И. Е. ИРОДОВ

ЗАДАЧИ ПО ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1979

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 5

Несколько советов по решению задач 6

Принятые обозначения 8

Часть 1. **Физические основы механики** 9

1.1. Кинематика 9
1.2. Основное уравнение динамики 17
1.3. Законы сохранения энергии, импульса и момента импульса . . . 26
1.4. Всемирное тяготение 40
1.5. Динамика твердого тела 43
1.6. Упругие деформации твердого тела 54
1.7. Гидродинамика 57
1.8. Релятивистская механика 62

Часть 2. **Термодинамика и молекулярная физика** 69

2.1. Уравнение состояния газа. Процессы 69
2.2. Первое начало термодинамики. Теплоемкость 72
2.3. Молекулярно-кинетическая теория. Распределения Максвелла и Больцмана 76
2.4. Второе начало термодинамики. Энтропия 81
2.5. Жидкости. Капиллярные явления 87
2.6. Фазовые превращения 89
2.7. Явления переноса 93

Часть 3. **Электродинамика** 98

3.1. Постоянное электрическое поле в вакууме 98
3.2. Проводники и диэлектрики в электрическом поле 104
3.3. Электроемкость. Энергия электрического поля 111
3.4. Электрический ток 117
3.5. Постоянное магнитное поле. Магнетики 129
3.6. Электромагнитная индукция. Уравнения Максвелла 139
3.7. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях 152

Часть 4. **Колебания и волны** 158

4.1. Механические колебания 158
4.2. Электрические колебания 171
4.3. Упругие волны. Акустика 179
4.4. Электромагнитные волны. Излучение 184

Часть 5. **Оптика** 189

5.1. Фотометрия и геометрическая оптика 189
5.2. Интерференция света 199
5.3. Дифракция света 205
5.4. Поляризация света 215
5.5. Дисперсия и поглощение света 223
5.6. Оптика движущихся источников 227
5.7. Тепловое излучение. Квантовая природа света 230

Часть 6. **Атомная и ядерная физика** 236
6.1. Рассеяние частиц. Атом Резерфорда — Бора 236
6.2. Волновые свойства частиц 241
6.3. Свойства атомов. Спектры 247
6.4. Молекулы и кристаллы 254
6.5. Радиоактивность 260
6.6. Ядерные реакции 263
6.7. Элементарные частицы 268

Ответы и решения 271

Приложения 347
1. Основные тригонометрические формулы 347
2. Таблица синусов 348
3. Таблица тангенсов 349
4. Таблица десятичных логарифмов 350
5. Показательные функции 352
6. Греческий алфавит 354
7. Некоторые постоянные числа и приближенные формулы 354
8. Некоторые сведения о векторах 354
9. Таблица производных и интегралов 355
10. Астрономические величины 356
11. Плотности веществ 356
12. Коэффициенты теплового расширения 357
13. Упругие постоянные. Предел прочности 357
14. Давление насыщенных паров воды 357
15. Постоянные газов 358
16. Постоянные жидкостей и твердых тел 358
17. Диэлектрические проницаемости 359
18. Удельные сопротивления проводников 359
19. Магнитные восприимчивости пара- и диамагнетиков 359
20. Показатели преломления 360
21. Вращение плоскости поляризации 360
22. Работа выхода электрона из металлов 361
23. Край K-полосы поглощения 361
24. Массовые коэффициенты ослабления 361
25. Потенциалы ионизации атомов 362
26. Массы легких атомов 362
27. Периоды полураспада радиоизотопов 362
28. Единицы физических величин 363
29. Основные формулы электродинамики в СИ и гауссовой системе 365
30. Основные физические константы 367

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый сборник задач представляет собой радикально переработанный «Сборник задач по общей физике» Иродова И. Е., Савельева И. В. и Замши О. И., изданный в 1975 году. Переработка является настолько существенной, что данное пособие следует рассматривать как созданное заново. Особенно сильной переработке подверглись части 2 (термодинамика и молекулярная физика), 3 (электродинамика) и 6 (атомная и ядерная физика). Проведена перекомпановка материала сборника, в частности, введена новая часть 4 (колебания и волны). Значительное число задач заменено или улучшено и, кроме того, добавлено еще около 500 задач.

Для удобства и экономии времени учащихся в начале каждого раздела введена сводка основных формул на соответствующий материал. Формулы приведены, как правило, без подробных пояснений: предполагается, что смысл входящих в них величин студенту, приступающему к решению задач, уже известен. Пояснения даны лишь в тех случаях, где по тем или иным причинам могут возникнуть недоразумения.

Все формулы в основном тексте и ответах приведены в системе СИ, за исключением части 6, где использована гауссова система. Исходные данные и числовые ответы задач даны с учетом точности соответствующих величин и правил действий над приближенными числами.

Сборник предназначен в качестве учебного пособия в основном для студентов вузов с расширенной программой по физике.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность профессору И. В. Савельеву за большую помощь и внимание, оказанные им в процессе работы над рукописью данной книги, а также всем товарищам, которые сообщили свои замечания по отдельным задачам и тем самым способствовали улучшению сборника.

И. Иродов

НЕСКОЛЬКО СОВЕТОВ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1. Прежде всего ознакомьтесь с таблицами приложения, так как решение многих задач без них невозможно. Кроме того, содержащийся в этих таблицах справочный материал значительно облегчит Вашу работу и сэкономит время.

2. Приступая к решению задачи, хорошо вникните в ее смысл и постановку вопроса. Установите, все ли данные, необходимые для решения задачи, приведены. Недостающие данные можно найти в таблицах приложения. Если позволяет характер задачи, обязательно сделайте схематический рисунок, поясняющий ее сущность, — это во многих случаях резко облегчает как поиск решения, так и само решение.

3. Каждую задачу решайте, как правило, в общем виде (т. е. в буквенных обозначениях), так чтобы искомая величина была выражена через заданные величины. Решение в общем виде придает окончательному результату особую ценность, ибо позволяет установить определенную закономерность, показывающую, как зависит искомая величина от заданных величин. Кроме того, ответ, полученный в общем виде, позволяет судить в значительной степени о правильности самого решения (см. следующий пункт).

4. Получив решение в общем виде, проверьте, правильную ли оно имеет размерность. Неверная размерность есть явный признак ошибочности решения. Если возможно, исследуйте поведение решения в предельных частных случаях. Например, какой бы вид ни имело выражение для силы гравитационного взаимодействия между двумя протяженными телами, с увеличением расстояния между телами оно должно непременно переходить в известный закон взаимодействия точечных масс. В противном случае можно сразу утверждать: решение неверное.

5. Приступая к вычислениям, помните, что числовые значения физических величин всегда являются приближенными. Поэтому при расчетах руководствуйтесь правилами действий с приближен-

ными числами. В частности, в полученном значении вычисленной величины нужно сохранить последним тот знак, единица которого еще превышает погрешность этой величины. Все следующие цифры надо отбросить.

6. Получив числовой ответ, оцените его правдоподобность. Такая оценка может в ряде случаев обнаружить ошибочность полученного результата. Так, например, дальность полета брошенного человеком камня не может быть порядка 1 км, скорость тела не может оказаться больше скорости света в вакууме и т. п.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Векторы обозначены жирным прямым шрифтом, например $\mathbf{r}$, $\mathbf{F}$; та же буква светлым шрифтом (r, F) означает модуль вектора.

Орты — единичные векторы:

$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — орты декартовых координат x, y, z (иногда $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$),

$\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ — орты цилиндрических координат ρ, φ, z,

$\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\tau}$ — орты нормали и касательной.

Средние величины отмечены скобками $\langle\ \rangle$, например $\langle \mathbf{v} \rangle$, $\langle P \rangle$.

Символы Δ, d и δ перед величинами означают:

Δ — конечное приращение величины, например $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\Delta U = U_2 - U_1$,

d — дифференциал (бесконечно малое приращение), например $d\mathbf{r}$, dU,

δ — элементарное значение величины, например δA — элементарная работа.

Производная по времени от произвольной функции f обозначена df/dt или точкой, стоящей над функцией, $\dot{f}$.

Векторный оператор ∇ («набла»). Операции с ним обозначены так:

$\nabla\varphi$ — градиент φ (grad φ),

$\nabla \cdot \mathbf{E}$ — дивергенция $\mathbf{E}$ (div $\mathbf{E}$),

$\nabla \times \mathbf{E}$ — ротор $\mathbf{E}$ (rot $\mathbf{E}$).

Интегралы любой кратности обозначены одним-единственным знаком $\int$ и различаются лишь обозначением элемента интегрирования: dV — по объему, $d\mathbf{S}$ — по поверхности, $d\mathbf{r}$ — по линии. Знаком $\oint$ обозначен интеграл или по замкнутой поверхности, или по замкнутому контуру.

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

1.1. Кинематика

● Средние векторы скорости и ускорения точки:

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}, \quad \langle \mathbf{w} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}, \tag{1.1а}$$

где $\Delta \mathbf{r}$ — вектор перемещения (приращение радиус-вектора).

● Скорость и ускорение точки:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{1.1б}$$

● Ускорение точки в проекциях на касательную и нормаль к траектории:

$$w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}, \quad w_n = \frac{v^2}{R}, \tag{1.1в}$$

где R — радиус кривизны траектории в данной точке.

● Путь, пройденный точкой:

$$s = \int v\, dt, \tag{1.1г}$$

где v — *модуль* вектора скорости точки.

● Угловая скорость и угловое ускорение твердого тела:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \beta = \frac{d\omega}{dt}. \tag{1.1д}$$

● Связь между линейными и угловыми величинами при вращении твердого тела:

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}], \quad w_n = \omega^2 R, \quad |w_\tau| = \beta R, \tag{1.1е}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор рассматриваемой точки относительно произвольной точки оси вращения, R — расстояние от оси вращения.

1.1. Катер, двигаясь вниз по реке, обогнал плот в пункте A. Через $\tau = 60$ мин после этого он повернул обратно и затем встретил плот на расстоянии $l = 6{,}0$ км ниже пункта A. Найти скорость течения, если при движении в обоих направлениях мотор катера работал одинаково.

1.2. Точка прошла половину пути со скоростью v_0. Оставшуюся часть пути она половину времени двигалась со скоростью v_1, а

последний участок — со скоростью v_2. Найти среднюю за все время движения скорость точки.

1.3. Автомашина движется с нулевой начальной скоростью по прямому пути сначала с ускорением $w = 5{,}0$ м/с^2, затем равномерно и, наконец, замедляясь с тем же ускорением w, останавливается. Все время движения $\tau = 25$ с. Средняя скорость за это время $\langle v \rangle = 72$ км/ч. Сколько времени автомашина двигалась равномерно?

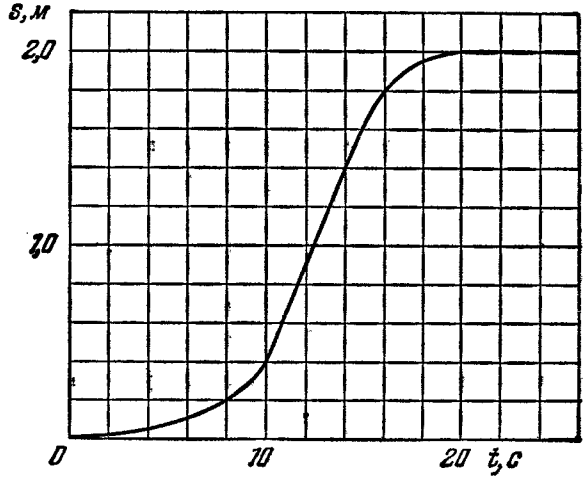


Рис. 1.1.

1.4. Точка движется по прямой в одну сторону. На рис. 1.1 показан график пройденного ею пути s в зависимости от времени t. Найти с помощью этого графика:

а) среднюю скорость точки за время движения;

б) максимальную скорость;

в) момент времени t_0, в который мгновенная скорость равна средней скорости за первые t_0 секунд;

г) среднее ускорение за первые 10 и 16 с.

1.5. Две частицы, *1* и *2*, движутся с постоянными скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. Их радиус-векторы в начальный момент равны $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. При каком соотношении между этими четырьмя векторами частицы испытают столкновение друг с другом?

1.6. Корабль движется по экватору на восток со скоростью $v_0 = 30$ км/ч. С юго-востока под углом $\varphi = 60°$ к экватору дует ветер со скоростью $v = 15$ км/ч. Найти скорость v' ветра относительно корабля и угол φ' между экватором и направлением ветра в системе отсчета, связанной с кораблем.

1.7. Два пловца должны попасть из точки A на одном берегу реки в прямо противоположную точку B на другом берегу. Для этого один из них решил переплыть реку по прямой AB, другой

же — все время держать курс перпендикулярно к течению, а расстояние, на которое его снесет, пройти пешком по берегу со скоростью u. При каком значении u оба пловца достигнут точки B за одинаковое время, если скорость течения $v_0 = 2{,}0$ км/ч и скорость каждого пловца относительно воды $v' = 2{,}5$ км/ч?

1.8. От бакена, который находится на середине широкой реки, отошли две лодки, A и B. Обе лодки стали двигаться по взаимно перпендикулярным прямым: лодка A — вдоль реки, а лодка B — поперек. Удалившись на одинаковое расстояние от бакена, лодки вернулись затем обратно. Найти отношение времен движения лодок τ_A/τ_B, если скорость каждой лодки относительно воды в $\eta = 1{,}2$ раза больше скорости течения.

1.9. Лодка движется относительно воды со скоростью, в $n = 2{,}0$ раза меньшей скорости течения реки. Под каким углом к направлению течения лодка должна держать курс, чтобы ее снесло течением как можно меньше?

1.10. Два тела бросили одновременно из одной точки: одно — вертикально вверх, другое — под углом $\vartheta = 60°$ к горизонту. Начальная скорость каждого тела $v_0 = 25$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти расстояние между телами через $t = 1{,}70$ с.

1.11. Две частицы движутся с ускорением g в однородном поле тяжести. В начальный момент частицы находились в одной точке и имели скорости $v_1 = 3{,}0$ м/с и $v_2 = 4{,}0$ м/с, направленные горизонтально и в противоположные стороны. Найти расстояние между частицами в момент, когда векторы их скоростей окажутся взаимно перпендикулярными.

1.12. Три точки находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной a. Они начинают одновременно двигаться с постоянной по модулю скоростью v, причем первая точка все время держит курс на вторую, вторая — на третью, третья — на первую. Через сколько времени точки встретятся?

1.13. Точка A движется равномерно со скоростью v так, что вектор $\mathbf{v}$ все время «нацелен» на точку B, которая в свою очередь движется прямолинейно и равномерно со скоростью $u < v$. В начальный момент $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}$, и расстояние между точками равно l. Через сколько времени точки встретятся?

1.14. Поезд длины $l = 350$ м начинает двигаться по прямому пути с постоянным ускорением $w = 3{,}0 \cdot 10^{-2}$ м/с^2. Через $t = 30$ с после начала движения был включен прожектор локомотива (событие 1), а через $\tau = 60$ с после этого — сигнальная лампа в хвосте поезда (событие 2). Найти расстояние между этими событиями в системах отсчета, связанных с поездом и Землей. Как и с какой постоянной скоростью V относительно Земли должна перемещаться некоторая K-система отсчета, чтобы оба события произошли в ней в одной точке?

1.15. Кабина лифта, у которой расстояние от пола до потолка равно 2,7 м, начала подниматься с постоянным ускорением 1,2 м/с^2.

Через 2,0 с после начала подъема с потолка кабины стал падать болт. Найти:

а) время свободного падения болта;

б) перемещение и путь болта за время свободного падения в системе отсчета, связанной с шахтой лифта.

1.16. Две частицы, *1* и *2*, движутся с постоянными скоростями v_1 и v_2 по двум взаимно перпендикулярным прямым к точке их пересечения O. В момент $t = 0$ частицы находились на расстояниях l_1 и l_2 от точки O. Через сколько времени после этого расстояние между частицами станет наименьшим? Чему оно равно?

1.17. Из пункта A, находящегося на шоссе (рис. 1.2), необходимо за кратчайшее время попасть на машине в пункт B, расположенный в поле на расстоянии l от шоссе. Известно, что скорость машины по полю в η раз меньше ее скорости по шоссе. На каком расстоянии от точки D следует свернуть с шоссе?

Рис. 1.2.

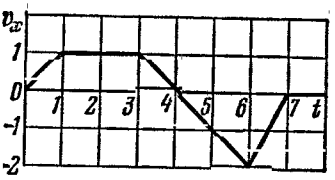


Рис. 1.3.

1.18. Точка движется вдоль оси x со скоростью, проекция которой v_x как функция времени описывается графиком (рис. 1.3). Имея в виду, что в момент $t = 0$ координата точки $x = 0$, начертить примерные графики зависимостей от времени ускорения w_x, координаты x и пройденного пути s.

1.19. За промежуток времени $\tau = 10{,}0$ с точка прошла половину окружности радиуса $R = 160$ см. Вычислить за это время:

а) среднюю скорость $\langle v \rangle$;

б) модуль среднего вектора скорости $|\langle \mathbf{v} \rangle|$;

в) модуль среднего вектора полного ускорения $|\langle \mathbf{w} \rangle|$, если точка двигалась с постоянным тангенциальным ускорением.

1.20. Радиус-вектор частицы меняется со временем t по закону $\mathbf{r} = \mathbf{a}t\,(1 - \alpha t)$, где $\mathbf{a}$ — постоянный вектор, α — положительная постоянная. Найти:

а) скорость $\mathbf{v}$ и ускорение $\mathbf{w}$ частицы в зависимости от времени;

б) промежуток времени Δt, по истечении которого частица вернется в исходную точку, а также путь s, который она пройдет при этом.

1.21. В момент $t = 0$ частица вышла из начала координат в положительном направлении оси x. Ее скорость меняется со временем по закону $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0\,(1 - t/\tau)$, где $\mathbf{v}_0$ — вектор начальной скорости, модуль которого $v_0 = 10{,}0$ см/с, $\tau = 5{,}0$ с. Найти:

а) координату x частицы в моменты времени 6,0, 10 и 20 с;

б) моменты времени, когда частица будет находиться на расстоянии 10,0 см от начала координат;

в) путь s, пройденный частицей за первые 4,0 и 8,0 с; изобразить примерный график $s(t)$.

1.22. Частица движется в положительном направлении оси x так, что ее скорость меняется по закону $v = \alpha\sqrt{x}$, где α — положительная постоянная. Имея в виду, что в момент $t = 0$ она находилась в точке $x = 0$, найти:

а) зависимость от времени скорости и ускорения частицы;

б) среднюю скорость частицы за время, в течение которого она пройдет первые s метров пути.

1.23. Точка движется, замедляясь, по прямой с ускорением, модуль которого зависит от ее скорости v по закону $w = a\sqrt{v}$, где a — положительная постоянная. В начальный момент скорость точки равна v_0. Какой путь она пройдет до остановки? За какое время этот путь будет пройден?

1.24. Радиус-вектор точки A относительно начала координат меняется со временем t по закону $\mathbf{r} = at\mathbf{i} - bt^2\mathbf{j}$, где a и b — положительные постоянные, $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ — орты осей x и y. Найти:

а) уравнение траектории точки $y(x)$; изобразить ее график;

б) зависимости от времени векторов скорости $\mathbf{v}$, ускорения $\mathbf{w}$ и модулей этих величин;

в) зависимость от времени угла α между векторами $\mathbf{w}$ и $\mathbf{v}$;

г) средний вектор скорости за первые t секунд движения и модуль этого вектора.

1.25. Точка движется в плоскости xy по закону: $x = at$, $y = at(1 - \alpha t)$, где a и α — положительные постоянные, t — время. Найти:

а) уравнение траектории точки $y(x)$; изобразить ее график;

б) скорость v и ускорение w точки в зависимости от времени;

в) момент t_0, в который вектор скорости составляет угол $\pi/4$ с вектором ускорения.

1.26. Точка движется в плоскости xy по закону $x = a\sin\omega t$, $y = a(1 - \cos\omega t)$, где a и ω — положительные постоянные. Найти:

а) путь s, проходимый точкой за время τ;

б) угол между векторами скорости и ускорения точки.

1.27. Частица движется в плоскости xy с постоянным ускорением $\mathbf{w}$, направление которого противоположно положительному направлению оси y. Уравнение траектории частицы имеет вид $y = ax - bx^2$, где a и b — положительные постоянные. Найти скорость частицы в начале координат.

1.28. Небольшое тело бросили под углом к горизонту с начальной скоростью $\mathbf{v}_0$. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти:

а) перемещение тела в функции времени $\mathbf{r}(t)$;

б) средний вектор скорости $\langle\mathbf{v}\rangle$ за первые t секунд и за все время движения.

1.29. Тело бросили с поверхности Земли под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. Пренебрегая сопротивлеиием воздуха, найти:

а) время движения;

б) максимальную высоту подъема и горизонтальную дальность полета; при каком значении угла α они будут равны друг другу;

в) уравнение траектории $y(x)$, где y и x — перемещения тела по вертикали и горизонтали соответственно;

г) радиусы кривизны начала и вершины траектории.

1.30. Имея в виду условие предыдущей задачи, изобразить примерные графики зависимости от времени модулей векторов нормального w_n и тангенциального w_τ ускорений, а также проекции вектора полного ускорения w_v на направление вектора скорости.

1.31. Шарик начал падать с нулевой начальной скоростью на гладкую наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом. Пролетев расстояние h, он упруго отразился от плоскости. На каком расстоянии от места падения шарик отразится второй раз?

1.32. Пушка и цель находятся на одном уровне на расстоянии 5,10 км друг от друга. Через сколько времени снаряд с начальной скоростью 240 м/с достигнет цели в отсутствие сопротивления воздуха?

1.33. Из пушки выпустили последовательно два снаряда со скоростью $v_0 = 250$ м/с: первый — под углом $\vartheta_1 = 60°$ к горизонту, второй — под углом $\vartheta_2 = 45°$ (азимут один и тот же). Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти интервал времени между выстрелами, при котором снаряды столкнутся друг с другом.

1.34. Воздушный шар начинает подниматься с поверхности Земли. Скорость его подъема постоянна и равна v_0. Благодаря ветру шар приобретает горизонтальную компоненту скорости $v_x = ay$, где a — постоянная, y — высота подъема. Найти зависимости от высоты подъема:

а) величины сноса шара $x(y)$;

б) полного, тангенциального и нормального ускорений шара.

1.35. Частица движется в плоскости xy со скоростью $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + bx\mathbf{j}$, где $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ — орты осей x и y, a и b — постоянные. В начальный момент частица находилась в точке $x = y = 0$. Найти:

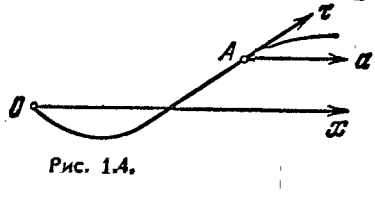


Рис. 1.4.

а) уравнение траектории частицы $y(x)$;

б) радиус кривизны траектории в зависимости от x.

1.36. Частица A движется в одну сторону по некоторой заданной траектории с тангенциальным ускорением $w_\tau = a\tau$, где $\mathbf{a}$ — постоянный вектор, совпадающий по направлению с осью x (рис. 1.4), а τ — единичный вектор, совпадающий по направлению с вектором

скорости в данной точке. Найти зависимость от x скорости частицы, если в точке $x = 0$ ее скорость пренебрежимо мала.

1.37. Точка движется по окружности со скоростью $v = at$, где $a = 0{,}50$ м/с^2. Найти ее полное ускорение в момент, когда она пройдет $n = 0{,}10$ длины окружности после начала движения.

1.38. Точка движется, замедляясь, по окружности радиуса R так, что в каждый момент времени ее тангенциальное и нормальное ускорения по модулю равны друг другу. В начальный момент $t = 0$ скорость точки равна v_0. Найти:

а) скорость точки в зависимости от времени и от пройденного пути s;

б) полное ускорение точки в функции скорости и пройденного пути.

1.39. Точка движется по дуге окружности радиуса R. Ее скорость зависит от пройденного пути s по закону $v = a\sqrt{s}$, где a — постоянная. Найти угол α между вектором полного ускорения и вектором скорости в зависимости от s.

1.40. Частица движется по дуге окружности радиуса R по закону $l = a \sin \omega t$, где l — смещение из начального положения, отсчитываемое вдоль дуги, a и ω — постоянные. Положив $R = 1{,}00$ м, $a = 0{,}80$ м и $\omega = 2{,}00$ рад/с, найти:

а) полное ускорение частицы в точках $l = 0$ и $\pm a$;

б) минимальное значение полного ускорения $w_{\text{мин}}$ и смещение l_m, ему соответствующее.

1.41. Точка движется по плоскости так, что ее тангенциальное ускорение $w_\tau = a$, а нормальное ускорение $w_n = bt^4$, где a и b — положительные постоянные, t — время. В момент $t = 0$ точка покоилась. Найти зависимости от пройденного пути s радиуса кривизны R траектории точки и ее полного ускорения w.

1.42. Частица движется с постоянной по модулю скоростью v по плоской траектории $y(x)$. Найти ускорение частицы в точке $x = 0$ и радиус кривизны траектории в этой точке, если траектория имеет вид:

а) параболы $y = ax^2$;

б) эллипса $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$. Здесь a и b — постоянные.

1.43. Частица A движется по окружности радиуса $R = 50$ см так, что ее радиус-вектор $\mathbf{r}$ относительно точки O (рис. 1.5) поворачивается с постоянной угловой скоростью $\omega = 0{,}40$ рад/с. Найти модуль скорости частицы, а также модуль и направление вектора ее полного ускорения.

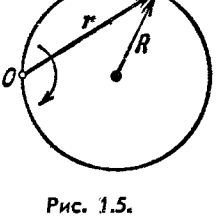


Рис. 1.5.

1.44. Колесо вращается вокруг неподвижной оси так, что угол φ его поворота зависит от времени как $\varphi = at^2$, где $a = 0{,}20$ рад/с^2. Найти полное ускорение w точки A на ободе колеса в момент $t = 2{,}5$ с, если линейная скорость точки A в этот момент $v = 0{,}65$ м/с.

1.45. Снаряд вылетел со скоростью $v = 320$ м/с, сделав внутри ствола $n = 2{,}0$ оборота. Длина ствола $l = 2{,}0$ м. Считая движение снаряда в стволе равноускоренным, найти его угловую скорость вращения вокруг оси в момент вылета.

1.46. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = at - bt^3$, где $a = 6{,}0$ рад/с, $b = 2{,}0$ рад/с^3. Найти:

а) средние значения угловой скорости и углового ускорения за промежуток времени от $t = 0$ до остановки;

б) угловое ускорение в момент остановки тела.

1.47. Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\beta = at$, где $a = 2{,}0 \cdot 10^{-2}$ рад/с^3. Через сколько времени после начала вращения вектор полного ускорения произвольной точки тела будет составлять угол $\alpha = 60°$ с ее вектором скорости?

1.48. Твердое тело вращается, замедляясь, вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\beta \sim \sqrt{\omega}$, где ω — его угловая скорость. Найти среднюю угловую скорость тела за время, в течение которого оно будет вращаться, если в начальный момент его угловая скорость была равна ω_0.

1.49. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость зависит от угла поворота φ по закону $\omega = \omega_0 - a\varphi$, где ω_0 и a — положительные постоянные. В момент времени $t = 0$ угол $\varphi = 0$. Найти зависимости от времени:

а) угла поворота; б) угловой скорости.

1.50. Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\beta = \beta_0 \cos\varphi$, где β_0 — постоянный вектор, φ — угол поворота из начального положения. Найти угловую скорость тела в зависимости от угла φ. Изобразить график этой зависимости.

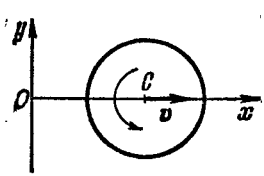


Рис. 1.6.

1.51. Вращающийся диск (рис. 1.6) движется в положительном направлении оси x. Найти уравнение $y(x)$, характеризующее положеиия мгновенной оси вращения, если в начальный момент ось C диска находилась в точке O и в дальнейшем движется:

а) с постоянной скоростью v, а диск раскручивается без начальной угловой скорости с постоянным угловым ускорением β против часовой стрелки;

б) с постоянным ускорением w (без начальной скорости), а диск вращается с постоянной угловой скоростью ω против часовой стрелки.

1.52. Точка A находится на ободе колеса радиуса $R = 0{,}50$ м, которое катится без скольжения по горизонтальной поверхности со скоростью $v = 1{,}00$ м/с. Найти:

а) модуль и направление вектора ускорения точки A;

б) полный путь s, проходимый точкой A между двумя последовательными моментами ее касания поверхности.

1.53. Шар радиуса $R = 10{,}0$ см катится без скольжения по горизонтальной плоскости так, что его центр движется с постоянным ускорением $w = 2{,}50$ см/с^2. Через $t = 2{,}00$ с после начала движения его положение соответствует рис. 1.7. Найти:

а) скорости точек A, B и O;

б) ускорения этих точек.

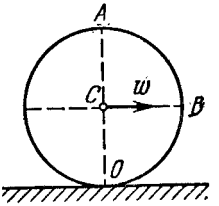


Рис. 1.7.

1.54. Цилиндр катится без скольжения по горизонтальной плоскости. Радиус цилиндра равен r. Найти радиусы кривизны траекторий точек A и B (см. рис. 1.7).

1.55. Два твердых тела вращаются вокруг неподвижных взаимно перпендикулярных пересекающихся осей с постоянными угловыми скоростями $\omega_1 = 3{,}0$ рад/с и $\omega_2 = 4{,}0$ рад/с. Найти угловую скорость и угловое ускорение одного тела относительно другого.

1.56. Твердое тело вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = at\mathbf{i} + bt^2\mathbf{j}$, где $a = 0{,}50$ рад/с^2, $b = 0{,}060$ рад/с^3, $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ — орты осей x и y. Найти:

а) модули угловой скорости и углового ускорения в момент $t = 10{,}0$ с;

б) угол между векторами угловой скорости и углового ускорения в этот момент.

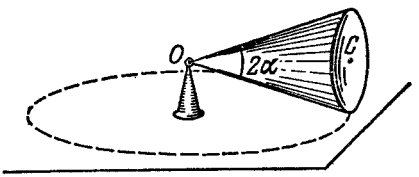


Рис. 1.8.

1.57. Круглый конус с углом полураствора $\alpha = 30°$ и радиусом основания $R = 5{,}0$ см катится равномерно без скольжения по горизонтальной плоскости, как показано на рис. 1.8. Вершина конуса закреплена шарнирно в точке O, которая находится на одном уровне с точкой C — центром основания конуса. Скорость точки C $v = 10{,}0$ см/с. Найти модули:

а) вектора угловой скорости конуса и угол, который составляет этот вектор с вертикалью;

б) вектора углового ускорения конуса.

1.58. Твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = 0{,}50$ рад/с вокруг горизонтальной оси AB. В момент $t = 0$ ось AB начали поворачивать вокруг вертикали с постоянным угловым ускорением $\beta_0 = 0{,}10$ рад/с^2. Найти угловую скорость и угловое ускорение тела через $t = 3{,}5$ с.

1.2. Основное уравнение динамики

● Основное уравнение динамики материальной точки (второй закон Ньютона):

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}. \qquad (1.2a)$$

● Это же уравнение в проекциях на касательную и нормаль к траектории точки:

$$m\frac{dv_\tau}{dt}=F_\tau, \quad m\frac{v^2}{R}=F_n. \tag{1.2б}$$

● Уравнение динамики точки в неинерциальной K'-системе отсчета, которая вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перемещающейся поступательно с ускорением $\mathbf{w}_0$:

$$m\mathbf{w}'=\mathbf{F}-m\mathbf{w}_0+m\omega^2\mathbf{R}+2m[\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega}], \tag{1.2в}$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точки относительно оси вращения K'-системы.

1.59. Аэростат массы m начал опускаться с постоянным ускорением w. Определить массу балласта, который следует сбросить за борт, чтобы аэростат получил такое же ускорение, но направленное вверх. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.60. В установке (рис. 1.9) массы тел равны m_0, m_1 и m_2, массы блока и нитей пренебрежимо малы и трения в блоке нет. Найти ускорение $\mathbf{w}$, с которым опускается тело m_0, и натяжение нити, связывающей тела m_1 и m_2, если коэффициент трения между этими телами и горизонтальной поверхностью равен k. Исследовать возможные случаи.

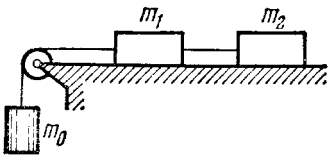


Рис. 1.9.

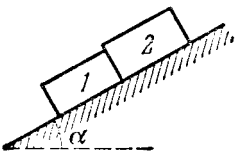


Рис. 1.10.

1.61. На наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом, поместили два соприкасающихся бруска *1* и *2* (рис. 1.10). Массы брусков равны m_1 и m_2, коэффициенты трения между наклонной плоскостью и этими брусками — соответственно k_1 и k_2, причем $k_1 > k_2$. Найти:

а) силу взаимодействия между брусками в процессе движения;

б) минимальное значение угла α, при котором начнется скольжение.

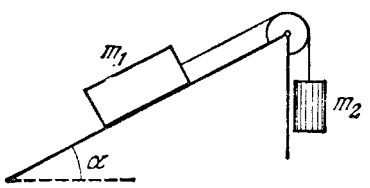


Рис. 1.11.

1.62. Небольшое тело пустили снизу вверх по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 15°$ с горизонтом. Найти коэффициент трения, если время подъема тела оказалось в $\eta = 2{,}0$ раза меньше времени спуска.

1.63. В установке (рис. 1.11) известны угол α наклонной плоскости с горизонтом и коэффициент трения k между телом m_1 и наклонной плоскостью. Массы блока и нити пренебрежимо малы,

трения в блоке нет. Считая, что в начальный момент оба тела неподвижны, найти отношение масс m_2/m_1, при котором тело m_2:

а) начнет опускаться;

б) начнет подниматься;

в) будет оставаться в покое.

1.64. Наклонная плоскость (см. рис. 1.11) составляет угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Отношение масс тел $m_2/m_1 = \eta = 2/3$. Коэффициент трения между телом m_1 и наклонной плоскостью $k = 0{,}10$. Массы блока и нитей пренебрежимо малы. Найти модуль и направление ускорения тела m_2, если система пришла в движение из состояния покоя.

1.65. На гладкой горизонтальной плоскости лежит доска массы m_1 и на ней брусок массы m_2. К бруску приложили горизонтальную силу, увеличивающуюся со временем t по закону $F = at$, где a — постоянная. Найти зависимости от t ускорений доски w_1 и бруска w_2, если коэффициент трения между доской и бруском равен k. Изобразить примерные графики этих зависимостей.

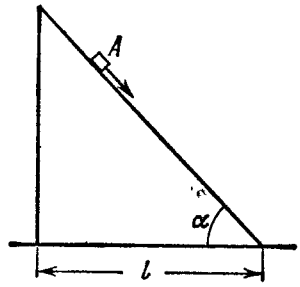


Рис. 1.12.

1.66. Небольшое тело A начинает скользить с вершины клина, основание которого $l = 2{,}10$ м (рис. 1.12). Коэффициенты трения между телом и поверхностью клиина $k = 0{,}140$. При каком значении угла α время соскальзывания будет наименьшим? Чему оно равно?

1.67. Брусок массы m втаскивают за нить с постоянной скоростью вверх по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом (рис. 1.13). Коэффициент трения равен k. Найти угол β, который должна составлять нить с наклонной плоскостью, чтобы натяжение нити было наименьшим. Чему оно равно?

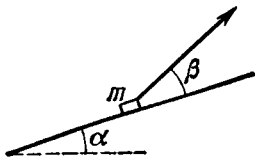


Рис. 1.13.

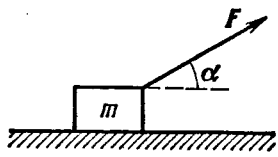


Рис. 1.14.

1.68. На небольшое тело массы m, лежащее на гладкой горизонтальной плоскости, в момент $t = 0$ начала действовать сила, зависящая от времени по закону $F = at$, где a — постоянная. Направление этой силы все время составляет угол α с горизонтом (рис. 1.14). Найти:

а) скорость тела в момент отрыва от плоскости;

б) путь, пройденный телом к этому моменту.

1.69. К бруску массы m, лежащему на гладкой горизонтальной плоскости, приложили постоянную по модулю силу $F = mg/3$. В процессе его прямолинейного движения угол α между направлением этой силы и горизонтом меняют по закону $\alpha = as$, где a — постоянная, s — пройденный бруском путь (из начального положения). Найти скорость бруска как функцию угла α.

1.70. На горизонтальной плоскости с коэффициентом трения k находятся два тела: брусок и электромотор с батарейкой на подставке. На ось электромотора намотана нить, свободный конец которой соединен с бруском. Расстояние между обоими телами равно l. После включения мотора брусок, масса которого в два раза больше массы другого тела, начал двигаться с постоянным ускорением w. Через сколько времени оба тела столкнутся?

1.71. Через блок, прикрепленный к потолку кабины лифта, перекинута нить, к концам которой привязаны грузы с массами m_1 и m_2. Кабина начинает подниматься с ускорением $\mathbf{w}_0$. Пренебрегая массами блока и нити, а также трением, найти:

а) ускорения груза m_1 относительно шахты лифта и относительно кабины;

б) силу, с которой блок действует на потолок кабины.

1.72. Найти ускорение $\mathbf{w}$ тела *2* в системе (рис. 1.15), если его масса в η раз больше массы бруска *1* и угол между наклонной плоскостью и горизонтом равен α. Массы блоков и нитей, а также трение пренебрежимо малы. Исследовать возможные случаи.

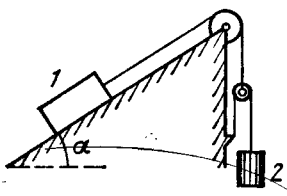


Рис. 1.15.

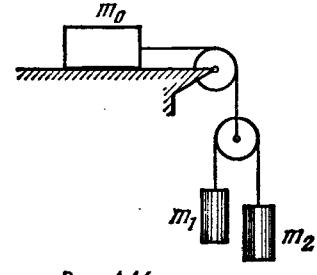


Рис. 1.16.

1.73. В системе рис. 1.16 массы тел равны m_0, m_1, m_2, трения нет, массы блоков и нитей пренебрежимо малы. Найти ускорение тела m_1. Исследовать возможные случаи.

1.74. В установке (рис. 1.17) известны массы стержня M и шарика m, причем $M > m$. Шарик имеет отверстие и может скользить по нити с некоторым трением. Масса блока и трение в его оси пренебрежимо малы. В начальный момент шарик находился напротив нижнего конца стержня. После того как систему предоставили самой себе, оба тела стали двигаться с постоянными ускорениями. Найти силу трения между шариком и нитью, если через t секунд после начала движения шарик оказался напротив верхнего конца стержня. Длина стержня равна l.

1.75. В установке (рис. 1.18) шарик *1* имеет массу в $\eta = 1{,}8$ раза больше массы стержня *2*. Длина последнего $l = 100$ см. Массы блоков и нитей, а также трение пренебрежимо малы. Шарик установили на одном уровне с нижним концом стержня и отпустили. Через сколько времени он поравняется с верхним концом стержня?

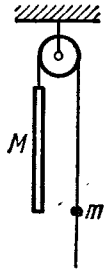


Рис. 1.17.

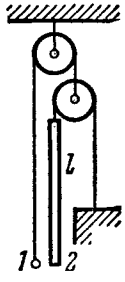


Рис. 1.18.

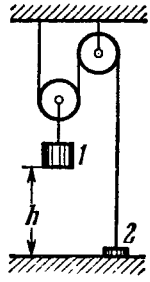


Рис. 1.19.

1.76. В системе (рис. 1.19) масса тела *1* в $\eta = 4{,}0$ раза больше массы тела *2*. Высота $h = 20$ см. Массы блоков и нитей, а также трение пренебрежимо малы. В некоторый момент тело *2* отпустили, и система пришла в движение. На какую максимальную высоту от пола поднимется тело *2*?

1.77. Найти ускорения стержня A и клина B в установке (рис. 1.20), если отношение массы клина к массе стержня равно η и трение между всеми соприкасающимися поверхностями пренебрежимо мало.

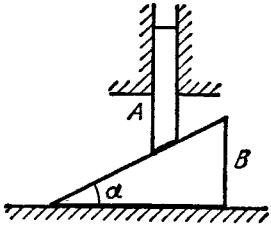


Рис. 1.20.

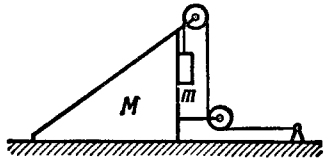


Рис. 1.21.

1.78. В системе (рис. 1.21) известны массы клина M и тела m. Трение имеется только между клином и телом m. Соответствующий коэффициент трения равен k. Массы блока и нити пренебрежимо малы. Найти ускорение тела m относительно горизонтальной поверхности, по которой скользит клин.

1.79. С каким минимальным ускорением следует перемещать в горизонтальном направлении брусок A (рис. 1.22), чтобы тела *1* и *2* не двигались относительно него? Массы тел одинаковы, коэффициент трения между бруском и обоими телами равен k. Массы блока и нитей пренебрежимо малы, трения в блоке нет.

1.80. Призме *1*, на которой находится брусок *2* массы m, сообщили направленное влево горизонтальное ускорение w (рис. 1.23). При каком максимальном значении этого ускорения брусок будет оставаться еще неподвижным относительно призмы, если коэффициент трения между ними $k < \operatorname{ctg}\alpha$?

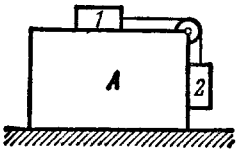


Рис. 1.22.

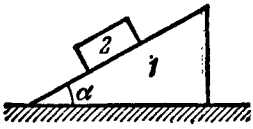


Рис. 1.23.

1.81. На горизонтальной поверхности находится призма *1* массы m_1 с углом α (см. рис. 1.23) и на ней брусок *2* массы m_2. Пренебрегая трением, найти ускорение призмы.

1.82. В системе (рис. 1.24) известны массы кубика m и клина M, а также угол клина α. Массы блока и нити пренебрежимо малы. Трения нет. Найти ускорение клина M.

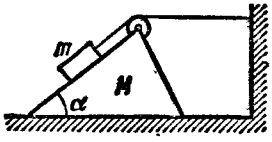


Рис. 1.24.

1.83. Частица массы m движется по окружности радиуса R. Найти модуль среднего вектора силы, действующей на частицу на пути, равном четверти окружности, если частица движется:

а) равномерно со скоростью v;

б) с постоянным тангенциальным ускорением w_τ без начальной скорости.

1.84. Самолет делает «мертвую петлю» радиуса $R = 500$ м с постоянной скоростью $v = 360$ км/ч. Найти вес летчика массы $m = 70$ кг в нижней, верхней и средней точках петли.

1.85. Небольшой шарик массы m, подвешенный на нити, отвели в сторону так, что нить образовала прямой угол с вертикалью, и затем отпустили. Найти:

а) полное ускорение шарика и натяжение нити в зависимости от ϑ — угла отклонения нити от вертикали;

б) натяжение нити в момент, когда вертикальная составляющая скорости шарика максимальна;

в) угол ϑ между нитью и вертикалью в момент, когда вектор полного ускорения шарика направлен горизонтально.

1.86. Шарик, подвешенный на нити, качается в вертикальной плоскости так, что его ускорения в крайнем и нижнем положениях равны по модулю друг другу. Найти угол отклонения нити в крайнем положении.

1.87. Небольшое тело A начинает скользить с вершины гладкой сферы радиуса R. Найти угол ϑ (рис. 1.25), соответствующий точке отрыва тела от сферы, и скорость тела в момент отрыва.

1.88. Прибор (рис. 1.26) состоит из гладкого Г-образного стержня, расположенного в горизонтальной плоскости, и муфточки A массы m, соединенной невесомой пружинкой с точкой B. Жесткость пружинки $\varkappa$. Вся система вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O. Найти относительное удлинение пружинки. Как зависит результат от направления вращения?

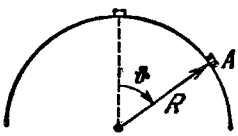


Рис. 1.25.

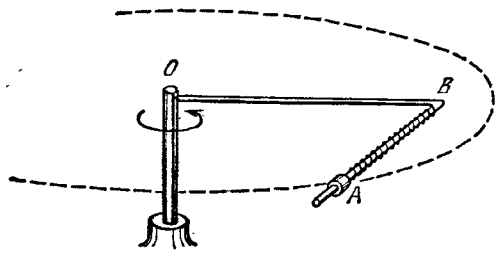


Рис. 1.26.

1.89. Велосипедист едет по круглой горизонтальной площадке, радиус которой R, а коэффициент трения зависит только от расстояния r до центра O площадки по закону $k = k_0 (1 - r/R)$, где k_0 — постоянная. Найти радиус окружности с центром в точке O, по которой велосипедист может ехать с максимальной скоростью. Какова эта скорость?

1.90. Автомашина движется с постоянным тангенциальным ускорением $w_\tau = 0{,}62$ м/с^2 по горизонтальной поверхности, описывая окружность радиуса $R = 40$ м. Коэффициент трения скольжения между колесами машины и поверхностью $k = 0{,}20$. Какой путь пройдет машина без скольжения, если в начальный момент ее скорость равна нулю?

1.91. Автомашина движется равномерно по горизонтальному пути, имеющему форму синусоиды $y = a \sin(x/\alpha)$, где a и α — некоторые постоянные. Коэффициент трения между колесами и дорогой равен k. При какой скорости движение автомашины будет происходить без скольжения?

1.92. Цепочка массы m, образующая окружность радиуса R, надета на гладкий круговой конус с углом полураствора θ. Найти натяжение цепочки, если она вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, совпадающей с осью симметрии конуса.

1.93. Через закрепленный блок перекинута невесомая нить, к концам которой прикреплены грузы с массами m_1 и m_2. Между нитью и блоком имеется трение. Оно таково, что нить начинает скользить по блоку, когда отношение $m_2/m_1 = \eta_0$. Найти:

а) коэффициент трения;

б) ускорение грузов, если $m_2/m_1 = \eta > \eta_0$.

1.94. Частица массы m движется по внутренней гладкой поверхности вертикального цилиндра радиуса R. Найти силу давления частицы на стенку цилиндра, если в начальный момент ее скорость равна v_0 и составляет угол α с горизонтом.

1.95. Найти модуль и направление вектора силы, действующей на частицу массы m при ее движении в плоскости xy по закону $x = a \sin \omega t$, $y = b \cos \omega t$, где a, b, ω — постоянные.

1.96. Тело массы m бросили под углом к горизонту с начальной скоростью $\mathbf{v}_0$. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти:

а) приращение импульса $\Delta \mathbf{p}$ тела за первые t секунд движения;

б) модуль приращения импульса $\Delta \mathbf{p}$ тела за все время движения.

1.97. На покоившуюся частицу массы m в момент $t = 0$ начала действовать сила, меняющаяся со временем по закону $\mathbf{F} = \mathbf{a}t(\tau - t)$, где $\mathbf{a}$ — постоянный вектор, τ — время, в течение которого действует данная сила. Найти:

а) импульс частицы после окончания действия силы;

б) путь, пройденный частицей за время действия силы.

1.98. Частица массы m в момент $t = 0$ начинает двигаться под действием силы $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 \sin \omega t$, где $\mathbf{F}_0$ и ω — постоянные. Найти путь, пройденный частицей, в зависимости от времени t. Изобразить примерный график этой зависимости.

1.99. Частица массы m в момент $t = 0$ начинает двигаться под действием силы $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 \cos \omega t$, где $\mathbf{F}_0$ и ω — постоянные. Сколько времени частица будет двигаться до первой остановки? Какой путь она пройдет за это время? Какова максимальная скорость частицы на этом пути?

1.100. Катер массы m движется по озеру со скоростью v_0. В момент $t = 0$ выключили его двигатель. Считая силу сопротивления воды движению катера пропорциональной его скорости $\mathbf{F} = -r\mathbf{v}$, найти:

а) время движения катера с выключенным двигателем;

б) скорость катера в зависимости от пути, пройденного с выключенным двигателем, а также полный путь до остановки;

в) среднюю скорость катера за время, в течение которого его начальная скорость уменьшится в η раз.

1.101. Пуля, пробив доску толщиной h, изменила свою скорость от v_0 до v. Найти время движения пули в доске, считая силу сопротивления пропорциональной квадрату скорости.

1.102. Небольшой брусок начинает скользить по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Коэффициент трения зависит от пройденного пути x по закону $k = ax$, где a — постоянная. Найти путь, пройденный бруском до остановки, и максимальную скорость его на этом пути.

1.103. На горизонтальной плоскости с коэффициентом трения k лежит тело массы m. В момент $t = 0$ к нему приложили горизонтальную силу, меняющуюся со временем по закону $\mathbf{F} =$

$= \mathbf{a}t$, где $\mathbf{a}$ — постоянный вектор. Найти путь, пройденный телом за первые t секунд после начала действия этой силы.

1.104. Тело массы m бросили вертикально вверх со скоростью v_0. Найти скорость v', с которой тело упадет обратно, если сила сопротивления воздуха равна kv^2, где k — постоянная, v — скорость тела.

1.105. Частица массы m движется в некоторой плоскости P под действием постоянной по модулю силы F, вектор которой поворачивается в этой плоскости с постоянной угловой скоростью ω. Считая, что в момент $t = 0$ частица покоилась, найти:

а) ее скорость в зависимости от времени;

б) путь, проходимый частицей между двумя последовательными остановками, и среднюю скорость за это время.

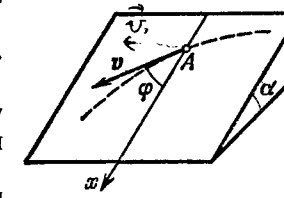


Рис. 1.27.

1.106. Небольшую шайбу A положили на наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом, и сообщили начальную скорость v_0 (рис. 1.27). Найти зависимость скорости шайбы от угла φ, если коэффициент трения $k = \operatorname{tg}\alpha$ и в начальный момент $\varphi_0 = \pi/2$.

1.107. Цепочку длины l поместили на гладкую сферическую поверхность радиуса R так, что один ее конец закреплен на вершине сферы. С каким ускорением w начнет двигаться каждый элемент цепочки, если ее верхний конец освободить? Предполагается, что длина цепочки $l < {}^1/_2\pi R$.

1.108. Небольшое тело поместили на вершину гладкого шара радиуса R. Затем шару сообщили в горизонтальном направлении постоянное ускорение w_0, и тело начало скользить вниз. Найти:

а) скорость тела относительно шара в момент отрыва;

б) угол ϑ_0 между вертикалью и радиус-вектором, проведенным из центра шара в точку, где происходит отрыв; вычислить ϑ_0 при $w_0 = g$.

Рис. 1.28.

1.109. Частица массы m равномерно движется по окружности с заданной скоростью v под действием силы $F = a/r^n$, где a и n — постоянные, r — расстояние от центра окружности. При каких значениях n движение по окружности будет устойчивым? Каков радиус такой окружности?

1.110. Муфточка A может свободно скользить вдоль гладкого стержня, изогнутого в форме полукольца радиуса R (рис. 1.28). Систему привели во вращение с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси OO'. Найти угол ϑ, соответствующий устойчивому положению муфточки.

1.111. Винтовку навели на вертикальную черту мишени, находящейся точно в северном направлении, и выстрелили. Прене-

брегая сопротивлением воздуха, найти, на сколько сантиметров и в какую сторону пуля, попав в мишень, отклонится от черты. Выстрел произведен в горизонтальном направлении на широте $\varphi = 60°$, скорость пули $v = 900$ м/с и расстояние до мишени $s = 1{,}0$ км.

1.112. Горизонтальный диск вращают с постоянной угловой скоростью $\omega = 6{,}0$ рад/с вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. По одному из диаметров диска движется небольшое тело массы $m = 0{,}50$ кг с постоянной относительно диска скоростью $v' = 50$ см/с. Найти силу, с которой диск действует на это тело в момент, когда оно находится на расстоянии $r = 30$ см от оси вращения.

1.113. Горизонтально расположенный гладкий стержень AB вращают с постоянной угловой скоростью $\omega = 2{,}00$ рад/с вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец A. По стержню свободно скользит муфточка массы $m = 0{,}50$ кг, движущаяся из точки A с начальной скоростью $v_0 = 1{,}00$ м/с. Найти действующую на муфточку силу Кориолиса (в системе отсчета, связанной с вращающимся стержнем) в момент, когда муфточка оказалась на расстоянии $r = 50$ см от оси вращения.

1.114. Горизонтальный диск радиуса R вращают с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его край. По периферии диска равномерно относительно него движется частица массы m. В момент, когда она оказывается на максимальном расстоянии от оси вращения, результирующая сил инерции $F_{ин}$, действующих на частицу в системе отсчета «диск», обращается в нуль. Найти:

а) ускорение w' частицы относительно диска;

б) зависимость $F_{ин}$ от расстояния до оси вращения.

1.115. С вершины гладкой сферы радиуса $R = 1{,}00$ м начинает соскальзывать небольшое тело массы $m = 0{,}30$ кг. Сфера вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 6{,}0$ рад/с вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. Найти в системе отсчета, связанной со сферой, центробежную силу инерции и силу Кориолиса в момент отрыва тела от поверхности сферы.

1.116. Поезд массы $m = 2000$ т движется со скоростью $v = 54$ км/ч на широте $\varphi = 60°$. Определить горизонтальную составляющую F силы давления поезда на рельсы, если путь проложен:

а) по меридиану; б) по параллели.

1.117. На экваторе с высоты $h = 500$ м на поверхность Земли падает тело (без начальной скорости относительно Земли). Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти, на какое расстояние и в какую сторону отклонится от вертикали тело при падении.

1.3. Законы сохранения энергии, импульса и момента импульса

● Работа и мощность силы **F**:

$$A = \int \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \int F_s\, ds, \quad P = \mathbf{Fv}. \tag{1.3a}$$

● Приращение кинетической энергии частицы:

$$T_2 - T_1 = A, \tag{1.3б}$$

где A — работа результирующей *всех* сил, действующих на частицу.

● Работа сил поля равна убыли потенциальной энергии частицы в данном поле:

$$A = U_1 - U_2. \tag{1.3в}$$

● Связь между силой поля и потенциальной энергией частицы в поле:

$$\mathbf{F} = -\nabla U, \tag{1.3г}$$

т. е. сила равна антиградиенту потенциальной энергии.

● Приращение полной механической энергии частицы в данном потенциальном поле:

$$E_2 - E_1 = A_{\text{стор}}, \tag{1.3д}$$

где $A_{\text{стор}}$ — алгебраическая сумма работ всех *сторонних* сил, т. е. сил, не принадлежащих к силам *данного* поля.

● Приращение полной механической энергии системы:

$$E_2 - E_1 = A_{\text{внеш}} + A_{\text{внутр}}^{\text{неконс}}, \tag{1.3е}$$

где $E = T + U$, причем U — *собственная* потенциальная энергия системы.

● Закон изменения импульса системы:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \tag{1.3ж}$$

где $\mathbf{F}$ — результирующая всех *внешних* сил.

● Уравнение движения центра инерции системы:

$$m\frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = \mathbf{F}, \tag{1.3з}$$

где $\mathbf{F}$ — результирующая всех *внешних* сил.

● Кинетическая энергия системы:

$$T = \tilde{T} + \frac{mv_C^2}{2}, \tag{1.3и}$$

где $\tilde{T}$ — ее кинетическая энергия в системе центра инерции.

● Уравнение динамики тела с переменной массой:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{dm}{dt}\mathbf{u}, \tag{1.3к}$$

где $\mathbf{u}$ — скорость отделяемого (присоединяемого) вещества относительно рассматриваемого тела.

● Закон изменения момента импульса $\mathbf{M}$ системы (уравнение моментов):

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{N}, \tag{1.3л}$$

где $\mathbf{N}$ — суммарный момент всех *внешних* сил.

● Момент импульса системы:

$$\mathbf{M} = \tilde{\mathbf{M}} + [\mathbf{r}_C\mathbf{p}], \tag{1.3м}$$

где $\tilde{\mathbf{M}}$ — ее момент импульса в системе центра инерции, $\mathbf{r}_C$ — радиус-вектор центра инерции, $\mathbf{p}$ — импульс системы.

1.118. Частица совершила перемещение по некоторой траектории в плоскости xy из точки *1* с радиус-вектором $\mathbf{r}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ в точку *2* с радиус-вектором $\mathbf{r}_2 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$. При этом на нее действовали некоторые силы, одна из которых $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. Найти работу, которую совершила сила $\mathbf{F}$. Здесь r_1, r_2 и F — в СИ.

1.119. Локомотив массы m начинает двигаться со станции так, что его скорость меняется по закону $v = a\sqrt{s}$, где a — постоянная, s — пройденный путь. Найти суммарную работу всех сил, действующих на локомотив, за первые t секунд после начала движения.

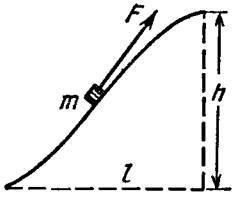


Рис. 1.29.

1.120. Кинетическая энергия частицы, движущейся по окружности радиуса R, зависит от пройденного пути s по закону $T = as^2$, где a — постоянная. Найти силу, действующую на частицу, в зависимости от s.

1.121. Тело массы m медленно втащили на горку, действуя силой $\mathbf{F}$, которая в каждой точке направлена по касательной к траектории (рис. 1.29). Найти работу этой силы, если высота горки h, длина ее основания l и коэффициент трения k.

1.122. Шайба массы $m = 50$ г соскальзывает без начальной скорости по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом, и, пройдя по горизонтальной плоскости расстояние $l = 50$ см, останавливается. Найти работу сил трения на всем пути, считая всюду коэффициент трения $k = 0{,}15$.

1.123. Два бруска с массами m_1 и m_2, соединенные недеформированной легкой пружинкой, лежат на горизонтальной плоскости. Коэффициент трения между брусками и плоскостью равен k. Какую минимальную постоянную силу нужно приложить в горизонтальном направлении к бруску с массой m_1, чтобы другой брусок сдвинулся с места?

1.124. Цепочка массы $m = 0{,}80$ кг, длины $l = 1{,}5$ м лежит на шероховатом столе так, что один ее конец свешивается у его края. Цепочка начинает сама соскальзывать, когда ее свешивающаяся часть составляет $\eta = 1/3$ длины цепочки. Какую работу совершат силы трения, действующие на цепочку, при ее полном соскальзывании со стола?

1.125. Тело массы m бросили под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. Найти среднюю мощность, развиваемую силой тяжести за все время движения тела, и мгновенную мощность этой силы как функцию времени.

1.126. Частица массы m движется по окружности радиуса R с нормальным ускорением, которое меняется со временем по закону $w_n = at^2$, где a — постоянная. Найти зависимость от времени мощности всех сил, действующих на частицу, а также среднее значение этой мощности за первые t секунд после начала движения.

1.127. Небольшое тело массы m находится на горизонтальной плоскости в точке O. Телу сообщили горизонтальную скорость v_0. Найти:

а) среднюю мощность, развиваемую силой трения за все время движения, если коэффициент трения $k = 0{,}27$, $m = 1{,}0$ кг и $v_0 = 1{,}5$ м/с;

б) максимальную мгновенную мощность силы трения, если коэффициент трения меняется по закону $k = \alpha x$, где α — постоянная, x — расстояние от точки O.

1.128. В системе отсчета, вращающейся вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью $\omega = 5{,}0$ рад/с, движется небольшое тело массы $m = 0{,}10$ кг. Какую работу совершила центробежная сила инерции при перемещении этого тела по произвольному пути из точки *1* в точку *2*, которые расположены на расстояниях $r_1 = 30$ см и $r_2 = 50$ см от оси вращения?

1.129. Система состоит из двух последовательно соединенных пружинок с коэффициентами жесткости k_1 и k_2. Найти минимальную работу, которую необходимо совершить, чтобы растянуть эту систему на Δl.

1.130. Тело массы m начинают поднимать с поверхности Земли, приложив к нему силу $\mathbf{F}$, которую изменяют с высотой подъема y по закону $\mathbf{F} = 2(a\mathbf{y} - 1)\,m\mathbf{g}$, где a — положительная постоянная. Найти работу этой силы и приращение потенциальной энергии тела в поле тяжести Земли на первой половине пути подъема.

1.131. Потенциальная энергия частицы в некотором поле имеет вид $U = a/r^2 - b/r$, где a и b — положительные постоянные, r — расстояние от центра поля. Найти:

а) значение r_0, соответствующее равновесному положению частицы; выяснить, устойчиво ли это положение;

б) максимальное значение силы притяжения; изобразить графики зависимостей $U(r)$ и $F_r(r)$ — проекции силы на радиус-вектор $\mathbf{r}$.

1.132. Потенциальная энергия частицы в некотором двумерном силовом поле имеет вид $U = \alpha x^2 + \beta y^2$, где α и β — положительные постоянные, не равные друг другу. Выяснить:

а) является ли это поле центральным;

б) какую форму имеют эквипотенциальные поверхности, а также поверхности, для которых модуль вектора силы $F = \text{const}$.

1.133. Имеются два стационарных силовых поля: $\mathbf{F} = ay\mathbf{i}$ и $\mathbf{F} = ax\mathbf{i} + by\mathbf{j}$, где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ — орты осей x и y, a и b — постоянные. Выяснить, являются ли эти поля потенциальными.

1.134. Тело массы m пустили вверх по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Начальная скорость тела равна v_0, коэффициент трения — k. Какой путь пройдет тело до остановки и какова на этом пути работа силы трения?

1.135. Небольшая шайба A соскальзывает без начальной скорости с вершины гладкой горки высоты H, имеющей горизонтальный

трамплин (рис. 1.30). При какой высоте h трамплина шайба пролетит наибольшее расстояние s? Чему оно равно?

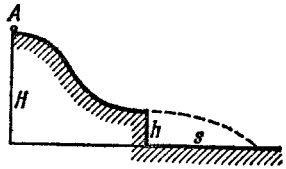


Рис. 1.30.

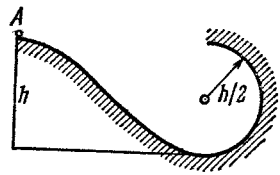


Рис. 1.31.

1.136. Небольшое тело A начинает скользить с высоты h по наклонному желобу, переходящему в полуокружность радиуса $h/2$ (рис. 1.31). Пренебрегая трением, найти скорость тела в наивысшей точке его траектории (после отрыва от желоба).

1.137. На нити длины l подвешен шарик массы m. С какой наименьшей скоростью надо начать перемещать точку подвеса в горизонтальном направлении, чтобы шарик стал двигаться по окружности вокруг этой точки? Каково при этом натяжение нити в момент, когда она будет проходить горизонтальное положение?

1.138. На горизонтальной плоскости находятся вертикально расположенный неподвижный цилиндр радиуса R и шайба A, соединенная с цилиндром горизонтальной нитью AB длины l_0 (рис. 1.32, вид сверху). Шайбе сообщили начальную скорость v_0, как показано на рисунке. Сколько времени она будет двигаться по плоскости до удара о цилиндр? Трения нет.

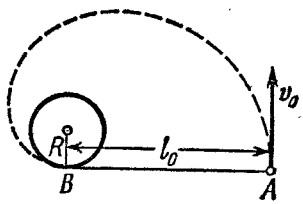


Рис. 1.32.

Рис. 1.33.

1.139. Гладкий резиновый шнур, длина которого l и коэффициент упругости k, подвешен одним концом к точке O (рис. 1.33). На другом конце имеется упор B. Из точки O начинает падать небольшая муфта A массы m. Пренебрегая массами шнура и упора, найти максимальное растяжение шнура.

1.140. На гладкой горизонтальной плоскости лежит небольшой брусок A, соединенный нитями с точкой P (рис. 1.34) и через невесомый блок — с грузом B той же массы, что и у бруска. Кроме того, брусок соединен с точкой O легкой недеформированной пружинкой длины $l_0 = 50$ см и жесткостью $\varkappa = 5\ mg/l_0$, где m —

масса бруска. Нить PA пережгли, и брусок начал двигаться. Найти его скорость в момент отрыва от плоскости.

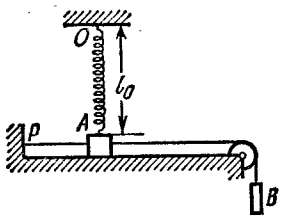


Рис. 1.34.

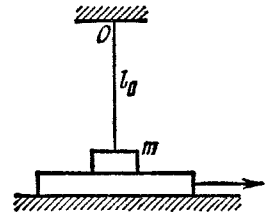


Рис. 1.35.

1.141. На горизонтальной плоскости лежит доска и на ней брусок массы $m = 1{,}0$ кг, соединенный с точкой O (рис. 1.35) легкой упругой недеформированной нитью длины $l_0 = 40$ см. Коэффициент трения между бруском и доской $k = 0{,}20$. Доску начали медленно перемещать вправо до положения, при котором брусок стал скользить по ней. Это произошло в момент, когда нить отклонилась от вертикали на угол $\vartheta = 30°$. Найти работу, которую совершила к этому моменту сила трения, действующая на брусок, в системе отсчета, связанной с плоскостью.

1.142. Гладкий легкий горизонтальный стержень AB может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец A. На стержне находится небольшая муфточка массы m, соединенная невесомой пружинкой длины l_0 с концом A. Жесткость пружинки равна $\varkappa$. Какую работу надо совершить, чтобы эту систему медленно раскрутить до угловой скорости ω?

1.143. Через блок, укрепленный к потолку комнаты, перекинута нить, на концах которой подвешены тела с массами m_1 и m_2. Массы блока и нити пренебрежимо малы, трения нет. Найти ускорение $\mathbf{w}_C$ центра инерции этой системы.

Рис. 1.36.

1.144. Две взаимодействующие между собой частицы образуют замкнутую систему, центр инерции которой покоится. На рис. 1.36 показаны положения обеих частиц в некоторый момент и траектория частицы с массой m_1. Построить траекторию частицы с массой m_2, если $m_2 = m_1/2$.

1.145. Замкнутая цепочка A массы $m = 0{,}36$ кг соединена нитью с концом вертикальной оси центробежной машины (рис. 1.37) и вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 35$ рад/с. При этом нить составляет угол $\vartheta = 45°$ с вертикалью. Найти расстояние от центра тяжести цепочки до оси вращения, а также натяжение нити.

1.146. Круглый конус A, масса которого $m = 3{,}2$ кг и угол полураствора $\alpha = 10°$, катится равномерно без скольжения по

круглой конической поверхности B так, что его вершина O остается неподвижной (рис. 1.38). Центр тяжести конуса A находится на одном уровне с точкой O и отстоит от нее на $l = 17$ см. Ось конуса движется с угловой скоростью ω. Найти:

а) силу трения покоя, действующую на конус A, если $\omega = 1{,}0$ рад/с;

б) при каких значениях ω движение конуса A будет происходить без скольжения, если коэффициент трения между поверхностями $k = 0{,}25$?

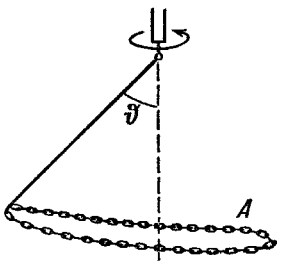


Рис. 1.37.

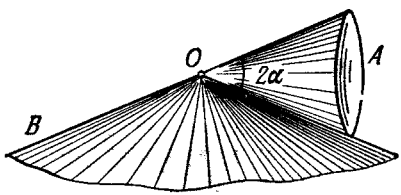


Рис. 1.38.

1.147. В K-системе отсчета вдоль оси x движутся две частицы: одна массы m_1 — со скоростью $\mathbf{v}_1$, другая массы m_2 — со скоростью $\mathbf{v}_2$. Найти:

а) скорость $\mathbf{V}$ K'-системы отсчета, в которой суммарная кинетическая энергия этих частиц минимальна;

б) суммарную кинетическую энергию этих частиц в K'-системе.

1.148. Система отсчета, в которой покоится центр инерции данной системы частиц, движется поступательно со скоростью $\mathbf{V}$ относительно инерциальной K-системы отсчета. Масса системы частиц равна m, ее полная энергия в системе центра инерции $\tilde{E}$. Найти полную энергию E этой системы частиц в K-системе отсчета.

1.149. На гладкой горизонтальной плоскости находятся две небольшие шайбы с массами m_1 и m_2, которые соединены между собой невесомой пружинкой. Шайбам сообщили начальные скорости v_1 и v_2, направления которых взаимно перпендикулярны и лежат в горизонтальной плоскости. Найти полную энергию этой системы $\tilde{E}$ в системе центра инерции.

1.150. Система состоит из двух шариков с массами m_1 и m_2, которые соединены между собой невесомой пружинкой. В момент $t = 0$ шарикам сообщили начальные скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, после чего система начала двигаться в однородном поле тяжести Земли. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти зависимости от времени полного импульса этой системы в процессе движения и радиус-вектора ее центра инерции относительно его начального положения.

1.151. На гладкой горизонтальной плоскости находятся два бруска с массами m_1 и m_2, соединенные невесомой пружинкой

жесткости $\varkappa$ (рис. 1.39). Брусок *2* переместили влево на небольшое расстояние x и отпустили. Найти скорость центра инерции системы после отрыва бруска *1* от стенки.

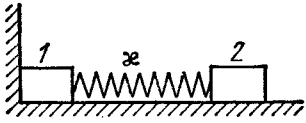


Рис. 1.39.

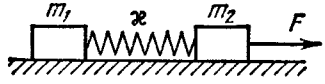


Рис. 1.40.

1.152. На гладкой горизонтальной плоскости лежат два бруска, соединенные невесомой пружинкой жесткости $\varkappa$ и длины в недеформированном состоянии l_0. На один из брусков начали действовать постоянной горизонтальной силой F, как показано на рис. 1.40. Найти максимальное и минимальное расстояния между брусками при дальнейшем движении системы, если массы брусков:

а) одинаковы;

б) равны m_1 и m_2, а сила F приложена к бруску с массой m_2.

1.153. Система состоит из двух одинаковых кубиков, каждый массы m, между которыми находится сжатая невесомая пружина жесткости $\varkappa$ (рис. 1.41). Кубики связаны нитью, которую в некоторый момент пережигают. Найти:

а) при каких значениях Δl — начальном сжатии пружины — нижний кубик подскочит после пережигания нити;

б) на какую высоту h поднимется центр тяжести этой системы, если сжатие пружины в начальном положении $\Delta l = 7\ mg/\varkappa$.

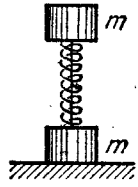


Рис. 1.41.

1.154. Две одинаковые тележки *1* и *2*, на каждой из которых находится по одному человеку, движутся без трения по инерции навстречу друг другу по параллельным рельсам. Когда тележки поравнялись, с каждой из них на другую перепрыгнул человек — в направлении, перпендикулярном к движению тележек. В результате тележка *1* остановилась, а тележка *2* продолжала двигаться в прежнем направлении так, что ее скорость стала $\mathbf{v}$. Найти первоначальные скорости тележек $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, если масса каждой тележки (без человека) M, а масса каждого человека m.

1.155. Две одинаковые тележки движутся друг за другом по инерции (без трения) с одной и той же скоростью $\mathbf{v}_0$. На задней тележке находится человек массы m. В некоторый момент человек прыгнул в переднюю тележку со скоростью $\mathbf{u}$ относительно своей тележки. Имея в виду, что масса каждой тележки равна M, найти скорости, с которыми будут двигаться обе тележки после этого.

1.156. На краю покоящейся тележки массы M стоят два человека, масса каждого из которых равна m. Пренебрегая трением, найти скорость тележки после того, как оба человека спрыгнут с одной и той же горизонтальной скоростью $\mathbf{u}$ относительно

тележки: 1) одновременно; 2) друг за другом. В каком случае скорость тележки будет больше и во сколько раз?

1.157. Цепочка массы $m = 1{,}00$ кг и длины $l = 1{,}40$ м висит на нити, касаясь поверхности стола своим нижним концом. После пережигания нити цепочка упала на стол. Найти полный импульс, который она передала столу.

1.158. Стальной шарик массы $m = 50$ г падает с высоты $h = 1{,}0$ м на горизонтальную поверхность массивной плиты. Найти суммарный импульс, который он передаст плите в результате многократных отскакиваний, если при каждом ударе скорость шарика изменяется в $\eta = 0{,}80$ раз.

1.159. Плот массы M с находящимся на нем человеком массы m неподвижно стоит в пруду. Относительно плота человек совершает перемещение $\mathbf{1}'$ со скоростью $\mathbf{v}'(t)$ и останавливается. Пренебрегая сопротивлением воды, найти:

а) перемещение плота $\mathbf{1}$ относительно берега;

б) горизонтальную составляющую силы, с которой человек действовал на плот в процессе движения.

1.160. Через неподвижный блок перекинута веревка, на одном конце которой висит лестница с человеком, а на другом — уравновешивающий груз массы M. Человек массы m совершил перемещение $\mathbf{1}'$ относительно лестницы вверх и остановился. Пренебрегая массой веревки, а также трением в оси блока, найти перемещение $\mathbf{1}$ центра инерции этой системы.

1.161. Пушка массы M начинает свободно скользить вниз по гладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Когда пушка прошла путь l, произвели выстрел, в результате которого снаряд вылетел с импульсом $\mathbf{p}$ в горизонтальном направлении, а пушка остановилась. Пренебрегая массой снаряда по сравнению с массой пушки, найти продолжительность выстрела.

1.162. Летевшая горизонтально пуля массы m попала, застряв, в тело массы M, которое подвешено на двух одинаковых нитях длины l (рис. 1.42). В результате нити отклонились на угол ϑ. Считая $m \ll M$, найти:

а) скорость пули перед попаданием в тело;

б) относительную долю первоначальной кинетической энергии пули, которая перешла в тепло.

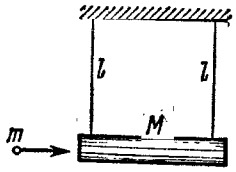


Рис. 1.42.

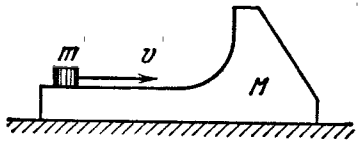


Рис. 1.43.

1.163. На гладкой горизонтальной плоскости находится тело массы M (рис. 1.43) и на нем небольшая шайба массы m. Послед-

ней сообщили в горизонтальном направлении скорость v. На какую высоту (по сравнению с первоначальным уровнем) поднимется шайба после отрыва от тела M? Трения нет.

1.164. Небольшая шайба массы m без начальной скорости соскальзывает с гладкой горки высотой h и попадает на доску массы M, лежащую у основания горки на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 1.44). Вследствие трения между шайбой и доской шайба тормозится и, начиная с некоторого момента, движется вместе с доской как единое целое.

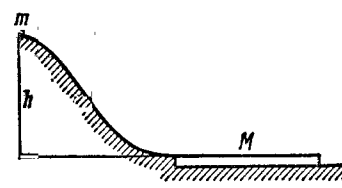


Рис. 1.44.

1) Найти суммарную работу сил трения в этом процессе.

2) Можно ли утверждать, что полученный результат не зависит от системы отсчета?

1.165. Камень падает без начальной скорости с высоты h на поверхность Земли. В отсутствие сопротивления воздуха к концу падения скорость камня относительно Земли $v_0 = \sqrt{2gh}$. Получить эту же формулу, проведя решение в системе отсчета, «падающей» на Землю с постоянной скоростью v_0.

1.166. Частица массы 1,0 г, двигавшаяся со скоростью $\mathbf{v}_1 = 3{,}0\mathbf{i} - 2{,}0\mathbf{j}$, испытала абсолютно неупругое столкновение с другой частицей, масса которой 2,0 г и скорость $\mathbf{v}_2 = 4{,}0\mathbf{j} - 6{,}0\mathbf{k}$. Найти скорость образовавшейся частицы — вектор $\mathbf{v}$ и его модуль, — если проекции векторов $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ даны в системе СИ.

1.167. Найти приращение кинетической энергии замкнутой системы из двух шариков с массами m_1 и m_2 при их абсолютно неупругом столкновении, если до столкновения скорости шариков были $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$.

1.168. Частица массы m_1 испытала абсолютно упругое столкновение с покоившейся частицей массы m_2. Какую относительную часть кинетической энергии потеряла налетающая частица, если:

а) она отскочила под прямым углом к своему первоначальному направлению движения;

б) столкновение лобовое?

1.169. Частица *1* испытала абсолютно упругое столкновение с покоившейся частицей *2*. Найти отношение их масс, если:

а) столкновение лобовое и частицы разлетелись в противоположных направлениях с одинаковыми скоростями;

б) частицы разлетелись симметрично по отношению к первоначальному направлению движения частицы *1* и угол между их направлениями разлета $\theta = 60^\circ$.

1.170. Шар, двигавшийся поступательно, испытал упругое соударение с другим, покоившимся, шаром той же массы. При соударении угол между прямой, проходящей через центры шаров, и направлением первоначального движения налетающего шара оказался равным $\alpha = 45^\circ$. Считая шары гладкими, найти долю η кинетиче-

ской энергии налетающего шара, которая перешла в потенциальную энергию в момент наибольшей деформации.

1.171. Снаряд, летящий со скоростью $v = 500$ м/с, разрывается на три одинаковые осколка так, что кинетическая энергия системы увеличивается в $\eta = 1{,}5$ раза. Какую максимальную скорость может иметь один из осколков?

1.172. Частица *1*, имевшая скорость $v = 10$ м/с, испытала лобовое столкновение с покоившейся частицей *2* той же массы. В результате столкновения кинетическая энергия системы уменьшилась на $\eta = 1{,}0\%$. Найти модуль и направление скорости частицы *1* после столкновения.

1.173. Частица массы m испытала столкновение с покоившейся частицей массы M, в результате которого частица m отклонилась на угол $\pi/2$, а частица M отскочила под углом $\vartheta = 30°$ к первоначальному направлению движения частицы m. На сколько процентов и как изменилась кинетическая энергия этой системы после столкновения, если $M/m = 5{,}0$?

1.174. Замкнутая система состоит из двух частиц с массами m_1 и m_2, которые движутся под прямым углом друг к другу со скоростями v_1 и v_2. Найти в системе отсчета, связанной с их центром инерции:

а) импульс каждой частицы;

б) суммарную кинетическую энергию обеих частиц.

1.175. Частица массы m_1 испытала абсолютно упругое соударение с покоившейся частицей массы m_2, причем $m_1 > m_2$. Найти максимальный угол, на который может отклониться налетающая частица в результате соударения.

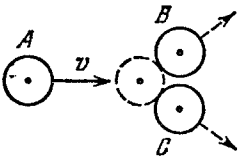


Рис. 1.45.

1.176. На гладкой горизонтальной плоскости лежат три одинаковые шайбы A, B и C (рис. 1.45). Шайбе A сообщили скорость $\mathbf{v}$, после чего она испытала абсолютно упругое соударение одновременно с шайбами B и C. Расстояние между центрами последних до соударения было в η раз больше диаметра каждой шайбы. Найти скорость шайбы A после соударения. При каком значении η шайба A после соударения отскочит назад; остановится; будет двигаться вперед?

1.177. Молекула испытала соударение с другой, покоившейся, молекулой той же массы. Показать, что угол между направлениями разлета молекул:

а) равен 90°, если соударение абсолютно упругое;

б) отличен от 90°, если соударение неупругое.

1.178. Ракета выпускает непрерывную струю газа, имеющую скорость $\mathbf{u}$ относительно ракеты. Расход газа равен μ кг/с. Показать, что уравнение движения ракеты:

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F} - \mu\mathbf{u},$$

где m — масса ракеты в данный момент, $\mathbf{w}$ — ее ускорение, $\mathbf{F}$ — внешняя сила.

1.179. Ракета движется в отсутствие внешних сил, выпуская непрерывную струю газа со скоростью $\mathbf{u}$, постоянной относительно ракеты. Найти скорость ракеты $\mathbf{v}$ в момент, когда ее масса равна m, если в начальный момент она имела массу m_0 и ее скорость была равна нулю. Воспользоваться формулой, приведенной в предыдущей задаче.

1.180. Найти закон изменения массы ракеты со временем, если ракета движется в отсутствие внешних сил с постоянным ускорением w, скорость истечения газа относительно ракеты постоянна и равна u, а ее масса в начальный момент равна m_0.

1.181. Космический корабль массы m_0 движется в отсутствие внешних сил с постоянной скоростью $\mathbf{v}_0$. Для изменения направления движения включили реактивный двигатель, который стал выбрасывать струю газа с постоянной относительно корабля скоростью u, все время перпендикулярной к направлению движения корабля. В конце работы двигателя масса корабля стала равной m. На какой угол α изменилось направление движения корабля за время работы двигателя?

1.182. Тележка с песком движется по горизонтальной плоскости под действием постоянной силы $\mathbf{F}$, совпадающей по направлению с ее вектором скорости. При этом песок высыпается через отверстие в дне с постоянной скоростью μ кг/с. Найти ускорение и скорость тележки в момент t, если в момент $t = 0$ тележка с песком имела массу m_0 и ее скорость была равна нулю. Трением пренебречь.

1.183. Платформа массы m_0 начинает двигаться вправо под действием постоянной горизонтальной силы $\mathbf{F}$ (рис. 1.46). Из неподвижного бункера на нее высыпается песок. Скорость погрузки постоянна и равна μ кг/с. Найти зависимость от времени скорости и ускорения платформы в процессе погрузки. Трение пренебрежимо мало.

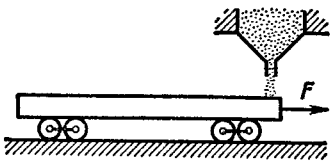


Рис. 1.46.

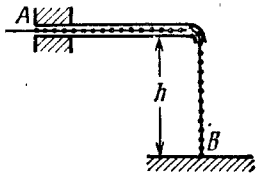


Рис. 1.47.

1.184. Цепочка AB длины l находится в гладкой горизонтальной трубке так, что часть ее длины h свободно свешивается, касаясь своим концом B поверхности стола (рис. 1.47). В некоторый момент конец A цепочки отпустили. С какой скоростью выскочит из трубки этот конец цепочки?

1.185. Момент импульса частицы относительно некоторой точки O меняется со временем по закону $\mathbf{M} = \mathbf{a} + \mathbf{b}t^2$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — постоянные векторы, причем $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$. Найти относительно точки O момент силы $\mathbf{N}$, действующей на частицу, когда угол между векторами $\mathbf{N}$ и $\mathbf{M}$ окажется равным 45°.

1.186. Шарик массы m бросили под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. Найти модуль вектора момента импульса шарика относительно точки бросания в зависимости от времени движения. Вычислить M в вершине траектории, если $m = 130$ г, $\alpha = 45°$ и $v_0 = 25$ м/с. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.187. Шайба A массы m, скользя по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью v, испытала в точке O (рис. 1.48) абсолютно упругий удар с гладкой неподвижной стенкой. Угол между направлением движения шайбы и нормалью к стенке равен α. Найти:

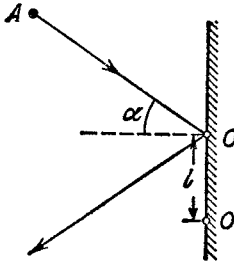


Рис. 1.48.

а) точки, относительно которых момент импульса $\mathbf{M}$ шайбы остается постоянным в этом процессе;

б) модуль приращения вектора момента импульса шайбы относительно точки O', которая находится в плоскости движения шайбы на расстоянии l от точки O.

1.188. Небольшой шарик массы m, привязанный на нити длины l к потолку в точке O, движется по горизонтальной окружности с постоянной угловой скоростью ω. Относительно каких точек момент импульса $\mathbf{M}$ шарика остается постоянным? Найти модуль приращения вектора момента импульса шарика относительно точки O за половину оборота.

1.189. Шарик массы m падает без начальной скорости с высоты h над поверхностью Земли. Найти модуль приращения вектора момента импульса шарика за время падения — относительно точки O системы отсчета, движущейся поступательно со скоростью V в горизонтальном направлении. В момент начала падения точка O совпадала с шариком. Сопротивление воздуха не учитывать.

1.190. Горизонтальный гладкий диск вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его центр — точку O. Из этой точки в момент $t = 0$ пустили шайбу со скоростью v_0. Найти момент импульса шайбы $M(t)$ относительно точки O в системе отсчета, связанной с диском. Убедиться, что этот момент импульса обусловлен действием силы Кориолиса.

1.191. Частица движется по замкнутой траектории в центральном силовом поле, где ее потенциальная энергия $U = kr^2$, k — положительная постоянная, r — расстояние частицы до центра поля O. Найти массу частицы, если наименьшее расстояние ее до точки O равно r_1, а скорость на наибольшем расстоянии от этой точки — v_2.

1.192. Небольшой шарик подвесили к точке O на легкой нити длиной l. Затем шарик отвели в сторону так, что нить отклонилась на угол ϑ от вертикали, и сообщили ему скорость в горизонтальном направлении перпендикулярно к вертикальной плоскости, в которой расположена нить. Какую начальную скорость надо сообщить шарику, чтобы в процессе движения максимальный угол отклонения нити от вертикали оказался равным $\pi/2$?

1.193. На гладкой горизонтальной плоскости движется небольшое тело массы m, привязанное к нерастяжимой нити, другой конец которой втягивают в отверстие O (рис. 1.49) с постоянной скоростью. Найти натяжение нити в зависимости от расстояния r тела до отверстия, если при $r = r_0$ угловая скорость нити была равна ω_0.

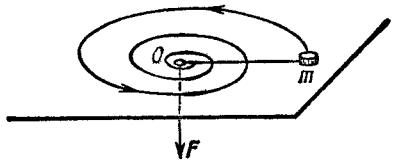


Рис. 1.49.

1.194. На массивный неподвижный блок радиуса R намотана легкая нерастяжимая нить, к свободному концу которой подвешено небольшое тело массы m. В момент $t = 0$ систему предоставили самой себе, и она пришла в движение. Найти ее момент импульса относительно оси блока в зависимости от t.

1.195. Однородный шар массы m и радиуса R начинает скатываться без скольжения по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Найти зависимость от времени момента импульса шара относительно точки касания в начальный момент. Как изменится результат в случае абсолютно гладкой наклонной плоскости?

1.196. Некоторая система частиц имеет суммарный импульс $\mathbf{p}$ и момент импульса $\mathbf{M}$ относительно точки O. Найти ее момент импульса $\mathbf{M}'$ относительно точки O', положение которой по отношению к точке O определяется радиус-вектором $\mathbf{r}_0$. Выяснить, в каком случае момент импульса системы частиц не будет зависеть от выбора точки O.

1.197. Доказать, что момент импульса $\mathbf{M}$ системы частиц относительно точки O K-системы отсчета может быть представлен как

$$\mathbf{M} = \tilde{\mathbf{M}} + [\mathbf{r}_C \mathbf{p}],$$

где $\tilde{\mathbf{M}}$ — ее собственный момент импульса (в поступательно движущейся системе отсчета, связанной с центром инерции), $\mathbf{r}_C$ — радиус-вектор центра инерции относительно точки O, $\mathbf{p}$ — суммарный импульс системы частиц в K-системе отсчета.

1.198. Шарик массы m, двигавшийся со скоростью v_0, испытал упругое лобовое соударение с одним из шариков покоившейся жесткой гантели, как показано на рис. 1.50. Масса каждого шарика гантели равна $m/2$, расстояние между ними — l. Пренебрегая

размерами шариков, найти собственный момент импульса $\tilde{M}$ гантели после соударения, т. е. момент импульса в поступательно движущейся системе отсчета, связанной с центром инерции гантели.

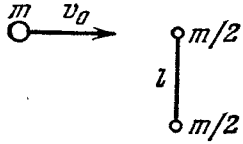


Рис. 1.50.

1.199. На гладкой горизонтальной плоскости лежат две небольшие одинаковые шайбы, каждая массы m. Шайбы соединены друг с другом легкой недеформированной пружинкой, длина которой l_0 и жесткость $\varkappa$. В некоторый момент одной из шайб сообщили скорость v_0 — в горизонтальном направлении перпендикулярно к пружинке. Найти максимальное относительное удлинение пружинки в процессе движения, если известно, что оно значительно меньше единицы.

1.4. Всемирное тяготение

● Закон всемирного тяготения:

$$F=\gamma\frac{m_1m_2}{r^2}. \tag{1.4а}$$

● Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит (Кеплер):

$$T^2\sim a^3. \tag{1.4б}$$

● Напряженность $\mathbf{G}$ и потенциал φ гравитационного поля точечной массы:

$$\mathbf{G}=-\gamma\frac{m}{r^3}\mathbf{r},\quad \varphi=-\gamma\frac{m}{r}. \tag{1.4в}$$

● Первая и вторая космические скорости:

$$v_1=\sqrt{gR},\quad v_2=\sqrt{2}v_1. \tag{1.4г}$$

1.200. Некоторая планета массы M движется по окружности вокруг Солнца со скоростью $v=34{,}9$ км/с (относительно гелиоцентрической системы отсчета). Найти период обращения этой планеты вокруг Солнца.

1.201. Период обращения Юпитера вокруг Солнца в 12 раз больше соответствующего периода для Земли. Считая орбиты планет круговыми, найти:

а) во сколько раз расстояние от Юпитера до Солнца превышает расстояние от Земли до Солнца;

б) скорость и ускорение Юпитера в гелиоцентрической системе отсчета.

1.202. Некоторая планета массы M движется вокруг Солнца по эллипсу так, что минимальное расстояние между ней и Солнцем равно r, а максимальное — R. Найти с помощью законов Кеплера период обращения ее вокруг Солнца.

1.203. Небольшое тело начинает падать на Солнце с расстояния, равного радиусу земной орбиты. Начальная скорость тела

в гелиоцентрической системе отсчета равна нулю. Найти с помощью законов Кеплера, сколько времени будет продолжаться падение.

1.204. Представим себе, что мы создали модель Солнечной системы в η раз меньше натуральной величины, но из материалов той же самой средней плотности, что у Солнца и планет. Как изменятся при этом периоды обращения моделей планет по своим орбитам?

1.205. Двойная звезда — это система из двух звезд, движущихся под действием притяжения вокруг центра инерции системы. Найти расстояние между компонентами двойной звезды, если ее суммарная масса M и период обращения T.

1.206. Найти потенциальную энергию гравитационного взаимодействия:

а) двух материальных точек с массами m_1 и m_2, находящихся на расстоянии r друг от друга;

б) материальной точки массы m и тонкого однородного стержня массы M и длины l, если они находятся на одной прямой на расстоянии a друг от друга; определить также силу их взаимодействия.

1.207. Планета массы m движется по эллипсу вокруг Солнца так, что наибольшее и наименьшее расстояния ее от Солнца равны соответственно r_1 и r_2. Найти момент импульса M этой планеты относительно центра Солнца.

1.208. Доказать с помощью законов сохранения, что полная механическая энергия планеты массы m, движущейся вокруг Солнца по эллипсу, зависит только от его большой полуоси a. Найти формулу зависимости этой энергии от a.

1.209. Планета A движется по эллиптической орбите вокруг Солнца. В момент, когда она находилась на расстоянии r_0 от Солнца, ее скорость равнялась v_0 и угол между радиус-вектором $\mathbf{r}_0$ и вектором скорости $\mathbf{v}_0$ составлял α. Найти наибольшее и наименьшее расстояния, на которые удаляется от Солнца эта планета при своем движении.

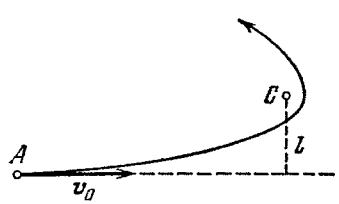


Рис. 1.51.

1.210. Космическое тело A движется к Солнцу, имея вдали от него скорость v_0 и прицельный параметр l — плечо вектора $\mathbf{v}_0$ относительно центра Солнца (рис. 1.51). Найти наименьшее расстояние, на которое это тело приблизится к Солнцу.

1.211. Частица массы m находится вне однородного шара массы M на расстоянии r от его центра. Найти:

а) потенциальную энергию гравитационного взаимодействия частицы и шара;

б) силу тяготения, с которой шар действует на частицу.

1.212. Доказать, что сила тяготения, действующая на частицу A внутри однородного сферического слоя вещества, равна нулю.

1.213. Частицу массы m переместили из центра основания однородного полушара массы M и радиуса R на бесконечность. Какую работу совершила при этом гравитационная сила, действующая на частицу со стороны полушара?

1.214. Имеется однородный шар массы M и радиуса R. Найти напряженность $\mathbf{G}$ и потенциал φ гравитационного поля этого шара как функции расстояния r от его центра (при $r < R$ и $r > R$). Изобразить примерные графики зависимостей $G(r)$ и $\varphi(r)$.

1.215. Внутри однородного шара с плотностью ρ имеется сферическая полость, центр которой находится на расстоянии $\mathbf{l}$ от центра шара. Найти напряженность $\mathbf{G}$ поля тяготения внутри полости.

1.216. Однородный шар имеет массу M и радиус R. Найти давление p внутри шара, обусловленное гравитационным сжатием, как функцию расстояния r от его центра. Оценить p в центре Земли, считая, что Земля является однородным шаром.

1.217. Найти собственную потенциальную энергию гравитационного взаимодействия вещества, образующего:

а) тонкий однородный сферический слой массы m и радиуса R;

б) однородный шар массы m и радиуса R (воспользоваться ответом к задаче 1.214).

1.218. Два спутника Земли движутся в одной плоскости по круговым орбитам. Радиус орбиты одного спутника $r = 7000$ км, радиус орбиты другого — на $\Delta r = 70$ км меньше. Через какой промежуток времени спутники будут периодически сближаться на минимальное расстояние?

1.219. Вычислить отношение следующих ускорений: ускорения w_1, вызываемого силой тяготения на поверхности Земли, ускорения w_2, обусловленного центробежной силой инерции на экваторе Земли, и ускорения w_3, сообщаемого телам на Земле Солнцем.

1.220. На какой высоте над полюсом Земли ускорение свободного падения убывает на один процент; в два раза?

1.221. Телу сообщили на полюсе Земли скорость v_0, направленную вертикально вверх. Зная радиус Земли и ускорение свободного падения на ее поверхности, найти высоту, на которую поднимется тело. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.222. Искусственный спутник вывели на круговую орбиту вокруг Земли со скоростью v — относительно поступательно движущейся системы отсчета, связанной с осью вращения Земли. Найти расстояние от спутника до поверхности Земли. Радиус Земли и ускорение свободного падения на ее поверхности считать известными.

1.223. Вычислить радиус круговой орбиты стационарного спутника Земли, который остается неподвижным относительно ее поверхности. Каковы его скорость и ускорение в инерциальной системе отсчета, связанной в данный момент с центром Земли?

1.224. Спутник, движущийся по круговой орбите радиуса $R = 2{,}00 \cdot 10^4$ км в экваториальной плоскости Земли с Запада на Восток, появляется над некоторым пунктом на экваторе через каждые

$\tau = 11{,}6$ ч. Вычислить на основании этих данных массу Земли. Гравитационная постоянная предполагается известной.

1.225. Спутник движется в экваториальной плоскости Земли с Востока на Запад по круговой орбите радиуса $R = 1{,}00 \cdot 10^4$ км. Найти в системе отсчета, связанной с Землей, его скорость и ускорение.

1.226. Спутник должен двигаться в экваториальной плоскости Земли вблизи ее поверхности по или против направления вращения Земли. Найти в системе отсчета, связанной с Землей, во сколько раз кинетическая энергия спутника во втором случае будет больше, чем в первом.

1.227. Искусственный спутник Луны движется по круговой орбите, радиус которой в η раз больше радиуса Луны. При своем движении спутник испытывает слабое сопротивление со стороны космической пыли. Считая, что сила сопротивления зависит от скорости спутника по закону $F = \alpha v^2$, где α — постоянная, найти время движения спутника до падения на поверхность Луны.

1.228. Вычислить первую и вторую космические скорости для Луны. Сравнить полученные результаты с соответствующими скоростями для Земли.

1.229. Космический корабль подлетает к Луне по параболической траектории, почти касающейся поверхности Луны. В момент максимального сближения с Луной на короткое время был включен тормозной двигатель, и корабль перешел на круговую орбиту спутника Луны. Найти приращение модуля скорости корабля при торможении.

1.230. Космический корабль вывели на круговую орбиту вблизи поверхности Земли. Какую дополнительную скорость необходимо сообщить кораблю, чтобы он смог преодолеть земное тяготение?

1.231. На каком расстоянии от центра Луны находится точка, в которой напряженность результирующего поля тяготения Земли и Луны равна нулю? Считать, что масса Земли в $\eta = 81$ раз больше массы Луны, а расстояние между центрами этих планет в $n = 60$ раз больше радиуса Земли R.

1.232. Какую наименьшую работу надо совершить, чтобы доставить космический корабль массы $m = 2{,}0 \cdot 10^3$ кг с поверхности Земли на Луну?

1.233. Найти приближенно третью космическую скорость v_3, т. е. наименьшую скорость, которую необходимо сообщить телу относительно поверхности Земли, чтобы оно смогло покинуть Солнечную систему. Вращением Земли вокруг собственной оси пренебречь.

1.5. Динамика твердого тела

● Уравнение динамики твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z:

$$I\beta_z = N_z. \qquad (1.5a)$$

где N_z — алгебраическая сумма моментов внешних сил относительно оси z.

● Согласно теореме Штейнера:

$$I = I_C + ma^2. \tag{1.5б}$$

● Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси:

$$T = {}^1/_2 I\omega^2. \tag{1.5в}$$

● Работа внешних сил при повороте твердого тела иокруг неподвижной оси:

$$A = \int N_z \, d\varphi. \tag{1.5г}$$

● Кинетическая энергия твердого тела при плоском движении:

$$T = \frac{I_C\omega^2}{2} + \frac{mv_C^2}{2}. \tag{1.5д}$$

● Связь между угловой скоростью ω' прецессии гироскопа, его моментом импульса $\mathbf{M}$, равным $I\omega$, и моментом $\mathbf{N}$ внешних сил:

$$[\omega' \mathbf{M}] = \mathbf{N}. \tag{1.5е}$$

1.234. Тонкий однородный стержень AB массы $m = 1{,}0$ кг движется поступательно с ускорением $w = 2{,}0$ м/с^2 под действием двух антипараллельных сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ (рис. 1.52). Расстояние между точками приложения этих сил $a = 20$ см. Кроме того, известно, что $F_2 = 5{,}0$ Н. Найти длину стержня.

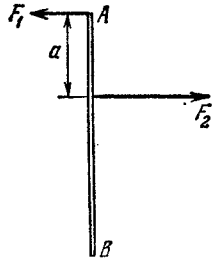


Рис. 1.52.

1.235. К точке, радиус-вектор которой относительно начала координат O равен $\mathbf{r} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, приложена сила $\mathbf{F} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$, где a, b, A, B — постоянные, $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ — орты осей x и y. Найти момент $\mathbf{N}$ и плечо l силы $\mathbf{F}$ относительно точки O.

1.236. К точке с радиус-вектором $\mathbf{r}_1 = a\mathbf{i}$ приложена сила $\mathbf{F}_1 = A\mathbf{j}$, а к точке с $\mathbf{r}_2 = b\mathbf{j}$ — сила $\mathbf{F}_2 = B\mathbf{i}$. Здесь оба радиус-вектора определены относительно начала координат O, $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ — орты осей x и y, a, b, A и B — постоянные. Найти плечо l равнодействующей силы относительно точки O.

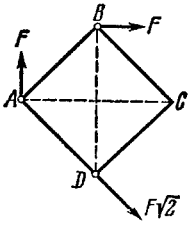


Рис. 1.53.

1.237. К квадратной пластинке приложены три силы, как показано на рис. 1.53. Найти модуль, направление и точку приложения равнодействующей силы, если эту точку взять на стороне BC.

1.238. Найти момент инерции:

а) тонкого однородного стержня относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его конец, если масса стержня m и его длина l;

б) тонкой однородной прямоугольной пластинки относительно оси, проходящей перпендикулярно к плоскости пластинки через одну из ее вершин, если стороны пластинки a и b, а ее масса m.

1.239. Вычислить момент инерции:

а) медного однородного диска относительно оси симметрии, перпендикулярной к плоскости диска, если его толщина $b = 2{,}0$ мм и радиус $R = 100$ мм;

б) однородного сплошного конуса относительно его оси симметрии, если масса конуса m и радиус его основания R.

1.240. Показать, что для тонкой пластинки произвольной формы имеется следующая связь между моментами инерции: $I_1 + I_2 = I_3$, где 1, 2, 3 — три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через одну точку, причем оси 1 и 2 лежат в плоскости пластинки. Используя эту связь, найти момент инерции тонкого круглого однородного диска радиуса R и массы m относительно оси, совпадающей с одним из его диаметров.

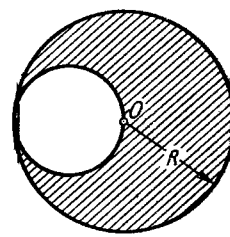


Рис. 1.54.

1.241. Однородный диск радиуса $R = 20$ см имеет круглый вырез, как показано на рис. 1.54. Масса оставшейся (заштрихованной) части диска $m = 7{,}3$ кг. Найти момент инерции такого диска относительно оси, проходящей через его центр инерции и перпендикулярной к плоскости диска.

1.242. Исходя из формулы для момента инерции однородного шара, найти момент инерции тонкого сферического слоя массы m и радиуса R относительно оси, проходящей через его центр.

1.243. На однородный сплошной цилиндр массы M и радиуса R намотана легкая нить, к концу которой прикреплено тело массы m (рис. 1.55). В момент $t = 0$ система пришла в движение. Пренебрегая трением в оси цилиндра, найти зависимость от времени:

а) угловой скорости цилиндра;

б) кинетической энергии всей системы.

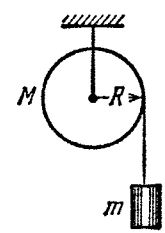


Рис. 1.55.

1.244. Концы тонких нитей, плотно намотанных на ось радиуса r диска Максвелла, прикреплены к горизонтальной штанге. Когда диск раскручивается, штангу поднимают так, что диск остается неизменно на одной и той же высоте. Масса диска с осью m, момент инерции прибора относительно его оси I. Найти натяжение каждой нити и ускорение штанги.

1.245. Горизонтальный тонкий однородный стержень AB массы m и длины l может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец A. В некоторый момент на конец B начала действовать постоянная сила F, которая все время перпендикулярна к первоначальному положению покоившегося стержня

и направлена в горизонтальной плоскости. Найти угловую скорость стержня как функцию его угла поворота φ из начального положения.

1.246. В установке (рис. 1.56) известны масса однородного сплошного цилиндра m, его радиус R и массы тел m_1 и m_2. Скольжения нити и трения в оси цилиндра нет. Найти угловое ускорение цилиндра и отношение натяжений T_1/T_2 вертикальных участков нити в процессе движения.

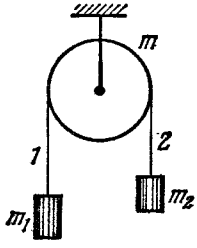


Рис. 1.56.

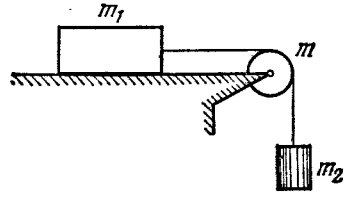


Рис. 1.57.

1.247. В системе (рис. 1.57) известны массы тел m_1 и m_2, коэффициент трения k между телом m_1 и горизонтальной плоскостью, а также масса блока m, который можно считать однородным диском. Скольжения нити по блоку нет. В момент $t = 0$ тело m_2 начинает опускаться. Пренебрегая массой нити и трением в оси блока, найти работу силы трения, действующей на тело m_1, за первые t секунд после начала движения.

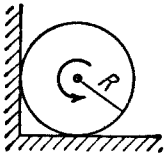


Рис. 1.58.

1.248. Однородный цилиндр радиуса R раскрутили вокруг его оси до угловой скорости ω_0 и поместили затем в угол (рис. 1.58). Коэффициент трения между стенками угла и цилиндром равен k. Сколько оборотов сделает цилиндр до остановки?

1.249. Однородный диск радиуса R раскрутили до угловой скорости ω и осторожно положили на горизонтальную поверхность. Сколько времени диск будет вращаться на поверхности, если коэффициент трения равен k? Давление диска на поверхность считать равномерным.

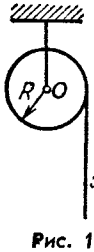


Рис. 1.59.

1.250. Маховик с начальной угловой скоростью ω_0 начинает тормозиться силами, момент которых относительно его оси пропорционален квадратному корню из его угловой скорости. Найти среднюю угловую скорость маховика за все время торможения.

1.251. Однородный сплошной цилиндр радиуса R и массы M может свободно вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси O (рис. 1.59). На цилиндр в один ряд намотан тонкий шнур длины l и массы m. Найти угловое ускорение цилиндра в зависимости от длины x свешивающейся части шнура. Считать, что центр тяжести намотанной части шнура находится на оси цилиндра.

1.252. Однородный шар массы m и радиуса R скатывается без скольжения по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Найти:

а) значения коэффициента трения, при которых скольжения не будет;

б) кинетическую энергию шара через t секунд после начала движения.

1.253. Однородный цилиндр массы $m = 8{,}0$ кг и радиуса $R = 1{,}3$ см (рис. 1.60) в момент $t = 0$ начинает опускаться под действием силы тяжести. Пренебрегая массой нити, найти:

а) натяжение каждой нити и угловое ускорение цилиндра;

б) зависимость от времени мгновенной мощности, которую развивает сила тяжести.

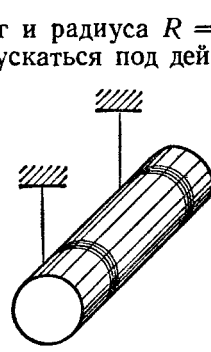


Рис. 1.60.

1.254. Тонкие нити плотно намотаны на концах однородного сплошного цилиндра массы m. Свободные концы нитей прикреплены к потолку кабины лифта. Кабина начала подниматься с ускорением w_0. Найти ускорение w' цилиндра относительно кабины и силу F, с которой цилиндр действует (через нити) на потолок.

1.255. На гладкой наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом, находится катушка с ниткой, свободный конец которой укреплен, как показано на рис. 1.61. Масса катушки $m = 200$ г, ее момент инерции относительно собственной оси $I = 0{,}45$ г·м^2, радиус намотанного слоя ниток $r = 3{,}0$ см. Найти ускорение оси катушки.

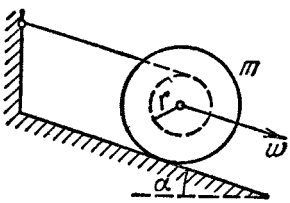


Рис. 1.61.

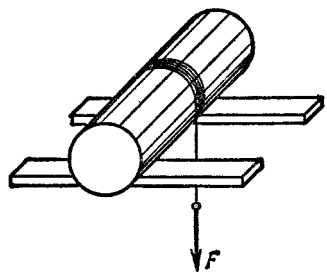


Рис. 1.62.

1.256. Однородный сплошной цилиндр массы m лежит на двух горизонтальных брусьях. На цилиндр намотана нить, за свешивающийся конец которой тянут с постоянной вертикально направленной силой F (рис. 1.62). Найти максимальное значение силы F, при котором цилиндр будет катиться еще без скольжения, если коэффициент трения между ним и брусьями равен k. С каким ускорением $w_{макс}$ будет перемещаться ось цилиндра?

1.257. На горизонтальной шероховатой плоскости лежит катушка ниток массы m. Ее момент инерции относительно собствен-

ной оси $I = \beta m R^2$, где β — числовой коэффициент, R — внешний радиус катушки. Радиус намотанного слоя ниток равен r. Катушку без скольжения начали тянуть за нить постоянной силой $\mathbf{F}$, направленной под углом α к горизонту (рис. 1.63). Найти:

а) модуль и направление вектора ускорения оси катушки;

б) работу силы $\mathbf{F}$ за первые t секунд после начала движения.

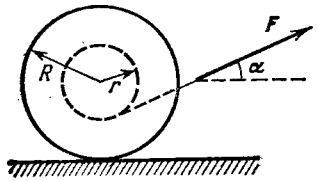


Рис. 1.63.

1.258. Установка (рис. 1.64) состоит из двух одинаковых сплошных однородных цилиндров каждый массы m, на которые симметрично намотаны две легкие нити. Найти натяжение каждой нити в процессе движения. Трения в оси верхнего цилиндра нет.

1.259. В системе (рис. 1.65) известны масса m груза A, масса M блока B, момент инерции I последнего относительно его оси и радиусы блока R и $2R$. Масса нитей пренебрежимо мала. Найти ускорение груза A после того, как систему предоставили самой себе.

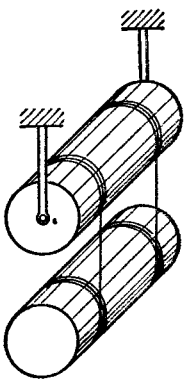


Рис. 1.64.

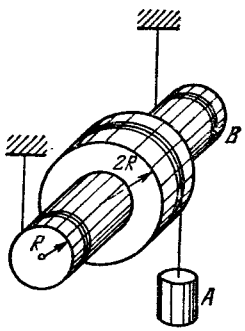


Рис. 1.65.

1.260. Сплошной однородный цилиндр A массы m_1 может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, которая укреплена на подставке B массы m_2 (рис. 1.66). На цилиндр плотно намотана легкая нить, к концу K которой приложили постоянную горизонтальную силу F. Трения между подставкой и опорной горизонтальной плоскостью нет. Найти:

а) ускорение точки K;

б) кинетическую энергию этой системы через t секунд после начала движения.

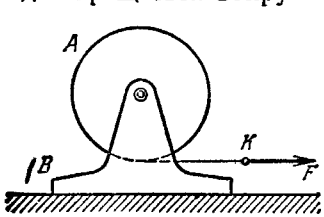


Рис. 1.66.

1.261. На гладкой горизонтальной плоскости лежит доска массы m_1 и на ней однородный шар массы m_2. К доске приложили постоян-

ную горизонтальную силу F. С какими ускорениями будут двигаться доска и центр шара в отсутствие скольжения между ними?

1.262. Сплошному однородному цилиндру массы m и радиуса R сообщили вращение вокруг его оси с угловой скоростью ω_0, затем его положили боковой поверхностью на горизонтальную плоскость и предоставили самому себе. Коэффициент трения между цилиндром и плоскостью равен k. Найти:

а) время, в течение которого движение цилиндра будет происходить со скольжением;

б) полную работу силы трения скольжения, действующей на цилиндр.

1.263. Однородный шар радиуса r скатывается без скольжения с вершины сферы радиуса R. Найти угловую скорость шара после отрыва от сферы. Начальная скорость шара пренебрежимо мала.

1.264. Сплошной однородный цилиндр радиуса $R = 15$ см катится по горизонтальной плоскости, которая переходит в наклонную плоскость, составляющую угол $\alpha = 30°$ с горизонтом (рис. 1.67). Найти максимальное значение скорости v_0, при котором цилиндр перейдет на наклонную плоскость еще без скачка. Считать, что скольжения нет.

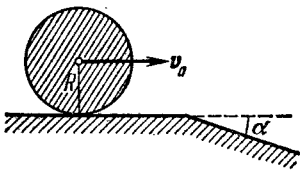


Рис. 1.67.

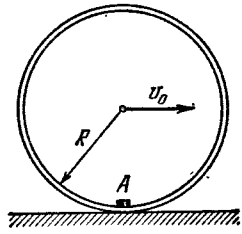


Рис. 1.68.

1.265. На внутренней стороне тонкого жесткого обруча радиуса R прикреплено небольшое тело A, масса которого равна массе обруча. Последний катится без скольжения по горизонтальной плоскости так, что в моменты, когда тело A оказывается в нижнем положении, скорость центра обруча равна v_0 (рис. 1.68). При каких значениях v_0 обруч не будет подпрыгивать?

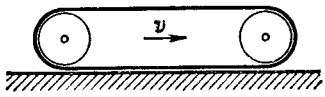


Рис. 1.69.

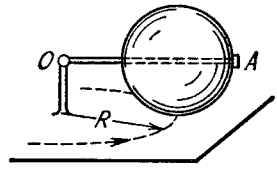


Рис. 1.70.

1.266. Найти кинетическую энергию гусеницы трактора, движущегося со скоростью v, если масса гусеницы равна m (рис. 1.69).

1.267. Однородный шар массы m и радиуса r катится без скольжения по горизонтальной плоскости, вращаясь вокруг горизонтальной оси OA (рис. 1.70). При этом центр шара движется со

скоростью v по окружности радиуса R. Найти кинетическую энергию шара.

1.268. Доказать, что на тело массы m в системе отсчета, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси, действует результирующая:

а) центробежная сила инерции $\mathbf{F}_{цб} = m\omega^2\mathbf{R}_C$, где $\mathbf{R}_C$ — радиус-вектор центра инерции тела относительно оси вращения;

б) сила Кориолиса $\mathbf{F}_{кор} = 2m\,[\mathbf{v}'_C\boldsymbol{\omega}]$, где $\mathbf{v}'_C$ — скорость центра инерции тела во вращающейся системе отсчета.

1.269. Середина однородного тонкого стержня AB массы m и длины l жестко скреплена с осью вращения OO', как показано на рис. 1.71. Стержень привели во вращение с постоянной угловой скоростью ω. Найти результирующий момент центробежных сил инерции относительно точки C — в системе отсчета, связанной с осью OO' и стержнем.

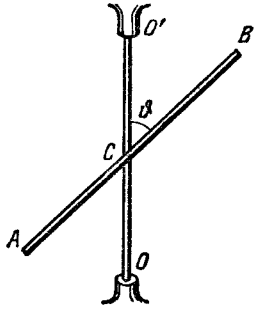


Рис. 1.71.

1.270. Конический маятник — тонкий однородный стержень длины l и массы m — вращается равномерно вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω (верхний конец стержня укреплен шарнирно). Найти угол ϑ между стержнем и вертикалью.

1.271. Однородный кубик со стороной a находится на горизонтальной плоскости с коэффициентом трения k. Кубику сообщили начальную скорость, после чего он прошел некоторое расстояние по плоскости и остановился. Объяснить исчезновение момента импульса кубика относительно оси, лежащей на плоскости и перпендикулярной к направлению движения кубика. Найти расстояние между равнодействующими сил тяжести и нормального давления со стороны опорной плоскости.

1.272. Гладкий однородный стержень AB массы M и длины l свободно вращается с угловой скоростью ω_0 в горизонтальной плоскости вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его конец A. Из точки A начинает скользить по стержню небольшая муфта массы m. Найти скорость v' муфты относительно стержня в тот момент, когда она достигнет его конца B.

1.273. На гладкой горизонтальной поверхности лежит однородный стержень массы $m = 5{,}0$ кг и длины $l = 90$ см. По одному из концов стержня произвели удар в горизонтальном направлении, перпендикулярном к стержню, в результате которого стержню был передан импульс $p = 3{,}0$ Н·с. Найти силу, с которой одна половина стержня будет действовать на другую в процессе движения.

1.274. Однородная тонкая квадратная пластинка со стороной l и массы M может свободно вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси, совпадающей с одной из ее сторон. В центр пластинки по нормали к ней упруго ударяется шарик массы m, летевший со скоростью v. Найти:

а) скорость шарика $\mathbf{v}'$ после удара;

б) горизонтальную составляющую результирующей силы, с которой ось будет действовать на пластинку после удара.

1.275. Вертикально расположенный однородный стержень массы M и длины l может вращаться вокруг своего верхнего конца. В нижний конец стержня попала, застряв, горизонтально летевшая пуля массы m, в результате чего стержень отклонился на угол α. Считая $m \ll M$, найти:

а) скорость летевшей пули;

б) приращение импульса системы «пуля — стержень» за время удара; какова причина изменения этого импульса;

в) на какое расстояние x от верхнего конца стержня должна попасть пуля, чтобы импульс системы «пуля — стержень» не изменился в процессе удара.

1.276. Горизонтально расположенный однородный диск массы M и радиуса R свободно вращается вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его центр. Диск имеет радиальную направляющую, вдоль которой может скользить без трения небольшое тело массы m. К телу привязана легкая нить, пропущенная через полую ось диска вниз. Первоначально тело находилось на краю диска и вся система вращалась с угловой скоростью ω_0. Затем к нижнему концу нити приложили силу F, с помощью которой тело медленно подтянули к оси вращения. Найти:

а) угловую скорость системы в конечном состоянии;

б) работу, которую совершила сила F.

1.277. Человек массы m_1 стоит на краю горизонтального однородного диска массы m_2 и радиуса R, который может свободно вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его центр. В некоторый момент человек начал двигаться по краю диска, совершил перемещение на угол φ' относительно диска и остановился. В процессе движения скорость человека относительно диска зависела от времени по закону $v'(t)$. Пренебрегая размерами человека, найти:

а) угол, на который повернулся диск к моменту остановки человека;

б) момент силы относительно оси вращения, с которой человек действовал на диск в процессе движения.

1.278. Два горизонтальных диска свободно вращаются вокруг вертикальной оси, проходящей через их центры. Моменты инерции дисков относительно этой оси равны I_1 и I_2, а угловые скорости — ω_1 и ω_2. После падения верхнего диска на нижний оба диска благодаря трению между ними начали через некоторое время вращаться как единое целое. Найти:

а) установившуюся угловую скорость вращения дисков;

б) работу, которую совершили при этом силы трения.

1.279. На гладкой горизонтальной плоскости лежат небольшая шайба и тонкий однородный стержень длины l, масса которого в η раз больше массы шайбы. Шайбе сообщили скорость $\mathbf{v}$ — в горизон-

тальном направлении перпендикулярно к стержню, после чего она испытала упругое соударение с концом стержня. Найти скорость шайбы и угловую скорость стержня после столкновения. При каком значении η скорость шайбы после столкновения будет равна нулю; изменит направление на противоположное?

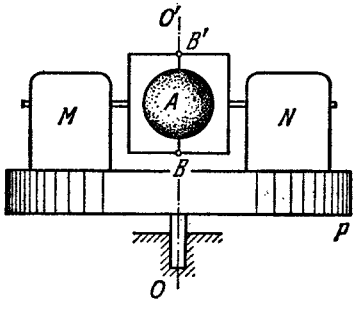


Рис. 1.72.

1.280. На неподвижной платформе P, которая может свободно поворачиваться вокруг вертикальной оси OO' (рис. 1.72), установлен мотор M и уравновешивающий противовес N. Момент инерции платформы с мотором и противовесом относительно этой оси равен I. На оси мотора укреплена легкая рамка с однородным шаром A, который свободно вращается с угловой скоростью ω_0 вокруг оси BB', совпадающей с осью OO'. Момент инерции шара относительно оси вращения равен I_0. Найти:

а) работу, которую совершит мотор, повернув ось BB' на 90°; на 180°;

б) момент внешних сил, удерживающий ось установки в вертикальном положении после того, как мотор повернет ось BB' на 90°.

1.281. Горизонтально расположенный однородный стержень AB массы $m = 1{,}40$ кг и длины $l_0 = 100$ см вращается свободно вокруг неподвижной вертикальной оси OO', проходящей через его конец A. Точка A находится посередине оси OO', длина которой $l = 55$ см. При каком значении угловой скорости стержня горизонтальная составляющая силы, действующей на нижний конец оси OO', будет равна нулю? Какова при этом горизонтальная составляющая силы, действующей на верхний конец оси?

1.282. Середина однородного стержня массы m и длины l жестко соединена с вертикальной осью OO' так, что угол между стержнем и осью равен ϑ (см. рис. 1.71). Концы оси OO' укреплены в подшипниках. Система вращается без трения с угловой скоростью ω. Найти:

а) модуль и направление момента импульса $\mathbf{M}$ стержня относительно точки C, а также его момент импульса относительно оси вращения;

б) модуль приращения вектора $\mathbf{M}$ относительно точки C за полоборота;

в) момент внешних сил N, действующих на ось OO' при вращении.

1.283. Волчок массы $m = 0{,}50$ кг, ось которого наклонена под углом $\vartheta = 30°$ к вертикали, прецессирует под действием силы тяжести. Момент инерции волчка относительно его оси симметрии $I = 2{,}0$ г·м^2, угловая скорость вращения вокруг этой оси $\omega =$

$= 350$ рад/с, расстояние от точки опоры до центра инерции волчка $l = 10$ см. Найти:

а) угловую скорость прецессии волчка;

б) модуль и направление горизонтальной составляющей силы реакции, действующей на волчок в точке опоры.

1.284. На полу кабины лифта, которая начинает подниматься с постоянным ускорением $w = 2{,}0$ м/с^2, установлен гироскоп — однородный диск радиуса $R = 5{,}0$ см на конце стержня длины $l = 10$ см (рис. 1.73). Другой конец стержня укреплен в шарнире O. Гироскоп прецессирует с угловой скоростью $n = 0{,}5$ об/с. Пренебрегая трением и массой стержня, найти собственную угловую скорость диска.

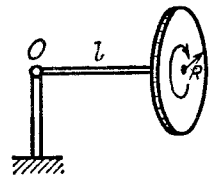


Рис. 1.73.

1.285. Волчок, масса которого $m = 1{,}0$ кг и момент инерции относительно собственной оси $I = 4{,}0$ г·м^2, вращается с угловой скоростью $\omega = 310$ рад/с. Его точка опоры находится на подставке, которую перемещают в горизонтальном направлении с постоянным ускорением $w = 1{,}0$ м/с^2. Расстояние между точкой опоры и центром инерции волчка $l = 10$ см. Найти модуль и направление вектора ω' — угловой скорости прецессии.

1.286. Однородный шар массы $m = 5{,}0$ кг и радиуса $R = 6{,}0$ см вращается с угловой скоростью $\omega = 1250$ рад/с вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр и укрепленной в подшипниках подставки. Расстояние между подшипниками $l = 15$ см. Подставку поворачивают вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\omega' = 5{,}0$ рад/с. Найти модуль и направление гироскопических сил.

1.287. Цилиндрический диск гироскопа массы $m = 15$ кг и радиуса $r = 5{,}0$ см вращается с угловой скоростью $\omega = 330$ рад/с. Расстояние между подшипниками, в которых укреплена ось диска, $l = 15$ см. Ось вынуждают совершать гармонические колебания вокруг горизонтальной оси с периодом $T = 1{,}0$ с и амплитудой $\varphi_m = 20°$. Найти максимальное значение гироскопических сил, действующих на подшипники со стороны оси диска.

1.288. Корабль движется со скоростью $v = 36$ км/ч по дуге окружности радиуса $R = 200$ м. Найти момент гироскопических сил, действующих на подшипники со стороны вала с маховиком, которые имеют момент инерции относительно оси вращения $I = 3{,}8 \cdot 10^3$ кг·м^2 и делают $n = 300$ об/мин. Ось вращения расположена вдоль корабля.

1.289. Локомотив приводится в движение турбиной, ось которой параллельна осям колес. Направление вращения турбины совпадает с направлением вращения колес. Момент инерции ротора турбины относительно собственной оси $I = 240$ кг·м^2. Найти добавочную силу давления на рельсы, обусловленную гироскопическими силами,

когда локомотив идет по закруглению радиуса $R = 250$ м со скоростью $v = 50$ км/ч. Расстояние между рельсами $l = 1{,}5$ м. Турбина делает $n = 1500$ об/мин.

1.6. Упругие деформации твердого тела

● Связь между относительным удлинением (сжатием) ε и напряжением σ:

$$\varepsilon = \sigma/E, \tag{1.6а}$$

где E — модуль Юнга.

● Связь между относительным поперечным сжатием (растяжением) ε' и относительным продольным растяжением (сжатием) ε:

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon, \tag{1.6б}$$

где μ — коэффициент Пуассона.

● Связь между относительным сдвигом γ и тангенциальным напряжением τ:

$$\gamma = \tau/G, \tag{1.6в}$$

где G — модуль сдвига.

● Коэффициент сжимаемости (модуль всестороннего сжатия):

$$\beta = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dp}. \tag{1.6г}$$

● Объемная плотность энергии упругой деформации:

$$u = E\varepsilon^2/2, \quad u = G\gamma^2/2. \tag{1.6д}$$

1.290. Какое давление необходимо приложить к торцам стального цилиндра, чтобы длина его не изменилась при повышении температуры на 100 °С?

1.291. Какое давление изнутри (при отсутствии наружного давления) может выдержать:

а) стеклянная трубка; б) стеклянная сферическая колба, у которых радиус $r = 25$ мм и толщина стенок $\Delta r = 1{,}0$ мм?

1.292. Горизонтально расположенный медный стержень длины $l = 1{,}0$ м вращают вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину. При какой частоте оборотов он может разорваться?

1.293. Кольцо радиуса $r = 25$ см, сделанное из свинцовой проволоки, вращают вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его центр и перпендикулярной к плоскости кольца. При какой частоте оборотов данное кольцо может разорваться?

1.294. Стальная проволока диаметра $d = 1{,}0$ мм натянута в горизонтальном положении между двумя зажимами, находящимися на расстоянии $l = 2{,}0$ м друг от друга. К середине проволоки — точке O — подвесили груз массы $m = 0{,}25$ кг. На сколько сантиметров опустится точка O?

1.295. Однородный упругий брусок движется по гладкой горизонтальной плоскости под действием постоянной силы F_0, равномерно распределенной по торцу. Площадь торца равна S, модуль Юнга материала — E. Найти относительное сжатие бруска в направлении действия данной силы.

1.296. Тонкий однородный медный стержень длины l и массы m равномерно вращается с угловой скоростью ω в горизонтальной

плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через один из его концов. Найти силу натяжения в стержне в зависимости от расстояния r до оси вращения, а также удлинение стержня.

1.297. Сплошной медный цилиндр длины $l = 65$ см поставили на горизонтальную поверхность и сверху приложили вертикальную сжимающую силу $F = 1000$ Н, которая равномерно распределена по его торцу. На сколько кубических миллиметров изменился при этом объем цилиндра?

1.298. Медный стержень длины l подвесили за один конец к потолку. Найти:

а) удлинение стержня Δl под действием его собственного веса;

б) относительное приращение его объема $\Delta V/V$.

1.299. Брусок из материала с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона μ подвергли всестороннему сжатию давлением p. Найти:

а) относительное уменьшение его объема;

б) связь между коэффициентом сжимаемости β и упругими постоянными E и μ.

Показать, что коэффициент Пуассона μ не может превышать 1/2.

1.300. Стальная балка прямоугольного сечения вмонтирована одним концом в стену (рис. 1.74). Под действием силы тяжести она испытывает некоторый небольшой изгиб. Найти радиус кривизны нейтрального слоя (см. пунктир на рисунке) вблизи точки O, если длина выступающего конца балки $l = 6{,}0$ м и ее толщина $h = 10$ см.

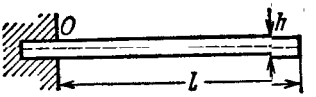


Рис. 1.74.

1.301. Изгиб упругого стержня характеризуется формой *упругой линии*, проходящей через центры тяжести поперечных сечений стержня. Уравнение для определения этой линии при малых изгибах имеет вид

$$N(x) = EI\frac{d^2y}{dx^2},$$

где $N(x)$ — изгибающий момент упругих сил в сечении с координатой x, E — модуль Юнга, I — *момент инерции* поперечного сечения относительно оси, проходящей через нейтральный слой ($I = \int z^2\,dS$, рис. 1.75).

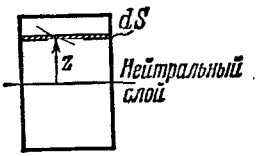


Рис. 1.75.

Рис. 1.76.

Пусть стальной стержень квадратного сечения со стороной a вмонтирован одним концом в стенку так, что выступающий конец его имеет длину l (рис. 1.76). Пренебрегая массой стержня, найти

форму упругой линии и стрелу прогиба λ, если на его конец A действует:

а) изгибающий момент пары сил N_0;

б) сила F, направленная вдоль оси y.

1.302. Стальная балка длины l свободно опирается своими концами на два упора (рис. 1.77). Момент инерции ее поперечного сечения равен I (см. предыдущую задачу). Пренебрегая массой балки и считая прогибы малыми, найти стрелу прогиба λ под действием силы F, приложенной к ее середине.

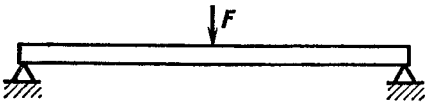


Рис. 1.77.

1.303. Стальная балка имеет прямоугольное сечение, высота которого равна h. Воспользовавшись уравнением из задачи 1.301, найти стрелу прогиба λ, которая обусловлена собственным весом балки, в двух случаях:

а) балка вмонтирована одним концом в стену так, что длина ее выступающего конца равна l (рис. 1.78, *а*);

б) балка длины $2l$ своими концами свободно опирается на две опоры (рис. 1.78, *б*).

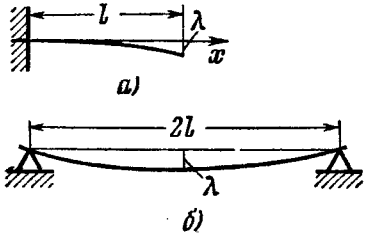


Рис. 1.78.

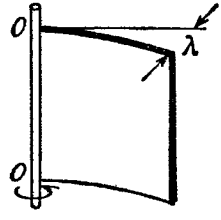


Рис. 1.79.

1.304. Стальная пластинка толщины h имеет форму квадрата со стороной l, причем $h \ll l$. Пластинка жестко скреплена с вертикальной осью OO, которую вращают с постоянным угловым ускорением β (рис. 1.79). Найти стрелу прогиба λ, считая изгиб малым.

1.305. Установить связь между крутящим моментом N и углом закручивания φ для:

а) трубы, у которой толщина стенок Δr значительно меньше радиуса трубы;

б) сплошного стержня круглого сечения.

Предполагается, что их длина l, радиус r и модуль сдвига G известны.

1.306. Вычислить момент сил N, которые вызывают закручивание стальной трубы длины $l = 3{,}0$ м на угол $\varphi = 2{,}0°$ вокруг ее оси, если внутренний и внешний диаметры трубы равны $d_1 = 30$ мм и $d_2 = 50$ мм.

1.307. Найти наибольшую мощность, которую можно передать с помощью стального вала, вращающегося вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega = 120$ рад/с, если его длина $l = 200$ см, радиус $r = 1{,}50$ см и допустимый угол закручивания $\varphi = 2{,}5°$.

1.308. Однородное кольцо массы m, имеющее внешний радиус r_2, плотно насажено на вал радиуса r_1. Вал вращают с постоянным угловым ускорением β вокруг его оси. Найти момент упругих сил в кольце в зависимости от расстояния r до оси вращения.

1.309. Найти энергию упругой деформации стального стержня массы $m = 3{,}1$ кг, который растянут так, что его относительное удлинение $\varepsilon = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$.

1.310. Стальной цилиндрический стержень длины l и радиуса r подвесили одним концом к потолку.

а) Найти энергию U упругой деформации стержня.

б) Выразить U через относительное удлинение стержня $\Delta l/l$.

1.311. Какую работу необходимо совершить, чтобы стальную полосу длины $l = 2{,}0$ м, ширины $h = 6{,}0$ см и толщины $\delta = 2{,}0$ мм согнуть в круглый обруч? Предполагается, что процесс происходит в пределах упругой деформации.

1.312. Найти энергию упругой деформации стального стержня, у которого один конец закреплен, а другой закручен на угол $\varphi = 6{,}0°$. Длина стержня $l = 1{,}0$ м, его радиус $r = 10$ мм.

1.313. Найти распределение объемной плотности энергии упругой деформации в стальном стержне в зависимости от расстояния r до его оси. Длина стержня l, угол закручивания φ.

1.314. Определить объемную плотность энергии упругой деформации в пресной воде на глубине $h = 1000$ м.

