

Научно-популярный физико-математический

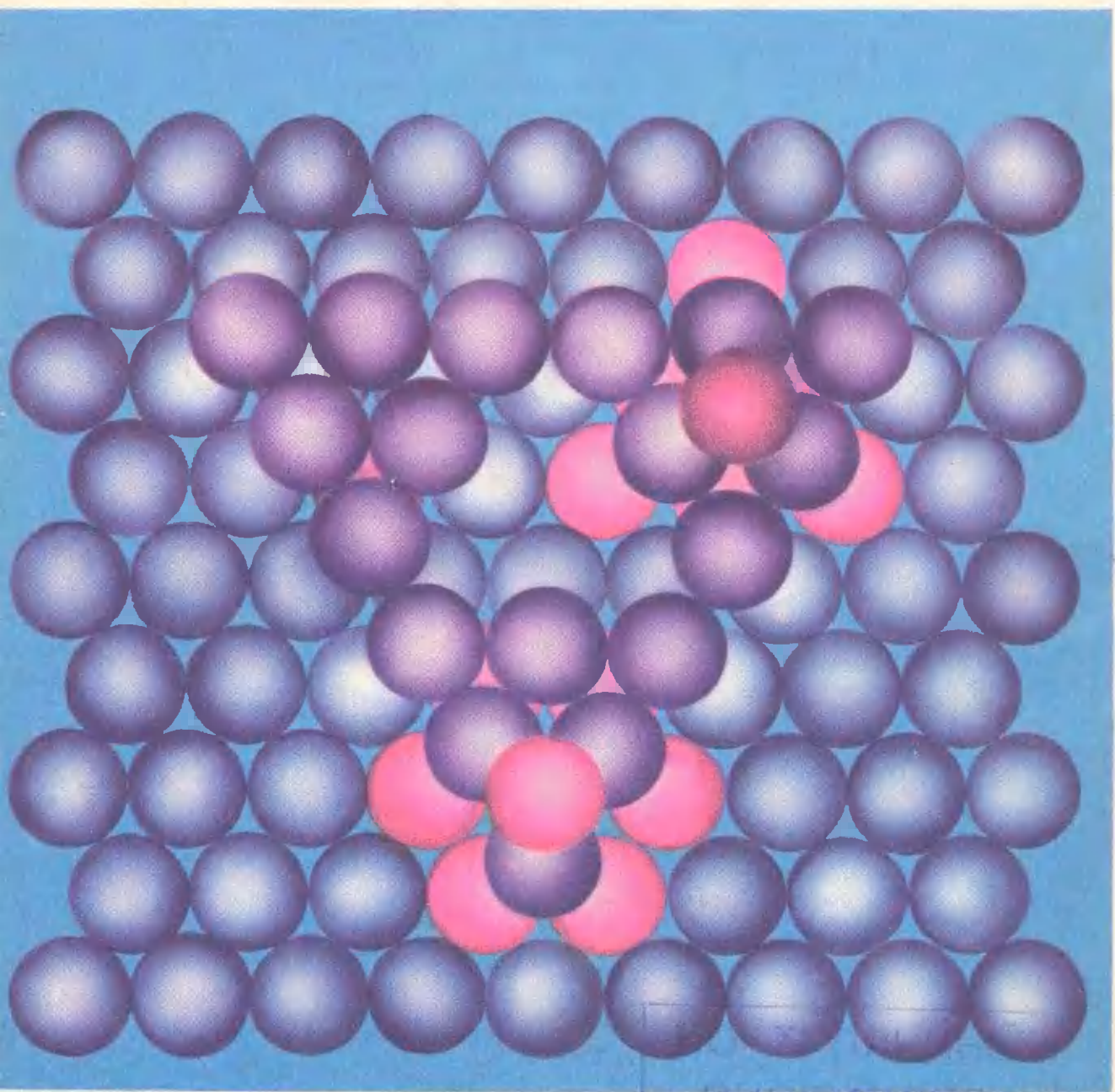
# Квант

# 7

1970

журнал  
Академии  
наук СССР  
и  
Академии педагогических  
наук СССР

XIX  $\frac{567}{43}$



ЭЛЕМЕНТАР

Главный редактор — академик *Н. К. Кикоин*  
 Первый заместитель главного редактора —  
 академик *А. Н. Колмогоров*

**Редакционная  
коллегия:**

<i>Л. А. Арцимович,</i>	<i>академик</i>
<i>М. И. Башмаков</i>	
<i>В. Г. Болтянский,</i>	<i>член-корреспондент АПН СССР</i>
<i>И. Н. Бронштейн</i>	
<i>Н. Б. Васильев</i>	
<i>И. Ф. Гинзбург</i>	
<i>В. Г. Зубов,</i>	<i>академик АПН СССР</i>
<i>П. Л. Капица,</i>	<i>академик</i>
<i>В. А. Кириллин.</i>	<i>академик</i>
<i>Г. И. Косоуров</i>	
<i>В. А. Лешковцев</i>	<i>(зам. главного редактора)</i>
<i>В. П. Лишевский,</i>	
<i>А. И. Маркушевич,</i>	<i>академик АПН СССР</i>
<i>М. Д. Миллиончиков,</i>	<i>академик</i>
<i>Н. А. Патрикеева</i>	
<i>Н. Х. Розов</i>	
<i>А. П. Савин</i>	
<i>И. Ш. Слободецкий</i>	
<i>М. Л. Смолянский</i>	<i>(зам. главного редактора)</i>
<i>Я. А. Смородинский,</i>	<i>доктор физико-математических наук</i>
<i>В. А. Фабрикант,</i>	<i>академик АПН СССР</i>
<i>Я. Е. Шнайдер</i>	<i>(ответственный секретарь)</i>

Заведующая редакцией *Л. В. Чернова.*  
 Главный художник *Е. П. Леонов.*  
 Технический редактор *Т. М. Макарова.*  
 Корректоры *Л. Н. Боролина, В. П. Сорокина*  
 Издательство «Наука»  
 Главная редакция  
 физико-математической литературы.  
 Москва, В — 71, Ленинский проспект, 15

Сдано в набор 23/IV—1970 г. Подп. к печати 15/VII—1970 г.  
 Бумага 70×100 1/16. Физ. печ. л. 4. Услови. печ. л. 5,2. Т—09868  
 Уч.-изд. л. 5,67. Тираж экз. 169404  
 Цена 30 коп. Заказ 644  
 Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома  
 Комитета по печати при Совете Министров СССР  
 г. Чехов, Московской области

7

**Квант**журнал  
Академии  
наук СССР  
и  
Академии  
педагогических  
наук СССР

## В НОМЕРЕ:

- |   |   |
|---|---|
| Ленинская теория познания<br>и математические понятия | <i>В. Г. Болтянский,<br/>Н. Х. Розов</i>        |
| 2   |   |
| Портреты Земли  | <i>В. Н. Березин,<br/>М. Л. Смолянский</i>      |
| 10  |   |
| Природа металлов                                      | <i>А. Х. Коттрэлл</i>                           |
| 26  |   |
| Случай с методом математической индукции              | <i>Е. Г. Николаев</i>                           |
| 37  |   |
| О решении десятой проблемы Гильберта                  | <i>Ф. Л. Варнаховский,<br/>А. Н. Колмогоров</i> |
| 39  |   |
| Задачник «Кванта»                                     |   |
| 46  |   |
| Решения «задачника Кванта»                            | <i>Н. Б. Васильев,<br/>И. Ш. Слободецкий</i>    |
| 48  |   |
| Задачи для 5 класса                                   |   |
| 59  |   |
| Что мы знаем и чего не знаем о гравитации             | <i>В. А. Лешковцев</i>                          |
| 62  |   |
| Три магических квадрата —<br>3-я страница обложки     |   |

# Ленинская теория

## познания

### и математические понятия

В. Г. Болтянский,  
Н. Х. Розов

Уже в средних классах школы становится ясным своеобразие математики по сравнению, например, с физикой. Все физические законы справедливы с некоторой степенью точности и часто при прогрессе измерительной техники заменяются новыми, по отношению к которым первоначальные становятся лишь первым приближением. Бессмысленно спрашивать себя, рациональна или иррациональна длина стержня. Для узко понятой практики иррациональные числа не нужны. В математике же теорема о том, что диагональ квадрата несоизмерима со стороной, считается очень важной. Открытие этого факта в Древней Греции считается одним из поворотных пунктов всего развития математики.

Публикуемая статья В. Г. Болтянского и Н. Х. Розова содержит попытку популярно изложить своеобразие математики с точки зрения философии диалектического материализма. Быть может, некоторые из вас осият посвященные этим вопросам разделы моей статьи «Математика» в 26 томе второго издания «Большой Советской Энциклопедии».

В. И. Ленин, как вы знаете из статьи И. К. Кикоина [«Квант» № 4], дал подробный анализ основных философских вопросов физики. Специально философскими вопросами математики Ленин не занимался. Но его общие высказывания по вопросам теории познания служат руководством и для математиков.

А. Н. Колмогоров

Познание окружающей нас реальной действительности, объективных законов природы и общества всегда было и остается составной и неотъемлемой частью человеческой деятельности, целью и задачей различных наук. Изучением же сложного и многогранного процесса познания, выявлением объективных законов происхождения и формирования человеческих знаний о материальном мире занимается теория познания — один из разделов философской науки.

Творчески развивая диалектико-материалистическую теорию познания, В. И. Ленин обогатил ее новыми, основополагающими положениями, с исключительной глубиной и ясностью разработал необычайно широкий круг связанных с ней вопросов. Это и позволяет нам с полным основанием говорить о *ленинской теории познания*.

\* \* \*

Нас окружает материальный мир, движение и развитие которого подчиняется объективным, существующим независимо от человека законам. Свойства и взаимные связи объектов материального мира прямо или косвенно воспринимаются людьми, их органами чувств, отображаются в человеческом сознании. *Живое созерцание*, непосредственная чувственная связь человека с объективной реальностью в процессе практической деятельности, являясь *исходным пунктом* познания, позволяет нам составить представление об окружающей действительности.

Накопленные человеком данные опыта обрабатываются и обобщаются его *абстрактно-логическим мышлением*. Именно мышление позволяет человеку, отталкиваясь от фактов, познавать то, что недоступно восприятию с помощью органов чувств, дает возможность проникать в сущность предметов и явлений, выявлять связи между ними, открывать объективные законы материального мира, воспроизводить реальную действительность.

Естественно, возникает вопрос о том, соответствует ли воспроизведенная мышлением картина реальной действительности самой этой действительности, отражают ли (и насколько правильно) наши представления объективное положение вещей. Только на практике, только в сравнении ожидающихся результатов с тем, что действительно произошло, человек может оценить правильность и ценность своих знаний. Именно *практика служит критерием истины* той или иной идеи, гипотезы, теории.

В. И. Ленину принадлежит генеральное определение процесса познания: «От живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике — таков диалектический путь познания истины, познания объективной реальности» \*).

В окружающем нас мире нет вещей непознаваемых, принципиально недоступных человеческому разуму. Однако познание предметов, явлений *во всей их полноте* может быть дано только бесконечной суммой общих понятий, законов и т. п. И овладение всей этой суммой знаний все время приблизительно, т. е. исчерпывающее познание мира возможно, говоря математическим языком, *лишь в пределе*. На каждом отрезке исторического развития наши знания о действительности являются лишь относительными и в то же время содержат в себе частицу абсолютной истины: одни стороны предметов и явлений отражаются научными понятиями более или менее правильно, адекватно, другие — лишь примерно или даже неверно, третьи еще вообще неизвестны.

Движение, изменение, развитие материального мира протекает в разных формах; предметы и явления объективной реальности наделены различными качествами и обладают разнообразными количественными характеристиками.

Различные направления науки изу-

\*) В. И. Ленин. Полн. собр. соч., т. 29, стр. 152—153.

чают специфические качественные особенности предметов или стороны явлений, исследуют одну или несколько тесно связанных форм движения материи. Так, биохимия рассматривает химические процессы в их связи с живыми организмами, география описывает картину нашей планеты и изучает законы ее преобразования людьми, история имеет своим предметом раскрытие законов развития человеческого общества в их конкретном проявлении и т. д.

Специфика математики состоит в том, что она не рассматривает конкретные материальные тела, не анализирует какую-либо определенную форму движения материи. «Чистая математика,— писал Ф. Энгельс,— имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира...»<sup>\*)</sup>. Иначе говоря, математика изучает материальный мир с особой точки зрения: предметом ее исследования являются сами *количественные отношения* (в общепhilosophическом понимании этого термина), которые присущи всем без исключения объектам реальной действительности и которые «характеризуются, в отличие от качественных, лишь своим безразличным отношением к конкретной природе тех предметов, которые они связывают...»<sup>\*\*</sup>).

Эта специфика предмета определяет широкую *применимость математики в других науках*. Внутренняя неразделимость качественных и количественных свойств предметов или явлений реальной действительности создает объективные предпосылки для использования математических методов в изучении многих важнейших проблем биологии, геологии, языкознания и др. В этом смысле К. Маркс говорил, что «...наука только тогда достигает совершенства, когда ей удается пользоваться математикой»<sup>\*\*\*</sup>).

\*) К. Маркс и Ф. Энгельс, Соч., т. 20, стр. 37.

\*\*\*) А. Н. Колмогоров, Математика, БСЭ, т. 26, стр. 476.

\*\*\*) Сб. «Воспоминания о Марксе и Энгельсе», М., 1956, стр. 66.

Математику принято считать абстрактной наукой, и это, бесспорно, справедливо. Именно специфика математики, изучающей пространственные формы и количественные отношения, определяет ее особую *абстрактность*. На это обращал внимание еще Ф. Энгельс: «...чтобы быть в состоянии исследовать эти формы и отношения в чистом виде, необходимо совершенно отделить их от их содержания, оставить это последнее в стороне как нечто безразличное...»<sup>\*)</sup>.

Иначе говоря, речь идет об исследованиях, результаты которых достигаются не с помощью микроскопа или химических реактивов, а лишь силой абстракции.

Каждый предмет или явление объективной реальности обладают бесконечным числом свойств, качеств и неразрывно связаны с другими предметами и явлениями, со всем материальным миром. Наше мышление не может охватить сразу все эти свойства и все многообразие связей. Поэтому, производя научные исследования, мы вынуждены останавливать свое внимание лишь на одном или нескольких свойствах изучаемого объекта, лишь на некоторых его связях с другими объектами. На все остальные свойства и связи мы не обращаем внимание, т. е. отвлекаемся, абстрагируемся от них.

Иными словами, всякое познание необходимо связано с *процессами абстрагирования, с абстракциями*. «Мышление, восходя от конкретного к абстрактному, не отходит — если оно правильное... — от истины, а подходит к ней... все научные (правильные, серьезные, не вздорные) абстракции отражают природу глубже, вернее, *полнее*», — отмечает В. И. Ленин<sup>\*\*</sup>).

Но абстракции имеют и свою слабость, которая заключается прежде

\*) К. Маркс и Ф. Энгельс, Соч., т. 20, стр. 37.

\*\*\*) В. И. Ленин, Полн. собр. соч., т. 29, стр. 152.

всего в том, что каждая из них отражает объект как-то односторонне. «Мы не можем, — писал В. И. Ленин, — представить, выразить, смерить, изобразить движения, не прервав непрерывного, не упростив, угрубив, не разделив, не омертвив живого. Изображение движения мыслью есть всегда огрубление, омертвление, —... и не только движения, но и всякого понятия» \*). Поэтому отражение конкретного объекта во всей его полноте может быть осуществлено лишь с помощью бесконечного ряда абстракций, раскрывающих все многообразие его свойств и качеств.

Итак, в основе математики лежит весьма *реальный* материал. «Тот факт, — замечает Ф. Энгельс, — что этот материал принимает чрезвычайно абстрактную форму, может лишь слабо затушевать его происхождение из внешнего мира» \*\*).

Наиболее простым и широко распространенным видом абстракции является *абстракция отождествления*. Проследим формирование этого вида абстракции на простом примере.

Возьмем, например, слово «дом». Оно выражает некоторое понятие, появляющееся в результате абстракции. Сам процесс абстрагирования можно представить себе примерно так. Мы рассматриваем совокупность, класс реальных предметов, обладающих общим для всех них признаком: каждый из этих предметов предназначен для того, чтобы внутри него жили или работали люди. Именно этот признак мы считаем главным, существенным в процессе абстрагирования. По этому признаку мы судим о том, принадлежит данный конкретный предмет нашему классу или нет, а от всех прочих свойств, которые присущи различным конкретным предметам нашего класса, мы отвлекаемся, считая их второстепенными, несущественными (напри-

мер, количество и форма окон, число этажей, наличие или отсутствие электрического освещения и т. д.).

В результате такого отвлечения от несущественных свойств мы как бы отождествляем в нашем сознании все предметы рассматриваемого класса, создавая тем самым абстрактное понятие «дом». Само это слово является теперь знаком, символом, характеризующим любой предмет рассматриваемого класса. Когда мы говорим «это — дом», то имеем в виду, что данный предмет обладает основным указанным выше качеством, а индивидуальные отличия этого предмета рассматриваются как второстепенные.

Абстракция отождествления приводит к образованию ряда математических понятий, например понятия конкретного числа («два», «четыре», «десять» и т. д.).

Нам часто встречаются множества, содержащие *одинаковое количество* предметов: две руки, пара ботинок, два уха, пара лошадей в упряжке и т. д. Отождествление таких множеств на основании выделенного основного свойства приводит к образованию абстрактного понятия «два», отражающего общее, существенное, что есть у всех этих множеств. Само слово «два» и символ «2» являются знаками, обозначениями этого понятия.

Другой вид абстракции — *абстракция идеализации* (или идеализирующая абстракция). Примерами абстракций этого вида являются такие понятия, как «отрезок», «поверхность», «материальная точка», «абсолютно черное тело» и т. д.

Сравним для примера понятия «дом» и «материальная точка». Мы можем в окружающем нас мире указать на ряд предметов, о которых каждый скажет: «Это — дом». Но ни одной «материальной точки» указать нельзя: ведь это (согласно принятому в механике определению) объект, обладающий конечной массой и не имеющий никакой протяженности. Ясно, что таких предметов в природе нет, ибо любой реальный предмет обла-

\* ) В. И. Ленин. Полн. собр. соч., т. 29, стр. 233.

\*\* ) К. Маркс и Ф. Энгельс, Соч., т. 20, стр. 37.



дает большими или меньшими размерами. Таким образом, «дома» реально существуют, а «материальные точки» — нет.

То же самое можно сказать и о геометрическом понятии «отрезок». В природе мы не наблюдаем «в чистом виде» предметов, обладающих длиной и «прямоугольной», но «лишенных толщины». Это понятие, следовательно, не возникает в результате абстракции отождествления, а является идеализацией.

Идеализация в общих чертах состоит в следующем. Реальный объект заменяется в нашем сознании абстрактной *моделью*, которая получается не только путем отвлечения от несущественных, второстепенных свойств, но и путем надления модели *идеализированными* свойствами, в утрированном виде отражающими существенные свойства объекта. Например, если мы изучаем движение небесного тела, удаленного от нас на расстояние, во много раз превышающее его размеры, мы можем построить утрированную модель, считая это тело материальной точкой. Точно так же понятие «касания» в утрированном виде отражает возможное в действительности взаиморасположение предметов.

Разумеется, сказанное не означает, что понятия, возникающие в результате идеализации, совершенно оторваны от объективного мира и лишены реального смысла. Позволяя нам особенно глубоко и четко проследить наиболее существенные свойства объектов, эти понятия имеют общеизвестное значение в практических приложениях математики.

Особым видом абстракции идеализация является *абстракция потенциальной осуществимости*. Она характеризуется отвлечением от реальных границ наших конструктивных возможностей, обусловленных ограниченностью нашей жизни в пространстве и во времени.

Эта форма абстракции позволяет нам рассуждать, например, о любом большом числе (скажем, о числе  $10^{10^{10}}$ )

и предполагать, что мы как бы имеем возможность досчитать до него, начиная с 1, 2, 3, 4 ... и т. д. Очевидно, что эта возможность чисто потенциальная: нам не хватит на это всей нашей жизни.

Однако мы отвлекаемся от практической неосуществимости этой задачи, от ограниченности наших возможностей и считаем допустимым рассматривать любые числа, приходя тем самым к понятию «бесконечный ряд натуральных чисел».

В результате применения этого вида абстракции возникают и такие понятия, как «прямая» (неограниченно простирающаяся в обе стороны), «плоскость» и другие.

Современная математика оперирует с громадным количеством понятий, которые не могут быть получены как очевидные, непосредственные абстракции доступных живому созерцанию свойств объектов материального мира. Эти понятия образуются в процессе *многоступенчатого наслаения абстракций*.

Исходные, первичные математические понятия возникают из объективной реальности, отражая, абстрагируя количественные отношения и пространственные формы объектов действительности. Но, возникнув, эти понятия как бы живут своей собственной жизнью, образуя в сознании человека свой собственный мир, сами порождают дальнейшие отражения и новые абстрактные понятия. Эти абстрактные понятия в свою очередь снова порождают новые абстракции, так сказать, более высокого порядка и т. д.

Для того чтобы пояснить сказанное, обратимся к понятию «числа».

Число, первоначально выступающее как результат счета предметов (абстракция отождествления), обобщается затем до понятия натурального числа (абстракция потенциальной осуществимости). Потом вводится понятие дробного числа (абстракция отожд-



дествления\*). Следующая абстракция — рациональные числа (положительные и отрицательные), а затем и действительные числа.

Многоступенчатый характер абстракции здесь совершенно ясно виден. Точно так же понятия «числа», «вектора», «геометрического преобразования» и ряд других абстракций (относящихся, очевидно, к пространственным формам и количественным отношениям реального мира) порождают понятие «группа», являющееся абстракцией более высокого порядка.

Однако не следует думать, что многоступенчатость математических абстракций, наличие абстракций разного порядка означают отрыв математики от реального мира. Очень поучительным в этом отношении является то, что многие «изысканные» абстрактные понятия и теории современной математики уже сейчас находят важные применения. Так, понятие «группа» и тонкие вопросы теории групп находят важные приложения в физике элементарных частиц.

Специфический отпечаток на всю математику накладывает *гипотетический характер* математических теорий.

Физики изучают, например, изотермические газовые процессы, т. е. исследуют свойства газа *при условии*, что его температура не изменяется. Другой пример из физики — изучение переохлажденных жидкостей, т. е. исследование свойств вещества *при условии*, что оно имеет температуру ниже точки плавления, но (в силу особых условий опыта) не кристаллизуется, а остается в жидком состоянии. Законы, открытые в этих условиях, будут *гипотетическими*, т. е. справедливыми при выполнении определенных гипотез.

Однако в физике такие законы имеют смысл лишь тогда, когда соответствующие условия, гипотезы *реально осуществимы*. В самом деле,

\* Расчленив целое, единицу на доли, мы затем отождествляем символы  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{6}$ ,  $\frac{3}{9}$ ,  $\frac{4}{12}$  и т. д., считая их представляющими одно и то же дробное число.

если бы кто-нибудь создал «теорию» о поведении веществ при температуре ниже абсолютного нуля, то физики вряд ли приняли бы ее всерьез, ибо она использует гипотезу, противоречащую известным нам свойствам реального мира.

В математике дело обстоит (во всяком случае, *внешне*) по-другому. Окружающие нас предметы имеют три измерения, но математики построили теорию  $n$ -мерных (и даже бесконечномерных) пространств. Мы знаем, что умножение чисел коммутативно:  $ab=ba$ , но в математике изучают и такие числовые системы, в которых  $ab \neq ba$ . Можно привести и другие примеры теорий, противоречащих «здравому смыслу».

Но характерно, что эти на первый взгляд «дикие» теории находят важное применение при изучении реальной действительности! Достаточно напомнить, например, что теория относительности широко использует четырехмерное пространство.

Наиболее ярким примером гипотетической теории, оказавшей решающее влияние на всю математику, была *геометрия Лобачевского*. Н. И. Лобачевский заменил постулат Евклида о параллельных другим, своим постулатом (через данную точку в данной плоскости можно провести бесчисленное множество прямых, не пересекающих данную прямую), а затем на базе этой аксиомы (и остальных аксиом, совпадающих с евклидовыми) построил логически стройную и законченную геометрию.

