Избранные главы
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
для инженеров и студентов втузов

ЗАДАЧИ и УПРАЖНЕНИЯ

Н.И.КОЖЕВНИКОВ, Т.И.КРАСНОЩЕКОВА, Н.Е.ШИШКИН

РЯДЫ И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ И СТУДЕНТОВ ВТУЗОВ

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Н. И. КОЖЕВНИКОВ, Т. И. КРАСНОЩЕКОВА,
Н. Е. ШИШКИН

РЯДЫ И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ
ТЕОРИЯ ПОЛЯ
АНАЛИТИЧЕСКИЕ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Под редакцией А. В. ИГНАТЬЕВОЙ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования РСФСР
в качестве учебного пособия
для высших технических учебных заведений*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1964

517.2
К58
УДК 517.5 (076.1)

АННОТАЦИЯ

Книга включена в подсерию «Задачи и упражнения» широко известной серии «Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов втузов», содержащей различные дополнительные вопросы к общему втузовскому курсу высшей математики. Материал задачника приспособлен к книге П. И. Романовского «Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа».

Предназначена для студентов старших курсов и аспирантов высших технических учебных заведений.

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый сборник задач составлен на основе теоретического материала, изложенного в книге П. И. Романовского «Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа», Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1964.

Основные сведения и формулы приводятся в начале каждого параграфа. Задачи более сложного содержания снабжены указаниями, а некоторые из них, отмеченные звездочкой, решены. Многие задачи настоящего сборника взяты из «Сборника задач по дополнительным главам курса математического анализа» (Оборонгиз, 1959) тех же авторов, который был использован в практической работе со студентами ряда втузов.

Мы приносим большую благодарность товарищам, высказавшим свои замечания к «Сборнику» 1959 г., и будем признательны всем, кто своими замечаниями поможет устранить недостатки данного сборника.

Глава I, §§ 3,4 главы V составлены Т. И. Краснощековой. Главы II, III, §§ 1,2 главы V составлены Н. И. Кожевниковым и Н. Е. Шишкиным. Глава IV составлена Н. И. Кожевниковым.

Все замечания и пожелания просим присылать по адресу: Москва, А-80, Волоколамское шоссе, 18. Кафедра математики МАИ.

Авторы

ГЛАВА I
РЯДЫ ФУРЬЕ И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

§ 1. Тригонометрические ряды Фурье

Теорема разложения. Если $f(x)$ — периодическая функция (периода $T = 2l$), кусочно-гладкая или кусочно-монотонная на сегменте длины $2l$, то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x\right),$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x\, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

сходится к $f(x)$ в каждой ее точке непрерывности и сходится к $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ (среднему арифметическому предельных значений справа и слева) в каждой ее точке разрыва. Таким образом, в каждой правильной точке x (т. е. точке, в которой $f(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, и, в частности, в точке непрерывности $f(x)$) рассматриваемая функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x\right).$$

При вычислении коэффициентов Фурье отрезок интегрирования $[-l, l]$ в формулах (1) можно заменить любым отрезком

$[a, a+2l]$ длины $2l$. В случае четной функции $f(x)$ формулы (1) для коэффициентов Фурье принимают вид

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \\ b_n &= 0, \quad n=1,\ 2,\ \ldots \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

а в случае нечетной функции $f(x)$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 0, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \\ b_n &= \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx, \quad n=1,\ 2,\ \ldots \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Если функция $f(x)$ определена на интервале $(a, a+2l)$, a — любое число, кусочно-монотонна или кусочно-гладка на нем, то в каждой правильной точке x этого интеграла ее можно разложить в ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int\limits_a^{a+2l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int\limits_a^{a+2l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx, \quad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

являющийся рядом Фурье для периодического продолжения функции $f(x)$ на всю ось Ox.

Функцию $f(x)$, кусочно-монотонную или кусочно-гладкую на интервале $(0, l)$, можно в каждой правильной точке разложить в ряд Фурье как по косинусам, так и по синусам. Для этого достаточно продолжить функцию $f(x)$ четным или соответственно нечетным образом на интервал $(-l, 0)$ и для полученной на интервале $(-l, l)$ функции составить ряд Фурье. Коэффициенты Фурье будут при этом вычисляться соответственно по формулам (2) или (3).

Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье для функции $f(x)$, периодической (с периодом $T=2l$), а также для функции $f(x)$, заданной на интервале $(-l, l)$, имеет вид

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{+i\frac{n\pi}{l}x},$$

где

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) e^{-i \frac{n\pi}{l} x} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

При этом

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

1. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $T = 2\pi$) функцию $f(x)$, определенную на сегменте $[-\pi, \pi]$ равенствами:

$$f(x) = \begin{cases} c_1, & -\pi < x < 0, \\ c_2, & 0 < x < \pi, \\ \dfrac{c_1 + c_2}{2}, & x = -\pi, 0, \pi. \end{cases}$$

Воспользовавшись полученным разложением, найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

2. Записать ряд Фурье периодической (с периодом $T = 2\pi$) функции $f(x)$, определенной равенствами:

$$f(x) = \begin{cases} c_1, & -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ c_2, & \dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

3. Построить графики и разложить в ряды Фурье четные периодические (с периодом 2π) функции, определенные на сегменте $[0, \pi]$ равенствами:

1) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi, \end{cases}$

2) $f(x) = \frac{2A}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$

4. Разложить в ряд Фурье на интервале $(0, 2\pi)$ следующие функции:

1) $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$,

2) $f(x) = x^2$.

Построить графики сумм полученных рядов.

5. Разложить функцию $f(x) = x^2$, $0 \leqslant x < \pi$, в ряд Фурье: 1) по косинусам кратных дуг; 2) по синусам кратных дуг.

Пользуясь полученными разложениями, найти суммы рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

6. Каковы будут коэффициенты Фурье для тригонометрического многочлена $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$?

7. Пусть функция $f(x)$ периодическая, $f(x + 2\pi) = f(x)$ для любого x. Каждое из выписанных ниже условий 1) — 5) характеризует некоторую симметрию кривой $y = f(x)$. Доказать, что:

1) Если $f(x + \pi) = -f(x)$, то все коэффициенты Фурье с четными индексами равны нулю: $a_0 = a_2 = b_2 = \ldots = a_{2n} = b_{2n} = \ldots = 0$.

Указание. Кривая $y = f(x)$ приводится в совпадение сама с собой горизонтальным смещением на π и последующей симметрией относительно оси абсцисс.

2) Если $f(x + \pi) = f(x)$, то все коэффициенты Фурье с нечетными индексами равны нулю: $a_1 = b_1 = a_3 = b_3 = \ldots \ldots = a_{2n-1} = b_{2n-1} = \ldots = 0$.

Указание. Период этой функции равен π.

3) Если $f(-x) = f(x)$, $f(x + \pi) = -f(x)$, то $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$; $a_0 = a_2 = \ldots = a_{2n} = \ldots = 0$.

Указание. Использовать свойство рядов Фурье для четных функций и задачу 1).

4) Если $f(-x) = -f(x)$, $f(x + \pi) = -f(x)$, то $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $b_2 = b_4 = \ldots = b_{2n} = \ldots = 0$.

Указание. Использовать свойство рядов Фурье для нечетных функций и задачу 1).

5) Выяснить, какие коэффициенты Фурье обращаются в нуль, если: а) $f(-x)=f(x)$, $f(x+\pi)=f(x)$; б) $f(-x)=-f(x)$, $f(x+\pi)=f(x)$.

8. Пусть $f(x)$ — периодическая функция с периодом 2π, a_n и b_n — ее коэффициенты Фурье. Доказать, что коэффициенты Фурье a_n' и b_n' функции $f(x+h)$ ($h=\text{const}$) следующим образом выражаются через a_n и b_n:

$$a_n' = a_n \cos nh + b_n \sin nh, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n' = b_n \cos nh - a_n \sin nh, \quad n = 1, 2, \ldots$$

9. Построить график и разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом 2π) функцию $f(x)$, определенную на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ равенствами:

$$f(x)=\begin{cases} \cos x, & -\frac{\pi}{2} \leqslant x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Написать для нее ряд Фурье.

10. Разложить в ряд Фурье в указанных промежутках следующие функции:

1) $\cos ax$ (a — не целое число) на сегменте $[-\pi, \pi]$;

2) $\sin ax$ (a — не целое число) на интервале $(-\pi, \pi)$.

Положив $a=\frac{1}{2}$, написать разложение для $\sin\frac{x}{2}$;

3) $f(x)=|x|$ на сегменте $[-1, 1]$;

4) $f(x)=x$ на интервале $(1, 3)$;

5) $f(x)=x$ на интервале $(a, a+2l)$, a — любое число;

6) $$f(x)=\begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & 1 < x < 2, \\ 3-x, & 2 \leqslant x \leqslant 3, \end{cases}$$

на сегменте $[0, 3]$;

7) $$f(x)=\begin{cases} 1, & -1 \leqslant x < 0, \\ \frac{1}{2}, & x=0, \\ x, & 0 < x \leqslant 1, \end{cases} \qquad f(x+2)=f(x),$$

на всей оси Ox.

11. Показать справедливость следующих равенств:

1) $$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1} = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nx}{4n^2-1};$$

2) $$|\cos x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nx.$$

Построить графики функций $|\sin x|$, $|\cos x|$.

12*. 1) Представить рядом Фурье в комплексной форме периодическую функцию $f(x)$ (с периодом 2π), определенную для $0 \leqslant x < 2\pi$ равенством $f(x)=e^x$.

2) Воспользовавшись полученным рядом Фурье в комплексной форме, записать в действительной форме ряд Фурье этой функции.

13. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ (с периодом 2π), определяемую следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ e^{-x}, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Указание. Воспользоваться комплексной формой ряда Фурье.

14. Записать ряд Фурье: 1) в комплексной и 2) в действительной форме для периодической функции $f(x)$ (с периодом 2π), определяемой на сегменте $[-\pi, \pi]$ равенством $f(x)=\cos\frac{x}{2}$.

15. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\operatorname{ch} x$ на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Указание. Воспользоваться комплексной формой ряда Фурье.

16. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\operatorname{sh} x$ на интервале $(-\pi, \pi)$.

Указание. Использовать комплексную форму ряда Фурье.

17. Убедившись, что разложение в ряд Фурье нечетной функции $f(x)$ (с периодом 2π), определяемой на интервале $(0, \pi)$ условием $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$, запишется в виде

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},$$

$x \neq 2k\pi$, k — целое число, доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Указание. Использовать условие полноты тригонометрической системы

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,dx.$$

18. Функция

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{\pi}{4}, & -\pi<x<0,\\ 0, & x=0,\\ \frac{\pi}{4}, & 0<x<\pi,\end{cases}$$

разлагается в ряд Фурье (см. задачу 1) следующим образом:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}, \quad |x|<\pi.$$

Используя условие полноты тригонометрической системы (см. указание к задаче 17), доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

§ 2. Ортогональные системы функций и ряды Фурье по ним

Пусть в промежутке с концами a и b, $a<b$ (a и b могут быть как конечными, так и бесконечными), задана положительная непрерывная функция $\rho(x)$ (весовая функция). Будем рассматривать различные функции $\varphi(x)$, непрерывные на этом промежутке

и удовлетворяющие условию

$$\int_a^b [\varphi(x)]^2 \rho(x)\,dx < +\infty.$$

Функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ называются ортогональными с весом $\rho(x)$ (при $\rho(x) \equiv 1$ — ортогональными) на рассматриваемом промежутке, если

$$\int_a^b \varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,\rho(x)\,dx = 0.$$

Система функций

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$$

называется ортогональной с весом $\rho(x)$ на рассматриваемом промежутке, если любые две функции этой системы ортогональны.

Система $\{\varphi_n(x)\}$ называется нормированной с весом $\rho(x)$ на рассматриваемом промежутке, если

$$\int_a^b [\varphi_n(x)]^2 \rho(x)\,dx = 1, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Система $\{\varphi_n(x)\}$ называется ортонормированной с весом $\rho(x)$, если

$$\int_a^b \varphi_i(x)\,\varphi_k(x)\,\rho(x)\,dx = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k. \end{cases}$$

Любую ортогональную систему можно нормировать, если умножить каждую функцию $\varphi_n(x)$ системы на соответствующий множитель (нормирующий множитель)

$$\lambda_n = \frac{1}{\pm\sqrt{\int_a^b [\varphi_n(x)]^2 \rho(x)\,dx}}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

(знак у корня можно брать любой).

Рядом Фурье функции $f(x)$ относительно системы $\{\varphi_n(x)\}$, удовлетворяющей указанным выше условиям, называется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x),$$

где

$$c_n = \frac{\int\limits_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,\rho(x)\,dx}{\int\limits_a^b [\varphi_n(x)]^2\,\rho(x)\,dx}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

(для ортонормированной системы

$$c_n = \int\limits_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,\rho(x)\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots).$$

В этом случае записывают

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

(вместо знака равенства записан знак соответствия $\sim$, так как функция $f(x)$ может и не разлагаться в свой ряд Фурье).

19. Показать, что если p и $q\,(p \neq q)$ — целые неотрицательные числа, то функции $\sin\left(p + \frac{1}{2}\right)x$ и $\sin\left(q + \frac{1}{2}\right)x$ ортогональны на сегменте $[0, \pi]$.

20. Проверить, что системы функций:

1) $1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, \ldots;$

2) $\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx, \ldots$

ортогональны на сегменте $[0, \pi]$. Нормировать эти системы.

21. Показать, что система функций

$$\sin x, \quad \sin 3x, \quad \sin 5x, \ldots, \sin(2n-1)x, \ldots$$

ортогональна на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Написать формулы для коэффициентов Фурье функции $f(x)$ относительно этой системы.

22. Показать, что система функций

$$\Theta_0(x) \equiv 1; \quad \Theta_{2n-1}(x) = \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{\sin^2 \frac{x}{2}},$$

$$\Theta_{2n}(x) = \frac{(n+1)\sin nx - n \sin(n+1)x}{\sin^2 \frac{x}{2}}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

ортогональна на интервале $(0, 2\pi)$ с весом $\rho(x) = \sin^2 \frac{x}{2}$.

23. Трансцендентное уравнение $\operatorname{tg} x = x$ имеет бесчисленное множество положительных корней $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, которые являются абсциссами точек пересечения тангенсоиды $y = \operatorname{tg} x$ и биссектрисы $y = x$ (рис. 1).

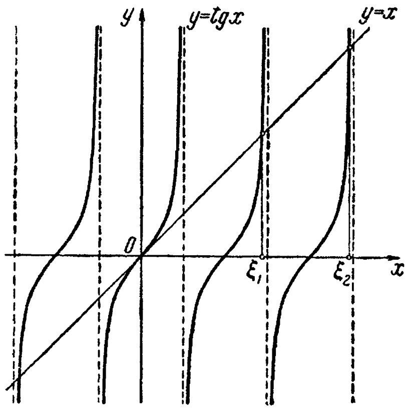


Рис. 1.

Показать, что система функций

$$\sin \xi_1 x, \quad \sin \xi_2 x, \ \ldots, \ \sin \xi_n x, \ \ldots$$

ортогональна на сегменте [0, 1].

Указание. Использовать соотношение

$$\int_0^1 \sin \alpha x \sin \beta x \, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta} - \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}\right] =$$

$$= \cos\alpha\cos\beta \, \frac{\beta \operatorname{tg}\alpha - \alpha \operatorname{tg}\beta}{\alpha^2-\beta^2} \qquad (\alpha \neq \beta).$$

24. Многочлены Чебышева имеют вид

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

1) Записать их в виде

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right].$$

Указание. Сделать подстановку $x = \cos\theta$ и записать $\cos n\theta$ по формуле Эйлера.

2) Записать многочлены Чебышева при $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

25. Показать, что система многочленов Чебышева

$$T_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

ортогональна на интервале $(-1, 1)$ с весом $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Нормировать ее[1]).

Указание. При интегрировании применить подстановку $x = \cos\theta$.

26. Показать, что система многочленов

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

ортогональна на интервале $(-1, 1)$ с весом $\rho(x) = \sqrt{1-x^2}$. Нормировать ее.

Указание. При интегрировании применить подстановку $x = \cos\theta$.

27. Написать ряд Фурье функции $f(x) = |x|$ на интервале $(-1, 1)$:

1) относительно системы многочленов Чебышева;

2) относительно системы многочленов $U_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (см. задачу 26).

28. Многочлены Лежандра определяются формулами:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Написать многочлены Лежандра при $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

29. Доказать, что система многочленов Лежандра ортогональна на сегменте $[-1, 1]$. Нормировать ее.

Указание. Использовать (несколько раз) интегрирование по частям.

30. Записать ряд Фурье относительно системы многочленов Лежандра для функции $f(x)$, заданной на сегменте $[-1, 1]$.

---

[1]) Многочлен нормированной системы будем обозначать той же буквой, что и соответствующий многочлен данной системы, но с «крышей» сверху. Например, $\widehat{T}_n(x)$ для $T_n(x)$.

31. Для функции, определяемой условиями

$$f(x)=\begin{cases}0, & -1<x\leqslant 0,\\ 1, & 0<x<1,\end{cases}$$

написать ряды Фурье: 1) относительно системы многочленов Чебышева; 2) относительно системы многочленов Лежандра.

32. Написать ряд Фурье относительно системы многочленов Лежандра для функции $f(x)=|x|$ на сегменте $[-1, 1]$.

33. Многочлены Якоби определяются формулой

$$J_0^{(\alpha,\beta)}(x)=1,$$

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{1}{n!\,2^n}\frac{1}{\rho(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\rho(x)\right],\qquad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

где $\rho(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, параметры α и β — действительные числа, удовлетворяющие условиям $\alpha>-1$, $\beta>-1$. В частности, при $\alpha=\beta=0$ многочлены Якоби превращаются в многочлены Лежандра, а при $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$ — в многочлены Чебышева.

Показать, что система многочленов Якоби ортогональна с весом $\rho(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ на интервале $(-1, 1)$.

Указание. Использовать (несколько раз) интегрирование по частям.

Написать выражения для $J_1^{(\alpha,\beta)}(x)$ и $J_2^{(\alpha,\beta)}(x)$.

34. Многочлены Лагерра определяются равенством

$$L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x}),\qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Интегрируя (несколько раз) по частям, показать, что

$$\int_0^{+\infty}L_i(x)L_k(x)\,e^{-x}\,dx=\begin{cases}0, & i\neq k,\\ (k!)^2, & i=k,\end{cases}$$

т. е. что система многочленов Лагерра ортогональна с весом $\rho(x)=e^{-x}$ на промежутке $[0, +\infty)$. Нормировать ее.

35. Написать многочлены Лагерра при $n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ (см. задачу **34**).

36. Написать ряд Фурье относительно системы многочленов Лагерра для функции $f(x)=e^{-x}$ при $x>0$.

37. Многочлены Эрмита определяются равенством

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Написать многочлены Эрмита при $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

38. Показать, что система многочленов Эрмита ортогональна с весом $\rho(x) = e^{-x^2}$ на всей числовой оси.

39. Написать ряд Фурье относительно системы многочленов Эрмита для функции $f(x)$, $-\infty < x < +\infty$.

40*. Найти три члена ортогональной с весом $\rho(x) = e^{-x}$ на промежутке $[0, +\infty)$ последовательности многочленов, полученной путем ортогонализации последовательности $1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots$

41. Ортогонализируя систему функций

$$1,\quad x,\quad x^2,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots,$$

построить четыре члена системы многочленов, ортогональных на сегменте $[-1,\ 1]$.

Указание. См. задачу 40*.

42. Написать три члена ортонормированной с весом $\rho(x) = e^{-x^2}$ на промежутке $(-\infty, +\infty)$ системы многочленов, полученной путем ортогонализации и нормирования (с весом $\rho(x) = e^{-x^2}$) последовательности $1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots$

Указание. См. задачу 40*.

43. Пусть система функций

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots$$

ортогональна с весом $\rho(x)$ на промежутке с концами a и b $(a < b)$. Эта система называется полной, если для любой функции $f(x)$, удовлетворяющей условию

$$\int_a^b [f(x)]^2 \rho(x)\, dx < \infty,$$

выполняется равенство

$$\int_a^b [f(x)]^2 \rho(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \int_a^b [\varphi_n(x)]^2 \rho(x)\, dx,$$

где c_n, $n = 1, 2, \ldots$, — коэффициенты Фурье функции $f(x)$ относительно данной системы.

Доказать, что для полноты системы $\{\varphi_n(x)\}$ необходимо и достаточно, чтобы для каждой функции $f(x)$, удовлетворяющей указанному выше условию, выполнялось равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\left[f(x)-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x)\right]^2\rho(x)\,dx=0.$$

§ 3. Улучшение сходимости тригонометрических рядов Фурье по методу А. Н. Крылова

Приведем две теоремы, характеризующие связь между дифференциальными свойствами функции $f(x)$ и порядком убывания коэффициентов Фурье этой функции.

Теорема. Если периодическая, непрерывная функция $f(x)$ имеет непрерывные производные до $(k-1)$-го порядка включительно, а производная k-го порядка удовлетворяет условиям Дирихле, то коэффициенты Фурье функции $f(x)$ будут порядка не ниже $\frac{1}{n^{k+1}}$. При этом ряды Фурье для всех производных функции $f(x)$ до $(k-1)$-го порядка включительно могут быть получены почленным дифференцированием ряда Фурье для $f(x)$.

Теорема. Если коэффициенты тригонометрического ряда $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ порядка не ниже $\frac{1}{n^k}$ $(k\geqslant 2)$, то сумма ряда — непрерывная функция периода 2π, имеющая производные до $(k-2)$-го порядка включительно, которые могут быть получены последовательным дифференцированием данного ряда.

Из этих теорем видно, что более удобны тригонометрические ряды с быстро убывающими коэффициентами, так как их можно почленно дифференцировать, и, кроме того, в этом случае несколько первых членов ряда достаточно точно определяют его сумму. В связи с этим ставится следующая задача. Дан тригонометрический ряд (обозначим его сумму через $f(x)$)

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

Требуется выделить из данного ряда такой ряд, сумма которого $\varphi(x)$ известна, чтобы оставшийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)$, т. е. ряд, удовлетворяющий условию

$$f(x)=\varphi(x)+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx),$$

имел достаточно быстро убывающие коэффициенты. Если поставленная задача решена, то говорят, что улучшена сходимость данного ряда. Так как обычно $f(x)$ — сумма данного ряда — не известна (в конечном виде), то и функция $\varphi(x)$ определяется, исходя из ряда, а для этого нужно иметь набор тригонометрических разложений.

Таблица некоторых тригонометрических разложений приводится в конце параграфа.

44. Улучшить сходимость данных тригонометрических рядов, доведя коэффициенты ряда до порядка $\frac{1}{n^k}$. (Для каждого ряда значение k указано в скобках.)

1*) $f(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n^2-1}\sin nx\qquad(k=5);$

2) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{n^5+1}\sin nx\qquad(k=6);$

3) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+1}\sin nx\qquad(k=2);$

4) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1}\sin nx\qquad(k=4);$

5) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n+a}\qquad(a=\text{const},\ a>0)\qquad(k=4);$

6) $f(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{n^4-1}\sin nx\qquad(k=5);$

7) $f(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2-1}\cos nx\qquad(k=5);$

8) $$f(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2-1}\sin nx \qquad (k=5),$$

9) $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4-n^2+1}{n^2(n^4+1)}\cos nx \qquad (k=4).$$

Таблица некоторых тригонометрических разложений:

1) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \qquad 0 < x < 2\pi;$$

2) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n} = -\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right), \qquad 0 < x < 2\pi;$$

3) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2} = -\int_0^x \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)dx, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi;$$

4) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi;$$

5) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3} = \frac{x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x}{12}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi;$$

6) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3} = \int_0^x dx \int_0^x \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi,$$
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} \approx 1{,}20205\right);$$

7) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} = \frac{x}{2}, \qquad -\pi < x < \pi;$$

8) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n} = \ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right), \qquad -\pi < x < \pi;$$

9) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n^2} = \int_0^x \ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)dx, \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi;$$

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\cos nx}{n^2}=\dfrac{\pi^2-3x^2}{12},\qquad -\pi\leqslant x\leqslant\pi;$

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin nx}{n^3}=\dfrac{\pi^2x-x^3}{12},\qquad -\pi\leqslant x\leqslant\pi;$

12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\cos nx}{n^3}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^3}-$

$$-\int\limits_0^x dx\int\limits_0^x \ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)dx,\qquad -\pi\leqslant x\leqslant\pi;$$

13) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin(2n+1)x}{2n+1}=\dfrac{\pi}{4},\qquad 0<x<\pi;$

14) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)x}{2n+1}=-\dfrac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2},\qquad 0<x<\pi;$

15) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2}=-\dfrac{1}{2}\int\limits_0^x\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\,dx,\qquad 0\leqslant x\leqslant\pi;$

16) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}=\dfrac{\pi^2-2\pi x}{8},\qquad 0\leqslant x\leqslant\pi;$

17) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin(2n+1)x}{2n+1}=-\dfrac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right),$

$$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2};$$

18) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos(2n+1)x}{2n+1}=\dfrac{\pi}{4},\quad -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}.$

§ 4. Практический гармонический анализ

Во многих случаях точное определение коэффициентов Фурье функции $f(x)$ становится затруднительным или невозможным. Это происходит в случае, когда функция задана сложным аналитическим выражением, которое не позволяет найти значения соответствующих интегралов, а также когда функция задается графически или с помощью таблицы.

При этих условиях можно искать лишь приближенные значения коэффициентов Фурье. Для практических целей в большинстве случаев достаточно знать лишь несколько первых коэффициентов. Вопрос о способах приближенного вычисления коэффициентов Фурье имеет важное значение и является содержанием так называемого практического гармонического анализа. Эти способы основаны на применении к выражениям a_n и b_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ формул приближенного вычисления интегралов. Если воспользоваться способом прямоугольников, разделив сегмент $[0, 2\pi]$ на m равных частей точками $0, \frac{2\pi}{m}, 2\cdot\frac{2\pi}{m}, \ldots, (m-1)\cdot\frac{2\pi}{m}, 2\pi$ при условии, что известны соответствующие значения функции: $y_0, y_1, \ldots, y_m$, то получим следующие приближенные равенства:

$$a_n=\frac{2}{m}\sum_{k=0}^{m-1} y_k\cos\frac{2k\pi}{m}n, \qquad n=0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n=\frac{2}{m}\sum_{k=0}^{m-1} y_k\sin\frac{2k\pi}{m}n, \qquad n=1, 2, \ldots$$

Нетрудно показать, что при $m=12$ (случай двенадцати ординат) для вычисления коэффициентов a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 можно пользоваться следующей схемой:

	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
		y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7	
Сумма	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
Разность		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	

	u_0	u_1	u_2	u_3
	u_6	u_5	u_4	
Сумма	s_0	s_1	s_2	s_3
Разность	t_0	t_1	t_2	

	v_1	v_2	v_3
	v_5	v_4	
Сумма	σ_1	σ_2	σ_3
Разность	τ_1	τ_2	

Получив указанные величины, можно записать:

$$\begin{aligned}
6a_0 &= s_0+s_1+s_2+s_3,\\
6a_1 &= t_0+0{,}866t_1+0{,}5t_2,\\
6a_2 &= s_0-s_3+0{,}5(s_1-s_2),\\
6a_3 &= t_0-t_2,\\
6b_1 &= 0{,}5\sigma_1+0{,}866\sigma_2+\sigma_3,\\
6b_2 &= 0{,}866(\tau_1+\tau_2),\\
6b_3 &= \sigma_1-\sigma_3.
\end{aligned}$$

45*. Периодическая (с периодом 2π) функция $f(x)$ задана на сегменте $[0, 2\pi]$ следующей таблицей:

$$f(0) = 27; \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 32; \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 35; \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 30;$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 26; \quad f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 20; \quad f(\pi) = 18; \quad f\left(\frac{7}{6}\pi\right) = 22;$$

$$f\left(\frac{4}{3}\pi\right) = 26; \quad f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 30; \quad f\left(\frac{5}{3}\pi\right) = 32; \quad f\left(\frac{11}{6}\pi\right) = 36.$$

Записать для этой функции тригонометрический многочлен третьего порядка, используя указанную схему.

46. На рис. 2 изображена зависимость касательного усилия T на пальце кривошипа некоторой паровой машины от

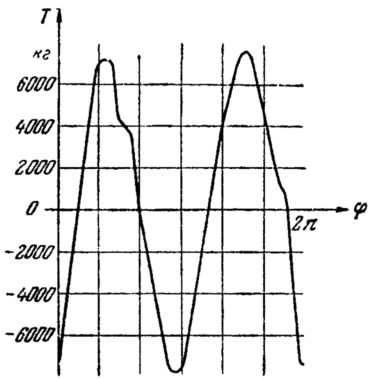


Рис. 2.

угла φ поворота кривошипа. Выделить гармонические составляющие третьего порядка касательного усилия T.

Указание. Сняв с графика двенадцать ординат, соответствующих значениям аргумента $\varphi_k = k\frac{2\pi}{12}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, 11)$, получим:

$$T_0 = -7200; \quad T_1 = -300; \quad T_2 = 7000; \quad T_3 = 4300;$$

$$T_4 = 0; \quad T_5 = -5200; \quad T_6 = -7400; \quad T_7 = -2250;$$

$$T_8 = 3850; \quad T_9 = 7600; \quad T_{10} = 4500; \quad T_{11} = 250.$$

47. Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ заданы на сегменте $[0,2\pi]$ соответствующей таблицей:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$
$f(x)$	2,3	3,2	2,1	1,6	–0,4	–0,2
$\varphi(x)$	3,042	2,134	1,273	0,788	0,495	0,370

x	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$
$f(x)$	–0,4	0,3	0,7	0,9	1,2	1,6
$\varphi(x)$	0,540	0,191	–0,357	–0,437	0,767	2,714

Выделить указанные гармонические составляющие этих функций: 1) второго порядка для $f(x)$, 2) третьего порядка для $\varphi(x)$.

48. Дана функция $f(x)=3+\cos x-5\sin 2x$. Требуется составить таблицу ее значений для $x_k=k\frac{2\pi}{12}$ $(k=0, 1, \ldots, 11)$. Используя схему для двенадцати ординат, написать соответствующий ей тригонометрический многочлен второго порядка и сравнить полученный многочлен с выражением $f(x)$.

49. Периодическая (с периодом 2π) функция $f(x)$ задана на сегменте $[0,2\pi]$ равенством

$$f(x)=\frac{1}{2\pi^2}(x^3-3\pi x^2+2\pi^2 x).$$

Составить таблицу значений $f(x)$ для значений аргумента $x_k=k\cdot\frac{2\pi}{12}$, $k=0, 1, \ldots, 11$. Вычислить коэффициенты Фурье $a_n\,(n=0, 1, 2, 3)$ и $b_n\,(n=1, 2, 3)$ функции $f(x)$, используя: 1) их выражение через интегралы; 2) по схеме для двенадцати ординат.

Сравнить полученные результаты.

50. Показать, что если $f(x)$ периодическая (с периодом 2π) функция, а сегмент $[0,2\pi]$ разделен на $m=24$ равных частей точками $x_k = k\frac{2\pi}{24}$ $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ 24)$, соответствующие значения функции в которых $y_k\,(k=0,\ 1,\ \ldots,\ 24)$, то справедлива следующая схема для вычисления $a_n\,(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 6)$ и $b_n\,(n=1,\ \ldots,\ 6)$ коэффициентов Фурье этой функции:

	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}
		y_{23}	y_{22}	y_{21}	y_{20}	y_{19}	y_{18}	y_{17}	y_{16}	y_{15}	y_{14}	y_{13}	
Сумма	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}
Разность		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	

	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
	u_{12}	u_{11}	u_{10}	u_9	u_8	u_7	
Сумма	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
Разность	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
	v_{11}	v_{10}	v_9	v_8	v_7	
Сумма	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
Разность	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	

	s_0	s_1	s_2	s_3
	s_6	s_5	s_4	
Сумма	k_0	k_1	k_2	k_3
Разность	l_0	l_1	l_2	

	τ_1	τ_2	τ_3
	τ_5	τ_4	
Сумма	m_1	m_2	m_3
Разность	n_1	n_2	

$$12a_0 = k_0 + k_1 + k_2 + k_3,$$

$$12a_1 = [t_0 + 0{,}5t_4 + 0{,}6124\,(t_1 + t_5)] + \\ + [0{,}8660t_2 + 0{,}7071t_3 + 0{,}3536\,(t_1 - t_5)],$$

$$12a_2 = l_0 + 0{,}8660l_1 + 0{,}5l_2,$$

$$12a_3 = (t_0 - t_4) + 0{,}7071\,(t_1 - t_3 - t_5),$$

$$12a_4 = (k_0 - k_3) + 0{,}5\,(k_1 - k_2),$$

$$12a_5 = [t_0 + 0{,}5t_4 + 0{,}6124\,(t_1 + t_5)] - \\ - [0{,}8660t_2 + 0{,}7071t_3 + 0{,}3536\,(t_1 - t_5)]$$

$$12a_6 = l_0 - l_2,$$

$$12b_1 = [0{,}5\sigma_2 + \sigma_6 + 0{,}6124\,(\sigma_1 + \sigma_5)] + \\ + [0{,}7071\sigma_3 + 0{,}8660\sigma_4 - 0{,}3536\,(\sigma_1 - \sigma_5)],$$

$$12b_2 = 0{,}5m_1 + 0{,}8660m_2 + m_3,$$

$$12b_3 = (\sigma_2 - \sigma_6) + 0{,}7071\,(\sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_5),$$

$$12b_4 = 0{,}8660\,(n_1 + n_2),$$

$$12b_5 = [0{,}5\sigma_2 + \sigma_6 + 0{,}6124\,(\sigma_1 + \sigma_5)] - \\ - [0{,}7071\sigma_3 + 0{,}8660\sigma_4 - 0{,}3536\,(\sigma_1 - \sigma_5)],$$

$$12b_6 = m_1 - m_3.$$

51. Используя схему, полученную в задаче **50**, записать многочлены Фурье периодических (с периодом 2π) функций $f(x)$ и $T(\varphi)$, заданных следующей таблицей:

	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}
$f(x)$	200	243	223	171	123	102	100	91	50	−29	−123
$T(\varphi)$	−7200	−4150	−300	3250	7000	7450	4300	2750	0	−2650	−5200

	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}	y_{16}	y_{17}	y_{18}	y_{19}	y_2	y_{21}	y_{22}	y_{23}
$f(x)$	−191	−200	−143	−50	29	50	−2	−100	−191	−223	−171	−50	91
$T(\varphi)$	−7700	−7400	−4850	−2250	650	3850	6400	7600	6800	4500	2300	250	−5150

(Значения функции $T(\varphi)$ сняты с ее графика. См. рис. 2.)

§ 5. Применение рядов Фурье к решению дифференциальных уравнений

52. С помощью тригонометрических рядов Фурье найти решения следующих дифференциальных уравнений:

1) $y'' - y = f(x)$, где $f(x)$ — периодическая (с периодом 2π) функция, определенная на сегменте $[-\pi, \pi]$ равенствами:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x = 0,\ -\pi,\ \pi; \end{cases}$$

2) $y'' - 2y = f(x)$, где $f(x)$ — периодическая функция (с периодом 2π), определенная на интервале $0 < x < 2\pi$ равенством $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$.

3) $y'' + y = f(x)$, где $f(x)$ определена в п. 2).

Указание. Разложить $f(x)$ в ряд Фурье и искать решение в виде тригонометрического ряда.

53. Методом Фурье решить следующие уравнения (описывающие колебания струны):

1*) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при граничных условиях $u(0, t) = u(l, t) = 0$ при любом t и начальных условиях

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \frac{4hx(l-x)}{l^2} \\ u'_t(x, 0) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ на сегменте } 0 \leqslant x \leqslant l;$$

2) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при граничных условиях $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ при любом t и начальных условиях

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \sin x, \\ u'_t(x, 0) &= \sin x, \end{aligned}\right\} \text{ на сегменте } [0, \pi];$$

3) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при граничных условиях $u(0, t) = u(l, t) = 0$ при любом t и начальных условиях

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \\ u'_t(x, 0) &= \sin \frac{\pi}{l} x \end{aligned}\right\} \text{ на сегменте } 0 \leqslant x \leqslant l.$$

54. Продольные колебания стержня длины l, у которого один конец (при $x = 0$) закреплен, а другой (при $x = l$) свободен, определяются уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где $u(x, t)$ — продольное смещение точки стержня с абсциссой x в момент времени t, и условиями 1) граничными: $u|_{x=0} = 0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0$ при любом t и 2) начальными: при $t = 0$, $u = \varphi(x)$ и $\frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x)$. Найти функцию $u(x, t)$.

55. Однородная струна длины l закреплена на конце $x = 0$, а к другому ее концу $x = l$ прикреплено кольцо, массой которого можно пренебречь. Кольцо может скользить по вертикальному гладкому стержню; оно отклонено на малое расстояние h от положения равновесия и в момент $t=0$ отпущено. Найти отклонение $u(x, t)$ точки x струны в любой момент времени t от положения равновесия.

56. Однородная струна длиной l, закрепленная на концах $x=0$ и $x=l$, колеблется под действием внешней гармонической силы $F(x, t)=f(x)\sin\omega t$, рассчитанной на единицу длины. Найти отклонение $u(x, t)$ струны от положения равновесия при произвольных начальных условиях.

§ 6. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье

Теорема разложения. Если $f(x)$ — абсолютно интегрируемая на всей числовой оси функция, т. е. функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty,$$

кусочно-гладкая или кусочно-монотонная на каждом сегменте, то ее интеграл Фурье

$$\int_0^{+\infty} [a(u)\cos ux + b(u)\sin ux]\, du,$$

где

$$a(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos ut\, dt,$$

$$b(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin ut\, dt,$$

равен $f(x)$ в каждой точке непрерывности функции $f(x)$ и равен $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ в каждой точке разрыва функции $f(x)$.

Таким образом, в каждой правильной точке x рассматриваемая функция $f(x)$ равна своему интегралу Фурье:

$$f(x)=\int_0^{\infty} [a(u)\cos ux + b(u)\sin ux]\, du. \tag{1}$$

В случае четной функции $f(x)$

$$a(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \cos ut \, dt, \qquad b(u) = 0, \tag{2}$$

а в случае нечетной $f(x)$

$$a(u) = 0, \qquad b(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \sin ut \, dt. \tag{3}$$

Равенства (2) и (3) можно использовать также для представления интегралом Фурье функции $f(x)$, заданной лишь в промежутке $[0, +\infty)$ и удовлетворяющей в этом промежутке условиям, аналогичным тем, которые сформулированы по отношению ко всему промежутку $(-\infty, +\infty)$. В случае четного продолжения функции $f(x)$ на промежуток $(-\infty, 0)$ используются формулы (2) для коэффициентов четной функции, а при нечетном продолжении функции на промежуток $(-\infty, 0)$ используются формулы (3) для коэффициентов нечетной функции.

Если выражения коэффициентов $a(u)$ и $b(u)$ для четной функции подставить в равенство (1), то получится двойной интеграл Фурье для четной функции $f(x)$:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin ux \, du \int_0^{+\infty} f(t) \sin ut \, dt.$$

Положив

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos xt \, dt, \tag{4}$$

получим

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \varphi(t) \cos xt \, dt. \tag{5}$$

Равенство (4) называется косинус-преобразованием Фурье для функции $f(x)$ и, следовательно, равенство (5) является косинус-преобразованием Фурье функции $\varphi(x)$.

Аналогичным образом для нечетной функции получим

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin xt \, dt,$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \varphi(t) \sin xt \, dt$$

— синус-преобразования Фурье соответственно для функций $f(x)$ и $\varphi(x)$.

Комплексная форма интеграла Фурье для функции $f(x)$ имеет вид

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} c(u)\,e^{iux}\,du,$$

где

$$c(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-iut}\,dt,$$

$$c(u)=2\pi\,\frac{a(u)-ib(u)}{2}=\pi\,[a(u)-ib(u)],\qquad -\infty<u<+\infty.$$

Функция $c(u)$ называется спектральной характеристикой функции $f(x)$. Модуль спектральной характеристики $c(u)$,

$$\Phi(u)=|\,c(u)\,|,$$

называется спектром функции $f(x)$.

Функция $c(u)$ называется также преобразованием Фурье функции $f(t)$. В этом случае ее обычно обозначают $F(u)$, называют изображением функции $f(t)$ и пишут:

$$F(u)\div f(t)\quad\text{или}\quad f(t)\div F(u).$$

Равенство

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\,e^{iut}\,du,$$

имеющее место в правильных точках функции $f(t)$, называется формулой обращения преобразования Фурье.

57. Представить интегралом Фурье следующие функции:

1)
$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|>1,\\ \dfrac{1}{2}, & |x|=1.\end{cases}$$

Использовать полученный результат для вычисления интеграла $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$.

2)
$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn} x, & |x|<1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

3) $f(x)$ задана на сегменте $[-2, 2]$ графиком и равна нулю вне этого сегмента (рис. 3).

4) $f(x)=\begin{cases} x, & |x|\leqslant 1, \\ 0, & |x|>1. \end{cases}$ 5) $f(x)=\begin{cases} |x|, & |x|<1, \\ 0, & |x|>1, \\ \frac{1}{2}, & |x|=1. \end{cases}$

6) $$f(x)=\begin{cases} 1, & -1<x<0, \\ +\frac{1}{2}, & x=-1,\ 0,\ +1, \\ x, & 0<x<1, \\ 0, & |x|>1. \end{cases}$$

7) $f(x)=\begin{cases} \cos x, & |x|\leqslant\frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x|>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$ 8) $f(x)=\begin{cases} \sin x, & |x|\leqslant\pi, \\ 0, & |x|>\pi. \end{cases}$

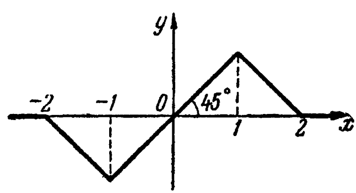


Рис. 3.

58. Функцию $f(x)=e^{-x}$, $0<x<+\infty$, представить интегралом Фурье, продолжая ее: 1) четным образом, 2) нечетным образом на промежуток $(-\infty, 0)$.

Найти значения интегралов $\int\limits_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$ и $\int\limits_0^\infty \frac{x\sin x}{1+x^2}\,dx$.

59. Представить интегралами Фурье функции:

1) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$; 2) $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$.

Указание. Использовать результат задачи 58.

60. Найти функцию $\varphi(u)$, если

$$\int_0^\infty \varphi(u)\cos ux\,du = \frac{1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Указание. Использовать результат задачи 58.

61. Найти функцию $\psi(u)$, если

$$\int_0^\infty \psi(u)\sin ux\,du = e^{-x}, \quad 0 < x < +\infty.$$

Указание. Использовать результат задачи 59.

62. Написать интеграл Фурье в комплексной, а затем в действительной форме для функций:

1) $f(x) = e^{-a|x|}$ $\quad (a > 0)$,

2) $f(x) = xe^{-a|x|}$ $\quad (a > 0)$.

63. Показать, что спектральной характеристикой функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

$a > 0$, является функция $c(u) = \dfrac{1}{a+iu}$. Построить график спектра функции $f(x)$.

64*. Вычислить спектр прямоугольного импульса высотой h и длительностью τ (рис. 4) и построить график спектра.

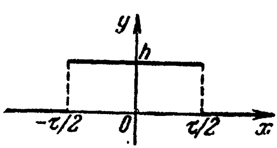


Рис. 4.

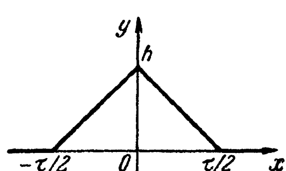


Рис. 5.

65. Вычислить спектр импульса в форме треугольника с основанием τ и высотой h (рис. 5) и построить график спектра.

Указание. Функция $f(x)$ определяется следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases} h\left(1+\frac{2x}{\tau}\right), & -\frac{\tau}{2}\leqslant x\leqslant 0,\\ h\left(1-\frac{2x}{\tau}\right), & 0\leqslant x\leqslant \frac{\tau}{2},\\ 0, & |x|>\frac{\tau}{2}.\end{cases}$$

66. Вычислить спектр косинусоидального импульса, вырезанного из косинусоиды с периодом 2τ и амплитудой h (рис. 6).

Указание. Функция $f(x)$ определяется следующими равенствами:

$$f(x)=\begin{cases} h\cos\frac{\pi x}{\tau}, & |x|\leqslant\frac{\tau}{2},\\ 0, & |x|>\frac{\tau}{2}.\end{cases}$$

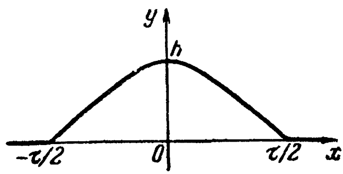


Рис. 6.

67. Записать преобразование Фурье для следующих функций:

1) $f(t)=e^{-|t|}$;

2) $f(t)=te^{-|t|}$.

68. Доказать, что если $f_1(t)\risingdotseq F_1(u)$, $f_2(t)\risingdotseq F_2(u)$, то $c_1f_1(t)+c_2f_2(t)\risingdotseq c_1F_1(u)+c_2F_2(u)$, где c_1 и c_2 постоянные (свойство линейности).

69. Доказать: если $f(t)\risingdotseq F(u)$, то

$$f(\alpha t)\risingdotseq\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{u}{\alpha}\right),\quad \alpha>0.$$

70. Используя предыдущую задачу, найти изображения функций:

1) $f(t)=e^{-a|t|}$ $(a>0)$; 2) $f(t)=te^{-a|t|}$ $(a>0)$.

Указание. См. задачу 67.

