [112] – [114] и Хейнриха [179] – [182], [184], где при помощи х.ф. разработаны отличающиеся друг от друга методы оценки скорости сходимости в одномерной ЦПТ оптимального порядка.

Более общая задача решается в работах М. Д. Юдина [117] – [123]. М. Д. Юдиным предлагается один общий метод оценки скорости сходимости распределений сумм слабо зависимых с.в. к неограниченно делимым распределениям. Его метод применим также и к нормальному случаю. Кроме того, им исследована задача аппроксимации распределений сумм слабо зависимых с.в. распределениями из класса L [120], [121], [123]. Отметим также, что М. Д. Юдин использует разбиение суммы по методу С. Н. Бернштейна, а при аппроксимации распределений сумм слабо зависимых с.в. распределениями из класса L – основную идею метода А. Н. Тихомирова [119] – [123]. Подробно эти исследования изложены в книге М. Д. Юдина [122].

По оптимальности получаемых оценок скорости сходимости в одномерной ЦПТ для слабо зависимых с.в. при минимальных моментных ограничениях на слагаемые, простоте и применимости для решения других задач в настоящее время именно методы Стейна, А. Н. Тихомирова и Хейнриха являются одними из наиболее распространенных методов. Поэтому далее мы более подробно изложим именно эти три метода. Для этого введем некоторые обозначения.

Буквой $\mathcal{N}$ обозначим вещественную стандартную нормальную с.в. с ф.р. $\Phi(x)$ и плотностью $\varphi(x) = \Phi'(x)$.

Далее мы будем оценивать разность $\mathrm{E}h(Z_n) - \mathrm{E}h(\mathcal{N})$, где Z_n – нормированная сумма центрированных слабо зависимых с.в., а функция h является либо индикатором интервала, либо удовлетворяет некоторому условию гладкости.

Для любой функции $g : R \to R$ обозначим

$$\mathcal{L}(g; p, \alpha) = \sup_{x \neq y} \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|^{\alpha}(1 + |x|^p + |y|^p)}, \quad ||g||_{\infty} = \sup_x |g(x)|,$$

через g' – производную функции g.

В §2 п.2.3 и §3 будем предполагать, что функция $h : R \to R$ удовлетворяет условию $||h||_{\infty} < \infty$ (кроме теорем 3 и 16) и одному из условий $H_1^{(p)} = \mathcal{L}(h; p, \alpha) < \infty$ или $H_2^{(p)} = \mathcal{L}(h'; p+1, \alpha) < < \infty$, где $p \geqslant 0$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Выделим пространство $BL(R)$ – пространство ограниченных функций $h : R \to R$, удовлетворяющих условию Липшица, т.е. таких, что

$$||h||_{\infty} < \infty \text{ и } ||h||_L = \sup_{x \neq y} \frac{|h(x) - h(y)|}{|x - y|} < \infty.$$

Обозначим

$$||h||_{BH_i^{(p)}} = ||h||_{\infty} + H_i^{(p)}, \qquad ||h||_{BL} = ||h||_{\infty} + ||h||_L.$$

Пусть

$$X_1, X_2, \dots \tag{12}$$

– последовательность вещественных с.в. с $\mathbf{E}X_j = 0$ и $\mathbf{E}X_j^2 < \infty$, $j = 1, 2, \ldots, n$,

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j, \quad B_n^2 = \mathbf{E}S_n^2, \quad Z_n = S_n/B_n, \quad F_n(x) = \mathbf{P}(Z_n < x),$$

$$A_j = X_j/B_n, \quad \overline{A}_j = A_j 1_{(|A_j| \leqslant t)}, \quad \overline{\overline{A}}_j = A_j 1_{(|A_j| > t)},$$

$$L_{r,n} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}|A_j|^r, \quad \overline{L}_{r,n} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}|\overline{A}_j|^r, \quad \overline{\overline{L}}_{r,n} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}|\overline{\overline{A}}_j|^r,$$

$$L^*_{s,n} = nd_{s,n}, \quad d_{s,n} = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \mathbf{E}|A_j|^s,$$

$$\Delta_n(x) = \mathbf{P}(Z_n < x) - \Phi(x), \quad \Delta_n = \sup_x |\Delta_n(x)|, \quad \|\cdot\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\cdot|\, dx,$$

$$d_i^{(p)}(F_n, \Phi) = \sup_{h \in \mathcal{H}_i^{(p)}} |\mathbf{E}h(Z_n) - \mathbf{E}h(\mathcal{N})| / \|h\|_{BH_i^{(p)}},$$

$$d_{BL}(F_n, \Phi) = \sup_{h \in BL(R)} |\mathbf{E}h(Z_n) - \mathbf{E}h(\mathcal{N})| / \|h\|_{BL},$$

где $\mathcal{H}_i^{(p)} = \{h : \|h\|_\infty < \infty, \ H_i^{(p)} < \infty\}$, $i = 1, 2$, 1_A – индикатор события A, $t > 0$ и $B_n > 0$.

Заметим, что величины $d_i^{(p)}(F_n, \Phi)$ и $d_{BL}(F_n, \Phi)$ можно записать в следующем виде:

$$d_i^{(p)}(F_n, \Phi) = \sup_{\substack{h \in \mathcal{H}_i^{(p)} \\ \|h\|_{BH_i^{(p)}} \leqslant 1}} |\mathbf{E}h(Z_n) - \mathbf{E}h(\mathcal{N})|,$$

$$d_{BL}(F_n, \Phi) = \sup_{\substack{h \in BL(R) \\ \|h\|_{BL} \leqslant 1}} |\mathbf{E}h(Z_n) - \mathbf{E}h(\mathcal{N})|.$$

Величина $d_{BL}(F_n, \Phi)$ известна под названием ограниченной метрики Липшица между ф.р. F_n и Φ.

Далее в обозначениях $L_{r,n}$, $\overline{L}_{r,n}$, $\overline{\overline{L}}_{r,n}$, $L^*_{s,n}$ и $d_{s,n}$ будем опускать индекс n, а вместо $d_i^{(p)}(F_n, \Phi)$ и $d_{BL}(F_n, \Phi)$ будем писать $d_i^{(p)}$ и d_{BL}.

Буквой $C(\cdot)$ с индексом или без него будем обозначать положительную конечную постоянную (не всегда одну и ту же), зависящую только от величин, указанных в скобках, буквой C – абсолютную положительную постоянную, буквой θ – комплексную функцию, не превосходящую единицу по модулю; $0 < K < \infty$, $\lambda > 0$ – постоянные.

Далее мы покажем, как методы Стейна, А. Н. Тихомирова и Хейнриха работают при оценке величин $\|\Delta_n(x)\|_1$, $d_i^{(p)}$, d_{BL} и Δ_n сверху, если последовательность с.в. (12) удовлетворяет одному из вышеупомянутых условий слабой зависимости.

Оценки величин $\|\Delta_n(x)\|_1$ (теорема 1, следствие 1), $d_i^{(p)}$ (теоремы 3 – 8, следствия 2, 3) и Δ_n (теорема 10) для рассматриваемых коэффициентов перемешивания являются новыми и получены автором. Более общие результаты содержатся в утверждениях 2 – 4.

При описании методов Стейна и А. Н. Тихомирова будут использоваться с.в.

$$Z_j^{(i)} = \sum_{|p-j|\leqslant im} A_p \quad \text{и} \quad z_j^{(i)} = Z_n - Z_j^{(i)}$$

при $2mi + 1 < n$, где $m = 1, 2, \ldots$, а в случае m-зависимости $m = 0, 1, \ldots$. При оценках методом Стейна будет использоваться вспомогательная с.в. J, равномерно распределенная на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ и не зависящая от с.в. $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Обозначим

$$c_* = \begin{cases} m+1 & \text{при условии } m\text{-зависимости}, \\ 1 + 2\psi_n & \text{при условии } \psi\text{-перемешивания}, \\ 1 + 4\Phi_n & \text{при условии р.с.п.}, \\ 1 + 12B_{n,r} & \text{при условии а.р.}, \\ 1 + 12A_{n,r} & \text{при условии с.п.}, \end{cases}$$

где $\psi_n = \sum_{\tau=1}^{n-1} \psi(\tau)$, $\Phi_n = \sum_{\tau=1}^{n-1} \varphi^{1/2}(\tau)$, $B_{n,r} = \sum_{\tau=1}^{n-1} (\beta(\tau))^{(r-2)/r}$, $A_{n,r} = \sum_{\tau=1}^{n-1} (\alpha(\tau))^{(r-2)/r}$ и $2 < r < \infty$.

Применяя неравенства (1), (3) и (6) соответственно, получаем, что для последовательности с.в. (12), удовлетворяющей или условию m-зависимости, или ψ-перемешивания, или р.с.п.,

$$\mathbf{E} Z_n^2 \leqslant c_* L_2, \tag{13}$$

а при условии а.р. или с.п.

$$\mathbf{E} Z_n^2 \leqslant c_* \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}^{2/r} |A_j|^r, \quad 2 < r < \infty. \tag{14}$$

Однако для $2 < r < \infty$

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}^{2/r} |A_j|^r \leqslant n^{(r-2)/r} L_r^{2/r}. \tag{15}$$

Поэтому из оценок (13) – (15) получаем, что для определенных выше слабо зависимых с.в. (12) с конечными ψ_n, Φ_n, $B_{n,r}$ и $A_{n,r}$ соответственно, при $2 < r < \infty$

$$n^{-(r-2)/2} \leqslant c_*^{r/2} L_r, \tag{16}$$

и, следовательно, условии $C_1(\cdot)(m+1) \geqslant n$

$$1 \leqslant (C_1(\cdot))^{(r-2)/2} c_*^{r/2} (m+1)^{(r-2)/2} L_r. \tag{17}$$

В силу (17), при оценке величин $||\Delta_n(x)||_1$, $d_i^{(p)}$, d_{BL} и Δ_n нам достаточно рассмотреть случаи, когда $C_1(\cdot)(m+1) < n$.

2.2. Оценка $||\Delta_n(x)||_1$

Теорема 1. *Пусть последовательность с.в.* (12) *является m-зависимой. Тогда для $m \geqslant 0$ и $t > 0$*

$$||\Delta_n(x)||_1 \leqslant C\{\overline{\overline{L}}_1 + (m+1)\overline{\overline{L}}_2 + (m+1)^2\overline{L}_3 + (m+1)^3\overline{L}_4\}.$$

Если уровень усечения в этой оценке взять $t = 1$, а вместо $\overline{\overline{L}}_1$ положить $(m+1)\overline{\overline{L}}_1$, то получим результат Эриксона [168] (см. также [100]).

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $\mathbf{E}|X_j|^s < \infty$, $2 < s \leqslant 3$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда для $m \geqslant 0$

$$||\Delta_n(x)||_1 \leqslant C(m+1)^{s-1} L_s.$$

При помощи неравенства (24) аналогичные оценки для величины $||\Delta_n(x)||_1$ можно получить и в случае коэффициентов перемешивания ψ, φ и β. Для других коэффициентов перемешивания оценки величины $||\Delta_n(x)||_1$ получены в работах [100], [102], [254]. Ради простоты изложения мы здесь ограничиваемся оценкой величины $||\Delta_n(x)||_1$ только для последовательностей m-зависимых с.в.

Из результатов Хейнриха [184] для m-зависимых с.в. следует, в частности, такой результат.

Теорема 2 [184]. *Пусть последовательность с.в.* (12) *является m-зависимой и $\mathbf{E}|X_j|^s < \infty$, $2 < s < 3$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда для $1 \leqslant p < \infty$ и $n \geqslant 1$*

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)^{sp-1} |\Delta_n(x)|^p dx\right)^{1/p} \leqslant C(m+1)^{s-1} L_s^*.$$

Для m-зависимых с.в. (12) с конечными абсолютными моментами порядка k, $k \geqslant 2$, и таких, что при всех $n \geqslant n_0$ $\sum\limits_{j=1}^{n} \mathbf{E}X_j^2 \leqslant M_0 B_n^2$, где M_0 и n_0 – положительные постоянные, В. В. Шергин [114] методом Стейна получил оценку величины $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^l |\Delta_n(x)|\, dx$ в терминах дробей Ляпунова для $0 \leqslant l \leqslant k-1$.

Доказательство теоремы 1.

Стейн обратил внимание на следующую характеризацию стандартного нормального закона: если с.в. $W = \mathcal{N}$, то $\mathbf{E}f'(W) - \mathbf{E}[Wf(W)] = 0$ для достаточно широкого класса функций f и наоборот (см., например, [249], [250]). Следовательно, величина $\mathbf{E}f'(W) - \mathbf{E}[Wf(W)]$ пригодна для измерения близости с.в. W к с.в. $\mathcal{N}$.

Поэтому для оценки разности $\mathbf{E}h(W) - \mathbf{E}h(\mathcal{N})$ достаточно оценить правую часть равенства

$$\mathbf{E}h(W) - \mathbf{E}h(\mathcal{N}) = \mathbf{E}f'(W) - \mathbf{F}'Wf(W)].$$

Для этого рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$f'(y) - yf(y) = h(y) - \mathbf{E}h(\mathcal{N}), \qquad (18)$$

которое имеет решение

$$f(y) = e^{y^2/2} \int\limits_{-\infty}^{y} h_0(u) e^{-u^2/2}\, du = -e^{y^2/2} \int\limits_{y}^{\infty} h_0(u) e^{-u^2/2}\, du, \qquad (19)$$

где $h_0(y) = h(y) - \mathbf{E}h(\mathcal{N})$.

Например, для оценки разности $\mathbf{P}(W < x) - \Phi(x)$ в равенстве (18) в качестве функции h нужно взять индикаторную функцию интервала, т.е. $h(y) = h_x(y) = 1_{(-\infty\, x)}(y)$. В этом случае равенства (18) и (19) превращаются соответственно в

$$f_x'(y) - yf_x(y) = 1_{(-\infty,x)}(y) - \Phi(x) \qquad (20)$$

и

$$f_x(y) = \begin{cases} \Phi(-x)\Phi(y)/\varphi(y), & \text{если } y < x, \\ \Phi(x)\Phi(-y)/\varphi(y), & \text{если } y \geqslant x. \end{cases} \qquad (21)$$

При оценке величины $\|\Delta_n(x)\|_1$ мы используем следующий результат.

Лемма 4 (см. [168], [194]). *Пусть функция f_x определена равенством* (21). *Тогда для всех вещественных* y

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f_x(y)|dx = 1 \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f'_x(y)|dx \leqslant 1.$$

Для того чтобы все с.в., входящие в приводимые ниже соотношения (22) и (24) были определены, далее предполагаем, что $6m+1<n$.

Для краткости обозначим $Q_j = A_j Z_j^{(1)} - \mathbf{E}(A_j Z_j^{(1)})$.

Из равенства (20) следует, что

$$\Delta_n(x) = \mathbf{E}\Big\{f'_x(Z_n) - \sum_{j=1}^{n} A_j f_x(Z_n)\Big\} =$$
$$= \mathbf{E}\Big\{f'_x(Z_n) + \sum_{j=1}^{n} A_j \left[f_x(z_j^{(1)}) - f_x(Z_n)\right] - \sum_{j=1}^{n} A_j f_x(z_j^{(1)})\Big\}.$$

Применяя формулу Ньютона – Лейбница к разностям $f_x(z_j^{(1)}) - f_x(Z_n)$ и $f_x(u) - f_x(Z_n)$ и учитывая равенство (20), получаем, что

$$\Delta_n(x) = \mathbf{E} f'_x(Z_n) + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\Big\{A_j \int\limits_{Z_n}^{z_j^{(1)}} u \int\limits_{Z_n}^{u} f'_x(v)\,dv\,du\Big\} +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\big\{A_j (Z_j^{(1)})^2 f_x(Z_n)\big\} - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\big\{A_j f_x(z_j^{(1)})\big\} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\Big\{A_j \int\limits_{Z_n}^{z_j^{(1)}} [1_{(-\infty,x)}(u) - 1_{(-\infty,x)}(Z_n)]du\Big\} -$$
$$- \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\{A_j Z_j^{(1)} f'_x(Z_n)\}.$$

Аналогичное рассуждение приводит нас к равенству

$$\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\{Q_j[f'_x(Z_n)-f'_x(z_j^{(2)})]\}=\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\{Q_jZ_j^{(2)}f_x(Z_n)\}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\Big\{Q_jz_j^{(2)}\int\limits_{z_j^{(2)}}^{Z_n}f'_x(u)\,du\Big\}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\big\{Q_j\big[1_{(-\infty,x)}(Z_n)-1_{(-\infty,x)}(z_j^{(2)})\big]\big\}.$$

Так как $\mathbf{E}Z_n^2=1$, то

$$1-\sum_{j=1}^{n}A_jZ_j^{(1)}=-\sum_{j=1}^{n}Q_j+\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\{A_jz_j^{(1)}\}.$$

Из последних трех равенств получаем, что [100]

$$\Delta_n(x)=\sum_{k=1}^{9}E_k(x),\tag{22}$$

где

$$E_1(x)=\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\Big\{A_j\int\limits_{Z_n}^{z_j^{(1)}}u\int\limits_{Z_n}^{u}f'_x(v)\,dv\,du\Big\},$$

$$E_2(x)=\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\Big\{Q_jz_j^{(2)}\int\limits_{Z_n}^{z_j^{(2)}}f'_x(u)\,du\Big\},$$

$$E_3(x)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\{A_j(Z_j^{(1)})^2f_x(Z_n)\},$$

$$E_4(x)=-\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\{Q_jZ_j^{(2)}f_x(Z_n)\},$$

$$E_5(x)=\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\Big\{A_j\int\limits_{Z_n}^{z_j^{(1)}}\big[1_{(-\infty,x)}(u)-1_{(-\infty,x)}(Z_n)\big]\,du\Big\},$$

$$E_6(x) = -\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\Big\{Q_j\big[1_{(-\infty,x)}(Z_n) - 1_{(-\infty,x)}(z_j^{(2)})\big]\Big\},$$

$$E_7(x) = -\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\{A_j f_x(z_j^{(1)})\},$$

$$E_8(x) = -\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\{Q_j f_x'(z_j^{(2)})\},$$

$$E_9(x) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\{A_j z_j^{(1)}\}\mathbf{E}f'(Z_n).$$

Именно равенство (22) и играет основную роль при оценке величины $||\Delta_n(x)||_1$ для слабо зависимых с.в. Для m-зависимых с.в. аналогичное равенство использовалось в работе Эриксона [168].

Используя лемму 4 и тот факт, что для любых $u, v \in R$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|1_{(-\infty,x)}(u) - 1_{(-\infty,x)}(v)\right| dx = |u - v|, \tag{23}$$

из равенства (22) получаем

Основное неравенство [100]:

$$||\Delta_n(x)||_1 \leqslant I_1(m) + I_2(m), \tag{24}$$

где

$$I_1(m) = \frac{5}{6} n\mathbf{E}|A_J(Z_J^{(1)})^3| + n\mathbf{E}|A_J(Z_J^{(1)})^2| + 2n\mathbf{E}|Q_J Z_J^{(2)}| +$$
$$+ \frac{n}{2}\mathbf{E}|A_J(Z_J^{(1)})^2(Z_J^{(2)} - Z_J^{(1)})| + n\mathbf{E}|Q_J Z_J^{(2)}(Z_J^{(3)} - Z_J^{(2)})|,$$

$$I_2(m) = \frac{n}{2}\mathbf{E}|A_J(Z_J^{(1)})^2 z_J^{(2)}| + n\mathbf{E}|Q_J Z_J^{(2)} z_J^{(3)}| +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \left[||\mathbf{E}\{A_j f_x(z_j^{(1)})\}||_1 + ||\mathbf{E}\{Q_j f_x'(z_j^{(2)})\}||_1\right] + n|\mathbf{E}\{A_J z_J^{(1)}\}|.$$

Так как величину $I_1(m)$ составляют моменты "близких" с.в., то ее оценка не нуждается в факте слабой зависимости последовательности с.в. $X_1, X_2, \dots$.

Легко видеть, что для любого вещественного $r \geqslant 1$

$$\mathbf{E}|Z_J^{(i)}|^r \leqslant (2mi + 1)^r n^{-1} L_r, \qquad i = 0, 1, \dots, \tag{25}$$

$$\mathbf{E}|Z_J^{(i)} - Z_J^{(i-1)}|^r \leqslant (2m)^r n^{-1} L_r, \qquad i = 2,3,\ldots \tag{26}$$

Поэтому из неравенства Гельдера и оценок (25) и (26) следует, что

$$|I_1(m)| \leqslant (2m+1)(18m+5)L_3 + \frac{1}{6}(2m+1)(128m^2+50m+5)L_4. \tag{27}$$

Величину $I_2(m)$ для каждого условия слабой зависимости приходится оценивать отдельно.

Пусть последовательность с.в. (12) является m-зависимой. Тогда

$$I_2(m) = \frac{n}{2}\mathbf{E}|A_J(Z_J^{(1)})^2 z_J^{(2)}| + n\mathbf{E}|Q_J Z_J^{(2)} z_J^{(3)}|.$$

Обозначим

$$t_j^i = \mathbf{E}|Z_j^{(2)}|^i, \qquad \delta_j^i = \mathbf{E}|Z_j^{(3)}|^i.$$

Тогда

$$\mathbf{E}|A_J(Z_J^{(1)})^2 z_J^{(2)}| \leqslant \mathbf{E}|A_J(Z_J^{(1)})^2| + \mathbf{E}|A_J(Z_J^{(1)})^2 t_J^1|,$$
$$\mathbf{E}|Q_J Z_J^{(2)} z_J^{(3)}| \leqslant \mathbf{E}|Q_J Z_J^{(2)}| + \mathbf{E}|Q_J Z_J^{(2)} \delta_J^1|.$$

Если $\xi_j = \sum\limits_{p\in B_j} A_p$ и $\tau_j^i = \mathbf{E}|\xi_j|^i$, где $B_j \subset \{1,2,\ldots,n\}$ для любого $j = 1,2,\ldots,n$, то легко видеть, что

$$\mathbf{E}|\tau_J^i|^{j/i} \leqslant \mathbf{E}|\xi_J|^j, \qquad 0 < i \leqslant j. \tag{28}$$

Тогда оценки (25), (26), (28) и неравенство Гельдера влекут за собой оценки

$$\mathbf{E}|A_J(Z_J^{(1)})^2| \leqslant (2m+1)^2 n^{-1} L_3,$$
$$\mathbf{E}|A_J(Z_J^{(1)})^2 t_J^1| \leqslant (2m+1)^2(4m+1)n^{-1}L_4,$$
$$\mathbf{E}|Q_J Z_J^{(2)}| \leqslant 2(2m+1)(4m+1)n^{-1}L_3,$$
$$\mathbf{E}|Q_J Z_J^{(2)}\delta_J^1| \leqslant 2(2m+1)(4m+1)(6m+1)n^{-1}L_4.$$

Следовательно,

$$I_2(m) \leqslant (2m+1)\big[(9m+2,5)L_3 + (52m^2+23m+2,5)L_4\big]. \tag{29}$$

Поэтому, подставляя оценки (27) и (29) в неравенство (24) и освобождаясь от условия $6m+1 < n$ при помощи (17), получаем следующий результат:

Утверждение 1. Пусть последовательность с.в. (12) является m-зависимой и $\mathbf{E}X_j^4 < \infty$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда для $m \geqslant 0$

$$\|\Delta_n(x)\|_1 \leqslant (2m+1)\left[(27m+7,5)L_3 + (10/3)(22m^2+9,4m+1)L_4\right].$$

Усечение. Для завершения доказательства теоремы 1 проведем усечение с.в. A_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, на уровне $t > 0$ (§2 п.2.1) и дополнительно обозначим

$$\overline{A}_j^{(0)} = \overline{A}_j - \mathbf{E}\overline{A}_j, \qquad \overline{\overline{A}}_j^{(0)} = \overline{\overline{A}}_j - \mathbf{E}\overline{\overline{A}}_j, \qquad \overline{Z}_n^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} \overline{A}_j^{(0)}.$$

Так как для любых с.в. ξ и η имеет место неравенство (см. [168], с. 527)

$$\|\mathbf{P}(\xi < x) - \mathbf{P}(\eta < x)\|_1 \leqslant \mathbf{E}|\xi - \eta|, \tag{30}$$

то для любого $a > 0$

$$\|\Phi(ax) - \Phi(x)\|_1 \leqslant \sqrt{2/\pi}\,|1 - a^{-1}|. \tag{31}$$

Поэтому для последовательности с.в. (12) при $\mathbf{E}(\overline{Z}_n^{(0)})^2 > 0$

$$\begin{aligned}\|\Delta_n(x)\|_1 \leqslant & 2\overline{\overline{L}}_1 + \sqrt{2/\pi}\,|1 - \mathbf{E}(\overline{Z}_n^{(0)})^2| + \\ & + \mathbf{E}^{1/2}(\overline{Z}_n^{(0)})^2 \|\mathbf{P}(\overline{Z}_n^{(0)} < x\mathbf{E}^{1/2}(\overline{Z}_n^{(0)})^2) - \Phi(x)\|_1.\end{aligned} \tag{32}$$

Заметим, что неравенство усечения (32) имеет место при любой зависимости последовательности с.в. (12).

Поскольку

$$|1 - \mathbf{E}(\overline{Z}_n^{(0)})^2| \leqslant 9\overline{\overline{L}}_2 + \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} \left|\mathbf{E}(\overline{\overline{A}}_i^{(0)}\overline{\overline{A}}_j^{(0)}) + 2\mathbf{E}(\overline{A}_i^{(0)}\overline{\overline{A}}_j^{(0)})\right|, \tag{33}$$

то для m-зависимой последовательности с.в. (12)

$$|1 - \mathbf{E}(\overline{Z}_n^{(0)})^2| \leqslant 9(2m+1)\overline{\overline{L}}_2 = \varepsilon_1. \tag{34}$$

При доказательстве теоремы 1 предполагается, что $\varepsilon_1 \leqslant 1/2$ (в противном случае оценки тривиальны). Тогда из оценки (34) имеем, что $\frac{1}{2} \leqslant \mathbf{E}(\overline{Z}_n^{(0)})^2 \leqslant \frac{3}{2}$, и, следовательно, для $r > 0$

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\left|\overline{A}_j^{(0)}/\mathbf{E}^{1/2}(\overline{Z}_n^{(0)})^2\right|^r \leqslant 2^{3r/2}\overline{L}_r. \tag{35}$$

В силу неравенства усечения (32) и оценок (34), (35) для завершения доказательства теоремы 1 достаточно оценить величину $\|\Delta_n(x)\|_1$ для неусеченных с.в., т.е. воспользоваться утверждением 1.

Следствие 1 получается из теоремы 1 при $t = (m+1)^{-1}$.

2.3. Оценка $d_i^{(p)}$ и d_{BL}

Теорема 3. *Пусть последовательность с.в.* (12) *является m-зависимой и* $\mathbf{E}|X_j|^{2+p+\alpha} < \infty$, $j = 1,2,\ldots,n$. *Тогда при условии* $6m+1 < n$

$$|\mathbf{E}h(Z_n) - \mathbf{E}h(\mathcal{N})| \leqslant C(p,\alpha)H_i^{(p)}\{(m+1)^{1+\alpha}L_{2+\alpha}(1+\mathbf{E}|Z_n|^p)+ \\ +(m+1)^{1+p+\alpha}L_{2+p+\alpha}\}.$$

Таким образом, теоремой 3 задача оценки величины $|\mathbf{E}h(Z_n) - \mathbf{E}h(\mathcal{N})|$, когда функция h удовлетворяет условию $H_1^{(p)} < \infty$ или $H_2^{(p)} < \infty$, сведена к оценке абсолютного момента $\mathbf{E}|Z_n|^p$, $p \geqslant 0$.

Оценки абсолютных моментов суммы слабо зависимых с.в. получены С. А. Утевым в работе [109].

Заметим, что для с.в., удовлетворяющих условию ψ-перемешивания или условию а.р., оценки $d_i^{(p)}$, $i = 1,2$, также сводятся к оценкам абсолютных моментов суммы Z_n (хотя и более высокого порядка, чем p.) Однако ради простоты в случаях ψ-перемешивания и а.р. мы рассматриваем здесь только оценки величин $d_i^{(0)}$, $i = 1,2$.

Теорема 4. *Пусть последовательность с.в.* (12) *удовлетворяет условию ψ-перемешивания с* $\psi(\tau) \leqslant K\tau^{-\mu}$, *где* $\mu \geqslant (r-1)r$, *и* $\mathbf{E}|X_j|^r < \infty$, $4 \leqslant r < \infty$, $j = 1,2,\ldots,n$. *Тогда*

$$d_i^{(0)} \leqslant C(K,\mu,r,\alpha)\{n^{(1+\alpha)(r-1)/\mu}L_{2+\alpha} + L_r\}.$$

Теорема 5. *Пусть последовательность с.в.* (12) *удовлетворяет условию а.р. и* $\mathbf{E}|X_j|^r < \infty$, $4 \leqslant r < \infty$, $j = 1,2,\ldots,n$. *Тогда:*

1) *если* $\beta(\tau) \leqslant Ke^{-\lambda\tau}$, *то*

$$d_i^{(0)} \leqslant C(K,\lambda,r,\alpha)\{L_{2+\alpha}\ln^{1+\alpha}(n+1) + L_r\};$$

2) *если* $\beta(\tau) \leqslant K\tau^{-\mu}$, *где* $\mu \geqslant 2(r-1)r$, *то*

$$d_i^{(0)} \leqslant C(K,\mu,r,\alpha)\{n^{2(1+\alpha)(r-1)/\mu}L_{2+\alpha} + L_r\}.$$

Усечение с.в. позволяет получить, например, следующие результаты.

Теорема 6. *Пусть последовательность с.в.* (12) *является m-зависимой. Тогда для* $m \geqslant 0$ *и* $t > 0$

$$d_1^{(0)} \leqslant C(\alpha)\{\overline{\overline{L}}_1^{\alpha} + (m+1)^{\alpha}\overline{\overline{L}}_2^{\alpha} + (m+1)^{1+\alpha}\overline{L}_{2+\alpha}\}.$$

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы 6. Тогда:

1) если $\mathbf{E}|X_j|^{2+\alpha} < \infty$, $j = 1, 2, \ldots, n$, то для $m \geqslant 0$

$$d_1^{(0)} \leqslant C(\alpha)(m+1)^{\alpha(1+\alpha)}L_{2+\alpha}^{\alpha};$$

2) если $\mathbf{E}|X_j|^s < \infty$, $2 < s \leqslant 3$, $j = 1, 2, \ldots, n$, то для $m \geqslant 0$

$$d_{BL} \leqslant C(m+1)^{s-1}L_s.$$

Теорема 7. *Пусть последовательность с.в.* (12) *удовлетворяет условию ψ-перемешивания с* $\psi(\tau) \leqslant Ke^{-\lambda\tau}$. *Тогда для* $t > 0$ *и* $4 \leqslant r < \infty$

$$d_1^{(0)} \leqslant C(K, \lambda, r, \alpha)\{\overline{\overline{L}}_1^{\alpha} + \overline{\overline{L}}_2^{\alpha} + \overline{L}_{2+\alpha}\ln^{1+\alpha}(n+1) + \overline{L}_r\}.$$

Следствие 3. Пусть выполнены условия теоремы 7. Тогда:

1) если $\mathbf{E}|X_j|^{2+\alpha} < \infty$, $j = 1, 2, \ldots, n$, то

$$d_1^{(0)} \leqslant C(K, \lambda, \alpha)L_{2+\alpha}^{\alpha}\ln^{\alpha(1+\alpha)}(n+1);$$

2) если $\mathbf{E}|X_j|^s < \infty$, $2 < s \leqslant 3$, $j = 1, 2, \ldots, n$, то

$$d_{BL} \leqslant C(K, \lambda)L_s\ln^{s-1}(n+1).$$

Теорема 8. *Пусть последовательность с.в.* (12) *удовлетворяет условию ψ-перемешивания с* $\psi(\tau) \leqslant K\tau^{-\mu}$, *где* $\mu \geqslant 12$. *Тогда:*

1) *если* $\mathbf{E}|X_j|^{2+\alpha} < \infty$, $j = 1, 2, \ldots, n$, *то*

$$d_1^{(0)} \leqslant C(K, \mu, \alpha)n^{3(1+\alpha)/\mu}L_{2+\alpha}^{\alpha};$$

2) *если* $\mathbf{E}|X_j|^s < \infty$, $2 < s \leqslant 3$, $j = 1, 2, \ldots, n$, *то*

$$d_{BL} \leqslant C(K, \mu)n^{3(s-1)/\mu}L_s.$$

Более подробно с оцениванием ограниченной метрики Липшица d_{BL} можно ознакомиться по работе [103].

Доказательство теорем 3 – 8.

Имеет место следующий результат.

Лемма 5. *Пусть функции f и f' определены равенствами* (18) *и* (19). *Тогда:*

1) *если $\|h\|_\infty < \infty$, то для $\forall y \in R$ (см.* [168], [128]*)*

$$|f(y)| \leqslant c_1\|h_0\|_\infty, \qquad |f'(y)| \leqslant 2\|h_0\|_\infty, \tag{36}$$

где $c_1 = \sup\limits_{x \geqslant 0} \Xi(x)$, а $\Xi(x) = \Phi(-x)/\varphi(x)$;

2) *если $H_1^{(p)} < \infty$ или $H_2^{(p)} < \infty$, то* [126]

$$\mathcal{L}(f'; p, \alpha) \leqslant C_i(p, \alpha) H_i^{(p)}, \tag{37}$$

где $i = 1$, если $H_1^{(p)} < \infty$, и $i = 2$, если $H_2^{(p)} < \infty$.

Пусть, далее, $6m + 1 < n$. Тогда из равенства (18) следует что

$$\mathbf{E}h_0(Z_n) = \sum_{j=1}^{n} \left\{\mathbf{E}(A_j Z_j^{(1)})\mathbf{E}f'(Z_n) - \mathbf{E}[A_j f(Z_n)] + \mathbf{E}(A_j z_j^{(1)})\mathbf{E}f'(Z_n)\right\}.$$

Прибавляя и вычитая под знаком суммы сначала величины $\mathbf{E}(A_j Z_j^{(1)})\mathbf{E}f'(z_j^{(1)})$, $\mathbf{E}[A_j f(z_j^{(1)})]$ и $\mathbf{E}[A_j Z_j^{(1)} f'(z_j^{(1)})]$, а потом – $\mathbf{E}[Q_j f'(z_j^{(2)})]$ и учитывая равенство

$$f(Z_n) - f(z_j^{(1)}) - f'(z_j^{(1)})Z_j^{(1)} = \int\limits_0^{Z_j^{(1)}} \left[f'(z_j^{(1)} + u) - f'(z_j^{(1)})\right] du,$$

получаем, что

$$\mathbf{E}h(Z_n) - \mathbf{E}h(\mathcal{N}) = I_1 + I_2, \tag{38}$$

где

$$I_1 = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}(A_j Z_j^{(1)}) \mathbf{E}[f'(Z_n) - f'(z_j^{(1)})] -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\left\{Q_j [f'(z_j^{(1)}) - f'(z_j^{(2)})]\right\} -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\left\{A_j \int_0^{Z_j^{(1)}} [f'(z_j^{(1)} + u) - f'(z_j^{(1)})]\, du\right\},$$

$$I_2 = - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\left\{Q_j f'(z_j^{(2)})\right\} + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}(A_j z_j^{(1)}) \mathbf{E} f'(Z_n) -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}[A_j f(z_j^{(1)})].$$

Обозначим

$$\nu_j^i = \mathbf{E}|Z_j^{(1)}|^i, \quad \gamma_j^i = \mathbf{E}|Z_j^{(2)} - Z_j^{(1)}|^i, \quad t_j^i = \mathbf{E}|Z_j^{(2)}|^i, \quad \delta_j^i = \mathbf{E}|Z_j^{(3)}|^i,$$

$$\omega_j = \mathbf{E}|(Z_j^{(1)})^\alpha (Z_j^{(2)} - Z_j^{(1)})^p|, \quad w_j = \mathbf{E}|(Z_j^{(2)} - Z_j^{(1)})^\alpha (Z_j^{(3)} - Z_j^{(2)})^p|.$$

Оценивая $|I_1|$ при помощи (37), получаем, что

$$|I_1| \leqslant C(p, \alpha) H_i^{(p)} (n I_1' + I_1''), \tag{39}$$

где

$$I_1' = \mathbf{E}|A_J Z_J^{(1)} \nu_J^\alpha| + \mathbf{E}|A_J Z_J^{(1)} \nu_J^{p+\alpha}| + \mathbf{E}|A_J Z_J^{(1)} \omega_J| +$$

$$+ \mathbf{E}|A_J Z_J^{(1)} \gamma_J^\alpha| + \mathbf{E}|A_J Z_J^{(1)} \gamma_J^{p+\alpha}| + \mathbf{E}|A_J Z_J^{(1)} w_J| +$$

$$+ \mathbf{E}|A_J (Z_J^{(1)})^{1+\alpha}| + \mathbf{E}|A_J (Z_J^{(1)})^{1+p+\alpha}| +$$

$$+ \mathbf{E}|A_J (Z_J^{(1)})^{1+\alpha} (Z_J^{(2)} - Z_J^{(1)})^p| + \mathbf{E}|A_J Z_J^{(1)} (Z_J^{(2)} - Z_J^{(1)})^\alpha| +$$

$$+ \mathbf{E}|A_J Z_J^{(1)} (Z_J^{(2)} - Z_J^{(1)})^{p+\alpha}| +$$

$$+ \mathbf{E}|A_J Z_J^{(1)} (Z_J^{(2)} - Z_J^{(1)})^\alpha (Z_J^{(3)} - Z_J^{(2)})^p|,$$

$$I_1'' = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}|A_j Z_j^{(1)}| [\mathbf{E}|(Z_j^{(1)})^\alpha (z_j^{(2)})^p| + \mathbf{E}|(Z_j^{(2)} - Z_j^{(1)})^\alpha (z_j^{(3)})^p|] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} [\mathbf{E}|A_j (Z_j^{(1)})^{1+\alpha} (z_j^{(2)})^p| + \mathbf{E}|A_j Z_j^{(1)} (Z_j^{(2)} - Z_j^{(1)})^\alpha (z_j^{(3)})^p|].$$

Используя оценки (25), (26), (28) и неравенства Гельдера, получаем, что $\mathbf{E}|A_J Z_J^{(1)}\nu_J^\alpha|$, $\mathbf{E}|A_J Z_J^{(1)}\gamma_J^\alpha|$, $\mathbf{E}|A_J(Z_J^{(1)})^{1+\alpha}|$ и $\mathbf{E}|A_J Z_J^{(1)}(Z_J^{(2)} - Z_J^{(1)})^\alpha|$ ограничены сверху величиной $(2m+1)^{1+\alpha}n^{-1}L_{2+\alpha}$, а остальные члены выражения I_1' – величиной $(2m+1)^{1+p+\alpha}n^{-1}L_{2+p+\alpha}$. Поэтому

$$I_1' \leqslant C(p,\alpha)n^{-1}\left[(m+1)^{1+\alpha}L_{2+\alpha} + (m+1)^{1+p+\alpha}L_{2+p+\alpha}\right]. \qquad (40)$$

Заметим, что в оценке (40) стало возможным обойтись без использования условия слабой зависимости с.в. (12) за счет того, что I_1' образуют моменты близких с.в.

Величины I_1'' и $|I_2|$ будем оценивать для каждого условия слабой зависимости отдельно.

Пусть последовательность с.в. (12) является m-зависимой. Так как

$$\mathbf{E}|z_j^{(i)}|^p \leqslant (1 \vee 2^{p-1})(\mathbf{E}|Z_n|^p + \mathbf{E}|Z_j^{(i)}|^p), \qquad i = 1,2,$$

то в силу m-зависимости

$$\begin{aligned} I_1'' \leqslant &(1 \vee 2^{p-1})n\Big\{\big[\mathbf{E}|A_J Z_J^{(1)}\nu_J^\alpha| + \mathbf{E}|A_J Z_J^{(1)}\gamma_J^\alpha| + \mathbf{E}|A_J(Z_J^{(1)})^{1+\alpha}| + \\ &+ \mathbf{E}|A_J Z_J^{(1)}(Z_J^{(2)} - Z_J^{(1)})^\alpha|\big]\mathbf{E}|Z_n|^p + \mathbf{E}|A_J Z_J^{(1)}\nu_J^\alpha t_J^p| + \\ &+ \mathbf{E}|A_J Z_J^{(1)}\gamma_J^\alpha \delta_J^p| + \mathbf{E}|A_J(Z_J^{(1)})^{1+\alpha}t_J^p| + \\ &+ \mathbf{E}|A_J Z_J^{(1)}(Z_J^{(2)} - Z_J^{(1)})^\alpha \delta_J^p|\Big\}. \end{aligned} \qquad (41)$$

Множитель при $\mathbf{E}|Z_n|^p$ уже оценен, а при помощи оценок (25), (26), (28) и неравенства Гельдера убеждаемся, что каждый из остальных членов в (41) ограничен сверху по крайней мере величиной $(6m+1)^{1+p+\alpha}n^{-1}L_{2+p+\alpha}$.

Следовательно,

$$I_1'' \leqslant C(p,\alpha)\left[(m+1)^{1+\alpha}L_{2+\alpha}\mathbf{E}|Z_n|^p + (m+1)^{1+p+\alpha}L_{2+p+\alpha}\right]. \qquad (42)$$

В силу m-зависимости $I_2 = 0$. Поэтому для завершения доказательства теоремы 3 достаточно в оценку (39) подставить оценки (40) и (42).

При $p = 0$

$$\begin{aligned} I_1'' = &n[\mathbf{E}|A_J Z_J^{(1)}\nu_J^\alpha| + \mathbf{E}|A_J Z_J^{(1)}\gamma_J^\alpha| + \mathbf{E}|A_J(Z_J^{(1)})^{1+\alpha}| + \\ &+ \mathbf{E}|A_J Z_J^{(1)}(Z_J^{(2)} - Z_J^{(1)})^\alpha|] \end{aligned}$$

входит в выражение для nI_1', и поэтому из (39) и (40) получаем

$$|I_1| \leqslant C(\alpha)H_i^{(0)}m^{1+\alpha}L_{2+\alpha}. \qquad (43)$$

8822

Поэтому из равенства (38) и оценки (43) следует, что если $H_1^{(0)} < \infty$ или $H_2^{(0)} < \infty$, то при любой слабой зависимости последовательности с.в. (12)

$$|\mathbf{E}h(Z_n) - \mathbf{E}h(\mathcal{N})| \leqslant C(\alpha)H_i^{(0)}m^{1+\alpha}L_{2+\alpha} + |I_2|. \tag{44}$$

Пусть последовательность с.в. (12) удовлетворяет условию ψ-перемешивания. Тогда оценивая согласно (9) и учитывая (36) получаем, что

$$\begin{aligned}|I_2| \leqslant 6\|h_0\|_\infty n\big[2\mathbf{E}^{1/2}(A_J Z_j^{(1)})^2 + (2^{3/2} + c_1)\mathbf{E}^{1/2}A_j^2 + \\ + 2^{3/2}\mathbf{E}^{1/2}(A_j^2\nu_j^2)\big]\psi^{1/2}(m+1).\end{aligned} \tag{45}$$

Поэтому в силу (25), (28) и неравенства Гельдера

$$|I_2| \leqslant C\|h\|_\infty n^{1/2}[L_2^{1/2} + mL_4^{1/2}]\psi^{1/2}(m+1). \tag{46}$$

Из оценок (44) и (46) получаем следующий результат.

Утверждение 2. Пусть последовательность с.в. (12) удовлетворяет условию ψ-перемешивания и $\mathbf{E}X_j^4 < \infty$, $j = 1,2,\ldots,n$. Тогда при условии $6m+1 < n$

$$d_i^{(0)} \leqslant C(\alpha)\big\{m^{1+\alpha}L_{2+\alpha} + n^{1/2}[L_2^{1/2} + mL_4^{1/2}]\psi^{1/2}(m+1)\big\}.$$

При условии а.р. величину $|I_2|$ оцениваем при помощи неравенства (10) и аналогично получаем

Утверждение 3. Пусть последовательность с.в. (12) удовлетворяет условию а.р. и $\mathbf{E}X_j^4 < \infty$, $j = 1,2,\ldots,n$. Тогда при условии $6m+1 < n$

$$d_i^{(0)} \leqslant C(\alpha)\big\{m^{1+\alpha}L_{2+\alpha} + [n^{3/4}L_4^{1/4} + mn^{1/2}L_4^{1/2}]\beta^{1/4}(m+1)\big\}.$$

Теоремы 4 и 5 следуют соответственно из утверждений 2 и 3.

Усечение. Как и при оценке $\|\Delta_n(x)\|_1$, усечение с.в. A_j, $j = 1,2,\ldots,n$, производим на уровне $t > 0$ (§2 п.2.1). Напомним вспомогательные с.в.

$$\overline{A}_j^{(0)} = \overline{A}_j - \mathbf{E}\overline{A}_j \quad \text{и} \quad \overline{Z}_n^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} \overline{A}_j^{(0)}.$$

Пусть функция $h \in \mathcal{H}_1^{(0)}$. Тогда для любых вещественных с.в. ξ и η

$$|\mathbf{E}h(\xi) - \mathbf{E}h(\eta)| \leqslant 3H_1^{(0)}\mathbf{E}|\xi - \eta|^\alpha. \tag{47}$$

Легко видеть, что $\mathbf{E}|Z_n - \overline{Z}_n^{(0)}|^\alpha \leqslant 2^\alpha \overline{\overline{L}}_1^\alpha$, а при $\mathbf{E}(\overline{Z}_n^{(0)})^2 > 0$

$$\mathbf{E}|\overline{Z}_n^{(0)}(1 - \mathbf{E}^{-1/2}(\overline{Z}_n^{(0)})^2)|^\alpha \leqslant |1 - \mathbf{E}(\overline{Z}_n^{(0)})^2|^\alpha.$$

Поэтому, оценивая согласно (47), получаем, что при $h \in \mathcal{H}_1^{(0)}$ и $\mathbf{E}(\overline{Z}_n^{(0)})^2 > 0$

$$\begin{aligned}|\mathbf{E}h(Z_n) - \mathbf{E}h(\mathcal{N})| \leqslant & 3H_1^{(0)}[2^\alpha \overline{\overline{L}}_1^\alpha + |1 - \mathbf{E}(\overline{Z}_n^{(0)})^2|^\alpha] + \\ & + |\mathbf{E}h(\overline{Z}_n^{(0)}/\mathbf{E}^{1/2}(\overline{Z}_n^{(0)})^2) - \mathbf{E}h(\mathcal{N})|. \qquad (48)\end{aligned}$$

Ясно, что неравенство усечения (48) имеет место при любой зависимости последовательности с.в. (12). Поэтому для завершения доказательства теорем 6 – 8 остается только применить ее к теоремам 3 – 5.

2.4. Оценка Δ_n

Теорема 9. *Пусть последовательность с.в. (12) является m-зависимой и $\mathbf{E}|X_j|^s < \infty$, $2 < s \leqslant 3$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда для $m \geqslant 0$ и $n \geqslant 1$*

$$\Delta_n \leqslant C(m+1)^{s-1} L_s^*.$$

Теорема 10. *Пусть последовательность с.в. (12) удовлетворяет условию с.п. и $\mathbf{E}|X_j|^s < \infty$, $2 < s \leqslant 3$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда:*

1) *если $\alpha(\tau) \leqslant Ke^{-\lambda\tau}$, то*

$$\Delta_n \leqslant C(K, \lambda, s) L_s^* \ln^{s-1}(n+1);$$

2) *если $\alpha(\tau) \leqslant K\tau^{-\mu}$, где $\mu \geqslant \frac{2(s-1)}{s(s-2)^2}[\beta(5s-6) - (s-2)(3-s)]$, $\beta > 1$, то*

$$\Delta_n \leqslant C(K, \beta, s) n^c d_s,$$

где $c = (4\beta + s^2 - 4)/(2(2\beta - s - 4))$.

При экспоненциальном коэффициенте с.п. степень логарифма можно понизить, но при более жестких ограничениях на моменты слагаемых. Здесь мы приведем и неравномерную оценку, ограничиваясь случаем стационарности в узком смысле.

Теорема 11 [106]. *Пусть стационарная в узком смысле последовательность с.в. (12) удовлетворяет условию с.п. с $\alpha(\tau) \leqslant Ke^{-\lambda\tau}$ и для некоторого $\nu > 0$ $\mathbf{E}|X_1|^{4+\nu} < \infty$. Тогда*

8822

$$\Delta_n \leqslant C(K, \lambda, \nu) n^{-1/2} \ln n$$

и

$$|\Delta_n(x)| \leqslant C(K,\lambda,\nu)\frac{\ln^3 n}{\sqrt{n}(1+|x|)^4}.$$

Для m-зависимых с.в. неравномерная оценка величины $|\Delta_n(x)|$ получена Хейнрихом в работе [184]. В частности, им получен следующий результат.

Теорема 12 [184]. *Пусть последовательность с.в.* (12) *является m-зависимой и* $\mathbf{E}|X_j|^s < \infty$, $2 < s \leqslant 3$, $j = 1,2,\ldots,n$. *Тогда для всех вещественных x и $n \geqslant 1$*

$$|\Delta_n(x)| \leqslant C\frac{(m+1)^{s-1}L_s^*}{(1+|x|)^s}.$$

Заметим, что скорость сходимости в теореме 12 при $s=3$ не может быть улучшена по отношению к n, x (см. [79]) и m (см. [132]).

Мы ограничимся доказательством теорем 9 и 10.

Отметим, что В. В. Шергин ([113], [245]) сумел в теоремах 9 и 12 L_s^* заменить дробью Ляпунова L_s.

Оценка скорости сходимости ф.р. максимальной суммы $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(X_1+\ldots+X_k)$ стационарной в узком смысле последовательности с.в., удовлетворяющей условию с.п., к ф.р. $\sqrt{2/\pi}\int\limits_0^{x^+} e^{-u^2/2}du$, где $x^+ = \max(0,x)$, в равномерной метрике получена А. Н. Тихомировым в работе [108].

Доказательство теорем 9 и 10.

Метод А. Н. Тихомирова (для стационарной в узком смысле последовательности с.в. подробно изложен в работе [106]) состоит в получении линейного дифференциального уравнения для х.ф. $f_n(t) = \mathbf{E}e^{itZ_n}$ центрированной и нормированной суммы Z_n, "близкого" к однородному дифференциальному уравнению $f'(t) = -tf(t)$, решением которого является х.ф. стандартного нормального закона, т.е. $f(t) = e^{-t^2/2}$.

Напомним, что в теоремах 9 и 10 стационарность с.в. (12) не предполагается. Аналогичные оценки величины Δ_n для нестационарной последовательности с.в., удовлетворяющей или условию m-зависимости, или условию с.п., но при дополнительном условии $B_n^2 \geqslant c_0 n$, $0 < c_0 < \infty$, получены в работе [101].

Дополнительно к §2 п.2.1 обозначим

$$\xi_j^{(l)} = e^{it(z_j^{(l-1)}-z_j^{(l)})} - 1, \qquad \eta_j^{(r)} = e^{-itZ_j^{(r)}} - 1,$$

$$a_j^{(r-1)} = \mathbf{E}\Big(iA_j\prod_{l=1}^{r-1}\xi_j^{(l)}\Big), \qquad z_j^{(0)} = Z_n.$$

Поскольку $f_n'(t) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}(iA_j e^{itZ_n})$, то под знаком суммы последовательно прибавляя и вычитая величины $\mathbf{E}(iA_j e^{itz_j^{(1)}})$, $\mathbf{E}(iA_j \xi_j^{(1)} e^{itz_j^{(2)}}), \ldots, \mathbf{E}\big(iA_j \prod_{l=1}^{k-1} \xi_j^{(l)} e^{itz_j^{(k)}}\big)$, получаем, что [106]

$$f_n'(t) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}(iA_j e^{itz_j^{(1)}}) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=2}^{k} \mathbf{E}\Big(iA_j \prod_{l=1}^{r-1} \xi_j^{(l)} e^{itz_j^{(r)}}\Big) + \\ + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\Big(iA_j \prod_{l=1}^{k} \xi_j^{(l)} e^{itz_j^{(k)}}\Big).$$

Учитывая

$$\mathbf{E}e^{itz_j^{(r)}} = \mathbf{E}(\eta_j^{(r)} + 1) f_n(t) + \mathbf{E}[(\eta_j^{(r)} - \mathbf{E}\eta_j^{(r)}) e^{itZ_n}],$$

получаем [101], что производная по t х.ф. $f_n(t)$ равна

$$f_n'(t) = (E_1 + E_2) f_n(t) + E_3 + E_4 + E_5 + E_6, \tag{49}$$

где

$$E_1 = \sum_{j=1}^{n} a_j^{(1)}, \quad E_2 = \sum_{j=1}^{n} \Big[a_j^{(1)} \mathbf{E}\eta_j^{(2)} + \sum_{r=3}^{k} a_j^{(r-1)} \mathbf{E}(\eta_j^{(r)} + 1)\Big],$$

$$E_3 = \sum_{r=2}^{k} \sum_{j=1}^{n} a_j^{(r-1)} \mathbf{E}[(\eta_j^{(r)} - \mathbf{E}\eta_j^{(r)}) e^{itZ_n}],$$

$$E_4 = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\Big(iA_j \prod_{l=1}^{k} \xi_j^{(l)} e^{itz_j^{(k)}}\Big), \quad E_6 = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}(iA_j e^{itz_j^{(1)}}),$$

$$E_5 = \sum_{r=2}^{k} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\Big[iA_j \prod_{l=1}^{r-1} \xi_j^{(l)} (e^{itz_j^{(r)}} - \mathbf{E}e^{itz_j^{(r)}})\Big].$$

Здесь предполагается, что $2km + 1 < n$.

Линейное дифференциальное уравнение (49) является исходным пунктом при доказательстве теорем 9 – 11. Переход от (49) к разности х.ф. будет осуществляться при помощи следующей леммы.

Лемма 6 [101]. *Пусть для $|t| \leqslant T_1$ задано линейное дифференциальное уравнение*

$$f'(t) = (-t + \theta a(t)) f(t) + \theta b(t), \qquad f(0) = 1, \tag{50}$$

где

$$a(t) = a^{(0)} + a^{(1)}|t| + a^{(2)}t^2 + a^{(3)}|t|^{s-1}, \quad 2 < s \leqslant 3,$$
$$b(t) = b^{(0)} + b^{(2)}t^2,$$

коэффициенты $a^{(i)} \geqslant 0$ $(i = 0,1,2,3)$ *и* $b^{(j)} \geqslant 0$ $(j = 0,2)$ *не зависят от* t, θ – *комплексные функции такие, что* $|\theta| \leqslant 1$.

Тогда, если $a^{(1)} \leqslant 1/6$, *то для* $|t| \leqslant \min(T_1; T_2)$

$$|f(t) - e^{-t^2/2}| \leqslant C[a^{(0)}|t| + a^{(1)}t^2 + a^{(2)}|t|^3 + a^{(3)}|t|^s]e^{-t^2/4} + \\ + C[b^{(0)}\min(|t|^{-1}; |t|) + b^{(2)}|t|], \tag{51}$$

где

$$T_2 = \min\left\{\frac{1}{a^{(0)}}; \frac{1}{6a^{(2)}}; \left(\frac{1}{6a^{(3)}}\right)^{1/(s-2)}\right\}.$$

Из леммы 6 и неравенства Эссеена (см., например, [79], с. 154) легко следует такое утверждение:

Если х.ф. $f(t) = \mathbf{E}e^{it\xi}$ вещественной с.в. ξ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению (50) при $|t| \leqslant T_1$, то

$$\sup_x |\mathbf{P}(\xi < x) - \Phi(x)| \leqslant C(a^{(0)} + a^{(1)} + a^{(2)} + a^{(3)} + b^{(0)} + b^{(2)}T_1 + T_1^{-1}). \tag{52}$$

Поэтому при оценке величины Δ_n все внимание будет направлено на получение линейного дифференциального уравнения типа (50) для х.ф. $f_n(t)$, с тем чтобы его коэффициенты и T_1 обеспечивали оценку для Δ_n как можно более близкую к оптимальной.

Приступим к доказательству теорем 9 и 10.