Открытие Н. И. Лобачевского в значительной мере предопределило полное торжество *аксиоматического метода* построения математики. Суть этого метода состоит в том, что все теоремы выводятся чисто логическим путем из сравнительно небольшого числа недоказываемых предложений — аксиом. Иначе говоря, математическая теория развивается, строится в предположении, что имеют место определенные, заранее фиксируемые аксиомы.

Математик в процессе своего твор-

чества имеет дело с абстрактными понятиями. Он не обращается каждый раз в своих рассуждениях к объективной действительности, *непосредственно* исследует не ее, а именно этот «мир понятий». Для доказательства той или иной теоремы нет необходимости описывать и систематизировать факты и явления, не нужно строить громоздкие и дорогостоящие установки, не требуется проводить ювелирно-тонкие эксперименты.

Математическое исследование происходит чисто умозрительным путем, подчиняясь *законам логики*. Математик в процессе своей работы преследует лишь цель проведения логически строгих, исчерпывающих доказательств теорем, построения непротиворечивых теорий.

Но, помимо чисто логической деятельности мышления, большую роль в развитии математики (как, впрочем, и всякой науки) играют и такие творческие возможности человеческого разума, как воображение, интуиция. Подчеркивая значение творческого воображения, интуитивной догадки, значение *фантазии* в процессе познания, В. И. Ленин писал: «Напрасно думают, что она нужна только поэту. Это глупый предрассудок! Даже в математике она нужна, даже открытие дифференциального и интегрального исчисления невозможно было бы без фантазии» \*).

Чисто умозрительный, мыслительный путь математического исследования, допускающий широкое использование фантазии и гипотетических построений, создает *иллюзию* независимости математических понятий и теорий от объективного мира, отсутствия реального содержания у абстракций более высокого порядка, возникающих в процессе «свободного творчества» разума.

В самом деле, *формально* открывается следующая возможность: математик выдвигает произвольные, выдуманные им аксиомы и выводит из них с помощью законов логики раз-

личные следствия; если ему «повезет» и в результате получится непротиворечивая теория, то можно говорить о математическом открытии. Иными словами, математик, не будучи связан непосредственно ни с какими реальными объектами, ни с какой формой движения материи, может, казалось бы, руководствоваться только своим воображением, делать любые гипотезы и на их основе развивать теории, лишь бы получить что-нибудь логически непротиворечивое и «математически интересное».

Развивая подобные мысли, один из крупнейших французских математиков Анри Пуанкаре (1854—1912 гг.) утверждал, что в основе математики (и даже науки вообще) якобы лежат свободные, произвольно принятые соглашения, выдуманные исследователем и удобные для него. Он считал, что математика является продуктом свободного «чистого разума» и не зависит от существования материальных объектов, не связана с практической деятельностью людей. Что же касается возможности практического применения достижений математики, то это лишь счастливая случайность, объяснить которую мы не в состоянии \*).

Отдавая должное научным заслугам А. Пуанкаре, В. И. Ленин подверг резкой критике его философские концепции, охарактеризовав его как «очень путаного философа». Следует иметь в виду, что при всей нелепости и откровенно идеалистическом ха-

\*) Подобные взгляды можно встретить иногда и сейчас. Например, группа известных зарубежных математиков, выступавших под псевдонимом Николая Бурбаки, писала, касаясь отношений «мира экспериментального и мира математического»: «То, что между экспериментальными явлениями и математическими структурами существует тесная связь, — это, как кажется, было совершенно неожиданным образом подтверждено недавними открытиями современной физики, но нам совершенно неизвестны глубокие причины этого (если только этим словам можно приписать какой-либо смысл), и, может быть, мы их никогда не узнаем» (Н. Бурбаки, Очерки по истории математики, М., 1963, стр. 258).

\*) В. И. Ленин. Полн. собр. соч., т. 45, стр. 125.

рактуре подобных взглядов, опровергнуть их чисто логическими доводами невозможно. Правильный ответ может дать только последовательная диалектико-материалистическая точка зрения, признание практики критерием истины.

Логика является рабочим инструментом математики: утверждение, выведенное из посылок, аксиом и определений по правилам логики, считается в математике истинным. Но «очевидность», «ясность», «убедительность» самих шагов логических рассуждений возникает не сама по себе; правомерность логических построений находит свое подтверждение в многовековом опыте практической деятельности человечества.

Именно этот опыт подтверждает, что внутренние законы развития логического мышления *тождественны* законам развития объективной реальности. Ф. Энгельс писал по этому поводу: «Над всем нашим теоретическим мышлением господствует с абсолютной силой тот факт, что наше субъективное мышление и объективный мир подчинены одним и тем же законам и что поэтому они и не могут противоречить друг другу в своих результатах, а должны согласоваться между собой»<sup>\*)</sup>.

Таким образом, требование формальной математической строгости, т. е. точности определений, полноты доказательств теорем, непротиворечивости теорий и т. д., и есть одна из сторон специфического проявления критерия практики в математике.

<sup>\*)</sup> К. Маркс и Ф. Энгельс, Соч., т. 20, стр. 581.

Однако сама по себе математическая строгость не может полностью заменить собой критерий практики, не является исчерпывающей гарантией истинности математического знания, т. е. правильности отражения человеком объективной реальности. Ибо существенным является и вопрос о соответствии принятых в теории посылок реальной действительности. Этот вопрос уже выходит за пределы компетенции логики и может быть решен лишь в ходе общественно-производственной (в том числе—научной) деятельности людей. Только опыт этой деятельности может отличить строго логичные «теории», построенные на нереальных, фантастических гипотезах и аксиомах, от подлинно научных теорий, приближающих нас к познанию объективных истин.

Научно-историческая практика свидетельствует, что *первичные* понятия математики и описывающие их аксиомы взяты из жизни и являются отражением объективных свойств реальных предметов. Поскольку логика понятий отражает объективную логику вещей, т. е. объективные связи предметов материального мира, то *новые* понятия и теории теснейшим образом связаны с реальным миром и потому *закономерно*, а вовсе не случайно, находят все новые приложения в научной и практической деятельности людей.

Протекающий сейчас бурный процесс «математизации» знаний, еще более стимулируемый развитием вычислительной техники, полностью подтверждает мощь математических методов и их органическую связь с жизнью.

# ПОРТРЕТЫ ЗЕМЛИ



Портреты, модели, карты. Схемы, чертежи, планы, фотографии, портреты, выполненные художниками и конструкторами,—все это модели изображаемых ими предметов («оригиналов»). Модель есть своего рода заместитель изображаемого ею предмета. Каждая модель, снабжая нас информацией об изображаемом ею «оригина-

ле», в то же время ряд черт этого «оригинала» не воспроизводит, опускает их, или, как говорят, абстрагируется от них. Да это и понятно: «полная» модель, являющаяся точной копией «оригинала», не обладала бы с точки зрения легкости изучения никакими преимуществами в сравнении с ним. Ради упрощения процесса познания приходится жертвовать его полнотой. Как правило, плоское изображение пространственного объекта искажает форму оригинала. К числу таких объектов относится земной шар, способам изготовления «портретов» которого, т. е. попросту географических карт, посвящена эта статья. Способов этих (в зависимости от назначения карты) известно много. Но при всем их разнообразии все они так или иначе включают и варьируют два основных «мотива»: проектирование и развертку на плоскость.

В. Н. Березин,  
М. Л. Смолянский



Рис. 1.

### «Бюст Земли» — глобус

Прежде чем перейти к различным способам изображения земной поверхности на карте, или, как их называют, картографическим проекциям, скажем несколько слов о «скульптурном портрете» Земли, который можно считать промежуточным этапом для получения других «портретов», — иначе говоря, о хорошо известном всем глобусе.

То, что наша планета по форме близка к шару, было достаточно ясно осознано еще древнегреческими учеными, основывавшимися главным образом на наблюдениях мореплавателей и путешественников. Конечно, сами по себе эти наблюдения позволяли утверждать лишь, что известная грекам часть Земли, — то есть части Европы, Азии и Африки, непосредственно примыкающие к Средиземному и Черному морям и восточной части Атлантического океана, — выпукла. Не удивительно, что при высокоразвитой у греков культуре абстрактного мышления эти достаточно косвенные данные позволили ученым того времени выдвинуть смелую гипотезу о замкнутости поверхности Земли. Форма же земной тени на поверхности Луны во время затмений (осознание того, что это тень Земли, само по себе было достижением, которое трудно переоценить), а отчасти умозрительные доводы, при-

влекающие в той или иной форме представления о симметрии, привели греков к убеждению, что Земля — шар.

О том, как греки представляли себе «лицо» Земли, можно судить по древнейшей дошедшей до нас (в позднейших латинских копиях) географической карте, составленной знаменитым греческим ученым Клавдием Птолемеем (около 150 лет до нашей эры). Птолемей, пользуясь введенной еще до него Гиппархом координатной сеткой, пытается развернуть сферическую поверхность Земли на плоскость (рис. 1). Меридианы изображаются двузвенными ломаными, а широтные круги — дугами окружностей, верхняя из которых соответствует примерно полярному кругу, нижняя — экватору, а отделяющая усеченный конус умеренного пояса от цилиндрического экваториального (широта  $0^\circ$ ) — тропику Рака. Вдоль меридианов выдержан постоянный масштаб (концентрические дуги параллелей отделены друг от друга через каждые  $10^\circ$  равными промежутками). Понимая, что к югу от экватора параллели снова должны сокращаться, в связи с чем нижняя половина развертки должна была бы быть отделена от изображенной им верхней разрезом, Птолемей не пытался изображать Южное полушарие. Африку с юга и Азию с востока ему пришлось продолжать гипотетической *Terra incognita* («Неизвестной Землей»), к югу от Индийского океана переходящей в «Звездную Землю» (*Terra australis*; название это впоследствии было присвоено открытому примерно в тех же краях пятому материку). Карта Птолемея выполнена, как сказали бы современные картографы, в «произвольной проекции». Тем примечательнее точность, с которой на нее нанесены координаты (особенно широты) многих городов и портов.

Птолемей приводит и другую проекцию, с его точки зрения более красивую и правильную, но менее удобную для практических построений.



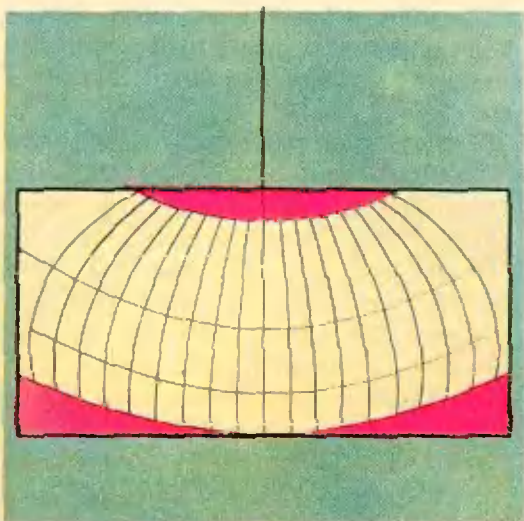


Рис. 2.

Предоставим слово самому Птолемию \*): «... можно было представить себе в виде прямой один только средний меридиан, с плоскостью которого совпадает ось зрения. Меридианы же, находящиеся по обе стороны от него, кажутся обращенными к нему своей вогнутостью, возрастающей по мере удаления от него (рис. 2).

Последний чертеж передает это, сохраняя надлежащее соответствие изгибов. Кроме того, взаимная пропорциональность дуг параллелей передает как можно точнее подлинное отношение одних параллелей к другим...

Благодаря всему этому второй способ имеет, пожалуй, преимущество перед первым, уступая ему, однако, в удобстве исполнения чертежа. Там можно было провести только одну параллель, разбить ее на деления и наносить на карту любой пункт, прикладывая и перемещая линейку. Здесь же этого удобства нет, так как линии меридианов подходят к среднему меридиану изгибаясь, и, кроме того, нужно еще чертить все окружности, а положение относительно окружающих стороны квадрата точек, приходящихся на просветы сетки, нужно определять по нанесенным на карту точкам путем расчета. Поэ-

\*) «Античная география», составитель проф. М. С. Боднарский, Географгиз, 1953.



Рис. 3.

тому, хотя я лично в данном деле и везде предпочитаю то, что лучше и труднее, тому, что хуже и легче, нужно все же придерживаться обоих установленных способов, имея в виду людей, которых праздность влечет к более легкому...

Примерно к тому же времени (середина II века до нашей эры) относится, по-видимому, и изготовление первого из известных глобусов. Глобус этот, сделанный философом Кратесом Малосским, не сохранился и известен по позднейшим описаниям, на схематичность которых приходится делать неизбежную скидку при оценке его точности. Знаниям этой эпохи вполне соответствовало изображение на глобусе материка Ойкумены («Обитаемого»), состоящего из Евразии и Африки (для этого у Кратеса были, конечно, основания, поскольку Суэцкий перешеек был перерезан каналом, действительно, несколько позднее). Пропорции привычных нам очертаний береговых линий (особенно в периферийных областях) заметно нарушены, но взаимное расположение таких характерных элементов карты, как Средиземное, Черное, Красное и Белое моря, Персидский залив, Аравийский полуостров и полуострова Юга Европы, передано в общем правильно.

Глобус Кратеса (в отличие от гораздо более подробной карты Пто-



Рис. 4.

лемей) играл, очевидно, в основном демонстрационную роль. Появление же на нем таких фантастических деталей, как симметричный Ойкумене относительно экватора материк, населенный будто бы «Антэками», и материка на севере и юге противоположного полушария (обиталища «Перизков» и «Антиподов») можно, пожалуй, объяснить неосознанным стремлением к «симметрии», очень характерным, кстати, и для современной науки. (рис. 3)

До наших дней дошел глобус (смотри заставку к статье), изготовленный жителем Нюрнберга Мартином Бихеймом намного позже — в том самом 1492 году, который в честь открытия Колумбом Америки стали считать условной границей между средневековьем и новым временем. На полуметровом глобусе Бихейма и особенно на карте (см. рис. 4), изготовленной с помощью этого глобуса, хорошо видно, что географы того времени переоценили размеры Азии, а путь из Испании до ее восточных берегов (Китая и Индии) оценивали из-за этого почти вдвое меньшим, чем в действительности.

Ошибка, конечно, есть ошибка, но объективно эти представления безусловно способствовали оптимизму Колумба, вдохновляя его на смелый замысел достичь восточных бе-

регов Азии, двигая свои каравеллы все время на запад.

### От «макета» к «портрету»

Но сейчас, когда глобусы умеют делать вполне хорошо, что мешает пользоваться ими во всех случаях, когда нужна карта? Или они тоже не свободны от искажений — не учитывают, например, сплюснутость Земли у полюсов или ее горный рельеф? Нет, это здесь не очень существенно: разница между полярным и экваториальным радиусами Земли составляет не более 0,3% любого из них, а высота высочайшей горной вершины — Джомолунгмы — около 0,1% земного радиуса (и примерно того же порядка — глубочайшие впадины на дне океанов), так что в пределах разумной точности изготовления эти факторы вообще практически незаметны; гораздо удобнее изобразить рельеф на карте или глобусе с помощью так называемых «линий уровня», окрашивая для наглядности промежутки между ними в разные цвета. Суть же дела очень проста: глобус менее удобен, чем карта, — не снабжают же паспорта бюстами и барельефами владельцев!

Но, имея глобус, можно подумать и о «развертке» его — хотя бы приблизительной. Для изготовления портрета Земли нам понадобится ее миниатюрный макет.

Разобравшись в том, как глобус «развертывается» в карту, мы подойдем, кстати, и к пониманию не менее интересной обратной задачи: как по полученным в результате аэрофотосъемки плоским изображениям кусков земной поверхности воссоздается истинный вид оригинала — Земли.

Вспомним теперь, как делаются развертки поверхностей. У многогранника можно, например, разрезать почти все ребра, оставляя лишь по одному неразрезанному ребру у каждой грани, чтобы поверхность не распадалась на куски. Еще проще развертываются цилиндры и конусы. Модель цилиндра (точнее, цилиндрической поверхности) вы получите,



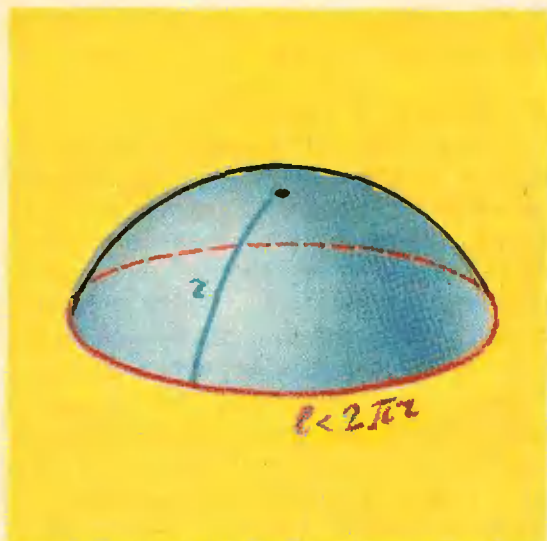


Рис. 5.

склеив две противоположные стороны прямоугольного листа бумаги, а модель конуса — это просто бумажный фунтик. Достаточно разрезать любую из этих моделей по образующей и положить получившийся кусок бумаги на стол — и развертка готова! Длины линий, начерченных на исходных поверхностях, сохранятся и на развертках (разве что линия — если она пересекла образующую, вдоль которой делался разрез, — разорвется на две части).

Но Земля наша — шар. Как доказал в 1777 году Леонард Эйлер, никакая (сколь угодно малая!) часть сферической поверхности не может быть развернута на плоскость с сохранением всех расстояний. Идея эйлеровского доказательства — очень проста. Какую бы малую часть сферической поверхности глобуса мы ни взяли, мы можем внутри нее выделить круглую «шапочку». Ввиду полного равноправия каждой точки сферы (каждый диаметр является осью ее симметрии) мы можем считать центр этой «шапочки» полюсом, а границу — параллелью (широтным кругом). Расстояния между точками шапочки надо, естественно, измерять по поверхности шапочки. В частности, расстояние от полюса до любой точки границы шапочки будет равно длине  $r$  соответствующей дуги меридиана

(рис. 5). Значит, на не искажающей размеров развертке эта параллель должна изобразиться на плоскости окружностью радиуса  $r$  и иметь, следовательно, длину  $2\pi r$ . Но легко доказать (сделайте это сами!), что на самом деле длина нашего широтного круга меньше  $2\pi r$ . Полученное противоречие и доказывает невозможность точной развертки на плоскость даже самой малой шапочки, срезанной со сферы, и вообще никакой части сферической поверхности.

### «Микрокарты» — планы

Из доказательства теоремы Эйлера (да и про это из соображений «здравого смысла») видно, что, когда речь идет об очень малых участках земной поверхности, замена таких малых «шапочек» плоскими кружочками искажает переносимые на карту размеры тем меньше, чем меньше диаметр кружка. В конечном счете вопрос сводится к тому, какая же точность изображения нам действительно нужна. Оценка допустимой погрешности очень проста (см. задачу на стр. 25) и в каждом конкретном случае позволяет разумным образом ответить на этот вопрос.

Скажем, архитектор, планирующий застройку города, совершенно не интересуется формой в сего земного шара — какой-нибудь овраг беспокоит его, конечно, гораздо больше, чем такие «вселенские» проблемы! Мало дела до округлости Земли и геологу, ведущему разведку конкретного месторождения, — ему гораздо существеннее учесть всякого рода местные уклоны и прочие «неправильности» рельефа, могущие повлиять на рациональный выбор пунктов бурения скважин. Короче говоря, когда речь идет о составлении карт малых участков, мы можем смело уподобиться древним египтянам, еще пять тысячелетий назад составлявших планы (так обычно называют эти «микрокарты») участков земной поверхности, абсолютно игнорируя выпуклость Земли в целом. Единственное требование к плану состоит



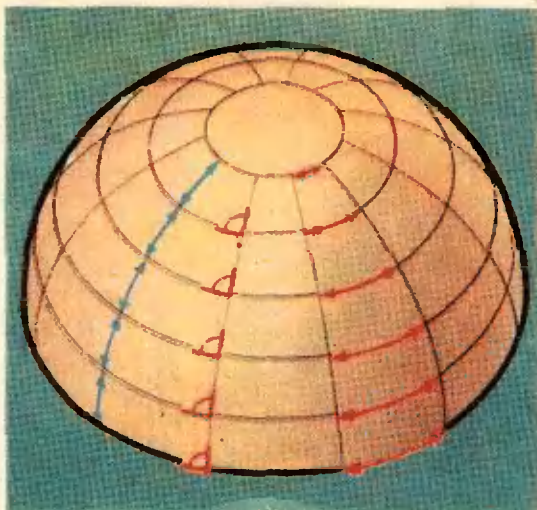


Рис. 6.

в том, чтобы для произвольных точек  $A, B, C$  и  $D$  на поверхности изображаемого участка Земли и их изображений на плане — точек  $A', B', C'$  и  $D'$  с достаточной точностью выполнялось равенство  $\frac{A'B'}{AB} = \frac{C'D'}{CD}$ .

Величину отношения  $\frac{A'B'}{AB}$  естествен-

но назвать масштабом изображения участка  $AB$ ; таким образом, условие наше выражает принцип постоянства масштаба. Из теоремы Эйлера следует, конечно, что строго постоянным масштаб плоского изображения куска земной поверхности быть не может. Поэтому в каждом конкретном случае устанавливают приемлемую величину допустимой погрешности и считают план «правильным», если погрешности на нем не превышают установленной нормы.

Очень простые и наглядные геометрические рассуждения (см. рис. 6) убеждают нас в том, что все меридианы (линии постоянной долготы) равны между собой, а все параллели (линии постоянной широты) уменьшаются от экватора к полюсам от  $2\pi R_{\text{Земли}}$  до нуля («90-я параллель» вырождается в точку — полюс). Отсюда сразу следует, что отрезки меридианов, заключенные между соседними параллелями на глобусе, равны, а отрезки параллелей, заклю-



Рис. 7.

ченные между соседними меридианами уменьшаются по направлению от экватора к полюсам.

Легко также проверить, что все углы между параллелями и меридианами в точках их пересечения (т. е. углы между касательными к этим кривым в данных точках) прямые.

#### Еще чуть-чуть истории

До эпохи великих географических открытий (XV век) картография, если и развивалась, то в достаточной мере стихийно. Сохранившиеся средневековые карты зачастую представляли даже значительный шаг назад от описанной выше карты Птолемея. Примером может служить так называемая Герефордская карта (1280 г.), довольно-таки фантастическое изображение круглой и плоской Земли на которой особых комментариев не требует и представляет разве лишь исторический интерес (рис. 7).

Для мореплавателей, однако, уже тогда составлялись специальные мореходные карты (рис. 8) — так называемые портуланы (или портоланы), снабженные вместо координатной сетки (пользовались ли ею и чем вообще пользовались, помимо чисто эмпирических приемов, составители портуланов — точно сказать трудно) так называемой «розой ветров» — направлениями «линий румбов», соответствующих делениям картушки (круглой шкалы) магнитного компаса, при-





Рис. 8.



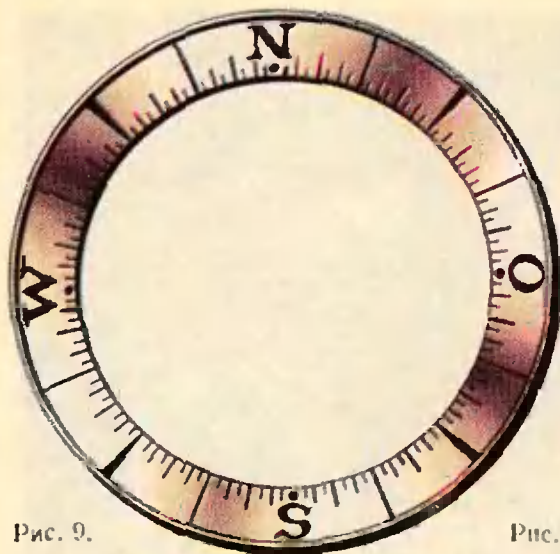


Рис. 9.