71. Доказать, что если $f(t)\risingdotseq F(u)$, то

$$f(t)\cos\omega_0 t\risingdotseq\frac{1}{2}[F(u-\omega_0)+F(u+\omega_0)];$$

$$f(t)\sin\omega_0 t\risingdotseq\frac{1}{2i}[F(u-\omega_0)-F(u+\omega_0)].$$

72. Используя предыдущую задачу, получить изображения следующих функций:

1) $e^{-|t|}\cos t$; 2) $e^{-|t|}\sin t$.

73. Доказать следующие свойства преобразования Фурье:

1) если $f(t) \div F(u)$ и $f(t) = 0$ при $t < 0$, то

$$f'(t) \div iuF(u) - f(0);$$

2) если $f(t) \div F(u)$ и $f(t) = 0$ при $t < 0$, то

$$\int_0^t f(t)\,dt \div \frac{F(u)}{iu};$$

3) если $f(t) \div F(u)$, то

$$f(t \pm t_0) \div e^{\pm iut_0} F(u).$$

ГЛАВА II
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

§ 1. Скалярное поле. Градиент

Если каждой точке M некоторой области пространства поставлен в соответствие скаляр $\varphi(M)$, то говорят, что в этой области задано скалярное поле. Задавая в пространстве прямоугольную (правую) систему координат $Oxyz$, имеем

$$\varphi(M) = \varphi(x, y, z) = \varphi(\boldsymbol{r}),$$

где $M(x, y, z)$ и $\boldsymbol{r} = \overline{OM}$.

Уравнение поверхности уровня скалярного поля

$$\varphi(M) = \mathrm{const} \quad \text{или} \quad \varphi(x, y, z) = C.$$

Производная по направлению $\boldsymbol{n}$ в точке M от функции $\varphi(M) = \varphi(x, y, z)$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \lim_{M_1 \to M} \frac{\varphi(M_1) - \varphi(M)}{MM_1},$$

где M_1 лежит на луче, выходящем из точки M в направлении вектора $\boldsymbol{n}$.

Если функция $\varphi(M) = \varphi(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка, то

$$\frac{\partial\varphi(M)}{\partial n} = \frac{\partial\varphi(M)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\varphi(M)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\varphi(M)}{\partial z}\cos\gamma,$$

где α, β, γ — углы, составляемые вектором $\boldsymbol{n}$ с осями Ox, Oy, Oz.

Градиент скалярной функции $\varphi(M) = \varphi(x, y, z)$ в точке M есть вектор, определяемый равенством

$$\operatorname{grad}\varphi(M) = \frac{\partial\varphi(M)}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi(M)}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi(M)}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

Свойства градиента:

1) Производная от скалярной функции $\varphi(M)$ по любому направлению $\boldsymbol{n}$ равна проекции ее градиента на это направление:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \text{пр}_{\boldsymbol{n}} \operatorname{grad}\varphi(M).$$

2) Направление градиента характеризуется тем, что производная по этому направлению будет наибольшей среди производных от φ в данной точке по всевозможным направлениям.

3) Длина градиента $\varphi(M)$ есть наибольшая из производных по направлениям от $\varphi(M)$ в данной точке:

$$|\operatorname{grad}\varphi(M)| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}.$$

4) Вектор $\operatorname{grad}\varphi(M_0)$ направлен по нормали к поверхности уровня $\varphi(M) = \varphi(M_0)$ в сторону возрастания функции $\varphi(M)$.

5) Если φ и ψ — два скалярных поля, имеющих градиенты, а f — дифференцируемая функция одной или нескольких скалярных переменных в некоторой области, то

$$\operatorname{grad}(\varphi+\psi) = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{grad}\psi;$$
$$\operatorname{grad}(\varphi\cdot\psi) = \varphi\operatorname{grad}\psi + \psi\operatorname{grad}\varphi;$$
$$\operatorname{grad} f(\varphi) = f'(\varphi)\operatorname{grad}\varphi;$$
$$\operatorname{grad} f(\varphi,\psi) = \frac{\partial f}{\partial\varphi}\operatorname{grad}\varphi + \frac{\partial f}{\partial\psi}\operatorname{grad}\psi.$$

74. Найти линии уровня плоского скалярного поля $\varphi(M) = r_1 + r_2$, где $r_1 = MA$, $r_2 = MB$, A и B — фиксированные точки.

75. Найти линии уровня плоского скалярного поля:

1) $\varphi(M) = x^2 + y^2 - 2x$; 2) $\varphi(M) = 2x^2 + 4y^2 + 1$;
3) $\varphi(M) = xy - 4$; 4) $\varphi(M) = 3x + 4y - 7$.

76. Найти поверхности уровня скалярного поля:

1) $\varphi(M) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}$, $R = \text{const}$;

2) $\varphi(M) = \arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

3) $\varphi(M) = z - x^2 - y^2$; 4) $\varphi(M) = x^2 + y^2 - z^2$.

77. Дано плоское скалярное поле $u = \varphi(M) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$. Определить производную поля $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$ в точке A в направлении вектора $n = \overline{AB}$, если A (3, 1), B (6, 5).

78. Дано скалярное поле $u = \varphi(M) = xy^2 + z^3 - xyz$. Найти $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$ в точке A (1,1,2), если вектор n образует с осями координат углы соответственно равные 60°, 45° и 60°.

79. Найти производную поля $u = \ln(x+y+z+1)$ в точке $M(x, y, z)$ по направлению, составляющему равные углы с координатными осями.

80. Найти производную поля $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ в точке $M(x, y, z)$ по направлению радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ этой точки.

81. Дано скалярное поле $u = x^3y^2z$. Найти $\operatorname{grad} u$ в точке $A(x_0, y_0, z_0)$.

82. Дано скалярное поле $u = x^2 + y^2$. Найти $\operatorname{grad} u$.

83. Дано скалярное поле $u = 2xy$. Убедиться, что $\operatorname{grad} u$ в каждой точке поля перпендикулярен проходящей через эту точку линии уровня.

84. Дано скалярное поле $\varphi(x, y, z) = r$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Найти: 1) $\operatorname{grad} r$; 2) $\operatorname{grad} r^2$; 3) $\operatorname{grad} \frac{1}{r}$.

85. Найти градиент потенциала электростатического поля $\varphi(x, y, z) = \frac{e}{r}$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

86. Найти $\operatorname{grad}(\boldsymbol{ra})$, где $\boldsymbol{a}$ — постоянный вектор, а $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки $M(x, y, z)$.

87. Найти $\operatorname{grad} f(r)$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

88. Вычислить $\operatorname{grad} |[\boldsymbol{cr}]|^2$, где $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор, а $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки $M(x, y, z)$.

89. Пусть $\varphi(M)$ — плоское скалярное поле. Известны производные по двум направлениям $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial m}$ в некоторой точке M. Построить вектор $\operatorname{grad} \varphi(M)$.

90. Показать, что $\operatorname{grad} \varphi(M)$ есть полярный вектор.

91. Найти производную поля $u = u(x, y, z)$ по направлению градиента поля $v = v(x, y, z)$. В каком случае эта производная равна нулю?

92. Пусть (r, θ) — полярные координаты точки $M(x, y)$, лежащей в I четверти $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$. Тогда $\theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Найти линии уровня и градиенты этих полей.

93. Дано семейство поверхностей уровня: $\varphi(\boldsymbol{r}) = \text{const}$ скалярного поля $\varphi(\boldsymbol{r})$. Написать векторное уравнение нормали к поверхности уровня, проходящей через точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ и уравнение касательной плоскости в этой точке (используя $\operatorname{grad} \varphi(\boldsymbol{r}_0)$).

94. Найти наибольшую крутизну подъема поверхности $z = \frac{x+\sqrt{y}}{y}$ в точке $M(2, 1, 3)$.

95. Найти наибольшую крутизну подъема поверхности $z = x^y$ в точке $A(2, 2, 4)$.

96. Найти точки, в которых градиент скалярного поля $u = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$ равен $\boldsymbol{i} - \frac{16}{9}\boldsymbol{j}$.

97. Найти точки скалярного поля $u = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$, в которых модуль градиента равен 2.

98. Используя градиент скалярной функции, выбрать на плоскости точку P так, чтобы сумма расстояний ее от трех данных точек M_1, M_2, M_3 была наименьшей.

§ 2. Векторное поле. Операции первого порядка

Если каждой точке M некоторой (будем считать ее односвязной) области пространства поставлен в соответствие вектор $\boldsymbol{a}(M)$, то говорят, что в этой области задано векторное поле. Задавая (правую) систему прямоугольных координат $Oxyz$, имеем: $\boldsymbol{a}(M) = \boldsymbol{a}(x, y, z)$.

Векторными линиями векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$ называются такие линии, которые в каждой своей точке M имеют направление $\boldsymbol{a}(M)$.

Дифференциальные уравнения векторных линий:

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}.$$

99. Электрический ток I течет снизу вверх по бесконечному проводу, совпадающему с осью Oz. Найти вектор $\boldsymbol{H}$ напряженности магнитного поля, создаваемого этим током, в произвольной точке $M(x, y, z)$, используя закон Био — Савара.

100. Определить векторные линии магнитного поля $\boldsymbol{H}$ предыдущей задачи.

101. Найти векторные линии поля $\boldsymbol{a}(M)$:

1) $\boldsymbol{a}(M) = cx\boldsymbol{i} - cy\boldsymbol{j} - 2cz\boldsymbol{k}$ $\quad (c = \text{const})$;

2) $\boldsymbol{a}(M) = (z - y)\boldsymbol{i} + (x - z)\boldsymbol{j} + (y - x)\boldsymbol{k}$;

3) $\boldsymbol{a}(M) = (z - y)^2\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$.

Если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$ есть напряженность силового поля (сила, действующая на единицу массы), то работа A поля при движении материальной точки массы m по дуге MN равна

$$A = m \int\limits_{MN} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r}.$$

Циркуляция векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$ по замкнутому контуру L в выбранном направлении равна

$$\Gamma = \oint\limits_{L} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r}$$

(интегрирование ведется в указанном направлении).

Векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ называется потенциальным в данной области, если его циркуляция вдоль любого замкнутого контура в этой области равна нулю:

$$\Gamma = 0.$$

Чтобы векторное поле $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M) = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ было потенциальным, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих четырех условий:

а) чтобы величина любого криволинейного интеграла $\int\limits_{MN} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r}$ не зависила от формы пути MN;

б) чтобы подынтегральное выражение $\boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r}$ было полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x, y, z)$:

$$\boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz = du;$$

в) чтобы тождественно выполнялись равенства (предполагается, что P, Q и R имеют непрерывные частные производные первого порядка в рассматриваемой области):

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}; \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y};$$

г) чтобы вектор $\boldsymbol{a}(M)$ был градиентом некоторого скалярного поля $\varphi(M)$:

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} \varphi.$$

Силовая функция $u(x, y, z)$ потенциального поля $\boldsymbol{a} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ равна

$$u(x, y, z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)\, dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)\, dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x, y, z)\, dz,$$

где (x_0, y_0, z_0) — фиксированная точка рассматриваемой области. Функция $v(x, y, z) = -u(x, y, z)$ называется потенциалом потенциального поля $\boldsymbol{a}(M)$.

Для потенциального поля работа вдоль пути M_1M_2 равна

$$\int\limits_{M_1M_2} du(x, y, z) = u(M_2) - u(M_1) = v(M_1) - v(M_2).$$

102. Найти циркуляцию вектора $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$ вдоль замкнутой линии, образованной отрезками осей координат Ox и Oy и дугой астроиды $\boldsymbol{r} = R\cos^3 t\boldsymbol{i} + R\sin^3 t\boldsymbol{j}$, лежащей в первой четверти (рис. 7).

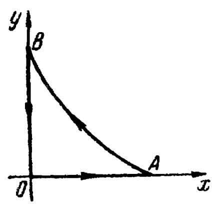


Рис. 7.

103. Найти циркуляцию вектора $\boldsymbol{a} = (zx + y)\boldsymbol{i} + (zy - x)\boldsymbol{j} - (x^2 + y^2)\boldsymbol{k}$ вдоль кривой L: $x^2 + y^2 = 1$, $z = 3$. (Обход контура в направлении против часовой стрелки, если смотреть на него из точки $(0, 0, 4)$.)

104. Твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси Oz. Вычислить циркуляцию поля линейных скоростей вдоль окружности радиуса R, центр которой лежит на оси вращения, если плоскость окружности перпендикулярна оси вращения (циркуляция рассматривается в направлении вращения).

105. Дана напряженность $\boldsymbol{a} = \frac{x}{y}\boldsymbol{i} + \frac{y}{x}\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ силового поля. Найти работу поля при перемещении массы m вдоль одного витка винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ из точки $A(t = 0)$ в точку $B(t = 2\pi)$.

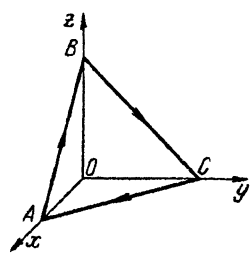


Рис. 8.

106. Найти работу поля $\boldsymbol{a} = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$ при перемещении точки единичной массы вдоль замкнутой линии, состоящей из трех прямолинейных отрезков, лежащих в координатных плоскостях, отсекающих на осях координат отрезки, равные единице.

Направление обхода контура указано на рис. 8.

107. Силовое поле образовано силой, равной по величине расстоянию от начала координат до точки ее приложения и направленной к началу координат. Найти работу поля по перемещению единицы массы вдоль дуги параболы $y^2 = 8x$ от точки с абсциссой $x = 2$ до точки с абсциссой $x = 4$.

108. Показать, что поле $\boldsymbol{a}(M)$ является потенциальным (в естественной области определения), и найти потенциал этого поля:

1) $\boldsymbol{a}(M) = (4x^3y^3 - 3y^2 + 5)\boldsymbol{i} + (3x^4y^2 - 6xy - 4)\boldsymbol{j}$;

2) $\boldsymbol{a}(M) = (10xy - 8y)\boldsymbol{i} + (5x^2 - 8x + 3)\boldsymbol{j}$;

3) $\boldsymbol{a}(M) = (x^2 - 2yz)\boldsymbol{i} + (y^2 - 2xz)\boldsymbol{j} + (z^2 - 2xy)\boldsymbol{k}$;

4) $\boldsymbol{a}(M) = yz(2x + y + z)\boldsymbol{i} + xz(x + 2y + z)\boldsymbol{j} + xy(x + y + 2z)\boldsymbol{k}$.

109. Показать, что векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ потенциально (в естественной области определения), и найти работу этого поля по перемещению единичной массы вдоль пути AB от точки A к точке B:

1) $\boldsymbol{a}(M) = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$; $A(1,\ 2,\ 3)$; $B(6,\ 1,\ 1)$.

2) $\boldsymbol{a}(M) = (x+y+z)^2\boldsymbol{i} + (x + y + z)^2\boldsymbol{j} + (x+y+z)^2\boldsymbol{k}$; $A(1,\ 2,\ -2)$; $B(2,\ 3,\ -3)$.

110. Найти потенциал гравитационного поля $\boldsymbol{a} = -\dfrac{m}{r^3}\boldsymbol{r}$, создаваемого массой m, помещенной в начале координат.

Если двусторонняя поверхность S расположена в области определения векторного поля $a = a(M)$, S_1 и S_2 — стороны поверхности S, то потоком векторного поля $a(M)$ через поверхность S в направлении от S_1 к S_2 называется выражение

$$\Pi = \iint\limits_{S_2} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{\omega},$$

или в координатной форме

$$\Pi = \iint\limits_{S_2} P(x,\ y, z)\, dy\, dz + Q(x,\ y,\ z)\, dz\, dx + R(x,\ y,\ z)\, dx\, dy.$$

111. Найти поток вектора $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ через часть поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, лежащую в первом октанте ($x > 0$; $y > 0$; $z > 0$) в направлении оси Oz.

112. Найти поток радиуса-вектора $\boldsymbol{r}\,(\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$: 1) через боковую поверхность конуса $x^2 + y^2 \leqslant z^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$

в направлении оси Oz и 2) через основание этого конуса в противоположном направлении.

113. Найти поток вектора $\boldsymbol{a}(M) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ через боковую поверхность прямого кругового конуса с основанием в плоскости xOy и вершиной на оси Oz в сторону, противоположную направлению оси Oz, если высота конуса равна 1 *м*, радиус основания 2 *м*.

114. Найти поток вектора $\boldsymbol{a}(M) = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$ через боковую поверхность пирамиды с вершиной в точке $(0, 0, 2)$ и основанием OAB, $O(0, 0, 0)$; $A(2, 0, 0)$; $B(0, 1, 0)$ в направлении оси Oz.

115. Найти поток вектора

1) $\boldsymbol{a}(M) = xy\boldsymbol{i} + zx\boldsymbol{j} + yz\boldsymbol{k}$ через площадку, вырезаемую из плоскости $x + y + z = 2$ плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ в направлении, противоположном оси Oz;

2) $\boldsymbol{a}(M) = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ через часть поверхности $x^2 + y^2 + 2az = a^2$, расположенную во втором октанте ($x < 0$; $y > 0$; $z > 0$) в направлении оси Oz;

3) $\boldsymbol{a}(M) = xy\boldsymbol{i} - 5z^2\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$ через круг, отсекаемый на плоскости $x + y = 3$ сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ в направлении оси Ox.

Дивергенция векторного поля $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$ в точке M_0 определяется равенством

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M_0) = \lim_{V \to M_0} \frac{\displaystyle\iint_{S_V} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{\omega}}{V},$$

где S_V — бесконечно малая замкнутая поверхность, внутри которой лежит точка M_0, а V — объем тела, ограниченного этой поверхностью. Если $\boldsymbol{a}(M) = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k}$, то

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Свойства дивергенции. Если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — векторные поля, а φ — скалярная функция, то

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \operatorname{div} \boldsymbol{a} + \operatorname{div} \boldsymbol{b},$$
$$\operatorname{div}(\varphi \boldsymbol{a}) = \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{a} + \operatorname{grad} \varphi\, \boldsymbol{a}.$$

Формула Остроградского. Если проекции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ вектора $\boldsymbol{a} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ непрерывны вместе со своими частными производными в замкнутой области D, ограниченной поверхностью S, то

$$\iint_S \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{\omega} = \iiint_D \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dx\, dy\, dz$$

или в координатной форме

$$\iint_S P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy = \iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

$\left(\text{интеграл } \iint_S \text{ берется по внешней стороне поверхности } S\right)$.

Векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ называется соленоидальным в данной области, если в каждой точке этой области $\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M) = 0$. Потоки векторного поля через различные сечения векторной трубки соленоидального поля равны между собой.

Вихрь (ротор) векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$ в точке M_0 определяется равенством

$$\text{пр}_{\boldsymbol{n}} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}(M_0) = \lim_{S \to M_0} \frac{\oint_C \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r}}{S},$$

где $\boldsymbol{n}$ — вектор любого направления с началом в точке M_0, C — контур бесконечно малой площадки, содержащей точку M_0 и перпендикулярной направлению $\boldsymbol{n}$, а S — площадь этой площадки. Контур C пробегается против часовой стрелки, если смотреть на него из конца вектора $\boldsymbol{n}$. Если $\boldsymbol{a}(M) = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$, то

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

Свойства вихря. Если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — векторные поля и φ — скалярное поле, то

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \operatorname{rot} \boldsymbol{a} + \operatorname{rot} \boldsymbol{b}, \qquad \operatorname{rot}(\varphi \boldsymbol{a}) = \varphi \operatorname{rot} \boldsymbol{a} + [\operatorname{grad} \varphi \boldsymbol{a}].$$

Векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ называется безвихревым в данной области, если $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}(M) = 0$ в каждой ее точке M.

Формула Стокса. Если проекции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ вектора $\boldsymbol{a} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ непрерывны вместе со своими частными производными на незамкнутой кусочно-гладкой поверхности S, ограниченной кусочно-гладким контуром C и в точках, близких к S, то

$$\oint_C \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = \iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{\omega}.$$

Направление обхода контура C берется положительным на выбранной стороне поверхности S. В координатной форме:

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$
$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

116. Найти дивергенцию векторного поля:

1) $\boldsymbol{a}(M) = \boldsymbol{r}(M) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$;

2) $\boldsymbol{a}(M) = \frac{e}{r^2}\boldsymbol{r}_1$, где $\boldsymbol{r}_1$ — единичный вектор — вектор индукции единичного заряда e, помещенного в начале координат;

3) $\boldsymbol{a}(M) = \boldsymbol{v}(M) = [\boldsymbol{\omega r}]$ — линейная скорость вращения жидкости ($\boldsymbol{\omega} = \mathrm{const}$ — угловая скорость);

4) $\boldsymbol{a}(M) = \boldsymbol{H}(M) = \frac{2J}{\rho^2}(-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j})$ — напряженность магнитного поля, $J = \mathrm{const}$, $\rho = \mathrm{const}$;

5) $\boldsymbol{a}(M) = r\boldsymbol{l}$, где $\boldsymbol{l} = l_x\boldsymbol{i} + l_y\boldsymbol{j} + l_z\boldsymbol{k}$ — постоянный вектор, а $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

117. Найти

$$\mathrm{div}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}.$$

118. Какие из следующих векторных полей являются соленоидальными (в естественной области определения):

1) $\boldsymbol{a}(M) = x(z^2 - y^2)\boldsymbol{i} + y(x^2 - z^2)\boldsymbol{j} + z(y^2 - x^2)\boldsymbol{k}$,

2) $\boldsymbol{a}(M) = 3z(y^2 + x^2)\boldsymbol{i} - 2y(x^2 + z^2)\boldsymbol{j} + 4x(z^2 + y^2)\boldsymbol{k}$?

119. Используя формулу Остроградского, вычислить:

1) поток вектора $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ через полную поверхность пирамиды, ограниченной плоскостями $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; $x + y + z = a$ $(a > 0)$;

2) поток вектора $\boldsymbol{a}(M) = m\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ (m — постоянная) через произвольную замкнутую поверхность S, окружающую начало координат;

3) поток вектора $\boldsymbol{a}(M) = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + zx\boldsymbol{k}$ через полную поверхность восьмой части шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$, лежащей в первом октанте $(x, y, z \geqslant 0)$;

4) поток вектора $\boldsymbol{a}(M)=x^2\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$ через лежащую в I октанте замкнутую поверхность, ограниченную координатными плоскостями и параболоидом

$$x^2+y^2+2az=a^2;$$

5) поток вектора $\boldsymbol{a}(M)=x^2y^3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ через полусферу $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ в направлении оси Oz.

120. Найти 1) $\operatorname{rot}\boldsymbol{r}$; 2) $\operatorname{rot}(f(r)\boldsymbol{r})$.

121. Какие из следующих векторных полей являются безвихревыми (в естественной области определения):

1) $\boldsymbol{a}(M)=(10xy-3y^3)\boldsymbol{i}+(5x^2-9xy^2+4y^3)\boldsymbol{j}$;

2) $\boldsymbol{a}(M)=3x^2y^2z\boldsymbol{i}+2x^3yz\boldsymbol{j}+x^3y^2\boldsymbol{k}$;

3) $\boldsymbol{a}(M)=(5x^3-4xy)^2\boldsymbol{i}-(2x+4x^2y^2-y^4)\boldsymbol{j}$?

122. Используя формулу Стокса, вычислить:

1) поток вихря поля вектора $\boldsymbol{a}(M)=y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}+x\boldsymbol{k}$ через часть поверхности $z=2(1-x^2-y^2)$, лежащую над плоскостью xOy;

2) циркуляцию вектора $\boldsymbol{a}(M)$:

$$\boldsymbol{a}(M)=(y+z)\boldsymbol{i}+(z+x)\boldsymbol{j}+(x+y)\boldsymbol{k}$$

вдоль эллипса $C\{x=a\sin^2 t;\ y=2a\sin t\cos t;\ z=a\cos^2 t,\ 0\leqslant t\leqslant\pi\}$, пробегаемого в направлении возрастания t.

§ 3. Символика Гамильтона. Операции второго порядка. Векторные операции в криволинейных координатах

Оператор Гамильтона ∇ (набла) — символический вектор:

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Операции первого порядка:

$$\nabla\varphi=\operatorname{grad}\varphi;\quad \nabla\boldsymbol{a}=\operatorname{div}\boldsymbol{a};\ [\nabla\boldsymbol{a}]=\operatorname{rot}\boldsymbol{a}.$$

Операции второго порядка:

$$\nabla\nabla\varphi=\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2};$$

$$[\nabla\nabla\varphi]=\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi=0;$$

$$\nabla\nabla\boldsymbol{a}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a};$$

$$\nabla[\nabla\boldsymbol{a}]=\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=0;$$

$$[\nabla[\nabla\boldsymbol{a}]]=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a}-\Delta\boldsymbol{a},$$

где

$$\Delta a = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}.$$

Пусть u, v, w — криволинейные координаты точек пространства. Координатная поверхность есть геометрическое место точек (u, v, w), у которых или $u = \text{const}$, или $v = \text{const}$, или $w = \text{const}$. Пересечение двух координатных поверхностей называется координатной линией.

Между прямоугольными координатами x, y, z и криволинейными координатами u, v, w точек устанавливается взаимно однозначное соответствие, описываемое формулами:

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w),$$

а также формулами:

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z).$$

Будем предполагать, что функции $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$ непрерывны, имеют непрерывные частные производные первого порядка и якобиан $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ не обращается в нуль в рассматриваемой области пространства $Ouvw$. При этих условиях и функции $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ будут обладать такими же свойствами в соответствующей области пространства $Oxyz$.

Пусть $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. Векторы $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$, $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$, $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}$ — ненулевые. Длины этих векторов

$$H_u = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\right|, \quad H_v = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|, \quad H_w = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}\right|$$

называются коэффициентами Ламе.

Векторы

$$\boldsymbol{e}_u = \frac{1}{H_u}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}; \quad \boldsymbol{e}_v = \frac{1}{H_v}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}; \quad \boldsymbol{e}_w = \frac{1}{H_w}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}$$ — единичные.

Система криволинейных координат $Ouvw$ называется ортогональной, если в каждой точке u, v, w координатные линии попарно ортогональны, т. е. в каждой точке (u, v, w) векторы $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$, $\boldsymbol{e}_w$ попарно ортогональны.

Градиент скалярного поля $\varphi = \varphi(M)$ в ортогональных криволинейных координатах $Ouvw$:

$$\operatorname{grad} \varphi(M) = \boldsymbol{e}_u \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{H_u} + \boldsymbol{e}_v \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{H_v} + \boldsymbol{e}_w \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial w}}{H_w}.$$

Дивергенция векторного поля $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$ в ортогональных криволинейных координатах $Ouvw$:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M) = \frac{\frac{\partial}{\partial u}(a_u H_v H_w) + \frac{\partial}{\partial v}(a_v H_w H_u) + \frac{\partial}{\partial w}(a_w H_u H_v)}{H_u H_v H_w}.$$

Вихрь векторного поля $a = a(M)$ в ортогональных криволинейных координатах $Ouvw$:

$$\operatorname{rot} a(M) = e_u \frac{\frac{\partial}{\partial v}(a_w H_w) - \frac{\partial}{\partial w}(a_v H_v)}{H_v H_w} +$$

$$+ e_v \frac{\frac{\partial}{\partial w}(a_u H_u) - \frac{\partial}{\partial u}(a_w H_w)}{H_w H_u} + e_w \frac{\frac{\partial}{\partial u}(a_v H_v) - \frac{\partial}{\partial v}(a_u H_u)}{H_u H_v}.$$

Оператор Лапласа в ортогональных криволинейных координатах $Ouvw$:

$$\Delta\varphi(M) = \frac{\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}}{H_u^2} + \frac{\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}}{H_v^2} + \frac{\frac{\partial^2\varphi}{\partial w^2}}{H_w^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{1}{H_u^2}\frac{\partial}{\partial u}\ln\frac{H_v H_w}{H_u} +$$

$$+ \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{1}{H_v^2}\frac{\partial}{\partial v}\ln\frac{H_w H_u}{H_v} + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{1}{H_w^2}\frac{\partial}{\partial w}\ln\frac{H_u H_v}{H_w}.$$

Декартовы координаты x, y, z точки M выражаются через ее цилиндрические координаты r, φ, z по формулам:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z,$$

где $0 \leqslant r < +\infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$.

Пусть $f = f(M)$ — скалярное, а $a = a(M)$ — векторное поля, определенные в некоторой области пространства. Тогда

$$\operatorname{grad} f(M) = e_r \frac{\partial f}{\partial r} + e_\varphi \frac{\frac{\partial f}{\partial \varphi}}{r} + e_z \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\operatorname{div} a(M) = \frac{a_r}{r} + \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} a(M) = e_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right) +$$

$$+ e_\varphi\left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right) + e_z\left(\frac{a_\varphi}{r} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}\right),$$

$$\Delta f(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}.$$

Декартовы координаты x, y, z точки M выражаются через ее сферические координаты по формулам:

$$x = r\cos\theta\cos\varphi; \ y = r\cos\theta\sin\varphi; \ z = r\sin\theta,$$

$$0 \leqslant r < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Если $f = f(M)$ — скалярное и $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$ — векторное поля, то

$$\operatorname{grad} f(M) = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{\frac{\partial f}{\partial \varphi}}{r \cos \theta} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{\frac{\partial f}{\partial \theta}}{r},$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial (a_\theta \cos \theta)}{\partial \theta},$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a}(M) = \boldsymbol{e}_r \left(\frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} - \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial (a_\varphi \cos \theta)}{\partial \theta} \right) +$$

$$+ \boldsymbol{e}_\varphi \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} \right) + \boldsymbol{e}_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r a_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right),$$

$$\Delta f(M) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} +$$

$$+ \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right).$$

123. Найти: 1) $\operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \varphi)$, 2) $\operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \psi)$, где $\varphi = \varphi(M)$ и $\psi = \psi(M)$ — скалярные функции.

124. П р а в и л о. При применении оператора ∇ к произведениям скалярных ($\varphi = \varphi(M)$, $\psi = \psi(M)$) и векторных ($\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(M)$) полей: $\varphi\psi$; $\varphi\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{ab}$; $[\boldsymbol{ab}]$ можно поступать так: применить оператор ∇ к каждому из сомножителей отдельно, считая другой постоянным, и результаты сложить; затем каждое полученное слагаемое преобразовать по правилам векторной алгебры так, чтобы оператор ∇ стоял на предпоследнем месте перед переменным множителем.

Используя сформулированное выше правило, доказать справедливость следующих формул:

1. $\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$;
2. $\operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{a}) = \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \operatorname{grad} \varphi$;
3. $\operatorname{div}[\boldsymbol{ab}] = \boldsymbol{b} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \operatorname{rot} \boldsymbol{b}$;
4. $\operatorname{rot}(\varphi\boldsymbol{a}) = \varphi \operatorname{rot} \boldsymbol{a} + [\operatorname{grad} \varphi, \boldsymbol{a}]$;
5. $\operatorname{grad}(\boldsymbol{ab}) = (\boldsymbol{a}\nabla)\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}\nabla)\boldsymbol{a} + [\boldsymbol{a}, \operatorname{rot} \boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{b}, \operatorname{rot} \boldsymbol{a}]$;
6. $\operatorname{rot}[\boldsymbol{ab}] = (\boldsymbol{a}\nabla)\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}\nabla)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \operatorname{div} \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \operatorname{div} \boldsymbol{a}$;
7. $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{a} - \Delta \boldsymbol{a}$.

125. Найти $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)]$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. В каком случае $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)] = 0$?

126. Производная вектора $\boldsymbol{a}(M)$ в точке M по направлению вектора $\boldsymbol{n}$ определяется равенством

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}(M)}{\partial n} = \lim_{M' \to M} \frac{\boldsymbol{a}(M') - \boldsymbol{a}(M)}{M'M},$$

где M' — точка, лежащая на луче, выходящем из точки M в направлении вектора $\boldsymbol{n}$.

Полагая $\boldsymbol{n} = \cos\alpha \boldsymbol{i} + \cos\beta \boldsymbol{j} + \cos\gamma \boldsymbol{k}$, показать справедливость формул:

$$1)\ \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial n} = \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial z}\cos\gamma;\quad 2)\ \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial n} = (\boldsymbol{n}\nabla)\boldsymbol{a}.$$

127. Градиентом вектора $\boldsymbol{a}$ по вектору $\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{v}|\boldsymbol{n}$, где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, называется выражение $(\boldsymbol{v}, \nabla)\boldsymbol{a}$. Показать, что градиент вектора $\boldsymbol{a}$ по вектору $\boldsymbol{v}$ равен произведению производной вектора $\boldsymbol{a}$ по направлению вектора $\boldsymbol{v}$ на длину вектора $\boldsymbol{v}$

$$(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{v}|\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial n}.$$

128. Дано скалярное поле $f = f(M)$ в цилиндрических координатах: $f(r, \varphi, z) = r^2\varphi + z^2\varphi^3 - r\varphi z + 3$. Найти $\operatorname{grad} f(M)$ и $\Delta f(M)$.

129. Дано векторное поле $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$ в цилиндрических координатах: $\boldsymbol{a}(r, \varphi, z) = (z^2 + r)\boldsymbol{e}_r + zr\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + (z^3 + r\varphi)\boldsymbol{e}_z$. Найти $\operatorname{div}\boldsymbol{a}(M)$ и $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(M)$.

130. Дано скалярное поле $f = f(M)$ в сферических координатах: $f(r, \varphi, \theta) = r^2\varphi\theta + r^3\varphi^2 + \varphi + \theta^2 + 1$. Найти $\operatorname{grad} f(M)$ и $\Delta f(M)$.

131. Дано векторное поле $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$ в сферических координатах: $\boldsymbol{a}(r, \varphi, \theta) = r^2\varphi\boldsymbol{e}_r + (r\varphi^2\theta + r^3)\boldsymbol{e}_\varphi + (r^4 + 1)\boldsymbol{e}_\theta$. Найти $\operatorname{div}\boldsymbol{a}(M)$ и $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(M)$.

132. Пусть $\varphi(\boldsymbol{r}, t) = \varphi(x, y, z, t) = \varphi(M, t)$ — скалярная дифференцируемая функция в некоторой области D.

Показать, что частная производная

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(M, t + \Delta t) - \varphi(M, t)}{\Delta t}$$

и полная производная

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(M', t + \Delta t) - \varphi(M, t)}{\Delta t}$$

связаны соотношением

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\boldsymbol{v}\ \operatorname{grad}\varphi,$$

где $v_x=\frac{dx}{dt}$, $v_y=\frac{dy}{dt}$, $v_z=\frac{dz}{dt}$.

§ 4. Смешанные задачи из теории поля

Пусть $\varphi=\varphi(M)$ — скалярное и $\boldsymbol{a}(M)=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ — векторное поля, заданные в некоторой области пространства $Oxyz$, а S — кусочно-гладкая двусторонняя поверхность, лежащая в этой области. По определению,

$$\iint\limits_S \varphi(M)\,d\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{i}\iint\limits_S \varphi(M)\,dy\,dz+\boldsymbol{j}\iint\limits_S \varphi(M)\,dz\,dx+\boldsymbol{k}\iint\limits_S \varphi(M)\,dx\,dy,$$

$$\iint\limits_S [\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{\omega}]=\boldsymbol{i}\iint\limits_S Q\,dx\,dy-R\,dz\,dx+\boldsymbol{j}\iint\limits_S R\,dy\,dz-P\,dx\,dy+\boldsymbol{k}\iint\limits_S P\,dz\,dx-Q\,dy\,dz.$$

Аналогичным образом определяются криволинейные интегралы $\int\limits_{AB}\varphi(M)\,d\boldsymbol{r}$, $\int\limits_{AB}[\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}]$, $\int\limits_{AB}\boldsymbol{a}\,dS$, поверхностный интеграл $\iint\limits_S \boldsymbol{a}\,dS$, тройной интеграл $\iiint\limits_V \boldsymbol{a}\,dV$ и др.

Объемными (пространственными) производными скалярного поля $\varphi(M)$ и векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$ в точке M_0 называются следующие величины:

$$\lim_{V\to M_0}\frac{\iint\limits_{S_V}\varphi(M)\,d\boldsymbol{\omega}}{V}=\operatorname{grad}\varphi(M_0),$$

$$\lim_{V\to M_0}\frac{\iint\limits_{S_V}\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{\omega}}{V}=\operatorname{div}\boldsymbol{a}(M_0),\qquad \lim_{V\to M_0}\frac{\iint\limits_{S_V}[\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{\omega}]}{V}=\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(M_0),$$

где S_V — бесконечно малая замкнутая поверхность, внутри которой лежит точка M_0, а V — объем тела, ограниченного этой поверхностью.

Обозначим через S_1 и S_2 стороны двусторонней кусочно-гладкой поверхности S. Через поверхность S в направлении от S_1 к S_2 можно определить:

1) векторный поток скалярного поля $\varphi(M)$

$$\boldsymbol{P} = \iint_{S_2} \varphi(M)\, d\boldsymbol{\omega};$$

2) скалярный поток векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$

$$\Pi = \iint_{S_2} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{\omega};$$

3) векторный поток векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$

$$\boldsymbol{R} = \iint_{S_2} [\boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{\omega}].$$

133. Найти объемную (пространственную) производную.

1) скалярного поля $\varphi(M) = x^2yz + 3xy^2 + z^3 - 1$ в точке $(3, -4, 1)$;

2) векторного поля $\boldsymbol{a}(M) = (2xy + 1)\boldsymbol{i} + xy^2z\boldsymbol{j} + (z^2x + y - 1)\boldsymbol{k}$ в точке $(1, -2, 3)$.

134. Модуль радиуса-вектора $\overline{OM} = \boldsymbol{r}$ есть скалярная функция двух точек O и M. Найти $\operatorname{grad} r$ в следующих случаях: 1) точка O фиксирована, r рассматривается как функция точки M, 2) точка M фиксирована, r рассматривается как функция точки O.

135. Вычислить:

1) векторный поток $\boldsymbol{P}$ скалярного поля $\varphi = xyz$ через лежащую в I октанте часть плоскости $x + y + z = 1$ в направлении от стороны S_1, обращенной к началу координат, к противоположной стороне S_2;

2) скалярный поток Π векторного поля $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ через ту же поверхность;

3) векторный поток $\boldsymbol{R}$ векторного поля $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ через ту же поверхность.

136. Показать, что

$$\operatorname{grad} \varphi(M_0) = \lim_{V \to M_0} \frac{\displaystyle\iint_{S_V} \varphi \boldsymbol{n}\, dS}{V},$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к замкнутой поверхности S_V.

Указание. Применить формулу Остроградского к вектору $\boldsymbol{a}(M) = \boldsymbol{c}\varphi(M)$, где $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор.

137. Применяя формулу Остроградского к векторным полям: 1) $\boldsymbol{a} = \varphi\boldsymbol{c}$, 2) $\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{bc}]$, где $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор, установить справедливость формул:

1) $$\iiint\limits_V \nabla\varphi\, dV = \iint\limits_{S_V} \boldsymbol{n}\varphi\, dS,$$

2) $$\iiint\limits_V [\nabla\boldsymbol{b}]\, dV = \iint\limits_{S_V} [\boldsymbol{nb}]\, dS.$$

Примечание. Формулы 1), 2) и формулу Остроградского

$$\iiint\limits_V \nabla\boldsymbol{a}\, dV = \iint\limits_{S_V} \boldsymbol{na}\, dS$$

можно объединить в одну

$$\iiint\limits_V \nabla(\ldots)\, dV = \iint\limits_S \boldsymbol{n}(\ldots)\, dS.$$

138. Применяя формулу Стокса к векторным полям 1) $\boldsymbol{a} = \varphi\boldsymbol{c}$, 2) $\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{bc}]$, где $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор, показать справедливость формул:

1) $$\iint\limits_S [\boldsymbol{n}\nabla\varphi]\, dS = \oint\limits_C \varphi\, d\boldsymbol{r},$$

2) $$\iint\limits_S [[\boldsymbol{n}\nabla]\,\boldsymbol{b}]\, dS = \oint\limits_C [d\boldsymbol{r}\boldsymbol{b}],$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к незамкнутой поверхности S в выбранную на ней сторону, а C — контур, ограничивающий поверхность S, пробегаемый в положительном направлении на выбранной стороне поверхности.

Примечание. Формулы 1), 2) и формулу Стокса

$$\iint\limits_S \boldsymbol{n}\,[\nabla\boldsymbol{a}]\, dS = \oint\limits_C \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r}$$

можно объединить в одну

$$\iint\limits_S [\boldsymbol{n}\nabla](\ldots)\, dS = \oint\limits_C d\boldsymbol{r}(\ldots).$$

139. Записать формулу Остроградского для полей: 1) $\boldsymbol{a}=\varphi\nabla\psi$ и 2) $\boldsymbol{a}=\varphi\nabla\psi-\psi\nabla\varphi$, где $\varphi=\varphi(M)$ и $\psi=\psi(M)$ — скалярные функции.

140. Скалярное поле $\varphi=\varphi(M)$ задано в ограниченной области V выражением

$$\varphi(M)=-\iiint\limits_V \frac{\mu(K)}{r(M, K)}\, dV(K),$$

где $\mu(K)$ — любая непрерывная функция в области V, а $r(M, K)$ — расстояние между точками M и K. Найти градиент этого скалярного поля.

141. Векторное поле $\boldsymbol{R}(M)$ задано выражением

$$\boldsymbol{R}(M)=\iiint\limits_V \frac{\varphi(K)\,\boldsymbol{e}(M, K)}{r^2(M, K)}\, dV(K),$$

где $\varphi(K)$ — любая непрерывная функция в области V, $\boldsymbol{e}(M, K)$ — единичный вектор направления $\overline{KM}$. Найти поток вектора $\boldsymbol{R}(M)$ через границу S объема V и $\operatorname{div}\boldsymbol{R}(M)$.

142. Пусть $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(K)$ — векторное поле, отличное от нуля только в некоторой ограниченной области V. Предположим, что проекции $a_x(K)$, $a_y(K)$, $a_z(K)$ поля $\boldsymbol{a}(K)$ имеют непрерывные частные производные. Построим векторное поле

$$\boldsymbol{A}(M)=\iiint\limits_V \frac{\boldsymbol{a}(K)\, dV(K)}{r(M, K)}.$$

Найти $\operatorname{div}\boldsymbol{A}(M)$ и $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}(M)$.

143. Показать, что векторное поле

$$\boldsymbol{Q}(M)=-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_V \frac{\rho(K)\,\boldsymbol{e}(M, K)}{r^2(M, K)}\, dV(K),$$

где $\rho(K)$ — непрерывная функция в области V, удовлетворяет системе уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{div}\boldsymbol{Q}(M)=\rho(M), \\ \operatorname{rot}\boldsymbol{Q}(M)=0. \end{cases}$$

Указание. Использовать результаты задач 141 и 142.

144. Электростатическое поле образовано зарядом e, находящимся в начале координат. Найти напряженность поля в точке M и потенциал поля.

145. Электростатическое поле образовано зарядами e_1, $e_2, \ldots, e_n$, находящимися в точках $M_1, M_2, \ldots, M_n$ ($\overline{OM}_1 = \boldsymbol{r}_1$, $\overline{OM}_2 = \boldsymbol{r}_2, \ldots, \overline{OM}_n = \boldsymbol{r}_n$). Найти потенциал поля.

146. На поверхности S распределен заряд с плотностью $\sigma = \sigma(K)$. Показать, что в любой точке M потенциал поля зарядов равен

$$\varphi(M) = \iint\limits_S \frac{\sigma(K)}{r(M, K)} \, dS(K).$$

147. В объеме V распределен заряд с плотностью $\rho = \rho(K)$. Показать, что в любой точке M потенциал поля зарядов равен

$$\varphi(M) = \iiint\limits_V \frac{\rho(K)}{r(M, K)} \, dV(K).$$

ГЛАВА III
АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Ряды с комплексными членами. Степенные ряды. Элементарные функции комплексного переменного

Число $z = x + iy$ называется пределом последовательности комплексных чисел $z_n = x_n + iy_n$, $n = 1, 2, \ldots$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|z_n - z| < \varepsilon.$$

Для того чтобы $z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$, необходимо и достаточно, чтобы $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Степенным рядом называется функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^n$, где A_n, $n = 1, 2, \ldots$, и a — комплексные числа.

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^n$ либо сходится только в точке $z = 0$, либо сходится во всей плоскости z, либо для него существует так называемый круг сходимости $|z-a| < R$, внутри которого ряд сходится, а вне расходится. На границе круга сходимости могут лежать как точки сходимости, так и точки расходимости ряда. Радиус R $(0 < R < +\infty)$ этого круга называется радиусом сходимости ряда. В случае, если ряд сходится только в точке $z = a$ или во всех точках z плоскости, принято говорить, что круг сходимости является соответственно точкой $(R = 0)$ или всей плоскостью $(R = +\infty)$.

Ряд $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} A_n (z-a)^n$ по положительным и отрицательным степеням $z - a$ является обобщением степенного ряда. Область сходимости этого ряда состоит из общих точек сходимости его главной части $\sum\limits_{n=-1}^{-\infty} A_n (z-a)^n$ и правильной части $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^n$.

Если ряд $\sum_{n=-1}^{-\infty} A_n (z-a)^n$ расходится внутри круга $|z-a| \leqslant r$ и сходится вне этого круга, т. е. при $|z-a| > r$, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^n$ имеет круг сходимости $|z-a| < R$, где $r < R$, то ряд $\sum_{-\infty}^{+\infty} A_n (z-a)^n$ сходится в кольце $r < |z-a| < R$ и расходится вне этого кольца, т. е. при $|z-a| < r$ и $|z-a| > R$. Такое кольцо будем называть кольцом сходимости данного ряда. На границе кольца сходимости могут лежать как точки сходимости, так и точки расходимости ряда. Если $r=0$, $R=+\infty$, то «кольцо» — плоскость z с выколотой точкой $z=a$; если $r>0$, $R=+\infty$, то «кольцо» — внешность круга, т. е. $|z-a|>r$; если же $r=0$, $R<+\infty$, то «кольцо» — окрестность точки a с выколотой точкой a: $0<|z-a|<R$.

