Избранные главы
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
для инженеров и студентов втузов

ЗАДАЧИ и УПРАЖНЕНИЯ

М. Л. КРАСНОВ, Г. И. МАКАРЕНКО

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

•

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ И СТУДЕНТОВ ВТУЗОВ

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

М. Л. КРАСНОВ, Г. И. МАКАРЕНКО

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования РСФСР
в качестве учебного пособия
для высших технических учебных заведений*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1964

517.2
К 78
УДК 517.432.1+517.916(076)

АННОТАЦИЯ

Книга включена в подсерию «Задачи и упражнения» широко известной серии «Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов втузов», содержащей различные дополнительные вопросы к общему втузовскому курсу высшей математики. Ввиду того, что теоретический материал, соответствующий теме настоящего задачника (операционное исчисление, устойчивость движения), имеется (по частям) в различных учебных руководствах, авторы задачника дают в начале каждого параграфа сводку необходимых сведений. Кроме того, приводятся образцы решения задач и примеров.

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый сборник задач возник на основе упражнений, которые велись на ряде факультетов Московского энергетического института с повышенной математической подготовкой.

Он имеет своей целью дать преподавателю и студентам некоторый минимум задач, необходимый для закрепления теоретического материала по основным вопросам операционного исчисления и устойчивости движения.

Вместе с тем задачник может служить пособием для лиц, самостоятельно изучающих эти разделы математики. С этой целью в каждом параграфе помещена краткая сводка основных теоретических сведений и дается разобранный пример.

Все задачи снабжены ответами, а для некоторых задач даны краткие указания к их решению и приведены чертежи.

В процессе работы над задачником авторам оказали большую помощь своими советами и указаниями профессор М. И. Вишик, доцент Ю. И. Гросберг и преподаватель Н. С. Цодокова (МЭИ), доценты Г. В. Корицкий и Г. А. Каменский (МАИ), доценты Е. Н. Мирославлев и Р. Я. Шостак (МВТУ), доцент И. Г. Араманович (МИИТ). Всем им мы выражаем свою глубокую благодарность.

Мы признательны также профессорам А. Ф. Леонтьеву и Н. А. Фролову за их внимание к нашей работе.

Считаем своим приятным долгом поблагодарить редактора А. П. Баеву за ряд ценных замечаний.

М. Л Краснов,
Г. И. Макаренко

Москва — Дубна, 1964 г.

ГЛАВА I
ОПЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

§ 1. Нахождение изображений и оригиналов

Функцией-оригиналом называется любая комплексная функция $f(t)$ действительного аргумента t, удовлетворяющая следующим трем условиям:

1. $f(t)$ непрерывна вместе со своими производными достаточно высокого порядка на всей оси t, кроме отдельных точек, в которых $f(t)$ или ее производные терпят разрыв 1-го рода, причем на каждом конечном интервале оси t таких точек имеется лишь конечное число.

2. Для всех отрицательных t

$$f(t)=0.$$

3. $f(t)$ возрастает не быстрее показательной функции, т. е. существуют такие постоянные $M>0$ и $S_0 \geqslant 0$, что для всех t

$$|f(t)| < Me^{S_0 t}. \tag{1}$$

Число S_0 называется *показателем роста функции* $f(t)$.

Простейшей функцией-оригиналом является так называемая *единичная* функция

$$\eta(t)=\begin{cases} 1, & t>0, \\ 0, & t<0. \end{cases}$$

Очевидно,

$$\varphi(t)\,\eta(t)=\begin{cases} \varphi(t), & t>0, \\ 0, & t<0; \end{cases}$$

если $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям 1 и 3, то $\varphi(t)\eta(t)$ уже удовлетворяет всем условиям функции-оригинала.

Всюду в дальнейшем мы будем, как правило, для сокращения записи писать $\varphi(t)$ вместо $\varphi(t)\eta(t)$, считая, что рассматриваемые нами функции продолжены нулем для отрицательных t.

Изображением функции $f(t)$ (по Лапласу) называется функция комплексного переменного $p=s+i\sigma$, определяемая соотношением

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt. \tag{2}$$

Это символически записывается так:

$$F(p) \risingdotseq f(t).$$

Обратно, если функция $f(t)$ является оригиналом, т. е. удовлетворяет условиям 1, 2, 3, и $F(p)$ служит ее изображением, то в любой точке своей непрерывности функция $f(t)$ равна

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp, \tag{3}$$

где интеграл берется вдоль любой прямой $\operatorname{Re} p=a>S_0$ и понимается в смысле главного значения (т. е. как предел интеграла вдоль отрезка $(a-ib,\ a+ib)$ при $b\to\infty$).

Свойства преобразования Лапласа

I. Свойство линейности. *Для любых комплексных постоянных* α и β

$$\alpha f(t)+\beta g(t) \risingdotseq \alpha F(p)+\beta G(p) \tag{4}$$

(здесь и всюду в дальнейшем считаем $F(p) \risingdotseq f(t)$, $G(p) \risingdotseq g(t)$).

II. Теорема подобия. *Для любого постоянного* $\alpha>0$

$$f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \tag{5}$$

III. Дифференцирование оригинала. *Если* $f'(t)$ *или вообще* $f^{(n)}(t)$ *является оригиналом, то*

$$f'(t) \risingdotseq pF(p)-f(0) \tag{6}$$

и

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\dots-f^{(n-1)}(0). \tag{7}$$

Под $f^{(k)}(0)$ понимается $\lim\limits_{t\to+0} f^{(k)}(t)$.

IV. Дифференцирование изображения. *Дифференцирование изображения сводится к умножению на* $-t$ *оригинала или вообще*

$$F^{(n)}(p) \risingdotseq (-1)^n t^n f(t). \tag{8}$$

V. Интегрирование оригинала. *Интегрирование оригинала сводится к делению изображения на p:*

$$\int_0^t f(t)\,dt \risingdotseq \frac{F(p)}{p}, \tag{9}$$

VI. Интегрирование изображения. *Если* $\int_p^\infty F(p)\,dp$ *сходится, то он служит изображением функции* $f(t)/t$:

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^\infty F(p)\,dp. \tag{10}$$

VII. Теорема запаздывания. *Для любого положительного* τ

$$f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p). \tag{11}$$

VIII. Теорема смещения. *Для любого комплексного* p_0

$$e^{p_0 t} f(t) \risingdotseq F(p-p_0). \tag{12}$$

IX. Теорема умножения (*Э. Борель*). *Произведение* двух *изображений* $F(p)$ *и* $G(p)$ *также является изображением, причем*

$$F(p)\,G(p) \risingdotseq \int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau. \tag{13}$$

Интеграл в правой части (13) называется *сверткой* функций $f(t)$ и $g(t)$ и обозначается символом

$$(f * g). \tag{14}$$

Для нахождения оригинала $f(t)$ по известному изображению $F(p)$ применяются следующие приемы:

1. Если $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$ есть дробно-рациональная функция, причем степень многочлена $A(p)$ меньше степени многочлена $B(p)$, то разлагают эту дробь на сумму простых дробей и находят оригиналы для каждой простой дроби, используя свойства I—IX преобразования Лапласа.

2. Используют вторую теорему разложения, которая утверждает, что при определенных условиях на $F(p)$ (см. [9]) оригиналом для $F(p)$ служит функция

$$f(t) = \sum_{(p_k)} \operatorname{res}\,[F(p)\,e^{pt}], \tag{15}$$

где сумма вычетов берется по всем особым точкам p_k функции $F(p)$ в порядке неубывания их модулей.

В частности, если $F(p) = A(p)/B(p)$ — правильная рациональная дробь, то оригиналом ее служит функция

$$f(t)=\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{(n_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}}\{F(p)(p-p_k)^{n_k}e^{pt}\}, \tag{16}$$

где p_k — полюсы $F(p)$ кратности n_k и сумма берется по всем полюсам.

Если все полюсы $F(p)$ простые, то формула (16) упрощается и принимает вид

$$f(t)=\sum_{k=1}^{l}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t}. \tag{17}$$

Таблица основных оригиналов и их изображений

№	Оригинал	Изображение
1	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
2	$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p-\lambda}$
3	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
4	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
5	$\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
6	$\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
7	$\sin(t-\alpha)\ (\alpha>0)$	$e^{-\alpha p}\frac{1}{p^2+1}$
8	$\cos(t-\alpha)\ (\alpha>0)$	$e^{-\alpha p}\frac{p}{p^2+1}$
9	$J_n(t)$	$\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$
10	$\sin t$	$\frac{\operatorname{arcctg} p}{p}$
11	$\operatorname{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)\ (\alpha>0)$	$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p}$

1°. Найти изображения следующих функций:

1. $t^n e^{\lambda t}$.

2. $\int\limits_0^t \sin t\,dt$.

3. $\int\limits_0^t \cos\omega t\,dt$.

4. $(t-1)^2 e^{t-1}$.

5. $\cos^3 t$.

6. $\int\limits_0^t \frac{\sin t}{t}\,dt$.

7. $\int\limits_0^t \operatorname{ch} t\,dt$.

8. $\int\limits_0^t \operatorname{sh} t\,dt$.

9. $t \operatorname{sh} 3t$.

10. $\operatorname{sh}(t-\alpha)$.

11. $t \operatorname{ch} 2t$.

12. $\int\limits_0^t \cos^2\omega t\,dt$.

13. $\operatorname{ch}(t-\alpha)$.

14. $t\sin t$.

15. $t\cos t$.

16. $\sin^2 t$.

17. $\frac{e^t-1}{t}$.

18. $\sin 3(t-2)$.

19. $e^{\lambda t}\sin\omega t$.

20. $e^{\lambda t}\cos\omega t$.

21. $\cos 4(t-3)$.

22. $\cos mt\cos nt$.

23. $\sin mt\cos nt$.

24. $\sin^4 t$.

25. $\sin mt\sin nt$.

26. $\frac{1-\cos t}{t}$.

27. $f(t)=t^\alpha\ (\alpha>-1)$.

28. $f(t)=J_0(t)$.

29. Показать, что $J_n(t) \risingdotseq \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$.

30. Показать, что

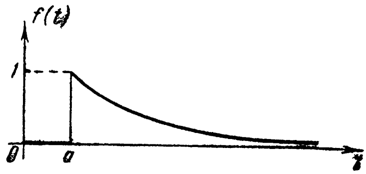
$$t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t}) \risingdotseq \frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{1}{p}} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\dots).$$

31. Показать, что $\operatorname{erf}(\sqrt{t}) \risingdotseq \dfrac{1}{p\sqrt{p+1}}$.

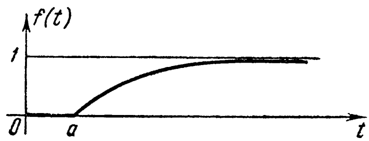
32. Показать, что $\operatorname{Erf}(\sqrt{t}) \risingdotseq \dfrac{1}{\sqrt{p+1}+p+1}$.

Найти изображения следующих функций, заданных графически:

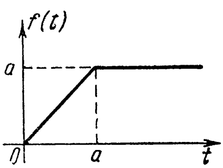
33. $f(t)=\begin{cases} 0 & \text{при } 0\leqslant t\leqslant a, \\ e^{-b(t-a)} & \text{при } t>a. \end{cases}$



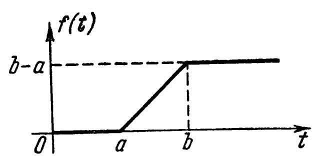
34. $f(t)=\begin{cases} 0 & \text{при } 0\leqslant t\leqslant a, \\ 1-e^{-b(t-a)} & \text{при } t>a. \end{cases}$



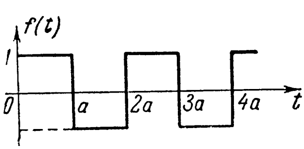
35.



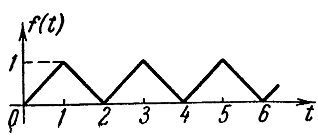
36.

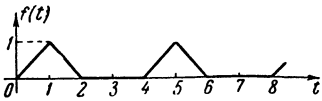


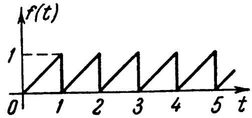
37.

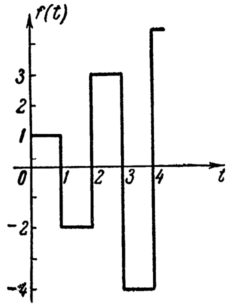


38.



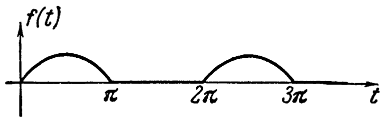
39. 

40. 

41. 

42. $f(t)=|\sin t|$.

43. $f(t)=|\cos t|$.

44. 

$$f(t)=\begin{cases}\sin t & \text{при } 2k\pi<t<(2k+1)\pi,\\ 0 & \text{при } (2k+1)\pi<t<(2k+2)\pi\end{cases}\quad (k=0, 1, 2, \ldots).$$

2°. Найти оригинал по заданному изображению:

45. $F(p)=\frac{1}{p^2+4p+5}$.

46. $F(p)=\frac{1}{p^2+4p+3}$.

47. $F(p)=\frac{1}{(p^2+1)^2}$.

48. $F(p)=\frac{p}{(p^2+1)^2}$.

49. $F(p)=\frac{1}{p+2p^2+p^3}$.

50. $F(p)=\frac{1}{7-p+p^2}$.

51. $F(p)=\frac{2p^3+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3}$.

52. $F(p)=\frac{1}{p^2(p^2+1)}$.

53. $F(p)=\frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$.

54. $F(p)=\dfrac{1}{p^4+2p^3+3p^2+2p+1}$.

55. $F(p)=\dfrac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$.

56. $F(p)=\dfrac{p}{p^3+1}$.

57. $F(p)=\dfrac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}$.

58. $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)}$.

59. $F(p)=\dfrac{p^2+2p-1}{p^3-2p^2+2p-1}$.

60. $F(p)=\dfrac{3p^2}{(p^3-1)^2}$.

61. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2-2p+5}+\dfrac{pe^{-2p}}{p^2+9}$.

62. $F(p)=\dfrac{e^{-3p}}{(p+1)^2}$.

63. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p(p-1)}$.

64. $F(p)=\dfrac{1}{p^2+1}(e^{-2p}+2e^{-3p}+3e^{-4p})$.

65. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2-1}+\dfrac{pe^{-2p}}{p^2-4}$.

66. $F(p)=\dfrac{e^{-\frac{p}{2}}}{p(p+1)(p^2+4)}$.

67. $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2}+\dfrac{2e^{-2p}}{p^3}+\dfrac{6e^{-3p}}{p^4}$.

68. $F(p)=\dfrac{e^{-\frac{p}{3}}}{p(p^2+1)}$.

3°. Теорема Эфроса. *Пусть* $f(t)\fallingdotseq F(p)$ и пусть $\Phi(p)$ и $q(p)$ — *аналитические функции, такие, что*

$$\Phi(p)e^{-\tau q(p)}\fallingdotseq\varphi(t,\tau). \tag{1}$$

Тогда

$$F[q(p)]\,\Phi(p) \risingdotseq \int_0^\infty f(\tau)\,\varphi(t,\tau)\,d\tau. \tag{2}$$

В частности, если $\Phi(p) = \dfrac{1}{\sqrt{p}}$, $q(p) = \sqrt{p}$, то

$$\varphi(t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{\tau^2}{4t}}. \tag{3}$$

Поэтому, если известно, что $F(p) \risingdotseq f(t)$, то по теореме Эфроса находим оригинал для $\dfrac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}$:

$$\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty f(\tau)\,e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau. \tag{4}$$

Используя теорему Эфроса, найти оригиналы следующих функций (a — вещественное число):

69. $F(p) = \dfrac{e^{-\frac{\sqrt{p}\,x}{a}}}{p}$.

70. $F(p) = \dfrac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}}$.

71. $F(p) = \dfrac{e^{-a\sqrt{p}}}{p^2}$.

72. $F(p) = \dfrac{e^{-\frac{\sqrt{p}\,x}{a}}}{\sqrt{p}\left(\frac{\sqrt{p}}{a} + h\right)}$.

73. $F(p) = \dfrac{e^{-a\sqrt{p}}}{p(\sqrt{p} + a)}$.

Используя теорему Эфроса, вычислить следующие интегралы:

74. $I(t) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{ch}\tau\, e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau.$

75. $I(t) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_0^\infty \cos\tau\, e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau.$

76. $I(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^\infty \tau \operatorname{sh} \tau \, e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau.$

77. $I(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^\infty \tau \sin \tau \, e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau.$

§ 2. Решение задачи Коши для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Пусть имеем дифференциальное уравнение (для простоты 2-го порядка):

$$a_0 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x(t) = f(t), \tag{1}$$

где a_0, a_1, a_2 — const, $a_0 \neq 0$.

Будем искать решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям:

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1. \tag{2}$$

Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$, $f(t) \risingdotseq F(p)$. Применяя к обеим частям (1) преобразование Лапласа и используя теорему о дифференцировании оригинала и свойство линейности преобразования Лапласа, вместо дифференциального уравнения (1) с начальными условиями (2) получаем операторное уравнение

$$(a_0p^2 + a_1p + a_2) X(p) - (a_0px_0 + a_0x_1 + a_1x_0) = F(p). \tag{3}$$

Из (3) получаем

$$X(p) = \frac{F(p) + a_0px_0 + a_0x_1 + a_1x_0}{a_0p^2 + a_1p + a_2}. \tag{4}$$

Это так называемое операторное решение. Находя по $X(p)$ оригинал $x(t)$, мы тем самым найдем функцию $x(t)$ — решение задачи Коши (1)—(2).

Общий случай решения задачи Коши для дифференциального уравнения n-го порядка принципиально ничем не отличается от случая $n=2$.

Пример.

$$x'' + x = 2\cos t; \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$$

Решение.

$$x(t) \risingdotseq X(p), \quad x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p),$$

$$x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) + 1, \quad \cos t \risingdotseq \frac{p}{p^2+1},$$

$$p^2X(p) + 1 + X(p) = \frac{2p}{p^2+1};$$

отсюда

$$X(p) = \frac{2p}{(p^2+1)^2} - \frac{1}{p^2+1}.$$

Находим оригинал для $X(p)$. Оригинал для функции $\frac{1}{p^2+1}$

$$\frac{1}{p^2+1} \risingdotseq \sin t.$$

Для нахождения оригинала для функции $\frac{2p}{(p^2+1)^2}$ воспользуемся, например, теоремой о дифференцировании изображения (см. § 1):

$$\frac{2p}{(p^2+1)^2} = -\left(\frac{1}{p^2+1}\right)'_p \risingdotseq t\sin t.$$

Значит, $X(p) \risingdotseq t\sin t - \sin t = (t-1)\sin t$.

Итак, $x(t) = (t-1)\sin t$.

Решить уравнения:

78. $x''' + x' = 1$; $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

79. $x'' + 2x' = t\sin t$; $x(0) = x'(0) = 0$.

80. $x'' + 2x' + x = \sin t$; $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$.

81. $x''' - x'' = \sin t$; $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

82. $x''' + x' = t$; $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$; $x''(0) = 0$.

83. $x'' - 2x' + x = e^t$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

84. $x''' + 2x'' + 5x' = 0$; $x(0) = -1$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = 0$.

85. $x'' - 2x' + 2x = 1$; $x(0) = x'(0) = 0$.

86. $x'' + x' = \cos t$; $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$.

87. $x'' + 2x' + x = t^2$; $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

88. $x''' + x'' = \sin t$; $x(0) = x'(0) = 1$, $x''(0) = 0$.

89. $x'' + x = \cos t$; $x(0) = -1$, $x'(0) = 1$.

90. $x''' + x'' = t$; $x(0) = -3$, $x'(0) = 1$, $x''(0) = 0$.

91. $x'' + 2x' + 5x = 3$. $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

92. $x^{IV} - x'' = \cos t$; $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$, $x''(0) = x'''(0) = 0$.

93. $x'' + 2x' + 2x = 1$; $x(0) = x'(0) = 0$.

94. $x'' + x = 1$; $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$.

95. $x'' + 4x = t$; $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

96. $x'' - 2x' + 5x = 1 - t$; $x(0) = x'(0) = 0$.

97. $x''' + x = 0$; $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$, $x''(0) = 2$.

98. $x''' + x'' = \cos t$; $x(0) = -2$, $x'(0) = x''(0) = 0$.

99. $x''' + x' = e^t$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = 0$.

100. $x^{IV} - x'' = 1$; $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$.

101. $x'' + x' = \cos t$; $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$.

102. $x'' - x' = te^t$; $x(0) = x'(0) = 0$.

103. $x''' + x' = \cos t$; $x(0) = 0$, $x'(0) = -2$, $x''(0) = 0$.

104. $x'' + 2x' + x = t$; $x(0) = x'(0) = 0$.

105. $x'' - x' + x = e^{-t}$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

106. $x'' - x = \sin t$; $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$.

107. $x''' + x = e^t$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = 0$.

108. $x'' + x = 2\sin t$; $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$,

109. $x'' - 2x' + x = t - \sin t$; $x(0) = x'(0) = 0$.

110. $x'' + 2x' + x = 2\cos^2 t$; $x(0) = x'(0) = 0$.

111. $x'' + 4x = 2\cos t \cdot \cos 3t$; $x(0) = x'(0) = 0$.

112. $x''+x=te^t+4\sin t$; $x(0)=x'(0)=0$.

113. $x''-x'=te^t$; $x(0)=1,\ x'(0)=0$.

114. $x''+x'=4\sin^2 t$; $x(0)=0,\ x'(0)=-1$.

115. $x'''-2x''+x'=4$; $x(0)=1,\ x'(0)=2,\ x''(0)=-2$.

116. $x''-3x'+2x=e^t$; $x(0)=x'(0)=0$.

117. $x''-x'=t^2$; $x(0)=0,\ x'(0)=1$.

118. $x'''+x=\frac{1}{2}t^2e^t$; $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$.

119. $x''+x=t\cos 2t$; $x(0)=x'(0)=0$.

120. $x''+n^2x=a\sin(nt+\alpha)$; $x(0)=x'(0)=0$.

121. $x'''+6x''+11x'+6x=1+t+t^2$; $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$.

122. $x^{\mathrm{IV}}+2x''+x=t\sin t$; $x(0)=x'(0)=x''(0)=x'''(0)=0$.

123. $x''-2\alpha x'+(\alpha^2+\beta^2)x=0$; $x(0)=0,\ x'(0)=1$.

124. $x''+4x=\sin t$; $x(0)=x'(0)=0$.

125. $x'''+x'=e^{2t}$; $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$.

126. $x^{\mathrm{IV}}+x^{\mathrm{III}}=\cos t$; $x(0)=x'(0)=x''(0)=0,\ x^{\mathrm{III}}(0)=\gamma$.

127. $x''-4x=\sin\frac{3}{2}t\sin\frac{1}{2}t$; $x(0)=1,\ x'(0)=0$.

128. $x^{\mathrm{IV}}-5x''+10x'-6x=0$; $x(0)=1,\ x'(0)=0,\ x''(0)=6,\ x'''(0)=-14$.

129. $x''+x'+x=te^t$; $x(0)=x'(0)=0$.

130. $x''+x=t\cos t$; $x(0)=x'(0)=0$.

131. $x'''+3x''-4x=0$; $x(0)=x'(0)=0,\ x''(0)=2$.

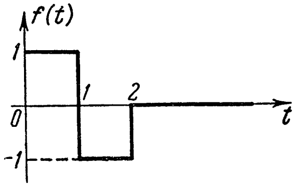
132. $x'''+3x''+3x'+x=1$; $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$.

133. $x''' + x = 1;$

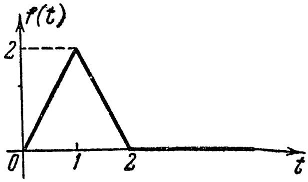
$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

134. $x'' + \omega^2 x = a\,[\eta(t) - \eta(t-b)];$

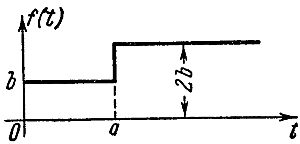
$x(0) = x'(0) = 0.$

135. 