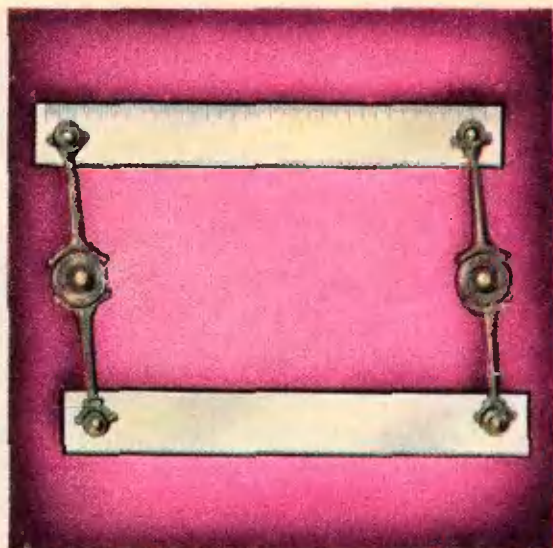


Рис. 10.

менявшегося в Европе уже с XII столетия (рис. 9). Они позволяли пролагать курс корабля на карте без всяких дополнительных расчетов, проводя с помощью так называемой штурманской линейки (сохранившейся, между прочим, и до наших дней) через точку положения корабля прямую, параллельную соответствующей линии румба (рис. 10).

Естественно, моряки были заинтересованы в том, чтобы направление курса, отклоняющегося от меридиана на данное число градусов, в любой точке карты было одним и тем же. Для этого необходимо (хотя, разумеется, недостаточно), чтобы меридианы и параллели изображались на карте прямыми. Удовлетворить это требование в сочетании с достаточной точностью изображения удалось впервые Герарду Меркатору, с именем которого часто связывают начало научной картографии. Меркаторская карта мира, опубликованная на 18 отдельных листах в 1569 году, не потеряла значения и до сих пор. (На рисунке, приведенном на стр. 18, показан фрагмент этой карты).

Бурный прогресс географических знаний в целом и в картографии в частности был характерен для XVI—XVII веков: изобретение маятниковых часов (Х. Гюйгенс, 1675 г.),

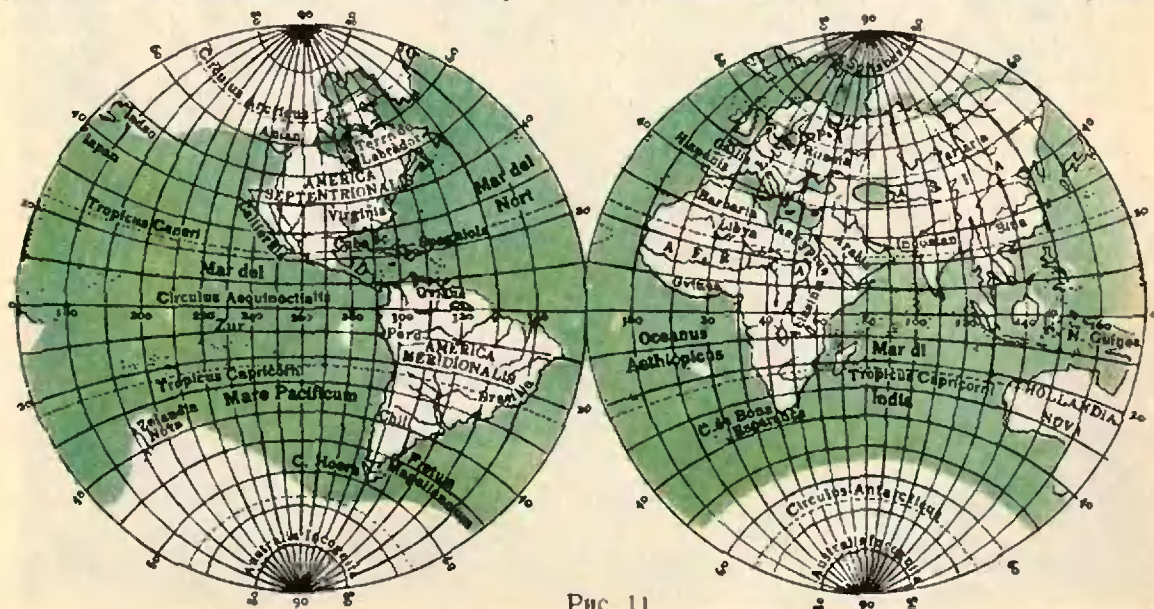


Рис. 11.







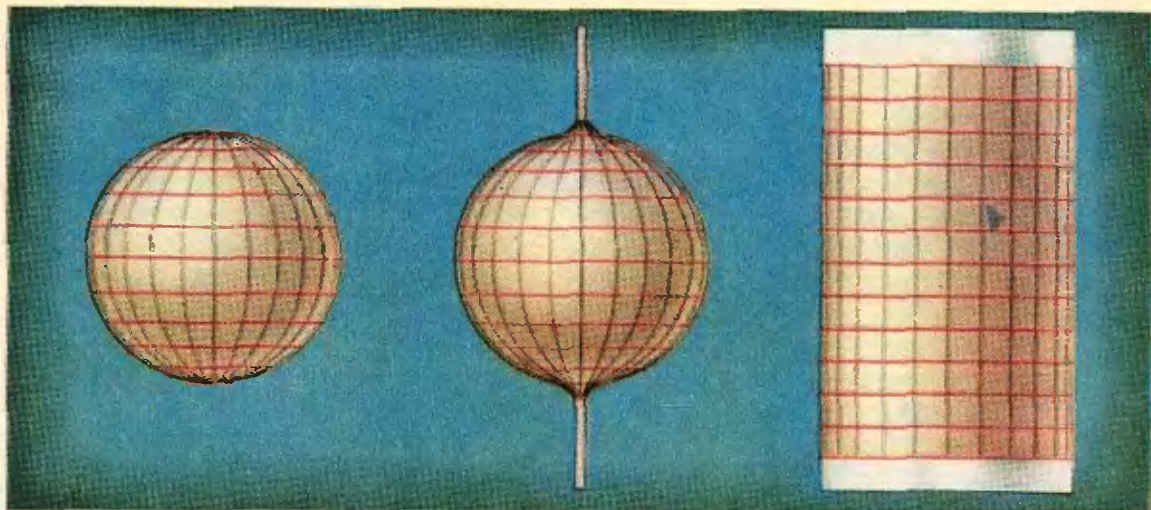


Рис. 12.

а затем и хронометра позволило с большой точностью определять географическую долготу пункта (широту хорошо определяли еще древние греки), появились разнообразные, приспособленные к различным нуждам и исходящие из различных принципов системы проекций. К тому времени относится карта (рис. 11), изображающая всю поверхность Земли в виде двух «полушарий» (де Вит, 1700 г.). Ниже мы познакомимся с несколькими, относительно простыми по идее картографическими проекциями. Конечно, это только отдельные штрихи картографии — науки, связанной с такими славными именами, как Эйлер, Гаусс, Чебышев, Ламберт.

### Квадратная проекция

Представим себе глобус, изготовленный в виде мяча правильной сферической формы, оболочка которого сделана из ткани, легко растягивающейся в одном направлении и совершенно нерастяжимой в перпендикулярном ему. Можно, например, считать, что горизонтальные нити — резиновые, а вертикальные — стальные, причем резиновые нити замкнуты и стягивают наш мяч-глобус по параллелям, а перпендикулярные им тонкие гибкие стальные стержни плотно облегают глобус по полумеридианам, примыкая друг к другу концами

в полюсах. Поскольку концы меридианов не прикреплены друг к другу, можно, слегка растянув близкие к полюсам резиновые параллели, просунуть в образовавшиеся отверстия тонкую твердую спицу. Впрочем, не обязательно тонкую. Кто нам мешает растянуть параллели посильнее? Давайте так и поступим и вдвинем в отверстия, растянутые до размеров экватора, «толстую спицу», представляющую собой прямой круговой цилиндр того же радиуса, что и наш сферический глобус (рис. 12).

Вот мы и «преодолели» теорему Эйлера: ведь полученный цилиндр, будучи разрезанным вдоль любого полумеридиана (можно представить, что резиновые параллели, чтобы они после этой операции не стянулись вновь, подвергли перед разрезанием специальной термической обработке, лишившей их способности к дальнейшему сжатию и растяжению), великолепно разворачивается на плоскость! Разумеется, это не более чем шутка, — чуда «преодоления» не произошло: ведь все параллели (кроме экватора) растянулись, и очертания материков и островов растянулись в поперечном направлении. Особенно это растяжение заметно, конечно, в приполярных областях.

Мы получили изображение земного шара в виде прямоугольника, основание которого (равное экватору),



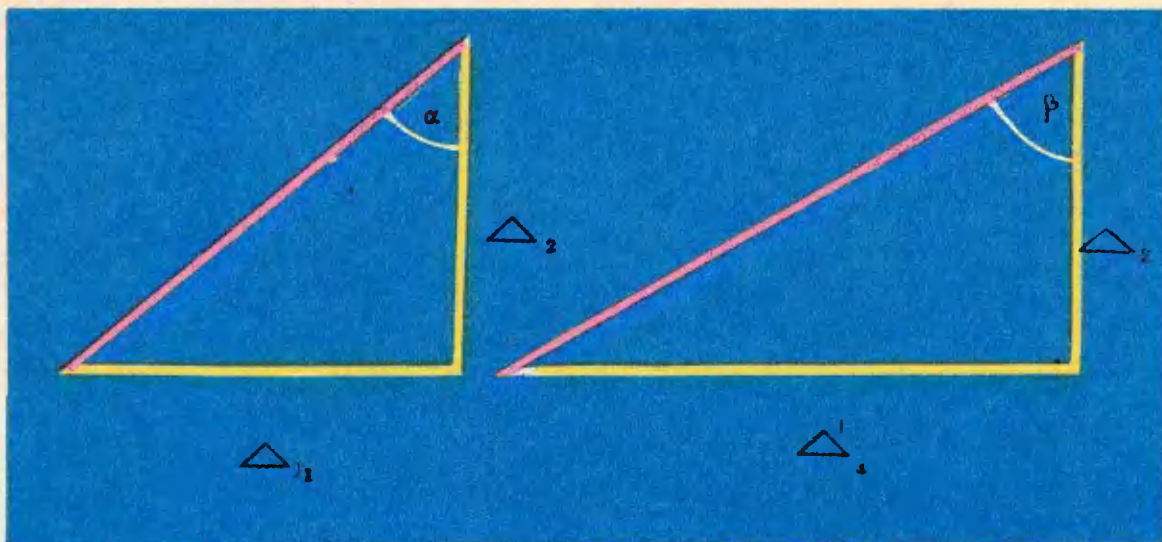


Рис. 13. вдвое больше высоты (полумеридиана). Его называют квадратной проекцией Земли. Эту проекцию, сохраняющую, как легко видеть, масштаб вдоль меридианов, предложил в 1438 году португальский принц Энрике Мореплаватель. (Он был не единственным августейшим картографом — в картографию внес значительный вклад и сам «король математиков» Гаусс.)

### Локсодромии

При плавании под постоянным румбом корабль перемещается по линии, пересекающей меридианы под постоянным углом. Такие линии на сфере (на глобусе или на самой Земле) называют локсодромиями. К локсодромиям, в частности, принадлежат параллели (пересекающие меридианы под углом  $90^\circ$ ) и меридианы (угол  $0^\circ$ ). А каково же будет изображение в квадратной проекции произвольной локсодромии, пересекающей меридианы под любым углом  $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ )?

Рассмотрим маленький участок локсодромии (рис. 13), пройдя который корабль совершает перемещение  $\Delta_1$  в широтном направлении и перемещение  $\Delta_2$  по меридиану:

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

Но на широте  $\varphi$  все расстояния

в направлении запад—восток растянуты в  $\frac{1}{\cos \varphi}$  раз. (Докажите это!) Значит, на карте перемещению по меридиану на расстояние  $\Delta_2$  соответствует, при движении корабля по локсодромии, перемещение по параллели не на  $\Delta_1$ , а на

$$\Delta_1' = \frac{\Delta_1}{\cos \varphi},$$

и линия, изображающая интересующую нас локсодромию, будет пересекать меридианы не под постоянным углом  $\alpha$ , а под зависящим от широты  $\varphi$  углом  $\beta$ :

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{\Delta_2}{\Delta_1'} = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \cos \varphi.$$

Ясно, что  $\alpha = \beta$  лишь на экваторе.

Локсодромия, пересекающая экватор под углом  $\alpha = 30^\circ$ , изображена на рисунке 14. Вы, наверное, спросите: «Какая же из этих красных линий изображает локсодромию?» Но ведь здесь изображена одна линия! — склейте мысленно левый и правый края карты (в тот самый цилиндр, разрезанием которого эта карта была получена), и вы сразу убедитесь в этом. Эта намотанная на цилиндр непрерывная кривая делает свои «витки» вокруг цилиндра все чаще и чаще по мере приближения к полюсам, но через полюс так и не проходит: она состоит из бесконечного множества витков. (Представьте себе, как долж-



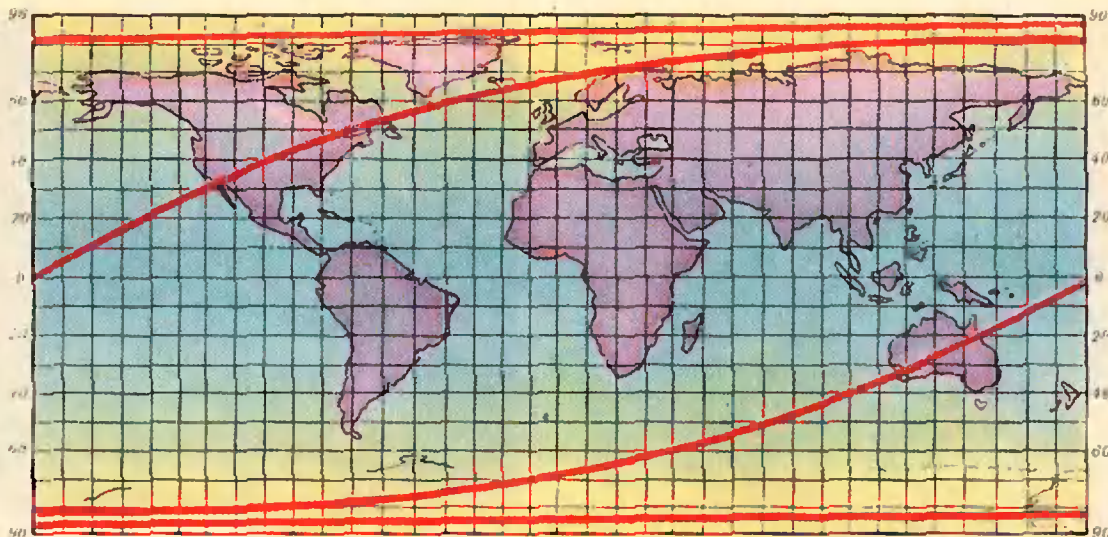


Рис. 14.

на выглядеть по мере приближения к полюсу локсодромия на глобусе, и бесконечность ее «растянутой развертки» уже, пожалуй, не покажется вам удивительной.)

#### Еще одно растяжение. Проекция Меркатора

Давайте, теперь представим себя на минуту в роли Меркатора, с неудовольствием разглядывающего несуразно расплющенные очертания Скандинавии и Канады в квадратной проекции (Антарктиды тогда, слава богу, еще не знали, — вот бы на чье изображение ему полюбоваться!). Но неэстетичность карты можно было бы в конце концов пережить. Да и растяжение расстояний вдоль параллелей никого не введет в заблуждение, раз уж нам известно правило получения истинного расстояния. Не кривое зеркало страшно, а уверенность в его правильности.

Хуже другое: карта в квадратной проекции неудобна для моряков, заинтересованных не столько в точности измерения расстояний, сколько в возможности легко «прокладывать» на карте постоянный курс, иными словами, в прямолинейности локсодромий. (Вспомним, что еще в старых «портуланах», несмотря на всю их кустарность, это требование вполне удовлетворялось с достаточной для пра-

ктики точностью.) Так что огорчает на рисунке 14 не столько «сплюсченность» карты, сколько вид локсодромии.

Нельзя ли ее выпрямить? За счет чего она получилась кривой? Из-за растяжения карты в  $\frac{1}{\cos \varphi}$  раз по широте? — Прекрасно! Кто же нам может помешать растянуть меридианы квадратной координатной сетки, тоже в  $\frac{1}{\cos \varphi}$  раз!? Квадраты прежней координатной сетки вытянулись теперь в прямоугольники, и карта уже не обладает постоянством масштаба вдоль меридианов (см. рисунок 15, все кружки на котором изображают равные участки; синия линия изображает локсодромию). Зато на меркаторской карте остается неизменным угол между двумя линиями, пересекающимися на глобусе. (Попробуйте доказать!) Достаточно малые части земной поверхности передаются «почти» с сохранением подобия (окружность радиуса 500 км, например, изображается на карте Меркатора замкнутым овалом, зрительно неотличимым от окружности). И локсодромии, конечно, прямолинейны.

По мере приближения к полюсам растяжение вертикального масштаба в проекции Меркатора неограниченно возрастает, следовательно, полная карта Земли в этой проекции была бы

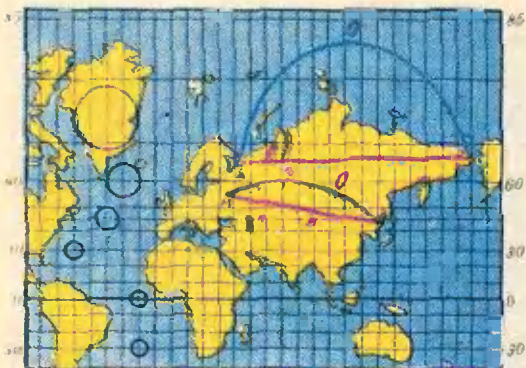


Рис. 15.

разверткой цилиндра с бесконечной высотой и потребовала бы для своего изображения бесконечного листа бумаги. Поэтому приполярные области на таких картах не изображают (верхняя и нижняя границы карты, конечно, определяются при этом чисто произвольно, из соображений удобства; например, рисунок 15 ограничен сверху 85-й широтой, снизу — 30-й).

И еще два замечания. Во-первых, наша реконструкция хода мысли Меркатора может вовсе не совпадать с действительным ходом его рассуждений; просто нам показалось, что именно так об этом говорить проще всего. Далее надо заметить, что вывод о растяжении карты вдоль меридианов в  $\frac{1}{\cos \varphi}$  раз, полученный нами «на пальцах», для строгого (хотя и не сложного) обоснования потребовал бы владения элементами математического анализа, включая натуральные логарифмы и начала дифференциального и интегрального исчисления\*). Кстати, сам Меркатор в действительности и не сделал этого — строгое решение задачи «выпрямления локсодромий» было получено лишь тридцатью годами позже Ричардом

\*) Сведения эти можно, например, найти в книгах Р. Куранта и Г. Роббинса «Что такое математика?» (М., 1967) или Н. Я. Виленкина и С. И. Шварцбурда «Математический анализ» (М., 1969).

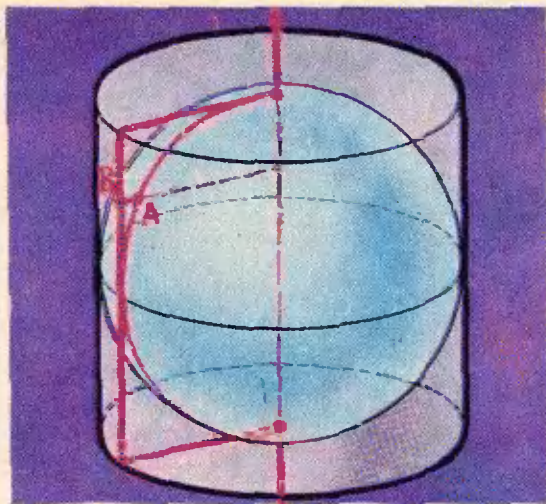


Рис. 16.

Райтом из Кембриджа (в чьей редакции и выходят современные издания того, что в наше время именуют «проекцией Меркатора»).

### Цилиндрическая проекция Ламберта

Рассмотрим еще одну проекцию с прямоугольной сеткой; получается она очень просто. Опшем вокруг глобуса прямой круговой цилиндр (касающийся его по экватору и в полюсах) и спроектируем на его боковую поверхность поверхность глобуса (без полюсов!) так, чтобы лучом проекции для каждой точки этой поверхности служил проходящий через нее перпендикуляр к земной оси (рис. 16).

С помощью обычных формул школьной стереометрии легко показать (попробуйте!), что площади любых участков поверхности глобуса и их проекций на боковую поверхность цилиндра оказываются при этом равными, в связи с чем развертку этого цилиндра (разрезанного по любому меридиану) и называют равновеликой цилиндрической проекцией (или проекцией Ламберта). Правильно передавая площади, проекция Ламберта сильно искажает форму даже малых участков проектируемой поверхности (сравните эллипсы на рисунке 17 с соответствующими кружками на рисунке 15): приполярные области сплющиваются здесь еще



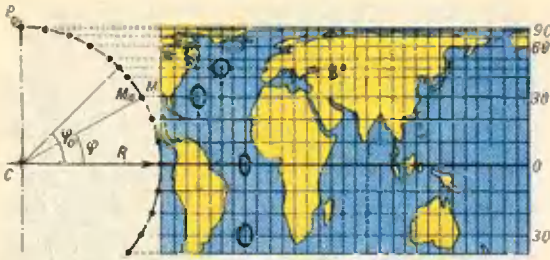


Рис. 17.

сильнее, чем в квадратной проекции, из которой проекция Ламберта может быть, очевидно, получена сжатием по вертикальной оси. Прямолинейность изображений меридианов и параллелей совершенно очевидна.

### Ортодромии

До сих пор мы считали почти само собой разумеющимся то, что для моряков важна простота прокладывания курса по карте, расстояние же, которое при этом приходится проходить кораблю, интересует их куда меньше. Что ж, во времена парусных судов, пожалуй, так дело и обстояло. Но в наши дни, при плаваниях на очень большие расстояния, вовсе не длящихся месяцами, и годами, не говоря уже о дальних (в том числе трансконтинентальных и межконтинентальных) авиационных полетах, первостепенную важность приобретает вопрос о минимальности траектории.

Можно доказать (чего мы здесь не будем пытаться делать), что на поверхности шара кратчайшей линией, соединяющей две произвольные ее точки (или, как принято говорить в математике, геодезической), служит меньшая из дуг большого круга, проходящего через эти точки. (Для диаметрально противоположных точек сферы обе дуги проходящего через них большого круга равны, и



Рис. 18.

какую из них взять в качестве геодезической, конечно, безразлично.) Этот факт можно проверить и при помощи простого эксперимента, натянув нить между двумя точками на глобусе, лежащими на одном меридиане или на экваторе (любой другой большой круг, конечно, ничуть не хуже этих, но, в отличие от них, он просто не изображен на глобусе).

Большие круги земной поверхности, являющиеся кратчайшими расстояниями между ее точками, в мореплавании и картографии принято называть ортодромиями. Локсодромия является ортодромией лишь тогда, когда она либо экватор, либо меридиан. Об этом, для нас столь интуитивно очевидном обстоятельстве знал, возможно, уже Меркатор; однако строгое доказательство этого утверждения было дано лишь его современником португальским математиком Педро Ньюнесом. Таким образом, в проекции Меркатора, «спрямившей» локсодромии, ортодромии изображены кривыми; примерами могут служить рисунки 18, 19, где видно, каким значительным мо-

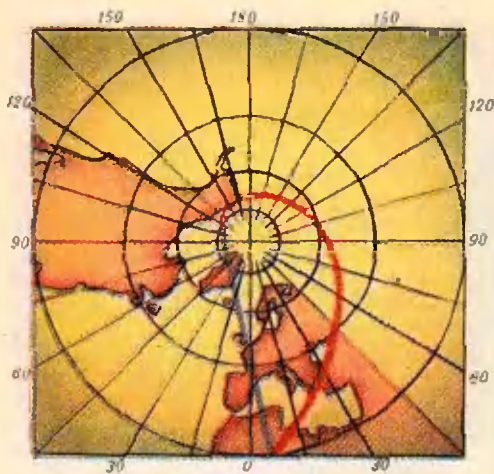


Рис. 19.

жет быть расхождение между локсодромией и ортодромией. Конечно, при больших перелетах разница может быть большой и при путешествии в умеренных широтах; например, путь по локсодромии от Москвы до Нью-Йорка равен 8500 км, а по ортодромии — 7500 км.