148. Построить на комплексной плоскости множества точек z, определяемых соотношениями: 1) $|z-i|<2$; 2) $1<|z-3+4i| \leqslant 2$; 3) $|z|>4$; 4) $\operatorname{Re}(z)>3$; 5) $0<\operatorname{Im}(z) \leqslant 1$.

149. Построить множества точек плоскости, определяемых соотношениями: 1) $0 \leqslant \arg z < \frac{\pi}{2}$; 2) $|\operatorname{Re}(z)|<1$; 3) $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$; 4) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|<1$; 5) $|z^2-1|<1$.

150. Найти пределы последовательностей:

1) $z_n = \frac{n+3}{2n+1} + i\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n=1, 2, 3, \ldots$;

2) $z_n = n \sin\frac{1}{n} + i\,\frac{n^2+3}{4n^2+5}$, $n=1, 2, 3, \ldots$;

3) $z_n = n \operatorname{tg}\frac{1}{n} + i\,\frac{n^5}{2^n}$, $n=1, 2, 3, \ldots$

151. Исследовать на сходимость ряды $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, где:

1) $c_n = \frac{1+ni}{2^n}$;

2) $c_n = \cos n + i \sin n$;

3) $c_n = \frac{\cos n + i \sin n}{n^2}$.

152. Найти кольцо (круг) сходимости ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n (z-2)^n}{(n+1)(n+2)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n^2 (1+i)^n}$;

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3}{(z-1-3i)^n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z-1+i)^n}$;

5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{4+3i}{z-2i}\right)^n$; 6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n$;

7) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{3^n (n+1)} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{(z+i)^n}$;

8) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1-i)^n}{5^n (1+ni)} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n+1)}{(z+1-i)^n}$.

Элементарные функции комплексного переменного:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

для любого комплексного числа z.

Формулы Эйлера:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z; \qquad e^{-iz} = \cos z - i \sin z;$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Показательная форма записи комплексного числа: $z = re^{i\varphi}$, где $r = |z|$, φ — любое из значений аргумента числа z.

Связь между показательной и гиперболическими функциями:

$$e^z = \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z; \qquad e^{-z} = \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z;$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями

$$\operatorname{ch} iz = \cos z; \qquad \cos iz = \operatorname{ch} z;$$
$$\operatorname{sh} iz = i \sin z; \qquad \sin iz = i \operatorname{sh} z.$$

Функции e^z, $\operatorname{ch} z$ и $\operatorname{sh} z$ имеют период $2\pi i$:

$$e^{z+2\pi i} = e^z; \qquad e^{i(z+2\pi)} = e^{iz};$$
$$\operatorname{ch}(z + 2\pi i) = \operatorname{ch} z; \qquad \operatorname{sh}(z + 2\pi i) = \operatorname{sh} z.$$

Функции $\cos z$ и $\sin z$ имеют период 2π:

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z; \qquad \sin(z + 2\pi) = \sin z.$$

Натуральный логарифм комплексного числа, $z \neq 0$:

$$\operatorname{Ln} z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi),$$

где $r = |z|$; φ — любое из значений аргумента числа z, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Главное значение натурального логарифма числа z:

$$\operatorname{Ln} z = \ln r + i\varphi, \quad \text{где} \quad \varphi = \arg z.$$

Степень с комплексным основанием A, $A \neq 0$, и комплексным показателем B определяется равенством

$$A^B = e^{B \operatorname{Ln} A}.$$

Обратные тригонометрические функции:

$$\operatorname{Arcsin} z = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2});$$

$$\operatorname{Arccos} z = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1});$$

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{i - z}{i + z}, \quad z \neq \pm i.$$

Обратные гиперболические функции:

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}),$$

$$\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z}, \quad z \neq \pm 1.$$

153. Вычислить действительные и мнимые части, модули и аргументы следующих комплексных чисел: 1) e^{3-2i}; 2) $\cos(1-i)$; 3) $\operatorname{sh}(2+3i)$; 4) $\operatorname{th}(1+i)$; 5) $\operatorname{Ln}(\sqrt{2}-i\sqrt{2})$; 6) $\operatorname{Arcsin} i$; 7) $\operatorname{Arch} 2$; 8) $\operatorname{Arctg} 2i$; 9) 3^{1+i}; 10) i^{i+1}.

154. Вычислить действительную и мнимую части функций:

1) e^{z^2}; 2) $z^2 \sin z$; 3) $\operatorname{tg} z$; 4) $\operatorname{Ln} z$; 5) z^{3+i}.

155. Решить уравнения:

1) $\sin z = 2$; 2) $\cos z = 0$; 3) $\operatorname{sh} z = i$.

156. Составить в комплексной форме уравнения: 1) прямой, проходящей через точки z_1 и z_2; 2) оси Ox и оси Oy; 3) окружности радиуса r с центром в точке z_0; 4) прямой $Ax+By+C=0$; 5) окружности $x^2+y^2+2x-2y+1=0$.

157. Написать в действительной форме уравнения линий:

1) $z = z_0 + re^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $r \geqslant 0$; 2) $z\bar{z}+z+\bar{z}-1=0$; 3) $z = a\cos t + ib\sin t$, $0 \leqslant t < 2\pi$, $a > 0$, $b > 0$; 4) $z = at + ia(1+e^{-it})$, $0 \leqslant t < 2\pi$, a — действительное число; 5) $z\bar{z}+iz-i\bar{z}-2=0$.

158. Построить на комплексной плоскости образы точки $z_1 = 2+i$ при отображениях: 1) $w = 3z+i$; 2) $w = \dfrac{16}{z}$; 3) $w = \dfrac{z}{z+i}$.

159. Найти образы линии $A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$ (A, B, C, D — действительные числа) при отображении $w=f(z)$ в следующих случаях: 1) $w = rz$, $r > 0$; 2) $w = e^{\alpha i}z$, α — действительное число; 3) $w = z+a$, a — любое комплексное число.

160. При отображении $w = z^2$ найти образы линий:

1) $x = 2$, 2) $|z| = 3$.

161. При отображении $w = 3z+i$ найти образы линий:

1) $y = 2x+3$, $-\infty < x < +\infty$; 2) $x^2+y^2-2x=0$.

162. Найти образы линии $x^2+y^2-2x-3x=0$ при отображениях $w = \dfrac{1}{z}$ и $w = \dfrac{1}{\bar{z}}$.

163. При отображении $w = \dfrac{z-3}{z+3}$ найти образ линии $y = 2x$, $-\infty < x < +\infty$.

164. Найти образ линии $x^2+y^2=1$ при отображении $w=\frac{z+2}{z+i}$.

165. При отображении $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ найти образы следующих линий: 1) $|z|=3$; 2) $|z|=1$; 3) $|z|=\frac{1}{2}$; 4) $\arg z=\frac{\pi}{3}$, $r=|z|$ меняется от 0 до 1 (не включая 0 и 1); 5) $\arg z=\frac{\pi}{6}$, $r=|z|$ меняется от 1 до ∞ (не включая 1).

166. При отображении $w=z^2$ найти: 1) образ полярной сетки полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$; 2) образ прямоугольной сетки полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$; 3) прообраз прямоугольной сетки плоскости w с разрезом вдоль действительной оси.

167. При отображении, осуществляемом функцией Жуковского $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, найти: 1) образ полярной сетки, расположенной внутри единичного круга $|z|<1$; 2) образ полярной сетки, расположенной вне единичного круга.

168. Найти образ прямоугольной сетки плоскости z при отображении $w=e^z$.

169. Найти образ прямоугольной сетки плоскости z при отображении $w=\cos z$.

170. Найти образ полярной сетки плоскости z при отображении $w=\ln z$.

171. Найти образ полуполосы $-\pi<x<\pi$, $0<y<+\infty$:

1) при отображении $w=\sin z$, разложив его на простейшие отображения $w_1=iz$, $w_2=e^{w_1}$, $w_3=\frac{w_2}{i}$, $w=\frac{1}{2}\left(w_3+\frac{1}{w_3}\right)$; 2) при отображении $w=\cos z$, разложив его на простейшие отображения $w_1=iz$, $w_2=e^{w_1}$, $w=\frac{1}{2}\left(w_2+\frac{1}{w_2}\right)$.

172. Показать справедливость соотношений: 1) $\arg z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, если $x>0$; 2) $\arg z=\pi+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, если $x<0$, $y\geqslant 0$; 3) $\arg z=-\pi+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, если $x<0$, $y<0$.

173. Показать, что

1)
$$\lim_{n\to\infty} z^n = \begin{cases} 0, & |z|<1, \\ \infty, & |z|>1, \\ 1, & z=1, \\ \text{не существует, если } |z|=1 \text{ и } z\neq 1. \end{cases}$$

2)
$$\lim_{n\to\infty} n^p z^n = \begin{cases} 0, & |z|<1, \\ \infty, & |z|\geqslant 1, \end{cases}$$

где p — натуральное число.

174. Точка z движется по лучу, выходящему из начала координат, неограниченно удаляясь от него. Показать, что:

1) $\lim |e^z| = +\infty$, если $-\frac{\pi}{2} < \arg z < +\frac{\pi}{2}$;

2) $\lim e^z = 0$, если $\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$;

3) $\lim e^z$ не существует, если $\arg z = \pm\frac{\pi}{2}$.

175. Найти кривые постоянного модуля и кривые постоянного аргумента для отображений: 1) $w = z^2 - 1$; 2) $w = \sin z$; 3) $w = e^z$.

176. Используя формулу $\cos\alpha = \frac{e^{\alpha i} + e^{-\alpha i}}{2}$, показать справедливость следующих соотношений:

1)
$$\cos^{2m}\alpha = \frac{1}{2^{2m-1}}\left\{\frac{1}{2}C_{2m}^{m} + C_{2m}^{m-1}\cos 2\alpha + C_{2m}^{m-2}\cos 4\alpha + \ldots + \cos 2m\alpha\right\};$$

2)
$$\int_0^{2\pi} \cos^{2m}\alpha\, d\alpha = \frac{\pi}{2^{2m-1}} C_{2m}^{m};$$

3)
$$\frac{1}{2} + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos m\alpha = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

177. Конденсатор емкостью $C = 2$ *мкф* и реостат с сопротивлением $r = 6$ *ом* включены под напряжением $V = 200$ *в*. Частота напряжения $f = 10\,000$ *гц*. Вычислить: 1) комплексное сопротивление $Z = r - i\frac{1}{\omega C}$, где $\omega = 2\pi f$; 2) комплексную проводимость $Y = \frac{1}{Z}$; 3) ток $I = \frac{V}{|Z|}$.

178. Электростатическое поле задано потенциалом: 1) $w = Ai \ln z + C$; 2) $w = A \ln z + C$, где A — действительное число, C — комплексное число. Найти силовые линии поля $\operatorname{Im} w = \text{const}$ и линии равного потенциала $\operatorname{Re} w = \text{const}$.

179. Комплексный потенциал течения жидкости равен: 1) $w = az$, a — комплексное число; 2) $w = az^2$, a — комплексное число; 3) $w = \ln z$; 4) $w = \frac{\Gamma i}{2\pi} \ln z$ (Γ — действительное число); 5) $w = \frac{1}{z}$.

Найти линии тока $\psi(x, y) = \operatorname{Im} w = \text{const}$ и эквипотенциальные линии $\varphi(x, y) = \operatorname{Re} w = \text{const}$.

180. Комплексный потенциал плоского течения жидкости равен: 1) $w = -v\left(z + \frac{R^2}{z}\right)$, где v и R — действительные числа; 2) $w = -v\left(z + \frac{R^2}{z}\right) - \frac{\Gamma i}{2\pi} \ln z$, где v, R и Γ — действительные числа.

Найти линии тока и эквипотенциальные линии.

§ 2. Производные и интегралы функций комплексного переменного

Производная комплексной функции действительного переменного $z(t) = x(t) + iy(t)$:

$$z'(t) = \frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t},$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}.$$

Производная комплексной функции комплексного переменного $w = f(z)$:

$$\frac{dw}{dz} = f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Для дифференцируемости функции комплексного переменного $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в данной точке необходимо и достаточно, чтобы в этой точке функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были дифференцируемы и удовлетворяли условиям Коши — Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

При этом

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Функция $w=f(z)$ называется аналитической в области D, если она дифференцируема в каждой точке области D. Функция $w=f(z)$ называется аналитической в точке z, $z \neq \infty$, если она аналитична в некоторой ее окрестности. Функция двух действительных переменных $u=u(x, y)$, имеющая в области D непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяющая уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

называется гармонической в области D.

Действительная и мнимая части аналитической в односвязной области D функции $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ являются гармоническими функциями в области D. Для всякой гармонической в односвязной области D функции $u(x, y)$ существует функция $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$, аналитическая в области D. Ее мнимая часть $v(x, y)$ называется функцией, гармонически сопряженной с функцией $u(x, y)$.

Если $f(t)=u(t)+iv(t)$ — непрерывная комплексная функция действительного переменного t, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, то

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt=\int_{t_1}^{t_2} u(t)\,dt+i\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt.$$

Интеграл от непрерывной функции комплексного переменного z

$$f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$$

вдоль кусочно-гладкой дуги AB вычисляется по формуле

$$\int_{AB} f(z)\,dz=\int_{AB} u\,dx-v\,dy+i\int_{AB} v\,dx+u\,dy,$$

или, если $x=x(t)$, $y=y(t)$, т. е. $z=x(t)+iy(t)$, $z=z(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, — параметрические уравнения дуги AB, $A \sim t_1$, $B \sim t_2$, то

$$\int_{AB} f(z)\,dz=\int_{t_1}^{t_2} f(z(t))\,z'(t)\,dt.$$

Интеграл от функции $f(z)$ по простому (несамопересекающемуся) замкнутому контуру C обозначается через $\oint\limits_{C} f(z)\,dz$ или $\oint\limits_{C} f(z)\,dz$ (в зависимости от направления обхода контура C, указываемого стрелкой).

Основная теорема Коши для односвязной области: если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, то интеграл от этой функции вдоль всякого кусочно-гладкого замкнутого контура C, лежащего в D, равен нулю.

Пусть C — простой кусочно-гладкий замкнутый контур, C_1, $C_2, \ldots, C_n$ — простые кусочно-гладкие замкнутые контуры, лежащие внутри C, но вне друг друга. Если функция $f(z)$ аналитична в многосвязной области, лежащей между контуром C и контурами $C_1, C_2, \ldots, C_n$, и на этих контурах, то

$$\oint\limits_{C} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{C_k} f(z)\,dz$$

(основная теорема Коши для многосвязной области).

Если функция $f(z)$ аналитична в области, лежащей внутри простого кусочно-гладкого замкнутого контура C и на этом контуре, то в каждой точке z, лежащей внутри C, имеют место интегральные представления функции $f(z)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$$

(интегральная формула Коши) и ее производных:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_{C} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

181. Найти производную $z'(t)$ функции: 1) $z(t) = \cos^3 t + ie^{-t^2}$; 2) $z(t) = \ln(t^2+1) + i\,\operatorname{arctg}\frac{1}{t}$.

182. Проверить выполнение условий Коши — Римана и установить правила для дифференцирования функций: 1) $f(z) = z^3$; 2) $f(z) = e^z$; 3) $f(z) = \sin z$; 4) $f(z) = \ln z$.

183. Показать, что при $z \neq 0$ функции 1) $f(z) = |z|^2$ и 2) $f(z) = z\operatorname{Re} z$ не имеют производных.

184. Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении $w = f(z)$ в точке $z = z_1$: 1) $w = \frac{z+2}{z-i}$, $z_1 = 2i$; 2) $w = 3iz + 2$, $z_1 = 1 + i$; 3) $w = e^z$, $z_1 = i$; 4) $w = \frac{1}{z}$, $z_1 = 3i$.

185. Найти линии равного растяжения и линии равного угла поворота для отображений: 1) $w=z^3$; 2) $w=e^z$.

186. Показать, что если точка z описывает дугу l в области аналитичности функции $f(z)$, то ее образ описывает дугу, длина L которой находится по формуле: $L=\int\limits_l |f'(z)|\,ds$. Найти длину образа отрезка $z=1+ti$, $-1\leqslant t\leqslant +1$, при отображении $w=z^2$.

187. Показать, что если аналитическая функция $w=f(z)$ отображает область G плоскости z на область G' плоскости w, то

$$\text{пл. } G'=\iint\limits_G |f'(z)|^2\,dx\,dy.$$

Найти площадь области изменения w при отображении $w=z^2$, если переменная z меняется в области, определяемой условиями $1\leqslant |z|\leqslant 2$, $-\frac{\pi}{4}\leqslant \arg z\leqslant \frac{\pi}{4}$.

188. Доказать, что линейная комбинация гармонических функций есть функция гармоническая.

189. Доказать, что всякая гармоническая в односвязной области G функция имеет семейство сопряженных гармонических функций, отличающихся друг от друга на постоянное слагаемое:

$$v(x,\ y)=\int\limits_{(x_0,\,y_0)}^{(x,\,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx+\frac{\partial u}{\partial x}\,dy+C,$$

и найти функции, сопряженные с гармонической функцией $u(x,\ y)=x^2-y^2+x$ в плоскости xOy.

190. Найти аналитические функции $w=u+iv$, если:

1) $u=x^2-y^2+xy$, $w(0)=0$; 2) $v=\frac{y}{x^2+y^2}$, $w(2)=0$; 3) $u=\ln(x^2+y^2)$; 4) $v=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3$, $w(0)=0$.

191. Вычислить интеграл от функции $f(t)$ по промежутку $[t_0,\ T]$:

1) $f(t)=\sin 3t+ie^{-2t}$, $t_0=0$, $T=1$;

2) $f(t)=(t^2+1)+\frac{1}{t}i$, $t_0=+1$, $T=2$.

192. Доказать следующие равенства: 1) $\oint\limits_C x\,dz = iS$; 2) $\oint\limits_C y\,dz = -S$; 3) $\oint\limits_C \bar{z}\,dz = 2iS$, где C — простой замкнутый контур, ограничивающий область площади S.

193. Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_{AB} |z|\,dz$ по левой полуокружности с центром O радиуса 1, если $z_A = -i$, $z_B = i$;

2) $\int\limits_L \operatorname{Re}(z)\,dz$, где L — отрезок прямой, соединяющей точку z_1 с точкой z_2;

3) $\int\limits_L \frac{dz}{\sqrt{z}}$, где L — верхняя половина окружности с центром O единичного радиуса; направление обхода положительное ($\sqrt{z}$ — главное значение корня, получаемое из общей формулы при $k=0$).

194. Вычислить интеграл $\oint\limits_C \frac{z}{\bar{z}}\,dz$, где C — граница области $1 < |z| < 2$, $\operatorname{Im} z > 0$.

195. Вычислить интеграл $\int\limits_C (z-a)^n\,dz$, n — целое число:

1) по полуокружности $|z-a| = R$, $0 \leqslant \arg(z-a) \leqslant \pi$ (начало пути в точке $z = a + R$);

2) по окружности $|z-a| = R$;

3) по периметру квадрата с центром в точке a и сторонами, параллельными осям координат.

196. Найти значение интеграла $\int\limits_1^z \frac{dz}{z}$, если путь интегрирования не проходит через начало координат.

197. Исследовать значения функций в зависимости от выбора пути интегрирования:

1) $\operatorname{arctg} z = \int\limits_0^z \frac{d\zeta}{1+\zeta^2}$ (путь интегрирования не проходит через точки i и $-i$);

2) $\arcsin z = \int\limits_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$ (путь интегрирования не проходит через точки 1 и —1).

198. Какие значения могут иметь следующие интегралы, если за пути интегрирования принимать любые пути, вдоль которых подынтегральная функция непрерывна:

1) $\int\limits_1^2 \frac{dz}{z}$, 2) $\int\limits_0^1 \frac{dz}{1+z^2}$?

199. Вычислить следующие интегралы:

1) $\int\limits_1^{1+i} z^2\,dz$; 2) $\int\limits_0^{\ln 2} ze^z\,dz$; 3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}+i} \sin z\,dz$.

200. Используя основную теорему Коши и интегральную формулу Коши, вычислить $\oint\limits_C \frac{dz}{z^2+9}$, если: 1) точка $3i$ лежит внутри контура C, а точка $-3i$ вне его; 2) точка $-3i$ лежит внутри контура C, а точка $3i$ вне его; 3) точки $\pm 3i$ лежат внутри контура C; 4) точки $\pm 3i$ лежат вне контура C.

201. Используя основную теорему Коши и интегральные формулы для аналитических функций и их производных, вычислить следующие интегралы:

1) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{dz}{z^3+4z}$; 2) $\oint\limits_C \frac{\sin z\,dz}{z^2+4}$, $C\,\{x^2+y^2+6y=0\}$;

3) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z\,dz}{(z+i)^3}$; 4) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{(z+1)\,dz}{z(z-1)^2(z-3)}$; 5) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos z\,dz}{(z+1)^2(z-2)}$.

202. Вычислить $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{e^z\,dz}{z(1-z)^3}$, если: 1) точка 0 лежит внутри, а точка 1 вне контура C; 2) точка 1 лежит внутри, а точка 0 вне контура C; 3) обе точки 0 и 1 лежат внутри контура C.

203. Найти $\oint\limits_{|z-a|=a} \frac{z\,dz}{z^4-1}$, $a>1$.

204. Вычислить $\oint\limits_C \frac{dz}{z(z^2-1)}$ по произвольному простому контуру C, не проходящему через точки 0, 1 и —1.

205. Показать справедливость формул:

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi}\cos(\sin\varphi - n\varphi)\,d\varphi = \frac{2\pi}{n!};$$

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi}\sin(\sin\varphi - n\varphi)\,d\varphi = 0.$$

Указание. Рассмотреть $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{n+1}}\,dz$, положив $z = e^{\varphi i}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

206. Показать справедливость формулы

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}.$$

Указание. Проинтегрировать функцию $f(z) = e^{-z^2}$ по границе прямоугольника $|x| \leqslant R$; $0 \leqslant y \leqslant b$ и воспользоваться интегралом Пуассона $\int\limits_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$.

207. Доказать равенство

$$\int_0^{\infty}\cos x^2\,dx = \int_0^{\infty}\sin x^2\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \quad \text{(интегралы Френеля).}$$

Указание. Проинтегрировать функцию $f(z) = e^{iz^2}$ по границе сектора $0 \leqslant |z| \leqslant R$; $0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{4}$.

208. Доказать, что $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ (интеграл Дирихле).

Указание. Проинтегрировать функцию $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ по границе области $r \leqslant |z| \leqslant R$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$.

209. Имеется плоское поле векторов $A = A_x + iA_y$ без источников $\left(\operatorname{div} A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} = 0\right)$ и без вихрей

$\left(\operatorname{rot} A=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}=0\right)$. Показать, что функция тока

$$v(x,\ y)=\int_{z_0}^{z}-A_y\,dx+A_x\,dy+C\quad (C=\mathrm{const})$$

и потенциал поля

$$u(x,\ y)=\int_{z_0}^{z}A_x\,dx+A_y\,dy+C$$

являются соответственно мнимой и действительной частями аналитической функции $f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$ (так называемого комплексного потенциала поля).

Указание. Использовать условия Коши — Римана.

210. Дан комплексный потенциал плоского поля $f(z)=$ $=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$. Показать, что в векторном поле $A=\overline{f'(z)}$ (где $\overline{f'(z)}$ — комплексная функция, сопряженная с $f'(z)$):

1) поток N поля через замкнутую кривую C вычисляется по формуле

$$N=\operatorname{Im}\oint_C f'(z)\,dz;$$

2) циркуляция Γ поля вдоль замкнутого контура C вычисляется по формуле

$$\Gamma=\operatorname{Re}\oint_C f'(z)\,dz.$$

Указание. Поток поля A

$$N=\oint_C (An_0)\,ds=\oint_C A_x\,dy-A_y\,dx,$$

где n_0 — единичный вектор по внешней нормали к контуру C. Циркуляция Γ поля вдоль контура C:

$$\Gamma=\oint_C (As_0)\,ds=\oint_C A_x\,dx+A_y\,dy,$$

где s_0 — единичный вектор, направленный по касательной к контуру C в направлении обхода C.

211. Комплексный потенциал $f(z)$ поля равен:

1) $f(z)=\frac{N}{2\pi}\ln z$; 2) $f(z)=\frac{\Gamma i}{2\pi}\ln z$; 3) $f(z)=\frac{N+i\Gamma}{2\pi}\ln z$. Найти поток поля через окружность $|z|=r$ и циркуляцию поля вдоль этой окружности.

212. Найти комплексный потенциал $f(z)$: 1) поля точечного источника $A=\frac{N}{2\pi}\frac{1}{z}$, где A — вектор; 2) поля точечного вихря $A=\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{i}{z}$; 3) поля точечного вихреисточника $A=\frac{N+i\Gamma}{2\pi}\frac{1}{z}$.

213. Комплексный потенциал электростатического поля диполя равен $w=\frac{2pi}{z}$, где p — действительное постоянное число (так называемый момент диполя). Найти вектор напряженности поля диполя $E=-i\left(\frac{dw}{dz}\right)$ и величину напряженности $|E|$.

214. Производная $\frac{dw}{dz}$ от комплексного потенциала $w=f(z)$ плоского течения жидкости есть комплексная скорость течения. Модуль комплексной скорости дает величину самой скорости. Найти комплексную скорость, величину и направление скорости для плоского течения с комплексным потенциалом:

1) $w=az$, где $a=a_1-ia_2$; 2) $w=az^2$, где a — действительное число; 3) $w=\frac{Q}{2\pi}\ln(z-a)$; 4) $w=\frac{M}{2\pi}\frac{1}{z-c}$; 5) $w=-\frac{\Gamma i}{2\pi}\ln(z-a)$.

215. Найти комплексный потенциал плоского течения жидкости $w=f(z)$, если: 1) его потенциал скорости $\varphi=x+\frac{x}{x^2+y^2}$; 2) его функция тока $\psi=y-\frac{y}{x^2+y^2}$.

§ 3. Ряды Тейлора и Лорана

Если $f(z)$ — аналитическая функция в круге $|z-a|<R$, $0\leqslant R<+\infty$, то она разлагается в этом круге в ряд Тейлора

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(z-a)^n,$$

где

$$A_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz, \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

(C — любая окружность с центром a, лежащая внутри круга $|z-a| < R$).

Если $f(z)$ — аналитическая функция внутри кольца $r < |z-a| < R$, $0 \leqslant r < R \leqslant +\infty$, то она разлагается в нем в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n (z-a)^n,$$

где

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(z)\, dz}{(z-a)^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

(C — любая окружность с центром a, лежащая внутри кольца $r < |z-a| < R$).

216. Зная разложение

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots, \ |z| < 1,$$

найти разложение по степеням z функций: 1) $\frac{1}{(1-z)^2}$ при $|z| < 1$; 2) $\frac{1}{(1-z)^p}$ при $|z| < 1$, p — натуральное число.

217. Написать разложение функции $f(z)$ по степеням z в области D в ряд Тейлора или Лорана:

1) $f(z) = \frac{1}{3-z}$, $D\{|z| > 3\}$;

2) $f(z) = \frac{1}{(z+i)^2}$, $D\{|z| < 1\}$;

3) $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2i)}$, $D\{1 < |z| < 2\}$;

4) $f(z) = \frac{1+z}{(z+3)^2(z-2i)}$, $D\{2 < |z| < 3\}$;

5) $f(z) = \frac{1}{z^2-3z+2}$, а) $D_1\{|z| < 1\}$, б) $D_2\{1 < |z| < 2\}$, в) $D_3\{|z| > 2\}$;

6) $f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$, а) $D_1\{0 < |a| < |z| < |b|\}$, б) $D_2\{|z| > |b|\}$;

7) $f(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z}}$, $D\{|z| < 1\}$.

218. Разложить в ряд Тейлора или Лорана в окрестности точки z_0 функции:

1) $f(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$, а) $z_0=0$, б) $z_0=1$, в) $z_0=\infty$;

2) $f(z)=\frac{z}{1+z^2}$, а) $z_0=i$, б) $z_0=\infty$;

3) $f(z)=\frac{1}{z(z-1)}$, а) $z_0=0$, б) $z_0=1$;

4) $f(z)=\frac{1}{z^2-3iz-2}$, $z_0=2i$;

5) $f(z)=\frac{1}{z+2}$, а) $z_0=-3$, б) $z_0=\infty$, в) $z_0=-2$;

6) $f(z)=\frac{1}{(z-3)^2}$, а) $z_0=-1$, б) $z_0=\infty$, в) $z_0=3$;

7) $f(z)=\frac{z}{(z+1)^2(z-2)}$, а) $z_0=3$, б) $z_0=-1$, в) $z_0=2$;

8) $f(z)=\frac{1}{z}$, $z_0=i$;

9) $f(z)=\frac{6z}{(z^2-4)(z^2-1)}$ в окрестности точек $z_0=\pm 2$, $z_0=\pm 1$.

10) $f(z)=\ln z$, $z_0=a\neq 0$;

11) $f(z)=(1-z)e^z$, $z_0=0$;

12) $f(z)=\sin 2z-2\sin z$, $z_0=0$.

219. Разложить в ряд Лорана в указанном кольце или в окрестности указанной точки z_0 (в последнем случае надлежит определить окрестность, в которой разложение имеет место) следующие функции:

1) $\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ в окрестности точки $z_0=2$ и в кольце $1<|z|<2$;

2) $\frac{1}{(z^2+1)^2}$ в окрестности точек $z_0=i$ и $z_0=\infty$;

3) $z^2e^{\frac{1}{z}}$ в окрестности точек $z_0=0$ и $z_0=\infty$;

4) $e^{\frac{1}{1-z}}$ в окрестности точек $z_0=1$ и $z_0=\infty$;

5) $e^{z+\frac{1}{z}}$ в области $0<|z|<+\infty$;

6) $\sin z \sin \frac{1}{z}$ в области $0 < |z| < +\infty$;

7) $\ln \frac{z-a}{z-b}$ в окрестности точки $z_0 = \infty$.

220. Используя предложение: «тейлоровские коэффициенты суммы равномерно сходящегося ряда с аналитическими членами $f_n(z)$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, получаются путем сложения одноименных тейлоровских коэффициентов, взятых из разложения каждой функции $f_n(z)$», написать разложение по степеням z функции

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}.$$

221. Подставляя ряд в ряд, написать первые четыре члена разложения в ряд по степеням z функций: 1) $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$; 2) $f(z) = \ln(1+e^z)$; 3) $\sin \frac{1}{1-z}$.

222. Используя умножение степенных рядов, разложить по степеням z функции:

1) $f(z) = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n\right)^2$, $|z| < 1$;

2) $f(z) = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n\right)$,

где радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ отличен от нуля;

3) $f(z) = e^z \cos z$;

4) $f(z) = e^z \sin z$.

223. Используя деление степенных рядов, написать разложение по степеням z функций: 1) $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$; 2) $f(z) = z \operatorname{ctg} z$; 3) $f(z) = \operatorname{tg} z$; 4) $f(z) = \sec z$.

224. Функция $f(z)$ допускает приближение многочленами в некоторой области D, если существует такая последовательность многочленов $\{P_n(z)\}$, которая сходится равномерно к функции $f(z)$ в этой области. Показать, что следующие функции допускают приближение многочленами:

1) $f(z)=e^z$ во всякой ограниченной области;

2) $f(z)=\sin z$ во всякой ограниченной области;

3) $f(z)=\frac{1}{1-z}$ в области $|z|\leqslant\rho$, $\rho<1$.

225. Найти области сходимости рядов и их суммы:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-z^2)^n$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{z^2}{1+z^2}\right)^n$.

226. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n e^{-nz}$ сходится в полуплоскости $x>\ln\frac{1}{R}$, где R — радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n z^n$, и расходится в полуплоскости $x<\ln\frac{1}{R}$.

227. Показать, что в соотношении $R\geqslant\min(R_1, R_2)$ (где R_1 и R_2 — соответственно радиусы сходимости рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n z^n$, а R — радиус сходимости произведения этих рядов) для произведения

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)$$

имеет место знак равенства, а для произведения

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n(1-n)}{n!}$$

— знак неравенства.

Пусть функция $w=f(z)$ аналитична в окрестности точки z_0. Точка z_0 называется нулем функции $f(z)$ порядка k, $k\geqslant 1$, если разложение функции $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_0 имеет вид:

$$f(z)=\sum_{n=k}^{\infty}A_n(z-z_0)^n,$$

где $A_k\neq 0$.

228. Доказать, что точка z_0 тогда и только тогда является нулем порядка k аналитической функции $f(z)$, когда имеют место соотношения:

$$f(z_0)=f'(z_0)=f''(z_0)=\ldots=f^{(k-1)}(z_0)=0,\ f^{(k)}(z_0)\neq 0.$$

229. Найти порядок нуля $z_0=0$ для функций: 1) $z^2(e^{z^2}-1)$; 2) $6\sin z^3+z^3(z^6-6)$; 3) $e^{\sin z}-e^{\operatorname{tg} z}$.

230. Найти порядки всех нулей данных функций: 1) z^2+9; 2) $\frac{z^2+9}{z^4}$; 3) $z\sin z$; 4) $(1-e^z)(z^2-4)^3$; 5) $1-\cos z$; 6) $\frac{\sin^3 z}{z}$.

231. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в кольце $1-\delta<|z|<1+\delta\ (\delta>0)$. Тогда в этом кольце ее можно разложить в ряд Лорана $f(z)=\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_n z^n$, где

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\,e^{-in\theta}\,d\theta.$$

Для точек $z=e^{it}$ единичной окружности

$$f(e^{it})=\varphi(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}.$$

Показать, что этот ряд является рядом Фурье (в комплексной форме) для функции $\varphi(t)$.

232*. Найти разложение в ряд Фурье функции

$$\varphi(x)=\frac{a\sin x}{1-2a\cos x+a^2}\qquad(|a|<1).$$

Указание. Положить $e^{ix}=z$ и найти разложение функции от z в ряд Лорана.

233. Разложить в ряд Фурье следующие функции:

1) $\varphi(x)=\dfrac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2}\qquad(|a|<1)$,

2) $\varphi(x)=\dfrac{1-a\cos x}{1-2a\cos x+a^2}\qquad(|a|<1)$.

Указание. См. задачу 232*.

234. Отделяя действительную и мнимую части разложения функции $f(z)=\frac{z}{1-z}$ в ряд по степеням z, доказать справедливость следующих равенств:

$$\frac{\cos\varphi-r}{1-2r\cos\varphi+r^2}=\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}\cos n\varphi \quad (0<r<1,\ 0\leqslant\varphi<2\pi),$$

$$\frac{\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}=\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}\sin n\varphi \quad (0<r<1,\ 0\leqslant\varphi<2\pi).$$

235. Используя соотношение

$$\ln(1-z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n},\quad |z|<1,$$

доказать следующие равенства:

$$\frac{1}{2}\ln(1-2r\cos\varphi+r^2)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}\cos n\varphi$$

$$(0\leqslant r<1,\ 0\leqslant\varphi<2\pi).$$

$$\operatorname{arctg}\frac{r\sin\varphi}{1-r\cos\varphi}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}\sin n\varphi$$

$$(0\leqslant r<1,\ 0\leqslant\varphi<2\pi).$$

236*. Найти суммы следующих тригонометрических рядов

1) а) $1+\frac{\cos x}{1!}+\frac{\cos 2x}{2!}+\ldots+\frac{\cos nx}{n!}+\ldots,$

б) $\frac{\sin x}{1!}+\frac{\sin 2x}{2!}+\ldots+\frac{\sin nx}{n!}+\ldots;$

2) а) $\frac{\cos x}{1!}-\frac{\cos 3x}{3!}+\frac{\cos 5x}{5!}-\ldots$

$$\ldots+(-1)^{n+1}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)!}+\ldots,$$

б) $\frac{\sin x}{1!}-\frac{\sin 3x}{3!}+\frac{\sin 5x}{5!}-\ldots$

$$\ldots+(-1)^{n+1}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)!}+\ldots$$

§ 4. Особые точки

Каждая точка a, $a \neq \infty$, в которой нарушается аналитичность функции $f(z)$, является для этой функции особой точкой. Особая точка a называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если существует окрестность $0 < |z-a| < R$, в которой функция $f(z)$ аналитична.

Если разложение функции $f(z)$ в окрестности изолированной особой точки a в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n (z-a)^n$$

1) не содержит отрицательных степеней $z-a$, то точка a называется устранимой особой точкой функции $f(z)$;

2) содержит конечное число членов с отрицательными степенями $z-a$, то точка a называется полюсом функции $f(z)$;

3) содержит бесчисленное множество членов с отрицательными степенями $z-a$, то точка a называется существенно особой точкой функции $f(z)$.

Для того чтобы изолированная особая точка a была устранимой особой точкой, полюсом или существенно особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы при стремлении z к a функция $f(z)$ имела соответственно конечный предел, бесконечный предел или не имела предела (ни конечного, ни бесконечного).

Если a — устранимая особая точка $f(z)$, то после доопределения функции $f(z)$ в этой точке по непрерывности ($f(a) = \lim\limits_{z \to a} f(z)$) функция становится аналитичной в точке a.

Если a — полюс $f(z)$, то в окрестности точки a

$$f(z) = \frac{A_{-m}}{(z-a)^m} + \ldots + \frac{A_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^n, \text{ где } A_{-m} \neq 0.$$

Число m называется порядком полюса a. Для того чтобы точка a была полюсом $f(z)$ порядка m, необходимо и достаточно, чтобы в окрестности точки a имело место равенство

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m},$$

где $\varphi(z)$ — аналитическая функция в точке a, $\varphi(a) \neq 0$.

Если функция $f(z)$ аналитична в окрестности $|z| > r$ бесконечно удаленной точки, то точка $a = \infty$ называется изолированной особой точкой $f(z)$. При этом точка $a = \infty$ называется устранимой особой точкой функции $f(z)$, полюсом или существенно особой, если разложение $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $a = \infty$

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n z^n$$

соответственно не содержит положительных степеней z, содержит конечное число положительных степеней z или содержит бесчисленное множество положительных степеней z.

Подстановка $z = \frac{1}{\zeta}$ сводит изучение функции в окрестности точки $a = \infty$ к изучению функции в окрестности точки $a = 0$.

Если в окрестности точки $a = \infty$

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{m} A_n z^n,$$

где $A_m \neq 0$, то точка $a = \infty$ называется полюсом порядка m функции $f(z)$. Если в окрестности точки $a = \infty$

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{-m} A_n z^n, \qquad m > 0,$$

где $A_{-m} \neq 0$, то устранимая особая точка $a = \infty$ называется нулем порядка m функции $f(z)$.

237. Точка z_0 является нулем порядка k для функции $f(z)$ и нулем порядка l для функции $\varphi(z)$. Что можно сказать о характере точки z_0 для функций: 1) $f(z)\varphi(z)$; 2) $f(z)+\varphi(z)$; 3) $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$?

238. Определить характер точки z_0 для следующих функций: 1) $\sin z + 3\sin^2 z$, $z_0 = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; 2) $\sin(z-1)\cos^3\frac{\pi z}{2}$, $z_0 = 1$; 3) $\frac{\cos\frac{\pi}{2}z}{\sin^2(z-1)}$, $z_0 = 1$.

239. Используя результаты задачи 237 и определение порядка полюса, определить порядки полюсов z_0 для следующих функций:

1) $\frac{z}{\sin^3 z}$; $z_0 = 0$; $z_0 = k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$;

2) $\frac{z^2 - 3z + 2}{(z^2-4)^2(z-1)^3}$; $z_0 = 2$; $z_0 = 1$;

3) $\frac{\cos(\pi z) + 1}{(z^2 - z - 2)^3}$; $z_0 = -1$; $z_0 = 2$.

240. Показать, что если $f(z)$ и $\varphi(z)$ не имеют в области D других особых точек, кроме полюсов, то их сумма, разность, произведение и частное (последнее, если $\varphi(z) \not\equiv 0$) не имеют других особых точек, кроме полюсов и устранимых особых точек.

241. Проверить утверждение задачи 240 для следующих функций и точек z_0:

1) $\frac{1}{z^2+16}+\frac{1}{\sin z}$, $z_0=\pm 4i$, $z_0=k\pi$, $k=0$, ± 1, $\pm 2, \ldots$;

2) $\frac{1}{z^2+1}e^z$, $z_0=\pm i$;

3) $\frac{1}{(z^2-4)^2}\operatorname{ctg}(\pi z)$, $z_0=\pm 2$.

242. Пусть $P_n(z)$ и $Q_m(z)$ — многочлены соответственно n-й и m-й степени. Показать, что точка $z_0=\infty$ является:

1) для функции $P_n(z)+Q_m(z)$ а) полюсом порядка $k=\max(n, m)$, если $n\neq m$; б) полюсом порядка $k\leqq n$ или устранимой особой точкой, если $n=m$;

2) для функции $P_n(z)\,Q_m(z)$ полюсом порядка $n+m$;

3) для функции $\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ а) полюсом порядка $n-m$, если $n>m$; б) устранимой особой точкой, если $n\leqslant m$ $\left(\text{если } n<m, \text{ то } z_0=\infty \text{ — нуль функции } \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} \text{ порядка } m-n\right)$.

243. Определить характер точки $z_0=\infty$ для следующих функций: 1) $\frac{z^2+z+1}{(z+i)^2(z-4)^3}$; 2) $\frac{z^3+z+5}{z(z^2+7)}$; 3) $\frac{2z^5+3z+1}{z^3+z^2+10}$; 4) $3z^2+4z+5$; 5) $(2z+7)(3z^2+9z+1)$.

244. Показать, что если точка z_0 для функции $f(z)$ ($f(z)\not\equiv 0$) является устранимой особой точкой или полюсом, а для функции $\varphi(z)$ существенно особой точкой, то она будет существенно особой точкой и для каждой из функций:

$$\varphi(z)\pm f(z); \quad f(z)\,\varphi(z) \quad \text{и} \quad \frac{\varphi(z)}{f(z)}.$$

245. Показать, что точка z_0 есть существенно особая точка для следующих функций: 1) $\frac{1}{z^2+1}+e^{\frac{1}{z-i}}$, $z_0=i$; 2) $\frac{1}{z^2-4}e^{\frac{1}{z+2}}$, $z_0=-2$; 3) $\frac{\cos\frac{1}{z+1}}{z^2-z+2}$, $z_0=-1$.

246. Показать, что если z_0 есть существенно особая точка для функции $\varphi(z)$, то $\frac{1}{\varphi(z)}$ будет иметь в точке z_0

либо существенно особую точку, либо неизолированную особую точку, являющуюся предельной точкой полюсов.

247. Воспользовавшись предыдущей задачей, рассмотреть примеры: 1) $e^{-\frac{1}{z^2}}$, $z_0=0$; 2) $\frac{1}{\sin z}$, $z_0=\infty$; 3) $\frac{1}{\sin z-\sin a}$, $z_0=\infty$.

248. Найти характер особых точек z_0 для следующих функций: 1) $e^{\frac{z}{1-z}}$, $z_0=1$; 2) $e^{z-\frac{1}{z}}$, $z_0=0$; 3) $\sin\frac{1}{1-z}$, $z^0=1$; 4) $e^{\operatorname{tg}\frac{1}{z}}$, $z_0=\frac{2}{(2k+1)\pi}$, $k=0, \pm 1, \ldots$; 5) $\operatorname{ctg}\frac{1}{z}$, $z_0=\infty$; 6) $\sin\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}\right)$, $z_0=\infty$; 7) $\sin\left(\frac{1}{\cos\frac{1}{z}}\right)$, $z_0=\infty$.

249. Какие особые точки имеют следующие функции: 1) $\frac{1-e^z}{z}$ при $z=0$; 2) $\operatorname{ctg} z$ при $z=0$ и $z=\pi$; 3) $\frac{1}{1-e^z}$ при $z=0$ и $z=\infty$; 4) $\cos z-\sin z$ при $z=\infty$; 5) $e^{\frac{1}{2-z}}$ при $z=2$?

250. Найти особые точки функций, выяснить их характер и исследовать поведение функции в бесконечности:

1) $\frac{z^5+3z+1}{(z-1)^2(z^2+4)}$; 2) $\frac{\sin z}{z^3+1}$; 3) $\frac{z+1}{\sin z}$; 4) $\frac{e^z}{1+z^2}$;

5) $\frac{e^z}{z(1-e^{-z})}$; 6) $\frac{1-e^z}{1+e^z}$; 7) $\frac{1}{\cos z+\cos a}$; 8) $e^{\operatorname{ctg}\frac{1}{z}}$;

9) $\frac{\sin z}{z^2+1}+\frac{e^z}{z+i}$; 10) $e^{\frac{1}{z}}+\cos z$; 11) $\frac{z}{z^2+16}\cos\frac{1}{z}$;

12) $\frac{1}{\cos\frac{1}{z-2}}$.

251. Построить примеры функций, имеющих в расширенной комплексной плоскости только следующие особенности: 1) полюс второго порядка в бесконечности; 2) полюс второго порядка в точке $z=0$ с главной частью $\frac{1}{z^2}$ и простой полюс в бесконечности.

252. Найти общий вид функции, имеющей в расширенной комплексной плоскости только следующие особенности: 1) один простой полюс; 2) один полюс порядка n.

253. Пусть точка z_0 для функции $f_1(z)$ является нулем порядка α, а для функции $f_2(z)$ — полюсом порядка β. Что можно сказать о точке z_0 для следующих функций: 1) f_1+f_2; 2) $f_1 f_2$; 3) $\frac{f_1}{f_2}$; 4) $\frac{f_2}{f_1}$?

254. Показать, что для функции

$$y=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \ (x \text{ — действительное число}),\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

производные всех порядков при $x=0$ равны нулю.