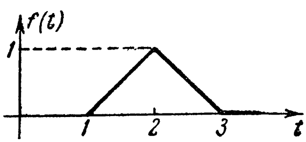
$x'' + x = f(t);$
$x(0) = x'(0) = 0.$

136. 

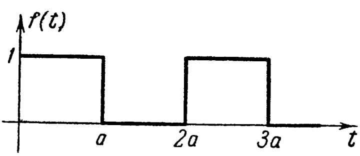
$x'' + 4x = f(t);$
$x(0) = x'(0) = 0.$

137. 

$x'' + x = f(t);$
$x(0) = 1,\ x'(0) = 0.$

138. 

$x'' + 9x = f(t);$
$x(0) = 0,\ x'(0) = 1.$

139. 

$x'' - 2x' + x = f(t);$
$x(0) = x'(0) = 0.$

140. Частица массы m движется прямолинейно под действием восстанавливающей силы $m\lambda x$, пропорциональной смещению, и силы сопротивления $2m\mu v$, пропорциональной скорости. В момент времени $t=0$ частица находится на расстоянии x_0 от положения равновесия и обладает скоростью v_0. Показать, что если имеет место равенство $n^2=\lambda-\mu^2$, то смещение частицы определяется выражением

$$\frac{1}{n}e^{-\mu t}\left[nx_0\cos nt+(v_0+\mu x_0)\sin nt\right].$$

141. Частица массы m может совершать малые колебания относительно положения равновесия и находится под воздействием восстанавливающей силы mn^2x, пропорциональной смещению. Она выводится из состояния покоя постоянной силой F, действующей в течение времени T. Показать, что амплитуда колебания равна

$$\frac{2F}{mn^2}\sin\frac{nT}{2} \text{ при } t>T.$$

142. Математический маятник длины l выводится из положения равновесия малыми отклонениями точки подвеса в горизонтальном направлении. Показать, что если точка подвеса переместилась на расстояние a, то отклонение маятника равно $a(1-\cos nt)$, $n^2=\frac{g}{l}$.

143. Частица брошена вертикально вверх со скоростью v_0. На нее действуют сила тяжести и сила сопротивления $2kmv$. Показать, что в момент времени t она будет находиться на расстоянии $-\frac{gt}{2k}+\frac{g+2kv_0}{4k^2}\left(1-e^{-2kt}\right)$ от точки бросания.

144. Материальная точка массы 2 грамма движется прямолинейно под действием силы F, возрастающей на a дин в секунду. В начальный момент точка находилась в начале координат и имела скорость $v_0=10$ *см/сек*. Зная, что начальная величина силы $F_0=4$ дины и что на расстоянии 450 *см* от начала координат скорость $v=105$ *см/сек*, определить значение величины a.

145. Материальная точка массы m движется прямолинейно, отталкиваясь от начала координат O с силой F, прямо пропорциональной расстоянию ($F=4mx$). На точку действует сопротивление среды $R=3mv$. В начальный момент расстояние от начала равно 1, а скорость равна нулю. Найти закон движения точки.

146. Тяжелая точка массы m падает в среде, сопротивление которой прямо пропорционально первой степени скорости. Определить наибольшую скорость точки, если при $v=1$ *м/сек* сила сопротивления равна одной трети веса точки и начальная скорость $v_0=0$.

147. Материальная точка массы m движется в среде, сопротивление которой прямо пропорционально первой степени скорости (коэффициент пропорциональности k). Какое расстояние пройдет точка до остановки, если ей сообщена начальная скорость v_0 и кроме силы сопротивления никаких других сил нет?

148. Тяжелая однородная цепочка массы m и длины $2l$ лежит на гладком горизонтальном столе так, что половина ее свешивается со стола. Определить движение цепочки во время ее соскальзывания со стола и найти время соскальзывания.

149. Точка массы m находится на прямой, проходящей через два центра A и B, расстояние между которыми $2d$. Центры притягивают точку с силами, прямо пропорциональными расстоянию до центра; коэффициент пропорциональности mk^2 одинаков для обоих центров. В начальный момент точка находится на расстоянии a от середины O отрезка AB, не имея начальной скорости. Определить закон движения точки.

150. Неподвижный центр O притягивает точку массы m с силой $F=\mu mr$, где r — расстояние точки от этого центра и μ — постоянный коэффициент. В начальный момент $r=a$ и скорость $v=0$. Через сколько времени точка достигнет центра O?

151. Лодке сообщена начальная скорость $v_0=$ $=6$ *м/сек*. Через 69 *сек* после начала движения эта скорость уменьшается вдвое. Найти закон движения лодки, если сила сопротивления воды прямо пропорциональна скорости лодки.

152. Материальная точка массы $m=2$ совершает прямолинейные колебания по оси Ox под действием восстанавливающей силы, пропорциональной расстоянию точки от начала координат (коэффициент пропорциональности равен 8), и возмущающей силы $F=4\cos t$.

Найти закон движения точки, если в начальный момент $x=0$ и $v=0$.

153. Определить движение материальной точки массы m, притягиваемой к неподвижному центру O силой, прямо пропорциональной расстоянию и равной k^2m на расстоянии, равном единице длины.

В начальный момент точка находилась на расстоянии a от центра O и имела скорость v_0, перпендикулярную к прямой, соединяющей начальное положение с центром O.

154. Решить задачу № 153, предполагая, что точка M отталкивается от центра с силой, прямо пропорциональной расстоянию, при том же коэффициенте пропорциональности.

155. К цепи, состоящей из емкости C и самоиндукции L, соединенных последовательно, в момент времени $t=0$ приложена э. д. с. $E\cos(\omega t+\alpha)$. Начальные ток и заряд равны нулю. Показать, что ток в момент t равен

$$E\{\omega\sin(\omega t+\alpha)-n\cos\alpha\sin nt-$$
$$-\omega\sin\alpha\cos nt\}\frac{1}{L(\omega^2-n^2)},$$

где $n^2=\frac{1}{LC}$; предполагается, что $n^2\neq\omega^2$.

156. К цепи предыдущего примера, с нулевыми начальными током и зарядом в момент времени $t=0$, приложена э. д. с. $E\sin nt$ с резонансной частотой. Показать, что ток равен $\frac{E}{2L}\,t\sin nt$, где $n^2=\frac{1}{LC}$.

157. К сопротивлению R, обладающему самоиндукцией L, приложена э. д. с. $E\sin(\omega t+\alpha)$. Начальный ток равен нулю. Показать, что ток равен

$$E\left\{\sin(\gamma-\alpha)e^{-\frac{Rt}{L}}+\sin(\omega t+\alpha+\gamma)\right\}(R^2+L^2\omega^2)^{-\frac{1}{2}},$$

где $\operatorname{tg}\gamma=\frac{\omega L}{R}$.

158. К цепи, в которую последовательно включены L, R, C с начальными током и зарядом, равными нулю, приложена э. д. с., равная E_1 при $0<t\leqslant T$ и E_2 при $t>T$;

E_1, E_2 — постоянные. Показать, что при $t > T$ ток в цепи равен

$$\frac{E_1}{nL} e^{-\mu t} \sin nt - \frac{E_1 - E_2}{nL} e^{-\mu(t-T)} \sin n(t-T),$$

где $\mu = \frac{R}{2L}$ и $n^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$, причем предполагается, что $n^2 > 0$.

159. Цепь, состоящая из самоиндукции L, сопротивления R и емкости C, соединенных последовательно, включается на постоянную э. д. с. E. Начальный заряд и ток равны нулю. Показать, что ток I в момент времени t равен

$$I = \begin{cases} \frac{E}{nL} e^{-\mu t} \sin nt & \text{при } n^2 > 0, \\ \frac{E}{L} t e^{-\mu t} & \text{при } n^2 = 0, \end{cases}$$

где $n^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$, $\mu = \frac{R}{2L}$.

§ 3. Интеграл Дюамеля

Если функция $f(t)$ непрерывна на $[0, +\infty)$, а функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, +\infty)$ и $F(p) \doteqdot f(t)$, $\Phi(p) \doteqdot \varphi(t)$, то

$$F(p)\,\Phi(p) \doteqdot \int_0^t f(\tau)\,\varphi(t-\tau)\,d\tau.$$

Отсюда легко получаем

$$pF(p)\,\Phi(p) \doteqdot f(t)\,\varphi(0) + \int_0^t f(\tau)\,\varphi'(t-\tau)\,d\tau. \qquad (1)$$

Это — так называемая *формула Дюамеля.*

Пусть требуется решить линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами n-го порядка

$$L[x] = f(t) \qquad (2)$$

при нулевых начальных условиях

$$x(0) = x'(0) = \cdots = x^{(n-1)}(0) = 0. \tag{3}$$

Это ограничение на начальные условия несущественно. Простой заменой искомой функции задачу с ненулевыми начальными условиями можно свести к задаче с нулевыми условиями за счет незначительного изменения правой части $f(t)$. Допустим, что известно решение уравнения

$$L[x] = 1 \tag{4}$$

с той же левой частью и правой частью, равной единице, при условиях (3). Переходя к оперативным уравнениям, будем иметь ($A(p)$ — известный многочлен от p):

$$A(p)X(p) = F(p) \tag{5}$$

для (2) и

$$A(p)X_1(p) = \frac{1}{p} \tag{6}$$

для (4). Из (5) находим $X(p) = \frac{F(p)}{A(p)}$, а из (6) $A(p) = \frac{1}{pX_1(p)}$, откуда $X(p) = pX_1(p)F(p)$. Согласно формуле (1)

$$pX_1(p)F(p) \risingdotseq f(t)x_1(0) + \int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)\,d\tau. \tag{7}$$

Учитывая, что $x_1(0) = 0$, получаем

$$X(p) = pX_1(p)F(p) \risingdotseq \int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)\,d\tau, \tag{8}$$

т. е. $x(t) = \int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)\,d\tau$ — решение уравнения (2) при нулевых начальных условиях (3).

Пример. Используя формулу Дюамеля, решить уравнение

$$x'' + x = e^{at}; \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Рассмотрим уравнение

$$x_1'' + x_1 = 1; \quad x_1(0) = x_1'(0) = 0.$$

Его операторное решение $X_1(p) = \frac{1}{p(p^2+1)}$, откуда $x_1(t) = 1 - \cos t$. По формуле (8) получаем для решения $x(t)$ исходного уравнения

$$x(t) = \int_0^t e^{a\tau} \sin(t-\tau)\,dt = \frac{1}{a^2+1}\left(e^{at} - \cos t - a\sin t\right).$$

Решить с помощью формулы Дюамеля уравнения:

160. $x'' - 2x' = t^2 e^t$; $x(0) = x'(0) = 0$.

161. $x'' + 2x' + 2x = \sin t$; $x(0) = x'(0) = 0$.

162. $x'' = \operatorname{arctg} t$; $x(0) = x'(0) = 0$.

163. $x'' + x = \dfrac{1}{2 + \cos t}$; $x(0) = x'(0) = 0$.

164. $x'' - x' = \dfrac{1}{1 + e^t}$; $x(0) = x'(0) = 0$.

165. $x'' + x = \dfrac{1}{4 + \operatorname{tg}^2 t}$; $x(0) = x'(0) = 0$.

166. $x'' + x' = \cos t$; $x(0) = x'(0) = 0$.

167. $x'' + x = \dfrac{1}{1 + \cos^2 t}$; $x(0) = x'(0) = 0$.

168. $x'' - x = \operatorname{sh} t$; $x(0) = x'(0) = 0$.

169. $x'' - 2x' + x = \operatorname{ch} t$; $x(0) = x'(0) = 0$.

170. $x''' + x' = \dfrac{1}{2 + \sin t}$; $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

171. $x'' - x = \operatorname{th} t$; $x(0) = x'(0) = 0$.

§ 4. Решение систем линейных дифференциальных уравнений операционным методом

Решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом производится по той же схеме, что и решение одного дифференциального уравнения.

Пусть, например, нужно решить систему дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$\sum_{k=1}^{n} \left(a_{ik} \frac{d^2 x_k}{dt^2} + b_{ik} \frac{dx_k}{dt} + c_{ik} x_k \right) = f_i(t) \qquad (1)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

где a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} — const, при начальных условиях

$$x_k(0) = \alpha_k, \quad x_k'(0) = \beta_k. \qquad (2)$$

Обозначая через $X_k(p)$ и $F_i(p)$ изображения $x_k(t)$ и $f_i(t)$, от системы (1) с учетом (2) перейдем к операторной системе

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}p^2+b_{ik}p+c_{ik})X_k(p)=F_i(p)+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}[(a_{ik}p+b_{ik})\alpha_k+a_{ik}\beta_k] \qquad (3)$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Решая систему (3) как линейную алгебраическую систему уравнений относительно $X_k(p)$, найдем $X_k(p)$, а затем и их оригиналы $x_k(t)$ $(k=1,\ 2,\ldots,\ n)$. Эти последние будут решениями задачи Коши (2) для системы (1).

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x''=3(y-x+z),\\ y''=x-y,\\ z''=-z;\end{cases}$$
$$x(0)=x'(0)=0,$$
$$y(0)=0,\quad y'(0)=-1,$$
$$z(0)=1,\quad z'(0)=0.$$

Решение. Переходя к операторной системе, получим

$$\begin{cases} p^2X=3(Y-X+Z),\\ p^2Y+1=X-Y,\\ p^2Z-p=-Z,\end{cases}$$

где $X(p)\risingdotseq x(t),\quad Y(p)\risingdotseq y(t),\quad Z(p)\risingdotseq z(t)$.

Решая последнюю систему относительно $X(p)$, $Y(p)$ и $Z(p)$, получим

$$X(p)=\frac{3(p-1)}{p^2(p^2+4)};\quad Y(p)=\frac{3(p-1)}{p^2(p^2+1)(p^2+4)}-\frac{1}{p^2+1};$$
$$Z(p)=\frac{p}{p^2+1}.$$

Находя оригиналы для $X(p)$, $Y(p)$, $Z(p)$, получаем

$$x(t)=\frac{3}{4}(1-t)-\frac{3}{4}\cos 2t+\frac{3}{8}\sin 2t,$$
$$y(t)=\frac{3}{4}(1-t)+\frac{1}{4}\cos 2t-\frac{1}{8}\sin 2t-\cos t,$$
$$z(t)=\cos t.$$

Решить системы уравнений:

172. $\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t, \\ x'' + 2y' + x = 0; \end{cases}$

$$x(0) = y(0) = x'(0) = 0.$$

173. $\begin{cases} x'' - 3x' + 2x + y' - y = 0, \\ -x' + x + y'' - 5y' + 4y = 0; \end{cases}$

$$x(0) = x'(0) = y'(0) = 0, \ y(0) = 1.$$

174. $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = 2x + 2y; \end{cases}$

$$x(0) = y(0) = 1.$$

175. $\begin{cases} 2x'' - x' + 9x - y'' - y' - 3y = 0, \\ 2x'' + x' + 7x - y'' + y' - 5y = 0; \end{cases}$

$$x(0) = x'(0) = 1, \ y(0) = y'(0) = 0.$$

176. $\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t; \end{cases}$

$$x(0) = y(0) = 0.$$

177. $\begin{cases} x' = -x + y + z + e^t, \\ y' = x - y + z + e^{3t}; \\ z' = x + y + z + 4; \end{cases}$

$$x(0) = y(0) = z(0) = 0.$$

178. $\begin{cases} x' = -y - z, \\ y' = -x - z, \\ z' = -x - y; \end{cases}$

$$x(0) = -1, \ y(0) = 0, \ z(0) = 1.$$

179. $\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = 3x + z, \\ z' = 3x + y; \end{cases}$

$$x(0) = 0, \ y(0) = 1, \ z(0) = 1.$$

180. $\begin{cases} x' = 3y - x, \\ y' = y + x + e^{at}; \end{cases}$

$$x(0) = 1, \ y(0) = 1.$$

181. $\begin{cases} x' = 2x - y + z, \\ y' = x + z, \\ z' = -3x + y - 2z; \end{cases}$

$$x(0) = 1, \ y(0) = 1, \ z(0) = 0.$$

182. $\begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z, \\ y' = -2x + y - 2z, \\ z' = 5x + 2y + 7z; \end{cases}$

$$x(0) = y(0) = z(0) = 1.$$

183. $\begin{cases} tx' = -x + y + z + t, \\ ty' = x - y + z + t^3, \\ tz' = x + y + z + 4; \end{cases}$

$$x(1) = y(1) = z(1) = 0.$$

184. $\begin{cases} x_0' = -cx_0, \\ x_1' = -cx_1 + cx_0, \\ \dots\dots\dots \\ x_n' = -cx_n + cx_{n-1}; \end{cases}$

$$x_0(0) = 1, \ x_1(0) = x_2(0) = \dots = x_n(0) = 0.$$

185. $\begin{cases} 3x' + 2x + y' = 1, \\ x' + 4y' + 3y = 0; \end{cases}$

$$x(0) = y(0) = 0.$$

186. $\begin{cases} 3tx' = 2x + y - z, \\ 2ty' = x + 3y + z, \\ 6tz' = -x + 7y + 5z; \end{cases}$

$$x(1) = y(1) = z(1) = 1.$$

187. $\begin{cases} x' - x - 2y = t, \\ -2x + y' - y = t. \end{cases}$

$$x(0) = 2, \ y(0) = 4.$$

188. Электрон вылетает из начала координат с начальной скоростью v_0, направленной по оси Ox. Найти закон движения электрона, предполагая, что напряжение магнитного поля H постоянно и направлено перпендикулярно к плоскости xOy.

189. Снаряд вылетает из орудия со скоростью v_0 *м/сек* под углом 45° к горизонту. Найти, пренебрегая сопротивлением воздуха, наибольшую высоту, на которую поднимается снаряд, и место его падения.

190. Электрон движется в магнитном поле постоянного напряжения H. Найти траекторию, если начальная скорость $\boldsymbol{v}_0$ образует угол α с направлением магнитного поля.

191. Определить движение тяжелой материальной точки, брошенной с начальной скоростью $\boldsymbol{v}_0$ под углом α к горизонту, в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости $(\boldsymbol{F}=mk\boldsymbol{v})$.

192. Частица массы m с зарядом e вылетает из начала координат со скоростью $(u, 0, 0)$. На нее действует постоянное магнитное поле H, параллельное оси Oz, и сопротивление среды $km\boldsymbol{v}$, где $\boldsymbol{v}$ — скорость частицы. Показать, что ее координаты в момент времени t равны

$$x=\frac{kue^{-kt}}{k^2+\lambda^2}\left(e^{kt}-\cos\lambda t+\frac{\lambda}{k}\sin\lambda t\right),$$

$$y=-\frac{\lambda u}{k^2+\lambda^2}+\frac{ue^{-kt}}{k^2+\lambda^2}(\lambda\cos\lambda t+k\sin\lambda t),$$

где $\lambda=\dfrac{eH}{mc}$, c — скорость света.

193. Частица движется в сопротивляющейся среде, действующей на нее с силой $F=2\lambda\boldsymbol{v}$, где $\boldsymbol{v}$ — скорость частицы, и притягивается к точке $(0,0)$ с силой $\mu^2\boldsymbol{r}$ $(m=1)$. В точке $(a, 0)$ частица обладает скоростью v_0, параллельной оси Oy. Показать, что при $\mu>\lambda$ траектория частицы определяется уравнениями

$$x=ae^{-\lambda t}\left[\cos\omega t+\frac{\lambda}{\omega}\sin\omega t\right],$$

$$y=\frac{v_0}{\omega}e^{-\lambda t}\sin\omega t,$$

где $\omega=\sqrt{\mu^2-\lambda^2}$.

194. Материальная точка A с массой m, находившаяся на расстоянии a от оси Ox, получила начальную скорость $\boldsymbol{v}_0$, параллельную оси Ox. Точка A притягивается осью Ox с силой $\boldsymbol{F}$, прямо пропорциональной расстоянию от нее; коэффициент пропорциональности равен mk^2. Найти уравнения движения и траекторию точки.

§ 5. Решение интегральных уравнений Вольтерра с ядрами специального вида

Интегральным уравнением называется уравнение, содержащее искомую функцию под знаком интеграла. Например, решение задачи Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

как известно, сводится к решению следующего интегрального уравнения:

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx + y_0.$$

Если искомая функция y входит в уравнение линейно, то и само интегральное уравнение называется *линейным*.

Уравнение вида

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)\, y(t)\, dt \tag{1}$$

(a и b — постоянные) называется *линейным интегральным уравнением Фредгольма* 2-го *рода*.

Функции $K(x, t)$, $f(x)$ предполагаются известными, а $y(x)$ — искомая функция. Функцию $K(x, t)$ называют *ядром уравнения* (1). Уравнение

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t)\, y(t)\, dt \tag{2}$$

называют *линейным интегральным уравнением Вольтерра* 2-го *рода*.

Если в уравнениях (1) и (2) $f(x) \equiv 0$, то уравнения называются *однородными*.

Если искомая функция $y(x)$ входит только под знак интеграла, то мы получаем соответственно уравнения Фредгольма или Вольтерра *первого* рода:

$$\int_a^b K(x, t)\, y(t)\, dt = f(x) \quad \text{или} \quad \int_a^x K(x, t)\, y(t)\, dt = f(x).$$

Укажем связь между линейными дифференциальными уравнениями и интегральными уравнениями Вольтерра. Для простоты рассмотрим дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)\, y = \psi(x), \tag{3}$$

причем будем предполагать, что в точке $x=0$ функции $a_1(x)$, $a_2(x)$

и $\psi(x)$ не имеют особенностей. Сделаем подстановку $\frac{d^2y}{dx^2}=\varphi(x)$. Тогда

$$\frac{dy}{dx}=\int_0^x \varphi(t)\,dt+C_1,$$

$$y=\int_0^x dx\left\{\int_0^x \varphi(t)\,dt\right\}+C_1x+C_2.$$

Подставляя выражения для y, $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ в уравнение (3), получим

$$\varphi(x)+a_1(x)\int_0^x \varphi(t)\,dt+a_2(x)\int_0^x dx\left\{\int_0^x \varphi(t)\,dt\right\}=$$
$$=\psi(x)-C_1a_1(x)-(C_1x+C_2)\,a_2(x). \tag{4}$$

Положим $\psi(x)-C_1a_1(x)-(C_1x+C_2)a_2(x)\equiv f(x)$. Заметим, что

$$\int_0^x dx\left\{\int_0^x \varphi(t)\,dt\right\}=\int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Тогда (4) примет вид

$$\varphi(x)+\int_0^x [a_1(x)+a_2(x)(x-t)]\,\varphi(t)\,dt=f(x). \tag{5}$$

Уравнение (5) есть интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода.

Если для дифференциального уравнения (3) поставлена задача Коши, то постоянные C_1 и C_2, входящие в правую часть (4), имеют конкретные числовые значения, и таким образом, решение уравнения Вольтерра (5) будет эквивалентно решению задачи Коши для линейного дифференциального уравнения (3).

Единственность решения уравнения Вольтерра следует из того, что задача Коши допускает в точках, где уравнение (3) не имеет особенностей, одно и только одно решение. В случае линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами указанный метод приводит к интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода, ядро которого является многочленом относительно $x-t$. Уравнения вида

$$\varphi(x)+\int_0^x K(x-t)\,\varphi(t)\,dt=f(x) \tag{6}$$

с ядром $K(x-t)$, зависящим лишь от разности аргументов, представляют собой важный класс уравнений Вольтерра. Они иногда называются уравнениями типа свертки.

Итак, пусть имеем интегральное уравнение Вольтерра с ядром, зависящим лишь от разности аргументов

$$\varphi(x)=f(x)+\int_0^x K(x-t)\varphi(t)\,dt. \tag{7}$$

Будем предполагать, что $f(x)$ и $K(x)$ достаточно гладкие функции и имеют конечный порядок роста при $x>0$. В этом случае и $\varphi(x)$ при $x\geqslant 0$ имеет конечный порядок роста, а значит, может быть найдено изображение функций f, K и φ (по Лапласу). Пусть $\Phi(p)\doteqdot\varphi(x)$, $F(p)\doteqdot f(x)$, $L(p)\doteqdot K(x)$. Применяя к обеим частям (7) преобразование Лапласа и пользуясь формулой свертки (см. § 1, IX), будем иметь

$$\Phi(p)=F(p)+L(p)\Phi(p), \tag{8}$$

откуда

$$\Phi(p)=\frac{F(p)}{1-L(p)}. \tag{9}$$

Для $\Phi(p)$ находим оригинал $\varphi(x)$ — решение интегрального уравнения (7).