1.7. Гидродинамика

● Основное уравнение гидродинамики идеальной жидкости (уравнение Эйлера):

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \nabla p, \tag{1.7а}$$

где ρ — плотность жидкости, $\mathbf{f}$ — объемная плотность массовых сил (в случае силы тяжести $\mathbf{f} = \rho\mathbf{g}$), ∇p — градиент давления.

● Уравнение Бернулли. В стационарном потоке идеальной жидкости вдоль любой линии тока:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const}. \tag{1.7б}$$

● Число Рейнольдса, определяющее характер течения вязкой жидкости:

$$\text{Re} = \rho v l/\eta, \tag{1.7в}$$

где l — некоторый характерный размер, η — вязкость жидкости.

● Формула Пуазейля. Поток жидкости через поперечное сечение трубы (в м³/с):

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{p_1 - p_2}{l}, \tag{1.7г}$$

где R и l — радиус и длина трубы, $p_1 - p_2$ — разность давлений на ее концах.

● Формула Стокса. Сила сопротивления движению шарика радиусом r в вязкой жидкости:

$$F = 6\pi\eta r v. \qquad (1.7д)$$

1.315. Идеальная жидкость течет по плоской трубе одинакового сечения, расположенной в горизонтальной плоскости и изогнутой, как показано на рис. 1.80 (вид сверху). Поток стационарный. Одинаковы ли давления и скорости жидкости в точках *1* и *2*? Какой вид имеют линии тока?

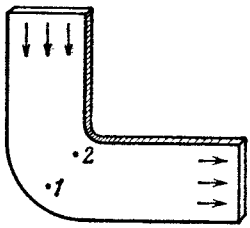


Рис. 1.80.

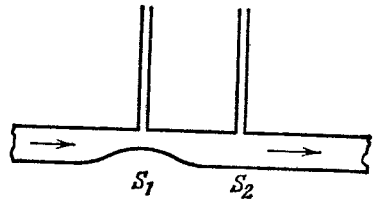


Рис. 1.81.

1.316. Две манометрические трубки установлены на горизонтальной трубе переменного сечения в местах, где сечения трубы равны S_1 и S_2 (рис. 1.81). По трубе течет вода. Найти объем воды, протекающей в единицу времени через сечение трубы, если разность уровней воды в манометрических трубках равна Δh.

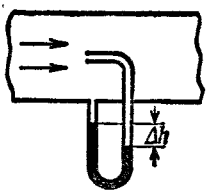


Рис. 1.82.

1.317. Трубка Пито (рис. 1.82) установлена по оси газопровода, площадь внутреннего сечения которого равна S. Пренебрегая вязкостью, найти объем газа, проходящего через сечение трубы в единицу времени, если разность уровней в жидкостном манометре равна Δh, а плотности жидкости и газа — соответственно ρ_0 и ρ.

1.318. Широкий сосуд с небольшим отверстием в дне наполнен водой и керосином. Пренебрегая вязкостью, найти скорость вытекающей воды, если толщина слоя воды $h_1 = 30$ см, а слоя керосина $h_2 = 20$ см.

1.319. На столе стоит широкий цилиндрический сосуд высотой 50 см. Сосуд наполнен водой. Пренебрегая вязкостью, найти, на какой высоте от дна сосуда следует сделать небольшое отверстие, чтобы струя из него била в поверхность стола на максимальное расстояние $l_{макс}$ от сосуда. Чему равно $l_{макс}$?

1.320. Изогнутую трубку опустили в поток воды, как показано на рис. 1.83. Скорость потока относительно трубки $v = 2{,}5$ м/с. Закрытый верхний конец трубки имеет небольшое отверстие и находится на высоте $h_0 = 12$ см. На какую высоту h будет подниматься струя воды, вытекающая из отверстия?

1.321. На горизонтальном дне широкого сосуда с идеальной жидкостью имеется круглое отверстие радиуса R_1, а над ним укреплен круглый закрытый цилиндр радиуса $R_2 > R_1$ (рис. 1.84). Зазор между цилиндром и дном сосуда очень мал, плотность жидкости ρ. Найти статическое давление жидкости в зазоре как функцию расстояния r от оси отверстия и цилиндра, если высота жидкости равна h.

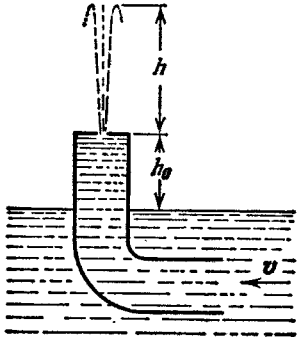


Рис. 1.83.

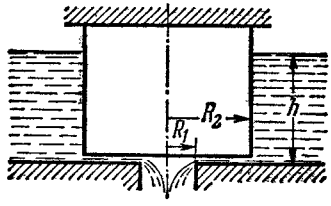


Рис. 1.84.

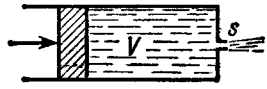


Рис. 1.85.

1.322. Какую работу необходимо совершить, чтобы, действуя постоянной силой на поршень (рис. 1.85), выдавить из горизонтально расположенного цилиндра всю воду за время t? Объем воды в цилиндре равен V, площадь сечения отверстия — s, причем s значительно меньше площади поршня. Трение и вязкость пренебрежимо малы.

1.323. Цилиндрический сосуд высоты h и площадью основания S наполнен водой. В дне сосуда открыли отверстие с площадью $s \ll S$. Пренебрегая вязкостью воды, определить, через сколько времени вся вода вытечет из сосуда.

1.324. Горизонтально расположенная трубка AB длины l вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси OO', проходящей через конец A (рис. 1.86). В трубке находится идеальная жидкость. Конец A трубки открыт, а в закрытом конце B имеется очень малое отверстие. Найти, с какой скоростью относительно трубки будет вытекать жидкость в зависимости от «высоты» ее столба h.

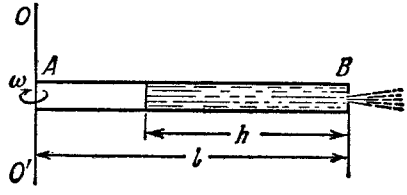


Рис. 1.86.

1.325. Показать, что в случае стационарного потока идеальной жидкости уравнение (1.7а) приводит к уравнению Бернулли.

1.326. С противоположных сторон широкого вертикального сосуда, наполненного водой, открыли два одинаковых отверстия, каждое площадью $S = 0{,}50\ см^2$. Расстояние между ними по высоте $\Delta h = 51$ см. Найти результирующую силу реакции вытекающей воды.

1.327. В боковой стенке широкого цилиндрического вертикального сосуда высоты $h = 75$ см сделана узкая вертикальная щель, нижний конец которой упирается в дно сосуда. Длина щели $l = 50$ см, ширина $b = 1{,}0$ мм. Закрыв щель, сосуд наполнили водой. Найти результирующую силу реакции вытекающей воды непосредственно после того, как щель открыли.

1.328. Вода вытекает из большого бака по изогнутой под прямым углом трубке, внутренний радиус которой $r = 0{,}50$ см (рис. 1.87). Длина горизонтальной части трубки $l = 22$ см. Расход воды $Q = 0{,}50$ л/с. Найти момент сил реакции воды на стенки этой трубки относительно точки O, обусловленный течением воды.

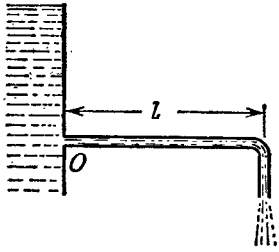


Рис. 1.87.

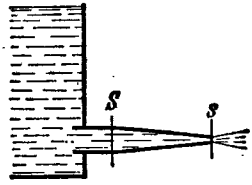


Рис. 1.88.

1.329. В боковой стенке широкого открытого бака вмонтирована суживающаяся трубка (рис. 1.88), через которую вытекает вода. Площадь сечения трубки уменьшается от $S = 3{,}0\ см^2$ до $s = 1{,}0\ см^2$. Уровень воды в баке на $h = 4{,}6$ м выше уровня в трубке. Пренебрегая вязкостью воды, найти горизонтальную составляющую силы, вырывающей трубку из бака.

1.330. Цилиндрический сосуд с водой вращают вокруг его вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. Найти:

а) форму свободной поверхности воды;

б) распределение давления воды на дне сосуда вдоль его радиуса, если давление в центре дна равно p_0.

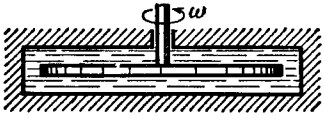


Рис. 1.89.

1.331. Тонкий горизонтальный диск радиуса $R = 10$ см расположен в цилиндрической полости с маслом, вязкость которого $\eta = 0{,}08$ П (рис. 1.89). Зазоры между диском и горизонтальными торцами полости одинаковы и равны $h = 1{,}0$ мм. Найти мощность, которую развивают силы вязкости, действующие на диск, при вращении его с угловой скоростью $\omega = 60$ рад/с. Краевыми эффектами пренебречь

1.332. Длинный цилиндр радиуса R_1 перемещают вдоль его оси с постоянной скоростью v_0 внутри коаксиального с ним неподвижного цилиндра радиуса R_2. Пространство между цилиндрами заполнено вязкой жидкостью. Найти скорость жидкости в зависимости от расстояния r до оси цилиндров. Течение ламинарное.

1.333. Жидкость с вязкостью η находится между двумя длинными коаксиальными цилиндрами с радиусами R_1 и R_2, причем $R_1 < R_2$. Внутренний цилиндр неподвижен, а внешний вращают с постоянной угловой скоростью ω_2. Движение жидкости ламинарное. Имея в виду, что сила трения, действующая на единицу площади цилиндрической поверхности радиуса r, определяется формулой $\sigma = \eta r\,(\partial\omega/\partial r)$, найти:

а) угловую скорость вращающейся жидкости в зависимости от радиуса r:

б) момент сил трения, действующих на единицу длины внешнего цилиндра.

1.334. По трубке длины l и радиуса R течет стационарный поток жидкости, плотность которой ρ и вязкость η. Скорость течения жидкости зависит от расстояния r до оси трубки по закону $v = v_0\,(1 - r^2/R^2)$. Найти:

а) объем жидкости, протекающей через сечение трубки в единицу времени;

б) кинетическую энергию жидкости в объеме трубки;

в) силу трения, которую испытывает трубка со стороны жидкости;

г) разность давлений на концах трубки.

1.335. В системе (рис. 1.90) из широкого сосуда A по трубке вытекает вязкая жидкость, плотность которой $\rho = 1{,}0$ г/см^3. Найти скорость вытекающей жидкости, если $h_1 = 10$ см, $h_2 = 20$ см и $h_3 = 35$ см. Расстояния l одинаковы.

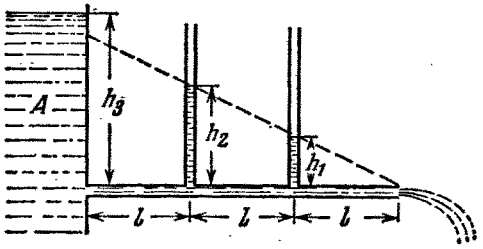


Рис. 1.90.

1.336. Радиус сечения трубопровода монотонно уменьшается по закону $r = r_0 e^{-\alpha x}$, где $\alpha = 0{,}50$ м$^{-1}$, x — расстояние от начала трубопровода. Найти отношение чисел Рейнольдса в сечениях, отстоящих друг от друга на $\Delta x = 3{,}2$ м.

1.337. При движении шарика радиуса $r_1 = 1{,}2$ мм в глицерине ламинарное обтекание наблюдается при скорости шарика, не превышающей $v_1 = 23$ см/с. При какой минимальной скорости v_2 шара радиуса $r_2 = 5{,}5$ см в воде обтекание станет турбулентным? Вязкости глицерина и воды равны соответственно $\eta_1 = 13{,}9$ П и $\eta_2 = 0{,}011$ П.

1.338. Свинцовый шарик равномерно опускается в глицерине, вязкость которого $\eta = 13{,}9$ П. При каком наибольшем диаметре шарика его обтекание еще остается ламинарным? Известно, что переход к турбулентному обтеканию соответствует числу $\mathrm{Re} = 0{,}5$ (это значение числа Re, при котором за характерный размер взят диаметр шарика).

1.339. Стальной шарик диаметра $d = 3{,}0$ мм опускается с нулевой начальной скоростью в прованском масле, вязкость которого $\eta = 0{,}90$ П. Через сколько времени после начала движения скорость шарика будет отличаться от установившегося значения на $n = 1{,}0\%$?

1.8. Релятивистская механика

● Лоренцево сокращение длины и замедление хода движущихся часов:

$$l = l_0\sqrt{1-(v/c)^2}, \quad \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \tag{1.8а}$$

где l_0 — собственная длина, Δt_0 — собственное время движущихся часов.

● Преобразования Лоренца *):

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \quad y' = y, \quad t' = \frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1-(V/c)^2}}. \tag{1.8б}$$

● Интервал s_{12} — инвариантная величина:

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = \mathrm{inv}, \tag{1.8в}$$

где t_{12} — промежуток времени между событиями *1* и *2*, l_{12} — расстояние между точками, где произошли эти события.

● Преобразование скорости *):

$$v_x' = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}, \quad v_y' = \frac{v_y\sqrt{1-(V/c)^2}}{1 - v_x V/c^2}. \tag{1.8г}$$

● Релятивистская масса и релятивистский импульс:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \tag{1.8д}$$

где m_0 — масса покоя, или просто масса.

● Релятивистское уравнение динамики частицы:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \tag{1.8е}$$

где $\mathbf{p}$ — релятивистский импульс частицы.

● Полная и кинетическая энергии релятивистской частицы:

$$E = mc^2 = m_0c^2 + T, \quad T = (m - m_0)c^2. \tag{1.8ж}$$

---

*) Предполагается, что K'-система отсчета движется со скоростью V в положительном направлении оси x K-системы, причем оси x' и x совпадают, а оси y' и y параллельны.

● Связь между энергией и импульсом релятивистской частицы:

$$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4, \quad pc = \sqrt{T(T + 2m_0c^2)}. \tag{1.8з}$$

● При рассмотрении столкновения частиц полезно использовать инвариантную величину:

$$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4, \tag{1.8и}$$

где E и p — полные энергия и импульс системы до столкновения, m_0 — масса покоя образовавшейся частицы (или системы).

1.340. Стержень движется в продольном направлении с постоянной скоростью v относительно инерциальной K-системы отсчета. При каком значении v длина стержня в этой системе отсчета будет на $\eta = 0{,}5\%$ меньше его собственной длины?

1.341. Имеется треугольник, собственная длина каждой стороны которого равна a. Найти периметр этого треугольника в системе отсчета, движущейся относительно него с постоянной скоростью V вдоль одной из его

а) биссектрис; б) сторон.

Исследовать полученные результаты при $V \ll c$ и $V \to c$, где c — скорость света.

1.342. Найти собственную длину стержня, если в лабораторной системе отсчета его скорость $v = c/2$, длина $l = 1{,}00$ м и угол между ним и направлением движения $\vartheta = 45°$.

1.343. Покоящийся прямой конус имеет угол полураствора $\vartheta = 45°$ и площадь боковой поверхности $S_0 = 4{,}0$ м^2. Найти в системе отсчета, движущейся со скоростью $v = {}^4/_5\, c$ вдоль оси конуса:

а) его угол полураствора; б) площадь боковой поверхности.

1.344. С какой скоростью двигались в K-системе отсчета часы, если за время $t = 5{,}0$ с (в K-системе) они отстали от часов этой системы на $\Delta t = 0{,}10$ с?

1.345. Стержень пролетает с постоянной скоростью мимо метки, неподвижной в K-системе отсчета. Время пролета $\Delta t = 20$ нс — в K-системе. В системе же отсчета, связанной со стержнем, метка движется вдоль него в течение $\Delta t' = 25$ нс. Найти собственную длину стержня.

1.346. Собственное время жизни некоторой нестабильной частицы $\Delta t_0 = 10$ нс. Найти путь, который пролетит эта частица до распада в лабораторной системе отсчета, где ее время жизни $\Delta t = 20$ нс.

1.347. В K-системе отсчета мю-мезон, движущийся со скоростью $v = 0{,}990\, c$, пролетел от места своего рождения до точки распада расстояние $l = 3{,}0$ км. Определить:

а) собственное время жизни этого мезона;

б) расстояние, которое пролетел мезон в K-системе с «его точки зрения».

1.348. Две частицы, двигавшиеся в лабораторной системе отсчета по одной прямой с одинаковой скоростью $v = {}^3/_4\, c$, попали

в неподвижную мишень с интервалом времени $\Delta t = 50$ нс. Найти собственное расстояние между частицами до попадания в мишень.

1.349. Стержень движется вдоль линейки с некоторой постоянной скоростью. Если зафиксировать положение обоих концов данного стержня одновременно в системе отсчета, связанной с линейкой, то разность отсчетов по линейке $\Delta x_1 = 4{,}0$ м. Если же положение обоих концов зафиксировать одновременно в системе отсчета, связанной со стержнем, то разность отсчетов по этой же линейке $\Delta x_2 = 9{,}0$ м. Найти собственную длину стержня и его скорость относительно линейки.

1.350. Два стержня одинаковой собственной длины l_0 движутся навстречу друг другу параллельно общей горизонтальной оси. В системе отсчета, связанной с одним из стержней, промежуток времени между моментами совпадения левых и правых концов стержней оказался равным Δt. Какова скорость одного стержня относительно другого?

1.351. Две нестабильные частицы движутся в K-системе отсчета по некоторой прямой в одном направлении со скоростью $v = 0{,}990\,c$. Расстояние между ними в этой системе отсчета $l = 120$ м. В некоторый момент обе частицы распались одновременно в системе отсчета, связанной с ними. Какой промежуток времени между моментами распада обеих частиц наблюдали в K-системе? Какая частица распалась позже в K-системе?

1.352. Стержень AB, ориентированный вдоль оси x K-системы отсчета, движется с постоянной скоростью v в положительном направлении оси x. Передним (по ходу движения) концом стержня является точка A, задним — точка B. Найти:

а) собственную длину стержня, если в момент t_A координата точки A равна x_A, а в момент t_B координата точки B равна x_B;

б) через какой промежуток времени надо зафиксировать координаты начала и конца стержня в K-системе, чтобы разность координат оказалась равной собственной длине стержня?

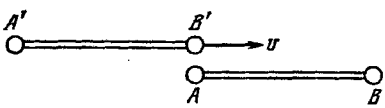


Рис. 1.91.

1.353. Стержень $A'B'$ движется с постоянной скоростью v относительно стержня AB (рис. 1.91). Оба стержня имеют одинаковую собственную длину l_0 и на концах каждого из них установлены синхронизированные между собой часы: A с B и A' с B'. Пусть момент, когда часы B' поравнялись с часами A, взят за начало отсчета времени в системах отсчета, связанных с каждым из стержней. Определить:

а) показания часов B и B' в момент, когда они окажутся напротив друг друга;

б) то же для часов A и A'.

1.354. Имеются две группы синхронизированных часов K и K', движущихся одна относительно другой со скоростью v, как пока-

зано на рис. 1.92. Возьмем за начало отсчета времени момент, когда часы A' окажутся напротив часов A. Изобразить примерное расположение стрелок всех часов в этот момент с «точки зрения» K-часов; K'-часов.

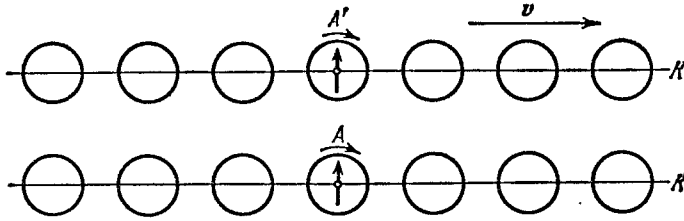


Рис. 1.92.

1.355. K'-система отсчета движется в положительном направлении оси x K-системы со скоростью V относительно последней. Пусть в момент совпадения начал координат O и O' показания часов обеих систем в этих точках равны нулю. Найти в K-системе скорость $\dot{x}$ перемещения точки, в которой показания часов обеих систем отсчета будут все время одинаковы. Убедиться, что $\dot{x} < V$.

1.356. В двух точках K-системы отсчета произошли события, разделенные промежутком времени Δt. Показать, что если эти события причинно связаны в K-системе (например, выстрел и попадание пули в мишень), то они причинно связаны и в любой другой инерциальной K'-системе отсчета.

1.357. На диаграмме пространства — времени (рис. 1.93) показаны три события A, B и C, которые произошли на оси x некоторой инерциальной системы отсчета. Найти:

а) промежуток времени между событиями A и B в той системе отсчета, где оба события произошли в одной точке;

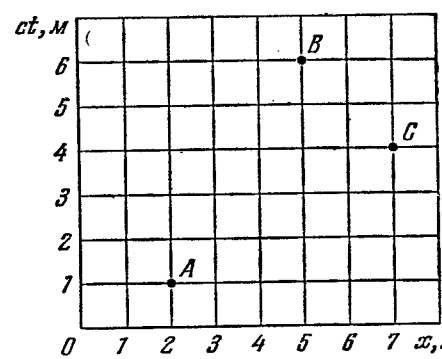


Рис. 1.93.

б) расстояние между точками, где произошли события A и C, в той системе отсчета, где они одновременны.

1.358. В плоскости xy K-системы отсчета движется частица, проекции скорости которой равны v_x и v_y. Найти скорость v' этой частицы в K'-системе, которая перемещается со скоростью V относительно K-системы в положительном направлении ее оси x.

1.359. Две частицы движутся навстречу друг другу со скоростями $v_1 = 0{,}50c$ и $v_2 = 0{,}75c$ по отношению к лабораторной системе отсчета. Найти:

а) скорость сближения частиц в лабораторной системе отсчета;

б) их относительную скорость.

1.360. Два стержня одинаковой собственной длины l_0 движутся в продольном направлении навстречу друг другу параллельно общей оси с одной и той же скоростью v относительно лабораторной системы отсчета. Чему равна длина каждого стержня в системе отсчета, связанной с другим стержнем?

1.361. Две релятивистские частицы движутся под прямым углом друг к другу в лабораторной системе отсчета, причем одна со скоростью v_1, а другая со скоростью v_2. Найти:

а) скорость сближения частиц в лабораторной системе отсчета;

б) их относительную скорость.

1.362. Некоторая нестабильная частица движется со скоростью v' в K'-системе отсчета вдоль ее оси y'. K'-система в свою очередь перемещается относительно K-системы со скоростью V в положительном направлении ее оси x. Оси x' и x обеих систем отсчета совпадают, оси y' и y параллельны друг другу. Найти путь, который частица пролетит в K-системе, если ее собственное время жизни равно Δt_0.

1.363. Частица движется в K-системе со скоростью v под углом ϑ к оси x. Найти соответствующий угол в K'-системе, перемещающейся со скоростью V относительно K-системы в положительном направлении ее оси x, если оси x и x' обеих систем совпадают.

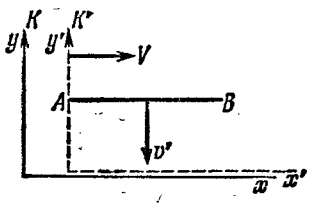


Рис. 1.94.

1.364. Стержень AB ориентирован параллельно оси x' K'-системы отсчета и движется в этой системе со скоростью v' вдоль ее оси y'. K'-система в свою очередь движется со скоростью V относительно K-системы, как показано на рис. 1.94. Найти угол ϑ между стержнем и осью x в K-системе.

1.365. K'-система перемещается с постоянной скоростью $\mathbf{V}$ относительно K-системы. Найти ускорение w' частицы в K'-системе, если в K-системе она движется со скоростью v и ускорением w по прямой:

а) в направлении вектора $\mathbf{V}$;

б) перпендикулярно к вектору $\mathbf{V}$.

1.366. Стартовавшая с Земли воображаемая космическая ракета движется с ускорением $w' = 10g$, одинаковым в каждой инерциальной системе, мгновенно сопутствующей ракете. Разгон продолжался по земному времени $\tau = 1{,}0$ год. Найти, на сколько процентов отличается скорость ракеты от скорости света в конце разгона. Каков путь, пройденный ракетой к этому моменту?

1.367. Используя данные предыдущей задачи, определить время разгона ракеты τ_0 в системе отсчета, связанной с самой ракетой.

Иметь в виду, что это время определяется формулой

$$\tau_0 = \int_0^{\tau} \sqrt{1 - (v/c)^2}\, dt,$$

где dt — интервал времени в системе Земли.

1.368. Во сколько раз релятивистская масса частицы, скорость которой отличается от скорости света на 0,010%, превышает ее массу покоя?

1.369. Плотность покоящегося тела равна ρ_0. Найти скорость системы отсчета относительно данного тела, в которой его плотность будет на $\eta = 25\%$ больше ρ_0.

1.370. Протон движется с импульсом $p = 10{,}0$ ГэВ/c, где c — скорость света. На сколько процентов отличается скорость этого протона от скорости света?

1.371. Найти скорость, при которой релятивистский импульс частицы в $\eta = 2$ раза превышает ее ньютоновский импульс.

1.372. Какую работу необходимо совершить, чтобы увеличить скорость частицы с массой покоя m_0 от 0,60 c до 0,80 c? Сравнить полученный результат со значением, вычисленным по классической формуле.

1.373. Найти скорость, при которой кинетическая энергия частицы равна ее энергии покоя.

1.374. При каких значениях отношения кинетической энергии частицы к ее энергии покоя относительная ошибка при расчете скорости частицы по классической формуле не превышает $\varepsilon = 0{,}010$?

1.375. Найти зависимость импульса от кинетической энергии частицы с массой покоя m_0. Вычислить импульс протона с кинетической энергией 500 МэВ.

1.376. Пучок релятивистских частиц с кинетической энергией T падает на поглощающую мишень. Сила тока в пучке I, заряд и масса покоя каждой частицы e и m_0. Найти силу давления пучка на мишень и выделяющуюся в ней мощность.

1.377. Шар движется с релятивистской скоростью v через газ, в единице объема которого содержится n медленно движущихся частиц, каждая массы m. Найти давление p, производимое газом на элемент поверхности шара, нормальный к его скорости, если частицы отражаются упруго. Убедиться, что это давление одинаково как в системе отсчета, связанной с шаром, так и в системе отсчета, связанной с газом.

1.378. Частица с массой покоя m_0 в момент $t = 0$ начинает двигаться под действием постоянной силы **F**. Найти зависимость от времени t скорости частицы и пройденного ею пути.

1.379. Частица с массой покоя m_0 движется вдоль оси x K-системы по закону $x = \sqrt{a^2 + c^2t^2}$, где a — некоторая постоянная, c — скорость света, t — время. Найти силу, действующую на частицу в этой системе отсчета.

1.380. Исходя из основного уравнения релятивистской динамики, найти:

а) в каких случаях ускорение частицы совпадает по направлению с действующей на нее силой $\mathbf{F}$;

б) коэффициенты пропорциональности между силой $\mathbf{F}$ и ускорением $\mathbf{w}$ в тех случаях, когда $\mathbf{F} \perp \mathbf{v}$ и $\mathbf{F} \parallel \mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ — скорость частицы.

1.381. Релятивистская частица с импульсом p и полной энергией E движется вдоль оси x K-системы. Показать, что в K'-системе, движущейся с постоянной скоростью V относительно K-системы в положительном направлении ее оси x, импульс и полная энергия данной частицы определяются формулами:

$$p'_x = \frac{p_x - EV/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad E' = \frac{E - p_x V}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

где $\beta = V/c$.

1.382. Энергия фотона в K-системе равна ε. Воспользовавшись формулами преобразования, приведенными в предыдущей задаче, найти энергию ε' этого фотона в K'-системе, перемещающейся со скоростью V относительно K-системы в направлении движения фотона. При каком значении V энергия фотона $\varepsilon' = \varepsilon/2$?

1.383. Показать, что для частицы величина $E^2 - p^2c^2$ есть инвариант, т. е. имеет одно и то же значение во всех инерциальных системах отсчета. Каково значение этого инварианта?

1.384. Нейтрон с кинетической энергией $T = 2\,m_0c^2$, где m_0 — его масса покоя, налетает на другой, покоящийся нейтрон. Определить:

а) суммарную кинетическую энергию $\tilde{T}$ обоих нейтронов в системе их центра инерции и импульс $\tilde{p}$ каждого нейтрона в этой системе;

б) скорость центра инерции этой системы частиц.

Указание. Воспользоваться инвариантностью величины $E^2 - p^2c^2$ при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой (здесь E — полная энергия системы, p — ее суммарный импульс).

1.385. Частица с массой покоя m_0 и кинетической энергией T налетает на покоящуюся частицу с той же массой покоя. Найти массу покоя и скорость составной частицы, образовавшейся в результате соударения.

1.386. Какова должна быть кинетическая энергия протона, налетающего на другой, покоящийся протон, чтобы их суммарная кинетическая энергия в системе центра инерции была такая же, как у двух протонов, движущихся навстречу друг другу с кинетическими энергиями $T = 25{,}0$ ГэВ?

1.387. Неподвижная частица с массой покоя m_0 распадается на три частицы с массами покоя m_1, m_2 и m_3. Найти наибольшую полную энергию, которую может иметь, например, частица m_1.

1.388. Релятивистская ракета выбрасывает струю газа с нерелятивистской скоростью $\mathbf{u}$, постоянной относительно ракеты. Найти зависимость скорости v ракеты от ее массы покоя m, если в начальный момент масса покоя ракеты равна m_0.

ТЕРМОДИНАМИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

2.1. Уравнение состояния газа. Процессы

● Уравнение состояния идеального газа:

$$pV = \frac{m}{M} RT, \qquad (2.1а)$$

где M — молярная масса (масса моля).

● Барометрическая формула:

$$p = p_0 e^{-Mgh/RT}, \qquad (2.1б)$$

где p_0 — давление на высоте $h = 0$.

● Уравненне состояния ван-дер-ваальсовского газа (для моля):

$$\left(p + \frac{a}{V_M^2}\right)(V_M - b) = RT, \qquad (2.1в)$$

где V_M — молярный объем, занимаемый при данных p и T.

2.1. В сосуде объемом $V = 30$ л содержится идеальный газ при температуре 0 °С. После того, как часть газа была выпущена наружу, давление в сосуде понизилось на $\Delta p = 0{,}78$ атм (без изменения температуры). Найти массу выпущенного газа. Плотность данного газа при нормальных условиях $\rho = 1{,}3$ г/л.

2.2. Два одинаковых баллона соединены трубкой с клапаном, пропускающим газ из одного баллона в другой при разности давлений $\Delta p \geqslant 1{,}10$ атм. Сначала в одном баллоне был вакуум, а в другом — идеальный газ при температуре $t_1 = 27$ °С и давлении $p_1 = 1{,}00$ атм. Затем оба баллона нагрели до температуры $t_2 = 107$ °С. Каким стало давление газа в баллоне, где был вакуум?

2.3. Сосуд объемом $V = 20$ л содержит смесь водорода и гелия при температуре $t = 20$ °С и давлении $p = 2{,}0$ атм. Масса смеси $m = 5{,}0$ г. Найти отношение массы водорода к массе гелия в данной смеси.

2.4. В сосуде находится смесь $m_1 = 7{,}0$ г азота и $m_2 = 11$ г углекислого газа при температуре $T = 290$ К и давлении $p_0 = 1{,}0$ атм. Найти плотность этой смеси, считая газы идеальными.

2.5. В баллоне объемом $V = 7{,}5$ л при температуре $T = 300$ К находится смесь идеальных газов: $\nu_1 = 0{,}10$ моля кислорода,

$\nu_2 = 0{,}20$ моля азота и $\nu_3 = 0{,}30$ моля углекислого газа. Считая газы идеальными, найти:

а) давление смеси;

б) среднюю молярную массу M данной смеси, которая входит в уравнение ее состояния $pV = (m/M)\,RT$, где m — масса смеси.

2.6. В вертикальном закрытом с обоих торцов цилиндре находится легкоподвижный поршень, по обе стороны которого — по одному молю воздуха. В равновесном состоянии при температуре $T_0 = 300$ К объем верхней части цилиндра в $\eta = 4{,}0$ раза больше объема нижней части. При какой температуре отношение этих объемов станет $\eta' = 3{,}0$?

2.7. Поршневым воздушным насосом откачивают сосуд объемом V. За один цикл (ход поршня) насос захватывает объем ΔV. Сколько следует сделать циклов, чтобы давление в сосуде уменьшилось в η раз? Процесс считать изотермическим, газ — идеальным.

2.8. Найти давление воздуха в откачиваемом сосуде как функцию времени откачки t. Объем сосуда V, первоначальное давление p_0. Процесс считать изотермическим и скорость откачки не зависящей от давления и равной C.

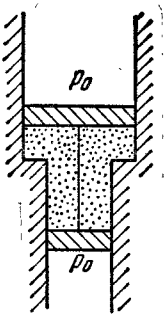


Рис. 2.1.

Примечание. Скоростью откачки называют объем газа, откачиваемый за единицу времени, причем этот объем измеряется при давлении газа в данный момент.

2.9. Камеру объемом $V = 87$ л откачивают насосом, скорость откачки которого (см. примечание к предыдущей задаче) $C = 10$ л/с. Через сколько времени давление в камере уменьшится в $\eta = 1000$ раз?

2.10. В гладкой открытой с обоих концов вертикальной трубе, имеющей два разных сечения (рис. 2.1), находятся два поршня, соединенные нерастяжимой нитью, а между поршнями — один моль идеального газа. Площадь сечения верхнего поршня на $\Delta S = 10$ см^2 больше, чем нижнего. Общая масса поршней $m = 5{,}0$ кг. Давление наружного воздуха $p_0 = 1{,}0$ атм. На сколько кельвин надо нагреть газ между поршнями, чтобы они переместились на $l \approx 5{,}0$ см?

2.11. Найти максимально возможную температуру идеального газа в каждом из нижеследующих процессов:

а) $p = p_0 - \alpha V^2$; б) $p = p_0 e^{-\beta V}$,

где p_0, α и β — положительные постоянные, V — объем одного моля газа.

2.12. Определить наименьшее возможное давление идеального газа в процессе, происходящем по закону $T = T_0 + \alpha V^2$, где T_0 и α — положительные постоянные, V — объем одного моля газа. Изобразить примерный график этого процесса в параметрах p, V.

2.13. Высокий цилиндрический сосуд с газообразным азотом находится в однородном поле тяжести, ускорение свободного паде-

ния в котором равно g. Температура азота меняется по высоте так, что его плотность всюду одинакова. Найти градиент температуры dT/dh.

2.14. Допустим, давление p и плотность ρ воздуха связаны соотношением $p/\rho^n = \text{const}$ независимо от высоты (здесь n — постоянная). Найти соответствующий градиент температуры.

2.15. Пусть на поверхности Земли воздух находится при нормальных условиях. Считая, что температура и молярная масса воздуха не зависят от высоты, найти его давление на высоте 5,0 км над поверхностью Земли и в шахте на глубине 5,0 км.

2.16. Считая, что температура и молярная масса воздуха, а также ускорение свободного падения не зависят от высоты, найти разность высот, на которых плотности воздуха при температуре 0 °С отличаются:

а) в е раз; б) на $\eta = 1{,}0\%$.

2.17. Идеальный газ с молярной массой M находится в высоком вертикальном цилиндрическом сосуде, площадь основания которого S и высота h. Температура газа T, его давление на нижнее основание p_0. Считая, что температура и ускорение свободного падения g не зависят от высоты, найти массу газа в сосуде.

2.18. Идеальный газ с молярной массой M находится в очень высоком вертикальном цилиндрическом сосуде в однородном поле тяжести, для которого ускорение свободного падения равно g. Считая температуру газа всюду одинаковой и равной T, найти высоту, на которой находится центр тяжести газа.

2.19. Идеальный газ с молярной массой M находится в однородном поле тяжести, ускорение свободного падения в котором равно g. Найти давление газа как функцию высоты h, если при $h = 0$ давление $p = p_0$, а температура изменяется с высотой как

а) $T = T_0(1 - ah)$; б) $T = T_0(1 + ah)$, где a — положительная постоянная.

2.20. Горизонтальный цилиндр, закрытый с одного конца, вращают с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через открытый конец цилиндра. Давление воздуха снаружи p_0, температура T, молярная масса воздуха M. Найти давление воздуха как функцию расстояния r от оси вращения. Молярную массу считать не зависящей от r.

2.21. Какому давлению необходимо подвергнуть углекислый газ при температуре $T = 300$ К, чтобы его плотность оказалась равной $\rho = 500$ г/л? Расчет провести как для идеального газа, так и для ван-дер-ваальсовского.

2.22. Один моль азота находится в сосуде объемом $V = 1{,}00$ л. Найти:

а) температуру азота, при которой ошибка в давлении, определяемом уравнением состояния идеального газа, составляет $\eta = 10\%$ (по сравнению с давлением согласно уравнению Ван-дер-Ваальса);

б) давление газа при этой температуре.

2.23. Один моль некоторого газа находится в сосуде объемом $V = 0{,}250$ л. При температуре $T_1 = 300$ К давление газа $p_1 = 90$ атм, а при $T_2 = 350$ К давление $p_2 = 110$ атм. Найти постоянные Ван-дер-Ваальса для этого газа.

2.24. Найти коэффициент изотермической сжимаемости $\varkappa$ ван-дер-ваальсовского газа как функцию объема V при температуре T.

Примечание. По определению, $\varkappa = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}$.

2.25. Воспользовавшись результатом решения предыдущей задачи, найти, при какой температуре коэффициент изотермической сжимаемости $\varkappa$ ван-дер-ваальсовского газа больше, чем у идеального. Рассмотреть случай, когда молярный объем значительно больше поправки b.

2.2. Первое начало термодинамики. Теплоемкость

● Первое начало термодинамики:

$$Q = \Delta U + A, \tag{2.2а}$$

где ΔU — приращение внутренней энергии системы.

● Работа, совершаемая газом,

$$A = \int p\, dV. \tag{2.2б}$$

● Внутренняя энергия идеального газа:

$$U = \frac{m}{M} C_V T = \frac{m}{M}\frac{RT}{\gamma - 1} = \frac{pV}{\gamma - 1}. \tag{2.2в}$$

● Молярная теплоемкость газа при политропическом процессе ($pV^n = \text{const}$):

$$C = \frac{R}{\gamma - 1} - \frac{R}{n - 1} = \frac{(n - \gamma) R}{(n - 1)(\gamma - 1)}. \tag{2.2г}$$

● Внутренняя энергия моля ван-дер-ваальсовского газа:

$$U = C_V T - \frac{a}{V_M}. \tag{2.2д}$$

2.26. Показать, что внутренняя энергия U воздуха в комнате не зависит от температуры, если наружное давление p постоянно. Вычислить U, если p равно нормальному атмосферному давлению и объем комнаты $V = 40$ м^3.

2.27. Теплоизолированный сосуд с газом, молярная масса которого M и $C_p/C_V = \gamma$, движется со скоростью v. Найти приращение температуры газа при внезапной остановке сосуда.

2.28. Два теплоизолированных баллона *1* и *2* наполнены воздухом и соединены короткой трубкой с краном. Известны объемы баллонов, а также давление и температура воздуха в них (V_1, p_1, T_1 и V_2, p_2, T_2). Найти температуру и давление воздуха, которые установятся после открытия крана.

2.29. Газообразный водород, находившийся при нормальных условиях в закрытом сосуде объемом $V = 5{,}0$ л, охладили на $\Delta T =$

= 55 К. Найти приращение внутренней энергии газа и количество отданного им тепла.

2.30. Какое количество тепла необходимо сообщить азоту при его изобарическом нагревании, чтобы газ совершил работу $A = 2{,}0$ Дж?

2.31. Один моль некоторого идеального газа изобарически нагрели на $\Delta T = 72$ К, сообщив ему количество тепла $Q = 1{,}60$ кДж. Найти совершенную газом работу, приращение его внутренней энергии и величину $\gamma = C_p/C_V$.

2.32. Два моля идеального газа при температуре $T_0 = 300$ К охладили изохорически, вследствие чего его давление уменьшилось в $n = 2{,}0$ раза. Затем газ изобарически расширили так, что в конечном состоянии его температура стала равной первоначальной. Найти количество тепла, поглощенного газом в данном процессе.

2.33. Вычислить величину $\gamma = C_p/C_V$ для газовой смеси, состоящей из $\nu_1 = 2{,}0$ моля кислорода и $\nu_2 = 3{,}0$ моля углекислого газа. Газы считать идеальными.

2.34. Вычислить удельные теплоемкости c_V и c_p для газовой смеси, состоящей из 7,0 г азота и 20 г аргона. Газы считать идеальными.

2.35. В вертикальном цилиндре под поршнем находится один моль некоторого идеального газа при температуре T. Пространство над поршнем сообщается с атмосферой. Какую работу необходимо совершить, чтобы, медленно поднимая поршень, изотермически увеличить объем газа под ним в n раз? Трение поршня о стенки цилиндра пренебрежимо мало.

2.36. Внутри закрытого с обоих концов горизонтального цилиндра находится легкоподвижный поршень. Первоначально поршень делит цилиндр на две равные части, каждая объемом V_0, в которых находится идеальный газ одинаковой температуры и под одним и тем же давлением p_0. Какую работу необходимо совершить, чтобы, медленно двигая поршень, изотермически увеличить объем одной части газа в η раз по сравнению с объемом другой части?

2.37. Три моля идеального газа, находившегося при температуре $T_0 = 273$ К, изотермически расширили в $n = 5{,}0$ раза и затем изохорически нагрели так, что в конечном состоянии его давление стало равным первоначальному. За весь процесс газу сообщили количество тепла $Q = 80$ кДж. Найти величину $\gamma = C_p/C_V$ для этого газа.

2.38. Изобразить для идеального газа примерные графики изохорического, изобарического, изотермического и адиабатического процессов на диаграмме:

а) p, T; б) V, T.

2.39. Один моль кислорода, находившегося при температуре $T_0 = 290$ К, адиабатически сжали так, что его давление возросло в $\eta = 10{,}0$ раза. Найти:

а) температуру газа после сжатия;

б) работу, которая была совершена над газом.

2.40. Некоторую массу азота сжали в $\eta = 5{,}0$ раза (по объему) один раз адиабатически, другой раз изотермически. Начальное состояние газа в обоих случаях одинаково. Найти отношение соответствующих работ, затраченных на сжатие.

2.41. Внутри закрытого теплоизолированного цилиндра с идеальным газом находится легкоподвижный теплопроводящий поршень. При равновесии поршень делит цилиндр на две равные части и температура газа равна T_0. Поршень начали медленно перемещать. Найти температуру газа как функцию отношения η объема большей части к объему меньшей части. Показатель адиабаты газа γ.

2.42. Определить скорость v истечения гелия из теплоизолированного сосуда в вакуум через малое отверстие. Считать, что при этом условии скорость потока газа в сосуде пренебрежимо мала. Температура гелия в сосуде $T = 1000$ К.

2.43. Объем идеального газа с показателем адиабаты γ изменяют по закону $V = a/T$, где a — постоянная. Найти количество тепла, полученное одним молем газа в этом процессе, если температура газа испытала приращение ΔT.

2.44. Показать, что процесс, при котором работа идеального газа пропорциональна соответствующему приращению его внутренней энергии, описывается уравнением $pV^n = \text{const}$, где n — постоянная.

2.45. Найти молярную теплоемкость идеального газа при политропическом процессе $pV^n = \text{const}$, если показатель адиабаты газа равен γ. При каких значениях показателя политропы n теплоемкость газа будет отрицательной?

2.46. При некотором политропическом процессе объем аргона был увеличен в $\alpha = 4{,}0$ раза. Давление при этом уменьшилось в $\beta = 8{,}0$ раза. Найти молярную теплоемкость аргона в этом процессе, считая газ идеальным.

2.47. Один моль аргона расширили по политропе с показателем $n = 1{,}50$. При этом температура газа испытала приращение $\Delta T = -26$ К. Найти:

а) количество полученного газом тепла;

б) работу, совершенную газом.

2.48. Идеальный газ с показателем адиабаты γ расширили по закону $p = \alpha V$, где α — постоянная. Первоначальный объем газа V_0. В результате расширения объем увеличился в η раз. Найти:

а) приращение внутренней энергии газа;

б) работу, совершенную газом;

в) молярную теплоемкость газа в этом процессе.

2.49. Идеальный газ, показатель адиабаты которого γ, расширяют так, что сообщаемое газу тепло равно убыли его внутренней энергии. Найти:

а) молярную теплоемкость газа в этом процессе;

б) уравнение процесса в параметрах T, V;

в) совершенную молем газа работу при увеличении его объема в η раз.

2.50. Один моль идеального газа с показателем адиабаты γ совершает процесс, при котором его давление зависит от температуры по закону $p = aT^{\alpha}$, где a и α — постоянные. Найти:

а) работу, которую произведет газ, если его температура испытает приращение ΔT;

б) молярную теплоемкость газа в этом процессе; при каком значении α теплоемкость будет отрицательной?

2.51. Идеальный газ с показателем адиабаты γ совершает процесс, при котором его внутренняя энергия зависит от объема по закону $U = aV^{\alpha}$, где a и α — постоянные. Найти:

а) работу, которую произведет газ, и тепло, которое надо сообщить ему, чтобы внутренняя энергия испытала приращение ΔU;

б) молярную теплоемкость газа в этом процессе.

2.52. Имеется идеальный газ, молярная теплоемкость которого при постоянном объеме равна C_V. Найти молярную теплоемкость этого газа как функцию его объема V, если газ совершает процесс по закону:

а) $T = T_0 e^{\alpha V}$; б) $p = p_0 e^{\alpha V}$,

где T_0, p_0 и α — постоянные.

2.53. Один моль идеального газа с показателем адиабаты γ совершает процесс по закону $p = p_0 + \alpha/V$, где p_0 и α — положительные постоянные. Найти:

а) теплоемкость газа как функцию его объема;

б) приращение внутренней энергии газа, совершенную им работу и сообщенное газу тепло, если его объем увеличился от V_1 до V_2.

2.54. Один моль идеального газа, теплоемкость которого при постоянном давлении равна C_p, совершает процесс по закону $T = T_0 + \alpha V$, где T_0 и α — постоянные. Найти:

а) теплоемкость газа как функцию его объема;

б) сообщенное газу тепло, если его объем увеличился от V_1 до V_2.

2.55. Найти для идеального газа уравнение процесса (в переменных T, V), при котором молярная теплоемкость газа изменяется по закону:

а) $C = C_V + \alpha T$; б) $C = C_V + \beta V$; в) $C = C_V + ap$.

Здесь α, β и a — постоянные.

2.56. Имеется идеальный газ с показателем адиабаты γ. Его молярная теплоемкость при некотором процессе изменяется по закону $C = \alpha/T$, где α — постоянная. Найти:

а) работу, совершенную одним молем газа при его нагревании от температуры T_0 до температуры в η раз большей;

б) уравнение процесса в параметрах p, V.

2.57. Найти работу, совершаемую одним молем ван-дер-ваальсовского газа при изотермическом расширении его от объема V_1 до V_2 при температуре T.

2.58. Один моль кислорода расширили от объема $V_1 = 1{,}00$ л до $V_2 = 5{,}0$ л при постоянной температуре $T = 280$ К. Вычислить:

а) приращение внутренней энергии газа;

б) количество поглощенного тепла.

Газ считать ван-дер-ваальсовским.

2.59. Найти для ван-дер-ваальсовского газа:

а) уравнение адиабаты в параметрах T, V;

б) разность молярных теплоемкостей $C_p - C_V$ как функцию T и V.

2.60. Два теплоизолированных баллона соединены между собой трубкой с краном. В одном баллоне объемом $V_1 = 10$ л находится $\nu = 2{,}5$ моля углекислого газа. Второй баллон объемом $V_2 = 100$ л откачан до высокого вакуума. Кран открыли, и газ адиабатически расширился. Считая, что газ подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса, найти приращение его температуры в результате расширения.

2.61. Какое количество тепла надо сообщить $\nu = 3{,}0$ молям углекислого газа, чтобы при расширении в вакуум от объема $V_1 = 5{,}0$ л до $V_2 = 10$ л температура его не изменилась?

2.3. Молекулярно-кинетическая теория. Распределения Максвелла и Больцмана

● Число ударов молекул газа об единицу поверхности стенки за единицу времени:

$$\nu = {}^1/_4 n \langle v \rangle, \tag{2.3а}$$

где n — концентрация молекул, $\langle v \rangle$ — их средняя скорость.

● Уравнение состояния идеального газа:

$$p = nkT. \tag{2.3б}$$

● Средняя энергия молекул:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT, \tag{2.3в}$$

где i — сумма поступательных, вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы.

● Распределение Максвелла:

$$dN(v_x) = N \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-mv_x^2/2kT}\, dv_x, \tag{2.3г}$$

$$dN(v) = N \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} 4\pi v^2\, dv. \tag{2.3д}$$

● Распределение Максвелла в приведенном виде:

$$dN(u) = N \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2\, du, \tag{2.3е}$$

где $u = v/v_{\text{вер}}$, $v_{\text{вер}}$ — наиболее вероятная скорость.

● Наиболее вероятная, средняя и средняя квадратичная скорости молекул:

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{2\frac{kT}{m}}, \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi}\frac{kT}{m}}, \quad v_{\text{кв}} = \sqrt{3\frac{kT}{m}}. \tag{2.3ж}$$

● Распределение Больцмана:

$$n = n_0 e^{-(U-U_0)/kT}, \tag{2.3з}$$

где U — потенциальная энергия молекулы.

2.62. Современные вакуумные насосы позволяют получать давления до $p = 4 \cdot 10^{-15}$ атм (при комнатной температуре). Считая, что газом является азот, найти число его молекул в 1 см^3 и среднее расстояние между ними при этом давлении.

2.63. В сосуде объемом $V = 5{,}0$ л находится азот массы $m = 1{,}4$ г при температуре $T = 1800$ К. Найти давление газа, имея в виду, что при этой температуре $\eta = 30\%$ молекул диссоциировано на атомы.

2.64. Плотность смеси гелия и азота при нормальных условиях $\rho = 0{,}60$ г/л. Найти концентрацию атомов гелия в данной смеси.

2.65. Параллельный пучок молекул азота, имеющих скорость $v = 400$ м/с, падает на стенку под углом $\vartheta = 30°$ к ее нормали. Концентрация молекул в пучке $n = 0{,}9 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$. Найти давление пучка на стенку, считая, что молекулы отражаются от нее по закону абсолютно упругого удара.

2.66. Найти число степеней свободы молекулы газа, если при нормальных условиях плотность газа $\rho = 1{,}3$ мг/см^3 и скорость распространения звука в нем $v = 330$ м/с.

2.67. Определить отношение скорости v звука в газе к средней квадратичной скорости молекул газа, если молекулы:

а) одноатомные; б) жесткие двухатомные.

2.68. Газ, состоящий из N-атомных молекул, имеет температуру T, при которой у молекул возбуждены все степени свободы (поступательные, вращательные и колебательные). Найти среднюю энергию молекулы такого газа. Какую часть этой энергии составляет энергия поступательного движения?

2.69. Пусть газ нагрет до температуры, при которой у молекул возбуждены все степени свободы (поступательные, вращательные и колебательные). Найти молярную теплоемкость такого газа при изохорическом процессе, а также показатель адиабаты γ, если газ состоит из молекул:

а) двухатомных;

б) линейных N-атомных;

в) объемных N-атомных.

2.70. Идеальный газ, состоящий из N-атомных молекул, расширяют изобарически. Считая, что у молекул возбуждены все степени свободы (поступательные, вращательные и колебательные), найти, какая доля теплоты, сообщаемой газу в этом процессе, расходуется на работу расширения. Чему равна эта доля для одноатомного газа?

2.71. Найти молярную массу и число степеней свободы молекул газа, если известны его удельные теплоемкости: $c_V = 0{,}65$ Дж/(г·К) и $c_p = 0{,}91$ Дж/(г·К).

2.72. Найти число степеней свободы молекул газа, молярная теплоемкость которого

а) при постоянном давлении $C_p = 29$ Дж/(моль·К);

б) в процессе $pT = \text{const}$ равна $C = 29$ Дж/(моль·К).

2.73. Вычислить показатель адиабаты γ для смеси, состоящей из ν_1 молей одноатомного газа и ν_2 молей двухатомного газа из жестких молекул.

2.74. Теплоизолированный сосуд с газообразным азотом при температуре $t = 27$ °С движется со скоростью $v = 100$ м/с. Как и на сколько процентов изменится давление газа после внезапной остановки сосуда?

2.75. Вычислить при температуре $t = 17$ °С:

а) среднюю квадратичную скорость и среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекулы кислорода;

б) среднюю квадратичную скорость капельки воды диаметра $d = 0{,}10$ мкм, взвешенной в воздухе.

2.76. Во сколько раз надо расширить адиабатически газ, состоящий из жестких двухатомных молекул, чтобы их средняя квадратичная скорость уменьшилась в $\eta = 1{,}50$ раза?

2.77. Азот массы $m = 15$ г находится в закрытом сосуде при температуре $T = 300$ К. Какое количество тепла необходимо сообщить азоту, чтобы средняя квадратичная скорость его молекул возросла в $\eta = 2{,}0$ раза?

2.78. Газ, состоящий из жестких двухатомных молекул, находится при температуре $T = 300$ К. Вычислить среднюю квадратичную угловую скорость вращения молекулы, если ее момент инерции $I = 2{,}1 \cdot 10^{-39}$ г·см^2.

2.79. Газ из жестких двухатомных молекул, находившийся при нормальных условиях, адиабатически сжали в $\eta = 5{,}0$ раза по объему. Найти среднюю кинетическую энергию вращательного движения молекулы в конечном состоянии.

2.80. Во сколько раз изменится число ударов жестких двухатомных молекул газа о поверхность стенки в единицу времени, если газ адиабатически расширить в η раз?

2.81. Объем газа, состоящего из жестких двухатомных молекул, увеличили в $\eta = 2{,}0$ раза по политропе с молярной теплоемкостью $C = R$. Во сколько раз изменилась при этом частота ударов молекул о стенку сосуда?

2.82. Газ, состоящий из жестких двухатомных молекул, расширили политропически так, что частота ударов молекул о стенку сосуда не изменилась. Найти молярную теплоемкость газа в этом процессе.

2.83. Вычислить наиболее вероятную, среднюю и среднюю квадратичную скорости молекул газа, у которого при нормальном атмосферном давлении плотность $\rho = 1{,}00$ г/л.

2.84. Найти относительное число молекул газа, скорости которых отличаются не более чем на $\delta\eta = 1{,}00\%$ от значения:

а) наиболее вероятной скорости;

б) средней квадратичной скорости.

2.85. Определить температуру газа, для которой:

а) средняя квадратичная скорость молекул водорода больше их наиболее вероятной скорости на $\Delta v = 400$ м/с;

б) функция распределения молекул кислорода по скоростям $F(v)$ будет иметь максимум при скорости $v = 420$ м/с.

2.86. Найти для газообразного азота:

а) температуру, при которой скоростям молекул $v_1 = 300$ м/с и $v_2 = 600$ м/с соответствуют одинаковые значения функции распределения Максвелла $F(v)$;

б) скорость v молекул, при которой значение функции распределения Максвелла $F(v)$ для температуры T_0 будет таким же, как и для температуры в η раз большей.

2.87. При какой температуре газа, состоящего из смеси азота и кислорода, наиболее вероятные скорости молекул азота и кислорода будут отличаться друг от друга на $\Delta v = 30$ м/с?

2.88. Смесь водорода и гелия находится при температуре $T = 300$ К. При каком значении скорости v молекул значения максвелловской функции распределения по скоростям $F(v)$ будут одинаковыми для обоих газов?

2.89. При какой температуре газа число молекул со скоростями в заданном интервале v, $v + dv$ будет максимально? Масса каждой молекулы равна m.

2.90. Определить относительное число молекул, проекции скорости которых на ось x лежат в интервале v_x, $v_x + dv_x$, а модули перпендикулярной составляющей скорости — в интервале $v_\perp$, $v_\perp + dv_\perp$. Масса каждой молекулы m, температура газа T.

2.91. Вычислить с помощью распределения Максвелла среднюю проекцию скорости $\langle v_x \rangle$ и среднее значение модуля этой проекции $\langle | v_x | \rangle$, если масса каждой молекулы m и температура газа T.

2.92. Найти с помощью распределения Максвелла $\langle v_x^2 \rangle$ — среднее значение квадрата v_x-проекции скорости молекул газа при температуре T. Масса каждой молекулы равна m.

2.93. Вычислить с помощью распределения Максвелла число ν молекул газа, падающих в единицу времени на единичную площадку, если концентрация молекул n, температура T и масса каждой молекулы m.

2.94. Определить с помощью распределения Максвелла давление, оказываемое газом на стенку, если температура газа T и концентрация молекул n.

2.95. Воспользовавшись распределением Максвелла, найти $\langle 1/v \rangle$ — среднее значение обратной скорости молекул идеального газа, находящегося при температуре T, если масса каждой молекулы m. Сравнить полученную величину с обратной величиной средней скорости.

2.96. Газ состоит из молекул массы m и находится при температуре T. Найти с помощью распределения Максвелла по скоростям v соответствующее распределение молекул по кинетическим энергиям ε. Определить наиболее вероятное значение кинетической энергии $\varepsilon_{\text{вер}}$. Соответствует ли $\varepsilon_{\text{вер}}$ наиболее вероятной скорости?

2.97. Какая часть одноатомных молекул газа, находящегося в тепловом равновесии, имеет кинетическую энергию, отличающуюся от ее среднего значения на $\delta\eta = 1{,}0\%$?

2.98. Какая часть молекул газа, находящегося при температуре T, имеет кинетическую энергию поступательного движения большую, чем ε_0, если $\varepsilon_0 \gg kT$?

2.99. Распределение молекул по скоростям в пучке, выходящем из отверстия в сосуде, описывается функцией $F(v) = Av^3 e^{-mv^2/2kT}$, где T — температура газа внутри сосуда. Найти наиболее вероятные значения:

а) скорости молекул в пучке; сравнить полученную величину с наиболее вероятной скоростью молекул в самом сосуде;

б) кинетической энергии молекул в пучке.

2.100. Идеальный газ, состоящий из молекул массы m с концентрацией n, имеет температуру T. Найти с помощью распределения Максвелла число молекул, падающих в единицу времени на единицу поверхности стенки под углами ϑ, $\vartheta + d\vartheta$ к ее нормали.

2.101. Исходя из условий предыдущей задачи, найти число молекул, падающих в единицу времени на единицу поверхности стенки со скоростями в интервале v, $v + dv$.

2.102. Найти силу, действующую на частицу со стороны однородного поля, если концентрации этих частиц на двух уровнях, отстоящих друг от друга на расстоянии $\Delta h = 3{,}0$ см (вдоль поля), отличаются в $\eta = 2{,}0$ раза. Температура системы $T = 280$ К.

2.103. При наблюдении в микроскоп взвешенных частиц гуммигута обнаружено, что среднее число их в слоях, расстояние между которыми $h = 40$ мкм, отличается друг от друга в $\eta = 2{,}0$ раза. Температура среды $T = 290$ К. Диаметр частиц $d = 0{,}40$ мкм и их плотность на $\Delta\rho = 0{,}20$ г/см^3 больше плотности окружающей жидкости. Найти по этим данным число Авогадро.

2.104. Пусть η_0 — отношение концентрации молекул водорода к концентрации молекул азота вблизи поверхности Земли, а η — соответствующее отношение на высоте $h = 3000$ м. Найти отношение η/η_0 при $T = 280$ К, полагая, что температура и ускорение свободного падения не зависят от высоты.

2.105. В длинном вертикальном сосуде находится газ, состоящий из двух сортов молекул с массами m_1 и m_2, причем $m_2 > m_1$. Концентрации этих молекул у дна сосуда равны соответственно n_1 и n_2, причем $n_2 > n_1$. Считая, что по всей высоте поддерживается одна и та же температура T и ускорение свободного падения равно g, найти высоту h, на которой концентрации этих сортов молекул будут одинаковы.

2.106. В очень высоком вертикальном цилиндрическом сосуде находится углекислый газ при некоторой температуре T. Считая поле тяжести однородным, найти, как изменится давление газа на дно сосуда, если температуру газа увеличить в η раз.

2.107. Газ находится в очень высоком цилиндрическом сосуде при температуре T. Считая поле тяжести однородным, найти сред-

нее значение потенциальной энергии молекул газа. Как зависит эта величина от того, состоит ли газ из одного сорта молекул или из нескольких сортов?

2.108. Закрытую с обоих торцов горизонтальную трубку длины $l = 100$ см перемещают с постоянным ускорением w, направленным вдоль ее оси. Внутри трубки находится аргон при температуре $T = 330$ К. При каком значении w концентрации аргона вблизи торцов трубки будут отличаться друг от друга на $\eta = 1{,}0\%$?

2.109. Найти массу моля коллоидных частиц, если при вращении центрифуги с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси концентрация этих частиц на расстоянии r_2 от оси вращения в η раз больше, чем на расстоянии r_1 (в одной горизонтальной плоскости). Плотности частиц и растворителя равны соответственно ρ и ρ_0.

2.110. Горизонтально расположенную трубку с закрытыми торцами вращают с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через один из ее торцов. В трубке находится углекислый газ при температуре $T = 300$ К. Длина трубки $l = 100$ см. Найти значение ω, при котором отношение концентраций молекул у противоположных торцов трубки $\eta = 2{,}0$.

2.111. Потенциальная энергия молекул газа в некотором центральном поле зависит от расстояния r до центра поля как $U(r) = ar^2$, где a — положительная постоянная. Температура газа T, концентрация молекул в центре поля n_0. Найти:

а) число молекул, находящихся на расстояниях r, $r + dr$ от центра поля;

б) наиболее вероятное расстояние молекул от центра поля;

в) относительное число всех молекул, находящихся в слое r, $r + dr$;

г) во сколько раз изменится концентрация молекул в центре поля при уменьшении температуры в η раз.

2.112. Исходя из условий предыдущей задачи, найти:

а) число молекул с потенциальной энергией в интервале U, $U + dU$;

б) наиболее вероятное значение потенциальной энергии молекулы; сравнить эту величину с потенциальной энергией молекулы на наиболее вероятном расстоянии ее от центра поля.

2.4. Второе начало термодинамики. Энтропия

● К. п. д. тепловой машины:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2'}{Q_1}, \tag{2.4а}$$

где Q_1 — тепло, получаемое рабочим телом, Q_2' — отдаваемое тепло.

● К. п. д. цикла Карио:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \tag{2.4б}$$

где T_1 и T_2 — температуры нагревателя и холодильника.

● Неравенство Клаузиуса:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leqslant 0, \tag{2.4в}$$

где δQ — элементарное тепло, полученное системой (δQ — величина алгебраическая).

● Приращение энтропии системы:

$$\Delta S \geqslant \int \frac{\delta Q}{T}. \tag{2.4г}$$

● Основное соотношение термодинамики:

$$T\,dS \geqslant dU + p\,dV. \tag{2.4д}$$

● Связь между энтропией и статистическим весом Ω (термодинамической вероятностью):

$$S = k \ln \Omega, \tag{2.4е}$$

где k — постоянная Больцмана.

2.113. В каком случае к. п. д. цикла Карно повысится больше: при увеличении температуры нагревателя на ΔT или при уменьшении температуры холодильника на такую же величину?

2.114. Водород совершает цикл Карно. Найти к. п. д. цикла, если при адиабатическом расширении:

а) объем газа увеличивается в $n = 2{,}0$ раза;

б) давление уменьшается в $n = 2{,}0$ раза.

2.115. Тепловую машину, работавшую по циклу Карно с к. п. д. $\eta = 10\%$, используют при тех же тепловых резервуарах как холодильную машину. Найти ее холодильный коэффициент ε.

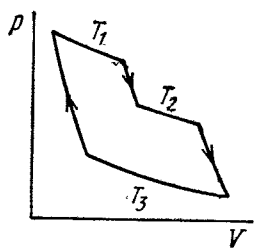


Рис. 2.2.

2.116. Идеальный газ совершает цикл, состоящий из чередующихся изотерм и адиабат (рис. 2.2). Температуры, при которых происходят изотермические процессы, равны T_1, T_2 и T_3. Найти к. п. д. такого цикла, если при каждом изотермическом расширении объем газа увеличивается в одно и то же число раз.

2.117. Найти к. п. д. цикла, состоящего из двух изохор и двух адиабат, если в пределах цикла объем идеального газа изменяется в $n = 10$ раз. Рабочим веществом является азот.

2.118. Найти к. п. д. цикла, состоящего из двух изобар и двух адиабат, если в пределах цикла давление изменяется в n раз. Рабочим веществом является идеальный газ с показателем адиабаты γ.

2.119. Идеальный газ с показателем адиабаты γ совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. Найти к. п. д. такого цикла, если абсолютная температура газа возрастает в n раз как при изохорическом нагреве, так и при изобарическом расширении.

2.120. Идеальный газ совершает цикл, состоящий из:
а) изохоры, адиабаты и изотермы;
б) изобары, адиабаты и изотермы,
причем изотермический процесс происходит при *минимальной* температуре цикла. Найти к. п. д. каждого цикла, если абсолютная температура в его пределах изменяется в n раз.

2.121. То же, что в предыдущей задаче, только изотермический процесс происходит при *максимальной* температуре цикла.

2.122. Идеальный газ совершает цикл, состоящий из изотермы политропы и адиабаты, причем изотермический процесс происходит при *максимальной* температуре цикла. Найти к. п. д. такого цикла, если абсолютная температура в его пределах изменяется в n раз.

2.123. Идеальный газ с показателем адиабаты γ совершает прямой цикл, состоящий из адиабаты, изобары и изохоры. Найти к. п. д. цикла, если при адиабатическом процессе объем идеального газа:
а) увеличивается в n раз; б) уменьшается в n раз.

2.124. Вычислить к. п. д. цикла, состоящего из изотермы, изобары и изохоры, если при изотермическом процессе объем идеального газа с показателем адиабаты γ:
а) увеличивается в n раз; б) уменьшается в n раз.

2.125. Найти к. п. д. цикла, состоящего из двух изохор и двух изотерм, если в пределах цикла объем изменяется в ν раз, а абсолютная температура — в τ раз. Рабочим веществом является идеальный газ с показателем адиабаты γ.

2.126. Определить к. п. д. цикла, состоящего из двух изобар и двух изотерм, если в пределах цикла давление изменяется в n раз, а абсолютная температура — в τ раз. Рабочим веществом является идеальный газ с показателем адиабаты γ.

2.127. Идеальный газ с показателем адиабаты γ совершает цикл (рис. 2.3), в пределах которого абсолютная температура изменяется в τ раз. Найти к. п. д. этого цикла.

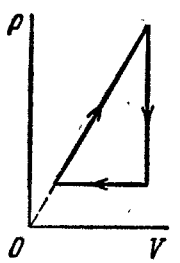


Рис. 2.3.

2.128. Воспользовавшись неравенством Клаузиуса, показать, что к. п. д. всех циклов, у которых одинакова максимальная температура $T_{макс}$ и одинакова минимальная температура $T_{мин}$, меньше, чем у цикла Карно при $T_{макс}$ и $T_{мин}$.

2.129. Показать с помощью теоремы Карно, что для физически однородного вещества, состояние которого характеризуется параметрами T и V,

$$(\partial U/\partial V)_T = T\,(\partial p/\partial T)_V - p,$$

где $U(T, V)$ — внутренняя энергия вещества.

Указание. Использовать бесконечно малый цикл Карно на диаграмме p, V.

2.130. Найти приращение энтропии одного моля углекислого газа при увеличении его абсолютной температуры в $n = 2{,}0$ раза, если процесс нагревания:

а) изохорический; б) изобарический.
Газ считать идеальным.

2.131. Во сколько раз следует увеличить изотермически объем $\nu = 4{,}0$ моля идеального газа, чтобы его энтропия испытала приращение $\Delta S = 23$ Дж/К?

2.132. Два моля идеального газа сначала изохорически охладили, а затем изобарически расширили так, что температура газа стала равна первоначальной. Найти приращение энтропии газа, если его давление в данном процессе изменилось в $n = 3{,}3$ раза.

2.133. Гелий массы $m = 1{,}7$ г адиабатически расширили в $n = 3{,}0$ раза и затем изобарически сжали до первоначального объема. Найти приращение энтропии газа в этом процессе.

2.134. Найти приращение энтропии $\nu = 2{,}0$ моля идеального газа с показателем адиабаты $\gamma = 1{,}30$, если в результате некоторого процесса объем газа увеличился в $\alpha = 2{,}0$ раза, а давление уменьшилось в $\beta = 3{,}0$ раза.

2.135. В сосудах *1* и *2* находится по $\nu = 1{,}2$ моля газообразного гелия. Отношение объемов сосудов $V_2/V_1 = \alpha = 2{,}0$, а отношение абсолютных температур гелия в них $T_1/T_2 = \beta = 1{,}5$. Считая газ идеальным, найти разность энтропий гелия в этих сосудах $(S_2 - S_1)$.

2.136. Один моль идеального газа с показателем адиабаты γ совершает политропический процесс, в результате которого абсолютная температура газа увеличивается в τ раз. Показатель политропы n. Найти приращение энтропии газа в данном процессе.

2.137. Процесс расширения $\nu = 2{,}0$ моля аргона происходит так, что давление газа увеличивается прямо пропорционально его объему. Найти приращение энтропии газа при увеличении его объема в $\alpha = 2{,}0$ раза.

2.138. Идеальный газ с показателем адиабаты γ совершает процесс по закону $p = p_0 - \alpha V$, где p_0 и α — положительные постоянные, V — объем. При каком значении объема энтропия газа окажется максимальной?

2.139. Один моль идеального газа совершает процесс, при котором энтропия газа изменяется с температурой T по закону $S = aT + C_V \ln T$, где a — положительная постоянная, C_V — молярная теплоемкость данного газа при постоянном объеме. Найти, как зависит температура газа от его объема в этом процессе, если при $V = V_0$ температура $T = T_0$.

2.140. Найти приращение энтропии одного моля ван-дер-ваальсовского газа при изотермическом изменении его объема от V_1 до V_2. Поправки Ван-дер-Ваальса считать известными.

2.141. Один моль ван-дер-ваальсовского газа, имевший объем V_1 и температуру T_1, переведен в состояние с объемом V_2 и температурой T_2. Найти соответствующее приращение энтропии газа, считая его молярную теплоемкость C_V известной.

2.142. При очень низких температурах теплоемкость кристаллов $C = aT^3$, где a — постоянная. Найти энтропию кристалла как функцию температуры в этой области.

2.143. Найти приращение энтропии алюминиевого бруска массы $m = 3{,}0$ кг при нагревании его от температуры $T_1 = 300$ К до $T_2 = 600$ К, если в этом интервале температур удельная теплоемкость алюминия $c = a + bT$, где $a = 0{,}77$ Дж/(г·К), $b = 0{,}46$ мДж/(г·К^2).

2.144. В некотором процессе температура вещества зависит от его энтропии S по закону $T = aS^n$, где a и n — постоянные. Найти соответствующую теплоемкость C вещества как функцию S. При каком условии $C < 0$?

2.145. Найти температуру T как функцию энтропии S вещества для политропического процесса, при котором теплоемкость вещества равна C. Известно, что при температуре T_0 энтропия вещества равна S_0. Изобразить примерные графики зависимости $T(S)$ при $C > 0$ и $C < 0$.

2.146. Один моль идеального газа с известным значением теплоемкости C_V совершает процесс, при котором его энтропия S зависит от температуры T как $S = \alpha/T$, где α — постоянная. Температура газа изменилась от T_1 до T_2. Найти:

а) молярную теплоемкость газа как функцию его температуры;

б) количество тепла, сообщенное газу;

в) работу, которую совершил газ.

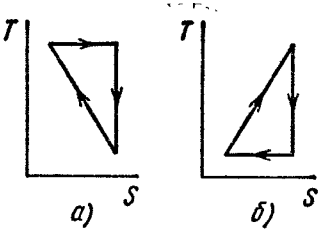


Рис. 2.4.

2.147. Рабочее вещество совершает цикл, в пределах которого абсолютная температура изменяется в n раз, а сам цикл имеет вид, показанный:

а) на рис. 2.4, *а*; б) на рис. 2.4, *б*,

где T — абсолютная температура, S — энтропия. Найти к. п. д. каждого цикла.

2.148. Идеальный газ в количестве $\nu = 2{,}2$ моля находится в одном из двух теплоизолированных сосудов, соединенных между собой трубкой с краном. В другом сосуде — вакуум. Кран открыли, и газ заполнил оба сосуда, увеличив свой объем в $n = 3{,}0$ раза. Найти приращение энтропии газа.

2.149. Теплоизолированный цилиндр разделен невесомым поршнем на две одинаковые части. По одну сторону поршня находится один моль идеального газа с показателем адиабаты γ, а по другую сторону — вакуум. Начальная температура газа T_0. Поршень отпустили, и газ заполнил весь цилиндр. Затем поршень медленно переместили в первоначальное положение. Найти приращение внутренней энергии и энтропии газа в результате этих двух процессов.

2.150. Идеальный газ, находившийся в некотором состоянии, расширили до объема V без обмена теплом с окружающими телами. Одинаково ли будет установившееся давление газа в конечном состоянии, если процесс расширения а) быстрый; б) очень медленный?

2.151. Теплоизолированный сосуд разделен перегородкой на две части так, что объем одной из них в $n = 2{,}0$ раза больше объема другой. В меньшей части находится $\nu_1 = 0{,}30$ моля азота, а в большей части $\nu_2 = 0{,}70$ моля кислорода. Температура газов одинакова. В перегородке открыли отверстие, и газы перемешались. Найти соответствующее приращение энтропии системы, считая газы идеальными.

2.152. Кусок меди массы $m_1 = 300$ г при температуре $t_1 = 97$ °C поместили в калориметр, где находится вода массы $m_2 = 100$ г при температуре $t_2 = 7$ °C. Найти приращение энтропии системы к моменту выравнивания температур. Теплоемкость калориметра пренебрежимо мала.

2.153. Два одинаковые теплоизолированные сосуда, соединенные трубкой с краном, содержат по одному молю одного и того же идеального газа. Температура газа в одном сосуде T_1, в другом T_2. Молярная теплоемкость газа при постоянном объеме равна C_V. После открывания крана газ пришел в новое состояние равновесия. Найти ΔS — приращение энтропии газа. Показать, что $\Delta S > 0$.

2.154. N атомов газообразного гелия находятся при комнатной температуре в кубическом сосуде, объем которого равен 1,0 см^3. Найти:

а) вероятность того, что все атомы соберутся в одной половине сосуда;

б) примерное числовое значение N, при котором это событие можно ожидать на протяжении времени $t \approx 10^{10}$ лет (возраст Вселенной).

2.155. Найти статистический вес наиболее вероятного распределения $N = 10$ одинаковых молекул по двум одинаковым половинам сосуда. Определить также вероятность такого распределения?

2.156. N молекул идеального газа находятся в некотором сосуде. Разделим мысленно сосуд на две одинаковые половины A и B. Найти вероятность того, что в половине A сосуда окажется n молекул. Рассмотреть случаи, когда $N = 5$ и $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

2.157. В сосуде объемом V_0 находится N молекул идеального газа. Найти вероятность того, что в некоторой выделенной части этого сосуда, имеющей объем V, окажется n молекул. Рассмотреть, в частности, случай $V = V_0/2$.

2.158. Идеальный газ находится при нормальных условиях. Найти диаметр сферы, в объеме которой относительная флуктуация числа молекул $\eta = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$. Каково среднее число молекул внутри такой сферы?

2.159. Один моль идеального газа, состоящего из одноатомных молекул, находится в сосуде при температуре $T_0 = 300$ К. Как и во сколько раз изменится статистический вес этой системы (газа), если ее нагреть изохорически на $\Delta T = 1{,}0$ К?

2.5. Жидкости. Капиллярные явления

● Добавочное (капиллярное) давление в жидкости под произвольной поверхностью (формула Лапласа):

$$\Delta p=\alpha\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right), \tag{2.5а}$$

где α — поверхностное натяжение данной жидкости.

● Приращение свободной энергии поверхностного слоя жидкости:

$$dF=\alpha\, dS, \tag{2.5б}$$

где dS — приращение площади поверхностного слоя.

● Тепло, необходимое для образования единицы площади поверхностного слоя жидкости при изотермическом увеличении ее поверхности:

$$q=-T\frac{d\alpha}{dT}. \tag{2.5в}$$

2.160. Найти капиллярное давление:

а) в капельках ртути диаметра $d = 1{,}5$ мкм;

б) внутри мыльного пузырька диаметра $d = 3{,}0$ мм, если поверхностное натяжение мыльной воды $\alpha = 45$ мН/м.

2.161. В дне сосуда со ртутью имеется круглое отверстие диаметра $d = 70$ мкм. При какой максимальной толщине слоя ртути она еще не будет вытекать через это отверстие?

2.162. В сосуде с воздухом при давлении p_0 находится мыльный пузырек диаметра d. Давление воздуха изотермически уменьшили в n раз, в результате чего диаметр пузырька увеличился в η раз. Найти поверхностное натяжение мыльной воды.

2.163. Найти давление в пузырьке воздуха диаметра $d = 4{,}0$ мкм, который находится в воде на глубине $h = 5{,}0$ м. Атмосферное давление p_0 нормальное.

2.164. На дне пруда выделился пузырек газа диаметра $d = 4{,}0$ мкм. При поднятии этого пузырька к поверхности воды его диаметр увеличился в $n = 1{,}1$ раза. Найти глубину пруда в данном месте. Атмосферное давление нормальное, процесс расширения газа считать изотермическим.

2.165. Найти разность уровней ртути в двух сообщающихся вертикальных капиллярах, диаметры которых $d_1 = 0{,}50$ мм и $d_2 = 1{,}00$ мм, если краевой угол $\theta = 138°$.

2.166. Вертикальный капилляр с внутренним диаметром 0,50 мм погрузили в воду так, что длина выступающей над поверхностью воды части капилляра оказалась $h = 25$ мм. Найти радиус кривизны мениска.

2.167. Стеклянный капилляр длины $l = 110$ мм с диаметром внутреннего канала $d = 20$ мкм опустили в вертикальном положении в воду. Верхний конец капилляра запаян. Наружное давление воздуха нормальное. Какая длина x капилляра должна быть погружена в воду, чтобы уровень воды в капилляре совпадал с поверхностью воды вне его?

2.168. Вертикальный капилляр длины l с запаянным верхним концом привели в соприкосновение с поверхностью жидкости, после чего она поднялась в нем на высоту h. Плотность жидкости ρ, диаметр сечения внутреннего канала капилляра d, краевой угол ϑ, атмосферное давление p_0. Найти поверхностное натяжение жидкости.

2.169. Стеклянный стержень диаметром $d_1 = 1{,}5$ мм вставили симметрично в стеклянный капилляр с диаметром внутреннего канала $d_2 = 2{,}0$ мм. Затем всю систему установили вертикально и привели в соприкосновение с поверхностью воды. На какую высоту поднимется вода в таком капилляре?

2.170. Две вертикальные пластинки, погруженные частично в смачивающую жидкость, образуют клин с очень малым углом $\delta\varphi$. Ребро клина вертикально. Плотность жидкости ρ, ее поверхностное натяжение α, краевой угол ϑ. Найти высоту h поднятия жидкости как функцию расстояния x от ребра клина.

2.171. Из круглого отверстия вытекает вертикальная струя воды так, что в одном из горизонтальных сечений ее диаметр $d = 2{,}0$ мм, а в другом сечении, расположенном ниже на $l = 20$ мм, диаметр струи в $n = 1{,}5$ раза меньше. Найти объем воды, вытекающий из отверстия за одну секунду.

2.172. Капля воды равномерно падает в воздухе. Найти разность между радиусом кривизны поверхности капли в ее верхней точке и радиусом кривизны в нижней точке, расстояние между которыми $h = 2{,}3$ мм.

2.173. Между двумя горизонтальными стеклянными пластинками находится капля ртути в форме лепешки радиуса R и толщины h. Считая, что $h \ll R$, найти массу m груза, который надо положить на верхнюю пластинку, чтобы расстояние между пластинками уменьшилось в n раз. Краевой угол ϑ. Вычислить m, если $R = 2{,}0$ см, $h = 0{,}38$ мм, $n = 2{,}0$ и $\vartheta = 135°$.

2.174. Найти силу притяжения двух параллельных стеклянных пластинок, отстоящих друг от друга на расстояние $h = 0{,}10$ мм, после того, как между ними ввели каплю воды массы $m = 70$ мг. Смачивание считать полным.

2.175. Два стеклянных диска радиуса $R = 5{,}0$ см смочили зодой и сложили вместе так, что толщина слоя воды между дисками $h = 1{,}9$ мкм. Считая смачивание полным, найти силу, которую нужно приложить перпендикулярно к плоскости дисков, чтобы оторвать их друг от друга.

2.176. Две вертикальные параллельные друг другу стеклянные пластины частично погружены в воду. Расстояние между пластинами $d = 0{,}10$ мм, их ширина $l = 12$ см. Считая, что вода между пластинами не доходит до их верхних краев и что смачивание полное, найти силу, с которой они притягиваются друг к другу.

2.177. Найти время исчезновения мыльного пузыря радиуса R, соединенного с атмосферой капилляром длины l и радиусом сечения канала r. Поверхностное натяжение α, коэффициент вязкости газа η.

2.178. Вертикальный капилляр привели в соприкосновение с поверхностью воды. Какое количество тепла выделится при поднятии воды по капилляру? Смачивание считать полным, поверхностное натяжение равно α.

2.179. Найти свободную энергию поверхностного слоя:

а) капли ртути диаметра $d = 1{,}4$ мм;

б) мыльного пузыря диаметра $d = 6{,}0$ мм, если поверхностное натяжение мыльной воды $\alpha = 45$ мН/м.

2.180. Вычислить приращение свободной энергии поверхностного слоя при изотермическом слиянии двух одинаковых капель ртути, каждая диаметра $d = 1{,}5$ мм.

2.181. Найти работу, которую нужно совершить, чтобы изотермически выдуть мыльный пузырь радиуса R, если давление окружающего воздуха p_0 и поверхностное натяжение мыльной воды α.

2.182. Внутри мыльного пузыря радиуса r находится идеальный газ. Наружное давление p_0, поверхностное натяжение мыльной воды α. Найти разность между молярной теплоемкостью газа при нагреве его внутри пузыря и молярной теплоемкостью этого газа при постоянном давлении, $C - C_p$.

2.183. Рассмотрев цикл Карно для пленки жидкости, показать, что при изотермическом процессе теплота, необходимая для образования единицы площади поверхностного слоя, $q = -T \cdot d\alpha/dT$, где $d\alpha/dT$ — производная поверхностного натяжения по температуре.

2.184. Площадь мыльной пленки изотермически увеличили на $\Delta\sigma$ при температуре T. Зная поверхностное натяжение мыльной воды α и температурный коэффициент $d\alpha/dT$, найти приращение:

а) энтропии поверхностного слоя пленки;

б) внутренней энергии поверхностного слоя.

2.6. Фазовые превращения

● Соотношения между постоянными Ван-дер-Ваальса и параметрами критического состояния вещества:

$$V_{M\,кр} = 3b, \quad p_{кр} = \frac{a}{27b^2}, \quad T_{кр} = \frac{8a}{27Rb}. \tag{2.6а}$$

● Связь между критическими параметрами моля вещества:

$$p_{кр} V_{M\,кр} = \frac{3}{8} RT_{кр}. \tag{2.6б}$$

● Уравнение Клапейрона — Клаузиуса:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q_{12}}{T(V_2' - V_1')}, \tag{2.6в}$$

где q_{12} — удельная теплота, поглощаемая при переходе $1 \to 2$, V_1' и V_2' — удельные объемы фазы 1 и фазы 2.

2.185. Насыщенный водяной пар находится при температуре $t = 100$ °С в цилиндрическом сосуде под невесомым поршнем. При медленном вдвигании поршня небольшая часть пара массы $\Delta m = 0{,}70$ г сконденсировалась. Какая работа была совершена над

газом? Пар считать идеальным газом, объемом жидкости пренебречь.

2.186. Вода со своим насыщенным паром находится в сосуде объемом $V = 6{,}0$ л при температуре 250 °С и давлении 40 атм. Удельный объем пара при этих условиях $V_п' = 50$ л/кг. Масса системы (воды с паром) $m = 5{,}0$ кг. Найти массу и объем пара.

2.187. Пространство в цилиндре под поршнем, имеющее объем $V_0 = 5{,}0$ л, занимает один насыщенный водяной пар, температура которого $t = 100$ °С. Найти массу жидкой фазы, образовавшейся в результате изотермического уменьшения объема под поршнем до $V = 1{,}6$ л. Насыщенный пар считать идеальным газом.

2.188. Некоторую массу вещества, взятого в состоянии насыщенного пара, изотермически сжали в n раз по объему. Найти, какую часть η конечного объема занимает жидкая фаза, если удельные объемы насыщенного пара и жидкой фазы отличаются друг от друга в N раз ($N > n$). Тот же вопрос, но при условии, что конечный объем вещества соответствует середине горизонтального участка изотермы на диаграмме p, V.

2.189. Какое количество тепла необходимо сообщить воде, кипящей при нормальном атмосферном давлении, чтобы превратить $m = 1{,}00$ кг воды в пар?

2.190. Вода массы $m = 20$ г находится при температуре 0°С в теплоизолированном цилиндре под невесомым поршнем, площадь которого $S = 410$ см^2. Внешнее давление равно нормальному атмосферному. На какую высоту поднимется поршень, если воде сообщить количество тепла $Q = 20{,}0$ кДж?

2.191. В теплоизолированном цилиндре под невесомым поршнем находится один грамм насыщенного водяного пара. Наружное давление нормальное. В цилиндр ввели $m = 1{,}0$ г воды при температуре $t_0 = 22$ °С. Пренебрегая теплоемкостью цилиндра и трением, найти работу, которую произвела сила атмосферного давления при опускании поршня.

2.192. Если дополнительное давление Δp насыщенных паров над выпуклой сферической поверхностью жидкости значительно меньше давления пара у плоской поверхности, то $\Delta p = (\rho_п/\rho_ж)2\alpha/r$, где $\rho_п$ и $\rho_ж$ — плотности пара и жидкости, α — поверхностное натяжение, r — радиус кривизны поверхности. Найти с помощью этой формулы диаметр капелек воды, при котором давление насыщенных паров на $\eta = 1{,}0\%$ превышает давление паров над плоской поверхностью при температуре $t = 27$ °С. Пар считать идеальным газом.

2.193. Найти массу всех молекул, вылетающих за одну секунду с одного квадратного сантиметра поверхности воды в находящийся над ней насыщенный водяной пар при температуре $t = 100$ °С. Считать, что $\eta = 3{,}6\%$ всех молекул водяного пара, падающих на поверхность воды, ею задерживаются.

2.194. Найти давление насыщенного пара вольфрама при температуре $T = 2000$ К, если известно, что при этой температуре

вольфрамовая нить, испаряясь в высоком вакууме, теряет в единицу времени с единицы поверхности массу $\mu = 1{,}2 \cdot 10^{-13}$ г/(с·см^2).

2.195. На какую величину возросло бы давление воды на стенки сосуда, если бы исчезли силы притяжения между ее молекулами?

2.196. Найти внутреннее давление p_i в жидкости, если известны ее плотность ρ и удельная теплота парообразования q. Считать, что теплота q равна работе против сил внутреннего давления и жидкость подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса. Вычислить p_i у воды.

2.197. Показать, что для вещества, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса, в критическом состоянии справедливы соотношения (2.6а) и (2.6б).

У к а з а н и е. Использовать тот факт, что критическому состоянию соответствует точка перегиба на изотерме $p\,(V)$.

2.198. Вычислить постоянные Ван-дер-Ваальса для углекислого газа, если его критическая температура $T_{кр} = 304$ К и критическое давление $p_{кр} = 73$ атм.

2.199. Найти удельный объем бензола (C_6H_6) в критическом состоянии, если его критическая температура $T_{кр} = 562$ К и критическое давление $p_{кр} = 47$ атм.

2.200. Записать уравнение Ван-дер-Ваальса в приведенных параметрах π, ν и τ, приняв за единицы давления, объема и температуры соответствующие критические величины. Используя полученное уравнение, найти, во сколько раз температура газа больше его критической температуры, если давление газа в 12 раз больше критического, а объем газа вдвое меньше критического.

2.201. Зная постоянные Ван-дер-Ваальса, найти:

а) наибольший объем, который может занимать вода массы $m = 1{,}00$ кг в жидком состоянии;

б) наибольшее давление насыщенных паров воды.

2.202. Вычислить температуру и плотность углекислого газа в критическом состоянии, считая газ ван-дер-ваальсовским.

2.203. Какую часть объема сосуда должен занимать жидкий эфир при комнатной температуре, чтобы при достижении критической температуры он оказался в критическом состоянии? Для эфира $T_{кр} = 467$ К, $p_{кр} = 35{,}5$ атм, $M = 74$ г/моль.

2.204. Показать, что положение прямой *1—5*, соответствующей изотермически-изобарическому фазовому переходу, таково, что площади *I* и *II*, ограниченные этой прямой и изотермой Ван-дер-Ваальса, равны друг другу (рис. 2.5).

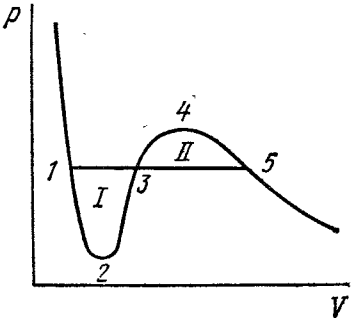


Рис. 2.5.

2.205. Какая часть воды, переохлажденной при нормальном давлении до температуры $t = -20$ °С, превратится в лед при

переходе системы в равновесное состояние? При какой температуре переохлажденной воды она целиком превратится в лед?

2.206. Найти приращение температуры плавления льда вблизи 0 °С при повышении давления на $\Delta p = 1{,}00$ атм, если удельный объем льда на $\Delta V' = 0{,}091$ см³/г больше удельного объема воды.

2.207. Найти удельный объем насыщенного водяного пара при нормальном давлении, если известно, что уменьшение давления на $\Delta p = 3{,}2$ кПа приводит к уменьшению температуры кипения воды на $\Delta T = 0{,}9$ К.

2.208. Определить давление насыщенного водяного пара при температуре 101,1 °С, считая его идеальным газом.

2.209. В закрытом сосуде находится небольшое количество воды и ее насыщенный пар при температуре $t = 100$ °С. На сколько процентов увеличится масса насыщенного пара при повышении температуры системы на $\Delta T = 1{,}5$ К? Пар считать идеальным газом и удельный объем воды пренебрежимо малым по сравнению с удельным объемом пара.

2.210. Найти давление насыщенного пара как функцию температуры $p\,(T)$, если при температуре T_0 его давление p_0. Считать, что: удельная теплота парообразования q не зависит от T, удельный объем жидкости пренебрежимо мал по сравнению с удельным объемом пара, насыщенный пар подчиняется уравнению состояния идеального газа. Выяснить, при каких условиях эти упрощения допустимы.

2.211. Лед, находившийся при нормальных условиях, подвергли сжатию до давления $p = 640$ атм. Считая, что понижение температуры плавления льда в данных условиях линейно зависит от давления, найти, какая часть льда растаяла. Удельный объем воды на $\Delta V' = 0{,}09$ см³/г меньше удельного объема льда.

2.212. Вблизи тройной точки давление p насыщенного пара двуокиси углерода зависит от температуры T как $\lg p = a - b/T$, где a и b — постоянные. Если p — в атмосферах, то для процесса сублимации $a = 9{,}05$ и $b = 1{,}80$ кК, а для процесса испарения $a = 6{,}78$ и $b = 1{,}31$ кК. Найти:

а) температуру и давление в тройной точке;

б) значения удельных теплот сублимации, испарения и плавления вблизи тройной точки.

2.213. Воду массы $m = 1{,}00$ кг нагрели от температуры $t_1 = 10$ °С до $t_2 = 100$ °С, при которой она вся превратилась в пар. Считая пар идеальным газом, найти приращение энтропии системы.

2.214. Лед с начальной температурой $t_1 = 0$ °С в результате нагревания превратили сначала в воду, а затем в пар при температуре $t_2 = 100$ °С. Найти приращение удельной энтропии системы, считая пар идеальным газом.

2.215. Кусок меди массы $m = 90$ г при температуре $t_1 = 90$ °С положили в калориметр, в котором находился лед массы 50 г при температуре —3 °С. Найти приращение энтропии куска меди к моменту установления теплового равновесия.

2.216. Кусок льда массы $m_1 = 100$ г при температуре $t_1 = 0\,^\circ\text{C}$ поместили в калориметр, в котором находилась вода массы $m_2 = 100$ г при температуре t_2. Пренебрегая теплоемкостью калориметра, найти приращение энтропии системы к моменту установления теплового равновесия. Рассмотреть два случая:
а) $t_2 = 60\,^\circ\text{C}$; б) $t_2 = 94\,^\circ\text{C}$.

2.217. В калориметр, наполненный большим количеством льда при температуре $t_1 = 0\,^\circ\text{C}$, вылили $m = 5{,}0$ г расплавленного свинца, находившегося при температуре плавления $t_2 = 327\,^\circ\text{C}$. Найти приращение энтропии системы свинец — лед к моменту установления теплового равновесия. Удельная теплота плавления свинца $q = 22{,}5$ Дж/г, его удельная теплоемкость $c = 0{,}125$ Дж/(г · К).

2.218. Водяной пар, заполняющий пространство под поршнем в цилиндре, сжимают (или расширяют) так, что он все время остается насыщенным, находясь на грани конденсации. Найти молярную теплоемкость C пара в данном процессе как функцию температуры T, считая пар идеальным газом и пренебрегая удельным объемом жидкости по сравнению с удельным объемом пара. Вычислить C при $t = 100\,^\circ\text{C}$.

2.219. Один моль воды, находившийся в равновесии с пренебрежимо малым количеством своего насыщенного пара при температуре T_1, перевели целиком в насыщенный пар при температуре T_2. Найти приращение энтропии системы. Пар считать идеальным газом, удельным объемом жидкости пренебречь по сравнению с удельным объемом пара.

2.7. Явления переноса

● Относительное число молекул газа, пролетающих путь s без столкновений:

$$N/N_0 = e^{-s/\lambda}, \tag{2.7а}$$

где λ — средняя длина свободного пробега.

● Средняя длина свободного пробега молекулы газа:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi d^2 n}, \tag{2.7б}$$

где d — эффективный диаметр молекулы, n — концентрация молекул.

● Коэффициенты диффузии D, вязкости η и теплопроводности $\varkappa$ газов:

$$D = {}^1/_3 \langle v \rangle \lambda, \quad \eta = {}^1/_3 \langle v \rangle \lambda \rho, \quad \varkappa = {}^1/_3 \langle v \rangle \lambda \rho c_V, \tag{2.7в}$$

где ρ — плотность газа, c_V — его удельная теплоемкость при постоянном объеме.

● Сила трения, действующая на единицу поверхности пластин при их движении параллельно друг другу в ультраразреженном газе:

$$F = {}^1/_6 \langle v \rangle \rho \, | u_1 - u_2 |, \tag{2.7г}$$

где u_1 и u_2 — скорости пластин.

● Плотность потока тепла, переносимого ультраразреженным газом между двумя стенками:

$$q = {}^1/_6 \langle v \rangle \rho c_V |T_1 - T_2|, \qquad (2.7д)$$

где T_1 и T_2 — температуры стенок.

2.220. Вычислить, какая часть молекул газа:

а) пролетает без столкновений расстояния, превышающие среднюю длину свободного пробега λ;

б) имеет длины свободного пробега в интервале от λ до 2λ.

2.221. Узкий пучок молекул входит в сосуд с газом, давление которого достаточно низкое. Найти среднюю длину свободного пробега молекул пучка, если поток молекул в пучке убывает в η раз на расстоянии Δl вдоль пучка.

2.222. Пусть $\alpha\, dt$ — вероятность того, что молекула газа испытывает столкновение в течение времени dt, α — постоянная. Найти:

а) вероятность того, что молекула не испытает столкновения в течение времени t;

б) среднее время между столкновениями;

2.223. Найти среднюю длину свободного пробега и среднее время между столкновениями молекул газообразного азота, находящегося:

а) при нормальных условиях;

б) при температуре $t = 0\,°C$ и давлении $p = 1{,}0$ нПа (такое давление позволяют получать современные вакуумные насосы).

2.224. Во сколько раз средняя длина свободного пробега молекул азота, находящегося при нормальных условиях, больше среднего расстояния между его молекулами?

2.225. Найти при нормальных условиях среднюю длину свободного пробега молекулы газа, для которого постоянная Ван-дер-Ваальса $b = 40$ мл/моль.

2.226. Азот находится при нормальных условиях. При какой частоте колебаний длина звуковой волны в нем будет равна средней длине свободного пробега молекул данного газа?

2.227. Кислород находится при температуре $0\,°C$ в сосуде с характерным размером $l = 10$ мм (это линейный размер, определяющий характер интересующего нас физического процесса). Найти:

а) давление газа, ниже которого средняя длина свободного пробега молекул $\lambda > l$;

б) соответствующую концентрацию молекул и среднее расстояние между ними.

2.228. Азот находится при нормальных условиях. Найти:

а) число столкновений, испытываемых в среднем каждой молекулой за одну секунду;

б) число всех столкновений, происходящих между молекулами в 1 см^3 азота ежесекундно.

2.229. Как зависят λ и ν (средняя длина свободного пробега и число столкновений каждой молекулы в единицу времени) от абсо-

лютной температуры идеального газа, если последний совершает процесс:

а) изохорический; б) изобарический?

2.230. Идеальный газ совершил процесс, в результате которого его давление возросло в n раз. Как и во сколько раз изменились λ и ν (средняя длина свободного пробега и число столкновений каждой молекулы в единицу времени), если процесс:

а) изохорический; б) изотермический?

2.231. Идеальный газ, состоящий из жестких двухатомных молекул, совершает адиабатический процесс. Как зависят λ и ν (средняя длина свободного пробега и число столкновений каждой молекулы ежесекундно) в этом процессе от:

а) объема V; б) давления p; в) температуры T.

2.232. Идеальный газ совершает политропический процесс с показателем политропы n. Найти λ и ν (среднюю длину свободного пробега и число столкновений каждой молекулы ежесекундно) как функцию:

а) объема V; б) давления p; в) температуры T.

2.233. Определить молярную теплоемкость политропического процесса, совершаемого идеальным газом из жестких двухатомных молекул, при котором число столкновений между молекулами остается неизменным:

а) в единице объема; б) во всем объеме газа.

2.234. Идеальный газ с молярной массой M находится в тонкостенном сосуде объемом V, стенки которого поддерживаются при постоянной температуре T. В момент $t = 0$ в стенке сосуда открыли малое отверстие площадью S, и газ начал вытекать в вакуум. Найти концентрацию n газа как функцию времени t, если в начальный момент $n(0) = n_0$.

2.235. Сосуд с газом разделен на две одинаковые половины 1 и 2 тонкой теплоизолирующей перегородкой с двумя отверстиями. Диаметр одного из них мал, а другого очень велик (оба по сравнению со средней длиной свободного пробега молекул). В половине 2 газ поддерживается при температуре в η раз большей, чем в половине 1. Как и во сколько раз изменится концентрация молекул в половине 2, если закрыть только большое отверстие?

2.236. В результате некоторого процесса коэффициент вязкости идеального газа увеличился в $\alpha = 2{,}0$ раза, а коэффициент диффузии — в $\beta = 4{,}0$ раза. Как и во сколько раз изменилось давление газа?

2.237. Как изменятся коэффициенты диффузии D и вязкости η идеального газа, если объем газа увеличить в n раз:

а) изотермически; б) изобарически?

2.238. Идеальный газ состоит из жестких двухатомных молекул. Как и во сколько раз изменятся коэффициенты диффузии D и вязкости η, если объем газа адиабатически уменьшить в $n = 10$ раз?

2.239. Найти показатель политропы n процесса, совершаемого идеальным газом, при котором остается неизменным коэффициент:

а) диффузии; б) вязкости; в) теплопроводности.

2.240. Зная коэффициент вязкости гелия при нормальных условиях, вычислить эффективный диаметр его атома.

2.241. Коэффициент теплопроводности гелия в 8,7 раза больше, чем у аргона (при нормальных условиях). Найти отношение эффективных диаметров атомов аргона и гелия.

2.242. Гелий при нормальных условиях заполняет пространство между двумя длинными коаксиальными цилиндрами. Средний радиус цилиндров R, зазор между ними ΔR, причем $\Delta R \ll R$. Внутренний цилиндр неподвижен, а внешний вращают с достаточно небольшой угловой скоростью ω. Найти момент сил трения, действующих на единицу длины внутреннего цилиндра. До какого значения надо уменьшить давление гелия (не меняя температуры), чтобы искомый момент сил трения уменьшился в $n = 10$ раз, если $\Delta R = 6$ мм?

2.243. Газ заполняет пространство между двумя длинными коаксиальными цилиндрами, радиусы которых R_1 и R_2, причем $R_1 < R_2$. Внутренний цилиндр неподвижен, а внешний вращают с достаточно малой угловой скоростью ω. Момент сил трения, действующих на единицу длины внутреннего цилиндра, равен N_1. Найти коэффициент вязкости η газа, имея в виду, что сила трения, действующая на единицу площади цилиндрической поверхности радиуса r, определяется формулой $\sigma = \eta r\,(\partial\omega/\partial r)$.

2.244. Два одинаковых параллельных диска, оси которых совпадают, расположены на расстоянии h друг от друга. Радиус каждого диска a, причем $a \gg h$. Один диск вращают с небольшой угловой скоростью ω, другой диск неподвижен. Найти момент сил трения, действующий на неподвижный диск, если коэффициент вязкости газа между дисками равен η.

2.245. Решить предыдущую задачу, считая, что между дисками находится ультраразреженный газ с молярной массой M, температурой T и под давлением p.

2.246. Воспользовавшись формулой Пуазейля (1.7г), определить массу μ газа, протекающего в единицу времени через поперечное сечение трубы длины l и радиуса a, на концах которой поддерживаются постоянные давления p_1 и p_2.

2.247. Один конец стержня, заключенного в теплоизолирующую оболочку, поддерживается при температуре T_1, а другой конец — при температуре T_2. Сам стержень состоит из двух частей, длины которых l_1 и l_2 и коэффициенты теплопроводности $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. Найти температуру поверхности соприкосновения этих частей стержня.

2.248. Сложены торцами два стержня, длина которых l_1 и l_2 и коэффициент теплопроводности $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. Найти коэффициент теплопроводности однородного стержня длины $l_1 + l_2$, проводящего теплоту так же, как и система из этих двух стержней. Предполагается, что боковые поверхности стержней теплоизолированы.

2.249. Стержень длины l с теплоизолированной боковой поверхностью состоит из материала, коэффициент теплопроводности которого изменяется с температурой по закону $\varkappa = \alpha/T$, где α —

постоянная. Торцы стержня поддерживают при температурах T_1 и T_2. Найти зависимость $T(x)$, где x — расстояние от торца с температурой T_1, а также плотность потока тепла.

2.250. Два куска металла, теплоемкости которых C_1 и C_2, соединены между собой стержнем длины l с площадью поперечного сечения S и достаточно малой теплопроводностью $\varkappa$. Вся система теплоизолирована от окружающего пространства. В момент $t = 0$ разность температур между двумя кусками металла равна $(\Delta T)_0$. Пренебрегая теплоемкостью стержня, найти разность температур между металлами как функцию времени.

2.251. Найти распределение температур в веществе, находящемся между двумя параллельными пластинами, если последние поддерживаются при температурах T_1 и T_2, расстояние между ними l и коэффициент теплопроводности вещества $\varkappa \sim \sqrt{T}$.

2.252. Пространство между двумя большими горизонтальными пластинами заполнено гелием. Расстояние между пластинами $l = 50$ мм. Нижняя пластина поддерживается при температуре $T_1 = 290$ К, верхняя — при $T_2 = 330$ К. Давление газа близко к нормальному. Найти плотность потока тепла.

2.253. Гелий под давлением $p = 1{,}0$ Па находится между двумя большими параллельными пластинами, отстоящими друг от друга на $l = 5{,}0$ мм. Одна пластина поддерживается при температуре $t_1 = 17\,^\circ\text{C}$, другая — при $t_2 = 37\,^\circ\text{C}$. Найти среднюю длину свободного пробега атомов гелия и плотность потока тепла.

2.254. Найти распределение температуры в пространстве между двумя коаксиальными цилиндрами с радиусами R_1 и R_2, заполненном однородным теплопроводящим веществом, если температуры цилиндров постоянны и равны соответственно T_1 и T_2.

2.255. Тот же вопрос, что и в предыдущей задаче, но для двух концентрических сфер с радиусами R_1 и R_2 и температурами T_1 и T_2.

2.256. Постоянный электрический ток течет по однородному проводу, радиус сечения которого R и коэффициент теплопроводности $\varkappa$. В единице объема провода выделяется тепловая мощность w. Найти распределение температуры в проводе, если установившаяся температура на его поверхности равна T_0.

2.257. В однородном шаре, радиус которого R и коэффициент теплопроводности $\varkappa$, выделяется равномерно по объему тепловая мощность с объемной плотностью w. Найти распределение температуры в шаре, если установившаяся температура на его поверхности равна T_0.

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

3.1. Постоянное электрическое поле в вакууме

● Напряженность и потенциал поля точечного заряда q:

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\mathbf{r}, \quad \varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}. \tag{3.1а}$$

● Связь между напряженностью поля и потенциалом:

$$\mathbf{E}=-\nabla\varphi, \tag{3.1б}$$

т. е. напряженность поля равна антиградиенту потенциала.

● Теорема Гаусса и циркуляция вектора $\mathbf{E}$:

$$\oint \mathbf{E}\,d\mathbf{S}=q/\varepsilon_0, \quad \oint \mathbf{E}\,d\mathbf{r}=0. \tag{3.1в}$$

● Потенциал и напряженность поля точечного диполя с электрическим моментом $\mathbf{p}$:

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{pr}}{r^3}, \quad E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^2}\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}, \tag{3.1г}$$

где ϑ — угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$.

● Энергия W диполя $\mathbf{p}$ во внешнем электрическом поле и момент сил $\mathbf{N}$, действующих на диполь:

$$W=-\mathbf{pE}, \quad \mathbf{N}=[\mathbf{pE}]. \tag{3.1д}$$

● Сила $\mathbf{F}$, действующая на диполь, и ее проекция F_x:

$$\mathbf{F}=p\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial l}, \quad F_x=\mathbf{p}\cdot\nabla E_x, \tag{3.1е}$$

где $\partial\mathbf{E}/\partial l$ — производная вектора $\mathbf{E}$ по направлению диполя, ∇E_x — градиент функции E_x.

3.1. Вычислить отношение электростатической и гравитационной сил взаимодействия между двумя электронами, между двумя протонами. При каком значении удельного заряда q/m частицы эти силы оказались бы равными по модулю в случае взаимодействия одинаковых частиц?

3.2. С какой силой взаимодействовали бы два медных шарика, каждый массы 1 г, находясь на расстоянии 1 м друг от друга, если бы суммарный заряд всех электронов в них отличался на 1% от суммарного заряда всех ядер?

3.3. Два небольших одинаково заряженных шарика, каждый массы m, подвешены к одной точке на шелковых нитях длины l.

Расстояние между шариками $x \ll l$. Найти скорость утечки зарядов dq/dt с каждого шарика, если скорость их сближения меняется по закону $v = a/\sqrt{x}$, где a — постоянная.

3.4. Два положительных заряда q_1 и q_2 находятся в точках с радиус-векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. Найти отрицательный заряд q_3 и радиус-вектор $\mathbf{r}_3$ точки, в которую его надо поместить, чтобы сила, действующая на каждый из этих трех зарядов, была равна нулю.

3.5. Тонкое проволочное кольцо радиуса r имеет электрический заряд q. Каково будет приращение силы, растягивающей проволоку, если в центр кольца поместить точечный заряд q_0?

3.6. Положительный точечный заряд 50 мкКл находится на плоскости xy в точке с радиус-вектором $\mathbf{r}_0 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, где $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ — орты осей x и y. Найти модуль и направление вектора напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ в точке с радиус-вектором $\mathbf{r} = 8\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$. Здесь r_0 и r в метрах.

3.7. В вершинах квадрата с диагональю $2l$ находятся точечные заряды q и $-q$, как показано на рис. 3.1. Найти модуль вектора напряженности электрического поля в точке, отстоящей на расстояние x от центра квадрата и расположенной симметрично относительно вершин квадрата.

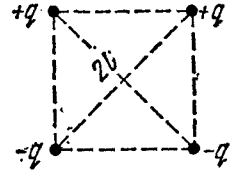


Рис. 3.1.

3.8. Тонкое полукольцо радиуса $R = 20$ см заряжено равномерно зарядом $q = 0{,}70$ нКл. Найти модуль вектора напряженности электрического поля в центре кривизны этого полукольца.

3.9. Кольцо радиуса r из тонкой проволоки имеет заряд q. Найти модуль напряженности электрического поля на оси кольца как функцию расстояния l до его центра. Исследовать полученную зависимость при $l \gg r$. Определить максимальное значение напряженности и соответствующее расстояние l. Изобразить примерный график функции $E(l)$.

3.10. Точечный заряд q находится в центре тонкого кольца радиуса R, по которому равномерно распределен заряд $-q$. Найти модуль вектора напряженности электрического поля на оси кольца в точке, отстоящей от центра кольца на расстояние x, если $x \gg R$.

3.11. Система состоит из тонкого заряженного проволочного кольца радиуса R и очень длинной равномерно заряженной нити, расположенной по оси кольца так, что один из ее концов совпадает с центром кольца. Последнее имеет заряд q. На единицу длины нити приходится заряд λ. Найти силу взаимодействия кольца и нити.

3.12. Тонкое непроводящее кольцо радиуса R заряжено с линейной плотностью $\lambda = \lambda_0 \cos\varphi$, где λ_0 — постоянная, φ — азимутальный угол. Найти модуль вектора напряженности электрического поля:

а) в центре кольца;

б) на оси кольца в зависимости от расстояния x до его центра. Исследовать полученное выражение при $x \gg R$.

3.13. Находящийся в вакууме тонкий прямой стержень длины $2a$ заряжен равномерно зарядом q. Найти модуль вектора напряженности электрического поля как функцию расстояния r от центра стержня для точек прямой:

а) перпендикулярной к стержню и проходящей через его центр;

б) на оси стержня вне его.

Исследовать полученные выражения при $r \gg a$.

3.14. Очень длинная прямая равномерно заряженная нить имеет заряд λ на единицу длины. Найти модуль и направление вектора напряженности электрического поля в точке, которая отстоит от нити на расстояние y и находится на перпендикуляре к нити, проходящем через один из ее концов.

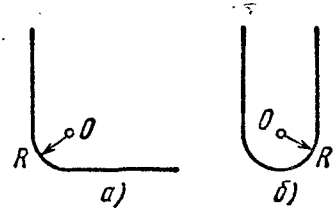


Рис. 3.2.

3.15. Равномерно заряженная нить, на единицу длины которой приходится заряд λ, имеет конфигурации, показанные на рис. 3.2, *а* и *б*. Считая, что радиус закругления R значительно меньше длины нити, найти модуль вектора напряженности электрического поля в точке O.

3.16. Сфера радиуса r заряжена с поверхностной плотностью $\sigma = \mathbf{ar}$, где $\mathbf{a}$ — постоянный вектор, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки сферы относительно ее центра. Найти вектор напряженности электрического поля в центре сферы.

3.17. Пусть поверхностная плотность заряда на сфере радиуса R зависит от полярного угла ϑ как $\sigma = \sigma_0 \cos \vartheta$, где σ_0 — положительная постоянная. Показать, что такое распределение заряда можно представить как результат малого сдвига друг относительно друга двух равномерно заряженных *шаров* радиуса R, заряды которых одинаковы по модулю и противоположны по знаку. Воспользовавшись этим представлением, найти вектор напряженности электрического поля внутри данной сферы.

3.18. Найти вектор напряженности электрического поля в центре шара радиуса R, объемная плотность заряда которого $\rho = \mathbf{ar}$, где $\mathbf{a}$ — постоянный вектор, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из центра шара.

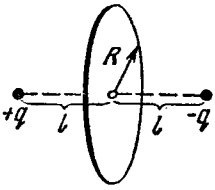


Рис. 3.3

3.19. Равномерно заряженная очень длинная нить, расположенная по оси круга радиуса R, упирается одним своим концом в его центр. Заряд нити на единицу длины равен λ. Найти поток вектора $\mathbf{E}$ через площадь круга.

3.20. Два точечных заряда q и $-q$ расположены на расстоянии $2l$ друг от друга (рис. 3.3). Найти поток вектора напряженности электрического поля через круг радиуса R.

3.21. Шар радиуса R равномерно заряжен с объемной плотностью ρ. Найти поток вектора напряженности электрического поля

через сечение шара, которое образовано плоскостью, отстоящей от центра шара на расстояние $r_0 < R$.

3.22. Две длинные параллельные друг другу нити равномерно заряжены так, что на единицу длины каждой из них приходится заряд λ. Расстояние между нитями равно l. Найти максимальное значение напряженности электрического поля в плоскости симметрии этой системы, расположенной между нитями.

3.23. Бесконечно длинная цилиндрическая поверхность круглого сечения заряжена равномерно по длине с поверхностной плотностью $\sigma = \sigma_0 \cos \varphi$, где φ — полярный угол цилиндрической системы координат с осью z, совпадающей с осью данной поверхности. Найти модуль и направление вектора напряженности электрического поля на оси z.

3.24. Напряженность электрического поля зависит только от координат x и y по закону $\mathbf{E} = a(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$, где a — постоянная, $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ — орты осей x и y. Найти поток вектора $\mathbf{E}$ через сферу радиуса R с центром в начале координат.

3.25. Шар радиуса R имеет положительный заряд, объемная плотность которого зависит только от расстояния r до его центра по закону $\rho = \rho_0 (1 - r/R)$, где ρ_0 — постоянная. Полагая диэлектрическую проницаемость шара и окружающего пространства равной единице, найти:

а) модуль вектора напряженности электрического поля внутри и вне шара как функцию расстояния r;

б) максимальное значение напряженности $E_{\text{макс}}$ и соответствующее ему значение расстояния r_m.

3.26. Система состоит из шара радиуса R, заряженного сферически симметрично, и окружающей среды, заполненной зарядом с объемной плотностью $\rho = \alpha/r$, где α — постоянная, r — расстояние от центра шара. Найти заряд шара, при котором модуль вектора напряженности электрического поля вне шара не будет зависеть от r. Чему равна эта напряженность? Диэлектрическая проницаемость шара и окружающей среды предполагается равной единице.

3.27. Пространство заполнено зарядом с объемной плотностью $\rho = \rho_0 e^{-\alpha r^3}$, где ρ_0 и α — положительные константы, r — расстояние от центра данной системы. Найти модуль вектора напряженности электрического поля как функцию r. Исследовать полученное выражение при малых и больших r, т. е. при $\alpha r^3 \ll 1$ и $\alpha r^3 \gg 1$.

3.28. Внутри шара, заряженного равномерно с объемной плотностью ρ, имеется сферическая полость. Центр полости смещен относительно центра шара на величину $\mathbf{a}$. Найти напряженность $\mathbf{E}$ поля внутри полости, полагая диэлектрическую проницаемость равной единице.

3.29. Внутри бесконечно длинного круглого цилиндра, заряженного равномерно с объемной плотностью ρ, имеется круглая цилиндрическая полость. Расстояние между осями цилиндра и полости равно a. Найти напряженность $\mathbf{E}$ электрического поля в полости. Диэлектрическую проницаемость считать равной единице.

3.30. Имеются два тонких проволочных кольца радиуса R каждое, оси которых совпадают. Заряды колец равны q и $-q$. Найти разность потенциалов между центрами колец, отстоящими друг от друга на расстояние a.

3.31. Имеется бесконечно длинная прямая нить, заряженная равномерно с линейной плотностью $\lambda = 0{,}40$ мкКл/м. Вычислить разность потенциалов точек 1 и 2, если точка 2 находится в $\eta = 2{,}0$ раза дальше от нити, чем точка 1.

3.32. Найти потенциал и напряженность электрического поля в центре полусферы радиуса R, заряженной равномерно с поверхностной плотностью σ.

3.33. Находящаяся в вакууме круглая очень тонкая пластинка радиуса R равномерно заряжена с поверхностной плотностью σ. Найти потенциал и напряженность электрического поля на оси пластинки как функцию расстояния l от ее центра. Исследовать полученное выражение при $l \to 0$ и $l \gg R$.

3.34. Найти потенциал φ на краю тонкого диска радиуса R, по которому равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью σ.

3.35. Найти вектор напряженности электрического поля, потенциал которого имеет вид $\varphi = \mathbf{ar}$, где $\mathbf{a}$ — постоянный вектор, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки поля.

3.36. Определить вектор напряженности электрического поля, потенциал которого зависит от координат x, y по закону:

а) $\varphi = a(x^2 - y^2)$; б) $\varphi = axy$,

где a — постоянная. Изобразить примерный вид этих полей с помощью силовых линий (в плоскости x, y).

3.37. Потенциал некоторого электростатического поля имеет вид $\varphi = a(x^2 + y^2) + bz^2$, где a и b — постоянные. Найти модуль и направление вектора напряженности поля. Какую форму имеют эквипотенциальные поверхности в случаях:

а) $a > 0$, $b > 0$; б) $a > 0$, $b < 0$?

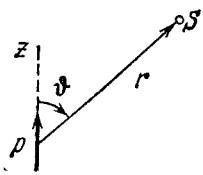


Рис. 3.4.

3.38. Заряд q распределен равномерно по объему шара радиуса R. Полагая диэлектрическую проницаемость всюду равной единице, найти потенциал:

а) в центре шара;

б) внутри шара как функцию расстояния r от его центра.

3.39. Показать, что потенциал поля диполя с электрическим моментом $\mathbf{p}$ (рис. 3.4) может быть представлен как $\varphi = \mathbf{pr}/4\pi\varepsilon_0 r^3$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор. Найти с помощью этого выражения модуль вектора напряженности электрического поля диполя как функцию r и ϑ.

3.40. Точечный диполь с электрическим моментом p, ориентированный в положительном направлении оси z, находится в начале координат. Найти проекции вектора напряженности электрического

поля E_z и $E_\perp$ (на плоскость, перпендикулярную к оси z в точке S (см. рис. 3.4)). В каких точках $\mathbf{E} \perp \mathbf{p}$?

3.41. Точечный электрический диполь с моментом $\mathbf{p}$ находится во внешнем однородном электрическом поле, напряженность которого равна $\mathbf{E}_0$, причем $\mathbf{p} \uparrow\uparrow \mathbf{E}_0$. В этом случае одна из эквипотенциальных поверхностей, охватывающих диполь, является сферой. Найти ее радиус.

3.42. Две параллельные тонкие нити равномерно заряжены с линейной плотностью λ и $-\lambda$. Расстояние между нитями равно l. Найти потенциал и модуль вектора напряженности электрического поля на расстоянии $r \gg l$ под углом ϑ к вектору $\mathbf{l}$ (рис. 3.5).

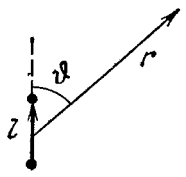


Рис. 3.5.

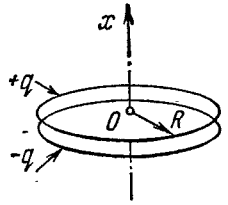


Рис. 3.6.

3.43. Два коаксиальных кольца, каждое радиуса R, из тонкой проволоки находятся на малом расстоянии l друг от друга ($l \ll R$) и имеют заряды q и $-q$. Найти потенциал и напряженность электрического поля на оси системы как функции координаты x (рис. 3.6). Изобразить на одном рисунке примерные графики полученных зависимостей. Исследовать эти функции при $|x| \gg R$.

3.44. Две безграничные плоскости, отстоящие друг от друга на расстояние l, заряжены равномерно с поверхностной плотностью σ и $-\sigma$ (рис. 3.7). Плоскости имеют коаксиальные отверстия радиуса R, причем $l \ll R$. Взяв координатную ось x с началом отсчета O, как показано на рисунке, найти потенциал и проекцию вектора напряженности электрического поля E_x на оси системы как функции координаты x. Изобразить примерный график $\varphi(x)$.

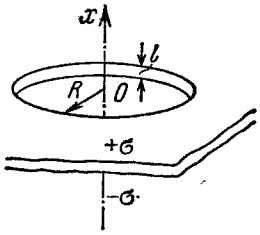


Рис. 3.7.

3.45. Имеется плоский конденсатор с круглыми тонкими пластинами радиуса R, отстоящими друг от друга на расстояние l ($l \ll R$) и заряженными равномерно с поверхностной плотностью σ и $-\sigma$. Найти потенциал и модуль вектора напряженности электрического поля на оси системы как функции расстояния x до пластин, если $x \gg l$. Исследовать полученные выражения при $x \gg R$.

3.46. Диполь с электрическим моментом $\mathbf{p}$ находится на расстоянии r от длинной нити, заряженной равномерно с линейной плот-

ностью λ. Найти силу $\mathbf{F}$, действующую на диполь, если вектор $\mathbf{p}$ ориентирован:

а) вдоль нити;

б) по радиус-вектору $\mathbf{r}$;

в) перпендикулярно к нити и радиус-вектору $\mathbf{r}$.

3.47. Найти силу взаимодействия двух молекул воды, отстоящих друг от друга на расстояние $l = 10$ нм, если их электрические моменты ориентированы вдоль одной и той же прямой. Момент каждой молекулы $p = 0{,}62 \cdot 10^{-29}$ Кл·м.

3.48. Найти потенциал $\varphi(x, y)$ электростатического поля $\mathbf{E} = a(y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$, где a — постоянная, $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ — орты осей x и y.

3.49. Найти потенциал $\varphi(x, y)$ электростатического поля $\mathbf{E} = 2axy\mathbf{i} + a(x^2 - y^2)\mathbf{j}$, где a — постоянная, $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ — орты осей x и y.

3.50. Определить потенциал $\varphi(x, y, z)$ электростатического поля $\mathbf{E} = ay\mathbf{i} + (ax + bz)\mathbf{j} + by\mathbf{k}$, где a и b — постоянные, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — орты осей x, y, z.

3.51. Потенциал поля в некоторой области пространства зависит только от координаты x как $\varphi = -ax^3 + b$, где a и b — некоторые постоянные. Найти распределение объемного заряда $\rho(x)$.

3.52. Между двумя большими параллельными пластинами, отстоящими друг от друга на расстояние d, находится равномерно распределенный объемный заряд. Разность потенциалов пластин равна $\Delta\varphi$. При каком значении объемной плотности ρ заряда напряженность поля вблизи одной из пластин будет равна нулю? Какова будет при этом напряженность поля у другой пластины?

3.53. Потенциал поля внутри заряженного шара зависит только от расстояния до его центра по закону $\varphi = ar^2 + b$, где a и b — постоянные. Найти распределение объемного заряда $\rho(r)$ внутри шара.

3.2. Проводники и диэлектрики в электрическом поле

● Напряженность электрического поля у поверхности проводника в вакууме:

$$E_n = \sigma/\varepsilon_0. \qquad (3.2а)$$

● Поток поляризованности $\mathbf{P}$ через замкнутую поверхность:

$$\oint \mathbf{P}\, d\mathbf{S} = -q', \qquad (3.2б)$$

где q' — алгебраическая сумма *связанных* зарядов внутри этой поверхности.

● Вектор $\mathbf{D}$ и теорема Гаусса для него:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \oint \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = q, \qquad (3.2в)$$

где q — алгебраическая сумма *сторонних* зарядов внутри замкнутой поверхности.

● Условия на границе раздела двух диэлектриков:

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma', \quad D_{2n} - D_{1n} = \sigma, \quad E_{2\tau} = E_{1\tau}, \qquad (3.2г)$$

где σ' и σ — поверхностные плотности связанных и сторонних зарядов, а $\mathrm{ort}\, \mathbf{n}$ нормали $\mathbf{n}$ направлен из среды 1 в среду 2.

● Для изотропных диэлектриков:

$$\mathbf{P}=\varkappa\varepsilon_0\mathbf{E},\quad \mathbf{D}=\varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E},\quad \varepsilon=1+\varkappa. \tag{3.2д}$$

● В случае изотропного однородного диэлектрика, заполняющего все пространство между эквипотенциальными поверхностями:

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0/\varepsilon. \tag{3.2е}$$

3.54. Небольшой шарик висит над горизонтальной безграничной проводящей плоскостью на изолирующей упругой нити жесткости k. После того как шарик зарядили, он опустился на x см, и его расстояние до проводящей плоскости стало равным l. Найти заряд шарика.

3.55. Точечный заряд q находится на расстоянии l от безграничной проводящей плоскости. Какую работу необходимо совершить, чтобы медленно удалить этот заряд на очень большое расстояние от плоскости?

3.56. Два точечных заряда, q и $-q$, расположены на расстоянии l друг от друга и на одинаковом расстоянии $l/2$ от безграничной проводящей плоскости. Найти:

а) модуль вектора электрической силы, действующей на каждый заряд;

б) модуль вектора напряженности электрического поля в точке, расположенной на середине между этими зарядами.

3.57. Точечный заряд q находится между двумя проводящими взаимно перпендикулярными полуплоскостями. Расстояние заряда до каждой полуплоскости равно l. Найти модуль вектора силы, действующей на заряд.

3.58. Точечный диполь с электрическим моментом $\mathbf{p}$ находится на расстоянии l от бесконечной проводящей плоскости. Найти модуль вектора силы, действующей на диполь, если вектор $\mathbf{p}$ перпендикулярен плоскости.

3.59. Точечный заряд q находится на расстоянии l от проводящей безграничной плоскости. Определить поверхностную плотность зарядов, индуцированных на плоскости, как функцию расстояния r от основания перпендикуляра, опущенного из заряда на плоскость.

3.60. Тонкая бесконечно длинная нить имеет заряд λ на единицу длины и расположена параллельно безграничной проводящей плоскости. Расстояние между нитью и плоскостью равно l. Найти:

а) модуль вектора силы, действующей на единицу длины нити;

б) распределение поверхностной плотности заряда $\sigma(x)$ на плоскости, где x — расстояние от плоскости, перпендикулярной к проводящей поверхности и проходящей через нить.

3.61. Очень длинная прямая нить ориентирована перпендикулярно к безграничной проводящей плоскости и не доходит до этой плоскости на расстояние l. Нить заряжена равномерно с линейной плотностью λ. Пусть точка O — след нити на плоскости. Найти поверхностную плотность индуцированного заряда на плоскости:

а) в точке O;

б) в зависимости от расстояния r до точки O.

3.62. Тонкое проволочное кольцо радиуса R имеет заряд q. Кольцо расположено параллельно безграничной проводящей плоскости на расстоянии l от последней. Найти:

а) поверхностную плотность заряда в точке плоскости, расположенной симметрично относительно кольца;

б) напряженность и потенциал электрического поля в центре кольца.

3.63. Найти потенциал φ незаряженной проводящей сферы, вне которой на расстоянии l от ее центра находится точечный заряд q.

3.64. Точечный заряд q находится на расстоянии r от центра O незаряженного сферического слоя проводника, внутренний и наружный радиусы которого равны соответственно R_1 и R_2. Найти потенциал в точке O, если $r < R_1$.

3.65. Система состоит из двух концентрических проводящих сфер, причем на внутренней сфере радиуса a находится положительный заряд q_1. Какой заряд q_2 следует поместить на внешнюю сферу радиуса b, чтобы потенциал внутренней сферы оказался равным нулю? Как будет зависеть при этом потенциал φ от расстояния r до центра системы? Изобразить примерный график этой зависимости.

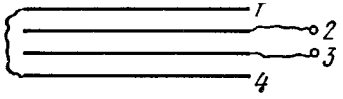


Рис. 3.8.

3.66. Четыре большие металлические пластины расположены на малом расстоянии d друг от друга, как показано на рис. 3.8. Крайние пластины соединены проводником, а на внутренние пластины подана разность потенциалов $\Delta\varphi$. Найти:

а) значения напряженности электрического поля между соседними пластинами;

б) суммарный заряд, приходящийся на единицу площади каждой пластины.

3.67. Две безграничные проводящие пластины 1 и 2 расположены на расстоянии l друг от друга. Между пластинами на расстоянии x от пластины 1 находится точечный заряд q. Найти заряды, наведенные на каждой из пластин.

3.68. Найти электрическую силу, которую испытывает заряд, приходящийся на единицу поверхности произвольного проводника, если поверхностная плотность заряда равна σ.

3.69. Металлический шарик радиуса $R = 1{,}5$ см имеет заряд $q = 10$ мкКл. Найти модуль вектора результирующей силы, которая действует на заряд, расположенный на одной половине шарика.

3.70. Незаряженный проводящий шар радиуса R поместили во внешнее однородное электрическое поле, в результате чего на поверхности шара появился индуцированный заряд с поверхностной плотностью $\sigma = \sigma_0 \cos\vartheta$, где σ_0 — постоянная, ϑ — полярный угол. Найти модуль вектора результирующей электрической силы, которая действует на индуцированный заряд одного знака.

3.71. В воде электрическое поле напряженности $E = 1{,}0$ кВ/см создает поляризацию, эквивалентную правильной ориентации только одной из N молекул. Найти N. Электрический момент молекулы воды $p = 0{,}62 \cdot 10^{-29}$ Кл·м.

3.72. Неполярная молекула с поляризуемостью β находится на большом расстоянии l от полярной молекулы с электрическим моментом $\mathbf{p}$. Найти модуль вектора силы взаимодействия этих молекул, если вектор $\mathbf{p}$ ориентирован вдоль прямой, проходящей через обе молекулы.

3.73. На оси тонкого равномерно заряженного кольца радиуса R находится неполярная молекула. На каком расстоянии x от центра кольца модуль вектора силы F, действующей на данную молекулу: а) равен нулю; б) имеет максимальное значение? Изобразить примерный график зависимости $F_x(x)$.

3.74. Точечный заряд q находится в центре шара из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью ε. Найти поляризованность $\mathbf{P}$ как функцию радиус-вектора $\mathbf{r}$ относительно центра системы, а также заряд q' внутри сферы, радиус которой меньше радиуса шара.

3.75. Показать, что на границе диэлектрика с проводником поверхностная плотность связанного заряда диэлектрика $\sigma' = -\sigma(\varepsilon - 1)/\varepsilon$, где ε — диэлектрическая проницаемость, σ — поверхностная плотность заряда на проводнике.

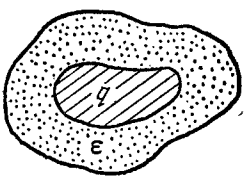


Рис. 3.9.

3.76. Проводник произвольной формы, имеющий заряд q, окружен однородным диэлектриком с проницаемостью ε (рис. 3.9). Найти суммарные поверхностные связанные заряды на внутренней и наружной поверхностях диэлектрика.

3.77. Однородный изотропный диэлектрик имеет вид сферического слоя с радиусами a и b. Изобразить примерные графики напряженности электрического поля E и потенциала φ как функций расстояния r от центра слоя, если диэлектрик имеет некоторый положительный сторонний заряд, распределенный равномерно: а) по внутренней поверхности слоя; б) по объему слоя.

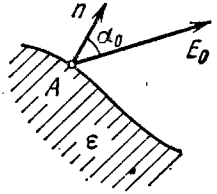


Рис. 3.10.

3.78. Вблизи точки A (рис. 3.10) границы раздела стекло — вакуум напряженность электрического поля в вакууме $E_0 = 10{,}0$ В/м, причем угол между вектором $\mathbf{E}_0$ и нормалью $\mathbf{n}$ к границе раздела $\alpha_0 = 30°$. Найти напряженность E поля в стекле вблизи точки A, угол α между вектором $\mathbf{E}$ и $\mathbf{n}$, а также поверхностную плотность связанных зарядов в точке A.