255. Показать, что для функции $w=e^{-\frac{1}{z^2}}$ точка $z=0$ является существенно особой.

256. Проверить справедливость теоремы Сохоцкого для функции $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ в окрестности существенно особой точки $z=0$, т. е. найти последовательность $z_k\to 0$, такую, что $f(z_k)\to A$, где A — любое комплексное число и $k\to\infty$.

257. Функция $f(z)$ аналитична в области D всюду, за исключением конечного числа полюсов. Показать, что в окрестности каждой точки a области D функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z)=(z-a)^n\varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ аналитична в точке a, $\varphi(a)\neq 0$, n — целое число. Как, в зависимости от n, определяется характер точки a?

Точка, обладающая тем свойством, что полный (однократный) обход вокруг нее в любой достаточно малой ее окрестности по какой-либо замкнутой кривой заменяет одну непрерывно изменяющуюся ветвь многозначной функции другой ветвью, называется точкой разветвления функции. Если после n-кратного обхода в одном и том же направлении мы возвращаемся к исходной ветви, то говорят, что точка разветвления имеет порядок $n-1$ (такую точку называют алгебраической точкой разветвления).

258. Показать, что:

1) для $f(z)=\sqrt[n]{z}$ точки $z=0$ и $z=\infty$ являются точками разветвления порядка $n-1$;

2) для $f(z)=\sqrt{1-z^2}$ точки $z=\pm 1$ являются точками разветвления;

3) для $f(z)=\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{1}{4}z^2\right)}$ точки $z=\pm 1$; $z=\pm\frac{1}{2}$ — точки разветвления;

4) для $f(z)=z+\sqrt{z^2-1}$ точки $z=\pm 1$ — точки разветвления.

259. Показать, что в любой области D, в которой нельзя провести замкнутую линию, обходящую лишь одну из точек разветвления ± 1 функции $w=z+\sqrt{z^2-1}$, можно выделить две однозначных ветви функции $w=z+\sqrt{z^2-1}$.

Если же в области D можно обойти точки $+1$ (-1), не обходя при этом точки -1 $(+1)$, то в такой области ветви функции $w=z+\sqrt{z^2-1}$ отделить друг от друга нельзя.

Если, совершая обход вокруг точки разветвления в любой ее достаточно малой окрестности, мы никогда не вернемся к исходной ветви, то такая точка называется точкой разветвления бесконечного порядка или логарифмической точкой.

260. Показать, что:

1) для функции $w=\operatorname{Ln} z$ точка $z=0$ — точка разветвления бесконечного порядка;

2) для функции $w=\operatorname{Arcsin} z$ точки $z=\pm 1$ являются точками разветвления порядка 1, а $z=\infty$ — точка разветвления бесконечного порядка.

261. Показать, что логарифмическую точку a функции $f(z)=C\operatorname{Ln}(z-a)+g(z)$, где C — действительное число, а $g(z)$ — аналитическая функция, можно интерпретировать как источник интенсивности $N=C\cdot 2\pi$.

262. Показать, что логарифмическую точку a функции $f(z)=Ci\operatorname{Ln}(z-a)+g(z)$, где C — действительное число, $g(z)$ — аналитическая функция, можно интерпретировать как вихрь интенсивности $\Gamma=C\cdot 2\pi i$.

263. Показать, что логарифмическую точку a функции $f(z)=C\operatorname{Ln}(z-a)+g(z)$, где $C=C_1+C_2 i$, можно интерпретировать как вихреисточник с интенсивностью $N+i\Gamma=2\pi C$.

264. Показать, что простой полюс a функции

$$f(z)=\frac{C}{z-a}+g(z),$$

где C — действительное число, $g(z)$ — аналитическая функция, можно интерпретировать как диполь, полученный от слияния двух источников интенсивности $\pm N$, расположенных в точках $z_1 = a - h$, $z_2 = a$. При этом

$$C = \frac{1}{2\pi} \lim_{h \to 0} (Nh).$$

265. Показать, что полюс a функции $f(z) = \frac{C}{z-a} + g(z)$, где C — действительное число, $f(z)$ — аналитическая функция, можно интерпретировать как диполь, полученный от слияния вихреисточников интенсивности $\pm \Gamma$, расположенных в точках $z_1 = a - h$, $z_2 = a$. При этом $C = \frac{1}{2\pi} \lim\limits_{n \to 0} (\Gamma h)$.

266. Показать, что полюс a функции $f(z) = \frac{C}{z-a} + g(z)$, где $C = C_1 + iC_2$, а $g(z)$ — аналитическая функция, можно интерпретировать как диполь, полученный от слияния двух вихреисточников интенсивности $\pm (N + i\Gamma)$, расположенных в точках $z_1 = a - h$, $z_2 = a$. При этом $C = C_1 + iC_2 = \frac{1}{2\pi} \lim\limits_{h \to 0} (N + i\Gamma) h$.

З а м е ч а н и е. Полюсы второго порядка функции $f(z) = \frac{C}{(z-a)^2} + g(z)$ могут быть интерпретированы как квадруполи, полученные при слиянии двух диполей, расположенных в точках $z_1 = a - h$; $z_2 = a$, с моментами $\pm 2\pi \frac{C}{h}$.

§ 5. Вычеты и их приложения

Вычетом функции $f(z)$ относительно конечной изолированной особой точки a называется число, обозначаемое $\operatorname*{Res}\limits_a f(z)$ и определяемое равенством

$$\operatorname*{Res}_a f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_C f(z)\, dz,$$

где C — любая окружность с центром a достаточно малого радиуса

$$\operatorname*{Res}_a f(z) = A_{-1},$$

где A_{-1} — коэффициент при $\frac{1}{z-a}$ в разложении $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки a. Если a — простой полюс $f(z)$, то

$$\operatorname*{Res}_{a} f(z) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z).$$

Если $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитичны в точке a, $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$ (т. е. a — простой полюс $f(z)$), то

$$\operatorname*{Res}_{a} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Если a — полюс порядка n для $f(z)$, то

$$\operatorname*{Res}_{a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-a)^n f(z)].$$

Основная теорема о вычетах. Если функция $f(z)$ аналитична на простом замкнутом контуре C и внутри него, за исключением конечного числа особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$, лежащих внутри C, то

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{a_k} f(z).$$

Функция $f(z)$ называется мероморфной в области, если ее особыми точками в этой области являются только полюсы.

Принцип аргумента. Если функция $f(z)$ аналитична на простом замкнутом контуре C, не имеет на нем нулей и мероморфна в области, ограниченной контуром C, то

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N - P,$$

где N — число нулей, а P — число полюсов функции $f(z)$ в области, ограниченной C, причем каждый нуль и полюс $f(z)$ считается столько раз, каков его порядок.

Интеграл $\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$ называется логарифмическим вычетом функции $f(z)$ относительно контура C.

Вычетом относительно бесконечно удаленной изолированной особой точки функции $f(z)$ называется обозначаемое $\operatorname*{Res}_{\infty} f(z)$ число, равное

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C^-} f(z)\, dz,$$

где C — любая окружность с центром в точке O достаточно большого радиуса.

$$\operatorname*{Res}_{\infty} f(z) = -A_{-1},$$

где A_{-1} — коэффициент при $\frac{1}{z}$ в разложении $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=\infty$.

Если функция $f(z)$ аналитична в расширенной комплексной плоскости всюду, за исключением конечного числа особых точек, то сумма вычетов функции $f(z)$ относительно всех ее особых точек равна нулю.

Пусть $f(z)$ — функция, имеющая лишь конечное число особых точек a_k, $k=1, 2, \ldots, m$, выше действительной оси и не имеющая особых точек на действительной оси. Если $f(z)$ при $z\to\infty$ (в верхней полуплоскости) стремится к нулю быстрее, чем $\frac{1}{z}$, т. е. $f(z)=\frac{\alpha(z)}{z}$, где $\alpha(z)\to 0$ при $z\to\infty$ (в верхней полуплоскости), то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{m}\operatorname*{Res}_{a_k} f(z).$$

Лемма Жордана. Пусть C_n, $n=1, 2, \ldots$, бесконечная последовательность окружностей с центрами в точке O и неограниченно возрастающими радиусами, a — какое-нибудь действительное число, Γ_n — часть окружности C_n, расположенная в полуплоскости $\operatorname{Re} z\leqslant a$. Тогда, если функция $F(z)$ непрерывна на совокупности дуг Γ_n и $F(z)\to 0$ при z на Γ_n, $z\to\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\Gamma_n} F(z)\,e^{zt}\,dz=0$ для каждого $t>0$.

267. Вычислить вычеты следующих функций относительно точек $z=a$: 1) $\frac{z^3+1}{(z+2)^2(z-3)}$, $a=3$, $a=-2$; 2) $\frac{\cos z}{z^3(z+4)}$, $a=0$; 3) $\operatorname{tg} z$, $a=\frac{\pi}{2}$; 4) $e^{\frac{1}{z+2}}$, $a=-2$; 5) $\sin\frac{4}{z-1}$, $a=1$; 6) $\frac{z^4+2}{z^2+16}$, $a=\infty$; 7) $\frac{z^3+3z+1}{2z^2+5}$, $a=\infty$.

268. Найти вычеты следующих функций $f(z)$ относительно их особых точек: 1) $\frac{1}{(z+2)^2 z^3}$; 2) $\frac{1}{\sin z}$ $(z\neq\infty)$; 3) $e^{\frac{1}{z}}$; 4) $\frac{z^{2n}}{(1+z)^n}$; 5) $\cos z-\sin z$; 6) $\frac{e^z}{1+z}$; 7) $z^n e^z$; 8) $\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$; 9) $\sin z\sin\frac{1}{z}$; 10) $\frac{1}{z(1-e^{-hz})}$, $h\neq 0$.

269. Вычислить с помощью вычетов следующие интегралы:

1) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\,dz$; 2) $\oint\limits_{|z|=n} \operatorname{tg} \pi z\,dz$, $n = 1, 2, 3, \ldots$;

3) $\oint\limits_{|z|=R} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_k)}$, где все z_ν различны, $f(z)$ — аналитическая функция, $f(z_\nu) \neq 0$; $\nu = 1, 2, 3, \ldots, k$. Точки $z_1, z_2, \ldots, z_l$ лежат внутри контура $|z| = R$, а точки $z_{l+1}, z_{l+2}, \ldots, z_k$ лежат вне контура $|z| = R$.

4) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{z^{15}\,dz}{(z^2+1)(z^4+2)^3}$.

Указание. Использовать $\operatorname*{Res}\limits_{\infty} f(z)$.

5) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z\,dz}{(z+1)^2(z-i)}$; 6) $\oint\limits_{C} \frac{z^2+1}{(2z+3)^2 z^2}\,dz$, где C — эллипс $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$;

7) $\oint\limits_{C} \frac{dz}{z^4+1}$, где C — окружность $x^2 + y^2 = 2x$;

8) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$.

Указание. Использовать $\operatorname*{Res}\limits_{\infty} f(z)$.

9) $\oint\limits_{|z|=r} \sin \frac{1}{z}\,dz$; 10) $\oint\limits_{|z|=\frac{5}{2}} \frac{\operatorname{sh} z\,dz}{(z^2+4)(z^2-9)}$.

270. Вычислить с помощью вычетов определенные интегралы вдоль отрезка действительной оси, предварительно произведя замену $e^{ix} = z$: 1) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\frac{5}{4} - \cos x}$;

2) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(5+4\cos x)^2}$; 3) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x + a}$ $(a > 1)$.

271. Вычислить с помощью вычетов следующие несобственные интегралы: 1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+25)(9x^2+1)}$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2+9)}$; 3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+1}$; 4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{ax^2+bx+c}$, a, b, c — действительные числа, $b^2-4ac<0$, $a>0$; 5) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx$, $m<n$, m и n — натуральные числа.

272. Вычислить с помощью основной теоремы о вычетах следующие несобственные интегралы:

1) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos x\,dx}{x^2+a^2}$.

Указание. Рассмотреть интеграл от функции $f(z)=\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}$ вдоль контура, который составлен из верхней полуокружности $C_R\ \{z=\mathrm{Re}^{\varphi i},\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi\}$ и отрезка действительной оси $[-R,\ +R]$. Показать, что $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} f(z)\,dz=0$.

2) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos 2x-\cos 3x}{x^2}\,dx$.

Указание. Рассмотреть интеграл от функции $f(z)=\frac{e^{2iz}-e^{3iz}}{z^2}$ вдоль контура, состоящего из двух верхних полуокружностей: $C_R\ \{z=Re^{\varphi i},\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi\}$ и $C_r\ \{z=re^{\varphi i},\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi\}$, $r<R$, и двух отрезков действительной оси $[-R,\ -r]$ и $[r,\ R]$.

Показать, что

$$\int\limits_{C_R} f(z)\,dz\to 0 \quad \text{при} \quad R\to\infty,$$

$$\int\limits_{C_r} f(z)\,dz\to -\pi \quad \text{при} \quad r\to\infty.$$

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}\,dx}{1+e^x}$, $0<a<1$.

Указание. Рассмотреть интеграл от функции $f(z)=\frac{e^{iz}}{1+e^z}$ вдоль прямоугольного контура, состоящего из

(I) отрезка $[-R, R]$ действительной оси,
(II) отрезка $z=R+iy$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$,
(III) отрезка $z=x+2\pi i$, $R \geqslant x \geqslant -R$,
(IV) отрезка $z=-R+iy$, $2\pi \geqslant y \geqslant 0$.

Показать, что $\int\limits_{(II)} f(z)\,dz \to 0$ при $R \to \infty$,

$$\int\limits_{(IV)} f(z)\,dz \to 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty.$$

4) $\int\limits_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{(x^2+1)^2}$.

Указание. Рассмотреть интеграл от функции $f(x)=\frac{\ln z}{(z^2+1)^2}$ вдоль контура, который использован в примере 2).

Показать, что $\int\limits_{C_R} f(z)\,dz \to 0$ при $R \to \infty$

и

$$\int\limits_{C_r} f(z)\,dz \to 0 \quad \text{при} \quad z \to 0.$$

5) $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x \cdot dx}{x(x^2+1)^2}$.

Указание. Рассмотреть интеграл от функции $f(z)=\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}$ вдоль контура, который использован в примере 2).

273. Применяя лемму Жордана, вычислить интегралы:

1) $\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{tz}}{z^2}\,dx$, $a>0$; 2) $\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{tz}}{z}\,dz$, $a>0$;

3) $\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t - x\sqrt{\frac{\lambda}{k}}}\,\frac{d\lambda}{\lambda}$, $\gamma>0$.

274. Вычислить логарифмические вычеты функции $f(z)$ относительно контура Γ:

1) $\dfrac{z+i}{z^2+4}$, $\Gamma\{|z|=3\}$; 2) $\dfrac{\sin z}{z^3+8}$, $\Gamma\{|z|=5\}$;

3) $\dfrac{e^z}{z^4+1}$, $\Gamma\{|z|=2\}$; 4) $\dfrac{z^2+z+1}{z^2-3z+2}$, $\Gamma\{|z|=4\}$.

275. Вычислить интегралы вида

$$\oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz,$$

где $f(z)$: 1) $\dfrac{z^2+4}{(z+2)^3}$, $\Gamma\{|z|=3\}$; 2) $(z+1)^2\sin z$, $\Gamma\{|z|=3\}$; 3) z^3+z^2+z, $\Gamma\{|z|=2\}$; 4) $\dfrac{\cos z}{(z+1)^3 z^2 (z-i)}$, $\Gamma\{|z|=5\}$.

Теорема Руше. Если $f(z)$ и $\varphi(z)$ — аналитические функции в области, ограниченной контуром C, и на нем и во всех точках контура C выполняется неравенство $|f(z)|>|\varphi(z)|$, то $f(z)$ и $f(z)+\varphi(z)$ имеют внутри C одинаковое число нулей (считая каждый нуль столько раз, какова его кратность).

276. Используя теорему Руше, найти число корней следующих уравнений в указанных областях:

1) $z^9-2z^6+z^2-8z-2=0$ в круге $|z|<1$.

Указание. Взять $f(z)=-8z$ и $\varphi(z)=z^9-2z^6+z^2-2$.

2) $2z^5-z^3+3z^2-z+8=0$ в круге $|z|<1$.
3) $z^7-5z^4+z^2-2=0$ в круге $|z|<1$.
4) $z^4-5z+1=0$ в круге $|z|<1$ и в кольце $1<|z|<2$.

277. 1) Чему равен вычет функции $\varphi(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ относительно точки $z=z_0$, если $f(z)$ в точке z_0 имеет нуль порядка α, а $\varphi(z)$ аналитична в этой точке?

2) Тот же вопрос в предположении, что $f(z)$ имеет при $z=z_0$ полюс порядка β.

278. Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C} z^n \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz,$$

если n — натуральное число, а $f(z)$ — аналитическая функция внутри C и на C, причем $f(z) \neq 0$ на C, и имеет внутри C нули $z_1, z_2, \ldots, z_k$ порядков $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

279. Функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в точке z_0, причем $f(z_0) \neq 0$, а $g(z)$ имеет при $z = z_0$ нуль второго порядка. Какой вычет имеет $\frac{f(z)}{g(z)}$ относительно точки $z = z_0$?

280. Показать, что функция

$$\Pi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)} \frac{\omega(\zeta) - \omega(z)}{\zeta - z} \, d\zeta,$$

где $\omega(z) = (z - z_1)^2 (z - z_2)^3 (z - z_3)$, z_1, z_2, z_3 различны; Γ — замкнутый контур, охватывающий точки z_1, z_2, z_3, $f(\zeta)$ — аналитическая функция внутри и на контуре Γ,

1) является многочленом степени не выше 5;

2) удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{array}{lll} \Pi(z_1) = f(z_1); & & \\ \Pi(z_2) = f(z_2); & \Pi'(z_1) = f'(z_1); & \Pi''(z_2) = f''(z_2). \\ \Pi(z_3) = f(z_3); & \Pi'(z_2) = f'(z_2); & \end{array}$$

Замечание. $\Pi(z)$ есть интерполяционный многочлен для $f(z)$, удовлетворяющий условиям 1) и 2).

§ 6. Конформные отображения

Рассмотрим отображение, осуществляемое функцией $w = f(z)$. Будем говорить, что отображение $w = f(z)$, определенное в точке z_0 и ее окрестности, обладает в точке z_0: 1) свойством консерватизма углов, если при этом отображении углы между кривыми, выходящими из точки z_0, сохраняются по величине и направлению, и 2) свойством постоянства растяжений, если при этом отображении коэффициент растяжения бесконечно малых дуг, выходящих из точки z_0, не зависит от направления этих дуг. Отображение $w = f(z)$, обладающее в точке z_0 свойствами консерватизма углов и постоянства растяжений, будем называть конформным отображением. Отображение $w = f(z)$ называется конформным в области D, если оно конформно в каждой ее точке.

Для того чтобы отображение $w = f(z)$ было конформным в области D, необходимо и достаточно, чтобы в этой области функция $w = f(z)$ была аналитична и ее производная $f'(z)$ была отлична от нуля.

281. Используя уравнения прямой и окружности в комплексной форме, показать, что линейная функция $w = az + b$,

$a \neq 0$, отображает прямую в прямую и окружность в окружность.

282. Найти линейную функцию, отображающую круг $|z-i|<2$ на круг $|w-2|<4$.

283. Найти линейную функцию, отображающую прямоугольник $ABCD$ на прямоугольник $PQRS$, где $z_A=3$; $z_B=5+2i$; $z_C=2+5i$; $z_D=3i$; $w_P=1+i$; $w_Q=4+i$; $w_R=4+3i$; $w_S=1+3i$.

284. Найти линейную функцию, отображающую полосу $-2<y-2x<2$ на полосу $1<\operatorname{Im} w<5$ так, что точка $\left(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$ переходит в точку (0; 5), а точка $\left(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right)$ переходит в точку (0, 1).

285. Найти линейную функцию, отображающую полуплоскость $\operatorname{Im} z>2$ на полуплоскость $\operatorname{Re} w<-3$ так, что принадлежащая первой полуплоскости часть мнимой оси переходит в принадлежащую второй полуплоскости часть действительной оси.

286. Найти дробно-линейную функцию, отображающую круг $|z|<1$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$ так, чтобы точки -1, $+1$, i переходили в точки ∞, 0, 1.

287. Найти дробно-линейную функцию, отображающую полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$ так, чтобы точки ∞, 0, 1 переходили в точки 0, 1, ∞.

288. Найти дробно-линейную функцию, отображающую круг $|z-2|<3$ на круг $|w|<1$ так, чтобы точки -1, 5, $\sqrt{5}\,i$ переходили в точки 1, i, -1.

289. Найти дробно-линейную функцию, отображающую полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ на круг $|w|<1$ так, чтобы точки -1, 0, $+1$ переходили в точки 1, i, -1.

290. Найти дробно-линейную функцию, отображающую круг $|z|<1$ на круг $|w|<1$ так, чтобы точки i, $-i$, $2i$ переходили в точки i, $-i$, $+\infty$.

291. Найти дробно-линейную функцию, отображающую полуплоскость $\operatorname{Im} z>y_0>0$ на круг $|w+i|<1$ так, чтобы $w(2y_0 i)=-i$.

292. Найти дробно-линейную функцию, которая преобразует круг $|z-i|<1$ в полуплоскость так, что точка $z=i$ переходит в точку $w=-3i$ этой полуплоскости, а граница круга — в прямую $v=v_0>0$.

293. Найти дробно-линейные функции, отображающие круг $|z-i|<1$ на круг $|w+i|<1$ так, чтобы точка $z_0=y_0 i$, $1<y_0<2$, круга $|z-i|<1$ переходила в точку $w_0=-i$.

294. Найти дробно-линейную функцию, отображающую область $\{|z-i|>1, |z-2i|<2\}$ на полосу $0<\operatorname{Re} w<1$.

Степенная функция $w=z^n$ отображает взаимно однозначно и конформно внутренность любого угла с прямолинейными сторонами и вершиной в точке O, раствора θ, $0<\theta\leqslant\frac{2\pi}{n}$, на внутренность соответствующего угла также с прямолинейными сторонами, вершиной в начале координат, раствора $n\theta$.

Отображение, осуществляемое функцией $w=z^n$, сводится к повороту каждого вектора z на угол $(n-1)\arg z$ и растяжению его в $|z|^{n-1}$ раз.

295. Найти степенную функцию, отображающую область $0<\arg z<\frac{\pi}{3}$ на область $\operatorname{Im} w>0$.

296. Найти функцию, отображающую область $0<\arg(z-1-i)<\frac{\pi}{2}$ на область $\operatorname{Re} w>0$.

297. Найти функцию, отображающую область $\frac{\pi}{2}<\arg z<\pi$ на область $0<\arg w<\frac{\pi}{4}$.

298. Найти функцию, отображающую луночку между окружностями $(x-1)^2+y^2=1$ и $x^2+(y-1)^2=1$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$.

299. Найти функцию, отображающую верхний полукруг $|z|<1$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$.

Функция Жуковского $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ взаимно однозначно и конформно отображает как внутренность, так и внешность единичного круга $|z|=1$ плоскости z на внешность отрезка $-1\leqslant u\leqslant+1$, $v=0$ (действительной оси) плоскости w. При этом каждая окружность $|z|=r_0<1$ преобразуется в эллипс с полуосями $a=\frac{1}{2}\left(r_0+\frac{1}{r_0}\right)$; $b=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_0}-r_0\right)$ и центром $w=0$. Каждая окружность $|z|=r_0>1$ преобразуется в эллипс с полуосями $a=\frac{1}{2}\left(r_0+\frac{1}{r_0}\right)$; $b=\frac{1}{2}\left(r_0-\frac{1}{r_0}\right)$ и центром $w=0$.

300. Используя функцию Жуковского, найти функцию, отображающую кольцо $\frac{1}{2} \leqslant |z| < 1$ на область $\frac{u^2}{25} + \frac{v^2}{9} \leqslant 1$ с разрезом $-4 \leqslant u \leqslant 4,\ v = 0$.

301. Используя функцию Жуковского, найти функцию, отображающую кольцо $1 < |z| \leqslant 2$ на область $\frac{u^2}{25} + \frac{v^2}{9} \leqslant 1$ с разрезом $-4 \leqslant u \leqslant 4,\ v = 0$.

302. Используя функцию Жуковского, найти функцию, отображающую область $0 < \arg z < \frac{\pi}{4},\quad 0 < |z| < 1$ на область $2u^2 - 2v^2 > 1,\ u > 0,\ v > 0$.

303. Используя функцию Жуковского, найти функцию, отображающую внутренность верхнего единичного полукруга $|z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

304. Используя функцию Жуковского, найти функцию, отображающую внешность верхнего единичного полукруга $|z| > 1,\ \operatorname{Im} z > 0$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

305. Используя функцию Жуковского, найти функцию, отображающую плоскость с разрезом по отрезку $[-2, 4]$ действительной оси на внутренность круга $|w| < 3$.

306. Используя функцию Жуковского, найти функцию, отображающую круг $|z| < 1$ с разрезом по отрезку прямой между точками $z = 0$ и $z_1 = 1$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Показательная функция $w = e^z$ отображает взаимно однозначно и конформно полосу ширины $h < 2\pi$, параллельную действительной оси, на угол раствора h с вершиной в начале координат; при этом прямые, параллельные действительной оси, преобразуются в прямолинейные лучи, выходящие из начала координат, а отрезки прямых, параллельных мнимой оси, преобразуются в дуги окружностей с центром в начале координат.

307. Используя показательную функцию, найти функцию, отображающую:

1) полуполосу $0 < x < +\infty,\quad 0 < y < \pi$ на область $|w| > 2,\ \operatorname{Im} w > 0$;

2) полуполосу $0 < x < 1,\ y > 0$ на верхний полукруг $|w| < 1,\ \operatorname{Im} w > 0$.

308. Используя логарифмическую функцию, найти функцию, отображающую:

1) плоскость с разрезом вдоль отрицательной действительной полуоси на полосу $0 < u < 1,\ -\infty < v < +\infty$;

2) верхнее полукольцо $2<|z|<3$, $y>0$, на прямоугольник $0<x<\ln\frac{3}{2}$, $0<y<\pi$.

309. Комбинируя элементарные функции, найти функции, отображающие:

1) полосу $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, $-\infty<y<+\infty$ на плоскость w с разрезами $-\infty<u\leqslant-1$, $v=0$ и $1\leqslant u<\infty$, $v=0$;

2) полуполосу $-\pi<x<\pi$, $y>0$ на плоскость w с разрезами вдоль отрезка $-1\leqslant u\leqslant 1$, $v=0$ и луча $u=0$, $-\infty<v<0$;

3) полосу $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$, $-\infty<y<+\infty$ на круг $|w|<1$ так, чтобы $w\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)=\pm 1$, $w(\infty)=i$;

4) полуполосу $0<x<2\pi$, $y>0$ на плоскость w с бесконечным разрезом $-1<u<\infty$, $v=0$;

5) полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ на круг $|w|<1$ так, чтобы точка z_0 верхней полуплоскости переходила в точку $w_0=0$;

6) круг $|z|<1$ на круг $|w|<1$ так, чтобы точка z_0 круга $|z|<1$ переходила в точку $w_0=0$;

7) полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ с разрезом вдоль отрезка с концами $z=a$ и $z=a+ih$, a и h — положительные числа, на полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$ так, чтобы точка $a+ih$ переходила в точку a;

8) единичный круг с разрезом вдоль отрезка с концами $z_1=re^{i\alpha}$, $z_2=e^{i\alpha}$, α — действительное число, $0<r<1$, на единичный круг $|w|<1$;

9) плоскость z с разрезами $-\infty<x\leqslant-a$, $y=0$ и $a\leqslant x<+\infty$, $y=0$, $a>0$, на полосу $0<\operatorname{Im} w<2v_0$ так, чтобы левый разрез переходил в нижний берег, а правый — в верхний берег;

10) полосу $-\infty<x<+\infty$, $0<y<2H$ с разрезом $-\infty<x\leqslant a$, $a>0$, $y=H$, $H>0$, на полосу $-\infty<u<+\infty$, $0<v<2H$;

11) полосу $-\infty<x<+\infty$, $0<y<1$ с разрезом $x=a$, $a>0$, $0\leqslant y\leqslant h$, на полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$ так, чтобы точка $a+hi$ перешла в точку a;

12) область, расположенную вне двух кругов C_1 и C_2, C_1 лежит вне C_2, на круговое кольцо;

13) внешность дуги AB на внешность круга C (рис. 9);
14) круговую луночку (рис. 10) на полосу $0 < \operatorname{Im} w < h$;
15) область $y^2 > 2p\left(x + \frac{p}{2}\right)$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

310. Рассмотреть отображение с помощью функции $w = w(z)$, полученной в задаче 309, 13) окружности C', касающейся границы круга C в точке $w = a$, $a > 0$.

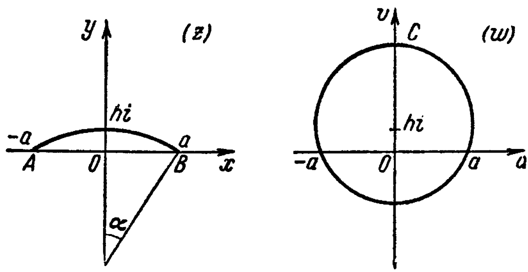


Рис. 9.

311. Конденсатор состоит из двух шин в форме полуплоскостей. Одна из этих полуплоскостей является продолжением другой, расстояние между ними $2a$ и разность потен-

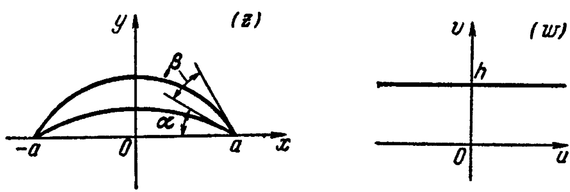


Рис. 10.

циалов $2v_0$. Найти комплексный потенциал поля конденсатора $w = F(z)$, если известно, что он осуществляет конформное отображение области D (плоскость z с выброшенными лучами $-\infty < x \leqslant -a$, $y = 0$ и $a \leqslant x < +\infty$, $y = 0$) на горизонтальную полосу в плоскости w, ширина которой равна $2v_0$ $(0 < \operatorname{Im} w < 2v_0)$.

312. Поле образовано двумя разноименно заряженными цилиндрами, лежащими вне друг друга, оси которых перпендикулярны плоскости z. Найти комплексный потенциал поля, если известно, что он осуществляет конформное отображение области D (плоскость z с выброшенными из нее сечениями цилиндров) на круговое кольцо.

313. Бесконечно глубокий поток идеальной жидкости обтекает плотину высоты H с заданной скоростью v_∞ на бесконечности. Найти комплексный потенциал поля скоростей.

314. Поток идеальной жидкости обтекает параболу $y^2 = 2px$. Величина скорости в точке $z = 0$ равна v_0. Найти комплексный потенциал поля скоростей.

315. Поток идеальной жидкости обтекает окружность $|z| = R$. Скорость в бесконечно удаленной точке равна $v_\infty = 1$ и направлена вдоль действительной оси. Найти комплексный потенциал скорости $w = \Phi(z)$, если известно, что он осуществляет конформное отображение области D (плоскость z с вырезанным кругом $|z| < R$) на некоторую полуплоскость. Предполагается, что поток симметричен относительно действительной оси и удовлетворяет условиям: $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) = \lim\limits_{z \to \infty} \Phi'(z) = 1$.

ГЛАВА IV
СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Гамма-функция и бета-функция

Определение гамма-функции $\Gamma(s)$:

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\,dx, \qquad s>0.$$

Формулы:

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s) \text{ (формула приведения)}, \ s>0;$$
$$\Gamma(n+1)=n!, \ n=0, 1, 2, \ldots;$$
$$\Gamma(s)=2\int_0^{\infty} e^{-x^2}x^{2s-1}\,dx \ (s>0); \ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi};$$
$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi};$$
$$\Gamma(s)\,\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin \pi s}, \quad 0<s<1 \quad \text{(формула дополнения)};$$
$$\Gamma(s)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{s(s+1)\ldots(s+n)}\,n^s, \qquad s>0.$$

Определение бета-функции $\mathrm{B}(p, q)$:

$$\mathrm{B}(p, q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \quad p>0, \quad q>0.$$

Формулы:

$$\mathrm{B}(p, q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\varphi\,\sin^{2q-1}\varphi\,d\varphi, \quad p>0, \quad q>0;$$

$$B(p, q) = B(q, p); \quad B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi;$$

$$B(m, n) = \frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}, \quad m \text{ и } n \text{ — натуральные числа;}$$

$$B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\,dx, \quad p > 0, \quad q > 0;$$

$$B(s, 1-s) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{1+x}\,dx, \quad 0 < s < 1;$$

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

В книге: Б. И. Сегал и К. А. Семендяев, Пятизначные математические таблицы, М., Изд. АН СССР, 1962, имеются значения гамма-функции $\Gamma(x)$, $x = 1\,(0{,}001)\,2$, $\Gamma(n+1)$, $n = 1\,(1)\,50$. Сокращенная запись обозначает, что аргумент x изменяется от 1 до 2 с интервалом 0,001.

316. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x\,dx,$$

где n и m — целые положительные числа.

Указание. Сделать подстановку $\sin^2 x = u$, которая позволит выразить интеграл через гамма-функцию.

317. Применяя формулу интегрирования по частям к интегралу, определяющему бета-функцию $B(p, q)$, показать справедливость формул:

1) $B(p, q) = \dfrac{q-1}{p+q-1}\,B(p, q-1)$,

2) $B(p, q) = \dfrac{p-1}{p+q-1}\,B(p-1, q)$.

318. Вычислить значения бета-функции $B(p, 1)$ и $B(p, n)$, где n — натуральное число.

319. С помощью гамма- и бета-функций вычислить следующие интегралы:

1) $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a > 0)$; 2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{1+x^4}$.

Указание. Положить $x^4 = t$.

3) $\int\limits_0^\infty x^{2n} e^{-x^2}\,dx$ (n — натуральное число).

320. Показать справедливость формул:

1) $$\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}\,dx = \frac{1}{m}\,\mathrm{B}\left(\frac{p}{m},\ q\right),\quad p,\ q,\ m > 0.$$

Указание. Положить $x^m = y$.

2) $$\int\limits_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{(x+p)^{a+b}}\,dx = \frac{1}{(1+p)^a\,p^b}\,\mathrm{B}(a,\ b).$$

Указание. Положить $y = (1+p)\dfrac{x}{x+p}$.

321. Используя результаты задачи 320, 1), вычислить интегралы:

1) $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1}\varphi\,d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{a-1}\varphi\,d\varphi,\quad a > 0;$$

2) $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^c\varphi\,d\varphi,\quad |c| < 1.$$

322. Определить площадь P фигуры, ограниченной кривой, полярное уравнение которой $r^4 = \sin^3\varphi\cos\varphi$. Кривая имеет две петли в I и III четверти.

Указание. Использовать формулы задачи 320, 1).

323. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{3-\cos\theta}}.$$

Указание. Положить $\cos\theta = 1 - 2\sqrt{x}$.

324. Используя формулу дополнения, доказать формулу удвоения (Лежандра)

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)=(2\pi)^{\frac{1}{2}}\,2^{\frac{1}{2}-2a}\,\Gamma(2a),\quad a>0.$$

325. Полагая $x=pe^{\frac{\omega}{\sqrt{p}}}$, показать, что

$$\lim_{p\to\infty}\frac{\Gamma(p+1)}{p^{p+\frac{1}{2}}e^{-p}}=\sqrt{2\pi},$$

т. е. что при больших p

$$\Gamma(p+1)\approx\sqrt{2\pi p}\,p^{p}e^{-p}$$

(асимптотическая формула).

326. Используя таблицы, найти значения гамма-функции: 1) $\Gamma(1{,}414)$; 2) $\Gamma(15)$; 3) $\Gamma(3{,}3287)$; 4) $\Gamma(-0{,}2666)$.

§ 2. Бесселевы (цилиндрические) функции

Уравнение Бесселя

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)\,y=0.$$

Бесселевы функции 1-го рода с индексом ν:

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}.$$

В случае целого неотрицательного индекса $\nu=n$ имеем

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!}$$

и, в частности,

$$J_0(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}.$$

В случае нецелого индекса ν общее решение уравнения Бесселя есть

$$y=C_1J_\nu(x)+C_2J_{-\nu}(x).$$

Если $\nu = -n$ (целое отрицательное число), то

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

Бесселевы функции 2-го рода с индексом ν:

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}, \quad \text{если } \nu \text{ — не целое;}$$

$$Y_n(x) = \lim_{\nu\to n} Y_\nu(x), \quad \text{если } n \text{ — целое.}$$

Общее решение уравнения Бесселя во всех случаях имеет вид

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Формулы приведения для бесселевых функций 1-го рода:

$$\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^m \frac{J_\nu(x)}{x^\nu} = (-1)^m \frac{J_{\nu+m}(x)}{x^{\nu+m}}, \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

$$\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^m [x^\nu J_\nu(x)] = x^{\nu-m} J_{\nu-m}(x), \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

$$2J'_\nu = J_{\nu-1} - J_{\nu+1}; \quad \frac{2\nu}{x} J_\nu = J_{\nu-1} + J_{\nu+1}; \quad J'_\nu = J_{\nu-1} - \frac{\nu}{x} J_\nu.$$

Бесселевы функции 1-го рода с полуцелыми индексами:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x; \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

При целом положительном n:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n \frac{\sin x}{x},$$

$$J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n \frac{\cos x}{x}.$$

Производящая функция системы бесселевых функций 1-го рода с целыми индексами:

$$e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(x)\, z^n.$$

Полагая $z = e^{i\varphi}$, как следствия последней формулы получаем:

$$\cos(x \sin\varphi) = J_0(x) + 2\sum_{m=1}^{+\infty} J_{2m}(x)\cos 2m\varphi;$$

$$\sin(x \sin\varphi) = 2\sum_{m=0}^{+\infty} J_{2m+1}(x)\sin(2m+1)\varphi;$$

$$\cos(x \cos\varphi) = J_0(x) + 2\sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^m J_{2m}(x)\cos 2m\varphi;$$

$$\sin(x \cos\varphi) = 2\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m J_{2m+1}(x)\cos(2m+1)\varphi.$$

Интегральное представление $J_n(x)$:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\varphi - n\varphi)\,d\varphi, \qquad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$$

Асимптотическое представление бесселевой функции 1-го рода с целым индексом:

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left[x - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] + O\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{при} \quad x \to +\infty,$$

где $O\left(\frac{1}{x}\right)$ означает, что найдутся такие числа x_0 и M, что при $x > x_0$ будет $\left|O\left(\frac{1}{x}\right)\right| < \frac{M}{x}$.

Таблицы бесселевых функций имеются в книгах:

1. Б. И. Сегал, К. А. Семендяев, Пятизначные математические таблицы, М., Физматгиз, 1962.

$$\left.\begin{array}{l} J_0(x),\ J_1(x),\ Y_0(x),\ Y_1(x); \\ I_0(x),\ I_1(x),\ K_0(x),\ K_1(x); \end{array}\right. \quad x = 0\ (0{,}01) \cdot 10.$$

2. В. Н. Фаддеева, М. К. Гавурин, Таблицы функций Бесселя целых номеров, М., Гостехиздат, 1950.

$J_n(x)$, $x = 0\ (0{,}01)\ 125$; $n = 0\ (1)\ 120$ (6-значные),

$J_n(x)$, $x = 0\ (0{,}01)\ 15$ (8-значные).

Корни уравнений $J_n(x) = 0$; $n = 0\ (1)\ 115$.

327. 1) Написать общее решение уравнения Бесселя $x^2y'' + xy' + (x^2 - 4)y = 0$.

2) Показать, что уравнение вида $x^2y''+xy'+(k^2x^2-p^2)y=0$ (где k — постоянное, не равное 0) приводится к уравнению Бесселя; написать его общее решение.

Указание. Сделать замену $\xi = kx$.

3) Показать, что уравнение вида $z''+\frac{2p+1}{x}z'+z=0$ приводится к уравнению Бесселя; написать его общее решение.

Указание. Сделать замену $z=x^{-p}y$.

4) Написать общий интеграл дифференциального уравнения $y''+\frac{5}{x}y'+y=0$.

Указание. Полагая $2p+1=5$, $p=2$, приходим к уравнению предыдущего примера.

328. Показать справедливость следующих формул: 1) $J_0'(x)=-J_1(x)$; 2) $J_2-J_0=2J_0''$; 3) $J_2=J_0''-x^{-1}J_0'$.

329. Показать справедливость следующих формул:

$$J_{\frac{3}{2}}(x)\sqrt{\frac{\pi x}{2}}=\frac{\sin x}{x}-\cos x;$$

$$J_{-\frac{5}{2}}(x)\sqrt{\frac{\pi x}{2}}=\frac{3}{2}\sin x+\left(\frac{3}{x^2}-1\right)\cos x.$$

330. Показать, что функция

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\varphi-n\varphi)\,d\varphi$$

при целом n удовлетворяет уравнению Бесселя $x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$.

331. Написать интегральные представления следующих бесселевых функций: 1) $J_2(x)$; 2) $J_0(x)$; 3) $J_{-1}(x)$.

332. Записать асимптотические представления следующих бесселевых функций: 1) $J_{-1}(x)$; 2) $J_2(x)$; 3) $J_3(x)$.

333. Показать, что $|J_n(x)|<1$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Указание. Использовать интегральное представление функции $J_n(x)$.

334. Показать справедливость формул:

$$\int x^{n+1} J_n(x)\,dx = x^{n+1} J_{n+1}(x) + C,$$

$$\int x^{1-n} J_n(x)\,dx = -x^{1-n} J_{n-1}(x) + C,$$

n — любое натуральное число.

Указание. Использовать формулу приведения.

335. Используя производящую функцию для бесселевой функции 1-го рода с целым индексом, доказать «теорему сложения»:

$$J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x)\,J_{n-k}(y), \qquad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

336. Показать справедливость следующих формул:

$$1)\quad \int_0^{\infty} e^{-ax} J_0(bx)\,dx = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad a>0,\ b>0.$$

Указание. Воспользоваться интегральным представлением $J_0(bx)$.

$$2)\quad \int_0^{\infty} e^{-a^2x^2} J_\nu(bx)\,x^{\nu+1}\,dx = \frac{b^\nu}{(2a^2)^{\nu+1}}\,e^{-\frac{b^2}{4a^2}},$$

$$a>0, \quad b>0, \quad \operatorname{Re}\nu > -1.$$

Указание. Заменить $J_\nu(bx)$ степенным рядом.

337. Используя асимптотическое представление функции Бесселя 1-го рода с целым индексом $J_n(x)$, показать, что при больших значениях x для корней этой функции справедлива приближенная формула $x_k \approx (2k+n)\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}$.

338. Бесселева функция комплексного переменного z 1-го рода с индексом ν определяется равенством

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m}}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)},$$

причем на плоскости z имеется разрез от точки $z=0$ вдоль отрицательной части вещественной оси. Показать, что

$$J_\nu(-z) = e^{-i\nu\pi} J_\nu(z), \qquad \text{если } 0 < \arg z < \pi,$$
$$J_\nu(-z) = e^{i\nu\pi} J_\nu(z), \qquad \text{если } -\pi < \arg z > 0.$$

339. Пусть $J_p(x)$ $(p > -1)$ — бесселева функция 1-го рода и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ — последовательность ее положительных корней. Доказать, что система функций

$$J_p(\lambda_1 x),\ J_p(\lambda_2 x),\ \ldots,\ J_p(\lambda_n x),\ \ldots$$

ортогональна с весом $\rho(x) = x$ на интервале $(0, 1)$.

Указание. Использовать равенство

$$\mu J_p(\lambda) J_p'(\mu) - \lambda J_p(\mu) J_p'(\lambda) = (\lambda^2 - \mu^2) \int_0^1 x J_p(\lambda x) J_p(\mu x)\, dx.$$

340. Записать ряд Фурье функции $f(x)$, заданной на интервале $(0, 1)$ по системе бесселевых функций $J_p(\lambda_1 x)$, $J_p(\lambda_2 x), \ldots, J_p(\lambda_n x), \ldots$ (см. предыдущую задачу).

Указание. Использовать равенство

$$\int_0^1 x J_p^2(\lambda x)\, dx = \frac{1}{2}\left[J_{p+2}^2(\lambda) + \left(1 - \frac{p^2}{\lambda^2}\right) J_p^2(\lambda)\right].$$

341. Показать, что функция

$$I_\nu(x) = e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} J_\nu(ix)$$

является решением видоизмененного уравнения Бесселя $x^2 y'' + x y' - (x^2 + \nu^2) y = 0$. Функция $I_\nu(x)$ называется видоизмененной функцией Бесселя 1-го рода с индексом ν. Показать, что

$$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{x+2m}}{m!\,\Gamma(\nu + m)}.$$

342. Показать, что для видоизмененной функции Бесселя 1-го рода $I_\nu(x)$ справедливы равенства

1) $I_{-n}(x) = I_n(x)$, если n — целое положительное число,

2) $e^{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)x} = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} I_n(x) z^n$.

343. Видоизмененной функцией Бесселя 2-го рода называется функция $K_\nu(x)$, определяемая равенствами

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \nu\pi}, \quad \text{если } \nu \text{ — не целое число},$$

$$K_n(x) = \lim_{\nu \to n} K_\nu(x), \quad \text{если } n \text{ — целое число}.$$

Показать, что $K_\nu(x)$ есть решение видоизмененного уравнения Бесселя $x^2y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)y = 0$.

344. Показать, что определитель Вронского W для двух бесселевых функций равняется: 1) $W[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)] = -\frac{2\sin\nu\pi}{\pi x}$; 2) $W[J_\nu(x), Y_\nu(x)] = \frac{2}{\pi x}$; 3) $W[I_\nu(x), I_{-\nu}(x)] = -\frac{2\sin\nu\pi}{\pi x i}$; 4) $W[I_\nu(x), K_\nu(x)] = -\frac{1}{xi}$.