Пример. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x)=\cos x+\int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt.$$

Решение. Переходя к изображениям и рассматривая интеграл как свертку функций, получим на основании правила изображения свертки

$$\Phi(p)=\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{p^2}\Phi(p),$$

откуда

$$\Phi(p)=\frac{p^3}{(p^2+1)(p^2-1)}.$$

Находя оригинал для $\Phi(p)\doteqdot\varphi(x)$, получим решение интегрального уравнения

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\operatorname{ch} x).$$

Решить интегральные уравнения:

195. $\varphi(x)=\sin x+\int\limits_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt.$

196. $\varphi(x) = x + \frac{1}{2}\int\limits_0^x (x-t)^2 \varphi(t)\, dt.$

197. $\varphi(x) = x + \int\limits_0^x \sin(x-t)\, \varphi(t)\, dt.$

198. $\varphi(x) = \cos x + \int\limits_0^x e^{x-t} \varphi(t)\, dt.$

199. $\varphi(x) = 1 + x + \int\limits_0^x \cos(x-t)\, \varphi(t)\, dt.$

200. $\varphi(x) = \frac{x^2}{2} + \int\limits_0^x (x-t)\, e^{-(t-x)} \varphi(t)\, dt.$

201. $\varphi(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}\int\limits_0^x (x-t)^2 \varphi(t)\, dt.$

202. $\varphi(x) = x + 2\int\limits_0^x [(x-t) - \sin(x-t)]\, \varphi(t)\, dt.$

203. $\varphi(x) = \sin x + 2\int\limits_0^x \cos(x-t)\, \varphi(t)\, dt.$

204. $\varphi(x) = 1 - 2x - 4x^2 + \int\limits_0^x [3 + 6(x-t) -$

$- 4(x-t)^2]\, \varphi(t)\, dt.$

205. $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{2}\int\limits_0^x \sin 2(x-t)\, \varphi(t)\, dt.$

206. $\varphi(x) = e^x - 2\int\limits_0^x \cos(x-t)\, \varphi(t)\, dt.$

207. $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{6}\int\limits_0^x (x-t)^3 \varphi(t)\, dt.$

208. $\varphi(x)=x-\int\limits_0^x \operatorname{sh}(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

209. $\varphi(x)=\operatorname{sh} x-\int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

Аналогично решаются интегральные уравнения Вольтерра 1-го рода с ядром $K(x, t)$, зависящим только от разности $x-t$, т. е. уравнения вида

$$\int\limits_0^x K(x-t)\,\varphi(t)\,dt=f(x), \tag{10}$$

где $f(x)$ — известная функция, $K(x-t)$ — ядро, а $\varphi(x)$ — искомая функция. При этом мы предполагаем $K(x, x)\neq 0$, что гарантирует существование решения уравнения (10).

Пусть, как и раньше, $F(p)\risingdotseq f(x)$, $L(p)\risingdotseq K(x)$; $\Phi(p)\risingdotseq \varphi(x)$. Применяя к обеим частям (10) преобразование Лапласа и используя теорему о свертывании, будем иметь

$$L(p)\cdot\Phi(p)=F(p),$$

откуда

$$\Phi(p)=\frac{F(p)}{L(p)}. \tag{11}$$

Оригинал для $\Phi(p)$ будет решением $\varphi(x)$ интегрального уравнения (10).

Решить интегральные уравнения:

210. $\int\limits_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt=x.$

211. $\int\limits_0^x J_0(x-t)\,\varphi(t)\,dt=\sin x.$

212. $\int\limits_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt=\sin x.$

213. $\int\limits_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt=\sin x.$

214. $\int\limits_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt = x + x^2.$

215. $\int\limits_0^x e^{2(x-t)}\,\varphi(t)\,dt = x^2e^x.$

216. $\int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t)\,\varphi(t)\,dt = \operatorname{sh} x.$

217. $\int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t)\,\varphi(t)\,dt = x.$

Указанный метод решения уравнений (7), (10) приложим также к системам интегральных уравнений Вольтерра вида

$$\varphi_i(x) = f_i(x) + \sum_{k=1}^{s}\int\limits_0^x K_{ik}(x-t)\,\varphi_k(t)\,dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, s). \quad (12)$$

Применяя к обеим частям (12) преобразование Лапласа, получим

$$\Phi_i(p) = F_i(p) + \sum_{k=1}^{s} K_{ik}(p)\,\Phi_k(p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, s). \quad (13)$$

Решая эту систему уравнений, линейную относительно $\Phi_i(p)$, найдем $\Phi_i(p)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, оригиналы для которых и будут решением исходной системы интегральных уравнений (12).

Пример. Решить систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = x + \int\limits_0^x e^{-(x-t)}\,\varphi_1(t)\,dt + \int\limits_0^x (x-t)\,\varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 1 + \int\limits_0^x \operatorname{sh}(x-t)\,\varphi_1(t)\,dt - \int\limits_0^x e^{(x-t)}\,\varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

Решение. Переходя к изображениям и используя теорему о свертке, получим ($\Phi_1(p) \risingdotseq \varphi_1(x)$, $\Phi_2(p) \risingdotseq \varphi_2(x)$):

$$\begin{cases} \Phi_1(p) = \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{p+1}\,\Phi_1(p) + \dfrac{1}{p^2}\,\Phi_2(p), \\ \Phi_2(p) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^2-1}\,\Phi_1(p) - \dfrac{1}{p-1}\,\Phi_2(p), \end{cases}$$

откуда

$$\Phi_1(p) = \frac{p^2 + p - 1}{p(p-1)(p^2+1)}, \quad \Phi_2(p) = \frac{p^3 - p^2 + 1}{(p-1)(p+1)(p^2+1)}.$$

Находим оригиналы для $\Phi_1(p)$ и $\Phi_2(p)$:

$$\varphi_1(x) = 1 + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\sin x - \frac{3}{2}\cos x,$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \operatorname{ch} x) - \sin x.$$

Функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ являются решениями исходной системы интегральных уравнений.

Решить следующие системы интегральных уравнений:

218. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = 1 - 2\int\limits_0^x e^{2(x-t)}\varphi_1(t)\,dt + \int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 4x - \int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt + 4\int\limits_0^x (x-t)\varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

219. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = e^x + \int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt - \int\limits_0^x e^{(x-t)}\varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = -x - \int\limits_0^x (x-t)\varphi_1(t)\,dt + \int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

220. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = x + \int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt + \int\limits_0^x (x-t)\varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int\limits_0^x e^{(x-t)}\varphi_1(t)\,dt + \int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

221. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = e^x - \int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt + 4\int\limits_0^x e^{(x-t)}\varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int\limits_0^x e^{-(x-t)}\varphi_1(t)\,dt + \int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

222. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = 2x - \int\limits_0^x (x-t)\,\varphi_1(t)\,dt + \int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = -2 - 4\int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt + 3\int\limits_0^x (x-t)\,\varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

223. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = 2 - \int\limits_0^x (x-t)\,\varphi_1(t)\,dt - 4\int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt - \int\limits_0^x (x-t)\,\varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

§ 6. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом

В ряде технических задач приходится иметь дело с дифференциальными уравнениями, в которые неизвестная функция входит при различных значениях аргумента, например:

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), x(t-\tau(t))), \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), x(t-\tau(t)), \dot{x}(t-\tau(t))), \tag{2}$$

$$\ddot{x}(t) = \varphi(t, x(t), \dot{x}(t), x(t-\tau_1(t)), \dot{x}(t-\tau_2(t))). \tag{3}$$

Такие уравнения называются *дифференциальными уравнениями с отклоняющимися аргументами*. Если $\tau_i(t)$ — постоянные, то мы имеем так называемое *дифференциально-разностное уравнение*. Если старшая производная входит в дифференциально-разностное уравнение только при одном значении аргумента, не меньшем всех других аргументов функций и производных, входящих в уравнение, то уравнение называется *дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом* (например, уравнения (1) и (3)).

Пусть дано дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом с постоянными коэффициентами:

$$x^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)}(t-\tau_k) + f(t), \tag{4}$$

где $a_k = \text{const}$, $\tau_k = \text{const} \geqslant 0, 0 < t < +\infty$. Возьмем ради простоты нулевые начальные условия

$$x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0. \tag{5}$$

При этом мы полагаем

$$x(t) = x'(t) = \dots = x^{(n-1)}(t) \equiv 0 \text{ для } t < 0.$$

Применяя к обеим частям (4) преобразование Лапласа и пользуясь при этом теоремой запаздывания (см. § 1), получим операторное уравнение для $X(p) \risingdotseq x(t)$:

$$p^n X(p) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k X(p) e^{-\tau_k p} + F(p), \text{ где } F(p) \risingdotseq f(t), \tag{6}$$

откуда

$$X(p) = \frac{F(p)}{p^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k p^k e^{-\tau_k p}}. \tag{7}$$

Находя $x(t)$ — оригинал для $X(p)$, определяемого формулой (7), получаем решение уравнения (4), удовлетворяющее начальным условиям (5).

Пример. Решить уравнение

$$x'(t) = x(t-1) + 1, \quad x(0) = 0.$$

Решение. Переходя к изображениям, получим

$$pX(p) = Xe^{-p} + \frac{1}{p},$$

откуда

$$X(p) = \frac{1}{p}\,\frac{1}{p - e^{-p}} = \frac{1}{p^2}\,\frac{1}{1 - \frac{e^{-p}}{p}} =$$

$$= \frac{1}{p^2}\left(1 + \frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p^2} + \dots + \frac{e^{-np}}{p^n} + \dots\right).$$

Для $x(t)$ получаем

$$x(t) = t\eta(t) + \frac{1}{2!}(t-1)^2\eta(t-1) + \dots + \frac{1}{(n+1)!}(t-n)^{n+1} \times$$

$$\times \eta(t-n) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-k)^{k+1}}{(k+1)!}\,\eta(t-k).$$

Решить следующие уравнения:

224. $x''(t) - x(t-1) = t; \quad x(0) = x'(0) = 0.$

225. $x''(t) - 2x'(t-1) = t; \; x(0) = x'(0) = 0.$

226. $x''(t) = 2x'(t-1) - x(t-2) + 1;$

$$x(0) = x'(0) = 0.$$

227. $x''(t) + 2x'(t-2) + x(t-4) = t;$

$$x(0) = x'(0) = 0.$$

Для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, описывающих процесс с последействием, часто встречаются задачи в следующей постановке:

Найти решение уравнения $x(t)$ для $t \geqslant t_0$, причем для всех $t \leqslant t_0$, для которых значения $x(t)$ влияют на последующие значения решения при $t \geqslant t_0$, функция $x(t)$ задается.

Так, например, ставится задача: найти непрерывное решение $x(t)$ при $t \geqslant t_0$ уравнения

$$x(t) = f(t,\ x(t),\ x(t-\tau)),\quad \tau > 0 - \text{const},$$

если дано, что $x(t) = \varphi(t)$ для $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$.

Здесь $\varphi(t)$ — заданная непрерывная функция, называемая *начальной функцией*. Отрезок $[t_0 - \tau,\ t_0]$, на котором задается функция $\varphi(t)$, называется *начальным множеством*.

Решение линейного уравнения (4) с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием в случае, когда начальная функция отлична от тождественного нуля, также можно искать, используя преобразование Лапласа. Покажем это на примере.

Пример.

$$x'(t) = x(t-1),\quad \varphi(t) \equiv 1,\quad -1 \leqslant t \leqslant 0.$$

Решение.

$$x(t) \risingdotseq X(p),\qquad x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p) - 1,$$

$$pX(p) - 1 = \int_0^\infty e^{-pt}\, x(t-1)\, dt.$$

Делая замену переменных $t - 1 = z$, получим

$$\int_0^\infty e^{-pt}\, x(t-1)\, dt = \int_{-1}^\infty e^{-p(z+1)}\, x(z)\, dz =$$

$$= e^{-p} \int_{-1}^0 e^{-pz}\, x(z)\, dz + e^{-p} \int_0^\infty e^{-pz}\, x(z)\, dz =$$

$$= e^{-p} \left. \frac{e^{-pz}}{-p} \right|_{z=-1}^{z=0} + e^{-p} X(p), \text{ так как } x(z) \equiv 1 \text{ для } -1 \leqslant z \leqslant 0.$$

Окончательно

$$pX(p) - 1 = \frac{1 - e^{-p}}{p} + e^{-p} X(p).$$

Отсюда

$$X(p)=\frac{1}{p-e^{-p}}+\frac{1-e^{-p}}{p(p-e^{-p})}=$$

$$=\frac{1}{p\left(1-\frac{e^{-p}}{p}\right)}+\frac{1-e^{-p}}{p^2\left(1-\frac{e^{-p}}{p}\right)}=$$

$$=\frac{1}{p}\left(1+\frac{e^{-p}}{p}+\frac{e^{-2p}}{p^2}+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\frac{e^{-kp}}{p^k}+\cdots\right)+$$

$$+\frac{(1-e^{-p})}{p^2}\left(1+\frac{e^{-p}}{p}+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\frac{e^{-kp}}{p^k}+\cdots\right)=$$

$$=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{e^{-p}}{p^3}+\cdots+\frac{e^{-kp}}{p^{k+2}}+\cdots$$

Находя оригинал для $X(p)$, получаем решение исходного уравнения

$$x(t)=\left(1+\frac{t}{1!}\right)\eta(t)+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(t-k+1)^k}{k!}\eta(t-k+1).$$

Решить следующие уравнения:

228. $x'(t)=x(t-1)$;

$$\varphi(t)=t,\quad -1\leqslant t\leqslant 0.$$

229. $x'(t)=x(t-1)+t$;

$$\varphi(t)\equiv 1,\quad -1\leqslant t\leqslant 0.$$

230. $x'(t)+x\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=0$;

$$\varphi(t)=\cos t,\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant 0.$$

§ 7. Решение нестационарных задач для уравнений математической физики

Операционный метод может быть применен для решения нестационарных задач математической физики. Ограничимся случаем, когда искомая функция u зависит от двух независимых переменных x и t. Переменную x будем рассматривать как пространственную координату, переменную t — как время.

Рассмотрим, например, уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \tag{1}$$

(a^2 — постоянная).

Разберем первую краевую задачу для уравнения (1): найти решение $u(x, t)$ дифференциального уравнения (1) для $0 < x < l$ и $t \geqslant 0$, удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x) \tag{2}$$

и краевым условиям

$$u(0, t) = \psi_1(t), \qquad u(l, t) = \psi_2(t). \tag{3}$$

Предположим, что $u(x, t)$, $\dfrac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$ и $f(x, t)$, рассматриваемые как функции t, являются оригиналами. Обозначим через

$$U(p, x) = \int_0^\infty u(x, t)\, e^{-pt}\, dt \tag{4}$$

изображение функции $u(x, t)$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} \risingdotseq \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial x} e^{-pt} dt = \frac{dU}{dx}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \risingdotseq \frac{d^2 U}{dx^2}. \tag{5}$$

По правилу дифференцирования оригиналов получаем с учетом начального условия (2):

$$\frac{\partial u}{\partial t} \risingdotseq pU - \varphi(x). \tag{6}$$

Предположим, что $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ являются оригиналами и

$$\psi_1(t) \risingdotseq \Psi_1(p), \quad \psi_2(t) \risingdotseq \Psi_2(p). \tag{7}$$

Тогда граничные условия (3) дают

$$U|_{x=0} = \Psi_1(p), \quad U|_{x=l} = \Psi_2(p). \tag{8}$$

Таким образом, операторный метод приводит решение задачи (1), (2), (3) к решению обыкновенного дифференциального уравнения

$$a^2 \frac{d^2 U}{dx^2} - pU + \varphi(x) + F(x, p) = 0 \tag{9}$$

при граничных условиях (8). Здесь $F(x, p) \risingdotseq f(x, t)$. Решая задачу (9), (8) и обращая полученное решение, найдем функцию $u(x, t)$, являющуюся решением задачи (1), (2), (3). Аналогично решаются и другие краевые задачи для уравнения теплопроводности, а также краевые задачи для уравнения колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \tag{10}$$

телеграфного уравнения (см. [17] и [9])

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha + \beta) \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha\beta u = 0 \tag{11}$$

и некоторых других уравнений более общего вида.

Задача. Концы струны $x=0$ и $x=l$ закреплены жестко. Начальное отклонение задано равенством $u(x, 0) = A \sin \frac{\pi x}{l}$, $0 \leqslant x \leqslant l$. Начальные скорости равны нулю. Найти отклонения $u(x, t)$ при $t > 0$.

Решение. Дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{12}$$

$$u(x, 0) = A \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \tag{13}$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \tag{14}$$

Переходя к изображениям, будем иметь

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - \frac{p^2}{a^2} U = -\frac{pA}{a^2} \sin \frac{\pi x}{l}, \tag{15}$$

$$U|_{x=0} = U|_{x=l} = 0. \tag{16}$$

Решая уравнение (15), получим

$$U(x, p) = C_1 e^{\frac{p}{a} x} + C_2 e^{-\frac{p}{a} x} + \frac{Ap}{p^2 + \frac{a^2 \pi^2}{l^2}} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Учитывая краевые условия (16), окончательно будем иметь

$$U(x, p) = \frac{Ap}{p^2 + \frac{a^2 \pi^2}{l^2}} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Оригинал для $U(x, p)$ равен

$$u(x, t) = A \cos \frac{\pi a}{l} t \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Решить следующие уравнения:

231. $\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ (x > 0,\ t > 0);$

$$u(0,\ t) = u_0,\ u(x,\ 0) = 0.$$

232. $\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ (x > 0,\ t > 0);$

$$u(0,\ t) = 0,\ u(x,\ 0) = u_1.$$

233. $\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ (x > 0,\ t > 0);$

$$u(0,\ t) = a\cos\omega t,\ u(x,\ 0) = 0.$$

234. $\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ (x > 0,\ t > 0);$

$$u(0,\ t) = a\sin\omega t,\ u(x,\ 0) = 0.$$

235. $\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ (x > 0,\ t > 0);$

$$u(0,\ t) = \varphi(t),\ u(x,\ 0) = 0.$$

236. Найти распределение температур в стержне $0 \leqslant x \leqslant l$, при условии, что поток тепла не проходит через границу $x=0$; другая граница $x=l$ сохраняет постоянную температуру u_1; начальная температура стержня равна $u_0 = \text{const}$.

237. Найти распределение температур в полуограниченном стержне, если на левом конце стержня происходит теплоизлучение в среду с нулевой температурой. Начальная температура стержня $u_0 = \text{const}$.

238. Стержень длины l находится в состоянии покоя, его конец $x=0$ закреплен. В момент времени $t=0$ к свободному концу стержня приложена сила F (на единицу площади), направленная вдоль стержня. Найти колебание стержня.

239. Стержень подвешен вертикально и защемлен так, что смещение во всех точках равно нулю. В момент времени $t=0$ стержень освобождается, оставаясь закрепленным в верхней точке. Найти закон колебания стержня.

240. Решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bx(x - l)$$

при нулевых начальных и краевых условиях

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \quad u(0,\ t) = u(l,\ t) = 0.$$

241. Однородная струна, закрепленная на концах $x=0$ и $x=l$, имеет в начальный момент времени форму параболы, симметричной относительно перпендикуляра, проведенного через точку $x=\frac{l}{2}$. Определить смещение точек струны от прямолинейного положения равновесия, предполагая, что начальные скорости отсутствуют.

ГЛАВА II

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ И КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

§ 8. Понятие об устойчивости решения системы дифференциальных уравнений. Простейшие типы точек покоя

Пусть имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

где $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ существуют и непрерывны, и пусть $\varphi_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ есть решение этой системы, удовлетворяющее при $t=t_0$ условиям

$$\varphi_i(t_0) = \varphi_i^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Решение $\varphi_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ системы (1) называется *устойчивым по Ляпунову,* если для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всякого решения $y_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ той же системы (1), начальные значения которого удовлетворяют неравенствам

$$|y_i(t_0) - \varphi_i^0| < \delta(\varepsilon) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

для всех $t \geqslant t_0$ справедливы неравенства

$$|y_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

т. е. близкие по начальным значениям решения остаются близкими для всех $t \geqslant t_0$.

Если при сколь угодно малом $\delta > 0$ хотя бы для одного решения $y_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ неравенства (2) не выполняются, то решение $\varphi_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ называется *неустойчивым.*

Если решение $\varphi_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ не только устойчиво, но, кроме того, удовлетворяет условиям

$$\lim_{t \to \infty} |y_i(t) - \varphi_i(t)| = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

если $\left|y_i(t_0)-\varphi_i^0\right|<\delta$, то решение $\varphi_i(t)$ называется *асимптотически устойчивым.*

Вопрос об устойчивости решения $\varphi_i(t)$ системы (1) может быть сведен к вопросу об устойчивости нулевого решения $x_i(t)\equiv 0$ некоторой новой системы уравнений, получающейся из (1) линейной заменой искомых функций

$$x_i(t)=y_i(t)-\varphi_i(t) \qquad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

где $x_i(t)$ — новые неизвестные функции, равные отклонениям прежних неизвестных функций $y_i(t)$ от функций $\varphi_i(t)$, определяющих исследуемое решение. Поэтому в дальнейшем будем считать, что на устойчивость исследуется именно нулевое решение $x_i(t)\equiv 0$ или, что то же, расположенная в начале координат точка покоя системы уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=\psi_i(t, x_1\ x_2, \ldots, x_n) \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

В дальнейшем вместо термина *нулевое решение* будем употреблять термин *тривиальное решение.* В применении к точке покоя $x_i(t)\equiv 0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ условие устойчивости выглядит так:

Точка покоя $x_i(t)\equiv 0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ системы (5) *устойчива по Ляпунову,* если для каждого $\varepsilon>0$ можно подобрать $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что из неравенства $|x_i(t_0)|<\delta(\varepsilon)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ следует $|x_i(t)|<\varepsilon$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ при $t\geqslant T>t_0$.

Простейшие типы точек покоя

Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=P(x, y),\\ \frac{dy}{dt}&=Q(x, y).\end{aligned}\right\} \tag{A}$$

Точка (x_0, y_0) такая, что $P(x_0, y_0)=0$, $Q(x_0, y_0)=0$, называется *точкой покоя системы (A)* или *особой точкой.*

Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=a_{11}x+a_{12}y,\\ \frac{dy}{dt}&=a_{21}x+a_{22}y,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где a_{ij} $(i, j=1, 2)$ — постоянные и $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0.$

Точка (0, 0) будет точкой покоя системы (1). Исследуем расположение траекторий системы (1) в окрестности этой точки. Ищем решение в виде

$$x = a_1 e^{kt}, \quad y = a_2 e^{kt}. \tag{2}$$

Для определения k получаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим возможные случаи.

I. Корни характеристического уравнения действительны и различны. Подслучаи: 1) $k_1<0$; $k_2<0$. Точка покоя асимптотически устойчива (*устойчивый узел*, рис. 1). 2) $k_1>0$, $k_2>0$. Точка покоя неустойчива (*неустойчивый узел*, рис. 2). 3) $k_1>0$, $k_2<0$. Точка покоя неустойчива (*седло*, рис. 3).

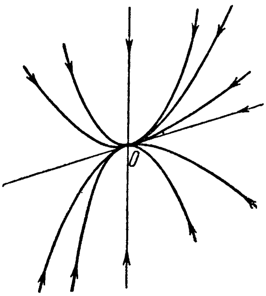


Рис. 1.

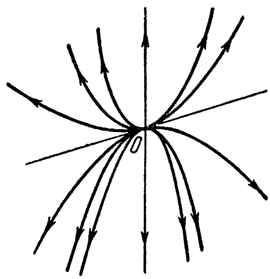


Рис. 2.

II. Корни характеристического уравнения комплексные $k_1=p+qi$, $k_2=p-qi$. Подслучаи: 1) $p<0$, $q\neq 0$. Точка покоя асимптотически устойчива (*устойчивый фокус*, рис. 4). 2) $p>0$, $q\neq 0$. Точка покоя неустойчива (*неустойчивый фокус*, рис. 5). 3) $p=0$, $q\neq 0$. Точка покоя устойчива (*центр*, рис. 6). Асимптотической устойчивости нет.