3.79. У плоской поверхности однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью ε напряженность электрического поля

в вакууме равна E_0, причем вектор $\mathbf{E}_0$ составляет угол ϑ с нормалью к поверхности диэлектрика (рис. 3.11). Считая поле внутри и вне диэлектрика однородным, найти:

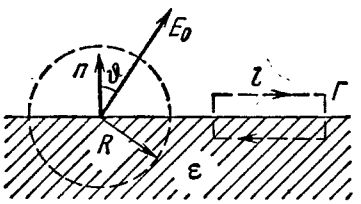


Рис. 3.11.

а) поток вектора $\mathbf{E}$ через сферу радиуса R с центром на поверхности диэлектрика;

б) циркуляцию вектора $\mathbf{D}$ по контуру Γ длины l (см. рис. 3.11), плоскость которого перпендикулярна к поверхности диэлектрика и параллельна вектору $\mathbf{E}_0$.

3.80. Бесконечно большая пластина из однородного диэлектрика с проницаемостью ε заряжена равномерно сторонним зарядом с объемной плотностью ρ. Толщина пластины равна $2d$. Найти:

а) модуль вектора напряженности электрического поля и потенциал как функции расстояния l от середины пластины (потенциал в середине пластины положить равным нулю); взяв координатную ось x перпендикулярно к пластине, изобразить примерные графики зависимостей проекции $E_x(x)$ вектора $\mathbf{E}$ и потенциала $\varphi(x)$;

б) поверхностную и объемную плотности связанного заряда.

3.81. Сторонние заряды равномерно распределены с объемной плотностью $\rho > 0$ по шару радиуса R из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью ε. Найти:

а) модуль вектора напряженности электрического поля как функцию расстояния r от центра шара; изобразить примерные графики зависимостей $E(r)$ и $\varphi(r)$;

б) объемную и поверхностную плотности связанных зарядов.

3.82. Круглый диэлектрический диск радиуса R и толщины d поляризован *статически* так, что поляризованность, равная $\mathbf{P}$, всюду одинакова и вектор $\mathbf{P}$ лежит в плоскости диска. Найти напряженность $\mathbf{E}$ электрического поля в центре диска, если $d \ll R$.

3.83. При некоторых условиях поляризованность безграничной незаряженной пластины из диэлектрика имеет вид $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0(1 - x^2/d^2)$, где $\mathbf{P}_0$ — вектор, перпендикулярный к пластине, x — расстояние от середины пластины, d — ее полутолщина. Найти напряженность $\mathbf{E}$ электрического поля внутри пластины и разность потенциалов между ее поверхностями.

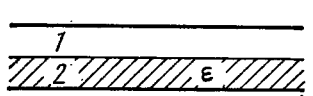


Рис. 3.12.

3.84. Первоначально пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено воздухом, и напряженность поля в зазоре равна E_0. Затем половину зазора, как показано на рис. 3.12, заполнили однородным изотропным диэлектриком с проницаемостью ε. Найти модули векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ в обеих частях зазора (*1* и *2*), если при введении диэлектрика:

а) напряжение между обкладками не менялось;

б) заряды на обкладках оставались неизменными.

3.85. Решить предыдущую задачу с тем отличием, что диэлектриком заполнили половину зазора, как показано на рис. 3.13.

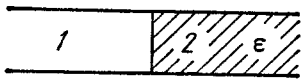


Рис. 3.13.

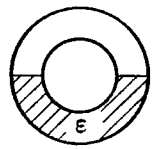


Рис. 3.14.

3.86. Половина пространства между двумя концентрическими обкладками сферического конденсатора заполнена, как показано на рис. 3.14, однородным изотропным диэлектриком с проницаемостью ε. Заряд конденсатора равен q. Найти модуль вектора напряженности электрического поля между обкладками как функцию расстояния r от центра кривизны этих обкладок.

3.87. Два одинаковых небольших одноименно заряженных шарика подвешены на изолирующих нитях равной длины к одной точке. При заполнении окружающей среды керосином угол расхождения нитей не изменился. Найти плотность материала шариков.

3.88. Внутри шара из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью $\varepsilon = 5{,}00$ создано однородное электрическое поле напряженности $E = 100$ В/м. Радиус шара $R = 3{,}0$ см. Найти максимальную поверхностную плотность связанных зарядов и полный связанный заряд одного знака.

3.89. Точечный заряд q находится в вакууме на расстоянии l от плоской поверхности однородного изотропного диэлектрика, заполняющего все полупространство. Проницаемость диэлектрика равна ε. Найти:

а) поверхностную плотность связанных зарядов как функцию расстояния r от точечного заряда q; исследовать полученный результат при $l \to 0$;

б) суммарный связанный заряд на поверхности диэлектрика.

3.90. Воспользовавшись условием и решением предыдущей задачи, найти модуль вектора силы, действующей на заряд q со стороны связанных зарядов на поверхности диэлектрика.

3.91. Точечный заряд q находится на плоскости, отделяющей вакуум от безграничного однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью ε. Найти модули векторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ и потенциал φ как функции расстояния r от заряда q.

3.92. Небольшой проводящий шарик, имеющий заряд q, находится в однородном изотропном диэлектрике с проницаемостью ε на расстоянии l от безграничной плоской границы, отделяющей диэлектрик от вакуума. Найти поверхностную плотность связанных

зарядов на границе диэлектрик — вакуум как функцию расстояния r от шарика. Исследовать полученный результат при $l \to 0$.

3.93. Полупространство, заполненное однородным изотропным диэлектриком с проницаемостью ε, ограничено проводящей плоскостью. На расстоянии l от этой плоскости в диэлектрике находится небольшой металлический шарик, имеющий заряд q. Найти поверхностную плотность связанных зарядов на границе с проводящей плоскостью как функцию расстояния r от шарика.

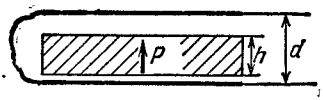


Рис. 3.15.

3.94. Пластинка толщины h из однородного *статически* поляризованного диэлектрика находится внутри плоского конденсатора, обкладки которого соединены между собой проводником. Поляризованность диэлектрика равна $\mathbf{P}$ (рис. 3.15). Расстояние между обкладками конденсатора d. Найти векторы напряженности и индукции электрического поля внутри и вне пластины.

3.95. Длинный диэлектрический цилиндр круглого сечения поляризован так, что вектор $\mathbf{P} = \alpha \mathbf{r}$, где α — положительная постоянная, $\mathbf{r}$ — расстояние от оси. Найти объемную плотность ρ' связанных зарядов как функцию расстояния r от оси.

3.96. Диэлектрический шар поляризован однородно и *статически*. Его поляризованность равна $\mathbf{P}$. Имея в виду, что *так* поляризованный шар можно представить как результат малого сдвига всех положительных зарядов диэлектрика относительно всех отрицательных зарядов,

а) найти напряженность $\mathbf{E}$ электрического поля внутри шара;

б) показать, что поле вне шара является полем диполя, расположенного в центре шара, и потенциал этого поля $\varphi = \mathbf{p}_0\mathbf{r}/4\pi\varepsilon_0$, где $\mathbf{p}_0$ — электрический момент шара, $\mathbf{r}$ — расстояние от его центра.

3.97. Воспользовавшись результатом решения предыдущей задачи, найти напряженность $\mathbf{E}_0$ электрического поля в сферической полости в безграничном однородном диэлектрике с проницаемостью ε, если вдали от полости напряженность поля равна $\mathbf{E}$.

3.98. В однородное электрическое поле напряженности $\mathbf{E}_0$ поместили однородный диэлектрический шар. При этих условиях диэлектрик поляризуется однородно. Найти напряженность $\mathbf{E}$ электрического поля внутри шара и поляризованность $\mathbf{P}$ диэлектрика, проницаемость которого равна ε. При решении воспользоваться результатом задачи 3.96.

3.99. Бесконечно длинный диэлектрический цилиндр круглого сечения поляризован однородно и статически, причем поляризованность $\mathbf{P}$ перпендикулярна к оси цилиндра. Найти напряженность $\mathbf{E}$ электрического поля в диэлектрике.

3.100. Длинный цилиндр круглого сечения из однородного диэлектрика поместили в однородное электрическое поле с напряженностью $\mathbf{E}_0$. Ось цилиндра перпендикулярна к вектору $\mathbf{E}_0$. При этих условиях диэлектрик поляризуется однородно. Воспользовавшись

результатом решения предыдущей задачи, найти напряженность **E** электрического поля внутри цилиндра и поляризованность **P** диэлектрика, проницаемость которого равна ε.

3.3. Электроемкость. Энергия электрического поля

● Емкость плоского конденсатора:

$$C = \varepsilon\varepsilon_0 S/d. \tag{3.3а}$$

● Энергия взаимодействия системы точечных зарядов:

$$W = {}^1/_2 \sum q_i\varphi_i. \tag{3.3б}$$

● Полная электрическая энергия системы с непрерывным распределением заряда:

$$W = {}^1/_2 \int \varphi\rho\, dV. \tag{3.3в}$$

● Полная электрическая энергия двух заряженных тел 1 и 2:

$$W = W_1 + W_2 + W_{12}, \tag{3.3г}$$

где W_1 и W_2 — собственные энергии тел, W_{12} — энергия взаимодействия.

● Энергия заряженного конденсатора:

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}. \tag{3.3д}$$

● Объемная плотность энергии электрического поля:

$$w = \frac{\mathbf{ED}}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}. \tag{3.3е}$$

3.101. Найти емкость уединенного шарового проводника радиуса R_1, окруженного прилегающим к нему концентрическим слоем однородного диэлектрика с проницаемостью ε и наружным радиусом R_2.

3.102. К источнику с э. д. с. $\mathcal{E}$ подключили последовательно два плоских воздушных конденсатора, каждый емкости C. Затем один из конденсаторов заполнили однородным диэлектриком с проницаемостью ε. Во сколько раз уменьшилась напряженность электрического поля в этом конденсаторе? Какой заряд пройдет через источник?

3.103. Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено последовательно двумя диэлектрическими слоями 1 и 2 с толщинами d_1 и d_2 и с проницаемостями ε_1 и ε_2. Площадь каждой обкладки равна S. Найти:

а) емкость конденсатора;

б) плотность σ' связанных зарядов на границе раздела диэлектрических слоев, если напряжение на конденсаторе равно U и электрическое поле направлено от слоя 1 к слою 2.

3.104. Зазор между обкладками плоского конденсатора заполнен изотропным диэлектриком, проницаемость ε которого изменяется в перпендикулярном к обкладкам направлении по линейному закону от ε_1 до ε_2, причем $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Площадь каждой обкладки S, расстояние между ними d. Найти:

а) емкость конденсатора;

б) объемную плотность связанных зарядов как функцию ε, если заряд конденсатора q и поле **E** в нем направлено в сторону возрастания ε.

3.105. Найти емкость сферического конденсатора с радиусами обкладок R_1 и $R_2 > R_1$, который заполнен изотропным диэлектриком с проницаемостью, изменяющейся по закону $\varepsilon = a/r$, где a — постоянная, r — расстояние от центра конденсатора.

3.106. Цилиндрический конденсатор заполнен двумя цилиндрическими слоями диэлектриков с проницаемостями ε_1 и ε_2. Внутренние радиусы слоев равны соответственно R_1 и $R_2 > R_1$. Максимально допустимая напряженность электрического поля для этих диэлектриков равна E_{1m} и E_{2m}. При каком соотношении между ε, R и E_m напряженность поля при повышении напряжения одновременно достигнет значения, соответствующего пробою того и другого диэлектрика?

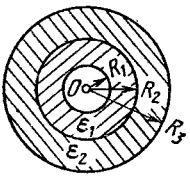


Рис. 3.16.

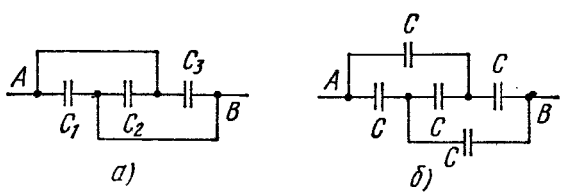
3.107. Имеется двухслойный цилиндрический конденсатор, данные которого приведены на рис. 3.16. Предельные значения напряженности электрического поля, при которых наступает пробой данных диэлектриков, равны соответственно E_1 и E_2. При каком напряжении конденсатор будет пробит, если $\varepsilon_1 R_1 E_1 < \varepsilon_2 R_2 E_2$?

3.108. Два длинных прямых провода с одинаковым радиусом сечения a расположены в воздухе параллельно друг другу. Расстояние между их ссями равно b. Найти взаимную емкость проводов на единицу их длины при условии $b \gg a$.

3.109. Длинный прямой провод расположен параллельно безграничной проводящей плоскости. Радиус сечения провода равен a, расстояние между осью провода и проводящей плоскостью b. Найти взаимную емкость этой системы на единицу длины провода при условии $a \ll b$.

3.110. Найти емкость системы из двух одинаковых металлических шариков радиуса a, расстояние между центрами которых b, причем $b \gg a$. Система находится в однородном диэлектрике с проницаемостью ε.

3.111. Определить емкость системы, которая состоит из металлического шарика радиуса a и безграничной проводящей плоскости, отстоящей от центра шарика на расстояние l, если $l \gg a$.



а) б)
Рис. 3.17.

3.112. Найти емкость системы одинаковых конденсаторов между точками A и B, которая показана:
а) на рис. 3.17, *а*; б) на рис. 3.17, *б*.

3.113. Четыре одинаковые металлические пластины расположены в воздухе на одинаковом расстоянии d друг от друга. Площадь каждой пластины равна S. Найти емкость системы между точками A и B, если пластины соединены так, как показано:

а) на рис. 3.18, *а*; б) на рис. 3.18, *б*.

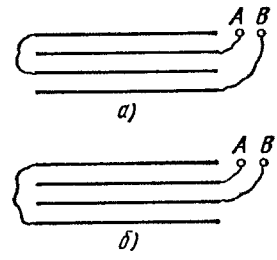


Рис. 3.18.

3.114. Конденсатор емкости $C_1 = 1{,}0$ мкФ выдерживает напряжение не более $U_1 = 6{,}0$ кВ, а конденсатор емкости $C_2 = 2{,}0$ мкФ — не более $U_2 = 4{,}0$ кВ. Какое напряжение может выдержать система из этих двух конденсаторов при последовательном соединении?

3.115. В схеме (рис. 3.19) найти разность потенциалов между точками A и B, если э. д. с. $\mathscr{E} = 110$ В и отношение емкостей $C_2/C_1 = \eta = 2{,}0$.

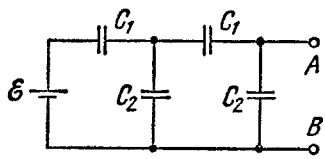


Рис. 3.19.

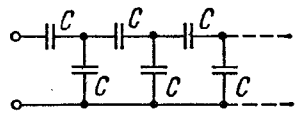


Рис. 3.20.

3.116. Найти емкость бесконечной цепи, которая образована повторением одного и того же звена, состоящего из двух одинаковых конденсаторов, каждый емкости C (рис. 3.20).

3.117. В некоторой цепи имеется участок AB, показанный на рис. 3.21. Э. д. с. источника $\mathscr{E} = 10$ В, емкости конденсаторов $C_1 = 1{,}0$ мкФ, $C_2 = 2{,}0$ мкФ и разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B = 5{,}0$ В. Найти напряжение на каждом конденсаторе.

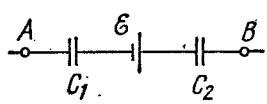


Рис. 3.21.

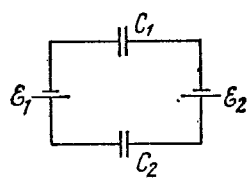


Рис. 3.22.

3.118. В схеме (рис. 3.22) найти разность потенциалов между левой и правой обкладками каждого конденсатора.

3.119. Найти заряд каждого конденсатора в цепи, показанной на рис. 3.22.

3.120. Определить разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ между точками A и B схемы (рис. 3.23). При каком условии она равна нулю?

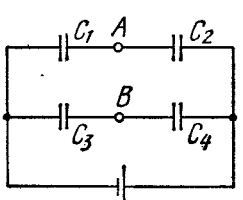


Рис. 3.23.

3.121. Конденсатор емкости $C_1 = 1{,}0$ мкФ, заряженный до напряжения $U = 110$ В, подключили параллельно к концам системы из двух последовательно соединенных незаряженных конденсаторов, емкости которых $C_2 = 2{,}0$ мкФ и $C_3 = 3{,}0$ мкФ. Какой заряд протечет при этом по соединительным проводам?

3.122. Какие заряды протекут после замыкания ключа K в схеме (рис. 3.24) через сечения *1* и *2* в направлениях, указанных стрелками?

3.123. В схеме (рис. 3.25) э. д. с. каждой батареи $\mathscr{E} = 60$ В, емкости конденсаторов $C_1 = 2{,}0$ мкФ и $C_2 = 3{,}0$ мкФ. Найти заряды, которые пройдут после замыкания ключа K через сечения *1*, *2* и *3* в направлениях, указанных стрелками.

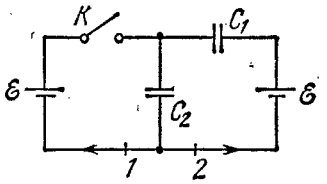


Рис. 3.24.

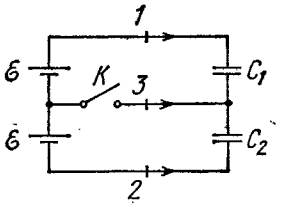


Рис. 3.25.

3.124. Найти разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ между точками A и B схемы (рис. 3.26).

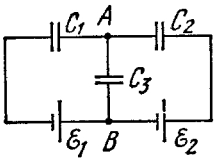


Рис. 3.26.

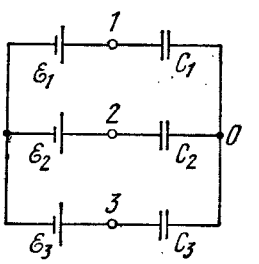


Рис. 3.27.

3.125. Определить потенциал в точке *1* схемы (рис. 3.27), полагая потенциал точки O равным нулю. Написать по аналогии (используя симметрию полученной формулы) выражения для потенциалов в точках *2* и *3*.

3.126. Найти емкость схемы (рис. 3.28) между точками A и B.

3.127. Определить энергию взаимодействия точечных зарядов, расположенных в вершинах квадрата со стороной a в системах, которые показаны на рис. 3.29.

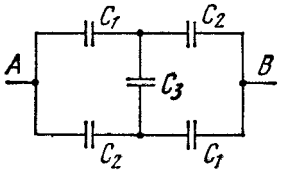


Рис. 3.28.

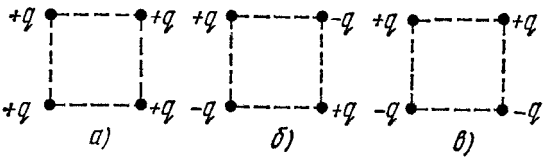


Рис. 3.29.

3.128. Имеется бесконечная прямая цепочка чередующихся зарядов q и $-q$. Расстояние между соседними зарядами равно a. Найти энергию взаимодействия каждого заряда со всеми остальными.

Указание. Воспользоваться разложением $\ln(1+\alpha)$ в ряд по α.

3.129. Точечный заряд q находится на расстоянии l от безграничной проводящей плоскости. Найти энергию взаимодействия этого заряда с зарядами, индуцированными на плоскости.

3.130. Вычислить энергию взаимодействия двух шаров, заряды которых q_1 и q_2 распределены сферически симметрично. Расстояние между центрами шаров равно l.

Указание. Прежде всего следует определить энергию взаимодействия шара и тонкого сферического слоя.

3.131. Конденсатор емкости $C_1 = 1{,}0$ мкФ, предварительно заряженный до напряжения $U = 300$ В, подключили параллельно к незаряженному конденсатору емкости $C_2 = 2{,}0$ мкФ. Найти приращение электрической энергии этой системы к моменту установления равновесия. Объяснить полученный результат.

3.132. Какое количество тепла выделится в цепи (рис. 3.30) после переключения ключа K из положения *1* в положение *2*?

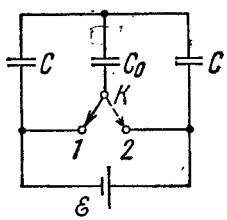


Рис. 3.30.

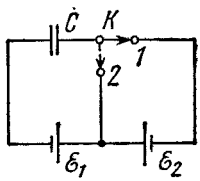


Рис. 3.31.

3.133. Какое количество тепла выделится в цепи (рис. 3.31) после переключения ключа K из положения *1* в положение *2*?

3.134. Система состоит из двух концентрических тонких металлических оболочек радиусами R_1 и R_2 с соответствующими зарядами

q_1 и q_2. Найти значения собственной энергии каждой оболочки W_1 и W_2, энергии взаимодействия оболочек W_{12} и полную электрическую энергию W системы.

3.135. Заряд q распределен равномерно по объему шара радиуса R. Полагая диэлектрическую проницаемость равной единице, найти:

а) собственную электростатическую энергию шара;

б) отношение энергии W_1, запасенной внутри шара, к энергии W_2, заключенной в окружающем пространстве.

3.136. Точечный заряд $q = 3{,}0$ мкКл находится в центре шарового слоя из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью $\varepsilon = 3{,}0$. Внутренний радиус слоя $a = 250$ мм, внешний $b = 500$ мм. Найти электростатическую энергию, заключенную в диэлектрическом слое.

3.137. Сферическую оболочку радиуса R_1, равномерно заряженную зарядом q, расширили до радиуса R_2. Найти работу, совершенную при этом электрическими силами.

3.138. Имеется сферическая оболочка, равномерно заряженная зарядом q, в центре которой расположен точечный заряд q_0. Найти работу, совершенную электрическими силами при расширении оболочки — увеличении ее радиуса от R_1 до R_2.

3.139. Сферическая оболочка заряжена равномерно с поверхностной плотностью σ. Воспользовавшись законом сохранения энергии, найти модуль вектора электрической силы, которая действует на единицу поверхности оболочки.

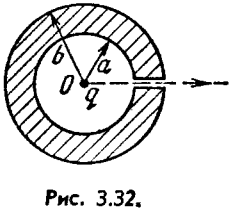


Рис. 3.32.

3.140. Точечный заряд q находится в центре O сферического незаряженного проводящего слоя с малым отверстием (рис. 3.32). Внутренний и внешний радиусы слоя равны соответственно a и b. Какую работу надо затратить, чтобы медленно перенести заряд q из точки O через отверстие на бесконечность?

3.141. Имеется плоский воздушный конденсатор, площадь каждой обкладки которого равна S. Какую работу необходимо совершить, чтобы медленно увеличить расстояние между обкладками от x_1 до x_2, если при этом поддерживать неизменным:

а) заряд конденсатора, равный q;

б) напряжение на конденсаторе, равное U?

3.142. Внутри плоского конденсатора находится параллельная обкладкам пластинка, толщина которой составляет $\eta = 0{,}60$ части зазора между обкладками. Емкость конденсатора в отсутствие пластинки $C = 20$ нФ. Конденсатор сначала подключили параллельно к источнику постоянного напряжения $U = 200$ В, затем отключили и после этого медленно извлекли пластинку из зазора. Найти работу, затраченную на извлечение пластинки, если пластинка:

а) металлическая; б) стеклянная.

3.143. Плоский конденсатор опустили в горизонтальном положении в воду, которая заполнила зазор между пластинами шириной $d = 1{,}0$ мм. Затем конденсатор подключили к постоянному напряжению $U = 500$ В. Найти приращение давления воды в зазоре.

3.144. Плоский конденсатор расположен горизонтально так, что одна его пластина находится над поверхностью жидкости, другая — под поверхностью жидкости (рис. 3.33). Диэлектрическая проницаемость жидкости ε, ее плотность ρ. На какую высоту поднимется уровень жидкости в конденсаторе после сообщения его пластинам заряда с поверхностной плотностью σ?

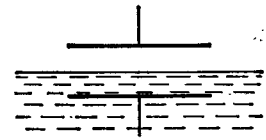


Рис. 3.33.

3.145. В цилиндрический конденсатор вводят цилиндрический слой диэлектрика с проницаемостью ε, заполняющий все пространство между обкладками. Средний радиус обкладок равен R, зазор между ними d, причем $d \ll R$. Обкладки конденсатора подключены к источнику постоянного напряжения U. Найти модуль вектора электрической силы, втягивающей диэлектрик в конденсатор.

3.146. Конденсатор состоит из двух неподвижных пластин, имеющих форму полукруга радиуса R, и расположенной между ними подвижной пластины из диэлектрика с проницаемостью ε, которая может свободно поворачиваться вокруг оси O (рис. 3.34). Толщина подвижной пластины d, что практически равно расстоянию между неподвижными пластинами. Конденсатору сообщили разность потенциалов U. Найти модуль момента сил отиосительно оси O, действующих на подвижную пластину в положении, показанном на рисунке.

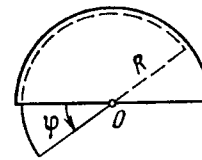


Рис. 3.34.

3.4. Электрический ток

● Закон Ома для неоднородного участка цепи:

$$I = \frac{U_{12}}{R} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}_{12}}{R}, \tag{3.4а}$$

где U_{12} — падение напряжения на данном участке.

● Закон Ома в дифференциальной форме:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*), \tag{3.4б}$$

где $\mathbf{E}^*$ — напряженность поля сторонних сил.

● Правила Кирхгофа:

$$\sum I_k = 0, \quad \sum I_k R_k = \sum \mathscr{E}_k. \tag{3.4в}$$

● Мощность тока P и тепловая мощность Q:

$$P = UI = (\varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}_{12})\, I, \quad Q = RI^2. \tag{3.4г}$$

● Удельная мощность тока $P_{уд}$ и удельная тепловая мощность тока $Q_{уд}$:

$$P_{уд}=\mathbf{j}(\mathbf{E}+\mathbf{E}^*), \quad Q_{уд}=\rho j^2. \tag{3.4д}$$

● Плотность тока в металле:

$$\mathbf{j}=en\mathbf{u}, \tag{3.4е}$$

где $\mathbf{u}$ — средняя скорость носителей.

● Число ионов, рекомбинирующих за единицу времени в единице объема газа:

$$\dot{n}_r=rn^2, \tag{3.4ж}$$

где r — коэффициент рекомбинации.

3.147. Длинный равномерно заряженный по поверхности цилиндр радиусом сечения $a = 1{,}0$ см движется с постоянной скоростью $v = 10$ м/с вдоль своей оси. Напряженность электрического поля непосредственно у поверхности цилиндра $E = 0{,}9$ кВ/см. Чему равен соответствующий конвекционный ток, т. е. ток, обусловленный механическим переносом заряда?

3.148. Воздушный цилиндрический конденсатор, подключенный к источнику постоянного напряжения $U = 200$ В, погружают в вертикальном положении в сосуд с дистиллированной водой со скоростью $v = 5{,}0$ мм/с. Зазор между обкладками конденсатора $d = 2{,}0$ мм, средний радиус кривизны обкладок $r = 50$ мм. Имея в виду, что $d \ll r$, найти ток, текущий при этом по подводящим проводам.

3.149. При 0 °С сопротивление проводника 1 в η раз меньше сопротивления проводника 2. Их температурные коэффициенты сопротивления равны α_1 и α_2. Найти температурный коэффициент сопротивления участка цепи, состоящего из этих двух проводников, если они соединены:

а) последовательно; б) параллельно.

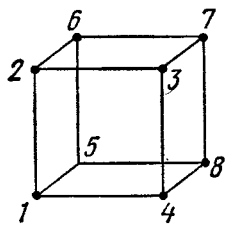


Рис. 3.35.

3.150. Найти сопротивление проволочного каркаса, имеющего форму куба (рис. 3.35), при включении его в цепь между точками:

а) *1* — *7*; б) *1* — *2*; в) *1* — *3*.

Сопротивление каждого ребра каркаса равно R.

3.151. При каком значении сопротивления R_x в цепочке (рис. 3.36) сопротивление между точками A и B не будет зависеть от числа ячеек?

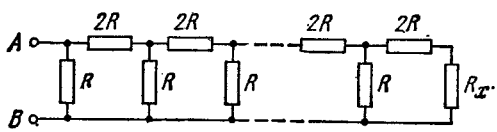


Рис. 3.36.

3.152. На рис. 3.37 изображена бесконечная цепь, образованная повторением одного и того же звена — сопротивлений $R_1 = 4{,}0$ Ом

и $R_2 = 3{,}0$ Ом. Найти сопротивление этой цепи между точками A и B.

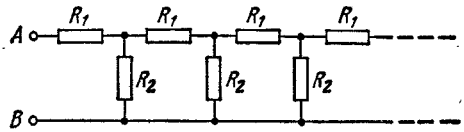


Рис. 3.37.

3.153. Имеется безграничная проволочная сетка с квадратными ячейками (рис. 3.38). Сопротивление каждого проводника между соседними узлами равно R_0. Найти сопротивление R этой сетки между точками A и B.

Указание. Воспользоваться принципами симметрии и суперпозиции.

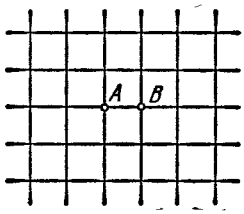


Рис. 3.38.

3.154. Однородная слабо проводящая среда с удельным сопротивлением ρ заполняет пространство между двумя коаксиальными идеально проводящими тонкими цилиндрами. Радиусы цилиндров a и b, причем $a < b$, длина каждого цилиндра l. Пренебрегая краевыми эффектами, найти сопротивление среды между цилиндрами.

* **3.155.** Металлический шар радиуса a окружен концентрической тонкой металлической оболочкой радиуса b. Пространство между этими электродами заполнено однородной слабо проводящей средой с удельным сопротивлением ρ. Найти сопротивление межэлектродного промежутка. Исследовать полученное выражение при $b \to \infty$.

3.156. Пространство между двумя проводящими концентрическими сферами, радиусы которых a и b $(a < b)$, заполнено однородной слабо проводящей средой. Емкость такой системы равна C. Найти удельное сопротивление среды, если разность потенциалов между сферами, отключенными от внешнего напряжения, уменьшается в η раз за время Δt.

3.157. Два металлических шарика одинакового радиуса a находятся в однородной слабо проводящей среде с удельным сопротивлением ρ. Найти сопротивление среды между шариками при условии, что расстояние между ними значительно больше радиуса шариков.

3.158. Металлический шарик радиуса a находится на расстоянии l от безграничной идеально проводящей плоскости. Пространство вокруг шарика заполнено однородной слабо проводящей средой с удельным сопротивлением ρ. Найти для случая $a \ll l$:

а) плотность тока у проводящей плоскости как функцию расстояния r от шарика, если разность потенциалов между шариком и плоскостью равна U;

б) сопротивление среды между шариком и плоскостью.

3.159. Два длинных параллельных провода находятся в слабо проводящей среде с удельным сопротивлением ρ. Расстояние между осями проводов l, радиус сечения каждого провода a. Найти для случая $a \ll l$:

а) плотность тока в точке, равноудаленной от осей проводов на расстояние r, если разность потенциалов между проводами равна U;

б) сопротивление среды на единицу длины проводов.

3.160. Зазор между обкладками плоского конденсатора заполнен стеклом с удельным сопротивлением $\rho = 100$ ГОм·м. Емкость конденсатора $C = 4{,}0$ нФ. Найти ток утечки через конденсатор при подаче на него напряжения $U = 2{,}0$ кВ.

3.161. Два проводника произвольной формы находятся в безграничной однородной слабо проводящей среде с удельным сопротивлением ρ и диэлектрической проницаемостью ε. Найти значение произведения RC для данной системы, где R — сопротивление среды между проводниками, C — взаимная емкость проводников при наличии среды.

3.162. Проводник с удельным сопротивлением ρ граничит с диэлектриком проницаемости ε. В некоторой точке A у поверхности проводника электрическая индукция равна D, причем вектор $\mathbf{D}$ направлен от проводника и составляет угол α с нормалью к поверхности. Найти поверхностную плотность зарядов на проводнике вблизи точки A и плотность тока в проводнике вблизи этой же точки.

3.163. Зазор между пластинами плоского конденсатора заполнен неоднородной слабо проводящей средой, удельная проводимость которой изменяется в направлении, перпендикулярном к пластинам, по линейному закону от $\sigma_1 = 1{,}0$ пСм/м до $\sigma_2 = 2{,}0$ пСм/м. Площадь каждой пластины $S = 230$ см^2, ширина зазора $d = 2{,}0$ мм. Найти ток через конденсатор при напряжении на нем $U = 300$ В.

3.164. Показать, что закон преломления линий постоянного тока на границе раздела двух проводящих сред имеет вид $\operatorname{tg}\alpha_2/\operatorname{tg}\alpha_1 = \sigma_2/\sigma_1$, где σ_1 и σ_2 — проводимости сред, α_2 и α_1 — углы между линиями тока и нормалью к поверхности раздела данных сред.

3.165. Два цилиндрических проводника одинакового сечения, но с разными удельными сопротивлениями ρ_1 и ρ_2, прижаты торцами друг к другу. Найти заряд на границе раздела данных проводников, если в направлении от проводника 1 к проводнику 2 течет ток I.

3.166. Зазор между обкладками плоского конденсатора заполнен последовательно двумя диэлектрическими слоями 1 и 2 толщиной d_1 и d_2, с проницаемостями ε_1 и ε_2 и удельными сопротивлениями ρ_1 и ρ_2. Конденсатор находится под постоянным напряжением U, причем электрическое поле направлено от слоя 1 к слою 2. Найти σ — поверхностную плотность сторонних зарядов на границе раздела диэлектрических слоев и условие, при котором $\sigma = 0$.

3.167. Между пластинами 1 и 2 плоского конденсатора находится неоднородная слабо проводящая среда. Ее диэлектрическая

проницаемость и удельное сопротивление изменяются от значений ε_1, ρ_1 у пластины 1 до значений ε_2, ρ_2 у пластины 2. Конденсатор подключен к постоянному напряжению, и через него течет установившийся ток I от пластины 1 к пластине 2. Найти суммарный сторонний заряд в данной среде.

3.168. Между пластинами плоского конденсатора находится неоднородная слабо проводящая среда, удельное сопротивление которой изменяется только в направлении, перпендикулярном к пластинам, причем по линейному закону. Отношение максимального значения удельного сопротивления к минимальному равно η. Ширина зазора d. Найти объемную плотность заряда в зазоре при напряжении на конденсаторе U.

3.169. Длинный проводник круглого сечения площади S сделан из материала, удельное сопротивление которого зависит только от расстояния r до оси проводника по закону $\rho = \alpha/r^2$, где α — постоянная. Найти:

а) сопротивление единицы длины такого проводника;

б) напряженность электрического поля в проводнике, при которой по нему будет протекать ток I.

3.170. Конденсатор емкости $C = 400$ пФ подключили через сопротивление $R = 650$ Ом к источнику постоянного напряжения U_0. Через сколько времени напряжение на конденсаторе составит $U = 0{,}90\,U_0$?

3.171. Конденсатор, заполненный диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon = 2{,}1$, теряет за время $\tau = 3{,}0$ мин половину сообщенного ему заряда. Предполагая, что утечка заряда происходит только через диэлектрическую прокладку, вычислить ее удельное сопротивление.

3.172. Цепь состоит из источника постоянной э. д. с. $\mathscr{E}$ и последовательно подключенных к нему сопротивления R и конденсатора емкости C. Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало. В момент $t = 0$ емкость конденсатора быстро (скачком) уменьшили в η раз. Найти ток в цепи как функцию времени t.

3.173. Амперметр и вольтметр подключили последовательно к батарее с э. д. с. $\mathscr{E} = 6{,}0$ В. Если параллельно вольтметру подключить некоторое сопротивление, то показание вольтметра уменьшается в $\eta = 2{,}0$ раза, а показание амперметра во столько же раз увеличивается. Найти показание вольтметра после подключения сопротивления.

3.174. Найти разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между точками *1* и *2* схемы (рис. 3.39), если $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $\mathscr{E}_1 = 5$ В и $\mathscr{E}_2 = 2{,}0$ В. Внутренние сопротивления источников тока пренебрежимо малы.

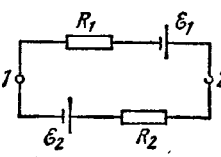


Рис. 3.39.

3.175. Два последовательно соединенных источника тока одинаковой э. д. с. имеют различные внутренние сопротивления R_1 и R_2, причем $R_2 > R_1$. Найти внешнее сопротивление R, при ко-

тором разность потенциалов на клеммах одного из источников (какого именно?) станет равной нулю.

3.176. N источников тока с различными э. д. с. соединены, как показано на рис. 3.40. Э. д. с. источников пропорциональны их внутренним сопротивлениям, т. е. $\mathscr{E} = \alpha R$, где α — заданная постоянная. Сопротивление соединительных проводов пренебрежимо мало. Найти:

а) ток в цепи;

б) разность потенциалов между точками A и B, делящими цепь на n и $N - n$ звеньев.

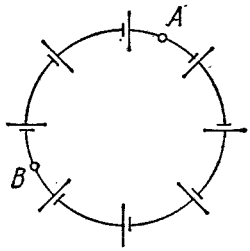


Рис. 3.40.

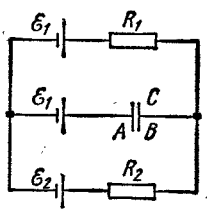


Рис. 3.41.

3.177. В схеме (рис. 3.41) э. д. с. источников $\mathscr{E}_1 = 1{,}0$ В, $\mathscr{E}_2 = 2{,}5$ В и сопротивления $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом. Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы. Найти разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ между обкладками A и B конденсатора C.

3.178. В схеме (рис. 3.42) э. д. с. источника $\mathscr{E} = 5{,}0$ В и сопротивления $R_1 = 4{,}0$ Ом, $R_2 = 6{,}0$ Ом. Внутреннее сопротивление источника $R = 0{,}10$ Ом. Найти токи, текущие через сопротивления R_1 и R_2.

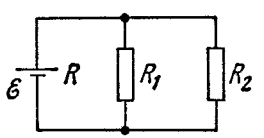


Рис. 3.42.

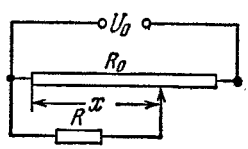


Рис. 3.43.

3.179. На рис. 3.43 показана схема потенциометра, с помощью которого можно менять напряжение U, подаваемое на некоторый прибор с сопротивлением R. Потенциометр имеет длину l, сопротивление R_0 и находится под напряжением U_0. Найти напряжение U, снимаемое на прибор, как функцию расстояния x. Исследовать отдельно случай $R \gg R_0$.

3.180. Найти э. д. с. и внутреннее сопротивление источника, эквивалентного двум параллельно соединенным элементам с э. д. с. $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ и внутренними сопротивлениями R_1 и R_2.

3.181. Найти значение и направление тока через сопротивление R в схеме (рис. 3.44), если э. д. с. источников $\mathscr{E}_1 = 1{,}5$ В, $\mathscr{E}_2 = 3{,}7$ В и сопротивления $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом и $R = 5{,}0$ Ом. Внутренние сопротивления источников тока пренебрежимо малы.

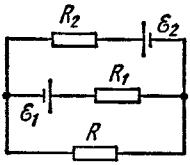


Рис. 3.44.

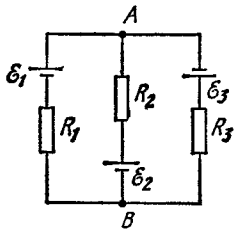


Рис. 3.45.

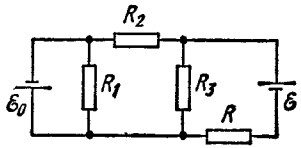


Рис. 3.46.

3.182. В схеме (рис. 3.45) э. д. с. источников $\mathscr{E}_1 = 1{,}5$ В, $\mathscr{E}_2 = 2{,}0$ В, $\mathscr{E}_3 = 2{,}5$ В и сопротивления $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 30$ Ом. Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы. Найти:

а) ток через сопротивление R_1;

б) разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ между точками A и B.

3.183. Найти ток через сопротивление R в схеме (рис. 3.46). Внутренние сопротивления обоих источников пренебрежимо малы.

3.184. Найти разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ между обкладками конденсатора C схемы (рис. 3.47), если э. д. с. источников $\mathscr{E}_1 = 4{,}0$ В, $\mathscr{E}_2 = 1{,}0$ В и сопротивления $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 30$ Ом. Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы.

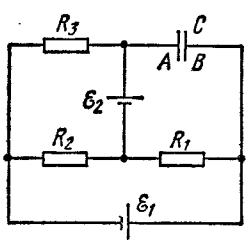


Рис. 3.47.

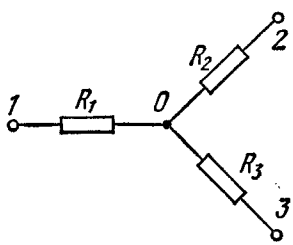


Рис. 3.48.

3.185. Найти ток, протекающий через сопротивление R_1 участка цепи (рис. 3.48), если сопротивления $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 30$ Ом и потенциалы точек *1*, *2* и *3* равны соответственно $\varphi_1 = 10$ В, $\varphi_2 = 6$ В, $\varphi_3 = 5$ В.

3.186. Между точками A и B цепи (рис. 3.49) поддерживают постоянное напряжение $U = 25$ В. Найти значение и направление тока в участке CD, если сопротивления $R_1 = 1{,}0$ Ом, $R_2 = 2{,}0$ Ом, $R_3 = 3{,}0$ Ом и $R_4 = 4{,}0$ Ом.

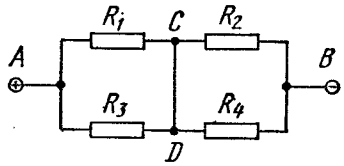


Рис. 3.49.

3.187. В схеме (рис. 3.50) найти сопротивление между точками A и B.

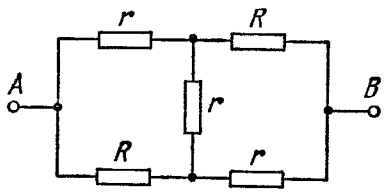


Рис. 3.50.

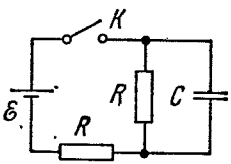


Рис. 3.51.

3.188. Найти зависимость от времени t напряжения на конденсаторе C (рис. 3.51) после замыкания в момент $t = 0$ ключа K.

3.189. Сколько тепла выделится в спирали сопротивлением R при прохождении через нее количества электричества q, если ток в спирали:

а) равномерно убывал до нуля в течение времени Δt;

б) монотонно убывал до нуля так, что за каждые Δt секунд он уменьшался вдвое?

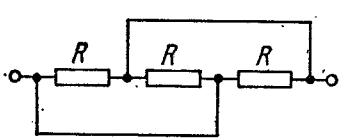


Рис. 3.52.

3.190. К источнику постоянного тока с внутренним сопротивлением R_0 подключили три одинаковых сопротивления R, соединенных между собой, как показано на рис. 3.52. При каком значении R тепловая мощность, выделяемая на этом участке, будет максимальна?

3.191. Убедиться, что распределение тока в параллельно соединенных сопротивлениях R_1 и R_2 соответствует минимуму выделяемой на этом участке тепловой мощности.

3.192. Аккумулятор с э. д. с. $\mathscr{E} = 2{,}6$ В, замкнутый на внешнее сопротивление, дает ток $I = 1{,}0$ А. При этом разность потен-

циалов между полюсами аккумулятора $U = 2{,}0$ В. Найти тепловую мощность, выделяемую в аккумуляторе, и мощность, которую развивают в нем электрические силы.

3.193. Электромотор постоянного тока подключили к напряжению U. Сопротивление обмотки якоря равно R. При каком значении тока через обмотку полезная мощность мотора будет максимальной? Чему она равна? Каков при этом к. п. д. мотора?

3.194. На сколько процентов уменьшился диаметр нити накала вследствие испарения, если для поддержания прежней температуры пришлось повысить напряжение на $\eta = 1{,}0\%$? Считать, что теплоотдача нити в окружающее пространство пропорциональна площади ее поверхности.

3.195. Имеется проводник, у которого известны сопротивление R, не зависящее от температуры, и общая теплоемкость C. В момент $t = 0$ его подключили к постоянному напряжению U. Найти зависимость от времени температуры T проводника, считая, что тепловая мощность, отдаваемая им в окружающее пространство $q = k(T - T_0)$, где k — постоянная, T_0 — температура окружающей среды (она же и температура проводника в начальный момент).

3.196. В схеме (рис. 3.53) сопротивления $R_1 = 20$ Ом и $R_2 = 30$ Ом. При каком значении сопротивления R_x выделяемая на нем тепловая мощность практически не будет зависеть от малых изменений этого сопротивления? Напряжение между точками A и B предполагается при этом постоянным.

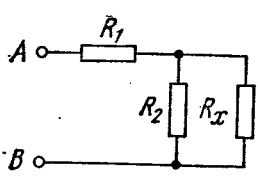


Рис. 3.53.

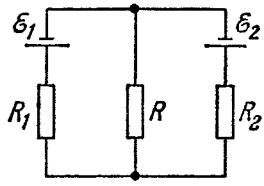


Рис. 3.54.

3.197. В схеме (рис. 3.54) заданы сопротивления R_1 и R_2, а также э. д. с. источников $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$. Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы. При каком значении сопротивления R выделяемая на нем тепловая мощность будет максимальной? Чему она равна?

3.198. Смешанная батарея из большого числа $N = 300$ одинаковых элементов, каждый с внутренним сопротивлением $r = 0{,}3$ Ом, подключена к внешнему сопротивлению $R = 10$ Ом. Найти число n параллельных групп, содержащих одинаковое число последовательно соединенных элементов, при котором на внешнем сопротивлении будет выделяться максимальная тепловая мощность.

3.199. Конденсатор емкости $C = 5{,}00$ мкФ подключили к источнику постоянной э. д. с. $\mathscr{E} = 200$ В (рис. 3.55). Затем переключатель K перевели с контакта *1* на контакт *2*. Найти количество тепла, выделившееся на сопротивлении $R_1 = 500$ Ом, если $R_2 = 330$ Ом.

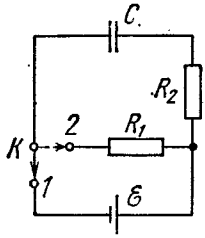


Рис. 3.55.

3.200. Между обкладками плоского конденсатора помещена параллельно им металлическая пластинка, толщина которой составляет $\eta = 0{,}60$ расстояния между обкладками. Емкость конденсатора в отсутствие пластинки $C = 20$ нФ. Конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения $U = 100$ В. Пластинку медленно извлекли из конденсатора. Найти:

а) приращение энергии конденсатора;

б) механическую работу, затраченную на извлечение пластинки.

3.201. Стеклянная пластинка целиком заполняет зазор между обкладками плоского конденсатора, емкость которого в отсутствие пластинки $C = 20$ нФ. Конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения $U = 100$ В. Пластинку медленно (без трения) извлекли из зазора. Найти приращение энергии конденсатора и механическую работу, затраченную на извлечение пластинки.

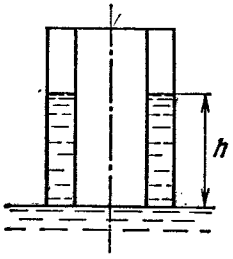


Рис. 3.56.

3.202. Цилиндрический конденсатор, подключенный к источнику постоянного напряжения U, упирается своим торцом в поверхность воды (рис. 3.56). Расстояние d между обкладками конденсатора значительно меньше их среднего радиуса. Найти высоту h, на которой установится уровень воды между обкладками конденсатора. Капиллярными явлениями пренебречь.

3.203. Радиусы обкладок сферического конденсатора равны a и b, причем $a < b$. Пространство между обкладками заполнено однородным веществом с диэлектрической проницаемостью ε и удельным сопротивлением ρ. Первоначально конденсатор не заряжен. В момент $t = 0$ внутренней обкладке сообщили заряд q_0. Найти:

а) закон изменения во времени заряда на внутренней обкладке;

б) количество тепла, выделившегося при растекании заряда.

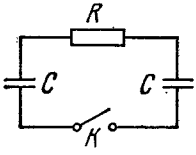


Рис. 3.57.

3.204. Обкладкам конденсатора емкости $C = 2{,}00$ мкФ сообщили разноименные заряды $q_0 = 1{,}00$ мКл. Затем обкладки замкнули через сопротивление $R = 5{,}0$ МОм. Найти:

а) заряд, прошедший через это сопротивление за $\tau = 2{,}00$ с;

б) количество тепла, выделившееся в сопротивлении за то же время.

3.205. В схеме (рис. 3.57) емкость каждого конденсатора равна C и сопротивление — R. Один из конденсаторов зарядили

до напряжения U_0 и затем в момент $t = 0$ замкнули ключ K. Найти:

а) ток I в цепи как функцию времени t;

б) количество выделенного тепла, зная зависимость $I(t)$.

3.206. Катушка радиуса $r = 25$ см, содержащая $l = 500$ м тонкого медного провода, вращается с угловой скоростью $\omega = 300$ рад/с вокруг своей оси. Через скользящие контакты катушка подключена к баллистическому гальванометру. Общее сопротивление всей цепи $R = 21$ Ом. Найти удельный заряд носителей тока в меди, если при резком затормаживании катушки через гальванометр проходил заряд $q = 10$ нКл.

3.207. Найти суммарный импульс электронов в прямом проводе длины $l = 1000$ м, по которому течет ток $I = 70$ А.

3.208. По медному проводу течет ток плотности $j = 1{,}0$ А/мм^2. Считая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон, оценить, какой путь пройдет электрон, переместившись вдоль провода на расстояние $l = 10$ мм.

3.209. По прямому медному проводу длины $l = 1000$ м и сечением $S = 1{,}0$ мм^2 течет ток $I = 4{,}5$ А. Считая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон, найти:

а) время, за которое электрон переместится от одного конца провода до другого;

б) сумму электрических сил, действующих на все свободные электроны в данном проводе.

3.210. Однородный пучок протонов, ускоренных разностью потенциалов $U = 600$ кВ, имеет круглое сечение радиуса $r = 5{,}0$ мм. Найти напряженность электрического поля на поверхности пучка и разность потенциалов между поверхностью и осью пучка при токе $I = 50$ мА.

3.211. Две большие параллельные пластины находятся в вакууме. Одна из пластин служит катодом — источником электронов, начальная скорость которых пренебрежимо мала. Электронный поток, направленный к противоположной пластине, создает в пространстве объемный заряд, вследствие чего потенциал в зазоре между пластинами меняется по закону $\varphi = ax^{4/3}$, где a — положительная постоянная, x — расстояние от катода. Найти:

а) объемную плотность пространственного заряда в зависимости от x;

б) плотность тока.

3.212. Воздух между двумя параллельными пластинами, отстоящими друг от друга на расстояние $d = 20$ мм, ионизируют рентгеновским излучением. Площадь каждой пластины $S = 500$ см^2. Найти концентрацию положительных ионов, если при напряжении $U = 100$ В между пластинами идет ток $I = 3{,}0$ мкА, значительно меньший тока насыщения. Подвижность ионов воздуха $u_0^+ = 1{,}37$ см^2/(В·с) и $u_0^- = 1{,}91$ см^2/(В·с).

3.213. Газ ионизируют непосредственно у поверхности плоского электрода *1* (рис. 3.58), отстоящего от электрода *2* на расстояние l.

Между электродами приложили переменное напряжение, изменяющееся со временем t по закону $U = U_0 \sin \omega t$. Уменьшая частоту ω, обнаружили, что гальванометр Γ показывает ток только при $\omega < \omega_0$, где ω_0 — некоторая граничная частота. Найти подвижность ионов, достигающих при этих условиях электрода *2*.

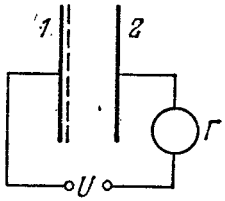


Рис. 3.58.

3.214. Воздух между двумя близко расположенными пластинами равномерно ионизируют ультрафиолетовым излучением. Объем воздуха между пластинами $V = 500$ см^3, наблюдаемый ток насыщения $I_{нас} = 0{,}48$ мкА. Найти:

а) число пар ионов, создаваемых ионизатором за единицу времени в единице объема;

б) равновесную концентрацию пар ионов, если коэффициент рекомбинации ионов воздуха $r = 1{,}67 \cdot 10^{-6}$ см^3/с.

3.215. Длительно действовавший ионизатор, создававший за единицу времени в единице объема воздуха число пар ионов $\dot{n}_i = 3{,}5 \cdot 10^9$ см$^{-3} \cdot$с$^{-1}$, был выключен. Считая, что единственным процессом потери ионов в воздухе является рекомбинация с коэффициентом $r = 1{,}67 \cdot 10^{-6}$ см^3/с, найти, через какое время после выключения ионизатора концентрация ионов уменьшится в $\eta = 2{,}0$ раза.

3.216. Плоский воздушный конденсатор, расстояние между пластинами которого $d = 5{,}0$ мм, зарядили до разности потенциалов $U = 90$ В и отключили от источника напряжения. Найти время, за которое напряжение на конденсаторе уменьшится на $\eta = 1{,}0\%$, имея в виду, что в воздухе при обычных условиях в среднем образуется за единицу времени в единице объема число пар ионов $\dot{n}_i = 5{,}0$ см$^{-3} \cdot$с$^{-1}$ и что данное напряжение соответствует току насыщения.

3.217. Между двумя плоскими пластинами конденсатора, отстоящими друг от друга на расстояние d, находится газ. Одна из пластин эмиттирует ежесекундно ν_0 электронов, которые, двигаясь в электрическом поле, ионизируют молекулы газа так, что каждый электрон создает на единице длины своего пути α новых электронов (и ионов). Найти электронный ток у противоположной пластины, пренебрегая ионизацией молекул газа образующимися ионами.

3.218. Газ между пластинами конденсатора, отстоящими друг от друга на расстояние d, равномерно ионизируют ультрафиолетовым излучением так, что ежесекундно в единице объема создается $\dot{n}_i$ электронов. Последние, двигаясь в электрическом поле конденсатора, ионизируют молекулы газа, причем каждый электрон создает на единице длины своего пути α новых электронов (и ионов). Пренебрегая ионизацией ионами, найти плотность электронного тока у пластины с бо́льшим потенциалом.

3.5. Постоянное магнитное поле. Магнетики

● Магнитное поле точечного заряда q, движущегося с нерелятивистской скоростью $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\,[\mathbf{vr}]}{r^3}. \tag{3.5а}$$

● Закон Био—Савара:

$$d\mathbf{L}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[\mathbf{jr}]}{r^3}\,dV, \quad d\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,[d\mathbf{l},\ \mathbf{r}]}{r^3}. \tag{3.5б}$$

● Циркуляция вектора $\mathbf{B}$ и теорема Гаусса для него:

$$\oint \mathbf{B}\,d\mathbf{r}=\mu_0 I, \quad \oint \mathbf{B}\,d\mathbf{S}=0. \tag{3.5в}$$

● Сила Лоренца:

$$\mathbf{F}=q\mathbf{E}+q\,[\mathbf{vB}]. \tag{3.5г}$$

● Сила Ампера:

$$d\mathbf{F}=[\mathbf{jB}]\,dV, \quad d\mathbf{F}=I\,[d\mathbf{l},\ \mathbf{B}]. \tag{3.5д}$$

● Сила и момент сил, действующие на магнитный диполь $\mathbf{p}_m=IS\mathbf{n}$:

$$\mathbf{F}=p_m\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial n}, \quad \mathbf{N}=[\mathbf{p}_m\mathbf{B}], \tag{3.5е}$$

где $\partial\mathbf{B}/\partial n$ — производная вектора $\mathbf{B}$ по направлению диполя.

● Циркуляция намагниченности $\mathbf{J}$:

$$\oint \mathbf{J}\,d\mathbf{r}=I', \tag{3.5ж}$$

где I' — суммарный молекулярный ток.

● Вектор $\mathbf{H}$ и его циркуляция:

$$\mathbf{H}=\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}-\mathbf{J}, \quad \oint \mathbf{H}\,d\mathbf{r}=I, \tag{3.5з}$$

где I — алгебраическая сумма макроскопических токов.

● Условия на границе раздела двух магнетиков:

$$B_{1n}=B_{2n}, \quad H_{1\tau}=H_{2\tau}. \tag{3.5и}$$

● Для магнетиков, у которых $\mathbf{J}=\chi\mathbf{H}$:

$$\mathbf{B}=\mu\mu_0\mathbf{H}, \quad \mu=1+\chi. \tag{3.5к}$$

3.219. По круговому витку радиуса $R = 100$ мм из тонкого провода циркулирует ток $I = 1{,}00$ А. Найти магнитную индукцию:

а) в центре витка;

б) на оси витка в точке, отстоящей от его центра на $x = 100$ мм.

3.220. Ток I течет по тонкому проводнику, который имеет вид правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R. Найти магнитную индукцию в центре данного контура. Исследовать полученное выражение при $n \to \infty$.

3.221. Найти индукцию магнитного поля в центре контура, имеющего вид прямоугольника, если его диагональ $d = 16$ см, угол между диагоналями $\varphi = 30°$ и ток в контуре $I = 5{,}0$ А.

3.222. Ток $I = 5{,}0$ А течет по тонкому проводнику, изогнутому, как показано на рис. 3.59. Радиус изогнутой части проводника $R = 120$ мм, угол $2\varphi = 90°$. Найти индукцию магнитного поля в точке O.

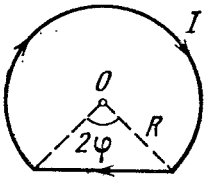


Рис. 3.59.

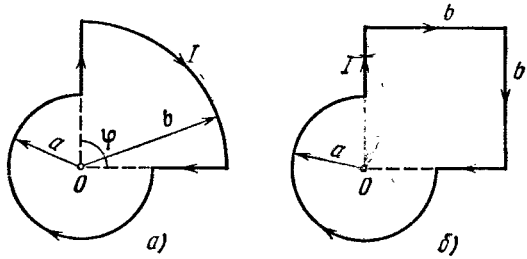


Рис. 3.60.

3.223. Найти индукцию магнитного поля в точке O контура с током I, который показан:

а) на рис. 3.60, *а*; радиусы a и b, а также угол φ известны;

б) на рис. 3.60, *б*; радиус a и сторона b известны.

3.224. Ток I течет вдоль длинной тонкостенной трубы радиуса R, имеющей по всей длине продольную прорезь ширины h. Найти индукцию магнитного поля внутри трубы при условии $h \ll R$.

3.225. Ток I течет по длинному прямому проводнику, сечение которого имеет форму тонкого полукольца радиуса R (рис. 3.61). Найти индукцию магнитного поля в точке O.

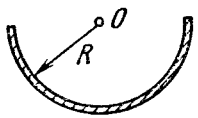


Рис. 3.61.

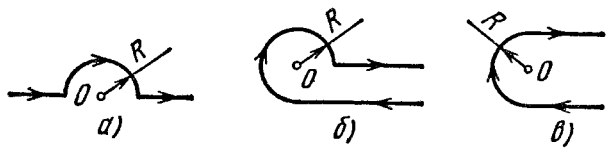


Рис. 3.62.

3.226. Определить индукцию магнитного поля в точке O, если проводник с током I имеет вид, показанный на рис. 3.62: *а*, *б*, *в*. Радиус изогнутой части проводника равен R, прямолинейные участки проводника предполагаются очень длинными.

3.227. Очень длинный проводник с током $I = 5{,}0$ А изогнут в форме прямого угла. Найти индукцию магнитного поля в точке, которая отстоит от плоскости проводника на $l = 35$ см и находится на перпендикуляре к проводникам, проходящем через точку изгиба.

3.228. Найти индукцию магнитного поля в точке O, если проводник с током $I = 8{,}0$ А имеет вид, показанный на рис. 3.63: *а*, *б*, *в*.

Радиус изогнутой части проводника $R = 100$ мм, прямолинейные участки проводника очень длинные.

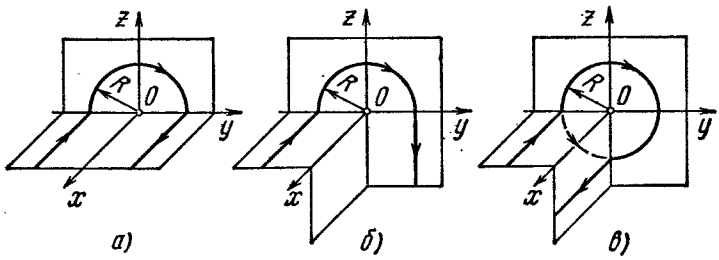


Рис. 3.63.

3.229. Определить модуль и направление вектора **B** магнитного поля:

а) безграничной плоскости, по которой течет ток с линейной плотностью **i**, одинаковой во всех точках плоскости;

б) двух параллельных безграничных плоскостей, по которым текут токи с линейными плотностями **i** и —**i**, одинаковыми во всех точках каждой плоскости.

3.230. Однородный ток плотности j течет внутри неограниченной пластины толщины $2d$ параллельно ее поверхности. Найти индукцию магнитного поля этого тока как функцию расстояния x от средней плоскости пластины. Магнитную проницаемость всюду считать равной единице.

3.231. Постоянный ток I течет по длинному прямому проводу. Из точки O (рис. 3.64) он растекается радиально-симметрично по безграничной проводящей плоскости, перпендикулярной к проводу. Найти индукцию магнитного поля во всех точках пространства.

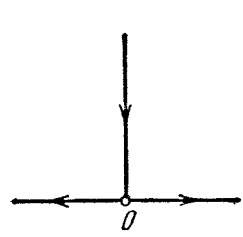


Рис. 3.64.

3.232. Имеется круговой виток с током I. Найти интеграл $\int \mathbf{B}\, d\mathbf{r}$ вдоль оси витка в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Объяснить полученный результат.

3.233. По круглому однородному прямому проводу, радиус сечения которого R, течет постоянный ток плотности **j**. Найти вектор индукции магнитного поля этого тока в точке, положение которой относительно оси провода определяется радиус-вектором **r**. Магнитную проницаемость всюду считать равной единице.

3.234. Внутри однородного длинного прямого провода круглого сечения имеется круглая длинная цилиндрическая полость, ось которой параллельна оси провода и смещена относительно последней

на расстояние $\mathbf{l}$. По проводу течет постоянный ток плотности $\mathbf{j}$. Найти вектор индукции магнитного поля внутри полости. Рассмотреть, в частности, случай $\mathbf{l} = 0$.

3.235. Найти плотность тока как функцию расстояния r от оси аксиально-симметричного параллельного потока электронов, если индукция магнитного поля внутри потока зависит от r как $B = br^{\alpha}$, где b и α — положительные постоянные.

3.236. Однослойная катушка (соленоид) имеет длину l и радиус сечения R. Число витков на единицу длины n. Найти индукцию магнитного поля в центре катушки при пропускании через нее тока I.

3.237. Очень длинный прямой соленоид имеет радиус сечения R и n витков на единицу длины. По соленоиду течет постоянный ток I. Пусть x — расстояние, отсчитываемое вдоль оси соленоида от его торца. Найти:

а) индукцию магнитного поля на оси как функцию x; изобразить примерный график зависимости индукции B от отношения x/R;

б) расстояние x_0 до точки на оси, в которой индукция поля отличается от индукции в глубине соленоида на $\eta = 1\%$.

3.238. Обмоткой очень длинного прямого соленоида с радиусом сечения $R = 2{,}5$ см служит тонкая лента-проводник шириной $h = 2{,}0$ см, намотанная в один слой практически вплотную. По ленте течет постоянный ток $I = 5{,}0$ А. Найти индукцию магнитного поля внутри и вне соленоида как функцию расстояния r от его оси.

3.239. На деревянный тороид малого поперечного сечения намотано равномерно $N = 2{,}5 \cdot 10^3$ витков провода, по которому течет ток I. Найти отношение η индукции магнитного поля внутри тороида к индукции магнитного поля в центре тороида.

3.240. Постоянный ток $I = 10$ А течет по длинному прямому проводнику круглого сечения. Найти магнитный поток через одну из половин осевого сечения проводника в расчете на один метр его длины.

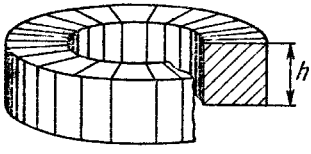


Рис. 3.65.

3.241. Имеется очень длинный прямой соленоид с током I. Площадь поперечного сечения соленоида равна S, число витков на единицу длины — n. Найти поток вектора $\mathbf{B}$ через торец соленоида.

3.242. На рис. 3.65 показан кольцевой соленоид прямоугольного сечения. Найти магнитный поток через это сечение, если ток в обмотке $I = 1{,}7$ А, полное число витков $N = 1000$, отношение внешнего диаметра к внутреннему $\eta = 1{,}6$ и толщина $h = 5{,}0$ см.

3.243. Найти магнитный момент тонкого кругового витка с током, если радиус витка $R = 100$ мм и индукция магнитного поля в его центре $B = 6{,}0$ мкТ.

3.244. Вычислить магнитный момент тонкого проводника с током $I = 0{,}8$ А, плотно навитого на половину тора (рис. 3.66). Диаметр сечения тора $d = 5{,}0$ см, число витков $N = 500$.

3.245. Тонкий провод (с изоляцией) образует плоскую спираль из $N = 100$ плотно расположенных витков, по которым течет ток

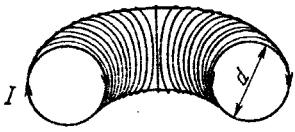


Рис. 3.66.

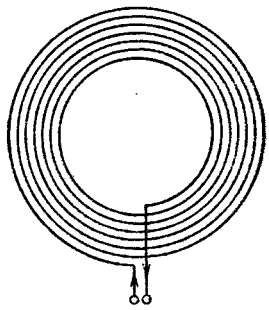


Рис. 3.67.

$I = 8$ мА. Радиусы внутреннего и внешнего витков (рис. 3.67) равны $a = 50$ мм, $b = 100$ мм. Найти:

а) индукцию магнитного поля в центре спирали;

б) магнитный момент спирали при данном токе.

3.246. Непроводящий тонкий диск радиуса R, равномерно заряженный с одной стороны с поверхностной плотностью σ, вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Найти:

а) индукцию магнитного поля в центре диска;

б) магнитный момент диска.

3.247. Непроводящая сфера радиуса $R = 50$ мм, заряженная равномерно с поверхностной плотностью $\sigma = 10{,}0$ мкКл/м^2, вращается с угловой скоростью $\omega = 70$ рад/с вокруг оси, проходящей через ее центр. Найти магнитную индукцию в центре сферы.

3.248. Заряд q равномерно распределен по объему однородного шара массы m и радиуса R, который вращается вокруг оси, проходящей через его центр, с угловой скоростью ω. Найти соответствующий магнитный момент и его отношение к механическому моменту.

3.249. Длинный диэлектрический цилиндр радиуса R статически поляризован так, что во всех его точках поляризованность $\mathbf{P} = \alpha \mathbf{r}$, где α — положительная постоянная, $\mathbf{r}$ — расстояние от оси. Цилиндр привели во вращение вокруг его оси с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Найти индукцию $\mathbf{B}$ магнитного поля в центре цилиндра.

3.250. Два протона движутся параллельно друг другу с одинаковой скоростью $v = 300$ км/с. Найти отношение сил магнитного и электрического взаимодействия данных протонов.

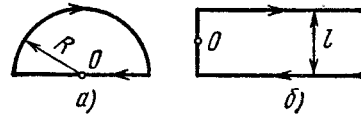


Рис. 3.68.

3.251. Найти модуль и направление вектора силы, действующей на единицу длины тонкого проводника с током $I = 8{,}0$ А в точке O, если проводник изогнут, как показано:

а) на рис. 3.68, *а*, и радиус закругления $R = 10$ см;

б) на рис. 3.68, *б*, и расстояние между длинными параллельными друг другу участками проводника $l = 20$ см.

3.252. Катушку с током $I = 10$ мА поместили в однородное магнитное поле так, что ее ось совпала с направлением поля. Обмотка катушки однослойная из медного провода диаметром $d = 0{,}10$ мм, радиус витков $R = 30$ мм. При каком значении индукции внешнего поля обмотка катушки может быть разорвана?

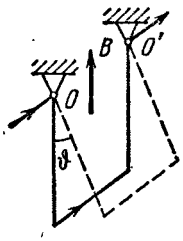


Рис. 3.69.

3.253. Медный провод сечением $S = 2{,}5$ мм^2, согнутый в виде трех сторон квадрата, может поворачиваться вокруг горизонтальной оси OO' (рис. 3.69). Провод находится в однородном вертикально направленном магнитном поле. Найти индукцию поля, если при пропускании по данному проводу тока $I = 16$ А угол отклонения $\vartheta = 20°$.

3.254. Укрепленную на конце коромысла весов небольшую катушку K с числом витков $N = 200$ поместили в зазор между полюсами магнита, как показано на рис. 3.70. Площадь сечения катушки $S = 1{,}0$ см^2, длина плеча OA коромысла $l = 30$ см. В отсутствие тока через катушку весы уравновешены. После того как через катушку пустили ток $I = 22$ мА, для восстановления равновесия пришлось изменить груз на чаше весов на $\Delta m = 60$ мг. Найти индукцию магнитного поля в месте нахождения катушки.

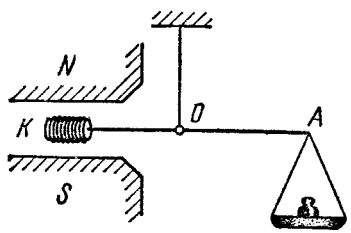


Рис. 3.70.

3.255. Квадратная рамка с током $I = 0{,}90$ А расположена в одной плоскости с длинным прямым проводником, по которому течет ток $I_0 = 5{,}0$ А. Сторона рамки $a = 8{,}0$ см. Проходящая через середины противоположных сторон ось рамки параллельна проводу и отстоит от него на расстояние, которое в $\eta = 1{,}5$ раза больше стороны рамки. Найти:

а) амперову силу, действующую на рамку;

б) механическую работу, которую нужно совершить для поворота рамки вокруг ее оси на 180°, если токи поддерживают неизменными.

3.256. Два длинных параллельных провода с пренебрежимо малым сопротивлением замкнуты с одного конца на некоторое сопротивление R, а с другого конца подключены к источнику постоянного напряжения. Расстояние между осями проводов в $\eta = 20$ раз больше радиуса сечения каждого провода. При каком значении сопротивления R результирующая сила взаимодействия между проводами обратится в нуль?

3.257. Постоянный ток I течет по длинному прямому проводнику, сечение которого имеет форму тонкого полукольца радиуса R. Такой же ток течет в противоположном направлении по тонкому

проводнику, расположенному на «оси» первого проводника (точка O на рис. 3.61). Найти силу магнитного взаимодействия данных проводников в расчете на единицу их длины.

3.258. По двум длинным тонким параллельным проводникам, вид которых показан на рис. 3.71, текут постоянные токи I_1 и I_2. Расстояние между проводниками a, ширина правого проводника b. Имея в виду, что оба проводника лежат в одной плоскости, найти силу магнитного взаимодействия между ними в расчете на единицу их длины.

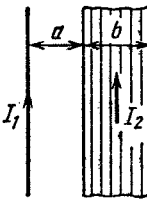


Рис. 3.71.

3.259. Система состоит из двух параллельных друг другу плоскостей с токами, которые создают между плоскостями однородное магнитное поле с индукцией B. Вне этой области магнитное поле отсутствует. Найти магнитную силу, действующую на единицу поверхности каждой плоскости.

3.260. Проводящую плоскость с током поместили во внешнее однородное магнитное поле. В результате индукция магнитного поля с одиой стороны плоскости оказалась B_1, а с другой стороны B_2. Найти магнитную силу, действующую на единицу поверхности плоскости в случаях, показанных на рис. 3.72. Выяснить, куда направлен ток в плоскости в каждом случае.

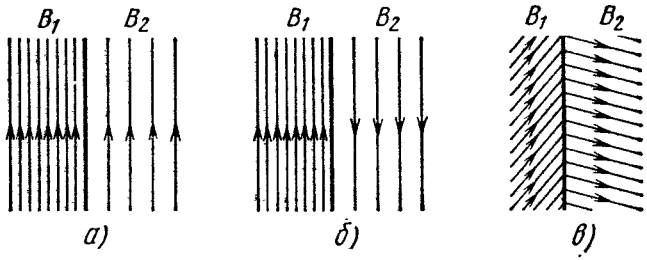


Рис. 3.72.

3.261. В электромагнитном насосе для перекачки расплавленного металла участок трубы с металлом находится в однородном магнитном поле с индукцией B (рис. 3.73). Через этот участок трубы в перпендикулярном к вектору **B** и оси трубы направлении пропускают ток I. Найти избыточное давление, создаваемое насосом при $B = 0{,}10$ Т, $I = 100$ А и $a = 2{,}0$ см.

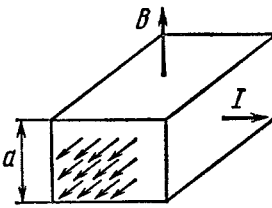


Рис. 3.73.

3.262. Вдоль длинного тонкостенного круглого цилиндра радиуса R течет ток I. Какое давление испытывают стенки цилиндра?

3.263. Какое давление испытывает боковая поверхность длинного прямого соленоида, содержащего n витков на единицу длины, когда по нему течет ток I?

3.264. Ток I течет по длинному однослойному соленоиду, радиус сечения которого равен R. Число витков на единицу длины соленоида n. Найти предельную силу тока, при которой может наступить разрыв обмотки, если предельная нагрузка на разрыв проволоки обмотки равна $F_{пр}$.

3.265. Плоский конденсатор, площадь каждой пластинки которого S и расстояние между ними d, поместили в поток проводящей жидкости с удельным сопротивлением ρ. Жидкость движется с постоянной скоростью v параллельно пластинам. Система находится в однородном магнитном поле с индукцией B, причем вектор $\mathbf{B}$ параллелен пластинам и перпендикулярен к направлению потока. Пластины конденсатора замкнули на внешнее сопротивление R. Какая мощность выделяется на этом сопротивлении? При каком значении R выделяемая мощность будет максимальной? Чему равна последняя?

3.266. Вдоль медного прямого проводника круглого сечения радиуса $R = 5{,}0$ мм течет ток $I = 50$ А. Найти разность потенциалов между осью проводника и его поверхностью. Концентрация электронов проводимости у меди $n = 0{,}9 \cdot 10^{23}$ см$^{-3}$.

3.267. При измерении эффекта Холла в натриевом проводнике напряженность поперечного поля оказалась $E = 5{,}0$ мкВ/см при плотности тока $j = 200$ А/см^2 и индукции магнитного поля $B = 1{,}00$ Т. Найти концентрацию электронов проводимости и ее отношение к концентрации атомов в данном проводнике.

3.268. Найти подвижность электронов проводимости в медном проводнике, если при измерении эффекта Холла в магнитном поле с индукцией $B = 100$ мТ напряженность поперечного электрического поля у данного проводника оказалась в $\eta = 3{,}1 \cdot 10^3$ раз меньше напряженности продольного электрического поля.

3.269. Небольшой виток с током находится на расстоянии r от длинного прямого проводника с током I. Магнитный момент витка равен $\mathbf{p}_m$. Найти модуль и направление вектора силы, действующей на виток, если вектор $\mathbf{p}_m$:

а) параллелен прямому проводнику;

б) направлен по радиус-вектору $\mathbf{r}$;

в) совпадает по направлению с магнитным полем тока I в месте расположения витка.

3.270. Небольшая катушка с током, имеющая магнитный момент $\mathbf{p}_m$, находится на оси кругового витка радиуса R, по которому течет ток I. Найти модуль вектора силы, действующей на катушку, если ее расстояние от центра витка равно x, а вектор $\mathbf{p}_m$ совпадает по направлению с осью витка.

3.271. Найти силу взаимодействия двух катушек с магнитными моментами $p_{1m} = 4{,}0$ мА$\cdot$м^2 и $p_{2m} = 6{,}0$ мА$\cdot$м^2, если их оси лежат на одной прямой и расстояние между катушками, равное $l = 20$ см, значительно превышает их линейные размеры.

3.272. Постоянный магнит имеет форму достаточно тонкого диска, намагниченного вдоль его оси. Радиус диска $R = 1{,}0$ см.

Оценить значение молекулярного тока I', текущего по ободу диска, если индукция магнитного поля на оси диска в точке, отстоящей на $x = 10$ см от его центра, составляет $B = 30$ мкТ.

3.273. Индукция магнитного поля в вакууме вблизи плоской поверхности однородного изотропного магнетика равна B, причем вектор $\mathbf{B}$ составляет угол α с нормалью к поверхности. Магнитная проницаемость магнетика равна μ. Найти модуль вектора индукции B' магнитного поля в магнетике вблизи поверхности.

3.274. Индукция магнитного поля в вакууме вблизи плоской поверхности магнетика равна B, и вектор $\mathbf{B}$ составляет угол ϑ с нормалью $\mathbf{n}$ к поверхности (рис. 3.74). Магнитная проницаемость магнетика равна μ. Найти:

а) поток вектора $\mathbf{H}$ через поверхность сферы S радиуса R, центр которой лежит на поверхности магнетика;

б) циркуляцию вектора $\mathbf{B}$ по квадратному контуру Γ со стороной l, расположенному, как показано на рисунке.

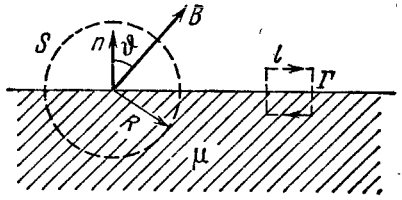


Рис. 3.74.

3.275. Постоянный ток I течет вдоль длинного однородного цилиндрического провода круглого сечения. Провод сделан из парамагнетика с магнитной восприимчивостью χ. Найти:

а) поверхностный молекулярный ток $I'_{\text{пов}}$;

б) объемный молекулярный ток $I'_{\text{об}}$.

Как эти токи направлены друг относительно друга?

3.276. Бесконечно длинный прямой соленоид с током «наполовину» заполнен магнетиком, как показано на рис. 3.75. Изобразить примерные графики магнитной индукции B, напряженности H и магнитной поляризованности J на оси соленоида в зависимости от x.

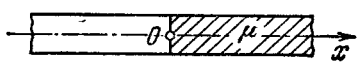


Рис. 3.75.

3.277. Прямой бесконечно длинный проводник с током I лежит в плоскости раздела двух непроводящих сред с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2. Найти модуль вектора индукции магнитного поля во всем пространстве в зависимости от расстояния r до провода. Иметь в виду, что линии вектора $\mathbf{B}$ являются окружностями с центром на оси проводника.

3.278. Круговой контур с током лежит на плоской границе раздела вакуума и магнетика. Проницаемость последнего равна μ. Найти индукцию $\mathbf{B}$ магнитного поля в произвольной точке на оси контура, если индукция поля в этой точке в отсутствие магнетика равна $\mathbf{B}_0$. Обобщить полученный результат на все точки поля.

3.279. Если шар из однородного магнетика поместить во внешнее однородное магнитное поле с индукцией $\mathbf{B}_0$, он намагнитится

однородно. Найти индукцию **B** внутри шара с магнитной проницаемостью μ, имея в виду, что в случае однородно намагниченного шара магнитное поле внутри него является однородным и его напряженность $\mathbf{H}' = -\mathbf{J}/3$, где **J** — магнитная поляризованность.

3.280. На постоянный магнит, имеющий форму цилиндра длины $l = 15$ см, намотали равномерно $N = 300$ витков тонкого провода. При пропускании по нему тока $I = 3{,}0$ А поле вне магнита исчезло. Найти коэрцитивную силу H_c материала, из которого изготовлен магнит.

3.281. Постоянный магнит имеет вид кольца с узким зазором между полюсами. Средний диаметр кольца $d = 20$ см. Ширина зазора $b = 2{,}0$ мм, индукция магнитного поля в зазоре $B = 40$ мТ. Пренебрегая рассеянием магнитного потока на краях зазора, найти модуль вектора напряженности магнитного поля внутри магнита.

3.282. На железном сердечнике в виде тора со средним радиусом $R = 250$ мм имеется обмотка с общим числом витков $N = 1000$. В сердечнике сделана поперечная прорезь шириной $b = 1{,}00$ мм. При токе $I = 0{,}85$ А через обмотку индукция магнитного поля в зазоре $B = 0{,}75$ Т. Пренебрегая рассеянием магнитного потока на краях зазора, найти магнитную проницаемость железа в этих условиях.

3.283. На рис. 3.76 показана основная кривая намагничения технически чистого железа. Построить с помощью этого графика

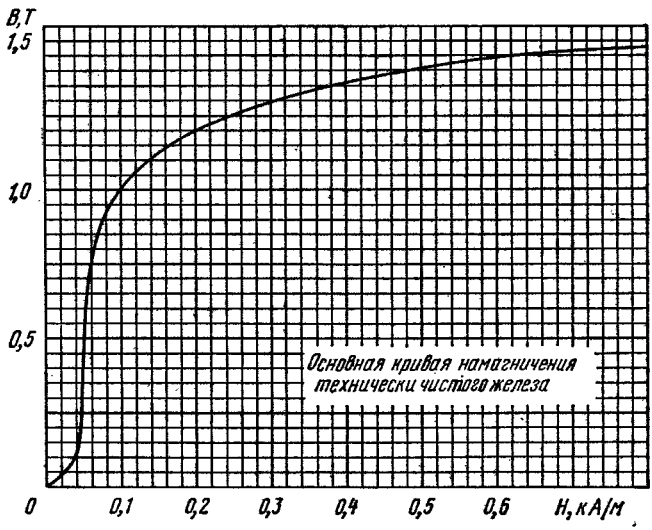


Рис. 3.76.

кривую зависимости магнитной проницаемости μ от напряженности H магнитного поля. При каком значении H проницаемость максимальна? Чему равно $\mu_{макс}$?

3.284. Тонкое железное кольцо со средним диаметром $d = 50$ см несет на себе обмотку из $N = 800$ витков с током $I = 3{,}0$ А. В кольце имеется поперечная прорезь шириной $b = 2{,}0$ мм. Пренебрегая рассеянием магнитного потока на краях зазора, найти с помощью графика (см. рис. 3.76) магнитную проницаемость железа в этих условиях.

3.285. Длинный тонкий цилиндрический стержень из парамагнетика с магнитной восприимчивостью χ и площадью поперечного сечения S расположен вдоль оси катушки с током. Один конец стержня находится в центре катушки, где индукция магнитного поля равна B, а другой конец — в области, где магнитное поле практически отсутствует. С какой силой катушка действует на стержень?

3.286. В установке (рис. 3.77) измеряют с помощью весов силу, с которой парамагнитный шарик объема $V = 41$ мм^3 притягивается к полюсу электромагнита M. Индукция магнитного поля на оси полюсного наконечника зависит от высоты x как $B = B_0 e^{-ax^2}$, где $B_0 = 1{,}50$ Т, $a = 100$ м$^{-2}$. Найти:

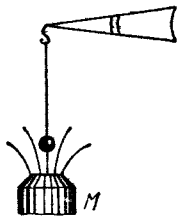


Рис. 3.77.

а) на какой высоте x_m надо поместить шарик, чтобы сила притяжения была максимальной;

б) магнитную восприимчивость парамагнетика, если максимальная сила притяжения $F_{\text{макс}} = 160$ мкН.

3.287. Небольшой шарик объема V из парамагнетика с магнитной восприимчивостью χ медленно переместили вдоль оси катушки с током из точки, где индукция магнитного поля равна B, в область, где магнитное поле практически отсутствует. Какую при этом совершили работу?

3.6. Электромагнитная индукция. Уравнения Максвелла

● Закон электромагнитной индукции Фарадея:

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \tag{3.6а}$$

● В случае соленоида и тороида:

$$\Phi = N\Phi_1, \tag{3.6б}$$

где N — число витков, Φ_1 — магнитный поток через каждый виток.

● Индуктивность соленоида:

$$L = \mu\mu_0 n^2 V. \tag{3.6в}$$

● Собственная энергия тока и взаимная энергия двух токов:

$$W = \frac{LI^2}{2}, \quad W_{12} = L_{12} I_1 I_2. \tag{3.6г}$$

● Объемная плотность энергии магнитного поля:

$$w = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\mathbf{BH}}{2}. \tag{3.6д}$$

● Плотность тока смещения:

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{3.6е}$$

● Уравнения Максвелла в дифференциальной форме:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \tag{3.6ж}$$

где $\nabla \times \equiv \text{rot}$ (ротор) и $\nabla \cdot \equiv \text{div}$ (дивергенция).

● Формулы преобразования полей при переходе от K-системы отсчета к движущейся по отношению к ней со скоростью $\mathbf{v}_0$ K'-системе.

При $v_0 \ll c$

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}], \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - [\mathbf{v}_0 \mathbf{E}]/c^2. \tag{3.6з}$$

В общем случае

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \qquad \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel},$$
$$\mathbf{E}'_{\perp} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} + [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}]}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}}, \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \frac{\mathbf{B}_{\perp} - [\mathbf{v}_0 \mathbf{E}]/c^2}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}}, \tag{3.6и}$$

где символами $\parallel$ и $\perp$ отмечены составляющие полей, параллельные и перпендикулярные к вектору $\mathbf{v}_0$.

3.288. Провод, имеющий форму параболы $y = ax^2$, находится в однородном магнитном поле с индукцией B, причем вектор $\mathbf{B}$ перпендикулярен к плоскости x, y. Из вершины параболы в момент $t = 0$ начинают перемещать поступательно перемычку с постоянным ускорением w (рис. 3.78). Найти э. д. с. индукции в образовавшемся контуре как функцию y.

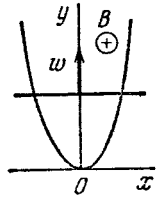


Рис. 3.78.

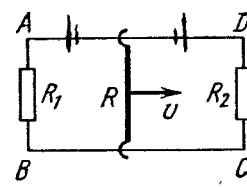


Рис. 3.79.

3.289. Прямоугольный контур со скользящей перемычкой длины l находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном к плоскости контура (рис. 3.79). Индукция поля равна B. Перемычка имеет сопротивление R, стороны AB и CD — сопротивления R_1 и R_2. Пренебрегая самоиндукцией контура, найти ток в перемычке при ее поступательном перемещении с постоянной скоростью v.

3.290. Металлический диск радиуса $a = 25$ см вращают с постоянной угловой скоростью $\omega = 130$ рад/с вокруг его оси. Найти разность потенциалов между центром и ободом диска, если:

а) внешнего магнитного поля нет;

б) имеется перпендикулярное к диску внешнее однородное магнитное поле с индукцией $B = 5{,}0$ мТ.

3.291. Тонкий проводник AC, изогнутый в форме полуокружности диаметра $d = 20$ см, вращают с постоянной угловой скоростью $\omega = 100$ рад/с в однородном магнитном поле с индукцией $B = 5{,}0$ мТ так, что $\boldsymbol{\omega} \uparrow\uparrow \mathbf{B}$. Ось вращения проходит через конец A проводника и перпендикулярна к прямой AC (диаметру). Найти значение линейного интеграла $\int \mathbf{E}\, d\mathbf{r}$ вдоль проводника от точки A до точки C. Полученный результат обобщить.

3.292. Проволочный контур, ограничивающий полукруг радиуса a, находится на границе однородного магнитного поля с индукцией B (рис. 3.80). В момент $t = 0$ контур начинают вращать с постоянным угловым ускорением β вокруг оси O, совпадающей с линией вектора $\mathbf{B}$ на границе поля. Найти э. д. с. индукции в контуре как функцию времени t. Изобразить примерный график этой зависимости. Положительным направлением для э. д. с. считать то, которое показано стрелкой на рисунке.

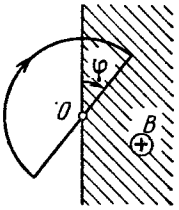


Рис. 3.80.

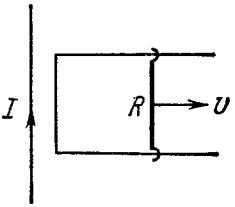


Рис. 3.81.

3.293. Длинный прямой проводник с током I и П-образный проводник с подвижной перемычкой расположены в одной плоскости, как показано на рис. 3.81. Перемычку, длина которой l и сопротивление R, перемещают вправо с постоянной скоростью v. Найти ток, индуцируемый в контуре, как функцию расстояния r между перемычкой и прямым проводником. Сопротивление П-образного проводника и самоиндукция контура пренебрежимо малы.

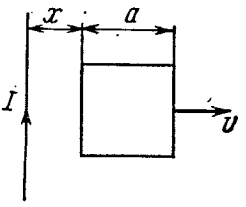


Рис. 3.82.

3.294. Квадратная рамка со стороной a и длинный прямой провод с током I находятся в одной плоскости, как показано на рис. 3.82. Рамку поступательно перемещают вправо с постоянной скоростью v. Найти э. д. с. индукции в рамке как функцию расстояния x.

3.295. Металлический стержень массы m может вращаться вокруг горизонтальной оси O, скользя по кольцевому проводнику радиуса a (рис. 3.83). Система находится в однородном магнитном

поле с индукцией B, направленном перпендикулярно к плоскости кольца. Ось и кольцо подключены к источнику э. д. с., образуя цепь с сопротивлением R. Пренебрегая трением, индуктивностью цепи и сопротивлением кольца, найти, по какому закону должна изменяться э. д. с. источника, чтобы стержень вращался с постоянной угловой скоростью ω.

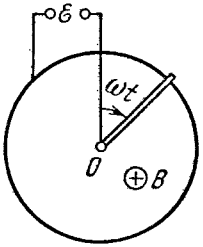


Рис. 3.83.

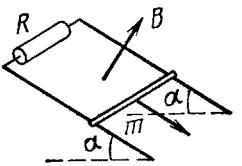


Рис. 3.84.

3.296. По двум гладким медным шинам, установленным под углом α к горизонту, скользит под действием силы тяжести медная перемычка массы m (рис. 3.84). Вверху шины замкнуты на сопротивление R. Расстояние между шинами l. Система находится в однородном магнитном поле с индукцией B, перпендикулярном к плоскости, в которой перемещается перемычка. Сопротивления шин, перемычки и скользящих контактов, а также самоиндукция контура пренебрежимо малы. Найти установившуюся скорость перемычки.

3.297. Система отличается от рассмотренной в предыдущей задаче (см. рис. 3.84) лишь тем, что вместо сопротивления R к концам шин подключен конденсатор емкости C. Найти ускорение перемычки.

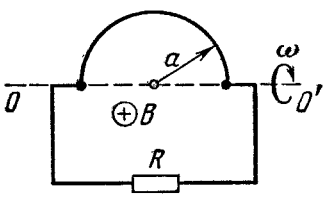


Рис. 3.85.

3.298. Провод, согнутый в форме полуокружности радиуса a, вращают вокруг оси OO' с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией B (рис. 3.85). Ось вращения перпендикулярна к направлению поля. Сопротивление всей цепи равно R. Пренебрегая магнитным полем индуцируемого тока, найти среднее за период вращения значение тепловой мощности, выделяемой в контуре.

3.299. Между полюсами электромагнита находится небольшая катушка, ось которой совпадает с направлением магнитного поля. Площадь поперечного сечения катушки $S = 3{,}0$ мм^2, число витков $N = 60$. При повороте катушки на 180° вокруг ее диаметра через подключенный к ней баллистический гальванометр протекает заряд $q = 4{,}5$ мкКл. Найти модуль вектора индукции магнитного поля между полюсами, если полное сопротивление электрической цепи $R = 40$ Ом.

3.300. Квадратная проволочная рамка со стороной a и прямой проводник с постоянным током I лежат в одной плоскости (рис. 3.86). Индуктивность и сопротивление рамки равны L и R. Рамку повернули на 180° вокруг оси OO', отстоящей от проводника с током на расстояние b. Найти количество электричества, протекшее в рамке.

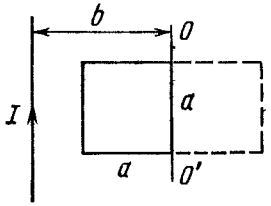


Рис. 3.86.

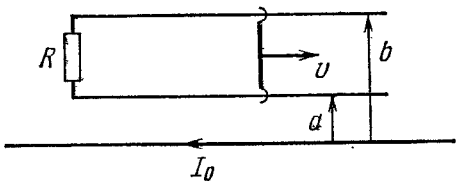


Рис. 3.87.

3.301. Имеется длинный прямой проводник с током I_0. На расстояниях a и b от него расположены два параллельных ему провода, замкнутых на одном конце сопротивлением R (рис. 3.87). По проводам без трения перемещают с постоянной скоростью v стержень-перемычку. Пренебрегая сопротивлением проводов, стержня и скользящих контактов, найти:

а) значение и направление индукционного тока в стержне;

б) силу, необходимую для поддержания постоянства скорости стержня.

3.302. Проводник AB массы m скользит без трения по двум длинным проводящим рельсам, расположенным на расстоянии l друг от друга (рис. 3.88). На левом конце рельсы замкнуты сопротивлением R. Система находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном к плоскости контура. В момент $t = 0$ стержню AB сообщили вправо начальную скорость v_0. Пренебрегая сопротивлением рельсов и стержня AB, а также самоиндукцией, найти:

а) расстояние, пройденное стержнем до остановки;

б) количество тепла, выделенное при этом на сопротивлении R.

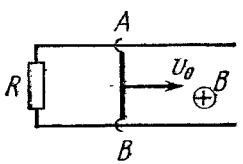


Рис. 3.88.

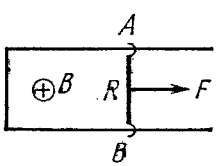


Рис. 3.89.

3.303. По П-образному проводнику, расположенному в горизонтальной плоскости, может скользить без трения перемычка AB (рис. 3.89). Последняя имеет длину l, массу m и сопротивление R. Вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией B, направленном вертикально. В момент $t = 0$ на перемычку начали действовать постоянной горизонтальной силой F, и перемычка

начала перемещаться поступательно вправо. Найти зависимость от времени t скорости перемычки. Индуктивность контура и сопротивление П-образного проводника пренебрежимо малы.

3.304. На рис. 3.90 показаны плоские контуры из тонких проводов, находящиеся в однородном магнитном поле, которое направлено

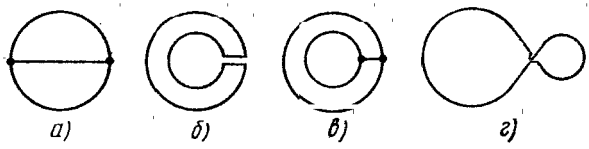


Рис. 3.90.

за плоскость рисунка. Индукцию поля начали уменьшать. Найти направление индукционных токов в этих контурах.

3.305. Плоский контур (рис. 3.91), имеющий вид двух квадратов со сторонами $a = 20$ см и $b = 10$ см, находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном к его плоскости. Индукция поля меняется во времени по закону $B = B_0 \sin \omega t$, где $B_0 = 10$ мТ и $\omega = 100$ рад/с. Найти амплитуду индукционного тока в контуре, если сопротивление единицы длины его $\rho = 50$ мОм/м. Индуктивностью контура пренебречь.

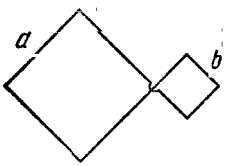


Рис. 3.91.

3.306. Плоская спираль с очень большим числом витков N, плотно прилегающих друг к другу, находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном к плоскости спирали. Наружный радиус витков спирали равен a. Индукция поля изменяется во времени по закону $B = B_0 \sin \omega t$, где B_0 и ω — постоянные. Найти амплитудное значение э. д. с. индукции, наводимой в спирали.

3.307. П-образный проводник находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном к плоскости проводника и изменяющемся во времени со скоростью $\dot{B} = 0{,}10$ Т/с. Вдоль параллельных сторон этого проводника перемещают без начальной скорости проводник-перемычку с ускорением $w = 10$ см/с^2. Длина перемычки $l = 20$ см. Найти э. д. с. индукции в контуре через $t = 2{,}0$ с после начала перемещения, если в момент $t = 0$ площадь контура и индукция магнитного поля равны нулю. Индуктивностью контура пренебречь.

3.308. В длинном прямом соленоиде с радиусом сечения a и числом витков на единицу длины n изменяют ток с постоянной скоростью I А/с. Найти модуль вектора напряженности вихревого электрического поля как функцию расстояния r от оси соленоида. Изобразить примерный график этой зависимости.

3.309. На длинный прямой соленоид, имеющий диаметр сечения $d = 5$ см и содержащий $n = 20$ витков на один сантиметр длины,

плотно надет круговой виток из медного провода сечением $S = 1{,}0$ мм^2. Найти ток в витке, если ток в обмотке соленоида увеличивают с постоянной скоростью $\dot{I} = 100$ А/с. Индуктивностью витка пренебречь.

3.310. На длинный соленоид с радиусом сечения a плотно надето тонкое проволочное кольцо в изоляции, причем одна половина кольца имеет сопротивление в η раз больше, чем другая. Индукция магнитного поля соленоида меняется во времени по закону $B = bt$, где b — постоянная. Найти модуль вектора напряженности электростатического поля в кольце.

3.311. Непроводящее тонкое кольцо массы m, имеющее заряд q, может свободно вращаться вокруг своей оси. В начальный момент кольцо покоилось и магнитное поле отсутствовало. Затем включили практически однородное магнитное поле, перпендикулярное к плоскости кольца, которое начало нарастать во времени по некоторому закону $\mathbf{B}(t)$. Найти угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ кольца в зависимости от индукции $\mathbf{B}(t)$.

3.312. Тонкое проволочное кольцо, имеющее радиус a и сопротивление r, расположено внутри длинного соленоида так, что их оси совпадают. Длина соленоида l, радиус сечения b. В некоторый момент соленоид подключили к источнику постоянного напряжения U. Полное сопротивление цепи равно R. Пренебрегая индуктивностью кольца, найти максимальное значение радиальной силы, действующей на единицу длины кольца.

3.313. Магнитный поток через неподвижный контур с сопротивлением R изменяется в течение времени τ по закону $\Phi = at\,(\tau - t)$. Найти количество тепла, выделенное в контуре за это время. Индуктивностью контура пренебречь.

3.314. В середине длинного соленоида находится коаксиальное кольцо прямоугольного сечения из проводящего материала с удельным сопротивлением ρ. Толщина кольца h, его внутренний и внешний радиусы a и b. Найти индукционный ток в кольце, если индукция магнитного поля соленоида изменяется во времени по закону $B = \beta t$, где β — постоянная. Индуктивностью кольца пренебречь.

3.315. Сколько метров тонкого провода надо взять для изготовления соленоида длины $l_0 = 100$ см с индуктивностью $L = 1{,}0$ мГ, если диаметр сечения соленоида значительно меньше его длины?

3.316. Найти индуктивность соленоида длины l, обмоткой которого является медная проволока массы m. Сопротивление обмотки R. Диаметр соленоида значительно меньше его длины.

3.317. Катушку индуктивности $L = 300$ мГ и сопротивления $R = 140$ мОм подключили к источнику постоянного напряжения. Через сколько времени ток через катушку достигнет $\eta = 50\%$ установившегося значения?

3.318. Вычислить постоянную времени τ прямого соленоида длины $l = 1{,}0$ м, имеющего однослойную обмотку из медного провода массы $m = 1{,}0$ кг. Предполагается, что диаметр сечения соленоида значительно меньше его длины.

Примечание. Постоянной времени τ называют отношение L/R, где L — индуктивность, R — активное сопротивление.

3.319. Найти индуктивность единицы длины кабеля, представляющего собой два тонкостенных коаксиальных металлических цилиндра, если радиус внешнего цилиндра в $\eta = 3{,}6$ раза больше, чем радиус внутреннего. Магнитную проницаемость среды между цилиндрами считать равной единице.

3.320. Определить индуктивность тороидального соленоида из N витков, внутренний радиус которого равен b, а поперечное сечение имеет форму квадрата со стороной a. Пространство внутри соленоида заполнено однородным парамагнетиком с магнитной проницаемостью μ.

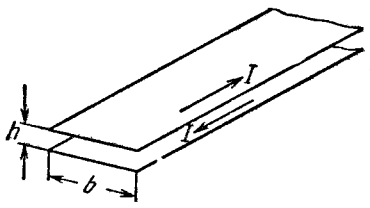


Рис. 3.92.

3.321. Вычислить индуктивность единицы длины двухпроводной ленточной линии (рис. 3.92), если расстояние между лентами h значительно меньше их ширины b, а именно, $b/h = 50$.

3.322. Найти индуктивность единицы длины двухпроводной линии, если радиус каждого провода в η раз меньше расстояния между их осями. Полем внутри проводов пренебречь, магнитную проницаемость всюду считать равной единице и $\eta \gg 1$.

3.323. Сверхпроводящее круглое кольцо радиуса a, имеющее индуктивность L, находится в однородном магнитном поле с индукцией B. Плоскость кольца параллельна вектору $\mathbf{B}$, и ток в кольце равен нулю. Затем плоскость кольца повернули на 90° в положение, перпендикулярное к полю. Найти:

а) ток в кольце после поворота; б) работу, совершенную при этом.

3.324. Ток $I_0 = 1{,}9$ А течет по длинному замкнутому соленоиду, проволока которого находится в сверхпроводящем состоянии. Найти ток в соленоиде после того, как его растянули, увеличив длину на $\eta = 5\%$.

3.325. Кольцо радиуса $a = 50$ мм из тонкой проволоки радиуса $b = 1{,}0$ мм поместили в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}50$ мТ так, что плоскость кольца оказалась перпендикулярной к вектору $\mathbf{B}$. Затем кольцо охладили до сверхпроводящего состояния и выключили магнитное поле. Найти ток в кольце после этого. Иметь в виду, что индуктивность тонкого кольца, вдоль которого течет поверхностный ток, $L = \mu_0 a \left(\ln \frac{2a}{b} - 2\right)$.

3.326. Замкнутая цепь состоит из последовательно включенных источника постоянной э. д. с. $\mathscr{E}$ и дросселя индуктивности L. Активное сопротивление всей цепи равно R. В момент $t = 0$ индуктивность дросселя скачком уменьшили в η раз. Найти ток в цепи как функцию времени t.

Указание. При скачкообразном изменении индуктивности полный магнитный поток (потокосцепление) остается неизменным.

3.327. Найти закон изменения во времени тока, текущего через индуктивность L в схеме (рис. 3.93) после замыкания ключа K в момент $t = 0$.

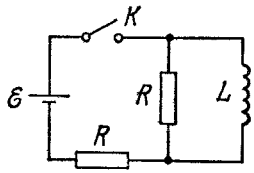


Рис. 3.93.

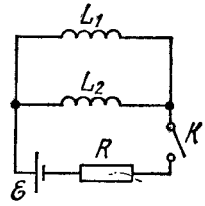


Рис. 3.94.

3.328. В схеме (рис. 3.94) известны э. д. с. $\mathscr{E}$ источника, сопротивление R и индуктивности катушек L_1 и L_2. Внутреннее сопротивление источника и сопротивления катушек пренебрежимо малы. Найти установившиеся токи в катушках после замыкания ключа K.

3.329. Вычислить взаимную индуктивность длинного прямого провода и прямоугольной рамки со сторонами a и b. Рамка и прямой провод лежат в одной плоскости, причем ближайшая к проводу сторона рамки длиной b параллельна проводу и отстоит от него на расстояние l.

3.330. Определить взаимную индуктивность тороидальной катушки и проходящего по ее оси бесконечного прямого провода. Катушка имеет прямоугольное сечение, ее внутренний радиус a, внешний b. Длина стороны поперечного сечения тора, параллельная проводу, равна h. Число витков катушки N. Система находится в однородном магнетике с проницаемостью μ.

3.331. Два концентрических тонких проводника в форме окружностей с радиусами a и b лежат в одной плоскости. Имея в виду, что $a \ll b$, найти:

а) их взаимную индуктивность;

б) магнитный поток, который пронизывает поверхность, натянутую на внешний проводник, когда по внутреннему проводнику течет ток I.

3.332. Небольшой цилиндрический магнит M (рис. 3.95) находится в центре тонкой катушки радиуса a, состоящей из N витков. Катушка подключена к баллистическому гальванометру. Активное сопротивление всей цепи равно R. Найти магнитный момент магнита, если при его удалении из катушки через гальванометр прошло количество электричества q.

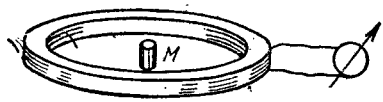


Рис. 3.95.

3.333. Найти приближенную формулу для взаимной индуктивности двух тонких витков одинакового радиуса a, если оси витков совпадают, а их центры находятся друг от друга на расстояние l, причем $l \gg a$.

3.334. Имеются два неподвижных контура с взаимной индуктивностью L_{12}. В одном из контуров начали изменять ток по закону $I_1 = \alpha t$, где α — постоянная, t — время. Найти закон изменения тока $I_2(t)$ в другом контуре, индуктивность которого L_2 и сопротивление R.

3.335. Катушка индуктивности $L = 2{,}0$ мкГ и сопротивления $R = 1{,}0$ Ом подключена к источнику постоянной э. д. с. $\mathscr{E} = 3{,}0$ В (рис. 3.96). Параллельно катушке включено сопротивление $R_0 = 2{,}0$ Ом. Найти количество тепла, которое выделится в катушке после размыкания ключа K. Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало.

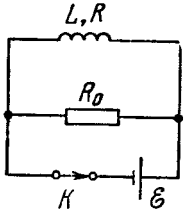


Рис. 3.96.

3.336. На железный тор намотано $N = 500$ витков. Найти энергию магнитного поля, если при токе $I = 2{,}0$ А магнитный поток через поперечное сечение тора $\Phi = 1{,}0$ мВб.

3.337. Железный сердечник, имеющий форму тора с круглым сечением радиуса $a = 3{,}0$ см, несет на себе обмотку из $N = 1000$ витков, по которой течет ток $I = 1{,}0$ А. Средний радиус тора $b = 32$ см. Найти с помощью рис. 3.76 магнитную энергию, запасенную в сердечнике, полагая напряженность поля H одинаковой по всему сечению и равной его значению в центре сечения.

3.338. Тонкое кольцо из магнетика имеет средний диаметр $d = 30$ см и несет на себе обмотку из $N = 800$ витков. Площадь поперечного сечения кольца $S = 5{,}0$ см^2. В кольце сделана поперечная прорезь ширины $b = 2{,}0$ мм. Когда по обмотке течет некоторый ток, магнитная проницаемость магнетика $\mu = 1400$. Пренебрегая рассеянием магнитного потока на краях зазора, найти:

а) отношение магнитной энергии в зазоре к магнитной энергии в магнетике;

б) индуктивность системы, причем двумя способами — через поток и через энергию.

3.339. Длинный цилиндр радиуса a, заряженный равномерно по поверхности, вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Найти энергию магнитного поля, приходящуюся на единицу длины цилиндра, если линейная плотность заряда цилиндра равна λ и $\mu = 1$.

3.340. При каком значении напряженности электрического поля в вакууме объемная плотность энергии этого поля будет такой же, как у магнитного поля с индукцией $B = 1{,}0$ Т (тоже в вакууме)?

3.341. Тонкое равномерно заряженное кольцо радиуса $a = 10$ см вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega = 100$ рад/с. Найти отношение объемных плотностей энергии маг-

нитного и электрического полей на оси кольца в точке, отстоящей от его центра на расстояние $l = a$.

3.342. Исходя из выражения для объемной плотности магнитной энергии, показать, что работа, затрачиваемая на намагничивание единицы объема пара- или диамагнетика, $A = -\mathbf{JB}/2$.

3.343. Две одинаковые катушки, каждая индуктивности L, соединяют а) последовательно, б) параллельно. Считая взаимную индуктивность катушек пренебрежимо малой, найти индуктивность системы в обоих случаях.

3.344. Два соленоида одинаковой длины и почти одинакового сечения вставлены полностью один в другой. Найти их взаимную индуктивность, если их индуктивности равны L_1 и L_2.

3.345. Показать, что магнитная энергия взаимодействия двух контуров с токами, находящихся в вакууме, может быть представлена как $W_{вз} = (1/\mu_0) \int \mathbf{B}_1\mathbf{B}_2\, dV$, где $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ — индукции магнитного поля в элементе объема dV, создаваемые отдельно токами одного и другого контуров.

3.346. Найти энергию взаимодействия двух контуров с токами I_1 и I_2, если оба контура имеют вид окружностей с радиусами a и b ($a \ll b$), центры этих контуров находятся в одной точке и плоскости контуров составляют друг с другом угол ϑ.

3.347. Пространство между двумя концентрическими металлическими сферами заполнено однородной слабо проводящей средой с удельным сопротивлением ρ и диэлектрической проницаемостью ε. В момент $t = 0$ внутренней сфере сообщили некоторый заряд. Найти:

а) связь между векторами плотностей тока смещения и тока проводимости в произвольной точке среды в один и тот же момент;

б) ток смещения через произвольную замкнутую поверхность, расположенную целиком в среде и охватывающую внутреннюю сферу, если заряд этой сферы в данный момент равен q.

3.348. Плоский конденсатор образован двумя дисками, между которыми находится однородная слабо проводящая среда. Конденсатор зарядили и отключили от источника напряжения. Пренебрегая краевыми эффектами, показать, что магнитное поле внутри конденсатора отсутствует.

3.349. Плоский воздушный конденсатор, площадь каждой пластины которого $S = 100$ см^2, включен последовательно в цепь переменного тока. Найти амплитуду напряженности электрического поля в конденсаторе, если амплитуда синусоидального тока в подводящих проводах $I_m = 1{,}0$ мА и частота тока $\omega = 1{,}6 \cdot 10^7$ рад/с.

3.350. Пространство между обкладками плоского конденсатора, имеющими форму круглых дисков, заполнено однородной слабо проводящей средой с удельной проводимостью σ и диэлектрической проницаемостью ε. Расстояние между обкладками d. Пренебрегая краевыми эффектами, найти напряженность магнитного поля между обкладками на расстоянии r от их оси, если на конденсатор подано переменное напряжение $U = U_m \cos \omega t$.

3.351. Длинный прямой соленоид имеет n витков на единицу длины. По нему течет переменный ток $I = I_m \sin \omega t$. Найти плотность тока смещения как функцию расстояния r от оси солеиоида. Радиус сечения соленоида R.

3.352. Точечный заряд q движется с нерелятивистской скоростью $\mathbf{v} = \text{const}$. Найти плотность тока смещения $\mathbf{j}_{см}$ в точке, находящейся на расстоянии r от заряда на прямой:

а) совпадающей с траекторией заряда;

б) перпендикулярной к траектории и проходящей через заряд.

3.353. Кольцо радиуса a из тонкого провода, несущее заряд q, приближается к точке наблюдения P так, что его центр движется прямолинейно с постоянной скоростью v. При этом плоскость кольца все время перпендикулярна к направлению его движения. На каком расстоянии x_m от точки P будет находиться кольцо в момент, когда плотность тока смещения в точке P окажется максимальной? Чему равно значение этого тока?

3.354. Точечный заряд q движется с нерелятивистской скоростью $\mathbf{v} = \text{const}$. Воспользовавшись теоремой о циркуляции вектора $\mathbf{H}$ по пунктирной окружности (рис. 3.97), найти $\mathbf{H}$ в точке A как функцию радиус-вектора $\mathbf{r}$ и скорости $\mathbf{v}$ заряда.

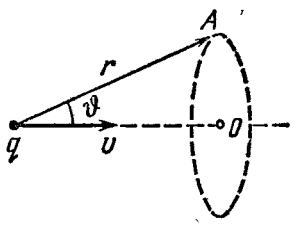


Рис. 3.97.

3.355. Доказать с помощью уравнений Максвелла, что:

а) переменное во времени магнитное поле не может существовать без электрического поля;

б) однородное электрическое поле не может существовать при наличии переменного во времени магнитного поля;

в) внутри полой области однородное электрическое (или магнитное) поле может быть переменным во времени.

3.356. Показать, что из уравнений Максвелла следует закон сохранения электрического заряда, т. е. $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial \rho / \partial t$.

3.357. Показать, что уравнения Максвелла $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$ и $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ являются совместимыми, т. е. первое из них не противоречит второму.

3.358. В некоторой области инерциальной системы отсчета имеется вращающееся с угловой скоростью ω магнитное поле, индукция которого равна B. Найти $\nabla \times \mathbf{E}$ в этой области как функцию векторов ω и $\mathbf{B}$.

3.359. В инерциальной K-системе отсчета имеется однородное чисто магнитное поле с индукцией $\mathbf{B}$. Найти напряженность электрического поля в K'-системе, которая движется с нерелятивистской скоростью $\mathbf{v}$ относительно K-системы, причем $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$. Для решения этого вопроса рассмотреть силы, действующие на воображаемый заряд в обеих системах отсчета в момент, когда скорость заряда в K'-системе равна нулю.

3.360. Большая пластина из неферромагнитного металла движется с постоянной скоростью $v = 90$ см/с в однородном магнитном поле с индукцией $B = 50$ мТ, как показано на рис. 3.98. Найти поверхностную плотность электрических зарядов, возникающих на пластине вследствие ее движения.

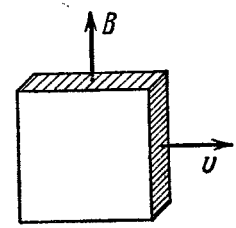


Рис. 3.98.

3.361. Длинный сплошной алюминиевый цилиндр радиуса $a = 5{,}0$ см вращают вокруг его оси в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10$ мТ. Угловая скорость вращения $\omega = 45$ рад/с, причем $\boldsymbol{\omega} \uparrow\uparrow \mathbf{B}$. Пренебрегая магнитным полем возникающих зарядов, найти их объемную и поверхностную плотности.

3.362. Нерелятивистский точечный заряд q движется с постоянной скоростью $\mathbf{v}$. Найти с помощью формул преобразования полей индукцию $\mathbf{B}$ магнитного поля этого заряда в точке, положение которой относительно заряда определяется радиус-вектором $\mathbf{r}$.

3.363. Показать с помощью формул (3.6з): если в инерциальной K-системе отсчета имеется только электрическое или только магнитное поле, то в любой другой инерциальной K'-системе будут существовать как электрическое, так и магнитное поле одновременно, причем $\mathbf{E}' \perp \mathbf{B}'$.

3.364. В инерциальной K-системе имеется только магнитное поле с индукцией $\mathbf{B} = b\,(y\mathbf{i} - x\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$, где b — постоянная, $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ — орты осей x и y. Найти напряженность $\mathbf{E}'$ электрического поля в K'-системе, движущейся относительно K-системы с нерелятивистской постоянной скоростью $\mathbf{v} = v\mathbf{k}$, $\mathbf{k}$ — орт оси z. Считать, что ось z' совпадает с осью z. Какой вид имеет поле $\mathbf{E}'$?

3.365. В инерциальной K-системе имеется только электрическое поле с напряженностью $\mathbf{E} = a\,(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$, где a — постоянная, $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ — орты осей x и y. Найти индукцию $\mathbf{B}'$ магнитного поля в K'-системе, которая движется относительно K-системы с нерелятивистской постоянной скоростью $\mathbf{v} = v\mathbf{k}$, $\mathbf{k}$ — орт оси z. Считать, что ось z' совпадает с осью z. Какой вид имеет поле $\mathbf{B}'$?

3.366. Убедиться, что формулы преобразования (3.6з) следуют из формул (3.6и) при $v_0 \ll c$.

3.367. В инерциальной K-системе имеется только однородное электрическое поле с напряженностью $E = 8$ кВ/м. Найти модуль и направление

а) вектора $\mathbf{E}'$, б) вектора $\mathbf{B}'$

в инерциальной K'-системе, движущейся по отношению к K-системе с постоянной скоростью $\mathbf{v}$ под углом $\alpha = 45°$ к вектору $\mathbf{E}$. Скорость K'-системы составляет $\beta = 0{,}60$ скорости света.

3.368. Решить задачу, отличающуюся от предыдущей лишь тем, что в K-системе имеется не электрическое, а магнитное поле с индукцией $B = 0{,}8$ Т.

3.369. Электромагнитное поле имеет две инвариантные величины. Показать с помощью формул преобразования (3.6и), что такими величинами являются:

а) $\mathbf{EB}$; б) $E^2 - c^2B^2$.

3.370. В инерциальной K-системе отсчета имеются два однородных взаимно перпендикулярных поля: электрическое напряженности $E = 40$ кВ/м и магнитное с индукцией $B = 0{,}20$ мТ. Найти напряженность E' (или индукцию B') поля в той K'-системе отсчета, где наблюдается только одно поле (электрическое или магнитное).

Указание. Воспользоваться инвариантами поля, приведенными в предыдущей задаче.

3.371. Точечный заряд q движется равномерно и прямолинейно с релятивистской скоростью, составляющей β-часть скорости света ($\beta = v/c$). Найти напряженность $\mathbf{E}$ электрического поля этого заряда в точке, радиус-вектор которой относительно заряда равен $\mathbf{r}$ и составляет угол ϑ с вектором его скорости.

3.7. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях

● Сила Лоренца:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\,[\mathbf{vB}]. \tag{3.7а}$$

● Уравнение движения релятивистской частицы:

$$\frac{d}{dt}\,\frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \mathbf{F}. \tag{3.7б}$$

● Период обращения заряженной частицы в однородном магнитном поле:

$$T = \frac{2\pi m}{qB}, \tag{3.7в}$$

где m — релятивистская масса частицы, $m = m_0/\sqrt{1-(v/c)^2}$.

● Бетатронное условие — условие движения электрона по круговой орбите в бетатроне:

$$B_0 = {}^1/_2\,\langle B\rangle, \tag{3.7г}$$

где B_0 — индукция магнитного поля на орбите, $\langle B\rangle$ — среднее значение индукции внутри орбиты.

3.372. В момент $t = 0$ из одной пластины плоского конденсатора вылетел электрон с пренебрежимо малой скоростью. Между пластинами приложено ускоряющее напряжение, меняющееся во времени по закону $U = at$, где $a = 100$ В/с. Расстояние между пластинами $l = 5{,}0$ см. С какой скоростью электрон подлетит к противоположной пластине?

3.373. Протон, ускоренный разностью потенциалов U, попадает в однородное электрическое поле плоского конденсатора, длина пластин которого в направлении движения равна l. Напряженность поля меняется во времени как $E = at$, где a — постоянная. Считая протон нерелятивистским, найти угол между направлениями его

движения до и после пролета конденсатора, если протон попадает в поле в момент $t = 0$. Краевыми эффектами пренебречь.

3.374. Частица с удельным зарядом q/m движется прямолинейно под действием электрического поля $E = E_0 - ax$, где a — положительная постоянная, x — расстояние от точки, в которой частица первоначально покоилась. Найти:

а) расстояние, пройденное частицей до точки, где она остановилась;

б) ускорение частицы в этой точке.

3.375. Электрон начинает двигаться в однородном электрическом поле с напряженностью $E = 10$ кВ/см. Через сколько времени после начала движения кинетическая энергия электрона станет равной его энергии покоя?

3.376. Определить ускорение релятивистского электрона, движущегося вдоль однородного электрического поля напряженности E, в момент, когда его кинетическая энергия равна T.

3.377. Релятивистский протон в момент $t = 0$ влетел со скоростью $\mathbf{v}_0$ в область, где имеется поперечное однородное электрическое поле напряженности $\mathbf{E}$, причем $\mathbf{v}_0 \perp \mathbf{E}$. Найти зависимость от времени:

а) угла ϑ между вектором скорости $\mathbf{v}$ протона и первоначальным направлением его движения;

б) проекции v_x вектора $\mathbf{v}$ на первоначальное направление движения.

3.378. Протон, ускоренный разностью потенциалов $U = 500$ кВ, пролетает поперечное однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}51$ Т. Толщина области с полем $d = 10$ см (рис. 3.99). Найти угол α отклонения протона от первоначального направления движения.

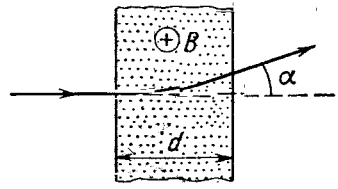


Рис. 3.99.

3.379. Заряженная частица движется по окружности радиуса $r = 100$ мм в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10{,}0$ мТ. Найти ее скорость и период обращения, если частицей является:

а) нерелятивистский протон;

б) релятивистский электрон.

3.380. Релятивистская частица с зарядом q и массой покоя m_0 движется по окружности радиуса r в однородном магнитном поле с индукцией B. Найти:

а) модуль вектора импульса частицы;

б) кинетическую энергию частицы;

в) ускорение частицы.

3.381. Для каких значений кинетической энергии период обращения электрона и протона в однородном магнитном поле на $\eta = 1{,}0\%$ больше периода их обращения при нерелятивистских скоростях?

3.382. Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U = 1{,}0$ кВ, движется в однородном магнитном поле под углом $\alpha = 30°$ к век-

тору B, модуль которого $B = 29$ мТ. Найти шаг винтовой траектории электрона.

3.383. Слабо расходящийся пучок нерелятивистских заряженных частиц, ускоренных разностью потенциалов U, выходит из точки A вдоль оси прямого соленоида. Пучок фокусируется на расстоянии l от точки A при двух последовательных значениях индукции магнитного поля, B_1 и B_2. Найти удельный заряд q/m частиц.

3.384. Из точки A, лежащей на оси прямого соленоида, вылетает нерелятивистский электрон со скоростью v под углом α к оси. Индукция магнитного поля B. Найти расстояние r от оси до точки попадания электрона на экран, расположенный перпендикулярно к оси на расстоянии l от точки A.

3.385. С поверхности цилиндрического провода радиуса a, по которому течет постоянный ток I, вылетает электрон с начальной скоростью v_0, перпендикулярной к поверхности провода. Найти, на какое максимальное расстояние удалится электрон от оси провода, прежде чем повернуть обратно под действием магнитного поля тока.

3.386. Нерелятивистская заряженная частица пролетает электрическое поле цилиндрического конденсатора и затем попадает в однородное поперечное магнитное поле с индукцией B (рис. 3.100). В конденсаторе частица движется по дуге окружности, в магнитном поле — по полуокружности радиуса r. Разность потенциалов на конденсаторе U, радиусы обкладок a и b, причем $a < b$. Найти скорость частицы и ее удельный заряд q/m.

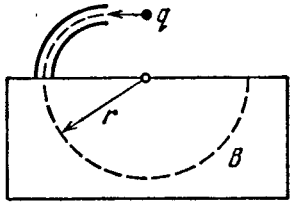


Рис. 3.100.

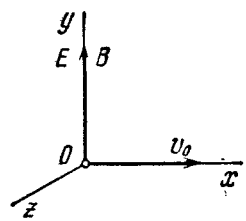


Рис. 3.101.

3.387. Из начала координат O области, где созданы однородные параллельные оси y электрическое и магнитное поля с напряженностью E и индукцией B (рис. 3.101), вылетает в направлении оси x частица с удельным зарядом q/m. Начальная скорость частицы равна v_0. Найти для нерелятивистского случая:

а) координату y_n частицы в момент, когда она n-й раз пересечет ось y;

б) угол α между вектором скорости частицы и осью y в этот момент.

3.388. Узкий пучок одинаковых ионов с удельным зарядом q/m, имеющих различные скорости, входит в точке O (см. рис. 3.101) в область, где созданы однородные параллельные электрическое и

магнитное поля с напряженностью E и индукцией B. Направление пучка в точке O совпадает с осью x. На расстоянии l от точки O находится плоский экран, ориентированный перпендикулярно к оси x. Найти уравнение следа ионов на экране. Показать, что при $z \ll l$ — это уравнение параболы.

3.389. Пучок нерелятивистских протонов проходит, не отклоняясь, через область, в которой созданы однородные поперечные взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля с $E =$ $= 120$ кВ/м и $B = 50$ мТ. Затем пучок попадает на заземленную мишень. Найти силу, с которой пучок действует на мишеиь, если ток в пучке $I = 0{,}80$ мА.

3.390. Нерелятивистские протоны движутся прямолинейно в области, где созданы однородные взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля с $E = 4{,}0$ кВ/м и $B = 50$ мТ. Траектория протонов лежит в плоскости xz (рис. 3.102) и составляет угол $\varphi = 30°$ с осью x. Найти шаг винтовой линии, по которой будут двигаться протоны после выключеиия электрического поля.

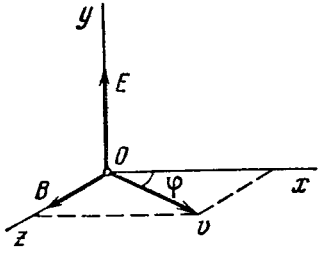


Рис. 3.102.

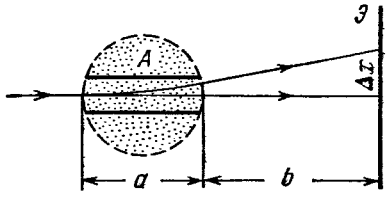


Рис. 3.103.

3.391. Пучок нерелятивистских заряженных частиц проходит, ие отклоняясь, через область A (рис. 3.103), в которой созданы поперечные взаимно перпендикулярные электрическое и магиитное поля с напряженностью E и индукцией B. Если магнитное поле выключить, след пучка на экране $Э$ смещается на Δx. Зная расстояния a и b, найти удельный заряд q/m частиц.

3.392. Частица с удельным зарядом q/m движется в области, где созданы однородные взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля с напряженностью E и индукцией **B** (рис. 3.104). В момент $t = 0$ частица находилась в точке O и имела нулевую скорость. Найти для нерелятивистского случая:

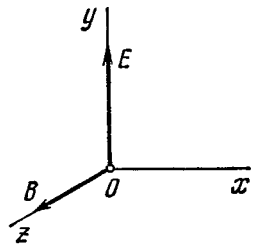


Рис. 3.104.

а) закон движения частицы $x(t)$ и $y(t)$; какой вид имеет траектория;

б) длину участка траектории между двумя ближайшими точками, в которых скорость частицы обращается в нуль;

в) среднее значение проекции вектора скорости частицы на ось x (дрейфовая скорость).

3.393. Система состоит из длинного цилиндрического анода радиуса a и коаксиального с ним цилиндрического катода радиуса b ($b < a$). На оси системы имеется нить с током накала I, создающим в окружающем пространстве магнитное поле. Найти наименьшую разность потенциалов между катодом и анодом, при которой термоэлектроны, покидающие катод без начальной скорости, начнут достигать анода.

3.394. Магнетрон — это прибор, состоящий из нити накала радиуса a и коаксиального цилиндрического анода радиуса b, которые находятся в однородном магнитном поле, параллельном нити. Между нитью и анодом приложена ускоряющая разность потенциалов U. Найти значение индукции магнитного поля, при котором электроны, вылетающие с нулевой начальной скоростью из нити, будут достигать анода.

3.395. Заряженная частица с удельным зарядом q/m начинает двигаться в области, где созданы однородные взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля. Магнитное поле постоянно и имеет индукцию B, электрическое же меняется во времени как $E = E_m \cos \omega t$, где $\omega = qB/m$. Найти для нерелятивистского случая закон движения частицы $x(t)$ и $y(t)$, если в момент $t = 0$ она находилась в точке O (см. рис. 3.104). Какой примерно вид имеет траектория частицы?

3.396. Частота генератора циклотрона $\nu = 10$ МГц. Найти эффективное ускоряющее напряжение на дуантах этого циклотрона, при котором расстояние между соседними траекториями протонов с радиусом $r = 0{,}5$ м не меньше, чем $\Delta r = 1{,}0$ см.

3.397. Протоны ускоряют в циклотроне так, что максимальный радиус кривизны их траектории $r = 50$ см. Найти:

а) кинетическую энергию протонов в конце ускорения, если индукция магнитного поля в циклотроне $B = 1{,}0$ Т;

б) минимальную частоту генератора циклотрона, при которой в конце ускорения протоны будут иметь кинетическую энергию $T = 20$ МэВ.

3.398. Однократно ионизованные ионы He^+ ускоряют в циклотроне так, что максимальный радиус орбиты $r = 60$ см. Частота генератора циклотрона $\nu = 10{,}0$ МГц, эффективное ускоряющее напряжение между дуантами $U = 50$ кВ. Пренебрегая зазором между дуантами, найти:

а) полное время процесса ускорения иона;

б) приближенное значение пути, пройденного ионом за весь цикл ускорения.

3.399. Так как период обращения электронов в однородном магнитном поле с ростом энергии быстро увеличивается, циклотрон оказывается непригодным для их ускорения. Этот недостаток устраняется в *микротроне* (рис. 3.105), где изменение периода обращения электрона ΔT делают кратным периоду ускоряющего поля T_0.

Сколько раз электрону необходимо пройти через ускоряющий промежуток микротрона, чтобы приобрести энергию $W = 4{,}6$ МэВ, если $\Delta T = T_0$, индукция магнитного поля $B = 107$ мТ и частота ускоряющего поля $\nu = 3000$ МГц?

3.400. Чтобы в циклотроне не возникала расстройка, связанная с изменением периода обращения частицы при возрастании ее энергии, медленно изменяют (модулируют) частоту ускоряющего поля. По какому закону надо изменять эту частоту $\omega(t)$, если индукция магнитного поля равна B и частица приобретает за один оборот энергию ΔW? Заряд частицы q, масса m.

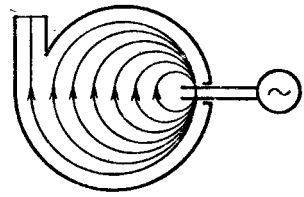


Рис. 3.105.

3.401. Частица с удельным зарядом q/m находится внутри соленоида круглого сечения на расстоянии r от его оси. В обмотке включили ток, и индукция магнитного поля стала равной B. Найти скорость частицы и радиус кривизны ее траектории, считая, что за время нарастания тока в соленоиде ее смещение пренебрежимо мало.

3.402. В бетатроне магнитный поток внутри равновесной орбиты радиуса $r = 25$ см возрастает за время ускорения практически с постоянной скоростью $\dot{\Phi} = 5{,}0$ Вб/с. При этом электроны приобретают энергию $W = 25$ МэВ. Найти число оборотов, совершенных электроном за время ускорения, и соответствующее значение пройденного им пути.

3.403. Показать, что электроны в бетатроне будут двигаться по круговой орбите постоянного радиуса при условии, что индукция магнитного поля на орбите равна половине среднего значения индукции поля внутри орбиты (бетатронное условие).

3.404. Найти с помощью бетатронного условия радиус круговой орбиты электрона, зная зависимость индукции магнитного поля от расстояния r до оси поля. Рассмотреть этот вопрос на примере поля $B = B_0 - ar^2$, где B_0 и a — положительные постоянные.

3.405. Показать с помощью бетатронного условия, что напряженность вихревого электрического поля в бетатроне имеет экстремум на равновесной орбите.

3.406. В бетатроне индукция магнитного поля на равновесной орбите радиуса $r = 20$ см изменяется за время $\Delta t = 1{,}0$ мс практически с постоянной скоростью от нуля до $B = 0{,}40$ Т. Найти энергию, приобретаемую электроном за каждый оборот.

3.407. Индукция магнитного поля в бетатроне на равновесной орбите радиуса r изменяется за время ускорения от нуля до B практически с постоянной скоростью. Считая начальную скорость электрона равной нулю, найти:

а) энергию, приобретенную электроном за время ускорения;

б) соответствующее значение пройденного электроном пути, если время ускорения равно Δt.

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

4.1. Механические колебания

● Уравнение гармонических колебаний и его решение:

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=0, \quad x=a\cos(\omega_0 t+\alpha), \tag{4.1а}$$

где ω_0 — собственная частота колебаний.

