

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ



М. В. ФЕДОРЮК

# ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ



ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ  
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ  
ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ  
И СТУДЕНТОВ ВТУЗОВ

**М. В. ФЕДОРЮК**

# **ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

*Допущено Министерством высшего  
и среднего специального образования СССР  
в качестве учебного пособия  
для студентов втузов*



МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1980

22.161.6

Ф-33

УДК 517.9

**ФЕДОРЮК М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения.** — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. — 352 с.

Книга содержит изложение основ обыкновенных дифференциальных уравнений, включая теорию устойчивости и вариационное исчисление. Значительное место уделено уравнениям с частными производными первого порядка, как линейным, так и нелинейным, аналитической теории дифференциальных уравнений и методу ВКБ — одному из важнейших асимптотических методов для линейных уравнений.

Илл. 48, библи. 48.



Scan AAW

Ф  $\frac{20203-059}{053(02)-80}$  25-80. 1702050000

© Издательство «Наука».  
Главная редакция  
физико-математической  
литературы, 1980

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	6
<b>Глава 1. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений . . . . .</b>	<b>7</b>
§ 1. Общие понятия, примеры . . . . .	7
§ 2. Дифференциальные уравнения первого порядка . . . . .	9
§ 3. Линейные дифференциальные уравнения. Принцип суперпозиции . . . . .	18
§ 4. Линейное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами . . . . .	20
§ 5. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами . . . . .	24
§ 6. Линейные неоднородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами . . . . .	30
§ 7. Линейные уравнения с правой частью—квазимногочленом . . . . .	33
§ 8. Линейные системы с постоянными коэффициентами. Случай простых корней . . . . .	41
§ 9. Фазовая плоскость линейной системы . . . . .	45
§ 10. Линейные системы с постоянными коэффициентами. Случай кратных корней . . . . .	49
§ 11. Операционное исчисление . . . . .	57
§ 12. Линейные разностные уравнения . . . . .	62
<b>Глава 2. Основные свойства решений обыкновенных дифференциальных уравнений . . . . .</b>	<b>65</b>
§ 1. Основная теорема . . . . .	65
§ 2. Линейные нормированные пространства . . . . .	73
§ 3. Принцип сжатых отображений . . . . .	76
§ 4. Лемма Адамара . . . . .	83
§ 5. Доказательство основной теоремы. Теорема существования и единственности для уравнений $n$ -го порядка . . . . .	85
§ 6. Гладкость решений . . . . .	90
§ 7. Зависимость решений от параметров и начальных условий . . . . .	91
§ 8. Регулярная теория возмущений . . . . .	95
§ 9. Обратные и неявные функции . . . . .	97
§ 10. Зависимые и независимые функции. Криволинейные координаты . . . . .	106
§ 11. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной . . . . .	117

<b>Глава 3. Линейные уравнения и системы . . . . .</b>	<b>123</b>
§ 1. Теорема существования и единственности . . . . .	123
§ 2. Функции от матриц и однородные линейные системы с постоянными коэффициентами . . . . .	128
§ 3. Линейная зависимость и независимость функций и вектор-функций. Определитель Вронского . . . . .	138
§ 4. Формула Лиувилля . . . . .	142
§ 5. Фундаментальные системы решений . . . . .	144
§ 6. Неоднородные линейные системы с переменными коэффициентами . . . . .	146
§ 7. Линейные дифференциальные уравнения $n$ -го порядка . . . . .	147
§ 8. Понижение порядка линейных и нелинейных дифференциальных уравнений . . . . .	153
§ 9. Нули решений однородных линейных уравнений второго порядка . . . . .	157
§ 10. Элементы аналитической теории дифференциальных уравнений. Уравнение Бесселя . . . . .	160
§ 11. Уравнения с периодическими коэффициентами . . . . .	171
§ 12. Дельта-функция и ее применения . . . . .	179
<b>Глава 4. Автономные системы и теория устойчивости . . . . .</b>	<b>193</b>
§ 1. Автономные системы. Общие свойства . . . . .	193
§ 2. Структура решений автономной системы в окрестности неособой точки . . . . .	200
§ 3. Изменение фазового объема . . . . .	202
§ 4. Производная в силу системы. Первые интегралы . . . . .	209
§ 5. Одномерное движение частицы в потенциальном поле . . . . .	216
§ 6. Устойчивость. Функция Ляпунова . . . . .	221
§ 7. Устойчивость положения равновесия линейной системы . . . . .	228
§ 8. Устойчивость по линейному приближению . . . . .	233
§ 9. Двумерные автономные системы (элементы качественной теории) . . . . .	240
<b>Глава 5. Уравнения с частными производными первого порядка . . . . .</b>	<b>249</b>
§ 1. Некоторые задачи, приводящие к уравнениям 1-го порядка с частными производными . . . . .	249
§ 2. Интегрирование линейных и квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка . . . . .	252
§ 3. Задача Коши для линейных и квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка . . . . .	259
§ 4. Линейные и нелинейные волны . . . . .	265
§ 5. Нелинейные уравнения . . . . .	267
<b>Глава 6. Элементы вариационного исчисления . . . . .</b>	<b>276</b>
§ 1. Функционалы . . . . .	276
§ 2. Функционалы в линейных нормированных пространствах . . . . .	277
§ 3. Простейшие задачи вариационного исчисления . . . . .	281
§ 4. Функционалы, зависящие от высших производных . . . . .	288
§ 5. Функционалы, зависящие от вектор-функций. Принцип наименьшего действия в механике . . . . .	289

§ 6. Условный экстремум . . . . .	292
§ 7. Задача Лагранжа . . . . .	295
§ 8. Функционалы от функций многих переменных . . . . .	297
§ 9. Достаточные условия слабого экстремума . . . . .	300
<b>Глава 7. Асимптотика решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка . . . . .</b>	<b>309</b>
§ 1. Эвристические соображения . . . . .	309
§ 2. Основные оценки . . . . .	310
§ 3. Асимптотика решений при больших значениях аргумента . . . . .	316
§ 4. Асимптотика решений при больших значениях параметра . . . . .	326
<b>Д о б а в л е н и е. Задачи оптимального управления . . . . .</b>	<b>333</b>
§ 1. Дополнительные сведения из вариационного исчисления . . . . .	333
§ 2. Принцип максимума Понтрягина . . . . .	341
Литература . . . . .	348

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящей книге изложены основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений с частными производными первого порядка и основы вариационного исчисления. Она написана на основе курса лекций, который автор читал в Московском физико-техническом институте на протяжении более десяти лет. Книга рассчитана на студентов высших технических учебных заведений (с объемом курса высшей математики 510 и более часов) и на инженеров-исследователей.

В книге наиболее полно представлены разделы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, связанные с задачами малых колебаний и распространения линейных волн. Последняя глава посвящена одному из важнейших асимптотических методов — методу ВКБ для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

В книгу включены некоторые понятия функционального анализа и ряд необходимых сведений из математического анализа.

При ссылках на параграф из той же главы указывается только его номер. Во многих параграфах условия на область определения и гладкость функций, которые в них рассматриваются, сформулированы в начале параграфа в виде «предположений» с тем, чтобы сделать формулировки теорем более компактными.

Я глубоко благодарен профессорам Е. А. Гребеникову и С. И. Похожаеву, которые внимательно прочли рукопись и сделали ряд ценных замечаний.

## МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

### § 1. Общие понятия, примеры

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение вида

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0. \quad (1)$$

Здесь  $F$  — известная функция,  $x$  — независимое переменное,  $y(x)$  — неизвестная функция. Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной неизвестной функции  $y = \varphi(x)$ , входящей в уравнение. Функция  $y(x)$  называется *решением* (или *интегралом*) дифференциального уравнения (1), если она  $n$  раз непрерывно дифференцируема на некотором интервале  $I$  и при  $x \in I$  удовлетворяет уравнению.

Пример 1. Пусть  $f(x)$  — непрерывная на интервале  $I = (a, b)$  функция,  $y(x)$  — ее первообразная. Тогда

$$y'(x) = f(x) \quad (2)$$

и для отыскания первообразной мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Его решения известны:

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt + C \quad (x_0 \in I),$$

где  $C$  — произвольная постоянная.

Дифференциальное уравнение (2) имеет *бесконечно много решений* — и это верно для всех обыкновенных дифференциальных уравнений. Чтобы выделить единственное решение уравнения (2), достаточно задать значение первообразной  $y(x)$  в какой-либо точке, например,  $y(x_0) = y_0$ . Тогда решение единственно и равно

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt.$$



Основные элементарные функции являются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений, и притом простейших.

**Пример 2.** Тригонометрические функции  $\sin x$ ,  $\cos x$  — решения уравнения

$$y'' + y = 0, \quad (3)$$

что проверяется непосредственно. Функция  $y = \sin x$  удовлетворяет, очевидно, условиям

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad (4)$$

а функция  $y = \cos x$  — условиям

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \quad (4')$$

В дальнейшем будет доказано, что решение уравнения (3), удовлетворяющее условиям (4) (или (4')) единственно. Поэтому функцию  $y = \sin x$  можно определить как решение уравнения (3), удовлетворяющее условиям (4); аналогично можно ввести функцию  $y = \cos x$ . Из этого определения можно вывести все свойства синуса и косинуса.

К обыкновенным дифференциальным уравнениям приводят многие задачи естествознания.

**Пример 3.** Движение материальной точки массы  $m$  под действием внешних сил описывается вторым законом Ньютона

$$ma = F.$$

Пусть точка движется по оси  $x$  и  $x(t)$  — ее абсцисса в момент времени  $t$ . Тогда функция  $x(t)$  удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F \left( t, x, \frac{dx}{dt} \right). \quad (5)$$

Пусть точка движется в трехмерном пространстве и  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  — ее радиус-вектор. Тогда

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \left( t, \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right).$$

Это соотношение — система из трех обыкновенных дифференциальных уравнений с тремя неизвестными функциями  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ .

Чтобы определить положение точки в момент времени  $t$ , необходимо, как известно из механики, знать ее положение

ние и скорость в некоторый начальный момент времени  $t_0$ . Так, чтобы выделить единственное решение уравнения Ньютона (5), необходимо задать начальные данные

$$x(t_0) = x_0, \quad \frac{dx(t_0)}{dt} = v_0. \quad (6)$$

Если задачу об отыскании всех решений дифференциального уравнения удастся свести к вычислению конечного числа интегралов и производных от известных функций и к алгебраическим операциям, то говорят, что *уравнение интегрируется в квадратурах*. К сожалению, класс таких уравнений крайне узок. Например, уравнение Ньютона (5) при произвольной правой части  $F$  интегрируется только тогда, когда сила  $F$  зависит только от одной из переменных  $t$ ,  $x$ ,  $\frac{dx}{dt}$ , т. е. уравнение имеет один из видов

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(t), \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x), \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = F\left(\frac{dx}{dt}\right).$$

*Уравнение Рикатти*

$$y' + y^2 = q(x)$$

в случае, когда  $q(x) = x^\alpha$ , интегрируется в квадратурах только тогда, когда  $\alpha = -4n/(2n-1)$ , где  $n$  — целое число или  $\alpha = -2$  (этот факт доказал Лиувилль).

Дифференциальные уравнения, которые интегрируются в квадратурах, никогда не могли удовлетворить потребностей естествознания. Поэтому для исследования дифференциальных уравнений широко применяются приближенные и численные методы их решения; первые такие методы создал еще Ньютон.

Задача теории обыкновенных дифференциальных уравнений — исследование общих свойств решений и развитие точных, асимптотических и численных методов интегрирования дифференциальных уравнений.

## § 2. Дифференциальные уравнения первого порядка

**1. Теорема существования и единственности.** Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \quad (1)$$

Здесь  $t$  — независимое переменное,  $x(t)$  — неизвестная функция и правая часть  $f(t, x)$  — заданная функция.

ОДУ вида (1) называется уравнением в нормальной форме, или уравнением, разрешенным относительно производной. Дело в том, что общий вид ОДУ первого порядка следующий:

$$F(t, x, x') = 0.$$

Такие уравнения будут рассмотрены в гл. 2.

Поставим следующую задачу: найти решение уравнения (1) такое, что

$$x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

где  $t_0, x_0$  — заданные числа. Задача (1), (2) называется задачей Коши. Условия (2) называются начальными данными или данными Коши.

Пусть  $x = \varphi(t)$  — решение уравнения (1) на интервале  $I$  оси  $t$ . График этой функции (т. е. кривая  $x = \varphi(t), t \in I$ ) называется интегральной кривой уравнения (1). Задачу Коши можно сформулировать так: найти интегральную кривую уравнения (1), проходящую через заданную точку  $(t_0, x_0)$  (рис. 1).

Фундаментальным результатом теории обыкновенных дифференциальных уравнений является следующая теорема.

**Теорема существования и единственности.**

Пусть функция  $f(t, x)$  и частная производная  $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}$  непрерывны в некоторой области  $D$  плоскости  $(t, x)$ , точка  $(t_0, x_0)$  лежит в  $D$ . Тогда

1°. Существование. В некоторой окрестности  $|t - t_0| < \delta$  точки  $t_0$  существует решение задачи Коши (1), (2).

2°. Единственность. Если  $x = \varphi_1(t), x = \varphi_2(t)$  — два решения задачи Коши (1), (2), то  $\varphi_1(t) \equiv \varphi_2(t)$  при всех значениях  $t$ , при которых оба эти решения определены.

Эта теорема имеет простую геометрическую интерпретацию. Ее можно сформулировать так. Если условия теоремы (непрерывность  $f$  и  $\frac{\partial f}{\partial x}$  в  $D$ ) выполнены, то:

через каждую точку  $(t_0, x_0)$  области  $D$  проходит интегральная кривая, и притом только одна.

Область  $D$ , таким образом, расслаивается на интегральные кривые (рис. 1).

Доказательство теоремы существования и единственности будет приведено в гл. 2, § 1. Прокомментируем эту теорему.

1°. Уравнение (1) имеет бесконечно много решений; это семейство решений зависит от одного параметра. Действительно, если фиксировать  $t_0$  и взять данные Коши вида  $x(t_0) = x_0$ , то полученные решения  $x = \varphi(t; x_0)$  будут различны при различных значениях  $x_0$ .

2°. Теорема гарантирует существование решения только в малой окрестности точки  $t_0$ , т. е. за малое время  $t$ . Это по существу, так как решение задачи Коши (1), (2) может за конечное время уйти в бесконечность.

Рассмотрим несколько типов уравнений первого порядка, которые можно проинтегрировать в квадратурах.

**2. Автономные уравнения.** Уравнение (1) называется *автономным*, если правая часть не зависит явно от времени  $t$ , т. е. уравнение имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \quad (3)$$

Функция  $f(x)$  предполагается непрерывной на некотором интервале  $I$  оси  $x$ .

Имеем  $\frac{dx}{f(x)} = dt$  и, интегрируя, получаем

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{f(x)} = t - t_0. \quad (4)$$

Если обозначить  $\int_{x_0}^x \frac{dx}{f(x)} = F(x)$ , то получим уравнение

$$F(x) = t - t_0, \quad (4')$$

которое определяет  $x$  как неявную функцию  $t$ :  $x = F^{-1}(t - t_0)$ , где  $F^{-1}$  — обратная к  $F$  функция.

Но формула (4) не дает всех решений уравнения (3); при ее выводе мы поделили на  $f(x)$ , а эта функция может обращаться в нуль!

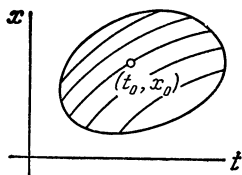


Рис. 1.

Пусть  $f(x^*) = 0$ , тогда функция

$$x(t) \equiv x^* \quad (5)$$

удовлетворяет уравнению (3).

Итак, все решения уравнения (3) даются формулами (4), (5).

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = x^2.$$

Из (4) следует, что функция

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(t - t_0)}$$

есть решение задачи Коши (3), (2). Если  $x_0 \neq 0$ , то интегральная кривая есть гипербола; если  $x_0 = 0$ , то интегральная кривая есть ось  $t$ .

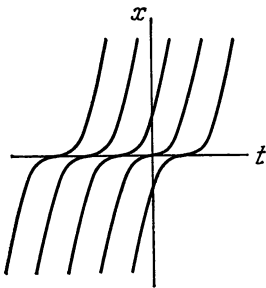


Рис. 2.

Этот пример показывает, что решение уравнения (1) может за конечное время обратиться в бесконечность. В самом деле, если  $x_0 > 0$ , то решение  $x(t; t_0, x_0)$  задачи Коши (3), (2) обращается в бесконечность при  $t = t_0 + 1/x_0$ .

Выясним, с какой скоростью должна расти правая часть  $f(x)$ , чтобы решение задачи Коши (3), (2) за конечное время могло бы обратиться в бесконечность. Пусть  $t_0 = 0$ ,  $f(x) > 0$  при  $x \geq 0$ , тогда должен сходиться интеграл  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{f(x)}$ . Если  $f(x) = x^\alpha$ , то это условие выполняется при  $\alpha > 1$ .

Пример 2. Все решения уравнения

$$\frac{dx}{dt} = 3x^{2/3}$$

даются формулой

$$x = (t - C)^3; \quad x \equiv 0,$$

где  $C$  — произвольная постоянная.

Интегральные кривые изображены на рис. 2. На оси  $x$  нарушается единственность: через каждую точку  $t = t_0$ ,

$x=0$  проходят две интегральные кривые:  $x(t) = (t - t_0)^3$  и  $x(t) \equiv 0$ .

Следовательно, на оси  $x$  должны нарушаться условия теоремы существования и единственности. Действительно, производная  $f'(x) = 2x^{-1/3}$  обращается в бесконечность при  $x=0$ .

**3. Уравнения с разделяющимися переменными.** Это уравнения вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x)g(t), \quad (6)$$

где  $f, g$  — непрерывные на интервалах  $I, J$  функции.

Имеем  $\frac{dx}{f(x)} = g(t) dt$ , откуда после интегрирования находим

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{f(x)} = \int_{t_0}^t g(t) dt \quad (7)$$

и  $x(t)$  определяется как неявная функция от  $t$ . Кроме того, если  $f(x^*) = 0$ , то уравнение (6) имеет решение  $x(t) \equiv x^*$ . Формулы (7), (5) исчерпывают все решения уравнения (6).

К уравнениям с разделяющимися переменными приводятся так называемые *однородные уравнения*

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right).$$

Введем функцию  $y = \frac{x}{t}$ , тогда  $\frac{dx}{dt} = t \frac{dy}{dt} + y$ , так что

$$\frac{dy}{dt} = \frac{f(y) - y}{t}$$

и это уравнение имеет вид (6). Уравнения вида

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{ax + bt + c}{a_1x + b_1t + c_1}\right)$$

приводятся к однородным уравнениям с помощью замены

$$ax + bt + c = \tilde{x}, \quad a_1x + b_1t + c_1 = \tilde{t},$$

если  $ab_1 - a_1b \neq 0$ . Если же  $ab_1 - a_2b = 0$ , то замена  $\tilde{x} = ax + bt$  приводит это уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

**4. Линейные уравнения.** Уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t) \quad (8)$$

называется *линейным неоднородным уравнением*. Уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x \quad (9)$$

называется *линейным однородным уравнением*.

Уравнение (9) есть уравнение с разделяющимися переменными и интегрируется:

$$\frac{dx}{x} = a(t) dt, \quad \int_{x_0}^x \frac{dx'}{x'} = \int_{t_0}^t a(t') dt',$$

так что

$$x(t) = C \exp \left\{ \int_{t_0}^t a(t') dt' \right\}, \quad (10)$$

где  $C$  — произвольная постоянная.

Будем искать решение неоднородного уравнения (8) в виде

$$x(t) = C(t) \exp \left\{ \int_{t_0}^t a(t') dt' \right\},$$

где  $C(t)$  — неизвестная функция. Подставляя в уравнение (8), получаем

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= b(t) \exp \left\{ - \int_{t_0}^t a(t') dt' \right\}, \\ C(t) &= \int_{t_0}^t b(t') \exp \left\{ - \int_{t_0}^{t'} a(\tau) d\tau \right\} dt' + C, \end{aligned}$$

где  $C$  — произвольная постоянная.

Следовательно, все решения уравнения (8) даются формулой

$$x(t) = C \exp \left\{ \int_{t_0}^t a(t') dt' \right\} + \int_{t_0}^t b(t') \exp \left\{ \int_{t'}^t a(\tau) d\tau \right\} dt', \quad (11)$$

где  $C$  — произвольная постоянная.

Пример 3. Всякое решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x,$$

где  $\lambda$  — постоянная, имеет вид

$$x = Ce^{\lambda t}.$$

Здесь  $C$  — произвольная постоянная.

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dr}{d\varphi} = r - 1,$$

где  $(r, \varphi)$  — полярные координаты на плоскости. Проинтегрируем это уравнение непосредственно:

$$\frac{dr}{r-1} = d\varphi, \quad \ln|r-1| = \varphi + \ln C, \quad |r-1| = Ce^{\varphi},$$

где  $C$  — произвольная неотрицательная постоянная. При  $C=0$  интегральная кривая есть окружность  $r=1$ . Далее, если  $r > 1$ , то  $r = 1 + Ce^{\varphi}$ . Эта кривая — спираль, которая при  $\varphi \rightarrow -\infty$  наматывается на окружность  $r=1$ , а при  $\varphi \rightarrow +\infty$  уходит на бесконечность (рис. 3). Если  $r < 1$ , то  $r = 1 - Ce^{\varphi}$ ; эта кривая — спираль, которая при  $\varphi \rightarrow -\infty$  наматывается на окружность  $r=1$ , а при  $\varphi = -\ln C$  входит в начало координат.

**5. Уравнения в полных дифференциалах.** Уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

можно записать в виде

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0. \quad (12)$$

Оно называется *уравнением в полных дифференциалах*, если левая часть есть дифференциал некоторой функции

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = df(x, y), \quad (13)$$

и в этом случае легко интегрируется:

$$f(x, y) = C.$$

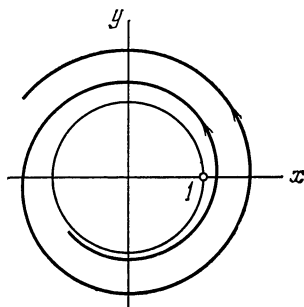


Рис. 3.



Полученное соотношение определяет  $y$  как неявную функцию  $x$ .

Пример 5. Уравнение

$$y dx + x dy = 0$$

есть уравнение в полных дифференциалах:  $d(xy) = 0$ , так что все его решения даются формулой  $xy = C$ , где  $C$  — произвольная постоянная. При  $C \neq 0$  интегральные кривые — гиперболы, при  $C = 0$  имеем  $y \equiv 0$ . Через точки оси  $y$  (кроме точки  $(0, 0)$ ) не проходит ни одной интегральной кривой, так что в этих точках должны нарушаться условия теоремы существования и единственности. Действительно, правая часть уравнения  $y' = -y/x$  обращается в бесконечность при  $x = 0$ ,  $y \neq 0$ .

*Теорема.* Пусть функции  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  непрерывно дифференцируемы в области  $D$ . Для того чтобы уравнение (12) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (x, y) \in D. \quad (14)$$

Если область  $D$  — односвязная, то условие (14) является достаточным.

*Доказательство.* Пусть (12) есть уравнение в полных дифференциалах, тогда из (13) находим

$$P = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Дифференцируя первое из этих соотношений по  $y$ , второе — по  $x$ , получаем (14). Пусть  $D$  — односвязная область и условие (14) выполнено. Рассмотрим интеграл

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \quad (15)$$

который берется по кривой  $\gamma$ , лежащей в  $D$  и соединяющей точки  $(x_0, y_0)$ ,  $(x, y)$ ; точка  $(x_0, y_0) \in D$  фиксирована. Из теоремы о независимости интеграла от пути интегрирования следует, что интеграл (15) не зависит от  $\gamma$ , а есть функция только от верхнего предела интегрирования  $(x, y)$ . Обозначим полученную функцию  $f(x, y)$ , тогда всюду в области  $D$  выполняется (13).

Функция  $\mu(x, y) \neq 0$  называется *интегрирующим множителем* для уравнения (12), если оно становится уравнением в полных дифференциалах после умножения на  $\mu$ :

$$\mu P dx + \mu Q dy = df.$$

Функция  $\mu$ , как следует из теоремы, должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q). \quad (16)$$

Это линейное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка, и его интегрирование, вообще говоря, ничуть не проще, чем интегрирование исходного уравнения (12). Отметим один частный случай, когда интегрирующий множитель удается найти.

**Пример 6.** Пусть  $P, Q$  — однородные функции одной и той же степени однородности, т. е.

$$P(tx, ty) = t^m P(x, y), \quad Q(tx, ty) = t^m Q(x, y) \quad (17)$$

при всех  $t$ , где  $m$  — целое число. Пусть  $m \geq 1$  и функции  $P, Q$  непрерывно дифференцируемы при всех  $x, y$  для простоты. Интегрирующий множитель равен  $\mu = (xP + yQ)^{-1}$ , если выражение в скобках не обращается в нуль. Проверим, что выполняется соотношение (16). После простых преобразований оно приводится к виду

$$Q(xP'_x + yP'_y) = P(xQ'_x + yQ'_y). \quad (18)$$

Продифференцируем первое из соотношений (17) по  $t$  и затем положим  $t = 1$ , тогда получим

$$xP'_x(x, y) + yP'_y(x, y) = mP(x, y).$$

Это соотношение называется *тождеством Эйлера для однородных функций*. Такое же тождество справедливо для функции  $Q$ , так что обе части соотношения (18) равны  $mPQ$ .

**6. Метод введения параметра.** Рассмотрим уравнение

$$F(y, y') = 0.$$

Если из этого уравнения можно выразить  $y'$  через  $y$ :  $y' = f(y)$ , то мы получим автономное уравнение (см. п. 2). Пусть  $y$  выражается явно через  $y'$ :

$$y = f(y'). \quad (19)$$

Введем новую независимую переменную

$$p = y',$$

т. е. будем рассматривать  $x$  и  $y$  как функции от параметра  $p$ . Из (19) находим  $y = f(p)$ . Дифференцируем уравнение (19) по  $x$ :

$$p = f'(p) \frac{dp}{dx}, \quad dx = p^{-1} f'(p) dp$$

и окончательно получаем параметрическое представление интегральной кривой:

$$x = \int_{p_0}^p p^{-1} f'(p) dp + C, \quad y = f(p). \quad (20)$$

Аналогично интегрируется уравнение вида

$$F(x, y') = 0,$$

если  $x$  явно выражается через  $y'$ :  $x = f(y')$ . В этом случае имеем

$$x = f(p), \quad dy = p dx = p f'(p) dp$$

и окончательно получаем

$$x = f(p), \quad y = \int_{p_0}^p p f'(p) dp + C.$$

## 7. Уравнение Бернулли. Уравнение

$$y' + \varphi(x)y = \psi(x)y^n$$

приводится к линейному с помощью подстановки

$$z = y^{1-n}.$$

Имеем

$$z' = (1-n)y^{-n}y'; \quad y^{-n}y' + \varphi(x)y^{1-n} = \psi(x),$$

так что для  $z$  получаем линейное уравнение первого порядка:

$$z' + (1-n)\varphi(x)z = (1-n)\psi(x).$$

## § 3. Линейные дифференциальные уравнения.

### Принцип суперпозиции

**1. Линейные уравнения.** Дифференциальное уравнение называется *линейным*, если неизвестная функция и все ее производные входят в уравнение линейно.

Линейное дифференциальное уравнение порядка  $n$  имеет вид

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x). \quad (1)$$

Здесь  $y(x)$  — неизвестная,  $a_1(x), \dots, a_n(x), f(x)$  — известные функции.

Обозначим  $l(y)$  левую часть уравнения (1); тогда оно примет вид

$$l(y) = f(x). \quad (2)$$

Выражение

$$l(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y \quad (3)$$

называется *линейным дифференциальным оператором порядка  $n$* . Уравнение (1) называется *неоднородным*, если правая часть  $f(x)$  не равна нулю тождественно. Если  $f(x) \equiv 0$ , то уравнение называется *однородным* и имеет вид

$$l(y) = 0. \quad (4)$$

**2. Принцип суперпозиции.** Будем предполагать, что функции  $a_1(x), \dots, a_n(x), f(x)$  непрерывны, функции  $y_j(x)$ ,  $n$  раз непрерывно дифференцируемы на некотором интервале  $I = (a, b)$ . Всюду в дальнейшем  $x \in I$ .

*Лемма 1. Если  $\alpha_1, \alpha_2$  — постоянные, то*

$$l(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 l(y_1) + \alpha_2 l(y_2). \quad (5)$$

Это свойство называется *линейностью* оператора  $l$ .

*Доказательство.* Так как  $\alpha_1, \alpha_2$  — постоянные, то

$$(\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x))^{(k)} = \alpha_1 y_1^{(k)}(x) + \alpha_2 y_2^{(k)}(x).$$

Умножая обе части на  $a_{n-k}(x)$  и суммируя полученные выражения при  $k=0, 1, \dots, n$ , получаем (5).

**Теорема 1.** 1°. *Принцип суперпозиции. Если  $y_1(x), y_2(x)$  — решения однородного уравнения  $l(y) = 0$ , то их линейная комбинация*

$$y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$$

*при любых постоянных  $\alpha_1, \alpha_2$  является решением однородного уравнения.*

2°. *Если  $y_1(x), y_2(x)$  — решения неоднородного уравнения (2), то их разность*

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

*есть решение однородного уравнения (4).*

Доказательство. 1°. Применяя лемму 1, получаем

$$l(\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)) = \alpha_1 l(y_1(x)) + \alpha_2 l(y_2(x)) = 0.$$

2°. По условию,

$$l(y_1(x)) = f(x), \quad l(y_2(x)) = f(x),$$

так что, в силу линейности оператора  $l$ ,

$$l(y_1(x) - y_2(x)) = l(y_1(x)) - l(y_2(x)) = 0.$$

Свойство 2° удобно бывает сформулировать иначе.

3°. *Всякое решение неоднородного уравнения (1) есть сумма частного (т. е. фиксированного) решения неоднородного уравнения и некоторого решения однородного уравнения.*

Действительно, пусть  $y_0(x)$  — фиксированное (частное) решение уравнения (1),  $y(x)$  — произвольное решение этого уравнения. Тогда

$$y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x),$$

где  $\tilde{y}(x) = y(x) - y_0(x)$  — решение однородного уравнения, в силу 2°.

#### § 4. Линейное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами

1. **Формулы для решений.** Всякое решение уравнения

$$y' - \lambda y = 0, \tag{1}$$

где  $\lambda$  — постоянная, имеет вид

$$y = C e^{\lambda x}, \tag{2}$$

где  $C$  — постоянная (§ 2, пример 3).

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение первого порядка со специальной правой частью

$$y' - \lambda y = P_m(x) e^{\mu x}. \tag{3}$$

Здесь  $\mu$  — постоянная,  $P_m(x)$  — многочлен степени  $m$ .

**Теорема 1.** *Уравнение (3) имеет частное решение вида*

$$y = Q_m(x) e^{\mu x}, \tag{4}$$

если  $\mu \neq \lambda$ , и вида

$$y = x Q_m(x) e^{\mu x}, \tag{5}$$

если  $\mu = \lambda$ . Здесь  $Q_m(x)$  — многочлен степени  $m$ .

Доказательство. Будем искать решение уравнения (3) в виде

$$y = e^{\mu x} z, \quad (6)$$

тогда для функции  $z(x)$  получим уравнение

$$z' + (\mu - \lambda) z = P_m(x). \quad (7)$$

Имеем

$$P_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m, \quad a_0 \neq 0.$$

Пусть  $\mu = \lambda$ , тогда функция

$$z = \int_0^x P_m(t) dt = x \left( a_0 \frac{x^m}{m+1} + \dots + a_m \right)$$

есть решение уравнения (7), так что уравнение (3) имеет частное решение вида (5).

Пусть  $\mu \neq \lambda$ ; будем искать решение  $z(x)$  в виде многочлена степени  $m$ :

$$z = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m$$

с неопределенными коэффициентами  $b_0, b_1, \dots, b_m$ . Подставляя в уравнение (7), получаем

$$\begin{aligned} (\mu - \lambda) b_0 x^m + [(\mu - \lambda) b_1 + m b_0] x^{m-1} + \dots = \\ = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots \end{aligned}$$

Приравнивая слева и справа коэффициенты при  $x^m, x^{m-1}, \dots$ , последовательно находим

$$b_0 = a_0 / (\mu - \lambda), \quad b_1 = (a_1 - m b_0) / (\mu - \lambda), \dots$$

Так как всякое решение неоднородного уравнения (3) есть сумма решения однородного уравнения (оно имеет вид (2)) и частного решения неоднородного уравнения, то мы нашли все решения уравнения (3). Введем

*Определение.* Квазимногочленом называется функция вида

$$f(x) = e^{\lambda_1 x} P_1(x) + e^{\lambda_2 x} P_2(x) + \dots + e^{\lambda_k x} P_k(x), \quad (8)$$

где  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  — постоянные,  $P_1(x), \dots, P_k(x)$  — многочлены.

Теорема 1 позволяет найти все решения уравнения

$$y' - \lambda y = f(x) \quad (9)$$

в случае, когда  $f(x)$  — квазимногочлен. Действительно, достаточно найти частные решения уравнений  $y' - \lambda y = P_j(x)e^{\lambda_j x}$  (что можно сделать с помощью теоремы 1); их сумма будет частным решением уравнения (9)).

**2. Комплексные функции вещественного аргумента. Комплексная экспонента.** Уже в следующем параграфе нам понадобится знать решения уравнения (1) в случае, когда  $\lambda$  — комплексное число. При этом решение  $y(x)$  будет комплекснозначной функцией вещественной переменной  $x$ .

Определим экспоненту  $e^{\lambda x}$  при комплексных значениях  $\lambda$ . Если  $\lambda = i\beta$  ( $\beta$  вещественно,  $i$  — мнимая единица), то по формуле Эйлера имеем

$$e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x.$$

Пусть  $\lambda = \alpha + i\beta$ , где  $\alpha, \beta$  — вещественные числа. Положим по определению

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x). \quad (10)$$

Функция  $e^{\lambda x}$  при вещественных  $\lambda$  обладает следующими свойствами:

$$1^\circ. e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x}.$$

$$2^\circ. e^{\lambda x} e^{-\lambda x} = 1.$$

$$3^\circ. \frac{d}{dx} e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}.$$

$$4^\circ. \int_{x_0}^x e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} \Big|_{x_0}^x \quad (\lambda \neq 0).$$

Покажем, что все эти формулы верны при комплексных значениях  $\lambda$ . Докажем  $1^\circ$ . Пусть  $\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ ,  $\lambda_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ ,

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} &= e^{(\alpha_1 + \alpha_2)x} [\cos \beta_1 x \cos \beta_2 x - \sin \beta_1 x \sin \beta_2 x + \\ &\quad + i (\sin \beta_1 x \cos \beta_2 x + \sin \beta_2 x \cos \beta_1 x)] = \\ &= e^{(\alpha_1 + \alpha_2)x} [\cos (\beta_1 + \beta_2)x + i \sin (\beta_1 + \beta_2)x] = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$e^{\lambda x} e^{-\lambda x} = e^{(\lambda - \lambda)x} = 1,$$

и  $2^\circ$  также доказано.

Прежде чем доказывать соотношения 3° и 4°, необходимо ввести понятие производной от функции, принимающей комплексные значения. Пусть функция  $f(x)$  определена на интервале  $I = (a, b)$  вещественной оси и принимает комплексные значения. Тогда ее можно представить в виде

$$f(x) = u(x) + iv(x), \quad (11)$$

где функции  $u(x)$ ,  $v(x)$  принимают вещественные значения.

По определению, комплекснозначная функция  $f(x)$  называется *непрерывной* в точке  $x_0$ , если в этой точке *непрерывны функции  $u(x)$ ,  $v(x)$* . Функция называется *дифференцируемой* (дважды дифференцируемой и т. д.) в точке  $x_0$ , если в этой точке *дифференцируемы (дважды дифференцируемы и т. д.) функции  $u(x)$ ,  $v(x)$* . Производные функции  $f(x)$  определяются так:

$$f^{(n)}(x) = u^{(n)}(x) + iv^{(n)}(x),$$

т. е. соотношение (11) дифференцируется по обычным правилам, причем мнимая единица  $i$  считается постоянной. Интеграл от функции  $f(x)$  определяется так:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx.$$

Докажем 3°. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} e^{\lambda x} &= -e^{\alpha x} \beta \sin \beta x + e^{\alpha x} \alpha \cos \beta x + \\ &+ i(e^{\alpha x} \beta \cos \beta x + e^{\alpha x} \alpha \sin \beta x) = \\ &= e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) (\alpha + i\beta) = \lambda e^{\lambda x}. \end{aligned}$$

Соотношение 4° следует из 3°.

**Теорема 2.** Пусть  $\lambda$ ,  $\mu$  — комплексные числа,  $P_m(x)$  — многочлен степени  $m$  с комплексными коэффициентами. Тогда всякое решение уравнения (1) имеет вид (2), где  $C$  — комплексная постоянная, а уравнение (3) имеет частное решение вида (4) при  $\mu \neq \lambda$  и вида (5) при  $\mu = \lambda$ .

Доказательство этой теоремы дословно то же, что и при вещественных  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $P_m(x)$ .

Приведем еще одну формулу для комплексной экспоненты:

$$5^\circ. |e^{\lambda x}| = e^{\alpha x} \quad (\lambda = \alpha + i\beta).$$



Действительно,

$$\begin{aligned} |e^{i\beta x}| &= \sqrt{\cos^2 \beta x + \sin^2 \beta x} = 1, \\ |e^{(\alpha+i\beta)x}| &= |e^{\alpha x}| |e^{i\beta x}| = e^{\alpha x}. \end{aligned}$$

## § 5. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

**1. Алгебраический характер задачи.** Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение порядка  $n$

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad (1)$$

с постоянными комплексными коэффициентами  $a_1, \dots, a_n$ . Интегрирование этого уравнения сводится к задаче алгебры, а именно, к решению алгебраического уравнения  $n$ -й степени.

Чтобы установить алгебраический характер задачи об интегрировании уравнения (1), рассмотрим многочлен от символа  $D = \frac{d}{dx}$ :

$$l(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n. \quad (2)$$

Коэффициенты этого многочлена те же, что и в (1). Условимся обозначать

$$l(D)y = D^n y + a_1 D^{n-1} y + \dots + a_n y.$$

Так как  $D^k y = y^{(k)}$ , то уравнение (1) можно записать в виде

$$l(D)y = 0. \quad (3)$$

Отображение  $y \rightarrow l(D)y$  переводит функцию  $y(x)$  в функцию  $[l(D)y](x)$ . Это отображение называется *линейным дифференциальным оператором порядка  $n$  с постоянными коэффициентами*; будем обозначать оператор символом  $l(D)$ , т. е. так же, как и многочлен (2).

Определим сумму и произведение двух дифференциальных операторов:

$$a(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n,$$

$$b(D) = b_0 D^m + b_1 D^{m-1} + \dots + b_m$$

с постоянными коэффициентами  $a_j, b_j$ . Суммой этих операторов назовем оператор, переводящий функцию  $y$  в функ-

цию  $a(D)y + b(D)y$ . Из известных свойств производной следует, что

$$a(D)y + b(D)y = [a(D) + b(D)]y.$$

Поэтому сумма операторов  $a(D)$  и  $b(D)$  есть оператор  $a(D) + b(D)$ .

*Произведением* оператора  $b(D)$  на оператор  $a(D)$  называется оператор, действующий по формуле  $a(D)[b(D)y]$ , т. е. сначала вычисляется функция  $b(D)y$  (результат действия оператора  $b(D)$ ), а затем к этой функции применяется оператор  $a(D)$ . Покажем, что

$$a(D)[b(D)y] = b(D)[a(D)y] = [a(D)b(D)]y, \quad (4)$$

т. е. произведение операторов  $a(D)$ ,  $b(D)$  не зависит от порядка сомножителей и есть оператор  $a(D)b(D)$ . Ограничимся, для простоты, операторами первого порядка:  $a(D) = a_0D + a_1$ ,  $b(D) = b_0D + b_1$ . Имеем

$$\begin{aligned} a(D)[b(D)y] &= (a_0D + a_1)(b_0y' + b_1y) = \\ &= a_0b_0y'' + (a_1b_0 + a_0b_1)y' + a_1b_1y = \\ &= [a_0b_0D^2 + (a_1b_0 + a_0b_1)D + a_1b_1]y = \\ &= [a(D)b(D)]y. \end{aligned}$$

Точно так же (4) доказывается для операторов  $a(D)$ ,  $b(D)$  любых порядков.

**2. Случай простых корней.** Рассмотрим многочлен

$$l(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n,$$

который называется *характеристическим многочленом* уравнения (1). Как известно из алгебры, многочлен  $l(\lambda)$  разлагается на множители

$$l(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_m), \quad (5)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — корни уравнения

$$l(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (6)$$

которое называется *характеристическим* для уравнения (1).

**Теорема 1.** Пусть корни  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  характеристического уравнения различны. Тогда всякое решение уравнения (1) имеет вид

$$y = C_1e^{\lambda_1x} + C_2e^{\lambda_2x} + \dots + C_n e^{\lambda_nx}, \quad (7)$$

где  $C_1, \dots, C_n$  — постоянные, и всякая функция вида (7) есть решение уравнения (1).

Доказательство. Оператор  $l(D)$  разлагается в произведение линейных сомножителей

$$l(D) = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2) \dots (D - \lambda_n). \quad (8)$$

Действительно, многочлен  $l(\lambda)$  разлагается на множители (см. (5)), а многочлены от символа  $D$  перемножаются по тем же правилам, что и многочлены от  $\lambda$ .

Разложение (8) позволяет свести интегрирование уравнения  $n$ -го порядка (1) к интегрированию уравнений первого порядка. Применим индукцию; при  $n=1$  теорема доказана в § 4. Совершим переход по индукции от  $n-1$  к  $n$ . Представим  $l(D)$  в виде

$$l(D) = l_1(D)(D - \lambda_n), \quad l_1(D) = (D - \lambda_1) \dots (D - \lambda_{n-1})$$

и положим  $z = (D - \lambda_n)y$ . Тогда для  $z$  получим уравнение  $l_1(D)z = 0$ , всякое решение которого имеет вид

$$z \equiv y' - \lambda_n y = A_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + A_{n-1} e^{\lambda_{n-1} x},$$

по предположению индукции. Здесь  $A_1, \dots, A_{n-1}$  — постоянные. Мы получили уравнение первого порядка относительно  $y$  с правой частью — квазимногочленом, причем  $\lambda_n$  не совпадает с  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ . Решение однородного уравнения  $y' - \lambda_n y = 0$  есть  $y = C_n e^{\lambda_n x}$ , где  $C_n$  — произвольная постоянная, а неоднородное уравнение имеет частное решение  $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + C_{n-1} e^{\lambda_{n-1} x}$ . Тем самым доказано, что всякое решение уравнения (1) имеет вид (7). Проверим, что всякая функция вида (7) удовлетворяет уравнению (1). Имеем

$$l(D) e^{\lambda x} = (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n) e^{\lambda x} = l(\lambda) e^{\lambda x}.$$

Так как  $l(\lambda_1) = 0, \dots, l(\lambda_n) = 0$ , то  $l(e^{\lambda_j x}) = 0$ ,  $1 \leq j \leq n$ , а потому функции  $e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$  и любые их линейные комбинации — решения уравнения (1).

**3. Случай кратных корней.** Пусть среди корней  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  характеристического уравнения имеются одинаковые. Тогда  $l(\lambda)$  можно представить в виде

$$l(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{k_s}.$$

Здесь  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  различны,  $k_1, k_2, \dots, k_s$  — положительные целые числа. Корень  $\lambda_j$  называется *простым*, если  $k_j = 1$ , и *кратным*, если  $k_j \geq 2$ . Число  $k_j$  называется *кратностью корня*  $\lambda_j$  характеристического уравнения.

**Теорема 2.** Пусть характеристическое уравнение имеет корни  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  кратностей  $k_1, \dots, k_s$ , соответственно. Тогда всякое решение уравнения (1) имеет вид

$$y = P_1(x)e^{\lambda_1 x} + P_2(x)e^{\lambda_2 x} + \dots + P_s(x)e^{\lambda_s x}, \quad (9)$$

где  $P_j(x)$  — многочлен степени  $k_j - 1$ , и всякая функция вида (9) есть решение уравнения (1).

Доказательство проведем по индукции. Представим оператор  $l(D)$  в виде

$$l(D) = l_1(D)(D - \lambda_s); \quad l_1(D) = (D - \lambda_1)^{k_1} \dots (D - \lambda_{s-1})^{k_{s-1}}$$

и обозначим  $(D - \lambda_s)y = z$ , тогда для  $z$  получим уравнение  $l_1(D)z = 0$  порядка  $n - 1$ . По предположению индукции имеем

$$z \equiv y' - \lambda_s y = Q_1(x)e^{\lambda_1 x} + \dots + Q_{s-1}(x)e^{\lambda_{s-1} x} + Q_s(x)e^{\lambda_s x}.$$

Здесь  $Q_1(x), \dots, Q_{s-1}(x)$  — многочлены степеней  $k_1 - 1, \dots, k_{s-1} - 1$ ,  $Q_s(x)$  — многочлен степени  $k_s - 2$ ; если  $k_s = 1$ , то  $Q_s(x) \equiv 0$ . Мы получили уравнение первого порядка относительно  $y$  с правой частью — квазимногочленом. Если  $\lambda_s$  — простой корень, то это уравнение имеет частное решение вида

$$y_0 = P_1(x)e^{\lambda_1 x} + \dots + P_{s-1}(x)e^{\lambda_{s-1} x},$$

где  $P_j(x)$  — многочлен степени  $k_j - 1$ , а всякое решение однородного уравнения имеет вид  $y_1 = C_s e^{\lambda_s x}$ , где  $C_s$  — произвольная постоянная (§ 4). Тем самым (9) доказано. Если  $\lambda_s$  — кратный корень, то неоднородное уравнение имеет частное решение вида

$$y_0 = P_1(x)e^{\lambda_1 x} + \dots + P_{s-1}(x)e^{\lambda_{s-1} x} + xQ_s(x)e^{\lambda_s x},$$

где  $P_j(x)$  — многочлен степени  $k_j - 1$ ,  $Q_s(x)$  — многочлен степени  $k_s - 2$ . Сумма  $y_0$  и решения однородного уравнения имеет вид (9).

**4. Уравнение Эйлера.** Это уравнение вида

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0, \quad (10)$$

где  $a_1, \dots, a_n$  — постоянные,  $x > 0$ . С помощью замены переменной

$$x = e^t \quad (11)$$

уравнение Эйлера приводится к уравнению с постоянными коэффициентами. Действительно,

$$\frac{d}{dx} = e^{-t} \frac{d}{dt}; \quad x \frac{d}{dx} y = \frac{dy}{dt};$$

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} y = e^{2t} e^{-t} \frac{d}{dt} \left( e^{-t} \frac{dy}{dt} \right) = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

и аналогично можно показать, что  $x^k y^{(k)}$  есть линейная комбинация производных функции  $y$  по переменной  $t$  с постоянными коэффициентами.

Более эффективный способ интегрирования уравнения Эйлера состоит в том, что решение ищется в виде  $y = x^\lambda$ . Имеем

$$xy' = \lambda x^\lambda, \quad x^2 y'' = \lambda(\lambda - 1)x^\lambda, \quad \dots,$$

$$x^n y^{(n)} = \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1)x^\lambda.$$

Подставляя в (10) и сокращая на  $x^\lambda$ , получаем уравнение относительно  $\lambda$ :

$$\lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1) + a_1 \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 2) + \dots$$

$$\dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \quad (12)$$

которое называется *определяющим уравнением*. Если  $\lambda$  — корень определяющего уравнения, то функция

$$y = x^\lambda \quad (13)$$

есть решение уравнения Эйлера. Приведем общий вид решения уравнения Эйлера.

1°. Корни  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  определяющего уравнения различны. Тогда всякое решение уравнения Эйлера имеет вид

$$y = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2} + \dots + C_n x^{\lambda_n},$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  — произвольные постоянные.

2°. Определяющее уравнение имеет корни  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  кратностей  $k_1, \dots, k_s$  соответственно. Тогда всякое решение уравнения Эйлера имеет вид

$$y = P_1(\ln x) x^{\lambda_1} + P_2(\ln x) x^{\lambda_2} + \dots + P_s(\ln x) x^{\lambda_s},$$

где  $P_j(t)$  — произвольный многочлен от  $t$  степени  $k_j - 1$ .

Замечание. Если  $\lambda$  — комплексное число, то при  $x > 0$ , по определению,

$$x^\lambda = e^{\lambda \ln x}.$$

**5. Выделение вещественных решений.** Во многих прикладных задачах коэффициенты уравнения (1) вещественны, и требуется найти все вещественные решения этого уравнения. Процедура выделения вещественных решений не зависит от того, постоянны или переменны коэффициенты уравнения, и мы рассмотрим уравнение

$$l(y) \equiv y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0 \quad (14)$$

с переменными коэффициентами.

*Лемма 1.* Если коэффициенты уравнения (14) вещественны и  $y(x)$  — его решения, то его вещественная и мнимая части

$$u(x) = \operatorname{Re} y(x), \quad v(x) = \operatorname{Im} y(x)$$

также являются решениями.

*Доказательство.* Имеем  $y(x) = u(x) + iv(x)$ . Подставляя в уравнение (14), получаем

$$l(y) = l(u) + il(v) = 0.$$

Функции  $l(u)$ ,  $l(v)$  вещественны, а потому  $l(u) = 0$ ,  $l(v) = 0$ .

*Лемма 2.* Если коэффициенты характеристического уравнения (6) вещественны и  $\lambda$  — корень уравнения, то  $\bar{\lambda}$  — также корень уравнения.

*Доказательство.* Имеем

$$\overline{l(\lambda)} = \overline{\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n} = \bar{\lambda}^n + a_n\bar{\lambda}^{n-1} + \dots + a_n = l(\bar{\lambda}),$$

так как  $a_1, \dots, a_n$  вещественны, и если  $l(\lambda) = 0$ , то  $l(\bar{\lambda}) = 0$ .

Пусть коэффициенты уравнения (1) вещественны; ограничимся случаем простых корней. Если  $\lambda_0$  — вещественный корень, то функция  $y_0 = e^{\lambda_0 x}$  есть вещественное решение. Пусть  $\lambda = \alpha + i\beta$ ,  $\beta \neq 0$ , — комплексный корень, тогда уравнение (1) имеет решение  $y = e^{\alpha x} e^{i\beta x}$ . В силу леммы 1 функции

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

будут (вещественными) решениями. Комплексному решению  $y = e^{\bar{\lambda}x}$  отвечает та же (с точностью до множителя) пара вещественных решений. Можно показать, что всякое вещественное решение уравнения (1) есть линейная комбинация

с вещественными коэффициентами решений вида  $y_0$ ,  $y_1$ ,  $y_2$ , т. е.

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + C_k e^{\lambda_k x} + A_1 e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x + \\ + B_1 e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x + \dots + A_s e^{\alpha_s x} \cos \beta_s x + B_s e^{\alpha_s x} \sin \beta_s x,$$

где  $C_j$ ,  $A_j$ ,  $B_j$  — вещественные постоянные.

## § 6. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

### 1. Гармонические колебания. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (1)$$

где  $\omega > 0$  — постоянная. Характеристическое уравнение есть  $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ , так что  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$  и всякое вещественное решение уравнения (1) имеет вид

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \quad (2)$$

где  $C_1$ ,  $C_2$  — произвольные постоянные. Это решение можно записать в виде

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi), \quad (3)$$

где  $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ ,  $\cos \varphi = C_1/A$ ,  $\sin \varphi = C_2/A$ . Чтобы выделить единственное решение, необходимо задать значения функции  $x(t)$  и ее производной  $\dot{x}(t)$  в некоторый момент времени  $t = t_0$ . Пусть  $t_0 = 0$  для простоты, тогда начальные данные таковы:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1. \quad (4)$$

Будем считать, что  $x(t)$  есть координата в момент времени  $t$  частицы, движущейся по оси  $x$ , и пусть ее начальная скорость  $x_1$  положительна. Тогда частица будет двигаться вправо, пока не дойдет до точки  $x = A$ , где  $A = \sqrt{x_0^2 + x_1^2/\omega^2}$  (эта формула следует из сравнения (3) и (4)). Затем частица поворачивает налево и движется до точки  $x = -A$ , и т. д. (рис. 4). Таким образом, частица совершает периодические колебания; число  $A$  называется

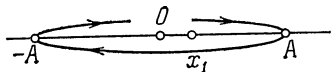


Рис. 4.

амплитудой колебаний. Колебания совершаются с периодом  $T = 2\pi/\omega$ . В данном случае период колебаний не зависит от амплитуды (иначе обстоит дело для нелинейных периодических колебаний — гл. IV, § 5).

Механическая или физическая система, которая описывается уравнением (1), называется *гармоническим осциллятором*. Примеры таких систем:

1°. Малые колебания маятника.

2°. Малые колебания груза, подвешенного на упругой пружине, под действием силы тяжести.

3°. Электрические колебания в контуре, состоящем из емкости  $C$  и индуктивности  $L$ .

**2. Ангармонические колебания.** Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + 2a\dot{x} + bx = 0, \quad (5)$$

где  $a, b$  — вещественные постоянные. Корни характеристического уравнения  $\lambda^2 + 2a\lambda + b = 0$  равны

$$\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - b}. \quad (6)$$

Возможны несколько вариантов, в зависимости от соотношения между числами  $a, b$ .

1°. *Затухающие гармонические колебания.* Пусть  $a > 0$ ,  $a^2 < b$ , тогда  $\lambda_{1,2} = -a \pm i\sqrt{b - a^2}$ , и все вещественные решения уравнения (5) имеют вид

$$x = e^{-at} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t), \quad \omega = \sqrt{b - a^2},$$

где  $C_1, C_2$  — произвольные вещественные постоянные. Решения можно записать в виде, аналогичном (3):

$$x(t) = Ae^{-at} \cos(\omega t - \varphi). \quad (7)$$

Эта функция — непериодическая; но ее нули, а также максимумы и минимумы периодически повторяются, с периодом  $T = 2\pi/\omega$ , который равен периоду гармонического осциллятора, частота колебаний которого равна  $\omega$ . Колебания, которые описываются формулой (6) — *затухающие*, так как  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$  (график см.

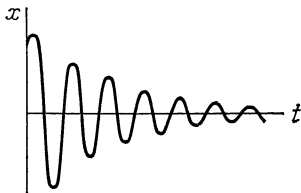


Рис. 5.

на рис. 5). Величина  $Ae^{-at}$  называется *амплитудой* колебаний. Величина  $\delta = a$  называется *коэффициентом затухания*. Она равна  $\delta = 1/\tau$ , где  $\tau$  — промежуток времени, за который амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз. Действительно,  $Ae^{-a(t+\tau)}/Ae^{-at} = e^{-a\tau} = e^{-1} = 1/e$ . Величина  $d = \delta T$  (т. е.  $d = 2\pi\delta/\omega$ ) назы-



вается *логарифмическим декрементом* затухания. Эта величина показывает, насколько убывает амплитуда функции  $\cos(\omega t - \varphi)$  за один период. Пусть  $N$  — число колебаний, после которых амплитуда уменьшается в  $e$  раз. Тогда

$$\tau = NT, \quad d = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}.$$

Следовательно,  $d$  — это величина, обратная числу колебаний, после которых амплитуда уменьшается в  $e$  раз. Логарифмический декремент (часто говорят просто «декремент») есть «естественная» мера быстроты затухания колебаний, поскольку естественным масштабом времени для каждого колебания есть его длительность  $T$ .

Для характеристики колебательных контуров употребляется еще величина  $Q$  — *добротность контура*:

$$Q = \frac{\pi}{d} = \pi N.$$

Добротность контура тем больше, чем дольше длятся колебания контура — в естественном масштабе времени для контура, где единица измерения времени есть  $T$ .

Запишем уравнение (5) в виде второго закона Ньютона:

$$m\ddot{x} = m(-2a\dot{x} - bx) \equiv F.$$

Слагаемое в правой части  $-2ma\dot{x}$  можно интерпретировать как силу, пропорциональную скорости  $\dot{x}$  частицы и направленную в сторону, противоположную направлению движения частицы. Так действует, например, сила трения (в простейшей модели). Ясно, что эта сила тормозит движение частицы, что и приводит к затуханию колебаний; но лучшим объяснением их затухания является формула (7). Затухающие гармонические колебания возникают в линейных системах с потерями (например, в электрическом колебательном контуре, в цепь которого включено сопротивление).

2°. *Апериодический процесс.* Пусть по-прежнему  $a > 0$ , но  $a^2 > b$ , тогда корни  $\lambda_{1,2}$  оба вещественны и отрицательны, если  $b > 0$ .

Решение имеет вид

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0)$$

и не колеблется (рис. 6). Это отвечает наличию большого трения или больших потерь в системе.

3°. Остается исследовать случай  $a > 0$ . Решения имеют вид

$$x(t) = Ae^{|a|t} \cos(\omega t - \varphi) \quad (a^2 < b),$$

$$x(t) = Ae^{|a|t} (C_1 e^{t\sqrt{a^2-b}} + C_2 e^{-t\sqrt{a^2-b}}) \quad (a^2 > b).$$

В первом случае амплитуда колебаний  $Ae^{|a|t}$  неограниченно возрастает со временем. Такой процесс может описываться линейным уравнением только на конечном промежутке времени, так как колебания с большими амплитудами нелинейны. Во втором случае при  $b < 0$  амплитуда колебаний также неограниченно возрастает. При  $b > 0$  имеется единственное (с точностью до множителя) убывающее решение:

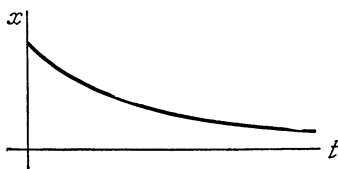


Рис. 6.

$$x(t) = e^{(|a| - \sqrt{a^2 - b})t}$$

и только оно имеет физический смысл при изучении малых колебаний.

## § 7. Линейные уравнения с правой частью — квазимногочленом

Частное решение неоднородного линейного дифференциального уравнения вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = P_m(x) e^{\mu x}, \quad (1)$$

где  $P_m(x)$  — многочлен степени  $m$ , может быть найдено элементарно.

**Теорема. 1°.** Нерезонансный случай. Пусть  $\mu$  не является корнем характеристического уравнения. Тогда уравнение (1) имеет частное решение вида

$$y = Q_m(x) e^{\mu x}, \quad (2)$$

где  $Q_m(x)$  — многочлен степени  $m$ .

**2°.** Резонансный случай. Пусть  $\mu$  — корень характеристического уравнения, кратности  $k$ . Тогда уравнение (1) имеет частное решение вида

$$y = x^k Q_m(x) e^{\mu x}, \quad (3)$$

где  $Q_m(x)$  — многочлен степени  $m$ .

Доказательство. Применим индукцию по  $n$ ; при  $n = 1$  формулы (2), (3) доказаны в § 4. Разложим оператор

$$l(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n$$

на множители:

$$l(D) = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2) \dots (D - \lambda_n)$$

и обозначим

$$z = (D - \lambda_n)y, \quad l_1(D) = (D - \lambda_1) \dots (D - \lambda_{n-1}).$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$l_1(D)z = P_m(x)e^{\mu x}. \quad (4)$$

Пусть  $\mu$  не является корнем уравнения  $l(\lambda) = 0$ , тогда, по предположению индукции, уравнение (4) имеет частное решение вида

$$z \equiv y' - \lambda_n y = R_m(x)e^{\mu x},$$

где  $R_m(x)$  — многочлен степени  $m$ . Полученное уравнение для  $y$  первого порядка имеет частное решение вида (2), так как  $\mu \neq \lambda_n$  (§ 4).

Пусть  $\mu$  — корень характеристического уравнения, кратности  $k$ . Если  $k < n$ , то выберем  $\lambda_n \neq \mu$ . По предположению индукции уравнение (4) имеет частное решение вида

$$z \equiv y' - \lambda_n y = x^k R_m(x)e^{\mu x},$$

где  $R_m(x)$  — многочлен степени  $m$ . Полученное уравнение для  $y$  первого порядка имеет частное решение вида (3) (§ 4).

Если  $n = k$ , то получаем

$$y' - \mu y = x^{n-1} R_m(x)e^{\mu x}$$

и это уравнение имеет частное решение вида  $y = x^n Q_m(x)e^{\mu x}$ .

Следующая лемма полезна при практическом отыскании частных решений уравнения (1).

Лемма 1. Если  $l(D)$  — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, то справедлива формула сдвига:

$$l(D)(e^{\mu x} y) = e^{\mu x} l(D + \mu)y. \quad (5)$$

Доказательство. По формуле Лейбница имеем

$$D^k (e^{\mu x} y) = \sum_{j=0}^k C_k^j (e^{\mu x})^{(j)} y^{(k-j)} = \\ = e^{\mu x} \sum_{j=0}^k C_k^j \mu^j D^{k-j} y = e^{\mu x} (D + \mu)^k y.$$

Следовательно,

$$l(D) (e^{\mu x} y) = e^{\mu x} [a_0 (D + \mu)^n y + \\ + a_1 (D + \mu)^{n-1} y + \dots + a_n y] = e^{\mu x} l(D + \mu) y.$$

Приведем алгоритм построения частного решения. Пусть  $\mu$  — корень характеристического уравнения кратности  $k \geq 0$  (если  $k=0$ , то  $l(\mu) \neq 0$ ). Сделаем замену

$$y = e^{\mu x} z. \quad (6)$$

Применяя формулу сдвига, получаем для  $z$  уравнение

$$\tilde{l}(D) z = Q_m(x), \quad (7)$$

где  $\tilde{l}(D) = l(D + \mu)$ . Теперь ищем  $z$  в виде многочлена

$$z = b_0 x^{k+m} + b_1 x^{k+m-1} + \dots + b_m x^k$$

с неизвестными коэффициентами  $b_0, \dots, b_m$ . Подставим выражение для  $z$  в уравнение (7) и приравняем коэффициенты при степенях  $x^{k+m}, x^{k+m-1}, \dots$  в левой и правой частях; тогда мы последовательно найдем коэффициенты  $b_0, b_1, \dots$

Пример 1. Рассмотрим уравнение Ньютона

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = F \cos \omega t. \quad (8)$$

Здесь  $\omega_0 > 0$ ,  $\omega > 0$ ,  $F \neq 0$  вещественно. Удобнее вместо уравнения (8) решать уравнение

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_0^2 z = F e^{i\omega t}. \quad (9)$$

Вещественная часть решения  $\operatorname{Re} z$  удовлетворяет уравнению (8).

1°. Пусть  $\omega \neq \omega_0$ , тогда частное решение ищем в виде  $z = A e^{i\omega t}$ . Подставляя в (9), находим  $A$ , так что всякое решение уравнения (9) имеет вид

$$z = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t} + \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2} e^{i\omega t},$$

а всякое вещественное решение уравнения (8) имеет вид

$$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t. \quad (10)$$

2°. Пусть  $\omega = \omega_0$ , тогда частное решение ищем в виде  $z = A t e^{i\omega t}$  (так как кратность  $k$  корня  $\omega_0$  уравнения  $\lambda^2 - \omega_0^2 = 0$  равна 1). Всякое решение уравнения (9) имеет вид

$$z = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t} + \frac{F t e^{i\omega_0 t}}{2i\omega_0},$$

а всякое вещественное решение уравнения (8) имеет вид

$$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{F}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t. \quad (10')$$

Приведем физическую интерпретацию формул (10), (10'). Однородное уравнение (8) (при  $F \equiv 0$ ) описывает свободные колебания материальной точки, частоты  $\omega_0$  (§ 6). Уравнение (8) описывает колебания материальной точки под действием внешней периодической силы, с частотой  $\omega$ .

Если  $\omega \neq \omega_0$ , то все решения уравнения (8) ограничены при  $-\infty < t < \infty$ , как видно из формулы (10).

Если же  $\omega = \omega_0$ , то любое решение уравнения (8) неограниченно возрастает по модулю при  $t \rightarrow +\infty$  из-за наличия слагаемого  $\frac{F}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t$  (см. (10')), т. е. колебания точки становятся неограниченными. Это явление называется *резонансом* — совпадают собственная частота колебаний  $\omega_0$  и частота колебаний внешней силы  $\omega$ . Типичным примером резонансного явления служат обычные качели, если подталкивать их «в такт».

3°. Вернемся к случаю  $\omega \neq \omega_0$  и пусть правая часть в (8) равна  $F \cos(\omega_1 t - \varphi_1)$ . Тогда

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t - \varphi_0) + A_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1), \quad (11)$$

где  $A_j, \varphi_j$  — вещественные постоянные; пусть  $A_0 \neq 0, A_1 \neq 0$ .

А. Если частоты  $\omega_0, \omega_1$  *соизмеримы*, т. е. их отношение есть рациональное число, то  $x(t)$  — *периодическая* функция. Действительно,  $\omega_0/\omega_1 = p/q$ , где  $p, q$  — целые числа; можно считать, что они положительны и взаимно просты. Тогда период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi p}{\omega_0} = \frac{2\pi q}{\omega_1}.$$

Б. Если частоты  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  несоизмеримы, т. е. их отношение есть иррациональное число, то  $x(t)$  — непериодическая функция. Допустим противное, и пусть  $T > 0$  — период функции  $x(t)$ . Из тождества  $x(t+T) = x(t)$  находим:

$$A_0 \sin \frac{\omega_0 T}{2} \sin \left( \omega_0 t + \frac{\omega_0 T}{2} - \varphi_0 \right) + \\ + A_1 \sin \frac{\omega_1 T}{2} \sin \left( \omega_1 t + \frac{\omega_1 T}{2} - \varphi_1 \right) \equiv 0. \quad (12)$$

Выберем  $t_k$  так, чтобы  $\omega_0 t_k + \frac{\omega_0 T}{2} - \varphi_0 = k\pi$ , где  $k$  — целое число, тогда первое слагаемое в (12) обратится в нуль, и мы получим соотношение

$$\sin \frac{\omega_1 T}{2} \sin \left( \omega_1 t_k + \frac{\omega_1 T}{2} - \varphi_1 \right) = 0. \quad (13)$$

Если равен нулю первый сомножитель, то  $T = 2\pi k_1 / \omega_1$ , где  $k_1 \neq 0$  — целое число. Это значение  $T$  есть период второго слагаемого из (11), следовательно,  $T$  — период первого слагаемого. Все периоды первого слагаемого из (11) имеют вид  $2\pi m / \omega_0$ , где  $m \neq 0$  — целое число. Поэтому  $2\pi k_1 / \omega_1 = 2\pi m / \omega_0$  при некотором целом  $m$ , так что отношение  $\omega_0 / \omega_1$  — рациональное число. Это противоречит несоизмеримости частот  $\omega_0$ ,  $\omega_1$ .

Пусть второй сомножитель из (13) равен нулю, тогда

$$\omega_1 t_k + \frac{\omega_1 T}{2} - \varphi_1 = \pi n(k),$$

где  $n(k)$  — целое число. Полагая  $k=0, 1$  и вычитая первое тождество из второго, получаем  $\pi \omega_1 / \omega_0 = m\pi$ , где  $m$  — целое число. Поэтому отношение  $\omega_0 / \omega_1$  — рациональное число, что противоречит предположению о их несоизмеримости. Итак,  $x(t)$  — непериодическая функция.

Покажем, что

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} x(t) = |A_0| + |A_1|, \quad \inf_{t \in \mathbf{R}} x(t) = -|A_0| - |A_1|, \quad (14)$$

где  $\mathbf{R}$  — числовая прямая. Пусть  $A_0 > 0$ ,  $A_1 > 0$  для простоты. Положим  $t_k = (2\pi k + \varphi_0) / \omega_0$ , где  $k$  — целое число, тогда первое слагаемое в (11) будет равно  $A_0$ . Покажем, что второе слагаемое может принимать при  $t = t_k$  значения, сколь угодно близкие к  $A_1$ . Аргумент косинуса равен

$$2\pi(\alpha k + \beta), \quad \alpha = \omega_1 / \omega_0, \quad (15)$$

число  $\beta = \left( \frac{\omega_1 \varphi_0}{\omega_0} - \varphi_1 \right) / (2\pi)$  не зависит от  $k$ . Нам понадобится

*Лемма 2. Пусть  $\alpha$  — иррациональное число. Тогда для любого числа  $r \in [0, 1]$  и для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое целое число  $k = k(\varepsilon)$ , что*

$$|k\alpha - [k\alpha] - r| < \varepsilon. \quad (16)$$

Здесь  $[x]$  — целая часть числа  $x$  (если  $x = n + r$ , где  $n$  — целое число,  $0 \leq r < 1$ , то  $[x] = n$ ).

*Доказательство.* Пусть  $C$  — окружность длины 1 и  $O \in C$  — фиксированная точка. Будем откладывать от точки  $O$  дуги длин  $\alpha$ ,  $2\alpha$ ,  $3\alpha$  и т. д. против часовой стрелки. Ясно, что длина дуги, соединяющей точки  $O$  и  $k\alpha$ , равна  $k\alpha - [k\alpha]$ . Точки вида  $k_1\alpha - [k_1\alpha]$ ,  $k_2\alpha - [k_2\alpha]$  при  $k_1 \neq k_2$  не могут совпасть. Действительно, если бы они совпали, то разность этих чисел была бы целым числом:  $(k_1 - k_2)\alpha = m$  (длина окружности равна единице). Но тогда  $\alpha = m / (k_1 - k_2)$  — рациональное число, что противоречит условию леммы. Поэтому мы получим на окружности  $C$  бесконечно много различных точек.

Фиксируем  $\varepsilon > 0$  и выберем целое число  $N \geq 2$  такое, что  $N > 1/\varepsilon$ . Отложим на  $C$  первые  $N - 1$  точек; они разобьют  $C$  на  $N$  дуг. Длина хотя бы одной из этих дуг меньше, чем  $1/N$ , т. е. меньше  $\varepsilon$ . Пусть  $L$  — такая дуга; ее длина  $l$  равна  $l = k_2\alpha - [k_2\alpha] - (k_1\alpha - [k_1\alpha])$ , где  $k_{1,2}$  — целые числа,  $k_1 \neq k_2$ . Отсюда следует, что

$$l = n_0\alpha - [n_0\alpha] + m, \quad n_0 = k_2 - k_1,$$

где  $m = 0$ , если  $n_0 > 0$ , и  $m = 1$ , если  $n_0 < 0$ . Отложим на  $C$  дуги длин  $l$ ,  $2l$  и т. д. от точки  $O$  против часовой стрелки, до тех пор, пока они не покроют всю окружность. Пусть  $n_0 > 0$ , тогда конец  $m$ -й дуги будет находиться в точке  $m(n_0\alpha - [n_0\alpha])$ . Имеем

$$mn_0\alpha - m[n_0\alpha] = mn_0\alpha - [mn_0\alpha].$$

Действительно, обе части этого соотношения заключены между 0 и 1, а их разность — целое число; это число может быть только нулем. Любая точка  $r$ ,  $0 \leq r \leq 1$ , на окружности принадлежит одной из дуг, и расстояние от  $r$  до любого из концов содержащей ее замкнутой дуги не превосходит  $\varepsilon$ , т. е.  $|mn_0\alpha - [mn_0\alpha] - r| < \varepsilon$ . Тем самым

неравенство (16) доказано. В случае  $n_0 < 0$  дугу  $L$  нужно откладывать по часовой стрелке от точки  $O$ .

Замечание 1. Из леммы 2 следует, что последовательность  $\{n\alpha - [n\alpha]\}$  при  $\alpha$  иррациональном всюду плотна на отрезке  $[0, 1]$ , т. е. в любой сколь угодно малой окрестности любой точки  $r \in [0, 1]$  обязательно найдутся точки последовательности. Эта последовательность обладает еще одним замечательным свойством: она *равномерно распределена* на отрезке  $[0, 1]$ . Это означает следующее: пусть  $L$  — любой отрезок, содержащийся в отрезке  $[0, 1]$ ,  $l$  — его длина, и пусть  $N(L)$  — число точек последовательности, которые лежат на  $L$  и номера которых не превосходят  $N$ . Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(L)}{N} = l.$$

Докажем, что  $\cos 2\pi(k\alpha + \beta)$  может принимать значения сколь угодно близкие к единице; тем самым первое из соотношений (14) будет доказано. Представим  $\beta$  в виде  $\beta = m - r$ , где  $m$  — целое число,  $0 \leq r < 1$  и выберем  $k$  в соответствии с (16). Тогда

$$k\alpha + \beta = [k\alpha] + m + \tilde{r},$$

где  $|\tilde{r}| < \varepsilon$ , так что

$$\cos 2\pi(k\alpha + \beta) = \cos 2\pi\tilde{r},$$

и это значение может быть сколь угодно близким к единице. Аналогично доказывается утверждение (14) относительно нижней грани.

Замечание 2. Функция  $x(t)$  (см. (11)) с несоизмеримыми  $\omega_0, \omega_1$  является *почти периодической*. Это означает, что для всякого  $\varepsilon > 0$  существует  $L = L(\varepsilon) > 0$  такое, что в каждом интервале длины  $L$  найдется число  $T$  такое, что

$$|x(t+T) - x(t)| < \varepsilon.$$

Это число называется  $\varepsilon$ -*почти периодом*. Почти периодическая функция повторяет свои значения, но, в отличие от периодической функции, с ошибкой.

Аналогичные утверждения справедливы и для суммы нескольких гармонических колебаний:

$$x(t) = \sum_{j=0}^N A_j \cos(\omega_j t - \varphi_j), \quad A_j \neq 0.$$



Пусть частоты  $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_N$  — рационально независимы, т. е. не существует целых чисел  $n_0, n_1, \dots, n_N$ , не равных нулю одновременно и таких, что

$$n_0\omega_0 + n_1\omega_1 + \dots + n_N\omega_N = 0.$$

Для двух частот  $\omega_0, \omega_1$  их рациональная независимость эквивалентна несоизмеримости. В этом случае функция  $x(t)$  — непериодическая, но почти периодическая.

Пример 2. Рассмотрим функцию (11) в случае, когда  $\omega_1 > \omega_0 > 0$  и частоты  $\omega_0, \omega_1$  близки, т. е.  $\Omega/\omega_0 \ll 1$ , где  $\Omega = \omega_1 - \omega_0$ . Функцию  $x(t)$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= A(t) \cos(\omega_0 t - \varphi(t)), \\ A^2(t) &= A_0^2 + A_1^2 + 2A_0A_1 \cos(\varphi_0 - \psi(t)), \\ \operatorname{tg} \varphi(t) &= \frac{A_0 \sin \varphi_0 + A_1 \sin \psi(t)}{A_0 \cos \varphi_0 + A_1 \cos \psi(t)}, \quad \psi(t) = \varphi_1 - \Omega t. \end{aligned} \quad (17)$$

«Амплитуда»  $A(t)$  есть медленно меняющаяся функция, периодическая, с периодом  $2\pi/\Omega$ . Если  $A_0 > 0, A_1 > 0$ , то  $A^2(t)$  меняется в пределах от  $(A_0 - A_1)^2$  до  $(A_0 + A_1)^2$ . Множитель  $\cos(\omega_0 t - \varphi(t))$  есть быстро меняющаяся функция; график функции  $x(t)$  см. на рис. 7; здесь  $A_0 = A_1$ .

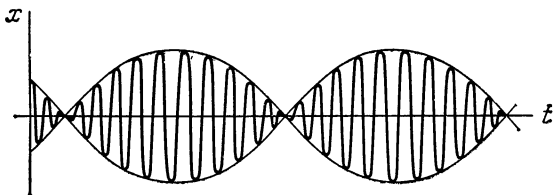


Рис. 7

Такая картина называется *биениями*; график функции  $A(t)$  называется *огibaющей*. Этот физический термин не совпадает с математическим понятием огибающей (гл. 2, § 11).

Можно рассматривать функцию  $x(t)$ , например, как сумму звуковых полей двух излучателей с близкими частотами;  $x(t)$  — это значение звукового давления в фиксированной точке пространства в момент времени  $t$ . Если частоты  $\omega_0, \omega_1$  высокие, то человеческое ухо не сможет услышать каждое из колебаний в отдельности, но услышит их огибающую — звук поочередно усиливается и ослабляется, т. е. человек услышит биения.



*Интегрирование этой системы сводится к задачам алгебры.*

Напомним некоторые сведения из линейной алгебры [7, 17]. Вектор  $e \neq 0$  называется *собственным вектором* матрицы  $A$ , если

$$Ae = \lambda e.$$

Число  $\lambda$  называется *собственным значением* матрицы  $A$  (отвечающим собственному вектору  $e$ ) и является корнем *характеристического уравнения*

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

**Теорема 1.** *Если собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  матрицы  $A$  различны, то собственные векторы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  линейно независимы (и потому образуют базис).*

Приведем другую формулировку этой теоремы: *если собственные значения матрицы  $A$  различны, то существует невырожденная  $(n \times n)$ -матрица  $T$ , приводящая матрицу  $A$  к диагональному виду, т. е.*

$$T^{-1}AT = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — собственные значения матрицы  $A$ , а матрица  $T = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  (т. е. столбцы матрицы  $T$  — собственные векторы матрицы  $A$ ).

Нам понадобятся элементарные сведения о матричных функциях. Пусть  $T(x)$  есть  $(n \times n)$ -матрица с элементами  $t_{jk}(x)$ . Матрица-функция  $T(x)$  называется *непрерывной* (дифференцируемой, дважды дифференцируемой и т. д.) на множестве  $M$ , если все ее элементы непрерывны (дифференцируемы и т. д.) на множестве  $M$ . *Производной* матрицы-функции  $T(x)$  называется матрица, элементы которой — производные от элементов матрицы  $T(x)$ , т. е.

$$\frac{d}{dx} T(x) = \left( \frac{d}{dx} t_{jk}(x) \right).$$

**Лемма.** *Пусть  $T(x)$  есть  $(n \times n)$ -матрица,  $z(x)$  есть  $n$ -вектор. Тогда*

$$\frac{d}{dx} (T(x)z(x)) = \frac{dT(x)}{dx} z(x) + T(x) \frac{dz(x)}{dx}. \quad (3)$$

Таким образом, правило дифференцирования произведения  $T(x)z(x)$  матрицы-функции и вектор-функции в точности такое же, как и для произведения скалярных функций. Формула (3) проверяется непосредственно.

**Теорема 2.** Пусть собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  матрицы  $A$  различны. Тогда всякое решение системы (1) имеет вид:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} e_1 + C_2 e^{\lambda_2 x} e_2 + \dots + C_n e^{\lambda_n x} e_n, \quad (4)$$

где  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — собственные матрицы вектора  $A$  и  $C_1, C_2, \dots, C_n$  — произвольные постоянные.

**Доказательство.** Введем новую неизвестную вектор-функцию  $z(x)$  по формуле

$$y(x) = Tz(x), \quad (5)$$

где  $T$  — матрица, приводящая матрицу  $A$  к диагональному виду (см. (2)). Подставляя (5) в (1), получаем систему

$$T \frac{dz}{dx} = ATz,$$

так как  $\frac{dT}{dx} \equiv 0$ . Умножая обе части этой системы слева на  $T^{-1}$  и учитывая, что  $T^{-1}AT = \Lambda$ , получаем систему

$$\frac{dz}{dx} = \Lambda z.$$

В покомпонентной записи эта система имеет вид

$$z'_1 = \lambda_1 z_1, \quad z'_2 = \lambda_2 z_2, \quad \dots, \quad z'_n = \lambda_n z_n,$$

т. е. она распадается на  $n$  независимых уравнений. Все решения этой системы даются формулой

$$z_1 = C_1 e^{\lambda_1 x}, \quad z_2 = C_2 e^{\lambda_2 x}, \quad \dots, \quad z_n = C_n e^{\lambda_n x},$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  — произвольные постоянные, или

$$z = C_1 e^{\lambda_1 x} f_1 + C_2 e^{\lambda_2 x} f_2 + \dots + C_n e^{\lambda_n x} f_n, \quad (6)$$

где  $f_k$  — вектор, у которого  $k$ -я компонента равна единице, а остальные компоненты равны нулю. Так как столбцы матрицы  $T$  — собственные векторы матрицы  $A$ , то  $Tf_k = e_k$  и, подставив (6) в (5), получим (4).

Итак, алгоритм отыскания всех решений системы (1) следующий:

1°. Находим собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  матрицы  $A$  из характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

2°. Находим собственные векторы  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , решая  $n$  систем линейных алгебраических уравнений

$$Ay = \lambda_1 y; Ay = \lambda_2 y; \dots; Ay = \lambda_n y.$$

3°. Выписываем решение по формуле (4).

Рассмотрим неоднородную систему

$$\frac{dy}{dx} = Ay + e^{\mu x} P_m(x). \quad (7)$$

Здесь  $P_m(x)$  — вектор-функция, компоненты которой — многочлены степени не выше чем  $m$ :  $P_m(x) = \sum_{j=0}^m p_j x^j$ , где

$p_j$  — постоянные векторы.

1°. *Нерезонансный случай.* Если  $\mu$  не есть собственное значение матрицы  $A$ , то система (7) имеет частное решение вида

$$y = e^{\mu x} Q_m(x), \quad (8)$$

где  $Q_m(x)$  — вектор-функция, компоненты которой — многочлены степени не выше чем  $m$ . При этом матрица  $A$  может иметь как простые, так и кратные собственные значения.

Будем искать  $Q_m(x)$  в виде

$$Q_m(x) = \sum_{j=0}^m q_j x^j,$$

где  $q_j$  — неизвестные постоянные векторы. Подставляя в (7) и сокращая на  $e^{\mu x}$ , получаем

$$(\mu I - A) Q_m(x) = P_m(x) - \frac{dQ_m(x)}{dx}.$$

Приравнивая слева и справа коэффициенты при степенях  $x^m, x^{m-1}$  и т. д., получаем

$$\begin{aligned} (\mu I - A) q_m &= p_m, \\ (\mu I - A) q_{m-1} &= p_{m-1} - m q_m, \\ &\dots \end{aligned} \quad (9)$$

Матрица  $\mu I - A$  невырождена, так как  $\mu$  не есть собственное значение матрицы  $A$ , и из первого из уравнений (9) находим  $q_m$ :

$$q_m = (\mu I - A)^{-1} p_m.$$

Затем из второго из уравнений (9) находим  $q_{m-1}$  и т. д. При практическом решении задачи удобно заранее «заготовить» матрицу  $(\mu I - A)^{-1}$ .

2°. *Резонансный случай.* Пусть  $\mu$  — собственное значение матрицы  $A$ , и пусть собственные значения матрицы  $A$  различны. В этом случае система (7) имеет частное решение вида

$$y = e^{\mu x} Q_{m+1}(x),$$

где  $Q_{m+1}(x)$  — вектор-функция, компоненты которой суть многочлены степени не выше чем  $m+1$ . В этом случае удобно сделать подстановку (5), тогда система (7) примет вид

$$\frac{dz_1}{dx} = \lambda_1 z_1 + e^{\mu x} f_1(x), \quad \frac{dz_2}{dx} = \lambda_2 z_2 + e^{\mu x} f_2(x), \dots$$

где  $f_j(x)$  — компоненты вектор-функции  $T^{-1}Q_m(x)$ . Система распалась на  $n$  уравнений первого порядка, частные решения которых ищутся так же, как и в § 4.

## § 9. Фазовая плоскость линейной системы

1. **Вещественные корни.** Рассмотрим однородную линейную систему из двух уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \quad (1)$$

с постоянными *вещественными* коэффициентами  $a_{jk}$ . Пусть  $x_1 = \varphi_1(t)$ ,  $x_2 = \varphi_2(t)$  — вещественное решение системы (1); тогда уравнения

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad -\infty < t < \infty,$$

определяет кривую на плоскости  $x_1, x_2$ . Эта кривая называется *фазовой траекторией* системы (1), а картина, которую образуют фазовые траектории, носит название: *фазовый портрет системы* (1). Одна из фазовых траекторий легко находится: система (1) имеет решение  $x_1(t) \equiv 0$ ,

$x_2(t) \equiv 0$  и фазовая траектория — точка  $(0, 0)$ . Эта точка называется *точкой покоя* (или *положением равновесия*) системы (1).

Так как система (1) интегрируется, то можно построить ее фазовый портрет. Пусть  $\lambda_1, \lambda_2$  — собственные значения матрицы  $A = (a_{jk})$  системы (1), т. е. корни уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Коэффициенты этого квадратного уравнения вещественны; поэтому возможны 2 варианта:

1°. Корни  $\lambda_1, \lambda_2$  — вещественны.

2°. Корни  $\lambda_1, \lambda_2$  — комплексно сопряженные:  $\bar{\lambda}_2 = \lambda_1$ .

Мы рассмотрим

Основной случай. *Собственные значения матрицы  $A$  различны и отличны от нуля.*

Пусть оба корня  $\lambda_1, \lambda_2$  вещественны. Тогда собственные векторы  $e_1, e_2$  матрицы  $A$  можно взять вещественными, и всякое вещественное решение системы (1) имеет вид

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} e_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} e_2, \quad (2)$$

где  $C_1, C_2$  — постоянные. Векторы  $e_1, e_2$  образуют базис на плоскости. Пусть  $\xi_1, \xi_2$  — координаты вектора  $x(t)$  в этом базисе, тогда

$$\xi_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \xi_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (3)$$

Достаточно построить фазовые траектории только в первом квадранте:  $C_1 \geq 0, C_2 \geq 0$ , так как в силу (3), фазовый портрет симметричен относительно координатных осей.

I. Числа  $\lambda_1, \lambda_2$  одного знака.

A.  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ .

При  $C_1 = C_2 = 0$  получаем точку покоя  $(0, 0)$ . Если  $C_1 > 0, C_2 = 0$ , то фазовая траектория — ось  $\xi_1$ , если  $C_1 = 0, C_2 > 0$  — ось  $\xi_2$ . Стрелки на рисунке показывают направление, в котором движется точка  $x(t)$  с ростом  $t$ . Пусть  $C_1 > 0, C_2 > 0$ , тогда  $e^{\lambda_j t} \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow +\infty$ ),  $e^{\lambda_j t} \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ),  $j = 1, 2$ , так что фазовая траектория — неограниченная кривая, входящая в начало координат при  $t \rightarrow +\infty$  (рис. 8). Если  $\lambda_1 > \lambda_2$ , то

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\xi_2}{\xi_1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = 0,$$

так что фазовая траектория касается оси  $\xi_1$  в начале координат (и оси  $\xi_2$ , если  $\lambda_1 < \lambda_2$ ).

Уравнение фазовой траектории можно также записать в виде

$$\xi_2 = C \xi_1^\alpha, \quad \alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad (4)$$

(для этого достаточно возвести первое из уравнений (3) в степень  $\lambda_2$ , второе — в степень  $\lambda_1$ ), откуда видно, что фазовые траектории имеют вид «парабол».

Изображенная на рис. 8 картина называется *устойчивым узлом* (устойчивый — потому, что точка  $\mathbf{x}(t)$  стремится к точке покоя  $(0, 0)$  при  $t \rightarrow +\infty$ ).

В.  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ .

Фазовый портрет системы точно такой же, как и на рис. 8, только все стрелки направлены от начала координат. Такая картина называется *неустойчивым узлом*.

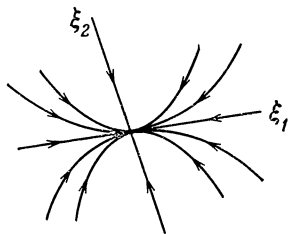


Рис. 8.

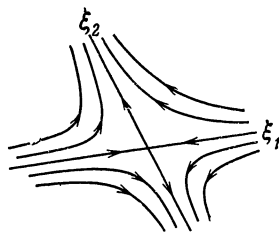


Рис. 9.

II. Числа  $\lambda_1, \lambda_2$  разных знаков (седло).

Пусть для определенности  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ . При  $C_1 = 0, C_2 > 0$  имеем  $\xi_1 = 0, \xi_2 = e^{\lambda_2 t} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , а при  $C_1 > 0, C_2 = 0$  имеем  $\xi_2 = 0, \xi_1 \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Полученные 4 луча называются «усами» седла (еще 2 луча получаем при  $C_1 = 0, C_2 < 0; C_1 < 0, C_2 = 0$ ). Если  $C_1 > 0, C_2 > 0$ , то  $\xi_1 \rightarrow +\infty, \xi_2 \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , и траектории имеют вид «гипербол» (рис. 9). Такая картина называется *седлом*.

**2. Комплексные корни.** Обозначим  $\lambda_1 = \lambda$ , тогда  $\lambda_2 = \bar{\lambda}$ . Пусть  $\mathbf{e}$  — собственный вектор матрицы  $A$ :  $A\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$ . Тогда  $A\bar{\mathbf{e}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{e}}$ , т. е.  $\bar{\mathbf{e}}$  — собственный вектор, отвечающий  $\bar{\lambda}$ . Всякое решение системы (1) имеет вид (2), а всякое вещественное решение — вид

$$\mathbf{x}(t) = C e^{\lambda t} \mathbf{e} + \bar{C} e^{\bar{\lambda} t} \bar{\mathbf{e}}. \quad (5)$$



Здесь  $C$  — произвольная комплексная постоянная. Вещественность решения (5) очевидна: каждая компонента вектора  $\mathbf{x}(t)$  — сумма двух комплексно сопряженных чисел. Нетрудно доказать и обратный факт: всякое вещественное решение можно записать в виде (5). Положим

$$\lambda = \alpha + i\beta, \quad \mathbf{e} = \mathbf{f}_1 - i\mathbf{f}_2, \quad C = a + ib,$$

где числа  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $a$ ,  $b$  и векторы  $\mathbf{f}_1$ ,  $\mathbf{f}_2$  вещественны. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \xi_1 \mathbf{f}_1 + \xi_2 \mathbf{f}_2, \\ \xi_1 &= 2e^{\alpha t} (a \cos \beta t - b \sin \beta t), \\ \xi_2 &= 2e^{\alpha t} (b \cos \beta t + a \sin \beta t). \end{aligned}$$

I. Центр:  $\alpha = 0$  (оба корня  $\pm i\beta$  чисто мнимые).

В этом случае

$$\xi_1 = \rho_0 \cos(\beta t + \gamma), \quad \xi_2 = \rho_0 \sin(\beta t + \gamma),$$

где обозначено  $\rho_0 = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\operatorname{tg} \gamma = b/a$ . Фазовые траектории — эллипсы (рис. 10). Направление обхода эллипса зависит от знака  $\beta$  (здесь  $\beta > 0$ ).

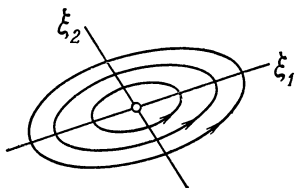


Рис. 10.

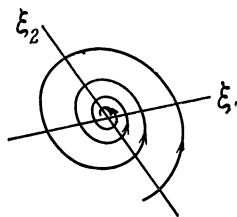


Рис. 11.