III. Корни кратные: $k_1=k_2$. Подслучаи: 1) $k_1=k_2<0$. Точка покоя асимптотически устойчива (*устойчивый узел*, рис. 7 и 8). 2) $k_1=k_2>0$. Точка покоя неустойчива (*неустойчивый узел*, рис. 9).

Замечание. Если оба корня характеристического уравнения (3) имеют отрицательную действительную часть, то точка покоя асимптотически устойчива.

Если же хотя бы один корень (3) имеет положительную действительную часть, то точка покоя неустойчива.

Аналогичные утверждения справедливы и для системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

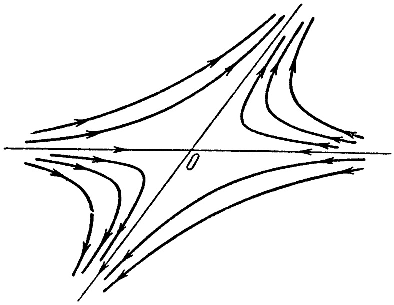


Рис. 3.

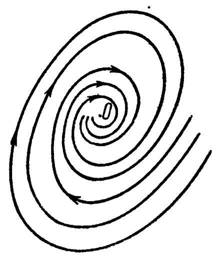


Рис. 4

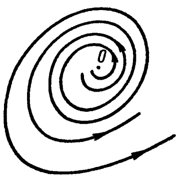


Рис. 5.

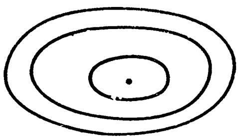


Рис. 6.

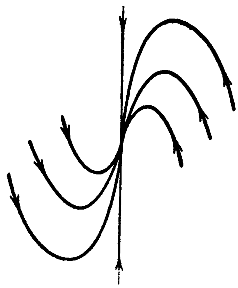


Рис. 7.

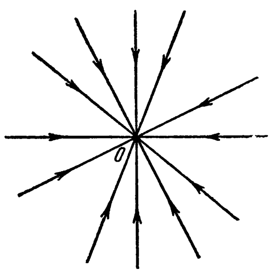


Рис. 8.

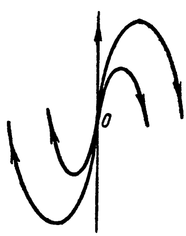


Рис. 9.

Установить характер точки покоя (0, 0) в следующих системах:

242. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 2x + 3y. \end{cases}$

243. $\begin{cases} \dot{x} = 4y - x, \\ \dot{y} = -9x + y. \end{cases}$

244. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

245. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 2y - 3x. \end{cases}$

246. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - z, \\ \dot{y} = 3x - 2z, \\ \dot{z} = 5x - 4y. \end{cases}$

247. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + \frac{7}{2} y, \\ \dot{y} = -x + y. \end{cases}$

248. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

249. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = x + y - 3z, \\ \dot{z} = x - 5y - 3z. \end{cases}$

250. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y, \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$

251. $\begin{cases} \dot{x} = x - 5y, \\ \dot{y} = 2x - 3y. \end{cases}$

252. $\begin{cases} \dot{x} = x + 4y, \\ \dot{y} = -x + y. \end{cases}$

253. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 5y, \\ \dot{y} = 2x - 3y. \end{cases}$

254. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$

255. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = -x - 4y. \end{cases}$

256. $\begin{cases} \dot{x} = x - \frac{1}{2} y, \\ \dot{y} = \frac{53}{2} x - y. \end{cases}$

257. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -x + y. \end{cases}$

258. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + 2z, \\ \dot{y} = 5x - 3y + 3z, \\ \dot{z} = -x - 2z. \end{cases}$

259. $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y + 4z, \\ \dot{y} = 4x - 7y + 8z, \\ \dot{z} = 6x - 7y + 7z. \end{cases}$

260. При каких значениях α система

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \alpha x, \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

имеет устойчивую точку покоя (0, 0)?

261. При каких значениях α точка покоя (0, 0, 0) системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y, \\ \dot{y} = \alpha y - z, \\ \dot{z} = \alpha z - x \end{cases}$$

устойчива?

§ 9. Исследование на устойчивость по первому приближению

Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

где f_i — дифференцируемые в окрестности начала координат функции, $f_i(t, 0, 0, \ldots 0) \equiv 0$.

Исследуем на устойчивость точку покоя $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ системы (1). Представим систему (1) в окрестности начала координат в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_j + R_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

где R_i имеют порядок выше первого относительно $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ (т. е. фактически разложим правые части (1) по формуле Тейлора по x в окрестности начала координат). Вместо точки покоя системы (1) исследуем на устойчивость ту же точку покоя линейной системы

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

называемой *системой уравнений первого приближения* для системы (1). В этом и состоит метод исследования на устойчивость системы (1) по первому приближению. Ограничимся для простоты случаем, когда коэффициенты $a_{ij}(t)$ в (3) постоянные. В этом случае говорят, что система (2) стационарна в первом приближении.

Теорема 1. *Если система уравнений* (2) *стационарна в первом приближении, все члены* R_i *ограничены по* t, *разлагаются в ряды по степеням* $x_1, \ldots, x_n$ *в некоторой области* $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant H$, *причем разложения начинаются членами не ниже второго порядка, и все корни характеристического уравнения*

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

имеют отрицательные действительные части, то тривиальные решения $x_i \equiv 0$ ($i=1, 2, \ldots, n$) *системы* (2) *и системы* (3) *асимптотически устойчивы, т. е. в этом случае возможно исследование на устойчивость по первому приближению.*

Теорема 2. *Если система уравнений* (2) *стационарна в первом приближении, все функции* R_i *удовлетворяют условиям теоремы* 1 *и хотя бы один из корней характеристического уравнения* (4) *имеет положительную действительную часть, то точки покоя* $x_i \equiv 0$ ($i=1, 2, \ldots, n$) *системы* (2) *и системы* (3) *неустойчивы, т. е. и в этом случае возможно исследование на устойчивость по первому приближению.*

Замечание. Если действительные части всех корней характеристического уравнения (4) неположительны, причем действительная часть хотя бы одного корня равна нулю, то исследование на устойчивость по первому приближению, вообще говоря, невозможно (в этом случае начинают влиять нелинейные члены R_i).

Пример. Исследовать на устойчивость точку покоя $x=0$, $y=0$ системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + 2x^4 - y^6, \\ \dot{y} = x - 3y + 11y^4. \end{cases} \qquad (2)$$

Решение. Нелинейные члены удовлетворяют условиям теорем 1 и 2. Исследуем на устойчивость точку покоя системы первого приближения

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases} \qquad (3)$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1-k & 1 \\ 1 & -3-k \end{vmatrix} = 0$$

имеет корни $k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$ — отрицательные. Следовательно, на основании теоремы 1 точка покоя $x=0$, $y=0$ систем (2) и (3) асимптотически устойчива.

Исследовать на устойчивость по первому приближению точку покоя $x=0$, $y=0$ в следующих системах:

262. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y - 3x^2, \\ \dot{y} = 3x - 2y + 2x^2 + y^4. \end{cases}$

263. $\begin{cases} \dot{x} = -\sin x + 3y + x^5, \\ \dot{y} = \frac{1}{4}x - 2y - \frac{1}{6}y^3. \end{cases}$

264. $\begin{cases} \dot{x} = 2e^x + 5y - 2 + x^4, \\ \dot{y} = x + 6\cos y - 6 - y^2. \end{cases}$

265. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y + \sin^3 x - y^2, \\ \dot{y} = -2x + \sin y + e^y x^2. \end{cases}$

266. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2\sin y - y^3 \sin x, \\ \dot{y} = 2y - 3x - x^3. \end{cases}$

267. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + x^2 + y^2 \sin t, \\ \dot{y} = x + y - y^2. \end{cases}$

268. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8\sin y, \\ \dot{y} = 2 - e^x - 3y - \cos y. \end{cases}$

269. $\begin{cases} \dot{x} = -4x + \frac{7}{2}\sin y - 3x^2, \\ \dot{y} = -2x + x^2 + y + y^3. \end{cases}$

270. $\begin{cases} \dot{x} = -4y - x^3, \\ \dot{y} = 3x - y^3. \end{cases}$

271. $\begin{cases} \dot{x} = 10\sin x - 29y + 3y^3, \\ \dot{y} = 5x - 14\sin y + y^2. \end{cases}$

§ 10. Второй метод Ляпунова

Пусть имеем вещественную функцию $v(t, x_1, \dots, x_n)$ вещественных переменных $t, x_1, \dots, x_n$, однозначную, непрерывную в области $t \geqslant t_0 > 0, \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant H$ и обращающуюся в нуль, когда $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$.

Функцию $v(t, x_1, \dots, x_n)$ назовем *знакопостоянной*, если она принимает, кроме нулевых, значения только одного знака при t_0 достаточно большом и H достаточно малом. Такие функции будем называть постоянно-положительными или постоянно-отрицательными. Например, функция $v = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \sin t$ является постоянно положительной (кроме нулевых, она принимает только положительные значения).

Если знакопостоянная функция v не зависит от t, а величина H может быть выбрана столь малой, что $v=0$ только при $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$, то функция $v(x_1, \dots, x_n)$ называется *знакоопределенной* (определенно-положительная или определенно-отрицательная). Например, $v = x_1^2 + \dots + x_n^2$ — определенно-положительная функция.

Знакопостоянная функция v, зависящая явно от t, называется *знакоопределенной*, если найдется такая не зависящая явно от t знакоопределенная функция w, что одно из двух выражений $v-w$ или $-v-w$ представляет постоянно-положительную функцию. Так, функция $v=2x_1x_2 \cos t - t\,(x_1^2 + x_2^2)$ — определенно-отрицательная (для нее $w = x_1^2 + x_2^2$).

Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{1}$$

Вопрос об устойчивости тривиального решения системы (1) может быть решен с помощью следующих теорем.

I. Теорема А. М. Ляпунова об устойчивости. *Если дифференциальные уравнения* (1) *таковы, что возможно найти знакоопределенную функцию v, производная которой $\frac{dv}{dt}$ в силу этих уравнений была бы или знакопостоянной функцией противоположного знака с v или тождественно равной нулю, то тривиальное решение устойчиво. Производная $\frac{dv}{dt}$, взятая в силу системы* (1), *имеет вид*

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, \dots, x_n).$$

II. Дополнение А. М. Ляпунова об асимптотической устойчивости. Определение. Если ограниченная функция $g(t, x_1, \ldots, x_n)$ такова, что для всякого $\varepsilon > 0$, как бы оно мало ни было, найдется такое число $\delta > 0$, что при $t \geqslant t_0$ и $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant \delta$ будет выполняться неравенство $|g(t, x_1, \ldots, x_n)| < \varepsilon$, то говорят что g допускает *бесконечно малый высший предел.*

Замечание. Всякая не зависящая явно от t непрерывная функция g допускает бесконечно малый высший предел.

Теорема. *Если знакоопределенная функция v допускает бесконечно малый высший предел, а ее производная $\frac{dv}{dt}$, составленная в силу системы* (1), *является знакоопределенной функцией противоположного знака, то тривиальное решение асимптотически устойчиво.*

III. Определение. Назовем *областью* $v>0$ какую-нибудь область окрестности $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant H$ начала координат пространства переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ограниченную поверхностью $v=0$, в которой функция v принимает положительные значения.

Допустим, что функция v обладает следующими свойствами:

1) при сколь угодно больших значениях t в сколь угодно малой окрестности начала координат существует область $v>0$;

2) в области $v>0$ функция v ограничена,

3) в области $v>0$ производная $\frac{dv}{dt}$, составленная в силу системы уравнений (1), определенно-положительная.

Теорема Н. Г. Четаева о неустойчивости. *Если для системы дифференциальных уравнений* (1) *можно найти функцию, удовлетворяющую условиям* 1), 2), 3), *то тривиальное решение этой системы неустойчиво.*

Функции $v(t, x_1, \ldots, x_n)$, фигурирующие в приведенных выше теоремах, называются *функциями Ляпунова.*

Замечание. Если в системе (1) все f_i не зависят явно от t, то функцию Ляпунова нужно искать как не зависящую явно от t

Пример 1. Исследовать на устойчивость тривиальное решение системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -(x-2y)(1-x^2-3y^2), \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = -(y+x)(1-x^2-3y^2). \end{cases}$$

Решение. Возьмем в качестве v функцию $v=x^2+2y^2$. Она является, во-первых, определенно-положительной, а во-вторых, ее производная $\frac{dv}{dt}$, взятая в силу системы (1), равна

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt}=2x\,(2y-x)\,(1-x^2-3y^2)-$$

$$-4y\,(x+y)\,(1-x^2-3y^2)=-2\,(1-x^2-3y^2)\,(x^2+2y^2)\leqslant 0$$ при достаточно малых x и y.

Мы видим, что выполняются все условия теоремы А. М. Ляпунова об устойчивости.

Следовательно, тривиальное решение $x\equiv 0$, $y\equiv 0$ устойчиво.

Пример 2. Исследовать на устойчивость тривиальное решение системы

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-5y-2x^3,\\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=5x-3y^3.\end{cases}$$

Решение. Функция $v=x^2+y^2$ удовлетворяет условиям теоремы А. М. Ляпунова об асимптотической устойчивости:

1) $v\,(x,\ y)\geqslant 0,\quad v\,(0,\ 0)=0.$

2) $$\frac{dv}{dt}=2x\,(-5y-2x^3)+2y\,(5x-3y^3)=-(4x^4+6y^4)\leqslant 0$$

$$\left(\frac{dv}{dt}=0 \text{ при } x=0,\ y=0\right).$$

Следовательно, решение $x\equiv 0$, $y\equiv 0$ асимптотически устойчиво.

Пример 3. Исследовать на устойчивость тривиальное решение системы

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x^2+y,\\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=y^2+x.\end{cases}$$

Решение.

$$v=\frac{1}{3}x^3+xy+\frac{1}{3}y^3$$

(здесь областью $v>0$ является, например, область $x>0$, $y>0$),

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt}=(x^2+y)^2+(x+y^2)^2>0$$

в области $v>0$.

Согласно теореме Н. Г. Четаева о неустойчивости решение $x\equiv 0$ $y\equiv 0$ неустойчиво.

Исследовать на устойчивость тривиальное решение системы:

272. $$\begin{cases} \dot{x} = -x + y - 3xy^2 - \frac{1}{4}x^3, \\ \dot{y} = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y - 2y^3 \end{cases}$$
$$(v = x^2 + 3y^2).$$

273. $$\begin{cases} \dot{x} = y - 3x^3, \\ \dot{y} = -x - 7y^3 \end{cases}$$
$$(v = x^2 + y^2).$$

274. $$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + 2xy^2 - 3x^3, \\ \dot{y} = \frac{1}{3}x - y - x^2y - 7y^3 \end{cases}$$
$$(v = x^2 + 3y^2).$$

275. $$\begin{cases} \dot{x} = -xy^4, \\ \dot{y} = yx^4 \end{cases}$$
$$(v = x^4 + y^4).$$

276. $$\begin{cases} \dot{x} = -5x - 9y + 3xy^2 - x^3, \\ \dot{y} = 3x - 4y - 2x^2y - \frac{1}{2}y^3 \end{cases}$$
$$(v = x^2 + 3y^2).$$

277. $$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2xy^2 - xy^6, \\ \dot{y} = -\frac{1}{2}y - x^2y - x^4y^3 \end{cases}$$
$$(v = 2x^4 + y^4).$$

278. $$\begin{cases} \dot{x} = -3x + xy^4 - x^3y^6, \\ \dot{y} = -\frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{4}y^3 \end{cases}$$
$$(v = x^2 + y^4).$$

279 $$\begin{cases} \dot{x} = x - xy^4, \\ \dot{y} = y - x^2y^3 \end{cases}$$
$$(v = x^2 - y^2).$$

280. $$\begin{cases} \dot{x} = y^3 + x^5, \\ \dot{y} = x^3 + y^5 \end{cases}$$
$$(v = x^4 - y^4).$$

281. $\begin{cases} \dot{x} = -2y - x^3, \\ \dot{y} = 3x - 4y^3 \end{cases}$
$(v = 3x^2 + 2y^2)$.

282. $\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}xy^2, \\ \dot{y} = -\frac{3}{4}y + 3xz^3, \\ \dot{z} = -\frac{2}{3}z - 2xyz^2 \end{cases}$
$(v = x^2 + 2y^2 + 3z^2)$.

283. $\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{3}y - x - \frac{7}{2}x^3, \\ \dot{y} = -x - \frac{1}{2}y - \frac{5}{2}y^3 \end{cases}$
$(v = 3x^2 + y^2)$.

§ 11. Критерий Рауса—Гурвица

Известно, что тривиальное решение линейного дифференциального уравнения с постоянными вещественными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \qquad (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n - \text{const}) \qquad (1)$$

асимптотически устойчиво, если все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части. Поэтому большое практическое значение приобретают необходимые и достаточные условия того, чтобы все корни алгебраического уравнения с вещественными коэффициентами

$$f(\lambda) \equiv a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (2)$$

имели отрицательные вещественные части. Не нарушая общности, можно предположить, что $a_0 > 0$. Нетрудно убедиться в том, что положительность всех коэффициентов — необходимое, но не достаточное условие для того, чтобы все корни уравнения (2) были расположены слева от мнимой оси (в случае уравнений 1-й и 2-й степени это условие и достаточное). Необходимые и достаточные условия отрицательности вещественных частей корней уравнения (2) дали Раус и независимо от него Гурвиц.

Условия Рауса—Гурвица. *Для того чтобы все корни уравнения* (2) *имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы были положительными все главные диагональные миноры матрицы Гурвица*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Матрица Гурвица составляется так. По главной диагонали располагаются коэффициенты многочлена (2), начиная с a_1 до a_n. Столбцы состоят поочередно из коэффициентов только с нечетными или только с четными индексами, причем в число последних включается коэффициент a_0. Все недостающие элементы, т. е. коэффициенты с индексами, большими n или меньшими 0, заменяются нулями.

Главные диагональные миноры матрицы Гурвица:

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix}.$$

Таким образом, условие Гурвица выглядит так:

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0. \tag{4}$$

Заметим, что, так как $\Delta_n = \Delta_{n-1} \cdot a_n$, то последнее из условий $\Delta_n > 0$ может быть заменено требованием $a_n > 0$.

П р и м е р. Исследовать на устойчивость тривиальное решение уравнения

$$y^{\mathrm{V}} + y^{\mathrm{IV}} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0.$$

Р е ш е н и е. Составляем характеристическое уравнение

$$f(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + 7\lambda^3 + 4\lambda^2 + 10\lambda + 3 = 0.$$

Здесь $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 7$, $a_3 = 4$, $a_4 = 10$, $a_5 = 3$.

Выписываем диагональные миноры Гурвица:

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\Delta_4 = 3 \cdot 8 = 24 > 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 10 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 10\Delta_3 - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 50 - 3(49 + 3 - 10 - 28) = 8 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 5 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 > 0, \quad \Delta_1 = 1 > 0.$$

Итак, $\Delta_1>0$, $\Delta_2>0$, $\Delta_3>0$, $\Delta_4>0$, $\Delta_5>0$. Следовательно, тривиальное решение $y\equiv 0$ уравнения асимптотически устойчиво.

Вычисления можно вести так. Сначала составляем минор Δ_n (в нашем случае $n=5$). Затем легко составляем миноры Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, которые надо вычислять последовательно: Δ_1, затем Δ_2, Δ_3 и т. д.

Если коэффициенты уравнения (2) заданы как числа, то условия (4) легко проверяются. Если же коэффициенты уравнения (2) содержат буквенные параметры, то вычисление определителей Δ_k при больших k затруднительно.

Можно показать, что если условия (4) выполнены, то все коэффициенты многочлена (2) положительны:

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \ldots, a_n > 0. \tag{5}$$

Как уже отмечалось, условия (5) являются необходимыми, но не достаточными для того, чтобы все корни $f(\lambda)$ располагались в левой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda<0$. Однако при выполнении условий (5) неравенства (4) уже не являются независимыми. Так, например, при $n=5$ условия Рауса—Гурвица приводятся к двум неравенствам: $\Delta_2>0$, $\Delta_4>0$. Это позволило Льенару и Шипару установить другие условия устойчивости, в которых число детерминантных неравенств примерно вдвое меньше, чем в условиях (4).

Условия Льенара—Шипара. *Для того чтобы многочлен*

$$f(\lambda) \equiv a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{2}$$

имел все корни с отрицательными действительными частями, необходимо и достаточно, чтобы:

1) *все коэффициенты многочлена $f(\lambda)$ были положительны:*

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \ldots, a_n > 0; \tag{5}$$

2) *имели место детерминантные неравенства*

$$\Delta_{n-1} > 0, \quad \Delta_{n-3} > 0, \ldots \tag{6}$$

(здесь, как и раньше, Δ_k — определитель Гурвица k-порядка).

Пример. Рассмотрим то же уравнение, что и на стр. 57:

$$y^{V} + y^{IV} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0.$$

Здесь

$$a_0 = a_1 = 1 > 0, \quad a_2 = 7 > 0, \quad a_3 = 4 > 0, \quad a_4 = 10 > 0, \quad a_5 = 3 > 0,$$

т. е. первое условие критерия Льенара—Шипара выполнено.

Далее,

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 10 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 8 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 > 0,$$

т. е. выполнено и условие 2.

Таким образом, тривиальное решение уравнения асимптотически устойчиво.

Исследовать на устойчивость тривиальные решения уравнений

284. $y^{\mathrm{IV}} + 7y''' + 12y'' + 23y' + 10y = 0.$

285. $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + 4y'' + 2y' + 5y = 0.$

286. $y^{\mathrm{IV}} + y''' + 3y'' + 2y' + y = 0.$

287. $y^{\mathrm{V}} + 2y^{\mathrm{IV}} + 3y''' + 2y'' + y' + y = 0.$

При каких значениях α будут устойчивы тривиальные решения следующих уравнений:

288. $y''' + \alpha y'' + 2y' + y = 0.$

289. $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + y'' + \alpha y' + 3y = 0.$

290. $y^{\mathrm{IV}} + 3y''' + \alpha y'' + 2y' + y = 0.$

При каких значениях α и β будут устойчивы тривиальные решения следующих уравнений:

291. $y''' + \alpha y'' + 2y' + \beta y = 0.$

292. $y''' + \alpha y'' + \beta y' + 3y = 0.$

293. $y^{\mathrm{IV}} + \alpha y''' + 2y'' + \beta y' + y = 0.$

§ 12. Геометрический критерий устойчивости (критерий Михайлова)

Пусть имеем дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными вещественными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0. \tag{1}$$

Вопрос об устойчивости решения дифференциального уравнения (1) сводится к вопросу о расположении корней характеристического уравнения

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{2}$$

на комплексной плоскости. Последний решается с помощью нижеследующего критерия Михайлова.

Пусть дан характеристический многочлен

$$f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n. \tag{3}$$

Подставив в него $\lambda = i\omega$, получим

$$f(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega), \tag{4}$$

где

$$\left.\begin{aligned} u(\omega) &= a_n - a_{n-2}\,\omega^2 + a_{n-4}\,\omega^4 - \dots, \\ v(\omega) &= a_{n-1}\,\omega - a_{n-3}\,\omega^3 - a_{n-5}\,\omega^5 - \dots \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

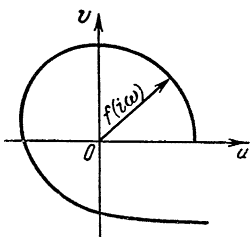


Рис. 1.

Величину $f(i\omega)$, согласно (4) и (5), при заданном параметре ω можно изобразить на комплексной плоскости $u\,Ov$ в виде вектора (рис. 1). Если изменять параметр ω в интервале $(-\infty, +\infty)$, то конец этого вектора опишет некоторую кривую, каждая точка которой соответствует определенному значению ω.

Полученный таким образом годограф вектора $f(i\omega)$ называется кривой Михайлова для многочлена $f(\lambda)$. Оказывается, что по очертанию кривой Михайлова можно судить о знаках вещественных частей корней многочлена (3).