● Уравнение затухающих колебаний и его решение:

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2 x=0, \quad x=a_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t+\alpha), \tag{4.1б}$$

где β — коэффициент затухания, ω — частота затухающих колебаний:

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}. \tag{4.1в}$$

● Логарифмический декремент затухания λ и добротность Q:

$$\lambda=\beta T, \quad Q=\pi/\lambda, \tag{4.1г}$$

где $T=2\pi/\omega$.

● Уравнение вынужденных колебаний и его установившееся решение:

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2 x=f_0\cos\omega t, \quad x=a\cos(\omega t-\varphi), \tag{4.1д}$$

где

$$a=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}. \tag{4.1е}$$

● Максимум амплитуды смещения достигается при

$$\omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}. \tag{4.1ж}$$

4.1. Точка совершает колебания вдоль оси x по закону $x=a\cos(\omega t-\pi/4)$. Построить примерные графики:

а) смещения x, проекции скорости v_x и проекции ускорения w_x как функций времени t;

б) проекции скорости v_x и проекции ускорения w_x как функций координаты x.

4.2. Некоторая точка движется вдоль оси x по закону $x=a\sin^2(\omega t-\pi/4)$. Найти:

а) амплитуду и период колебаний; изобразить график $x(t)$;

б) проекцию скорости v_x как функцию координаты x; изобразить график $v_x(x)$.

4.3. Частица совершает гармонические колебания вдоль оси x около положения равновесия $x = 0$. Частота колебаний $\omega = 4{,}00$ рад/с. В некоторый момент координата частицы $x_0 = 25{,}0$ см и ее скорость $v_{x0} = 100$ см/с. Найти координату x и скорость v_x частицы через $t = 2{,}40$ с после этого момента.

4.4. Найти круговую частоту и амплитуду гармонических колебаний частицы, если на расстояниях x_1 и x_2 от положения равновесия ее скорость равна соответственно v_1 и v_2.

4.5. Точка совершает гармонические колебания вдоль некоторой прямой с периодом $T = 0{,}60$ с и амплитудой $a = 10{,}0$ см. Найти среднюю скорость точки за время, в течение которого она проходит путь $a/2$:

а) из крайнего положения;

б) из положения равновесия.

4.6. В момент $t = 0$ точка начинает совершать колебания вдоль оси x по закону $x = a \sin \omega t$. Найти за первые 3/8 периода после начала движения:

а) среднее значение проекции ее вектора скорости $\langle v_x \rangle$;

б) модуль среднего вектора скорости $|\langle \mathbf{v} \rangle|$;

в) среднее значение модуля скорости $\langle v \rangle$.

4.7. Частица движется вдоль оси x по закону $x = a \cos \omega t$. Найти путь, который она пройдет за промежуток времени от $t = 0$ до t.

4.8. В момент $t = 0$ частица начинает двигаться вдоль оси x так, что проекция ее скорости меняется по закону $v_x = 35 \cos \pi t$ см/с, где t в секундах. Найти путь, который пройдет эта частица за первые $t = 2{,}80$ с после начала движения.

4.9. Частица совершает гармонические колебания вдоль оси x по закону $x = a \cos \omega t$. Считая вероятность P нахождения частицы в интервале от $-a$ до $+a$ равной единице, найти зависимость от x плотности вероятности dP/dx, где dP — вероятность нахождения частицы в интервале от x до $x + dx$. Изобразить график dP/dx в зависимости от x.

4.10. Найти графически амплитуду a колебаний, которые возникают при сложении следующих колебаний одного направления:

а) $x_1 = 3{,}0 \cos (\omega t + \pi/3)$, $x_2 = 8{,}0 \sin (\omega t + \pi/6)$;

б) $x_1 = 3{,}0 \cos \omega t$, $x_2 = 5{,}0 \cos (\omega t + \pi/4)$, $x_3 = 6{,}0 \sin \omega t$.

4.11. Точка участвует одновременно в двух колебаниях одного направления, которые происходят по законам $x_1 = a \cos \omega t$ и $x_2 = a \cos 2\omega t$. Найти максимальную скорость точки.

4.12. При сложении двух гармонических колебаний одного направления результирующее колебание точки имеет вид $x = a \cos 2{,}1t \cdot \cos 50{,}0t$, где t в секундах. Найти круговые частоты складываемых колебаний и период биений результирующего колебания.

4.13. Точка A колеблется по определенному гармоническому закону в K'-системе отсчета, которая в свою очередь совершает

гармоническне колебания по отношению к K-системе. Оба колебания происходят вдоль одного и того же направления. При частоте колебаний K'-системы 20 или 24 Гц частота возникающих биений точки A в K-системе оказывается равной ν. При какой частоте колебаний K'-системы частота биений точки A станет равной 2ν?

4.14. Точка движется в плоскости xy по закону $x = a \sin \omega t$, $y = b \cos \omega t$, где a, b и ω — положительные постоянные. Найти:

а) уравнение траектории точки $y(x)$ и направление ее движения по этой траектории;

б) ускорение точки $\mathbf{w}$ в зависимости от ее радиус-вектора $\mathbf{r}$ относительно начала координат.

4.15. Найти уравнения траектории точки $y(x)$, если она движется по законам:

а) $x = a \sin \omega t$, $y = a \sin 2\omega t$;

б) $x = a \sin \omega t$, $y = a \cos 2\omega t$.

Изобразить графики этих траекторий.

4.16. Частица массы m находится в одномерном потенциальном поле, где ее потенциальная энергия зависит от координаты x как $U(x) = U_0 (1 - \cos ax)$, U_0 и a — некоторые постоянные. Найти период малых колебаний частицы около положения равновесия.

4.17. Тот же вопрос, что и в предыдущей задаче, но потенциальная энергия имеет вид $U(x) = a/x^2 - b/x$, где a и b — некоторые положительные постоянные.

4.18. Найти период малых вертикальных колебаний шарика массы $m = 40$ г, укрепленного на середине горизонтально натянутой струны длины $l = 1{,}0$ м. Натяжение струны считать постоянным и равным $F = 10$ Н.

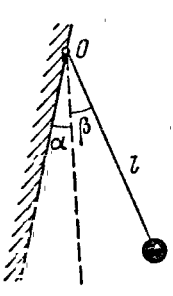


Рис. 4.1.

4.19. Определить период малых колебаний математического маятника — шарика, подвешенного на нити длины $l = 20$ см, если он находится в жидкости, плотность которой в $\eta = 3{,}0$ раза меньше плотности шарика. Сопротивление жидкости считать пренебрежимо малым.

4.20. Шарик подвесили на нити длины l к точке O стенки, составляющей небольшой угол α с вертикалью (рис. 4.1). Затем нить с шариком отклонили на небольшой угол β ($\beta > \alpha$) и отпустили. Считая удар шарика о стенку абсолютно упругим, найти период колебаний такого маятника.

4.21. Маятниковые часы установили в кабине лифта, которая начала подниматься с постоянным ускорением w, причем $w < g$. На высоте h ускорение кабины изменило свое направление на противоположное, оставшись по модулю тем же. Через сколько времени после начала движения показания часов окажутся верными?

4.22. Вычислить период малых колебаний ареометра (рис. 4.2), которому сообщили небольшой толчок в вертикальном направлении. Масса ареометра $m = 50$ г, радиус его трубки $r = 3{,}2$ мм, плотность жидкости $\rho = 1{,}00$ г/см^3. Сопротивление жидкости считать пренебрежимо малым.

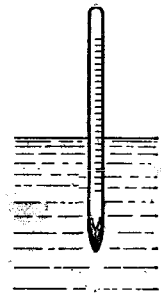


Рис. 4.2.

4.23. Имеется недеформированная пружина жесткости $\varkappa = 13$ Н/м, концы которой закреплены. В точке, отстоящей от одного из концов пружины на $\eta = 1/3$ ее длины, укрепили небольшое тело массы $m = 25$ г. Пренебрегая массой пружины, найти период малых продольных колебаний данного тела. Силы тяжести нет.

4.24. Определить период малых продольных колебаний тела массы m в системе (рис. 4.3), если жесткости пружинок равны $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, а их массы и трение пренебрежимо малы.

4.25. Найти период малых вертикальных колебаний тела массы m в системе (рис. 4.4). Жесткости пружинок равны $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, а их массы пренебрежимо малы.

4.26. Небольшое тело массы m закреплено на середине натянутой струны длины $2l$. Натяжение струны в положении равновесия равно T_0. Найти угловую частоту малых колебаний тела в поперечном направлении. Масса струны пренебрежимо мала, поле тяжести отсутствует.

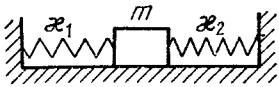


Рис. 4.3.

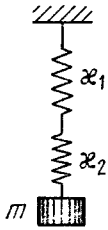


Рис. 4.4.

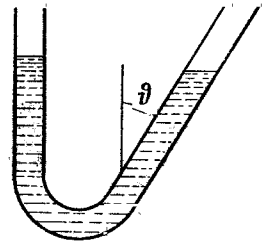


Рис. 4.5.

4.27. Определить период колебаний ртути массы $m = 200$ г, налитой в изогнутую трубку (рис. 4.5), правое колено которой составляет угол $\vartheta = 30°$ с вертикалью. Площадь сечения канала трубки $S = 0{,}50$ см^2. Вязкостью ртути пренебречь.

Рис. 4.6.

4.28. Однородный стержень положили на два быстро вращающихся блока, как показано на рис. 4.6. Расстояние между осями блоков $l = 20$ см, коэффициент трения между стержнем и блоками $k = 0{,}18$. Показать, что стержень будет совершать гармонические колебания. Найти их период.

4.29. Представим себе шахту, пронизывающую Землю по ее оси вращения. Считая Землю за однородный шар и пренебрегая сопротивлением воздуха, найти:

а) закон движения тела, упавшего в шахту;

б) сколько времени понадобится этому телу, чтобы достигнуть противоположного конца шахты;

в) скорость тела в центре Земли.

4.30. Найти период малых колебаний математического маятника длины l, если его точка подвеса O движется относительно поверхности Земли в произвольном направлении с постоянным ускорением $\mathbf{w}$ (рис. 4.7). Вычислить этот период, если $l = 21$ см, $w = g/2$ и угол между векторами $\mathbf{w}$ и $\mathbf{g}$ $\beta = 120°$.

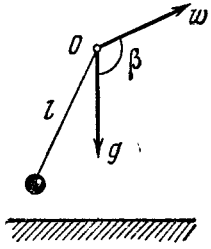


Рис. 4.7.

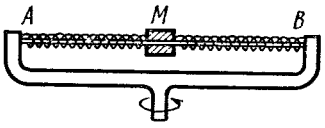


Рис. 4.8.

4.31. В установке (рис. 48) муфта M массы $m = 0{,}20$ кг закреплена между двумя одинаковыми пружинками, общая жесткость которых $\varkappa = 20$ Н/м. Муфта без трения может скользить по горизонтальному стержню AB. Установка вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 4{,}4$ рад/с вокруг вертикальной оси, проходящей через середину стержня. Найти период малых колебаний муфты. При каком значении ω колебаний муфты не будет?

4.32. Доска с лежащим на ней бруском совершает горизонтальные гармонические колебания с амплитудой $a = 10$ см. Найти коэффициент трения между доской и бруском, если последний начинает скользить по доске, когда ее период колебания меньше $T = 1{,}0$ с.

4.33. Найти зависимость от времени угла отклонения математического маятника длины 80 см, если в начальный момент маятник:

а) отклонили на угол 3,0° и без толчка отпустили;

б) находился в состоянии равновесия и его нижнему концу сообщили горизонтальную скорость 0,22 м/с;

в) отклонили на 3,0° и его нижнему концу сообщили скорость 0,22 м/с, направленную к положению равновесия.

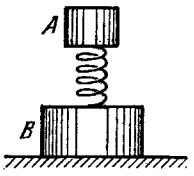


Рис. 4.9.

4.34. Тело A массы $m_1 = 1{,}00$ кг и тело B массы $m_2 = 4{,}10$ кг соединены между собой пружиной, как показано на рис. 4.9. Тело A совершает свободные вертикальные гармонические колебания с амплитудой $a = 1{,}6$ см и частотой $\omega = 25$ рад/с. Пренебрегая массой пружины, найти

наибольшее и наименьшее значения силы давления этой системы на опорную плоскость.

4.35. Доска, на которой лежит тело массы m, начинает двигаться вертикально вверх по закону $y = a(1 - \cos \omega t)$, где y — смещение из начального положения, $\omega = 11$ рад/с. Найти:

а) силу давления тела на доску в зависимости от времени, если $a = 4{,}0$ см; изобразить график этой зависимости;

б) минимальную амплитуду колебания доски, при которой тело начнет отставать от нее;

в) амплитуду колебания доски, при которой тело подскочит на высоту $h = 50$ см относительно начального положения (в момент $t = 0$).

4.36. К нерастянутой пружине, верхний конец которой закреплен, подвесили и без толчка отпустили тело массы m. Жесткость пружины $\varkappa$. Пренебрегая ее массой, найти:

а) закон движения тела $y(t)$, где y — его смещение из начального положения;

б) максимальное и минимальное натяжения пружины в процессе движения.

4.37. Частица массы m движется под действием силы $\mathbf{F} = -\alpha m \mathbf{r}$, где α — положительная постоянная, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор частицы относительно начала координат. Найти траекторию ее движения, если в начальный момент $\mathbf{r} = r_0\mathbf{i}$ и скорость $\mathbf{v} = v_0\mathbf{j}$, где $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ — орты осей x и y.

4.38. Тело массы m висит на пружине, прикрепленной к потолку кабины лифта. Жесткость пружины $\varkappa$. В момент $t = 0$ кабина начала подниматься с ускорением w. Пренебрегая массой пружины, найти закон движения груза $y(t)$ относительно кабины лифта, если $y(0) = 0$ и $\dot{y}(0) = 0$. Рассмотреть два случая:

а) $w = \text{const}$;

б) $w = \alpha t$, где α — постоянная.

4.39. Тело массы $m = 0{,}50$ кг висит на резиновом шнуре с коэффициентом упругости $k = 50$ Н/м. Найти максимальное расстояние, на которое можно оттянуть вниз тело, чтобы его колебания еще носили гармонический характер. Какова при этом энергия колебаний тела?

4.40. Тело массы m упало с высоты h на чашку пружинных весов (рис. 4.10). Массы чашки и пружины пренебрежимо малы, жесткость последней $\varkappa$. Прилипнув к чашке, тело начинает совершать гармонические колебания в вертикальном направлении. Найти амплитуду колебаний и их энергию.

Рис. 4.10.

4.41. В условиях предыдущей задачи масса чашки равна M. Найти амплитуду колебаний в этом случае.

4.42. Частица массы m движется в плоскости xy под действием силы, зависящей от скорости по закону $\mathbf{F} = a(y\mathbf{i} - x\mathbf{j})$, где a —

положительная постоянная, $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ — орты осей x и y. В начальный момент $t = 0$ частица находилась в точке $x = y = 0$ и имела скорость $\mathbf{v}_0$ в направлении орта $\mathbf{j}$. Найти закон движения частицы $x(t)$, $y(t)$, а также уравнение ее траектории.

4.43. Маятник представляет собой легкий тонкостенный сферический сосуд радиуса R, который целиком заполнен водой. Сосуд укреплен на легком жестком стержне (рис. 4.11). Расстояние между точкой подвеса O и центром сосуда равно l. Во сколько раз изменится период малых колебаний такого маятника после того, как вода замерзнет? Вязкостью воды и изменением ее объема при замерзании пренебречь.

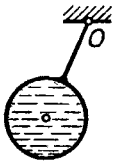


Рис. 4.11.

4.44. Найти частоту малых колебаний тонкого однородного вертикального стержня массы m и длины l, который шарнирно укреплен в точке O (рис. 4.12). Суммарная жесткость пружин $\varkappa$. Массы пружин пренебрежимо малы.

4.45. Однородный стержень массы $m = 1{,}5$ кг, висящий на двух одинаковых нитях длины $l = 90$ см (рис. 4.13), повернули на малый угол вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину C. При этом нити отклонились на угол $\alpha = 5{,}0°$. Затем стержень отпустили, и он начал совершать малые колебания. Найти:

а) период колебаний;

б) энергию колебаний стержня.

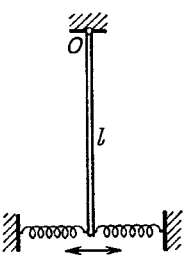


Рис. 4.12.

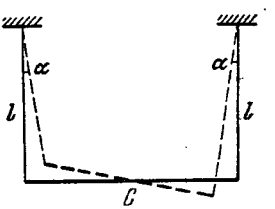


Рис. 4.13.

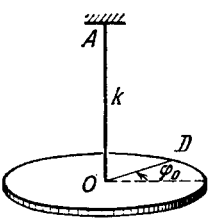


Рис. 4.14.

4.46. Система (рис. 4.14) состоит из горизонтального однородного диска D массы m и радиуса R и тонкого стержня AO, коэффициент кручения которого k. Найти амплитуду малых крутильных колебаний и их энергию, если в начальный момент диск отклонили на угол φ_0 из положения равновесия и сообщили ему угловую скорость $\dot{\varphi}_0$.

4.47. Однородный стержень массы m и длины l совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси, проходящей через его верхний конец. Найти среднюю за период колебания кинетическую энергию стержня, если в начальный момент его отклонили от вертикали на угол ϑ_0 и сообщили ему угловую скорость $\dot{\vartheta}_0$.

4.48. Физический маятник установили так, что его центр тяжести оказался над точкой подвеса. Из этого положения маятник начал двигаться к положению устойчивого равновесия, которое он прошел с угловой скоростью ω. Пренебрегая трением, найти период малых колебаний этого маятника.

4.49. Физический маятник совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси с частотой $\omega_1 = 15{,}0$ рад/с. Если к нему прикрепить небольшое тело массы $m = 50$ г на расстоянии $l = 20$ см ниже оси, то частота колебаний становится $\omega_2 = 10{,}0$ рад/с. Найти момент инерции этого маятника относительно оси качания.

4.50. Два физических маятника совершают малые колебания вокруг одной и той же горизонтальной оси с частотами ω_1 и ω_2. Их моменты инерции относительно данной оси равны соответственно I_1 и I_2. Маятники привели в состояние устойчивого равновесия и скрепили друг с другом. Какова будет частота малых колебаний составного маятника?

4.51. Однородный стержень длины l совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси OO', перпендикулярной к стержню и проходящей через одну из его точек. Найти расстояние между центром инерции стержня и осью OO', при котором период колебаний будет наименьшим. Чему он равен?

4.52. Тонкая однородная пластинка в форме равностороннего треугольника с высотой h совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси, совпадающей с одной из его сторон. Найти период колебаний и приведенную длину данного маятника.

4.53. Гладкий горизонтальный диск вращают вокруг вертикальной оси O (рис. 4.15) с постоянной угловой скоростью ω. На нем находится тонкий однородный стержень AB длины l, который совершает малые колебания вокруг вертикальной оси A, укрепленной на диске на расстоянии a от оси O. Найти частоту ω_0 этих колебаний.

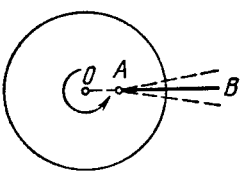


Рис. 4.15.

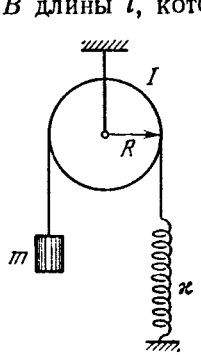


Рис. 4.16.

4.54. Найти частоту малых колебаний системы, показанной на рис. 4.16. Известны радиус блока R, его момент инерции I относительно оси вращения, масса тела m и жесткость пружины $\varkappa$. Массы нити и пружины пренебрежимо малы, нить по блоку не скользит, трения в оси блока нет.

4.55. Однородный цилиндрический блок массы M и радиуса R может свободно поворачиваться вокруг горизонтальной оси O (рис. 4.17). На блок плотно намотана нить, к свешивающемуся концу которой прикреплен груз A. Этот груз уравновешивает точечное тело массы m, укрепленное на ободе блока, при определенном значении угла α. Найти частоту малых колебаний системы.

4.56. Сплошной однородный цилиндр радиуса r катается без скольжения по внутренней стороне цилиндрической поверхности радиуса R, совершая малые колебания. Найти их период.

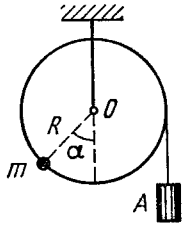


Рис. 4.17.

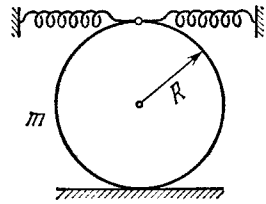


Рис. 4.18.

4.57. Сплошной однородный цилиндр массы m совершает малые колебания под действием двух пружин, общая жесткость которых $\varkappa$ (рис. 4.18). Найти период этих колебаний в отсутствие скольжения.

4.58. Два кубика, массы которых равны m_1 и m_2, соединили невесомой пружинкой жесткости $\varkappa$ и положили на гладкую горизонтальную плоскость. Затем кубики немного сблизили и одновременно отпустили. Найти собственную частоту колебаний системы.

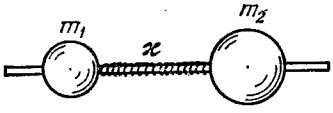


Рис. 4.19.

4.59. Два шара с массами $m_1 = 1{,}0$ кг и $m_2 = 2{,}0$ кг насажены на тонкий гладкий горизонтальный стержень (рис. 4.19). Шары связаны между собой легкой пружинкой с жесткостью $\varkappa = 24$ Н/м. Левому шару сообщили начальную скорость $v_1 = 12$ см/с. Найти:

а) частоту колебаний системы в процессе движения;

б) энергию и амплитуду колебаний.

4.60. Найти период малых крутильных колебаний системы, состоящей из двух дисков, насаженных на тонкий стержень с коэффициентом кручения k. Моменты инерции дисков относительно оси стержня равны I_1 и I_2.

4.61. Модель молекулы CO_2 — три шарика, соединенные одинаковыми легкими пружинками и расположенные в положении равновесия вдоль одной прямой. Такая система может совершать продольные колебания двух типов, как показано стрелками на рис. 4.20. Зная массы атомов, найти отношение частот этих колебаний.

4.62. В закрытом с обоих концов цилиндре, заполненном идеальным газом, находится поршень массы m и площадью S (рис. 4.21).

В состоянии равновесия поршень делит цилиндр на две равные части, каждая объемом V_0. Давление газа p_0. Поршень немного сместили из положения равновесия и отпустили. Найти частоту его колебаний, считая процессы в газе адиабатическими, а трение ничтожно малым.

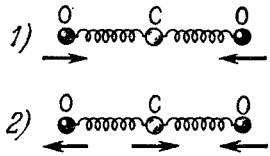


Рис. 4.20.

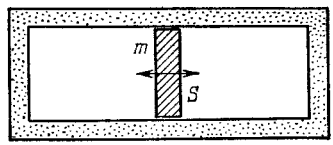


Рис. 4.21.

4.63. Небольшой шарик массы $m = 21$ г, подвешенный на изолирующей нити на высоте $h = 12$ см от большой горизонтальной проводящей плоскости, совершает малые колебания (рис. 4.22). После того как ему сообщили некоторый заряд q, период колебаний изменился в $\eta = 2{,}0$ раза. Найти q.

4.64. Небольшая магнитная стрелка совершает малые колебания вокруг оси, перпендикулярной к вектору индукции магнитного поля. При изменении индукции поля период колебаний стрелки уменьшился в $\eta = 5{,}0$ раза. Во сколько раз и как изменилась индукция поля? Затухание колебаний пренебрежимо мало.

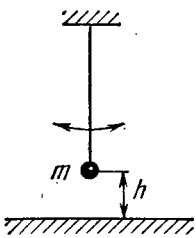


Рис. 4.22.

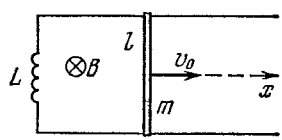


Рис. 4.23.

4.65. Контур (рис. 4.23) образован двумя параллельными проводниками, замыкающим их соленоидом с индуктивностью L и проводящим стержнем массы m, который может свободно (без трения) скользить по проводникам. Проводники находятся в горизонтальной плоскости в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией B. Расстояние между проводниками l. В момент $t = 0$ стержню сообщили вправо начальную скорость v_0. Найти закон его движения $x(t)$, если сопротивление контура пренебрежимо мало.

4.66. Катушка индуктивности L соединяет верхние концы двух вертикальных медных шин, отстоящих друг от друга на расстояние l. Вдоль шин падает без начальной скорости горизонтальный проводник-перемычка массы m — без нарушения контакта с

шинами. Вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией B, перпендикулярном плоскости шин. Найти закон движения проводника $x\,(t)$.

4.67. Затухающие колебания точки происходят по закону $x = a_0 e^{-\beta t} \sin \omega t$. Найти:

а) амплитуду колебаний и скорость точки в момент $t = 0$;

б) моменты времени, когда точка достигает крайних положений.

4.68. Тело совершает крутильные колебания по закону $\varphi = \varphi_0 e^{-\beta t} \cos \omega t$. Найти:

а) угловую скорость $\dot{\varphi}$ и угловое ускорение $\ddot{\varphi}$ тела в момент $t = 0$;

б) моменты времени, когда угловая скорость становится максимальной.

4.69. Точка совершает затухающие колебания с частотой ω и коэффициентом затухания β по закону (4.1б). Найти начальную амплитуду a_0 и начальную фазу α, если в момент $t = 0$ смещение точки и проекция ее скорости равны:

а) $x\,(0) = 0$ и $v_x\,(0) = \dot{x}_0$; б) $x\,(0) = x_0$ и $v_x\,(0) = 0$.

4.70. Некоторая точка совершает затухающие колебания с частотой $\omega = 25$ рад/с. Найти коэффициент затухания β, если в начальный момент скорость точки равна нулю, а ее смещение из положения равновесия в $\eta = 1{,}020$ раза меньше амплитуды в этот момент.

4.71. Точка совершает затухающие колебания с частотой ω и коэффициентом затухания β. Найти амплитуду скорости точки как функцию времени t, если в момент $t = 0$:

а) амплитуда ее смещения равна a_0;

б) смещение точки $x\,(0) = 0$ и проекция ее скорости $v_x\,(0) = \dot{x}_0$.

4.72. Имеются два затухающих колебания с известными периодами T и коэффициентами затухания β: $T_1 = 0{,}10$ мс, $\beta_1 = 100$ с$^{-1}$ и $T_2 = 10$ мс, $\beta_2 = 10$ с$^{-1}$. Какое из них затухает быстрее?

4.73. Математический маятник совершает колебания в среде, для которой логарифмический декремент затухания $\lambda_0 = 1{,}50$. Каким будет логарифмический декремент затухания, если сопротивление среды увеличить в $n = 2{,}00$ раза? Во сколько раз следует увеличить сопротивление среды, чтобы колебания стали невозможны?

4.74. К невесомой пружине подвесили грузик, в результате чего она растянулась на $\Delta x = 9{,}8$ см. С каким периодом будет колебаться грузик, если ему дать небольшой толчок в вертикальном направлении? Логарифмический декремент затухания $\lambda = 3{,}1$.

4.75. Найти добротность осциллятора, у которого амплитуда смещения уменьшается в $\eta = 2{,}0$ раза через каждые $n = 110$ колебаний.

4.76. Частицу сместили из положения равновесия на расстояние $l = 1{,}0$ см и предоставили самой себе. Какой путь пройдет, колеблясь, эта частица до полной остановки, если логарифмический декремент затухания $\lambda = 0{,}020$?

4.77. Найти добротность математического маятника длины $l = 50$ см, если за промежуток времени $\tau = 5{,}2$ мин его полная механическая энергия уменьшилась в $\eta = 4{,}0 \cdot 10^4$ раз.

4.78. Однородный диск радиуса $R = 13$ см может вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной к его плоскости и проходящей через край диска. Найти период малых колебаний этого диска, если логарифмический декремент затухания $\lambda = 1{,}00$.

4.79. Тонкий однородный диск массы m и радиуса R, подвешенный в горизонтальном положении к упругой нити, совершает крутильные колебания в жидкости. Момент упругих сил со стороны нити $N = \alpha\varphi$, где α — постоянная, φ — угол поворота из положения равновесия. Сила сопротивления, действующая на единицу поверхности диска, $F_1 = \eta v$, где η — постоянная, v — скорость данного элемента диска относительно жидкости. Найти частоту малых колебаний.

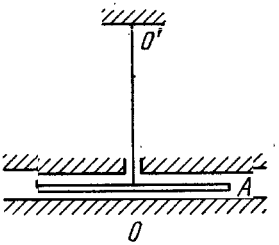


Рис. 4.24.

4.80. Диск A радиуса R, подвешенный на упругой нити между двумя неподвижными плоскостями (рис. 4.24), совершает крутильные колебания вокруг своей оси OO'. Момент инерции диска относительно этой оси I, зазор между диском и каждой из плоскостей h, причем $h \ll R$. Найти вязкость газа, окружающего диск A, если период колебаний диска T и логарифмический декремент затухания λ.

4.81. Проводник в форме квадратной рамки со стороной a, подвешенный на упругой нити, находится в однородном горизонтальном магнитном поле с индукцией B. В положении равновесия плоскость рамки параллельна вектору **B** (рис. 4.25). Будучи выведена из положения равновесия, рамка совершает малые колебания вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. Момент инерции рамки относительно этой оси I, ее электрическое сопротивление R. Пренебрегая индуктивностью рамки, найти время, через которое амплитуда ее углового поворота уменьшится в e раз.

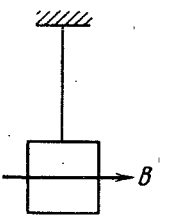


Рис. 4.25.

4.82. На горизонтальной плоскости с коэффициентом трения $k = 0{,}10$ лежит брусок массы $m = 0{,}50$ кг, соединенный горизонтальной недеформированной пружинкой со стенкой. Жесткость пружинки $\varkappa = 2{,}45$ Н/см, а ее масса пренебрежимо мала. Брусок сместили так, что пружинка растянулась на $x_0 = 3{,}0$ см, а затем отпустили. Найти:

а) период колебаний бруска;

б) число колебаний, которые совершит брусок до остановки.

4.83. Шарик массы m может совершать незатухающие гармонические колебания около точки $x = 0$ с собственной частотой ω_0.

В момент $t = 0$, когда шарик находился в состоянии равновесия, к нему приложили вынуждающую силу $F = F_0 \cos \omega t$, совпадающую по направлению с осью x. Найти уравнение вынужденных колебаний шарика $x(t)$.

4.84. Частица массы m может совершать незатухающие гармонические колебания под действием упругой силы с коэффициентом k. Когда частица находилась в состоянии равновесия, к ней приложили постоянную силу F, которая действовала в течение τ секунд. Найти амплитуду колебаний частицы после окончания действия этой силы. Изобразить примерный график колебаний $x(t)$. Исследовать возможные случаи.

4.85. Шарик массы m, подвешенный к пружинке, удлиняет последнюю на величину Δl. Под действием внешней вертикальной силы, меняющейся по гармоническому закону с амплитудой F_0, шарик совершает вынужденные колебания. Логарифмический декремент затухания равен λ. Пренебрегая массой пружинки, найти круговую частоту вынуждающей силы, при которой амплитуда смещения шарика максимальна. Каково значение этой амплитуды?

4.86. Амплитуды смещений вынужденных гармонических колебаний при частотах $\omega_1 = 400$ рад/с и $\omega_2 = 600$ рад/с равны между собой. Найти частоту, при которой амплитуда смещения максимальна.

4.87. При частотах вынуждающей гармонической силы ω_1 и ω_2 амплитуда скорости частицы равна половине максимального значения. Найти:

а) частоту, соответствующую резонансу скорости;

б) коэффициент затухания β и частоту затухающих колебаний ω частицы.

4.88. Некоторая резонансная кривая соответствует механической колебательной системе с логарифмическим декрементом затухания $\lambda = 1{,}60$. Найти для этой кривой отношение максимальной амплитуды смещения к амплитуде смещения при очень малой частоте.

4.89. Под действием внешней вертикальной силы $F = F_0 \cos \omega t$ тело, подвешенное на пружинке, совершает установившиеся вынужденные колебания по закону $x = a \cos(\omega t - \varphi)$. Найти работу силы F за период колебания.

4.90. Шарик массы $m = 50{,}0$ *г* подвешен на невесомой пружинке жесткости $\varkappa = 20{,}0$ Н/м. Под действием вынуждающей вертикальной гармонической силы с частотой $\omega = 25{,}0$ рад/с шарик совершает установившиеся колебания с амплитудой $a = 1{,}3$ см. При этом смещение шарика отстает по фазе от вынуждающей силы на $\varphi = {}^3/_4\pi$. Найти:

а) добротность данного осциллятора;

б) работу вынуждающей силы за период колебания.

4.91. Шарик массы m, подвешенный на невесомой пружинке, может совершать вертикальные колебания с коэффициентом затухания β. Собственная частота колебаний равна ω_0. Под действием внешней вертикальной силы, меняющейся по закону $F = F_0 \cos \omega t$, шарик совершает установившиеся гармонические колебания. Найти

а) среднюю за период колебания мощность $\langle P \rangle$ силы F;

б) частоту ω силы F, при которой $\langle P \rangle$ максимальна; чему равна $\langle P \rangle_{макс}$?

4.92. Вынужденная гармоническая сила F, частоту которой можно менять, не изменяя ее амплитуды, действует в вертикальном направлении на шарик, висящий на невесомой пружине. Коэффициент затухания в η раз меньше собственной частоты ω_0 колебаний шарика. На сколько процентов отличается средняя за период колебания мощность $\langle P \rangle$ силы F при частоте, соответствующей резонансу смещения, от максимальной средней мощности $\langle P \rangle_{макс}$ этой силы?

4.93. Однородный горизонтальный диск, укрепленный в центре на упругом вертикальном стержне, совершает вынужденные крутильные колебания под действием момента сил $N = N_m \cos \omega t$. Колебания происходят по закону $\varphi = \varphi_m \cos(\omega t - \alpha)$. Найти:

а) работу сил трения, действующих на диск, за период колебания;

б) добротность данного осциллятора, если момент инерции диска относительно его оси равен I.

4.2. Электрические колебания

● Затухающие колебания контура

$$q = q_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha),$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \beta = \frac{R}{2L}. \tag{4.2а}$$

● Логарифмический декремент затухания λ и добротность Q контура определяются формулами (4.1г). При слабом затухании:

$$\lambda = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{4.2б}$$

● Установившиеся вынужденные колебания при последовательном включении в контур напряжения $U = U_m \cos \omega t$:

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi), \tag{4.2в}$$

где

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \tag{4.2г}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

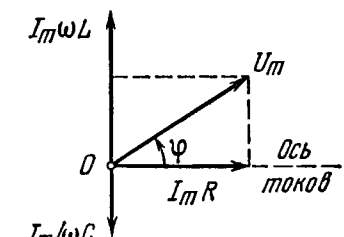


Рис. 4.26.

Соответствующая векторная диаграмма напряжений показана на рис. 4.26.

● Мощность, выделяемая в цепи переменного тока:

$$P = UI \cos \varphi, \tag{4.2д}$$

где U и I — действующие (эффективные) значения напряжения и тока:

$$U = U_m / \sqrt{2}, \quad I = I_m / \sqrt{2}. \tag{4.2е}$$

4.94. Под действием некоторой причины свободные электроны в плоской медной пластине сместились на небольшое расстояние x перпендикулярно к ее поверхности. Вследствие этого возник поверхностный заряд и соответствующая возвращающая сила, что привело к возбуждению так называемых плазменных колебаний. Найти круговую частоту этих колебаний, если концентрация свободных электронов в меди $n = 0{,}85 \cdot 10^{29}$ м$^{-1}$.

4.95. В колебательном контуре, состоящем из конденсатора емкости C и катушки индуктивности L, совершаются свободные незатухающие колебания, при которых амплитуда напряжения на конденсаторе равна U_m. Найти для произвольного момента времени связь между током I в контуре и напряжением U на конденсаторе. Решить этот вопрос как с помощью закона Ома, так и энергетически.

4.96. Колебательный контур состоит из конденсатора емкости C, катушки индуктивности L с пренебрежимо малым сопротивлением и ключа. При разомкнутом ключе конденсатор зарядили до напряжения U_m и затем в момент $t = 0$ замкнули ключ. Найти:

а) ток в контуре как функцию времени $I(t)$;

б) э. д. с. самоиндукции в катушке в моменты, когда электрическая энергия конденсатора оказывается равной энергии тока в катушке.

4.97. В колебательном контуре, состоящем из плоского конденсатора и катушки индуктивности с пренебрежимо малым активным сопротивлением, происходят колебания с энергией W. Пластины конденсатора медленно раздвинули так, что частота колебаний увеличилась в η раз. Какую работу совершили при этом?

4.98. В колебательном контуре (рис. 4.27) индуктивность катушки $L = 2{,}5$ мГ, а емкости конденсаторов $C_1 = 2{,}0$ мкФ и $C_2 = 3{,}0$ мкФ. Конденсаторы зарядили до напряжения $U = 180$ В и замкнули ключ K. Найти:

а) период собственных колебаний;

б) амплитудное значение тока через катушку.

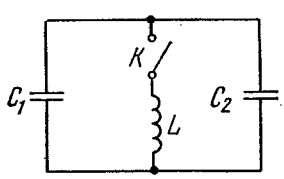


Рис. 4.27.

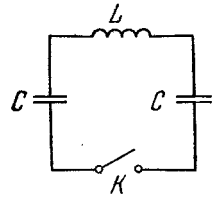


Рис. 4.28.

4.99. Электрическая цепь (рис. 4.28) имеет пренебрежимо малое активное сопротивление. Левый конденсатор зарядили до напряжения U_0 и затем — в момент $t = 0$ — замкнули ключ K. Найти зависимость от времени t напряжений на левом и правом конденсаторах.

4.100. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности L и конденсатора емкости C. Сопротивление катушки и соединительных проводов пренебрежимо мало. Катушка находится в постоянном магнитном поле, так что суммарный поток, пронизывающий все витки катушки, равен Ф. В момент $t = 0$ магнитное поле выключили. Считая время выключения очень малым по сравнению с периодом собственных колебаний контура, найти ток в контуре как функцию времени t.

4.101. В контуре совершаются свободные затухающие колебания, при которых напряжение на конденсаторе меняется во времени по закону $U = U_m e^{-\beta t} \cos \omega t$. Найти моменты времени, когда модуль напряжения на конденсаторе достигает:

а) амплитудных значений;

б) максимальных (экстремальных) значений.

4.102. Некоторый колебательный контур содержит конденсатор емкости C, катушку с индуктивностью L и активным сопротивлением R, а также ключ. При разомкнутом ключе конденсатор зарядили, после чего ключ замкнули, и начались колебания. Найти отношение напряжения на конденсаторе к его амплитудному значению в момент непосредственно после замыкания ключа.

4.103. В контуре с емкостью C и индуктивностью L происходят свободные затухающие колебания, при которых ток меняется во времени по закону $I = I_m e^{-\beta t} \sin \omega t$. Найти напряжение на конденсаторе в зависимости от времени и, в частности, в момент $t = 0$.

4.104. Колебательный контур состоит из конденсатора емкости $C = 4{,}0$ мкФ и катушки с индуктивностью $L = 2{,}0$ мГ и активным сопротивлением $R = 10$ Ом. Найти отношение энергии магнитного поля катушки к энергии электрического поля конденсатора в момент максимума тока.

4.105. Некоторый колебательный контур содержит две последовательно соединенные катушки с активными сопротивлениями R_1 и R_2 и индуктивностями L_1 и L_2, причем взаимная индуктивность их пренебрежимо мала. Эти катушки надо заменить одной так, чтобы частота и добротность контура не изменились. Найти индуктивность и активное сопротивление такой катушки.

4.106. Найти время, за которое амплитуда колебаний тока в контуре с добротностью $Q = 5000$ уменьшится в $\eta = 2{,}0$ раза, если частота колебаний $\nu = 2{,}2$ МГц.

4.107. Колебательный контур имеет емкость $C = 10$ мкФ, индуктивность $L = 25$ мГ и активное сопротивление $R = 1{,}0$ Ом. Через сколько колебаний амплитуда тока в этом контуре уменьшится в e раз?

4.108. На сколько процентов отличается частота ω свободных колебаний контура с добротностью $Q = 5{,}0$ от собственной частоты ω_0 колебаний этого контура?

4.109. В схеме (рис. 4.29) э. д. с. элемента $\mathscr{E} = 2{,}0$ В, его внутреннее сопротивление $r = 9{,}0$ Ом, емкость конденсатора $C = 10$ мкФ,

индуктивность катушки $L = 100$ мГ и сопротивление $R = 1{,}0$ Ом. В некоторый момент ключ K разомкнули. Найти энергию колебаний в контуре:

а) непосредственно после размыкания ключа;

б) через $t = 0{,}30$ с после размыкания ключа.

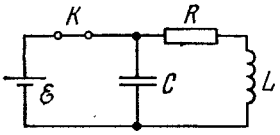


Рис. 4.29.

4.110. В контуре, добротность которого $Q = 50$ и собственная частота колебаний $\nu_0 = 5{,}5$ кГц, возбуждаются затухающие колебания. Через сколько времени энергия, запасенная в контуре, уменьшится в $\eta = 2{,}0$ раза?

4.111. Колебательный контур содержит конденсатор с утечкой. Емкость конденсатора C, его активное сопротивление R. Индуктивность катушки L. Сопротивление катушки и проводов пренебрежимо мало. Найти:

а) частоту затухающих колебаний такого контура;

б) его добротность.

4.112. Найти добротность контура с емкостью $C = 2{,}0$ мкФ и индуктивностью $L = 5{,}0$ мГ, если на поддержание в нем незатухающих колебаний с амплитудой напряжения на конденсаторе $U_m = 1{,}0$ В необходимо подводить мощность $\langle P \rangle = 0{,}10$ мВт. Затухание колебаний в контуре достаточно мало.

4.113. Какую среднюю мощность должен потреблять колебательный контур с активным сопротивлением $R = 0{,}45$ Ом, чтобы в нем поддерживались незатухающие гармонические колебания с амплитудой тока $I_m = 30$ мА?

4.114. Колебательный контур содержит конденсатор емкостью $C = 1{,}2$ нФ и катушку с индуктивностью $L = 6{,}0$ мкГ и активным сопротивлением $R = 0{,}50$ Ом. Какую среднюю мощность нужно подводить к контуру, чтобы поддерживать в нем незатухающие гармонические колебания с амплитудой напряжения на конденсаторе $U_m = 10$ В?

4.115. Найти частоту затухающих колебаний контура, показанного на рис. 4.30. Емкость C, индуктивность L и активное сопротивление R предполагаются известными. Выяснить, при каком соотношении между C, L и R колебания возможны.

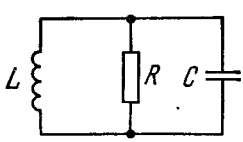


Рис. 4.30.

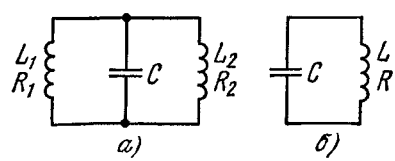


Рис. 4.31.

4.116. Имеются два колебательных контура (рис. 4.31) с конденсаторами одинаковой емкости. При каком соотношении между

индуктивностями и активными сопротивлениями катушек частоты и затухание свободных колебаний в обоих контурах будут одинаковыми? Взаимная индуктивность катушек левого контура пренебрежимо мала.

4.117. Контур состоит из последовательно включенных конденсатора емкости C, катушки индуктивности L, ключа и сопротивления, равного критическому для данного контура. При разомкнутом ключе конденсатор зарядили до напряжения U_0 и в момент $t = 0$ ключ замкнули. Найти ток I в контуре как функцию времени t. Чему равен $I_{\text{макс}}$?

4.118. Катушку с активным сопротивлением R и индуктивностью L подключили в момент $t = 0$ к источнику напряжения $U = U_m \cos\omega t$. Найти ток в катушке как функцию времени t.

4.119. Цепь, состоящую из последовательно соединенных конденсатора емкости C и сопротивления R, подключили к переменному напряжению $U = U_m \cos\omega t$ в момент $t = 0$. Найти ток в цепи как функцию времени t.

4.120. Длинный однослойный соленоид из проволоки с удельным сопротивлением ρ имеет на единицу длины n плотно расположенных витков. Толщина изоляции провода пренебрежимо мала. Радиус сечения соленоида равен a. Найти разность фаз между током и переменным напряжением с частотой ν, которое подключено к концам соленоида.

4.121. Концы цепи, состоящей из последовательно включенных конденсатора и активного сопротивления $R = 110$ Ом, подсоединили к переменному напряжению с амплитудным значением $U_m = 110$ В. При этом амплитуда установившегося тока в цепи $I_m = 0{,}50$ А. Найти разность фаз между током и подаваемым напряжением.

4.122. На рис. 4.32 показана простейшая схема сглаживающего фильтра. На левый вход подают напряжение $U = U_0 (1 + \cos\omega t)$. Найти:

а) выходное напряжение $U'(t)$;

б) значение величины RC, при котором амплитуда переменной составляющей напряжения на выходе будет в $\eta = 7{,}0$ раза меньше постоянной составляющей, если $\omega = 314$ рад/с.

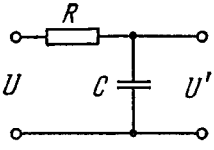


Рис. 4.32.

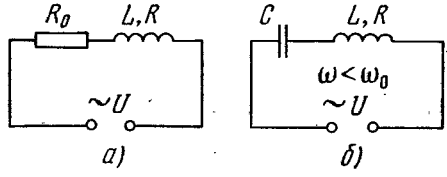


Рис. 4.33.

4.123. Изобразить примерные векторные диаграммы напряжений в электрических цепях, показанных на рис. 4.33, *а*, *б*. Внешнее напряжение U предполагается гармоническим с частотой ω.

4.124. Цепь, состоящая из последовательно соединенных конденсатора емкости $C = 22$ мкФ и катушки с активным сопротивлением $R = 20$ Ом и индуктивностью $L = 0{,}35$ Г, подключена к сети переменного напряжения с амплитудой $U_m = 180$ В и частотой $\omega = 314$ рад/с. Найти:

а) амплитуду тока в цепи;

б) разность фаз между током и внешним напряжением;

в) амплитуды напряжения на конденсаторе и катушке.

4.125. Цепь из последовательно соединенных конденсатора емкости C, сопротивления R и катушки с индуктивностью L и пренебрежимо малым активным сопротивлением подключена к генератору синусоидального напряжения, частоту которого можно менять при постоянной амплитуде. Найти частоту, при которой максимальна амплитуда напряжения:

а) на конденсаторе; б) на катушке.

4.126. Переменное напряжение с частотой $\omega = 314$ рад/с и амплитудным значением $U_m = 180$ В подключено к концам цепи, состоящей из последовательно соединенных конденсатора и катушки с активным сопротивлением $R = 40$ Ом и индуктивностью $L = 0{,}36$ Г. При каком значении емкости конденсатора амплитуда напряжения на катушке будет максимальной? Чему равна эта амплитуда и соответствующая амплитуда напряжения на конденсаторе?

4.127. Конденсатор емкости C, пространство между обкладками которого заполнено слабо проводящей средой с активным сопротивлением R, подключили к источнику переменного напряжения $U = U_m \cos \omega t$. Найти установившийся ток в подводящих проводах в зависимости от времени. Сопротивление проводов пренебрежимо мало.

4.128. Колебательный контур содержит конденсатор емкости C и соленоид с индуктивностью L_1. Соленоид индуктивно связан с короткозамкнутой катушкой, имеющей индуктивность L_2 и пренебрежимо малое активное сопротивление. Коэффициент их взаимной индуктивности равен L_{12}. Найти собственную частоту данного колебательного контура.

4.129. Найти добротность колебательного контура, в который последовательно включен источник переменной э. д. с., если при резонансе напряжение на конденсаторе в n раз превышает напряжение на источнике.

4.130. Цепь переменного тока, состоящая из последовательно соединенных катушки и конденсатора, подключена к источнику переменной э. д. с., причем индуктивность катушки подобрана так, что ток в цепи максимален. Найти добротность системы, если известно, что при увеличении индуктивности в n раз ток в цепи уменьшается в η раз.

4.131. Цепь, содержащая последовательно соединенные конденсатор и катушку с активным сопротивлением, подключена к источнику гармонического напряжения, частоту которого можно менять,

не изменяя амплитуды напряжения. При частотах ω_1 и ω_2 амплитуды тока оказались в n раз меньше резонансной амплитуды. Найти:
а) резонансную частоту; б) добротность цепи.

4.132. Показать, что при малом затухании добротность контура, в котором совершаются вынужденные колебания, $Q \approx \omega_0/\Delta\omega$, где ω_0 — собственная частота колебаний, $\Delta\omega$ — ширина резонансной кривой $I(\omega)$ на «высоте», в $\sqrt{2}$ раз меньшей амплитуды тока при резонансе.

4.133. К концам цепи, состоящей из последовательно соединенных конденсатора и катушки, подают два переменных напряжения одинаковой амплитуды, но разной частоты. Частота одного напряжения равна собственной частоте (ω_0), другого — в η раз больше. Найти отношение амплитуд токов (I_0/I), возбуждаемых обоими напряжениями, если добротность системы равна Q. Вычислить это отношение для $Q = 10$ и 100, если $\eta = 1{,}10$.

4.134. Для зарядки аккумулятора постоянным током I_0 требуется t_0 часов. Сколько времени понадобится для зарядки такого аккумулятора от сети через однополупериодный выпрямитель, если действующее значение тока тоже равно I_0?

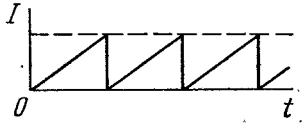


Рис. 4.34.

4.135. Найти действующее значение тока, если среднее значение его равно I_0, а сам ток зависит от времени по закону:
а) показанному на рис. 4.34;
б) $I \sim |\sin \omega t|$.

4.136. Соленоид с индуктивностью $L = 7$ мГ и активным сопротивлением $R = 44$ Ом подключили сначала к источнику постоянного напряжения U_0, а затем к генератору синусоидального напряжения с действующим значением $U = U_0$. При какой частоте генератора мощность, потребляемая соленоидом, будет в $\eta = 5{,}0$ раза меньше, чем в первом случае?

4.137. К сети с действующим напряжением $U = 100$ В подключили катушку, индуктивное сопротивление которой $X_L = 30$ Ом и импеданс $Z = 50$ Ом. Найти разность фаз между током и напряжением, а также тепловую мощность, выделяемую в катушке.

4.138. Катушка с индуктивностью $L = 0{,}70$ Г и активным сопротивлением $r = 20$ Ом соединена последовательно с безындукционным сопротивлением R, и между концами этой цепи приложено переменное напряжение с действующим значением $U = 220$ В и частотой $\omega = 314$ рад/с. При каком значении сопротивления R в цепи будет выделяться максимальная тепловая мощность? Чему она равна?

4.139. Цепь, состоящая из последовательно соединенных конденсатора и катушки, подключена к сети. Изменив емкость конденсатора, добились увеличения выделяемой тепловой мощности в катушке в $n = 1{,}7$ раза. На сколько процентов изменилось при этом значение $\cos\varphi$?

4.140. В колебательный контур с добротностью $Q = 100$ включены последовательно источник синусоидальной э. д. с. с постоянной амплитудой напряжения. При некоторой частоте внешнего напряжения тепловая мощность, выделяемая в контуре, оказывается максимальной. На сколько процентов следует изменить эту частоту, чтобы выделяемая мощность уменьшилась в $n = 2{,}0$ раза?

4.141. Цепь, состоящую из последовательно соединенных безындукционного сопротивления $R = 0{,}16$ кОм и катушки с активным сопротивлением, подключили к сети с действующим напряжением $U = 220$ В. Найти тепловую мощность, выделяемую на катушке, если действующие напряжения на сопротивлении R и катушке равны соответственно $U_1 = 80$ В и $U_2 = 180$ В.

4.142. Катушка и безындукционное сопротивление $R = 25$ Ом подключены параллельно к сети переменного напряжения. Найти тепловую мощность, выделяемую в катушке, если из сети потребляется ток $I = 0{,}90$ А, а через катушку и сопротивление R текут токи соответственно $I_1 = 0{,}50$ А и $I_2 = 0{,}60$ А.

4.143. Найти полное сопротивление участка цепи, состоящего из параллельно включенного конденсатора емкости $C = 73$ мкФ и активного сопротивления $R = 100$ Ом, — для переменного тока частоты $\omega = 314$ рад/с.

4.144. Изобразить примерные векторные диаграммы токов в электрических контурах, показанных на рис. 4.35. Предполагается,

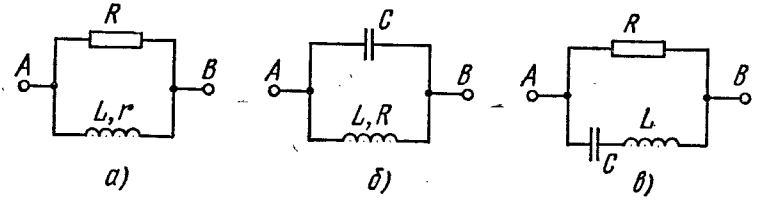


Рис. 4.35.

что подаваемое между точками A и B напряжение синусоидальное и параметры каждого контура подобраны так, что суммарный ток I_0 через контур отстает по фазе от внешнего напряжения на угол φ.

4.145. Конденсатор емкости $C = 1{,}0$ мкФ и катушку с активным сопротивлением $R = 0{,}10$ Ом и индуктивностью $L = 1{,}0$ мГ подключили параллельно к источнику синусоидального напряжения с действующим значением $U = 31$ В. Найти:

а) частоту ω, при которой наступает резонанс;

б) действующее значение подводимого тока при резонансе, а также соответствующие токи через катушку и конденсатор.

4.146. К источнику синусоидального напряжения с частотой ω подключили параллельно конденсатор емкости C и катушку с активным сопротивлением R и индуктивностью L. Найти разность фаз между подводимым к контуру током и напряжением на источнике.

4.147. Участок цепи состоит из параллельно включенных конденсатора емкости C и катушки с активным сопротивлением R и индуктивностью L. Найти полное сопротивление этого участка для переменного напряжения с частотой ω.

4.148. Кольцо из тонкого провода с активным сопротивлением R и индуктивностью L вращают с постоянной угловой скоростью ω во внешнем однородном магнитном поле, перпендикулярном к оси вращения. При этом поток магнитной индукции внешнего поля через кольцо изменяется во времени по закону $\Phi = \Phi_0 \cos \omega t$. Показать, что:

а) индукционный ток в кольце зависит от времени как $I = I_m \sin(\omega t - \varphi)$, где $I_m = \omega\Phi_0/\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$, причем $\operatorname{tg}\varphi = \omega L/R$;

б) средняя механическая мощность, развиваемая внешними силами для поддержания вращения, определяется формулой $P = {}^1/_2\omega^2\Phi_0^2 R/(R^2 + \omega^2 L^2)$.

4.149. На деревянный сердечник (рис. 4.36) надеты две катушки: катушка *1* с индуктивностью L_1 и замкнутая накоротко катушка *2* с активным сопротивлением R и индуктивностью L_2. Взаимная индуктивность катушек зависит от расстояния x между ними по закону $L_{12}(x)$. Найти среднее по времени значение силы взаимодействия между катушками, когда по катушке *1* течет переменный ток $I_1 = I_0 \cos \omega t$.

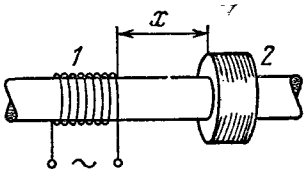


Рис. 4.36.

4.3. Упругие волны. Акустика

● Уравнения плоской и сферической волн:

$$\xi = a\cos(\omega t - kx), \quad \xi = \frac{a_0}{r}\cos(\omega t - kr). \tag{4.3а}$$

Для однородной поглощающей среды в эти формулы входит множитель соответственно $e^{-\gamma x}$ и $e^{-\gamma r}$, где γ — коэффициент затухания волны.

● Волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}. \tag{4.3б}$$

● Фазовая скорость продольных волн в упругой среде $(v_\parallel)$ и поперечных волн в струне $(v_\perp)$:

$$v_\parallel = \sqrt{E/\rho}, \quad v_\perp = \sqrt{T/\rho_1}, \tag{4.3в}$$

где E — модуль Юнга, ρ — плотность среды, T — натяжение струны, ρ_1 — ее линейная плотность.

● Объемная плотность энергии упругой волны:

$$w = \rho a^2\omega^2 \sin^2(\omega t - kx), \quad \langle w\rangle = {}^1/_2\rho a^2\omega^2. \tag{4.3г}$$

● Плотность потока энергии — вектор Умова:

$$\mathbf{j} = w\mathbf{v}, \quad \langle\mathbf{j}\rangle = {}^1/_2\rho a^2\omega^2\mathbf{v}. \tag{4.3д}$$

● Уравнение стоячей волны:

$$\xi = a \cos kx \cdot \cos \omega t. \qquad (4.3е)$$

● Акустический эффект Доплера:

$$\nu = \nu_0 \frac{v + v_{пр}}{v - v_{ист}}. \qquad (4.3ж)$$

● Уровень громкости звука (в белах):

$$L = \lg (I/I_0). \qquad (4.3з)$$

● Связь между интенсивностью I звуковой волны и амплитудой колебания давления $(\Delta p)_m$:

$$I = (\Delta p)_m^2 / 2\rho v. \qquad (4.3и)$$

4.150. За сколько времени звуковые колебания пройдут расстояние l между точками A и B, если температура воздуха между ними меняется линейно от T_1 до T_2? Скорость звука в воздухе $v = \alpha\sqrt{T}$, где α — постоянная.

4.151. Плоская гармоническая волна с частотой ω распространяется со скоростью v в направлении, составляющем углы α, β, γ с осями x, y, z. Найти разность фаз колебаний в точках среды с координатами x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2.

4.152. Плоская волна с частотой ω распространяется так, что некоторая фаза колебаний перемещается вдоль осей x, y, z со скоростями соответственно v_1, v_2, v_3. Найти волновой вектор $\mathbf{k}$, предполагая орты осей координат $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ заданными.

4.153. В среде K распространяется упругая плоская волна $\xi = a\cos(\omega t - kx)$. Найти уравнение этой волны в K'-системе отсчета, движущейся в положительном направлении оси x с постоянной скоростью V по отношению к среде K. Исследовать полученное выражение.

4.154. Показать, что любая дифференцируемая функция $f(t + \alpha x)$, где α — постоянная, является решением волнового уравнения. Каков физический смысл постоянной α?

4.155. Уравнение бегущей плоской звуковой волны имеет вид $\xi = 60 \cos (1800t - 5{,}3x)$, где ξ в микрометрах, t в секундах, x в метрах. Найти:

а) отношение амплитуды смещения частиц среды к длине волны;

б) амплитуду колебаний скорости частиц среды и ее отношение к скорости распространения волны;

в) амплитуду колебаний относительной деформации среды и ее связь с амплитудой колебания скорости частиц среды.

4.156. В однородной упругой среде распространяется плоская волна вида $\xi = a \cos (\omega t - kx)$. Изобразить для момента $t = 0$:

а) графики зависимостей от x величин ξ, $\partial\xi/\partial t$ и $\partial\xi/\partial x$;

б) направление скорости частиц среды в точках, где $\xi = 0$, для случаев продольной и поперечной волн;

в) примерный график распределения плотности среды $\rho(x)$ для продольной волны.

4.157. В однородной среде распространяется плоская упругая волна вида $\xi = a\,e^{-\gamma x}\cos(\omega t - kx)$, где a, γ, ω и k — постоянные. Найти разность фаз колебаний в точках, где амплитуды смещения частиц среды отличаются друг от друга на $\eta = 1{,}0\%$, если $\gamma = 0{,}42\ м^{-1}$ и длина волны $\lambda = 50$ см.

4.158. Найти радиус-вектор, характеризующий положение точечного источника сферических волн, если известно, что этот источник находится на прямой между точками с радиус-векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, в которых амплитуды колебаний частиц среды равны a_1 и a_2. Затухание волны пренебрежимо мало, среда однородная.

4.159. Точечный изотропный источник испускает звуковые колебания с частотой $\nu = 1{,}45$ кГц. На расстоянии $r_0 = 5{,}0$ м от источника амплитуда смещения частиц среды $a_0 = 50$ мкм, а в точке A, находящейся на расстоянии $r = 10{,}0$ м от источника, амплитуда смещения в $\eta = 3{,}0$ раза меньше a_0. Найти:

а) коэффициент затухания волны γ;

б) амплитуду колебаний скорости частиц среды в точке A.

4.160. В упругой однородной среде распространяются две плоские волны, одна — вдоль оси x, другая — вдоль оси y: $\xi_1 = a\cos(\omega t - kx)$, $\xi_2 = a\cos(\omega t - ky)$. Найти характер движения частиц среды в плоскости xy, если обе волны:

а) поперечные и направление колебаний одинаково;

б) продольные.

4.161. В среде распространяется незатухающая плоская гармоническая волна. Найти среднюю объемную плотность полной энергии колебаний $\langle w\rangle$, если в любой точке среды объемная плотность энергии равна w_0 через одну шестую периода колебаний после прохождения максимума смещения.

4.162. Точечный изотропный источник звука находится на перпендикуляре к плоскости кольца, проходящем через его центр O. Расстояние между точкой O и источником $l = 1{,}00$ м, радиус кольца $R = 0{,}50$ м. Найти средний поток энергии через площадь, ограниченную кольцом, если в точке O интенсивность звука $I_0 = 30\ мкВт/м^2$. Затухание волн пренебрежимо мало.

4.163. Изотропный точечный источник, звуковая мощность которого $P = 0{,}10$ Вт, находится в центре круглого полого цилиндра радиуса $R = 1{,}0$ м и высоты $h = 2{,}0$ м. Полагая, что стенки цилиндра полностью поглощают звук, найти средний поток энергии, падающий на боковую поверхность цилиндра.

4.164. В однородной упругой среде установилась плоская стоячая волна вида $\xi = a\cos kx\cdot\cos\omega t$. Изобразить:

а) графики зависимостей от x величин ξ и $\partial\xi/\partial x$ в моменты $t = 0$ и $t = T/2$, где T — период колебаний;

б) графики распределения плотности среды $\rho(x)$ для продольных колебаний в моменты $t = 0$ и $t = T/2$;

в) график распределения скоростей частиц среды в момент $t = T/4$; указать направления скоростей в этот момент в пучностях — для продольных и поперечных колебаний.

4.165. В однородной среде с плотностью ρ установилась продольная стоячая волна вида $\xi = a \cos kx \cdot \cos \omega t$. Найти выражения для объемной плотности:

а) потенциальной энергии $w_p(x, t)$;

б) кинетической энергии $w_k(x, t)$.

Изобразить графики распределения объемной плотности полной энергии w в пределах между двумя соседними узлами смещения в моменты $t = 0$ и $t = T/4$, где T — период колебаний.

4.166. На струне длины 120 см образовалась стоячая волна, причем точки струны, для которых амплитуда смещения равна 3,5 мм, отстоят друг от друга на 15,0 см. Найти максимальную амплитуду смещения. Какому обертону соответствуют эти колебания?

4.167. Найти отношение частот основного тона двух одинаковых струн после того, как одну из них растянули на $\eta_1 = 2{,}0\%$, а другую — на $\eta_2 = 4{,}0\%$. Натяжение считать пропорциональным растяжению.

4.168. Определить, как и во сколько раз изменится частота основного тона натянутой струны, если ее длину укоротить на 35%, а натяжение увеличить на 70%.

4.169. Для определения скорости звука в воздухе методом акустического резонанса используется труба с поршнем и звуковой мембраной, закрывающей один из ее торцов. Найти скорость звука, если расстояние между соседними положениями поршня, при которых наблюдается резонанс на частоте $\nu = 2000$ Гц, составляет $l = 8{,}5$ см.

4.170. Найти число возможных собственных колебаний столба воздуха в трубе, частоты которых меньше $\nu_0 = 1250$ Гц. Длина трубы $l = 85$ см. Скорость звука $v = 340$ м/с. Рассмотреть два случая:

а) труба закрыта с одного конца;

б) труба открыта с обоих концов.

Считать, что открытые концы трубы являются пучностями смещения.

4.171. Медный стержень длины $l = 50$ см закреплен в середине. Найти число продольных собственных колебаний этого стержня в диапазоне частот от 20 до 50 кГц. Каковы их частоты?

4.172. Струна массы m закреплена с обоих концов. В ней возбудили колебания основного тона с круговой частотой ω и максимальной амплитудой смещения $a_{\text{макс}}$. Найти:

а) максимальную кинетическую энергию струны;

б) среднюю за период колебания кинетическую энергию струны.

4.173. В однородном стержне, площадь сечения которого S и плотность ρ, установилась стоячая волна вида $\xi = a \sin kx \cdot \cos \omega t$. Найти полную механическую энергию, заключенную между сечениями, которые проходят через соседние узлы смещения.

4.174. Источник звуковых колебаний частоты $\nu_0 = 1000$ Гц движется по нормали к стенке со скоростью $u = 0{,}17$ м/с. На этой же нормали расположены два неподвижных приемника $П_1$ и $П_2$,

причем последовательность расположения этих приемников и источника $И$ такая: $П_1 — И — П_2$ — стенка. Какой приемник регистрирует биения и какова их частота? Скорость звука $v = 340$ м/с.

4.175. Неподвижный наблюдатель воспринимает звуковые колебания от двух камертонов, один из которых приближается, а другой — с такой же скоростью удаляется. При этом наблюдатель слышит биения с частотой $\nu = 2{,}0$ Гц. Найти скорость каждого камертона, если их частота колебаний $\nu_0 = 680$ Гц и скорость звука в воздухе $v = 340$ м/с.

4.176. На оси x находятся приемник и источник звуковых колебаний с частотой $\nu_0 = 2000$ Гц. Источник совершает гармонические колебания вдоль этой оси с круговой частотой ω и амплитудой $a = 50$ см. При каком значении ω ширина частотного интервала, воспринимаемого неподвижным приемником, будет составлять $\Delta\nu = 200$ Гц? Скорость звука $v = 340$ м/с.

4.177. Источник звуковых колебаний с частотой $\nu_0 = 1700$ Гц и приемник находятся в одной точке. В момент $t = 0$ источник начинает удаляться от приемника с постоянным ускорением $w = 10{,}0$ м/с^2. Считая скорость звука $v = 340$ м/с, найти частоту колебаний, воспринимаемых неподвижным приемником через $t = 10{,}0$ с после начала движения источника.

4.178. Источник звука, собственная частота которого $\nu_0 = 1{,}8$ кГц, движется равномерно по прямой, отстоящей от неподвижного наблюдателя на $l = 250$ м. Скорость источника составляет $\eta = 0{,}80$ скорости звука. Найти:

а) частоту звука, воспринимаемую наблюдателем в момент, когда источник окажется напротив него;

б) расстояние между источником и наблюдателем в момент, когда воспринимаемая наблюдателем частота $\nu = \nu_0$.

4.179. Неподвижный источник испускает монохроматический звук. К нему приближается стенка со скоростью $u = 33$ см/с. Скорость распространения звука в среде $v = 330$ м/с. Как и на сколько процентов изменяется длина волны звука при отражении от стенки?

4.180. На одной и той же нормали к стенке находятся источник звуковых колебаний с частотой $\nu_0 = 1700$ Гц и приемник. Источник и приемник неподвижны, а стенка удаляется от источника со скоростью $u = 6{,}0$ см/с. Найти частоту биений, которую будет регистрировать приемник. Скорость звука $v = 340$ м/с.

4.181. Найти коэффициент затухания γ звуковой волны, если на расстояниях $r_1 = 10$ м и $r_2 = 20$ м от точечного изотропного источника звука значения интенсивности звуковой волны отличаются друг от друга в $\eta = 4{,}5$ раза.

4.182. Плоская звуковая волна распространяется вдоль оси x. Коэффициент затухания волны $\gamma = 0{,}0230$ м$^{-1}$. В точке $x = 0$ уровень громкости $L = 60$ дБ. Найти:

а) уровень громкости в точке с координатой $x = 50$ м;

б) координату x точки, в которой звук уже не слышен.

4.183. На расстоянии $r_0 = 20{,}0$ м от точечного изотропного источника звука уровень громкости $L_0 = 30{,}0$ дБ. Пренебрегая затуханием звуковой волны, найти:

а) уровень громкости на расстоянии $r = 10{,}0$ м от источника;

б) расстояние от источника, на котором звук не слышен.

4.184. Наблюдатель A, находящийся на некотором расстоянии от звучащего камертона, отметил исчезновение звука на $\tau = 23$ с раньше, чем наблюдатель B, находящийся в $n = 5{,}0$ раза ближе к камертону. Найти коэффициент затухания β колебаний камертона. Затухание звуковых волн в среде пренебрежимо мало.

4.185. В среде с плотностью ρ распространяется плоская продольная гармоническая волна. Скорость волны равна v. Считая изменение плотности среды при прохождении волны $\Delta\rho \ll \rho$, показать, что:

а) приращение давления в среде $\Delta p = -\rho v^2(\partial\xi/\partial x)$, где $\partial\xi/\partial x$ — относительная деформация;

б) интенсивность волны определяется формулой (4.3и).

4.186. На пути плоской звуковой волны, распространяющейся в воздухе, находится шар радиуса $R = 50$ см. Длина звуковой волны $\lambda = 20$ см, частота $\nu = 1700$ Гц, амплитуда колебаний давления в воздухе $(\Delta p)_m = 3{,}5$ Па. Найти средний за период колебания поток энергии, падающей на поверхность шара.

4.187. Точка A находится на расстоянии $r = 1{,}5$ м от точечного изотропного источника звука частоты $\nu = 600$ Гц. Звуковая мощность источника $P = 0{,}80$ Вт. Пренебрегая затуханием волн и считая скорость звука в воздухе $v = 340$ м/с, найти для точки A:

а) амплитуду колебаний давления $(\Delta p)_m$ и ее отношение к давлению воздуха;

б) амплитуду колебаний частиц среды; сравнить ее с длиной волны звука.

4.188. На расстоянии $r = 100$ м от точечного изотропного источника звука частоты 200 Гц уровень громкости $L = 50$ дБ. Порог слышимости на этой частоте соответствует интенсивности звука $I_0 = 0{,}10$ нВт/м^2. Коэффициент затухания звуковой волны $\gamma = 5{,}0$ м$^{-1}$. Найти звуковую мощность источника.

4.4. Электромагнитные волны. Излучение

● Фазовая скорость электромагнитной волны:

$$v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}, \text{ где } c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}. \tag{4.4а}$$

● В бегущей электромагнитной волне:

$$E\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H\sqrt{\mu\mu_0}. \tag{4.4б}$$

● Объемная плотность энергии электромагнитного поля:

$$w = \frac{\mathbf{ED}}{2} + \frac{\mathbf{BH}}{2}. \tag{4.4в}$$

● Плотность потока электромагнитной энергии — вектор Пойнтинга:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{EH}]. \tag{4.4г}$$

● Плотность потока энергии излучения диполя в волновой зоне:

$$S \sim \frac{1}{r^2} \sin^2 \vartheta, \qquad (4.4д)$$

где r — расстояние от диполя, ϑ — угол между радиус-вектором $\mathbf{r}$ и осью диполя.

● Мощности излучения диполя с электрическим моментом $\mathbf{p}(t)$ и заряда q, движущегося с ускорением $\mathbf{w}$:

$$P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2\ddot{\mathbf{p}}^2}{3c^3}, \quad P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2q^2\mathbf{w}^2}{3c^3}. \qquad (4.4е)$$

4.189. Электромагнитная волна с частотой $\nu = 3{,}0$ МГц переходит из вакуума в немагнитную среду с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 4{,}0$. Найти приращение ее длины волны.

4.190. Плоская электромагнитная волна падает нормально на поверхность плоскопараллельного слоя толщины l из немагнитного вещества, диэлектрическая проницаемость которого экспоненциально падает от значения ε_1 на передней поверхности до ε_2 — на задней. Найти время распространения данной фазы волны через этот слой.

4.191. Плоская электромагнитная волна с частотой $\nu = 10$ МГц распространяется в слабо проводящей среде с удельной проводимостью $\sigma = 10$ мСм/м и диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 9$. Найти отношение амплитуд плотностей токов проводимости и смещения.

4.192. Плоская электромагнитная волна $\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \cos(\omega t - \mathbf{kr})$ распространяется в вакууме. Считая векторы $\mathbf{E}_m$ и $\mathbf{k}$ известными, найти вектор $\mathbf{H}$ как функцию времени t в точке с радиус-вектором $\mathbf{r} = 0$.

4.193. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна $\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \cos(\omega t - \mathbf{kr})$, где $\mathbf{E}_m = E_m \mathbf{e}_y$, $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ — орты осей x, y. Найти вектор $\mathbf{H}$ в точке с радиус-вектором $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x$ в момент: а) $t = 0$; б) $t = t_0$. Рассмотреть случай, когда $E_m = 160$ В/м, $k = 0{,}51$ м$^{-1}$, $x = 7{,}7$ м и $t_0 = 33$ нс.

4.194. Плоская электромагнитная волна $\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \cos(\omega t - kx)$, распространяющаяся в вакууме, наводит э. д. с. индукции $\mathscr{E}_{\text{инд}}$ в квадратном контуре со стороной l. Расположение контура показано на рис. 4.37. Найти $\mathscr{E}_{\text{инд}}(t)$, если $E_m = 50$ мВ/м, частота $\nu = 100$ МГц и $l = 50$ см.

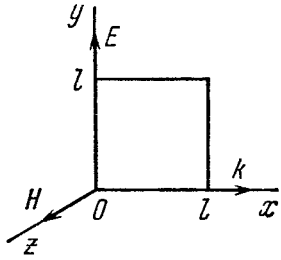


Рис. 4.37.

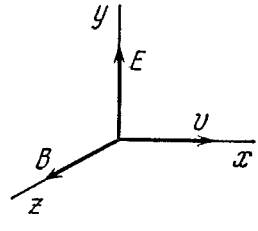


Рис. 4.38.

4.195. Исходя из уравнений Максвелла, показать, что для плоской электромагнитной волны (рис. 4.38), распространяющейся

в вакууме,

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial B}{\partial x}, \quad \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial x}.$$

4.196. Найти средний вектор Пойнтинга $\langle \mathbf{S} \rangle$ у плоской электромагнитной волны $\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \cos(\omega t - \mathbf{kr})$, если волна распространяется в вакууме.

4.197. Плоская гармоническая линейно поляризованная электромагнитная волна распространяется в вакууме. Амплитуда напряженности электрической составляющей волны $E_m = 50$ мВ/м, частота $\nu = 100$ МГц. Найти:

а) действующее значение плотности тока смещения;

б) среднюю за период колебания плотность потока энергии.

4.198. Шар радиуса $R = 50$ см находится в немагнитной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 4{,}0$. В среде распространяется плоская электромагнитная волна, амплитуда напряженности электрической составляющей которой $E_m = 200$ В/м. Какая энергия падает на шар за время $t = 1{,}0$ мин?

4.199. В вакууме в направлении оси x установилась стоячая электромагнитная волна, электрическая составляющая которой $\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \cos kx \cdot \cos \omega t$. Найти магнитную составляющую волны $\mathbf{B}(x,t)$. Изобразить примерную картину распределения электрической и магнитной составляющих волны ($\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$) в моменты $t = 0$ и $t = T/4$, где T — период колебаний.

4.200. В вакууме вдоль оси x установилась стоячая электромагнитная волна $\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \cos kx \cdot \cos \omega t$. Найти x-проекцию вектора Пойнтинга $S_x(x, t)$ и ее среднее за период колебаний значение.

4.201. Плоский воздушный конденсатор, обкладки которого имеют форму дисков радиуса $R = 6{,}0$ см, подключен к переменному синусоидальному напряжению частоты $\omega = 1000$ рад/с. Найти отношение амплитудных значений магнитной и электрической энергий внутри конденсатора.

4.202. Переменный синусоидальный ток частоты $\omega = 1000$ рад/с течет по обмотке прямого соленоида, радиус сечения которого $R = 6{,}0$ см. Найти отношение амплитудных значений электрической и магнитной энергий внутри соленоида.

4.203. Плоский конденсатор с круглыми параллельными пластинами медленно заряжают. Показать, что поток вектора Пойнтинга через боковую поверхность конденсатора равен приращению энергии конденсатора за единицу времени. Рассеянием поля на краях при расчете пренебречь.

4.204. По прямому проводнику круглого сечения течет ток I. Найти поток вектора Пойнтинга через боковую поверхность участка данного проводника, имеющего сопротивление R.

4.205. Нерелятивистские протоны, ускоренные разностью потенциалов U, образуют пучок круглого сечения с током I. Найти модуль и направление вектора Пойнтинга вне пучка на расстоянии r от его оси.

4.206. Ток, протекающий по обмотке длинного прямого соленоида, достаточно медленно увеличивают. Показать, что скорость возрастания энергии магнитного поля в соленоиде равна потоку вектора Пойнтинга через его боковую поверхность.

4.207. На рис. 4.39 показан участок двухпроводной линии передачи постоянного тока, направление которого отмечено стрелками. Имея в виду, что потенциал $\varphi_2 > \varphi_1$, установить с помощью вектора Пойнтинга, где находится генератор тока (слева, справа?).

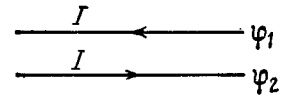


Рис. 4.39.

4.208. Энергия от источника постоянного напряжения U передается к потребителю по длинному прямому коаксиальному кабелю с пренебрежимо малым активным сопротивлением. Потребляемый ток равен I. Найти поток энергии через поперечное сечение кабеля. Внешняя проводящая оболочка кабеля предполагается тонкостенной.

4.209. Генератор переменного напряжения $U = U_0 \cos \omega t$ передает энергию потребителю по длинному прямому коаксиальному кабелю с пренебрежимо малым активным сопротивлением. Ток в цепи меняется по закону $I = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$. Найти средний по времени поток энергии через поперечное сечение кабеля. Внешняя оболочка кабеля тонкостенная.

4.210. Показать, что на границе раздела двух сред нормальные составляющие вектора Пойнтинга не терпят разрыва, т. е. $S_{1n} = S_{2n}$.

4.211. Доказать, что у замкнутой системы заряженных нерелятивистских частиц с одинаковым удельным зарядом дипольное излучение отсутствует.

4.212. Найти среднюю мощность излучения электрона, совершающего гармонические колебания с амплитудой $a = 0{,}10$ нм и частотой $\omega = 6{,}5 \cdot 10^{14}$ рад/с.

4.213. Найти мощность излучения нерелятивистской частицы с зарядом e и массой m, движущейся по круговой орбите радиуса R в поле неподвижного точечного заряда q.

4.214. Частица с зарядом e и массой m пролетает с нерелятивистской скоростью v на расстоянии b от неподвижной частицы с зарядом q. Пренебрегая искривлением траектории движущейся частицы, найти энергию, теряемую этой частицей на излучение за все время пролета.

4.215. Нерелятивистский протон влетел по нормали в полупространство с поперечным однородным магнитным полем, индукция которого $B = 1{,}0$ Т. Найти отношение энергии, потерянной протоном на излучение за время движения в поле, к его первоначальной кинетической энергии.

4.216. Нерелятивистская заряженная частица движется в поперечном однородном магнитном поле с индукцией B. Найти закон убывания (за счет излучения) кинетической энергии частицы во времени. Через сколько времени ее кинетическая энергия уменьшается в e раз? Вычислить это время для электрона и протона.

4.217. Заряженная частица движется вдоль оси y по закону $y = a\cos\omega t$, а точка наблюдения P находится на оси x на расстоянии l от частицы ($l \gg a$). Найти отношение плотностей потока электромагнитного излучения S_1/S_2 в точке P в моменты, когда координата частицы $y_1 = 0$ и $y_2 = a$. Вычислить это отношение, если $\omega = 3{,}3 \cdot 10^6$ рад/с и $l = 190$ м.

4.218. Заряженная частица движется равномерно со скоростью v по окружности радиуса R, лежащей в плоскости xy (рис. 4.40). На оси x в точке P, которая отстоит от центра окружности на расстояние, значительно превышающее R, находится наблюдатель. Найти:

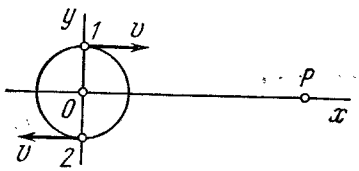


Рис. 4.40.

а) связь между наблюдаемыми значениями y-проекции ускорения частицы и ее y-координаты;

б) отношение плотностей потока электромагнитного излучения S_1/S_2 в точке P в моменты времени, когда частица для наблюдателя P движется к нему и от него, как показано на рисунке.

4.219. Электромагнитная волна, излучаемая элементарным диполем, распространяется в вакууме так, что в волновой зоне на луче, перпендикулярном к оси диполя, на расстоянии r от него, среднее значение плотности потока энергии равно S_0. Найти среднюю мощность излучения диполя.

4.220. Средняя мощность, излучаемая элементарным диполем, равна P_0. Найти среднюю объемную плотность энергии электромагнитного поля в вакууме в волновой зоне на луче, перпендикулярном к оси диполя, на расстоянии r от него.

4.221. Постоянный по модулю электрический диполь с моментом p вращают с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной к оси диполя и проходящей через его середину. Найти мощность излучения такого диполя.

4.222. Свободный электрон находится в поле плоской электромагнитной волны. Пренебрегая влиянием на его движение магнитной составляющей волны, найти отношение средней энергии, излучаемой осциллирующим электроном в единицу времени, к среднему значению плотности потока энергии падающей волны.

4.223. Плоская электромагнитная волна с частотой ω падает на упруго связанный электрон, собственная частота которого ω_0. Пренебрегая затуханием колебаний, найти отношение средней энергии, рассеянной электроном в единицу времени, к среднему значению плотности потока энергии падающей волны.

4.224. Считая, что частица имеет форму шарика и поглощает весь падающий на нее свет, найти радиус частицы, при котором гравитационное притяжение ее к Солнцу будет компенсироваться силой светового давления. Мощность светового излучения Солнца $P = 4 \cdot 10^{26}$ Вт, плотность частицы $\rho = 1{,}0$ г/см^3.

ОПТИКА

5.1. Фотометрия и геометрическая оптика

● Кривая относнтельной спектральной чувствительности глаза $V(\lambda)$ показана на рнс. 5.1.

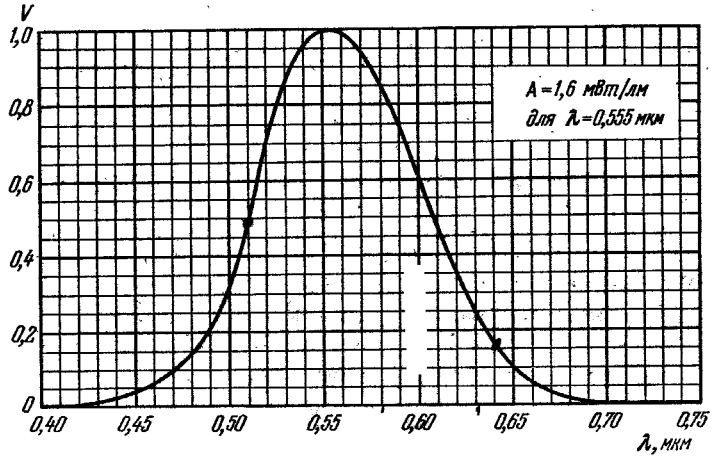


Рис. 5.1.

● Сила света I и освещенность E:

$$I=\frac{d\Phi}{d\Omega},\quad E=\frac{d\Phi_{\text{пад}}}{dS}. \tag{5.1а}$$

● Освещенность, создаваемая точечным изотропным источником:

$$E=\frac{I\cos\alpha}{r^2}, \tag{5.1б}$$

где α — угол между нормалью к поверхности и направлением на источник.

● Светимость M и яркость L:

$$M=\frac{d\Phi_{\text{исп}}}{dS},\quad L=\frac{d\Phi}{d\Omega\,\Delta S\cos\vartheta}. \tag{5.1в}$$

● Для ламбертовского источника $L=\text{const}$ и светнмость:

$$M=\pi L. \tag{5.1г}$$

● Связь между преломляющим углом θ призмы и углом α наименьшего отклонения:

$$\sin\frac{\alpha+\theta}{2}=n\sin\frac{\theta}{2}, \qquad (5.1д)$$

где n — показатель преломления призмы.

● Формула сферического зеркала:

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{2}{R}, \qquad (5.1е)$$

где R — радиус кривизны зеркала.

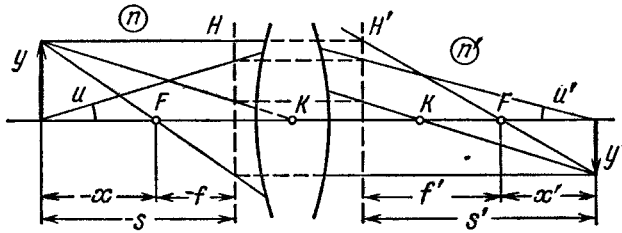


Рис. 5.2.

● Формулы центрированной оптической системы (рис. 5.2):

$$\frac{n'}{s'}-\frac{n}{s}=\Phi,\quad \frac{f'}{s'}+\frac{f}{s}=1,\quad xx'=ff'. \qquad (5.1ж)$$

● Соотношения между фокусными расстояниями и оптической силой:

$$f'=\frac{n'}{\Phi},\quad f=-\frac{n}{\Phi},\quad \frac{f'}{f}=-\frac{n'}{n}. \qquad (5.1з)$$

● Оптическая сила сферической преломляющей поверхности:

$$\Phi=\frac{n'-n}{R}. \qquad (5.1и)$$

● Оптическая сила тонкой линзы в среде с показателем преломления n_0:

$$\Phi=(n-n_0)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right), \qquad (5.1к)$$

где n — показатель преломления линзы.

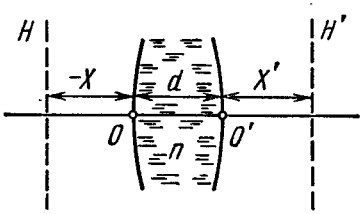


Рис. 5.3.

● Оптическая сила толстой линзы толщины d:

$$\Phi=\Phi_1+\Phi_2-\frac{d}{n}\Phi_1\Phi_2. \qquad (5.1л)$$

Эта формула справедлива и для системы из двух тонких линз, между которыми находится среда с показателем преломления n.

● Главные плоскости H и H' отстоят от вершин O и O' поверхностей толстой линзы (рис. 5.3) на расстояниях:

$$X=\frac{d}{n}\frac{\Phi_2}{\Phi},\quad X'=-\frac{d}{n}\frac{\Phi_1}{\Phi}. \qquad (5.1м)$$

● Инвариант Лагранжа — Гельмгольца:

$$nyu = \text{const}. \tag{5.1н}$$

● Увеличение оптического прибора:

$$\Gamma = \frac{\operatorname{tg}\psi'}{\operatorname{tg}\psi}, \tag{5.1о}$$

где ψ' и ψ — угловые размеры предмета при наблюдении через прибор и без него (в случае лупы и микроскопа угол ψ соответствует наблюдению на расстоянии наилучшего зрения $l_0 = 25$ см).

5.1. Найти с помощью кривой относительной спектральной чувствительности глаза (см. рис. 5.1):

а) поток энергии, соответствующий световому потоку в 1,0 лм с длиной волны 0,51 и 0,64 мкм;

б) световой поток, приходящийся на интервал длин волн от 0,58 до 0,63 мкм, если соответствующий поток энергии $\Phi_э = 4{,}5$ мВт, причем последний распределен равномерно по всем длинам волн этого интервала. Считать, что в данном спектральном интервале функция $V(\lambda)$ зависит линейно от длины волны.

5.2. Точечный изотропный источник испускает световой поток $\Phi = 10$ лм с длиной волны $\lambda = 0{,}59$ мкм. Найти амплитудные значения напряженностей электрического и магнитного полей этого светового потока на расстоянии $r = 1{,}0$ м от источника. Воспользоваться кривой, приведенной на рис. 5.1.

5.3. Найти среднюю освещенность облучаемой части непрозрачной сферы, если на нее падает:

а) параллельный световой поток, создающий в точке нормального падения освещенность E_0;

б) свет от точечного изотропного источника, находящегося на расстоянии $l = 100$ см от центра сферы; радиус сферы $R = 60$ см и сила света $I = 36$ кд.

5.4. Определить светимость поверхности, яркость которой зависит от направления по закону $L = L_0 \cos\vartheta$, где ϑ — угол между направлением излучения и нормалью к поверхности.

5.5. Некоторая светящаяся поверхность подчиняется закону Ламберта. Ее яркость равна L. Найти:

а) световой поток, излучаемый элементом ΔS этой поверхности внутрь конуса, ось которого нормальна к данному элементу, если угол полураствора конуса равен ϑ;

б) светимость такого источника.

5.6. Над центром круглого стола радиуса $R = 1{,}0$ м подвешен светильник в виде плоского горизонтального диска площадью $S = 100$ см^2. Яркость светильника не зависит от направления и равна $L = 1{,}6 \cdot 10^4$ кд/м^2. На какой высоте от поверхности стола надо поместить светильник, чтобы освещенность периферийных точек стола была максимальной? Какова будет эта освещенность?

5.7. На высоте $h = 1{,}0$ м над центром круглого стола радиуса $R = 1{,}0$ м подвешен точечный источник, сила света которого I так

зависит от направления, что освещенность всех точек стола оказывается равномерной. Найти вид функции $I(\vartheta)$, где ϑ — угол между направлением излучения и вертикалью, а также световой поток, падающий на стол, если $I(0) = I_0 = 100$ кд.

5.8. Вертикальный луч проектора освещает центр потолка круглой комнаты радиуса $R = 2{,}0$ м. При этом на потолке образуется зайчик площадью $S = 100$ см^2. Освещенность зайчика $E = 1000$ лк. Коэффициент отражения потолка $\rho = 0{,}80$. Найти наибольшую освещенность стены, создаваемую светом, отраженным от потолка. Считать, что отражение происходит по закону Ламберта.

5.9. Равномерно светящийся купол, имеющий вид полусферы, опирается на горизонтальную поверхность. Определить освещенность в центре этой поверхности, если яркость купола равна L и не зависит от направления.

5.10. Ламбертовский источник имеет вид бесконечной плоскости. Его яркость равна L. Найти освещенность площадки, расположенной параллельно данному источнику.

5.11. Над столом находится светильник — плоский горизонтальный диск радиуса $R = 25$ см. Расстояние от него до поверхности стола $h = 75$ см. Освещенность стола под центром светильника $E_0 = 70$ лк. Найти светимость этого источника, считая его ламбертовским.

5.12. Светильник, имеющий вид равномерно светящейся сферы радиуса $R = 6{,}0$ см, находится на расстоянии $h = 3{,}0$ м от пола. Яркость светильника $L = 2{,}0 \cdot 10^4$ кд/м^2 и не зависит от направления. Найти освещенность пола непосредственно под светильником.

5.13. Записать в векторном виде закон отражения светового луча от зеркала — через направляющие орты $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ падающего и отраженного лучей и орт $\mathbf{n}$ внешней нормали к поверхности зеркала.

5.14. Показать, что луч света, последовательно отразившийся от трех взаимно перпендикуляриых плоских зеркал, изменит свое направление на прямо противоположное.

5.15. При каком значении угла падения ϑ_1 луч, отраженный от поверхности воды, будет перпендикулярен к преломленному лучу?

5.16. Имеются две оптические среды с плоской границей раздела. Пусть $\vartheta_{1пр}$ — предельный угол падения луча, а ϑ_1 — угол падения, при котором преломленный луч перпендикулярен к отраженному (предполагается, что луч идет из оптически более плотной среды). Найти относительный показатель преломления этих сред, если $\sin \vartheta_{1пр} / \sin \vartheta_1 = \eta = 1{,}28$.

5.17. Луч света падает на плоскопараллельную стеклянную пластину толщиной $d = 6{,}0$ см. Угол падения $\vartheta = 60°$. Найти величину бокового смещения луча, прошедшего через эту пластину.

5.18. На краю бассейна стоит человек и наблюдает камень, лежащий на дне. Глубина бассейна равна h. На каком расстоянии от поверхности воды видно изображение камня, если луч зрения составляет с нормалью к поверхности воды угол ϑ?

5.19. Показать, что при преломлении в призме с малым преломляющим углом θ луч отклоняется на угол $\alpha \approx (n-1)\theta$ независимо от угла падения, если последний также мал.

5.20. Луч света проходит через призму с преломляющим углом θ и показателем преломления n. Пусть α — угол отклонения луча. Показать, что при симметричном ходе луча через призму:

а) угол α минимален;

б) связь между углами α и θ определяется формулой (5.1д).

5.21. Для некоторой стеклянной призмы угол наименьшего отклонения луча равен преломляющему углу призмы. Найти последний.

5.22. Найти пределы, в которых может меняться угол отклонения луча при прохождении стеклянной призмы с преломляющим углом $\theta = 60°$.

5.23. Трехгранная призма с преломляющим углом 60° дает угол наименьшего отклонения в воздухе 37°. Какой угол наименьшего отклонения даст эта призма в воде?

5.24. Луч света, содержащий две монохроматические составляющие, проходит через трехгранную призму с преломляющим углом $\theta = 60°$. Определить угол $\Delta\alpha$ между обеими составляющими луча после призмы, если показатели преломления для них равны 1,515 и 1,520 и призма ориентирована на угол наименьшего отклонения.

5.25. Вывести с помощью принципа Ферма законы отражения и преломления света на плоской границе раздела двух сред.

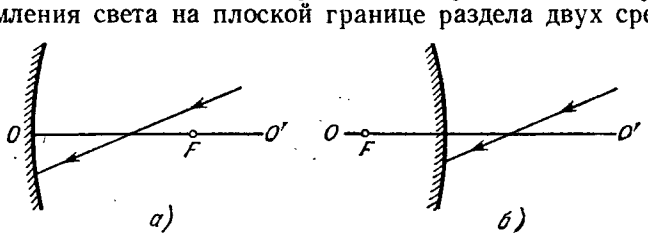


Рис. 5.4.

5.26. Найти построением:

а) ход луча после отражения в вогнутом и выпуклом сферических зеркалах (рис. 5.4, где F — фокус, OO' — оптическая ось);

б) положение зеркала и его фокуса для случаев, показанных на рис. 5.5, где P и P' — сопряженные точки.

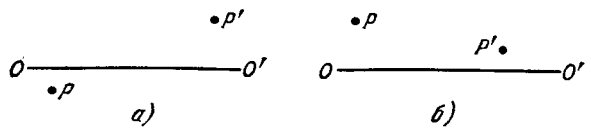


Рис. 5.5.

5.27. Определить фокусное расстояние вогнутого зеркала, если:

а) при расстоянии между предметом и изображением $l = 15$ см поперечное увеличение $\beta = -2{,}0$;

б) при одном положении предмета поперечное увеличение $\beta_1 = -0{,}50$, а при другом положении, смещенном относительно первого на расстояние $l = 5{,}0$ см, поперечное увеличение $\beta_2 = -0{,}25$.

5.28. Точечный источник, сила света которого $I_0 = 100$ кд, помещен на расстоянии $s = 20{,}0$ см от вершины вогнутого зеркала с фокусным расстоянием $f = 25{,}0$ см. Определить силу света в отраженном пучке, если коэффициент отражения зеркала $\rho = 0{,}80$.

5.29. Вывести с помощью принципа Ферма формулу преломления параксиальных лучей на сферической поверхности радиуса R, разделяющей среды с показателями преломления n и n'.

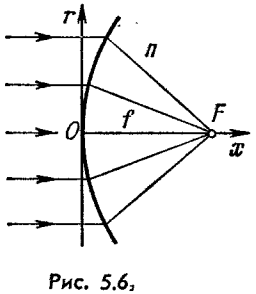


Рис. 5.6.

5.30. Параллельный пучок света падает из вакуума на поверхность, которая ограничивает область с показателем преломления n (рис. 5.6). Найти форму этой поверхности — уравнение $x(r)$, при которой пучок будет сфокусирован в точке F на расстоянии f от вершины O. Пучок какого максимального радиуса сечения может быть сфокусирован?

5.31. Точечный источник расположен на расстоянии 20 см от передней поверхности стеклянной симметричной двояковыпуклой линзы. Толщина линзы равна 5,0 см, радиус кривизны поверхностей 5,0 см. На каком расстоянии от задней поверхности этой линзы образуется изображение источника?

5.32. Перед выпуклой поверхностью стеклянной выпукло-плоской линзы толщины $d = 9{,}0$ см находится предмет. Изображение этого предмета образуется на плоской поверхности линзы, которая служит экраном. Определить:

а) поперечное увеличение, если радиус кривизны выпуклой поверхности линзы $R = 2{,}5$ см;

б) освещенность изображения, если яркость предмета $L = 7700$ кд/м^2 и диаметр входного отверстия выпуклой поверхности линзы $D = 5{,}0$ мм; потери света пренебрежимо малы.

5.33. Найти оптическую силу и фокусные расстояния:

а) тонкой стеклянной линзы в жидкости с показателем преломления $n_0 = 1{,}7$, если ее оптическая сила в воздухе $\Phi_0 = -5{,}0$ дп;

б) тонкой симметричной двояковыпуклой стеклянной линзы, с одной стороны которой находится воздух, а с другой — вода, если оптическая сила этой линзы в воздухе $\Phi_0 = +10$ дп.

5.34. Найти построением:

а) ход луча за собирающей и рассеивающей тонкими линзами (рис. 5.7, где OO' — оптическая ось, F и F' — передний и задний фокусы);

б) положение тонкой линзы и ее фокусов, если известно положение оптической оси OO' и положение пары сопряженных точек PP' (см. рис. 5.5); среды по обе стороны линз одинаковы;

в) ход луча *2* за собирающей и рассеивающей тонкими линзами (рис. 5.8), если известно положение линзы и ее оптической оси OO' и ход луча *1*; среды по обе стороны линз одинаковы.

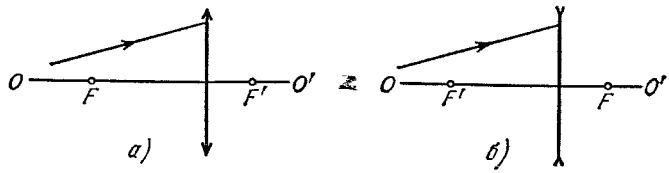


Рис. 5.7.

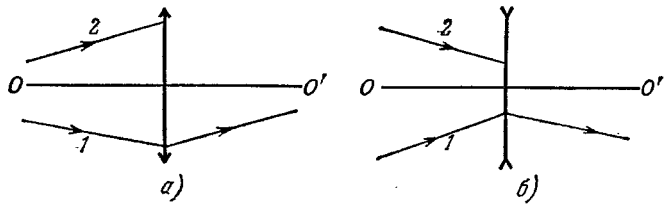


Рис. 5.8.

5.35. Тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием $f = 25$ см проецирует изображение предмета на экран, отстоящий от линзы на расстоянии $l = 5{,}0$ м. Экран придвинули к линзе на $\Delta l = 18$ см. На сколько следует переместить предмет, чтобы опять получить четкое изображение его на эране?

5.36. Источник света находится на расстоянии $l = 90$ см от экрана. Тонкая собирающая линза, помещенная между источником света и экраном, дает четкое изображение источника при двух положениях. Определить фокусное расстояние линзы, если:

а) расстояние между обоими положениями линзы $\Delta l = 30$ см;

б) поперечные размеры изображения при одном положении линзы в $\eta = 4{,}0$ раза больше, чем при другом.

5.37. Между предметом и экраном, положения которых неизменны, помещают тонкую собирающую линзу. Перемещением линзы находят два положения, при которых на экране образуется четкое изображение предмета. Найти поперечный размер предмета, если при одном положении линзы размер изображения $h' = 2{,}0$ мм, а при другом $h'' = 4{,}5$ мм.

5.38. Тонкая собирающая линза с относительным отверстием $D : f = 1 : 3{,}5$ (D — диаметр линзы, f — ее фокусное расстояние) дает изображение достаточно удаленного предмета на фотопластинке. Яркость предмета $L = 260$ кд/м^2. Потери света в линзе составляют $\alpha = 0{,}10$. Найти освещенность изображения.

5.39. Как зависит от диаметра D тонкой собирающей линзы яркость действительного изображения, если его рассматривать:

а) непосредственно;

б) на белом экране, рассеивающем по закону Ламберта?

5.40. Имеются две тонкие симметричные линзы: одна собирающая с показателем преломления $n_1 = 1{,}70$, другая рассеивающая с $n_2 = 1{,}51$. Обе линзы имеют одинаковый радиус кривизны поверхностей $R = 10$ см. Линзы сложили вплотную и погрузили в воду. Каково фокусное расстояние этой системы в воде?

5.41. Определить фокусное расстояние вогнутого сферического зеркала, которое представляет собой тонкую симметричную двояковыпуклую стеклянную линзу с посеребренной одной поверхностью. Радиус кривизны поверхности линзы $R = 40$ см.

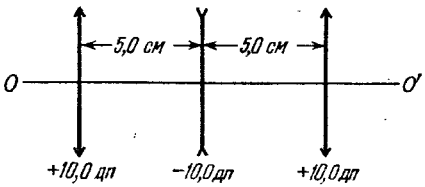


Рис. 5.9.

5.42. На рис. 5.9 показана центрированная система, состоящая из трех тонких линз. Система находится в воздухе. Определить:

а) положение точки схождения параллельного пучка, падающего слева, после прохождения через систему;

б) расстояние от первой линзы до точки, находящейся на оси слева от системы, при котором эта точка и ее изображение будут расположены симметрично относительно системы.

5.43. Галилеева труба 10-кратного увеличения при установке на бесконечность имеет длину 45 см. Определить:

а) фокусные расстояния объектива и окуляра трубы;

б) на какое расстояние надо передвинуть окуляр трубы, чтобы ясно видеть предметы на расстоянии 50 м.

5.44. Найти увеличение зрительной трубы кеплеровского типа, установленной на бесконечность, если D — диаметр оправы ее объектива, а d — диаметр изображения этой оправы, образуемого окуляром трубы.

5.45. При прохождении светового потока через зрительную трубу его интенсивность увеличивается в $\eta = 4{,}0 \cdot 10^4$ раз. Найти угловой размер удаленного предмета, если при наблюдении в эту трубу угловой размер его изображения $\psi' = 2{,}0°$.

5.46. Зрительную трубу кеплеровского типа с увеличением $\Gamma = 15$ погрузили в воду, которая заполнила и ее внутреннюю часть. Чтобы система при тех же размерах стала опять телескопической, объектив заменили другим. Каково стало после этого увеличение трубы в воде? Показатель преломления стекла окуляра $n = 1{,}50$.

5.47. При каком увеличении Γ зрительной трубы с диаметром объектива $D = 6{,}0$ см освещенность изображения объекта на сетчатке глаза будет не меньше, чем в отсутствие трубы? Диаметр зрачка глаза считать равным $d_0 = 3{,}0$ мм. Потерями света в трубе пренебречь.

5.48. Оптические силы объектива и окуляра микроскопа равны соответственно 100 и 20 дп. Увеличение микроскопа равно 50. Каково будет увеличение этого микроскопа, если расстояние между объективом и окуляром увеличить на 2,0 см?

5.49. Микроскоп имеет числовую апертуру $\sin\alpha = 0{,}12$, где α — угол полураствора конуса лучей, падающих на оправу объектива. Полагая диаметр зрачка глаза $d_0 = 4{,}0$ мм, определить увеличение микроскопа, при котором:

а) диаметр светового пучка, выходящего из микроскопа, равен диаметру зрачка глаза;

б) освещенность изображения на сетчатке глаза не будет зависеть от увеличения (рассмотреть случай, когда световой пучок, проходящий через систему «микроскоп — глаз», ограничен оправой объектива).

5.50. Найти положение главных плоскостей, фокусов и узловых точек двояковыпуклой тонкой симметричной стеклянной линзы с радиусом кривизны поверхностей $R = 7{,}50$ см, если с одной стороны ее находится воздух, а с другой — вода.

5.51. Найти с помощью построения положение фокусов и главных плоскостей центрированных оптических систем, показанных на рис. 5.10:

а) телеобъектив — система из собирающей и рассеивающей тонких линз ($f_1 = 1{,}5\,a$, $f_2 = -1{,}5\,a$);

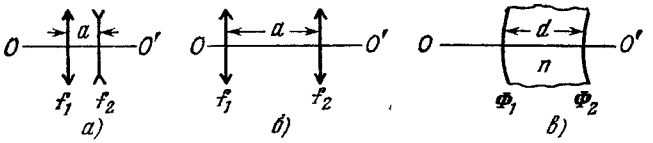


Рис. 5.10.

б) система из двух собирающих тонких линз ($f_1 = 1{,}5\,a$, $f_2 = 0{,}5\,a$);

в) толстая выпукло-вогнутая линза ($d = 4$ см, $n = 1{,}5$, $\Phi_1 = +50$ дп, $\Phi_2 = -50$ дп).

5.52. Оптическая система находится в воздухе. Пусть OO' — ее оптическая ось, F и F' — передний и задний фокусы, H и H' — передняя и задняя главные плоскости, P и P' — сопряженные точки. Найти построением:

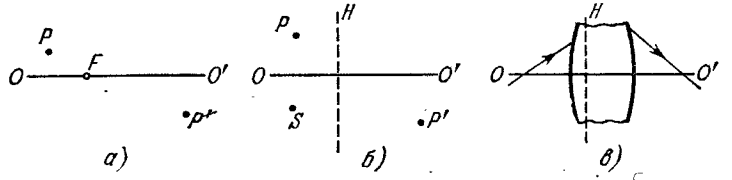


Рис. 5.11.

а) положение F' и H' (рис. 5.11, *а*);

б) положение точки S', сопряженной с точкой S (рис. 5.11, *б*);

в) положение F, F' и H' (рис. 5.11, *в*, где показан ход луча до и после прохождения системы).

5.53. Пусть F и F' — передний и задний фокусы оптической системы, H и H' — ее передняя и задняя главные точки. Найти построением положение изображения S' точки S для следующих относительных расположений точек S, F, F', H и H':

а) $FSHH'F'$; б) $HSF'FH'$; в) $H'SF'FH$; г) $F'H'SHF$.

5.54. Телеобъектив состоит из двух тонких линз — передней собирающей и задней рассеивающей с оптическими силами $\Phi_1 = +10$ дп и $\Phi_2 = -10$ дп. Найти:

а) фокусное расстояние и положение главных плоскостей этой системы, если расстояние между линзами $d = 4{,}0$ см;

б) расстояние d между линзами, при котором отношение фокусного расстояния f системы к расстоянию l между собирающей линзой и задним главным фокусом будет максимальным. Чему равно это отношение?

5.55. Рассчитать положение главных плоскостей и фокусов толстой выпукло-вогнутой стеклянной линзы, если радиус кривизны выпуклой поверхности $R_1 = 10{,}0$ см, вогнутой $R_2 = 5{,}0$ см и толщина линзы $d = 3{,}0$ см.

5.56. Центрированная оптическая система состоит из двух тонких линз с фокусными расстояниями f_1 и f_2, причем расстояние между линзами равно d. Данную систему требуется заменить одной тонкой линзой, которая при любом положении объекта давала бы такое же поперечное увеличение, как и предыдущая система. Каким должно быть фокусное расстояние этой линзы и ее положение относительно системы из двух линз?

5.57. Система состоит из собирающей тонкой симметричной стеклянной линзы с радиусом кривизны поверхностей $R = 38$ см и плоского зеркала, расположенного перпендикулярно к оптической оси линзы. Расстояние между линзой и зеркалом $l = 12$ см. Какова будет оптическая сила этой системы, если пространство между линзой и зеркалом заполнить водой?

5.58. При какой толщине выпукло-вогнутая толстая стеклянная линза в воздухе будет:

а) телескопической, если радиус кривизны ее выпуклой поверхности больше, чем радиус кривизны вогнутой поверхности, на $\Delta R = 1{,}5$ см?

б) иметь оптическую силу, равную $-1{,}0$ дп, если радиусы кривизны ее выпуклой и вогнутой поверхностей равны соответственно 10,0 и 7,5 см?

5.59. Найти положение главных плоскостей, фокусное расстояние и знак оптической силы выпукло-вогнутой толстой стеклянной линзы, у которой:

а) толщина равна d, а радиусы кривизны поверхностей одинаковы и равны R;

б) преломляющие поверхности концентрические с радиусами кривизны R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$).

5.60. Телескопическая система образована из двух стеклянных шаров, радиусы которых $R_1 = 5{,}0$ см и $R_2 = 1{,}0$ см. Каковы расстояние между центрами этих шаров и увеличение системы, если объективом является больший шар?

5.61. Две одинаковые симметричные двояковыпуклые толстые линзы сложены вплотную. Толщина каждой линзы равна радиусу кривизны ее поверхностей, $d = R = 3{,}0$ см. Найти оптическую силу этой системы в воздухе.

5.62. При распространении света в изотропной среде с медленно изменяющимся от точки к точке показателем преломления n радиус кривизны ρ луча определяется формулой

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial}{\partial N}(\ln n),$$

где производная берется по направлению главной нормали к лучу. Получить эту формулу, имея в виду, что в такой среде справедлив закон преломления $n \sin\vartheta = \text{const}$, где ϑ — угол между лучом и направлением grad n в данной точке.

5.63. Найти радиус кривизны светового луча, распространяющегося в горизонтальном направлении вблизи поверхности Земли, где градиент показателя преломления воздуха равен около $3 \cdot 10^{-8}$ м$^{-1}$. При каком значении этого градиента луч света распространялся бы по окружности вокруг Земли?

5.2. Интерференция света

● Ширина интерференционной полосы:

$$\Delta x = \frac{l}{d}\lambda, \tag{5.2а}$$

где l — расстояние от экрана до источников, d — расстояние между источниками.

● Временна́я и пространственная когерентности. Соответственно длина и радиус когерентности:

$$l_{\text{ког}} \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}, \quad \rho_{\text{ког}} \approx \frac{\lambda}{\psi}, \tag{5.2б}$$

где ψ — угловой размер источника.

● Условие максимумов при интерференции света, отраженного от тонкой пластинки толщины b:

$$2b\sqrt{n^2 - \sin^2\vartheta_1} = (k + 1/2)\lambda, \tag{5.2в}$$

где k — целое число.

● Кольца Ньютона при отражении света от поверхностей воздушной прослойки, которая образована между стеклянной пластинкой и соприкасающейся с ней выпуклой поверхностью линзы радиуса R. Радиусы колец:

$$r = \sqrt{\lambda R k/2}, \tag{5.2г}$$

причем кольца светлые, если $k = 1, 3, 5, \ldots$, и темные, если $k = 2, 4, 6, \ldots$ Значению $k = 0$ соответствует середина центрального темного пятна.

5.64. Показать, что при сложении двух гармонических колебаний средняя по времени энергия результирующего колебания равна сумме энергий каждого из них, если оба колебания:

а) имеют одинаковое направление и некогерентны, причем все значения их разности фаз равновероятны;

б) взаимно перпендикулярны, имеют одну и ту же частоту и произвольную разность фаз.

5.65. Найти графически амплитуду колебания, которое возникает в результате сложения следующих трех колебаний одного направления:

$$\xi_1 = a\cos\omega t, \quad \xi_2 = 2a\sin\omega t, \quad \xi_3 = 1{,}5a\cos(\omega t + \pi/3).$$

5.66. Некоторое колебание возникает в результате сложения когерентных колебаний одного направления, имеющих следующий вид: $\xi_k = a\cos[\omega t + (k-1)\varphi]$, где k — номер колебания ($k = 1, 2, \ldots, N$), φ — разность фаз между k-м и $(k-1)$-м колебаниями. Найти амплитуду результирующего колебания.

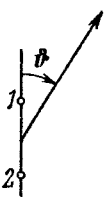


Рис. 5.12.

5.67. Система (рис. 5.12) состоит из двух точечных когерентных излучателей *1* и *2*, которые расположены в некоторой плоскости так, что их дипольные моменты перпендикулярны к этой плоскости. Расстояние между излучателями d, длина волны излучения λ. Имея в виду, что колебания излучателя *2* отстают по фазе на φ ($\varphi < \pi$) от колебаний излучателя *1*, найти:

а) углы ϑ, в которых интенсивность излучения максимальна;

б) условия, при которых в направлении $\vartheta = \pi$ интенсивность излучения будет максимальна, а в противоположном направлении — минимальна.

5.68. Неподвижная излучающая система состоит из линейной цепочки параллельных вибраторов, отстоящих друг от друга на расстояние d, причем фаза колебаний вибраторов линейно меняется вдоль цепочки. Найти зависимость от времени разности фаз $\Delta\varphi$ между соседними вибраторами, при которой главный максимум излучения системы будет совершать круговой «обзор» местности с постоянной угловой скоростью ω.

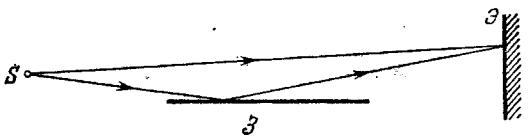


Рис. 5.13.

5.69. В опыте Ллойда (рис. 5.13) световая волна, исходящая непосредственно из источника S (узкой щели), интерферирует с волной, отраженной от зеркала $З$. В результате на экране $Э$ образуется

система интерференционных полос. Расстояние от источника до экрана $l = 100$ см. При некотором положении источника ширина интерференционной полосы на экране $\Delta x = 0{,}25$ мм, а после того как источник отодвинули от плоскости зеркала на $\Delta h = 0{,}60$ мм, ширина полос уменьшилась в $\eta = 1{,}5$ раза. Найти длину волны света.

5.70. Две когерентные плоские световые волны, угол между направлениями распространения которых $\psi \ll 1$, падают почти нормально на экран. Амплитуды волн одинаковы. Показать, что расстояние между соседними максимумами на экране $\Delta x = \lambda/\psi$, где λ — длина волны.

5.71. На рис. 5.14 показана интерференционная схема с бизеркалами Френеля. Угол между зеркалами $\alpha = 12'$, расстояния от

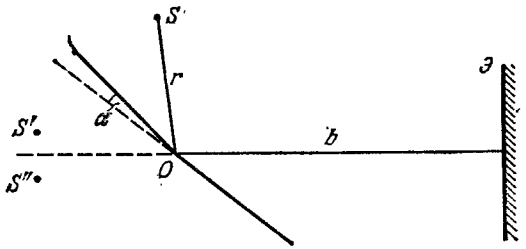


Рис. 5.14.

линии пересечения зеркал до узкой щели S и экрана $Э$ равны соответственно $r = 10{,}0$ см и $b = 130$ см. Длина волны света $\lambda = 0{,}55$ мкм. Определить:

а) ширину интерференционной полосы на экране и число возможных максимумов;

б) сдвиг интерференционной картины на экране при смещении щели на $\delta l = 1{,}0$ мм по дуге радиуса r с центром в точке O;

в) при какой максимальной ширине щели $\delta_{макс}$ интерференционные полосы на экране будут наблюдаться еще достаточно отчетливо?

5.72. Плоская световая волна падает на бизеркала Френеля, угол между которыми $\alpha = 2{,}0'$. Определить длину волны света, если ширина интерференционной полосы на экране $\Delta x = 0{,}55$ мм.

5.73. Линзу диаметром 5,0 см и с фокусным расстоянием $f = 25{,}0$ см разрезали по диаметру на две одинаковые половины, причем удаленным оказался слой толщины $a = 1{,}00$ мм. После этого обе половины сдвинули до соприкосновения и в фокальной плоскости полученной таким образом билинзы поместили узкую щель, испускающую монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}60$ мкм. За билинзой расположили экран на расстоянии $b = 50$ см от нее. Определить:

а) ширину интерференционной полосы на экране и число возможных максимумов;

б) максимальную ширину щели $\delta_{макс}$, при которой интерференционные полосы на экране будут наблюдаться еще достаточно отчетливо.

5.74. Расстояния от бипризмы Френеля до узкой щели и экрана равны соответственно $a = 25$ см и $b = 100$ см. Бипризма стеклянная с преломляющим углом $\theta = 20'$. Найти длину волны света, если ширина интерференционной полосы на экране $\Delta x = 0{,}55$ мм.

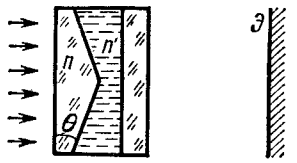


Рис. 5.15.

5.75. Плоская световая волна с $\lambda = 0{,}70$ мкм падает нормально на основание бипризмы, сделанной из стекла ($n = 1{,}520$) с преломляющим углом $\theta = 5{,}0°$. За бипризмой (рис. 5.15) находится плоскопараллельная стеклянная пластинка, и пространство между ними заполнено бензолом ($n' = 1{,}500$). Найти ширину интерференционной полосы на экране $Э$, расположенном за этой системой.

5.76. Плоская монохроматическая световая волна падает нормально на диафрагму с двумя узкими щелями, отстоящими друг от друга на расстояние $d = 2{,}5$ мм. На экране, расположенном за диафрагмой на $l = 100$ см, образуется система интерференционных полос. На какое расстояние и в какую сторону сместятся эти полосы, если одну из щелей перекрыть стеклянной пластинкой толщины $h = 10$ мкм?

5.77. На рис. 5.16 показана схема интерферометра, служащего для измерения показателей преломления прозрачных веществ.

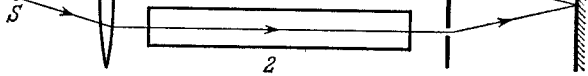


Рис. 5.16.

Здесь S — узкая щель, освещаемая монохроматическим светом $\lambda = 589$ нм, 1 и 2 — две одинаковые трубки с воздухом, длина каждой из которых $l = 10{,}0$ см, $Д$ — диафрагма с двумя щелями. Когда воздух в трубке 1 заменили аммиаком, то интерференционная картина на экране $Э$ сместилась вверх на $N = 17$ полос. Показатель преломления воздуха $n = 1{,}000277$. Определить показатель преломления аммиака.

5.78. Электромагнитная волна падает нормально на границу раздела двух изотропных диэлектриков с показателями преломления n_1 и n_2. Воспользовавшись условием непрерывности тангенциальной составляющей вектора **E** на границе раздела и законом сохранения энергии, показать, что на границе раздела вектор **E**:

а) проходящей волны не испытывает скачка фазы;

б) отраженной волны испытывает скачок фазы на π, если отражение происходит от оптически более плотной среды.

5.79. На тонкую пленку ($n = 1{,}33$) падает параллельный пучок белого света. Угол падения $\vartheta_1 = 52°$. При какой толщине пленки зеркально отраженный свет будет наиболее сильно окрашен в желтый цвет ($\lambda = 0{,}60$ мкм)?

5.80. Найти минимальную толщину пленки с показателем преломления 1,33, при которой свет с длиной волны 0,64 мкм испытывает максимальное отражение, а свет с длиной волны 0,40 мкм не отражается совсем. Угол падения света равен 30°.

5.81. Для уменьшения потерь света из-за отражения от поверхности стекла последнее покрывают тонким слоем вещества с показателем преломления $n' = \sqrt{n}$, где n — показатель преломления стекла. В этом случае амплитуды световых колебаний, отраженных от обеих поверхностей такого слоя, будут одинаковыми. При какой толщине этого слоя отражательная способность стекла в направлении нормали будет равна нулю для света с длиной волны λ.

5.82. Рассеянный монохроматический свет с $\lambda = 0{,}60$ мкм падает на тонкую пленку вещества с показателем преломления $n = 1{,}5$. Определить толщину пленки, если угловое расстояние между соседними максимумами, наблюдаемыми в отраженном свете под углами с нормалью, близкими к $\vartheta = 45°$, равно $\delta\vartheta = 3{,}0°$.

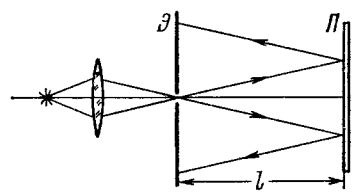


Рис. 5.17.

5.83. Монохроматический свет проходит через отверстие в экране $Э$ (рис. 5.17) и, отразившись от тонкой плоско-параллельной стеклянной пластинки $П$, образует на экране систему интерференционных полос равного наклона. Толщина пластинки d, расстояние между ней и экраном l, радиусы i-го и k-го темных колец r_i и r_k. Учитывая, что $r_{i,k} \ll l$, найти длину волны света.

5.84. Плоская монохроматическая световая волна длины λ падает на поверхность стеклянного клина, угол между гранями которого $\alpha \ll 1$. Плоскость падения перпендикулярна к ребру клина, угол падения ϑ_1. Найти расстояние между соседними максимумами интерференционных полос на экране, расположенном перпендикулярно к отраженному свету.

5.85. Свет с длиной волны $\lambda = 0{,}55$ мкм от удаленного точечного источника падает нормально на поверхность стеклянного клина. В отраженном свете наблюдают систему интерференционных полос, расстояние между соседними максимумами которых на поверхности клина $\Delta x = 0{,}21$ мм. Найти:

а) угол между гранями клина;

б) степень монохроматичности света ($\Delta\lambda/\lambda$), если исчезновение интерференционных полос наблюдается на расстоянии $l \approx 1{,}5$ см от вершины клина.

5.86. Плоско-выпуклая стеклянная линза выпуклой поверхностью соприкасается со стеклянной пластинкой. Радиус кривизны выпуклой поверхности линзы R, длина волны света λ. Найти ширину Δr кольца Ньютона в зависимости от его радиуса r в области, где $\Delta r \ll r$.

5.87. Плоско-выпуклая стеклянная линза с радиусом кривизны $R = 40$ см соприкасается выпуклой поверхностью со стеклянной пластинкой. При этом в отраженном свете радиус некоторого кольца $r = 2{,}5$ мм. Наблюдая за данным кольцом, линзу осторожно отодвинули от пластинки на $\Delta h = 5{,}0$ мкм. Каким стал радиус этого кольца?

5.88. На вершине сферической поверхности плоско-выпуклой стеклянной линзы имеется сошлифованный плоский участок радиуса $r_0 = 3{,}0$ мм, которым она соприкасается со стеклянной пластинкой. Радиус кривизны выпуклой поверхности линзы $R = 150$ см. Найти радиус шестого светлого кольца при наблюдении в отраженном свете с длиной волны $\lambda = 655$ нм.

5.89. Плоско-выпуклая стеклянная линза с радиусом кривизны сферической поверхности $R = 12{,}5$ см *прижата* к стеклянной пластинке. Диаметры десятого и пятнадцатого темных колец Ньютона в отраженном свете равны $d_1 = 1{,}00$ мм и $d_2 = 1{,}50$ мм. Определить длину волны света.

5.90. Две плоско-выпуклые тонкие стеклянные линзы соприкасаются своими сферическими поверхностями. Найти оптическую силу такой системы, если в отраженном свете с $\lambda = 0{,}60$ мкм диаметр пятого светлого кольца $d = 1{,}50$ мм.

5.91. Две соприкасающиеся тонкие симметричные стеклянные линзы — одна двояковыпуклая, другая двояковогнутая — образуют систему с оптической силой $\Phi = 0{,}50$ дп. В свете с $\lambda = 0{,}61$ мкм, отраженном от этой системы, наблюдают кольца Ньютона. Определить:

а) радиус десятого темного кольца;

б) как изменится радиус этого кольца, если пространство между линзами заполнить водой?

5.92. Сферическая поверхность плоско-выпуклой линзы соприкасается со стеклянной пластинкой. Пространство между линзой и пластинкой заполнено сероуглеродом. Показатели преломления линзы, сероуглерода и пластинки равны соответственно $n_1 = 1{,}50$, $n_2 = 1{,}63$ и $n_3 = 1{,}70$. Радиус кривизны сферической поверхности линзы $R = 100$ см. Определить радиус пятого темного кольца Ньютона в отраженном свете с $\lambda = 0{,}50$ мкм.

5.93. В двухлучевом интерферометре используется оранжевая линия ртути, состоящая из двух компонент с длинами волн $\lambda_1 = 576{,}97$ нм и $\lambda_2 = 579{,}03$ нм. При каком наименьшем порядке интерференции четкость интерференционной картины будет наихудшей?

5.94. В интерферометре Майкельсона использовалась желтая линия натрия, состоящая из двух компонент с длинами волн $\lambda_1 =$

$= 589{,}0$ нм и $\lambda_2 = 589{,}6$ нм. При поступательном перемещении одного из зеркал интерференционная картина периодически исчезала (почему?). Найти перемещение зеркала между двумя последовательными появлениями наиболее четкой интерференционной картины.

5.95. При освещении эталона Фабри — Перо расходящимся монохроматическим светом с длиной волны λ в фокальной плоскости линзы возникает интерференционная картина — система концентрических колец (рис. 5.18). Толщина эталона равна d. Определить, как зависит от порядка интерференции:

а) расположение колец;

б) угловая ширина полос интерференции.

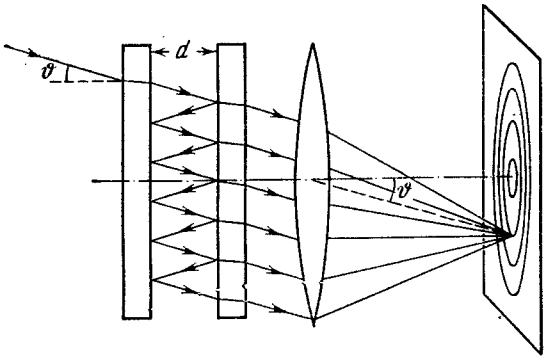


Рис. 5.18.

5.96. Найти для эталона Фабри — Перо, толщина которого $d = 2{,}5$ см:

а) максимальный порядок интерференции света с длиной волны $\lambda = 0{,}50$ мкм;

б) дисперсионную область $\Delta\lambda$, т. е. спектральный интервал длин волн, для которого еще нет перекрытия с другими порядками интерференции, если наблюдение ведется вблизи $\lambda = 0{,}50$ мкм.

5.3. Дифракция света

● Радиус внешней границы k-й зоны Френеля:

$$r_k = \sqrt{k\lambda \frac{ab}{a+b}}, \qquad k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{5.3a}$$

● Спираль Корню (рис. 5.19). Числа на этой спирали — значения параметра v. Для плоской волны $v = x\sqrt{2/b\lambda}$, где x и b — расстояния, характеризующие положение элемента dS волновой поверхности относительно точки наблюдения P, как показано в левом верхнем углу рисунка.

● Дифракция Фраунгофера от щели, свет падает нормально. Условие минимумов интенсивности:

$$b \sin \vartheta = \pm k\lambda, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{5.3б}$$

где b — ширина щели, ϑ — угол дифракции.

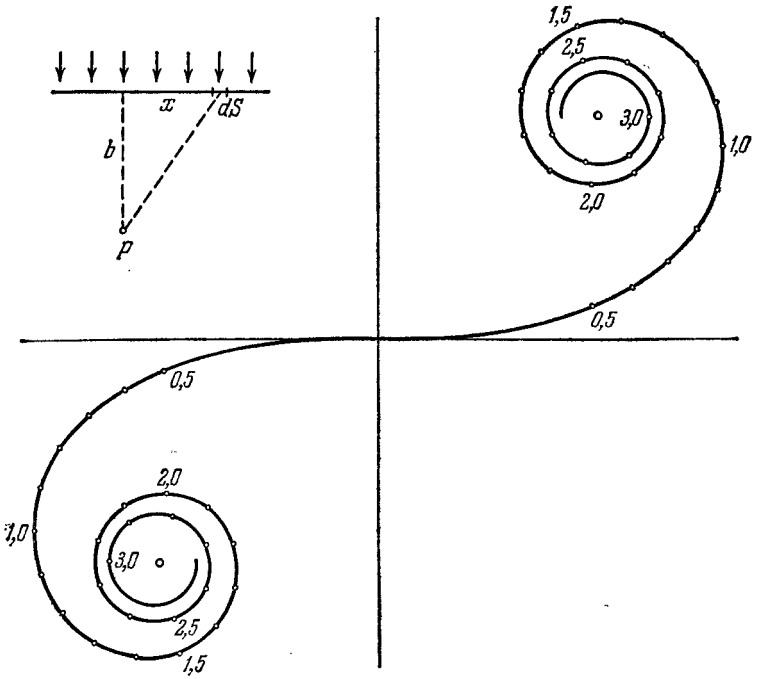


Рис. 5.19.

● Дифракционная решетка, свет падает нормально. Условие главных фраунгоферовых максимумов:

$$d \sin \vartheta = \pm k\lambda, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5.3в}$$

условие добавочных минимумов:

$$d \sin \vartheta = \pm \frac{k'}{N} \lambda, \tag{5.3г}$$

где $k' = 1, 2, \ldots$, кроме $0, N, 2N, \ldots$

● Угловая дисперсия дифракционной решетки:

$$D = \frac{\delta\vartheta}{\delta\lambda} = \frac{k}{d \cos \vartheta}. \tag{5.3д}$$

● Разрешающая способность дифракционной решетки:

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN, \tag{5.3е}$$

где N — число штрихов решетки.

● Разрешающая сила объектива

$$R=\frac{1}{\delta\psi}=\frac{D}{1{,}22\lambda}, \qquad (5.3ж)$$

где $\delta\psi$ — наименьшее угловое расстояние, разрешаемое объективом, D — диаметр последнего.

● Формула Брэгга—Вульфа. Условие дифракционных максимумов:

$$2d\sin\alpha=\pm k\lambda, \qquad (5.3з)$$

где d — межплоскостное расстояние, α — угол скольжения, $k=1, 2, 3, \ldots$

5.97. Плоская световая волна падает нормально на диафрагму с круглым отверстием, которое открывает первые N зон Френеля — для точки P на экране, отстоящем от диафрагмы на расстояние b. Длина волны света равна λ. Найти интенсивность света I_0 перед диафрагмой, если известно распределение интенсивности света на экране $I(r)$, где r — расстояние до точки P.

5.98. Точечный источник света с длиной волны $\lambda = 0{,}50$ мкм расположен на расстоянии $a = 100$ см перед диафрагмой с круглым отверстием радиуса $r = 1{,}0$ мм. Найти расстояние b от диафрагмы до точки наблюдения, для которой число зон Френеля в отверстии составляет $k = 3$.

5.99. Между точечным источником света и экраном поместили диафрагму с круглым отверстием, радиус которого r можно менять в процессе опыта. Расстояния от диафрагмы до источника и экрана равны $a = 100$ см и $b = 125$ см. Определить длину волны света, если максимум освещенности в центре дифракционной картины на экране наблюдается при $r_1 = 1{,}00$ мм и следующий максимум при $r_2 = 1{,}29$ мм.

5.100. Плоская монохроматическая световая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на непрозрачный экран с круглым отверстием. Какова интенсивность света I за экраном в точке, для которой отверстие:

а) равно первой зоне Френеля; внутренней половине первой зоны;

б) сделали равным первой зоне Френеля и затем закрыли его половину (по диаметру)?

5.101. Монохроматическая плоская световая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на непрозрачный диск, закрывающий для точки наблюдения P первую зону Френеля. Какова стала интенсивность света I в точке P после того, как у диска удалили:

а) половину (по диаметру);

б) половину внешней половины первой зоны Френеля (по диаметру)?

5.102. Плоская монохроматическая световая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на поверхности непрозрачных экранов, показанных на рис. 5.20. Найти интенсивность света I в точке P:

а) расположенной за вершиной угла экранов *1—3* и за краем полуплоскости *4*;

б) для которой закругленный край экранов *5—8* совпадает с границей первой зоны Френеля.

Обобщить полученные результаты для экранов *1—4* одной формулой; то же — для экранов *5—8*.