Указание. Для вывода первого равенства использовать уравнение Бесселя.

345. Исходя из результатов предыдущей задачи, показать, что:

1) функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ линейно независимы, если ν отлично от целого числа, и линейно зависимы, если ν — целое число;

2) функции $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$ линейно независимы при любом ν;

3) функции $I_\nu(x)$ и $I_{-\nu}(x)$ линейно независимы, если ν отлично от целого числа, и линейно зависимы, если ν — целое число;

4) $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ линейно зависимы при любом ν.

346. Показать, что общее решение видоизмененного уравнения Бесселя $x^2y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)y = 0$ есть $y = C_1 I_\nu(x) + C_2 I_{-\nu}(x)$, если ν — не целое число, $y = C_1 I_\nu(x) + C_2 K_\nu(x)$ для любого ν (C_1 и C_2 — произвольные постоянные).

347. Используя производящую функцию для бесселевой функции 1-го рода с целым индексом, показать справедливость указанных ниже разложений по видоизмененным бесселевым функциям $I_n(x)$:

1) $e^{x\cos\varphi} = I_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(x)\cos n\varphi,$

2) $e^{x\sin\varphi} = I(x_0) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(x)\cos\left(\frac{n\pi}{2} - n\varphi\right).$

348. В качестве характеристики диода взята зависимость анодного тока $i(t)$ с напряжением на аноде $u(t)$. Она имеет вид $i(t) = Ae^{ku(t)}$, где A и k — постоянные величины. Пусть в анодную цепь включена э. д. с. вида $E = E_0 \cos\omega t$. Считая падение напряжения на нагрузке постоянным и равным i_0R, найти ток $i(t)$ после включения э. д. с.

349. Используя таблицы, вычислить значения функций Бесселя: 1) $J_0(4{,}12)$; 2) $J_1(5{,}228)$; 3) $K_0(6{,}23)$; 4) $K_1(1{,}27)$; 5) $J_2(4{,}22)$.

§ 3. Интегральные функции. Интеграл вероятностей. Интегралы Френеля. Эллиптические интегралы

Интегральная показательная функция:

$$\mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt \qquad (x < 0).$$

Для комплексного переменного z:

$$\mathrm{Ei}(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{e^t}{t}\,dt,$$

где интеграл берется по произвольному пути L в комплексной плоскости z, разрезанной вдоль действительной полуоси $[0, +\infty)$. При $x > 0$ функция $\mathrm{Ei}(x \pm e^i)$ имеет комплексное значение. Через $\overline{\mathrm{Ei}}(x)$ обозначается действительная часть $\overline{\mathrm{Ei}}(x \pm e^i)$, где $-\mathrm{Ei}(x) = [\mathrm{Ei}(x + 0i) + \mathrm{Ei}(x - 0i)]/2$.

Интегральный логарифм:

$$\mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t} \qquad (0 < x < 1),$$

$$\mathrm{li}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\ln t} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{dt}{\ln t}\right] \qquad (x > 1).$$

Интегральный синус:

$$\operatorname{si}(x) = -\int_{x}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt, \qquad \operatorname{si}(+\infty) = 0.$$

Интегральный косинус:

$$\operatorname{ci}(x) = -\int_{x}^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt, \qquad \operatorname{ci}(+\infty) = 0.$$

Таблицы интегральных функций имеются в книге: Е. Янке и Ф. Эмде, Таблицы функций с формулами и кривыми, М., Физматгиз, 1959.

$$-\operatorname{Ei}(-x):\ x = 0\,(0{,}01)\,1\,(0{,}1)\,5\,(1)\,15,$$
$$\overline{\operatorname{Ei}}(x):\ x = 0\,(0{,}001)\,1\,(0{,}1)\,(1)\,15,$$
$$\operatorname{Si}(x) = \operatorname{si}(x) + \frac{\pi}{2},\ \operatorname{Ci}(x) = \operatorname{ci}(x),$$
$$x = 0\,(0{,}01)\,1\,(0{,}1)\,5\,(1)\,15\,(5)\,1000\,(10)\,200\,(100)\,107.$$

Запись $x = 1\,(0{,}01)\,2$ означает, что x изменяется от 1 до 2 с интервалом 0,01.

350. Написать выражения неопределенных интегралов

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}, \quad \int \frac{\cos x}{x}\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx$$

соответственно через интегральные функции

$$\operatorname{Ei}(x), \quad \operatorname{li}(x), \quad \operatorname{si}(x), \quad \operatorname{ci}(x).$$

351. Показать, что неопределенные интегралы:

$$\int R(x)\,e^x\,dx, \quad \int \frac{R(x)}{\ln x}\,dx,$$
$$\int R(x)\operatorname{si}(x)\,dx, \quad \int R(x)\cos x\,dx,$$

где $R(x)$ — рациональная функция, выражаются в конечном виде с помощью рациональных функций, логарифмов, арктангенсов и интегральных функций.

352. Найти выражение интегралов 1)—6) через интегральные функции:

$$1)\ \int \frac{\cos x}{x+5}\,dx;\qquad 2)\ \int \frac{\sin x\,dx}{(x+2)^2};\qquad 3)\ \int \frac{x\,dx}{\ln x};$$

$$4)\ \int \frac{e^{3x}}{(x-1)^3}\,dx;\ 5)\ \int \frac{\sin 2x\,dx}{x^4};\ 6)\ \int \frac{e^{2x}+3e^x+1}{(x-1)(x+2)^2}\,dx.$$

353. Показать справедливость соотношений между интегральными функциями:

$\mathrm{Ei}(\ln x) = \mathrm{li}(x)$, $x < 1$; $\mathrm{li}(e^x) = \mathrm{Ei}(x)$, $x < 0$; $\mathrm{Ei}(ix) = \mathrm{ci}(x) + i\,\mathrm{si}(x)$; $\mathrm{Si}(-x) = -\mathrm{Si}(x)$; $\mathrm{si}(-x) = -\mathrm{si}(x) - \pi$.

354. Показать справедливость разложений в ряд следующих интегральных функций:

$$\mathrm{Ei}(x) = C + \ln(-x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{kk!},\qquad x < 0;$$

$$\mathrm{li}(x) = C + \ln\ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^k}{kk!},\qquad x > 1;$$

$$\mathrm{li}(x) = C + \ln(-\ln x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^k}{kk!},\qquad 0 < x < 1;$$

$$\mathrm{si}(x) = -\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)(2k-1)!};$$

$$\mathrm{ci}(x) = C + \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k(2k)!},$$

где

$$C = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t} - e^{-\frac{1}{t}}}{t}\,dt = 0{,}5772157\ \ldots$$

— постоянная Эйлера.

355. Показать, что при малых значениях x справедливы приближенные формулы: $\mathrm{Ei}(-x) \approx C + \ln x$; $\mathrm{li}(x) \approx \dfrac{-x}{\ln\frac{1}{x}}$; $\mathrm{si}(x) \approx x$; $\mathrm{Ci}(x) \approx C + \ln x$, где C — постоянная Эйлера.

356. Показать справедливость асимптотических формул (при больших значениях x): $\operatorname{Ei}(-x) \approx \frac{e^{-x}}{-x}$; $\operatorname{si}(x) \approx$ $\approx -\frac{\cos x}{x}$; $\operatorname{ci}(x) \approx \frac{\sin x}{x}$.

357. Интегрируя по частям, показать справедливость равенств:

$$\int_0^x \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt = \operatorname{Si}(2x) - \frac{\sin^2 x}{x};$$

$$\int_0^x \operatorname{Ei}(-mt)\, dt = x \operatorname{Ei}(-mx) - \frac{1-e^{-mx}}{m}.$$

358. Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{x} \frac{e^t dt}{t^2(t-1)}$, $x < 0$.

359. Сопротивление излучения длинной прямой антенны определяется по формуле

$$R_r = 60 \int_0^{\pi} \frac{[\cos(kl \cos\theta) - \cos kl]^2}{\sin\theta}\, d\theta,$$

где k, l постоянны. Найти выражение R_r через интегральные функции $\operatorname{Si}(x)$ и $\operatorname{Ci}(x)$.

Указание. Применить подстановку $t = \cos\theta$.

360. Используя таблицы, вычислить значения функций: $\operatorname{Si}(0{,}15)$; $\operatorname{Ci}(0{,}87)$; $\overline{\operatorname{Ei}}(4{,}2)$; $\operatorname{Ei}(-0{,}45)$.

361. Исследуя интегральные функции с помощью первой производной, построить их графики.

Интегралом вероятностей называется функция

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad \operatorname{erf}(+\infty) = 1.$$

Для комплексного переменного $\operatorname{erf} z$ определяется аналогично.

Таблицы интеграла вероятностей имеются в книге: Б. И. Сегал, К. А. Семендяев, Пятизначные математические таблицы, Физматгиз, 1962: $\operatorname{erf} x$ для $x = 0\,(0{,}001)\,2.5\,(0{,}01)\,3$ и некоторые значения для $x > 3$.

362. Часто за интеграл вероятностей берется функция

$$\Phi(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

или (по С. Бернштейну)

$$\Phi_{Б}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Показать справедливость равенств: $\Phi(x)=\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$; $\operatorname{erf} x=\Phi\left(x\sqrt{2}\right)$; $\Phi_{Б}(x)=\frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$; $\operatorname{erf} x=2\Phi_{Б}\left(x\sqrt{2}\right)$; $\frac{d}{dx}(\operatorname{erf} x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$; $\frac{d}{dx}\Phi(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}$; $\int \operatorname{erf} x\,dx=$ $=x\operatorname{erf} x+\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}+C.$

363. Показать справедливость следующих интегральных представлений:

$$\operatorname{erf} x=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x^2}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt,\quad \operatorname{erf}(xy)=\frac{2y}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-y^2t^2}\,dt.$$

364. Показать, что $\operatorname{erf} x$ разлагается в степенной ряд:

$$\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)(k-1)!},\qquad |x|<\infty.$$

365. Показать, что функция $\varphi(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{x^2}\operatorname{erf} x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\varphi'-2x\varphi=1$, и получить отсюда разложение

$$\operatorname{erf} x=\frac{2x}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^{2n}}{(2n+1)!!},\qquad |x|<\infty.$$

366. Используя правило дифференцирования по параметру α, показать, что

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\alpha t^2}}{1+t^2}\,dt=e^{-\alpha}\left[1-\operatorname{erf}\left(\sqrt{\alpha}\right)\right].$$

367. Вероятность попадания случайной величины X с нормальным распределением в отрезок (α, β) равняется

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx,$$

где α и β — постоянные. Показать, что

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{\beta - a}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha - a}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right].$$

368. Используя таблицы, вычислить значения функции вероятностей: $\operatorname{erf}(0{,}283)$, $\operatorname{erf}(2{,}45)$, $\operatorname{erf}(3{,}5)$.

369. Исследовать с помощью первой производной функцию $\operatorname{erf} x$ и построить ее график.

Интегралами Френеля называются следующие функции: синус-интеграл Френеля

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin^2 t\, dt, \qquad S(+\infty) = \frac{1}{2};$$

косинус-интеграл Френеля

$$C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos^2 t\, dt, \qquad C(+\infty) = \frac{1}{2}.$$

Таблицы (4-значные) интегралов Френеля имеются в книге: Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш, Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, М., Изд-во «Наука», 1964.

$S(\sqrt{x})$, $C(\sqrt{x})$ для $x = 0\ (0{,}2)\ 1\ (0{,}2)\ 20\ (0{,}5)\ 50$.

370. Показать справедливость следующих интегральных представлений $S(x)$ и $C(x)$:

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt, \quad C(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x^2} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt.$$

371. Показать, что $S(x)$ и $C(x)$ разлагаются в степенные ряды:

$$S(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{4k+3}}{(2k+1)!\,(4k+3)}, \qquad |x|<\infty,$$

$$C(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{4k+1}}{(2k)!\,(4k+1)}, \qquad |x|<\infty.$$

372. Показать, что интегралы Френеля $S(x)$, $C(x)$ связаны с функциями $J_{\frac{1}{2}}(x)$, $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ и $\operatorname{erf} x$ следующими соотношениями:

$$S(x)=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}J_{\frac{1}{2}}(t)\,dt, \quad C(x)=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}J_{-\frac{1}{2}}(t)\,dt,$$

$$C(x)+iS(x)=\sqrt{\frac{i}{2}}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{i}}\right),$$

$$C(x)-iS(x)=\frac{1}{\sqrt{2i}}\operatorname{erf}\left(x\sqrt{i}\right).$$

373. Интегрируя по частям, проверить соотношения:

$$\int_0^p S(\alpha x)\,dx=pS(\alpha p)+\frac{\cos(\alpha^2p^2)-1}{\alpha\sqrt{2\pi}};$$

$$\int_0^p C(\alpha x)\,dx=pC(\alpha p)-\frac{\sin(\alpha^2p^2)}{\alpha\sqrt{2\pi}}.$$

374. Используя таблицы, вычислить значения интегралов Френеля:

$$S(0{,}2),\quad C(7),\quad S(2{,}5),\quad C(0{,}9).$$

375. Исследовать с помощью первой производной функции $S(x)$ и $C(x)$ и построить их графики.

Эллиптические интегралы имеют вид:

$$\int_0^x\frac{R(x)}{\sqrt{P(x)}}\,dx,$$

где $R(x)$ — рациональная функция от x, а $P(x)$ — многочлен 3-й или 4-й степени. Этот интеграл может быть преобразован к сумме интегралов, приводящих к элементарным функциям и к эллиптическим интегралам в нормальной форме:

эллиптический интеграл 1-го рода:

$$F(\varphi, \theta) = \int_0^{\sin\varphi} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \text{где} \quad k = \sin\theta;$$

эллиптический интеграл 2-го рода:

$$E(\varphi, \theta) = \int_0^{\sin\varphi} \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad \text{где} \quad k = \sin\theta;$$

эллиптический интеграл 3-го рода:

$$\Pi(\varphi, \lambda, \theta) = \int_0^{\sin\varphi} \frac{dx}{(1+\lambda x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \text{где} \quad k = \sin\theta.$$

Число k называется модулем этих интегралов, а число λ — параметром интеграла 3-го рода.

Таблицы эллиптических интегралов имеются в книге: Б. И. Сегал, К. А. Семендяев, Пятизначные математические таблицы, М., Физматгиз, 1962. Значения $F(\varphi, \theta)$ и $E(\varphi, \theta)$ даны с интервалом в 1° по аргументу φ и с интервалом 5° по аргументу θ.

376. Полагая $x = \sin\psi$, показать, что эллиптические интегралы 1-го, 2-го и 3-го рода приводятся к нормальной тригонометрической форме:

$$F(\varphi, \theta) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\Delta\psi}, \quad \text{где} \ \Delta\psi = \sqrt{1-k^2\sin^2\psi};$$

$$E(\varphi, \theta) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi = \int_0^{\varphi} \Delta\psi\,d\psi;$$

$$\Pi(\varphi, \lambda, \theta) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{(1+\lambda\sin^2\psi)\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{(1+\lambda\sin^2\psi)\,\Delta\psi}.$$

377. Показать, что эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода разлагаются в степенные ряды по степеням k с коэффициентами, зависящими от φ:

$$F(\varphi, \theta) = A_0 + \frac{1}{2} A_1 k^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} A_2 k^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} A_3 k^6 + \ldots,$$

$$E(\varphi, \theta) = A_0 - \frac{1}{2} A_1 k^2 - \frac{1}{2\cdot 4} A_2 k^4 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6} A_3 k^6 - \ldots,$$

где $A_n = \int\limits_0^{\varphi} \sin^{2n}\alpha\, d\alpha$.

378. Выражения $F\left(\frac{\pi}{2}, \theta\right)$ и $E\left(\frac{\pi}{2}, \theta\right)$ называются полными эллиптическими интегралами 1-го и 2-го рода. Показать, что полные эллиптические интегралы разлагаются в следующие степенные ряды:

$$F\left(\frac{\pi}{2}, \theta\right) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right]^2 k^{2n}\right\},$$

$$E\left(\frac{\pi}{2}, \theta\right) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right]^2 \frac{k^{2n}}{2n-1}\right\}.$$

379. Используя таблицы, вычислить значения эллиптических функций:

1) $F(\varphi, \theta)$ при $\varphi = 28°$, $\theta = 75°$;
2) $E(\varphi, \theta)$ при $\varphi = 58°$, $\sin^2\theta = 0{,}11698$;
3) $E(\varphi, \theta)$ при $\varphi = 17°20'$, $\theta = 37°$;
4) $F(\varphi, \theta)$ при $\varphi = 12°45'$, $\sin^2\theta = 0{,}6235$.

380. С помощью эллиптических интегралов 1-го и 2-го рода вычислить интегралы:

1) $\int\limits_0^{t_0} \frac{dt}{\sqrt{1 - 4\sin^2 t}}$ (сделать замену $\sin\psi = 2\sin t$);

2) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}$ (сделать замену $x = \cos\psi$);

3) $\int\limits_0^{1} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1 - x^4}}$ (сделать замену $x = \cos\psi$).

381. Вычислить длину: 1) эллипса $x=a\sin t$; $y=b\cos t$; 2) лемнискаты $r^2=2a^2\cos 2\vartheta$.

382. Время полного колебания простого маятника с длиной l и амплитудой колебания 2α выражается формулой

$$T=\sqrt{\frac{2l}{g}}\int_0^{\alpha}\frac{d\tau}{\sqrt{\cos\tau-\cos\alpha}},$$

где g — ускорение силы тяжести. Выразить T через эллиптический интеграл 1-го рода.

Указание. Сделать замену $\sin\frac{\tau}{2}=k\sin\psi$, где $k=\sin\frac{\alpha}{2}$.

383. Коэффициент взаимной индукции M двух круглых коаксиальных петель, несущих токи, равняется

$$M=\mu\sqrt{ab}\,k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(2\sin^2\varphi-1)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

где μ, a, b, k — постоянные и $|k|<1$. Выразить M через эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода.

§ 4. Некоторые системы ортогональных многочленов

Системой ортогональных многочленов называется система многочленов, являющихся решениями однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$\beta y''(x)+(\alpha+\beta')\,y'(x)-\gamma_n y(x)=0,\quad a<x<b,\quad n=0,1,2,\ldots$$

с коэффициентами

$$\alpha(x)=\alpha_0+\alpha_1 x;\quad \beta(x)=\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2,$$

где α_0, α_1, β_0, β_1, β_2 — действительные числа. Коэффициент γ_n зависит от n. Коэффициенты $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ связаны дифференциальным соотношением (уравнение Пирсона)

$$\frac{\rho'}{\rho}=\frac{\alpha(x)}{\beta(x)},$$

в котором $\rho(x)$ — неотрицательная функция, удовлетворяющая краевым условиям

$$\rho(x)\,\beta(x)\,|_{x=a}=0.$$

Функция $\rho(x)$ называется весовой функцией или весом системы ортогональных многочленов. Каждая система ортогональных многочленов характеризуется весом $\rho(x)$ и промежутком (a, b). Каждый многочлен системы, как решение линейного однородного дифференциального уравнения, определен с точностью до постоянного множителя.

Примеры систем ортогональных многочленов:

1) многочлены Лежандра $P_n(x)$: $\rho(x)=1$, $a=-1$, $b=+1$;

2) многочлены Чебышева $T_n(x)$: $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $a=-1$, $b=+1$;

3) многочлены Эрмита $H_n(x)$: $\rho(x)=e^{-x^2}$, $a=-\infty$, $b=+\infty$;

4) многочлены Лагерра $L_n^{(\lambda)}(x)$: $\rho(x)=x^{\lambda}e^{-x}$, где $\lambda>-1$, $a=0$, $b=+\infty$.

384. Показать, что в качестве функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ в уравнении Пирсона можно взять:

1) для многочленов Лежандра $\alpha(x)=0$, $\beta(x)=1-x^2$; 2) для многочленов Чебышева $\alpha(x)=x$, $\beta(x)=1-x^2$; 3) для многочленов Эрмита $\alpha(x)=-2x$, $\beta=1$; 4) для многочленов Лагерра $\alpha(x)=\lambda-x$, $\beta(x)=x$.

385. Пусть многочлен степени n, $n=0, 1, 2, \ldots$,

$$q_n(x)=a_nx^n+b_nx^{n-1}+c_nx^{n-2}+\ldots+l_n$$

является решением дифференциального уравнения

$$(\beta_0+\beta_1x+\beta_2x^2)y''+(\alpha_0+\alpha_1x+\beta_1+2\beta_2x)y'-\gamma_ny=0.$$

Показать, используя метод неопределенных коэффициентов, что

$$\gamma_n=n[\alpha_1+(n+1)\beta_2], \qquad b_n=\frac{\alpha_0+n\beta_1}{\alpha_1+2n\beta_2}na_n.$$

386. Воспользовавшись предыдущей задачей,

1) вычислить значения γ_n для многочленов: а) Лежандра, б) Чебышева, в) Эрмита, г) Лагерра;

2) найти соотношения между коэффициентами a_n и b_n для этих многочленов.

387. Используя значения $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и γ_n, написать дифференциальные уравнения, решениями которых являются: а) многочлены Лежандра, б) многочлены Чебышева, в) многочлены Эрмита, г) многочлены Лагерра.

388. Показать, что дифференциальное уравнение, определяющее систему ортогональных многочленов, можно преобразовать к виду: $(\beta\rho y')'-\gamma_n\rho y=0$.

Указание. Использовать уравнение Пирсона.

389. Показать, что два многочлена различных степеней $q_n(x)$ и $q_m(x)$, $m \neq n$, принадлежащих к одной системе (с весом $\rho(x)$), удовлетворяют условию ортогональности с весом $\rho(x)$:

$$\int_a^b q_n(x)\, q_m(x)\, \rho(x)\, dx = 0.$$

Указание. Написать дифференциальные уравнения для многочленов $q_n(x)$ и $q_m(x)$ и, исходя из них, вычислить выражение $(\gamma_n - \gamma_m) \int_a^b q_n q_m \rho\, dx$, используя для этого краевые условия.

390. Показать, что любой многочлен $p_n(x)$ степени n можно представить в виде линейной комбинации ортогональных многочленов $q_0(x)$, $q_1(x)$, ..., $q_n(x)$, принадлежащих к одной системе, т. е. записать в виде

$$p_n(x) = \alpha_0 q_0(x) + \alpha_1 q_1(x) + \ldots + \alpha_n q_n(x).$$

Указание. Вычислить коэффициенты α_k, используя свойство ортогональности многочленов $q_l(x)$ с весом $\rho(x)$:

$$\alpha_k = \frac{\int_a^b p_n(x)\, q_k(x)\, \rho(x)\, dx}{\int_a^b q_k^2(x)\, \rho(x)\, dx}.$$

Величина $\int_a^b q_k^2(x)\, \rho(x)\, dx$ называется квадратом взвешенной нормы с весом $\rho(x)$ многочлена $q_k(x)$.

391. Показать, что ортогональный многочлен $q_n(x)$ любой системы с весом $\rho(x)$ ортогонален (с весом $\rho(x)$) к произвольному многочлену $p_k(x)$ степени $k < n$.

Указание. Использовать результаты задач 390 и 389.

392. Показать, что ортогональный многочлен $q_n(x)$ с весом $\rho(x)$ имеет на интервале (a, b) в точности n различных корней.

Указание. Рассмотреть $\int\limits_a^b q_n(x) r_m(x) \rho(x)\,dx$, где $r_m(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)$, и показать, что многочлен $q_n(x)$ меняет знак при прохождении через точки $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Использовать соотношение $\int\limits_a^b q_n(x)\rho(x)\,dx = 0$ (см. задачу 391).

393. Показать методом математической индукции, что выражение

$$\tilde{Q}_n(x) = \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} \{\rho(x)\beta^n(x)\}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\rho(x)$ — весовая функция, удовлетворяющая уравнению Пирсона и краевым условиям, является многочленом степени n:

$$\tilde{Q}_n(x) = \tilde{a}_n x^n + \tilde{b}_n x^{n-1} + \ldots + \tilde{l}_n.$$

Указание. 1) Вычислить $(\rho\beta^n)'$, $(\rho\beta^n)''$, ..., $(\rho\beta^n)^{(n)}$; 2) найти значение $\tilde{a}_n$.

394. Показать, что многочлен $y = \tilde{Q}_n(x) = \frac{1}{\rho}(\rho\beta^n)^{(n)}$ (см. задачу 393) является решением дифференциального уравнения

$$\beta y'' + (\alpha + \beta')y' - \gamma_n y = 0.$$

Указание. Составить дифференциальное уравнение первого порядка для функции $z = \rho\beta^n$ и затем продифференцировать его $n+1$ раз, используя формулу Лейбница.

395. Вычислить коэффициенты $\tilde{a}_n$ многочлена $\tilde{Q}_n(x)$ в случае, если $\tilde{Q}_n(x)$ является: а) многочленом Лежандра; б) многочленом Чебышева, в) многочленом Эрмита, г) многочленом Лагерра.

396. Показать, что для многочлена $\tilde{Q}_n(x) = \frac{1}{\rho}(\rho\beta^n)^{(n)}$ справедливо равенство

$$\tilde{d}_n^2 = \int\limits_a^b \tilde{Q}_n^2 \rho\,dx = (-1)^n n!\,\tilde{a}_n \int\limits_a^b \rho\beta^n\,dx.$$

Указание. Воспользоваться результатом задачи 390.

397. Вычислить квадрат взвешенной нормы для многочлена $\tilde{Q}_n(x)$, если этот многочлен является: а) многочленом Лежандра, б) многочленом Чебышева, в) многочленом Эрмита, г) многочленом Лагерра.

Нормировать систему ортогональных многочленов — значит однозначным образом указать для многочленов системы множитель, с точностью до которого эти многочлены были определены. Примеры нормировки:

1) коэффициент $\tilde{a}_n$ при старшей степени x^n определяется по формуле: $\tilde{a}_n = \prod\limits_{k=n+1}^{2n} (\alpha_1 + k\beta_2)$. В этом случае имеем

$$\tilde{b}_n = \frac{\alpha_0 + n\beta_1}{\alpha_1 + 2n\beta_2} n\tilde{a}_n,$$

$$\tilde{Q}_n(x) = \tilde{a}_n x^n + \tilde{b}_n x^{n-1} + \ldots + \tilde{l}_n \quad \text{(см. задачу № 393).}$$

2) Коэффициент $\tilde{a}_n$ полагаем равным единице. При этом $\tilde{Q}_n(x) = x^n + \tilde{b}_n x^{n-1} + \ldots + \tilde{l}_n$.

3) Взвешенную норму полагаем равной единице, т. е. $\int\limits_a^b \hat{Q}_n^2(x)\rho(x)\,dx = 1$, и $\tilde{a}_n$ считаем положительным.

4) В формуле $Q_n(x) = A_n\tilde{Q}_n(x) = A_n \frac{1}{\rho}\frac{d^n}{dx^n}\{\rho(x)\beta^{(n)}(x)\} = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots + l_n$ (см. задачу № 396) коэффициент A_n выбран следующим образом:

а) для многочленов Лежандра $A_n = (-1)\frac{1}{2^n n!}$,

б) для многочленов Чебышева $A_n = (-1)^n 2^n \frac{n!}{(2n)!}$,

в) для многочленов Эрмита $A_n = (-1)^n$,

г) для многочленов Лагерра $A_n = 1$.

При таком выборе A_n формула $Q_n(x) = A_n \frac{1}{\rho}\frac{d^n}{dx^n}\{\rho(x)\beta^n(x)\}$ называется формулой Родрига для системы ортогональных многочленов.

398. 1) Написать формулу Родрига для: а) многочленов Лежандра $P_n(x)$, б) многочленов Чебышева $T_n(x)$, в) многочленов Эрмита $H_n(x)$, г) многочленов Лагерра $L_n^{(\lambda)}(x)$.

2) Вычислить значения коэффициентов при старших степенях x у этих многочленов.

399. 1) Написать первые шесть многочленов Лежандра, Чебышева, Эрмита, Лагерра.

2) Вычислить квадрат взвешенной нормы многочленов $P_n(x)$, $T_n(x)$, $H_n(x)$, $L_n^{(\lambda)}(x)$.

400. Показать, что любые три последовательных ортогональных многочлена $Q_n(x)$, $Q_{n+1}(x)$ и $Q_{n+2}(x)$, принадлежащих одной ортогональной системе, связаны рекуррентным соотношением

$$xQ_n(x)=\frac{a_n}{a_{n+1}}Q_{n+1}(x)+\left(\frac{b_n}{a_n}-\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)Q_n(x)+\\+\frac{a_{n-1}}{a_n}\left(\frac{d_n}{d_{n+1}}\right)^2Q_{n-1}(x),$$

где

$$Q_m(x)=a_mx^m+b_mx^{m-1}+\ldots,\quad m=n,\ n+1,\ n+2;$$

$$d_m^2=\int_a^b Q_m^2(x)\rho(x)\,dx.$$

Указание. Разложить $xQ_n(x)$ по многочленам $Q_0(x)$, $Q_1(x),\ldots,Q_{n+1}(x)$ и вычислить коэффициенты разложения.

401. Воспользовавшись предыдущей задачей, написать рекуррентные соотношения для: а) многочленов Лежандра $P_n(x)$, б) многочленов Чебышева $T_n(x)$, в) многочленов Эрмита $H_n(x)$, г) многочленов Лагерра $L_n^{(\lambda)}(x)$.

Назовем производящей функцией системы ортогональных многочленов $Q_n(z)$ (z — комплексное переменное) функцию двух независимых переменных z и w, определяемую соотношением

$$\Psi(z,w)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\tilde{Q}_n(z)}{n!}w^n.$$

402. Показать, что для любой системы ортогональных многочленов с весом $\rho(x)$ производящей функцией является

$$\Psi(z,w)=\frac{1}{\rho(z)}\,\frac{\rho(t_w)}{|1+w\beta'(t_w)|},$$

где t_w означает тот корень квадратного уравнения $t-z-w\beta(t)=0$, который при w, малых по модулю, близок к $t=z$.

Указание. Использовать формулу Родрига для $\tilde{Q}_n(z)$, а затем интегральное представление производных высшего порядка от аналитических функций. Полученный при этом интеграл вычисляется с помощью вычетов.

403. Написать производящие функции для: а) многочленов Лежандра $\tilde{P}_n(z)$, б) многочленов Чебышева $\tilde{T}_n(z)$, в) многочленов Эрмита $\tilde{H}_n(z)$, г) многочленов Лагерра $\tilde{L}_n^{(\lambda)}(z)$.

404. Показать, что многочлены Лежандра $P_n(x)$, Чебышева $T_n(x)$ и Эрмита $H_n(x)$ содержат при четном n только члены с четными степенями x, а при нечетном n только члены с нечетными степенями. Коэффициенты этих многочленов имеют чередующиеся знаки. Многочлены Лагерра $L_n^{(\lambda)}(x)$ содержат все степени x, начиная с x^n. Коэффициенты этих многочленов имеют чередующиеся знаки.

Указание. Воспользоваться рекуррентными формулами (см. задачу 400).

ГЛАВА V
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

§ 1. Преобразование Лапласа и его свойства

Комплекснозначную функцию $f(t)$ действительного аргумента t, непрерывную на промежутке $[0, +\infty)$, за исключением, быть может, изолированных точек, и имеющую ограниченный рост, будем называть оригиналом. Число s_0, обладающее тем свойством, что при $s > s_0$ несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty |f(t)|\, e^{-st}\, dt$ сходится, а при $s < s_0$ — расходится, является показателем роста оригинала $f(t)$. Функция $F(p)$ комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определяемая при $\operatorname{Re} p = s > s_0$ равенством

$$F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt,$$

называется изображением (по Лапласу) оригинала $f(t)$. Переход от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$ называется преобразованием Лапласа.

Обозначения:

$$f(t) \risingdotseq F(p), \quad F(p) \fallingdotseq f(t), \quad L(f(t)) = F(p).$$

Согласно определению, оригинал $f(t)$ задается на промежутке $[0, +\infty)$. В случае необходимости его доопределяют на промежутке $(-\infty, 0)$ равенством $f(t) = 0$.

Простейшие свойства преобразования Лапласа:

Линейность. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$, то $C_1 f(t) + C_2 \varphi(t) \risingdotseq C_1 F(p) + C_2 \Phi(p)$, где C_1 и C_2 — любые комплексные числа.

Подобие. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $f(at) \risingdotseq \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$ для любого числа $a > 0$.

Дифференцирование оригинала. Если $f(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция на промежутке $[0, +\infty)$ и $f'(t)$ является оригиналом, то из соотношения $f(t) \risingdotseq F(p)$ следует, что

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(+0).$$

Если $f(t)$ n раз непрерывно дифференцируема на промежутке $[0, +\infty)$ и $f^{(n)}(t)$ является оригиналом, то из соотношения $f(t) \risingdotseq F(p)$ следует, что

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - f(+0)\,p^{n-1} - f'(+0)\,p^{n-2} - \ldots - f^{(n-1)}(+0).$$

Дифференцирование изображения. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$-tf(t) \risingdotseq F'(p), \quad (-1)^n t^n f(t) \risingdotseq F^{(n)}(p)$$

для любого натурального числа n.

Интегрирование оригинала. Если оригинал $f(t)$ непрерывен на промежутке $[0, +\infty)$ и $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$\int_0^t f(u)\,du \risingdotseq \frac{F(p)}{p}.$$

Интегрирование изображения. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $\frac{f(t)}{t}$ оригинал, то

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^\infty F(q)\,dq.$$

Запаздывание оригинала. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то для любого числа $\tau > 0$

$$f(t-\tau) = e^{-p\tau} F(p).$$

Смещение изображения. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то для любого комплексного числа λ

$$e^{\lambda t} f(t) \risingdotseq F(p-\lambda).$$

Умножение изображений (свертка оригиналов). Если оригиналы $f(t)$ и $\varphi(t)$ непрерывны на промежутке $[0, +\infty)$ и $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$, то

$$\int_0^t f(u)\,\varphi(t-u)\,du = (f * \varphi) \risingdotseq F(p)\,\Phi(p).$$

Формула Дюамеля. Если оригинал $f(t)$ непрерывен, а оригинал $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируем на промежутке $[0, +\infty)$ и $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$, то

$$f(t)\,\varphi(+0) + \int_0^t f(u)\,\varphi'(t-u)\,du \risingdotseq pF(p)\,\Phi(p).$$

Теорема обращения. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то в каждой точке t, в которой $f(t)$ дифференцируема,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\, e^{pt}\, dp,$$

где a — любое действительное число, большее показателя роста $f(t)$.

Вычисление интеграла $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\, e^{pt}\, dp$. Если: 1) изображение $F(p)$ аналитично в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$ всюду, за исключением конечного числа полюсов $p_1, p_2, \ldots, p_m$, 2) существует система не проходящих через полюсы окружностей C_n: $|p| = R_n$, $R_1 < R_2 < \ldots < R_n < \ldots$ с неограниченно возрастающими радиусами, таких, что $F(p) \to 0$ при p на C_n, $p \to \infty$ равномерно относительно $\arg p$ и 3) для любого числа $a > s_0$ интеграл $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\, dp$ абсолютно сходится, то

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\, e^{pt}\, dp = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}_{p_k} [F(p)\, e^{pt}].$$

Первая теорема разложения. Если изображение $F(p)$ в окрестности $|p| > R$ бесконечно удаленной точки имеет разложение в ряд Лорана вида

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{p^{k+1}},$$

то оригинал $f(t)$, соответствующий $F(p)$, имеет вид

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k t^k}{k!}, \qquad t > 0.$$

Если при $t > 0$

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k t^k}{k!}$$

и если существуют числа $M > 0$ и s_0 такие, что при всех $t > 0$

$$|f(t)| < M e^{s_0 t},$$

то $f(t)$ — оригинал,

$$f(t) \risingdotseq F(p).$$

$F(p)$ в окрестности $p=\infty$ разлагается в ряд Лорана

$$F(p)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_k}{p^k}.$$

Вторая теорема разложения. Если изображение $F(p)$ — правильная рациональная дробь, то

$$F(p) \risingdotseq f(t)=\sum_{k=1}^{m}\operatorname*{Res}_{p_k}\,[F(p)\,e^{pt}],$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_m$ — полюсы $F(p)$. В частности, если изображение $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$, где $A(p)$ и $B(p)$ — многочлены, не имеющие общих корней, имеет лишь простые полюсы $p_1, p_2, \ldots, p_k$, то

$$F(p) \risingdotseq f(t)=\sum_{k=1}^{m}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}\,e^{p_k t}.$$

405. Используя таблицу оригиналов и их изображений, а также определение и простейшие свойства преобразования Лапласа, найти изображение $F(p)$ по заданному оригиналу $f(t)$:

1) $f(t)=\eta(t-\tau), \quad \tau>0,$

$$\eta(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ 1, & t>0;\end{cases}$$

2) $f(t)=\eta(t-\tau_1)-\eta(t-\tau_2)$, где функция $\eta(t)$ определена так же, как в 1), а $0<\tau_1<\tau_2$;

3) $f(t)=\begin{cases}at+b, & 0\leqslant t<t_0,\\ 0, & t>t_0,\end{cases}$

$t_0>0$, a и b — постоянные;

4) $f(t)=\begin{cases}\dfrac{f_0 t}{\tau_1}, & 0<t<\tau_1,\\ f_0, & \tau_1<t<\tau_2,\\ f_0\dfrac{\tau_3-t}{\tau_3-\tau_2}, & \tau_2<t<\tau_3,\\ 0, & t>\tau_3;\end{cases}$

5) $f(t)=a+bt$; 6) $f(t)=t^{\frac{1}{2}}$; 7) $f(t)=\operatorname{ch} t\cos t$;

8) $f(t)=\operatorname{ch} at\sin at$; 9) $f(t)=\frac{1}{2}\operatorname{sh} t\sin t$; 10) $f(t)=$

$=\frac{1}{2}\operatorname{sh} at\sin at$; 11) $f(t)=\frac{1}{2}(\operatorname{ch} t\sin t-\operatorname{sh} t\cos t)$; 12) $f(t)=$ $=\frac{1}{2}(\operatorname{ch} t\sin t+\operatorname{sh} t\cos t)$; 13) $f(t)=\operatorname{ch} t\sin t$; 14) $f(t)=$ $=\operatorname{sh} t\cos t$; 15) $f(t)=\sin^4 t$; 16) $f(t)=e^{-4t}\sin 3t\cos 2t$.

406. Используя таблицу оригиналов и изображений, а также, где это необходимо, разлагая изображение на сумму более простых функций, найти оригиналы для следующих изображений:

1) $\frac{p+8}{p^2+4p+5}$; 2) $\frac{p+1}{p^2+2p}$; 3) $\frac{1}{(p-1)(p-2)^2}$;
4) $\frac{p+c}{(p+a)(p+b)^2}$; 5) $\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$, $a\neq b$;
6) $\frac{a^2}{p(p+a)^2}$; 7) $\frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}$; 8) $\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$;
9) $\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$; 10) $\frac{2p+3}{(p^2+4p+8)^2}$.

407. Найти свертку $(f*\varphi)$ следующих оригиналов:
1) $f(t)=e^t$; $\varphi(t)=t^2$; 2) $f(t)=\sin t$; $\varphi(t)=\cos t$; 3) $f(t)=t^3$; $\varphi(t)=t^2$; 4) $f(t)=\operatorname{sh} t$; $\varphi(t)=t^2$; 5) $f(t)=1$; $\varphi(t)=\sqrt{1+t}$; 6) $f(t)=\operatorname{sh} t$; $\varphi(t)=\sin t$.

408. Используя теорему умножения изображений и формулу Дюамеля, найти оригиналы $f(t)$ для следующих изображений:

1) $\frac{1}{p^2(p-a)}$; 2) $\frac{k}{p(p^2+k^2)}$; 3) $\frac{k}{p^2(p^2+k^2)}$;
4) $\frac{p}{(p^2+a^2)^2}$; 5) $\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$; 6) $\frac{1}{(p^2-6p+13)(p^2-6p+10)}$;
7) $\frac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}$.

409. Используя теорему обращения, найти оригинал $f(t)$, если известно изображение $F(p)$:

1) $\frac{1}{p-1}$; 2) $\frac{1}{p^2(p-1)}$; 3) $\frac{p}{(p^2+1)(p^2+9)}$;
4) $\frac{1}{(p-1)^2(p^2+1)}$.

410. Используя первую теорему разложения, найти оригинал $f(t)$ по его изображению: 1) $\frac{1}{p}\cos\frac{1}{p}$; 2) $\frac{1}{p}\sin\frac{1}{p}$.

411. Используя первую теорему разложения, найти оригинал по его изображению: 1) $\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$; 2) $\dfrac{1}{p^{n+1}}e^{-\frac{1}{p}}$, $n=0, 1, 2, 3, \ldots$

412. Используя вторую теорему разложения, найти оригиналы $f(t)$ для следующих изображений:

1) $\dfrac{p^2+1}{p(p+1)(p+2)(p+3)}$; 2) $\dfrac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)}$;

3) $\dfrac{1}{(p-1)^2(p-2)^3}$; 4) $\dfrac{1}{(p+1)^3(p+3)}$.

§ 2. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений операционным методом

Дано дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$a_0x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_nx(t)=f(t), \quad a_0\neq 0,$$

где $f(t)$ — оригинал, являющийся линейной комбинацией функций вида $t^me^{\lambda t}$ (m — натуральные числа, λ — любые комплексные числа)

$$x(0)=x_0, \quad x'(0)=x_1, \ \ldots, \ x^{n-1}(0)=x_{n-1}.$$

Применяя правила дифференцирования оригинала и свойство линейности, получим соответствующее операционное уравнение:

$$(a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n)X(p)=F(p)+x_0(a_0p^{n-1}+a_1p^{n-2}+\ldots$$
$$\ldots+a_{n-1})+x_1(a_0p^{n-2}+a_1p^{n-3}+\ldots+a_{n-2})+\ldots+x_{n-1}a_0,$$

где $X(p) \risingdotseq x(t)$ и $F(p) \risingdotseq f(t)$, т. е. уравнение

$$A(p)X(p)=F(p)+B(p),$$

где $A(p)$ и $B(p)$ — известные многочлены, а $F(p)$ — правильная рациональн я функция p,

$$X(p)=\frac{F(p)+B(p)}{A(p)}.$$

Решение: $x(t) \risingdotseq X(p)$.

Аналогично применяется операционный метод и к решению системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пусть, например, имеются система уравнений второго порядка

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{\nu k}x_k''(t)+b_{\nu k}x_k'(t)+c_{\nu k}x_k(t)\right)=f_\nu(t), \quad \nu=1, 2, \ldots, n,$$

относительно неизвестных $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ и система начальных условий

$$x_k(0)=\alpha_k;\quad x_k'(0)=\beta_k,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Предположим, что функции $f_\nu(t)$, $\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, — оригиналы, являющиеся линейными комбинациями функций вида $t^m e^{\lambda t}$, где m — натуральные, λ — любые числа.

Эту систему можно заменить операционной системой

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{\nu k}p^2+b_{\nu k}p+c_{\nu k})\,X_k(p)=F_\nu(p)+\sum_{k=1}^{n}[(a_{\nu k}p+b_{\nu k})\,\alpha_k+a_{\nu k}\beta_k],$$

где $X_k(p)\risingdotseq x_k(t)$; $F_\nu(p)\risingdotseq f_\nu(t)$, $\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Решая эту систему как алгебраическую линейную систему уравнений, найдем изображения $X_k(p)$, а затем и их оригиналы $x_k(t)$.

Операционный метод можно применять к решению некоторых типов интегральных уравнений.

Найти решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

413. $x'''-2x''+x'=4;$

$$x(0)=1,\quad x'(0)=2,\quad x''(0)=-2.$$

414. $x^{IV}-5x''+10x'-6x=0;$

$$x(0)=1,\quad x'(0)=0,\quad x''(0)=6,\quad x'''(0)=-14.$$

415. $y^{IV}+2y''+y=0;$

$$y(0)=0,\quad y'(0)=1,\quad y''(0)=2,\quad y'''(0)=-3.$$

416. $x''+x=t\cos 2t;$

$$x(0)=x'(0)=0.$$

417. $x'''-x''=0;$

$$x(0)=x_0,\quad x'(0)=x_1,\quad x''(0)=x_2.$$

418. $x^{IV}-5x''+10x'-6x=0;$

$$x(0)=1,\quad x'(0)=0,\quad x''(0)=6,\quad x'''(0)=-14.$$

419. $x^{IV}+4x'''+4x''=0;$

$$x(0)=x_0,\quad x'(0)=x_1,\quad x''(0)=x_2,\quad x'''(0)=x_3.$$

420. $x'''-6x''+11x'-6x=1;$

$$x(0)=x'(0)=x''(0)=0.$$

421. $x'' - 3x' + 2x = e^t;$

$$x(0) = x'(0) = 0.$$

422. $x'' + n^2 x = a \sin nt;$

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1.$$

423. $x'' + 3x' + 2x = 1 + t + t^2;$

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1.$$

424. $x^{\mathrm{IV}} + 2x'' + x = t \sin t;$

$$x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0.$$

425. $x''' + x = \frac{1}{2} t^2 e^t;$

$$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$$

426. $x'' + n^2 x = a \sin(mt + \alpha), \quad m \neq n,$

$$x(0) = x'(0) = 0.$$

427. $x'' - m^2 x = ae^{mt} + be^{nt}, \quad m \neq n,$

$$x(0) = x'(0) = 0.$$

428. К цепи, состоящей из самоиндукции L, сопротивления R и емкости C, включенных последовательно, в момент времени $t = 0$ приложена э. д. с. $v = E = \mathrm{const}$. В начальный момент $t = 0$ ток $I = I_0 = 0$, заряд $Q = Q_0 = 0$. Найти ток I в момент времени t из уравнения

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = v, \quad \text{где } \frac{dQ}{dt} = I.$$

429. Цепь состоит из самоиндукции L, сопротивления R и емкости C (конденсатор), включенных последовательно. Конденсатор, заряженный до потенциала E, разряжается через сопротивление и самоиндукцию. В начальный момент $I_0 = 0$; $Q_0 = CE$. Найти ток I в момент времени t (см. задачу 428).