Обозначив корни многочлена $f(\lambda)$ через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, запишем (3) в виде

$$f(\lambda) = a_0(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_n). \tag{6}$$

Выражение для кривой Михайлова в этом случае будет

$$f(i\omega) = a_0(i\omega - \lambda_1)(i\omega - \lambda_2)\dots(i\omega - \lambda_n). \tag{7}$$

Рассмотрим комплексную плоскость $s\,(s = \alpha + i\omega)$. Легко видеть, что если корень λ_k лежит в левой полуплоскости (т. е. имеет отрицательную вещественную часть), то при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ вектор $i\omega - \lambda_k$ повернется на угол $\varphi_k = +\pi$ (т. е. сделает пол-оборота против часовой стрелки, см. рис. 2).

Аналогично, если корень λ_s лежит в правой полуплоскости, то вектор $i\omega - \lambda_s$ повернется на угол $\varphi_s = -\pi$ (см. рис. 3).

Подсчитаем теперь, на какой угол φ повернется вектор $f(i\omega)$, если ω изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Известно, что при перемножении комплексных чисел их аргументы складываются. Поэтому φ, согласно (7), выразится так:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n, \tag{8}$$

где φ_k — угол поворота вектора $i\omega - \lambda_k$.

Очевидно, что если многочлен $f(\lambda)$ имеет m корней с положительными вещественными частями, а остальные $n-m$ корней с отрицательными, то

$$\varphi = (n - m)\pi + m(-\pi) = (n - 2m)\pi. \tag{9}$$

Замечание. Так как функция $u(\omega)$ четная, то кривая Михайлова симметрична относительно оси Ou и поэтому достаточно строить часть кривой Михайлова, отвечающую изменению параметра ω от 0 до $+\infty$. Тогда формула (9) примет вид

$$\varphi = (n - m)\frac{\pi}{2} + m\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (n - 2m)\frac{\pi}{2}. \tag{10}$$

Для устойчивости решения уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения $f(\lambda)=0$ имели отрицательные вещественные части, т. е. в формуле (10) должно быть $m=0$.

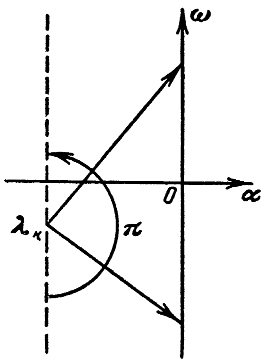


Рис. 2.

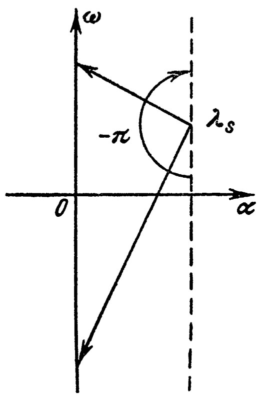


Рис. 3.

Отсюда вытекает следующая формулировка критерия Михайлова. *Для устойчивости тривиального решения уравнения* (1) *необходимо и достаточно, чтобы*:

1) вектор $f(i\omega)$ *при изменении* ω *от* 0 *до* $+\infty$ *совершил поворот на угол* $\varphi = n\frac{\pi}{2}$, *т. е. сделал* $\frac{n}{4}$ *оборотов против часовой стрелки;*

2) годограф $f(i\omega)$ *при изменении* ω *от* 0 *до* $+\infty$ *не проходил через нулевую точку.*

Иначе, *для устойчивости решения уравнения* (1) *необходимо и достаточно, чтобы кривая Михайлова проходила поочередно* n *квадрантов против часовой стрелки, окружая все время начало координат.*

Поочередное прохождение квадрантов означает, что кривая поочередно пересекает оси координат. Следовательно, координаты $u(\omega)$ и $v(\omega)$ точек кривой Михайлова для устойчивости решения должны поочередно обращаться в нуль. Отсюда вытекает вторая формулировка критерия устойчивости Михайлова. *Для устойчивости решения уравнения* (1) *необходимо (а при условии, что кривая приходится против часовой стрелки — и достаточно), чтобы все корни уравнений* $u(\omega)=0$, $v(\omega)=0$ *были вещественными и перемежающимися друг с другом, т. е. чтобы между любыми двумя корнями одного из этих уравнений находился корень другого уравнения.*

Пример. Исследовать на устойчивость тривиальное решение уравнения

$$y^{IV}+2y'''+3y''+2y'+y=0.$$

Решение. Составляем характеристический многочлен

$$f(\lambda)=\lambda^4+2\lambda^3+3\lambda^2+2\lambda+1.$$

Далее, $f(i\omega)=\omega^4-2i\omega^3-3\omega^2+2i\omega+1,$

$$u(\omega)=\omega^4-3\omega^2+1,$$

$$v(\omega)=-2\omega^3+2\omega=2\omega(1-\omega^2)=2\omega(1-\omega)(1+\omega).$$

Будем изменять ω от 0 до $+\infty$ и построим кривую (рис. 4.)

$$\begin{cases} u=u(\omega),\\ v=v(\omega)\end{cases}$$

ω	0	$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$	1	$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$
u	1	0	-1	0
v	0	+	0	—

$$\lim_{\omega\to+\infty}\frac{v}{u}=0.$$

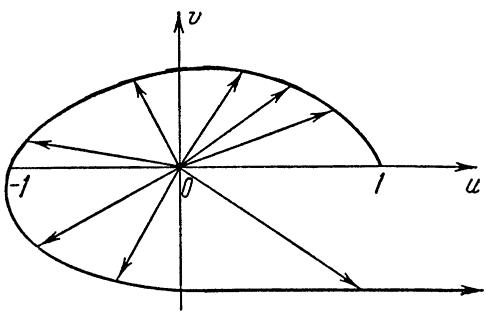


Рис. 4.

Угол поворота радиуса-вектора $\varphi = 4\frac{\pi}{2} = (n-2m)\frac{\pi}{2}$. Отсюда $n-2m=4$; $n=4$; следовательно $m=0$. Таким образом, все корни характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости, т. е. тривиальное решение $y \equiv 0$ асимптотически устойчиво. К этому же выводу можно было прийти, исходя из критерия Льенара—Шипара, поскольку все коэффициенты характеристического уравнения положительны и

$$\Delta_{n-1} = \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

$$\Delta_{n-3} = \Delta_1 = 2 > 0.$$

Исследовать на устойчивость тривиальные решения уравнений:

294. $2y^{IV} + 4y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$

295. $3y^{IV} + 4y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$

296. $y^{V} + 5y^{IV} + 10y''' + 11y'' + 7y' + 2y = 0.$

297. $y^{IV} + 5y''' + 4y'' + 3y' + 2y = 0.$

298. $y^{V} + 2y^{IV} + 2y''' + 46y'' + 89y' + 260y = 0.$

299. $y^{V} + y^{IV} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0.$

300. $y^{VII} + 7y^{VI} + 23y^{V} + 37y^{IV} + 56y''' + 36y'' + 12y' + 4y = 0.$

301. $y^{IV} + 3y''' + 4y'' + 3y' + y = 0.$

302. $y^{IV} + 7y''' + 18y'' + 22y' + 12y = 0.$

303. $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0.$

304. $y^{IV} + 11y''' + 59y'' + 107y' + 60y = 0.$

305. $y^{IV} + 5y''' + 18y'' + 53y' + 60y = 0.$

306. $y^{IV} + 6y''' + 15y'' + 18y' + 10y = 0.$

307. $y^{IV} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0.$

308. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0.$

309. $y^{IV} + 7y''' + 12y'' + 23y' + 10y = 0.$

310. $y^{IV}+3y'''+3y''+3y'+2y=0.$

311. $y^{IV}+2y'''+4y''+2y'+5y=0.$

312. $y^{IV}+2y''+8y'+5y=0.$

313. $y^{V}+4y^{IV}+5y'''+2y'+4y=0.$

§ 13. D-разбиения

Пусть имеем линейное дифференциальное уравнение с постоянными вещественными коэффициентами

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_ny=0. \tag{1}$$

Его характеристическое уравнение имеет вид

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\dots+a_n=0. \tag{2}$$

Как известно, необходимым и достаточным условием устойчивости тривиального решения уравнения (1) является условие, чтобы все корни характеристического уравнения (2) имели отрицательную вещественную часть.

Для суждения об устойчивости нет необходимости вычислять корни характеристического уравнения. Достаточно лишь установить, что все они лежат в левой полуплоскости. Обычно встречаются две постановки этой задачи.

Первая. Считая заданными все коэффициенты уравнения (1), установить, устойчиво ли решение при этих значениях коэффициентов?

Вторая. Считая заданными некоторые коэффициенты уравнения (1), определить, при каких значениях других коэффициентов решение уравнения устойчиво.

Задача в первой постановке решается с помощью приведенных выше критериев устойчивости (см. § 11 и 12). Задача во второй постановке решается построением так называемых областей устойчивости.

Построение областей устойчивости

Понятие о D-разбиении. Пусть имеем характеристическое уравнение

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\dots+a_n=0. \tag{2}$$

Совокупность значений коэффициентов уравнения (1) можно рассматривать как точку n-мерного пространства R_n. Каждой точке пространства R_n соответствует определенное значение коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_n$, а следовательно, и определенное значение всех корней $z_1, z_2, \dots, z_n$ характеристического уравнения (2). Если в

R_n существует такая область, что каждой ее точке соответствует характеристическое уравнение, все корни которого лежат в левой полуплоскости, то гиперповерхность, ограничивающая эту область, называется *границей области устойчивости.* Пусть, например, в характеристическом уравнении (2) все коэффициенты, кроме двух, скажем a_1 и a_2, — конкретные числа.

Предположим, что при некоторых определенных значениях a_1 и a_2 данное уравнение в плоскости корней (т. е. в плоскости z) имеет k корней, лежащих слева, и $(n-k)$ корней, лежащих справа от мнимой оси (рис. 1).

На плоскости A (плоскость параметров a_1 и a_2) существует кривая, ограничивающая такую область (рис. 2), каждая точка ко-

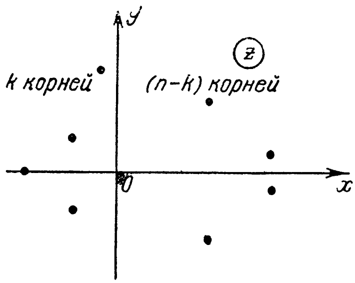


Рис. 1.

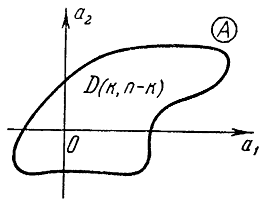


Рис. 2.

торой определяет многочлен, также имеющий k корней, лежащих слева, и $n-k$ корней, лежащих справа от мнимой оси. Эту область обозначим через

$$D(k,\ n-k) \quad (k\text{—целое, } 0 \leqslant k \leqslant n).$$

Например, если характеристическое уравнение имеет третью степень, т. е. $n=3$, то в общем случае в пространстве коэффициентов могут быть указаны области

$$D(0,3),\ D(1,2),\ D(2,1),\ D(3,0).$$

Область $D(3,0)$ и будет *областью устойчивости.*

Заметим, что некоторые области, в частности $D\ (3,0)$, могут отсутствовать.

Разбиение пространства коэффициентов характеристического уравнения на области, соответствующие одному и тому же числу корней, расположенных в левой полуплоскости плоскости z, называется *D-разбиением пространства коэффициентов.*

Аналогично можно построить D-разбиение пространства любых параметров, от которых могут зависеть коэффициенты характеристического уравнения.

Положим, что в характеристическом уравнении (2) коэффициенты зависят от двух параметров ξ и η (этими параметрами могут быть, в частности, просто два коэффициента рассматриваемого уравнения).

Рассмотрим семейство многочленов

$$f(z, \xi, \eta) = \xi P(z) + \eta Q(z) + R(z), \tag{3}$$

где (ξ, η) — вещественные параметры, а P, Q, R — известные многочлены от z с вещественными коэффициентами.

Задача ставится так:

В плоскости параметров (ξ, η) (плоскость w) найти область $D(n, 0)$, такую, что для любой точки $(\xi, \eta) \in D(n, 0)$ многочлен (3) будет иметь все корни z в левой полуплоскости, или убедиться, что такой области нет.

Построение областей $D(k, n-k)$ основано на следующих соображениях:

1. Корни алгебраического уравнения непрерывно зависят от его коэффициентов, т. е. если коэффициенты многочлена $f(z, \xi, \eta)$ мало изменить, то и корни его изменятся мало.

2. Если точка (ξ, η) лежит на границе области $D(k, n-k)$, то хотя бы один корень многочлена (3) лежит на мнимой оси, т. е. граница D-разбиения является образом мнимой оси плоскости z.

Действительно, если, например, точка $(\xi, \eta) \in D(n, 0)$, то многочлен (3) имеет при этом все корни в левой полуплоскости.

Если (ξ, η) лежит вне $D(n, 0)$, то многочлен (3) имеет хотя бы один корень в правой полуплоскости.

При непрерывном движении точки (ξ, η) из области $D(n, 0)$ в соседнюю непрерывно же меняются корни многочлена $f(z, \xi, \eta)$. Так как при этом появляется хотя бы один корень в правой полуплоскости, то в процессе изменения (ξ, η) он должен пересечь мнимую ось (ось Oy). Это будет, когда точка (ξ, η) пересечет границу области $D(n, 0)$.

Пусть $z = x + iy$ — корень многочлена $f(z, \xi, \eta)$. Равенство $f(z, \xi, \eta) = 0$ равносильно равенствам

$$\left.\begin{aligned} \xi u_1(x, y) + \eta u_2(x, y) + u_3(x, y) &= 0, \\ \xi v_1(x, y) + \eta v_2(x, y) + v_3(x, y) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где u_1, u_2, u_3 и v_1, v_2, v_3 — вещественные и мнимые части многочленов P, Q и R соответственно.

Если определитель системы (4)

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то система (4) однозначно разрешима относительно ξ и η:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y), \\ \eta &= \eta(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Уравнения (5) в точках, где $\Delta \neq 0$, определяют однозначное отображение плоскости корней многочлена $f(z, \xi, \eta)$ на плоскость параметров (ξ, η).

Обратное отображение неоднозначно: фиксированной паре значений (ξ, η) отвечает, вообще говоря, n корней. Если определитель системы (4) в точке $z_0=x_0+iy_0$ обращается в нуль, то система либо несовместна, либо одно уравнение является следствием другого.

В этом последнем случае на плоскости параметров w существует целая прямая, состоящая из точек (ξ, η), для которых $z_0=x_0+iy_0$ является корнем многочлена $f(z, \xi, \eta)$. Такую точку (x_0, y_0), а также соответствующую ей прямую будем называть *исключительными.*

Найдем на плоскости параметров (ξ, η) те точки, для которых многочлен (3) имеет хотя бы один чисто мнимый корень $z=iy$.

Геометрическое место таких точек состоит из линии, параметрические уравнения которой есть

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi(0, y), \\ \eta &= \eta(0, y), \end{aligned}\right\} \quad -\infty < y < +\infty, \tag{6}$$

и которую можно получить, полагая $x=0$ в уравнениях (5), а также из исключительных прямых, отвечающих исключительным точкам оси Oy (если таковые имеются).

Заметим, что уравнения (6) дают образ оси Oy при отображении (5).

Это геометрическое место точек будем называть линией L.

Линия L разбивает плоскость параметров на некоторое число связных областей.

Каждая из таких областей обладает тем свойством, что для любой ее точки (ξ, η) многочлен $f(z, \xi, \eta)$ имеет одно и то же число корней, расположенных в левой полуплоскости, т. е. является областью типа $D(k, n-k)$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

Таким образом, линия L — граница искомого D-разбиения.

Рассмотрим отображение (5) плоскости корней на плоскость параметров

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y), \\ \eta &= \eta(x, y), \end{aligned}\right\}$$

Проведем через точку (x_0, y_0) две линии, горизонтальную I и вертикальную II.

Определение. Если направление поворота от I к II сохраняется при отображении (5), то говорят, что отображение *сохраняет ориентацию* в точке (x_0, y_0); в противном случае — что оно *не сохраняет ориентацию* (рис. 3 и 4).

Если определитель $I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\xi}{\partial y} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y} \end{vmatrix} > 0$ в точке (x_0, y_0), то

отображение (5) в точке (x_0, y_0) сохраняет ориентацию. При $I<0$ ориентация нарушается. Если $I=0$, то вопрос о сохранении или несохранении ориентации решают старшие производные. Можно показать (см. [9]), что знак определителя I совпадает со знаком определителя Δ, где

$$\Delta=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix},$$

так что если $\Delta>0$, то отображение с плоскости корней на плоскость параметров сохраняет ориентацию; если $\Delta<0$, то ориентация меняется.

Рассмотрим опять разбиение плоскости w (плоскость параметров) на области $D(k,n-k)$ $(k\leqslant n)$ и обозначим через L границу

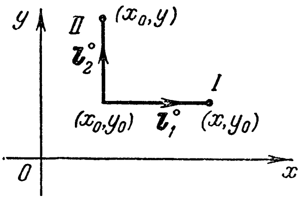


Рис. 3.

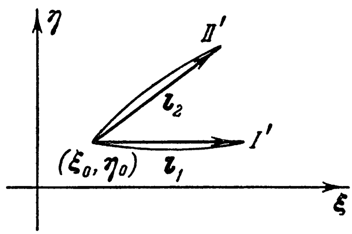


Рис. 4.

этих областей. Положительным направлением на L будем считать то, которое соответствует возрастанию y (начиная с $y=-\infty$); при этом кривая L может состоять из нескольких ветвей и при полном обходе оси Oy ее участки могут проходиться по нескольку раз (не более n, где n — степень многочлена $f(z,\xi,\eta)$).

Рассмотрим некоторый участок w_1w_2 кривой L и предположим, что при полном обходе оси Oy он обходится r раз, т. е. что этому участку соответствует r участков $y_1^\mu y_2^\mu$ $(\mu=1, 2,\ldots, r)$ оси Oy. Положим $\varepsilon_\mu=1$, если направление $y_1^\mu y_2^\mu$ совпадает с направлением оси Oy и $\varepsilon_\mu=-1$ в противоположном случае. Положим также $\delta_\mu=1$, если на $y_1^\mu y_2^\mu$ определитель $\Delta>0$ и $\delta_\mu=-1$ — в противоположном случае. Пусть точка w, двигаясь непрерывно по некоторому достаточно малому пути, пересекает дугу w_1w_2 слева направо (рис. 5). Этому пути в плоскости z соответствует r путей, пересекающих отрезки $y_1^\mu y_2^\mu$ оси Oy. Если $\varepsilon_\mu\cdot\delta_\mu>0$, то соответствующий путь идет из левой полуплоскости в правую и многочлен

$$f(z,\xi,\eta)=\xi P(z)+\eta Q(z)+R(z)$$

приобретает на нем один корень с положительной действительной частью и теряет корень с отрицательной действительной частью; в случае $\varepsilon_\mu\cdot\delta_\mu<0$ — наоборот.

Действительно, пусть $\varepsilon_\mu \cdot \delta_\mu > 0$. Это может быть в двух случаях: 1) $\varepsilon_\mu = 1$, $\delta_\mu = 1$; 2) $\varepsilon_\mu = -1$, $\delta_\mu = -1$. В первом случае направление отрезка $y_1^\mu y_2^\mu$ оси Oy совпадает с положительным направлением этой оси ($\varepsilon_\mu = 1$) и сохраняется ориентация ($\delta_\mu = 1$), т. е. если в плоскости w мы переходим дугу w_1w_2 слева направо, то и в плоскости z мы переходим с левой полуплоскости в правую (т. е. ось Oy пересекаем тоже слева направо, рис. 6).

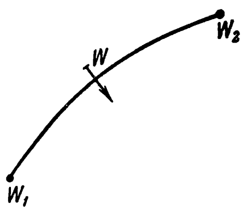


Рис. 5.

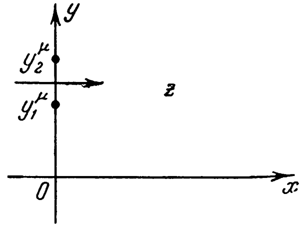


Рис. 6.

Во втором случае вектор $\overrightarrow{y_1^\mu\ y_2^\mu}$ направлен в сторону, противоположную направлению $\overrightarrow{Oy}$ ($\varepsilon_\mu = -1$). Так как $\delta_\mu = -1$, то ориентация в этом случае меняется и при переходе слева направо в плоскости w мы опять получаем переход слева направо в плоскости z через ось Oy.

Аналогично рассматривается случай $\varepsilon_\mu \cdot \delta_\mu < 0$.

Итак, *при переходе с левой стороны дуги w_1w_2 кривой L на правую сторону многочлен $f(z, \xi, \eta)$ теряет*

$$N = \varepsilon_1\delta_1 + \varepsilon_2\delta_2 + \dots + \varepsilon_r\delta_r$$

корней с отрицательной действительной частью.

Пример Вышнеградского. Дан многочлен $f(z) = z^3 + \xi z^2 + \eta z + 1$. Найти область $D(3, 0)$.

Решение. Полагая $z = iy$ и разделяя действительную и мнимую части, найдем параметрические уравнения кривой L:

$$\xi = \frac{1}{y^2}, \quad \eta = y^2.$$

Это—лежащая в первом квадранте ветвь гиперболы $\xi\eta = 1$. При полном обходе оси Oy (y меняется от $-\infty$ до $+\infty$) гипербола описывается два раза, т. е. $r = 2$; при этом один раз гипербола проходится в направлении, указанном стрелкой, при изменении y от $-\infty$ до 0.

При дальнейшем изменении y от 0 до $+\infty$ гипербола проходится второй раз, но уже в противоположном направлении. Таким образом, отрезку w_1w_2 кривой L отвечают два отрезка оси Oy: $y_1^1 y_2^1$

и $y_1^2 y_2^2$ (рис. 7 и 8). Определитель Δ на оси Oy равен $\Delta(iy) = -y^3$. Следовательно, $\delta_1 = 1$ (ибо при $\mu = 1$, $y < 0$), а $\delta_2 = -1$ (ибо при $\mu = 2$,

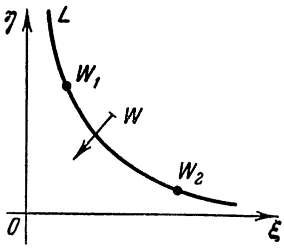


Рис. 7.

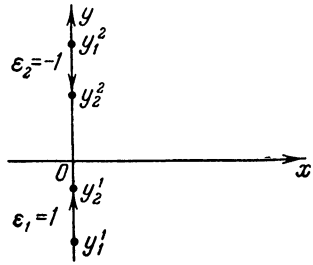


Рис. 8.

$y > 0$). При переходе точки w через $w_1 w_2$ слева направо теряется N корней с отрицательной действительной частью, где

$$N = \varepsilon_1 \delta_1 + \varepsilon_2 \delta_2 = 2.$$

В начале координат $\xi = \eta = 0$ многочлен $f(z)$ принимает вид $z^3 + 1$ и имеет корни $z_1 = -1$, $z_{2,3} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, следовательно, область под гиперболой есть $D(1, 2)$. Область над гиперболой есть область $D(3, 0)$. В самом деле, при переходе из этой области в $D(1, 2)$ многочлен $f(z)$ потерял два корня с отрицательной вещественной частью и превратился в многочлен, имеющий один корень с отрицательной вещественной частью. Следовательно, в области над гиперболой было три корня с отрицательной вещественной частью (рис. 9). Для проверки можно взять точку $\xi = \eta = 3$, в которой многочлен принимает вид

$$z^3 + 3z^2 + 3z + 1$$

и имеет трехкратный корень $z = -1$.

Таким образом, для построения D-областей поступаем так:

1. В многочлене $f(z, \xi, \eta)$ полагаем $z = iy$, отделяем действительную и мнимую части и приравниваем их нулю:

$$\left.\begin{aligned} \xi u_1(y) + \eta u_2(y) + u_3(y) = 0, \\ \xi v_1(y) + \eta v_2(y) + v_3(y) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Решая (7) относительно ξ и η, получаем

$$\left.\begin{aligned} \xi = \xi(y), \\ \eta = \eta(y) \end{aligned}\right\}$$

— параметрические уравнения линии L.