Предположим, что $\mathbf{E}|X_j|^s < \infty$, $2 < s \leqslant 3$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Заметим, что при любой зависимости

$$E_1 = -t\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}(A_j Z_j^{(1)}) + \theta(2^{3-s}/(s-1))(2m+1)^{s-1}L_s|t|^{s-1}. \tag{53}$$

Пусть, теперь, последовательность с.в. (12) является m-зависимой. Тогда

$$E_1 = -t + \theta(2^{3-s}/(s-1))(2m+1)^{s-1}L_s|t|^{s-1}. \tag{54}$$

Легко видеть, что

$$\mathbf{E}^{1/2}|\xi_j^{(l)}|^2 \leqslant \sqrt{2}(m+1)d_s^{1/s}|t|, \tag{55}$$

$$\mathbf{E}^{1/2}|\eta_j^{(r)}|^2 \leqslant \sqrt{2r}(m+1)d_s^{1/s}|t|. \tag{56}$$

В силу m-зависимости и (55),

$$|a_j^{(r-1)}| \leqslant \mathbf{E}^{1/2}A_j^2 \prod_{l=1}^{r-1} \mathbf{E}^{1/2}|\xi_j^{(l)}|^2 \leqslant$$
$$\leqslant d_s^{1/s}\left(\sqrt{2}(m+1)d_s^{1/s}|t|\right)^{r-1} = a^{(r-1)}. \tag{57}$$

Так как

$$|E_2| \leqslant \sum_{j=1}^{n}\left[|a_j^{(1)}|\mathbf{E}|\eta_j^{(2)}| + \sum_{r=3}^{k}|a_j^{(r-1)}|\right], \tag{58}$$

то, учитывая (56) и (57), получаем, что для $|t| \leqslant (\sqrt{2}e^2(m+1)d_s^{1/s})^{-1} = T_1$

$$|E_2| \leqslant C(m+1)^2 n d_s^{3/s} t^2. \tag{59}$$

В силу m-зависимости, оценок (56) и (57), получаем для $|t| \leqslant T_1$

$$|E_3| \leqslant \sum_{r=2}^{k} a^{(r-1)}\Bigl(\sum_{j=1}^{n}\sum_{|p-j|\leqslant 3rm} \mathbf{E}^{1/2}|\eta_j^{(r)}|^2\mathbf{E}^{1/2}|\eta_p^{(r)}|^2\Bigr)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant C(m+1)^{5/2}n^{1/2}d_s^{3/s}t^2. \tag{60}$$

В силу (57) для $k \geqslant 2 + (\ln n/4)$ и $|t| \leqslant T_1$

$$|E_4| \leqslant na^{(k)} \leqslant C(m+1)^2 n^{1/2} d_s^{3/s} t^2. \tag{61}$$

Поскольку благодаря m-зависимости $E_5 = E_6 = 0$, то подставляя в равенство (49) оценки (54), (59) – (61) получаем, что при условиях $2km + 1 < n$, $k \geqslant 2 + (\ln n/4)$ и $|t| \leqslant T_1$

$$f_n'(t) = (-t + \theta a_n(t))f_n(t) + \theta b_n(t), \tag{62}$$

где

$$a_n(t) = a_n^{(2)}t^2 + a_n^{(3)}|t|^{s-1}, \qquad b_n(t) = b_n^{(2)}t^2,$$
$$a_n^{(2)} = C(m+1)^2 n d_s^{3/s}, \qquad a_n^{(3)} = C(m+1)^{s-1}L_s^*,$$
$$b_n^{(2)} = C(m+1)^{5/2}n^{1/2}d_s^{3/s}.$$

Из соотношений (52) и (62) следует утверждение теоремы 9 при $m+1 < n/(C\ln(n+1))$, $C > 1$.

Для всех $m \geqslant 0$ утверждение теоремы 9 следует из третьего неравенства леммы 7 §2 п.2.5 и неравенства Эссеена.

Пусть, теперь, последовательность с.в. (12) удовлетворяет условию с.п.

Обозначим $z_j^{(i)} = \widehat{z}_j^{(i)} + \widehat{\widehat{z}}_j^{(i)}$, где $\widehat{z}_j^{(i)}$ есть сумма тех A_p из $z_j^{(i)}$, для которых $p < j - im$, а $\widehat{\widehat{z}}_j^{(i)}$ – сумма тех A_p из $z_j^{(i)}$, для которых $p > j + im$.

Тогда, согласно (6),

$$\sum_{j=1}^{n} |\mathrm{E}(A_j z_j^{(1)})| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left[|\mathrm{E}(A_j \widehat{z}_j^{(1)})| + |\mathrm{E}(A_j \widehat{\widehat{z}}_j^{(1)})|\right] \leqslant$$
$$\leqslant 6n^2 d_s^{2/s} (\alpha(m+1))^{(s-2)/s}.$$

Поэтому из (53) имеем

$$E_1 = -t + \theta(2^{3-s}/(s-1))(2m+1)^{s-1} L_s^* |t|^{s-1} + \\ + \theta 6n^2 d_s^{2/s} (\alpha(m+1))^{(s-2)/s} |t|. \tag{63}$$

Обозначим $\widehat{\xi}_j^{(l)} = e^{itx} - 1$, $\widehat{\widehat{\xi}}_j^{(l)} = e^{ity} - 1$, где $x = \sum_{p=j-lm}^{j-(l-1)m-1} A_p$, $y = \sum_{p=j+(l-1)m+1}^{j+lm} A_p$. Тогда, согласно неравенству Минковского, для $1 \leqslant \mu \leqslant s$

$$\max\left\{\mathrm{E}^{1/\mu}|\widehat{\xi}_j^{(l)}|^{\mu};\ \mathrm{E}^{1/\mu}|\widehat{\widehat{\xi}}_j^{(l)}|^{\mu}\right\} \leqslant (m+1) d_s^{1/s} |t|, \tag{64}$$

$$\mathrm{E}^{1/\mu}|\eta_j^{(r)}|^{\mu} \leqslant (2rm+1) d_s^{1/s} |t| = \eta^{(r)}. \tag{65}$$

Аналогично

$$a_j^{(1)} \leqslant (2m+1) d_s^{2/s} |t|. \tag{66}$$

Оценим $a_j^{(r-1)}$ при $r = 3, 4, \ldots, k$. Так как $|\xi_j^{(l)}| \leqslant |\widehat{\xi}_j^{(l)}| + |\widehat{\widehat{\xi}}_j^{(l)}|$, то

$$|a_j^{(r-1)}| \leqslant \sum_{p=0}^{r-1} \sum{}^{*} \mathrm{E}\left|A_j \prod_{\nu=1}^{p} \widehat{\xi}_j^{(l_\nu)} \prod_{\mu=p+1}^{r-1} \widehat{\widehat{\xi}}_j^{(l_\mu)}\right|, \tag{67}$$

где $\sum^*$ означает сумму по всем наборам индексов $1 \leqslant l_1 < l_2 < \ldots < l_p \leqslant r-1$ и $1 \leqslant l_{p+1} < l_{p+2} < \ldots < l_{r-1} \leqslant r-1$ таких, что $l_\nu \neq l_\mu$ при $\nu \neq \mu$ (см. [106]).

Согласно неравенству Гельдера,

$$\mathbf{E}\left|A_j\prod_{\nu=1}^{p}\hat{\xi}_j^{(l\nu)}\prod_{\mu=p+1}^{r-1}\hat{\hat{\xi}}_j^{(l\mu)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{E}^{1/s}\left|\prod_{\nu}{}'\hat{\xi}_j^{(l\nu)}\prod_{\mu}{}'\hat{\hat{\xi}}_j^{(l\mu)}\right|^{s}\mathbf{E}^{(s-1)/s}\left|A_j\prod_{\nu}{}''\hat{\xi}_j^{(l\nu)}\prod_{\mu}{}''\hat{\hat{\xi}}_j^{(l\mu)}\right|^{s/(s-1)},$$

где $\prod''$ и $\prod'$ соответственно означают произведения по всем четным и нечетным l от 1 до $r-1$.

Пусть $r-1$ – четное число (если $r-1$ нечетное число, то поступаем таким же образом). Обозначим $(\cdot) = (m+1)d_s^{1/s}|t|$. Тогда, согласно (7), (8) и (64),

$$\mathbf{E}\left|\prod_{\nu}{}'\hat{\xi}_j^{(l\nu)}\prod_{\mu}{}'\hat{\hat{\xi}}_j^{(l\mu)}\right|^{s} \leqslant (\cdot)^{s(r-1)/2} + 8(r-3)2^{s(r-1)/2}\alpha(m+1),$$

$$\mathbf{E}\left|A_j\prod_{\nu}{}''\hat{\xi}_j^{(l\nu)}\prod_{\mu}{}''\hat{\hat{\xi}}_j^{(l\mu)}\right|^{s/(s-1)} \leqslant d_s^{1/(s-1)}\Big[(\cdot)^{s(r-1)/(2(s-1))}+$$

$$+\,8(r-1)2^{s(r-1)/(2(s-1))}(\alpha(m+1))^{(s-2)/(s-1)}\Big].$$

Поэтому

$$\mathbf{E}\left|A_j\prod_{\nu=1}^{p}\hat{\xi}_j^{(l\nu)}\prod_{\mu=p+1}^{r-1}\hat{\hat{\xi}}_j^{(l\mu)}\right| \leqslant 8d_s^{1/s}(\alpha(m+1))^{(s-1)/s}(r-1)2^{r-1}+$$

$$+\,d_s^{1/s}(\cdot)^{r-1} + 7d_s^{1/s}(2(\cdot))^{(r-1)/2}(\alpha(m+1))^{(s-2)/s}(r-1).$$

Так как слагаемых в (67) не более чем 2^{r-1}, то получаем для $|t| \leqslant (32(m+1)d_s^{1/s})^{-1} = T_3$ и $r = 3, 4, \ldots, k$

$$|a_j^{(r-1)}| \leqslant C\Big\{m^2 d_s^{3/s}t^2\left(\frac{1}{2}\right)^{4r}+$$

$$+\,d_s^{1/s}(\alpha(m+1))^{(s-2)/s}\left[r\left(\frac{1}{2}\right)^{r} + r4^r(\alpha(m+1))^{1/s}\right]\Big\} = a^{(r-1)}. \quad (68)$$

Теперь уже можно оценить $|E_4|$. Получаем для $k \geqslant \ln n/ /(8\ln 2) \geqslant 3$ и $|t| \leqslant T_3$

$$|E_4| \leqslant na^{(k)} \leqslant C\left[m^2 n^{1/2} d_s^{3/s} t^2 + d_s^{1/s} n(\alpha(m+1))^{(s-2)/s}\right]. \quad (69)$$

Слагаемые E_2, E_3 и E_5 оценим при дополнительном условии

$$k^{3/2}4^k(\alpha(m+1))^{1/s} \leqslant 1. \tag{70}$$

Подставляя в (58) оценки (66), (65) и (68), получаем при условии (70) для $|t| \leqslant T_3$

$$|E_2| \leqslant C\big[m^2 n d_s^{3/s} t^2 + n d_s^{1/s}(\alpha(m+1))^{(s-2)/s}\big]. \tag{71}$$

Пусть $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)\overline{(\eta - \mathbf{E}\eta)}$. Поскольку в силу (6)

$$|E_3| \leqslant \sum_{r=2}^{k} a^{(r-1)}\Big(\sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}|\operatorname{cov}(\eta_j^{(r)},\eta_p^{(r)})|\Big)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{r=2}^{k} a^{(r-1)}\Big\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{|p-j|\leqslant 2rm}\mathbf{E}^{1/2}|\eta_j^{(r)}|^2\mathbf{E}^{1/2}|\eta_p^{(r)}|^2 +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{|p-j|>2rm} 24\mathbf{E}^{1/s}|\eta_j^{(r)}|^s\mathbf{E}^{1/s}|\eta_p^{(r)}|^s(\alpha(|p-j|-2rm))^{(s-2)/s}\Big\}^{1/2},$$

то, учитывая (66), (65) и (68), получаем при условии (70) для $|t| \leqslant T_3$

$$|E_3| \leqslant C\big[m^{1/2} + A_{n,s}^{1/2}\big]\big[m^2 n^{1/2} d_s^{3/s} t^2 + n^{1/2} d_s^{1/s}(\alpha(m+1))^{(s-2)/s}\big]. \tag{72}$$

Из определения $z_j^{(r)}$ имеем, что $\widehat{z}_j^{(r)}$ и $\widehat{\widehat{z}}_j^{(r)}$ не могут быть равными нулю одновременно. Будем считать, что $\widehat{z}_j^{(r)} \neq 0$ и $\widehat{\widehat{z}}_j^{(r)} \neq 0$ (в противном случае выкладки лишь упрощаются). Заметим, что

$$\Big|\mathbf{E}\Big[iA_j\prod_{l=1}^{r-1}\xi_j^{(l)}(e^{itz_j^{(r)}} - \mathbf{E}e^{itz_j^{(r)}})\Big]\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Big|\mathbf{E}\Big(iA_j\prod_{l=1}^{r-1}\xi_j^{(l)}e^{itz_j^{(r)}}\Big) - \mathbf{E}\Big(iA_j\prod_{l=1}^{r-1}\xi_j^{(l)}e^{it\widehat{z}_j^{(r)}}\Big)\mathbf{E}e^{it\widehat{\widehat{z}}_j^{(r)}}\Big| +$$

$$+\Big|\mathbf{E}\Big[iA_j\prod_{l=1}^{r-1}\xi_j^{(l)}(e^{it\widehat{z}_j^{(r)}} - \mathbf{E}e^{it\widehat{z}_j^{(r)}})\Big]\Big| +$$

$$+\Big|\mathbf{E}e^{it\widehat{z}_j^{(r)}}\mathbf{E}e^{it\widehat{\widehat{z}}_j^{(r)}} - \mathbf{E}e^{itz_j^{(r)}}\Big|\cdot\Big|\mathbf{E}\Big(iA_j\prod_{l=1}^{r-1}\xi_j^{(l)}\Big)\Big|.$$

Правую часть последнего неравенства оцениваем, согласно неравенствам (5) и (4), и убеждаемся, что она не превышает величины $48\cdot 2^{r-1} d_s^{1/s}(\alpha(m+1))^{(s-1)/s}$. Складывая полученные неравенства по всем j и r, получаем при условии (70)

$$|E_5| \leqslant 48 n d_s^{1/s}(\alpha(m+1))^{(s-2)/s}. \tag{73}$$

Аналогично оцениваем и $|E_6|$. Получаем, что

$$|E_6| \leqslant 32 n d_s^{1/s}(\alpha(m+1))^{(s-1)/s}. \tag{74}$$

Обозначим $A_s = \sum\limits_{\tau=1}^{\infty}(\alpha(\tau))^{(s-2)/s}$. Подставляя в равенство (49) оценки (63), (69), (71) – (74), получаем: если $A_s < \infty$, $k^{3/2}4^k(\alpha(m+1))^{1/s} \leqslant 1$, $3 \leqslant \ln n/(8\ln 2) \leqslant k$ и $2k(m+1) \leqslant n$, то для $|t| \leqslant T_3$

$$f_n'(t) = (-t + \theta a_n(t)) f_n(t) + \theta b_n(t), \tag{75}$$

где

$$a_n(t) = a_n^{(0)} + a_n^{(1)}|t| + a_n^{(2)}t^2 + a_n^{(3)}|t|^{s-1},$$
$$b_n(t) = b_n^{(0)} + b_n^{(2)}t^2,$$

$$a_n^{(0)} = Cnd_s^{1/s}(\alpha(m+1))^{(s-2)/s}, \qquad a_n^{(1)} = Cn^2 d_s^{2/s}(\alpha(m+1))^{(s-2)/s},$$
$$a_n^{(2)} = Cm^2 n d_s^{3/s}, \qquad a_n^{(3)} = Cm^{s-1}L_s^*,$$
$$b_n^{(0)} = C(A_s) n d_s^{1/s}(\alpha(m+1))^{(s-2)/s}, \quad b_n^{(2)} = C(A_s) m^{5/2} n^{1/2} d_s^{3/s}.$$

Поскольку дифференциальные уравнения (50) и (75) имеют одинаковый вид, то из (52) получаем

Утверждение 4. Пусть последовательность с.в. (12) удовлетворяет условию с.п., $\mathbf{E}|X_j|^s < \infty$, $2 < s \leqslant 3$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $A_s < \infty$ и $k^{3/2}4^k(\alpha(m+1))^{1/s} \leqslant 1$, где целые положительные числа k и m такие, что $3 \leqslant \ln n/(8\ln 2) \leqslant k$, $2k(m+1) \leqslant n$. Тогда

$$\Delta_n \leqslant C(A_s)\left[m^{s-1}L_s^* + n^2 d_s^{2/s}(\alpha(m+1))^{(s-2)/s}\right].$$

Остается только подобрать k и m в зависимости от скорости убывания коэффициента с.п.

При экспоненциальном убывании коэффициента с.п. утверждение теоремы 10 для $n > C(K, \lambda, s)$ следует из утверждения 4 при $m = \left[\frac{3s}{\lambda(s-2)}\ln(n+1)\right]$ и $k = \left[\frac{1}{(s-2)}\ln(n+1)\right]$.

При степенном убывании коэффициента с.п. утверждение теоремы 10 для $n > C(K, \beta, s)$ следует из утверждения 4 при $m = [n^\varepsilon]$, $\varepsilon = s(s-2)/(2(s-1)(2\beta+s-2))$ и $k = \left[\frac{5\beta}{8(2\beta+1)}\ln(n+1)\right]$.

Для малых n утверждение теоремы 10 следует из оценки (17).

2.5. О методе Хейнриха для m-зависимых с.в.

Метод Хейнриха [179] является достаточно общим методом получения разных предельных теорем для сумм Z_n m-зависимых с.в. и основывается на факторизации х.ф. $f_n(t) = \mathbf{E}e^{itZ_n}$ (производящей функции моментов $\mathbf{E}e^{zZ_n}$, $z \in C^1$) в некоторой окрестности точки $t = 0$ $(z = 0)$.

Здесь мы ограничимся изложением факторизации только для х.ф. $f_n(t)$. Используя уже полученную факторизацию для х.ф. $f_n(t)$, можно получить, например, такие результаты для сумм m-зависимых с.в. и случайных векторов: сходимость к неограниченным распределениям, равномерные и неравномерные оценки скорости сходимости в ЦПТ, асимптотические разложения, умеренные и большие уклонения и т.д.

Суть метода Хейнриха мы покажем ограничиваясь доказательством только одной леммы.

Лемма 7. *Пусть последовательность с.в.* (12) *является m-зависимой и* $\mathbf{E}|X_j|^s < \infty$, $2 < s \leqslant 3$, $j = 1, 2, \ldots, n$. *Тогда для* $m \geqslant 0$ *в интервале*

$$|t| \leqslant \left(\frac{1-2c}{2C_1(s)} \cdot \frac{1}{(m+1)^{s-1}L_s^*}\right)^{1/(s-2)} = T_4$$

имеют место следующие неравенства:

1) $\left|\ln f_n(t) + \frac{t^2}{2}\right| \leqslant C_1(s)(m+1)^{s-1}L_s^*|t|^s$,

2) $|f_n(t)| \leqslant e^{-ct^2}$,

3) $|f_n(t) - e^{-t^2/2}| \leqslant C_1(s)(m+1)^{s-1}L_s^*|t|^s e^{-ct^2}$,

где

$$C_1(s) = \left(149 + \frac{1}{s}\right)\frac{2^{4-s}}{s-1}, \qquad 0 < c < 1/2.$$

При $s = 3$ лемма 7 (с другими константами) следует из следствия 3.2 работы Хейнриха [179].

Поскольку для любого комплексного числа z $|e^z| \leqslant e^{|z|}$ и $|e^z - 1| \leqslant |z|e^{|z|}$, то второе и третье неравенства леммы 7 следуют из первого.

Для доказательства первого неравенства леммы 7 нам понадобится несколько вспомогательных утверждений.

Для любой последовательности комплексных с.в. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ в предположении, что $\mathbf{E}|\xi_j|^k < \infty$, $j = 1, 2, \ldots, k$, символ $\widehat{\mathbf{E}}\xi_1\xi_2\ldots\xi_k$

определим так: $\widehat{\mathbf{E}}\xi_1 = \mathbf{E}\xi_1$, а при $k \geqslant 2$ (см. [179])

$$\widehat{\mathbf{E}}\xi_1\xi_2\ldots\xi_k = \mathbf{E}\xi_1\xi_2\ldots\xi_k - \sum_{j=1}^{k-1}\widehat{\mathbf{E}}\xi_1\ldots\xi_j\mathbf{E}\xi_{j+1}\ldots\xi_k. \tag{76}$$

Этот символ другим способом впервые был введен В. Статулявичусом [96] и известен под названием центрированных моментов. Среди многих интересных свойств центрированных моментов выделим следующие.

Лемма 8 [179]. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ являются 1-зависимыми комплексными с.в. Тогда:*

1) *если* $\mathbf{E}|\xi_j|^k < \infty$, $j = 1, 2, \ldots, k$, *то*

$$\widehat{\mathbf{E}}(\xi_1 + a_1)(\xi_2 + a_2)\ldots(\xi_k + a_k) = \widehat{\mathbf{E}}\xi_1\xi_2\ldots\xi_k, \tag{77}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_k$ – любые комплексные числа;

2) *если* $\mathbf{E}|\xi_j|^2 < \infty$, $j = 1, 2, \ldots, k$, *то*

$$|\widehat{\mathbf{E}}\xi_1\xi_2\ldots\xi_k| \leqslant 2^{k-1}\prod_{j=1}^{k}\mathbf{E}^{1/2}|\xi_j|^2. \tag{78}$$

Для последовательности m-зависимых с.в. (12) образуем новые 1-зависимые с.в.

$$Y_j = \sum_{p=(j-1)(m+1)+1}^{j(m+1)} A_p, \qquad j = 1, 2, \ldots, N = [n/(m+1)],$$

$$Y_{N+1} = \begin{cases} \sum\limits_{p=N(m+1)+1}^{n} A_p, & \text{если } N(m+1) < n, \\ 0, & \text{если } N(m+1) = n, \end{cases}$$

где $[x]$ означает целую часть числа x.

Обозначим $U_j = \sum\limits_{i=1}^{j} Y_i$, $j = 1, 2, \ldots, N+1$, $w = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant N+1} \mathbf{E}^{1/2}|e^{itY_j} - 1|^2$ и $u_j(t) = 2\mathbf{E}^{1/2}|e^{itY_{j-1}} - 1|^2\mathbf{E}^{1/2}|e^{itY_j} - 1|^2$.

Тогда имеет место следующая

Лемма 9 [179]. *Если $w \leqslant 1/6$, то*

1) $$f_n(t) = \prod_{j=1}^{N+1} g_j(t), \tag{79}$$

где $g_1(t) = \mathbf{E}e^{itY_1}$, *а при* $j = 2, 3, \ldots, N+1$

$$g_j(t) = \frac{\mathbf{E}e^{itU_j}}{\mathbf{E}e^{itU_{j-1}}} =$$

$$= \mathbf{E}e^{itY_j} + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\widehat{\mathbf{E}}(e^{itY_i} - 1)(e^{itY_{i+1}} - 1)\ldots(e^{itY_j} - 1)}{\prod_{p=i}^{j-1} g_p(t)}; \qquad (80)$$

2) *для* $j = 1, 2, \ldots, N+1$

$$|g_j(t) - 1| \leqslant |\mathbf{E}e^{itY_j} - 1| + 3u_j(t) \leqslant \qquad (81)$$

$$\leqslant 2w. \qquad (82)$$

Лемма 9 доказывается по индукции с использованием соотношений (76) – (78).

В силу (80),

$$\sum_{j=1}^{N+1} [g_j(t) - 1] = \sum_{j=1}^{N+1} (\mathbf{E}e^{itY_j} - 1) +$$

$$+ \sum_{j=2}^{N+1} \sum_{i=1}^{j-1} \left(\frac{1}{g_i(t) \ldots g_{j-1}(t)} - 1 \right) \widehat{\mathbf{E}}(e^{itY_i} - 1)\ldots(e^{itY_j} - 1) +$$

$$+ \sum_{j=3}^{N+1} \sum_{i=1}^{j-2} \widehat{\mathbf{E}}(e^{itY_i} - 1)\ldots(e^{itY_j} - 1) +$$

$$+ \sum_{j=2}^{N+1} \widehat{\mathbf{E}}(e^{itY_{j-1}} - 1)(e^{itY_j} - 1).$$

Поскольку $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{N+1}$ являются 1-зависимыми с.в. с нулевыми математическими ожиданиями, то

$$\frac{t^2}{2} = \sum_{j=1}^{N+1} \left[\mathbf{E}e^{itY_j} - 1 - \frac{(it)^2}{2} \mathbf{E}Y_j^2 \right] +$$

$$+ \sum_{j=2}^{N+1} \left[\widehat{\mathbf{E}}(e^{itY_{j-1}} - 1)(e^{itY_j} - 1) - (it)^2 \mathbf{E}(Y_{j-1}Y_j) \right] -$$

$$- \sum_{j=1}^{N+1} (\mathbf{E}e^{itY_j} - 1) - \sum_{j=2}^{N+1} \widehat{\mathbf{E}}(e^{itY_{j-1}} - 1)(e^{itY_j} - 1).$$

Складывая последние два равенства, получаем, что если последовательность с.в. (12) является m-зависимой и $\mathbf{E}|X_j|^s < \infty$, $2 < s \leqslant 3$, $j = 1, 2, \ldots, n$, то

$$\ln f_n(t) + \frac{t^2}{2} = \Sigma_1 + \ldots + \Sigma_5, \tag{83}$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{j=1}^{N+1} \left[\ln g_j(t) - (g_j(t) - 1)\right],$$

$$\Sigma_2 = \sum_{j=2}^{N+1} \sum_{i=1}^{j-1} \left(\frac{1}{g_i(t) \ldots g_{j-1}(t)} - 1\right) \widehat{\mathbf{E}}(e^{itY_i} - 1) \ldots (e^{itY_j} - 1),$$

$$\Sigma_3 = \sum_{j=3}^{N+1} \sum_{i=1}^{j-2} \widehat{\mathbf{E}}(e^{itY_i} - 1) \ldots (e^{itY_j} - 1),$$

$$\Sigma_4 = \sum_{j=1}^{N+1} \left[\mathbf{E}e^{itY_j} - 1 - \frac{(it)^2}{2}\mathbf{E}Y_j^2\right],$$

$$\Sigma_5 = \sum_{j=2}^{N+1} \left[\widehat{\mathbf{E}}(e^{itY_{j-1}} - 1)(e^{itY_j} - 1) - (it)^2 \mathbf{E}(Y_{j-1}Y_j)\right].$$

Всюду далее при оценке правой части равенства (83) предполагаем, что $w \leqslant 1/6$.

В силу элементарного неравенства $|\ln z - (z-1)| \leqslant |z-1|^2$, имеющего место при $|z-1| \leqslant 1/2$, и оценок (81) – (82), следует

$$|E_1| \leqslant 2w \sum_{j=1}^{N+1} |\mathbf{E}e^{itY_j} - 1| + 6w \sum_{j=2}^{N+1} u_j(t). \tag{84}$$

Согласно (82),

$$\left|\frac{1}{g_i(t) \ldots g_{j-1}(t)} - 1\right| \leqslant 3(j-i)2^{j-i-1} w,$$

поэтому используя оценку (78), получаем

$$|\Sigma_2| \leqslant 27w \sum_{j=2}^{N+1} u_j(t). \tag{85}$$

Оценка (78) обеспечивает и оценку

$$|\Sigma_3| \leqslant 3w \sum_{j=3}^{N+1} u_j(t). \tag{86}$$

Поскольку для $2 < s \leqslant 3$

$$|e^{ix} - 1| \leqslant 2^{3-s}|x|^{s-2},$$
$$|e^{ix} - 1 - ix| \leqslant (2^{3-s}/(s-1))|x|^{s-1},$$
$$\left|e^{ix} - 1 - ix - \frac{(ix)^2}{2}\right| \leqslant (2^{3-s}/(s-1)s)|x|^s,$$

то

$$|\Sigma_4| \leqslant (2^{3-s}/(s-1)s)|t|^s \sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{E}|Y_j|^s, \tag{87}$$

$$|\Sigma_5| \leqslant 3(2^{3-s}/(s-1))|t|^s \sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{E}|Y_j|^s, \tag{88}$$

$$w \sum_{j=1}^{N+1} |\mathbf{E}e^{itY_j} - 1| \leqslant (2^{3-s}/(s-1))(N+1) \max_{1 \leqslant j \leqslant N+1} \mathbf{E}|Y_j|^s |t|^s. \tag{89}$$

В силу того, что

$$\sum_{j=2}^{N+1} u_j(t) \leqslant 4 \sum_{j=1}^{N+1} |\mathbf{E}e^{itY_j} - 1|,$$

складывая оценки (84) – (88) и используя оценку (89), получаем, что при $w \leqslant 1/6$

$$\left|\ln f_n(t) + \frac{t^2}{2}\right| \leqslant C_1(s)(m+1)^{s-1} L_s^* |t|^s. \tag{90}$$

Остается заметить, что $w \leqslant 1/6$ при $|t| \leqslant T_4$. Следовательно, первое неравенство леммы 7, а тем самым и само утверждение леммы 7 доказаны.

Из леммы 9 видно, что функции $g_j(t)$, через произведение которых выражается х.ф. суммы Z_n, хотя и не являются х.ф., ведут себя примерно так же, как и х.ф. величин Y_j. Это подтверждает, например, и следующая лемма.

Лемма 10 [179]. *Пусть последовательность с.в.* (12) *является m-зависимой и* $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \mathbf{E}|X_j|^p < \infty$ *для некоторого* $p = 1,2,\ldots$. *Тогда при* $w \leqslant 1/6$

1) $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant N+1} \left|\frac{d^p}{dt^p} g_j(t)\right| \leqslant C(p) \max\limits_{1\leqslant j\leqslant N+1} \mathbf{E}|Y_j|^p$,

2) $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant N+1} \left|\frac{d^p}{dt^p} \ln g_j(t)\right| \leqslant C(p) \max\limits_{1\leqslant j\leqslant N+1} \mathbf{E}|Y_j|^p$,

где постоянные $C(p)$ могут быть явно вычислены.

Поэтому лемма 9 играет основополагающую роль при исследовании предельного закона для распределения нормированной суммы Z_n m-зависимых с.в. (см. работы Хейнриха [179] – [184]).

§ 3. Оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме для слабо зависимых случайных полей

Пусть $Z^d = \{a = (a_1,\ldots,a_d) :\ a_i \in \{0;\ \pm 1;\ \ldots\},\ i = 1,2,\ldots,d\}$, $\|a\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant d} |a_i|$, $\mathcal{V} = \{V \subset Z^d :\ |V| < \infty\}$, где $|V| = \#\{a :\ a \in V\}$ – число элементов множества V. Расстояние между $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ определим следующим образом: $d(V_1,V_2) = \min\{\|a - b\| :\ a \in V_1, b \in V_2\}$. Через $\mathcal{F}_V$ обозначим σ-алгебру событий, порожденную с.в. $\{X_a, a \in V\}$.

Далее будем рассматривать вещественное случайное поле $\{X_a, a \in Z^d\}, d \geqslant 1$, удовлетворяющее одному из следующих условий слабой зависимости:

1) m-зависимость: для $\forall V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ при $d(V_1,V_2) > m$ σ-алгебры $\mathcal{F}_{V_1}$ и $\mathcal{F}_{V_2}$ независимы;

2) сильное перемешивание (с.п.): если существуют функции $M : Z_+^2 \to [1,\infty)$ и $\alpha : N \to [0,\infty)$ такие, что M является неубывающей по каждому аргументу, $\alpha(r) \downarrow 0$ при $r \uparrow \infty$, и для $\forall V_1, V_2 \in \mathcal{V}$

$$\sup_{\substack{A\in\mathcal{F}_{V_1}\\ B\in\mathcal{F}_{V_2}}} |\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A,\mathbf{P}(B)| \leqslant M(|V_1|,|V_2|)\alpha(d(V_1,V_2))).$$

Определение этих и других коэффициентов перемешивания для случайных полей, а также библиографию вопроса можно найти, например, в работах [33], [150], [255], [13], [254], [102], [75].

Пусть

$$\{X_a,\ a \in Z^d\},\quad d \geqslant 1, \tag{91}$$

– вещественное случайное поле с $\mathbf{E}X_a = 0$ и $\mathbf{E}X_a^2 < \infty$ для $a \in V$.

При $V \in \mathcal{V}$, $V \neq \phi$, обозначим

$$S_V = \sum_{a \in V} X_a, \qquad B_V^2 = \mathbf{E} S_V^2, \qquad Z_V = S_V / B_V,$$

$$F_V(x) = \mathbf{P}(Z_V < x), \qquad A_a = X_a / B_V, \qquad L_r = \sum_{a \in V} \mathbf{E}|A_a|^r,$$

$$L_s^* = |V| d_s, \qquad d_s = \max_{a \in V} \mathbf{E}|A_a|^s, \qquad \Delta_V(x) = F_V(x) - \Phi(x),$$

$$\Delta_V = \sup_x |\Delta_V(x)|, \qquad ||\Delta_V(x)||_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Delta_V(x)|\, dx,$$

$$d_i^{(p)}(F_V, \Phi) = \sup_{h \in \mathcal{H}_i^{(p)}} |\mathbf{E}h(Z_V) - \mathbf{E}h(\mathcal{N})| / ||h||_{BH_i^{(p)}},$$

где класс $\mathcal{H}_i^{(p)}$ функций $h : R \to R$ с нормой $||h||_{BH_i^{(p)}}$ определен в §2 п.2.1, $i = 1, 2$.

Оценивание скорости сходимости в ЦПТ для слабо зависимых случайных полей проводилось на пути обобщения методов, развитых для последовательностей слабо зависимых с.в. Со специфическими трудностями, которые приходится преодолевать, например, при оценке величины Δ_V для мультииндексированных слагаемых, с особенностями перемешивания полей, с вопросом о границах применимости метода С. Н. Бернштейна к случайным полям и с другими близкими вопросами подробно можно ознакомиться по книге А. В. Булинского [13].

В случае m-зависимых случайных полей оценка величины Δ_V для целочисленных параллелепипедов $V \subset Z^d$ была получена в работе Н. Н. Леоненко [60], откуда при $d = 1$ получается приведенный выше результат В. В. Петрова [78]. Обобщая работу Маеджимы [206] для с.в., Рао [228] для m-зависимых случайных полей получил неравномерную оценку величины $|\Delta_V(x)|$ для целочисленных параллелепипедов V. Им, в частности, высказывалась гипотеза о том, что даже для m-зависимого случайного поля невозможно получить оценку для величины Δ_V порядка $O(|V|^{-\gamma})$, где $0 < \gamma \leqslant 1/2$. Эта гипотеза была опровергнута в работах Такахаты [254] и Гюйона и Ричардсона [176]. Более точная (по сравнению с оценками работ [60] и [228]) равномерная оценка для слабо зависимых случайных адитивных функций (охватывающих класс m-зависимых) была получена в работе А. В. Булинского [6]. Впоследствии им же эта оценка была усилена в работе [150]. В работах [60], [6], [228] доказательства проводятся методом С. Н. Бернштейна.

Более точные оценки скорости сходимости в ЦПТ для слабо зависимых случайных полей были получены методом Стейна и методом А. Н. Тихомирова.

Гюйон и Ричардсон в работе [176] исследуют скорость сходимости в ЦПТ для центрированных слабо зависимых случайных полей $\{X_a, a \in Z^d\}$ (m-зависимых или удовлетворяющих условию с.п. с функцией $M \equiv 1$), удовлетворяющих условию $\sup\limits_{a \in Z^d} \mathbf{E}|X_a|^{2+\delta} < \infty$, $\delta > 0$. Суммирование $S_{V_n} = \sum\limits_{a \in V_n} X_a$ берется по строго возрастающей последовательности множеств $V_n \in \mathcal{V}$ таких, что $\liminf\limits_{n\to\infty} B^2_{V_n}/|V_n| > 0$, где $B^2_{V_n} = \mathbf{E}S^2_{V_n}$.

В частности, в [176] доказано, что:

1) для m-зависимых случайных полей

$$\Delta_{V_n} = \begin{cases} O(B_{V_n}^{-\delta}), & \text{если } 0 < \delta < 1; \qquad (92)\\ O\left[B_{V_n}^{-1}(\log B_{V_n})^{(d-1)/2}\right], & \text{если } \delta \geqslant 1; \qquad (93)\end{cases}$$

2) для случайных полей, удовлетворяющих условию с.п. с функцией $M \equiv 1$ и экспоненциально убывающей функцией α

$$\Delta_{V_n} = O\left[B_{V_n}^{-(\delta\wedge 1)}(\log B_{V_n})^{d(1+\delta)\wedge 2}\right]; \tag{94}$$

здесь $a \wedge b = \min(a; b)$.

Если $\sup\limits_{a \in Z^d} \mathbf{E}|X_a|^{4+\delta} < \infty$, $\delta > 0$, то последняя оценка улучшается до

$$\Delta_{V_n} = O\left[B_{V_n}^{-1}(\log B_{V_n})^{d}\right]. \tag{95}$$

В работе [176] исследован также случай, когда $M \equiv 1$, а функция α убывает степенным образом. Доказательства проводятся методом А. Н. Тихомирова.

В работе Такахаты [254] получены оценки сверху для величин Δ_{V_n} и $\|\Delta_{V_n}(x)\|_1$, когда случайное поле является m-зависимым или удовлетворяет условию с.п. с функцией $M \not\equiv 1$ и экспоненциально убывающей функцией α, а суммирование $S_{V_n} = \sum\limits_{a \in V_n} X_a$ берется по последовательности множеств $V_n \in \mathcal{V}$ таких, что $|V_n| \to \infty$ $(n \to \infty)$ и $\liminf\limits_{n\to\infty} B^2_{V_n}/|V_n| > 0$. В этих условиях, в частности, доказано, что:

1) для m-зависимых случайных полей

$$\Delta_{V_n} = O(|V_n|^{-1/2}), \tag{96}$$

если $\sup\limits_{a \in Z^d} \mathbf{E}X_a^8 < \infty$,

$$\|\Delta_{V_n}(x)\|_1 = O(|V_n|^{-1/2}),$$

если $\sup\limits_{a\in Z^d} \mathbf{E}X_a^4 < \infty$;

2) для случайных полей, удовлетворяющих условию с.п. с $M(n,m) \leqslant B(n+m)^k$ для некоторого $k > 1$ и $\alpha(\tau) \leqslant Ke^{-\lambda\tau}$

$$\Delta_{V_n} = O\left[|V_n|^{-1/2}(\log|V_n|)^d\right], \tag{98}$$

если $\sup\limits_{a\in Z^d} \mathbf{E}|X_a|^{8+\delta} < \infty$, $\delta > 0$,

$$\|\Delta_{V_n}(x)\|_1 = O\left[|V_n|^{-1/2}(\log|V_n|)^d\right], \tag{99}$$

если $\sup\limits_{a\in Z^d} \mathbf{E}|X_a|^{4+\delta} < \infty$, $\delta > 0$.

Для m-зависимого случайного поля установленная в [254] оценка (96) уточняет работу [86].

В работе Такахаты [254] доказательства проводятся методом Стейна.

Оказывается, что методы Стейна ([254], [102]) и А. Н. Тихомирова ([176], [102], [11], [150]) можно распространить на нестационарные слабо зависимые случайные поля, имеющие конечные абсолютные моменты слагаемых порядка s, $2 < s \leqslant 3$, причем можно не делая предположения о линейном росте дисперсии B_V^2 суммы S_V, $V \in \mathcal{V}$, оценить величины $\|\Delta_V(x)\|_1$ (методом Стейна) и Δ_V (методом А. Н. Тихомирова) таким образом, чтобы из этих оценок при $d = 1$ следовали наилучшие известные (или близкие к ним) оценки для последовательности слабо зависимых с.в. ([106], [168], [100]).

Сформулируем некоторые результаты такого рода.

Теорема 13 [102]. *Пусть случайное поле* (91) *является m-зависимым и* $\mathbf{E}|X_a|^s < \infty$, $2 < s \leqslant 3$, *для* $a \in V$. *Тогда для* $m+1 \leqslant |V|^{1/d}/(C\ln(|V|+1))$, $C > 1$,

$$\Delta_V \leqslant C(d)\left\{(m+1)^{d(s-1)}L_s^* + (m+1)^d d_s^{1/s}(\ln(|V|+1))^{(d-1)/2}\right\}.$$

Теорема 14 [102]. *Пусть случайное поле* (91) *удовлетворяет условию с.п. с* $M(n,m) \leqslant B(n+m)^p$, $\alpha(\tau) \leqslant Ke^{-\lambda\tau}$ *и* $\mathbf{E}|X_a|^s < \infty$, $2 < s \leqslant 3$, *для* $a \in V$. *Тогда для* $0 \leqslant p < \infty$

$$\Delta_V \leqslant C(B,K,\lambda,d,p,s)\Big\{L_s^*(\ln(|V|+1))^{d(s-1)} + \\ + |V|^{1/2}d_s^{2/s}(\ln(|V|+1))^{1+(dp(s-2)/(2s))}\Big\}.$$

Теорема 15 [102]. *Пусть случайное поле* (91) *является m-зависимым и* $\mathbf{E}|X_a|^s < \infty$, $2 < s \leqslant 3$, *для* $a \in V$. *Тогда для* $m \geqslant 0$

$$\|\Delta_V(x)\|_1 \leqslant C(d)(m+1)^{d(s-1)}L_s.$$

В работе [102] получены и более точные оценки величины $\|\Delta_V(x)\|_1$ в случае, когда слагаемые имеют конечные вторые моменты.

Следует заметить, что для слабо зависимых случайных полей (как и для последовательности с.в.) величина Δ_V оценивается через L_s^* и d_s, а величина $\|\Delta_V(x)\|_1$ – через дробь Ляпунова L_s.

Результаты, близкие к теоремам 13 и 14, независимо были получены в работах А. В. Булинского [11], [150], где условия перемешивания носят более общий характер, так как учитывается "геометрический" аспект отделения множеств, использующийся в определении коэффициента перемешивания (см. также [13]).

Херрндорф [190] построил пример стационарной в узком смысле последовательности с.в., удовлетворяющей условию с.п. со сколь угодно быстрым убыванием коэффициента с.п. и регулярным ростом дисперсии частичной суммы, которая однако не удовлетворяет ЦПТ, если существуют лишь вторые моменты слагаемых. Поэтому естественным являются оценки скорости сходимости в ЦПТ для слабо зависимых случайных полей, использующие моментные ограничения типа $\sup\limits_{a \in Z^d} \mathbf{E}\mathcal{G}(|X_a|) < \infty$ на слагаемые, где функция $\mathcal{G}$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{x \to \infty} x^{-2}\mathcal{G}(x) = \infty$. В работе А. В. Булинского и Дукана [151] получена оценка скорости сходимости в ЦПТ для случайных полей, удовлетворяющих условию $\widetilde{\alpha}$-перемешивания (см. [151]), в предположении конечности моментов слагаемых "малого" порядка (например, типа $\mathbf{E}X^2 \ln_+^\delta(X) < \infty$). Эти оценки получены при помощи усечения, примененного к известным результатам А. В. Булинского [11].

Оценки величины $d_i^{(p)}$, $i = 1, 2$, для случайных полей, удовлетворяющих разным условиям перемешивания, получены в работе [104], где эта задача сведена к оценке абсолютного момента суммы Z_V, порядок которого зависит от p и типа перемешивания.

Здесь сформулируем только одну оценку, которая является обобщением теоремы 3 на случайные поля.

Теорема 16 [104]. *Пусть функция $h: R \to R$ удовлетворяет условию $H_1^{(p)} < \infty$ или $H_2^{(p)} < \infty$ (см. §2 п.2.1), а случайное поле* (91) *является m-зависимым с $\mathbf{E}|X_a|^{2+p+\alpha} < \infty$ для $a \in V$. Тогда при условии $(6m+1)^d < |V|$*

$$|\mathbf{E}h(Z_n) - \mathbf{E}h(\mathcal{N})| \leqslant C(d,p,\alpha) H_i^{(p)} \{ (m+1)^{d(1+\alpha)} L_{2+\alpha} (1 + \mathbf{E}|Z_V|^p) + \\ + (m+1)^{d(1+p+\alpha)} L_{2+p+\alpha} \}.$$

Ограниченность функции h в теореме 16 не требуется.

Оценка величины Δ_V для $m(d)$-зависимых случайных полей (точное определение см. в [43]) получена в работе Н. М. Зуева [43].

Оценки величин Δ_V, $\Delta_V(x)$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^l |\Delta_V(x)|\, dx$ для конечно-зависимых с.в. (см. [153]) в терминах дробей Ляпунова получены в работах В. В. Шергина [115], [245].

Для случайных полей, удовлетворяющих условию с.п. и р.с.п., оценки величины $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^l |\Delta_V(x)|\, dx$ методом Стейна получены А. К. Мухамедовым в работе [71].

Для слабо зависимых стационарных с.в. и случайных полей при весьма медленном убывании коэффициентов перемешивания Б. С. Нахапетян, пользуясь им же предложенным методом малых блоков, получил оценки скорости сходимости в ЦПТ, достаточные для справедливости, например, закона повторного логарифма [75], [76].

Неравномерная оценка величины $|\Delta_V(x)|$ для стационарных в узком смысле случайных полей, определенных на целочисленной решетке Z_+^d, принимающих значения в конечномерном евклидовом пространстве R^k и удовлетворяющих условию с.п., получена в работе А. Н. Тихомирова [107]. Свой метод А. Н. Тихомиров распространил и при оценивании скорости сходимости в ЦПТ для стационарных в узком смысле гильбертовозначных с.в. [256].

Асимптотические разложения для слабо зависимых с.в. и случайных полей можно найти в работах Хейнриха [181], [186], Ри [230] и Гетце и Хиппа [171], [172].

Метод Стейна в контексте функциональной аппроксимации винеровскими и другими гауссовскими процессами исследован в работе Барбура [127].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аминев Ф. А., Дубровин В. Т.* Оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме для слабозависимых однородных случайных полей // Исслед. прикл. мат.— Казань: Изд-во казан. ун-та, 1984.— *10*.— С. 3—12.

2. *Бакиров Н. К.* Центральная предельная теорема для слабозависимых величин // Мат. заметки.— 1987.— *41*, № 1.— С. 104—109.

3. *Басаликас А.* Оценка скорости сходимости распределений некоторых оценок в случае слабо зависимых наблюдений // Liet. matem. rink.— 1986.— *26*, № 4.— С. 607—615.

4. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений.— *4*.— М.: Наука, 1964.

5. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер.—М.: Наука, 1977.

6. *Булинский А. В.* О скорости сходимости в центральной предельной теореме для аддитивных случайных функций // Докл. АН СССР.— 1977.— *235*, № 4.— С. 741—744.

7. — Центральная предельная теорема для случайных полей с сильной и слабой зависимостью // Докл. АН СССР.— 1979. — *248*, № 1.— С. 17—19.

8. — О мерах зависимости, близких к максимальному коэффициенту корреляции // Докл. АН СССР.— 1984.— *277*, № 6. — С. 1296—1298.

9. — Асимптотическая нормальность случайных полей с перемешиванием // Докл. АН СССР.— 1985.— *284*, № 5.— С. 1044—1048.

10. — Об условиях перемешивания случайных полей // Теория вероятн. и ее примен.— 1985.— *30*, вып. 1.— С. 200—201.

11. — Оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме для случайных полей // Докл. АН СССР.— 1986.— *291*, № 1.— С. 22—25.

12. — О различных условиях перемешивания и асимптотической нормальности случайных полей // Докл. АН СССР.— 1988. — *299*, № 4.— С. 785—789.

13. — Предельные теоремы в условиях слабой зависимости.— М.: Изд-во МГУ, 1989.

14. —, *Журбенко И. Г.* Центральная предельная теорема для случайных полей // Докл. АН СССР.— 1976.— *226*, № 1.— С. 23—25.

15. — Центральная предельная теорема для аддитивных случайных функций // Теория вероятн. и ее примен.— 1976.— *21*, вып. 4.— С. 707—717.

16. *Бхаттачария Р. Н., Рао Р. Р.* Аппроксимация нормальным

распределением и асимптотические разложения.—М.: Наука, 1982.

17. *Волконский В. А., Розанов Ю. А.* Некоторые предельные теоремы для случайных функций. I, II // Теория вероятн. и ее примен.— 1959.— *4*, вып. 2.— С. 186—207; 1961.— *6*, вып. 2.— С. 202—215.

18. *Габбасов Ф. Г.* Многомерная центральная предельная теорема для сумм функций от последовательностей с перемешиванием // Liet. matem. rink.— 1977.— *17*, № 4.— С. 83—98.

19. *Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин.—М.: Гостехиздат, 1949.

20. *Гордин М. И.* О центральной предельной теореме для стационарных процессов // Докл. АН СССР.— 1969.— *188*, № 4.— С. 739—741.

21. *Городецкий В. В.* Принцип инвариантности для стационарных случайных полей с сильным перемешиванием // Теория вероятн. и ее примен.— 1982.— *27*, вып. 2.— С. 358—364.

22. — Центральная предельная теорема и принцип инвариантности для слабозависимых случайных полей // Докл. АН СССР.— 1984.— *276*, № 3.— С. 528—531.

23. *Гринь А. Г.* Об одном условии регулярности стационарных случайных процессов // Теория вероятн. и ее примен.— 1982.— *27*, вып. 4.— С. 789—795.

24. — Области притяжения для последовательностей с перемешиванием // Сиб. мат. ж.— 1990.— *31*, № 1.— С. 53—63.

25. — Об областях притяжения для сумм зависимых величин // Теория вероятн. и ее примен.— 1990.— *35*, вып. 2.— С. 255—270.

26. *Гудинас П. П.* Принцип инвариантности для неоднородных цепей Маркова // Liet. matem. rink.— 1977.— *17*, № 2.— С. 63—73.

27. — Об аппроксимации распределений сумм зависимых случайных величин со значениями из банахова пространства // Liet. matem. rink.— 1983.— *23*, № 3.— С. 3—21.

28. — Обобщения одного аппроксимационного неравенства // Liet. matem. rink.— 1989.— *29*, № 1.— С. 27—34.

29. *Давыдов Ю. А.* О сходимости распределений, порожденных стационарными случайными процессами // Теория вероятн. и ее примен.— 1968.— *13*, вып. 4.— С. 730—737.

30. — Принцип инвариантности для стационарных процессов // Теория вероятн. и ее примен.— 1970.— *15*, вып. 3.— С. 498—509.

31. — Условия перемешивания для цепей Маркова // Теория вероятн. и ее примен.— 1973.— *17*, вып. 2.— С. 321—338.

32. *Добрушин Р. Л.* Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова. I, II // Теория вероятн. и ее примен.— 1956.— *1*, вып. 1.— С.72—89; 1956.— *1*, вып. 4.— С. 365—425.
33. — Описание случайного поля при помощи условных вероятностей и условия его регулярности // Теория вероятн. и ее примен.— 1968.— *13*, вып. 2.— С. 201—229.
34. *Дубровин В. Т.* Центральная предельная теорема для сумм функций от слабозависимых случайных величин // Вероятн. методы и кибернетика. Изд-во казан. ун-та.— 1971.— *131*, вып. 9.— С. 21—33.
35. — Многомерная центральная предельная теорема для теоретико-числовых эндоморфизмов // Вероятн. методы и кибернетика. Изд-во казан. ун-та.— 1974.— вып. 10.— С. 17—29.
36. —, *Москвин Д. А.* Центральная предельная теорема для сумм функций от последовательностей с перемешиванием // Теория вероятн. и ее примен.— 1979.— *24*, вып. 3.— С. 553—564.
37. *Егоров В. А.* Некоторые предельные теоремы для m-зависимых случайных величин // Liet. matem. rink.— 1970.— *10*, № 1.— С. 51—59.
38. *Журбенко И. Г.* О сильных оценках смешанных семиинвариантов случайных процессов // Сиб. мат. ж.— 1972.— *13*, № 2.— С. 293—308.
39. *Золотарев В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин.—М.: Наука, 1986.
40. *Золотухина Л. А.* Центральная предельная теорема для дискретных случайных полей // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук.— 1978.— № 3.— С. 15—19.
41. —, *Чугуева В. Н.* Достаточные условия асимптотической нормальности сумм значений дискретных случайных полей, зависимых в полосах // Мат. заметки.— 1978.— *23*, № 5.— С. 725—732.
42. *Зуев Н. М.* О скорости сходимости в центральной предельной теореме для $m(d)$-зависимых случайных величин // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук.— 1986.— № 4.— С. 28—32.
43. — Оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме для $m(d)$-зависимых случайных полей // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук.— 1989.— № 3.— С. 17—22.
44. *Зупаров Т. М.* Моментные неравенства и оценка остаточного члена в центральной предельной теореме для последовательностей слабо зависимых случайных величин // Предельные теоремы для сл. процессов и статист. выводы.—Ташкент: Фан, 1981.— С. 69—87.
45. — Оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме для абсолютно регулярных случайных величин со

значениями в некоторых банаховых пространствах // Докл. АН СССР.— 1983.— *272*, № 5.— С. 1042—1045.

46. — Оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме для абсолютно регулярных случайных величин со значениями в банаховом пространстве // Асимптотические задачи для вероятн. распределений.—Ташкент: Фан, 1984. — С. 78—87.

47. — Об оценках скорости сходимости в принципе инвариантности для слабозависимых случайных величин // Предельные теоремы для вероятн. распределений.—Ташкент: Фан, 1985.— С. 32—52.

48. *Ибрагимов И. А.* Некоторые предельные теоремы для стационарных процессов // Теория вероятн. и ее примен.— 1962.— *7*, вып. 4.— С. 361—392.

49. — Центральная предельная теорема для сумм функций от независимых величин и сумм вида $\Sigma f(2^k t)$ // Теория вероятн. и ее примен.— 1967.— *12*, вып. 4.— С. 655—665.

50. — Замечание о центральной предельной теореме для случайных величин // Теория вероятн. и ее примен.— 1975.— *20*, вып. 1.— С. 134—140.

51. —, *Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины.— М.: Наука, 1965.

52. —, *Розанов Ю. А.* Гауссовские случайные процессы.—М.: Наука, 1970.

53. *Каллианпур Г.* Об одной предельной теореме для зависимых случайных величин // Докл. АН СССР.— 1955.— *101*, № 1. — С. 13—16.

54. *Колмогоров А. Н., Розанов Ю. А.* Об условиях сильного перемешивания гауссовского стационарного процесса // Теория вероятн. и ее примен.— 1960.— *5*, вып. 2.— С. 222—227.

55. *Колмогоров А. Н., Сарманов О. В.* О работах С. Н. Бернштейна по теории вероятностей // Теория вероятн. и ее примен. — 1960.— *5*, вып. 2.— С. 215—221.

56. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория.— М.: Наука, 1980.

57. *Лапинскас Р.* О скорости сходимости для сумм бесконечномерных случайных величин, связанных в цепь Маркова // Liet. matem. rink.— 1976.— *16*, № 4.— С. 125—132.

58. — Предельные теоремы для слабо зависимых случайных величин // Liet. matem. rink.— 1980.— *20*, № 3.— С. 91—97.

59. *Лаппо П. М.* Скорость сходимости в центральной предельной теореме для последовательностей с перемешиванием // Мат. заметки.— 1986.— *39*, № 2.— С. 295—299.

60. *Леоненко Н. Н.* Об оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме для m-зависимых случайных полей // Мат. заметки.— 1975.— *17*, № 1.— С. 129—132.