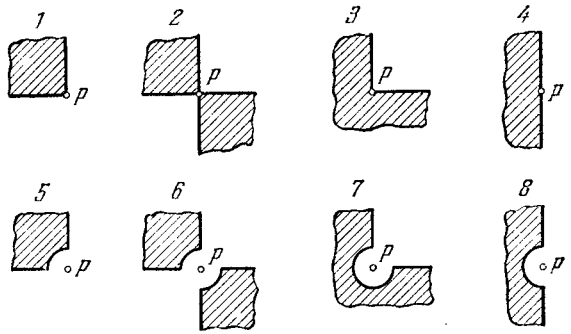


Рис. 5.20.

5.103. Плоская световая волна с $\lambda = 0{,}60$ мкм падает нормально на достаточно большую стеклянную пластинку, на противоположной стороне которой сделана круглая выемка (рис. 5.21). Для точки наблюдения P она представляет собой первые полторы зоны Френеля. Найти глубину h выемки, при которой интенсивность света в точке P будет:

а) максимальной;

б) минимальной;

в) равной интенсивности падающего света.

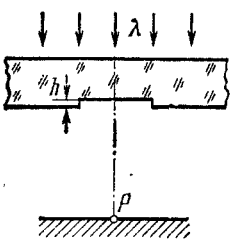


Рис. 5.21.

5.104. Плоская световая волна длины λ и интенсивности I_0 падает нормально на большую стеклянную пластинку, противоположная сторона которой представляет собой непрозрачный экран с круглым отверстием, равным первой зоне Френеля для точки наблюдения P. В середине отверстия сделана круглая выемка, равная половине зоны Френеля. При какой глубине h этой выемки интенсивность света в точке P будет максимальной? Чему она равна?

5.105. Плоская световая волна с $\lambda = 0{,}57$ мкм падает нормально на поверхность стеклянного ($n = 1{,}60$) диска, который закрывает полторы зоны Френеля для точки наблюдения P. При какой минимальной толщине этого диска интенсивность света в точке P будет максимальной? Учесть интерференцию света при прохождении диска.

5.106. На пути плоской световой волны с $\lambda = 0{,}54$ мкм поставили тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием $f = 50$ см, непосредственно за ней — диафрагму с круглым отверстием и на расстоянии $b = 75$ см от диафрагмы — экран. При ка-

ких радиусах отверстия центр дифракционной картины на экране имеет максимальную освещенность?

5.107. Плоская монохроматическая световая волна падает нормально на круглое отверстие. На расстоянии $b = 9{,}0$ м от него находится экран, где наблюдают некоторую дифракционную картину. Диаметр отверстия уменьшили в $\eta = 3{,}0$ раза. Найти новое расстояние b', на котором надо поместить экран, чтобы получить на нем дифракционную картину, подобную той, что в предыдущем случае, но уменьшенную в η раз.

5.108. Между источником света с $\lambda = 0{,}55$ мкм и фотопластинкой поместили непрозрачный шарик диаметра $D = 40$ мм. Расстояние между источником и шариком $a = 12$ м, а между шариком и фотопластинкой $b = 18$ м. Найти:

а) размер изображения y' на пластинке, если поперечный размер источника $y = 6{,}0$ мм;

б) минимальную высоту неровностей, хаотически покрывающих поверхность шарика, при которой последний уже будет загораживать свет.

Примечание. Расчет и опыт показывают, что это происходит тогда, когда высота неровностей сравнима с шириной зоны Френеля, по которой проходит край непрозрачного экрана.

5.109. Точечный источник монохроматического света расположен перед зонной пластинкой на расстоянии $a = 1{,}5$ м от нее. Изображение источника образуется на расстоянии $b = 1{,}0$ м от пластинки. Найти фокусное расстояние зонной пластинки.

5.110. Плоская световая волна с $\lambda = 0{,}60$ мкм и интенсивностью I_0 падает нормально на большую стеклянную пластинку, профиль которой показан на рис. 5.22. При какой высоте h уступа интенсивность света в точках, расположенных под ним, будет:

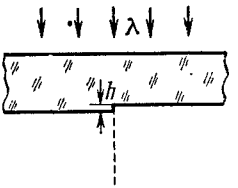


Рис. 5.22.

а) минимальна;

б) вдвое меньше I_0 (потерями на отражения пренебречь).

5.111. Плоская монохроматическая световая волна падает нормально на непрозрачную полуплоскость. На расстоянии $b = 100$ см за ней находится экран. Найти с помощью спирали Корню (рис. 5.19):

а) отношение интенсивностей первого максимума и ссседнего с ним минимума;

б) длину волны света, если расстояние между двумя первыми максимумами $\Delta x = 0{,}63$ мм.

5.112. Плоская световая волна длины 0,60 мкм падает нормально на непрозрачную длинную полоску ширины 0,70 мм. За ней на расстоянии 100 см находится экран. Найти с помощью рис. 5.19 отношение интенсивностей света в середине дифракционной картины и на краях геометрической тени.

5.113. Плоская монохроматическая световая волна падает нормально на длинную прямоугольную щель, за которой на расстоя-

нии $b = 60$ см находится экран. Сначала ширину щели установили такой, что в середине дифракционной картины на экране наблюдался наиболее глубокий минимум. Раздвинув после этого щель на $\Delta h = 0{,}70$ мм, получили в центре картины следующий минимум. Найти длину волны света.

5.114. Плоская световая волна с $\lambda = 0{,}65$ мкм падает нормально на большую стеклянную пластинку, на противоположной стороне которой сделана длинная прямоугольная выемка ширины 0,60 мм. Найти с помощью рис. 5.19 глубину выемки h, при которой в середине дифракционной картины на экране, отстоящем на 77 см от пластинки, будет максимум освещенности.

5.115. Плоская световая волна с $\lambda = 0{,}65$ мкм падает нормально на большую стеклянную пластинку, на противоположной стороне которой имеется уступ и непрозрачная полоска ширины $a = 0{,}30$ мм (рис. 5.23). На расстоянии $b = 110$ см от пластинки находится экран. Высота уступа h подобрана такой, что в точке *2* на экране интенсивность света оказывается максимально возможной. Найти с помощью рис. 5.19 отношение интенсивностей в точках *1* и *2*.

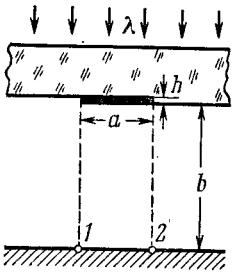


Рис. 5.23.

5.116. Плоская монохроматическая световая волна интенсивности I_0 падает нормально на непрозрачный экран, в котором прорезана длинная щель с полукруглым вырезом на одной из сторон (рис. 5.24). Край выреза совпадает с границей первой зоны Френеля для точки наблюдения P. Ширина щели составляет 0,90 радиуса выреза. Найти с помощью рис. 5.19 интенсивность света в точке P.

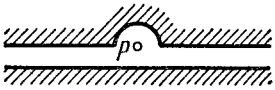


Рис. 5.24.

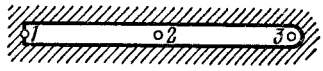


Рис. 5.25.

5.117. Плоская монохроматическая световая волна падает нормально на непрозрачный экран с длинной щелью, форма которой показана на рис. 5.25. Найти с помощью рис. 5.19 отношение интенсивностей света в точках *1*, *2* и *3*, расположенных за экраном на одном и том же расстоянии от него, если для точки *3* закругленный край щели совпадает с границей первой зоны Френеля.

5.118. Плоская монохроматическая световая волна падает нормально на непрозрачный экран, имеющий вид длинной полоски с круглым отверстием посередине. Для точки наблюдения P отверстие представляет собой половину зоны Френеля, причем его диаметр в $\eta = 1{,}07$ раза меньше ширины полоски. Найти с помощью

рис. 5.19 интенсивность света в точке P, если интенсивность падающего света равна I_0.

5.119. Свет с длиной волны λ падает нормально на длинную прямоугольную щель ширины b. Найти угловое распределение интенсивности света при фраунгоферовой дифракции, а также угловое положение минимумов.

5.120. Воспользовавшись результатом, полученным в предыдущей задаче, найти условия, определяющие угловое положение максимумов первого, второго и третьего порядков.

5.121. Свет с длиной волны $\lambda = 0{,}50$ мкм падает на щель ширины $b = 10$ мкм под углом $\vartheta_0 = 30°$ к ее нормали. Найти угловое положение первых минимумов, расположенных по обе стороны центрального фраунгоферова максимума.

5.122. Плоская световая волна с $\lambda = 0{,}60$ мкм падает нормально на грань стеклянного клина с преломляющим углом $\theta = 15°$. На противоположной, непрозрачной, грани имеется щель ширины $b = 10$ мкм, параллельная ребру клина. Найти:

а) угол $\Delta\vartheta$ между направлением на фраунгоферов максимум нулевого порядка и направлением падающего света;

б) угловую ширину фраунгоферова максимума нулевого порядка.

5.123. Монохроматический свет падает на отражательную дифракционную решетку с периодом $d = 1{,}0$ мм под углом скольжения $\alpha_0 = 1{,}0°$. Под углом скольжения $\alpha = 3{,}0°$ образуется фраунгоферов максимум второго порядка. Найти длину волны света.

5.124. Изобразить примерную дифракционную картину, возникающую при дифракции Фраунгофера от решетки из трех одинаковых щелей, если отношение периода решетки к ширине щели равно:

а) двум; б) трем.

5.125. При нормальном падении света на дифракционную решетку угол дифракции для линии $\lambda_1 = 0{,}65$ мкм во втором порядке равен 45°. Найти угол дифракции для линии $\lambda_2 = 0{,}50$ мкм в третьем порядке.

5.126. Свет с длиной волны 535 нм падает нормально на дифракционную решетку. Найти ее период, если одному из фраунгоферовых максимумов соответствует угол дифракции 35° и наибольший порядок спектра равен пяти.

5.127. Определить длину волны монохроматического света, падающего нормально на дифракционную решетку с периодом $d = 2{,}2$ мкм, если угол между направлениями на фраунгоферовы максимумы первого и второго порядков $\Delta\vartheta = 15°$.

5.128. Свет с длиной волны 530 нм падает на прозрачную дифракционную решетку, период которой равен 1,50 мкм. Найти угол с нормалью к решетке, под которым образуется фраунгоферов максимум наибольшего порядка, если свет падает на решетку:

а) нормально; б) под углом 60° к нормали.

5.129. Свет с длиной волны $\lambda = 0{,}60$ мкм падает нормально на дифракционную решетку, которая нанесена на плоской поверхности плоско-выпуклой цилиндрической стеклянной линзы с радиу-

сом кривизны $R = 20$ см. Период решетки $d = 6{,}0$ мкм. Найти расстояние между симметрично расположенными главными максимумами первого порядка в фокальной плоскости этой линзы.

5.130. Плоская световая волна с $\lambda = 0{,}50$ мкм падает нормально на грань стеклянного клина с углом $\theta = 30°$. На противоположной грани клина нанесена прозрачная дифракционная решетка с периодом $d = 2{,}00$ мкм, штрихи которой параллельны ребру клина. Найти углы между направлением падающего света и направлениями на главные фраунгоферовы максимумы нулевого и первого порядков. Каков максимальный порядок спектра? Под каким углом к направлению падающего света он будет наблюдаться?

5.131. Плоская световая волна длины λ падает нормально на фазовую дифракционную решетку, профиль которой показан на рис. 5.26. Решетка нанесена на стеклянной пластинке с показателем преломления n. Найти глубину h штрихов, при которой интенсивность центрального фраунгоферова максимума равна нулю. Каков при этом угол дифракции, соответствующий первому максимуму?

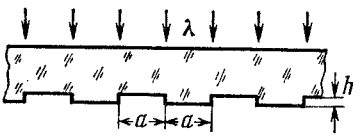


Рис. 5.26.

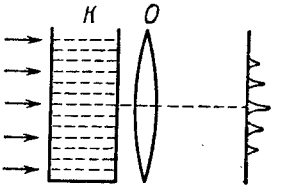


Рис. 5.27.

5.132. На рис. 5.27 показана схема установки для наблюдения дифракции света на ультразвуке. Плоская световая волна с $\lambda = 0{,}55$ мкм проходит через кювету K с водой, в которой возбуждена стоячая ультразвуковая волна с частотой $\nu = 4{,}7$ МГц. В результате дифракции света на оптически неоднородной периодической структуре в фокальной плоскости объектива O с фокусным расстоянием $f = 35$ см возникает дифракционный спектр. Расстояние между соседними максимумами $\Delta x = 0{,}60$ мм. Найти скорость распространения ультразвуковых колебаний в воде.

5.133. Для измерения методом Майкельсона углового расстояния ψ между компонентами двойной звезды перед объективом телескопа поместили диафрагму с двумя узкими параллельными щелями, расстояние d между которыми можно менять. Уменьшая d, обнаружили первое ухудшение видимости дифракционной картины в фокальной плоскости объектива при $d = 95$ см. Найти ψ, считая длину волны света $\lambda = 0{,}55$ мкм.

5.134. Прозрачная дифракционная решетка имеет период $d = 1{,}50$ мкм. Найти угловую дисперсию D (в угл. мин/нм), соответствующую максимуму наибольшего порядка спектральной линии с $\lambda = 530$ нм, если свет падает на решетку

а) нормально; б) под углом $\vartheta_0 = 45°$ к нормали.

5.135. Свет с длиной волны λ падает нормально на дифракционную решетку. Найти ее угловую дисперсию в зависимости от угла дифракции ϑ.

5.136. Свет с $\lambda = 589{,}0$ нм падает нормально на дифракционную решетку с периодом $d = 2{,}5$ мкм, содержащую $N = 10\,000$ штрихов. Найти угловую ширину дифракционного максимума второго порядка.

5.137. Показать, что при нормальном падении света на дифракционную решетку максимальная величина ее разрешающей способности не может превышать значения l/λ, где l — ширина решетки, λ — длина волны света.

5.138. Показать на примере дифракционной решетки, что разность частот двух максимумов, разрешаемых по критерию Рэлея, равна обратной величине разности времен прохождения самых крайних интерферирующих колебаний, т. е. $\delta\nu = 1/\delta t$.

5.139. Свет, содержащий две спектральные линии с длинами волн 600,000 и 600,050 нм, падает нормально на дифракционную решетку ширины 10,0 мм. Под некоторым углом дифракции ϑ эти линии оказались на пределе разрешения (по критерию Рэлея). Найти ϑ.

5.140. Свет падает нормально на прозрачную дифракционную решетку ширины $l = 6{,}5$ см, имеющую 200 штрихов на миллиметр. Исследуемый спектр содержит спектральную линию с $\lambda = 670{,}8$ нм, которая состоит из двух компонент, отличающихся на $\delta\lambda = 0{,}015$ нм. Найти:

а) в каком порядке спектра эти компоненты будут разрешены;

б) наименьшую разность длин волн, которую может разрешить эта решетка в области $\lambda \approx 670$ нм.

5.141. При нормальном падении света на прозрачную дифракционную решетку ширины 10 мм сбнаружено, что компоненты желтой линии натрия (589,0 и 589,6 нм) оказываются разрешенными, начиная с пятого порядка спектра. Оценить:

а) период этой решетки;

б) при какой ширине решетки с таким же периодом можно разрешить в третьем порядке дублет спектральной линии с $\lambda = 460{,}0$ нм, компоненты которого отличаются на 0,13 нм.

5.142. Прозрачная дифракционная решетка кварцевого спектрографа имеет ширину 25 мм и содержит 250 штрихов на миллиметр. Фокусное расстояние объектива, в фокальной плоскости которого находится фотопластинка, равно 80 см. Свет падает на решетку нормально. Исследуемый спектр содержит спектральную линию, компоненты дублета которой имеют длины волн 310,154 и 310,184 нм. Определить:

а) расстояния на фотопластинке между компонентами этого дублета в спектрах первого и второго порядков;

б) будут ли они разрешены в этих порядках спектра.

5.143. Для трехгранной призмы спектрографа предельная разрешающая способность $\lambda/\delta\lambda$ обусловлена дифракцией света от краев призмы (как от щели). При установке призмы на угол наименьшего

отклонения в соответствии с критерием Рэлея

$$\lambda/\delta\lambda = b\,|\,dn/d\lambda\,|,$$

где b — ширина основания призмы (рис. 5.28), $dn/d\lambda$ — дисперсия ее вещества. Вывести эту формулу.

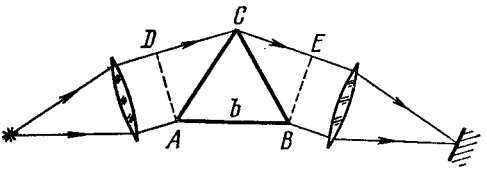


Рис. 5.28.

5.144. Трехгранная призма спектрографа изготовлена из стекла, показатель преломления которого зависит от длины волны света как $n = A + B/\lambda^2$, где A и B — постоянные, причем $B = 0{,}010$ мкм^2. Воспользовавшись формулой из предыдущей задачи, найти:

а) зависимость разрешающей способности призмы от λ; вычислить $\lambda/\delta\lambda$ вблизи $\lambda_1 = 434$ нм и $\lambda_2 = 656$ нм, если ширина основания призмы $b = 5{,}0$ см;

б) ширину основания призмы, способной разрешить желтый дублет натрия (589,0 и 589,6 нм).

5.145. Какой должна быть ширина основания трехгранной призмы, чтобы она имела такую же разрешающую способность, как и дифракционная решетка из 10 000 штрихов во втором порядке спектра?

5.146. Имеется зрительная труба с диаметром объектива $D = 5{,}0$ см. Определить разрешающую способность объектива трубы и минимальное расстояние между двумя точками, находящимися на расстоянии $l = 3{,}0$ км от трубы, которое она может разрешить (считать $\lambda = 0{,}55$ мкм).

5.147. Вычислить наименьшее расстояние между двумя точками на Луне, которое можно разрешить рефлектором с диаметром зеркала в 5 м. Считать, что длина волны света $\lambda = 0{,}55$ мкм.

5.148. Определить минимальное увеличение зрительной трубы с диаметром объектива $D = 5{,}0$ см, при котором разрешающая способность ее объектива будет полностью использована, если диаметр зрачка глаза $d_0 = 4{,}0$ мм.

5.149. Имеется микроскоп с числовой апертурой объектива $\sin\alpha = 0{,}24$, где α — угол полураствора конуса лучей, падающих на оправу объектива. Найти минимальное разрешаемое расстояние для этого микроскопа при оптимальном освещении объекта светом с длиной волны $\lambda = 0{,}55$ мкм.

5.150. Найти минимальное увеличение микроскопа с числовой апертурой объектива $\sin\alpha = 0{,}24$, при котором разрешающая способность его объектива будет полностью использована, если диаметр зрачка глаза $d_0 = 4{,}0$ мм.

5.151. Пучок рентгеновских лучей с длиной волны λ падает под углом скольжения 60,0° на линейную цепочку из рассеивающих центров с периодом a. Найти углы скольжения, соответствующие всем дифракционным максимумам, если $\lambda = {}^2/_5 a$.

5.152. Пучок рентгеновских лучей с длиной волны $\lambda = 40$ пм падает нормально на плоскую прямоугольную решетку из рассеивающих центров и дает на плоском экране, расположенном на расстоянии $l = 10$ см от решетки, систему дифракционных максимумов (рис. 5.29). Найти периоды решетки a и b соответственно вдоль осей x и y, если расстояния между симметрично расположенными максимумами второго порядка равны $\Delta x = 60$ мм (по оси x) и $\Delta y = 40$ мм (по оси y).

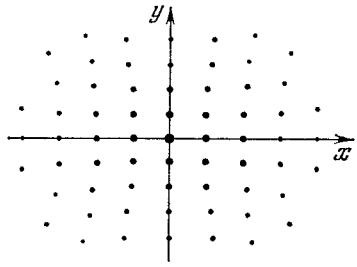


Рис. 5.29.

5.153. Пучок рентгеновских лучей падает на трехмерную прямоугольную решетку, периоды которой a, b и c. Направление падающего пучка совпадает с направлением, вдоль которого период решетки равен a. Найти направления на дифракционные максимумы и длины волн, при которых эти максимумы будут наблюдаться.

5.154. Узкий пучок рентгеновских лучей падает под углом скольжения $\alpha = 60{,}0°$ на естественную грань монокристалла NaCl, плотность которого $\rho = 2{,}16$ г/см^3. При зеркальном отражении от этой грани образуется максимум второго порядка. Определить длину волны излучения.

5.155. Пучок рентгеновских лучей с $\lambda = 174$ пм падает на поверхность монокристалла, поворачивающегося вокруг оси, которая параллельна его поверхности и перпендикулярна к направлению падающего пучка. При этом направления на максимумы второго и третьего порядков от системы плоскостей, параллельных поверхности монокристалла, образуют между собой угол $\alpha = 60°$. Найти соответствующее межплоскостное расстояние.

5.156. При прохождении пучка рентгеновских лучей с $\lambda = 17{,}8$ пм через поликристаллический образец на экране, расположенном на расстоянии $l = 15$ см от образца, образуется система дифракционных колец. Определить радиус светлого кольца, соответствующего второму порядку отражения от системы плоскостей с межплоскостным расстоянием $d = 155$ пм.

5.4. Поляризация света

● Степень поляризации света:

$$P = \frac{I_{\text{макс}} - I_{\text{мин}}}{I_{\text{макс}} + I_{\text{мин}}}. \qquad (5.4а)$$

● Закон Малюса:

$$I = I_0 \cos^2 \varphi. \qquad (5.4б)$$

● Закон Брюстера:

$$\operatorname{tg}\vartheta_B = n_2/n_1. \tag{5.4в}$$

● Формулы Френеля для интенсивности света, отраженного от границы раздела двух диэлектриков:

$$I'_\perp = I_\perp \frac{\sin^2(\vartheta_1-\vartheta_2)}{\sin^2(\vartheta_1+\vartheta_2)}, \quad I'_\parallel = I_\parallel \frac{\operatorname{tg}^2(\vartheta_1-\vartheta_2)}{\operatorname{tg}^2(\vartheta_1+\vartheta_2)}, \tag{5.4г}$$

где $I_\perp$ и $I_\parallel$ — интенсивности падающего света, у которого колебания светового вектора соответственно перпендикулярны и параллельны плоскости падения.

● Кристаллическая пластинка между двумя поляризаторами P и P'. Если угол между плоскостью поляризатора P и оптической осью OO' пластинки равен 45°, то интенсивность I' света, прошедшего через поляризатор P', оказывается максимальной или минимальной при следующих условиях:

поляризаторы P и P'	$\delta = 2\pi k$	$\delta = (2k+1)\pi$
параллельны	$I'_\parallel$ = макс	$I'_\parallel$ = мин
скрещены	$I'_\perp$ = мин	$I'_\perp$ = макс

(5.4д)

Здесь $\delta = 2\pi(n_o - n_e)\,d/\lambda$ — разность фаз между обыкновенным и необыкновенным лучами, $k = 0, 1, 2, \ldots$

● Естественное и магнитное вращение плоскости поляризации:

$$\varphi_{\text{ест}} = \alpha l, \quad \varphi_{\text{магн}} = VlH, \tag{5.4е}$$

где α — постоянная вращения, V — постоянная Верде.

5.157. Плоская монохроматическая волна естественного света с интенсивностью I_0 падает нормально на экран из двух соприкасающихся полуплоскостей. Главное направление одного поляроида параллельно, а другого перпендикулярно к границе раздела поляроидов. Какой характер имеет дифракционная картина за экраном? Какова интенсивность света за экраном в точках плоскости, перпендикулярной к экрану и проходящей через границу раздела поляроидов?

5.158. Плоская монохроматическая волна естественного света с интенсивностью I_0 падает нормально на непрозрачный экран с круглым отверстием, которое представляет собой первую зону Френеля для точки наблюдения P. Найти интенсивность света в точке P после того, как отверстие перекрыли двумя одинаковыми поляроидами, главные направления которых перпендикулярны друг к другу, а граница их раздела проходит:

а) по диаметру отверстия;

б) по окружности, ограничивающей первую половину зоны Френеля.

5.159. Линейно поляризованный световой пучок падает на поляризатор, вращающийся вокруг оси пучка с угловой скоростью $\omega = 21$ рад/с. Найти световую энергию, проходящую через поляризатор за один оборот, если поток энергии в падающем пучке $\Phi_0 = 4{,}0$ мВт.

5.160. Пучок естественного света падает на систему из $N = 6$ николей, плоскость пропускания каждого из которых повернута на угол $\varphi = 30°$ относительно плоскости пропускания предыдущего николя. Какая часть светового потока проходит через эту систему?

5.161. Естественный свет падает на систему из трех последовательно расположенных одинаковых поляроидов, причем главное направление среднего поляроида составляет угол $\varphi = 60°$ с главными направлениями двух других поляроидов. Каждый поляроид обладает поглощением таким, что при падении на него линейно поляризованного света максимальный коэффициент пропускания составляет $\tau = 0{,}81$. Во сколько раз уменьшится интенсивность света после прохождения этой системы?

5.162. Степень поляризации частично поляризованного света $P = 0{,}25$. Найти отношение интенсивности поляризованной составляющей этого света к интенсивности естественной составляющей.

5.163. На пути частично поляризованного пучка поместили николь. При повороте николя на угол $\varphi = 60°$ из положения, соответствующего максимуму пропускания света, интенсивность прошедшего света уменьшилась в $\eta = 3{,}0$ раза. Найти степень поляризации падающего света.

5.164. На пути естественного пучка света поместили два несовершенных одинаковых поляризатора. Оказалось, что при параллельных плоскостях поляризаторов эта система пропускает в $\eta = 10{,}0$ раза больше света, чем при скрещенных плоскостях. Найти степень поляризации света, которую создает:

а) каждый поляризатор в отдельности;

б) вся система при параллельных плоскостях поляризаторов.

5.165. Два параллельных одинаковых по интенсивности линейно поляризованных пучка, плоскости колебаний которых N_1 и N_2 повернуты относительно друг друга на некоторый малый угол φ (рис. 5.30), падают на николь. Для уравнивания интенсивностей обоих пучков за николем его главное направление N должно быть установлено по биссектрисе A или B. Определить значение угла φ, при котором поворот николя из положения A на малый угол $\delta\varphi \ll \varphi$ приводит к относительному изменению интенсивностей обоих пучков $\Delta I/I$ на величину в $\eta = 100$ раз бóльшую, чем при повороте на тот же угол из положения B.

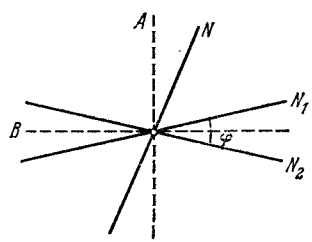


Рис. 5.30.

5.166. Показать с помощью формул Френеля, что отраженный от поверхности диэлектрика свет будет полностью поляризован, если угол падения ϑ_1 удовлетворяет условию $\operatorname{tg}\vartheta_1 = n$, где n — показатель преломления диэлектрика. Каков при этом угол между отраженным и преломленным лучами?

5.167. Естественный свет падает под углом Брюстера на поверхность стекла. Определить с помощью формул Френеля:

а) коэффициент отражения;

б) степень поляризации преломленного света.

5.168. Плоский пучок естественного света с интенсивностью I_0 падает под углом Брюстера на поверхность воды. При этом $\rho = 0{,}039$ светового потока отражается. Найти интенсивность преломленного пучка.

5.169. На поверхность воды под углом Брюстера падает пучок плоскополяризованного света. Плоскость колебаний светового вектора составляет угол $\varphi = 45°$ с плоскостью падения. Найти коэффициент отражения.

5.170. Узкий пучок естественного света падает под углом Брюстера на поверхность толстой плоскопараллельной прозрачной пластины. При этом от верхней поверхности отражается $\rho = 0{,}080$ светового потока. Найти степень поляризации пучков *1—4* (рис. 5.31).

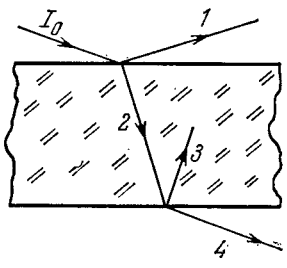


Рис. 5.31.

5.171. На плоскопараллельную стеклянную пластинку (см. рис. 5.31) падает под углом Брюстера узкий пучок света интенсивности I_0. Определить с помощью формул Френеля:

а) интенсивность прошедшего пучка I_4, если падающий свет линейно поляризован, причем плоскость колебаний его перпендикулярна к плоскости падения;

б) степень поляризации прошедшего через пластинку пучка, если падающий свет — естественный.

5.172. Узкий пучок естественного света падает под углом Брюстера на стопу Столетова, состоящую из N толстых плоскопараллельных стеклянных пластин. Найти:

а) степень поляризации P прошедшего пучка;

б) чему равно P при $N = 1, 2, 5$ и 10.

5.173. Определить с помощью формул Френеля:

а) коэффициент отражения естественного света при нормальном падении на поверхность стекла;

б) относительную потерю светового потока за счет отражений при прохождении параксиального пучка естественного света через центрированную оптическую систему из пяти стеклянных линз (вторичными отражениями света пренебречь).

5.174. Световая волна падает нормально на поверхность стекла, покрытого слоем прозрачного вещества. Пренебрегая вторичными отражениями, показать, что амплитуды световых волн, отраженных от обеих поверхностей такого слоя, будут одинаковы при условии $n' = \sqrt{n}$, где n' и n — показатели преломления слоя и стекла соответственно.

5.175. На поверхность стекла падает пучок естественного света. Угол падения равен 45°. Найти с помощью формул Френеля степень поляризации:

а) отраженного света; б) преломленного света.

5.176. Построить по Гюйгенсу волновые фронты и направления распространения обыкновенного и необыкновенного лучей в положительном одноосном кристалле, оптическая ось которого:

а) перпендикулярна к плоскости падения и параллельна поверхности кристалла;

б) лежит в плоскости падения и параллельна поверхности кристалла;

в) лежит в плоскости падения под углом 45° к поверхности кристалла, и свет падает перпендикулярно к оптической оси.

5.177. Узкий пучок естественного света с длиной волны $\lambda = 589$ нм падает нормально на поверхность призмы Волластона, сделанной из исландского шпата, как показано на рис. 5.32. Оптические оси обеих частей призмы взаимно перпендикулярны. Найти угол δ между направлениями пучков за призмой, если угол $\theta = 30°$.

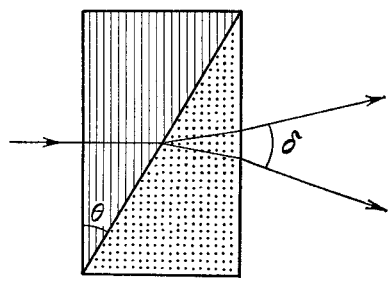


Рис. 5.32.

5.178. Какой характер поляризации имеет плоская электромагнитная волна, проекции вектора **E** которой на оси x и y, перпендикулярные к направлению ее распространения, определяются следующими уравнениями:

а) $E_x = E\cos(\omega t - kz)$, $E_y = E\sin(\omega t - kz)$;

б) $E_x = E\cos(\omega t - kz)$, $E_y = E\cos(\omega t - kz + \pi/4)$;

в) $E_x = E\cos(\omega t - kz)$, $E_y = E\cos(\omega t - kz + \pi)$?

5.179. Требуется изготовить параллельную оптической оси кварцевую пластинку, толщина которой не превышала бы 0,50 мм. Найти максимальную толщину этой пластинки, при которой линейно поляризованный свет с длиной волны $\lambda = 589$ нм после прохождения ее:

а) испытывает лишь поворот плоскости поляризации;

б) станет поляризованным по кругу.

5.180. Кварцевую пластинку, вырезанную параллельно оптической оси, поместили между двумя скрещенными николями. Угол между главными направлениями николей и пластинки равен 45°. Толщина пластинки $d = 0{,}50$ мм. При каких длинах волн в интервале 0,50—0,60 мкм интенсивность света, прошедшего через эту систему, не будет зависеть от поворота заднего николя? Разность показателей преломления обыкновенных и необыкновенных лучей в этом интервале длин волн считать $\Delta n = 0{,}0090$.

5.181. Белый естественный свет падает на систему из двух скрещенных николей, между которыми находится кварцевая пластинка,

вырезанная параллельно оптической оси, толщиной 1,50 мм. Ось пластинки составляет угол 45° с главными направлениями николей. Прошедший через эту систему свет разложили в спектр. Сколько темных полос будет наблюдаться в интервале длин волн 0,55—0,66 мкм? Разность показателей преломления обыкновенных и необыкновенных лучей в этом интервале длин волн считать равной 0,0090.

5.182. Кристаллическая пластинка, вырезанная параллельно оптической оси, имеет толщину 0,25 мм и служит пластинкой в четверть волны для $\lambda = 530$ нм. Для каких длин волн в области видимого спектра она будет также пластинкой в четверть волны? Считать, что для всех длин волн видимого спектра разность показателей преломления обыкновенных и необыкновенных лучей одинакова и равна $n_e - n_o = 0{,}0090$.

5.183. Кварцевая пластинка, вырезанная параллельно оптической оси, помещена между двумя скрещенными николями так, что ее оптическая ось составляет угол 45° с главными направлениями николей. При какой минимальной толщине пластинки свет с $\lambda_1 = 643$ нм будет проходить через эту систему с максимальной интенсивностью, а свет с $\lambda_2 = 564$ нм будет сильно ослаблен? Разность показателей преломления обыкновенных и необыкновенных лучей для обеих длин волн считать равной $n_e - n_o = 0{,}0090$.

5.184. Между двумя скрещенными поляроидами поместили кварцевый клин с преломляющим углом $\theta = 3{,}5°$. Оптическая ось клина параллельна его ребру и составляет угол 45° с главными направлениями поляроидов. При прохождении через эту систему света с $\lambda = 550$ нм наблюдается система интерференционных полос. Ширина каждой полосы $\Delta x = 1{,}0$ мм. Определить разность показателей преломления кварца для необыкновенного и обыкновенного лучей указанной длины волны.

5.185. Естественный монохроматический свет интенсивности I_0 падает на систему из двух поляроидов, между которыми находится кристаллическая пластинка, вырезанная параллельно оптической оси. Пластинка вносит разность фаз δ между обыкновенным и необыкновенным лучами. Показать, что интенсивность света, прошедшего через эту систему,

$$I = {}^1/_2 I_0 [\cos^2(\varphi - \varphi') - \sin 2\varphi \cdot \sin 2\varphi' \cdot \sin^2(\delta/2)],$$

где φ и φ' — углы между оптической осью кристалла и главными направлениями поляроидов. Рассмотреть, в частности, случаи скрещенных и параллельных поляроидов.

5.186. Монохроматический поляризованный по кругу свет падает нормально на кристаллическую пластинку, вырезанную параллельно оптической оси. За пластинкой находится николь, главное направление которого составляет угол φ с оптической осью пластинки. Показать, что интенсивность света, прошедшего через эту систему,

$$I = I_0 (1 + \sin 2\varphi \cdot \sin \delta),$$

где δ — разность фаз между обыкновенным и необыкновенным лучами, которую вносит пластинка.

5.187. Как с помощью поляроида и пластинки в четверть волны, изготовленной из положительного одноосного кристалла ($n_e > n_o$), отличить:

а) свет левополяризованный по кругу от правополяризованного;

б) естественный свет от поляризованного по кругу и от смеси естественного света с поляризованным по кругу?

5.188. Свет с длиной волны λ падает на систему из скрещенных поляризатора $П$ и анализатора $А$, между которыми находится компенсатор Бабине $К$ (рис. 5.33). Компенсатор состоит из двух кварцевых клиньев, оптическая ось одного из которых параллельна ребру клина, другого — перпендикулярна к нему. Главные направления поляризатора и анализатора составляют угол 45° с оптическими осями компенсатора. Известны также преломляющий угол θ клиньев ($\theta \ll 1$) и разность показателей преломления кварца $n_e - n_o$. При введении исследуемого двупреломляющего образца $О$ (его оптическая ось ориентирована так, как показано на рисунке) наблюдаемые интерференционные полосы сдвинулись вверх на δx мм. Найти:

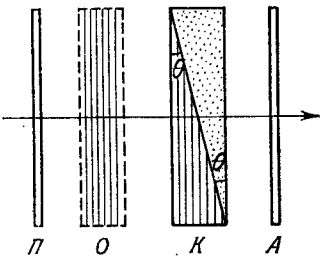


Рис. 5.33.

а) ширину интерференционной полосы Δx;

б) величину и знак оптической разности хода обыкновенного и необыкновенного лучей, которую вносит образец $О$.

5.189. Вычислить с помощью таблиц приложения разность показателей преломления кварца для право- и левополяризованного по кругу света с длиной волны $\lambda = 589{,}5$ нм.

5.190. Линейно поляризованный свет с длиной волны 0,59 мкм падает на трехгранную кварцевую призму $П$ (рис. 5.34) с преломляющим углом $\theta = 30°$. В призме свет распространяется вдоль оптической оси, направление которой показано штриховкой. За поляроидом $Р$ наблюдают систему светлых и темных полос, ширина которых $\Delta x = 15{,}0$ мм. Найти постоянную вращения кварца, а также характер распределения интенсивности света за поляроидом.

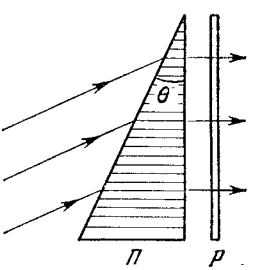


Рис. 5.34.

5.191. Естественный монохроматический свет падает на систему из двух скрещенных николей, между которыми находится кварцевая пластинка, вырезанная перпендикулярно к оптической оси. Найти минимальную толщину пластинки, при которой эта система будет пропускать $\eta = 0{,}30$ светового потока, если постоянная вращения кварца $\alpha = 17$ угл.град/мм.

5.192. Свет проходит через систему из двух скрещенных николей, между которыми расположена кварцевая пластинка, вырезанная перпендикулярно к оптической оси. Определить минимальную толщину пластинки, при которой свет с длиной волны 436 нм будет полностью задерживаться этой системой, а свет с длиной волны 497 нм — пропускаться наполовину. Постоянная вращения кварца для этих длин волн равна соответственно 41,5 и 31,1 угл.град/мм.

5.193. Линейно поляризованный свет с длиной волны 589 нм проходит вдоль оси цилиндрического стеклянного сосуда, заполненного слегка замутненным раствором сахара с концентрацией 500 г/л. При наблюдении сбоку видна система винтообразных полос, причем расстояние между соседними темными полосами вдоль оси равно 50 см. Объяснить возникновение полос и определить удельную постоянную вращения раствора.

5.194. Ячейку Керра поместили между двумя скрещенными николями так, что направление электрического поля **E** в конденсаторе образует угол 45° с главными направлениями николей. Конденсатор имеет длину $l = 10$ см и заполнен нитробензолом. Через систему проходит свет с $\lambda = 0{,}50$ мкм. Имея в виду, что в данном случае постоянная Керра $B = 2{,}2 \cdot 10^{-10}$ см/В^2, определить:

а) минимальную напряженность электрического поля E в конденсаторе, при которой интенсивность света, прошедшего через эту систему, не будет зависеть от поворота заднего николя;

б) число прерываний света в одну секунду, если на конденсатор подать синусоидальное напряжение с частотой $\nu = 10$ МГц и амплитудным значением напряженности $E_m = 50$ кВ/см.

Примечание. Постоянной Керра называют коэффициент B в формуле $n_e - n_o = B\lambda E^2$.

5.195. Монохроматический плоскополяризованный свет с круговой частотой ω проходит через вещество вдоль однородного магнитного поля с напряженностью H. Найти разность показателей преломления для право- и левополяризованных по кругу компонент светового пучка, если постоянная Верде равна V.

5.196. Некоторое вещество поместили в продольное магнитное поле соленоида, расположенного между двумя полюсами. Длина трубки с веществом $l = 30$ см. Найти постоянную Верде, если при напряженности поля $H = 56{,}5$ кА/м угол поворота плоскости поляризации $\varphi_1 = +5°10'$ для одного направления поля и $\varphi_2 = -3°20'$ для противоположного направления поля.

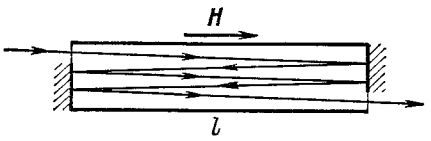


Рис. 5.35.

5.197. Узкий пучок плоскополяризованного света проходит через правовращающее положительное вещество, находящееся в продольном магнитном поле, как показано на рис. 5.35. Найти угол, на который повернется плоскость поляризации вышедшего пучка, если длина трубки с веществом равна l,

его постоянная вращения α, постоянная Верде V и напряженность магнитного поля H.

5.198. Трубка с бензолом длины $l = 26$ см находится в продольном магнитном поле соленоида, расположенного между двумя поляроидами. Угол между главными направлениями поляроидов равен 45°. Найти минимальную напряженность магнитного поля, при которой свет с длиной волны 589 нм будет проходить через эту систему только в одном направлении (оптический вентиль). Как будет вести себя этот оптический вентиль, если изменить направление данного магнитного поля на противоположное?

5.199. Опыт показывает, что телу, облучаемому поляризованным по кругу светом, сообщается вращательный момент (эффект Садовского). Это связано с тем, что данный свет обладает моментом импульса, плотность потока которого в вакууме $M = I/\omega$, где I — интенсивность света, ω — его круговая частота колебаний. Пусть поляризованный по кругу свет с длиной волны $\lambda = 0{,}70$ мкм падает нормально на однородный черный диск массы $m = 10$ мг, который может свободно вращаться вокруг своей оси. Через сколько времени его угловая скорость станет $\omega_0 = 1{,}0$ рад/с, если $I = 10$ Вт/см^2?

5.5. Дисперсия и поглощение света

● Согласно элементарной теории дисперсии диэлектрическая проницаемость вещества:

$$\varepsilon = 1 + \sum_k \frac{n_k e^2/m\varepsilon_0}{\omega_{0k}^2 - \omega^2}, \tag{5.5а}$$

где n_k — концентрация электронов с собственной частотой ω_{0k}.

● Связь между показателем преломления и диэлектрической проницаемостью вещества:

$$n = \sqrt{\varepsilon}. \tag{5.5б}$$

● Фазовая v и групповая u скорости:

$$v = \frac{\omega}{k}, \quad u = \frac{d\omega}{dk}. \tag{5.5в}$$

● Формула Рэлея:

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \tag{5.5г}$$

● Закон ослабления узкого пучка электромагнитного излучения:

$$I = I_0 e^{-\mu d}, \tag{5.5д}$$

где $\mu = \varkappa + \varkappa'$, μ, $\varkappa$, $\varkappa'$ — линейные показатели ослабления, поглощения и рассеяния.

5.200. Свободный электрон находится в поле монохроматической световой волны. Интенсивность света $I = 150$ Вт/м^2, его частота $\omega = 3{,}4 \cdot 10^{15}$ рад/с. Найти:

а) амплитуду колебаний электрона и амплитуду его скорости;

б) отношение $F_м/F_э$, где $F_м$ и $F_э$ — амплитудные значения сил, действующих на электрон со стороны магнитной и электрической составляющих поля световой волны; показать также, что это отношение равно $^1/_2\ v/c$, где v — амплитуда скорости электрона, c — скорость света.

Указание. В уравнении движения электрона можно не учитывать действие магнитной составляющей поля (как будет видно из расчета, оно пренебрежимо мало).

5.201. Электромагнитная волна с частотой ω распространяется в разреженной плазме. Концентрация свободных электронов в плазме равна n_0. Пренебрегая взаимодействием волны с ионами плазмы, найти зависимость:

а) диэлектрической проницаемости плазмы от частоты;

б) фазовой скорости электромагнитной волны от ее длины волны λ в плазме.

5.202. Найти концентрацию свободных электронов ионосферы, если для радиоволн с частотой $\nu = 100$ МГц ее показатель преломления $n = 0{,}90$.

5.203. Имея в виду, что для достаточно жестких рентгеновских лучей электроны вещества можно считать свободными, определить, на сколько отличается от единицы показатель преломления графита для рентгеновских лучей с длиной волны в вакууме $\lambda = 50$ пм.

5.204. Электрон, на который действует квазиупругая сила kx и «сила трения» $\gamma\dot{x}$, находится в поле электромагнитного излучения. E-составляющая поля — меняется во времени по закону $E = E_0 \cos \omega t$. Пренебрегая действием магнитной составляющей поля, найти:

а) уравнение движения электрона;

б) среднюю мощность, поглощаемую электроном; частоту, при которой она будет максимальна, и выражение для максимальной средней мощности.

5.205. В ряде случаев диэлектрическая проницаемость вещества оказывается величиной комплексной или отрицательной и показатель преломления — соответственно комплексным ($n' = n + i\varkappa$) или чисто мнимым ($n' = i\varkappa$). Написать для этих случаев уравнение плоской волны и выяснить физический смысл таких показателей преломления.

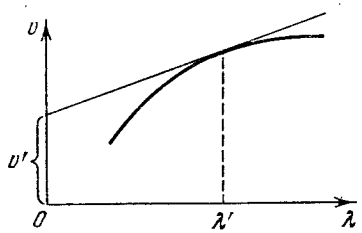


Рис. 5.36.

5.206. При зондировании разреженной плазмы радиоволнами различных частот обнаружили, что радиоволны с $\lambda > \lambda_0 = 0{,}75$ м испытывают полное внутреннее отражение. Найти концентрацию свободных электронов в этой плазме.

5.207. Исходя из определения групповой скорости u, получить формулу Рэлея (5.5г). Показать также, что u вблизи $\lambda = \lambda'$ равна отрезку v', отсекаемому касательной к кривой $v(\lambda)$ в точке λ' (рис. 5.36).

5.208. Найти зависимость между групповой u и фазовой v скоростями для следующих законов дисперсии:

а) $v \sim 1/\sqrt{\lambda}$;

б) $v \sim k$;

в) $v \sim 1/\omega^2$.

Здесь λ, k и ω — длина волны, волновое число и круговая частота.

5.209. В некоторой среде связь между групповой и фазовой скоростями электромагнитной волны имеет вид $uv = c^2$, где c — скорость света в вакууме. Найти зависимость диэлектрической проницаемости этой среды от частоты волны, $\varepsilon(\omega)$.

5.210. Показатель преломления сероуглерода для света с длинами волн 509, 534 и 589 нм равен соответственно 1,647, 1,640 и 1,630. Вычислить фазовую и групповую скорости света вблизи $\lambda = 534$ нм.

5.211. Плоский световой импульс распространяется в среде, где фазовая скорость v линейно зависит от длины волны λ по закону $v = a + b\lambda$, a и b — некоторые положительные постоянные. Показать, что в такой среде форма произвольного светового импульса будет восстанавливаться через промежуток времени $\tau = 1/b$.

5.212. Пучок естественного света интенсивности I_0 падает на систему из двух скрещенных николей, между которыми находится трубка с некоторым раствором в продольном магнитном поле напряженности H. Длина трубки l, линейный показатель поглощения раствора $\varkappa$ и постоянная Верде V. Найти интенсивность света, прошедшего через эту систему.

5.213. Плоская монохроматическая световая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на плоскопараллельную пластинку, коэффициент отражения каждой поверхности которой равен ρ. Учтя многократные отражения, найти интенсивность прошедшего света, если:

а) пластинка идеально прозрачная (поглощение отсутствует);

б) линейный показатель поглощения равен $\varkappa$, а толщина пластинки d.

5.214. Из некоторого вещества изготовили две пластинки: одну толщиной $d_1 = 3{,}8$ мм, другую — $d_2 = 9{,}0$ мм. Введя поочередно эти пластинки в пучок монохроматического света, обнаружили, что первая пластинка пропускает $\tau_1 = 0{,}84$ светового потока, вторая — $\tau_2 = 0{,}70$. Найти линейный показатель поглощения этого вещества. Свет падает нормально. Вторичными отражениями пренебречь.

5.215. Монохроматический пучок проходит через стопу из $N = 5$ одинаковых плоскопараллельных стеклянных пластинок каждая толщиной $l = 0{,}50$ см. Коэффициент отражения на каждой поверхности пластинок $\rho = 0{,}050$. Отношение интенсивности света, прошедшего через эту стопу пластинок, к интенсивности падающего света $\tau = 0{,}55$. Пренебрегая вторичными отражениями света, определить показатель поглощения данного стекла.

5.216. Монохроматический пучок света падает нормально на поверхность плоскопараллельной пластины толщины l. Показатель поглощения вещества пластины линейно изменяется вдоль нормали к ее поверхности от значения $\varkappa_1$ до $\varkappa_2$. Коэффициент отражения от каждой поверхности пластины равен ρ. Пренебрегая вторичными отражениями, определить коэффициент пропускания такой пластины.

5.217. Пучок света интенсивности I_0 падает нормально на плоскопараллельную прозрачную пластинку толщины l. Пучок содержит все длины волн в диапазоне от λ_1 до λ_2 одинаковой спектральной интенсивности. Определить интенсивность прошедшего через пластинку пучка, если в этом диапазоне длин волн показатель поглощения линейно зависит от λ в пределах от $\varkappa_1$ до $\varkappa_2$ и коэффициент отражения каждой поверхности равен ρ. Вторичными отражениями пренебречь.

5.218. Светофильтр представляет собой пластинку толщины d с показателем поглощения, зависящим от длины волны λ по формуле

$$\varkappa(\lambda) = \alpha\,(1-\lambda/\lambda_0)^2 \text{ см}^{-1},$$

где α и λ_0 — некоторые постоянные. Найти ширину полосы пропускания этого светофильтра $\Delta\lambda$ — ширину, при которой ослабление света на краях полосы в η раз больше, чем ослабление при λ_0. Коэффициент отражения от поверхностей светофильтра считать одинаковым для всех длин волн.

5.219. Точечный монохроматический источник, испускающий световой поток Φ, находится в центре сферического слоя вещества, внутренний радиус которого равен a, наружный — b. Линейный показатель поглощения вещества равен $\varkappa$, коэффициент отражения поверхностей — ρ. Пренебрегая вторичными отражениями, найти интенсивность света на выходе из этого вещества.

5.220. Во сколько раз уменьшится интенсивность узкого пучка рентгеновского излучения с длиной волны 20 пм при прохождении свинцовой пластинки толщины $d = 1{,}0$ мм, если массовый показатель ослабления для данной длины волны излучения $\mu/\rho = 3{,}6$ см^2/г?

5.221. Узкий пучок рентгеновского излучения с длиной волны 62 пм проходит через алюминиевый экран толщины 2,6 см. Какой толщины надо взять свинцовый экран, чтобы он ослаблял данный пучок в такой же степени? Массовые показатели ослабления алюминия и свинца для этого излучения равны соответственно 3,48 и 72,0 см^2/г.

5.222. Найти для алюминия толщину слоя половинного ослабления узкого пучка монохроматического рентгеновского излучения, если соответствующий массовый показатель ослабления $\mu/\rho = 0{,}32$ см^2/г.

5.223. Сколько слоев половинного ослабления в пластинке, которая уменьшает интенсивность узкого пучка рентгеновского излучения в $\eta = 50$ раз?

5.6. Оптика движущихся источников

● Эффект Доплера при $v \ll c$:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{v}{c}\cos\vartheta, \tag{5.6а}$$

где v — скорость источника, ϑ — угол между направлением движения источника и линией наблюдения.

● Эффект Доплера в общем случае:

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\vartheta}, \tag{5.6б}$$

где $\beta = v/c$.

● При $\vartheta = 0$ эффект Доплера называют продольным, при $\vartheta = \pi/2$ — поперечным.

● Эффект Вавилова — Черенкова:

$$\cos\vartheta = \frac{c}{nv}, \tag{5.6в}$$

где ϑ — угол между направлением распространения излучения и вектором скорости $\mathbf{v}$ частицы.

5.224. В опыте Физо по определению скорости света расстояние между зубчатым колесом и зеркалом $l = 7{,}0$ км, число зубцов $z = 720$. Два последовательных исчезновения света наблюдали при скоростях вращения колеса $n_1 = 283$ об/с и $n_2 = 313$ об/с. Найти скорость света.

5.225. Источник света движется со скоростью v относительно приемника. Показать, что при $v \ll c$ относительное изменение частоты света определяется формулой (5.6а).

5.226. Одна из спектральных линий, испускаемых возбужденными ионами He^+, имеет длину волны $\lambda = 410$ нм. Найти доплеровское смещение $\Delta\lambda$ этой линии, если ее наблюдать под углом $\vartheta = 30°$ к пучку движущихся ионов с кинетической энергией $T = 10$ МэВ.

5.227. При наблюдении спектральной линии $\lambda = 0{,}59$ мкм в направлениях на противоположные края солнечного диска на его экваторе обнаружили различие в длинах волн на $\delta\lambda = 8{,}0$ пм. Найти период вращения Солнца вокруг собственной оси.

5.228. Эффект Доплера позволил открыть двойные звезды столь удаленные, что разрешение их с помощью телескопа оказалось невозможным. Спектральные линии таких звезд периодически становятся двойными, из чего можно предположить, что источником являются две звезды, обращающиеся вокруг их центра масс. Считая массы обеих звезд одинаковыми, найти расстояние между ними и их массы, если максимальное расщепление спектральных линий равно $(\Delta\lambda/\lambda)_m = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$, причем оно возникает через каждые $\tau = 30$ дней.

5.229. Плоская электромагнитная волна частоты ω_0 падает нормально на поверхность зеркала, движущегося навстречу с релятивистской скоростью V. Воспользовавшись формулой Доплера,

найти частоту отраженной волны. Упростить полученное выражение для случая $V \ll c$.

5.230. Радиолокатор работает на длине волны $\lambda = 50{,}0$ см. Определить скорость приближающегося самолета, если частота биений между сигналом передатчика и сигналом, отраженным от самолета, в месте расположения локатора равна $\Delta\nu = 1{,}00$ кГц.

5.231. Имея в виду, что фаза волны $\omega t - kx$ есть инвариант, т. е. не меняется при переходе от одной инерциальной системы к другой, определить, как преобразуются входящие в нее частота ω и волновое число k. Рассмотреть одномерный случай.

5.232. С какой скоростью удаляется от нас некоторая туманность, если известно, что линия водорода $\lambda = 434$ нм в ее спектре смещена в красную сторону на 130 нм?

5.233. С какой скоростью должна была бы двигаться автомашина, чтобы красный свет светофора ($\lambda \approx 0{,}70$ мкм) превратился в зеленый ($\lambda' \approx 0{,}55$ мкм)?

5.234. По некоторой прямой движутся в одном направлении наблюдатель со скоростью $v_1 = {}^1/_2\, c$ и впереди него источник монохроматического света со скоростью $v_2 = {}^3/_4 c$. Собственная частота света равна ω_0. Найти частоту света, которую зафиксирует наблюдатель.

5.235. Одна из спектральных линий атомарного водорода имеет длину волны $\lambda = 656{,}3$ нм. Найти доплеровское смещение этой линии $\Delta\lambda$, если ее наблюдать под прямым углом к пучку атомов водорода с кинетической энергией $T = 1{,}0$ МэВ (поперечный доплер-эффект).

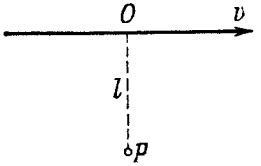


Рис. 5.37.

5.236. Источник, испускающий электромагнитные сигналы с собственной частотой $\omega_0 = 3{,}0 \cdot 10^{10}$ рад/с, движется с постоянной скоростью $v = 0{,}80\, c$ по прямой, отстоящей от неподвижного наблюдателя P на расстоянии l (рис. 5.37). Найти частоту сигналов, воспринимаемых наблюдателем в момент, когда:

а) источник окажется в точке O;

б) наблюдатель увидит его в точке O.

5.237. Узкий пучок электронов проходит непосредственно над поверхностью металлического зеркала, на котором нанесена дифракционная решетка с периодом $d = 2{,}0$ мкм. Электроны движутся со скоростью v, близкой к c, перпендикулярно к штрихам решетки. При этом наблюдается видимое излучение — траектория электронов имеет вид полоски, окраска которой меняется в зависимости от угла наблюдения ϑ (рис. 5.38). Объяснить это явление. Найти длину волны наблюдаемого излучения при $\vartheta = 45°$.

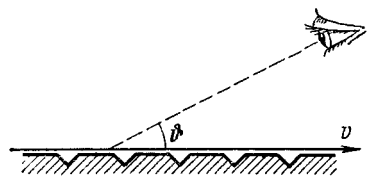


Рис. 5.38.

5.238. Газ состоит из атомов массы m, находящихся в термодинамическом равновесии при температуре T. Пусть ω_0 — собственная частота излучаемого атомами света.

а) Показать, что спектральное распределение излучаемого света определяется формулой

$$I_\omega = I_0 e^{-a(1-\omega/\omega_0)^2},$$

(I_0 — спектральная интенсивность, соответствующая частоте ω_0, $a = mc^2/2kT$).

б) Найти относительную ширину $\Delta\omega/\omega_0$ данной спектральной линии, т. е. ширину линии между частотами, при которых $I_\omega = I_0/2$.

5.239. В среде, движущейся с постоянной скоростью $V \ll c$ относительно инерциальной K-системы, распространяется плоская электромагнитная волна. Найти скорость этой волны в K-системе, если показатель преломления среды равен n и направление распространения волны совпадает с направлением движения среды.

5.240. Аберрация света заключается в том, что при наблюдении звезды кажутся смещенными от истинного положения на небосводе (из-за движения Земли по орбите). Направление на звезду в плоскости эклиптики периодически меняется, и звезда совершает кажущиеся колебания в пределах угла $\delta\vartheta = 41''$. Найти скорость Земли на орбите.

5.241. Показать, что преобразование угла ϑ между направлением распространения света и осью x при переходе от K- к K'-системе отсчета определяется формулой

$$\cos\vartheta' = \frac{\cos\vartheta - \beta}{1 - \beta\cos\vartheta},$$

где $\beta = V/c$, V — скорость K'-системы относительно K-системы. Оси x и x' обеих систем отсчета совпадают.

5.242. Найти угол полураствора конуса, в котором будут видны звезды, расположенные в полусфере для земного наблюдателя, если двигаться относительно Земли с релятивистской скоростью V, отличающейся от скорости света на 1,0%. Воспользоваться формулой из предыдущей задачи.

5.243. Найти условия, при которых заряженная частица, движущаяся равномерно в среде с показателем преломления n, будет излучать свет (эффект Вавилова — Черенкова). Найти также направление этого излучения.

Указание. Рассмотреть интерференцию колебаний, возбуждаемых частицей в разные моменты времени.

5.244. Найти наименьшие значения кинетической энергии электрона и протона, при которых возникает черенковское излучение в среде с показателем преломления $n = 1{,}60$. Для каких частиц это значение кинетической энергии $T_{\text{мин}} = 29{,}6$ МэВ?

5.245. Определить кинетическую энергию электронов, которые в среде с показателем преломления $n = 1{,}50$ излучают свет под углом $\vartheta = 30°$ к направлению своего движения.

5.7. Тепловое излучение. Квантовая природа света

● Энергетическая светимость:

$$M_э = \frac{c}{4} u, \tag{5.7а}$$

где u — объемная плотность энергии теплового излучения.

● Формула Вина и закон смещения Вина:

$$u_\omega = \omega^3 F(\omega/T), \quad T\lambda_m = b, \tag{5.7б}$$

где λ_m — длина волны, соответствующая максимуму функции u_λ.

● Закон Стефана — Больцмана:

$$M_э = \sigma T^4, \tag{5.7в}$$

где σ — постоянная Стефана — Больцмана.

● Формула Планка:

$$u_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \tag{5.7г}$$

● Формула Эйнштейна для фотоэффекта:

$$\hbar\omega = A + \frac{mv^2_{макс}}{2}. \tag{5.7д}$$

● Эффект Комптона:

$$\Delta\lambda = 2\pi\lambda_C (1 - \cos\vartheta), \tag{5.7е}$$

где $\lambda_C = \hbar/mc$ — комптоновская длина волны.

5.246. Показать с помощью формулы Вина, что

а) наиболее вероятная частота излучения $\omega_{вер} \sim T$;

б) максимальная спектральная плотность теплового излучения $(u_\omega)_{макс} \sim T^3$;

в) энергетическая светимость $M_э \sim T^4$.

5.247. Имеется два абсолютно черных источника теплового излучения. Температура одного из них $T_1 = 2500$ К. Найти температуру другого источника, если длина волны, отвечающая максимуму его испускательной способности, на $\Delta\lambda = 0{,}50$ мкм больше длины волны, соответствующей максимуму испускательной способности первого источника.

5.248. Энергетическая светимость абсолютно черного тела $M_э = 3{,}0$ Вт/см^2. Определить длину волны, отвечающую максимуму испускательной способности этого тела.

5.249. Излучение Солнца по своему спектральному составу близко к излучению абсолютно черного тела, для которого максимум испускательной способности приходится на длину волны 0,48 мкм. Найти массу, теряемую Солнцем ежесекундно за счет излучения. Оценить время, за которое масса Солнца уменьшится на 1%.

5.250. Найти температуру полностью ионизованной водородной плазмы плотностью $\rho = 0{,}10$ г/см^3, при которой давление теплового излучения равно газокинетическому давлению частиц плазмы.

Иметь в виду, что давление теплового излучения $p = u/3$, где u — объемная плотность энергии излучения, и что при высоких температурах вещества подчиняются уравнению состояния идеальных газов.

5.251. Медный шарик диаметра $d = 1{,}2$ см поместили в откачанный сосуд, температура стенок которого поддерживается близкой к абсолютному нулю. Начальная температура шарика $T_0 = 300$ К. Считая поверхность шарика абсолютно черной, найти, через сколько времени его температура уменьшится в $\eta = 2{,}0$ раза.

5.252. Имеются две полости (рис. 5.39) с малыми отверстиями одинаковых диаметров $d = 1{,}0$ см и абсолютно отражающими наружными поверхностями. Расстояние между отверстиями $l = 10$ см. В полости *1* поддерживается постоянная температура $T_1 = 1700$ К. Вычислить установившуюся температуру в полости *2*.

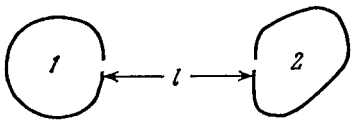


Рис. 5.39.

У к а з а н и е. Иметь в виду, что абсолютно черное тело является косинусным излучателем.

5.253. Полость объемом $V = 1{,}0$ л заполнена тепловым излучением при температуре $T = 1000$ К. Найти:

а) теплоемкость C_V; б) энтропию S этого излучения.

5.254. Считая, что спектральное распределение энергии теплового излучения подчиняется формуле Вина $u(\omega, T) = A\omega^3 e^{-a\omega/T}$, где $a = 7{,}64$ пс·К/рад, найти для температуры $T = 2000$ К наиболее вероятную:

а) частоту излучения; б) длину волны излучения.

5.255. Получить с помощью формулы Планка приближенные выражения для объемной спектральной плотности излучения u_ω:

а) в области, где $\hbar\omega \ll kT$ (формула Рэлея — Джинса);

б) в области, где $\hbar\omega \gg kT$ (формула Вина).

5.256. Преобразовать формулу Планка для объемной спектральной плотности излучения u_ω от переменной ω к переменным ν (линейная частота) и λ (длина волны).

5.257. Найти с помощью формулы Планка мощность излучения единицы поверхности абсолютно черного тела, приходящегося на узкий интервал длин волн $\Delta\lambda = 1{,}0$ нм вблизи максимума спектральной плотности излучения, при температуре тела $T = 3000$ К.

5.258. На рис. 5.40 показан график функции $\psi(x)$, которая характеризует относительную долю общей мощности теплового излучения, приходящуюся на спектральный интервал от 0 до x. Здесь $x = \lambda/\lambda_m$ (λ_m — длина волны, отвечающая максимальной спектральной плотности излучения).

Найти с помощью этого графика:

а) длину волны, которая делит спектр излучения на две энергетически равные части при температуре 3700 К;

б) долю общей мощности излучения, которая приходится на видимую часть спектра (0,40—0,76 мкм) при температуре 5000 К;

в) во сколько раз увеличится мощность излучения в области длин волн $\lambda > 0{,}76$ мкм при возрастании температуры от 3000 до 5000 К.

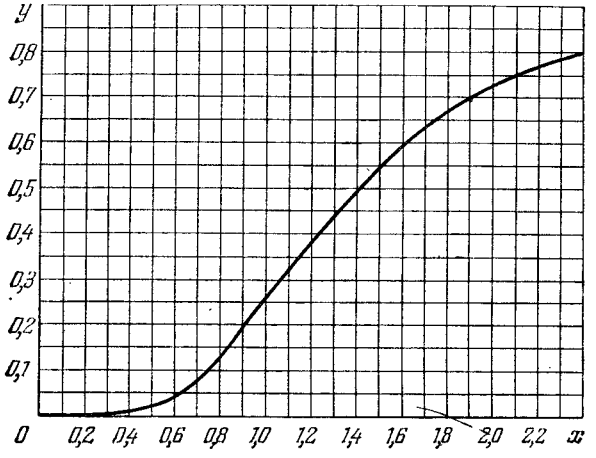


Рис. 5.40.

5.259. Найти с помощью формулы Планка выражения, определяющие число фотонов в 1 см^3 полости при температуре T в спектральных интервалах $(\omega, \omega + d\omega)$ и $(\lambda, \lambda + d\lambda)$.

5.260. Точечный изотропный источник испускает свет с $\lambda = 589$ нм. Световая мощность источника $P = 10$ Вт. Найти:

а) среднюю плотность потока фотонов на расстоянии $r = 2{,}0$ м от источника;

б) расстояние от источника до точки, где средняя концентрация фотонов $n = 100$ см$^{-3}$.

5.261. Показать с помощью корпускулярных представлений, что импульс, переносимый в единицу времени плоским световым потоком, не зависит от его спектрального состава, а определяется только потоком энергии $\Phi_э$.

5.262. Лазер излучил в импульсе длительностью $\tau = 0{,}13$ мс пучок света с энергией $E = 10$ Дж. Найти среднее давление такого светового импульса, если его сфокусировать в пятнышко диаметром $d = 10$ мкм на поверхность, перпендикулярную к пучку, с коэффициентом отражения $\rho = 0{,}50$.

5.263. Короткий импульс света с энергией $E = 7{,}5$ Дж в виде узкого почти параллельного пучка падает на зеркальную пластинку с коэффициентом отражения $\rho = 0{,}60$. Угол падения $\vartheta = 30°$. Определить с помощью корпускулярных представлений импульс, переданный пластинке.

5.264. Плоская световая волна интенсивности $I = 0{,}20$ Вт/см^2 падает на плоскую зеркальную поверхность с коэффициентом отражения $\rho = 0{,}8$. Угол падения $\vartheta = 45°$. Определить с помощью корпускулярных представлений значение нормального давления, которое оказывает свет на эту поверхность.

5.265. Плоская световая волна интенсивности $I = 0{,}70$ Вт/см^2 освещает шар с абсолютно зеркальной поверхностью. Радиус шара $R = 5{,}0$ см. Найти с помощью корпускулярных представлений силу светового давления, испытываемую шаром.

5.266. На оси круглой абсолютно зеркальной пластинки находится точечный изотропный источник, световая мощность которого P. Расстояние между источником и пластинкой в η раз больше ее радиуса. Найти с помощью корпускулярных представлений силу светового давления, испытываемую пластинкой.

5.267. В K-системе отсчета фотон с частотой ω падает нормально на зеркало, которое движется ему навстречу с релятивистской скоростью V. Найти импульс, переданный зеркалу при отражении фотона:

а) в системе отсчета, связанной с зеркалом;

б) в K-системе.

5.268. Небольшое идеально отражающее зеркальце массы $m = 10$ мг подвешено на невесомой нити длины $l = 10$ см. Найти угол, на который отклонится нить, если по нормали к зеркальцу в горизонтальном направлении произвести «выстрел» коротким импульсом лазерного излучения с энергией $E = 13$ Дж. За счет чего зеркальце приобретет кинетическую энергию?

5.269. Фотон с частотой ω_0 испущен с поверхности звезды, масса которой M и радиус R. Найти гравитационное смещение частоты фотона $\Delta\omega/\omega_0$ на очень большом расстоянии от звезды.

5.270. При увеличении напряжения на рентгеновской трубке в $\eta = 1{,}5$ раза длина волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра изменилась на $\Delta\lambda = 26$ пм. Найти первоначальное напряжение на трубке.

5.271. Узкий пучок рентгеновских лучей падает на монокристалл NaCl. Наименьший угол скольжения, при котором еще наблюдается зеркальное отражение от системы кристаллических плоскостей с межплоскостным расстоянием $d = 0{,}28$ нм, равен $\alpha = 4{,}1°$. Каково напряжение на рентгеновской трубке?

5.272. Найти длину волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра, если скорость электронов, подлетающих к антикатоду трубки, $v = 0{,}85c$, где c — скорость света.

5.273. Определить красную границу фотоэффекта для цинка и максимальную скорость фотоэлектронов, вырываемых с его поверхности электромагнитным излучением с длиной волны 250 нм.

5.274. При поочередном освещении поверхности некоторого металла светом с длинами волн $\lambda_1 = 0{,}35$ мкм и $\lambda_2 = 0{,}54$ мкм обнаружили, что соответствующие максимальные скорости фотоэлектронов отличаются друг от друга в $\eta = 2{,}0$ раза. Найти работу выхода с поверхности этого металла.

5.275. До какого максимального потенциала зарядится удаленный от других тел медный шарик при облучении его электромагнитным излучением с длиной волны $\lambda = 140$ нм?

5.276. Найти максимальную кинетическую энергию фотоэлектронов, вырываемых с поверхности лития электромагнитным излучением, напряженность электрической составляющей которого меняется со временем по закону $E = a\,(1 + \cos \omega t) \cos \omega_0 t$, где a — некоторая постоянная, $\omega = 6{,}0 \cdot 10^{14}$ рад/с и $\omega_0 = 3{,}60 \cdot 10^{15}$ рад/с.

5.277. Электромагнитное излучение с длиной волны $\lambda = 0{,}30$ мкм падает на фотоэлемент, находящийся в режиме насыщения. Соответствующая спектральная чувствительность фотоэлемента $J = 4{,}8$ мА/Вт. Найти выход фотоэлектронов, т. е. число фотоэлектронов на каждый падающий фотон.

5.278. Имеется вакуумный фотоэлемент, один из электродов которого цезиевый, другой — медный. Определить максимальную скорость фотоэлектронов, подлетающих к медному электроду, при освещении цезиевого электрода электромагнитным излучением с длиной волны 0,22 мкм, если электроды замкнуть снаружи накоротко.

5.279. Фототок, возникающий в цепи вакуумного фотоэлемента при освещении цинкового электрода электромагнитным излучением с длиной волны 262 нм, прекращается, если подключить внешнее задерживающее напряжение 1,5 В. Найти величину и полярность внешней контактной разности потенциалов данного фотоэлемента.

5.280. Составить выражение для величины, имеющей размерность длины, используя скорость света c, массу частицы m и постоянную Планка $\hbar$. Что это за величина?

5.281. Показать с помощью законов сохранения, что свободный электрон не может полностью поглотить фотон.

5.282. Объяснить следующие особенности комптоновского рассеяния света веществом:

а) независимость смещения $\Delta\lambda$ от природы рассеивающего вещества;

б) увеличение интенсивности смещенной компоненты рассеянного света с уменьшением атомного номера вещества, а также с ростом угла рассеяния;

в) наличие несмещенной компоненты в рассеянном излучении.

5.283. Узкий пучок монохроматического рентгеновского излучения падает на рассеивающее вещество. При этом длины волн излучения, рассеянного под углами $\vartheta_1 = 60°$ и $\vartheta_2 = 120°$, отличаются друг от друга в $\eta = 2{,}0$ раза. Считая, что рассеяние происходит на свободных электронах, найти длину волны падающего излучения.

5.284. Фотон с энергией $\hbar\omega = 1{,}00$ МэВ рассеялся на свободном покоившемся электроне. Найти кинетическую энергию электрона отдачи, если в результате рассеяния длина волны фотона изменилась на $\eta = 25\%$.

5.285. Фотон с длиной волны $\lambda = 6{,}0$ пм рассеялся под прямым углом на покоившемся свободном электроне. Найти:

а) частоту рассеянного фотона;

б) кинетическую энергию электрона отдачи.

5.286. Фотон с энергией $\hbar\omega = 250$ кэВ рассеялся под углом $\vartheta = 120°$ на первоначально покоившемся свободном электроне. Определить энергию рассеянного фотона.

5.287. Фотон с импульсом $p = 1{,}02$ МэВ/c, где c — скорость света, рассеялся на покоившемся свободном электроне, в результате чего импульс фотона стал $p' = 0{,}255$ МэВ/c. Под каким углом рассеялся фотон?

5.288. Фотон рассеялся под углом $\vartheta = 120°$ на покоившемся свободном электроне, в результате чего электрон получил кинетическую энергию $T = 0{,}45$ МэВ. Найти энергию фотона до рассеяния.

5.289. Найти длину волны рентгеновского излучения, если максимальная кинетическая энергия комптоновских электронов $T_{\text{макс}} = 0{,}19$ МэВ.

5.290. Фотон с энергией $\hbar\omega = 0{,}15$ МэВ рассеялся на покоившемся свободном электроне, в результате чего его длина волны изменилась на $\Delta\lambda = 3{,}0$ пм. Найти угол, под которым вылетел комптоновский электрон.

5.291. Фотон с энергией, в $\eta = 2{,}0$ раза превышающей энергию покоя электрона, испытал лобовое столкновение с покоившимся свободным электроном. Найти радиус кривизны траектории электрона отдачи в магнитном поле $B = 0{,}12$ Т. Предполагается, что электрон отдачи движется перпендикулярно к направлению поля.

5.292. Фотон, испытав столкновение с релятивистским электроном, рассеялся под углом $\vartheta = 60°$, а электрон остановился. Найти комптоновское смещение длины волны рассеянного фотона.

АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА *)

6.1. Рассеяние частиц. Атом Резерфорда—Бора

● Угол ϑ, на который рассеивается заряженная частица кулоновским полем неподвижного ядра, определяется формулой:

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}=\frac{q_1q_2}{2bT}, \tag{6.1а}$$

где q_1 и q_2 — заряды частицы и ядра, b — прицельный параметр, T — кинетическая энергия налетающей частицы.

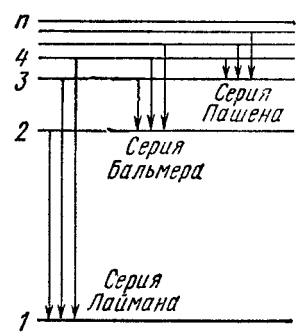


Рис. 6.1.

● Формула Резерфорда. Относительное число частиц, рассеянных в элементарном телесном угле $d\Omega$ под углом ϑ к первоначальному направлению их движения:

$$\frac{dN}{N}=n\left(\frac{q_1q_2}{4T}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^4(\vartheta/2)}, \tag{6.1б}$$

где n — число ядер фольги на единицу ее поверхности, $d\Omega=\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$.

● Обобщенная формула Бальмера (рис. 6.1):

$$\omega=RZ^2\left(\frac{1}{n_1^2}-\frac{1}{n_2^2}\right), \quad R=\frac{me^4}{2\hbar^3}, \tag{6.1в}$$

где ω — частота перехода (рад/с) между энергетическими уровнями с квантовыми числами n_1 и n_2, R — постоянная Ридберга, Z — порядковый номер водородоподобного иона.

6.1. Вычислить согласно модели Томсона радиус атома водорода и длину волны испускаемого им света, если известно, что энергия ионизации атома $E = 13{,}6$ эВ.

6.2. Альфа-частица с кинетической энергией 0,27 МэВ рассеялась золотой фольгой на угол 60°. Найти соответствующее значение прицельного параметра.

6.3. На какое минимальное расстояние приблизится α-частица с кинетической энергией $T = 0{,}40$ МэВ (при лобовом соударении):

а) к покоящемуся тяжелому ядру атома свинца;

б) к первоначально покоившемуся легкому свободному ядру Li^7?

*) В этой части все формулы даны в гауссовой системе.

6.4. Альфа-частица с кинетической энергией $T = 0{,}50$ МэВ рассеялась под углом $\vartheta = 90°$ на кулоновском поле неподвижного ядра атома ртути. Найти:

а) наименьший радиус кривизны ее траектории;

б) минимальное расстояние, на которое она сблизилась с ядром.

6.5. Протон с кинетической энергией T и прицельным параметром b рассеялся на кулоновском поле неподвижного ядра атома золота. Найти импульс, переданный данному ядру в результате рассеяния.

6.6. Протон с кинетической энергией $T = 10$ МэВ пролетает на расстоянии $b = 10$ пм от свободного покоившегося электрона. Найти энергию, которую получит электрон, считая, что траектория протона прямолинейная и за время пролета электрон остается практически неподвижным.

6.7. Частица с кинетической энергией T рассеивается на сферической потенциальной яме радиуса R и глубины U_0, т. е. полем, в котором потенциальная энергия частицы имеет вид

$$U = \begin{cases} 0 & \text{при } r > R, \\ -U_0 & \text{при } r < R, \end{cases}$$

где r — расстояние от центра ямы. Найти связь между прицельным параметром частицы b и углом ϑ, на который она отклонится от первоначального направления движения.

6.8. Неподвижный шар радиуса R облучают параллельным потоком частиц, радиус которых r. Считая столкновение частицы с шаром упругим, найти:

а) угол ϑ отклонения частицы в зависимости от ее прицельного параметра b;

б) относительную долю частиц, которые после столкновения с шаром рассеялись в интервале углов от ϑ до $\vartheta + d\vartheta$;

в) вероятность того, что частица, испытавшая соударение с шаром, рассеется в переднюю полусферу ($\vartheta < \pi/2$).

6.9. Узкий пучок α-частиц с кинетической энергией 1,0 МэВ падает нормально на платиновую фольгу толщины 1,0 мкм. Наблюдение рассеянных частиц ведется под углом 60° к направлению падающего пучка при помощи счетчика с круглым входным отверстием площади 1,0 см^2, которое расположено на расстоянии 10 см от рассеивающего участка фольги. Какая доля рассеянных α-частиц падает на отверстие счетчика?

6.10. Узкий пучок α-частиц с кинетической энергией $T = 0{,}50$ МэВ и интенсивностью $I = 5{,}0 \cdot 10^5$ част./с падает нормально на золотую фольгу. Найти ее толщину, если на расстоянии $r = 15$ см от рассеивающего участка под углом $\vartheta = 60°$ к направлению падающего пучка плотность потока рассеянных частиц $J = 40$ част./(см$^2 \cdot$ с).

6.11. Узкий пучок α-частиц падает нормально на серебряную фольгу. За ней установлен счетчик, регистрирующий частицы,

рассеянные в соответствии с формулой Резерфорда. При замене серебряной фольги на платиновую той же массовой толщины число регистрируемых в единицу времени α-частиц возросло в $\eta = 1{,}52$ раза. Найти порядковый номер платины, считая, что порядковый номер серебра и массовые числа обоих элементов известны.

6.12. Узкий пучок α-частиц с кинетической энергией $T = 0{,}50$ МэВ падает нормально на золотую фольгу, массовая толщина которой $\rho d = 1{,}5$ мг/см^2. Интенсивность пучка $I_0 = 5{,}0 \cdot 10^5$ част./с. Найти число α-частиц, рассеянных фольгой за $\tau = 30$ мин в интервалах углов:

а) 59—61°; б) свыше $\vartheta_0 = 60°$.

6.13. Узкий пучок протонов, имеющих скорость $v = 6 \cdot 10^6$ м/с, падает нормально на серебряную фольгу толщины $d = 1{,}0$ мкм. Найти вероятность рассеяния протонов в заднюю полусферу ($\vartheta > 90°$).

6.14. Узкий пучок α-частиц с кинетической энергией $T = 600$ кэВ падает нормально на золотую фольгу, содержащую $n = 1{,}1 \cdot 10^{19}$ ядер/см^2. Найти относительное число α-частиц, рассеивающихся под углами $\vartheta < \vartheta_0 = 20°$.

6.15. Узкий пучок протонов с кинетической энергией $T = 1{,}4$ МэВ падает нормально на латунную фольгу, массовая толщина которой $\rho d = 1{,}5$ мг/см^2. Весовое отношение меди и цинка в фольге равно соответственно 7 : 3. Найти относительное число протонов, рассеивающихся на углы свыше $\vartheta_0 = 30°$.

6.16. Найти эффективное сечение ядра атома урана, соответствующее рассеянию α-частиц с кинетической энергией $T = 1{,}5$ МэВ в интервале углов свыше $\vartheta_0 = 60°$.

6.17. Эффективное сечение ядра атома золота, отвечающее рассеянию моноэнергетических α-частиц в интервале углов от 90 до 180°, равно $\Delta\sigma = 0{,}50$ кб. Определить:

а) энергию α-частиц;

б) дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma/d\Omega$ (кб/ср), соответствующее углу $\vartheta = 60°$.

6.18. Согласно классической электродинамике электрон, движущийся с ускорением $\mathbf{w}$, теряет энергию на излучение по закону

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2e^2}{3c^3}\mathbf{w}^2,$$

где e — заряд электрона, c — скорость света. Оценить время, за которое энергия электрона, совершающего колебания, близкие к гармоническим с частотой $\omega = 5 \cdot 10^{15}$ рад/с, уменьшится в $\eta = 10$ раз.

6.19. Воспользовавшись формулой из предыдущей задачи, оценить время, в течение которого электрон, движущийся в атоме водорода по круговой орбите радиуса $r = 50$ пм, упал бы на ядро. Для простоты считать, что вектор $\mathbf{w}$ все время направлен к центру атома.

6.20. Показать, что частота ω фотона, возникающего при переходе электрона между соседними круговыми орбитами водородоподобного иона, удовлетворяет неравенству $\omega_n < \omega < \omega_{n+1}$, где ω_n и ω_{n+1} — частоты обращения электрона вокруг ядра на этих круговых орбитах. Убедиться, что при $n \to \infty$ частота фотона $\omega \to \omega_n$.

6.21. Частица массы m движется по круговой орбите в центрально-симметричном потенциальном поле $U(r) = kr^2/2$. Найти с помощью боровского условия квантования возможные радиусы орбит и уровни энергии этой частицы.

6.22. Вычислить для атома водорода и иона He^+:

а) радиус первой боровской орбиты и скорость электрона на ней;

б) кинетическую энергию и энергию связи электрона в основном состоянии;

в) потенциал ионизации, первый потенциал возбуждения и длину волны резонансной линии ($n' = 2 \to n = 1$).

6.23. Вычислить круговую частоту обращения электрона на второй боровской орбите иона He^+.

6.24. Найти для водородоподобных систем магнитный момент μ_n, соответствующий движению электрона на n-й орбите, а также отношение магнитного момента к механическому μ_n/M_n. Вычислить магнитный момент электрона, находящегося на первой боровской орбите.

6.25. Вычислить индукцию магнитного поля в центре атома водорода, обусловленного движением электрона по первой боровской орбите.

6.26. Рассчитать и изобразить в шкале длин волн спектральные интервалы, в которых заключены серии Лаймана, Бальмера и Пашена для атомарного водорода. Выделить на этой шкале видимую область спектра.

6.27. Какой серии принадлежит спектральная линия атомарного водорода, волновое число которой равно разности волновых чисел следующих двух линий серии Бальмера: 486,1 и 410,2 нм? Какова длина волны этой линии?

6.28. Вычислить для атомарного водорода:

а) длины волн первых трех линий серии Бальмера;

б) минимальную разрешающую способность $\lambda/\delta\lambda$ спектрального прибора, при которой возможно разрешить первые 20 линий серии Бальмера.

6.29. Излучение атомарного водорода падает нормально на дифракционную решетку ширины $l = 6{,}6$ мм. В наблюдаемом спектре под некоторым углом дифракции ϑ оказалась на пределе разрешения (по критерию Рэлея) 50-я линия серии Бальмера. Найти этот угол.

6.30. Какому элементу принадлежит водородоподобный спектр, длины волн линий которого в четыре раза короче, чем у атомарного водорода?

6.31. Сколько спектральных линий будет испускать атомарный водород, который возбуждают на n-й энергетический уровень?

6.32. Какие линии содержит спектр поглощения атомарного водорода в диапазоне длин волн от 94,5 до 130,0 нм?

6.33. Найти квантовое число n, соответствующее возбужденному состоянию иона He^+, если при переходе в основное состояние этот ион испустил последовательно два фотона с длинами волн 108,5 и 30,4 нм.

6.34. Вычислить постоянную Ридберга R, если известно, что для ионов He^+ разность длин волн между головными линиями серий Бальмера и Лаймана $\Delta\lambda = 133{,}7$ нм.

6.35. У какого водородоподобного иона разность длин волн между головными линиями серий Бальмера и Лаймана равна 59,3 нм?

6.36. Найти длину волны головной линии той спектральной серии ионов He^+, у которой интервал между крайними линиями $\Delta\omega = 5{,}18 \cdot 10^{15}$ рад/с.

6.37. Найти энергию связи электрона в основном состоянии водородоподобных ионов, в спектре которых длина волны третьей линии серии Бальмера равна 108,5 нм.

6.38. Энергия связи электрона в основном состоянии атома He равна $E_0 = 24{,}6$ эВ. Найти энергию, необходимую для удаления обоих электронов из этого атома.

6.39. Найти скорость фотоэлектронов, вырываемых электромагнитным излучением с длиной волны $\lambda = 18{,}0$ нм из ионов He^+, которые находятся в основном состоянии и покоятся.

6.40. С какой минимальной кинетической энергией должен двигаться атом водорода, чтобы при неупругом лобовом соударении с другим, покоящимся, атомом водорода один из них оказался способным испустить фотон? Предполагается, что до соударения оба атома находятся в основном состоянии.

6.41. Покоившийся атом водорода испустил фотон, соответствующий головной линии серии Лаймана. Какую скорость приобрел атом?

6.42. В условиях предыдущей задачи найти, на сколько процентов энергия испущенного фотона отличается от энергии соответствующего перехода в атоме водорода.

6.43. Покоящийся ион He^+ испустил фотон, соответствующий головной линии серии Лаймана. Этот фотон вырвал фотоэлектрон из покоящегося атома водорода, который находился в основном состоянии. Найти скорость фотоэлектрона.

6.44. Найти скорость возбужденных атомов водорода, если при наблюдении их излучения под углом $\vartheta = 45°$ к направлению движения данных атомов длина волны головной линии серии Лаймана оказалась смещенной на $\Delta\lambda = 0{,}20$ нм.

6.45. Согласно постулату Бора — Зоммерфельда при периодическом движении частицы в потенциальном поле должно выполняться следующее правило квантования:

$$\oint \mathbf{p}\, d\mathbf{r} = 2\pi\hbar n,$$

где $\mathbf{p}$ — импульс частицы, $d\mathbf{r}$ — ее элементарное перемещение, n — целые числа. Воспользовавшись этим правилом, найти разрешенные значения энергии частицы массы m, которая движется:

а) в одномерной прямоугольной потенциальной яме ширины l с бесконечно высокими стенками;

б) по окружности радиуса r;

в) в одномерном потенциальном поле $U = \alpha x^2/2$, где α — положительная постоянная;

г) по круговой орбите в центральном поле, где потенциальная энергия частицы $U = -\alpha/r$, α — положительная постоянная.

6.46. Найти с учетом движения ядра атома водорода выражения для энергии связи электрона в основном состоянии и для постоянной Ридберга. На сколько процентов отличается энергия связи и постоянная Ридберга, полученные без учета движения ядра, от соответствующих уточненных значений этих величин?

6.47. Найти для атомов легкого и тяжелого водорода (H и D) разность:

а) энергий связи их электронов в основном состоянии;

б) длин волн головных линий серии Лаймана.

6.48. Вычислить расстояние между частицами системы в основном состоянии, соответствующую энергию связи и длину волны головной линии серии Лаймана, если системой является:

а) мезоатом водорода, ядром которого служит протон (в мезоатоме вместо электрона движется мезон, имеющий тот же заряд, но массу в 207 раз большую);

б) позитроний, который состоит из электрона и позитрона, движущихся вокруг общего центра масс.

6.2. Волновые свойства частиц

● Дебройлевская длина волны частицы с импульсом p:

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}. \tag{6.2а}$$

● Соотношение неопределенностей:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \gtrsim \hbar. \tag{6.2б}$$

● Временно́е и стационарное уравнения Шрёдингера:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + U\Psi,$$
$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0, \tag{6.2в}$$

где Ψ — полная волновая функция, ψ — ее координатная часть, ∇^2 — оператор Лапласа, E и U — полная и потенциальная энергии частицы. В сферических координатах:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \tag{6.2г}$$

● Коэффициент прозрачности потенциального барьера $U(x)$:

$$D \approx \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m(U-E)}\,dx\right], \qquad (6.2д)$$

где x_1 и x_2 — координаты точек, между которыми $U > E$.

6.49. Вычислить дебройлевские длины волн электрона, протона и атома урана, имеющих одинаковую кинетическую энергию 100 эв.

6.50. Какую энергию необходимо дополнительно сообщить электрону, чтобы его дебройлевская длина волны уменьшилась от 100 до 50 пм?

6.51. Нейтрон с кинетической энергией $T = 25$ эВ налетает на покоящийся дейтон (ядро тяжелого водорода). Найти дебройлевские длины волн обеих частиц в системе их центра инерции.

6.52. Две одинаковые нерелятивистские частицы движутся перпендикулярно друг к другу с дебройлевскими длинами волн λ_1 и λ_2. Найти дебройлевскую длину волны каждой частицы в системе их центра инерции.

6.53. Найти дебройлевскую длину волны молекул водорода, соответствующую их наиболее вероятной скорости при комнатной температуре.

6.54. Вычислить наиболее вероятную дебройлевскую длину волны молекул водорода, находящихся в термодинамическом равновесии при комнатной температуре.

6.55. Получить выражение для дебройлевской длины волны λ релятивистской частицы, движущейся с кинетической энергией T. При каких значениях T ошибка в определении λ по нерелятивистской формуле не превышает 1% для электрона и протона?

6.56. При каком значении кинетической энергии дебройлевская длина волны электрона равна его комптоновской длине волны?

6.57. Найти дебройлевскую длину волны релятивистских электронов, подлетающих к антикатоду рентгеновской трубки, если длина волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра $\lambda_к = 10{,}0$ пм?

6.58. Параллельный поток моноэнергетических электронов падает нормально на диафрагму с узкой прямоугольной щелью ширины $b = 1{,}0$ мкм. Определить скорость этих электронов, если на экране, отстоящем от щели на расстояние $l = 50$ см, ширина центрального дифракционного максимума $\Delta x = 0{,}36$ мм.

6.59. Параллельный поток электронов, ускоренных разностью потенциалов $U = 25$ В, падает нормально на диафрагму с двумя узкими щелями, расстояние между которыми $d = 50$ мкм. Определить расстояние между соседними максимумами дифракционной картины на экране, расположенном на расстоянии $l = 100$ см от щелей.

6.60. Узкий пучок моноэнергетических электронов падает под углом скольжения $\vartheta = 30°$ на естественную грань монокристалла

алюминия. Расстояние между соседними кристаллическими плоскостями, параллельными этой грани монокристалла, $d = 0{,}20$ нм. При некотором ускоряющем напряжении U_0 наблюдали максимум зеркального отражения. Найти U_0, если известно, что следующий максимум зеркального отражения возникал при увеличении ускоряющего напряжения в $\eta = 2{,}25$ раза.

6.61. Узкий пучок моноэнергетических электронов падает нормально на поверхность монокристалла никеля. В направлении, составляющем угол $\vartheta = 55°$ с нормалью к поверхности, наблюдается максимум отражения четвертого порядка при энергии электронов $T = 180$ эВ. Вычислить соответствующее значение межплоскостного расстояния.

6.62. Узкий пучок электронов с кинетической энергией $T = 10$ кэВ проходит через поликристаллическую алюминиевую фольгу, образуя на экране систему дифракционных колец. Вычислить межплоскостное расстояние, соответствующее отражению третьего порядка от некоторой системы кристаллических плоскостей, если ему отвечает дифракционное кольцо диаметра $D = 3{,}20$ см. Расстояние между экраном и фольгой $l = 10{,}0$ см.

6.63. Пучок электронов, ускоренных разностью потенциалов U, падает на поверхность металла, внутренний потенциал которого $U_i = 15$ В. Найти:

а) показатель преломления металла для электронов с $U = 150$ В;

б) отношение U/U_i, при котором показатель преломления отличается от единицы не более чем на $\eta = 1{,}0\%$.

6.64. Частица массы m находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Ширина ямы равна l. Найти возможные значения энергии частицы, имея в виду, что реализуются лишь такие состояния ее движения, для которых в пределах данной ямы укладывается целое число дебройлевских полуволн.

6.65. Интерпретировать квантовые условия Бора на основе волновых представлений: показать, что электрон в атоме водорода может двигаться только по тем круговым орбитам, на которых укладывается целое число дебройлевских волн.

6.66. Оценить наименьшие ошибки, с которыми можно определить скорость электрона, протона и шарика массы 1 мг, если координаты частиц и центра шарика установлены с неопределенностью 1 мкм.

6.67. Оценить с помощью соотношения неопределенностей неопределенность скорости электрона в атоме водорода, полагая размер атома $l = 0{,}10$ нм. Сравнить полученную величину со скоростью электрона на первой боровской орбите данного атома.

6.68. Показать, что для частицы, неопределенность местоположения которой $\Delta x = \lambda/2\pi$, где λ — ее дебройлевская длина волны, неопределенность скорости равна по порядку величины самой скорости частицы.

6.69. Свободный электрон первоначально был локализован в области размером $l = 0{,}10$ нм. Оценить с помощью соотношения неопределенностей время, за которое ширина соответствующего волнового пакета увеличится в $\eta = 10^2$ раз.

6.70. Оценить с помощью соотношения неопределенностей минимальную кинетическую энергию электрона, локализованного в области размером $l = 0{,}20$ нм.

6.71. Электрон с кинетической энергией $T \approx 4$ эВ локализован в области размером $l = 1$ мкм. Оценить с помощью соотношения неопределенностей относительную неопределенность его скорости.

6.72. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Ширина ямы равна l. Оценить с помощью соотношения неопределенностей силу давления электрона на стенки этой ямы при минимально возможной его энергии.

6.73. Частица массы m движется в одномерном потенциальном поле $U = kx^2/2$ (гармонический осциллятор). Оценить с помощью соотношения неопределенностей минимально возможную энергию частицы в таком поле.

6.74. Оценить с помощью соотношения неопределенностей минимально возможную энергию электрона в атоме водорода и соответствующее эффективное расстояние его от ядра.

6.75. Параллельный пучок атомов водорода со скоростью $v = 600$ м/с падает нормально на диафрагму с узкой щелью, за которой на расстоянии $l = 1{,}0$ м расположен экран. Оценить с помощью соотношения неопределенностей ширину δ щели, при которой ширина изображения ее на экране будет минимальной.

6.76. Найти частное решение одномерного временно́го уравнения Шрёдингера для свободно движущейся частицы массы m.

6.77. Частица находится в основном состоянии в одномерной прямоугольной потенциальной яме ширины l с абсолютно непроницаемыми стенками ($0 < x < l$). Найти вероятность пребывания частицы в области $^1/_3\, l \leqslant x \leqslant {}^2/_3 l$.

6.78. Частица находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Ширина ямы равна l. Найти нормированные волновые функции стационарных состояний частицы, взяв начало отсчета координаты x в середине ямы.

6.79. Доказать, что волновые функции стационарных состояний частицы в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками являются ортогональными, т. е. удовлетворяют условию $\int_0^l \psi_n \psi_{n'}\, dx = 0$, если $n' \neq n$. Здесь l — ширина ямы, n — целые числа.

6.80. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Ширина ямы l такова, что энергетические уровни расположены весьма густо.

Найти плотность уровней dN/dE, т. е. их число на единичный интервал энергии, в зависимости от E. Вычислить dN/dE для $E = 1{,}0$ эВ, если $l = 1{,}0$ см.

6.81. Частица массы m находится в двумерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками. Найти:

а) возможные значения энергии частицы, если стороны ямы равны l_1 и l_2;

б) значения энергии частицы на первых четырех уровнях, если яма квадратная со стороной l.

6.82. Частица находится в двумерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками ($0 < x < a$, $0 < y < b$). Определить вероятность нахождения частицы с наименьшей энергией в области $0 < x < a/3$.

6.83. Частица массы m находится в трехмерной кубической потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками. Сторона куба равна a. Найти:

а) собственные значения энергии частицы;

б) разность энергий 3-го и 4-го уровней;

в) энергию 6-го уровня и соответствующее ему число состояний (кратность вырождения).

6.84. Показать с помощью уравнения Шрёдингера, что в точке, где потенциальная энергия частицы $U(x)$ имеет конечный разрыв, волновая функция остается гладкой, т. е. ее первая производная по координате непрерывна.

6.85. Частица массы m находится в одномерном потенциальном поле $U(x)$, вид которого показан на рис. 6.2, где $U(0) = \infty$. Найти:

а) уравнение, определяющее возможные значения энергии частицы в области $E < U_0$; привести это уравнение к виду

$$\sin kl = \pm kl \sqrt{\hbar^2/2ml^2U_0},$$

где $k = \sqrt{2mE}/\hbar$.

Показать с помощью графического решения данного уравнения, что возможные значения энергии частицы образуют дискретный спектр;

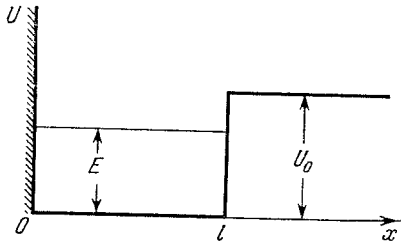


Рис. 6.2.

б) минимальное значение величины l^2U_0, при котором появляется первый энергетический уровень в области $E < U_0$. При каком минимальном значении l^2U_0 появляется n-й уровень?

6.86. Воспользовавшись решением предыдущей задачи, определить вероятность нахождения частицы с энергией $E = U_0/2$ в области $x > l$, если $l^2U_0 = (3/4\pi)^2\,\hbar^2/m$.

6.87. Найти возможные значения энергии частицы массы m, находящейся в сферически-симметричной потенциальной яме $U(r) = 0$ при $r < r_0$ и $U(r) = \infty$ при $r = r_0$, для случая, когда движение частицы описывается волновой функцией $\psi(r)$, зависящей только от r.

Указание. При решении уравнения Шрёдингера воспользоваться подстановкой $\psi(r) = \chi(r)/r$.

6.88. Имея в виду условия предыдущей задачи, найти:

а) нормированные собственные функции частицы в состояниях, где $\psi(r)$ зависит только от r;

б) для основного состояния частицы наиболее вероятное значение $r_{\text{вер}}$, а также вероятность нахождения частицы в области $r < r_{\text{вер}}$.

6.89. Частица массы m находится в сферически-симметричной потенциальной яме $U(r) = 0$ при $r < r_0$ и $U(r) = U_0$ при $r > r_0$.

а) Найти с помощью подстановки $\psi(r) = \chi(r)/r$ уравнение, определяющее собственные значения энергии E частицы при $E < U_0$, когда движение описывается волновой функцией $\psi(r)$, зависящей только от r. Привести это уравнение к виду

$$\sin kr_0 = \pm kr_0 \sqrt{\hbar^2/2mr_0^2U_0}, \quad \text{где} \quad k = \sqrt{2mE}/\hbar.$$

б) Определить значение величины $r_0^2U_0$, при котором появляется первый уровень.

6.90. Волновая функция частицы массы m для основного состояния в одномерном потенциальном поле $U(x) = kx^2/2$ имеет вид $\psi(x) = Ae^{-\alpha x^2}$, где A — нормировочный коэффициент, α — положительная постоянная. Найти с помощью уравнения Шрёдингера постоянную α и энергию E частицы в этом состоянии.

6.91. Определить энергию электрона атома водорода в стационарном состоянии, для которого волновая функция $\psi(r) = A(1 + ar)e^{-\alpha r}$, где A, a и α — некоторые постоянные.

6.92. Волновая функция электрона в основном состоянии атома водорода имеет вид $\psi(r) = Ae^{-r/r_1}$, где A — некоторая постоянная, r_1 — первый боровский радиус. Найти:

а) наиболее вероятное расстояние между электроном и ядром;

б) среднее значение модуля кулоновской силы, действующей на электрон;

в) среднее значение потенциальной энергии электрона в поле ядра.

6.93. Найти средний электростатический потенциал, создаваемый электроном в центре атома водорода, если электрон находится в основном состоянии, для которого волновая функция $\psi(r) = A\,e^{-r/r_1}$, где A — некоторая постоянная, r_1 — первый боровский радиус.

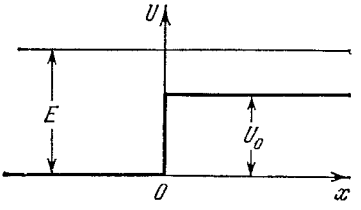


Рис. 6.3.

6.94. Частицы с массой m и энергией E движутся слева на потенциальный барьер (рис. 6. 3). Найти:

а) коэффициент отражения R этого барьера при $E > U_0$;

б) эффективную глубину проникновения частиц в область $x > 0$ при $E < U_0$, т. е. расстояние от границы барьера до точки, где плотность вероятности нахождения частицы уменьшается в e раз.

6.95. Воспользовавшись формулой (6.2д), найти для электрона с энергией E вероятность D прохождения потенциального барьера, ширина которого l и высота U_0, если барьер имеет форму, показанную:

а) на рис. 6.4;

б) на рис. 6.5.

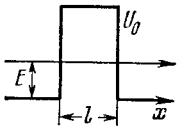


Рис. 6.4.

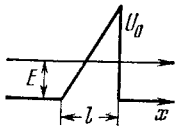


Рис. 6.5.

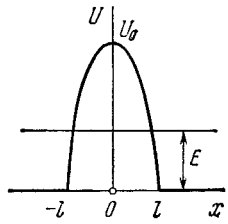


Рис. 6.6.

6.96. Найти с помощью формулы (6.2д) вероятность D прохождения частицы с массой m и энергией E сквозь потенциальный барьер (рис. 6.6), где $U(x) = U_0(1 - x^2/l^2)$.

6.3. Свойства атомов. Спектры

● Спектральные обозначения термов: $^{\varkappa}(L)_J$, где $\varkappa = 2S+1$ — мультиплетность, L, S, J — квантовые числа,

$$L = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots$$
$$(L):\ S,\ P,\ D,\ F,\ G,\ H,\ I,\ \ldots$$

● Термы атомов щелочных металлов:

$$T = \frac{R}{(n+\alpha)^2}, \tag{6.3а}$$

где R — постояниая Ридберга, α — ридберговская поправка.

На рис. 6.7 показана схема термов атома лития.

● Механические моменты атома:

$$M_L = \hbar\sqrt{L(L+1)},\ \text{аналогично}\ M_S\ \text{и}\ M_J. \tag{6.3б}$$

● Правила Хунда:

1) наименьшей энергией обладает терм с максимальным значением S при данной электронной конфигурации и максимально возможным при этом $S_{\text{макс}}$ значении L;

2) для основного (нормального) терма $J = |L - S|$, если подоболочка заполнена менее чем наполовину, и $J = L + S$ в остальных случаях.

● Распределение Больцмана:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-(E_2 - E_1)/kT}, \tag{6.3в}$$

где g_1 и g_2 — статистические веса (кратности вырождения) соответствующих уровней.

● Вероятности переходов атома в единицу времени между уровнем *1* и более высоким уровнем *2* — для спонтанного и индуцированного излучения и поглощения:

$$P_{21}^{\text{сп}} = A_{21}, \quad P_{21}^{\text{инд}} = B_{21}u_\omega, \quad P_{12}^{\text{погл}} = B_{12}u_\omega, \tag{6.3г}$$

где A_{2i}, B_{2i}, B_{12} — коэффициенты Эйнштейна, u_ω — спектральная плотность излучения, отвечающая частоте ω перехода между данными уровнями.

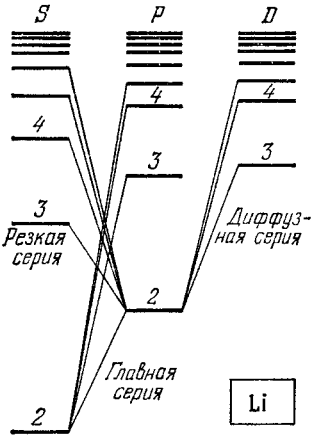


Рис. 6.7.

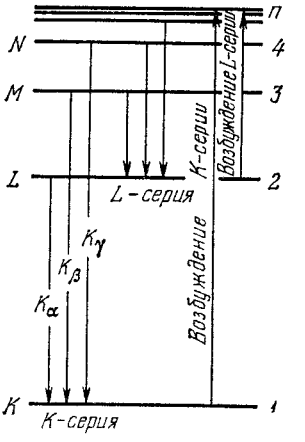


Рис. 6.8.

● Связь между коэффициентами Эйнштейна:

$$g_1B_{12} = g_2B_{21}, \quad B_{21} = \frac{\pi^2c^3}{\hbar\omega^3}A_{2i}. \tag{6.3д}$$

● Схема возникновении рентгеновских спектров (рис. 6.8).

● Закон Мозли для K_α-линий:

$$\omega_{K_\alpha} = {}^3/_4R\,(Z-\sigma)^2, \tag{6.3е}$$

где σ — поправка, равная для легких элементов единице.

● Магнитный момент атома и фактор (множитель) Ланде:

$$\mu = g\sqrt{J(J+1)}\,\mu_B, \qquad g = 1 + \frac{J(J+1)+S(S+1)-L(L+1)}{2J(J+1)}. \tag{6.3ж}$$

● Зеемановское расщепление спектральных линий в слабом магнитном поле:

$$\Delta\omega = (m_1g_1 - m_2g_2)\,\mu_B B/\hbar. \tag{6.3з}$$

● При излучении вдоль магнитного поля зеемановские компоненты, обусловленные переходами $m_1 = m_2$, отсутствуют.

6.97. Энергия связи валентного электрона атома лития в состояниях $2S$ и $2P$ равна соответственно 5,39 и 3,54 эВ. Вычислить ридберговские поправки для S- и P-термов этого атома.

6.98. Найти ридберговскую поправку для $3P$-терма атома натрия, первый потенциал возбуждения которого 2,10 В, а энергия связи валентного электрона в основном $3S$-состоянии 5,14 эВ.

6.99. Найти энергию связи валентного электрона в основном состоянии атома лития, если известно, что длина волны головной линии резкой серии $\lambda_1 = 813$ нм и длина волны коротковолновой границы этой серии $\lambda_2 = 350$ нм.

6.100. Определить длины волн спектральных линий, возникающих при переходе возбужденных атомов лития из состояния $3S$ в основное состояние $2S$. Ридберговские поправки для S- и P-термов равны —0,41 и —0,04.

6.101. Длины волн компонент желтого дублета резонансной линии натрия, обусловленной переходом $3P \to 3S$, равны 589,00 и 589,56 нм. Найти величину расщепления $3P$-терма в эВ.

6.102. Головная линия резкой серии атомарного цезия представляет собой дублет с длинами волн 1358,8 и 1469,5 нм. Найти интервалы в частотах (рад/с) между компонентами следующих линий этой серии.

6.103. Выписать спектральные обозначения термов атома водорода, электрон которого находится в состоянии с главным квантовым числом $n = 3$.

6.104. Сколько и каких квантовых чисел J может иметь атом в состоянии с квантовыми числами S и L, равными соответственно:
а) 2 и 3; б) 3 и 3; в) 5/2 и 2?

6.105. Найти возможные значения полных механических моментов атомов, находящихся в состояниях ^4P и ^5D.

6.106. Найти максимально возможный полный механический момент и соответствующее спектральное обозначение терма атома:
а) натрия, валентный электрон которого имеет главное квантовое число $n = 4$;
б) с электронной конфигурацией $1s^2 2p 3d$.

6.107. Известно, что в F- и D-состояниях число возможных значений квантового числа J одинаково и равно пяти. Определить спиновый механический момент в этих состояниях.

6.108. Атом находится в состоянии, мультиплетность которого равна трем, а полный механический момент — $\hbar\sqrt{20}$. Каким может быть соответствующее квантовое число L?

6.109. Найти возможные мультиплетности $\varkappa$ термов типа:
а) $^{\varkappa}D_2$; б) $^{\varkappa}P_{3/2}$; в) $^{\varkappa}F_1$.

6.110. Некоторый атом, кроме заполненных оболочек, имеет три электрона (s, p и d) и находится в состоянии с максимально возможным для этой конфигурации полным механическим моментом. Найти в соответствующей векторной модели атома угол между спиновым и полным механическими моментами данного атома.

6.111 Атом находится в состоянии со спиновым квантовым числом $S = 1$, имея полный механический момент $\hbar\sqrt{6}$. В соответствующей векторной модели угол между спиновым и полным

механическими моментами $\vartheta = 73{,}2°$. Написать спектральный символ терма этого состояния.

6.112. Выписать спектральные символы термов двухэлектронной системы, состоящей из одного p-электрона и одного d-электрона.

6.113. Система состоит из d-электрона и атома в $^2P_{3/2}$-состоянии. Найти возможные спектральные термы этой системы.

6.114. Установить, какие из нижеперечисленных переходов запрещены правилами отбора: $^2D_{3/2} \to {}^2P_{1/2}$, $^3P_1 \to {}^2S_{1/2}$, $^3F_3 \to {}^3P_2$, $^4F_{7/2} \to {}^4D_{5/2}$.

6.115 Определить суммарную кратность вырождения $3D$-состояния атома лития. Каков физический смысл этой величины?

6.116. Найти кратность вырождения состояний ^2P, ^3D и ^4F с максимально возможными значениями полного механического момента.

6.117. Написать спектральное обозначение терма, кратность вырождения которого равна семи, а квантовые числа L и S связаны соотношением $L = 3S$.

6.118. У атома какого элемента заполнены K-, L- и M-оболочки, $4s$-подоболочка и наполовину $4p$-подоболочка?

6.119. Используя правила Хунда, найти основной терм атома, незаполненная подоболочка которого содержит:

а) три p-электрона; б) четыре p-электрона.

6.120. Найти с помощью правил Хунда полный механический момент атома в основном состоянии, если его незаполненная подоболочка содержит:

а) три d-электрона; б) семь d-электронов.

6.121. Воспользовавшись правилами Хунда, найти число электронов в единственной незаполненной подоболочке атома, основной терм которого:

а) $^3F_2$; б) $^2P_{3/2}$; в) $^6S_{5/2}$.

6.122. Написать с помощью правил Хунда спектральный символ основного терма атома, единственная незаполненная подоболочка которого заполнена:

а) на 1/3, и $S = 1$; б) на 70%, и $S = 3/2$.

6.123. Единственная незаполненная подоболочка некоторого атома содержит три электрона, причем основной терм атома имеет $L = 3$. Найти с помощью правил Хунда спектральный символ основного состояния данного атома.

6.124. Найти с помощью правил Хунда магнитный момент основного состояния атома, незамкнутая подоболочка которого заполнена ровно наполовину пятью электронами.

6.125. Какая относительная часть атомов водорода находится в состоянии с главным квантовым числом $n = 2$ при температуре $T = 3000$ К?

6.126. Определить отношение числа атомов газообразного натрия в состоянии $3P$ к числу атомов в основном состоянии $3S$ при температуре $T = 2400$ К. Известно, что переходу $3P \to 3S$ соответствует спектральная линия с длиной волны $\lambda = 589$ нм.

6.127. Вычислить среднее время жизни возбужденных атомов, если известно, что интенсивность спектральной линии, обусловленной переходом в основное состояние, убывает в $\eta = 25$ раз на расстоянии $l = 2{,}5$ мм вдоль пучка атомов, скорость которых $v = 600$ м/с.

6.128. Разреженные пары ртути, атомы который практически все находятся в основном состоянии, осветили резонансной линией ртутной лампы с длиной волны $\lambda = 253{,}65$ нм. При этом мощность испускания данной линии парами ртути оказалась $P = 35$ мВт. Найти число атомов в состоянии резонансного возбуждения, среднее время жизни которого $\tau = 0{,}15$ мкс.

6.129. Атомарный литий с концентрацией $n = 3{,}6 \cdot 10^{16}$ см$^{-3}$ находится при температуре $T = 1500$ К. При этом мощность излучения резонансной линии $\lambda = 671$ нм ($2P \to 2S$) в расчете на единицу объема газа $P = 0{,}30$ Вт/см^3. Найти среднее время жизни атомов лития в состоянии резонансного возбуждения.

6.130. Атомарный водород находится в термодинамическом равновесии со своим излучением. Найти:

а) отношение вероятностей индуцированного и спонтанного излучений атомов с уровня $2P$ при температуре $T = 3000$ К;

б) температуру, при которой эти вероятности станут одинаковыми.

6.131. Через газ с температурой T проходит пучок света с частотой ω, равной резонансной частоте перехода атомов газа, причем $\hbar\omega \gg kT$. Показать, учитывая индуцированное излучение, что коэффициент поглощения газа $\varkappa = \varkappa_0(1 - e^{-\hbar\omega/kT})$, где $\varkappa_0$ — коэффициент поглощения при $T \to 0$.

6.132. Длина волны резонансной линии ртути $\lambda = 253{,}65$ нм. Среднее время жизни атомов ртути в состоянии резонансного возбуждения $\tau = 0{,}15$ мкс. Оценить отношение доплеровского уширения этой линии к ее естественной ширине при температуре газа $T = 300$ К.

6.133. Найти длину волны K_α-линии меди ($Z = 29$), если известно, что длина волны K_α-линии железа ($Z = 26$) равна 193 пм.

6.134. Вычислить с помощью закона Мозли:

а) длину волны K_α-линии алюминия и кобальта;

б) разность энергий связи K- и L-электронов ванадия.

6.135. Сколько элементов содержится в ряду между теми, у которых длины волн K_α-линий равны 250 и 179 пм?

6.136. Найти напряжение на рентгеновской трубке с никелевым антикатодом, если разность длин волн K_α-линии и коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра равна 84 пм.

6.137. При некотором напряжении на рентгеновской трубке с алюминиевым антикатодом длина волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра равна 0,50 нм. Будет ли наблюдаться при этом K-серия характеристического спектра, потенциал возбуждения которой равен 1,56 кВ?

6.138. При увеличении напряжения на рентгеновской трубке от $U_1 = 10$ кВ до $U_2 = 20$ кВ интервал длин волн между K_α-линией и коротковолновой границей сплошного рентгеновского спектра увеличился в $n = 3{,}0$ раза. Определить порядковый номер элемента антикатода этой трубки.

6.139. У какого металла в спектре поглощения разность частот K- и L-краев поглощения рентгеновских лучей составляет $\Delta\omega = 6{,}85 \cdot 10^{18}$ рад/с?

6.140. Вычислить энергию связи K-электрона ванадия, для которого длина волны L-края поглощения $\lambda_L = 2{,}4$ нм.

6.141. Найти энергию связи L-электрона титана, если разность длин волн головной линии K-серии и ее коротковолновой границы $\Delta\lambda = 26$ пм.

6.142. Найти кинетическую энергию и скорость фотоэлектронов, вырываемых K_α-излучением цинка с K-оболочки атомов железа, для которого край K-полосы поглощения $\lambda_K = 174$ пм.

6.143. Вычислить фактор Ланде для атомов:
а) в S-состояниях; б) в синглетных состояниях.

6.144. Вычислить фактор Ланде для следующих термов:
а) $^6F_{1/2}$; б) $^4D_{1/2}$; в) $^5F_2$; г) $^5P_1$; д) $^3P_0$.

6.145. Вычислить в магнетонах Бора магнитный момент атома:
а) в ^1F-состоянии;
б) в состоянии $^2D_{3/2}$;
в) в состоянии с $S = 1$, $L = 2$ и фактором Ланде $g = {}^4/_3$.

6.146. Определить спиновый механический момент атома в состоянии D_2, если максимальное значение проекции магнитного момента в этом состоянии равно четырем магнетонам Бора.

6.147. Атом в состоянии с квантовыми числами $L = 2$, $S = 1$ находится в слабом магнитном поле. Найти его магнитный момент, если известно, что наименьший возможный угол между механическим моментом и направлением поля равен 30°.

6.148. Валентный электрон атома натрия находится в состоянии с главным квантовым числом $n = 3$, имея при этом максимально возможный полный механический момент. Каков его магнитный момент в этом состоянии?

6.149. Возбужденный атом имеет электронную конфигурацию $1s^2\ 2s^2\ 2p\ 3d$ и находится при этом в состоянии с максимально возможным полным механическим моментом. Найти магнитный момент атома в этом состоянии.

6.150. Найти полный механический момент атома в состоянии с $S = {}^3/_2$ и $L = 2$, если известно, что магнитный момент его равен нулю.

6.151. Некоторый атом находится в состоянии, для которого $S = 2$, полный механический момент $M = \sqrt{2}\hbar$, а магнитный момент равен нулю. Написать спектральный символ соответствующего терма.

6.152. Атом в состоянии $^2P_{3/2}$ находится во внешнем магнитном поле с индукцией $B = 1{,}0$ кГс. Найти с точки зрения векторной мо-

дели угловую скорость прецессии полного механического момента этого атома.

6.153. Атом в состоянии $^2P_{1/2}$ находится на оси витка радиуса $r = 5$ см с током $I = 10$ А. Расстояние между атомом и центром витка равно радиусу последнего. Какой может быть максимальная сила, действующая на атом со стороны магнитного поля этого тока?

6.154. Атом водорода в нормальном состоянии находится на расстоянии $r = 2{,}5$ см от длинного прямого проводника с током $I = 10$ А. Найти силу, действующую на атом.

6.155. Узкий пучок атомов ванадия в основном состоянии $^4F_{3/2}$ пропускают по методу Штерна и Герлаха через поперечное резко неоднородное магнитное поле протяженностью $l_1 = 5{,}0$ см. Расщепление пучка наблюдают на экране, отстоящем от магнита на расстояние $l_2 = 15$ см. Кинетическая энергия атомов $T = 22$ мэВ. При каком значении градиента индукции B магнитного поля расстояние между крайними компонентами расщепленного пучка на экране будет составлять $\delta = 2{,}0$ мм?

6.156. На сколько подуровней расщепится в слабом магнитном поле терм:

а) $^3P_0$; б) $^2F_{5/2}$; в) $^4D_{1/2}$?

6.157. Атом находится в магнитном поле с индукцией $B = 2{,}50$ кГс. Найти полную величину расщепления в электронвольтах следующих термов:

а) ^1D; б) $^3F_4$.

6.158. Какой эффект Зеемана (простой, сложный) обнаруживают в слабом магнитном поле спектральные линии, обусловленные следующими переходами:

а) $^1P \to {}^1S$; б) $^2D_{5/2} \to {}^2P_{3/2}$; в) $^3D_1 \to {}^3P_0$; г) $^5I_5 \to {}^5H_4$?

6.159. Определить спектральный символ терма атома, если полная ширина расщепления этого терма в слабом магнитном поле с индукцией $B = 3{,}0$ кГс составляет $\Delta E = 104$ мкэВ.

6.160. Известно, что спектральная линия $\lambda = 612$ нм атома обусловлена переходом между синглетными термами. Вычислить интервал $\Delta\lambda$ между крайними компонентами этой линии в магнитном поле с индукцией $B = 10{,}0$ кГс.

6.161. Найти минимальное значение индукции B магнитного поля, при котором спектральным прибором с разрешающей способностью $\lambda/\delta\lambda = 1{,}0 \cdot 10^5$ можно разрешить компоненты спектральной линии $\lambda = 536$ нм, обусловленной переходом между синглетными термами. Наблюдение ведут в направлении, перпендикулярном к магнитному полю.

6.162. Спектральная линия, обусловленная переходом $^3D_1 \to {}^3P_0$, испытывает зеемановское расщепление в слабом магнитном поле. При наблюдении перпендикулярно к направлению магнитного поля интервал между соседними компонентами зеемановской структуры линии составляет $\Delta\omega = 1{,}32 \cdot 10^{10}$ рад/с. Найти индукцию B магнитного поля в месте нахождения источника.

6.163. Длины волн дублета желтой линии натрия ($^2P \to {}^2S$) равны 589,59 и 589,00 нм. Найти:

а) отношение интервалов между соседними подуровнями зеемановского расщепления термов $^2P_{3/2}$ и $^2P_{1/2}$ в слабом магнитном поле;

б) индукцию B магнитного поля, при которой интервал между соседними подуровнями зеемановского расщепления терма $^2P_{3/2}$ будет в $\eta = 50$ раз меньше естественного расщепления терма ^2P.

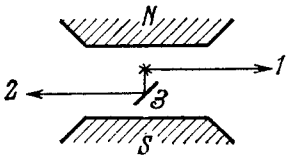


Рис. 6.9.

6.164. Изобразить схему возможных переходов в слабом магнитном поле между термами $^2P_{3/2}$ и $^2S_{1/2}$. Вычислить для магнитного поля $B = 4{,}5$ кГс смещения (в рад/с) зеемановских компонент этой линии.

6.165. Одну и ту же спектральную линию, испытывающую аномальный эффект Зеемана, наблюдают в направлении *1*, а также в направлении *2* — после отражения от зеркала (рис. 6.9). Сколько зеемановских компонент будет наблюдаться в обоих направлениях, если спектральная линия обусловлена переходом:

а) $^2P_{3/2} \to {}^2S_{1/2}$; б) $^3P_2 \to {}^3S_1$?

6.166. Вычислить полное расщепление $\Delta\omega$ спектральной линии $^3D_3 \to {}^3P_2$ в слабом магнитном поле с индукцией $B = 3{,}4$ кГс.

6.4. Молекулы и кристаллы

● Вращательная энергия двухатомной молекулы:

$$E_J = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1), \tag{6.4а}$$

где I — момент инерции молекулы.

● Колебательная энергия двухатомной молекулы:

$$E_v = \hbar\omega (v + 1/2), \tag{6.4б}$$

где ω — собственная частота колебаний молекулы.

● Средняя энергия квантового гармонического осциллятора при температуре T:

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \tag{6.4в}$$

● Формула Дебая. Молярная колебательная энергия кристалла:

$$U = 9R\Theta \left[\frac{1}{8} + \left(\frac{T}{\Theta}\right)^4 \int_0^{\Theta/T} \frac{x^3\, dx}{e^x - 1} \right], \tag{6.4г}$$

где Θ — дебаевская температура,

$$\Theta = \hbar\omega_{\text{макс}}/k. \tag{6.4д}$$

● Молярная колебательная теплоемкость кристалла при $T \ll \Theta$:

$$C = \frac{12}{5}\pi^4 R \left(\frac{T}{\Theta}\right)^3. \tag{6.4е}$$

● Распределение свободных электронов в металле вблизи абсолютного нуля:

$$dn = \frac{\sqrt{2}\, m^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E}\, dE, \qquad (6.4ж)$$

где dn — концентрация электронов с энергиями E, $E + dE$. Энергия E отсчитывается от дна зоны проводимости.

● Уровень Ферми при $T = 0$:

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}, \qquad (6.4з)$$

где n — концентрация свободных электронов в металле.

6.167. Определить угловую скорость вращения молекулы S_2, находящейся на первом возбужденном вращательном уровне, если расстояние между ее ядрами $d = 189$ пм.

6.168. Найти для молекулы HCl вращательные квантовые числа двух соседних уровней, разность энергий которых 7,86 мэВ. Расстояние между ядрами молекулы 127,5 пм.

6.169. Найти механический момент молекулы кислорода, вращательная энергия которой $E = 2{,}16$ мэВ, а расстояние между ядрами $d = 121$ пм.

6.170. Показать, что интервалы частот между соседними спектральными линиями чисто вращательного спектра двухатомной молекулы имеют одинаковую величину. Найти момент инерции и расстояние между ядрами молекулы CH, если интервалы между соседними линиями чисто вращательного спектра этих молекул $\Delta\omega = 5{,}47 \cdot 10^{12}$ рад/с.

6.171. Найти для молекулы HF число вращательных уровней, расположенных между нулевым и первым возбужденным колебательными уровнями, считая вращательные состояния не зависящими от колебательных. Собственная частота колебаний этой молекулы равна $7{,}79 \cdot 10^{14}$ рад/с, расстояние между ядрами — 91,7 пм.

6.172. Оценить, сколько линий содержит чисто вращательный спектр молекул Br_2, собственная частота колебаний которых $\omega = 6{,}08 \cdot 10^{13}$ рад/с и момент инерции $I = 3{,}46 \cdot 10^{-38}$ г·см^2.

6.173. Найти для двухатомной молекулы dN/dE (число вращательных уровней на единичный интервал энергии) в зависимости от вращательной энергии E. Вычислить эту величину для молекулы иода в состоянии с вращательным квантовым числом $J = 10$. Расстояние между ядрами этой молекулы равно 267 пм.

6.174. Найти отношение энергий, которые необходимо затратить для возбуждения двухатомной молекулы на первый колебательный и первый вращательный уровни. Вычислить это отношение для следующих молекул:

Молекула	ω, 10^{14} рад/с	d, пм
а) H_2	8,3	74
б) HI	4,35	160
в) I_2	0,40	267

Здесь ω — собственная частота колебаний молекулы, d — расстояние между ее ядрами.

6.175. Собственная частота колебаний молекулы водорода равна $8{,}25 \cdot 10^{14}$ рад/с, расстояние между ядрами — 74 пм. Найти отношение числа этих молекул на первом возбужденном колебательном уровне ($v = 1$) к числу молекул на первом возбужденном вращательном уровне ($J = 1$) при температуре $T = 875$ К. Иметь в виду, что кратность вырождения вращательных уровней равна $2J + 1$.

6.176. Вывести формулу (6.4в), используя распределение Больцмана. Получить с помощью нее выражение для молярной колебательной теплоемкости $C_{V\text{кол}}$ двухатомного газа. Вычислить $C_{V\text{ кол}}$ для газа, состоящего из молекул Cl_2, при температуре 300 К. Собственная частота колебаний этих молекул равна $5{,}63 \cdot 10^{14}$ рад/с.

6.177. В середине колебательно-вращательной полосы спектра испускания молекул HCl, где отсутствует «нулевая» линия, запрещенная правилом отбора, интервал между соседними линиями $\Delta\omega = 0{,}79 \cdot 10^{13}$ рад/с. Вычислить расстояние между ядрами молекулы HCl.

6.178. Вычислить длины волн красного и фиолетового спутников, ближайших к несмещенной линии, в колебательном спектре комбинационного рассеяния молекул F_2, если длина волны падающего света $\lambda_0 = 404{,}7$ нм и собственная частота колебаний молекулы $\omega = 2{,}15 \cdot 10^{14}$ рад/с.

6.179. Найти собственную частоту колебаний и коэффициент квазиупругой силы молекулы S_2, если в колебательном спектре комбинационного рассеяния света длины волн красного и фиолетового спутников, ближайших к несмещенной линии, равны 346,6 и 330,0 нм.

6.180. Найти отношение интенсивностей фиолетового и красного спутников, ближайших к несмещенной линии, в колебательном спектре комбинационного рассеяния света на молекулах Cl_2 при температуре $T = 300$ К, если собственная частота колебаний этих молекул $\omega = 1{,}06 \cdot 10^{14}$ рад/с. Во сколько раз изменится это отношение при увеличении температуры вдвое?

6.181. Рассмотреть возможные типы колебаний следующих линейных молекул:

а) CO_2 (O — C — O); б) C_2H_2 (H — C — C — H).

6.182. Определить число собственных поперечных колебаний струны длины l в интервале частот ω, $\omega + d\omega$, если скорость распространения колебаний равна v. Считать, что колебания происходят в одной плоскости.

6.183. Имеется прямоугольная мембрана площадью S. Найти число собственных колебаний, перпендикулярных к ее плоскости, в интервале частот ω, $\omega + d\omega$, если скорость распространения колебаний равна v.

6.184. Найти число собственных поперечных колебаний прямоугольного параллелепипеда объемом V в интервале частот ω, $\omega + d\omega$, если скорость распространения колебаний равна v.

6.185. Считая, что скорости распространения продольных и поперечных колебаний одинаковы и равны v, определить дебаевскую температуру:

а) для одномерного кристалла — цепочки из одинаковых атомов, содержащей n_0 атомов на единицу длины;

б) для двумерного кристалла — плоской квадратной решетки из одинаковых атомов, содержащей n_0 атомов на единицу площади;

в) для простой кубической решетки из одинаковых атомов, содержащей n_0 атомов на единицу объема.

6.186. Вычислить дебаевскую температуру для железа, у которого скорости распространения продольных и поперечных колебаний равны соответственно 5,85 и 3,23 км/с.

6.187. Оценить скорость распространения акустических колебаний в алюминии, дебаевская температура которого $\Theta = 396$ К.

6.188. Получить выражение, определяющее зависимость теплоемкости одномерного кристалла — цепочки одинаковых атомов — от температуры T, если дебаевская температура цепочки равна Θ. Упростить полученное выражение для случая $T \gg \Theta$.

6.189. Для цепочки одинаковых атомов частота колебаний ω зависит от волнового числа k как $\omega = \omega_{\text{макс}} \sin(ka/2)$, где $\omega_{\text{макс}}$ — максимальная частота колебаний, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, соответствующее частоте ω, a — расстояние между соседними атомами. Воспользовавшись этим дисперсионным соотношением, найти зависимость от ω числа продольных колебаний, приходящихся на единичный интервал частот, т. е. $dN/d\omega$, если длина цепочки равна l. Зная $dN/d\omega$, найти полное число N возможных продольных колебаний цепочки.

6.190. Вычислить энергию нулевых колебаний, приходящуюся на один грамм меди, дебаевская температура которой $\Theta = 330$ К.

6.191. На рис. 6.10 показан график зависимости теплоемкости кристалла от температуры (по Дебаю). Здесь $C_{\text{кл}}$ — классическая теплоемкость, Θ — дебаевская температура. Найти с помощью этого графика:

а) дебаевскую температуру для серебра, если при $T = 65$ К его молярная теплоемкость равна 15 Дж/(моль · К);

б) молярную теплоемкость алюминия при $T = 80$ К, если при $T = 250$ К она равна 22,4 Дж/(моль · К);

в) максимальную частоту колебаний для меди, у которой при $T = 125$ К теплоемкость отличается от классического значения на 25%.

6.192. Показать, что молярная теплоемкость кристалла при температуре $T \ll \Theta$, где Θ — дебаевская температура, определяется формулой (6.4е).

6.193. Можно ли считать температуры 20 и 30 К низкими для железа, теплоемкость которого при этих температурах равна 0,226 и 0,760 Дж/(моль · К)?

6.194. Вычислить среднее значение энергии нулевых колебаний, приходящейся на один осциллятор кристалла в модели Дебая, если дебаевская температура кристалла равна Θ.

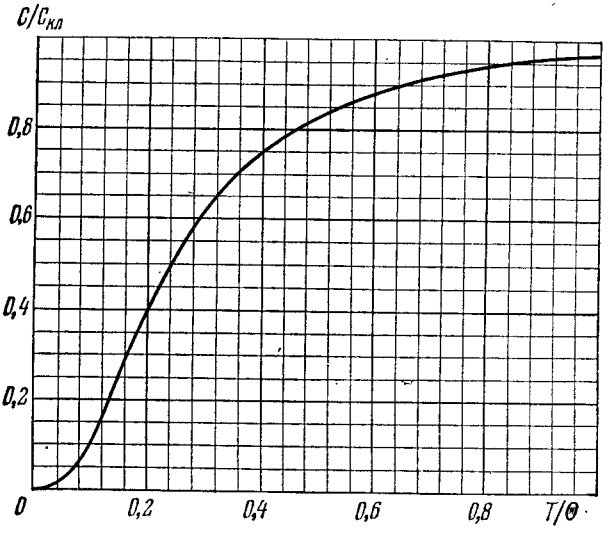


Рис. 6.10.

6.195. Изобразить спектр распределения энергии колебаний кристалла по частотам (без учета нулевых колебаний). Рассмотреть два случая: $T = \Theta/2$ и $T = \Theta/4$, где Θ — дебаевская температура.