II. Фокус:  $\alpha \neq 0$ .

A. Устойчивый фокус:  $\alpha < 0$ .

Уравнения траекторий имеют вид

$$\xi_1 = \rho_0 e^{\alpha t} \cos(\beta t + \gamma), \quad \xi_2 = \rho_0 e^{\alpha t} \sin(\beta t + \gamma)$$

и траектории являются спиралями, которые закручиваются в начало координат при  $t \rightarrow +\infty$  (так как  $e^{\alpha t} \rightarrow 0$ ). Направление закручивания спирали зависит от знака  $\beta$  (рис. 11).

B. Неустойчивый фокус:  $\alpha > 0$ .

Фазовый портрет системы точно такой же, как и на рис. 11, но при  $t \rightarrow +\infty$  точка уходит по спирали на бесконечность.

**3. Уравнение второго порядка.** Рассмотрим линейное уравнение

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0 \quad (6)$$

с постоянными вещественными коэффициентами  $a, b$ . Сведем его к системе

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -bx - ay. \quad (7)$$

Фазовые траектории системы (7) называются фазовыми траекториями уравнения (6), которые изображаются на плоскости  $(x, \dot{x})$ . Характеристические уравнения системы (7) и уравнения (6) совпадают:  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ , и потому все фазовые портреты для уравнения (6) такие же, как и для системы из двух уравнений.

## § 10. Линейные системы с постоянными коэффициентами. Случай кратных корней.

**1. Жорданова нормальная форма матрицы.** В § 8 были найдены все решения однородной линейной системы с постоянными коэффициентами в случае, когда матрица системы  $A$  имела различные собственные значения. Такие матрицы приводятся к диагональному виду, и этот факт сыграл основную роль при интегрировании системы. Если же матрица  $A$  имеет кратное собственное значение, то ее не всегда можно привести к диагональному виду.

**Пример.** Матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

нельзя привести к диагональному виду (ее собственные значения равны  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ). Действительно, допустим противное; тогда существует  $(2 \times 2)$ -матрица  $T$  такая, что  $T^{-1}AT = \Lambda$  — это диагональная матрица. Матрица  $\Lambda$  — нулевая, так как ее диагональные элементы равны собственным значениям матрицы  $A$ . Поэтому  $T^{-1}AT = 0$ , так что  $A = 0$ , и мы пришли к противоречию.

Простейшая форма, к которой приводится произвольная квадратная матрица, есть так называемая *жорданова*

нормальная форма, к описанию которой мы приступаем. Матрица вида

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \lambda & \ddots \\ 0 & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \quad (1)$$

называется *жордановым блоком*. Эта матрица имеет единственное собственное значение  $\lambda$  кратности  $k$ , где  $k$  — порядок матрицы  $J$ . Найдем ее собственные векторы, решив систему  $J\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ , т. е.

$$\lambda x_1 + x_2 = \lambda x_1, \quad \lambda x_2 + x_3 = \lambda x_2, \quad \dots, \quad \lambda x_n = \lambda x_n.$$

Отсюда следует, что  $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$ ,  $x_1$  — любое, т. е. матрица  $J$  имеет единственный (с точностью до множителя) собственный вектор  $\mathbf{f}_1 = (1, 0, \dots, 0)$  (все векторы-столбцы). На остальные базисные векторы:  $\mathbf{f}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $\mathbf{f}_3 = (0, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , ... матрица  $J$  действует так:

$$J\mathbf{f}_1 = \lambda\mathbf{f}_1, \quad J\mathbf{f}_2 = \lambda\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_1, \quad \dots, \quad J\mathbf{f}_k = \lambda\mathbf{f}_k + \mathbf{f}_{k-1}.$$

Определение. Набор векторов  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}$  называется *жордановой цепочкой* матрицы  $A$ , если

$$A\mathbf{e}_1 = \lambda\mathbf{e}_1, \quad A\mathbf{e}_2 = \lambda\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1, \quad \dots, \quad A\mathbf{e}_k = \lambda\mathbf{e}_k + \mathbf{e}_{k-1}. \quad (2)$$

Вектор  $\mathbf{e}_1$  — собственный, векторы  $\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k$  называются *присоединенными*. Векторы  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k$  образуют *жорданову цепочку* жорданова блока  $J$ .

Теорема о приведении матрицы к жордановой нормальной форме. Для любой матрицы  $A$  существует матрица  $T$  такая, что

$$T^{-1}AT = J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & J_s \end{pmatrix}. \quad (3)$$



можно привести к почти диагональному виду, т. е. существует матрица  $T$  такая, что

$$T^{-1}AT = \Lambda + B_\varepsilon. \quad (4)$$

Здесь  $\Lambda$  — диагональная матрица, элементами которой являются (все) собственные значения матрицы  $A$ , а для элементов  $b_{jk}$  матрицы  $B_\varepsilon$  имеет место оценка  $|b_{jk}| \leq \varepsilon$ , где,  $\varepsilon > 0$  может быть выбрано сколь угодно малым.

Доказательство. Выберем матрицу  $P$  такую, что

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & J_s \end{pmatrix},$$

где  $J$  — нормальная жорданова форма матрицы  $A$ . Рассмотрим жорданов блок

$$J_\alpha = \begin{pmatrix} \lambda_\alpha & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_\alpha \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{k_\alpha} \end{pmatrix},$$

где  $a_i \neq 0$ ,  $k_\alpha$  — порядок матрицы  $J_\alpha$ . Тогда

$$R_\alpha^{-1} J_\alpha R_\alpha = \begin{pmatrix} \lambda_\alpha & a_2 a_1^{-1} & & & & & 0 \\ & \lambda_\alpha & a_3 a_2^{-1} & & & & \\ & & \lambda_\alpha & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & a_{k_\alpha} a_{k_\alpha-1}^{-1} & \\ 0 & & & & & & \lambda_\alpha \end{pmatrix}.$$

Положим  $a_2 a_1^{-1} = a_3 a_2^{-1} = \dots = a_{k_\alpha} a_{k_\alpha - 1}^{-1} = \varepsilon$ , тогда

$$R_\alpha^{-1} J_\alpha R_\alpha = \begin{pmatrix} \lambda_\alpha & 0 \\ & \ddots \\ 0 & \lambda_\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу

$$R = \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & R_s \end{pmatrix}.$$

Тогда, по правилу умножения блочных матриц,

$$R^{-1} J R = \begin{pmatrix} R_1^{-1} J_1 R_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & R_s^{-1} J_s R_s \end{pmatrix} = \Lambda + B_\varepsilon,$$

где  $\Lambda$  — диагональная матрица с элементами  $\lambda_j$ , а

$$B_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & b_{12} & & \\ & \cdot & \ddots & \\ & & \cdot & b_{n-1, n} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix},$$

$b_{j, j+1} = \varepsilon$  или  $b_{j, j+1} = 0$ . В качестве  $T$  возьмем матрицу  $T = PR$ . Тогда

$$T^{-1} A T = R^{-1} (P^{-1} A P) R = R^{-1} J R = \Lambda + B_\varepsilon.$$

Теорема доказана.

**2. Интегрирование системы.** Рассмотрим систему из  $n$  уравнений:

$$\frac{dy}{dx} = Ay, \quad (5)$$

где  $A$  — постоянная матрица. Эта система полностью интегрируется. Рассмотрим вначале систему из  $k$  уравнений

$$\frac{dz}{dx} = Jz, \quad (6)$$



Наметим доказательство этого факта. После подстановки  $\mathbf{y} = T\mathbf{z}$ , где матрица  $T$  приводит матрицу  $A$  к жордановой нормальной форме, система (5) принимает вид

$$\frac{d\mathbf{z}}{dx} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & J_s \end{pmatrix} \mathbf{z}.$$

Эта система распадается на  $s$  отдельных подсистем

$$\frac{dz^j}{dx} = J_1 z^j, \dots, \frac{dz^s}{dx} = J_s z^s,$$

где  $z^j$  есть вектор-столбец высоты  $k_j$ , а каждая из этих подсистем интегрируется так же, как и система (6).

**Пример.** Рассмотрим систему

$$y_1' = 2y_1 + y_2, \quad y_2' = -y_1 + 4y_2.$$

Собственные значения матрицы  $A$  этой системы равны  $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ . Собственный вектор определяется из системы  $A\mathbf{y} = 3\mathbf{y}$ , т. е.

$$2y_1 + y_2 = 3y_1, \quad -y_2 + 4y_2 = 3y_2,$$

откуда следует, что  $y_1 = y_2$  и собственный вектор только один (с точностью до множителя):  $\mathbf{e}_1 = (1, 1)$ . Поэтому имеется присоединенный вектор  $\mathbf{e}_2$ , который определяется из системы  $A\mathbf{e}_2 = 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1$ . Для компонент  $y_1, y_2$  вектора  $\mathbf{e}_2$  получаем систему

$$y_2 - y_1 = 1, \quad y_2 - y_1 = 1,$$

и вектор  $\mathbf{e}_2$  можно взять в виде  $(0, 1)$ . По формуле (7) строим решения

$$\mathbf{y}^{(1)} = e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}^{(2)} = e^{3x} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right],$$

и всякое решение системы имеет вид

$$\mathbf{y} = e^{3x} \left[ C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix} \right],$$

или, в покомпонентной записи,

$$y_1 = e^{3x} (C_1 + C_2 x), \quad y_2 = e^{3x} (C_1 + (x+1)C_2).$$

Здесь  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные.



Сделаем еще несколько замечаний о системах вида (5), в случае кратных собственных значений матрицы  $A$ . Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  — все различные собственные значения, кратностей  $m_1, \dots, m_s$ . Всякое решение системы (5) имеет вид

$$y = P_1(x) e^{\lambda_1 x} + \dots + P_s(x) e^{\lambda_s x}. \quad (8)$$

Здесь  $P_j(x)$  есть вектор-функция, компоненты которой — многочлены от  $x$  степени не выше чем  $m_j - 1$ . Это следует из того, что длина жордановой цепочки, отвечающей собственному значению  $\lambda_j$ , не может быть больше чем  $m_j$  (а может быть только короче, так одному и тому же собственному значению может отвечать несколько жордановых цепочек). Как видно из формулы (7), соответствующие решения имеют вид  $P_j(x) e^{\lambda_j x}$ , где компоненты вектор-функции  $P_j(x)$  — многочлены степени не выше, чем длина жордановой цепочки минус единица.

Случай кратных корней значительно сложнее случая простых корней, но, по счастью, *кратные корни — исключение, а не правило*. Поясним это на примере  $(2 \times 2)$ -матрицы  $A$  с вещественными элементами. Ее характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0,$$

где  $a, b$  — вещественные постоянные. На плоскости параметров  $(a, b)$  каждому такому уравнению отвечает точка, а уравнениям, корни которых совпадают, отвечает парабола  $a^2 = 4b$ . Ясно, что точку  $(a_0, b_0)$  можно сдвинуть с параболы за счет сколь угодно малого изменения чисел  $(a_0, b_0)$  (или что то же, за счет сколь угодно малого изменения элементов матрицы  $A$ ). Полученная матрица уже будет иметь простые собственные значения.

С точки зрения вычислительной, *приведение матрицы к жордановой нормальной форме есть неустойчивая операция*. Действительно, на ЭВМ можно найти собственные значения только с вполне определенной точностью. Поэтому можно утверждать с уверенностью лишь то, что два собственных значения различны, если у них не совпадают некоторые десятичные знаки. Проверить же, что они равны, нельзя, и потому очень близкие собственные значения воспринимаются ЭВМ как равные. В силу этого, в слу-

чаях, когда имеются очень близкие (возможно, равные) собственные значения, матрицу приводят не к жордановой нормальной форме, а к какой-либо иной (например, к треугольной).

## § 11. Операционное исчисление

Операционное исчисление — один из наиболее экономичных методов интегрирования линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и пользуется большой популярностью у инженеров. Этот метод был предложен известным американским электротехником и физиком Хевисайдом. «Сначала этот символический метод был предложен без строгого обоснования: Хевисайд выражал даже некоторое пренебрежение к опасениям профессиональных математиков. Но поразительный успех метода Хевисайда заставил объяснить его с математической точки зрения, что привело к полному оправданию и дальнейшему развитию символических методов» [27].

Приведем современный вариант этого метода. *Оригиналами* будем называть функции  $f(x)$  такие, что:

1.  $f(x)$  непрерывна при  $x \geq 0$ , за исключением быть может, конечного числа точек,  $f(x) \equiv 0$  при  $x < 0$ .

2.  $|f(x)| \leq Me^{ax}$  при  $x \geq 0$ .

Постоянные  $M$ ,  $a$  — свои для каждой функции.

*Преобразованием Лапласа* функции  $f(x)$  называется функция

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-px} f(x) dx. \quad (1)$$

Функцию  $F(p)$  будем называть *изображением* функции  $f(x)$  и будем записывать это так:

$$f(x) \doteq F(p).$$

Покажем, что интеграл (1) сходится при комплексных  $p$  в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > a$ , где  $a$  указано в условии 2. Имеем

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-px} f(x) dx \right| \leq M \int_0^{\infty} e^{(a - \operatorname{Re} p)x} dx < \infty,$$

так как  $a - \operatorname{Re} p < 0$ . Можно показать, что в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > a$  функция  $F(p)$  бесконечно дифференцируема (предлагается доказать этот факт в качестве задачи).

Выведем основные формулы операционного исчисления. При их выводе предполагается, что все рассматриваемые функции принадлежат классу оригиналов. Кроме того, параметр  $p$  выбирается настолько большим, чтобы все внеинтегральные подстановки при  $x = +\infty$  обращались в нуль (например,  $e^{-px}f(x)|_{x=\infty} = 0$  и т. д.).

1°. Линейность преобразования Лапласа. Если

$$f(x) \doteq F(p), \quad g(x) \doteq G(p)$$

и  $\alpha, \beta$  — постоянные, то

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \doteq \alpha F(p) + \beta G(p).$$

Доказательство следует из линейности интеграла.

2°. Изображение производных

$$f^{(n)}(x) \doteq p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - \dots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \quad (2)$$

Пусть  $n = 1$ , тогда

$$f'(x) \doteq \int_0^{\infty} e^{-px} f'(x) dx = pF(p) - f(0).$$

Применим индукцию. Пусть формула (2) доказана для  $n$ . Обозначим  $g(x) = f^{(n)}(x)$ , тогда

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= g'(x) \doteq pG(p) - g(0) = \\ &= p(p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)) - f^{(n)}(0), \end{aligned}$$

так что формула (2) доказана для  $n + 1$ .

3°. Теорема запаздывания. Для любого  $a > 0$

$$f(x-a) \doteq e^{-pa} F(p). \quad (3)$$

Действительно, так как  $f(x-a) \equiv 0$  при  $x < a$ , то, делая замену переменной  $x-a \doteq \tilde{x}$ , получаем

$$\begin{aligned} f(x-a) &\doteq \int_a^{\infty} f(x-a) e^{-px} dx = \\ &= \int_0^{\infty} f(\tilde{x}) e^{-p(a+\tilde{x})} d\tilde{x} = e^{-pa} F(p). \end{aligned}$$

По существу уже этих трех формул вполне достаточно для того, чтобы решить задачу Коши для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Формула (2) — основная: она показывает, что дифференцированию оригиналов отвечает умножение изображений на  $p$ , т. е. дифференциальная операция  $\frac{d}{dx}$  переходит в алгебраическую операцию — умножение на  $p$ . Это свойство преобразования Лапласа позволяет сводить решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами к решению алгебраических уравнений. Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y &= f(x), \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) &= y_{n-1}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $a_1, \dots, a_n$  — постоянные. Обозначим

$$y(x) \doteq Y(p), \quad f(x) \doteq F(p).$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (4) и используя свойства 1°, 2°, получаем

$$\begin{aligned} (p^n Y(p) - p^{n-1} y_0 - \dots - y_{n-1}) + \\ + a_1 (p^{n-1} Y(p) - p^{n-2} y_0 - \dots - y_{n-2}) + \dots \\ \dots + a_n Y(p) = F(p), \end{aligned}$$

или

$$A(p) Y(p) + B(p) = F(p),$$

где  $A(p), B(p)$  — многочлены. Отсюда

$$Y(p) = \frac{F(p) - B(p)}{A(p)}. \quad (5)$$

Если теперь по  $Y(p)$  найти  $y(x)$ , то задача Коши будет решена. Остается, конечно, вопрос: как восстановить оригинал по изображению? Ответ на этот вопрос известен: имеется формула обращения для преобразования Лапласа, а именно

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{px} F(p) dp.$$

Интеграл берется по прямой  $\operatorname{Re} p = b$ .

При практическом применении операционного исчисления редко приходится пользоваться этой формулой —

обычно используются готовые таблицы оригиналов и изображений. Чтобы сознательно пользоваться ими, необходимо знать, что справедлива

**Теорема единственности.** *Оригинал по изображению восстанавливается единственным образом, с точностью до значений в точках разрыва.*

Составим небольшую таблицу, которой вполне достаточно для того, чтобы решить задачу Коши для уравнения вида (4) с правой частью — квазимногочленом. Пусть  $n \geq 0$  целое, тогда

$$x^n e^{-\lambda x} \doteq \int_0^{\infty} e^{-(p+\lambda)x} x^n dx = \frac{n!}{(p+\lambda)^{n+1}}.$$

Из этой формулы, используя также формулы  $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ ,  $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ , получаем таблицу:

Оригинал	Изображение
1	$\frac{1}{p}$
$x^n$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{p+\lambda}$
$x^n e^{-\lambda x}$	$\frac{n!}{(p+\lambda)^{n+1}}$
$\cos \omega x$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\sin \omega x$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$x \cos \omega x$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$x \sin \omega x$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$

**Пример 1.** Рассмотрим задачу Коши

$$y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Делая преобразование Лапласа, получаем  $(p^2 + 1)Y(p) = p^{-1}$ , так что

$$Y(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)}.$$

Этой функции нет в таблице, но вспомним о том, что рациональную функцию можно разложить на простейшие дроби:

$$Y(p) = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1}.$$

По таблице находим

$$y(x) = 1 - \cos x.$$

Вернемся к задаче Коши (4). Если правая часть этого уравнения есть квазимногочлен, то, как видно из таблицы, ее изображение  $F(p)$  есть рациональная функция. Поэтому изображение решения задачи Коши (4) есть рациональная функция, что следует из формулы (5). Разложив эту функцию на простейшие дроби и воспользовавшись таблицей, можно решить задачу Коши (4).

Пример 2.

$$y'' + \omega_0^2 y = A \cos \omega x; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Здесь  $\omega_0 > 0$ ,  $\omega > 0$ ,  $A \neq 0$  — постоянные. Переходя к изображениям, получаем

$$Y(p) = \frac{Ap}{(p^2 + \omega_0^2)(p^2 + \omega^2)}.$$

Здесь приходится различать два случая. Пусть  $\omega \neq \omega_0$  (нерезонансный случай — см. § 7, пример 1). Тогда

$$Y(p) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \left( \frac{p}{p^2 + \omega^2} - \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} \right)$$

и по таблице находим

$$y(x) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega x - \cos \omega_0 x).$$

Если  $\omega = \omega_0$ , то  $Y(p) = Ap/(p^2 + \omega_0^2)^2$ , и по таблице находим

$$y(x) = \frac{Ax}{2\omega_0} \sin \omega_0 x.$$

В рассмотренных выше примерах задача Коши была поставлена при  $x=0$ . К этому случаю можно свести задачу Коши при  $x=a$ :

$$y(a) = y_0, \quad y'(a) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(a) = y_{n-2}$$

для уравнения (4), если сделать замену переменной  $x - a = \tilde{x}$  и положить  $y(x) = \tilde{y}(\tilde{x})$ . Тогда получим задачу Коши:

$$\begin{aligned} \tilde{y}^{(n)} + a_1 \tilde{y}^{(n-1)} + \dots + a_n \tilde{y} &= f(\tilde{x} + a), \\ \tilde{y}(0) = y_0, \quad \tilde{y}'(0) = y_1, \quad \dots, \quad \tilde{y}^{(n-1)}(0) &= y_{n-1}. \end{aligned}$$

Точно так же операционное исчисление применяется к системам линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Рассмотрим задачу Коши для системы из  $n$  уравнений

$$\frac{dy}{dx} - Ay = f(x), \quad y(0) = y^0. \quad (6)$$

Здесь  $A$  есть постоянная  $(n \times n)$ -матрица,  $f(x)$  вектор-функция с  $n$  компонентами и  $y^0$  — постоянный  $n$ -вектор. Изображение вектор-функции (т. е. ее преобразование Лапласа) снова вводится по формуле (1), и свойства 1° — 3° полностью сохраняются.

Переходя к изображениям в задаче (6), получаем

$$(pI - A) Y(p) = y^0 + F(p), \quad (7)$$

где  $Y(p)$ ,  $F(p)$  — изображения вектор-функций  $y(x)$ ,  $f(x)$ . Отсюда находим изображение

$$Y(p) = (pI - A)^{-1} (y^0 + F(p))$$

и затем с помощью таблиц восстанавливаем оригинал. При практическом применении этого метода удобнее не вычислять обратную матрицу  $(pI - A)^{-1}$ , а непосредственно решать систему линейных алгебраических уравнений (7), например, методом исключения.

## § 12. Линейные разностные уравнения

Пусть имеется последовательность  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ , члены которой связаны соотношениями

$$y_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \dots + a_k y_{n-k}, \quad n \geq k + 1, \quad (1)$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_k$  — заданные числа,  $a_k \neq 0$ . Такие после-

довательности называются *рекуррентными* (или *возвратными*), а соотношение (1) называется *однородным линейным разностным уравнением порядка  $k$* . Более точно, его называют разностным уравнением с постоянными коэффициентами. Свойства уравнения (1) полностью аналогичны свойствам линейного дифференциального уравнения порядка  $k$  с постоянными коэффициентами:

$$z^{(k)} = a_1 z^{(k-1)} + a_2 z^{(k-2)} + \dots + a_k z. \quad (2)$$

В частности, справедлив *принцип суперпозиции*: если последовательности  $\{y_n\}$  и  $\{z_n\}$  удовлетворяют уравнению (1), то ему же удовлетворяет последовательность  $\{\alpha y_n + \beta z_n\}$ , где  $\alpha, \beta$  — произвольные постоянные.

Ясно, что задав первые  $k$  членов  $y_1, y_2, \dots, y_k$ , по формуле (1) можно последовательно найти  $y_{k+1}, y_{k+2}, \dots$

Но весьма просто можно найти все решения уравнения (1). Будем искать частное решение в виде

$$y_n = \lambda^n, \quad (3)$$

где  $\lambda \neq 0$  — неизвестное число. Подставляя в (1) и сокращая на  $\lambda^{n-k}$ , получаем уравнение

$$\lambda^k = a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_k, \quad (4)$$

которое называется *характеристическим*. Тем самым доказано, что если  $\lambda$  — корень характеристического уравнения, то последовательность  $y_n = \lambda^n$  есть решение разностного уравнения (1).

Пусть корни  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  характеристического уравнения различны, тогда последовательность

$$y_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n + \dots + C_k \lambda_k^n, \quad (5)$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_k$  — произвольные постоянные, будет решением уравнения (1). Более того, все решения этого уравнения даются формулой (5) (см. [16, 37]). Теперь аналогия между разностным уравнением (1) и дифференциальным уравнением (2) становится очевидной (сравните (5) и теорему 1, § 5). Все решения уравнения (1) можно найти и в том случае, если характеристическое уравнение имеет кратные корни.

Линейные разностные уравнения возникают, например, при численном интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений.



Рассмотрим простейшее уравнение

$$y'(x) + ay(x) = 0, \quad (6)$$

где  $a$  — постоянная, с начальными данными  $y(0) = 1$ . Это решение равно  $y = e^{-ax}$ . Зададим число  $h > 0$ , и заменим производную приближенно отношением  $\frac{y(x+h) - y(x)}{h}$ , считая шаг  $h$  достаточно малым. Тогда получим вместо (6) уравнение

$$y(x+h) = (1 - ha)y(x).$$

Положим  $y(nh) = y_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , тогда получим разностное уравнение первого порядка:

$$y_{n+1} = (1 - ha)y_n; \quad y_0 = 1.$$

Если коэффициент  $a$  зависит от  $x$ , то мы получим разностное уравнение с переменным коэффициентом:

$$y_{n+1} = (1 - ha_n)y_n,$$

где  $a_n = a(nh)$ . При аппроксимации дифференциальных уравнений возникают также разностные уравнения более высоких порядков [16, 38].



вектор-функция  $\mathbf{x} = \varphi(t)$ , которая определена и непрерывно дифференцируема на некотором интервале  $(t_1, t_2)$  и удовлетворяет системе.

Пусть  $\mathbf{x} = \varphi(t)$  — решение системы (1), определенное при  $t \in I = (t_1, t_2)$ . Интегральной кривой системы (1) называется кривая  $\mathbf{x} = \varphi(t)$ ,  $t = t$ ;  $t \in I$  в  $(n+1)$ -мерном пространстве  $R_{t, \mathbf{x}}^{n+1}$  с координатами  $(t, x_1, \dots, x_n)$ . Геометрическая интерпретация задачи Коши такова: *требуется найти интегральную кривую системы (1), проходящую через заданную точку  $(t_0, \mathbf{x}^0) \in R^{n+1}$ .*

Вектор  $(\dot{\varphi}_1(t_0), \dots, \dot{\varphi}_n(t_0), 1)$  касается интегральной кривой  $\mathbf{x} = \varphi(t)$ ,  $t = t_0$ , в точке  $\mathbf{x} = \varphi(t_0)$ ,  $t = t_0$ . В силу (1) этот вектор равен вектору  $(f_1(t_0, \varphi(t_0)), \dots, f_n(t_0, \varphi(t_0)), 1)$ . Пусть вектор-функция  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  определена в области  $G \subset \subset R^{n+1}$ . Построив в каждой точке  $(t, \mathbf{x}) \in G$  вектор  $(f_1(t, \mathbf{x}), \dots, f_n(t, \mathbf{x}), 1)$ , получим в области  $G$  векторное поле. Интегральные кривые системы (1) принадлежат этому полю, т. е. касаются векторов этого поля в каждой точке, и обратно, всякая непрерывно дифференцируемая кривая  $\mathbf{x} = \varphi(t)$ ,  $t = t$ , принадлежащая данному векторному полю, является интегральной кривой системы (1). Такова геометрическая интерпретация системы (1).

Сформулируем основную теорему теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

**Теорема существования и единственности.** Пусть  $G$  — область в пространстве  $R^{n+1}$  (с координатами  $t, x_1, \dots, x_n$ ), вектор-функция  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  и ее производные  $\frac{\partial f_i(t, \mathbf{x})}{\partial x_j}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , определены и непрерывны в области  $G$ . Рассмотрим задачу Коши (1), (2), где  $(t_0, \mathbf{x}^0) \in G$ . Тогда

1°. Решение задачи Коши существует на некотором интервале  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ .

2°. Решение задачи Коши единственно (т. е. если имеется два решения  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  задачи (1), (2), то  $\varphi(t) \equiv \psi(t)$  в некоторой окрестности точки  $t_0$ ).

Геометрическая интерпретация основной теоремы такова: в условиях теоремы через каждую точку области  $G$  проходит интегральная кривая, и притом только одна.

Для доказательства этой теоремы сведем систему дифференциальных уравнений (1) к системе интегральных уравнений.

Лемма 1. *Задача Коши (1), (2) эквивалентна системе интегральных уравнений*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\tilde{t}, \mathbf{x}(\tilde{t})) d\tilde{t}. \quad (3)$$

Именно: 1) всякое решение задачи (1), (2) удовлетворяет уравнению (3); 2) всякое непрерывное на некотором интервале  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  решение уравнения (3) является решением задачи (1), (2).

Доказательство. Пусть  $\mathbf{x}(t)$  — решение задачи Коши (1), (2), определенное на интервале  $I = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ , и пусть  $t$  лежит на этом интервале. Интегрируя обе части (1) от  $t_0$  до  $t$  и учитывая (2), получаем (3).

Пусть  $\mathbf{x}(t)$  — непрерывное на интервале  $I$  решение уравнения (3). Тогда  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ , так что (2) выполнено. Далее, так как вектор-функции  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{x}$  непрерывны, то вектор-функция  $\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$  непрерывна при  $t \in I$ , и потому вектор-функция  $\int_{t_0}^t \boldsymbol{\omega}(\tilde{t}) d\tilde{t}$  дифференцируема при  $t \in I$ . Следовательно, вектор-функция  $\mathbf{x}(t)$  дифференцируема при  $t \in I$ . Дифференцируя обе части равенства (3), получаем, что  $\mathbf{x}(t)$  удовлетворяет системе (1).

Уравнение (3) запишем в операторной форме:

$$\mathbf{x}(t) = A(\mathbf{x}(t)). \quad (4)$$

Здесь  $A$  — оператор

$$A(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\tilde{t}, \mathbf{x}(\tilde{t})) d\tilde{t}. \quad (5)$$

Сформулируем определение оператора.

Пусть каждой функции  $x(t)$  из некоторого множества функций  $M$  поставлена в соответствие некоторая функция  $y(t)$ . Тогда мы говорим, что задан оператор  $A$ , переводящий функцию  $x(t)$  в функцию  $y(t)$ .

Будем записывать это в виде  $y(t) = A(x(t))$  или  $A: x(t) \rightarrow y(t)$  (читается:  $A$  переводит  $x(t)$  в  $y(t)$ ).

Это определение дословно переносится на тот случай, когда  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{y}(t)$  — вектор-функции.

Приведем примеры операторов.

1. Оператор умножения на функцию:

$$A(x(t)) = a(t)x(t).$$

Здесь  $a(t)$  — заданная непрерывная на отрезке  $[a, b]$  функция.

2. Оператор дифференцирования:

$$A(x(t)) = x'(t).$$

3. Оператор интегрирования:

$$A(x(t)) = \int_a^t x(\tilde{t}) d\tilde{t}.$$

В примерах 1, 3 функция  $x(t)$  непрерывна, а в примере 2 — дифференцируема на отрезке  $I = [a, b]$ .

4. Оператор  $A(x(t))$ , действующий по формуле (5). Здесь  $x(t)$  — непрерывная на некотором интервале  $I$  вектор-функция такая, что все точки  $(t, x(t))$  при  $t \in I$  лежат в области определения вектор-функции  $f(t, x)$ .

Как и в случае обычных функций, вводятся понятия: *область определения и область значений оператора*.

Понятие оператора является естественным обобщением понятия функции. Именно,

функция: число  $\rightarrow$  число,

оператор: функция  $\rightarrow$  функцию, вектор-функция  $\rightarrow$  вектор-функцию.

Оба эти понятия — частный случай понятия «отображение», напомним его.

Пусть даны два произвольных множества  $X, Y$ . Мы скажем, что задано *отображение множества  $X$  в множество  $Y$* , если каждому элементу  $x \in X$  поставлен в соответствие некоторый элемент  $y \in Y$ . Для функции  $X$  и  $Y$  — множества чисел, для оператора  $X$  и  $Y$  — множества функций (или вектор-функций).

Доказательство основной теоремы будет проведено в § 5 с помощью принципа сжатых отображений, что потребует введения ряда новых понятий и дополнительных фактов из анализа (§§ 2—4). Здесь мы ограничимся случаем одного уравнения.

**2. Доказательство основной теоремы при  $n=1$ .** Рассмотрим задачу Коши для одного уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Заменим ее эквивалентным интегральным уравнением

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tilde{t}, x(\tilde{t})) d\tilde{t} \equiv A(x(t)). \quad (6)$$

Применим *метод последовательных приближений*. Положим

$$x_0(t) = x_0, \quad x_1(t) = A(x_0(t)), \quad \dots, \quad x_n(t) = A(x_{n-1}(t)), \quad \dots$$

Последовательные приближения имеют вид

$$x_0(t) = x_0, \quad x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tilde{t}, x_0(\tilde{t})) d\tilde{t}, \quad \dots, \\ x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tilde{t}, x_{n-1}(\tilde{t})) d\tilde{t}. \quad (7)$$

**Пример.** Задача Коши

$$\dot{x} - x = 0, \quad x(0) = 1$$

имеет решение  $x(t) = e^t$ . Эта задача эквивалентна интегральному уравнению

$$x(t) = 1 + \int_0^t x(\tilde{t}) d\tilde{t}.$$

Вычислим последовательные приближения:

$$x_0(t) = 1,$$

$$x_1(t) = 1 + \int_0^t d\tilde{t} = 1 + t,$$

$$x_2(t) = 1 + \int_0^t (1 + \tilde{t}) d\tilde{t} = 1 + t + \frac{t^2}{2},$$

.....

$$x_n(t) = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!}.$$

Мы видим, что последовательные приближения — это отрезки ряда Тейлора функции  $e^t$ , так что последовательные приближения  $x_n(t)$  равномерно сходятся к решению на любом конечном отрезке.

Докажем, что последовательность  $\{x_n(t)\}$  равномерно сходится к некоторой функции  $x(t)$  на отрезке  $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ , если  $\delta > 0$  достаточно мало. Пусть  $\Pi$  — прямоугольник  $|t - t_0| \leq a$ ,  $|x - x_0| \leq b$ , лежащий внутри области  $G$ , и  $\Pi_\delta$  — меньший прямоугольник  $|t - t_0| \leq \delta \leq a$ ,  $|x - x_0| \leq b$  (рис. 12).

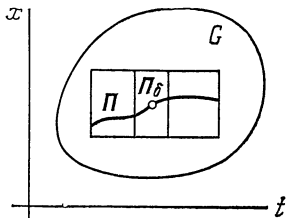


Рис. 12.

Обозначим

$$K_0 = \max_{(t, x) \in \Pi} |f(t, x)|, \quad K_1 = \max_{(t, x) \in \Pi} \left| \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \right|.$$

Пусть  $M$  — множество всех непрерывных при  $t \in I$  функций  $x(t)$ , графики которых лежат в прямоугольнике  $\Pi_\delta$ , т. е.  $|x(t) - x_0| \leq b$  при  $t \in I$ .

1°. Если  $\delta \leq a/K_0$  и  $x(t) \in M$ , то  $A(x(t)) \in M$ . Действительно, функция  $A(x(t))$  непрерывна при  $t \in I$  и

$$|A(x(t)) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(\tilde{t}, x(\tilde{t})) d\tilde{t} \right| \leq K_0 \delta.$$

2°. Пусть функции  $x(t), y(t) \in M$  и  $\delta \leq \min(a/K_0, q/K_1)$ , где  $0 < q < 1$ . Тогда

$$\max_{t \in I} |A(x(t)) - A(y(t))| \leq q \max_{t \in I} |x(t) - y(t)|. \quad (8)$$

Имеем

$$\begin{aligned} |A(x(t)) - A(y(t))| &= \left| \int_{t_0}^t [f(\tilde{t}, x(\tilde{t})) - f(\tilde{t}, y(\tilde{t}))] d\tilde{t} \right| = \\ &= \left| \int_{t_0}^t (x(\tilde{t}) - y(\tilde{t})) \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{t}, \theta(\tilde{t})) d\tilde{t} \right| \leq \end{aligned}$$

(мы применили формулу конечных приращений Лагранжа; точка  $\theta(\tilde{t})$  лежит на интервале  $(x(\tilde{t}), y(\tilde{t}))$ )

$$\leq \left| \int_{t_0}^t |x(\tilde{t}) - y(\tilde{t})| \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{t}, \theta(\tilde{t})) \right| d\tilde{t} \right| \leq K_1 \delta \max_{t \in I} |x(t) - y(t)|,$$

откуда следует (8).

Рассмотрим ряд

$$\begin{aligned} x(t) = x_0(t) + (x_1(t) - x_0(t)) + (x_2(t) - x_1(t)) + \dots \\ \dots + (x_n(t) - x_{n-1}(t)) + \dots \quad (9) \end{aligned}$$

Его частичные суммы равны  $x_0(t), x_1(t), \dots, x_n(t)$ , так что сходимость этого ряда эквивалентна сходимости последовательности  $\{x_n(t)\}$ . Имеем в силу 1°, 2°

$$\begin{aligned} |x_1(t) - x_0| \leq b, \quad |x_2(t) - x_1(t)| = |A(x_1(t)) - A(x_0(t))| \leq \\ \leq q \max_{t \in I} |x_1(t) - x_0(t)| \leq qb, \end{aligned}$$

и докажем по индукции, что при  $n \geq 1$

$$\max_{t \in I} |x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq bq^n. \quad (10)$$

При  $n=1$  это неравенство доказано, совершим переход по индукции от  $n$  к  $n+1$ . Используя неравенства (8), (10), получаем

$$\begin{aligned} |x_{n+1}(t) - x_n(t)| &= |A(x_n(t)) - A(x_{n-1}(t))| \leq \\ &\leq q \max_{t \in I} |x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq bq^{n+1} \end{aligned}$$

и (10) доказано. Ряд (9) равномерно сходится на отрезке  $I$  (по признаку Вейерштрасса), так как модули членов ряда не превосходят членов убывающей геометрической прогрессии со знаменателем  $q$ ,  $0 < q < 1$  — см. (10).

Итак,  $x_n(t) \rightarrow x(t)$ ,  $t \in I$  и предельная функция непрерывна при  $t \in I$ . Поэтому в соотношении

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tilde{t}, x_{n-1}(\tilde{t})) d\tilde{t}$$

можно перейти к пределу под знаком интеграла, так что предельная функция  $x(t)$  удовлетворяет интегральному уравнению (6). Тем самым доказано существование решения задачи Коши (5).

Докажем единственность. Допустим, что интегральное уравнение (6) имеет два решения  $x(t)$ ,  $y(t)$ , определенные при  $t \in I$ , тогда

$$x(t) - y(t) = A(x(t)) - A(y(t)).$$

Применяя оценку (8), получаем

$$0 \leq \max_{t \in I} |x(t) - y(t)| \leq q \max_{t \in I} |x(t) - y(t)|$$

и так как  $0 < q < 1$ , то  $\max_{t \in I} |x(t) - y(t)| = 0$ , так что  $x(t) \equiv y(t)$ ,  $t \in I$ .

**3. Теорема Коши.** Пусть  $z = x + iy$  — комплексное переменное; здесь  $x$ ,  $y$  — вещественные числа,  $i$  — мнимая единица. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dw}{dz} = f(z, w), \quad w(z_0) = w_0 \quad (11)$$

для одного уравнения, где  $w(z)$  — комплекснозначная функ-



ция. Функция  $w(z)$  называется *аналитической* в точке  $z_0$ , если она разлагается в степенной ряд

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n (z - z_0)^n, \quad (12)$$

сходящийся в некоторой окрестности этой точки. Аналитическая в точке  $z_0$  функция аналитична в некотором круге вида  $|z - z_0| < r$ . Функция двух комплексных переменных  $f(z, w)$  называется *аналитической* в точке  $(z_0, w_0)$ , если она разлагается в двойной степенной ряд

$$f(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_{nm} (z - z_0)^n (w - w_0)^m, \quad (13)$$

сходящийся в некоторой окрестности точки  $(z_0, w_0)$ .

**Теорема Коши.** Пусть функция  $f(z, w)$  аналитична в точке  $(z_0, w_0)$ . Тогда задача Коши (11) имеет решение  $w(z)$ , аналитическое в точке  $z_0$ , и такое решение единственно.

Это решение строится так. Будем искать  $w(z)$  в виде ряда (12) с неопределенными коэффициентами  $\omega_n$ . Коэффициент  $\omega_0$  находится из данных Коши:  $w(z_0) = w_0$ . Подставим ряд (12) в ряд (13), тогда получим ряд по степеням  $z - z_0$ , и уравнение (11) примет вид

$$\begin{aligned} \omega_1 + 2\omega_2(z - z_0) + 3\omega_3(z - z_0)^2 + \dots = \\ = f_{00} + (f_{10} + f_{01}\omega_1)(z - z_0) + \\ + (f_{01}\omega_2 + f_{20} + f_{11}\omega_1 + f_{02}\omega_1^2)(z - z_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

Степенные ряды равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при всех степенях  $z - z_0$ , так что

$$\begin{aligned} \omega_1 &= f_{00}, \quad 2\omega_2 = f_{10} + f_{01}\omega_1, \\ 3\omega_3 &= f_{01}\omega_2 + f_{20} + f_{11}\omega_1 + f_{02}\omega_1^2, \dots \end{aligned}$$

Из этих соотношений можно последовательно найти коэффициенты  $\omega_1, \omega_2, \dots$ ; так как коэффициенты определяются однозначно, то тем самым доказана единственность аналитического решения. Доказательство сходимости построенного таким способом ряда для  $w(z)$  см. в [35].

Аналогичная теорема справедлива и для системы из  $n$  уравнений:

$$\frac{dw}{dz} = f(z, w), \quad w(z_0) = w^0. \quad (14)$$

Требуется, чтобы все компоненты  $f_j(z, \omega_1, \dots, \omega_n)$ ,  $1 \leq j \leq n$ , вектор-функции  $f(z, \omega)$  были аналитичны в точке  $(z_0, \omega_1^0, \dots, \omega_n^0)$ . Тогда задача Коши (14) имеет решение  $\omega(z)$ , все компоненты которого аналитичны в точке  $z_0$  и такое решение единственно.

## § 2. Линейные нормированные пространства

Коротко напомним понятие линейного пространства  $\mathbf{B}$ , которое мы считаем известным из курса линейной алгебры. Множество  $\mathbf{B}$  называется *линейным пространством*, если для любых его элементов  $x, y$  определена сумма  $(x + y) \in \mathbf{B}$  и для любого  $x \in \mathbf{B}$  и вещественного (или комплексного) числа  $\alpha$  определено произведение  $\alpha x \in \mathbf{B}$ , со следующими свойствами:

1.  $x + y = y + x$ .
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$ .
3. Существует нулевой элемент  $O_B \in \mathbf{B}$  такой, что  $x + O_B = x$  для всех  $x \in \mathbf{B}$ .
4.  $1 \cdot x = x$ ,  $0 \cdot x = O_B$ .
5.  $\alpha(\beta x) = \alpha\beta \cdot x$ .
6.  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

и т. д.

Определение 1. *Линейное пространство  $\mathbf{B}$  называется нормированным, если каждому элементу  $x \in \mathbf{B}$  поставлено в соответствие вещественное число  $\|x\|$  (норма  $x$ ), обладающее следующими свойствами:*

- 1°.  $\|x\| > 0$ ,  $x \neq O_B$ ;  $\|O_B\| = 0$ .
- 2°.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  (здесь  $\alpha$  — число).
- 3°.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (неравенство треугольника).

Приведем примеры линейных нормированных пространств.

1. Числовая прямая  $\mathbf{R}$ . Здесь  $\|x\| = |x|$ .
2.  $n$ -мерное евклидово пространство  $\mathbf{E}^n$ . Элементами являются векторы  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , норма определяется так:

$$\|\mathbf{x}\| = |\mathbf{x}| = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}.$$

3.  $n$ -мерное пространство  $R^n$ , с нормой

$$\|\mathbf{x}\| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|.$$

Всюду в дальнейшем употребляется последнее определение нормы вектора.

4. Пространство  $C(a, b)$ . Элементами являются функции  $x(t)$ , непрерывные на отрезке  $[a, b]$ , и

$$\|x(t)\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|.$$

5. Пространство  $C(a, b)$ . Элементами этого пространства являются вектор-функции  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ , непрерывные на отрезке  $[a, b]$ , с нормой

$$\|\mathbf{x}(t)\|_C = \max_{t \in [a, b]} \|\mathbf{x}(t)\|,$$

или, более подробно,

$$\|\mathbf{x}(t)\|_C = \max_{t \in [a, b]} (\max_{1 \leq j \leq n} |x_j(t)|).$$

В примере 4 функции  $x(t)$  могут быть как вещественнозначными, так и комплекснозначными. Свойства пространства  $C(a, b)$ , которые будут установлены ниже, одни и те же в обоих случаях. Это же замечание относится и к примеру 5.

В примере 2  $\|\mathbf{x}\|$  — длина вектора  $\mathbf{x}$ ,  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  — расстояние между точками  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ . Точно так же можно интерпретировать  $\|\mathbf{x}\|$ ,  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  в любом линейном нормированном пространстве  $\mathbf{B}$ , как «длину» вектора  $\mathbf{x}$  и как «расстояние между точками  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ », соответственно. Поэтому можно ввести в линейном нормированном пространстве те понятия, которые вводятся в  $E^n$  с помощью понятия расстояния.

Пусть  $\mathbf{B}$  — линейное нормированное пространство. Множество  $M \subset \mathbf{B}$  называется *ограниченным*, если существует  $R > 0$  такое, что  $\|x\| \leq R$  для всех  $x \in M$ .

По определению,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  в пространстве  $\mathbf{B}$ , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ . Так как для нормы справедливы те же оценки, что и для модуля, то следующие свойства пре-

делов доказываются точно так же, как и для числовых последовательностей в анализе:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha x_n &= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad (\alpha - \text{число}),\end{aligned}$$

если существуют пределы  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ .

В примере 3 ( $B = R^n$ ) сходимость  $x^k$  к  $x$  эквивалентна сходимости каждой из компонент:  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_j^k = x_j$  при всех  $j = 1, 2, \dots, n$ . В пространстве  $C(a, b)$  сходимость  $x_n(t)$  к  $x(t)$  — это *равномерная сходимость* последовательности  $\{x_n(t)\}$  на отрезке  $[a, b]$ . Действительно, по определению сходимости в  $C(a, b)$  имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in [a, b]} |x_n(t) - x(t)| = 0,$$

а это есть одно из определений равномерной сходимости последовательности  $\{x_n(t)\}$ . В пространстве  $C(a, b)$  сходимость  $x^k(t)$  к  $x(t)$  — это равномерная сходимость на отрезке  $[a, b]$  для каждой из компонент:  $x_j^k(t) \rightrightarrows x_j(t)$  при  $1 \leq j \leq n$ .

Последовательность  $\{x_n\}$  называется *фундаментальной*, если  $\lim_{k, l \rightarrow \infty} \|x_k - x_l\| = 0$ .

**Определение 2.** *Линейное нормированное пространство называется полным, если всякая фундаментальная последовательность является сходящейся.*

*Полное линейное нормированное пространство называется банаховым пространством* в честь польского математика С. Банаха.

Все пространства в примерах 1 — 5 ( $R$ ,  $E^n$ ,  $R^n$ ,  $C(a, b)$ ,  $C(a, b)$ ) являются банаховыми пространствами.

Докажем полноту пространства  $C(a, b)$ . Если функциональная последовательность  $x_n(t)$  является фундаментальной, то

$$\lim_{k, l \rightarrow \infty} \max_{t \in [a, b]} |x_k(t) - x_l(t)| = 0.$$

В силу критерия Коши последовательность  $\{x_n(t)\}$  равномерно сходится на отрезке  $[a, b]$  к некоторой непрерывной функции  $x(t)$ , т. е.  $x_n(t) \rightarrow x(t)$  в пространстве  $C(a, b)$ . Аналогично доказывается полнота пространства  $C(a, b)$ .

Наконец, несколько слов о рядах. Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  ( $x_n \in \mathbf{B}$ ) называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм  $\{s_n\}$ . Как и в анализе, доказывается следующий признак сходимости:

Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  сходится по норме, т. е. сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ , то этот ряд сходится.

Введем понятие *оператора*.

**Определение 3.** Пусть каждому элементу  $x \in M$ , где  $M$  — подмножество банахова пространства  $\mathbf{B}$ , поставлен в соответствие элемент  $A(x) \in \mathbf{B}$ . Тогда мы скажем, что задан оператор  $A$ .

Множество  $M$  называется *областью определения* оператора  $A$ .

### § 3. Принцип сжатых отображений

Рассмотрим уравнение

$$\varphi = A(\varphi). \quad (1)$$

Здесь  $\varphi \in \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B}$  — банахово пространство, и  $A$  — оператор, действующий из  $\mathbf{B}$  в  $\mathbf{B}$  (т. е. переводящий элементы из  $\mathbf{B}$  в элементы из  $\mathbf{B}$ ). *Метод последовательных приближений*, применительно к уравнению (1), заключается в следующем. Возьмем произвольную точку  $\varphi_0 \in \mathbf{B}$  и составим последовательность:

$$\varphi_1 = A(\varphi_0), \quad \varphi_2 = A(\varphi_1), \dots, \quad \varphi_{n+1} = A(\varphi_n), \dots$$

Элементы  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$  называются *последовательными приближениями*. Допустим, что последовательность  $\varphi_n$  сходится к  $\varphi$ , и что оператор  $A$  таков, что можно переходить к пределу под знаком оператора. Тогда, переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$  в равенстве

$$\varphi_{n+1} = A(\varphi_n),$$

получаем, что  $\varphi = A(\varphi)$ . В этом случае решение уравнения (1) существует и находится с помощью последовательных приближений.

Приведем достаточные условия сходимости этого метода. Введем

**Определение.** Пусть  $M$  — некоторое множество в банаховом пространстве  $B$ . Оператор  $A$ , определенный на  $M$ , сжимает  $M$ , если

1)  $A: M \rightarrow M$  (т. е. для любого  $\varphi \in M$  имеем  $A(\varphi) \in M$ ).

2) Существует  $k$ ,  $0 < k < 1$ , такое, что

$$\|A(\varphi_1) - A(\varphi_2)\| \leq k \|\varphi_1 - \varphi_2\| \quad (2)$$

для любых  $\varphi_1, \varphi_2 \in M$ .

**Пример 1.**  $B$  — плоскость  $(x, y)$ ,

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 x \\ k_2 y \end{pmatrix}, \quad |k_j| < 1.$$

Оператор  $A$  сжимает множество  $M = B$ . Геометрический смысл сжимающего оператора  $A$  следующий:  $A$  уменьшает расстояние между точками — см. (2).

**Теорема 1** (принцип сжатых отображений). Пусть  $M$  — замкнутое ограниченное множество в банаховом пространстве  $B$ . Пусть оператор  $A$  сжимает  $M$ . Тогда уравнение

$$\varphi = A(\varphi) \quad (1)$$

имеет решение  $\varphi \in M$ , и притом единственное.

**Доказательство.** Применим к уравнению (1) метод последовательных приближений. Возьмем любую точку  $\varphi_0 \in M$  и построим последовательные приближения:

$$\varphi_1 = A(\varphi_0), \quad \varphi_2 = A(\varphi_1), \dots, \varphi_{n+1} = A(\varphi_n), \dots$$

Так как  $A: M \rightarrow M$ , то все  $\varphi_j \in M$ .

Докажем, что последовательность  $\{\varphi_n\}$  сходится. Сходимость ее эквивалентна сходимости ряда

$$\varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + (\varphi_2 - \varphi_1) + \dots + (\varphi_{n+1} - \varphi_n) + \dots \quad (3)$$

Так как множество  $M$  ограничено, то существует  $C > 0$  такое, что  $\|\varphi\| \leq C$  для любого  $\varphi \in M$ . Докажем по индукции, что

$$\|\varphi_{n+1} - \varphi_n\| \leq 2Ck^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (4)$$

При  $n = 0$  это верно, и если верно для  $n$ , то

$$\|\varphi_{n+1} - \varphi_n\| = \|A(\varphi_n) - A(\varphi_{n-1})\| \leq k \|\varphi_n - \varphi_{n-1}\| \leq 2Ck^{n+1},$$

что и доказывает (4). Итак,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$  существует и  $\varphi \in M$ , так как  $M$  замкнуто.

Докажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(\varphi_n) = A(\varphi), \quad (5)$$

тогда, переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$  в равенстве  $\varphi_{n+1} = A(\varphi_n)$ , получим, что  $\varphi$  является решением уравнения (1). Имеем

$$\|A(\varphi_n) - A(\varphi)\| \leq k \|\varphi_n - \varphi\| \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ , и (5) доказано.

Докажем, что решение уравнения (1) единственно. Допустим, что  $\varphi, \psi \in M$  являются решениями. Тогда

$$\varphi - \psi = A(\varphi) - A(\psi),$$

откуда

$$\|\varphi - \psi\| \leq k \|\varphi - \psi\|$$

и так как  $0 < k < 1$ , то  $\|\varphi - \psi\| = 0$ , т. е.  $\varphi = \psi$ . Теорема доказана.

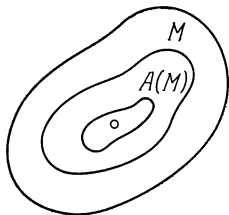


Рис 13.

Геометрическая интерпретация принципа сжатых отображений такова. Пусть  $B$  — плоскость, а  $M$  — замкнутое ограниченное множество на плоскости (рис. 13). Пусть  $A$  сжимает  $M$ . Если  $d$  — диаметр  $M$ , то диаметр множества  $A(M)$  будет  $\leq kd$ , и  $A(M) \subset M$ .

Аналогично, диаметр множества  $A^n(M)$  будет  $\leq k^n d$ . Мы получаем последовательность замкнутых, ограниченных и вложенных друг в друга множеств

$$M \supset A(M) \supset A^2(M) \supset \dots \supset A^n(M) \supset \dots,$$

диаметры которых стремятся к нулю. По известной теореме анализа эта последовательность имеет ровно одну точку  $\varphi$ , принадлежащую всем множествам — и эта точка является решением уравнения (1).

Рассмотрим один важный вариант принципа сжатых отображений. Пусть оператор  $A$  определен на всем банаховом пространстве  $B$ . Оператор  $A$  называется *линейным*, если

$$A(\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2) = \alpha_1 A(\varphi_1) + \alpha_2 A(\varphi_2)$$

для любых элементов  $\varphi_1, \varphi_2 \in B$  и для любых чисел  $\alpha_1, \alpha_2$ . Норма оператора  $A$  определяется формулой

$$\|A\| = \sup_{\varphi \in B, \varphi \neq O_B} \frac{\|A(\varphi)\|}{\|\varphi\|}. \quad (6)$$

Оператор  $A$  называется *ограниченным*, если  $\|A\| < \infty$ . Ниже мы рассматриваем только линейные ограниченные операторы. Из определения нормы (6) следует неравенство

$$\|A(\varphi)\| \leq \|A\| \|\varphi\|, \quad (7)$$

где  $\varphi$  — любой элемент пространства  $B$ .

*Суммой*  $A + \tilde{A}$  операторов  $A$  и  $\tilde{A}$  называется оператор, действующий по формуле

$$(A + \tilde{A})(\varphi) = A(\varphi) + \tilde{A}(\varphi).$$

Если  $\alpha$  — число, то оператор  $\alpha A$ , по определению, действует по формуле

$$(\alpha A)(\varphi) = \alpha A(\varphi).$$

*Произведением*  $A\tilde{A}$  операторов  $A, \tilde{A}$  называется оператор, действующий по формуле

$$(A\tilde{A})(\varphi) = A(\tilde{A}(\varphi)).$$

Непосредственно проверяется, что если  $A$  и  $\tilde{A}$  — линейные операторы, то  $A + \tilde{A}$ ,  $\alpha A$  ( $\alpha$  — число),  $A\tilde{A}$  — линейные операторы. Покажем, что норма оператора (8) удовлетворяет всем аксиомам нормы (§ 2, определение 1).

*Лемма.* Пусть  $A, \tilde{A}$  — ограниченные линейные операторы, действующие в банаховом пространстве  $B$ . Тогда

$$\begin{aligned} \|\alpha A\| &= |\alpha| \|A\|, \quad \|A + \tilde{A}\| \leq \|A\| + \|\tilde{A}\|, \\ \|A\tilde{A}\| &\leq \|A\| \|\tilde{A}\|. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $\alpha$  — число.

*Доказательство.* Первое из этих соотношений непосредственно вытекает из определения нормы; докажем второе. Пусть  $\varphi \in B$ ,  $\varphi \neq O_B$ , тогда, в силу (7),

$$\|(A + \tilde{A})(\varphi)\| \leq \|A(\varphi)\| + \|\tilde{A}(\varphi)\| \leq (\|A\| + \|\tilde{A}\|) \|\varphi\|,$$

так что

$$\|A + \tilde{A}\| = \sup_{\varphi \in B, \varphi \neq O_B} \frac{\|(A + \tilde{A})(\varphi)\|}{\|\varphi\|} \leq \|A\| + \|\tilde{A}\|.$$





(штрих означает, что равные нулю слагаемые опущены)

$$= \sum_{k=1}^n |a_{j_0 k}| = \|A\|,$$

так что  $\|A\mathbf{x}^0\| \geq \|A\| \|\mathbf{x}^0\|$ , и (10) доказано.

Обозначим символом  $I$  единичный оператор, действующий в банаховом пространстве  $\mathbf{B}$  по формуле  $I(\varphi) = \varphi$ . Этот оператор линеен и  $\|I\| = 1$ .

**Теорема 2.** Пусть  $A$  — линейный оператор, действующий в банаховом пространстве  $\mathbf{B}$ , и

$$\|A\| < 1. \quad (11)$$

Тогда уравнение

$$\varphi - A(\varphi) = \psi \quad (12)$$

для любого элемента  $\psi \in \mathbf{B}$  имеет, и притом единственное, решение  $\varphi \in \mathbf{B}$ .

**Доказательство.** Применим метод последовательных приближений, полагая

$$\varphi_0 = \psi, \quad \varphi_1 = \psi + A(\varphi_0), \quad \dots, \quad \varphi_n = \psi + A(\varphi_{n-1}), \quad \dots$$

так что

$$\varphi_n = \psi + A(\psi) + \dots + A^n(\psi). \quad (13)$$

Покажем, что решение уравнения (12) равно

$$\varphi = \psi + A(\psi) + \dots + A^n(\psi) + \dots \quad (14)$$

Из оценки (7) и условия  $\|A\| < 1$ , следует, что

$$\|\varphi\| \leq \|\psi\| (1 + \|A\| + \|A\|^2 + \dots + \|A\|^n + \dots) = \|\psi\| (1 - \|A\|)^{-1}, \quad (15)$$

так что ряд (14) сходится, а потому последовательность частичных сумм  $\varphi_n$  этого ряда сходится к  $\varphi$ . Далее,

$$\|A(\varphi - \varphi_n)\| \leq \|A\| \|\varphi - \varphi_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

так что  $A(\varphi_n) \rightarrow A(\varphi)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$  в тождестве  $\varphi_n = \psi + A(\varphi_{n-1})$ , получаем, что  $\varphi$  есть решение уравнения (12).

Докажем единственность решения. Если  $\varphi, \tilde{\varphi}$  — решения уравнения (12), то, в силу линейности оператора  $A$ , имеем

$$\varphi - \tilde{\varphi} = A(\varphi - \tilde{\varphi}).$$

Следовательно,

$$0 \leq \|\varphi - \tilde{\varphi}\| \leq \|A\| \|\varphi - \tilde{\varphi}\|$$

и так как  $\|A\| < 1$ , то  $\|\varphi - \tilde{\varphi}\| = 0$ , т. е.  $\varphi = \tilde{\varphi}$ .

Если  $\varphi, \psi$  — векторы  $n$ -мерного пространства и  $A$  —  $(n \times n)$ -матрица, то решение уравнения (12) записывается в виде

$$\varphi = (I - A)^{-1} \psi. \quad (16)$$

Это обозначение сохраняется и для банаховых пространств; символом  $(I - A)^{-1}$  обозначается оператор, отображающий элемент  $\psi$  в элемент  $\varphi$ . В условиях теоремы имеет место

*Следствие. Оператор  $(I - A)^{-1}$  линеен, и справедлива оценка*

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq (1 - \|A\|)^{-1}. \quad (17)$$

Действительно, если

$$\varphi_1 - A(\varphi_1) = \psi_1, \quad \varphi_2 - A(\varphi_2) = \psi_2,$$

то элемент  $\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2$  (здесь  $\alpha_1, \alpha_2$  — числа) есть решение уравнения

$$\varphi - A(\varphi) = \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2,$$

так что

$$(I - A)^{-1}(\alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2) = \alpha_1 (I - A)^{-1}(\psi_1) + \alpha_2 (I - A)^{-1}(\psi_2),$$

и линейность оператора  $(I - A)^{-1}$  доказана. Из оценки (15) следует, что

$$\|\varphi\| = \|(I - A)^{-1}(\varphi)\| \leq (1 - \|A\|)^{-1} \|\psi\|$$

для любого элемента  $\psi \in \mathbf{B}$ , откуда следует (17). Ряд

$$(I - A)^{-1}(\psi) = (I + A + A^2 + \dots + A^n + \dots)(\psi), \quad (18)$$

дающий решение уравнения (12), называется *рядом Неймана*. Оператор  $(I - A)^{-1}$  называется *резольвентой* уравнения (12). Резольвента (в условиях теоремы) представима рядом

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^n + \dots,$$

сходящимся по норме. Для резольвенты имеет место тождество Гильберта

$$(I - A)^{-1} = I + A(I - A)^{-1}. \quad (19)$$

Чтобы доказать его, подставим в уравнение (12) выражение  $\varphi = (I - A)^{-1}(\psi)$ , тогда получим

$$(I - A)^{-1}(\psi) = [I + A(I - A)^{-1}](\psi),$$

откуда и следует (19).

### § 4. Лемма Адамара

Для дифференцируемой функции  $g(x)$  одной переменной справедлива формула конечных приращений Лагранжа:

$$g(y) - g(x) = g'(\xi)(y - x), \quad (1)$$

где точка  $\xi$  лежит в интервале  $(x, y)$ . Докажем многомерный аналог этой формулы.

Область  $D$  в пространстве  $R_x^n$  называется *выпуклой*, если вместе с любыми двумя точками  $x, y$  эта область содержит отрезок, их соединяющий. Примеры выпуклых областей в трехмерном пространстве: параллелепипед, шар, эллипсоид. Пусть  $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ .

*Лемма 1. Пусть функция  $g(x)$  непрерывно дифференцируема в выпуклой области  $D \subset R_x^n$ . Если точки  $x, y \in D$ , то*

$$g(y) - g(x) = (\nabla g(\xi), y - x), \quad (2)$$

где точка  $\xi$  лежит на отрезке, соединяющем точки  $x, y$ .

*Доказательство.* Так как область  $D$  выпукла, то она содержит отрезок  $I$ , соединяющий точки  $x, y$ . Всякая точка этого отрезка имеет вид  $z(t) = x + t(y - x)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , и на этом отрезке функция  $g(x)$  есть функция от одной переменной  $t$ :  $g(z(t)) = f(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . По формуле конечных приращений Лагранжа

$$f(1) - f(0) = f'(t_0), \quad 0 < t_0 < 1. \quad (3)$$

Так как  $f(0) = g(x)$ ,  $f(1) = g(y)$  и

$$\frac{d}{dt} g(z(t)) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g(z(t))}{\partial z_k} (y_k - x_k) = (\nabla g(z(t)), y - x), \quad (4)$$

то из (3) следует (2), где  $\xi = z(t_0)$ .

Ввиду важности этой леммы для последующего приведем другую формулировку и другое доказательство.

*Лемма 2. Если условия леммы 1 выполнены, то*

$$g(y) - g(x) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(x, y)(y_k - x_k), \quad (5)$$

где функции  $\varphi_k(x, y)$  непрерывны по совокупности переменных при  $x \in D, y \in D$ .

Доказательство. Имеем, используя (4),

$$g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}) = \int_0^1 \frac{d}{dt} g(\mathbf{z}(t)) dt = \sum_{k=1}^n \varphi_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})(y_k - x_k),$$

где функции  $\varphi_k$  равны

$$\varphi_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z_k} g(\mathbf{z}(t)) dt (\mathbf{z}(t) = \mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})). \quad (6)$$

Из этой формулы следует непрерывность функций  $\varphi_k$ .

Лемма 3. Пусть вектор-функция  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), \dots, \dots, g_n(\mathbf{x}))$  непрерывно дифференцируема в замкнутой ограниченной выпуклой области  $D$ . Тогда для любых точек  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{y}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})\| \leq nK_1 \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|, \quad (7)$$

где обозначено

$$K_1 = \max_{\mathbf{x} \in D} \max_{1 \leq i, j \leq n} \left| \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right|. \quad (8)$$

Доказательство. Применяя формулу (1) к компоненте  $g_i(\mathbf{x})$ , получаем

$$\begin{aligned} |g_i(\mathbf{y}) - g_i(\mathbf{x})| &\leq \sum_{j=1}^n |y_j - x_j| \left| \frac{\partial g_i(\xi^i)}{\partial x_j} \right| \leq \\ &\leq K_1 \sum_{j=1}^n |y_j - x_j| \leq nK_1 \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|, \end{aligned}$$

так как  $|y_j - x_j| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ . Из полученной оценки и определения нормы вектора (§ 2, пример 3) следует лемма.

Аналогом формулы конечных приращений Лагранжа для вектор-функций (в условиях леммы 3) служит формула

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}; \mathbf{y})(\mathbf{y} - \mathbf{x}), \quad (9)$$

которая следует из (1). Здесь  $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{y})$  есть  $(n \times n)$ -матрица с элементами

$$\Phi_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \frac{\partial g_i(\xi^i)}{\partial x_j}, \quad (10)$$

точки  $\xi^i$  лежат на отрезке, соединяющем точки  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ . Матрица-функция  $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{y})$  непрерывна при  $\mathbf{x} \in D, \mathbf{y} \in D$ .

Рассмотрим функцию  $F(\mathbf{x}; \mathbf{z})$ , где  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m)$ .

**Лемма Адамара.** Пусть  $D$  — область в пространстве  $\mathbf{R}_{\mathbf{x}, \mathbf{z}}^{n+m}$ , выпуклая по переменным  $\mathbf{x}$ , функция  $F(\mathbf{x}; \mathbf{z})$  имеет в области  $D$  непрерывные производные до порядка  $p \geq 1$  включительно. Тогда существуют функции  $\varphi_k(\mathbf{x}; \mathbf{y}; \mathbf{z})$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ , имеющие непрерывные производные по  $x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m; z_1, \dots, z_m$  до порядка  $p-1$  включительно, такие, что

$$F(\mathbf{y}; \mathbf{z}) - F(\mathbf{x}; \mathbf{z}) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(\mathbf{x}; \mathbf{y}; \mathbf{z}) (y_k - x_k). \quad (11)$$

Доказательство следует из (5), (6); в данном случае

$$\varphi_k(\mathbf{x}; \mathbf{y}; \mathbf{z}) = \int_0^1 F_k(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}); \mathbf{z}) dt,$$

где  $F_k$  — производная  $F$  по переменной  $x_k + t(y_k - x_k)$ .

## § 5. Доказательство основной теоремы.

### Теорема существования и единственности для уравнений $n$ -го порядка

**1. Доказательство основной теоремы.** В § 1 мы свели задачу Коши для системы из  $n$  уравнений к системе интегральных уравнений

$$\mathbf{x}(t) = A(\mathbf{x}(t)), \quad (1)$$

где  $A$  — интегральный оператор:

$$A(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\bar{t}, \mathbf{x}(\bar{t})) d\bar{t}. \quad (2)$$

В дальнейшем будет систематически применяться Лемма. Если  $\mathbf{x}(t)$  — непрерывная при  $t \in [a, b]$  вектор-функция, то справедливо неравенство

$$\left\| \int_a^b \mathbf{x}(t) dt \right\| \leq \left| \int_a^b \|\mathbf{x}(t)\| dt \right|. \quad (3)$$

Доказательство. Имеем

$$\left| \int_a^b x_j(t) dt \right| \leq \left| \int_a^b |x_j(t)| dt \right| \leq \left| \int_a^b \|x(t)\| dt \right|,$$

так как  $|x_j(t)| \leq \|x(t)\| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j(t)|$ . Правая часть этого неравенства не зависит от номера  $j$ ; беря максимум по  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , от левой части, получаем оценку (3).

Применим к уравнению (1) принцип сжатых отображений. Пусть  $\Pi$  — параллелепипед  $\|x - x^0\| \leq b$ ,  $|t - t_0| \leq a$ , целиком содержащийся в области  $G$  (рис. 12). Обозначим

$$K = \max_{\Pi} \|f(t, x)\|, \quad K_1 = \max_{\Pi} \left( \max_{1 \leq i, j \leq n} \left| \frac{\partial f_i(t, x)}{\partial x_j} \right| \right).$$

Рассмотрим меньший параллелепипед  $\Pi_\delta$ :  $|t - t_0| \leq \delta \leq a$ ,  $\|x - x^0\| \leq b$ , где  $\delta > 0$  будет указано ниже. В качестве банахова пространства  $B$  выберем  $C[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ , т. е. пространство непрерывных на отрезке  $|t - t_0| \leq \delta$  вещественнозначных вектор-функций  $x(t)$ , с нормой

$$\|x(t)\|_C = \max_{|t - t_0| \leq \delta} \|x(t)\|.$$

В качестве  $M$  возьмем множество вектор-функций  $x(t) \in B$  таких, что  $\|x(t) - x^0\|_C \leq b$ . Это множество ограничено, так как  $\|x(t)\|_C \leq \|x^0\| + b$  для всех  $x(t) \in M$ . Множество  $M$  замкнуто, так как если  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k(t) = x(t)$ , где  $x^k(t) \in M$ , то предельная вектор-функция  $x(t) \in B$ , и, кроме того,  $\|x(t) - x^0\|_C \leq b$ , так что  $x(t) \in M$ .

Итак, нам необходимо проверить, что оператор  $A$ , определяемый формулой (2), сжимает  $M$ , если  $\delta > 0$  достаточно мало.

1°. Покажем, что если  $\delta > 0$  достаточно мало, то  $A: M \rightarrow M$ . Пусть  $x(t) \in M$ . Тогда вектор-функция  $A(x(t)) \in C[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ , так как интеграл (2) от непрерывной на этом отрезке вектор-функции  $f(t, x(t))$  является непрерывной вектор-функцией. Далее,

$$\begin{aligned} \|A(x(t)) - x^0\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(t, x(t)) dt \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(\bar{t}, x(\bar{t}))\| d\bar{t} \right| \leq \left| \int_{t_0}^t K d\bar{t} \right| \leq K\delta, \end{aligned}$$

так что

$$\|A(\mathbf{x}(t)) - \mathbf{x}^0\|_C \leq K\delta.$$

Если  $K\delta \leq b$ , то  $A(\mathbf{x}(t)) \in M$ . Итак, при

$$\delta \leq b/K \quad (4)$$

имеем  $A: M \rightarrow M$ .

2°. Покажем, что если  $\delta \geq 0$  достаточно мало, то

$$\|A(\mathbf{x}(t)) - A(\mathbf{y}(t))\|_C \leq q \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\|_C, \quad (5)$$

где  $0 < q < 1$ , для любых  $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t) \in M$ . Пусть  $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t) \in M$ . Имеем в силу леммы 2, § 4 (параллелепипед  $\Pi_\delta$  — выпуклое множество)

$$\begin{aligned} \|A(\mathbf{x}(t)) - A(\mathbf{y}(t))\| &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(\bar{t}, \mathbf{x}(\bar{t})) - f(\bar{t}, \mathbf{y}(\bar{t}))\| d\bar{t} \right| \leq \\ &\leq K_1 n \left| \int_{t_0}^t \|\mathbf{x}(\bar{t}) - \mathbf{y}(\bar{t})\| d\bar{t} \right| \leq \\ &\leq K_1 n \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\|_C \left| \int_{t_0}^t d\bar{t} \right| \leq K_1 n \delta \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\|_C. \end{aligned}$$

Беря максимум по  $t$  от обеих частей неравенства, получаем

$$\|A(\mathbf{x}(t)) - A(\mathbf{y}(t))\|_C \leq q \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\|_C,$$

где  $q = K_1 n \delta$ . Если  $\delta \leq q/(K_1 n)$ , где  $q$  — фиксированное число,  $0 < q < 1$ , то неравенство (4), § 3, выполняется.

Итак, мы доказали, что если  $\delta > 0$  таково, что

$$\delta \leq \min\left(\frac{b}{K}, \frac{q}{K_1 n}\right), \quad (6)$$

то оператор  $A$  сжимает  $M$ . Применяя принцип сжатых отображений, получаем, что уравнение  $\mathbf{x}(t) = A(\mathbf{x}(t))$  имеет решение  $\mathbf{x}(t)$ , непрерывное на отрезке  $|t - t_0| \leq \delta$  и притом единственное. В § 1 было показано (см. лемму), что отсюда следует теорема существования и единственности для задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = f(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0. \quad (7)$$

**2. Дифференциальные уравнения  $n$ -го порядка.** Рассмотрим уравнение  $n$ -го порядка в нормальной форме (т. е. разрешенное относительно старшей производной):

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right), \quad (8)$$



Поставим начальные условия

$$x|_{t=t_0} = x_0, \quad \frac{dx}{dt} \Big|_{t=t_0} = x_1, \dots, \quad \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} \Big|_{t=t_0} = x_n. \quad (9)$$

Задача Коши ставится так: найти решение уравнения (8), удовлетворяющее условиям (9). Заметим, что число начальных условий равно порядку уравнения.

**Теорема существования и единственности** для уравнений  $n$ -го порядка. Пусть функция  $f(t, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$  непрерывна вместе со всеми частными производными  $\frac{\partial f}{\partial y_j}$ ,  $0 \leq j \leq n-1$ , в области  $G \subset \mathbf{R}_{t, y}^{n+1}$ , и пусть точка  $(t_0, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in G$ . Тогда решение задачи Коши (8), (9) существует и единственно на некотором интервале  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ .

Доказательство проведем для простоты при  $n=2$ . Имеем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right); \quad x(t_0) = x_0; \quad \frac{dx(t_0)}{dt} = x_1.$$

Обозначим  $x = y_0$ ,  $\frac{dx}{dt} = y_1$ , тогда получим систему

$$\frac{dy_0}{dt} = y_1, \quad \frac{dy_1}{dt} = f(t, y_0, y_1), \quad (10)$$

которая эквивалентна исходному уравнению. Данные Коши примут вид:

$$y_0(t_0) = x_0, \quad y_1(t_0) = x_1.$$

Применяя основную теорему, получаем существование и единственность задачи Коши для системы (10), откуда следует теорема.

**Задача 1.** Показать, что систему любого порядка можно свести к системе первого порядка.

**Задача 2.** Дано уравнение  $\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ , условия основной теоремы выполнены. Могут ли две различные интегральные кривые этого уравнения а) пересекаться; б) касаться?

### 3. Комментарии к основной теореме.

1°. Для существования решений достаточно непрерывности правой части  $f(t, \mathbf{x})$ . Справедлива

**Теорема Пеано.** Если вектор-функция  $f(t, \mathbf{x})$  непрерывна в области  $G \subset \mathbf{R}_{t, \mathbf{x}}^{n+1}$ , то решение задачи Коши  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$  существует при любых  $(t_0, \mathbf{x}^0) \in G$ .

Доказательство см. в [35].

2°. Для единственности решения непрерывности правой части  $f$  недостаточно. Пример неединственности:

$$\frac{dx}{dt} = 3x^{2/3}$$

(гл. 1, § 2, пример, рис. 2). Единственность нарушается на оси  $x=0$  — а на этой оси условия основной теоремы не выполняются, так как производная  $f'(x) = 2x^{-1/3}$  обращается в бесконечность.

Теоремы единственности, справедливые при более слабых, чем в основной теореме, предположениях, см. в [35].

3°. Теорема существования и единственности носит локальный характер: существование решения гарантируется лишь на малом интервале времени  $|t - t_0| < \delta$ . Это по существу, как показывает рассмотренный в гл. 1, § 2 пример  $\frac{dx}{dt} = x^2$ .

**4. Продолжение решений.** Пусть  $x(t)$  — решение задачи Коши (7), определенное на некотором интервале  $I = (t_1, t_2)$ . Это решение может быть продолжено, вообще говоря, на больший интервал времени. Решение  $y(t)$  называется *продолжением решения  $x(t)$* , если оно определено на большем интервале  $J \supset I$  и совпадает с  $x(t)$  при  $t \in I$ .

Решение называется *неограниченно продолжаемым (неограниченно продолжаемым вперед или назад)*, если его можно продолжить на всю ось  $-\infty < t < \infty$  (на полуось  $t_0 \leq t < \infty$  или  $-\infty < t \leq t_0$ , соответственно). Пусть  $\Gamma$  — граница области  $G$ . Решение  $x(t)$  ( $x(t_0) = x^0$ ) называется *продолжаемым вперед до границы  $\Gamma$* , если существует его продолжение  $y(t)$ , определенное на конечном интервале  $[t_0, t_+)$ ,  $t_+ < \infty$ , и такое, что точки вида  $(t, y(t))$  при  $t$ , близких к  $t_+$ , не содержатся ни в каком компактном подмножестве  $F$  области  $G$ . Аналогично определяется продолжаемость решения назад вплоть до границы  $\Gamma$ .

**Теорема о продолжении решений.** Пусть в области  $G$  в пространстве  $R_{t,x}^{n+1}$  для системы (7) выполнены условия основной теоремы. Тогда всякое решение этой системы продолжается вперед (назад) либо неограниченно, либо вплоть до границы  $\Gamma$ , и это продолжение единственно.

Доказательство см. в [3, 36].

Поясним понятие «продолжаемость вперед до границы» на примере одного уравнения

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Пусть  $y(t)$  — описанное выше продолжение этого решения, определенное при  $t_0 \leq t < t_+ < \infty$ . Имеются три логические возможности:

1.  $\lim_{t \rightarrow t_+} y(t)$  существует и конечен.
2.  $\lim_{t \rightarrow t_+} y(t) = \infty$ .
3.  $\lim_{t \rightarrow t_+} y(t)$  не существует.

В первом случае  $(t, y(t)) \rightarrow (t_+, y_+)$  и предельная точка интегральной кривой лежит на границе. Этот случай реализуется, например, для уравнения  $\dot{x} = 0$ ,  $G$  — прямоугольник вида  $t_1 < t < t_2$ ,  $x_1 < x < x_2$ . Второй случай реализуется для уравнения  $\dot{x} = x^2$  (гл. 1, § 2). В третьем случае поведение интегральной кривой вблизи границы  $\Gamma$  носит более сложный характер; приведем пример. Функция  $x = \sin(1/t)$  удовлетворяет, очевидно, уравнению  $\dot{x} = -t^{-2} \cos(1/t)$  в области  $G: t < 0$ ,  $-\infty < x < \infty$ , и условия основной теоремы выполнены. Предел  $\lim_{t \rightarrow -0} x(t)$  не существует, а множество предельных точек интегральной кривой заполняет отрезок  $x = 0$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ , лежащий на границе  $\Gamma$ .

## § 6. Гладкость решений

Рассмотрим систему из  $n$  уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, \mathbf{x}). \quad (1)$$

*Теорема.* Пусть вектор-функция  $f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$  обладает непрерывными производными по всем переменным до порядка  $p \geq 1$  включительно. Тогда всякое решение системы (1) имеет непрерывные производные до порядка  $p + 1$ .

Это означает, что чем глаже правые части системы, тем глаже решение.

*Доказательство* проведем для случая одного уравнения. Пусть  $p = 1$ , тогда решение  $x(t)$  непрерывно дифференцируемо, в силу основной теоремы. Имеем

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)). \quad (2)$$

Так как функция  $f(t, x)$  непрерывно дифференцируема по совокупности переменных, то функция от одной переменной  $f(t, x(t))$  непрерывно дифференцируема по теореме о дифференцируемости сложной функции. Следовательно, левая часть тождества (2) непрерывно дифференцируема. Пусть  $p=2$ . Продифференцировав это тождество по  $t$ , получим

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{\partial f(t, x(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, x(t))}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt}.$$

Применяя к этому тождеству те же рассуждения, что и выше, получим, что существует непрерывная третья производная решения  $\frac{d^3x(t)}{dt^3}$ , и т. д.

**Задача.** Доказать теорему для системы из  $n$  уравнений, применяя индукцию по  $p$ .

## § 7. Зависимость решений от параметров и начальных условий

**1. Непрерывная зависимость решений от параметров.** Дифференциальные уравнения, описывающие физические процессы, всегда содержат некоторые параметры (масса, упругость и т. д.). Эти параметры в реальных задачах никогда не могут быть измерены абсолютно точно, т. е. всегда измеряются с некоторой погрешностью, так что сами дифференциальные уравнения известны лишь с некоторой степенью точности. Поэтому, для того чтобы уравнения могли описывать реальные процессы, необходимо, чтобы их решения непрерывно зависели от параметров, т. е., чтобы они мало менялись при малых изменениях параметров.

Перейдем к точным формулировкам.

**Теорема о непрерывной зависимости решений от параметров.** *Рассмотрим задачу Коши для одного уравнения*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \mu), \quad x(t_0, \mu) = x_0, \quad (1)$$

где  $\mu$  — параметр. Пусть  $G$  — область в пространстве  $(t, x, \mu)$ . Если функции  $f(t, x, \mu)$ ,  $\frac{\partial f(t, x, \mu)}{\partial x}$  непрерывны в области  $G$  по совокупности переменных и точка  $(t_0, x_0, \mu_0) \in G$ , то решение задачи Коши (1)  $x(t, \mu)$  непрерывно по совокуп-

ности переменных  $(t, \mu)$  в некоторой области  $|t - t_0| \leq \delta$ ,  $|\mu - \mu_0| \leq \delta_1$ .

Интегральные кривые уравнения (1) образуют семейство кривых, проходящих через точку  $(t_0, x_0)$ . Теорема утверждает, что интегральные кривые, отвечающие близким значениям параметра  $\mu$ , близки.

Доказательство. Сведем задачу Коши (1) к эквивалентному ей интегральному уравнению

$$x(t, \mu) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau, \mu), \mu) d\tau \quad (2)$$

или, в операторной форме,

$$x = A(x). \quad (3)$$

Возьмем параллелепипед  $\Pi_0$ :  $|t - t_0| \leq a$ ,  $|x - x_0| \leq b$ ,  $|\mu - \mu_0| \leq c$ , лежащий в области  $G$ , и обозначим

$$K_0 = \max_{\Pi_0} |f(t, x, \mu)|, \quad K_1 = \max_{\Pi_0} \left| \frac{\partial f(t, x, \mu)}{\partial x} \right|.$$

Применим к уравнению (3) принцип сжатых отображений. В качестве  $B$  возьмем пространство функций  $x(t, \mu)$ , непрерывных при  $|t - t_0| \leq \delta$ ,  $|\mu - \mu_0| \leq c$ , где  $\delta > 0$  будет выбрано ниже, с нормой

$$\|x(t, \mu)\|_C = \max_{\substack{|t - t_0| \leq \delta, \\ |\mu - \mu_0| \leq c}} |x(t, \mu)|.$$

В качестве  $M$  возьмем множество функций из  $B$  таких, что  $\|x(t, \mu) - x_0\|_C \leq b$ . Заметим, что если  $\varphi(t, \mu) \in B$ , то функция

$$A(\varphi) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau, \mu), \mu) d\tau$$

непрерывна по  $x$  и  $\mu$  при  $|t - t_0| \leq \delta$ ,  $|\mu - \mu_0| \leq c$ , по теореме о непрерывности интеграла, зависящего от параметра. Повторяя далее дословно доказательство основной теоремы, получаем, что при  $\delta \leq b/K_0$ ,  $\delta \leq q/K_1$ , где  $0 < q < 1$ , оператор  $A$  сжимает  $M$ , откуда и вытекает настоящая теорема.

Точно так же формулируется и доказывается теорема о непрерывной зависимости от параметров для системы:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \mu), \quad x(t_0, \mu) = x^0, \quad (4)$$

где  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ ,  $\mu_j$  — параметры.

Теорема о дифференцируемости решений по параметру. Рассмотрим задачу Коши (4). Пусть в некоторой области  $G$  пространства  $(t, \mathbf{x}, \mu)$  вектор-функция  $\mathbf{f}$  имеет непрерывные производные до порядка  $p \geq 1$  включительно по  $t, \mathbf{x}, \mu$ . Тогда решение задачи Коши (4)  $\mathbf{x}(t, \mu)$  имеет  $p$  непрерывных производных по переменным  $(t, \mu)$ .

Доказательство проведем для случая одного уравнения и одного параметра  $\mu$  (см. (1)). Пусть  $p=1$ ,  $x = \varphi(t, \mu)$  — решение задачи Коши (1). Функция  $x = \varphi(t, \mu + \Delta\mu)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \mu + \Delta\mu)$$

и данным Коши (1), так что  $\Delta\varphi = \varphi(t, \mu + \Delta\mu) - \varphi(t, \mu)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d \Delta\varphi}{dt} = f(t, \varphi(t, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - f(t, \varphi(t, \mu), \mu).$$

Правую часть по лемме Адамара (§ 4) можно представить в виде  $F \Delta\varphi + G \Delta\mu$ , где  $F, G$  — непрерывные функции от переменных  $t, \varphi(t, \mu), \varphi(t, \mu + \Delta\mu), \mu, \mu + \Delta\mu$ , и для функции  $\Delta\varphi/\Delta\mu$  получаем линейное уравнение

$$\frac{d}{dt} \frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu} = F \frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu} + G. \quad (5)$$

Поскольку функции  $\varphi(t, \mu)$  и  $\varphi(t, \mu + \Delta\mu)$  удовлетворяют одним и тем же данным Коши, то

$$\left. \frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu} \right|_{t=t_0} = 0.$$

Правая часть уравнения (5) непрерывна по переменным  $t, \Delta\mu$  и непрерывно дифференцируема по переменной  $\Delta\varphi/\Delta\mu$ , так как, в силу леммы Адамара, функции  $F, G$  — интегралы от непрерывных функций  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial t}$ . В силу теоремы о непрерывной зависимости от параметров функция  $\Delta\varphi/\Delta\mu$  непрерывна при достаточно малых  $|\Delta\mu|$ , а потому существует конечный предел  $\lim_{\Delta\mu \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu} = \frac{\partial x}{\partial \mu}$ . Из леммы Адамара следует, что

$$F \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}, \quad G \rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} (\Delta\mu \rightarrow 0),$$

так что производная  $\frac{\partial x}{\partial \mu}$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial \mu} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial f}{\partial \mu} \quad (6)$$

и данным Коши  $\left. \frac{\partial x}{\partial \mu} \right|_{t=t_0} = 0$ .

Если правая часть  $f(t, x, \mu)$  имеет непрерывные производные до порядка  $p \geq 2$  включительно, то, применяя к уравнению (6) те же рассуждения, что и выше, мы докажем существование и непрерывность производных  $\frac{\partial^2 x}{\partial \mu^2}$ ,  $\frac{\partial^2 x}{\partial t \partial \mu}$ . Продолжив эти рассуждения, получим доказательство теоремы для одного уравнения, точно так же доказывается теорема для системы (4).

Рассмотрим задачу Коши для одного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \quad (7)$$

Начальные данные  $t_0, x_0$  также можно рассматривать как параметры. С помощью замены

$$t - t_0 = \tilde{t}, \quad x(t) - x_0 = \tilde{x}$$

получаем задачу Коши

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \tilde{f}(\tilde{t}, \tilde{x}), \quad \tilde{x}(0) = 0.$$

Правая часть  $\tilde{f}(\tilde{t}, \tilde{x}) \equiv f(\tilde{t} + t_0, \tilde{x} + x_0)$  зависит от начальных данных как от параметров, а начальные данные  $\tilde{x}(0) = 0$  не зависят от параметров. Поэтому из предыдущей теоремы следует, что если правая часть  $f(t, x)$  имеет непрерывные производные до порядка  $p \geq 1$  включительно, то решение  $x(t; t_0, x_0)$  задачи Коши (7) имеет непрерывные производные до порядка  $p \geq 1$  включительно по совокупности переменных  $t, t_0, x_0$ .

Аналогично формулируются и доказываются теоремы о непрерывной зависимости и дифференцируемости по параметрам и начальным данным для одного уравнения  $n$ -го порядка в нормальной форме.

## § 8. Регулярная теория возмущений

Рассмотрим задачу Коши для скалярного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где  $\varepsilon > 0$  — малый параметр.

Предположения. 1°. Функция  $f(t, x, \varepsilon)$  бесконечно дифференцируема по совокупности переменных при  $0 \leq t \leq T$ ,  $-\infty < x < \infty$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ .

2°. Задача Коши (1) при  $\varepsilon = 0$ :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, 0), \quad x(0) = x_0 \quad (2)$$

имеет, и притом единственное, решение  $x = \varphi(t)$ , которое существует и бесконечно дифференцируемо при  $0 \leq t \leq T$ .

Требуется получить приближенные формулы для решения задачи (1) при малых  $\varepsilon > 0$ . Решение  $x = x(t, \varepsilon)$  бесконечно дифференцируемо по параметру  $\varepsilon$  при малых  $\varepsilon > 0$  (§ 7), так что его можно представить в виде

$$x = \sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon^j x_j(t) + O(\varepsilon^N) \quad (\varepsilon \rightarrow 0), \quad (3)$$

где  $N \geq 1$  — любое,  $x_j(t)$  — неизвестные функции. Подставим выражение (3) в уравнение (1)

$$\sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon^j \frac{dx_j}{dt} + O(\varepsilon^N) = f\left(t, \sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon^j x_j + O(\varepsilon^N), \varepsilon\right). \quad (4)$$

Разложим правую часть по степеням  $\varepsilon$  и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$  в полученном уравнении. Для  $x_0(t)$  получим задачу Коши

$$\frac{dx_0(t)}{dt} = f(t, x_0(t), 0), \quad x_0(0) = x_0,$$

которая совпадает с задачей (2), так что  $x_0(t) = \varphi(t)$ . Для  $x_1(t)$  получим задачу Коши

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial f(t, \varphi(t), 0)}{\partial x} x_1 + \frac{\partial f(t, \varphi(t), 0)}{\partial \varepsilon}, \quad x_1(0) = 0. \quad (5)$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка, и его можно явно проинтегрировать; тем самым функция



$x_1(t)$  будет построена. Нетрудно показать, что уравнения для последующих приближений будут иметь вид

$$\frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial f(t, \varphi(t), 0)}{\partial x} x_n + F_n(t, \varphi(t), x_1, \dots, x_{n-1}), \quad (6)$$

$$x_n(0) = 0,$$

где  $F_n$  — известная функция. Все эти уравнения — *линейные, первого порядка*, и потому интегрируются явно. Нелинейным является только уравнение для функции  $x_0(t)$ . Справедлива

*Теорема. Если условия 1°, 2° выполнены, то задача Коши (1) имеет решение  $x(t, \varepsilon)$ , для которого имеет место представление (3). Здесь  $N \geq 1$  — любое и  $O(\varepsilon^N)$  — равномерно по  $0 \leq t \leq T$ .*

Точно так же исследуется задача Коши (1) для системы из  $n$  уравнений. В этом случае соотношения (5), (6) — *линейные системы* из  $n$  уравнений с переменными коэффициентами,  $\frac{\partial f}{\partial x}$  — матрица Якоби.