### Гномоническая проекция

Проекция, в которой ортодромии изображаются прямыми, получается центральным проектированием из центра земной сферы: при этом все лучи, направленные в точки ортодромии (являющейся, как мы видели, большим кругом), лежат в одной плоскости, пересекающейся по прямой с любой плоскостью проекции. Проще всего сетка меридианов и параллелей выглядит в этой так называемой гномонической проекции (рис. 19), если плоскость проекции касается проектируемого на нее глобуса в полюсе. (Гномон — это стержень солнечных часов; если встать на плоскость проекции и счи-

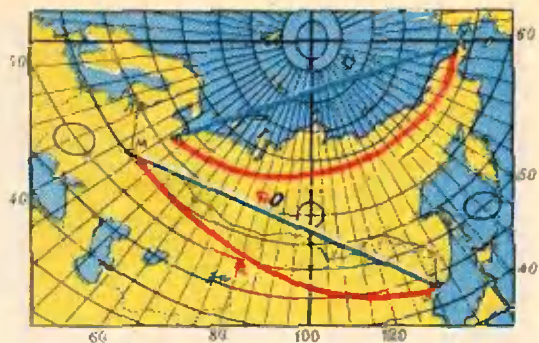


Рис. 20а.

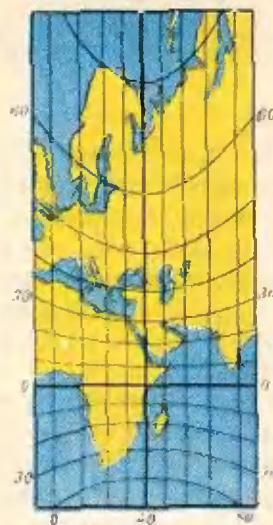


Рис. 20б.

тать гномоном земной радиус, то проекция проектирующего луча действительно представится нам тенью этого гномона.)

Легко доказать (сделайте это самостоятельно), что меридианы изображаются в гномонической проекции этого вида прямыми, а параллели — концентрическими окружностями. На рисунке 19 (где по понятным причинам нет изображения экватора: он «ушел в бесконечность») очень наглядна спиралеобразная форма локсодромии в окрестности полюса в гномонической проекции.

Для морских и воздушных путешествий на большие расстояния



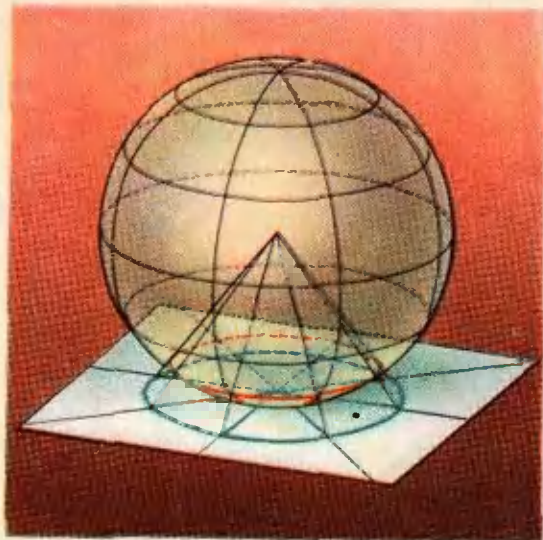


Рис. 21а.

гномонические проекции очень удобны. Всю земную поверхность на такой карте, конечно, не изобразишь, так что приходится выбирать различные плоскости проекции, от положения которых зависит и форма изображаемой на них координатной сетки. На рисунках 20, а и 20, б изображены гномонические проекции, картинная плоскость которых касается глобуса не в полюсе.

**Задача.** Пусть план местности изображается проектированием данного участка, имеющего форму «шапочки» радиусом среза 100 км, на плоскость, касающуюся «шапочки» в центре ( $R_{\text{Земли}} \approx 6000$  км). Найти точность изображения, т. е. узнать на сколько процентов искажаются небольшие отрезки меридианов и параллелей, проведенных в любой точке «шапочки»:

а) в гномонической проекции (центральное проектирование из центра Земли);

б) в ортографической проекции (параллельное проектирование в направлении, перпендикулярном данной касательной плоскости). Смотри рисунки 21, а, б.

### Вместо заключения

Вот пока и весь рассказ об основных принципах и конкретных способах изображения земной поверх-

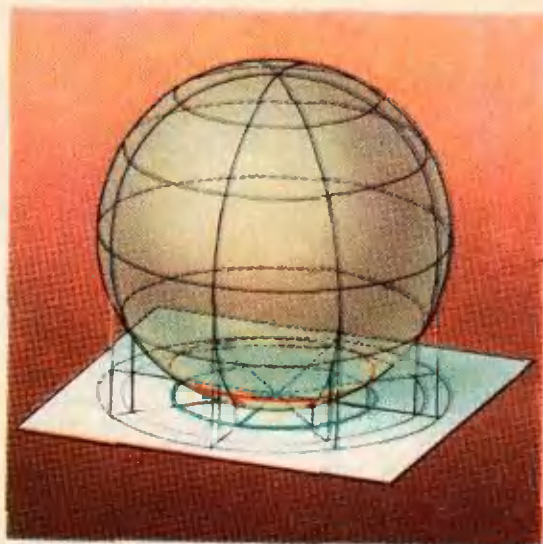


Рис. 21б

ности на карте. Тому, кто захотел бы познакомиться с наукой о «портретах Земли» — картографией — глубже, подробнее и систематичнее, мы посоветовали бы прежде всего внимательно просмотреть какой-нибудь большой атлас, обращая особое внимание на различие применяемых в нем проекций, и попытаться уяснить самостоятельно (с помощью, быть может, довольно кратких пояснений, приводимых обычно в атласах) причины этого различия. Правда, при этом вы, возможно, обогатитесь не столько ответами, сколько новыми вопросами. Но тем лучше!

Систематическое (но весьма насыщенное и потому значительно более трудное, чем в этой статье) освещение предмета вы найдете в статье «Картографические проекции» последнего издания Большой Советской Энциклопедии. В очень богатой историческим материалом статье «Карты географические», помещенной там же, вы найдете дальнейшие указания на литературу.



ПРИРОДА МЕТАЛЛОВ

МЕТАЛЛЫ  
И СПЛАВЫ

Металлы непрозрачны, блестящи и сравнительно тяжелы. Металлы прочны, но их форму можно изменять с помощьюковки и прокатки. Их также можно плавить и сваривать. Металлы имеют хорошую электро- и теплопроводность. Всем этим они обязаны металлической связи. Природа этой связи состоит в том, что в металле каждый атом окружен большим числом точно таких же атомов, каждый из которых имеет лишь несколько электронов на внешней электронной оболочке, причем оболочки электронов так перекрываются, что слабо удерживаемые внешние электроны уже нельзя приписать какому-либо одному из атомов. В то время как атомы, а вернее ионы, остаются на месте, «электронный газ» свободно движется среди ионов, связывая их друг с другом, подобно клею.

Благодаря тому, что электроны свободны и могут перемещаться в электрическом поле, металлы являются проводниками. Благодаря тому, что свободные электроны поглощают, а затем излучают обратно большую часть падающего на них света, металлы непрозрачны и блестящи. Благодаря тому, что свободные электроны могут переносить тепловую энергию, металлы имеют высокую теплопроводность.

В этой статье не рассматриваются тепловые, электрические и оптические свойства металлов. Главным образом я буду говорить об их механических свойствах.

Природа металлической связи одинакова для разных металлов. Она способствует образованию плотной упаковки атомов, характерной для



На снимке (см. заставку), полученном с помощью ионного микроскопа, толщина границ зерен составляет всего несколько атомов. На фотографии — кончик вольфрамовой иглы, увеличенный примерно в 5 миллионов раз. Каждая яркая точка соответствует атому вольфрама. Расположение точек зависит от того, как поверхность иглы пересекает плоскость кристалла. Видно нарушение структуры на границе зерна, идущей из левого нижнего в правый верхний угол снимка.

некоторых правильных структур\*.) Такие структуры, сопротивляясь сжатию, оказывают меньшее сопротивление сдвигу, поэтому металлы пластичны. Плотная упаковка объясняет и большой удельный вес металлов. Механические свойства металлов, следовательно, определяются той кристаллической структурой, которая наиболее подходит для металлической связи, осуществляемой свободными электронами.

Еще в 1665 году Роберт Гук смоделировал характерную форму кристаллов с помощью укладываемых рядами дробинок, но лишь через 250 лет выяснилось, что он построил точную модель кристаллической структуры известных металлов, в которой каждому атому соответствовала дробиночка.

Хотя уже несколько столетий было известно, что некоторые сложные вещества имеют кристаллическую структуру, тот факт, что обычные металлы являются кристаллами, оставался под сомнением вплоть до недавнего времени. Такие свойства, как затвердевание расплава при вполне определенной температуре и наличие блестящих зерен на поверхностях изломов, говорили о кристаллическом строении, но другие факты, казалось, указывали на аморфность: расплавленные металлы после затвердевания принимали форму сосуда, твердые металлы были пластичны и их форму можно было изменить ковкой, отполированная поверхность металла выглядела совершенно однородной.

Ключ к выяснению структуры металлов был найден в 1864 году, когда англичанин Генри Сорби разработал способ исследования металлов под микроскопом в отраженном, а не в проходящем свете. Кроме того, своим успехом он был обязан тому, что вместо полированной поверхности рассматривал поверхность металла, обработанную слабым хи-

\*) О плотной упаковке атомов см. статью Г. И. Косоурова «Кристаллы из шариков», «Квант» № 1.





мическим реагентом. Некоторые реактивы протравливали глубокие борозды вдоль границ зерен, другие проявляли микроструктуру зерен, действуя на сами зерна.

Это дало возможность обнаружить неправильную сетку границ, разбивающих металл на маленькие многогранники — зерна размером около 0,25 мм (рис. 1).

При одном и том же освещении одни зерна казались более яркими, другие — более темными. Распределение света и тени менялось при изменении угла освещения, показывая, что протравленная поверхность каждого из зерен состоит из маленьких плоских отражающих ступенек, неодинаково наклоненных к поверхности металла. Стало ясно, что каждое зерно, несмотря на свою неправильную форму, является отдельным кристалликом, а весь кусок металла состоит из множества таких маленьких кристалликов, ориентированных в разных направлениях и имеющих общие границы.

Метод металлографии, изобретенный Сорби, оказался весьма плодотворным для определения формы и размеров зерен, что важно для исследования технических свойств металлов, для обнаружения примесей и их скопления вдоль границ зерен, для исследования сплавов. Однако оптическая металлография не могла дать

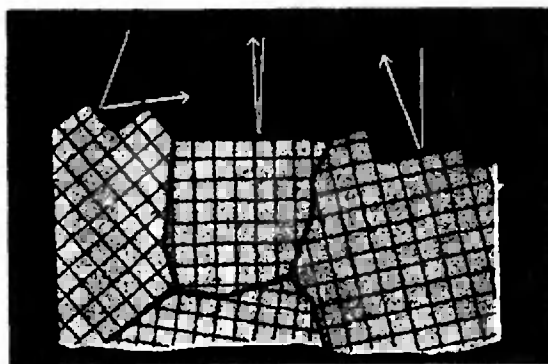


Рис. 1.

Микрофотография зерен алюминия в отраженном свете. Образец протравливался. Как схематически показано справа, некоторые зерна ориентированы так, что кажутся яркими, другие — темными. Увеличено в 60 раз сведения о строении границ зерен. Постепенно исследователи приходили к мысли, что при охлаждении металла ниже точки плавления соседние зерна захватывают как можно большее число атомов, сокращая границу между зернами до слоя, толщиной лишь в несколько атомов, внутри которого кристаллографическая ориентация резко изменяется от одного зерна к другому.

Недавно эта точка зрения подтвердилась благодаря использованию ионного микроскопа, изобретенного американцем Эрвином Мюллером. В этом приборе кончик металлической иглы находится под высоким положительным потенциалом в вакууме, так что силовые линии электрического поля начинаются на игле и кончаются на флуоресцирующем экране. В камеру впускается небольшое количество гелия. Когда атом гелия сталкивается с атомом иглы, он становится положительным ионом и летит по направлению к экрану вдоль силовой линии. При ударе иона об экран образуется видимое изображение. Соотношение размеров таково, что площади одного атома на кончике иглы соответствует примерно один квадратный миллиметр на экране; именно в этом смысле мы «видим» атомную структуру иглы (см. фотографию в начале статьи).

В 1900 году Джеймс Эвинг и Вальтер Розенгейн обнаружили, что

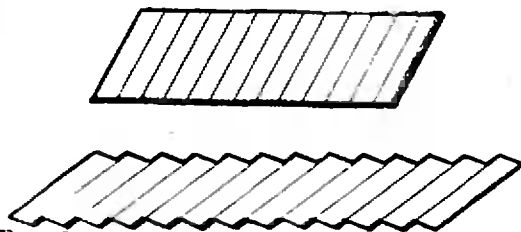


Рис. 2.

Пластическая деформация выявляет плоскости скольжения в кристалле металла. На фотографии показан деформированный образец алюминия (увеличено в 60 раз). Параллельные линии внутри каждого зерна — ступеньки, образовавшиеся при сжатии металла. Они вызваны скольжением вдоль определенных кристаллических плоскостей в пределах каждого из зерен. Этот процесс схематически показан справа.

если образец подвергнуть деформации, например, сдвигая его грани в разные стороны, то его поверхность покрывается линиями. Они обычно идут строго параллельно друг другу в пределах каждого из зерен, и направление их в разных зернах различно (рис. 2). Тщательные наблюдения показали, что эти линии — следы ступенек, образующихся при скольжении тонких слоев кристалла друг по другу. Дальнейшие исследования (в особенности с большими идеальными кристаллами металлов) показали, что это скольжение происходит вдоль определенных плоскостей и в определенных кристаллографических направлениях. Механизм пластической деформации металлов оказался, таким образом, сильно отличающимся от текучести жидкостей и газов. Пластическая деформация характерна именно для кристаллической структуры. Она происходит так, что атомы с одной стороны плоскости скольжения отделяются от своих прежних соседей с другой стороны плоскости и перемещаются, перенося с собой определенную часть кристалла и занимая, наконец, положение, при котором они вместе с их новыми соседями образуют столь же правильную структуру, как и раньше. При этом восстанавливаются первоначальные свойства и внутренняя структура кристалла.

Если пластический сдвиг — след-

ствие кристаллической структуры металла, то почему он не наблюдается в кристаллах неметаллов — алмазе, сапфире, которые обычно ломаются при деформациях? Иначе говоря, почему металлы пластичны, а большинство неметаллов хрупки? Для того чтобы понять это, познакомимся более подробно со строением металлов.

В металлах встречаются три вида кристаллических решеток. В объемноцентрированной кубической решетке один дополнительный атом помещен в центр простой кубической ячейки. Такую структуру имеют щелочные металлы, железо при комнатной температуре, вольфрам, хром и молибден. В гранецентрированной кубической решетке (рис. 3, сверху) дополнительные атомы помещены в центр каждой грани куба. Такую структуру имеют железо при высокой температуре, медь, серебро, золото, алюминий, никель и свинец. В гексагональной плотноупакованной структуре три дополнительных атома (фиолетовые шарики на рисунке 3, внизу) помещены в пустоты простой гексагональной ячейки. Такова структура цинка, магния, кобальта, титана.

И в гранецентрированной кубической и в гексагональной структурах атомы упакованы максимально плотно. И та, и другая структуры могут быть получены путем разме-

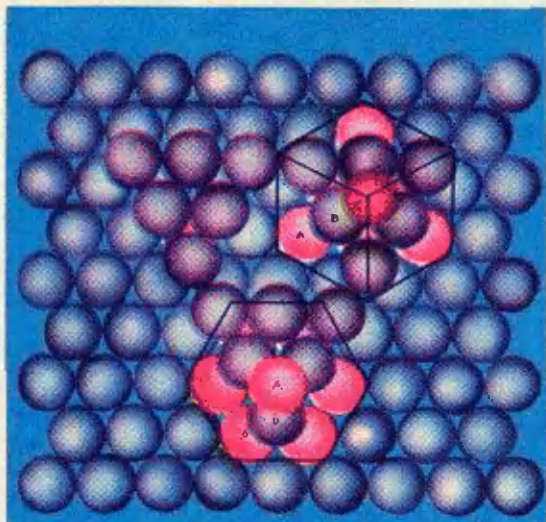


Рис. 3.

Плотная упаковка характерна для большинства металлов. Две плотноупакованные кристаллические структуры представлены на рисунке в виде плотноупакованных шаров. Плоскость шаров первого слоя обозначена буквой *A*. Второй слой (фиолетовые шары) отмечен буквой *B*. Для шаров третьего слоя есть две возможности: либо расположиться над шарами первого слоя, либо занять положение, обозначенное буквой *C*. Соответственно, могут образоваться две кристаллические структуры: гранецентрированная кубическая, если слои чередуются в порядке *ABCABC* (вверху) и гексагональная плотная, если порядок чередования слоев *ABABAB* (внизу); в этом случае в третьем слое должно быть семь шаров, из которых на рисунке показан лишь один.

шения одной плотноупакованной плоской структуры над другой. Каждые три соседних шарика в плоскости образуют ямку, в которую можно вложить шарик верхнего слоя.

Выбрать такие ямки можно двумя способами. Если места расположения шаров первого слоя обозначить буквой *A*, а два последующих слоя — соответственно буквами *B* и *C*, то гранецентрированная кубическая решетка получается, если класть слои в последовательности *ABCABC*, а гексагональная плотная упаковка — при *ABABAB*.

В кристаллах металлов скольжение происходит вдоль тех направлений, где атомы уложены наиболее плотно, так как сопротивление движению слоев друг относительно друга в этом случае меньше. Кроме того, как мы увидим далее, атомы, движущиеся вдоль плотноупакованных рядов, чаще занимают устойчивые положения. Благодаря большей симметрии кубические структуры содержат много таких направлений, в которых ряды атомов упакованы плотно и плоскости атомов могут скользить друг по другу во многих направлениях. Это сильно сказывается на пластичности. Отдельные кристаллики могут принять такую форму, что соседние зерна подойдут вплотную друг к другу, не оставляя полостей и трещин, и, следовательно, весь кристалл тоже может принимать

любую форму, не ломаясь при этом. Кристаллы с гексагональной структурой более хрупкие и хуже поддаются механической обработке.

Пластические свойства кристаллов металлов объясняются, как мы видели, наличием плотноупакованных направлений и плоскостей, вдоль которых происходит скольжение. Почему образуются такие кристаллические структуры? Чтобы ответить на этот вопрос, мы должны обратиться к электронному строению металлов.

В 1900 году немецкий физик Пауль Друде предположил, что в металле имеются свободные электроны, которые могут двигаться по всему объему металла под действием электрического поля, что и является причиной высокой электропроводности металлов. Эта теория была впоследствии улучшена применением квантовой механики, но основа осталась прежней: газ подвижных электронов, подобно жидкому клею, скрепляет положительные ионы металла между собой за счет сил электрического притяжения к этому газу. Электронный газ и ионы притягиваются друг к другу, стремясь образовать компактную массу, структура и объем которой определяются главным образом геометрией плотноупакованных шаров. Если шары одинаковы, как в чистом металле, то возникают простые кристаллические структуры,



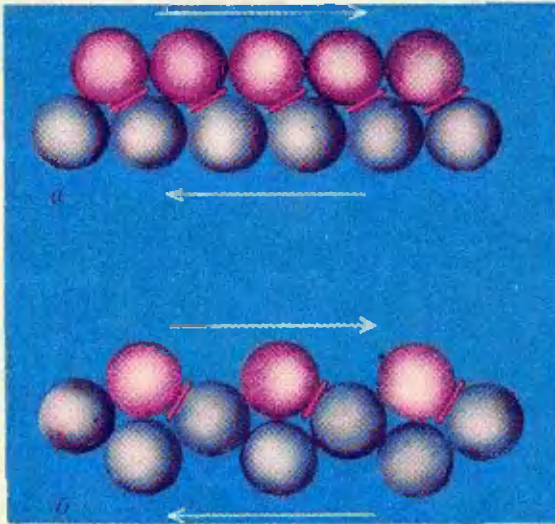


Рис. 4.

Пластический сдвиг возникает при скольжении одного слоя атомов по другому. Скольжение плотноупакованных слоев происходит легче (сравните рисунки *а* и *б*). Кроме того, при плотной упаковке атомы легче перевести из устойчивого положения в такое, из которого они затем снова могут легко перейти в другое устойчивое положение.

рассмотренные нами ранее. В некоторых сплавах могут образовываться другие структуры, и даже более плотные, благодаря разнице в размерах шаров.

Из-за того, что электронный газ ведет себя подобно клею, связывающему ионы, валентность металлов не сказывается на их кристаллической структуре, как в случае неметаллов. Кристаллики металлов могут быть так сильно связаны между собой газом свободных электронов, что границы между ними почти не ощущаются. Очень трудно разбить холодный металл вдоль границ зерен, если только границы не ослаблены примесями. Такая «неразборчивость» металлической связи приводит к тому, что два куска металла можно прочно соединить друг с другом, если просто прижать их чистые поверхности. Металлическая связь позволяет получать сплавы различных металлов в очень разнообразных сочетаниях и пропорциях.

Каким же образом наличие свободных электронов сказывается на прочности и пластичности металлов? Один эффект мы уже рассмотрели: образование у металлов (и у некоторых сплавов, в которых размеры атомов не слишком отличаются друг от друга) простых кристаллических структур с плотнозаполненными плоскостями и линиями, вдоль которых осуществляется скольжение. Пластич-

ность металлов объясняется также тем, что атомы не связаны непосредственно друг с другом, а притягиваются один к другому благодаря газу свободных электронов. Поэтому скольжение одного слоя относительно другого происходит легко.

Если бы скольжение слоев происходило при полном отсутствии сопротивления, то материал вообще не обладал бы жесткостью. Твердое тело, тем не менее, имеет вполне определенную жесткость, мерой которой является модуль сдвига, определяющий усилие, необходимое для очень малой деформации.

Рассмотрим два случая скольжения плоскостей (рис. 4). В одном случае (*а*) атомы в каждом ряду в горизонтальном направлении упакованы плотнее, и, следовательно, расстояния между плоскостями в вертикальном направлении меньше, чем в случае *б*. Ясно, что одна и та же деформация в случае *а* потребует меньших усилий, чем в случае *б*. Для наглядности можно сказать, что «взбираться» придется на меньшие холмы (в действительности это означает, что потребуется меньшее усилие для деформации электронных оболочек). Другими словами, вдоль плотноупакованных плоскостей модуль сдвига меньше.

Прочность металла характеризуется также величиной деформации, которая вызывает его текучесть, —

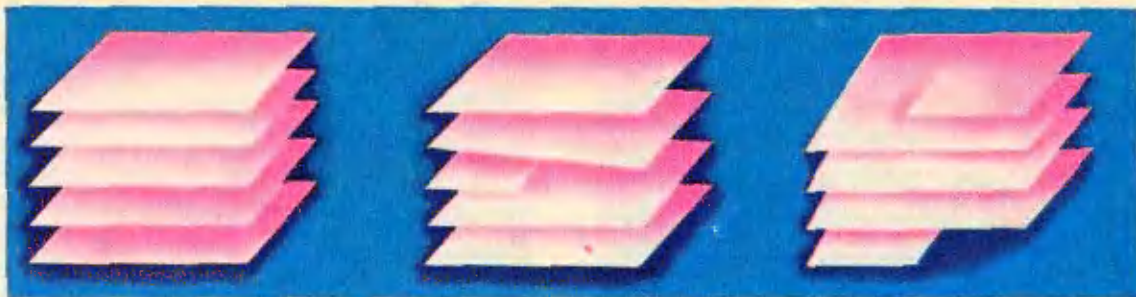


Рис. 5.

Кристалл с правильной решеткой можно представить себе как пакет из параллельных атомных плоскостей (а). Если одна или несколько плоскостей обрываются внутри кристалла, то края «лишних» плоскостей образуют в кристалле краевую дислокацию (б). Другой простейший вид дефекта — винтовая дислокация. Здесь ни одна из атомных плос-

необратимое скольжение атомов. В случае скольжения плоскостей пластическая деформация начинается тогда, когда атом верхнего слоя приближается к положению неустойчивого равновесия, то есть когда разница между электрическими силами, стремящимися вернуть атом назад, и электрическими силами, толкающими его вперед к следующей «ямке», максимальна. Ясно, что в случае а эта деформация меньше. Из-за этих двух причин: меньшего сопротивления сдвигу и меньшей деформации, необходимой для достижения предела текучести, скольжение более вероятно вдоль плотноупакованных плоскостей. Эти соображения объясняют, почему металлы с кубической структурой, такие, как медь и алюминий, особенно пластичны, но вопрос о прочности остается открытым. Вычисления, основанные на этих соображениях, показывают, что металлы должны деформироваться упруго на 2—10% до того, как наступит текучесть. Однако чистые металлы текут уже при деформации в 0,01%.