6.196. Оценить максимальные значения энергии и импульса фонона (звукового кванта) в меди, дебаевская температура которой равна 330 К.

6.197. Воспользовавшись формулой (6.4ж), найти при $T = 0$:

а) максимальную кинетическую энергию свободных электронов в металле, если их концентрация равна n;

б) среднюю кинетическую энергию свободных электронов, если известна их максимальная кинетическая энергия $T_{макс}$.

6.198. Сколько процентов свободных электронов в металле при $T = 0$ имеет кинетическую энергию, превышающую половину максимальной?

6.199. Найти число свободных электронов, приходящихся на один атом натрия при $T = 0$, если уровень Ферми $E_F = 3{,}07$ эВ и плотность натрия равна 0,97 г/см^3.

6.200. До какой температуры надо было бы нагреть классический электронный газ, чтобы средняя энергия его электронов оказалась равной средней энергии свободных электронов в меди при $T = 0$? Считать, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон.

6.201. Вычислить интервал (в электронвольтах) между соседними уровнями свободных электронов в металле при $T = 0$ вблизи уровня Ферми, если концентрация свободных электронов $n = 2{,}0 \cdot 10^{22}$ см$^{-3}$ и объем металла $V = 1{,}0$ см^3.

6.202. Воспользовавшись формулой (6.4ж), найти при $T = 0$:

а) распределение свободных электронов по скоростям;

б) отношение средней скорости свободных электронов к их максимальной скорости.

6.203. Исходя из формулы (6.4ж), найти функцию распределения свободных электронов в металле при $T = 0$ по дебройлевским длинам волн.

6.204. Вычислить давление электронного газа в металлическом натрии при $T = 0$, если концентрация свободных электронов в нем $n = 2{,}5 \cdot 10^{22}$ см$^{-3}$. Воспользоваться уравнением для давления идеального газа.

6.205. Повышение температуры катода в электронной лампе от значения $T = 2000$ К на $\Delta T = 1{,}0$ К увеличивает ток насыщения на $\eta = 1{,}4\%$. Найти работу выхода электрона из материала катода.

6.206. Найти коэффициент преломления металлического натрия для электронов с кинетической энергией $T = 135$ эВ. Считать, что на каждый атом натрия приходится один свободный электрон.

6.207. Найти минимальную энергию образования пары электрон — дырка в чистом беспримесном полупроводнике, электропроводность которого возрастает в $\eta = 5{,}0$ раз при увеличении температуры от $T_1 = 300$ К до $T_2 = 400$ К.

6.208. При очень низких температурах красная граница фотопроводимости чистого беспримесного германия $\lambda_к = 1{,}7$ мкм. Найти температурный коэффициент сопротивления данного германия при комнатной температуре.

6.209. На рис 6.11 показан график зависимости логарифма электропроводности от обратной температуры (T, кК) для некоторого полупроводника n-типа. Найти с помощью этого графика ширину запрещенной зоны полупроводника и энергию активации донорных уровней.

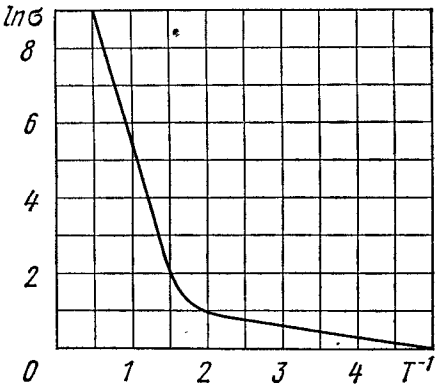


Рис. 6.11.

6.210. Удельное сопротивление некоторого чистого беспримесного полупроводника при комнатной температуре $\rho = 50$ Ом·см. После включения источника света оно стало $\rho_1 = 40$ Ом·см, а через $t = 8$ мс после выключения источника света удельное сопро-

тивление оказалось $\rho_2 = 45$ Ом·см. Найти среднее время жизни электронов проводимости и дырок.

6.211. При измерении эффекта Холла пластинку из полупроводника p-типа ширины $h = 10$ мм и длины $l = 50$ мм поместили в магнитное поле с индукцией $B = 5{,}0$ кГс. К концам пластинки приложили разность потенциалов $U = 10$ В. При этом холловская разность потенциалов оказалась $U_H = 50$ мВ и удельное сопротивление $\rho = 2{,}5$ Ом·см. Найти концентрацию дырок и их подвижность.

6.212. При измерении эффекта Холла в магнитном поле с индукцией $B = 5{,}0$ кГс поперечная напряженность электрического поля в чистом беспримесном германии оказалась в $\eta = 10$ раз меньше продольной напряженности электрического поля. Найти разность подвижностей электронов проводимости и дырок в данном полупроводнике.

6.213. В некотором полупроводнике, у которого подвижность электронов проводимости в $\eta = 2{,}0$ раза больше подвижности дырок, эффект Холла не наблюдался. Найти отношение концентраций дырок и электронов проводимости в этом полупроводнике.

6.5. Радиоактивность

● Основной закон радиоактивного распада:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \tag{6.5а}$$

● Связь между постоянной распада λ, средним временем жизни τ и периодом полураспада T:

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{\ln 2}{T}. \tag{6.5б}$$

● Удельная активность — это активность единицы массы вещества.

6.214. Зная постоянную распада λ ядра, определить:

а) вероятность того, что оно распадется за промежуток времени от 0 до t;

б) его среднее время жизни τ.

6.215. Какая доля радиоактивных ядер кобальта, период полураспада которых 71,3 дня, распадется за месяц?

6.216. Сколько β-частиц испускает в течение одного часа 1,0 мкг изотопа Na^{24}, период полураспада которого равен 15 ч?

6.217. При изучении β-распада радиоизотопа Mg^{23} в момент $t = 0$ был включен счетчик. К моменту $t_1 = 2{,}0$ с он зарегистрировал N_1 β-частиц, а к моменту $t_2 = 3t_1$ — в 2,66 раза больше. Найти среднее время жизни данных ядер.

6.218. Активность некоторого препарата уменьшается в 2,5 раза за 7,0 суток. Найти его период полураспада.

6.219. В начальный момент активность некоторого радиоизотопа составляла 650 част./мин. Какова будет активность этого препарата по истечении половины его периода полураспада?

6.220. Найти постоянную распада и среднее время жизни радиоактивного изотопа Co^{55}, если известно, что его активность уменьшается на 4,0% за час? Продукт распада нерадиоактивен.

6.221. Препарат U^{238} массы 1,0 г излучает $1{,}24 \cdot 10^4$ α-частиц в секунду. Найти период полураспада этого изотопа и активность препарата.

6.222. Определить возраст древних деревянных предметов, если известно, что удельная активность изотопа C^{14} у них составляет 3/5 удельной активности этого изотопа в только что срубленных деревьях. Период полураспада ядер C^{14} равен 5570 лет.

6.223. В урановой руде отношение числа ядер U^{238} к числу ядер Pb^{206} $\eta = 2{,}8$. Оценить возраст руды, считая, что весь свинец Pb^{206} является конечным продуктом распада уранового ряда. Период полураспада ядер U^{238} равен $4{,}5 \cdot 10^9$ лет.

6.224. Вычислить удельные активности изотопов Na^{24} и U^{235}, периоды полураспада которых равны соответственно 15 ч и $7{,}1 \cdot 10^8$ лет.

6.225. В кровь человека ввели небольшое количество раствора, содержащего радиоизотоп Na^{24} активностью $A = 2{,}0 \cdot 10^3$ расп./с. Активность 1 см^3 крови, взятой через $t = 5{,}0$ ч, оказалась $A' = 16$ расп./(мин·см^3). Период полураспада данного радиоизотопа $T = 15$ ч. Найти объем крови человека.

6.226. Удельная активность препарата, состоящего из активного кобальта Co^{58} и неактивного Co^{59}, составляет $2{,}2 \cdot 10^{12}$ расп./(с·г). Период полураспада Co^{58} равен 71,3 суток. Найти отношение массы активного кобальта в этом препарате к массе препарата (в %).

6.227. Некоторый препарат содержит две β-активные компоненты с различными периодами полураспада. Измерения дали следующую зависимость натурального логарифма активности препарата от времени t в часах:

t	0	1	2	3	5	7	10	14	20
$\ln A$	4,10	3,60	3,10	2,60	2,06	1,82	1,60	1,32	0,90

Найти периоды полураспада обеих компонент и отношение чисел радиоактивных ядер этих компонент в момент $t = 0$.

6.228. Радиоизотоп P^{32}, период полураспада которого $T = 14{,}3$ сут, образуется в ядерном реакторе с постоянной скоростью $q = 2{,}7 \cdot 10^9$ ядер/с. Через сколько времени после начала образования этого радиоизотопа его активность станет $A = 1{,}0 \times 10^9$ расп./с?

6.229. Радиоизотоп A_1 с постоянной распада λ_1 превращается в радиоизотоп A_2 с постоянной распада λ_2. Считая, что в начальный момент препарат содержал только ядра изотопа A_1, найти:

а) закон накопления радиоизотопа A_2 со временем;

б) промежуток времени, через который активность радиоизотопа A_2 достигнет максимума.

6.230. Решить предыдущую задачу, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

6.231. Радиоизотоп A_1 испытывает превращения по цепочке $A_1 \to A_2 \to A_3$ (стабилен) с соответствующими постоянными рас-

пада λ_1 и λ_2. Считая, что в начальный момент препарат содержал только ядра изотопа A_1 в количестве N_{10}, найти закон накопления стабильного изотопа A_3.

6.232. Радиоактивный изотоп Bi^{210} распадается по цепочке

$$Bi^{210} \xrightarrow{\lambda_1} Po^{210} \xrightarrow{\lambda_2} Pb^{206} \text{ (стабилен)},$$

где постоянные распада $\lambda_1 = 1{,}60 \cdot 10^{-6}$ с$^{-1}$, $\lambda_2 = 5{,}80 \cdot 10^{-8}$с$^{-1}$. Вычислить α- и β-активности препарата Bi^{210} массы 1,00 мг через месяц после его изготовления.

6.233. а) Какой изотоп образуется из α-активного Ra^{226} в результате пяти α-распадов и четырех β^--распадов?

б) Сколько α- и β^--распадов испытывает U^{238}, превращаясь в конечном счете в стабильный изотоп Pb^{206}?

6.234. Покоившееся ядро Po^{200} испустило α-частицу с кинетической энергией $T_\alpha = 5{,}77$ МэВ. Найти скорость отдачи дочернего ядра. Какую долю полной энергии, освобождаемой в этом процессе, составляет энергия отдачи дочернего ядра?

6.235. Определить количество тепла, которое выделяет 1,00 мг препарата Po^{210} за период, равный среднему времени жизни этих ядер, если известно, что испускаемые α-частицы имеют кинетическую энергию 5,3 МэВ и практически все дочерние ядра образуются непосредственно в основном состоянии.

6.236. Альфа-распад ядер Po^{210} (из основного состояния) сопровождается испусканием двух групп α-частиц с кинетическими энергиями 5,30 и 4,50 МэВ. В результате испускания этих частиц дочерние ядра оказываются соответственно в основном и возбужденном состояниях. Найти энергию γ-квантов, испускаемых возбужденными ядрами.

6.237. Средний пробег α-частицы в воздухе при нормальных условиях определяется следующей формулой $R = 0{,}98 \cdot 10^{-27} v_0^3$ см, где v_0 (см/с) — начальная скорость α-частицы. Воспользовавшись этой формулой, найти для α-частицы с начальной кинетической энергией 7,0 МэВ:

а) ее средний пробег;

б) среднее число пар ионов, которые образует данная α-частица на всем пути R, а также на первой половине его, считая, что энергия образования одной пары ионов равна 34 эВ.

6.238. Найти энергию Q, выделяющуюся при β^-- и β^+-распадах и при K-захвате, если известны массы материнского атома $M_м$, дочернего атома $M_д$ и электрона m.

6.239. Найти с помощью табличных значений масс атомов максимальную кинетическую энергию β-частиц, испускаемых ядрами Be^{10}, и соответствующую кинетическую энергию отдачи дочерних ядер, которые образуются непосредственно в основном состоянии.

6.240. Оценить количество тепла, выделенного за сутки в калориметре β^--активным препаратом Na^{24}, масса которого $m \approx 1{,}0$ мг. Считать, что β-частицы в среднем имеют кинетическую энергию,

равную $^1/_3$ максимально возможной при данном распаде. Период полураспада Na^{24} $T = 15$ ч.

6.241. Вычислить с помощью табличных значений масс атомов кинетические энергии позитрона и нейтрино, испускаемых ядром C^{11} в случае, если дочернее ядро не испытывает отдачи.

6.242. Найти кинетическую энергию ядра отдачи при позитронном распаде ядра N^{13} в том случае, когда энергия позитрона максимальна.

6.243. Определить с помощью табличных значений масс атомов скорость ядра, возникающего в результате K-захвата в атоме Be^7, если дочернее ядро оказывается непосредственно в основном состоянии.

6.244. Возбужденные ядра Ag^{109}, переходя в основное состояние, испускают или γ-кванты с энергией 87 кэВ, или конверсионные K-электроны (их энергия связи 26 кэВ). Определить скорость этих электронов.

6.245. Свободное покоившееся ядро Ir^{191} с энергией возбуждения $E = 129$ кэВ перешло в основное состояние, испустив γ-квант. Вычислить относительное изменение энергии γ-кванта, возникающее в результате отдачи ядра.

6.246. С какой относительной скоростью должны сближаться источник и поглотитель, состоящие из свободных ядер Ir^{191}, чтобы наблюдалось максимальное поглощение γ-квантов с энергией $\varepsilon = 129$ кэВ?

6.247. Источник γ-квантов расположен на $h = 20$ м выше поглотителя. С какой скоростью необходимо перемещать вверх источник, чтобы в месте расположения поглотителя полностью скомпенсировать гравитационное изменение энергии γ-квантов, обусловленное полем тяготения Земли?

6.248. На какую минимальную высоту необходимо поднять источник γ-квантов, содержащий возбужденные ядра Zn^{67}, чтобы при регистрации на поверхности Земли гравитационное смещение линии Мёссбауэра превзошло ширину этой линии? Известно, что регистрируемые γ-кванты имеют энергию $\varepsilon = 93$ кэВ и возникают при переходе ядер Zn^{67} в основное состояние, а среднее время жизни возбужденного состояния $\tau = 14$ мкс.

6.6. Ядерные реакции

● Энергия связи ядра:

$$E_{\text{св}} = Zm_{\text{H}} + (A - Z)\, m_n - M, \tag{6.6а}$$

где Z — заряд ядра (в единицах e), A — массовое число, m_{H}, m_n и M — массы атома водорода, нейтрона и *атома*, соответствующего данному ядру.

Для расчетов удобнее пользоваться формулой:

$$E_{\text{св}} = Z\Delta_{\text{H}} + (A - Z)\, \Delta_n - \Delta, \tag{6.6б}$$

где Δ_{H}, Δ_n и Δ — избыток массы атома водорода, нейтрона и атома, соответствующего данному ядру.

● Энергетическая схема ядерной реакции

$$m+M \to M^* \to m'+M'+Q \qquad (6.6в)$$

показана на рис. 6.12, где $m+M$ и $m'+M'$ — суммы масс покоя частиц до и после реакции, $\tilde{T}$ и $\tilde{T}'$ — суммарные кинетические энергии частиц до и после реакции (в системе центра инерции), E^* — энергия возбуждения промежуточного ядра, Q — энергия реакции, E и E' — энергии связи частиц m и m' в промежуточном ядре, *1*, *2*, *3* — уровни энергии промежуточного ядра.

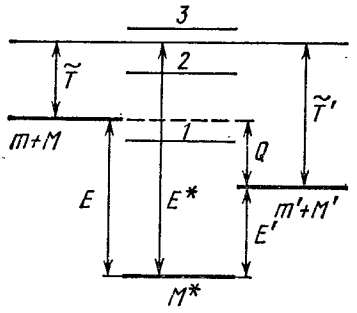


Рис 6.12.

● Пороговая (минимальная) кинетическая энергия налетающей частицы, при которой становится возможной эндоэнергетическая ядерная реакция:

$$T_{\text{пор}} = \frac{m+M}{M}|Q|, \qquad (6.6г)$$

где m и M — массы налетающей частицы и ядра мишени.

6.249. Альфа-частица с кинетической энергией $T_\alpha = 7{,}0$ Мэв упруго рассеялась на первоначально покоившемся ядре Li^6. Определить кинетическую энергию ядра отдачи, если угол между направлениями разлета обеих частиц $\theta = 60°$.

6.250. Нейтрон испытал упругое соударение с первоначально покоившимся дейтоном. Определить долю кинетической энергии, теряемую нейтроном:

а) при лобовом соударении;

б) при рассеянии под прямым углом.

6.251. Определить значение максимально возможного угла, на который рассеивается дейтон при упругом соударении с первоначально покоившимся протоном.

6.252. Считая радиус ядра равным $R = 0{,}13\sqrt[3]{A}$ пм, где A — его массовое число, оценить плотность ядер, а также число нуклонов в единице объема ядра.

6.253. Написать недостающие обозначения (x) в следующих ядерных реакциях:

а) B^{10} (x, α) Be^8;

б) O^{17} (d, n) x;

в) Na^{23} (p, x) Ne^{20};

г) $x(p, n)$ Ar^{37}.

6.254. Показать, что энергия связи ядра с массовым числом A и зарядом Z может быть определена по формуле (6.6б).

6.255. Найти энергию связи ядра, которое имеет одинаковое число протонов и нейтронов и радиус, в полтора раза меньший радиуса ядра Al^{27}.

6.256. Найти с помощью табличных значений масс атомов:

а) среднюю энергию связи на один нуклон в ядре O^{16};

б) энергию связи нейтрона и α-частицы в ядре B^{11};

в) энергию, необходимую для разделения ядра O^{16} на четыре одинаковые частицы.

6.257. Найти разность энергий связи нейтрона и протона в ядре B^{11}. Объяснить причину их различия.

6.258. Вычислить энергию, необходимую для разделения ядра Ne^{20} на две α-частицы и ядро C^{12}, если известно, что энергии связи на один нуклон в ядрах Ne^{20}, He^4 и C^{12} равны соответственно 8,03, 7,07 и 7,68 МэВ.

6.259. Вычислить в а. е. м. массу:

а) атома Li^8, энергия связи ядра которого 41,3 МэВ;

б) ядра C^{10}, у которого энергия связи на один нуклон равна 6,04 МэВ.

6.260. Известны энергии связи E_1, E_2, E_3 и E_4 ядер, участвующих в ядерной реакции $A_1 + A_2 \rightarrow A_3 + A_4$. Найти энергию этой реакции.

6.261. Считая, что в одном акте деления ядра U^{235} освобождается энергия 200 МэВ, определить:

а) энергию, выделяющуюся при сгорании одного килограмма изотопа U^{235}, и массу каменного угля с теплотворной способностью 30 кДж/г, эквивалентную в тепловом отношении одному килограмму U^{235};

б) массу изотопа U^{235}, подвергшегося делению при взрыве атомной бомбы с тротиловым эквивалентом 30 килотонн, если тепловой эквивалент тротила равен 4,1 кДж/г.

6.262. Сколько тепла выделяется при образовании одного грамма He^4 из дейтерия H^2? Какая масса каменного угля с теплотворной способностью 30 кДж/г эквивалентна в тепловом отношении полученной величине?

6.263. Вычислить с помощью табличных значений масс атомов энергию на один нуклон, которая выделяется при протекании термоядерной реакции $Li^6 + H^2 \rightarrow 2He^4$. Сравнить полученную величину с энергией на один нуклон, освобождающейся при делении ядра U^{235}.

6.264. Определить энергию реакции $Li^7 + p \rightarrow 2He^4$, если известно, что энергии связи на один нуклон в ядрах Li^7 и He^4 равны соответственно 5,60 и 7,06 МэВ.

6.265. Найти энергию реакции N^{14} (α, p) O^{17}, если кинетическая энергия налетающей α-частицы $T_\alpha = 4{,}0$ МэВ и протон, вылетевший под углом $\vartheta = 60°$ к направлению движения α-частицы, имеет кинетическую энергию $T_p = 2{,}09$ МэВ.

6.266. Определить с помощью табличных значений масс атомов энергию следующих реакций:

а) $Li^7(p, n)$ Be^7;

б) Be^9 (n, γ) Be^{10};

в) Li^7 (α, n) B^{10};

г) O^{16} (d, α) N^{14}.

6.267. Найти с помощью табличных значений масс атомов скорости продуктов реакции $B^{10}(n, \alpha)$ Li^7, протекающей в резуль-

тате взаимодействия весьма медленных нейтронов с покоящимися ядрами бора.

6.268. Протоны, налетающие на неподвижную литиевую мишень, возбуждают реакцию Li^7 (p, n) Be^7. При каком значении кинетической энергии протона возникший нейтрон может оказаться покоящимся?

6.269. Альфа-частица с кинетической энергией $T = 5{,}3$ МэВ возбуждает ядерную реакцию $Be^9(\alpha, n)$ C^{12}, энергия которой $Q = +5{,}7$ МэВ. Найти кинетическую энергию нейтрона, вылетевшего под прямым углом к направлению движения α-частицы.

6.270. Протоны с кинетической энергией $T = 1{,}0$ МэВ бомбардируют литиевую мишень, в результате чего наблюдается ядерная реакция $p + Li^7 \rightarrow 2He^4$. Найти кинетическую энергию каждой α-частицы и угол между направлениями их разлета, если разлет происходит симметрично по отношению к направлению налетающих протонов.

6.271. Частица массы m налетает на покоящееся ядро массы M, возбуждая эндоэнергетическую реакцию. Показать, что пороговая (минимальная) кинетическая энергия, при которой эта реакция становится возможной, определяется формулой (6.6г).

6.272. Какую кинетическую энергию необходимо сообщить протону, чтобы он смог расщепить покоящееся ядро тяжелого водорода H^2, энергия связи которого $E_{св} = 2{,}2$ МэВ?

6.273. При облучении моноэнергетическим пучком протонов мишеней из лития и бериллия было обнаружено, что реакция $Li^7(p, n)$ Be^7 — 1,65 МэВ идет, а Be^9 (p, n) B^9 — 1,85 МэВ не идет. Найти возможные значения кинетической энергии протонов.

6.274. Для возбуждения реакции (n, α) на покоящихся ядрах B^{11} пороговая кинетическая энергия нейтронов $T_{пор} = 4{,}0$ МэВ. Найти энергию этой реакции.

6.275. Вычислить пороговые кинетические энергии протонов для возбуждения реакций (p, n) и (p, d) на ядрах Li^7.

6.276. Найти с помощью табличных значений масс атомов пороговую кинетическую энергию α-частицы для ядерной реакции $Li^7(\alpha, n)$ B^{10}. Какова при этом скорость ядра B^{10}?

6.277. Нейтрон с кинетической энергией $T = 10$ МэВ возбуждает ядерную реакцию $C^{12}(n, \alpha)$ Be^9, порог которой $T_{пор} = 6{,}17$ МэВ. Найти кинетическую энергию α-частиц, вылетающих под прямым углом к падающим нейтронам.

6.278. На сколько процентов пороговая энергия γ-кванта превосходит энергию связи дейтона ($E_{св} = 2{,}2$ МэВ) в реакции $\gamma + H^2 \rightarrow n + p$?

6.279. Протон с кинетической энергией $T = 1{,}5$ МэВ захватывается ядром H^2. Найти энергию возбуждения образовавшегося ядра.

6.280. Выход ядерной реакции C^{13} (d, n) N^{14} имеет максимумы при следующих значениях кинетической энергии T_i налетающих дейтонов: 0,60, 0,90, 1,55 и 1,80 МэВ. Найти с помощью табличных

значений масс атомов соответствующие энергетические уровни промежуточного ядра, через которые идет эта реакция.

6.281. Узкий пучок тепловых нейтронов ослабляется в $\eta = 360$ раз после прохождения кадмиевой пластинки, толщина которой $d = 0{,}50$ мм. Определить эффективное сечение взаимодействия этих нейтронов с ядрами кадмия.

6.282. Определить, во сколько раз уменьшится интенсивность узкого пучка тепловых нейтронов после прохождения слоя тяжелой воды толщиной $d = 5{,}0$ см. Эффективные сечения взаимодействия ядер дейтерия и кислорода для тепловых нейтронов равны соответственно $\sigma_1 = 7{,}0$ б и $\sigma_2 = 4{,}2$ б.

6.283. Узкий пучок тепловых нейтронов проходит через пластинку из железа, для которого эффективные сечения поглощения и рассеяния равны соответственно $\sigma_a = 2{,}5$ б, $\sigma_s = 11$ б. Определить относительную долю нейтронов, выбывших из пучка в результате рассеяния, если толщина пластинки $d = 0{,}50$ см.

6.284. Выход ядерной реакции с образованием радиоактивных изотопов можно характеризовать двояко: либо отношением w числа ядерных реакций к числу бомбардирующих частиц, либо величиной k — отношением активности возникшего радиоизотопа к числу бомбардировавших частиц. Найти:

а) период полураспада образующегося радиоизотопа, считая, что w и k известны;

б) выход w реакции Li^7 (p, n) Be^7, если после облучения литиевой мишени пучком протонов (в течение $t = 2{,}0$ ч при токе в пучке $I = 10$ мкА) активность изотопа Be^7 оказалась $A = 1{,}35 \cdot 10^8$ расп./с, а его период полураспада $T = 53$ сут.

6.285. Тонкую золотую фольгу, состоящую из стабильного изотопа Au^{197}, облучают по нормали к поверхности тепловыми нейтронами, плотность потока которых $J = 1{,}0 \cdot 10^{10}$ част./(с·см^2). Масса фольги $m = 10$ мг. В результате захвата нейтронов возникает β-активный изотоп Au^{198}, эффективное сечение образования которого $\sigma = 98$ б и период полураспада $T = 2{,}7$ сут. Найти:

а) время облучения, за которое число ядер Au^{197} уменьшится на $\eta = 1{,}0\%$;

б) максимальное число ядер Au^{198}, которое может образоваться в процессе длительного облучения.

6.286. Тонкую фольгу из некоторого стабильного изотопа облучают тепловыми нейтронами, падающими по нормали к ее поверхности. В результате захвата нейтронов возникает радиоактивный изотоп с постоянной распада λ. Найти закон накопления этого радиоизотопа $N(t)$ в расчете на единицу поверхности фольги. Плотность потока нейтронов равна J, число ядер на единицу поверхности фольги n и эффективное сечение образования активных ядер σ.

6.287. Золотую фольгу массы $m = 0{,}20$ г облучали в течение $t = 6{,}0$ ч потоком тепловых нейтронов, падающим по нормали к ее поверхности. Через $\tau = 12$ ч после окончания облучения ак-

тивность фольги оказалась $A = 1{,}9 \cdot 10^7$ расп./с. Найти плотность потока нейтронов, если эффективное сечение образования ядра радиоактивного изотопа $\sigma = 96$ б, а его период полураспада $T = 2{,}7$ сут.

6.288. Сколько нейтронов будет в сотом поколении, если процесс деления начинается с $N_0 = 1000$ нейтронов и происходит в среде с коэффициентом размножения $k = 1{,}05$?

6.289. Найти число нейтронов, возникающих в единицу времени в урановом реакторе, тепловая мощность которого $P = 100$ МВт, если среднее число нейтронов на каждый акт деления $\nu = 2{,}5$. Считать, что при каждом делении освобождается энергия $E = 200$ МэВ.

6.290. В ядерном реакторе на тепловых нейтронах среднее время жизни одного поколения нейтронов $\tau = 0{,}10$ с. Считая коэффициент размножения $k = 1{,}010$, найти:

а) во сколько раз увеличится количество нейтронов в реакторе, а следовательно и его мощность, за время $t = 1{,}0$ мин;

б) период реактора T, т. е. время, за которое его мощность увеличится в e раз.

6.7. Элементарные частицы

● Выражения для полной энергии и импульса релятивистской частицы:

$$E = m_0c^2 + T, \quad pc = \sqrt{T(T + 2m_0c^2)}, \tag{6.7а}$$

где T — кинетическая энергия частицы.

● При рассмотрении столкновения частиц полезно использовать инвариантную величину:

$$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4, \tag{6.7б}$$

где E и p — полная энергия и импульс системы до столкновения, m_0 — масса покоя образовавшейся частицы.

● Пороговая (минимальная) кинетическая энергия частицы m, налетающей на покоящуюся частицу M, для возбуждения эндоэнергетической реакции $m + M \to m_1 + m_2 + \ldots$:

$$T_{\text{пор}} = \frac{(m_1 + m_2 + \ldots)^2 - (m + M)^2}{2M} c^2, \tag{6.7в}$$

где m, M, m_1, m_2, ... — массы покоя соответствующих частиц.

● Квантовые числа, приписываемые элементарным частицам:

Q — электрический заряд,

L — лептонный заряд,

B — барионный заряд,

T — изотопический спин, T_z — его проекция,

S — странность, $S = 2\langle Q \rangle - B$,

Y — гиперзаряд, $Y = B + S$.

● Связь между квантовыми числами сильно взаимодействующих частиц:

$$Q = T_z + \frac{Y}{2} = T_z + \frac{B + S}{2}. \tag{6.7г}$$

● При взаимодействии частиц выполняются законы сохранения Q, L и B зарядов. В сильных взаимодействиях выполняются также законы сохранения S (или Y), T и его проекции T_z.

6.291. Вычислить кинетические энергии протонов, импульсы которых равны 0,10, 1,0 и 10 ГэВ/c, где c — скорость света.

6.292. Найти средний путь, проходимый π-мезонами с кинетической энергией, которая в $\eta = 1{,}2$ раза превышает их энергию покоя. Среднее время жизни очень медленных π-мезонов $\tau_0 = 25{,}5$ нс.

6.293. Отрицательные π-мезоны с кинетической энергией $T = 100$ МэВ пролетают от места рождения до распада в среднем расстояние $l = 11$ м. Найти собственное время жизни этих мезонов.

6.294. Имеется узкий пучок π^--мезонов с кинетической энергией T, равной энергии покоя данных частиц. Найти отношение потоков частиц в сечениях пучка, отстоящих друг от друга на $l = 20$ м. Собственное среднее время жизни этих мезонов $\tau_0 = 25{,}5$ нс.

6.295. Остановившийся π^+-мезон распался на мюон и нейтрино. Найти кинетическую энергию мюона и энергию нейтрино.

6.296. Найти кинетическую энергию нейтрона, возникшего при распаде остановившегося Σ^--гиперона ($\Sigma^- \to n + \pi^-$).

6.297. Остановившийся положительный мюон распался на позитрон и два нейтрино. Найти максимально возможную кинетическую энергию позитрона.

6.298. Покоившаяся нейтральная частица распалась на протон с кинетической энергией $T = 5{,}3$ Мэв и π^--мезон. Найти массу этой частицы. Как она называется?

6.299. Отрицательный π-мезон с кинетической энергией $T = 50$ МэВ распался на лету на мюон и нейтрино. Найти энергию нейтрино, вылетевшего под прямым углом к направлению движения π-мезона.

6.300. Σ^+-гиперон с кинетической энергией $T_\Sigma = 320$ МэВ распался на лету на нейтральную частицу и π^+-мезон, который вылетел с кинетической энергией $T_\pi = 42$ МэВ под прямым углом к направлению движения гиперона. Найти массу покоя нейтральной частицы (в МэВ).

6.301. Нейтральный π-мезон распался на лету на два γ-кванта с одинаковой энергией. Угол между направлениями разлета γ-квантов $\theta = 60°$. Найти кинетическую энергию π-мезона и энергию каждого γ-кванта.

6.302. Релятивистская частица с массой покоя m в результате столкновения с покоившейся частицей массы M возбуждает реакцию рождения новых частиц: $m + M \to m_1 + m_2 + \ldots$, где справа записаны массы покоя возникших частиц. Воспользовавшись инвариантностью величины $E^2 - p^2c^2$, показать, что пороговая кинетическая энергия частицы m для этой реакции определяется формулой (6.7в).

6.303. Позитрон с кинетической энергией $T = 750$ кэВ налетает на покоящийся свободный электрон. В результате анниги-

ляции возникают два γ-кванта с одинаковыми энергиями. Определить угол между направлениями их разлета.

6.304. Найти пороговую энергию γ-кванта, необходимую для образования:

а) пары электрон — позитрон в поле покоящегося электрона;

б) пары π^- — π^+-мезонов в поле покоящегося протона.

6.305. Протоны с кинетической энергией T налетают на неподвижную водородную мишень. Найти пороговые значения T для следующих реакций:

а) $p+p \to p+p+p+\tilde{p}$; б) $p+p \to p+p+\pi^0$.

6.306. Водородную мишень облучают π-мезонами. Вычислить пороговые значения кинетической энергии этих мезонов, при которых становятся возможными следующие реакции:

а) $\pi^-+p \to K^+ + \Sigma^-$; б) $\pi^0+p \to K^+ + \Lambda^0$.

6.307. Найти странность S и гиперзаряд Y нейтральной элементарной частицы, у которой проекция изотопического спина $T_z = +1/2$ и барионный заряд $B = +1$. Что это за частица?

6.308. Какие из нижеследующих процессов запрещены законом сохранения лептонного заряда:

1) $n \to p+e^-+\nu$; 4) $p+e^- \to n+\nu$;

2) $\pi^+ \to \mu^+ + e^- + e^+$; 5) $\mu^+ \to e^+ + \nu + \tilde{\nu}$;

3) $\pi^- \to \mu^- + \nu$; 6) $K^- \to \mu^- + \tilde{\nu}$?

6.309. Какие из нижеследующих процессов запрещены законом сохранения странности:

1) $\pi^-+p \to \Sigma^- + K^+$; 4) $n+p \to \Lambda^0 + \Sigma^+$;

2) $\pi^-+p \to \Sigma^+ + K^-$; 5) $\pi^-+n \to \Xi^- + K^+ + K^-$;

3) $\pi^-+p \to K^+ + K^- + n$; 6) $K^-+p \to \Omega^- + K^+ + K^0$?

6.310. Указать причины, запрещающие нижеследующие процессы:

1) $\Sigma^- \to \Lambda^0 + \pi^-$; 4) $n+p \to \Sigma^+ + \Lambda^0$;

2) $\pi^-+p \to K^+ + K^-$; 5) $\pi^- \to \mu^- + e^+ + e^-$;

3) $K^-+n \to \Omega^- + K^+ + K^0$; 6) $\mu^- \to e^- + \nu_e + \tilde{\nu}_\mu$.

1.1. $v = l/2\tau = 3{,}0$ км/ч.

1.2. $\langle v \rangle = 2v_0 (v_1 + v_2)/(2v_0 + v_1 + v_2)$.

1.3. $\Delta t = \tau \sqrt{1 - 4\langle v \rangle / w\tau} = 15$ с.

1.4. а) 10 см/с; б) 25 см/с; в) $t_0 = 16$ с; г) 2,5 и 0,7 см/с^2.

1.5. $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)/|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|$.

1.6. $v' = \sqrt{v_0^2 + v^2 + 2v_0 v \cos\varphi} \approx 40$ км/ч, $\varphi' = 19°$.

1.7. $u = \dfrac{v_0}{(1 - v_0^2/v'^2)^{-1/2} - 1} = 3{,}0$ км/ч.

1.8. $\tau_A/\tau_B = \eta/\sqrt{\eta^2 - 1} = 1{,}8$.

1.9. $\vartheta = \arcsin(1/n) + \pi/2 = 120°$.

1.10. $l = v_0 t \sqrt{2(1 - \sin\vartheta)} = 22$ м.

1.11. $l = (v_1 + v_2)\sqrt{v_1 u_2/g} = 2{,}5$ м.

1.12. $t = 2a/3v$.

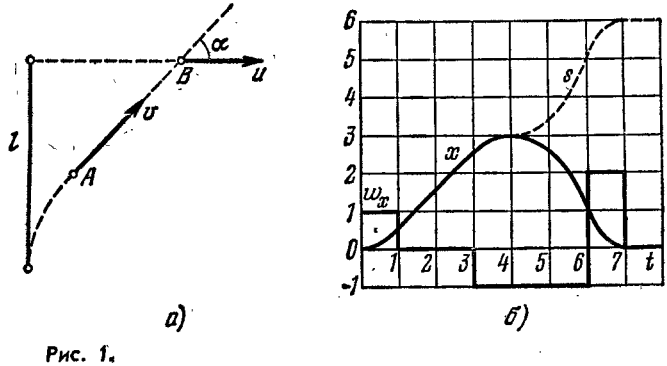


Рис. 1.

1.13. Из рис. 1, *а* видно, что скорость сближения точек A и B равна $v - u\cos\alpha$, где угол α зависит от времени. Для встречи точек необходимо, чтобы были выполнены два условия:

$$\int_0^\tau (v - u\cos\alpha)\, dt = l, \quad \int_0^\tau v\cos\alpha\, dt = u\tau,$$

где τ — искомое время. Из этих двух выражений следует, что

$$\tau = vl/(v^2 - u^2).$$

1.14. $x_1 - x_2 = l - w\tau\,(t + \tau/2) = 0{,}24$ км. Навстречу поезду со скоростью $V = 4{,}0$ м/с.

1.15. а) 0,7 с; б) соответственно 0,7 и 1,3 м.

1.16. $t_m = \dfrac{v_1 l_1 + v_2 l_2}{v_1^2 + v_2^2}$, $l_{\text{мин}} = \dfrac{|\, l_1 v_2 - l_2 v_1 \,|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$.

1.17. $CD = l/\sqrt{\eta^2 - 1}$.

1.18. См. рис. 1, *б*.

1.19. а) $\langle v \rangle = \pi R/\tau = 50$ см/с; б) $|\langle \mathbf{v} \rangle| = 2R/\tau = 32$ см/с; в) $|\langle \mathbf{w} \rangle| = 2\pi R/\tau^2 = 10$ см/с^2.

1.20. а) $\mathbf{v} = \mathbf{a}\,(1 - 2\alpha t)$, $\mathbf{w} = -2\alpha\mathbf{a} = \text{const}$; б) $\Delta t = 1/\alpha$, $s = a/2\alpha$.

1.21. а) $x = v_0 t\,(1 - t/2\tau)$; б) 1,1, 9 и 11 с; в) $s = \begin{cases} (1 - t/2\tau)\, v_0 t & \text{при } t \leqslant \tau, \\ [1 + (1 - t/\tau)^2]\, v_0 t/2 & \text{при } t \geqslant \tau. \end{cases}$

Соответственно 24 см и 34 см.

1.22. а) $v = \alpha^2 t/2$, $w = \alpha^2/2$; б) $\langle v \rangle = \alpha\sqrt{s}/2$.

1.23. а) $s = (2/3a)\, v_0^{3/2}$; б) $t = 2\sqrt{v_0/a}$.

1.24. а) $y = -x^2 b/a^2$; б) $\mathbf{v} = a\mathbf{i} - 2bt\mathbf{j}$, $\mathbf{w} = -2b\mathbf{j}$, $v = \sqrt{a^2 + 4b^2 t^2}$, $w = 2b$; в) $\operatorname{tg}\alpha = a/2bt$; г) $\langle \mathbf{v} \rangle = a\mathbf{i} - bt\mathbf{j}$, $|\langle \mathbf{v} \rangle| = \sqrt{a^2 + b^2 t^2}$.

1.25. а) $y = x - x^2\alpha/a$; б) $v = a\sqrt{1 + (1 - 2\alpha t)^2}$, $w = 2\alpha a = \text{const}$; в) $t_0 = 1/\alpha$.

1.26. а) $s = a\omega\tau$; б) $\pi/2$.

1.27. $v_0 = \sqrt{(1 + a^2)\, w/2b}$.

1.28. а) $\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{g}t^2/2$; б) $\langle \mathbf{v} \rangle_t = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}t/2$, $\langle v \rangle = v_0 - g\,(v_0 g)/g^2$.

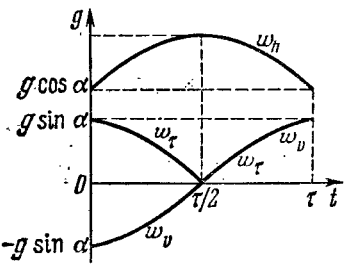


Рис. 2.

1.29. а) $\tau = 2\,(v_0/g)\sin\alpha$;
б) $h = (v_0^2/2g)\sin^2\alpha$, $l = (v_0^2/g)\sin 2\alpha$, $\alpha = 76°$;
в) $y = x\operatorname{tg}\alpha - (g/2v_0^2\cos^2\alpha)\, x^2$;
г) $R_1 = v_0^2/g\cos\alpha$, $R_2 = (v_0^2/g)\cos^2\alpha$.

1.30. См. рис. 2.

1.31. $l = 8h\sin\alpha$.

1.32. Через 0,41 или 0,71 мин в зависимости от начального угла.

1.33. $\Delta t = \dfrac{2v_0}{g}\,\dfrac{\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2} = 11$ с.

1.34. а) $x = (a/2v_0)\, y^2$; б) $w = av_0$, $w_\tau = a^2 y/\sqrt{1 + (ay/v_0)^2}$, $w_n = av_0/\sqrt{1 + (ay/v_0)^2}$.

1.35. а) $y = (b/2a)\, x^2$; б) $R = v^2/w_n = v^2/\sqrt{w^2 - w_\tau^2} = (a/b)\,[1 + (xb/a)^2]^{3/2}$.

1.36. $v = \sqrt{2ax}$.

1.37. $w = a\sqrt{1 + (4\pi n)^2} = 0{,}8$ м/с^2.

1.38. а) $v = v_0/(1 + v_0 t/R) = v_0 e^{-s/R}$; б) $w = \sqrt{2}\, v_0^2/R e^{2s/R} = \sqrt{2}\, v^2/R$.

1.39. $\operatorname{tg}\alpha = 2s/R$.

1.40. а) $w_0 = a^2\omega^2/R = 2{,}6$ м/с^2, $w_{|a|} = a\omega^2 = 3{,}2$ м/с^2; б) $w_{\text{мин}} = a\omega^2\sqrt{1 - (R/2a)^2} = 2{,}5$ м/с^2, $l_m = \pm a\sqrt{1 - R^2/2a^2} = \pm 0{,}37$ м.

1.41. $R = a^3/2bs$, $w = a\sqrt{1 + (4bs^2/a^3)^2}$.

1.42. а) $w = 2av^2$, $R = 1/2a$; б) $w = bv^2/a^2$, $R = a^2/b$.

1.43. $v = 2R\omega = 0{,}40$ м/с, $w = 4R\omega^2 = 0{,}32$ м/с^2.

1.44. $w = (v/t)\sqrt{1 + 4a^2 t^4} = 0{,}7$ м/с^2.

1.45. $\omega = 2\pi n v/l = 2{,}0 \cdot 10^3$ рад/с.

1.46. а) $\langle\omega\rangle = 2a/3 = 4$ рад/с, $\langle\beta\rangle = \sqrt{3ab} = 6$ рад/с^2; б) $\beta = 2\sqrt{3ab} = 12$ рад/с^2.

1.47. $t = \sqrt[3]{(4/a)\operatorname{tg}\alpha} = 7$ с.

1.48. $\langle\omega\rangle = \omega_0/3$.

1.49. а) $\varphi = (1 - e^{-at})\,\omega_0/a$; б) $\omega = \omega_0 e^{-at}$.

1.50. $\omega_z = \pm\sqrt{2\beta_0 \sin\varphi}$, см. рис. 3.

1.51. а) $y = v^2/\beta x$ (гипербола);

б) $y = \sqrt{2\omega x}/\omega$ (парабола).

1.52. а) $w_A = v^2/R = 2{,}0$ м/с^2, вектор w_A направлен все время к центру колеса;

б) $s = 8R = 4{,}0$ м.

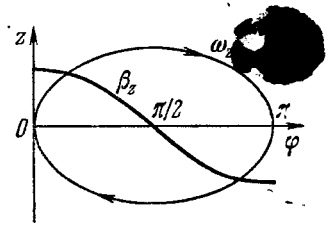


Рис. 3.

1.53. а) $v_A = 2\omega t = 10$ см/с, $v_B = \sqrt{2}\,\omega t = 7$ см/с, $v_O = 0$; б) $w_A = 2\omega\sqrt{1 + (\omega t^2/2R)^2} = 5{,}6$ см/с^2, $w_B = \omega\sqrt{1 + (1 - \omega t^2/R)^2} = 2{,}5$ см/с^2, $w_O = \omega^2/2/R = 2{,}5$ см/с^2.

1.54. $R_A = 4r$, $R_B = 2\sqrt{2}\,r$.

1.55. $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = 5$ рад/с, $\beta = \omega_1\omega_2 = 12$ рад/с^2.

1.56. а) $\omega = at\sqrt{1 + (bt/a)^2} = 8$ рад/с, $\beta = a\sqrt{1 + (2bt/a)^2} = 1{,}3$ рад/с^2; б) 17°.

1.57. а) $\omega = v/R\cos\alpha = 2{,}3$ рад/с, 60°; б) $\beta = (v/R)^2 \operatorname{tg}\alpha = 2{,}3$ рад/с^2.

1.58. $\omega = \omega_0\sqrt{1 + (\beta_0 t/\omega_0)^2} = 0{,}6$ рад/с, $\beta = \beta_0\sqrt{1 + \omega_0^2 t^2} = 0{,}2$ рад/с^2.

1.59. $\Delta m = 2m\omega/(g + \omega)$.

1.60. $w = \dfrac{m_0 - k(m_1 + m_2)}{m_0 + m_1 + m_2}\,g$, $T = \dfrac{(1 + k)\,m_0}{m_0 + m_1 + m_2}\,m_2 g$.

1.61. а) $F = \dfrac{(k_1 - k_2)\,m_1 m_2 g\cos\alpha}{m_1 + m_2}$; б) $\operatorname{tg}\alpha_{\text{мин}} = \dfrac{k_1 m_1 + k_2 m_2}{m_1 + m_2}$.

1.62. $k = [(\eta^2 - 1)/(\eta^2 + 1)]\operatorname{tg}\alpha = 0\ 16$.

1.63. а) $m_2/m_1 > \sin\alpha + k\cos\alpha$; б) $m/m_1 < \sin\alpha - k\cos\alpha$; в) $\sin\alpha - k\cos\alpha < m_2/m_1 < \sin\alpha + k\cos\alpha$.

1.64. $w_2 = g(\eta - \sin\alpha - k\cos\alpha)/(\eta + 1) = 0{,}05$ g.

1.65. При $t \leqslant t_0$ ускорения $w_1 = w_2 = at/(m_1 + m_2)$; при $t \geqslant t_0$ $w_1 = kgm_2/m_1$, $w_2 = (at - km_2 g)/m_2$. Здесь $t_0 = kgm_2(m_1 + m_2)/am_1$. См. рис. 4.

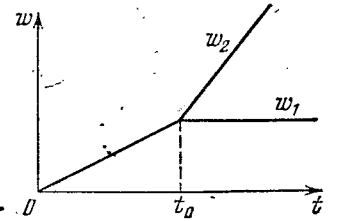


Рис. 4.

1.66. $\operatorname{tg} 2\alpha = -1/k$, $\alpha = 49°$; $t_{\text{мин}} = 1{,}0$ с.

1.67. $\operatorname{tg}\beta = k$; $T_{\text{мин}} = mg(\sin\alpha + k\cos\alpha)/\sqrt{1 + k^2}$.

1.68. а) $v = \dfrac{mg^2\cos\alpha}{2a\sin^2\alpha}$; б) $s = \dfrac{m^2 g^3\cos\alpha}{6a^2\sin^3\alpha}$.

1.69. $v = \sqrt{(2g/3a)\sin\alpha}$.

1.70. $\tau = \sqrt{2l/(3w + kg)}$.

1.71. а) $w_1 = \dfrac{(m_1 - m_2)\,g + 2m_2 w_0}{m_1 + m_2}$, $w_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(g - w_0)$; б) $F = \dfrac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2}(g - w_0)$.

1.72. $w = 2g(2\eta - \sin\alpha)/(4\eta + 1)$.

1.73. $w_1 = \dfrac{4m_1m_2 + m_0(m_1 - m_2)}{4m_1m_2 + m_0(m_1 + m_2)}\,g$.

1.74. $F_{тр} = 2lmM/(M-m)\,t^2$.

1.75. $t = \sqrt{2l(4+\eta)/3g(2-\eta)} = 1{,}4$ с.

1.76. $H = 6h\eta/(\eta+4) = 0{,}6$ м.

1.77. $w_A = g/(1+\eta\operatorname{ctg}^2\alpha)$, $w_B = g/(\operatorname{tg}\alpha + \eta\operatorname{ctg}\alpha)$.

1.78. $w = g\sqrt{2}/(2+k+M/m)$.

1.79. $w_{мин} = g(1-k)/(1+k)$.

1.80. $w_{макс} = g(1+k\operatorname{ctg}\alpha)/(\operatorname{ctg}\alpha - k)$.

1.81. $w = g\sin\alpha\cos\alpha/(\sin^2\alpha + m_1/m_2)$.

1.82. $w = \dfrac{mg\sin\alpha}{M + 2m(1-\cos\alpha)}$.

1.83. а) $|\langle \mathbf{F}\rangle| = 2\sqrt{2}\,mv^2/\pi R$; б) $|\langle \mathbf{F}\rangle| = mw_\tau$.

1.84. 2,1, 0,7 и 1,5 кН.

1.85. а) $w = g\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}$, $T = 3mg\cos\vartheta$; б) $T = mg\sqrt{3}$; в) $\cos\vartheta = 1/\sqrt{3}$, $\vartheta = 54{,}7°$.

1.86. $\approx 53°$.

1.87. $\vartheta = \arccos(2/3) \approx 48°$, $v = \sqrt{2gR/3}$.

1.88. $\varepsilon = 1/(\varkappa/m\omega^2 - 1)$. От направления вращения не зависит.

1.89. $r = R/2$, $v_{макс} = {}^1/_2\sqrt{kgR}$.

1.90. $s = {}^1/_2R\sqrt{(kg/w_\tau)^2 - 1} = 60$ м.

1.91. $v \leqslant \alpha\sqrt{kg/a}$.

1.92. $T = (\operatorname{ctg}\vartheta + \omega^2R/g)\,mg/2$.

1.93. а) Рассмотрим малый элемент нити на блоке (рис. 5). Вследствие его невесомости $dT = dF_{тр} = k\,dF_n$ и $dF_n = T\,d\alpha$. Отсюда $dT/T = k\,d\alpha$. Проинтегрировав это уравнение, получим $k = (1/\pi)\ln\eta_0$; б) $w = g(\eta - \eta_0)/(\eta + \eta_0)$.

1.94. $F = (mv_0^2/R)\cos^2\alpha$.

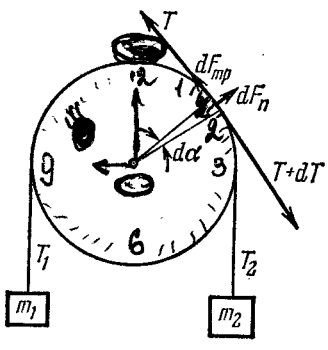


Рис. 5.

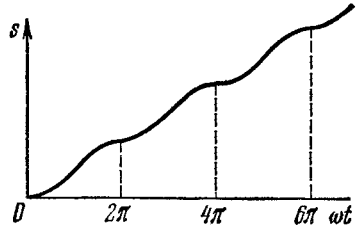


Рис. 6.

1.95. $\mathbf{F} = -m\omega^2\mathbf{r}$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор частицы относительно начала координат; $F = m\omega^2\sqrt{x^2+y^2}$.

1.96. а) $\Delta\mathbf{p} = m\mathbf{g}t$; б) $|\Delta\mathbf{p}| = -2m(\mathbf{v}_0\mathbf{g})/g$.

1.97. а) $\mathbf{p} = \mathbf{a}\tau^3/6$; б) $s = a\tau^4/12m$.

1.98. $s = (\omega t - \sin\omega t)\,F_0/m\omega^2$, см. рис. 6.

1.99. $t = \pi/\omega$; $s = 2F_0/m\omega^2$; $v_{макс} = F_0/m\omega$.

1.100. а) $v=v_0e^{-tr/m}$, $t\to\infty$; б) $v=v_0-sr/m$, $s_{\text{полн}}=\dfrac{mv_0}{r}$; в) $\langle v\rangle = v_0\dfrac{\eta-1}{\eta\ln\eta}$.

1.101. $t=\dfrac{h(v_0-v)}{v_0v\ln(v_0/v)}$.

1.102. $s=\dfrac{2}{a}\operatorname{tg}\alpha$, $v_{\text{макс}}=\sqrt{\dfrac{g}{a}\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha}$. Указание. Чтобы привести уравнение движения к виду, удобному для интегрирования, надо представить ускорение как dv/dt и затем произвести замену переменных по формуле $dt=dx/v$.

1.103. $s=\frac{1}{6}a(t-t_0)^3/m$, где $t_0=kmg/a$ — момент времени, с которого начнется движение. При $t\leqslant t_0$ путь $s=0$.

1.104. $v'=v_0/\sqrt{1+kv_0^2/mg}$.

1.105. а) $v=(2F/m\omega)\sin(\omega t/2)$; б) $\Delta s=8F/m\omega^2$, $\langle v\rangle=4F/\pi m\omega$.

1.106. $v=v_0/(1+\cos\varphi)$. Указание. Здесь $\omega_\tau=-\omega_x$, поэтому $v=-v_x+\text{const}$. Из начального условия следует, что $\text{const}=v_0$. Кроме того, $v_x=v\cos\varphi$.

1.107. $w=[1-\cos(l/R)]\,Rg/l$.

1.108. а) $v=\sqrt{2gR/3}$; б) $\cos\vartheta_0=\dfrac{2+\eta\sqrt{5+9\eta^2}}{3(1+\eta^2)}$, где $\eta=\omega_0/g$, $\vartheta_0\approx 17°$.

1.109. При $n<1$, включая и отрицательные значения, $r_{\text{уст}}=(mv^2/a)^{1/(1-n)}$.

1.110. Если $\omega^2R>g$, то имеются два положения равновесия: $\vartheta_1=0$ и $\vartheta_2=\arccos(g/\omega^2R)$. Если $\omega^2R<g$, то положение равновесия только $\vartheta_1=0$. Пока существует одно нижнее положение равновесия, оно устойчиво. При появлении же второго положения равновесия (оно всегда устойчиво) нижнее положение становится неустойчивым.

1.111. $h\approx(\omega s^2/v)\sin\varphi=7$ см, где ω — угловая скорость вращения Земли.

1.112. $F=m\sqrt{g^2+\omega^4r^2+(2v'\omega)^2}=8$ Н.

1.113. $F_{\text{кор}}=2m\omega^2r\sqrt{1+(v_0/\omega r)^2}=2{,}8$ Н.

1.114. а) $w'=\omega^2R$; б) $F_{\text{ин}}=m\omega^2r\sqrt{(2R/r)^2-1}$.

1.115. $F_{\text{цб}}=m\omega^2R\sqrt{5/9}=8$ Н, $F_{\text{кор}}=\frac{2}{3}m\omega^2R\sqrt{5+8g/3\omega^2R}=17$ Н.

1.116. а) $F=2mv\omega\sin\varphi=3{,}8$ кН, где ω — угловая скорость вращения Земли вокруг собственной оси; б) $F=m\omega(\omega R\cos\varphi\pm 2v)\sin\varphi$, $F_+=33$ кН, $F_-=25$ кН, где знак плюс соответствует движению с запада на восток, знак минус — наоборот, R — радиус Земли.

1.117. Отклонится на восток на расстояние $x\approx\frac{2}{3}\omega h\sqrt{2h/g}=24$ см. Здесь ω — угловая скорость вращения Земли вокруг собственной оси.

1.118. $A=\mathbf{F}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)=-17$ Дж.

1.119. $A=ma^4t^2/8$.

1.120. $F=2as\sqrt{1+(s/R)^2}$.

1.121. $A=mg(h+kl)$.

1.122. $A=-kmgl/(1-k\operatorname{ctg}\alpha)=-0{,}05$ Дж.

1.123. $F_{\text{мин}}=(m_1+m_2/2)kg$.

1.124. $A=-(1-\eta)\eta mgl/2=-1{,}3$ Дж.

1.125. $\langle P\rangle=0$, $P=mg(gt-v_0\sin\alpha)$.

1.126. $P=mRat$, $\langle P\rangle=mRat/2$.

1.127. а) $\langle P\rangle = -kmgv_0/2 = -2$ Вт; б) $P_{\text{макс}} = -{}^1/_2 mv_0^2\sqrt{\alpha g}$.

1.128. $A = {}^1/_2 m\omega^2 (r_2^2 - r_1^2) = 20$ Дж.

1.129. $A_{\text{мин}} = {}^1/_2 k\,(\Delta l)^2$, где $k = k_1k_2/(k_1 + k_2)$.

1.130. $A = 3mg/4a$, $\Delta U = mg/2a$.

1.131. а) $r_0 = 2a/b$, устойчиво; б) $F_{\text{макс}} = b^3/27a^2$. См. рис. **7.**

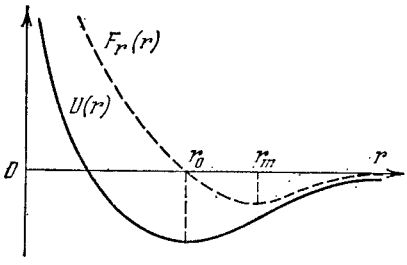


Рис. 7.

1.132. а) Нет; б) эллипсы, отношение полуосей которых $a/b = \sqrt{\beta/\alpha}$; тоже эллипсы, но с $a/b = \beta/\alpha$.

1.133. Потенциальным является второе поле сил.

1.134. $s = v_0^2/2g\,(\sin\alpha + k\cos\alpha)$, $A = -mv_0^2k/2\,(k + \operatorname{tg}\alpha)$.

1.135. $h = H/2$; $s_{\text{макс}} = H$.

1.136. $v = {}^2/_3\sqrt{gh/3}$.

1.137. $v_{\text{мин}} = \sqrt{5gl}$; $T = 3mg$.

1.138. $t = l_0^2/2v_0R$.

1.139. $\Delta l = \left(1 + \sqrt{1 + 2kl/mg}\right) mg/k$.

1.140. $v = \sqrt{19gl_0/32} = 1{,}7$ м/с.

1.141. $A = \dfrac{kmgl_0}{2}\,\dfrac{1 - \cos\vartheta}{(\sin\vartheta + k\cos\vartheta)\cos\vartheta} = 0{,}09$ Дж.

1.142. $A = \varkappa l_0^2\eta\,(1 + \eta)/2\,(1 - \eta)^2$, где $\eta = m\omega^2/\varkappa$.

1.143. $w_C = g\,(m_1 - m_2)^2/(m_1 + m_2)^2$.

1.145. $r = (g/\omega^2)\operatorname{tg}\vartheta = 0{,}8$ см, $T = mg/\cos\vartheta = 5$ Н.

1.146. а) $F_{\text{тр}} = mg[\sin\alpha + (\omega^2 l/g)\cos\alpha] = 6$ Н;

б) $\omega < \sqrt{g(k - \operatorname{tg}\alpha)/l(1 + k\operatorname{tg}\alpha)} = 2$ рад/с.

1.147. а) $\mathbf{V} = (m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2)/(m_1 + m_2)$; б) $T = \mu\,(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2/2$, где $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$.

1.148. $E = \tilde{E} + mV^2/2$.

1.149. $\tilde{E} = \mu\,(v_1^2 + v_2^2)/2$, где $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$.

1.150. $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + mgt$, где $\mathbf{p}_0 = m\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$, $m = m_1 + m_2$; $\mathbf{r}_C = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{g}t^2/2$, где $\mathbf{v}_0 = (m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2)/(m_1 + m_2)$.

1.151. $v_C = x\sqrt{\varkappa m_2/(m_1 + m_2)}$.

1.152. а) $l_{\text{макс}} = l_0 + F/\varkappa$, $l_{\text{мин}} = l_0$; б) $l_{\text{макс}} = l_0 + 2m_1F/\varkappa\,(m_1 + m_2)$, $l_{\text{мин}} = l_0$.

1.153. а) $\Delta l > 3mg/\varkappa$; б) $h = (1 + \varkappa\,\Delta\,l/mg)\,mg/8\varkappa = 8mg/\varkappa$.

1.154. $\mathbf{v}_1 = -m\mathbf{v}/(M - m)$, $\mathbf{v}_2 = M\mathbf{v}/(M - m)$.

1.155. $\mathbf{v}_{\text{задн}}=\mathbf{v}_0-\dfrac{m}{M+m}\mathbf{u}$; $\mathbf{v}_{\text{пер}}=\mathbf{v}_0+\dfrac{mM}{(M+m)^2}\mathbf{u}$.

1.156. 1) $\mathbf{v}_1=-\dfrac{2m}{M+2m}\mathbf{u}$; 2) $\mathbf{v}_2=-\dfrac{m(2M+3m)}{(M+m)(M+2m)}\mathbf{u}$, $v_2/v_1=1+$ $+m/2(M+m)>1$.

1.157. $p=\frac{2}{3}m\sqrt{2gl}=3{,}5$ кг · м/с.

1.158. $\Delta p=m\sqrt{2gh}(1+\eta)/(1-\eta)=0{,}2$ кг · м/с.

1.159. а) $\mathbf{l}=-\dfrac{m}{M+m}\mathbf{l}'$; б) $\mathbf{F}=-\dfrac{mM}{M+m}\dfrac{d\mathbf{v}'}{dt}$.

1.160. $\mathbf{l}=m\mathbf{l}'/2M$.

1.161. $\tau=(p\cos\alpha-M\sqrt{2gl\sin\alpha})/Mg\sin\alpha$.

1.162. а) $v=(2M/m)\sqrt{gl}\sin(\vartheta/2)$; б) $\eta\approx 1-m/M$.

1.163. $h=Mv^2/2g(M+m)$.

1.164. 1) $A=-\mu gh$, где $\mu=mM/(m+M)$; 2) Да.

1.166. $\mathbf{v}=1{,}0\mathbf{i}+2{,}0\mathbf{j}-4{,}0\mathbf{k}$, $v\approx 4{,}6$ м/с.

1.167. $\Delta T=-\mu(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)^2/2$, где $\mu=m_1m_2/(m_1+m_2)$.

1.168. а) $\eta=2m_1/(m_1+m_2)$; б) $\eta=4m_1m_2/(m_1+m_2)^2$.

1.169. а) $m_1/m_2=1/3$; б) $m_1/m_2=1+2\cos\theta=2{,}0$.

1.170. $\eta=\frac{1}{2}\cos^2\alpha=0{,}25$.

1.171. $v_{\text{макс}}=v(1+\sqrt{2(\eta-1)})=1{,}0$ км/с.

1.172. Будет двигаться в ту же сторону, но со скоростью $v'=$ $=(1-\sqrt{1-2\eta})v/2$. При $\eta\ll 1$ скорость $v'\approx\eta v/2=5$ см/с.

1.173. $\Delta T/T=(1+m/M)\operatorname{tg}^2\vartheta+m/M-1=-40\%$.

1.174. а) $p=\mu\sqrt{v_1^2+v_2^2}$; б) $T=\frac{1}{2}\mu(v_1^2+v_2^2)$. Здесь $\mu=m_1m_2/(m_1+m_2)$.

1.175. $\sin\vartheta_{\text{макс}}=m_2/m_1$.

1.176. $\mathbf{v}'=-\mathbf{v}(2-\eta^2)/(6-\eta^2)$. Соответственно при η меньшем, равном и большем $\sqrt{2}$.

1.178. Пусть в некоторый момент t ракета имела массу m и скорость $\mathbf{v}$ (относительно интересующей нас системы отсчета). Рассмотрим инерциальную систему отсчета, имеющую ту же скорость, что и ракета в *данный* момент. В этой системе отсчета приращение импульса системы «ракета — выброшенная порция газа» за время dt есть $d\mathbf{p}=m\,d\mathbf{v}+\mu\,dt\cdot\mathbf{u}=\mathbf{F}\,dt$. Дальнейшее очевидно.

1.179. $\mathbf{v}=-\mathbf{u}\ln(m_0/m)$.

1.180. $m=m_0e^{-\omega t/u}$.

1.181. $\alpha=(u/v_0)\ln(m_0/m)$.

1.182. $\mathbf{v}=\dfrac{\mathbf{F}}{\mu}\ln\dfrac{m_0}{m_0-\mu t}$, $\mathbf{w}=\dfrac{\mathbf{F}}{m_0-\mu t}$.

1.183. $\mathbf{v}=\mathbf{F}t/m_0(1+\mu t/m_0)$, $\mathbf{w}=\mathbf{F}/m_0(1+\mu t/m_0)^2$.

1.184. $v=\sqrt{2gh\ln(l/h)}$.

1.185. $\mathbf{N}=2b\sqrt{a/b}$.

1.186. $M=\frac{1}{2}mgv_0t^2\cos\alpha$; $M=(mv_0^2/2g)\sin^2\alpha\cos\alpha=37$ кг · м²/с.

1.187. а) Относительно всех точек прямой, перпендикулярной к стенке и проходящей через точку 0; б) $|\Delta\mathbf{M}|=2mvl\cos\alpha$.

1.188. Относительно центра окружности. $|\Delta\mathbf{M}|=2\sqrt{1-(g/\omega^2l)^2}\,mgl/\omega$.

1.189. $|\Delta\mathbf{M}|=hmV$.

1.190. $M=m\omega v_0^2t^2$.

1.191. $m=2kr_1^2/v_2^2$.

1.192. $v_0=\sqrt{2gl/\cos\vartheta}$.

1.193. $F=m\omega_0^2r_0^4/r^3$.

1.194. $M_z=Rmgt$.

1.195. $M=Rmgt\sin\alpha$. Не изменится.

1.196. $\mathbf{M}'=\mathbf{M}-[\mathbf{r}_0\mathbf{p}]$. В случае, когда $\mathbf{p}=0$, т. е. в системе центра инерции.

1.198. $\tilde{M}=1/3\,lmv_0$.

1.199. $\varepsilon_{\text{макс}}\approx mv_0^2/kl_0^2$. Решение удобно провести в системе центра инерции.

1.200. $T=2\pi\gamma M/v^3=225$ суток.

1.201. а) В 5,2 раза; б) 13 км/с, $2{,}2\cdot10^{-4}$ м/с^2.

1.202. $T=\pi\sqrt{(r+R)^3/2\gamma M}$. Достаточно рассмотреть движение по окружности, радиус которой равен большой полуоси данного эллипса, т. е. $(r+R)/2$ — по Кеплеру период обращения будет тем же.

1.203. Падение тела на Солнце можно рассматривать как движение по очень вытянутому (в пределе вырожденному) эллипсу, большая ось которого практически равна радиусу R земной орбиты. Тогда по Кеплеру $(2\tau/T)^2=[(R/2)/R]^3$, где τ — время падения (время половины оборота по вытянутому эллипсу), T — период обращения Земли вокруг Солнца. Отсюда $\tau=T/4\sqrt{2}=65$ сут.

1.204. Не изменятся.

1.205. $l=\sqrt[3]{\gamma M(T/2\pi)^2}$.

1.206. а) $U=-\gamma m_1m_2/r$; б) $U=-\gamma(mM/l)\ln(1+l/a)$, $F=\gamma mM/a(a+l)$.

1.207. $M=m\sqrt{2\gamma m_Cr_1r_2/(r_1+r_2)}$, где m_C — масса Солнца.

1.208. $E=T+U=-\gamma mm_C/2a$, где m_C — масса Солнца.

1.209. $r_m=\dfrac{r_0}{2-\eta}\left[1\pm\sqrt{1-(2-\eta)\,\eta\sin^2\alpha}\right]$, где $\eta=r_0v_0^2/\gamma m_C$, m_C — масса Солнца.

1.210. $r_{\text{мин}}=(\gamma m_C/v_0^2)\left[\sqrt{1+(lv_0^2/\gamma m_C)^2}-1\right]$, где m_C — масса Солнца.

1.211. *а*) Рассмотрим сначала тонкий сферический слой радиуса ρ и массы δM. Энергия взаимодействия частицы с элементарным поясом δS этого слоя есть (рис. 8)

$$dU=-\gamma(m\,\delta M/2l)\sin\vartheta\,d\vartheta. \quad (*)$$

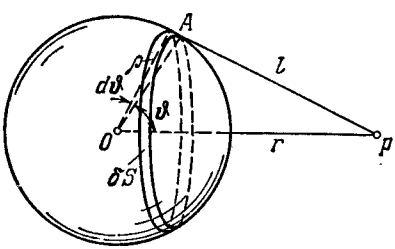


Рис. 8.

Для треугольника OAP по теореме косинусов $l^2=\rho^2+r^2-2\rho r\cos\vartheta$. Найдя дифференциал этого выражения, преобразуем формулу (*) к виду, удобному для интегрирования. После интегрирования по всему слою найдем $\delta U=-\gamma m\,\delta M/r$. И наконец, интегрируя по всем слоям шара, получим $U=-\gamma mM/r$; б) $F_r=-\partial U/\partial r=-\gamma mM/r^2$.

1.212. Рассмотрим сначала тонкий сферический слой вещества (рис. 9). Построим конус с малым углом раствора и вершиной в точке A. Площади участков, вырезанных этим конусом в слое, $dS_1:dS_2=r_1^2:r_2^2$. Массы же выре-

занных участков пропорциональны площадям этих участков. Поэтому силы притяжения к ним частицы A равны по модулю и противоположны по направлению. Дальнейшее очевидно.

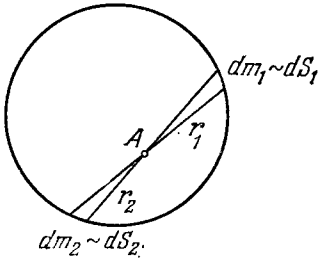


Рис. 9.

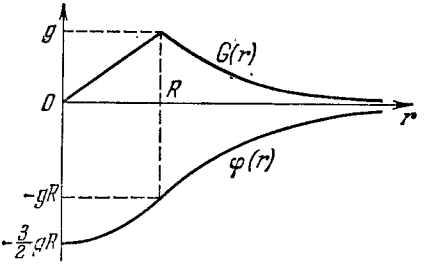


Рис. 10.

1.213. $A = -\,{}^3/_2 \gamma m M/R$.

1.214. $\mathbf{G} = \begin{cases} -(\gamma M/R^3)\,\mathbf{r} & \text{при } r \leqslant R, \\ -(\gamma M/r^3)\,\mathbf{r} & \text{при } r \geqslant R; \end{cases}$

$\varphi = \begin{cases} -{}^3/_2\,(1 - r^2/3R^2)\,\gamma M/R & \text{при } r \leqslant R, \\ -\gamma M/r & \text{при } r \geqslant R. \end{cases}$ См. рис. 10.

1.215. $\mathbf{G} = -\,{}^4/_3 \pi \gamma \rho \mathbf{l}$. Поле внутри полости однородное.

1.216. $p = {}^3/_8\,(1 - r^2/R^2)\,\gamma M^2/\pi R^4$. Около $1{,}8 \cdot 10^6$ атм.

1.217. а) Разобьем сферический слой на малые элементы, каждый массы δm. Тогда энергия взаимодействия каждого элемента со всеми остальными $\delta U = -\gamma m\,\delta m/R$. Суммируя по всем элементам и учитывая, что каждая пара взаимодействующих элементов войдет в результат дважды, получим $U = -\gamma m^2/2R$; б) $U = -3\gamma m^2/5R$.

1.218. $\Delta t \approx \dfrac{2\pi}{\sqrt{\gamma M}} \dfrac{r^{3/2}}{3\Delta r/2r + \delta} = \begin{cases} 4{,}5 \text{ сут} & (\delta = 0), \\ 0{,}84 \text{ ч} & (\delta = 2). \end{cases}$

1.219. $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = 1 : 0{,}0034 : 0{,}0006$.

1.220. 32 км; 2650 км.

1.221. $h = R/(2gR/v_0^2 - 1)$.

1.222. $h = R\,(gR/v^2 - 1)$.

1.223. $r = \sqrt[3]{\gamma M\,(T/2\pi)^2} = 4{,}2 \cdot 10^4$ км, где M и T — масса Земли и ее период обращения вокруг собственной оси; 3,1 км/с, 0,22 м/с^2.

1.224. $M = (4\pi^2 R^3/\gamma T^2)\,(1 + T/\tau)^2 = 6 \cdot 10^{24}$ кг, где T — период обращения Земли вокруг собственной оси.

1.225. $v' = \dfrac{2\pi R}{T} + \sqrt{\dfrac{\gamma M}{R}} = 7{,}0$ км/с, $\quad w' = \dfrac{\gamma M}{R^2}\left(1 + \dfrac{2\pi R}{T}\sqrt{\dfrac{R}{\gamma M}}\right) =$ $= 4{,}9$ м/с^2. Здесь M — масса Земли, T — ее период обращения вокруг собственной оси.

1.226. В 1,27 раза.

1.227. Убыль полной энергии E спутника за время dt есть $-dE = Fv\,dt$. Представив E и v как функции расстояния r между спутником и центром Луны, преобразуем это уравнение к виду, удобному для интегрирования. В результате получим $\tau \approx (\sqrt{\eta} - 1)\,m/\alpha\sqrt{gR}$.

1.228. $v_1 = 1{,}67$ км/с, $v_2 = 2{,}37$ км/с.

1.229. $\Delta v = \sqrt{\gamma M/R}\,(1-\sqrt{2}) = -0{,}70$ км/с, где M и R — масса и радиус Луны.

1.230. $\Delta v = \sqrt{gR}\,(\sqrt{2}-1) = 3{,}27$ км/с, где g — нормальное ускорение свободного падения, R — радиус Земли.

1.231. $r = nR/(1+\sqrt{\eta}) = 3{,}8 \cdot 10^4$ км.

1.232. $A \approx \gamma m\,(M_1/R_1 + M_2/R_2) = 1{,}3 \cdot 10^8$ кДж, где M и R — масса и радиус Земли и Луны.

1.233. $v_3 \approx \sqrt{2v_1^2 + (\sqrt{2}-1)^2\,V_1^2} \approx 17$ км/с. Здесь $v_1^2 = \gamma M_3/R$, M_3 и R — масса и радиус Земли; $V_1^2 = \gamma M_C/r$, M_C — масса Солнца, r — радиус орбиты Земли.

1.234. $l = 2aF_2/m\omega = 1{,}0$ м.

1.235. $\mathbf{N} = (aB - bA)\,\mathbf{k}$, где $\mathbf{k}$ — орт оси z; $l = |\,aB - bA\,|/\sqrt{A^2+B^2}$.

1.236. $l = |\,aA - bB\,|/\sqrt{A^2+B^2}$.

1.237. $F_{\text{равн}} = 2F$. Эта сила параллельна диагонали AC, а точка приложения ее расположена на середине стороны BC.

1.238. а) $I = {}^1/_3 ml^2$; б) $I = {}^1/_3 m\,(a^2+b^2)$.

1.239. а) $I = {}^1/_2 \pi \rho b R^4 = 2{,}8$ г·м²; б) $I = {}^3/_{10} mR^2$.

1.240. $I = {}^1/_4 mR^2$.

1.241. $I = (37/72)\,mR^2 = 0{,}15$ кг·м².

1.242. $I = {}^2/_3 mR^2$.

1.243. а) $\omega = gt/R\,(1 + M/2m)$; б) $T = mg^2t^2/2\,(1 + M/2m)$.

1.244. $T = {}^1/_2 mg$, $\omega_0 = gmr^2/I$.

1.245. $\omega = \sqrt{6F \sin\varphi/ml}$.

1.246. $\beta = \dfrac{|\,m_2 - m_1\,|\,g}{(m_1 + m_2 + m/2)\,R}$, $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{m_1\,(m+4m_2)}{m_2\,(m+4m_1)}$.

1.247. $A = -\dfrac{(m_2 - m_1)\,km_1g^2t^2}{m + 2\,(m_1+m_2)}$.

1.248. $n = (1+k^2)\,\omega_0^2 R/8\pi k\,(k+1)\,g$.

1.249. $t = {}^3/_4 \omega R/kg$.

1.250. $\langle\omega\rangle = {}^1/_3 \omega_0$.

1.251. $\beta = 2mgx/Rl\,(M+2m)$.

1.252. а) $k \geqslant {}^2/_7 \operatorname{tg}\alpha$; б) $T = {}^5/_{14} mg^2t^2 \sin^2\alpha$.

1.253. а) $T = {}^1/_6 mg = 13$ Н, $\beta = {}^2/_3 g/R = 5 \cdot 10^2$ рад/с²; б) $P = {}^2/_3 mg^2t$.

1.254. $\mathbf{w}' = {}^2/_3\,(\mathbf{g} - \mathbf{w}_0)$, $\mathbf{F} = {}^1/_3 m\,(\mathbf{g} - \mathbf{w}_0)$.

1.255. $w = g \sin\alpha/(1 + I/mr^2) = 1{,}6$ м/с².

1.256. $F_{\text{макс}} = 3km g/(2-3k)$; $w_{\text{макс}} = 2kg/(2-3k)$.

1.257. а) $w = \dfrac{F\,(\cos\alpha - r/R)}{m\,(1+\beta)}$; б) $A = \dfrac{F^2t^2\,(\cos\alpha - r/R)^2}{2m\,(1+\beta)}$.

1.258. $T = {}^1/_{10} mg$.

1.259. $\mathbf{w} = 3\mathbf{j}\,(M+3m)/(M+9m+I/R^2)$.

1.260. а) $w = \dfrac{F\,(3m_1+2m_2)}{m_1\,(m_1+m_2)}$; б) $T = \dfrac{F^2t^2\,(3m_1+2m_2)}{2m_1\,(m_1+m_2)}$.

1.261. $w_1 = F/(m_1 + {}^2/_7 m_2)$; $w_2 = {}^2/_7 w_1$.

1.262. а) $t = {}^1/_3 \omega_0 R/kg$; б) $A = -{}^1/_6 m\omega_0^2 R^2$.

1.263. $\omega = \sqrt{10g\,(R+r)/17r^2}$.

1.264. $v_0 = \sqrt{{}^1/_2 gR\,(7\cos\alpha - 4)} = 1{,}0$ м/с.

1.265. $v_0 = \sqrt{8gR}$.

1.266. $T = mv^2$.

1.267. $T = {}^7/_{10} mv^2 (1 + {}^2/_7 r^2/R^2)$.

1.269. $N = {}^1/_{24} m\omega^2 l^2 \sin 2\vartheta$.

1.270. $\cos\vartheta = {}^3/_2 g/\omega^2 l$.

1.271. $\Delta x = {}^1/_2 ka$.

1.272. $v' = \omega_0 l/\sqrt{1 + 3m/M}$.

1.273. $F = {}^9/_2 p^2/ml = 9$ Н.

1.274. а) $\mathbf{v}' = \dfrac{3m - 4M}{3m + 4M}\,\mathbf{v}$; б) $F = \dfrac{8Mv^2}{l\,(1 + 4M/3m)^2}$.

1.275. а) $v = (M/m)\sqrt{{}^2/_3 gl}\sin(\alpha/2)$; б) $\Delta p = M\sqrt{{}^1/_6 gl}\sin(\alpha/2)$; в) $x \approx {}^2/_3 l$.

1.276. а) $\omega = (1 + 2m/M)\,\omega_0$; б) $A = {}^1/_2 m\omega_0^2 R^2 (1 + 2m/M)$.

1.277. а) $\varphi = -\dfrac{2m_1}{2m_1 + m_2}\varphi'$; б) $N_z = -\dfrac{m_1 m_2 R}{2m_1 + m_2}\dfrac{dv'}{dt}$.

1.278. а) $\omega = \dfrac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}$; б) $A = -\dfrac{I_1 I_2}{2\,(I_1 + I_2)}(\omega_1 - \omega_2)^2$.

1.279. $\mathbf{v}' = \mathbf{v}\,(4 - \eta)/(4 + \eta)$, $\omega = 12v/l\,(4 + \eta)$. При $\eta = 4$ и $\eta > 4$.

1.280. а) $A_{90^\circ} = {}^1/_2 I_0^2\omega_0^2/(I + I_0)$, $A_{180^\circ} = 2I_0^2\omega_0^2/I$; б) $N = I_0^2\omega_0^2/(I + I_0)$.

1.281. $\omega = \sqrt{2g/l} = 6{,}0$ рад/с; $F = mgl_0/l = 25$ Н.

1.282. а) $M = {}^1/_{12} m\omega l^2 \sin\vartheta$, $M_z = M\sin\vartheta$; б) $|\Delta\boldsymbol{M}| = {}^1/_{12} m\omega l^2 \sin 2\vartheta$; в) $N = {}^1/_{24} m\omega^2 l^2 \sin 2\vartheta$.

1.283. а) $\omega' = mgl/I\omega = 0{,}7$ рад/с; б) $F = m\omega'^2 l \sin\vartheta = 10$ мН. См. рис. 11.

1.284. $\omega = (g + \omega)\,l/\pi nR^2 = 3 \cdot 10^2$ рад/с.

1.285. $\omega' = ml\sqrt{g^2 + \omega^2}/I\omega = 0{,}8$ рад/с. Вектор $\boldsymbol{\omega}'$ составляет с вертикалью угол $\vartheta = \operatorname{arctg}(\omega/g) = 6^\circ$.

1.286. $F' = {}^2/_5 mR^2\omega\omega'/l = 0{,}30$ кН.

1.287. $F_{\text{макс}} = \pi mr^2\varphi_m\omega/lT = 0{,}09$ кН.

1.288. $N = 2\pi nIv/R = 6$ кН · м.

1.289. $F_{\text{доб}} = 2\pi nIv/Rl = 1{,}4$ кН. На такую величину сила давления на наружный рельс возрастет, а на внутренний — уменьшится.

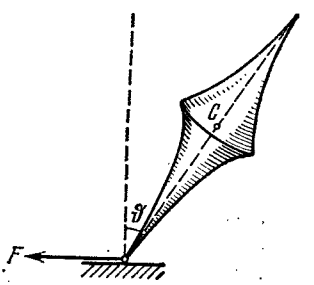


Рис. 11.

1.290. $p = \alpha E\Delta T = 2{,}2 \cdot 10^3$ атм, где α — коэффициент теплового расширения.

1.291. а) $p \approx \sigma_m \Delta r/r = 20$ атм; б) $p \approx 2\sigma_m \Delta r/r = 40$ атм. Здесь σ_m — предел прочности стекла.

1.292. $n = \sqrt{2\sigma_m/\rho}/\pi l = 0{,}8 \cdot 10^2$ об/с, где σ_m — предел прочности, ρ — плотность меди.

1.293. $n = \sqrt{\sigma_m/\rho}/2\pi R = 23$ об/с, где σ_m — предел прочности, ρ — плотность свинца.

1.294. $x \approx l\sqrt[3]{mg/2\pi d^2 E} = 2{,}5$ см.

1.295. $\varepsilon = {}^1/_2 F_0/ES$.

1.296. $T = {}^1/_2 m\omega^2 l\,(1 - r^2/l^2)$, $\Delta l = {}^1/_3 \rho\omega^2 l^3/E$, где ρ — плотность меди.

1.297. $\Delta V = (1 - 2\mu)\,Fl/E = 1{,}6$ мм^3, где μ — коэффициент Пуассона меди.

1.298. а) $\Delta l = {}^1/_2 \rho g l^2/E$; б) $\Delta V/V = (1 - 2\mu)\,\Delta l/l$. Здесь ρ — плотность, μ — коэффициент Пуассона меди.

1.299. а) $\Delta V/V = -3\,(1 - 2\mu)\,p/E$; б) $\beta = 3\,(1 - 2\mu)/E$.

1.300. $R = {}^1/_6 Eh^2/\rho g l^2 = 0{,}12$ км, где ρ — плотность стали.

1.301. а) Здесь N не зависит от x и равен N_0. Интегрируя дважды исходное уравнение с учетом краевых условий $dy/dx\,(0) = 0$ и $y\,(0) = 0$, получим $y = (N_0/2EI)\,x^2$. Это уравнение параболы. Стрела прогиба $\lambda = N_0 l^2/2EI$, где $I = a^4/12$.

б) В данном случае $N\,(x) = F\,(l - x)$ и $y = (F/2EI)\,(l - x/3)\,x^2$; $\lambda = Fl^3/3EI$, где I то же, что и в предыдущем пункте.

1.302. $\lambda = Fl^3/48EI$.

1.303. а) $\lambda = {}^3/_2 \rho g l^4/Eh^2$; б) $\lambda = {}^5/_2 \rho g l^4/Eh^2$. Здесь ρ — плотность стали.

1.304. $\lambda = {}^9/_5 \beta \rho l^5/Eh^2$, где ρ — плотность стали.

1.305. а) $\varphi = (l/2\pi r^3 \Delta r G) \cdot N$; б) $\varphi = (2l/\pi r^4 G) \cdot N$.

1.306. $N = \pi\,(d_2^4 - d_1^4)\,G\varphi/32l = 0{,}5$ кН · м.

1.307. $P = {}^1/_2 \pi r^4 G \varphi \omega = 17$ кВт.

1.308. $N = {}^1/_2 \beta m\,(r_2^4 - r^4)/(r_2^2 - r_1^2)$.

1.309. $U = {}^1/_2 mE\varepsilon^2/\rho = 0{,}04$ кДж, где ρ — плотность стали.

1.310. а) $U = {}^1/_6 \pi r^2 l^3 \rho^2 g^2/E$; б) $U = {}^2/_3 \pi r^2 l E\,(\Delta l/l)^2$. Здесь ρ — плотность стали.

1.311. $A \approx {}^1/_6 \pi^2 h \delta^3 E/l = 0{,}08$ кДж.

1.312. $U = {}^1/_4 \pi r^4 G \varphi^2/l = 7$ Дж.

1.313. $u = {}^1/_2 G \varphi^2 r^2/l^2$.

1.314. $u = {}^1/_2 \beta\,(\rho g h)^2 = 23{,}5$ кДж/м^3, где β — коэффициент сжимаемости.

1.315. $p_1 > p_2$, $v_1 < v_2$. Плотность линий тока растет при переходе от точки *1* к точке *2*.

1.316. $Q = S_1 S_2 \sqrt{2g\Delta h/(S_2^2 - S_1^2)}$.

1.317. $Q = S \sqrt{2g\Delta h \rho_0/\rho}$.

1.318. $v = \sqrt{2g\,(h_1 + h_2 \rho_2/\rho_1)} = 3$ м/с, где ρ_1 и ρ_2 — плотности воды и керосина.

1.319. $h = 25$ см; $l_{\text{макс}} = 50$ см.

1.320. $h = {}^1/_2 v^2/g - h_0 = 20$ см.

1.321. $p = p_0 + \rho g h\,(1 - R_1^2/r^2)$, где $R_1 < r < R_2$, p_0 — атмосферное давление.

1.322. $A = {}^1/_2 \rho V^3 s^2 t^2$, где ρ — плотность воды.

1.323. $\tau = \sqrt{2h/g}\,S/s$.

1.324. $v = \omega h \sqrt{2l/h - 1}$.

1.326. $F = 2\rho g S \Delta h = 0{,}50$ Н.

1.327. $F = \rho g b l\,(2h - l) = 5$ Н.

1.328. $N = \rho l Q^2/\pi r^2 = 0{,}7$ Н · м.

1.329. $F = \rho g h\,(S - s)^2/S = 6$ Н.

1.330. а) Параболоид вращения: $z = (\omega^2/2g)\,r^2$, где z — высота от поверхности жидкости на оси сосуда, r — расстояние от оси вращения; б) $p = p_0 + {}^1/_2 \rho \omega^2 r^2$.

1.331. $P = \pi \eta \omega^2 R^4/h = 9$ Вт.

1.332. $v = v_0 \dfrac{\ln\,(r/R_2)}{\ln\,(R_1/R_2)}$.

1.333. а) $\omega = \omega_2 \dfrac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(\dfrac{1}{R_1^2} - \dfrac{1}{r^2} \right)$; б) $N = 4\pi\eta\omega_2 \dfrac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$.

1.334. а) $Q = {}^1/_2 \pi v_0 R^2$; б) $T = {}^1/_6 \pi l R^2 \rho v_0^2$; в) $F_{\text{тр}} = 4\pi\eta l v_0$; г) $\Delta p = 4\eta l v_0/R^2$.

1.335. В левом конце трубки дополнительный напор $\Delta h = 5$ см сообщает кинетическую энергию жидкости, втекающей в трубку. Из условия $\rho v^2/2 = \rho g \Delta h$ получим $v = \sqrt{2g\Delta h} = 1{,}0$ м/с.

1.336. Искомое отношение равно $e^{\alpha \Delta x}=5$.

1.337. $v_2=v_1\dfrac{r_1\rho_1\eta_2}{r_2\rho_2\eta_1}=5$ мкм/с.

1.338. $d=\sqrt[3]{\dfrac{18\,\mathrm{Re}\,\eta^2}{(\rho-\rho_0)\rho_0 g}}=5$ мм, где ρ_0 и ρ — плотности глицерина и свинца.

1.339. $t=-\dfrac{\rho d^2}{18\eta}\ln n=0{,}20$ с.

1.340. $v=c\sqrt{\eta(2-\eta)}=0{,}1c$, где c — скорость света.

1.341. а) $P=a\left(1+\sqrt{4-3\beta^2}\right)$; б) $P=a\left(\sqrt{1-\beta^2}+\sqrt{4-\beta^2}\right)$. Здесь $\beta=V/c$.

1.342. $l_0=l\sqrt{(1-\beta^2\sin^2\vartheta)/(1-\beta^2)}=1{,}08$ м, где $\beta=v/c$.

1.343. а) $\operatorname{tg}\vartheta'=\dfrac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sqrt{1-\beta^2}}$, отсюда $\vartheta'=59°$; б) $S=S_0\sqrt{1-\beta^2\cos^2\vartheta}=$ $=3{,}3$ м^2. Здесь $\beta=v/c$.

1.344. $v=c\sqrt{\left(2-\dfrac{\Delta t}{t}\right)\dfrac{\Delta t}{t}}=0{,}6\cdot 10^8$ м/с.

1.345. $l_0=c\Delta t'\sqrt{1-(\Delta t/\Delta t')^2}=4{,}5$ м.

1.346. $s=c\Delta t\sqrt{1-(\Delta t_0/\Delta t)^2}=5$ м.

1.347. а) $\Delta t_0=(l/v)\sqrt{1-(v/c)^2}=1{,}4$ мкс; б) $l'=l\sqrt{1-(v/c)^2}=0{,}42$ км.

1.348. $l_0=v\Delta t/\sqrt{1-(v/c)^2}=17$ м.

1.349. $l_0=\sqrt{\Delta x_1\Delta x_2}=6{,}0$ м, $v=c\sqrt{1-\Delta x_1/\Delta x_2}=2{,}2\cdot 10^8$ м/с.

1.350. $v=\dfrac{2l_0/\Delta t}{1+(l_0/c\Delta t)^2}$.

1.351. Частица, двигавшаяся впереди, распалась позже на время $\Delta t=$ $=l\beta/c\,(1-\beta^2)=20$ мкс, где $\beta=v/c$.

1.352. а) $l_0=\dfrac{x_A-x_B-v\,(t_A-t_B)}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$; б) $t_A-t_B=\left(1-\sqrt{1-(v/c)^2}\right)l_0/v$ или $t_B-t_A=\left(1+\sqrt{1-(v/c)^2}\right)l_0/v$.

1.353. а) $t\,(B)=l_0/v$, $t\,(B')=(l_0/v)\sqrt{1-(v/c)^2}$; б) $t\,(A)=(l_0/v)\sqrt{1-(v/c)^2}$, $t\,(A')=l_0/v$.

1.354. С «точки зрения» K-часов см. рис. 12.

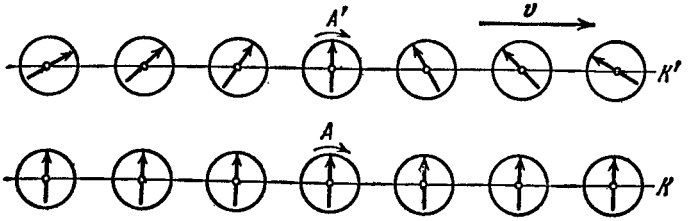


Рис. 12.

1.355. $\dot{x}=\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right)c/\beta$, где $\beta=V/c$.

1.356. Для этого необходимо убедиться в том, что при $\Delta t=t_2-t_1>0$ и $\Delta t'=t_2'-t_1'>0$.

1.357. а) 13 нс; б) 4,0 м. Указание. Воспользоваться инвариантностью интервала.

1.358. $v'=\dfrac{\sqrt{(v_x-V)^2+v_y^2(1-V^2/c^2)}}{1-v_xV/c^2}$.

1.359. а) $v=v_1+v_2=1{,}25c$; б) $v=(v_1+v_2)/(1+v_1v_2/c^2)=0{,}91c$.

1.360. $l=l_0(1-\beta^2)/(1+\beta^2)$, где $\beta=v/c$.

1.361. а) $v=\sqrt{v_1^2+v_2^2}$; б) $v=\sqrt{v_1^2+v_2^2-(v_1v_2/c)^2}$.

1.362. $s=\Delta t_0\sqrt{\dfrac{V^2+(1-\beta^2)v'^2}{(1-\beta^2)(1-v'^2/c^2)}}$, где $\beta=V/c$.

1.363. $\operatorname{tg}\vartheta'=\dfrac{\sqrt{1-\beta^2}\sin\vartheta}{\cos\vartheta-V/v}$, где $\beta=V/c$.

1.364. $\operatorname{tg}\vartheta=v'V/c^2\sqrt{1-(V/c)^2}$.

1.365. а) $w'=w(1-\beta^2)^{3/2}/(1-\beta v/c)^3$; б) $w'=w(1-\beta^2)$. Здесь $\beta=V/c$.

1.366. Воспользуемся связью между ускорением w' и ускорением w в системе отсчета, связанной с Землей:

$$w'=(1-v^2/c^2)^{-3/2}\frac{dv}{dt}.$$

Эта формула приведена в решении предыдущей задачи (пункт а), где следует положить $V=v$. Проинтегрировав данное уравнение (при $w'=\text{const}$), получим $v=w't/\sqrt{1+(w't/c)^2}$. Искомый путь $l=(\sqrt{1+(w't/c)^2}-1)\,c^2/w'=0{,}91$ светового года; $(c-v)/c={}^1/_2\,(c/w't)^2=0{,}47\%$.

1.367. Имея в виду, что $v=w't/\sqrt{1+(w't/c)^2}$, получим

$$\tau_0=\int_0^{\tau}\frac{dt}{\sqrt{1+(w't/c)^2}}=\frac{c}{w'}\ln\left[\frac{w'\tau}{c}+\sqrt{1+\left(\frac{w'\tau}{c}\right)^2}\right]=3{,}5\text{ мес}.$$

1.368. $m/m_0\approx 1/\sqrt{2(1-\beta)}\approx 70$, где $\beta=v/c$.

1.369. $v=c\sqrt{\eta(2+\eta)}/(1+\eta)=0{,}6c$, где c — скорость света. Здесь использовано определение плотности как отношение массы *покоя* тела к его объему.

1.370. $(c-v)/c=1-[1+(m_0c/p)^2]^{-1/2}=0{,}44\%$.

1.371. $v=(c/\eta)\sqrt{\eta^2-1}={}^1/_2c\sqrt{3}$.

1.372. $A=0{,}42m_0c^2$ вместо $0{,}14m_0c^2$.

1.373. $v={}^1/_2c\sqrt{3}=2{,}6\cdot 10^8$ м/с.

1.374. При $\varepsilon\ll 1$ отношение $T/m_0c^2\lesssim {}^4/_3\varepsilon\approx 0{,}013$.

1.375. $p=\sqrt{T(T+2m_0c^2)}/c=1{,}09$ ГэВ/c, где c — скорость света.

1.376. $F=(I/ec)\sqrt{T(T+2m_0c^2)}$, $P=TI/e$.

1.377. $p=2nmv^2/(1-v^2/c^2)$.

1.378. $v=Fct/\sqrt{m_0^2c^2+F^2t^2}$, $l=\sqrt{(m_0c^2/F)^2+c^2t^2}-m_0c^2/F$.

1.379. $F=m_0c^2/a$.

1.380. а) В двух случаях: $\mathbf{F}\parallel\mathbf{v}$ и $\mathbf{F}\perp\mathbf{v}$; б) $F_\perp=m_0w/\sqrt{1-\beta^2}$, $F_\parallel=m_0w/(1-\beta^2)^{3/2}$, где $\beta=v/c$.

1.382. $\varepsilon'=\varepsilon\sqrt{(1-\beta)/(1+\beta)}$, где $\beta=V/c$, $V={}^3/_5c$.

1.383. $E^2-p^2c^2=m_0^2c^4$, где m_0 — масса покоя частицы.

1.384. а) $\tilde{T}=2m_0c^2\left(\sqrt{1+T/2m_0c^2}-1\right)=777$ МэВ, $\tilde{p}=\sqrt{1/2m_0T}=940$ МэВ/c; б) $V=c\sqrt{T/(T+2m_0c^2)}=2{,}12\cdot10^8$ м/с.

1.385. $M_0=\sqrt{2m_0\left(T+2m_0c^2\right)}/c$, $V=c\sqrt{T/(T+2m_0c^2)}$.

1.386. $T'=2T\left(T+2m_0c^2\right)/m_0c^2=1{,}43\cdot10^3$ ГэВ.

1.387. $E_{1\text{макс}}=\dfrac{m_0^2+m_1^2-(m_2+m_3)^2}{2m_0}\,c^2$. Частица m_1 будет иметь наибольшую энергию в том случае, когда энергия системы двух других частиц m_2 и m_3 будет наименьшей, т. е. когда они движутся как единое целое.

1.388. $v/c=\dfrac{1-(m/m_0)^{2u/c}}{1+(m/m_0)^{2u/c}}$. Воспользоваться законом сохранения импульса (подобно решению задачи 1.178) и релятивистской формулой преобразования скорости.

2.1. $m=\rho V\Delta p/p_0=30$ г, где p_0 — нормальное атмосферное давление.

2.2. $p=1/2\,(p_1T_2/T_1-\Delta p)=0{,}10$ атм.

2.3. $m_1/m_2=(1-a/M_2)/(a/M_1-1)=0{,}50$, где $a=mRT/pV$.

2.4. $\rho=\dfrac{p_0\left(m_1+m_2\right)}{RT\left(m_1/M_1+m_2/M_2\right)}=1{,}5$ г/л.

2.5. а) $p=(\nu_1+\nu_2+\nu_3)\,RT/V=2{,}0$ атм; б) $M=(\nu_1M_1+\nu_2M_2+\nu_3M_3)/(\nu_1+\nu_2+\nu_3)=36{,}7$ г/моль.

2.6. $T=T_0\eta'\left(\eta^2-1\right)/\eta\left(\eta'^2-1\right)=0{,}42$ кК.

2.7. $n=\dfrac{\ln\eta}{\ln(1+\Delta V/V)}$.

2.8. $p=p_0e^{-Ct/V}$.

2.9. $t=(V/C)\ln\eta=1{,}0$ мин.

2.10. $\Delta T=(mg+p_0\Delta S)\,l/R=0{,}9$ К.

2.11. а) $T_{\text{макс}}=2/3\,(p_0/R)\sqrt{p_0/3\alpha}$; б) $T_{\text{макс}}=p_0/e\beta R$.

2.12. $p_{\text{мин}}=2R\sqrt{\alpha T_0}$.

2.13. $dT/dh=Mg/R=33$ мК/м.

2.14. $dT/dh=-Mg(n-1)/nR$.

2.15. 0,5 и 2 атм.

2.16. а) $h=RT/Mg=8{,}0$ км; б) $h\approx\eta RT/Mg=0{,}08$ км.

2.17. $m=\left(1-e^{-Mgh/RT}\right)p_0S/g$.

2.18. $h_C=\int\limits_0^\infty h\rho\,dh\Big/\int\limits_0^\infty\rho\,dh=RT/Mg$.

2.19. а) $p=p_0\,(1-ah)^n$, $h<1/a$; б) $p=p_0/(1+ah)^n$. Здесь $n=Mg/aRT_0$.

2.20. $p=p_0e^{M\omega^2r^2/2RT}$.

2.21. $p_{\text{ид}}=\rho RT/M=280$ атм; $p=\rho RT/(M-\rho b)-a\rho^2/M^2=80$ атм.

2.22. а) $T=a\,(V-b)\,(1+\eta)/RV\,(\eta V+b)=133$ К; б) $p=RT/(V-b)-a/V^2=9{,}9$ атм.

2.23. $a=V^2\,(T_1p_2-T_2p_1)/(T_2-T_1)=185$ атм · л^2/моль^2; $b=V-R\times\times(T_2-T_1)/(p_2-p_1)=0{,}042$ л/моль.

2.24. $\varkappa=V^2\,(V-b)^2/[RTV^3-2a\,(V-b)^2]$.

2.25. $T>a/bR$.

2.26. $U=pV/(\gamma-1)=10$ МДж.

2.27. $\Delta T = {}^1/_2 M v^2 (\gamma - 1)/R$.

2.28. $T = T_1 T_2 (p_1 V_1 + p_2 V_2)/(p_1 V_1 T_2 + p_2 V_2 T_1)$; $p = (p_1 V_1 + p_2 V_2)/(V_1 + V_2)$.

2.29. $\Delta U = -p_0 V \Delta T / T_0 (\gamma - 1) = -0{,}25$ кДж, $Q' = -\Delta U$.

2.30. $Q = A_1/(\gamma - 1) = 7$ Дж.

2.31. $A = R\Delta T = 0{,}60$ кДж, $\Delta U = Q - R\Delta T = 1{,}00$ кДж; $\gamma = Q/(Q - R\Delta T) = 1{,}6$.

2.32. $Q = \nu R T_0 (1 - 1/n) = 2{,}5$ кДж.

2.33. $\gamma = \dfrac{\nu_1 \gamma_1 (\gamma_2 - 1) + \nu_2 \gamma_2 (\gamma_1 - 1)}{\nu_1 (\gamma_2 - 1) + \nu_2 (\gamma_1 - 1)} = 1{,}33$.

2.34. $c_V = 0{,}42$ Дж/(г · К), $c_p = 0{,}65$ Дж/(г · К).

2.35. $A = RT (n - 1 - \ln n)$.

2.36. $A' = p_0 V_0 \ln [(\eta + 1)^2/4\eta]$.

2.37. $\gamma = 1 + (n - 1)/(Q/\nu R T_0 - \ln n) = 1{,}4$.

2.38. См. рис. 13, где V — изохорический процесс, p — изобарический, T — изотермический, S — адиабатический.

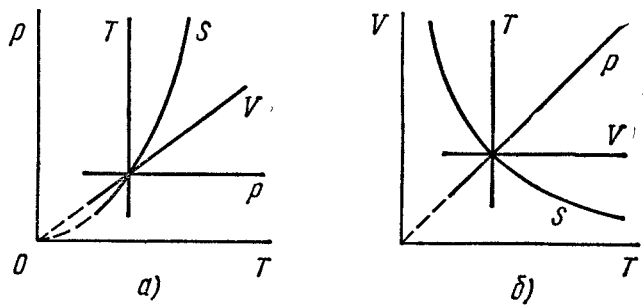


Рис. 13.

2.39. а) $T = T_0 \eta^{(\gamma-1)/\gamma} = 0{,}56$ кК; б) $A' = RT_0 (\eta^{(\gamma-1)/\gamma} - 1)/(\gamma - 1) = 1{,}6$ кДж.

2.40. При адиабатическом сжатии больше в $n = (\eta^{\gamma-1} - 1)/(\gamma - 1) \ln \eta = 1{,}4$ раза.

2.41. $T = T_0 [(\eta + 1)^2/4\eta]^{(\gamma-1)/2}$.

2.42. $v = \sqrt{2\gamma RT/(\gamma - 1) M} = 3{,}3$ км/с.

2.43. $Q = R\Delta T (2 - \gamma)/(\gamma - 1)$.

2.45. $C_n = R (n - \gamma)/(n - 1) (\gamma - 1)$; $C_n < 0$ при $1 < n < \gamma$.

2.46. $C = R (n - \gamma)/(n - 1) (\gamma - 1) = -4{,}2$ Дж/(К · моль), где $n = \ln \alpha / \ln \beta$.

2.47. а) $Q = R (n - \gamma) \Delta T/(n - 1) (\gamma - 1) = 0{,}11$ кДж; б) $A = -R\Delta T/(n - 1) = 0{,}43$ кДж.

2.48. а) $\Delta U = \alpha V_0^2 (\eta^2 - 1)/(\gamma - 1)$; б) $A = {}^1/_2 \alpha V_0^2 (\eta^2 - 1)$; в) $C = {}^1/_2 R \times (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$.

2.49. а) $C = -R/(\gamma - 1)$; б) $TV^{(\gamma-1)/2} = \text{const}$; в) $A = 2RT_0 \times (1 - \eta^{(\gamma-1)/2})/(\gamma - 1)$.

2.50. а) $A = (1 - \alpha) R\Delta T$; б) $C = R/(\gamma - 1) + R (1 - \alpha)$; $C < 0$ при $\alpha > \gamma/(\gamma - 1)$.

2.51. а) $A = \Delta U (\gamma - 1)/\alpha$; $Q = \Delta U [1 + (\gamma - 1)/\alpha]$; б) $C = R/(\gamma - 1) + R/\alpha$.

Зад 5 в почте есть?

2.52. а) $C=C_V+R/\alpha V$; б) $C=C_V+R/(1+\alpha V)$.

2.53. а) $C=\gamma R/(\gamma-1)+\alpha R/p_0V$; б) $\Delta U=p_0(V_2-V_1)/(\gamma-1)$; $A=p_0(V_2-V_1)+\alpha\ln(V_2/V_1)$; $Q=\gamma p_0(V_2-V_1)/(\gamma-1)+\alpha\ln(V_2/V_1)$.

2.54. а) $C=C_p+RT_0/\alpha V$; б) $Q=\alpha C_p(V_2-V_1)+RT_0\ln(V_2/V_1)$.

2.55. а) $Ve^{-\alpha T/R}=\text{const}$; б) $Te^{R/\beta V}=\text{const}$; в) $V-aT=\text{const}$.

2.56. а) $A=\alpha\ln\eta-RT_0(\eta-1)/(\gamma-1)$; б) $pV^\gamma e^{\alpha(\gamma-1)/pV}=\text{const}$.

2.57. $A=RT\ln\dfrac{V_2-b}{V_1-b}+a\left(\dfrac{1}{V_2}-\dfrac{1}{V_1}\right)$, где a и b — постоянные Ван-дер-Ваальса.

2.58. а) $\Delta U=a/V_1-a/V_2=0{,}11$ кДж; б) $Q=RT\ln\dfrac{V_2-b}{V_1-b}=3{,}8$ кДж.

2.59. а) $T(V-b)^{R/C_V}=\text{const}$; б) $C_p-C_V=\dfrac{R}{1-2a(V-b)^2/RTV^3}$.

2.60. $\Delta T=-\dfrac{\nu aV_2(\gamma-1)}{RV_1(V_1+V_2)}=-3{,}0$ К.

2.61. $Q=\nu^2a(V_2-V_1)/V_1V_2=0{,}33$ кДж.

2.62. $n=p/kT=1\cdot10^5$ см$^{-3}$; $\langle l\rangle=0{,}2$ мм.

2.63. $p=(1+\eta)mRT/MV=1{,}9$ атм, где M — масса моля азота N_2.

2.64. $n=(p/kT-\rho/m_2)/(1-m_1/m_2)=1{,}6\cdot10^{19}$ см$^{-3}$, где m_1 и m_2 — массы молекул гелия и азота.

2.65. $p=2nmv^2\cos^2\vartheta=1{,}0$ атм, где m — масса молекулы азота.

2.66. $i=2/(\rho v^2/p-1)=5$.

2.67. $v/v_{кв}=\sqrt{(i+2)/3i}$; а) 0,75; б) 0,68.

2.68. $\langle\varepsilon\rangle=\begin{cases}(3N-3)\,kT & \text{для объемных молекул,}\\ (3N-5/2)\,kT & \text{для линейных молекул.}\end{cases}$

Соответственно $1/2\,(N-1)$ и $1/(2N-5/3)$.

2.69. а) $C_V=7/2R$, $\gamma=9/7$; б) $C_V=(3N-5/2)\,R$, $\gamma=(6N-3)/(6N-5)$; в) $C_V=3\,(N-1)\,R$, $\gamma=(N-2/3)/(N-1)$.

2.70. $A/Q=\begin{cases}1/(3N-2) & \text{для объемных молекул,}\\ 1/(3N-3/2) & \text{для линейных молекул.}\end{cases}$

Для одноатомных молекул $A/Q=2/5$.

2.71. $M=R/(c_p-c_V)=32$ г/моль; $i=2/(c_p/c_V-1)=5$.

2.72. а) $i=2\,(C_p/R-1)=5$; б) $i=2\,[C/R+1/(n-1)]=3$, где $n=1/2$ — показатель политропы.

2.73. $\gamma=(5\nu_1+7\nu_2)/(3\nu_1+5\nu_2)$.

2.74. Увеличится на $\Delta p/p=Mv^2/iRT=1{,}2\%$, где $i=5$.

2.75. а) $v_{кв}=\sqrt{3RT/M}=0{,}47$ км/с, $\langle\varepsilon\rangle=3/2kT=6{,}0\cdot10^{-21}$ Дж; б) $v_{кв}=3\sqrt{2kT/\pi\rho d^3}=0{,}15$ м/с.

2.76. В $\eta^i=7{,}6$ раза.

2.77. $Q=1/2\,(\eta^2-1)\,imRT/M=10$ кДж.

2.78. $\omega_{кв}=\sqrt{kT/I}=1{,}4\cdot10^9$ рад/с.

2.79. $\langle\varepsilon\rangle_{вр}=kT_0\eta^{2/i}=0{,}7\cdot10^{-20}$ Дж.

2.80. Уменьшится в $\eta^{(i+1)/i}$ раз, где $i=5$.

2.81. Уменьшилась в $\eta^{(i-1)/(i-2)}=2{,}5$ раза.

2.82. $C=1/2R\,(i+1)=3R$.

2.83. $v_{\text{вер}}=\sqrt{2p/\rho}=0{,}45$ км/с, $\langle v\rangle=0{,}51$ км/с, $v_{\text{кв}}=0{,}55$ км/с.

2.84. а) $\delta N/N=(8/\sqrt{\pi})\,e^{-1}\delta\eta=1{,}66\%$; б) $\delta N/N=12\sqrt{3/2\pi}\,e^{-3/2}\delta\eta=1{,}85\%$.

2.85. а) $T=\dfrac{m(\Delta v)^2}{k(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=380$ К; б) $T=\dfrac{mv^2}{2k}=340$ К.

2.86. а) $T=\dfrac{m(v_2^2-v_1^2)}{4k\ln(v_2/v_1)}=330$ К; б) $v=\sqrt{\dfrac{3kT_0}{m}\dfrac{\eta\ln\eta}{\eta-1}}$.

2.87. $T=\dfrac{m_N(\Delta v)^2}{2k\left(1-\sqrt{m_N/m_O}\right)^2}=0{,}37$ кК.

2.88. $v=\sqrt{\dfrac{3kT\ln(m_2/m_1)}{m_2-m_1}}=1{,}61$ км/с.

2.89. $T=1/3\,mv^2/k$.

2.90. $dN/N=\left(\dfrac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-mv^2/2kT}\,2\pi v_\perp dv_\perp dv_x$.

2.91. $\langle v_x\rangle=0$, $\langle|v_x|\rangle=\sqrt{2kT/\pi m}$.

2.92. $\langle v_x^2\rangle=kT/m$.

2.93. $\nu=1/4\,n\langle v\rangle$, где $\langle v\rangle=\sqrt{8kT/\pi m}$.

2.94. $p=\int\limits_0^\infty 2mv_x\cdot v_x\,dn(v_x)=nkT$, где $dn(v_x)=(m/2\pi kT)^{1/2}\,n\cdot e^{-mv_x^2/2kT}\,dv_x$.

2.95. $\langle 1/v\rangle=\sqrt{2m/\pi kT}=4/\pi\langle v\rangle$.

2.96. $dN/N=2\pi(\pi kT)^{-3/2}e^{-\varepsilon/kT}\sqrt{\varepsilon}\,d\varepsilon$; $\varepsilon_{\text{вер}}=1/2\,kT$; нет.

2.97. $\delta N/N=3\sqrt{6/\pi}\,e^{-3/2}\,\delta\eta=0{,}9\%$.

2.98. Искомая величина

$$\frac{\Delta N}{N}=\frac{2\pi}{(\pi kT)^{3/2}}\int\limits_{\varepsilon_0}^{\infty}\sqrt{\varepsilon}\,e^{-\varepsilon/kT}\,d\varepsilon.$$

Главную роль в значении интеграла играют наименьшие значения ε, а именно $\varepsilon\approx\varepsilon_0$. Медленно изменяющийся множитель $\sqrt{\varepsilon}$ можно вынести из-под знака интеграла, взяв его значение при $\varepsilon=\varepsilon_0$. Тогда

$$\Delta N/N=2\sqrt{\varepsilon_0/\pi kT}\,e^{-\varepsilon_0/kT}.$$

2.99. а) $v_{\text{вер}}=\sqrt{3kT/m}$; б) $\varepsilon_{\text{вер}}=kT$.

2.100. $dv=\int\limits_{v=0}^{\infty}dn\,(d\Omega/4\pi)\,v\cos\vartheta=n\,(2kT/\pi m)^{1/2}\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta$.

2.101. $dv=\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi/2}dn\,(d\Omega/4\pi)\,v\cos\vartheta=\pi\,(m/2\pi kT)^{3/2}e^{-mv^2/2kT}\,v^3\,dv$.

2.102. $F=(kT/\Delta h)\ln\eta=0{,}9\cdot10^{-19}$ Н.

2.103. $N_A=(6RT/\pi d^3\Delta\rho gh)\ln\eta\approx6{,}4\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$.

2.104. $\eta/\eta_0=e^{(M_2-M_1)gh/RT}=1{,}39$.

2.105. $h=\dfrac{kT\ln(n_2/n_1)}{(m_2-m_1)g}$.

2.106. Не изменится.

2.107. $\langle U\rangle = kT$. Не зависит.

2.108. $w \approx \eta RT/Ml \approx 70g$.

2.109. $M = \dfrac{2RT\rho \ln \eta}{(\rho-\rho_0)(r_2^2-r_1)\omega^2}$.

2.110. $\omega = \sqrt{(2RT/Ml^2)\ln\eta} = 280$ рад/с.

2.111. а) $dN = n_0 e^{-ar^2/kT}\, 4\pi r^2 dr$; б) $r_{\text{вер}} = \sqrt{kT/a}$;

в) $dN/N = (a/\pi kT)^{3/2} e^{-ar^2/kT}\, 4\pi r^2 dr$; г) увеличится в $\eta^{3/2}$ раза.

2.112. а) $dN = (2\pi n_0/a^{3/2})\, e^{-U/kT} \sqrt{U}\, dU$; б) $U_{\text{вер}} = {}^1/_2 kT$.

2.113. Во втором случае.

2.114. а) $\eta = 1 - n^{1-\gamma} = 0{,}25$; б) $\eta = 1 - n^{1/\gamma - 1} = 0{,}18$.

2.115. $\varepsilon = (1-\eta)/\eta = 9$.

2.116. $\eta = 1 - 2T_3/(T_1+T_2)$.

2.117. $\eta = 1 - n^{1-\gamma} = 60\%$.

2.118. $\eta = 1 - n^{-(1-1/\gamma)}$.

2.119. $\eta = 1 - (n+\gamma)/(1+\gamma n)$.

2.120. В обоих случаях $\eta = 1 - \dfrac{\ln n}{n-1}$.

2.121. В обоих случаях $\eta = 1 - \dfrac{n-1}{n \ln n}$.

2.122. $\eta = 1 - \dfrac{n-1}{n \ln n}$.

2.123. а) $\eta = 1 - \gamma \dfrac{n-1}{n^\gamma - 1}$; б) $\eta = 1 - \dfrac{n^\gamma - 1}{\gamma (n-1) n^{\gamma-1}}$.

2.124. а) $\eta = 1 - \dfrac{\gamma(n-1)}{n-1+(\gamma-1)n\ln n}$; б) $\eta = 1 - \dfrac{n-1+(\gamma-1)\ln n}{\gamma(n-1)}$.

2.125. $\eta = \dfrac{(\tau-1)\ln\nu}{\tau\ln\nu + (\tau-1)/(\gamma-1)}$.

2.126. $\eta = \dfrac{(\tau-1)\ln n}{\tau \ln n + (\tau-1)\gamma/(\gamma-1)}$.

2.127. $\eta = 1 - 2\dfrac{\gamma + \sqrt{\tau}}{(1+\gamma)(1+\sqrt{\tau})}$.

2.128. Неравенство $\int \dfrac{\delta Q_1}{T_1} - \int \dfrac{\delta Q_2'}{T_2} \leqslant$ $\leqslant 0$ только усилится, если заменить T_1 на $T_{\text{макс}}$ и T_2 — на $T_{\text{мин}}$. Тогда $Q_1/T_{\text{макс}} - Q_2'/T_{\text{мин}} < 0$. Отсюда

$$\frac{Q_1 - Q_2'}{Q_1} < \frac{T_{\text{макс}} - T_{\text{мин}}}{T_{\text{макс}}}, \text{ или } \eta < \eta_{\text{Карно}}.$$

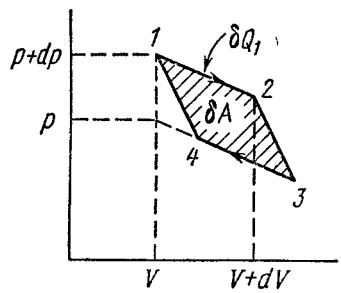


Рис. 14.

2.129. По теореме Карно $\delta A/\delta Q_1 = dT/T$. Найдем выражения для δA и δQ_1. Для бесконечно малого цикла Карно (его можно считать параллелограммом *1234*, показанным на рис. 14)

$$\delta A = dp \cdot dV = (\partial p/\partial T)_V\, dT \cdot dV,$$

$$\delta Q_1 = dU_{12} + p\, dV = \left[(\partial U/\partial V)_T + p\right] dV.$$

Остается подставить последние два выражения в первое.

2.130. а) $\Delta S=\dfrac{R\ln n}{\gamma-1}=19$ Дж/(К·моль); б) $\Delta S=\dfrac{\gamma R\ln n}{\gamma-1}=25$ Дж/(К·моль).

2.131. $n=e^{\Delta S/\nu R}=2{,}0$.

2.132. $\Delta S=\nu R\ln n=20$ Дж/К.

2.133. $\Delta S=-\dfrac{m}{M}\dfrac{\gamma R}{\gamma-1}\ln n=-10$ Дж/К.

2.134. $\Delta S=(\gamma\ln\alpha-\ln\beta)\,\nu R/(\gamma-1)=-11$ Дж/К.

2.135. $S_2-S_1=\nu R\left(\ln\alpha-\dfrac{\ln\beta}{\gamma-1}\right)=0{,}5$ Дж/К.

2.136. $\Delta S=\dfrac{(n-\gamma)\,R}{(n-1)\,(\gamma-1)}\ln\tau$.

2.137. $\Delta S=\dfrac{\nu(\gamma+1)\,R}{\gamma-1}\ln\alpha=46$ Дж/К.

2.138. $V_m=\gamma p_0/\alpha\,(1+\gamma)$.

2.139. $T=T_0+(R/a)\ln(V/V_0)$.

2.140. $\Delta S=R\ln[(V_2-b)/(V_1-b)]$.

2.141. $\Delta S=C_V\ln(T_2/T_1)+R\ln[(V_2-b)/(V_1-b)]$.

2.142. $S=aT^3/3$.

2.143. $\Delta S=m\,[a\ln(T_2/T_1)+b\,(T_2-T_1)]=2{,}0$ кДж/К.

2.144. $C=S/n$; $C<0$ при $n<0$.

2.145. $T=T_0e^{(S-S_0)/C}$, см. рис. 15.

2.146. а) $C=-\alpha/T$; б) $Q=\alpha\ln(T_1/T_2)$; в) $A=\alpha\ln(T_1/T_2)+C_V(T_1-T_2)$.

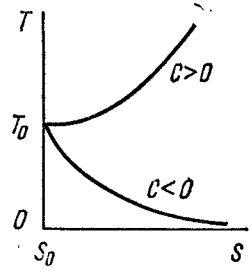


Рис. 15.

2.147. а) $\eta=(n-1)/2n$; б) $\eta=(n-1)/(n+1)$.

2.148. $\Delta S=\nu R\ln n=20$ Дж/К.

2.149. $\Delta U=(2^{\gamma-1}-1)\,RT_0/(\gamma-1)$, $\Delta S=R\ln 2$.

2.150. После быстрого расширения давление будет больше.

2.151. $\Delta S=\nu_1R\ln(1+n)+\nu_2R\ln(1+1/n)=5{,}1$ Дж/К.

2.152. $\Delta S=m_1c_1\ln(T/T_1)+m_2c_2\ln(T/T_2)=4{,}4$ Дж/К, где $T=(m_1c_1T_1+m_2c_2T_2)/(m_1c_1+m_2c_2)$, c_1 и c_2 — удельные теплоемкости меди и воды.

2.153. $\Delta S=C_V\ln\dfrac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2}>0$.

2.154. а) $P=1/2^N$; б) $N=\dfrac{\lg(t/\tau)}{\lg 2}\approx 80$, где $\tau\sim10^{-5}$с — среднее время пролета атомом гелия расстояния порядка размера сосуда.

2.155. $\Omega_{\text{вер}}=N!/[(N/2)!]^2=252$. $P_{N/2}=\Omega_{\text{вер}}/2^N=24{,}6\%$.

2.156. $P_n=\dfrac{N!}{n!\,(N-n)!\,2^N}$; соответственно $^1/_{32}$, $^5/_{32}$, $^{20}/_{32}$, $^{20}/_{32}$, $^5/_{32}$, $^1/_{32}$.

2.157. $P_n=\dfrac{N!}{n!\,(N-n)!}\,p^n\,(1-p)^{N-n}$, где $p=V/V_0$.

2.158. $d=\sqrt[3]{6/\pi n_0\eta^2}=0{,}4$ мкм, где n_0 — число Лошмидта; $\langle n\rangle=1/\eta^2=1{,}0\cdot10^6$.

2.159. Увеличится в $\Omega/\Omega_0=(1+\Delta T/T_0)^{iN_A/2}=10^{1{,}31\cdot10^{21}}$ раз.

2.160. а) $\Delta p=4\alpha/d=13$ атм; б) $\Delta p=8\alpha/d=1{,}2\cdot10^{-3}$ атм.

2.161. $h = 4\alpha/\rho g d = 21$ см.

2.162. $\alpha = {}^1/_8 p_0 d\,(1-\eta^3/n)/(\eta^2-1)$.

2.163. $p = p_0 + \rho g h + 4\alpha/d = 2{,}2$ атм.

2.164. $h = [p_0\,(n^3-1) + 4\alpha\,(n^2-1)/d]/\rho g = 5$ м.

2.165. $\Delta h = 4\alpha\,|\cos\vartheta|\,(d_2-d_1)/d_1 d_2 \rho g = 11$ мм.

2.166. $R = 2\alpha/\rho g h = 0{,}6$ мм.

2.167. $x = l/(1 + p_0 d/4\alpha) = 1{,}4$ см.

2.168. $\alpha = [\rho g h + p_0 l/(l-h)]\,d/4\cos\vartheta$.

2.169. $h = 4\alpha/\rho g\,(d_2 - d_1) = 6$ см.

2.170. $h = 2\alpha\cos\vartheta/\rho g x \delta\varphi$.

2.171. $V_1 = {}^1/_4 \pi d^2 \sqrt{\dfrac{2gl - 4\alpha\,(n-1)/\rho d}{n^4-1}} = 0{,}9$ см^3/с.

2.172. $R_2 - R_1 \approx {}^1/_8 \rho g h^3/\alpha = 0{,}20$ мм.

2.173. $m \approx 2\pi R^2 \alpha\,|\cos\vartheta|\,(n^2-1)/gh = 0{,}7$ кг.

2.174. $F \approx 2\alpha m/\rho h^2 = 1{,}0$ Н.

2.175. $F = 2\pi R^2 \alpha/h = 0{,}6$ кН.

2.176. $F = 2\alpha^2 l/\rho g d^2 = 13$ Н.

2.177. $t = 2l\eta R^4/\alpha r^4$.

2.178. $Q = 2\pi\alpha^2/\rho g$.

2.179. а) $F = \pi\alpha d^2 = 3$ мкДж; б) $F = 2\pi\alpha d^2 = 10$ мкДж.

2.180. $\Delta F = 2\pi\alpha d^2\,(2^{-1/3} - 1) = -1{,}5$ мкДж.

2.181. $A' = F + pV\ln(p/p_0)$, где $F = 8\pi R^2\alpha$, $p = p_0 + 4\alpha/R$, $V = {}^4/_3\pi R^3$.

2.182. $C - C_p = {}^1/_2 R/(1 + {}^3/_8 p_0 r/\alpha)$.

2.184. а) $\Delta S = -2\,(d\alpha/dT)\,\Delta\sigma$; б) $\Delta U = 2\,(\alpha - T\cdot d\alpha/dT)\,\Delta\sigma$.

2.185. $A = \Delta m RT/M = 1{,}2$ Дж.

2.186. $m_п = (V - mV'_ж)/(V'_п - V'_ж) = 20$ г, $V_п = 1{,}0$ л. Здесь $V'_ж$ — удельный объем воды.

2.187. $m_ж \approx M p_0\,(V_0 - V)/RT = 2{,}0$ г, где p_0 — нормальное атмосферное давление.

2.188. $\eta = (n-1)/(N-1)$; $\eta = 1/(N+1)$.

2.189. $Q \approx m\,(q + RT/M) = 2{,}4$ МДж, где q — удельная теплота парообразования.

2.190. $h \approx \dfrac{(Q - mc\Delta T)}{p_0 S\,(1 + qM/RT)} = 20$ см, где c — удельная теплоемкость воды, $\Delta T = 100$ К, q — удельная теплота парообразования воды, T — ее температура кипения.

2.191. $A = mc\,(T - T_0)\,RT/qM = 25$ Дж, где c — удельная теплоемкость воды, T — начальная температура пара, равная температуре кипения воды (это видно из условия), q — удельная теплота конденсации пара.

2.192. $d \approx 4\alpha M/\eta\rho RT = 0{,}2$ мкм, где ρ — плотность воды.

2.193. $\mu = \eta p_0 \sqrt{M/2\pi RT} = 0{,}35$ г/(с · см^2), где p_0 — нормальное атмосферное давление.

2.194. $p = \mu\sqrt{2\pi RT/M} = 0{,}9$ нПа.

2.195. $\Delta p = a/V_M^2 = 1{,}7 \cdot 10^4$ атм.

2.196. $p_i \approx \rho q$. Приблизительно $2 \cdot 10^4$ атм.

2.198. $a = {}^{27}/_{64} R^2 T_{кр}^2/p_{кр} = 3{,}6$ атм · л^2/моль^2, $b = {}^1/_8 RT_{кр}/p_{кр} = 0{,}043$ л/моль.

2.199. $V'_{кр}=3/8\,RT_{кр}/Mp_{кр}=4{,}7$ см³/г.

2.200. $(\pi+3/\nu^2)(3\nu-1)=8\tau$, $\tau=1{,}5$.

2.201. а) $V_{макс}=3bm/M=5{,}0$ л; б) $p_{макс}=a/27b^2=230$ атм.

2.202. $T_{кр}=8/27\,a/bR=0{,}30$ К, $\rho_{кр}=1/3\,M/b=0{,}34$ г/см³.

2.203. $\eta=8/3\,Mp_{кр}/\rho RT_{кр}=0{,}25$, где ρ — плотность эфира при комнатной температуре.

2.204. Применим уравнение (2.4д) к обратимому изотермическому циклу *1—2—3—4—5—3—1*:

$$T\oint dS=\oint dU+\oint p\,dV.$$

Так как первые два интеграла равны нулю, то и $\oint p\,dV=0$. Последнее может быть только при равенстве площадей *I* и *II*.

Заметим, что эти рассуждения не применимы, например, к циклу *1—2—3—1*. Он необратим, ибо включает совершаемый в точке *3* необратимый переход из однофазного состояния в двухфазное.

2.205. $\eta=c\,|\,t\,|/q=0{,}25$, где q — удельная теплота плавления льда; при $t=-80$ °С.

2.206. $\Delta T=-(T\Delta V'/q)\,\Delta p=-7{,}5$ мК, где q — удельная теплота плавления льда.

2.207. $V'_{ип}\approx q\Delta T/T\Delta p=1{,}7$ м³/кг, q — удельная теплота парообразования, $T=373$ К.

2.208. $p_{ип}\approx p_0\,(1+qM\Delta T/RT^2)=1{,}04$ атм, где q — удельная теплота парообразования, p_0 — нормальное атмосферное давление, $\Delta T=1{,}1$ К.

2.209. $\Delta m/m=(qM/RT-1)\,\Delta T/T=5\%$.

2.210. $p=p_0\exp\left[\dfrac{qM}{R}\left(\dfrac{1}{T_0}-\dfrac{1}{T}\right)\right]$. Эти упрощения допустимы для не слишком широкого интервала температур, значительно меньших критической.

2.211. $\eta\approx cpT\Delta V'/q^2=0{,}03$, где c — удельная теплоемкость льда, $T\approx273$ К, q — удельная теплота плавления.

2.212. а) 216 К, 5,1 атм; б) соответственно 0,78, 0,57 и 0,21 кДж/г.

2.213. $\Delta S\approx m\,[c\ln(T_2/T_1)+q/T_2+R/M]=7{,}6$ кДж/К.

2.214. $\Delta s\approx q_{пл}/T_1+c\ln(T_2/T_1)+q_{пар}/T_2+R/M=9{,}0$ Дж/(г · К).

2.215. $\Delta S=mc\ln(T/T_1)=-10$ Дж/К, где c — удельная теплоемкость меди, $T=273$ К (при данных условиях лед растает частично).

2.216. а) При $m_2c_2t_2<m_1q$ лед растает не весь и

$$\Delta S=m_2c_2\left(\frac{T_2}{T_1}-1-\ln\frac{T_2}{T_1}\right)=9{,}2\ \text{Дж/К};$$

б) при $m_2c_2t_2>m_1q$ лед растает весь и

$$\Delta S=\frac{m_1q}{T_1}+c_2\left(m_1\ln\frac{T}{T_1}-m_2\ln\frac{T_2}{T}\right)=18\ \text{Дж/К},$$

где $T=\dfrac{m_1T_1+m_2T_2-m_1q/c_2}{m_1+m_2}$.

2.217. $\Delta S=mq\left(\dfrac{1}{T_1}-\dfrac{1}{T_2}\right)+mc\left(\dfrac{T_2}{T_1}-1-\ln\dfrac{T_2}{T_1}\right)=0{,}48$ Дж/К.

2.218. $C=C_p-qM/T=-74$ Дж/(К · моль), где $C_p=R\gamma/(\gamma-1)$.

2.219. $\Delta S=qM/T_2+C_p\ln(T_2/T_1)$.

2.220. а) $\eta \approx 0{,}37$; б) $\eta \approx 0{,}23$.

2.221. $\lambda = \Delta l / \ln \eta$.

2.222. а) $P = e^{-\alpha t}$; б) $\langle t \rangle = 1/\alpha$.

2.223. а) $\lambda = 0{,}06$ мкм, $\tau = 0{,}13$ нс; б) $\lambda = 6$ Мм, $\tau = 3{,}8$ ч.

2.224. В 18 раз.

2.225. $\lambda = (2\pi N_A / 3b)^{2/3} (kT_0 / \sqrt{2}\, \pi p_0) = 84$ нм.