61. — Предельные теоремы для аддитивных случайных функций // Исследования по теории сл. процессов. Ин-т мат. АН УССР.— 1976.— С. 94—105.
62. —, *Иванов А. В.* Статистический анализ случайных полей.— Киев: Вища школа, 1986.
63. —, *Ядренко М. И.* О принципе инвариантности для однородных случайных полей // Теория вероятн. и ее примен.— 1979.— *24*, вып. 1.— С. 175—181.
64. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Теория мартингалов.—М.: Наука, 1986.
65. *Лифшиц Б. А.* О центральной предельной теореме для сумм случайных величин, связанных в цепь // Теория вероятн. и ее примен.— 1978.— *23*, вып. 2.— С. 295—312.
66. — Принцип инвариантности для слабо зависимых величин // Теория вероятн. и ее примен.— 1984.— *29*, вып. 1.— С. 33—40.
67. *Лифшиц М. А.* Секционирование многомерных множеств // Кольца и модули. Предельные теоремы теории вероятностей.—Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.— вып. 1.— С. 175—178.
68. *Малевич Т. Л.* К вопросу о скорости сходимости в центральной предельной теореме для сумм m-зависимых величин // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук.— 1980.— № 2.— С. 25—29.
69. *Малышев В. А.* Центральная предельная теорема для гиббсовских случайных полей // Докл. АН СССР.— 1975.— *224*, № 1.— С. 35—38.
70. —, *Минлос Р. А.* Гиббсовские случайные поля.—М.: Наука, 1985.
71. *Мухамедов А. К.* О глобальной форме центральной предельной теоремы для слабо зависимых случайных полей // Мат. анализ, алгебра и теория вероятн.— Ташкент: ТашГУ, 1987. — С. 77—81.
72. *Нагаев С. В.* Некоторые предельные теоремы для однородных цепей Маркова // Теория вероятн. и ее примен.— 1957.— *2*, вып. 4.— С. 389—416.
73. — Центральная предельная теорема для марковских процессов с дискретным временем // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук.— 1962.— № 2.— С. 12—20.
74. *Нахапетян Б. С.* Центральная предельная теорема для случайных полей, удовлетворяющих условию сильного перемешивания // Многокомпонентные сл. системы.—М.: Наука, 1978.— С. 276—288.
75. — Об одном подходе к доказательству предельных теорем для зависимых случайных величин // Теория вероятн. и ее примен.— 1987.— *32*, вып. 3.— С. 589—594.

76. — Слабо зависимые случайные поля и задача суммирования для гиббсовских полей в больших объемах // Докт. дисс.— Ереван, 1989.— 211с.
77. *Паулаускас В. И., Рачкаускас А. Ю.* Точность аппроксимации в центральной предельной теореме в банаховых пространствах.—Вильнюс: Мокслас, 1987.
78. *Петров В. В.* О центральной предельной теореме для m-зависимых величин // Тр. всес. сов. по теории вероятн. и мат. статист., 1958.— Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1960.— С. 38—44.
79. — Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.— М.: Наука, 1987.
80. — Последовательности m-ортогональных случайных величин // Зап. научн. семин. ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР.— 1988.— *119, №* 7.— С. 198—202.
81. *Прохоров Ю. В.* Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей // Теория вероятн. и ее примен.— 1956.— *1*, вып. 2.— С. 177—238.
82. — Многомерные распределения: неравенства и предельные теоремы // Итоги науки и техники. В сб.: Теория вероятн. и мат. статист. Теоретическая кибернетика. ВИНИТИ.— 1972.— *10*.— С. 5—24.
83. *Розанов Ю. А.* О центральной предельной теореме для аддитивных случайных функций // Теория вероятн. и ее примен. — 1960.— *5*, вып. 2.— С. 243—246.
84. — Стационарные случайные поля.—М.: Физматгиз, 1963.
85. — Марковские случайные поля.—М.: Наука, 1981.
86. *Ряуба Б.* О скорости сходимости в центральной предельной теореме для m-зависимых случайных полей // Liet. matem. rink.— 1980.— *20, №* 1.— С. 157—163.
87. — Центральная предельная теорема для стационарных случайных полей // Liet. matem. rink.— 1988.— *28, №* 4.— С. 758 —769.
88. *Саулис Л., Статулявичус В.* Предельные теоремы о больших уклонениях.— Вильнюс: Мокслас, 1989.
89. *Сарманов О.В., Захаров В. К.* Меры зависимости между случайными величинами и спектры стохастических матриц // Мат. сб.— 1960.— *52, №* 4.— С. 953—990.
90. *Сарманов И. О.* О теореме Ляпунова для сумм слабо зависимых случайных величин // Изв. ВУЗ. Мат.— 1964.— *№* 3. — С. 123—130.
91. *Сираждинов С. Х.* Предельные теоремы для однородных цепей Маркова.— Ташкент: Изд-во АН УзССР, 1955.
92. —, *Форманов Ш. К.* Предельные теоремы для сумм случайных векторов, связанных в цепь Маркова.—Ташкент: Фан, 1979.

93. *Статулявичус В. А.* Локальные предельные теоремы и асимптотические разложения для неоднородных цепей Маркова // Liet. matem. rink.— 1961.— *1*, № 1—2.— С. 231—314.
94. — Об уточнениях предельных теорем для слабо зависимых случайных величин // Тр. VI всес. сов. по теории вероятн. и мат. статист.— Вильнюс, 1962.— С. 113—119.
95. — Предельные теоремы для случайных величин, связанных в цепь Маркова. I–III // Liet. matem. rink.— 1969.— *9*, № 2.— С. 345—362; 1969.— *9*, № 3.— С. 635—672; 1970.— *10*, № 1. — С. 161—169.
96. — О предельных теоремах для случайных функций. I // Liet. matem. rink.— 1970.— *10*, № 3.— С. 582—592.
97. — Об условиях почти марковской регулярности // Теория вероятн. и ее примен.— 1983.— *28*, вып. 2.— С. 358—361.
98. *Сунклодас Й.* Оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме для слабо зависимых случайных величин // Liet. matem. rink.— 1977.— *17*, № 3.— С. 41—51.
99. — Оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме для m-зависимых случайных векторов // Liet. matem. rink.— 1978.— *18*, № 4.— С. 175—186.
100. — Расстояние в метрике L_1 распределения суммы слабо зависимых случайных величин от нормальной функции распределения // Liet. matem. rink.— 1982.— *22*, № 2.— С. 171—18[illegible].
101. — О скорости сходимости в центральной предельной теореме для случайных величин с сильным перемешиванием // Liet. matem. rink.— 1984.— *24*, № 2.— С. 174—185.
102. — Оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме для слабо зависимых случайных полей // Liet. matem. rink.— 1986.— *26*, № 3.— С. 541—559.
103. — Оценка ограниченной метрики Липшица для сумм слабо зависимых случайных величин // Liet. matem. rink.— 1989.— *29*, № 2.— С. 385—393.
104. — Аппроксимация нормальным распределением // Liet. matem. rink.— 1990.— *30*, № 2.— С. 382—391.
105. *Тихомиров А. Н.* О скорости сходимости в центральной предельной теореме для слабо зависимых величин // Вестн. ЛГУ.— 1976.— *2*, № 7.— С. 158—159.
106. — О скорости сходимости в центральной предельной теореме для слабо зависимых величин // Теория вероятн. и ее примен.— 1980.— *25*, вып. 4.— С. 800—818.
107. — О нормальной аппроксимации сумм векторных случайных полей с перемешиванием // Докл. АН СССР.— 1983.— *272*, № 2.— С. 312—314.
108. — О распределении максимальной суммы слабо зависимых величин // Теория вероятн. и ее примен.— 1986.— *31*, вып. 4.— С. 829—834.

109. *Утев С. А.* Неравенства для сумм слабозависимых случайных величин и оценки скорости сходимости в принципе инвариантности // Предельные теоремы для сумм сл. величин. —Новосибирск: Наука, 1984.— С. 50—77.

110. — Суммы случайных величин с φ-перемешиванием // Асимптотический анализ распределений случайных процессов.— Новосибирск: Наука, 1989.— С. 78—100.

111. — О центральной предельной теореме для схем серий случайных величин с φ-перемешиванием // Теория вероятн. и ее примен.— 1990.— *35*, вып. 1.— С. 110—117.

112. *Шергин В. В.* Оценка остаточного члена в центральной предельной теореме для m-зависимых случайных величин // Liet. matem. rink.— 1976.— *16*, № 4.— С. 245—250.

113. — О скорости сходимости в центральной предельной теореме для m-зависимых случайных величин // Теория вероятн. и ее примен.— 1979.— *24*, вып. 4.— С. 781—794.

114. — О глобальной форме центральной предельной теоремы для m-зависимых случайных величин // Теория вероятн. и мат. статист.— 1983.— вып. 29.— С. 122—128.

115. — О центральной предельной теореме для конечно-зависимых случайных величин // Теория сл. процессов.— 1988.— вып. 16.— С. 93—97.

116. *Ширяев А. Н.* Некоторые вопросы спектральной теории старших моментов // Теория вероятн. и ее примен.— 1960.— *5*, вып. 3.— С. 193—213.

117. *Юдин М. Д.* О скорости сходимости распределения суммы $f(n)$-зависимых случайных величин к нормальному закону // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук.— 1981.— № 3. — С. 57—60.

118. — О скорости сходимости распределения суммы слабо зависимых случайных величин // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук.— 1984.— № 2.— С. 44—52.

119. — Замечание к аппроксимации распределений сумм зависимых величин безгранично делимыми распределениями // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук.— 1987.— № 2.— С. 38—41.

120. — К аппроксимации распределений сумм m_n-зависимых величин распределениями из класса L // Изв. ВУЗ. Мат.— 1989.— № 4.— С. 83—88.

121. — Об аппроксимации распределений сумм перемешивающихся случайных величин распределениями из класса L // Теория вероятн. и мат. статист. (Киев).— 1989.— № 41.— С. 120—125.

122. — Сходимость распределений сумм случайных величин.— Минск: Университетское, 1990.

123. — Об аппроксимации распределений сумм зависимых случайных величин распределениями из класса L // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук.— 1991.— № 1.— С. 35—41.
124. *Babu G. J.* An inequality for moments of sums of truncated ϕ-mixing random variables and its applications // Sankhya. Ser. A.— 1980.— *42*, № 1—2.— С. 1—8.
125. —, *Ghosh H.*, *Singh K.* On rates of convergence to normality for Φ-mixing processes // Sankhya. Ser. A.— 1978.— *40*, № 3.— С. 278—293.
126. *Barbour A. D.* Asymptotic expansions based on smooth functions in the central limit theorem // Probab. Theor. and Relat. Fields.— 1986.— *72*, № 2.— С. 289—303.
127. — Stein's method for diffusion approximations // Probab. Theor. and Relat. Fields.— 1990.— *84*, № 3.— С. 297—322.
128. —, *Eagleson G. K.* Multiple comparisons and sums of dissociated random variables // Adv. Appl. Probab.— 1985.— *17*, № 1.— С. 147—162.
129. *Bergström H.* A comparison method for distribution functions of sums of independent and dependent random variables // Теория вероятн. и ее примен.— 1970.— *15*, № 3.— С. 442—468.
130. — Reduction of the limit problem for sums of random variables under a mixing condition // Proc. 4th Conf. Probab. Th. 1971, Romania. — С. 107—120.
131. — On the convergence of sums of random variables in distribution under mixing condition // Period. math. hungar.— 1972.— *2*, № 1—4.— С. 173—190.
132. *Berk K. N.* A central limit theorem for m-dependent random variables with unbounded m // Ann. Probab.— 1973.— *1*, № 2.— С. 352—354.
133. *Bernstein S.* Sur l'extension du théorème limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dépendantes // Math. Ann.— 1926. — *97*.— С. 1—59. (Пер. на рус. яз.: Бернштейн С. Н. Распространение предельной теоремы теории вероятностей на суммы зависимых величин // Успехи мат. наук.— 1944.— 10.— С. 65—114.)
134. *Blum J. R.*, *Hanson D. L.*, *Koopmans L. H.* On the strong law of large numbers for a class of stochastic processes // Z. Wahrsch. und verw. Geb.— 1963.— *2*, № 1.— С. 1—11.
135. *Bolthausen E.* On the central limit theorem for stationary mixing random fields // Ann. Probab.— 1982.— *10*, № 4.— С. 1047—1050.
136. — An estimate of the remainder in a combinatorial central limit theorem // Z. Wahrsch. und verw. Geb.— 1984.— *66*, № 3.— С. 379—386.
137. *Bradley R. C.* A remark on the central limit question for dependent

random variables // J. Appl. Probab.— 1980.— *17*, № 1.— C. 94—101.

138. — On the φ-mixing condition for stationary random sequences // Duke Math. J.— 1980.— *47*, № 2.— C. 421—433.

139. — Central limit theorems under weak dependence // J. Multiv. Anal. — 1981.— *11*, № 1.— C. 1—16.

140. — Equivalent measures of dependence // J. Multiv. Anal.— 1983.— *13*, № 1.— C. 167—176.

141. — Basic properties of strong mixing conditions // Dependence in Probab. and Statist. (Eds. E. Eberlein, M. S. Taqqu). Progress in Probab. and Statist.—Boston: Birkhäuser, 1986.— *2*.— C. 165—192.

142. — A central limit theorem for stationary ρ-mixing sequences with infinite variance // Ann. Probab.— 1988.— *16*, № 1.— C. 313—332.

143. — A caution on mixing conditions for random fields // Statist. Probab. Letters.— 1989.— *8*, № 5.— C. 489—491.

144. — On ρ-mixing except on small sets // Pacif J. Math.— 1990.— *146*, № 2.— C. 217—226.

145. —, *Bryc W.* Multilinear forms and measures of dependence between random variables // J. Multiv. Anal.— 1985.— *16*, № 3.— C. 335—367.

146. —, —, *Janson S.* Remarks on the foundations of measures of dependence // Center for Stoch. Proc. Univ. of North Carolina.— 1985.— Tech. Rep. 105.

147. — On dominations between measures of dependence // J. Multiv. Anal.— 1987.— *23*, № 2.— C. 312—329.

148. *Bradley R. C., Peligrad M.* Invariance principles under a two-part mixing assumption // Stoch. Proc. Appl.— 1986.— *22*, № 2.— C. 271—289.

149. *Bulinskii A. V.* Central limit theorem and invariance principle for mixing random fields // First Int. Congr. of the Bernoulli Statist. Soc. Tashkent.— 1986.— *1*.— C. 105—107.

150. — Limit theorems under weak dependence conditions // Probab. Theory and Math. Statist. Proc. of the Fourth Vilnius Conf.— Utrecht, The Netherlands: VNU Sci. Press, 1987.— *1*.— C. 307—326.

151. —, *Doukhan P.* Vitesse de convergence dans le théorème de limite centrale pour les champs mélangeants satisfaisant des hypothèses de moments faibles // C. r. Acad. sci. Paris.— 1990.— Sér. 1.— 311, № 12.— C. 801—805.

152. *Chen L. H. Y.* An elementary proof of the central limit theorem // Bull. Sing. Math. Soc.— 1972.— C. 1—12.

153. — Two central limit problems for dependent random variables // Z. Wahrsch. und verw. Geb.— 1978.— *43*, № 3.— C. 223—243.

154. — Stein's method in limit theorems for dependent random variables // Sea Bull. Math. (Special Issue).— 1979.— C. 36—50.
155. *Cohn H.* On a class of dependent random variables // Rev. Roumaine Math. Pures Appl.— 1965.— *10*, № 10.— C. 1593—1606.
156. *Dasgupta R.* Non uniform rates of convergence to normality for strong mixing processes // Sankhya. Ser A.— 1988.— *50*, № 3.— C. 436—451.
157. *Davis R. A.* Stable limits for partial sums of dependent random variables // Ann. Probab.— 1983.— *11*, № 2.— C. 262—269.
158. *Dehling H., Denker M., Philipp W.* Central limit theorem for mixing sequences of random variables under minimal conditions // Ann. Probab.— 1986.— *14*, № 4.— C. 1359—1370.
159. *Denker M.* Uniform integrability and the central limit theorem // Dependence in Probab. and Statist. (Eds. E. Eberlein, M. S. Taqqu). — Boston: Birkhäuser, 1986.— *2*.— C. 269—274.
160. —, *Jakubowski A.* Stable limit distributions for strongly mixing sequences // Statist. Probab. Letters.— 1989.— *8*, № 5.— C. 477—483.
161. *Deo C. M.* A note on empirical processes of strong mixing conditions // Ann. Probab.— 1973.— *1*.— C. 870—875.
162. —, *Wong H. S.-F.* On Berry — Esseen approximation and a functional LIL for a class of dependent random fields // Pacif. J. Math. — 1980.— *91*, № 2.— C. 269—275.
163. *Diananda P. H.* The central limit theorem for m-dependent variables // Proc. Cambridge Philos. Soc.— 1955.— *51*, № 1.— C. 92—95.
164. *Dvoretzky A.* Asymptotic normality for sums of dependent random variables // Proc. 6th Berkeley Symp. Math. Statist. Probab.— 1972.— *2*.— C. 513—535.
165. *Eberlein E.* An invariance principle for lattices of dependent random variables // Z. Wahrsch. und verw. Geb.— 1979.— *50*, № 2.— C. 119—133.
166. — Weak convergence of partial sums of absolutely regular sequences // Statist. Probab. Letters.— 1984.— *2*, № 5.— C. 291—293.
167. *Erickson R. V.* On an L_p version of Berry — Esseen theorem for independent and m-dependent random variables // Ann. Probab.— 1973.— *1*, № 3.— C. 497—503.
168. — L_1 bounds for asymptotic normality of m-dependent sums using Stein's technique // Ann. Probab.— 1974.— *2*, № 3.— C. 522—529.
169. — Truncation of dependent random variables // Теория вероятн. и ее примен.— 1975.— *20*, № 4.— C. 892—900.
170. *Gebelein H.* Das statistische Problem der Korrelation als Variations und Eigenwertproblem und sein Zusammenhang mit der Ausgleichungsrecnnung // Z. Angew. Math. Mech.— 1941.— *21*.— C. 364—379.

171. *Götze F., Hipp Ch.* Asymptotic expansions for sums of weakly dependent random vectors // Z. Wahrsch. und verw. Geb.— 1983.— *64*, № 2.— C. 211—239.
172. — Asymptotic expansions for potential functions of i.i.d. random fields // Probab. Theor. and Relat. Fields.— 1989.— *82*, № 3.— C. 349—370.
173. *Goldie Ch. M., Greenwood P. E.* Variance of set-indexed sums of mixing random variables and weak convergence of set-indexed processes // Ann. Probab.— 1986.— *14*, № 3.— C. 817—839.
174. — Central limit results for random fields // Proc. of I Int. Congr. Bernoulli Soc. Tashkent.— 1986.— C. 1—8.
175. *Goldie Ch. M., Morrow G. J.* Central limit questions for random fields // Dependence in Probab. and Statist.—Boston: Birkhäuser, 1986.— *2*.— C. 275—289.
176. *Guyon X., Richardson S.* Vitesse de convergence du théorème de la limite centrale pour des champs faiblement dépendants // Z. Wahrsch. und verw. Geb.— 1984.— *66*, № 2.— C. 297—314.
177. *Hall P., Heyde C. C.* Martingale limit theory and its application.— New York: Acad. Press, 1980.
178. *Hegerfeldt G. C., Nappi C. R.* Mixing properties in lattice systems // Commun. Math. Phys.— 1977.— *53*, № 1.— C. 1—7.
179. *Heinrich L.* A method of the derivation of limit theorems for sums of m-dependent random variables // Z. Wahrsch. und verw. Geb.— 1982.— *60*, № 4.— C. 501—515.
180. — Non-uniform estimates and asymptotic expansions of the remainder in the central limit theorem for m-dependent random variables // Math. Nachr.— 1984.— *115*.— C. 7—20.
181. — Some remarks on asymptotic expansions in the central limit theorem for m-dependent random variables // Math. Nachr.— 1985.— *122*.— C. 151—155.
182. — Stable limits for sums of m-dependent random variables // Serdica Bulgaricae math. publ.— 1985.— *11*, № 2.— C. 189—199.
183. — Some estimates of the cumulant-generating function of a sum of m-dependent random vectors and their application to large deviations // Math. Nachr.— 1985.— *120*.— C. 91—101.
184. — Non-uniform estimates, moderate and large deviation in the central limit theorem for m-dependent random variables // Math. Nachr.— 1985.— *121*.— C. 107—121.
185. — Stable limit theorems for sums of multiply indexed m-dependent random variables // Math. Nachr.— 1986.— *127*.— C. 193—210.
186. — Asymptotic expansions in the central limit theorem for a special class of m-dependent random fields. I, II — lattice case // Math. Nachr.— 1987.— *134*.— C. 83—106; 1990.— *145*.— C. 309—327.
187. — Non-uniform bounds for the error in the central limit theorem for random fields generated by functions of independent random variables // Math. Nachr.— 1990.— *145*.— C. 345—364.

188. —, *Richter W.-D.* On moderate deviations of sums of m-dependent random vectors // Math. Nachr.— 1984.— *118.*— C. 253—264.
189. *Herrndorf N.* The invariance principle for φ-mixing sequences // Z. Wahrsch. und verw. Geb.— 1983.— *63,* № 1.— C. 97—108.
190. — Stationary strongly mixing sequences not satisfying the central limit theorem // Ann. Probab.— 1983.— *11,* № 3.— C. 809—813.
191. — A functional central limit theorem for strongly mixing sequences of random variables // Z. Wahrsch. und verw. Geb.— 1985.— *69,* № 4.— C. 541—550.
192. *Hipp Ch.* Convergence rates of the strong law for stationary mixing sequences // Z. Wahrsch. und verw. Geb.— 1979.— *49,* № 1.— C. 49—62.
193. — Convergence rates in the central limit theorem for stationary mixing sequences of random vectors // J. Multiv. Anal.— 1979.— *9.*— C. 560—578.
194. *Ho S.-T., Chen L. H. Y.* An L_p bound for the remainder in a combinatorial central limit theorem // Ann. Probab.— 1978.— *6,* № 2.— C. 231—249.
195. *Hoeffding W., Robbins H.* The central limit theorem for dependent random variables // Duke Math. J.— 1948.— *15.*— C. 773—780.
196. *Iosifescu M.* La loi logarithme itéré pour une classe de variables aléatoires dépendantes // Теория вероятн. и ее примен.— 1968.— *13,* вып. 2.— C. 315—325.
197. — Limit theorems for ϕ-mixing sequences. A survey. // Proc. of the Fifth Conf. on Probab. Th., Sept. 1—6, 1974. Brasov, Romania. Editura Academiei Republicii Socialiste Romania, Bucuresti.— C. 51—57.
198. — Recent advances in mixing sequences of random variables // In: Third Inter. Summer School on Probab. Theory and Math. Statist. Varna, 1978.—Sofia: Publishing House of the Bulgarian Academy of Sciences, 1980.— C. 111—138.
199. —, *Teodorescu R.* Random Processes and Learning.— Berlin: Springer Verlag, 1969.
200. *Jakimavičius D., Statulevičius V.* Estimates of cumulants and centered moments of mixing random processes // Preprint № 3. Acad. Sci. Lit.SSR, Inst. Math. and Cyb.— Vilnius, 1987.— 60c.
201. *Janson S.* Normal convergence by higher semiinvariants with applications to sums of dependent random variables and random graphs // Ann. Probab.— 1988.— *16,* № 1.— C. 305—312.
202. *Kanagawa S.* Rates of convergence of the invariance principle for weakly dependent random variables // Keio Math. Semin. Rep.— 1981.— *6.*— C. 23—25.
203. — On the rate of convergence of the invariance principle for stationary sequences // Keio Sci. and Technology Reports.— 1982.— *35,* № 3. — C. 53—61.

204. *Kesten H., O'Brien G. L.* Examples of mixing sequences // Duke Math. J.— 1976.— *43*, № 2.— C. 405—415.
205. *Krieger H. A.* A new look of Bergström's theorem on convergence in distribution for sums of dependent random variables // Isr. J. Math. — 1984.— *47*.— C. 32—64.
206. *Maejima M.* A non-uniform estimate in the central limit theorem for m-dependent random variables // Keio Engineering Reports.— 1978. — *31*, № 2.— C. 15—20.
207. *McLeish D. L.* Dependent central limit theorems and invariance principles // Ann. Probab.— 1974.— *2*, № 4.— C. 620—628.
208. — Invariance principles for dependent variables // Z. Wahrsch. und verw. Geb.— 1975.— *32*, № 3.— C. 165—178.
209. *Nahapetian B. S.* The central limit theorem for random fields // Multicomponent random systems (Eds. R. L. Dobrushin, Ya. G. Sinai). —New York: Marcel Dekker, 1980.— C. 531—542.
210. *Neaderhouser C. C.* Some limit theorems for random fields // Commun. Math. Phys.— 1978.— *61*, № 3.— C. 293—305.
211. — Limit theorems for multiply-indexed mixing random variables with applications to Gibbs random fields // Ann. Probab.— 1978.— *6*, № 2.— C. 207—215.
212. *Negishi H.* The rate of convergence to normality for strong mixing sequences of random variables // Sci. Repts. Yokohama Nat. Univ. Sec. 1.— 1977.— № 14.— C. 17—25.
213. *Oodaira H., Yoshihara K.* Functional central limit theorems for strictly stationary processes satisfying the strong mixing conditions // Kodai Math. Sem. Rep.— 1972.— *24*, № 3.— C. 259—269.
214. *Orey S.* A central limit theorem for m-dependent random variables // Duke Math. J.— 1958.— *25*, № 4.— C. 543—546.
215. *Peligrad M.* Invariance principles for mixing sequences of random variables // Ann. Probab.— 1982.— *10*, № 4.— C. 968—981.
216. — A note on two measures of dependence and mixing sequences // Adv. Appl. Probab.— 1983.— *15*.— C. 461—464.
217. — An invariance principle for ϕ-mixing sequences // Ann. Probab. — 1985.— *13*, № 4.— C. 1304—1313.
218. — Recent advances in the central limit theorem and its weak invariance principle for mixing sequences of random variables (a survey) // Dependence in Probab. and Statist.—Basel-Stuttgart: Birkhäuser, 1986.— C. 193—223.
219. — Invariance principles under weak dependence // J. Multiv. Anal. — 1986.— *19*, № 2.— C. 299—310.
220. — On the central limit theorem for ρ-mixing sequences of random variables // Ann. Probab.— 1987.— *15*, № 4.— C. 1387—1394.
221. — On Ibragimov — Iosifescu conjecture for ϕ-mixing sequences // Stoch. Proc. Appl.— 1990.— *35*, № 2.— C. 293—308.
222. *Philipp W.* The central limit problem for mixing sequences of random variables // Z. Wahrsch. und verw. Geb.— 1969.— *12*, № 2.—

C. 155—171.
223. — The remainder in the central limit theorem for mixing stochastic processes // Ann. Math. Statist.— 1969.— *40*, № 2.— C. 601—609.
224. — Weak and L^p-invariance principles for sums of B-valued random variables // Ann Probab.— 1980.— *8*, № 1.— C. 68—82.
225. —, *Stout W.* Almost sure invariance principles for partial sums of weakly dependent random variables // Mem. Amer. Math. Soc.— 1975.— № 161.
226. —, *Webb G. R.* An invariance principle for mixing sequences of random variables // Z. Wahrsch. und verw. Geb.— 1973.— *25*, № 3.— C. 223—237.
227. *Rao P. L. S. P.* Remark on the rate of convergence in the random central limit theorem for mixing sequences // Z. Wahrsch. und verw. Geb.— 1975.— *31*, № 2.— C. 157—160.
228. — A non-uniform estimate of the rate of convergence in the central limit theorem for m-dependent random fields // Z. Wahrsch. und verw. Geb.— 1981.— *58*, № 2.— C. 247—256.
229. *Rényi A.* On measures of dependence // Acta Math. Acad. Sci. Hungar.— 1959.— *10*.— C. 441—451.
230. *Rhee Wan Soo.* An Edgeworth expansion for a sum of m-dependent random variables // Internat. J. Math. and Math. Sci.— 1985.— *8*, № 3.— C. 563—569.
231. — On the characteristic function of a sum of m-dependent random variables // Internat. J. Math. and Math. Sci.— 1986.— *9*, № 2.— C. 397—404.
232. —, *Talagrand M.* On Berry — Esseen type bounds for m-dependent random variables valued in certain Banach spaces // Z. Wahrsch. und verw. Geb.— 1981.— *58*, № 4.— C. 433—451.
233. — Uniform bound in the central limit theorem for Banach space valued dependent random variables // J. Multiv. Anal.— 1986.— *20*, № 2.— C. 303—320.
234. *Rosén B.* On the central limit theorem for sums of dependent random variables // Z. Wahrsch. und verw. Geb.— 1967.— *7*, № 1.— C. 48—82.
235. *Rosenblatt M.* A central limit theorem and a strong mixing condition // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1956.— *42*, № 1.— C. 43—47.
236. — Markov processes. Structure and asymptotic behavior.— New York: Springer Verlag, 1971.
237. — Central limit theorem for stationary processes // Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. and Probab.— 1972.— *2*.— C. 551—561.
238. — Asymptotic normality, strong mixing and spectral density estimates // Ann. Probab.— 1984.— *12*, № 4.— C. 1167—1180.
239. *Roussas G. G., Ionnides D.* Moment inequalities for mixing sequences of random variables // Stoch. Anal. Appl.— 1987.— *5*, № 1.—

С. 61—120.
240. *Rychlik Z., Szyszkowski I.* The invariance principle for φ-mixing sequences // Теория вероятн. и ее примен.— 1987.— *32*, № 3.— С. 616—619.
241. *Samur J.* Convergence of sums of mixing triangular arrays of random vectors with stationary rows // Ann. Probab.— 1984.— *12*, № 2.— С. 390—426.
242. *Schneider E.* On the speed of convergence in the random central limit theorem for φ-mixing processes // Z. Wahrsch. und verw. Geb.— 1981.— *58*, № 1.— С. 125—138.
243. *Serfling R. J.* Contributions to central limit theorem for dependent variables // Ann. Math. Statist.— 1968.— *39*, № 4.— С. 1158—1175.
244. — Approximation Theorems of Mathematical Statistics.— New York: Wiley, 1980.
245. *Shergin V. V.* The central limit theorem for finitely dependent random variables // Probab. Theory and Math. Statist. Proc. of the Fifth Vilnius Conf., 1989.— Utrecht: VSP BV/Vilnius: Mokslas, 1990.— С. 424—431.
246. *Statulevičius V. A.* Limit theorems for dependent random variables under various regularity conditions // Proc. Int. Congr. Math. Vancouver.— 1974.— *2*.— С. 173—181.
247. — Application of semi-invariants to asymptotic analysis of distributions of random processes // J. Multiv. Anal.— 1977.— *4*.— С. 325—337.
248. — On limit theorems for dependent random variables // In: Abstracts of Commun. in Second Vilnius Conf. on Probab. Theory and Math. Statist. Vilnius.— 1977.— *3*.— С. 212—215.
249. *Stein Ch.* A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables // Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. and Probab.— 1972.— *2*.— С. 583—602.
250. — Estimation of the mean of a multivariate normal distribution // Ann. Statist.— 1981.— *9*, № 6.— С. 1135—1151.
251. *Szewczak Z. S.* On a central limit theorem for m-dependent sequences // Bull. Polish Acad. Sci. Math.— 1988.— *36*, № 5—6.— С. 327—331.
252. *Szyszkowski I.* An invariance principle for dependent random variables // Acta math. hung.— 1990.— *56*, № 1—2.— С. 45—51.
253. *Takahata H.* L_∞-bound for asymptotic normality of weakly dependent summands using Stein's result // Ann. Probab.— 1981.— *9*, № 4. — С. 676—683.
254. — On the rates in the central limit theorem for weakly dependent random fields // Z. Wahrsch. und verw. Geb.— 1983.— *64*, № 4.— С. 445—456.

255. — The central limit problems for energy in the Cibbs random fields A short survey // Bull. Tokyo Gakugei Univ., Sec. 4.— 1984.— *36.*— C. 1—15.
256. *Tikhomirov A. N.* On the normal approximation of sums of weakly dependent Hilbert — valued random variables // Probab. Theory and Math. Statist. Proc. of the Fifth Vilnius Conf., 1989.—Utrecht: VSP BV/Vilnius: Mokslas, 1990.— C. 482—494.
257. *Utev S. A.* Central limit theorem for dependent random variables // Probab. Theory and Math. Statist. Proc. of the Fifth Vilnius Conf., 1989.— Utrecht: VSP BV/Vilnius: Mokslas, 1990.— C. 519—528.
258. *Withers C. S.* Central limit theorems for dependent variables. I // Z. Wahrsch. und verw. Geb.— 1981.— *57,* № 4.— C. 509—534.
259. — Central limit theorems for dependent variables. II // Probab. Theor. and Relat. Fields.— 1987.— *76,* № 1.— C. 1—13.
260. *Yokoyama R.* Convergence of moments in the central limit theorem for stationary φ-mixing sequences // Tsukuba J. Math.— 1979.— *3,* № 2.— C. 1—6.
261. — Moments bounds for stationary mixing sequences // Z. Wahrsch. und verw. Geb.— 1980.— *52,* № 1.— C. 45—57.
262. — The convergence of moments in the central limit theorem for weakly dependent random variables // Tsukuba J. Math.— 1983.— *7,* № 1.— C. 147—156.
263. *Yoshihara K.* Limiting behavior of U-statistics for stationary absolutely regular processes // Z. Wahrsch. und verw. Geb.— 197 — *35,* № 3.— C. 237—252.
264. — Convergence rates for integral type functionals of absolutely regular processes // Yokohama Math. J.— 1977.— *25,* № 2.— C. 145—153.
265. — Moments inequalities for mixing sequences // Kodai Math. J.— 1978.— *1,* № 2.— C. 316—328.
266. — Probability inequalities for sums of absolutely regular processes and their applications // Z. Wahrsch. und verw. Geb.— 1978.— *43,* № 4.— C. 319—329.
267. — Summability of random variables satisfying the strong mixing condition // Sci. Rep. Yokohama Nat. Univ. Sect. 1.— 1979.— № 26. — C. 9—15.
268. — Convergence rates of the invariance principles for absolutely regular sequences // Yokohama Math. J.— 1979.— *27,* № 1.— C. 49—55.
269. — Central limit theorems for stationary mixing sequences // Yokohama Math. J.— 1985.— *33,* № 1—2.— C. 131—137.
270. *Zaremba S. K.* Note on the central limit theorem // Math. Z.— 1958. — *69.*— C. 295—298.

УТОЧНЕНИЯ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

П. Гудинас

В современной теории вероятностей, наряду с независимыми случайными величинами (с.в.), изучаются и так называемые слабо зависимые с.в. Связано это как с внутренней логикой развития теории вероятностей, так и с конкретными практическими задачами. Особое место среди различных схем слабой зависимости занимают однородные цепи Маркова, удовлетворяющие условиям перемешивания. Они служат как бы промежуточным звеном при переходе от независимых одинаково распределенных с.в. к более сложным схемам слабой зависимости. Кроме того, однородные цепи Маркова имеют достаточно простую структуру и поэтому сравнительно легко поддаются исследованию. И, наконец, они хорошо моделируют многие наблюдаемые на практике процессы.

Цель настоящей работы: во-первых, дать читателю представление о двух наиболее развитых методах доказательства предельных теорем для сумм с.в. связанных в однородную цепь Маркова; во-вторых, ознакомить его с некоторыми результатами, полученными с помощью этих методов. Из-за небольшого объема, работа не претендует на полноту изложения. Затрагиваются только самые характерные для однородных цепей подходы и результаты, хотя (и это надо подчеркнуть) в случае однородных марковских цепей неплохо работают и универсальные методы слабо зависимых с.в.

§ 1. Введение

Начнем с основных обозначений и определений. Пусть $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ – измеримое пространство и пусть $P(x, A)$ – ***функция вероятностей перехода*** (ф.в.п.). По определению, при фиксированном x ф.в.п. $P(x, \cdot)$ является вероятностной мерой на

$(\mathcal{X},\mathcal{F})$, а при фиксированном A ф.в.п. $P(\cdot, A)$ измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{F}$. Рассмотрим *однородную цепь Маркова* $\{X_i,\ i = 0,1,2,\ldots\}$ с пространством состояний $(\mathcal{X},\mathcal{F})$, начальным распределением $G(\cdot)$ и переходной вероятностью $P(\cdot,\cdot)$. Согласно теореме Ионеску–Тулча для любых множеств A_i, $i = 0,1,\ldots,n$, из $\mathcal{F}$

$$\mathbf{P}_G(X_0 \in A_0,\ X_1 \in A_1,\ldots,X_n \in A_n) =$$
$$= \int\limits_{A_0} G(dx_0) \int\limits_{A_1} P(x_0, dx_1) \ldots \int\limits_{A_n} P(x_{n-1}, dx_n). \qquad (1)$$

Здесь индекс G подчеркивает, что $\mathbf{P}_G$ – распределение цепи с начальным распределением G. Аналогично, мы будем добавлять индекс G (или другой) к знаку математического ожидания и будем понимать запись $\mathbf{E}_G f$ как интеграл по мере $\mathbf{P}_G$. Через $P^n(x, A)$ обозначим вероятность перехода цепи $\{X_i\}$ за n шагов из состояния x в множество A, $\mathcal{A}_n$ – σ-алгебру, порожденную $\{X_i,\ i \leqslant n\}$, $\mathcal{B}_m$ – σ-алгебру, порожденную $\{X_j,\ j \geqslant m\}$. Пусть $f(x)$ – действительная измеримая функция на $(\mathcal{X},\mathcal{F})$. Будем рассматривать последовательность с.в.

$$Y_i := f(X_i), \quad i = 1,2,\ldots. \qquad (2)$$

Определенные таким образом с.в. $\{Y_i\}$ называются *связанными в цепь Маркова*. Обозначим

$$S_n := Y_1 + \ldots + Y_n, \qquad (3)$$
$$\mu_n := \mathbf{E}_G S_n, \quad \sigma_n^2 := \mathbf{E}_G (S_n - \mu_n)^2. \qquad (4)$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что существует вероятностная мера Q, инвариантная относительно P, т.е. для любого $A \in \mathcal{F}$

$$Q(A) = \int Q(dx) P(x, A).$$

К настоящему времени разработан ряд методов доказательства предельных теорем для цепей Маркова. Но наиболее законченных результатов удалось добиться для цепей, определенных на произвольном фазовом пространстве и удовлетворяющих условию Деблина, методом, основанным на спектральной теории возмущений линейных операторов. Впоследствии этот метод, который мы назовем спектральным, был распространен на более широкий класс цепей Маркова. Именно с изложения его сути мы и собираемся начать, но перед этим сделаем еще несколько замечаний. Первое – относительно условия Деблина D_0 (см. [19]). Оно эквивалентно (см. [26], с. 209) условию

$$\sup_{x\in\mathcal{X}} \sup_{A\in\mathcal{F}} |P^n(x,A) - Q(A)| \leqslant \alpha(n) \to 0. \tag{5}$$

Иными словами, условие D_0, встречающееся в теории цепей Маркова, по существу эквивалентно *условию равномерно сильного перемешивания* в теории слабо зависимых с.в. Далее, известно (см. [26]), что (5) выполнено тогда и только тогда, когда существуют константы γ, $\gamma > 0$, и $\rho, 0 < \rho < 1$, такие, что для всех $x \in \mathcal{X}$ и $A \in \mathcal{F}$

$$|P^n(x,A) - Q(A)| < \gamma\rho^n. \tag{6}$$

Мы видим, что условия, эквивалентные D_0, накладывают довольно жестские ограничения на эргодические свойства цепи. Это заставило искать другие условия, при которых применим спектральный метод. Одним из них оказалось условие асимптотической некоррелированности. Сформулируем его здесь.

Пусть $L_2(\mathcal{A}_n)$ – множество $\mathcal{A}_n$-измеримых функций с нулевым средним и конечными вторыми моментами. Аналогично определим $L_2(\mathcal{B}_k)$. Обозначим

$$c(n) :=$$

$$\sup\left\{\frac{\mathbf{E}_Q(fg)}{(\mathbf{E}_Q f^2 \mathbf{E}_Q g^2)^{1/2}} : f \in L_2(\mathcal{A}_m),\ g \in L_2(\mathcal{B}_{m+n}),\ m = 0,1,\dots\right\}.$$

$c(n)$ называется *максимальным коэффициентом корреляции*. Если при $n \to \infty$

$$c(n) \to 0, \tag{7}$$

то принято говорить, что цепь $\{X_i\}$ удовлетворяет *условию асимптотической некоррелированности*.

Теперь попытаемся выяснить, что общего между, скажем, условиями (5) и (7). Это нам поможет понять суть спектрального метода. Через $L^p = L^p(\mathcal{X},\mathcal{F},Q)$, $1 \leqslant p < \infty$, обозначим банахово пространство комплексных $\mathcal{F}$-измеримых функций на $\mathcal{X}$ с нормой $\|g\|_{L^p} = \left(\int |g(x)|^p Q(dx)\right)^{1/p}$, $L^\infty = L^\infty(\mathcal{X},\mathcal{F},Q)$ – банахово пространство комплексных $\mathcal{F}$-измеримых существенно ограниченных функций на $\mathcal{X}$ с нормой $\|g\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}|g(x)|$. Рассмотрим операторы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$, определяемые в банаховом пространстве L^1 соотношениями

$$(\mathbf{P}g)(x) = \int_{\mathcal{X}} P(x,dy)g(y),$$

$$(\mathbf{Q}g)(x) = \int_{\mathcal{X}} Q(dy)g(y).$$

Первый из этих операторов часто называют *оператором перехода цепи.* Второй из них является проектором на константы. Заметим, что $\mathsf{PQ} = \mathsf{QP} = \mathsf{Q}$, т.е. число $\lambda = 1$ – собственное значение оператора P. Нетрудно видеть также, что условие (6) эквивалентно условию

$$||\mathsf{P}^n - \mathsf{Q}||_{L^\infty \to L^\infty} < \gamma_0 \rho^n, \qquad (8)$$

где $||\cdot||_{L^\infty \to L^\infty}$ – операторная норма в L^∞, γ_0 – положительная константа. Но $(\mathsf{P} - \mathsf{Q})^n = \mathsf{P}^n - \mathsf{Q}$. Поэтому из (8) получаем, что спектральный радиус оператора $(\mathsf{P} - \mathsf{Q})$ в L^∞ не превышает ρ. Следовательно, условие (6) (а значит и (5)) выполнено тогда и только тогда, когда весь спектр оператора P, за исключением простого собственного значения $\lambda = 1$, находится в круге $|\lambda| < \rho < 1$.

Оказалось, что и условие (7) имеет аналогичную спектральную интерпретацию. Только в этом случае оператор P надо рассматривать в более узком банаховом пространстве $L^2(Q)$ Q-суммируемых в квадрате функций. А именно: условие (7) выполнено (см. [7]) тогда и только тогда, когда весь спектр оператора P в пространстве L^2, за исключением простого собственного значения $\lambda = 1$, находится в некотором круге $|\lambda| < \rho_1 < 1$. Очевидно, что для этого необходимо и достаточно существование $\gamma_1 > 0$ такого, что

$$||\mathsf{P}^n - \mathsf{Q}||_{L^2 \to L^2} < \gamma_1 \rho_1^n. \qquad (9)$$

Введем еще один очень важный для исследования цепей Маркова объект. Пусть B – некоторое банахово пространство, элементами которого служат комплекснозначные измеримые функции на $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$. Для тех комплексных чисел z, для которых это имеет смысл, определим оператор $\mathsf{P}(z)$, действующий по следующей формуле:

$$(\mathsf{P}(z)g)(x) = \int P(x, dy) e^{zf(y)} g(y). \qquad (10)$$

для $g \in B$

По аналогии с независимыми с.в. $\mathsf{P}(z)$ иногда называют *операторнозначной производящей функцией* условных моментов цепи. Очевидно, что $\mathsf{P}(0) = \mathsf{P}$. Через $\psi = \psi(x)$ обозначим функцию, тождественно равную единице (т.е. $\psi(x) \equiv 1$), $f_n(t)$ – характеристическую функцию суммы S_n, $\mathcal{G}$ – функционал, определяемый равенством

$$\mathcal{G}g = \int_{\mathcal{X}} G(dx) g(x). \qquad (11)$$

Тогда легко видеть, что для $f_n(t)$ имеет место выражение

$$f_n(t) = \mathbf{E}_G e^{itS_n} = \mathcal{G}\mathbf{P}^n(it)\psi, \tag{12}$$

т.е. характеристическая функция S_n записывается через n-тую степень операторнозначной производящей функции. В этом прослеживается определенная аналогия с независимыми с.в. Если выполнены условия (5) или (7), то из (12) можно, например, вывести следующее асимптотическое соотношение. В достаточно малой окрестности нуля

$$f_n(t) = \lambda^n(it)(1 + t\theta_1(t)) + \rho_2^n t\theta_2(n,t), \tag{13}$$

где $\lambda(it)$ – наибольшее по модулю собственное значение оператора $\mathbf{P}(it)$, $\theta_1(t)$ и $\theta_2(n,t)$ – ограниченные функции, ρ_2 – положительное число меньше единицы. Кроме того, оказывается, что в окрестности нуля свойства $\lambda(it)$ схожи со свойствами обычной характеристической функции. Следовательно, если выполнены условия (5) или (7), то характеристическая функция суммы S_n ведет себя почти так же, как и в случае независимых с.в. Из соотношений типа (13), применяя классические методы, уже несложно получить, скажем, различные уточнения центральной предельной теоремы для цепей Маркова.

Из сказанного становится ясно, что основные трудности в доказательстве предельных теорем для суммы S_n сопряжены с переходом от тождества (12) к выражениям для $f_n(t)$, аналогичным соотношению (13). Именно для этого и используется *спектральный метод*, основные приемы которого мы постараемся продемонстрировать в §3. В следующем параграфе сформулируем несколько результатов, которые можно доказать, пользуясь этим методом.

§ 2. Результаты для B-регулярных цепей

Сначала введем условие слабой зависимости, обобщающее условия (5) и (7). Пусть B – банахово пространство комплекснозначных функций на $\mathcal{X}$ такое, что:

а) если $g \in B$, то g измерима относительно $\mathcal{F}$;

б) если g постоянная на $\mathcal{X}$, то $g \in B$;

в) определенные выше операторы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ – ограниченные эндоморфизмы пространства B.

Определение. Цепь Маркова $\{X_i\}$ назовем (см. [3]) *B-регулярной*, если выполнено условие: существует число k_0 такое, что

$$\|\mathbf{P}^{k_0} - \mathbf{Q}\|_{B\to B} = \delta < 1. \tag{14}$$

Здесь $\mathbf{P}^{k_0}$ – k_0-я итерация оператора $\mathbf{P}$, а $\|\cdot\|_{B\to B}$ – операторная норма в B. Нетрудно получить другую, эквивалентную форму этого условия: существуют положительные числа γ_3 и $\rho_3 < 1$ такие, что

$$\|\mathbf{P}^n - \mathbf{Q}\|_{B\to B} < \gamma_3\rho_3^n. \tag{15}$$

Заметим, что, при выполнении условия (14), в неравенстве (15) можно взять $\gamma_3 = \delta^{-1}(\|\mathbf{P}\|_{B\to B} + \|\mathbf{Q}\|_{B\to B})^{k_0-1}$ и $\rho_3 = \delta^{1/k_0}$. И наконец, B-регулярность может быть определена еще одним способом – в терминах спектральной теории линейных операторов. Для выполнения условия (14) необходимо и достаточно, чтобы существовалс ρ_4, $0 < \rho_4 < 1$, для которого множество точек комплексной плоскости $\{\xi : |\xi| \geqslant \rho_4\}$ со спектром оператора перехода $\mathbf{P}$ (действующего в B) имело бы единственную общую точку – простое собственное значение $\lambda = 1$, которому соответствует проектор $\mathbf{Q}$. Напомним, что собственное значение называется простым, если оно изолировано от остальной части спектра и имеет алгебраическую кратность, равную единице. Непосредственно из такой спектральной интерпретации понятия B-регулярности и спектральной интерпретации условий (5) и (7) вытекают следующие утверждения: условие (5) эквивалентно L^∞-регулярности, а условие (7) эквивалентно L^2-регулярности однородной цепи Маркова. Иными словами, указанные два условия можно рассматривать как частные случаи общей схемы L^p-регулярности (когда p пробегает интервал $[1,\infty]$.) Возникает естественный вопрос о взаимосвязи условий L^p-регулярности при различных значениях p.

Предложение 1. *Если условие L^p-регулярности удовлетворяется хотя бы для одного значения q из интервала* $[1, \infty]$, *то оно удовлетворяется и для всех* $p \in (1, \infty)$.

Доказательство. Это утверждение вытекает непосредственно из теоремы Рисса–Торина об интерполяции линейных операторов в пространствах L^p (см. [12], с. 150). Надо только воспользоваться эквивалентностью L^p-регулярности условию (15) и учесть, что $\|\mathbf{P}^k - \mathbf{Q}\|_{L^1\to L^1} \leqslant 2$ и $\|\mathbf{P}^k - \mathbf{Q}\|_{L^\infty\to L^\infty} < 2$. Для $r \in (1,q)$ можно найти θ, $0 < \theta < 1$, такое, что $1/r = (1-\theta) + \theta/q$. Тогда по теореме Рисса–Торина

$$\|\mathbf{P}^n - \mathbf{Q}\|_{L^r\to L^r} \leqslant \|\mathbf{P}^n - \mathbf{Q}\|_{L^1\to L^1}^{1-\theta}\|\mathbf{P}^n - \mathbf{Q}\|_{L^q\to L^q}^{\theta} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{1-\theta}(\gamma_4\rho_4^n)^\theta = \gamma_5\rho_5^n, \quad 0 < \rho_5 < 1,$$

и, следовательно, цепь $\{X_i\}$ L^r-регулярна. Аналогично доказывается и случай $r \in (q, \infty)$.

Следует отметить, что L^p-регулярными цепями класс B-регулярных цепей не исчерпывается. L^p-регулярность играет центральную роль только для цепей с произвольными пространствами состояний. Для цепей же с топологическими пространствами состояний интересных возможностей B-регулярности гораздо больше. Мы не будем уточнять последнее утверждение. Вместо этого приведем пример.

Пример. Пусть $\{Z_i,\ i = 0, 1, \ldots\}$ – цепь Маркова с фазовым пространством $\mathcal{X} = [0, 1]$ и переходной вероятностью

$$P(x, A) := \begin{cases} p(x), & \text{если } A = \{x/2\}, \\ 1 - p(x), & \text{если } A = \{x/2 + 1/2\}, \end{cases} \qquad (16)$$

где $p(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция на $[0, 1]$, удовлетворяющая неравенствам $0 < p(x) < 1$. Оператор перехода этой цепи действует по формуле

$$(\mathbf{P}g)(x) = p(x)g(x/2) + (1 - p(x))g(x/2 + 1/2).$$

Обозначим $C = C[0, 1]$ банахово пространство всех непрерывных на $[0, 1]$ функций с нормой $||g||_0 := \max\{|g(x)| : x \in [0, 1]\}, C^{(1)} = C^{(1)}[0, 1]$ – банахово пространство дифференцируемых на $[0, 1]$ функций с нормой $||g|| := ||g||_0 + ||g||_1$, где $||g||_1 := \max\{|g'(x)| : x \in [0, 1]\}$. В [3] доказано, что для любого $q \in (0, 1)$ можно так подобрать число $\varepsilon(q) > 0$, чтобы из неравенства $||p(x) - q|| < \varepsilon(q)$ вытекало существование инвариантной относительно ф.в.п. (16) меры Q и $C^{(1)}$-регулярность цепи Маркова с начальным распределением Q и ф.в.п. (16).

Сразу же отметим, что цепь Маркова $\{Z_i\}$ не удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания. Более того, даже в том простом случае, когда $p(x) \equiv 1/2$, цепь $\{Z_i\}$ не является $L^q[0, 1]$-регулярной ни для какого значения $q \in [1, \infty)$.

Перейдем теперь к формулировке предельных теорем для B-регулярных цепей. В дальнейшем будем предполагать, что

$$\int f(x)Q(dx) = 0. \qquad (17)$$

Обозначим $\Phi(x)$ функцию распределения стандартного нормального закона,

$$\sigma^2 := \mathbf{E}_Q(f^2(X_1)) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}_Q(f(X_1)f(X_{k-1}), \qquad (18)$$

$$F_{n,G}(x) := \mathbf{P}_G(S_n < \sigma\sqrt{n}x).$$

Операторы $\mathbf{P}^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, определим соотношением

$$(\mathbf{P}^{(k)}g)(x) = (1/k!)\int_{\mathcal{X}} P(x, dy)f^k(y)g(y). \qquad (19)$$

Будем говорить, что функция $f(x)$ удовлетворяет *условию* (M_B), если:

а) $\mathsf{P}^{(1)}$, $\mathsf{P}^{(2)}$ и $\mathsf{P}(it)$, $t \in (-\infty, \infty)$, – линейные ограниченные операторы, отображающие B в B;

б) в смысле операторной нормы

$$\mathsf{P}(it) = \mathsf{P} + it\mathsf{P}^{(1)} - t^2\mathsf{P}^{(2)} + O(t^3).$$

У читателя может возникнуть вопрос о корректности определения величины σ^2. На него отвечает следующее утверждение.

Предложение 2 [3]. *Пусть цепь Маркова $\{x_i\}$ B-регулярна, а функция $f(x)$ удовлетворяет условию (M_B). Тогда соотношение* (18) *корректно определяет величину σ^2 и $\sigma^2 < \infty$.*

Теорема 1 [3]. *Пусть*

а) цепь Маркова $\{X_i\}$ B-регулярна;

б) функция $f(x)$ удовлетворяет условию (M_B);

в) соответствующий начальному распределению G линейный функционал $\mathcal{G}$ ограничен на B;

г) $\sigma^2 > 0$.

Тогда

$$\sup_x |F_{n,G}(x) - \Phi(x)| = O(n^{-1/2}). \tag{20}$$

Надо признать, что условие (M_B) сформулировано в очень абстрактных терминах и это осложняет применение теоремы 1. Но, с другой стороны, вряд ли этого недостатка можно избежать, не сузив класс допустимых пространств B. Один из разумных вариантов сужения упомянутого класса – ограничиться пространствами L^p, $p \in [1, \infty]$. Приведем следствие из теоремы 1.

Теорема 2 (см. [2]). *Пусть для некоторого фиксированного $p \in [1, \infty]$:*

а) цепь $\{X_i\}$ – L^p-регулярна;

б) оператор $\mathsf{P}^{(3)}$ – ограниченный эндоморфизм пространства L^p;

в) функционал $\mathcal{G}$ принадлежит сопряженному к L^p пространству $(L^p)^*$;

г) $\sigma^2 > 0$.

Тогда справедливо соотношение (20).

Замечание 1. Нетрудно видеть, что для любого $p \in (1, \infty)$ условие б) теоремы 2 может быть заменено более простым, хотя и более ограничительным, условием

$$\operatorname*{ess\,sup}_x \int_X P(x, dy)|f(y)|^{3q} < \infty, \tag{21}$$

где $1/p + 1/q = 1$.

Надо отметить, что спектральный метод позволяет получать более точные результаты, чем теорема 1. Он позволяет, например, детализировать структуру остаточного члена в соотношении (20). Хорошей иллюстрацией этому утверждению может послужить классическая теорема С. В. Нагаева для L^∞-регулярной (согласно нашей терминологии) цепи. Приведем здесь незначительно измененный ее вариант.

Теорема 3 (см. [10], [11]). *Пусть выполнено условие* (6) *и существует функция действительного переменного* $H(x) > 0$ *такая, что* $\lim H(x) = \infty$,

$$\sup_x \int P(x,dy)|f(y)|^3 H(|f(y)|) < \infty.$$

Тогда величина σ^2 *корректно определена и* $\sigma^2 < \infty$. *Обозначим через* $F^{(0)}_{n,G}$ *функцию распределения нормированной суммы*

$$Z^{(0)}_n := \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n} f(X_k).$$

Если $m_{G,1} := \int |f(x)|G(dx)$ *и* $\sigma^2 > 0$, *то*

$$\sup_x \left|F^{(0)}_{n,G}(x) - \Phi(x)\right| \leqslant c_1 M^3(\rho)\frac{m_3}{\sigma^3\sqrt{n}} + c_2\frac{m_{G,1}}{\sigma\sqrt{n}} + c_3\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\rho\right)^n,$$

где c_1, c_2, c_3 – *абсолютные константы,*

$$m_3 := \sup_x \int P(x,dy)|f(y)|^3,$$

$$M(\rho) := \frac{6(1+2\rho)+3}{1-\rho}.$$

Многомерный аналог этой предельной теоремы доказан Ш. К. Формановым (см. [11], с. 108). С. В. Нагаевым [10] исследовались также асимптотические разложения для L^∞-регулярных цепей. Подробная структура остаточного члена в ЦПТ для других типов B-регулярности фактически не изучалась.

С помощью спектрального метода получен и ряд результатов, касающихся больших уклонений. Классические большие уклонения изучались только для L^p-регулярных цепей (см. [10] и [2]).