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon x^2, \quad (7)$$

где  $\varepsilon > 0$  — малый параметр,  $\omega > 0$ , и зададим начальные данные  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = x_1$ . Будем искать решение в виде (3). Подставляя (3) в уравнение, получаем

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 + \varepsilon (\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1) + \varepsilon^2 (\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2) + \dots = \\ = \varepsilon x_0^2 + \varepsilon^2 2x_0 x_1 + \varepsilon^3 (x_1^2 + 2x_1 x_2) + \dots \end{aligned}$$

Функция  $x_0(t) = \varphi(t)$ , очевидно, имеет вид

$$x_0(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Для  $x_1(t)$  получаем задачу Коши

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \frac{A^2 + B^2}{2} + \frac{A^2 - B^2}{2} \cos 2\omega t + AB \sin 2\omega t, \\ x_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0. \end{aligned}$$

Решение этой задачи имеет вид

$$x_1(t) = \tilde{A}_1 \cos \omega t + \tilde{A}_2 \sin \omega t + A_1 + A_2 \cos 2\omega t + A_3 \sin 2\omega t.$$

Здесь

$$A_1 = \frac{A^2 + B^2}{2\omega^2}, \quad A_2 = \frac{B^2 - A^2}{6\omega^2}, \quad A_3 = -\frac{AB}{6},$$



$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ; обозначим  $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ . Приведем достаточные условия, при которых из уравнений (1) можно (локально) выразить  $y_1, y_2, \dots, y_n$  через  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$y_1 = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y_2 = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots \\ \dots, \quad y_n = g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

или, в векторной форме,

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}). \quad (3)$$

Вектор-функция  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  называется *обратной* к вектор-функции  $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ .

Приведем вначале эвристические соображения. Разложим функции  $f_j$  по формуле Тейлора:

$$f_j(y_1, y_2, \dots, y_n) = f_j(\mathbf{a}) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_j(\mathbf{a})}{\partial y_k} (y_k - a_k) + \\ + h_j(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad h_j(\mathbf{y}) = o(\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|) (\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{a}).$$

Эти равенства можно записать в виде

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{f}'(\mathbf{a})(\mathbf{y} - \mathbf{a}) + \mathbf{h}(\mathbf{y}). \quad (4)$$

Здесь  $\mathbf{h}(\mathbf{y})$  — вектор-функция с компонентами  $h_1, h_2, \dots, h_n$  и  $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$  — матрица

$$\mathbf{f}'(\mathbf{a}) = \left( \frac{\partial f_j(\mathbf{a})}{\partial y_k} \right), \quad 1 \leq j, \quad k \leq n. \quad (5)$$

Матрица  $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$  называется *матрицей Якоби*.

Если отбросить  $\mathbf{h}(\mathbf{y})$  в разложении (4), то получится система из  $n$  линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными:

$$\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{f}'(\mathbf{a})(\mathbf{y} - \mathbf{a}).$$

Из линейной алгебры известно [7, 17], что эта система однозначно разрешима, если отличен от нуля ее определитель:  $\det \mathbf{f}'(\mathbf{a}) \neq 0$ . Ниже будет доказано, что это условие гарантирует локальную разрешимость нелинейной системы (1).

Пусть  $U$  — некоторая окрестность точки  $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ . Вектор-функция  $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$  переводит каждую точку  $\mathbf{y} \in U$  в точку  $\mathbf{x}$

из некоторой окрестности  $V$  точки  $\mathbf{x} = \mathbf{b}$  (рис. 14). Если отображение взаимно однозначно, то это означает, что существует обратная вектор-функция  $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ .

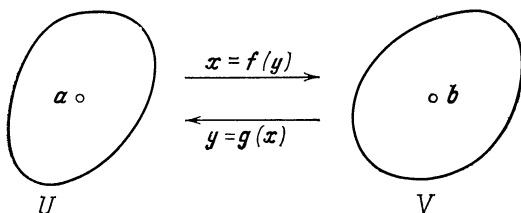


Рис. 14.

**Теорема об обратной функции.** Пусть выполнены условия:

1. Вектор-функция  $\mathbf{f}(\mathbf{y})$  непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки  $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ .

2.  $\det \mathbf{f}'(\mathbf{a}) \neq 0$ .

Тогда существуют окрестности  $U, V$  точек  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  такие, что:

1. Вектор-функция  $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$  взаимно однозначно отображает область  $U$  на область  $V$ .

2. Обратная вектор-функция  $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$  непрерывно дифференцируема в области  $V$ .

3. Обратная вектор-функция  $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$  единственна, если область  $V$  достаточно мала.

Доказательство этой теоремы разобьем на несколько этапов.

1°. Существование обратной вектор-функции. Применим принцип сжатых отображений. Будем считать, что  $\mathbf{a} = \mathbf{0}, \mathbf{b} = \mathbf{0}$ ; этого можно добиться с помощью замены переменных  $\mathbf{x} - \mathbf{a} = \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y} - \mathbf{b} = \tilde{\mathbf{y}}$ . Используя разложение (4), запишем систему уравнений (2) в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{h}(\mathbf{y}),$$

где  $\mathbf{B} = \mathbf{f}'(\mathbf{0})$ . Преобразуем эту систему к виду

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{h}(\mathbf{y})) \quad (6)$$

(напомним, что матрица Якоби  $\mathbf{f}'(\mathbf{0}) = \mathbf{B}$  невырождена) и запишем систему (9) в «операторной форме»

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{y}), \quad (7)$$

где  $\mathbf{A}(\mathbf{y})$  — правая часть формулы (6).

Пусть  $U$  — окрестность вида  $\|y\| \leq \delta$  точки  $y=0$ ,  $V$  — окрестность вида  $\|x\| \leq \tilde{\delta}$  точки  $x=0$ . Покажем, что если  $\delta, \tilde{\delta}$  достаточно малы, то  $A(y) \in \bar{U}$  (замыкание области  $U$ ) при любых  $y \in \bar{U}, x \in \bar{V}$ , т. е. что

$$\|A(y)\| \leq \delta. \quad (8)$$

Так как  $h(y) = o(\|y\|)$  при  $\|y\| \rightarrow 0$  (см. (4)), то  $\|h(y)\| \leq \varepsilon \|y\|$  при  $\|y\| \leq \delta$ , где  $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$  может быть выбрано сколь угодно малым. Используя это неравенство и неравенство  $\|B^{-1}x\| \leq \|B^{-1}\| \|x\|$ , получаем

$$\begin{aligned} \|A(y)\| &= \|B^{-1}(x - h(y))\| \leq \\ &\leq \|B^{-1}\| (\|x\| + \|h(y)\|) \leq \|B^{-1}\| (\tilde{\delta} + \varepsilon \delta) \end{aligned}$$

и неравенство (8) будет выполнено, если выбрать  $\tilde{\delta} \leq 1/(2C), \varepsilon \leq 1/(2C)$ , где  $C = \|B^{-1}\|$ . Ниже предполагается, что окрестности  $U, V$  выбраны указанным образом.

Чтобы применить принцип сжатых отображений к уравнению (7), оценим норму разности  $A(y^2) - A(y^1)$ , где  $y^1, y^2 \in \bar{U}$ . Имеем

$$\begin{aligned} \|A(y^2) - A(y^1)\| &= \|B^{-1}(h(y^2) - h(y^1))\| \leq \\ &\leq \|B^{-1}\| \|h(y^2) - h(y^1)\| \leq \end{aligned}$$

(мы используем лемму 2 из § 4)

$$\leq \|B^{-1}\| K_1 \|y^2 - y^1\|,$$

где обозначено  $K_1 = \max_{y \in \bar{U}} \max_{1 \leq j, k \leq n} \left| \frac{\partial h_j(y)}{\partial y_k} \right|$ . Из разложения (4) следует, что  $\frac{\partial h_j(y)}{\partial y_k} = 0$  при всех  $j, k$  и потому  $\delta > 0$  можно выбрать настолько малым, чтобы выполнялось неравенство  $q = \|B^{-1}\| K_1 < 1$ ; при этом соответственно уменьшается окрестность  $V$ . Итак,

$$\|A(y^2) - A(y^1)\| \leq q \|y^2 - y^1\| \quad (0 < q < 1). \quad (9)$$

Фиксируем точку  $x \in U$  и применим к уравнению (7) принцип сжатых отображений (§ 3). В данном случае банахово пространство  $B$  есть пространство  $R^n$ , замкнутое ограниченное множество  $M \subset B$  есть  $\bar{U}$ , а оператор  $A$  определен выше (см. (6), (7)) и отображает точку  $y \in B$  в точку  $A(y) \in B$ . Из оценок (8), (9) следует, что оператор  $A$  сжимает множество  $M$ , а потому уравнение (7) имеет, и

притом единственное, решение  $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \in M$ . Тем самым доказано существование однозначной обратной вектор-функции  $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$  при  $\mathbf{x} \in \bar{V}$ , и ее значения лежат в области  $\bar{V}$ .

2°. Непрерывность. Пусть  $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \bar{V}$  и  $\mathbf{y}^1 = \mathbf{g}(\mathbf{x}^1)$ ,  $\mathbf{y}^2 = \mathbf{g}(\mathbf{x}^2)$ . Имеем из (6)

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^2) - \mathbf{g}(\mathbf{x}^1) = B^{-1}(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1) + B^{-1}(h(\mathbf{y}^2) - h(\mathbf{y}^1)),$$

и, используя оценку (9), получаем

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}^2) - \mathbf{g}(\mathbf{x}^1)\| \leq \|B^{-1}\| \|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1\| + q \|\mathbf{g}(\mathbf{x}^2) - \mathbf{g}(\mathbf{x}^1)\|,$$

так что

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}^2) - \mathbf{g}(\mathbf{x}^1)\| \leq \|B^{-1}\| (1 - q)^{-1} \|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1\|. \quad (10)$$

Из этой оценки следует, что если  $\mathbf{x}^2 \rightarrow \mathbf{x}^1$ , то  $\mathbf{g}(\mathbf{x}^2) \rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{x}^1)$  и непрерывность обратной вектор-функции  $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$  доказана.

3°. Дифференцируемость. Чтобы доказать дифференцируемость вектор-функции  $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$  в точке  $\mathbf{x}^0 \in \bar{V}$ , необходимо доказать, что ее приращение представимо в виде

$$\Delta \mathbf{g} \equiv \mathbf{g}(\mathbf{x}^0 + \Delta \mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}^0) = C \Delta \mathbf{x} + \tilde{h}(\Delta \mathbf{x}), \quad (11)$$

$$\|\tilde{h}(\Delta \mathbf{x})\| \rightarrow 0 \quad (\|\Delta \mathbf{x}\| \rightarrow 0)$$

(ср. с (4)). Пусть  $\mathbf{x}^0 = \mathbf{g}(\mathbf{y}^0)$ ; преобразуем разность  $\mathbf{f}(\mathbf{y}^0 + \Delta \mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{y}^0)$ . Из формул (9), (10), § 4 следует, что

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}^0 + \Delta \mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{y}^0) = \Phi(\Delta \mathbf{y}) \Delta \mathbf{y}.$$

Здесь  $\Phi$  есть  $(n \times n)$ -матрица с элементами  $\Phi_{jk} = \frac{\partial f_j(\xi^j)}{\partial y_k}$ , точки  $\xi^j$  лежат на отрезке, соединяющем точки  $\mathbf{y}^0, \mathbf{y}^0 + \Delta \mathbf{y}$  и матрица-функция  $\Phi(\Delta \mathbf{y})$  непрерывно зависит от  $\Delta \mathbf{y}$ . Следовательно,

$$\Phi(\Delta \mathbf{y}) = \mathbf{f}'(\mathbf{y}^0) + \Psi(\Delta \mathbf{y}),$$

и элементы матрицы  $\Psi$  стремятся к нулю, если  $\|\Delta \mathbf{y}\| \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\|\Delta \mathbf{y}\| \rightarrow 0} \Psi_{jk}(\Delta \mathbf{y}) = 0.$$

Поэтому

$$\Delta \mathbf{x} \equiv \mathbf{f}(\mathbf{y}^0 + \Delta \mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{y}^0) = \mathbf{f}'(\mathbf{y}^0) \Delta \mathbf{y} + \varepsilon(\Delta \mathbf{y}), \quad (12)$$



с  $n + m$  неизвестными и приведем достаточные условия, при которых можно выразить из этой системы переменные  $y_1, \dots, y_m$  через  $x_1, \dots, x_n$ . Тогда найдем функции

$$y_1 = g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m = g_m(x_1, \dots, x_n),$$

которые неявно заданы системой уравнений (16). Перейдем к векторным обозначениям, положив

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m), \quad \mathbf{F} = (F_1, \dots, F_m)$$

(все векторы-столбцы), тогда система (16) примет вид

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0. \quad (17)$$

Обозначим  $\mathbf{F}'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  матрицу Якоби вектор-функции  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  относительно переменных  $\mathbf{y}$ , т. е.  $(m \times m)$ -матрицу

$$\mathbf{F}'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left( \frac{\partial E_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_j} \right), \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

**Теорема о неявной функции.** Пусть выполнены условия:

1°. Вектор-функция  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  непрерывно дифференцируема в окрестности точки  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$  и  $\mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ .

2°.  $\det \mathbf{F}'_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$ .

Тогда существуют окрестности  $U$ ,  $V$  точек  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  такие, что:

1. Существует вектор-функция  $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ , которая определена при  $\mathbf{x} \in U$ , ее значения лежат в области  $V$ , и

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x})) \equiv 0, \quad \mathbf{x} \in U. \quad (18)$$

2. Вектор-функция  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  непрерывно дифференцируема в области  $U$ .

3. Вектор-функция  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ , удовлетворяющая тождеству (18), единственна, если область  $U$  достаточно мала.

Геометрическая иллюстрация этой теоремы при  $n = m = 1$  приведена на рис. 15.

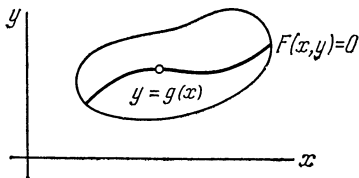


Рис. 15.

**Доказательство.** Рассмотрим вспомогательную систему

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = z, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x} \quad (19)$$



относительно  $n + m$  неизвестных  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$  с известными правыми частями  $z_1, \dots, z_m, x_1, \dots, x_n$ . Число уравнений равно числу неизвестных, т. е. это система вида (1) и при  $z = 0, x = a$  она имеет решение  $x = a, y = b$ . Матрица Якоби вектор-функции, стоящей в правой части (19), есть

$$A = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,m} \\ F'_x(x, y) & F'_y(x, y) \end{pmatrix}.$$

Здесь  $I_n$  и  $0_{n,m}$  — единичная и нулевая матрицы порядков  $(n \times n)$  и  $(n \times m)$ , так как  $x'_x = I_n, x'_y = 0_{n,m}$ . В точке  $x = a, y = b$  имеем  $\det A = \det F'_y(a, b) \neq 0$  и для системы (19) выполнены условия теоремы об обратной функции. Поэтому существует, и притом единственная, обратная вектор-функция

$$y = \varphi(x, z), \quad x = \psi(x, z),$$

которая взаимно однозначно отображает окрестность  $W$  точки  $z = a, z = 0$  на окрестность  $\widetilde{W}$  точки  $x = a, y = b$ , и вектор-функции  $\varphi, \psi$  непрерывно дифференцируемы. Окрестность  $\widetilde{W}$  можно задать заранее; возьмем ее в виде  $\widetilde{W} = U \times V$ , где  $U$  — окрестность точки  $x = a$  в  $R_x^n$ ,  $V$  — окрестность точки  $y = b$  в  $R_y^m$ . Кроме того, ясно, что  $\psi(x, z) \equiv x$ , так что

$$y = \varphi(x, z), \quad x = x.$$

Положим  $g(x) = \varphi(x, 0)$ , тогда из первого из уравнений (19) находим

$$F(x, g(x)) = F(x, \varphi(x, 0)) = 0$$

и теорема доказана.

Вычислим матрицу Якоби  $g'(x)$  неявной вектор-функции  $y = g(x)$ . Пусть  $x$  — одно переменное,  $y$  — одно переменное,  $F$  — скалярная функция. Дифференцируя тождество (18) по  $x$ , получаем

$$F'_x(x, g(x)) + F'_y(x, g(x))g'(x) = 0,$$

откуда находим

$$g'(x) = -(F'_y(x, g(x)))^{-1} F'_x(x, g(x)). \quad (20)$$

Удобство матричных обозначений состоит в том, что эта формула справедлива и для вектор-функций, т. е. если

$\mathbf{x} \in R^n$ ,  $\mathbf{y} \in R^m$ . В формуле (20)  $F'_y$  есть  $(m \times m)$ -матрица, описанная выше,

$$F'_x(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left( \frac{\partial F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_j} \right), \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n,$$

т. е.  $F'_x$  есть  $(m \times n)$ -матрица. Нужно, конечно, проследить за тем, чтобы матрицы перемножались в нужном порядке; но при  $n \neq m$  ошибиться невозможно, так как нельзя умножить  $(m \times n)$ -матрицу на  $(m \times n)$ -матрицу.

**3. Дифференцирование сложных функций.** Пусть  $f(\mathbf{y})$ ,  $g(\mathbf{x})$  — непрерывно дифференцируемые функции (при любых  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ , для простоты), тогда

$$(\mathbf{f}(g(\mathbf{x})))' = \mathbf{f}'(g(\mathbf{x})) g'(\mathbf{x}). \quad (21)$$

Это правило дифференцирования сложной функции сохраняется и для вектор-функций  $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ , если понимать под  $\mathbf{f}'(\mathbf{y})$ ,  $\mathbf{g}'(\mathbf{x})$  матрицы Якоби. Пусть

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ g_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{y}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{y}) \end{pmatrix}.$$

**Теорема.** Если вектор-функция  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  непрерывно дифференцируема в окрестности  $U$  точки  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ , вектор-функция  $\mathbf{f}(\mathbf{y})$  непрерывно дифференцируема в окрестности  $V$  точки  $\mathbf{y} = \mathbf{b} = \mathbf{g}(\mathbf{a})$ , то вектор-функция  $\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$  непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки  $\mathbf{a}$ , и ее матрица Якоби имеет вид (21).

**Доказательство.** Пусть для простоты,  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{a}) = \mathbf{b} = \mathbf{0}$ , тогда

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \varepsilon_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{f}(\mathbf{y}) = B\mathbf{y} + \varepsilon_2(\mathbf{y}), \\ A = \mathbf{g}'(\mathbf{0}), \quad B = \mathbf{f}'(\mathbf{0}),$$

где  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$  при  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon_2 \rightarrow 0$  при  $\|\mathbf{y}\| \rightarrow 0$ . Следовательно, при  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0$  имеем

$$\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = B\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \varepsilon_2(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = BA\mathbf{x} + (B\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

и нетрудно проверить, что  $\varepsilon = B\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \rightarrow 0$  при  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0$ . Следовательно,

$$\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = BA\mathbf{x} + o(\|\mathbf{x}\|) (\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0).$$

С другой стороны, имеем из (4)

$$\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = (\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x})))' |_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} + o(\|\mathbf{x}\|) (\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0).$$

Сравнение этих выражений доказывает формулу (20) при  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ .

## § 10. Зависимые и независимые функции.

### Криволинейные координаты

1. **Зависимые и независимые функции.** Пусть  $U$  — область в  $R_x^n$ .

Предположение 1. Все функции, которые рассматриваются в этом параграфе, непрерывно дифференцируемы в области  $U$ .

Функции  $u_1(\mathbf{x}), \dots, u_m(\mathbf{x}), m \leq n$ , называются *зависимыми в области  $U$* , если одну из них можно выразить через остальные, т. е. при некотором  $j$

$$u_j(\mathbf{x}) = \omega(u_1(\mathbf{x}), \dots, u_{j-1}(\mathbf{x}), u_{j+1}(\mathbf{x}), \dots, u_m(\mathbf{x})). \quad (1)$$

Здесь  $\omega$  — непрерывно дифференцируемая функция. Если ни в какой подобласти  $V \subset U$  функции  $u_1(\mathbf{x}), \dots, u_m(\mathbf{x})$  не являются зависимыми, то они называются *независимыми в области  $U$* .

Пример 1. Координатные функции  $u_1 = x_1, \dots, u_m = x_m$  ( $m \leq n$ ) независимы в любой области  $U$ . Функции  $u_1 = x_1, u_2 = x_2, u_3 = x_1^2 - x_2^2$  зависимы в любой области  $U$ :  $u_3 = u_1^2 - u_2^2$ .

Вопрос о зависимости функций исследуется с помощью теоремы о неявной функции. Введем вектор-функцию  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  и ее матрицу Якоби

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} u_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ u_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_m(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Порядок матрицы  $\mathbf{u}'(\mathbf{x})$  равен  $m \times n$ .

Введем новые переменные  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , связанные с переменными  $x_1, x_2, \dots, x_n$  соотношениями

$$y_1 = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), y_2 = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots \\ \dots, y_n = g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

или, в векторной форме,

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}). \quad (3)$$

Определение 1. *Замену переменных (3) будем называть гладкой обратимой в области  $U$ , если*

1°. Вектор-функция  $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$  взаимно однозначно отображает область  $U$  на область  $V$ .

## 2°. Обратная вектор-функция

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \quad (4)$$

непрерывно дифференцируема в области  $V$ .

В области  $U$  вместо координат  $x_1, x_2, \dots, x_n$  можно ввести координаты  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , так как соответствие между  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  взаимно однозначно. Поэтому функции  $g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_n(\mathbf{x})$  (и функции  $f_1(\mathbf{y}), f_2(\mathbf{y}), \dots, f_n(\mathbf{y})$ ) будем называть *координатными*. Достаточные условия для того, чтобы функции  $g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_n(\mathbf{x})$  были координатными в малой окрестности данной точки, дает теорема об обратной функции.

*Лемма 1. Зависимость и независимость системы функций инвариантны относительно гладкой обратимой замены переменных.*

*Доказательство.* Функции  $u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}), \dots, u_m(\mathbf{x})$  после замены (3) переходят в функции  $\tilde{u}_1(\mathbf{y}) = u_1(\mathbf{f}(\mathbf{y})), \tilde{u}_2(\mathbf{y}) = u_2(\mathbf{f}(\mathbf{y})), \dots, \tilde{u}_m(\mathbf{y}) = u_m(\mathbf{f}(\mathbf{y}))$ . Утверждение леммы состоит в том, что если функции  $u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}), \dots, u_m(\mathbf{x})$  были зависимы (независимы) в области  $U$ , то функции  $\tilde{u}_1(\mathbf{y}), \tilde{u}_2(\mathbf{y}), \dots, \tilde{u}_m(\mathbf{y})$  будут зависимы (независимы) в области  $V$ . Допустим, что функции  $u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}), \dots, u_m(\mathbf{x})$  зависимы в области  $U$ , тогда при некотором  $j$  выполняется тождество (1). Выражая  $\mathbf{x}$  через  $\mathbf{y}$ , получаем

$$\tilde{u}_j(\mathbf{y}) \equiv \omega(\tilde{u}_1(\mathbf{y}), \dots, \tilde{u}_{j-1}(\mathbf{y}), \tilde{u}_{j+1}(\mathbf{y}), \dots, \tilde{u}_m(\mathbf{y})),$$

так что функции  $\tilde{u}_1(\mathbf{y}), \tilde{u}_2(\mathbf{y}), \dots, \tilde{u}_m(\mathbf{y})$  зависимы в области  $U$ .

*Теорема 1. Пусть ранг матрицы Якоби  $\mathbf{u}'(\mathbf{x})$  не превосходит  $r$  в области  $U$  и равен  $r \geq 1$  в точке  $\mathbf{x}^0 \in U$ . Тогда в некоторой окрестности  $V \ni \mathbf{x}^0$  из набора функций  $u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}), \dots, u_m(\mathbf{x})$  можно выбрать  $r$  независимых, а остальные будут от них зависимы.*

*Доказательство.* Пусть для определенности отличен от нуля минор

$$\Delta_r = \det A, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_1(\mathbf{x}^0)}{\partial x_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_r(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_r(\mathbf{x}^0)}{\partial x_r} \end{pmatrix};$$

очевидно, что  $r \leq n$ . Сделаем замену переменных

$$u_1(\mathbf{x}) = y_1, \dots, u_r(\mathbf{x}) = y_r, x_{r+1} = y_{r+1}, \dots, x_n = y_n. \quad (5)$$

Покажем, что эта замена гладкая и обратимая, если область достаточно мала. Матрица Якоби вектор-функции  $\tilde{u}(\mathbf{x}) = (u_1(\mathbf{x}), \dots, u_r(\mathbf{x}), x_{r+1}, \dots, x_n)$  равна

$$\tilde{u}'(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

где  $I, 0$  — единичная и нулевая матрицы порядков  $(n-r) \times (n-r)$  и  $(n-r) \times r$  соответственно. Поэтому  $\det \tilde{u}'(\mathbf{x}^0) = \det A \neq 0$  и условия теоремы об обратной функции выполнены. В частности, функции  $u_1(\mathbf{x}), \dots, u_r(\mathbf{x})$  независимы в области  $V$ , так как независимы функции  $\tilde{u}_1(\mathbf{y}) = y_1, \dots, \tilde{u}_r(\mathbf{y}) = y_r$ .

Покажем, что остальные функции  $u_j(\mathbf{x}), j \geq r+1$ , можно выразить через функции  $u_1(\mathbf{x}), \dots, u_r(\mathbf{x})$ . Докажем это для функции  $u_{r+1}(\mathbf{x})$ . В переменных  $\mathbf{y}$  вектор-функция  $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{y}) = (u_1(\mathbf{x}), \dots, u_{r+1}(\mathbf{x}))$  принимает вид  $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{y}) = (y_1, \dots, y_r, \tilde{u}_{r+1}(\mathbf{y}))$ , причем ранг матрицы Якоби  $\tilde{\mathbf{v}}'(\mathbf{y})$  равен рангу матрицы Якоби  $\mathbf{v}'(\mathbf{x})$  при  $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$  (§ 9). Имеем

$$\tilde{\mathbf{v}}'(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial \tilde{u}_{r+1}}{\partial y_1} & \frac{\partial \tilde{u}_{r+1}}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \tilde{u}_{r+1}}{\partial y_r} & \frac{\partial \tilde{u}_{r+1}}{\partial y_{r+1}} & \dots & \frac{\partial \tilde{u}_{r+1}}{\partial y_n} \end{pmatrix}.$$

Так как ранг матрицы  $\tilde{\mathbf{v}}'(\mathbf{y})$  не превосходит  $r$ , то

$$\frac{\partial \tilde{u}_{r+1}(\mathbf{y})}{\partial y_{r+1}} \equiv 0, \dots, \frac{\partial \tilde{u}_{r+1}(\mathbf{y})}{\partial y_n} \equiv 0$$

и потому функция  $\tilde{u}_{r+1}(\mathbf{y})$  не зависит от переменных  $y_{r+1}, \dots, y_n$ . Следовательно,

$$\tilde{u}_{r+1}(\mathbf{y}) = \omega(y_1, \dots, y_r) = \omega(\tilde{u}_1(\mathbf{y}), \dots, \tilde{u}_r(\mathbf{y})),$$

т. е. функция  $\tilde{u}_{r+1}(\mathbf{y})$  зависит от функций  $\tilde{u}_1(\mathbf{y}), \dots, \tilde{u}_r(\mathbf{y})$ . В силу леммы 1 функция  $u_{r+1}(\mathbf{x})$  зависит от функций  $u_1(\mathbf{x}), \dots, u_r(\mathbf{x})$ .

**Следствие 1.** Пусть  $t \leq n$  и ранг матрицы Якоби  $\mathbf{u}'(\mathbf{x})$  равен  $t$  хотя бы в одной точке  $\mathbf{x}^0 \in U$ . Тогда функции  $u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}), \dots, u_m(\mathbf{x})$  независимы в области  $U$ .

Действительно, они независимы в некоторой окрестности точки  $\mathbf{x}^0$ , а потому, в силу определения независимости функций, и во всей области  $U$ .

**Следствие 2.** Пусть  $m \leq n$  и ранг матрицы Якоби  $\mathbf{u}'(\mathbf{x}^0)$  равен  $m$ . Тогда в некоторой окрестности точки  $\mathbf{x}^0$  к набору функций  $u_1(\mathbf{x}), \dots, u_m(\mathbf{x})$  можно добавить  $n - m$  функций  $u_{m+1}(\mathbf{x}), \dots, u_n(\mathbf{x})$  так, что полученный набор функций будет координатным.

Это вытекает из доказательства теоремы: см. (5).

**Замечание 1.** Координатные функции  $g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x})$ ,  $m \leq n$  независимы в области  $U$ . Обратное неверно: независимые в области  $U$  функции не всегда можно принять в качестве координатных.

**Пример 2.** Пусть  $n = 2$ ,  $U$  — окрестность точки  $(0, 0)$ ,  $y_1 = x_1^3$ ,  $y_2 = x_2^3$ . Эти функции независимы в  $U$ , так как их матрица Якоби диагональная, с элементами  $3x_1^2$ ,  $3x_2^2$  на диагонали, и ее определитель отличен от нуля в любой точке  $(x_1^0, x_2^0)$  такой, что  $x_1^0 \neq 0$ ,  $x_2^0 \neq 0$ . Но  $x_1 = \sqrt[3]{y_1}$ ,  $x_2 = \sqrt[3]{y_2}$ , так что обратная вектор-функция недифференцируема на осях  $y_1, y_2$ .

**2. Кривые и поверхности.** Кривой  $\gamma$  в  $\mathbf{R}^n$  называется множество точек, заданное уравнениями

$$x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t), \quad t \in (t_1, t_2) \in I,$$

где функции  $x_i(t)$  непрерывны при  $t \in I$ . Кривая  $\gamma$  называется *гладкой*, если функции  $x_i(t)$  непрерывно дифференцируемы при  $t \in I$  и

$$(x'_1(t), \dots, x'_n(t)) \neq (0, \dots, 0), \quad x \in I. \quad (6)$$

Вектор  $\frac{d\mathbf{x}(t_0)}{dt}$  — *касательный вектор* к кривой  $\gamma$  в точке  $\mathbf{x}(t_0)$ . Гладкая обратимая замена переменных (3) отображает кривую  $\gamma$  в кривую  $\tilde{\gamma}$ , заданную уравнениями

$$y_1 = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)), \dots, y_n = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

причем гладкая кривая отображается в гладкую кривую. Действительно,

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}) \frac{d\mathbf{x}}{dt},$$

где  $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$  — матрица Якоби и  $\frac{d\mathbf{y}}{dt} \neq 0$ , так как матрица Якоби невырождена.

В трехмерном пространстве с координатами  $x, y, z$  система из двух уравнений

$$f(x, y, z) = 0, \quad g(x, y, z) = 0$$

определяет кривую, при некоторых предположениях.

**Теорема 2.** Система из  $(n-1)$ -го уравнения

$$u_1(\mathbf{x}) = 0, \dots, u_{n-1}(\mathbf{x}) = 0 \quad (7)$$

в  $\mathbf{R}^n$  определяет гладкую кривую  $\gamma$ , проходящую через точку  $\mathbf{x}^0$ , если  $\mathbf{x}^0$  — решение системы (7) и ранг матрицы Якоби  $\mathbf{u}'(\mathbf{x}^0)$  равен  $n-1$ .

**Доказательство.** Пусть для определенности отличен от нуля определитель

$$\det \left( \frac{\partial u_i(\mathbf{x}^0)}{\partial x_j} \right), \quad 1 \leq i, \quad j \leq n-1.$$

Положим

$$u_1(\mathbf{x}) = y_1, \dots, u_{n-1}(\mathbf{x}) = y_{n-1}, \quad x_n - x_n^0 = y_n.$$

Полученная замена переменных — гладкая и обратимая, и в переменных  $\mathbf{y}$  система (7) принимает вид  $y_1 = 0, \dots, y_{n-1} = 0$ . Эта система определяет гладкую кривую  $\gamma$

$$y_1 = 0, \dots, y_{n-1} = 0, \quad y_n = t,$$

где  $t$  меняется на некотором интервале  $I \ni 0$ .

**З а м е ч а н и е 1.** Теорема 2 (и последующая теорема 3) — локальная, т. е. система (6) определяет кривую  $\gamma$  в малой окрестности точки  $\mathbf{x}^0$ .

Рассмотрим поверхность  $S$  в  $\mathbf{R}^3$ , заданную параметрически:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha, \beta)$ ,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, т. е.

$$x = x(\alpha, \beta), \quad y = y(\alpha, \beta), \quad z = z(\alpha, \beta), \quad (\alpha, \beta) \in U. \quad (8)$$

где  $U$  — некоторая область на плоскости  $(\alpha, \beta)$ . Функции  $x, y, z$  непрерывно дифференцируемы в области  $U$ , и ранг матрицы Якоби

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \\ \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \beta} \end{pmatrix}$$

максимален, т. е. равен 2, во всех точках области  $U$ . Пусть в точке  $(\alpha_0, \beta_0)$  отличен от нуля определитель:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда из первых двух уравнений (8) можно в малой окрестности точки  $(\alpha_0, \beta_0)$  выразить  $\alpha, \beta$  через  $x, y$ :

$$\alpha = \alpha(x, y), \quad \beta = \beta(x, y),$$

и уравнение поверхности примет вид

$$z = f(x, y) \equiv z(\alpha(x, y), \beta(x, y)).$$

Фиксируя значение параметра  $\beta = \beta_0$ , получаем кривую

$$x = x(\alpha, \beta_0), \quad y = y(\alpha, \beta_0), \quad z = z(\alpha, \beta_0),$$

лежащую на поверхности  $S$ . Ее касательный вектор есть  $r_\alpha = \left( \frac{\partial x}{\partial \alpha}, \frac{\partial y}{\partial \alpha}, \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right)$ . Аналогично, фиксируя  $\alpha = \alpha_0$ , получаем кривую на  $S$  с касательным вектором  $r_\beta = \left( \frac{\partial x}{\partial \beta}, \frac{\partial y}{\partial \beta}, \frac{\partial z}{\partial \beta} \right)$ . Векторы  $r_\alpha(\alpha_0, \beta_0), r_\beta(\alpha_0, \beta_0)$  неколлинеарны, так как ранг составленной из них матрицы равен двум. Плоскость  $\Pi(P^0)$ , проходящая через точку  $P^0 = r(\alpha_0, \beta_0)$  и натянутая на векторы  $r_\alpha(\alpha_0, \beta_0), r_\beta(\alpha_0, \beta_0)$ , называется касательной плоскостью к поверхности  $S$  в точке  $P^0$ . Любой вектор с началом в точке  $P^0$ , лежащий на плоскости  $\Pi(P^0)$ , касается поверхности  $S$ .

**Замечание 2.** Рассмотрим сферу  $S$ , заданную уравнением  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Известно, что  $S$  нельзя задать параметрически, т. е. уравнениями (8). Разобьем сферу на две части  $S_1, S_2$ : пусть  $S_1$  содержит северный полюс и ограничена меридианом, лежащим ниже экватора, а  $S_2$  содержит южный полюс и ограничена меридианом, лежащим выше экватора. Тогда  $S_1, S_2$  можно задать уравнениями  $r = r_1(\alpha, \beta), r = r_2(\alpha, \beta)$ . Части  $S_1, S_2$  сферы пересекаются, и на их пересечении уравнения естественным образом согласуются. Поэтому под поверхностью  $S$  понимается множество, состоящее из «кусков», каждый из которых задан уравнениями вида (8), и эти уравнения согласуются, если куски пересекаются. Полученный геометрический объект называется дифференцируемым многообразием (см. [3, 33]). Мы ограничимся рассмотрением только «куска» многообразия,



Рассмотрим в  $n$ -мерном пространстве  $R^n$  множество точек  $M^k$ , заданное уравнениями

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi_1, \dots, \xi_k), \quad (\xi_1, \dots, \xi_k) \in U. \quad (9)$$

Здесь  $U$  — область в пространстве  $R_k^k$ , вектор-функция  $\mathbf{x}(\xi)$  непрерывно дифференцируема в области  $U$  и  $k \leq n-1$ . В покомпонентной записи имеем

$$x_1 = x_1(\xi_1, \dots, \xi_k), \dots, x_n = x_n(\xi_1, \dots, \xi_k).$$

**Определение 2.** Множество  $M^k$  называется *гладкой поверхностью* (или *дифференцируемым многообразием*) размерности  $k$ , если ранг матрицы Якоби  $\mathbf{x}'(\xi)$  равен  $k$  при всех  $\xi \in U$ .

Если  $k=1$ , то  $M^k$  — кривая; если  $n=3$ ,  $k=2$ , то  $M^k$  — поверхность в пространстве  $R^3$ . Поверхность максимальной размерности  $n-1$  называется *гиперповерхностью*. При гладкой обратимой замене переменных (3) гладкая поверхность  $M^k$  отображается в гладкую поверхность  $\tilde{M}^k$  той же размерности, так как ранг матрицы Якоби при таком отображении сохраняется.

Векторы  $\mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}(\xi^0)}{\partial \xi_1}, \dots, \mathbf{r}_k = \frac{\partial \mathbf{x}(\xi^0)}{\partial \xi_k}, \xi^0 \in U$ , линейно независимы, так как ранг составленной из них матрицы равен  $k$ . Плоскость  $\Pi(P^0)$  размерности  $k$ , проходящая через точку  $P^0 = \mathbf{x}(\xi^0)$  и натянутая на векторы  $\mathbf{r}_1(\xi^0), \dots, \mathbf{r}_k(\xi^0)$ , называется *касательной плоскостью* в  $M^k$ . Любым вектор с началом в точке  $P^0$ , лежащий в плоскости  $\Pi(P^0)$ , касается  $M^k$  в этой точке.

Гиперповерхность может быть задана одним уравнением

$$f(\mathbf{x}) = 0. \quad (10)$$

**Теорема 3.** Пусть уравнение (10) имеет решения и

$$\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0},$$

если  $f(\mathbf{x}) = 0$ . Тогда уравнение (10) определяет гиперповерхность  $M^{n-1}$  в  $R^n$ .

**Доказательство.** Напомним, что

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right).$$

Если  $f(\mathbf{x}^0) = 0$ , то хотя бы одна из частных производных функции  $f(\mathbf{x})$  при  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$  отлична от нуля. Пусть  $\frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_n} \neq 0$ . Сделаем замену переменных

$$x_1 = y_1, \dots, x_{n-1} = y_{n-1}, \quad f(\mathbf{x}) = y_n.$$

Эта замена — гладкая и обратимая в малой окрестности точки  $\mathbf{x}^0$ , так как определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_n} \neq 0.$$

В переменных  $\mathbf{y}$  множество  $\tilde{M}^{n-1}$  точек, удовлетворяющих уравнению (10), есть гиперплоскость  $y_n = 0$ , так что  $\tilde{M}^{n-1}$  есть гиперповерхность (в качестве параметров  $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$  можно взять  $y_1, \dots, y_{n-1}$ ). Поэтому  $M^{n-1}$  — прообраз  $\tilde{M}^{n-1}$  — есть гиперповерхность.

**Пример 3.** Рассмотрим уравнение эллипсоида

$$f(x, y, z) \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$$

Эллипсоид — гладкая поверхность, так как  $\nabla f = \left( \frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2} \right)$  обращается в нуль только в точке  $(0, 0, 0)$ , которая не лежит на эллипсоиде. Точно так же доказывается, что однополостный и двуполостный гиперболоиды, эллиптический и гиперболический параболоиды — гладкие поверхности.

Система из  $k \leq n-1$  уравнений

$$u_1(\mathbf{x}) = 0, \dots, u_k(\mathbf{x}) = 0$$

определяет, вообще говоря, гладкую поверхность размерности  $n-k$  в  $R^n$ . Достаточное условие таково: ранг матрицы Якоби  $\left( \frac{\partial u_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right)$ ,  $1 \leq i \leq k$ ,  $1 \leq j \leq n$ , в точке  $\mathbf{x}^0$ , удовлетворяющей системе, максимален, т. е. равен  $k$ . Доказательство предоставляем читателю.

**3. Криволинейные координаты.** Пусть  $x_1, \dots, x_n$  — декартовы координаты в  $R^n$ ,  $U$  — область в  $R^n$ . Сделаем гладкую обратимую замену переменных в области  $U$ :  $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$  (соответственно  $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$  — см. (3), (4)). Уравнение  $y_j = c$ ,

т. е.  $g_j(\mathbf{x}) = c$ , определяет гиперповерхность, в силу теоремы 3; гиперповерхности  $y_j = \text{const}$  называются *координатными*. В частности, на плоскости ( $n=2$ ) уравнения  $y_1 = c_1$ ,  $y_2 = c_2$  определяют семейство кривых (координатную сетку):

$$g_1(x_1, x_2) = c_1, \quad g_2(x_1, x_2) = c_2.$$

Выясним, как преобразуются при замене переменных скалярные и векторные поля. Пусть точка  $P \in U$ , ее координаты равны

$$P = (x_1, \dots, x_n), \quad P = (y_1, \dots, y_n),$$

где  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  связаны соотношением (3) (или (4)). Значение функции  $u(P)$ , определенной в области  $U$ , обозначим  $u(\mathbf{x})$  в координатах  $\mathbf{x}$  и  $\tilde{u}(\mathbf{y})$  в координатах  $\mathbf{y}$ . Очевидно, что  $u(P) = u(\mathbf{f}(\mathbf{y}))$ , так что

$$\tilde{u}(\mathbf{y}) = u(\mathbf{f}(\mathbf{y})).$$

Это и есть представление функции  $u(\mathbf{x})$  в координатах  $\mathbf{y}$ .

Возьмем точку  $P + \Delta P$ , близкую к точке  $P$ , и обозначим ее координаты  $\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y} + \Delta \mathbf{y}$ , соответственно. Имеем

$$\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{y} + \Delta \mathbf{y}).$$

Из непрерывности вектор-функции  $\mathbf{f}$  следует, что  $|\Delta \mathbf{y}| \rightarrow 0$ , если  $|\Delta \mathbf{x}| \rightarrow 0$ , так что

$$\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{y}) + \mathbf{f}'(\mathbf{y}) \Delta \mathbf{y} + o(|\Delta \mathbf{y}|),$$

где  $\mathbf{f}'(\mathbf{y})$  — матрица Якоби, и потому

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{f}'(\mathbf{y}) \Delta \mathbf{y} + o(|\Delta \mathbf{y}|) \quad (|\Delta \mathbf{y}| \rightarrow 0). \quad (11)$$

Из этой формулы следует, что  $|\Delta \mathbf{x}|$ ,  $|\Delta \mathbf{y}|$  — бесконечно малые одного порядка, т. е. что существуют постоянные  $C_1, C_2 > 0$  такие, что

$$C_1 \leq \frac{|\Delta \mathbf{x}|}{|\Delta \mathbf{y}|} \leq C_2,$$

если  $|\Delta \mathbf{x}|$  (или  $|\Delta \mathbf{y}|$ ) достаточно мал.

Пусть  $\{\mathbf{e}\}$  — ортонормированный базис, базисные векторы  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  имеют своим началом точку  $P$ , так что

$$\Delta P = \Delta x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \Delta x_n \mathbf{e}_n.$$

В силу (11) это же приращение можно записать в виде

$$\Delta P = \sum_{i=1}^n \Delta y_i \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j(\mathbf{y})}{\partial y_i} \mathbf{e}_j \right) + o(|\Delta \mathbf{y}|).$$

Введем векторы  $\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_n$  с началом в точке  $P$ :

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j(\mathbf{y})}{\partial y_i} \mathbf{e}_j, \quad (12)$$

тогда

$$\Delta P = \Delta y_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + \dots + \Delta y_n \tilde{\mathbf{e}}_n + o(|\Delta \mathbf{y}|). \quad (13)$$

Таким образом, с точностью до бесконечно малых высшего порядка по сравнению с  $|\Delta \mathbf{y}|$  приращение  $\Delta P$  одинаково записывается и в базе  $\{\mathbf{e}_j\}$ , и в базе  $\{\tilde{\mathbf{e}}_j\}$ . Линейная независимость векторов  $\tilde{\mathbf{e}}_j(P)$  следует из (12) и из того, что  $\det \mathbf{f}'(\mathbf{y}) \neq 0$ . Базис  $\{\tilde{\mathbf{e}}(P)\}$  называется *локальным базисом*; локальные базисы различны, вообще говоря, в различных точках (рис. 16).

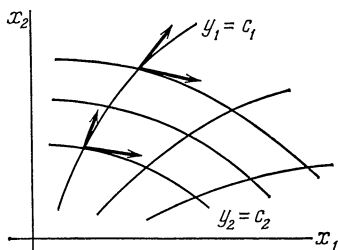


Рис. 16.

Пусть в области  $U$  задано векторное поле  $\Phi(P)$ , т. е. в каждой точке  $P \in U$  задан вектор

$$\Phi(P) = \varphi_1(\mathbf{x}) \mathbf{e}_1 + \dots + \varphi_n(\mathbf{x}) \mathbf{e}_n$$

или, что то же, задана вектор-функция  $\Phi(\mathbf{x})$ . При переходе к криволинейным координатам  $\mathbf{y}$  будем записывать координаты вектора  $\Phi(P)$  в локальном базисе  $\{\tilde{\mathbf{e}}(P)\}$ , т. е.

$$\Phi(P) = \tilde{\varphi}_1(\mathbf{y}) \tilde{\mathbf{e}}_1 + \dots + \tilde{\varphi}_n(\mathbf{y}) \tilde{\mathbf{e}}_n. \quad (14)$$

Установим связь между вектор-функциями  $\Phi(\mathbf{x})$  и  $\tilde{\Phi}(\mathbf{y})$ . Имеем из (14)

$$\begin{aligned} \Phi(P) &= \sum_{i=1}^n \varphi_i(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^n \tilde{\varphi}_j(\mathbf{y}) \tilde{\mathbf{e}}_j = \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(\mathbf{y})}{\partial y_j} \tilde{\varphi}_j(\mathbf{y}) \right) \mathbf{e}_i, \end{aligned}$$

так что

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(\mathbf{y})}{\partial y_j} \tilde{\varphi}_j(\mathbf{y}).$$

Эту формулу можно записать в виде

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{y}) \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{y}). \quad (15)$$

Здесь  $\mathbf{f}'(\mathbf{y})$  — матрица Якоби, а  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  связаны соотношением (4). Формула (15) показывает, как преобразуется векторное поле при переходе к криволинейным координатам.

Рассмотрим систему из  $n$  уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \quad (16)$$

и сделаем в ней замену переменных  $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ , тогда система примет вид

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{y}).$$

Здесь  $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{y})$  есть вектор-функция с  $n$  компонентами. Выясним связь между  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$  и  $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{y})$ . Имеем

$$\mathbf{f}'(\mathbf{y}) \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = (\mathbf{f}'(\mathbf{y}))^{-1} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{y}),$$

так что вектор-функции  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$  и  $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{y})$  связаны соотношением (15).

Матрица Якоби  $u'(\mathbf{x})$  скалярной функции  $u(\mathbf{x})$  называется *градиентом* функции  $u(\mathbf{x})$  и обозначается  $\nabla u(\mathbf{x})$ . Градиент — это *вектор-строка* (§ 9):

$$\nabla u(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right).$$

Выясним, как преобразуется градиент при замене переменных. Пусть  $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ , тогда (§ 9, (21))

$$\tilde{u}'(\mathbf{y}) = (u(\mathbf{f}(\mathbf{y})))' = u'(\mathbf{x}) \mathbf{f}'(\mathbf{y})$$

и окончательно получаем

$$\nabla \tilde{u}(\mathbf{y}) = \nabla u(\mathbf{x}) \mathbf{f}'(\mathbf{y}). \quad (17)$$

**Замечание 4.** При выводе предыдущих формул предполагалось, что координаты  $x$  — декартовы. Можно проверить, что все формулы из п. 3 остаются в силе, когда и  $x$  и  $y$  — криволинейные координаты.

## § 11. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной

**1. Задача Коши.** Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1)$$

**Предположение.** Функция  $F(x, y, p)$  вещественна и непрерывно дифференцируема в некоторой области  $D$  пространства  $(x, y, p)$ .

В дальнейшем  $(x, y, p) \in D$ . Уравнение

$$F(x, y, p) = 0 \quad (2)$$

определяет, вообще говоря, некоторую поверхность  $S$  в трехмерном пространстве.

Уравнение (1) — первого порядка, но для того, чтобы выделить единственное решение, недостаточно задать  $y(x_0) = y_0$ .

**Пример 1.** Уравнение  $y'^2 = 1$  имеет два семейства решений  $y = x + C$ ,  $y = -x + C$ , и через каждую точку плоскости  $(x, y)$  проходят две интегральные кривые (рис. 17). Это происходит по той причине, что если задано значение  $y(x_0) = y_0$ , то тем самым задано (хотя и неоднозначно) значение  $y'(x_0)$ , так как  $F(x_0, y_0, y'(x_0)) = 0$  и из этого уравнения определяется одно или более значений  $y'(x_0)$ . Поэтому *задача Коши ставится так: найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = p_0, \quad (3)$$

где  $x_0, y_0, p_0$  связаны соотношением  $F(x_0, y_0, p_0) = 0$ .

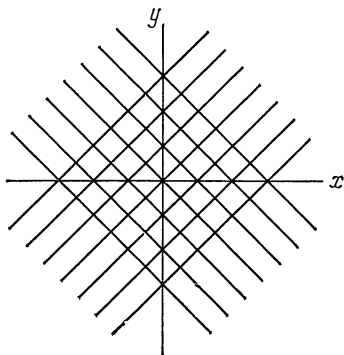


Рис. 17.

Теорема 1. Пусть выполнено условие

$$F_p(x_0, y_0, p_0) \neq 0. \quad (4)$$

Тогда решение задачи Коши (1), (3) существует и единственно на некотором интервале  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ .

Доказательство. В силу теоремы о неявной функции из уравнения (2) можно локально выразить  $p$  через  $x, y$ :  $p = \varphi(x, y)$ , где функция  $\varphi$  непрерывно дифференцируема в окрестности  $U$  точки  $(x_0, y_0)$ , единственна и  $p_0 = \varphi(x_0, y_0)$ . Тем самым мы получаем задачу Коши

$$y' = \varphi(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (5)$$

существование и единственность которой установлены в § 1.

Интегральные кривые уравнения (1) удобнее изображать не на плоскости  $(x, y)$ , а в пространстве  $(x, y, p)$ . Именно, это кривые, заданные уравнениями

$$x = x, \quad y = y(x), \quad p = p(x),$$

где  $p(x) = y'(x)$ , лежащие на поверхности  $S: F(x, y, p) = 0$ . В примере 1  $S$  состоит из плоскостей  $p = 1, p = -1$ , и одно из семейств интегральных кривых лежит на плоскости  $p = 1$ , другое — на плоскости  $p = -1$ .

Множество точек на  $S$ , в которых условие (4) теоремы 1 нарушено, задается уравнениями

$$F(x, y, p) = 0, \quad F_p(x, y, p) = 0. \quad (6)$$

Из этой системы можно, вообще говоря, исключить  $p$ , и мы получим соотношение

$$D(x, y) = 0. \quad (7)$$

Кривая, определенная этим уравнением, называется *дискриминантной кривой*. Ее ветви могут быть решениями уравнения (1); соответствующие достаточные условия довольно сложны, и в конкретных задачах проще исследовать эту кривую непосредственно.

Пример 2. Рассмотрим уравнение  $y'^2 = y$ , т. е.  $p^2 = y$ . Исключая  $p$  из соотношений  $p^2 - y = 0, 2p = 0$ , получаем дискриминантную кривую  $y = 0$ . Решим уравнение:

$$y' = \pm \sqrt{y}, \quad (\sqrt{y})' = \pm \frac{1}{2}, \quad y = \left(\frac{x}{2} + C\right)^2.$$

Функция  $y \equiv 0$  — также решение, и эта кривая касается семейства парабол (рис. 18, а).

Пример 3. Уравнение  $y'^2 = x$  имеет решения  $y = \pm (2/3)x^{3/2} + C$  (это семейство полукубических парабол) и  $y \equiv 0$ . Из уравнений  $p^2 - x = 0$ ,  $2p = 0$  находим дискриминантную кривую  $x = 0$ .

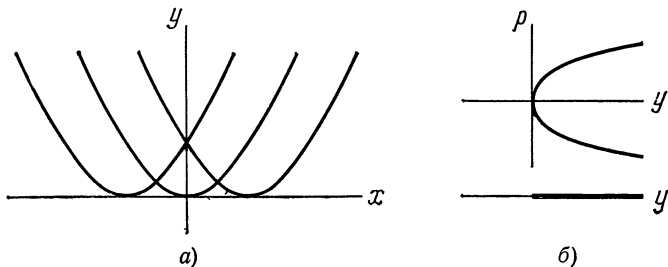


Рис. 18.

Окрестности точек на  $S$ , в которых условие (3) нарушено, *неоднозначно (или негладко) проектируются на плоскость  $(x, y)$* . В примере 2,  $S$  есть параболический цилиндр:  $p^2 - y = 0$ , его проекция дважды покрывает полуплоскость  $-\infty < x < \infty$ ,  $y \geq 0$  и ни одна его точка не проектируется на дополнительную полуплоскость (рис. 18, б).

**2. Особые решения. Огибающая.** Рассмотрим уравнение (5). Точка  $(x_0, y_0)$  называется *неособой*, если существует ее окрестность  $U$  такая, что через каждую точку этой окрестности проходит интегральная кривая и притом только одна. В противном случае точка  $(x_0, y_0)$  называется *особой*. Решение, все точки которого особые, называется *особым решением*. Для уравнения  $y' = (2/3)y^{2/3}$  все точки оси  $y = 0$  — особые (гл. 1, § 2), и решение  $y \equiv 0$  — особое. Аналогично, точка  $(x_0, y_0, p_0)$  называется *неособой* для уравнения (1), если существует ее окрестность  $U$  (на поверхности  $S$ ), через каждую точку которой проходит интегральная кривая и притом только одна; в противном случае эта точка называется *особой*.

Пусть имеется семейство кривых на плоскости, заданное уравнением

$$f(x, y, C) = 0, \quad (8)$$



где  $C$  — параметр. Функция  $f$  вещественна и непрерывно дифференцируема в некоторой области  $D$  пространства  $(x, y, C)$  и  $f_C \neq 0$ . Последующие рассуждения носят локальный характер — в малой окрестности  $U$  точки  $(x_0, y_0, C_0)$ , где  $f(x_0, y_0, C_0) = 0$ .

*Кривая  $\gamma$  называется огибающей семейства кривых (8), если в каждой своей точке она касается одной из кривых семейства и если в разных точках она касается разных кривых.*

**Теорема 2.** *Огибающая семейства решений есть решение.*

Очевидно, что это решение — особое.

**Доказательство.** Пусть для определенности семейство (8) — решения уравнения (5), и  $(x_0, y_0) \in \gamma$ . Пусть, далее,  $y = \psi(x)$ , — интегральная кривая, проходящая через точку  $(x_0, y_0)$  и  $y = \chi(x)$  — уравнение кривой  $\gamma$  вблизи этой точки. Тогда

$$\psi'(x_0) = \varphi(x_0, y_0), \quad \psi'(x_0) = \chi'(x_0),$$

так как эти кривые касаются, так что  $\chi'(x_0) = \varphi(x_0, y_0)$  и уравнение (5) выполняется.

Найдем уравнение огибающей.

**Теорема 3.** *Пусть  $f = 0$ ,  $\nabla_{x,y} f \neq (0, 0)$  в точке  $(x_0, y_0, C_0)$ . Тогда в некоторой окрестности  $U \ni (x_0, y_0)$  точки, лежащие на огибающей семейства кривых (8), определяются из системы*

$$f(x, y, C) = 0, \quad f_C(x, y, C) = 0. \quad (9)$$

**Доказательство.** Пусть  $f_C \neq 0$  и пусть  $f_y \neq 0$  для определенности, в точке  $(x_0, y_0, C_0)$ . Покажем, что точка  $(x_0, y_0) = P_0$  не лежит на огибающей; тем самым теорема будет доказана. По теореме о неявной функции из уравнения (8) можно выразить  $C$  через  $x, y$ :  $C = \psi(x, y)$ , где  $\psi$  — непрерывно дифференцируемая в достаточно малой области  $U \ni P_0$ . Кроме того,  $\frac{\partial \psi}{\partial y} \neq 0$  в точке  $P_0$ , так как из тождества  $f(x, y, \psi(x, y)) \equiv 0$  следует, что  $f_y + f_C \psi_y = 0$  в точке  $P_0$ .

Сделаем замену переменных

$$x = \tilde{x}, \quad \psi(x, y) = \tilde{y}.$$

Эта замена гладкая и обратимая, так как якобиан

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial \psi(P_0)}{\partial y} \neq 0.$$

При такой замене огибающая переходит в огибающую. В новых переменных семейство (8) примет вид  $\tilde{y} = C$ , а это — семейство параллельных кривых, которое не имеет огибающей.

Итак, чтобы найти уравнение огибающей, надо исключить  $C$  из системы (9), что даст (вообще говоря) уравнение вида  $g(x, y) = 0$ . Но определенная этим уравнением кривая может и не быть огибающей — теорема 3 дает лишь необходимые условия.

**Пример 4.** Рассмотрим семейство кривых

$$f(x, y, C) \equiv y - (2x + C)^2 = 0$$

(см. пример 2). Из уравнения  $f_C = 0$  находим  $2x + C = 0$ ; подставляя в уравнение  $f = 0$ , получаем линию  $y = 0$ , которая является огибающей этого семейства парабол.

**Пример 5.** Уравнение из примера 3 имеет семейство решений

$$f(x, y, C) \equiv (y - C)^2 - (4/9)x^3 = 0.$$

Имеем  $f_C = 2(y - C) = 0$ , так что из системы  $f = 0$ ,  $f_C = 0$  находим  $x = 0$ . Эта кривая — не огибающая семейства, а множество точек возврата кривых семейства (рис. 19).

**Пример 6.** Рассмотрим семейство синусоид

$$f(x, y, C) \equiv y - C \sin x = 0. \quad (10)$$

Из уравнения  $f_C = 0$  находим  $x = \pi n$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , так что  $y = 0$  и система (9) определяет семейство точек  $(\pi n, 0)$ . Семейство, таким образом, не имеет огибающей.

**Замечание.** Точки  $(\pi n, 0)$  называются *фокальными точками* семейства. Уравнения (10) могут, например, описывать световые лучи на плоскости, которые выходят из источника, расположенного в точке  $(0, 0)$ . В точке

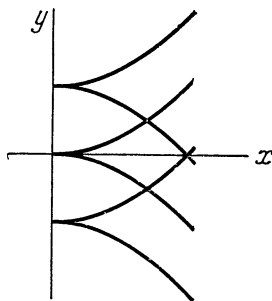


Рис. 19.

( $\pi n, 0$ ),  $n \neq 0$ , происходит *фокусировка лучей*, так как все лучи собираются в эту точку.

Пример 5. Рассмотрим уравнение Клеро

$$F(x, y, y') \equiv y - xy' - f(y') = 0. \quad (11)$$

Решим это уравнение, положив  $y' = p$ . Тогда  $y = xp + f(p)$ ; дифференцируя это тождество по  $x$ , получаем

$$p'(x + f'(p)) = 0.$$

Пусть  $p' \neq 0$ , тогда

$$x = -f'(p), \quad y = -pf'(p) + f(p) \quad (12)$$

и мы получили параметрическое представление решения. Если  $f''(p) \neq 0$ ,  $a < p < b$ , то можно выразить  $p$  через  $x$ :  $p = p(x)$  из первого соотношения (12), и решение  $y = y(x)$  будет непрерывно дифференцируемо. Если же  $p' = 0$  на некотором интервале, то  $p = C$ , так что

$$y = Cx + f(C), \quad (13)$$

где  $C$  — постоянная. Это уравнение определяет семейство прямых.

Решение (12) — особое, и эта интегральная кривая — огибающая семейства прямых (13). Действительно, прямых (13) касается кривой (12) в точке

$$x = -f'(C), \quad y = -f'(C)C + f(C).$$

## ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ

### § 1. Теорема существования и единственности

**1. Формулировка теоремы.** Рассмотрим линейную систему из  $n$  уравнений

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{jk}(x) y_k + f_j(x), \quad j=1, 2, \dots, n,$$

в нормальной форме. Здесь  $y_j(x)$  — неизвестные,  $a_{jk}(x)$ ,  $f_j(x)$  — известные функции. Все эти функции предполагаются комплекснозначными. Положим

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix},$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

тогда система примет вид

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x). \quad (1)$$

Поставим задачу Коши

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}^0 \quad (2)$$

для системы (1), где  $\mathbf{y}^0$  — заданный  $n$ -вектор.

**Теорема существования и единственности** для линейных систем. Пусть вектор-функция  $\mathbf{f}(x)$  и матрица-функция  $A(x)$  непрерывны на отрезке  $I = [a, b]$ , точка  $x_0 \in I$ . Тогда

1°. Решение задачи Коши (1), (2) существует на всем отрезке  $I$ .

2°. Решение задачи Коши (1), (2) единственно: если  $y(x)$ ,  $z(x)$  — решения системы (1) с одинаковыми данными Коши (2), то  $y(x) \equiv z(x)$  на всем отрезке  $I$ .

Замечание. В отличие от теоремы существования и единственности для нелинейных систем (гл. 2, § 1), эта теорема — глобальная: решение существует на всем отрезке  $I$ .

2. Доказательство теоремы. Задача Коши (1), (2) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$y(x) = g(x) + \int_{x_0}^x A(t) y(t) dt, \quad (3)$$

где обозначено

$$g(x) = y^0 + \int_{x_0}^x f(x) dt.$$

Применим метод последовательных приближений:

$$y^0(x) = g(x), \quad y^1(x) = g(x) + \int_{x_0}^x A(t) y^0(t) dt, \dots$$

$$\dots, \quad y^k(x) = g(x) + \int_{x_0}^x A(t) y^{k-1}(t) dt, \dots \quad (4)$$

Так как матрица-функция  $A(x)$  и вектор-функция  $f(x)$  непрерывны на отрезке  $I$ , то все последовательные приближения  $y^0(x)$ ,  $y^1(x)$ , ... — непрерывные на отрезке  $I$  вектор-функции. Докажем, что последовательные приближения  $y^k(x)$  равномерно сходятся на отрезке  $I$ :  $y^k(x) \rightrightarrows y(x)$ .

Как и в доказательстве основной теоремы (гл. 2, § 1), рассмотрим ряд

$$y(x) = y^0(x) + (y^1(x) - y^0(x)) + \dots$$

$$\dots + (y^{k+1}(x) - y^k(x)) + \dots \quad (5)$$

Его частичные суммы равны  $y^0(x)$ ,  $y^1(x)$ , ...,  $y^k(x)$ , ..., так что из равномерной сходимости ряда (5) следует равномерная сходимость последовательности  $\{y^k(x)\}$ . Как и в доказательстве основной теоремы, достаточно доказать сходимость ряда

$$\|y^0(x)\|_C + \|y^1(x) - y^0(x)\|_C + \dots + \|y^{k+1}(x) - y^k(x)\|_C + \dots \quad (6)$$

Напомним, что если  $\mathbf{y}(x)$  есть  $n$ -вектор, то его норма в пространстве  $\mathbf{C}(I)$  определяется так:

$$\|\mathbf{y}(x)\|_{\mathbf{C}} = \max_{x \in I} \|\mathbf{y}(x)\| = \max_{x \in I} \left( \max_{1 \leq k \leq n} |y_k(x)| \right),$$

а норма  $(n \times n)$ -матрицы  $A(x)$  определяются по формулам (гл. 2, §§ 2, 3):

$$\|A(x)\| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^n |a_{jk}(x)|, \quad \|A(x)\|_{\mathbf{C}} = \max_{x \in I} \|A(x)\|.$$

Так как вектор-функция  $\mathbf{g}(x)$  и матрица-функция  $A(x)$  непрерывны при  $x \in I$ , то

$$\|\mathbf{g}(x)\|_{\mathbf{C}} \leq C_1, \quad \|A(x)\|_{\mathbf{C}} \leq C_2,$$

где  $C_1, C_2$  — постоянные.

Оценим нормы в  $\mathbf{C}(I)$  последовательных приближений. Имеем  $\|y^0(x)\|_{\mathbf{C}} \leq C_1$ . Далее,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}^1(x) - \mathbf{y}^0(x)\| &= \left\| \int_{x_0}^x A(t) \mathbf{g}(t) dt \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x \|A(t) \mathbf{g}(t)\| dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x \|A(t)\| \|\mathbf{g}(t)\| dt \right| \leq \end{aligned}$$

(мы воспользовались неравенством  $\|A(t) \mathbf{g}(t)\| \leq \|A(t)\| \|\mathbf{g}(t)\|$  и неравенством (3) из § 5, гл. 2)

$$\leq \left| \int_{x_0}^x C_1 C_2 dt \right| = C_1 C_2 |x - x_0|. \quad (7)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}^2(x) - \mathbf{y}^1(x)\| &= \left\| \int_{x_0}^x A(t) (\mathbf{y}^1(t) - \mathbf{y}^0(t)) dt \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x \|A(t)\| \|\mathbf{y}^1(t) - \mathbf{y}^0(t)\| dt \right| \leq \end{aligned}$$

(используем оценку (7))

$$\leq C_1 C_2^2 \left| \int_{x_0}^x |t - x_0| dt \right| = \frac{C_1 C_2^2}{2} |x - x_0|^2.$$

Докажем по индукции, что выполняются оценки

$$\|\mathbf{y}^k(x) - \mathbf{y}^{k-1}(x)\| \leq \frac{C_1 C_2^k}{k!} |x - x_0|^k. \quad (8)$$

При  $k=1$  это неравенство доказано; совершим переход по индукции от  $k$  к  $k+1$ : Имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}^{k+1}(x) - \mathbf{y}^k(x)\| &= \left\| \int_{x_0}^x A(t) (\mathbf{y}^k(t) - \mathbf{y}^{k-1}(t)) dt \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x \|A(t)\| \|\mathbf{y}^k(t) - \mathbf{y}^{k-1}(t)\| dt \right| \leq \end{aligned}$$

(используем оценку (8))

$$\leq \frac{C_1 C_2^k}{k!} \left| \int_{x_0}^x |t - x_0|^k dt \right| = \frac{C_1 C_2^{k+1}}{(k+1)!} |x - x_0|^{k+1}.$$

Тем самым оценка (8) доказана.

Так как  $|x - x_0| \leq b - a$ , то

$$\|\mathbf{y}^k(x) - \mathbf{y}^{k-1}(x)\| \leq \frac{C_1 C_2^k (b - a)^k}{k!}.$$

Правая часть неравенства не зависит от  $x$ ; поэтому неравенство верно для максимума по  $x \in I$  левой части (т. е. для нормы в  $C$ )

$$\|\mathbf{y}^k(x) - \mathbf{y}^{k-1}(x)\|_C \leq \frac{C_1 C_2^k (b - a)^k}{k!}.$$

Так как числовой ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_1}{k!} [C_2 (b - a)]^k$  сходится (его

сумма равна  $C_1 e^{C_2 (b - a)}$ ), то сходится ряд (6) и тем самым равномерная сходимость последовательности  $\{\mathbf{y}^k(x)\}$  доказана. В силу равномерной сходимости предельная вектор-функция  $\mathbf{y}(x)$  непрерывна на отрезке  $I$ .

Переходя к пределу при  $k \rightarrow \infty$  в соотношении (4), что возможно в силу равномерной сходимости последовательности  $\{\mathbf{y}^k(x)\}$ , получаем, что  $\mathbf{y}(x)$  удовлетворяет системе интегральных уравнений (3) при всех  $x \in I$ . Тем самым существование решения задачи Коши (1), (2) доказано.

Единственность вытекает из основной теоремы и теоремы о продолжении решений (гл. 2, § 6).

Рассмотрим задачу Коши для нелинейной системы из  $n$  уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x^0, \quad (9)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n)$ .

**Теорема.** Пусть вектор-функция  $f(t, x)$  непрерывна при  $t \in I = [t_0, t_1]$ ,  $x \in \mathbf{R}^n$  по совокупности переменных и

$$\left| \frac{\partial f_j(t, x)}{\partial x_k} \right| \leq C \quad (t \in I, x \in \mathbf{R}^n) \quad (10)$$

при всех  $j, k$ . Тогда решение задачи Коши (9) существует и единственно на всем отрезке  $I$ .

Наметим доказательство. Для последовательных приближений

$$x^k(t) = x^0 + \int_{t_0}^t f(\tilde{t}, x^{k-1}(\tilde{t})) d\tilde{t}$$

в силу леммы 3 (гл. 2, § 4) и оценок (9) справедливо неравенство

$$\|x^k(t) - x^{k-1}(t)\| \leq Cn \left| \int_{t_0}^t \|x^{k-1}(\tilde{t}) - x^{k-2}(\tilde{t})\| d\tilde{t} \right|$$

и по индукции, как и выше, доказывается неравенство

$$\|x^k(t) - x^{k-1}(t)\| \leq A \frac{(Cn)^k}{k!} |t_1 - t_0|^k,$$

где  $A$  — некоторая постоянная. Далее см. доказательство предыдущей теоремы.

**3. Линейное уравнение  $n$ -го порядка.** Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = f(x) \quad (11)$$

и поставим для него задачу Коши

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \quad (12)$$

**Теорема существования и единственности.** Пусть коэффициенты  $a_1(x), \dots, a_n(x)$  и правая часть  $f(x)$  уравнения (11) непрерывны на отрезке  $I = [a, b]$ . Тогда



1°. Существование. Решение задачи Коши (11), (12) существует на всем отрезке  $x \in I$ .

2°. Единственность. Решение задачи Коши (11), (12) единственно на всем отрезке  $I$ .

Доказательство. Заменяем уравнение (11) эквивалентной системой уравнений, полагая

$$y_0(x) = y(x), \quad y_1(x) = y'_0(x), \quad \dots, \quad y_{n-1}(x) = y'_{n-2}(x),$$

так что  $y_j(x) = y^{(j)}(x)$ . Из уравнения (11) находим

$$y'_{n-1}(x) = -a_1(x)y_{n-1}(x) - \dots - a_n(x)y_0(x) + f(x).$$

Мы получили систему вида (2), где

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & \dots & -a_1(x) \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix},$$

данные Коши (12) принимают вид:  $y_j(x_0) = y_j$ .

## § 2. Функции от матриц и однородные линейные системы с постоянными коэффициентами

1. Матричная экспонента. Рассмотрим задачу Коши для линейной однородной системы из  $n$  уравнений

$$\frac{dy}{dx} = Ay, \quad y(x_0) = y^0 \quad (1)$$

с постоянными коэффициентами. Сведем эту задачу к системе интегральных уравнений

$$y(x) = y^0 + \int_{x_0}^x Ay(t) dt$$

и применим метод последовательных приближений:

$$y^0(x) = y^0, \quad \dots, \quad y^k(x) = y^0 + \int_{x_0}^x Ay^{k-1}(t) dt.$$

Вычисляя последовательные приближения, получаем

$$\begin{aligned} y^1(x) &= y^0 + (x - x_0) Ay^0, \quad y^2(x) = y^0 + (x - x_0) Ay^0 + \\ &+ \frac{(x - x_0)^2}{2} A^2 y^0, \quad \dots, \quad y^k(x) = y^0 + \frac{x - x_0}{1!} Ay^0 + \dots \\ &\dots + \frac{(x - x_0)^k}{k!} A^k y^0. \end{aligned}$$

В § 1 доказано, что последовательность  $\{y^k(x)\}$  равномерно сходится к решению задачи Коши (1), (2) на любом отрезке  $I$ . Поэтому решение имеет вид

$$y(x) = e^{(x-x_0)A} y^0, \quad (2)$$

где введено естественное обозначение

$$e^{(x-x_0)A} = I + \frac{x-x_0}{1!} A + \frac{(x-x_0)^2}{2!} A^2 + \dots + \frac{(x-x_0)^k}{k!} A^k + \dots \quad (3)$$

Матрица-функция  $e^{(x-x_0)A}$  называется *матричной экспонентой* и обладает рядом свойств скалярной экспоненты. Справедливы формулы

$$1^\circ. e^{x_1 A} e^{x_2 A} = e^{(x_1 + x_2) A}.$$

$$2^\circ. (e^{xA})^{-1} = e^{-xA}.$$

$$3^\circ. \frac{d}{dx} e^{xA} = A e^{xA} = e^{xA} A.$$

Докажем  $1^\circ$ . Решение системы (1) с данными Коши  $y(0) = y^0$  имеет вид  $y(x) = e^{xA} y^0$ . По теореме единственности  $y(x_1 + x_2) = z(x_1)$ , где  $z(x)$  — решение системы (1) с данными Коши  $z(0) = y(x_2)$ . Имеем

$$y(x_1 + x_2) = e^{(x_1 + x_2)A} y^0, \quad z(x_2) = e^{x_1 A} y(x_2) = e^{x_1 A} e^{x_2 A} y^0,$$

так что  $e^{(x_1 + x_2)A} y^0 = e^{x_1 A} e^{x_2 A} y^0$  и  $1^\circ$  следует из того, что это тождество справедливо для любого вектора  $y^0$ . Свойство  $2^\circ$  следует из  $1^\circ$ . Далее,

$$\frac{d}{dx} (e^{xA} y^0) = \left( \frac{d}{dx} e^{xA} \right) y^0 = A e^{xA} y^0,$$

так как  $e^{xA} y^0$  — решение системы (1). Поскольку это тождество справедливо для любого вектора  $y^0$ , то первое из равенств  $3^\circ$  доказано; второе можно проверить перемножением рядов.

Матричная экспонента  $e^{xA}$  бесконечно дифференцируема на всей оси  $-\infty < x < \infty$ , так как всякое решение системы (1) обладает этим свойством.

Рассмотрим ряд из матричных функций порядка  $n \times n$ :

$$S(x) = B_1(x) + B_2(x) + \dots + B_k(x) + \dots \quad (4)$$

Этот ряд называется *сходящимся (абсолютно сходящимся, равномерно сходящимся)*, если все ряды из компонент матриц  $B_k(x)$ :

$$(b_1(x))_{jl} + (b_2(x))_{jl} + \dots + (b_k(x))_{jl} + \dots$$

сходятся (абсолютно сходятся, равномерно сходятся). Абсолютная сходимость ряда (4) в точке  $x_0$  эквивалентна сходимости ряда из норм:

$$\|B_1(x_0)\| + \|B_2(x_0)\| + \dots + \|B_k(x_0)\| + \dots < \infty,$$

а равномерная сходимость ряда (4) на интервале  $I$  эквивалентна сходимости ряда из норм в  $C(I)$ :

$$\|B_1(x)\|_C + \|B_2(x)\|_C + \dots + \|B_k(x)\|_C + \dots < \infty.$$

Доказываются эти факты точно так же, как и для рядов из вектор-функций (гл. 2, § 2). Теоремы из анализа о дифференцировании и интегрировании функциональных рядов справедливы и для матричных рядов. Ряд (3) для матричной экспоненты сходится абсолютно на всей оси  $x$  и равномерно на любом конечном отрезке  $a \leq x \leq b$ , что следует из доказательства теоремы существования и единственности.

**2. Вычисление матричной экспоненты.** Пусть  $A$  —  $(n \times n)$ -матрица, тогда

$$e^A = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^k}{k!} + \dots \quad (5)$$

**Лемма а.** Если  $T$  — невырожденная  $(n \times n)$ -матрица, то

$$T^{-1}A^kT = (T^{-1}AT)^k. \quad (6)$$

**Доказательство** вытекает из тождества

$$T^{-1}A^kT = T^{-1}AT \cdot T^{-1}AT \dots T^{-1}AT \cdot T^{-1}AT \quad (k \text{ раз}).$$

Эта лемма необыкновенно упрощает вычисление степеней матриц. Ясно, что в качестве матрицы  $T$  нужно взять такую, которая приводит матрицу  $A$  к простейшему виду. Пусть матрица  $A$  приводится к диагональному виду, т. е. существует матрица  $T$  такая, что

$$T^{-1}AT = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Тогда, в силу (6),

$$A^k = T\Lambda^kT^{-1} = T \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} T^{-1}. \quad (7)$$

Из (6) следует, что

$$T^{-1}e^AT = e^{T^{-1}AT} \quad (8)$$

и если матрица  $A$  приводится к диагональному виду, то

$$e^A = Te^{\Lambda}T^{-1} = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}. \quad (9)$$

В частности, отсюда следует, что

$$\det e^A = e^{\text{Sp } A}. \quad (10)$$

Здесь  $\text{Sp } A$  — *след* матрицы  $A$ , т. е. сумма ее диагональных элементов:

$$\text{Sp } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Из линейной алгебры [7, 17] известно, что  $\text{Sp } T^{-1}AT = \text{Sp } A$ , так что  $\text{Sp } A = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ .

Формула (10) для определителя матричной экспоненты (доказанная пока только для таких матриц, которые приводятся к диагональному виду) справедлива для любых квадратных матриц.

Формулы (2), (9) позволяют получить новое доказательство формулы для решений системы (1) (гл. 1, § 8). Всякое решение системы (1) имеет вид  $\mathbf{y} = e^{xA}\mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}$  — постоянный вектор; возьмем его в виде  $\mathbf{a} = T\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$ . В силу (9) имеем

$$\mathbf{y} = Te^{x\Lambda}\mathbf{c} = \sum_{j=1}^n c_j e^{\lambda_j x} T\mathbf{f}_j,$$

где  $j$ -я компонента вектора  $\mathbf{f}_j$  равна 1, остальные равны нулю. Так как  $T\mathbf{f}_j = \mathbf{e}_j$  — собственный вектор матрицы  $A$ , то мы пришли к формуле (4) из гл. 1, § 8.

В общем случае матрица  $A$  приводится к жордановой нормальной форме. Пусть  $B$  — жорданов блок порядка

$l \times l$  с нулевыми диагональными элементами. Степени этой матрицы равны

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \cdot & \cdot & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ & & & & \cdot \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \dots$$

$$\dots, \quad B^{l-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \cdot & & & 0 \\ & \cdot & & \vdots \\ 0 & \cdot & & 0 \end{pmatrix}, \quad B^l = 0.$$

Пусть  $J$  — жорданов блок порядка  $l \times l$  с диагональными элементами, равными  $\lambda$ , т. е.  $J = \lambda I + B$ . Имеем

$$(\lambda I + B)^k = \sum_{j=0}^k C_k^j \lambda^{k-j} B^j = \sum_{j=0}^{\tilde{k}} C_k^j \lambda^{k-j} B^j,$$

где  $\tilde{k} = \min(k, l-1)$ , так как  $B^l = 0$  и окончательно получаем

$$J^k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} \lambda^k & \frac{(\lambda^k)'}{1!} & \dots & \frac{(\lambda^k)^{(l-1)}}{(l-1)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \frac{(\lambda^k)'}{1!} \\ & & & \lambda^k \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Из этой формулы следует,

$$e^J = \begin{pmatrix} e^\lambda & \frac{e^\lambda}{1!} & \frac{e^\lambda}{2!} & \dots & \frac{e^\lambda}{(l-1)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{e^\lambda}{2!} \\ & & \cdot & \cdot & \frac{e^\lambda}{1!} \\ & & 0 & \cdot & e^\lambda \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Эта формула в сочетании с (9) позволяет вычислить матрицу  $e^A$  для произвольной матрицы  $A$ .

Матричная экспонента позволяет установить связи между важнейшими классами матриц. Из (5) следует, что

$$(e^A)^t = e^{A^t}, \quad (13)$$

так как  $(A^k)^t = (A^t)^k$ . Аналогично,

$$(e^A)^* = e^{A^*}, \quad (14)$$

где  $A^*$  — эрмитово сопряженная матрица (т. е. если  $A = (a_{ij})$ , то  $A^* = (\bar{a}_{ji})$ ).

1°. Если матрица  $A$  — кососимметрическая, т. е.  $A^t = -A$ , то матрица  $T = e^A$  — ортогональная. Действительно,

$$TT^t = e^A (e^A)^t = e^A e^{-A} = I.$$

2°. Если матрица  $A$  — косоэрмитова, т. е.  $A^* = -A$ , то матрица  $U = e^A$  — унитарная. Действительно,

$$UU^* = e^A e^{A^*} = e^A e^{-A} = I.$$

Из (13), (14) следует также, что если матрица  $A$  симметрическая (эрмитова), то матрица  $e^A$  также симметрическая (эрмитова).

Одно из основных отличий матричной экспоненты от обычной (скалярной) таково

$$e^A e^B \neq e^{A+B},$$

если  $AB \neq BA$ . Чтобы убедиться в этом, достаточно взять матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### 3. Функции от матриц. Рассмотрим степенной ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k,$$

сходящийся при  $|x| < R$ . Матричная функция  $f(A)$  от квадратной  $(n \times n)$ -матрицы  $A$  определяется по формуле

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k A^k. \quad (15)$$

Этот ряд сходится, если  $\|A\| < R$ , что следует из оценки

$$\|f(A)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| \|A\|^k.$$

Тем самым определены такие функции от матриц, как

$$\sin A, \quad \cos A, \quad \operatorname{sh} A, \quad \operatorname{ch} A, \quad \ln(I - A), \quad (I + A)^\alpha$$

(последние две — при условии  $\|A\| < 1$ ). Из (6) следует, что

$$T^{-1}f(A)T = f(T^{-1}AT), \quad (16)$$

и это позволяет свести вычисление функций от матриц к вычислению скалярных функций.

Если матрица  $A$  приводится матрицей  $T$  к диагональному виду, то

$$f(A) = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ \mathbf{0} & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}. \quad (17)$$

Пусть  $J$  — жорданов блок порядка  $(l \times l)$  с диагональными элементами, равными  $\lambda$  (см. (11)). Тогда

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(l-1)}(\lambda)}{(l-1)!} \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ & & \cdot & \cdot & \frac{f''(\lambda)}{2!} \\ & & & \cdot & \frac{f'(\lambda)}{1!} \\ 0 & & & & f(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Действительно, элемент матрицы  $f(J)$  с индексами  $(1, m)$  имеет, в силу (11), вид

$$f_{1m} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{(\lambda^k)^m}{m!} = \frac{1}{m!} f^{(m)}(\lambda).$$

Функцию  $\sqrt{A}$  можно определить как матрицу такую, что  $(\sqrt{A})^2 = A$ . Таких матриц бесконечно много; например,

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

если  $x^2 + zy = 1$ . Отметим один важный частный случай.

Если  $A$  — вещественная симметрическая (или эрмитова) положительно определенная матрица, то существует единственная матрица  $\sqrt{A}$  с теми же свойствами. Она имеет вид

$$\sqrt{A} = T \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}. \quad (19)$$

Здесь  $\lambda_j$  — собственные значения матрицы  $A$ , все корни положительны:  $\sqrt{\lambda_j} > 0$  и  $T$  — матрица, приводящая матрицу к диагональному виду.

Рассмотрим систему из  $n$  уравнений

$$y'' + Ay = 0, \quad (20)$$

$A$  — вещественная симметрическая положительно определенная матрица. Всякое решение этой системы имеет вид

$$y = e^{ix\sqrt{A}}c_1 + e^{-ix\sqrt{A}}c_2. \quad (21)$$

Здесь  $\sqrt{A}$  — описанный выше квадратный корень и  $c_1, c_2$  — произвольные постоянные векторы. Действительно,

$$\frac{d}{dx} e^{ix\sqrt{A}}c_1 = i\sqrt{A} e^{ix\sqrt{A}}c_1, \quad \frac{d^2}{dx^2} e^{ix\sqrt{A}}c_2 = -A e^{ix\sqrt{A}}c_2$$

и первое слагаемое из правой части в (21) удовлетворяет системе (20). Аналогично доказывается, что второе слагаемое также будет решением системы. Ниже будет показано, что формула (21) дает все решения системы (20).

Вещественные решения системы (21) имеют вид

$$y = \cos(x\sqrt{A})\tilde{c}_1 + \sin(x\sqrt{A})\tilde{c}_2, \quad (22)$$

где  $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$  — постоянные вещественные векторы.

Пусть  $T^{-1}AT = \Lambda$ , где  $\Lambda$  — диагональная матрица с диагональными элементами  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , и пусть  $e_1, \dots, e_n$  — ортонормированный базис из собственных векторов матрицы  $A$ . Используя формулы (17), (21) можно выразить решения через  $\lambda_j, e_j$ , но проще сделать подстановку  $y = Tz$ . Тогда система (20) примет вид

$$z'' + \Lambda z = 0,$$



т. е. распадается на  $n$  независимых уравнений

$$z_j'' + \lambda_j z_j = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Интегрируя эти уравнения, получаем

$$y_j = C_{j1} \cos \sqrt{\lambda_j} x + C_{j2} \sin \sqrt{\lambda_j} x,$$

откуда следует, что всякое решение системы (20) имеет вид

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^n [C_{j1} \cos(\sqrt{\lambda_j} x) \mathbf{e}_j + C_{j2} \sin(\sqrt{\lambda_j} x) \mathbf{e}_j], \quad (23)$$

где  $C_{jk}$  — произвольные постоянные.

**4. Малые колебания механических систем.** Рассмотрим систему с  $n$  степенями свободы, состояние которой в момент времени  $t$  задается вектор-функцией  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ . Пусть потенциальная энергия  $U = U(x_1, \dots, x_n)$  системы имеет точку минимума  $\mathbf{x}^0$ . Будем рассматривать малые колебания системы вблизи этого положения равновесия. Разлагая функции  $U(\mathbf{x})$  в ряд по степеням отклонений  $y_j = x_j - x_j^0$ , получаем

$$U(\mathbf{x}) - U(\mathbf{x}^0) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n k_{ij} y_i y_j + \dots$$

Здесь многоточием обозначены члены третьего и более высокого порядка малости и  $k_{ij} = \frac{\partial^2 U(\mathbf{x}^0)}{\partial x_i \partial x_j}$ . Матрица  $K = (k_{ij})$  — симметрическая, так как  $k_{ij} = k_{ji}$ .

Кинетическая энергия  $T$  системы имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \dot{x}_i \dot{x}_j$$

и вблизи положения равновесия  $\mathbf{x}^0$  имеем

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n m_{ij} \dot{y}_i \dot{y}_j + \dots,$$

где  $m_{ij} = a_{ij}(\mathbf{x}^0)$ . Отбрасывая члены третьего порядка малости, для функции Лагранжа (см. гл. 6, § 5)  $L = T - U$  получаем выражение

$$L = \frac{1}{2} (M \dot{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{y}}) - \frac{1}{2} (K \mathbf{y}, \mathbf{y}).$$

Можно считать, что  $m_{ij} = m_{ji}$ ; для этого достаточно перегруппировать слагаемые в выражении для  $T$ . Тогда матрица  $M = (m_{ij})$  будет симметрической.

Так как кинетическая энергия системы положительна, то матрица  $M$  положительно определена. Будем предполагать, что точка минимума  $\mathbf{x}^0$  невырождена, т. е.  $\det K \neq 0$ ; тогда матрица  $K$  также положительно определенная. Уравнения движения системы имеют вид

$$\frac{\partial \dot{L}}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

так что

$$M\ddot{\mathbf{y}} + K\mathbf{y} = 0. \quad (24)$$

Так как  $M$ ,  $K$  — симметрические положительно определенные матрицы, то, в силу известной теоремы линейной алгебры [17], они одновременно приводятся к диагональному виду (достаточно даже положительной определенности только одной из этих матриц). Поэтому существует матрица  $T$  такая, что

$$T^{-1}MT = \tilde{M}, \quad T^{-1}KT = \tilde{K},$$

где  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{K}$  — диагональные матрицы с элементами  $m_j$ ,  $k_j$ .

Сделаем в системе (24) подстановку  $\mathbf{y} = T\mathbf{z}$ , тогда, после умножения полученной системы слева на матрицу  $T^{-1}$ , получим систему

$$\tilde{M}\ddot{\mathbf{z}} + \tilde{K}\mathbf{z} = 0.$$

Эта система распадается на  $n$  независимых уравнений

$$m_j\ddot{z}_j + k_j z_j = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

и все вещественные решения системы даются формулами

$$z_j = A_j \cos(\omega_j t + \varphi_j); \quad \omega_j^2 = k_j/m_j.$$

Здесь  $A_j$ ,  $\varphi_j$  — произвольные вещественные постоянные. Соответственно, все решения системы (24) имеют вид

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^n A_j \cos(\omega_j t + \varphi_j) \mathbf{t}_j, \quad (25)$$

где  $\mathbf{t}_j$  есть  $j$ -й столбец матрицы  $T$ . Таким образом, малые колебания механической системы распадаются на гармонические колебания с частотами  $\omega_j$  вдоль осей, с направляющими векторами  $\mathbf{t}_j$ .

### § 3. Линейная зависимость и независимость функций и вектор-функций.

#### Определитель Вронского

#### 1. Понятие линейной независимости.

**Определение 1.** *Функции  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$  называются линейно зависимыми на интервале  $I = (a, b)$ , если существуют постоянные  $c_1, c_2, \dots, c_k$ , не равные нулю одновременно и такие, что*

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_k y_k(x) \equiv 0, \quad x \in I. \quad (1)$$

*В противном случае функции  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$  называются линейно независимыми на интервале  $I$ .*

**Пример 1.** Функции  $1, x, x^2, \dots, x^k$  линейно независимы на любом интервале  $I$ .

Допустим противное; тогда существуют постоянные  $c_0, c_1, \dots, c_k$ , не равные нулю одновременно и такие, что

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_k x^k \equiv 0, \quad x \in I. \quad (2)$$

Левая часть этого тождества — ненулевой многочлен степени не выше чем  $k$ . Такой многочлен имеет не более  $k$  различных корней. С другой стороны, все точки интервала  $I$  (которых бесконечно много) — корни этого многочлена, в силу (2). Это возможно только тогда, когда все коэффициенты  $c_0, c_1, \dots, c_k$  многочлена равны нулю. Мы пришли к противоречию, так как предполагали, что не все числа  $c_k$  равны нулю.

Приведем другое доказательство. Дифференцируя тождество (2), получаем тождества (при  $x \in I$ )

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 x + \dots + k c_k x^{k-1} &\equiv 0, \\ \dots &\dots \\ (k-1)! c_{k-1} + k! c_k x &\equiv 0, \\ k! c_k &\equiv 0. \end{aligned}$$

Из последнего соотношения находим, что  $c_k = 0$ , из предпоследнего, — что  $c_{k-1} = 0$  и т. д., так что  $c_0 = c_1 = \dots = c_k = 0$ .

**Пример 2.** Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  — различные числа. Тогда функции

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_k x}$$

линейно независимы на любом интервале  $I$ .

Доказательство проведем по индукции. Пусть  $k=1$ ; если  $c_1 e^{\lambda_1 x} \equiv 0$  при  $x \in I$ , то  $c_1 = 0$ . Пусть линейная независимость доказана для  $k-1$  экспонент; совершим переход по индукции от  $k-1$  к  $k$ . Допустим, что функции  $e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_{k-1} x}$  линейно зависимы, тогда

$$c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_k e^{\lambda_k x} \equiv 0, \quad x \in I,$$

где не все постоянные  $c_j$  равны нулю. Поделим это тождество на  $e^{\lambda_k x}$  и затем продифференцируем по  $x$ ; тогда получим тождество

$$c_1 \mu_1 e^{\mu_1 x} + \dots + c_{k-1} \mu_{k-1} e^{\mu_{k-1} x} \equiv 0, \quad x \in I,$$

где  $\mu_j = \lambda_j - \lambda_k$ . По предположению индукции имеем  $c_1 \mu_1 = 0, \dots, c_{k-1} \mu_{k-1} = 0$  и так как  $\mu_j \neq 0$ , то  $c_1 = 0, \dots, c_{k-1} = 0$ . Отсюда следует, что  $c_k e^{\lambda_k x} \equiv 0, x \in I$ , так что  $c_k = 0$ ; полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Пример линейно зависимых функций:  $y_1 = f(x), y_2 = cf(x)$ , где  $c$  — постоянная; тогда  $c y_1(x) - y_2(x) \equiv 0$ .