Расхождение в тысячу раз представляет как научный, так и технический интерес. Когда это расхождение было впервые обнаружено, сначала показалось, что вся теория неверна. Но это не совсем так, ибо кристаллы металлов, выращенные в форме тонких «усов», обладают прочностью, близкой к расчетной.

костей не оканчивается внутри кристалла, но сами плоскости вблизи линии дислокации уже не параллельны, а смыкаются друг с другом так, что весь кристалл как бы состоит из единственной винтообразно изогнутой атомной плоскости (в). При обходе вокруг линии дислокации эта плоскость поднимается (или опускается) на один шаг винта, равный межплоскостному расстоянию.

Меньшая прочность больших кристаллов объясняется наличием в кристаллах дислокаций — нарушений правильной структуры, которые дают атомным плоскостям возможность скользить друг относительно друга легче, чем в идеальном кристалле.

Пусть нам нужно сдвинуть большой тяжелый ковер. Если попытаться сдвинуть весь ковер целиком, то сопротивление будет слишком большим. Но можно сделать на ковре складку и передвигать ее. Такое действие не требует большой затраты энергии, а в результате весь ковер окажется сдвинутым.

Движение ковра в этом случае очень похоже на пластический сдвиг, вызванный дислокацией. Одна часть кристалла скользит по другой не целиком, а по частям. Во время такого скольжения обязательно появится граничная линия (дислокация), разделяющая уже сдвинувшуюся часть от еще не сдвинувшейся.

Различают «краевую» и «винтовую» дислокации (рис. 5). В первом случае линия дислокации перпендикулярна направлению скольжения, во втором — параллельна. Большинство дислокаций является комбинацией этих двух типов и по форме напоминает пружину.

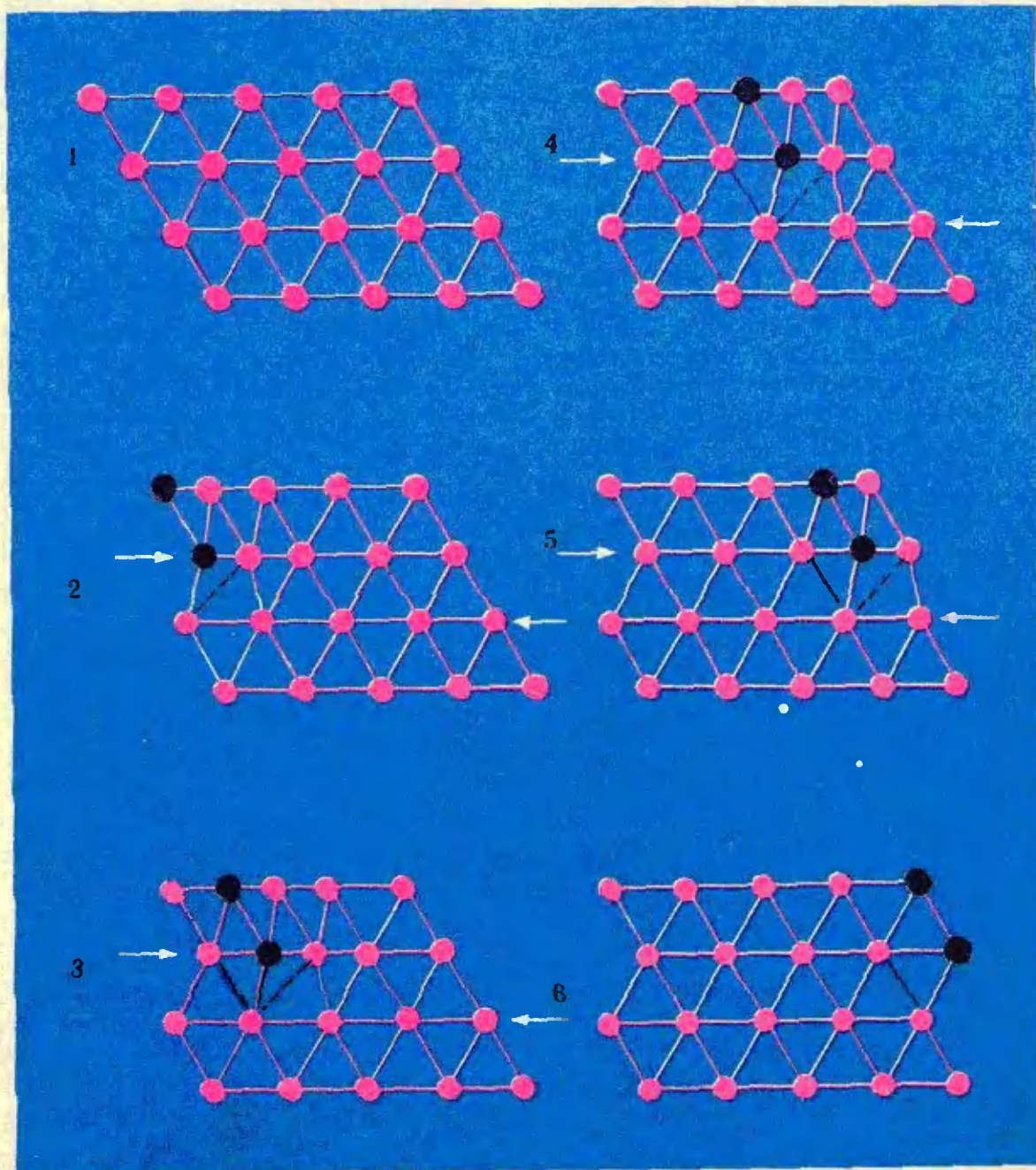
Дислокации в кристалле почти неизбежны, хотя бы из-за неравномерности процесса роста кристалла и наличия зерен, границы которых



Рис. 6.

Дислокации движутся вдоль кристалла. Диаграмма иллюстрирует процесс пластического сдвига в плотноупакованном кристалле. Под действием сдвигающего усилия (стрелки) атомная плоскость (черные шары) смещается (2), и связь нарушается (пунктир).

Лишняя плоскость (черные шары) продолжает двигаться, связи нарушаются, а затем восстанавливаются (черная линия). Когда дислокация (область нарушенных связей) пройдет через весь кристалл, он окажется деформированным (6).





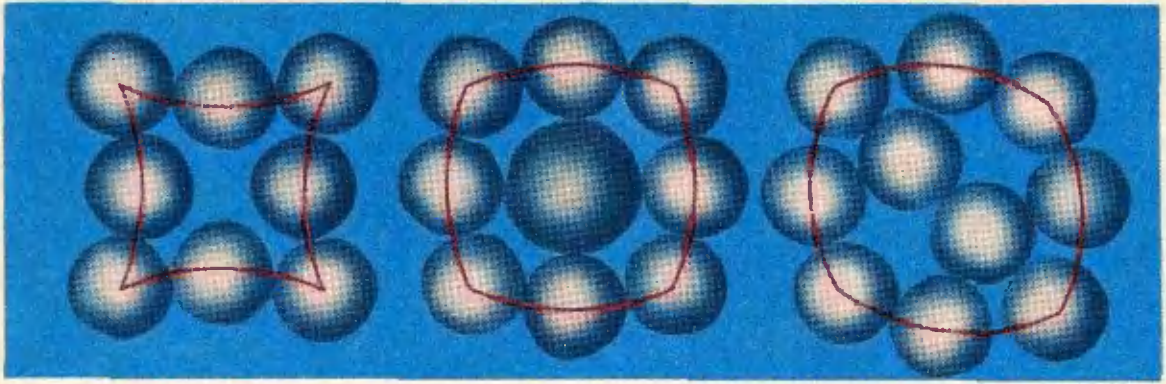


Рис. 7.

Точечные дефекты, как и дислокации, нарушают структуру кристалла. Имеются три разновидности точечных дефектов (слева направо): вакансия (отсутствие атома), замещение (включение атома постороннего вещества) являются фактически совокупностью дислокаций. Сдвигающие усилия, приложенные к кристаллу, заставляют дислокации перемещаться вдоль плоскостей скольжения. Если в кристалле имеется лишь одна дислокация, то при сдвиге она выходит из кристалла (рис. 6). В действительности же в кристалле обычно имеется сложная сеть дислокаций, связанных друг с другом, не считая других нарушений структуры и наличия примесей. Так как концы дислокаций закреплены либо на других дислокациях, либо на примесях, то при сдвиге кристалл не избавляется от нарушений в своей структуре. В действительности при сдвиге число дислокаций увеличивается.

Дислокации перемещаются вдоль плоскости скольжения благодаря «сдвиговым усилиям», возникающим при растяжении, сжатии или кручении образца. Какова величина усилия, необходимого для перемещения дислокации? В этом вопросе содержится два вопроса: 1) о естественном сопротивлении движению дислокации в идеальном кристалле и 2) о влиянии помех (примесей и других препятствий), имеющих в реальном кристалле.

Рассмотрим сопротивление движению дислокации в идеальной решетке. Атомы, расположенные непосредственно перед дислокацией, отталкивают ее, так как она стремится

вывести их из положения устойчивого равновесия. Атомы, расположенные за дислокацией, толкают ее вперед, так как они стремятся занять новое устойчивое положение. На дислокацию действуют равные и противоположно направленные силы, поэтому сопротивление ее движению через кристалл равно нулю! Это странное свойство кристаллического состояния имеет место, если область дислокации достаточно велика. В этом случае по обе стороны от дислокации так много атомов, толкающих ее в разные стороны, что их действие полностью уравнивает друг друга. В противном случае для передвижения дислокации необходимо приложить силу. В пределе, когда толщина дислокации не превышает размера атома, эта сила почти равна прочности материала.

Узкие дислокации могут возникать в кристаллах типа алмаза, поэтому такие материалы даже с дислокациями весьма прочны. Широкие дислокации объясняют мягкость таких металлов, как медь, золото, алюминий. Практические задачи по отношению к этим металлам состоят не в том, чтобы сделать их мягче, а наоборот — сделать тверже. Металлурги достигают этого, помещая на пути движения дислокаций различные препятствия (рис. 9).

Внесение атомов примесей приводит к локальным нарушениям



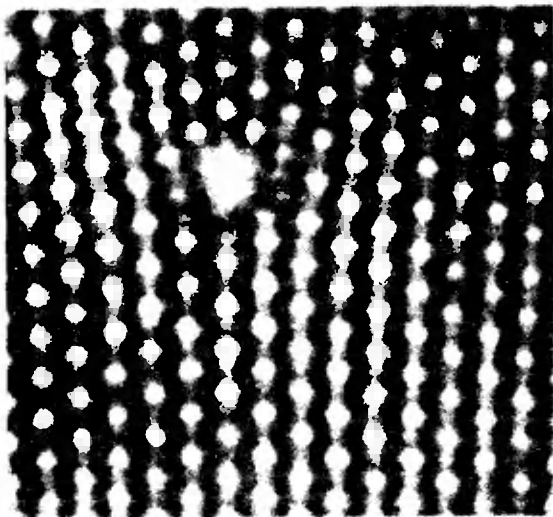


Рис. 8.

Одиночная дислокация в кристалле кадмия. Снимок получен с помощью электронного микроскопа и специального метода фотографирования.

структуры кристалла. Эти нарушения оказывают сопротивление движению дислокаций. Действие атомов примесей усиливается, когда они группируются. Этого можно добиться термической обработкой. Так как дислокации концентрируются на границах зерен, металл можно упрочнить, уменьшая размеры зерен.

Если дислокаций много, то при своем движении вдоль плоскостей скольжения они мешают друг другу — этот эффект может легко себе представить каждый, кому приходилось задерживаться на перекрестке улиц с оживленным движением.

Рассмотрим последний вопрос. Что происходит, когда металл пытаются быстро разрубить? Обычно металлы содержат примеси разных хрупких веществ, и если частица такого вещества раскалывается, то трещина быстро выходит за пределы включения. Опыт показывает, что металлы с гранецентрированной решеткой, например медь, лучше сопротивляются расколу. Он не распространяется по всему куску металла, а «затухает» благодаря пластической деформации.

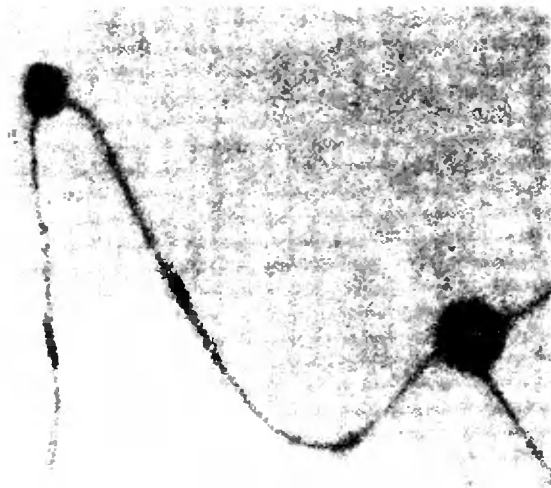


Рис. 9.

Примеси могут закреплять дислокацию, заставляя ее изгибаться и пересекать различные плоскости, что мешает движению дислокации. На микрофотографии, полученной с помощью электронного микроскопа, видны дислокации, закрепленные на примесях в кристалле кадмия. Увеличено в 90 000 раз.

Металлы с объемноцентрированной решеткой, например, такие, как железо, ведут себя в нагретом состоянии как медь, но легко раскалываются, будучи холодными.

Если клин движется медленно, то уже имеющиеся в металле дислокации движутся под действием напряжений, возникающих при перемещении клина, и энергия его тратится на пластическую деформацию. А что будет, если клин движется быстро?

Келли, Тайсон и я недавно рассмотрели этот вопрос. Мы вычислили, что непосредственно вблизи острого края клина силы, стремящиеся разорвать атомные связи, в 5—6 раз больше сил, стремящихся вызвать сдвиг. И те и другие силы растут с приближением клина, но их отношение остается тем же самым до тех пор, пока не достигается предел прочности атомных связей на разрыв или на сдвиг.

Если отношение прочности на разрыв к прочности на сдвиг больше, чем отношение разрывающих сил к силам, вызывающим сдвиг атомов, то разрушение будет иметь вид деформации скольжения. Если наоборот, то материал треснет.

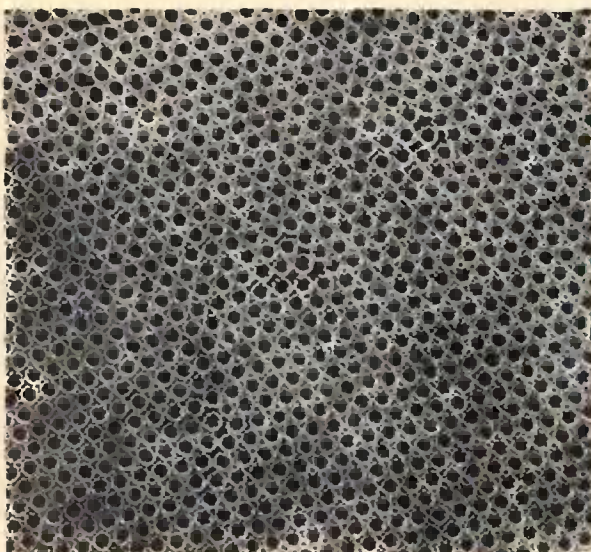
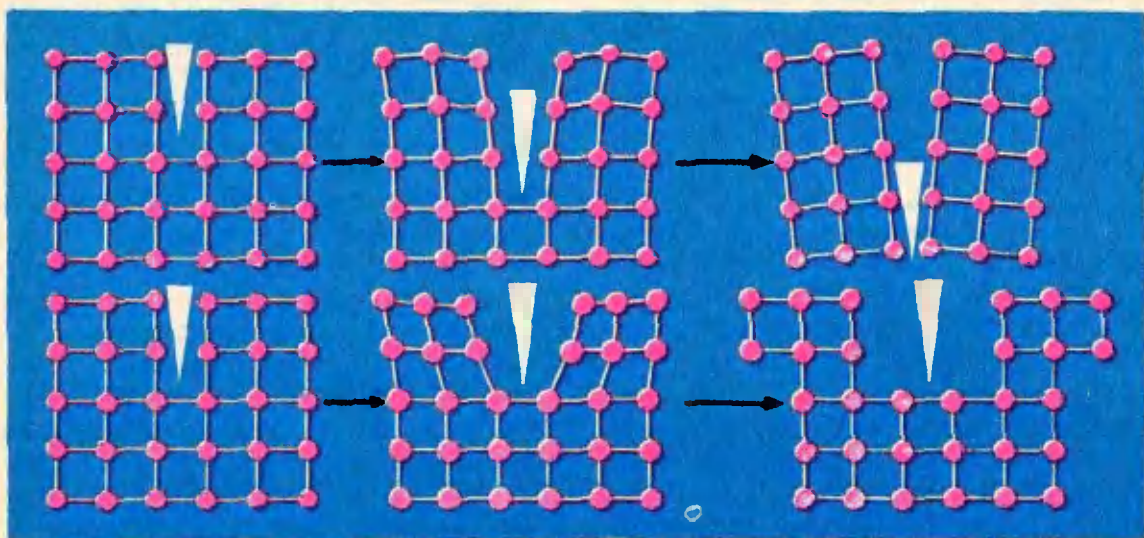


Рис. 10.

Три дислокации, смоделированные с помощью мыльных пузырьков. (Слой пузырьков моделирует слой атомов.) Дислокации, каждая из которых содержит лишний ряд, идут по диагонали из левого нижнего в правый верхний угол.

Рис. 11.

Клин, движущийся через металл с высокой скоростью, может либо просто разорвать связи между атомами, либо заставить атомы скользить друг по другу. В хрупком материале (вверху) связи разрываются раньше, трещина распространяется быстрее, и металл разваливается на куски. В вязком материале (внизу) при движении клина происходит сдвиг. Связи рвутся и восстанавливаются после сдвига атомов. Клин увязает.



Можно оценить прочность связей на разрыв и на сдвиг для различных материалов. Если это сделать, то оказывается, что материалы типа алмаза должны быть хрупкими. Металлы с объемноцентрированной кубической решеткой могут быть как хрупкими, так и вязкими. У металлов с гранецентрированной решеткой прочность связей на сдвиг настолько

мала по сравнению с прочностью на разрыв, что они должны быть всегда вязкими, как это и наблюдается в действительности.

Сокращенный перевод Е. М. Дижуря (А. Н. Cottrell, *The Nature of Metals*. «Scientific American», September 1967, p. 90).

А. Х. Коттрэлл



# Случай с методом

Е. Г. Николаев

## математической

### индукции

Однажды учитель задал ученикам 10-го класса на дом следующую задачу:

Доказать, пользуясь методом математической индукции, что при любом натуральном  $n$  верно неравенство

$$P_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} < \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Коля В. нашел дома следующее решение;

а) При  $n=1$  неравенство верно, так как

$$P_1 = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

б) Покажем, что из условия  $P_n < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$  вытекает справедливость

неравенства  $P_{n+1} < \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ .

Для этого достаточно показать, что

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} < \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}},$$

или

$$\frac{2n+1}{2n+2} < \sqrt{\frac{n+1}{n+2}},$$

или

$$(2n+1)^2(n+2) < 4(n+1)^3,$$

или

$$4n^3 + 12n^2 + 9n + 2 < 4n^3 + 12n^2 + 12n + 4,$$

или

$$0 < 3n + 2,$$

что, очевидно, верно. Таким образом, справедливость доказываемого неравенства следует из принципа математической индукции.

Однако, рассказывая в школе это решение, Коля забыл поставить в знаменателе единицу и стал доказывать более «грубое» неравенство:

$$P_n < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Вот что у него получилось:

а) При  $n=1$  неравенство верно, так как

$$P_1 = \frac{1}{2} < \frac{1}{1}.$$

б) Покажем, что из условия  $P_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$  следует  $P_{n+1} < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ .

Для этого достаточно показать, что

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} < \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}},$$

или

$$\frac{2n+1}{2n+2} < \sqrt{\frac{n}{n+1}},$$

или

$$(2n+1)^2(n+1) < 4(n+1)^2n,$$

или

$$4n^3 + 8n^2 + 5n + 1 < 4n^3 + 8n^2 + 4n,$$

или

$$n+1 < 0.$$

Получился абсурд. Более точное неравенство оказалось и более легким для доказательства. Почему?

Разобравшись в этом вопросе предлагаем доказать два неравенства:

$$1. P_n < \frac{1}{\sqrt{3,1n}}.$$

Интересно, что в этом неравенстве коэффициент 3,1 нельзя заменить на 3,2. Самый большой коэффициент, при котором оно остается верным, равен  $\pi$  (отношение длины окружности к диаметру).

$$2. \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{4}.$$

# Несколько слов об авторе решения десятой проблемы Гильберта

Юрий Владимирович Матиясевич родился 2 марта 1947 г в Ленинграде Первым человеком, обратившим внимание на выдающиеся математические способности мальчика и повлиявшим на зарождение у него раннего интереса к математике, была преподавательница математики 255 школы г Ленинграда Софья Григорьевна Герсон Начиная с 6 класса Юрий участвует в городских математических олимпиадах, неизменно занимая в них первые места, а в 1961 — 1964 гг — и во всероссийских и московских олимпиадах, где был также в числе победителей (10 класс Юрий Матиясевич закончил в 18 школе-интернате при МГУ) С 7 по 9 класс Юрий занимался в математическом кружке Ленинградского Дворца пионеров под руководством сотрудника ЛОМИ (Ленинградского отделения Математического института им В А Стеклова Академии наук СССР) Н М Минрофанова

Участвуя в составе команды СССР в VI Международной математической олимпиаде (Москва, 1964 г), Матиясевич был удостоен Диплома I степени

В 1964—1969 гг Юрий Матиясевич — студент математико-механического факультета Ленинградского университета

Еще на II курсе Матиясевич выполнил две работы по математической логике, напечатанные затем в «Докладах Академии наук СССР» Основные результаты этих работ были доложены Ю Матиясевичем на Международном математическом конгрессе в Москве в 1966 г

В настоящее время Матиясевич — аспирант Ленинградского отделения математического института Математическое творчество Ю Матиясевича — яркий пример преемственности научной традиции Научным руководителем Матиясевича в университете и аспирантуре является молодой, но уже хорошо известный специалист по математической логике Сергей Юрьевич Маслов по совету которого Матиясевич с декабря 1965 г и обратился к десятой проблеме Гильберта Учитель С Ю Маслова проф Николай Александрович Шапиро — ближайший ученик члена-корреспондента АН СССР Андрея Андреевича Маркова

Таким образом, Юрий Матиясевич — представитель уже «четвертого поколения», возглавляемого выдающимся советским математиком Марковым так называемого конструктивного направления в логике и математике





# О РЕШЕНИИ ДЕСЯТОЙ ПРОБЛЕМЫ ГИЛЬБЕРТА

Ф. П. Варпаховский,  
А. Н. Колмогоров

В третьем номере «Кванта» сообщалось о выдающемся успехе молодого ленинградского математика Ю. В. Матиясевича, которому недавно удалось сделать завершающий шаг в решении одной из знаменитых «проблем Гильберта», поставленных еще в 1900-м году. Работа Ю. В. Матиясевича опубликована в Докладах Академии наук СССР<sup>\*</sup>. И что бывает редко — вдумчивый школьник может самостоятельно разобраться в основном содержании этой работы, имеющей важное значение для современной математической науки. Дело в том, что оригинальная часть работы Ю. В. Матиясевича посвящена доказательству теоремы, формулировка которой вполне элементарна и приведена в публикуемой нами статье. Методы доказательства тоже элементарны. Труднее, правда, объяснить на понятном школьнику языке, почему эта теорема о числах Фибоначчи имеет столь значительный интерес для серьезной математической науки. По своей формулировке и методам доказательства она скорее напоминает хитроумную олимпиадную задачу.