2. Строим кривую L на плоскости параметров, изменяя y в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, причем если в уравнениях (7) ξ — первое по порядку написания переменное, а η — второе, то при построении кривой L система координат $\xi O \eta$ должна быть правой.

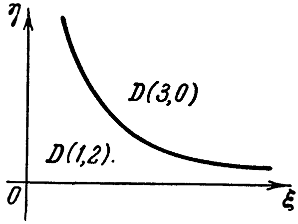


Рис. 9.

Если при некотором значении y определитель системы (7) и определители

$$\Delta_\xi = \begin{vmatrix} -u_3 & u_2 \\ -v_3 & v_2 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta_\eta = \begin{vmatrix} u_1 & -u_3 \\ v_1 & -v_3 \end{vmatrix}$$

обращаются в нуль, то при этом значении y одно из уравнений (7) является следствием другого, и для этого значения y получаем в плоскости $\xi O \eta$ не точку, а прямую линию (особая или исключительная прямая). Ее мы также включаем в границу D-разбиения.

Если коэффициент при старшем члене характеристического уравнения зависит от параметров ξ и η, то, приравнивая этот коэффициент нулю, получаем уравнение еще одной особой прямой, соответствующей $y = \infty$.

Если, наконец, определитель системы (7) $\Delta \equiv 0$, то границей D-разбиения служат только особые прямые.

3. Выделяем связные области, на которые L разбивает плоскость параметров. Это и будут области $D(k, n-k)$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

4. Определяем характер этих областей, т. е. находим k и $n-k$. Для этого выбираем в каждой из областей $D(k, n-k)$ по одной точке (ξ_0, η_0) и исследуем полученный многочлен $f(z, \xi_0, \eta_0)$ с числовыми коэффициентами на устойчивость с помощью изложенных выше критериев устойчивости Михайлова или Рауса—Гурвица (см. § 11 и 12).

Построить D-области для следующих многочленов:

314. $z^3 + \xi z^2 + \eta z + 6 = 0.$

315. $z^4 + \xi z^3 + \eta z^2 + 4z + 1 = 0.$

316. $z^3 + \xi z^2 + 11z + \eta = 0.$

317. $z^3 + (z^2 + 2)\xi + \eta z - 4 = 0.$

318. $z^4 + 2z^3 + \xi z^2 + z + \eta = 0.$

319. $z^3 + 3z^2 + \xi z + \eta = 0.$

320. $z^3 + \xi z^2 + (z + 1)\eta + 1 = 0.$

ДОБАВЛЕНИЕ

Построение функции Грина для обыкновенных дифференциальных уравнений

Пусть дано дифференциальное уравнение n-го порядка

$$L(y) \equiv$$
$$\equiv p_0(x)\, y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = f(x). \quad (1)$$

Будем предполагать, что функции $\frac{1}{p_0(x)}$, $p_1(x)$, $p_2(x), \ldots, p_n(x)$ непрерывны на $[a, b]$.

Обозначим через

$$y_a,\ y'_a, \ldots,\ y_a^{(n-1)};\ y_b,\ y'_b, \ldots,\ y_b^{(n-1)} \quad (2)$$

значения функции $y(x)$ и ее первых $(n-1)$ производных в точках $x=a$ и $x=b$ соответственно.

Обозначим через $V(y)$ линейную форму относительно переменных (2)

$$V(y) = \alpha_0 y_a + \alpha_1 y'_a + \cdots + \alpha_{n-1} y_a^{(n-1)} +$$
$$+ \beta_0 y_b + \beta_1 y'_b + \cdots + \beta_{n-1} y_b^{(n-1)}. \quad (3)$$

Если задано несколько таких форм $V_\nu(y)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, то равенства

$$V_\nu(y) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \quad (4)$$

называются *краевыми условиями.*

Однородной краевой задачей называется задача определения функции $y(x)$, удовлетворяющей уравнению

$$L(y) = 0 \quad (5)$$

и краевым условиям (4).

Пусть однородная краевая задача (5), (4) имеет только тривиальное решение $y(x)\equiv 0$.

Тогда уравнение (1) имеет решение, удовлетворяющее краевым условиям (4), для любой функции $f(x)$, непрерывной на $[a, b]$. Это решение задается формулой

$$y(x)=\int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \tag{6}$$

где $G(x, \xi)$ — функция Грина оператора L.

Замечание. В силу предположения, что однородная краевая задача (5), (4) имеет только тривиальное решение $y(x)\equiv 0$, должно быть выполнено условие

$$\begin{vmatrix} V_1(y_1) & V_1(y_2) & \ldots & V_1(y_n) \\ V_2(y_1) & V_2(y_2) & \ldots & V_2(y_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ V_n(y_1) & V_n(y_2) & \ldots & V_n(y_n) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{7}$$

Здесь $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — любая фундаментальная система решений уравнения (5).

Построение функции Грина. *Функцией Грина* оператора L называется функция $G(x, \xi)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $G(x, \xi)$ непрерывна и имеет непрерывные производные по x до $(n-2)$-го порядка включительно для всех значений x и ξ из $[a, b]$.

2. $(n-1)$-я производная по x функции $G(x, \xi)$ непрерывна в $[a, b]$ всюду за исключением точки $x=\xi$, где она имеет разрыв первого рода со скачком $\frac{1}{p_0(\xi)}$, т. е.

$$\frac{\partial^{n-1} G(\xi+0, \xi)}{\partial x^{n-1}}-\frac{\partial^{n-1} G(\xi-0, \xi)}{\partial x^{n-1}}=\frac{1}{p_0(\xi)}.$$

3. В каждом из интервалов $[a, \xi)$ и $(\xi, b]$ функция $G(x, \xi)$, рассматриваемая как функция от x, удовлетворяет уравнению (5) и краевым условиям $V_\nu(G)=0$ $(\nu=1, 2, \ldots, n)$.

Теорема. *Если краевая задача* (5), (4) *имеет лишь тривиальное решение, то оператор L имеет одну и только одну функцию Грина.*

Доказательство. Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — линейно независимые решения уравнения (5). Так как в интервале $[a, \xi]$ функция G также удовлетворяет этому уравнению, то должно быть

$$G(x, \xi)=a_1 y_1(x)+\cdots+a_n y_n(x)$$

при

$$a \leqslant x < \xi,$$

где a_1, $a_2, \ldots$, a_n— некоторые функции от ξ.

Аналогично, $G(x,\xi) = b_1 y_1(x) + \ldots + b_n y_n(x)$ при $\xi < x \leqslant b$. Условия непрерывности функции $G(x, \xi)$ и ее первых $(n-2)$ производных при $x = \xi$ дают

$$[a_1 y_1(\xi) + \cdots + a_n y_n(\xi)] - [b_1 y_1(\xi) + \cdots + b_n y_n(\xi)] = 0,$$

$$[a_1 y_1'(\xi) + \cdots + a_n y_n'(\xi)] - [b_1 y_1'(\xi) + \cdots + b_n y_n'(\xi)] = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$[a_1 y_1^{(n-2)}(\xi) + \cdots + a_n y_n^{(n-2)}(\xi)] - [b_1 y_1^{(n-2)}(\xi) + \cdots + b_n y_n^{(n-2)}(\xi)] = 0,$$

а условие

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(\xi + 0, \xi) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(\xi - 0, \xi) = \frac{1}{p_0(\xi)} \qquad (*)$$

запишется в виде

$$[a_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + \cdots + a_n y_n^{(n-1)}(\xi)] - [b_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + \cdots$$
$$\cdots + b_n y_n^{(n-1)}(\xi)] = -\frac{1}{p_0(\xi)}.$$

Положим

$$c_\nu = b_\nu - a_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда эти условия запишутся в виде системы уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} c_1 y_1(\xi) + \cdots + c_n y_n(\xi) = 0, \\ c_1 y_1'(\xi) + \cdots + c_n y_n'(\xi) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1 y_1^{(n-2)}(\xi) + \cdots + c_n y_n^{(n-2)}(\xi) = 0, \\ c_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(\xi) = \dfrac{1}{p_0(\xi)}, \end{array}\right. \qquad (8)$$

определитель которой есть вронскиан фундаментальной системы y_1, $y_2, \cdots, y_n$ при $x = \xi$ и, следовательно, отличен от нуля.

Поэтому система (8) однозначно определяет функции $c_\nu(\xi)$. Для определения функций $a_\nu(\xi)$ и $b_\nu(\xi)$ воспользуемся краевыми условиями; запишем форму $V_\nu(y)$ в виде

$$V_\nu(y) = V_{\nu a}(y) + V_{\nu b}(y), \qquad (9)$$

где $V_{\nu a}(y)$ — сумма всех слагаемых, содержащих

$$y_a, y_a', \ldots, y_a^{(n-1)},$$

$V_{\nu в}(y)$ — сумма всех слагаемых, содержащих

$$y_b, y_b', \ldots, y_b^{(n-1)}.$$

Тогда

$$V_\nu(G) = a_1 V_{\nu a}(y_1) + \cdots + a_n V_{\nu a}(y_n) +$$
$$+ b_1 V_{\nu b}(y_1) + \cdots + b_n V_{\nu b}(y_n) = 0.$$

Подставляя сюда вместо a_k их выражения $a_k = b_k - c_k$, получим

$$b_1 V_{\nu b}(y_1) + \cdots + b_n V_{\nu b}(y_n) + (b_1 - c_1) V_{\nu a}(y_1) +$$
$$+ \cdots + (b_n - c_n) V_{\nu a}(y_n) = 0.$$

Отсюда в силу (9)

$$b_1 V_\nu(y_1) + \cdots + b_n V_\nu(y_n) = c_1 V_{\nu a}(y_1) +$$
$$+ \cdots + c_n V_{\nu a}(y_n). \tag{10}$$

При $\nu = 1, 2, \ldots, n$ равенство (10) представляет собой систему уравнений относительно $b_1, b_2, \ldots, b_n$, определитель которой отличен от нуля согласно условию (7).

Следовательно, система уравнений (10) имеет единственное решение относительно $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Но тогда формулы $a_\nu = b_\nu - c_\nu$ однозначно определяют функции a_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$).

Тем самым существование и единственность функции Грина $G(x, \xi)$ доказаны и одновременно дан метод ее построения. Заметим, что если краевая задача самосопряженная, то функция Грина является симметричной, т. е. $G(x, \xi) = G(\xi, x)$. Справедливо и обратное утверждение. Отметим, наконец, что в случае, когда коэффициент при старшей производной обращается в нуль на одном из концов $[a, b]$, например при $x=a$, то ставится естественное граничное условие ограниченности решения при $x=a$, а на другом конце задается обычное граничное условие.

Пример. Построить функцию Грина оператора

$$L(y) = y'' + k^2 y, \tag{1}$$

$$y(0) = 0, \quad y'(1) = 0. \tag{2}$$

Решение. Функции $y_1(x) = \sin kx$, $y_2(x) = \cos kx$ являются линейно независимыми решениями уравнения

$$y'' + k^2 y = 0. \tag{3}$$

Функция Грина $G(x, \xi)$ удовлетворяет этому же уравнению, так что будем иметь

$$G(x, \xi) = a_1(\xi)\sin kx + a_2(\xi)\cos kx \text{ при } 0 \leqslant x < \xi, \tag{4}$$

$$G(x, \xi) = b_1(\xi)\sin kx + b_2(\xi)\cos kx \text{ при } \xi < x \leqslant 1. \tag{5}$$

Условие непрерывности функции $G(x, \xi)$ при $x=\xi$ дает нам

$$b_1(\xi)\sin k\xi + b_2(\xi)\cos k\xi - a_1(\xi)\sin k\xi - a_2(\xi)\cos k\xi = 0, \tag{6}$$

а условие ($*$) в этом случае принимает вид:

$$k\,[b_1(\xi)\cos k\xi - b_2(\xi)\sin k\xi - a_1(\xi)\cos k\xi + a_2(\xi)\sin k\xi] = 1. \tag{7}$$

Используя свойство 3 функции Грина и заданные краевые условия (2), получаем

$$\begin{cases} a_2(\xi) = 0, & (8)\\ k\,[b_1(\xi)\cos k - b_2(\xi)\sin k] = 0. & (9)\end{cases}$$

Положим

$$c_1(\xi) = b_1(\xi) - a_1(\xi), \tag{10}$$

$$c_2(\xi) = b_2(\xi) - a_2(\xi). \tag{11}$$

Тогда уравнения (6) и (7) перепишутся так:

$$c_1\sin k\xi + c_2\cos k\xi = 0, \tag{6'}$$

$$c_1\cos k\xi - c_2\sin k\xi = \frac{1}{k}, \tag{7'}$$

откуда

$$c_1(\xi) = \frac{\cos k\xi}{k}, \quad c_2(\xi) = -\frac{\sin k\xi}{k}. \tag{12}$$

Но $a_2(\xi)=0$, поэтому

$$b_2(\xi) = -\frac{\sin k\xi}{k}. \tag{13}$$

Подставляя $b_2(\xi)$ в (9), получим

$$b_1(\xi)\cos k + \frac{\sin k\xi}{k}\sin k = 0,$$

откуда

$$b_1(\xi) = -\frac{\sin k\cdot\sin k\xi}{k\cos k}. \tag{14}$$

Тогда

$$a_1(\xi)=b_1(\xi)-c_1(\xi)=-\frac{\cos k(\xi-1)}{k\cos k}. \tag{15}$$

Имея выражения для коэффициентов $a_1(\xi)$, $a_2(\xi)$, $b_1(\xi)$, $b_2(\xi)$, окончательно получаем:

$$G(x,\xi)=\begin{cases} -\dfrac{\cos k(\xi-1)\sin kx}{k\cos k}, & 0\leqslant x<\xi, \\ -\dfrac{\sin k\xi\cos k(x-1)}{k\cos k}, & \xi<x\leqslant 1. \end{cases}$$

Построить функцию Грина:

321. $L(y)=y''$;
$y(0)=y(1)=0$.

322. $L(y)=y''+k^2y$;
$y(0)=y(1)=0$.

323. $L(y)=y^{IV}$;
$y(0)=y'(0)=y(1)=y'(1)=0$.

324. $L(y)=y''+k^2y$;
$y(-1)=y(1)$, $y'(-1)=y'(1)$.

325. $L(y)=y''-k^2y$;
$y(-1)=y(1)$, $y'(-1)=y'(1)$.

326. $L(y)=y''-k^2y$;
$y(0)=0$, $y'(1)=0$.

327. $L(y)=y''$;
$y(-1)=y(1)=0$.

328. $L(y)=y''-y$;
$y(+\infty)$, $y(-\infty)$ конечны.

329. $L(y)=y''-y$;
$y(a)=y(b)$, $y'(a)=y'(b)$.

330. $L(y)=xy''+y'$;
$y(1)=\alpha y'(1)$, $y(x)$ ограничено при $x\to 0$.

331. $L(y) = 4xy'' + 4y' - (x+2)\,y;$

$y(x)$ регулярна в точке $x = 0$, $y(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

332. $L(y) = x^2y'' + 2xy';$

$y(1) = \alpha y'(1)$, $y(x)$ ограничено при $x \to 0$.

333. $L(y) = x^2y^{\mathrm{IV}} + 4xy''' + 2y'';$

$y(1) = y'(1) = 0$, $y(x)$ и $y'(x)$ ограничены при $x \to 0$.

334. $L(y) = x^3y^{\mathrm{IV}} + 6x^2y''' + 6xy''$,

$y(1) = y'(1) = 0$, $y(x)$ ограничено при $x \to 0$.

ОТВЕТЫ

1. $\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$. 2. $\frac{1}{(p^2+1)p}$. 3. $\frac{1}{p^2+\omega^2}$. 4 $\frac{2}{(p-1)^3}e^{-p}$.

5. $\frac{3p}{4(p^2+1)}+\frac{p}{4(p^2+9)}$. 6. $\frac{1}{p}\operatorname{arctg} p$. 7. $\frac{1}{p^2-1}$. 8. $\frac{1}{(p^2-1)p}$.

9. $\frac{6p}{(p^2-9)^2}$. 10. $\frac{e^{-\alpha p}}{p^2-1}$. 11. $\frac{p^2+4}{(p^2-4)^2}$. 12. $\frac{p^2+2\omega^2}{(p^2+4\omega^2)p^2}$.

13. $\frac{e^{-\alpha p}}{p^2-1}$. 14. $\frac{2p}{(p^2+1)^2}$. 15. $\frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}$. 16. $\frac{2}{p(p^2+4)}$.

17. $\operatorname{Ln}\frac{p}{p-1}$. 18. $e^{-2p}\frac{3}{p^2+9}$. 19. $\frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$.

20. $\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$. 21. $e^{-3p}\frac{p}{p^2+16}$. 22. $\frac{p(p^2+m^2+n^2)}{(p^2+m^2+n^2)^2-4m^2n^2}$.

23. $\frac{m(p^2+m^2-n^2)}{(p^2+m^2+n^2)^2-4m^2n^2}$. 24. $\frac{3}{8p}-\frac{p}{2(p^2+4)}+\frac{p}{8(p^2+16)}$.

25. $\frac{2pmn}{(p^2+m^2+n^2)^2-4m^2n^2}$. 26. $\operatorname{Ln}\frac{\sqrt{p^2+1}}{p}$.

27. $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$; в частности, при $\alpha=-\frac{1}{2}$ получаем $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\right)$. 28. Решение. Известно, что $J_0(t)=$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}, \text{ поэтому } J_0(t)\doteqdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\frac{(2k)!}{p^{2k+1}2^{2k}}.$$

С другой стороны, $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}}=\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2p^{2k}}. \text{ Итак, } J_0(t)\doteqdot\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}.$$

29. Решение. Известно, что $J_1(t) = -J'_0(t)$. Используя результаты предыдущей задачи и теорему о дифференцировании оригинала, находим:

$$J_1(t) \risingdotseq -p\,\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} + J_0(0) = -\frac{p}{\sqrt{p^2+1}} + 1 = \frac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Следовательно, при $n=0$ и $n=1$ формула

$$J_n(t) \risingdotseq \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$$

верна.

Применим метод математической индукции. Так как

$$2J'_n(t) = J_{n-1}(t) - J_{n+1}(t) \text{ и } J_{n-1}(0) = 0 \, (n \geqslant 2),$$

то

$$J_n(t) = J_{n-2}(t) - 2J'_{n-1}(t) \risingdotseq \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{n-2}}{\sqrt{p^2+1}} -$$

$$- \frac{2p(\sqrt{p^2+1}-p)^{n-1}}{\sqrt{p^2+1}} = \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}.$$

30. Решение. Рассмотрим функцию

$$F(p) = \frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{1}{p}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Имеем

$$F(p) = \frac{1}{p^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,p^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,p^{n+k+1}}.$$

Следовательно, $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{n+k}}{k!\,(n+k)!}$. Замечая, что

$$J_n(2\sqrt{t}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\frac{n}{2}+k}}{k!\,(n+k)!}, \text{ получаем } f(t) = t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t}).$$

В частности, при $n = 0$ $\quad J_0(2\sqrt{t}) = \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}}.$

31. Решение. Рассмотрим функцию $f(t)=e^t\operatorname{erf}(\sqrt{t})$, и пусть $F(p)$ есть изображение $f(t)$. Имеем $(\operatorname{erf} t)'=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$,

$$f'(t)=e^t\operatorname{erf}(\sqrt{t})+\frac{1}{\sqrt{\pi t}}=f(t)+\frac{1}{\sqrt{\pi t}}. \qquad (1)$$

Переходя к изображениям и учитывая, что $f(0)=0$, из (1) найдем $pF(p)=F(p)+\frac{1}{\sqrt{p}}$, откуда $F(p)=\frac{1}{(p-1)\sqrt{p}}$. Здесь мы использовали результат задачи 27 и то, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. Итак,

$$e^t\operatorname{erf}(\sqrt{t}) \risingdotseq \frac{1}{(p-1)\sqrt{p}}.$$

Применяя теорему смещения, окончательно находим

$$\operatorname{erf}(\sqrt{t}) \risingdotseq \frac{1}{p\sqrt{p+1}}.$$

32. Решение. $\operatorname{Erf}(\sqrt{t})=1-\operatorname{erf}(\sqrt{t})$. Отсюда

$$\operatorname{Erf}(\sqrt{t}) \risingdotseq \frac{1}{p}-\frac{1}{p\sqrt{p+1}}=\frac{1}{\sqrt{p+1}+p+1}.$$

33. $\frac{e^{-ap}}{p+b}$. 34. $\frac{e^{-ap}\,b}{p(p+b)}$. 35. $\frac{1-e^{-ap}}{p^2}$. 36. $\frac{e^{-ap}-e^{-bp}}{p^2}$.

37. $\frac{1-e^{-ap}}{p(1+e^{-ap})}$. 38. $\frac{1-e^{-p}}{p^2(1+e^{-p})}$. 39. $\frac{(1-e^{-p})^2}{p^2(1-e^{-4p})}$.

40. $\frac{p+1-e^p}{p^2(1-e^p)}$.

41. Решение. $f(t)=\eta(t)-3\eta(t-1)+5\eta(t-2)-7\eta(t-3)+\ldots$,

$$F(p)=\frac{1}{p}-\frac{3}{p}e^{-p}+\frac{5}{p}e^{-2p}-\frac{7}{p}e^{-3p}+\cdots=\frac{1}{p}(1-3e^{-p}+$$
$$+5e^{-2p}-7e^{-3p}+\cdots)=\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+1)}{e^{kp}}.$$

42. $\frac{1}{p^2+1}\times\frac{1+e^{-\pi p}}{1-e^{-\pi p}}$. 43. $\frac{1}{1+p^2}\left(p+\frac{2e^{-\frac{\pi}{2}p}}{1-e^{-\pi p}}\right)$. 44. Решение.

$f(t)=\sin t\,\eta(t)+\sin(t-\pi)\,\eta(t-\pi)+\sin(t-2\pi)\,\eta(t-2\pi)+\cdots+$

$+\sin(t-k\pi)\,\eta(t-k\pi)+\ldots,\quad F(p)=\dfrac{1}{p^2+1}(1+e^{-\pi p}+e^{-2\pi p}+$

$+\cdots+e^{-k\pi p}+\cdots)=\dfrac{1}{p^2+1}\,\dfrac{1}{1-e^{-\pi p}}.$ **45.** $e^{-2t}\sin t.$

46. $\dfrac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t}).$ **47.** $\dfrac{1}{2}(\sin t-t\cos t).$ **48.** $\dfrac{1}{2}t\sin t.$

49. $1-e^{-t}-te^{-t}.$ **50.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}e^{\frac{t}{2}}\sin\dfrac{3\sqrt{3}}{2}t.$ **51.** $\dfrac{t^2}{2}+2e^{-t}\sin t.$

52. $t-\sin t.$ **53.** $\dfrac{1}{6}e^{2t}-\dfrac{1}{15}e^{-t}-\dfrac{1}{10}\cos 2t-\dfrac{1}{5}\sin 2t.$

54. $\dfrac{2}{3}e^{-\frac{t}{2}}(\sin t-t\cos t).$ **55.** $e^{-t}(1-t^2).$ **56.** $\dfrac{1}{3}e^{\frac{t}{2}}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+\right.$

$\left.+\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)-\dfrac{1}{3}e^{-t}.$ **57.** $\dfrac{3}{5}+\dfrac{e^{-2t}}{5}(4\sin t-3\cos t).$

58. $\dfrac{1}{9}(e^{-2t}-e^{t}+3te^{t})$ **59.** $2e^{t}+e^{\frac{t}{2}}\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t-\right.$

$\left.-\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right).$ **60.** $\dfrac{1}{3}te^{t}-\dfrac{1}{3}te^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right).$

61. $\dfrac{1}{2}e^{t-1}\sin 2(t-1)\,\eta(t-1)+\cos 3(t-2)\,\eta(t-2).$ **62.** $(t-3)\times$ $\times e^{-(t-3)}\eta(t-3).$ **63.** $e^{t-1}\eta(t-1)-\eta(t-1).$ **64.** $\sin(t-2)\eta(t-2)+$ $+2\sin(t-3)\,\eta(t-3)+3\sin(t-4)\,\eta(t-4).$ **65.** $\operatorname{sh}(t-1)\,\eta(t-1)+$ $+\operatorname{ch}2(t-2)\,\eta(t-2).$ **66.** $\dfrac{1}{4}\eta\left(t-\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{1}{5}e^{-\left(t-\frac{1}{2}\right)}\times$

$\times\eta\left(t-\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{1}{20}\cos 2\left(t-\dfrac{1}{2}\right)\eta\left(t-\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{1}{10}\sin 2\left(t-\dfrac{1}{2}\right)\times$

$\times\eta\left(t-\dfrac{1}{2}\right).$ **67.** $(t-1)\,\eta(t-1)+(t-2)^2\,\eta(t-2)+(t-3)^3\,\eta(t-3).$

68. $\eta\left(t-\dfrac{1}{3}\right)-\cos\left(t-\dfrac{1}{3}\right)\eta\left(t-\dfrac{1}{3}\right).$ **69.** $1-\operatorname{erf}\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$

70. Решение. $\dfrac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}} = \dfrac{1}{\sqrt{p}} \dfrac{e^{-a\sqrt{p}}}{(\sqrt{p})^2}$. Полагаем

$\Phi(p) = \dfrac{1}{\sqrt{p}}$, $F(\sqrt{p}) = \dfrac{e^{-a\sqrt{p}}}{(\sqrt{p})^2}$. Отсюда $F(p) = \dfrac{e^{-ap}}{p^2}$,

и по теореме запаздывания $F(p) \risingdotseq (t-a)\,\eta(t-a) = f(t)$.