Определение 2. Вектор-функции  $y^1(x), \dots, y^k(x)$  называются линейно зависимыми на интервале  $I = (a, b)$ , если существуют постоянные  $c_1, \dots, c_k$ , не равные нулю одновременно и такие, что

$$c_1 y^1(x) + c_2 y^2(x) + \dots + c_k y^k(x) \equiv 0, \quad x \in I. \quad (3)$$

В противном случае эти вектор-функции называются линейно независимыми.

Пример 3. Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  — произвольные комплексные числа  $e_1, \dots, e_k$  — линейно независимые векторы с  $n \geq k$  компонентами. Тогда вектор-функции

$$y^1(x) = e^{\lambda_1 x} e_1, \dots, y^k(x) = e^{\lambda_k x} e_k$$

линейно независимы на любом интервале  $I$ .

Допустим противное, тогда

$$c_1 e^{\lambda_1 x} e_1 + \dots + c_k e^{\lambda_k x} e_k \equiv 0, \quad x \in I,$$

где не все постоянные  $c_j$  равны нулю. Фиксируем точку  $x_0 \in I$ ; тогда  $c_1 e^{\lambda_1 x_0} = 0, \dots, c_k e^{\lambda_k x_0} = 0$ , так как векторы  $e_1, \dots, e_k$  линейно независимы. Следовательно,  $c_1 = 0, \dots, c_k = 0$ .

**Пример 4.** Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  — различные комплексные числа,  $P_1(x), \dots, P_k(x)$  — многочлены степеней  $n_1, \dots, n_k$ , не равные нулю тождественно. Тогда функции

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} P_1(x), \dots, y_k(x) = e^{\lambda_k x} P_k(x)$$

линейно независимы на любом интервале  $I$ .

Доказательство проведем индукцией по  $k$ . При  $k=1$  утверждение очевидно; совершим переход по индукции от  $k-1$  к  $k$ . Допустим, что функции  $y_1(x), \dots, y_k(x)$  линейно зависимы, тогда

$$c_1 e^{\lambda_1 x} P_1(x) + \dots + c_k e^{\lambda_k x} P_k(x) \equiv 0, \quad x \in I,$$

где не все постоянные  $c_j$  равны нулю. Поделим это тождество на  $e^{\lambda_k x}$ , тогда

$$c_1 e^{\mu_1 x} P_1(x) + \dots + c_{k-1} e^{\mu_{k-1} x} P_{k-1}(x) + P_k(x) \equiv 0, \quad x \in I,$$

где  $\mu_j = \lambda_j - \lambda_k \neq 0$ . Продифференцировав это тождество по  $x$ ,  $n_k + 1$  раз, где  $n_k$  — степень многочлена  $P_k(x)$ , получим

$$c_1 (e^{\mu_1 x} P_1(x))^{(n_k+1)} + \dots + c_{k-1} (e^{\mu_{k-1} x} P_{k-1}(x))^{(n_k+1)} \equiv 0, \quad x \in I.$$

Пусть  $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ ,  $a_0 \neq 0$ ,  $\mu \neq 0$ . Тогда

$$(e^{\mu x} P(x))^{(m)} = \sum_{j=0}^m C_m^j (e^{\mu x})^{(j)} P^{(m-j)}(x) = e^{\mu x} Q_m(x).$$

Здесь  $Q_m(x)$  — многочлен степени  $m$ , с коэффициентом  $\mu^m a_0$  при старшей степени  $x^m$ . Следовательно, имеет место тождество

$$c_1 e^{\mu_1 x} Q_1(x) + \dots + c_{k-1} e^{\mu_{k-1} x} Q_{k-1}(x) \equiv 0, \quad x \in I,$$

где  $Q_j(x)$  — полиномы. По предположению индукции имеем

$$c_1 Q_1(x) \equiv 0, \dots, c_{k-1} Q_{k-1}(x) \equiv 0, \quad x \in I. \quad (4)$$

Пусть  $P_1(x) = a_{01} x^{n_1} + \dots + a_{n_1,1}$ , тогда коэффициент при старшей степени  $x^{n_1}$  многочлена  $Q_1(x)$  равен  $\mu_1^{n_1+1} a_{01}$ . Имеем из (4)  $c_1 \mu_1^{n_1+1} a_{01} = 0$ , так что  $c_1 a_{01} = 0$ . Допустим, что  $c_1 \neq 0$ ; тогда  $a_{01} = 0$ . Аналогично доказывается, что  $a_{11} = 0, \dots, a_{n_1,1} = 0$ , т. е.  $P_1(x) \equiv 0$ . Это противоречит условию  $P_1(x) \not\equiv 0$ , так что  $c_1 = 0$ . Аналогично получаем  $c_2 = 0, \dots, c_{k-1} = 0$ , и затем, из тождества  $c_k P_k(x) e^{\lambda_k x} \equiv 0, x \in I$ , находим, что  $c_k = 0$ . Следовательно, все числа  $c_j = 0$ ; полученное противоречие доказывает линейную независимость функций  $y_1(x), \dots, y_k(x)$ .

**2. Определитель Вронского.** Пусть  $y^1(x), y^2(x), \dots, y^n(x)$  — вектор-функции с  $n$  компонентами. Определитель

$$w(x) = \det(y^1(x), y^2(x), \dots, y^n(x)) \quad (5)$$

называется *определителем Вронского* (или *вронскианом*) набора вектор-функций  $\{\mathbf{y}^1(x), \dots, \mathbf{y}^n(x)\}$ .

Всюду в дальнейшем предполагается, что  $x \in I = (a, b)$  и что все рассматриваемые вектор-функции непрерывны при  $x \in I$ , и их линейная зависимость исследуется при  $x \in I$ .

*Лемма 1. Если вронскиан системы вектор-функций  $\mathbf{y}^1(x), \dots, \mathbf{y}^n(x)$  отличен от нуля хотя бы в одной точке  $x_0 \in I$ , то эти вектор-функции линейно независимы.*

*Доказательство.* Допустим, что вектор-функции линейно зависимы; тогда существуют постоянные  $c_1, \dots, \dots, c_n$ , не равные нулю одновременно и такие, что

$$c_1 \mathbf{y}^1(x) + c_2 \mathbf{y}^2(x) + \dots + c_n \mathbf{y}^n(x) \equiv \mathbf{0}, \quad x \in I.$$

В частности,

$$c_1 \mathbf{y}^1(x_0) + c_2 \mathbf{y}^2(x_0) + \dots + c_n \mathbf{y}^n(x_0) = \mathbf{0}. \quad (6)$$

Так как  $\omega(x_0) \neq 0$ , то векторы  $\mathbf{y}^1(x_0), \dots, \mathbf{y}^n(x_0)$  линейно независимы и потому все постоянные  $c_k$  равны нулю. Полученное противоречие доказывает лемму.

*Лемма 2. Если вектор-функции  $\mathbf{y}^1(x), \dots, \mathbf{y}^n(x)$  линейно зависимы, то их вронскиан тождественно равен нулю.*

*Доказательство* следует из того, что если столбцы определителя линейно зависимы, то определитель равен нулю.

Следующая лемма имеет важнейшее значение для линейной теории. Рассмотрим однородную линейную систему из  $n$  уравнений

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A(x)\mathbf{y} \quad (7)$$

с непрерывной при  $x \in I$  матрицей-функцией  $A(x)$ .

*Лемма 3. Пусть вектор-функции  $\mathbf{y}^1(x), \dots, \mathbf{y}^n(x)$  — решения системы (7). Если их вронскиан  $\omega(x)$  обращается в нуль хотя бы в одной точке  $x_0 \in I$ , то эти вектор-функции линейно зависимы.*

*Доказательство.* Так как  $\omega(x_0) = 0$ , то существуют постоянные  $c_1, \dots, c_n$ , не равные нулю одновременно и такие, что выполняется тождество (6). Рассмотрим вектор-функцию

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \mathbf{y}^1(x) + \dots + c_n \mathbf{y}^n(x), \quad (8)$$

которая есть решение системы (7) и  $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{0}$ , в силу (6). Вектор-функция  $\tilde{\mathbf{y}}(x) \equiv \mathbf{0}$  удовлетворяет системе (7) и имеет те же данные Коши, что и  $\mathbf{y}(x)$ , так как  $\tilde{\mathbf{y}}(x_0) = \mathbf{0}$ . По теореме единственности  $\mathbf{y}(x) \equiv \tilde{\mathbf{y}}(x)$ , так что  $\mathbf{y}(x) \equiv \mathbf{0}$ ,  $x \in I$ , и из (8) следует линейная зависимость вектор-функций  $\mathbf{y}^1(x), \dots, \mathbf{y}^n(x)$ .

*Замечание.* Для произвольных вектор-функций утверждение леммы 3 неверно. Например, вектор-функции

$$\mathbf{y}^1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}^2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix},$$

линейно независимы на любом интервале, поскольку линейно независимы их вторые компоненты 1,  $x$ ; вронскиан этих вектор-функций тождественно равен нулю.

#### § 4. Формула Лиувилля

Пусть  $Y(x)$  — квадратная матрица порядка  $n$  и  $\Delta(x)$  — ее определитель. Выведем формулу для  $\Delta'(x)$ .

*Лемма.* Если матрица  $Y(x)$  дифференцируема и невырождена в точке  $x = x_0$ , то в этой точке

$$\frac{\Delta'(x)}{\Delta(x)} = \text{Sp} \left( \frac{d}{dx} Y(x) Y^{-1}(x) \right). \quad (1)$$

*Доказательство.* Из формулы Тейлора следует, что

$$Y(x_0 + h) = Y(x_0) + h \frac{d}{dx} Y(x_0) + o(h) \quad (h \rightarrow 0).$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \Delta(x_0 + h) &= \det \left[ Y(x_0) + h \frac{d}{dx} Y(x_0) + o(h) \right] = \\ &= \Delta(x_0) \det [I + hB + o(h)], \end{aligned}$$

где  $B = \frac{d}{dx} Y(x_0) \cdot Y^{-1}(x_0)$ . Далее,

$$\det [I + hB + o(h)] = 1 + h \text{Sp} B + o(h) \quad (h \rightarrow 0). \quad (2)$$

Действительно, этот определитель имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 + hb_{11} + o(h) & hb_{12} + o(h) & \dots & hb_{1n} + o(h) \\ hb_{21} + o(h) & 1 + hb_{22} + o(h) & \dots & hb_{2n} + o(h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ hb_{n1} + o(h) & hb_{n2} + o(h) & \dots & 1 + hb_{nn} + o(h) \end{vmatrix}.$$

Произведение любых двух элементов, не находящихся на главной диагонали, имеет порядок  $O(h^2)$ , так что члены порядка  $h$  могут содержаться только в произведении диагональных элементов, которое равно

$$(1 + hb_{11} + o(h))(1 + hb_{22} + o(h)) \dots (1 + hb_{nn} + o(h)) = \\ = 1 + h \sum_{j=1}^n b_{jj} + o(h) = 1 + h \operatorname{Sp} B + o(h).$$

Тем самым (2) доказано, так что

$$\frac{\Delta(x_0 + h) - \Delta(x_0)}{h} = \Delta(x_0) (\operatorname{Sp} B + o(1)).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при  $h \rightarrow 0$ , получаем (1).

Рассмотрим линейную однородную систему из  $n$  уравнений

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y \quad (3)$$

с непрерывной на некотором отрезке  $I$  матрицей-функцией  $A(x)$ .

**Теорема.** Пусть  $y^1(x), \dots, y^n(x)$  — решения системы (3) и  $\omega(x)$  — их вронскиан. Тогда справедлива формула Лиувилля

$$\omega(x) = \omega(x_0) \exp \left[ \int_{x_0}^x \operatorname{Sp} A(t) dt \right]. \quad (4)$$

**Доказательство.** Если решения  $y^1(x), \dots, y^n(x)$  линейно зависимы, то  $\omega(x) \equiv 0$  и формула (4) очевидна. Пусть эти решения линейно независимы, и  $Y(x) = (y^1(x), \dots, y^n(x))$ , т. е. столбцы матрицы-функции  $Y(x)$  — вектор-функции  $y^j(x)$ . Эта матрица удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{dY}{dx} = A(x)Y, \quad (5)$$

так как ее столбцы — решения системы (3). Имеем из (1), (4)

$$\frac{\omega'(x)}{\omega(x)} = \operatorname{Sp} (A(x)Y(x)Y^{-1}(x)) = \operatorname{Sp} A(x).$$

Интегрируя это уравнение относительно  $\omega(x)$ , получаем формулу Лиувилля.



## § 5. Фундаментальные системы решений

Рассмотрим однородную линейную алгебраическую систему из  $k$  уравнений

$$A\mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

где  $A$  есть  $(m \times k)$ -матрица  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k)$ . Из линейной алгебры известно, что существует фундаментальная система решений  $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^r$  системы (1). Эти решения линейно независимы и всякое решение системы (1) имеет вид  $\mathbf{y} = c_1\mathbf{y}^1 + \dots + c_r\mathbf{y}^r$ , где  $c_1, \dots, c_r$  — произвольные постоянные. Аналогичные утверждения справедливы для линейной однородной системы из  $n$  дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A(x)\mathbf{y}. \quad (2)$$

*Предположение.* Матрица-функция  $A(x)$  непрерывна на отрезке  $I$ . Всюду в дальнейшем предполагается, что  $x \in I$ .

*Определение.* Фундаментальной системой решений системы (2) называется набор из  $n$  линейно независимых решений  $\mathbf{y}^1(x), \dots, \mathbf{y}^n(x)$ .

*Теорема 1.* Фундаментальные системы решений существуют.

*Доказательство.* Пусть  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  — линейно независимые векторы и  $\mathbf{y}^1(x), \dots, \mathbf{y}^n(x)$  — решения системы (2) с данными Коши

$$\mathbf{y}^1(x_0) = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{y}^2(x_0) = \mathbf{e}_2, \quad \dots, \quad \mathbf{y}^n(x_0) = \mathbf{e}_n.$$

Вронскиан  $\omega(x)$  этих решений при  $x = x_0$  равен  $\omega(x_0) = \det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \neq 0$ , так как векторы  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  линейно независимы. В силу леммы 1 из § 3 решения  $\mathbf{y}^1(x), \dots, \mathbf{y}^n(x)$  линейно независимых, их  $n$  штук, а потому они составляют фундаментальную систему решений.

*Теорема 2.* Пусть  $\mathbf{y}^1(x), \dots, \mathbf{y}^n(x)$  — фундаментальная система решений системы (2). Тогда всякое решение системы (2) имеет вид

$$\mathbf{y}(x) = c_1\mathbf{y}^1(x) + c_2\mathbf{y}^2(x) + \dots + c_n\mathbf{y}^n(x), \quad (3)$$

где  $c_1, c_2, \dots, c_n$  — произвольные постоянные.

*Доказательство.* Пусть  $x_0 \in I$ , тогда векторы  $\mathbf{y}^1(x_0), \mathbf{y}^2(x_0), \dots, \mathbf{y}^n(x_0)$  линейно независимы, так как

составленный из них определитель отличен от нуля (§ 3, лемма 3). Поэтому существуют такие постоянные  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , что

$$\mathbf{y}(x_0) = c_1 \mathbf{y}^1(x_0) + c_2 \mathbf{y}^2(x_0) + \dots + c_n \mathbf{y}^n(x_0).$$

Вектор-функция

$$\tilde{\mathbf{y}}(x) = c_1 \mathbf{y}^1(x) + c_2 \mathbf{y}^2(x) + \dots + c_n \mathbf{y}^n(x) \quad (4)$$

есть решение системы (2), и  $\tilde{\mathbf{y}}(x_0) = \mathbf{y}(x_0)$ , по построению. По теореме единственности  $\tilde{\mathbf{y}}(x) \equiv \mathbf{y}(x)$ , и из (4) следует (3).

Эта теорема — *фундаментальный результат теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений*. Формула (3) показывает, что для того чтобы найти все решения однородной системы (2), достаточно найти только  $n$  решений (линейно независимых). Для нелинейных уравнений все значительно сложнее. Например, если мы знаем 100 решений скалярного нелинейного уравнения первого порядка  $y' = f(x, y)$ , то нет никакого рецепта, который позволил бы найти еще одно решение по уже известным.

Придадим другой вид формуле (3). Матрица

$$Y(x) = (\mathbf{y}^1(x), \mathbf{y}^2(x), \dots, \mathbf{y}^n(x)),$$

столбцы которой — фундаментальная система решений, называется *фундаментальной матрицей* системы (1). Как уже отмечалось в § 4, фундаментальная матрица удовлетворяет матричному уравнению

$$\frac{dY(x)}{dx} = A(x)Y(x) \quad (5)$$

и невырождена при всех  $x \in I$ . Из формулы (3) следует, что всякое решение системы (2) имеет вид

$$\mathbf{y}(x) = Y(x)\mathbf{c},$$

где  $\mathbf{c}$  — произвольный постоянный вектор.

**Теорема 3.** *Всякое решение  $Y(x)$  матричного уравнения (5) имеет вид*

$$Y(x) = \tilde{Y}(x)C. \quad (6)$$

*Здесь  $\tilde{Y}(x)$  — фундаментальная матрица системы (1),  $C$  — постоянная матрица.*

**Доказательство.** Будем искать решение уравнения (3) в виде  $Y(x) = \tilde{Y}(x)C(x)$ . Подставляя в (3), получаем

$$\frac{d}{dx} \tilde{Y}(x)C(x) + \tilde{Y}(x) \frac{d}{dx} C(x) = A(x) \tilde{Y}(x)C(x),$$

и так как  $\tilde{Y}(x)$  — решение уравнения (3), то

$$\tilde{Y}(x) \frac{d}{dx} C(x) = 0.$$

Умножая это равенство слева на  $\tilde{Y}^{-1}(x)$ , получаем, что  $\frac{dC(x)}{dx} = 0$ , т. е.  $C(x)$  — постоянная матрица.

*Следствие. Любые две фундаментальные матрицы системы (1) связаны соотношением (6), где  $C$  — постоянная невырожденная матрица.*

## § 6. Неоднородные линейные системы с переменными коэффициентами

Рассмотрим линейную систему из  $n$  уравнений

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x). \quad (1)$$

Матрица-функция  $A(x)$  и вектор-функция  $f(x)$  непрерывны на интервале  $I$ .

*Теорема. Система (1) имеет частное решение*

$$y(x) = Y(x) \int_{x_0}^x Y^{-1}(t) f(t) dt. \quad (2)$$

*Здесь  $Y(t)$  — фундаментальная матрица однородной системы*

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y. \quad (3)$$

**Доказательство.** Применим метод вариации постоянных (ср. § 2 гл. 1, пример 4), т. е. будем искать решение системы (1) в виде

$$y(x) = Y(x)c(x), \quad (4)$$

где  $c(x)$  — неизвестная вектор-функция. Подставляя в (1) и учитывая, что  $\frac{dY}{dx} = A(x)Y$ , получаем

$$A(x)Y(x)c(x) + Y(x)\frac{dc(x)}{dx} = A(x)Y(x)c(x) + f(x),$$

откуда находим

$$\frac{dc(x)}{dx} = Y^{-1}(x)f(x).$$

Так как  $Y(x)$  — фундаментальная матрица системы (3), то ее определитель нигде не обращается в нуль и потому матрица-функция  $Y^{-1}(x)$  существует и непрерывна при  $x \in I$ . Интегрируя уравнение для  $c(x)$ , находим частное решение

$$c(x) = \int_{x_0}^x Y^{-1}(t)f(t) dt.$$

Подставив это выражение в (4), получим (1).

**З а м е ч а н и е.** В формуле (1) можно каждую компоненту вектор-функции  $Y^{-1}(t)f(t)$  интегрировать по своему интервалу, т. е.  $j$ -ю компоненту интегрировать по интервалу  $(x_j, x)$ . Этот очевидный факт играет существенную роль в асимптотической теории обыкновенных дифференциальных уравнений [11].

Всякое решение неоднородной системы (1) есть сумма ее частного решения и общего решения однородной системы. Поэтому, если известна фундаментальная система решений однородной системы, то отыскание всех решений неоднородной системы сводится к квадратурам — см. (1). В частности, решение задачи Коши

$$y(x_0) = y^0$$

для системы (1) дается формулой

$$y(x) = Y(x)Y^{-1}(x_0)y^0 + Y(x)\int_{x_0}^x Y^{-1}(t)f(t) dt. \quad (5)$$

## § 7. Линейные дифференциальные уравнения $n$ -го порядка

**1. Уравнения  $n$ -го порядка.** Рассмотрим неоднородное скалярное уравнение  $n$ -го порядка

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

и соответствующее однородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0. \quad (2)$$

Предположение. Коэффициенты уравнения  $a_1(x), \dots, a_n(x)$  и правая часть  $f(x)$  непрерывны на отрезке  $I$ .

Перенесем на это уравнение все результаты §§ 4—6. Определителем Вронского (или вронскианом) системы функций  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  называется определитель

$$\omega(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \quad (3)$$

1°. Если  $\omega(x_0) \neq 0$ , то функции  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  линейно независимы.

Допустим противное; тогда существуют постоянные  $c_1, \dots, c_n$ , не равные нулю одновременно и такие, что

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) \equiv 0. \quad (4)$$

Дифференцируя это тождество, получаем

$$\begin{aligned} c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + \dots + c_n y_n'(x) &\equiv 0, \\ \dots & \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x) + c_2 y_2^{(n-1)}(x) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x) &\equiv 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Следовательно, столбцы вронскиана  $\omega(x)$  линейно зависимы и потому  $\omega(x) \equiv 0$ . Это противоречит предположению  $\omega(x_0) \neq 0$ .

2°. Пусть  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  — решения однородного уравнения (2). Если их вронскиан обращается в нуль хотя бы в одной точке, то эти функции линейно зависимы.

Пусть  $\omega(x_0) = 0$ , тогда столбцы вронскиана линейно зависимы, так что

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) &= 0, \\ \dots & \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) &= 0, \end{aligned}$$

где числа  $c_1, c_2, \dots, c_n$  не все равны нулю. Функция

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

есть решение уравнения (2) с данными Коши

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

По теореме единственности  $y(x) \equiv 0$  и потому решения  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  линейно зависимы.

Сведем уравнение (2) к эквивалентной системе линейных уравнений точно так же, как и в § 1, п. 3:

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y,$$

$$y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix},$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & -a_{n-2}(x) & \dots & -a_1(x) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

3°. Пусть  $y^1(x), \dots, y^n(x)$  — вектор-функции с компонентами  $(y_j(x), y'_j(x), \dots, y_j^{(n-1)}(x)), 1 \leq j \leq n$ . Тогда этот набор вектор-функций и набор функций  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  одновременно линейно зависимы или линейно независимы.

Если функции  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  линейно зависимы, то выполняется тождество (4), где не все постоянные  $c_j$  равны нулю. Дифференцируя это тождество по  $x$ , получаем (5), и в сочетании с (4) это показывает, что вектор-функции  $y^1(x), \dots, y^n(x)$  линейно зависимы. Если вектор-функции  $y^1(x), \dots, y^n(x)$  линейно зависимы, то

$$c_1 y^1(x) + \dots + c_n y^n(x) \equiv 0,$$

где не все числа  $c_k$  равны нулю. Выписывая первую компоненту в этом тождестве, получаем (4), т. е. функции  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  линейно зависимы.

Итак, линейная зависимость набора функций (вектор-функций) влечет за собой линейную зависимость набора вектор-функций (функций). Переходя в этом утверждении к отрицанию, получаем то же относительно линейной независимости.

Фундаментальной системой решений уравнения (2) называется набор из  $n$  линейно независимых решений.

4°. Фундаментальные системы решений уравнения (2) существуют.

Пусть  $y^1(x), \dots, y^n(x)$  — фундаментальная система решений системы (4). Так как эти вектор-функции линейно

независимы, то линейно независимы их первые компоненты — функции  $y_1(x), \dots, y_n(x)$ , в силу  $3^\circ$ , и потому они образуют фундаментальную систему решений уравнения (2).

5°. Пусть  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  — фундаментальная система решений уравнения (2). Тогда всякое решение этого уравнения имеет вид

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x), \quad (7)$$

где  $c_1, c_2, \dots, c_n$  — произвольные постоянные.

По каждой функции  $y_j(x)$  построим вектор-функцию  $y^j(x)$ , по формуле (6). Вектор-функции  $y^1(x), y^2(x), \dots, y^n(x)$  линейно независимы, в силу  $3^\circ$ , и потому образуют фундаментальную систему решений системы (6). Поэтому всякое решение этой системы имеет вид (§ 5, теорема 2)

$$y(x) = c_1 y^1(x) + c_2 y^2(x) + \dots + c_n y^n(x).$$

Приравнивая в этом тождестве первые компоненты, получаем (7).

6°. Пусть  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  — решения уравнения (2) и  $w(x)$  — их вронскиан. Справедлива формула Лиувилля:

$$w(x) = w(x_0) \exp \left\{ - \int_{x_0}^x a_1(t) dt \right\}. \quad (8)$$

Действительно, если  $A(x)$  — матрица (6), то  $\text{Sp } A(x) = -a_1(x)$  и из формулы Лиувилля (§ 4) следует (8).

7°. Построим частное решение неоднородного уравнения (1). Введем матрицу-функцию:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix},$$

которая является фундаментальной матрицей системы (6), и вектор-функцию  $f(x) = (0, 0, \dots, 0, f(x))$ . Уравнение (1) эквивалентно системе

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x).$$

Ее частное решение дается формулой (1), § 6, так что частное решение уравнения (1) можно взять в виде

$$y(x) = \left[ Y(x) \int_{x_0}^x Y^{-1}(t) f(t) dt \right]_1. \quad (9)$$

Индекс 1 означает, что берется первая компонента этой вектор-функции.

**2. Уравнения второго порядка.** Рассмотрим уравнение

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0. \quad (10)$$

Если  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  — решения этого уравнения, то их вронскиан равен

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

и формула Лиувилля принимает вид

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = C \exp \left\{ - \int_{x_0}^x a(t) dt \right\}, \quad (11)$$

где  $C$  — постоянная. В частности, вронскиан решений уравнения

$$y'' + q(x)y = 0 \quad (12)$$

есть константа:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \equiv \text{const}. \quad (13)$$

Если известно решение  $y_1(x)$  уравнения (12), не равное тождественно нулю, то второе линейно независимое решение может быть найдено с помощью квадратуры. Действительно, в силу (13) имеем

$$y_2'(x) - \frac{y_2(x)}{y_1(x)} y_1'(x) = \frac{C}{y_1(x)},$$

так что для  $y_2(x)$  мы получили линейное уравнение первого порядка. Интегрируя это уравнение (гл. 1, § 2, пример 4), находим частное решение

$$y_2(x) = y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{dt}{y_1^2(t)}. \quad (14)$$

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x) \quad (15)$$



и найдем его частное решение в предположении, что известна фундаментальная система решений однородного уравнения (10). Имеем

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}, \quad Y^{-1}(x) = \frac{1}{\omega(x)} \begin{pmatrix} y_2'(x) & -y_2(x) \\ -y_1'(x) & y_1(x) \end{pmatrix},$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix},$$

так что

$$[Y(x) Y^{-1}(t) f(t)]_1 = \frac{f(t)}{\omega(t)} \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}.$$

Подставляя в (9), находим частное решение

$$y(x) = \int_{x_0}^x \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix} \frac{f(t)}{\omega(t)} dt. \quad (16)$$

Если нет под рукой формулы (16), то частное решение уравнения (15) можно найти с помощью *метода вариации постоянных*. Будем искать решение в виде

$$y = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x), \quad (17)$$

где  $c_1(x)$ ,  $c_2(x)$  — неизвестные функции. Имеем

$$y' = c_1(x) y_1'(x) + c_2(x) y_2'(x) + (c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x)).$$

Функции  $c_1(x)$ ,  $c_2(x)$  выберем так, чтобы выражение в круглых скобках обратилось в нуль. Подставляя  $y(x)$  в уравнение (15), получаем

$$[c_1(x) (y_1''(x) + a(x) y_1'(x) + b(x) y_1(x)) + c_2(x) (y_2''(x) + a(x) y_2'(x) + b(x) y_2(x))] + c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) = f(x).$$

Выражение в квадратных скобках равно нулю, так как  $y_1$ ,  $y_2$  — решения уравнения (10), и потому для  $c_1'(x)$ ,  $c_2'(x)$  получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) &= 0, \\ c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) &= f(x). \end{aligned}$$

Решив систему, получим

$$c_1'(x) = -\omega^{-1}(x) f(x) y_2(x), \quad c_2'(x) = \omega^{-1}(x) f(x) y_1(x).$$

После интегрирования и подстановки в (17) снова получим формулу (16).

## § 8. Понижение порядка линейных и нелинейных дифференциальных уравнений

1°. Если известно нетривиальное решение однородного линейного дифференциального уравнения, то его порядок можно понизить на единицу.

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = 0 \quad (1)$$

и пусть  $y_1(x) \not\equiv 0$  — его частное решение. Сделаем подстановку

$$y(x) = y_1(x) z(x), \quad (2)$$

где  $z(x)$  — новая неизвестная функция. Мы рассмотрим интервал, на котором  $y_1(x) \neq 0$ . После подстановки получится однородное линейное дифференциальное уравнение порядка  $n$  относительно неизвестной функции  $z$ . Вычислим коэффициент при  $z$ . Так как

$$y^{(k)}(x) = (y_1(x) z(x))^{(k)} = y_1^{(k)}(x) z(x) + (\text{производные от } z(x)),$$

то искомый коэффициент равен

$$y^{(n)} + a_1(x) y_1^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y_1 = 0.$$

Следовательно, уравнение для  $z(x)$  имеет вид

$$b_0(x) z^{(n)} + \dots + b_{n-1}(x) z' = 0$$

и подстановка  $z' = \omega$  превращает это уравнение в уравнение порядка  $n - 1$ .

Если  $n = 2$  и частное решение известно, то уравнение (1) интегрируется, так как оно сводится к линейному дифференциальному уравнению первого порядка.

2°. Если известно частное решение однородной линейной системы

$$\frac{dy}{dx} = A(x) y$$

из  $n$  уравнений, то ее можно свести к системе из  $(n - 1)$ -го уравнения. Пусть  $y^0(x)$  — это решение и, для определен-

ности  $y_1^0(x) \neq 0$ . Положим

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_1^0(x) z_1(x), \\ y_2(x) &= y_1^0(x) z_1(x) + z_2(x), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ y_n(x) &= y_n^0(x) z_1(x) + z_n(x), \end{aligned}$$

тогда получим систему

$$\frac{dz}{dx} = B(x)z.$$

Эта система имеет решение  $z_1(x) \equiv 1$ ,  $z_2(x) = \dots = z_n(x) \equiv 0$ , а потому первый столбец матрицы  $B(x)$  тождественно равен нулю. Поэтому система имеет вид

$$z_1' = 0, \quad z_2' = \sum_{k=2}^n b_{jk}(x) z_k, \quad \dots, \quad z_n' = \sum_{k=2}^n b_{nk}(x) z_k,$$

т. е. мы получили систему из  $(n-1)$ -го уравнения.

3°. Однородное линейное дифференциальное уравнение порядка  $n$  можно свести к уравнению порядка  $n-1$  (но уже нелинейному) с помощью подстановки

$$\frac{y'}{y} = w. \quad (3)$$

Имеем

$$\begin{aligned} w' &= \frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2, \quad y'' = (w' + w^2)y, \\ y''' &= [(w' + w^2)w + (w' + w^2)']y, \dots, \end{aligned}$$

так что все производные имеют вид  $y^{(k)} = P_k(w, w', \dots, w^{(k-1)})y$ , где  $P_k$  — многочлен от своих аргументов. Подставляя в (1), получаем уравнение  $(n-1)$ -го порядка

$$f(x, w, w', \dots, w^{(n-1)}) = 0,$$

где  $f$  — многочлен от  $w, w', \dots, w^{(n-1)}$  с коэффициентами, зависящими от  $x$ . В частности, линейное уравнение второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (4)$$

с помощью подстановки (3) сводится к уравнению Рикатти:

$$w' + p(x)w + w^2 + q(x) = 0. \quad (5)$$

4°. Если уравнение не содержит либо  $y$ , либо  $x$ , то его порядок можно понизить на единицу. Рассмотрим уравнение

$$f(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (6)$$

Введя новую неизвестную функцию  $p = y'$ , получим уравнение порядка  $n - 1$ :

$$f(x, p, p', \dots, p^{(n-1)}) = 0.$$

Пусть уравнение не содержит явно  $x$ :

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (7)$$

Снова введем неизвестную функцию  $p = y'$ . Имеем

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = p \frac{dp}{dy}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = p \frac{d}{dy} \left( p \frac{dp}{dy} \right)$$

и т. д. Подставляя в (7), получим уравнение

$$f\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0$$

порядка  $n - 1$ .

5°. Однородные уравнения. Рассмотрим уравнение

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (8)$$

однородное относительно  $y, y', \dots, y^{(n)}$ , т. е.

$$f(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^\alpha f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \quad (9)$$

при всех  $t > 0$ . С помощью подстановки

$$y = e^z$$

порядок этого уравнения можно понизить на единицу. Действительно,

$$y' = e^z z', \quad y'' = e^z (z'^2 + z''), \dots,$$

так что  $y^{(k)} = e^z P_k(z', \dots, z^{(k)})$ , где  $P_k$  — многочлен от своих аргументов. После подстановки в уравнение (8) можно вынести за знак функции  $f$  множитель  $e^z$  и сократить на него. Полученное уравнение не содержит функции  $z$  и с помощью подстановки  $z' = \omega$  приводится к уравнению порядка  $n - 1$  — см. 4°.

В частности, уравнение второго порядка, вида

$$P(y, y', y'') = 0, \quad (10)$$

где  $P$  — однородный многочлен от своих аргументов, после этих подстановок приводится к виду

$$P(1, \omega, \omega^2 + \omega') = 0$$

и интегрируется явно, если  $\omega'$  можно выразить явно:  $\omega' = \varphi(\omega)$ . Отметим один класс частных решений уравнения (10): это решения вида  $y = Ce^{\lambda x}$ . Здесь  $C$  — произвольная постоянная, а  $\lambda$  — корень уравнения  $P(1, \lambda, \lambda^2) = 0$ .

Пусть уравнение (8) однородно относительно  $x$  и  $dx$ , т. е.

$$f\left(\lambda x, \lambda^{-1} \frac{dy}{dx}, \dots, \lambda^{-n} \frac{d^ny}{dx^n}\right) = \lambda^\alpha f\left(x, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right). \quad (11)$$

Сделаем подстановку  $x = e^t$ , тогда

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= e^{-t} \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t} \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} - 1 \right) y, \dots \\ \dots, \quad \frac{d^ky}{dx^k} &= e^{-kt} \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} - 1 \right) \dots \left( \frac{d}{dt} - k + 1 \right) y. \end{aligned}$$

Подставляя в уравнение (8) и учитывая (11), получаем уравнение, не содержащее независимой переменной  $t$ , порядок которого можно понизить на единицу — см. 4°.

Пусть уравнение (8) однородно относительно  $x$ ,  $y$  и  $dx$ ,  $dy$ ,  $d^2y$ , ..., т. е.

$$f(\lambda x, \lambda y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = \lambda^\alpha f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}). \quad (12)$$

Введем новую независимую переменную и новую неизвестную функцию:

$$x = e^t, \quad y = e^t z.$$

Тогда получим

$$\frac{d^ky}{dx^k} = e^{-(k-1)t} \left( \frac{d}{dt} + 1 \right) \frac{d}{dt} \dots \left( \frac{d}{dt} - k + 2 \right) z$$

и после подстановки в (8) получим уравнение, не содержащее независимой переменной; далее см. 4°.

Рассмотрим уравнение (8) такое, что

$$f(\lambda x, \lambda^n y, \lambda^{n-1} y', \dots, y^{(n)}) = \lambda^\alpha f(x, y, y', \dots, y^{(n)}). \quad (13)$$

Введем новую независимую переменную и новую неизвестную функцию:

$$x = e^t, \quad y = ze^{nt},$$

тогда получим

$$\frac{d^k y}{dx^k} = e^{(n-k)t} \left( \frac{d}{dt} + n \right) \left( \frac{d}{dt} + n - 1 \right) \dots \left( \frac{d}{dt} + n - k + 1 \right) z.$$

Подставляя в (8) и используя (13), получаем уравнение, не содержащее независимой переменной  $t$ , далее см. 4°.

## § 9. Нули решений однородных линейных уравнений второго порядка

1. Приведение уравнения к двучленному виду. Рассмотрим уравнение второго порядка

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \quad (1)$$

на отрезке  $I = [\alpha, \beta]$ . Коэффициенты  $a(x)$ ,  $b(x)$  вещественны и непрерывно дифференцируемы при  $x \in I$ .

Уравнение (1) имеет очевидное решение  $y(x) \equiv 0$ ; будем называть его *тривиальным*. Нас интересуют нули вещественных нетривиальных решений уравнения (1). Это уравнение можно привести к виду, не содержащему первой производной, с помощью подстановки

$$y(x) = \varphi(x)z(x), \quad (2)$$

где  $z(x)$  — новая неизвестная функция. Подставляя (2) в уравнение (1), получаем

$$\varphi z'' + (2\varphi' + a\varphi)z' + (\varphi'' + a\varphi' + b\varphi)z = 0,$$

и если  $2\varphi' + a\varphi = 0$ , то коэффициент при  $z'$  обратится в нуль. Итак, подстановка

$$y(x) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_{x_0}^x a(t) dt \right] z(x)$$

приводит уравнение (1) к *двучленному виду*:

$$z'' + \left[ b(x) - \frac{a^2(x)}{4} - \frac{a'(x)}{2} \right] z = 0.$$

Функции  $y(x)$  и  $z(x)$  имеют одни и те же нули.

Будем рассматривать уравнения вида

$$y'' + q(x)y = 0, \quad (3)$$

функция  $q(x)$  непрерывна и вещественна на отрезке  $I$ .

**Лемма.** *Всякое нетривиальное решение уравнения (3) может иметь на отрезке  $I$  не более конечного числа нулей.*

**Доказательство.** Допустим, что решение  $y(x) \not\equiv 0$  имеет бесконечно много нулей  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  на отрезке  $I$ . По лемме Больцано — Вейерштрасса последовательность  $\{x_n\}$  имеет предельную точку  $x^* \in I$ . Не ограничивая общности, можно считать, что  $x_n \rightarrow x^*$  при  $n \rightarrow \infty$ . Так как  $y(x_n) = 0$ , то  $y(x^*) = 0$ , по непрерывности. По теореме Ролля на интервале  $(x_n, x_{n+1})$  имеется точка  $x'_n$  такая, что  $y'(x'_n) = 0$ . Так как  $x'_n \rightarrow x^*$ , то  $y'(x^*) = 0$ . Итак,  $y(x^*) = 0, y'(x^*) = 0$  и по теореме единственности  $y(x) \equiv 0$ ; это противоречит предположению  $y(x) \not\equiv 0$ .

**2. Теорема сравнения.** Рассмотрим уравнение (3), где  $q$  — постоянная.

1°. Пусть  $q < 0$ , тогда всякое решение имеет вид

$$y = C_1 e^{\sqrt{|q|}x} + C_2 e^{-\sqrt{|q|}x}.$$

Это решение может иметь не более одного нуля.

2°. Если  $q > 0$ , то всякое решение имеет вид

$$y = C_1 \cos \sqrt{q}x + C_2 \sin \sqrt{q}x.$$

Любое решение имеет бесконечно много нулей, причем расстояние между соседними нулями равно  $\pi/\sqrt{q}$  и оно тем меньше, чем больше коэффициент  $q$ .

На основании примера можно сделать следующий эвристический вывод: *решение уравнения (3) колеблется тем чаще, чем больше  $q(x)$ .*

Этот вывод правилен, как показывает

**Теорема сравнения.** *Рассмотрим два уравнения*

$$\begin{aligned} y_1'' + q_1(x)y_1 &= 0, \\ y_2'' + q_2(x)y_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

*с непрерывными и вещественными на отрезке  $I = [a, b]$  коэффициентами. Если*

$$q_1(x) \leq q_2(x), \quad x \in I, \quad (5)$$

*то между двумя соседними нулями любого нетривиального решения  $y_1(x)$  лежит по крайней мере один нуль любого решения  $y_2(x)$ .*

**Доказательство.** Пусть  $x_1, x_2$  — соседние нули решения  $y_1(x)$ ; можно считать, что  $y_1(x) > 0$  при  $x_1 < x < x_2$ . Допустим, что  $y_2(x)$  не обращается в нуль на отрезке  $[x_1, x_2]$ ; тогда можно считать, что  $y_2(x) > 0$  на

этом отрезке. Умножим первое из уравнений (4) на  $y_2(x)$ , второе на  $y_1(x)$  и вычтем из первого уравнения второе. Получим

$$y_1''(x)y_2(x) - y_2''(x)y_1(x) + (q_1(x) - q_2(x))y_1(x)y_2(x) = 0.$$

Проинтегрируем это тождество от  $x_1$  до  $x_2$ . Так как

$$y_1''y_2 - y_2''y_1 = (y_1'y_2' - y_1y_2'')$$

и поскольку  $y_1(x_1) = y_2(x_2) = 0$ , то получим

$$[y_1'(x_2)y_2(x_2) - y_1'(x_1)y_2(x_1)] + \int_{x_1}^{x_2} [q_1(x) - q_2(x)]y_1(x)y_2(x) dx = 0. \quad (6)$$

Так как  $y_1(x_1) = y_1(x_2) = 0$  и  $y_1(x) > 0$  при  $x_1 < x < x_2$ , то  $y_1'(x_1) > 0$ ,  $y_1'(x_2) < 0$ , так что выражение в квадратных скобках отрицательно (напомним, что  $y_2(x) > 0$  на отрезке  $[x_1, x_2]$ ). Поскольку  $y_1(x) \geq 0$ ,  $y_2(x) > 0$  на отрезке  $[x_1, x_2]$  и  $q_1(x) - q_2(x) \leq 0$ , в силу условия (5), то интеграл в формуле (6) неположителен. Следовательно, левая часть равенства (6) отрицательна; полученное противоречие доказывает теорему.

*Следствие 1. Если  $q(x) \leq 0$ , то любое решение уравнения (3) может иметь не более одного нуля.*

Применим теорему сравнения, полагая  $q_1(x) = q(x)$ ,  $q_2(x) = 0$ . Допустим, что решение  $y_1(x)$  имеет два нуля  $x_1, x_2$ . Тогда на отрезке  $[x_1, x_2]$  обязано обратиться в нуль любое решение уравнения  $y_2''(x) = 0$  — это неверно, например, для решения  $y_2(x) \equiv 1$ .

*Следствие 2. Нули линейно независимых решений уравнения (3) перемежаются.*

Это означает, что строго между любыми двумя соседними нулями решения  $y_1(x)$  лежит ровно один нуль решения  $y_2(x)$ .

*Доказательство.* Пусть  $y_1(x), y_2(x)$  — линейно независимые решения уравнения (3). Они не могут иметь общих нулей: если  $y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0$ , то вронскиан этих решений равен нулю в точке  $x_0$ , что противоречит их линейной независимости. Пусть  $x_1, x_2$  — соседние нули решения  $y_1(x)$ . В качестве уравнения сравнения для (3) возьмем его же, т. е.  $q_1(x) \equiv q_2(x) \equiv q(x)$  в (4). По теореме сравнения между  $x_1$  и  $x_2$  лежит нуль  $x_3$  решения



$y_2(x)$ . Если бы решение  $y_2(x)$  имело еще один нуль  $x_4 \in \in (x_1, x_2)$ , то, по доказанному выше, решение  $y_2(x)$  имело бы нуль, лежащий между  $x_3$  и  $x_4$ . Это противоречит тому, что  $x_1, x_2$  — соседние нули.

## § 10. Элементы аналитической теории дифференциальных уравнений. Уравнение Бесселя

**1. Уравнения с аналитическими коэффициентами.** Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (1)$$

коэффициенты которого — степенные ряды:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x-a)^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x-a)^n.$$

Напомним основные сведения о степенных рядах [26, 33]. Пусть ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x-a)^n \quad (2)$$

сходится хотя бы в одной точке  $b \neq a$ . Тогда существует число  $R > 0$  такое, что ряд (2) сходится при  $|x-a| < R$  и расходится при  $|x-a| > R$  (если  $R = \infty$ , то ряд сходится при всех  $x$ ). Число  $R$  называется *радиусом сходимости* степенного ряда. Здесь  $x$  может принимать как вещественные, так и комплексные значения, так что область  $|x-a| < R$  при  $R$  конечном есть круг в комплексной плоскости  $x$  радиуса,  $R$  с центром в точке  $a$ . Этот круг называется *кругом сходимости* степенного ряда (2).

Функция  $f(x)$  называется *аналитической* в круге  $|x-a| < R$ , если она разлагается в степенной ряд (2), сходящийся в этом круге.

**Теорема единственности.** Если степенные ряды  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$  сходятся в круге  $|x-a| < R$  и

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n,$$

в этом круге, то  $a_n = b_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

Если  $R$  — радиус сходимости степенного ряда (2), то этот ряд сходится абсолютно и равномерно в любом меньшем замкнутом круге  $|x - a| \leq R' < R$ . Степенной ряд можно почленно дифференцировать любое число раз, и все продифференцированные ряды имеют тот же радиус сходимости.

**Теорема 1.** Пусть коэффициенты  $p(x)$ ,  $q(x)$  уравнения (1) аналитичны в круге  $|x - a| < R$ . Тогда всякое решение  $y(x)$  уравнения (1) аналитично в этом круге, т. е. разлагается в степенной ряд

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n (x - a)^n, \quad (3)$$

сходящийся в круге  $|x - a| < R$ .

Доказательство этой теоремы см. в [18]. Эта теорема справедлива для линейного дифференциального уравнения любого порядка  $n$ :

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = 0.$$

Если коэффициенты  $a_1(x), \dots, a_n(x)$  аналитичны в круге  $|x - a| < R$ , то все решения этого уравнения аналитичны в этом круге.

Вернемся к уравнению (1). Теорема 1 ценна тем, что дает возможность проинтегрировать уравнение (1), т. е. построить решения этого уравнения в виде степенных рядов. Пусть  $a = 0$ , для простоты. Будем искать решение в виде ряда по степеням  $x$  с неопределенными коэффициентами

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n. \quad (4)$$

Подставляя в уравнение (1), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) y_n x^{n-2} + \sum_{m=0}^{\infty} p_m x^m \sum_{n=1}^{\infty} n y_n x^{n-1} + \\ + \sum_{m=0}^{\infty} q_m x^m \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n = 0. \end{aligned}$$

Обе части этого тождества — степенные ряды, и по теореме единственности все коэффициенты ряда, стоящего в левой части, равны нулю. Приравнявая нулю коэффи-

циенты при степенях  $x^0, x^1, x^2, \dots$ , получаем рекуррентную систему уравнений для неизвестных  $y_0, y_1, \dots$ :

$$\begin{aligned} q_0 y_0 + p_0 y_1 + 1 \cdot 2 y_2 &= 0, \\ q_1 y_0 + (q_0 + p_1) y_1 + 2 p_0 y_2 + 2 \cdot 3 y_3 &= 0, \\ \dots & \\ \sum_{k=0}^n [q_{n-k} y_k + (k+1) p_{n-k} y_{k+1}] + & \\ + (n+1)(n+2) y_{n+2} &= 0, \dots \end{aligned} \tag{5}$$

Первые два коэффициента  $y_0, y_1$  можно задать произвольно (это эквивалентно постановке задачи Коши  $y(0) = y_0, y'(0) = y_1$ ). После этого из первого уравнения находим  $y_2$ , затем из второго находим  $y_3$  и т. д. Точно так же находятся решения однородного линейного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка с аналитическими коэффициентами.

Пример 1. Найдем решения уравнения Эйри

$$y'' - xy = 0.$$

Будем искать решение в виде ряда (4). Подставив ряд в уравнение, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} [n(n-1) y_n x^{n-2} - y_n x^{n+1}] = 0,$$

и для коэффициентов  $y_j$  получим рекуррентную систему

$$y_2 = 0; \quad y_{n+3} = \frac{y_n}{(n+2)(n+3)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Положим  $y_0 = 1, y_1 = 0$ , тогда

$$y_2 = y_4 = y_5 = y_7 = y_8 = \dots = 0,$$

т. е. отличными от нуля будут только коэффициенты  $y_{3k}$ . Имеем

$$y_{3k+3} = \frac{y_{3k}}{(3k+2)(3k+3)}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

откуда находим

$$y_{3k} = \frac{1}{(2 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 6) \dots [(3k-1) 3k]}.$$

Тем самым построено решение

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(2 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 6) \dots [(3n-1) 3n]}.$$

Второе линейно независимое решение получим, положив  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 1$ . Тогда отличными от нуля будут только коэффициенты  $y_{3k+1}$ . Имеем

$$y_{3k+1} = \frac{y_{3k+1}}{(3k+3)(3k+4)}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

откуда находим

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3 \cdot 4) \cdot (6 \cdot 7) \dots [3n(3n+1)]}.$$

Оба ряда  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  сходятся при всех комплексных  $x$ . Действительно, коэффициент  $x$  уравнения — функция, аналитическая при всех  $x$  и в силу теоремы 1 все решения уравнения Эйри аналитичны при всех  $x$ .

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$y'' - 2xy' + 2my = 0,$$

где  $m \geq 0$  — целое число. Коэффициенты этого уравнения —  $2x$ ,  $2m$  аналитичны при всех  $x$ , и по теореме 1 все решения этого уравнения аналитичны при всех  $x$ . Будем искать решение в виде степенного ряда (4). Подставляя ряд в уравнение, получаем рекуррентную систему уравнений

$$y_{n+2} = \frac{2(m-n)}{(n+1)(n+2)} y_n.$$

Положим  $y_1 = 0$ , тогда все коэффициенты ряда (4) с нечетными номерами обратятся в нуль:  $y_1 = y_3 = y_5 = \dots = 0$ , а для коэффициентов с четными номерами получим рекуррентную систему

$$y_2 = \frac{2m}{1 \cdot 2}, \quad y_4 = \frac{2(m-2)}{3 \cdot 4} y_2, \quad \dots, \quad y_{2n} = \frac{2(m-2n+2)}{(2n-1)2n} y_{2n-2}, \quad \dots$$

Перемножив выписанные соотношения, получим

$$y_{2n} = \frac{2^n m(m-2) \dots (m-2n+2)}{(2n)!} y_0.$$

Наибольший интерес представляет случай, когда  $m$  — четное число,  $m = 2k$ . Тогда все коэффициенты с номерами  $2n > 2k$  обратятся в нуль, и решение будет многочленом:

$$y_1(x) = y_0 \sum_{n=0}^k \frac{2^{2nk} (k-1) \dots (k-n+1)}{(2n)!} x^{2n}. \quad (6)$$

Второе линейно независимое решение есть бесконечный ряд по степеням  $x$ ; его можно найти, положив  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 1$ . Решение  $y_1(x)$  лишь постоянным множителем отличается от *многочлена Эрмита*

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} \left( \frac{d}{dx} \right)^m e^{-x^2} = \\ = (2x)^m - \frac{m(m-1)}{1!} (2x)^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} (2x)^{m-4} + \dots$$

Последний член при  $m = 2k$  равен  $(-1)^k \frac{(2k)!}{k!}$ ; если положить  $y_0$  равным этому числу, то  $y_1(x) = H_{2k}(x)$ .

Полагая  $y_0 = 0$ , получаем, что все коэффициенты при четных степенях  $x$  в ряде (4) обратятся в нуль, а для коэффициентов с нечетными номерами получим рекуррентную систему уравнений

$$y_{2n+1} = \frac{2(m-2n+1)}{2(n+1)(2n+1)} y_{2n-1}.$$

В этом случае ряд (4) обрывается, если  $m = 2k + 1$  — нечетное число, и мы получаем решение

$$y_2(x) = y_1 \sum_{n=0}^k \frac{2^{2nk} (k-1) \dots (k-n+1)}{(2n+1)!}. \quad (7)$$

Если положить  $y_1 = (-1)^k 2(2k+1)!/k!$ , то это решение совпадает с полиномом Эрмита:  $y_2(x) = H_{2k+1}(x)$ .

**2. Регулярные особые точки.** Многие задачи математики, механики, физики приводят к уравнениям второго порядка, вида (1), коэффициенты которых — рациональные функции

$$p(x) = \frac{\tilde{p}_1(x)}{\tilde{p}_2(x)}, \quad q(x) = \frac{\tilde{q}_1(x)}{\tilde{q}_2(x)},$$

где  $\tilde{p}_j(x)$ ,  $\tilde{q}_j(x)$  — многочлены. Можно считать, что эти дроби несократимы; тогда в точках, в которых  $\tilde{p}_2(x) = 0$  или  $\tilde{q}_2(x) = 0$ , хотя бы один из коэффициентов уравнения (1) обратится в бесконечность. Такие точки называются *особыми точками* уравнения (1). Решения уравнения (1) будут, вообще говоря, иметь особенности в этих точках. Изучение поведения решений вблизи особых точек — это один из разделов *аналитической теории диф-*

ференциальных уравнений, с которой можно познакомиться по монографиям [9, 25, 39].

Мы рассмотрим простейшие особенности — так называемые *регулярные особые точки* (или *особые точки I рода*).

Рассмотрим уравнение второго порядка

$$(x-a)^2 y'' + (x-a)p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (8)$$

Если функции  $p(x)$ ,  $q(x)$  аналитичны в некотором круге  $|x-a| < R$ , и точка  $a$  — особая, то  $a$  называется *регулярной особой точкой*. Точка  $a$  не будет особой только в том случае, если  $p(x)$  делится на  $x-a$ , а  $q(x)$  — на  $(x-a)^2$ , что становится очевидным, если переписать уравнение (8) так:

$$y'' + \frac{p(x)}{x-a} y' + \frac{q(x)}{(x-a)^2} y = 0.$$

Простейший пример уравнения, имеющего регулярную особую точку — это уравнение Эйлера (гл. 1, § 5)

$$x^2 y'' + axy' + by = 0.$$

Точка  $x=0$  — регулярная особая, если  $(a, b) \neq (0, 0)$ . Если корни  $\lambda_1, \lambda_2$  определяющего уравнения (гл. 1, § 5)

$$\lambda(\lambda-1) + a\lambda + b = 0$$

различны, то уравнение Эйлера имеет фундаментальную систему решений  $y_1 = x^{\lambda_1}$ ,  $y_2 = x^{\lambda_2}$ . Будем рассматривать эти решения при положительных  $x$  и пусть  $\lambda_1, \lambda_2$  вещественны. Выясним характер особенности решения. Если  $\lambda_1 < 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow +0} y_1(x) = \infty$ , т. е.  $x=0$  — особая точка решения  $y_1(x)$ . Если  $\lambda_1 > 0$  и  $\lambda_1$  — нецелое, то  $\lim_{x \rightarrow +0} y_1^{(k)}(x) = \infty$ , если  $k > [\lambda_1]$  (целая часть числа  $\lambda_1$ ), так как

$$y_1^{(k)}(x) = \lambda_1(\lambda_1-1)\dots(\lambda_1-k+1)x^{\lambda_1-k}$$

и  $\lambda_1 - k < 0$ . В этом случае точка  $x=0$  будет особой для всех производных  $y_1^{(k)}(x)$ ,  $k > [\lambda_1]$ .

Оказывается, что структура особенностей решений уравнения (8) в окрестности регулярной особой точки такая же, как и для решений уравнения Эйлера. Пусть

$a = 0$ ; рассмотрим уравнение (8) на полуоси  $x > 0$ . Будем искать решение в виде

$$y = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n \tag{9}$$

с неизвестными  $\lambda, y_0, y_1, \dots$ , где  $y_0 \neq 0$ . Имеем

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + \lambda) y_n x^{n+\lambda-1},$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + \lambda)(n + \lambda - 1) y_n x^{n+\lambda-2}.$$

После подстановки в уравнение (8) и сокращения на  $x^\lambda$  получим

$$y_0 [\lambda(\lambda - 1) + p_0\lambda + q_0] + x \{y_1 [\lambda(\lambda + 1) + p_0(\lambda + 1) + q_0] + y_0(\lambda p_0 + q_0)\} + \dots + x^n \{y_n [(\lambda + n)(\lambda + n - 1) + \dots + p_0(\lambda + n) + q_0] + \dots + y_0(\lambda p_0 + q_0)\} = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при степенях  $x$ , получаем рекуррентную систему уравнений

$$y_0 f_0(\lambda) = 0,$$

$$y_1 f_0(\lambda + 1) + y_0 f_1(\lambda) = 0,$$

$$\dots \dots \dots \tag{10}$$

$$y_n f_0(\lambda + n) + y_{n-1} f_1(\lambda + n - 1) + y_{n-2} f_2(\lambda + n - 2) + \dots + y_0 f_n(\lambda) = 0,$$

где обозначено

$$f_0(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + p_0\lambda + q_0, \quad f_k(\lambda) = \lambda p_k + q_k \quad (k \geq 1). \tag{11}$$

Так как  $y_0 \neq 0$ , то  $\lambda$  должно удовлетворять уравнению

$$\lambda(\lambda - 1) + p_0\lambda + q_0 = 0, \tag{12}$$

которое называется *определяющим*. Пусть  $\lambda_1, \lambda_2$  — корни этого уравнения.

1°. Разность  $\lambda_1 - \lambda_2$  не есть целое число. Тогда  $f_0(\lambda_1 + n) \neq 0, f_0(\lambda_2 + n) \neq 0$  ни при каком целом  $n > 0$ . Полагая  $\lambda = \lambda_1$  в уравнениях (11), можно последовательно найти коэффициенты  $y_1, y_2, \dots$  (аналогично при  $\lambda_1 = \lambda_2$ ).

2°.  $\lambda_1 - \lambda_2 = m$  — целое число. Пусть  $m \geq 0$ , тогда  $f_0(\lambda_1 + n) \neq 0$  ни при каком целом  $n \geq 1$ , и при  $\lambda = \lambda_1$

система (11) разрешима. При  $\lambda = \lambda_2$  имеем  $f_0(\lambda_2 + m) = f_0(\lambda_1) = 0$ , так что становится невозможным найти коэффициенты  $y_m, y_{m+1}, \dots$ . В этом случае второе решение удобнее найти по формуле Лиувилля:

$$y_2(x) = y_1(x) \int_{x_0}^x y_1^{-2}(t) \exp \left\{ - \int_{x_0}^t \tilde{t}^{-1} p(\tilde{t}) dt \right\} dt. \quad (13)$$

Это решение может содержать логарифм  $\ln x$  (см. п. 3).

**Теорема 2.** Пусть функции  $p(x), q(x)$  аналитичны в круге  $|x - a| < R$ . Если разность  $\lambda_1 - \lambda_2$  корней определяющего уравнения не есть целое число, то уравнение (8) имеет два линейно независимых решения вида

$$y_1(x) = (x - a)^{\lambda_1} z_1(x), \quad y_2(x) = (x - a)^{\lambda_2} z_2(x), \quad (14)$$

где  $z_1(x), z_2(x)$  — аналитические в круге  $|x - a| < R$  функции. Если  $\lambda_1 - \lambda_2$  есть неотрицательное целое число, то уравнение (8) имеет решение  $y_1(x)$  вида (14).

Доказательство см. в [25]. Аналогичные утверждения справедливы для линейных дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка

$$(x - a)^n y^{(n)} + (x - a)^{n-1} p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y = 0. \quad (15)$$

Точка  $a$  называется регулярной особой точкой этого уравнения, если функции  $p_1(x), \dots, p_n(x)$  аналитичны в некотором круге  $|x - a| < R$  (и точка  $a$  — особая). Будем искать решение в виде степенного ряда (9) (при  $a = 0$ ), тогда для  $\lambda$  получим определяющее уравнение

$$\lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1) + \lambda(\lambda - 1) \dots \dots (\lambda - n + 2) p_1(a) + \dots + p_n(a) = 0. \quad (16)$$

**Теорема 3.** Пусть разности  $\lambda_j - \lambda_k, j \neq k$ , корней определяющего уравнения не являются целыми числами. Тогда уравнение (15) имеет фундаментальную систему решений вида

$$y_j(x) = (x - a)^{\lambda_j} z_j(x), \quad 1 \leq j \leq n, \quad (17)$$

где  $z_1(x), \dots, z_n(x)$  — аналитические в круге  $|x - a| < R$  функции.

Рассмотрим линейную систему из  $n$  уравнений

$$(x - a) \frac{dy}{dx} = A(x) y. \quad (18)$$



Точка  $a$  называется *регулярной особой точкой* этой системы, если все элементы матрицы-функции  $A(x)$  аналитичны в некотором круге  $|x - a| < R$  и  $A(a) \neq 0$ .

Пример 3. Рассмотрим систему

$$x \frac{dy}{dx} = Ay \quad (19)$$

с постоянной матрицей  $A$ . Подстановка  $x = e^t$  приводит систему к виду  $\dot{y} = Ay$ . Пусть собственные значения  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  различны, тогда все решения системы (19) даются формулой

$$y(x) = \sum_{j=1}^n c_j x^{\lambda_j} e_j.$$

Здесь  $e_1, \dots, e_n$  — собственные векторы матрицы  $A$  и  $c_1, \dots, c_n$  — произвольные постоянные.

Будем искать решение системы (18) в виде

$$y(x) = (x - a)^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} (x - a)^k y^k, \quad (20)$$

где  $\lambda$  — неизвестное число,  $y^0, y^1, \dots, y^k, \dots$  — неизвестные постоянные  $n$ -векторы. Каждый элемент  $a_{jl}(x)$  матрицы-функции  $A(x)$  разлагается в степенной ряд

$$a_{jl}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{jlk} (x - a)^k,$$

так что матрица-функция  $A(x)$  разлагается в ряд

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x - a)^k A_k.$$

Здесь  $A_k$  есть постоянная  $(n \times n)$ -матрица с элементами  $a_{jlk}$ . Подставив ряд (20) в систему (19) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $x - a$ , получим рекуррентную систему уравнений

$$(\lambda + k) y^k = \sum_{i=0}^k A_i y^{k-i}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Первое уравнение имеет вид

$$A(a) y^0 = \lambda y^0$$

(мы учли, что  $A_0 = A(a)$ ), так что  $\lambda$  должно быть собственным значением, а вектор  $y^0$  должен быть собственным вектором матрицы  $A$ . Определяющее уравнение принимает вид

$$\det(\lambda I - A(a)) = 0. \quad (21)$$

**Теорема 4.** Пусть разности  $\lambda_j - \lambda_k$ ,  $j \neq k$  корней определяющего уравнения не являются целыми числами. Тогда система (18) имеет фундаментальную систему решений вида

$$y^j(x) = (x - a)^{\lambda_j} z^j(x), \quad 1 \leq j \leq n, \quad (22)$$

где  $z^1(x), \dots, z^n(x)$  — вектор-функции с аналитическими в круге  $|x - a| < R$  компонентами.

Доказательство теорем 3, 4 и дальнейшие сведения по аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений читатель сможет найти в [18, 25].

**3. Уравнение Бесселя.** Это уравнение вида

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0. \quad (23)$$

Его решения называются *функциями Бесселя порядка  $\nu$* . В уравнении (23)  $\nu$  — постоянное (вообще говоря, комплексное) число; мы будем считать  $\nu$  вещественным. Функции Бесселя — столь же частые гости в задачах физики и механики, сколь синусы и косинусы.

С помощью подстановки  $y = z/\sqrt{x}$  уравнение (6) приводится к виду

$$z'' + \left(1 - \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2}\right) z = 0,$$

которое называется *приведенным уравнением Бесселя*. В частности, при  $\nu = \pm 1/2$  функции  $\sin x/\sqrt{x}$ ,  $\cos x/\sqrt{x}$  являются решениями уравнения Бесселя (23). Свойства функций Бесселя во многом схожи со свойствами тригонометрических функций.

Уравнение Бесселя имеет особенность при  $x = 0$ , и эта точка — регулярная особая.

Найдем решения уравнения Бесселя. Будем искать решение в виде

$$y(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n, \quad (24)$$

где  $y_0 \neq 0$ . Прделаем все выкладки формально, а затем проверим, что полученные ряды сходятся и удовлетворяют уравнению. Подставляя (24) в (23) и приравнивая нулю коэффициенты при степенях  $x$ , получаем бесконечную систему уравнений

$$y_0(\lambda^2 - \nu^2) = 0, \quad y_1[(\lambda + 1)^2 - \nu^2] = 0, \\ y_2[(\lambda + 2)^2 - \nu^2] - y_0 = 0, \quad \dots, \quad y_n[(\lambda + n)^2 - \nu^2] - y_{n-2} = 0, \quad \dots$$

Так как  $y_0 \neq 0$ , то из первого уравнения находим  $\lambda_{1,2} = = \pm \nu$ . Пусть  $\nu \geq 0$ . Положим  $\lambda = \nu$ . Тогда  $y_1 = 0, y_3 = = 0, \dots$ , т. е. все  $y_{2n+1} = 0$ . Далее,

$$y_{2n} = -\frac{y_{2n-2}}{4n(\nu + n)},$$

откуда находим

$$y_{2n} = \frac{(-1)^n y_0}{4^n n! (\nu + 1) \dots (\nu + n)}.$$

Итак, мы получили решение

$$y_1(x) = y_0 x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n}}{n! (\nu + 1) \dots (\nu + n)}.$$

В силу тождеств для гамма-функции Эйлера

$$\Gamma(\nu + n + 1) = (\nu + n) \dots (\nu + 1) \Gamma(\nu + 1), \quad \Gamma(n + 1) = n!$$

можно  $y_1(x)$  записать в виде

$$y_1(x) = C_1 x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n}}{\Gamma(n+1) \Gamma(\nu+n+1)}. \quad (25)$$

Аналогично, полагая  $\lambda = -\nu$ , получаем при  $\nu$  нецелом

$$y_2(x) = C_2 x^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n}}{\Gamma(n+1) \Gamma(\nu+n+1)}. \quad (25')$$

При  $\lambda = -\nu$  и  $\nu$  целом формула (25) непригодна, так как знаменатель может обратиться в бесконечность, и в этом случае второе линейно независимое решение  $y_2(x)$  содержит  $\ln x$ .

Пусть  $\nu > 0$  нецелое. Тогда ряды (25), (25') сходятся при всех  $x$  (по признаку Даламбера). Наконец, решения

$y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  линейно независимы, так как  $y_1(x) \rightarrow 0$ ,  $y_2(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow +0$ .

Общепринято следующее обозначение:

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n+\nu}}{\Gamma(n+1)\Gamma(\nu+n+1)}, \quad (26)$$

так что  $J_\nu(x)$ ,  $J_{-\nu}(x)$  при  $\nu$  нецелом образуют фундаментальную систему решений уравнений Бесселя.

Если  $\nu = n$  — целое число, то одним из решений будет функция Бесселя  $J_n(x)$ , а второе решение можно построить с помощью формулы (13).

В гл. 7, § 3 мы исследуем поведение функций Бесселя при  $x \rightarrow \infty$ . Функциям Бесселя посвящена обширная математическая литература.

## § 11. Уравнения с периодическими коэффициентами

**1. Теория Флоке—Ляпунова.** Рассмотрим однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0, \quad (1)$$

коэффициенты которого непрерывные периодические с периодом  $\omega > 0$  функции:

$$a(x + \omega) = a(x), \quad b(x + \omega) = b(x).$$

Теория обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и систем была разработана Г. Флоке и А. М. Ляпуновым. Основу этой теории, применительно к уравнению (1), составляет

*Теорема Флоке—Ляпунова. Уравнение (1) с периодическими коэффициентами имеет фундаментальную систему решений либо вида*

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} p_1(x), \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x} p_2(x), \quad (2a)$$

*либо вида*

$$y_1(x) = e^{\lambda x} p_1(x), \quad y_2(x) = e^{\lambda x} [x p_1(x) + p_2(x)]. \quad (2б)$$

*Здесь  $p_j(x)$  — периодические с периодом  $\omega$  функции,  $\lambda_j$ ,  $\lambda$  — постоянные.*

Решения вида (2a) обладают следующим свойством:

$$y(x + \omega) = \rho y(x), \quad (3)$$

т. е. при сдвиге на период решение умножается на постоянную  $\rho$ . Числа  $\lambda_1, \lambda_2$  называются *характеристическими показателями*, а числа  $\rho_1, \rho_2$  называются *мультипликаторами* и связаны с  $\lambda_1, \lambda_2$  соотношениями

$$\rho_1 = e^{\lambda_1 \omega}, \quad \rho_2 = e^{\lambda_2 \omega}. \quad (4)$$

*Лемма.* Если  $y(x)$  — решение уравнения (1), то  $y(x + \omega)$  также будет его решением.

Действительно, заменяя  $x$  на  $x + \omega$  в уравнении (1) и учитывая периодичность коэффициентов  $a(x), b(x)$ , получаем

$$y''(x + \omega) + a(x)y'(x + \omega) + b(x)y(x + \omega) = 0.$$

Докажем теорему. Пусть  $Y(x)$  — фундаментальная матрица уравнения (1):

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица  $Y(x + \omega)$  — фундаментальная. Действительно, функции  $y_1(x + \omega), y_2(x + \omega)$  — решения уравнения (1). Определитель этой матрицы равен  $\omega(x + \omega)$ , где  $\omega(x)$  — вронскиан решений  $y_1(x), y_2(x)$ , и потому не обращается в нуль. Следовательно (§ 5)

$$Y(x + \omega) \equiv Y(x)C, \quad (5)$$

где  $C$  — постоянная невырожденная матрица. Возможны два варианта

А. Матрица  $C$  приводится к диагональному виду, т. е. существует невырожденная матрица  $T$  такая, что

$$T^{-1}CT = \Lambda = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix}.$$

Положим  $Y(x) = \tilde{Y}(x)T^{-1}$ , тогда матрица  $\tilde{Y}(x)$  — фундаментальная и  $\tilde{Y}(x + \omega) = \tilde{Y}(x)\Lambda$ . Следовательно,

$$\tilde{y}_1(x + \omega) = \rho_1 \tilde{y}_1(x), \quad \tilde{y}_2(x + \omega) = \rho_2 \tilde{y}_2(x).$$

Числа  $\rho_1, \rho_2$  отличны от нуля, так как матрица  $C$  невырождена. Введем числа  $\lambda_1, \lambda_2$  по формулам (4)\* и положим  $p_j(x) = \tilde{y}_j(x)e^{-\lambda_j x}$ ,  $j = 1, 2$ . Тогда

$$p_j(x + \omega) = e^{-\lambda_j x} e^{-\lambda_j \omega} \rho_j \tilde{y}_j(x) = p_j(x),$$

---

\*) Число  $\rho$  можно представить в виде  $\rho = ae^{i\alpha}$ , где  $a > 0$ ,  $\alpha$  вещественно. Если положить  $\lambda = \frac{1}{\omega}(\ln \rho + i\alpha)$ , то  $e^{i\omega\alpha} = \rho$ .

т. е.  $p_j(x)$  — периодические с периодом  $\omega$  функции, и решения  $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$  имеют вид (2а). Числа  $\lambda_j$  определяются не однозначно, а с точностью до слагаемого  $2\pi ik/\omega$ ,  $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

В. Матрица  $C$  приводится к жордановой нормальной форме, т. е. существует матрица  $T$  такая, что

$$T^{-1}CT = J = \begin{pmatrix} \rho & 1 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}.$$

Тогда для матрицы  $\tilde{Y}(x) = Y(x)T$  выполняется тождество  $\tilde{Y}(x + \omega) = \tilde{Y}(x)J$ , откуда следует, что

$$\tilde{y}_1(x + \omega) = \rho \tilde{y}_1(x), \quad \tilde{y}_2(x + \omega) = \rho \tilde{y}_2(x) + \tilde{y}_1(x).$$

Отсюда, как и в случае А, следует, что

$$\tilde{y}_1(x) = e^{\lambda x} p_1(x),$$

где  $e^{\lambda \omega} = \rho$ ,  $p_1(x)$  есть  $\omega$ -периодическая функция. Полагая  $p_2(x) = e^{-\lambda x} \tilde{y}_2(x)$ , получаем

$$p_2(x + \omega) - p_2(x) = \rho^{-1} p_1(x).$$

Рассмотрим функцию

$$q(x) = p_2(x) + dx p_1(x),$$

где  $d$  — постоянная. Имеем

$$q(x + \omega) - q(x) = (d\omega + \rho^{-1}) p_1(x),$$

так что функция  $q(x)$  будет  $\omega$  — периодической, если  $d = -(\rho\omega)^{-1}$ . Следовательно,

$$p_2(x) = -\frac{x}{\rho\omega} p_1(x) + q(x),$$

и второе из решений (2б) построено.

Следствие 1. Мультипликаторы  $\rho_1, \rho_2$  являются корнями уравнения

$$\det(Y(\omega) - \rho Y(0)) = 0, \tag{6}$$

где  $Y(x)$  — фундаментальная матрица уравнения (1).

Действительно, мультипликаторы — собственные значения матрицы  $C$  (см. (5)), т. е. корни уравнения  $\det(C - \rho I) = 0$ . Полагая  $x=0$  в тождестве (5), получаем  $C = Y^{-1}(0)Y(\omega)$  и уравнение (6) для  $\rho$ .

В частности, мультипликаторы не зависят от выбора фундаментальной матрицы  $Y(x)$ .

Следствие 2. *Справедливо тождество*

$$\rho_1 \rho_2 = \exp \left\{ - \int_0^{\omega} a(t) dt \right\}. \quad (7)$$

Доказательство. Пусть  $Y(x)$  — фундаментальная матрица уравнения (1) и  $\omega(x)$  — ее вронскиан. Уравнение (6) имеет вид

$$\rho^2 \omega(0) + A\rho + \omega(\omega) = 0,$$

так что  $\rho_1 \rho_2 = \omega(\omega) \omega^{-1}(0)$ , и из формулы Лиувилля (§ 7, (11)) следует (7).

Следствие 3. *Если коэффициенты уравнения (1) вещественны, то мультипликаторы комплексно сопряжены:*

$$\bar{\rho}_2 = \rho_1. \quad (8)$$

В этом случае матрицу  $Y(x)$  можно выбрать вещественной, и квадратное уравнение (6) будет иметь вещественные коэффициенты.

Рассмотрим более подробно один из наиболее важных классов уравнений второго порядка:

$$y'' + q(x)y = 0. \quad (9)$$

Теорема. *Пусть  $q(x)$  — вещественная  $\omega$ -периодическая функция. Тогда возможны два варианта расположения мультипликаторов уравнения (9) на комплексной плоскости  $\rho$ :*

1°. *Оба мультипликатора вещественны и образуют пару  $\rho, 1/\rho$ .*

2°. *Оба мультипликатора лежат на единичной окружности и образуют пару  $\rho = e^{i\varphi}$ ,  $\bar{\rho} = e^{-i\varphi}$ ,  $\varphi$  вещественно.*

Доказательство. Если один из мультипликаторов веществен, то имеет место случай 1°, в силу соотношения  $\rho_1 \rho_2 = 1$ . Пусть  $\text{Im } \rho_1 \neq 0$ , тогда  $\rho_2 = \bar{\rho}_1$  и так как  $\rho_1 \rho_2 = 1$ , то  $|\rho_1|^2 = |\rho_2|^2 = 1$ , откуда следует 2°.

Рассмотрим систему из  $n$  уравнений

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y. \quad (10)$$

Теорема Флоке—Ляпунова. *Пусть элементы матрицы-функции  $A(x)$  — непрерывные периодические с пе-*

риодом  $\omega$  функции. Тогда всякая фундаментальная матрица  $Y(x)$  системы (9) имеет вид

$$Y(x) = P(x) e^{x^B}. \quad (11)$$

Здесь  $B$  — постоянная матрица, элементы матрицы  $P(x)$  периодичны по  $x$  с периодом  $\omega$ .

Наметим доказательство (подробнее см. [25]). Те же рассуждения, что и выше, приводят к тождеству (5), где  $C$  — постоянная невырожденная  $(n \times n)$ -матрица. Поэтому существует матрица  $B$  такая, что  $e^{\omega B} = C$  (§ 2). Положим  $P(x) = Y(x) e^{-x^B}$ , тогда

$$P(x + \omega) = Y(x) C e^{-\omega B} e^{-x^B} = P(x),$$

т. е.  $P(x)$  есть периодическая с периодом  $\omega$  матрица-функция.

**2. Зоны устойчивости и неустойчивости.** Различные физические и технические задачи приводят к уравнениям второго порядка, содержащими вещественный параметр  $k \geq 0$ , вида

$$-y'' + q(x)y = k^2 y \quad (12)$$

или вида

$$y'' + k^2 q(x)y = 0. \quad (13)$$

Здесь  $q(x)$  — вещественная  $\omega$ -периодическая функция. К уравнению вида (1) приводит, например, задача о движении квантовомеханической частицы в периодической кристаллической решетке, к уравнению вида (2) — задачи о распространении электромагнитных или звуковых волн в средах с периодическими свойствами.

Физическая постановка задачи приводит к условию: решение  $y(x)$  должно быть ограничено на всей оси  $-\infty < x < \infty$ . Это условие не может выполняться на полуоси вида  $k > k_0$  (за исключением очевидного случая  $q(x) \equiv \equiv \text{const}$ , который мы далее не рассматриваем). По определению, точка  $k^2$  принадлежит зоне устойчивости, если все решения уравнения (12) (или (13)) ограничены при  $-\infty < x < \infty$ , и принадлежит зоне неустойчивости в противном случае. Из вида решений (2а) следует, что точка  $k^2$  принадлежит зоне устойчивости, если

$$|\rho_1| = |\rho_2| = 1, \quad \rho_1 \neq \rho_2. \quad (14)$$



Действительно, в этом случае, в силу (3),

$$|y_j(x + \omega)| = |\rho_j| |y_j(x)| = |y_j(x)|, \quad j = 1, 2,$$

и потому решения  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  и все их линейные комбинации ограничены на всей оси  $x$ . Если же  $|\rho_j| \neq 1$ , то точка  $k^2$  принадлежит зоне неустойчивости. Пусть  $|\rho_1| > 1$ , для определенности (напомним, что  $\rho_1\rho_2 = 1$ ), тогда из (3) имеем

$$|y_1(x + n\omega)| = |\rho_1|^n |y_1(x)|.$$

Фиксируем точку  $x_0$  такую, что  $y_1(x_0) \neq 0$ , тогда  $|y_1(x_0 + n\omega)| \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , и решение  $y_1(x)$  не является ограниченным.

К сожалению, единственный пример интегрируемого уравнения вида (12) или (13), где  $q(x)$  — элементарная функция, есть уравнение с кусочно постоянной функцией  $q(x)$ . Но даже в этом случае анализ зон устойчивости и неустойчивости оказывается весьма сложным. Проще всего этот анализ проводится в примере, принадлежащем П. Дираку.

Рассмотрим уравнение

$$y'' + \left[ k^2 - U \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n\omega) \right] y = 0, \quad (15)$$

где  $U \neq 0$  — постоянная и  $\delta$  есть дельта-функция Дирака (§ 12). Функция  $q(x)$ , входящая в уравнение (14), называется *дираковской потенциальной гребенкой* [44]. На интервале  $0 < x < \omega$  всякое решение уравнения (14) имеет вид

$$y(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx},$$

где  $A, B$  — постоянные. Будем искать решение  $y(x)$  такое, что  $y(x + \omega) = \rho y(x)$  (см. (3)), так что

$$y(x) = \rho [Ae^{ik(x-\omega)} + Be^{-ik(x-\omega)}]$$

при  $\omega < x < 2\omega$ . В точке  $x = \omega$  должны выполняться условия (§ 12)

$$y(\omega + 0) = y(\omega - 0), \quad y'(\omega + 0) = y'(\omega - 0) + Uy(\omega - 0),$$

и мы получаем систему уравнений относительно неизвестных  $A, B$ :

$$\begin{aligned} \rho(A + B) &= Ae^{ik\omega} + Be^{-ik\omega}, \\ ik\rho(A - B) &= ik(Ae^{ik\omega} - Be^{-ik\omega}) + U(Ae^{ik\omega} + Be^{-ik\omega}). \end{aligned}$$

Система имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю, и это дает уравнение для мультипликаторов

$$\rho^2 - 2f(k)\rho + 1 = 0, \quad f(k) = \cos \omega k + \frac{U}{2k} \sin \omega k.$$

При выводе этого уравнения следует помнить, что свободный член обязательно равен коэффициенту при  $\rho^2$ , так как  $\rho_1 \rho_2 = 1$ . Решая уравнение, находим

$$\rho_{1,2} = f(k) \pm \sqrt{f^2(k) - 1}. \quad (16)$$

Зоны устойчивости определяются из условия  $f^2(k) < 1$ , в этом случае

$$\rho_{1,2} = f(k) \pm i \sqrt{1 - f^2(k)}$$

и  $|\rho_1| = |\rho_2| = 1$ . Если же  $f^2(k) > 1$ , то  $\rho_1 > 1$  при  $f(k) > 0$ ,  $\rho_2 > 1$  при  $f(k) < 0$ , и точка  $k^2$  принадлежит зоне неустойчивости. Можно проверить, что если  $f(k) = \pm 1$ , то точка  $k^2$  принадлежит зоне неустойчивости. Итак, зоны устойчивости определяются неравенством

$$\left| \cos k\omega + \frac{U}{2k} \sin k\omega \right| < 1. \quad (17)$$

Если построить график функции  $f(k)$ , то границами зон устойчивости будут абсциссы точек пересечения графика с прямыми  $y = \pm 1$ . Поэтому зоны устойчивости и неустойчивости чередуются (на рис. 20, а, жирно выделены зоны устойчивости).

Если  $U > 0$ , то некоторый интервал вида  $(0, k_0)$  будет зоной неустойчивости, так как при малых  $k$  имеем  $f(k) \sim 1 + U\omega/2 > 1$ . Покажем, что существует бесконечно много зон устойчивости и неустойчивости. Точки экстремума функции  $f(x)$  определяются из уравнения

$$\operatorname{tg} k\omega = \frac{U}{2k(1 + U/(2\omega k^2))}. \quad (18)$$

Из сравнения графиков функций  $\operatorname{tg} x$  и  $1/x$  видно, что это уравнение имеет бесконечно много корней, вида  $k_n = \frac{n\pi}{\omega} + \gamma_n$ , где  $\gamma_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Подставляя их в уравнение, получаем

$$\operatorname{tg} \gamma_n \omega = \frac{U\omega}{2\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Так как  $\operatorname{tg} x \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ , то  $\gamma_n \sim U/(2\pi n)$ , и мы получаем асимптотику корней уравнения (1):

$$k_n = \frac{n\pi}{\omega} + \frac{U}{2\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (19)$$

Из этой формулы и (18) находим

$$\begin{aligned} f(k_n) &= \cos k_n \omega \left[ 1 + \left( \frac{U}{2k_n} \right)^2 \left( 1 + \frac{U}{2\omega k_n^2} \right)^{-1} \right] = \\ &= (-1)^n \left[ 1 + \frac{U^2 \omega^2}{8\pi^2 n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right] \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned} \quad (20)$$

так что  $|f(k_n)| > 1$  при  $n \gg 1$ . Поэтому существует бесконечно много зон устойчивости и неустойчивости. Так как  $|f(k_n)| \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ , то ширина  $n$ -й зоны неустойчивости (эти зоны называют также *лакунами*) стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Пусть  $l_n = (a_n, b_n)$  — лакуна, содержащая точку  $k_n$ . Положим  $a_n = k_n - \alpha_n$ ,  $b_n = k_n + \beta_n$ , где  $\alpha_n, \beta_n$  — положительные бесконечно малые. Имеем из (19), (20)

$$\begin{aligned} f(a_n) &= (-1)^n = f(k_n) + \frac{f''(k_n)}{2} \alpha_n^2 + O(\alpha_n^3) = \\ &= (-1)^n \left[ 1 + \frac{U^2 \omega^2}{8\pi^2 n^2} - \frac{\omega^2 \alpha_n^2}{2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right], \end{aligned}$$

так что  $\alpha_n \sim U/(2\pi n)$ . Такую же асимптотику имеет величина  $\beta_n$ , так что ширина  $\Delta_n$  лакуны  $l_n$  равна

$$\Delta_n = \frac{U}{\pi n} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right]. \quad (21)$$

Вычислим асимптотику мультипликаторов, отвечающих  $n$ -й зоне неустойчивости. Пусть  $\rho(k)$  — тот из мультипликаторов, модуль которого больше единицы. Из формулы (16) следует, что максимум  $|\rho(k)|$  при  $k \in l_n$  достигается в точке  $k_n$  и из (20) находим

$$|\rho(k_n)| = 1 + \frac{|U| \omega}{2\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Так как  $|\rho(k_n)|$  мало отличается от единицы при  $n \gg 1$ , то это означает, что с ростом номера зоны неустойчивость проявляется все слабее.

Аналогично устроены зоны устойчивости и неустойчивости для уравнения (12).

**Теорема.** Пусть  $q(x)$  — непрерывная вещественная  $\omega$ -периодическая функция,  $q(x) \not\equiv \text{const}$ . Тогда на полуоси  $k > 0$  имеется бесконечно много зон неустойчивости  $l_n = [a_n, b_n]$ , а дополнительные к ним интервалы суть зоны устойчивости. Ширина  $\Delta_n$   $n$ -й зоны неустойчивости стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .

Если функция  $q(x)$  имеет  $p \geq 1$  непрерывных производных, то

$$\Delta_n = o(n^{-p}) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Доказательство теоремы и этой формулы см. в [41].

Одним из наиболее полно исследованных уравнений с периодическими коэффициентами является уравнение Матье:

$$y'' + (a + b \cos 2x)y = 0.$$

В последние годы были исследованы *конечнозонные потенциалы*  $q(x)$ . Это такие периодические функции  $q(x)$ ,

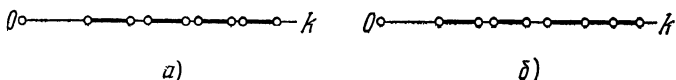


Рис. 20.

что уравнение (12) имеет конечное число протяженных зон неустойчивости (т. е. интервалов), а все остальные зоны неустойчивости вырождаются в точки (рис. 20, б). Для конечнозонных потенциалов получены явные выражения.

## § 12. Дельта-функция и ее применения

**1. Дельта-функция Дирака.** Эта функция — она обозначается  $\delta(x)$  — была введена английским физиком П. Дираком. Ее определение таково:

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (1)$$

Дельта-функцию можно рассматривать, например, как плотность единичной массы, сосредоточенной в точке  $x = 0$

(это только одна из известных физических интерпретаций дельта-функции). Действительно, обозначим эту плотность  $\rho(x)$ ; тогда  $\rho(x) = 0$  при  $x \neq 0$  (вся масса сосредоточена в точке  $x = 0$ ), и  $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 1$ , ибо масса равна единице, так что  $\rho(x) = \delta(x)$ .

Разумеется, дельта-функция не есть функция в обычном смысле слова. Это *обобщенная функция*. Теория обобщенных функций была построена советским математиком С. Л. Соболевым и французским математиком Л. Шварцем.

Основы теории обобщенных функций читатель может найти в [13, 15]. Мы ограничимся тем, что приведем основные формулы, относящиеся к дельта-функции, и не будем излагать строгую теорию обобщенных функций. Читатель, не знакомый с обобщенными функциями, будет находиться примерно в том же положении, в каком находились в начале нашего века инженеры, которые использовали метод Хевисайда (см. гл. 1, § 11). Впрочем, это не совсем так: математического обоснования метода Хевисайда тогда не было, а математическое обоснование приведенных ниже результатов — теория обобщенных функций — существует.

Введем понятие обобщенной функции. Пусть  $K$  — множество всех функций  $\varphi(x)$ , которые бесконечно дифференцируемы на всей оси  $-\infty < x < \infty$  и финитны. Последнее означает, что каждая функция  $\varphi(x) \in K$  тождественно равна нулю вне некоторого отрезка:  $\varphi(x) \equiv 0$ , если  $x \notin (a, b)$ ; числа  $a, b$  — свои для каждой функции  $\varphi(x)$ . Множество  $K$  есть линейное пространство; его элементы  $\varphi(x)$  называются *основными* (или *пробными*) *функциями*.

*Обобщенной функцией*  $f$  (над пространством  $K$ ) называется линейный функционал, определенный на пространстве  $K$ . Именно, каждой функции  $\varphi(x) \in K$  ставится в соответствие число  $f(\varphi)$ , причем

$$f(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1f(\varphi_1) + \alpha_2f(\varphi_2) \quad (2)$$

для любых основных функций  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$  и для любых чисел  $\alpha_1, \alpha_2$ . От функционала  $f$  требуется также непрерывность; мы не будем вводить соответствующее определение, поскольку во всех рассматриваемых примерах это свойство выполняется.

Будем употреблять обозначения, принятые в физической литературе. Именно, значение  $f(\varphi)$  будем записывать в виде интеграла

$$f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx. \quad (3)$$

Класс обобщенных функций содержит все «обычные» функции. Действительно, если  $f(x)$  — непрерывная на оси  $-\infty < x < \infty$  функция, то интеграл из (3) существует и обладает свойством линейности. Если  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  — непрерывные на всей оси функции и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x) \varphi(x) dx \quad (4)$$

для любой основной функции  $\varphi(x)$ , то  $f_1(x) \equiv f_2(x)$  (гл. 7, § 3, основная лемма вариационного исчисления). По аналогии с этим фактом будем считать, что две обобщенные функции  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  равны:  $f_1(x) \equiv f_2(x)$ , если соотношение (4) выполняется для любой основной функции  $\varphi(x)$ .

Введем производные от обобщенных функций. Пусть  $f(x)$  — непрерывно дифференцируемая на всей оси функция,  $\varphi(x)$  — основная функция. Интегрируя по частям, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx, \quad (5)$$

поскольку внеинтегральная подстановка  $f(x) \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty}$  равна нулю — функция  $\varphi(x)$  финитна. Формулу (5) примем в качестве определения обобщенной функции  $f'(x)$ . Заметим, что правая часть формулы (5) определена, так как  $\varphi'(x)$  —

основная функция, и потому интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx$  определен. Аналогично определяются высшие производные:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x) \varphi(x) dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi^{(n)}(x) dx. \quad (6)$$

Приведем основные формулы для дельта-функции и поясним их.

$$1^\circ. \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) \varphi(x) dx = \varphi(a).$$

Здесь  $\varphi(x)$  — непрерывная на всей оси функция. Эта формула есть определение дельта-функции.

Дельта-функцию можно представить как «предел» обычных функций. Пусть  $\delta_\varepsilon(x)$  — ступенчатая функция (рис. 21):

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon}, \quad |x| \leq \varepsilon; \quad \delta_\varepsilon(x) = 0, \quad |x| > \varepsilon,$$

так что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x) dx = 1.$$

Функцию  $\delta_\varepsilon(x)$  можно интерпретировать как плотность единичной массы, «размазанной» на интервал  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ .

Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \delta_\varepsilon(x) = \delta(x), \quad (7)$$

где предел понимается так:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x) \varphi(x) dx &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) \end{aligned} \quad (8)$$

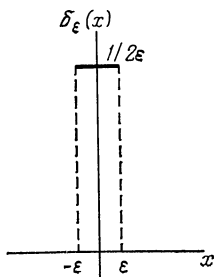


Рис. 21.

для любой непрерывной на всей оси функции  $\varphi(x)$ . Действительно, по теореме о среднем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(x) dx = \varphi(0) + o(1) \quad (\varepsilon \rightarrow 0),$$

откуда следует (8).

Обозначим символом  $\theta(x)$  ступенчатую функцию Хевисайда:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (9)$$

$$2^\circ. \quad \frac{d}{dx} \theta(x) = \delta(x).$$

Действительно, пусть  $\varphi(x)$  — основная функция. Согласно определению (5),

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \theta'(x) \varphi(x) dx &= - \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x) \varphi'(x) dx = \\ &= - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \end{aligned}$$

(так как  $\varphi(x)$  — финитная функция)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx.$$

Поскольку первый и последний интегралы равны для любой основной функции  $\varphi(x)$ , то  $\theta'(x) = \delta(x)$ , согласно определению равенства обобщенных функций (см. (4)).

3°. Пусть функция  $f(x)$  непрерывно дифференцируема на полуосях  $x \leq a$  и  $x \geq a$ , а в точке  $a$  может иметь разрыв. Тогда

$$f'(x) = \{f'(x)\} + A\delta(x-a).$$

Здесь  $A = f(a+0) - f(a-0)$  (т. е. величина скачка функции  $f(x)$ ), а  $\{f'(x)\}$  — обычная производная.

Действительно, по определению (5) имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx = \\ &= - \int_{-\infty}^a f(x) \varphi'(x) dx - \int_a^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx = \end{aligned}$$

(интегрируем по частям)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \{f'(x)\} \varphi(x) dx + A\varphi(a).$$

Последнее слагаемое равно  $\int_{-\infty}^{\infty} A\delta(x-a) \varphi(x) dx$ , и формула 3° доказана.

$$4^\circ. \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x-a) \varphi(x) dx = (-1)^n \varphi^{(n)}(a).$$



Здесь  $\varphi(x)$  — любая основная функция; если  $n$  фиксировано, то достаточно, чтобы функция  $\varphi(x)$  была  $n$  раз непрерывно дифференцируема на оси  $x$ .

$$5^\circ. \quad \delta(ax) = |a|^{-1} \delta(x) \quad (a \neq 0).$$

Пусть  $a > 0$  (для определенности),  $\varphi(x)$  — непрерывная на оси  $x$  функция. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax) \varphi(x) dx &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \varphi\left(\frac{t}{a}\right) dt = \frac{1}{a} \varphi(0) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} a^{-1} \delta(x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Так как первый и последний интегралы равны при любой непрерывной функции  $\varphi(x)$ , то  $5^\circ$  доказано.

$$6^\circ. \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} dx = 2\pi \delta(\alpha).$$

Здесь мы ограничимся совсем уж формальным выводом. Воспользуемся формулой обращения для преобразования Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \tilde{f}(\alpha) d\alpha,$$

где  $\tilde{f}(\alpha)$  — преобразование Фурье функции  $f(x)$ :

$$\tilde{f}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} f(x) dx.$$

Пусть  $f(x) = \delta(x)$ , тогда  $\tilde{f}(\alpha) \equiv 1$ ; подставляя это выражение в формулу обращения, получаем  $6^\circ$ .

Формул  $1^\circ - 6^\circ$  вполне достаточно для решения большинства прикладных задач, связанных с обыкновенными дифференциальными уравнениями.

**2. Толчки. Принцип Дюамеля.** Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a(t) \frac{dx}{dt} + b(t)x = V\delta(t-t_0), \quad (10)$$

где  $V \neq 0$  — постоянная, функции  $a(t)$ ,  $b(t)$  непрерывны на всей оси, для простоты. При  $t \neq t_0$  функция  $x(t)$  удовлетворяет однородному уравнению

$$lx(t) \equiv \frac{d^2x}{dt^2} + a(t) \frac{dx}{dt} + b(t)x = 0. \quad (11)$$

Покажем, что если  $x(t)$  — решение уравнения (10), то  $x(t)$  удовлетворяет уравнению (11) при  $t \neq t_0$  и следующим краевым условиям:

$$x(t_0 + 0) = x(t_0 - 0), \quad \frac{dx(t_0 + 0)}{dt} = \frac{dx(t_0 - 0)}{dt} + V. \quad (12)$$

Здесь обозначено  $x(t_0 \pm 0) = \lim_{\tau \rightarrow \pm 0} x(t_0 \pm \tau)$  и т. д.

Действительно, решение  $x(t)$  непрерывно на полуосях  $t < t_0$  и  $t > t_0$ . Далее, эта функция должна быть непрерывна при  $t = t_0$  — в противном случае производная  $\frac{dx}{dt}$  была бы суммой обычной функции и функции  $A\delta(t - t_0)$ ,  $A \neq 0$  (см. 3°), а функция  $\frac{d^2x}{dt^2}$  содержала бы слагаемое  $A\delta'(t - t_0)$  и потому левая часть уравнения (10) не совпала бы с правой. Итак,  $x(t_0 + 0) = x(t_0 - 0)$ , но производная  $\dot{x}(t)$  может иметь конечный скачок в точке  $t_0$ . Проинтегрируем обе части уравнения (10) по интервалу  $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$ ,  $\tau > 0$ , тогда получим

$$\dot{x}(t + \tau) - \dot{x}(t - \tau) + \int_{t_0 - \tau}^{t_0 + \tau} [a(t') \dot{x}(t') + b(t') x(t')] dt' = V.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при  $\tau \rightarrow 0$ , тогда интеграл обратится в нуль (подынтегральная функция ограничена) и мы получим

$$\dot{x}(t_0 + 0) - \dot{x}(t_0 - 0) = V.$$

Тем самым условие (12) получено.

Если рассматривать  $x(t)$  как координату точки, движущейся по оси  $x$ , то соотношения (12) означают, что в момент времени  $t = t_0$  координата точки не меняется, а скорость получает конечное приращение  $V$ . Такое воздействие на точку называется в механике и физике *толчком* (или *мгновенным ударом*); например, это резкий удар кием по бильярдному шару.

Толчок можно получить как результат предельного перехода. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a(t) \frac{dx}{dt} + b(t) x = V\delta_\tau(t - t_0),$$

где  $\delta_\tau(t) = 0$  при  $|t - t_0| > \tau$  и  $\delta_\tau(t) = 1/(2\tau)$  при  $|t - t_0| < \tau$ . Правая часть есть большая постоянная сила  $F_\tau$ ,

действующая малое время, причем так, что интеграл  $\int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} F_\tau d\tau = V \neq 0$  (импульс конечен). Решив это уравнение и перейдя к пределу при  $\tau \rightarrow +0$ , получим, что предельная функция  $x(t)$  будет решением уравнения (10). Но ценность дельта-функции в том и состоит, что ее применение позволяет избежать необходимости каждый раз совершать предельный переход — этот предельный переход содержится в самом определении дельта-функции (см. (7)).

Найдем результат воздействия толчка. Рассмотрим задачу Коши

$$x(t^*) = x_0, \quad \dot{x}(t^*) = x_1 \quad (13)$$

для уравнения (11), и пусть  $x_0(t)$  — решение этой задачи, определенное при  $-\infty < t < \infty$ . Положим

$$x(t) = x_0(t) + VG(t, t_0), \quad (14)$$

где  $x(t)$  — решение уравнения (10) с данными Коши (13). Тогда для функции  $G$  получим задачу Коши

$$\begin{aligned} \frac{d^2 G}{dt^2} + a(t) \frac{dG}{dt} + b(t)G &= 0, \quad t > t_0, \\ G(t, t_0)|_{t=t_0} &= 0, \quad \left. \frac{dG(t, t_0)}{dt} \right|_{t=t_0} = 1. \end{aligned} \quad (15)$$

Кроме того,

$$G(t, t_0) \equiv 0, \quad t < t_0. \quad (16)$$

Функция  $G(t, t_0)$  — это результат воздействия единичного толчка (т. е.  $V = 1$ ) на систему. Заметим, что  $G$  не зависит от данных Коши (13) (т. е. не зависит от того, как двигалась точка при  $t < t_0$ ).

Функция  $G(t, t_0)$  называется *функцией Грина* уравнения (10) и может быть найдена, если известна фундаментальная система решений  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  однородного уравнения (11). Так как  $G$  удовлетворяет этому уравнению при  $t > t_0$ , то

$$G(t, t_0) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t), \quad t > t_0,$$

где  $C_1$ ,  $C_2$  — постоянные. Данные Коши (15) приводят к системе уравнений

$$C_1 x_1(t_0) + C_2 x_2(t_0) = 0, \quad C_1 \dot{x}_1(t_0) + C_2 \dot{x}_2(t_0) = 1,$$

откуда находятся  $C_1, C_2$ , и мы получаем

$$G(t, t_0) = \frac{1}{\omega(t_0)} \begin{vmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) \\ x_1(t) & x_2(t) \end{vmatrix}. \quad (17)$$

Здесь  $\omega(t)$  — вронскиан решений  $x_1(t), x_2(t)$ . При  $t < t_0$  имеем  $G(t, t_0) \equiv 0$ .

Отметим также, что  $G(t, t_0)$  есть решение уравнения

$$\frac{d^2G}{dt^2} + a(t) \frac{dG}{dt} + b(t)G = \delta(t - t_0), \quad (18)$$

равное нулю при  $t < t_0$ .

Если функция Грина известна, то можно найти решение неоднородного уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a(t) \frac{dx}{dt} + b(t)x = f(t) \quad (19)$$

с любой (непрерывной) правой частью  $f(t)$ .

Теорема. *Функция*

$$x(t) = \int_{t_0}^t G(t, t') f(t') dt' \quad (20)$$

удовлетворяет уравнению (19) при  $t > t_0$  и нулевым данным Коши при  $t = t_0$ :

$$x(t_0) = 0, \quad \dot{x}(t_0) = 0. \quad (21)$$

Прежде чем привести строгое доказательство, приведем формальное. Так как  $G(t, t') \equiv 0$  при  $t < t'$ , то

$$x(t) = \int_{t_0}^{\infty} G(t, t') f(t') dt'.$$

Формально дифференцируя под знаком интеграла, получаем

$$lx(t) = \int_{t_0}^{\infty} lG(t, t') f(t') dt = \int_{t_0}^{\infty} \delta(t - t') f(t') dt' = f(t),$$

так что  $x(t)$  — решение уравнения (19).

Теперь строгое доказательство. Имеем  $x(t_0) = 0$ . Далее,

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{t_0}^t \frac{\partial G(t, t')}{\partial t} f(t') dt' + G(t, t) f(t).$$

Так как  $G(t, t) = 0$ , то

$$\frac{dx(t_0)}{dt} = 0, \quad \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \left. \frac{\partial G(t, t')}{\partial t} \right|_{t'=t} f(t) + \int_{t_0}^t \frac{\partial^2 G(t, t')}{\partial t^2} f(t') dt',$$

так что

$$lx(t) = f(t) + \int_{t_0}^t l_t G(t, t') f(t') dt' = f(t),$$

поскольку подынтегральное выражение равно нулю (см. (15)).

Правая часть формулы (20) — это континуальная (т. е. непрерывная) сумма толчков. Они совершаются в моменты времени  $t'$ , с плотностями  $f(t') dt'$ , где  $t'$  пробегает интервал  $(0, t)$ . Итак, результат воздействия на частицу непрерывно действующей силы  $f(t)$  эквивалентен воздействию континуальной суммы последовательных толчков. Этот факт (а точнее, формула (20)) называется *принципом Дюамеля*.

Замечание 1. Формулы (20), (17), дающие частное решение уравнения (19), совпадают с полученными в § 6 формулами (16) для частного решения неоднородного уравнения второго порядка.

Замечание 2. Рассмотрим нелинейное уравнение с дельта-функцией в правой части:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = V\delta(t - t_0).$$

Тем же способом, что и выше, можно показать, что  $x(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0$$

при  $t \neq t_0$  и условиям (12) при  $t = t_0$ .

Приведем аналогичные результаты для линейного уравнения  $n$ -го порядка

$$lx(t) \equiv \frac{d^nx}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n(t) x = V\delta(t - t_0),$$

где  $V \neq 0$ , коэффициенты  $a_1(t), \dots, a_n(t)$  непрерывны на всей прямой, для простоты. Тогда функция  $x(t)$  удовлетворяет однородному уравнению

$$lx(t) = 0$$

при  $t \neq t_0$  и условиям

$$\begin{aligned} x(t_0+0) &= x(t_0-0), \\ \frac{dx(t_0+0)}{dt} &= \frac{dx(t_0-0)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-2}x(t_0+0)}{dt^{n-2}} = \\ &= \frac{d^{n-2}x(t_0-0)}{dt^{n-2}}, \frac{d^{n-1}x(t_0+0)}{dt^{n-1}} = \frac{d^{n-1}x(t_0-0)}{dt^{n-1}} + V. \end{aligned}$$

В данном случае функция Грина  $G(t, t_0)$  есть решение задачи Коши

$$\begin{aligned} lG(t, t_0) &= 0, \quad t \neq t_0, \\ G|_{t=t_0} &= \frac{dG}{dt} \Big|_{t=t_0} = \dots = \frac{d^{n-2}G}{dt^{n-2}} \Big|_{t=t_0} = 0, \\ &\frac{d^{n-1}G}{dt^{n-1}} \Big|_{t=t_0} = 1, \end{aligned}$$

равное нулю при  $t < t_0$ . Функция

$$x(t) = \int_{t_0}^t G(t, t') f(t') dt'$$

при  $t > t_0$  удовлетворяет неоднородному уравнению

$$lx(t) = f(t)$$

и данным Коши

$$x|_{t=t_0} = \frac{dx}{dt} \Big|_{t=t_0} = \dots = \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} \Big|_{t=t_0} = 0.$$

**Замечание 3.** Рассмотрим систему из  $n$  уравнений

$$lx(t) \equiv \frac{d^2x}{dt^2} + A(t) \frac{dx}{dt} + B(t)x = V\delta(t-t_0).$$

Здесь  $A(t)$ ,  $B(t)$  — непрерывные  $(n \times n)$ -матрицы и  $V$  — постоянный  $n$ -вектор. Тогда решение  $x(t)$  удовлетворяет однородной системе  $lx(t) = 0$  при  $t \neq t_0$  и соотношениям (12). Роль функции Грина играет  $(n \times n)$ -матрица  $G(t, t_0)$  — матрица Грина, которая при  $t > t_0$  есть решение задачи Коши

$$lG = 0; \quad G|_{t=t_0} = 0, \quad \frac{dG}{dt} \Big|_{t=t_0} = I$$

и равна нулю при  $t < t_0$ . Здесь  $0, I$  — нулевая и единичная  $(n \times n)$ -матрицы. Теорема 1 остается в силе (в формуле (20),  $f$  есть  $n$ -вектор), но формула (17) уже не имеет места.

**3. Периодические толчки в системах с трением.** Рассмотрим однородное уравнение

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0, \tag{22}$$

где  $a, b$  — вещественные постоянные. Пусть  $a \geq 0, a^2 - 4b < 0$ ; тогда это уравнение описывает гармонические или затухающие колебания (гл. 1, § 6). Пусть на систему действуют толчки в последовательные моменты времени  $t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots \rightarrow +\infty$ , дающие положительные приращения скорости  $V_0, V_1, \dots, V_n, \dots$ . Тогда будет происходить борьба между трением (при  $a > 0$ ), которое стремится уменьшить амплитуду колебаний, и толчками, которые стремятся их увеличить. Выясним, к чему приводит эта борьба.

Сформулируем математическую постановку задачи. Зададим данные Коши  $x(t^*) = x_0, \dot{x}(t^*) = x_1; t^* < t_0$ . При  $t > t^*$  функция  $x(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = \sum_{k=0}^{\infty} V_k \delta(t - t_k). \quad (23)$$

Если  $x_0(t)$  — решение задачи Коши для однородного уравнения (22), определенное при  $t^* \leq t < \infty$ , то решение задачи Коши для уравнения (23) равно

$$x(t) = x_0(t) + \sum_{k=0}^{\infty} V_k G(t, t_k).$$

Не следует пугаться бесконечного ряда: если фиксировать момент времени  $t = \bar{t} > t^*$ , то останется лишь конечная сумма

$$x(t) = x_0(t) + \sum_{t_k \leq \bar{t}} V_k G(t, t_k),$$

так как  $G(t, t_k) \equiv 0$  при  $t < t_k$  (см. (16)). Уравнение (22) имеет решения

$$x_1(t) = \exp\{-\delta(t - t_0)\} \cos \omega(t - t_0),$$

$$x_2(t) = \exp\{-\delta(t - t_0)\} \sin \omega(t - t_0),$$

где обозначено

$$\delta = a/2, \quad \omega = \sqrt{b - a^2/4},$$

и из формулы (17) находим

$$G(t, t_0) = \exp\{-\delta(t - t_0)\} \frac{\sin \omega(t - t_0)}{\omega}$$

при  $t > t_0$ . Итак, если  $t_{n-1} < t < t_n$ , то

$$x(t) = x_0(t) + \sum_{k=0}^{n-1} V_k \exp\{-\delta(t - t_k)\} \frac{\sin \omega(t - t_k)}{\omega}. \quad (24)$$

Упростить эту сумму для любых  $t_k$ ,  $V_k$  невозможно, и мы ограничимся случаем, когда все толчки одинаковы и совершаются через равные промежутки времени:

$$V_k = V, \quad t_k = k\tau.$$

Результат воздействия периодических толчков существенно зависит от того, совпадает ли период  $T$  толчков с периодом  $T_0$  свободных колебаний.

Сумма из правой части (24) равна

$$S_n = \frac{V}{\omega} e^{-\delta t} \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{n-1} \exp\{k\tau\delta\} \exp\{i\omega(t - k\tau)\}.$$

Под знаком мнимой части стоит сумма геометрической прогрессии со знаменателем  $q = \exp\{\tau(\delta - i\omega)\}$ , так что

$$S_n = \frac{V}{\omega} e^{-\delta t} \operatorname{Im} \left( e^{i\omega t} \frac{q^n - 1}{q - 1} \right) \quad (q \neq 1). \quad (25)$$

1°. Пусть  $\delta = 0$  (свободные колебания — гармонические), но  $q \neq 1$ , т. е.  $\tau$  не имеет вид  $2\pi n/\omega = nT_0$ ,  $n$  — целое число. Это означает, что период толчков не есть целое кратное периода свободных колебаний. Преобразуя правую часть (25):

$$\begin{aligned} \exp\{i\omega t\} \frac{\exp\{-in\omega\tau\} - 1}{\exp\{-i\omega\tau\} - 1} &= \\ &= \exp\left\{i\omega\left(t - \frac{n-1}{2}\tau\right)\right\} \frac{\exp\left\{-i\frac{\omega n\tau}{2}\right\} - \exp\left\{i\frac{\omega n\tau}{2}\right\}}{\exp\left\{-i\frac{\omega\tau}{2}\right\} - \exp\left\{i\frac{\omega\tau}{2}\right\}} \end{aligned}$$

и используя формулы Эйлера, получаем, что при  $t_{n-1} < t < t_n$

$$x(t) = x_0(t) + \frac{V}{\omega} \frac{\sin \frac{n\omega\tau}{2}}{\sin \frac{\omega\tau}{2}} \sin \omega\left(t - \frac{n-1}{2}\tau\right).$$

Поэтому результат воздействия толчков есть гармоническое колебание с амплитудой

$$A_n = \frac{V}{\omega} \left| \frac{\sin \frac{n\omega\tau}{2}}{\sin \frac{\omega\tau}{2}} \right|.$$



Пусть, для простоты, число  $\omega\tau/(2\pi)$  иррационально. Тогда величина  $\left|\sin\frac{n\omega\tau}{2}\right|$  может принимать значения, сколь угодно близкие к любому числу  $a$ , лежащему на отрезке  $0 \leq a \leq 1$  (гл. 1, § 7), так что амплитуда  $A_n$  может принимать значения, сколь угодно близкие к любому числу, заключенному в отрезке  $\left[0, V\left(\omega\left|\sin\frac{\omega\tau}{2}\right|\right)^{-1}\right]$ . Это явление биений, о котором говорилось в гл. 1, § 7.

2°. Пусть  $\delta = 0$ , т. е. свободные колебания — гармонические, а период толчков совпадает с периодом свободных колебаний, т. е.  $\tau = 2\pi/\omega$ . Тогда  $\exp\{-i\omega k\tau\} = 1$ , так что при  $t_{n-1} < t < t_n$  получаем

$$x(t) = x_0(t) + \frac{nV}{\omega} \sin \omega t.$$

Амплитуда  $A_n = nV/\omega$  стремится к бесконечности с ростом  $n$  — возникает явление резонанса (ср. гл. 1, § 7). Аналогичное явление происходит и в том случае, когда  $\tau = 2\pi n/\omega$ , где  $n \geq 1$  — целое.

3°. Пусть  $\delta > 0$ , т. е. свободные колебания затухающие, а  $\tau = 2\pi/\omega$  — период толчков совпадает с периодом свободных ангармонических колебаний. На интервале  $t_{n-1} < t < t_n$  имеем  $t = n\tau + t'$ ,  $0 < t' < \tau$ , так что

$$x(t) = x_0(t) + \frac{V}{\omega} \frac{e^{\delta t'} - \exp\{-\delta(n\tau + t')\}}{e^{\delta\tau} - 1} \sin \omega t.$$

Если  $n \rightarrow \infty$ , то  $x_0(t) \rightarrow 0$ ,  $\exp\{-n\delta\tau\} \rightarrow 0$ , так что устанавливаются периодические колебания:

$$x(t) = \frac{V}{\omega(e^{\delta\tau} - 1)} \sin \omega t + o(1)$$

с амплитудой

$$A = \frac{V}{\omega(e^{\delta\tau} - 1)}.$$

Таков результат «борьбы» между трением и периодическими толчками. Если же  $\delta = 0$ , а  $e^{i\omega\tau} \neq 1$ , то, как и в случае 1°, возникают биения.

## АВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ И ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

### § 1. Автономные системы. Общие свойства

**1. Автономные системы.** Всюду в этой главе независимое переменное обозначается  $t$  и интерпретируется как время, неизвестные функции обозначаются  $x_1(t), \dots, x_n(t)$ .

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (или одно уравнение) называется *автономной* (или *динамической*, или *консервативной*), если независимое переменное явно не входит в систему.

Общий вид автономной системы из  $n$  уравнений первого порядка в нормальной форме следующий:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (1)$$

или подробнее,

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Всякую систему можно свести к автономной, если увеличить число неизвестных функций на единицу. Пусть, например, дана неавтономная система

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x).$$

Обозначим  $t = x_{n+1}$ , тогда

$$\frac{dx}{dt} = f(x_{n+1}, x), \quad \frac{dx_{n+1}}{dt} = 1$$

и мы получили автономную систему с  $(n+1)$ -й неизвестной функцией.

**Предположение.** Всюду в этой главе предполагается, что вектор-функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям основной теоремы в некоторой области  $G \subset \mathbf{R}^n$ , где координатами точки являются  $(x_1, \dots, x_n)$ , т. е.  $f(x)$  непрерывно дифференцируема в области  $G$ .

Все рассмотрения производятся в области  $G$ .

1°. Если  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$  — решение системы (1), то при любой постоянной  $c$  вектор-функция  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t+c)$  также является решением системы (1).

Доказательство следует из формул

$$\frac{d\boldsymbol{\varphi}(t+c)}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}(t+c)}{d(t+c)} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(t+c)).$$

Пусть  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$  — решение системы (1), определенное на интервале  $I$ . Тогда множество точек  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ ,  $t \in I$ , является кривой в пространстве  $\mathbf{R}_x^n$  (действительно,  $x_1 = \varphi_1(t), \dots, x_n = \varphi_n(t)$ ,  $t \in I$ , — параметрические уравнения кривой). Эту кривую будем называть *фазовой траекторией* (или просто *траекторией*) системы (1), а пространство  $\mathbf{R}_x^n$ , в котором расположены фазовые траектории — *фазовым пространством автономной системы* (1).

Интегральные кривые системы (1) изображаются в  $(n+1)$ -мерном пространстве  $\mathbf{R}_{t,x}^{n+1}$  с координатами  $(t, x_1, \dots, x_n)$ . Если  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$  — решение системы, то интегральная кривая задается уравнениями  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ ,  $t = t$ ;  $t \in I$ , так что соответствующая фазовая траектория является проекцией интегральной кривой на пространство  $\mathbf{R}_x^n$  параллельно оси  $t$  (рис. 22). Конечно, фазовая траектория дает меньше информации о решениях системы (1), чем интегральная кривая (которая дает полную информацию), но, тем не менее, для многих вопросов этого вполне достаточно. Примеры фазовых траекторий на плоскости были приведены в гл. 1, § 9.

2°. Две фазовые траектории либо не имеют общих точек, либо совпадают.

Доказательство. Пусть  $\gamma_1, \gamma_2$  — фазовые траектории, отвечающие решениям  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ ,  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\psi}(t)$ , имеют общую точку  $\mathbf{x}^0$ . Тогда  $\boldsymbol{\varphi}(t_1) = \mathbf{x}^0 = \boldsymbol{\psi}(t_2)$ . Рассмотрим вектор-функцию  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\psi}(t + (t_2 - t_1)) \equiv \boldsymbol{\chi}(t)$ . Она является решением системы (1), в силу свойства 1° и  $\boldsymbol{\chi}(t_1) = \boldsymbol{\varphi}(t_1)$ ,

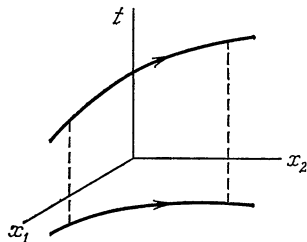


Рис. 22.

так что  $\chi(t) \equiv \varphi(t)$  в силу теоремы единственности. Поэтому  $\varphi(t) \equiv \psi(t + (t_2 - t_1))$ , т. е. кривые  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  совпадают.

Таким образом, фазовое пространство расслаивается на непересекающиеся траектории. Для неавтономной системы это не так: проекции интегральных кривых на пространство  $R_x^n$  могут пересекаться. Например, при  $n = 1$  всякая интегральная кривая проектируется на интервал оси  $x$ .

**Определение.** Точка  $a$  называется положением равновесия автономной системы (1), если

$$f(a) = 0.$$

3°. Если  $a$  — положение равновесия, то вектор-функция  $x(t) \equiv a$ ,  $-\infty < t < \infty$ , является решением системы (1).

Действительно,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt} = 0, \quad f(x(t)) = f(a) = 0.$$

Отсюда следует

4°. Если  $a$  — положение равновесия, то точка  $x = a$  есть фазовая траектория.

Положение равновесия называют также точкой покоя автономной системы; смысл этого термина ясен из 3°.

5°. Фазовая траектория, отличная от точки, есть гладкая кривая (т. е. в каждой точке имеется ненулевой касательный вектор).

Действительно, если  $x = \varphi(t)$  — решение системы (1), то касательный вектор в точке  $x^0 = \varphi(t_0)$  равен  $\frac{d\varphi(t_0)}{dt}$ .

В силу системы (1) этот вектор равен  $f(x^0) \neq 0$ .

**Теорема.** Всякая фазовая траектория принадлежит к одному из трех типов:

- 1) гладкая кривая без самопересечений;
- 2) замкнутая гладкая кривая (цикл);
- 3) точка.

Если фазовая траектория, отвечающая решению  $x = \varphi(t)$ , есть гладкая замкнутая кривая, то это решение есть периодическая функция  $t$ , с периодом  $T > 0$ .

**Доказательство.** Если фазовая траектория не есть точка (положение равновесия), то она является гладкой кривой, в силу 5°; гладкая кривая либо незамкнута, либо замкнута.

Пусть  $\gamma$  — замкнутая фазовая траектория, отвечающая решению  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ . Покажем, что это решение периодично. Возьмем точку  $\mathbf{a} \in \gamma$ ; в силу 1° можно считать, что  $\mathbf{a} = \boldsymbol{\varphi}(0)$ . Обозначим длину  $\gamma$  через  $l$ . Элемент длины дуги кривой  $\gamma$  равен

$$ds = |d\mathbf{x}| = \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| dt = |\mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(t))| dt.$$

Так как  $\gamma$  — замкнутое ограниченное множество и  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq 0$  на  $\gamma$ , то функция  $|\mathbf{f}(\mathbf{x})|$  ограничена на  $\gamma$  снизу и сверху положительными постоянными

$$0 < m \leq |\mathbf{f}(\mathbf{x})| \leq M < \infty, \quad \mathbf{x} \in \gamma.$$

Пусть  $\gamma_t$  — дуга кривой  $\gamma: \mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\tilde{t})$ ,  $0 \leq \tilde{t} \leq t$ , и  $l(t)$  — ее длина:

$$l(t) = \int_0^t |\mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(\tilde{t}))| d\tilde{t}.$$

Если  $t > 0$  достаточно мало, то  $\gamma_t$  будет частью кривой  $\gamma$ , так как  $l(t) \leq Mt < l$  при  $t < l/M$ . Функция  $l(t)$  — монотонно возрастающая функция  $t$  и  $l(+\infty) = +\infty$ , так как  $l(t) \geq mt$ . Следовательно, существует (и притом единственное)  $T > 0$  такое, что  $l(T) = l$ . Ясно, что  $\boldsymbol{\varphi}(T) = \boldsymbol{\varphi}(0)$ ; в противном случае дуга  $\gamma_T$  была бы частью кривой  $\gamma$ , и ее длина была бы меньше, чем  $l$ . Следовательно, число  $T$  есть наименьший период решения  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ .

Мы получили также формулу для периода  $T$ : это наименьший положительный корень уравнения

$$l = \int_0^T |\mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(t))| dt, \quad (2)$$

где  $l$  — длина кривой  $\gamma$ .

Установим *групповые свойства* решений автономной системы. Пусть  $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}^0)$  — решение задачи Коши

$$\mathbf{x}(t; \mathbf{x}^0)|_{t=0} = \mathbf{x}^0 \quad (3)$$

для системы (1).

$$\begin{aligned} 6^\circ. \mathbf{x}(t_1 + t_2; \mathbf{x}^0) &= \mathbf{x}(t_2; \mathbf{x}(t_1; \mathbf{x}^0)) = \\ &= \mathbf{x}(t_1; \mathbf{x}(t_2; \mathbf{x}^0)). \end{aligned} \quad (4)$$

Доказательство. Вектор-функции

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t) = \mathbf{x}(t; \mathbf{x}(t_1; \mathbf{x}^0)), \quad \boldsymbol{\varphi}_2(t) = \mathbf{x}(t + t_1; \mathbf{x}^0)$$

являются решениями системы (1), в силу 1°. При  $t=0$  имеем

$$\varphi_1(0) = \mathbf{x}(t_1; \mathbf{x}^0), \quad \varphi_2(0) = \mathbf{x}(t_1; \mathbf{x}^0),$$

т.е.  $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ . В силу теоремы единственности  $\varphi_1(t) \equiv \varphi_2(t)$  при всех  $t$ , откуда следует первое из равенств (4). Аналогично доказывается равенство первой и последней вектор-функций в (4).

Приведем еще менее формальное доказательство.

Нарисуем кривую  $\mathbf{x} = \varphi(t)$ , где  $\varphi(t) = \mathbf{x}(t; \mathbf{x}^0)$ . При  $t=0$  имеем  $\varphi(0) = \mathbf{x}^0$  и, двигаясь по кривой время

$t_1 + t_2$ , мы попадем в точку  $\varphi(t_1 + t_2) = \mathbf{x}(t_1 + t_2; \mathbf{x}^0)$ .

Теперь придем в эту точку другим способом. Сначала продвинемся вдоль кривой за время, равное  $t_1$ ; тогда попадем в точку  $\varphi(t_1) = \mathbf{x}(t_1; \mathbf{x}^0)$ . Затем из этой точки

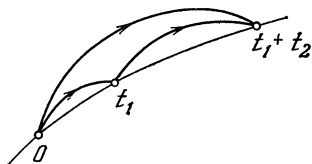


Рис. 23.

продвинемся за время  $t$ ; при этом уравнение кривой будет иметь вид  $\mathbf{x} = \psi(t) = \varphi(t; \mathbf{x}(t_1; \mathbf{x}^0))$ , так как при  $t=0$  имеем  $\psi(0) = \mathbf{x}(t_1; \mathbf{x}^0)$  (рис. 23). В силу единственности решения при  $t=t_2$  приведем в ту же точку, что и первым способом, т. е.  $\varphi(t_1 + t_2) = \psi(t_2)$ , откуда и следует (4). Если же сначала двигаться по кривой время  $t_2$ , а затем  $t_1$ , то получим второе из равенств (4).

Из этого свойства вытекает следующее.

$$7^\circ. \mathbf{x}(-t; \mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0)) = \mathbf{x}^0.$$

**2. Векторные поля. Механическая интерпретация фазовых траекторий.** Пусть в каждой точке  $\mathbf{x}$  области  $G \subset \mathbf{R}_x^n$  задан  $n$ -вектор  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Тогда говорят, что в области  $G$  задано *векторное поле*. Автономная система (1) полностью определяется заданием векторного поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Говорят, что кривая *принадлежит векторному полю*, если она в каждой своей точке касается вектора из этого векторного поля (рис. 24). Согласно этому определению фазовые траектории автономной системы (1) принадлежат векторному полю  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Действительно, пусть  $\mathbf{x} = \varphi(t)$  — решение системы (1), определенное при  $t \in I$ . Пусть  $n=2$ ; уравнения  $x_1 = \varphi_1(t)$ ,  $x_2 = \varphi_2(t)$ ,  $t \in I$ , определяют кривую (фазовую траекторию) на плоскости  $(x_1, x_2)$ . Как известно из

математического анализа, вектор  $(\varphi_1'(t_0), \varphi_2'(t_0))$  касается этой кривой в точке  $x_1^0 = \varphi_1(t_0)$ ,  $x_2^0 = \varphi_2(t_0)$ , так что вектор  $f(x_1^0, x_2^0)$  касается фазовой траектории (в точке  $(x_1^0, x_2^0)$ ). Это же рассуждение справедливо и в  $n$ -мерном пространстве. Исключение составляет, разумеется, случай, когда фазовая траектория состоит из одной точки — положения равновесия.

Точки векторного поля  $f(x)$ , в которых вектор  $f(x)$  — нулевой, называются *критическими* (или *особыми*) точками векторного поля. Таким образом, положения равновесия системы (1) — это критические точки векторного поля  $f(x)$ . Векторное поле устроено просто в малой окрестности любой некритической точки. Действительно, если

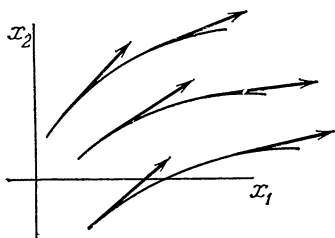


Рис. 24.

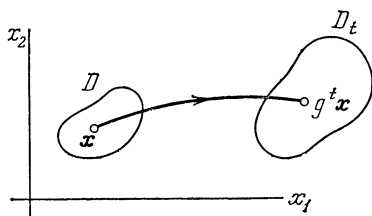


Рис. 25.

$f(a) \neq 0$ , то  $f(x) = f(a) + o(|x - a|)$  при  $x$ , близких к  $a$ , т. е. векторы в близких к  $a$  точках имеют примерно ту же длину и то же направление, что и вектор  $f(x)$ . Столь же просто устроены фазовые траектории вблизи точки, отличной от положения равновесия. Если точка  $a$  — критическая, то длина  $|f(x)|$  вектора  $f(x)$  стремится к нулю при  $x \rightarrow a$ . Направление же вектора  $f(x)$  при  $x$ , близких к  $a$ , может меняться весьма произвольно, и даже при  $n = 2$  (т. е. на плоскости) структура векторного поля (и соответствующих фазовых траекторий) может быть очень сложной.

С автономной системой (1) связано еще одно важное понятие — *фазовый поток*  $g^t$ . Вначале приведем пояснения. Возьмем любую точку  $x$  из области  $G$ , выпустим из нее фазовую траекторию и сдвинем точку вдоль траектории за время  $t$ . Полученную точку обозначим  $g^t x$ . Тем самым определено отображение  $x \rightarrow g^t x$  (каждая точка  $x$  области  $G$  отображается в точку  $g^t x$ , лежащую в области  $G$ ). Если  $D$  — подобласть области  $G$ , то тем самым определено отображение  $D \rightarrow g^t D$ , т. е. каждая точка  $x \in D$  переходит

при этом в точку  $g^t \mathbf{x} \in g^t D = D_t$  (рис. 25). Область  $D$  при таком отображении деформируется; в § 2 будет показано, как при такой деформации изменяется объем области  $D$ .

Строгое определение отображения  $g^t$  таково. Пусть  $\mathbf{x}(t; \mathbf{y})$  — решение задачи Коши  $\mathbf{x}|_{t=0} = \mathbf{y}$  для системы (1). Тогда

$$g^t \mathbf{y} = \mathbf{x}(t; \mathbf{y}). \quad (5)$$

Из свойств 6°, 7° вытекают следующие групповые свойства отображения  $g^t$ :

$$g^{t_1+t_2} = g^{t_1} g^{t_2} = g^{t_2} g^{t_1}, \quad g^t g^{-t} = I, \quad (6)$$

где  $I$  — тождественное отображение:  $I\mathbf{x} = \mathbf{x}$  для любой точки  $\mathbf{x} \in G$ . Первое из соотношений (6) означает, что  $g^{(t_1+t_2)} \mathbf{y} = g^{t_1}(g^{t_2} \mathbf{y})$  для любой точки  $\mathbf{y} \in G$ , и если переписать его с помощью (5), то мы получим первое из соотношений 6°. Множество преобразований, зависящих от одного вещественного параметра  $t$  и обладающего свойствами (6), называется *однопараметрической группой преобразований*; подробнее см. [3].

Приведем одну из физических интерпретаций автономной системы (1). Рассмотрим установившееся (стационарное) течение жидкости в трехмерном пространстве  $R^3$ . Это течение характеризуется тем, что частица жидкости в тот момент времени, в который она проходит через точку  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , имеет скорость  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v_1(\mathbf{x}), v_2(\mathbf{x}), v_3(\mathbf{x}))$ . Эта скорость зависит только от точки  $\mathbf{x}$ , но не от времени: если другая частица в другой момент времени пройдет через точку  $\mathbf{x}$ , то мгновенная скорость в этой точке будет той же. Тем самым в пространстве задано векторное поле — *поле скоростей*  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ , и соответствующая автономная система, описывающая движение частиц жидкости, имеет вид

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}).$$

Фазовые траектории называются в этом случае *линиями тока*; это кривые, по которым движутся (текут) частицы жидкости. Термин «фазовый поток» при такой гидромеханической интерпретации также становится абсолютно прозрачным.



Введем понятие *трубки тока*. Возьмем в трехмерном пространстве площадку  $S$  (т. е. поверхность), которая не касается ни в одной точке векторов поля скоростей, и выпустим из нее линии тока. Множество, которое они заполняют, и называется трубкой тока (рис. 26).

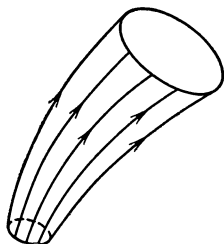


Рис. 26.

Точно так же и в  $n$ -мерном пространстве векторное поле  $f(x)$  (см. (1)) можно интерпретировать как поле скоростей, фазовые траектории — как линии тока,

и можно ввести понятие трубки траекторий (трубки тока).

## § 2. Структура решений автономной системы в окрестности неособой точки

Рассмотрим автономную систему из  $n$  уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (1)$$

в малой окрестности  $U$  точки  $a$ , отличной от положения равновесия:  $f(a) \neq 0$ .

Выясним поведение решений системы (1) в окрестности точки  $a$ . Векторное поле локально устроено весьма просто:  $f(x) \approx f(a)$  при  $x$ , близких к  $a$ , т. е. близкие векторы имеют примерно ту же длину и то же направление, что и  $f(a)$ . Фазовые траектории в малом будут почти прямыми, и малая окрестность точки  $a$  расслаивается на непересекающиеся фазовые траектории. Покажем, что в области  $U$  можно ввести такие координаты, в которых фазовые траектории будут прямыми линиями. Прежде чем приводить строгие формулировки и доказательства, поясним выбор этих координат. Пусть  $n=2$ ,  $a=(0, a)$ , при  $t=0$  траектория пересекает прямую  $x_2=a$  в точке  $(\xi, a)$ . Чтобы задать точку на траектории, необходимо задать еще время  $t$  (рис. 27). Итак, точка на фазовой траектории вполне определяется заданием двух чисел  $(\xi, t)$ , с одной стороны, или заданием декартовых координат точки  $(x_1, x_2)$ . Геометрически очевидно, что соответствие  $(x_1, x_2) \leftrightarrow (\xi, t)$  в малом взаимно однозначно. Уравнение

траектории в координатах  $(\xi, t)$  есть  $\xi = \xi_0$ , т. е. фазовая траектория в этих координатах — прямая линия (рис. 27).

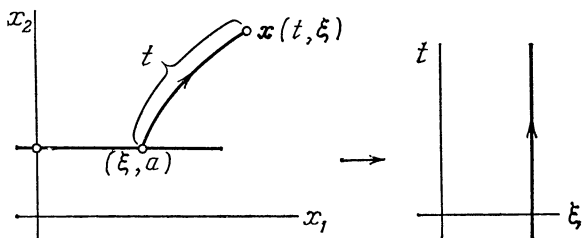


Рис. 27.

**Теорема.** Пусть точка  $a$  не является положением равновесия системы (1). Тогда в малой окрестности точки  $a$  систему (1) с помощью гладкой замены переменных можно привести к виду:

$$\frac{dy_1}{dt} = 0, \quad \frac{dy_2}{dt} = 0, \quad \dots, \quad \frac{dy_{n-1}}{dt} = 0, \quad \frac{dy_n}{dt} = 1. \quad (2)$$

Траектории системы (2) — прямые линии:

$$y_1 = c_1, \quad y_2 = c_2, \quad \dots, \quad y_{n-1} = c_{n-1}, \quad y_n = t + c_n.$$

**Доказательство.** Так как  $f(a) \neq 0$ , то можно, не ограничивая общности, считать, что  $f_n(a) \neq 0$ . Проведем гиперплоскость  $\Pi: x_n = a_n$ ; ее точки имеют вид  $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, a_n) \equiv (\xi, a_n)$ . Пусть  $x = \varphi(t, \xi)$  — решение системы (1) такое, что

$$\varphi(0, \xi) = (\xi, a_n), \quad (3)$$

т. е. начальная точка траектории при  $t=0$  лежит на гиперплоскости  $\Pi$ . Формула

$$x = \varphi(t, \xi) \quad (4)$$

дает искомую замену переменных: обозначим

$$y_1 = \xi_1, \quad \dots, \quad y_{n-1} = \xi_{n-1}, \quad y_n = t.$$

В новых координатах  $y$  траектории будут прямыми линиями. Действительно, по определению решения  $\varphi(t, \xi^0)$  имеем, что  $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$  постоянны вдоль траектории  $x = \varphi(t, \xi^0)$  и ее уравнение в переменных  $y$  имеет вид

$$y_1 = \xi_1^0, \quad y_2 = \xi_2^0, \quad \dots, \quad y_{n-1} = \xi_{n-1}^0, \quad y_n = t,$$

Остается проверить, что замена переменных  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})$  является гладкой, т. е. что выполняются условия теоремы об обратной функции. Имеем  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \rightarrow \mathbf{b} = (a_1, \dots, a_{n-1}, 0)$  при замене (4). Вычислим матрицу Якоби вектор-функции  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})$  при  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ . Имеем из (3)

$$\begin{aligned}\varphi_i(0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) &= \xi_i, & 1 \leq i \leq n-1, \\ \varphi_n(0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) &= a_n.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \varphi_i(\mathbf{b})}{\partial \xi_j} = \delta_{ij} \quad (1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq n-1).$$

Далее, в силу того, что  $\boldsymbol{\varphi}$  — решение системы (1), имеем

$$\frac{\partial \varphi_n(\mathbf{b})}{\partial t} = f_n(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{b})) = f_n(\mathbf{a}),$$

так что матрица Якоби имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 1 & \dots & 0 & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & f_n(\mathbf{a}) \end{pmatrix}.$$

(\* обозначены неизвестные нам числа). Поэтому  $\det A = f_n(\mathbf{a}) \neq 0$ , и условия теоремы об обратной функции выполнены.

### § 3. Изменение фазового объема

**1. Теорема Лиувилля.** Рассмотрим автономную систему из  $n$  уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (1)$$

Пусть  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \alpha)$  — решение этой системы, которое есть дважды непрерывно дифференцируемая вектор-функция от переменных  $t, \alpha$  в некоторой области; в этой области и производятся все рассуждения.

*Лемма 1. Производная по параметру есть решение системы*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha}. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right)$  — матрица Якоби (гл. 2, § 9).

Доказательство. Дифференцируя обе части системы (1) по  $\alpha$  и учитывая, что  $\frac{\partial^2 x_i}{\partial \alpha \partial t} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial \alpha}$ , получаем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \alpha}, \quad i=1, 2, \dots, n,$$

что и доказывает (2).

Система (2) называется *системой в вариациях*. Пусть решение  $\mathbf{x}(t, \alpha_0)$  известно; фиксируем  $\alpha = \alpha_0$ . Тогда

$$\left. \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}(t, \alpha_0)) \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0},$$

так что вектор-функция  $\frac{\partial \mathbf{x}(t, \alpha_0)}{\partial \alpha}$  есть решение линейной однородной системы. Вычисление высших производных  $\left( \frac{\partial}{\partial \alpha} \right)^k \mathbf{x} \Big|_{\alpha=\alpha_0}$  также сводится к решению линейных систем дифференциальных уравнений.

Рассмотрим семейство решений системы (1), зависящее от  $n$  параметров  $y_1, \dots, y_n$ :  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{y})$ . Будем предполагать, что эта вектор-функция дважды непрерывно дифференцируема по переменным  $t, y_1, \dots, y_n$  в некоторой области, и введем обозначения

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} = \left( \frac{\partial x_i(t, \mathbf{y})}{\partial y_j} \right), \quad 1 \leq i, j \leq n; \quad J(t, \mathbf{y}) = \det \frac{\partial \mathbf{x}(t, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}}. \quad (3)$$

Лемма 2. Пусть  $J(t, \mathbf{y}) \neq 0$ . Тогда справедлива формула Лиувилля

$$\frac{d}{dt} \ln J(t, \mathbf{y}) = \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t, \mathbf{y})). \quad (4)$$

Напомним, что *дивергенцией* (или *расходимостью*) векторного поля

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$$

называется функция

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_i}.$$

Доказательство. Из леммы 1 следует, что матрица  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}}$  удовлетворяет линейному матричному уравнению

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}},$$

где  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{y})$ . Применяя формулу дифференцирования определителя (гл. 3, § 4, лемма 1), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \ln J(t, \mathbf{y}) &= \text{Sp} \left( \mathbf{f}'(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} \right)^{-1} \right) = \\ &= \text{Sp} \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \text{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е. Рассмотрим неавтономную систему из  $n$  уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

и пусть  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\alpha})$ ,  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$  есть  $(n-1)$ -параметрическое семейство решений этой системы. Положим

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\alpha})}{\partial (t, \boldsymbol{\alpha})} = \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha_1} \dots \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha_{n-1}} \right), \quad J(t, \boldsymbol{\alpha}) = \det \frac{\partial \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\alpha})}{\partial (t, \boldsymbol{\alpha})}.$$

Тогда формула Лиувилля примет вид

$$\frac{d}{dt} \ln J(t, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(t, \mathbf{x})}{\partial x_i}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\alpha})$ .

Пусть  $D$  — ограниченная область в фазовом пространстве,  $D_t$  — область, полученная из области  $D$  сдвигом за время  $t$  вдоль фазовых траекторий системы (1), и  $V_t$  — объем этой области.

Т е о р е м а Л и у в и л л я. Справедлива формула

$$\frac{dV_t}{dt} = \int_{D_t} \text{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (6)$$

где  $d\mathbf{x} = dx_1 \dots dx_n$ .

Доказательство. Пусть  $\mathbf{x}(t, \mathbf{y})$  — решение задачи Коши  $\mathbf{x}|_{t=0} = \mathbf{y}$  для системы (1), где  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in D$ . Область  $D_t$  — это множество точек вида  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{y})$ , где  $\mathbf{y}$

пробегают область  $D$ . Воспользуемся обозначениями (3), тогда  $\frac{\partial x(0, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} = I$ ,  $J(0, \mathbf{y}) = 1$  и из (4) следует, что  $J(t, \mathbf{y}) > 0$  при всех  $t$ . Имеем

$$dx_1(t, \mathbf{y}) \dots dx_n(t, \mathbf{y}) = J(t, \mathbf{y}) dy_1 \dots dy_n = J(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

так что

$$V_t = \int_D J(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

$$\frac{dV_t}{dt} = \int_D \frac{d}{dt} J(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} =$$

(применяем формулу (4))

$$= \int_D \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t, \mathbf{y})) J(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{D_t} \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Следствие 1. Если

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv 0, \quad (7)$$

то фазовый поток сохраняет объем, т. е.  $V_t = V_0$  при всех  $t$ .

Напомним, что векторное поле, удовлетворяющее условию (7), в области  $D$  называется *соленоидальным*, или полем без источников и стоков (в области  $D$ ). В силу теоремы Гаусса — Остроградского поток соленоидального векторного поля через любую замкнутую гиперповерхность  $S$  (внутренность которой  $\Omega$  содержится в области  $S$ ), равен нулю, так как

$$\int_S (\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{n}_x) dS = \int_D \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Здесь  $dS$  — элемент гиперповерхности  $S$  и  $\mathbf{n}_x$  — единичный вектор внешней нормали к  $S$  в точке  $\mathbf{x}$ . Если интерпретировать векторное поле  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  как поле скоростей частиц жидкости (§ 1, п. 2), то условие (7) означает, что *жидкость несжимаема*: объем элемента жидкости сохраняется.

Из (6) нетрудно выразить  $V_t$  через  $V_0$ . Особенно просто выглядит такая формула для линейной автономной системы

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x},$$

где  $A$  — постоянная  $(n \times n)$ -матрица. В этом случае  $\operatorname{div}(Ax) =$   
 $= \sum_{i=1}^n a_{ii} = \operatorname{Sp} A$ , так что

$$V_t = e^{t \operatorname{Sp} A} V_0. \quad (8)$$

Рассмотрим гамильтонову систему уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H(x, p)}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H(x, p)}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Функция  $H(x, p)$  называется *функцией Гамильтона*. Фазовое пространство гамильтоновой системы имеет размерность  $2n$ : его точки имеют координаты  $(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$ .

Следствие 2. *Гамильтонова система сохраняет фазовый объем.*

Это вытекает из следствия 1, так как

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{x, p} \left( \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial x_n} \right) = \\ = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial p_i} \left( \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) = 0. \end{aligned}$$

Следствие 2 часто называют *теоремой Лиувилля*; она играет важную роль в статистической механике.

**2. Замечания о системах в трехмерном пространстве.** Рассмотрим автономную систему

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= v_1(x_1, x_2, x_3), \\ \frac{dx_2}{dt} &= v_2(x_1, x_2, x_3), \\ \frac{dx_3}{dt} &= v_3(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \quad (9)$$

Векторное поле  $v(x)$  будем интерпретировать как поле скоростей (см. § 1, п. 2). Векторное поле  $v(x)$  называется *потенциальным* (или *безвихревым*) в области  $D$ , если

$$\operatorname{rot} v(x) \equiv 0$$

в этой области.

**Теорема.** Пусть векторное поле  $v(x)$  — потенциальное в односвязной области  $D$ . Тогда система (9) не имеет замкнутых фазовых траекторий (циклов), лежащих в  $D$ .

**Доказательство.** Допустим противное, тогда существует замкнутая фазовая траектория  $\gamma$ , лежащая в области  $D$ . Ее уравнение есть  $x = \varphi(t)$ , где  $\varphi(t)$  — периодическая вектор-функция:  $\varphi(t+T) =$

$=\varphi(T)$  ( $T > 0$  — наименьший период). Пусть  $S$  — поверхность с краем  $\gamma$ , лежащая в  $D$ ,  $\Gamma$  — циркуляция векторного поля  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  вдоль кривой  $\gamma$ . По формуле Стокса имеем

$$\Gamma = \oint_{\gamma} (\mathbf{v}(\mathbf{x}), d\mathbf{x}) = \int_S (\text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{x}), \mathbf{n}_x) dS = 0.$$

С другой стороны,  $d\mathbf{x} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} dt = \mathbf{v}(\varphi(t)) dt$  на  $\Gamma$ , так что

$$\Gamma = \int_0^T (\mathbf{v}(\varphi(t)), \mathbf{v}(\varphi(t))) dt > 0,$$

так как скалярный квадрат положителен:  $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$ . Полученное противоречие доказывает теорему.

Выясним, что происходит с бесконечно малой каплей жидкости в процессе ее движения. Пусть  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ , точка  $\tilde{\mathbf{x}}$  лежит в шаре бесконечно малого радиуса  $\rho$  с центром в точке  $\mathbf{x}$ . За бесконечно малое время  $\tau$  точка  $\mathbf{x}$  смещается в точку  $\mathbf{y}$ , точка  $\tilde{\mathbf{x}}$  — в точку  $\tilde{\mathbf{y}}$ . Пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка по сравнению с  $\tau$ , получаем

$$\mathbf{y} \approx \mathbf{x} + \tau \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \tilde{\mathbf{y}} \approx \tilde{\mathbf{x}} + \tau \mathbf{v}(\tilde{\mathbf{x}}).$$

Вектор  $\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$  преобразуется в вектор

$$\mathbf{b} = \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y} \approx \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x} + \tau (\mathbf{v}(\tilde{\mathbf{x}}) - \mathbf{v}(\mathbf{x})).$$

Пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка относительно  $\rho$ , получаем

$$\mathbf{v}(\tilde{\mathbf{x}}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{v}'(\mathbf{x})(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}),$$

где  $\mathbf{v}'(\mathbf{x})$  — матрица Якоби  $\left( \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right)$ , так что

$$\mathbf{b} \approx (I + \tau \mathbf{v}'(\mathbf{x})) \mathbf{a}. \quad (10)$$

Итак, бесконечно малый вектор  $\mathbf{a}$  с центром в точке  $\mathbf{x}$  капли переходит в бесконечно малый вектор  $\mathbf{b}$  с центром в точке  $\mathbf{y}$  сдвинутой и деформированной капли. Капля сдвигается на вектор  $\tau \mathbf{v}(\mathbf{x})$ ; выясним, как она деформируется.

Представим матрицу  $U(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{v}'(\mathbf{x})$  в виде суммы симметричной матрицы  $\varepsilon(\mathbf{x})$  и кососимметричной матрицы  $\omega(\mathbf{x})$ :

$$U(\mathbf{x}) = \varepsilon(\mathbf{x}) + \omega(\mathbf{x}).$$

Из тождеств

$$u_{jk} = \varepsilon_{jk} + \omega_{jk}, \quad \varepsilon_{jk} = \varepsilon_{kj}, \quad \omega_{jk} = -\omega_{kj}$$

находим

$$\varepsilon_{jk}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j(\mathbf{x})}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right), \quad \omega_{jk}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j(\mathbf{x})}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right). \quad (11)$$

Пренебрегая бесконечно малыми порядка  $\tau^2$ , получаем

$$I + \tau U(\mathbf{x}) = I + \tau (\varepsilon(\mathbf{x}) + \omega(\mathbf{x})) = (I + \tau \varepsilon(\mathbf{x})) (I + \tau \omega(\mathbf{x})),$$



т. е. вектор  $\mathbf{b}$  получается из вектора  $\mathbf{a}$  в результате последовательного применения бесконечно малых линейных преобразований  $I + \tau \epsilon(\mathbf{x})$ ,  $I + \tau \omega(\mathbf{x})$ . Выясним геометрический смысл этих преобразований.

Матрица  $I + \tau \epsilon(\mathbf{x})$  — симметричная. Как известно из линейной алгебры [7], [17], вектор  $\tilde{\mathbf{b}} = (I + \tau \epsilon(\mathbf{x})) \mathbf{a}$  получается из вектора  $\mathbf{a}$  растяжением вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений (главные оси). Именно, для симметричной матрицы существует ортонормированный базис  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , состоящий из собственных векторов этой матрицы:  $(I + \tau \epsilon(\mathbf{x})) \times e_j = \lambda_j e_j$ , где  $\lambda_j$  — собственные значения. Вектор  $(I + \tau \epsilon(\mathbf{x})) \mathbf{a}$  получается из вектора  $\mathbf{a}$  растяжением вдоль направлений  $e_1, e_2, e_3$  с коэффициентами  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , так что

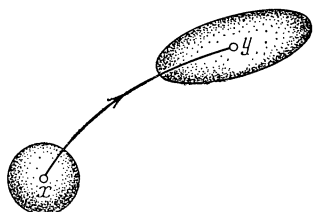


Рис. 28.

бесконечно малый шар радиуса  $\rho$  переходит в бесконечно малый эллипсоид с полуосями  $\rho(1 + \lambda_1)$ ,  $\rho(1 + \lambda_2)$ ,  $\rho(1 + \lambda_3)$  (рис. 28). Пусть  $V$  — объем шара,  $\tilde{V}$  — объем эллипсоида, тогда

$$\frac{\tilde{V}}{V} = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 + \lambda_3) \approx 1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 =$$

(так как  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{Sp } \epsilon$ )

$$= 1 + \tau \text{Sp } \epsilon(\mathbf{x}) = 1 + \tau \text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}).$$

Поэтому *относительное объемное расширение*  $\theta$  равно

$$\theta = \frac{\tilde{V} - V}{V} = \tau \text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \tau \text{Sp } \epsilon(\mathbf{x}). \tag{12}$$

Матрица  $\epsilon(\mathbf{x})$  называется *тензором деформации*.

Из формулы (11) следует, что

$$(I + \tau \omega(\mathbf{x})) \mathbf{a} = \mathbf{a} + \frac{1}{2} \tau \text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{x}) \times \mathbf{a}. \tag{13}$$

Следовательно, это преобразование — поворот вокруг оси, проходящей через начало координат и направленной вдоль вектора  $\text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{x})$ , на бесконечно малый угол  $\frac{1}{2} \tau |\text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{x})|$ . Это преобразование не изменяет объема (с точностью до малых высшего порядка относительно  $\tau$  и  $\rho$ ). Объем изменяет только преобразование  $I + \tau \epsilon(\mathbf{x})$ ; тем самым, в силу (12), заново доказана теорема Лиувилля (см. (6)).

Итак, бесконечно малая капля жидкости с центром в точке  $\mathbf{x}$  по прошествии бесконечно малого времени  $\tau$  испытывает:

- 1) смещение на вектор  $\tau \mathbf{v}(\mathbf{x})$  (поступательное движение);
- 2) вращение с мгновенной угловой скоростью  $\frac{\tau}{2} \text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{x})$ ;

3) растяжение вдоль трех взаимно перпендикулярных осей (деформация).

Вычислим приращение длины вектора. Оно происходит только при деформации. Имеем  $ds = \mathbf{a}$ ,  $d\tilde{s} = \mathbf{b}$ , так что

$$\begin{aligned} d\tilde{s}^2 - ds^2 &= ((I + \tau \varepsilon(\mathbf{x})) \mathbf{a}, (I + \tau \varepsilon(\mathbf{x})) \mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \mathbf{a}) \approx \\ &\approx 2\tau (\varepsilon \mathbf{a}, \mathbf{a}) = 2\tau \sum_{j, k=1}^n \varepsilon_{jk}(\mathbf{x}) dx_j dx_k. \end{aligned}$$

С точностью до бесконечно малых высшего порядка

$$d\tilde{s}^2 = ds^2 + \tau \sum_{j, k=1}^n \left( \frac{\partial v_j(\mathbf{x})}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right) dx_j dx_k. \quad (14)$$

Точно так же описываются малые деформации твердого тела.

## § 4. Производная в силу системы.

### Первые интегралы

1. Производная в силу системы. Рассмотрим систему из  $n$  уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}). \quad (1)$$

Предположения. В некоторой области  $G$  в пространстве  $\mathbf{R}_{t, \mathbf{x}}^{n+1}$  для системы (1) выполнены условия основной теоремы (гл. 2, § 1). Все прочие функции  $u(t, \mathbf{x})$ , которые рассматриваются ниже, непрерывно дифференцируемы в области  $G$ .

Пусть  $u(t, \mathbf{x})$  — некоторая функция,  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$  — решение системы (1). Вдоль этой интегральной кривой функция  $u$  будет функцией одной переменной  $t$ :

$$u(t, \boldsymbol{\varphi}(t)) \equiv \omega(t). \quad (2)$$

Дифференцируя это тождество по  $t$  и учитывая, что  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$  — решение системы (1), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\omega(t)}{dt} &= \frac{\partial u(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial u(t, \mathbf{x})}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} \Big|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)} = \\ &= \frac{\partial u(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial u(t, \mathbf{x})}{\partial x_j} f_j(t, \mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)}. \end{aligned}$$

Полученное выражение называется *производной функции  $u$  в силу системы* (1) и обозначается  $\dot{u}$  или  $\frac{du}{dt}$ . Таким образом,

$$\dot{u}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial u(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial u(t, \mathbf{x})}{\partial x_j} f_j(t, \mathbf{x}). \quad (3)$$

Рассмотрим автономную систему из  $n$  уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (4)$$

и функцию  $u(\mathbf{x})$ . Ее производная в силу системы (4) равна

$$\dot{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_j} f_j(\mathbf{x}) \equiv (\nabla u(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x})), \quad (5)$$

где  $\nabla u(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right)$  — градиент функции  $u(\mathbf{x})$ . *Производная в силу системы* (4) называется также *производной по направлению векторного поля* или *производной Ли* (в честь шведского математика Софуса Ли).

**З а м е ч а н и е 1.** Производной функции  $u(\mathbf{x})$  по направлению  $l$  называется величина

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial l} = (\nabla u(\mathbf{x}), l),$$

где  $l$  — единичный вектор. Это частный случай производной по направлению векторного поля; последняя учитывает не только направление, но и длину вектора (см. (5)).

**Лемма.** Пусть  $\dot{u}(\mathbf{x})$  — производная в силу системы (4),  $\dot{u}(\mathbf{x}) \geq 0$  ( $\dot{u}(\mathbf{x}) \leq 0$ ) в некоторой области  $D$ . Тогда функция  $u(\mathbf{x})$  не убывает (не возрастает) вдоль любой фазовой траектории системы (4), лежащей в области  $D$ .

Доказательство следует из (2): если  $\dot{u}(\mathbf{x}) \geq 0$ , то  $\omega'(t) \geq 0$  и функция  $u(\varphi(t)) = \omega(t)$  не убывает с ростом  $t$ .

Пусть  $u(\mathbf{x})$  — гладкая функция,  $\nabla u(\mathbf{x}) \neq 0$  в некоторой области  $D$ . Тогда уравнение  $u(\mathbf{x}) = 0$  определяет гладкую гиперповерхность  $S$  (гл. 2, § 10), а вектор  $\nabla u(\mathbf{x})$  ортогонален к  $S$  в точке  $\mathbf{x}$  и направлен в сторону возрастания функции  $u(\mathbf{x})$ . Если  $\dot{u}(\mathbf{x}) \leq 0$  в области  $D$ ,

то вектор  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  образует прямой или тупой угол с вектором  $\nabla u(\mathbf{x})$ , и потому направлен в сторону убывания (или постоянства) функции  $u(\mathbf{x})$ . В ту же сторону направлена фазовая траектория  $\gamma$  системы (4), выходящая из точки  $\mathbf{x}$ , так как  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  — касательный вектор к  $\gamma$  в точке  $\mathbf{x}$ . Эти рассуждения дают геометрическое доказательство леммы.

*Производная в силу системы (4) инвариантна относительно гладкой замены переменных.* Это означает следующее. Сделаем гладкую обратимую замену переменных  $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y})$  (гл. 2, § 10), тогда функция  $u(\mathbf{x})$  перейдет в функцию  $\tilde{u}(\mathbf{y}) \equiv u(\Phi(\mathbf{y}))$ , а система (4) — в систему

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{y}). \quad (4')$$

Производная в силу системы при этом не изменяется, т. е.

$$\dot{u}(\mathbf{x}) = \dot{\tilde{u}}(\mathbf{y}),$$

если  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  связаны соотношением  $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y})$ . Здесь  $\dot{\tilde{u}}(\mathbf{y})$  — производная в силу системы (4), а  $\dot{u}(\mathbf{x})$  — производная в силу системы (4'). Действительно (гл. 2, § 11),

$$\nabla_{\mathbf{y}} \tilde{u}(\mathbf{y}) = ((\Phi'(\mathbf{y}))^t)^{-1} \nabla u(\mathbf{x}), \quad \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{y}) = (\Phi'(\mathbf{y}))^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

где  $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y})$ , так что

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{u}}(\mathbf{y}) &= (((\Phi'(\mathbf{y}))^t)^{-1} \nabla u(\mathbf{x}), \\ \Phi'(\mathbf{y}) \mathbf{f}(\mathbf{x})) &= (\nabla u(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \dot{u}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

**2. Первые интегралы.** Функция  $u(\mathbf{x})$  называется *первым интегралом* автономной системы (4), если она постоянна вдоль каждой траектории этой системы. Таким образом, если  $\mathbf{x} = \Phi(t)$  — решение системы (4), то функция  $u(\Phi(t)) \equiv \equiv \text{const}$  при всех  $t$ .

*Теорема 1.* Для того чтобы функция  $u(\mathbf{x})$  была первым интегралом системы (4), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла соотношению

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_j} f_j(\mathbf{x}) = 0. \quad (6)$$

*Доказательство.* Пусть  $u(\mathbf{x})$  — первый интеграл (в некоторой области  $D$ ) и  $\mathbf{x} = \Phi(t)$  — решение системы (4).

Тогда функция  $\omega(t) = u(\varphi(t))$  — постоянная, так что  $\dot{u}(\mathbf{x}) \equiv 0$  на этой траектории, и из (5) следует (6). Пусть соотношение (6) выполнено в области  $D$  и  $\mathbf{x} = \varphi(t)$  — уравнение фазовой траектории, лежащей в области  $D$ . Тогда

$$\frac{d}{dt} u(\varphi(t)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_j} f_j(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\varphi(t)} = 0$$

в силу (6), т. е.  $u(\varphi(t))$  не зависит от  $t$ .

**Замечание 2.** Аналогичное утверждение верно и для неавтономной системы (1); условие (6) заменяется следующим:

$$\frac{\partial u(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial u(t, \mathbf{x})}{\partial x_j} f_j(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (7)$$

**Замечание 3.** Условие (10) имеет простой геометрический смысл. Вектор  $\nabla u(\mathbf{x})$  ортогонален к гиперповерхности  $S: u(\mathbf{x}) = c$ ; из условия (6) следует, что вектор  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  касается поверхности  $S$ , так как он ортогонален вектору  $\nabla u(\mathbf{x})$ . Поэтому фазовая траектория  $\gamma$ , проходящая через точку  $\mathbf{x}^0 \in S$ , лежит на гиперповерхности  $S$ , так что  $u(\mathbf{x}) \equiv c$  на  $\gamma$ .

**Следствие.** *Первые интегралы инвариантны относительно выбора системы координат.*

Именно, сделаем гладкую обратимую замену переменных  $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{y})$ , тогда система (4) перейдет в систему (4'). Если  $u(\mathbf{x})$  — первый интеграл системы (4), то функция  $\tilde{u}(\mathbf{y}) = u(\varphi(\mathbf{y}))$  — первый интеграл системы (4'). Действительно,  $\dot{\tilde{u}}(\mathbf{y}) = \dot{u}(\mathbf{x}) = 0$ , т. е. функция  $\tilde{u}(\mathbf{y})$  удовлетворяет соотношению (6), записанному в переменных  $\mathbf{y}$ :

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{u}(\mathbf{y})}{\partial y_j} \tilde{f}_j(\mathbf{y}) = 0.$$

**Пример 1.** Решения системы

$$\frac{dy_1}{dt} = 0, \dots, \frac{dy_{n-1}}{dt} = 0, \frac{dy_n}{dt} = 1 \quad (8)$$

даются формулами

$$y_1 = c_1, \dots, y_{n-1} = c_{n-1}, y_n = t + c_n.$$

Функции  $v_1(\mathbf{y}) = y_1, \dots, v_{n-1}(\mathbf{y}) = y_{n-1}$  — первые интегралы этой системы. Всякий первый интеграл системы (8) есть функция, не зависящая от  $y_n$ :  $u(\mathbf{y}) = \omega(y_1, \dots, y_{n-1})$ .

В этом примере имеется  $n - 1$  независимых первых интегралов (понятие независимости функций см. гл. 2, § 11), и любой первый интеграл есть функция от них. Точно такое же утверждение, с некоторыми оговорками, справедливо для любой автономной системы.

**Теорема 2.** Пусть точка  $\mathbf{a}$  не есть положение равновесия автономной системы (4). Тогда в некоторой окрестности  $U$  точки  $\mathbf{a}$  существует  $n - 1$  независимых первых интегралов  $u_1(\mathbf{x}), \dots, u_{n-1}(\mathbf{x})$ , и всякий первый интеграл  $u(\mathbf{x})$  есть функция от них, т. е.

$$u(\mathbf{x}) = F(u_1(\mathbf{x}), \dots, u_{n-1}(\mathbf{x})). \quad (9)$$

**Доказательство.** Пусть окрестность  $U$  достаточно мала, тогда существует окрестность  $V$  точки  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$  и гладкая обратимая замена переменных  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})$ , приводящая систему (4) к виду (8) (§ 2). Полученная система имеет независимые первые интегралы  $v_1(\mathbf{y}) = y_1, \dots, v_{n-1}(\mathbf{y}) = y_{n-1}$ , и всякий первый интеграл  $\mathbf{v}(\mathbf{y})$  есть функция от них:  $\mathbf{v}(\mathbf{y}) = F(v_1(\mathbf{y}), \dots, v_{n-1}(\mathbf{y}))$ , как показано в примере 1. При обратной замене переменных  $\mathbf{y} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})$  эти первые интегралы переходят в первые интегралы  $u_1(\mathbf{x}), \dots, u_{n-1}(\mathbf{x})$  системы (4), которые также независимы (гл. 2, § 10),  $v(\mathbf{y})$  перейдет в первый интеграл  $u(\mathbf{x})$ , откуда следует (9).

**Пример 2.** В теореме 2 предполагается, что точка  $\mathbf{a}$  не является положением равновесия системы (4). Это условие существенно: например, всякий первый интеграл системы

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y,$$

непрерывный в окрестности положения равновесия  $(0, 0)$ , есть тождественная постоянная. Действительно, фазовые траектории этой системы — лучи  $x = Ae^t, y = Be^t$  (т. е.  $y = Cx$ ), выходящие из начала координат. Первый интеграл  $u(x, y)$  постоянен вдоль любого такого луча и из непрерывности  $u$  в начале координат следует, что  $u \equiv \text{const}$ . В этом примере всякий первый интеграл имеет вид  $u(x, y) = f(y/x)$  (если мы рассматриваем область, не содержащую

оси  $x$ ); лучше записать первый интеграл в виде  $u(x, y) = F(\varphi)$ , где  $\varphi$  — полярный угол.

Первый интеграл  $u(\mathbf{x})$  — это некоторый закон сохранения: величина  $u(\mathbf{x})$  при движении точки вдоль фазовой траектории  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$  величина  $u(\mathbf{x})$  сохраняет то же значение, что и в первоначальный момент времени. Именно из таких соображений (т. е. как законы сохранения) и были получены многие первые интегралы дифференциальных уравнений классической механики.

Пример 3. Функция Гамильтона  $H(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  есть первый интеграл гамильтоновой системы

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Действительно, производная функции  $H$  в силу системы равна

$$\dot{H}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \left( -\frac{\partial H}{\partial x_i} \right) = 0.$$

Функция Гамильтона — это энергия соответствующей механической системы, и тот факт, что она есть первый интеграл, выражает закон сохранения энергии.

Пример 4. Одномерное движение материальной точки массы  $m$  в потенциальном поле описывается уравнением Ньютона

$$m\ddot{x} = -U'(x).$$

Его первый интеграл — это функция  $v(x, \dot{x})$ , которая постоянна при  $x = \varphi(t)$ ,  $\dot{x} = \dot{\varphi}(t)$ , где  $x = \varphi(t)$  — решение. Умножив обе части уравнения на  $\dot{x}$ , получим

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) \right) = 0,$$

так что

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E,$$

где  $E$  — постоянная. Левая часть этого равенства — первый интеграл. Он носит название *интеграл энергии*, так как равен сумме кинетической энергии и потенциальной энергии. Аналогично доказывается, что система уравнений Ньютона

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla U(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n).$$

имеет первый интеграл (интеграл энергии)

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E. \quad (10)$$

Для доказательства достаточно умножить обе части системы скалярно на вектор  $\dot{x}$ .

Если известен первый интеграл системы, то ее порядок можно понизить на единицу. Для наглядности рассмотрим автономную систему из трех уравнений

$$\frac{dx}{dt} = a(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = b(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = c(x, y, z) \quad (11)$$

и пусть  $u(x, y, z)$  — первый интеграл. Уравнение  $u(x, y, z) = c$  определяет поверхность  $S$  в пространстве (для этого достаточно, чтобы  $\nabla u \neq 0$  на  $S$  — гл. 2, § 10). Эта поверхность расслаивается на фазовые траектории. Действительно, пусть  $\gamma$  — фазовая траектория, заданная уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

и пусть точка  $(x_0, y_0, z_0) = P_0$ , отвечающая значению  $t = t_0$ , лежит на  $S$ . Так как  $u(x_0, y_0, z_0) = c$  и функция  $u$  сохраняет постоянное значение вдоль  $\gamma$ , то  $u(x, y, z) = c$  вдоль  $\gamma$ , т. е. кривая  $\gamma$  лежит на поверхности  $S$ . Пусть, для определенности,  $\frac{\partial u(P_0)}{\partial z} \neq 0$ ; последующие рассуждения носят локальный характер, т. е. действие происходит в малой окрестности точки  $P_0$ . По теореме о неявной функции из соотношения  $u(x, y, z) = c$  можно выразить  $z$  через  $x, y$ , так что

$$z = \varphi(x, y, c). \quad (12)$$

Тогда система (11) сведется к системе из двух уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(x, y, \varphi(x, y, c)), \\ \frac{dy}{dt} &= b(x, y, \varphi(x, y, c)). \end{aligned}$$

Решив эту систему, мы восстановим  $z$  по формуле (12). Третье же уравнение системы (11) обратится в тождество. Аналогично доказывается, что если известен первый интеграл системы из  $n$  уравнений (4), то ее можно свести к системе из  $(n-1)$ -го уравнения.



Если известны два (независимых) первых интеграла  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  системы (11), то эта система интегрируется. Действительно, рассмотрим поверхности  $S_1, S_2$ , заданные уравнениями

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= c_1, \\ v(x, y, z) &= c_2. \end{aligned} \quad (13)$$

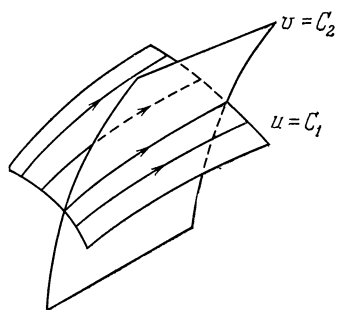


Рис. 29.

Пусть  $\gamma$  — линия их пересечения (рис. 29), тогда  $\gamma$  — фазовая траектория. Действительно, выпустим из некоторой точки  $P_0 \in \gamma$  фазовую траекторию; по доказанному выше она обязана лежать и на поверхности  $S_1$ , и на поверхности  $S_2$ , а потому совпадает с  $\gamma$ .

Таким образом, интегрирование системы (11) свелось к тому, чтобы из системы (13) выразить одно из переменных через два других.

## § 5. Одномерное движение частицы в потенциальном поле

Рассмотрим одномерное уравнение Ньютона

$$m\ddot{x} = -U'(x). \quad (1)$$

Оно эквивалентно системе

$$\dot{x} = y, \quad m\dot{y} = -U'(x), \quad (2)$$

которая имеет первый интеграл (§ 4)

$$\frac{my^2}{2} + U(x) = E. \quad (3)$$

Исследование фазовых траекторий системы (2) свелось, таким образом, к исследованию семейства кривых, зависящего от параметра  $E$ . На заданной траектории значение энергии  $E$  можно найти из начальных условий: если  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = x_1$ , то  $E = mx_1^2/2 + U(x_0)$ .

Положения равновесия системы (2) — это точки вида  $(a, 0)$ , где  $U'(a) = 0$ . Фазовые траектории, отличные от положений равновесия, — гладкие кривые, как показано в § 1. Можно проверить этот факт непосредственно: гра-

диент левой части уравнения (3) равен  $(U'(x), m\dot{y})$  и обращается в нуль только в положениях равновесия.

Соотношение (3) позволяет проинтегрировать уравнение Ньютона; именно, если  $x(t_0) = x_0$ ,  $\dot{x}(t_0) = x_1$ , то

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}, \quad \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} = t - t_0, \quad (4)$$

значение  $E$  указано выше.

Пусть потенциальная энергия  $U(x)$  имеет вид, изображенный на рис. 30. Будем предполагать, что функция

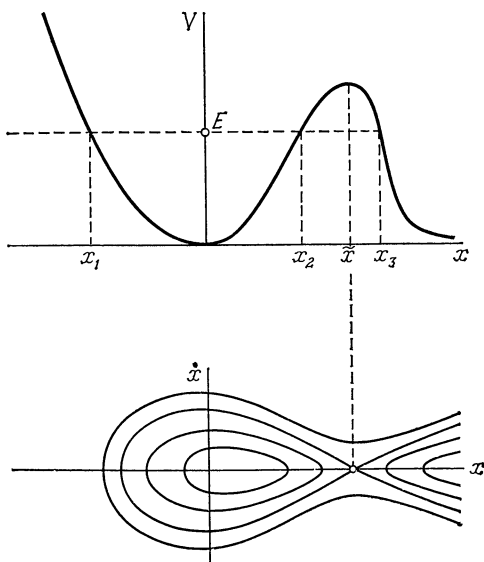


Рис. 30.

$U(x)$  дважды непрерывно дифференцируема при  $-\infty < x < \infty$ , имеет только две точки  $0, \tilde{x}$ , где  $U'(x) = 0$  и  $U(-\infty) = +\infty$ ,  $U(+\infty) = 0$ . В этом случае имеются два положения равновесия  $(0, 0)$  и  $(\tilde{x}, 0)$ . Так как  $U(x) \leq E$  (см. (3)), то движение с заданной полной энергией  $E$  может происходить только в тех областях, где  $U(x) \leq E$ ; в данном примере — только на интервалах  $(x_1, x_2)$  и  $(x_3, \infty)$ . В точках, где  $U(x) = E$ , имеем  $\dot{x} = 0$ , т. е. скорость частицы обращается в нуль; они называются *точками остановки*.

1°. Пусть начальная точка  $x_0$  лежит на отрезке  $[x_1, x_2]$ , тогда  $x(t)$  лежит на этом отрезке при всех  $t$ ,  $-\infty < t < \infty$ . Такое движение называется *финитным*; частица колеблется между точками  $x_1$  и  $x_2$ . Пусть  $\dot{x}(0) > 0$ , тогда при малых  $t > 0$  частица будет двигаться вправо от точки  $x_0$ , так что

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}} = t$$

при малых  $t > 0$ . В момент времени

$$t_1 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}} \quad (5)$$

частица придет в точку  $x_2$ . Заметим, что  $t_1 < \infty$ : поскольку  $U'(x_2) \neq 0$ , то  $E-U(x) \sim -U'(x_2)(x-x_2)$  при  $x \rightarrow x_2$  и интеграл сходится. Затем частица поворачивает налево (по этой причине точки остановки называются также *точками поворота*) и ее движение описывается уравнением

$$t = t_1 - \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_2}^x \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}$$

до того момента времени, пока она не придет в точку поворота  $x_1$ . После этого она поворачивает направо и т. д. Период  $T$  колебаний частицы равен удвоенному времени, за которое частица пробегает интервал  $(x_1, x_2)$ , т. е.

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}. \quad (6)$$

Напомним, что  $U(x_j(E)) = E$ ,  $j = 1, 2$ . Фазовая траектория — замкнутая кривая, содержащая внутри себя положение равновесия  $(0, 0)$  и картина фазовых траекторий такая же, как и в случае центра (рис. 10).

2°. Пусть начальная точка  $x(0) = x_0$  лежит справа от точки поворота  $x_3$  (рис. 30), и пусть  $\dot{x}(0) < 0$ . Тогда движение частицы описывается соотношением

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}} = -t,$$

пока она не дойдет до точки поворота  $x_3$ , а в последующие моменты времени — уравнением

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_2}^x \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}} = t - t_3, \quad t_3 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x_3} \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}.$$

При  $t \rightarrow +\infty$  имеем  $x \rightarrow +\infty$ , т. е. частица уходит на бесконечность (напомним, что  $U(+\infty) = 0$ ). Такое движение называется *инфинитным*. Аналогично,  $x(t) \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow -\infty$ , и фазовая траектория — бесконечная незамкнутая кривая (рис. 30).

3°. Если энергия частицы  $E > E_0$ , то движение также будет инфинитным.

4°. Пусть  $E = E_0$ . Тогда частица будет совершать финитное движение, если  $x < \tilde{x}$ , и инфинитное, если  $x > \tilde{x}$ . Соответствующие фазовые траектории называются *сепаратрисами* (разделяющими); одна из них отделяет область финитных движений от области инфинитных движений. Структура траекторий в окрестности положения равновесия  $(\tilde{x}, 0)$  такая же, как и в случае седла (рис. 9, 30).

Пусть  $x_0 < \tilde{x}$ ,  $\dot{x}(0) > 0$ , тогда частица будет двигаться вправо от точки  $x_0$  и придет в точку  $x$  за бесконечное время. Действительно, это время дается формулой (5), где  $E = E_0$ ,  $x_2 = \tilde{x}$ . Если порядок касания кривой  $U = U(x)$  и прямой  $U = E_0$  конечен, то

$$E_0 - U(x) \sim A(x - \tilde{x})^n \quad (x \rightarrow \tilde{x}),$$

где  $A \neq 0$ ,  $n \geq 2$ , и потому интеграл (5) расходится; тем более он расходится, если порядок касания бесконечен. Такое движение называется в механике *лимитационным*.

Пример 1. Рассмотрим колебания плоского математического маятника — точка массы  $m$  подвешена на конце нити длины  $l$  и находится в однородном поле тяжести. Колебания маятника описываются уравнением

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0,$$

которое имеет интеграл энергии

$$\frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi = E, \quad (7)$$

где  $\varphi = \varphi(t)$  — угол отклонения маятника от вертикали. Положим  $\varphi = x$ ,  $\dot{\varphi} = y$  и перейдем к системе единиц, в кото-

рой  $m=1$ ,  $l=1$ , тогда фазовые траектории маятника задаются уравнениями

$$\frac{y^2}{2} - \cos x = E.$$

Положения равновесия — точки  $(n\pi, 0)$ ,  $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Четным значениям  $n$  отвечает нижняя точка подвеса, нечетным — верхняя. Ввиду периодичности косинуса достаточно изобразить траектории при  $-\pi \leq x \leq \pi$ . Тем же способом, что и выше, получаем, что при  $-1 < E < 1$  фазовые траектории — замкнутые кривые, содержащие внутри себя точку  $(0, 0)$ , при  $|E| > 1$  — незамкнутые

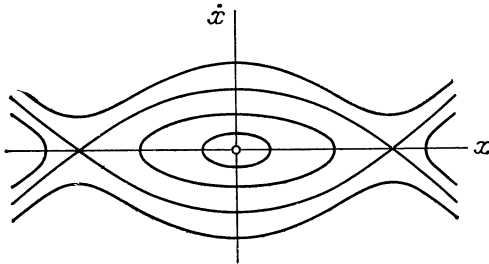


Рис. 31.

бесконечные периодические по  $x$  кривые (рис. 31). Области, отвечающие финитным и инфинитным движениям, разделены сепаратрисами. При  $|E| < 1$  маятник совершает периодические колебания, не поднимаясь до верхней точки подвеса; при  $|E| > 1$  маятник крутится вокруг точки подвеса.

Пример 2. Вычислим период колебаний маятника. Из (7) следует, что если  $|E| < mgl$ , то  $E$  можно записать в виде  $E = -mgl \cos \varphi_0$ , где  $\varphi_0 > 0$  — максимальный угол отклонения. По формуле (6) находим

$$\begin{aligned} T(E) &= 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} = \\ &= 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}. \end{aligned}$$

Подстановка  $(\sin \varphi/2)(\sin \varphi_0/2)^{-1} = \sin u$  приводит этот интеграл к виду

$$T(E) = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} K\left(\sin \frac{\varphi_0}{2}\right),$$

где

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}}. \quad (8)$$

Функция  $K(k)$  называется *полным эллиптическим интегралом первого рода* [39]; эта функция протабулирована. Формула (8) показывает, что период колебаний маятника зависит от амплитуды, что характерно для нелинейных колебаний. При малых  $\varphi_0$  (т. е. при малых колебаниях маятника) имеем

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} \varphi_0^2 + \dots\right)$$

и в первом приближении период не зависит от  $E$  (ср. гл. 1, § 6).

## § 6. Устойчивость. Функция Ляпунова

**1. Устойчивость положения равновесия.** Слово «устойчивость» настолько выразительно, что правильные интуитивные представления об устойчивости имеются у всех. Рассмотрим металлический шарик, который катается по горке (рис. 30). Имеются ровно две точки покоя (положения равновесия): дно впадины 1 ( $x=0$ ), и вершина горки 2 ( $x=\bar{x}$ ). Ясно, что первое из них устойчиво, а второе — нет. Действительно, если слегка подтолкнуть или сместить шарик с вершины, то он либо будет колебаться во впадине, либо укатится на бесконечность. Если же шарик, находящемуся в точке 1, сообщить малую начальную скорость и слегка его сместить, то он будет совершать малые колебания вблизи этого положения равновесия.

Но таких наглядных представлений об устойчивости совершенно недостаточно, чтобы решить мало-мальски серьезную задачу об устойчивости реальной физической или технической системы. Теория устойчивости создавалась многими математиками, механиками, физиками. Фун-

даментальные результаты в теории устойчивости принадлежат знаменитому русскому математику А. М. Ляпунову [31].

Рассмотрим автономную систему из  $n$  уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \quad (1)$$

Обозначим  $x(t; x^0)$  решение этой системы с начальными данными

$$x|_{t=0} = x^0. \quad (2)$$

**Определение 1.** *Положение равновесия  $a$  называется устойчивым по Ляпунову, если:*

1°. *Существует  $\delta_0 > 0$  такое, что если  $|x^0 - a| < \delta_0$ , то решение  $x(t; x^0)$  существует при  $0 \leq t < \infty$ .*

2°. *Для всякого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что если  $|x^0 - a| \leq \delta$ , то*

$$|x(t; x^0) - a| \leq \varepsilon$$

*при всех  $t$ ,  $0 \leq t < \infty$ .*

Это означает, что если в начальный момент времени точка находится достаточно близко к положению равновесия (т. е. величина  $|x^0 - a|$  мала), то и во все последующие моменты времени, двигаясь по траектории, точка будет оставаться вблизи положения равновесия.

**Определение 2.** *Положение равновесия  $a$  называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и если*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t; x^0) = a,$$

*при достаточно малых  $|x^0 - a|$ .*

Это означает, что если точку немного сдвинуть из положения равновесия, то она с ростом времени будет стремиться вернуться в положение равновесия.

В примере с шариком положение равновесия 1 будет устойчивым по Ляпунову, если трение отсутствует. Если имеется трение, то колебания шарика будут уменьшаться с ростом времени, т. е. положение равновесия будет асимптотически устойчивым.

Следует подчеркнуть, что мы рассматриваем устойчивость положения равновесия по отношению к малым возмущениям. Устойчивость по отношению к возмущениям,

которые не являются малыми — это значительно более сложная задача.

В гл. 1, § 9 были исследованы фазовые траектории двумерной автономной системы  $\dot{x} = Ax$ , где  $x = (x_1, x_2)$  и  $A$  есть  $(2 \times 2)$ -матрица. Начало координат  $(0, 0)$  есть положение равновесия, и его устойчивость в этом примере легко исследуется:

1. Устойчивый узел, устойчивый фокус — асимптотически устойчивые положения равновесия (рис. 8, 11).

2. Центр — устойчивое по Ляпунову, но не асимптотически устойчивое положение равновесия (рис. 10).

3. Седло (рис. 9), неустойчивый узел, неустойчивый фокус — неустойчивые положения равновесия.

2. **Функция Ляпунова.** Пусть  $x \in \mathbb{R}^n$ , функция  $V(x)$  непрерывно дифференцируема в окрестности  $U$  точки  $x = a$ . Эта функция называется *положительно определенной* (в области  $U$ ), если

$$V(x) > 0, \quad x \neq a; \quad V(a) = 0.$$

Если же выполнены условия

$$V(x) < 0, \quad x \neq a; \quad V(x) = 0,$$

то функция  $V(x)$  называется *отрицательно определенной*.

Пример 1. Функция

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

положительно определена в любой окрестности точки  $x = 0$ .

При  $n=2$  уравнение  $V = x_1^2 + x_2^2$  определяет параболоид вращения (рис. 32), который касается плоскости  $(x_1, x_2)$  в начале координат, а его остальные точки лежат выше этой плоскости. Линии уровня функции  $V$  — это окружности  $x_1^2 + x_2^2 = c$  ( $c \geq 0$ ), которые стягиваются в точку при  $c \rightarrow +0$ . Справедлива

**Теорема [6].** Пусть функция  $V(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , положительно определена в окрестности  $U$  точки  $a$ . Тогда множества уровня  $V(x) = v$ , лежащие в  $U$ , — замкнутые гиперповерхности, окружающие точку  $a$ , если  $v > 0$  достаточно мало.

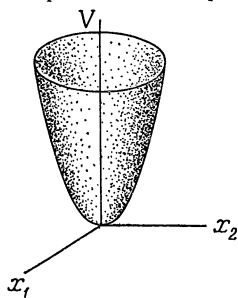


Рис. 32.



Пример 2. Рассмотрим квадратичную форму

$$V(\mathbf{x}) = (A\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{j, k=1}^n a_{jk} x_j x_k. \quad (3)$$

Здесь  $a_{jk} = a_{kj}$ , эти числа вещественны, так что  $A$  — вещественная симметрическая матрица. Квадратичная форма называется *положительно определенной*, если

$$(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \neq 0.$$

Положительно определенная квадратичная форма есть положительно определенная функция в любой окрестности точки  $\mathbf{x} = 0$ .

Этот пример существенно используется в последующем, и мы исследуем его более тщательно.