2.226. $\nu = \pi d^2 p_0 N_A \sqrt{2\gamma / MRT_0} = 5{,}5$ ГГц.

2.227. а) 0,7 Па; б) $2 \cdot 10^{14}$ см$^{-3}$, 0,2 мкм.

2.228. а) $\nu = \sqrt{2}\, \pi d^2 n \langle v \rangle = 0{,}74 \cdot 10^{10}$ с$^{-1}$; б) $\nu = {}^1/_2 \sqrt{2}\, \pi d^2 n^2 \langle v \rangle = 1{,}0 \times$ $\times\, 10^{29}$ с$^{-1} \cdot$ см$^{-3}$, где $n = p_0 / kT_0$, $\langle v \rangle = \sqrt{8RT/\pi M}$.

2.229. а) $\lambda = \text{const}$, $\nu \sim \sqrt{T}$; б) $\lambda \sim T$, $\nu \sim 1/\sqrt{T}$.

2.230. а) $\lambda = \text{const}$, ν увеличится в $\sqrt{n}$ раз; б) λ уменьшится в n раз, ν увеличится в n раз.

2.231. а) $\lambda \sim V$, $\nu \sim V^{-6/5}$; б) $\lambda \sim p^{-5/7}$, $\nu \sim p^{6/7}$; в) $\lambda \sim T^{-5/2}$, $\nu \sim T^3$.

2.232. а) $\lambda \sim V$, $\nu \sim V^{-(n+1)/2}$; б) $\lambda \sim p^{-1/n}$, $\nu \sim p^{(n+1)/2n}$; в) $\lambda \sim$ $\sim T^{1/(1-n)}$, $\nu \sim T^{(n+1)/2(n-1)}$.

2.233. а) $C = {}^1/_4 R\,(1+2i) = 23$ Дж/(К $\cdot$ моль); б) $C = {}^1/_2 R\,(i+2) =$ $= 29$ Дж/(К $\cdot$ моль).

2.234. $n = n_0 e^{-t/\tau}$, где $\tau = 4V/S\langle v \rangle$, $\langle v \rangle = \sqrt{8RT/\pi M}$.

2.235. Увеличится в $(1+\eta)/(1+\sqrt{\eta})$ раз.

2.236. Увеличилось в $\alpha^3/\beta = 2{,}0$ раза.

2.237. а) D увеличится в n раз, $\eta = \text{const}$; б) D увеличится в $n^{3/2}$ раза, η — в $\sqrt{n}$ раз.

2.238. D уменьшится в $n^{4/5} \approx 6{,}3$ раза, η увеличится в $n^{1/5} \approx 1{,}6$ раза.

2.239. а) $n = 3$; б) $n = 1$; в) $n = 1$.

2.240. 0,18 нм.

2.241. $d_{Ar}/d_{He} = 1{,}7$.

2.242. $N_1 \approx 2\pi\eta\omega R^3/\Delta R$; $p = \sqrt{2}\, kT/\pi d^2 n \Delta R = 0{,}7$ Па.

2.243. $\eta = (1/R_1^2 - 1/R_2^2)\, N_1 / 4\pi\omega$.

2.244. $N = {}^1/_2 \pi\eta\omega a^4 / h$.

2.245. $N = {}^1/_3 \omega a^4 p \sqrt{\pi M / 2RT}$.

2.246. $\mu = \dfrac{\pi a^4 M}{16\eta RT} \dfrac{|p_2^2 - p_1^2|}{l}$.

2.247. $T = (\varkappa_1 T_1/l_1 + \varkappa_2 T_2/l_2)/(\varkappa_1/l_1 + \varkappa_2/l_2)$.

2.248. $\varkappa = (l_1 + l_2)/(l_1/\varkappa_1 + l_2/\varkappa_2)$.

2.249. $T(x) = T_1 (T_2/T_1)^{x/l}$; $q = (\alpha/l) \ln (T_2/T_1)$.

2.250. $\Delta T = (\Delta T)_0 e^{-\alpha t}$, где $\alpha = (1/C_1 + 1/C_2)\, S\varkappa/l$.

2.251. $T = T_1 \{1 + (x/l)\, [(T_2/T_1)^{3/2} - 1]\}^{2/3}$, где x — расстояние от пластины с температурой T_1.

2.252. $q = \dfrac{2iR^{3/2}\,(T_2^{3/2} - T_1^{3/2})}{9\pi^{3/2} l d^2 N_A \sqrt{M}} = 4{,}0$ Вт/м^2, где $i = 3$, d — эффективный диаметр атома гелия.

2.253. $\lambda = 23$ мм $> l$, следовательно, газ ультраразреженный;
$q = p\langle v \rangle (t_2 - t_1)/6T(\gamma - 1) = 22$ Вт/м^2, где $\langle v \rangle = \sqrt{8RT/\pi M}$. $T = {}^1/_2 (T_1 + T_2)$.

2.254. $T=T_1+\dfrac{T_2-T_1}{\ln(R_2/R_1)}\ln\dfrac{r}{R_1}$.

2.255. $T=T_1+\dfrac{T_2-T_1}{1/R_1+1/R_2}\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{r}\right)$.

2.256. $T=T_0+(R^2-r^2)\,w/4\varkappa$.

2.257. $T=T_0+(R^2-r^2)\,w/6\varkappa$.

3.1. Отношение $F_{эл}/F_{гр}$ равно соответственно $4\cdot10^{42}$ и $1\cdot10^{36}$; $q/m=0{,}86\cdot10^{-10}$ Кл/кг.

3.2. Около $2\cdot10^{15}$ Н.

3.3. $dq/dt=3/2\,a\sqrt{2\pi\varepsilon_0 mg/l}$.

3.4. $q_3=-\dfrac{q_1q_2}{(\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2})^2}$, $r_3=\dfrac{r_1\sqrt{q_2}+r_2\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}$.

3.5. $\Delta T=\dfrac{qq_0}{8\pi^2\varepsilon_0 r^2}$.

3.6. $\mathbf{E}=2{,}7\mathbf{i}-3{,}6\mathbf{j}$, $E=4{,}5$ кВ/м.

3.7. $E=\dfrac{ql}{\sqrt{2}\,\pi\varepsilon_0\,(l^2+x^2)^{3/2}}$.

3.8. $E=\dfrac{q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}$.

3.9. $E=\dfrac{ql}{4\pi\varepsilon_0\,(r^2+l^2)^{3/2}}$. При $l\gg r$ напряженность $E\approx\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$, как для точечного заряда. $E_{макс}=\dfrac{q}{6\sqrt{3}\,\pi\varepsilon_0 r^2}$ при $l=r/\sqrt{2}$.

3.10. $E=\dfrac{3qR^2}{4\pi\varepsilon_0 x^4}$.

3.11. $F=\dfrac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$.

3.12. а) $E=\dfrac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}$; б) $E=\dfrac{\lambda_0 R^2}{4\varepsilon_0\,(x^2+R^2)^{3/2}}$, при $x\gg R$ напряженность $E\approx\dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0 x^3}$, где $p=\pi R^2\lambda_0$.

3.13. а) $E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r\sqrt{a^2+r^2}}$; б) $E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\,(r^2-a^2)}$. В обоих случаях при $r\gg a$ напряженность $E\approx\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

3.14. $E=\dfrac{\lambda\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0 y}$. Вектор $\mathbf{E}$ направлен под углом 45° к нити.

3.15. а) $E=\dfrac{\lambda\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0 R}$; б) $E=0$.

3.16. $\mathbf{E}=-1/3\,a\mathbf{r}/\varepsilon_0$.

3.17. $\mathbf{E}=-1/3\,\mathbf{k}\sigma_0/\varepsilon_0$, где $\mathbf{k}$ — орт оси z, от которой отсчитывается угол ϑ. Как видно, поле внутри данной сферы однородное.

3.18. $\mathbf{E}=-1/6\,a\mathbf{R}^2/\varepsilon_0$.

3.19. $|\Phi|=1/2\,\lambda R/\varepsilon_0$. Знак Φ зависит от выбора направления нормали к кругу.

3.20. $|\Phi| = \dfrac{q}{\varepsilon_0}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{1+(R/l)^2}}\right)$. Знак Φ зависит от выбора направления нормали к кругу.

3.21. $|\Phi| = {}^1/_3\pi\rho r_0 (R^2 - r_0^2)/\varepsilon_0$.

3.22. $E_{\text{макс}} = \lambda/\pi\varepsilon_0 l$.

3.23. $E = {}^1/_2\sigma_0/\varepsilon_0$, причем направление вектора $\mathbf{E}$ соответствует углу $\varphi = \pi$.

3.24. $\Phi = 4\pi Ra$.

3.25. а) $E = \dfrac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\left(1 - \dfrac{3r}{4R}\right)$ при $r \leqslant R$, $E = \dfrac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r^2}$ при $r \geqslant R$; б) $E_{\text{макс}} = {}^1/_9\rho_0 R/\varepsilon_0$ при $r_m = {}^2/_3 R$.

3.26. $q = 2\pi R^2\alpha$, $E = {}^1/_2\alpha/\varepsilon_0$.

3.27. $E = \dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0\alpha r^2}(1 - e^{-\alpha r^3})$. Соответственно $E \approx \dfrac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}$ и $E \approx \dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0\alpha r^2}$.

3.28. $\mathbf{E} = {}^1/_3\mathbf{a}\rho/\varepsilon_0$.

3.29. $\mathbf{E} = {}^1/_2\mathbf{a}\rho/\varepsilon_0$, где вектор $\mathbf{a}$ направлен к оси полости.

3.30. $\Delta\varphi = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 R}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{1+(a/R)^2}}\right)$.

3.31. $\varphi_1 - \varphi_2 = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\eta = 5$ кВ.

3.32. $\varphi = {}^1/_2\sigma R/\varepsilon_0$, $E = {}^1/_4\sigma/\varepsilon_0$.

3.33. $\varphi = \dfrac{\sigma l}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{1+(R/l)^2} - 1\right)$, $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \dfrac{l}{\sqrt{l^2+R^2}}\right)$. При $l \to 0$ потенциал $\varphi = \dfrac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$, $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$; при $l \gg R$ потенциал $\varphi \approx \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}$, $E \approx \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$, где $q = \sigma\pi R^2$.

3.34. $\varphi = \sigma R/\pi\varepsilon_0$.

3.35. $\mathbf{E} = -\mathbf{a}$, т. е. поле однородное.

3.26. а) $\mathbf{E} = -2a(x\mathbf{i} - y\mathbf{j})$; б) $\mathbf{E} = -a(y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$. Здесь $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ — орты осей x, y. См. рис. 16, соответствующий случаю $a > 0$.

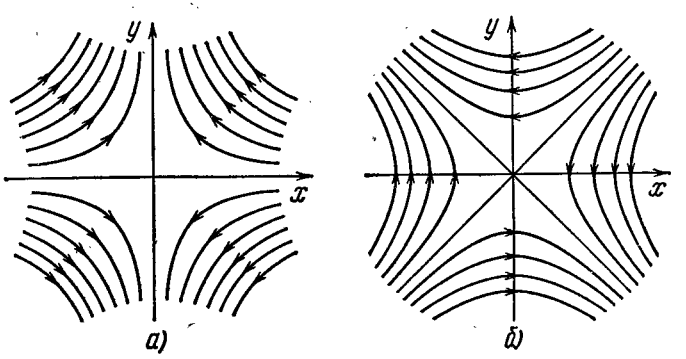


Рис. 16.

3.37. $\mathbf{E} = -2(ax\mathbf{i} + ay\mathbf{j} + bz\mathbf{k})$, $E = 2\sqrt{a^2(x^2+y^2) + b^2z^2}$. а) Эллипсоид вращения с полуосями $\sqrt{\varphi/a}$ и $\sqrt{\varphi/b}$. б) При $\varphi > 0$ однополостной гиперболоид

вращения, при $\varphi=0$ прямой круговой конус, при $\varphi<0$ двуполостной гиперболоид вращения.

3.38. а) $\varphi_0=\dfrac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R}$; б) $\varphi=\varphi_0\left(1-\dfrac{r^2}{3R^2}\right)$, $r\leqslant R$.

3.39. $E=\sqrt{E_r^2+E_\vartheta^2}=\dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}$, где E_r — радиальная, а E_ϑ — перпендикулярная к ней составляющие вектора $\mathbf{E}$.

3.40. $E_z=\dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{3\cos^2\vartheta-1}{r^3}$, $E_\perp=\dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{3\sin\vartheta\cos\vartheta}{r^3}$; $\mathbf{E}\perp\mathbf{p}$ в точках, лежащих на боковой поверхности конуса с осью вдоль z и углом полураствора ϑ, для которого $\cos\vartheta=1/\sqrt{3}$ ($\vartheta_1=54{,}7°$, $\vartheta_2=123{,}5°$). В этих точках $E=E_\perp=\dfrac{p\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

3.41. $R=\sqrt[3]{\dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0 E_0}}$.

3.42. $\varphi\approx\dfrac{\lambda l}{2\pi\varepsilon_0 r}\cos\vartheta$, $E\approx\dfrac{\lambda l}{2\pi\varepsilon_0 r^2}$.

3.43. $\varphi=\dfrac{ql}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}}$, $E_x=-\dfrac{ql}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{R^2-2x^2}{(R^2+x^2)^{5/2}}$, где E_x — проекция вектора $\mathbf{E}$ на ось x. Графики этих зависимостей показаны на рис. 17. При $|x|\gg R$ потенциал $\varphi\approx\dfrac{ql}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$ и $E_x\approx\dfrac{ql}{2\pi\varepsilon_0 x^3}$.

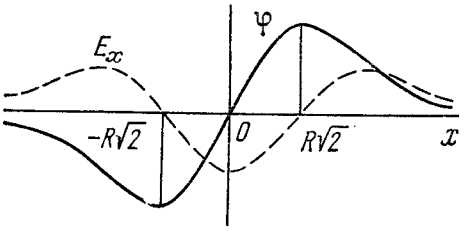


Рис. 17.

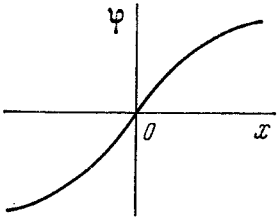


Рис. 18.

3.44. $\varphi=\dfrac{\sigma l}{2\varepsilon_0}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}$, $E_x=-\dfrac{\sigma l R^2}{2\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}$. См. рис. 18.

3.45. $\varphi\approx\pm\dfrac{\sigma l}{2\varepsilon_0}\left(1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)$, $E\approx\dfrac{\sigma l R^2}{2\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}$. При $x\gg R$ потенциал $\varphi\approx\pm\dfrac{p}{4\sigma\varepsilon_0 x^2}$ и $E\approx\dfrac{p}{2\pi\varepsilon_0 x^3}$, где $p=\pi R^2\sigma l$. В формулах для φ знак плюс соответствует пространству со стороны положительно заряженной пластины, а знак минус — со стороны отрицательно заряженной пластины.

3.46. а) $\mathbf{F}=0$; б) $\mathbf{F}=-\dfrac{\lambda\mathbf{p}}{2\pi\varepsilon_0 r^2}$; в) $\mathbf{F}=\dfrac{\lambda\mathbf{p}}{2\pi\varepsilon_0 r^2}$.

3.47. $F=\dfrac{3p^2}{2\pi\varepsilon_0 l^4}=2{,}1\cdot10^{-16}$ Н.

3.48. $\varphi=-axy+\text{const}$.

3.49. $\varphi = ay\left(\frac{y^2}{3} - x^2\right) + \text{const}$.

3.50. $\varphi = -y(ax + bz) + \text{const}$.

3.51. $\rho = 6\varepsilon_0 ax$.

3.52. $\rho = 2\varepsilon_0 \Delta\varphi/d^2$; $E = \rho d/\varepsilon_0$.

3.53. $\rho = -6\varepsilon_0 a$.

3.54. $q = 4l\sqrt{\pi\varepsilon_0 kx}$.

3.55. $A = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 l}$.

3.56. а) $F = \frac{(2\sqrt{2}-1)q^2}{8\pi\varepsilon_0 l^2}$; б) $E = 2\left(1 - \frac{1}{5\sqrt{5}}\right)\frac{q}{\pi\varepsilon_0 l^2}$.

3.57. $F = \frac{(2\sqrt{2}-1)q^2}{32\pi\varepsilon_0 l^2}$.

3.58. $F = \frac{3p^2}{32\pi\varepsilon_0 l^4}$.

3.59. $\sigma = -\frac{ql}{2\pi(l^2 + r^2)^{3/2}}$, $q_{\text{инд}} = -q$.

3.60. а) $F_1 = \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0 l}$; б) $\sigma = \frac{l\lambda}{\pi(l^2 + x^2)}$.

3.61. а) $\sigma = \frac{\lambda}{2\pi l}$; б) $\sigma(r) = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{l^2 + r^2}}$.

3.62. а) $\sigma = \frac{lq}{2\pi(l^2 + R^2)^{3/2}}$; б) $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{4l^2[1 + {}^1/_4 (R/l)^2]^{3/2}}$, $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times$
$\times \frac{q}{R}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4(l/R)^2}}\right)$.

3.63. $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}$.

3.64. $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$.

3.65. $q_2 = -\frac{b}{a}q_1$; $\varphi = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \times \begin{cases} 1/r - 1/a & \text{при } a \leqslant r \leqslant b, \\ (1 - b/a)/r & \text{при } r \geqslant b. \end{cases}$

3.66. а) $E_{23} = \Delta\varphi/d$, $E_{12} = E_{34} = {}^1/_2 E_{23}$; б) $|\sigma_1| = \sigma_4 = {}^1/_2\varepsilon_0\Delta\varphi/d$, $\sigma_2 = |\sigma_3| = {}^3/_2\varepsilon_0\Delta\varphi/d$.

3.67. $q_1 = -q(l - x)/l$, $q_2 = -qx/l$. Указание. Если заряд q мысленно «размазать» равномерно по плоскости, проходящей через этот заряд и параллельной пластинам, то ясно, что заряды q_1 и q_2 не изменятся. Изменится только их распределение, и электрическое поле станет простым для расчета.

3.68. $dF/dS = {}^1/_2\sigma^2/\varepsilon_0$.

3.69. $F = \frac{q^2}{32\pi\varepsilon_0 R^2} = 0{,}5$ кН.

3.70. $F = {}^1/_4\pi R^2\sigma_0^2/\varepsilon_0$.

3.71. $N = \frac{n_0 p}{(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E} = 3 \cdot 10^3$, где n_0 — концентрация молекул.

3.72. $F = \frac{3\beta p^2}{4\pi^2\varepsilon_0 l^7}$.

3.73. а) $x = R/\sqrt{2}$; б) $x = \begin{cases} 1{,}1R \text{ (притяжение)}, \\ 0{,}29R \text{ (отталкивание)}. \end{cases}$ См. рис. 19.

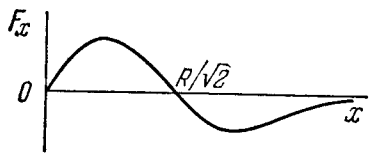


Рис. 19.

3.74. $\mathbf{P} = \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \dfrac{q}{4\pi r^3} \mathbf{r}$,

$q' = -\dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} q$.

3.76. $q'_{\text{внутр}} = -q(\varepsilon - 1)/\varepsilon$,

$q'_{\text{наруж}} = q(\varepsilon - 1)/\varepsilon$.

3.77. См. рис. 20.

3.78. $E = \dfrac{E_0}{\varepsilon} \sqrt{\cos^2 \alpha_0 + \varepsilon^2 \sin^2 \alpha_0} =$

$= 5{,}2$ В/м; $\operatorname{tg} \alpha = \varepsilon \operatorname{tg} \alpha_0$, отсюда $\alpha = 74°$; $\sigma' = \dfrac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1)}{\varepsilon} E_0 \cos \alpha_0 = 64$ пКл/м^2.

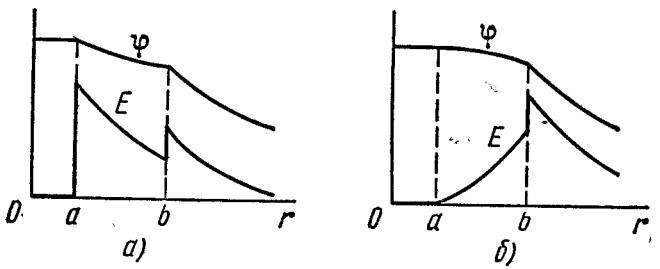


Рис. 20.

3.79. а) $\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{S} = \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \pi R^2 E_0 \cos \vartheta$; б) $\oint \mathbf{D}\, d\mathbf{r} = -\varepsilon_0 (\varepsilon - 1)\, l E_0 \sin \vartheta$.

3.80. а) $E = \begin{cases} \rho l/\varepsilon\varepsilon_0 & \text{при } l < d, \\ \rho d/\varepsilon_0 & \text{при } l > d, \end{cases}$

$\varphi = \begin{cases} -\rho l^2/2\varepsilon\varepsilon_0 & \text{при } l \leqslant d, \\ -(d/2\varepsilon + l - d)\, \rho d/\varepsilon_0 & \text{при } l \geqslant d. \end{cases}$

Графики зависимостей $E_x(x)$ и $\varphi(x)$ см. на рис. 21. б) $\sigma' = \rho d(\varepsilon - 1)/\varepsilon$, $\rho' = -\rho(\varepsilon - 1)/\varepsilon$.

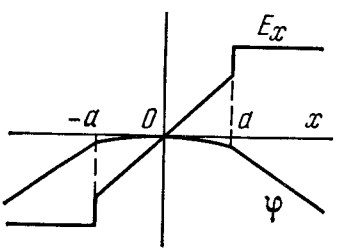


Рис. 21.

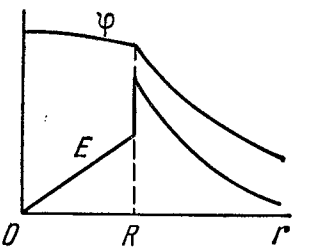


Рис. 22.

3.81. а) $E = \begin{cases} \rho r/3\varepsilon_0\varepsilon & \text{при } r < R, \\ \rho R^3/3\varepsilon_0 r^2 & \text{при } r > R; \end{cases}$ б) $\rho' = -\rho(\varepsilon - 1)/\varepsilon$, $\sigma' = \rho R \times$

$\times (\varepsilon - 1)/3\varepsilon$. См. рис. 22.

3.82. $\mathbf{E} = -d\mathbf{P}/4\varepsilon_0 R$.

3.83. $\mathbf{E} = -\mathbf{P}_0 (1 - x^2/d^2)/\varepsilon_0$, $U = 4dP_0/3\varepsilon_0$.

3.84. а) $E_1 = 2\varepsilon E_0/(\varepsilon+1)$, $E_2 = 2E_0/(\varepsilon+1)$, $D_1 = D_2 = 2\varepsilon\varepsilon_0 E_0/(\varepsilon+1)$; б) $E_1 = E_0$, $E_2 = E_0/\varepsilon$, $D_1 = D_2 = \varepsilon_0 E_0$.

3.85. а) $E_1 = E_2 = E_0$, $D_1 = \varepsilon_0 E_0$, $D_2 = \varepsilon D_1$; б) $E_1 = E_2 = 2E_0/(\varepsilon+1)$, $D_1 = 2\varepsilon_0 E_0/(\varepsilon+1)$, $D_2 = \varepsilon D_1$.

3.86. $E = q/2\pi\varepsilon_0 (\varepsilon+1) r^2$.

3.87. $\rho = \rho_0\varepsilon/(\varepsilon-1) = 1{,}6$ г/см^3, где ε и ρ_0 — диэлектрическая проницаемость и плотность керосина.

3.88. $\sigma'_{\text{макс}} = (\varepsilon-1)\varepsilon_0 E = 3{,}5$ нКл/м^2, $q' = \pi R^2 (\varepsilon-1)\varepsilon_0 E = 10$ пКл.

3.89. а) Воспользовавшись непрерывностью нормальной составляющей вектора $\mathbf{D}$ на границе диэлектрика, получим $\sigma' = -ql(\varepsilon-1)/2\pi r^3(\varepsilon+1)$, при $l \to 0$ $\sigma' \to 0$; б) $q' = -q(\varepsilon-1)/(\varepsilon+1)$.

3.90. $F = q^2(\varepsilon-1)/16\pi\varepsilon l^2(\varepsilon+1)$.

3.91. $D = \begin{cases} q/2\pi(1+\varepsilon) r^2 — \text{в вакууме}, \\ \varepsilon q/2\pi(1+\varepsilon) r^2 — \text{в диэлектрике}; \end{cases}$

$\left.\begin{aligned} E &= q/2\pi\varepsilon_0(1+\varepsilon) r^2 \\ \varphi &= q/2\pi\varepsilon_0(1+\varepsilon) r \end{aligned}\right\}$ — и в вакууме и в диэлектрике.

3.92. $\sigma' = ql(\varepsilon-1)/2\pi r^3\varepsilon(\varepsilon+1)$; при $l \to 0$ $\sigma' \to 0$.

3.93. $\sigma' = ql(\varepsilon-1)/2\pi r^3\varepsilon$.

3.94. $\mathbf{E}_1 = \mathbf{P}h/\varepsilon_0 d$ (в зазоре), $\mathbf{E}_2 = -(1-h/d)\mathbf{P}/\varepsilon_0$, $\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2 = \mathbf{P}h/d$.

3.95. $\rho' = -2\alpha$, т. е. от r не зависит.

3.96. а) $\mathbf{E} = -\mathbf{P}/3\varepsilon_0$.

3.97. $\mathbf{E}_0 = {}^1/_3 (\varepsilon+2)\mathbf{E}$.

3.98. $\mathbf{E} = 3\mathbf{E}_0/(\varepsilon+2)$, $\mathbf{P} = 3\varepsilon_0\mathbf{E}_0(\varepsilon-1)/(\varepsilon+2)$.

3.99. $\mathbf{E} = -\mathbf{P}/2\varepsilon_0$.

3.100. $\mathbf{E} = 2\mathbf{E}_0/(\varepsilon+1)$; $\mathbf{P} = 2\varepsilon_0\mathbf{E}_0(\varepsilon-1)/(\varepsilon+1)$.

3.101. $C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1}{1+(\varepsilon-1)R_1/R_2}$.

3.102. Напряженность уменьшилась в ${}^1/_2(\varepsilon+1)$ раз; $q = {}^1/_2 C\mathscr{E}(\varepsilon-1)/(\varepsilon+1)$.

3.103. а) $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d_1/\varepsilon_1 + d_2/\varepsilon_2}$; б) $\sigma' = \varepsilon_0 U \dfrac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(\varepsilon_1+\varepsilon_2-1)}{\varepsilon_1 d_1 + \varepsilon_2 d_2}$.

3.104. а) $C = \varepsilon_0(\varepsilon_2-\varepsilon_1) S/d \ln(\varepsilon_2/\varepsilon_1)$; б) $\rho' = -q(\varepsilon_2-\varepsilon_1)/dS\varepsilon^2$.

3.105. $C = 4\pi\varepsilon_0 a/\ln(R_2/R_1)$.

3.106. При условии $\varepsilon_1 R_1 E_{1m} = \varepsilon_2 R_2 E_{2m}$.

3.107. $U = R_1 E_1 [\ln(R_2/R_1) + (\varepsilon_1/\varepsilon_2)\ln(R_3/R_2)]$.

3.108. $C \approx \pi\varepsilon_0/\ln(b/a)$.

3.109. $C \approx 2\pi\varepsilon_0/\ln(b/a)$.

3.110. $C \approx 2\pi\varepsilon_0\varepsilon a$. Указание. При $b \gg a$ можно считать, что заряды распределены по поверхности шариков практически равномерно.

3.111. $C \approx 4\pi\varepsilon_0 a$.

3.112. а) $C_{\text{общ}} = C_1 + C_2 + C_3$; б) $C_{\text{общ}} = C$.

3.113. а) $C = 2\varepsilon_0 S/3d$; б) $C = 3\varepsilon_0 S/2d$.

3.114. $U \leqslant U_1(1 + C_1/C_2) = 9$ кВ.

3.115. $U = \mathscr{E}/(1+3\eta+\eta^2) = 10$ В.

3.116. $C_x = C(\sqrt{5}-1)/2 = 0{,}62C$. Поскольку цепь бесконечна, все звенья, начиная со второго, могут быть заменены емкостью C_x, равной искомой.

3.117. $U_1=q/C_1=10$ В, $U_2=q/C_2=5$ В, где $q=(\varphi_A-\varphi_B+\mathscr{E})\times$ $\times C_1C_2/(C_1+C_2)$.

3.118. $U_1=(\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1)/(1+C_1/C_2)$, $U_2=(\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2)/(1+C_2/C_1)$.

3.119. $q=|\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2|\,C_1C_2/(C_1+C_2)$.

3.120. $\varphi_A-\varphi_B=\mathscr{E}\,\dfrac{C_2C_3-C_1C_4}{(C_1+C_2)\,(C_3+C_4)}$. При условии $C_1/C_2=C_3/C_4$.

3.121. $q=\dfrac{U}{1/C_1+1/C_2+1/C_3}=0{,}06$ мКл.

3.122. $q_1=\mathscr{E}C_2$, $q_2=-\mathscr{E}C_1C_2/(C_1+C_2)$.

3.123. $q_1=\mathscr{E}C_1\,(C_1-C_2)/(C_1+C_2)=-24$ мкКл, $q_2=\mathscr{E}C_2\,(C_1-C_2)/(C_1+C_2)=$ $=-36$ мкКл, $q_3=\mathscr{E}\,(C_2-C_1)=+60$ мкКл.

3.124. $\varphi_A-\varphi_B=(C_2\mathscr{E}_2-C_1\mathscr{E}_1)/(C_1+C_2+C_3)$.

3.125. $\varphi_1=\dfrac{\mathscr{E}_2C_2+\mathscr{E}_3C_3-\mathscr{E}_1\,(C_2+C_3)}{C_1+C_2+C_3}$, $\varphi_2=\dfrac{\mathscr{E}_1C_1+\mathscr{E}_3C_3-\mathscr{E}_2\,(C_1+C_3)}{C_1+C_2+C_3}$; $\varphi_3=\dfrac{\mathscr{E}_1C_1+\mathscr{E}_2C_2-\mathscr{E}_3\,(C_1+C_2)}{C_1+C_2+C_3}$.

3.126. $C_{\text{общ}}=\dfrac{2C_1C_2+C_3\,(C_1+C_2)}{C_1+C_2+2C_3}$.

3.127. а) $W=(\sqrt{2}+4)\,q^2/4\pi\varepsilon_0a$; б) $W=(\sqrt{2}-4)\,q^2/4\pi\varepsilon_0a$; в) $W=$ $=-\sqrt{2}\,q^2/4\pi\varepsilon_0a$.

3.128. $W=-\dfrac{2\ln 2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q^2}{a}$.

3.129. $W=-q^2/8\pi\varepsilon_0l$.

3.130. $W=q_1q_2/4\pi\varepsilon_0l$.

3.131. $\Delta W=-{}^1/_2U^2C_1C_2/(C_1+C_2)=-0{,}03$ мДж.

3.132. $Q=\mathscr{E}^2CC_0/(2C+C_0)$.

3.133. $Q={}^1/_2C\mathscr{E}_2^2$. Интересно, что полученный результат не зависит от $\mathscr{E}_1$.

3.134. $W=W_1+W_2+W_{12}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q_1^2}{2R_1}+\dfrac{q_2^2}{2R_2}+\dfrac{q_1q_2}{R_2}\right)$.

3.135. а) $W=3q^2/20\pi\varepsilon_0R$; б) $W_1/W_2=1/5$.

3.136. $W=(q^2/8\pi\varepsilon_0\varepsilon)\,(1/a-1/b)=27$ мДж.

3.137. $A=(q^2/8\pi\varepsilon_0)\,(1/R_1-1/R_2)$.

3.138. $A=\dfrac{q\,(q_0+q/2)}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right)$.

3.139. $F_1=\sigma^2/2\varepsilon_0$.

3.140. $A=(q^2/8\pi\varepsilon_0)\,(1/a-1/b)$.

3.141. а) $A=q^2\,(x_2-x_1)/2\varepsilon_0S$; б) $A=\varepsilon_0SU^2\,(x_2-x_1)2x_1x_2$.

3.142. а) $A={}^1/_2CU^2\eta/(1-\eta)^2=1{,}5$ мДж; б) $A={}^1/_2CU^2\eta\varepsilon\,(\varepsilon-1)/[\varepsilon-\eta\times$ $\times(\varepsilon-1)]^2=0{,}8$ мДж.

3.143. $\Delta p=\varepsilon_0\varepsilon\,(\varepsilon-1)\,U^2/2d^2=7$ кПа $=0{,}07$ атм.

3.144. $h=(\varepsilon^2-1)\,\sigma^2/2\varepsilon_0\varepsilon^2\rho g$.

3.145. $F=\pi R\varepsilon_0\,(\varepsilon-1)\,U^2/d$.

3.146. $N=(\varepsilon-1)\,\varepsilon_0R^2U^2/4d$.

3.147. $I=2\pi\varepsilon_0aEv=0{,}5$ мкА.

3.148. $I\approx 2\pi\varepsilon_0\,(\varepsilon-1)\,rvU/d=0{,}11$ мкА.

3.149. а) $\alpha=(\alpha_1+\eta\alpha_2)/(1+\eta)$; б) $\alpha\approx(\alpha_2+\eta\alpha_1)/(1+\eta)$.

3.150. а) ${}^5/_6R$; б) ${}^7/_{12}R$; в) ${}^3/_4R$.

3.151. $R_x = R(\sqrt{3}-1)$.

3.152. $R = (1+\sqrt{1+4R_2/R_1})\,R_1/2 = 6$ Ом. Указание. Поскольку цепь бесконечна, все звенья, начиная со второго, могут быть заменены сопротивлением, равным искомому сопротивлению R.

3.153. Подключим мысленно к точкам A и B источник напряжения U. Тогда $U = IR = I_0R_0$, где I — ток в подводящих проводах, I_0 — ток в проводнике AB.

Ток I_0 можно представить как суперпозицию двух токов. Если бы ток I «втекал» в точку A и растекался по сетке на бесконечность, то по проводнику AB — из симметрии — шел ток $I/4$. Аналогично, если бы ток I поступал в сетку из бесконечности и «вытекал» из точки B, то по проводнику AB шел тоже ток $I/4$. Наложив друг на друга оба эти решения, получим $I_0 = I/2$. Поэтому $R = R_0/2$.

3.154. $R = (\rho/2\pi l)\ln(b/a)$.

3.155. $R = \rho(b-a)/4\pi ab$. При $b \to \infty$ $R = \rho/4\pi a$.

3.156. $\rho = 4\pi\Delta t ab/(b-a)\,C\ln\eta$.

3.157. $R = \rho/2\pi a$.

3.158. а) $j = 2alU/\rho r^3$; б) $R = \rho/4\pi a$.

3.159. а) $j = lU/2\rho r^2\ln(l/a)$; б) $R_1 = (\rho/\pi)\ln(l/a)$.

3.160. $I = UC/\rho\varepsilon\varepsilon_0 = 1{,}5$ мкА.

3.161. $RC = \rho\varepsilon\varepsilon_0$.

3.162. $\sigma = D_n = D\cos\alpha$; $j = D\sin\alpha/\varepsilon\varepsilon_0\rho$.

3.163. $I = US(\sigma_2-\sigma_1)/d\ln(\sigma_2/\sigma_1) = 5$ нА.

3.165. $q = \varepsilon_0(\rho_2-\rho_1)I$.

3.166. $\sigma = \varepsilon_0U(\varepsilon_2\rho_2-\varepsilon_1\rho_1)/(\rho_1d_1+\rho_2d_2)$, $\sigma = 0$ при $\varepsilon_1\rho_1 = \varepsilon_2\rho_2$.

3.167. $q = \varepsilon_0I(\varepsilon_2\rho_2-\varepsilon_1\rho_1)$.

3.168. $\rho = 2\varepsilon_0U(\eta-1)/d^2(\eta+1)$.

3.169. а) $R_1 = 2\pi\alpha/S^2$; б) $E = 2\pi\alpha I/S^2$.

3.170. $t = -RC\ln(1-U/U_0) = 0{,}6$ мкс.

3.171. $\rho = \tau/\varepsilon_0\varepsilon\ln 2 = 1{,}4\cdot 10^{13}$ Ом · м.

3.172. $I = [(\eta-1)\mathscr{E}/R]\,e^{-\eta t/RC}$.

3.173. $U = \mathscr{E}/(\eta+1) = 2{,}0$ В.

3.174. $\varphi_1-\varphi_2 = (\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2)R_1/(R_1+R_2)-\mathscr{E}_1 = -4$ В.

3.175. $R = R_2-R_1$, $\Delta\varphi = 0$ у источника тока с внутренним сопротивлением R_2.

3.176. а) $I = \alpha$; б) $\varphi_A-\varphi_B = 0$.

3.177. $\varphi_A-\varphi_B = (\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2)R_1/(R_1+R_2) = -0{,}5$ В.

3.178. $I_1 = \mathscr{E}R_2/(RR_1+R_1R_2+R_2R) = 1{,}2$ А, $I_2 = I_1R_1/R_2 = 0{,}8$ А.

3.179. $U = U_0Rx/[Rl+R_0(l-x)x/l]$; при $R \gg R_0$ $U \approx U_0x/l$.

3.180. $\mathscr{E} = (\mathscr{E}_1R_2+\mathscr{E}_2R_1)/(R_1+R_2)$, $R_i = R_1R_2/(R_1+R_2)$.

3.181. $I = (R_1\mathscr{E}_2-R_2\mathscr{E}_1)/(RR_1+R_1R_2+R_2R) = 0{,}02$ А, направление тока — слева направо (см. рис. 3.44).

3.182. а) $I_1 = [R_3(\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2)+R_2(\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_3)]/(R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1) = 0{,}06$ А; б) $\varphi_A-\varphi_B = \mathscr{E}_1-I_1R_1 = 0{,}9$ В.

3.183. $I = [\mathscr{E}(R_2+R_3)+\mathscr{E}_0R_3]/[R(R_2+R_3)+R_2R_3]$.

3.184. $\varphi_A-\varphi_B = [\mathscr{E}_2R_3(R_1+R_2)-\mathscr{E}_1R_1(R_2+R_3)]/(R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1) = -1{,}0$ В.

3.185. $I_1=[R_3(\varphi_1-\varphi_2)+R_2(\varphi_1-\varphi_3)]/(R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1)=0{,}2$ А.

3.186. $I=\dfrac{U}{R_2}\left(\dfrac{R_1+R_2}{R_1[1+R_2R_4(R_1+R_3)/R_1R_3(R_2+R_4)]}-1\right)=1{,}0$ А. Ток идет от точки C к точке D.

3.187. $R_{AB}=r(r+3R)/(R+3r)$.

3.188. $U=\mathscr{E}/2\left(1-e^{-2t/RC}\right)$.

3.189. а) $Q=4q^2R/3\Delta t$; б) $Q=\ln 2\cdot q^2R/2\Delta t$.

3.190. $R=3R_0$.

3.192. $Q=I(\mathscr{E}-U)=0{,}6$ Вт, $P=-IU=-2{,}0$ Вт.

3.193. $I=U/2R$; $P_{\text{макс}}=U^2/4R$; $\eta=1/2$.

3.194. На $2\eta=2\%$.

3.195. $T-T_0=\left(1-e^{-kt/C}\right)U^2/kR$.

3.196. $R_x=R_1R_2/(R_1+R_2)=12$ Ом.

3.197. $R=R_1R_2/(R_1+R_2)$; $Q_{\text{макс}}=(\mathscr{E}_1R_2+\mathscr{E}_2R_1)^2/4R_1R_2(R_1+R_2)$.

3.198. $n=\sqrt{Nr/R}=3$.

3.199. $Q=C\mathscr{E}^2R_1/2(R_1+R_2)=60$ мДж.

3.200. а) $\Delta W=-CU^2\eta/2(1-\eta)=-0{,}15$ мДж; б) $A=CU^2\eta/2(1-\eta)=0{,}15$ мДж.

3.201. $\Delta W=-(\varepsilon-1)CU^2/2=-0{,}5$ мДж, $A_{\text{мех}}=(\varepsilon-1)CU^2/2=0{,}5$ мДж.

3.202. $h\approx\varepsilon_0(\varepsilon-1)U^2/2\rho gd^2$, где ρ — плотность воды.

3.203. а) $q=q_0e^{-t/\varepsilon_0\varepsilon\rho}$; б) $Q=(1/a-1/b)\,q_0^2/8\pi\varepsilon_0\varepsilon$.

3.204. а) $q=q_0\left(1-e^{-\tau/RC}\right)=0{,}18$ мКл; б) $Q=\left(1-e^{-2\tau/RC}\right)q_0^2/2C=82$ мДж.

3.205. а) $I=(U_0/R)\,e^{-2t/RC}$; б) $Q=CU_0^2/4$.

3.206. $e/m=l\omega r/qR=1{,}8\cdot10^{11}$ Кл/кг.

3.207. $p=IlTm/e=0{,}40$ мкН $\cdot$ с.

3.208. $s=enl\langle v\rangle/j\sim10^7$ м, где n — концентрация свободных электронов, $\langle v\rangle$ — средняя скорость теплового движения электрона.

3.209. а) $t=enlS/I=3$ Мс; б) $F=enl\rho I=1{,}0$ МН, где ρ — плотность меди.

3.210. $E=(I/2\pi\varepsilon_0r)\sqrt{m/2eU}=32$ В/м, $\Delta\varphi=(I/4\pi\varepsilon_0)\sqrt{m/2eU}=0{,}80$ В.

3.211. а) $\rho(x)=-4/9\varepsilon_0ax^{-2/3}$; б) $j=4/9\varepsilon_0a^{3/2}\sqrt{2e/m}$.

3.212. $n=Id/e(u_0^++u_0^-)US=2{,}3\cdot10^8$ см$^{-3}$.

3.213. $u_0=\omega_0l^2/2U_0$.

3.214. а) $\dot{n}_i=I_{\text{нас}}/eV=6\cdot10^9$ см$^{-3}\cdot$с$^{-1}$; б) $n=\sqrt{\dot{n}_i/r}=6\cdot10^7$ см$^{-3}$.

3.215. $t=(\eta-1)/\sqrt{r\dot{n}_i}=13$ мс.

3.216. $t=\varepsilon_0\eta U/e\dot{n}_id^2=4{,}6$ сут.

3.217. $I=ev_0e^{\alpha d}$.

3.218. $j=(e^{\alpha d}-1)\,e\dot{n}_i/\alpha$.

3.219. а) $B=\mu_0I/2R=6{,}3$ мкТ; б) $B=\mu_0R^2I/2(R^2+x^2)^{3/2}=2{,}3$ мкТ.

3.220. $B=n\mu_0I\operatorname{tg}(\pi/n)/2\pi R$. При $n\to\infty$ $B=\mu_0I/2R$.

3.221. $B=4\mu_0I/\pi d\sin\varphi=0{,}10$ мТ.

3.222. $B=(\pi-\varphi+\operatorname{tg}\varphi)\,\mu_0I/2\pi R=28$ мкТ.

3.223. а) $B=\dfrac{\mu_0I}{4\pi}\left(\dfrac{2\pi-\varphi}{a}+\dfrac{\varphi}{b}\right)$; б) $B=\dfrac{\mu_0I}{4\pi}\left(\dfrac{3\pi}{4a}+\dfrac{\sqrt{2}}{b}\right)$.

3.224. $B\approx\mu_0hI/4\pi^2Rr$, где r — расстояние от прорези.

3.225. $B=\mu_0I/\pi^2R$.

3.226. а) $B=(\mu_0/4\pi)(\pi I/R)$; б) $B=(\mu_0/4\pi)(1+3\pi/2)\,I/R$; в) $B=(\mu_0/4\pi)\times$ $\times(2+\pi)\,I/R$.

3.227. $B=(\mu_0/4\pi)\,I\sqrt{2}/l=2{,}0$ мкТ.

3.228. а) $B=(\mu_0/4\pi)\sqrt{4+\pi^2}\,I/R=0{,}30$ мкТ; б) $B=(\mu_0/4\pi)\sqrt{2+2\pi+\pi^2}\times$ $\times I/R=0{,}34$ мкТ; в) $B=(\mu_0/4\pi)\sqrt{2}\,I/R=0{,}11$ мкТ.

3.229. а) $B=\mu_0 i/2$; б) $B=\mu_0 i$ между плоскостями и $B=0$ вне плоскостей.

3.230. $B=\begin{cases}\mu_0 jx & \text{внутри пластины,}\\ \mu_0 jd & \text{вне пластины.}\end{cases}$

3.231. В том полупространстве, где находится прямой провод, $B=\mu_0 I/2\pi r$, r — расстояние от провода. В другом полупространстве $B\equiv 0$.

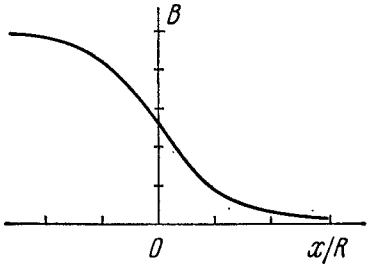


Рис. 23.

3.232. Данный интеграл равен $\mu_0 I$.

3.233. $\mathbf{B}=\begin{cases}{}^1/_2\mu_0\,[\mathbf{jr}] & \text{при } r\leqslant R,\\ {}^1/_2\mu_0\,[\mathbf{jr}]\,R^2/r^2 & \text{при } r\geqslant R.\end{cases}$

3.234. $\mathbf{B}={}^1/_2\mu_0\,[\mathbf{jl}]$, т. е. поле в полости однородное.

3.235. $j(r)=(b/\mu_0)(1+\alpha)\,r^{\alpha-1}$.

3.236. $B=\mu_0 nI/\sqrt{1+(2R/l)^2}$.

3.237. а) $B={}^1/_2\mu_0 nI\left(1-x/\sqrt{x^2+R^2}\right)$, где $x>0$ вне соленоида и $x<0$ внутри соленоида; см. рис. 23; б) $x_0=R\,(1-2\eta)/2\sqrt{\eta(1-\eta)}\approx 5R$.

3.238. $B=\begin{cases}(\mu_0 I/h)\sqrt{1-(h/2R)^2}=0{,}29 \text{ мТ}, & r<R,\\ (\mu_0/4\pi)\,2I/r=0{,}04 \text{ мТ}, & r>R.\end{cases}$

3.239. $\eta\approx N/\pi=8\cdot 10^2$.

3.240. $\Phi=(\mu_0/4\pi)\,I=1{,}0$ мкВб/м.

3.241. $\Phi=\Phi_0/2=\mu_0 nIS/2$, где Φ_0 — поток вектора $\mathbf{B}$ через поперечное сечение соленоида вдали от его торцов.

3.242. $\Phi=(\mu_0/4\pi)\,2INh\ln\eta=8$ мкВб.

3.243. $p_m=2\pi R^3 B/\mu_0=30$ мА · м^2.

3.244. $p_m={}^1/_2 NId^2=0{,}5$ А · м^2.

3.245. а) $B=\dfrac{\mu_0 IN\ln(b/a)}{2(b-a)}=7$ мкТ; б) $p_m={}^1/_3\pi IN(a^2+ab+b^2)=15$ мА · м^2.

3.246. а) $B={}^1/_2\mu_0\sigma\omega R$; б) $p_m={}^1/_4\pi\sigma\omega R^4$.

3.247. $B={}^2/_3\mu_0\sigma\omega R=29$ пТ.

3.248. $p_m={}^1/_5 qR^2\omega$; $p_m/M=q/2m$.

3.249. $\mathbf{B}={}^1/_2\mu_0\alpha\omega R^2$.

3.250. $F_м/F_э=\mu_0\varepsilon_0 v^2=(v/c)^2=1{,}00\cdot 10^{-6}$.

3.251. а) $F_1=\mu_0 I^2/4R=0{,}20$ мН/м; б) $F_1=\mu_0 I^2/\pi l=0{,}13$ мН/м.

3.252. $B=\pi d^2\sigma_m/4Rl=8$ кТ, где σ_m — предел прочности меди.

3.253. $B=(2\rho gS/I)\operatorname{tg}\vartheta=10$ мТ, где ρ — плотность меди.

3.254. $B=\Delta mgl/NIS=0{,}4$ Т.

3.255. а) $F=2\mu_0 II_0/\pi\,(4\eta^2-1)=0{,}40$мкН; б) $A=(\mu_0 aII_0/\pi)\times$ $\times\ln[(2\eta+1)/(2\eta-1)]=0{,}10$ мкДж.

3.256. $R\approx\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}\,(\ln\eta)/\pi=0{,}36$ кОм.

3.257. $F_1=\mu_0 I^2/\pi^2 R$.

3.258. $F_1=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\,\dfrac{2I_1 I_2}{b}\ln(1+b/a)$.

3.259. $F_1 = B^2/2\mu_0$.

3.260. Во всех трех случаях $F_1 = (B_1^2 - B_2^2)/2\mu_0$. Сила действует вправо. Ток в листе (проводящей плоскости) направлен за чертеж.

3.261. $\Delta p = IB/a = 0{,}5$ кПа.

3.262. $p = \mu_0 I^2/8\pi^2 R^2$.

3.263. $p = {}^1/_2 \mu_0 n^2 I^2$.

3.264. $I_{пр} = \sqrt{2F_{пр}/\mu_0 nR}$.

3.265. $P = v^2 B^2 d^2 R/(R + \rho d/S)^2$; при $R = \rho d/S$ мощность $P = P_{макс} = {}^1/_4 v^2 B^2 dS/\rho$.

3.266. $U = {}^1/_4 \mu_0 I^2/\pi^2 R^2 ne = 2$ пВ.

3.267. $n = jB/eE = 2{,}5 \cdot 10^{28}$ м$^{-1}$; почти 1 : 1.

3.268. $u_0 = 1/\eta B = 3{,}2 \cdot 10^{-3}$ м^2/(В · с).

3.269. а) $F = 0$; б) $F = (\mu_0/4\pi)\, 2Ip_m/r^2$, $\mathbf{F} \uparrow\downarrow \mathbf{B}$; в) $F = (\mu_0/4\pi)\, 2Ip_m/r^2$, $\mathbf{F} \uparrow\downarrow \mathbf{r}$.

3.270. $F = (\mu_0/4\pi)\, 3\pi R^2 I p_m/(R^2 + x^2)^{5/2}$.

3.271. $F = {}^3/_2 \mu_0 p_{1m} p_{2m}/\pi l^4 = 9$ нН.

3.272. $I' \approx 2Bx^3/\mu_0 R^2 = 0{,}5$ кА.

3.273. $B' = B\sqrt{\mu^2 \sin^2\alpha + \cos^2\alpha}$.

3.274. а) $\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{S} = \pi R^2 B \cos\vartheta \cdot (\mu - 1)/\mu\mu_0$; б) $\oint \mathbf{B}\, d\mathbf{r} = (1 - \mu)\, Bl \sin\vartheta$.

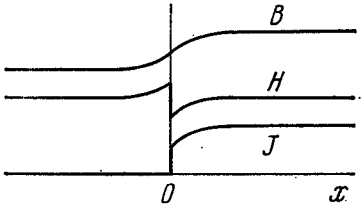


Рис. 24.

3.275. а) $I'_{пов} = \chi I$; б) $I'_{об} = \chi I$; в противоположные стороны.

3.276. См. рис. 24.

3.277. $B = \dfrac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \dfrac{I}{\pi r}$.

3.278. $\mathbf{B} = 2\mathbf{B}_0\mu/(1 + \mu)$.

3.279. $\mathbf{B} = 3\mathbf{B}_0\mu/(2 + \mu)$.

3.280. $H_c = NI/l = 6$ кА/м.

3.281. $H \approx bB/\mu_0 \pi d = 0{,}10$ кА/м.

3.282. При $b \ll R$ проницаемость $\mu \approx 2\pi RB/(\mu_0 NI - bB) = 3{,}7 \cdot 10^3$.

3.283. $H = 0{,}06$ кА/м, $\mu_{макс} \approx 1{,}0 \cdot 10^4$.

3.284. Из теоремы о циркуляции вектора $\mathbf{H}$ получаем

$$B \approx \frac{\mu_0 NI}{b} - \frac{\mu_0 \pi d}{b} H = 1{,}51 - 0{,}987H \text{ (кА/м)}.$$

Кроме того, между B и H имеется зависимость, график которой показан на рис. 3.76. Искомые значения H и B должны удовлетворять одновременно обоим уравнениям. Решив эту систему уравнений графически, получим $H \approx 0{,}26$ кА/м, $B \approx 1{,}25$ Т и $\mu = B/\mu_0 H \approx 4 \cdot 10^3$.

3.285. $F \approx {}^1/_2 \chi S B^2/\mu_0$.

3.286. а) $x_m = 1/\sqrt{4a}$; б) $\chi = \mu_0 F_{макс} \sqrt{e/a}\,/VB_0^2 = 3{,}6 \cdot 10^{-4}$.

3.287. $A \approx {}^1/_2 \chi V B^2/\mu_0$.

3.288. $\mathscr{E}_i = By\sqrt{8\omega/a}$.

3.289. $I = Bvl/(R + R_\mu)$, где $R_\mu = R_1 R_2/(R_1 + R_2)$.

3.290. а) $\Delta\varphi = {}^1/_2 \omega^2 a^2 m/e = 3{,}0$ нВ; б) $\Delta\varphi \approx {}^1/_2 \omega B a^2 = 20$ мВ.

3.291. $\int_A^C \mathbf{E}\, d\mathbf{r} = -{}^1/_2 \omega B\, d^2 = -10$ мВ.

3.292. $\mathscr{E}_i = {}^1/_2 (-1)^n Ba\beta t$, где $n = 1, 2, \ldots$ — номер полуоборота, которому принадлежит данный момент t. График $\mathscr{E}_i(t)$ показан на рис. 25, где $t_n = \sqrt{2\pi n/\beta}$.

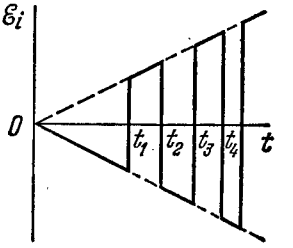


Рис. 25.

3.293. $I_{инд} = \alpha/r$, где $\alpha = {}^1/_2 \mu_0 l v l / \pi R$.

3.294. $\mathscr{E}_i = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \dfrac{2Ia^2 v}{x(x+a)}$.

3.295. $\mathscr{E}_i = {}^1/_2 (\omega a^3 B^2 + 2mg \sin \omega t)/aB$.

3.296. $v = \dfrac{mgR \sin \alpha}{B^2 l^2}$.

3.297. $w = \dfrac{g \sin \alpha}{1 + l^2 B^2 C/m}$.

3.298. $\langle P \rangle = {}^1/_2 (\pi \omega a^2 B)^2 / R$.

3.299. $B = {}^1/_2 qR/NS = 0{,}5$ Т.

3.300. $q = \dfrac{\mu_0 aI}{2\pi R} \ln \dfrac{b+a}{b-a}$, т. е. от L не зависит.

3.301. а) $I = \dfrac{\mu_0 I_0 v}{2\pi R} \ln \dfrac{b}{a}$; б) $F = \dfrac{v}{R} \left(\dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ln \dfrac{b}{a} \right)^2$.

3.302. а) $s = v_0 mR/l^2 B^2$; б) $Q = {}^1/_2 m v_0^2$.

3.303. $v = \dfrac{F}{\alpha m} (1 - e^{-\alpha t})$, где $\alpha = B^2 l^2 / mR$.

3.304. а) По круговому проводнику — по часовой стрелке, в перемычке тока нет; б) во внешнем проводнике — по часовой стрелке; в) в обоих круговых проводниках — по часовой стрелке; в перемычке тока нет; г) в левой части «восьмерки» — по часовой стрелке.

3.305. $I = {}^1/_4 \omega B_0 (a-b)/\rho = 0{,}5$ А.

3.306. $\mathscr{E}_{im} = {}^1/_3 \pi a^2 N \omega B_0$.

3.307. $\mathscr{E}_i = {}^3/_2 wlBt^2 = 12$ мВ.

3.308. $E = \begin{cases} {}^1/_2 \mu_0 n \dot{I} r & \text{при } r < a, \\ {}^1/_2 \mu_0 n \dot{I} a^2 / r & \text{при } r > a. \end{cases}$

3.309. $I = {}^1/_4 \mu_0 n S \dot{I} / \rho = 2$ мА, где ρ — удельное сопротивление меди.

3.310. $E = {}^1/_2 ab (\eta - 1)/(\eta + 1)$.

3.311. $\omega = -\dfrac{q}{2m} \mathbf{B}(t)$.

3.312. $F_{i\,макс} = \dfrac{\mu_0 a^2 U^2}{4rRlb^2}$.

3.313. $Q = {}^1/_3 a^2 \tau^3 / R$.

3.314. $I = {}^1/_2 (b^2 - a^2) \beta h / \rho$.

3.315. $l = \sqrt{4\pi l_0 L / \mu_0} = 0{,}10$ км.

3.316. $L = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \dfrac{mR}{l \rho \rho_0}$, где ρ и ρ_0 — удельное сопротивление и плотность меди.

3.317. $t = -\dfrac{L}{R} \ln (1 - \eta) = 1{,}5$ с.

3.318. $\tau = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \dfrac{m}{l \rho \rho_0} = 0{,}7$ мс, где ρ — удельное сопротивление, ρ_0 — плотность меди.

3.319. $L_1 = \dfrac{\mu \mu_0}{2\pi} \ln \eta = 0{,}26$ мкГ/м.

3.320. $L=\frac{\mu_0}{2\pi}\mu N^2 a \ln\left(1+\frac{a}{b}\right)$.

3.321. $L_1=\mu_0 h/b=25$ вГ/м.

3.322. $L_1=\frac{\mu_0}{\pi}\ln(\eta-1)$.

3.323. а) $I=\pi a^2 B/L$; б) $A=1/2\pi^2 a^4 B^2/L$.

3.324. $I=I_0(1+\eta)=2$ А.

3.325. $I=\frac{\pi a B}{\mu_0\left(\ln\frac{8a}{b}-2\right)}=50$ А.

3.326. $I=\frac{\mathscr{E}}{R}\left[1+(\eta-1)\,e^{-t\eta R/L}\right]$.

3.327. $I=\frac{\mathscr{E}}{R}\left(1-e^{-tR/2L}\right)$.

3.328. $I_1=\frac{\mathscr{E}L_2}{R(L_1+L_2)}$, $I_2=\frac{\mathscr{E}L_1}{R(L_1+L_2)}$.

3.329. $L_{12}=\frac{\mu_0 b}{2\pi}\ln\left(1+\frac{a}{l}\right)$.

3.330. $L_{12}=\frac{\mu_0\mu h N}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$.

3.331. а) $L_{12}\approx 1/2\mu_0\pi a^2/b$; б) $\Phi_{21}=1/2\mu_0\pi a^2 I/b$.

3.332. $p_m=2aRq/\mu_0 N$.

3.333. $L_{12}\approx 1/2\mu_0\pi a^4/l^3$.

3.334. $I_2=\frac{\alpha L_{12}}{R}\left(1-e^{-tR/L_2}\right)$.

3.335. $Q=\frac{L\mathscr{E}^2}{2R^2(1+R_0/R)}=3$ мкДж.

3.336. $W=1/2 N\Phi I=0{,}5$ Дж.

3.337. $W=BH\pi^2 a^2 b=2{,}0$ Дж, где $H=1/2 N I/\pi b$.

3.338. а) $W_э/W_м\approx\mu b/\pi d=3{,}0$; б) $L\approx\frac{\mu_0 S N^2}{b+\pi d/\mu}=0{,}15$ Г.

3.339. $W_1=\mu_0\lambda^2\omega^2 a^2/8\pi$.

3.340. $E=B/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}=3\cdot 10^8$ В/м.

3.341. $w_м/w_э=\varepsilon_0\mu_0\omega^2 a^4/l^2=1{,}1\cdot 10^{-15}$.

3.343. а) $L_{общ}=2L$; б) $L_{общ}=L/2$.

3.344. $L_{12}=\sqrt{L_1 L_2}$.

3.346. $W_{12}=\frac{\mu_0\pi a^2}{2b}I_1 I_2\cos\vartheta$.

3.347. а) $j_{см}=-j$; б) $I_{см}=q/\varepsilon_0\varepsilon\rho$.

3.348. Кроме тока проводимости следует учесть ток смещения.

3.349. $E_m=I_m/\varepsilon_0\omega S=7$ В/см.

3.350. $H=H_m\cos(\omega t+\alpha)$, где $H_m=\frac{rU_m}{2d}\sqrt{\sigma^2+(\varepsilon_0\varepsilon\omega)^2}$, а α определяется формулой $\operatorname{tg}\alpha=\varepsilon_0\varepsilon\omega/\sigma$.

3.351. $j_{см}=\begin{cases}1/2\ddot{B}r & \text{при } r<R,\\ 1/2\ddot{B}R^2/r & \text{при } r>R.\end{cases}$

Здесь $\ddot{B}=\mu_0 n I_m\omega^2\sin\omega t$.

3.352. а) $j_{см}=\frac{3qv}{4\pi r^3}$; б) $j_{см}=-\frac{qv}{4\pi r^3}$.

3.353. $x_m=0$, $j_{см\ макс}=\frac{qv}{4\pi a^3}$.

3.354. $\mathbf{H}=\frac{q[\mathbf{vr}]}{4\pi r^3}$.

3.355. а) Если $\mathbf{B}(t)$, то $\nabla\times\mathbf{E}=-\partial\mathbf{B}/\partial t\neq 0$. Не равенство же нулю пространственных производных E-поля ($\nabla\times\mathbf{E}\neq 0$) возможно только при наличии электрического поля.

б) Если $\mathbf{B}(t)$, то $\nabla\times\mathbf{E}=-\partial\mathbf{B}/\partial t\neq 0$. В однородном же поле $\nabla\times\mathbf{E}=0$.

в) По предположению, $\mathbf{E}=\mathbf{a}f(t)$, где $\mathbf{a}$ — вектор, не зависящий от координат, $f(t)$ — произвольная функция времени. Тогда $-\partial\mathbf{B}/\partial t=\nabla\times\mathbf{E}=0$, т. е. B-поле не зависит от времени. Вообще говоря, это противоречит уравнению $\nabla\times\mathbf{H}=\partial\mathbf{D}/\partial t$, ибо левая часть его в данном случае оказывается не зависящей от времени, правая же часть — зависящей. Исключением является случай, когда $f(t)$ — линейная функция. В этом случае однородное E-поле может быть переменным во времени.

3.356. Возьмем дивергенцию от обеих частей уравнения $\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{j}+\partial\mathbf{D}/\partial t$. Имея в виду, что дивергенция ротора всегда равна нулю, получим $0=\nabla\cdot\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{D})$. Остается учесть, что $\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$.

3.357. Возьмем дивергенцию от обеих частей первого уравнения. Так как дивергенция ротора всегда равна нулю, то $\nabla\cdot(\partial\mathbf{B}/\partial t)=0$, или $\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{B})=0$. Отсюда $\nabla\cdot\mathbf{B}=\text{const}$, что действительно не противоречит второму уравнению.

3.358. $\nabla\times\mathbf{E}=[\omega\mathbf{B}]$.

3.359. $\mathbf{E}'=[\mathbf{vB}]$.

3.360. $\sigma=\varepsilon_0 vB=0{,}40$ пКл/м^2.

3.361. $\rho=-2\varepsilon_0\omega\mathbf{B}=-0{,}08$ иКл/м^3; $\sigma=\varepsilon_0 a\omega\mathbf{B}=2$ пКл/м^2.

3.362. $\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q[\mathbf{vr}]}{r^3}$.

3.364. $\mathbf{E}'=b\mathbf{r}/r^2$, где r — расстояние от оси z'.

3.365. $\mathbf{B}'=\frac{a[\mathbf{rv}]}{c^2r^2}$, где r — расстояние от оси z'.

3.367. а) $E'=E\sqrt{\frac{1-\beta^2\cos^2\alpha}{1-\beta^2}}=9$ кВ/м; $\operatorname{tg}\alpha'=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}}$, откуда $\alpha'\approx 51°$; б) $B'=\frac{\beta E\sin\alpha}{c\sqrt{1-\beta^2}}=14$ мкТ.

3.368. а) $E'=\frac{\beta B\sin\alpha}{c\sqrt{1-\beta^2}}=1{,}4$ иВ/м; б) $B'=B\sqrt{\frac{1-\beta^2\cos^2\alpha}{1-\beta^2}}=0{,}9$ Т, $\alpha'\approx 51°$.

3.370. $B'=B\sqrt{1-(E/cB)^2}\approx 0{,}15$ мТ.

3.371. Пусть заряд q движется в положительном направлении оси x K-системы отсчета. Перейдем в K'-систему, в начале координат которой этот заряд покоится (оси x' и x обеих систем совпадают, оси y' и y — параллельны). В K'-системе поле заряда имеет наиболее простой вид: $\mathbf{E}'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'^3}\mathbf{r}'$,

н в плоскости x, y

$$E'_x=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'^3}x', \quad E'_y=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'^3}y'.$$

Теперь совершим обратный переход в исходную K-систему. В момент, когда заряд q проходит через начало координат K-системы, проекции x, y вектора $\mathbf{r}$ связаны с проекциями x', y' вектора $\mathbf{r}'$ соотношениями

$$x=r\cos\vartheta=x'\sqrt{1-(v/c)^2}, \quad y=r\sin\vartheta=y'.$$

Кроме того, согласно преобразованиям, обратным (3.6и),

$$E_x=E'_x, \quad E_y=E'_y/\sqrt{1-(v/c)^2}.$$

Решив совместно все эти уравнения, получим

$$\mathbf{E}=E_x\mathbf{i}+E_y\mathbf{j}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\mathbf{r}}{r^3}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\vartheta)^{3/2}}.$$

Следует обратить внимание на то, что в данном случае ($\mathbf{v}=\text{const}$) вектор $\mathbf{E}$ коллинеарен вектору $\mathbf{r}$.

3.372. $v=\sqrt[3]{9/2}al\sqrt{e/m}=16$ км/с.

3.373. $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{al^2}{4}\sqrt{\dfrac{m}{2eU^3}}$.

3.374. а) $x=2E_0/a$; б) $w=qE_0/m$.

3.375. $t=\dfrac{\sqrt{T(T+2m_0c^2)}}{ceE}=3{,}0$ нс.

3.376. $w=\dfrac{eE}{m_0(1+T/m_0c^2)^3}$.

3.377. а) $\operatorname{tg}\vartheta=\dfrac{eEt}{m_0v_0}\sqrt{1-(v_0/c)^2}$, где e и m_0 — заряд и масса протона;

б) $v_x=v_0/\sqrt{1+(1-v_0^2/c^2)(eEt/m_0c^2)^2}$.

3.378. $\alpha=\arcsin\left(dB\sqrt{\dfrac{q}{2mU}}\right)=30°$.

3.379. а) $v=reB/m=100$ км/с, $T=2\pi m/eB=6{,}5$ мкс;

б) $v=c/\sqrt{1+(m_0c/reB)^2}=0{,}51\,c$, $T=\dfrac{2\pi m_0}{eB\sqrt{1-(v/c)^2}}=4{,}1$ нс.

3.380. а) $p=qrB$; б) $T=m_0c^2\left(\sqrt{1+(qrB/m_0c)^2}-1\right)$; в) $w=\dfrac{c^2}{r[1+(m_0c/qrB)^2]}$.

3.381. $T=\eta m_0c^2$. Соответственно 5 кэВ и 9 МэВ.

3.382. $\Delta l=2\pi\sqrt{2mU/eB^2}\cos\alpha=2{,}0$ см.

3.383. $q/m=\dfrac{8\pi^2U}{l^2(B_2-B_1)^2}$.

3.384. $r=2\rho\,|\sin(\varphi/2)|$, где $\rho=\dfrac{mv}{eB}\sin\alpha$, $\varphi=\dfrac{leB}{mv\cos\alpha}$.

3.385. $r_{\text{макс}}=ae^{v_0/b}$, где $b=\dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{e}{m}I$.

3.386. $v=\dfrac{U}{rB\ln(b/a)}$, $q/m=\dfrac{U}{r^2B^2\ln(b/a)}$.

3.387. а) $y_n=\dfrac{2\pi^2mEn^2}{qB^2}$; б) $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{v_0B}{2\pi En}$.

3.388. $z = l \operatorname{tg} \sqrt{\frac{qB^2}{2mE}}\, y$; при $z \ll l$ это уравнение упрощается: $y = (2mE/q^2B^2)\, z^2$.

3.389. $F = mEl/qB = 20$ мкН.

3.390. $\Delta l = \frac{2\pi mE}{eB^2} \operatorname{tg} \varphi = 6$ см.

3.391. $q/m = \frac{a\,(a+2b)\,B^2}{2E\Delta x}$.

3.392. а) $x = a\,(\omega t - \sin \omega t)$; $y = a\,(1 - \cos \omega t)$, где $a = mE/qB^2$, $\omega = qB/m$. Траекторией является циклоида (рис. 26). Движение частицы представляет собой

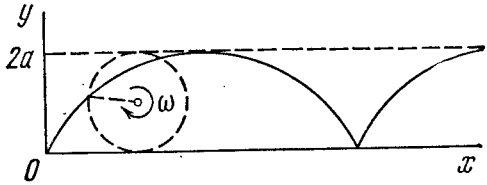


Рис. 26.

движение точки на ободе круга радиусом a, катящегося без скольжения вдоль оси x так, что его центр перемещается со скоростью $v = E/B$; б) $s = 8mE/qB^2$; в) $\langle v_x \rangle = E/B$.

3.393. $U = 2\frac{e}{m}\left(\frac{\mu_0 I}{4\pi}\right)^2 \ln \frac{a}{b}$.

3.394. $B \leqslant \frac{2b}{b^2 - a^2} \sqrt{\frac{2m}{e} U}$.

3.395. $y = \frac{a}{2\omega} t \sin \omega t$, $x = \frac{a}{2\omega^2}(\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$, где $a = qE_m/m$. Траектория имеет вид раскручивающейся спирали.

3.396. $U \gtrsim 2\pi^2 \nu^2 m r \Delta r/e = 0{,}10$ МВ.

3.397. а) $T = \frac{(erB)^2}{2m} = 12$ МэВ; б) $\nu_{\text{мин}} = \frac{1}{2\pi r} \sqrt{\frac{T}{2m}} = 20$ МГц.

3.398. а) $t = \frac{\pi^2 \nu m r^2}{eU} = 17$ мкс; б) $s \approx \frac{4\pi^3 \nu^2 m r^2}{3eU} = 0{,}74$ км. Указание. Здесь $s \sim \sum_{n=1}^{N} v_n \sim \sum \sqrt{n}$, где v_n — скорость частицы после n-го прохождения ускоряющего промежутка. Так как N велико, то $\sum_1^N \sqrt{n} \approx \int_0^N \sqrt{n}\, dn$.

3.399. $n = 2\pi \nu W/eBc^2 = 9$.

3.400. $\omega = \omega_0/\sqrt{1 + at}$, где $\omega_0 = qB/m$, $a = qB\Delta W/\pi m^2 c^2$.

3.401. $v = {}^1\!/_2 rqB/m$, $\rho = r/2$.

3.402. $N = W/e\Phi = 5 \cdot 10^6$ оборотов, $s = 2\pi r N = 8 \cdot 10^3$ км.

3.403. С одной стороны,

$$\frac{dp}{dt} = eE = \frac{e}{2\pi r}\frac{d\Phi}{dt},$$

где p — импульс электрона, r — радиус орбиты, Φ — магнитный поток внутри нее.

С другой стороны, dp/dt можно найти, продифференцировав соотношение $p=erB$ при $r=\text{const}$. Из сравнения полученных выражений следует, что $dB_0/dt=1/2\,\langle dB/dt\rangle$. В частности, это условие будет выполнено, если $B_0=1/2\langle B\rangle$.

3.404. $r_0=\sqrt{2B_0/3a}$.

3.405. $dE/dr=B\,(r_0)=1/2\,\langle B\rangle=0$.

3.406. $\Delta W=2\pi r^2eB/\Delta t=0{,}10$ кэВ.

3.407. а) $W=\left(\sqrt{1+(reB/m_0c)^2}-1\right)m_0c^2$; б) $s=W\Delta t/reB$.

4.1. а) См. рис. 27; б) $(v_x/a\omega)^2+(x/a)^2=1$ и $w_x=-\omega^2x$.

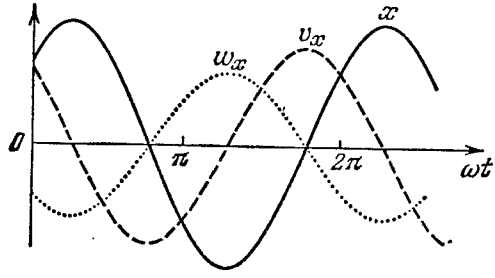


Рис. 27.

4.2. а) Амплитуда равна $a/2$, период $T=\pi/\omega$, см. рис. 28, *а*; б) $v_x^2=4\omega^2x\,(a-x)$, см. рис. 28, *б*.

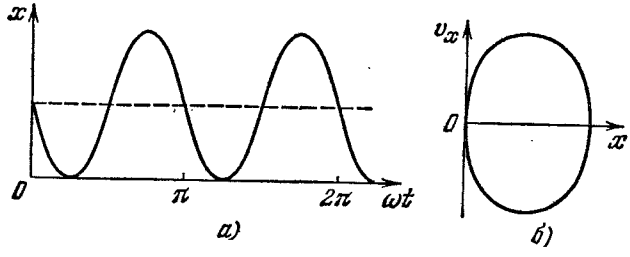


Рис. 28.

4.3. $x=a\cos(\omega t+\alpha)=-29$ см, $v_x=-81$ см/с, где $a=\sqrt{x_0^2+(v_{x0}/\omega)^2}$, $\alpha=\operatorname{arctg}(-v_{x0}/\omega x_0)$.

4.4. $\omega=\sqrt{(v_1^2-v_2^2)/(x_2^2-x_1^2)}$, $a=\sqrt{(v_1^2x_2^2-v_2^2x_1^2)/(v_1^2-v_2^2)}$.

4.5. а) $\langle v\rangle=3a/T=0{,}50$ м/с; б) $\langle v\rangle=6a/T=1{,}0$ м/с.

4.6. а) $\langle v_x\rangle=\dfrac{2\sqrt{2}}{3\pi}a\omega$; б) $|\langle \mathbf{v}\rangle|=\dfrac{2\sqrt{2}}{3\pi}a\omega$; в) $\langle v\rangle=\dfrac{2(4-\sqrt{2})}{3\pi}a\omega$.

4.7. $s=\begin{cases}a\,[n+1-\cos(\omega t-n\pi/2)], & n\text{ — четное},\\ a\,[n+\sin(\omega t-n\pi/2)], & n\text{ — нечетное}.\end{cases}$

Здесь n — целое число отношения $2\omega t/\pi$.

4.8. $s=0{,}6$ м.

4.9. $dP/dx=1/\pi\sqrt{a^2-x^2}$.

4.10. В обоих случаях $a=7$.

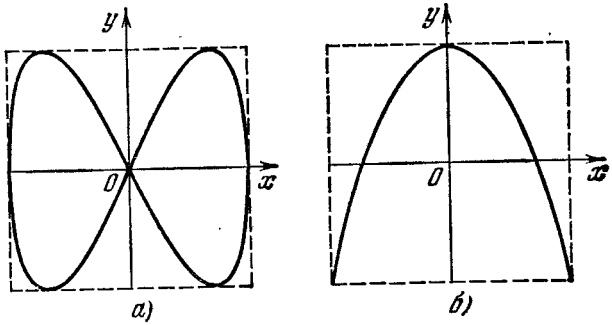
4.11. $v_{\text{макс}}=2{,}73\,a\omega$.

4.12. 47,9 и 52,1 рад/с, 1,5 с.

4.13. 18 или 26 Гц.

4.14. а) $x^2/a^2+y^2/b^2=1$, по часовой стрелке; б) $\mathbf{w}=-\omega^2\mathbf{r}$.

4.15. а) $y^2=4x^2(1-x^2/a^2)$; б) $y=a(1-2x^2/a^2)$. См. рис. 29.



а) б)

Рис 29.

4.16. $T2=\pi\sqrt{m/a^2U_0}$.

4.17. $T=4\pi a\sqrt{ma/b^2}$.

4.18. $T=\pi\sqrt{ml/F}=0{,}2$ с.

4.19. $T=2\pi\sqrt{\eta l/g\,(\eta-1)}=1{,}1$ с.

4.20. $T=2\sqrt{l/g}\,[\pi/2+\arcsin(\alpha/\beta)]$.

4.21. $t=\sqrt{\dfrac{2h}{w}}\,\dfrac{\sqrt{1+\eta}-\sqrt{1-\eta}}{1-\sqrt{1-\eta}}$, где $\eta=w/g$.

4.22. $T=\sqrt{4\pi m/\rho g r^2}=2{,}5$ с.

4.23. $T=2\pi\sqrt{\eta\,(1-\eta)\,m/\varkappa}=0{,}13$ с.

4.24. $T=2\pi\sqrt{m/(\varkappa_1+\varkappa_2)}$.

4.25. $T=2\pi\sqrt{m/\varkappa}$, где $\varkappa=\varkappa_1\varkappa_2/(\varkappa_1+\varkappa_2)$.

4.26. $\omega=\sqrt{2T_0/ml}$.

4.27. $T=2\pi\sqrt{m/S\rho g\,(1+\cos\vartheta)}=0{,}8$ с.

4.28. $T=\pi\sqrt{2l/kg}=1{,}5$ с.

4.29. а) $\ddot{x}+(g/R)\,x=0$, где x — смещение тела относительно центра Земли, R — ее радиус, g — нормальное ускорение свободного падения; б) $\tau=\pi\sqrt{R/g}=42$ мин; в) $v=\sqrt{gR}=7{,}9$ км/с.

4.30. $T=2\pi\sqrt{l/|\mathbf{g}-\mathbf{w}|}=0{,}8$ с, где $|\mathbf{g}-\mathbf{w}|=\sqrt{g^2+w^2-2gw\cos\beta}$.

4.31. $T=2\pi/\sqrt{\varkappa/m-\omega^2}=0{,}7$ с, $\omega\geqslant\sqrt{\varkappa/m}=10$ рад/с.

4.32. $k=4\pi^2a/gT^2=0{,}4$.

4.33. а) $\vartheta=3{,}0^\circ\cos 3{,}5t$; б) $\vartheta=4{,}5^\circ\sin 3{,}5t$; в) $\vartheta=5{,}4^\circ\cos(3{,}5t+1{,}0)$. Здесь t в секундах.

4.34. $F=(m_1+m_2)\,g\pm m_1a\omega^2=60$ и 40 Н.

4.35. а) $F = mg\left(1 + \dfrac{a\omega^2}{g}\cos\omega t\right)$, см. рис. 30; б) $a_{\text{мин}} = g/\omega^2 = 8$ см; в) $a = (\omega\sqrt{2h/g} - 1)\, g/\omega^2 = 20$ см.

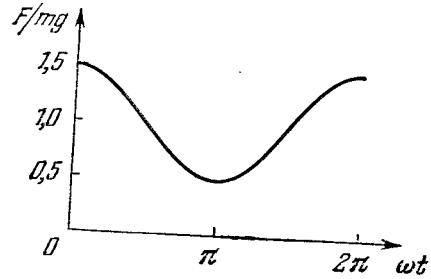


Рис. 30.

4.36. а) $y = (1 - \cos\omega t)\, mg/\varkappa$, где $\omega = \sqrt{\varkappa/m}$; б) $T_{\text{макс}} = 2mg$, $T_{\text{мин}} = 0$.
4.37. $(x/r_0)^2 + \alpha\,(y/v_0)^2 = 1$.
4.38. а) $y = (1 - \cos\omega t)\, w/\omega^2$; б) $y = (\omega t - \sin\omega t)\, \alpha/\omega^3$. Здесь $\omega = \sqrt{\varkappa/m}$.
4.39. $\Delta h_{\text{макс}} = mg/k = 10$ см, $E = m^2g^2/2k = 4{,}8$ мДж.
4.40. $a = (mg/\varkappa)\sqrt{1 + 2h\varkappa/mg}$, $E = mgh + m^2g^2/2\varkappa$.
4.41. $a = (mg/\varkappa)\sqrt{1 + 2h\varkappa/(m+M)\,g}$.
4.42. Запишем уравнение движения в проекциях на оси x и y:

$$\ddot{x} = \omega\dot{y}, \quad \ddot{y} = -\omega\dot{x}, \quad \text{где } \omega = a/m.$$

Их интегрирование (с учетом начальных условий) дает $x = (v_0/\omega)\,(1 - \cos\omega t)$, $y = (v_0/\omega)\sin\omega t$. Отсюда $(x - v_0/\omega)^2 + y^2 = (v_0/\omega)^2$. Это уравнение окружности радиуса v_0/ω с центром в точке $x_0 = v_0/\omega$, $y_0 = 0$.
4.43. Увеличится в $\sqrt{1 + {}^2/_5\,(R/l)^2}$ раз. Здесь учтено, что вода до замерзания движется поступательно, и система ведет себя как *математический* маятник.
4.44. $\omega = \sqrt{\dfrac{3g}{2l}\left(1 + \dfrac{2\varkappa l}{mg}\right)}$.
4.45. а) $T = 2\pi\sqrt{l/3g} = 1{,}1$ с; б) $E = {}^1/_2 mgl\alpha^2 = 0{,}05$ Дж.
4.46. $\varphi_m = \varphi_0\sqrt{1 + mR^2\dot{\varphi}_0^2/2k\varphi_0}$, $E = {}^1/_2 k\varphi_m^2$.
4.47. $\langle T\rangle = {}^1/_8 mgl\dot{\vartheta}_0^2 + {}^1/_{12} ml^2\dot{\vartheta}_0^2$.
4.48. $T = 4\pi/\omega$.
4.49. $I = ml^2\,(\omega_2^2 - g/l)/(\omega_1^2 - \omega_2^2) = 0{,}8$ г · м².
4.50. $\omega = \sqrt{(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2)/(I_1 + I_2)}$.
4.51. $x = l/2\sqrt{3}$, $T_{\text{мин}} = 2\pi\sqrt{l/g}\sqrt{3}$.
4.52. $T = \pi\sqrt{2h/g}$, $l_{\text{пр}} = h/2$.
4.53. $\omega_0 = \sqrt{3a\omega^2/2l}$.
4.54. $\omega_0 = \sqrt{\varkappa/(m + I/R^2)}$.
4.55. $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{2mg\cos\alpha}{MR + 2mR\,(1 + \sin\alpha)}}$.
4.56. $T = 2\pi\sqrt{3\,(R-r)/2g}$.
4.57. $T = \pi\sqrt{3m/2\varkappa}$.

4.58. $\omega_0 = \sqrt{\varkappa/\mu}$, где $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$.

4.59. а) $\omega = \sqrt{\varkappa/\mu} = 6$ рад/с; б) $E = {}^1/_2 \mu v_1^2 = 5$ мДж, $a = v_1/\omega = 2$ см. Здесь $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$.

4.60. $T = 2\pi\sqrt{I'/k}$, где $I' = I_1 I_2/(I_1 + I_2)$.

4.61. $\omega_2/\omega_1 = \sqrt{1 + 2m_O/m_C} \approx 1{,}9$, где m_O и m_C — массы атомов кислорода и углерода.

4.62. $\omega = S\sqrt{2\gamma p_0/mV_0}$, где γ — показатель адиабаты.

4.63. $q = 4h\sqrt{\pi\varepsilon_0 mg(\eta^2 - 1)} = 2{,}0$ мкКл.

4.64. Индукция поля увеличилась в $\eta^2 = 25$ раз.

4.65. $x = (v_0/\omega)\sin\omega t$, где $\omega = lB\sqrt{mL}$.

4.66. $x = (1 - \cos\omega t)\, g/\omega^2$, где $\omega = lB/\sqrt{mL}$.

4.67. а) a_0 и $a_0\omega$; б) $t_n = \dfrac{1}{\omega}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{\beta} + n\pi\right)$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$

4.68. а) $\dot\varphi(0) = -\beta\varphi_0$, $\ddot\varphi(0) = (\beta^2 - \omega^2)\varphi_0$; б) $t_n = \dfrac{1}{\omega}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{\omega^2 - \beta^2}{2\beta\omega} + n\pi\right)$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$

4.69. а) $a_0 = \dfrac{|\dot x_0|}{\omega}$, $\alpha = \begin{cases} -\pi/2, & \text{если } \dot x_0 > 0, \\ +\pi/2, & \text{если } \dot x_0 < 0; \end{cases}$

б) $a_0 = |x_0|\sqrt{1 + (\beta/\omega)^2}$, $\alpha = \operatorname{arctg}(-\beta/\omega)$, причем $-\pi/2 < \alpha < 0$, если $x_0 > 0$, и $\pi/2 < \alpha < \pi$, если $x_0 < 0$.

4.70. $\beta = \omega\sqrt{\eta^2 - 1} = 5$ с$^{-1}$.

4.71. а) $v(t) = a_0\sqrt{\omega^2 + \beta^2}\, e^{-\beta t}$; б) $v(t) = |\dot x_0|\sqrt{1 + (\beta/\omega)^2}\, e^{-\beta t}$.

4.72. Ответ зависит от того, какой смысл вкладывать в данный вопрос. Во времени затухает быстрее первое колебание. Если же взять для каждого колебания его естественный масштаб времени — период T, то за это время быстрее затухает второе колебание.

4.73. $\lambda = n\lambda_0/\sqrt{1 + (1 - n^2)(\lambda_0/2\pi)^2} = 3{,}3$, $n' = \sqrt{1 + (2\pi/\lambda_0)^2} = 4{,}3$ раза.

4.74. $T = \sqrt{(4\pi^2 + \lambda^2)\,\Delta x/g} = 0{,}70$ с.

4.75. $Q = \pi n/\ln\eta = 5 \cdot 10^2$.

4.76. $s \approx l\,(1 + e^{-\lambda/2})/(1 - e^{-\lambda/2}) = 2$ м.

4.77. $Q = {}^1/_2\sqrt{\dfrac{4g\tau^2}{l\ln^2\eta} - 1} = 1{,}3 \cdot 10^2$.

4.78. $T = \sqrt{{}^3/_{(4\pi^2 + \lambda^2)}\, R/g} = 0{,}9$ с.

4.79. $\omega = \sqrt{\dfrac{2\alpha}{mR^2} - \left(\dfrac{\pi\eta R^2}{m}\right)^2}$.

4.80. $\eta = 2\lambda hl/\pi R^4 T$.

4.81. $\tau = 2Rl/a^3 B^2$.

4.82. а) $T = 2\pi\sqrt{m/\varkappa} = 0{,}28$ с; б) $n = (x_0 - \Delta)/4\Delta = 3{,}5$ колебания, здесь $\Delta = kmg/\varkappa$.

4.83. $x = \dfrac{F_0/m}{\omega^2 - \omega_0^2}(\cos\omega_0 t - \cos\omega t)$.

4.84. Уравнения движения и их решения:

$$t \leqslant \tau, \quad \ddot x + \omega_0^2 x = F/m, \quad x = (1 - \cos\omega_0 t)\, F/k,$$
$$t \geqslant \tau, \quad \ddot x + \omega_0^2 x = 0, \quad x = a\cos[\omega_0 (t - \tau) + \alpha],$$

где $\omega_0^2 = k/m$, a и α — произвольные постоянные. Из условия непрерывности x и $\dot{x}$ в момент $t = \tau$ находим искомую амплитуду:

$$a = (2F/k) \mid \sin(\omega_0 t/2) \mid .$$

4.85. $\omega_{рез} = \sqrt{\dfrac{1-(\lambda/2\pi)^2}{1+(\lambda/2\pi)^2}\dfrac{g}{\Delta l}}$, $a_{рез} = \dfrac{\lambda F_0 \Delta l}{4\pi mg}\left(1+\dfrac{4\pi^2}{\lambda^2}\right)$.

4.86. $\omega_{рез} = \sqrt{(\omega_1^2+\omega_2^2)/2} = 5{,}1 \cdot 10^2$ рад/с.

4.87. а) $\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}$; б) $\beta = |\omega_2 - \omega_1|/2\sqrt{3}$, $\omega = \sqrt{\omega_1\omega_2 - (\omega_2-\omega_1)^2/12}$.

4.88. $\eta = (1+\lambda^2/4\pi^2)\,\pi/\lambda = 2{,}1$.

4.89. $A = \pi a F_0 \sin\varphi$.

4.90. а) $Q = {}^1/_2\sqrt{\dfrac{4\omega^2\omega_0^2}{(\omega^2-\omega_0^2)\operatorname{tg}^2\varphi} - 1} = 0{,}35$; б) $A = \pi m a^2(\omega^2-\omega_0^2)\operatorname{tg}\varphi =$ $= 6$ мДж. Здесь $\omega_0 = \sqrt{\varkappa/m}$.

4.91. а) $\langle P\rangle = \dfrac{F_0^2\beta\omega^2/m}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}$; б) $\omega = \omega_0$, $\langle P\rangle_{макс} = F_0^2/4\beta m$.

4.92. $\dfrac{\langle P\rangle_{макс} - \langle P\rangle}{\langle P\rangle_{макс}} = \dfrac{100}{\eta^2-1}\,\%$.

4.93. а) $A = -\pi\varphi_m N_m \sin\alpha$; б) $Q = \dfrac{\sqrt{(\cos\alpha + 2\omega^2 I\varphi_m/N_m)^2 - 1}}{2\sin\alpha}$.

4.94. $\omega = \sqrt{ne^2/\varepsilon_0 m} = 1{,}65 \cdot 10^{16}$ рад/с.

4.95. $U^2 + I^2 L/C = U_m^2$.

4.96. а) $I = I_m \sin\omega_0 t$, где $I_m = U_m\sqrt{C/L}$, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$; б) $\mathscr{E}_s = U_m/\sqrt{2}$.

4.97. $A = (\eta^2-1)\,W$.

4.98. а) $T = 2\pi\sqrt{L(C_1+C_2)} = 0{,}7$ мс; б) $I_m = U\sqrt{(C_1+C_2)/L} = 8$ А.

4.99. $U = {}^1/_2(1 \pm \cos\omega t)\,U_0$, где знак плюс — для левого конденсатора, знак минус — для правого; $\omega = \sqrt{2/LC}$.

4.100. $I = \dfrac{\Phi}{L}\cos\left(t/\sqrt{LC}\right)$.

4.101. а) $t_n = \dfrac{\pi n}{\omega}$; б) $t_n = \dfrac{1}{\omega}\operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{\omega} + \pi n$. Здесь $n = 0, 1, 2, \ldots$

4.102. $U_0/U_m = \sqrt{1 - \dfrac{R^2C}{4L}}$.

4.103. $U_C = I_m\sqrt{L/C}\,e^{-\beta t}\sin(\omega t + \alpha)$, причем $\operatorname{tg}\alpha = \omega/\beta$; $U_C(0) = I_m \times$ $\times\sqrt{\dfrac{L}{C(1+\beta^2/\omega^2)}}$.

4.104. $W_L/W_C = L/CR^2 = 5$.

4.105. $L = L_1 + L_2$, $R = R_1 + R_2$.

4.106. $t = \dfrac{Q}{\pi\nu}\ln\eta = 0{,}5$ с.

4.107. $n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{4L}{CR^2} - 1} = 16$.

4.108. $\dfrac{\omega_0-\omega}{\omega_0} = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{1+1/(2Q)^2}} \approx \dfrac{1}{8Q^2} = 0{,}5\%$.

4.109. а) $W_0 = {}^1/_2\mathscr{E}^2(L+CR^2)/(r+R)^2 = 2{,}0$ мДж; б) $W = W_0 e^{-tR/L} =$ $= 0{,}10$ мДж.

4.110. $t \approx \frac{Q}{2\pi\nu_0} \ln \eta = 1{,}0$ мс.

4.111. а) $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}$; б) $Q = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4R^2C}{L} - 1}$. При решении следует учесть, что $dq/dt = I - I'$, где q — заряд конденсатора, I — ток через катушку, I' — ток утечки ($I' = U/R$).

4.112. $Q = \frac{U_m^2}{2\langle P\rangle}\sqrt{\frac{C}{L}} = 1{,}0 \cdot 10^2$.

4.113. $\langle P\rangle = R\langle I^2\rangle = {}^1/_2 RI_m^2 = 20$ мВт.

4.114. $\langle P\rangle = {}^1/_2 RCU_m^2/L = 5$ мВт.

4.115. $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}$; $R < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

4.116. $\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} = \frac{1}{L}$ и $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}$.

4.117. $I = \frac{U_0}{L} te^{-t/\sqrt{LC}}$; $I = I_{\text{макс}} = \frac{U_0}{e}\sqrt{\frac{C}{L}}$ в момент $t_m = \sqrt{LC}$.

4.118. $I = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\left[\cos(\omega t - \varphi) - \cos\varphi \cdot e^{-tR/L}\right]$, $\operatorname{tg}\varphi = \omega L/R$.

4.119. $I = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + 1/(\omega C)^2}}\left[\cos(\omega t - \varphi) - \cos\varphi \cdot e^{-t/RC}\right]$, $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{\omega RC}$.

4.120. Ток отстает по фазе от напряжения на угол φ, определяемый уравнением $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\mu_0\pi^2\nu a}{4n\rho}$.

4.121. Ток опережает по фазе напряженне иа угол $\varphi = 60°$, определяемый уравнением $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{(U_m/RI_m)^2 - 1}$.

4.122. а) $U' = U_0 + U_m\cos(\omega t - \alpha)$, где $U_m = U_0/\sqrt{1 + (\omega RC)^2}$, $\alpha = \operatorname{arctg}(\omega RC)$; б) $RC = \sqrt{\eta^2 - 1}/\omega = 22$ мс.

4.123. См. рис. 31.

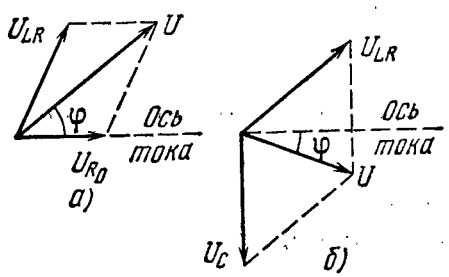


Рис. 31.

4.124. а) $I_m = U_m/\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} = 4{,}5$ А; б) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$, $\varphi = -60°$ (ток опережает напряжение); в) $U_C = I_m/\omega C = 0{,}65$ кВ, $U_L = I_m\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = 0{,}50$ кВ.

4.125. а) $\omega=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$; б) $\omega=\omega_0^2/\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$, где $\omega_0^2=1/LC$, $\beta=R/2L$.

4.126. При $C=\dfrac{1}{\omega^2 L}=28$ мкФ; $U_L=U_m\sqrt{1+(\omega L/R)^2}=0{,}54$ кВ; $U_C=U_m\omega L/R=0{,}51$ кВ.

4.127. $I=I_m\cos(\omega t+\varphi)$, где $I_m=\dfrac{U_m}{R}\sqrt{1+(\omega RC)^2}$ и $\operatorname{tg}\varphi=\omega RC$.

4.128. $\omega_0=\sqrt{\dfrac{L_2}{C(L_1L_2-L_{12}^2)}}$.

4.129. $Q=\sqrt{n^2-1/4}$.

4.130. $Q=\sqrt{\dfrac{\eta^2-1}{(n-1)^2}-\dfrac{1}{4}}$.

4.131. а) $\omega_0=\sqrt{\omega_1\omega_2}$; б) $Q=\sqrt{\dfrac{\omega_1\omega_2(n^2-1)}{(\omega_2-\omega_1)^2}-\dfrac{1}{4}}$.

4.133. $I_0/I=\sqrt{1+(Q^2+1/4)(\eta^2-1)^2/\eta^2}$, соответственно 2,2 и 19.

4.134. $t=1/2\pi t_0$.

4.135. а) $I=\dfrac{2}{\sqrt{3}}I_0\approx 1{,}15I_0$; б) $I=\dfrac{\pi}{\sqrt{8}}I_0\approx 1{,}11I_0$.

4.136. $\nu=\dfrac{R}{2\pi L}\sqrt{\eta-1}=2$ кГц.

4.137. Ток отстает по фазе от напряжения на $\varphi=\arccos\sqrt{1-(X_L/Z)^2}\approx 37°$, $P=\dfrac{U^2}{Z^2}\sqrt{Z^2-X_L^2}=0{,}16$ кВт.

4.138. При $R=\omega L-r=0{,}20$ кОм; $P_{\text{макс}}=\dfrac{U^2}{2\omega L}=0{,}11$ кВт.

4.139. Увеличилось на $\sqrt{n}-1\approx 30\%$.

4.140. При $Q\gg 1$ отношение $\Delta\omega/\omega_0\approx 1/2\sqrt{n-1}/Q=0{,}5\%$.

4.141. $P_2=1/2\,(U^2-U_1^2-U_2^2)/R=30$ Вт.

4.142. $P_1=1/2\,(I^2-I_1^2-I_2^2\ R=2{,}5$ Вт.

4.143. $Z=R/\sqrt{1+(\omega CR)^2}=40$ Ом.

4.144. См. рис. 32.

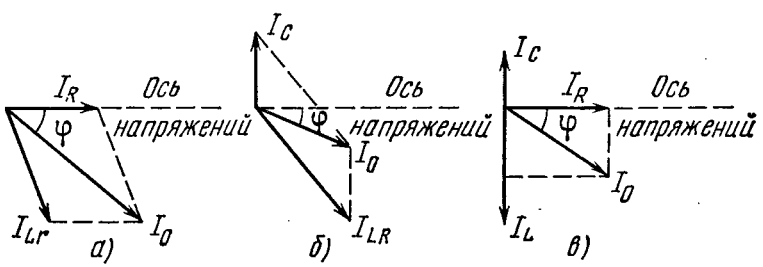


Рис. 32.

4.145. а) $\omega_{\text{рез}}=\sqrt{\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R^2}{L^2}}=3\cdot 10^4$ рад/с; б) $I=URC/L=3$ мА, $I_L=U\sqrt{C/L}=1{,}0$ А, $I_C=U\sqrt{\dfrac{C}{L}-\left(\dfrac{RC}{L}\right)^2}=1{,}0$ А.

4.146. $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{\omega C(R^2+\omega^2L^2)-\omega L}{R}$.

4.147. $Z=\sqrt{\dfrac{R^2+\omega^2L^2}{(\omega CR)^2+(1-\omega^2CL)^2}}$.

4.149. $\langle F_x\rangle=\dfrac{\omega^2L_2L_{12}I_0^2}{2(R^2+\omega^2L_2^2)}\dfrac{\partial L_{12}}{\partial x}$.

4.150. $t=\dfrac{2l}{\alpha(\sqrt{T_1}+\sqrt{T_2})}$.

4.151. $\Delta\varphi=\dfrac{\omega}{v}\,|(x_1-x_2)\cos\alpha+(y_1-y_2)\cos\beta+(z_1-z_2)\cos\gamma\,|$.

4.152. $\mathrm{k}=\omega\left(\dfrac{\mathbf{e}_x}{v_1}+\dfrac{\mathbf{e}_y}{v_2}+\dfrac{\mathbf{e}_z}{v_3}\right)$.

4.153. $\xi=a\cos[(1-V/v)\,\omega t-kx']$, где $v=\omega/k$.

4.155. а) $a/\lambda=5{,}1\cdot10^{-5}$; б) $v_m=11$ см/с, $3{,}2\cdot10^{-4}$; в) $(\partial\xi/\partial x)_m=3{,}2\cdot10^{-4}$, $(\partial\xi/\partial t)_m=v\,(\partial\xi/\partial x)_m$, где $v=0{,}34$ км/с — скорость волны.

4.156. См. рис. 33.

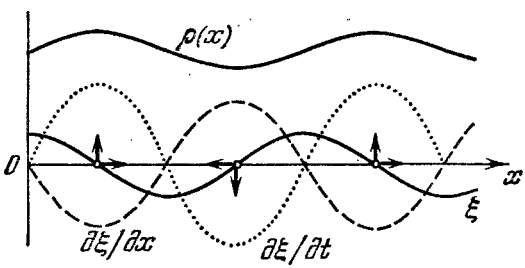


Рис. 33.

4.157. $\Delta\varphi=-\dfrac{2\pi}{\gamma\lambda}\ln(1-\eta)\approx\dfrac{2\pi\eta}{\gamma\lambda}=0{,}3$ рад.

4.158. $\mathrm{r}=(a_1\mathrm{r}_1+a_2\mathrm{r}_2)/(a_1+a_2)$.

4.159. а) $\gamma=\dfrac{\ln(\eta r_0/r)}{r-r_0}=0{,}08$ м$^{-1}$; б) $v_m=\dfrac{2\pi\nu a_0}{\eta}=15$ см/с.

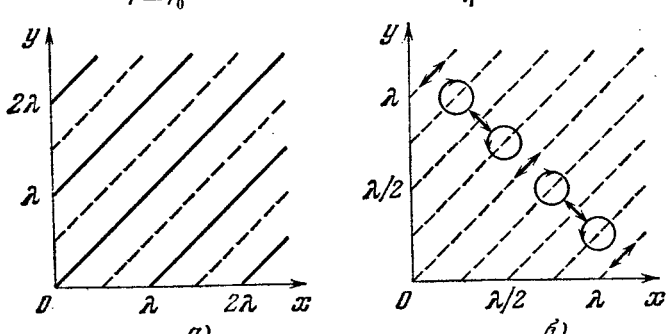


Рис. 34.

4.160. а) См. рис. 34, *а*. Частицы среды в точках на сплошных прямых ($y=x\pm n\lambda$, $n=0, 1, 2, \ldots$) колеблются с максимальной амплитудой, на пунктирных же прямых — не колеблются вовсе.

б) См. рис. 34, *б*. Частицы среды в точках на прямых $y = x \pm n\lambda$, $y = x \pm (n \pm 1/2)\lambda$ и $y = x \pm (n \pm 1/4)\lambda$ колеблются соответственно вдоль этих прямых, перпендикулярно к ним и движутся по окружностям (здесь $n = 0, 1, 2, \ldots$). В остальных точках частицы движутся по эллипсам.

4.161. $\langle w \rangle = {}^2/_3 w_0$.

4.162. $\langle \Phi \rangle = 2\pi l^2 I_0 \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{1 + (R/l)^2}}\right) = 20$ мкВт.

4.163. $\langle \Phi \rangle = P/\sqrt{1 + (2R/h)^2} = 0{,}07$ Вт.

4.164. а) и б) — см. рис. 35; в) — см. рис. 36.

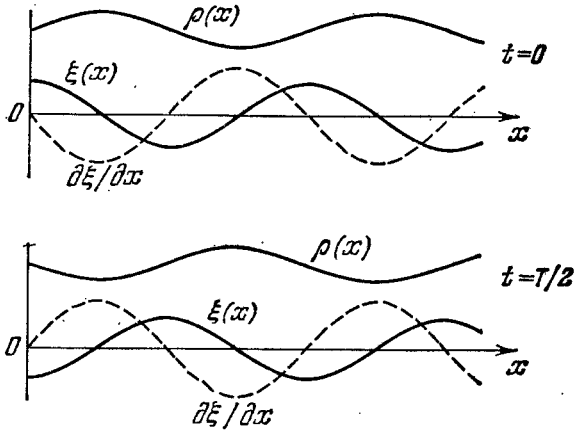


Рис. 35.

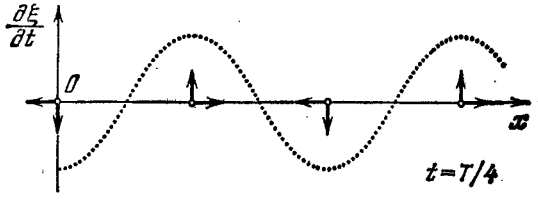


Рис. 36.

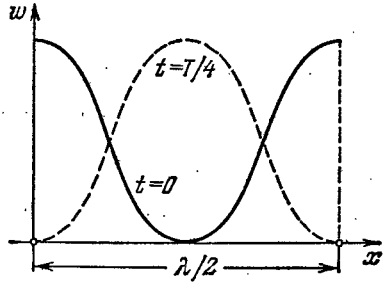


Рис. 37.

4.165. а) $w_p = {}^1/_2 \rho a^2 \omega^2 \sin^2 kx \cdot \cos^2 \omega t$; б) $w_k = {}^1/_2 \rho a^2 \omega^2 \cos^2 kx \cdot \sin^2 \omega t$. См. рис. 37.

4.166. $a_{\text{макс}}=5$ мм; третьему обертону.

4.167. $\dfrac{\nu_2}{\nu_1}=\sqrt{\dfrac{\eta_2(1+\eta_1)}{\eta_1(1+\eta_2)}}=1{,}4.$

4.168. Увеличится в $\eta=\dfrac{\sqrt{1-\Delta T/T}}{1+\Delta l/l}=2$ раза.

4.169. $v=2l\nu=0{,}34$ км/с.

4.170. а) $\nu_n=\dfrac{v}{4l}(2n+1)$, шесть колебаний; б) $\nu_n=\dfrac{v}{2l}(n+1)$, тоже шесть колебаний. Здесь $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

4.171. $\nu_n=\dfrac{2n+1}{2l}\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}=3{,}8(2n+1)$ кГц; четыре колебания с частотами 26,6, 34,2, 41,8 и 49,4 кГц.

4.172. а) $T_{\text{макс}}={}^1/_4 m\omega^2 a^2_{\text{макс}}$; б) $\langle T\rangle={}^1/_8 m\omega^2 a^2_{\text{макс}}$.

4.173. $W={}^1/_4\pi S\rho\omega^2 a^2/k$.

4.174. $\nu=2\nu_0 vu/(v^2-u^2)\approx 2\nu_0 u/v=1{,}0$ Гц.

4.175. $u=\dfrac{v\nu}{\nu_0}\left(\sqrt{1+(\nu/\nu_0)^2}-1\right)\approx\dfrac{v\nu}{2\nu_0}=0{,}5$ м/с.

4.176. $\omega=\dfrac{\nu_0 v}{a\Delta\nu}\left(\sqrt{1+(\Delta\nu/\nu_0)^2}-1\right)=34$ рад/с.

4.177. $\nu=\nu_0/\sqrt{1+2\omega l/v}=1{,}35$ кГц.

4.178. а) $\nu=\nu_0/(1-\eta^2)=5$ кГц; б) $r=l\sqrt{1+\eta^2}=0{,}32$ км.

4.179. Уменьшается на $2u/(v+u)=2{,}0\%$.

4.180. $\nu=2\nu_0 u/(v+u)=0{,}60$ Гц.

4.181. $\gamma=\dfrac{\ln(\eta r_1^2/r_2^2)}{2(r_2-r_1)}=6\cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$.

4.182. а) $L'=L-20\gamma x\lg e=50$ дБ; б) $x=0{,}30$ км.

4.183. а) $L=L_0+20\lg(r_0/r)=36$ дБ; б) $r>0{,}63$ км.

4.184. $\beta=(\ln n)/\tau=0{,}07$ с$^{-1}$.

4.185. а) Рассмотрим движение плоского элемента среды толщиной dx с единичной площадью поперечного сечения. Согласно второму закону Ньютона $\rho\,dx\cdot\ddot{\xi}=-dp$, где dp — приращение давления на длине dx. Учитывая, что $\ddot{\xi}=v^2(\partial^2\xi/\partial x^2)$ — волновое уравнение, перепишем предыдущее равенство в виде

$$\rho v^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\,dx=-dp.$$

Проинтегрировав это уравнение, получим

$$\Delta p=-\rho v^2\frac{\partial\xi}{\partial x}+\text{const}.$$

В отсутствие деформации (волны) избыточное давление $\Delta p=0$. Отсюда const $=0$.

4.186. $\langle\Phi\rangle=\pi R^2(\Delta p)_m^2/2\rho v\lambda=11$ мВт.

4.187. а) $(\Delta p)_m=\sqrt{\rho v P/2\pi r^2}=5$ Па, $(\Delta p)_m/p=5\cdot 10^{-5}$; б) $a=(\Delta p)_m/2\pi\nu\rho v=3$ мкм, $a/\lambda=5\cdot 10^{-6}$.

4.188. $P=4\pi r^2 e^{2\gamma r}I_0\cdot 10^L=1{,}4$ Вт, где L в белах.

4.189. $\Delta\lambda=(1/\sqrt{\varepsilon}-1)\,c/\nu=-50$ м.

4.190. $t=2(\sqrt{\varepsilon_1}-\sqrt{\varepsilon_2})\,l/c\ln(\varepsilon_1/\varepsilon_2)$.

4.191. $j/j_{см}=\sigma/2\pi\nu\varepsilon\varepsilon_0=2$.

4.192. $\mathbf{H}=\frac{1}{k}\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}\,[\mathbf{kE}_m]\cos(ckt)$, где c — скорость волны в вакууме.

4.193. а) $\mathbf{H}=\mathbf{e}_z E_m\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}\cos kx=-0{,}30\mathbf{e}_z$; б) $\mathbf{H}=\mathbf{e}_z E_m\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}\times$ $\times\cos(ckt_0-kx)=0{,}18\mathbf{e}_z$. Здесь $\mathbf{e}_z$ — орт оси z, H в А/м.

4.194. $\mathscr{E}_{инд}=lE_m[\cos\omega t-\cos(\omega t-\omega l/c)]=25\cos(\omega t+\pi/3)$ мВ. Здесь $\omega l/c=\pi/3$.

4.196. $\langle S\rangle=\frac{1}{2}k\varepsilon_0 c^2E_m^2/\omega$.

4.197. а) $j_{см}=\pi\sqrt{2}\,\varepsilon_0 vE_m=0{,}20$ мА/м^2; б) $\langle S\rangle=\frac{1}{2}\varepsilon_0 cE_m^2=3{,}3$ мВт/м^2.

4.198. Здесь $t\gg T$, где T — период колебаний, поэтому $W=\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0/\mu_0}\times$ $\times E_m^2\pi R^2 t=5$ кДж.

4.199. $\mathbf{B}=\mathbf{B}_m\sin kx\cdot\sin\omega t$, где $\mathbf{B}_m\perp\mathbf{E}_m$, причем $B_m=E_m/c$.

4.200. $S_x=\frac{1}{4}\varepsilon_0 cE_m^2\sin 2kx\cdot\sin 2\omega t$, $\langle S_x\rangle=0$.

4.201. $W_м/W_э=\frac{1}{8}\varepsilon_0\mu_0\omega^2R^2=5{,}0\cdot10^{-15}$.

4.202. $W_э/W_м=\frac{1}{8}\varepsilon_0\mu_0\omega^2R^2=5{,}0\cdot10^{-15}$.

4.204. $\Phi_S=I^2R$.

4.205. $S=I^2\sqrt{m/2eU}/4\pi^2\varepsilon_0 r^2$.

4.207. Слева.

4.208. $\Phi=UI$.

4.209. $\langle\Phi\rangle=\frac{1}{2}U_0I_0\cos\varphi$.

4.211. Электрический дипольный момент системы $\mathbf{p}=\sum e\mathbf{r}_i=(e/m)\,M\mathbf{r}_C$, где M — масса системы, $\mathbf{r}_C$ — радиус-вектор ее центра инерции. Так как мощность излучения $P\sim\ddot{\mathbf{p}}^2\sim\ddot{\mathbf{r}}_C^2$, а в нашем случае $\ddot{\mathbf{r}}_C=0$, то и $P=0$.

4.212. $\langle P\rangle=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2a^2\omega^4}{3c^3}=5\cdot10^{-15}$ Вт.

4.213. $P=\frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^3}\frac{2}{3c^3}\left(\frac{qe^2}{mR^2}\right)^2$.

4.214. $\Delta W\approx\frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^3}\frac{\pi e^4q^2}{3c^3m^2vb^3}$.

4.215. $\Delta W/T=\frac{1}{3}c^3B/\varepsilon_0c^3m^2=2\cdot10^{-18}$.

4.216. $T=T_0e^{-\alpha t}$, где $\alpha=\frac{1}{3}e^4B^2/\pi\varepsilon_0c^3m^3$. Через

$$t_0=\frac{1}{\alpha}=\begin{cases}2{,}5\text{ с для электрона,}\\ 1{,}6\cdot10^{10}\text{ с}=0{,}5\cdot10^3\text{ лет для протона.}\end{cases}$$

4.217. $S_1/S_2=\operatorname{tg}^2(\omega l/c)=3$.

4.218. а) Пусть t — момент времени, когда частица находится в определенной точке x, y окружности, а t' — момент, когда информация об этом доходит до точки P. Обозначив наблюдаемые значения y-координаты в точке P через y' (см. рис. 4.40), запишем

$$t'=t+\frac{l-x(t)}{c},\quad y'(t')=y(t).$$

Искомое ускорение найдем двукратным дифференцированием y' по t':

$$\frac{dy'}{dt'}=\frac{dy}{dt'}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dt'},\quad \frac{d^2y'}{dt'^2}=\frac{dt}{dt'}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy'}{dt'}\right)=\frac{v^2}{R}\frac{v/c-v_x/R}{(1-vy/cR)^3},$$

где учтено, что $x=R\sin\omega t$, $y=R\cos\omega t$ и $\omega=v/R$.

б) Плотность потока энергии электромагнитного излучения S пропорциональна квадрату y-проекции наблюдаемого ускорения частицы. Отсюда $S_1/S_2 = (1+v/c)^4/(1-v/c)^4$.

4.219. $\langle P\rangle = {}^8/_3\pi r^2 S_0$.

4.220. $\langle \omega\rangle = {}^3/_8 P_0/\pi r^2 c$.

4.221. $P = {}^1/_6 p^2\omega^4/\pi\varepsilon_0 c^3$.

4.222. $\langle P\rangle/\langle S\rangle = (e^2/m)^2\mu_0^2/6\pi$.

4.223. $\langle P\rangle/\langle S\rangle = \dfrac{\mu_0^2}{6\pi}\dfrac{(e^2/m)^2\,\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}$.

4.224. $R = 3P/16\pi c\gamma\rho M_C \approx 0{,}6$ мкм.

5.1. а) 3 и 9 мВт; б) $\Phi = {}^1/_2(V_1+V_2)\,\Phi_э/A = 1{,}6$ лм, где $A = 1{,}6$ мВт/лм, V_1 и V_2 — значения относительной спектральной чувствительности глаза для данных длин волн.

5.2. $E_m^2 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}\,A\Phi/2\pi r^2 V_\lambda$, отсюда $E_m = 1{,}1$ В/м, $H_m = 3{,}0$ мА/м. Здесь $A = 1{,}6$ мВт/лм, V_λ — относительная спектральная чувствительность глаза для данной длины волны.

5.3. а) $\langle E\rangle = {}^1/_2 E_0$; б) $\langle E\rangle = \dfrac{1-\sqrt{1-(R/l)^2}}{1-R/l}\dfrac{I}{R^2} = 50$ лк.

5.4. $M = {}^2/_3\pi L_0$.

5.5. а) $\Phi = \pi L\Delta S\sin^2\vartheta$; б) $M = \pi L$.

5.6. $h \approx R$, $E = LS/4R^2 = 40$ лк.

5.7. $I = I_0/\cos^3\vartheta$, $\Phi = \pi I_0 R^2/h^2 = 3\cdot 10^2$ лм.

5.8. $E'_{\text{макс}} = (9/16\pi\sqrt{3})\,\rho ES/R^2 = 0{,}21$ лк, на расстоянии $R/\sqrt{3}$ от потолка.

5.9. $E = \pi L$.

5.10. $E = \pi L$.

5.11. $M = E_0(1+h^2/R^2) = 7\cdot 10^2$ лм/м^2.

5.12. $E_0 = \pi LR^2/h^2 = 25$ лк.

5.13. $\mathbf{e}' = \mathbf{e} - 2(\mathbf{en})\,\mathbf{n}$.

5.14. Пусть $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$ — орты нормалей к плоскостям данных зеркал, а $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — орты первичного луча и лучей, отраженных от первого, второго и третьего зеркал. Тогда (см. ответ предыдущей задачи):

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_0 - 2(\mathbf{e}_0\mathbf{n}_1)\,\mathbf{n}_1, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 - 2(\mathbf{e}_1\mathbf{n}_2)\,\mathbf{n}_2, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 - 2(\mathbf{e}_2\mathbf{n}_3)\,\mathbf{n}_3.$$

Сложив почленно левые и правые части этих выражений, нетрудно показать, что $\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_0$.

5.15. $\vartheta_1 = \operatorname{arctg} n = 53°$.

5.16. $n_1/n_2 = 1\sqrt{\eta^2-1} = 1{,}25$.

5.17. $x = \left[1-\sqrt{(1-\sin^2\vartheta)/(n^2-\sin^2\vartheta)}\right] d\sin\vartheta = 3{,}1$ см.

5.18. $h' = (hn^2\cos^3\vartheta)/(n^2-\sin^2\vartheta)^{3/2}$.

5.21. $\theta = 83°$.

5.22. От 37 до 58°.

5.23. $\alpha = 8{,}7°$.

5.24. $\Delta\alpha = \dfrac{2\sin(\theta/2)}{\sqrt{1-n^2\sin^2(\theta/2)}}\Delta n = 0{,}44°$.

5.27. а) $f = l\beta/(1-\beta^2) = 10$ см; б) $f = l\beta_1\beta_2/(\beta_2-\beta_1) = 2{,}5$ см.

5.28. $I' = \rho I_0 f^2/(f-s)^2 = 2{,}0\cdot 10^3$ кд.

5.29. Пусть S — точечный источник света и S' — его изображение (рис. 38). По принципу Ферма оптические длины всех лучей, вышедших из S и собравшихся в S', одинаковы. Проведем окружности из центров S и S' радиусами SO и $S'M$. Тогда оптические пути (DM) и (OB) должны быть равны:

$$n \cdot DM = n' \cdot OB. \qquad (*)$$

Но для параксиальных лучей $DM \approx AO + OC$, где $AO \approx h^2/(-2s)$ и $OC \approx h'^2/2R$. Кроме того, $OB = OC - BC \approx h'^2/2R - h'^2/2s'$. Подставив эти выражения в (*) и имея в виду, что $h' \approx h$, получим $n'/s' - n/s = (n' - n)/R$.

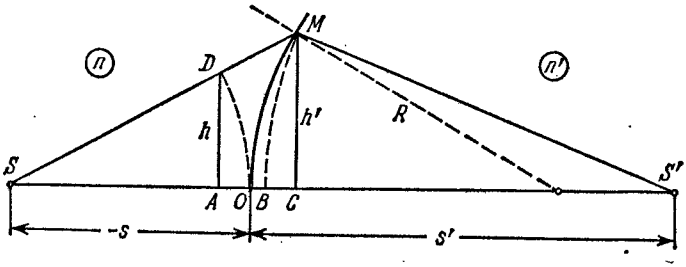


Рис. 38.

5.30. $x = \dfrac{nf}{n+1}\left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{(n+1)\,r^2}{(n-1)\,f^2}}\right)$, $r_{\text{макс}} = f\sqrt{(n-1)/(n+1)}$.

5.31. 6,3 см.

5.32. а) $\beta = 1 - d\,(n-1)/nR = -0{,}20$; б) $E = \pi n^2 D^2 L/4d^2 = 42$ лк.

5.33. а) $\Phi = \Phi_0\,(n - n_0)/(n-1) = 2{,}0$ дп, $f' = -f = n_0/\Phi = 85$ см; б) $\Phi = {}^1/_2\Phi_0\,(2n - n_0 - 1)/(n-1) = 6{,}7$ дп, $f = 1/\Phi \approx 15$ см, $f' = n_0/\Phi \approx 20$ см. Здесь n и n_0 — показатели преломления стекла и воды.

5.35. $\Delta x \approx \Delta l\, f^2/(l-f)^2 = 0{,}5$ мм.

5.36. а) $f = [l^2 - (\Delta l)^2]/4l = 20$ см; б) $f = l\sqrt{\eta}/(1+\sqrt{\eta})^2 = 20$ см.

5.37. $h = \sqrt{h'h''} = 3{,}0$ мм.

5.38. $E = (1-\alpha)\,\pi L D^2/4f^2 = 15$ лк.

5.39. а) Не зависит от D; б) пропорциональна D^2.

5.40. $f = n_0 R/2\,(n_1 - n_2) = 35$ см, где n_0 — показатель преломления воды.

5.41. $f = R/2\,(2n-1) = 10$ см.

5.42. а) Справа от последней линзы на расстоянии 3,3 см от нее; б) $l = 17$ см.

5.43. а) 50 и 5 см; б) отодвинуть на 0,5 см.

5.44. $\Gamma = D/d$.

5.45. $\psi = \psi'/\sqrt{\eta} = 0{,}6'$.

5.46. $\Gamma' = (\Gamma + 1)\,\dfrac{n - n_0}{n_0\,(n-1)} - 1 = 3{,}1$, где n_0 — показатель преломления воды.

5.47. $\Gamma \leqslant D/d_0 = 20$.

5.48. $\Gamma = 60$.

5.49. а) $\Gamma = 2\alpha l_0/d_0 = 15$, где l_0 — расстояние наилучшего видения (25 см); б) $\Gamma \leqslant 2\alpha l_0/d_0$.

5.50. Главные плоскости совпадают с центром линзы. Фокусные расстояния в воздухе и воде: $f=-1/\Phi=-11$ см, $f'=n_0/\Phi=+15$ см. Здесь $\Phi=(2n-n_0-1)/R$, где n и n_0 — показатели преломления стекла и воды. Узловые точки совпадают и расположены в воде на расстоянии $x=f'+f=3{,}7$ см от линзы.

5.51. См. рис. 39.

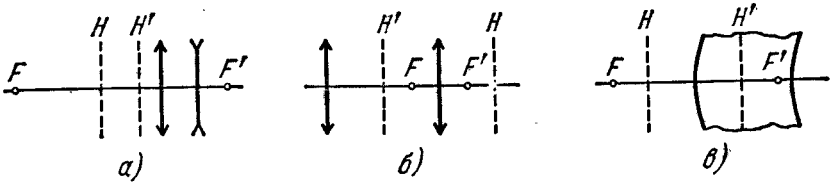


Рис. 39.

5.54. а) Оптическая сила системы $\Phi=\Phi_1+\Phi_2-d\Phi_1\Phi_2=+4$ дп, фокусное расстояние равно 25 см. Обе главные плоскости расположены перед собирающей линзой: передняя — на расстоянии 10 см от собирающей линзы, задняя — на расстоянии 10 см от рассеивающей линзы ($x=d\Phi_2/\Phi$ и $x'=-d\Phi_1/\Phi$); б) $d=5$ см; около $^4/_3$.

5.55. Оптическая сила данной линзы $\Phi=\Phi_1+\Phi_2-(d/n)\,\Phi_1\Phi_2$, $x=d\Phi_2/n\Phi=5{,}0$ см, $x'=-d\Phi_1/n\Phi=2{,}5$ см, т. е. обе главные плоскости расположены вне линзы со стороны ее выпуклой поверхности.

5.56. $f=\dfrac{f_1f_2}{f_1+f_2-d}$. Линзу надо поместить в передней главной плоскости системы, т. е. на расстоянии $x=f_1d/(f_1+f_2-d)$ от первой линзы.

5.57. $\Phi=2\Phi'-2\Phi'^2l/n_0=3{,}0$ дп, где $\Phi'=(2n-n_0-1)/R$, n и n_0 — показатели преломления стекла и воды.

5.58. а) $d=n\Delta R/(n-1)=4{,}5$ см; б) $d=3{,}0$ см.

5.59. а) $\Phi=d\,(n-1)^2/nR^2>0$, главные плоскости лежат со стороны выпуклой поверхности на расстоянии d друг от друга, причем передняя главная плоскость удалена от выпуклой поверхности линзы на расстояние $R/(n-1)$; б) $\Phi=(1/R_2-1/R_1)\,(n-1)/n<0$; обе главные плоскости проходят через общий центр кривизны поверхностей линзы.

5.60. $d=^1/_2n\,(R_1+R_2)/(n-1)=9{,}0$ см, $\Gamma=R_1/R_2=5{,}0$.

5.61. $\Phi=2\,(n^2-1)/n^2R=37$ дп.

5.63. $\rho=3\cdot10^7$ м; $\operatorname{grad} n=1{,}6\cdot10^{-7}$ м$^{-1}$.

5.65. $1{,}9a$.

5.66. Представим k-е колебание в комплексном виде

$$\xi_k=ae^{i\,[\omega t+(k-1)\varphi]}=a_k^*e^{i\omega t},$$

где $a_k^*=ae^{i(k-1)\varphi}$ — комплексная амплитуда. Тогда комплексная амплитуда результирующего колебания

$$A^*=\sum_{k=1}^{N}ae^{i(k-1)\varphi}=a\left[1+e^{i\varphi}+e^{i2\varphi}+\ldots+e^{i(N-1)\varphi}\right]=a\left(e^{i\varphi N}-1\right)/\left(e^{i\varphi}-1\right).$$

После умножения A^* на комплексно сопряженную величину и извлечения квадратного корня получим действительную амплитуду

$$A = a\sqrt{\frac{1-\cos N\varphi}{1-\cos\varphi}} = a\frac{\sin(N\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}.$$

5.67. а) $\cos\varphi = (k - \varphi/2\pi)\,\lambda/d$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; б) $\varphi = \pi/2$, $d/\lambda = k + 1/4$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

5.68. $\Delta\varphi = 2\pi\,[k - (d/\lambda)\sin(\omega t + \alpha)]$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

5.69. $\lambda = 2\Delta x \Delta h/l\,(\eta - 1) = 0{,}6$ мкм.

5.71. а) $\Delta x = \lambda\,(b + r)/2ar = 1{,}1$ мм, 9 максимумов; б) сдвиг картины $\delta x = (b/r)\,\delta l = 13$ мм; в) картина будет еще достаточно отчетлива, если $\delta x \leqslant \Delta x/2$, отсюда $\delta_{\text{макс}} = (1 + r/b)\,\lambda/4\alpha = 43$ мкм.

5.72. $\lambda = 2\alpha\Delta x = 0{,}64$ мкм.

5.73. а) $\Delta x = \lambda f/a = 0{,}15$ мм, 13 максимумов; б) полосы будут наблюдаться еще достаточно отчетливо, если $\delta x \leqslant \Delta x/2$, где δx — сдвиг интерференционных картин от крайних элементов щели, отсюда $\delta_{\text{макс}} = \lambda f^2/2ab = 37$ мкм.

5.74. $\lambda = 2a\theta\,(n - 1)\,\Delta x/(a + b) = 0{,}6$ мкм.

5.75. $\Delta x \approx \lambda/2\theta\,(n - n') = 0{,}20$ мм.

5.76. Полосы сместятся в сторону перекрытой щели на расстояние $\Delta x = hl\,(n - 1)/d = 2{,}0$ мм.

5.77. $n' = n + N\lambda/l = 1{,}000377$.

5.78. а) Пусть векторы **E**, **E′** и **E″** соответствуют падающей, отраженной и проходящей волнам. Из непрерывности тангенциальной составляющей на границе раздела следует, что

$$E_\tau + E'_\tau = E''_\tau. \qquad (1)$$

Плотность потока энергии $\mathbf{S} = [\mathbf{E}\,\mathbf{H}]$, а так как $H\sqrt{\mu\mu_0} = E\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}$, или $H \sim nE$, где $n = \sqrt{\varepsilon}$ — показатель преломления, то $S \sim nE^2$ и по закону сохранения энергии

$$n_1 E_\tau^2 = n_1 E_\tau'^2 + n_2 E_\tau''^2. \qquad (2)$$

Исключив E'_τ из (1) и (2), получим

$$E''_\tau = 2E_\tau n_1/(n_1 + n_2). \qquad (3)$$

Отсюда видно, что знаки E''_τ и E_τ совпадают, т. е. на границе раздела колебания световых векторов соответствующих волн происходят всегда синфазно.

б) Из (1) и (3) следует, что

$$E'_\tau = E_\tau\,(n_1 - n_2)/(n_1 + n_2),$$

т. е. при $n_2 > n_1$ знаки E'_τ и E_τ противоположны — на границе раздела происходит скачок фазы отраженной волны на π. Если же $n_2 < n_1$, то скачка фазы нет.

5.79. $d = 1/4\lambda\,(1 + 2k)/\sqrt{n^2 - \sin^2\vartheta_1} = 0{,}14\,(1 + 2k)$ мкм, где $k = 0, 1, 2, \ldots$

5.80. $d_{\text{мин}} = 0{,}65$ мкм.

5.81. $d = 1/4\lambda\,(1 + 2k)/\sqrt{n}$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$

5.82. $d = \lambda\,\dfrac{\sqrt{n^2 - \sin^2\vartheta}}{\sin 2\vartheta \cdot \delta\vartheta} = 15$ мкм.

5.83. $\lambda \approx \dfrac{d\,(r_i^2 - r_k^2)}{4nl^2\,(i-k)}$.

5.84. $\Delta x = \dfrac{\lambda \cos \vartheta_1}{2\alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta_1}}$.

5.85. а) $\theta = {}^1/_2\lambda/n\Delta x = 3''$; б) $\Delta\lambda/\lambda \approx \Delta x/l = 0{,}014$.

5.86. $\Delta r \approx {}^1/_4\lambda R/r$.

5.87. $r' = \sqrt{r^2 - 2R\Delta h} = 1{,}5$ мм.

5.88. $r = \sqrt{r_0^2 + (k - {}^1/_2)\,\lambda R} = 3{,}8$ мм, где $k = 6$.

5.89. $\lambda = {}^1/_4\,(d_2^2 - d_1^2)/R\,(k_2 - k_1) = 0{,}50$ мкм, где k_1 и k_2 — номера темных колец.

5.90. $\Phi = 2\,(n-1)\,(2k-1)\,\lambda/d^2 = 2{,}4$ дп, где k — номер светлого кольца.

5.91. а) $r = \sqrt{2k\lambda\,(n-1)/\Phi} = 3{,}5$ мм, где $k = 10$; б) $r' = r/\sqrt{n_0} = 3{,}0$ мм, где n_0 — показатель преломления воды.

5.92. $r = \sqrt{{}^1/_2\,(1+2k)\,\lambda R/n_2} = 1{,}3$ мм, где $k = 5$.

5.93. $k_{\text{мин}} = {}^1/_2\lambda_1/(\lambda_2 - \lambda_1) = 140$.

5.94. Условие перехода от одной четкой картины к следующей:

$$(k+1)\,\lambda_1 = k\lambda_2,$$

где k — некоторое целое число. Соответствующее перемещение Δh зеркала определяется уравнением $2\Delta h = k\lambda_2$. Из этих двух уравнений получим

$$\Delta h = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\,(\lambda_2 - \lambda_1)} \approx \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda} = 0{,}3 \text{ мм}.$$

5.95. а) Условие максимумов: $2d\cos\vartheta = k\lambda$; отсюда следует, что с ростом угла ϑ, т. е. радиуса колец (см. рис. 5.18), порядок интерференции k убывает. б) Взяв дифференциал от обеих частей предыдущего уравнения и имея в виду, что при переходе от одного максимума к следующему k изменяется на единицу, получим $\delta\vartheta = {}^1/_2\lambda/d\sin\vartheta$; отсюда видно, что угловая ширина полос уменьшается с ростом угла ϑ, т. е. с уменьшением порядка интерференции.

5.96. а) $k_{\text{макс}} = 2d/\lambda = 1{,}0 \cdot 10^5$; б) $\Delta\lambda = \lambda/k = \lambda^2/2d = 5$ пм.

5.97. $I_0 = \dfrac{2}{bN\lambda} \displaystyle\int_0^\infty I\,(r)\,r\,dr$.

5.98. $b = ar^2/(k\lambda a - r^2) = 2{,}0$ м.

5.99. $\lambda = (r_2^2 - r_1^2)\,(a+b)/2ab = 0{,}60$ мкм.

5.100. а) $I \approx 4I_0$, $I \approx 2I_0$; б) $I \approx I_0$.

5.101. а) $I \approx 0$; б) $I \approx I_0/2$.