По теореме Эфроса

$$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}} \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty (\tau - a)\,\eta(\tau - a)\, e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_a^\infty (\tau - a)\, e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\, d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_a^\infty \tau e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\, d\tau -$$

$$- \frac{a}{\sqrt{\pi t}} \int_a^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\, d\tau = I_1(t) + I_2(t).$$

Здесь

$$I_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_a^\infty \tau e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\, d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} (-2t)\, e^{-\frac{\tau^2}{4t}} \Bigg|_{\tau=a}^{\infty} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\, e^{-\frac{a^2}{4t}},$$

$$I_2(t) = -\frac{a}{\sqrt{\pi t}} \int_a^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\, d\tau = \frac{a}{\sqrt{\pi t}} \int_0^a e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\, d\tau - \frac{a}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\, d\tau =$$

$$= a\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{a}{2\sqrt{t}}} e^{-s^2} ds - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-s^2} ds\right),$$

где $s = \dfrac{\tau}{2\sqrt{t}}$.

Следовательно, $I_2(t) = a\left[\operatorname{erf}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right) - 1\right] = -a \operatorname{Erf}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$

и окончательно

$$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}} \risingdotseq 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\,e^{-\frac{a^2}{4t}} - a\,\mathrm{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right).$$

71. $\left(t+\frac{\alpha^2}{2}\right)\mathrm{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) - \alpha\sqrt{\frac{t}{\pi}}\,e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}.$

72. $ae^{hx+a^2h^2t}\,\mathrm{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + ah\sqrt{t}\right).$

73. Решение. $\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p(a+\sqrt{p})} = \frac{1}{\sqrt{p}}\,\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}(a+\sqrt{p})}.$

Полагаем

$$\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}, \quad F(\sqrt{p}) = \frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}(a+\sqrt{p})}.$$

Отсюда

$$F(p) = \frac{e^{-\alpha p}}{p(a+p)} = \frac{1}{a}\left(\frac{e^{-\alpha p}}{p} - \frac{e^{-\alpha p}}{p+a}\right) \risingdotseq$$

$$\risingdotseq \frac{1}{a}\left[\eta(t-\alpha) - e^{-a(t-\alpha)}\,\eta(t-\alpha)\right] = f(t).$$

По теореме Эфроса имеем

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p(a+\sqrt{p})} \risingdotseq \frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\int_{\alpha}^{\infty}\left[1-e^{-a(\tau-\alpha)}\right]e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{a}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^2}ds - \frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\int_{\alpha}^{\infty} e^{-\left[a\tau - a\alpha + \frac{\tau^2}{4t}\right]}d\tau =$$

$$= \frac{1}{a}\,\mathrm{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\int_{\alpha}^{\infty} e^{a\alpha + a^2t}\,e^{-\left(\frac{\tau}{2\sqrt{t}} + a\sqrt{t}\right)^2}d\tau =$$

$$= \frac{1}{a}\,\mathrm{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{e^{a(at+\alpha)}}{a}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}}^{\infty} e^{-z^2}dz,$$

где $z = \frac{\tau}{2\sqrt{t}} + a\sqrt{t}.$

Итак,

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p(a+\sqrt{p})} \risingdotseq \frac{1}{a}\operatorname{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)-\frac{e^{a(at+\alpha)}}{a}\operatorname{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}\right).$$

74. Решение. $I(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^\infty \operatorname{ch}\tau e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau.$

Сравнивая $I(t)$ с формулой (4), стр. 13, видим, что $f(t)=\operatorname{ch}t$, а значит, $F(p)=\frac{p}{p^2-1}$. Значит, $F(\sqrt{p})=\frac{\sqrt{p}}{p-1}$. Взяв $\Phi(p)=\frac{1}{\sqrt{p}}$, получим $\Phi(p)F(\sqrt{p})=\frac{1}{p-1}\risingdotseq I(t)$, откуда $I(t)=e^t$.

75. $I(t)=e^{-t}$. 76. $I(t)=2te^t$. 77. $I(t)=2te^{-t}$. 78. $x(t)=t-\sin t$. 79. $x(t)=\frac{2}{25}e^{-2t}-\frac{2}{25}\cos t+\frac{14}{25}\sin t-\frac{1}{5}t\sin t-\frac{2}{5}t\cos t$. 80. $x(t)=\frac{1}{2}(e^{-t}-te^{-t}-\cos t)$. 81. $x(t)=\frac{1}{2}e^t-t-1+\frac{1}{2}(\cos t+\sin t)$. 82. $x(t)=\frac{1}{2}t^2-1+\cos t-\sin t$. 83. $x(t)=\frac{1}{2}t^2e^t+te^t$. 84. $x(t)=\frac{3}{5}e^{-t}\sin 2t-\frac{4}{5}e^{-t}\cos 2t-\frac{1}{5}$. 85. $x(t)=\frac{1}{2}(1-e^t\cos t+e^t\sin t)$. 86. $x(t)=2+\frac{1}{2}(e^{-t}-\cos t+\sin t)$. 87. $x(t)=t^2-4t+6-5e^{-t}-te^{-t}$. 88. $x(t)=2t+\frac{1}{2}(e^{-t}+\cos t-\sin t)$. 89. $x(t)=\frac{1}{2}t\sin t-\cos t+\sin t$. 90. $x(t)=\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{2}t^2+2t-4+e^{-t}$. 91. $x(t)=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}e^{-t}\cos 2t+\frac{1}{5}e^{-t}\sin 2t$. 92. $x(t)=\frac{1}{2}(\cos t+\operatorname{ch}t)-t-1$. 93. $x(t)=\frac{1}{2}(1-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t)$. 94. $x(t)=1-2\cos t$. 95. $x(t)=\frac{1}{4}t+\cos 2t-\frac{1}{8}\sin 2t$. 96. $x(t)=\frac{3}{25}-$

$-\frac{t}{5}-\frac{3}{25}e^t\cos 2t+\frac{4}{25}e^t\sin 2t.$ **97.** $x(t)=2-2\cos t-\sin t.$

98. $x(t)=-1-\frac{1}{2}(\sin t+\cos t+e^{-t}).$ **99.** $x(t)=\frac{1}{2}e^t+$ $+\frac{3}{2}\sin t+\frac{1}{2}\cos t-1.$ **100.** $x(t)=\operatorname{ch} t-\frac{1}{2}t^2-1.$ **101.** $x(t)=$ $=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}e^t(\sin t-\cos t).$ **102.** $x(t)=e^t\left(1-t+\frac{1}{2}t^2\right)-1.$

103. $x(t)=-\frac{3}{2}\sin t-\frac{1}{2}t\cos t.$ **104.** $x(t)=2e^{-t}+te^{-t}+t-2.$

105. $x(t)=\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-3\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$

106. $x(t)=-\frac{1}{4}e^t-\frac{3}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\sin t.$ **107.** $x(t)=\frac{1}{2}e^t-$ $-\frac{5}{6}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$ **108.** $x(t)=$ $=\cos t-t\cos t.$ **109.** $x(t)=2+t-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}te^t-\frac{3}{2}e^t.$

110. $x(t)=1-\frac{22}{25}e^{-t}-\frac{6}{5}te^{-t}-\frac{3}{25}\cos 2t+\frac{4}{25}\sin 2t.$

111. $x(t)=\frac{t}{4}\sin 2t+\frac{1}{12}(\cos 2t-\cos 4t).$ **112.** $x(t)=te^t-e^t+$ $+\cos t+2\sin t-2t\cos t.$ **113.** $x(t)=e^t\left(\frac{t^2}{2}-t+1\right).$ **114.** $x(t)=$ $=2t-3+3e^{-t}+\frac{1}{5}(\sin 2t-2\cos 2t+2e^{-t}).$ **115.** $x(t)=4t+$ $+3-2e^t.$ **116.** $x(t)=e^{2t}-e^t-te^t.$ **117.** $x(t)=3e^t-3-2t-$ $-t^2-\frac{t^3}{3}.$ **118.** $x(t)=\frac{1}{4}e^t\left(t^2-3t+\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{3}e^{\frac{t}{2}}\left(\sqrt{3}\times\right.$ $\left.\times\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-\frac{1}{24}e^{-t}.$ **119.** $x(t)=\frac{4}{9}\sin 2t-$ $-\frac{5}{9}\sin t-\frac{1}{3}t\cos 2t.$ **120.** $x(t)=\frac{a}{2n^2}$ $[\sin nt\cos\alpha-$

$-nt\cos(nt+\alpha)]$. **121.** $x(t)=\frac{1}{6}t^2-\frac{4}{9}t+\frac{35}{54}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}-$ $-\frac{4}{27}e^{-3t}$. **122.** $x(t)=-\frac{t}{24}[3t\cos t+(t^2-3)\sin t]$. **123.** $x(t)=$ $=\frac{1}{\beta}e^{\alpha t}\sin\beta t$. **124.** $x(t)=\frac{1}{3}\sin t-\frac{1}{6}\sin 2t$. **125.** $x(t)=$ $=\frac{1}{10}e^{2t}-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cos t-\frac{1}{5}\sin t$. **126.** $x(t)=\frac{\gamma}{2}t^2+(1-\gamma)t+$ $+(\gamma-1)+\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)e^{-t}+\frac{1}{2}(\cos t-\sin t)$. **127.** $x(t)=$ $=\frac{83}{80}\operatorname{ch}2t-\frac{1}{10}\cos t+\frac{1}{16}\cos 2t$. **128.** $x(t)=e^t\left(\cos t+\sin t-\right.$ $\left.-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}e^{-3t}$. **129.** $x(t)=\frac{1}{3}e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{3}\times\right.$ $\left.\times\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\frac{1}{3}(t-1)e^t$. **130.** $x(t)=\frac{1}{4}(t^2\sin t+t\cos t-\sin t)$.

131. $x(t)=\frac{2}{9}[e^t-e^{-2t}(3t+1)]$. **132.** $x(t)=1-e^{-t}\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right)$.

133. $x(t)=1-\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$. **134.** $x(t)=$ $=\frac{2a}{\omega^2}\left[\sin^2\frac{\omega t}{2}\eta(t)-\sin^2\frac{\omega(t-b)}{2}\eta(t-b)\right]$. **135.** $x(t)=$ $=2\left[\sin^2\frac{t}{2}\eta(t)-2\sin^2\frac{t-1}{2}\eta(t-1)+\sin^2\frac{t-2}{2}\eta(t-2)\right]$.

136. $x(t)=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\eta(t)-\left[(t-1)-\frac{1}{2}\sin 2(t-1)\right]\times$ $\times\eta(t-1)+\frac{1}{2}\left[(t-2)-\frac{1}{2}\sin 2(t-2)\right]\eta(t-2)$. **137.** $x(t)=$ $=[b+(1-b)\cos t]\eta(t)+[(b-b\cos(t-a)]\eta(t-a)$. **138.** $x(t)=$ $=\frac{1}{3}\sin 3t\eta(t)+\frac{1}{9}\left[(t-1)-\frac{1}{3}\sin 3(t-1)\right]\eta(t-1)-$

$$-\frac{2}{9}\left[(t-2)-\frac{1}{3}\sin 3(t-2)\right]\eta(t-2)+\frac{1}{9}\left[(t-3)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{3}\sin 3(t-3)\right]\eta(t-3).$$ **139.** $x(t) \doteqdot \sum_{k=0}^{3}(-1)^k\,[1+$
$+e^{t-ka}(t-ka-1)]\,\eta(t-ka).$

140. Решение. Уравнение движения $m\ddot{x}=-m\lambda\dot{x}-2m\mu x$; $x(0)=x_0$, $\dot{x}(0)=v_0$. Операторное уравнение имеет вид

$$p^2X-px_0-v_0+2\mu pX-2\mu x_0+\lambda X=0,$$

откуда $X(p)=\dfrac{2\mu x_0+v_0+px_0}{p^2+2\mu p+\lambda}$ или

$$X(p)=\frac{x_0(p+\mu)+\mu x_0+v_0}{(p+\mu)^2+(\sqrt{\lambda-\mu^2})^2}=\frac{x_0(p+\mu)}{(p+\mu)^2+n^2}+$$
$$+\frac{\mu x_0+v_0}{(p+\mu)^2+n^2},$$

где $n^2=\lambda-\mu^2$.

Находя оригинал для $X(p)$, получим

$$x(t)=\frac{1}{n}e^{-\mu t}\,[nx_0\cos nt+(\mu x_0+v_0)\sin nt].$$

141. Уравнение движения

$$m\ddot{x}=-mn^2x+F\eta(t)-F\eta(t-T);\quad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=0.$$

142. Уравнение движения $\ddot{x}=an^2-n^2x$; $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$.

143. Уравнение движения

$$m\ddot{x}=-mg-2km\dot{x};\quad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=v_0.$$

144. Решение.

$$m\ddot{x}=F. \qquad (1)$$

В нашем случае $m=2$, $F=F_0+at=4+at$, так что уравнение (1) приобретает вид

$$2\ddot{x}=4+at, \qquad (2)$$

$$x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=10. \qquad (3)$$

Операторное уравнение имеет вид $2(p^2X-10)=\dfrac{4}{p}+\dfrac{a}{p^2}$,

откуда $X=\dfrac{1}{p^2}\left(\dfrac{a}{2p^2}+\dfrac{2}{p}+10\right)$.

Находя оригинал для $X(p)$, получаем

$$x(t) = \frac{a}{12} t^3 + t^2 + 10t.$$

Для определения величины a имеем следующую систему:

$$\left. \begin{aligned} 450 &= \frac{at_0^3}{12} + t_0^2 + 10t_0, \\ 105 &= \frac{at_0^2}{4} + 2t_0 + 10, \end{aligned} \right\}$$

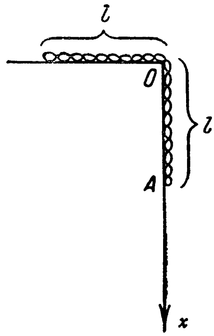
откуда находим, что $t_0 = 10$, $a = 3$.

145. Уравнение движения

$$m\ddot{x} = 4mx - 3m\dot{x};$$

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0;$$

$$x(t) = \frac{1}{5}(4e^t + e^{-4t}).$$



К задаче 148.

146. Уравнение движения $m\ddot{x} = mg - \lambda\dot{x}$. В силу условия задачи $\lambda = \frac{1}{3} mg$ при $v=1$ *м/сек*, так что окончательно получаем уравнение

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{1}{3} gv, \quad v(0) = 0,$$

откуда $v(t) = 3\left(1 - e^{-\frac{gt}{3}}\right)$; $v_{\max} = 3$ при $t = \infty$.

147. Уравнение движения

$$m\ddot{x} = -k\dot{x}; \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0;$$

$$x(t) = \frac{mv_0}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right), \quad x_{\max} = \frac{mv_0}{k} \text{ при } t = \infty.$$

148. Решение. Опишем движение нижнего конца цепочки. Выберем начало координат в точке O (см. рис.) и направим ось Ox вниз. Тогда начальные условия будут

$$x(0) = l, \quad \dot{x}(0) = 0 \text{ (цепочка неподвижна).}$$

Если абсцисса конца есть x, то движущая сила равна весу части цепочки, свисающей со стола, т. е.

$$F = \frac{mg}{2l} x.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение движения таково:

$$m\ddot{x} = \frac{mg}{2l}x; \quad x(0) = l, \quad \dot{x}(0) = 0;$$

$$x(t) = \frac{l}{2}\left(e^{t\sqrt{\frac{g}{2l}}} + e^{-t\sqrt{\frac{g}{2l}}}\right).$$

По этому закону движение будет происходить до того момента T, когда цепочка целиком соскользнет со стола. Мы найдем этот момент, положив $x=2l$:

$$4 = e^{T\sqrt{\frac{g}{2l}}} + e^{-T\sqrt{\frac{g}{2l}}}.$$

Обозначив $z = e^{T\sqrt{\frac{g}{2l}}}$, получим уравнение

$$z^2 - 4z + 1 = 0,$$

откуда $z_1 = 2 - \sqrt{3} < 1$, $z_2 = 2 + \sqrt{3}$. z_1 отбрасываем, так как ему соответствует отрицательное значение T. Итак, для определения T получили уравнение

$$e^{T\sqrt{\frac{g}{2l}}} = 2 + \sqrt{3}, \text{ откуда } T = \sqrt{\frac{2l}{g}}\ln(2 + \sqrt{3}).$$

149. Уравнение движения

$$m\ddot{x} = -2mx\kappa^2; \quad x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0; \quad x(t) = a\cos(\sqrt{2}kt).$$

150. Уравнение движения

$$m\ddot{x} = -\mu m x; \quad x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0; \quad t = \frac{\pi}{2\sqrt{\mu}}.$$

151. Уравнение движения

$$m\ddot{x} = -k\dot{x}; \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 6; \quad x(t) = 600(1 - e^{-0{,}01t}).$$

152. Уравнение движения

$$\ddot{x} + 4x = 2\cos t; \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0; \quad x(t) = \frac{2}{3}(\cos t - \cos 2t).$$

153. Уравнение движения $m\ddot{r} = -mk^2 r$

или
$$\ddot{x} = -k^2 x; \quad x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0;$$

$$\ddot{y} = -k^2 y; \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0.$$

Траектория точки — эллипс: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{\dfrac{v_0^2}{k^2}}=1.$

154. Уравнения движения

$$\ddot{x}=k^2x;\quad x(0)=a,\quad \dot{x}(0)=0;$$
$$\ddot{y}=k^2y;\quad y(0)=0,\quad \dot{y}(0)=v_0.$$

Траектория точки — гипербола:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\dfrac{v_0^2}{k^2}}=1.$$

155. Д. у. $L\dfrac{d^2Q}{dt^2}+\dfrac{1}{C}Q=E\cos(\omega t+\alpha)$; $Q|_{t=0}=0$, $\left.\dfrac{dQ}{dt}\right|_{t=0}=0$. 156. Д. у. $L\dfrac{d^2Q}{dt^2}+\dfrac{1}{C}Q=E\sin nt$; $Q|_{t=0}=0$, $\left.\dfrac{dQ}{dt}\right|_{t=0}=0$. 157. Д. у. $L\dfrac{dI}{dt}+RI=E\sin(\omega t+\alpha)$; $I|_{t=0}=0$.

158. Д. у. $L\dfrac{d^2Q}{dt^2}+R\dfrac{dQ}{dt}+\dfrac{1}{C}Q=E_1\eta(t)+(E_2-E_1)\eta(t-T)$; $Q|_{t=0}=0$, $\left.\dfrac{dQ}{dt}\right|_{t=0}=0$. 159. Д. у. $L\dfrac{d^2Q}{dt^2}+R\dfrac{dQ}{dt}+\dfrac{1}{C}Q=E$; $Q|_{t=0}=0$, $\left.\dfrac{dQ}{dt}\right|_{t=0}=0$. 160. $x(t)=1+e^{2t}-2e^t-t^2e^t$.

161. $x(t)=\dfrac{1}{5}\sin t(1+e^{-t})-\dfrac{2}{5}(1-e^{-t})\cos t$. 162. $x(t)=\dfrac{1}{2}(t^2-1)\operatorname{arctg} t-\dfrac{t}{2}\ln(1+t^2)+\dfrac{t}{2}$. 163. $x(t)=t\sin t-\dfrac{4}{\sqrt{3}}\sin t\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}}{\sqrt{3}}+\cos t\ln(2+\cos t)-\ln 3\cos t$. 164. $x(t)=e^t-1-t(e^t+1)+(e^t+1)\ln(e^t+1)-(e^t+1)\ln 2$. 165. $x(t)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{9-\pi\sqrt{3}}{27}\cos t+\dfrac{\sqrt{3}}{36}\sin t\ln\left|\dfrac{\sqrt{3}\sin t-2}{\sqrt{3}\sin t+2}\right|-$

$-\frac{\sqrt{3}}{9}\cos t \operatorname{arctg}(\sqrt{3}\cos t)$. **166.** $x(t)=\frac{1}{2}(\sin t-\cos t+e^{-t})$.

167. $x(t)=\cos t \operatorname{arctg}(\cos t)-\frac{\pi}{4}\cos t-\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin t\times$ $\times\ln\left|\frac{\sin t-\sqrt{2}}{\sin t+\sqrt{2}}\right|$. **168.** $x(t)=\frac{1}{2}(t \operatorname{ch} t-\operatorname{sh} t)$. **169.** $x(t)=$ $=\frac{1}{4}e^t t^2+\frac{1}{2}t \operatorname{sh} t+\frac{1}{4}te^{-t}-\frac{1}{4}\operatorname{sh} t$. **170.** $x(t)=\ln 2\cos t-$ $-\cos t\ln(2+\sin t)-t\sin t+\frac{2}{\sqrt{3}}(2\sin t+1)\times$ $\times\left(\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}+1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6}\right)$. **171.** $x(t)=\operatorname{ch} t-\operatorname{sh} t+$ $+2\operatorname{ch} t\left(\operatorname{arctg} e^t-\frac{\pi}{4}\right)$. **172.** $x(t)=2(1-e^{-t}-te^{-t})$; $y(t)=2-$ $-t-2e^{-t}-2te^{-t}$. **173.** $x(t)=\frac{1}{4}(e^t-e^{3t}+2te^{3t})$; $y(t)=$ $=\frac{1}{4}(5e^t-e^{3t}-2te^{3t})$. **174.** $x(t)=e^t(\cos t-2\sin t)$; $y(t)=$ $=e^t(\cos t+3\sin t)$. **175.** $x(t)=\frac{1}{3}(e^t+2\cos 2t+\sin 2t)$; $y(t)=$ $=\frac{2}{3}\left(e^t-\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)$. **176.** $x(t)=e^t-\frac{11}{34}e^{4t}-\frac{3}{17}\cos t+$ $+\frac{5}{17}\sin t-\frac{1}{2}$; $y(t)=-\frac{2}{3}e^t+\frac{22}{51}e^{4t}+\frac{4}{17}\cos t-\frac{1}{17}\sin t$.
177. $x(t)=-\frac{1}{15}e^{-2t}+\frac{13}{12}e^{-t}-2+\frac{1}{6}e^t+\frac{2}{3}e^{2t}+\frac{3}{20}e^{3t}$; $y(t)=\frac{1}{15}e^{-2t}+\frac{13}{12}e^{-t}-2-\frac{1}{6}e^t+\frac{2}{3}e^{2t}+\frac{7}{20}e^{3t}$; $z(t)=$ $=-\frac{13}{12}e^{-t}-\frac{1}{2}e^t+\frac{4}{3}e^{2t}+\frac{1}{4}e^{3t}$. **178.** $x(t)=-e^t$; $y(t)=0$; $z(t)=e^t$. **179.** $x(t)=\frac{2}{5}(e^{3t}-e^{-2t})$; $y(t)=\frac{1}{5}(3e^{3t}+2e^{-2t})$; $z(t)=\frac{1}{5}(3e^{3t}+2e^{-2t})$. **180.** $x(t)=\frac{3e^{-2t}}{4(2+a)}+\frac{(11-4a)e^{2t}}{4(2-a)}+$

$+\dfrac{3e^{at}}{a^2-4}$; $\quad y(t)=-\dfrac{e^{-2t}}{4(2+a)}+\dfrac{(11-4a)e^{2t}}{4(2-a)}+\dfrac{(a+1)e^{at}}{a^2-4}$.