*Лемма.* Если  $A$  — вещественная симметрическая  $(n \times n)$ -матрица, то для любого  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  справедливо неравенство

$$\alpha |\mathbf{x}|^2 \leq (A\mathbf{x}, \mathbf{x}) \leq \beta |\mathbf{x}|^2. \quad (4)$$

Здесь  $\alpha$  — наименьшее,  $\beta$  — наибольшее собственное значение матрицы  $A$ .

*Доказательство.* Из линейной алгебры известно [7, 17], что матрицу  $A$  можно привести к диагональному виду с помощью ортогонального преобразования, т. е. существует ортогональная матрица  $T$  такая, что  $T^{-1}AT = \Lambda$ , где  $\Lambda$  — диагональная матрица с диагональными элементами  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Сделаем подстановку  $\mathbf{x} = T\mathbf{y}$ , тогда

$$(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (AT\mathbf{y}, T\mathbf{y}) = (T^tAT\mathbf{y}, \mathbf{y}) =$$

(так как  $T^t = T^{-1}$ )

$$= (T^{-1}AT\mathbf{y}, \mathbf{y}) = (\Lambda\mathbf{y}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2,$$

так что  $\alpha |\mathbf{y}|^2 \leq (A\mathbf{x}, \mathbf{x}) \leq \beta |\mathbf{y}|^2$ . Ортогональное преобразование сохраняет длину вектора:  $|\mathbf{x}|^2 = |T\mathbf{y}|^2 = |\mathbf{y}|^2$ , и (4) доказано.

*Определение 3.* Положительно определенная в окрестности  $U$  точки  $\mathbf{a}$  функция  $V(\mathbf{x})$  называется функцией Ляпунова (системы (1)), если

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0, \quad \mathbf{x} \in U. \quad (5)$$

Здесь  $\dot{V}(\mathbf{x})$  — производная в силу системы (1).

**Теорема Ляпунова об устойчивости.** Если в некоторой окрестности  $U$  положения равновесия  $\mathbf{a}$  существует функция Ляпунова  $V(\mathbf{x})$ , то это положение равновесия устойчиво по Ляпунову.

Наметим идею доказательства при  $n = 2$ ; пусть  $\mathbf{a} = (0, 0)$ . Линии уровня  $V(\mathbf{x}) = c$  — замкнутые кривые при малых  $c > 0$ . Эти кривые стягиваются в точку  $(0, 0)$  при  $c \rightarrow +0$  и при малых  $c_j > 0$  линия уровня  $V(\mathbf{x}) = c_1$  лежит внутри линии уровня  $V(\mathbf{x}) = c_2$ , если  $c_1 < c_2$ . (Читателю, который найдет ошибку в этом утверждении, рекомендуем перейти к чтению строгого доказательства.) Выпустим фазовую траекторию  $\gamma$  в момент времени  $t = 0$  из точки  $\mathbf{x}^0$ ,  $V(\mathbf{x}^0) = c_0$ . Так как  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ , то  $V(\mathbf{x}) \leq V(\mathbf{x}^0) = c_0$  вдоль траектории  $\gamma$  (§ 4, лемма), т. е.  $\gamma$  лежит внутри линии уровня  $V(\mathbf{x}) = c_0$  при всех  $t \geq 0$  (рис. 33). Поэтому точка не может сильно отклониться от положения

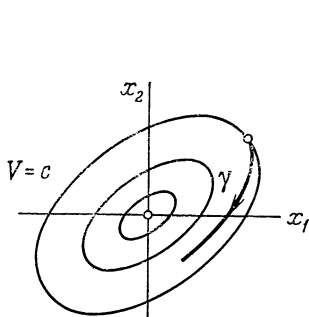


Рис. 33.

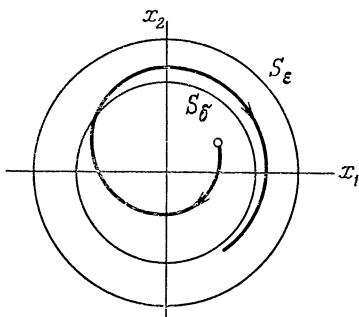


Рис. 34.

равновесия. Чем меньше  $c_0$ , тем меньше область  $V(\mathbf{x}) \leq c_0$ ; она стягивается в точку при  $c_0 \rightarrow +0$ , что и показывает устойчивость положения равновесия.

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{a} = 0$ , выберем  $\varepsilon > 0$  такое, что шар  $K_\varepsilon: |\mathbf{x}| \leq \varepsilon$  лежит в окрестности  $U$  точки  $\mathbf{x} = 0$ . Пусть  $S_\varepsilon$  — граница шара — сфера  $|\mathbf{x}| = \varepsilon$  (рис. 34). Так как  $S_\varepsilon$  — замкнутое ограниченное множество, функция  $V(\mathbf{x})$  непрерывна и  $V(\mathbf{x}) > 0$  на  $S_\varepsilon$ , то  $\min_{x \in S_\varepsilon} V(\mathbf{x}) = k > 0$ .

Рассмотрим шар  $K_\delta: |\mathbf{x}| \leq \delta$ , содержащийся в  $U$ . Так

как  $V(\mathbf{0})=0$ , то  $\delta > 0$  можно выбрать настолько малым, чтобы выполнялось неравенство  $V(\mathbf{x}) < k$  при  $\mathbf{x} \in K_\delta$ , в силу непрерывности функции  $V(\mathbf{x})$ .

Покажем, что если  $|\mathbf{x}^0| \leq \delta$ , то  $|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}^0)| \leq \varepsilon$  при  $0 \leq t < \infty$ ; тем самым теорема будет доказана. Так как  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$  в области  $U$  и  $V(\mathbf{x}^0) < k$ , то  $V(\mathbf{x}) < k$  при  $0 \leq t < \infty$  вдоль фазовой траектории  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t; \mathbf{x}^0)$ . Следовательно, траектория, которая начинается в шаре  $K_\delta$ , не может пересечь границы шара  $K_\varepsilon$ :  $V(\mathbf{x}) \geq k$  на  $S_\varepsilon$ ,  $V(\mathbf{x}) < k$  на траектории.

**Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости.** Пусть в некоторой окрестности  $U$  положения равновесия  $\mathbf{a}$  существует функция Ляпунова  $V(\mathbf{x})$  такая, что функция  $\dot{V}(\mathbf{x})$  отрицательно определена в  $U$ . Тогда положение равновесия  $\mathbf{a}$  асимптотически устойчиво.

**Доказательство.** Выберем шары  $K_\varepsilon$ ,  $K_\delta$  так же, как и в предыдущем доказательстве. Если  $|\mathbf{x}^0| \leq \delta$ , то  $|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}^0)| \leq \varepsilon$  при  $0 \leq t < \infty$ . Рассмотрим функцию  $\omega(t) = V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}^0))$ . Так как  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ , то функция  $\omega(t)$  не возрастает (§ 4, лемма) и существует предел  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega(t) = A$ . При этом  $A \geq 0$ , поскольку  $V(\mathbf{x}) \geq 0$ . Если  $A = 0$ , то  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t; \mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$ , так как  $V(\mathbf{x}) > 0$  при  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ,  $V(\mathbf{0}) = 0$ , и в этом случае теорема доказана. Допустим, что  $A > 0$ , и приведем это предположение к противоречию. В этом случае  $\omega(t) \geq A$  при всех  $t \geq 0$ , и существует  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < \varepsilon$  такое, что  $|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}^0)| \geq \alpha$  при  $0 \leq t < \infty$ . В противном случае на траектории  $\gamma$  имелись бы точки, сколь угодно близкие к точке  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , а потому функция  $V(\mathbf{x})$  на  $\gamma$  принимала бы сколь угодно малые значения. В шаровом слое  $\alpha \leq |\mathbf{x}| \leq \varepsilon$  функция  $\dot{V}(\mathbf{x})$  строго отрицательна, по условию теоремы. В силу непрерывности  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -m < 0$  в этом слое, а стало быть, и на траектории  $\gamma$ . Следовательно,

$$\omega'(t) = \dot{V}(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}^0)) \leq -m.$$

Интегрируя, получаем  $\omega(t) \leq \omega(0) - mt$ , и правая часть этого неравенства отрицательна при  $t > \omega(0)/m$ . Это противоречит предположению:  $\omega(t) \geq A > 0$ ,  $t \geq 0$ .

Пусть  $U$  — окрестность положения равновесия  $a$ ,  $U_1$  — область, которая содержится в  $U$  и имеет  $a$  своей граничной точкой (рис. 35).

Теорема Четаева о неустойчивости. Пусть функция  $V(x)$  непрерывно дифференцируема в области  $U_1$ ,

$$V(x) > 0, \quad \dot{V}(x) > 0 \\ (x \in U_1)$$

и  $V(x) = 0$  в тех граничных точках области  $U_1$ , которые лежат внутри области  $U$ . Тогда положение равновесия  $a$  неустойчиво.

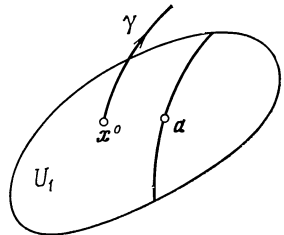


Рис. 35.

Доказательство. Пусть точка  $x^0 \in U_1$ ,  $\gamma$  — фазовая траектория, выходящая из точки  $x^0$ , ее уравнение имеет вид  $x = x(t; x^0)$ . Покажем, что траектория  $\gamma$  не может пересечь ту часть границы области  $U_1$ , которая лежит внутри  $U$ . Рассмотрим функцию  $V(x)$  вдоль  $\gamma$ :  $\omega(t) = V(x(t; x^0))$ . Так как  $\omega(0) > 0$  и  $\omega'(t) = \dot{V}(x) > 0$ , пока  $\gamma$  содержится в  $U_1$ , то  $\omega(t) > 0$ , пока  $\gamma$  содержится в  $U_1$  и траектория не может пересечь ту часть границы области  $U_1$ , на которой  $V(x) = 0$ . Следовательно, траектория  $\gamma$  должна покинуть  $U_1$ . Так как  $U_1$  содержит точки, сколь угодно близкие к точке  $a$ , то это положение равновесия неустойчиво.

Рассмотрим примеры.

Теорема 1. Пусть система (1) имеет первый интеграл  $V(x)$ , положительно определенный в окрестности положения равновесия  $a$ . Тогда положение равновесия  $a$  устойчиво по Ляпунову.

Действительно,  $\dot{V}(x) \equiv 0$  и потому все условия теоремы Ляпунова об устойчивости выполнены.

Пример 3. Рассмотрим материальную точку массы  $m$ , которая движется в потенциальном поле сил с потенциальной энергией  $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Движение частицы описывается системой уравнений

$$m\ddot{x} = -\nabla U(x).$$

Эта система эквивалентна системе уравнений первого порядка

$$m\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\nabla U(x)$$

и имеет первый интеграл (§ 4)

$$V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y}^2}{2m} + U(\mathbf{x}).$$

Положения равновесия определяются из уравнений  $\nabla U(\mathbf{x}) = 0$ ,  $\mathbf{y} = 0$ , т. е. имеют вид  $(\mathbf{x}^0, 0)$ , где  $\mathbf{x}^0$  — стационарная точка потенциальной энергии.

Пусть  $\mathbf{x}^0$  — изолированная точка минимума потенциальной энергии  $U(\mathbf{x})$ , тогда положение равновесия  $(\mathbf{x}^0, 0)$  устойчиво по Ляпунову. Это утверждение было высказано Лагранжем и впоследствии доказано Дирихле.

Так как потенциальная энергия определяется с точностью до постоянного слагаемого, то можно считать, что  $U(\mathbf{x}^0) = 0$ . Функция  $V(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  обращается в нуль (в малой окрестности точки  $(\mathbf{x}^0, 0)$  только при  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$ ,  $\mathbf{y} = 0$ , так как  $U(\mathbf{x}) > 0$  при  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0$ , и теорема Дирихле следует из теоремы 1.

**Теорема 2.** Пусть  $\mathbf{x} = 0$  — положение равновесия системы (1) и существует функция Ляпунова  $V(\mathbf{x})$  такая, что

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\alpha V(\mathbf{x}), \quad V(\mathbf{x}) \geq A |\mathbf{x}|^\beta \quad (6)$$

в некоторой окрестности  $U$  точки  $\mathbf{x} = 0$ , где  $A$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  — положительные постоянные. Тогда существует положительная постоянная  $C$  такая, что

$$|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}^0)| \leq C e^{-\alpha t / \beta} \quad (0 \leq t < \infty), \quad (7)$$

если точка  $\mathbf{x}^0$  достаточно близка к точке  $\mathbf{x} = 0$ .

**Доказательство.** Положим  $\omega(t) = V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}^0))$ , тогда  $\omega'(t) \leq -\alpha \omega(t)$ , или  $(\ln \omega(t))' \leq -\alpha$ . Интегрируя это неравенство от 0 до  $t$ , получаем  $\omega(t) \leq \omega(0) e^{-\alpha t}$ . Учитывая второе из неравенств (6), получаем

$$A |\mathbf{x}(t; \mathbf{x}^0)|^\beta \leq V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}^0)) \leq V(\mathbf{x}^0) e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0,$$

откуда следует (7).

## § 7. Устойчивость положения равновесия линейной системы

Рассмотрим линейную однородную систему из  $n$  уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} \quad (1)$$

с постоянными комплексными коэффициентами. Эта система имеет положение равновесия  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Так как система (1) интегрируется, то вопрос об устойчивости этого положения равновесия полностью исследован.

**Теорема.** *Положение равновесия  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  системы (1) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда вещественные части всех собственных значений матрицы  $A$  отрицательны.*

**Доказательство.** Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  — собственные значения матрицы  $A$  и  $\operatorname{Re} \lambda_j \leq -\alpha < 0$  при всех  $j$ . Построим функцию Ляпунова  $V(\mathbf{x})$ . Как показано в § 10, гл. 1, для любого  $\varepsilon > 0$  существует матрица  $T = T(\varepsilon)$ , приводящая матрицу  $A$  к почти диагональному виду

$$T^{-1}AT = \Lambda + B_\varepsilon.$$

Здесь  $\Lambda$  — диагональная матрица с диагональными элементами  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , а  $B_\varepsilon = (b_{jk})$  — такая матрица, что  $|b_{jk}| \leq \varepsilon$  при всех  $j, k$ . После подстановки  $\mathbf{x} = T\mathbf{y}$  система (1) примет вид

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = (\Lambda + B_\varepsilon)\mathbf{y}. \quad (2)$$

Функцию Ляпунова  $V(\mathbf{x})$  возьмем в виде

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n |y_j|^2 = (\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}). \quad (3)$$

Эта функция положительно определена в любой окрестности точки  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  (§ 6, пример 2). Имеем

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt} (\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}) = \left( \frac{d\mathbf{y}}{dt}, \bar{\mathbf{y}} \right) + \left( \mathbf{y}, \frac{d\bar{\mathbf{y}}}{dt} \right) =$$

(выражаем  $\frac{d\mathbf{y}}{dt}$  через  $\mathbf{y}$  из системы (2))

$$= ((\Lambda + \bar{\Lambda})\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}) + [(B_\varepsilon\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}) + (\mathbf{y}, \bar{B}_\varepsilon\bar{\mathbf{y}})].$$

Первое из этих слагаемых равно

$$\sum_{j=1}^n (\lambda_j + \bar{\lambda}_j) |y_j|^2 = 2 \sum_{j=1}^n \operatorname{Re} \lambda_j |y_j|^2 \leq -2\alpha \sum_{j=1}^n |y_j|^2,$$

так как  $\operatorname{Re} \lambda_j \leq -\alpha$ .

Оценим модуль выражения, стоящего в квадратных скобках. Так как  $|b_{jk}| \leq \varepsilon$ , то

$$\begin{aligned} |(B_\varepsilon \mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}})| &\leq \sum_{j,k=1}^n |b_{jk}| |y_j| |y_k| \leq \varepsilon \sum_{j,k=1}^n |y_j| |y_k| = \\ &= \varepsilon \left( \sum_{j=1}^n |y_j| \right)^2 \leq n\varepsilon \sum_{j=1}^n |y_j|^2. \end{aligned}$$

Мы использовали неравенство  $\left( \sum_{j=1}^n |y_j| \right)^2 \leq n \sum_{j=1}^n |y_j|^2$ . Такая же оценка справедлива для второго слагаемого в квадратных скобках. Следовательно,

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -2(\alpha - n\varepsilon) \sum_{j=1}^n |y_j|^2 = -2(\alpha - n\varepsilon) V(\mathbf{x}). \quad (4)$$

Выберем  $\varepsilon$  так, чтобы было  $0 < \varepsilon < \alpha/n$ , тогда из (4) следует, что функция  $\dot{V}(\mathbf{x})$  отрицательно определена, и положение равновесия  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  асимптотически устойчиво.

Пусть матрица  $A$  имеет собственное значение  $\lambda_{j_0}$  такое, что  $\operatorname{Re} \lambda_{j_0} \geq 0$ . Тогда система (1) имеет решение

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda_{j_0} t} \mathbf{f}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$  — собственный вектор, отвечающий собственному значению  $\lambda_{j_0}$ . Имеем

$$|\mathbf{x}(t)| = e^{\beta t} |\mathbf{f}|, \quad \beta = \operatorname{Re} \lambda_{j_0}.$$

Так как  $\beta \geq 0$ , то  $|\mathbf{x}(t)|$  не стремится к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ , и положение равновесия  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  не будет асимптотически устойчивым.

*Следствие 1. В условиях теоремы существует функция Ляпунова  $V(\mathbf{x})$ , которая является положительно определенной квадратичной формой и*

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -2\beta V(\mathbf{x}); \quad \beta = \max_{1 \leq j \leq n} \operatorname{Re} \lambda_j + \delta, \quad (6)$$

где  $\delta > 0$  можно выбрать сколь угодно малым.

Оценка (6) следует из (3), (4). Далее,  $\mathbf{y} = T^{-1}\mathbf{x}$ , так что (см. (2))

$$V(\mathbf{x}) = (T^{-1}\mathbf{x}, \bar{T}^{-1}\mathbf{x}) = \sum_{j,k=1}^n a_{jk} x_j x_k$$

и  $V(\mathbf{x})$  — квадратичная форма. Так как форма  $V(\mathbf{x})$  положительно определена, то  $V(\mathbf{x}) \geq c|\mathbf{x}|^2$ , где  $c > 0$  — постоянная (§ 5, (4)), и из (6) следует оценка

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\gamma|\mathbf{x}|^2, \quad \gamma > 0. \quad (7)$$

Из следствия 1 и теоремы 2 § 6 вытекает

**Следствие 2.** Пусть вещественные части всех собственных значений матрицы  $A$  отрицательны и  $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}^0)$  — решение системы (1) с данными Коши  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$ . Тогда

$$|\mathbf{x}(t)| \leq C|\mathbf{x}^0|e^{-\beta t} \quad (t \geq 0), \quad (8)$$

где показатель  $\beta$  — тот же, что и в (6).

Итак, положение равновесия  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  системы (1) асимптотически устойчиво, если все  $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ , и неустойчиво, если  $\operatorname{Re} \lambda_{j_0} > 0$  хотя бы для одного собственного значения  $\lambda_{j_0}$ . В последнем случае для решения (5) имеем

$$|\mathbf{x}(t)| = e^{\beta t} |\mathbf{f}| \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow +\infty \quad (\beta = \operatorname{Re} \lambda_{j_0}).$$

Остается исследовать случай, когда  $\operatorname{Re} \lambda_j \leq 0$  при всех  $j$  и имеются чисто мнимые собственные значения; обозначим их  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ . В зависимости от структуры жордановой нормальной формы матрицы  $A$  положение равновесия  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  будет либо устойчивым по Ляпунову, либо неустойчивым. Именно, устойчивость будет в том случае, если отсутствуют жордановы блоки порядка  $\geq 2$ , отвечающие чисто мнимым собственным значениям (в частности, если  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  — простые собственные значения). В противном случае имеется неустойчивость. Пусть, например, чисто мнимому собственному значению  $\lambda_1$  отвечает жорданов блок порядка  $k \geq 2$ , тогда система (1) имеет решение вида (гл. 1, § 10)

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda_1 t} (\mathbf{f} + t\mathbf{g}), \quad \mathbf{g} \neq \mathbf{0},$$

где  $\mathbf{f}, \mathbf{g}$  — постоянные векторы. При  $t \gg 1$  имеем  $|\mathbf{x}(t)| = |\mathbf{f} + t\mathbf{g}| \geq t|\mathbf{g}| - |\mathbf{f}| \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow \infty)$ .

**З а м е ч а н и е.** Сформулированную выше теорему можно было бы доказать, используя явный вид решения (гл. 2, § 2)

$$\mathbf{x}(t; \mathbf{x}^0) = e^{tA} \mathbf{x}^0$$

и явный вид матрицы  $e^{tA}$  (гл. 2, § 2). Но ценность приведенного доказательства состоит в том, что та же самая функция Ляпунова позволяет исследовать устойчивость положения равновесия нелинейной системы (см. § 8).



Это же замечание относится и к нижеследующим построениям. Именно, пусть матрица  $A$  имеет собственное значение  $\lambda_n$  с положительной вещественной частью:  $\operatorname{Re} \lambda_n > 0$ . Докажем неустойчивость положения равновесия  $x=0$ , построив функцию Четаева (§ 6). Выберем матрицу  $T$ , приводящую матрицу  $A$  к нижнему треугольному виду так, чтобы в матрице  $\Lambda$  последний диагональный элемент был равен  $\lambda_n$ . Тогда уравнение для  $y_n$  отделяется:

$$\frac{dy_n}{dt} = \lambda_n y_n$$

и функцию Четаева возьмем в виде

$$V(x) = |y_n|^2. \quad (9)$$

Имеем

$$\dot{V}(x) = \left( \frac{dy_n}{dt}, \bar{y}_n \right) + \left( y_n, \frac{d\bar{y}_n}{dt} \right) = 2 \operatorname{Re} \lambda_n |y_n|^2. \quad (10)$$

В качестве области  $U_1$ , указанной в теореме Четаева, возьмем область  $y_n \neq 0$ . Так как  $y = T^{-1}x$ , то  $y_n = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ , где  $c_j$  — постоянные (вообще говоря, комплексные), и граница  $\Gamma$  области  $U_1$  задается уравнениями

$$\sum_{j=1}^n x_j \operatorname{Re} c_j = 0, \quad \sum_{j=1}^n x_j \operatorname{Im} c_j = 0.$$

Так как  $\Gamma$  содержит точку  $x=0$  и  $V(x) > 0$ ,  $\dot{V}(x) > 0$  при  $x \in U_1$ ,  $V(x) = 0$  на  $\Gamma$ , то все условия теоремы Четаева выполнены.

Характеристическое уравнение, отвечающее системе (1), имеет вид

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (11)$$

Пусть все элементы матрицы  $A$  вещественны; тогда все числа  $a_0, \dots, a_n$  вещественны. В этом случае можно, не решая уравнение (11), установить, лежат ли все его корни в левой полуплоскости комплексной плоскости  $\lambda$ . Именно, справедлив [29]

**Критерий Рауса — Гурвица.** Пусть все коэффициенты уравнения (11) вещественны и  $a_0 > 0$ . Для того чтобы все корни уравнения (11) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы все определители

$$a_1, \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

были положительны.

Здесь  $a_k = 0$  при  $k > n$ .

## § 8. Устойчивость по линейному приближению

**1. Линеаризация.** Пусть  $a$  — положение равновесия автономной системы

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (1)$$

из  $n$  уравнений. Вектор-функция  $f(x)$  предполагается дважды непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности  $U$  точки  $a$ .

Разложим вектор-функцию по формуле Тейлора:

$$f(x) = f'(a)(x - a) + g(x), \quad (2)$$

где  $f'(a)$  — матрица Якоби (гл. 2, § 9); ее элементы равны  $\frac{\partial f_j(a)}{\partial x_k}$ . Далее,

$$|g(x)| \leq C|x - a|^2, \quad x \in U. \quad (3)$$

Следовательно,  $f(x) \approx f'(a)(x - a)$ , если точки  $x$ ,  $a$  достаточно близки. Отбросим в разложении (2) вектор-функции  $f(x)$  нелинейные члены, квадратичные по  $x_j - a_j$ . Тогда получим линейную систему

$$\frac{dy}{dt} = Ay. \quad (4)$$

Здесь  $y = x - a$ ,  $A = f'(a)$ . Система (4) называется *линеаризованной* (для системы (1) в окрестности положения равновесия  $a$ ), а переход от нелинейной системы (1) к линейной системе (4) называется *линеаризацией*.

Линеаризованная система (4) — это линейная система с постоянными коэффициентами; она интегрируется, и потому устойчивость положения равновесия  $y = 0$  полностью исследована. Замечательно то, что по структуре положения равновесия линеаризованной системы можно (хотя и не всегда) судить об устойчивости положения равновесия нелинейной системы.

**2. Устойчивость по линейному приближению.** Сформулируем фундаментальный результат теории устойчивости.

**Теорема Ляпунова об устойчивости по линейному приближению.** Пусть вектор-функция  $f(x)$  дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности положения равновесия  $a$ . Если вещественные части всех собственных значений матрицы Якоби  $f'(a)$  отрица-

тельны, то положение равновесия  $\mathbf{a}$  асимптотически устойчиво. Кроме того, справедлива оценка

$$|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}^0) - \mathbf{a}| \leq C e^{-\alpha t} |\mathbf{x}^0 - \mathbf{a}|, \quad 0 \leq t \leq \infty, \quad (5)$$

где  $\alpha > 0$ ,  $C > 0$  для всех  $\mathbf{x}^0$ , достаточно близких к точке  $\mathbf{a}$ .

Эту теорему можно сформулировать еще так: если положение равновесия линеаризованной системы асимптотически устойчиво, то асимптотически устойчиво положение равновесия нелинейной системы.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ . Имеем из (2), (3)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad |\mathbf{g}(\mathbf{x})| \leq C_1 |\mathbf{x}|^2,$$

где  $A = \mathbf{f}'(\mathbf{a})$ . Чтобы доказать асимптотическую устойчивость положения равновесия  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , достаточно построить функцию Ляпунова  $V(\mathbf{x})$  такую, что функция  $V(\mathbf{x})$  положительно определена, а функция  $\dot{V}(\mathbf{x})$  отрицательно определена в некоторой окрестности точки  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  (§ 5). В качестве  $V(\mathbf{x})$  возьмем функцию Ляпунова линеаризованной системы, построенную в § 7.

Пусть  $T$  — матрица, приводящая матрицу  $A$  к почти диагональному виду, т. е.  $T^{-1}AT = \Lambda + B_\varepsilon$ . Матрицы  $\Lambda$ ,  $B_\varepsilon$  — те же, что и в доказательстве теоремы из § 7. Положим  $\mathbf{x} = T\mathbf{y}$ , тогда система (1) примет вид

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = (\Lambda + B_\varepsilon)\mathbf{y} + \mathbf{h}(\mathbf{y}), \quad (6)$$

где обозначено  $\mathbf{h}(\mathbf{y}) = T^{-1}\mathbf{g}(T\mathbf{y})$ . Функцию Ляпунова  $V(\mathbf{x})$  возьмем в виде

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n |y_j|^2 = (\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}). \quad (7)$$

Эта функция положительно определена в  $U$ .

Заметим, что хотя матрица  $T$  и вектор  $\mathbf{y}$  могут иметь комплексные элементы, вектор-функция  $\mathbf{h}(\mathbf{y}) = T^{-1}\mathbf{g}(\mathbf{x})$  вполне определена, так как  $\mathbf{x}$  — вещественный вектор.

Вычислим  $\dot{V}(\mathbf{x})$ . Имеем из (6), (7)

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \frac{d}{dt}(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}) = \left(\frac{d\mathbf{y}}{dt}, \bar{\mathbf{y}}\right) + \left(\mathbf{y}, \frac{d\bar{\mathbf{y}}}{dt}\right) = \\ &= [(\Lambda + B_\varepsilon)\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}] + (\mathbf{y}, (\bar{\Lambda} + \bar{B}_\varepsilon)\bar{\mathbf{y}}) + \\ &\quad + [(\mathbf{h}(\mathbf{y}), \bar{\mathbf{y}}) + (\mathbf{y}, \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{y}))] \equiv A_1 + A_2. \end{aligned}$$

Слагаемое  $A_1$  (т. е. выражение, заключенное в первые квадратные скобки) есть производная в силу линейной системы

$$\frac{dy}{dt} = (\Lambda + B_\varepsilon)y.$$

Поэтому справедлива оценка (§ 6, (4))

$$A_1 \leq -\gamma |x|^2,$$

где  $\gamma > 0$  — постоянная. Из оценок

$$\begin{aligned} |y| &= |T^{-1}x| \leq C_2 |x|, \\ |h(y)| &= |T^{-1}g(y)| \leq C_2 |g(x)| \leq C_1 C_2 |x|^2 \end{aligned}$$

следует, что

$$|A_2| \leq 2|y||h(y)| \leq C_3 |x|^3,$$

где  $C_3 = 2C_1 C_2^2$ , в некоторой окрестности  $U_1$  точки  $x=0$ . Следовательно,

$$\dot{V}(x) \equiv A_1 + A_2 \leq -|x|^2(\gamma - C_3|x|). \quad (8)$$

Выберем окрестность  $W \subset U_1$  точки  $x=0$  такую, что  $|x| < \frac{\gamma}{2} C_3$ , тогда

$$\dot{V}(x) \leq -\frac{\gamma}{2}|x|^2, \quad x \in W,$$

и потому функция  $\dot{V}(x)$  отрицательно определена в области  $W$ . Тем самым асимптотическая устойчивость положения равновесия  $x=0$  доказана.

Из оценки (8) и вида функции  $V(x)$  следует, что

$$\dot{V}(x) \leq -\alpha V(x), \quad x \in W,$$

где  $\alpha > 0$  (это доказывается так же, как и неравенство (6) из § 7), и из (8), § 7 следует оценка (5).

*Замечание.* Можно показать, что в качестве показателя  $\alpha$  в неравенстве (5) можно взять любое такое число; что

$$\alpha < \min_{1 \leq j \leq n} \operatorname{Re}(-\lambda_j)$$

### 3. Неустойчивость по линейному приближению.

**Теорема 1.** Пусть вектор-функция  $f(x)$  дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности положения равновесия  $a$ . Если матрица Якоби имеет собст-

венное значение с положительной вещественной частью, то положение равновесия  $\mathbf{a}$  неустойчиво.

Доказательство. Пусть  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ,  $\operatorname{Re} \lambda_n > 0$ . Применим теорему Четаева (§ 6). В качестве функции Четаева, как и в § 7, возьмем  $V(\mathbf{x}) = |y_n|^2$  (см. (9), § 7). Тогда

$$V(\mathbf{0}) = 0, \quad \dot{V}(\mathbf{x}) = 2 \operatorname{Re} \lambda_n |y_n|^2 + \mathbf{h}(\mathbf{y}),$$

где  $|\mathbf{h}(\mathbf{y})| \leq C|\mathbf{y}|^3$ . В любой окрестности точки  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  имеются точки, в которых  $V(\mathbf{x}) > 0$ , что следует из вида этой функции, и точки, в которых  $\dot{V}(\mathbf{x}) > 0$ . Действительно,

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \geq 2 \operatorname{Re} \lambda_n |y_n|^2 - C|\mathbf{y}|^3,$$

так что  $\dot{V}(\mathbf{x}) > 0$ , например, в точке вида  $y_1 = 0, \dots, y_{n-1} = 0, y_n \neq 0$ ,  $|y_n|$  достаточно мал, так как

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \geq (2 \operatorname{Re} \lambda_n - C|y_n|)|y_n|^2$$

в этой точке,  $\operatorname{Re} \lambda_n > 0$ . Поэтому существует область  $U_1$ , в которой  $V(\mathbf{x}) > 0$ ,  $\dot{V}(\mathbf{x}) > 0$  и граница которой содержит точку  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Из теоремы Четаева следует неустойчивость положения равновесия.

**4. Устойчивость неавтономных систем.** Рассмотрим неавтономную систему из  $n$  уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}). \quad (9)$$

Будем предполагать, что вектор-функция  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  дважды непрерывно дифференцируема в некоторой области  $\Omega$ :  $|\mathbf{x}| < \rho$ ,  $t \geq 0$ . Кроме того, предположим, что

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (10)$$

так что система (9) имеет решение  $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ .

В этом случае говорят об устойчивости по Ляпунову или об асимптотической устойчивости нулевого решения  $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ ; эти понятия формулируются дословно так же, как и для автономных систем (§ 6, определения 1, 2).

Такая постановка задачи возникает при исследовании устойчивости решения (положение равновесия — это частное решение). Пусть  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$  — решение автономной системы из  $n$  уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{x}). \quad (11)$$

Сделаем подстановку

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t) + \mathbf{y}(t),$$

тогда для  $\mathbf{y}(t)$  получим систему

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\varphi}(t) + \mathbf{y}(t)) - \mathbf{g}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \equiv \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)). \quad (12)$$

Очевидно, что  $\mathbf{f}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$  при  $0 \leq t < \infty$ , т. е. условие (10) выполняется. Решение  $\boldsymbol{\varphi}(t)$  системы (11) называется устойчивым по Ляпунову или асимптотически устойчивым, если таковым является нулевое решение  $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{0}$  системы (12). Асимптотическая устойчивость решения  $\boldsymbol{\varphi}(t)$  означает, что если величина  $|\mathbf{x}(0) - \boldsymbol{\varphi}(0)|$  достаточно мала, то

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)| = 0,$$

т. е. точки фазовой траектории решения  $\mathbf{x}(t)$  при  $t \rightarrow +\infty$  неограниченно сближаются с точками фазовой траектории решения  $\boldsymbol{\varphi}(t)$ . Устойчивость траектории называют также *орбитальной устойчивостью*.

Проведем линеаризацию системы (12) в окрестности решения  $\boldsymbol{\varphi}(t)$ . Считая  $|\mathbf{y}(t)|$  малой величиной, получаем

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\varphi}(t) + \mathbf{y}(t)) - \mathbf{g}(\boldsymbol{\varphi}(t)) = \mathbf{g}'(\boldsymbol{\varphi}(t))\mathbf{y}(t) + O(|\mathbf{y}(t)|^2).$$

Здесь  $\mathbf{g}'(\boldsymbol{\varphi}(t))$  — матрица Якоби, с элементами  $\left. \frac{\partial g_j(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)}$ . Линеаризованная система имеет вид

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{g}'(\boldsymbol{\varphi}(t))\mathbf{y}. \quad (13)$$

Это линейная система, но с переменными коэффициентами. Система (13) называется первой вариацией системы (11) относительно решения  $\boldsymbol{\varphi}(t)$ .

Функция  $V(t, \mathbf{x})$  называется *функцией Ляпунова* системы (9), если:

1) эта функция определена и непрерывно дифференцируема при  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $t \geq 0$ ;

2)  $V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$  при  $t \geq 0$ ;

3) существует положительно определенная в области  $\Omega$  функция  $W(\mathbf{x})$  такая, что  $V(t, \mathbf{x}) \geq W(\mathbf{x})$  при всех  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $t \geq 0$ ;

4)  $\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq 0$  при всех  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $t \geq 0$ .

Теоремы Ляпунова об устойчивости положения равновесия и об асимптотической устойчивости (§ 5) полностью

переносятся на случай неавтономной системы (9). В утверждении теоремы об асимптотической устойчивости необходимо дополнительно потребовать, чтобы выполнялась оценка

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq -W_1(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 \leq t < \infty,$$

где  $W_1(\mathbf{x})$  — положительно определенная в области  $\Omega$  функция. Доказательства лишь несколько усложняются по сравнению с приведенными в § 6.

Сформулируем аналог теоремы Ляпунова об устойчивости по линейному приближению для системы (9).

**Теорема 2.** *Рассмотрим систему из  $n$  уравнений*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}). \quad (14)$$

*Пусть  $A$  — постоянная матрица, вещественные части всех ее собственных значений отрицательны, вектор-функция  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  непрерывно дифференцируема при  $|\mathbf{x}| < \rho$ ,  $0 \leq t < \infty$  и*

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = o(|\mathbf{x}|) \quad (|\mathbf{x}| \rightarrow 0)$$

*равномерно по  $t$  при всех  $t \geq 0$ . Тогда нулевое решение системы (14) асимптотически устойчиво и справедлива оценка*

$$|\mathbf{x}(t)| \leq C |\mathbf{x}(0)| e^{-\alpha t} \quad (0 \leq t < \infty),$$

*где  $\alpha > 0$ ,  $C > 0$ , если величина  $|\mathbf{x}(0)|$  достаточно мала.*

Доказательство см. в [30].

**5. Устойчивые многообразия решений (условная устойчивость).** Рассмотрим линейную систему из двух уравнений с постоянными вещественными коэффициентами (гл. 1, § 9), фазовый портрет которой — седло. Начало координат — неустойчивое положение равновесия, но имеется два луча («усы») такие, что если точку при  $t=0$  поместить на ус, то решение  $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Эти усы называются *устойчивыми многообразиями*.

**Пример.** Рассмотрим линейную систему из  $n$  уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x},$$

где  $A$  — постоянная  $(n \times n)$ -матрица. Для простоты предположим, что все собственные значения  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  вещественны и различны. Пусть собственные значения  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$

отрицательны, а остальные собственные значения положительны. Если начальные данные задать в виде

$$\mathbf{x}(0) = c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + \dots + c_k \mathbf{e}_k, \quad (15)$$

где  $c_1, c_2, \dots, c_k$  — постоянные,  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k$  — собственные векторы, то

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{e}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{e}_2 + \dots + c_k e^{\lambda_k t} \mathbf{e}_k.$$

Так как  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \dots, \lambda_k < 0$ , то  $|\mathbf{x}(t)| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$  и имеется устойчивое многообразие  $M$  размерности  $k$  такое, что если  $\mathbf{x}(0) \in M$ , то  $|\mathbf{x}(t)| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Точки этого многообразия имеют вид (15), где  $c_1, c_2, \dots, c_k$  — произвольные постоянные. Если же  $\mathbf{x}(0) \notin M$ , то  $|\mathbf{x}(t)| \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

Нетрудно проверить, что если собственные значения матрицы  $A$  не лежат на мнимой оси, то система имеет устойчивое многообразие  $M$ . Его размерность равна числу собственных значений матрицы  $A$ , вещественные части которых отрицательны. Этот факт обобщается и на нелинейные системы вида (14).

*Теорема 3. Пусть матрица  $A$  имеет  $k$  собственных значений с отрицательными и  $n - k$  собственных значений с положительными вещественными частями, вектор-функция  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  непрерывно дифференцируема при  $|\mathbf{x}| < \rho$ ,  $0 \leq t < \infty$  и*

$$|\mathbf{f}'_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x})| \rightarrow 0 \quad (|\mathbf{x}| \rightarrow 0)$$

*равномерно по  $t$ ,  $0 \leq t < \infty$ . Тогда для любого достаточно большого  $t_0 > 0$  в пространстве  $\mathbf{R}_x^n$  существует (устойчивое) многообразие  $M$  размерности  $k$ , содержащее начало координат  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  и такое, что если  $\mathbf{x} = \varphi(t)$  — решение системы (14) такое, что  $\varphi(t_0) \in M$ , то*

$$|\varphi(t)| \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty). \quad (16)$$

*Кроме того, существует  $\delta > 0$  такое, что если  $\varphi(t_0) \notin M$  и величина  $|\varphi(t_0)|$  достаточно мала, то решение  $\mathbf{x} = \varphi(t)$  не может удовлетворять условию*

$$|\varphi(t)| \leq \delta \quad (t_0 \leq t < \infty).$$

Последнее означает, что  $|\varphi(t)|$  может сильно уклониться от нуля при больших значениях  $t$ , если начальная точка  $\varphi(t_0)$  не лежит на устойчивом многообразии. Дока-



зательство теоремы 3 см. в [25]. Там же доказано, что если все частные производные  $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$  непрерывны при  $|x| \leq \rho$ ,  $t \geq T$ , то  $M$  есть дифференцируемое многообразие (гл. 2, § 10).

## § 9. Двумерные автономные системы (элементы качественной теории)

**1. Локальное поведение траекторий.** Рассмотрим автономную систему из двух уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y). \quad (1)$$

**Предположение.** Функции  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  вещественны и бесконечно дифференцируемы при всех  $x, y$ .

Пусть  $a = (x_0, y_0)$  — положение равновесия системы (1). Линеаризованная (в окрестности точки  $a$ ) система имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f(a)}{\partial x} x + \frac{\partial f(a)}{\partial y} y, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial g(a)}{\partial x} x + \frac{\partial g(a)}{\partial y} y. \quad (2)$$

Система (2) — это линейная однородная система с постоянными коэффициентами и ее фазовые траектории нетрудно построить. Спрашивается, можно ли судить о структуре фазовых траекторий исходной нелинейной системы (1), в малой окрестности  $U$  точки  $a$ , по структуре траекторий линеаризованной системы (2)? Ответ на этот вопрос хорошо известен [34, 36].

**Теорема 1.** Пусть положение равновесия  $(0, 0)$  линеаризованной системы (2) есть узел, седло или фокус. Тогда фазовые траектории системы (1) имеют ту же топологическую структуру в малой окрестности положения равновесия  $a$ .

Последнее означает, что существует гладкая обратимая замена переменных, при которой фазовые траектории системы (2) отображаются в фазовые траектории системы (1). Седло, узел и фокус называются *грубыми положениями равновесия* (эта терминология была введена А. А. Андроновым). Центр — не грубое положение равновесия: если у линеаризованной системы (2) точка  $(0, 0)$  — центр, то у исходной системы (1) положение равновесия  $a$  может быть или центром, или фокусом, или центрофокусом (в последнем

случае в любой окрестности положения равновесия имеются замкнутые траектории, его окружающие, но не все траектории замкнуты). Результаты, относящиеся к исследованию особых точек автономной системы (1), читатель может найти в [34].

Рассмотрим одно уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}. \quad (3)$$

Точка  $(x_0, y_0)$  называется *особой*, если

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad g(x_0, y_0) = 0,$$

т. е. если эта точка — положение равновесия системы (1). Это понятие введено по следующим соображениям. Пусть  $f(x_0, y_0) \neq 0$ , тогда имеется интегральная кривая  $y = y(x)$  уравнения (3), проходящая через точку  $(x_0, y_0)$  и притом единственная. Если же  $g(x_0, y_0) \neq 0$ , то будем рассматривать  $y$  как независимую переменную, т. е. перейдем к уравнению

$$\frac{dx}{dy} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}. \quad (3')$$

Тогда через точку  $(x_0, y_0)$  проходит единственная интегральная кривая  $x = x(y)$  уравнения (3').

Рассмотрим автономную систему из  $n$  уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Пусть  $\mathbf{a}$  — ее положение равновесия; рассмотрим линеаризованную систему

$$\frac{dx}{dt} = A\mathbf{x},$$

где  $A = \mathbf{f}'(\mathbf{a})$ . Если собственные значения матрицы  $A$  различны и среди них нет чисто мнимых, то фазовые траектории линеаризованной и нелинейной систем (в малых окрестностях точек  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{0}$ ) имеют одну и ту же топологическую структуру [34].

**2. Предельное поведение траекторий.** Пусть  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  — решение системы (1) с данными Коши  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ . Это решение либо определено при всех  $t$ ,  $-\infty < t < \infty$ , либо не при всех  $t$  (т. е. за конечное время фазовая траектория может уйти на бесконечность — см. гл. 1; § 2, пример 1). Будем предполагать, что имеет

место первый случай. Для этого достаточно заменить систему (1) системой

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)h^{-1}(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y)h^{-1}(x, y), \quad (4)$$

где  $h = \sqrt{1 + f^2 + g^2}$ . Скорость точек, движение которых описывается системой (4), всюду не превосходит единицы, и точка не может за конечное время уйти на бесконечность, а фазовые траектории систем (1) и (4) совпадают.

Пусть  $\gamma: x = x(t), y = y(t), -\infty < t < \infty$  — фазовая траектория системы (1). Часть траектории  $\gamma$ , заданная этими уравнениями при  $0 \leq t < \infty$  ( $-\infty < t \leq 0$ ), называется *положительной* (*отрицательной*) *полутраекторией*. Точка  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  называется  *$\omega$ -предельной точкой* траектории  $\gamma$ , если существует последовательность моментов времени  $t_n \rightarrow +\infty$  такая, что  $(x(t_n), y(t_n)) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y})$ . Точно так же вводится понятие  *$\alpha$ -предельной точки* (в этом случае  $t_n \rightarrow -\infty$ ). Множество  $\omega(\gamma)$  ( $\alpha(\gamma)$ ) всех  $\omega$ -предельных ( $\alpha$ -предельных) точек называется  *$\omega$ -предельным* ( *$\alpha$ -предельным*) *множеством траектории  $\gamma$* .

Сформулируем основные результаты о предельном поведении траекторий системы (1), принадлежащие И. Бендиксону и А. Пуанкаре. Доказательства см. в [35, 36].

Пусть положительная полутраектория  $\gamma^+$  содержится в компакте в ограниченной области  $D$  на плоскости, и пусть в  $\bar{D}$  имеется лишь конечное число положений равновесия системы (1). Тогда справедлива

*Теорема 2. Предельное множество  $\omega(\gamma)$  имеет один из следующих видов:*

1°.  $\omega(\gamma)$  — точка (положение равновесия). Тогда  $\gamma^+$  стремится к этой точке при  $t \rightarrow +\infty$ .

2°.  $\omega(\gamma)$  — замкнутая кривая (цикл).

3°.  $\omega(\gamma)$  состоит из конечного числа положений равновесия и множества траекторий, которые стремятся к этим точкам при  $t \rightarrow +\infty$ .

В частности, множество  $\omega(\gamma)$  состоит из конечного числа траекторий. Аналогичную структуру имеет множество  $\alpha(\gamma)$ .

*Теорема 3. Пусть  $\gamma$  — замкнутая траектория, в некоторой окрестности которой нет других замкнутых траекторий. Тогда все траектории, которые начинаются*

достаточно близко от  $\gamma$ , спиралевидно приближаются к  $\gamma$  или при  $t \rightarrow +\infty$ , или при  $t \rightarrow -\infty$ .

Такая траектория называется *предельным циклом*. Эти циклы могут быть трех видов:

1°. *Устойчивые* — близкие траектории при  $t \rightarrow +\infty$  навиваются на цикл (рис. 36, а).

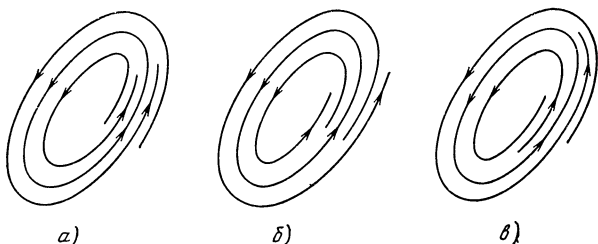


Рис. 36.

2°. *Неустойчивые* — при  $t \rightarrow +\infty$  траектории отходят от цикла (рис. 36, б).

3°. *Полуустойчивые* — при  $t \rightarrow +\infty$  траектории, лежащие по одну сторону от цикла, навиваются на него, а по другую — отходят от цикла (рис. 36, в).

**3. Функция последования. Автоколебания.** Пусть  $L$  — отрезок, который не касается траекторий системы (1). В качестве  $L$  можно взять, например, малый отрезок нормали к фазовой траектории. Уравнение  $L$  можно записать в виде  $x = x_0 + au$ ,  $y = y_0 + bu$ ,  $u \in I = [u_1, u_2]$ , так что каждая точка  $P$  на  $L$  определяется значением параметра  $u$ :  $P = P(u)$ . Выпустим из точки  $P(u)$  положительную полутраекторию  $\gamma^+$ . Пусть она пересекается с  $L$ , и  $P = P(\chi(u))$  — первая точка пересечения. Функция  $\chi(u)$  называется *функцией последования*. Перечислим ее основные свойства; доказательства их см. в [35, 36].

1°. Если функция последования  $\chi(u)$  определена при некотором значении параметра  $u$ , то она определена при всех достаточно близких значениях параметра.

Это следует из теоремы о непрерывной зависимости решения от параметров (гл. 2, § 7). Пусть  $I = (u_1, u_2)$  — интервал, на котором функция последования определена.

2°. Функция  $\chi(u)$  непрерывно дифференцируема при  $u \in I$ .

3°. Для того чтобы через точку  $u_0$  проходил цикл, необходимо и достаточно, чтобы  $\chi(u_0) = u_0$ .

Заметим, что достаточность этого утверждения очевидна. По функции последования можно судить об устойчивости предельного цикла — случаям *а*, *б*, *в* (рис. 37) отвечают устойчивый, неустойчивый и полуустойчивый предельные циклы.

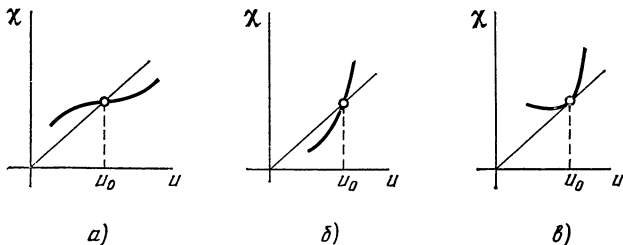


Рис. 37.

Предельные циклы представляют огромный интерес для физики и техники. Поведение многих физических и технических систем описывается уравнениями вида (1). Существование устойчивого предельного цикла у этой системы уравнений означает, что соответствующая физическая или техническая система может работать в устойчивом периодическом режиме.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = f(kI).$$

Оно описывает работу простейшего лампового генератора, состоящего из триода, конденсатора с емкостью  $C$ , сопротивления  $R$  и катушек индуктивности  $L, L_1$ . Здесь

$I = I(t)$  — сила тока, идущего через сопротивление,  $f$  — характеристика триода:  $I_A = f(U)$  ( $I_A$  — ток, идущий через лампу,  $U$  — сеточное напряжение),  $k$  ( $k > 0$ ) — коэффициент взаимной индукции между индуктивностями  $L$  и  $L_1$ . Характеристика  $f$  — монотонно возрастающая функция (рис. 38).

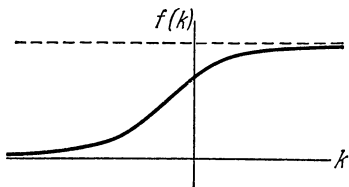


Рис. 38.

Характеристика  $f$  — монотонно возрастающая функция (рис. 38).

Делая подстановку  $x = I - f(0)$ , получаем уравнение

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = g(\dot{x}),$$

где  $g(\dot{x}) = (LC)^{-1}(f(k\dot{x}) - f(0))$ , параметры  $\delta > 0$ ,  $\omega > 0$  легко выражаются через исходные. Полученное уравнение, как правило, не интегрируется. А. А. Андроным была предложена модель, которая допускает исчерпывающее исследование:

$$g(\dot{x}) = a\omega^2 \operatorname{sgn} \dot{x} \quad (a > 0).$$

Полагая  $\dot{x} = y$ , получаем систему, которая имеет вид

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\omega^2 x - 2\delta y + \omega^2 a \quad (5)$$

при  $y > 0$  и вид

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\omega^2 x - 2\delta y - \omega^2 a \quad (6)$$

при  $y < 0$ . Пусть  $\omega > \delta$ , тогда корни характеристического уравнения  $\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0$ , которое отвечает системам (5), (6), комплексны:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega_0, \quad \omega_0 = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}.$$

Система (5) имеет положение равновесия  $(a, 0)$ , система (6) —  $(-a, 0)$ ; оба они — устойчивые фокусы, причем движение по фазовым траекториям (спиралям) совершается по часовой стрелке.

Найдем функцию последования  $\chi(u)$ . Пусть при  $t = 0$  точка находится на оси  $x$  и имеет вид  $(u, 0)$ ,  $u > 0$ . Тогда при малых  $t > 0$  она сдвинется в полуплоскость  $y < 0$ , так что  $(x, y)$  удовлетворяют системе (6), и

$$x = e^{-\delta t} (C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t) - a.$$

Из данных Коши находим

$$\dot{x} = e^{-\delta t} (u + a) \left( \cos \omega_0 t + \frac{\delta}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) - a, \quad y = \dot{x}$$

при  $0 \leq t \leq \pi/\omega_0 = t_0$ . При  $t > t_0$  траектория попадет в полуплоскость  $y > 0$ , так что  $(x, y)$  удовлетворяют системе (5), и

$$x = e^{-\delta t} (C_3 \cos \omega_0 t + C_4 \sin \omega_0 t) + a.$$

Из данных Коши  $x(t_0) = -e^{-\pi\delta/\omega_0}(u+a) - a$ ,  $y(t_0) = 0$  находим

$$x = e^{-\delta(t-\pi/\omega_0)}(x(t_0) - a) \left( \cos \omega_0 t + \frac{\delta}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) + a,$$

$$y = \dot{x},$$

$$\frac{\pi}{\omega_0} \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

При  $t = 2\pi/\omega_0$  траектория пересекает ось  $x$  в точке  $(\chi(u), 0)$ ,

$$\chi(u) = e^{-2\pi\delta/\omega_0} u + (1 - e^{-\pi\delta/\omega_0})^2 a. \quad (7)$$

Тем самым функция последования построена. Уравнение  $\chi(u) = u$  имеет единственное решение:

$$u_0 = \frac{1 + e^{-\pi\delta/\omega_0}}{1 - e^{-\pi\delta/\omega_0}} a,$$

которому отвечает предельный цикл. Нетрудно проверить, что  $\chi'(u_0) < 1$ , т. е. имеет место случай (рис. 37, а) и предельный цикл устойчив.

Пример 2. Движение часового маятника описывается уравнением

$$J\ddot{\theta} + h\dot{\theta} + mgl\theta = M(\theta, \dot{\theta}), \quad (8)$$

где  $\theta = \theta(t)$  — угол отклонения маятника от вертикали,  $J, h, m, g, l$  — положительные постоянные. Далее,  $M$  — момент, действующий на маятник со стороны анкера (рычага). Эта функция нелинейна и удовлетворяет условиям [19]:

1. Знак  $M$  совпадает со знаком  $\dot{\theta}$ .

2. Функция  $M$  заметно отлична от нуля только при  $\theta$ , близких к нулю.

Это означает, что анкерный механизм подталкивает маятник в направлении его движения только тогда, когда маятник проходит через вертикальное положение  $\theta = 0$ .

Простейшая функция, удовлетворяющая условиям 1, 2, есть  $M\dot{\theta}\delta(\theta)$ , где  $M > 0$  — постоянная,  $\delta(\theta)$  есть дельта-функция и уравнение (8) можно записать в виде

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = A\dot{x}\delta(x), \quad (9)$$

где  $x = \theta$ ,  $\omega, A$  — положительные постоянные. Будем, как и в примере 1, считать, что  $\omega > \delta$ . При  $x \neq 0$  уравнение (9) — линейное

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (10)$$

и в каждой из полуплоскостей  $x > 0$ ,  $x < 0$  траектория состоит из полувитков спиралей. Если траектория при  $t = t_0$  пересекает ось  $x = 0$ , то необходимо поставить дополнительные условия на решение. Одно из них очевидно — непрерывность траектории:  $x(t_0 - 0) = x(t_0 + 0) = 0$ . Чтобы найти второе, проинтегрируем обе части уравнения (9) по интервалу  $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$ , где  $\tau > 0$  достаточно мало (такой прием уже применялся в гл. 3, § 12), тогда получим

$$\begin{aligned} \dot{x}(t_0 + \tau) - \dot{x}(t_0 - \tau) + \omega^2 \int_{t_0 - \tau}^{t_0 + \tau} x(t) dt = \\ = A \int_{t_0 + \tau}^{t_0 - \tau} \delta(x(t)) \dot{x}(t) dt = A \int_{t_0 - \tau}^{t_0 + \tau} \delta(x) dx = \\ = A \operatorname{sgn}[x(t_0 + \tau) - x(t_0 - \tau)]. \end{aligned}$$

Функция  $\operatorname{sgn}$  возникает по той причине, что если  $x(t_0 + \tau) > x(t_0 - \tau)$ , то интегрирование по  $dx$  производится в положительном направлении, если  $x(t_0 + \tau) < x(t_0 - \tau)$  — то в отрицательном. Переходя к пределу при  $\tau \rightarrow +0$ , получаем

$$\dot{x}(t_0 + 0) - \dot{x}(t_0 - 0) = A \operatorname{sgn}[\dot{x}(t_0 + 0) - \dot{x}(t_0 - 0)],$$

так как  $x(t_0 + \tau) - x(t_0 - \tau) \sim 2\tau(\dot{x}(t_0 + 0) - \dot{x}(t_0 - 0))$  при  $\tau \rightarrow +0$ . Нетрудно видеть, что знаки скоростей  $\dot{x}(t_0 \pm 0)$  совпадают, так что

$$\dot{x}(t_0 + 0) - \dot{x}(t_0 - 0) = A \operatorname{sgn} \dot{x}(t_0 - 0). \quad (11)$$

Построим функцию последования. Положим  $\dot{x} = y$  и пусть начальная точка лежит на оси  $y$ :  $(x(0), y(0)) = (0, u)$ ,  $u > 0$ . Решая уравнение (10) с этими данными Коши, получаем

$$x = \frac{u}{\omega_0} e^{-\delta t} \sin \omega_0 t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega_0} = t_0,$$

причем точка движется по часовой стрелке и  $\dot{x}(t_0 - 0) = -ue^{-\delta t_0}$ . Из (11) находим  $\dot{x}(t_0 + 0) = -ue^{-\delta t_0} - A_0$ , так что

$$u \rightarrow u_1 \equiv -uP - A, \quad P = \exp\{-\pi\delta/\omega_0\}$$

за половину оборота. Точно так же получаем, что

$$u_1 \rightarrow u_2 \equiv u_1 P + A$$



за время  $t_0 \leq t \leq 2t_0$  и потому

$$\chi(u) = e^{-\pi\delta/\omega_0} (e^{-\pi\delta/\omega_0} u + A) + A. \quad (12)$$

Уравнение  $\chi(u) = u$  имеет единственное решение

$$u_0 = \frac{A}{1 - e^{-\pi\delta/\omega_0}}.$$

Нетрудно видеть, что  $\chi'(u_0) < 1$ , так что этому значению  $u_0$  отвечает устойчивый предельный цикл (рис. 39).

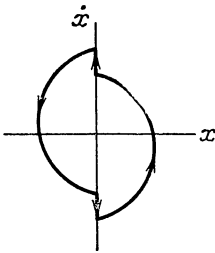


Рис. 39.

Качественно возникновение предельного цикла можно пояснить так. Наличие трения (члена  $2\delta\dot{x}$ ,  $\delta > 0$ ) приводит к тому, что если точка начинает движение из положения  $(u, 0)$ , то она пересечет ось  $x=0$  (при  $t = t_0$ ), имея меньшую по абсолютной величине скорость. Но в момент времени  $t = t_0$  происходит толчок: скорость получает конечное приращение направление которого совпадает с направлением скорости.

Эта борьба между трением и толчками приводит к установлению предельного периодического режима; наличие трения обуславливает его устойчивость. Такого рода предельные циклы имеются во многих физических задачах (см. [2, 32, 36]).

Периодические решения лишь в редких случаях удается найти в явном виде. Для их построения развиты различные приближенные методы; одни из основных — это методы Пуанкаре и Ляпунова [31, 34].

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В предыдущих главах рассматривались дифференциальные уравнения относительно неизвестной функции (или вектор-функции), которая зависит только от одной переменной. Пусть неизвестная функция зависит от двух или более переменных:  $u = u(x_1, \dots, x_n)$ . Соотношение между переменными  $x_1, \dots, x_n$ , неизвестной функцией  $u(\mathbf{x})$  и ее частными производными  $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$  и т. д. называется *уравнением с частными производными*. Уравнение вида

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0$$

называется *уравнением с частными производными первого порядка*. Интегрирование таких уравнений сводится к интегрированию систем обыкновенных дифференциальных уравнений — это будет показано в данной главе.

### § 1. Некоторые задачи, приводящие к уравнениям 1-го порядка с частными производными

**1. Уравнения поверхностей.** Рассмотрим в трехмерном пространстве поверхность  $S$ , образованную вращением около оси  $z$  кривой  $\gamma$ , расположенной в плоскости  $x, z$ . Уравнение этой поверхности имеет вид

$$z = \varphi(x^2 + y^2). \quad (1)$$

Функцию  $\varphi$  будем предполагать достаточно гладкой. Продифференцируем уравнение (1) по  $x, y$ :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\varphi'(x^2 + y^2), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y\varphi'(x^2 + y^2),$$

откуда находим соотношение

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Мы получили уравнение с частными производными 1-го порядка относительно неизвестной функции  $z(x, y)$ . График решения — поверхность  $z = z(x, y)$  в пространстве  $(x, y, z)$  называется *интегральной поверхностью* уравнения (2). Это уравнение выражает геометрическое свойство поверхностей вращения: сечение такой поверхности плоскостью  $z = \text{const}$  есть окружность с центром в начале координат. Действительно, рассмотрим кривую  $l: z(x, y) = z_0$  на плоскости  $z = z_0$ . Если точка  $(x, y, z_0) \in l$ , то вектор  $\nabla z = \left( \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right)$  ортогонален к вектору  $(y, -x)$ , а потому коллинеарен вектору  $(x, y)$ . Вектор  $\nabla z$  направлен по нормали к кривой  $l$  в точке  $(x, y)$ , так как  $l$  — линия уровня функции  $z(x, y)$ . Следовательно, нормаль к кривой  $l$  в любой ее точке направлена по радиусу-вектору  $(x, y)$ , а потому  $l$  есть окружность с центром в точке  $(0, 0)$ .

В § 2 будет показано, что любая интегральная поверхность уравнения (2) есть поверхность вращения с осью  $z$ , так что все такие поверхности полностью описываются уравнением с частными производными (2). Таким образом, всякое решение уравнения (2) дается формулой (1), где  $\varphi$  — произвольная функция. *Семейство решений уравнения (2) зависит от произвольной функции.* Это утверждение справедливо для всех уравнений с частными производными первого порядка.

**Задача 1.** Доказать, что если  $z = z(x, y)$  — уравнение поверхности вращения, ось которой направлена вдоль прямой  $x = at$ ,  $y = bt$ ,  $z = ct$ , то функция  $z$  удовлетворяет уравнению

$$(cy - bz) \frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx) \frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay. \quad (3)$$

В § 2 будут рассмотрены уравнения с частными производными первого порядка, описывающие цилиндрические и конические поверхности.

**2. Другие примеры.** Рассмотрим функцию вида

$$u(t, x) = f(x - ct). \quad (4)$$

Здесь  $c$  — постоянная,  $x$  — пространственная координата,  $t$  — время. График функции  $u$  в момент времени  $t$  получается из графика этой функции в начальный момент  $t = 0$  сдвигом на расстояние  $ct$  вдоль оси  $x$ . Функция  $u$

есть волна, бегущая вдоль оси  $x$  со скоростью  $c$ . Так как  $\frac{\partial u}{\partial t} = -cf'$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x} = f'$ , то функция  $u$  удовлетворяет уравнению с частными производными

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (5)$$

В § 4 будет показано, что все решения этого уравнения имеют вид (4).

В § 4 гл. 4 было показано, что всякий первый интеграл  $u(\mathbf{x})$  системы  $\frac{dx}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  из  $n$  уравнений удовлетворяет уравнению с частными производными первого порядка

$$\sum_{j=1}^n f_j(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0. \quad (6)$$

Важнейшие примеры уравнений с частными производными 1-го порядка — это уравнения классической механики и геометрической оптики [27]; см. также § 5.

**3. Классификация уравнений с частными производными 1-го порядка.** Уравнение называется *линейным*, если неизвестная функция  $u(\mathbf{x})$  и все ее частные производные входят в уравнение линейно. Общий вид линейного уравнения с частными производными 1-го порядка следующий:

$$\sum_{j=1}^n a_j(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j} + b(\mathbf{x}) u = f(\mathbf{x}). \quad (7)$$

Уравнения (2), (3), (5), (6) — линейные. Уравнение 1-го порядка называется *квазилинейным*, если частные производные функции  $u(\mathbf{x})$  входят в уравнение линейно. Общий вид квазилинейного уравнения с частными производными первого порядка следующий:

$$\sum_{j=1}^n a_j(\mathbf{x}, u) \frac{\partial u}{\partial x_j} = b(\mathbf{x}, u).$$

Пример: уравнение Хопфа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

где  $u = u(t, x)$ .

Уравнение, которое не является квазилинейным, называется нелинейным. Пример: *уравнение Эйконала*

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 = 1,$$

где  $S = S(x, y)$  — неизвестная функция.

## § 2. Интегрирование линейных и квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка

**1. Первые интегралы.** Рассмотрим автономную систему из  $n$  уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \quad (1)$$

**Предположение.** Вектор-функция  $f(x)$  непрерывно дифференцируема в некоторой области  $D \subset \mathbf{R}^n$ .

В теореме 1 из § 4, гл. 4 доказано, что гладкая функция  $u(x_1, \dots, x_n)$  тогда и только тогда является первым интегралом системы (1), когда  $u$  удовлетворяет уравнению с частными производными первого порядка

$$\sum_{j=1}^n f_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0 \quad (2)$$

в области  $D$ . Следовательно, интегрирование уравнения (1) сводится к отысканию всех первых интегралов системы (2). Так как всякое решение уравнения (2) есть первый интеграл системы (1), то из теоремы 2, § 4, гл. 4 вытекает

**Теорема 1.** Пусть  $U$  — достаточно малая окрестность точки  $a$ , которая не является положением равновесия системы (1). Тогда в области  $U$  всякое решение уравнения (2) имеет вид

$$u(x) = F(u_1(x), \dots, u_{n-1}(x)).$$

Здесь  $u_1(x), \dots, u_{n-1}(x)$  — независимые первые интегралы системы (1), а  $F$  — произвольная (гладкая) функция.

Тем самым задача об интегрировании уравнения с частными производными (2) сведена к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1).

Система (1) называется *характеристической* для уравнения (2), а ее фазовые траектории называются *характеристиками* уравнения (2). Связь между характеристиками и интегральными поверхностями особенно проста в случае двух независимых переменных ( $x, y$ ): пересечение плоскости  $z = \text{const}$  с интегральной поверхностью  $z = z(x, y)$  есть характеристика. Это следует из постоянства первого интеграла вдоль характеристики.

Пример 1.  $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ , где  $z = z(x, y)$  — неизвестная функция. Уравнения характеристик удобно записать, исключив  $dt$ , в следующей форме:

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}; \quad d(x^2 + y^2) = 0.$$

Следовательно, характеристики — окружности  $x^2 + y^2 = C$ , первый интеграл  $u = x^2 + y^2$ , и всякое решение уравнения имеет вид

$$z = F(x^2 + y^2).$$

Интегральные поверхности — поверхности вращения с осью  $z$ .

Пример 2.  $\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ . Уравнения характеристик:  $\frac{dx}{dt} = c$ ,  $x - ct = \text{const}$  (параллельные прямые), первый интеграл:  $u = x - ct$ , всякое решение имеет вид

$$u = F(x - ct).$$

Интегральная поверхность — цилиндрическая, образующие параллельны вектору  $(1, c, 0)$ .

Пример 3.  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ . Если область  $D$ , в которой рассматривается уравнение, содержит начало координат, то единственными интегральными поверхностями являются плоскости  $z = \text{const}$  (см. замечание 2). Пусть  $(0, 0) \notin D$ , тогда  $u = y/x$  — первый интеграл, решение имеет вид

$$z = F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Это уравнение можно записать в виде  $z = \Phi(\varphi)$ , где  $(r, \varphi)$  — полярные координаты на плоскости  $x, y$ . Покажем, что все интегральные поверхности — коноиды.

*Коноидом* называется поверхность, образованная прямыми (образующими), которые параллельны заданной плоскости (направляющей) и пересекают неподвижную прямую и неподвижную кривую (направляющие коноида). Точка пересечения направляющих прямой и плоскости называется вершиной коноида. Направляющей плоскостью поверхности  $z = \Phi(\varphi)$  служит плоскость  $xy$ , направляющей прямой — ось  $z$ . В качестве направляющей кривой можно взять, например, кривую, заданную уравнениями

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z = \Phi(\varphi).$$

Пример 4.  $\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = 1 \quad \left( \sum_{j=1}^n a_j^2 = 1 \right)$ . Уравнение ха-

рактеристик:  $\frac{dx}{dt} = a$  ( $a$  — вектор с компонентами  $a_1, \dots, a_n$ ), характеристики — параллельные прямые с направляющим вектором  $a$ . Выберем в  $R^n$  ортогональный базис из векторов  $(a, b_1, \dots, b_{n-1})$ , тогда функции  $u_j(x) = (b_j, x)$  — первые интегралы, так как  $(b_j, a) = 0$ . Всякое решение имеет вид

$$u(x) = F((b_1, x), \dots, (b_{n-1}, x)).$$

**2. Квазилинейные уравнения.** Рассмотрим квазилинейное уравнение (см. § 1)

$$\sum_{j=1}^n a_j(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_j} = b(x, u) \quad (3)$$

и покажем, что его интегрирование сводится к отысканию первых интегралов *характеристической системы*

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1(x, u), \dots, \frac{dx_n}{dt} = a_n(x, u), \quad \frac{du}{dt} = b(x, u). \quad (4)$$

Предположение. Функции  $a_j(x, u)$ ,  $1 \leq j \leq n$ ,  $b(x, u)$  непрерывно дифференцируемы в области  $D \subset R_{x, u}^{n+1}$  и  $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$  в этой области.

Будем искать функцию  $\omega(x_1, \dots, x_n, u)$  такую, что если  $u(x)$  — решение уравнения (3), то

$$\omega(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n)) \equiv 0. \quad (5)$$

Из этого тождества находим

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = - \frac{\partial w}{\partial x_j} / \frac{\partial w}{\partial u}$$

и, подставляя в уравнение (5), получаем

$$\sum_{j=1}^n a_j(\mathbf{x}, u) \frac{\partial w}{\partial x_j} + b(\mathbf{x}, u) \frac{\partial w}{\partial u} = 0. \quad (6)$$

Уравнение (7) имеет тот же вид, что и уравнение (2), и потому всякое его решение есть функция от независимых первых интегралов  $v_1(\mathbf{x}, u), \dots, v_n(\mathbf{x}, u)$  системы (4). Следовательно, всякое решение уравнения (3) определяется из уравнения

$$F(v_1(\mathbf{x}, u), \dots, v_n(\mathbf{x}, u)) = 0, \quad (7)$$

где  $F$  — некоторая (гладкая) функция.

Пример 5.  $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  (уравнение Хопфа). Характеристическая система:

$$dt = \frac{dx}{u} = \frac{du}{0},$$

первые интегралы  $v_1 = u$ ,  $v_2 = x - tu$ . Всякое решение задается уравнением

$$F(u, x - tu) = 0.$$

Если это уравнение можно разрешить относительно  $u$ , то

$$u = f(x - tu). \quad (8)$$

Этот пример будет подробно проанализирован в § 4.

**3. Характеристики и интегральные поверхности.** Укажем связь между характеристиками и интегральными кривыми уравнения (5), на примере уравнения с двумя независимыми переменными

$$a(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = c(x, y, z). \quad (9)$$

Коэффициенты уравнения (9) задают в пространстве  $\mathbf{R}^3$  векторное поле

$$I(P) = (a(P), b(P), c(P)); P = (x, y, z).$$



Если точка  $P$  лежит на интегральной поверхности  $S: z = z(x, y)$ , то вектор

$$\mathbf{n}(P) = \left( \frac{\partial z(P)}{\partial x}, \frac{\partial z(P)}{\partial y}, -1 \right)$$

направлен по нормали к поверхности  $S$  в точке  $P$ . Уравнение (9) можно записать в виде

$$(\mathbf{n}(P), \mathbf{l}(P)) = 0, \quad (10)$$

т. е. векторы  $\mathbf{n}(P)$ ,  $\mathbf{l}(P)$  ортогональны. Итак:

1°. Вектор  $\mathbf{l}(P)$  лежит в касательной плоскости к интегральной поверхности.

Очевидно, верно и обратное.

2°. Если поверхность  $S: z = z(x, y)$  в каждой своей точке  $P$  касается вектора  $\mathbf{l}(P)$ , то  $S$  — интегральная поверхность.

Так как и характеристика, и интегральная поверхность, проходящие через точку  $P$ , касаются вектора  $\mathbf{l}(P)$ , то интегральная поверхность расслаивается на характеристики. Именно, справедлива

**Теорема 2.** Если интегральная поверхность  $S: z = \varphi(x, y)$  содержит точку  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ , то она содержит характеристику, проходящую через точку  $P_0$ .

**Доказательство.** Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = a(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = b(x, y, z),$$

где  $z = \varphi(x, y)$ , и поставим задачу Коши

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.$$

Пусть  $\{x(t), y(t)\}$  — решение этой задачи. Кривая  $\Gamma$ :

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \equiv \varphi(x(t), y(t))$$

лежит на интегральной поверхности; покажем, что  $\Gamma$  — характеристика. Действительно,

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dt} = a \frac{\partial \varphi}{\partial x} + b \frac{\partial \varphi}{\partial y} = c,$$

так как  $z = \varphi(x, y)$  — решение уравнения (9).

**Пример 6.**  $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = c$  ( $a^2 + b^2 \neq 0$ ). Характеристическая система имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = b, \quad \frac{dz}{dt} = c,$$

так что характеристики

$$x = at + x_0, \quad y = bt + y_0, \quad z = ct + z_0$$

образуют семейство прямых, параллельных вектору  $l = (a, b, c)$ . Следовательно, интегральные поверхности — цилиндрические поверхности с образующими, параллельными вектору  $l$ .

Первые интегралы (при  $a \neq 0$ )

$$u_1 = bx - ay, \quad u_2 = az - cx$$

и всякое решение определяется уравнением

$$F(bx - ay, az - cx) = 0.$$

**Пример 7.**  $(x - a) \frac{\partial z}{\partial x} + (y - b) \frac{\partial z}{\partial y} = z - c$ . Из характеристической системы

$$\frac{dx}{dt} = x - a, \quad \frac{dy}{dt} = y - b, \quad \frac{dz}{dt} = z - c$$

находим

$$x = C_1 e^t + a, \quad y = C_2 e^t + b, \quad z = C_3 e^t + c,$$

где  $C_j$  — произвольные постоянные. Характеристики — лучи, выходящие из точки  $P = (a, b, c)$ , так что интегральные поверхности — гладкие коноиды с вершиной в точке  $P$  (ср. пример 3). Первые интегралы

$$u_1 = \frac{y - b}{x - a}, \quad u_2 = \frac{z - c}{x - a},$$

всякое решение определяется уравнением

$$F\left(\frac{y - b}{x - a}, \frac{z - c}{x - a}\right) = 0.$$

**Пример 8.**  $(bz - cy) \frac{\partial z}{\partial x} + (cx - az) \frac{\partial z}{\partial y} = ay - bz$ , вектор  $(a, b)$  — ненулевой. Из системы

$$\frac{dx}{dt} = bz - cy, \quad \frac{dy}{dt} = cx - az, \quad \frac{dz}{dt} = ay - bz,$$

умножая уравнения последовательно на: 1)  $a, b, c$ ; 2)  $x, y, z$  и складывая, находим первые интегралы

$$u_1 = ax + by + cz, \quad u_2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

На характеристике функции  $u_1, u_2$  постоянны; пересечение плоскости  $u_1 = C_1$  и сферы  $u_2 = C_2$  — окружность, центр которой лежит на прямой  $l: x = at, y = bt, z = ct$ . Следовательно, интегральные поверхности — поверхности вращения с осью вращения  $l$  (ср. пример 1).

Пример 9. Функция  $u(x_1, \dots, x_n)$  называется *положительной однородной степени  $\alpha$* , если при любом  $x \neq 0$  и при любом  $t > 0$  справедливо тождество

$$u(tx_1, \dots, tx_n) = t^\alpha u(x_1, \dots, x_n). \quad (11)$$

Дифференцируя это тождество по  $t$  и полагая затем  $t = 1$ , получаем тождество Эйлера для положительно однородных функций:

$$\sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = \alpha u(x). \quad (12)$$

Примеры таких функций:  $u(x) = |x|^\alpha$ ;  $u(x)$  — однородный полином степени  $\alpha$  (при целом  $\alpha \geq 0$ ).

Рассмотрим линейное уравнение с частными производными (12). Из характеристической системы

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1, \dots, \frac{dx_n}{dt} = x_n, \quad \frac{du}{dt} = \alpha u$$

находим

$$x_1 = C_1 e^t, \dots, x_n = C_n e^t, \quad u = C_0 e^{\alpha t},$$

где  $C_j$  — произвольные постоянные. Пусть  $x_1 > 0$ ; тогда независимые первые интегралы можно выбрать в виде

$$v_1 = \frac{x_2}{x_1}, \dots, v_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{x_1}, \quad v_n = \frac{u}{x_1^\alpha}$$

и всякое решение уравнения (14) определяется уравнением

$$F\left(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}, \frac{u}{x_1^\alpha}\right) = 0.$$

Выражая  $u$  через остальные переменные, получаем

$$u(x) = x_1^\alpha f\left(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right).$$

Отсюда следует, что любое решение уравнения (14) является положительно однородной функцией степени  $\alpha$ ; этот факт доказан при  $x_1 > 0$ , но нетрудно проверить, что он верен при  $x \neq 0$ .

### § 3. Задача Коши для линейных и квазилинейных уравнений с частными производными 1-го порядка

1. **Линейные уравнения с двумя независимыми переменными.** Рассмотрим уравнение

$$a(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} + c(x, y) z = f(x, y). \quad (1)$$

**Предположение 1.** Коэффициенты  $a(x, y)$ ,  $b(x, y)$ ,  $c(x, y)$  и правая часть  $f(x, y)$  уравнения (1) непрерывно дифференцируемы в некоторой области  $D$  на плоскости  $(x, y)$  и

$$(a(x, y), b(x, y)) \neq (0, 0)$$

в области  $D$ .

Для обыкновенного дифференциального уравнения  $y' = \varphi(x, y)$  задача Коши ставится так:

*найти интегральную кривую, проходящую через заданную точку  $(x_0, y_0)$  на плоскости  $(x, y)$ .*

Для уравнения с частными производными (1) задача Коши ставится так:

*найти интегральную поверхность, проходящую через заданную кривую  $\Gamma$  в пространстве  $(x, y, z)$ .*

Приведем точную постановку задачи Коши. Пусть на плоскости  $(x, y)$  задана кривая  $\gamma$ :  $x = \varphi(s)$ ,  $y = \psi(s)$ ,  $s \in I = (s_1, s_2)$ . Функции  $\varphi(s)$ ,  $\psi(s)$  непрерывно дифференцируемы при  $s \in I$  и

$$(\varphi'(s), \psi'(s)) \neq (0, 0), \quad s \in I,$$

т. е.  $\gamma$  — гладкая кривая. Зададим на  $\gamma$  значение функции  $z$ :

$$z|_{\gamma} = h(s), \quad (2)$$

т. е.

$$z(\varphi(s), \psi(s)) = h(s), \quad s \in I. \quad (3)$$

**Предположение 2.** Функция  $h(s)$  непрерывно дифференцируема при  $s \in I$ .

Задача Коши состоит в следующем: требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (3) (т. е. данным Коши, или начальным данным).

Пусть  $\Gamma$  — кривая  $x = \varphi(s)$ ,  $y = \psi(s)$ ,  $z = h(s)$  ( $s \in I$ ) в пространстве. Решение задачи Коши — это интегральная поверхность, проходящая через кривую  $\Gamma$  (рис. 40).

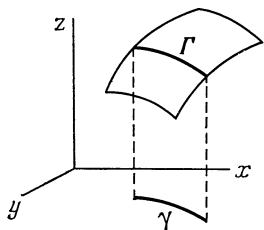


Рис. 40.

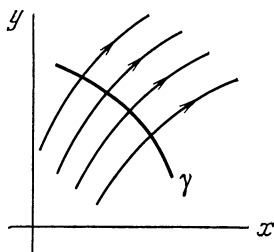


Рис. 41.

*Характеристической системой* для уравнения (1) называется система

$$\frac{dx}{dt} = a(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = b(x, y), \quad (4)$$

а ее фазовые траектории называются *характеристиками*. Отметим, что это определение характеристик не совпадает с приведенным в § 2.

Связь между уравнением (1) и характеристиками устанавливает

*Лемма. Вдоль характеристики*

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{dt}. \quad (5)$$

*Доказательство.* Пусть  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  — решение системы (4), тогда

$$\frac{d}{dt} z(x(t), y(t)) = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y}.$$

*Теорема 1.* Пусть кривая  $\gamma$  не касается характеристик. Тогда задача Коши (1), (3) однозначно разрешима в некоторой окрестности кривой  $\gamma$ .

*Доказательство.* Выпустим из каждой точки кривой  $\gamma$  характеристику (рис. 41), т. е. решим семейство задач Коши для системы (4):

$$x|_{t=0} = \varphi(s), \quad y|_{t=0} = \psi(s), \quad (6)$$

где  $s$  пробегает интервал  $I$ . Пусть

$$x = x(t, s), \quad y = y(t, s) \quad (7)$$

есть решение задачи (4), (6),  $l_s$  — соответствующая характеристика. В силу леммы вдоль  $l_s$  уравнение (1) принимает вид

$$\frac{dz}{dt} + cz = f, \quad z|_{t=0} = h(s), \quad (8)$$

т. е. мы получили задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Решая задачу Коши (8), находим функцию  $z = \omega(t, s)$ . Эта функция непрерывно дифференцируема в области  $\tilde{D}: s \in I, t \in I_s$ , где  $I_s$  — некоторый интервал вида  $(-\delta_1(s), \delta_2(s))$ ,  $\delta_{1,2} > 0$ . Действительно, в силу теорем из § 7 гл. 2 решение задачи Коши (4), (6) непрерывно дифференцируемо по  $t, s$  в  $\tilde{D}$ ; в силу тех же теорем этим свойством обладает решение  $\omega(t, s)$  задачи (8).

Остается проверить, что функция  $\omega$  есть гладкая функция переменных  $x, y$ ; для этого достаточно показать, что из соотношений (7) можно выразить  $t, s$  через  $x, y$ , как гладкие функции. Якобиан

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{vmatrix} \varphi'(s) & \psi'(s) \\ a(x, y) & b(x, y) \end{vmatrix} \Big|_{(x, y) \in \gamma} \neq 0.$$

Действительно, вектор  $(\varphi', \psi')$  — касательный к  $\gamma$ , вектор  $(a, b)$  — касательный к характеристике  $l_s$ , и эти векторы неколлинеарны, так как  $\gamma$  не касается характеристик. Тем самым существование решения задачи Коши доказано.

Допустим, что задача (1), (3) имеет два решения  $z_1(x, y), z_2(x, y)$ . Положим  $\tilde{z} = z_1 - z_2$ , тогда

$$a \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} + b \frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} + c\tilde{z} = 0, \quad \tilde{z}|_{\gamma} = 0,$$

так что, в силу (8), вдоль характеристики  $l_s$  имеем

$$\frac{d\tilde{z}}{dt} + c\tilde{z} = 0, \quad \tilde{z}|_{t=0} = 0.$$

По теореме единственности  $\tilde{z} \equiv 0$ , так что  $z_1(x, y) \equiv z_2(x, y)$  и потому решение задачи Коши единственно.

Это доказательство содержит четкий алгоритм решения задачи Коши (1), (3). Именно, требуется

1°. Построить характеристики, проходящие через кривую  $\gamma$ , т. е. решить семейство задач Коши (4), (6) для характеристической системы.

2°. Решить семейство задач Коши (8), которые элементарно интегрируются.

Этот алгоритм вполне пригоден для численного интегрирования задачи Коши.

Если кривая  $\gamma$  касается хотя бы одной из характеристик, то задача Коши (1), (2) может не иметь ни одного решения и может иметь бесконечно много решений.

Пример 1. Всякое решение уравнения  $z_x = 0$  имеет вид  $z = F(y)$ , характеристики — прямые  $y = \text{const}$ .

1°.  $\gamma$  — окружность  $x^2 + y^2 = 1$ . Характеристика  $y = y_0$  при  $|y_0| < 1$  пересекает  $\gamma$  в двух точках  $(\pm x_0, y_0)$ , и так как решение не зависит от  $x$ , то  $z(-x_0, y_0) = z(x_0, y_0)$ . Если данные Коши на  $\gamma$  не обладают этим свойством, то задача Коши не имеет решений.

2°.  $\gamma$  — характеристика  $y = y_0$ . Выберем данные Коши  $h|_\gamma \equiv c$ , где  $c$  — постоянная. Тогда задача Коши имеет бесконечно много решений; все они имеют вид  $z = f(y)$ , где  $f(y)$  — произвольная гладкая функция такая, что  $f(y_0) = c$ .

**2. Область зависимости от начальных данных.** Возьмем точку  $P_0 = (x_0, y_0)$ , достаточно близкую к кривой  $\gamma$ . Значение решения  $z(x_0, y_0)$  вычисляется так: выпускаем из точки  $P_0$  характеристику до пересечения с  $\gamma$  (пусть  $s = s_0$  в точке встречи) и затем решаем задачу Коши (8) при  $s = s_0$  (рис. 41). Следовательно, значение  $z(x_0, y_0)$  зависит только от значения  $h(s_0)$  и не зависит от значений данных Коши  $h(s)$  в других точках кривой  $\gamma$ . Поэтому говорят, что область зависимости решения задачи Коши (1), (3) состоит из одной точки.

**3. Линейные уравнения со многими переменными.** Рассмотрим уравнение

$$\sum_{j=1}^n a_j(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(\mathbf{x}) u = f(\mathbf{x}), \quad (9)$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ . Данные Коши ставятся не на кривой, а на поверхности размерности  $n - 1$  в  $\mathbf{R}_x^n$ . Гладкой гипер-

поверхностью  $\gamma$  (или поверхностью размерности  $n-1$ ) называется множество в  $\mathbf{R}^n$ , заданное уравнениями

$$x_j = \varphi_j(s_1, \dots, s_{n-1}), \quad 1 \leq j \leq n, \quad (s_1, \dots, s_{n-1}) \in U.$$

Здесь  $U$  — область в пространстве  $\mathbf{R}_s^{n-1}$ , функции  $\varphi_j(\mathbf{s}) \in C^1(U)$  и

$$\text{rank } \varphi'(\mathbf{s}) = n-1, \quad \mathbf{s} \in U. \quad (10)$$

Данные Коши для уравнения (9) задаются на  $\gamma$ :

$$u|_\gamma = h(\mathbf{s}), \quad (11)$$

где  $h(\mathbf{s}) \in C^1(U)$ . Система

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{a}(\mathbf{x}), \quad (12)$$

где  $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = (a_1(\mathbf{x}), \dots, a_n(\mathbf{x}))$  называется *характеристической* для уравнения (9). Введем

Предположение 1'. Функции  $a_1(\mathbf{x}), \dots, a_n(\mathbf{x}), c(\mathbf{x}), f(\mathbf{x})$  принадлежат классу  $C^1(D)$ , где  $D$  — область в  $\mathbf{R}^n$ , содержащая  $\gamma$ , и  $\mathbf{a}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$  при  $\mathbf{x} \in D$ .

**Теорема 2.** Пусть гиперповерхность  $\gamma$  не касается характеристик. Тогда задача Коши (9), (10) однозначно разрешима в некоторой окрестности гиперповерхности  $\gamma$ .

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1. Если  $l: \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  — характеристика, то вдоль  $l$

$$\frac{du}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = \sum_{j=1}^n a_j(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j} = f(\mathbf{x}) - c(\mathbf{x})u.$$

Выпустим из  $\gamma$  все характеристики, тогда вдоль характеристики  $l_{s^0}$  получим задачу Коши  $\frac{du}{dt} + cu = f$ ,  $u|_{t=0} = h(\mathbf{s}^0)$ . Решив это семейство задач Коши, зависящее от  $(n-1)$ -го параметра  $s_1, \dots, s_{n-1}$ , получим решение  $u = \omega(t, s_1, \dots, s_{n-1})$  как гладкую функцию  $t, s_1, \dots, s_{n-1}$ .

**4. Квазилинейные уравнения.** Рассмотрим уравнение

$$a(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = c(x, y, z). \quad (13)$$

Характеристическая система имеет вид (§ 2, (4))

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = b, \quad \frac{dz}{dt} = c \quad (14)$$



и характеристики — кривые в пространстве. Задача Коши ставится точно так же, как и для линейного уравнения:

$$z|_{\gamma} = h(s). \quad (15)$$

Предположения те же, что и в п. 1: функции  $a$ ,  $b$ ,  $c$  непрерывно дифференцируемы в некоторой области  $D$  в пространстве и  $(a, b) \neq (0, 0)$  в области  $D$ .

**Теорема 3.** Пусть кривая  $\gamma$  не касается проекций характеристик на плоскость  $(x, y)$ . Тогда решение задачи Коши (13), (15) существует и единственно в некоторой окрестности кривой  $\gamma$ .

Доказательство во многом аналогично доказательству теоремы 1. Пусть  $\Gamma$  — кривая:  $x = \varphi(s)$ ,  $y = \psi(s)$ ,  $z = h(s)$ ,  $s \in I$ . Проведем через каждую точку кривой  $\Gamma$  характеристику; образованная ими поверхность  $S$  будет интегральной поверхностью. Чтобы доказать это, необходимо проверить, что поверхность  $S$ :

1) задается уравнением  $z = f(x, y)$ , где  $f$  — гладкая функция;

2) является интегральной поверхностью.

Пусть свойство 1) выполнено, тогда поверхность  $S$  в каждой точке  $P \in S$  имеет касательную плоскость  $\pi(P)$ . Вектор  $\mathbf{l}(P) = (a(P), b(P), c(P))$  лежит в плоскости  $\pi(P)$ , так как он касается характеристики, проходящей через точку  $P$ . Поэтому вектор  $\mathbf{l}(P)$  ортогонален вектору  $\mathbf{n}(P)$ , направленному по нормали к  $S$  в точке  $P$ . Так как в качестве  $\mathbf{n}(P)$  можно взять вектор  $\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\right)$ , то в точке  $P$

$$0 = (\mathbf{l}, \mathbf{n}) = a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} - c$$

и уравнение (13) выполняется.

Докажем 1). Решение

$$x = x(t, s), \quad y = y(t, s), \quad z = z(t, s) \quad (16)$$

задачи Коши

$$x|_{t=0} = \varphi(s), \quad y|_{t=0} = \psi(s), \quad z|_{t=0} = h(s)$$

для системы (14) определяет характеристику  $L_s$ . При  $t=0$  якобиан

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi'(s) & \psi'(s) \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0,$$

так как  $\gamma$  не касается проекций характеристик на плоскость  $(x, y)$ . Поэтому из первых двух соотношений (16) можно выразить  $t, s$  через  $x, y$  как гладкие функции (в окрестности  $\gamma$ ), так что  $z = z(t(x, y), s(x, y))$  будет гладкой функцией переменных  $x, y$ .