Теорема 4 [2]. *Пусть для некоторого* $p \in [1,\infty]$

а) цепь Маркова $\{X_i\}$ L^p*-регулярна;*

б) $\mathcal{G}$ – линейный ограниченный функционал на L^p;
в) существует $\alpha > 0$ такое, что

$$\sup\left\{\left\|\int P(\cdot\,,dy)\exp(\alpha|f(y)|)g(y)\right\|_{L^p} : \|g\|_{L^p} \leqslant 1\right\} < \infty;$$

г) $\sigma^2 > 0$.
Если $x > 1,\ x = o(\sqrt{n})$, то

$$\frac{1 - F_{n,G}(x)}{1 - \Phi(x)} = \exp\left(x^3 r(x/\sqrt{n})/\sqrt{n}\right)\left(1 + O(x/\sqrt{n})\right)$$

и

$$\frac{F_{n,G}(-x)}{\Phi(-x)} = \exp\left(x^3 r(-x/\sqrt{n})/\sqrt{n}\right)\left(1 + O(x/\sqrt{n})\right),$$

где $r(y)$ – вещественно-голоморфная в точке $y = 0$ функция.

Особенно интересные результаты спектральный метод позволяет получить при изучении больших уклонений порядка n. Правда, в этом случае приходится требовать большего, чем B-регулярность. Образно говоря, приходится требовать "B-регулярности редких событий". Не будем стремиться здесь изложить наиболее общие результаты для широкого класса пространств B. Читатель сможет найти их в работах [1] и [4]. Ограничимся частным случаем теоремы из [4], когда $B = L^s$, $s \in (1, \infty)$.

Теорема 5. *Пусть функция $f(x)$ ограничена и, по-прежнему, $\int f(x)Q(dx) = 0$. Пусть существует вероятностная мера $\nu(\cdot)$ на $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ такая, что $Q(dx) = q(x)\nu(dx)$ и $P(x, dy) = p(x,y)\nu(dy)$, причем $q(x) > 0$ п.н. (ν) и $p(x,y) > 0$ п.н. $(\nu \otimes \nu)$. Пусть, далее, $1 < s < \infty$, $1/s + 1/t = 1$, функция $q \in L^t(\mathcal{X}, \nu)$ и*

$$\int\left(\int |p(x,y)|^s \nu(dx)\right)^{t/s} \nu(dy) < \infty. \tag{22}$$

Тогда $\lim_{n\to\infty} \mu_n/n = 0$, $\lim_{n\to\infty} \sigma_n^2/n = \sigma^2$. Обозначим $r(h)$ спектральный радиус оператора $\mathbf{P}(h)$ в пространстве $L^s(\mathcal{X}, \nu)$, где h – вещественное число,

$$M_1 := \sup\left\{\frac{d}{dh}\ln r(h)\ :\ h > 0\right\}.$$

Если дополнительно к перечисленным условиям добавить требование $\sigma^2 > 0$, то для любого a, $0 < a < M_1$,

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln \mathbf{P}_G(S_n > na) = \inf\{-ah + \ln r(h)\ :\ h > 0\} \tag{23}$$

и для всех $a > M_1$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}_G(S_n > na) = -\infty. \tag{24}$$

Следствие 1 [4]. *Пусть $\{X_i\}$ – невырожденная регулярная стационарная гауссовско-марковская последовательность со значениями в R^1, $f(x)$ ограничена и центрирована в смысле (17). Тогда справедливо утверждение теоремы 5, где $r(h)$ – спектральный радиус $\mathbf{P}(h)$ в $L^2(R^1, \Phi), \Phi$ – стандартное нормальное распределение.*

Замечание 2. В отличие от независимого случая для однородной цепи Маркова иногда трудно что-то определенное сказать о справедливости соотношения (23) для $a = M_1$. И эта трудность может быть существенной. Если же $\inf\{-ah + \ln r(h) : h \in [0, M_1)\} = -\infty$, то очевидным образом соотношение (23) теоремы выполняется и для $a = M_1$.

Надо подчеркнуть, что в условиях теоремы 5 для любого комплексного z оператор $\mathbf{P}(z)$ имеет простое собственное значение $\lambda(z)$, превышающее по модулю все другие собственные числа этого оператора. Далее, для вещественных h, $\lambda(h)$ вещественно и положительно, поэтому $r(h) = \lambda(h)$. Следовательно, теорема 5 дает нам очень важную вероятностную интерпретацию наибольшего собственного значения операторнозначной производящей функции условных моментов $\mathbf{P}(z)$. Кроме того, она еще раз показывает, что $\lambda(z)$ в предельных теоремах для цепей играет ту же роль, что и производящая функция моментов в независимом случае. Поэтому суть спектрального метода для цепей как раз и состоит в изучении и использовании аналитических свойств $\mathbf{P}(z)$ и $\lambda(z)$.

§ 3. Доказательство теоремы 1

В качестве примера применения спектрального метода изложим основные этапы доказательства теоремы 1. Обозначим $\mathbf{R}(\xi)$ резолвенту оператора $\mathbf{P}$, $\mathbf{R}(\xi, it)$ – резолвенту оператора $\mathbf{P}(it)$, $\lambda(it)$ – возмущенное (см. [20]) собственное значение $\lambda = 1$ оператора $\mathbf{P}(0) = \mathbf{P}$, $\mathbf{Q}(it)$ – возмущенный собственный проектор $\mathbf{Q}$, $\mathbf{S}$ – значение приведенной резолвенты оператора $\mathbf{P}$ в точке $\xi = 1$. Тогда (см. [20], с. 229)

$$(\mathbf{P} - 1)\mathbf{S} = \mathbf{1} - \mathbf{Q}, \quad \mathbf{SQ} = \mathbf{QS} = 0, \tag{25}$$

и в окрестности $\xi = 1$

$$\mathbf{R}(\xi) = -\mathbf{Q}/(\xi - 1) + \sum_{n=0}^{\infty} (\xi - 1)^n \mathbf{S}^{n+1}. \tag{26}$$

Ниже нам понадобится конкретное выражение оператора S. Приведенная в точке $\xi = 1$ резолвента оператора P, согласно определению, записывается формулой

$$\mathsf{R}_1(\xi) = \mathsf{R}(\xi) + \mathsf{Q}/(\xi - 1).$$

Спектр оператора $\mathsf{P} - \mathsf{Q}$ лежит в круге $|\xi| \leqslant \rho_3 < 1$. Поэтому для $|\xi| > \rho_3$ имеют место соотношения (см. [20], с. 53)

$$\mathsf{R}_1(\xi) = -\sum_{n=0}^{\infty} \xi^{-n-1}\mathsf{P}^n + \mathsf{Q}/(\xi - 1) = -\sum_{n=0}^{\infty} \xi^{-n-1}(\mathsf{P}^n - \mathsf{Q}).$$

Подставив сюда $\xi = 1$, получаем

$$\mathsf{S} = \mathsf{R}_1(1) = -\sum_{n=0}^{\infty}(\mathsf{P}^n - \mathsf{Q}). \tag{27}$$

С помощью методов теории возмущений линейных операторов (см., например, [20]) можно доказать следующее утверждение.

Предложение 3 [2]. *Пусть цепь Маркова B-регулярна и выполнено условие* (M_B). *Пусть, далее, замкнутый контур* Γ *отделяет* $\lambda = 1$ *от остальной части спектра оператора* P. *Тогда в некоторой окрестности нуля* $\lambda(it)$ *остается простым собственным значением и контур* Γ *по-прежнему отделяет его от остальной части спектра оператора* $\mathsf{P}(it)$. *Более того,*

$$\mathsf{Q}(it) = \mathsf{Q} + it\mathsf{Q}^{(1)} - t^2\mathsf{Q}^{(2)} + O(t^3), \tag{28}$$

$$\lambda(it) = 1 + it\lambda^{(1)} - t^2\lambda^{(2)} + O(t^3), \tag{29}$$

где

$$\begin{aligned}\mathsf{Q}^{(1)} &= \mathsf{Q}\mathsf{P}^{(1)}\mathsf{S} - \mathsf{S}\mathsf{P}^{(1)}\mathsf{Q}; \quad \mathsf{Q}^{(2)} = -\mathsf{Q}\mathsf{P}^{(2)}\mathsf{S} - \mathsf{S}\mathsf{P}^{(2)}\mathsf{Q} + \\ &\quad + \mathsf{Q}\mathsf{P}^{(1)}\mathsf{S}\mathsf{P}^{(1)}\mathsf{S} + \mathsf{S}\mathsf{P}^{(1)}\mathsf{Q}\mathsf{P}^{(1)}\mathsf{S} + \mathsf{S}\mathsf{P}^{(1)}\mathsf{S}\mathsf{P}^{(1)}\mathsf{Q} - \\ &\quad - \mathsf{Q}\mathsf{P}^{(1)}\mathsf{Q}\mathsf{P}^{(1)}\mathsf{S}^2 - \mathsf{Q}\mathsf{P}^{(1)}\mathsf{S}^2\mathsf{P}^{(1)}\mathsf{Q} - \mathsf{S}^{(2)}\mathsf{P}^{(1)}\mathsf{Q}\mathsf{P}^{(1)}\mathsf{Q}; \\ \lambda^{(1)} &= \operatorname{tr}\mathsf{P}^{(1)}\mathsf{Q}; \quad \lambda^{(2)} = \operatorname{tr}(\mathsf{P}^{(2)}\mathsf{Q} - \mathsf{P}^{(1)}\mathsf{S}\mathsf{P}^{(1)}\mathsf{Q}).\end{aligned} \tag{30}$$

Подставляя в (30) конкретные выражения Q, S, $\mathsf{P}^{(1)}$, $\mathsf{P}^{(2)}$, получаем

$$\lambda^{(1)} = \mathbf{E}_Q f(X_1) = 0, \quad \lambda^{(2)} = \sigma^2/2. \tag{31}$$

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 1. Вследствие предложения 3, в достаточно малой окрестности нуля

$$\mathsf{P}^n(it) = \lambda^n(it)\mathsf{Q}(it) + \mathsf{T}^n(it), \tag{32}$$

где $\mathbf{T}(it) = \mathbf{P}(it)(\mathbf{1} - \mathbf{Q}(it))$. Подставляя (32) в (12), получаем

$$f_n(t) = \mathbf{E}_G \exp(itS_n) = \lambda^n(it)\mathcal{G}\mathbf{Q}(it)\psi + \mathcal{G}\mathbf{T}(it)\psi. \tag{33}$$

В силу предложения 3 и равенства (31), при $t \to 0$

$$\lambda(it) = 1 - t^2\sigma^2/2 + O(t^3), \tag{34}$$

$$\mathcal{G}\mathbf{Q}(it)\psi = 1 + O(t) \tag{35}$$

и

$$||(\mathbf{1} - \mathbf{Q}(it))\psi||_B = ||(\mathbf{1} - \mathbf{Q}(it))\mathbf{Q}\psi||_B = ||(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}(it))\psi||_B = O(t). \tag{36}$$

Далее, из соотношения (14) и непрерывности $\mathbf{P}(it)$, $\lambda(it)$ и $\mathbf{Q}(it)$ в точке $t = 0$ вытекает, что для любого δ_1, $\delta < \delta_1 < 1$, найдется окрестность нуля, в которой

$$||\mathbf{T}^{k_0}(it)||_{B\to B} = ||\mathbf{P}^{k_0}(it)(\mathbf{1} - \mathbf{Q}(it))||_{B\to B} =$$

$$= ||\mathbf{P}^{k_0}(it) - \lambda^{k_0}(it)\mathbf{Q}(it))||_{B\to B} < \delta_1.$$

Поэтому, положив $\rho_4 = \delta_1^{1/k_0}$, можно так подобрать положительную константу γ_4, чтобы в той же окрестности нуля

$$||\mathbf{T}^n(it)||_{B\to B} < \gamma_4\rho_4^n. \tag{37}$$

В силу (36), (37) и условия (M_B), для достаточно малых t

$$|\mathcal{G}\mathbf{T}^n(it)\psi| = |\mathcal{G}\mathbf{T}^{n-1}(it)\mathbf{P}(it)(\mathbf{1} - \mathbf{Q}(it))\psi| \leqslant$$

$$\leqslant ||\mathcal{G}||_B \cdot ||\mathbf{T}^{n-1}(it)||_{B\to B}||\mathbf{P}(it)||_{B\to B}||\mathbf{1} - \mathbf{Q}(it))\psi||_B \leqslant C_4\rho_4^n t, \tag{38}$$

где C_4 – константа, не зависящая от n и t. Подставляя теперь (34), (35) и (38) в (33) получаем, что для достаточно малых t

$$f_n(t) = \lambda^n(it)(1 + t\theta_1(t)) + \rho_4^n t\theta_2(n,t), \tag{39}$$

где $\theta_1(t)$ и $\theta_2(n,t)$ – ограниченные функции.

Таким образом, мы доказали упоминавшееся нами выше основное соотношение (13). Дальнейшее доказательство теоремы фактически не отличается от доказательства аналогичных утверждений в независимом случае. Как обычно, применяем неравество Эссеена. Учитывая (39), получаем

$$\sup_x |F_{n,G} - \Phi(x)| \leqslant A/\Delta + \pi^{-1} \int_{-\Delta}^{\Delta} \left| \frac{f_n(t/\sigma\sqrt{n}) - \exp(-t^2/2)}{t} \right| dt =$$

$$= A/\Delta + \pi^{-1} \int_{-\Delta}^{\Delta} \left| t^{-1}\Big(\lambda^n(it/\sigma\sqrt{n})(1 + \frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\theta_1(t/\sigma\sqrt{n})) - \right.$$

$$\left. - \exp(-t^2/2)\Big) \right| dt + \pi^{-1} \int_{-\Delta}^{\Delta} \left| \frac{\rho_4^n \theta_2(n, t/\sigma\sqrt{n})}{\sigma\sqrt{n}} \right| dt =$$

$$= J_1 + J_2 + J_3, \tag{40}$$

где $\Delta > 0$, A – абсолютная константа. Положив $\Delta = \varepsilon\sqrt{n}$ и, оценив J_2 и J_3, с помощью (34), из (40) без особого труда выводим

$$\sup_x |F_{n,G} - \Phi(x)| = O(n^{-1/2}).$$

Это завершает доказательство. Доказательства остальных теорем § 2 во многом схожи с доказательством теоремы 1.

§ 4. Случай харрисовских цепей Маркова

Напомним читателю, что случайная последовательность, которая может быть разбита последовательностью случайных моментов времени (моментов регенерации) на последовательность взаимонезависимых отрезков (циклов регенерации), называется *регенерирующей*. Классическим примером такой последовательности является однородная цепь Маркова с положительно возвратным состоянием. Очевидно, что ее моментами регенерации являются моменты попадания в это состояние. В связи с этим был создан метод доказательства предельных теорем, основная идея которого заключается в следующем: предельная теорема для цепи Маркова сводится к соответсвующему утверждению для последовательности независимых случайных величин – приращений на циклах регенерации – для доказательства которого применяется мощный аппарат теории суммирования независимых случайных величин. Истоки этого метода можно найти в работах А. Н. Колмогорова [6] и Деблина [17], [18]. Позднее он был значительно усовершенствован. При помощи этого метода были получены различные предельные теоремы для однородных цепей (см. [16]) и, в том числе, оценки скорости сходимости в ЦПТ (см. [21], [14], [15]).

Долгое время казалось, что *регенеративным методом* можно исследовать цепь Маркова лишь в том случае, когда ее фазовое пространство содержит положительно возвратное состояние. Это представлялось существенным недостатком обсуждаемого метода. Однако дальнейшие исследования эргодических свойств заданных на произвольном фазовом пространстве цепей Маркова показали, что их регенерация в более широком смысле – в смысле существования регенерирующего расширения – гарантируется условием возратности по Харрису (см. [23] и [13]). Это условие, частичным случаем которого является условие Деблина, также накладывает определенные ограничения на эргодические свойства рассматриваемой цепи. Однако эти ограничения являются достаточно естественными и удовлетворяются во многих практически интересных случаях. Результаты, полученные ранее регенеративным методом для дискретных цепей, без труда удалось перенести на случай цепей, заданных на произвольном фазовом пространстве и удовлетворяющих условию возвратности Харриса (см., например, [15], [8], [24], [22]). Таким образом, регенеративный метод оказался пригодным для исследования широкого класса марковских цепей.

Обсудим теперь само понятие возвратности по Харрису. Сделать это не совсем просто, так как авторы, изучавшие предельные теоремы для цепей, несколько модифицировали его. Приведем здесь определение из работы [22].

Определение. Будем говорить, что однородная *цепь Маркова* $\{X_i\}$ (C,λ,β,m)*-возвратна*, если существует множество $C \in \mathcal{F}$, число λ, $0<\lambda<1$, натуральное число m и вероятностная мера β такие, что:

а) $P^m(x,K) > \lambda\beta(K)$ для всех $x \in C$ и $K \in \mathcal{F}$;

б) $\mathbf{P}_x(X_n \in C$ для некоторого $n \geqslant 1) = 1$ для всех $x \in \mathcal{X}$.

Цепь $\{X_i\}$ будем называть положительно возвратной, если дополнительно к а) и б) выполнено еще и в) $\sup\{\mathbf{E}_x(\tau_c) : x \in \in C\} < \infty$, где τ_c – момент первого попадания в C для цепи с шагом m (т.е. $\tau_c := \min\{i \geqslant 1 : X_{i\cdot m} \in C\}$), а $\mathbf{E}_x$ – математическое ожидание, вычисленное по распределению цепи с начальным распределением G, сосредоточенным в точке x.

Замечание 3 (см. [22]). Если $\mathcal{F}$ – счетно порожденная σ-алгебра, то это определение эквивалентно возвратности по Харрису (см. [25] и [24]). Когда мы здесь говорим о *возвратности по Харрису*, мы имеем в виду (C,λ,β,m)-возвратность цепи.

Как уже отмечалось выше, регенеративный метод был придуман для изучения цепей Маркова, имеющих рекуррентные атомы. Не будем здесь детально обсуждать начальный этап его развития, тем более, что соответствующие результаты уже стали классикой. Нас будет больше всего интересовать все, что дает возможность сравнить этот метод со спектральным методом, в частности, сравнить их универсальность. С этой точки зрения важным шагом в развитии регенеративного метода стало построение в [13] и [23] *регенерирующих расширений* харрисовских цепей. Мы приведем здесь краткое описание конструкции из работы [23]. При этом ограничимся наиболее простым случаем $(C,\lambda,\beta,1)$-возвратной цепи $\{X_i\}$. Наша цель – сконструировать такую цепь Маркова $\{X_i^*\}$, чтобы $\{X_i\}$ была вложена в $\{X_i^*\}$ и существовал атом, который последовательность $\{X_i^*\}$ посещает бесконечно часто с вероятностью единица.

Обозначим для любых $x \in \mathcal{X}$, $A \in \mathcal{F}$

$$x_0 := (x,0), \quad x_1 := (x,1), \quad \mathcal{X}^* := \{x_i : x \in \mathcal{X},\ i = 0,1\},$$
$$A_0 := A \times \{0\}, \quad A_1 := A \times \{1\}, \quad A^* = A \times \{0,1\}.$$

Обозначим $\mathcal{F}^*$ σ-алгебру, порожденную множествами A_i ($A \in \in \mathcal{F}$, $i = 0,1$). Ниже мы будем отождествлять любое подмножество $A \in \mathcal{F}$ с подмножеством $A^* \in \mathcal{F}^*$. В частности, мы можем писать $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^*$. Любая вероятностная мера μ на $\mathcal{F}$ может быть автоматически расширена до меры μ^* на $\mathcal{F}^*$, определяя ее значения на множествах A_i ($A \in \mathcal{F}$, $i = 0,1$)

$$\mu^*(A_0) = \int\limits_A (1 - \lambda I_C(x))\mu(dx), \quad \mu^*(A_1) = \lambda\mu(A \cap C), \tag{41}$$

где $I_C(\cdot)$ – индикатор множества C, $\lambda \in (0,1)$. Назовем эту новую меру μ^* расщеплением меры μ. Определим переходную вероятность P^* из $(\mathcal{X}^*, \mathcal{F}^*)$ в $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ следующим образом. Для произвольных $x \in \mathcal{X}$, $A \in \mathcal{F}$

$$P^*(x_0, A) := \big(1 - \lambda I_C(x)\big)^{-1}\big(P(x,A) - \lambda I_C(x)\beta(A)\big),$$
$$P^*(x_1, A) := \beta(A).$$

Продолжим P^* до ф.в.п. из $(\mathcal{X}^*, \mathcal{F}^*)$ в $(\mathcal{X}^*, \mathcal{F}^*)$ следующим образом: для любого $z \in \mathcal{X}^*$ меру $P^*(z,\cdot)$ на $\mathcal{F}^*$ определим как расщепление (в смысле (41)) меры $P^*(z,\cdot)$ на $\mathcal{F}$.

Пусть $\{X_i^*\} = \{(V_i, W_i)\}$, ($V_i \in \mathcal{X}$, $W_i \in \{0,1\}$) – цепь Маркова с пространством состояний $(\mathcal{X}^*, \mathcal{F}^*)$, функцией вероятностей перехода $P^*(\cdot,\cdot)$ и начальным распределением G^*, где G^* – расщепление меры G. Мы сразу видим, что множество $\mathcal{X}_1 := = \mathcal{X} \times \{1\}$ является атомом для ф.в.п. P^*, и $Q^*(\mathcal{X}_1) > 0$. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Предложение 4 [23]. *Для любого начального распределения G маргинальное распределение первого координатного процесса $\{V_i\}$ цепи $\{X_i^*\}$ и распределение цепи $\{X_i\}$ идентичны друг другу. Кроме того, множество $B := \mathcal{X}_1$ является рекуррентным атомом цепи $\{X_i^*\}$.*

Наконец, приведем один результат, который был получен с помощью регенеративного метода. Напомним в этой связи, что коэффициент сильного перемешивания определяется соотношением

$$\gamma(k) = \sup_n \sup_{A \in \mathcal{A}_n} \sup_{B \in \mathcal{B}_{n+k}} |\mathbf{P}_Q(A \cap B) - \mathbf{P}_Q(A)\mathbf{P}_Q(B)|. \tag{42}$$

Теорема 6 [15]. *Пусть $\{X_i\}$ – стационарная Марковская цепь (т.е. $G = Q$) и пусть $3 < p \leqslant \infty$. Если*

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{(p+3)/(p-3)}\gamma(m) < \infty, \tag{43}$$

$$||f||_{L^p} < \infty \tag{44}$$

и справедливо (17), то ряд в соотношении (18) сходится к конечному пределу. Если, кроме того, $\sigma^2 > 0$ и цепь $\{X_i\}$ $(C, \lambda, \beta, 1)$-возвратна, то

$$\sup_x |F_{n,Q}(x) - \Phi(x)| = O(n^{-1/2}).$$

В заключение следует отметить, что области применения спектрального и регенеративного методов совпадают лишь частично. Так, из условия (43) не вытекает B-регулярность цепи. С другой стороны, очевидно, что для цепей, о которых говорилось в приведенном выше примере, не выполнено условие (C, λ, β, m)-возвратности. Надо отметить также существенное различие в терминологии, используемой при формулировке результатов для B-регулярных и для харрисовских цепей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гудинас П.* Большие уклонения порядка n для сумм случайных величин, связанных в однородную цепь Маркова // Liet. matem. rink.—1982.—*21*, № 4.—С. 65—74.
2. — Об уточнениях центральной предельной теоремы для однородной цепи Маркова // Liet. matem. rink.— 1982.— *22*, № 1.— С. 66—78.
3. — О B-регулярности однородной цепи Маркова // Liet. matem. rink.— 1982.— 22, № 3.— С. 67—80.
4. — О больших уклонениях для сумм случайных величин, связанных в цепь // Liet. matem. rink.— 1986.— *26*, № 2.— С. 246—248.
5. *Каплан Е. И., Сильвестров Д. С.* Теоремы типа принципа инвариантности для возвратных полумарковских процессов с произвольным фазовым пространством // Теория вероятн. и ее примен.— 1979.— *24*, вып. 3.— С. 529—541.
6. *Колмогоров А. Н.* Цепи Маркова со счетным числом возможных состояний // Бюлл. МГУ.— 1937.— *1*, вып. 3.— С. 1—16.

7. *Лифшиц Б. А.* О центральной предельной теореме для сумм случайных величин, связанных в цепь // Теория вероятн. и ее примен.— 1978.— *23*, вып. 2.— С. 295—312.
8. *Малиновский В. К.* О предельных теоремах для харрисовских цепей Маркова. I, II // Теория вероятн. и ее примен.— 1986.— *31*, вып. 2.— С. 315—332; 1989.— 34, вып. 2.— С. 289—303.
9. *Нагаев С. В.* Некоторые предельные теоремы для однородных цепей Маркова // Теория вероятн. и ее примен.— 1957.— *2*, вып. 4.— С. 389—416.
10. — Уточнение предельных теорем для однородных цепей Маркова // Теория вероятн. и ее примен.— 1961.— *6*, вып. 1.— С. 67—86.
11. *Сираждинов С. Х., Форманов Ш. К.* Предельные теоремы для сумм случайных векторов, связанных в цепь Маркова. Ташкент: ФАН, 1979.— 171 с.
12. Функциональный анализ / Под ред. С. Г. Крейна (серия "Справочная математическая библиотека").— М.: Наука, 1972.— 544 с.
13. *Athreya K. B., Ney P.* A new approach to the limit theory of recurrent Markov chains // Trans. Amer. Math. Soc.— 1978.— *245*.— С. 493—501.
14. *Bolthausen E.* On rates of convergence in a random central limit theorem for Markov chains // Z. Wahrsch. und verw. Geb.— 1980.— *54*, № 1. С. 59—73.
15. — The Berry — Esseen theorem for strongly mixing Harris recurrent Markov chains // Z. Wahrsch. und verw. Geb. 1982.— *60*, № 3. С. 283—289.
16. *Chung K. L.* Markov chains with stationary transition probabilities. Berlin: Springer-Verlag, 1960. (Пер. на рус. яз.: Чжун К. Л. Однородные цепи Маркова.— М.: Мир, 1964.— 425 с.)
17. *Doeblin W.* Sur deux problems de Kolmogoroff concernant les chaines denombrables // Bull. Math. de France.— 1938.— *66*.— С. 201—220.
18. — Elements d'une theorie generale des chaines simple constantes de Markoff // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.— 1940.— *37*, № 3. С. 61—111.
19. *Doob J. L.* Stochastic processes.— Willey, New York: Chapman and Hall, London 1953. (Пер. на рус. яз.: Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы.— М.: Изд-во иностр. лит., 1956)
20. *Kato T.* Perturbation theory for linear operators.— New York: Springer-Verlag, 1966. (Пер. на рус. яз.: Като Т. Теория возмущений линейных операторов.— М.: Мир, 1972)
21. *Landers D., Rogge L.* On the rate of convergrnce in the central limit theorem for Markov chains // Z. Wahrsch. und verw. Geb.— 1976.— *35*, № 1.— С. 57—63.

22. *Levental S.* Uniform limit theorems for Harris recurrent Markov chains // Probab. Th. Fields.— 1988.— *80*, № 2.— C. 101—118.
23. *Nummelin E.* A splitting technique for Harris recurrent Markov chains // Z. Wahrsch. und verw. Geb.— 1978.— *43*, № 4.— C. 309—318.
24. — General irreducible Markov chains and non-negative operators.— Cambridge: Cambridge University Press. 1984. (Пер. на рус. яз.: Нуммелин Э. Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы.— М.: Мир, 1989.— 207 с.)
25. *Orey S.* Lecture notes on the limit theorems for Markov chains transition probabilities. N.-Y.: Van Nostrand, 1971.— 108 c.
26. *Rosenblatt M.* Markov processes. Structure and asymptotic behavior. N.-Y. etc.: Springer-Verlag, 1971.— 268 c.
27. *Revuz D.* Markov chains. N.-Y. etc.: North Holland, 1975.— 336 c.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ

Л. Саулис, В. Статулявичус

Предисловие

Среди работ по предельным теоремам о больших уклонениях наибольшая часть приходится на исследование сумм независимых случайных величин. Для этого случая применимы мощные аналитические методы, позволяющие понять общую картину поведения вероятностей больших уклонений.

Чаще всего исследовался случай, когда выполнено условие Крамера, т.е. когда характеристические функции слагаемых являются аналитическими в окрестности нуля, случай Линника, когда все моменты слагаемых конечны, но их рост не обеспечивает аналитичность соответствующих характеристических функций в окрестности нуля, случай так называемых умеренных уклонений, когда у слагаемых существуют только конечное число моментов, впервые рассмотренный Рубином и Сетураманом [150], и, наконец, случай, когда не выполнены условия Крамера или Линника, но поведение распределений хвостов слагаемых является достаточно регулярным (случай, когда слагаемые принадлежат зоне притяжения устойчивого закона с показателем $\alpha < 2$, рассмотрен в работах М. И. Фортус [110], Хейди [135], С. Г. Ткачука [108], а так называемые сверхбольшие уклонения – в работах С. В. Нагаева [62], [63] и А. В. Нагаева [60]).

Многие основные идеи и результаты достаточно полно отражены в монографиях И. А. Ибрагимова и Ю. В. Линника [48] и В. В. Петрова [73].

Другое направление, привлекшее внимание исследователей, – это большие уклонения в функциональных предельных теоремах. Наиболее полные результаты получены в теоремах, устанавливающих поведение вероятностей больших уклонений с точностью до логарифмической эквивалентности.

В первую очередь здесь следует упомянуть работы И. Н. Санова [87] и Бахадура [119] для эмпирических функций распределения, А. А. Боровкова [19] и А. А. Могульского [22] о больших уклонениях в принципе инвариантности для сумм независимых случайных величин и для процессов с независимыми приращениями, Донскера и Варадана [128] о больших уклонениях в эргодической теории марковских процессов, А. Д. Вентцеля и М. И. Фрейдлина [25] о больших уклонениях для широких классов семейств марковских процессов и Р. Ш. Липцера и А. Н. Ширяева [140] для мартингалов и семимартингалов. Большинство результатов этого направления представлены в книгах А. Д. Вентцеля [25], Струка [161] и Р. Ш. Липцера и А. Н. Ширяева [140].

Настоящая работа посвящена применению метода семиинвариантов в предельных теоремах о больших уклонениях. Читатель может убедиться, что этот метод эффективен при исследовании вероятностей больших уклонений для сумм как независимых, так и зависимых случайных величин, полиномиальных форм, кратных стохастических интегралов от случайных процессов и полиномиальных статистик. Здесь рассматривается только случай нормальной аппроксимации.

Для более глубокого ознакомления с методом семиинвариантов и его полезности в асимптотическом анализе, учитывающем большие уклонения, следует обратиться к книге: Л. Саулис, В. Статулявичус „Предельные теоремы о больших уклонениях" Мокслас, Вильнюс, 1989.

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ЛЕММЫ

Введение

Пусть для случайной величины (с.в.) ξ с функцией распределения (ф.р.) $F_\xi = \mathbf{P}(\xi < x)$ и *характеристической функцией* (х.ф.) $f_\xi(t) = \mathbf{E}\exp\{it\xi\}$ существует абсолютный момент $\beta_l = \mathbf{E}|\xi|^l$. Существование момента β_l влечет за собой существование *семиинвариантов* γ_k любого порядка, не превосходящего l ($k \leqslant l$), вычисляемых по формуле

$$\gamma_k = \frac{1}{i^k}\frac{d^k}{dt^k}\left(\ln f_\xi(t)\right)\Big|_{t=0}. \qquad (1.1)$$

Семиинвариант γ_k с.в. ξ будем также обозначать символом $\Gamma_k(\xi)$. Обычно семиинвариантами пользоваться проще, чем моментами. Так, например, если $\xi_1,\ldots,\xi_n$ – независимые с.в., то для с.в. $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$

$$\Gamma_k(S_n) = \sum_{j=1}^{n} \Gamma_k(\xi_j). \tag{1.2}$$

Настоящая глава посвящена ознакомлению с возможностями метода семиинвариантов для исследования асимптотического поведения распределений, главным образом вероятностей больших уклонений для различных функционалов от случайных процессов и полей, и в первую очередь для сумм

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \tag{1.3}$$

независимых с.в. ξ_j, сумм

$$S_n = \sum_{t=1}^{n} X_t \tag{1.4}$$

зависимых с.в. X_t, *полиномиальных форм*

$$\zeta_n^{(p)} = \sum_{1\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_p\leqslant n} a_{t_1,\ldots,t_p}\; X_{t_1}\cdot\ldots\cdot X_{t_p}, \tag{1.5}$$

кратных стохастических интегралов

$$Y_n^{(p)} = \underbrace{\int\cdots\int}_{p} a(t_1,\ldots,t_p)\,dX(t_1)\cdots dX(t_p) \tag{1.6}$$

по винеровскому или пуассоновскому процессам, *полиномиальных оценок Питмэна, U-статистик* и др.

Изучая случайные процессы, мы будем пользоваться конечномерными распределениями процесса, т.е. распределениями случайного вектора $X = (X_{t_1},\ldots,X_{t_k})$, $t_1,\ldots,t_k \in T$. Если $\mathrm{E}|X_t^m| < \infty$, $t \in T$, то для всех $k \leqslant m$ определены функции

$$m_X(t_1,\ldots,t_k) := \mathrm{E}X_{t_1}\cdots X_{t_k} \tag{1.7}$$

(символ := означает „по определению”).

Функция $m_X(t_1,\ldots,t_k)$ называется k-ой *моментной функцией* или *простым моментом* k-го порядка случайного процесса X_t. Если

$$f_X(u_1,\ldots,u_k) := \mathbf{E}\exp\{i < u, X >\} \tag{1.8}$$

– характеристическая функция случайного вектора X, где $< a, b > = \sum_{j=1}^{k} a_j b_j$ – скалярное произведение векторов $a = (a_1,\ldots,a_k) \in R^k$, $b = (b_1,\ldots,b_k) \in R^k$, то аналогично одномерному случаю при $\mathbf{E}|X_t^m| < \infty$ при всех k и $\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_k)$, $\nu_i \geqslant 0$, с $k|\nu| \leqslant m$, где $|\nu| := |\nu_1| + \cdots + |\nu_k|$, существуют *смешанные семиинварианты* случайного вектора X

$$\Gamma_\nu(X) := \frac{1}{i^{|\nu|}} \frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_k}}{\partial u_1^{\nu_1}\cdots\partial u_k^{\nu_k}} \ln f_X(u_1,\ldots,u_k)\Big|_{\substack{u_1=0\\ \vdots\\ u_k=0}} . \tag{1.9}$$

Иногда вместо $\Gamma_\nu(X)$ будем писать $\Gamma_\nu(X_{t_1},\cdots,X_{t_k})$.

Если $\nu = (1,\ldots,1) \in R^k$, то соответствующий семиинвариант $\Gamma_\nu(X_{t_1},\ldots,X_{t_k})$ будем обозначать $\Gamma_k(X)$, $\Gamma(X_{t_1},\ldots,X_{t_k})$ или $s_X(t_1,\ldots,t_k)$. Функция $s_X(t_1,\ldots,t_k)$ называется *корреляционной функцией* или *простым семиинвариантом* k-го порядка случайного процесса X_t. Если $S_n = \sum_{t=1}^{n} X_t$ или $S(T) = \int_0^T X_t\,dt$ (когда процесс X_t измерим и для почти всех ω существует $\int_0^T X_t(\omega)dt$), то из определения следует, что

$$\Gamma_k(S_n) = \sum_{1\leqslant t_1,\ldots,t_k\leqslant n} \Gamma(X_{t_1},\ldots,X_{t_k}) \tag{1.10}$$

и

$$\Gamma_k(S(T)) = \underbrace{\int_0^T \cdots \int_0^T}_{k} \Gamma(X_{t_1},\ldots,X_{t_k})\,dt_1\cdots dt_k. \tag{1.11}$$

Для компактности записи будем пользоваться следующими обозначениями: если $\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_k)$ – некоторый целозначный неотрицательный вектор и $a = (a_1,\ldots,a_k)$ – некоторый действительный вектор, то

$$a^\nu := a_1^{\nu_1}\cdots a_k^{\nu_k}, \quad \nu! := \nu_1!\cdots\nu_k!, \quad |\nu| := \nu_1 + \cdots + \nu_k. \tag{1.12}$$

Обозначим

$$\mathbf{E}_\nu(X) = \mathbf{E}X_{t_1}^{\nu_1}\cdots X_{t_k}^{\nu_k}. \tag{1.13}$$

Как и в одномерном случае, можно получить формулы, связывающие $\mathbf{E}_\nu(X)$ и $\Gamma_\nu(X)$:

$$\mathbf{E}_\nu(X) = \sum_{\lambda^{(1)}+\cdots+\lambda^{(q)}=\nu} \frac{1}{q!}\frac{\nu!}{\lambda^{(1)}!\ldots\lambda^{(q)}!}\prod_{p=1}^{q}\Gamma_{\lambda^{(p)}}(X), \tag{1.14}$$

$$\Gamma_\nu(X) = \sum_{\lambda^{(1)}+\cdots+\lambda^{(q)}=\nu} \frac{(-1)^{q-1}}{q}\frac{\nu!}{\lambda^{(1)}!\ldots\lambda^{(q)}!}\prod_{p=1}^{q}\mathbf{E}_{\lambda^{(p)}}(X), \tag{1.15}$$

где $\sum_{\lambda^{(1)}+\cdots+\lambda^{(q)}=\nu}$ означает сумирование по всем упорядоченным наборам целых неотрицательных векторов $\lambda^{(p)}, |\lambda^{(p)}| > 0$, дающих в сумме ν.

Пусть $I = \{t_1,\ldots,t_k\}$ – множество индексов вектора X. Разбиением множества I называем неупорядоченный набор непересекающихся непустых множеств I_p такой, что $\bigcup\limits_p I_p = I$. В этих обозначениях связь между простыми моментами и семиинвариантами устанавливаются по формулам (1.14) и (1.15):

$$\mathbf{E}X_{t_1}\cdots X_{t_k} = \sum_{\bigcup_{p=1}^{q} I_p=I} (q-1)!\prod_{p=1}^{q}\Gamma(X_{I_p}), \tag{1.16}$$

$$\Gamma(X_{t_1},\ldots,X_{t_k}) \doteq \sum_{\bigcup_{p=1}^{q} I_p=I} (-1)^{q-1}(q-1)!\prod_{p=1}^{q}\mathbf{E}(X_{I_p}). \tag{1.17}$$

Здесь и далее приняты следующие обозначения: если $I' = \{t'_1,\ldots,t'_m\} \subset I$, то

$$X_{I'} := (X_{t'_1},\ldots,X_{t'_m}),$$

$$\mathbf{E}(X_{I'}) := \mathbf{E}X_{t'_1},\ldots,X_{t'_m},$$

$$\Gamma(X_{I'}) := \Gamma(X_{t'_1},\ldots,X_{t'_m}).$$

Формулы (1.14) – (1.17) были предложены В. П. Леоновым и А. Н. Ширяевым [55].

Для исследования и оценки семиинвариантов $\Gamma_k(S_n)$, $\Gamma_k(S(T))$, $\Gamma_k(\zeta_n^p)$ существенно более удобным для нас будет представление $\Gamma(X_{t_1},\ldots,X_{t_k})$ через *центрированные моменты*

$$\widehat{\mathbf{E}}\,(X_I) := \mathbf{E}\widehat{X_{t_1}\widehat{X_{t_2}\ldots \widehat{X_{t_{k-1}}\widehat{X_{t_k}}}}}, \tag{1.18}$$

где знак „ $\frown$ " над с.в. означает центрирование:

$$\widehat{\xi} := \xi - \mathbf{E}\xi. \tag{1.19}$$

Часто вместо $\widehat{\mathbf{E}}\,(X_I)$ будем пользоваться и такой записью: $\widehat{\mathbf{E}}\,X_{t_1}\ldots X_{t_k}$. Имеем

$$\widehat{\mathbf{E}}\,X_t = \mathbf{E}X_t, \quad \widehat{\mathbf{E}}\,X_s X_t = \mathbf{E}X_s X_t - \mathbf{E}X_s\mathbf{E}X_t, \tag{1.20}$$

$$\widehat{\mathbf{E}}\,X_{t_1}X_{t_2}X_{t_3} = \mathbf{E}X_{t_1}X_{t_2}X_{t_3} - \mathbf{E}X_{t_1}\mathbf{E}X_{t_2}X_{t_3} - \\ - \mathbf{E}X_{t_1}X_{t_2}\mathbf{E}X_{t_3} + \mathbf{E}X_{t_1}\mathbf{E}X_{t_2}\mathbf{E}X_{t_3}.$$

Явное выражение центрированного момента через моменты дает формула

$$\widehat{\mathbf{E}}\,X_{t_1}\ldots X_{t_k} = \sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{\nu-1}\sum^{*}_{\bigcup\limits_{p=1}^{\nu} I_p = I}\ \prod_{p=1}^{\nu}\mathbf{E}(X_{I_p}), \tag{1.21}$$

где $\mathbf{E}(X_{I_p}) = \mathbf{E}X_{t_1^{(p)}}\ldots X_{t_{l_p}^{(p)}}$, а сумма $\sum^{*}$ распространена на ν-блочные разбиения $\{I_1,\ldots,I_\nu\}$ множества I такие, что $\max I_p \leqslant \min I_{p+1}$, $1 \leqslant p \leqslant \nu - 1$.

В случае независимых с.в. $X_{t_1},\ldots,X_{t_k}$ $\widehat{\mathbf{E}}\,X_{t_1}\ldots X_{t_k}$ отлична от нуля лишь при $t_1 = t_2 = \ldots = t_k$. То же верно и для $\Gamma(X_{t_1},\ldots,X_{t_k})$.

Приведем формулу, выражающую $\Gamma(X_{t_1},\ldots,X_{t_k})$ через центрированные моменты (В. Статулявичус [101] – [103], [105]).

Лемма 1.1 [98]. *Имеет место представление*

$$\Gamma(X_{t_1}\ldots X_{t_k}) = \sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{\nu-1}\sum_{\bigcup\limits_{p=1}^{\nu} I_p = I} N_\nu(I_1,\ldots,I_\nu)\prod_{p=1}^{\nu}\widehat{\mathbf{E}}\,(X_{I_p}), \tag{1.22}$$

где $\sum\limits_{\bigcup\limits_{p=1}^{\nu} I_p = I}$ *означает суммирование по всем ν-блочным разбиениям $\{I_1, \ldots, I_\nu\}$ множества I. Целые числа $N_\nu(I_1, \ldots, I_\nu)$,*

$$0 \leqslant N_\nu(I_1, \ldots, I_\nu) \leqslant (\nu - 1)!, \tag{1.23}$$

зависят только от множества $\{I_1, \ldots, I_\nu\}$, причем если $N_\nu(I_1, \ldots, I_\nu) > 0$, то

$$\sum_{p=1}^{\nu} \max_{t_i, t_j \in I_p} (t_j - t_i) \geqslant \max_{1 \leqslant i,j \leqslant k} (t_j - t_i). \tag{1.24}$$

Так, например,

$$\Gamma(X_t) = \widehat{\mathbf{E}}\, X_t = \mathbf{E} X_t,$$

$$\Gamma(X_s, X_t) = \widehat{\mathbf{E}}\, X_s X_t,$$

$$\Gamma(X_{t_1}, X_{t_2}, X_{t_3}) = \widehat{\mathbf{E}}\, X_{t_1} X_{t_2} X_{t_3} - \widehat{\mathbf{E}}\, X_{t_2}\, \widehat{\mathbf{E}}\, X_{t_1} X_{t_3},$$

$$\Gamma(X_{t_1}, X_{t_2}, X_{t_3}, X_{t_4}) = \widehat{\mathbf{E}}\, X_{t_1} X_{t_2} X_{t_3} X_{t_4} - \mathbf{E} X_{t_2}\, \widehat{\mathbf{E}}\, X_{t_1} X_{t_3} X_{t_4} -$$

$$- \mathbf{E} X_{t_3}\, \widehat{\mathbf{E}}\, X_{t_1} X_{t_2} X_{t_4} - \widehat{\mathbf{E}}\, X_{t_1} X_{t_3}\, \widehat{\mathbf{E}}\, X_{t_2} X_{t_4} - \widehat{\mathbf{E}}\, X_{t_1} X_{t_4}\, \widehat{\mathbf{E}}\, X_{t_2} X_{t_3} +$$

$$+ \mathbf{E} X_{t_2} \mathbf{E} X_{t_3}\, \widehat{\mathbf{E}}\, X_{t_1} X_{t_4}, \ldots .$$

Пусть с.в. Z_T зависит от некоторого параметра T, причем существуют все моменты $\mathbf{E}|Z_T^k| < \infty$, $k \geqslant 1$. Если

$$\Gamma_k(Z_T) \to \Gamma_k(Z), \quad T \to \infty,$$

при любом фиксированном k, где Z – с.в., для которой выполнен *признак Карлемана* определенности проблемы моментов

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{E} Z^{2k})^{-\frac{1}{2k}} = \infty, \tag{1.25}$$

то, поскольку моменты с.в. выражаются через ее семиинварианты, получаем, что

$$Z_T \xrightarrow{D} Z, \quad T \to \infty,$$

т.е. с.в. Z_T сходится к с.в. Z по распределению:

$$F_{Z_T}(x) \to F_Z(x), \quad T \to \infty$$

в каждой точке непрерывности предельной функции $F_Z(x)$.

В случае $(0,1)$-нормального предельного распределения при условии $\mathbf{E}Z_T = 0$, $\mathbf{E}Z_T^2 = 1$ достаточно, чтобы

$$\Gamma_k(Z_T) \to 0, \quad T \to \infty,$$

для каждого фиксированного целого $k \geqslant 3$.

Если интересоваться не только сходимостью к нормальному распределению, но и более точным асимптотическим анализом (скоростью сходимости, асимптотическими разложениями, вероятностями больших уклонений) распределения $\mathbf{P}_{Z_T}$ (в качестве Z_T может выступать, например, любая нормированная с.в., определенная одним из соотношений (1.3) – (1.6)), то приходится точно оценивать $\Gamma_k(Z_T)$ сверху как относительно T, так и относительно k. После этого можно воспользоваться общими утверждениями о поведении $\mathbf{P}_{Z_T}$, если известны оценки для $\Gamma_k(Z_T)$.

Следующий параграф посвящен именно установлению общих утверждений о поведении $\mathbf{P}_{Z_T}$ при наличии информации о семиинвариантах с.в. Z_T.

§ 1.1. Общие леммы об аппроксимации функции распределения произвольной случайной величины нормальным распределением

Рассмотрим с.в. $\xi = \xi_\Delta$, зависящую от параметра Δ, с функцией распределения $F_\xi(x) = \mathbf{P}(\xi < x)$, средним $\mathbf{E}\xi = 0$ и единичной дисперсией $\mathbf{D}\xi = 1$. Пусть $\varphi_\xi(z) = \mathbf{E}\exp\{z\xi\}$ – производящая функция моментов с.в. ξ. Предположим, что существуют величины $\gamma \geqslant 0$ и $\Delta > 0$ такие, что

$$|\Gamma_k(\xi)| \leqslant (k!)^{1+\gamma}/\Delta^{k-2}, \quad k = 3, 4, \dots . \qquad (S_\gamma)$$

Условие (S_γ) при $\gamma = 0$ обеспечивает аналитичность производящей функции моментов $\varphi_\xi(z)$ в области $|z| < \Delta$. Точнее, если

$$|\Gamma_k(\xi)| \leqslant k! H/\Delta^{k-2}$$

при некотором $H > 0$, то легко убедиться, что

$$|\ln \varphi_\xi(z)| \leqslant \frac{Hz^2}{(1-\rho)}, \quad |z| \leqslant \rho\Delta, \quad 0 < \rho < 1.$$

Наоборот, если

$$|\ln \varphi_\xi(z)|_{|z|=\Delta^*} \leqslant H_1 \Delta^{*2},$$

т.е.

$$\left|\frac{\ln \varphi_\xi(z)}{\ln \varphi_\eta(z)}\right|_{|z|=\Delta^*} \leqslant \frac{1}{2} H_1,$$

где η – (0,1)-нормальная с.в., то из формулы Коши получаем, что

$$|\Gamma_k(\xi)| \leqslant k! H_1 / \Delta^{*k-2}, \quad k = 3, 4, \dots .$$

Обозначим

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt,$$

$$\Delta_\gamma = c_\gamma \Delta^{1/(1+2\gamma)}, \qquad c_\gamma = \frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^{1/(1+2\gamma)}. \tag{1.26}$$

Пусть θ (с индексом или без него) означает некоторую величину, не всегда одну и ту же, не превосходящую единицы по модулю, $[m]$ – целая часть числа m.

Лемма 1.2 [93]. *Если для с.в. ξ с $\mathbf{E}\xi = 0$ и $\mathbf{E}\xi^2 = 1$ выполнено условие (S_γ), то $\forall T$, $T \geqslant \Delta_\gamma$, имеет место соотношение*

$$\sup_x |F_\xi(x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{3 \cdot 6^\gamma}{\Delta} + 100 \Delta_\gamma \exp\left\{-\frac{3}{2}\Delta_\gamma\right\} + \frac{1,5}{T} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Delta_\gamma}^{T} \left| f_\xi(t) - \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}\right| \frac{dt}{t} \right\}. \tag{1.27}$$

Лемма 1.3 [93]. *Если для с.в. ξ с $\mathbf{E}\xi = 0$ и $\mathbf{E}\xi^2 = 1$ выполнено условие (S_γ), то*

$$\sup_x |F_\xi(x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{18}{\Delta_\gamma}. \tag{1.28}$$

Лемма 1.4 [85]. *Пусть с.в. ξ с $\mathbf{E}\xi = 0$ и $\mathbf{E}\xi^2 = 1$ удовлетворяет условию*

$$|\Gamma_k(\xi)| \leqslant (k-2)! / \Delta^{k-2}, \quad k = 3, 4, \dots, s+2, \tag{S^*}$$

где s четно и удовлетворяет неравенству $s \leqslant 2\Delta^2$. Тогда в интервале

$$0 \leqslant x < \sqrt{s}/(3\sqrt{e})$$

имеют место соотношения больших уклонений

$$\begin{aligned} \frac{1-F_\xi(x)}{1-\Phi(x)} &= \exp\left\{\widetilde{L}(x)\right\}\left(1+\theta_1\,\widetilde{f}(x)\frac{x+1}{\sqrt{s}}\right), \\ \frac{F_\xi(-x)}{\Phi(-x)} &= \exp\left\{\widetilde{L}(x)\right\}\left(1+\theta_2\,\widetilde{f}(x)\frac{x+1}{\sqrt{s}}\right). \end{aligned} \tag{1.29}$$

Здесь

$$\widetilde{f}(x) = \frac{117+96s\exp\left\{-\frac{1}{2}(1-3\sqrt{e}x/\sqrt{s})s^{1/4}\right\}}{(1-3\sqrt{e}x/\sqrt{s})}, \tag{1.30}$$

$\widetilde{L}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \widetilde{l}_k x^{k+3}$ *– степенной ряд, сходящийся при* $|x| < \sqrt{2}\Delta/(3\sqrt{e})$. *В этом круге* $|\widetilde{L}(x)| \leqslant 5|x|^3/(4\Delta)$. *Коэффициенты* $\widetilde{l}_k$, $k = 0,1,2,\ldots$, *выражаются через первые* $r_k = \min\{k+3, s\}$ *семиинвариантов с.в.* ξ, *причем для* $k \leqslant s-3$ *выражения коэффициентов* $\widetilde{l}_k$ *совпадают с выражениями коэффициентов классического ряда Крамера–Петрова.*

Лемма 1.5 [85]. *Если для произвольной с.в.* ξ *с* $\mathbf{E}\xi = 0$ *и* $\mathbf{E}\xi^2 = 1$ *выполнено условие* (S_γ), *то в интервале*

$$0 \leqslant x < \Delta_\gamma$$

имеют место соотношения больших уклонений

$$\begin{aligned} \frac{1-F_\xi(x)}{1-\Phi(x)} &= \exp\{L_\gamma(x)\}\left(1+\theta_1\,f(x)\frac{x+1}{\Delta_\gamma}\right), \\ \frac{F_\xi(-x)}{\Phi(-x)} &= \exp\{L\gamma(-x)\}\left(1+\theta_2\,f(x)\frac{x+1}{\Delta_\gamma}\right). \end{aligned} \tag{1.31}$$

Здесь

$$f(x) = \frac{60(1+10\Delta_\gamma^2\exp\{-(1-x/\Delta_\gamma)\sqrt{\Delta_\gamma}\}}{(1-x/\Delta_\gamma))}, \tag{1.32}$$

$$L_\gamma(x) = \sum_{3\leqslant k<p} \lambda_k x^k + \theta(x/\Delta_\gamma)^3, \quad p = \begin{cases} (1/\gamma)-1, & \gamma > 0, \\ \infty, & \gamma = 0. \end{cases} \tag{1.33}$$

Выражения коэффициентов λ_k через семиварианты с.в. ξ совпадают с коэффициентами ряда Крамера–Петрова (В. В. Петров [73]) *и вычисляются по формуле*

$$\lambda_k = -\frac{b_k - 1}{k}, \tag{1.34}$$

причем b_k определяются последовательно из уравнений

$$\sum_{r=1}^{j} \frac{1}{r!}\Gamma_{r+1}(\xi) \sum_{\substack{j_1+\dots+j_r=j\\ j_i \geqslant 1}} \prod_{i=1}^{r} b_{j_i} = \begin{cases} 1, & j=1\\ 0, & j=2,3,\dots . \end{cases} \tag{1.35}$$

В частности,

$$\begin{aligned}
b_1 &= 1,\\
b_2 &= -\frac{1}{2}\Gamma_3(\xi),\\
b_3 &= -\frac{1}{6}(\Gamma_4(\xi) - 3\Gamma_3^2(\xi)),\\
b_4 &= -\frac{1}{24}(\Gamma_5(\xi) - 10\Gamma_3(\xi)\Gamma_4(\xi) + 15\Gamma_3^3(\xi)), \dots .
\end{aligned}$$

Для коэффициентов λ_k имеет место оценка

$$|\lambda_k| \leqslant \frac{2}{k}\left(\frac{16}{\Delta}\right)^{k-2}((k+1)!)^{\gamma}, \tag{1.36}$$

и поэтому

$$L_\gamma(x) \leqslant \frac{x^2}{2}\cdot\frac{x}{x+8\Delta_\gamma}, \qquad L_\gamma(-x) \geqslant -\frac{x^3}{3\Delta_\gamma}.$$

Лемма 1.6 (С. А. Ахмедов [5]). *Пусть для с.в. ξ с $\mathbf{E}\xi = 0$ и $\mathbf{D}\xi = 1$ выполнено условие (S_γ) для $k = 2,3,\dots,l$. Тогда для всех x и $k \leqslant l$*

$$|F(x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{c(k,\gamma)(\ln\Delta)^{k/2}}{(1+|x|^k)\Delta_\gamma}, \tag{1.37}$$

где

$$c(k,\gamma) = \left(7c(k) \vee \frac{2\sqrt{2}\cdot 4^{\gamma}}{7}\right)\left(\frac{1}{1+2\gamma}\right)^{k/2},$$

причем

$$c(k) \leqslant 2^{k/2}\left(5+\sqrt{e/\pi}\,2^{k/2}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\right), \qquad k>1.$$

Здесь и далее $a \vee b = \max\{a,b\}$, $a \wedge b = \min\{a,b\}$.

Лемма 1.7 (Р. Бенткус, Р. Рудзкис [14]). *Пусть для произвольной с.в.* ξ *с* $\mathbf{E}\xi = 0$ *существуют величины* $\gamma \geqslant 0$, $H > 0$ *и* $\widetilde{\Delta} > 0$ *такие, что*

$$|\Gamma_k(\xi)| \leqslant \left(\frac{k!}{2}\right)^{1+\gamma}\frac{H}{\widetilde{\Delta}^{k-2}}, \quad k=2,3,\dots . \tag{1.38}$$

Тогда для всех $x \geqslant 0$

$$\mathbf{P}(\pm\xi \geqslant x) \leqslant \exp\left\{-\frac{x^2}{2\left(H+\left(x/\widetilde{\Delta}^{1/(1+2\gamma)}\right)\right)^{(1+2\gamma)/(1+\gamma)}}\right\}. \tag{1.39}$$

Следствие. *В условиях леммы* 1.7 *имеем*

$$\mathbf{P}(\pm\xi \geqslant x) \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} \exp\left\{-\dfrac{x^2}{4H}\right\}, & 0 \leqslant x \leqslant (H^{1+\gamma}\widetilde{\Delta})^{1/(1+2\gamma)}, \\ \exp\left\{-\frac{1}{4}(x\widetilde{\Delta})^{1/(1+\gamma)}\right\}, & x \geqslant (H^{1+\gamma}\widetilde{\Delta})^{1/(1+2\gamma)}. \end{cases} \tag{1.40}$$

Если $x \leqslant (H^{1+\gamma}\widetilde{\Delta})^{1/(1+2\gamma)}$, то $H \geqslant \left(x/\widetilde{\Delta}^{1/(1+2\gamma)}\right)^{(1+2\gamma)/(1+\gamma)}$, и поэтому правая часть соотношения (1.39) не превосходит $\exp\{-x^2/4H\}$. Вторая строка в (1.40) получается аналогично.