181. $x(t)=2-e^{-t}$; $y(t)=2-e^{-t}$; $z(t)=2e^{-t}-2$. **182.** $x(t)=6e^t-e^{2t}-4e^{3t}$; $\quad y(t)=3e^t-2e^{3t}$; $\quad z(t)=6e^{3t}+e^{2t}-6e^t$

183. $x(t)=-\dfrac{1}{15t^2}+\dfrac{13}{12t}-2+\dfrac{1}{6}t+\dfrac{2}{3}t^2+\dfrac{3}{20}t^3$; $\quad y(t)=\dfrac{1}{15t^2}+\dfrac{13}{12t}-2-\dfrac{1}{6}t+\dfrac{2}{3}t^2+\dfrac{7}{20}t^3$; $\quad z(t)=-\dfrac{13}{12t}-\dfrac{1}{2}t+\dfrac{4}{3}t^2+\dfrac{1}{4}t^3$. **184.** $x_m(t)=e^{-ct}\dfrac{(ct)^m}{m!}$ $(m=0,1,2,\ldots,n)$.

185. $x(t)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}e^{-t}-\dfrac{3}{10}e^{-\frac{6}{11}t}$; $\quad y(t)=\dfrac{1}{5}\left(e^{-t}-e^{-\frac{6}{11}t}\right)$.

186. $x(t)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}t$; $y(t)=\dfrac{5}{4}t^2-\dfrac{1}{4}$; $z(t)=\dfrac{5}{4}t^2-\dfrac{2}{3}t+\dfrac{5}{12}$. **187.** $x(t)=\dfrac{28}{9}e^{3t}-e^{-t}-\dfrac{t}{3}-\dfrac{1}{9}$; $y(t)=\dfrac{28}{9}e^{3t}+e^{-t}-\dfrac{t}{3}-\dfrac{1}{9}$.

188. Уравнения движения электрона

$$\begin{cases} m\ddot{x}=-\dfrac{eH}{c}\dot{y}, & x(0)=0, \quad \dot{x}(0)=v_0; \\[2ex] m\ddot{y}=\dfrac{eH}{c}\dot{x}, & y(0)=0, \quad \dot{y}(0)=0. \end{cases}$$

$$x(t)=\frac{v_0mc}{eH}\sin\frac{eHt}{mc}, \qquad y(t)=\frac{mcv_0}{eH}\left(1-\cos\frac{eHt}{mc}\right).$$

Траектория электрона $\quad x^2+y^2-\dfrac{2mcv_0}{eH}y=0.$

189. Уравнения движения

$$\begin{cases} m\ddot{x}=0; & x(0)=0, \quad \dot{x}(0)=\dfrac{v_0}{\sqrt{2}}; \\[2ex] m\ddot{y}=-gm; & y(0)=0, \quad \dot{y}(0)=\dfrac{v_0}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Наибольшая высота $H=\frac{v_0^2}{4g}$, точка падения $x=\frac{v_0^2}{g}$.

190. Пусть электрон вылетает из начала координат. Выберем ось Ox параллельно направлению магнитного поля H, а ось Oy выберем так, чтобы вектор $\boldsymbol{v}_0$ лежал в координатной плоскости xOy. Тогда уравнения движения будут

$$\begin{cases} m\ddot{x}=0; & x(0)=0, \quad \dot{x}(0)=v_0\cos\alpha; \\ m\ddot{y}=-\dfrac{eH}{c}\dot{z}; & y(0)=0, \quad \dot{y}(0)=v_0\sin\alpha; \\ m\ddot{z}=\dfrac{eH}{c}\dot{y}; & z(0)=0, \quad \dot{z}(0)=0. \end{cases}$$

Траектория электрона

$$\begin{cases} y^2+z^2-\dfrac{2v_0cm\sin\alpha}{eH}z=0, \\ x=tv_0\cos\alpha. \end{cases}$$

191. Уравнения движения

$$\begin{cases} m\ddot{x}=-km\dot{x}; & x(0)=0, \quad \dot{x}(0)=v_0\cos\alpha; \\ m\ddot{y}=-mg-km\dot{y}; & y(0)=0, \quad \dot{y}(0)=v_0\sin\alpha. \end{cases}$$

$$x(t)=\frac{v_0\cos\alpha}{k}(1-e^{-kt}),\ y(t)=\frac{v_0k\sin\alpha+g}{k^2}(1-e^{-kt})-\frac{gt}{k}.$$

192. Уравнения движения

$$\begin{cases} m\ddot{x}=-\dfrac{eH}{c}\dot{y}-km\dot{x}; & x(0)=0, \quad \dot{x}(0)=u; \\ m\ddot{y}=\dfrac{eH}{c}\dot{x}-km\dot{y}; & y(0)=0, \quad \dot{y}(0)=0; \\ m\ddot{z}=-km\dot{z}; & z(0)=0, \quad \dot{z}(0)=0. \end{cases}$$

193. Уравнения движения

$$\begin{cases} m\ddot{x}=-2\lambda\dot{x}-\mu^2x; & x(0)=a, \quad \dot{x}(0)=0; \\ m\ddot{y}=-2\lambda\dot{y}-\mu^2y; & y(0)=0, \quad \dot{y}(0)=v_0. \end{cases}$$

194. Уравнения движения

$$\begin{cases} m\ddot{x}=0; & x(0)=0, \quad \dot{x}(0)=v_0; \\ m\ddot{y}=-mk^2y; & y(0)=a, \quad \dot{y}(0)=0; \end{cases}$$

$$x(t)=v_0t, \quad y(t)=a\cos kt.$$

Траектория точки $y = a\cos\left(\frac{kx}{v_0}\right)$.

195. $\varphi(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sh} x + \frac{1}{2}\sin x$. 196. $\varphi(x) = \frac{1}{3}\left(e^x - e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + \sqrt{3}e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$. 197. $\varphi(x) = x + \frac{1}{6}x^3$.

198. $\varphi(x) = \frac{2}{5}e^{2x} + \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$. 199. $\varphi(x) = 2 + x - e^{\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} - \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$. 200. $\varphi(x) = -\frac{1}{16} - \frac{1}{8}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{16}e^{2x} - \frac{1}{12}x^3$. 201. $\varphi(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{6}e^x + \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} - \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$. 202. $\varphi(x) = \frac{1}{3}\left(e^x - e^{-x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\sqrt{2}x\right)$. 203. $\varphi(x) = xe^x$. 204. $\varphi(x) = e^x$.

205. $\varphi(x) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\cos\sqrt{3}x$. 206. $\varphi(x) = \operatorname{ch} x - xe^{-x}$.

207. $\varphi(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} x + \cos x)$. 208. $\varphi(x) = x - \frac{1}{6}x^3$. 209. $\varphi(x) = \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{5}}{2}x$. 210. $\varphi(x) = 1 - x$. 211. $\varphi(x) = J_0(x)$, так что $\int\limits_0^x J_0(x-t)\,J_0(t)\,dt = \sin x$. 212. $\varphi(x) \equiv 1$. 213. $\varphi(x) = e^{-x}$.

214. $\varphi(x) = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$. 215. $\varphi(x) = 2xe^x + x^2e^x$.

216. $\varphi(x) \equiv 1$. 217. $\varphi(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$. 218. $\varphi_1(x) = e^{-x}(1-x)$, $\varphi_2(x) = \frac{8}{9}e^{2x} + \frac{1}{3}xe^{-x} - \frac{8}{9}e^{-x}$. 219. $\varphi_1(x) = e^{2x}$ $\varphi_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2x}$. 220. $\varphi_1(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}x}\left(\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + 2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \frac{1}{3}$, $\varphi_2(x) = e^{\frac{3}{2}x}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

221. $\varphi_1(x) = (x+2)\sin x + (2x+1)\cos x$, $\varphi_2(x) = \frac{1}{2} x \cos x - x \sin x + \frac{1}{2} \sin x$. 222. $\varphi_1(x) = \frac{3}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sh} \sqrt{3} x$, $\varphi_2(x) = -2 \operatorname{ch} \sqrt{3} x$. 223. $\varphi_1(x) = 2e^{-x}(1-x)$, $\varphi_2(x) = e^{-x}(1-x)$. 224. $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-k)^{2k+3}}{(2k+3)!} \eta(t-k)$. 225. $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k (t-k)^{k+3}}{(k+3)!} \eta(t-k)$.

226. $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(t-k)^{k+2}}{(k+2)!} \eta(t-k)$.

227. $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(t-2k)^{k+3}(k+1)}{(k+3)!} \eta(t-2k)$.

228. $x(t) = \left(t + \frac{1}{2} t^2\right) \eta(t) + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(t-k+2)^k}{k!} \eta(t-k+2)$.

229. $x(t) = \left(1 + t + \frac{t^2}{2!}\right) \eta(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(t-k)^{k+1}}{(k+1)!} \eta(t-k) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(t-k)^{k+2}}{(k+2)!} + \eta(t-k)$. 230. $x(t) = \cos t$. 231. $u(x,t) = u_0 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-z^2} dz\right)$. 232. $u(x,t) = u_1 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-z^2} dz$.

233. $u(x,t) = a e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2k}}} \cos\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right) - \frac{a}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \sin x \sqrt{\frac{\rho}{k}} \frac{\rho\, d\rho}{\rho^2 + \omega^2}$. 234. $u(x,t) = a \left[e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2k}}} \times \sin\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right) + \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \sin x \sqrt{\frac{\rho}{k}} \frac{d\rho}{\rho^2 + \omega^2} \right]$.

235. $$u(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi k}} \int_0^t \varphi(\tau) \frac{e^{-\frac{x^2}{4k(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} d\tau.$$

236. Д. у. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant l$, $t > 0$,

$$u|_{t=0} = u_0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = u_1.$$

$$u(x, t) = u_1 + $$
$$+ \frac{4(u_1 - u_0)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-a^2\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{l^2} t} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l}.$$

237. Д. у. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $x > 0$, $t > 0$,

$$u|_{t=0} = u_0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = hu|_{x=0}, \quad h = \text{const};$$

$$u(x, t) = u_0 \left[\operatorname{erf} \frac{x}{2a\sqrt{t}} + e^{hx + h^2a^2t} \operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + ha\sqrt{t}\right)\right].$$

При решении задачи воспользоваться теоремой Эфроса (см. § 1).

238. Д. у. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$; $0 \leqslant x \leqslant l$, $t > 0$,

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \frac{F}{E};$$

$$u(x, t) = \frac{Fx}{E} - \frac{8Fl}{\pi^2 E} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2k+1)\pi ct}{2l}}{(2k+1)^2}.$$

239. Д. у. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{g}{c^2}$; $0 \leqslant x \leqslant l$, $t > 0$,

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0;$$

$$u(x, t) = \frac{gx(2l-x)}{2c^2} -$$
$$- \frac{16gl^2}{\pi^3 c^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos \frac{(2k+1)(x-l)\pi}{2l} \cos \frac{(2k+1)\pi ct}{2l}}{(2k+1)^3}.$$

240. $u(x, t) = -\frac{bx}{12}(x^3 - 2lx^2 + l^3) +$

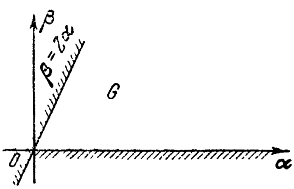
$$+\frac{8bl^4}{\pi^5}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2k+1)\pi t}{l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}}{(2k+1)^5}.$$

241. Д. у. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant l$, $t > 0$,

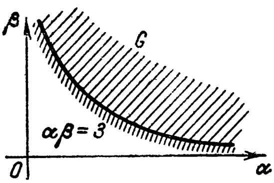
$$u(x, 0) = \frac{4hx(l-x)}{l^2}; \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0; \quad u(0, t) = u(l, t) = 0;$$

$$u(x, t) = \frac{32h}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2k+1)\pi at}{l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}}{(2k+1)^3}.$$

242. Неустойчивый фокус. **243.** Центр. **244.** Устойчивый фокус. **245.** Седло. **246.** Точка (0, 0, 0) неустойчива. **247.** Устойчивый узел. **248.** Неустойчивый узел. **249.** Точка покоя неустойчива. **250.** Седло. **251.** Устойчивый фокус. **252.** Неустойчивый фокус. **253.** Центр. **254.** Неустойчивый узел. **255.** Устойчивый узел. **256.** Центр. **257.** Неустойчивый фокус. **258.** Точка (0, 0, 0) устойчива. **259.** Точка (0, 0, 0) неустойчива. **260.** $\alpha \leqslant 0$. **261.** $\alpha \leqslant -1/2$. **262.** Неустойчива. **263.** Устойчива. **264.** Неустойчива. **265.** Устойчива. **266.** Неустойчива. **267.** Неустойчива. **268.** Асимпотически устойчива. **269.** Устойчива. **270.** Исследование по первому приближению невозможно. С помощью функции Ляпунова $v = 3x^2 + 4y^2$ устанавливаем, что точка (0, 0) асимптотически устойчива. **271.** Точка покоя устойчива. **272.** Асимптотически устойчиво. **273.** Асимптотически устойчиво. **274.** Асимптотически устойчиво. **275.** Устойчиво. **276.** Асимптотически устойчиво. **277.** Асимптотически устойчиво. **278.** Асимптотически устойчиво. **279.** Неустойчиво. **280.** Неустойчиво. **281.** Асимптотически устойчиво. **282.** Асимптотически устойчиво. **283.** Асимптотически устойчиво. **284** Устойчиво. **285.** Неустойчиво. **286.** Устойчиво. **287.** Неустойчиво. **288.** При $\alpha > 3/2$. **289.** Решение неустойчиво при любом α. **290.** При $\alpha > 13/6$.



К задаче 291.

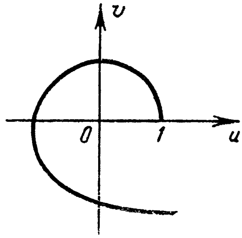


К задаче 292.

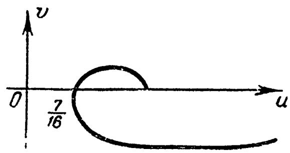
291. При любых (α, β) из области G (см. рис.).

292. При любых (α, β) из области G: $\alpha\beta > 3$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ (см. рис). **293.** Решение неустойчиво при любых (α, β).

294. Все корни в левой полуплоскости; решение устойчиво (см. рис.). **295.** Два корня в левой полуплоскости, два корня в пра-

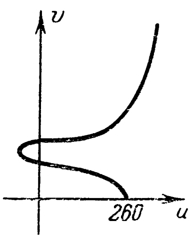


К задаче 294.

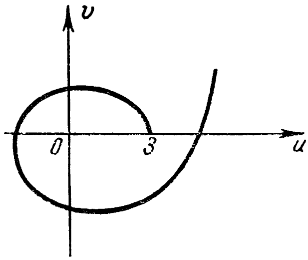


К задаче 295.

вой; решение неустойчиво (см. рис.). **296.** Устойчиво. **297.** Устойчиво. **298.** Два корня в правой полуплоскости; решение неустойчиво (см. рис.). **299.** Устойчиво (см. рис.). **300.** Устойчиво. **301.** Устойчиво.

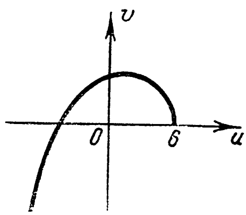


К задаче 298.

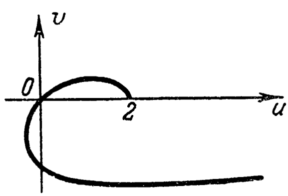


К задаче 299.

302. Устойчиво. **303.** Решение устойчиво. **304.** Устойчиво. **305.** Устойчиво. **306.** Устойчиво. **307.** Устойчиво. **308.** Устойчиво (см. рис.). **309.**

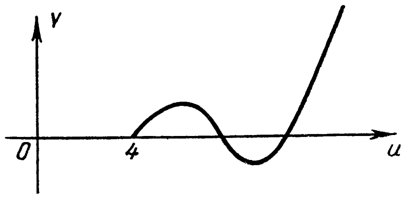


К задаче 308.



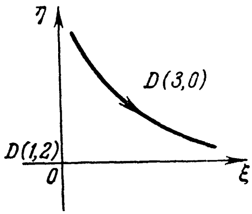
К задаче 310.

Устойчиво. **310.** Чисто мнимые корни; решение неустойчиво (см. рис.). **311.** Два корня в правой полуплоскости; решение неустойчиво. **312.** Два корня в правой полуплоскости; решение неустойчиво (см. рис.). **313.** Два корня в правой полуплоскости; решение неустойчиво.

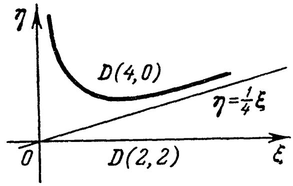


К задаче 312.

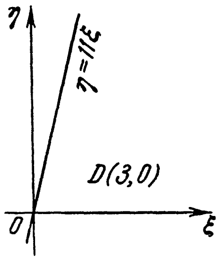
314.



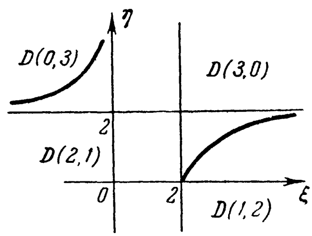
315.



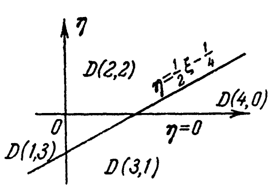
316.



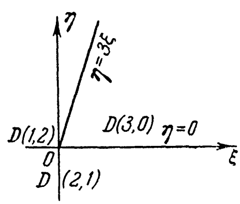
317.



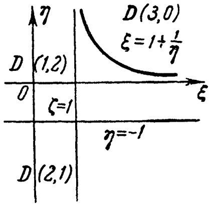
318.



319.



320.



321. $G(x, \xi) = \begin{cases} x(\xi - 1), & 0 \leqslant x < \xi, \\ (x-1)\xi, & \xi < x \leqslant 1. \end{cases}$

322. $$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{\sin kx \sin k(\xi - 1)}{k \sin k}, \\ \dfrac{\sin k\xi \sin k(x-1)}{k \sin k}, \end{cases}$$
$0 \leqslant x < \xi, \quad \xi < x \leqslant 1.$

323. $$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{6} x^2 (\xi - 1)^2 (3\xi - 2x\xi - x), \\ \dfrac{1}{6} \xi^2 (x-1)^2 (3x - 2\xi x - \xi), \end{cases}$$
$0 \leqslant x < \xi, \quad \xi < x \leqslant 1.$

324. $$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{\cos k(\xi - x - 1)}{2k \sin k}, \\ \dfrac{\cos k(x - \xi - 1)}{2k \sin k}, \end{cases}$$
$-1 \leqslant x < \xi, \quad \xi < x \leqslant 1.$

325. $$G(x, \xi) = \begin{cases} -\dfrac{\operatorname{ch}(\xi - x - 1)k}{2k \operatorname{sh} k}, \\ -\dfrac{\operatorname{ch}(x - \xi - 1)k}{2k \operatorname{sh} k}, \end{cases}$$
$-1 \leqslant x < \xi, \quad \xi < x \leqslant 1.$

326. $$G(x, \xi) = \begin{cases} -\dfrac{\operatorname{sh} kx \operatorname{ch} k(\xi - 1)}{k \operatorname{ch} k}, \\ -\dfrac{\operatorname{sh} k\xi \operatorname{ch} k(x - 1)}{k \operatorname{ch} k}, \end{cases}$$
$0 \leqslant x < \xi, \quad \xi < x \leqslant 1.$

327. $$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(\xi - 1)(x + 1), \\ \dfrac{1}{2}(x - 1)(\xi + 1), \end{cases}$$
$-1 \leqslant x < \xi, \quad \xi < x \leqslant 1.$

328. $G(x,\xi)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}e^{x-\xi}, \\ -\dfrac{1}{2}e^{\xi-x}, \end{cases}$

$-\infty < x < \xi, \quad \xi < x < +\infty.$

329. $G(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{e^{a-x+\xi}+e^{b+x-\xi}}{2(e^a-e^b)}, \\ \dfrac{e^{a-\xi+x}+e^{b+\xi-x}}{2(e^a-e^b)}, \end{cases}$

$a \leqslant x < \xi, \quad \xi < x \leqslant b.$

330. $G(x,\xi)=\begin{cases} \alpha+\ln\xi, \\ \alpha+\ln x, \end{cases}$ $\quad 0 < x < \xi, \quad \xi < x \leqslant 1.$

331. $G(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{1}{4}e^{\frac{\xi+x}{2}}\displaystyle\int\limits_{\infty}^{\xi} e^{-\tau}\dfrac{d\tau}{\tau}, \\ \dfrac{1}{4}e^{\frac{\xi+x}{2}}\displaystyle\int\limits_{\infty}^{x} e^{-\tau}\dfrac{d\tau}{\tau}, \end{cases}$

$0 < x < \xi, \quad \xi < x < \infty.$

332. $G(x,\xi)=\begin{cases} \alpha+1-\dfrac{1}{\xi}, \\ \alpha+1-\dfrac{1}{x}, \end{cases}$

$0 < x < \xi, \quad \xi < x \leqslant 1.$

333. $G(x,\xi)=\begin{cases} 1-\xi+\xi\ln\xi+(1-\xi+\ln\xi)\,x, \\ 1-x+x\ln x+(1-x+\ln x)\,\xi, \end{cases}$

$0 < x < \xi, \quad \xi < x \leqslant 1.$

334. $G(x,\xi)=\begin{cases} \xi-1-\ln\xi+\left[1-\dfrac{1}{2}\left(\xi+\dfrac{1}{\xi}\right)\right]x, \\ x-1-\ln x+\left[1-\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\right]\xi, \end{cases}$

$0 < x < \xi, \quad \xi < x \leqslant 1.$

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Айзерман, Лекции по теории автоматического регулирования, Гостехиздат, 1956.
2. Э. Л. Айнс, Обыкновенные дифференциальные уравнения, ГНТИУ, Харьков, 1939.
3. И. А. Брин, Операционное исчисление и устойчивость линейных систем, МЭИ, кафедра высшей математики, 1961.
4. Ф. Р. Гантмахер, Лекции по аналитической механике, Физматгиз, 1960.
5. Н. М. Гюнтер и Р. О. Кузьмин, Сборник задач по высшей математике, т. II, Гостехиздат, 1947.
6. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, ИЛ, 1950.
7. Х. Карслоу и Д. Егер, Операционные методы в прикладной математике, ИЛ, 1948.
8. М. Л. Краснов и Г. И. Макаренко, Задачи по дополнительным главам дифференциальных уравнений, МЭИ, кафедра высшей математики, 1960.
9. М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, 1958.
10. А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950.
11. И. Г. Малкин, Теория устойчивости движения, Гостехиздат, 1952.
12. Ян Микусинский, Операторное исчисление, ИЛ, 1956.
13. М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, Гостехиздат, 1954.
14. В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1950.
15. Н. Г. Четаев, Устойчивость движения, Гостехиздат, 1955.
16. Л. Э. Эльсгольц, Дифференциальные уравнения, Гостехиздат, 1957.
17. И. Г. Арамановиу, В. И. Левин, Уравнения математической физики, «Наука», 1964.

Михаил Леонтьевич Краснов,
Григорий Иванович Макаренко

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.
УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ

(Серия: «Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов втузов. Задачи и упражнения»)

М., 1964 г., 104 стр. с илл.

Редактор *А. П. Баева*

Техн. редакторы *Л. В. Лихачева, С. Я. Шкляр*
Корректор *Е. А. Белицкая*

Сдано в набор 3/IV 1964 г. Подписано к печати 22/IX 1964 г. Бумага $84 \times 108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 3,25 Условн. печ. л. 5,33. Уч.-изд. л. 4.69. Тираж 25000 Т-12892. Цена книги 24 к. Заказ № 373

Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 11 «Главполиграфпрома» Государственного комитета Совета Министров СССР по печати, ул. Марата, 58.

Цена 24 коп.