5.102. а) $I_1 \approx {}^9/_{16}I_0$, $I_2 = {}^1/_4 I_0$, $I_3 = {}^1/_{16}I_0$, $I_4 = I_2$, $I \approx (1 - \varphi/2\pi)^2\,I_0$; б) $I_5 \approx {}^{25}/_{16}I_0$, $I_6 \approx {}^9/_4 I_0$, $I_7 \approx {}^{49}/_{16}I_0$, $I_8 = I_6$, $I \approx (1 + \varphi/2\pi)^2\,I_0$. Здесь φ — угол, закрываемый экраном.

5.103. а) $h = \lambda\,(k + {}^3/_8)/(n-1) = 1{,}2\,(k + {}^3/_8)$ мкм; б) $h = 1{,}2\,(k + {}^7/_8)$ мкм; в) $h = 1{,}2k$ или $1{,}2\,(k + {}^3/_4)$ мкм. Здесь $k = 0, 1, 2, \ldots$

5.104. $h = \lambda\,(k + {}^3/_4)/(n-1)$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$; б) $I_{\text{макс}} \approx 8I_0$.

5.105. $h_{\text{мин}} \approx \lambda\,(k + {}^5/_8)/(n-1) = 2{,}5$ мкм, где $k = 2$.

5.106. $r = \sqrt{k\lambda fb/(b-f)} = 0{,}90\sqrt{k}$ мм, где $k = 1, 3, 5, \ldots$

5.107. $b' = b/\eta^2 = 1{,}0$ м.

5.108. а) $y' = yb/a = 9$ мм; б) $h_{\text{мин}} \approx ab\lambda/D\,(a+b) = 0{,}10$ мм.

5.109. $f=ab/(a+b)=0{,}6$ м. Это значение соответствует главному фокусу, помимо которого существуют и другие.

5.110. а) $h=0{,}60\,(2k+1)$ мкм; б) $h=0{,}30\,(2k+1)$ мкм. Здесь $k=0, 1, 2, \ldots$

5.111. а) $I_{\text{макс}}/I_{\text{мин}}\approx 1{,}7$; б) $\lambda=2\,(\Delta x)^2/b\,(v_2-v_1)^2=0{,}6$ мкм, где v_1 и v_2 — соответствующие значения параметра на спирали Корню.

5.112. $I_{\text{сер}}/I_{\text{кр}}\approx 2{,}6$.

5.113. $\lambda=(\Delta h)^2/2b\,(v_2-v_1)^2=0{,}55$ мкм, где v_1 и v_2 — соответствующие значения параметра на спирали Корню.

5.114. $h\approx\lambda\,(k+{}^3/_4)/(n-1)$, где $k=0, 1, 2, \ldots$

5.115. $I_2/I_1\approx 1{,}9$.

5.116. $I\approx 2{,}8I_0$.

5.117. $I_1 : I_2 : I_3\approx 1 : 4 : 7$.

5.118. $I\approx I_0$.

5.119. $I_\vartheta\sim(\sin^2\alpha)/\alpha^2$, где $\alpha=(\pi b/\lambda)\sin\vartheta$; $b\sin\vartheta=k\lambda$, $k=1, 2, 3, \ldots$

5.120. Условие максимума приводит к трансцендентному уравнению $\operatorname{tg}\alpha=\alpha$, где $\alpha=(\pi b/\lambda)\sin\vartheta$. Решение этого уравнения (графически или подбором) дает следующие значения корней: $\alpha_1=1{,}43\pi$, $\alpha_2=2{,}46\pi$, $\alpha_3=3{,}47\pi$. Отсюда $b\sin\vartheta_1=1{,}43\lambda$, $b\sin\vartheta_2=2{,}46\lambda$, $b\sin\vartheta_3=3{,}47\lambda$.

5.121. $b\,(\sin\vartheta-\sin\vartheta_0)=k\lambda$; для $k=+1$ и $k=-1$ углы ϑ равны соответственно 33° и 27°.

5.122. а) $\Delta\vartheta=\arcsin(n\sin\theta)-\theta=7{,}9°$; б) из условия $b\,(\sin\vartheta_1-n\sin\theta)=\pm\lambda$ получим $\Delta\vartheta=\vartheta_{+1}-\vartheta_{-1}=7{,}3°$.

5.123. $\lambda\approx(\alpha^2-\alpha_0^2)\,d/2k=0{,}6$ мкм.

5.125. 55°.

5.126. $d=2{,}8$ мкм.

5.127. $\lambda=(d\sin\Delta\vartheta)/\sqrt{5-4\cos\Delta\vartheta}=0{,}54$ мкм.

5.128. а) 45°; б) 64°.

5.129. $x=2R/(n-1)\sqrt{(d/\lambda)^2-1}=8$ см.

5.130. Из условия $d\,[n\sin\theta-\sin(\theta+\vartheta_k)]=k\lambda$ получим $\vartheta_0=-18{,}5°$, $\vartheta_{+1}=0°$; $k_{\text{макс}}=+6$, $\vartheta_{+6}=+78{,}5°$. См. рис. 40.

5.131. $h_k=\lambda\,(k-{}^1/_2)/(n-1)$, где $k=1, 2, \ldots$; $a\sin\vartheta_1=\lambda/2$.

5.132. $v=\lambda\nu f/\Delta x=1{,}5$ км/с.

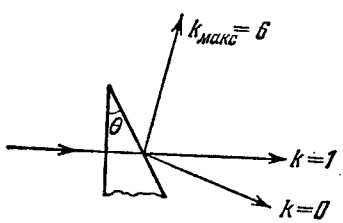


Рис. 40.

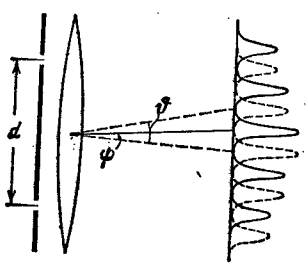


Рис. 41.

5.133. Каждая звезда дает в фокальной плоскости объектива свою дифракционную картину, причем их нулевые максимумы отстоят друг от друга на угол ψ (рис. 41). При уменьшении расстояния d угол ϑ между соседними максимумами в каждой дифракционной картине будет увеличиваться, и когда ϑ

станет равным 2ψ, наступит первое ухудшение видимости: максимумы одной системы полос совпадут с минимумами другой. Таким образом, из условия $\vartheta = 2\psi$ и формулы $\sin\vartheta = \lambda/d$ получим $\psi \approx \lambda/2d = 0{,}06'$.

5.134. а) $D = k/d\sqrt{1-(k\lambda/d)^2} = 6{,}5$ угл.мин/нм, где $k=2$; б) $D = k/d\sqrt{1-(k\lambda/d-\sin\vartheta_0)^2} = 13$ угл.мин/нм, где $k=4$.

5.135. $d\vartheta/d\lambda = (\operatorname{tg}\vartheta)/\lambda$.

5.136. $\Delta\vartheta = 2\lambda/Nd\sqrt{1-(k\lambda/d)^2} = 11''$.

5.139. $\vartheta = 46°$.

5.140. а) В четвертом; б) $\delta\lambda_{\text{мин}} \approx \lambda^2/l = 7$ пм.

5.141. а) $d = 0{,}05$ мм; б) $l = 6$ см.

5.142. а) 6 и 12 мкм; б) в первом порядке нет, во втором да.

5.143. Согласно критерию Рэлея максимум линии с длиной волны λ должен совпадать с первым минимумом линии $\lambda+\delta\lambda$. Запишем оба условия для угла наименьшего отклонения через оптические разности хода крайних лучей (см. рис. 5.28):

$$bn-(DC+CE)=0, \quad b(n+\delta n)-(DC+CE)=\lambda+\delta\lambda.$$

Отсюда $b\delta n \approx \lambda$. Дальнейшее очевидно.

5.144. а) $\lambda/\delta\lambda = 2bB/\lambda^3$; соответственно $1{,}2\cdot10^4$ и $0{,}35\cdot10^4$; б) 1,0 см.

5.145. Около 20 см.

5.146. $R = 7\cdot10^4$, $\Delta y_{\text{мин}} \approx 4$ см.

5.147. Около 50 м.

5.148. Пусть $\Delta\psi$ и $\Delta\psi'$ — минимальные угловые расстояния, разрешаемые соответственно объективом трубы и глазом ($\Delta\psi = 1{,}22\,\lambda/D$, $\Delta\psi' = 1{,}22\,\lambda/d_0$). Тогда искомое увеличение трубы $\Gamma_{\text{мин}} = \Delta\psi'/\Delta\psi = D/d_0 = 13$.

5.149. $d_{\text{мин}} = 0{,}61\lambda/\sin\alpha = 1{,}4$ мкм.

5.150. Пусть $d_{\text{мин}}$ — наименьшее разрешаемое расстояние для объектива микроскопа, $\Delta\psi$ — угол, под которым виден объект с расстояния наилучшего видения l_0 (25 см), и $\Delta\psi'$ — минимальное угловое расстояние, разрешаемое глазом ($\Delta\psi' = 1{,}22\,\lambda/d_0$). Тогда искомое увеличение микроскопа $\Gamma_{\text{мин}} = \Delta\psi'/\Delta\psi = 2(l_0/d_0)\sin\alpha = 30$.

5.151. 26, 60, 84, 107 и 134°.

5.152. $a = 0{,}28$ нм, $b = 0{,}41$ нм.

5.153. Пусть α, β и γ — углы между направлением на дифракционный максимум и направлениями решетки вдоль периодов a, b и c соответственно. Тогда значения этих углов определятся из условий: $a(1-\cos\alpha) = k_1\lambda$, $b\cos\beta = k_2\lambda$ и $c\cos\gamma = k_3\lambda$. Имея в виду, что $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1$, получим

$$\lambda = \frac{2k_1/a}{(k_1/a)^2+(k_2/b)^2+(k_3/c)^2}.$$

5.154. $\lambda = \dfrac{2}{k}\sqrt[3]{\dfrac{m}{2\rho}}\sin\alpha = 244$ пм, где $k=2$, m — масса молекулы NaCl.

5.155. $d = \dfrac{\lambda}{2\sin(\alpha/2)}\sqrt{k_1^2+k_2^2-2k_1k_2\cos(\alpha/2)} = 0{,}28$ нм, где k_1 и k_2 — порядки отражения.

5.156. $r = l\operatorname{tg}2\alpha = 3{,}5$ см, где α — угол скольжения, определяемый условием $2d\sin\alpha = k\lambda$.

5.157. $I_0/4$.

5.158. а) I_0; б) $2I_0$.

5.159. $E = \pi\Phi_0/\omega = 0{,}6$ мДж.

5.160. $\eta = {}^1/_2 (\cos\varphi)^{2(N-1)} = 0{,}12$.

5.161. $I_0/I = \dfrac{2}{\tau^3 \cos^4\varphi} \approx 60$.

5.162. $I_{пол}/I_{ест} = P/(1-P) = 0{,}3$.

5.163. $P = (\eta - 1)/(1 - \eta\cos 2\varphi) = 0{,}8$.

5.164. а) Представим естественный свет в виде двух взаимно перпендикулярных составляющих с интенсивностями I_0. Пусть каждый поляризатор пропускает в своей плоскости долю α_1 света с плоскостью колебаний, параллельной плоскости поляризатора, и долю α_2 — в перпендикулярной плоскости. Тогда при параллельных и перпендикулярных плоскостях поляризаторов системы интенсивность прошедшего через нее света будет равна соответственно

$$I_{\parallel} = \alpha_1^2 I_0 + \alpha_2^2 I_0, \quad I_{\perp} = \alpha_1\alpha_2 I_0 + \alpha_2\alpha_1 I_0,$$

причем по условию $I_{\parallel}/I_{\perp} = \eta$.

С другой стороны, степень поляризации, создаваемая каждым поляризатором в отдельности,

$$P_0 = (\alpha_1 - \alpha_2)/(\alpha_1 + \alpha_2).$$

Исключив α_1 и α_2 из этих формул, получим

$$P_0 = \sqrt{(\eta - 1)/(\eta + 1)} = 0{,}905.$$

б) $P = \sqrt{1 - 1/\eta^2} = 0{,}995$.

5.165. Относительные изменения интенсивностей обоих пучков в случаях A и B равны

$$(\Delta I/I)_A = 4\operatorname{ctg}(\varphi/2)\cdot\delta\varphi, \quad (\Delta I/I)_B = 4\operatorname{tg}(\varphi/2)\cdot\delta\varphi.$$

Отсюда $\eta = (\Delta I/I)_A/(\Delta I/I)_B = \operatorname{ctg}^2(\varphi/2)$, $\varphi = 11{,}5°$.

5.166. 90°.

5.167. а) $\rho = {}^1/_2 (n^2-1)^2/(n^2+1)^2 = 0{,}074$; б) $P = \rho/(1-\rho) = \dfrac{(1+n^2)^2 - 4n^2}{(1+n^2)^2 + 4n^2} = 0{,}080$. Здесь n — показатель преломления стекла.

5.168. $I = I_0(1-\rho)/n = 0{,}72 I_0$, где n — показатель преломления воды.

5.169. $\rho = [(n^2-1)/(n^2+1)]\sin^2\varphi = 0{,}038$, где n — показатель преломления воды.

5.170. $P_1 = P_3 = 1$, $P_2 = \dfrac{\rho}{1-\rho} = 0{,}087$, $P_4 = \dfrac{2\rho(1-\rho)}{1-2\rho(1-\rho)} = 0{,}17$.

5.171. а) В этом случае коэффициент отражения от каждой поверхности пластинки $\rho = (n^2-1)^2/(n^2+1)^2$, поэтому

$$I_4 = I_0(1-\rho)^2 = 16 I_0 n^4/(1+n^2)^2 = 0{,}725 I_0;$$

б) $P = \dfrac{1-(1-\rho')^2}{1+(1-\rho')^2} = \dfrac{(1+n^2)^4 - 16n^4}{(1+n^2)^4 + 16n^4} \approx 0{,}16$, где ρ' — коэффициент отражения той составляющей света, световой вектор которой колеблется перпендикулярно к плоскости падения.

5.172. а) $P = (1-\alpha^{4N})/(1+\alpha^{4N})$, где $\alpha = 2n/(1+n^2)$, n — показатель преломления стекла; б) соответственно 0,16, 0,31, 0,67 и 0,92.

5.173. а) $\rho=(n-1)^2/(n+1)^2=0{,}040$; б) $\Delta\Phi/\Phi=1-(1-\rho)^{2N}=0{,}34$, где N — число линз.

5.175. а) 0,83; б) 0,044.

5.176. См. рис. 42, где o и e — обыкновенный и необыкновенный лучи.

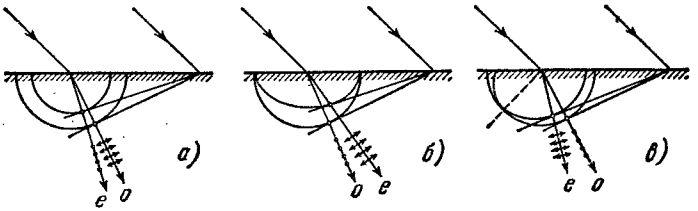


Рис. 42.

5.177. $\delta\approx 11°$.

5.178. Для правой системы координат:

1) круговая, против часовой стрелки, если смотреть навстречу волне;

2) эллиптическая, по часовой стрелке, если смотреть навстречу волне; большая ось эллипса совпадает с прямой $y=x$;

3) плоская поляризация, вдоль прямой $y=-x$.

5.179. а) 0,490 мм; б) 0,475 мм.

5.180. $\lambda=4d\Delta n/(2k+1)$; 0,58, 0,55 и 0,51 мкм соответственно при $k=15$, 16 и 17.

5.181. Четыре.

5.182. 0,69 и 0,43 мкм.

5.183. $d=(k-1/2)\,\lambda_1/\Delta n=0{,}25$ мм, где $k=4$.

5.184. $\Delta n=\lambda/\theta\Delta x=0{,}009$.

5.185. Обозначим интенсивность прошедшего света при скрещенных поляроидах $I_\perp$, а при параллельных — $I_\parallel$, тогда:

$$I_\perp=1/2\,I_0\sin^2 2\varphi\cdot\sin^2(\delta/2),$$

$$I_\parallel=1/2\,I_0\,[1-\sin^2 2\varphi\cdot\sin^2(\delta/2)].$$

Условия максимума и минимума:

Поляроиды	$I_{макс}$	$I_{мин}$
$\perp$	$\Delta=(k+1/2)\,\lambda$, $\varphi=\pi/4$	$\Delta=k\lambda$, φ — любое
$\parallel$	$\Delta=k\lambda$, φ — любое	$\Delta=(k+1/2)\,\lambda$, $\varphi=\pi/4$

Здесь Δ — оптическая разность хода обыкновенного и необыкновенного лучей, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

5.187. а) Если свет правополяризованный по кругу (для наблюдателя), то за пластинкой в четверть волны он становится линейно поляризованным, причем направление колебаний светового вектора составляет угол $+45°$ с осью кристалла OO' (рис. 43, *а*); для левополяризованного света этот угол будет равен $-45°$ (рис. 43, *б*).

б) Если при вращении поляроида (расположенного за пластинкой) при любом положении пластинки интенсивность прошедшего света не меняется — свет естественный, если меняется и падает до нуля, то свет поляризован по кругу; если

Рис. 43.

меняется, но не падает до нуля, то свет — смесь естественного и поляризованного по кругу.

5.188. а) $\Delta x = {}^1/_2\lambda\,(n_e - n_o)\,\theta$, б) $d\,(n_o' - n_e') = -2\,(n_e - n_o)\,\theta\delta x < 0$.

5.189. $\Delta n = \alpha\lambda/\pi = 0{,}71 \cdot 10^{-4}$, где α — постоянная вращения.

5.190. $\alpha = \pi/\Delta x \operatorname{tg}\theta = 21$ угл.град/мм, $I(x) \sim \cos^2(\pi x/\Delta x)$, где x — расстояние от максимума.

5.191. $d_{\text{мин}} = (1/\alpha)\arcsin\sqrt{2\eta} = 3{,}0$ мм.

5.192. 8,7 мм.

5.193. $[\alpha] = 72$ угл.град/(дм · г/см^3).

5.194. а) $E_{\text{мин}} = \pi/\sqrt{4BL} = 10{,}6$ кВ/см; б) $2{,}2 \cdot 10^8$ прерываний в секунду.

5.195. $\Delta n = 2cHV/\omega$, где c — скорость света в вакууме.

5.196. $V = {}^1/_2\,(\varphi_1 - \varphi_2)/lH = 0{,}015$ угл. мин/А.

5.197. Если смотреть навстречу вышедшему лучу и положительное направление отсчитывать по часовой стрелке, то $\varphi = (\alpha - VNH)/l$, где N — число прохождений луча через вещество (на рис. 5.35 число $N = 5$).

5.198. $H_{\text{мин}} = \pi/4Vl = 4{,}0$ кА/м, где V — постоянная Верде. Направление, в котором пропускается свет, изменится на противоположное.

5.199. $t = mc\omega_0/\lambda I = 12$ ч. Несмотря на чрезвычайную малость этого эффекта, его наблюдали как для видимого света, так и для сантиметровых волн.

5.200. а) $a = eE_0/m\omega^2 = 5 \cdot 10^{-16}$ см, где $E_0 = \sqrt{2I/\varepsilon_0 c}$, $v = a\omega = 1{,}7$ см/с; б) $F_м/F_э = 2{,}9 \cdot 10^{-11}$.

5.201. а) $\varepsilon = 1 - n_0 e^2/\varepsilon_0 m\omega^2$, $v = c\sqrt{1 + (n_0 e^2/4\pi^2\varepsilon_0 mc^2)\,\lambda^2}$.

5.202. $n_0 = (4\pi^2\nu^2 m\varepsilon_0/e^2)\,(1 - n^2) = 2{,}4 \cdot 10^7$ см$^{-3}$.

5.203. $n - 1 = -n_0 e^2\lambda^2/8\pi^2\varepsilon_0 mc^2 = -5{,}4 \cdot 10^{-7}$, где n_0 — концентрация электронов в углероде.

5.204. а) $x = a\cos(\omega t + \varphi)$, где a и φ определяются формулами

$$a = \frac{eE_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

Здесь $\beta = \gamma/2m$, $\omega_0^2 = k/m$, m — масса электрона, б) $\langle P\rangle = \dfrac{m\beta\,(eE_0/m)^2\,\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}$, $\langle P\rangle_{\text{макс}} = \dfrac{m}{4\beta}\left(\dfrac{eE_0}{m}\right)^2$ при $\omega = \omega_0$.

5.205. Запишем уравнение волны в форме $A = A_0 e^{i(\omega t - kx)}$, где $k = 2\pi/\lambda$. Если $n' = n + i\varkappa$, то $k = (2\pi/\lambda_0)\, n'$ и

$$A = A_0 e^{2\pi\varkappa x/\lambda_0} e^{i(\omega t - 2\pi n x/\lambda_0)},$$

или в вещественной форме

$$A = A_0 e^{\varkappa' x} \cos(\omega t - k' x),$$

т. е. свет распространяется в виде плоской волны, амплитуда которой зависит от x. При $\varkappa < 0$ амплитуда убывает (затухание волны за счет поглощения). Если $n' = i\varkappa$, то

$$A = A_0 e^{\varkappa' x} \cos \omega t.$$

Это стоячая волна с экспоненциально убывающей (при $\varkappa < 0$) амплитудой. В этом случае свет испытывает полное внутреннее отражение в среде (без поглощения).

5.206. $n_0 = 4\pi^2 \varepsilon_0 mc^2/e^2 \lambda_0^2 = 2{,}0 \cdot 10^9$ см$^{-3}$.

5.208. а) $u = {}^3/_2 v$; б) $u = 2v$; в) $u = {}^1/_3 v$.

5.209. $\varepsilon = 1 + A/\omega^2$, где A — постоянная.

5.210. $v = c/n = 1{,}83 \cdot 10^8$ м/с, $u = [1 + (\lambda/n)(dn/d\lambda)]\, c/n = 1{,}70 \cdot 10^8$ м/с.

5.211. Достаточно провести рассуждение для трех гармонических составляющих волнового импульса (проще всего с помощью графика).

5.212. $I = {}^1/_2 I_0 e^{-\varkappa l} \sin^2 \varphi$, где $\varphi = Vlh$.

5.213. а) $I = I_0 (1-\rho)^2 (1 + \rho^2 + \rho^4 + \ldots) = I_0 (1-\rho)^2/(1-\rho^2)$; б) $I = I_0 (1-\rho)^2 \sigma (1 + \sigma^2\rho^2 + \sigma^4\rho^4 + \ldots) = I_0 \sigma (1-\rho)^2/(1-\sigma^2\rho^2)$, где $\sigma = \exp(-\varkappa d)$.

5.214. $\varkappa = \dfrac{\ln(\tau_1/\tau_2)}{d_2 - d_1} = 0{,}35$ см$^{-1}$.

5.215. $\varkappa = \dfrac{1}{lN} \ln \dfrac{(1-\rho)^{2N}}{\tau} = 0{,}034$ см$^{-1}$.

5.216. $\tau = (1-\rho)^2 \exp[-{}^1/_2 (\varkappa_1 + \varkappa_2) l]$.

5.217. $I = I_0 (1-\rho)^2 \dfrac{e^{-\varkappa_1 l} - e^{-\varkappa_2 l}}{(\varkappa_2 - \varkappa_1) l}$.

5.218. $\Delta\lambda = 2\lambda_0 \sqrt{(\ln \eta)/\alpha d}$.

5.219. $I = \dfrac{\Phi}{4\pi b^2} (1-\rho)^2 e^{-\varkappa(b-a)}$.

5.220. Уменьшится в $\exp(\mu d) = 0{,}6 \cdot 10^2$ раз.

5.221. $d = 0{,}3$ мм.

5.222. $d = (\ln 2)/\mu = 8$ мм.

5.223. $N = (\ln \eta)/\ln 2 = 5{,}6$.

5.224. $c = 2lz\,(n_2 - n_1) = 3{,}0 \cdot 10^8$ м/с.

5.225. Прежде всего отметим, что при $v \ll c$ время течет практически одинаково в системах отсчета, связанных как с источником, так и с приемником. Представим себе, что источник испускает короткие импульсы с интервалами T_0. Тогда в системе отсчета, связаной с приемником, расстояние между двумя последовательными импульсами вдоль линии наблюдения $\lambda = cT_0 - v_r T_0$, где v_r — лучевая скорость источника ($v_r = v \cos\vartheta$). Частота принимаемых импульсов $\nu = c/\lambda = \nu_0/(1 - v_r/c)$, где $\nu_0 = 1/T_0$. Отсюда $(\nu - \nu_0)/\nu_0 = (v/c)\cos\vartheta$.

5.226. $\Delta\lambda = -\lambda \sqrt{2T/mc^2} \cos\vartheta = -26$ им.

5.227. $T = 4\pi R\lambda/c\delta\lambda = 25$ сут, где R — радиус Солнца.

5.228. $d=(\Delta\lambda/\lambda)_m c\tau/\pi=3\cdot10^7$ км, $m=(\Delta\lambda/\lambda)_m^2 c^3\tau/2\pi\gamma=2{,}9\cdot10^{29}$ кг, где γ — гравитационная постоянная.

5.229. $\omega=\omega_0(1+\beta)/(1-\beta)$, где $\beta=V/c$; $\omega\approx\omega_0(1+2V/c)$.

5.230. $v=\frac{1}{2}\lambda\Delta\nu\approx900$ км/ч.

5.231. После подстановки в равенство $\omega t-kx=\omega' t'-k'x'$ величин t' и x' (из преобразований Лоренца) получим

$$\omega=\omega'(1+\beta)/\sqrt{1-\beta^2},\quad k=k'(1+\beta)/\sqrt{1-\beta^2},$$

где $\beta=V/c$. Здесь учтено, что $\omega'=ck'$.

5.232. Из формулы $\omega'=\omega\sqrt{(1-\beta)/(1+\beta)}$ получим $\beta=v/c=0{,}26$.

5.233. $v=c\dfrac{(\lambda/\lambda')^2-1}{(\lambda/\lambda')^2+1}=7{,}1\cdot10^4$ км/с.

5.234. $\omega=\omega_0\sqrt{3/7}$.

5.235. $\Delta\lambda=\lambda T/m_0c^2=0{,}70$ нм, где m_0 — масса атома.

5.236. а) $\omega=\omega_0/\sqrt{1-\beta^2}=5{,}0\cdot10^{10}$ рад/с; б) $\omega=\omega_0\sqrt{1-\beta^2}=1{,}8\cdot10^{10}$ рад/с. Здесь $\beta=v/c$.

5.237. Заряд электрона вместе с положительным индуцированным в металле зарядом образует диполь. В системе отсчета, связанной с электроном, электрический момент диполя меняется с периодом $T'=d'/v$, где $d'=d\sqrt{1-(v/c)^2}$. Соответствующая «собственная» частота $\nu'=v/d'$. Вследствие эффекта Доплера наблюдаемая частота

$$\nu=\nu'\frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{1-(v/c)\cos\vartheta}=\frac{v/d}{1-(v/c)\cos\vartheta}.$$

Ей отвечает длина волны $\lambda=c/\nu=d\,(c/v-\cos\vartheta)$. При $\vartheta=45°$ и $v\approx c$ длина волны $\lambda\approx0{,}6$ мкм.

5.238. а) Пусть v_x — проекция вектора скорости излучающего атома на направление линии наблюдения. Число атомов с проекциями v_x, v_x+dv_x

$$n(v_x)\,dv_x\sim\exp\left(-mv_x^2/2kT\right)\cdot dv_x.$$

Частота света, излучаемого атомами, скорость которых v_x, есть $\omega=\omega_0(1+v_x/c)$. С помощью этого выражения найдем распределение атомов по частотам: $n(\omega)\,d\omega=n(v_x)\,dv_x$. И наконец, надо учесть, что спектральная интенсивность излучения $I_\omega\sim n(\omega)$. б) $\Delta\omega/\omega_0=2\sqrt{(2\ln2)\,kT/mc^2}$.

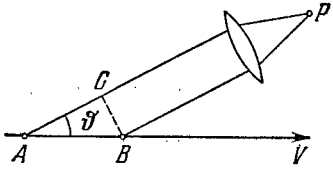


Рис. 44.

5.239. $u=\dfrac{c/n+V}{1+V/cn}$. Если $V\ll c$, то $u\approx\dfrac{c}{n}+V\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

5.240. $v=\frac{1}{2}c\delta\vartheta=30$ км/с.

5.242. $\vartheta'=8°$.

5.243. Движущаяся со скоростью V заряженная частица своим полем возбуждает атомы среды, и они становятся источниками световых волн. Возьмем две произвольные точки A и B на пути движения частицы. Световые волны, испускаемые из этих точек при прохождении через них частицы, достигнут точки P (рис. 44) за одинаковое время и усилят друг друга, если время распространения световой волны из точки A в точку C будет равно времени пролета частицей пути AB. Отсюда получим $\cos\vartheta=v/V$, где $v=c/n$ — фазовая

скорость света. Видно, что излучение возможно лишь при $V > v$, т. е. когда скорость частицы больше фазовой скорости света в среде.

5.244. $T_{\text{мин}} = (n/\sqrt{n^2-1} - 1)\, mc^2$; соответственно 0,14 МэВ и 0,26 ГэВ. Для μ-мезонов.

5.245. $T = \left(\dfrac{n\cos\vartheta}{\sqrt{n^2\cos^2\vartheta - 1}} - 1\right) mc^2 = 0{,}23$ МэВ.

5.247. $T_2 = bT_1/(b + T_1\Delta\lambda) = 1{,}75$ кК.

5.248. $\lambda_m = 3{,}4$ мкм.

5.249. $5 \cdot 10^9$ кг/с, около 10^{11} лет.

5.250. $T = \sqrt[3]{3cR\rho/\sigma M} = 2 \cdot 10^7$ К, где R — универсальная газовая постоянная, M — молярная масса водорода.

5.251. $t = (\eta^3 - 1)\, c\rho\, d/18\sigma T_0^3 = 3$ ч, где c — удельная теплоемкость меди, ρ — ее плотность.

5.252. $T_2 = T_1\sqrt{d/2l} = 0{,}4$ кК.

5.253. а) $C_V = (\partial U/\partial T)_V = 16\sigma T^3 V/c = 3$ нДж/К, где $U = 4\sigma T^4 V/c$; б) $S = 16\sigma T^3 V/3c = 1{,}0$ нДж/К.

5.254. а) $\omega_{\text{вер}} = 2T/a = 5{,}24 \cdot 10^{14}$ рад/с; б) $\lambda_{\text{вер}} = 2\pi ca/5T = 1{,}44$ мкм.

5.255. а) $u_\omega = (kT/\pi^2 c^3)\,\omega^2$; б) $u_\omega = (\hbar/\pi^2 c^3)\,\omega^3 e^{-\hbar\omega/kT}$.

5.256. $u_\nu = \dfrac{16\pi^2\hbar}{c^3}\dfrac{\nu^3}{e^{2\pi\hbar\nu/kT} - 1}$, $u_\lambda = \dfrac{16\pi^2 c\hbar\lambda^{-5}}{e^{2\pi\hbar c/kT\lambda} - 1}$.

5.257. $\Delta P = 4\pi^2 c^2 \hbar T^5 \Delta\lambda/b^5\,(e^{2\pi\hbar c/kb} - 1) = 0{,}31$ Вт/см^2, где b — постоянная в законе смещения Вина.

5.258. а) 1,1 мкм; б) 0,37; в) $P_2/P_1 = (T_2/T_1)^4\,(1 - y_2)/(1 - y_1) = 4{,}9$.

5.259. $n_\omega d\omega = \dfrac{1}{\pi^2 c^3}\dfrac{\omega^2 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$, $n_\lambda d\lambda = \dfrac{8\pi\lambda^{-4} d\lambda}{e^{2\pi\hbar c/kT\lambda} - 1}$.

5.260. а) $\langle j\rangle = P\lambda/8\pi^2 c\hbar r^2 = 6 \cdot 10^{13}$ см$^{-2} \cdot$ с$^{-1}$; б) $r = \sqrt{P\lambda/2\hbar n}/2\pi c = 9$ м.

5.261. $dp/dt = \Phi_э/c$.

5.262. $\langle p\rangle = 4\,(1 + \rho)\, E/\pi d^2 c\tau \approx 50$ атм.

5.263. $p = (E/c)\sqrt{1 + \rho^2 + 2\rho\cos 2\vartheta} = 35$ нН $\cdot$ с.

5.264. $p = (I/c)\,(1 + \rho)\cos^2\vartheta = 0{,}6$ нН/см^2.

5.265. $F = \pi R^2 I/c = 0{,}18$ мкН.

5.266. $F = P/2c\,(1 + \eta^2)$.

5.267. а) $\Delta p = \dfrac{2\hbar\omega}{c}\dfrac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta}$; б) $\Delta p = \dfrac{2\hbar\omega}{c}\dfrac{1}{1-\beta}$. Здесь $\beta = V/c$. Видно, что в системе отсчета, связанной с зеркалом, последнему передается меньший импульс.

5.268. $\sin(\vartheta/2) \approx E/mc\sqrt{gl}$, $\vartheta = 0{,}5°$.

5.269. $\Delta\omega/\omega_0 = -(1 - e^{-\gamma M/Rc^2}) < 0$, т. е. частота фотона уменьшается.

5.270. $U = 2\pi\hbar c\,(1 - 1/\eta)/e\Delta\lambda = 16$ кВ.

5.271. $U = \pi\hbar c/ed\sin\alpha = 31$ кВ.

5.272. $\lambda_{\text{мин}} = 2\pi\hbar/mc\,(\gamma - 1) = 2{,}8$ пм, где $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$.

5.273. 332 нм, $6{,}6 \cdot 10^5$ м/с.

5.274. $A = 2\pi c\hbar\,\dfrac{(\eta^2 - \lambda_2/\lambda_1)}{\lambda_2\,(\eta^2 - 1)} = 1{,}9$ эВ.

5.275. $\varphi_{\text{макс}} = 4{,}4$ В.

5.276. $T_{\text{макс}}=\hbar(\omega_0+\omega)-A_{\text{вых}}=0{,}38$ эВ.

5.277. $w=2\pi c\hbar J/e\lambda=0{,}020$.

5.278. $v_{\text{макс}}=6{,}4\cdot 10^5$ м/с.

5.279. 0,5 В; ее полярность противоположна полярности внешнего напряжения.

5.280. $\hbar/mc$ — комптоновская длина волны данной частицы.

5.281. Запишем законы сохранения энергии и импульса в системе отсчета, связанной с электроном — до соударения с фотоном: $\hbar\omega+m_0c^2=mc^2$, $\hbar\omega/c=mv$, где $m=m_0\sqrt{1-(v/c)^2}$. Отсюда следует, что $v=0$ или c. Оба результата физического смысла не имеют.

5.282. а) Рассеяние происходит на свободных электронах; б) увеличивается число электронов, которые становятся свободными (под свободными понимаются электроны, энергия связи которых значительно меньше энергии, передаваемой им фотонами); в) наличие несмещенной компоненты объясняется рассеянием на сильно связанных электронах и на ядрах.

5.283. $\lambda=4\pi\lambda_C\left[\sin(\vartheta_2/2)-\eta\sin(\vartheta_1/2)\right]/(\eta-1)=1{,}2$ пм.

5.284. $T=\hbar\omega\eta/(1+\eta)=0{,}20$ МэВ.

5.285. а) $\omega'=2\pi c/(\lambda+2\pi\hbar/mc)=2{,}2\cdot 10^{20}$ рад/с; б) $T=\dfrac{2\pi c\hbar/\lambda}{1+\lambda mc/2\pi\hbar}=$ $=60$ кэВ.

5.286. $\hbar\omega'=\dfrac{\hbar\omega}{1+2\,(\hbar\omega/mc^2)\sin(\vartheta/2)}=0{,}144$ МэВ.

5.287. $\sin(\vartheta/2)=\sqrt{mc\,(p-p')/2pp'}$, отсюда $\vartheta=120°$.

5.288. $\hbar\omega=\left[1+\sqrt{1+2mc^2/T\sin^2(\vartheta/2)}\right]T/2=0{,}68$ МэВ.

5.289. $\lambda=(2\pi\hbar/mc)\left(\sqrt{1+2mc^2/T_{\text{макс}}}-1\right)=3{,}7$ пм.

5.290. $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{\sqrt{4\pi\hbar/mc\Delta\lambda-1}}{1+\hbar\omega/mc^2}$, $\varphi=31°$.

5.291. $\rho=\dfrac{2\eta\,(1+\eta)\,mc}{(1+2\eta)\,eB}=3{,}4$ см.

5.292. $\Delta\lambda=(4\hbar/mc)\sin^2(\vartheta/2)=1{,}2$ пм.

6.1. $r=3e^2/2E=0{,}16$ нм, $\lambda=(2\pi c/e)\sqrt{mr^3}=0{,}24$ мкм.

6.2. $b=0{,}73$ пм.

6.3. а) $r_{\text{мин}}=0{,}59$ пм; б) $r_{\text{мин}}=(2Ze^2/T)\left(1+m_\alpha/m_{\text{Li}}\right)=0{,}034$ пм.

6.4. а) $\rho_{\text{мин}}=(Ze^2/T)\operatorname{ctg}^2(\vartheta/2)=0{,}23$ пм; б) $r_{\text{мин}}=[1+\operatorname{csc}(\vartheta/2)]\,Ze^2/T=$ $=0{,}56$ пм.

6.5. $p\approx 2\sqrt{2mT/[1+(2bT/Ze^2)^2]}$.

6.6. $T_e=m_pe^4/m_eb^2T=4$ эВ.

6.7. $b=\dfrac{Rn\sin(\vartheta/2)}{\sqrt{1+n^2-2n\cos(\vartheta/2)}}$, где $n=\sqrt{1+U_0/T}$.

6.8. а) $\cos(\vartheta/2)=b/(R+r)$; б) $dP=1/2\sin\vartheta\,d\vartheta$; в) $P=1/2$.

6.9. $3{,}3\cdot 10^{-5}$.

6.10. $d=(4Jr^2T^2/nIZ^2e^4)\sin^4(\vartheta/2)=1{,}5$ мкм, где n — концентрация ядер.

6.11. $Z_{\text{Pt}}=Z_{\text{Ag}}\sqrt{\eta A_{\text{Pt}}/A_{\text{Ag}}}=78$.

6.12. а) $1{,}6\cdot 10^6$; б) $N=\pi nd\,(Ze^2/T)^2\operatorname{ctg}^2(\vartheta_0/2)\,I_0\tau=2{,}0\cdot 10^7$, где n — концентрация ядер.

6.13. $P=\pi n d\,(Ze^2/mv^2)^2=0{,}006$, где n — концентрация ядер.

6.14. $\Delta N/N=1-\pi n Z^2e^4/T^2\,\mathrm{tg}^2\,(\vartheta/2)=0{,}6$.

6.15. $\Delta N/N=\dfrac{\pi e^4}{4T^2}\left(0{,}7\,\dfrac{Z_1^2}{M_1}+0{,}3\,\dfrac{Z_2^2}{M_2}\right)\rho\,dN_A\,\mathrm{ctg}^2\,\dfrac{\vartheta}{2}=1{,}4\cdot10^{-3}$, где Z_1 и Z_2 — порядковые номера меди и цинка, M_1 и M_2 — их молярные массы, N_A — число Авогадро.

6.16. $\Delta\sigma=\pi\,(Ze^2/T)^2\,\mathrm{ctg}^2\,(\vartheta_0/2)=0{,}73$ кб.

6.17. а) 0,9 МэВ; б) $d\sigma/d\Omega=\Delta\sigma/4\pi\,\sin^4\,(\vartheta/2)=0{,}64$ кб/ср.

6.18. $t=(3mc^3/2e^2\omega^2)\ln\eta=15$ нс.

6.19. $t\approx m^2c^3r^3/4e^4\approx13$ пс.

6.21. $r_n=\sqrt{n\hbar/m\omega}$, $E_n=n\hbar\omega$, где $n=1,\ 2,\ \ldots$, $\omega=\sqrt{k/m}$.

6.22.

	r_1, пм	v, 10^6 м/с	T, эВ	$E_{\text{св}}$, эВ	φ_i, В	φ_1, В	λ, нм
H	52,9	2,18	13,6	13,6	13,6	10,2	121,5
He^+	26,5	4,36	54,5	54,5	54,5	40,8	30,4

6.23. $\omega=me^4Z^2/\hbar^3n^2=2{,}07\cdot10^{16}$ рад/с.

6.24. $\mu_n=ne\hbar/2mc$, $\mu_n/M_n=e/2mc$, $\mu_1=\mu_B$.

6.25. $B=m^2e^7/c\hbar^5=125$ кГс.

6.27. Серия Брэкета, $\lambda_{6\to4}=2{,}63$ мкм.

6.28. а) 657, 487 и 434 нм; б) $\lambda/\delta\lambda\approx1{,}5\cdot10^3$.

6.29. При $n\gg1$ значение $\sin\vartheta\approx n^3\pi c/lR$, откуда $\vartheta\approx60°$.

6.30. He^+.

6.31. $N=\frac{1}{2}n\,(n-1)$.

6.32. 97,3, 102,6 и 121,6 нм.

6.33. $n=5$.

6.34. $R=\dfrac{176\pi c}{15Z^2\Delta\lambda}=2{,}07\cdot10^{16}$ с$^{-1}$.

6.35. $Z=\sqrt{(176/15)\,\pi c/R\Delta\lambda}=3$, Li^{++}.

6.36. $\lambda=(2\pi c/\Delta\omega)\,(Z\sqrt{R/\Delta\omega}-1)/(2Z\sqrt{R/\Delta\omega}-1)=0{,}47$ мкм.

6.37. $E_{\text{св}}=54{,}4$ эВ (He^+).

6.38. $E=E_0+4\hbar R=79$ эВ.

6.39. $v=\sqrt{2\,(\hbar\omega-4\hbar R)/m}=2{,}3\cdot10^6$ м/с, где $\omega=2\pi c/\lambda$.

6.40. $T_{\text{мин}}=\frac{3}{2}\hbar R=20{,}5$ эВ.

6.41. $v=3\hbar R/4mc=3{,}25$ м/с, где m — масса атома.

6.42. $(\varepsilon-\varepsilon')/\varepsilon\approx3\hbar R/8mc^2=0{,}55\cdot10^{-6}$ %, где m — масса атома.

6.43. $v=2\sqrt{\hbar R/m}=3{,}1\cdot10^6$ м/с, где m — масса электрона.

6.44. $v=3R\Delta\lambda/8\pi\cos\vartheta=0{,}7\cdot10^6$ м/с.

6.45. а) $E_n=n^2\pi^2\hbar^2/2ml^2$; б) $E_n=n^2\hbar^2/2mr^2$; в) $E_n=n\hbar\sqrt{\alpha/m}$; г) $E_n=-m\alpha^2/2\hbar^2n^2$.

6.46. $E_{\text{св}}=\mu e^4/2\hbar^2$, $R=\mu e^4/2\hbar^3$, где μ — приведенная масса системы. Без учета движения ядра эти величины для атома водорода больше на $m/M\approx0{,}055$ %, где m и M — массы электрона и протона.

6.47. $E_D - E_H = 3{,}7$ мэВ, $\lambda_H - \lambda_D = 33$ пм.

6.48. а) 0,285 пм, 2,53 кэВ, 0,65 нм; б) 106 пм, 6,8 эВ, 0,243 мкм.

6.49. 123, 2,86 и 0,186 пм.

6.50. 0,45 кэВ.

6.51. Для обеих частиц $\lambda = 2\pi\hbar\,(1 + m_n/m_d)/\sqrt{2m_nT} = 8{,}6$ пм.

6.52. $\tilde{\lambda} = 2\lambda_1\lambda_2/\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$.

6.53. $\lambda = 2\pi\hbar/\sqrt{2mkT} = 128$ пм.

6.54. Найдем сначала функцию распределения молекул по дебройлевским длинам волн. Из соотношения $f(v)\,dv = -\varphi(\lambda)\,d\lambda$, где $f(v)$ — максвелловская функция распределения по скоростям, получим

$$\varphi(\lambda) = A\lambda^{-4}e^{-a/\lambda^2}, \quad a = 2\pi^2\hbar^2/mkT.$$

Условие $d\varphi/d\lambda = 0$ дает $\lambda_{\text{вер}} = \pi\hbar/\sqrt{mkT} = 0{,}09$ нм.

6.55. $\lambda = 2\pi\hbar/\sqrt{2mT\,(1 + T/2mc^2)}$, $T \lesssim 4mc^2\Delta\lambda/\lambda = 20{,}4$ кэВ (для электрона) и 37,5 МэВ (для протона).

6.56. $T = (\sqrt{2} - 1)\,mc^2 = 0{,}21$ МэВ.

6.57. $\lambda = \lambda_к/\sqrt{1 + mc\lambda_к/\pi\hbar} = 3{,}3$ пм.

6.58. $v = 4\pi\hbar l/mb\Delta x = 2{,}0 \cdot 10^6$ м/с.

6.59. $\Delta x = 2\pi\hbar l/d\sqrt{2meU} = 4{,}9$ мкм.

6.60. $U_0 = \pi^2\hbar^2/2me\,(\sqrt{\eta} - 1)^2\,d^2\sin^2\vartheta = 0{,}15$ кэВ.

6.61. $d = \pi\hbar k/\sqrt{2mT}\cos(\vartheta/2) = 0{,}21$ нм, где $k = 4$.

6.62. $d = \pi\hbar k/\sqrt{2mT}\sin\vartheta = 0{,}23 \pm 0{,}04$ нм, где $k = 3$ и угол ϑ определяется формулой $\operatorname{tg} 2\vartheta = D/2l$.

6.63. а) $n = \sqrt{1 + U_i/U} = 1{,}05$; б) $U/U_i \geqslant 1/\eta\,(2 + \eta) = 50$.

6.64. $E_n = n^2\pi^2\hbar^2/2ml^2$, где $n = 1, 2, \ldots$

6.66. $1 \cdot 10^4$, $1 \cdot 10$ и $1 \cdot 10^{-20}$ см/с.

6.67. $\Delta v \approx \hbar/ml = 1 \cdot 10^6$ м/с; $v_1 = 2{,}2 \cdot 10^6$ м/с.

6.69. $\Delta t \approx \eta ml^2/\hbar \approx 10^{-16}$ с.

6.70. $T_{\text{мин}} \approx \hbar^2/2ml^2 = 1$ эВ. Здесь взято $p \approx \Delta p$ и $\Delta x = l$.

6.71. $\Delta v/v \sim \hbar/l\sqrt{2mT} = 1 \cdot 10^{-4}$.

6.72. $F \approx \hbar^2/ml^3$.

6.73. Имея в виду, что $p \sim \Delta p \sim \hbar/\Delta x \sim \hbar/x$, получим $E = T + U \approx \hbar^2/2mx^2 + kx^2/2$. Из условия $dE/dx = 0$ находим x_0 и затем $E_{\text{мин}} \approx \hbar\sqrt{k/m} = \hbar\omega$, где ω — круговая частота осциллятора. Точный расчет дает $\hbar\omega/2$.

6.74. Имея в виду, что $p \sim \Delta p \sim \hbar/\Delta r$ и $\Delta r \sim r$, получим $E = p^2/2m - e^2/r \approx \hbar^2/2mr^2 - e^2/r$. Из условия $dE/dr = 0$ находим $r_{\text{эфф}} \approx \hbar^2/me^2 = 53$ пм, $E_{\text{мин}} \approx -me^4/2\hbar^2 = -13{,}6$ эВ.

6.75. Ширина изображения $\Delta \approx \delta + \Delta' \approx \delta + \hbar l/p\delta$, где Δ' — дополнительное уширение, связанное с неопределенностью импульса Δp_y (при прохождении через щель), p — импульс падающих атомов водорода. Функция $\Delta(\delta)$ имеет минимум при $\delta \approx \sqrt{\hbar l/mv} = 0{,}01$ мм.

6.76. Решение уравнения Шрёдингера ищем в виде $\Psi = \psi(x) \cdot f(t)$. Подстановка этой функции в исходное уравнение и разделение переменных x и t приводит к двум уравнениям. Их решения: $\psi(x) \sim e^{ikx}$, где $k = \sqrt{2mE}/\hbar$,

E — энергия частицы, и $f(t) \sim e^{-i\omega t}$, где $\omega = E/\hbar$. В результате $\Psi = ae^{i(kx-\omega t)}$, где a — некоторая постоянная.

6.77. $P = 1/3 + \sqrt{3}/2\pi = 0{,}61$.

6.78. $\psi = \begin{cases} A\cos(\pi n x/l), & \text{если } n = 1, 3, 5, \ldots, \\ A\sin(\pi n x/l), & \text{если } n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$

Здесь $A = \sqrt{2/l}$.

6.80. $dN/dE = (l/\pi\hbar)\sqrt{m/2E}$; при $E = 1$ эВ величина $dN/dE = 0{,}8 \cdot 10^7$ уровней/эВ.

6.81. а) В этом случае уравнение Шрёдингера имеет вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + k^2\psi = 0, \quad k^2 = 2mE/\hbar^2.$$

Возьмем начало координат в одном из углов ямы. На сторонах ямы функция $\psi(x, y)$ должна обращаться в нуль (по условию), поэтому внутри ямы ее удобно искать сразу в виде $\psi(x, y) = a\sin k_1 x \cdot \sin k_2 y$, так как на двух сторонах ($x = 0$ и $y = 0$) автоматически $\psi = 0$. Возможные значения k_1 и k_2 найдем из условия обращения ψ в нуль на противоположных сторонах ямы:

$$\psi(l_1, y) = 0, \quad k_1 = \pm(\pi/l_1)n_1, \quad n_1 = 1, 2, 3, \ldots,$$
$$\psi(x, l_2) = 0, \quad k_2 = \pm(\pi/l_2)n_2, \quad n_2 = 1, 2, 3, \ldots$$

Подстановка волновой функции в уравнение Шрёдингера приводит к соотношению $k_1^2 + k_2^2 = k^2$, откуда

$$E_{n_1 n_2} = (n_1^2/l_1^2 + n_2^2/l_2^2)\,\pi^2\hbar^2/2m.$$

б) 9,87, 24,7, 39,5 и 49,4 единиц $\hbar^2/ml^2$.

6.82. $P = 1/3 - \sqrt{3}/4\pi = 19{,}5\%$.

6.83. а) $E = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)\,\pi^2\hbar^2/2ma^2$, где n_1, n_2, n_3 — целые числа, не равные нулю; б) $\Delta E = \pi^2\hbar^2/ma^2$; в) для 6-го уровня $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 14$ и $E = 7\pi^2\hbar^2/ma^2$; число состояний равно шести (оно равно числу перестановок тройки чисел 1, 2 и 3).

6.84. Проинтегрируем уравнение Шрёдингера по малому интервалу координаты x, внутри которого имеется скачок $U(x)$, например в точке $x = 0$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(+\delta) - \frac{\partial\psi}{\partial x}(-\delta) = \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\,\psi\,dx.$$

Ввиду конечности скачка U при $\delta \to 0$ интеграл тоже стремится к нулю. Дальнейшее очевидно.

6.85. а) Запишем уравнение Шрёдингера для двух областей:

$$0 < x < l, \quad \psi_1'' + k^2\psi_1 = 0, \quad k^2 = 2mE/\hbar^2,$$
$$x > l, \quad \psi_2'' - \varkappa^2\psi_2 = 0, \quad \varkappa^2 = 2m(U_0 - E)/\hbar^2.$$

Их общие решения

$$\psi_1(x) = a\sin(kx + \alpha), \quad \psi_2(x) = be^{-\varkappa x} + ce^{\varkappa x}.$$

должны удовлетворять стандартным и граничным условиям. Из условия $\psi_1(0) = 0$ и требования конечности волновой функции следует, что $\alpha = 0$ и $c = 0$. И наконец, из непрерывности $\psi(x)$ и ее производной в точке $x = l$

получим $\operatorname{tg} kl = -k/\varkappa$, откуда

$$\sin kl = \pm kl\sqrt{\hbar^2/2ml^2U_0}.$$

Изобразив графически левую и правую части последнего уравнения (рис. 45), найдем точки пересечения прямой с синусоидой. При этом корни данного уравнения, отвечающие собственным значениям энергии E, будут соответствовать тем точкам пересечения $(kl)_i$, для которых $\operatorname{tg}(kl)_i < 0$, т. е. корни этого уравнения будут находиться в четных четвертях окружности (эти

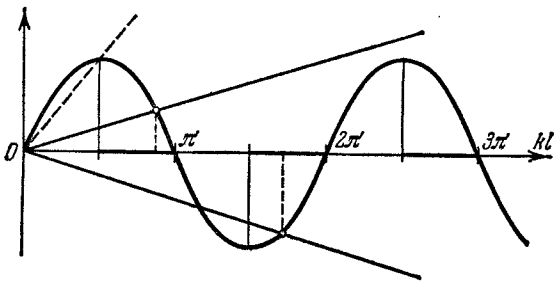


Рис. 45.

участки оси абсцисс выделены на рисунке жирными отрезками). Из графика видно, что корни уравнения, т. е. связанные состояния частицы, существуют не всегда. Пунктиром показано предельное положение прямой, б) $(l^2U_0)_{1\,\text{мин}} = \pi^2\hbar^2/8m$, $(l^2U_0)_{n\,\text{мин}} = (2n-1)\,\pi^2\hbar^2/8m$.

6.86. Пусть P_a и P_i — вероятности нахождения частицы вне и внутри ямы. Тогда

$$\frac{P_a}{P_i} = \frac{\int\limits_l^\infty b^2 e^{-2\varkappa x}\,dx}{\int\limits_0^l a^2 \sin^2 kx\,dx} = \frac{2}{2+3\pi},$$

где отношение b/a можно определить из условия $\psi_1(l) = \psi_2(l)$. Остается учесть, что $P_a + P_i = 1$; тогда $P_a = 2/(4+3\pi) = 14{,}9\%$.

Возможность нахождения частицы в области, где ее энергия $E < U$, представляет собой чисто квантовый эффект. Он является следствием волновых свойств частицы, исключающих одновременно точные значения координаты и импульса, а следовательно, и точное разделение полной энергии частицы на потенциальную и кинетическую. Последнее можно сделать только в пределах точности, даваемой соотношением неопределенностей.

6.87. В результате указанной подстановки получим

$$\chi'' + k^2\chi = 0, \quad \text{где} \quad k^2 = 2mE/\hbar^2.$$

Решение этого уравнения ищем в виде $\chi = a\sin(kr+\alpha)$. Из требования конечности волновой функции ψ в точке $r=0$ следует, что $\alpha = 0$. Таким образом, $\psi = (a/r)\sin kr$. Из граничного условия $\psi(r_0) = 0$ получим $kr_0 = n\pi$, где $n = 1, 2, \ldots$ Отсюда $E_n = n^2\pi^2\hbar^2/2mr_0^2$.

6.88. а) $\psi(r) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi r_0}}\,\dfrac{\sin(n\pi r/r_0)}{r}$, $n = 1, 2, \ldots$; б) $r_{\text{вер}} = r_0/2$; 50%.

6.89. а) Решения уравнения Шрёдингера для функции $\chi(r)$:

$$r<r_0,\quad \chi_1=A\sin(kr+\alpha),\quad \text{где}\quad k=\sqrt{2mE}/\hbar,$$
$$r>r_0,\quad \chi_2=Be^{\varkappa r}+Ce^{-\varkappa r},\quad \text{где}\quad \varkappa=\sqrt{2m(U_0-E)}/\hbar.$$

Из требования ограниченности функции $\psi(r)$ во всем пространстве следует, что $\alpha=0$ и $B=0$. Таким образом:

$$\psi_1=A\frac{\sin kr}{r},\quad \psi_2=C\frac{e^{-\varkappa r}}{r}.$$

Из условия непрерывности ψ и ее производной в точке $r=r_0$ получим $\operatorname{tg} kr_0=-k/\varkappa$, или

$$\sin kr_0=\pm\sqrt{\hbar^2/2mr_0^2U_0}\,kr_0.$$

Это уравнение, как показано в решении задачи 6.85, определяет дискретный спектр собственных значений энергии. б) $r_0^2U_0=\pi^2\hbar^2/8m$.

6.90. $\alpha=m\omega/2\hbar$, $E=\hbar\omega/2$, где $\omega=\sqrt{k/m}$.

6.91. $E=-me^4/8\hbar^2$, т. е. уровень с главным квантовым числом $n=2$.

6.92. а) Вероятность нахождения электрона на расстоянии r, $r+dr$ от ядра $dP=\psi^2(r)\,4\pi r^2\,dr$. Из условия максимума функции dP/dr получим $r_{\text{вер}}=r_1$; б) $\langle F\rangle=2e^2/r_1^2$; в) $\langle U\rangle=-e^2/r_1$.

6.93. $\varphi_0=\int(\rho/r)\,4\pi r^2\,dr=e/r_1$, где $\rho=e\psi^2$ — объемная плотность заряда, ψ — нормированная волновая функция.

6.94. а) Запишем решения уравнения Шрёдингера слева и справа от границы барьера в следующем виде:

$$x<0,\quad \psi_1(x)=a_1e^{ik_1x}+b_1e^{-ik_1x},\quad \text{где}\quad k_1=\sqrt{2mE}/\hbar,$$
$$x>0,\quad \psi_2(x)=a_2e^{ik_2x}+b_2e^{-ik_2x},\quad \text{где}\quad k_2=\sqrt{2m(E-U_0)}/\hbar.$$

Будем считать, что падающая волна характеризуется амплитудой a_1, а отраженная — амплитудой b_2. Так как в области $x>0$ имеется только проходящая волна, то $b_2=0$. Коэффициент отражения R представляет собой отношение отраженного потока частиц к падающему потоку, или, другими словами, отношение квадратов амплитуд соответствующих волн. Из условия непрерывности ψ и ее производной в точке $x=0$ имеем $a_1+b_1=a_2$ и $a_1-b_1=(k_2/k_1)\,a_2$, откуда

$$R=(b_1/a_1)^2=(k_1-k_2)^2/(k_1+k_2)^2.$$

б) В случае $E<U_0$ решение уравнения Шрёдингера справа от барьера имеет вид

$$\psi_2(x)=a_2e^{\varkappa x}+b_2e^{-\varkappa x},\quad \text{где}\quad \varkappa=\sqrt{2m(U_0-E)}/\hbar.$$

Из требования конечности $\psi(x)$ следует, что $a_2=0$. Плотность вероятности нахождения частицы под барьером $P_2(x)=\psi_2^2(x)\sim e^{-2\varkappa x}$. Отсюда $x_{\text{эфф}}=1/2\varkappa$.

6.95. а) $D\approx\exp\left[-\frac{2l}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-E)}\right]$;

б) $D\approx\exp\left[-\frac{8l\sqrt{2m}}{3\hbar U_0}(U_0-E)^{3/2}\right]$.

6.96. $D\approx\exp\left[-\frac{\pi l}{\hbar}\sqrt{\frac{2m}{U_0}}(U_0-E)\right]$.

6.97. —0,41 для S-терма и —0,04 для P-терма.

6.98. $\alpha = \sqrt{\hbar R/(E_0 - e\varphi_1)} - 3 = -0{,}88$.

6.99. $E_{св} = \hbar R/\left(\sqrt{R\lambda_1\lambda_2/2\pi c\Delta\lambda} - 1\right)^2 = 5{,}3$ эВ.

6.100. 0,82 мкм ($3S \to 2P$) и 0,68 мкм ($2P \to 2S$).

6.101. $\Delta E = 2\pi\hbar c\Delta\lambda/\lambda^2 = 2{,}0$ мэВ.

6.102. $\Delta\omega = 1{,}05 \cdot 10^{14}$ рад/с.

6.103. $3S_{1/2}$, $3P_{1/2}$, $3P_{3/2}$, $3D_{3/2}$, $3D_{5/2}$.

6.104. а) 1, 2, 3, 4, 5; б) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; в) $1/2$, $3/2$, $5/2$, $7/2$, $9/2$.

6.105. Для состояния ^4P: $\hbar\sqrt{3}/2$, $\hbar\sqrt{15}/2$ и $\hbar\sqrt{35}/2$; для состояния ^5D: 0, $\hbar\sqrt{2}$, $\hbar\sqrt{6}$, $\hbar\sqrt{12}$, $\hbar\sqrt{20}$.

6.106. а) $^2F_{7/2}$, $M_{макс} = \hbar\sqrt{63}/2$; б) $^3F_4$, $M_{макс} = 2\hbar\sqrt{5}$.

6.107. В F-состоянии $M_S = \hbar\sqrt{6}$; для D-состояния можно лишь устаиовить, что $M_S \geqslant \hbar\sqrt{6}$.

6.108. 3, 4, 5.

6.109. а) 1, 3, 5, 7, 9; б) 2, 4, 6; в) 5, 7, 9.

6.110. 31°.

6.111. $^3D_2$.

6.112. $^1P_1$, $^1D_2$, $^1F_3$, $^3P_{0,1,2}$, $^3D_{1,2,3}$, $^3F_{2,3,4}$.

6.113. Те же, что в предыдущей задаче.

6.114. Второй и третий.

6.115. $g = 4 + 6 = 10$.

6.116. 4, 7 и 10.

6.117. $^3F_3$.

6.118. As.

6.119. а) $^4S_{3/2}$; б) $^3P_2$.

6.120. а) $^4F_{3/2}$, $\hbar\sqrt{15}/2$; б) $^4F_{9/2}$, $\hbar 3\sqrt{11}/2$.

6.121. а) Два d-электрона; б) пять p-электронов; в) пять d-электронов.

6.122. а) $^3P_0$; б) $^4F_{9/2}$.

6.123. $^4F_{9/2}$.

6.124. $\mu = \mu_B\sqrt{35}$ ($^6S_{5/2}$).

6.125. $\eta = n^2 e^{-\hbar\omega/kT} = 3 \cdot 10^{-17}$, где $\omega = R\left(1 - 1/n^2\right)$.

6.126. $N/N_0 = (g/g_0)\, e^{-\hbar\omega/kT} = 1{,}14 \cdot 10^{-4}$, где g и g_0 — статистические веса (кратности вырождения) уровней $3P$ и $3S$ соответственно ($g = 6$, $g_0 = 2$).

6.127. $\tau = l/v \ln\eta = 1{,}3$ мкс.

6.128. $N = \lambda\tau P/2\pi c\hbar = 7 \cdot 10^9$.

6.129. $\tau = (n\hbar\omega/P)\,(g/g_0)\, e^{-\hbar\omega/kT} = 65$ нс, где g и g_0 — кратности вырождения резонансного и основного уровней.

6.130. а) $P_{инд}/P_{сп} = 1/\left(e^{\hbar\omega/kT} - 1\right) \approx 10^{-34}$, где $\omega = {}^3/_4 R$; б) $T = 1{,}7 \cdot 10^5$ К.

6.131. Пусть I — интенсивность проходящего света. Убыль этой величины при прохождении слоя вещества толщины dx равна

$$-dI = \varkappa I\, dx = (N_1 B_{12} - N_2 B_{21})\,(I/c)\,\hbar\omega\, dx,$$

где N_1 и N_2 — концентрации атомов на нижнем и верхнем уровнях, B_{12} и B_{21} — коэффициенты Эйнштейна. Отсюда

$$\varkappa = (\hbar\omega/c)\, N_1 B_{12}\,(1 - g_1 N_2/g_2 N_1).$$

Далее следует учесть распределение Больцмана и тот факт, что $\hbar\omega \gg kT$ (при этом $N_1 \approx N_0$ — полной концентрации атомов).

6.132. $\Delta\lambda_{доп}/\Delta\lambda_{ест} \approx 4\pi\tau v_{вер}/\lambda \approx 10^3$, где $v_{вер} = \sqrt{2RT/M}$.

6.133. $\lambda = 154$ пм.

6.134. а) 843 пм для Al, 180 пм для Co; б) ≈ 5 кэВ.

6.135. Три.

6.136. $U = 15$ кВ.

6.137. Да.

6.138. $Z = 1 + 2\sqrt{(n-1)\,eU_1/3\hbar R\,(n - U_1/U_2)} = 29$.

6.139. $Z = 1 + \sqrt{4\Delta\omega/3R} = 22$, титан.

6.140. $E_{св} = {}^3/_4\hbar R\,(Z-1)^2 + 2\pi c\hbar/\lambda_L = 5{,}5$ кэВ.

6.141. $E_L = \hbar\omega/(2\pi c/\omega\Delta\lambda - 1) \approx 0{,}5$ кэВ, где $\omega = {}^3/_4 R\,(Z-1)^2$.

6.142. $T = {}^3/_4\hbar R\,(Z-1)^2 - 2\pi c\hbar/\lambda_K = 1{,}45$ кэВ, $v = 2{,}26 \cdot 10^7$ м/с.

6.143. а) $g = 2$, за исключением синглетного состояния, где $g = 0{,}0$; б) $g = 1$.

6.144. а) $-2/3$; б) 0; в) 1; г) 5/2; д) 0/0.

6.145. а) $\sqrt{12}\mu_B$; б) $2\sqrt{35}\mu_B$; в) $(8/\sqrt{3})\,\mu_B$.

6.146. $M_s = 2\sqrt{3}\hbar$.

6.147. $\mu = (8/\sqrt{3})\,\mu_B$.

6.148. $\mu = 3\sqrt{7/5}\,\mu_B$.

6.149. $\mu = (5\sqrt{5}/2)\,\mu_B$.

6.150. $M = \hbar\sqrt{3}/2$.

6.151. ${}^5F_1$.

6.152. $\omega = \mu_B g B/\hbar = 1{,}2 \cdot 10^{10}$ рад/с, где g — фактор Ланде.

6.153. $F_{макс} = \mu_{B\,макс} \cdot |\partial B/\partial z| = (3/\sqrt{8})\,\pi l g J \mu_B / cr^2 = 4 \cdot 10^{-27}$ Н.

6.154. $F = 2I\mu_B/cr^2 = 3 \cdot 10^{-26}$ Н.

6.155. $\partial B/\partial z = 2T\delta/gJ\mu_B l_1\,(l_1 + 2l_2) = 15$ кГс/см.

6.156. а) Не расщепится; б) на шесть; в) не расщепится ($g = 0$).

6.157. а) 58 мкэВ; б) $\Delta E = 2gJ\mu_B B = 145$ мкэВ.

6.158. а) Простой; б) сложный; в) простой; г) простой (здесь для обоих термов факторы Ланде однаковы).

6.159. $L = \Delta E/2\mu_B B = 3$; ${}^1F_3$.

6.160. $\Delta\lambda = \lambda^2 eB/2\pi mc^2 = 35$ пм.

6.161. $B_{мин} = 4{,}0$ кГс.

6.162. $B = \hbar\Delta\omega/g\mu_B = 3$ кГс.

6.163. а) 2 : 1 (отношение соответствующих факторов Ланде); б) $B = 2\pi c\hbar\Delta\lambda/g\mu_B\eta\lambda^2 = 5{,}5$ кГс.

6.164. $\Delta\omega = (\pm 1{,}3,\ \pm 4{,}0,\ \pm 6{,}6) \cdot 10^{10}$ рад/с, шесть компонент.

6.165. а) Шесть (*1*) и четыре (*2*); б) девять (*1*) и шесть (*2*).

6.166. $\Delta\omega = (m_1 g_1 - m_2 g_2)_{макс} eB/mc = 1{,}0 \cdot 10^{11}$ рад/с.

6.167. $\omega = 4\sqrt{2}\hbar/md^2 = 1{,}57 \cdot 10^{11}$ рад/с, где m — масса молекулы.

6.168. 2 и 3.

6.169. $M = \sqrt{md^2E/2} = 3{,}5\hbar$, где m — масса молекулы.

6.170. $I=\hbar/\Delta\omega=1{,}93\cdot10^{-40}$ г·см^2, $d=112$ нм.

6.171. 13 уровней.

6.172. $N\approx\sqrt{2I\omega/\hbar}\approx60$ линий.

6.173. $dN/dE\approx\sqrt{I/2\hbar^2E}$, где I — момент инерции молекулы. Для $J=10$ величина $dN/dE=1{,}0\cdot10^4$ уровней/эВ.

6.174. $E_{кол}/E_{вр}=\omega\mu\,d^2/\hbar$, где μ — приведенная масса молекулы; а) 36; б) $1{,}7\cdot10^2$; в) $2{,}9\cdot10^3$.

6.175. $N_{кол}/N_{вр}={}^1/_3e^{-\hbar(\omega-2B)/kT}=3{,}1\cdot10^{-4}$, где $B=\hbar/2I$, I — момент инерции молекулы.

6.176. По определению

$$\langle E\rangle=\frac{\sum E_v\exp(-E_v/kT)}{\sum\exp(-E_v/kT)}=\frac{\sum E_v\exp(-\alpha E_v)}{\sum\exp(-\alpha E_v)},$$

где $E_v=\hbar\omega(v+{}^1/_2)$, $\alpha=1/kT$. Здесь суммирование проводится по v от 0 до ∞, и делается это следующим образом:

$$\langle E\rangle=-\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\sum\exp(-\alpha E_v)=-\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\frac{\exp(-\alpha\hbar\omega/2)}{1-\exp(-\alpha\hbar\omega)}=$$

$$=\frac{\hbar\omega}{2}+\frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/kT)-1};$$

$$C_{V\,кол}=N\frac{\partial\langle E\rangle}{\partial T}=\frac{R(\hbar\omega/kT)^2e^{\hbar\omega/kT}}{(e^{\hbar\omega/kT}-1)^2}=1{,}2\cdot10^{-4}R,$$

где R — универсальная газовая постоянная.

6.177. $d=\sqrt{2\hbar/\mu\Delta\omega}=0{,}13$ нм, где μ — приведенная масса молекулы.

6.178. $\lambda=\lambda_0/(1\mp\omega\lambda_0/2\pi c)=423$ и 387 нм.

6.179. $\omega=\pi c(\lambda_к-\lambda_ф)/\lambda_к\lambda_ф=1{,}37\cdot10^{14}$ рад/с, $\varkappa=4{,}96$ Н/см.

6.180. $I_ф/I_к=\exp(-\hbar\omega/kT)=0{,}067$. Увеличится в 3,9 раза.

6.181. а) См. рис. 46, *а*, на котором стрелками показаны направления движения ядер молекулы в один и тот же момент. Частоты колебаний ω_1, ω_2, ω_3, причем частоте ω_3 отвечают два независимых колебания во взаимно

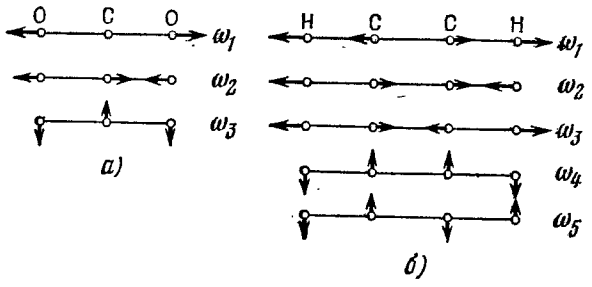


Рис. 46.

перпендикулярных плоскостях. Всего, таким образом, четыре разных колебания. б) См. рис. 46, *б*; всего разных колебаний семь: три продольных (ω_1, ω_2, ω_3) и четыре поперечных (ω_4, ω_5) — по два на каждую частоту.

6.182. $dN_\omega=(l/\pi v)\,d\omega$.

6.183. $dN_\omega = (S/2\pi v^2)\,\omega\,d\omega$.

6.184. $dN_\omega = (V/\pi^2 v^3)\,\omega^2\,d\omega$.

6.185. а) $\Theta = (\hbar/k)\,\pi v n_0$; б) $\Theta = (\hbar/k)\,v\sqrt{4\pi n_0}$; в) $\Theta = (\hbar/k)\,v\sqrt[3]{6\pi^2 n_0}$.

6.186. $\Theta = (\hbar/k)\sqrt[3]{18\pi^2 n_0/(v_\parallel^{-3} + 2v_\perp^{-3})} = 470$ К, где n_0 — концентрация атомов.

6.187. $v \approx k\Theta/\hbar\sqrt[3]{6\pi^2 n_0} = 3{,}4$ км/с, где n_0 — концентрация атомов. Табличные значения: $v_\parallel = 6{,}3$ км/с, $v_\perp = 3{,}1$ км/с.

6.188. Колебательная энергия моля «кристаллаа»

$$U = R\Theta\left[\frac{1}{4} + \left(\frac{T}{\Theta}\right)^2 \int_0^{\Theta/T} \frac{x\,dx}{e^x - 1}\right],$$

где $x = \hbar\omega/kT$. Отсюда молярная теплоемкость

$$C = R\left(\frac{2T}{\Theta}\int_0^{\Theta/T} \frac{x\,dx}{e^x - 1} - \frac{\Theta/T}{e^{\Theta/T} - 1}\right).$$

При $T \gg \Theta$ теплоемкость $C \approx R$.

6.189. а) $dN/d\omega = 2l/\pi a\sqrt{\omega_{\text{макс}}^2 - \omega^2}$; б) $N = l/a$, т. е. равно числу атомов в цепочке.

6.190. $U_0 = 9R\Theta/8\mu = 48{,}6$ Дж/г, где μ — молярная масса меди.

6.191. а) $\Theta \approx 220$ К; б) $C \approx 10$ Дж/(моль · К); в) $\omega_{\text{макс}} = 4{,}1 \cdot 10^{13}$ рад/с.

6.193. Да, так как при этих температурах теплоемкость пропорциональна T^3.

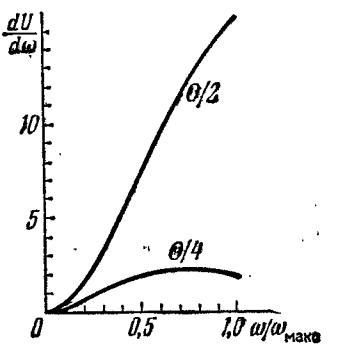


Рис. 47.

6.194. $\langle E\rangle = {}^3/_8 k\Theta$.

6.195. См. рис. 47.

6.196. $\hbar\omega_{\text{макс}} = 28$ мэВ, $\hbar k_{\text{макс}} \sim 10^{-19}$ г · см/с.

6.197. а) $T_{\text{макс}} = (3\pi^2 n)^{2/3}\hbar^2/2m$;
б) $\langle T\rangle = {}^3/_5 T_{\text{макс}}$.

6.198. $\eta = 1 - 2^{-3/2} \approx 65\%$.

6.199. 0,93.

6.200. $\approx 3 \cdot 10^4$ К.

6.201. $\Delta E = 2\pi^2\hbar^2/mV\,(3\pi^2 n)^{1/3} = 2 \cdot 10^{-22}$ эВ.

6.202. а) $dn_v = (m^3/\pi^2\hbar^3)\,v^2\,dv$; б) $\langle v\rangle/v_{\text{макс}} = {}^3/_4$.

6.203. $dn_\lambda = 8\pi\lambda^{-4}\,d\lambda$.

6.204. $p = {}^2/_3 n\,\langle T\rangle = (\pi\sqrt[3]{9\pi}\hbar^2/5m)\,n^{5/3} \approx 5 \cdot 10^4$ атм.

6.205. $A = kT\,(\eta T/\Delta T - 2) = 4{,}5$ эВ.

6.206. $n = \sqrt{1 + U_0/T} = 1{,}02$, где $U_0 = T_{\text{макс}} + A$, $T_{\text{макс}} = (3\pi^2 n)^{2/3}\hbar^2/2m$, A — работа выхода.

6.207. $E_{\text{мин}} = \dfrac{2kT_1T_2}{T_2 - T_1}\ln\eta = 0{,}33$ эВ.

6.208. $\alpha = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial T} = -\dfrac{\pi c\hbar}{kT^2\lambda_{\text{к}}} = -0{,}05$ К$^{-1}$, где $\rho \sim e^{\Delta E_0/2kT}$, ΔE_0 — ширина запрещенной зоны.

6.209. $\Delta E = -2k\dfrac{\Delta\ln\sigma}{\Delta(T^{-1})} = 1{,}2$ и $0{,}06$ эВ.

6.210. $\tau = t/\ln \dfrac{(\rho-\rho_1)\,\rho_2}{(\rho-\rho_2)\,\rho_1} = 0{,}01$ с.

6.211. $n = hBU/el\rho U_H = 5\cdot 10^{15}$ см$^{-3}$, $u_0 = lU_H/hBU = 0{,}05$ м^2/(В·с).

6.212. $|u_0^- - u_0^+| = 1/\eta B = 0{,}20$ м^2/(В·с).

6.213. $n^+/n^- = \eta^2 = 4{,}0$.

6.214. а) $P = 1 - \exp(-\lambda t)$; б) $\tau = 1/\lambda$.

6.215. Около $^1/_4$.

6.216. $1{,}2\cdot 10^{15}$.

6.217. $\tau \approx 16$ с.

6.218. $T = 5{,}3$ сут.

6.219. $4{,}6\cdot 10^2$ част./мин.

6.220. $\lambda = -(1/t)\ln(1-\eta) \approx \eta/t = 1{,}1\cdot 10^{-9}$ с$^{-1}$, $\tau = 1/\lambda = 1{,}0$ года.

6.221. $T = 4{,}5\cdot 10^9$ лет, $A = 1{,}2\cdot 10^4$ расп./с.

6.222. $4{,}1\cdot 10^3$ лет.

6.223. Около $2{,}0\cdot 10^9$ лет.

6.224. Соответственно $3{,}2\cdot 10^{17}$ и $0{,}8\cdot 10^5$ расп./(с·г).

6.225. $V = (A/A')\exp(-t\ln 2/T) = 6$ л.

6.226. 0,19%.

6.227. $T_1 = 1{,}6$ ч, $T_2 = 9{,}8$ ч; $N_2/N_1 = (T_2/T_1)\exp(\ln A_2 - \ln A_1) = 10$.

6.228. $t = -(T/\ln 2)\ln(1 - A/q) = 9{,}5$ сут.

6.229. а) $N_2(t) = N_{10}\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right)$; б) $t_m = \dfrac{\ln(\lambda_1/\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2}$.

6.230. а) $N_2(t) = \lambda N_{10} t\exp(-\lambda t)$; б) $t_m = 1/\lambda$.

6.231. $N_3(t) = N_{10}\left(1 + \dfrac{\lambda_1 e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_2-\lambda_1}\right)$.

6.232. $\dot{N}_\beta = N_0\lambda_1\exp(-\lambda_1 t) = 0{,}72\cdot 10^{11}$ част./с, $\dot{N}_\alpha = N_0\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right)\times$ $\times\,\lambda_1\lambda_2/(\lambda_2-\lambda_1) = 1{,}46\cdot 10^{11}$ част./с. Здесь N_0 — первоначальное число ядер Bi^{210}.

6.233. а) Pb^{206}; б) восемь α-распадов и шесть β-распадов.

6.234. $v = \sqrt{2m_\alpha T_\alpha}/m = 3{,}4\cdot 10^5$ м/с; 0,020.

6.235. 1,6 МДж.

6.236. 0,82 МэВ.

6.237. а) 6,1 см; б) соответственно $2{,}1\cdot 10^5$ и $0{,}77\cdot 10^5$.

6.238. $Q = \begin{cases} (M_м - M_д)c^2 \text{ при } \beta^-\text{-распаде и } K\text{-захвате,} \\ (M_м - M_д - 2m)c^2 \text{ при } \beta^+\text{-распаде.} \end{cases}$

6.239. 0,56 МэВ и 47,5 эВ.

6.240. 5 МДж.

6.241. 0,32 и 0,65 МэВ.

6.242. $T \approx {}^1/_2 Q\,(Q + 2mc^2)/M_N c^2 = 0{,}11$ кэВ, где $Q = (M_N - M_C - 2m)c^2$, m — масса электрона.

6.243. 40 км/с.

6.244. 0,45 c, где c — скорость света.

6.245. $\Delta\varepsilon/\varepsilon = E/2mc^2 = 3{,}6\cdot 10^{-7}$, где m — масса ядра.

6.246. $v \approx \varepsilon/mc = 0{,}22$ км/с, где m — масса ядра.

6.247. $v = gh/c = 65$ мкм/с.

6.248. $h_{мин} = \hbar c^2/g\varepsilon\tau = 4{,}6$ м.

6.249. $T = T_\alpha/[1 + (M-m)^2/4mM\cos^2\theta] = 6{,}0$ МэВ, где m и M — массы α-частицы и ядра лития.

6.250. а) $\eta = 4mM/(m+M)^2 = 0{,}89$; б) $\eta = 2m/(m+M) = {}^2/_3$. Здесь m и M — массы нейтрона и дейтона.

6.251. $\vartheta_{\text{макс}} = \arcsin(m_1/m_2) = 30°$, где m_1 и m_2 — массы протона и дейтона.

6.252. $2 \cdot 10^{11}$ кг/см^3, $1 \cdot 10^{38}$ нуклон/см^3.

6.253. а) d; б) F^{17}; в) α; г) Cl^{37}.

6.255. Be^8, $E_{\text{св}} = 56{,}5$ МэВ.

6.256. а) 8,0 МэВ; б) 11,5 и 8,7 МэВ; в) 14,5 МэВ.

6.257. $E_n - E_p = 0{,}22$ МэВ.

6.258. $E = 20\varepsilon_{Ne} - 2 \cdot 4\varepsilon_\alpha - 12\varepsilon_C = 11{,}9$ МэВ, где ε — энергия связи на один нуклон в соответствующем ядре.

6.259. а) 8,0225 а. е. м.; б) 10,0135 а. е. м.

6.260. $Q = (E_3 + E_4) - (E_1 + E_2)$.

6.261. а) $8{,}2 \cdot 10^{10}$ кДж, $2{,}7 \cdot 10^6$ кг; б) 1,5 кг.

6.262. $5{,}74 \cdot 10^7$ кДж; $2 \cdot 10^4$ кг.

6.263. 2,79 МэВ; 0,85 МэВ.

6.264. $Q = 8\varepsilon_\alpha - 7\varepsilon_{Li} = 17{,}3$ МэВ.

6.265. $Q = (1+\eta_p)\,T_p - (1-\eta_\alpha)\,T_\alpha - 2\sqrt{\eta_p \eta_\alpha T_p T_\alpha}\cos\vartheta = -1{,}2$ МэВ, где $\eta_p = m_p/m_O$, $\eta_\alpha = m_\alpha/m_O$.

6.266. а) —1,65 МэВ; б) 6,82 МэВ; в) —2,79 МэВ; г) 3,11 МэВ.

6.267. $v_\alpha = 0{,}92 \cdot 10^7$ м/с, $v_{Li} = 0{,}53 \cdot 10^7$ м/с.

6.268. 1,9 МэВ.

6.269. $T_n = \dfrac{Q + (1 - m_\alpha/m_C)\,T}{1 + m_n/m_C} = 8{,}5$ МэВ.

6.270. 9,1 МэВ, 170,5°.

6.272. $T \geqslant E_{\text{св}}(m_p + m_d)/m_d = 3{,}3$ МэВ.

6.273. В пределах от 1,89 до 2,06 МэВ.

6.274. $Q = -{}^{11}/_{12} T_{\text{пор}} = -3{,}7$ МэВ.

6.275. Соответственно 1,88 и 5,75 МэВ.

6.276. 4,4 МэВ; $5{,}3 \cdot 10^6$ м/с.

6.277. $T_\alpha = \dfrac{1}{m_3 + m_4}\left[(m_4 - m_1)\,T - \dfrac{m_2 m_4}{m_1 + m_2}\,T_{\text{пор}}\right] = 2{,}2$ МэВ, где m_1, m_2, m_3, m_4 — массы нейтрона, ядра C^{12}, α-частицы и ядра Be^9.

6.278. На $E_{\text{св}}/2mc^2 = 0{,}06\%$, где m — масса дейтона.

6.279. $E = Q + {}^2/_3 T = 6{,}5$ МэВ.

6.280. $E_i = E_{\text{св}} + \dfrac{m_C}{m_d + m_C}\,T_i = 16{,}7$, 16,9, 17,5 и 17,7 МэВ, где $E_{\text{св}}$ — энергия связи дейтона в промежуточном ядре.

6.281. $\sigma = (M/N\rho\,d)\ln\eta = 2{,}5$ кб, где M — молярная масса кадмия N — число Авогадро, ρ — плотность кадмия.

6.282. $I_0/I = \exp[(2\sigma_1 + \sigma_2)\,nd] = 20$, где n — концентрация молекул тяжелой воды.

6.283. $\omega = \{1 - \exp[-(\sigma_s + \sigma_a)\,nd]\}\,\sigma_s/(\sigma_s + \sigma_a) = 0{,}35$, где n — концентрация ядер железа.

6.284. а) $T = (\omega/k)\ln 2$; б) $\omega = ATe/It\ln 2 = 2 \cdot 10^{-3}$.

6.285. а) $t = \eta/\sigma J = 3 \cdot 10^6$ лет; б) $N_{\text{макс}} = J\sigma N_0 T/\ln 2 = 1{,}0 \cdot 10^{13}$, где N_0 — число ядер Au^{197} в фольге.

6.286. $N=(1-e^{-\lambda t})\,Jn\sigma/\lambda$.

6.287. $J=Ae^{\lambda\tau}/\sigma N_0\,(1-e^{-\lambda t})=6\cdot 10^9$ част./(см$^2\cdot$ с), где λ — постоянная распада, N_0 — число ядер Au в фольге.

6.288. $N=N_0k^{i-1}=1{,}3\cdot 10^5$, где i — число поколений.

6.289. $N=\nu P/E=0{,}8\cdot 10^{19}$ с$^{-1}$.

6.290. а) $N/N_0=4\cdot 10^2$; б) $T=\tau/(k-1)=10$ с.

6.291. Соответственно 0,05, 0,4 и 9 ГэВ.

6.292. $\langle l\rangle=c\tau_0\sqrt{\eta\,(\eta+2)}=15$ м.

6.293. $\tau_0=lmc/\sqrt{T\,(T+2mc^2)}=26$ нс, где m — масса покоя π-мезона.

6.294. $J/J_0=\exp\left[-\,lmc/\tau_0\sqrt{T\,(T+2mc^2)}\right]=0{,}22$, где m — масса покоя π^--мезона.

6.295 *). $T_\mu=(m_\pi-m_\mu)^2/2m_\pi=4{,}1$ МэВ, $E_\nu=29{,}8$ МэВ.

6.296*. $T=\left[(m_\Sigma-m_n)^2-m_\pi^2\right]/2m_\Sigma=19{,}5$ МэВ.

6.297*. $T_{\text{макс}}=(m_\mu-m_e)^2/2m_\mu=52{,}5$ МэВ.

6.298*. $m=m_p+T+\sqrt{m_\pi^2+T\,(T+2m_p)}=1115$ МэВ, Λ — частица.

6.299*. $E_\nu={}^1\!/_2\,(m_\pi^2-m_\mu^2)/(m_\pi+T)=22$ МэВ.

6.300*. $m=\sqrt{m_\Sigma^2+m_\pi^2-2\,(m_\Sigma+T_\Sigma)\,(m_\pi+T_\pi)}=0{,}94$ ГэВ, нейтрон.

6.301*. $T_\pi=m_\pi\,[\csc(\theta/2)-1]$, $E_\gamma=m_\pi/2\sin(\theta/2)$. При $\theta=60°$ энергия $T_\pi=E_\gamma=m_\pi$.

6.303*. $\cos(\theta/2)=1/\sqrt{1+2m/T}$, отсюда $\theta=99°$.

6.304*. а) $\varepsilon_{\text{пор}}=4m_e=2{,}04$ МэВ; б) $\varepsilon_{\text{пор}}=2m_\pi\,(1+m_\pi/m_p)=320$ МэВ.

6.305*. а) $T_{\text{пор}}=6m_p=5{,}6$ ГэВ; б) $T_{\text{пор}}=m_\pi\,(4m_p+m_\pi)/2m_p=0{,}28$ ГэВ.

6.306. а) 0,90 ГэВ; б) 0,77 ГэВ.

6.307. $S=-2$, $Y=-1$, Ξ^0-частица.

6.308. Запрещены 1, 2 и 3.

6.309. Запрещены 2, 4 и 5.

6.310. Энергетически (1); в остальных процессах не сохраняются: барионный заряд (2), электрический заряд (3), странность (4), лептонный заряд (5) и (6) — электронный и мюонный.

---

*) В ответах задач 6.295—6.305, отмеченных звездочкой, использовано сокращенное обозначение: m вместо mc^2.

1. Основные тригонометрические формулы

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$\sec^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha=1$$
$$\csc^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha=1$$
$$\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1$$
$$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$$
$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$
$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\mp1}{\operatorname{ctg}\beta\pm\operatorname{ctg}\alpha}$$

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$$
$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$
$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$
$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$
$$\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta=\pm\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$$
$$2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)$$
$$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)$$

$$\operatorname{sh}\alpha=\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}$$
$$\operatorname{ch}\alpha=\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}$$

$$\operatorname{th}\alpha=\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}$$
$$\operatorname{cth}\alpha=\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}$$

2. Таблица синусов

φ°	0′	20′	40′	φ°	0′	20′	40′
0	0,0000	0,0058	0,0116	45	0,7071	0,7112	0,7153
1	0,0175	0,0233	0,0291	46	0,7193	0,7234	0,7274
2	0,0349	0,0407	0,0465	47	0,7314	0,7353	0,7393
3	0,0523	0,0581	0,0640	48	0,7431	0,7470	0,7504
4	0,0698	0,0756	0,0814	49	0,7547	0,7585	0,7622
5	0,0872	0,0929	0,0987	50	0,7660	0,7698	0,7735
6	0,1045	0,1103	0,1161	51	0,7771	0,7808	0,7844
7	0,1219	0,1276	0,1334	52	0,7880	0,7916	0,7951
8	0,1392	0,1449	0,1507	53	0,7986	0,8021	0,8056
9	0,1564	0,1622	0,1679	54	0,8090	0,8124	0,8158
10	0,1736	0,1794	0,1851	55	0,8192	0,8225	0,8258
11	0,1908	0,1965	0,2022	56	0,8290	0,8323	0,8355
12	0,2079	0,2136	0,2196	57	0,8387	0,8418	0,8450
13	0,2250	0,2306	0,2363	58	0,8480	0,8511	0,8542
14	0,2419	0,2476	0,2532	59	0,8572	0,8601	0,8631
15	0,2588	0,2644	0,2700	60	0,8660	0,8689	0,8718
16	0,2756	0,2812	0,2868	61	0,8746	0,8774	0,8802
17	0,2924	0,2979	0,3035	62	0,8829	0,8857	0,8884
18	0,3090	0,3145	0,3201	63	0,8910	0,8936	0,8962
19	0,3256	0,3311	0,3365	64	0,8988	0,9013	0,9038
20	0,3420	0,3475	0,3529	65	0,9063	0,9088	0,9112
21	0,3584	0,3638	0,3692	66	0,9135	0,9159	0,9182
22	0,3746	0,3800	0,3854	67	0,9205	0,9228	0,9250
23	0,3907	0,3961	0,4014	68	0,9272	0,9293	0,9315
24	0,4067	0,4120	0,4173	69	0,9336	0,9356	0,9377
25	0,4226	0,4279	0,4331	70	0,9397	0,9417	0,9436
26	0,4384	0,4436	0,4488	71	0,9455	0,9474	0,9492
27	0,4540	0,4592	0,4643	72	0,9511	0,9528	0,9546
28	0,4695	0,4746	0,4797	73	0,9563	0,9580	0,9596
29	0,4848	0,4899	0,4950	74	0,9613	0,9628	0,9644
30	0,5000	0,5050	0,5100	75	0,9659	0,9674	0,9689
31	0,5150	0,5200	0,5250	76	0,9703	0,9717	0,9730
32	0,5299	0,5348	0,5398	77	0,9744	0,9757	0,9769
33	0,5446	0,5495	0,5544	78	0,9781	0,9793	0,9805
34	0,5592	0,5640	0,5688	79	0,9816	0,9827	0,9838
35	0,5736	0,5783	0,5831	80	0,9848	0,9858	0,9868
36	0,5878	0,5925	0,5972	81	0,9877	0,9886	0,9894
37	0,6018	0,6065	0,6111	82	0,9903	0,9911	0,9918
38	0,6157	0,6202	0,6248	83	0,9925	0,9932	0,9939
39	0,6293	0,6338	0,6383	84	0,9945	0,9951	0,9957
40	0,6428	0,6472	0,6517	85	0,9962	0,9967	0,9971
41	0,6561	0,6604	0,6648	86	0,9976	0,9980	0,9983
42	0,6691	0,6734	0,6777	87	0,9986	0,9989	0,9992
43	0,6820	0,6862	0,6905	88	0,9994	0,9996	0,9997
44	0,6947	0,6988	0,7030	89	0,9998	0,9999	1,0000

3. Таблица тангенсов

φ°	0′	20′	40′	φ°	0′	20′	40′
0	0,0000	0,0058	0,0116	45	1,0000	1,012	1,024
1	0,0175	0,0233	0,0291	46	1,036	1,048	1,060
2	0,0349	0,0407	0,0466	47	1,072	1,085	1,098
3	0,0524	0,0582	0,0641	48	1,111	1,124	1,137
4	0,0699	0,0758	0,0816	49	1,150	1,164	1,178
5	0,0875	0,0934	0,0992	50	1,192	1,206	1,220
6	0,1051	0,1110	0,1169	51	1,235	1,250	1,265
7	0,1228	0,1287	0,1346	52	1,280	1,295	1,311
8	0,1405	0,1465	0,1524	53	1,327	1,343	1,360
9	0,1584	0,1644	0,1703	54	1,376	1,393	1,411
10	0,1763	0,1823	0,1883	55	1,428	1,446	1,464
11	0,1944	0,2004	0,2065	56	1,483	1,501	1,520
12	0,2126	0,2186	0,2247	57	1,540	1,560	1,580
13	0,2309	0,2370	0,2432	58	1,600	1,621	1,643
14	0,2493	0,2555	0,2617	59	1,664	1,686	1,709
15	0,2679	0,2742	0,2805	60	1,732	1,756	1,780
16	0,2867	0,2931	0,2994	61	1,804	1,829	1,855
17	0,3057	0,3121	0,3185	62	1,881	1,907	1,935
18	0,3249	0,3314	0,3378	63	1,963	1,991	2,020
19	0,3443	0,3508	0,3574	64	2,050	2,081	2,112
20	0,3640	0,3706	0,3772	65	2,145	2,177	2,211
21	0,3839	0,3906	0,3973	66	2,246	2,282	2,318
22	0,4040	0,4108	0,4176	67	2,356	2,394	2,434
23	0,4245	0,4314	0,4383	68	2,475	2,517	2,560
24	0,4452	0,4522	0,4592	69	2,605	2,651	2,699
25	0,4663	0,4734	0,4806	70	2,747	2,798	2,850
26	0,4877	0,4950	0,5022	71	2,904	2,960	3,018
27	0,5095	0,5169	0,5243	72	3,078	3,140	3,204
28	0,5317	0,5392	0,5467	73	3,271	3,340	3,412
29	0,5543	0,5619	0,5696	74	3,487	3,566	3,647
30	0,5774	0,5851	0,5930	75	3,732	3,821	3,914
31	0,6009	0,6088	0,6168	76	4,011	4,113	4,219
32	0,6249	0,6330	0,6412	77	4,331	4,449	4,574
33	0,6494	0,6577	0,6661	78	4,705	4,843	4,989
34	0,6745	0,6830	0,6916	79	5,145	5,309	5,485
35	0,7002	0,7089	0,7177	80	5,671	5,871	6,084
36	0,7265	0,7355	0,7445	81	6,314	6,561	6,827
37	0,7536	0,7627	0,7720	82	7,115	7,429	7,770
38	0,7813	0,7907	0,8002	83	8,144	8,556	9,010
39	0,8098	0,8195	0,8292	84	9,514	10,08	10,71
40	0,8391	0,8491	0,8591	85	11,43	12,25	13,20
41	0,8693	0,8796	0,8899	86	14,30	15,60	17,17
42	0,9004	0,9110	0,9217	87	19,08	21,47	24,54
43	0,9325	0,9435	0,9545	88	28,64	34,37	42,96
44	0,9657	0,9770	0,9884	89	57,29	85,94	171,9

4. Таблица десятичных логарифмов

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2488	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7475
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8632	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

5. Показательные функции

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0,00	1,0000	1,0000	2,00	7,3891	0,1353
0,05	1,0513	0,9512	2,05	7,7679	0,1287
0,10	1,1052	0,9048	2,10	8,1662	0,1225
0,15	1,1618	0,8607	2,15	8,5849	0,1165
0,20	1,2214	0,8187	2,20	9,0250	0,1108
0,25	1,2840	0,7788	2,25	9,4877	0,1054
0,30	1,3499	0,7408	2,30	9,9742	0,1003
0,35	1,4191	0,7047	2,35	10,486	0,09537
0,40	1,4918	0,6703	2,40	11,023	0,09072
0,45	1,5683	0,6376	2,45	11,588	0,08629
0,50	1,6487	0,6065	2,50	12,182	0,08208
0,55	1,7333	0,5770	2,55	12,807	0,07808
0,60	1,8221	0,5488	2,60	13,464	0,07427
0,65	1,9155	0,5221	2,65	14,154	0,07065
0,70	2,0138	0,4966	2,70	14,880	0,06721
0,75	2,1170	0,4724	2,75	15,643	0,06393
0,80	2,2255	0,4493	2,80	16,445	0,06081
0,85	2,3396	0,4274	2,85	17,288	0,05784
0,90	2,4596	0,4066	2,90	18,174	0,05502
0,95	2,5857	0,3867	2,95	19,106	0,05234
1,00	2,7183	0,3679	3,00	20,086	0,04979
1,05	2,8577	0,3499	3,05	21,115	0,04736
1,10	3,0042	0,3329	3,10	22,198	0,04505
1,15	3,1582	0,3166	3,15	23,336	0,04285
1,20	3,3201	0,3012	3,20	24,533	0,04076
1,25	3,4903	0,2865	3,25	25,790	0,03877
1,30	3,6693	0,2725	3,30	27,113	0,03688
1,35	3,8574	0,2592	3,35	28,503	0,03508
1,40	4,0552	0,2466	3,40	29,964	0,03337
1,45	4,2631	0,2346	3,45	31,500	0,03175
1,50	4,4817	0,2231	3,50	33,115	0,03020
1,55	4,7115	0,2123	3,55	34,813	0,02872
1,60	4,9530	0,2019	3,60	36,598	0,02732
1,65	5,2070	0,1921	3,65	38,475	0,02599
1,70	5,4739	0,1827	3,70	40,447	0,02472
1,75	5,7546	0,1738	3,75	42,521	0,02352
1,80	6,0496	0,1653	3,80	44,701	0,02237
1,85	6,3598	0,1572	3,85	46,993	0,02128
1,90	6,6859	0,1496	3,90	49,402	0,02024
1,95	7,0287	0,1423	3,95	51,935	0,01925

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
4,00	54,598	0,01832	6,0	403,43	0,00248
4,05	57,397	0,01742	6,1	445,86	0,00224
4,10	60,340	0,01657	6,2	492,75	0,00203
4,15	63,434	0,01576	6,3	544,57	0,00184
4,20	66,686	0,01500	6,4	601,85	0,00166
4,25	70,105	0,01426	6,5	665,14	0,001503
4,30	73,700	0,01357	6,6	735,10	0,001360
4,35	77,478	0,01991	6,7	812,41	0,001231
4,40	81,451	0,01228	6,8	897,85	0,001114
4,45	85,627	0,01168	6,9	992,27	0,001008
4,50	90,017	0,01111	7,0	1096,6	0,000912
4,55	94,632	0,01057	7,1	1212,2	0,000825
4,60	99,484	0,01005	7,2	1339,4	0,000747
4,65	104,58	0,00956	7,3	1480,5	0,000676
4,70	109,95	0,00910	7,4	1636,0	0,000611
4,75	115,58	0,00865	7,5	1808,0	0,000553
4,80	121,51	0,00823	7,6	1998,2	0,000500
4,85	127,74	0,00783	7,7	2208,3	0,000453
4,90	134,29	0,00745	7,8	2440,6	0,000410
4,95	141,17	0,00708	7,9	2697,3	0,000371
5,00	148,41	0,00674	8,0	2981,0	0,000335
5,05	156,02	0,00641	8,1	3294,5	0,000304
5,10	164,02	0,00610	8,2	3641,0	0,000275
5,15	172,43	0,00580	8,3	4023,9	0,000249
5,20	181,27	0,00552	8,4	4447,1	0,000225
5,25	190,57	0,00525	8,5	4914,8	0,000203
5,30	200,34	0,00499	8,6	5431,7	0,000184
5,35	210,61	0,00475	8,7	6002,9	0,000167
5,40	221,41	0,00452	8,8	6634,2	0,000151
5,45	232,76	0,00430	8,9	7332,0	0,000136
5,50	244,69	0,00409	9,0	8103,1	0,000123
5,55	257,24	0,00389	9,1	8955,3	0,000112
5,60	270,43	0,00370	9,2	9897,1	0,000101
5,65	284,29	0,00352	9,3	10938	0,000091
5,70	298,87	0,00335	9,4	12088	0,000083
5,75	314,19	0,00318	9,5	13360	0,000075
5,80	330,30	0,00303	9,6	14765	0,000068
5,85	347,23	0,00288	9,7	16318	0,000061
5,90	365,04	0,00274	9,8	18034	0,000055
5,95	383,75	0,00261	9,9	19930	0,000050
			10,0	22026	0,000045

6. Греческий алфавит

A, α — альфа	I, ι — йота	P, ρ — ро
B, β — бета	K, $\varkappa$ — каппа	Σ, σ — сигма
Γ, γ — гамма	Λ, λ — ламбда	T, τ — тау
Δ, δ — дельта	M, μ — мю	Υ, υ — ипсилон
E, ε — эпсилон	N, ν — ню	Φ, φ — фи
Z, ζ — дзета	Ξ, ξ — кси	X, χ — хи
H, η — эта	O, o — омикрон	Ψ, ψ — пси
Θ, ϑ, θ — тэта	Π, π — пи	Ω, ω — омега

7. Некоторые постоянные числа и приближенные формулы

Постоянные числа	Приближенные формулы (при $\alpha \ll 1$)
$\pi = 3{,}1416$	$(1 \pm \alpha)^n \approx 1 \pm n\alpha$
$\pi^2 = 9{,}8696$	$e^{\alpha} \approx 1 + \alpha$
$\sqrt{\pi} = 1{,}7725$	$\ln(1+\alpha) \approx \alpha$
$e = 2{,}7183$	$\sin\alpha \approx \alpha$
$\lg e = 0{,}4343$	$\cos\alpha \approx 1 - \alpha^2/2$
$\ln 10 = 2{,}3026$	$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$

8. Некоторые сведения о векторах

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac} \qquad [\mathbf{a}, \mathbf{b}+\mathbf{c}] = [\mathbf{ab}] + [\mathbf{ac}]$$

$$\mathbf{ab} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad [\mathbf{a}\,[\mathbf{bc}]] = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab})$$

$$[\mathbf{ab}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\,\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\mathbf{k}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{b}}{dt} \qquad \frac{d}{dt}(\mathbf{ab}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\mathbf{b} + \mathbf{a}\frac{d\mathbf{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\alpha\mathbf{a}) = \frac{d\alpha}{dt}\mathbf{a} + \alpha\frac{d\mathbf{a}}{dt} \qquad \frac{d}{dt}[\mathbf{ab}] = \left[\frac{d\mathbf{a}}{dt}\mathbf{b}\right] + \left[\mathbf{a}\frac{d\mathbf{b}}{dt}\right]$$

9. Таблица производных и интегралов

Функция	Производная	Функция	Производная	Функция	Производная
x^n	nx^{n-1}	$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
e^{nx}	ne^{nx}			$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
a^x	$a^x \ln a$	$\ln u$	$\frac{u'}{u}$	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{u}{v}$	$\frac{vu'-v'u}{v^2}$	$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ (n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln \cos x$$

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln \sin x$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$$

$$\int e^x\,dx = e^x$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

Интегрирование «по частям»: $\int u \cdot dv = uv - \int v\,du$

Значения некоторых определенных интегралов

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 1/2\sqrt{\pi}, & n=1/2 \\ 1, & n=1 \\ 2, & n=2 \end{cases}$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-x^2}dx = \begin{cases} 1/2\sqrt{\pi}, & n=0 \\ 1/2, & n=1 \\ 1/4\sqrt{\pi}, & n=2 \\ 1/2, & n=3 \end{cases}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^n dx}{e^x-1} = \begin{cases} 2{,}31, & n=1/2 \\ \pi^2/6, & n=1 \\ 2{,}405, & n=2 \\ \pi^4/15, & n=3 \\ 24{,}9, & n=4 \end{cases}$$

$$\int_0^\alpha \frac{x^3 dx}{e^x-1} = \begin{cases} 0{,}225, & \alpha=1 \\ 1{,}18, & \alpha=2 \\ 2{,}56, & \alpha=3 \\ 4{,}91, & \alpha=5 \\ 6{,}43, & \alpha=10 \end{cases}$$

10. Астрономические величины

Космическое тело	Средний радиус, м	Масса, кг	Средняя плотность, 10^3 кг/м³	Период обращения вокруг оси, сутки
Солнце	$6{,}95 \cdot 10^8$	$1{,}97 \cdot 10^{30}$	1,41	25,4
Земля	$6{,}37 \cdot 10^6$	$5{,}96 \cdot 10^{24}$	5,52	1,00
Луна	$1{,}74 \cdot 10^6$	$7{,}30 \cdot 10^{22}$	3,30	27,3

Планеты Солнечной системы	Среднее расстояние от Солнца, 10^6 км	Период обращения вокруг Солнца в годах
Меркурий	57,87	0,241
Венера	108,14	0,615
Земля	149,50	1,000
Марс	227,79	1,881
Юпитер	777,8	11,862
Сатурн	1426,1	29,458
Уран	2867,7	84,013
Нептун	4494	164,79
Плутон	9508	248,43

11. Плотности веществ

Твердые вещества	ρ, г/см³
Алмаз	3,5
Алюминий	2,7
Вольфрам	19,1
Графит	1,6
Железо (сталь)	7,8
Золото	19,3
Кадмий	8,65
Кобальт	8,9
Лед	0,916
Медь	8,9
Молибден	10,2
Натрий	0,97
Никель	8,9
Олово	7,4
Платина	21,5
Пробка	0,20
Свинец	11,3
Серебро	10,5
Титан	4,5
Уран	19,0
Фарфор	2,3
Цинк	7,0

Жидкости	ρ, г/см³
Бензол	0,88
Вода	1,00
Глицерин	1,26
Касторовое масло	0,90
Керосин	0,80
Ртуть	13,6
Спирт	0,79
Тяжелая вода	1,1
Эфир	0,72

Газы (при нормальных условиях)	ρ, кг/м³
Азот	1,25
Аммиак	0,77
Водород	0,09
Воздух	1,293
Кислород	1,43
Метан	0,72
Углекислый газ	1,98
Хлор	3,21

12. Коэффициенты теплового расширения

(при комнатных температурах)

Твердое тело	Коэффициент линейного расширения α, 10^{-6} K^{-1}	Жидкость	Коэффициент объемного расширения β, 10^{-4} K^{-1}
Алюминий	22,9	Вода	2,1
Латунь	18,9	Глицерин	5,0
Медь	16,7	Керосин	10,0
Сталь (железо)	11	Ртуть	1,8
Стекло обычное	8,5	Спирт этиловый	11,0

Примечание. $\alpha = \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial T}$, $\beta = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial T}$.

13. Упругие постоянные. Предел прочности

Материал	Модуль Юнга E, ГПа	Модуль сдвига G, ГПа	Коэффициент Пуассона μ	Предел прочности на разрыв σ_m, ГПа	Коэффициент сжимаемости β, $ГПа^{-1}$
Алюминий	70	26	0,34	0,10	0,014
Медь	130	40	0,34	0,30	0,007
Свинец	16	5,6	0,44	0,015	0,022
Сталь (железо)	200	81	0,29	0,60	0,006
Стекло	60	30	0,25	0,05	0,025
Вода	—	—	—	—	0,49

Примечание. Коэффициент сжимаемости $\beta = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}$.

14. Давление насыщенных паров воды

°C	Давление, кПа	°C	Давление, кПа	°C	Давление, кПа
0	0,61	25	3,15	60	19,9
5	0,87	30	4,23	70	31,0
10	1,22	35	5,60	80	47,3
15	1,70	40	7,35	90	70,0
20	2,33	50	12,3	100	101

15. Постоянные газов

(при нормальных условиях)

Газ	Относительная молекулярная масса	$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$	Теплопроводность $\varkappa$, $\frac{\text{мВт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	Вязкость η, мкПа·с	Диаметр молекулы d, нм	Постоянные Ван-дер-Ваальса	
						a, $\frac{\text{атм} \cdot \text{л}^2}{\text{моль}^2}$	b, $\frac{\text{л}}{\text{моль}}$
He	4	1,63	141,5	18,9	0,20	—	—
Ar	40	1,67	16,2	22,1	0,35	1,30	0,032
H_2	2	1,41	168,4	8,4	0,27	0,24	0,027
N_2	28	1,40	24,3	16,7	0,37	1,35	0,039
O_2	32	1,40	24,4	19,2	0,35	1,35	0,032
CO_2	44	1,30	23,2	14,0	0,40	3,62	0,043
H_2O	18	1,32	15,8	9,0	0,30	5,47	0,030
Воздух	29	1,40	24,1	17,2	0,35	—	—

Примечание. В этой таблице приведены средние значения диаметров молекул. При более точных расчетах следует иметь в виду, что значения d, полученные из коэффициентов вязкости, теплопроводности, диффузии и постоянной b Ван-дер-Ваальса, заметно отличаются друг от друга.

16. Постоянные жидкостей и твердых тел

(при нормальных условиях)

Вещество	Удельная теплоемкость c, $\frac{\text{Дж}}{\text{г} \cdot \text{К}}$	Удельная теплота парообразования q, Дж/г	Удельная теплота плавления q, Дж/г	Поверхностное натяжение α, мН/м
Вода	4,18	2250	—	73
Глицерин	2,42	—	—	66
Ртуть	0,14	284	—	490
Спирт	2,42	853	—	22
Алюминий	0,90	—	321	—
Железо	0,46	—	270	—
Лед	2,09	—	333	—
Медь	0,39	—	175	—
Серебро	0,23	—	88	—
Свинец	0,13	—	25	—

17. Диэлектрические проницаемости

(относительные)

Диэлектрик	ε	Диэлектрик	ε
Вода	81	Слюда	7,5
Воздух	1,00058	Спирт	26
Керосин	2,0	Стекло	6,0
Парафин	2,0	Фарфор	6,0
Плексиглас	3,5	Эбонит	2,7
Полиэтилен	2,3		

18. Удельные сопротивления проводников

Проводник	Удельное сопротивление (при 20 °С) ρ, нОм·м	Температурный коэффициент α, кК$^{-1}$
Алюминий	25	4,5
Вольфрам	50	4,8
Железо	90	6,5
Золото	20	4,0
Медь	16	4,3
Свинец	190	4,2
Серебро	15	4,1

19. Магнитные восприимчивости пара- и диамагнетиков

(относительные)

Парамагнетики	$\mu-1$, 10^{-6}	Диамагнетики	$\mu-1$, 10^{-6}
Азот	0,013	Водород	—0,063
Воздух	0,38	Бензол	—7,5
Кислород	1,9	Вода	—9,0
Эбонит	14	Медь	—10,3
Алюминий	23	Стекло	—12,6
Вольфрам	176	Каменная соль	—12,6
Платина	360	Кварц	—15,1
Жидкий кислород	3400	Висмут	—176

20. Показатели преломления

Вещество	n	Вещество	n
Воздух	1,00029	Стекло	1,50
Вода	1,33	Алмаз	2,42

Примечание. Как известно, показатели преломления зависят от природы вещества и длины волны света, поэтому приведенные в этой таблице значения n следует рассматривать как условные.

Длина волны λ, нм	Цвет	Исландский шпат		Кварц	
		n_e	n_o	n_e	n_o
687	красный	1,484	1,653	1,550	1,541
656	оранжевый	1,485	1,655	1,551	1,542
589	желтый	1,486	1,658	1,553	1,544
527	зеленый	1,489	1,664	1,556	1,547
486	голубой	1,491	1,668	1,559	1,550
431	сине-фиолетовый	1,495	1,676	1,564	1,554
400	фиолетовый	1,498	1,683	1,568	1,558

21. Вращение плоскости поляризации

Естественное вращение в кварце (толщина пластинки 1 мм)

λ, нм	φ, *град*	λ, нм	φ, *град*	λ, нм	φ, *град*
199,0	295,65	344,1	70,59	589,5	21,72
217,4	226,91	372,6	58,89	656,3	17,32
219,4	220,7	404,7	48,93	670,8	16,54
257,1	143,3	435,9	41,54	1040	6,69
274,7	121,1	491,6	31,98	1450	3,41
328,6	78,58	508,6	29,72	1770	2,28

Магнитное вращение ($\lambda = 589$ нм). Постоянная Верде V:

Жидкость	V, угл. мин/А	Жидкость	V, угл. мин/А
Бензол	2,59	Сероуглерод	0,053
Вода	0,016	Спирт этиловый	1,072

22. Работа выхода электрона из металлов

Металл	A, эВ	Металл	A, эВ	Металл	A, эВ
Алюминий	3,74	Калий	2,15	Никель	4,84
Барий	2,29	Кобальт	4,25	Платина	5,29
Висмут	4,62	Литий	2,39	Серебро	4,28
Вольфрам	4,50	Медь	4,47	Титан	3,92
Железо	4,36	Молибден	4,27	Цезий	1,89
Золото	4,58	Натрий	2,27	Цинк	3,74

23. Край K-полосы поглощения

Z	Элемент	λ_K, пм	Z	Элемент	λ_K, пм
23	V	226,8	47	Ag	48,60
26	Fe	174,1	50	Sn	42,39
27	Co	160,4	74	W	17,85
28	Ni	148,6	78	Pt	15,85
29	Cu	138,0	79	Au	15,35
30	Zn	128,4	82	Pb	14,05
42	Mo	61,9	92	U	10,75

24. Массовые коэффициенты ослабления

(рентгеновское излучение, узкий пучок)

λ, пм	Массовый коэффициент ослабления μ/ρ, см^2/г				
	Воздух	Вода	Алюминий	Медь	Свинец
10		0,16	0,16	0,36	3,8
20		0,18	0,28	1,5	4,9
30		0,29	0,47	4,3	14
40		0,44	1,1	9,8	31
50	0,48	0,66	2,0	19	54
60	0,75	1,0	3,4	32	90
70	1,3	1,5	5,1	48	139
80	1,6	2,1	7,4	70	
90	2,1	2,8	11	98	
100	2,6	3,8	15	131	
150	8,7	12	46	49	
200	21	28	102	108	
250	39	51	194	198	

25. Потенциалы ионизации атомов

Z	Атом	Потенциал ионизации φ_i, В	Z	Атом	Потенциал ионизации φ_i, В
1	H	13,59	7	N	14,54
2	He	24,58	8	O	13,62
3	Li	5,39	9	F	17,42
4	Be	9,32	10	Ne	21,56
5	B	8,30	11	Na	5,14
6	C	11,27	80	Hg	10,44

26. Массы легких атомов

Z	Изотоп	Избыток массы атома $A_r - A$, а.е.м.	Z	Изотоп	Избыток массы атома $A_r - A$, а.е.м.
0	n	0,00867	6	C^{11}	0,01143
1	H^1	0,00783		C^{12}	0
	H^2	0,01410		C^{13}	0,00335
	H^3	0,01605	7	N^{13}	0,00574
2	He^3	0,01603		N^{14}	0,00307
	He^4	0,00260		N^{15}	0,00011
3	Li^6	0,01513	8	O^{15}	0,00307
	Li^7	0,01601		O^{16}	—0,00509
4	Be^7	0,01693		O^{17}	—0,00087
	Be^8	0,00531	9	F^{19}	—0,00160
	Be^9	0,01219	10	Ne^{20}	—0,00756
	Be^{10}	0,01354	11	Na^{23}	—0,01023
5	B^{10}	0,01294		Na^{24}	—0,00903
	B^{11}	0,00930	12	Mg^{24}	—0,01496

Примечание. Здесь A_r — относительная атомная масса (в а. е. м.), A — массовое число.

27. Периоды полураспада радиоизотопов

Z	Изотоп	Тип распада	Период полураспада
27	Кобальт Co^{60}	β	5,2 года
38	Строиций Sr^{90}	β	28 лет
84	Полоний Po^{210}	α	138 дней
86	Радон Rn^{222}	α	3,8 дня
88	Радий Ra^{226}	α	1620 лет
92	Уран U^{238}	α	$4{,}5 \cdot 10^9$ лет

28. Единицы физических величин

Обозначения и названия некоторых единиц

А — ампер	дин — дина	Н — ньютон
а. е. м. — атомная единица массы	Дж — джоуль	П — пуаз
Б — бел	дп — диоптрия	Па — паскаль
б — барн	К — кельвин	рад — радиан
В — вольт	кд — кандела	с — секунда
Вб — вебер	Кл — кулон	См — сименс
Вт — ватт	л — литр	ср — стерадиан
Г — генри	лк — люкс	Т — тесла
г — грамм	лм — люмен	Ф — фарада
Гс — гаусс	м — метр	ч — час
*Гц — герц	мин — минута	Э — эрстед
	Мкс — максвелл	эВ — электронвольт

Десятичные приставки к названиям единиц

Г — гига (10^9)	д — деци (10^{-1})	мк — микро (10^{-6})
М — мега (10^6)	с — санти (10^{-2})	и — нано (10^{-9})
к — кило (10^3)	м — милли (10^{-3})	п — пико (10^{-12})

Единицы величин в СИ и СГС

Величина	Единица величины		Отношение ед. СИ / ед. СГС
	СИ	СГС	
Длина	м	см	10^2
Время	с	с	1
Скорость	м/с	см/с	10^2
Ускорение	м/с^2	см/с^2	10^2
Частота колебаний	Гц	Гц	1
Угловая скорость	рад/с	рад/с	1
Угловое ускорение	рад/с^2	рад/с^2	1
Масса	кг	г	10^3
Плотность	кг/м^3	г/см^3	10^{-3}
Сила	Н	дин	10^5
Давление, напряжение	Па	дин/см^2	10
Импульс	кг · м/с	г · см/с	10^5
Момент силы	Н · м	дин · см	10^7
Энергия, работа	Дж	эрг	10^7
Мощность	Вт	эрг/с	10^7

Величина	Единица величины		Отношение ед. СИ / ед. СГС
	СИ	СГС	
Плотность потока энергии	Вт/м^2	эрг/(с · см^2)	10^3
Момент импульса	кг · м^2/с	г · см^2/с	10^7
Момент инерции	кг · м^2	г · см^2	10^7
Вязкость	Па · с	П	10
Температура	К	К	1
Теплоемкость, энтропия	Дж/К	эрг/К	10^7
Количество электричества	Кл	СГСЭ-ед.	$3 \cdot 10^9$
Потенциал	В	СГСЭ-ед.	1/300
Напряженность электрического поля	В/м	СГСЭ-ед.	$1/(3 \cdot 10^4)$
Электрическое смещение	Кл · м^2	СГСЭ-ед.	$12\pi \cdot 10^5$
Электрический момент диполя	Кл · м	СГСЭ-ед.	$3 \cdot 10^{11}$
Поляризованность	Кл/м^2	СГСЭ-ед.	$3 \cdot 10^5$
Емкость	Ф	см	$9 \cdot 10^{11}$
Сила тока	А	СГСЭ-ед.	$3 \cdot 10^9$
Плотность тока	А/м^2	СГСЭ-ед.	$3 \cdot 10^5$
Сопротивление	Ом	СГСЭ-ед.	$1/(9 \cdot 10^{11})$
Удельное сопротивление	Ом · м	СГСЭ-ед.	$1/(9 \cdot 10^9)$
Проводимость	См	СГСЭ-ед.	$9 \cdot 10^{11}$
Магнитная индукция	Т	Гс	10^4
Магнитный поток	Вб	Мкс	10^8
Напряженность магнитного поля	А/м	Э	$4\pi \cdot 10^{-3}$
Магнитный момент	А · м^2	СГСМ-ед.	10^3
Намагниченность	А/м	СГСМ-ед.	10^{-3}
Индуктивность	Г	см	10^9
Сила света	кд	кд	1
Световой поток	лм	лм	1
Освещенность	лк		
Светимость	лм/м^2		
Яркость	кд/м^2		

Примечание. Электрические и магнитные единицы в СГС даны здесь в гауссовой системе.

Некоторые внесистемные единицы

1 год = $3{,}11 \cdot 10^7$ с

1 атм = { 101,3 кПа / 760 мм рт. ст.

1 бар = 100 кПа (точно)

1 мм рт. ст. = 133,3 Па

1 л · атм = 101,3 Дж

1 кал = 4,18 Дж

1 Å = 10^{-8} см

1 б = 10^{-24} см^2

1 эВ = { $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж / $1{,}6 \cdot 10^{-12}$ эрг

1 а. е. м. = { $1{,}66 \cdot 10^{-24}$ г / 931,4 МэВ

1 Кп (кюри) = $3{,}70 \cdot 10^{10}$ расп./с

29. Основные формулы электродинамики в СИ и гауссовой системе

Наименование	СИ	Гауссова система
Напряженность поля точечного заряда	$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$	$E=\frac{q}{r^2}$
Напряженность поля плоского конденсатора	$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}$	$E=\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}$
Потенциал поля точечного заряда	$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$	$\varphi=\frac{q}{r}$
Связь между $\mathbf{E}$ и φ	$\mathbf{E}=-\nabla\varphi,\ \varphi_1-\varphi_2=\int_1^2 E_l dl$	
Электрический диполь $\mathbf{p}$ в поле $\mathbf{E}$	$\mathbf{N}=[\mathbf{pE}],\quad W=-\mathbf{pE}$	
Связь между $\mathbf{P}$ и $\mathbf{E}$	$\mathbf{P}=\varkappa\varepsilon_0\mathbf{E}$	$\mathbf{P}=\varkappa\mathbf{E}$
Связь между σ', $\mathbf{P}$ и $\mathbf{E}$	$\sigma'=P_n=\varkappa\varepsilon_0 E_n$	$\sigma'=P_n=\varkappa E_n$
Определение вектора $\mathbf{D}$	$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}$	$\mathbf{D}=\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}$
Связь между ε и $\varkappa$	$\varepsilon=1+\varkappa$	$\varepsilon=1+4\pi\varkappa$
Связь между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$	$\mathbf{D}=\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}$	$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$
Теорема Гаусса для вектора $\mathbf{D}$	$\oint D_n dS=q$	$\oint D_n dS=4\pi q$
Емкость конденсатора	$C=q/U$	
Емкость плоского конденсатора	$C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}$	$C=\frac{\varepsilon S}{4\pi d}$
Энергия системы зарядов	$W=\frac{1}{2}\sum q_i\varphi_i$	
Энергия конденсатора	$W=CU^2/2$	
Плотность энергии электрического поля	$w=\frac{ED}{2}$	$w=\frac{ED}{8\pi}$
Закон Ома	$\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$	
Закон Джоуля — Ленца	$w=\sigma E^2$	
Магнитный момент контура с током	$p_m=IS$	$p_m=\frac{1}{c}IS$
Магнитный диполь $\mathbf{p}_m$ в поле $\mathbf{B}$	$\mathbf{N}=[\mathbf{p}_m\mathbf{B}],\quad W=-\mathbf{p}_m\mathbf{B}$	
Закон Био — Савара	$d\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I[d\mathbf{l},\mathbf{r}]}{r^3}$	$d\mathbf{B}=\frac{1}{c}\frac{I[d\mathbf{l},\mathbf{r}]}{r^3}$
Индукция поля:		
а) прямого тока	$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{r}$	$B=\frac{1}{c}\frac{2I}{r}$
б) в центре витка	$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi I}{r}$	$B=\frac{1}{c}\frac{2\pi I}{r}$
в) в соленоиде	$B=\mu_0 nI$	$B=\frac{4\pi}{c}nI$

Наименование	СИ	Гауссова система
Определение вектора **H**	$\mathbf{H}=\mathbf{B}/\mu_0-\mathbf{J}$	$\mathbf{H}=\mathbf{B}-4\pi\mathbf{J}$
Циркуляция вектора **H** в постоянном поле	$\oint H_l dl = I$	$\oint H_l dl = \frac{4\pi}{c} I$
Связь между **J** и **H**	$\mathbf{J}=\chi\mathbf{H}$	
Связь между μ и χ	$\mu=1+\chi$	$\mu=1+4\pi\chi$
Связь между **B** и **H**	$\mathbf{B}=\mu_0\mu\mathbf{H}$	$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$
Сила Лоренца	$\mathbf{F}=q[\mathbf{vB}]$	$\mathbf{F}=\frac{q}{c}[\mathbf{vB}]$
Закон Ампера	$d\mathbf{F}=I[d\mathbf{l},\ \mathbf{B}]$	$d\mathbf{F}=\frac{I}{c}[d\mathbf{l},\ \mathbf{B}]$
Сила взаимодействия параллельных токов	$F=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I_1I_2}{d}$	$F=\frac{1}{c^2}\frac{2I_1I_2}{d}$
Э. д. с. индукции	$\mathscr{E}_i=-\frac{d\Phi}{dt}$	$\mathscr{E}_i=-\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$
Индуктивность	$L=\Phi/I$	$L=c\Phi/I$
Индуктивность соленоида	$L=\mu_0\mu n^2V$	$L=4\pi\mu n^2V$
Энергия магнитного поля тока	$W=\frac{LI^2}{2}$	$W=\frac{1}{c^2}\frac{LI^2}{2}$
Плотность энергии магнитного поля	$w=\frac{BH}{2}$	$w=\frac{BH}{8\pi}$
Уравнения Максвелла в интегральной форме	$\oint D_n dS=\int\rho\,dV$	$\oint D_n dS=4\pi\int\rho\,dV$
	$\oint E_l dl=-\int\dot{B}_n dS$	$\oint E_l dl=-\frac{1}{c}\int\dot{B}_n dS$
	$\oint B_n dS=0$	$\oint B_n dS=0$
	$\oint H_l dl=\int(j_n+\dot{D}_n)\,dS$	$\oint H_l dl=\frac{4\pi}{c}\int\left(i_n+\frac{\dot{D}_n}{4\pi}\right)dS$
Уравнения Максвелла в дифференциальной форме	$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$	$\nabla\cdot\mathbf{D}=4\pi\rho$
	$\nabla\times\mathbf{E}=-\dot{\mathbf{B}}$	$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}}$
	$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$	$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$
	$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{j}+\dot{\mathbf{D}}$	$\nabla\times\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\left(\mathbf{j}+\frac{\dot{\mathbf{D}}}{4\pi}\right)$
Скорость электромагнитной волны в среде	$v=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu}$	$v=c/\sqrt{\varepsilon\mu}$
Связь между E и H в электромагнитной волне	$E\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}=H\sqrt{\mu_0\mu}$	$E\sqrt{\varepsilon}=H\sqrt{\mu}$
Вектор Пойнтинга	$\mathbf{S}=[\mathbf{EH}]$	$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]$

30. Основные физические константы

Скорость света в вакууме	$c = 2{,}998 \cdot 10^{8}$ м/с
Гравитационная постоянная	$\gamma = \begin{cases} 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2) \\ 6{,}67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/(\text{г} \cdot \text{с}^2) \end{cases}$
Стандартное ускорение свободного падения	$g = 9{,}807$ м/с^2
Число Авогадро	$N_A = 6{,}023 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Стандартный объем газа	$V_0 = 22{,}4$ л/моль
Число Лошмидта	$n_0 = \begin{cases} 2{,}69 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3} \\ 2{,}69 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3} \end{cases}$
Универсальная газовая постоянная	$R = \begin{cases} 8{,}314 \text{ Дж}/(\text{К} \cdot \text{моль}) \\ 8{,}314 \cdot 10^{7} \text{ эрг}/(\text{К} \cdot \text{моль}) \\ 0{,}082 \text{ л} \cdot \text{атм}/(\text{К} \cdot \text{моль}) \end{cases}$
Постоянная Больцмана	$k = \begin{cases} 1{,}380 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К} \\ 1{,}380 \cdot 10^{-16} \text{ эрг/К} \end{cases}$
Число Фарадея	$F = \begin{cases} 0{,}965 \cdot 10^{8} \text{ Кл/кг-экв} \\ 2{,}90 \cdot 10^{14} \text{ СГСЭ/г-экв} \end{cases}$
Элементарный заряд	$e = \begin{cases} 1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \\ 4{,}803 \cdot 10^{-10} \text{ СГСЭ} \end{cases}$
Масса электрона	$m_e = \begin{cases} 0{,}911 \cdot 10^{-30} \text{ кг} \\ 0{,}911 \cdot 10^{-27} \text{ г} \\ 0{,}511 \text{ МэВ} \end{cases}$
Удельный заряд электрона	$\frac{e}{m_e} = \begin{cases} 1{,}76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг} \\ 5{,}27 \cdot 10^{17} \text{ СГСЭ/г} \end{cases}$
Масса протона	$m_p = \begin{cases} 1{,}672 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \\ 1{,}672 \cdot 10^{-24} \text{ г} \end{cases}$
Удельный заряд протона	$\frac{e}{m_p} = \begin{cases} 0{,}959 \cdot 10^{8} \text{ Кл/кг} \\ 2{,}87 \cdot 10^{14} \text{ СГСЭ/г} \end{cases}$
Постоянная Стефана — Больцмана	$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м$^2 \cdot$ К^4)
Постоянная закона смещения Вина	$b = 0{,}29$ см $\cdot$ К
Постоянная Планка	$\hbar = \begin{cases} 1{,}054 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} \\ 1{,}054 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с} \\ 0{,}659 \cdot 10^{-15} \text{ эВ} \cdot \text{с} \end{cases}$
Постоянная Ридберга	$R = \frac{me^4}{2\hbar^3} = 2{,}07 \cdot 10^{16}$ с$^{-1}$
	$R' = R/2\pi c = 1{,}097 \cdot 10^{5}$ см$^{-1}$
Первый боровский радиус	$r_1 = \hbar^2/me^2 = 0{,}529 \cdot 10^{-8}$ см
Энергия связи электрона в атоме водорода	$E = me^4/2\hbar^2 = 13{,}56$ эВ
Комптоновская длина волны электрона	$\lambda\!\!\!^{-}_C = \hbar/mc = 3{,}86 \cdot 10^{-11}$ см
Классический радиус электрона	$r_e = e^2/mc^2 = 2{,}82 \cdot 10^{-13}$ см
Магнетон Бора	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c} = 0{,}927 \cdot 10^{-20}$ эрг/Гс
Ядерный магнетон	$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p c} = 5{,}05 \cdot 10^{-24}$ эрг/Гс
Магнитный момент протона	$\mu_p = 2{,}7928\ \mu_N$
» » нейтрона	$\mu_n = -1{,}913\ \mu_N$
Атомная единица массы	1 а. е. м. $= \begin{cases} 1{,}660 \cdot 10^{-24} \text{ г} \\ 931{,}4 \text{ МэВ} \end{cases}$
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 0{,}885 \cdot 10^{-11}$ Ф/м
	$1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^{9}$ м/Ф
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 1{,}257 \cdot 10^{-6}$ Г/м
	$\mu_0/4\pi = 10^{-7}$ Г/м

Игорь Евгеньевич ИРОДОВ

ЗАДАЧИ ПО ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ

М., 1979 г., 368 стр. с илл.

Редактор Н. А. Микалина

Технический редактор В. Н. Кондакова

Корректоры З. В. Автонеева, Н. Д. Дорохова

ИБ № 11421

Сдано в набор 31.07.78. Подписано к печати 17.01.79. Бумага 60×90¹/₁₆, тип. № 1. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 23+форзац 0,25. Уч.-изд. л. 25,19+форзац 0,25. Тираж 125 000 экз. Заказ № 110. Цена книги 85 коп.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская, 26.