Лемма 1.8 [85]. *Пусть для с.в.* ξ *с* $\mathbf{E}\xi = 0$ *и* $\sigma^2 = \mathbf{D}\xi > 0$ *существуют величины* $\gamma \geqslant 0$ *и* $K > 0$, *такие, что*

$$|\mathbf{E}\xi^k| \leqslant (k!)^{1+\gamma}K^{k-2}\sigma^2, \quad k=3,4,\dots . \tag{$\bar{B}_\gamma$}$$

Тогда для семиинвариантa k-го порядка с.в. ξ *верна следующая оценка:*

$$|\Gamma_k(\xi)| \leqslant (k!)^{1+\gamma}(2(K \vee \sigma))^{k-2}\sigma^2, \quad k=3,4,\dots . \tag{1.41}$$

Отметим, что условие $(\bar{B}_\gamma)$ является обобщением известного *условия С. Н. Бернштейна*:

$$\mathbf{E}|\xi|^k \leqslant \frac{k!}{2}K^{k-2}\sigma^2, \quad k=2,3,\dots .$$

Выясним связь между классическим *условием Линника* и *условием* (S_γ). Будем говорить, что с.в. ξ подчиняется условию Линника, если существует постоянная C_γ такая, что

$$\mathbf{E}\exp\{|\xi|^{1/(1+2\gamma)}\} \leqslant C_\gamma < \infty, \quad \gamma > 0. \qquad (L)$$

Утверждение 1.1. *Если для с.в. ξ выполнено условие (L), то*

$$|\Gamma_k(\xi) \leqslant (k!)^{1+\gamma}(C_\gamma^{(1)})^{k-2}, \quad k = 3,4,\ldots, \qquad (1.42)$$

где

$$C_\gamma^{(1)} = 4C_\gamma e^\beta \beta^{3\beta}, \quad \beta = 1+\gamma. \qquad (1.43)$$

Доказательство. Из условия (L) вытекает, что

$$\mathbf{E}(|\xi|^{m/\beta})/m! \leqslant C_\gamma, \quad m = 1,2,\ldots .$$

При $m = (\widehat{k\beta})$, где

$$\hat{x} := \min\{n \geqslant x | n \ - \text{целое}\},$$

имеем

$$\mathbf{E}|\xi|^k \leqslant (\mathbf{E}|\xi|^{m/\beta})^{k\beta/m} \leqslant (m!C_\gamma)^{k\beta/m} \leqslant 2C_\gamma \beta^{k\beta} e^\beta (k!)^\beta.$$

Следовательно, для $m \geqslant 3$

$$\mathbf{E}|\xi|^k \leqslant (2C_\gamma e^\beta \beta^{3\beta})^{k-2}(k!)^\beta.$$

Отсюда, согласно лемме 1.8 ,

$$|\Gamma_k(\xi) \leqslant (k!)^\beta (C_\gamma^{(1)})^{k-2}, \quad k = 3,4,\ldots,$$

где величина $C_\gamma^{(1)}$ определяется равенством (1.43).

§ 1.2. Основные моменты доказательства лемм 1.4 и 1.5

При доказательстве лемм 1.2, 1.3 и 1.6 главное место занимает лемма 1.4. Теперь приступим к краткому изложению ее доказательства.

Пусть

$$\tilde{\varphi}(z) := \exp\left\{\sum_{k=2}^{s} \frac{1}{k!}\Gamma_k(\xi) z^k\right\} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}\tilde{m}_k z^k, \qquad (1.44)$$

где

$$\widetilde{m}_k = \frac{d^k}{dz^k}\widetilde{\varphi}(z)\Big|_{z=0},$$

причем согласно условию (S^*) $\widetilde{m}_k = m_k = \mathbf{E}\xi^k$, $1 \leqslant k \leqslant s$, $s \leqslant 2\Delta^2$. Учитывая, что $\Gamma_1(\xi) = 0$, нетрудно убедиться, что

$$\widetilde{m}_k = k! \sum_{j=1}^{[k/2]} \frac{1}{j!} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_j=k \\ k_i=2,3,\dots,s}} \frac{\Gamma_{k_1}(\xi)\dots\Gamma_{k_j}(\xi)}{k_1!\dots k_j!}.$$

Отсюда согласно условию леммы

$$|\widetilde{m}_k| \leqslant k! \sum_{j=1}^{[k/2]} \frac{1}{j!}\Big(\sum_{i=2}^{s} \frac{1}{i(i-1)}\Big)^j \Delta^{2j-k}. \tag{1.45}$$

После несложных расчетов получаем

$$|\widetilde{m}_k| \leqslant \frac{k!}{a^k(k)}, \qquad a(k) = (\sqrt{k/2e} \wedge \Delta/\sqrt{e}). \tag{1.46}$$

Далее, величину $h = h(x)$ определим из уравнения

$$x = \widetilde{m}(h) := \frac{d}{dh}\ln\widetilde{\varphi}(h) = \sum_{k=2}^{s} \frac{1}{(k-1)!}\Gamma_k(\xi)h^{k-1}, \tag{1.47}$$

и пусть

$$\widetilde{\sigma}^2(h) := \frac{d^2}{dh^2}\ln\widetilde{\varphi}(h) = \sum_{k=2}^{s} \frac{1}{(k-2)!}\Gamma_k(\xi)h^{k-2}. \tag{1.48}$$

Предположим, что $0 \leqslant h \leqslant \delta a$, $0 < \delta < 1$, $a = \sqrt{s/(4e)}$. Поскольку $s \leqslant 2\Delta^2$, то $a \leqslant \Delta/\sqrt{2e}$ и $h < \Delta/\sqrt{2e}$. Используя условие (S^*), получаем

$$x = h\big(1 + \theta(\sqrt{2e}h/(3\Delta))\big) = h(1 + \theta(\delta/3)), \tag{1.49}$$

$$\widetilde{\sigma}^2(h) = 1 + \theta(3\sqrt{2e}h/(4\Delta)) = 1 + \theta(3\delta/4). \tag{1.50}$$

Следовательно, $\widetilde{\sigma}^2(h) > 0$ и в уравнении $x = \widetilde{m}(h)$ каждому значению x соответствует одно значение h. Для того чтобы было $0 \leqslant h < a$, будем рассматривать значения x, удовлетворяющие неравенствам $0 \leqslant x < 2a/3$. Введем следующие функции:

$$F_h(y) := \int_{-\infty}^{\widetilde{\sigma}(h)y+\widetilde{m}(h)} \widetilde{\varphi}^{-1}(h) g_h(u)\, dF_\xi(u), \tag{1.51}$$

$$g_h(y) := \sum_{k=0}^{s} \frac{1}{k!}(hy)^k + y^2 \sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{1}{k!}\widetilde{m}_k h^k := \widetilde{e}(hy) + y^2\widetilde{r}(h). \tag{1.52}$$

Тогда

$$1 - F_\xi(x) = \widetilde{\varphi}(h) \int_0^{\infty} g_h^{-1}(\widetilde{\sigma}(h)y + x)\, dF_h(y). \tag{1.53}$$

Оценим величину $\sup\limits_y |F_h(y) - \Phi(y)|$. Согласно определению функции $F_h(y)$ равенством (1.51), ее *преобразование Фурье* имеет вид

$$f_h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity}\, dF_h(y) =$$

$$= \frac{\exp\left\{-itx/\tilde{\sigma}(h)\right\}}{\widetilde{\varphi}(h)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{itu}{\tilde{\sigma}(h)}\right\} g_h(u)\, dF_\xi(u). \tag{1.54}$$

Обозначим

$$\widetilde{f}_h(t) = \frac{\exp\left\{-\frac{itx}{\tilde{\sigma}(h)}\right\}}{\widetilde{\varphi}(h)} \int_{-\infty}^{\infty} g_z(u)\, dF_\xi(u) = \frac{\exp\left\{-\frac{itx}{\tilde{\sigma}(h)}\right\}\widetilde{\varphi}(z)}{\widetilde{\varphi}(h)}, \tag{1.55}$$

где $z = h + it/\tilde{\sigma}(h)$. Тогда

$$\left|f_h(t) - \exp\left\{-\frac{1}{2}t^2\right\}\right| \leqslant |f_h(t) - \widetilde{f}_h(t)| + \left|\widetilde{f}_h(t) - \exp\left\{-\frac{1}{2}t^2\right\}\right|. \tag{1.56}$$

Разлагая $\ln \widetilde{f}_h(t)$ по формуле Тейлора в окрестности точки h при $|h + |t|/\widetilde{\sigma}(h)| \leqslant \delta_2 a$, $0 < \delta < \delta_2 < 1$, т.е. при $|t| \leqslant T$, $T = (\delta_2 - \delta)\widetilde{\sigma}(h)a$, получаем

$$\left|\widetilde{f}_h(t) - \exp\left\{-\frac{1}{2}t^2\right\}\right| \leqslant \frac{|t|}{T}\left(\exp\left\{-\frac{t^2}{4}\right\} - \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}\right). \tag{1.57}$$

Теперь оценим величину $|f_h(t)-\widetilde{f}_h(t)|$. Вспомнив определение $f_h(t)$ и $\widetilde{f}_h(t)$ соотношениями (1.54) и (1.55), имеем

$$|f_h(t)-\widetilde{f}_h(t)| \leqslant I_1+I_2, \tag{1.58}$$

где

$$I_1=\widetilde{\varphi}^{-1}(h)\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\exp\left\{\frac{itu}{\widetilde{\sigma}(h)}\right\}\widetilde{e}(hu)-\widetilde{e}(zu)\right)dF_\xi(u)\right|,$$

$$I_2=\widetilde{\varphi}^{-1}(h)\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\exp\left\{\frac{itu}{\widetilde{\sigma}(h)}\right\}r(h)-r(z)\right)dF_\xi(u)\right|.$$

Учитывая, что $r(z)=\sum_{k=s+1}^{\infty}(1/k!)\,\widetilde{m}_k z^k$, $\widetilde{\varphi}(h)\geqslant 1$ и тот факт, что в оценке (1.46) для $\widetilde{m}_k$ величина $a(k)\geqslant\sqrt{2}a$ при $k>s$, находим

$$I_2\leqslant 2\sum_{k=s+1}^{\infty}\frac{1}{k!}|\widetilde{m}_k||z|^k\leqslant 2\sum_{k=s+1}^{\infty}(\delta_2/\sqrt{2})^k. \tag{1.59}$$

Оценим интеграл I_1. Имеем

$$I_1\leqslant I_1^{(1)}+I_1^{(2)}, \tag{1.60}$$

где

$$I_1^{(1)}=\left|\int_{-b}^{b}\left(\exp\left\{\frac{itu}{\widetilde{\sigma}(h)}\right\}\widetilde{e}(hu)-\widetilde{e}(zu)\right)dF_\xi(u)\right|,$$

$$I_1^{(2)}=\left|\int_{|u|>b}\left(\exp\left\{\frac{itu}{\widetilde{\sigma}(h)}\right\}\widetilde{e}(hu)-\widetilde{e}(zu)\right)dF_\xi(u)\right|,$$

$$b:=4a=4(s/(4e))^{1/2},\qquad z=h+it/\widetilde{\sigma}(h).$$

Поскольку $\widetilde{e}(zu)=\exp\{zu\}-\sum_{k=s+1}^{\infty}(1/k!)\,(zu)^k$, то

$$I_1^{(1)}\leqslant 2\sum_{k=s+1}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!}\int_{-b}^{b}|u|^k\,dF_\xi(u)\leqslant 2\sum_{k=s+1}^{\infty}\frac{(b|z|)^k}{k!}\leqslant 2\sum_{k=s+1}^{\infty}\delta_2^k, \tag{1.61}$$

так как $b|z| \leqslant 4a^2\delta_2 = \delta_2 s/e$ и $k! > (s/e)^k$ при $k > s$. Для оценки интеграла $I_1^{(2)}$ рассмотрим величину

$$m_k(b) := \int\limits_{|u|>b} |u|^k \, dF_\xi(u).$$

Используя для $\widetilde{m}_k$ оценку (1.46), имеем

$$\frac{m_k(b)}{k!} \leqslant \begin{cases} a^{-k}(k) \leqslant a^{-k}, & s/2 < k \leqslant s, \\ \dfrac{(2k)!}{k! a^{2k}(2k) b^k} \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{a^k}, & b < k \leqslant s/2, \\ \dfrac{m_{[b]}(b)}{[b]!} \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{a^{[b]}}, & 0 \leqslant k \leqslant b. \end{cases} \tag{1.62}$$

Отсюда в предположении, что $\delta_2 \geqslant 1/\sqrt{a}$, получаем

$$I_1^{(2)} \leqslant 2\sqrt{2}\Big(\sum_{k=0}^{[b]} \delta_2^{2[b]-k} + \sum_{k=[b]+1}^{\infty} \delta_2^k \Big). \tag{1.63}$$

Соотношения (1.58) – (1.61) и (1.63) позволяют заключить, что для $|t| \leqslant T$

$$\big|f_h(t) - \widetilde{f}_h(t)\big| \leqslant l(\delta_2), \quad l(\delta) = \frac{4\sqrt{2}\delta^{[4a]}}{1-\delta}. \tag{1.64}$$

Теперь исследуем $f_h(t)$ в окрестности точки 0. Имеем

$$f_h(t) = 1 + it \int\limits_{-\infty}^{\infty} y \, dF_h(y) + \theta \frac{t^2}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 |dF_h(y)|. \tag{1.65}$$

Имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} y \, dF_h(y) = (\widetilde{\varphi}(h)\widetilde{\sigma}(h))^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (t-x) g_h(t) \, dF_\xi(t) =$$

$$= -\frac{x}{\widetilde{\sigma}(h)} + (\widetilde{\varphi}(h)\widetilde{\sigma}(h))^{-1} \Big\{ \sum_{k=1}^{s-1} \frac{1}{(k-1)!} m_k h^{k-1} + m_3 r(h) \Big\} =$$

$$= -\frac{x}{\widetilde{\sigma}(h)} + (\widetilde{\varphi}(h)\widetilde{\sigma}(h))^{-1} \Big\{ -\frac{dr(h)}{dh} + \frac{d\widetilde{\varphi}(h)}{dh} +$$

$$+ \frac{m_{s+1}h^s}{s!} + m_3 r(h) \Big\} = \theta(0{,}02\delta^s/a) \quad \text{при } s \geqslant 30. \tag{1.66}$$

Нетрудно убедиться, что

$$|dF_h(y)| \leqslant \{\widetilde{e}(ht) + t^2|r(h)|\}\widetilde{\varphi}^{-1}(h)\, dF_\xi(t), \quad t = \widetilde{\sigma}(h)y + x.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2|dF_h(y)| \leqslant (\widetilde{\varphi}(h)\widetilde{\sigma}^2(h))^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} (t-x)^2(\widetilde{e}(ht) +$$

$$+ t^2|r(h)|)\, dF_\xi(t) = J_1 + J_2, \tag{1.67}$$

где

$$J_1 = (\widetilde{\varphi}(h)\widetilde{\sigma}^2(h))^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} (t-x)^2\widetilde{e}(ht)\, dt,$$

$$J_2 = (\widetilde{\varphi}(h)\widetilde{\sigma}^2(h))^{-1}(m_4 - 2xm_3 + x^2)|r(h)|.$$

Воспользовавшись оценкой (1.46) для $\widetilde{m}_k$, имеем

$$J_1 = (\widetilde{\varphi}(h)\widetilde{\sigma}^2(h))^{-1}\Big\{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\widetilde{m}_k h^{k-2}}{(k-2)!} - 2x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\widetilde{m}_k h^{k-1}}{(k-1)!} + x^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\widetilde{m}_k h^k}{k!} -$$

$$- \sum_{k=s+1}^{\infty}\frac{\widetilde{m}_k h^{k-2}}{(k-2)!} - \sum_{k=s+1}^{s+2}\frac{\widetilde{m}_k h^{k-2}}{(k-2)!} + 2x\sum_{k=s+1}^{\infty}\frac{\widetilde{m}_k h^{k-1}}{(k-1)!} -$$

$$- 2x\frac{m_{s+1}h^s}{s!} - x^2\sum_{k=s+1}^{\infty}\frac{\widetilde{m}_k h^k}{k!}\Big\} = 1 + \theta(2\delta^{s-1}/5) \tag{1.68}$$

и

$$J_2 \leqslant 4|r(h)|\big(4 + \frac{2x}{\Delta} + x^2\big) \leqslant \frac{\delta^{s+1}}{32}. \tag{1.69}$$

Поэтому из соотношений (1.65), (1.66) и (1.69) получаем

$$f_h(t) = 1 + \theta\Big\{0{,}02\delta^s|t| + (1 + \delta^{s-1}/2)\frac{t^2}{2}\Big\}.$$

Отсюда следует, что

$$\Big|f_h(t) - \exp\Big\{-\frac{1}{2}t^2\Big\}\Big| \leqslant 0{,}02\delta^s|t| + (1 + \delta^{s-1}/4)t^2. \tag{1.70}$$

Привлекая соотношения (1.56), (1.57), (1.64) и (1.70), получаем

$$\left|f_h(t)-\exp\left\{-\frac{1}{2}t^2\right\}\right| \leqslant \min\left\{0{,}02\delta^s|t|+(1+\delta^{s-1}/4)t^2,\right. \tag{1.71}$$

$$\left.\frac{|t|}{T}\left(\exp\left\{-\frac{1}{4}t^2\right\}-\exp\left\{-\frac{1}{2}t^2\right\}\right)+l(\delta_2)\right\}.$$

Используя лемму 1 (В. М. Золотарев [39]), находим, что

$$\sup_y |F_h(y)-\Phi(y)| \leqslant \frac{d}{\sqrt{2\pi}}, \tag{1.72}$$

где

$$d=\frac{8{,}5}{(\delta_2-\delta)a}+\frac{9{,}1\delta_2^{[4a]}}{(1-\delta_2)}(\ln 2{,}1\sqrt{s}-\sqrt{s/e}\ln\delta_2). \tag{1.73}$$

Учитывая (1.53), имеем

$$1-F_\xi(x)=\widetilde{\varphi}(h)\int_0^\infty g_h^{-1}\left(\widetilde{\sigma}(h)y+x\right)dF_h(y)=\widetilde{\varphi}(h)\big(I_1(h)+I_2(h)\big), \tag{1.74}$$

где

$$I_1(h)=\int_0^\infty g_h^{-1}\left(\widetilde{\sigma}(h)y+x\right)d\left(F_h(y)-\Phi(y)\right),$$

$$I_2(h)=\int_0^\infty g_h^{-1}\left(\widetilde{\sigma}(h)y+x\right)d\Phi(y). \tag{1.75}$$

Теперь оценим интеграл $I_1(h)$. Из определения функции $g_h(y)$ соотношением (1.52) получаем

$$g_h(t)=\widetilde{e}\left(ht\right)+t^2 r(h)=\widetilde{e}\left(ht\right)\left(1+\theta(2|r(h)|/h^2)\right), \tag{1.76}$$

$$\frac{|r(h)|}{h^2}=\left|\sum_{k=s+1}^\infty\frac{\widetilde{m}_k h^{k-2}}{k!}\right|=\theta\sum_{k=s+1}^\infty\frac{h^{k-2}}{(\sqrt{2}a)^k}=\theta 2(\delta/\sqrt{2})^{s-1}.$$

Поэтому $g_h^{-1}(\widetilde{\sigma}(h)y+x)$ как функция от y в интервале $[0,+\infty[$ неотрицательна и монотонно убывает. Следовательно,

$$I_1(h)\leqslant 2\sup_y|F_h(y)-\Phi(y)|/\left(\widetilde{e}(hx)\left(1-(\delta/\sqrt{2})^{s-5}\right)\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2d\exp\{-hx\}}{\sqrt{2\pi}\left(1-(\delta/\sqrt{2})^{s-5}\right)\left(1-(\delta/6)^{s+1}\right)},$$

так как

$$\widetilde{e}(hx) = e^{hx}\left(1 + \theta(hx)^{s+1}/(s+1)!\right) = e^{hx}\left(1 + \theta(\delta/6)^{s+1}\right).$$

Отсюда с учетом того, что для $x \geqslant 0$

$$(1 - \Phi(x)) \exp\left\{\frac{1}{2}x^2\right\} \geqslant \frac{3,1}{4\sqrt{2\pi}(x+1)},$$

получаем

$$I_1(h) \leqslant \frac{8}{3} d \exp\{-hx + \frac{x^2}{2}\}(1 - \Phi(x))(x+1). \tag{1.77}$$

Осталось оценить интеграл $I_2(h)$. Согласно (1.75),

$$I_2(h) = \int_0^{b_1} g_h^{-1}(\widetilde{\sigma}(h)y + x)\,d\Phi(y) + \int_{b_1}^{\infty} g_h^{-1}(\widetilde{\sigma}(h)y + x)\,d\Phi(y),$$

где $b_1 = (b - x)/\widetilde{\sigma}(h) \geqslant 5a/3$. Тогда для $0 \leqslant y \leqslant b_1$ и $t = \widetilde{\sigma}(h)y + x$

$$g_h(t) = \frac{\exp\{-ht\}}{\left(1 + \theta(\delta/\sqrt{2})^{s-1}\right)\left(1 + \theta\delta^{s+1}\right)}$$

и

$$I_2(h) = \tag{1.78}$$
$$= \frac{\exp\left\{-hx + \frac{1}{2}(h\widetilde{\sigma}(h))^2\right\}\left(1 - \Phi(h\widetilde{\sigma}(h))\right) + \theta \exp\left\{-\frac{1}{2}b_1^2\right\}/\sqrt{2\pi}}{\left(1 + \theta\delta^{s+1}\right)\left(1 + \theta(\delta/\sqrt{2})^{s-5}\right)}.$$

Далее,

$$h\widetilde{\sigma}^2(h) - x = \sum_{k=3}^{s}\left(\frac{1}{(k-2)!} - \frac{1}{(k-1)!}\right)\Gamma_k(\xi)h^{k-1} =$$
$$= \theta \sum_{k=3}^{s} \frac{k-2}{k-1} h(h/\Delta)^{k-2} = \theta(3/5)\delta h.$$

Учитывая, что $x = h\left(1 + \theta(\delta/3)\right)$, находим

$$h\widetilde{\sigma}(h) = x\left(1 + \theta\cdot(0,09\delta)\right). \tag{1.79}$$

Обозначим $\psi(y) = \exp\{y^2/2\}(1-\Phi(y))$, $q(y) = y\psi(y)$. Нетрудно убедиться, что функция $\psi(y)$ в интервале $[0,\infty[$ убывает, а $q(y)$ возрастает, поэтому для любых $y > 0$ и $z \in]-y, y[$

$$\psi(y+z) = \psi(y)y(y+\theta z)^{-1}.$$

Следовательно, учитывая соотношения (1.78), (1.79) и неравенство $4b_1^2 \leqslant s$, получаем

$$I_2(h) = \exp\left\{-hx + \frac{1}{2}x^2\right\}(1-\Phi(x))\times$$
$$\times\left(1+\theta\frac{2\delta+(4/3)(x+1)\exp\{-\frac{1}{8}s\}}{1-\delta}\right). \qquad (1.80)$$

Оценим величину d. С этой целью выберем $\delta_2 = 1 - -((1-\delta)/2s^{1/4})$. Тогда при $s \geqslant 30$, $\delta_2 \geqslant 1/\sqrt{a}$ имеем $\delta_2 - \delta = = 1-(2s^{1/4})^{-1}$ и $1-\delta_2 = (1-\delta)(2s^{1/4})^{-1}$. Следовательно,

$$\delta_2^{[4a]} \leqslant \exp\left\{-\frac{1}{2}(1-\delta)s^{1/4}\right\}\delta_2^{-1}.$$

Возвращаясь к определению величины d соотношением (1.73) имеем

$$d \leqslant 40 + 35s\exp\left\{-\frac{1}{2}(1-\delta)s^{1/4}\right\}/(\sqrt{s}(1-\delta)). \qquad (1.81)$$

Поскольку $\delta \leqslant 3x/2a < 5x/\sqrt{s}$, то из (1.77), (1.81) и (1.80) следует, что

$$\frac{1-F_\xi(x)}{1-\Phi(x)} = \exp\{\widetilde{L}(x)\}\left(1+\theta_1\widetilde{f}(x)\frac{x+1}{\sqrt{s}}\right)$$

для всех $0 \leqslant x < (2/3)\sqrt{s/4e}$, где

$$\widetilde{L}(x) = \frac{1}{2}x^2 + \ln\widetilde{\varphi}(y) - hx, \qquad (1.82)$$

и $\widetilde{f}(x)$ определено соотношением (1.30).

Функцию $h = h(x)$ можно разложить в ряд $h = x + \sum\limits_{k=2}^{\infty} b_k x^k$, сходящийся при $|x| < \sqrt{2}\Delta/3\sqrt{e}$. Так как $|h(z)|\big|_{|z|=2\Delta/(3\sqrt{2e})} \leqslant \leqslant \Delta/\sqrt{2e}$, то в силу неравенства Коши

$$b_k = \theta\left(\frac{3}{2}\right)^k \left(\frac{\sqrt{2e}}{\Delta}\right)^{k-1}, \quad k \geqslant 2. \tag{1.83}$$

Коэффиценты b_k выражаются через первые $r_k = \min\{k+3, s\}$ семиинвариантов с.в. ξ. Далее, нетрудно убедиться , что

$$\frac{d\widetilde{L}(x)}{dx} = x - h.$$

Отсюда $\widetilde{L}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \widetilde{l}_k\, x^{k+3}$, где

$$\widetilde{l}_k = -\frac{b_{k+2}}{k+3} = \theta\frac{1,5^{k+2}(\sqrt{2e})^{k+1}}{(k+3)\Delta^{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \,. \tag{1.84}$$

Привлекая соотношения (1.47), имеем $h = h(z) = z/(1+\theta(\delta/3))$, $\delta = \sqrt{2e}|h|/\Delta = 3\sqrt{e}/\sqrt{2}\Delta < 1$ и

$$\widetilde{L}(z) = \frac{1}{2}(z-h)^2 + \sum_{k=3}^{s}\frac{1}{k!}\Gamma_k(\xi)z^k = \frac{1}{2}z^2\left(1 - \left(1+\theta(\delta/3)\right)^{-1}\right) +$$

$$+ \frac{9|z|^2}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\delta}{\sqrt{2e}}\right)^k / ((k+1)(k+2)),$$

$$\widetilde{L}(z) = \theta 5|z|^3/(4\Delta).$$

Далее, при $0 \leqslant x < \sqrt{2}\Delta/(3\sqrt{e})$

$$\widetilde{L}(x) = \inf_{0 \leqslant h < \Delta/\sqrt{2e}} \left\{\frac{1}{2}(x-h)^2 + \sum_{k=3}^{s}\frac{1}{k!}\Gamma_k(\xi)z^h\right\}.$$

Пусть $h = \Delta x/(x+\Delta)$. Воспользовавшись условием (S^*), получаем оценку

$$|\widetilde{L}(x)| \leqslant \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{x}{x+2\Delta}.$$

Она позволяет завершить доказательство леммы 1.4, если учесть, что при $s \leqslant 30$ утверждение леммы тривиально.

При доказательстве леммы 1.5 основным моментом является тот факт, что условие (S_γ) : $|\Gamma_k(\xi)| \leqslant (k!)^{1+\gamma}/\Delta^{k-2}$, $k = 2, 3, \ldots$, влечет неравенство

$$|\Gamma_k(\xi)| \leqslant (k-2)!/\Delta_s^{k-2}, \quad k = 3, 4, \ldots, s+2, \tag{S^*}$$

где s четно и не превосходит $2\Delta_s^2$. Для $s \geqslant 4$ имеет место оценка

$$(k!)^{1+\gamma}/\Delta^{k-2} \leqslant (k-2)!\left(\frac{6(s+2)^\gamma}{\Delta}\right)^{k-2}, \quad k = 3, \ldots, s+2. \tag{1.85}$$

Поэтому положим $\Delta_s = \Delta/(6(s+2)^{\gamma})$. Тогда для всех четных s, удовлетворяющих неравенствам

$$4 \leqslant s \leqslant \Delta^2/\left(18(s+2)^{2\gamma}\right), \tag{1.86}$$

из условия S_γ следует (S^*). Пусть

$$s = 2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta^2}{18}\right)^{1/(1+2\gamma)}\right] - 2. \tag{1.87}$$

При таком выборе s оно четно и удовлетворяет неравенствам (1.86). Будем считать, что $\Delta > 10^{1+2\gamma}$, поскольку в противном случае утверждение леммы 1.4 тривиально. Непосредственно из (1.86) следует, что

$$0,95\left(\frac{\sqrt{2}\Delta}{6}\right)^{1/(1+2\gamma)} < \sqrt{s} < (\sqrt{2}\Delta/6)^{1/(1+2\gamma)}. \tag{1.88}$$

Используя лемму 1.4 в интервале $0 \leqslant x < \Delta_\gamma$, $\Delta_\gamma = (0,95/3\sqrt{e})\times$ $\times(\sqrt{2}\Delta/6)^{1/(1+2\gamma)}$, имеем

$$\frac{1-F_\xi(x)}{1-\Phi(x)} = \exp\{\widetilde{L}(x)\}\left(1+\theta f(x)\frac{x+1}{\Delta_\gamma}\right), \tag{1.89}$$

где

$$f(x) = \left(24 + 500\Delta_\gamma^2 \exp\left\{-\left(1-\frac{x}{\Delta_\gamma}\right)\sqrt{\Delta_\gamma}\right\}\right)\left(1-\frac{x}{\Delta_\gamma}\right)^{-1}.$$

Для завершения доказательства леммы 1.5 остается оборвать ряд $\widetilde{L}(x)$. Можно показать (см. [98]), что

$$L_\gamma(x) = \widetilde{L}(x) = \sum_{0 \leqslant k < p} \widetilde{l}_k\, x^{k+3} + \theta 0,95\left(\frac{x}{\Delta_\gamma}\right)^3, \tag{1.90}$$

где $p = \min\left\{\left[\frac{1}{\gamma}\right]+2,\ s-3\right\}$ и коэффиценты $\widetilde{l}_k$ совпадают с соответствующими коэффицентами ряда Крамера–Петрова, обозначенными в формулировке леммы через λ_k. Воспользовавшись леммой 1.4 и тем фактом, что $\Delta_s \geqslant 4\Delta_\gamma$, находим

$$L_\gamma(x) \leqslant \frac{x^2}{2}\cdot\frac{x}{x+8\Delta_\gamma}, \quad L_\gamma(-x) \geqslant -\frac{x^3}{3\Delta_\gamma}. \tag{1.91}$$

Полные доказательства лемм 1.2 – 1.8 приведены в следующих работах:

леммы 1.2, 1.3 – в [93];

леммы 1.4, 1.5 и 1.8 – в [85];

лемма 1.7 – в [14].

Замечание. Общая лемма для плотности распределения (если существует) произвольной с.в. ξ, удовлетворяющей условию (S_γ), доказана в работе Л. Саулиса [92]. На ее основании в работах [98], [151] и [153] получены теоремы больших уклонений для плотности распределения сумм независимых случайных величин в зоне Крамера и в степенных зонах Линника.

Следует отметить, что предложенный В. Статулявичусом [160] для исследования вероятностей больших уклонений метод семиинвариантов, применим и в многомерном случае. Читателя, интересующегося этими задачами, можем отослать к работам Л. Саулиса [94] – [96] и [153].

Глава 2

ТЕОРЕМЫ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, $n \geqslant 1$, – независимые с.в. с $\mathbf{E}\xi_j = 0$ и $\sigma_j^2 = \mathbf{D}\xi_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим

$$S_n = \sum_{j=1}^n \xi_j, \qquad B_n^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2, \qquad Z_n = S_n/B_n, \tag{2.1}$$

$$F_{Z_n}(x) = \mathbf{P}(Z_n < x), \qquad p_{Z_n}(x) = \frac{d}{dx}F_{Z_n}(x),$$

$$L_{k,n} = \sum_{j=1}^n E|\xi_j|^k/B_n^k. \tag{2.2}$$

Величину $L_{k,n}$ называют k-ой *дробью Ляпунова.*

Будем говорить, что с.в. ξ_j с $\mathbf{E}\xi_j = 0$ и $\sigma_j^2 = \mathbf{D}\xi_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяют условию (B_γ), если существуют постоянные $\gamma \geqslant 0$ и $K > 0$ такие, что

$$|\mathbf{E}\xi_j^k| \leqslant (k!)^{1+\gamma} K^{k-2} \cdot \sigma_j^2, \quad k = 3, 4, \dots \qquad (B_\gamma)$$

Теорема 2.1 [85]. *Пусть с.в.* ξ_j, $j = 1, 2 \dots, n$, *удовлетворяют условию* (B_γ). *Тогда для семиинвариантa k-го порядка с.в.* Z_n, *определяемой соотношением* (2.1), *верна оценка*

$$|\Gamma_k(Z_n)| \leqslant (k!)^{1+\gamma}/\Delta_n^{k-2}, \quad k = 3, 4, \dots, \tag{2.3}$$

где

$$\Delta_n = B_n / K_n, \quad K_n = 2(K \vee \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sigma_j), \tag{2.4}$$

а для с.в. $\xi = Z_n$ *выполнены соотношения* (1.31), (1.27) *и оценки* (1.28), (1.39) *с величинами*

$$\Delta_\gamma = c_\gamma \Delta_n^{1/(1+2\gamma)}, \quad H = 2^{1+\gamma} \quad \text{и} \quad \widetilde{\Delta} = \Delta_n,$$

где c_γ *и* Δ_n *определены соотношениями* (1.26) *и* (2.4) *соответственно.*

Следствие 2.1. *Пусть с.в.* ξ_j, $j = 1, 2, \dots, n$, *подчиняются условию* (B_γ). *Тогда для* $x \geqslant 0$,

$$x = o(\Delta_n^\nu), \quad \nu = \nu(\gamma) = (1 + 2(1 \vee \gamma))^{-1},$$

при $\Delta_n \to \infty$ *имеют место соотношения*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 - F_{Z_n}(x)}{1 - \Phi(x)} = 1, \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{F_{Z_n}(-x)}{\Phi(-x)} = 1. \tag{2.5}$$

Если выполнено условие (B_γ) *и, кроме того, все моменты с.в.* ξ_j, $j = 1, 2, \dots$, *до номера* $[1/\gamma] + 2$ *включительно совпадают с моментами соответствующих нормальных распределений, то для*

$$x \geqslant 0, \quad x = o(\Delta_n^{1/(1+2\gamma)}),$$

имеют место соотношения (2.5).

(Разумеется, последняя часть утверждения содержательна лишь при $0 < \gamma < 1$.)

Доказательство теоремы 2.1 и следствия 2.1. Используя условие (B_γ) и лемму 1.8, находим

$$|\Gamma_k(\xi_j)| \leqslant (k!)^{1+\gamma} 2(K \vee \sigma_j)^{k-2} \cdot \sigma_j^2, \quad \forall k, \ k \geqslant 3. \tag{2.6}$$

Из независимости с.в. ξ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, следует

$$|\Gamma_k(S_n)| \leqslant (k!)^{1+\gamma} K_n^{k-2} \cdot B_n^2, \quad \forall k,\ k \geqslant 3, \tag{2.7}$$

где величина K_n определена соотношением (2.4). Поскольку $\Gamma_k(Z_n) = \Gamma_k(S_n)/B_n^k$, то получаем оценку (2.3).

Для завершения доказательства теоремы 2.1 достаточно воспользоваться оценкой (2.3)и леммами 1.2 , 1.5 и 1.3, 1.7.

Утверждение первой части следствия 2.1 получается сразу, если воспользоваться $L_\gamma(x)$, определенным соотношением (1.33). Учитывая тот факт, что моменты с.в. ξ_j до $(m+3)$-го порядка включительно $(m = [1/\gamma] - 1)$ совпадают с моментами нормального закона, а также оценку (1.36), находим

$$L_\gamma(x) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \lambda_k x^{k+3} + \theta\left(\frac{x}{\Delta_\gamma}\right)^3 =$$

$$= \theta_1 \frac{6 \cdot 16^{m+2}((m+5)!)^\gamma}{m+4} \cdot \frac{x^{m+4}}{\Delta_n^{m+2}} + \theta_2 c_\gamma^3 \left(\frac{x}{\Delta_n^{1/(1+2\gamma)}}\right)^3,$$

где Δ_n опредслено соотношением (2.4). Поскольку $(m+4)/(1+ +2\gamma) \leqslant m+2$, то $L_\gamma(x) \to 0$ для $x = o(\Delta_n^{1/(1+2\gamma)})$, $\Delta_n \to \infty$.

Будем говорить, что с.в. ξ_j, $j = 1, 2, \ldots$, подчиняются условию (P), если существуют положительные постоянные $A, c_1, c_2, \ldots$, такие, что

$$\left|\frac{\ln \mathbf{E} \exp\{z\xi_j\}}{z^2}\right| \leqslant c_j^2, \quad |z| < A \quad (j = 1, 2, \ldots), \tag{P}$$

причем

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{j=1}^{n} c_j^2 \leqslant C. \tag{2.8}$$

Теорема 2.2 [98]. *Пусть с.в. ξ_j с $\mathbf{E}\xi_j = 0$ и $\sigma_j^2 = \mathbf{D}\xi_j > 0$ удовлетворяют условию (P). Тогда*

$$|\Gamma_k(Z_n)| \leqslant Ck!/(AB_n)^{k-2}, \quad \forall k, \quad k \geqslant 3, \tag{2.9}$$

и для с.в. Z_n выполнены соотношения больших уклонений (1.31), (1.39) и оценка (1.28) с $\Delta_\gamma = (1/6)(\sqrt{2}/6)AB_n/(1 \vee C)$ и $\tilde{\Delta} = AB_n$.

Доказательство. В силу равенства

$$\Gamma_k(\xi_j) = \frac{d^k}{dz^k} \ln \mathbf{E} \exp\{z\xi_j\}\Big|_{z=0},$$

условия (P) и неравенства Коши для производных аналитических функций находим

$$|\Gamma_k(\xi_j)| \leqslant c_j^2 k!/(A^{k-2}), \quad \forall k, \ k \geqslant 3.$$

Отсюда, воспользовавшись независимостью с.в. ξ_j, $j = 1,2,\ldots,n$, получим

$$|\Gamma_k(S_n)| \leqslant k! \sum_{j=1}^{n} c_j^2 / A^{k-2}$$

и

$$|\Gamma_k(Z_n)| \leqslant k! C/(AB_n)^{k-2}, \quad \forall k, \ k \geqslant 3, \tag{2.10}$$

где C определено соотношением (2.8). Используя оценку (2.10) и привлекая леммы 1.3, 1.5 и 1.7, получаем утверждение теоремы.

Пусть ξ_j, $j = 1,2,\ldots,n$, – независимые с.в. с $\mathbf{E}\xi_j = 0$, $\sigma_j^2 = \mathbf{E}\xi_j^2$ и $\{a_{k,n},\ 1 \leqslant k \leqslant n,\ 1 \leqslant n < \infty\}$ – серии неотрицательных чисел. Обозначим

$$\widetilde{S}_n = \sum_{j=1}^{n} a_{j,n}\xi_j, \quad \widetilde{B}_n^2 = \sum_{j=1}^{n} a_{j,n}^2 \sigma_j^2, \tag{2.11}$$

$$\widetilde{Z}_n = \widetilde{S}_n / \widetilde{B}_n, \quad \gamma_n = \max\{a_{j,n},\ 1 \leqslant j \leqslant n\}. \tag{2.12}$$

Теорема 2.3 [91]. *Пусть для с.в.* ξ_j *с* $\mathbf{E}\xi_j = 0$ *и* $\sigma_j^2 = \mathbf{E}\xi_j^2$, $j = 1,2,\ldots,n$, *выполнено условие* (B_γ). *Тогда*

$$|\Gamma_k(\widetilde{Z}_n)| \leqslant \frac{(k!)^{1+\gamma}}{\widetilde{\Delta}_n^{k-2}}, \quad k = 3,4,\ldots, \tag{2.13}$$

где

$$\widetilde{\Delta}_n = \frac{\widetilde{B}_n}{K_n \gamma_n}, \qquad K_n = 2(K \vee \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sigma_j), \tag{2.14}$$

и для с.в. $\xi = \widetilde{Z}_n$ *выполнены соотношения больших уклонений* (1.31), (1.27) *и оценки* (1.28), (1.39) *с*

$$\Delta_\gamma = c_\gamma \widetilde{\Delta}_n^{1/(1+2\gamma)}, \quad H = 2^{1+\gamma} \text{ и } \widetilde{\Delta} = \widetilde{\Delta}_n,$$

где c_γ и $\widetilde{\Delta}_n$ определены соотношениями (1.26) *и* (2.14).

Доказательство. Воспользовавшись независимостью с.в. ξ_j, $j = 1, \ldots, n$, получим

$$\Gamma_k(\widetilde{S}_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{j,n}^k \, \Gamma_k(\xi_j). \tag{2.15}$$

Поскольку выполнено условие (B_γ), (см. стр. 243), то, воспользовавшись оценкой (2.6), получим

$$|\Gamma_k(\widetilde{S}_n)| \leqslant (k!)^{1+\gamma} (K_n \gamma_n)^{k-2} \cdot \widetilde{B}_n^2, \tag{2.16}$$

где γ_n, K_n и $\widetilde{B}_n^2$ определены соотношениями (2.12), (2.14) и (2.11). Заметив, что $\Gamma_k(\widetilde{Z}_n) = \Gamma_k(\widetilde{S}_n)/\widetilde{B}_n^k$, получим оценку (2.13), которая при помощи лемм 1.2, 1.5 и оценок (1.28), (1.39) позволяет получить утверждение теоремы 2.3. Остается лишь заметить, что коэффиценты λ_k в равенстве (1.33) выражаются через семиинварианты с.в. $\widetilde{Z}_n$, причем

$$\Gamma(\widetilde{Z}_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{j,n}^k \, \Gamma_k(\xi_j)/\widetilde{B}_n^k, \quad \forall k, \ k \geqslant 2.$$

Напомним условие Линника: существует постоянная C_γ такая, что

$$\mathbf{E} \exp\{|\xi_1|^{1/(1+2\gamma)}\} \leqslant C_\gamma < \infty. \tag{L}$$

Связь условия (L) с условием (S_γ) указана на стр. 231.

Обозначим

$$\widehat{Z}_n = \frac{\widetilde{S}_n}{b_n}, \qquad b_n^2 = \sum_{j=1}^{n} a_{j,n}^2, \tag{2.17}$$

$$C_\gamma^{(1)} = 4 C_\gamma e^\beta \beta^{3\beta}, \qquad \beta = 1 + \gamma, \tag{2.18}$$

где $\widetilde{S}_n$ определено равенством (2.11).

Теорема 2.4 [91]. *Пусть для одинаково распределенных с.в. ξ_j с $\mathbf{E}\xi_j = 0$ и $\sigma^2 = \mathbf{E}\xi_j^2$, $j = 1, 2, \ldots, n$, выполнено условие (L). Тогда*

$$|\Gamma_k(\widehat{Z}_n)| \leqslant \frac{(k!)^{1+\gamma}}{\widehat{\Delta}_n^{k-2}}, \quad k = 3, 4, \ldots, \tag{2.19}$$

где

$$\widehat{\Delta}_n = b_n / (C_\gamma^{(1)} \gamma_n),$$

и для с.в. $\xi = \widehat{Z}_n$ имеют место соотношения больших уклонений (1.31), (1.27) и оценки (1.28), (1.39) с величинами

$$\Delta_\gamma = c_\gamma \widehat{\Delta}_n^{1/(1+2\gamma)}, \quad H = 2^{1+\gamma}, \quad \widetilde{\Delta} = \widehat{\Delta}_n.$$

Здесь величины b_n, $C_\gamma^{(1)}$ и γ_n, входящие в выражение $\widehat{\Delta}_n$, определены соотношениями (2.17), (2.18) и (2.12) соответственно.

Доказательство. Учитывая тот факт, что с.в. ξ_j имеют общую функцию распределения $F_{\xi_1}(x)$, имеем

$$\Gamma_k(\widetilde{S}_n) = \Gamma_k(\xi_1) \sum_{j=1}^{n} a_{j,n}^k. \tag{2.20}$$

Привлекая неравенство (1.42), получаем

$$|\Gamma_k(\widetilde{S}_n)| \leqslant (k!)^{1+\gamma} (C_\gamma^{(1)})^{k-2} \sum_{j=1}^{n} a_{j,n}^k.$$

Отсюда для семиинварианта k-го порядка с.в. $\widehat{Z}_n = \widetilde{S}_n / b_n$, где b_n определено равенством (2.17), верна оценка (2.19). Для завершения доказательства теоремы достаточно воспользоваться леммами 1.2, 1.5 и оценками (1.28) и (1.39).

Замечание. В теории суммирования с.в. с весами иногда используется следующее условие (Бук [125]): найдутся два числа $0 < \alpha \leqslant 1$ и $0 < q \leqslant 1$ такие, что среди неотрицательных чисел $a_{j,n}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, имеется α_n чисел таких, что $a_{j,n} \geqslant q\gamma_n$, где $\gamma_n = \max\{a_{j,n}, 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Это условие означает, что конечное число слагаемых при $n \to \infty$ не может определять поведение суммы $\widetilde{S}_n$. В случае, когда оно выполнено,

$$b_n^2 = \sum_{j=1}^{n} a_{j,n}^2 \geqslant \alpha n (q\gamma_n)^2. \tag{2.21}$$

Тогда, согласно (2.19), в теореме 2.4 достаточно положить $\widehat{\Delta}_n = q(\alpha n)^{1/2} / C_\gamma^{(1)}$, где $C_\gamma^{(1)}$ определено равенством (2.18).

Как известно, *дроби Ляпунова*

$$L_{k,n} = \frac{1}{B_n^k} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}|\xi_j|^k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

являются естественными величинами, по которым строятся асимптотические разложения (В. Статулявичус [101]) для функции распределения $F_{Z_n}(x)$ и ее плотности $p_{Z_n}(x) = \frac{d}{dx}F_{Z_n}(x)$ (если она существует). Оказывается, что в терминах дробей Ляпунова можно исследовать и вероятности больших уклонений как в зоне Крамера–Петрова, так и в степенных зонах Линника. Таким образом, вероятности больших уклонений в таких зонах в основном зависят не от индивидуальных свойств слагаемых, а от средних (этот факт для зон Линника был отмечен в работах Вольфа [28], [29]).

Теорема 2.5 [86] . *Пусть существуют величины* $\gamma \geqslant 0$ *и* $\tau_n > 0$ *такие, что*

$$L_{k,n} \leqslant (k!)^{1+\gamma}/\tau_n^{k-2}, \quad k = 3,4,\dots \qquad (L^*)$$

Тогда в интервале $0 \leqslant x < \tau_n^*$

$$\tau_n^* = \begin{cases} c\tau_n/|\ln \tau_n|, & \gamma = 0, \\ c_\gamma^* \tau_n^{1/(1+2\gamma)}, & \gamma > 0, \end{cases} \tag{2.22}$$

для с.в. $\xi = Z_n$ *имеют место соотношения* (1.28) *и* (1.31) *с* $\Delta_\gamma = \tau_n^*$. *Здесь*

$$\begin{aligned} c_\gamma^* \geqslant & 96\sqrt{e} \times 3^{1/(1+2\gamma)}(e(1+\gamma))^3 \times \\ & \times e^{\gamma(1+2\gamma)}((3(1+2\gamma)^2/(e\gamma))^{3(1+2\gamma)})^{-1}, \\ c > & \sqrt{6}(36 \cdot 27)^{-1}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Утверждение 2.2. *Если для с.в.* ξ_j *с* $\mathrm{E}\xi_j = 0$ *и* $\sigma_j^2 = \mathrm{E}\xi_j^2$, $j = 1,2,\dots,n$, *выполнено условие* (L^*) *с показателем* $\gamma = 0$, *то*

$$|\Gamma_k(Z_n)| \leqslant \frac{k!}{(\tau_n/(27|\ln \tau_n|))^{k-2}}, \quad k = 3,4,\dots \tag{2.24}$$

Если же условие (L^*) *выполнено с показателем* $\gamma > 0$, *то*

$$|\Gamma_k(Z_n)| \leqslant \frac{(k!)^{1+\gamma}}{(\tau_n/C_1^*(\gamma))^{k-2}} \vee \frac{k!}{\tau_n^2(\tau_n^{1/(1+2\gamma)}/C_2^*(\gamma))^{k-2}}, \tag{2.25}$$

$k = 3,4,\dots,$

где

$$
\begin{aligned}
C_1^*(\gamma) &= 48\exp\{3(1+\gamma)\},\\
C_2^*(\gamma) &= 16^{1/(1+2\gamma)}(e(1+\gamma))^3 6^{\gamma/(1+2\gamma)}\left(\frac{3(1+2\gamma)^2}{e\gamma}\right)^{3(1+2\gamma)}.
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

Полное доказательство этого утверждения приведено в работах [86], [98].

Приведем условие, предложенное А. И. Саханенко [99], которое эквивалентно условию (L^*) при $\gamma = 0$: пусть существует величина $\lambda > 0$ такая, что

$$
L_n := \lambda \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}|\xi_j|^3 e^{\lambda|\xi_j|} \leqslant \mathbf{D}S_n. \tag{B}
$$

Утверждение 2.3. *Если выполнено условие* (B), *то условие* (L^*) *верно при* $\gamma = 0$ *и* $\tau_n = \lambda B_n$. *Обратно, если выполнено условие* (L^*) *при* $\gamma = 0$, *то условие* (B) *имеет место при* $\lambda = \tau_n/(12B_n)$.

Доказательство. Сначала докажем, что из условия (B) следует условие (L^*) с $\gamma = 0$ и $\tau_n = \lambda B_n$. Имеем

$$
\begin{aligned}
\lambda^{k-2}\mathbf{E}|\xi_j|^k/(k-3)! = \lambda\mathbf{E}|\xi_j|^3(\lambda|\xi_j|)^{k-3}/(k-3)! <\\
< \lambda\mathbf{E}|\xi_j|^3 e^{\lambda|\xi_j|}, \quad \forall k,\ k \geqslant 3.
\end{aligned}
$$

Отсюда, с учетом условия (B),

$$
\lambda^{k-2}L_{k,n}/(k-3)! \leqslant \lambda B_n^{-k}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}|\xi_j|^3 e^{\lambda|\xi_j|} \leqslant B_n^{2-k}.
$$

Следовательно,

$$
L_{k,n} \leqslant \frac{(k-3)!}{(\lambda B_n)^{k-2}}, \quad \forall k, k \geqslant 3.
$$

Обратно, если выполнено условие (L^*) с $\gamma = 0$, то при $\lambda = \tau_n/(12B_n)$

$$
\begin{aligned}
L_n(\lambda) = \lambda\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\lambda^{k-3}}{(k-3)!}L_{k,n}B_n^k \leqslant B_n^2\sum_{k=3}^{\infty}k(k-1)(k-2)(\lambda B_n/\tau_n)^{k-2} \leqslant\\
\leqslant L_n^2\sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{6\lambda B_n}{\tau_n}\right)^{k-2} \leqslant B_n^2.
\end{aligned}
$$

Теперь приведем пример (см. А. И. Саханенко [99]), показывающий, что при выполнении условия (L^*) с показателем $\gamma = 0$ оценка (2.24) для семиинварианта k-го порядка с.в. Z_n неулучшаема с точностью до постоянной. Точнее, мы приведем пример последовательности, удовлетворяющей условиям (B) и (L^*) с $\tau = \lambda$ при $\gamma = 0$, и покажем, что если выполнено условие

$$|\Gamma_k(Z_n)| \leqslant k!/R^{k-2}, \quad k = 3,4,\ldots, \tag{2.27}$$

то с необходимостью $R < \pi\tau/\ln\tau$.

Пусть с.в. ξ_0 принимает два значения $\pm\sigma$ с равными вероятностями, причем $\sigma \leqslant 1/e$. Далее, пусть $\xi_1,\ldots,\xi_n$ – с.в. с общей функцией нормального распределения. Тогда $\mathbf{E}\xi_0 = 0$, $\mathbf{D}\xi_0 = \sigma^2$. Обозначим

$$S = \xi_0 + S', \qquad S' = \xi_1 + \cdots + \xi_n.$$

Если положить $\mathbf{D}S = 1$, то $\mathbf{D}S' = 1 - \sigma^2$. Тогда $\mathbf{D}\xi_1 = (1-\sigma^2)/n$. В этом случае

$$L_{k,n} = \mathbf{E}|\xi_0|^k + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}|\xi_j|^k \to \sigma^k \quad (n\to\infty)$$

и

$$L_n(\lambda) = \lambda\mathbf{E}|\xi_0|^3 e^{\lambda|\xi_0|} + \lambda\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}|\xi_j|^3 e^{\lambda|\xi_j|} \to \lambda\mathbf{E}|\xi_0|^3 e^{\lambda|\xi_0|} \quad (n\to\infty).$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned}\lambda\mathbf{E}|\xi_0|^3 e^{\lambda|\xi_0|} &= \lambda\sigma^3 e^{\lambda\sigma} = (1/\sigma)\ln(1/\sigma)\sigma^3\exp\{\sigma(1/\sigma)\ln(1/\sigma)\} = \\ &= \sigma\ln(1/\sigma) < \sigma(1/\sigma) = 1,\end{aligned}$$

так как $\ln(1/\sigma) \leqslant (1/\sigma) - 1 < 1/\sigma$, $\sigma < 1/e$. Следовательно, выполнено условие (B) с $\lambda = (1/\sigma)\cdot\ln(1/\sigma)$. Тогда, согласно утверждению 2.3, выполнено условие (L^*) с $\tau = \lambda = (1/\sigma)\ln(1/\sigma)$ и $\gamma = 0$.

Далее, при комплексном z

$$\begin{aligned}\varphi(z) := \ln\mathbf{E}e^{zS} &= \ln\mathbf{E}e^{z\xi_0} + \ln\mathbf{E}e^{zS'} = \ln\mathbf{E}e^{z\xi_0} + \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\Gamma_k(S')z^k = \ln\mathbf{E}e^{z\xi_0} + \Gamma_2(S')\frac{z^2}{2} = \ln\mathbf{E}e^{z\xi_0} + (1-\sigma^2)\frac{z^2}{2}.\end{aligned}$$

Кроме того,

$$\mathbf{E}e^{z\xi_0} = (e^{\sigma z} + e^{-\sigma z})/2 = \cos(i\sigma z) = 0$$

при $z = i(\pi/2\sigma)$, так как $\cos(i\sigma z) = \cos(i^2\pi\sigma/(2\sigma)) = \cos(-\pi/2) = 0$. Обозначим $R_0 = \pi/(2\sigma)$. Тогда при $z = iR_0$ будем иметь $\mathbf{E}e^{z\xi_0} = 0$ (т.е. $\ln \mathbf{E}e^{z\xi_0} = -\infty$).

Поскольку условие (2.27) влечет аналитичность функции $\varphi(z)$ в круге $|z| < R$, то тем самым доказано утверждение: если верно условие (2.27), то $R < R_0$.

Поскольку $\tau = \lambda = (1/\sigma)\ln(1/\sigma)$, то $R_0 = \pi/(2\sigma) = \pi(1/\sigma)\ln(1/\sigma)/ /(2\ln(1/\sigma)) = \pi\tau/(2\ln(1/\sigma))$. Так как $\ln(1/\sigma) \leqslant (1/\sigma) - 1 < 1/\sigma$, то $\tau = (1/\sigma)\ln(1/\sigma) < (1/\sigma)\cdot(1/\sigma) = 1/\sigma^2$. Отсюда $\ln\tau \leqslant \ln(1/\sigma^2)$, т.е. $\ln\tau < 2\ln(1/\sigma)$. Поэтому $R_0 < \pi\tau/\ln\tau$.