## 1. Теорема о числах Фибоначчи

Во всем дальнейшем мы будем иметь дело только с целыми числами. Рассмотрим такое свойство пары чисел  $(a, b)$ :

« $b$  делится на  $a$ ».

Это свойство пары чисел можно выразить и так:

«существует число  $x$  такое, что  $ax - b = 0$ ».

Мы выразили наше свойство пары чисел  $(a, b)$  через существование решения уравнения

$$ax - b = 0$$

(напомним еще раз, что мы имеем дело только с целыми числами и, значит, только с целыми решениями). Уравнение это имеет вид

$$P(a, b, x) = 0,$$

где  $P$  — многочлен от трех переменных  $a, b, x$ .

Введем теперь общее определение: свойство конечной последовательности чисел  $(a_1, a_2, \dots, a_m)$  называется *диофантовым*, если существует такой многочлен от  $m + n$  переменных

$$P(a_1, a_2, \dots, a_m, x_1, x_2, \dots, x_n),$$

что последовательность  $(a_1, a_2, \dots, a_m)$  обладает нашим свойством в том и

<sup>\*</sup> Вот название и точный «адрес» статьи: Ю. В. Матиясевич. Диофантовость пересчитываемых множеств, ДАН СССР, 1970, том 191, № 2.

только в том случае, когда существуют числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , для которых

$$P(a_1, a_2, \dots, a_m, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Основное достижение Матиясевица как раз и состоит в доказательстве диофантовости некоторого специального свойства пар чисел  $(a, b)$ .

Многие из вас знакомы с числами Фибоначчи

$$\begin{aligned} \psi_0 &= 0, & \psi_1 &= 1, \\ \psi_2 &= \psi_0 + \psi_1 = 1, \\ \psi_3 &= \psi_1 + \psi_2 = 2, \\ \psi_4 &= \psi_2 + \psi_3 = 3, \\ \psi_5 &= \psi_3 + \psi_4 = 5, \\ &\dots \end{aligned}$$

бесконечная последовательность которых определяется рекуррентной формулой

$$\psi_{n+1} = \psi_{n-1} + \psi_n.$$

Свойство пары чисел  $(a, b)$ , которым занимается Матиясевиц, таково:

« $b$  есть число Фибоначчи

с номером  $2a$ », т. е.  $b = \psi_{2a}$ .

Ясно, что этим свойством обладают пары

$$(0,0), (1,1), (2,3), (3,8)$$

и т. д. Утверждение, что свойство Матиясевица диофантово, означает, что существует многочлен

$$Q(a, b, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

такой, что  $b$  будет числом Фибоначчи с номером  $2a$  тогда и только тогда, когда существуют такие числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , что

$$Q(a, b, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Многочлен  $Q$  с целыми коэффициентами можно было бы в принципе явно выписать. Матиясевиц этого не делает и даже не указывает, каково число  $n$  дополнительных переменных.

Что касается доказательства сформулированной теоремы, то, как уже было сказано, оно вполне элементарно. Матиясевиц ссылается на одну лем-

му, доказанную в книжке Н. Н. Воробьева «Числа Фибоначчи», предназначенной для школьников, и один результат, доказанный в более ученой книге А. И. Мальцева, но тоже элементарный. В самой работе Матиясевица девятнадцать лемм приведены без доказательства, но доказательство каждой из них в отдельности не труднее обычных задач для школьников. Трудность состояла лишь в том, чтобы найти ту именно комбинацию элементарных предложений, которая ведет к конечной цели.

### 2. Почему все это так важно?

Если бы многочлен  $Q$  Матиясевица был в самом деле очень нужен математикам для проведения каких-либо расчетов, то вероятно, Матиясевиц не поленился бы его явно выписать. Но в действительности само обращение к числам Фибоначчи являлось для Матиясевица лишь вспомогательным средством для установления весьма общих и важных закономерностей.

В случае свойства Матиясевица существует очень простой регулярный способ (алгоритм) для последовательного выписывания всех обладающих этим свойством пар

$$(0,0), (1,1), (2,3), (3,8), (4,21), (5,55), \dots$$

Так как множество этих пар бесконечно, то процесс их выписывания никогда не кончится. Но мы располагаем правилом, по которому наши пары можно выписывать одну за другой с уверенностью в том, что

- 1) будут выписаны только пары, обладающие свойством Матиясевица,
- 2) любая пара, обладающая свойством Матиясевица, рано или поздно будет выписана.

Свойство (на более ученом языке «предикат») конечной последовательности чисел  $(a_1, a_2, \dots, a_m)$  называется *перечислимым*, если существует правило, позволяющее при помощи механического применения этого правила получать одну за другой последовательности, с непеременимостью обладающие заданным свойством, и притом так, что любая последователь-

ность, обладающая этим свойством, рано или поздно будет получена.

С современной точки зрения самым значительным следствием теоремы Матиясевиचा о числах Фибоначчи является

**Теорема 1.** Любое перечислимое свойство конечной последовательности чисел является диофантовым.

До 1961 года эта теорема казалась бы крайне неожиданной. Но некоторый более слабый результат Девиса, Путнама и Робинсон, доказанный в 1961 году, сделал такую гипотезу уже не столь невероятной. На ее доказательство математиками были затрачены немалые усилия. Матиясевиц и воспользовался некоторыми, как говорят, «редукциями» проблемы к более специальным задачам. Но идея свести все к свойствам чисел Фибоначчи была и в обстановке, сложившейся к 1970 году, неожиданной.

Таким образом крупный успех Матиясевича требовал соединения понимания больших проблем современной математики и эрудиции в своей области с искусством находить неожиданные вполне элементарные пути решения специальных задач.

### 3. В каком смысле Матиясевиц решил десятую проблему Гильберта

В десятой проблеме Гильберта \*) речь идет об уравнениях вида

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

где  $P$  многочлен с целыми коэффициентами. Степенью такого уравнения называют степень многочлена  $P$ . Когда вопрос ставится о нахождении их решений в целых числах, эти уравнения называют «диофантовыми». Например, уравнение

$$x^2 + y^2 = 1$$

имеет четыре решения в целых числах

$$x = \pm 1, \quad y = \pm 1,$$

а уравнение

$$x^2 + y^2 = 3$$

в целых числах решений не имеет.

Теперь предоставим слово самому Гильберту:

*«Пусть дано произвольное диофантово уравнение с произвольным числом неизвестных . . . ; требуется указать общий метод, следуя которому можно было бы в конечном числе шагов узнать, имеет данное уравнение решение в целых . . . числах или нет».*

Гильберт, по-видимому, был убежден, что искомый общий метод существует, и дело заключалось лишь в том, чтобы найти его. Немало усилий было затрачено, чтобы отыскать этот метод, но сколь-нибудь обнадеживающих результатов не получалось.

Задача о целых решениях произвольного уравнения легко сводится к задаче о натуральных (целых неотрицательных) решениях. Далее, совсем нетрудно показать, что достаточно ограничиться диофантовыми уравнениями степени не выше четвертой. Для диофантовых уравнений степени не выше второй искомый общий метод был найден, но уже уравнения третьей степени не поддавались никаким усилиям.

В связи с неудачами в этом направлении возникло подозрение, что тот общий метод, об отыскании которого говорится в формулировке Гильберта, попросту не существует! Сходная ситуация сложилась и в ряде других задач аналогичного характера. Однако, одно дело найти требуемый общий метод — тут достаточно было только предъявить этот метод и непосредственно убедиться в том, что он удовлетворяет условиям, выдвинутым Гильбертом.

А вот чтобы доказать несуществование некоего общего метода для решения серии задач, требовалось дать точное определение тому, что такое этот общий метод, как и какими средствами он может быть реализован.

В начале тридцатых годов соответствующие определения были выра-

\*) Более подробно о проблемах Гильберта можно прочитать в книге Д. Гильберт, «Математические проблемы», «Наука», 1969.



ботаны в трудах американского ученого Чёрча и английского ученого Тьюринга. Эти определения положили начало теории алгоритмов. Оглядываясь на пройденный путь, математики должны быть благодарны десятой проблеме Гильберта уже за то, что она послужила одним из стимулов для создания этой теории.

В рамках теории алгоритмов было получено и точное определение понятия «перечислимое свойство», которым мы воспользовались в предыдущем пункте.

Оказалось, что из диофантовости любого перечислимого свойства конечной числовой последовательности вытекает

**Теорема 2.** Невозможен общий метод (алгоритм), позволяющий для любого заданного диофантова уравнения установить, имеет оно решения в целых числах или нет.

Матиясевич из своей теоремы о диофантовости специального свойства пары чисел  $(a, b)$

$$b = \Psi_{2a}$$

вывел доказательство теоремы 1, из которой, как уже было известно, вытекает теорема 2, т. е. отрицательное решение десятой проблемы Гильберта.

Для окончательного понимания всего сказанного вам не хватает только отчетливого знания того, что такое «алгоритм» (общий метод решения бесконечного ряда задач) и что такое «перечислимое свойство» (перечислимый предикат). Но это уже значительно более трудная тема.

#### 4. Определения и факты теории алгоритмов

1. Среди функций, определенных на множестве  $N$  натуральных чисел и принимающих натуральные значения, следующим образом выделяется класс *примитивно рекурсивных* функций.

Рассматриваются функции  $S(n) = n + 1$  и  $f(n) = n - p$ , где  $p^2 \leq n < (p+1)^2$ . Из функций  $f(n)$  и  $q(n)$  разрешается образовывать функции  $h_1(n) = f(n) + q(n)$  (операция сложения),

$h_2(n) = f(q(n))$  (операция подстановки), а из одной функции  $f(n)$  — функцию, определяемую равенствами  $h_3(0) = 0, h_3(n+1) = f(h_3(n))$  (операция итерирования). Класс примитивно рекурсивных функций состоит из функций  $S, \varphi$  и всех тех функций, которые могут быть получены из них конечным числом сложений, подстановок и итерирований.

Примечание. Покажем, что функции  $\varphi(n) = 2n$  и  $\psi(n) = 2n + 1$  примитивно рекурсивные. Применим сначала операцию итерирования к функции  $S(n) = n + 1$ . Тогда  $h(0) = 0, h(n+1) = S(h(n)) = h(n) + 1$ . Следовательно,  $h(n) = n$  и  $\varphi(n)$  получается применением операции сложения к двум функциям, каждая из которых равна  $h(n)$ :  $\varphi(n) = h(n) + h(n) = n + n = 2n$ . Наконец, функция  $\psi(n)$  получается операцией подстановки, примененной к функциям  $S(n) = n + 1$  и  $\varphi(n) = 2n$ :  $\psi(n) = S(\varphi(n)) = S(2n) = 2n + 1$ .

2. Множество  $M$  натуральных чисел называется *перечислимым*, если оно совпадает со множеством значений некоторой примитивно рекурсивной функции.

Так, например, множество четных чисел перечислимо, так как является множеством значений примитивно рекурсивной функции  $\varphi(n) = 2n$ . Множество нечетных чисел, совпадающее со множеством значений примитивно рекурсивной функции  $\psi(n) = 2n + 1$ , также перечислимо.

3. Множество  $M$  называется *разрешимым*, если оно перечислимо вместе со своим дополнением  $N - M$  (где  $N$  — множество всех натуральных чисел).

В частности, разрешимо множество четных чисел, поскольку оно перечислимо вместе со своим дополнением (множеством нечетных чисел).

4. Существуют перечислимые, но неразрешимые множества.

Можно привести конкретный пример такого множества, однако соответствующая конструкция технически слишком сложна, для того чтобы ее можно было выполнить в рамках настоящей заметки.

Пусть теперь дано некоторое множество  $M$  натуральных чисел. Можно задаться вопросом, существует ли общий метод, который по каждому натуральному  $n$  определяет в конечном числе шагов, принадлежит это  $n$  множеству  $M$  или нет. Основное положение теории алгоритмов (тезис Чёрча) утверждает, что *такой метод (алгоритм) существует тогда и только тогда, когда множество  $M$  разрешимо*.

Для отрицательного решения данной проблемы Гильберта достаточно было доказать диофантовость каждого перечислимого множества, т.е. по каждому перечислимому множеству  $M$  уметь строить такое диофантово уравнение  $P(y, x_1, \dots, x_k) = 0$ , которое имело бы натуральные решения  $x_1, \dots, x_k$  для всех  $y$ , принадлежащих  $M$ , и только для таких  $y$ .

В самом деле, если бы это можно было сделать, то, взяв в качестве  $M$  неразрешимое множество (такие есть среди перечислимых, см. п. 4), мы получили бы, что уже для соответствующего уравнения  $P(y, x_1, \dots, x_k) = 0$  нет общего метода (алгоритма), который по каждому натуральному  $y$  давал бы ответ на вопрос о существовании у этого уравнения натуральных решений. Ведь если бы этот метод имелся, то можно было бы за конечное число шагов узнать, имеет ли уравнение  $P(0, x_1, \dots, x_k) = 0$  решение (т.е. принадлежит ли число 0 множеству  $M$ ), имеет ли уравнение  $P(1, x_1, \dots, x_k) = 0$  решение (т.е. принадлежит ли число 1 множеству  $M$ ) и т.д. Получилось бы, что существует общий метод, который по каждому натуральному  $y$  определяет за конечное число шагов, принадлежит это  $y$  множеству  $M$  или нет. Тогда в силу тезиса Чёрча  $M$  было бы разрешимо, вопреки выбору этого множества.

### 5. Что было сделано и что сделал Матиясевич.

В пятидесятые годы группа американских математиков (Р. Робинсон, Х. Путнам, М. Дэвис, Дж. Робинсон) получила ряд значительных и обна-

деживающих результатов в поисках доказательства диофантовости перечислимых множеств. (Гипотезу о диофантовости перечислимых множеств выдвинул Мартин Дэвис.)

Американским ученым ценою значительных усилий удалось свести задачу к доказательству диофантовости отношения  $y = z^n$ . Джулия Робинсон пошла даже несколько дальше, показав, что достаточно построить конкретное уравнение  $R(u, v, x_1, \dots, x_k) = 0$ , не допускающее решения с  $v > u^n$ , но для каждого  $n$  имеющее решение с  $v > u^n$ . Именно такого рода уравнение и удалось построить Ю. В. Матиясевичу, предложившему вполне элементарную, но чрезвычайно остроумную и оригинальную конструкцию. При этом пришлось решать задачу, необычную для традиционной теории чисел. Ведь в теории чисел по заданному уравнению, как правило, исследуются свойства его решений, здесь же, наоборот, задавшись определенными свойствами решений, нужно было искать требуемое уравнение.

Обратившись к рассмотрению последовательности Фибоначчи, Матиясевич заметил, что если за  $u$  взять половину номера четного члена последовательности, а за  $v$  — сам член, то неравенство  $v > u^n$  будет всегда неверно, а для любого  $n$  можно найти такой четный член последо-

Номер члена последовательности	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Член последовательности $v$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377
Половина номера четного члена последовательности $u$	0		1		2		3		4		5		6		7
$u^n$	1		1		4		27		64		3125		47 256		823 649
$u^0$	1		1		1		1		1		1		1		1
$u^1$	0		1		2		3		4		5		6		7
$u^2$	0		1		4		9		16		25		36		49
$u^3$	0		1		8		27		64		125		216		343

вательности, что неравенство  $v > u^n$  будет верно. Это обстоятельство иллюстрируется таблицей приведенной на стр. 43. (В ней выделены те клетки, в которых числа  $u^k$  оказываются меньше соответствующих чисел  $v$ ).

После того как указанное свойство было проверено, Матиясевиц «подправил» последовательность Фибоначчи, выбросив из нее нечетные члены. Именно, он рассмотрел последовательность, задаваемую соотношениями:  $\varphi_0 = 0, \varphi_1 = 1, \varphi_{n+1} = 3\varphi_n - \varphi_{n-1}$ . Получилось в точности последовательность из четных членов первоначальной последовательности:  $\varphi_0 = 0, \varphi_1 = 1, \varphi_2 = 3, \varphi_3 = 8, \varphi_4 = 21, \varphi_5 = 55, \varphi_6 = 144, \varphi_7 = 377$  и т. д. Приняв теперь за  $u$  номер члена последовательности, а за  $v$  — член последовательности с номером  $u$ , т. е.  $\varphi_u$ , мы получаем, что снова выполняется требуемое свойство для  $u$  и  $v$ . Теперь оставалось построить уравнение  $P(u, v, x_1, \dots, x_k) = 0$ , которое имело бы натуральное решение тогда и только тогда, когда  $v = \varphi_u$ , — дальше можно было сослаться на результат Джулии Робинсон! Для этого достаточно было построить систему диофантовых уравнений  $P_1 = 0, \dots, P_n = 0$  в переменных  $u, v, x_1, \dots, x_k$ , имеющую решение тогда и только тогда, когда  $v = \varphi_u$  — ведь такая система имеет в точности те же решения, что и единственное уравнение  $P_1^2 + \dots + P_n^2 = 0$ . Вот в каком виде получил Матиясевиц требуемую систему уравнений:

- 1)  $u + (a - 1) = v,$
- 2)  $v + b = 1,$
- 3)  $l^2 - lk - k^2 = 1,$
- 4)  $g^2 - gh - h^2 = 1,$
- 5)  $l^2c = g,$
- 6)  $ld = r - 2,$
- 7)  $(2h + g)e = r - 3,$
- 8)  $x^2 - rxy + y^2 = 1,$
- 9)  $lp = x - u,$
- 10)  $(2h + g)q = x - v.$

Для доказательства того, что су-

ществование натурального решения этой системы равносильно соотношению  $v = \varphi_u$ , Матиясевиц использовал следующее характеристическое свойство последовательности  $\{\varphi_k\}$ : пара условий  $x < y$  и  $x^2 - 3xy + y^2 = -1$  равносильна существованию такого  $k$ , что  $x = \varphi_k$  и  $y = \varphi_{k+1}$ .

Интересующемуся читателю рекомендуем попробовать свои силы на доказательстве этой равносильности.

Укажем в заключение, что найденное решение десятой проблемы имеет ряд интересных следствий, из которых, быть может, наиболее эффективным является следующее: *можно указать конкретный многочлен пятой степени, множество положительных значений которого совпадает со множеством всех простых чисел!*

Математическая наука записала в свой актив серьезное и поучительное достижение.

#### З а д а ч и

1. Покажите, что для любого  $k$  числа  $\varphi_k$  и  $\varphi_{k+1}$  взаимно просты.
2. Докажите соотношение:  $\varphi_{k+i} = \varphi_{k+1}\varphi_i - \varphi_k\varphi_{i-1}$ .
3. Покажите, что диофантово уравнение  $P(y, x_1, \dots, x_k) = 0$  имеет решение в целых положительных числах тогда и только тогда, когда такое решение имеет уравнение

$$Z (1 - (P(z, x_1, \dots, x_k))^2) = y.$$

По вине типографии в «Кванте» № 5 (стр. 64, зад. 1226) неправильно набрана формула деления чисел. Она должна выглядеть так:

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} \times \times \times \times \times \times \times \\ \times \times \times \times \times \\ \hline \times \times \times \times \times \\ \times \times \times \times \times \\ \hline \times \times \times \times \times \\ \times \times \times \times \times \\ \hline \times \times \times \times \times \\ \times \times \times \times \times \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} \times \times \times \times \\ \times \times \times \times \\ \hline \times \times \times \times \\ \times \times \times \times \\ \hline \times \times \times \times \\ \times \times \times \times \\ \hline \times \times \times \times \\ \times \times \times \times \\ \hline 0 \end{array} \right. \end{array}$$



*В наш век физики привыкли удивляться грандиозным вещам — гигантскому ускорителю, магниту, дающему поля в сотни тысяч эрстед, приборам квантовой электроники. Только построив огромную камеру для наблюдения процессов, происходящих в микромире, физики могут надеяться проникнуть дальше в суть явлений природы. А ведь не так давно, еще в начале нашего века, физик сам строил маленькие установки, умещавшиеся на его столе и делал великие открытия. Атомное ядро, радиоактивность, рентгеновские лучи, радиоволны — все это было открыто в XIX веке с помощью несложных средств, которые находились в распоряжении естествоиспытателей. А если уйти еще дальше в прошлое? Трудно сейчас поверить, что в XVIII веке даже королевские врачи не могли договориться между собой о частоте пульса короля, так как часы у них ходили по разному. Давление крови и даже просто температуру тела вообще никто не измерял. Появление термометра вызвало тогда энтузиазм не меньший, чем открытие лазера в наши дни. Вот с каким восторгом писал об этом изобретении Реомюр в 1730 году.*

*Я. А. Смородинский*

## «ОБ УСТРОЙСТВЕ ТЕРМОМЕТРОВ», 1730 г.

Реомюр

Термометр, без сомнения, есть одно из чудесных изобретений современной физики, которое в свою очередь много содействовало ее успехам. Он нам доставил большое число интересных знаний, которые были бы недостижимы без его помощи. Как мы во многих случаях могли бы без термометра узнать, что жидкости (некоторые), смешанные между собою, нагреваются? Без термометра мы никогда не открыли бы, что при растворении известных солей происходит охлаждение, а также при каких солях это охлаждающее обнаруживается наиболее сильно. Мы не могли бы также узнать, что один кусок льда может быть холоднее другого. Мы также не могли бы открыть, что кипящая вода имеет температуру, выше которой вода вообще не может быть нагрета (при нормальном давлении).

Все физики знают, что с термометром в руках можно произвести бесчисленные опыты. Но в этом приборе нуждаются не одни физики; применение его не ограничивается лабораториями — мы обычно узнаем по термометру, какова температура воздуха...

До сих пор (т. е. до 1730 г.) термометры почти совсем не употреблялись для определения наибольшего холода и жара в различных климатах — вопросов большой пользы и интереса. А между тем таким образом легко узнать, сколько градусов тепла или холода может выдержать человек. Столь же важно бы знать, в каких температурах нуждаются для произрастания те растения и деревья, которые могли бы у нас акклиматизироваться.

# ЗАДАЧНИК **Кванта**

*Все задачи по математике в этом номере взяты из числа предлагавшихся на последней Московской математической олимпиаде, некоторые формулировки слегка изменены.*



**Ф36.** Капля жидкости лежит на плоской стороне полусферической стеклянной пластинки. Покажите, как можно определить показатель преломления жидкости из наблюдений полного внутреннего отражения. Показатель преломления стекла тоже неизвестен и его надо определить.

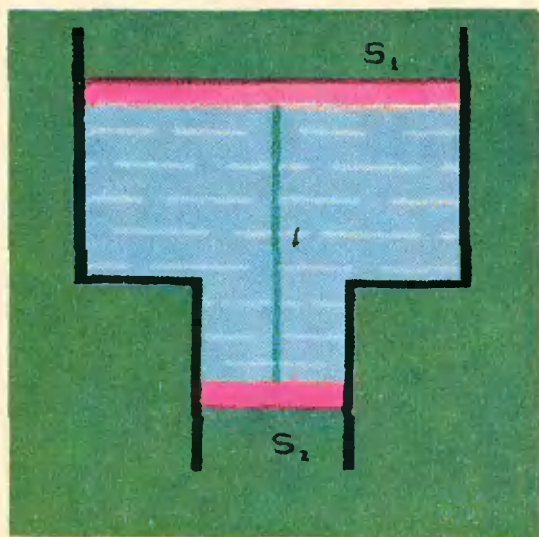


Рис. 1.

**Ф37.** В двух вертикально расположенных цилиндрах, площади сечения которых  $S_1$  и  $S_2$ , находятся два невесомых поршня, соединенных тонкой невесомой нитью длины  $l$  (рис. 1). Пространство между поршнями заполнено водой. Найти натяжение нити, если концы сосудов открыты в атмосферу. Плотность воды  $\rho$ .

**Ф38.** Широкое колено U-образного ртутного манометра имеет втрое больший диаметр, чем узкое. К какому колену следует прикрепить шкалу для отсчета измерения давления, чтобы точность измерения была выше?

**Ф39.** Планету радиуса  $R$  и массы  $M$  окружает равноплотная атмосфера, состоящая из газа с молекулярным весом  $\mu$ . Какова температура атмосферы на поверхности планеты, если высота атмосферы равна  $H$ ?

*Физическая олимпиада МГУ, 1967 г.*

**Ф40.** При какой разности потенциалов между электродами зажигается неоновая лампочка, если энергия ионизации неона  $I = 21,5$  эв, а среднее расстояние между двумя последовательными столкновениями электрона с атомами газа равно  $0,4$  мк? Electroды имеют вид больших пластинок, расположенных на расстоянии  $d = 3$  мм друг от друга.