#### § 4. Линейные и нелинейные волны

Поведение решений задачи Коши для линейных и квазилинейных уравнений существенно различается. Покажем это на примере линейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где  $c > 0$  — постоянная, и квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Зададим одни и те же данные Коши:

$$u|_{t=0} = f(x). \quad (3)$$

Здесь  $f$  — гладкая финитная (т. е. равная нулю вне некоторого отрезка) функция.

1°. Всякое решение уравнения (1) имеет вид (§ 2, пример 2)  $u = F(x - ct)$ , так что решение задачи Коши имеет вид

$$u(t, x) = f(x - ct). \quad (4)$$

Постоянная  $C$  имеет размерность скорости — см/с; и действительно,  $c$  есть скорость распространения возмущений. График функции  $u$  получается из графика функции  $f(x)$  сдвигом на расстояние  $ct$  (рис. 42), т. е. функция  $u$  — волна, бегущая направо со скоростью  $c$ .



Рис. 42.

Аналогично, решение задачи Коши для однородного линейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

также есть бегущая волна. Скорость в точке  $x_0$  в момент времени  $t = t_0$  равна  $c(t_0, x_0)$ .

2°. Всякое решение уравнения Хопфа (2) дается формулой  $u = F(x - tu)$  (§ 2, пример 5), так что решение задачи Коши (2), (3) имеет вид

$$u = f(x - tu). \quad (5)$$

Приведем качественную картину распространения волны. Значение  $u(t_0, x_0)$  — это скорость движения волны в точке  $t_0, x_0$ . В начальный момент  $t = 0$  эта скорость максимальна в точке  $P$  — на гребне волны (рис. 43). В последующие моменты времени точки на профиле волны, лежащие левее

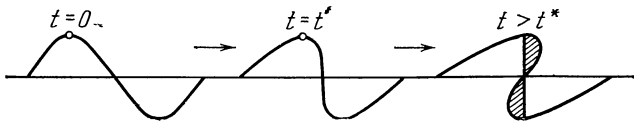


Рис. 43.

вершины  $P$ , будут отставать от  $P$ , а точка  $P$  будет «догонять» точки профиля, лежащие правее. Поэтому задний фронт волны станет более пологим, а передний — более крутым. Наконец, в некоторый момент времени  $t = t^*$  на переднем фронте появится точка с вертикальной касательной, а в последующие моменты времени функция  $u(t, x)$  станет неоднозначной. Неоднозначная функция  $u(t, x)$  не имеет физического смысла в такого рода задачах (например, в задачах газовой динамики). Физические соображения приводят к необходимости рассмотрения *разрывного* (при  $t > t^*$ ) решения уравнения (2), и при  $t > t^*$  график решения имеет изображенный на рис. 43 вид. Положение разрыва определяется по «правилу площадей»: заштрихованные площади равны. Разрывное решение называется *ударной волной*.

**Задача 1.** Показать, что

$$tf'(x - tu) = 1$$

при  $t = t^*, u = u(t^*, x^*)$ .

**Задача 2.** Найти  $t^*$ , если  $f(x) = a^2 - x^2, a > 0$ .

Самопроизвольное возникновение разрывов (ударных волн) при гладких начальных данных — эффект типично нелинейный.

## § 5. Нелинейные уравнения

**1. Характеристики.** Рассмотрим нелинейное уравнение с частными производными первого порядка

$$H\left(x_1, \dots, x_n, \frac{\partial S}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial x_n}\right) = 0 \quad (1)$$

относительно неизвестной функции  $S$ . Обозначим  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ . Будем для простоты предполагать, что функция  $H(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  дважды непрерывно дифференцируема во всем пространстве  $\mathbf{R}_{\mathbf{x}, \mathbf{p}}^{2n}$  и что не все частные производные  $\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n}$  обращаются в нуль одновременно. Решением уравнения (1) называется дважды непрерывно дифференцируемая функция  $S(\mathbf{x})$ , удовлетворяющая уравнению.

Пусть  $S(\mathbf{x})$  — решение уравнения (1); обозначим  $p_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}$ . Дифференцируя уравнение (1) по  $x_k$ , получаем

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial x_k} + \frac{\partial H}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_k}{\partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial x_k} = 0, \quad (2)$$

так как  $\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 S}{\partial x_k \partial x_i}$ . В этой и последующих формулах  $H = H(\mathbf{x}, \nabla S(\mathbf{x}))$ . Рассмотрим систему

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

и пусть  $\mathbf{x}(\tau)$  — ее решение. Вдоль соответствующей фазовой траектории  $\gamma$  все  $p_i$  будут функциями  $\tau$ , так как  $p_i = \frac{\partial S(\mathbf{x}(\tau))}{\partial x_i}$ . Имеем

$$\frac{dp_k}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_k} \frac{dx_i}{d\tau} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_k}{\partial x_i},$$

так что, в силу (2),

$$\frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Далее, вдоль  $\gamma$  имеем

$$\frac{dS}{d\tau} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} \frac{dx_i}{d\tau} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial H}{\partial p_i}. \quad (5)$$

Объединяя (3) и (4), получаем систему из  $2n$  дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

которая называется *характеристической* (для уравнения (1)). Ее фазовые траектории называют *характеристиками* уравнения (1); они расположены в  $2n$ -мерном *фазовом пространстве*  $\mathbf{R}_{x, p}^{2n}$ . Вдоль характеристик, в силу (5), имеем

$$\frac{dS}{d\tau} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial H}{\partial p_i}. \quad (7)$$

Ниже будет показано, что интегрирование уравнения (1) сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6).

**2. Задача Коши.** Постановка этой задачи для нелинейного уравнения (1) отличается от постановки задачи Коши для линейных и квазилинейных уравнений с частными производными. С такого рода различием мы уже встречались для обыкновенных дифференциальных уравнений. Именно, для уравнения, разрешенного относительно производной:  $y' = f(x)$  в качестве начальных данных задается значение функции в некоторой точке:  $y(x_0) = y_0$ . Для уравнения, не разрешенного относительно производной:  $H(x, y') = 0$ , задаются значения функции и производной в некоторой точке:  $y(x_0) = y_0$ ,  $y'(x_0) = p_0$ . Эти значения должны быть согласованы, т. е. должно выполняться соотношение  $H(x_0, p_0) = 0$ . Аналогично, для нелинейного уравнения (1) в качестве данных Коши следует задать значения функции и всех ее частных производных (т. е. задать градиент этой функции) на некоторой гиперповерхности  $M^{n-1} \subset \mathbf{R}_x^n$ . Эти значения функции  $S$  и ее градиента должны быть согласованы с уравнением (1).

Рассмотрим вначале случай, когда  $M^{n-1}$  есть гиперплоскость  $x_n = 0$ , и пусть  $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ . Введем обозначения

$$\mathbf{x}' = (x_1, \dots, x_{n-1}),$$

$$p_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial x_i}, \quad p_i^0(\mathbf{x}') = \frac{\partial S(\mathbf{x}', 0)}{\partial x_i}.$$

Зададим на  $M^{n-1}$  значения функции  $S: S(\mathbf{x}', 0) = S_0(\mathbf{x}')$ . Тогда значения  $p_i^0(\mathbf{x}')$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  известны:  $p_i^0(\mathbf{x}') = \frac{\partial S_0(\mathbf{x}')}{\partial x_i}$ . Для определения  $p_n^0(\mathbf{x}')$  получаем уравнение

$$H(\mathbf{x}', 0, p_1^0(\mathbf{x}'), \dots, p_{n-1}^0(\mathbf{x}'), p_n^0(\mathbf{x}')) = 0, \quad (8)$$

т. е.  $p_n^0(\mathbf{x}')$  определяется как неявная функция. Уравнение (8) может определять не одну, а несколько функций, его решение может не быть гладким и т. д. Пусть при  $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$  это уравнение имеет корень  $p_n^0$ . Если выполнено условие

$$\frac{\partial}{\partial p_n} H(\mathbf{0}, \mathbf{p}^0(\mathbf{0})) \neq 0, \quad (9)$$

то по теореме о неявной функции (гл. 2, § 9) уравнение (8) определяет единственную гладкую в окрестности точки  $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$  функцию  $p_n^0(\mathbf{x}')$  такую, что  $p_n^0(\mathbf{0}') = p_n^0$ . Данные Коши в этом случае таковы:

$$S(\mathbf{x}', 0) = S_0(\mathbf{x}'), \quad \nabla S(\mathbf{x}', 0) = \mathbf{p}^0(\mathbf{x}'). \quad (10)$$

Здесь  $p_i^0(\mathbf{x}') = \frac{\partial S_0(\mathbf{x}')}{\partial x_i}$ ,  $i < n$ , а  $p_n^0(\mathbf{x}')$  — указанный выше корень уравнения (8).

Перейдем к общему случаю. Пусть  $M^{n-1}$  задается уравнениями

$$x_i = x_i^0(\boldsymbol{\alpha}), \quad i = 1, \dots, n, \quad (11)$$

где  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$  и  $\boldsymbol{\alpha}$  лежит в некоторой области  $V \subset \mathbf{R}_\alpha^{n-1}$ . Пусть, для определенности,  $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^0(\alpha_0)$ . Гиперповерхность  $M^{n-1}$  предполагается гладкой, т. е. ранг матрицы Якоби  $(\mathbf{x}^0(\boldsymbol{\alpha}))'$  тождественно равен  $n-1$ . Задача Коши для уравнения (1) ставится так: найти решение уравнения такое, что

$$S(\mathbf{x}^0(\boldsymbol{\alpha})) = S_0(\boldsymbol{\alpha}), \quad \nabla S(\mathbf{x}^0(\boldsymbol{\alpha})) = \mathbf{p}^0(\boldsymbol{\alpha}), \quad (12)$$

где  $S_0$  и  $\mathbf{p}^0$  — заданные гладкие функция и вектор-функция. Для данных Коши (12) должны выполняться два условия согласования.

$$1^\circ. H(\mathbf{x}^0(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{p}^0(\boldsymbol{\alpha})) \equiv 0, \quad \boldsymbol{\alpha} \in V. \quad (13)$$

Это следует из того, что значения функции  $S$  и ее градиента на  $M^{n-1}$  должны быть согласованы с уравнением (1).

$$2^\circ. dS_0(\alpha) = \sum_{i=1}^n p_i^0(\alpha) dx_i^0(\alpha). \quad (14)$$

Это следует из тождества  $dS = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} dx_i$  и из инвариантности первого дифференциала. Такую задачу Коши не всегда можно поставить: для этого требуется, чтобы выполнялся аналог условия (9). Соответствующее условие имеет вид

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_1} & \frac{\partial H}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial H}{\partial p_n} \\ \frac{\partial x_1^0(\alpha^0)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x_2^0(\alpha^0)}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial x_n^0(\alpha^0)}{\partial \alpha_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_1^0(\alpha^0)}{\partial \alpha_{n-1}} & \frac{\partial x_2^0(\alpha^0)}{\partial \alpha_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x_n^0(\alpha^0)}{\partial \alpha_{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (15)$$

где значения производных функции  $H$  взяты в точке  $(x^0(\alpha^0), p^0(\alpha^0))$ .

*Теорема.* Пусть условия (13)—(15) выполнены. Тогда в малой окрестности точки  $x^0$  задача Коши (1), (12) имеет решение и притом единственное.

*Доказательство.* Мы ограничимся случаем, когда  $M^{n-1}$  есть гиперплоскость  $x_n = 0$ . Рассмотрим семейство задачи Коши

$$x(0) = (y, 0), \quad p(0) = p^0(y) \quad (16)$$

для характеристической системы (6). Здесь  $y = (y_1, \dots, y_{n-1})$  и  $y$  меняется в малой окрестности точки  $y = 0$ . Решение задачи Коши ( ), (16) обозначим  $\{\tilde{x}(\tau, y), \tilde{p}(\tau, y)\}$ . Это решение дважды непрерывно дифференцируемо по совокупности переменных  $\tau, y_1, \dots, y_{n-1}$  в некоторой окрестности  $W$  точки  $\tau = 0, y = 0$  (гл. 2, § 7).

Фиксируем  $y$  и рассмотрим уравнение (7) вдоль соответствующей характеристики, т. е.

$$\frac{dS}{d\tau} = \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i(\tau, y) \frac{\partial}{\partial p_i} H(\tilde{x}(\tau, y), \tilde{p}(\tau, y)).$$

Данные Коши для функции  $S$  определяются из (10):  $S|_{\tau=0} = S_0(\mathbf{y})$ . Решение этой задачи Коши обозначим  $\tilde{S}(\tau, \mathbf{y})$ ; оно имеет вид

$$\tilde{S}(\tau, \mathbf{y}) = S_0(\tau, \mathbf{y}) + \int_0^\tau \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} d\tau$$

и потому дважды непрерывно дифференцируемо в области  $W$ .

Чтобы завершить доказательство теоремы, проверим следующие факты:

1. Переменные  $\tau, y_1, \dots, y_{n-1}$  являются гладкими функциями от переменных  $x_1, \dots, x_n$ .

Напомним, что все наши рассмотрения носят локальный характер:  $\mathbf{x}$  лежит в малой окрестности точки  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Тогда  $\tilde{S}(\tau, \mathbf{y}) = S(\mathbf{x})$  — гладкая функция,  $\tilde{\mathbf{p}}(\tau, \mathbf{y}) = \mathbf{p}(\mathbf{x})$  — гладкая вектор-функция  $\mathbf{x}$ .

2. Справедливо тождество  $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \nabla S(\mathbf{x})$ .

3. Функция  $S(\mathbf{x})$  удовлетворяет уравнению (1).

Рассмотрим систему из  $n$  уравнений

$$\tilde{\mathbf{x}}(\tau, \mathbf{y}) = \mathbf{x}$$

относительно неизвестных  $\tau, y_1, \dots, y_n$ . Из данных Коши (16) имеем

$$\tilde{x}_1(0, \mathbf{y}) = y_1, \dots, \tilde{x}_{n-1}(0, \mathbf{y}) = y_{n-1}, \tilde{x}_n(0, \mathbf{y}) = 0,$$

так что

$$\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial y_j} = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, \quad j \leq n-1, \quad \frac{\partial \tilde{x}_n}{\partial y_j} = 0$$

в точке  $\tau = 0, \mathbf{y} = \mathbf{0}$ . В этой же точке  $\frac{d\tilde{x}_n}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_n} \neq 0$ ,

в силу условия (9). Следовательно,  $\det \tilde{\mathbf{x}}'(\tau, \mathbf{y}) \neq 0$  в указанной точке и утверждение 1 следует из теоремы об обратной функции (гл. 2, § 9). Докажем, что

$$H(\tilde{\mathbf{x}}(\tau, \mathbf{y}), \tilde{\mathbf{p}}(\tau, \mathbf{y})) \equiv 0. \quad (17)$$

Это следует из того, что функция  $H$  — первый интеграл гамильтоновой системы (6) (гл. 4, § 4). Остается доказать утверждение 2; его можно записать в виде

$$\tilde{p}_i(\tau, \mathbf{y}) = \frac{\partial \tilde{S}(\tau, \mathbf{y})}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$



Эти тождества эквивалентны следующим:

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} - \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial x_j}{\partial t} = 0, \quad M_i \equiv \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y_i} - \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial x_j}{\partial y_i} = 0, \quad (18)$$

$$i = 1, \dots, n,$$

где  $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}(\tau, \mathbf{y})$ ,  $\mathbf{p} = \tilde{\mathbf{p}}(\tau, \mathbf{y})$ . Первое из них следует из (7). Дифференцируя по  $y_i$  первое из соотношений (18) и дифференцируя по  $t$  остальные, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial t \partial y_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial p_j}{\partial y_i} \frac{\partial x_j}{\partial t} - \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial t \partial y_i} &= 0, \\ \frac{\partial M_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial t \partial y_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial p_j}{\partial t} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} - \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial t \partial y_i}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial M_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial p_j}{\partial y_i} \frac{\partial x_j}{\partial t} - \frac{\partial p_j}{\partial t} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \right) = \frac{\partial}{\partial y_i} H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0$$

в силу (17). Так как

$$M_i(0, \mathbf{y}) = \left( \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y_i} - \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \right) \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial S_0(\mathbf{y})}{\partial y_i} - p_i^0(\mathbf{y}) = 0,$$

в силу определения функций  $p_i^0$ , то  $M_i(\tau, \mathbf{y}) \equiv 0$  и (18) доказано. Тем самым существование решения задачи Коши доказано; его единственность следует из единственности решения задачи Коши для системы (6), (7).

В качестве примера рассмотрим уравнение эйконала

$$(\nabla S)^2 = \frac{1}{c^2}, \quad (19)$$

описывающее распространение световых лучей в однородной и изотропной среде. Здесь  $c > 0$  — постоянная (скорость света). Поверхности  $S = \text{const}$  называются *волновыми фронтами*. Само слово «эйконал» означает «изображение». Ограничимся случаем  $n = 2$ , т. е.  $S = S(x, y)$ , и положим  $p = \frac{\partial S}{\partial x}$ ,  $q = \frac{\partial S}{\partial y}$ , тогда уравнение (19) примет вид  $p^2 + q^2 = c^{-2}$ . Характеристическая система (6) имеет вид

$$\frac{dx}{d\tau} = 2p, \quad \frac{dy}{d\tau} = 2q, \quad \frac{dp}{d\tau} = 0, \quad \frac{dq}{d\tau} = 0, \quad (20)$$

а из (7) находим

$$\frac{dS}{d\tau} = \frac{2}{c^2}. \quad (21)$$

Характеристики имеют вид

$$\begin{aligned} x &= x(0) + 2\tau p(0), & y &= y(0) + 2\tau q(0), \\ p &= p(0), & q &= q(0), \end{aligned} \quad (22)$$

т. е. являются прямыми, расположенными в четырехмерном пространстве  $(x, y, p, q)$ . Их проекции на плоскость  $(x, y)$  называются *лучами*; из (20) следует, что лучи удовлетворяют системе

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{d\tau^2} = 0.$$

Покажем, что *лучи ортогональны волновым фронтам*. Действительно, вектор  $\nabla S(x_0, y_0)$  ортогонален линии  $S(x, y) = S(x_0, y_0)$  в точке  $(x_0, y_0)$ , а в силу (20) направление луча совпадает с направлением градиента функции  $S$ .

Пусть  $c = 1$ ,  $\Gamma$  — гладкая кривая и  $S|_{\Gamma} \equiv 0$  (т. е.  $\Gamma$  — волновой фронт). Если  $\frac{\partial S}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial S}{\partial n}$  — производные по касательной и по нормали к  $\Gamma$ , то

$$(\nabla S)^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial n}\right)^2 = 1.$$

Так как  $\frac{\partial S}{\partial s}|_{\Gamma} \equiv 0$ , то либо  $\frac{\partial S}{\partial n} = 1$ , либо  $\frac{\partial S}{\partial n} = -1$ . Рассмотрим одну из этих двух задач Коши:

$$S|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial n}|_{\Gamma} = 1. \quad (23)$$

Значения  $p, q$  (т. е. значение  $\nabla S$ ) на  $\Gamma$  находятся из системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial s} &= (\nabla S, \mathbf{s}) = ps_x + qs_y = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial n} &= (\nabla S, \mathbf{n}) = pn_x + qn_y = 1, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{n}$  — единичные касательный и нормальный к  $\Gamma$  векторы.

Пример 1. Пусть  $\Gamma$  — окружность  $x^2 + y^2 = R^2$ , вектор  $\mathbf{n}$  направлен внутрь  $\Gamma$ . Если точка  $(x, y)$  лежит на  $\Gamma$ , то

$$\begin{aligned} x &= R \cos \varphi, & y &= R \sin \varphi, \\ \mathbf{s} &= (-\sin \varphi, \cos \varphi), & \mathbf{n} &= -(\cos \varphi, \sin \varphi), \end{aligned}$$

и из (24) находим  $p = -\cos \varphi$ ,  $q = -\sin \varphi$ . Подставляя в (22) и интегрируя уравнение (21), получаем

$$x = (R - 2\tau) \cos \varphi, \quad y = (R - 2\tau) \sin \varphi, \\ S = 2\tau.$$

Эти формулы дают представление эйконала в переменных  $(\tau, \varphi)$ . Исключая  $\tau, \varphi$ , получаем

$$S(x, y) = R \pm \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Таким образом, эйконал оказывается неоднозначной и, более того, негладкой (в начале координат) функцией. Проанализируем картину лучей. Если  $\tau$  меняется от 0 до  $-\infty$ , то лучи уходят на бесконечность и не пересекаются. При  $0 < \tau < R/2$  лучи также не пересекаются, а волновые фронты — окружности радиуса  $R - 2\tau$  при  $S = 2\tau$ . При  $\tau = R/2$  все лучи сходятся в точку  $(0, 0)$ . Это явление называется *фокусировкой лучей*, а точка  $(0, 0)$  называется *фокусом*.

Исключив  $\varphi$ , уравнение семейства лучей можно записать в виде

$$f(x, y, \tau) \equiv x^2 + y^2 - (R - 2\tau)^2 = 0,$$

т. е. лучи образуют однопараметрическое семейство кривых. Найдем его огибающую (гл. 2, § 11), исключив  $\tau$  из системы  $f = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \tau} = 0$ . Тогда получим одну точку  $(0, 0)$ ; в данном случае огибающая вырождается в точку.

Пример 2. Пусть  $\Gamma$  — парабола  $y^2 = 2ax$  ( $a > 0$ ). Точки на  $\Gamma$  можно представить как функции одного параметра  $\alpha$ :  $y = \alpha$ ,  $x = \alpha^2/2a$ . В данном примере

$$s = \frac{(\alpha, a)}{\sqrt{a^2 + \alpha^2}}, \quad n = \frac{(-a, \alpha)}{\sqrt{a^2 + \alpha^2}},$$

и из системы (20) находим

$$p = -\frac{a}{(a^2 + \alpha^2)^{3/2}}, \quad q = \frac{\alpha}{(a^2 + \alpha^2)^{3/2}}, \\ x = \frac{\alpha^2}{2a} - \frac{2a\tau}{(a^2 + \alpha^2)^{3/2}}, \quad y = \alpha + \frac{2a\tau}{(a^2 + \alpha^2)^{3/2}}. \quad (25)$$

Далее,  $S(x, y) = 2\tau$ . Функция  $S$  не может быть однозначной на всей плоскости, так как лучи могут пересекаться. Неоднозначность может возникнуть в тех точках, в кото-

рых нельзя выразить  $\alpha$ ,  $\tau$  через  $x$ ,  $y$  однозначно; в этих точках должны нарушаться условия теоремы об обратной функции, т. е. должен обращаться в нуль якобиан:

$$\det \frac{\partial (x, y)}{\partial (\alpha, \tau)} = 0.$$

Это приводит к следующему соотношению между  $\alpha$  и  $\tau$ :

$$2a^2\tau + (a^2 + \alpha^2)^{3/2} = 0,$$

и из (25) находим, что искомые точки расположены на полукубической параболы (рис. 44)

$$y^2 = \frac{8}{27a} (x - a)^3.$$

Эта кривая — *эволюта* исходной параболы  $\Gamma$ .

**Замечание 1.** Последний факт носит общий характер. Именно, если кривая  $\Gamma$  — волновой фронт (т. е.  $S|_{\Gamma} \equiv \text{const}$ ), то точки, в которых нарушается гладкость функции  $S$ , расположены на эволюте кривой  $\Gamma$ .

**Замечание 2.** Уравнение (1) не содержит явно неизвестной функции. Рассмотрим уравнение первого порядка с частными производными самого общего вида:

$$H(\mathbf{x}, S(\mathbf{x}), \nabla S(\mathbf{x})) = 0.$$

В этом случае характеристическая система имеет вид

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} - p_i \frac{\partial H}{\partial S}, \quad i = 1, \dots, n,$$

а  $S$  по-прежнему удовлетворяет уравнению (7). Постановка задачи Коши и теорема существования и единственности формулируются точно так же, как и для уравнения (1) (см. [27, 35]).

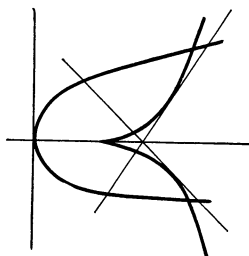


Рис. 44.

## § 1. Функционалы

Многие задачи анализа, механики, физики приводят к понятию функционала. Пусть каждой функции  $y(x)$  из некоторого множества  $M$  поставлено в соответствие число  $J(y(x))$ :

$$y(x) \rightarrow J(y(x)).$$

Тогда мы говорим, что задан функционал  $J(y(x))$ ; множество  $M$  называется его *областью определения*. Приведем примеры.

1. Пусть плоская кривая  $y = y(x)$  соединяет точки  $(a, A)$  и  $(b, B)$ . Ее длина есть функционал

$$s(y(x)) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

2. Площадь под кривой  $y = y(x)$ , соединяющей точки  $(a, A)$  и  $(b, B)$ , есть функционал

$$S(y(x)) = \int_a^b y dx.$$

3. Основной пример функционалов, которые рассматриваются в настоящей главе, следующий:

$$J(y(x)) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx, \quad (1)$$

где  $F$  — заданная функция. В примере 1  $F = \sqrt{1 + y'^2}$ , в примере 2  $F = y$ .

Одна из основных задач дифференциального исчисления — нахождение наибольших и наименьших значений функций. Одна из основных задач вариационного исчисления — *нахождение наибольших и наименьших значений функционалов*. Приведем примеры задач вариационного исчисления.

1. Среди всех плоских кривых  $y = y(x)$ , соединяющих заданные точки  $(a, A)$  и  $(b, B)$ , найти ту, которая имеет наименьшую длину. Это задача о нахождении минимума функционала  $s(y(x))$ .

2. Пусть скорость света на плоскости равна  $c(x, y)$ . Требуется найти световой луч, соединяющий заданные точки  $(a, A)$  и  $(b, B)$ . Будем считать, что луч задается уравнением  $y = y(x)$ .

Согласно принципу Ферма, луч приходит из начальной точки в конечную за минимальное время  $t$ . Имеем  $dt = ds/c$  вдоль кривой  $y = y(x)$ , где  $ds$  — дифференциал длины дуги, так что

$$t(y) = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{c(x, y)} dx.$$

Итак, для определения формы светового луча требуется найти минимум функционала  $t(y(x))$ .

Функционал  $J(y(x))$  можно рассматривать как функцию от бесконечного числа переменных, например, как функцию от значений  $y(x)$  в точках отрезка  $[a, b]$ . Естественно ожидать, что какая-то часть понятий и результатов, относящихся к функциям нескольких переменных, сохранится и для функционалов — функций от бесконечного числа переменных. И действительно, такие понятия как непрерывность функционала, первый дифференциал функционала вводятся для функционалов почти дословно так же, как и для функций.

## § 2. Функционалы в линейных нормированных пространствах

**1. Функционалы. Непрерывность.** Пусть  $B$  — банахово пространство, т. е. полное линейное нормированное пространство (гл. 2, § 2). Норму элемента  $y$  пространства  $B$  обозначим  $\|y\|$ .

*Определение 1.* Пусть каждому элементу  $y$  из некоторого множества  $M \subset B$  поставлено в соответствие вещественное число  $J(y)$ . Тогда мы скажем, что на множестве  $M$  задан функционал  $J(y)$ .

Понятие непрерывности функционала вводится так же, как и для функций. Функционал  $J(y)$  называется *непре-*

*равным* в точке  $y_0$ , если для всякого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что  $|J(y) - J(y_0)| < \varepsilon$ , как только  $\|y - y_0\| < \delta$ .

Приведем основные примеры банаховых пространств, которые мы будем рассматривать.

1. Пространство  $C(a, b)$  (гл. 2, § 2). Напомним, что его элементы — непрерывные на отрезке  $[a, b]$  функции и

$$\|y(x)\|_C = \max_{x \in [a, b]} |y(x)|.$$

Сходимость по норме в пространстве  $C(a, b)$  — это равномерная сходимость на отрезке  $[a, b]$ .

2. Пространство  $C^1(a, b)$  (его обозначают также  $D_1(a, b)$ ) — это пространство всех непрерывно дифференцируемых на отрезке  $[a, b]$  функций. Норма вводится так:

$$\|y(x)\|_{C^1} = \max_{x \in [a, b]} |y(x)| + \max_{x \in [a, b]} |y'(x)|.$$

Пусть последовательность  $y_n(x) \rightarrow y(x)$  в норме  $C_1$ , т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n(x) - y(x)\|_{C^1} = 0$ . Тогда равномерно по  $x \in [a, b]$  сходятся последовательности  $y_n(x)$ ,  $y'_n(x)$ :

$$y_n(x) \rightrightarrows y(x), \quad y'_n(x) \rightrightarrows y'(x);$$

верно и обратное.

Рассмотрим один из основных примеров — функционал

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx. \quad (1)$$

Если функция  $F(x, y, z)$  непрерывна по совокупности переменных при  $a \leq x \leq b$ ,  $-\infty < y, z < \infty$ , то функционал  $J(y)$  будет непрерывен в пространстве  $C^1(a, b)$ . Однако в пространстве  $C(a, b)$  этот функционал может не быть непрерывным.

**Задача.** Доказать, что функционал  $s(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$  (длина дуги) не является непрерывным в пространстве  $C(a, b)$ .

**2. Линейные функционалы.** Пусть функционал  $\varphi(h)$  определен на банаховом пространстве  $B$ . Этот функционал называется *линейным*, если он непрерывен на  $B$  и

$$\varphi(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) = \alpha_1 \varphi(h_1) + \alpha_2 \varphi(h_2)$$

для любых элементов  $h_1, h_2 \in B$  и для любых чисел  $\alpha_1, \alpha_2$ .

Приведем примеры:

1.  $\varphi(h) = \int_a^b a(x)h(x)dx$ , где  $a(x) \in C(a, b)$  — фиксированная функция. Это линейный функционал в пространстве  $C(a, b)$ .

2.  $\varphi(h) = \int_a^b [a(x)h(x) + b(x)h'(x)]dx$ , где  $a(x), b(x) \in C(a, b)$  — фиксированные функции. Это линейный функционал в пространстве  $C^1(a, b)$ .

3. **Первая вариация.** С помощью понятия линейного функционала вводится понятие первого дифференциала (или, что то же, первой вариации) функционала. Это понятие вводится так же, как и для функций.

Функция  $f(x)$  называется дифференцируемой в точке  $x_0$ , если ее приращение можно представить в виде

$$\Delta f \equiv f(x_0 + h) - f(x_0) = \varphi(h) + o(h) \quad (h \rightarrow 0),$$

где  $\varphi(h)$  — линейная функция, которая называется дифференциалом функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .

Функционал  $J(y)$  называется *дифференцируемым* в точке  $y_0$ , если его приращение представимо в виде

$$\Delta J \equiv J(y_0 + h) - J(y_0) = \varphi(h) + o(\|h\|) \quad (\|h\| \rightarrow 0), \quad (2)$$

где  $\varphi(h)$  — линейный функционал. Функционал  $\varphi(h)$  называется *первой вариацией* (или *первым дифференциалом*) функционала  $J(y)$  в точке  $y_0$  и обозначается так:  $\varphi(h) = \delta J_{y_0}(h)$ .

Замечание 1. Функционал  $\varphi(h)$  (первая вариация  $\delta J_{y_0}(h)$ ) определяется единственным образом.

Если функционал  $J(y)$  дифференцируем в точке  $y_0$ , то его первую вариацию можно вычислить по формуле:

$$\varphi(h) = \left. \frac{d}{dt} J(y_0 + th) \right|_{t=0}. \quad (3)$$

Действительно, положим  $\psi(t) = J(y_0 + th)$ , где элемент  $h \in B$  фиксирован. Тогда в силу (2) имеем

$$\psi(t) - \psi(0) = t\varphi(h) + o(t) \quad (t \rightarrow 0),$$

так что  $\psi'(0) = \varphi(h)$ .



Вычислим первую вариацию функционала (1) в предположении, что функция  $F(x, y, z)$  непрерывно дифференцируема по совокупности переменных при  $a \leq x \leq b$ ,  $-\infty < y, z < \infty$ . Можно показать, что этот функционал дифференцируем во всех точках пространства  $C^1(a, b)$  и потому его первую вариацию вычислим по формуле (3). Имеем

$$\begin{aligned} \delta J_{y_0}(h) &= \\ &= \frac{d}{dt} \int_a^b F(x, y_0 + th, y'_0 + th') dx \Big|_{t=0} = \int_a^b (F_y h + F_{y'} h') dx, \quad (4) \end{aligned}$$

где значения  $F_y, F_{y'}$  берутся в точке  $(x, y_0(x), y'_0(x))$ .

**4. Необходимое условие экстремума.** Точка  $y_0$  называется точкой минимума (максимума) функционала  $J(y)$ , если  $J(y) \geq J(y_0)$  ( $J(y) \leq J(y_0)$ ) для всех  $y$  из достаточно малой окрестности точки  $y_0$ . Определение дословно то же, что и для функций. Точка  $y_0$  называется *точкой экстремума* функционала  $J(y)$ , если она является точкой минимума или максимума.

Необходимым условием того, чтобы точка  $x_0$  была точкой экстремума функции  $f(x)$ , является обращение в нуль дифференциала:  $df = 0$ . Необходимое условие того, чтобы точка  $y_0$  была точкой экстремума функционала  $J(y)$ , формулируется аналогично:  $\delta J = 0$ .

*Теорема.* Пусть функционал  $J(y)$  дифференцируем в точке  $y_0$ . Для того чтобы точка  $y_0$  была точкой экстремума функционала  $J(y)$ , необходимо, чтобы его первая вариация обращалась в нуль в этой точке:

$$\delta J_{y_0}(h) = 0. \quad (5)$$

Это соотношение выполняется для всех приращений  $h$ .

*Доказательство.* Пусть  $y_0$  — точка минимума (для определенности), и пусть первая вариация  $\delta J_{y_0}(h) = \varphi(h) \neq 0$ . Тогда существует элемент  $h_0$  такой, что  $\varphi(h_0) \neq 0$ . Имеем при малых  $|t|$

$$\begin{aligned} 0 \leq \Delta J = J(y_0 + th_0) - J(y_0) &= t[\varphi(h_0) + o(1)] \\ &(t \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Знак последнего выражения при малых  $t \neq 0$  совпадает со знаком числа  $t\varphi(h_0)$ ; можно выбрать  $t$  так, чтобы это число было отрицательным. Полученное противоречие доказывает теорему.

### § 3. Простейшие задачи вариационного исчисления

**1. Задача с закрепленными концами.** Рассмотрим задачу об отыскании экстремумов функционала

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (1)$$

при условиях

$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \quad (2)$$

где  $A, B$  — заданные числа. Экстремум ищется в классе функций  $y(x) \in C^1(a, b)$  (слабый экстремум).

Геометрическая интерпретация этой задачи такова: среди всех (гладких) кривых  $y = y(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , соединяющих заданные точки  $(a, A)$  и  $(b, B)$  (рис. 45), найти ту (те), на которой функционал  $J(y)$  достигает экстремума. Эта задача называется *задачей с закрепленными концами* или *простейшей задачей вариационного исчисления*. Функция  $y = y(x)$ , на которой функционал  $J(y)$  достигает экстремума, называется *экстремалью*.

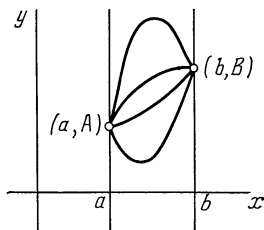


Рис. 45.

**Предположение.** Функция  $F(x, y, z)$  дважды непрерывно дифференцируема, если  $a \leq x \leq b$ ,  $-\infty < y, z < \infty$ .

Дадим функции  $y(x)$  приращение  $h(x)$ , т. е. рассмотрим  $J(y(x) + h(x))$ . Допустимые приращения  $h(x)$  таковы:

$$h(x) \in C^1(a, b), \quad h(a) = h(b) = 0. \quad (3)$$

Последнее следует из того, что концы кривой закреплены:  $y(a) = A$ ,  $y(a) + h(a) = A$ , так что  $h(a) = 0$  и аналогично  $h(b) = 0$ . Первая вариация функционала  $J(y)$  дается формулой (4), § 2. Интегрируя по частям:

$$\int_a^b F'_y h'(x) dx = F_y h(x) \Big|_a^b - \int_a^b h(x) \frac{d}{dx} F_y dx \quad (4)$$

и учитывая (3), получаем

$$\delta J_y(h) = \int_a^b \left( F_y - \frac{d}{dx} F_y' \right) h(x) dx, \quad (5)$$

где значения  $F_y, F_y'$  берутся в точке  $(x, y(x), y'(x))$ .

Лемма (основная лемма вариационного исчисления). Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $I = [a, b]$  и пусть

$$\int_a^b f(x) h(x) dx = 0 \quad (6)$$

для любой функции  $h(x)$ , удовлетворяющей условиям (3). Тогда  $f(x) \equiv 0$ ,  $x \in I$ .

Доказательство. Допустим, что  $f(x) \not\equiv 0$ , тогда существует точка  $x_0 \in (a, b)$  такая, что  $f(x_0) \neq 0$ ; пусть  $f(x_0) > 0$ , для определенности. Тогда существует окрестность  $I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  точки  $x_0$  такая, что  $f(x) > 0$ ,  $x \in I_\delta$ . Можно считать, что  $I_\delta$  лежит внутри интервала  $(a, b)$ . Построим функцию  $h_0(x) \in C^1(a, b)$  такую, что

$$h_0(x) > 0, \quad x \in I_\delta; \quad h_0(x) \equiv 0, \quad x \notin I_\delta. \quad (7)$$

Функция

$$h_0(x) = \begin{cases} [(x - x_0 + \delta)(x - x_0 - \delta)]^2, & x \in I_\delta, \\ 0, & x \notin I_\delta \end{cases}$$

удовлетворяет условиям (6). Имеем

$$\int_a^b f(x) h_0(x) dx = \int_{I_\delta} f(x) h_0(x) dx > 0,$$

так как  $f(x) > 0$ ,  $h_0(x) > 0$  при  $x \in I_\delta$ . Это противоречит условию (6) леммы; следовательно,  $f(x) \equiv 0$ ,  $x \in I$ .

З а м е ч а н и е. Лемма остается в силе, если условие (6) выполнено для более узкого класса функций  $h(x)$ , а именно: функция  $h(x)$  имеет  $n \geq 1$  непрерывных производных при  $x \in I$  и  $h^{(j)}(a) = h^{(j)}(b) = 0$ ,  $0 \leq j \leq n - 1$ . Действительно, как видно из доказательства леммы, достаточно построить  $n$  раз непрерывно дифференцируемую функцию  $h_0(x)$ , удовлетворяющую условию (7). В качестве такой функции можно взять, например,

$$h_0(x) = \begin{cases} [(x - x_0 + \delta)(x - x_0 - \delta)]^{2n}, & x \in I_\delta, \\ 0, & x \notin I_\delta. \end{cases}$$

Теорема 1. Пусть  $y(x)$  — экстремаль задачи с закрепленными концами (2) для функционала  $J(y)$ . Тогда  $y(x)$  удовлетворяет уравнению Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \quad a < x < b. \quad (8)$$

**Доказательство.** Если  $y(x)$  — экстремаль, то  $\delta J_y(h) = 0$  для любых допустимых приращений  $h(x)$ . Первая вариация имеет вид (5), и из основной леммы вариационного исчисления следует (8).

Уравнение Эйлера (8) — это дифференциальное уравнение второго порядка. Действительно,

$$\frac{d}{dx} F_{y'}(x, y(x), y'(x)) = F_{xy'} + F_{yy'}y' + F_{y'y'}y'',$$

и уравнение Эйлера имеет вид

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0.$$

Случай  $F_{y'y'} \equiv 0$  мы не рассматриваем.

**Замечание.** Пусть функция  $F$  не зависит от  $x$ , т. е.  $F = F(y, y')$ . Тогда уравнение Эйлера имеет первый интеграл

$$F - y'F_{y'} = C. \quad (9)$$

В этом важном частном случае интегрирование уравнения Эйлера приводится к интегрированию дифференциального уравнения первого порядка.

**2. Задача с одним закрепленным и с одним подвижным концом.** Рассмотрим задачу об отыскании экстремумов функционала  $J(y)$  при условии

$$y(a) = A. \quad (10)$$

Экстремум ищется в классе функций  $y(x) \in C^1(a, b)$ . Геометрическая интерпретация этой задачи такова: среди всех кривых  $y = y(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , которые выходят из точки  $(a, A)$  и оканчиваются на прямой  $x = b$  (рис. 46), найти те, которые дают экстремум функционалу  $J(y)$ . В этой постановке положение второго конца кривой не фиксируется.

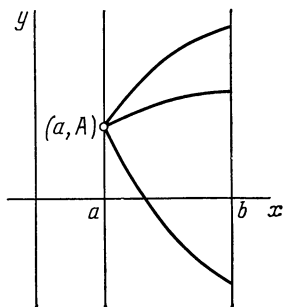


Рис. 46.

**Теорема 2.** Пусть  $y(x)$  — экстремаль задачи (10) для функционала  $J(y)$ . Тогда  $y(x)$  удовлетворяет уравнению Эйлера (9) и краевым условиям

$$y(a) = A, \quad F_{y'}(x, y(x), y'(x))|_{x=b} = 0. \quad (11)$$

**Доказательство.** Пусть  $y_0(x)$  — экстремаль, и пусть  $y_0(x)$  есть точка минимума, для определенности. Обозначим  $y_0(b) = B$ , тогда  $y_0(x)$  — точка минимума задачи с закрепленными концами  $y(a) = A$ ,  $y(b) = B$ . Действительно,  $J(y(x)) \geq J(y_0(x))$  для любой кривой  $y(x)$  такой, что  $y(a) = A$ , а  $y(b)$  — любое, и потому это неравенство будет выполняться, если фиксировать  $y(b)$ . Из теоремы 1 следует, что  $y_0(x)$  удовлетворяет уравнению Эйлера (9). Из (4) следует, что

$$\delta J_{y_0}(h) = F_{y'} h(x) \Big|_a^b.$$

Допустимые приращения — это функции  $h(x)$  класса  $C^1(a, b)$  такие, что  $h(a) = 0$ , в силу (10). Никаких условий на значение  $h(b)$  не налагается, и можно выбрать функцию  $h(x)$  так, чтобы  $h(b) \neq 0$ . Из условия

$$0 = \delta J_{y_0}(h) = F_{y'} \Big|_{x=b} h(b)$$

следует (11).

**3. Примеры.** Задачи вариационного исчисления приводят к так называемым *краевым задачам* для обыкновенных дифференциальных уравнений. Так, в простейшей задаче задаются значения  $y(a) = A$  и  $y(b) = B$  на одном и на другом конце отрезка  $I = [a, b]$ . Семейство решений уравнения второго порядка зависит от двух произвольных постоянных:  $y = y(x; C_1, C_2)$ , и для их определения имеем два уравнения:

$$y(a; C_1, C_2) = A, \quad y(b; C_1, C_2) = B.$$

Здесь возможны самые различные варианты: задача может иметь одно решение, любое конечное число решений, бесконечно много решений или же может не иметь ни одного решения. Это связано с нелокальным характером задачи: краевые условия ставятся на разных концах отрезка  $I$ , который, вообще говоря, может быть «большим». Приведенные ниже примеры подтверждают эти рассуждения.

**Пример 1.** Будем искать наименьшее значение функционала

$$J(y) = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

при условиях (2). Здесь  $J(y)$  — площадь поверхности, образованной вращением кривой  $y = y(x)$  вокруг оси  $x$ .

Воспользуемся замечанием к теореме 1; первый интеграл (9) имеет вид

$$y \sqrt{1+y'^2} - y' \frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} = C,$$

откуда находим

$$y'^2 = \left(\frac{y}{C}\right)^2 - 1.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$y = C \operatorname{ch}\left(\frac{x}{C} + \tilde{C}\right).$$

Такие кривые называются *цепными линиями*.

Выберем для простоты концы кривой симметричными относительно оси  $y$ , т. е. рассмотрим краевую задачу

$$y(-a) = y(a) = A > 0.$$

Тогда  $\tilde{C} = 0$ , параметр  $C$  определяется из краевого условия

$$A = C \operatorname{ch} \frac{a}{C} \equiv f(C).$$

Очевидно, что  $C > 0$ ; так как  $f(0) = +\infty$ ,  $f(+\infty) = +\infty$ , то функция  $f(C)$  на полуоси  $C \geq 0$  достигает наименьшего значения:  $A_0 > 0$ , и нетрудно проверить, что точка минимума  $C_0 > 0$  единственна. Следовательно, при  $A > A_0$  уравнение  $f(C) = A$  имеет два решения  $C_1, C_2$ , где  $0 < C_1 < C_2$ . Имеем

$$\begin{aligned} J(y) &= 2\pi \int_{-a}^a C \operatorname{ch} \frac{x}{C} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{C}} dx = \\ &= 2\pi C \int_{-a}^a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{C} dx = \pi C \left(2a + C \operatorname{sh} \frac{2a}{C}\right). \end{aligned}$$

Пусть  $h(C)$  — полученная функция, тогда

$$\begin{aligned} h'(C) &= 2\pi a \left(1 - \operatorname{ch} \frac{2a}{C}\right) + \pi C \operatorname{sh} \frac{2a}{C} = \\ &= 4\pi a \operatorname{sh}^2 \frac{a}{C} + \pi C \operatorname{sh} \frac{2a}{C} > 0, \end{aligned}$$

так что наименьшее значение функционала может достигаться только при  $C = C_2$ . Проверку того, что функция  $y = C_2 \operatorname{ch} \frac{x}{C_2}$  есть точка минимума, придется отложить до

§ 9, в котором приведены достаточные условия экстремума. При  $A = A_0$  уравнение  $f(C) = A_0$  имеет единственное решение, и соответствующая цепная линия дает наименьшее значение функционала.

Если  $0 < A < A_0$ , то уравнение  $f(C) = A$  не имеет решений, так что наименьшее значение функционала  $J(y)$  не может достигаться в классе функций из  $C^1(-a, a)$ . Этот факт нетрудно объяснить в случае, когда  $a/A \gg 1$ . Наименьшее значение площади поверхности вращения будет достигаться на ломаной с вершинами  $(-a, A)$ ,  $(-a, 0)$ ,  $(a, 0)$ ,  $(a, A)$ , т. е. поверхность вращения состоит из двух кругов радиусов  $A$  с центрами в точках  $(\pm a, 0)$  и из отрезка  $[-a, a]$  оси  $x$ .

Пример 2. Пусть в плоскости  $(x, y)$  распространяются световые лучи, скорость света равна  $c(x, y)$  и положительна. Получим уравнения лучей света. Из принципа Ферма (§ 1) следует, что лучи света — экстремали функционала

$$J(y) = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{c(x, y)} dx$$

(предполагается, что лучи задаются уравнениями  $y = y(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ ). При выводе уравнений Эйлера удобно ввести величину  $n(x, y) = c_0/c(x, y)$ , которая называется коэффициентом преломления. Здесь  $c_0$  — значение скорости в некоторой фиксированной точке  $(x_0, y_0)$ . Имеем

$$J(y) = \frac{1}{c_0} \int_a^b n(x, y) \sqrt{1+y'^2} dx. \quad (12)$$

Уравнение Эйлера имеет вид

$$\begin{aligned} 0 &= F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = \frac{1}{c_0} \left( n_y \sqrt{1+y'^2} - \frac{d}{dx} \frac{ny'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) = \\ &= \frac{1}{c_0} \left( n_y \sqrt{1+y'^2} - \frac{n_x y'}{\sqrt{1+y'^2}} - n_y \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{ny''}{(1+y'^2)^{3/2}} \right) \end{aligned}$$

и окончательно получаем уравнение световых лучей в виде

$$n_y - n_x y' - \frac{ny''}{1+y'^2} = 0. \quad (13)$$

Пример 3. Пусть скорость  $c$  не зависит от  $x$ . Сменим обозначения, заменив  $y$  на  $z$ , и ось  $z$  направим вниз,

как это принято в физике земли и в физике океана. Уравнение (13) примет вид

$$c(z) \left( \frac{1}{c(z)} \right)' = \frac{z''}{1+z'^2};$$

$$-d \ln c(z) = \frac{1}{2} d \ln (1+z'^2),$$

так что

$$z'^2 = \frac{A}{c^2(z)} - 1. \tag{14}$$

Пусть  $z$  — глубина ( $z=0$  — поверхность океана),  $c(z)$  — скорость звука; в реальных задачах она может не быть монотонной функцией глубины (рис. 47). Этот пример

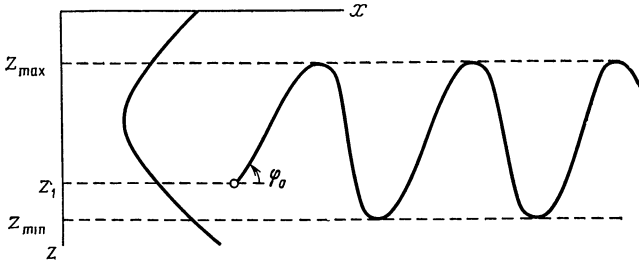


Рис. 47.

рассмотрен в [10]. Пусть излучатель звука расположен в точке  $O$ :  $x=0, z=z_1 > 0$ ; положим  $n(z) = c(z_0)/c(z)$ . Пусть луч выходит из точки  $O$  под углом  $\varphi_0$ , тогда  $z(0) = z_1, z'(0) = \operatorname{tg} \varphi_0$  и соотношение (14) принимает вид

$$z'^2 = \frac{n^2(z)}{\cos^2 \varphi_0} - 1. \tag{15}$$

Это уравнение было исследовано в гл. 4, § 5. График функции  $z = z(x)$  заключен в полосе  $z_{\min} \leq z \leq z_{\max}$  и  $z(x)$  — периодическая функция  $x$  с периодом.

$$T = 2 \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \frac{dz}{\sqrt{\frac{n^2(z)}{\cos^2 \varphi_0} - 1}}.$$

Таким образом, пучок лучей с углами выхода  $-\alpha \leq \varphi_0 \leq \alpha, \alpha > 0$  фиксировано, будет расположен в полосе  $\Pi: z_{\min}(\alpha) \leq z \leq z_{\max}(\alpha)$ , если  $\cos^2 \alpha < n^2(0)$ ; полоса  $\Pi$  называется *волноводом*.



#### § 4. Функционалы, зависящие от высших производных

Рассмотрим функционал вида

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx \quad (1)$$

и задачу с закрепленными концами:

$$\begin{aligned} y(a) &= A_0, & y'(a) &= A_1, & \dots, & y^{(n-1)}(a) &= A_{n-1}, \\ y(b) &= B_0, & y'(b) &= B_1, & \dots, & y^{(n-1)}(b) &= B_{n-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Предположение. Функция  $F(x, z_0, z_1, \dots, z_n)$   $n$  раз непрерывно дифференцируема по совокупности переменных, если

$$a \leq x \leq b, \quad -\infty < z_0, z_1, \dots, z_n < \infty.$$

Выведем формулу для первой вариации функционала (1). Имеем

$$\begin{aligned} \Delta J \equiv J(y+h) - J(y) &= \int_a^b [F(x, y(x)+h(x), \dots, y^{(n)}(x) + \\ &+ h^{(n)}(x)) - F(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x))] dx = \\ &= \int_a^b \sum_{k=0}^n F_{y^{(k)}}(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)) h^{(k)}(x) dx + \\ &+ \int_a^b \sum_{k=0}^n \varepsilon_k h^{(k)}(x) dx, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ , если  $h^{(j)}(x) \rightarrow 0$  ( $0 \leq j \leq n$ ) на отрезке  $[a, b]$ . Следовательно,

$$\delta J_y(h) = \int_a^b \sum_{k=0}^n F_{y^{(k)}} h^{(k)}(x) dx.$$

Допустимые приращения  $h(x)$  — это функции,  $n$  раз непрерывно дифференцируемые на отрезке  $[a, b]$  и удовлетворяющие, в силу (2), крайевым условиям

$$h^{(k)}(a) = h^{(k)}(b) = 0, \quad 0 \leq k \leq n-1. \quad (3)$$

Интегрируя по частям и учитывая краевые условия (3), получаем

$$\int_a^b F_{y^{(k)}} h^{(k)}(x) dx = (-1)^k \int_a^b h(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^k F_{y^{(k)}} dx$$

при  $0 \leq k \leq n$ . Поэтому первая вариация имеет вид

$$\delta J_y(h) = \int_a^b h(x) \sum_{k=0}^n \left(-\frac{d}{dx}\right)^k F_{y^{(k)}} dx. \quad (4)$$

Пусть  $y(x)$  — экстремаль задачи (1), (2), тогда  $\delta J_y(h) = 0$  для любых допустимых приращений  $h(x)$ . Из (4) и основной леммы вариационного исчисления вытекает уравнение Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0. \quad (5)$$

Значения всех производных функции  $F$  берутся в точке  $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x))$ . Следовательно, экстремаль  $y(x)$  должна удовлетворять уравнению Эйлера (5) и краевым условиям (2).

## § 5. Функционалы, зависящие от вектор-функций.

### Принцип наименьшего действия в механике

Рассмотрим функционал

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx, \quad (1)$$

где  $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$ .

Предположение. Функция  $F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, z_1, z_2, \dots, z_n)$  дважды непрерывно дифференцируема по совокупности переменных в области  $a \leq x \leq b$ ,  $-\infty < y_j < \infty$ ,  $-\infty < z_j < \infty$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

Рассмотрим задачу с закрепленными концами:

$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \quad (2)$$

где  $A, B$  — заданные  $n$ -векторы. Будем искать экстремумы функционала (1) в классе вектор-функций, которые непрерывно дифференцируемы на отрезке  $I = [a, b]$  и удовлет-

воряют краевым условиям (2). Допустимые приращения  $\mathbf{h}(x) = (h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x))$  — это вектор-функции, непрерывно дифференцируемые на отрезке  $I$  и удовлетворяющие краевым условиям

$$\mathbf{h}(a) = 0, \quad \mathbf{h}(b) = 0. \quad (3)$$

*Теорема.* Для того чтобы вектор-функция  $\mathbf{y}(x)$  была экстремалью функционала  $J(\mathbf{y})$  при условиях (2), необходимо, чтобы она удовлетворяла системе уравнений Эйлера

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (4)$$

*Доказательство.* Пусть  $\mathbf{y}^0(x) = (y_1^0(x), y_2^0(x), \dots, y_n^0(x))$  есть экстремаль. Рассмотрим функционал  $J(\mathbf{y})$  на вектор-функциях вида  $(y_1^0(x), \dots, y_{i-1}^0(x), y_i(x), y_{i+1}^0(x), \dots, y_n^0(x))$  (все компоненты, кроме  $i$ -й, совпадают с компонентами экстремали  $\mathbf{y}^0(x)$ ). Тогда получим функционал, зависящий от одной неизвестной функции  $y_i(x)$ :

$$J_1(y_i) = \int_a^b F(x, y_1^0(x), \dots, y_{i-1}^0(x), y_i(x), y_{i+1}^0(x), \dots, y_n^0(x), y_i'(x), \dots, y_n'(x)) dx$$

и задачу с закрепленными концами:

$$y_i(a) = A_i, \quad y_i(b) = B_i.$$

Пусть  $\mathbf{y}^0(x)$  — точка минимума функционала  $J(\mathbf{y})$ , для определенности. Тогда функционал  $J_1(y_i)$  достигает наименьшего значения при  $y_i = y_i^0(x)$  и, в силу теоремы 1, § 3,

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0$$

в точке  $(x, \mathbf{y}^0(x), \mathbf{y}^{0'}(x))$ . Так как  $i, 1 \leq i \leq n$ , можно выбрать любым, то экстремаль  $\mathbf{y}^0(x)$  удовлетворяет системе уравнений (4).

**Задача 1.** Доказать формулу для первой вариации функционала  $J(\mathbf{y})$ :

$$\delta J_{\mathbf{y}}(h) = \int_a^b \sum_{i=1}^n \left( F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} \right) h_i(x) dx + \sum_{i=1}^n F_{y_i'} h_i(x) \Big|_a^b.$$

**Задача 2.** Пусть функция  $F$  не зависит от  $x$ , т. е.  $F = F(\mathbf{y}, \mathbf{y}')$ . Проверить, что функция

$$F - \sum_{i=1}^n y_i' F_{y_i'}$$

есть первый интеграл системы (4).

**2. Принцип наименьшего действия.** Сформулируем этот принцип на простейшем примере. Пусть материальная точка массы  $m$  движется в трехмерном пространстве в потенциальном силовом поле, и  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  — положение точки в момент времени  $t$ . Введем функцию Лагранжа  $L$  — разность между кинетической и потенциальной энергией:

$$L = T - U. \quad (5)$$

Таким образом

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - U(t, x_1, x_2, x_3). \quad (6)$$

Интеграл

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt \quad (7)$$

называется *действием*. Действие  $S$  есть функционал вида (1):

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - U(t, x_1, x_2, x_3) \right] dt,$$

зависящий от вектор-функции  $\mathbf{x}(t)$ . Зададим значение  $\mathbf{x}(t)$  в начальный и конечный моменты времени:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^1.$$

Принцип наименьшего действия утверждает: *материальная точка движется по такой траектории, которой отвечает наименьшее действие.*

Иначе говоря, траектория движения материальной точки — это та из множества всех кривых  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , соединяющих точки  $\mathbf{x}^0$  и  $\mathbf{x}^1$ , которая дает минимум функционалу  $S$ , так что

$$\delta S = 0. \quad (8)$$

Выведем уравнения движения из принципа наименьшего действия. Для этого достаточно написать систему

уравнений Эйлера (4) для функционала  $S$ . Она имеет вид

$$m\ddot{x}_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad m\ddot{x}_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_2}, \quad m\ddot{x}_3 = -\frac{\partial U}{\partial x_3}$$

или

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla_{\mathbf{x}}U(t, \mathbf{x}).$$

Это классические уравнения Ньютона.

Строго говоря, принцип наименьшего действия в сформулированной выше форме неверен. Точная его формулировка такова: *траектория движения точки есть стационарное значение действия, т. е.  $\delta S = 0$  на траектории.* Правильнее было бы говорить: принцип стационарного действия. Но поскольку термин «принцип наименьшего действия» является общепринятым, мы будем его придерживаться.

Принцип наименьшего действия справедлив и для механической системы, состоящей из  $N$  точек. Пусть их массы равны  $m_1, m_2, \dots, m_N$ , координаты в момент времени равны  $(x_1^k(t), x_2^k(t), x_3^k(t)) = \mathbf{x}^k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  и система обладает потенциальной энергией  $U(t, \mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^n)$ . Тогда функция Лагранжа равна

$$L = \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{2} (\dot{x}_1^{k2} + \dot{x}_2^{k2} + \dot{x}_3^{k2}) - U.$$

Действие  $S$  определяется по формуле (7), и уравнения движения имеют вид

$$m_k \ddot{x}_j^k = -\frac{\partial U}{\partial x_j^k} \quad (1 \leq j \leq 3, \quad 1 \leq k \leq N).$$

## § 6. Условный экстремум

Напомним постановку и метод решения задачи на условный экстремум для функций. Пусть функции  $f(\mathbf{x})$ ,  $g(\mathbf{x})$ , где  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ , непрерывно дифференцируемы в области  $D \subset \mathbf{R}^n$ . Требуется найти экстремум функции  $f(\mathbf{x})$  при условии, что  $g(\mathbf{x}) = 0$ .

Эта задача решается с помощью функции Лагранжа

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda g(x_1, \dots, x_n),$$

зависящей от  $x_1, \dots, x_n$  и от дополнительного переменного  $\lambda$ , которое называется *множителем Лагранжа*. Именно, точки относительного экстремума определяются из условия

$$dL = 0$$

или, в более подробной записи, из уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_n} \equiv \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} \equiv g = 0.$$

Точная формулировка такова: если  $x^0$  — точка относительного экстремума и  $\nabla g(x^0) \neq 0$ , то существует  $\lambda_0$  такое, что  $dL = 0$  при  $x = x^0$ ,  $\lambda = \lambda_0$ .

Поставим задачу на условный экстремум для функционалов. Пусть

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad K(y) = \int_a^b G(x, y, y') dx.$$

Функции  $F(x, y, z)$ ,  $G(x, y, z)$  дважды непрерывно дифференцируемы при  $a \leq x \leq b$ ,  $-\infty < y, z < \infty$ .

Требуется найти экстремумы функционала  $J(y)$  при условии, что

$$K(y) = l, \quad (1)$$

где  $l$  — постоянная; для определенности рассмотрим задачу с закрепленными концами

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \quad (2)$$

Эта задача с помощью введения множителя Лагранжа  $\lambda$  сводится к задаче на безусловный экстремум для функционала

$$L(y) = J(y) + \lambda K(y).$$

**Теорема.** Пусть  $y(x)$  — экстремаль задачи на условный экстремум (1), (2), и пусть  $y(x)$  не является экстремалью функционала  $K(y)$ . Тогда существует число  $\lambda$  такое, что  $y(x)$  удовлетворяет уравнению Эйлера для функционала  $L(y) = J(y) + \lambda K(y)$ , т. е.

$$(F_y + \lambda G_y) - \frac{d}{dx}(F_{y'} + \lambda G_{y'}) = 0. \quad (3)$$

**Доказательство.** Пусть  $y(x)$  — искомая экстремаль. Рассмотрим приращения вида  $h(x) = \varepsilon_1 h_1(x) + \varepsilon_2 h_2(x)$ ,

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  — параметры, функции  $h_1, h_2$  обращаются в нуль при  $x=a, x=b$ . Тогда краевое условие выполнено, а функция

$$\Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = J(y + \varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_2)$$

будет иметь экстремум в точке  $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0$  при условии, что  $\Psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$ , где  $\Psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = K(y + \varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_2) - l$ . Тем самым получена задача на условный экстремум для функции  $\Phi$ . Имеем

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_k} \right|_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0} = \int_a^b (F_y h_y + F_{y'} h'_k) dx = \delta J_y(h_k), \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_k} \right|_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0} = \delta_y K(h_k), \quad k = 1, 2.$$

Выберем функцию  $h_2(x)$  так, чтобы  $\delta_y K(h_2) \neq 0$ ; это можно сделать в силу условия теоремы. Тогда  $\frac{\partial \Psi(0, 0)}{\partial \varepsilon_2} \neq 0$  при любом выборе функции  $h_1(x)$ , и существует  $\lambda = \lambda_0$  такое, что  $dL = 0$  при  $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0, \lambda = \lambda_0$ , где  $L = \Phi + \lambda \Psi$  — функция Лагранжа. В силу (4) имеем в точке  $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0, \lambda = \lambda_0$

$$\frac{\partial L}{\partial \varepsilon_2} = \delta_y J(h_1) + \lambda \delta_y J(h_1) = 0$$

для любой функции  $h_1(x)$ , равной нулю на концах отрезка  $[a, b]$ , и из основной леммы вытекает уравнение (3).

Пример. Среди всех кривых  $y = y(x)$  заданной длины  $l$ ,

$$y(a) = y(b) = 0,$$

найти ту, которая ограничивает наибольшую площадь. Эта задача называется *изопериметрической*. В данном случае

$$J(y) = \int_a^b y dx, \quad K(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Так как  $F, G$  не зависят от  $x$ , то уравнение Эйлера (3) имеет первый интеграл (§ 3)

$$F + \lambda G - y'(F_{y'} + \lambda G_{y'}) = C.$$

Следовательно,

$$y - C + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0, \quad \frac{y'(y - C)}{\sqrt{\lambda^2 - (y - C)^2}} = 1,$$

откуда находим, что

$$(x - C_1)^2 + (y - C)^2 = \lambda^2.$$

Искомая экстремаль — дуга окружности, проходящая через заданные точки  $(a, 0)$ ,  $(b, 0)$ .

## § 7. Задача Лагранжа

Рассмотрим задачу: среди всех кривых  $y = y(x)$ ,  $z = z(x)$ , лежащих на поверхности

$$g(x, y, z) = 0, \quad (1)$$

найти те, которые дают экстремум функционалу

$$J(y, z) = \int_a^b F(x, y, z, y', z') dx. \quad (2)$$

Концы кривых закреплены:

$$y(a) = A_1, \quad y(b) = B_1; \quad z(a) = A_2, \quad z(b) = B_2, \quad (3)$$

причем, очевидно, точки  $(a, A_1, A_2)$  и  $(b, B_1, B_2)$  удовлетворяют соотношению (1).

Предположения. 1°. Функция  $F(x, y, z, \dot{y}, \dot{z})$  дважды непрерывно дифференцируема по совокупности переменных, когда  $a \leq x \leq b$ , а остальные переменные меняются в пределах от  $-\infty$  до  $\infty$ .

2°. Функция  $g(x, y, z)$  непрерывно дифференцируема по совокупности переменных и

$$\left( \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right) \neq (0, 0), \quad (4)$$

если  $g = 0$ .

При условии (4) уравнение  $g = 0$  определяет поверхность  $S$  в пространстве. Поэтому геометрический смысл задачи Лагранжа следующий: *среди всех кривых, лежащих на поверхности  $S$  и имеющих заданные концы, найти те, которые дают экстремум функционалу  $J$ .*

**Теорема.** Пусть кривая  $\gamma: y = y(x), z = z(x)$  есть экстремаль задачи Лагранжа. Тогда существует функция



$\lambda(x)$  такая, что  $\gamma$  является стационарной точкой функционала  $\int_a^b (F + \lambda g) dx$ , т. е. выполняются уравнения Эйлера

$$\begin{aligned} F_y + \lambda(x) g_y - \frac{d}{dx} F_{y'} &= 0, \\ F_z + \lambda(x) g_z - \frac{d}{dx} F_{z'} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Доказательство. Пусть  $g = z - \varphi(x, y)$ , т. е. поверхность  $S$  задается уравнением

$$z = \varphi(x, y). \quad (6)$$

Тогда  $J_b$  — функционал только от одной функции  $y(x)$ :

$$\begin{aligned} J = \int_a^b F(x, y(x), \varphi(x, y(x)), y'(x), \varphi_x(x, y(x)) + \\ + \varphi_y(x, y(x)) y'(x)) dx \equiv \int_a^b G(x, y, y') dx \end{aligned}$$

и экстремаль удовлетворяет уравнению Эйлера

$$\begin{aligned} 0 = G_y - \frac{d}{dx} G_{y'} &= F_y + F_z \varphi_y + \\ &+ F_{z'} (\varphi_{xy} + \varphi_{yy} y') - \frac{d}{dx} F_{y'} - \frac{d}{dx} (F_{z'} \varphi_y) = \\ \left( \text{так как } \frac{d}{dx} (F_{z'} \varphi_y) &= \varphi_y \frac{d}{dx} F_{z'} + F_{z'} (\varphi_{xy} + \varphi_{yy} y') \right) \\ &= F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \varphi_y \left( F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} \right) = 0. \quad (7) \end{aligned}$$

Так как  $g_z = 1$ ,  $g_y = -\varphi_y$ , то полученное соотношение можно записать в виде

$$\frac{F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}}{g_y} = \frac{F_z - \frac{d}{dx} F_{z'}}{g_z}. \quad (8)$$

Обе части этого равенства — некоторая функция от  $x$ ; обозначив ее —  $\lambda(x)$ , получим уравнения (5).

2°. Общий случай сводится к рассмотренному с помощью следующего замечания: *часть экстремали есть экстремаль*. Действительно, пусть  $\gamma$ :  $y = y(x)$ ,  $z = z(x)$  — экстремаль задачи Лагранжа (точка минимума, для опре-

деленности), и пусть  $\gamma_0$  — дуга экстремали с концами  $M, N$ . Покажем, что  $\gamma_0$  — точка минимума функционала

$$J_1(y, z) = \int_{a_1}^{b_1} F(x, y, z, y', z') dx,$$

где  $a_1, b_1$  — проекции точек  $M, N$  на ось  $x$ . Проварьируем дугу  $\gamma_0$ , т. е. заменим ее близкой кривой  $\tilde{\gamma}_0$  (с теми же концами), лежащей на поверхности  $S$ . Обозначим  $\tilde{\gamma}$ , кривую, полученную из  $\gamma$  заменой дуги  $\gamma_0$  на  $\tilde{\gamma}_0$  (рис. 48).

Тогда  $J(\tilde{\gamma}) \geq J(\gamma_0)$  ( $\gamma$  есть точка минимума). Но в силу выбора  $\tilde{\gamma}$  имеем

$$\begin{aligned} 0 \leq J(\tilde{\gamma}) - J(\gamma) &= \\ &= J(\tilde{\gamma}_0) - J(\gamma_0), \end{aligned}$$

т. е.  $\gamma_0$  — точка минимума.

Завершим доказательство. Фиксируем точку  $M$  и возьмем  $N$  достаточно близко к  $M$ . По условию (4) одна из производных  $g_y, g_z$  отлична от нуля в точке  $M$ ; пусть  $g_z(M) \neq 0$ . По теореме о неявной функции можно выразить  $z$  через  $(x, y)$  из уравнения (1), т. е.  $S$  будет задаваться уравнением (6). При этом из (1) следует, что

$$g_y + \varphi_y g_z \equiv 0 \tag{9}$$

на  $S$ . Проведенные в п. 1° рассуждения приводят к уравнению (7); учитывая (9), снова получаем (8).

## § 8. Функционалы от функций многих переменных

### 1. Уравнение Эйлера. Рассмотрим функционал

$$J(u) = \int_D F(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) dx. \tag{1}$$

Здесь  $u = u(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $d\mathbf{x} = dx_1 \dots dx_n$ ,  $D$  — ограниченная область с гладкой границей  $\Gamma$ .

Предположения. Функция  $F(x_1, \dots, x_n, u, u_1, \dots, u_n)$  дважды непрерывно дифференцируема по сово-

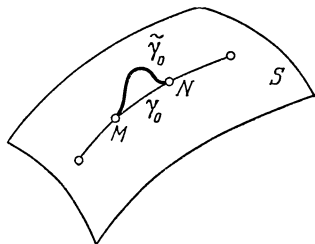


Рис. 48.

купности переменных, когда  $\mathbf{x} \in D \cup \Gamma$ , а переменные  $u, u_1, \dots, u_n$  меняются в пределах от  $-\infty$  до  $\infty$ . Экстремум функционала  $J(u)$  ищется в классе функций, непрерывно дифференцируемых при  $\mathbf{x} \in D \cup \Gamma$ .

При этих условиях первая вариация функционала  $J$  существует; вычислим ее. Имеем

$$\begin{aligned} \delta J_u(h) &= \frac{d}{dt} [J(u + th) - J(u)]|_{t=0} = \\ &= \int_D \left( F_u h + \sum_{i=1}^n F_{u_{x_i}} h_{x_i} \right) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2)$$

Точно так же, как и основная лемма (§ 3), доказывается

*Лемма.* Пусть функция  $f(\mathbf{x})$  непрерывна при  $\mathbf{x} \in D \cup \Gamma$  и  $\int_D f(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$  для любой функции  $h(\mathbf{x})$ , непрерывно дифференцируемой при  $\mathbf{x} \in D \cup \Gamma$  и равной нулю на  $\Gamma$ :  $h(\mathbf{x})|_{\Gamma} = 0$ . Тогда  $f(\mathbf{x}) \equiv 0$  в области  $D$ .

Рассмотрим задачу об отыскании экстремума функционала при условии

$$u(\mathbf{x})|_{\Gamma} = \varphi(\mathbf{x}), \quad (3)$$

где  $\varphi(\mathbf{x})$  — заданная непрерывная на  $\Gamma$  функция. При  $n=1$  это задача с закрепленными концами.

*Теорема.* Экстремаль  $u(\mathbf{x})$  задачи с закрепленными концами удовлетворяет в области  $D$  уравнению Эйлера

$$F_u - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} F_{u_{x_i}} = 0. \quad (4)$$

*Доказательство.* Допустимые приращения  $h(\mathbf{x})$  обращаются в нуль на  $\Gamma$ . Преобразуем выражение (2) для первой вариации, проинтегрировав по частям:

$$\int_D h_{x_i} F_{u_{x_i}} d\mathbf{x} = - \int_D h \frac{\partial}{\partial x_i} F_{u_{x_i}} d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} h F_{u_{x_i}} dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n.$$

Тогда получим

$$\delta J_u(h) = \int_D \left( F_u - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} F_{u_{x_i}} \right) h d\mathbf{x}. \quad (5)$$

Первая вариация в точке экстремума  $u = u(\mathbf{x})$  обращается

в нуль для любых допустимых приращений  $h(\mathbf{x})$ , и из леммы вытекает уравнение (4).

Замечание. Как и при  $n=1$ , уравнение Эйлера выполняется и при других краевых условиях.

**2. Уравнение колебаний мембраны.** Выведем это уравнение из принципа наименьшего действия (§ 5). Составим функцию Лагранжа  $L = T - U$ , где  $T$  — кинетическая,  $U$  — потенциальная энергия мембраны. Пусть  $u(t, x, y)$  — отклонение точки  $(x, y)$  мембраны от положения равновесия  $u \equiv 0$  в момент времени  $t$ . Тогда

$$T = \iint_D \frac{\rho}{2} u_t^2 dx dy,$$

где  $\rho$  — плотность мембраны, интеграл берется по области  $D$ , занимаемой мембраной. Вычислим  $U$ . Мембрана — это бесконечно тонкая пленка, которая не сопротивляется изгибу, но сопротивляется растяжению, причем ее потенциальная энергия пропорциональна приращению площади  $\Delta S$  мембраны. Следовательно,

$$\begin{aligned} U = T_0 \Delta S &= T_0 \iint_D (\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} - 1) dx dy = \\ &= \frac{T_0}{2} \iint_D (u_x^2 + u_y^2 + \dots) dx dy, \end{aligned}$$

где многоточием обозначены члены более высокого порядка малости. Мы рассматриваем малые колебания мембраны, т. е. величины  $u_x, u_y$  малы при всех  $t$ ; тогда

$$L = \frac{1}{2} \iint_D (\rho u_t^2 - T_0 u_x^2 - T_0 u_y^2) dx dy$$

и задача о колебаниях мембраны сводится к отысканию экстремума функционала

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \iint_D (\rho u_t^2 - T_0 u_x^2 - T_0 u_y^2) dx dy.$$

Уравнение Эйлера (4) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

где  $a = T_0/\rho > 0$ . Это и есть уравнение малых свободных колебаний мембраны (волновое уравнение).

## § 9. Достаточные условия слабого экстремума

Пусть  $B$  — банахово пространство  $\varphi(g, h)$  — функционал от пары  $g \in B, h \in B$ . Функционал называется *билинейным*, если он линеен по каждому аргументу при фиксированном другом, т. е.

$$\varphi(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, h) = \alpha_1 \varphi(g_1, h) + \alpha_2 \varphi(g_2, h),$$

$$\varphi(g, \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) = \alpha_1 \varphi(g, h_1) + \alpha_2 \varphi(g, h_2).$$

Функционал  $\psi(h) = \varphi(h, h)$  называется *квадратичным*.

Пример 1. Функционал

$$\psi(h) = \frac{1}{2} \int_a^b [P(x) h'^2(x) + Q(x) h^2(x)] dx \quad (1)$$

является квадратичным функционалом в пространстве  $C^1(a, b)$ . Здесь  $P(x), Q(x)$  — непрерывные функции. Соответствующий билинейный функционал равен

$$\varphi(g, h) = \frac{1}{2} \int_a^b [P(x) g'(x) h'(x) + Q(x) g(x) h(x)] dx.$$

Если  $\psi(h)$  — квадратичный функционал, то  $\psi(th) = t^2 \psi(h)$  для любого  $t$ .

Определение 1. Пусть функционал  $J(y)$  определен в окрестности точки  $y_0 \in B$ . Мы скажем, что  $J(y)$  имеет вторую вариацию в точке  $y_0$ , если его приращение может быть представлено в виде

$$\Delta J \equiv J(y_0 + h) - J(y_0) = \varphi_1(h) + \varphi_2(h) + o(\|h^2\|) \quad (\|h\| \rightarrow 0), \quad (2)$$

где  $\varphi_1(h)$  — линейный и  $\varphi_2(h)$  — квадратичные функционалы.

Функционал  $\varphi_2(h)$  называется *второй вариацией* функционала  $J(y)$  в точке  $y_0$ . Будем писать  $\varphi_2(h) = \delta^2 J_{y_0}(h)$  или просто  $\delta^2 J$ . Вторая вариация — это обобщение понятия второго дифференциала функции. Как и в случае функций, исследование второго дифференциала позволяет получить достаточные условия экстремума. В дальнейшем рас-

считаются только функционалы, имеющие вторую вариацию. Справедлива

**Теорема 1.** Пусть  $\delta J_{y_0}(h) \equiv 0$ . Для того чтобы  $y_0$  была точкой минимума (максимума) функционала  $J(y)$ , необходимо, чтобы

$$\delta^2 J_{y_0}(h) \geq 0 \quad (\delta^2 J_{y_0}(h) \leq 0)$$

для всех допустимых приращений  $h$ .

Выведем формулу для второй вариации. Имеем из (2) при  $h$  фиксированном

$$J(y + th) - J(y) = t\varphi_1(h) + t^2\varphi_2(h) + o(t^2) \quad (t \rightarrow 0),$$

так что

$$\varphi_2(h) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} J(y + th) |_{t=0}. \quad (3)$$

В дальнейшем рассматривается функционал

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (4)$$

и задача с закрепленными концами:

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \quad (5)$$

Ищется слабый экстремум, т. е.  $y(x) \in C^1(a, b)$ . Из формулы (3) находим

$$\delta^2 J = \frac{1}{2} \int_a^b [F_{yy} h^2(x) + 2F_{yy'} h(x) h'(x) + F_{y'y'} h'^2(x)] dx.$$

Преобразуем это выражение, проинтегрировав по частям:

$$2 \int_a^b F_{yy'} h(x) h'(x) dx = \int_a^b F_{yy'} dh^2(x) = - \int_a^b h^2(x) \frac{d}{dx} F_{yy'} dx.$$

Внеинтегральная подстановка обратилась в нуль, так как  $h(a) = h(b) = 0$ . Окончательно получаем выражение вида (1):

$$\delta^2 J = \frac{1}{2} \int_a^b [P(x) h'^2(x) + Q(x) h^2(x)] dx, \quad (6)$$

$$P = F_{y'y'}, \quad Q = F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'}.$$

Если функция  $F(x, y, z)$  дважды непрерывно дифференцируема при  $a \leq x \leq b$ ,  $-\infty < y, z < \infty$ , то вторая вариация  $\delta^2 J$  существует в любой точке  $y(x) \in C^1(a, b)$ . В дальнейшем предполагается, что функция  $F(x, y, z)$  трижды непрерывно дифференцируема в указанной области; необходимость этого условия ясна из вида функции  $Q(x)$ .

Всюду в дальнейшем предполагается, что  $\delta J \equiv 0$  в точке  $y = y_0(x)$ , функция  $h(x)$  — допустимое приращение, т. е.  $h(x) \in C^1(a, b)$  и

$$h(a) = h(b) = 0. \quad (7)$$

*Лемма 1. Для того чтобы  $y_0(x)$  была точкой минимума задачи (5) для функционала  $J(y)$ , необходимо, чтобы выполнялось условие Лежандра*

$$F_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) \geq 0, \quad x \in I. \quad (8)$$

*Доказательство.* Допустим противное, тогда существует точка  $x_0$ ,  $a < x_0 < b$ , такая, что  $P(x_0) < 0$  (напомним, что  $P = F_{y'y'}$  — см. (6)); тогда  $P(x_0) \leq -A < 0$  на некотором интервале  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . Пусть  $x_0 = 0$ , для простоты. Положим  $h_\delta(x) = \varphi(x/\delta)$ , где  $\varphi(x) > 0$  при  $|x| < 1$ ,  $\varphi(x) \equiv 0$  при  $|x| > 1$  и  $\varphi(x)$  непрерывно дифференцируема при всех  $x$ . Пример такой функции см. в § 3. При  $|x| \leq \delta_0$  имеем  $|Q(x)| \leq B$  и потому при  $\delta < \delta_0$

$$\begin{aligned} \varphi_2(h_\delta) &\leq \frac{1}{2} \int_{-\delta}^{\delta} \left[ -\frac{A}{\delta^2} \varphi'^2\left(\frac{x}{\delta}\right) + B\varphi^2\left(\frac{x}{\delta}\right) \right] dx = \\ &= \frac{\delta}{2} \left[ -\frac{A}{\delta^2} \int_{-1}^1 \varphi'^2(x) dx + B \int_{-1}^1 \varphi^2(x) dx \right]. \end{aligned}$$

При  $\delta \rightarrow 0$  первое слагаемое в квадратных скобках стремится к бесконечности, второе — постоянно, и потому  $\varphi_2(h_\delta) < 0$  при малых  $\delta > 0$ .

*Лемма 2. Пусть  $\delta J_{y_0}(h) \equiv 0$  и существует постоянная  $C > 0$ , не зависящая от функции  $h(x)$  и такая, что*

$$\int_a^b [P(x)h'^2(x) + Q(x)h^2(x)] dx \geq C \int_a^b [h'^2(x) + h^2(x)] dx \quad (9)$$

*для всех допустимых приращений  $h(x)$ . Тогда функция  $y_0(x)$  есть точка строгого минимума задачи с закрепленными концами (5) для функционала  $J(y)$ .*

Доказательство. По формуле Тейлора имеем

$$\Delta J \equiv J(y_0 + h) - J(y_0) = \frac{1}{2} \int_a^b [(F_{yy} + \varepsilon_{11}) h^2(x) + \\ + 2(F_{yy'} + \varepsilon_{12}) h(x) h'(x) + (F_{y'y'} + \varepsilon_{22}) h'^2(x)] dx,$$

где  $\varepsilon_{ij} \rightarrow 0$  при  $\|h\|_{C_1} \rightarrow 0$ . Если  $\|h\|_{C_1} \leq \delta_0$ , то  $|\varepsilon_j| \leq \varepsilon = \varepsilon(\delta_0) \rightarrow 0$  ( $\delta_0 \rightarrow 0$ ), так что

$$\left| \frac{1}{2} \int_a^b (\varepsilon_{11} h^2(x) + 2\varepsilon_{12} h(x) h'(x) + \varepsilon_{22} h'^2(x)) dx \right| \leq \\ \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_a^b [h'(x) + h(x)]^2 dx \leq \varepsilon \int_a^b [h'^2(x) + h^2(x)] dx,$$

и потому

$$\Delta J \geq \frac{1}{2} (C - 2\varepsilon) \int_a^b [h'^2(x) + h^2(x)] dx > 0,$$

если  $\delta_0 > 0$  достаточно мало,  $h(x) \not\equiv 0$ .

Квадратичный функционал, для которого выполняется неравенство (9), называется *положительно определенным*. Если первая вариация функционала (первый дифференциал функции) обращается в некоторой точке в нуль, а вторая вариация функционала (второй дифференциал функции) положительно определена, то эта точка минимума.

**2. Квадратичные функционалы.** Уравнение Эйлера для функционала (6) имеет вид

$$\frac{d}{dx} \left( P \frac{dh}{dx} \right) - Qh = 0. \quad (10)$$

Пусть выполнено *усиленное условие Лежандра*:

$$P(x) > 0, \quad x \in I. \quad (11)$$

Этого условия недостаточно для положительной определенности квадратичного функционала.

**Пример 2.** Рассмотрим функционал

$$\varphi_2(h) = \int_0^{2\pi} [h'^2(x) - h^2(x)] dx, \quad h(0) = h(2\pi) = 0.$$

Если  $h(x) = \sin(x/2)$ , то  $\varphi_2(h) < 0$ .



**Определение 2.** Точка  $c$  называется сопряженной с точкой  $c'$ , если уравнение (8) имеет решение  $h(x) \not\equiv 0$  такое, что  $h(c) = h(c') = 0$ .

В примере 2 точки  $0, 2\pi$  сопряжены, так как функция  $h(x) = \sin(x/2)$  удовлетворяет уравнению Эйлера  $h'' + h = 0$  и  $h(0) = h(2\pi) = 0$ .

**Теорема 2.** Пусть выполнено условие (11) и отрезок  $[a, b]$  не содержит точек, сопряженных с точкой  $a$ . Тогда квадратичный функционал  $\varphi_2(h)$  положительно определен.

Основная идея доказательства теоремы 2 принадлежит Лежандру и состоит в том, чтобы привести  $\varphi_2(h)$  к интегралу от квадрата функции. Добавляя к интегралу (6) выражение

$$\frac{1}{2} \int_a^b d(\omega(x) h^2(x)) = 0,$$

получаем

$$\varphi_2(h) = \frac{1}{2} \int_a^b P \left[ h'^2 + \frac{2}{P} h h' \omega + \frac{(Q + \omega')}{P} h^2 \right] dx.$$

Чтобы выражение в квадратных скобках было полным квадратом, необходимо, чтобы дискриминант обратился в нуль, т. е. чтобы функция  $\omega(x)$  удовлетворяла уравнению Рикатти

$$P(x) \omega' - \omega^2 + P(x) Q(x) = 0. \quad (12)$$

Если на отрезке  $I = [a, b]$  такая функция существует, то

$$\varphi_2(h) = \frac{1}{2} \int_a^b P(x) \left( h'(x) + \frac{\omega(x)}{P(x)} h(x) \right)^2 dx, \quad (13)$$

так что  $\varphi_2(h) \geq 0$ , если  $h(x) \not\equiv 0$ .

Но такой функции  $\omega(x)$  может не существовать. Уравнение Рикатти — нелинейное, и его решение может не существовать в большом, т. е. на всем отрезке  $I$ . Условие Якоби (отсутствие сопряженных точек на отрезке  $I$ ) необходимо для существования такой функции  $\omega(x)$ .

**Лемма 3.** В условиях теоремы 2 существует решение уравнения Рикатти (12), определенное на всем отрезке  $I$ .

Доказательство. Сделаем в уравнении (13) подстановку  $\omega = -\frac{u'}{u}P$ , где  $u(x)$  — новая неизвестная функция, тогда

$$\frac{d}{dx} \left( P \frac{du}{dx} \right) - Qu = 0.$$

Покажем, что это уравнение имеет решение  $u_0(x)$ , которое не обращается в нуль на отрезке  $I$ ; тем самым функция  $\omega(x)$  будет построена. Пусть  $u_1(x)$  — решение с данными Коши  $u_1(a) = 0$ ,  $u_1'(a) = 1$ ; тогда  $u_1(x) > 0$ ,  $x \in I$ ,  $x \neq a$ , так как на отрезке  $I$  нет точек, сопряженных с  $a$ . Рассмотрим решение  $u_0(x)$  с данными Коши  $u_0(a) = \varepsilon > 0$ ,  $u_0'(a) = 1$ , где  $\varepsilon$  достаточно мало. Так как  $u_1(x) > 0$  при  $x \in I$ ,  $x \neq a$ , то по теореме о непрерывной зависимости решения от начальных данных  $u_0(x) > 0$ ,  $x \in I$ .

Завершим доказательство теоремы 2. Прежде всего покажем, что

$$\varphi_2(h) > 0, \quad h(x) \neq 0. \quad (14)$$

Действительно,  $\varphi_2(h) \geq 0$ , в силу представления (13), и если  $\varphi_2(h_0) = 0$ , то на функции  $h_0(x)$  функционал  $\varphi_2(h)$  достигает наименьшего значения. Поэтому функция  $h_0(x)$  удовлетворяет уравнению Эйлера (10). Из представления (13) и условий  $P(x) > 0$ ,  $\varphi_2(h_0) = 0$  следует, что

$$h_0'(x) + \frac{\omega(x)}{P(x)} h_0(x) \equiv 0, \quad x \in I,$$

и потому  $h_0(a) = 0$ ,  $h_0'(a) = 0$ . По теореме единственности  $h_0(x) \equiv 0$ . Отсюда следует, что если  $\varepsilon > 0$  достаточно мало, то

$$\varphi_2(h) \geq \frac{\varepsilon}{2} \int_a^b h'^2(x) dx. \quad (15)$$

Действительно,  $P(x) \geq \varepsilon > 0$  при  $x \in I$ , так что для функционала

$$\bar{\varphi}_2(h) = \frac{1}{2} \int_a^b [(P(x) - \varepsilon) h'^2(x) + Q(x) h^2(x)] dx$$

условие (11) выполнено. Ему отвечает уравнение Эйлера

$$\frac{d}{dx} \left( (P - \varepsilon) \frac{dh}{dx} \right) - Qh = 0.$$

Покажем, что это уравнение имеет решение, положительное при  $x \in I$ . Пусть  $h_\varepsilon(x)$  — решение, отвечающее данным Коши  $h_\varepsilon(a) = 0$ ,  $h'_\varepsilon(a) = 1$ . Так как  $h_0(x) > 0$  при  $x \in I$ ,  $x \neq a$ , то по теореме о непрерывной зависимости решений от параметра  $h_\varepsilon(x) > 0$ ,  $a < x \leq b$ , если  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_0$  мало. Фиксируем  $\varepsilon > 0$  и выберем  $\delta > 0$  достаточно малым, тогда решение, отвечающее данным Коши  $h(a) = \delta$ ,  $h'(a) = 1$ , будет положительным при  $x \in I$ . Из доказательства леммы 3 следует, что  $\tilde{\varphi}_2(h) > 0$ ,  $h(x) \neq 0$  и так как

$$\varphi_2(h) = \tilde{\varphi}_2(h) + \frac{\varepsilon}{2} \int_a^b h'^2(x) dx,$$

то (15) доказано. Остается установить неравенство (9). Так как  $h(a) = 0$ , то

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_a^x h'(t) dt; \quad h^2(x) = \left( \int_a^x h'(t) dt \right)^2 \leq \\ &\leq \int_a^x 1^2 dt \int_a^x h'^2(t) dt \leq (b-a) \int_a^b h'^2(x) dx \end{aligned}$$

по неравенству Коши — Буняковского и потому

$$\int_a^b h'^2(x) dx \geq \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b h^2(x) dx.$$

Отсюда следует, что если выполнено неравенство (15), то выполнено и неравенство (9).

**3. Достаточные условия слабого экстремума.** Из леммы 2 и теоремы 2 следует

**Теорема 3.** *Рассмотрим задачу с закрепленными концами (5) для функционала (4). Пусть первая вариация  $\delta J_{y_0}(h) \equiv 0$  и выполнены условия:*

1°.  $F_{y'y'}(x, y_0(x), y'_0(x)) > 0$ ,  $a \leq x \leq b$   
(усиленное условие Лежандра).

2°. Отрезок  $[a, b]$  не содержит точек, сопряженных с точкой  $a$  (условие Якоби).

Тогда функция  $y_0(x)$  есть точка минимума функционала  $J(y)$ .