Глава 3

ТЕОРЕМЫ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ СУММ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть X_t, $t = 1, 2, \ldots$, – случайный процесс, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, и $\{\mathcal{F}_s^t,\ 1 \leqslant s \leqslant t < \infty\}$ – семейство σ-алгебр таких, что

1) $\mathcal{F}_s^t \subset \mathcal{F}, \quad \forall s \leqslant t$;

2) $\mathcal{F}_{s_1}^{t_1} \subset \mathcal{F}_{s_2}^{t_2}, \quad \forall [s_1, t_1] \subset [s_2, t_2]$;

3) $\mathcal{F}_s^t \supset \sigma\{X_u,\ s \leqslant u \leqslant t\}$.

Введем, как обычно, функции *α-перемешивания*, *φ-перемешивания* и *ψ-перемешивания* следующими соотношениями:

$$\alpha(s,t) = \sup_{A\in\mathcal{F}_1^s,\, B\in\mathcal{F}_t^\infty} |\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|$$

(Розенблатт [147]);

$$\varphi(s,t) = \sup_{\substack{A\in\mathcal{F}_1^s,\, B\in\mathcal{F}_t^\infty \\ P(A)>0}} \left|\frac{\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)}\right|$$

(И. А. Ибрагимов [45]);

$$\psi(s,t) = \sup_{\substack{A\in\mathcal{F}_1^s,\, B\in\mathcal{F}_t^\infty \\ P(A)>0\ \ P(B)>0}} \left|\frac{\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)}\right|$$

(Блюм, Хансон, Купменс [124]).

Классы обобщенных функций перемешивания. Пусть

$$\mathcal{K} := \{f \in L_\infty(R^2) \mid 0 \leqslant f(s_1, t_1) \leqslant f(s, t) \leqslant f(s_2, t_2),$$
$$[s_2, t_2] \subset [s, t] \subset [s_1, t_1]\}. \tag{3.1}$$

Каждую функцию $f \in \mathcal{K}$ будем называть *обобщенной функцией перемешивания.* Пусть

$$d(f, g) := \sup_{(s,t)\in R^2} |f(s,t) - g(s,t)|$$

– расстояние в $\mathcal{K}$. Определим $\mathcal{K}^{(\leqslant 1)}$ и $\mathcal{K}^{(\geqslant 1)}$ соотношениями

$$\mathcal{K}^{(\leqslant 1)} = \{f \in \mathcal{K} \mid d(0, f) \leqslant 1\}, \tag{3.2}$$

$$\mathcal{K}^{(\geqslant 1)} = \{f \in \mathcal{K} \mid d(0, f) \geqslant 1\}.$$

Тогда

$$\alpha,\ \varphi,\ \psi,\ \overline{m} \in \mathcal{K},$$
$$\alpha,\ \varphi,\ \overline{m} \in \mathcal{K}^{(\leqslant 1)},$$
$$4\alpha,\ \varphi,\ \psi,\ \overline{m} \in \mathcal{K}^{(\geqslant 1)},$$

где $\overline{m}(s,t) = \mathbf{1}_{\{t-s \leqslant m\}}(s,t)$ – *функция m-зависимости.*

Обозначим

$$\mathfrak{N} = \{1, 2, \ldots, n\},$$
$$I = \{t_1, \ldots, t_k | t_j \in \mathfrak{N}\}, \quad t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_k.$$

$\{I_1, \ldots, I_\gamma\}$ – разбиение множества I, $I_p = \{t_1^{(p)}, \ldots, t_{k_p}^{(p)}\}$, $t_1^{(p)} \leqslant \cdots \leqslant t_{k_p}^{(p)}$, $1 \leqslant p \leqslant \nu$, $k_1 + \cdots + k_\nu = k$.

§ 3.1. Оценки центрированных моментов k-го порядка случайных процессов с перемешиванием

В предельных теоремах для сумм $S_n = \sum_{t=1}^{n} X_t$ зависимых случайных величин при различных условиях на перемешивание существенную роль играют оценки сверху для $\widehat{\mathbf{E}}\, X_s X_t = \mathbf{E} X_s X_t - \mathbf{E} X_s \mathbf{E} X_t$ через функции α, φ или ψ. Напомним основные из них:

$$|\widehat{\mathbf{E}}\, X_s X_t| \leqslant 4C^2 \alpha(s,t), \tag{A}$$

если $|X_s| \leqslant C$ и $|X_t| \leqslant C$ с вероятностью 1 (В. А. Волконский, Ю. А. Розанов [27]);

$$|\widehat{\mathbf{E}}\, X_s X_t| \leqslant 6\alpha^{1-(1/u)-(1/v)}(s,t)\mathbf{E}^{1/u}|X_s|^u \mathbf{E}^{1/v}|X_t|^v \qquad (B)$$

для любых $u \geqslant 1$, $v \geqslant 1$ с $1/u + 1/v \leqslant 1$, если конечны $\mathbf{E}|X_s|^u$ и $\mathbf{E}|X_t|^v$ (Ю. А. Давыдов [32]);

$$|\widehat{\mathbf{E}}\, X_s X_t| \leqslant 2\varphi^{1/p}(s,t)\mathbf{E}^{1/p}|X_s|^p \mathbf{E}^{1/q}|X_t|^q \qquad (C)$$

для любых $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$ при $1/p + 1/q = 1$, если конечны $\mathbf{E}|X_s|^p$, $\mathbf{E}|X_t|^q$ (И. А. Ибрагимов [45]);

$$|\widehat{\mathbf{E}}\, X_s X_t| \leqslant \psi(s,t)\mathbf{E}|X_s|\mathbf{E}|X_t|, \qquad (D)$$

если существуют $\mathbf{E}|X_s|$, $\mathbf{E}|X_t|$ (Филипп [144]).

Обобщим эти оценки для $\widehat{\mathbf{E}}\, X_{t_1} \ldots X_{t_k}$.

Теорема 3.1. *Если $|X_{t_j}| \leqslant C$ с вероятностью* 1, $j = 1, \ldots, k$, $k = 2, 3, \ldots$, *то для всех* $i = 1, \ldots, k-1$

$$1)\ |\widehat{\mathbf{E}}\, X_{t_1} \ldots X_{t_k}| \leqslant 2^k C^k \alpha(t_i,\ t_{i+1}),$$

$$2)\ |\widehat{\mathbf{E}}\, X_{t_1} \ldots X_{t_k}| \leqslant 2^{k-1} C^k \varphi(t_i,\ t_{i+1}),$$

$$3)\ |\widehat{\mathbf{E}}\, X_{t_1} \ldots X_{t_k}| \leqslant 2^{k-2} C^k \psi(t_i,\ t_{i+1}).$$

Теорема 3.2. *Если для некоторого набора* $p_j \geqslant 1$, $j = 1, \ldots, k$, *такого, что* $\sum\limits_{j=1}^{k}(1/p_j) \leqslant 1$, $k = 2, 3, \ldots$, *существуют* $\mathbf{E}|X_{t_j}|^{p_j}$, $j = 1, \ldots, k$, *то для всех* $i = 1, \ldots, k-1$

$$1)\ |\widehat{\mathbf{E}}\, X_{t_1} \ldots X_{t_k}| \leqslant 3 \cdot 2^{k-1} \alpha^{1-\sum\limits_{j=1}^{k}(1/p_j)}(t_i,\ t_{i+1}) \prod_{j=1}^{k} \mathbf{E}^{1/p_j}|X_{t_j}|^{p_j},$$

$$2)\ |\widehat{\mathbf{E}}\, X_{t_1} \ldots X_{t_k}| \leqslant 2^{k-1} \varphi^{\sum\limits_{j=1}^{i}(1/p_j)}(t_i,\ t_{i+1}) \prod_{j=1}^{k} \mathbf{E}^{1/p_j}|X_{t_j}|^{p_j},$$

$$3)\ |\widehat{\mathbf{E}}\, X_{t_1} \ldots X_{t_k}| \leqslant 2^{k-2} \psi(t_i,\ t_{i+1}) \prod_{j=1}^{k} \mathbf{E}^{1/p_j}|X_{t_j}|^{p_j}.$$

Пусть $l_1 < \ldots < l_r$ – точки роста последовательности $t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_k$, m_j – число элементов в $\{t_1, \ldots, t_k\}$, равных b_j. В дальнейшем присутствующие в формулировках числа m_j будут считаться определенными, и разъяснения по поводу их структуры даваться не будут.

Теорема 3.3. *Если для некоторого* $k \in \{2, 3, \ldots\}$

$$|\,\widehat{\mathbf{E}}\,(X_{l_j}^{m_j} | \mathcal{F}_1^{l_{j-1}})| < \infty \textit{ с вероятностью } 1, \ j = 1, \ldots, r,$$

то для всех $i = 1, \ldots, k-1$

$$|\,\widehat{\mathbf{E}}\,X_{t_1} \ldots X_{t_k}| \leqslant 2^k \alpha(t_i,\ t_{i+1}) \prod_{j=1}^{r} \operatorname{ess\,sup} |\mathbf{E}(X_{l_j}^{m_j} | \mathcal{F}_1^{l_j - 1})|.$$

Следствие теоремы 3.3. *Если для некоторых* $\gamma_2 \geqslant 0$, $H_2 > 0$

$$|\mathbf{E}(X_{l_j}^k | \mathcal{F}_1^{l_{j-1}})| \leqslant (k!)^{1+\gamma_2} H_2^k \textit{ с вероятностью } 1,$$

$j = 1, \ldots, r$, $k = 2, 3, \ldots$, *то для всех* $i = 1, \ldots, k-1$

$$|\,\widehat{\mathbf{E}}\,X_{t_1} \ldots X_{t_k}| \leqslant \prod_{j=1}^{r} (m_j!)^{1+\gamma_2} 2^k H_2^k \alpha(t_i,\ t_{i+1}).$$

Рассмотрим случай, когда величины X_t связаны в *цепь Маркова* ξ_t (т.е. $X_t = g_t(\xi_t)$, где $g_t(x)$ – измеримая при каждом t функция) с вероятностями перехода

$$\mathbf{P}_{st}(x, A) = \mathbf{P}(\xi_t \in A | \xi_s = x), \ \mathbf{P}_t(A) = \mathbf{P}(\xi_t \in A).$$

Положим $\mathcal{F}_s^t = \sigma\{\xi_u,\ s \leqslant u \leqslant t\}$. Тогда

$$\varphi(s, t) = \sup_{x,\ A \in \mathcal{F}_s^t} |\mathbf{P}_{st}(x, A) - \mathbf{P}_t(A)| \leqslant 1 - \alpha_{st},$$

где α_{st} – *коэффициент эргодичности* функции $\mathbf{P}_{st}(\cdot, \cdot)$:

$$\alpha_{st} = 1 - \sup_{x, y,\ A \in \mathcal{F}_s^t} |\mathbf{P}_{st}(x, A) - \mathbf{P}_{st}(y, A)|$$

(Р. Л. Добрушин [33], [34]). Легко подсчитать, что в этом случае

$$\widehat{\mathbf{E}}\,X_{t_1} \ldots X_{t_k} = \tag{3.3}$$
$$= \underbrace{\int \cdots \int}_{k} g_{t_1}(x_1) P_{t_1}(dx_1) \prod_{j=2}^{k} g_{t_j}(x_j)(P_{t_{j-1} t_j}(x_{j-1}, dx_j) - P_{t_j}(dx_j)),$$

если $t_1 < \ldots < t_k$.

Теорема 3.4. *Пусть X_t связаны в цепь Маркова ξ_t. Если $|X_{t_j}| \leqslant C$ с вероятностью* 1, $j = 1, \ldots, r$, $r = 2, 3, \ldots$, *то*

$$1)\ |\widehat{\mathbf{E}}\, X_{t_1} \ldots X_{t_k}| \leqslant 2^{k-1} C^k \prod_{j=1}^{r-1} \varphi(l_j,\ l_{j+1}),$$

$$2)\ |\widehat{\mathbf{E}}\, X_{t_1} \ldots X_{t_k}| \leqslant 2^{k-r} \prod_{j=1}^{r-1} \psi(l_j,\ l_{j+1}).$$

Теорема 3.5. *Пусть X_t связаны в цепь Маркова ξ_t.*

1. *Если для некоторого набора $q_j \geqslant 1$, $j = 1, \ldots, r$, $r = 2, 3, \ldots$, такого, что $\sum_{j=1}^{r} (1/q_j) = 1$, существуют $\mathbf{E}|X_{l_j}|^{m_j q_j}$, $j = 1, \ldots, r$, то*

$$|\widehat{\mathbf{E}}\, X_{t_1} \ldots X_{t_k}| \leqslant 2^{k-1} \prod_{j=1}^{r-1} \varphi^{\sum_{i=1}^{j} (1/q_i)}(l_j,\ l_{j+1}) \prod_{j=1}^{r} \mathbf{E}^{1/q_j} |X_{l_j}|^{m_j q_j}.$$

2. *Если для некоторого $r \in \{2, 3, \ldots\}$ существуют $\mathbf{E}|X_{l_j}|^{m_j}$, $j = 1, \ldots, r$, то*

$$|\widehat{\mathbf{E}}\, X_{t_1} \ldots X_{t_k}| \leqslant 2^{k-r} \prod_{j=1}^{r-1} \psi(l_j,\ l_{j+1}) \prod_{j=1}^{r} \mathbf{E}|X_{l_j}|^{m_j}.$$

Теорема 3.6. *Пусть X_t связаны в цепь Маркова ξ_t. Если для некоторого $r \in \{2, 3, \ldots\}$*

$$|\mathbf{E}(X_{l_j}|^{m_j} | \mathcal{F}_1^{l_{j-1}})| < \infty \text{ с вероятностью } 1,\ j = 1, \ldots, r,$$

то

$$|\widehat{\mathbf{E}}\, X_{t_1} \ldots X_{t_k}| \leqslant 2^{k-1} \prod_{j=1}^{r-1} \varphi(l_j,\ l_{j+1}) \prod_{j=1}^{r} \operatorname{ess\,sup} |\mathbf{E}(X_{l_j}^{m_j} | \mathcal{F}_1^{l_{j-1}})|.$$

Следствие теоремы 3.6. *Пусть X_t связаны в цепь Маркова ξ_t. Если для некоторых $\gamma_2 \geqslant 0$, $H_2 > 0$*

$$|\mathbf{E}(X_{l_j}^k | \mathcal{F}_1^{l_{j-1}})| \leqslant (k!)^{1+\gamma_2} H_2^k \text{ с вероятностью } 1,$$

$j = 1,\dots,r,\ r = 2,3,\dots,\ k = 2,3,\dots,$ *то*

$$|\widehat{\mathrm{E}}\, X_{t_1}\dots X_{t_k}| \leqslant 2^{k-1} H_2^k \prod_{j=1}^{r} (m_j!)^{1+\gamma_2} \prod_{j=1}^{r-1} \varphi(l_j, l_{j+1}).$$

Как известно, оценки семиинвариантов случайных величин, связанных в цепь Маркова (В. Статулявичус [101], [102]) или, удовлетворяющих более общему условию RMT (И. Г. Журбенко [35],[36], Н. М. Зуев [42], В. Статулявичус [102] – [104], Розенблатт [147]), выражаются через произведение функций перемешивания. В случае произвольных величин этого достичь нельзя. Приходится ограничиться оценками „максимального интервала". Следует отметить, что неравенства

$$\alpha(s,t) \leqslant \varphi(s,t) \leqslant \psi(s,t) \tag{3.4}$$

(см. Иосифеску [136]) обосновывают непосредственный переход от оценок через $\alpha(s,t)$ к оценкам через $\varphi(s,t)$ и от $\varphi(s,t)$ – к $\psi(s,t)$ прямой заменой функции перемешивания.

§ 3.2. Оценки смешанных семиинвариантов для случайных процессов с перемешиванием

Имея оценки теорем 3.1 – 3.6 и их следствий, из соотношения (1.22), с учетом поведения $N_\nu(I_1,\dots,I_\nu)$, получаем оценки для семиинвариантов $\Gamma(X_{t_1},\dots,X_{t_n})$.

Теорема 3.7. *Если* $|X_{t_j}| \leqslant C$ *с вероятностью* 1, $j = 1,\dots,k$, $k = 2,3,\dots,$ *то для всех* $i = 1,2,\dots,k-1$

$$1)\ |\Gamma(X_{t_1},\dots,X_{t_k})| \leqslant (k-1)!2^k C^k \alpha(t_i, t_{i+1}),$$

$$2)\ |\Gamma(X_{t_1},\dots,X_{t_k})| \leqslant (k-1)!2^{k-1} C^k \varphi(t_i, t_{i+1}),$$

$$3)\ |\Gamma(X_{t_1},\dots,X_{t_k})| \leqslant (k-1)!2^{k-2} C^k \psi(t_i, t_{i+1}).$$

Здесь $t_{i+1} - t_i = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant k}(t_{j+1} - t_j)$.

Теорема 3.8. *Если для некоторого набора* $p_j \geqslant 1$, $j = 1,\dots,k$, *такого, что* $\sum\limits_{j=1}^{n}(1/p_j) \leqslant 1$, $k = 2,3,\dots,$ *существу-*

ют $\mathbf{E}|X_{t_j}|^{p_j}$, $j = 1,\dots,k$, *то для всех* $i = 1,\dots,k-1$

1) $|\Gamma(X_{t_1},\dots,X_{t_k})| \leqslant 3(k-1)!2^{k-1}\alpha^{1-\sum\limits_{j=1}^{k}(1/p_j)}(t_i,t_{i+1})\prod\limits_{j=1}^{k}\mathbf{E}^{1/p_j}|X_{t_j}|^{p_j}$,

2) $|\Gamma(X_{t_1},\dots,X_{t_k})| \leqslant (k-1)!2^{k-1}\varphi^{\sum\limits_{j=1}^{i}(1/p_j)}(t_i,t_{i+1})\prod\limits_{j=1}^{k}\mathbf{E}^{1/p_j}|X_{t_j}|^{p_j}$,

3) $|\Gamma(X_{t_1},\dots,X_{t_k})| \leqslant (k-1)!2^{k-2}\psi(t_i,t_{i+1})\prod\limits_{j=1}^{k}\mathbf{E}^{1/p_j}|X_{t_j}|^{p_j}$.

Теорема 3.9. *Если для некоторого* $k \in \{2,3,\dots\}$

$$\operatorname{ess\,sup}\,|\mathbf{E}(X_{l_j}^{m_j}|\mathcal{F}_1^{l_{j-1}}| < \infty \text{ с вероятностью } 1,\ j = 1,\dots,r,$$

то для всех $i = 1,\dots,k-1$

$$|\Gamma(X_{t_1},\dots,X_{t_k})| \leqslant (k-1)!2^k\alpha(t_i,t_{i+1})\prod_{j=1}^{r}\ \operatorname{ess\,sup}\,|\mathbf{E}(X_{l_j}^{m_j}|\mathcal{F}_1^{l_{j-1}})|.$$

Следствие теоремы 3.9. *Если для некоторых* $\gamma_2 \geqslant 0$, $H_2 > 0$

$$|\mathbf{E}(X_{l_j}^{k}|\mathcal{F}_1^{l_{j-1}})| \leqslant (k!)^{1+\gamma_2}H_2^k \text{ с вероятностью } 1,$$

$j = 1,\dots,r$, $k = 2,3,\dots$, *то для всех* $i = 1,\dots,k-1$

$$|\Gamma(X_{t_1},\dots,X_{t_k})| \leqslant (k!)^{1+\gamma_2}2^{2k-1}H_2^k\alpha(t_i,t_{i+1}).$$

Теорема 3.10. *Пусть* X_t *связаны в цепь Маркова* ξ_t. *Если* $|X_{t_j}| \leqslant C$ *с вероятностью* 1, $j = 1,\dots,r$, $k \in \{2,3,\dots\}$, *то*

$$1)\ |\Gamma(X_{t_1},\dots,X_{t_k})| \leqslant (k-1)!2^{k-1}C^k\prod_{j=1}^{r-1}\varphi(l_j,l_{j+1}),$$

$$2)\ |\Gamma(X_{t_1},\dots,X_{t_k})| \leqslant (k-1)!2^{k-r}C^k\prod_{j=1}^{r-1}\psi(l_j,l_{j+1}).$$

Теорема 3.11. *Пусть X_t связаны в цепь Маркова.*

1) *Если для некоторого набора $q_j \geqslant 1, j = 1,\ldots,r, r \in \{2,3,\ldots\}$, такого, что $\sum_{j=1}^{r}(1/q_j) = 1$, существуют $\mathbf{E}|X_{l_j}|^{m_j q_j}$, то*

$$|\Gamma(X_{t_1},\ldots,X_{t_k})| \leqslant$$
$$\leqslant (k-1)!2^{k-1}\prod_{j=1}^{r-1}\varphi^{\sum_{i=1}^{j}(1/q_i)}(l_j,l_{j+1})\prod_{j=1}^{r}\mathbf{E}^{1/q_j}|X_{l_j}|^{m_j q_j}.$$

2) *Если для некоторого $r \in \{2,3,\ldots\}$ существуют $\mathbf{E}|X_{l_j}|^{m_j}$, $j = 1,\ldots,r$, то*

$$|\Gamma(X_{t_1},\ldots,X_{t_k})| \leqslant (k-1)!2^{k-r}\prod_{j=1}^{r-1}\psi(l_j,l_{j+1})\prod_{j=1}^{r}\mathbf{E}|X_{l_j}|^{m_j}.$$

Теорема 3.12. *Пусть X_t связаны в цепь Маркова ξ_t. Если для некоторого $r \in \{2,3,\ldots\}$*

$$|\mathbf{E}(X_{l_j}^{m_j}|\mathcal{F}_1^{l_{j-1}})| \leqslant \infty \text{ с вероятностью } 1,\ j = 1,\ldots,r,$$

то

$$|\Gamma(X_{t_1},\ldots,X_{t_k})| \leqslant (k-1)!2^{k-1}\prod_{j=1}^{r-1}\varphi(l_j,l_{j+1})\prod_{j=1}^{r}\operatorname{ess\,sup}|\mathbf{E}(X_{l_j}^{m_j}|\mathcal{F}_1^{l_{j-1}})|.$$

Следствие теоремы 3.12. *Пусть X_t связаны в цепь Маркова ξ_t. Если для некоторых $\gamma_2 \geqslant 0, H_2 > 0$*

$$\mathbf{E}(X_{l_j}^{k}|\mathcal{F}_1^{l_{j-1}})| \leqslant (k!)^{1+\gamma_2}H_2^k \text{ с вероятностью } 1,$$

$j = 1,\ldots,r,\ r = 2,3,\ldots,\ k = 2,3,\ldots,$ *то*

$$|\Gamma(X_{t_1},\ldots,X_{t_k})| \leqslant (k!)^{1+\gamma_2}4^{k-1}H_2^k\prod_{j=1}^{r-1}\varphi(l_j,l_{j+1}).$$

Доказательство теорем 3.1 – 3.12 опираются на следущие неравенства.

Лемма 3.1.

$$|\Gamma(X_{t_1},\ldots,X_{t_k})| \leqslant (k-1)! \max_{1\leqslant\nu\leqslant k} \prod_{p=1}^{\nu} |\widehat{\mathbf{E}}\,(X_{I_p})|,$$

$$|\Gamma(X_{t_1},\ldots,X_{t_k})| \leqslant k!2^{k-1} \max_{1\leqslant\nu\leqslant k} \prod_{p=1}^{\nu} |\widehat{\mathbf{E}}\,(X_{I_p})|/k_p!.$$

Доказательство теоремы 3.7 получается непосредственно из теоремы 3.1 и лемы 3.1, так как

$$\max_{1\leqslant\nu\leqslant k} \prod_{p=1}^{\nu} |\widehat{\mathbf{E}}\,(X_{I_p})| \leqslant 2^k C^k \alpha(t_i,t_{i+1}),$$

$$\max_{1\leqslant\nu\leqslant k} \prod_{p=1}^{\nu} |\widehat{\mathbf{E}}\,(X_{I_p})| \leqslant 2^{k-1} C^k \varphi(t_i,t_{i+1}),$$

$$\max_{1\leqslant\nu\leqslant k} \prod_{p=1}^{\nu} |\widehat{\mathbf{E}}\,(X_{I_p})| \leqslant 2^{k-2} C^k \psi(t_i,t_{i+1}).$$

Доказательство теоремы 3.8 п.1. Учитывая оценки теоремы 3.2 п.1, убеждаемся, что .

$$\max_{1\leqslant\nu\leqslant k} \prod_{p=1}^{\nu} |\widehat{\mathbf{E}}\,(X_{I_p})| \leqslant 3\cdot 2^k C^k \alpha^{1-\sum_{j=1}^{k} 1/p_j}(t_i,t_{i+1}) \prod_{j=1}^{k} \mathbf{E}^{1/p_k}|X_{t_j}|^{p_k},$$

поскольку $\alpha \leqslant 1$. Так как условия теоремы 3.1 выполнены, теорема доказана.

Доказательство теоремы 3.8 п.2 проводится аналогично доказательству теоремы 3.8 п.1. Отметим только, что в данном случае в силу условия $\varphi \leqslant 1$ можно положить

$$\max_{1\leqslant\nu\leqslant k} \prod_{p=1}^{\nu} |\widehat{\mathbf{E}}\,(X_{I_p})| \leqslant 2^{k-1} \varphi^{1-\sum_{j=1}^{i} 1/p_j}(t_i,t_{i+1}) \prod_{j=1}^{k} \mathbf{E}^{1/p_k}|X_{t_j}|^{p_j}.$$

Доказательство теоремы 3.9 получается из теоремы 3.3 и леммы 3.1 в силу оценки

$$\max_{1\leqslant\nu\leqslant k} \prod_{p=1}^{\nu} |\widehat{\mathbf{E}}\,(X_{I_p})| \leqslant 2^k \alpha(t_i,t_{i+1}) \prod_{j=1}^{r} \operatorname{ess\,sup} |\mathbf{E}(X_{l_j}^{m_j}|\mathcal{F}_1^{l_{j-1}})|.$$

Доказательство теоремы 3.10 следует из оценок

$$1) \max_{1\leqslant\nu\leqslant k}\prod_{p=1}^{\nu}|\,\widehat{\mathbf{E}}\,(X_{I_p})|\leqslant 2^{k-1}C^k\prod_{j=1}^{r-1}\varphi(l_j,l_{j+1}),$$

$$2) \max_{1\leqslant\nu\leqslant k}\prod_{p=1}^{\nu}|\,\widehat{\mathbf{E}}\,(X_{I_p})|\leqslant 2^{k-r}C^k\prod_{j=1}^{r-1}\varphi(l_j,l_{j+1}).$$

Доказательство теоремы 3.11 п.1 следует из оценки

$$\max_{1\leqslant\nu\leqslant k}\prod_{p=1}^{\nu}|\,\widehat{\mathbf{E}}\,(X_{I_p})|\leqslant 2^{k-1}\prod_{j=1}^{r-1}\varphi^{\sum_{i=1}^{j}1/q_i}(l_j,l_{j+1})\prod_{j=1}^{r}\mathbf{E}^{1/q_j}|X_{l_j}|^{m_jq_j}.$$

Доказательство теоремы 3.11 п.2 следует из оценки

$$\max_{1\leqslant\nu\leqslant k}\prod_{p=1}^{\nu}|\,\widehat{\mathbf{E}}\,(X_{I_p})|\leqslant 2^{k-1}\prod_{j=1}^{r-1}\psi(l_j,l_{j+1})\prod_{j=1}^{r}\mathbf{E}|X_{l_j}^{m_j}|.$$

Доказательство теоремы 3.12 следует из оценки

$$\max_{1\leqslant\nu\leqslant k}\prod_{p=1}^{\nu}|\,\widehat{\mathbf{E}}\,(X_{I_p})|\leqslant 2^{k-1}\prod_{j=1}^{r-1}\varphi(l_j,l_{j+1})\prod_{j=1}^{r}\ \operatorname{ess\,sup}\ |\mathbf{E}(X_{l_j}^{m_j}|\mathcal{F}_{l_{j-1}}^{l_{j-1}})|.$$

Доказательство следствия теоремы 3.12 следует из оценки

$$\max_{1\leqslant\nu\leqslant k}\prod_{p=1}^{\nu}|\,\widehat{\mathbf{E}}\,(X_{I_p})|/k_p!\leqslant (k!)^{\gamma_2}2^{k-1}H_2^k\prod_{j=1}^{r-1}\varphi(l_j,l_{j+1}).$$

§ 3.3. Оценки семиинвариантов сумм зависимых случайных величин

Пусть $S_n=\sum_{t=1}^{n}X_t$ и $\Gamma_k(S_n)$ – семиинвариант k-го порядка суммы S_n. Положим

$$\Lambda_n(f,u):=1\vee\max_{1\leqslant s\leqslant n}\sum_{t=s}^{n}f^{1/u}(s,t),$$

где $f(s,t)$ – одна из функций перемешивания α, φ или ψ, а $u>0$.

Теорема 3.13. *Если* $|X_t| \leqslant C$ *с вероятностью* 1, $t = 1, 2, \ldots, n$, *то для всех* $k = 2, 3, \ldots$, $\beta > 0$, $\delta > 0$

1) $|\Gamma_k(S_n)| \leqslant 2k! 8^{k-1} C^k \Lambda_n^{k-1}(\alpha,\ k-1)n$,

2) $|\Gamma_k(S_n)| \leqslant k! 8^{k-1} C^{k-2} \Lambda_n^{k-2}(\varphi,\ (1+\beta)(1+1/\delta)(k-2)) \times$

$$\times \sum_{1 \leqslant s \leqslant t \leqslant n} \varphi^{\frac{\beta\delta}{(1+\beta)(1+\delta)}}(s,\ t) \mathbf{E}^{\frac{\delta}{1+\delta}} |X_s|^{1+1/\delta} \mathbf{E}^{\frac{1}{1+\delta}} |X_t|^{1+\delta}.$$

Теорема 3.14. *Если для некоторых* $k \in \{2, 3, \ldots\}$ *и* $\delta > 0$ *существуют* $\mathbf{E}|X_t|^{(1+\delta)k}$, $t = 1, \ldots, n$, *то для всех* $\beta > 0$

1) $|\Gamma_k(S_n)| \leqslant$

$$\leqslant 2k! 12^{k-1} \Lambda_n^{k-1}(\alpha,\ (1+1/\delta)(k-1)) \max_{1 \leqslant t \leqslant n} \mathbf{E}^{\frac{1}{1+\delta}} |X_t|^{(1+\delta)k} \cdot n,$$

2) $|\Gamma_k(S_n)| \leqslant$

$$\leqslant k! 8^{k-1} \Lambda_n^{k-2}(\varphi,\ (1+\beta)(1+1/\delta)(k-2)) \max_{1 \leqslant t \leqslant n} \mathbf{E}^{\frac{k-2}{(1+\delta)k}} |X_t|^{(1+\delta)k} \times$$

$$\times \sum_{1 \leqslant s \leqslant t \leqslant n} \varphi^{\frac{\beta\delta}{(1+\beta)(1+\delta)}}(s,\ t) \mathbf{E}^{\frac{1}{(1+\delta)k}} |X_s|^{(1+\delta)k} \mathbf{E}^{\frac{1}{(1+\delta)k}} |X_t|^{(1+\delta)k}.$$

Теорема 3.15. *Если для некоторых* $\gamma_1 \geqslant 0$, $H_1 > 0$

$$\mathbf{E}|X_t|^k \leqslant (k!)^{1+\gamma_1} H_1^k, \quad t = 1, \ldots, n, \quad k = 2, 3, \ldots,$$

то для всех $\delta > 0$

$$|\Gamma_k(S_n)| \leqslant 2(k!)^{2+\gamma_1} 12^{k-1} H_1^k (\widehat{1+\delta})^{(1+\gamma_1)k} \Lambda_n^{k-1}(\alpha,\ (1+1/\delta)(k-1)) \cdot n.$$

Здесь $\widehat{u} = \min\{v \geqslant u | v - \text{ целое}\}$.

Теорема 3.16. *Если для некоторых* $\gamma_2 \geqslant 0$, $H_2 > 0$

$$|\mathbf{E}(X_t^k | \mathcal{F}_1^{t-1})| \leqslant (k!)^{1+\gamma_2} H_2^k \text{ с вероятностью } 1,$$

$t = 1, \ldots, n$, $k = 2, 3, \ldots$, *то*

$$|\Gamma_k(S_n)| \leqslant 2(k!)^{1+\gamma_2} 16^{k-1} H_2^k \Lambda_n^{k-1}(\alpha,\ k-1) \cdot n.$$

Теорема 3.17. *Пусть X_t связаны в цепь Маркова ξ_t. Если $|X_t| \leqslant C$ с вероятностью 1, $t = 1, \dots, n$, то для всех $k = 2, 3, \dots$, $\delta > 0$*

$$1)\ \Gamma_k(S_n)| \leqslant k! 8^{k-1} C^k \Lambda_n^{k-1}(\varphi,\ 1) n,$$

$$2)\ |\Gamma_k(S_n)| \leqslant k! 8^{k-1} C^{k-2} \Lambda_n^{k-2}(\varphi,\ (1+1/\delta) \times$$

$$\times \sum_{1 \leqslant s \leqslant t \leqslant n} \varphi^{\frac{\delta}{(1+\delta)}}(s,\ t) \mathbf{E}^{\frac{\delta}{1+\delta}} |X_s|^{1+1/\delta} \mathbf{E}^{\frac{1}{1+\delta}} |X_t|^{1+\delta}.$$

Теорема 3.18. *Пусть X_t связаны в цепь Маркова ξ_t. Если для некоторых $k \in \{2, 3, \dots\}$ и $\delta > 0$ существуют $\mathbf{E}|X_t|^{(1+\delta)k}$, $t = 1, \dots, n$, то*

$$1)\ \Gamma_k(S_n)| \leqslant k! 8^{k-1} \Lambda_n^{k-1}(\varphi,\ 1+1/\delta) \max_{1 \leqslant t \leqslant n} \mathbf{E}^{\frac{1}{1+\delta}} |X_t|^{(1+\delta)k} \cdot n,$$

$$2)\ |\Gamma_k(S_n)| \leqslant k! 8^{k-1} \Lambda_n^{k-2}(\varphi,\ 1+1/\delta)) \max_{1 \leqslant t \leqslant n} \mathbf{E}^{\frac{k-2}{(1+\delta)k}} |X_t|^{(1+\delta)k} \times$$

$$\times \sum_{1 \leqslant s \leqslant t \leqslant n} \varphi^{\frac{\delta}{(1+\delta)}}(s,\ t) \mathbf{E}^{\frac{1}{(1+\delta)k}} |X_s|^{(1+\delta)k} \mathbf{E}^{\frac{1}{(1+\delta)k}} |X_t|^{(1+\delta)k}.$$

Теорема 3.19. *Пусть X_t связаны в цепь Маркова ξ_t. Если для некоторых $\gamma_1 \geqslant 0$, $H_1 > 0$*

$$\mathbf{E}|X_t|^k \leqslant (k!)^{1+\gamma_1} H_1^k, \quad t = 1, \dots, n, \quad k = 2, 3, \dots,$$

то для всех $\delta > 0$

$$1)\ |\Gamma_k(S_n)| \leqslant (k!)^{2+\gamma_1} 8^{k-1} H_1^k \widehat{(1+\delta)}^{(1+\gamma_1)k} \Lambda_n^{k-1}(\varphi,\ 1+1/\delta) n,$$

$$2)\ |\Gamma_k(S_n)| \leqslant (k!)^{1+\gamma_1} 16^{k-1} H_1^k \Lambda_n^{k-1}(\psi,\ 1) n.$$

Теорема 3.20. *Пусть X_t связаны в цепь Маркова ξ_t. Если для некоторых $\gamma_2 \geqslant 0$, $H_2 > 0$*

$$|\mathbf{E}(X_t^k | \mathcal{F}_1^{t-1})| \leqslant (k!)^{1+\gamma_2} H_2^k \text{ с вероятностью } 1,$$

$t = 1, \dots, n$, $k = 2, 3, \dots$, то

$$|\Gamma_k(S_n)| \leqslant (k!)^{1+\gamma_2} 16^{k-1} H_2^k \Lambda_n^{k-1}(\varphi,\ 1) n.$$

Лемма 3.2. *Если*

$$|\widehat{\mathbf{E}}(X_{I_p})| \leqslant C_0^{k_p-\varepsilon} C_2^{k_p} \min_{1\leqslant i<k_p} f^{1/u}(t_i^{(p)},\ t_{i+1}^{(p)}), \tag{3.4}$$

где $0 \leqslant \varepsilon \leqslant k_p$, $u \geqslant 1$, $C_0 \geqslant 1$, $C_2 > 0$, $f \in \mathcal{K}$*), $1 \leqslant p \leqslant \nu$, $1 \leqslant \nu \leqslant k$, *то*

$$\Big|\sum_{I\in\mathfrak{N}} \Gamma(X_I)\Big| \leqslant nk!4^{k-1}C_0^{k-\varepsilon}C_2^k \max \Lambda_n^{k-1}(f, su); \tag{3.5}$$

если

$$|\widehat{\mathbf{E}}(X_{I_p})| \leqslant C_0^{k_p-\varepsilon} C_2^{k_p} \prod_{j=1}^{r_p-1} f^{1/u}(l_j^{(p)},\ l_{j+1}^{(p)}), \tag{3.6}$$

где $0 \leqslant \varepsilon \leqslant k_p$, $u \geqslant 1$, $C_0 \geqslant 1$, $C_2 > 0$, $f \in \mathcal{K}^{(\geqslant 1)}$, $1 \leqslant p \leqslant \nu$, $1 \leqslant \nu \leqslant k$, *то*

$$\Big|\sum_{I\in\mathfrak{N}} \Gamma(X_I)\Big| \leqslant nk!4^{k-1}C_0^{k-\varepsilon}C_2^k \Lambda_n^{k-1}(f, u). \tag{3.7}$$

Следствие леммы 3.2. *Если*

$$|\widehat{\mathbf{E}}(X_{I_p})| \leqslant C_0^{k_p-\varepsilon} C_2^{k_p} \min_{1\leqslant i<k_p} f^{1/u}(t_i^{(p)},\ t_{i+1}^{(p)}), \tag{3.8}$$

где $0 \leqslant \varepsilon \leqslant k_p$, $u \geqslant 1$, $C_0 \geqslant 1$, $C_2 > 0$, $f \in \mathcal{K}^{(\leqslant 1)}$, $1 \leqslant p \leqslant \nu$, $1 \leqslant \nu \leqslant k$, *то*

$$\Big|\sum_{I\in\mathfrak{N}} \Gamma(X_I)\Big| \leqslant nk!4^{k-1}C_0^{k-\varepsilon}C_2^k \Lambda_n^{k-1}(f, (k-1)u). \tag{3.9}$$

Лемма 3.3. *Если*

$$|\widehat{\mathbf{E}}(X_{I_p})| \leqslant m_1^{(p)}!\ldots m_{r_p}^{(p)}! C_0^{k_p-\varepsilon} C_2^{k_p} \min_{1\leqslant i<k_p} f^{1/u}(t_i^{(p)},\ t_{i+1}^{(p)}), \tag{3.10}$$

где $0 \leqslant \varepsilon \leqslant k_p$, $u \geqslant 1$, $C_0 \geqslant 1$, $C_2 > 0$, $f \in \mathcal{K}$, $1 \leqslant p \leqslant \nu$, $1 \leqslant \nu \leqslant k$, *то*

$$\Big|\sum_{I\in\mathfrak{N}} \Gamma(X_I)\Big| \leqslant nk!8^{k-1}C_0^{k-\varepsilon}C_2^k \max_{1\leqslant s<k} \Lambda_n^{k-1}(f, su); \tag{3.11}$$

если

$$|\widehat{\mathbf{E}}(X_{I_p})| \leqslant m_1^{(p)}!\ldots m_{r_p}^{(p)}! C_0^{k_p-\varepsilon} C_2^{k_p} \prod_{j=1}^{r_p-1} f^{1/u}(l_j^{(p)},\ l_{j+1}^{(p)}), \tag{3.12}$$

---

*) Классы обобщенных функций перемешивания $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}^{(\leqslant 1)}$ и $\mathcal{K}^{(\geqslant 1)}$ определены соответственно соотношениями (3.1), (3.2).

где $0 \leqslant \varepsilon \leqslant k_p$, $u \geqslant 1$, $C_0 \geqslant 1$, $C_2 > 0$, $f \in \mathcal{K}^{(\geqslant 1)}$, $1 \leqslant p \leqslant \nu$, $1 \leqslant \nu \leqslant k$, *то*

$$\Big| \sum_{I \in \mathfrak{N}} \Gamma(X_I) \Big| \leqslant nk! 8^{k-1} C_0^{k-\varepsilon} C_2^k \Lambda_n^{k-1}(f, u). \tag{3.13}$$

Следствие леммы 3.3. *Если*

$$| \widehat{\mathbf{E}}\, X_{I_p} | \leqslant m_1^{(p)}! \dots m_{r_p}^{(p)}! C_0^{k_p - \varepsilon} C_2^{k_p} \min_{1 \leqslant i < k_p} f^{1/u}(t_i^{(p)}, \ t_{i+1}^{(p)}), \tag{3.14}$$

где $0 \leqslant \varepsilon \leqslant k_p$, $u \geqslant 1$, $C_0 \geqslant 1$, $C_2 > 0$, $f \in \mathcal{K}^{(\leqslant 1)}$, $1 \leqslant p \leqslant \nu$, $1 \leqslant \nu \leqslant k$, *то*

$$\Big| \sum_{I \in \mathfrak{N}} \Gamma(X_I) \Big| \leqslant nk! 8^{k-1} C_0^{k-\varepsilon} C_2^k \Lambda_n^{k-1}(f, (k-1)u). \tag{3.15}$$

При доказательстве теоремы 3.13 в (3.8) достаточно положить $f = \alpha$, $C_0 = 2$, $C_2 = C$, $\varepsilon = 0$, $u = 1$.

При докозательстве теоремы 3.16 в (3.14) полагаем $f = \alpha$, $C_0 = 2$, $C_2 = H_2$, $\varepsilon = 0$, $u = 1$.

При доказательстве теоремы 3.17 достаточно воспользоваться неравенством (3.6).

При доказательстве теоремы 3.19 достаточно в неравенстве (3.12) положить $f = \psi$, $C_0 = 2$, $C_2 = H_1$, $\varepsilon = 1$, $u = 1$.

Если в неравенстве (3.12) положить $f = \varphi$, $C_0 = 2$, $C_2 = H_2$, $\varepsilon = 1$, $u = 1$, то получим утверждение теоремы 3.20.

§ 3.4. Теоремы и неравенства больших уклонений для сумм зависимых случайных величин

Оценки для $\Gamma_k(S_n)$, полученные в теоремах 3.13 – 3.17, и основные леммы главы 1 позволяют получить теоремы и неравенства больших уклонений для распределения $\mathbf{P}(Z_n < x)$ нормированной суммы $Z_n = S_n/B_n$, $B_n^2 = \mathbf{E}S_n^2$ (всюду будем считать, что $\mathbf{E}X_t = 0, t = 1, \dots, n$). Теоремы больших уклонений для $\mathbf{P}(Z_n < x)$ приведем лишь для случая стационарной последовательности X_t, $t = 1, 2, \dots$. В случае общей нестационарной последовательности в теоремах 3.13 – 3.17 $\Gamma_k(Z_n)$ лучше оценивать при помощи $\Lambda_n^{k-2} L_{k,n}$ вместо $\Lambda_n^{k-2} n \max_{1 \leqslant t \leqslant n} \mathbf{E}|X_t|^k / B_n^k$, где

$$L_{k,n} = \frac{1}{B_n^k} \sum_{t=1}^{n} \mathbf{E}|X_t|^k$$

– *дробь Ляпунова k-того порядка.* Для этого нужно сумму S_n выразить через новые укрупненные слагаемые и исследовать поведение $\Gamma_k(S_n)$ относительно B_n.

Далее рассматривается стационарная последовательность X_t с $\mathbf{E}X_t = 0$, $\mathbf{E}X_t^2 = 1$, $B_n^2 = \mathbf{E}S_n^2 \geqslant \sigma_0^2 n$, $\sigma_0 > 0$.

Теорема 3.21. *Если* $|X_1| \leqslant C$ *с вероятностью* 1,

$$\alpha(s,t) \leqslant K_1 \exp\{-b_1(t-s)\}, \quad K_1 > 0, \quad b_1 > 0,$$

то

$$|\Gamma_k(Z_n)| \leqslant (k!)^2 B_1 \left(\frac{8Ce}{b_1 B_n}\right)^{k-2},$$

$k = 2,3,\ldots,$ $B_1 = 8C^2 K \exp\{1+b_1\}/(b_1\sigma_0^2)$, $K = (1 \vee K_1)$, *и для с.в.* $\xi = Z_n$ *имеют место соотношения больших уклонений* (1.31), (1.27) *и оценки* (1.39), (1.28) *с*

$$\gamma = 1,\ \Delta_\gamma = c_\gamma (B_n/H_0)^{1/3},\ \tilde{\Delta} = b_1 B_n/(8Ce),$$

где

$$H_0 = (8eC/b_1)(1 \vee B_1),\ H = 4B_1,$$

причем

$$\Delta_\gamma \geqslant c_\gamma (\sigma_0/H_0)^{1/3} (\sqrt{n})^{1/3}.$$

Теорема 3.22. *Если для некоторых* $\gamma_1 \geqslant 0$, $H_1 > 0$

$$\mathbf{E}|X_1|^k \leqslant (k!)^{1+\gamma_1} H_1^k, \quad k = 2,3,\ldots,$$
$$\alpha(s,t) \leqslant K_1 \exp\{-b_1(t-s)\},\ K_1 > 0,\ b_1 > 0,$$

то

$$|\Gamma_k(Z_n)| \leqslant (k!)^{3+\gamma_1}\ B_2 \left(\frac{48e2^{\gamma_1} H_1}{b_1 B_n}\right)^{k-2},$$

$k = 2,3,\ldots,$ $B_2 = 96H_1^2 4^{\gamma_1}\sqrt{K}\exp\{1+b_1/2\}/(b_1\sigma_0^2)$, *и для с.в.* $\xi = Z_n$ *имеют место соотношения больших уклонений* (1.31), (1.27) *и оценки* (1.28), (1.39) *с*

$$\gamma = 2+\gamma_1,\quad \Delta_\gamma = c_\gamma (B_n/H_0)^{1/(5+2\gamma_1)},\quad \tilde{\Delta} = b_1 B_n/(48e2^{\gamma_1} H_1),$$

где

$$H_0 = (48e2^{\gamma_1} H_1/b_1)(1 \vee B_2),\ H = 4 \cdot 2^{\gamma_1} B_2.$$

Теорема 3.23. *Если для некоторых* $\gamma_2 \geqslant 0, H_2 > 0$

$$|\mathbf{E}(X_t^k | F_1^{t-1})| \leqslant (k!)^{1+\gamma_2} H_2^k \text{ с вероятностью } 1,$$

$k = 2, 3, \ldots, \; t = 1, \ldots, n,$

$$\alpha(s,t) \leqslant K_1 \exp\{-b_1(t-s)\} \; K_1 > 0, \; b_1 > 0,$$

то

$$|\Gamma_k(Z_n)| \leqslant (k!)^{2+\gamma_2} B_3 \cdot \left(\frac{16eH_2}{b_1 B_n}\right)^{k-2},$$

$k = 2, 3, \ldots, \quad B_3 = 16H_2^2 K \exp\{1 + b_1\}/(b_1\sigma_0^2)$, *и для с.в.* $\xi = Z_n$ *имеют место соотношения больших уклонений* (1.31), (1.27) *и оценки* (1.28), (1.39) *с*

$$\gamma = 1 + \gamma_2, \quad \Delta_\gamma = c_\gamma (B_n/H_0)^{1/(3+2\gamma_2)}, \quad \tilde{\Delta} = b_1 B_n/(16eH_2),$$

где

$$H_0 = (16eH_2/b_1)(1 \vee B_3), \quad H = 4 \cdot 2^{\gamma_2} B_3,$$

причем

$$\Delta_\gamma \geqslant c_\gamma (\sigma_0/H_0)^{1/(3+2\gamma_2)} (\sqrt{n})^{1/(3+2\gamma_2)}.$$

Теорема 3.24. *Пусть с.в.* X_t *связаны в цепь Маркова* ξ_t. *Если* $|X_t| \leqslant C$ *с вероятностью* 1,

$$\varphi(s,t) \leqslant \exp\{-b_2(t-s)\}, \quad b_2 > 0,$$

то

$$|\Gamma_k(Z_n)| \leqslant k! B_4 \left(\frac{8(1+b_2)C}{b_2 B_n}\right)^{k-2},$$

$k = 2, 3, \ldots, \quad B_4 = 8C^2(1 + b_2)/(b_2\sigma_0^2)$, *и для с.в.* $\xi = Z_n$ *имеют место соотношения* (1.31), (1.27) *и оценки* (1.28), (1.39) *с*

$$\gamma = 0, \quad \Delta_\gamma = c_\gamma B_n/H_0, \quad \tilde{\Delta} = b_2 B_n/(8C(1+b_2)),$$

где

$$H_0 = (8C(1+b_2)/b_2)(1 \vee B_4), \quad H = 2B_4,$$

причем

$$\Delta_\gamma \geqslant c_\gamma (\sigma_0/H_0)\sqrt{n}.$$

Теорема 3.25. *Пусть с.в.* X_t *связаны в цепь Маркова* ξ_t. *Если для некоторых* $\gamma_1 \geqslant 0, \; H_1 > 0$

$$\mathbf{E}|X_1|^k \leqslant (k!)^{1+\gamma_1} H_1^k, \quad k = 2, 3, \ldots,$$

$$\varphi(s,t) \leqslant \exp\{-b_2(t-s)\}, \quad b_2 > 0,$$

то
$$|\Gamma_k(Z_n)| \leqslant (k!)^{2+\gamma_1} B_5\Big(\frac{16\cdot 2^{\gamma_1} H_1(2+b_2)}{b_2 B_n}\Big)^{k-2},$$
$k = 2,3,\ldots,\quad B_5 = 32\cdot 4^{\gamma_1} H_1^2(2+b_2)/(b_2\sigma_0^2)$, *и для с.в.* $\xi = Z_n$ *имеют место соотношения больших уклонений* (1.31), (1.27) *и оценки* (1.28), (1.39) *с*
$$\gamma = 1+\gamma_1,\quad \Delta_\gamma = c_\gamma(B_n/H_0)^{1/(3+2\gamma_1)},\quad \tilde{\Delta} = \frac{b_2 B_n}{16\cdot 2^{\gamma_1} H_1(2+b_2)},$$
где
$$H_0 = (16\cdot 2^{\gamma_1} H_1(2+b_2)/b_2)\,(1\vee B_5),\quad H = 4\cdot 2^{\gamma_1} B_5,$$
причем
$$\Delta_\gamma \geqslant c_\gamma(\sigma_0/H_0)^{1/(3+2\gamma_1)}\,(\sqrt{n})^{1/(3+2\gamma_1)}.$$

Теорема 3.26. *Пусть с.в.* X_t *связаны в цепь Маркова* ξ_t. *Если для некоторых* $\gamma_1 \geqslant 0,\ H_1 > 0$
$$\mathbf{E}|X_1|^k \leqslant (k!)^{1+\gamma_1} H_1^k,\quad k = 2,3,\ldots,$$
$$\psi(s,t) \leqslant K_3 \exp\{-b_3(t-s)\},\quad K_3 > 0,\quad b_3 > 0,$$
то
$$|\Gamma_k(Z_n)| \leqslant (k!)^{1+\gamma_1} B_6\Big(\frac{16 H_1 K(1+b_3)}{b_3 B_n}\Big)^{k-2},$$
$K = (1\vee K_3),\quad B_6 = 16 H_1^2 K(1+b_3)/(b_3\sigma_0^2)$, *и для с.в.* $\xi_t = Z_n$ *имеют место соотношения* (1.31), (1.27) *и оценки* (1.28), (1.39) *с*
$$\gamma = \gamma_1,\quad \Delta_\gamma = c_\gamma(B_n/H_0)^{1/(1+2\gamma_1)},\quad \tilde{\Delta} = \frac{b_3 B_n}{16 H_1 K(1+b_3)},$$
где
$$H_0 = (H_1 B_6/\sigma_0^2)\,(1\vee B_6),\quad H = 2^{1+\gamma_1}\cdot B_6,$$
причем
$$\Delta_\gamma \geqslant c_\gamma(\sigma_0/H_0)^{1/(1+2\gamma_1)}(\sqrt{n})^{1/(1+2\gamma_1)}.$$

Теорема 3.27. *Пусть с.в.* X_t *связаны в цепь Маркова* ξ_t. *Если для некоторых* $\gamma_2 \geqslant 0,\ H_2 > 0$
$$|\mathbf{E}(X_t^k \mid \mathcal{F}_1^{t-1})| \leqslant (k!)^{1+\gamma_2} H_2^k \text{ с вероятностью } 1,$$

$k = 2, 3, \ldots, \quad t = 1, \ldots, n,$

$$\varphi(s,t) \leqslant \exp\{-b_2(t-s)\}, \quad b_2 > 0,$$

то

$$|\Gamma_k(Z_n)| \leqslant (k!)^{1+\gamma_2} B_7 \left(\frac{16H_2(1+b_2)}{b_2 B_n} \right)^{k-2}, \quad k = 2, 3, \ldots,$$

где

$$B_7 = 16H_2^2(1+b_2)/(b_2\sigma_0^2),$$

и для с.в. $\xi = Z_n$ имеют место соотношения больших уклонений (1.31), (1.27) и оценки (1.28), (1.39) с

$$\gamma = \gamma_2, \quad \Delta_\gamma = c_\gamma (B_n/H_0)^{1/(1+2\gamma_2)}, \quad \tilde{\Delta} = \frac{b_2 B_n}{16H_2(1+b_2)},$$

где

$$H_0 = (\sigma_0^2 B_7/H_2)(1 \vee B_7), \quad H = 2^{1+\gamma_2} B_7,$$

причем

$$\Delta_\gamma \geqslant c_\gamma (\sigma_0/H_0)^{1/(1+2\gamma_2)} (\sqrt{n})^{1/(1+2\gamma_2)}.$$

Теоремы 3.21 – 3.27 доказываются прямым вычислением $\gamma, \Delta_\gamma, \tilde{\Delta}, H$ и непосредственным применением теорем 3.13 – 3.20 и основных лемм главы 1. Отметим только, что в случае $f(s,t) \leqslant \exp\{-b(t-s)\}$, $\quad K \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
&\Lambda_n(f,1) \leqslant K\big(1 + \exp\{-b\} + \cdots + \exp\{-b(n-s)\}\big) \leqslant \\
&\leqslant K/(1-\exp\{-b\}) = K\big(1 + 1/(\exp\{b\}-1)\big) \leqslant K(1+1/b), \\
&\Lambda_n(f,k-1) \leqslant K^{1/(k-1)}\big(1 + (k-1)/b\big).
\end{aligned}$$

В силу неравенства $k^k \leqslant k! \exp\{k\}$ и условия $k \geqslant 2$

$$\begin{aligned}
&\Lambda_n^{k-1}(f,k-1) \leqslant K\big(1 + (k-1)/b\big)^{k-1} = \\
&= K\big((k-1)/b\big)^{k-1}\big(1 \quad b/(k-1)\big)^{k-1} \leqslant K(e/b)^{k-1}(k-1)!e^b \leqslant \\
&\leqslant k!\big(K/(2b)\big) \exp\{1+b\}(e/b)^{k-2}.
\end{aligned}$$

Глава 4

ТЕОРЕМЫ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ ПОЛИНОМИНАЛЬНЫХ ФОРМ, ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ОЦЕНОК ПИТМЭНА, U-СТАТИСТИК, КРАТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ И ДЛЯ ОЦЕНОК СПЕКТРА СТАЦИОНАРНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 4.1. Оценки семиинвариантов и теоремы больших уклонений для полиномиальных форм, полиномиальных оценок Питмэна и U-статистик

Рассмотрим *полиномиальную форму*

$$\zeta_n^{(p)} = \sum_{1\leqslant\alpha_1\leqslant\cdots\leqslant\alpha_p\leqslant n} a_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} X_{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot X_{\alpha_p} \tag{4.1}$$

порядка $p \geqslant 1$, где $X_1,\ldots,X_n$ – независимые одинаково распределенные сл. в. с $\mathrm{E}X_1 = 0$ и $\mathrm{E}X_1^2 = \sigma^2 > 0$, а коэффициенты $a_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$ не меняются при любой перестановке индексов $\alpha_1,\ldots,\alpha_p$. Для краткости через $\max\limits_\alpha$, $\sum\limits_\alpha$ будем обозначать соответствующую операцию по всем наборам $\alpha = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\}$, $1 \leqslant \alpha_1 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_p \leqslant n$, а $\max\limits_{\alpha(1,s)} \sum\limits_{\alpha(s+1,p)} a_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$ будет означать суммирование по индексам $1 \leqslant \alpha_{s+1} \leqslant \cdots \leqslant \alpha_p \leqslant n$ с последующим взятием максимума по остальным индексам $1 \leqslant \alpha_1 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_s \leqslant n$. Также по определению положим

$$X_\alpha = X_{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot X_{\alpha_p},\ a_\alpha = a_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}.$$

Тогда

$$\zeta_n^{(p)} = \sum_\alpha a_\alpha X_\alpha, \tag{4.2}$$

$$B_n^2 = \mathrm{D}\zeta_n^{(p)} = \sum_{\substack{\alpha,\alpha' \\ \alpha\cap\alpha'\neq\varnothing}} a_\alpha a_{\alpha'} \mathrm{E}(X_\alpha - \mathrm{E}X_\alpha)(X_{\alpha'} - \mathrm{E}X_{\alpha'}). \tag{4.3}$$

Обозначим

$$A_n^2 = \max_{\substack{1\leqslant s_1, s_2\leqslant p\\ s_1+s_2=p}} \Big(\max_{\alpha(1,s_1)} \sum_{\alpha(s_1+1,p)} |a_\alpha|\Big)\Big(\max_{\alpha(1,s_2)} \sum_{\alpha(s_2+1,p)} |a_\alpha|\Big), \tag{4.4}$$

$$Z_n^{(p)} := \frac{\zeta_n^{(p)} - \mathbf{E}\zeta_n^{(p)}}{B_n}. \tag{4.5}$$

Теорема 4.1 [121]. *Пусть* $\beta_k = \mathbf{E}|X_1|^k < \infty$ *для всех* $k \geqslant 1$. *Тогда для* $k \geqslant 2$

$$|\Gamma_k(Z_n^p)| \leqslant k!\beta_{kp}4^k(A_n/B_n)^{k-2}. \tag{4.6}$$

Если существуют постоянные $H_0 > 0$ *и* $\sigma > 0$ *такие, что выполнено условие Бернштейна*

$$|\mathbf{E}X_1^k| \leqslant \frac{k!}{2}H_0^{k-2}\sigma^2, \quad k = 2, 3, \ldots, \tag{B}$$

то

$$|\Gamma_k(Z_n^{(p)}| \leqslant (k!)^p {c_p}^2 H_1^{4k}\left(\frac{c_pA_n}{B_n}\right)^{k-2}, \quad c_p = 2(pH_0)^p, \tag{4.7}$$

$H_1 = 1 \vee (\sigma/H_0)$, *и для с.в.* $\xi = Z_n^{(p)}$, *определенной равенством* (4.5), *в интервале*

$$0 \leqslant x < \Delta_\gamma, \quad \gamma = p - 1,$$

имеют место соотношения больших уклонений (1.31) *с*

$$\Delta_\gamma = \frac{1}{6}\left(\frac{3\sqrt{2}B_n}{{c_p}^3H_1^8A_n}\right)^{1/(2p-1)}$$

и оценки (1.28), (1.39) *с* $\gamma = p - 1$, $H = 2^p {c_p}^2\sigma^2 H_1^6/H_0^2$ *и* $\widetilde{\Delta} = 2B_n/({c_p}^2H_1^4A_n)$, $(H_1 = 1 \vee \sigma/H_0)$.