**Ф41.** Во сколько раз освещенность в лунную ночь в полнолуние меньше, чем в солнечный день, при одинаковой высоте Луны и Солнца над горизонтом? Считать, что освещенная полусфера Луны равномерно рассеивает свет в пространство. Радиус Луны принять равным  $2000$  км, а расстояние от Луны до Земли —  $400\,000$  км.

**М31.** Квадратный лист бумаги разрезают по прямой на две части. Одну из полученных частей снова разрезают на две части, и так делают много раз. Какое наименьшее число разрезов нужно сделать, чтобы среди полученных частей оказалось ровно сто 20-угольников?

*И. Бернштейн*

**М32.** Во всех клетках таблицы  $100 \times 100$  стоят плюсы. Разрешается одновременно изменить знаки во всех клетках одной строки или одного столбца. Можно ли, проделав такие операции несколько раз, получить таблицу, где ровно 1970 минусов?

*А. Зелевинский*

**М33.** Имеется натуральное число  $n > 1000$ . Возьмем остатки от деления числа  $2^n$  на числа  $1, 2, 3, \dots, n$  и найдем сумму всех этих остатков. Доказать, что эта сумма больше  $2n$ .

*А. Кушниренко*

**М34.** Доказать, что если натуральное число делится на  $10\,101\,010\,101$ , то в его десятичной записи по крайней мере шесть цифр отличны от нуля.

*А. Толыго*

**М35.** Около сферы радиуса  $10$  описан некоторый 19-гранник. Докажите, что на его поверхности найдутся две точки, расстояние между которыми больше  $21$ .

*А. Кушниренко*



# РЕШЕНИЯ ЗАДАЧНИКА **Кванта**

С этого номера мы начинаем печатать решения «Задачника Кванта». Большинство из задач, помещенных в этом разделе журнала, довольно трудны и обсуждению некоторых из них следовало бы посвятить большую статью. Многие из них дают повод для разговора о целом классе задач, о методах подхода к тем или иным явлениям, об использовании различных явлений в практике. Иногда мы будем вести этот разговор на страницах нашего журнала. Но часто читателям самим стоит подумать над тем, как обобщить приведенное решение, или как его упростить, над тем, где применяется явление, о котором говорится в задаче и т. д.

Седьмой номер был подготовлен к печати в конце марта, поэтому здесь, естественно, не учтены письма с решениями, которые мы получили позже. В дальнейшем предполагается публиковать решения примерно через полгода после публикации задач. При этом мы успеем познакомиться с решениями, посланными «вовремя» — не позднее чем через полтора месяца после выхода соответствующего номера. Конечно, мы не сможем ответить всем читателям, приславшим нам письма. Лучшие решения будут опубликованы на страницах журнала. Тем же, кто придумал решение, сильно отличающееся от опубликованного, придется самим разобраться, верно оно или нет, и если нет, — в чем ошибка.

И последнее. Придумать задачу обычно труднее, чем ее решить. Труднее, но зато и интереснее. Попробуйте придумать задачи и пришлите их нам. Лучшие задачи мы опубликуем в «Задачнике Кванта».

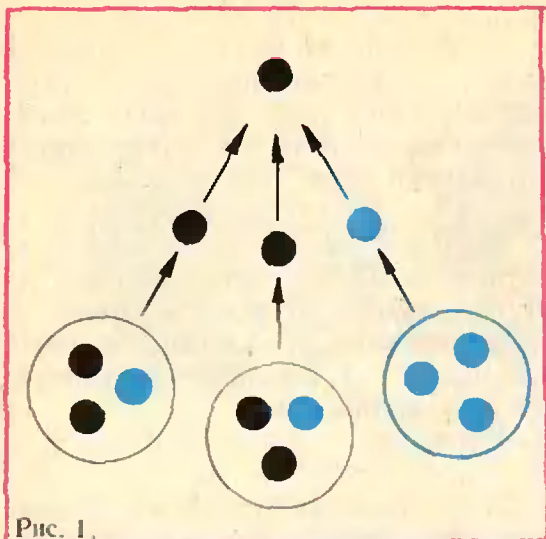


Рис. 1.

М1. В стране Анчурии, где правит президент Мирафлорес, приближилось время новых президентских выборов. В стране ровно 20 миллионов избирателей, из которых только один процент (регулярная армия Анчурии) поддерживает Мирафлореса. Мирафлорес, естественно, хочет быть избранным, но, с другой стороны, он хочет, чтобы выборы казались демократическими. «Демократическим голосованием» Мирафлорес называет вот что: все избиратели разбиваются на несколько равных групп, затем каждая из этих групп вновь разбивается на некоторое количество равных групп, затем эти последние группы снова разбиваются на равные группы и т. д.; в самых мелких группах выбирают представителя группы — выборщика, затем выборщики выбирают представителей для голосования в еще большей группе и т. д.; наконец, представители самых больших групп выбирают президента. Мирафлорес делит избирателей на группы, как он хочет, и структурирует своих сторонников, как им голосовать. Сможет ли он так организовать «демократические выборы», чтобы его избрали президентом? (При равенстве голосов побеждает оппозиция.)

Ответ. Да, сможет.

Прежде всего, разберемся, как может на «многоступенчатых» выборах

победить кандидат, за которого голосует меньшинство. (Кстати, по такой системе голосуют во многих капиталистических странах.) Самый простой пример такой ситуации изображен на рисунке 1: здесь девять избирателей — четыре «черных» и пять «голубых» — разбиты на три группы по три избирателя так, что в двух группах побеждают черные, и поэтому в результате таких «двухступенчатых выборов» будет избран кандидат черных, хотя число его сторонников составляет только  $\frac{4}{5}$  от общего числа

избирателей. (Нетрудно сообразить, что при двухступенчатых выборах с большим числом избирателей процент голосов, достаточный для победы, может быть еще меньше, но все-таки заведомо больше 25%.) Ясно, что при трехступенчатой системе выборов этот процент можно сделать еще ниже. Например, если заменить на рисунке 1 каждого избирателя группой из ста человек, причем так, что в голубой группе все сто избирателей голубые, а в черной — 51 черный и 49 голубых, то мы получим пример ситуации, где черные составляют только  $\frac{4}{9} \cdot \frac{51}{100} = \frac{17}{75}$  от общего числа избирателей и тем не менее побеждают.

После этих предварительных соображений приведем решение задачи.

Разобьем всех избирателей на 5 групп по 4 миллиона в каждой так, что две группы целиком состоят из противников Мирафлореса (назовем эти группы «голубыми», а три остальные — «черными»). Каждую из

Ранг группы $r$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Общее число групп ранга $r$	5	5 <sup>2</sup>	5 <sup>3</sup>	5 <sup>4</sup>	5 <sup>5</sup>	5 <sup>6</sup>	5 <sup>7</sup>	2 <sup>4</sup> · 5 <sup>7</sup>	2 <sup>8</sup> · 5 <sup>7</sup>
Сколько из них черных	3	3 <sup>2</sup>	3 <sup>3</sup>	3 <sup>4</sup>	3 <sup>5</sup>	3 <sup>6</sup>	3 <sup>7</sup>	3 <sup>9</sup>	3 <sup>11</sup>
Сколько человек в одной группе ранга $r$	4 · 10 <sup>6</sup>	8 · 10 <sup>5</sup>	16 · 10 <sup>4</sup>	32 · 10 <sup>3</sup>	64 · 10 <sup>2</sup>	1280	256	16	1
На сколько групп ранга $(r+1)$ разбивается каждая группа ранга $r$	5	5	5	5	5	5	16	16	—
Сколько черных подгрупп ранга $(r+1)$ у черной группы ранга $r$	3	3	3	3	3	3	9	9	—

этих групп «первого ранга» снова разобьем на 5 групп второго ранга, причем из пяти групп, составляющих черную группу первого ранга, три — черных и т. д., как указано в таблице.

Ясно, что при таком разбиении для победы Мирафлореса достаточно, чтобы за него проголосовала

$$\frac{3^{11}}{2^8 \cdot 5^7} = \frac{177\,147}{20\,000\,000} < \frac{1}{100}$$

часть всех избирателей. Тем самым, поскольку армия составляет  $\frac{1}{100}$  часть избирателей и поддерживает Мирафлореса, он сможет победить.

Некоторые читатели пытались решить следующий, более общий вопрос: какое наименьшее число сторонников должен иметь Мирафлорес, чтобы победить на «демократических выборах», если общее количество избирателей  $N$ ? Разумеется, ответ на этот вопрос зависит не столько от величины числа  $N$ , сколько от того, как оно раскладывается на множители. Если, скажем,  $N$  — число простое, то избирателей вообще никак нельзя разбить на равные группы (кроме тривиального способа:  $N$  групп по одному человеку) и для победы нужно иметь простое большинство. Покажем, как ответить на этот вопрос для любого  $N$ .

Рассмотрим такое разбиение  $N$  человек на группы (1-го, 2-го и т. д. ранга), при котором побеждает Мирафлорес и число его сторонников — наименьшее из возможных. Очевидно, можно считать, что в группах, голосующих против него, нет ни одного его сторонника и что все черные группы одного ранга разбиты совершенно одинаково. Удобно использовать обозначение  $[x]$  — «целая часть» ( $|x|$  — наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ; например,  $[2] = 2$ ,  $[3\frac{1}{2}] = 3$ ). Ясно, что если некоторая черная группа состоит из  $k$  групп следующего ранга, то среди них должно быть не менее  $[\frac{k}{2}] + 1$  черных. Пусть каждая

группа  $r$ -го ранга ( $r = 1, 2, \dots, m-1$ ) разбита на  $k_r$  групп меньшего ранга, а группы последнего  $m$ -го ранга состоят из 1 человека. Тогда для победы черных необходимо иметь по крайней мере

$$B = \left([\frac{k_1}{2}] + 1\right) \left([\frac{k_2}{2}] + 1\right) \dots \left([\frac{k_m}{2}] + 1\right)$$

черных голосов. Наша задача свелась к такой: разложить данное  $N$  в произведение таких сомножителей  $k_1, k_2, \dots, k_m$ , чтобы произведение  $B$  было минимально.

Пусть

$$N = k_1 k_2 \dots k_m \quad (*)$$

— такое разложение. Как показывает следующая лемма, можно предполагать, что в этом разложении нет сомножителей  $k$  вида  $k = pq$ , где  $p$  и  $q$  больше 2 (если такие есть, можно провести дальнейшее разложение, не увеличивая  $B$ ).

Л е м м а.

$$\left([\frac{p}{2}] + 1\right) \left([\frac{q}{2}] + 1\right) \leq [\frac{pq}{2}] + 1$$

для всех целых  $p$  и  $q$ , больших 2.

До к а з а т е л ь с т в о. Если  $p$  и  $q$  оба четны, то неравенство можно переписать так:

$$\left(\frac{p}{2} + 1\right) \left(\frac{q}{2} + 1\right) \leq \frac{pq}{2} + 1, \\ (p+2)(q+2) \leq 2pq + 4,$$

$pq - 2q - 2p + 4 \geq 4$ ,  $(p-2)(q-2) \geq 4$ , что, очевидно, верно для  $p > 2$  и  $q > 2$ .

В случае, когда одно из чисел  $p, q$ , например  $p$ , четно, а другое нечетно, имеем:

$$\left(\frac{p}{2} + 1\right) \left(\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\right) \leq \frac{pq}{2} + 1, \\ (p+2)(q+1) \leq 2pq + 4.$$

$pq - 2q - p + 2 \geq 0$ ,  $(p-2)(q-1) \geq 0$ .

Случай, когда  $p$  и  $q$  нечетны, разбирается аналогично. Лемма доказана. Отсюда сразу следует, что нечетные  $N$  надо раскладывать на простые множители «до конца». Осталось разобраться с двойками.

Можно считать, что в разложении нет сомножителей вида  $2q$ , где  $q$  нечетно, поскольку

$$2 \left([\frac{q}{2}] + 1\right) = [\frac{2q}{2}] + 1.$$



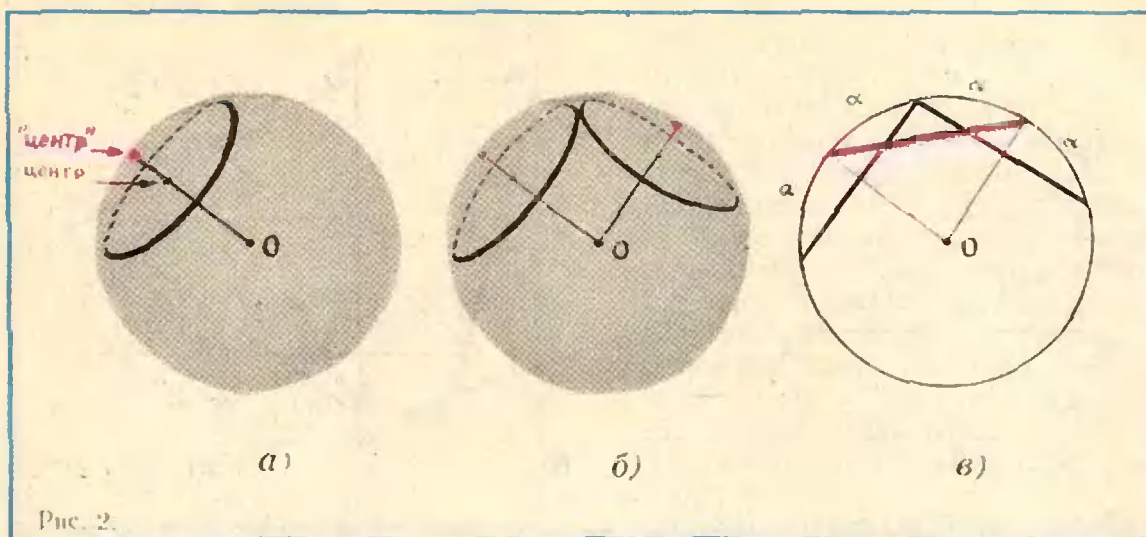


Рис. 2.

Отсюда из леммы вытекает, что из четных сомножителей можно ограничиться только двойками, четверками и восьмерками. Далее ясно, что  $2 \cdot 2$  хуже, чем 4, поскольку

$$\left(\left[\frac{2}{2}\right] + 1\right)^2 = 4 > \left[\frac{4}{2}\right] + 1 = 3. \text{ Выгодно}$$

$2 \cdot 4$  заменить на 8, поскольку  $2 \cdot 3 = 6 > 5$ ;  $4 \cdot 4$  лучше, чем  $2 \cdot 8$ , поскольку  $3 \cdot 3 = 9$ ;  $2 \cdot 5 = 10$  и, наконец,  $4 \cdot 4 \cdot 4$  менее выгодно, чем  $8 \cdot 8$ , поскольку  $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ ;  $5 \cdot 5 = 25$ , так что больше двух четверок оставлять нельзя.

Итак, окончательный ответ такой: пусть  $N = 2^d p_1 \dots p_m$ , где  $m \geq 0$ ,  $d \geq 0$  — целые,  $p_1, \dots, p_m$  — нечетные простые числа. Обозначим произведение

$$\frac{p_1 + 1}{2} \dots \frac{p_m + 1}{2} \text{ через } P.$$

Тогда наименьшее число сторонников Мирафлореса, достаточное для победы, равно

$$\begin{aligned} B &= 2P, \text{ если } d = 1 \text{ (т. е. } N = 2p_1 \dots p_m); \\ B &= 5^n P, \text{ если } d = 3n \text{ (} N = 8^n p_1 \dots p_m); \\ B &= 3 \cdot 5^n P, \text{ если } d = 3n + 2 \text{ (} N = 4 \cdot 8^n p_1 \dots p_m); \\ B &= 9 \cdot 5^n P, \text{ если } d = 3n + 4 \text{ (} N = 4^2 \cdot 8^n p_1 \dots p_m); \end{aligned}$$

здесь  $n$  — целое число,  $n \geq 0$ .

Этот ответ нашли ученик 9-го класса из Томска А. Гришков и (в другой форме) еще несколько читателей. В частности, для  $N = 20\,000\,000 =$

$$= 2^8 \cdot 5^7 = 4 \cdot 8^2 \cdot 5^7 \text{ получаем } B = 3 \cdot 5^2 \cdot 3^7 = 164\,025.$$

**М2.** Дана сфера радиуса 1. На ней расположены равные окружности  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$  радиуса  $r$  ( $n \geq 3$ ). Окружность  $\gamma_0$  касается всех окружностей  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ ; кроме того, касаются друг друга окружности  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ ;  $\gamma_2$  и  $\gamma_3$ ;  $\dots$ ;  $\gamma_{n-1}$  и  $\gamma_n$ .

При каких  $n$  это возможно? Вычислить соответствующий радиус  $r$ .

Ответ:  $n = 3, 4, 5$ .

$$r = \sqrt{1 - \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi}{n}}}$$

Каждой окружности на сфере можно сопоставить ее «центр на сфере» — конец радиуса сферы, проходящего через центр окружности (никогда не лежащий на сфере). Эту точку мы будем называть «центром» окружности в кавычках, подчеркивающих, что это не «обычный» центр (рис. 2, а).

Заметим для точности, что такого определенного «центра» нет у окружностей больших кругов сферы, у которых центр совпадает с центром сферы. Но окружности, о которых идет речь в условии задачи, заведомо не могут иметь радиус 1, потому что окружности двух больших кругов не могут друг друга касаться, — они всегда пересекают друг друга в двух диаметрально противоположных точках сферы.

Точка касания двух окружностей, расположенных на сфере (см. рис. 2, б), лежит в плоскости  $P$ , проходя-

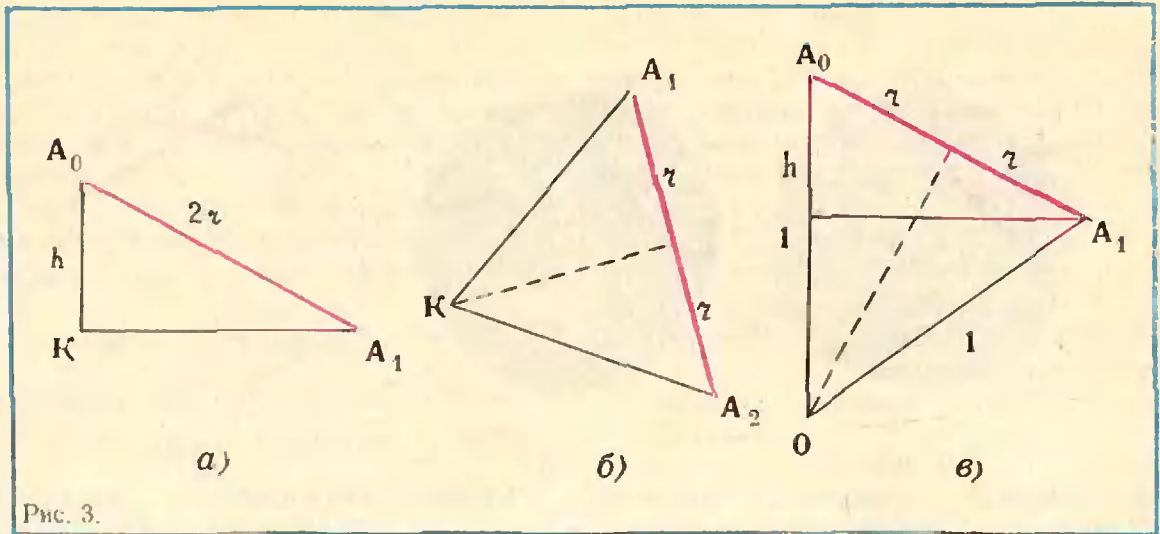


Рис. 3.

шей через центры окружностей и центр сферы. Действительно, обе окружности симметричны относительно плоскости  $P$ , и если бы они имели общую точку по одну сторону плоскости  $P$ , то должны были бы иметь и симметричную ей общую точку по другую сторону  $P$ , а у них всего одна общая точка. Если эти окружности имеют один и тот же радиус  $r$ , то расстояние между их «центрами» равно  $2r$ , потому что на окружности большего круга, получающейся в пересечении сферы и плоскости  $P$  (рис. 2, в), диаметры наших окружностей (черные отрезки) и отрезок, соединяющий их «центры» (красный), стягивают равные дуги.

Пусть  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$  — «центры» окружностей  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ , о которых идет речь в условии задачи. Тогда  $A_0A_1 = A_0A_2 = \dots = A_0A_n = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_nA_1 = 2r$ , другими словами,  $A_0A_1A_2 \dots A_n$  — вписанная в данную сферу радиуса 1 правильная  $n$ -угольная пирамида с вершиной  $A_0$ , у которой все боковые грани — равносторонние треугольники со сторонами равными  $2r$ . Итак, достаточно построить пирамиду, для которой выполнены эти условия, тогда точки  $A_0, A_1, \dots, A_n$  будут определять окружности радиуса  $r$  с «центрами»  $A_0, A_1, \dots, A_n$ , которые, очевидно, удовлетворяют условию задачи.

Поскольку сумма плоских углов выпуклого  $n$ -гранного угла с вершиной  $A_0$  меньше  $360^\circ$ :

$$n \cdot 60^\circ = \sphericalangle A_1 A_0 A_2 + \sphericalangle A_2 A_0 A_3 + \dots + \sphericalangle A_n A_0 A_1 < 360^\circ,$$

то  $n < 6$ . Для  $n = 3, 4$  и  $5$  нетрудно построить нужные пирамиды.

Пусть  $O$  — центр сферы. Высота пирамиды  $h$  и длина ее ребер  $2r$  находятся из следующих соображений: радиус  $KA_1$  основания пирамиды — катет  $\triangle A_0KA_1$  и боковая сторона  $\triangle A_1KA_2$ , где  $\sphericalangle A_1KA_2 = 2\pi/n$  (рис. 3, а, б, в),

$$\sqrt{4r^2 - h^2} \sin \frac{\pi}{n} = r.$$

$$\text{Из } \triangle A_0OA_1 \text{ имеем } r = \frac{h}{2r}.$$

$$\text{Отсюда } h = 2r^2, \quad r = \sqrt{1 - \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi}{n}}}.$$

Таким образом,

$$\text{при } n = 3: \quad r = \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \right);$$

$$\text{при } n = 4: \quad r = \sqrt{\frac{1}{2}} \left( \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \right);$$

$$\text{при } n = 5: \quad r = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}$$

(формулу  $\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$  можно

вывести из рисунка 4, с помощью которого строятся правильный десятиугольник и правильный пятиугольник).



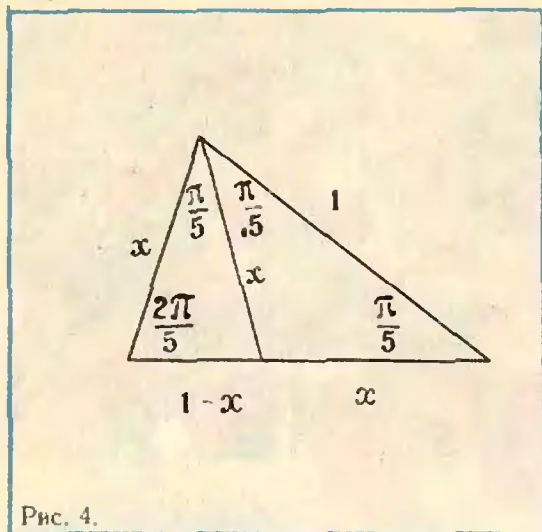


Рис. 4.

Зная  $r$  и  $h$ , мы можем построить правильные пирамиды, которые в силу приведенных соотношений будут удовлетворять всем нужным условиям: все грани — равносторонние треугольники со стороной  $2r$ , радиус описанной сферы — 1.

Построенные пирамиды тесно связаны с правильными многогранни-

ками, грани которых — треугольники. Таких многогранников всего три: тетраэдр, октаэдр и икосаэдр (рис. 5), и если от каждого из этих многогранников отрезать «вершущу» — все грани, примыкающие к одной вершине, — то получится как раз такие три пирамиды, которыми мы занимались. Подробнее о правильных многогранниках и о построении пятиугольника можно прочесть в прекрасной книге Г. С. Кокстера «Введение в геометрию» («Наука», 1966, гл. 10 «Пять платоновых тел» и гл. 11 «Золотое сечение и филлотаксис»).