Пример 3. Рассмотрим задачу об отыскании минимума функционала

$$J(y) = 2\pi \int_{-a}^a y \sqrt{1+y'^2} dx, \quad y(-a) = y(a) = A > 0.$$

В § 3, пример 1, показано, что минимум может достигаться только на функции  $y_0(x) = C_2 \operatorname{ch} \frac{x}{C_2}$ , где  $C_2$  — наибольший корень уравнения

$$f(C) \equiv C \operatorname{ch} \frac{a}{C} = A.$$

Функция  $f(C)$  достигает наименьшего значения на полуоси  $C > 0$  в точке  $C_0$ ; предполагается, что  $A > f(C_0)$ . Выпишем уравнения Якоби. Используя тождество  $\sqrt{1+y_0'^2} = \frac{y_0}{C_2}$ , находим

$$P \equiv F_{y'y'} = \frac{2\pi y_0}{(1+y_0'^2)^{3/2}} = \frac{2\pi C_2^3}{y_0^2},$$

$$Q \equiv F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'} = -2\pi C_2 \left( \frac{y_0'}{y_0} \right)'$$

и усиленное условие Лежандра  $F_{y'y'} > 0$  выполнено. Уравнение (10) имеет вид

$$C_2^2 \left( \frac{h'}{y_0^2} \right)' + \left( \frac{y_0'}{y_0} \right)' h = 0.$$

Это уравнение имеет линейно независимые решения

$$h_1 = \operatorname{sh} \frac{x}{C_2}, \quad h_2 = \operatorname{ch} \frac{x}{C_2} - \frac{x}{C_2} \operatorname{sh} \frac{x}{C_2}.$$

Решение

$$h(x) = h_1(a) h_2(x) + h_2(a) h_1(x) \quad (16)$$

обращается в нуль при  $x = -a$ . Покажем, что  $h(x) \neq 0$  при  $-a < x \leq a$ , тогда из теоремы 3 следует, что  $y_0(x)$  — точка минимума. Имеем

$$f'(C) = \operatorname{ch} \frac{a}{C} \left( 1 - \frac{a}{C} \operatorname{th} \frac{a}{C} \right), \quad f''(C) = \frac{a^2}{C^3} \operatorname{ch} \frac{a}{C} > 0,$$

так что  $f'(C) < 0$  при  $0 < C < C_0$ ,  $f'(C) > 0$  при  $C > C_0$ ; в частности,  $f'(C_2) > 0$ . Имеем

$$h'(x) = \frac{1}{C_2} \operatorname{ch} \frac{x}{C_2} \operatorname{sh} \frac{a}{C_2} \left( 1 - \frac{x+a}{C_2} \operatorname{th} \frac{a}{C_2} \right).$$

Так как  $f'(C_2) > 0$ , то  $h'(x) > 0$  при  $-a \leq x \leq 0$  и потому  $h(x) > 0$  при  $-a < x \leq 0$ . Пусть  $0 < x \leq a$ , тогда второе слагаемое в (16) положительно, так как  $f'(C_2) > 0$ . Далее, так как  $aC_2/x \geq C_2$ , то

$$\operatorname{ch} \frac{x}{C_2} - \frac{x}{C_2} \operatorname{sh} \frac{x}{C_2} = f'\left(\frac{aC_2}{x}\right) > 0$$

и первое слагаемое в (16) положительно, так что  $h(x) > 0$  при  $0 < x \leq a$ .

## АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

### § 1. Эвристические соображения

Рассмотрим уравнение второго порядка

$$y'' - k^2 q(x) y = 0 \quad (1)$$

на конечном отрезке  $I = [a, b]$ . Будем предполагать, что  $k > 0$ , функция  $q(x)$  вещественна, строго положительна и бесконечно дифференцируема при  $x \in I$ .

Нас интересует поведение решений уравнения (1) при  $k \rightarrow +\infty$ . Такого рода задачи возникают в самых разных физических задачах, в частности, в задачах о распространении звуковых, электромагнитных, упругих волн и в квантовой механике.

Если  $q$  — постоянная, то уравнение (1) имеет два линейно независимых решения  $y_{1,2} = e^{\pm k\sqrt{q}x}$ . Будем искать решение в виде экспоненты, умноженной на ряд по степеням  $1/k$ :

$$y = e^{kS(x)} \left[ a_0(x) + \frac{1}{k} a_1(x) + \dots + \frac{1}{k^n} a_n(x) + \dots \right].$$

Сходимость ряда мы пока что обсуждать не будем.

При вычислениях удобнее искать  $y$  в несколько ином виде:

$$y = \exp \left[ \int_{x_0}^x (k\alpha_{-1}(t) + \alpha_0(t) + \frac{\alpha_1(t)}{k} + \dots \dots + \frac{\alpha_n(t)}{k^n} + \dots) dt \right]. \quad (2)$$

Сделаем подстановку

$$\frac{y'}{y} = w, \quad (3)$$

тогда для  $w$  получим уравнение Рикатти:

$$w' + w^2 = k^2 q(x). \quad (4)$$

Имеем из (2), (4)

$$w = k\alpha_{-1}(x) + \alpha_0(x) + \frac{\alpha_1(x)}{k} + \dots$$

Подставим это выражение в (4):

$$k^2\alpha_{-1}^2(x) + k[2\alpha_0(x)\alpha_{-1}(x) + \alpha'_{-1}(x)] + \dots = k^2q(x)$$

и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $k$ :

$$\alpha_{-1}^2(x) = q(x), \quad 2\alpha_{-1}(x)\alpha_0(x) + \alpha'_{-1}(x) = 0, \dots$$

Отсюда находим

$$\alpha_{-1}(x) = \pm \sqrt{q(x)}, \quad \alpha_0(x) = -\frac{q'(x)}{4q(x)}, \dots$$

( $\alpha_0(x)$  не зависит от выбора знака корня), и можно затем последовательно найти  $\alpha_1(x)$ ,  $\alpha_2(x)$ , ... Подставляя в (2) и учитывая, что

$$S(x) = \pm \int^x \sqrt{q(t)} dt, \quad \exp \left[ - \int^x \frac{q'(t)}{4q(t)} dt \right] = \\ = C \exp \left[ - \frac{1}{4} \ln q(x) \right] = C (q(x))^{-1/4},$$

получаем (с точностью до  $O(k^{-1})$ ) два приближенных решения

$$y_{1,2}(x) \approx q^{-1/4}(x) \exp \left[ \pm k \int^x \sqrt{q(t)} dt \right] \quad (k \rightarrow +\infty). \quad (5)$$

Выбор нижнего предела интегрирования несуществен, так как его изменение приводит к умножению решения на постоянную. Выпишем еще

$$\alpha_1(x) = \frac{1}{8} \frac{q''(x)}{(q(x))^{3/2}} - \frac{5}{32} \frac{(q'(x))^2}{(q(x))^{5/2}} \quad (6)$$

(это отвечает выбору  $+\sqrt{q}$  в экспоненте).

В последующих параграфах эти формальные соображения будут строго обоснованы.

## § 2. Основные оценки

**1. Преобразование уравнения.** Рассмотрим уравнение

$$y'' - Q(x)y = 0 \quad (1)$$

на интервале  $I = (a, b)$ ,  $a < b$ , конечном или бесконечном.

Предположение 1. Функция  $Q(x)$  имеет две непрерывные производные и не обращается в нуль при  $x \in I$ .

Уравнение (1) эквивалентно системе

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ Q(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Напомним обозначение (§ 1, (6)):

$$\alpha_1(x) = \frac{1}{8} \frac{Q''(x)}{Q^{3/2}(x)} - \frac{5}{32} \frac{(Q'(x))^2}{Q^{5/2}(x)}. \quad (3)$$

Прямой выкладкой доказывается

Лемма. Преобразование

$$y(x) = u_1(x) + u_2(x)$$

$$y'(x) = \left( \sqrt{Q(x)} - \frac{1}{4} \frac{Q'(x)}{Q(x)} \right) u_1(x) - \left( \sqrt{Q(x)} + \frac{1}{4} \frac{Q'(x)}{Q(x)} \right) u_2(x) \quad (4)$$

приводит систему (2) к виду

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \left[ \sqrt{Q(x)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{Q'(x)}{4Q(x)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_1(x) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Поясним смысл и конструкцию преобразования (4) на примере уравнения

$$y'' - k^2 q(x) y = 0,$$

где  $k$  — большой параметр. Так как  $Q(x) = k^2 q(x)$  в данном случае, то  $\alpha_1(x, k) = O(k^{-1})$  и матрица системы (5) — диагональная, с точностью до малых членов порядка  $O(k^{-1})$ . В данном случае система (2) имеет вид

$$Y' = A(x, k) Y, \quad Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k^2 q(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Будем вначале искать преобразование  $Y = T_0(x) Z$ , приводящее систему к почти диагональному виду с точностью до  $O(1)$ . Эта подстановка приводит к системе

$$Z' = \left( T_0^{-1} A T_0 - T_0^{-1} \frac{dT_0}{dx} \right) Z,$$

откуда видно, что в качестве  $T_0(x)$  следует взять матрицу, приводящую матрицу  $A(x, k)$  к диагональному виду. Собственные значения этой матрицы равны  $\pm k \sqrt{q(x)}$  (и различны при всех  $x \in I$ , так как  $q(x) \neq 0$ ), а собственные векторы (столбцы) равны  $(1, \pm \sqrt{q(x)})$ , так что можно положить  $T_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{q} & -\sqrt{q} \end{pmatrix}$ . Тогда получим систему

$$Z' = \left[ k \Lambda(x) - T_0^{-1}(x) \frac{dT_0(x)}{dx} \right] Z,$$



где  $\Lambda(x)$  — диагональная матрица с диагональными элементами  $\pm \sqrt{q(x)}$ . Итак, система приведена к диагональному виду с точностью до членов порядка  $O(1)$ . Чтобы диагонализировать ее с точностью до членов порядка  $O(k^{-1})$ , сделаем подстановку  $Z = (I + k^{-1}T_1(x))U$ . Так как

$$(I + k^{-1}T_1(x))^{-1} = I - k^{-1}T_1(x) + O(k^{-2}),$$

то полученная система примет вид

$$U' = \left[ k\Lambda(x) + \left( T_1(x)\Lambda(x) - \Lambda(x)T_1(x) - T_0^{-1}(x) \frac{dT_0(x)}{dx} \right) + O(k^{-1}) \right] U.$$

Матрицу  $T_1(x)$  можно найти из условия, чтобы заключенная в круглые скобки матрица была диагональной. Эти соображения и приводят к подстановке (4).

**2. Оценки решений.** Если в системе (1) отбросить члены, содержащие  $\alpha_1(x)$ , то система распадется на два независимых уравнения. Укороченная система имеет решения

$$u^j(x) = y_j^0(x_0, x) e_j, \quad j = 1, 2, \quad (6)$$

где обозначено

$$e_1 = (1, 0), \quad e_2 = (0, 1),$$

$$y_{1,2}^0(x_0, x) = Q^{-1/4}(x) e^{\pm S(x_0, x)}, \quad (7)$$

$$S(x_0, x) = \int_{x_0}^x \sqrt{Q(t)} dt. \quad (8)$$

Покажем, что при условиях, которые будут сформулированы ниже, система (5) имеет решения, близкие к  $u^1$ ,  $u^2$ . Тогда, воспользовавшись соотношениями (4), получим приближенные формулы для решений уравнения (1). Обозначим

$$\rho(x_0, x) = \left| \int_{x_0}^x |\alpha_1(t)| dt \right|. \quad (9)$$

**Предположение 2.** Существует дважды непрерывно дифференцируемая при  $x \in I$  ветвь корня  $\sqrt{Q(x)}$  такая, что

$$\operatorname{Re} \sqrt{Q(x)} \geq 0, \quad x \in I.$$

Во всех последующих формулах фигурирует именно эта ветвь.

**Замечание.** Если функция  $Q(x)$  вещественна, то предположение 2 следует из условия:  $Q(x) \neq 0$ ,  $x \in I$ . Пусть  $Q(x) > 0$ ; искомая ветвь есть  $\sqrt{Q(x)} > 0$ . Если же

$Q(x) < 0$ , то  $\sqrt{Q(x)}$  — чисто мнимое число, и в качестве искомой ветви можно взять  $\sqrt{Q(x)} = i |\sqrt{Q(x)}|$ .

Теорема 1. Пусть выполнены предположения 1, 2 и

$$\rho(a, x) < \infty, \quad x \in I. \quad (10)$$

Тогда уравнение (1) имеет решение  $y_1(x)$  такое, что

$$\left| \frac{y_1(x)}{y_1^0(x_0, x)} - 1 \right| \leq 2 (e^{2\rho(a, x)} - 1), \quad x \in I. \quad (11)$$

Эта и последующая теоремы — основные в настоящей главе. Все дальнейшие асимптотические формулы будут выведены из оценок (11), (19).

Доказательство. Подстановка

$$u_j(x) = y_1^0(x_0, x) v_j(x), \quad j = 1, 2,$$

приводит систему (5) к виду

$$v_1' = \alpha_1(x) (v_1 + v_2), \quad v_2' - 2\sqrt{Q(x)} v_2 = -\alpha_1(x) (v_1 + v_2).$$

Решим эту систему, считая правые части известными функциями; тогда получим систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned} v_1(x) &= C_1 + \int_{x_1}^x \alpha_1(t) (v_1(t) + v_2(t)) dt, \\ v_2(x) &= C_2 \exp\{-2S(x_0, x)\} - \\ &\quad - \int_{x_2}^x \exp\{2S(x, t)\} \alpha_1(t) (v_1(t) + v_2(t)) dt. \end{aligned}$$

Положим  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 0$  и  $x_1 = x_2 = a$ , тогда получим систему

$$\begin{aligned} v_1(x) &= 1 + \int_a^x \alpha_1(t) (v_1(t) + v_2(t)) dt, \\ v_2(x) &= - \int_a^x \exp\{2S(x, t)\} \alpha_1(t) (v_1(t) + v_2(t)) dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Покажем, что на интервале  $(a, x)$ , по которому ведется интегрирование, выполняется оценка

$$|\exp\{2S(x, t)\}| \leq 1. \quad (13)$$

Действительно,  $\operatorname{Re} \sqrt{Q(x)} \geq 0$  при  $x \in I$ , и так как  $a < t \leq x$ , то

$$\operatorname{Re} S(x, t) = - \int_t^x \operatorname{Re} \sqrt{Q(t')} dt' \leq 0,$$

откуда следует (13).

Применим метод последовательных приближений к системе (12), положив

$$\begin{aligned} v_1^0(x) &= 1, & v_2^0(x) &= 0, \\ v_1^{n+1}(x) &= 1 + \int_a^x \alpha_1(t) (v_1^n(t) + v_2^n(t)) dt, \\ v_2^{n+1}(x) &= - \int_a^x e^{2S(x,t)} \alpha_1(t) (v_1^n(t) + v_2^n(t)) dt. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} |v_1^1(x) - 1| &\leq \int_a^x |\alpha_1(t)| dt = \rho(a, x), \\ |v_2^1(x)| &\leq \int_a^x |\alpha_1(t)| dt = \rho(a, x). \end{aligned}$$

Последняя оценка следует из (13). Покажем по индукции, что

$$|v_j^n(x) - v_j^{n-1}(x)| \leq \frac{(2\rho(a, x))^n}{n!}, \quad j = 1, 2. \quad (14)$$

При  $n = 1$  оценка доказана; совершим переход индукции от  $n$  к  $n + 1$ . Имеем

$$\begin{aligned} |v_1^{n+1}(x) - v_1^n(x)| &\leq \int_a^x |\alpha_1(t)| [ |v_1^n(t) - v_1^{n-1}(t)| + \\ &+ |v_2^n(t) - v_2^{n-1}(t)| ] dt \leq \\ &\leq \frac{2^n}{n!} \int_a^x |\alpha_1(t)| 2\rho(a, t)^n dt = \frac{(2\rho(a, x))^{n+1}}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

так как  $d\rho(a, t) = |\alpha_1(t)| dt$ . Точно так же доказывается оценка (14) при  $j = 2$ ; в этом случае необходимо учесть оценку (13).

Рассмотрим ряды

$$v_j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (v_j^{n+1}(x) - v_j^n(x)), \quad j = 1, 2.$$

Из оценки (14) и условия (10) следует, что эти ряды сходятся абсолютно и равномерно на любом интервале вида  $(a, x)$ ,  $x < b$ , и что

$$\begin{aligned} |v_1(x) - 1| &\leq \exp\{2\rho(a, x)\} - 1, \\ |v_2(x)| &\leq \exp\{2\rho(a, x)\} - 1. \end{aligned} \quad (15)$$

Из (4) находим  $y_1(x) = y_1^0(x_0, x)[v_1(x) + v_2(x)]$ , так что

$$\left| \frac{y_1(x)}{y_1^0(x_0, x)} - 1 \right| \leq |v_1(x) + v_2(x) - 1| \leq |v_1(x) - 1| + |v_2(x)|,$$

и из (15) следует (11).

Получим оценку для  $y_1'(x)$ . Из соотношения (см. (4))

$$y_1'(x) = y_1^0(x_0, x) \sqrt{Q(x)} \left[ \left( 1 - \frac{Q'(x)}{4Q^{3/2}(x)} \right) v_1(x) - \left( 1 + \frac{Q'(x)}{4Q^{3/2}(x)} \right) v_2(x) \right]$$

и оценки (15) вытекает

Следствие 1. Справедлива оценка

$$\begin{aligned} \left| \frac{y_1'(x)}{\sqrt{Q(x)} y_1^0(x_0, x)} - 1 \right| &\leq \\ &\leq \left| \frac{Q'(x)}{4Q^{3/2}(x)} \right| + 4 \left( 1 + \left| \frac{Q'(x)}{4Q^{3/2}(x)} \right| \right) (\exp\{2\rho(a, x)\} - 1). \end{aligned} \quad (16)$$

Сравнивая (11), (16) и учитывая, что  $\rho(a, x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow a$ , получаем

Следствие 2. Решение  $y_1(x)$  удовлетворяет краевому условию

$$\lim_{x \rightarrow a} y_1'(x) \left[ \left( \sqrt{Q(x)} - \frac{Q'(x)}{4Q(x)} \right) y_1(x) \right]^{-1} = 0, \quad (17)$$

если  $Q'(x)/Q^{3/2}(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow a$ .

Построим решение  $y_2(x)$ . Точно так же, как и теорема 1, доказывается

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 с той лишь разницей, что

$$\rho(x, b) < \infty, \quad x \in I. \quad (18)$$

Тогда уравнение (1) имеет решение  $y_2(x)$  такое, что

$$\left| \frac{y_2(x)}{y_2^0(x_0, x)} - 1 \right| \leq 2 (\exp\{2\rho(x, b)\} - 1), \quad x \in I. \quad (19)$$

Далее, выполняются оценки

$$\left| \frac{y_2'(x)}{\sqrt{Q(x)} y_2^0(x_0, x)} + 1 \right| \leq \leq \left| \frac{Q'(x)}{4Q^{3/2}(x)} \right| + 4 \left( 1 + \left| \frac{Q'(x)}{4Q^{3/2}(x)} \right| \right) (\exp \{2\rho(b, x)\} - 1) \quad (20)$$

и краевое условие

$$\lim_{x \rightarrow b} y_2'(x) \left[ \left( \sqrt{Q(x)} + \frac{Q'(x)}{4Q(x)} \right) y_2(x) \right]^{-1} = 1. \quad (21)$$

### § 3. Асимптотика решений при больших значениях аргумента

1. Осциллирующие решения. Рассмотрим уравнение

$$y'' + Q(x)y = 0 \quad (1)$$

на полуоси  $x \geq 0$ . Введем условия:

1°.  $Q(x) > 0$  при  $x \geq x_0 \geq 0$ .

2°.  $Q''(x)$  непрерывна при  $x \geq 0$ .

3°. Сходится интеграл

$$\int_0^{\infty} |\alpha_1(x)| dx < \infty. \quad (2)$$

Функция  $\alpha_1$  выписана в § 1.

Теорема 1. Пусть условия 1°—3° выполнены. Тогда уравнение (1) имеет решения  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  вида

$$y_{1,2}(x) = Q^{-1/4}(x) \exp \left\{ \pm i \int_{x_2}^x \sqrt{Q(t)} dt \right\} (1 + \varepsilon_{1,2}(x)) \quad (3)$$

и для функций  $\varepsilon_j(x)$  справедливы оценки

$$|\varepsilon_j(x)| \leq C \int_x^{\infty} |\alpha_1(t)| dt, \quad j = 1, 2, \quad (4)$$

где  $C$  — постоянная.

Из условия 3° следует, что  $\varepsilon_j(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$ , так что, в частности, справедлива асимптотическая формула

$$y_{1,2}(x) \sim Q^{-1/4}(x) \exp \left\{ \pm i \int_{x_0}^x \sqrt{Q(t)} dt \right\} \quad (x \rightarrow \infty). \quad (3')$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 2 из § 2. Положим  $I = (x_0, \infty)$ , так что  $a = x_0$ ,  $b = \infty$  и  $\rho(x, \infty) = \int_x^\infty |\alpha_1(t)| dt$ . Так как этот интеграл сходится, то  $\rho(x, \infty) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$  и потому  $|\exp\{2\rho(x, \infty)\} - 1| \leq C_1 \rho(x, \infty)$  при достаточно больших  $x$ . Поэтому оценку (19) из § 2 можно записать в виде

$$\left| \frac{u_2(x)}{y_2^0(x_0, x)} - 1 \right| \leq C \rho(x, \infty).$$

Из этой оценки и определения функции  $y_2^0(x_0, x)$  (§ 2, (7), (8)) следует существование решения  $y_2(x)$ , для которого справедливы формулы (3), (4). Чтобы доказать существование решения  $y_1(x)$ , достаточно заметить, что если  $y(x)$  — решение уравнения (1), то  $\overline{y(x)}$  — также решение.

Следствие. Пусть выполнено условие

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Q'(x)}{Q^{3/2}(x)} = 0. \quad (5)$$

Тогда решения  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  линейно независимы и их асимптотику можно дифференцировать, т. е.

$$y'_{1,2}(x) \sim \pm i Q^{1/4}(x) \exp \left\{ \pm i \int_{x_0}^x \sqrt{Q(t)} dt \right\} \quad (x \rightarrow \infty). \quad (6)$$

Доказательство. Из оценки (20) и условия 5) следует (6) для  $y_2(x)$ ; аналогично доказывается формула (6) для  $y_1(x)$ . Из (3'), (6) получаем, что при  $x \gg 1$  вронскиан  $w(x)$  решений  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  равен

$$w(x) = i \begin{vmatrix} 1+o(1) & 1+o(1) \\ 1+o(1) & -1+o(1) \end{vmatrix} = -2i + o(1).$$

Так как вронскиан от  $x$  не зависит, то, устремляя  $x$  к бесконечности, получаем

$$w(x) = -2i, \quad (7)$$

и линейная независимость построенных решений доказана.

Вместо  $y_{1,2}(x)$  можно взять вещественные решения  $y_{3,4}(x)$  со следующими асимптотиками при  $x \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} y_3(x) &= Q^{-1/4}(x) \left[ \cos \int_{x_0}^x \sqrt{Q(t)} dt + o(1) \right], \\ y_3'(x) &= -Q^{1/4}(x) \left[ \sin \int_{x_0}^x \sqrt{Q(t)} dt + o(1) \right], \\ y_4(x) &= Q^{-1/4}(x) \left[ \sin \int_{x_0}^x \sqrt{Q(t)} dt + o(1) \right], \\ y_4'(x) &= Q^{1/4}(x) \left[ \cos \int_{x_0}^x \sqrt{Q(t)} dt + o(1) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Их вронскиан равен  $\omega = 1$ .

Полученные асимптотические формулы показывают, что все решения уравнения (1) осциллируют при больших  $x$ .

Обсудим одно из важнейших условий теоремы 1 — условие 3°. Пусть  $Q(x) = C_1 x^\gamma$  (здесь и ниже  $C_j$  — постоянные),  $C_1 > 0$ , тогда  $\alpha_1(x) = C_2 x^{-2-\gamma/2}$  и интеграл (2) сходится, если  $\gamma > -2$ . При  $\gamma > -2$  выполняется также условие (5). В частности, если  $Q(x)$  — многочлен (с положительным коэффициентом при старшей степени), то все условия теоремы и следствия выполнены. Нетрудно проверить, что если  $Q(x)$  есть функция вида  $C_3 (\ln x)^\beta$ ,  $C_4 e^{C_5 x^\gamma}$ , где  $C_j > 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\beta$  — любое вещественное число, то все условия теоремы 1 и следствия выполнены. Эти условия выполняются также, если асимптотика функции  $Q(x)$  имеет один из указанных выше типов и ее можно дважды дифференцировать. Например,

$$\begin{aligned} Q(x) &\sim ax^\gamma, \quad Q'(x) \sim \gamma ax^{\gamma-1}, \quad Q''(x) \sim \gamma(\gamma-1)ax^{\gamma-2}, \\ a &> 0, \quad \gamma > -2 \quad (x \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

Отметим также, что во всех этих случаях,

$$\int^{\infty} \sqrt{Q(x)} dx = +\infty. \quad (9)$$

Условие (2) означает, грубо говоря, что функция  $Q(x)$  не слишком быстро убывает при  $x \rightarrow \infty$  (медленнее, чем  $x^{-2}$ ) и достаточно правильно ведет себя на бесконечности.

**Задача.** Доказать, что если выполнены условия теоремы 1 и (9), то решения  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  линейно независимы,

При условии (9) решения  $y_3(x)$ ,  $y_4(x)$  имеют бесконечно много положительных нулей, и если  $x_n$ ,  $x_{n+1}$  — соседние нули одного из этих решений, то

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \sqrt{Q(t)} dt = \pi + o(1) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (10)$$

Пример 1. Уравнение Эйра

$$y'' - xy = 0$$

имеет решения такие, что при  $x \rightarrow -\infty$

$$y_1(x) = |x|^{-1/4} \left[ \cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right) + O(|x|^{-3/2}) \right],$$

$$y_2(x) = |x|^{-1/4} \left[ \sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right) + O(|x|^{-3/2}) \right].$$

Действительно, после замены переменной  $x = -t$  получаем уравнение  $y'' + ty = 0$ , так что

$$Q(t) = t, \quad \int_0^t Q(t') dt' = \frac{2}{3} t^{3/2}, \quad \int_t^\infty |\alpha_1(t')| dt' = Ct^{-3/2}.$$

Пример 2. Приведенное уравнение Бесселя

$$z'' + \left(1 - \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2}\right) z = 0$$

имеет решения такие, что при  $x \rightarrow +\infty$

$$z_1(x) = \cos x + O(x^{-1}), \quad z_2(x) = \sin x + O(x^{-1}).$$

Действительно, в этом случае

$$Q(x) = 1 - (\nu^2 - 1/4)x^{-2}, \quad Q^{-1/4}(x) = 1 + O(x^{-2}),$$

$$S(x_0, x) =$$

$$= \int_{x_0}^x \sqrt{Q(t)} dt = x - x_0 + \int_{\infty}^x (\sqrt{1 - (\nu^2 - 1/4)t^{-2}} - 1) dt +$$

$$+ \int_{x_0}^{\infty} (\sqrt{1 - (\nu^2 - 1/4)t^{-2}} - 1) dt.$$

Следовательно,

$$S(x_0, x) =$$

$$= x + C - (\nu^2 - 1/4) \int_{\infty}^x t^{-2} \left[1 + \sqrt{1 - (\nu^2 - 1/4)t^{-2}}\right]^{-1} dt =$$

$$= x + C + O(x^{-1}) \quad (x \rightarrow +\infty),$$



и из этих оценок и (3) следуют асимптотические формулы.

Приведем еще один важный результат об асимптотике решений уравнения типа (1):

$$y'' + (k^2 - V(x))y = 0. \quad (11)$$

**Теорема 2.** Пусть  $k > 0$  — постоянная, функция  $V(x)$  непрерывна при  $x \geq 0$  и выполнено условие

$$\int_0^{\infty} |V(x)| dx < \infty. \quad (12)$$

Тогда уравнение (11) имеет линейно независимые решения вида

$$y_{1,2}(x) \sim e^{\pm ikx} \quad (x \rightarrow \infty). \quad (13)$$

**Доказательство.** Представим уравнение в виде  $y'' + k^2y = V(x)y$  и решим его, считая правую часть известной функцией (гл. 3, § 7, (16)). Тогда получим интегральное уравнение

$$y(x) = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx} + \frac{1}{k} \int_x^{\infty} \sin k(x-t) V(t) y(t) dt. \quad (14)$$

Положим  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 0$  и применим метод последовательных приближений:

$$y_0(x) = e^{ikx},$$

$$y_{n+1}(x) = e^{ikx} + \frac{1}{k} \int_x^{\infty} \sin k(x-t) V(t) y_n(t) dt.$$

Докажем по индукции оценку

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{\Phi^n(x)}{n!}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{k} \int_x^{\infty} |V(t)| dt.$$

При  $n = 0$  имеем

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leq \frac{1}{k} \int_x^{\infty} |V(t)| dt = \Phi(x).$$

Совершим переход индукции от  $n$  к  $n+1$ . Имеем

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(x) - y_n(x)| &\leq \\ &\leq \frac{1}{k} \int_x^{\infty} |\sin k(x-t)| |V(t)| |y_n(t) - y_{n-1}(t)| dt \leq \\ &\leq \frac{1}{n!} \int_x^{\infty} \Phi^n(t) \frac{1}{k} |V(t)| dt = \frac{\Phi^{n+1}(x)}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

так как  $|V(t)| dt = k d\Phi(t)$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} |y(x)| &= |y_0(x) + (y_1(x) - y_0(x)) + \dots \\ &\dots + (y_n(x) - y_{n-1}(x)) + \dots| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi^n(x)}{n!} \leq e^{\Phi(0)}, \end{aligned}$$

и потому последовательность  $y_n(x)$  равномерно сходится к функции  $y(x)$  на полуоси  $x \geq 0$ . Так как, по доказанному, функция  $y(x)$  ограничена, то из (14) находим

$$|y(x) - e^{ikx}| \leq C \int_x^{\infty} |V(t)| dt.$$

Правая часть этого неравенства стремится к нулю при  $x \rightarrow +\infty$ , в силу условия (12), и решение  $y_1(x)$  построено. Аналогично строится решение  $y_2(x)$ .

Допустим, что эти решения линейно зависимы, тогда  $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \equiv 0$  при  $x \geq 0$ . Если  $c_1 \neq 0$ , то  $y_1(x)/y_2(x) \equiv \equiv -c_2/c_1$ . Но из (13) следует, что  $y_1(x)/y_2(x) \sim e^{2ikx}$  ( $x \rightarrow \infty$ ), так что

$$e^{2ikx} \sim -c_2/c_1 \quad (x \rightarrow \infty).$$

Это невозможно, так как предел левой части этого равенства при  $x \rightarrow \infty$  не существует.

Следствие 1. В условиях теоремы 2 справедливы оценки

$$\begin{aligned} |y_1(x) - e^{ikx}| &\leq C \int_x^{\infty} |V(t)| dt, \\ |y_2(x) - e^{-ikx}| &\leq C \int_x^{\infty} |V(t)| dt. \end{aligned} \tag{15}$$

*З а м е ч а н и е.* В интегральном уравнении (14) интеграл берется по бесконечному интервалу и потому, строго говоря, необходимо проверить, что функция  $y''(x)$  непрерывна при  $x \geq 0$  и что функция  $y(x)$ , удовлетворяющая интегральному уравнению, удовлетворяет и дифференциальному. Эта несложная проверка предоставляется читателю.

*С л е д с т в и е 2.* Если

$$\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = 0,$$

то асимптотические формулы (13) можно дифференцировать:

$$y'_{1,2}(x) \sim \pm i k e^{\pm i k x} \quad (x \rightarrow +\infty). \quad (16)$$

Для доказательства достаточно продифференцировать уравнение (14).

**2. Неосциллирующие решения.** Рассмотрим уравнение

$$y'' - Q(x)y = 0. \quad (17)$$

*Т е о р е м а 3.* Если условия теоремы 1 выполнены, то уравнение (17) имеет решения вида

$$y_{1,2}(x) \sim Q^{-1/4}(x) \exp \left\{ \pm \int_{x_0}^x \sqrt{Q(t)} dt \right\} (1 + \varepsilon_{1,2}(x)), \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon_j(x) = 0, \quad j = 1, 2.$$

*С праведлива оценка*

$$|\varepsilon_2(x)| \leq C \int_x^\infty |\alpha_1(t)| dt. \quad (19)$$

Если, кроме того, выполнено условие (5), то

$$y'_{1,2}(x) \sim \pm Q^{1/4}(x) \exp \left\{ \pm \int_{x_0}^x \sqrt{Q(t)} dt \right\} \quad (x \rightarrow \infty) \quad (20)$$

и решения  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  линейно независимы.

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Существование решения  $y_2(x)$  и оценка (19) доказываются точно так же, как и в теореме 1.

Пусть интеграл  $\int_a^\infty \sqrt{Q(x)} dx = \infty$ , т. е. выполнено (9).

Функция

$$y_1(x) = y_2(x) \int_a^x Q(t) y_2^{-2}(t) dt \quad (21)$$

есть решение уравнения (17) (гл. 3, § 7). Пусть  $a > 0$  настолько велико, что  $|\varepsilon_2(x)| \leq 1/2$  при  $x \geq a$ , тогда интеграл из (21) можно представить в виде

$$I(x) = \int_a^x \sqrt{Q(t)} \exp \left\{ 2 \int_{x_0}^t \sqrt{Q(t)} dt \right\} (1 + \varepsilon_2(t))^{-2} dt.$$

Докажем, что при  $x \rightarrow +\infty$

$$I(x) \sim J(x) = \int_a^x \sqrt{Q(t)} \exp \left\{ 2 \int_{x_0}^t \sqrt{Q(t')} dt' \right\} dt.$$

Тем самым представление (18) будет доказано для решения  $y_1(x)$ , так как

$$J(x) = \frac{1}{2} \exp \left\{ 2 \int_{x_0}^x \sqrt{Q(t)} dt \right\} \Big|_a^x \sim \frac{1}{2} \exp \left\{ 2 \int_{x_0}^x \sqrt{Q(t)} dt \right\}$$

при  $x \rightarrow +\infty$ . Так как  $J(x) \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow +\infty$ , то можно применить правило Лопиталья:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{I(x)}{J(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{I'(x)}{J'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \varepsilon_2(x))^{-2} = 1.$$

Если же интеграл  $\int_a^\infty \sqrt{Q(t)} dt$  сходится, то решение  $y_1(x)$  можно построить с помощью того же интегрального уравнения, что и решение  $y_2(x)$  (§ 2). Мы не останавливаемся подробнее на этом случае, потому что во всех известных нам конкретных примерах из сходимости интеграла из (2) следует расходимость интеграла из (9).

Вронскиан  $\omega$  решений  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ , как следует из (18) — (20), равен  $\omega = -2$ , и потому они линейно независимы.

В дальнейшем, в силу сделанного выше замечания, будем считать, что условие (9) выполнено.

Следствие. Пусть условие (5) выполнено. Тогда при  $x \gg 1$  решение  $y_1(x)$  строго монотонно возрастает, решение  $y_2(x)$  строго монотонно убывает, и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y_1(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y_2(x) = 0. \quad (22)$$

Действительно, из (18), (20) следует, что  $y_1'(x)/y_2(x) = \sqrt{Q(t)}(1 + \varepsilon(x))$ , где  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ . Пусть  $a > 0$

таково, что  $|\varepsilon(x)| \leq 1/2$  при  $x \geq a$ . Тогда

$$\begin{aligned} \ln y_2(x) - \ln y_2(a) &= \int_a^x \sqrt{Q(t)} (1 + \varepsilon(t)) dt \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \int_a^x \sqrt{Q(t)} dt \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

так что  $y_2(x) \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow \infty$ . Аналогично доказывается второе из соотношений (22).

Итак, в условиях следствия уравнение (17) имеет убывающее при  $x \rightarrow \infty$  решение  $y_2(x)$ . Все остальные решения, не пропорциональные этому, растут при  $x \rightarrow \infty$ .

Пример 3. Уравнение Эйри (см. пример 2) имеет решения такие, что при  $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} y_3(x) &= x^{-1/4} \exp[(2/3)x^{3/2}] [1 + O(x^{-3/2})], \\ y_4(x) &= x^{-1/4} \exp[(-2/3)x^{3/2}] [1 + O(x^{-3/2})]. \end{aligned}$$

Решение, которое отличается от  $y_4(x)$  лишь постоянным множителем, а именно,

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} y_4(x),$$

называется *функцией Эйри* и играет важную роль в задачах распространения волн. Из примера 1 следует, что функция Эйри должна сильно осциллировать при  $x < 0$ . Ее точная асимптотика такова [11]:

$$\begin{aligned} \text{Ai}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi} |x|^{1/4}} \left[ \sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + O(|x|^{-3/2}) \right]. \\ &(x \rightarrow -\infty) \end{aligned}$$

Функция Эйри описывает *переходные процессы (типа перехода от света к тени)*, так как она осциллирует на полуоси  $x < 0$  и экспоненциально убывает на полуоси  $x > 0$ . Ее свойства хорошо изучены [11].

Пример 4. Рассмотрим уравнение Вебера

$$y'' + (x^2 - a^2)y = 0, \quad a \geq 0.$$

Его решения называются *функциями Вебера* или *функциями параболического цилиндра*. Исследуем их асимпто-

тику при  $x \rightarrow +\infty$ . Пусть  $x > 0$ , тогда

$$\sqrt{x^2 - a^2} = x - \frac{a^2}{2x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

$$\int_a^x \sqrt{t^2 - a^2} dt = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} \ln x + C + o(1)$$

при  $x \rightarrow \infty$  и  $(x^2 - a^2)^{-1/4} \sim x^{-1/2}$ . Следовательно, уравнение Вебера имеет решения такие, что при  $x \rightarrow +\infty$

$$y_1(x) \sim x^{-(a^2+1)/2} e^{x^2/2}, \quad y_2(x) \sim x^{(a^2+1)/2} e^{-x^2/2}.$$

Решение  $y_2(x)$  экспоненциально убывает, а решение  $y_1(x)$  экспоненциально возрастает при  $x \rightarrow +\infty$ .

**Теорема 4.** Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда уравнение

$$y'' - (k^2 + V(x))y = 0 \quad (23)$$

имеет линейно независимые решения вида

$$y_{1,2}(x) \sim e^{\pm kx} \quad (x \rightarrow +\infty). \quad (24)$$

**Доказательство.** Решение  $y_2(x)$  строится точно так же, как и в теореме 2, а решение  $y_1(x)$  определим формулой (21), где  $Q(x) = k^2 + V(x)$ . Тогда

$$y_1(x) = e^{-kx} (1 + \varepsilon_1(x)) \int_a^x e^{2kt} (1 + \varepsilon_2(t)) dt,$$

где  $\varepsilon_j(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Тем же способом, что и выше, нетрудно показать, что интеграл из правой части этого равенства равен  $e^{2kx} (1 + o(1))$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

**3. Уравнения с комплексными коэффициентами.** Рассмотрим уравнение (17), и пусть  $Q(x)$  — комплекснозначная функция.

**Теорема 5.** Пусть условия 2°, 3° выполнены и ветвь  $\sqrt{Q(x)}$  при  $x \geq 1$  можно выбрать так, что

$$\operatorname{Re} \sqrt{Q(x)} \geq 0. \quad (25)$$

Тогда уравнение (17) имеет решения вида (18), и справедлива оценка (19). Если, кроме того, выполнено условие (5), то эту асимптотику можно дифференцировать, т. е. справедлива формула (20), и решения  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  линейно независимы.

Коротко наметим доказательство. Решение  $y_2(x)$  строится так же, как и в теореме 1. Построение решения  $y_1(x)$  несколько сложнее; подробности см., например, в [11].

Пример 5. Рассмотрим уравнение

$$y'' - a_0 x^\alpha y = 0,$$

где  $\alpha > -2$ ,  $a_0 \neq 0$ . Пусть  $a_0 = \rho_0 e^{i\varphi_0}$ , где  $\rho_0 > 0$ ,  $0 \leq \varphi_0 < \pi$ , тогда значение корня  $\sqrt{a_0} = \sqrt{\rho_0} e^{i\varphi_0/2}$  таково, что  $\operatorname{Re} \sqrt{a_0} \geq 0$ . Поэтому все условия теоремы 5 выполнены, и это уравнение имеет решения такие, что при  $x \rightarrow +\infty$

$$y_{1,2}(x) \sim x^{-\alpha/4} \exp \left\{ \pm \frac{a_0}{\frac{\alpha}{2} + 1} x^{\frac{\alpha}{2} + 1} \right\}.$$

#### § 4. Асимптотика решений при больших значениях параметра

1. Осциллирующие решения. Рассмотрим уравнение

$$y'' + k^2 q(x) y = 0, \quad (1)$$

где  $k > 0$  — параметр, на конечном отрезке  $I = [a, b]$ . Исследуем асимптотическое поведение решений при  $k \rightarrow +\infty$ . Введем предположения:

1°.  $q''(x)$  непрерывна при  $x \in I$ .

2°.  $q(x) > 0$  при  $x \in I$ .

Теорема 1. Если условия 1°, 2° выполнены, то уравнение (1) имеет решения вида

$$y_{1,2}(x, k) = q^{-1/4}(x) \exp \left\{ \pm ik \int_{x_0}^x \sqrt{q(t)} dt \right\} \left[ 1 + \frac{\varepsilon_{1,2}(x, k)}{k} \right]. \quad (2)$$

Для функций  $\varepsilon_{1,2}$  справедливы оценки

$$|\varepsilon_j(x, k)| \leq C \quad (x \in I, k \geq k_0 > 0), \quad (3)$$

где постоянная  $C$  не зависит от  $x, k$ .

Асимптотику (2) можно дифференцировать, т. е.

$$\begin{aligned} y'_{1,2}(x, k) = \\ = \pm ikq^{1/4}(x) \exp \left\{ \pm ik \int_{x_0}^x \sqrt{q(t)} dt \right\} \left[ 1 + \frac{\tilde{\varepsilon}_{1,2}(x, k)}{k} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Для функций  $\tilde{\varepsilon}_j$  имеют место оценки вида (3).

**Доказательство.** Воспользуемся теоремой 1 из § 2. В данном случае  $Q(x) = -k^2 q(x)$ ; положим  $\sqrt{Q(x)} = ik \sqrt{q(x)}$ . Далее (см. (3), (9) из § 2)

$$\rho(a, x) \leq C_1 k^{-1} \int_a^x \left( \left| \frac{q'^2(t)}{q^{5/2}(t)} \right| + \left| \frac{q''(t)}{q^{3/2}(t)} \right| \right) dt \leq C_2 k^{-1}$$

при  $k > 0$ ,  $x \in I$ , так как  $q(x) \neq 0$ , функция  $q''(x)$  непрерывна. Следовательно,

$$e^{2\rho(a, x)} - 1 \leq C_3 k^{-1} \quad (k \geq k_0 > 0, \quad x \in I),$$

где  $k_0$  фиксировано, и из теоремы 1 § 2 следует существование решения  $y$  такого, что

$$\left| \frac{y(x, k)}{y_1^0(x, x_0, k)} - 1 \right| \leq 2C_3 k^{-1}$$

при  $k \geq k_0$ ,  $x \in I$ . Так как

$$y_1^0(x, x_0, k) = Q^{-1/4}(x) \exp \left\{ ik \int_{x_0}^x \sqrt{q(t)} dt \right\},$$

$$Q^{-1/4}(x) = k^{-1/2} (-1)^{-1/4} q^{-1/4}(x),$$

где  $q^{1/4}(x) > 0$ , то решение  $y$  лишь постоянным множителем  $k^{-1/2} (-1)^{-1/4}$  отличается от искомого решения  $y_1(x, k)$  (см. (2)). Формула (4) для производной  $y_1'(x, k)$  следует из (16), § 2. Аналогично доказывается существование решения  $y_2(x, k)$ . Вронскиан  $\omega(k)$  этих решений равен, как следует из (3), (4):

$$\omega(k) = -2ik [1 + O(k^{-1})] \quad (k \rightarrow +\infty),$$

и потому решения  $y_1, y_2$  линейно независимы, если  $k > 0$  достаточно велико.

**Следствие.** Пусть  $k$  комплексно и лежит в области  $D_{\rho}^-$ :  $|k| \geq \rho > 0$ ,  $\text{Im } k \leq 0$ . Тогда все заключения теоремы 1 остаются в силе.

Для доказательства достаточно проверить, что выполняется предположение 2 из § 2, т. е. что можно выбрать ветвь  $\sqrt{Q(x)}$  такую, что  $\text{Re } \sqrt{Q(x)} \geq 0$ ,  $x \in I$ . Имеем

$$\sqrt{Q(x)} = ik \sqrt{q(x)}, \quad \text{Re } \sqrt{Q(x)} = -\sqrt{q(x)} \text{Im } k \geq 0.$$



Обозначим полученные решения  $y_1^-(x, k)$ ,  $y_2^-(x, k)$  и пусть  $D_\rho^+$  — область  $|k| \geq \rho > 0$ ,  $\text{Im } k \geq 0$  в комплексной плоскости  $k$ . Положим  $\sqrt{Q(x)} = -ik\sqrt{q(x)}$ , тогда  $\text{Re } \sqrt{Q(x)} = \sqrt{q(x)} \text{Im } k \geq 0$  при  $x \in I$ ,  $k \in D_\rho^+$ , и потому существуют решения  $y_1^+(x, k)$ ,  $y_2^+(x, k)$ , для которых справедливы формулы (2) — (4).

Отметим, что эти пары решений  $\{y_1^+(x, k), y_1^-(x, k)\}$  и  $\{y_2^+(x, k), y_2^-(x, k)\}$  вообще говоря, различны.

Замечание. Можно показать, что решения  $y_j^+(x, k)$  ( $y_j^-(x, k)$ ),  $j=1, 2$ , аналитичны по  $k$  при  $k \in D_\rho^+$  ( $k \in D_\rho^-$ ) при каждом фиксированном  $x \in I$ .

Пусть  $k > 0$ , тогда вместо решений  $y_{1,2}$  можно взять пару вещественных решений:

$$\begin{aligned} y_3(x, k) &= q^{-1/4}(x) \left[ \cos \left( k \int_{x_0}^{\infty} \sqrt{q(t)} dt \right) + O(k^{-1}) \right], \\ y_3'(x, k) &= -kq^{1/4}(x) \left[ \sin \left( k \int_{x_0}^x \sqrt{q(t)} dt \right) + O(k^{-1}) \right], \\ y_4(x, k) &= q^{-1/4}(x) \left[ \sin \left( k \int_{x_0}^x \sqrt{q(t)} dt \right) + O(k^{-1}) \right], \\ y_4'(x, k) &= kq^{1/4}(x) \left[ \cos \left( k \int_{x_0}^x \sqrt{q(t)} dt \right) + O(k^{-1}) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $O(k^{-1})$  — равномерно по  $x \in I$ ,  $k \geq k_0 > 0$ , т. е.  $|O(k^{-1})| \leq Ck^{-1}$ , где  $C$  не зависит от  $x, k$ . При больших значениях  $k$  решения  $y_{3,4}$  сильно осциллируют. Если  $x_1, x_2$  — два соседних нуля любого из этих решений, то

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{q(x)} dx = \frac{\pi}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad (k \rightarrow +\infty),$$

так что расстояние между соседними нулями имеет порядок  $O(k^{-1})$ .

**2. Неосциллирующие решения.** Рассмотрим уравнение

$$y'' - k^2q(x)y = 0. \quad (6)$$

Теорема 2. Если условия 1°, 2° выполнены, то уравнение (6) имеет решения вида

$$y_{1,2}(x, k) = q^{-1/4}(x) \exp \left\{ \pm k \int_{x_0}^x \sqrt{q(t)} dt \right\} \left[ 1 + \frac{\varepsilon_{1,2}(x, k)}{k} \right]. \quad (7)$$

Для функций  $\varepsilon_{1,2}$  справедливы оценки (3).

Асимптотику (7) можно дифференцировать, т. е.

$$y'_{1,2}(x, k) = \\ = \pm k q^{1/4}(x) \exp \left\{ \pm k \int_{x_0}^x \sqrt{q(t)} dt \right\} \left[ 1 + \frac{\tilde{\varepsilon}_{1,2}(x, k)}{k} \right], \quad (8)$$

где для функций  $\tilde{\varepsilon}_{1,2}$  имеют место оценки вида (3).

Доказывается эта теорема точно так же, как и теорема 1.

Следствие. Пусть  $k$  комплексно и лежит в области  $\tilde{D}_\rho^+$ :  $|k| \geq \rho > 0$ ,  $\operatorname{Re} k \geq 0$ . Тогда все заключения теоремы 1 остаются в силе.

Это следствие верно и в том случае, когда  $k$  лежит в области  $\tilde{D}_\rho^-$ :  $|k| \geq \rho > 0$ ,  $\operatorname{Re} k \leq 0$ . Замечание к теореме 1 справедливо и для решений, построенных в теореме 2.

Возьмем решение  $y_1(x, k)$  и положим  $x_0 = b$  (см. (7)), тогда  $y_1(b, k) = q^{-1/4}(b) [1 + O(k^{-1})]$ . Это решение при  $k \gg 1$  монотонно возрастает на отрезке  $I$  и  $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_1(x, k) = 0$  ( $x \in I$ ,  $x \neq b$ ). С ростом  $k$  при  $x \neq b$  значение  $y_1(x, k)$  экспоненциально убывает. Если же рассмотреть решение  $y_2(x, k)$  и положить  $x_0 = a$ , то мы получим

$$y_2(a, k) = q^{-1/4}(a) [1 + O(k^{-1})], \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} y_2(x, k) = 0 \quad (x \in I, x \neq a).$$

Это решение при  $k \gg 1$  монотонно убывает на отрезке  $I$ .

Решение  $y_1(x, k)$  (соответственно  $y_2(x, k)$ ) заметно отлично от нуля лишь в малой (порядка  $O(k^{-1})$ ) окрестности точки  $x = b$  (соответственно  $x = a$ ). Эти области принято называть *пограничными слоями*.

Рассмотрим случай, когда  $q(x)$  — комплекснозначная функция.

**Теорема 3.** Пусть выполнено условие 1°,  $q(x) \neq 0$  при  $x \in I$  и имеется ветвь корня такая, что

$$\operatorname{Re} \sqrt{q(x)} \neq 0, \quad x \in I. \quad (9)$$

Тогда уравнение (6) имеет два решения вида (7), асимптотику которых можно дифференцировать. Для остаточных членов  $\varepsilon_{1,2}$ ,  $\bar{\varepsilon}_{1,2}$  справедливы оценки вида (3).

Доказывается эта теорема точно так же, как и теорема 1.

**3. Двойные асимптотики.** Рассмотрим уравнение (1) на полуоси  $I = [0, \infty)$ .

**Теорема 4.** Пусть выполнены условия теоремы 1 и сходится интеграл

$$\int_0^{\infty} |\alpha_1(x)| dx < \infty. \quad (10)$$

Тогда уравнение (1) имеет решения  $y_{1,2}(x, k)$  вида (2), где для функций  $\varepsilon_{1,2}$  справедливы оценки

$$|\varepsilon_{1,2}(x, k)| \leq C \int_x^{\infty} |\alpha_1(t)| dt \quad (x \in I, \quad k \geq k_0 > 0). \quad (11)$$

Если

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{q'(x)}{q^{3/2}(x)} = 0, \quad (12)$$

то асимптотику (2) можно дифференцировать, и для функций  $\bar{\varepsilon}_{1,2}$  справедливы оценки

$$|\bar{\varepsilon}_{1,2}(x, k)| \leq \varphi(x) \quad (x \in I, \quad k \geq k_0 > 0), \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0.$$

Доказательство точно такое же, как и в теореме 1, с той лишь разницей, что вместо  $\rho(a, x)$  следует взять  $\rho(x, +\infty)$ . Это же замечание относится и к последующей теореме.

**Теорема 5.** Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда уравнение (6) имеет решение

$$y_2(x, k) = q^{-1/4}(x) \exp \left\{ -k \int_{x_0}^x \sqrt{q(t)} dt \right\} \left[ 1 + \frac{\varepsilon_2(x, k)}{k} \right] \quad (14)$$

и для  $\varepsilon_2$  справедлива оценка (11). Если выполнено условие (12), то эту асимптотику можно дифференцировать и для  $\bar{\varepsilon}_2$  справедлива оценка (13).

Теоремы 4, 5 дают двойную асимптотику решений. Именно, остаточные члены  $\varepsilon_j(x, k)/k$  стремятся к нулю и при  $x \rightarrow \infty$ ,  $k$  фиксированном, и при  $k \rightarrow \infty$ ,  $x$  фиксированном, и при  $x \rightarrow \infty$ ,  $k \rightarrow \infty$ .

**4. Асимптотические разложения решений.** Рассмотрим уравнения (1), (6) на конечном отрезке  $I = [a, b]$ .

**Предположение.** Функция  $q(x)$  бесконечно дифференцируема и строго положительна при  $x \in I$ .

В этом случае для решений можно получить более точные асимптотические формулы. Продолжим построения § 1. Решение уравнения (6) будем искать в виде формального ряда (§ 1, (2)). Из формулы (4), § 1 следует формальное равенство

$$\sum_{n=-1}^{\infty} k^{-n} \alpha'_n(x) + \left( \sum_{n=-1}^{\infty} k^{-n} \alpha_n(x) \right)^2 - k^2 q(x) = 0.$$

Полагая  $\alpha_{-1}(x) = \sqrt{q(x)}$  и приравнивая нулю коэффициенты при степенях  $k$  в левой части этого равенства, получаем рекуррентную систему уравнений относительно неизвестных функций  $\alpha_n(x)$ :

$$\alpha_{n+1}(x) = -\frac{1}{2\sqrt{q(x)}} \left[ \sum_{j=0}^n \alpha_j(x) \alpha_{n-j}(x) + \alpha'_n(x) \right]. \quad (15)$$

Из этой системы можно последовательно найти  $\alpha_0(x)$ ,  $\alpha_1(x)$ , ...; в частности, функции  $\alpha_0(x)$ ,  $\alpha_1(x)$  были вычислены в § 1.

**Теорема 6.** Для любого целого  $N \geq 1$  уравнение (6) имеет решения вида

$$\begin{aligned} y_1(x, k) &= q^{-1/4}(x) \exp \{kS(x_0, x)\} \times \\ &\quad \times \exp \left\{ \sum_{n=1}^{N-1} k^{-n} \int_{x_0}^x \alpha_n(t) dt \right\} \left[ 1 + \frac{\varepsilon_1^N(x, k)}{k^N} \right], \\ y_2(x, k) &= q^{-1/4}(x) \exp \{-kS(x_0, x)\} \times \\ &\quad \times \exp \left\{ \sum_{n=1}^{N-1} (-k)^{-n} \int_{x_0}^x \alpha_n(t) dt \right\} \left[ 1 + \frac{\varepsilon_2^N(x, k)}{k^N} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Для функций  $\varepsilon_{1,2}^N(x, k)$  справедливы оценки вида (3). Асимптотику решений  $y_{1,2}(x, k)$  можно дифференцировать по  $x$  и по  $k$  любое число раз.

Доказательство см., например, в [11], Добавление 1. Оно проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1, § 2.

Разложения (16) можно записать в иной форме. Именно, если разложить по степеням  $k^{-1}$  экспоненту, содержащуюся в решении  $y_1(x, k)$ , и отправить в остаточный член слагаемые порядка  $O(k^{-N})$ , то асимптотика этого решения примет вид

$$y_1(x, k) = q^{-1/4}(x) \exp \{kS(x_0, x)\} \times \left[ \sum_{n=0}^{N-1} k^{-n} a_n(x) + k^{-N} \varepsilon_1^N(x, k) \right]. \quad (17)$$

Аналогичное представление справедливо и для решения  $y_2(x, k)$ .

Решение уравнения (1) будем искать в виде

$$y = \exp \left\{ \int_{x_0}^x \sum_{n=-1}^{\infty} (ik)^{-n} \alpha_n(t) dt \right\},$$

где  $\alpha_{-1} = \sqrt{q}$ . Тогда для функций  $\alpha_n(x)$  снова получим рекуррентные соотношения (15).

*Теорема 7. Для любого целого  $N \geq 1$  уравнение (1) имеет решения вида*

$$y_1(x, k) = q^{-1/4}(x) \exp \{ikS(x_0, x)\} \times \exp \left\{ \sum_{n=1}^{N-1} (ik)^{-n} \int_{x_0}^x \alpha_n(t) dt \right\} \left[ 1 + \frac{\varepsilon_1^N(x, k)}{k^N} \right],$$

$$y_2(x, k) = q^{-1/4}(x) \exp \{-ikS(x_0, x)\} \times \exp \left\{ \sum_{n=1}^{N-1} (-ik)^{-n} \int_{x_0}^x \alpha_n(t) dt \right\} \left[ 1 + \frac{\varepsilon_2^N(x, k)}{k^N} \right]. \quad (18)$$

*Для функций  $\varepsilon_{1,2}^N(x, k)$  справедливы оценки (3). Асимптотику решений  $y_{1,2}(x, k)$  можно дифференцировать по  $x$  и по  $k$  любое число раз.*

Доказательство см. в [11], Добавление 1. Дальнейшие сведения об асимптотике решений обыкновенных дифференциальных уравнений и систем читатель сможет найти в [11, 25, 45].

§ 1. Дополнительные сведения  
из вариационного исчисления

## 1. Задача Лагранжа. Рассмотрим функционал

$$J(\mathbf{x}) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) dt, \quad (1)$$

зависящий от вектор-функции  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ .

Предположение 1. Функция  $f(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  дважды непрерывно дифференцируема по совокупности переменных при  $t_0 \leq t \leq t_1$  и при всех  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ .

Поставим задачу об отыскании минимума функционала (1) при условиях связи

$$g_i(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad (2)$$

и с закрепленными концами

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^1, \quad (3)$$

где  $g_1, \dots, g_k$  — заданные функции. Эта задача называется *задачей Лагранжа*.

В столь общей постановке задача Лагранжа оказывается крайне сложной. Мы рассмотрим два важнейших частных случая.

1°. Пусть  $k < n$ , функции  $g_1, \dots, g_k$  не зависят от  $\dot{\mathbf{x}}$ , т. е. условия связи имеют вид

$$g_1(t, \mathbf{x}) = 0, \dots, g_k(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (4)$$

Такие связи (т. е. не зависящие от производных) называются в механике *неголономными*; связи вида (2), т. е. зависящие от производных, называются *голономными*. Рассмотренная в гл. 6, § 7 задача есть частный случай задачи (1), (4), (3) при  $n = 2, k = 1$ . Дифференциальные

уравнения для экстремалей можно получить, введя функцию Лагранжа

$$L = f(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^k p_i(t) g_i(t, \mathbf{x}),$$

где  $p_1(t), \dots, p_k(t)$  — неизвестные функции (множители Лагранжа). Если кривая  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  есть экстремаль, то она удовлетворяет системе уравнений Эйлера для функ-

ционала  $\int_{t_0}^{t_1} L dt$ , т. е.

$$L_{x_i} - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

При этом предполагается, что функции  $g_i(t, x_1, \dots, x_n)$  непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных при  $t_0 \leq t \leq t_1$  и, для простоты, при всех  $x_1, \dots, x_n$  и что ранг матрицы Якоби  $g'_x(t, \mathbf{x}) = \left( \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right)$ ,  $1 \leq i \leq k$ ,  $1 \leq j \leq n$ , максимален, т. е. равен  $k$  во всех точках  $(t, \mathbf{x})$ , которые удовлетворяют системе (4). Мы не будем останавливаться на этом случае более подробно и перейдем к рассмотрению такого варианта задачи Лагранжа, который непосредственно связан с задачами оптимального управления.

2°. Пусть систему (2) можно разрешить относительно производных  $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n$ . Тогда мы получим соотношения вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \Phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (5)$$

где  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ ,  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$ . Поясним, почему получаются такие соотношения при  $n=2, k=1$ . Пусть  $\mathbf{x} = (x, y)$ , тогда уравнение связи имеет вид

$$g(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) = 0. \quad (6)$$

Фиксируем  $t, x, y$ ; тогда уравнение (6) определяет, вообще говоря, кривую на плоскости  $(\dot{x}, \dot{y})$ . Ее параметрическое уравнение имеет вид  $\dot{x} = \varphi(u), \dot{y} = \psi(u)$ , где  $u$  — параметр вдоль кривой. Изменяя  $t, x, y$ , получаем

$$\dot{x} = \varphi(t, x, y, u), \quad \dot{y} = \psi(t, x, y, u).$$

В общем случае система из  $k$  уравнений (2) с  $2n+1$  неизвестными определяет, вообще говоря, многообразие раз-

мерности  $m = 2n + 1 - k$  в пространстве с координатами  $t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n$ . Достаточные локальные условия, при которых это утверждение справедливо и многообразие задается уравнениями вида (5), см. гл. 2, § 10.

Итак, рассмотрим задачу об отыскании минимума функционала (1) при условиях связи (5) и с закрепленными концами (см. (3)). Так как, в силу (5), производные  $\dot{x}$  явно выражаются через переменные  $t, x, u$ , то подынтегральная функция в (1) зависит от переменных  $t, x, u$ . Поэтому естественно обобщить задачу, рассмотрев функционал вида

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt. \quad (7)$$

При этом число  $m$  может быть любым, а переменные  $u_1, \dots, u_m$  изменяются в некоторой открытой (что существенно!) области  $U$  в пространстве  $R_u^m$ . Переменные  $x$  называются *фазовыми*, переменные  $u$  — *управлениями*. Задача об отыскании минимума функционала (7) при условиях связи

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u)$$

и с закрепленными (по  $x$ ) концами  $x(t_0) = x^0, x(t_1) = x^1$  также называется задачей Лагранжа.

**Предположение 2.** Функция  $f(t, x, u)$  и вектор-функция  $\varphi(t, x, u)$  непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных  $(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)$  при  $t_0 \leq t \leq t_1, u \in U$  и при всех  $x \in R^n$ .

Введем функцию Лагранжа

$$L = \lambda_0 f(t, x, u) + (p(t), \dot{x} - \varphi(t, x, u)). \quad (8)$$

Здесь  $\lambda_0 \geq 0$  — постоянная,  $p(t) = (p_1(t), \dots, p_m(t))$  и  $(p, \dot{x} - \varphi)$  — скалярное произведение этих векторов, т. е.

$\sum_{i=1}^m p_i(\dot{x}_i - \varphi_i)$ . Величины  $\lambda_0, p_1(t), \dots, p_m(t)$  называются

множителями Лагранжа.

**Теорема.** Пусть пара вектор-функций  $(x(t), u(t))$  есть точка локального минимума задачи Лагранжа. Тогда существуют множители Лагранжа  $\lambda_0, p_1(t), \dots, p_m(t)$ , не равные нулю одновременно и такие, что пара  $(x, u)$



удовлетворяет системе уравнений Эйлера для функционала

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt, \text{ т. е.}$$

$$L_{x_i} - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (9)$$

$$L_{u_j} = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (10)$$

Доказательство этой теоремы см.: Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979. Метод множителей Лагранжа оказывается применимым и к задачам со связями вида (5).

Замечание 1. Поясним появление «лишнего» (ср. гл. 6, §§ 6, 7) множителя Лагранжа  $\lambda_0$  на примере: найти экстремумы функции  $f(x)$  при наличии связи  $g(x) = 0$ , где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f, g$  — гладкие функции. Покажем, что если  $x^0$  — точка экстремума, то существуют множители Лагранжа  $\lambda_0, \lambda_1$ , не равные нулю одновременно и такие, что в точке экстремума  $x^0$  имеем  $\nabla_x L = 0$ , где  $L$  — функция Лагранжа:  $L = \lambda_0 f(x) + \lambda_1 g(x)$ . Пусть  $\nabla g(x^0) \neq 0$ ; тогда можно положить  $\lambda_0 = 1$ , а существование множителя  $\lambda_1$  известно из анализа [26, 33]. Если же  $\nabla g(x^0) = 0$ , то можно положить  $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 1$ .

Замечание 2. Приведем нестрогий вывод уравнений (9) в простейшем случае  $n = 1, m = 1$ . Функционал и условие связи имеют вид

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, u) dt, \quad \dot{x} = \varphi(t, x, u).$$

Допустим, что из уравнения связи можно выразить  $u$  через остальные переменные:  $u = h(t, x, \dot{x})$ . Тогда получим функционал, зависящий только от одной функции  $x(t)$ :

$$J_1(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x}) dt, \quad F(t, x, \dot{x}) = f(t, x, h(t, x, \dot{x}))$$

и простейшую задачу вариационного исчисления. Экстремаль  $x = x(t)$  этого функционала удовлетворяет уравнению Эйлера  $F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} = 0$ , т. е.

$$f(x) + f_u h_x - \frac{d}{dt} (f_u h_{\dot{x}}) = 0.$$

Дифференцируя тождество  $\dot{x} = \varphi(t, x, h(t, x, \dot{x}))$  по  $x$  и по  $\dot{x}$ , находим

$$\varphi_x + \varphi_u h_x = 0, \quad \varphi_u h_{\dot{x}} = 1,$$

и уравнение Эйлера принимает вид

$$f_x - \varphi_x \frac{f_u}{\varphi_u} - \frac{d}{dt} \left( \frac{f_u}{\varphi_u} \right) = 0.$$

Положим  $\lambda_0 = 1$ ,  $p = f_u/\varphi_u$ , тогда получим из этого уравнения систему

$$f_x - p\varphi_x - \dot{p} = 0, \quad f_u - p\varphi_u = 0,$$

которая совпадает с системой (9), (10).

**2. Гамильтонова форма уравнений механики.** Напомним принцип наименьшего действия (гл. 6, § 5). Пусть положение механической системы в момент времени  $t$  задается вектор-функцией  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ , и  $L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  — функция Лагранжа этой системы. Тогда уравнения движения системы определяются из условия  $\delta S = 0$ , где  $S$  — действие:

$$S(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) dt, \quad (11)$$

и имеют вид

$$L_{x_i} - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (12)$$

Функции

$$p_i = \frac{\partial L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})}{\partial \dot{x}_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (13)$$

называются в механике *обобщенными импульсами*. Если материальная точка массы  $m$  движется в трехмерном пространстве в потенциальном поле с потенциальной энергией  $U(t, x_1, x_2, x_3)$ , то функция Лагранжа равна

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - U(t, x_1, x_2, x_3). \quad (14)$$

В этом случае  $p_i = m\dot{x}_i$ , т. е. обобщенные импульсы совпадают с импульсами.

Функцию Лагранжа  $L$  можно рассматривать как функцию от координат  $x_1, \dots, x_n$  (обобщенных) импульсов  $p_1, \dots, p_n$  и времени  $t$ . Действительно, рассмотрим соотношения (13) как систему уравнений относительно неиз-

вестных  $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n$ , считая известными координаты  $x_1, \dots, x_n$ , импульсы  $p_1, \dots, p_n$  и время  $t$ . По теореме о неявной функции (гл. 2, § 9) из этой системы  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными можно локально выразить  $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n$  через известные величины, если отличен от нуля следующий определитель:

$$\det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} \right) \neq 0, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

В дальнейшем предполагается, что это условие выполнено и все последующие рассмотрения носят локальный характер. Тогда функцию Лагранжа  $L$  можно рассматривать как функцию от  $t, \mathbf{x}$  и  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ .

Введем функцию Гамильтона

$$H = -L + \sum_{i=1}^n \dot{x}_i p_i, \quad (15)$$

где  $H, \dot{x}_i, L$  рассматриваются как функции от  $t, \mathbf{x}, \mathbf{p}$ , и выясним, как преобразуются уравнения движения (12) при переходе к этим переменным. Вычислим  $dH$ , используя инвариантность первого дифференциала относительно выбора независимых переменных. Имеем

$$dH = \frac{\partial H}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_i} dx_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i, \quad (16)$$

$$dH = -dL + \sum_{i=1}^n p_i d\dot{x}_i + \sum_{i=1}^n \dot{x}_i dp_i. \quad (17)$$

Дифференциал  $dL$  равен

$$dL = \frac{\partial L}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_i} dx_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} d\dot{x}_i,$$

и в силу (13) это выражение равно

$$dL = \frac{\partial L}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_i} dx_i + \sum_{i=1}^n p_i d\dot{x}_i. \quad (18)$$

При подстановке (18) в (17) члены, содержащие  $d\dot{x}_i$ , вза-

имно уничтожаются, и мы получаем

$$dH = -\frac{\partial L}{\partial t} dt - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_i} dx_i + \sum_{i=1}^n \dot{x}_i dp_i.$$

Сравнивая это выражение с (16), получаем

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad \frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{\partial L}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{x}_i.$$

Используя эти соотношения, уравнения Эйлера (12) можно записать в виде

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (19)$$

Эта система из  $2n$  уравнений первого порядка, эквивалентная системе (12), называется *канонической* (или *гамильтоновой*) системой уравнений. Всякому функционалу вида (11) отвечает каноническая система уравнений.

Поясним механический смысл функции Гамильтона на примере частицы, движущейся в потенциальном поле. Функция Лагранжа имеет вид (14), так что  $p_i = m\dot{x}_i$ , и из (15) находим

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^3 p_i^2 + U(x_1, x_2, x_3).$$

Функция Лагранжа  $L$  есть разность между кинетической  $T$  и потенциальной  $U$  энергией механической системы; в данном примере  $H = T + U$ , т. е.  $H$  — *полная энергия системы*. Такой же смысл имеет функция Гамильтона для произвольных механических систем. Напомним, что если  $H$  не зависит от  $t$ , т. е.  $H = H(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ , то  $H$  — первый интеграл системы (19) (гл. 4, § 4), так что вдоль фазовой траектории  $\{\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)\}$  функция Гамильтона постоянна.

**3. Задача с подвижными концами.** Рассмотрим функционал вида (1), зависящий от одной неизвестной функции  $x(t)$ , и поставим задачу об отыскании его минимума при условии, что один конец кривой  $x = x(t)$  фиксирован:  $x(t_0) = x^0$ , а второй лежит на заданной гладкой кривой  $\gamma$ :  $x = g(t)$ . При этом верхний предел интегрирования в формуле (1) не фиксирован.

Пусть  $x(t)$  — экстремаль поставленной задачи и  $x_1 = x(t_1)$  — ее второй конец. Тогда  $x(t)$  — точка минимума

задачи с закрепленными концами:  $x(t_0) = x_0$ ,  $x(t_1) = x_1$ , и потому  $x(t)$  удовлетворяет уравнению Эйлера и краевому условию  $x(t_0) = x_0$ . Найдем краевое условие на втором конце кривой. Дадим  $x(t)$  приращение  $h(t)$  и рассмотрим приращение функционала:

$$\begin{aligned} \Delta J &\equiv \int_{t_0}^{t_1 + \delta t} f(t, x + h, \dot{x} + \dot{h}) dt - \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, \dot{x}) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [f(t, x + h, \dot{x} + \dot{h}) - f(t, x, \dot{x})] dt + \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_1 + \delta t} f(t, x + h, \dot{x} + \dot{h}) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ f_x - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}} \right] h dt + f_x h|_{t=t_1} + f|_{t=t_1} \delta t + \dots, \end{aligned}$$

где многоточием обозначены бесконечно малые высшего порядка. Из тождества

$$x(t_1 + \delta t) + h(t_1 + \delta t) = g(t_1 + \delta t)$$

следует, что  $h(t_1) = (\dot{g}(t_1) - \dot{x}(t_1) + \varepsilon) \delta t$ , где  $\varepsilon$  — бесконечно малая, и окончательно получаем следующую формулу для первой вариации функционала  $J$ :

$$\delta J = [f + f_x (\dot{g} - \dot{x})]|_{t=t_1} \delta t.$$

Мы учли, что  $x(t)$  удовлетворяет уравнению Эйлера. Краевое условие на втором конце кривой  $x = x(t)$  принимает вид

$$f + f_x (\dot{g} - \dot{x}) = 0 \quad (20)$$

и называется *условием трансверсальности*. Это условие можно представить в иной форме. Введем импульс  $p = f_{\dot{x}}$  и функцию Гамильтона  $H = -f + p\dot{x}$  (см. (13), (15)) и заметим, что вектор  $e = (1, \dot{g}(t))$  касается кривой  $\gamma$ . Условие (20) означает, что вектор  $(-H, p)$  ортогонален вектору  $e$ , т. е. что вектор  $(-H, p)$  ортогонален кривой  $\gamma$  в точке  $(t_1, x_1)$ . В такой форме условие трансверсальности легко обобщается на многомерный случай. Рассмотрим функционал (1), где  $x(t)$  — вектор-функция, и поставим задачу об отыскании минимума этого функционала

при условии, что один конец кривой  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  закреплен:  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ , а второй лежит на гиперповерхности  $\gamma$  в пространстве  $R_{t, \mathbf{x}}^{n+1}$ , заданной уравнением

$$g(t, \mathbf{x}) = 0.$$

Введем аналогично (13), (15) импульсы  $p_i = \dot{f}_{x_i}$  и функцию Гамильтона  $H = -f + (\mathbf{p}, \dot{\mathbf{x}})$ . Тогда условие трансверсальности означает, что в точке  $(t_1, \mathbf{x}(t_1))$  (т. е. на втором конце экстремали) вектор  $(-H, p_1, \dots, p_n)$  ортогонален к  $\gamma$ . Поскольку вектор  $\nabla g = (g_t, g_{x_1}, \dots, g_{x_n})$  ортогонален к  $\gamma$  в указанной точке, то он коллинеарен вектору  $(-H, p_1, \dots, p_n)$  и условия трансверсальности можно записать в виде

$$-\frac{g_t}{H} = \frac{g_{x_1}}{p_1} = \dots = \frac{g_{x_n}}{p_n}. \quad (21)$$

Условие трансверсальности в указанной выше форме сохраняется и в том случае, когда второй конец кривой  $\gamma$  лежит не на гиперповерхности, а на многообразии меньшей размерности. Рассмотрим следующий пример: пусть  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ ,  $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^1$ , причем фиксированы значение  $t_0$  и точки  $\mathbf{x}^0$ ,  $\mathbf{x}^1$ ; значение  $t_1$  не задается. Это означает, что второй конец экстремали лежит на прямой  $l$  в пространстве  $R_{t, \mathbf{x}}^{n+1}$ , заданной уравнениями  $x_1 = x_1^1, \dots, x_n = x_n^1, -\infty < t < \infty$ . В этом случае условие трансверсальности имеет вид

$$H(t_1, \mathbf{x}(t_1), \mathbf{p}(t_1)) = 0, \quad (22)$$

так как направляющий вектор прямой  $l$  равен  $(1, 0, \dots, 0)$ .

## § 2. Принцип максимума Понтрягина

**1. Постановка задач оптимального управления.** Пусть имеется некоторый объект, состояние которого в момент времени  $t$  определяется заданием вектор-функции  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ . Предполагается, что движением объекта можно управлять: управляющие параметры обозначим  $(u_1(t), \dots, u_m(t)) = \mathbf{u}(t)$ . Движение объекта описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad i = 1, \dots, n,$$

или в векторной форме

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)). \quad (1)$$

Примером управляемого объекта может служить любое транспортное средство (автомобиль, поезд и т. д.); его движение описывается уравнениями классической механики, но помимо внешних сил (сила земного тяготения, силы трения и т. п.) на него действуют также силы, управляемые человеком.

Рассмотрим функционал

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt \quad (2)$$

и задачу с закрепленными концами

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^1. \quad (3)$$

Задача оптимального управления состоит в отыскании минимума функционала (2) при условиях (1), (3), но для ее точной постановки необходимо еще описать класс допустимых управлений.

Будем предполагать, что управляющие параметры  $u_1, \dots, u_m$  меняются в некотором замкнутом ограниченном множестве  $U$  в пространстве  $R_u^m$ . Примером такого множества может служить  $m$ -мерный параллелепипед  $|u_i| \leq u_i^0, i = 1, \dots, m$ . Эти ограничения накладываются самим существом задачи (например, мощность двигателя  $u(t)$  не может превосходить некоторой величины:  $0 \leq u(t) \leq u_0$ ).

**Предположение.** Функции  $f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), f_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \dots, f_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$  и их частные производные по переменным  $\mathbf{x}$ :  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, i = 0, 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$ , непрерывны при

$$t_0 \leq t \leq t_1, \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad \mathbf{u} \in U.$$

*Допустимым управлением* называется вектор-функция  $\mathbf{u}(t)$  со значениями в множестве  $U$ , которая кусочно непрерывна при  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Это означает, что имеется не более конечного числа точек разрыва вектор-функции  $\mathbf{u}(t)$  при  $t_0 \leq t \leq t_1$  и в каждой точке разрыва  $t_*$  сущест-

вуют конечные пределы слева и справа:

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \mathbf{u}(t_* - \tau) = \mathbf{u}(t_* - 0), \quad \lim_{\tau \rightarrow +0} \mathbf{u}(t_* + \tau) = \mathbf{u}(t_* + 0).$$

Вектор-функция  $\mathbf{x}(t)$  предполагается непрерывной и кусочно гладкой при  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

Основная задача оптимального управления формулируется следующим образом: среди всех допустимых управлений  $\mathbf{u}(t)$  найти такое, для которого функционал  $J(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  принимает наименьшее возможное значение, при условиях (3). Пара  $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ , на которой достигается этот минимум, называется *оптимальным процессом*.

По внешнему виду эта задача близка к задаче Лагранжа (см. § 1, (5), (7), (3)). Но имеются следующие важнейшие различия: множество  $U$  — не открытая область, как в § 1, а замкнутое ограниченное множество, и допустимые управления — не гладкие, а кусочно непрерывные вектор-функции. Уже простейшие примеры показывают, что оптимальное управление может не быть непрерывным.

Важным примером задачи оптимального управления является *задача о быстродействии*. Пусть заданы две точки  $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1$ . Требуется за наименьшее время перевести объект из точки  $\mathbf{x}^0$  в точку  $\mathbf{x}^1$ . В этом случае  $J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = t_1 - t_0$ , так что  $f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \equiv 1$ . Это не задача с закрепленными концами: начальное и конечное времена  $t_0, t_1$  не фиксируются; они зависят от выбора управления  $\mathbf{u}(t)$ .

Теория оптимального управления была создана в конце пятидесятых годов нашего столетия. В этом параграфе приведены некоторые из основных результатов этой теории, принадлежащие Л. С. Понтрягину и его ученикам и изложенные в монографии [37].

**2. Необходимые условия экстремума.** Рассмотрим задачу оптимального управления (1), (2), (3). Введем функцию Понтрягина

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, \lambda_0) = (\mathbf{p}, \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})) - \lambda_0 f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (4)$$

где  $\lambda_0 \geq 0$  — число,  $\mathbf{p} = (p_1(t), \dots, p_n(t))$  и  $(\mathbf{p}, \mathbf{f})$  — скалярное произведение  $\sum_{i=1}^n p_i f_i$ . Переменные  $p_1, \dots, p_n$  называются *импульсами*. Наряду с функцией  $H$  рассмотрим



функцию

$$M(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda_0) = \sup_{\mathbf{u} \in U} H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, \lambda_0). \quad (5)$$

**Теорема (принцип максимума Понтрягина).** Пусть  $(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\mathbf{u}}(t))$  — оптимальный процесс для задачи (1) — (3). Тогда существуют не равные нулю одновременно число  $\lambda_0$  и вектор-функция  $\mathbf{p}(t)$  такие, что:

1. Вектор-функция  $\mathbf{p}(t)$  удовлетворяет системе

$$\dot{p}_i = -H_{x_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6)$$

2. Функция  $H(\cdot, \tilde{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}, \mathbf{p}(t), \lambda_0)$  переменного  $\mathbf{u} \in U$  достигает в точке  $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}(t)$  максимума при любом  $t \in [t_0, t_1]$ , т. е.

$$\begin{aligned} H(t, \tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\mathbf{u}}(t), \mathbf{p}(t), \lambda_0) &= \\ &= \sup_{\mathbf{u} \in U} H(t, \tilde{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}, \mathbf{p}(t), \lambda_0) = M(t, \tilde{\mathbf{x}}(t), \mathbf{p}(t), \lambda_0). \end{aligned} \quad (7)$$

Из (4) следует, что  $\dot{\mathbf{x}}_i = H_{p_i}$ , так что  $x_i, p_i$  удовлетворяют системе уравнений

$$\dot{\mathbf{x}}_i = H_{p_i}, \quad \dot{p}_i = -H_{x_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (8)$$

По форме эта система гамильтонова (см. § 1, (19)). Но в отличие от гамильтоновой системы она незамкнута, так как содержит  $2n$  уравнений и  $2n + m$  неизвестных  $x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n, u_1, \dots, u_m$ .

Необходимые условия экстремума в задачах классического вариационного исчисления формулируются в виде дифференциальных уравнений для экстремали. В задачах оптимального управления помимо дифференциальных уравнений возникают «недифференциальные условия» — см. (7). Необходимые условия экстремума для задач классического вариационного исчисления можно вывести из принципа максимума Понтрягина.

Приведем формулировку принципа максимума, связанную с задачей об оптимальном быстродействии. Рассмотрим автономную систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (9)$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$ ,  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ ,

и функционал

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt. \quad (10)$$

Фиксируем точки  $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 \in \mathbf{R}^n$ , момент времени  $t_0$  и поставим задачу об отыскании наименьшего значения функционала  $J(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  при условиях

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^1. \quad (11)$$

Такая постановка аналогична задаче с подвижными концами: в пространстве  $\mathbf{R}_{t, \mathbf{x}}^{n+1}$  начало  $(t_0, \mathbf{x}^0)$  кривой  $\mathbf{x}(t)$  фиксировано, а ее конец лежит на прямой  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^1, -\infty < t < \infty$ .

Необходимое условие оптимальности процесса  $(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\mathbf{u}}(t))$  формулируется в терминах функции Понтрягина (4) и имеет следующий вид:

1. Должны выполняться условия (6), (7).

2. В конечный момент времени  $t = t_1$  выполняется соотношение

$$M(t, \tilde{\mathbf{x}}(t), \mathbf{p}(t), \lambda_0)|_{t=t_1} = 0. \quad (12)$$

Доказано, что из условия 1 вытекает, что функция  $M(t, \tilde{\mathbf{x}}(t), \mathbf{p}(t), \lambda_0)$  не зависит от  $t$ , так что условие (12) можно проверять для любого момента времени  $t \in [t_0, t_1]$ .

В задаче об оптимальном быстродействии  $f_0 \equiv 1$ , так что слагаемое  $\lambda_0 f_0$  в (4) постоянно, и его можно опустить, взяв функцию  $H$  в виде

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n p_i f_i. \quad (13)$$

Тогда условие (12) примет вид

$$\sum_{i=1}^n p_i(t) f_i(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\mathbf{u}}(t)) \equiv \lambda_0 \geq 0. \quad (14)$$

Проиллюстрируем принцип максимума Понтрягина на простейшем примере [37]. Рассмотрим уравнение  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u}$ , где  $\mathbf{u}$  — управляющий параметр,  $|\mathbf{u}| \leq 1$  (т. е. множество  $U$  — отрезок  $[-1, 1]$ ). Параметр  $\mathbf{u}$  можно рассматривать как силу, действующую на материальную точку массы  $m = 1$ . Это уравнение можно записать в виде автономной

системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u. \quad (15)$$

Рассмотрим задачу о быстрейшем попадании из заданной точки  $(y_1, y_2)$  в начало координат  $(0, 0)$ . Функция Понтрягина имеет вид

$$H = p_1 x_2 + p_2 u.$$

Импульсы  $p_1, p_2$  удовлетворяют системе уравнений

$$\dot{p}_1 = 0, \quad \dot{p}_2 = -p_1,$$

откуда следует, что  $p_1 = c_1, p_2 = c_2 - c_1 t$ , где  $c_1, c_2$  — постоянные. Так как  $p_1(t) \equiv \text{const}$ , то

$$\max_{|u| \leq 1} H = p_1 x_2 + \max_{|u| \leq 1} p_2 u = p_1 x_2 + |p_2|,$$

т. е. максимум достигается при  $|u| = 1$ , и  $\text{sgn } u(t) = \text{sgn } p_2(t)$ . Следовательно, оптимальное управление  $u(t)$  — кусочно постоянная функция, принимающая значения  $\pm 1$ .

Если  $u = 1$ , то из системы (15) находим

$$x_2 = t + a_2, \quad x_1 = \frac{t^2}{2} + a_2 t + a_1,$$

так что фазовая траектория — дуга параболы

$$x_1 = \frac{1}{2} x_2^2 + c, \quad (16)$$

где  $c$  — постоянная. При  $u = -1$  уравнение фазовой траектории имеет вид

$$x_1 = -\frac{1}{2} x_2^2 + c', \quad (17)$$

где  $c'$  — постоянная. По параболам (16) точка движется снизу вверх, так как  $\dot{x}_2 = u = 1$ , а по параболам (17) — сверху вниз, так как  $\dot{x}_2 = u = -1$ . Поскольку функция  $p_2(t)$  — линейная, то она имеет не более одного нуля; следовательно,  $u(t)$  — кусочно постоянная функция, имеющая не более двух интервалов постоянства. Рассмотрим кривую  $\gamma$ , состоящую из двух «половинок» парабол вида (16), (17), проходящих через начало координат:  $x_1 = \frac{1}{2} x_2^2, x_2 \leq 0$  и  $x_1 = -\frac{1}{2} x_2^2, x_2 \geq 0$ .

Если начальная точка  $(y_1, y_2)$  лежит на  $\gamma$ , то либо  $u \equiv 1$  (при  $y_2 \geq 0$ ), либо  $u \equiv -1$  (при  $y_2 \leq 0$ ), и искомая

фазовая траектория — дуга кривой  $\gamma$ . Если начальная точка  $(y_1, y_2)$  лежит выше кривой  $\gamma$ , то вначале  $u(t) = -1$  и точка движется по параболе вида (17) до точки ее пересечения с  $\gamma$ . Затем происходит «переключение», т. е.  $u(t)$  становится равным 1 и точка движется по кривой  $\gamma$  к началу координат. Аналогично исследуется случай, когда точка  $(y_1, y_2)$  лежит ниже кривой  $\gamma$ .

Согласно принципу максимума, только описанные выше траектории могут быть оптимальными. В этом примере для каждой начальной точки такая траектория существует и единственна. Но тот факт, что она реализует минимум функционала, нуждается в проверке. Сформулируем теорему, которая позволяет осуществить эту проверку. Рассмотрим задачу о линейных оптимальных быстродействиях: система (I) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu. \quad (18)$$

Здесь  $A$ ,  $B$  — постоянные матрицы порядков  $(n \times n)$ ,  $(n \times m)$  соответственно. Пусть область управления  $U$  — замкнутый ограниченный выпуклый многогранник,  $w$  — вектор, направление которого совпадает с направлением одного из ребер многогранника  $U$ . Требуется, чтобы векторы  $Bw$ ,  $ABw$ , ...,  $A^{n-1}Bw$  были линейно независимы.

*Теорема [37]. Если для процесса, который описывается системой (18), существует допустимое управление, переводящее точку  $x$  из точки  $x^0$  в точку  $x^1$ , то существует и оптимальное управление.*

В рассмотренном выше примере (см. (15)) допустимое управление, переводящее точку  $(y_1, y_2)$  в точку  $(0, 0)$ , существует. Многогранник  $U$  есть отрезок  $[-1, 1]$ , так что  $w$  — скаляр,  $w \neq 0$ . Имеем  $Bw = (0, w)$ ,  $ABw = (w, 0)$  (эти векторы — столбцы), так что  $Bw$ ,  $ABw$  — линейно независимые векторы, и в силу теоремы построенные в примере управления являются оптимальными.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Харьков: ОНТИ, 1939.
2. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959.
3. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1975.
4. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
5. Ахиезер Н. И. Лекции по вариационному исчислению. — М.: Гостехиздат, 1955.
6. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. — М.: Наука, 1967.
7. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука, 1980.
8. Богданов Ю. С. Лекции по дифференциальным уравнениям. — Минск: Высшая школа, 1977.
9. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний — М.: Наука, 1974.
10. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973.
11. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968.
12. дела Валле-Пуссен Ш. Курс анализа бесконечно малых — Л.; М.: ГТТИ, 1933. т. 2.
13. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976.
14. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. — М.: Физматгиз, 1961.
15. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. — М.: Физматгиз, 1958.
16. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. — М.: Наука, 1977.
17. Головина Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. — М.: Наука, 1979.
18. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений — М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
19. Горелик Г. С. Колебания и волны. — М.: Физматгиз, 1959.

20. Гурса Э. Курс математического анализа. — М.; Л.: ОНТИ, 1936.
21. Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. — Минск: Наука и техника, 1972.
22. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976.
23. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. — М.: Наука, 1966.
24. Карташев А. П., Рождественский Б. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. — М.: Наука, 1980.
25. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1958.
26. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. — М.: Высшая школа, 1973, т. 1, т. 2.
27. Курант Р. Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964.
28. Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А. Курс вариационного исчисления. — М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
29. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1973.
30. Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. — М.: Мир, 1964.
31. Ляпунов А. М. Собрание сочинений. — М.: Изд-во АН СССР, 1956, т. 2.
32. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. — М.: Наука, 1975.
33. Никольский С. М. Курс математического анализа. — М.: Наука, 1975, т. 1, т. 2.
34. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.: Гостехиздат, 1949.
35. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1970.
36. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1974.
37. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: — Наука, 1976.
38. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. — М.: Наука, 1971.
39. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: ИЛ, 1953, т. 1; 1954, т. 2.
40. Смирнов В. И. Курс высшей математики. — М.: Наука, 1974, т. 2; 1969, т. 3, ч. 2; 1974, т. 4, ч. 1.
41. Титчмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. — М.: ИЛ, 1959, т. 1; 1960, т. 2.
42. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1979,

43. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения.—М.: ИЛ, 1962.
44. Флюгге З. Задачи по квантовой механике.—М.: Мир, 1974, т. 1.
45. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения.—М.; Мир, 1970.
46. Четаев Н. Г. Устойчивость движения.—М.: Наука, 1965.
47. Шилов Г. Е. Математический анализ. Специальный курс.—М.: Физматгиз, 1960.
48. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.—М.: Наука, 1969.

*Михаил  
Васильевич  
Федорюк*

ОБЫКНОВЕННЫЕ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ  
УРАВНЕНИЯ

(Серия: «Избранные главы  
высшей математики для инженеров  
и студентов вузов»)

М., 1980 г., 352 стр. с илл.

Редактор *И. Е. Морозова*  
Техн. редактор *Л. В. Лихачева*  
Корректоры *Е. В. Сидоркина, В. П. Сорокина*

ИБ № 11494

Сдано в набор 26.12.79. Подписано к печати  
08.05.80. Бумага 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>, тип. № 3. Литера-  
турная гарнитура. Высокая печать. Условн.  
печ. л. 18,48. Уч.-изд. л. 17,75. Тираж 25 000 экз.  
Заказ № 1065. Цена книги 75 коп.

Издательство «Наука»  
Главная редакция  
физико-математической литературы  
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции, ордена Тру-  
дового Красного Знамени Ленинградское про-  
изводственно-техническое объединение «Печ-  
чатный Двор» имени А. М. Горького «Союз-  
полиграфпрома» при Государственном коми-  
тете СССР по делам издательств, полиграфии  
и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136.  
Чкаловский пр., 15



ИЗДАТЕЛЬСТВО « НАУКА »  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ  
ЛИТЕРАТУРЫ,

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ В 1980 ГОДУ:

**Романовский П. И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразования Лапласа. 6-е изд., стереотипн.**

Книга представляет собой учебное пособие для студентов вузов по некоторым разделам, входящим в настоящее время в программы значительного числа высших технических учебных заведений. Она может быть также полезна аспирантам технических кафедр, преподавателям и инженерам.

*Заказы на данную книгу принимаются магазинами Книготорга и Академкниги.*

75 коп.