Если $|X_1| \leqslant C$ *с вероятностью* 1, *то для с.в.* $\xi = \zeta_n^{(p)}$ *в интервале*

$$0 \leqslant x < \Delta_\gamma, \quad \gamma = 0,$$

имеют место соотношения (1.31) *с*

$$\Delta_\gamma = \frac{\sqrt{2}B_n}{144C^p(1 \vee 16C^{2p-2})A_n},$$

и оценки (1.28), (1.39) *с* $\gamma = 0$, $H = 32\sigma^2C^{2p-2}$ *и* $\widetilde{\Delta} = B_n/(4C^pA_n)$.

Доказательство теоремы немедленно вытекает из оценок (4.6), (4.7) и лемм 1.5, 1.3 и 1.7.

Далее, пусть имеются наблюдения $X_1, X_2, \ldots, X_n$ вида $X_i = \theta + \xi_i$, где $\theta \in R$ – подлежащий оценке (сдвиговый) параметр, а $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – независимые одинаково распределенные с.в. с функцией распределения $F(x)$ такой, что

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{\infty} x^s\, dF(x), \quad s = 1, 2, \ldots, 2p.$$

Положим

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j, \quad m_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} (X_i - \overline{X})^j, \tag{4.10}$$

через V_p обозначим пространство всех полиномов степени, не выше p от $X_1 - \overline{X}, \ldots, X_n - \overline{X}$. Для оценки параметра θ можно брать так называемые *полиномиальную* $t_{n,p}^{(1)}$ или *модифицированную полиномиальную* $t_{n,p}^{(2)}$ (более простого вида, чем $t_{n,p}^{(1)}$) *оценки Питмена* (А. М. Каган [139], А. М. Каган, Л. Б. Клебанов, С. М. Финтушал [49]), обладающие рядом хороших свойств. Эти оценки определяются следующим образом:

$$t_{n,p}^{(1)} = \overline{X} - \widehat{\mathbf{E}}(\overline{X}|V_p), \tag{4.11}$$

$$t_{n,p}^{(2)} = \overline{X} - A_1 + \sum_{j=2}^{p} A_j m_j, \tag{4.12}$$

где $\widehat{\mathbf{E}}(\cdot|V_p)$ – оператор проектирования на пространство V_p, а $A_1, \ldots, A_p$ выражаются через $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2p}$. Заметим, что

$$\mathbf{E}_\theta t_{n,p}^{(1)} = \theta,$$
$$\mathbf{E}_\theta t_{n,p}^{(2)} = \theta + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Поскольку оценкам $t_{n,p}^{(j)}$, $j = 1, 2$, можно придать вид полиномальных форм типа (4.1) с коэффициентами

$$|a^{(j)}_{\alpha^{(1)},\ldots,\alpha^{(s)}}| \leqslant C_j(s, \mu_1, \ldots, \mu_{2p})/n^s, \quad s = 1, \ldots, p,$$

то для них можно получить аналог утверждения 4.1.

Утверждение 4.2 (А. Басаликас [8]). *Пусть* $\mathbf{E}\xi_1 = 0$, $\sigma^2 = \mathbf{E}\xi_1^2$, $|\xi_i| \leqslant L$ *с вероятностью* 1, $i = 1, 2, \ldots, n$, $L > 0$.

Тогда для всех $k = 3, 4, \ldots$

$$\left|\Gamma((t_{n,p}^{(j)} - \theta)/\sqrt{Dt_{n,p}^{(j)}})\right| \leqslant k!\left(\frac{H_{1,j}}{\sqrt{n}}\right)^{k-2}, \quad j = 1, 2, \qquad (4.13)$$

где $H_{1,j} = H_{1,j}(\sigma, L, p)$ – *величины, зависящие от указанных в скобках величин, явный вид которых указан в работе* [7].

Если $\mathbf{E}\xi_1 = 0$, $\sigma^2 = \mathbf{E}\xi_1^2 > 0$ *и существует постоянная* $H_0 > 0$ *такая, что*

$$|\mathbf{E}\xi_1^k| \leqslant \frac{1}{2}k!H_0^{k-2}\sigma^2, \quad k = 2, 3, \ldots, \qquad (B)$$

то для $k = 3, 4, \ldots$

$$|\Gamma((t_{n,p}^{(j)} - \theta)/\sqrt{Dt_{n,p}^{(j)}})| \leqslant (k!)^p\left(\frac{H_{2,j}}{\sqrt{n}}\right)^{k-2}, \qquad (4.14)$$

где $H_{2,j} = H_{2,j}(H_0, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_{2p}, p)$, $j = 1, 2$.

Теорема 4.2 (А. Басаликас [8]). *Пусть имеются наблюдения* $X_1, \ldots, X_n$ *вида* $X_j = \theta + \xi_j$, *где* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – *независимые одинаково распределенные с.в. с* $\mathbf{E}\xi_j = 0$, $\sigma^2 = \mathbf{E}\xi_1^2 > 0$, *для которых выполняется условие* (B). *Тогда для оценок* $t_{n,p}^{(j)}$, $j = 1, 2$, *определенных равенствами* (4.11) *и* (4.12), *в интервале*

$$0 \leqslant x < \Delta_\gamma^{(j)}, \quad \gamma = p - 1,$$

имеют место соотношения больших уклонений (1.31) *с*

$$\Delta_\gamma = \Delta_\gamma^{(j)} = \frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{n}}{6H_{2,j}}\right)^{1/(2p-1)}, \quad j = 1, 2,$$

и оценки (1.28), (1.39) *с*

$$\gamma = p - 1, \quad H = 2^p, \quad \tilde{\Delta} = \Delta^{(j)} = \frac{\sqrt{n}}{H_{2,j}}, \quad j = 1, 2.$$

Если $\mathbf{E}\xi_1 = 0$, $\mathbf{E}\xi_1^2 = \sigma^2 > 0$ *и* $|\xi_i| \leqslant L$ *с вероятностью* 1, $i = 1, \ldots, n$, *то для оценок* $t_{n,p}^{(j)}$ *в интервале*

$$0 \leqslant x < \Delta_\gamma^{(j)}, \quad \gamma = 0,$$

имеют место соотношения (1.31) *с*

$$\Delta_\gamma = \Delta_\gamma^{(j)} = \frac{\sqrt{2}}{36H_1}\sqrt{n}, \quad j = 1, 2,$$

и оценки (1.28), (1.39) *с*

$$\gamma = 0, \quad H = 2 \text{ и } \tilde{\Delta} = \sqrt{n}/H_{1,j}, \quad j = 1, 2.$$

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных с.в. с общей функцией распределения F, $\varphi(x_1, x_2)$ – некоторая симметрическая относительно своих аргументов функция. Рассмотрим *U-статистику* второго порядка с ядром $\varphi(x_1, x_2)$:

$$U_n := \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \varphi(X_i, X_j).$$

Будем предполагать, что

$$\mathbf{E}\varphi(X_1, X_2) = 0 \tag{4.15}$$

и что

$$g(x) = \mathbf{E}(\varphi(X_1, X_2) | X_1 = x)$$

удовлетворяет условию

$$\sigma^2 = \mathbf{D}g(X_1) > 0. \tag{4.16}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} \sigma_U^2 &:= \mathbf{D}U_n = \mathbf{E}U_n^2 = \\ &= \frac{4\sigma^2}{n} + \frac{2}{n(n-1)} \mathbf{E}\psi^2(X_1, X_2) = \frac{4\sigma^2}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big), \end{aligned} \tag{4.17}$$

где

$$\psi(X_1, X_2) := \varphi(X_1, X_2) - g(X_1) - g(X_2).$$

Изучение вероятностей больших уклонений для U-статистик началось с работы Хеффдинга [133], в которой получено неравенство типа Бернштейна для U-статистик с ограниченным ядром. Исследованию вероятностей больших уклонений типа Крамера и Линника посвящена работа Т. Ф. Малевич и Б. Абдалимова [58]. В ней показано, что если выполнены условия (4.15), (4.16) и если существуют постоянные $K > 0$ и $\alpha \geqslant 0$ такие, что

$$\mathbf{E}|\varphi(X_1, X_2)|^k \leqslant K^k k^{\alpha k}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{4.18}$$

то

$$\mathbf{P}(\sqrt{n}U_n/(2\sigma) \geqslant x) \sim 1 - \Phi(x), \quad n \to \infty, \tag{4.19}$$

равномерно относительно x в области

$$0 < x \leqslant \rho(n) n^{1/(2(5+2\alpha))},$$

где $\rho(n)$ – сколь угодно медленно стремящаяся к нулю функция при $n \to \infty$.

Теперь приведем оценки для семиинвариантов U-статистики второго порядка, из которых следует, что для с.в. $\xi = U_n/\sigma_U$ имеют место соотношения больших уклонений (1.31) в интервале

$$0 < x \leqslant c n^{1/(2(1+2\alpha))}, \quad c > 0.$$

Утверждение 4.3 (А. Алешкявичене [2]). *Если выполнены условия* (4.15), (4.16) *и при всех* $k = 3, 4, \ldots$

$$\mathbf{E}|\varphi(X_1, X_2)| \leqslant C^k (k!)^{1+\gamma}, \quad \gamma \geqslant 0, \tag{4.20}$$

то при всех $k = 3, 4, \ldots, n-1$

$$|\Gamma_k(U_n)| \leqslant 2e^{2(k-2)} \frac{2^k - 1}{k} C^k (k!)^{2+\gamma} n^{-(k-1)}, \quad n \geqslant 7,$$

и, следовательно, для $n \geqslant n_0 \geqslant 7$

$$|\Gamma_k(U_n/\sqrt{DU_n}| \leqslant (k!)^{2+\gamma} \left(\frac{2\sqrt{2} e C(\sigma)}{\sqrt{n}} \right)^{k-2}, \quad k = 3, \ldots, n-1, \tag{4.21}$$

где $C(\sigma) = C/\sigma$ *при* $C \leqslant \sigma$ *и* $C(\sigma) = C^3/\sigma^3$ *при* $C > \sigma$, *а* $n_0 \geqslant 7$ *определяется таким образом, чтобы для всех* $n \geqslant n_0$ *удовлетворялось неравенство*

$$\mathbf{D}U_n \geqslant \frac{e^2}{2} \frac{\sigma^2}{n}.$$

Теорема 4.3 (А. Алешкявичене [3]). *Если выполнены условия* (4.15), (4.16) *и* (4.20) *с* $\gamma \geqslant 1$, *то в интервале* $0 \leqslant x < \varepsilon_\gamma n^{1/(2+4\gamma)}$,

$$\varepsilon_\gamma = \frac{1}{2} \wedge \frac{\tilde{\ }}{12 B_\gamma} \wedge \left(3C^{1/(1+\gamma)} \right)^{-(1+\gamma)/(1+2\gamma)},$$

$$B_\gamma = (2,7)^{1+\gamma}\, 3C,$$

имеют место соотношения

$$P\left\{\frac{U_n}{\sqrt{DU_n}} > x\right\} = (1-\Phi(x))\left(1+O\left(\frac{1+x^3+x\ln n}{\sqrt{n}}\right)\right),$$

$$P\left\{\frac{U_n}{\sqrt{DU_n}} < -x\right\} = \Phi(-x)\left(1+O\left(\frac{1+x^3+x\ln n}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Большие уклонения для L- и более общих статистик исследовались в работах [2], [3] и [168].

§ 4.2. Оценки семиинвариантов и теоремы больших уклонений для кратных стохастических интегралов и для оценок спектра стационарной последовательности

Рассмотрим комплексную *гауссовскую случайную меру* $\beta(\Lambda)$, $\Lambda \subset R^1$, обладающую стандартными свойствами:

а) $\mathbf{E}\beta(\Lambda) = 0$,

б) $\beta(\Lambda) = \overline{\beta(-\Lambda)}$,

в) $\mathbf{E}\beta(\Lambda_1)\overline{\beta(\Lambda_2)} = F(\Lambda_1 \cap \Lambda_2)$.

Здесь $\Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2$ – измеримые множества в R^1, F – спектральная мера меры β. Будем полагать, что мера F непрерывна (не имеет атомов).

Введем пространство $L_2(F)$ четных комплекснозначных функций, определенных в R^m:

$$L_2^{(m)}(F) := \Big\{\varphi : \|\varphi\|^2 = \int\limits_{R^m} |\varphi(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)|^2 \prod_{j=1}^{m} F(d\lambda_j) < \infty,$$

$$\varphi(-\lambda_1,\ldots,-\lambda_m) = \overline{\varphi(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)}, \quad m = 1,2,\ldots\Big\}.$$

Для функций $\varphi \in L_2^{(m)}(F)$ можно определить *кратный стохастический интеграл* по мере β (см., например, Ито [137])

$$I^{(m)}(\varphi) = \int \cdots \int \varphi(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)\beta(d\lambda_1)\cdots\beta(d\lambda_m).$$

Определение можно строить обычным образом, начиная со ступенчатых функций, равных нулю на диагоналях пространства R^m. Пусть

$$\widetilde{\varphi}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = \frac{1}{m!}\sum{}' \varphi(\lambda_{i_1},\ldots,\lambda_{i_m}),$$

$\sum'$ означает суммирование по всем перестановкам множества $\{1, \ldots, m\}$. Тогда $I^{(m)}(\varphi) = I^{(m)}(\widetilde{\varphi})$. Отметим некоторые другие свойства кратных стохастических интегралов:

1. $I^{(m)}(\varphi)$ – вещественная случайная величина.
2. $\mathbf{E}I^{(m)}(\varphi) = 0$.
3. $\mathbf{E}I^{(m)}(\varphi)I^{(n)}(\psi) = 0$, если $m \neq n$, а при $m = n$

$$\mathbf{E}I^{(m)}(\varphi)I^{(m)}(\psi) = m! \int \widetilde{\varphi}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)\overline{\widetilde{\psi}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)} \prod_{j=1}^{m} F(d\lambda_j).$$

4. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ – ортонормированная система функций в $L_2^{(1)}(F)$, а $H_k(x) = (-1)^k e^{x^2/2} \dfrac{d^k}{dx^k} \exp\{-\frac{1}{2}x^2\}$ – *полином Эрмита* степени k. Тогда

$$\underbrace{\int \cdots \int}_{n} \varphi_1(\lambda_1) \cdot \ldots \cdot \varphi_1(\lambda_{p_1})\varphi_2(\lambda_{p_1+1}) \ldots \varphi_2(\lambda_{p_1+p_2}) \ldots$$

$$\ldots \varphi_n(\lambda_{p_1+\cdots+p_{n-1}+1}) \cdot \ldots \cdot \varphi_n(\lambda_{p_1+\cdots+p_n}) \prod_{i=1}^{r} \beta(d\lambda_i) =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} H_{p_j}\Big(\int \varphi_j(x)\beta(d\lambda)\Big), \quad r = p_1 + \cdots + p_n.$$

5. Пусть $X_t = \int e^{it\lambda}\beta(d\lambda)$ и $\mathcal{F} = \sigma\{X_t, t \in R^1\}$. Тогда любую $\mathcal{F}$-измеримую с.в. ξ с $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$ можно разложить в ряд

$$\xi = \mathbf{E}\xi + \sum_{m=1}^{\infty} I^{(m)}(\varphi_m),$$

где равенство понимается в смысле среднеквадратичной сходимости. Набор функций $\varphi_m \in L_2^{(m)}(F)$ единствен, если ограничиться симметрическими функциями.

Обозначим через D или $D_{k,m}$ таблицу пар индексов $D_{k,m} = \{(i,j), i = \overline{1,k}, j = \overline{1,m}\}$, имеющую k строк и m столбцов. Разбиение множества $D = D' \cup D''$ будем называть *построчным*, если любая строка из D принадлежит либо D', либо D''. Разбиение $D_{k,m} = \bigcup_{j=1}^{r} D_j$ будем называть *неразложимым*, если не существует такого построчного разбиения $D = D' \cup D''$, для которого любое D_j принадлежит либо D', либо D''.

Лемма 4.1 (А. Пликусас [75]). *Пусть* $\varphi \in L_2^{(m)}(F)$. *Тогда* $\Gamma_k(I^{(m)}(\varphi)) = 0$, *если* km *нечетно, и*

$$\Gamma_k(I^{(m)}(\varphi)) = \sum\nolimits^* \int\limits_{R^r} \prod_{j=1}^{k} \varphi(\lambda_{j,1}, \ldots, \lambda_{j,m}) \prod_{s=1}^{r} F(d\lambda_s), \tag{4.22}$$

если km *четно, где* $r = km/2$. $\sum^*$ *означает суммирование по всем неразложимым разбиениям множества* $D_{k,m}$ *на подмножества из двух элементов. Произведение* $\prod\limits_{j=1}^{k} \varphi(\lambda_{j,1}, \ldots, \lambda_{j,m})$ *определяется неразложимым разбиением* $D_{k,m} = \bigcup\limits_{j=1}^{r} D_j$ *следующим образом: если* $D_j = \{(p,q),(s,t)\}$, *то* $\lambda_{p,q} = \lambda_j$, $\lambda_{s,t} = -\lambda_j$.

Предложение 4.1. *Пусть* $\varphi_j \in L_2^{(m)}(F)$, $j = 1,2,\ldots,k$, km *четно, и пусть* $r = km/2$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\left| \int\limits_{R^r} \prod_{j=1}^{k}{}^* \varphi_j(\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_m}) \prod_{s=1}^{r} F(d\lambda_s) \right| \leqslant \prod_{j=1}^{k} \|\varphi_j\|. \tag{4.23}$$

Произведение $\prod^*$ *берется по таким наборам различных индексов* $(j_1, \ldots, j_m)$, *что каждый индекс* j_i *повторяется ровно в двух наборах.*

Следствие 4.1. *Пусть* $\varphi \in L_2^{(2)}(F)$ *– симметрическая. Тогда*

$$\Gamma_k(I^{(2)}(\varphi)) = \tag{4.24}$$

$$= 2^{k-1}(k-1)! \int\limits_{R^k} \varphi(\lambda_1, -\lambda_2)\varphi(\lambda_2, -\lambda_3) \cdots \varphi(\lambda_k, -\lambda_1) \prod_{j=1}^{k} F(d\lambda_j).$$

Доказательство. Очевидно, что в рассматриваемом случае все слагаемые в правой части (4.22) равны. Остается подсчитать число неразложимых разбиений множества $D_{k,2}$, что элементарно.

Следствие 4.2. *Пусть* $\varphi \in L_2^{(2)}(F)$ *симметрическая. Тогда*

$$|\Gamma_k(I^{(2)}(\varphi))| \leqslant 2^{k-1}(k-1)!\|\varphi\|^k.$$

Доказательство следует из неравенства (4.23).

Полученная оценка позволяет утверждать, что распределение сл. в. $I^{(2)}(\varphi)$ определяется своими моментами или семиинвариантами.

Известно, что не равная нулю почти всюду по мере F симметрическая функция φ из $L_2^{(2)}(F)$ посредством равенства

$$\varphi_1(\lambda_1) = \int \varphi_2(\lambda_2)\varphi(\lambda_1, \lambda_2)F(d\lambda_2), \quad \varphi_2 \in L_2^{(1)}(F),$$

определяет некоторый самосопряженный оператор из $L_2^{(1)}(F)$ в $L_2^{(1)}(F)$, имеющий ненулевые собственные значения $\{\mu_j\}$. Если $\{\psi_j\} \subset L_2^{(1)}(F)$ – ортонормированная последовательность собственных функций, то имеет место разложение в смысле сходимости в $L_2^{(2)}(F)$

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_j \mu_j \psi_j(\lambda_1)\psi_j(\lambda_2). \tag{4.25}$$

Предложение 4.2. *Пусть $\varphi \in L_2^{(2)}(F)$ – симметрическая. Тогда*

$$\Gamma_k(I^{(2)}(\varphi)) = 2^{k-1}(k-1)!\sum_j \mu_j^k, \quad k = 2, 3, \ldots. \tag{4.26}$$

Доказательство получаем подстановкой (4.25) в (4.24).

Из выражения (4.26) следует, что с.в. $I^{(2)}(\varphi)$ распределена так же, как и $\sum_j \mu_j(X_j^2 - 1)$, где X_j – независимые стандартные гауссовские величины.

Лемма 4.2. *Справедлива оценка*

$$|\Gamma_k(I^{(m)}(\varphi))| \leqslant M(k, m)||\varphi||^k, \quad k = 2, 3, \ldots, \tag{4.27}$$

где $M(k, m) = \Gamma_k(H_m(X))$, а X – стандартная гауссовская с.в., причем знак равенства в (4.27) достигается при $\varphi(\cdot) = \psi(\lambda_1) \cdot \ldots \cdot \psi(\lambda_m)$.

Доказательство. Учитывая (4.22) и (4.23), получаем (4.27), где $M(k, m)$ – число неразложимых разбиений таблицы $D_{k,m}$. При $\varphi = 1$ и $F(R^1) = 1$ имеем $I^{(m)}(\varphi) = H_m(X)$. Подставляя это в (4.22), получаем, что $M(k, m) = \Gamma_k(H_m(X))$.

Предложение 4.3. *Существуют положительные постоянные H_i и C_i, $i = 1, 2$, зависящие только от m и такие, что*

$$H_1 C_1^k (k!)^{m/2} \leqslant M(k, m) \leqslant H_2 C_2^k (k!)^{m/2}, \quad k = 2, 3, \ldots.$$

В частности, можно положить $C_1 = \sqrt{2}$ при $H_1 = 1/8$ и $C_2 = m^{m/2}$ при $H_2 = 1$.

Таким образом, имеем оценку

$$\left|\Gamma_k(I^{(m)}(\varphi))\right| \leqslant (m^{m/2}\|\varphi\|)^k (k!)^{m/2}. \tag{4.28}$$

Используя (4.28) и экспоненциальные оценки (1.40), получаем следующий результат.

Теорема 4.4 (А. Пликусас [75]). *Верно неравенство*

$$P\big(I^{(m)}(\varphi) \geqslant \sigma_m X\big) \leqslant \begin{cases} \exp\{-c_1 x^2\}, & x \leqslant A_m, \\ \exp\{-c_2 x^{2/m}\}, & x > A_m, \end{cases}$$

где

$$c_1 = \frac{1}{4}\Big(\frac{2}{3}e^2\Big)^{-m/2}\sqrt{\pi m}, \quad c_2 = (2\pi m)^{1/(2m)}/(4e),$$

$$A_m = 2^{(m^2+1)/(4(m-1))} 3^{m^2/(4(m-1))} e^{m/2}/(\pi m)^{1/4}.$$

Рассмотрим *стационарный гауссовский процесс*

$$X_t = \int_{R^1} e^{it\lambda}\beta(d\lambda), \quad t \in R^1, \tag{4.29}$$

заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Будем предполагать, что мера F абсолютно непрерывна по отношению к лебеговой мере на прямой, т.е. $F(d\lambda) = f(\lambda)d\lambda$ и $F(R^1) = 1$. Равенством $X_0(S_t(\omega)) = X_t(\omega)$ процесс X_t определяет оператор сдвига $S_t : \Omega \to \Omega$. Известно, что тогда

$$I^{(m)}(\varphi)(S_t(\omega)) =$$
$$= \int \cdots \int e^{it(\lambda_1 + \cdots + \lambda_m)}\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)\beta(d\lambda_1)\ldots\beta(d\lambda_m) \overset{\mathrm{df}}{=} I_t^{(m)}(\varphi).$$

Обозначим

$$Y_T^{(m)} = Y_T^{(m)}(\varphi) = \int_0^T I_t^{(m)}(\varphi)dt, \quad T > 0.$$

Наша цель – получить предельные теоремы для $Y_T^{(m)}$ при $T \to \infty$, в которых устанавливается скорость сходимости к нормальному распределению, а также изучаются вероятности больших уклонений.

Определим полиномиальную форму $\Phi_{k,m}(x_1,\dots,x_{k-1})$ от функции $\varphi \in L_2^{(m)}(F)$, через которую выразим k-ый семиинвариант с.в. $Y_T^{(m)}(\varphi)$. Предположим, что число km четно. Обозначим

$$\varphi^*(\lambda_1,\dots,\lambda_r) = \prod_{s=1}^{k} \varphi(\lambda_{s,1},\dots,\lambda_{s,m}), \qquad r = km/2.$$

Здесь произведение в правой части равенства определяется неразложимым разбиением $D_{k,m} = \bigcup_{j=1}^{r} D_j$ на подмножества из двух элементов. (Переменные $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ появляются в произведении по два раза: один раз со знаком плюс, второй – со знаком минус.) Сделаем замену переменных $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ при помощи линейного преобразования

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_{s,j} = x_s, \qquad s = 1,\dots,k-1,$$
$$\lambda_{j_k} = x_k,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\lambda_{j_r} = x_r.$$

Первые $k-1$ уравнения линейно независимы в силу неразложимости разбиения множества $D_{k,m}$, а остальные уравнения подобраны тривиально, лишь бы преобразование было невырожденым. Легко убедиться, что модуль якобиана преобразования равен 1. Рассмотрим теперь функцию

$$\varphi^*(\lambda_1,\dots,\lambda_r) \prod_{j=1}^{r} f(\lambda_j),$$

а полученное после замены переменных выражение обозначим через $\varphi_1^*(x_1,\dots,x_r)$. Положим

$$\Phi_{k,m}(x) = \Phi_{k,m}(x_1,\dots,x_{k-1}) = \sum\nolimits^* \int\limits_{R^{r-k+1}} \varphi_1^*(x_1,\dots,x_r)dx_1\dots dx_r.$$

Здесь, как и ранее, $\sum^*$ означает сумму по всем неразложимым разбиениям множества $D_{k,m}$ на двухэлементные подмножества. Если km нечетно, то полагаем $\Phi_{k,m}(x) = 0$.

Пусть

$$\Psi_T^{(n)}(x) = \frac{2}{\pi^n T} \cdot \frac{\sin\frac{Tx_1}{2}}{x_1} \cdot \ldots \cdot \frac{\sin\frac{Tx_n}{2}}{x_n} \cdot \frac{\sin\frac{T(x_1+\cdots+x_n)}{2}}{x_1+\cdots+x_n}, \qquad (4.30)$$
$$n = 1,2,\ldots, \quad T > 0, \quad x = (x_1,\ldots,x_n).$$

Функция $\Psi_T^{(n)}(x)$ при $n = 1$ обычно называется *ядром Фейера*. Отметим, что функции $\Psi_T^{(n)}(x)$, $n \geqslant 2$, введены в статье Р. Бенткуса [10] и являются одним из возможных обобщений ядра Фейера на многомерный случай. В ней доказаны основные свойства функций $\Psi_T^{(n)}(x)$. Теперь можем сформулировать следующий результат.

Лемма 4.3. *Справедливо равенство*

$$\Gamma_k\left(\int_0^T I_t^{(m)}(\varphi)dt\right) = (2\pi)^{k-1}T\int_{R^{k-1}} \Psi_T^{(k-1)}(x)\Phi_{k,m}(x)dx, \ \varphi \in L_2^{(m)}(F).$$

Сначала лемма доказывается для ступенчатых функций, затем применяется неравенство $|\Psi_T^{k-1}(x)| \leqslant T^{k-1}$.

Приведем некоторые следствия этой леммы.

Предложение 4.4. *Пусть* $\varphi \in L_2^{(2)}(F)$ *симметричная. Тогда*

$$\Gamma_k\left(\int_0^T I_t^{(2)}(\varphi)dt\right) = (4\pi)^{k-1}(k-1)!T\int_{R^{k-1}} \Psi_T^{k-1}(x)\varphi^*(x)dx,$$

где

$$\varphi^*(x) = \int_{R^1}\prod_{j=1}^k \varphi(y_j,-y_{j+1})f(y_j)dx_k,$$

$$x = (x_1,\ldots,x_{k-1}), \ y_j = \sum_{s=j}^k x_s, \ y_{k+1} = -y_1, \ k = 2,3,\ldots\ .$$

Предложение 4.5.

$$v_T^2 := \Gamma_2\left(\int_0^T I_t^{(m)}(\varphi)dt\right) = 4m!\int_{R^1}\frac{1}{\lambda}\sin^2\frac{T\lambda}{2}\times$$

$$\times \int\limits_{R^{m-1}} \left|\varphi\left(\lambda - \sum_{j=1}^{m-1}\mu_j,\ \mu_1,\dots,\mu_{m-1}\right)\right|^2 f\left(\lambda - \sum_{j=1}^{m-1}\mu_j\right)\prod_{j=1}^{m-1} f(\mu_j)d\mu_j d\lambda.$$

В частности, если $\varphi = C$, то

$$v_T^2 = 4m!C^2 \int\limits_{R^1} \frac{1}{\lambda}\sin^2\frac{T\lambda}{2} f^{*m}(\lambda)d\lambda,$$

где f^{*m} – свертка m-го порядка спектральной плотности $f(\lambda)$.

Предложение 4.6. *Пусть $\Phi_{2,m}(\lambda)$ непрерывна в точке $\lambda = 0$. Тогда*

$$v_T^2 = 2\pi\Phi_{2,m}(0)T + o(T), \quad T \to \infty.$$

Это утверждение следует из предложения 4.5 и теоремы 18.3.1 из книги И. А. Ибрагимова, Ю. В. Линника [48].

Предложение 4.7. *Пусть $\Phi_{k,m}(x)$, $k, m = 2, 3, \dots$, ограничена, непрерывна в точке $x = (x_1, \dots, x_{k-1}) = (0, \dots, 0)_{k-1}$. Тогда*

$$\Gamma_k\left(\int\limits_0^T I_t^{(m)}(\varphi)dt\right) = (2\pi)^{k-1}\Phi_{k,m}(0)T + o(T), \quad T \to \infty.$$

Доказательство этого утверждения можно найти в работе А. Пликусаса [75].

Перейдем к оценкам семиинвариантов сверху. Обозначим через $R(t) = \mathbf{E}X_0X_t$ *корреляционную функцию* исходного гауссовского процесса.

Лемма 4.4. *Пусть*

$$\operatorname{ess\,sup}|\varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_m)| = A_\varphi < \infty.$$

Тогда

$$|\Gamma_k(Y_T^{(m)}(\varphi))| \leqslant A_\varphi^k M(k,m)T\left(\int\limits_{-T}^{T}|R(t)|dt\right)^{k-2}\int\limits_{-T}^{T}|R(t)|^2dt, \ k = 2, 3, \dots.$$

Теперь можно получить оценку семиинвариантов нужного вида.

Лемма 4.5 (А. Пликусас [75]). *Пусть выполняются условия:*

1) $\operatorname{ess\,sup}|\varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_m)| \leqslant A_\varphi$,

2) $\int\limits_{R^1} |R(t)|dt = c_R < \infty$,

3) *существует константа* $c_1 > 0$ *такая, что*

$$v_T \geqslant c_1\sqrt{T}.$$

Тогда

$$|\Gamma_k(Y_T^{(m)}(\varphi)/v_T)| \leqslant (k!)^{m/2}/(A_1\sqrt{T})^{k-2}.$$

Здесь можно выбрать $A_1 = c_1(A_\varphi c_R m^{m/2})^{-1}$, *если* $A_\varphi^2 m^m c_R \leqslant c_1^2$, *а в противном случае*

$$A_1 = \begin{cases} (c_1(A_\varphi m^{m/2} c_R)^{-1})^3 & \text{при } c_R > 1 \\ (c_1(A_\varphi m^{m/2})^{-1})^3 & \text{при } c_R \leqslant 1. \end{cases}$$

Обозначим через $F_T(x)$ функцию распределения сл. в. $Y_T^{(m)}(\varphi)/v_T$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.5 (А. Пликусас [75]). *В условиях леммы* 4.5 *имеет место оценка*

$$\sup_x |F_T(x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{c}{T^{1/(2(m-1))}},$$

а соотношения (1.31) *вероятностей больших уклонений справедливы в зоне*

$$0 \leqslant x < \frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{2}A_1\sqrt{T}}{6}\right)^{1/(m-1)}$$

Рассмотрим *пуассоновский процесс* $X(t)$, $t \in [0,\infty)$, со средним $\mathbf{E}X(t) = m(t)$, $X(0) = 0$, т.е. неубывающий процесс с неотрицательными значениями и независимыми приращениями, причем распределение приращений задается соотношением

$$\mathbf{P}(X(t) - X(s) = k) = \frac{(m(t) - m(s))^k}{k!} e^{-(m(t)-m(s))},$$

$t > s$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Будем предполагать, что $m(t)$ непрерывна. Введем пространство действительных функций q переменных

$$L_T^p := \left\{ a(t_1, \ldots, t_q) : \int\limits_{0 \leqslant t_1 < \cdots < t_q \leqslant T} \!\!\!\cdots\!\!\! \int |a(t_1, \ldots, t_q)|^p dm(t_1) \ldots dm(t_q) < \infty \right\}.$$

Известно (Энгель [129]), что для $a \in L_T^2$ можно определить *кратный стохастический интеграл* по процессу $X(t)$

$$Y_T^{(q)} = \int\limits_{0 \leqslant t_1 < \cdots < t_q \leqslant T} \cdots \int a(t_1, \dots, t_q)\, dX(t_1) \dots dX(t_q).$$

Отметим, что при $a \equiv 1$

$$Y_T^{(q)} = \frac{1}{q!} X(T)(X(T) - 1) \dots (X(T) - q + 1).$$

Несколько иной подход к определению кратного стохастического интеграла по пуассоновскому процессу рассматривается в работе Д. Сургайлиса [162]).

Обозначим через τ_k момент k-го скачка процесса $X(t)$. Тогда $Y_T^{(q)}$ можно записать в виде

$$Y_T^{(q)} = \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_q \leqslant X(T)} a(\tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_q}). \tag{4.31}$$

Таким образом, $Y_T^{(q)}$ представляет собой *U-статистику* специального вида, имеющую отношение к теории массового обслуживания. Кратные стохастические интегралы различных видов также применяются для конструирования новых классов автомодельных полей (см. Д. Сургайлис [162]).

Обозначим через $D_{k,q}$ таблицу пар индексов:

$$D_{k,q} = \{(m, i) : m \in \{1, 2, \dots, k\}, \quad i \in \{1, 2, \dots, q\}\}.$$

Будем говорить, что элемент $(m, i) \in D_{k,q}$ принадлежит m-той строке и i-тому столбцу.

Разбиение множества $D_{k,q} = \bigcup\limits_{r=1}^{j} D_r$ называется *P-неразложимым*, если выполняются следующие два условия:

1) каждое подмножество D_r, $r = 1, \dots, j$, содержит не более одного элемента одной строки;

2) не существует ни одной группы из r, $r = 1, \dots, k-1$, строк, имеющей свое собственное разбиение, образованное разбиением $D_{k,q} = \bigcup\limits_{r=1}^{j} D_r$.

Лемма 4.6 [121]. *Для $a \in L_T^{(k)}$ справедливо равенство*

$$\Gamma_k(Y_T^{(q)}) = \sum_{j=q}^{k(q-1)+1} \sum\nolimits^{(j)} \int\limits_{0 \leqslant t_{m1} < \cdots < t_{mq} \leqslant T} \cdots \int \prod_{m=1}^{q} a(t_{m1}, \dots, t_{mq}) \prod_{i=1}^{j} dm(t_i),$$

$$T > 0, \quad q \geqslant 2, \quad k \geqslant 1, \tag{4.32}$$

где суммирование в $\sum^{(j)}$ производится по всем P-неразложимым разбиениям множества $D_{k,q} = \bigcup\limits_{r=1}^{j} D_r$ на j подмножеств. В произведении под знаком интеграла полагаем $t_{mi} = t_r$ при $(m,i) \in D_r$, $r = 1,2,\ldots,j$.

Поясним формулу (4.32) на примерах. Найдем дисперсию $Y_T^{(2)}$. Обозначим $A_{ij} = \{(t_i,t_j) \in R^2 : 0 \leqslant t_i < t_j \leqslant T\}$. Тогда

$$\Gamma_2(Y_T^{(2)}) = \int\limits_{A_{12}} a^2(t_1,t_2)dm(t) + \int\limits_{A_{12}\cap A_{13}} a(t_1,t_2)\,a(t_1,t_3)dm(t) +$$

$$+ \int\limits_{A_{12}\cap A_{31}} a(t_1,t_2)\,a(t_3,t_1)dm(t) + \int\limits_{A_{12}\cap A_{23}} a(t_1,t_2)\,a(t_2,t_3)dm(t) +$$

$$+ \int\limits_{A_{12}\cap A_{32}} a(t_1,t_2)\,a(t_3,t_2)dm(t).$$

Здесь $dm(t) = \prod\limits_i dm(t_i)$. Определим функцию $\widetilde{a}(t_1,\ldots,t_q) = a(t_{i_1},\ldots,t_{i_q})$, где $(i_1,\ldots,i_q)$ – такая перестановка индексов $(1,\ldots,q)$, что $t_{i_1} < \cdots < t_{i_q}$, а если $t_i = t_j$ для некоторых i,j, то полагаем $\widetilde{a} = 0$. Таким образом,

$$\Gamma_2(Y_T^{(2)}) = \int\limits_{A_{12}} a^2(t_1,t_2)dm(t) + \int\limits_{[0,T]^3} \widetilde{a}(t_1,t_2)\widetilde{a}(t_2,t_3)dm(t).$$

Применяя ко второму интегралу неравенство Гельдера, получаем

$$\Gamma_2(Y_T^{(2)}) \leqslant \|\widetilde{a}_T\|^2\big(1/2 + m(T)\big).$$

Здесь $\|\widetilde{a}_T\|^2 = \int\limits_{[0,T]^2} \widetilde{a}^2(t_1,t_2)dm(t)$.

Таким же образом нетрудно убедиться, что

$$\Gamma_3(Y_T^{(2)}) = \int\limits_{A_{12}} a^3(t_1,t_2)dm(t) + 3\int\limits_{[0,T]^3} \widetilde{a}^2(t_1,t_2)\widetilde{a}^2(t_1,t_3)dm(t) +$$

$$+ \int\limits_{[0,T]^3} \widetilde{a}(t_1,t_2)\,\widetilde{a}(t_2,t_3)\,\widetilde{a}(t_3,t_1)dm(t) + \int\limits_{[0,T]^4} \widetilde{a}(t_1,t_2)\widetilde{a}(t_1,t_3)\times$$

$$\times\, \widetilde{a}(t_1,t_4)dm(t) + 3\int\limits_{[0,T]^4} \widetilde{a}(t_1,t_2)\widetilde{a}(t_2,t_3)\widetilde{a}(t_3,t_4)dm(t).$$

Повторно применяя неравенство Гельдера, устанавливаем, что предпоследний интеграл не превосходит

$$\Bigl(\int\limits_{[0,T]}\Bigl(\int\limits_{[0,T]}|\widetilde{a}(t_1,t_2)|^3dm(t_1)\Bigr)^{1/3}dm(t_2)\Bigr)^3\leqslant m^2(T)\int\limits_{[0,T]^2}|\widetilde{a}(t_1,t_2)|^3dm(t).$$

Поступая аналогично и с остальными интегралами, получаем оценку

$$|\Gamma_3(Y_T^{(2)})|\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{[0,T]^2}|\widetilde{a}(t_1,t_2)|^3dm(t)+3m(T)\int\limits_{[0,T]^2}|\widetilde{a}(t_1,t_2)|^3dm(t)+$$

$$+\Bigl(\int\limits_{[0,T]^2}\widetilde{a}^2(t_1,t_2)dm(t)\Bigr)^{3/2}+m^2(T)\int\limits_{[0,T]^2}|\widetilde{a}(t_1,t_2)|^3dm(t)+$$

$$+3m(T)\Bigl(\int\limits_{[0,T]^2}\widetilde{a}^2(t_1,t_2)dm(t)\Bigr)^{3/2}.$$

Нетрудно понять, что в силу (4 32) для любого k семиинвариант $\Gamma_k(Y_T^{(q)})$ оценивается величиной

$$\int\limits_{[0,T]^q}|\widetilde{a}(t_1,\ldots,t_q)|^k\,dm(t).$$

Полное доказательство настоящей леммы приведено в [97].

Теорема 4.6 [121]. *Пусть $|a|\leqslant c_a$, и существует постоянная $c_0>0$ такая, что*

$$\mathrm{D}Y_T^{(q)}\geqslant c_0\bigl(m(T)\bigr)^{2q-1},\quad T>0.$$

Тогда для с.в. $\xi=Z_T^{(q)}$, $Z_T^{(q)}:=(Y_T^{(q)}-\mathrm{E}Y_T^{(q)})/\sqrt{\mathrm{D}Y_T^{(q)}}$, *в зоне*

$$0\leqslant x<C_q\bigl(m(T)\bigr)^{1/2}$$

справедливы соотношения (1.31) *больших уклонений. Здесь*

$$C_q=\frac{c_0^2}{c_a^2e^q}\inf_{0\leqslant\alpha\leqslant q-1}\Bigl\{\frac{1}{6}\Bigl(\frac{\sqrt{2}}{6}\Bigr)^{1/(2q-2\alpha-1)}\cdot\alpha^{q-\alpha}\Bigr\}.$$

В случае стандартного пуассоновского процесса $m(T) = aT$, и справедлива теорема больших уклонений в зоне $0 \leqslant x < c\sqrt{T}$.

Теперь рассмотрим кратный стохастический интеграл по центрированному пуассоновскому процессу $\widetilde{X}(t) = X(t) - m(t)$. Аналогично интегралу $Y_T^{(q)}$ определяется кратный стохастический интеграл

$$\widetilde{Y}_T^{(q)} = \int\limits_{0 \leqslant t_1 < \cdots < t_q \leqslant T} \cdots \int a(t_1, \ldots, t_q)\, d\widetilde{X}(t_1) \cdots d\widetilde{X}(t_q),$$

$$T > 0, \quad q \geqslant 2, \quad a \in L_T^2.$$

При $a \equiv 1$ имеем $\widetilde{Y}_T^{(q)} = K_q\big(X(T),\ m(T)\big)$, где

$$K_q(u,t) = \frac{1}{q!} \sum_{r=0}^{q} \binom{q}{r} (-t)^r u_{(q-r)},$$

$$u_{(n)} = u(u-1) \cdots (u-n+1).$$

Как известно, *полиномы Пуассона–Шарлье* $K_q(u,t)$, $q = 1, 2, \ldots$, ортогональны по отношению к пуассоновской мере:

$$\sum_{r=0}^{\infty} K_n(r,t) K_m(r,t) \frac{t^r e^{-r}}{r!} = \frac{t^n}{n!} \delta_{nm}, \quad \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

В отличие от $Z_T^{(q)}$ нормированная с.в. $\widetilde{Z}_T^{(q)} := \widetilde{Y}_T^{(q)} (\mathbf{D} Y_T^{(q)})^{-1/2}$ не сходится к гауссовской с.в. при $m(T) \to \infty$.

Лемма 4.7 [121]. *Пусть $a \in L_T^k$. Тогда*

$$\Gamma_k(\widetilde{Y}_T^{(q)}) = \tag{4.33}$$
$$= \sum_{j=q}^{[kq/2]} \sum\nolimits^{(j)} \int\limits_{0 \leqslant t_{m1} < \cdots < t_{mq} \leqslant T} \cdots \int \prod_{m=1}^{k} a(t_{m1}, \ldots, t_{mq}) \prod_{i=1}^{j} dm(t_i),$$

$k \geqslant 2$, $T > 0$, $q \geqslant 2$, $[kq/2]$ – целая часть числа $kq/2$. Суммирование в $\sum^{(j)}$ производится по всем P-неразложимым разбиениям множества $D_{k,q} = \bigcup_{r=1}^{j} D_r$ на j частей. При этом достаточно суммировать по P-неразложимым разбиениям на подмножества, содержащие хотя бы два элемента множества $D_{k,q}$.

Отметим лишь, что $\Gamma_1(\widetilde{X}(\Delta)) = 0$, $\Delta \subset R^1$, и, следовательно, исключаются слагаемые, соответствующие разбиениям, содержащим одноэлементные части. Очевидно, что $\Gamma_k\bigl(\widetilde{X}(\Delta)\bigr) = m(\Delta)$, $k = 2,3,\ldots$, а $\mathbf{E}\widetilde{Y}_T^{(q)} = 0$, причем

$$\mathbf{E}(\widetilde{Y}_T^{(q)})^2 = \Gamma_2(\widetilde{Y}_T^{(q)}) = \int\limits_{0\leqslant t_1<\cdots<t_q\leqslant T}\!\!\cdots\!\!\int a^2(t_1,\ldots,t_q)dm(t).$$

Отсюда следует, что порядок роста дисперсии при $a = \mathrm{const}$ есть $\bigl(m(T)\bigr)^q$. В этом случае, в силу леммы 4.7, четные семиинварианты с.в. $\widetilde{Z}_T^{(q)}$ не сходится к нулю при $m(T)\to\infty$.

Оценивая семиинварианты так же, как и в теореме 4.6, получаем что основной вклад вносится слагаемыми, соответствующими разбиению таблицы на $[kq/2]$ частей, семиинварианты с.в. $\widetilde{Y}_T^{(q)}$ будут оцениваться величиной $C^k(k!)^{q/2}$. Воспользовавшись экспоненциальным неравенством (1.39) для функции распределения, получаем следующее утверждение.

Теорема 4.7 [121]. *Пусть существует постоянная $\widetilde{c}_0 > 0$ такая, что*

$$\mathbf{E}(\widetilde{Y}_T^{(q)})^2 \geqslant \widetilde{c}_0\bigl(m(T)\bigr)^q, \quad |a|\leqslant c_a, \quad m(T) > 1.$$

Тогда

$$\mathbf{P}(\widetilde{Z}_T^{(q)}) \geqslant x) \leqslant \exp\{-hx^{2/q}\}$$

при $x > 2e^{-q}\widetilde{c}_0/c_a$ и $h \leqslant \widetilde{c}_0/(2e^q c_a)$.

Рассмотрим оценку

$$\widehat{A}(\varphi) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)I_N(x)\,dx, \tag{4.34}$$

где

$$I_N(x) := \frac{1}{2\pi N}\sum_{s,t=1}^{N} X_s X_t \exp\{-i(s-t)x\} \tag{4.35}$$

– *периодограмма второго порядка*, построенная по выборке объема N из стационарной в широком смысле последовательности $\{X(t),\ t = \ldots,-1,0,1,\ldots\}$ со спектральной плотностью $f(\lambda)$, а φ – некоторая функция. Если $\varphi = W_N(\cdot-\lambda)$, где W_N – некоторое ядро (асимптотически дельтаобразная функция), то $\widehat{A}(\varphi)$ является оценкой с. п. (второго порядка) f в точке λ.

Известно, что

$$\mathbf{E}\widehat{A}(\varphi) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi_N(u)\,du \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) f(x+u)\,dx,$$

где

$$\Psi_N(x) := \frac{1}{2\pi N} \cdot \frac{\sin^2 \frac{Nx}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}}$$

– ядро Фейера. С помощью формулы Леонова–Ширяева (1.17) получаем следующее представление (см. Р. Бенткус, [12]) для *смешанного семиинварианта*:

$$\Gamma(\widehat{A}(\varphi_1), \ldots, \widehat{A}(\varphi_k)) = \frac{1}{N^{k-1}} \int\limits_{\Pi^{2k-1}} G(u) \Psi_N^{(2k)}(u)\,du,$$

где $\Psi_N^{(n)}(x)$ – обобщенное ядро Фейера (Р. Бенткус, [12]), определенное равенством (4.30), $\Pi := [-\pi, \pi]$, а функция G определяется функциями $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ и спектральными плотностями до порядка $2k$ включительно (разумеется, если таковые существуют).

Лемма 4.7 (Р. Бенткус, Р. Рудзкис [14]). *Пусть $\varphi \in L_{p_1}$ и $f \in L_{p_2}$, где $p_1, p_2 \in [1, \infty]$. Тогда для всех $k = 3, 4, \ldots$ и $N = 1, 2, \ldots$*

$$|\Gamma_k(\widehat{A}(\varphi))| \leqslant (k-1)!\mathbf{D}\widehat{A}(\varphi)\big(4\pi \|\varphi\|_{p_1} \|f\|_{p_2} N^{-1+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}}\big)^{k-2}. \qquad (4.38)$$

Легко видеть, что

$$\widehat{A}(\varphi) = \frac{1}{2\pi N} \sum_{s,t=1}^{N} a(s-t) X_s X_t = \frac{1}{2\pi N} (T_\varphi X, X), \qquad (4.39)$$

где

$$a(u) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos ux\,dx,$$

$$T_\varphi = \|a(s-t)\|_{s,t=\overline{1,N}}, \qquad X = (X_1, \ldots, X_n).$$

Приводя одновременно T_φ и ковариационную матрицу T_f вектора X к диагональному виду, получаем, что с.в. $\widehat{A}(\varphi)$ распределена так же, как и сумма $1/2\pi N \sum\limits_{j=1}^{N} \mu_j \eta_j^2$, где η_j – независимые гауссовские с.в. со средним 0 и дисперсией 1, а μ_j –

характеристические числа матрицы $T_\varphi T_f$. Следовательно,

$$\Gamma_k(\widehat{A}(\varphi)) = \frac{(k-1)!}{2(\pi N)^k}\sum_{j=1}^{N}\mu_j^k, \quad k = 2,3,\ldots, \tag{4.40}$$

Отсюда, если учесть, что $\mathbf{D}\widehat{A} = \Gamma_2(\widehat{A}(\varphi))$, получаем

$$|\Gamma_k(\widehat{A}(\varphi))| \leqslant (k-1)!\mathbf{D}\widehat{A}\left(\frac{\max\limits_j|\mu_j|}{\pi N}\right)^{k-2}. \tag{4.41}$$

В статье Р. Бенткуса и Р. Рудзкиса [14] показано, что

$$\max_j|\mu_j| \leqslant (2\pi)^{2-1/p_1-1/p_2}||\varphi||_{p_1}||f||_{p_2}N^{1/p_1+1/p_2}. \tag{4.42}$$

Из (4.40) – (4.42) следует утверждение леммы 4.7.

Лемма 4.8 (Р. Бенткус, Р. Рудзкис [13]). *Если функции φ и f ограничены, то для всех $N = 1,2,\ldots$*

$$\mathbf{D}\widehat{A}(\varphi) \leqslant 4\pi||\varphi||_1||\varphi||_\infty||f||_\infty^2\frac{1}{N}. \tag{4.43}$$

Обозначим

$$\sigma_N^2 = N\mathbf{D}\widehat{A}(\varphi),$$

$$Z_N = \sqrt{N}(\widehat{A}(\varphi) - \mathbf{E}\widehat{A}(\varphi))/\sigma_N.$$

Тогда $\mathbf{E}Z_N = 0$ $\mathbf{E}Z_N^2 = 1$ и, согласно лемме 4.7,

$$|\Gamma_k(Z_N)| \leqslant \frac{(k-1)!}{\Delta_N^{k-2}}, \qquad \forall\, k \geqslant 1, \tag{4.44}$$

где

$$\Delta_N = \frac{\sqrt{N}\sigma_N}{4\pi||\varphi||_\infty\,||f||_\infty}. \tag{4.45}$$

Теорема 4.8 (Р. Бенткус, Р. Рудзкис [14]). *Если $\sigma_N > 0$ и функции φ и f ограничены, то в интервале*

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{36}\Delta_N$$

имеют место соотношения больших уклонений

$$\frac{\mathbf{P}(\sqrt{N}(\widehat{A}(\varphi)-\mathbf{E}\widehat{A}(\varphi))\geqslant\sigma_N x)}{1-\Phi(x)}=$$
$$=\exp\{L_0(x)\}\Big(1+\widetilde{\theta}_1 f(x)\frac{x+1}{\Delta_N}\Big),$$
$$\frac{\mathbf{P}(\sqrt{N}(\widehat{A}(\varphi)-\mathbf{E}\widehat{A}(\varphi))\leqslant-\sigma_N x)}{\Phi(-x)}=$$
$$=\exp\{L_0(-x)\}\Big(1+\widetilde{\theta}_2 f(x)\frac{x+1}{\Delta_N}\Big), \tag{4.46}$$

и неравенство

$$\mathbf{P}(\pm\sqrt{N}(\widehat{A}(\varphi)-\mathbf{E}\widehat{A}(\varphi))\geqslant\sigma_N x)\leqslant\exp\left\{-\frac{x^2}{2(1+x/\Delta_N)}\right\} \tag{4.47}$$

для всех $x\geqslant 0$. *Здесь* $|\widetilde{\theta}_i|\leqslant 36/\sqrt{2}$, $i=1,2$, *а функции* L_0 *и* f *определены соотношениями* (1.32).