430. Дифференциальное уравнение свободных колебаний вибратора при наличии силы сопротивления, пропорциональной первой степени скорости, имеет вид $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = 0$. Начальные условия: $x(0) = x_0$; $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$. Найти $x(t)$.

Найти решения систем дифференциальных уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

431. $\begin{cases} 3x' + 2x + y' = 1, \\ x' + 4y' + 3y = 0; \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0.$

432. $\begin{cases} x' - x - 2y = t, \\ -2x + y' - y = t; \end{cases}$

$$x(0) = 2, \quad y(0) = 4.$$

433. $\begin{cases} x' = 6x - 72y + 44z, \\ y' = -4x + 40y - 22z, \\ z' = -6x + 57y - 31z; \end{cases}$

$$x(0) = 9, \quad y(0) = 5, \quad z(0) = 7.$$

434. $\begin{cases} x_n'(t) = -cx_n + cx_{n-1} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots,\ k), \\ x_0'(t) = -cx_0; \end{cases}$

$$x_0(0) = 1, \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0,\ \ldots,\ x_k(0) = 0$$

435. $\begin{cases} 2x'' - x' + 9x - y'' - y' - 3y = 0, \\ 2x'' + x' + 7x - y'' + y' - 5y = 0; \end{cases}$

$$x(0) = x'(0) = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

436. $\begin{cases} x'' - x + y + z = 0, \\ x + y'' - y + z = 0, \\ x + y - z'' - z = 0; \end{cases}$

$$x(0) = 1, \quad y(0) = z(0) = 0, \quad x'(0) = y'(0) = z'(0) = 0.$$

437. $\begin{cases} x'' - 4x - y' - 2y + z' - 2z = 0, \\ 2x' - y'' + 3y + z'' - 4z = 0, \\ x' - 2x - y + z'' - 4z = 0; \end{cases}$

$$x(0) = y(0) = z(0) = 1, \quad x'(0) = 2, \quad y'(0) = 3, \quad z'(0) = 1.$$

438. $\begin{cases} x'' - 4x' - y' + y = 1, \\ x' + 6x + y'' - y' = e^{4t}; \end{cases}$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad x'(0) = x_1, \quad y'(0) = y_1.$$

439. $\begin{cases} x' - x + 2y = 0, \\ x'' - 2y' = 2t - \cos 2t; \end{cases}$

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = -1, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

440. $\begin{cases} y' - z' - 2y + 2z = 1 - 2t, \\ y'' + 2z' + y \qquad = 0; \end{cases}$

$$y(0) = z(0) = y'(0) = 0.$$

441. В задаче на включение воздушного трансформатора на постоянное напряжение E при замкнутой вторичной обмотке приходится решать систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} r_1 i_1 + L_1 \dfrac{di_l}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} = E, \\[2ex] M \dfrac{di_1}{dt} + r_2 i_2 + L_2 \dfrac{di_2}{dt} = 0, \end{cases}$$

при начальных условиях $i_1(0) = 0$; $i_2(0) = 0$. Найти ток $i_2(t)$ в первичной обмотке и $i_2(t)$ во вторичной обмотке.

442. Движение заряженной частицы массы m и заряда e, находящейся в электрическом поле E, параллельном оси Ox, и в магнитном поле H, параллельном оси Oz, определяется следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} m \dfrac{d^2x}{dt^2} = Ee + \dfrac{eH}{c} \dfrac{dy}{dt}, \\[2ex] m \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{eH}{c} \dfrac{dx}{dt}, \\[2ex] m \dfrac{d^2z}{dt^2} = 0. \end{cases} \qquad (c = \mathrm{const})$$

Найти x, y, z, если частица в момент времени $t = 0$ обладает скоростью $\{u, v, w\}$ и находится в начале координат.

443. Движение относительно Земли частицы, начинающей свой путь из начала координат на широте λ со скоростью

$\{u, v, w\}$, определяется следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\omega \dfrac{dy}{dt} \sin\lambda + 2\omega \dfrac{dz}{dt} \cos\lambda = 0, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\omega \dfrac{dx}{dt} \sin\lambda = 0, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} - 2\omega \dfrac{dx}{dt} \cos\lambda = -g, \end{cases}$$

где ω — угловая скорость вращения Земли. Здесь ось z направлена к центру Земли, ось x — на восток, ось y — на север. Найти $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

444. Продольное движение самолета, происходящее при малом возмущении режима горизонтального прямолинейного полета с постоянной скоростью, определяется следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = a_2 u_2 - \varphi, \\ \dfrac{du_2}{dt} = 2u_1 + b_2 u_2 - q, \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = q, \\ \dfrac{dq}{dt} = h_2 u_2 + h_6 q. \end{cases}$$

Здесь a_2, b_2, h_2, h_6 — постоянные. Найти u_1, u_2, φ, q.

445. Найти решения следующих дифференциальных и интегральных уравнений ($f(t)$ — оригиналы):

1) $y''(t) + k^2 y(t) = f(t)$, $y(0) = C_1$, $y'(0) = C_2$;
2) $y''(t) - k^2 y(t) = f(t)$, $y(0) = y'(0) = 0$;
3) $x'' + 2x' + 2x = f(t)$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$;
4) $y''' + y'' - 4y' - 4y = f(t)$, $y(0) = 0$,
$y'(0) = 2$, $y''(0) = 0$;
5) $y(t) = at + \int\limits_0^t \sin(t-u)\, y(u)\, du$;
6) $y(t) = \frac{1}{2} t^2 + \int\limits_0^t e^{t-u} y(u)\, du$.

446. К цепи, состоящей из самоиндукции L, сопротивления R и емкости C, включенных последовательно, в момент времени $t=0$ приложена э. д. с. $f(t)$, являющаяся произвольной функцией времени (оригинал). Начальный ток I и заряд Q равны нулю. Найти $I(t)$. Предполагается, что $\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}>0$. Функция $I(t)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\left\{\begin{aligned} &L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{Q}{C}=f(t),\\ &\frac{dQ}{dt}=I. \end{aligned}\right.$$

447. Дифференциальное уравнение вибратора при наличии возмущающей силы $f(t)$ имеет вид ($f(t)$ — оригинал)

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=\frac{1}{m}f(t) \qquad (k>n).$$

Начальные условия $x_0=\dot{x}_0=0$. Найти $x(t)$.

§ 3. Ступенчатые оригиналы и их изображение

Если $\{h_n\}$ — произвольная последовательность чисел, то функция $f(t)$, определяемая равенствами: $f(t)=h_n$ на $[n, n+1)$, $n=0, 1, \ldots$, называется ступенчатой функцией, порожденной последовательностью $\{h_n\}$ (рис. 11).

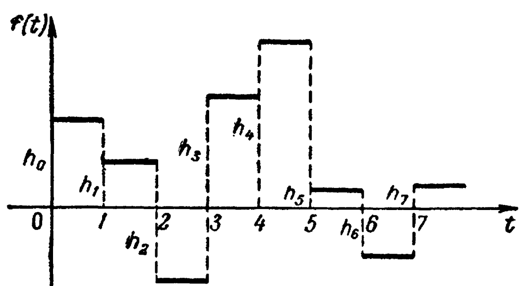


Рис. 11.

Если последовательность $\{h_n\}$ такова, что степенной ряд с коэффициентами h_n, $n=0, 1, \ldots$, имеет радиус сходимости, отличный от нуля, то ступенчатая функция является *оригиналом* (необходимое и достаточное условие).

Если $h_0 = 1$, $h_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, то соответствующий ступенчатый оригинал $\delta(t)$ называется единичным импульсом. Нетрудно видеть, что

$$\delta(t) = \eta(t) - \eta(t-1) \doteqdot \frac{1-e^{-p}}{p} = \Delta_1(p),$$

где $\eta(t)$ — единичная функция.

Теорема. Если $f(t)$ — ступенчатый оригинал, порожденный последовательностью $\{h_n\}$, $f(t) \doteqdot F(p)$, то

$$F(p) = \Delta_1(p) H(e^{-p}),$$

где

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n.$$

При этом изображение $F(p)$ определяется в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \ln \frac{1}{R}$, где R — радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n z^n$.

Обратно, любая функция вида $\Delta_1(p) H(e^{-p})$, где $H(z)$ — функция аналитическая в нуле, является изображением ступенчатого оригинала, порожденного коэффициентами разложения $H(z)$ по степеням z.

Если вместо ступенчатого оригинала на промежутке $[0, +\infty)$ рассматривать оригинал $f(t)$, определяемый равенствами

$$f(t) = h_n \varphi(t-n) \quad \text{на} \quad [n, n+1), \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

где $\varphi(t)$ — оригинал, заданный на промежутке $[0, 1)$ произвольным образом и равный нулю вне этого промежутка, то сформулированная теорема (и ей обратная) остаются в силе при условии, что вместо $\Delta_1(p)$ рассматривается изображение функции $\varphi(t)$

$$\varphi(t) \doteqdot \int_0^1 \varphi(t) e^{-pt}\, dt.$$

Если последовательность $\{h_n\}$ является последовательностью значений функции $\psi(t)$ при $t = 0, 1, 2, \ldots$, то ступенчатую функцию, порожденную этой последовательностью, будем обозначать через

$$\sum \psi(t), \quad \text{т. е.} \quad f(t) = \sum \psi(t).$$

448. Найти изображения следующих ступенчатых оригиналов:

1) функция $f(t)$ задана графиком (рис. 12);

2) функция $f(t)$ задана графиком (рис. 13);

3) $h_n = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; построить график функции $f(t)$;

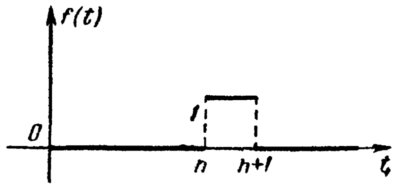


Рис. 12.

4) $h_n = (-1)^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; построить график функции $f(t)$ на сегменте $[0, 6]$;

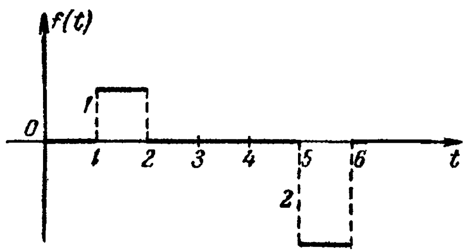


Рис. 13.

5) $\sum t$; построить график $\sum t$ на сегменте $[0, 5]$.

Указание. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}$, $\qquad |z| < 1$;

6) $\sum 2^t$;

7) $h_n = a^n$, $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$;

8) $\sum t(t-1)$. Построить график функции $f(t)$ на промежутке $[0, 4)$.

Указание. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n(n-1) z^n = \frac{2z^2}{(1-z)^3}$, $\qquad |z| < 1$.

449. Построить графики и найти изображения оригиналов $f(t)$, если $f(t)=h_n\varphi(t-n)$ на $[n, n+1)$, $n=0, 1, 2, \ldots$:

1) $h_n=1, \qquad \varphi(t)=\begin{cases} 0, & [0, T_0), \\ 1, & [T_0, 1); \end{cases}$

2) $h_n=(-1)^n, \qquad \varphi(t)=\begin{cases} 0, & [0, T_0), \\ 1, & [T_0, T_1), \\ 0, & [T_1, 1); \end{cases}$

3) $h_n=2^n, \qquad \varphi(t)=\begin{cases} 1, & [0, T_0), \\ 0, & [T_0, 1). \end{cases}$

450. Доказать, что если периодическая (с периодом $T=1$) функция $f(t)$ — оригинал, то ее изображением будет

$$F(p)=\tilde{\Delta}_1(p)\frac{1}{1-e^{-p}},$$

где

$$\tilde{\Delta}_1(p)=\int_0^1 f(t)\,e^{-pt}\,dt.$$

451. Найти изображение периодической (с периодом $T=1$) функции $f(t)$, определяемой на промежутке $[0, 1)$ равенством $f(t)=t$.

Указание. См. задачу 450.

452. Найти изображение периодической (с периодом T) функции, определяемой на промежутке $[0, T)$ условием

$$f(t)=\begin{cases} t, & 0\leqslant t<\frac{T}{2}, \\ T-t, & \frac{T}{2}\leqslant t<T. \end{cases}$$

453. Показать, что заданная функция $F(p)$ является изображением ступенчатого оригинала, и найти соответствующий оригинал:

1) $F(p)=\Delta_1(p)\dfrac{1}{1-e^{-2p}}$.

Указание. $\dfrac{F(p)}{\Delta_1(p)}=\dfrac{1}{1-z^2}$, где $z=e^{-p}$.

2) $F(p) = \Delta_1(p)\dfrac{e^{-p}}{(1+e^{-p})^2}$; 3) $F(p) = \Delta_1(p)\sin e^{-p}$;
4) $F(p) = \dfrac{e^p - 1}{p(e^p+1)(e^p-2)}$; 5) $F(p) = \dfrac{e^p - 1}{p(e^p-3)}$; 6) $F(p) =$
$= 18\dfrac{e^p-1}{p(e^p-3)^3}$.

Пусть $f(t)$ — какая-нибудь функция на промежутке $[a, +\infty)$. Конечной разностью первого порядка функции $f(t)$ в точке t из рассматриваемого промежутка при фиксированном h, $h > 0$, называется обозначаемая через $\Delta f(t)$ разность $f(t+h) - f(t)$:

$$\Delta f(t) = f(t+h) - f(t).$$

Конечная разность n-го порядка функции $f(t)$ в точке t при рассматриваемом h определяется равенством

$$\Delta^n f(t) = \Delta\Delta^{n-1} f(t), \qquad n = 2, 3, \ldots$$

Положим $h = 1$. Соотношение

$$\Delta^n f(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(t+k)$$

выражает конечную разность n-го порядка функции $f(t)$ в точке t через значения функции в точках $t, t+1, \ldots, t+n$.

Обратно, равенство

$$f(t+n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Delta^k f(t) \qquad (\Delta^0 f(t) = f(t))$$

выражает значение функции в точке $t+n$ через значения $f(t)$ и ее конечных разностей порядков $1, 2, \ldots, n$ в точке t.

Обобщенная степень t, определяемая соотношениями

$$t^0 = 1, \quad t^{(n)} = t(t-1)\ldots(t-\overline{n-1}) \quad (\overline{n-1} = (n-1))$$

$(n = 1, 2, \ldots)$, обладает следующим свойством:

$$\Delta t^{(n)} = nt^{(n-1)}.$$

Факториальные многочлены определяются условиями:

$$\Phi_0(t) = 1, \quad \Phi_n(t) = \frac{t^{(n)}}{n!}, \qquad n = 1, 2, \ldots;$$

при этом $\Delta\Phi_n(t) = \Phi_{n-1}(t)$. Любой многочлен $P(t)$ степени n можно разложить по системе факториальных многочленов. Это разложение имеет вид:

$$P(t) = P(0)\Phi_0(t) + \Delta P(0)\Phi_1(t) + \ldots + \Delta^n P(0)\Phi_n(t).$$

454*. Разложить многочлен $P(t) = t^3 + 2t^2 - 5$ по факториальным многочленам.

455. Разложить степени t^2, t^3, t^4 по факториальным многочленам (по факториалам).

456. Записать разложение по факториалам следующих многочленов:

1) $P(t)=3t^4-5t^2+7$, 2) $P(t)=2t^3+2t-4$.

457. Используя теорему опережения (если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$f(t+c) \risingdotseq e^{cp}\left[F(p)-\int\limits_0^c f(t)e^{-pt}\,dt\right] \qquad (c>0)\Bigg),$$

выразить изображение $f(t+n)$, $n=1, 2, \ldots$, через изображение $f(t)$ при условии, что $f(t)$ — ступенчатый оригинал. Найти изображение $\Delta f(t)$.

458. Найти изображение ступенчатых оригиналов, используя изображение $\Delta f(t)$ (см. задачу 457): 1*) $f(t)=\sum c^t$ или $f(t)=c^{[t]}$ (c — действительное число); 2) $f(t)=\sum \Phi_1(t)$; 3) $f(t)=\sum \Phi_n(t)$, $n=2, 3, \ldots$; 4) $f(t)=\sum t^2$; 5) $f(t)=\sum t^3$.

459. Используя изображения факториальных многочленов, найти изображения ступенчатых многочленов:

1) $f(t)=\sum t^4$; 2) $f(t)=\sum(2t^3-5t+2)$.

460. Найти изображения ступенчатых функций:

1) $f(t)=\sum \Phi_1(t)c^t$;

2) $f(t)=\sum \Phi_n(t)c^t$, $n=2, 3, \ldots$

Указание. Использовать изображение $\Delta f(t)$ (см. задачу 457).

461. По ступенчатым оригиналам найти их изображения:

1) $f(t)=\sum(t^2+5)\cdot 3^t$; 2) $f(t)=\sum(3t^3-7t+8)2^t$; 3) $f(t)=\sum t^4(-1)^t=(-1)^{[t]}\sum t^4$.

462. Доказать теорему: чтобы функция $F(p)$ являлась изображением линейной комбинации функций вида $\sum \Phi_n(t)c^t$, необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

$$\frac{F(p)}{\Delta_1(p)e^p}=R(e^p),$$

где $R(e^p)$ — правильная рациональная дробь относительно e^p.

463. Найти оригиналы по заданным изображениям:

1*) $\Delta_1(p)\dfrac{e^p}{e^{2p}-5e^p+6}$; 2) $\Delta_1(p)\dfrac{e^p}{(e^p-a)(e^p-b)}$;

3) $\Delta_1(p)\dfrac{e^p}{(e^p-1)^2(e^p+2)}$; 4) $\Delta_1(p)\dfrac{e^p}{(e^p-1)^2(e^p-c)}$.

§ 4. Решение линейных уравнений в конечных разностях операционным методом

Рассмотрим линейное уравнение n-го порядка в конечных разностях с постоянными коэффициентами

$$a_0 y(t+n) + a_1 y(t+n-1) + \ldots + a_n y(t) = f(t), \qquad (1)$$

где $f(t)$ — ступенчатый оригинал, $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$, и начальными условиями

$$y(0) = y_0, \; y(1) = y_1, \; \ldots, \; y(n-1) = y_{n-1}.$$

Решение $y(t)$ этого уравнения в классе ступенчатых оригиналов определяется следующим образом:

$$y(t) \risingdotseq Y(p) = \frac{1}{a_0 e^{np} + a_1 e^{(n-1)p} + \ldots + a_n} \times$$
$$\times \{F(p) + \Delta_1(p) e^p [y_0 (a_0 e^{(n-1)p} + a_1 e^{(n-2)p} + \ldots + a_{n-1}) +$$
$$+ y_1 (a_0 e^{(n-2)p} + a_1 e^{(n-3)p} + \ldots + a_{n-2}) + \ldots + y_{n-1} a_0]\},$$

где $F(p) \risingdotseq f(t)$.

Уравнение в конечных разностях может быть также записано в виде

$$b_0 \Delta^n y(t) + b_1 \Delta^{n-1} y(t) + \ldots + b_n y(t) = f(t). \qquad (2)$$

Начальные условия в этом случае запишутся так:

$$y(0) = c_0, \; \Delta y(0) = c_1, \; \ldots, \; \Delta^{n-1} y(0) = c_{n-1}.$$

Уравнение вида (2) можно записать в виде (1), с той лишь разницей, что соответствующие коэффициенты a_0 и a_n могут оказаться равными нулю, уравнение вида (1) всегда можно записать в виде (2).

Уравнение (2) называется уравнением n-го порядка, если, записав его в виде (1), мы получим соответствующие коэффициенты a_0 и a_n отличными от нуля, в противном случае это уравнение имеет порядок ниже n. Например, уравнение

$$\Delta^3 y(t) - 3\,\Delta y(t) - 2y(t) = t$$

в форме (1) записывается следующим образом:

$$y(t+3) - 3y(t+2) = t,$$

откуда следует, что данное уравнение порядка ниже третьего. Линейная подстановка $t+2 = t'$ приводит к уравнению первого порядка

$$y(t'+1) - 3y(t') = t' - 2.$$

В этом случае заданное уравнение называется уравнением первого порядка.

Заметим, что, допуская возможность линейного преобразования, уравнение (2) всегда можно записать в виде (1).

464. Показать, что если $f(t)$ является линейной комбинацией функций вида $\sum \Phi_n(t)c^t$, то и решение $y(t)$ — линейная комбинация функций того же вида.

Указание. См. задачу 462.

465. Определить порядки следующих уравнений:

1) $\Delta^3 y(t) + \Delta^2 y(t) - \Delta y(t) - y(t) = t^2$;

2) $\Delta^3 y(t) + 3\Delta^2 y(t) + 3\,\Delta y(t) - y(t) = 0$.

466. Решить следующие уравнения в конечных разностях с заданными начальными условиями:

1*) $y(t+1) - 2y(t) = 1$, $y(0) = 0$;

2) $\Delta^3 y(t) = 0$, $y_0 = y_1 = 0$, $y_2 = 1$;

3) $y(t+2) - 9y(t+1) + 20y(t) = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = -1$;

4) $y(t+1) - ay(t) = c$, $y(0) = y_0$, a и c — действительные числа;

5) $y(t+2) + 2y(t+1) + y(t) = 0$, $y(0) = 1$, $\Delta y(0) = -1$;

6) $\Delta y(t) = t^2$, $y(0) = y_0$;

7) $y(t+2) - 5y(t+1) + 6y(t) = t$, $y(0) = y_0$, $y(1) = y_1$;

8) $y(t+2) - 2y(t+1) + y(t) = 2^t$, $y(0) = y(1) = 0$;

9) $y(t+2) - 2y(t+1) + y(t) = t^2$, $y(0) = y(1) = 0$.

467. Дана последовательность целых чисел, начиная с 0 и 1, в которой каждый последующий член равен сумме двух предшествующих ему: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... (числа Фибоначчи). Найти выражение общего члена последовательности.

ОТВЕТЫ

Глава I

$$1.\ f(x)=\frac{c_1+c_2}{2}+\frac{2(c_2-c_1)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1},$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$. 2. $f(x)=\frac{c_1+c_2}{2}+$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[c_1+(-1)^n c_2]\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\cos nx=\frac{c_1+c_2}{2}+\frac{2(c_1-c_2)}{\pi}\times$$

$\times\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cos(2n-1)x$ для $x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$, где k — целое

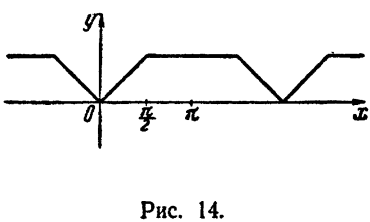
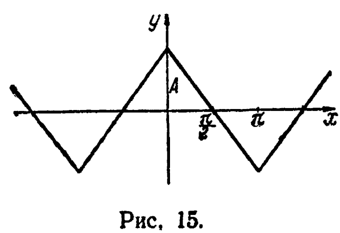


Рис. 14.



Рис, 15.

число 3. Графики функций см. на рис. 14 и 15. 1) $f(x)=\frac{3\pi}{8}+$ $+\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right)\cos nx$; 2) $f(x)=\frac{8A}{\pi^2}\Big[\cos x+\frac{1}{9}\cos 3x+$ $+\frac{1}{25}\cos 5x+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x+\ldots\Big]$. 4. 1) $\frac{\pi-x}{2}=$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},\ 0<x<2\pi;\ 2)\ x^2=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2}-\frac{\pi\sin nx}{n}\right)=$$

$$=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},\ 0<x<2\pi.$$ Графики сумм рядов 1) и 2) см. на рис. 16 и 17.

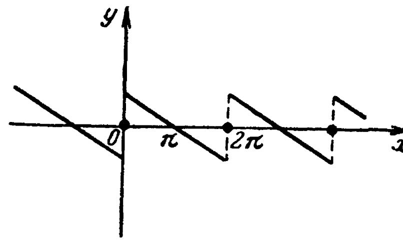


Рис. 16.

5. 1) $x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$, $0\leqslant x<\pi$. Равенство имеет место и на сегменте $[-\pi,\pi]$;

2) $$x^2=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}\pi^2}{n}+\frac{2(\cos n\pi-1)}{n^3}\right]\sin nx=$$

$$=2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}-\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3},\ 0\leqslant x<\pi.$$ Суммы рядов соответственно равны $\frac{\pi^2}{6}$; $\frac{\pi^2}{12}$; $\frac{\pi^2}{8}$. 6. Ряд Фурье

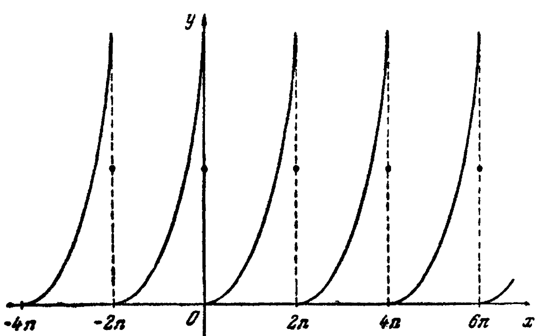


Рис. 17.

многочлена $T_n(x)$ совпадает с этим многочленом и, следовательно, $a_k=\alpha_k$, $b_k=\beta_k$, $k=1, 2, \ldots, n$. 7. 5), а) $b_n=0$, $n=1, 2, \ldots$, $a_1=a_3=\ldots=a_{2n-1}=\ldots=0$; б) $a_n=0$, $n=0, 1, 2, \ldots$, $b_1=b_3=\ldots=b_{2n-1}=\ldots=0$. 9. График функции см. на рис. 18; $f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos x+\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{3}\cos 2x-\frac{1}{15}\cos 4x+\ldots\right.$

$\ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx + \ldots\Big]$ **10.** 1) $\cos ax = \frac{2\sin a\pi}{\pi}\times$

$\times\left(\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a\cos nx}{n^2-a^2}\right), \quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi;$ 2) $\sin ax =$

$=\frac{2\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n\sin nx}{n^2-a^2}, \quad -\pi<x<\pi;$ $\sin\frac{x}{2}=$

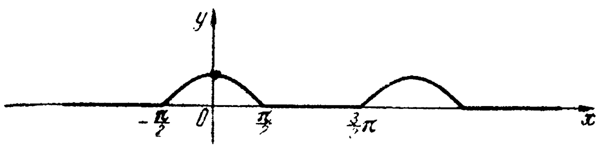


Рис. 18.

$=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin nx}{4n^2-1}, \quad -\pi<x<\pi;$ 3) $|x|=\frac{1}{2}-$

$-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}, \quad -1\leqslant x\leqslant +1;$ 4) $x=2+$

$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin n\pi x}{n}, \quad 1<x<3;$ 5) $x=a+l+$

$+\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}-\cos\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \quad a<x<a+2l;$

6) $f(x)=\frac{2}{3}+\frac{3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}-1}{n^2}\cos nx=\frac{2}{3}-$

$-\frac{9}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{2\pi nx}{3}+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nx}{n^2}, \quad 0\leqslant x\leqslant 3;$

7) $f(x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos n\pi-1}{n^2}\cos nx-\frac{\pi}{n}\sin nx\right)=\frac{3}{4}-$

$-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x}{n}.$

11. Второй ряд в 1) получается, если из результата подстановки в первый ряд $x=0$ вычесть первый ряд. Графики функций см. на рис. 19, 20. **12***. 1) $f(x)=\dfrac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1+in}{1+n^2}e^{inx}$, $x\neq 2k\pi$, k — целое число; 2) $f(x)=\dfrac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left[\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\cos nx}{1+n^2}-\right.\right.$

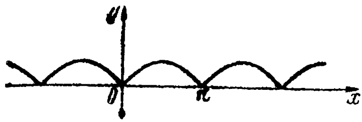


Рис. 19.

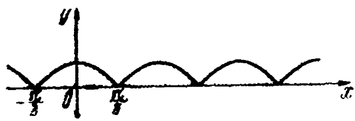


Рис. 20.

$\left.\left.-\dfrac{n\sin nx}{1+n^2}\right)\right]$, $x\neq 2k\pi$, k — целое число. Решение. 1) $f(x)=$
$=\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}c_ne^{inx}$, $x\neq 2k\pi$,

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(x)e^{-inx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^xe^{-inx}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in}(e^{2\pi}-1)=\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\frac{1+in}{1+n^2},\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,$$

$$e^x=\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+in}{1+n^2}e^{inx},\ 0<x<2\pi;$$

$$2)\ a_n=2\operatorname{Re}c_n=\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\frac{1}{1+n^2},\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$b_n=-2\operatorname{Im}c_n=-\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\frac{n}{1+n^2},\ n=1,\ 2,\ \ldots;$$

$$f(x)=\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{1+n^2}-\frac{n\sin nx}{1+n^2}\right)\right],$$

$x\neq 2k\pi$, k — целое число.

13. $f(x)=\frac{1-e^{-\pi}}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}e^{-\pi}+1}{1+n^2}(\cos nx+n\sin nx)$, $x\neq k\pi$, k—целое число. 14. 1) $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}e^{inx}$;

2) $f(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos nx.$

15. $\operatorname{ch} x=\frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{1+n^2}\right]$, $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$.

16. $\operatorname{sh} x=\frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n\sin nx}{1+n^2}$, $-\pi<x<\pi$.

20. 1) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x, \ldots \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx, \ldots$; 2) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x$, $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 2x, \ldots, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx, \ldots$

21. $c_n=\frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(2n-1)x\,dx$, $n=1, 2, \ldots$

24. 2) $T_0(x)=1$; $T_1(x)=x$; $T_2(x)=2x^2-1$; $T_3(x)=4x^3-3x$; $T_4(x)=8x^4-8x^2+1$.

25. $\hat{T}_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}T_0(x)$, $\hat{T}_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}T_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$ 26. $\hat{U}_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}U_n(x)$, $n=0, 1, 2, \ldots$ 27. 1) $|x|\sim\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\frac{1}{4}}T_{2n}(x)$, $-1<x<1$; 2) $|x|\sim\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{3}{2}\right)}U_{2n}(x)$, $-1<x<1$. 28. $P_0(x)=1$; $P_1(x)=x$; $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$; $P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$; $P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$.

29. $\widehat{P}_n(x) = \sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}\, P_n(x),\ n = 0, 1, 2, \ldots$

30. $f(x) \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x),\ -1 \leqslant x \leqslant 1,$

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int\limits_{-1}^{1} f(x)\, P_n(x)\, dx.$$

31. 1) $f(x) \sim 1 + \dfrac{4}{\pi} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{2n+1} T_{2n+1}(x);$

2) $f\ (x) \sim \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{(4n-1)(2n-2)!}{2^{2n} n!\,(n-1)!} P_{2n-1}(x).$

32. $|x| \sim \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{(2n-1)!}{(n-1)!\,(n+1)!} \dfrac{4n+1}{2^{2n}} P_{2n}(x),$

$-1 \leqslant x \leqslant 1.$ 33. $J_1^{(\alpha,\beta)}(x) = \dfrac{1}{2}[(\alpha+1)(x+1) + (\beta+1)(x-1)];$

$$J_2^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{8}[(\alpha+1)(\alpha+2)(x+1)^2 +$$
$$+ 2(\alpha+2)(\beta+2)(x+1)(x-1) + (\beta+1)(\beta+2)(x-1)^2].$$

34. $\widehat{L}_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n!} L_n(x),\ n = 0, 1, 2, \ldots$

35. $L_0(x) = 1;\ L_1(x) = -x + 1;\ L_2(x) = x^2 - 4x + 2;$
$L_3(x) = -x^3 - 9x^2 - 18x + 6;\ L_4(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24.$

36. $e^{-x} \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^{n+1}} L_n(x),\ x > 0.$ 37. $H_0(x) = 1;\ \ H_1(x) = 2x;$
$H_2(x) = 4x^2 - 2;\ H_3(x) = 8x^3 - 12x;\ H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12.$

39. $f(x) \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x),$ где

$$c_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) H_n(x) e^{-x^2} dx,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

40*. $P_0(x) = 1;\quad P_1(x) = x - 1;\quad P_2(x) = x^2 - 4x + 2.$ Решение. Воспользуемся методом ортогонализации. Положим $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x + \alpha \cdot 1 = x + \alpha$ и определим α из условия ортогональности с весом e^{-x} на промежутке $[0, +\infty)$ многочленов

$P_1(x)$ и $P_0(x)$, т. е. из условия $\int\limits_0^{+\infty}(x+\alpha)\cdot 1\cdot e^{-x}dx=0$. Имеем $\alpha=-1$ и, значит, $P_1(x)=x-1$. Положим теперь $P_2(x)=x^2+\alpha_1P_1(x)+\alpha_0P_0(x)=x^2+\alpha_1(x-1)+\alpha_0\cdot 1$ и определим α_1 и α_0 из условий ортогональности $P_2(x)$ к $P_1(x)$ и $P_0(x)$ с весом e^{-x} на промежутке $[0, +\infty)$:

$$\int\limits_0^{+\infty}[x^2+\alpha_1(x-1)+\alpha_0]\cdot(x-1)e^{-x}\,dx=0,$$

$$\int\limits_0^{+\infty}[x^2+\alpha_1(x-1)+\alpha_0]\cdot 1\cdot e^{-x}\,dx=0.$$

Решая эту систему, найдем $\alpha_1=-4$, $\alpha_0=2$ и, следовательно, $P_2(x)=x^2-4x+2$. Многочлены $P_0(x)$, $-P_1(x)$ и $P_2(x)$ являются многочленами Лагерра.

41. $P_0(x)=1$; $P_1(x)=x$; $P_2(x)=x^2-\frac{1}{3}$; $P_3(x)=x^3-\frac{3}{5}x$. Эти многочлены только постоянными множителями отличаются от соответствующих многочленов Лежандра.

42. $P_0(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}$; $P_1(x)=\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt[4]{\pi}}$; $P_2(x)=\frac{2x^2-1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{\pi}}$. Это — ортонормированная система (из трех членов) многочленов Эрмита.

44. 1*) $f(x)=\frac{x^3-3\pi x^2+2(\pi^2-3)x+6\pi}{12}-2\sin x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3(n^2-1)}$, $0<x<2\pi$. Решение. Используя ряд геометрической прогрессии, запишем $\frac{n}{n^2-1}=\frac{n}{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}+\dots\right)=$

$=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}}\right)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^3(n^2-1)}$. И, следовательно, имеем $f(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n^2-1}\sin nx=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}+$

$+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3(n^2-1)}$. Используя таблицу, получаем $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=$

$= \frac{\pi - x}{2} - \sin x,\ 0 < x < 2\pi,\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} = \frac{x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x}{12} - \sin x,$

$0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, откуда окончательно находим $f(x) = \frac{\pi - x}{2} - 2\sin x +$

$+ \frac{x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x}{12} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3(n^2-1)} = \frac{x^3 - 3\pi x^2 + 2(\pi^2 - 3)x + 6\pi}{12} -$

$-2\sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3(n^2-1)},\ 0 < x < 2\pi$; 2) $f(x) = \frac{\pi - x}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n^6+1)},$

$0 < x < 2\pi$; 3) $f(x) = \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n-1}{n(n^2+1)} \sin nx,\ -\pi < x < \pi$;

4) $f(x) = \frac{\pi - x}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n^3+1)},\ 0 < x < 2\pi$; 5) $f(x) = \frac{\pi - x}{2} +$

$+ a\int_0^x \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right) dx + \frac{a^2}{12}(x^3 + 3\pi x^2 - 2\pi^2 x) - a^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3(n+a)},$

$0 < x < 2\pi$; 6) $f(x) = -\frac{x}{2} + \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^5 - n},\ -\pi < x < \pi$;

7) $f(x) = \frac{\pi^3}{32} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi x^2}{8} - 2\cos x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n^3(n^2-1)} \cos nx,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$;

8) $f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^3(n^2-1)} \sin nx,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$, где

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\pi} & \text{при} \quad 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{x - \pi}{\pi} & \text{при} \quad \dfrac{\pi}{2} < x \leqslant \pi, \\ 0 & \text{при} \quad x = \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^3} \sin nx = \begin{cases} -\dfrac{x^3}{6\pi} + \dfrac{\pi}{24}x,\ 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ -\dfrac{(x-\pi)^3}{6\pi} + \dfrac{\pi}{24}(x - \pi),\ \dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi; \end{cases}$$

9) $f(x)=\frac{3x^2-6\pi x-2\pi^2}{12}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^4+1},\ 0\leqslant x\leqslant 2\pi.$

Указание. Использовать равенство

$$\frac{n^4-n^2+1}{n^2(n^4+1)}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^4+1}.$$

45*. $T_3(x)=27{,}83+6{,}47\cos x-0{,}07\sin x-3{,}25\cos 2x+$
$+0{,}09\sin 2x-\cos 3x-\sin 3x.$

Решение.

	27	32	35	30	26	20	18
		36	32	30	26	22	
Сумма	27	68	67	60	52	42	18
Разность		—4	3	0	0	—2	

	27	68	67	60
	18	42	52	
Сумма	45	110	119	60 (s)
Разность	9	26	15	(t)

	—4	3	0
	—2	0	
Сумма	—6	3	0 (σ)
Разность	—2	3	(τ)

$6a_0=45+110+119+60=334$, $6a_1=9+0{,}886\cdot 26+0{,}5\cdot 15=$ $=38{,}84$, $6a_2=45-60+0{,}5(110-119)=-19{,}5$, $6a_3=9-15=-6$, $6b_1=0{,}5(-6)+0{,}866\cdot 3=-0{,}4$, $6b_2=0{,}866(-2+3)=0{,}866$, $6b_3=-6$, откуда, определяя коэффициенты Фурье, получим $T_3(x)=$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{3}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=27{,}83+6{,}47\cos x-0{,}07\sin x-$$

$-3{,}25\cos 2x+0{,}09\sin 2x-\cos 3x-\sin 3x.$ **46.** $T_3(\varphi)=429+$ $+1739\cos\varphi-1037\sin\varphi-6321\cos 2\varphi+1263\sin 2\varphi-1242\cos 3\varphi-$ $-33\sin 3\varphi$. **47.** 1) $T_2(x)=0{,}12+1{,}32\cos x+0{,}28\sin x-0{,}07\cos 2x+$ $+0{,}46\sin 2x$; 2) $T_3(x)=0{,}960+0{,}851\cos x+0{,}915\sin x+$ $+0{,}542\cos 2x+0{,}620\sin 2x+0{,}271\cos 3x+0{,}100\sin 3x.$ **51.** Для функции $f(x)$: $T_6(x)=100\cos x+100\sin x+100\sin 2x+100\cos 3x.$ Для функции $T(\varphi)$: $T_6(\varphi)=427+1685\cos\varphi-938\sin\varphi-6426\cos 2\varphi+$ $+1325\sin 2\varphi-1175\cos 3\varphi-87\sin 3\varphi-783\cos 4\varphi-318\sin 4\varphi-$ $-163\cos 5\varphi-398\sin 5\varphi-304\cos 6\varphi+325\sin 6\varphi$. **52.** 1) $y=-\frac{4}{\pi}\times$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)[(2n+1)^2+1]};\ 2)\ y=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n(2+n^2)},\quad x\neq 2k\pi,$$

k — целое число; 3) $y = -\frac{x}{2}\cos x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{n(1-n^2)}$, $x \neq 2k\pi$, k — целое число. **53.** 1) $u(x,\ t) = \frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n+1)a\pi}{l}t\sin\frac{(2n+1)\pi}{l}x}{(2n+1)^3}$.

Решение. $u(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{an\pi}{l}t + B_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$,

где

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \frac{4hx(l-x)}{l^2}\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx,$$

$$B_n\ \frac{an\pi}{l} = \frac{2}{l}\int_0^l 0\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx = 0;$$

2) $u(x,\ t) = (\cos t + \sin t)\sin x$; 3) $u(x,\ t) = \frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi}{l}t\sin\frac{\pi}{l}x$.

54. $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{(2n+1)a\pi t}{2l} + b_n\sin\frac{(2n+1)a\pi t}{2l}\right]\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$,

где

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\,dx,$$

$$b_n = \frac{4}{(2n+1)a\pi}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\,dx.$$

55. $u(x,t) = \frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$.

Указание. Задача приводится к решению уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при условиях $u(0,\ t) = 0$, $\frac{\partial u(l,\ t)}{\partial x} = 0$, $u(x,\ 0) = \frac{hx}{l}$, $\frac{\partial u(x,\ 0)}{\partial t} = 0$. **56.** $u(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\omega_n t +$

$$+b_n \sin \omega_n t) \sin \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\omega_n\left(\omega^2 - \omega_n^2\right)} (\omega \sin \omega_n t - \omega_n \sin \omega t) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

где

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx, \quad \varphi(x) = u(x, 0),$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx, \quad \psi(x) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t},$$

$$f_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx, \quad \omega_n = \frac{an\pi}{l}.$$

Указание. Задача приводится к решению уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x) \sin n\omega t$ при условиях $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$, $u(x, 0) = \varphi(x)$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$.

57. 1) $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} \cos ux\, du$; $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$;

2) $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos u}{u} \sin ux\, du, \; x \neq \pm 1$;

3) $f(x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{(1 - \cos u) \sin u}{u^2} \sin ux\, du$;

4) $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin u}{u^2} - \frac{\cos u}{u} \right) \sin ux\, du, \quad x \neq \pm 1$;

5) $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{\sin u}{u} + \frac{\cos u - 1}{u^2} \right] \cos ux\, du$;

6) $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{2u \sin u + \cos u - 1}{u^2} \cos ux + \frac{\sin u - u}{u^2} \sin ux \right] du$;

7) $f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos u\frac{\pi}{2}}{1-u^2}\cos ux\,du;$

8) $f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin u\pi}{1-u^2}\sin ux\,du.$ **58.** 1) $e^{-x}=$

$=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos ux}{1+u^2}du,\ x\geqslant 0;$ 2) $e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{u\sin ux}{1+u^2}du,\ x>0;$

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2e};\qquad \int\limits_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2e}.$$

59. 1) $\frac{1}{1+x^2}=\int\limits_0^{+\infty}e^{-u}\cos ux\,du;$ 2) $\frac{x}{1+x^2}=\int\limits_0^{+\infty}e^{-u}\sin ux\,du.$

60. $\varphi(u)=e^{-u},\ u\geqslant 0.$ **61.** $\psi(u)=\frac{2}{\pi}\frac{u}{1+u^2},\ u\geqslant 0.$ **62.** 1) $f(x)=$

$=\frac{a}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2+u^2}e^{iux}du;$ $f(x)=\frac{2a}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos ux}{a^2+u^2}du.$ 2) $f(x)=$

$=-i\frac{2a}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{u}{(a^2+u^2)^2}e^{iux}\,du;$

$f(x)=\frac{4a}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{u}{(a^2+u^2)^2}\sin ux\,du.$

63. График спектра см. на рис. 21.

64*. $\Phi(u)=q\left|\frac{\sin u\frac{\tau}{2}}{u\frac{\tau}{2}}\right|$, где $q=h\tau$.

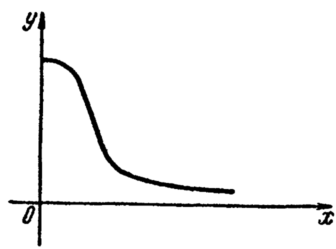


Рис. 21.

Решение. Спектральная характеристика $c(u)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-iut}dt=$

$=h\int\limits_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}e^{-iut}dt=-\frac{h}{iu}\left[e^{-iut}\right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}=h\tau\frac{\sin u\frac{\tau}{2}}{u\frac{\tau}{2}}.$ Обозначим через

$q = h\tau$ площадь импульса. Тогда спектр $\Phi(u) = q\left|\dfrac{\sin u\frac{\tau}{2}}{u\frac{\tau}{2}}\right|$.

$\Phi(u)$ — четная функция. Для $u \geqslant 0$ ее график изображен на рис. 22.

65. $\Phi(u) = q\left|\dfrac{1-\cos u\frac{\tau}{2}}{\frac{1}{2}\left(u\frac{\tau}{2}\right)^2}\right|$; $q = \dfrac{1}{2}h\tau$. $\Phi(u)$ — четная функция. График $\Phi(u)$ для $u \geqslant 0$ изображен на рис. 23. **66.** $\Phi(u) = q\left|\dfrac{\cos u\frac{\tau}{2}}{1-\left(\frac{\tau}{\pi}u\right)^2}\right|$, $q = \dfrac{2}{\pi}h\tau$. **67.** 1) $f(t) \div F(u) = \dfrac{2}{1+u^2}$;

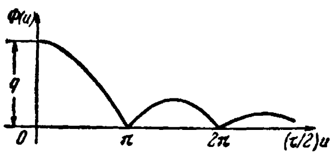


Рис. 22.

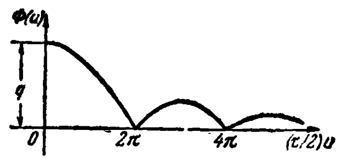


Рис. 23.

2) $f(t) \div F(u) = -4i\dfrac{u}{(1+u^2)^2}$. **70.** 1) $f(t) \div F(u) = \dfrac{2a}{a^2+u^2}$; 2) $f(t) \div F(u) = -4i\dfrac{a}{(a^2+u^2)^2}$. **72.** 1) $f(t) \div F(u) = \dfrac{1}{1+(u+1)^2} + \dfrac{1}{1+(u-1)^2}$; 2) $f(t) \div F(u) = i\left[\dfrac{1}{1+(u+1)^2} - \dfrac{1}{1+(u-1)^2}\right]$.

Глава II

74. Эллипсы с фокусами в точках A и B. **75.** 1) окружности $x^2 + y^2 - 2x = C$; 2) эллипсы $2x^2 + 4y^2 = C$; 3) гиперболы $xy = C$; 4) прямые $3x + 4y + C = 0$. **76.** 1) сферы $x^2 + y^2 + z^2 = C$; 2) конусы $z^2 = C^2(x^2 + y^2)$; 3) параболоиды $z = x^2 + y^2 + C$; 4) гиперболоиды $x^2 + y^2 - z^2 = C$. **77.** $\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_A = 0$. **78.** $\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_A = 5$. **79.** $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = \dfrac{\pm\sqrt{3}}{x+y+z+1}$. **80.** $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{2u}{r}$. **81.** $3x_0^2y_0^2z_0\mathbf{i} + 2x_0^3y_0z_0\mathbf{j} + x_0^3y_0^2\mathbf{k}$. **82.** $2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$. **83.** $\operatorname{grad} u = 2y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j}$. **84.** 1) $\dfrac{\mathbf{r}}{r}$; 2) $2\mathbf{r}$; 3) $-\dfrac{\mathbf{r}}{r^3}$.

85. $-\frac{er}{r^3}$. 86. a. 87. $f'(r)\cdot\frac{r}{r}$. 88. $2[[cr]c]=2r(cc)-2c(rc)$.
91. $\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\operatorname{grad} u\cdot\operatorname{grad} v}{|\operatorname{grad} v|}$, $\frac{\partial u}{\partial n}=0$, если $\operatorname{grad} u\perp\operatorname{grad} v$. 92. Линии уровня поля $\theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ — полупрямые, выходящие из полюса O. Вектор $\operatorname{grad}\theta=\frac{yi+xj}{r^2}$ направлен по перпендикуляру к OM в сторону возрастания θ и по модулю равен $\frac{1}{r}$. Линии уровня поля $r=\sqrt{x^2+y^2}$ — окружности $x^2+y^2=C$, $\operatorname{grad} r=\frac{r}{r}$. 93. $[(r-r_0)\times\times\operatorname{grad}\varphi]=0$, $(r-r_0)\operatorname{grad}\varphi=0$. 94. $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{29}}{2}\approx 2{,}69$. 95. $\operatorname{tg}\varphi\approx 4{,}87$; $\varphi\approx 78°\,24'$. 96. $\left(-\frac{1}{3},\frac{3}{4}\right)$; $\left(\frac{7}{3},-\frac{3}{4}\right)$. 97. Точки, лежащие на окружности $x^2+y^2=\frac{2}{3}$. 98. $\angle M_1PM_2=\angle M_2PM_3=\angle M_3PM_1=120°$.
99. $H=\frac{2I}{\rho^2}(-yi+xj)$, где ρ — расстояние точки M от провода.
100. Окружность $\begin{cases} x^2+y^2=C_1,\\ z=C_2.\end{cases}$ 101. 1) $\begin{cases} xy=C_1,\\ y^2=C_2z;\end{cases}$
2) $\begin{cases} x+y+z=C_1,\\ x^2+y^2+z^2=C_2;\end{cases}$ 3) $\begin{cases} y^2-z^2=C_1,\\ 2x+(z-y)^2=C_2.\end{cases}$ 102. $-\frac{3\pi R^2}{16}$.
103. -2π. 104. $2\pi\omega R^2$. 105. $4\pi bm$. 106. $\frac{1}{2}$. 107. -14. 108. 1) $v=-x^4y^3+3y^2x-5x+4y+C$; 2) $v=-5x^2y+8xy-3y+C$; 3) $v=-\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)+2xyz+C$; 4) $v=-xyz(x+y+z)+C$.
109. 1) 0; 2) $\frac{7}{3}$. 110. $\frac{m}{r}$. 111. $\frac{3\pi}{8}$. 112. 1) 0; 2) $-\pi h^3$. 113. -4π.
114. 0. 115. 1) $\frac{1}{24}$; 2) $a^4\left(\frac{\pi}{48}+\frac{4}{15}\right)$; 3) $-\frac{21\sqrt{2}}{4}\pi$. 116. 1) 3; 2) 0; 3) 0; 4) 0; 5) $\frac{1}{r}(l, r)$. 117. 0. 118. 1) соленоидальное; 2) несоленоидальное. 119. 1) 0; 2) $4\pi m$; 3) $\frac{3}{16}\pi$; 4) $\frac{a^4}{3}\left(\frac{\pi}{16}+\frac{4}{5}\right)$; 5) $\frac{2}{3}\pi R^3$. 120. 1) 0; 2) 0. 121. 1) безвихревое; 2) безвихревое; 3) небезвихревое. 122. 1) $-\pi$; 2) 0. 123. 1) $\varphi\Delta\varphi+(\operatorname{grad}\varphi)^2$, где $\Delta\varphi$ — оператор Лапласа; 2) $\varphi\Delta\psi+(\operatorname{grad}\varphi\operatorname{grad}\psi)$. 125. $f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)$, $f(r)=C+\frac{C_1}{r}$. 128. $\operatorname{grad} f=(2r\varphi-\varphi z)e_r+$

$+\left(r+\frac{3z^2\varphi^2-rz}{r}\right)e_\varphi+(2z\varphi^3-r\varphi)e_z;\ \Delta f=4\varphi+\frac{6\varphi z^2}{r^2}+2\varphi^3-\frac{\varphi z}{r}.$

129. $\operatorname{div} a=\frac{z^2}{r}+z+3z^2+2;\ \operatorname{rot} a=(1-r\varphi)e_r+(2z-\varphi)e_\varphi+2z\varphi e_z.$

130. $\operatorname{grad} f=(2r\varphi\theta+3r^2\varphi^2)e_r+\frac{1}{r\cos\theta}(r^2\theta+2r^3\varphi+1)e_\varphi+$ $+\frac{1}{r}(r^2\varphi+2\theta)e_\theta;\quad \Delta f=6\varphi\theta+12r\varphi^2+\theta+\frac{2}{r^2}-\frac{2\theta}{r^2}\operatorname{tg}\theta+$ $+\frac{2r}{\cos^2\theta}+\frac{\varphi}{\cos\theta}.$ **131.** $\operatorname{div} a=r^2\varphi+\frac{2\varphi\theta}{\cos\theta}-\frac{(r^4+1)\operatorname{tg}\theta}{r};$ $\operatorname{rot} a=[\operatorname{tg}\theta(\varphi^2\theta+r^2)-\varphi^2]e_r-\frac{5r^4+1}{r\cos\theta}e_\varphi+\left[2\varphi^2\theta+4r^2-\frac{r}{\cos\theta}\right]e_\theta.$

133. 1) $24i-63j-33k;$ 2) $-10;\ -3i-9j+10k.$

134. 1) $\operatorname{grad} r=\frac{r}{r};$ 2) $\operatorname{grad} r=-\frac{r}{r}.$ **135.** 1) $\frac{1}{120}(i+j+k);$ 2) $\frac{1}{2};$ 3) 0. **139.** 1) $\iiint\limits_V(\varphi\,\Delta\psi+\nabla\varphi\,\nabla\psi)\,dv=\iint\limits_S\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}dS$ (первая формула Грина); 2) $\iiint\limits_V(\varphi\,\Delta\psi-\psi\,\Delta\varphi)\,dV=\iint\limits_S\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\right.$ $\left.-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)dS$ (вторая формула Грина). **140.** $\operatorname{grad}\varphi(M)=F(M)=$ $=\iiint\limits_V\frac{\mu(K)\,e(M,K)}{r^2(M,K)}dV(K)$, $e(M,K)$ — единичный вектор направления $\overline{MK}$. **141.** $\Pi=-4\pi\iiint\limits_{V_s}\varphi(K)\,dV(K);\ \operatorname{div} R(M)=$ $=-4\pi\varphi(M)$. **142.** $\operatorname{div} A(M)=\iiint\limits_V\operatorname{div} a(K)\frac{dV(K)}{r(M,K)};\ \operatorname{rot} A(M)=$ $=\iiint\limits_V\frac{1}{r^2(M,K)}[e(M,K)\,a(K)]\,dV(K)$, $e(M,K)$ — единичный вектор направления $\overline{MK}$. **144.** $E=\frac{e}{r^2}\frac{r}{r}\ \varphi=\frac{e}{r}$. **145.** $\varphi=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{e_i}{r_i}.$

Глава III

148. 1) Внутренность круга с центром в точке i и радиусом 2; 2) концентрическое кольцо, ограниченное окружностями радиусов $r=1$ и $r=2$ с центрами в точке $3-4i$; окружность радиуса $r=2$ принадлежит данному множеству, окружность радиуса $r=1$ не принадлежит; 3) внешность круга радиуса $r=4$ с центром в начале координат; 4) правая полуплоскость $x > 3$; 5) горизонтальная полоса, для которой $0 < y \leqslant 1$. **149.** 1) Угол, для которого $0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}$; 2) вертикальная полоса $-1 < x < 1$; 3) правая полуплоскость $x > 0$; 4) правая полуплоскость $x > 0$; 5) внутренность лемнискаты Бернулли $r^2 = 2\cos 2\varphi$. **150.** 1) $\frac{1}{2} + ie$; 2) $1 + \frac{1}{4}i$; 3) 1. **151.** 1) Сходится абсолютно; 2) расходится; 3) сходится абсолютно. **152.** 1) $|z-2| < \frac{1}{\sqrt{2}}$; 2) $|z-i| < \sqrt{2}$; 3) $|z-1-3i| > 1$; 4) $|z-1+i| > 1$; 5) $|z-2i| > 5$; 6) $2 < |z| < 3$; 7) $1 < |z+i| < 3$; 8) $2 < |z+1-i| < 5$. **153.** 1) $e^3(\cos 2 - i\sin 2)$; 2) $\cos 1\cos i + \sin 1 \sin i = \cos 1 \operatorname{ch} 1 + i \sin 1 \operatorname{sh} 1$; 3) $\operatorname{sh} 2\cos 3 + i \operatorname{ch} 2 \sin 3$; 4) $\frac{\operatorname{th} 1 + \operatorname{th} 1 \operatorname{tg}^2 1}{1 + \operatorname{th}^2 1 \operatorname{tg}^2 1} + i\frac{\operatorname{tg} 1 - \operatorname{th}^2 1 \operatorname{tg} 1}{1 + \operatorname{th}^2 1 \operatorname{tg}^2 1}$; 5) $\ln 2 + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; 6) $\left.\begin{matrix} 2k\pi - i\ln(\sqrt{2}-1), \\ \pi(2k+1) - i\ln(1+\sqrt{2}), \end{matrix}\right\}$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; 7) $\left.\begin{matrix} \ln(2+\sqrt{3}) + i2k\pi, \\ \ln(2-\sqrt{3}) + i2k\pi, \end{matrix}\right\}$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; 8) $\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi - \frac{i}{2}\ln 3$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; 9) $3e^{-2k\pi}[\cos(\ln 3) + i\sin(\ln 3)]$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; 10) $ie^{-\pi\left(2k+\frac{1}{2}\right)}$. **154.** 1) $\operatorname{Re} e^{z^2} = e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$, $\operatorname{Im} e^{z^2} = e^{x^2-y^2}\sin(2xy)$; 2) $\operatorname{Re}(z^2 \sin z) = (x^2 - y^2)\sin x \operatorname{ch} y - 2xy\cos x \operatorname{sh} y$, $\operatorname{Im}(z^2\sin z) = (x^2-y^2)\cos x \operatorname{sh} y + 2xy \sin x \operatorname{ch} y$; 3) $\operatorname{Re}(\operatorname{tg} z) = \frac{\operatorname{tg} x(1 - \operatorname{th}^2 y)}{1 + \operatorname{tg}^2 x \operatorname{th}^2 y}$, $\operatorname{Im}(\operatorname{tg} z) = \frac{\operatorname{th} y(1 - \operatorname{tg}^2 x)}{1 + \operatorname{tg}^2 x \operatorname{th}^2 y}$; 4) $\operatorname{Re} \operatorname{Ln} z = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, $\operatorname{Im}\operatorname{Ln} z = \arg z + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; 5) $\operatorname{Re} z^{3+i} = \sqrt{(x^2+y^2)^3}\, e^{-\arg z + 2k\pi}\cos\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + 3\arg z\right]$, $\operatorname{Im} z^{3+i} = \sqrt{(x^2+y^2)^3}\, e^{-\arg z + 2k\pi}\sin\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + 3\arg z\right]$.

155. 1) $\left.\begin{matrix} z_1 = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi - i\ln(2+\sqrt{3}), \\ z_2 = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi - i\ln(2-\sqrt{3}), \end{matrix}\right\}$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

2) $z = \left(2k \pm \frac{1}{2}\right)\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; 3) $z = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ **156.** 1) $z = z_1 + (z_2 - z_1)t$, t — действительный параметр; 2) $z - \bar{z} = 0$; $z + \bar{z} = 0$; 3) $z = z_0 + re^{\varphi i}$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$; 4) $A(z + \bar{z}) + B(\bar{z} - z)i + 2c = 0$; 5) $z\bar{z} + (1+i)z + (1-i)\bar{z} + 1 = 0$. **157.** 1) $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$; 2) $(x+1)^2 + y^2 = 2$; 3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

4) $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$; 5) $x^2+y^2-2y-2=0$.
159. 1) $A(u^2+v^2)+Bru+Crv+Dr^2=0$; 2) $A(u^2+v^2)+(B\cos\alpha-C\sin\alpha)u+(B\sin\alpha+C\cos\alpha)v+D=0$; 3) $A(u^2+v^2)+(B-2Aa_1)u+(C-2Aa_2)v+A(a_1^2+a_2^2)-Ba_1-Ca_2+D=0$.

160. 1) $u=4-\frac{v^2}{16}$, 2) $w=9e^{2\varphi i}$. 161. 1) $v=2u+10$, $-\infty<u<+\infty$; 2) $w=3+i+3e^{\varphi i}$, $0\leqslant\varphi<2\pi$. 162. $\left(u+\frac{1}{3}\right)^2+v^2=\frac{4}{9}$ в обоих случаях. 163. $u^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$. 164. $2u+4v+3=0$.

165. 1) $\left.\begin{aligned} u&=\frac{5}{3}\cos\varphi,\\ v&=\frac{4}{3}\sin\varphi,\end{aligned}\right\}$ $0\leqslant\varphi<2\pi$. 2) Дважды проходимый отрезок $[-1, +1]$; 3) $\left(\frac{4u}{5}\right)^2+\left(\frac{4v}{3}\right)^2=1$; 4) $4u^2-\frac{16v^2}{3}=1$, $\frac{1}{2}<u<\infty$, $-\infty<v<0$; 5) $\frac{4u^2}{3}-\frac{4v^2}{1}=1$, $\frac{\sqrt{3}}{2}<u<\infty$, $0<v<\infty$.

166. 1) Полярная сетка верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ переходит в полярную сетку всей плоскости w с разрезом вдоль части действительной оси $0<u<+\infty$. При этом $|z|=r$ переходит в $|w|=r^2$; $\arg z=\varphi$ переходит в $\arg w=2\varphi$. 2) Образом прямоугольной сетки верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ являются два семейства парабол с общим фокусом в начале координат и с осями, совпадающими с действительной осью. 3) Прообразом прямоугольной сетки плоскости w являются два семейства равнобочных гипербол. У одного семейства асимптоты есть биссектрисы координатных углов, а у другого асимптотами служат оси OX и OY. 167. 1) Окружность $|z|<1$ отображается на эллипсы с полуосями $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\pm r\right)$ и с фокусами ± 1, а пары диаметров, симметричных относительно координатных осей, отображаются на гиперболы с фокусами ± 1 и полуосями $|\cos\alpha|$, $|\sin\alpha|$ с исключением вершин этих гипербол. 2) То же самое. 168. Прямоугольная сетка переходит в полярную сетку. 169. Отображение $w=\cos z$ переводит сетку прямых, параллельных координатным осям, в сетку эллипсов и гипербол с общими фокусами ± 1. 170. Полярная сетка переходит в прямоугольную сетку (в полосе $0<y<2\pi$). 171. 1) Полуполоса $\{-\pi<x<\pi, 0<y<+\infty\}$ отображается на плоскость w с разрезом по отрезку $-1\leqslant u\leqslant +1$, $v=0$ и лучу $-\infty<v\leqslant 0$, $u=0$. 2) Полуполоса $-\pi<x<\pi$, $0<y<+\infty$ отображается на плоскость w с разрезом $-\infty<u\leqslant+1$, $v=0$. 175. Кривые постоянного модуля: 1) $(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)=C$; 2) $\operatorname{ch}^2 y-\cos^2 x=C$; 3) $x=C$. Кривые постоянного аргумента: 1) $\frac{2xy}{x^2-y^2-1}=C_1$; 2) $\frac{\operatorname{th} y}{\operatorname{tg} x}=C_1$; 3) $y=C_1$. 177. $Z\approx 6-7{,}95i$; $Y\approx 0{,}06+0{,}80i$; $I\approx 20a$. 178. 1) $|z|=$

$=\text{const}$ (окружности), $\varphi=\text{const}$ (лучи); 2) $\varphi=\text{const}$ (лучи), $|z|=$ $=\text{const}$ (окружности). **179.** 1) Линии тока — прямые, проходящие через начало, эквипотенциальные линии — прямые, проходящие через начало и перпендикулярные к линиям тока. 2) Линии тока — гиперболы с асимптотами $x=0$, $y=0$, эквипотенциальные линии — гиперболы с осями $x=0$, $y=0$. 3) Линии тока — лучи, эквипотенциальные линии — окружности. 4) Линии тока — окружности, эквипотенциальные линии — лучи. 5) Линии тока — окружности с центрами на оси y, проходящие через начало, эквипотенциальные линии — окружности с центрами на оси x, проходящие через начало. **180.** 1) $\psi(x, y)=-v\left(r-\frac{R^2}{r^2}\right)\sin\varphi=\text{const}$, $\varphi(x, y)=-v\left(r+\frac{R^2}{r^2}\right)\times$ $\times\cos\varphi=\text{const}$; 2) $\psi(x, y)=-v\left(r-\frac{R^2}{r^2}\right)\sin\varphi-\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r=\text{const}$, $\varphi(x, y)=-v\left(r+\frac{R^2}{r^2}\right)\cos\varphi+\frac{\Gamma}{2\pi}\varphi=\text{const}$. **181.** 1) $z'(t)=$ $=-3\cos^2 t\sin t-i2te^{-t^2}$; 2) $z'(t)=\frac{2t}{t^2+1}-i\frac{1}{1+t^2}$. **182.** 1) $(z^3)'=3z^2$; 2) $(e^z)'=e^z$; 3) $(\sin z)'=\cos z$; 4) $(\ln z)'=\frac{1}{z}$. **184.** 1) $\left|\frac{dw}{dz}\right|_{z=2i}=\sqrt{5}$; $\varphi=\arg\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=2i}=\arg(2+1)$; 2) $\left|\frac{dw}{dz}\right|_{z=1+i}=3$; $\varphi=\arg\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=1+i}=\frac{\pi}{2}$; 3) $\left|\frac{dw}{dz}\right|_{z=i}=$ $=|e^i|=1$; $\varphi=\arg\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=i}=\arg e^i=1\approx 57°\,17'$; 4) $\left|\frac{dw}{dz}\right|_{z=3i}=\frac{1}{9}$; $\varphi=\arg\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=3i}=0$. **185.** 1) $\left|\frac{dw}{dz}\right|=3r^2=\text{const}$ (окружность), $\arg\left(\frac{dw}{dz}\right)=2\varphi=\text{const}$ (луч из начала);

$$\left.\begin{aligned}&2)\ \left|\frac{dw}{dz}\right|=e^x=\text{const};\ x=\text{const},\\&\arg\left(\frac{dw}{dz}\right)=y=\text{const};\ y=\text{const},\end{aligned}\right\}\ z=x+iy.$$

186. $2\sqrt{2}+$ $+\ln(3+2\sqrt{2})$. **187.** $7{,}5\pi$. **189.** $v(x, y)=2xy+y+C$. **190.** 1) $w=$ $=\frac{z^2}{2}(2-i)$; 2) $w=\frac{1}{2}-\frac{1}{z}$; 3) $w=2\ln z+C$; 4) $w=z^3(2+1)$. **191.** 1) $\frac{1}{3}(1-\cos 3)+\frac{1}{2}i(1-e^{-2})$; 2) $\frac{10}{3}+i\ln 2$. **193.** 1) $2i$; 2) $\frac{(z_2-z_1)(x_1+x_2)}{2}$; 3) $2(i-1)$. **194.** $\frac{4}{3}$.

195. 1) $\frac{R^{n+1}}{n+1}[(-1)^{n+1}-1]$, если $n\neq-1$; πi, если $n=-1$; 2) и

3) 0, если $n \neq -1$, $2\pi i$, если $n = -1$. **196.** $\ln z + 2n\pi i$, где n означает понимаемое алгебраически число обходов пути интегрирования вокруг начала. **197.** 1) $\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1-z}{1+z} + 2\pi (n_1 + n_2)$, где n_1 указывает, сколько раз и в каком направлении обходится точка i; n_2 указывает, сколько раз и в каком направлении обходится точка $(-i)$; 2) $\arcsin z = \ln(zi + \sqrt{1-z^2}) + \pi i \sqrt{2}\,(n_1 + n_2)$, где n_1 — число обходов вокруг точки 1, n_2 — число обходов вокруг точки (-1). **198.** 1) $\ln 2 + 2n\pi i$; 2) $\frac{\pi}{4} + 2\pi (n_1 + n_2)$. **199.** 1) $\frac{1}{3}(-3+2i)$; 2) $2\ln 2 - 1$; 3) $1 + i \operatorname{sh} 1$. **200.** 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $-\frac{\pi}{3}$; 3) 0; 4) 0. **201.** 1) 0; 2) $-\frac{1}{2} i\pi \operatorname{sh} 2$; 3) $\pi i e^{-1}$; 4) $-\frac{2}{3}\pi i$; 5) $\frac{2\pi i}{9}(\cos 2 - \cos 1 - 3\sin 1)$. **202.** 1) 1; 2) e; 3) $1+e$. **203.** $\frac{\pi i}{2}$. **204.** Интеграл может принимать пять различных значений: $-2\pi i$; $-\pi i$; 0; πi; $2\pi i$. **211.** 1) Поток равен N; циркуляция равна 0. 2) Поток равен 0; циркуляция равна Γ. 3) Поток равен N; циркуляция равна Γ. **212.** 1) $f(z) = \frac{N}{2\pi} \ln z + C$; 2) $f(z) = \frac{\Gamma i}{2\pi} \ln z + C$; 3) $f(z) = \frac{N + i\Gamma}{2\pi} \ln z + C$. **213.** $E = \frac{2p}{r^2} e^{2i\varphi}$, где $z = re^{i\varphi}$; $E = \frac{2p}{r^2}$. **214.** 1) $\frac{dw}{dz} = a_1 - ia_2$; $v = \left|\frac{dw}{dz}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$; 2) $\frac{dw}{dz} = 2az$; $v = 2a\sqrt{x^2+y^2} = 2ar$; 3) $\frac{dw}{dz} = \frac{Q}{2\pi(z-a)}$; $v = \frac{|Q|}{2\pi|z-a|}$; 4) $\frac{dw}{dz} = -\frac{M}{2\pi(z-c)}$; $v = \frac{|M|}{2\pi|z-c|}$; 5) $\frac{dw}{dz} = -\frac{\Gamma i}{2\pi(z-a)}$; $v = \frac{|\Gamma|}{2\pi|z-a|}$. **215.** 1) $w = z + \frac{1}{z}$; 2) $w = z + \frac{1}{z}$. **216.** 1) $\frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + \ldots + nz^{n-1} + \ldots$ $(|z| < 1)$; 2) $\frac{1}{(1-z)^p} = 1 + C_{p+1}^p z + C_{p+2}^p z^2 + \ldots$ $\ldots + C_{p+n}^p z^n + \ldots$ $(|z| < 1)$. **217.** 1) $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^{n+1}}$; 2) $-\sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1} n z^{n-1}$; 3) $A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}} + B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1} i^{n+1}}$, где $A =$

$\frac{1+2i}{5}$, $B=\frac{4-2i}{5}$; 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{A(n+1)}{3^{n+2}}+\frac{B}{3^{n+1}}\right]z^n+$

$C\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n i^n}{z^{n+1}}$, где $A=\frac{6+4i}{13}$; $B=\frac{-29+2i}{169}$; $C=B$;

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2^{n+1}}+1\right)z^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-1+2^{n-1}}{z^n}$;

а) $\frac{1}{a-b}\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n-1}}{z^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{b^{n+1}}\right]$; б) $\frac{1}{b-a}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b^n-a^n}{z^{n+1}}$;

$\pm\left(1+\frac{1}{2}z+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}z^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}z^3+\dots\right)$. 218. 1) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nz^n$;

$\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{z-1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{z^n}$; 2) а) $\frac{-i}{2(z-i)}+$

$\frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(2i)^n}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n+1}}$; 3) а) $-\frac{1}{z}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$;

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}}$; 4) $\frac{-i}{z-2i}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2i)^n}{i^n}$;

а) $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+3)^n}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{z^{n+1}}$; в) $\frac{1}{z+2}$;

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(z+1)^{n-1}}{4^{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{n-1}}{z^{n+2}}$; в) $\frac{1}{(z-3)^2}$;

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{A(n+1)}{4^{n+2}}+\frac{B}{4^{n+1}}+C\right](z-3)^n$; б) $\frac{A}{(z+1)^2}+$

$\frac{B}{z+1}-C\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{3^{n+1}}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{A(n+1)}{3^{n+2}}+\frac{B}{3^{n+1}}\right](z-2)^n+$

$\frac{C}{z-2}$, где $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{2}{9}$, $C=\frac{2}{9}$; 8) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}i^{n-1}(z-i)^n$;

$z_0=2$, $\frac{1}{z-2}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{4^{n+1}}-1-\frac{1}{3^{n+1}}\right](z-2)^n$;

$z_0=-2,\quad \dfrac{1}{z+2}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{4^{n+1}}+\dfrac{1}{3^{n+1}}+1\right)(z+2)^n;\quad z_0=1,$

$\dfrac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\left[-1+\dfrac{(-1)^n}{3^{n+1}}-\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right](z-1)^n;\quad z_0=-1,$

$\dfrac{1}{z+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\dfrac{1}{3^{n+1}}+(-1)^n+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right](z+1)^n;$ 10) $\ln z=\ln a+$ $+\dfrac{z-a}{a}-\dfrac{(z-a)^2}{2a^2}+\dfrac{(z-a)^3}{3a^3}-\dfrac{(z-a)^4}{4a^4}+\ldots;$ 11) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n(n-2)!};$

12) $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^{2n-2}-1}{(2n-1)!}z^{2n-1}.$

219. 1) $\dfrac{1}{z-2}+$ $+i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2+i)^{n+1}-(2-i)^{n+1}}{5^{n+1}}(z-2)^2$ при $0<|z-2|<\sqrt{5};$

$2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{z^{2n}}-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{2^{n+1}}$ при $1<|z|<2;$ 2) $-\dfrac{i}{4(z-i)}-$ $-\dfrac{1}{4(z-i)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+3)\,i^n(z-i)^n}{2^{n+4}}$ при $0<|z-i|<2;$

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{z^{2n+2}}$ при $|z|>1;$ 3) $\dfrac{1}{2}+z+z^2+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+2)!z^n}$ при $0<|z|<\infty;$ 4) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n!(z-1)!}$ при $0<|z-1|<\infty;$ $1-\dfrac{1}{z}+$ $+\sum_{n=2}^{\infty}C_{-n}z^{-n}$ при $|z|>1$, где $C_{-n}=-1+\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}\dbinom{n-1}{k},$ $n=2,\ldots;$ 5) $\sum_{n=0}^{\infty}C_nz^n+\sum_{n=1}^{\infty}C_{-n}z^{-n}$, где $C_n=C_{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k!(n+k!)},$ $n=0,1,2,\ldots;$ 6) $\sum_{n=0}^{\infty}C_{2n}z^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}C_{-2n}z^{-2n},$ где $C_{2n}=$

$$= C_{-2n} = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!\,(2n+2k+1)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots;$$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n - a^n}{nz^n}$ при $|z| > \max(|a|, |b|)$. **220.** $F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \tau(k) z^k$, где $\tau(k)$ — число всех делителей числа k. **221.** 1) $f(z) = e\left[1 + z + \frac{3}{2} z^2 + \frac{13}{6} z^3 + \frac{73}{24} z^4 + \ldots\right]$; 2) $f(z) = \ln 2 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^4}{192} + \ldots$; 3) $f(z) = \sigma + vz + \left(v - \frac{1}{2}\sigma\right) z^2 + \left(\frac{5}{6} v - \sigma\right) z^3 + \ldots$, где $\sigma = \sin 1$; $v = \cos 1$. **222.** 1) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n) z^n$;

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}}{n!} z^n$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}}{n!} z^n$. **223.** 1) $\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}$, $0 < |z| < 2\pi$, где коэффициенты B_n есть так называемые числа Бернулли. Эти числа определяются соотношениями $B_0 = 1$; $B_0 \binom{n+1}{0} + B_1 \binom{n+1}{1} + \ldots + B_n \binom{n+1}{n} = 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $B_{2k+1} = 0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}, \ldots$; 2) $z \operatorname{ctg} z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}$, $0 < |z| < \pi$;

3) $\operatorname{tg} z = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2^{2k}(2^{2k} - 1) B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}$, $|z| < \frac{\pi}{2}$; 4) $\sec z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{E_{2k}}{(2k)!} z^{2k}$, $|z| < \frac{\pi}{2}$, где коэффициенты E_n есть так называемые числа Эйлера. Эти числа определяются из соотношений: $E_0 = 1$; $E_0 + \binom{2n}{2} E_2 + \binom{2n}{4} E_4 + \ldots + \binom{2n}{2n-2} E_{2n-2} + E_{2n} = 0$, $E_{2k+1} = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $E_0 = 1$, $E_1 = 0$, $E_2 = -1$, $E_3 = 0$, $E_4 = 5, \ldots$ **225.** 1) Внутренность лемнискаты $|z-1||z+1| < 1$, $S = \frac{1}{z^2}$; 2) область сходимости определяется соотношением

$\left|\frac{z^2}{1+z^2}\right| < 1$, $S=(1+z^2)^2$. **229.** 1) 4; 2) 15; 3) 3. **230.** 1) Точка $z=\pm 3i$ — нуль 1-го порядка; 2) точка $z=\pm 3i$ — нуль 1-го порядка; 3) $z=0$ — нуль 2-го порядка: $z=k\pi$, $k=\pm 1; \pm 2; \pm 3, \ldots$ — нули 1-го порядка; 4) $z=\pm 2$ — нули 3-го порядка; $z=2k\pi i$, $k=0; \pm 1; \pm 2, \ldots$ — нули 1-го порядка; 5) $z=2k\pi$, $k=0; \pm 1, \pm 2, \ldots$ — нули 2-го порядка; 6) $z=k\pi$, $k=\pm 1; \pm 2, \ldots$ — нули 3-го порядка. **232*.** $\varphi(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n \sin nx$. Р е ш е н и е. Положив $e^{ix}=z$, получим $f(z)=\dfrac{1-z^2}{2i\left[z^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)z+1\right]}$. Учитывая, что корни знаменателя равны $z_1=a$, $z_2=\frac{1}{a}$, запишем разложение $f(z)$ на простейшие дроби: $f(z)=\dfrac{1}{2i}\left[-1+\dfrac{1}{1-\frac{z}{a}}+\dfrac{1}{1-az}\right]$. Так как $|a|<1$, то, используя сумму геометрической прогрессии, сходящейся при $|z|=1$, получим $f(z)=\dfrac{1}{2i}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n\left(z^n-\dfrac{1}{z^n}\right)$, откуда, после подстановки $z=e^{ix}$ имеем $\dfrac{a\sin x}{1-2a\cos x+a_2}=$
$=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n \sin nx$. **233.** 1) $\varphi(x)=1+2\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx$, 2) $\varphi(x)=$
$=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n \cos nx$. **236.** 1) а) $\varphi(x)=e^{\cos x}\cos(\sin x)$, б) $\psi(x)=$
$=e^{\cos x}\sin(\sin x)$. Р е ш е н и е. В результате сложения ряда а) с рядом б), умноженным на i, получим ряд $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}=e^z$, $z=e^{ix}$, откуда получим сумму рядов: а) $\varphi(x)=\operatorname{Re} e^{e^{ix}}=e^{\cos x}\cos(\sin x)$, б) $\psi(x)=\operatorname{Im} e^{e^{ix}}=e^{\cos x}\sin(\sin x)$; 2) а) $\varphi(x)=\sin(\cos x)\operatorname{ch}(\sin x)$, б) $\psi(x)=\cos(\cos x)\operatorname{sh}(\sin x)$. **237.** 1) Нуль порядка $k+l$; 2) нуль порядка не ниже, чем $\min(k, l)$; 3) устранимая особая точка, если $k \geqslant l$, полюс порядка $l-k$, если $k<l$. В случае $k>l$, доопределяя функцию $\dfrac{f(z)}{\varphi(z)}$ в точке z_0 по непрерывности, получим нуль порядка $k-l$. **238.** 1) $z_0=k\pi$ — простые нули; 2) $z_0=1$ — нуль четвертого порядка; 3) $z_0=1$ — полюс первого порядка. **239.** 1) $z_0=0$, $l=1$, $k=3$, $k-l=2$; $z_0=k\pi$, $k=\pm 1, \pm 2, \ldots, l=0$, $k=3$,

$k-l=3$; 2) $z_0=l=1$, $k=2$, $k-l=1$, $z_0=1$, $l=1$, $k=3$, $k-l=2$; 3) $z_0=-1$, $l=2$, $k=3$, $k-l=1$, $z_0=2$, $l=0$, $k=3$, $k-l=3$. **241.** 1) $z_0=\pm 4i$ — простые полюсы, $z_0=k\pi$ — простые полюсы; 2) $z_0=\pm i$ — простые полюсы; 3) $z_0=\pm 2$ — полюсы третьего порядка. **243.** 1) Нуль порядка $5-2=3$; 2) устранимая особая точка; 3) полюс порядка $5-3=2$; 4) полюс порядка 2; 5) полюс порядка 3. **247.** 1) $z_0=0$ — существенно особая точка; 2) $z_0=\infty$ — предельная точка полюсов; 3) $z_0=\infty$ — предельная точка полюсов. **248.** 1) $z_0=1$ — существенно особая точка; 2) $z_0=0$ — существенно особая точка; 3) $z_0=1$ — существенно особая точка; 4) $z_0=0$—существенно особая точка; 5) $z_0=\infty$—полюс 1-го порядка; 6) $z_0=\infty$ — существенно особая точка; 7) $z_0=\infty$ — устранимая особая точка. **249.** 1) $z=0$ — устранимая особая точка; 2) $z=0$ — полюс 1-го порядка; $z=\pi$ — полюс 1-го порядка; 3) $z=0$ — полюс 1-го порядка; $z=\infty$ — предельная точка полюсов; 4) $z=\infty$ — существенно особая точка; 5) $z=2$ — существенно особая точка. **250.** 1) $z=1$ — полюс второго порядка, $z=\pm 2i$ — простые полюсы, $z=\infty$ — простой полюс; 2) $z=-1$ и $z=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ — простые полюсы, $z=\infty$ — существенно особая точка; 3) $z=k\pi$, $k=0, \pm 1 \pm 2, \ldots$ — простые полюсы, $z=\infty$ — предельная точка полюсов; 4) $z=\pm i$ — полюсы 1-го порядка, $z=\infty$ — существенно особая точка; 5) $z=0$ — полюс 2-го порядка, $z=2k\pi i$, $k=\pm 1, \pm 2, \ldots$ — полюсы 1-го порядка, $z=\infty$ — предельная точка полюсов; 6) $z=(2k+1)\pi i$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ — полюсы 1-го порядка, $z=\infty$ — предельная точка для полюсов; 7) если $a\neq m\pi$, $m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то $z=(2k+1)\pi\pm a$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ — полюсы 1-го порядка; если $a=m\pi$, то при m нечетном $z=2k\pi$, а при m четном $z=(2k+1)\pi$ — полюсы 2-го порядка, $z=\infty$ во всех случаях предельная точка полюсов; 8) $z=\frac{1}{k\pi}$, $k=\pm 1, \pm 2, \ldots$ — существенно особая точка, $z=0$ — точка, предельная для существенно особых точек, $z=\infty$ — существенно особая точка; 9) $z=\pm i$ — простые полюсы, $z=\infty$ — существенно особая точка; 10) $z=0$ и $z=\infty$ — существенно особые точки; 11) $z=\pm 4i$ — простые полюсы, $z=\infty$ — устранимая особая точка, $z=0$ — существенно особая точка; 12) $z=2$ — предельная точка полюсов. **251.** 1) z^2; 2) $\frac{1}{z^2}+z$. **252.** 1) $\frac{a}{z-\alpha}$ $(a\neq 0)$ или $az+b$ $(a\neq 0)$; 2) $\frac{a}{(z-\alpha)^n}$ $(a\neq 0)$ или $a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$ $(a_n\neq 0)$. **253.** 1) Полюс порядка β; 2) полюс порядка $\beta-\alpha$, если $\beta>\alpha$; нуль порядка $\alpha-\beta$, если $\beta<\alpha$; устранимая особая точка, если $\beta=\alpha$; 3) после доопределения по непрерывности нуль порядка $\alpha+\beta$; 4) полюс порядка $\alpha+\beta$. **257.** Если $n>0$, то a — нуль $f(z)$ порядка n; если $n=0$, то a — точка аналитичности $f(z)$, $f(a)=\varphi(a)$; если $n<0$, то a — полюс $f(z)$ порядка $m=-n$. **267.** 1) $\frac{28}{25}, -\frac{53}{25}$; 2) $\frac{-7}{64}$; 3) -1; 4) 1; 5) 4; 6) 0; 7) $-\frac{1}{4}$.

268. 1) $\operatorname*{Res}_{-2} f(z) = -\frac{3}{16}$; $\operatorname*{Res}_{0} f(z) = \frac{3}{16}$; 2) $\operatorname*{Res}_{k\pi} f(z) = (-1)^k$; 3) $\operatorname*{Res}_{0} f(z) = 1$; 4) $\operatorname*{Res}_{-1} f(z) = (-1)^{n+1} C_{2n}^{n+1}$, $\operatorname*{Res}_{\infty} f(z) = (-1)^n C_{2n}^{n+1}$; 5) $\operatorname*{Res}_{\infty} f(z) = 0$; 6) $\operatorname*{Res}_{-1} f(z) = e^{-1}$, $\operatorname*{Res}_{\infty} f(z) = -e^{-1}$; 7) $\operatorname*{Res}_{\infty} f(z) = 0$; 8) $\operatorname*{Res}_{0} f(z) = \frac{1}{9}$, $\operatorname*{Res}_{3i} f(z) = -\frac{1}{54}(\sin 3 - i\cos 3)$, $\operatorname*{Res}_{-3i} f(z) = -\frac{1}{54}(\sin 3 + i\cos 3)$, $\operatorname*{Res}_{\infty} f(z) = \frac{1}{27}(\sin 3 - 3)$; 9) $\operatorname*{Res}_{0} f(z) = \operatorname*{Res}_{\infty} f(z) = 0$; 10) $\operatorname*{Res}_{0} f(z) = \frac{1}{2}$, $\operatorname*{Res}_{\frac{2k\pi i}{h}} f(z) = \frac{1}{2k\pi i}$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ 269. 1) $2\pi i$; 2) $-4\pi i$;

3) $2\pi i\left[\frac{f(z_1)}{(z_1-z_2)\ldots(z_1-z_k)} + \frac{f(z_2)}{(z_2-z_1)\ldots(z_2-z_k)} + \ldots + \frac{f(z_l)}{(z_l-z_1)\ldots(z_l-z_k)}\right]$; 4) $2\pi i$; 5) $\pi[\sin 1 - \cos 1 + i(\operatorname{sh} 1 - \cos 1)]$; 6) $-\frac{16\pi i}{27}$; 7) $-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$; 8) $-\frac{\pi i}{121}$; 9) $2\pi i$; 10) $\frac{-\pi i \sin 2}{13}$. 270. 1) $\frac{8\pi}{3}$; 2) $\frac{10\pi}{27}$; 3) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$. 271. 1) $\frac{7}{560}\pi$; 2) $\frac{\pi}{60}$; 3) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{2\pi}{\sqrt{4ac-b^2}}$; 5) $\frac{\pi}{n}\operatorname{cosec}\frac{2m+1}{2n}\pi$. 272. 1) $\frac{\pi}{2ae^a}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{\sin a\pi}$; 4) $-\frac{\pi}{4}$; 5) $\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{3}{2e}\right)$. 273. 1) 0, если $t<0$, $2\pi t i$, если $t>0$; 2) 0 при $t<0$, $2\pi i$ при $t \geqslant 0$; 3) $2\pi i\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-u^2}\,du\right)$. 274. 1) -1; 2) 4; 3) -4; 4) 0.

275. 1) $-2\pi i$; 2) $10\pi i$; 3) $6\pi i$; 4) $-4\pi i$. 276. 1) 1; 2) 0; 3) 4; 4) 1; 3. 277. 1) $\alpha\varphi(z_0)$; 2) $-\beta\varphi(z_0)$. 278. $\alpha_1 z_1^n + \alpha_2 z_2^n + \ldots + \alpha_k z_k^n$. 279. $\frac{a_1 b_2 - a_0 b_3}{b_2^2}$, где $a_\nu = \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(z_0)$, $b_\nu = \frac{1}{\nu!} g^{(\nu)}(z_0)$, $\nu = 0, 1, 2, 3$.

282. $w = 2e^{\varphi i}z + 2 - 2e^{\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)i}$, где $-\pi < \varphi \leqslant \pi$. 283. $w = \frac{1}{2}(1+i)z + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}i$. 284. $w = -\sqrt{5}\,e^{(\pi-\alpha)i}z + 3i$, где $\operatorname{tg}\alpha = 2$. 285. $w = \frac{u_0+3}{2-y_0}iz + \frac{2u_0+3y_0}{2-y_0}$, где $y_0 > 2$ и $u_0 < -3$. 286. $w = \frac{-iz+i}{z+1}$.

287. $w=\frac{1}{1-z}$. **288.** $\frac{w-1}{w-i}=\frac{2(-5+i\sqrt{5})}{(1+i)(1+i\sqrt{5})}\frac{z+1}{z-5}$. **289.** $\frac{w-1}{w+1}=-i\frac{z+1}{z-1}$. **290.** $w=\frac{2+4zi}{4i-2z}$ или $\frac{w-i}{w+i}=\frac{2+i}{2-i}\frac{z-i}{z+i}$.

291. $w=-\frac{2y_0ie^{\varphi i}}{z}+e^{\varphi i}-i$, где $-\pi<\varphi\leqslant\pi$. **292.** $\frac{w+3i}{w-(2v_0+3)i}=\sqrt{\frac{v_0^2+9}{v_0^2+(2v_0+3)^2}}e^{4i}(z-i)$. **293.** $w+i=\frac{1}{y_0}e^{\varphi i}\times\frac{-z+y_0i}{(1-y_0)z+i}$, φ — любое, $-\pi<\varphi\leqslant\pi$. **294.** $w=\frac{2z-4i}{z}$.

295. $w=z^3$. **296.** $w=-i(z-1-i)^2$. **297.** $w=e^{\frac{\pi}{4}i}\sqrt{z}$. **298.** $w=i\left[\frac{z}{z-1-i}\right]^2$. **299.** $w=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$. **300.** $w=2\left(z+\frac{1}{z}\right)$. **301.** $w=2\left(z+\frac{1}{z}\right)$. **302.** $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$. **303.** $w=-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$. **304.** $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$. **305.** $w=z-1+\sqrt{z^2-2z-8}$, знак корня выбирается соответственно условию. **306.** $w=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{z}+\frac{1}{\sqrt{z}}\right)$.

307. 1) $w=2e^z$; 2) $w=e^{-\pi z}$. **308.** 1) $w=\frac{1}{2}-\frac{i}{2\pi}\ln z$; 2) $w=\ln z-\ln 2$. **309.** 1) $w=\sin z$; 2) $w=\sin z$; 3) $w=\operatorname{tg} z$; 4) $w=\cos z$; 5) $w=e^{\varphi i}\frac{z-z_0}{z+z_0}$, $-\pi<\varphi\leqslant\pi$; 6) $w=e^{\varphi i}\frac{z-z_0}{1-z_0z}$, $-\pi<\varphi\leqslant\pi$; 7) $w=\sqrt{(z-a)^2+h^2}+a$; 8) $w=\frac{1}{(r+1)^2}\left[2r\left(ze^{-i\alpha}+\frac{1}{z}e^{i\alpha}\right)-(r-1)^2+\sqrt{\left[2r\left(ze^{-i\alpha}+\frac{1}{z}e^{i\alpha}\right)-(r-1)^2\right]^2-(r+1)^4}\right]$; 9) $w=\frac{2v_0}{\pi}\ln(z+\sqrt{z^2-a^2})+2v_0i+C$, где C — произвольное постоянное; 10) $w=\frac{H}{\pi}\ln\left(e^{\frac{\pi}{H}z}+e^{\frac{\pi}{H}a}\right)$; 11) $w=\frac{a}{\operatorname{tg}\frac{\pi h}{2}}\times\sqrt{\operatorname{th}^2\frac{\pi(z-a)}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\pi h}{2}}+a$; 12) $w=\frac{z-a}{z-b}$, где a и b — точки пересечения окружности C^*, построенной как на диаметре на общей касательной к данным окружностям, с линией центров этих окружностей; 13) $w=z+\sqrt{z^2-a^2}$; 14) $w=\frac{h}{\beta}\left\{\ln\frac{z+a}{z-a}-(\pi+\alpha)i\right\}$; 15) $w=\sqrt{z}-i\sqrt{\frac{p}{2}}$. **310.** Окружность C' переходит в замкнутую кривую, охватывающую дугу $\breve{AB}$ и имеющую в точке $z=a$ точку возврата (эта кривая напоминает профиль крыла самолета). **311.** $w=\frac{2v_0}{\pi}\ln(z+\sqrt{z^2-a^2})$. **312.** $w=Ki\ln\frac{z-a}{z-b}$; K — действительная постоянная, относительно a и b см. в ответе к задаче 12) № 309. **313.** $w=v_\infty\sqrt{z^2+H^2}$. **314.** $w=v_0\sqrt{2pz-p^2}$. **315.** $w=z+\frac{R^2}{z}+\frac{\Gamma}{2\pi}\ln z$.