В качестве оценки для спектральной плотности $f(x)$ обычно выбирают $\hat{f}(\lambda)=\widehat{A}(\varphi_N(\cdot-\lambda))$, где φ_N – некоторое ядро. Как и ранее, предположим, что φ_N и f являются ограниченными и не являются почти всюду равными нулю. При исследовании больших уклонений для распределения сл. в.

$$Z_N=(\hat{f}(\lambda)-\mathbf{E}\hat{f}(\lambda))/\sqrt{\mathbf{D}\hat{f}(\lambda)}$$

можно применить только что доказанную теорему с

$$\widehat{A}(\varphi):=\widehat{A}(\varphi_N(\cdot-\lambda)):=\hat{f}(\lambda). \tag{4.48}$$

В этом случае

$$\Delta_N=\frac{N\sqrt{\mathbf{D}\hat{f}(\lambda)}}{4\pi\|\varphi_N\|_\infty\|f\|_\infty}. \tag{4.49}$$

Отметим, что для большинства практически применяемых оценок спектральной плотности $\|\varphi_N\|_\infty/N\to 0$ при $N\to\infty$ и $\sup\limits_N\|\varphi_N\|_1<\infty$.

Если спектральная плотность f непрерывна в точке λ и ядро φ_N удовлетворяет условиям (см. Р. Бенткус [13]):

1) $\int\varphi_N(x)dx=1,\quad\forall N$,

2) $\sup\limits_N\|\varphi_N\|_1<\infty$,

3) $\forall\delta>0 \quad \int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} |\varphi_N(x)|dx \to 0 \quad (N\to\infty)$,

4) $\|\varphi_N\|_\infty \to \infty, \quad \|\varphi_N\|_\infty/N \to 0 \quad (N\to\infty)$,

5) существуют пределы

$$\Lambda_1 = \lim_{N\to\infty} \frac{2\pi}{\|\varphi_N\|_\infty} \int \varphi_N^2(x)dx,$$

$$\Lambda_2 = \lim_{N\to\infty} \frac{2\pi}{\|\varphi_N\|_\infty} \int \varphi_N(x)\varphi_N(-x)dx,$$

то

$$\varrho^2(\lambda) = \lim_{N\to\infty} N\mathbf{D}\hat{f}(\lambda)/\|\varphi_N\|_\infty = \begin{cases} \Lambda_1 f^2(\lambda), & \lambda\notin\{-\pi,0,\pi\},\\ (\Lambda_1+\Lambda_2)f^2(\lambda), & \lambda\in\{-\pi,0,\pi\}.\end{cases}$$

Следовательно, согласно соотношению (4.49), величина Δ_N ведет себя как $(\sqrt{N}\varrho(\lambda))/(4\pi\|f\|_\infty)$. Более подробно с асимптотическим поведением спектральных оценок можно ознакомиться по статьям (см. Р. Бенткус, Р. Рудзкис, В. Статулявичус [16], Р. Бенткус [12], Р. Бенткус, Р. Рудзкис [14], [15]).

Рассмотрим теперь вероятности уклонений оценки (4.48), измеряемых в равномерной метрике, причем гауссовость X_t не предполагается. Пусть ядро φ_N определяется равенством $\varphi_N(x) = \psi(x/h)/h$, где ψ – некоторая фиксированная непрерывно дифференцируемая финитная функция, $\int\psi(x)\,dx = 1$, $h = h(N)\to 0$ при $N\to\infty$. Пусть $0\leqslant x_1 < x_2 \leqslant \pi$ – некоторые фиксированные числа.

Теорема 4.9 (Р. Рудзкис [84]). *Пусть X_t – стационарная в узком смысле последовательность со средним 0 и спектральной плотностью $f(\lambda)$, удовлетворяющая условию*

$$\|f_k\|_\infty \leqslant C^k(k!)^\beta, \quad k=2,3,\ldots,$$

где f_k – спектральная плотность k-того порядка, β и C – некоторые константы. Пусть функции g_1 и g_2 не зависят от N и в некоторой окрестности интервала (x_1,x_2) вместе с f являются положительными и удовлетворяют условию Липшица с показателем $\alpha>0$. Тогда

$$\sup_{u>0}\Big|\mathbf{P}\Big(-ug_1(x) < \frac{\widehat{f}(x)-\mathbf{E}\widehat{f}(x)}{\sigma_N f(x)} < ug_2(x), x_1<x<x_2\Big) - \\ -\prod_{j=1}^{2}\exp\{-c_N\int\limits_{x_1}^{x_2}\exp\{-u^2g_j^2(x)/2\}\,dx\}\Big| \to 0,\ N\to\infty. \qquad (4.50)$$

Здесь $\sigma_N = \|\psi\|_2\sqrt{2\pi/Nh}$, $c_N = \|\psi'\|_2/2\pi\|\psi\|_2 h$, $\|\cdot\|_p$ – *норма в пространстве* L_p.

При $g_1 \equiv g_2(x) \equiv 1$ получаем следующее следствие.

Следствие. *Если выполнены условия теоремы* 4.9, *то при* $N \to \infty$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{x_1<x<x_2}\frac{|\widehat{f}(x)-\mathbf{E}\widehat{f}(x)|}{\sigma_N f(x)} \leqslant \sqrt{2\ln(2c_N(x_2-x_1))+2y}\right) =$$
$$= \exp\{-e^{-y}\} + o(1)$$

равномерно по y.

Заметим, что, обозначив $b_N(\lambda) = f(\lambda) - \mathbf{E}\widehat{f}(\lambda)$, имеем

$$\{|\widehat{f}(x) - f(x)| < u\} = \left\{-g_1(x,u) < \frac{\widehat{f}(x) - \mathbf{E}\widehat{f}(x)}{\sigma_N f(x)} < g_2(x,u)\right\}$$

при $g_j(x,u) = (u + (-1)^j b_N(x))/\sigma_N f(x)$. Однако воспользоваться теоремой 4.9 при анализе распределения максимальной ошибки не удается, так как функции $g_j(x,u)$ зависят и от N. Тем не менее при дополнительных условиях и в этом случае справедливо соотношение (4.50).

Теорема 4.10 (Р. Рудзкис [84]). *Пусть последовательность* X_t *удовлетворяет условиям теоремы 4.9 и спектральная плотность* f *в окрестности интервала* (x_1, x_2) *имеет производную порядка* $r \geqslant 1$, *удовлетворяющую условию Липшица с показателем* $\alpha > 0$. *Пусть* $\int \psi(x)\cdot x^k dx = 0$, $k = 1, \dots, r$, *и* $h = O(N^{-1/(2r+2\alpha+1)})$. *Тогда имеет место (4.50) при замене* $ug_j(x)$ *на* $g_j(x,u)$, *т.е. при* $N \to \infty$

$$\sup_{u>0}\Big|\mathbf{P}\big(\sup_{x_1<x<x_2}|\widehat{f}(x) - f(x)| < u\big) -$$
$$- \prod_{j=1}^{2}\exp\Big\{-c_N\int_{x_1}^{x_2}\exp\{-g_j^2(x,u)/2\}\,dx\Big\}\Big| \to 0.$$

МЕТОД СЕМИИНВАРИАНТОВ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ СУММ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.

Объясним как метод семиинвариантов применяется для установления центральной предельной теоремы, оценки скорости сходимости, получения асимптотических разложений для распределений сумм $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ случайных величин X_t с $\mathbf{E}X_t = 0$, $\mathbf{E}X_t^2 = \sigma_t^2 < \infty$, $t = 1, \ldots, n$, связанных в общую цепь Маркова (определение дано в § 3.1) с коэффициентом эргодичности цепи $\alpha^{(n)} = \min\limits_{1<t\leqslant n} \alpha_{t-1,t}$. Пусть $Z_n = S_n/B_n$, $B_n^2 = \mathbf{E}S_n^2$.

Теорема 5.1. *Если* $\alpha^{(n)} > 0$, $B_n > 0$,

$$\frac{1}{\alpha^{(n)}B_n^2}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{|x|>\varepsilon\alpha^{(n)}B_n} x^2\,dF_{X_j}(x) \to 0 \quad (n\to\infty) \tag{5.1}$$

при каждом $\varepsilon > 0$, *то*

$$\sup_x |F_{Z_n}(x) - \Phi(x)| \to 0 \quad (n\to\infty).$$

Доказательство. Очевидно, что в (5.1) ε можно заменить на ε_n, если $\varepsilon_n \to 0$ $(n\to\infty)$ достаточно медленно. Положим $C_n = \varepsilon_n\alpha^{(n)}B_n$ и пусть $X_j = X_j' + X_j''$, где

$$X_j' = \begin{cases} X_j, & \text{если } |X_j| \leqslant C_n,\\ 0, & \text{если } |X_j| > C_n,\end{cases}$$

$j = 1, \ldots, n$.

Тогда $S_n = S_n' + S_n''$, где $S_n' = \sum\limits_{j=1}^{n} X_j'$. Пусть далее $Z_n' = S_n'/B_n$ и $Z_n'' = S_n''/B_n$. Следовательно,

$$f_{Z_n}(t) = \mathbf{E}e^{itZ_n} = \mathbf{E}e^{itZ_n'}\left(1 + e^{itZ_n''} - 1\right) = f_{Z_n'}(t) + \theta\frac{|t|}{B_n}\mathbf{E}|S_n''| =$$

$$= f_{Z_n'}(t) + \theta\frac{|t|}{B_nC_n}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{|x|>C_n} x^2\,dF_{X_j}(x) = f_{Z_n'}(t) + o(1) \tag{5.2}$$

для каждого фиксированного t. Для того, чтобы показать, что $f_{Z'_n}(t) \to \exp\{-t^2/2\}$ $(n \to \infty)$ при каждом t, достаточно чтобы $\Gamma_k(Z'_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ при каждом $k \geqslant 3$, а

$$\Gamma_2(Z'_n) \to 1 \quad (n \to \infty). \tag{5.3}$$

Более того, покажем, что существуют обсолютные константы $H_1 > 0$, $H_2 > 0$ такие, что

$$|\Gamma_k(Z'_n)| \leqslant \frac{k! H_1 H_2^{k-2} C_n^{k-2}}{\alpha^{(n)k-2} B_n^{k-2}} \tag{5.4}$$

для всех $k \geqslant 3$.

Пусть

$$r_i = i\left[\frac{1}{\alpha^{(n)}} + 1\right], \quad i = 0, 1, \ldots, N-1,$$

где число N определяется из неравенства

$$r_{N-2} < n \leqslant r_{N-2} + \left[\frac{1}{\alpha^{(n)}} + 1\right],$$

($[x]$ означает целую часть числа x).

Положим

$$\gamma_i = \mathbf{E}(S'_{r_i} | F_{r_i}^{r_i}),$$

$$\widetilde{\gamma}_i = \begin{cases} \gamma_i \wedge 2C_n\left[\frac{1}{\alpha^{(n)}} + 1\right], & \text{если} \quad \gamma_i \geqslant 0, \\ \gamma_i \vee -2C_n\left[\frac{1}{\alpha^{(n)}} + 1\right], & \text{если} \quad \gamma_i < 0, \end{cases}$$

$$\widetilde{\varphi}_i = \widetilde{\gamma}_{i-1} + S'_{r_{i-1}, r_i} - \widetilde{\gamma}_i, \quad i = 1, \ldots, N-1, \quad \gamma_0 = 0,$$

где

$$S'_{kl} = \sum_{j=k+1}^{l} X_j, \quad 0 \leqslant k < l \leqslant n.$$

Далее, пусть

$$\varphi_i = \widetilde{\varphi}_i - \mathbf{E}\widetilde{\varphi}_i, \quad i = 1, \ldots, N-1,$$
$$\varphi_N = \widetilde{\gamma}_{N-1}.$$

Тогда

$$S_n = \sum_{j=1}^{N} \varphi_j,$$

и нетрудно показать (см. Р. Л. Добрушин [34]), что

$$\mathbf{D}S'_n \geqslant \beta \sum_{j=1}^{N} \mathbf{D}\varphi_j,$$

где β – абсолютная константа $\geqslant 10^{-4}$. Случайные величины $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ связаны в цепь Маркова с N моментами времени и с коэффициентами эргодичности β_{kl} такими что

$$1 - \beta_{kl} \leqslant \begin{cases} (1 - \alpha^{(n)})^{(l-k)/\alpha^{(n)}} \leqslant e^{-(l-k)} & \text{при } l - k \geqslant 2, \\ 1 - \alpha^{(n)} \leqslant e^{-\alpha^{(n)}} & \text{при } l - k = 1, \end{cases}$$

$1 \leqslant k < l \leqslant N$, так как $1 - \alpha(s,t) \leqslant \big(1 - \alpha(s,u)\big)\big(1 - \alpha(u,t)\big)$ при $s \leqslant u \leqslant t$. Поэтому согласно (3.3),

$$|\,\widehat{\mathbf{E}}\,\varphi_{l_1} \ldots \varphi_{l_{j_k}}| \leqslant \left(\frac{10C_n}{\alpha^{(n)}}\right)^{k-2} e^{k-2} e^{-(l_{j_k} - l_{j_2})} \mathbf{E}|\varphi_{l_{j_1}} \varphi_{l_{j_2}}|$$

при $l_{j_2} - l_{j_1} < 2$,

$$|\,\widehat{\mathbf{E}}\,\varphi_{l_1} \ldots \varphi_{l_{j_k}}| \leqslant \left(\frac{10C_n}{\alpha^{(n)}}\right)^{k-2} e^{(k-2)/2} e^{-(l_{j_k} - l_{j_1})/2} \sqrt{\mathbf{E}\varphi_{l_1}^2\, \mathbf{E}\varphi_{l_2}^2}$$

при $l_{j_2} - l_{j_1} \geqslant 2$, где $l_1 \leqslant l_2 \leqslant \ldots \leqslant l_{j_k}$. Так как

$$\sum_{1 \leqslant l_1 < l_2 \leqslant N} \mathbf{E}|\varphi_{l_1} \varphi_{l_2}| \leqslant \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant l_1 < l_2 \leqslant N} (\mathbf{D}\varphi_{l_1} + \mathbf{D}\varphi_{l_2}) \leqslant \sum_{l=1}^{N} \mathbf{D}\varphi_l,$$

$$\sum_{\substack{1 \leqslant l_1 < l_2 \leqslant N \\ l_2 - l_1 > 2}} e^{-(l_2 - l_1)/2} \sqrt{\mathbf{E}\varphi_{l_1}^2\, \mathbf{E}\varphi_{l_2}^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant l_1 < l_2 \leqslant N} e^{-(l_2 - l_1)/2} (\mathbf{D}\varphi_{l_1} + \mathbf{D}\varphi_{l_2}) \leqslant \frac{1}{2(1 - e^{-(1/2)})} \sum_{l=1}^{N} \mathbf{D}\varphi_l$$

и $\sum\limits_{l=1}^{N} \mathbf{D}\varphi_l \leqslant \frac{1}{\beta} \mathbf{D}S'_n$, то проделав аналогичные процедуры, как и при доказательстве теоремы 3.15, получаем, что существуют абсолютные константы $H'_1 > 0$, $H'_2 > 0$ такие, что

$$|\Gamma_k(S'_n)| \leqslant \frac{k!\, H'_1 H'^{\,k-2}_2 C_n^{k-2} \mathbf{D}S'_n}{\alpha^{(n)k-2}}. \tag{5.5}$$

В случае величин, связанных в цепь Маркова

$$\frac{1}{32}\sum_{j=1}^{n}\min\{\alpha_j,\ \alpha_{j+1}\}\mathbf{D}X_j \leqslant \mathbf{D}S_n \leqslant \frac{16}{\alpha^{(n)}}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{D}X_j,$$

где $\alpha_j = \alpha(j-1,\ j)$, $j = 1,\ldots,n$. Поэтому

$$\mathbf{D}S''_n \leqslant \frac{16}{\alpha^{(n)}}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{D}X''_j \leqslant \frac{16}{\alpha^{(n)}}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{|x|>C_n} x^2 dF_{X_j}(x) = o(B_n^2).$$

Следовательно, $\mathbf{D}S'_n/B_n^2 \to 1$ $(n\to\infty)$, и справедлива оценка (5.3), а с учетом (5.5), и оценка (5.4). Теорема доказана.

Теорема 5.2. *Если для некоторого целого $s \geqslant 3$ случайная величина X_j имеет конечные моменты $\mathbf{E}|X_j|^s$, $j = 1,\ldots,n$, и $\alpha^{(n)} > 0$, то существует абсолютная константа C, такая что*

$$\sup_x |F_{Z_n}(x) - \Phi(x)| \leqslant C\left\{L_{sn}^{1/(s-2)} + L_{sn}\ln^{s/2}\left(1 + L_{sn}^{-1/(s-2)}\right)\right\}, \quad (5.6)$$

где

$$L_{sn} = \frac{\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}|X_j|^s}{\alpha^{(n)s-1}B_n^s}.$$

Теорема 5.3. *Если случайные величины $|X_j| \leqslant C^{(n)}$, $j = 1,\ldots,n$, с вероятностью 1, $\alpha^{(n)} > 0$, то существует абсолютная константа $C' > 0$ такая, что*

$$\sup_x |F_{Z_n}(x) - \Phi(x)| \leqslant C'\frac{C^{(n)}}{\alpha^{(n)}B_n} \quad (5.7)$$

и, кроме того, существуют абсолютные константы $H_3 > 0$, $H_4 > 0$ такие, что

$$|\Gamma_k(Z_n)| \leqslant \frac{k!H_3H_4^{k-2}C^{(n)k-2}}{\alpha^{(n)k-2}B_n^{k-2}}, \quad (5.8)$$

а следовательно, для F_{Z_n} справедливы соотношения (1.31) и неравенство больших уклонений (1.39) с $\Delta = \alpha^{(n)}B_n/(H_5C^{(n)})$ и $\gamma = 0$.

Доказательство теоремы 5.2 аналогично доказательству теоремы 5.1, если усечь величину X_j на уровне

$$C_n = 64^{1/(s-2)}\alpha^{(n)} B_n L_{sn}^{1/(s-2)}$$

и воспользоваться представлением $S'_n = \sum_{j=1}^{N} \varphi_j$, $\mathbf{D}S'_n \geqslant \beta \sum_{j=1}^{N} \mathbf{D}\varphi_j$, $\beta > 0$ – абсолютная константа, а $|\varphi_k| \leqslant 10C_n/\alpha^{(n)}$. Тогда

$$\mathbf{D}S''_n \leqslant \frac{16}{\alpha^{(n)}} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{D}X''_j \leqslant \frac{16}{\alpha^{(n)} C_n^{s-2}} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}|X_j|^s = \frac{1}{4} B_n^2,$$

$$\frac{1}{2} B_n^2 \leqslant \mathbf{D}S'_n \leqslant \frac{3}{2} B_n^2,$$

$$\frac{|\Gamma_k(S'_n)|}{B_n^k} \leqslant k! H_0^{k-2} L_{sn}^{(k-2)/(s-2)}.$$

Поэтому

$$\ln f_{Z'_n}(t) = \sum_{k=2}^{s} \frac{\Gamma_k(S'_n)}{k!} \left(\frac{it}{B_n}\right)^k + 4s! H_0^{s-2} H_6^s |t|^{s+1} \rho_n^{-1} L_{sn},$$

$$f_{Z_n}(t) = f_{Z'_n}(t) + s! H_0^{s-2} |t| \rho_n^{s-1} L_{sn}$$

при

$$|t| \leqslant \frac{\rho_n}{2\sqrt{2} H'_0},$$

где

$$\rho_n = 2\sqrt{2} H_6 a \sqrt{\ln\left(1 + L_{sn}^{-1/(s-2)}\right)},$$

$a > 0$ – любое, H_6 – абсолютная константа.

Окончательно получаем

$$|f_{Z_n}(t) - \exp\{-t^2/2\}| \leqslant H_s H_0 |t| L_{S_n}^{1/(s-2)} + H'_s |t| \rho_n^{s-1} L_{sn}, \tag{5.9}$$

если только

$$|t| \leqslant \frac{\rho_n}{2\sqrt{2} H_6} \wedge \frac{L_{sn}^{-1/(s-2)}}{2H_0}.$$

Здесь H_s – величина, зависящая от s.

Кроме того можно показать, что

$$|f_{Z_n}(t)| \leqslant \exp\left\{-\frac{1}{12\pi^2} t^2\right\} \quad \text{при } |t| \leqslant c L_{sn}^{1/(s-2)}, \tag{5.10}$$

где $c > 0$ – абсолютная константа.

Из (5.9) и (5.10) по теореме Эссеена следует, что при любом $T > 0$

$$|F_{Z_n}(x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\pi} + \frac{24A}{\pi T},$$

где $\varepsilon = \int\limits_{-T}^{T} (|f_{Z_n}(t) - e^{-t^2/2}|)/|t|\,dt$, $\sup\limits_x |\Phi'(x)| = A$. Отсюда получаем доказательство утверждения 5.6 при $T = cL_{sn}^{-1/(s-2)}$. Тогда $\varepsilon \leqslant C_1(L_{sn}^{1/(s-2)} + \rho_n^s L_{sn})$, где C_1 – абсолютная константа. Неравенство (5.8) получается аналогично (5.4). Отсюда, опираясь на общие леммы о больших уклонениях, получаем утверждение теоремы 5.3.

Более подробное изложение материала, а также асимптотические разложения для F_{Z_n} можно найти в работах В. Статулявичуса [101], [102].

В заключение сделаем несколько замечаний, касающихся случая, когда аппроксимирующий закон не является нормальным.

Пусть аппроксимирующему распределению соответствует с.в. η и $z_1(z) = \ln \mathbf{E} \exp\{z\eta\}$ является аналитической в точке $z = 0$. Введем семиинварианты k-того порядка $\Gamma_k(\xi \,\|\, \eta)$ случайной величины ξ относительно с.в. η следующим образом:

$$\ln \mathbf{E} e^{it\xi} = \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l!} \Gamma_l(\xi \,\|\, \eta) z_1^l(it) + o(|t|^k),$$

если $\mathbf{E}|\xi^k| < \infty$. Тогда зачастую удается оценить вероятности больших уклонений $\mathbf{P}(\xi \geqslant x)$ при помощи $\mathbf{P}(\eta \geqslant x)$, если известны оценки для $\Gamma_k(\xi \,\|\, \eta)$ типа

$$|\Gamma_k(\xi \,\|\, \eta)| \leqslant (k!)^{1+\gamma}/\Delta_n^{k-1} \tag{5.11}$$

для всех $k \geqslant 2$. Очевидно, что

$$\Gamma_k(\eta \,\|\, \eta) = \begin{cases} 1, & k = 1, \\ 0, & k > 1. \end{cases}$$

Иногда необязательна аналитичность $z_1(z)$ в точке $z = 0$, а достаточно знать оценку сверху моментов, например, $|\mathbf{E}\eta^k| \leqslant (k!)^{1+\gamma'} H_0^k$ для всех $k \geqslant 1$. Приведем некоторые результаты, когда η имеет распределение Пуассона с параметром λ. Не ограничивая общности, можно положить $\lambda = 1$. Тогда

$$z_1 = z_1(t) = \exp\{it\} - 1,$$

$$\mathbf{E}\exp\{it\xi\} = \mathbf{E}(1+z_1)^{\xi} = 1 + \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l!}\mathbf{E}(\xi)_l z_1^l + o(|t|^k),$$

где $\mathbf{E}(\xi)_l$ – факториальный момент l-того порядка:

$$(x)_l := x(x-1)\dots\big(x-(l-1)\big).$$

Нетрудно убедиться, что

$$\widetilde{\Gamma}_k(\xi) := \Gamma_k(\xi \,\|\, \eta) = \tag{5.12}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{k} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} \sum_{k_1+\dots+k_\nu=k} \frac{k!}{k_1!\dots k_\nu!}\mathbf{E}(\xi)_{k_1}\cdots\mathbf{E}(\xi)_{k_\nu}.$$

Пусть $s(k,l)$ – числа Стирлинга первого рода, т.е.

$$(x)_k = \sum_{l=1}^{k} s(k,l)\, x^l,$$

тогда используя соотношения

$$(1+y)^x = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k} s(k,l)\frac{1}{k!}y^k x^l,$$

$$\frac{1}{l!}\big(\ln(1+y)\big)^l = \sum_{k=l}^{\infty} s(k,l)\,\frac{1}{k!}\,y^k,$$

получаем

$$\widetilde{\Gamma}_k(\xi) = \sum_{l=1}^{k} s(k,l)\,\Gamma_l(\xi).$$

Напомним, что $\Gamma_k(\eta) = \lambda$, а $\widetilde{\Gamma}_k(\eta) = 0$ для всех $k \geqslant 2$. Числа $s(k,l)$ имеют следующую комбинаторную интерпретацию.

Если

$$\sum_{l=1}^{k} C(k,l)x^l = x(x+1)\cdots(x+k-1),$$

то

$$s(k,l) = (-1)^{k+l}C(k,l)$$

и $C(k,l)$ равно числу г. дстановок степени k, имеющих l циклов. $\widetilde{\Gamma}_k(\xi)$ называют k-ым факториальным семиинвариантом случайной величины ξ. Многие оценки, полученные для $\Gamma_k(\xi)$, имеют место и для $\widetilde{\Gamma}_k(\xi)$. Например, из (5.12) следует, что если

$$|\mathbf{E}\xi| \leqslant p, \quad p \leqslant 1/\Delta$$

и

$$\mathbf{E}|(\xi)_k| \leqslant (k!)^{1+\gamma} p/\Delta^{k-1}$$

для всех $k \geqslant 2$ и некоторого $\gamma \geqslant 0$, то

$$|\widetilde{\Gamma}_k(\xi)| \leqslant (k!)^{1+\gamma} 2^{k-1} p/\Delta^{k-1}.$$

Пусть $X_t^{(n)}$, $t = 1, 2, \ldots$, $n = 1, 2, \ldots$, – схема серий случайных процессов, заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ с семейством σ-алгебр $\mathcal{F}_s^t$.

Теорема 5.4. *Если* $\mathbf{E}X_t^{(n)} = p_t^{(n)}$,

$$|\mathbf{E}(X_t^{(n)})_k| \leqslant k! p_t^{(n)}/\Delta_n^{k-1}, \quad p_t^{(n)} \leqslant 1/\Delta_n$$

для всех $t = 1, 2, \ldots, n$, $k \geqslant 2$ *и некоторой последовательности* $\Delta_n \uparrow \infty$ $(n \to \infty)$, *причем для* $\mathcal{F}_s^t$ *выполнено условие* ψ-*перемешивания с*

$$\psi(s, t) \leqslant C \exp\{-b(t - s)\},$$

$C > 0$, $b > 0$, *то в интервале*

$$0 \leqslant x < \varepsilon\sqrt{\Delta_n}$$

имеет место соотношение

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant x) = \mathbf{P}(\eta_n \geqslant x)\big(1 + o(1)\big),$$

где $S_n = \sum\limits_{t=1}^{n} X_t^{(n)}$, $\sum\limits_{t=1}^{n} p_t^{(n)} = \lambda_n$ *и* η_n – *случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром* λ_n, $\varepsilon > 0$ – *постоянная, зависящая от* b *и* C. *Также имеет место оценка*

$$|\widetilde{\Gamma}_k(S_n)| \leqslant \frac{(k!)^2 \lambda_n H^{k-1}}{\Delta_n^{k-1}},$$

где H *зависит от* b *и* C.

Если аппроксимирующий закон η является неограниченно делимым,

$$\log \mathbf{E}e^{it\eta} = \lambda\Big(\int\limits_{-\infty}^{0} (e^{itx} - 1)\, dM(x) + \int\limits_{0}^{\infty} (e^{itx} - 1)\, dN(x)\Big)$$

(см. [31]), и $\mathrm{E}|\eta^k| < \infty$ для всех $k \geqslant 1$, то при исследовании вероятностей больших уклонений удобно рассматривать

$$\approx{\Gamma}_k(\xi) = \int_{-\infty}^{0} \tilde{\Gamma}_k(\xi/x)\,dM(x) + \int_{0}^{\infty} \breve{\Gamma}_k(\xi/x)\,dN(x).$$

Общая лемма и ее применения для асимптотического разложения функции распределения целочисленной с.в. ξ в случае аппроксимации Пуассона получены в [17], [18] и [116], а в работе [1] исследованы большие уклонения для сумм серий независимых одинаково распределенных целочисленных случайных величин.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алешкявичене А.* О вероятностях больших уклонений при аппроксимации законом Пуассона // Liet. matem. rink.—1988.—*28*, № 1.—С. 3—33.
2. — Большие и умеренные уклонения для L-статистик // Liet. matem. rink.—1991.—*31*, № 2.—С. 227—241.
3. — Большие уклонения для U- и L-статистик // Теория вероятн. и ее примен.— (в печати).
4. *Арак Т. В., Зайцев А. Ю.* Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин // Тр. Мат. ин-та АН СССР.—Л.: Наука, 1986.—214с.
5. *Ахмедов С. А.* О неравномерных оценках в центральной предельной теореме для зависимых величин // Liet. matem. rink. — 1990.—*30*, № 4.—С. 623—629.
6. *Басаликас А.* Некоторые асимптотические свойства полиномиальных оценок Питмэна—Линника // Liet. matem. rink.—1984.—*24*, № 2.—С. 16—29.
7. — Некоторые асимптотические свойства полиномиальных и модифицированных полиномиальных оценок Питмэна—Линника // Докл. АН СССР.—1985.—*280*, № 5.—С. 1037—1039.
8. — Некоторые асимптотические свойства распределений полиномиальных форм // Liet. matem. rink.—1988.— *28*, № 4.— С. 644—654.
9. *Бенткус В.* О больших уклонениях в банаховых пространствах // Теория вероятн. и ее примен.—1986.—*31*, № 4.— С. 710—716.
10. *Бенткус Р.* Об ошибке оценки спектральной функции стационарного процесса // Liet. matem. rink.—1972.—*12*, № 1.—С. 55 —71.
11. — Об асимптотической нормальности оценки спектральной функции // Liet. matem. rink.—1972.— *12*, № 3.—С. 5—18.

12. — О семиинвариантах оценок спектра стационарной последовательности // Liet. matem. rink.—1976.—*16*, № 4.—С. 37—61.

13. —, *Рудзкис Р.* Большие уклонения для оценок спектра стационарной последовательности гауссовской последовательности // Liet. matem. rink.— 1976.—*16*, № 4.—С. 63—77.

14. —, — Об экспоненциальных оценках распределения случайных величин // Liet. matem. rink.—1980.—*20*, № 1.—С. 15—30.

15. —, — О распределении некоторых статистических оценок спектральной плотности // Теория вероятн. и ее примен. — 1982.—*27*, № 4.—С. 736—756.

16. —, —, *Статулявичус В.* Экспоненциальные неравенства для оценок спектра стационарной гауссовской последовательности // Liet. matem. rink.—1975.—*15*, № 3.—С. 25—39.

17. *Бикялис А., Жемайтис А.* Асимптотические разложения для вероятностей больших уклонений. I // Liet. matem. rink.—1974.—*14*, № 1.—С. 13—25.

18. —, — Асимптотические разложения для вероятностей больших уклонений. III // Liet. matem. rink.—1976.—*16*, № 3.—С. 31—50.

19. *Боровков А. А.* Анализ больших уклонений в граничных задачах с произвольными границами. I, II // Сиб. мат. ж.—1964.—№ 2.—С. 253—289; 1964.—№ 4.—С. 750—767.

20. — Граничные задачи для случайных блужданий и большие уклонения в функциональных пространствах // Теория вероятн. и ее примен.—1967.—*12*, № 4.—С. 635—654.

21. — Граничные задачи, принцип инвариантности, большие уклонения // Успехи мат. наук.—1983.—*38*.—С. 227—254.

22. —, *Могульский А. А.* О вероятностях больших уклонений в топологических пространствах. I, II // Сиб. мат. ж.—1978. —*19*, № 5.—С. 988—1004; 1980.—*21*, № 1.—С. 12—26.

23. —, — Равномерные теоремы о больших уклонениях сумм случайных векторов // АН СССР, Сиб. отд., Ин-т мат. Препринт.— № 21.—Новосибирск, 1985.—С. 1—47.

24. *Боровских Ю. В.* Проблема аппроксимации распределений U-статистик и функционалов Мизеса. II // Ин-т мат. АН УкрССР. —Препринт 80.7..—Киев, 1980.—С. 31—36.

25. *Вентцель А.Д.* Грубые предельные теоремы о больших уклонениях для марковских случайных процессов // Теория вероятн. и ее примен.—1976.—*21*, № 2.—С. 512—526.

26. — Предельные теоремы о больших уклонениях для марковских случайных процессов.—М.: Наука, 1986.

27. *Волконский В. А., Розанов Ю. А.* Некоторые предельные теоремы для случайных функций. I // Теория вероятн. и ее примен.— 1959.—*4*, № 2.—С. 186—207.
28. *Вольф В.* Некоторые предельные теоремы для больших уклонений сумм независимых случайных величин // Докл. АН СССР.—1970.— *191*, № 6.—С. 1209—1211.
29. — О вероятностях больших уклонений в случае нарушения условия Крамера // Math. Nachr.—1975.—*70*.—С. 197—215.
30. —, *Микош Т.* О вероятностях больших уклонений в схеме серий // Liet. matem. rink.—1983.—*23*, № 2.—С. 43—48.
31. *Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин.—М.—Л.: Наука, 1949.—264с.
32. *Давыдов Ю. А.* О сходимости распределений, порожденных стационарными случайными процессами // Теория вероятн. и ее примен.—1968.—*13*, № 4.—С. 730—737.
33. *Добрушин Р. Л.* Предельные законы для цепей Маркова // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1953.—*17*.—С. 291—330.
34. — Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова. I, II // Теория вероятн. и ее примен.—1956.— *1*, № 1.—С. 72—89; 1956.—*1*, № 4.—С. 365—425.
35. *Журбенко И. Г.* О сильных оценках смешанных семиинвариантов // Сиб. мат. ж.—1972.—*13*, № 2.—С. 293—308.
36. — Спектральный анализ временных рядов.— М.: Изд. МГУ, 1982.—168с.
37. *Зайцев А. Ю.* Об аппроксимации гауссовскими распределениями при выполнении многомерных аналогов условий Бернштейна // Докл. АН СССР.—1984.—*276*, № 5.—С. 1046—1048.
38. — О гауссовской аппроксимации сверток при выполнении многомерных аналогов условий Бернштейна // АН СССР ЛОМИ. Препринт.—1984.—Р—9.—С. 3—54.
39. *Золотарев В. М.* Об одной новой точке зрения на предельные теоремы, учитывающие большие уклонения // Тр. VI Всес. сов. по теории вероятн. и мат. статист.— Вильнюс, 1962.— С. 43—48.
40. — О близости распределений двух сумм независимых случайных величин // Теория вероятн. и ее примен.—1965.— *10*, № 3.—С. 519—526.
41. — Современная теория суммирования независимых случайных величин.—М.: Наука, 1986.—415с.
42. *Зуев Н. М.* Об оценках смешанных семиинвариантов случайных процессов // Мат. заметки.—1973.—*13*, № 4.—С. 581—586.
43. — Оценка смешанных семиинвариантов случайных процессов, удовлетворяющих условию перемешивания почти мар-

ковского типа // Liet. matem. rink.—1981.—*21*, № 2.—С. 81—87.
44. *Зыков А. А.* Основы теории графов.—М.: Наука, 1987.—380с.
45. *Ибрагимов И. А.* Некоторые предельные теоремы для стационарных в узком смысле вероятностных процессов // Докл. АН СССР.—1959.—*125*, № 4.— С. 711—714.
46. — О точности аппроксимации функций распределения сумм независимых величин нормальным распределением // Теория вероятн. и ее примен.—1966.—*11*, № 4.—С. 632—655.
47. — Об асимптотических разложениях Чебышева—Крамера // Теория вероятн. и ее примен.—1967.—*12*, № 3.—С. 506—519.
48. —, *Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины.—М.: Наука, 1965.—524с.
49. *Каган А. М., Клебанов Л. Б., Финтушал С. М.*, Асимптотическое поведение полиномиальных оценок Питмэна // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.— 1974.—*43*.—С. 24—39.
50. *Колмогоров А. Н.* Некоторые работы последних лет в области теории вероятностей // Вестн. МГУ.—1953.—*7*, № 10.—С. 29—38.
51. — Основные понятия теории вероятностей.— М.: Наука, 1974.—120с.
52. —, *Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1976.—542с.
53. *Кубилюс Й.* Вероятностные методы в теории чисел.— Вильнюс: Госполитнаучиздат, 1962.—220с.
54. *Леонов В. П.* Некоторые применения старших семиинвариантов к теории случайных процессов.—М.: Наука, 1964.—66с.
55. —, *Ширяев А. Н.* К технике вычисления семиинвариантов // Теория вероятн. и ее примен.—1959.—*4*, № 3.—С. 342—355.
56. *Линник Ю. В.* Новые предельные теоремы для сумм независимых случайных величин // Докл. АН СССР.—1960.—*133*, № 6.—С. 1291—1293
57. — Предельные теоремы для сумм независимых величин при учете больших уклонений. I—III // Теория вероятн. и ее примен.—1961.—*6*, № 2.—С. 145—163; 1961.—*6*, № 4.—С. 377—391; 1962.—*7*, № 2.—С. 121—134.
58. *Малевич Т. Л., Абдалимов Б.* Вероятности больших уклонений для *U*-статистик // Теория вероятн. и ее примен.—1979.—*24*, № 1.—С. 215—220.
59. *Могульский А. А.* Большие уклонения в пространстве траекторий для последовательностей процессов со стационарными приращениями // Сиб. мат. ж.—1975.—*16*, № 2.—С. 314—327.

60. *Нагаев А. В.* Локальные предельные теоремы с учетом больших уклонений // Предельные теоремы и вероятн. процессы. — Ташкент, 1967.—С. 71—88.
61. — Интегральные предельные теоремы с учетом больших уклонений, когда не выполнено условие Крамера. I, II // Теория вероятн. и ее примен.—1969.—*14*, № 1.—С. 51—63; 1969. —*14*, № 2.—С. 203—216.
62. *Нагаев С. В.* Уточнения предельных теорем для однородных цепей Маркова // Теория вероятн. и ее примен.—1961.—*6*, № 1.—С. 67—86.
63. — Интегральная предельная теорема для больших уклонений // Докл. АН СССР.—1963.—*143*, № 2.—С. 280.
64. — Некоторые предельные теоремы для больших уклонений // Теория вероятн. и ее примен.—1965.—*10*, № 2.—С. 231—254.
65. —, *Пинелис И. Ф.* Некоторые неравенства для распределений сумм независимых случайных величин // Теория вероятн. и ее примен.— 1977.—*22*, № 2.—С. 254—263.
66. —, *Сакоян С. Д.* Об одной оценке для вероятности больших уклонений // Предельные теоремы и мат. статист.—Ташкент, 1976.—С. 132—140.
67. *Осипов Л. В.* Вероятности больших уклонений сумм независимых случайных векторов // Теория вероятн. и ее примен. — 1978.—*23*, № 3.—С. 510—526.
68. — Вероятности больших уклонений сумм независимых случайных векторов для некоторых классов множеств // Мат. заметки.— 1982.—*32*, № 1.—С. 147—153.
69. *Петров В. В.* Распространение предельной теоремы Крамера на неодинаково распределенные независимые величины // Вестн. ЛГУ.—1953.—№ 8.—С. 13—25.
70. — Обобщение предельной теоремы Крамера // Успехи мат. наук.—1954.—*11*, № 4.—С. 195—202.
71. — О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин // Теория вероятн. и ее примен.— 1965.— *10*, № 2.—С. 310—322.
72. — Асимптотическое поведение вероятностей больших уклонений // Теория вероятн. и ее примен.—1968.—*13*, № 3.— С. 432—444.
73. — Суммы независимых случайных величин.—М.: Наука, 1972.—414с.
74. — Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.—М.: Наука, 1987.—317с.
75. *Пликусас А.* Оценки семиинвариантов и большие уклонения для некоторых нелинейных преобразований стационарного гауссовского процесса // Liet. matem. rink.—1980.—*20*, № 2.—С. 119—128.

76. — Некоторые свойства кратных интегралов Ито // Liet. matem. rink.—1981.—*21*, № 2.—С. 163—173.
77. *Прохоров Ю. В.* Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей // Теория вероятн. и ее примен.—1956.— *1*, № 2.—С. 177—233.
78. — Неравенства С. Н. Бернштейна в многомерном случае // Теория вероятн. и ее примен.—1968.— *13*, № 3.—С. 462—470.
79. —, *Розанов Ю. А.* Теория вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы.—М.: Наука, 1973.—496с.
80. *Рихтер В.* Локальная предельная теорема для больших уклонений // Докл. АН СССР.—1957.—*115*, № 1.—С. 53—56.
81. — Локальная предельная теорема для больших уклонений // Теория вероятн. и ее примен.—1957.—*2*, № 2.—С. 214—229.
82. *Рихтер В.-Д.* Большие уклонения в конечномерных параллелепипедах // Liet. matem. rink.—1982.—*22*, № 3.—С. 162—169.
83. *Руджис Р.* О лемме В.А. Статулявичуса // Liet. matem. rink. —1977.— *17*, № 2.—С. 177—185.
84. — О распределении функционалов типа супремума от непараметрических оценок плотности вероятности и спектраль ной плотности // Теория вероятн. и ее примен.— (в печати).
85. —, *Саулис Л., Статулявичус В.* Общая лемма о вероятностях больших уклонений // Liet. matem. rink.—1978.—*18*, № 2.— С. 99—116.
86. —, —, — О больших уклонениях сумм независимых случайных величин // Liet. matem. rink.—1979.—*19*, № 1.—С. 169—179.
87. *Сазонов В. В.* К оценке моментов сумм случайных величин // Теория вероятн. и ее примен.—1974.—*19*, № 4.—С. 383—386.
88. *Санов И. Н.* О вероятностях больших уклонений случайных величин // Мат. сб. -1957.—*42(84)*, № 1.—С. 11—44.
89. *Саулис Л.* Асимптотическое разложение для вероятностей больших уклонений // Liet. matem. rink.—1968.—*8*, № 3.— С. 605—625.
90. — Предельные теоремы, учитывающие большие уклонения при условии Ю.В. Линника // Liet. matem. rink.—*13*, № 4. С. 173—196.
91. — О больших уклонениях в схеме суммирования случайных величин с весами // Liet. matem. rink.—*19*, № 2.—С. 179 - 187.
92. — Общая лемма для плотности распределения с учетом больших уклонений // Liet. matem. rink.—1980.—*20*, № 4.—

С. 165—185.
93. — Общие леммы об аппроксимации нормальным распределением // Liet. matem. rink.—*21*, № 2.—С. 175—189.
94. — О больших уклонениях в пространстве R^k // Докл. АН СССР.—1984.—*276*, № 1.—С. 42—45.
95. — Общие леммы о больших уклонениях для случайного вектора с регулярным поведением семиинвариантов. I—III // Liet. matem. rink.—1987.—*27*, № 3.—С. 535—549; 1987.—*27*, № 4.—С. 747—758; 1988.—*28*, № 1.—С. 99—111.
96. — Вероятности больших уклонений для случайных векторов // Теория вероятн. и ее примен.—1991.—*41*, № 3.—С. 482—493.
97. —, *Статулявичус В.* Асимптотическое разложение для вероятностей больших уклонений сумм случайных величин, связанных в цепь Маркова // Liet. matem. rink.—1970.—*10*, № 2.—С. 359—366.
98. —, — Предельные теоремы о больших уклонениях.—Вильнюс: Мокслас, 1989.—208с.
99. *Саханенко А. И.* Скорость сходимости в принципе инвариантности для разнораспределенных величин с экспоненциальными моментами // Тр. Ин-та мат. Сиб. отд. АН СССР.—Новосибирск, 1984.—С. 4—49.
100. *Светулявичене В.* О вероятностях больших уклонений для сумм случайных векторов // Liet. matem. rink.—1981.—*21*, № 2.—С. 191—199.
101. *Статулявичус В.* Предельные теоремы для плотностей и асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин // Теория вероятн. и ее примен.—1965.—*10*, № 4.—С. 645—659.
102. — Предельные теоремы для сумм случайных величин, связанных в цепь Маркова. I—III // Liet. matem. rink.—1969.—*9*, № 2.—С. 345—362; 1969.—*9*, № 3.—С. 635—672; 1970.—*10*, № 1.—С. 161—169.
103. — О предельных теоремах для случайных функций. I // Liet. matem. rink.—1970.—*10*, № 3.—С. 583—592.
104. — Теоремы больших уклонений для сумм зависимых случайных величин. I // Liet. matem. rink.—1979.—*19*, № 2.—С. 199—208.
105. — Об условии почти марковской регулярности // Теория вероятн. и ее примен.—1983.—*28*, № 2.—С. 358—362.
106. —, *Якимавичюс Д.* Оценки семиинвариантов и центрированных моментов случанайных процессов с перемешиванием. I, II // Liet. matem. rink.—1988.—*28*, № 1.— С. 112—129; 1988.—*28*, № 2.—С. 360—375.
107. *Сурвила П.* О больших уклонениях для плотностей // Liet. matem. rink.—1966.—*6*, № 4.—С. 591—600.

108. *Ткачук С. Г.* Теорема о больших уклонениях в случае распределений с правильно меняющимися хвостами // Сл. процессы и статист. выводы.— Ташкент, 1975.— Вып. 5.— С. 164—174.
109. *Форманов Ш. К.* Некоторые предельные теоремы о больших уклонениях для однородных цепей Маркова // Сл. процессы и статист. выводы.—Ташкент, 1973.—Вып.. 3.—С. 173—185.
110. *Фортус М. И.* Равномерная предельная теорема для распределений, притягивающихся к устойчивому закону с показателем, меньшим единицы // Теория вероятн. и ее примен.— 1957.—*2*, № 4.—С. 486—487.
111. *Фук Д. Х., Нагаев С. В.* Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин // Теория вероятн. и ее примен.—1971.— *16*, № 4.— С. 660—675.
112. *Ширяев А. Н.* Некоторые вопросы спектральной теории старших моментов // Теория вероятн. и ее примен.—1960.—*5*, № 3.—С. 193—213.
113. *Шоргин С. Я.* Неклассические оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме, учитывающие большие уклонения // Теория вероятн. и ее примен.—1982.—*27*, № 2. —С. 308—318.
114. *Якимавичюс Д.* К оценкам семиинвариантов и центрированных моментов случайных процессов с перемешиванием // Liet. matem. rink.— *28*, № 3.—С. 614—626.
115. *Якшявичюс Ш.* Ассимптотические разложения для вероятностных распределений I—IV // Liet. matem. rink.—1983.—*23*, № 3.— С. 196—213; 1983.—*23*, № 4.— С. 73—83; 1984.—*24*, № 4.— С. 216—223; 1985.—*25*, № 1.—С. 194—208.
116. *Aigner M.* Combinatorial theory.— Springer-Verlag, Heidelberg, New York, 1979 (Пер. на рус. яз.: Айгнер М. Комбинаторная теория.—М.: Мир, 1982.—558с.).
117. *Amosova N. N.* On the necessity of Cramer's condition in local limit theorems // Probab. Theory and Math. Statist. Proc. of the Fifth Vilnius Conference.— 1, VSP, Utrecht, The Netherlands, Vilnius: Mokslas.— С. 52—56.
118. *Andrews G. E.* The theory of partitions.— Addison—Wesley, Reading, Mass., 1979 (Пер. на рус. яз.: Эндрюс Г. Теория разбиений.—М.: Наука, 1982.—255с.).
119. *Bahadur R. R.* On the asymptotic efficiency of tests and estimates // Sankhya.—1960.—*22*, № 3—4.—С. 229—252.
120. *Bahr B. von.* Multidimensional integral limit theorems for large deviations // Ark. Math.—1967.—*7*, № 1.—С. 89—99.
121. *Basalykas A., Plikusas A., Statulevičius V.* Theorems of large deviations for multinomial forms and multiple stochastic integrals // Proc. of the 1-st World Congress of the Bernoulli Soc., 1987.— VNU Science Press, Utrecht, The Netherlands.—С. 629—639.

122. *Bhattacharya R. N., Puri M. L.* On the order of magnitude of cumulants of von Mises functionals and related statistics // Ann. Probab.. — 1983.—*11*, № 2.—С. 346—359.

123. —, *Ranga Rao R.* Normal approximation and asymptotic expansions.— Wiley, New York, London, Toronto, 1976 (Пер. на рус. яз.: Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения.— М.: Наука, 1982.—288с.).

124. *Blum J. R., Hanson D. L., Koopmans L. H.* On the strong law of large numbers for a class of stochastic process // Z. Wahrsch. und verw. Geb.— 1963.—*2*, № 1.—С. 1—11.

125. *Book S. A.* A large deviation theorem for weighted sums // Z. Wahrsch. und verw. Geb.—1973.—*26*.—С. 43—49.

126. *Cramér H.* Sur un nuveau théoréme limite de la théorie de probabilités // Act. Sci. Ind.—1938.— *736* (Пер. на рус. яз.: Крамер Г. Об одной новой предельной теореме теории вероятностей // Успехи мат. наук.—1944.—*10*.—С. 166—178.).

127. *Dasgupta R.* On large deviation probabilities of U-statistics in non i. i. d. case // Sankhya.—1984.—*A46*, № 1.— С. 110—116.

128. *Donsker M.D., Varadhan S.R.S.* Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time // Commun. Pure Appl. Math.—1975.—*28*, № 1.— С.1—47; 1975.—*28*, № 2.— С.279—301; 1976.—*29*, № 4.—С. 389—461.

129. *Engel D.* The multiple stochastic integral // Mem. Amer. Math. Soc. —1982.—*38*, № 265.—С. 1—82.

130. *Feller W.* Limit theorems for probabilities of large deviations // Z. Wahrsch. und verw. Geb.—1969.—*14*.—С. 1—20.

131. *Heinrich L.* Some estimates of the cumulant generating function of a sum of m-dependent random vectors and their application to large deviations // Math. Nachr.—1985.—*120*.—С. 91—101.

132. — Non-uniform estimates, moderate and large deviations in the central limit theorem for m-dependent random variables // Math. Nachr. —1985.—*121*.—С. 107—121.

133. *Hoeffding W.* Probability inequalities for sums of bounded random variables // J. Amer. Statist. Assoc.—1963.—*58*.—С. 13—32.

134. — On probabilities of large deviations // Proc. 5th Berkeley Symp. on Math. Statist. and Probab. 1.—Berkeley and Los Angeles: Univ. Calif. Press, 1967.— С. 203—219.

135. *Heyde C. C.* On large deviation probabilities in this case of attraction to a nonnormal stable law // Sankhya.—1968.—*30*, № 3.— С. 253 —258.

136. *Iosifescu M.* Recent advances in mixing sequences of random variables // Proc. 3rd Intern. Summer School on Probab. Theory and Math. Statist.— 1978.— Sofia, Varna, 1980.— С. 111—138.

137. *Ito K.* Multiple Wiener integral // J. Math. Soc. Japan.— 1951.—*3*, № 1.—С. 157—169.

138. *Jakimavičius D., Statulevičius V.* Estimates of cumulants and centered moments of mixing random process // Preprint № 3. Acad. Sci. Lit.SSR, Inst. Math. and Cyb., Vilnius, 1987.—60c.
139. *Kagan A. M.* On the estimation theory of location parameters // Sankhya.—*28*.—C. 335—352.
140. *Liptser R. Sh., Shiryaev A. N.* Theory of martingales.—Holland: Reidel, 1989.
141. *McDonald D.* A local limit theorem for large deviations of sums of independent nonidentically distributed random variables // Ann. Probab.—1979.—*7*, № 3.—C. 526—531.
142. *McLeish D. L.* Invariance principles for dependent variables // Z. Wahrsch. und verw. Geb.—1975.—*32*, № 3.—C. 165—178.
143. *Nagaev S. V.* Large deviations of sums of independent random variables // Ann. Probab..—1979.—*7*, № 5.—C. 745—789.
144. *Philipp W.* The central limit problem for mixing sequences of random variables // Z. Wahrsch. und verw. Geb.—1969.—*12*, № 2.—C. 155—171.
145. *Ramachandran B.* Advanced Theory of Characteristic Functions.—Statistical Publishing Soc.—Calcuta, 1967 (Пер. на рус. яз.: Рамачандран Б. Теория характеристических функций. —М.: Наука, 1975.—224с.).
146. *Richter W.-D.* Über Wahrsheinlichkeiten grosser Abweichungen standartisierter Summen unabhängiger Zufallsvektoren // Math. Nachr.—1978.— *84*.—C. 345—358.
147. *Rosenblatt M.* A central limit theorem and a strong mixing condition // Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.—1956.—*42*.—C. 43—47.
148. — Some remarks on a mixing condition // Ann. Probab.—1979.—*7*, № 1.—C. 170—172.
149. *Rozovskii L. V.* On probabilities of large deviations in convex Borel sets in R^k // IV USSR—Japan Symposium on Probab. Theory and Math. Statist., Tbilisi, Abstr. of Cummun.—1982.— C. 191.
150. *Rubin H., Sethuraman J.* Probabilities of moderate deviations // Sankhya.—1965.—*A27*, № 2—4.—C. 325—346.
151. *Saulis L.* On large deviations for the probability density of sums of independent random variables // Probab. Theory and Math. Statist. — Proc. of the Fourth Vilnius Conf..—1986.—*2*.—C. 541—559.
152. — General lemmas on the distribution density for large deviations of a random vector // Theory Probab. and Math. Statist. —Proc. of the Fifth Vilnius Conf.—1990.—*2*.—C. 383—394.
153. — Asymptotic expansions in large deviation zones for the distribution density of sums of independent random variables // New trends in probab. and statist..—1990.—*1*.—Proc. of the Bakuariani Colloquium in Honour of Yu. V. Prokhorov, Bakuriani, Georgia, USSR, 24 February—4 March ,—C. 43—56.
154. —, *Statulevičius V.* On large deviations for a distribution density function // Math. Nachr.—1976.—*70*.—C. 111—132.

155. *Serfling R. J.* Contributions to central limit theorem for dependent variables // Ann. Math. Statist.—1968.—*39*, № 4.—C. 1158—1175.

156. *Sethuraman J.* On the probability of large deviations of families of sample means // Ann. Math. Statist.—1964.—*35*.—C. 1304—1316.

157. — Probabilities of deviations // S. N. Roy Memorial Volume. Univ. of North Carolina Press.—1970.— C. 655—672.

158. *Sievers G. L.* On the probabilities of large deviations and exact slopes // Ann. Math. Statist.—1969.—*40*.—C. 1908—1921.

159. — Multivariate probabilities of large deviations // Ann. Math. Statist.—1975.—*3*.—C. 897—905.

160. *Statulevičius V.* On large deviations // Z. Wahrsch. und verw. Geb. —1966.—*6*, № 2. —C. 133—144.

161. *Stroock D. W.* An introduction to the theory of large deviations.— New York. Inc. Springer—Verlag, 1984.

162. *Surgailis D.* On infinitely divisible self-similar fields // Z. Wahrsch. und verw. Geb.—1981.—*58*.—C. 453—477.

163. *Vandemaele M.* On probability of large deviations for *U*-statistics // Теория вероятн. и ее примен.—1982.— *27*, № 3. C. 573—574.

164. *Wolf W.* Über Wahrscheinlichkeiten grosser Abbweichungen // Math. Nachr.—1974.—*62*.—C. 261—288.

165. — Über Wahrscheinlichkeiten grosser Abbweichungen bei Nichterfüllung der Cramerschen Bedingung // Math. Nachr.— 1975.—*70*.— C. 197—215.

166. — Asymptotische Entwicklungen für Wahrsheinlichkeiten grosser Abbweichungen // Z. Wahrch. und verw. Geb.—1977.—*40*.—C. 239 —256.

167. *Yurinskii V. V.* Exponential inequalities for sums of random vectors // J. Multivar. Anal.—1976.—*6*, № 4.—C. 473—499.

168. *Zitikis R.* On large deviation for *L*-estimates // New trends in probab. and statist..—1990.—*1*. —Proc. of the Bakuariani Colloquium in Honour of Yu. V. Prokhorov, Bakuriani, Georgia, USSR, 24 February —4 March ,—C. 137—164.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Сдано в набор 11.12.91 В печать 09.12.91
Формат 60x90 1/16 Печать офсетная
Усл. печ. л. 20,0 Усл. кр.-отт. 20,19 Уч.-изд. л. 15,70
Тир. 550 экз. Зак. 8822 Цена 6 р. 40 к.

Адрес редакции: 125219, Москва, А-219, ул. Усиевича, 20а
Тел. 155-42-29
Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ
140010, Люберцы 10, Московской обл.,
Октябрьский проспект, 403

Индекс 56909

ISSN 0233-6723 ИНТ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 81, 1991, 1-320.