Глава IV

316. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^m x\,dx=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}+1\right)}$. **318.** $B(p,1)=\frac{1}{p}$, $B(p,n)=\frac{(n-1)!}{p(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)}$. **319.** 1) $\frac{\pi a^4}{16}$; 2) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; 3) $\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$. **321.** 1) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}$; 2) $\frac{\pi}{2\cos\frac{c\pi}{2}}$.

322. $P=\frac{1}{8}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$. **323.** $\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2$.

326. 1) $\Gamma(1{,}414)=0{,}88659$; 2) $\Gamma(15)=14!=8{,}71783\cdot10^{10}$; 3) $\Gamma(3{,}3287)=2{,}3287\cdot1{,}3287\cdot\Gamma(1{,}3287)=2{,}7647$; 4) $\Gamma(-0{,}2666)=\frac{\Gamma(1{,}7334)}{-0{,}2666\cdot0{,}7374}=-4{,}682$. **327.** 1) $y=C_1J_2(x)+C_2Y_2(x)$; 2) $y=C_1J_p(kx)+C_2J_{-p}(kx)$, если p — не целое число, $y=C_1J_p(kx)+C_2Y_p(kx)$, если p — целое число; 3) $y=C_1J_p(x)+C_2J_{-p}(x)$, если p — не целое число, $y=C_1J_p(x)+C_2Y_p(x)$, если p — целое число; 4) $y=x^{-2}[C_1J_2(x)+C_2Y_2(x)]$. **331.** 1) $J_2(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi\cos(x\sin\varphi-2\varphi)\,d\varphi$; 2) $J_0(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi\cos(x\sin\varphi)\,d\varphi$; 3) $J_{-1}(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi\cos(x\sin\varphi)\,d\varphi$.

332. 1) $J_{-1}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right)$; 2) $J_2(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x+\frac{5\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right)$; 3) $J_3(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{7\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right)$. **340.** $f(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nJ_p(\lambda_n x)$, где $c_n=\frac{2}{J_{p+1}^2(x)}\int\limits_0^1 xf(x)\times$

$\times J_p(\lambda_n x)\,dx,\ n=1,2,\ldots$ **348.** $i(t)=B\left[I_0(kE_0)+2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(kE_0)\cos n\omega t\right]$, где $B=Ae^{-ki_0R}$. **349.** 1) $J_0(4{,}12)=-0{,}38652$; 2) $J_1(5{,}228)=30{,}019$; 3) $K_0(6{,}23)=0{,}00097063$; 4) $K_1(1{,}27)=0{,}38997$; 5) используя рекуррентную формулу $J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x)$, получим $(n=1)$

$$-0{,}37372+J_2(4{,}22)=-\frac{2}{4{,}22}\,0{,}14548, \qquad J_2(4{,}22)=0{,}30477.$$

352. 1) $\cos 5\,\mathrm{ci}(x+5)+\sin 5\,\mathrm{si}(x+5)+C$; 2) $\frac{-\sin x}{x+2}+$ $+\cos 2\,\mathrm{ci}(x+2)+\sin 2\,\mathrm{si}(x+2)+C$; 3) $\mathrm{li}(x^2)+C$; 4) $\frac{-e^{3x}}{2(x-1)^2}+$ $+\frac{-3e^{3x}}{2(x-1)}+\frac{9e^3}{2}\mathrm{li}(e^{3x-3})+C$; 5) $-\frac{\sin 2x}{3x^3}-\frac{\cos 2x}{3x^2}+\frac{2\sin 2x}{3x}-$ $-\frac{4}{3}\mathrm{ci}(2x)+C$; 6) $\frac{1}{9}e^2\,\mathrm{li}(e^{2x-2})-\frac{e^{2x}}{3(x+2)}-\frac{7}{9}e^{-4}\,\mathrm{li}(e^{2x+4})+$ $+\frac{1}{3}e\,\mathrm{li}(e^{x-1})+\frac{e^x}{x+2}-\frac{4}{3}e^{-2}\,\mathrm{li}(e^{x+2})+\frac{1}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+$ $+\frac{1}{3(x+2)}+C$. **358.** $\frac{e^x}{x}-2\,\mathrm{Ei}(x)+e\,\mathrm{Ei}(x-1)$.

359. $R_r=60\left\{C+\ln 2kl-\mathrm{Ci}(2kl)+\frac{1}{2}\sin 2lk\,[\mathrm{Si}(4kl)-2\,\mathrm{Si}(2kl)]+\right.$ $\left.+\frac{1}{2}\cos 2kl\,[C+\ln(kl)+\mathrm{Ci}(4kl)-2\,\mathrm{Ci}(2kl)]\right\}$, где C — постоянная Эйлера. **360.** $\mathrm{Si}(0{,}15)=0{,}14981$, $\mathrm{Ci}(0{,}87)=0{,}2546$, $\mathrm{Ei}(4{,}2)=22{,}5774$, $\mathrm{Ei}(-0{,}45)=-0{,}6253$. **368.** $\mathrm{erf}(0{,}283)=0{,}31101$, $\mathrm{erf}(2{,}45)=0{,}999469$, $\mathrm{erf}(3{,}5)=1-8\cdot 10^{-7}$. **374.** $S(0{,}2)=S(\sqrt{0{,}04})=0{,}0021$; $C(7)=$ $=C(\sqrt{49})=0{,}4455$, $S(2{,}5)=S(\sqrt{6{,}25})=0{,}3441$, $C(0{,}9)=C(\sqrt{0{,}81})=$ $=0{,}6724$. **379.** 1) 0,50785, 2) 0,99560, 3) 0,30087, 4) 0,22368.

380. 1) $\frac{1}{2}F(\varphi_0,\ \theta_0)$, где $\sin\theta_0=\frac{1}{2}$, $\sin\varphi_0=2\sin t_0$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{F\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4}\right)-F\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{4}\right)\right\}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{2}}F\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4}\right)-$ $-\sqrt{2}\,E\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4}\right)$. **381.** 1) $4aE\left(\frac{\pi}{2},\ \theta_0\right)$, где $\sin\theta_0=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$; 2) $4aF\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4}\right)$. **382.** $T=2\sqrt{\frac{l}{g}}\,F\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\alpha}{2}\right)$. **383.** $M=\mu\sqrt{ab}\ \times$ $\times\left[\left(\frac{2}{k}-k\right)F\left(\frac{\pi}{2},\ \theta_0\right)-\frac{2}{k}E\left(\frac{\pi}{2},\ \theta_0\right)\right]$, где $k=\sin\theta_0$.

386. 1) а) $\gamma_n=-n(n+1)$; б) $\gamma_n=-n^2$; в) $\gamma_n=-2n$; г) $\gamma_n=-n$; 2) а) $b_n=0$; б) $b_n=0$; в) $b_n=0$; г) $b_n=-n(\lambda+n)a_n$. **387.** а) $(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$, б) $(1-x^2)y''-xy'+$

$+n^2y=0$, в) $y''-2xy'+2ny=0$, г) $xy''+(\lambda+1-x)y'+ny=0$.
393. 1) $(\rho\beta^n)^{(k)}=\rho\beta^{n-k}\tilde{Q}_{n,k}$, $k=0, 1, 2, \ldots, n$, $\tilde{Q}_{n0}=1$; $\tilde{Q}_{nk}$ — многочлен степени k, $\tilde{Q}_{nn}=\tilde{Q}_n$, $\tilde{Q}_{nk}=[\alpha+(n-k+1)\beta']\tilde{Q}_{n,k-1}+\beta\tilde{Q}'_{n,k-1}$; 2) $\tilde{a}_n=\prod\limits_{k=n+1}^{2n}(\alpha_1+k\beta_2)$. **395.** а) $\tilde{a}_n=(-1)^n\dfrac{(2n)!}{n!}$;
б) $\tilde{a}_n=(-1)^n\dfrac{(2n-1)!}{(n-1)!}$; в) $\tilde{a}_n=(-1)^n2^n$; г) $\tilde{a}_n=(-1)^n$.
397. а) $\tilde{d}_n^2=\dfrac{2^{2n+1}}{2n+1}(n!)^2$; б) $\tilde{d}_n^2=\dfrac{(2n-1)!}{(n-1)!}\sqrt{\pi}$; в) $\tilde{d}_n^2=2^nn!\sqrt{\pi}$;
г) $\tilde{d}_n^2=n!\,\Gamma(\lambda+n+1)$. **398.** 1) $P_n(x)=(-1)^n\dfrac{1}{2^nn!}\dfrac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^n]=$
$=\dfrac{1}{2^nn!}\dfrac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$;

$$T_n(x)=(-1)^n\frac{2^nn!}{(2n)!}\sqrt{1-x^2}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2)^n\right]=$$
$$=(-1)^n2^n\frac{n!}{(2n)!}\sqrt{1-x^2}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\right],$$

$H_n(x)=(-1)^ne^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}[e^{-x^2}]$; $L^{(\lambda)}(x)=x^{-\lambda}e^x\dfrac{d^n}{dx^n}[x^\lambda e^{-x}x^n]=$
$=x^{-\lambda}e^x\dfrac{d^n}{dx^n}[x^{n+\lambda}e^{-x}]$; 2) $a_n=A_n\tilde{a}_n$; а) $a_n=(-1)^n\dfrac{1}{2^nn!}(-1)^n\dfrac{(2n)!}{n!}=$
$=\dfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$; б) $a_n=(-1)^n2^n\dfrac{n!}{(2n)!}(-1)^n\dfrac{(2n-1)!}{(n-1)!}=2^{n-1}$; в) $a_n=$
$=(-1)^n(-1)^n2^n=2^n$; г) $a_n=1\cdot(-1)^n=(-1)^n$. **399.** 1) $P_0(x)=1$;
$P_1(x)=x$; $P_2(x)=\dfrac{1}{2}(3x^2-1)$; $P_3(x)=\dfrac{1}{2}(5x^2-3x)$; $P_4(x)=$
$=\dfrac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$; $P_5(x)=\dfrac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$; $T_0(x)=1$;
$T_1(x)=x$; $T_2(x)=2x^2-1$; $T_3(x)=4x^3-3x$; $T_4(x)=8x^4-8x^2+1$;
$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$; $H_0(x)=1$; $H_1(x)=2x$; $H_2(x)=4x^2-2$;
$H_3(x)=8x^3-12x$; $H_4(x)=64x^4-48x^2+12$; $H_5(x)=32x^5-$
$-160x^3+120x$; $L_0^{(0)}(x)=1$; $L_1^{(0)}(x)=1-x$; $L_2^{(0)}(x)=2-4x+x^2$;
$L_3^{(0)}(x)=3-18x+9x^2-x^3$; $L_4^{(0)}(x)=24-96x+72x^2-16x^3+x^4$;
$L_5^{(0)}=120-600x+600x^2-200x^3+25x^4-x^5$; 2) $d_n^2=\dfrac{2}{2n+1}$,
$d_n^2=\dfrac{2^{2n-1}n!}{(2n)!}\sqrt{\pi}$, $d_n^2=2^nn!\sqrt{\pi}$, $d_n^2=n!\,\Gamma(\lambda+n+1)$.
401. а) $xP_n(x)=\dfrac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x)+\dfrac{n}{2n+1}P_{n-1}(x)$, $n\geqslant 1$;
б) $xT_n(x)=\dfrac{1}{2}T_{n+1}(x)+\dfrac{1}{4}T_{n-1}(x)$, $n\geqslant 2$; $xT_1=\dfrac{1}{2}T_2-\dfrac{1}{2}T_0$;

$xT_0 = T_1$; в) $xH_n(x) = \frac{1}{2} H_{n+1}(x) + nH_{n-1}(x)$, $n \geqslant 1$; г) $xL_n^{(\lambda)}(x) = -L_{n+1}^{(\lambda)}(x) + (\lambda + 2n + 1) L_n^{(\lambda)}(x) - n(\lambda + n) L_{n-1}^{(\lambda)}(x)$, $n > 0$.

403. а) $$\frac{1}{\sqrt{1 + 4wz + 4w^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\widetilde{P}_n(z) w^n}{n!};$$

б) $$\frac{n\sqrt{2(1-z^2)}}{\sqrt{1+4wz+4w^2}\,[\sqrt{1+4zw+4w^2} - 1 - 2zw]} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\widetilde{T}_n(z)}{n!} w^n;$$

в) $e^{-w^2 - 2wz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\widetilde{H}_n(z)}{n!} w^n$. г) $\frac{1}{(1-w)^{\lambda+1}} e^{-\frac{zw}{1-w}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\widetilde{L}_n^{(\lambda)}(z)}{n!} w^n$.

Глава V

405. 1) $\frac{1}{p} e^{-pt}$; 2) $\frac{1}{p}(e^{-p\tau_1} - e^{-p\tau_2})$; 3) $\left(\frac{a}{p^2} + \frac{b}{p}\right)(1 - e^{-pt_0}) - \frac{a}{p} t_0 e^{-pt_0}$; 4) $\frac{f_0}{p^2}\left[\frac{1}{\tau_1}(1 - e^{-p\tau_1}) + \frac{e^{-p\tau_3} - e^{-p\tau_2}}{\tau_3 - \tau_2}\right]$; 5) $\frac{ap+b}{p^2}$; 6) $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p^3}}$; 7) $\frac{p^3}{p^4+4}$; 8) $\frac{a(p^2+2a^2)}{p^4+4a^4}$; 9) $\frac{p}{p^4+4}$; 10) $\frac{a^2 p}{p^4+4a^4}$; 11) $\frac{2}{p^4+4}$; 12) $\frac{p^2}{p^4+4}$; 13) $\frac{p^2+2}{p^4+4}$; 14) $\frac{p^2-2}{p^4+4}$; 15) $\frac{1}{8}\left(\frac{p}{p^2+16} - \frac{4p}{p^2+4} + \frac{3}{p}\right)$; 16) $\frac{1}{2}\left[\frac{5}{(p+4)^2+25} + \frac{1}{(p+4)^2+1}\right]$.

406. 1) $e^{-2t}(\cos t + 6\sin t)$; 2) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t}$; 3) $e^t + e^{2t}(t-1)$; 4) $\frac{c-a}{(b-a)^2} e^{-at} + \left(\frac{c-b}{a-b} + t\frac{a-c}{(a-b)^2}\right) e^{-bt}$; 5) $\frac{1}{b^2-a^2}(\cos at - \cos bt)$; 6) $1 - e^{-at} - ate^{-at}$; 7) $e^t - e^{-t}\left(\cos 2t - \frac{3}{2}\sin 2t\right)$; 8) $\frac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)$; 9) $\frac{t}{2a}\sin at$; 10) $\frac{1}{2} te^{-2t}\sin 2t - \frac{1}{16} e^{-2t} \times (\sin 2t - 2t\cos 2t)$.

407. 1) $2e^t - 2 - 2t - t^2$; 2) $\frac{1}{2} t \sin t$; 3) $\frac{1}{60} t^6$; 4) $2\operatorname{ch} t - 2$; 5) $\frac{2}{3}[\sqrt{(1+t)^3} - 1]$; 6) $\frac{1}{2}(\operatorname{sh} t - \sin t)$.

408. 1) $\frac{1}{a^2}(e^{at} - at - 1)$; 2) $\frac{1}{k}(1 - \cos kt)$; 3) $\frac{1}{k^2}(kt - \sin kt)$;

4) $\frac{t}{2a}\sin at$; 5) $\frac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)$; 6) $\frac{1}{6}e^{3t}(2\sin t - \sin 2t)$; 7) $\frac{1}{5}(3\sin 3t - 2\sin 2t)$. **409.** 1) e^t; 2) $e^t - t - 1$; 3) $\frac{1}{8}(\cos t - \cos 3t)$; 4) $\frac{1}{2}(te^t - e^t + \cos t)$. **410.** 1) $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k}}{[(2k)!]^2}$; 2) $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+1}}{[(2k+1)!]^2}$. **411.** 1) $J_0(t)$; 2) $t^{\frac{n}{2}}J_n(2\sqrt{t})$. **412.** 1) $\frac{1}{6} - e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-2t} - \frac{5}{3}e^{-3t}$; 2) $-\frac{3}{4} - \frac{1}{2}t + \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{12}e^{-2t}$; 3) $\frac{1}{2}(t^2e^{2t} - 4te^{2t} + 6e^{2t} - 2te^t - 6e^t)$; 4) $\frac{1}{8}(2t^2e^{-t} - 2te^{-t} - e^{-t} - e^{-3t})$. **413.** $x = 4t + 3 - 2e^t$. **414.** $x = e^t(\cos t + \sin t) - e^{-t}\,\mathrm{sh}\,2t$. **415.** $y(t) = t(\sin t + \cos t)$. **416.** $x(t) = -\frac{5}{9}\sin t + \frac{5}{18}\sin 2t + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\sin 2t - t\cos 2t\right]$. **417.** $x = (x_0 - x_2) + (x_1 - x_2)t + x_2e^t$. **418.** $x = e^t(\cos t + \sin t) - e^{-t}\,\mathrm{sh}\,2t$. **419.** $4x = 4x_0 - 3x_2 - x_3 + (4x_1 + 4x_2 + x_3)t + (3x_2 + x_3)e^{-2t} + (2x_2 + x_3)te^{-2t}$. **420.** $x = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{6}e^{3t}$. **421.** $x = e^{2t} - (t+1)e^t$. **422.** $x = \frac{a}{2n}\left(\frac{1}{n}\sin nt - t\cos nt\right) + x_0\cos nt + \frac{x_1}{n}\sin nt$. **423.** $x = \frac{3}{2} - t + \frac{1}{2}t^2 + (2x_0 - x_1 - 2)e^{-t} - \left(x_0 + x_1 - \frac{1}{2}\right)e^{-2t}$. **424.** $x = \frac{1}{24}\{(3t - t^3)\sin t - 3t^2\cos t\}$. **425.** $x = \frac{1}{4}\left(t^2 - 3t + \frac{3}{2}\right)e^t - \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{\frac{1}{2}t} - \frac{1}{24}e^{-t}$. **426.** $x = \frac{a}{n(m^2 - n^2)}\{m\cos\alpha\sin nt + n\sin\alpha\cos nt - n\sin(mt + \alpha)\}$. **427.** $x = \frac{a}{2m^2}(mte^{mt} - \mathrm{sh}\,mt) + \frac{b}{2m(m^2 - n^2)} \times \{(m-n)e^{-mt} + (m+n)e^{mt} - 2me^{nt}\}$. **428.** $I = \frac{E}{nL}e^{-\mu t}\sin nt$ при $n^2 > 0$, где $\mu = \frac{R}{2L}$; $n^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$; $I = \frac{E}{L}te^{-\mu t}$ при $n^2 > 0$; $I = \frac{E}{kL}e^{-\mu t}\,\mathrm{sh}\,kt$ при $n^2 < 0$, $n^2 = -k^2$. **429.** $I = -\frac{E}{nL}e^{-\mu t}\sin nt$ при

$n^2>0$, где $\mu=\frac{R}{2L}$; $n^2=\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}$; $I=\frac{E}{L}e^{-\mu t}t$ при $n^2=0$; $I=-\frac{E}{kL}e^{-\mu t}\operatorname{sh}kt$ при $n^2<0$; $k^2=-n^2$. **430.** $x(t)=e^{-nt}\left[x_0\cos k_1t+\frac{\dot{x}_0+nx_0}{k_1}\sin k_1t\right]$, если $k>n$, где $k^2=\frac{c}{m}$; $2n=\frac{\beta}{m}$; $k_1^2=k^2-n^2$; $x(t)=e^{-nt}[x_0+(\dot{x}_0+nx_0)t]$, если $n=k$; $x(t)=e^{-nt}\left[x_0\operatorname{ch}n_1t+\frac{\dot{x}_0+nx_0}{n_1}\operatorname{sh}n_1t\right]$, если $k<n$; $n_1^2=n^2-k^2$.

431. $x=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}e^{-t}-\frac{3}{10}e^{-\frac{6t}{11}}$; $y=\frac{1}{5}\left(e^{-t}-e^{-\frac{6t}{11}}\right)$. **432.** $x=\frac{28}{9}e^{3t}-e^{-t}-\frac{1}{3}t-\frac{1}{9}$, $y=\frac{28}{9}e^{3t}+e^{-t}-\frac{1}{3}t-\frac{1}{9}$. **433.** $x=-11e^{2t}+20e^{\frac{13}{2}t}\operatorname{ch}\frac{\sqrt{97}}{2}t-\frac{212}{\sqrt{97}}e^{\frac{13}{2}t}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{97}}{2}t$, $y=-11e^{2t}+16e^{\frac{13}{2}t}\operatorname{ch}\frac{\sqrt{97}}{2}t-\frac{144}{\sqrt{97}}e^{\frac{13}{2}t}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{97}}{2}t$, $z=-17e^{2t}+24e^{\frac{13}{2}t}\times\operatorname{ch}\frac{\sqrt{97}}{2}t-\frac{216}{\sqrt{97}}e^{\frac{13}{2}t}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{97}}{2}t$. **434.** $x_n(t)=\frac{1}{n!}(ct)^ne^{-ct}$.

435. $x=\frac{1}{3}(e^t+2\cos 2t+\sin 2t)$, $y=\frac{1}{3}(2e^t-2\cos 2t-\sin 2t)$.

436. $x=\frac{2}{3}\operatorname{ch}(t\sqrt{2})+\frac{1}{3}\cos t$, $y=-\frac{1}{3}\operatorname{ch}(t\sqrt{2})+\frac{1}{3}\cos t$, $z=y$.

437. $x=-\frac{1}{8}e^t+\frac{11}{12}e^{3t}+\frac{5}{24}e^{-3t}$, $y=\frac{1}{8}e^t+\frac{11}{12}e^{3t}-\frac{1}{24}e^{-3t}$, $z=\frac{4}{5}e^{2t}-\frac{1}{5}e^{-3t}$. **438.** $x=\frac{1}{12}\left(6x_0-x_1-y_0+y_1+\frac{4}{5}\right)e^t+\frac{1}{3}\left(3x_0-2x_1+y_0-y_1-\frac{1}{2}\right)e^{2t}+\frac{1}{4}(3x_1-2x_0-y_0+y_1)e^{3t}+\frac{1}{10}e^{4t}$, $y=\frac{1}{24}(-30x_0+5x_1+5y_0-5y_1-4)e^{-t}+\frac{1}{4}(18x_0-7x_1+7y_0-3y_1-6)e^t+\frac{1}{3}(-12x_0+8x_1-4y_0+4y_1+2)e^{2t}+\frac{1}{8}(6x_0-9x_1+3y_0-3y_1)e^{3t}+1$. **439.** $x=-6-4t-t^2+\frac{100}{17}e^{\frac{t}{2}}+\frac{2}{17}\cos 2t+\frac{1}{34}\sin 2t$, $y=-1-t-\frac{t^2}{2}+\frac{25}{17}e^{\frac{t}{2}}+\frac{1}{34}\cos 2t+$

$+\frac{9}{68}\sin 2t$. **440.** $y=2-2e^{-t}-2te^{-t}$, $z=2-2e^{-t}-2te^{-t}-t$. **441.** $i_1=\frac{E}{r_1}+\frac{E}{L_1 b}\left[\frac{p_1+\delta_2}{p_1}e^{p_1 t}-\frac{p_2+\delta_2}{p_2}e^{p_2 t}\right]$; $i_2=\frac{EM}{L_1L_2b}\times$ $\times(-e^{p_1 t}+e^{p_2 t})$, где $k=\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}$ — коэффициент связи; $\sigma=1-k^2$ — коэффициент рассеяния; $\delta_1=\frac{r_1}{L_1}$; $\delta_2=\frac{r_2}{L_2}$, $b=\sqrt{(\delta_1-\delta_2)^2+4k^2\delta_1\delta_2}$, $p_1=\frac{-(\delta_1+\delta_2)+b}{2\sigma}$; $p_2=\frac{-(\delta_1+\delta_2)-b}{2\sigma}$. **442.** $x=\frac{Hv+cE}{H\alpha}\times$ $\times(1-\cos\alpha t)+\frac{u}{\alpha}\sin\alpha t$; $y=vt-\frac{Hv+cE}{H\alpha}(\alpha t-\sin\alpha t)-$ $-\frac{u}{\alpha}(1-\cos\alpha t)$, где $\alpha=\frac{eH}{mc}$; $z=wt$. **443.** $x(t)=\frac{v\sin\lambda-w\cos\lambda}{2\omega}\times$ $\times(1-\cos 2\omega t)+\frac{g\cos\lambda}{4\omega^2}(2\omega t-\sin 2\omega t)+\frac{u}{2\omega}\sin 2\omega t$; $y(t)=$ $=\frac{-\sin\lambda\,(v\sin\lambda-w\cos\lambda)}{2\omega}(2\omega t-\sin 2\omega t)-\frac{g\sin\lambda\cos\lambda}{4\omega^2}(2\omega^2t^2-$ $-1+\cos 2\omega t)-\frac{u\sin\lambda}{2\omega}(1-\cos 2\omega t)+vt$; $z(t)=\frac{\cos\lambda\,(v\sin\lambda-w\cos\lambda)}{2\omega}\times$ $\times(2\omega t-\sin 2\omega t)+\frac{g\cos^2\lambda}{4\omega^2}(2\omega^2t-1+\cos 2\omega t)+\frac{u\cos\lambda}{2\omega}(1-\cos 2\omega t)+$ $+\omega t-\frac{gt^3}{2}$. **444.** $x_s(t)=e^{-\alpha_1 t}\left(C_s^{(1)}\cos\beta_1 t+D_s^{(1)}\sin\beta_1 t\right)+$ $+e^{-\alpha_2 t}\left(C_s^{(2)}\cos\beta_2 t+D_s^{(2)}\sin\beta_2 t\right)$, где $s=1, 2, 3, 4$; $-\alpha_1\pm i\beta_1=p_{12}$; $-\alpha\pm i\beta_2=p_{34}$ суть корни полинома $\Delta(p)$: $\Delta(p)=p^4-(b_2+h_6)p^3+$ $+p^2(b_2h_6-2a_2+h_2)+2a_2h_6p+2h_2$ (предполагается, что корни $\Delta(p)$ комплексные, сопряженные, с отрицательными действительными частями), $u_1=x_1$; $u_2=x_2$; $\varphi=x_3$; $q=x_4$. **445.** 1) $y=C_1\cos kt+$ $+\frac{C_2}{k}\sin kt+\frac{1}{k}\int\limits_0^t\sin k(t-u)f(u)\,du$; 2) $y=\frac{1}{2k}\left[e^{kt}\int\limits_0^t e^{-ku}f(u)\,du-\right.$ $\left.-e^{-kt}\int\limits_0^t e^{ku}f(u)\,du\right]$; 3) $x=x_0e^{-t}\cos t+(x_1+x_0)e^{-t}\sin t+$ $+\int\limits_0^t f(u)e^{-(t-u)}\sin(t-u)\,du$; 4) $y=\operatorname{sh}2t+\frac{1}{12}[f(t)*e^{2t}+$ $+3e^{-2t}-4e^{-t}]$; 5) $y(t)=a\left(t+\frac{1}{6}t^3\right)$; 6) $y(t)=\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{4}t-$ $-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}e^{2t}$. **446.** $I=\frac{1}{nL}\int\limits_0^t e^{-\mu u}(n\cos nu-\mu\sin nu)f(t-u)\,du$.

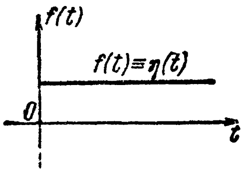


Рис. 24.

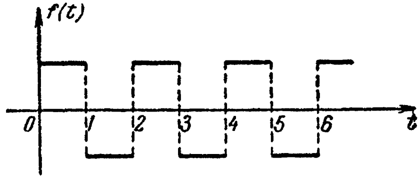


Рис. 25.

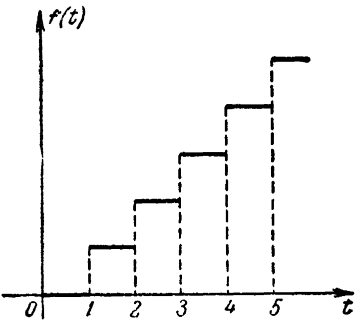


Рис. 26.

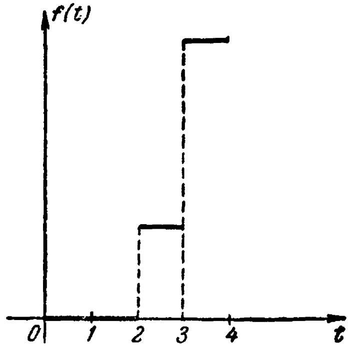


Рис. 27.

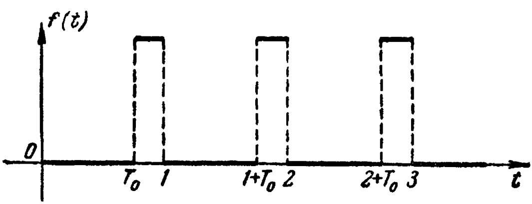


Рис. 28.

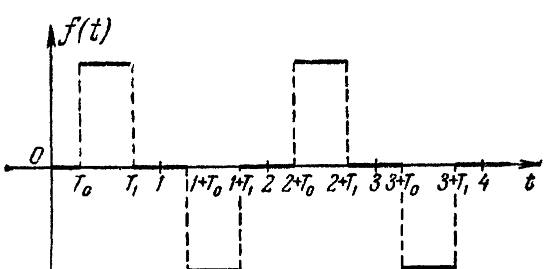


Рис. 29.

где $n^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$; $\mu = \frac{R}{2L}$. **447.** $x(t) = \frac{1}{k_1 m}\int\limits_0^t e^{-n(t-\tau)} \sin k_1 \times$ $\times (t-\tau) f(\tau)\,d\tau$, где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$. **448.** 1) $\Delta_1(p)\, e^{-np}$; 2) $\Delta_1(p) \times$ $\times (e^{-p} - 2e^{-5p})$; 3) $\Delta_1(p)\frac{1}{1-e^{-p}} = \frac{1}{p}$ (рис. 24); 4) $\Delta_1(p)\frac{e^p}{1+e^{+p}}$ (рис. 25); 5) $\Delta_1(p)\frac{e^p}{(e^p-1)^2}$ (рис. 26); 6) $\Delta_1(p)\frac{e^p}{e^p-2}$; 7) $\Delta_1(p)\frac{e^p}{e^p-a}$; 8) $\Delta_1(p)\frac{2e^p}{(e^p-1)^3}$ (рис. 27). **449.** 1) $\widetilde{\Delta}_1(p)\frac{e^p}{e^p-1}$, где $\widetilde{\Delta}_1(p) = \frac{e^{-pT_0} - e^{-p}}{p}$ (рис. 28); 2) $\widetilde{\Delta}_1(p)\frac{e^p}{e^p+1}$, где $\widetilde{\Delta}_1(p) =$ $= \frac{e^{-pT_0} - e^{-pT_1}}{p}$ (рис. 29); 3) $\widetilde{\Delta}_1(p)\frac{e^p}{e^p-2}$, где $\widetilde{\Delta}_1(p) = \frac{1-e^{-pT_0}}{p}$

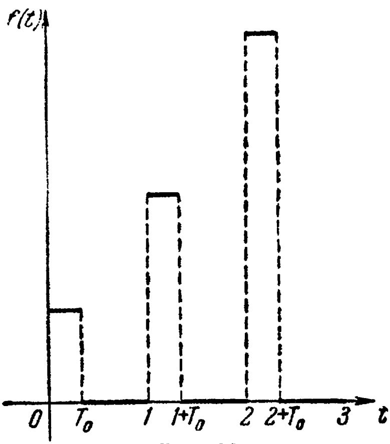


Рис. 30.

(рис. 30). **451.** $\widetilde{\Delta}_1(p)\frac{e^p}{e^p-1}$, где $\widetilde{\Delta}_1(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p^2}(p+1)$.

452. $\widetilde{\Delta}_1(p)\frac{e^{pT}}{e^{pT}-1}$, где $\widetilde{\Delta}_1(p) = \frac{1}{p^2}\left(1 + e^{-pT} - 2e^{-p\frac{T}{2}}\right)$.

453. 1) 1 при n четном, 0 при n нечетном; 2) $(-1)^{n+1} n$; 3) $\{h_n\}$ записывается так: $0,\ 1,\ 0,\ -\frac{1}{3!},\ 0,\ \frac{1}{5!},\ \ldots,\ 0,\ (-1)^n \frac{1}{(2n-1)!},\ \ldots$; 4) $\frac{1}{3}[2^n - (-1)^n]$; 5) 3^n; 6) $n(n-1)\cdot 3^n$. **454**. $P(t) = -5\Phi_0(t) +$ $+ 3\Phi_1(t) + 10\Phi_2(t) + 6\Phi_3(t)$. Решение. Составим таблицу

t	$P(t)$	$\Delta P(t)$	$\Delta^2 P(t)$	$\Delta^3 P(t)$
0	−5	3	10	6
1	−2	13	16	
2	11	29		
3	40			

Отсюда получаем: $P(t) = -5\Phi_0(t) + 3\Phi_1(t) + 10\Phi_2(t) + 6\Phi_3(t)$. **455.** $t^2 = \Phi_1 + 2\Phi_2$, $t^3 = \Phi_1 + 6\Phi_2 + 6\Phi_3$, $t^4 = \Phi_1 + 14\Phi_2 + 36\Phi_3 + 24\Phi_4$. **456.** 1) $P(t) = 7\Phi_0 - 2\Phi_1 + 32\Phi_2 + 108\Phi_3 + 72\Phi_4$, 2) $P(t) = -4\Phi_0 + 4\Phi_1 + 12\Phi_2 + 12\Phi_3$. **457.** $f(t+1) \doteqdot e^p[F(p) - f(0)\Delta_1(p)]$, $f(t+n) \doteqdot e^{np}[F(p) - f(0)\Delta_1(p) - f(1)e^{-p}\Delta_1(p) - \ldots - f(n-1) \times e^{-(n-1)p}\Delta_1(p)]$, $n = 1, 2, \ldots$; $\Delta f(t) \doteqdot (e^p - 1)F(p) - f(0)e^p\Delta_1(p)$, $n = 1, 2, \ldots$ **458.** 1*) $\sum c^t \doteqdot \Delta_1(p)\dfrac{e^p}{e^p - c}$.

Решение. $\Delta c^t = c^{t+1} - c^t = (c-1)c^t$, $(c-1)F(p) = (e^p - 1)F(p) - e^p\Delta_1(p)$, откуда $F(p) = \Delta_1(p)\dfrac{e^p}{e^p - c}$;

2) $\sum \Phi_1(t) \doteqdot \Delta_1(p)\dfrac{e^p}{(e^p-1)^2}$; 3) $\sum \Phi_n(t) \doteqdot \Delta_1(p)\dfrac{e^p}{(e^p-1)^{n+1}}$, $n = 2, 3, \ldots$; 4) $f(t) \doteqdot \Delta_1(p)\left[\dfrac{e^p}{(e^p-1)^2} + 2\dfrac{e^p}{(e^p-1)^3}\right]$;

5) $f(t) \doteqdot \Delta_1(p)\left[\dfrac{e^p}{(e^p-1)^2} + 6\dfrac{e^p}{(e^p-1)^3} + 6\dfrac{e^p}{(e^p-1)^4}\right]$.

459. 1) $f(t) \doteqdot \Delta_1(p)\left[\dfrac{e^p}{(e^p-1)^2} + 14\dfrac{e^p}{(e^p-1)^3} + 36\dfrac{e^p}{(e^p-1)^4} + 24\dfrac{e^p}{(e^p-1)^5}\right]$; 2) $f(t) \doteqdot \Delta_1(p)\left[\dfrac{2e^p}{e^p-1} - 3\dfrac{e^p}{(e^p-1)^2} + 12\dfrac{e^p}{(e^p-1)^3} + 12\dfrac{e^p}{(e^p-1)^4}\right]$. **460.** 1) $\sum \Phi_1(t)c^t \doteqdot c\Delta_1(p)\dfrac{e^p}{(e^p-c)^2}$;

2) $\sum \Phi_n(t)c^{t-n} \doteqdot \Delta_1(p)\dfrac{e^p}{(e^p-c)^{n+1}}$, $n = 2, 3, \ldots$ **461.** 1) $f(t) \doteqdot \Delta_1(p)\left[5\dfrac{e^p}{e^p-3} + 3\dfrac{e^p}{(e^p-3)^2} + 18\dfrac{e^p}{(e^p-3)^3}\right]$; 2) $f(t) \doteqdot \Delta_1(p)\left[8\dfrac{e^p}{e^p-2} - 8\dfrac{e^p}{(e^p-2)^2} + 72\dfrac{e^p}{(e^p-2)^3} + 144\dfrac{e^p}{(e^p-2)^4}\right]$;

3) $f(t) \doteqdot \Delta_1(p)\left[-\dfrac{e^p}{(e^p+1)^2} + 14\dfrac{e^p}{(e^p+1)^3} - 36\dfrac{e^p}{(e^p+1)^4} + 24\dfrac{e^p}{(e^p+1)^5}\right]$. **463.** 1*) $f(t) = \sum(3^t - 2^t)$. Решение.

$\dfrac{F(p)}{\Delta_1(p)e^p} = \dfrac{1}{q^2 - 5q + 6}$, $q = e^p$. Разложим $\dfrac{1}{q^2 - 5q + 6}$ на элементарные дроби: $\dfrac{1}{q^2 - 5q + 6} = \dfrac{1}{q-3} - \dfrac{1}{q-2}$. Тогда $F(p) = \Delta_1(p)\dfrac{e^p}{e^p-3} - \Delta_1(p)\dfrac{e^p}{e^p-2} \doteqdot \sum 3^t - \sum 2^t = \sum(3^t - 2^t)$;

2) $f(t) = \dfrac{1}{a-b}\sum(a^t - b^t)$; 3) $f(t) = \sum\dfrac{(-2)^t - 1}{9} + \sum\dfrac{t}{3}$;

4) $f(t) = \sum\dfrac{c^t - 1}{(c-1)^2} - \sum\dfrac{t}{c-1}$. **465.** 1) Первый, 2) третий.

466. 1*) $y(t) = -1 + \sum 2^t$. Решение. Так как $1 \risingdotseq \Delta_1(p)\dfrac{e^p}{e^p-1}$, то $y(t) \risingdotseq Y(p) = \dfrac{\Delta_1(p)\,e^p}{(e^p-1)(e^p-2)}$, откуда $y(t) = -1 + \sum 2^t$; 2) $y(t) = \sum \Phi_2(t)$; 3) $y(t) = \sum (4^t - 5^t)$; 4) $y(t) = c\sum \dfrac{a^t-1}{a-1} + y_0 \sum a^t$; 5) $y(t) = \sum (-1)^t (1+t) - 2\sum (-1)^t t$; 6) $y(t) = \sum \Phi_3(t+1) + \sum \Phi_3(t) + y_0$; 7) $y(t) = A\sum 3^t + B\sum 2^t + \dfrac{1}{2}\sum t + \dfrac{3}{4}$, где $A = \dfrac{1}{4} - 2y_0 + y_1$, $B = -1 + 3y_0 - y_1$; 8) $y(t) = \sum 2^t - \sum t - 1$; 9) $y(t) = \sum \Phi_3(t) + 2\sum \Phi_4(t)$. 467. $f(n) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$. Указание. Решить уравнение $f(t+2) = f(t+1) + f(t)$ при условии: $f(0) = 0$; $f(1) = 1$.

ТАБЛИЦА ОРИГИНАЛОВ И ИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

№ п/п.	Оригинал	Изображение по Лапласу	Примечание
1	1	$\frac{1}{p}$	
2	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	n — натуральное число
3	t^a	$\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$	$\operatorname{Re} a > -1$
4	$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p-\lambda}$	
5	a^t	$\frac{1}{p-\ln a}$	$\operatorname{Re} a > 0$
6	$\ln t$	$\frac{1}{p}\left(\ln\frac{1}{p}-C\right)$	$C=\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}=0{,}57722$ — постоянная Эйлера
7	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	
8	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	
9	$\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$	
10	$\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$	
11	$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$	

Продолжение

№ п/п.	Оригинал	Изображение по Лапласу	Примечание
12	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$	
13	$e^{-\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+\lambda)^2 + \omega^2}$	
14	$e^{-\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2 + \omega^2}$	
15	$e^{-\lambda t} t^a$	$\frac{\Gamma(a+1)}{(p+\lambda)^{a+1}}$	
16	$te^{-\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{2\omega (p+\lambda)}{[(p+\lambda)^2 + \omega^2]^2}$	
17	$te^{-\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{(p+\lambda)^2 - \omega^2}{[(p+\lambda)^2 + \omega^2]^2}$	
18	$\eta(t)$	$\frac{1}{p}$	Единичная функция
19	$\eta(t-\tau)$	$\frac{e^{-p\tau}}{p}$	$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < 0, \\ 1 & \text{при} \quad t > 0 \end{cases}$
20	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}$	
21	$\frac{e^{-bt} - e^{-at}}{a-b}$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	
22	$\frac{be^{-bt} - ae^{-at}}{b-a}$	$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$	
23	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^n}$	
24	$\frac{1-e^{at}}{t}$	$\ln \frac{p-a}{p}$	
25	$\delta_n(t)$	p^{n-1}	Дельта-функция или импульсная функция n-го порядка
26	$\operatorname{erf}(\sqrt{at})$	$\frac{\sqrt{a}}{p\sqrt{p+a}}$	$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$

Продолжение

№ п/п.	Оригинал	Изображение по Лапласу	Примечание
27	$\operatorname{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{1}{p} e^{-a\sqrt{p}}$	$\operatorname{Erf}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$
28	$J_0(t)$	$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$	Бесселевы (цилиндрические) функции
29	$J_n(t)$	$\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$	
30	$\operatorname{Ci} t$	$\frac{1}{p} \ln \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$	$\operatorname{ci} t = -\int\limits_t^\infty \frac{\cos\tau}{\tau}\, d\tau$
31	$\operatorname{li} t$	$\frac{1}{p} \ln(1+p)$	$\operatorname{li} t = \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\ln\tau}$
32	$\operatorname{si} t$	$\frac{\pi}{2p} - \frac{\operatorname{arctg} p}{p}$	$\operatorname{si} t = -\int\limits_t^\infty \frac{\sin\tau}{\tau}\, d\tau$

ЛИТЕРАТУРА

Романовский П. И., Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа, «Наука», 1964.

Алапашвили Г. Д., Основы векторного анализа и элементы теории поля, «Высшая школа», 1962.

Берман Г. Н., Сборник задач по курсу математического анализа, Физматгиз, 1962.

Борисенко А. И., Таранов И. Е., Векторный анализ и начала тензорного исчисления, Харьковский университет, 1959.

Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г., Сборник задач по теории функций комплексного переменного, Физматгиз, 1960.

Гарднер М. Ф. и Бернс Дж. Л., Переходные процессы в линейных системах, Физматгиз, 1961.

Гольдфайн И. А., Векторный анализ и теория поля, Физматгиз, 1962.

Гончаров В. Л., Теория функций комплексного переменного, Учпедгиз, 1955.

Гюнтер Н. М. и Кузьмин Р. О., Сборник задач по высшей математике, т. III, Гостехиздат, 1951.

Демидович Б. П., Сборник задач и упражнений по математическому анализу, Физматгиз, 1962.

Джексон Д., Ряды Фурье и ортогональные полиномы, ИЛ, 1948.

Карслоу Х. и Егер Д., Операционные методы в прикладной математике, ИЛ, 1948.

Кочин Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, АН СССР, 1961.

Кузнецов Д. С., Специальные функции, «Высшая школа», 1962.

Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, 1958.

Лурье А. И., Операционное исчисление и его приложение к задачам механики, Гостехиздат, 1950.

Маркушевич А. И., Краткий курс теории аналитических функций, Физматгиз, 1961.

Меркин Д. Р., Алгебра свободных и скользящих векторов Физматгиз, 1962.

Толстов Г. П., Ряды Фурье, Физматгиз, 1960.

Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, II и III, Физматгиз, 1960.

Фихтенгольц Г. М. и Натансон И. П., Криволинейные и кратные интегралы, ОНТИ, 1937.

Фукс Б. А. и Шабат Б. В., Функции комплексного переменного, «Наука», 1964.

Наум Иосифович Кожевников,
Таисия Ивановна Краснощекова,
Николай Ефимович Шишкин

Ряды и интеграл Фурье.
Теория поля. Аналитические
и специальные функции.
Преобразование Лапласа

М., 1964 г., 184 стр. с илл.

Редактор *И. Е. Морозова*

Техн. редактор *С. Я. Шкляр.*
Корректор *О. А. Бутусова.*

Сдано в набор 3/IX 1964 г. Подписано к печати 24/XI 1964 г. Бумага $84\times108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 5,75. Условн. печ. л. 9,43. Уч.-изд. л. 8,45. Тираж 32 500 экз. Т-17034. Цена книги 35 коп. Заказ № 714.

Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Государственного комитета
Совета Министров СССР по печати.
Измайловский проспект, 29.