Несколько иначе (без использования «центров на сфере») решил задачу ученик 10-го класса *Сергей Макеев* из г. Волоколамска.

Заметим еще, что ограничение  $n \geq 3$  в условии задачи вполне можно было бы заменить на  $n \geq 2$ . Соответствующее расположение трех окружностей  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$  существует (рис. 6: «центры» окружностей расположены в вершинах правильного треугольни-

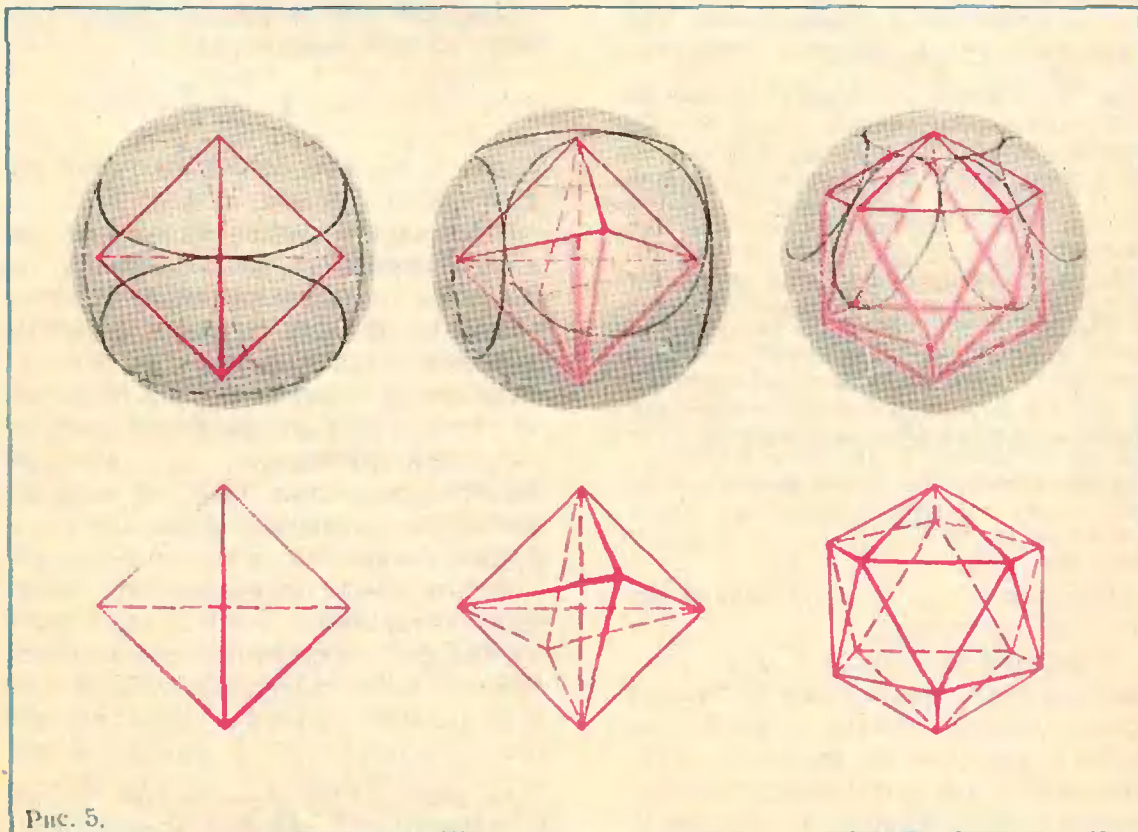


Рис. 5.



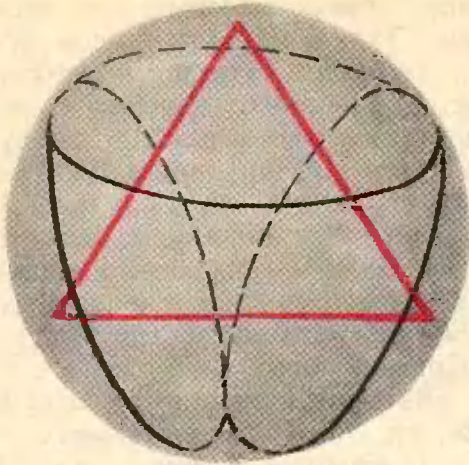


Рис. 6.

ка, вписанного в большой круг), и для вычисления  $r$ , как это ни странно, годится та же формула, которую мы доказали для  $3 \leq n \leq 5$

$$r = \sqrt{1 - \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**М3.** а) На рисунке 7, а плоскость покрыта квадратами пяти цветов. Центры квадратов одного и того же цвета расположены в вершинах квадратной сетки. При каком числе цветов возможно аналогичное заполнение плоскости?

б) На рисунке 7, б плоскость покрыта шестиугольниками семи цветов так, что центры шестиугольников одного и того же цвета образуют вершины решетки из одинаковых правильных треугольников. При каком числе цветов возможно аналогичное построение?

**Примечание.** В первой задаче число цветов может равняться единице (все квадраты одного цвета) и двум (как на шахматной доске). Во второй задаче вы без труда найдете решения с одним цветом и с тремя цветами. Желательно дать полное решение задач, т. е. описать все раскраски, удовлетворяющие указанным условиям. Присылайте, однако, и неполные решения, если они покажутся вам интересными. Подумайте, например, существует ли во второй задаче решение с тринадцатью цветами?

Полных решений этой задачи мы пока не получили.

Ученик 6-го класса *Сергей Елисеев* (Москва) прислал нам раскраску шестиугольной сетки тринадцатью цветами, которую мы воспроизводим, насколько это позволяют полиграфические возможности, на рисунке 8:

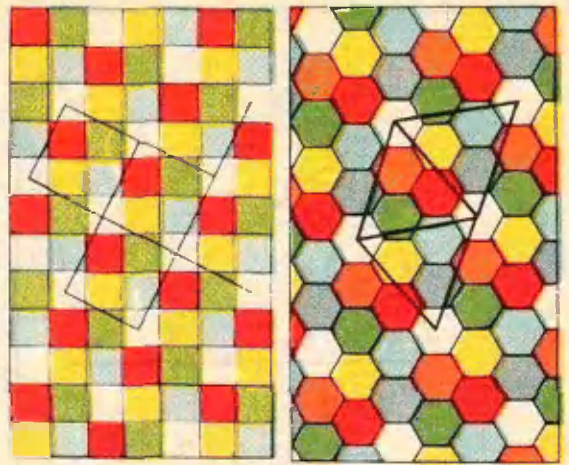


Рис. 7 а, б.

он утверждает (без объяснений), что ответ в общем случае такой:

В задаче а) *требуемая раскраска возможна, если количество цветов равно сумме двух квадратов целых чисел:*

$$1 = 0^2 + 1^2; \quad 2 = 1^2 + 1^2; \quad 4 = 0^2 + 2^2;$$

$$5 = 1^2 + 2^2; \quad 8 = 2^2 + 2^2; \quad 9 = 0^2 + 3^2;$$

$$10 = 1^2 + 3^2; \quad 13 = 2^2 + 3^2; \quad 16 = 0^2 + 4^2$$

и т. д.

В задаче б) *решение возможно при количестве цветов, равном сумме двух чисел из последовательности 0, 1,*

$$3, 6, 10, 15, \dots, \frac{n(n+1)}{2}, \dots$$

$$1 = 0 + 1; \quad 3 = 0 + 3; \quad 4 = 1 + 3; \quad 6 = 0 + 6;$$

$$7 = 1 + 6; \quad 9 = 3 + 6 \text{ и т. д.}$$

Попробуйте выяснить, правильны ли эти ответы? К этому вопросу мы вернемся позднее, а пока обратим внимание на одну тонкость в формулировке задачи (первым ее заметил читатель *В. Гутенмахер* из Москвы).

Начнем с задачи а). В ней требуется найти раскраски, при которых «центры квадратов одного и того же цвета расположены в вершинах квадратной сетки». Но в условии не сказано, что для разных цветов эта «большая» квадратная сетка должна быть одинаковой. Посмотрите на рисунок 9. Здесь тоже квадраты каждого из трех цветов образуют сетку, но для красного цвета «шаг» (сторона квадрата) сетки равен  $\sqrt{2}$ , а для белого и зеленого — 2, да еще сетки повер-



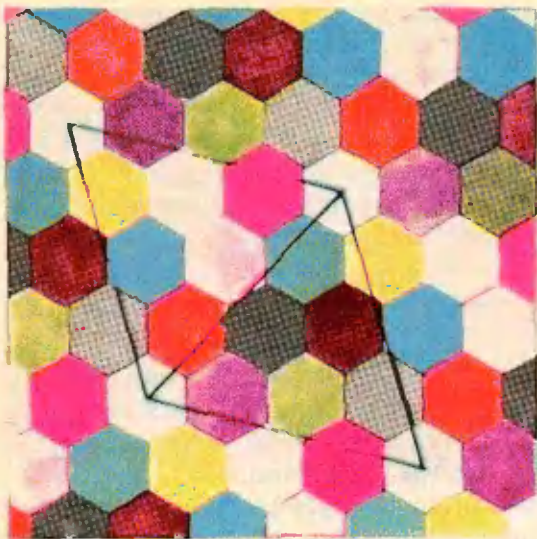


Рис. 8.

нуты друг относительно друга. Но если понимать условие задачи буквально — а на письменном экзамене или на олимпиаде именно так и следует поступать, — то раскраска рисунка 9 удовлетворяет условию задачи. При подобном понимании ответ в задаче а) будет такой: *при любом числе цветов*. Действительно, из любой раскраски с  $n$  цветами, один из которых белый, легко изготовить раскраску с  $(n+1)$  цветом: нужно белые квадраты в «шахматном порядке» раскрасить белой и новой  $(n+1)$ -й краской (именно так из шахматной красно-белой раскраски получилась раскраска рисунка 9).

При таком понимании и задача б) становится совсем простой.

**О т в е т.** *При любом числе цветов, большем 2.* Действительно, раскраска двумя цветами невозможна, поскольку, если из трех шестиугольников, каждые два из которых имеют общую сторону, два покрашены в один цвет, то и все шестиугольники должны быть покрашены этим цветом. Раскраски с 3 и 4 цветами находятся легко, а дальше нетрудно, раскрашивая белые шестиугольники в три цвета, увеличить число цветов на 2, затем еще на 2 и т. д.

Разумеется, таким способом можно получить много разнообразных раскрасок. Имея любую раскраску  $A$  ( $k$  цветов), выделив в

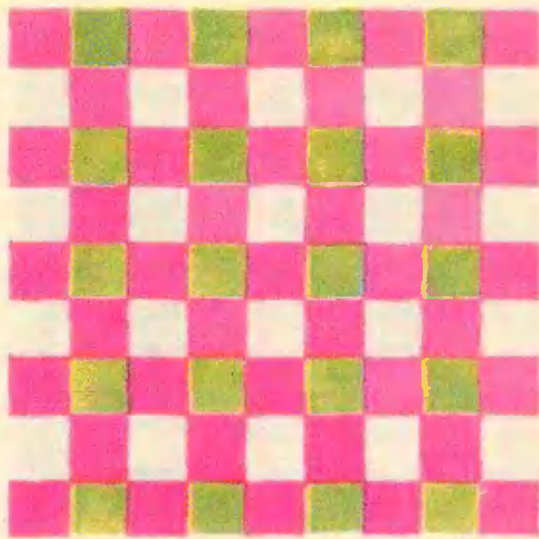


Рис. 9.

ней какой-то один цвет  $x$  и взяв еще одну раскраску  $B$  ( $l$  цветов), можно построить «расширение раскраски  $A$  с помощью  $B$ » следующим образом. В раскраске  $A$  сохраняются все цвета, кроме  $x$ , а квадратики или шестиугольники — наше замечание относится к обоим случаям) цвета  $x$  раскрашиваются новыми  $l$  цветами: сетка, которую они образуют, раскрашивается по способу  $B$ . Получается новая раскраска  $k+l-1$  цветами. (На рис. 9 изображено, в этой терминологии, «расширение шахматной раскраски с помощью шахматной раскраски».)

Итак, в такой «буквальной» формулировке задача оказывается совсем простой. Однако, автор задачи, а также большинство читателей журнала, приславших нам решения, понимали условие иначе; а именно, они хотели найти такие раскраски, при которых решетки, соответствующие разным цветам, одинаковы и получаются друг из друга параллельным сдвигом (как на рисунках, сопровождающих условие задачи, и на рис. 8). Решение задачи МЗ с таким уточнением мы приведем в следующем номере.

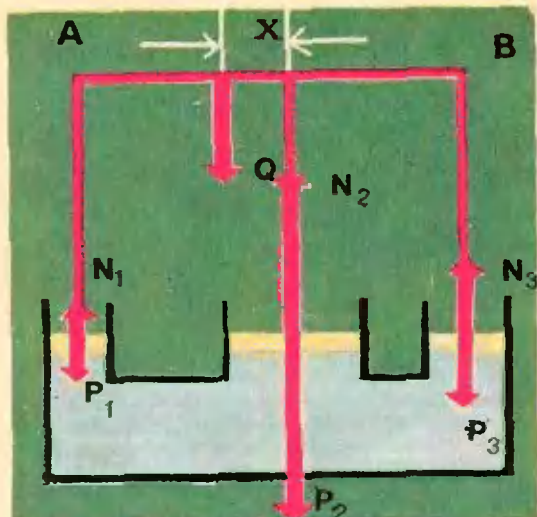


Рис. 10

**Ф1.** Три сообщающихся сосуда с водой, центры которых находятся на одинаковом расстоянии  $a$  друг от друга, прикрыты поршнями одинаковой толщины, сделанными из одного и того же материала. К поршням прикреплены вертикальные одинаковые штоки, которые шарнирно соединены со стержнем  $AB$ . В какой точке стержня можно прикрепить к нему груз, чтобы в положении равновесия стержень оставался горизонтальным, если массы стержня и штоков пренебрежимо малы по сравнению с массами поршней и груза. Диаметры сосудов соответственно  $d_1$ ,  $d_2$  и  $d_3$ .

Стержень  $AB$  и поршни находятся в равновесии под действием семи сил: силы  $Q$ , действующей со стороны груза, сил тяжести, действующих на поршни—эти силы пропорциональны площадям поршней:  $P_1 = k_1 d_1^2$ ;  $P_2 = -k_1 d_2^2$ ;  $P_3 = k_1 d_3^2$  и трех сил давления жидкости на поршни:  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  (рис. 10). Так как уровни жидкости в сосудах одинаковы, давления на все поршни равны, а силы давления относятся как площади поршней:  $N_1 : N_2 : N_3 = d_1^2 : d_2^2 : d_3^2$ . Поэтому  $N_1 = k_2 d_1^2$ ,  $N_2 = k_2 d_2^2$ ,  $N_3 = k_2 d_3^2$ . Равнодействующие сил, приложенных к каждому из поршней, равны:  $F_1 = N_1 - P_1 = (k_2 - k_1) d_1^2 = k d_1^2$ ,  $F_2 = k d_2^2$ ,  $F_3 = k d_3^2$ .

Обозначив через  $x$  расстояние от середины стержня до точки, в которой прикреплен груз, запишем условия равновесия стержня: 1) равенство нулю суммы всех сил, действующих

на стержень:  $F_1 + F_2 + F_3 - Q = 0$  и 2) равенство нулю суммы моментов всех сил, действующих на стержень, относительно середины стержня:  $F_1 a - F_3 a - Qx = 0$ . Подставляя в эти уравнения выражения для  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$ , а затем решая эти уравнения совместно, найдем, что

$$x = \frac{d_1^2 - d_3^2}{d_1^2 + d_3^2 + d_3^2} a.$$

Никто из читателей, приславших решение этой задачи, не учитывал масс поршней. Но только двое — *Г. Кальшин* из Кировобода и *А. Карпенко* из г. Лисницанска Ворошиловградской области — объяснили, почему это можно сделать. Так как поршни сделаны из одного и того же материала и имеют одинаковую толщину, то дополнительные давления на воду не зависят от диаметров поршней. Условие же равновесия поршней — это равенство давлений на воду во всех цилиндрах (так как уровни воды в цилиндрах одинаковы). Дополнительные давления из-за поршней этому условию удовлетворяют автоматически.

**Ф2.** На горизонтальной плоскости лежат два шарика с массами  $m_1$  и  $m_2$ , скрепленные между собой пружиной с жесткостью  $c$ . Плоскость гладкая. Шарики сдвигают, сжимая пружину, затем их одновременно отпускают. Определите периоды возникших колебаний шариков.

Центр масс системы не должен двигаться (или может двигаться равномерно и прямолинейно), поэтому шарики колеблются в противофазе с одинаковой частотой, а их отклонения  $x_1$  и  $x_2$  от положения равновесия удовлетворяют соотношению  $c_1 x_1 = c_2 x_2$ , где  $c_1$  и  $c_2$  — коэффициенты жесткости соответствующих кусков пружины длиной  $l_1$  и  $l_2$  ( $l_1$  и  $l_2$  — расстояния от шариков до центра масс системы;

$$l_1 = l \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad l_2 = l \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Удлинение  $1/q$ -й части пружины всегда в  $q$  раз меньше удлинения всей пружины, т. е.  $1/q$ -я часть пружины имеет жесткость в  $q$  раз большую, чем



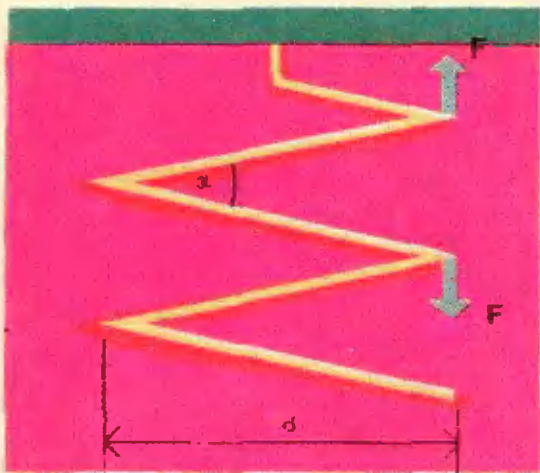


Рис. 11.

жесткость всей пружины. Поэтому  $c_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_2} c$ . Отсюда следует, что период колебаний шариков

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)c}}$$

Интересно проверить ответ, взяв какой-нибудь предельный случай. Так поступил ученик 10 класса школы № 20 из г. Вологды *Е. Тихонов*. Предположим, что масса  $m_2$  очень велика:  $m_2 \gg m_1$ . Тогда шарик с массой  $m_1$  должен колебаться так, как если бы второй шар был неподвижно закреплен, и  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{c}}$ .

Проверим нашу формулу

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{c(1 + \frac{m_1}{m_2})}} \approx 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{c}}$$

**Ф3.** Из двух одинаковых кусков стальной проволоки свили две пружины. Диаметр витков одной из них равен  $d$ , другой  $2d$ . Первая пружина под действием груза растянулась на одну десятую своей длины. На какую часть своей длины растянется под действием того же груза вторая пружина?

Удлинение пружины равно

$$\Delta l = n \cdot 2d \cdot \sin \frac{\alpha}{2}, \text{ где } n \text{ — число витков}$$

пружины, а  $\alpha$  — угол, на который разворачиваются соседние витки пружины (рис. 11). Так как удлинение пружины мало, то этот угол мал и  $\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$ . Поэтому  $\Delta l = nd\alpha$ .

Угол  $\alpha$  пропорционален моментам

сил  $F$ , которые растягивают виток:  $\alpha = F \cdot d$ . Сила  $F$  равна весу груза, подвешенного к пружине, и одинакова в обоих случаях, поэтому  $\Delta l \sim nd^2$ .

Диаметр витков второй пружины вдвое больше, а число витков у нее вдвое меньше, следовательно, абсолютное удлинение второй пружины вдвое больше, чем у первой. Таким образом, вторая пружина растянется на  $\frac{2}{5}$  своей длины.

Многие, приславшие решение этой задачи, правильно нашли, что удлинение второй пружины в два раза больше, чем первой, но забыли, что вторая пружина вдвое короче, чем первая, поэтому относительное удлинение второй пружины равно не  $\frac{1}{5}$ ,

как получалось у них, а  $\frac{2}{5}$ .

**Ф4.** В баллоне содержится очищенный газ, но неизвестно какой. Чтобы поднять температуру 1 кг этого газа на один градус при постоянном давлении требуется 958,4 Дж, а при постоянном объеме — 704,6 Дж. Что это за газ?

При нагревании газа при постоянном объеме затрачиваемая энергия идет только на изменение внутренней энергии газа, а при нагревании при постоянном давлении — еще и на совершение работы. Запишем закон сохранения энергии для обоих случаев:

$$m c_V \Delta t = \Delta W, \quad (1)$$

$$m c_p \Delta t = \Delta W + A. \quad (2)$$

Здесь  $c_p$  — теплоемкость газа при постоянном давлении (т. е. количество тепла, которое необходимо для нагревания 1 кг газа при постоянном давлении),  $c_V$  — теплоемкость газа при постоянном объеме,  $\Delta t$  — изменение температуры,  $\Delta W$  — изменение внутренней энергии газа,  $m$  — масса газа,  $A = p \Delta V$  — совершенная при расширении газа работа ( $\Delta V$  — изменение объема,  $p$  — давление).

Так как при повышении температуры газа на одинаковое число градусов изменение его внутренней энергии одинаково как при нагревании при постоянном объеме, так и при

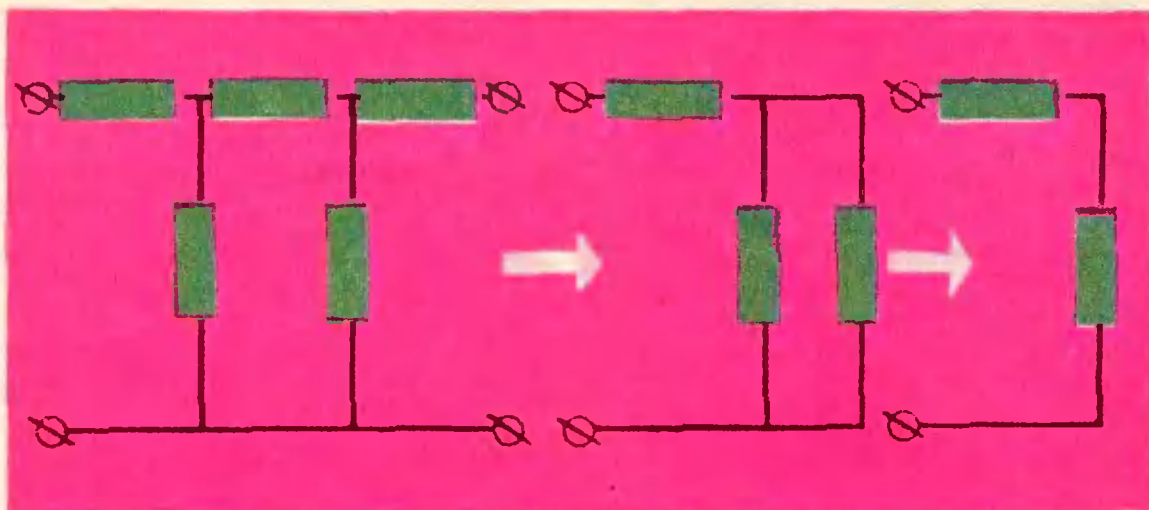


Рис. 12.

нагревании при постоянном давлении, то можно записать:  $c_p m \Delta t = c_v m \Delta t + p \Delta V$ . С помощью уравнения газового состояния (уравнения Клапейрона — Менделеева) совершенную газом работу можно выразить через молекулярную массу газа  $\mu$  и газовую постоянную  $R$ :  $p \Delta V = \frac{m}{\mu} R \Delta t$ . Подставляя это соотношение в уравнение (1), получим:  $c_p = c_v + \frac{R}{\mu}$ , откуда

$$\mu = \frac{R}{c_p - c_v} \approx 32,7 \text{ кг·кмоль.}$$

Неизвестный газ — кислород с очень небольшой примесью более тяжелого газа.

Ф5. Имеется электрическая цепь, изображенная на рисунке. Что покажет вольтметр с очень большим внутренним сопротивлением, если его присоединить к точкам  $C$  и  $D$ ?  $U_{AB} = 51 \text{ В}$ .

Вольтметр покажет падение напряжения между точками  $E$  и  $D$ . Для того чтобы найти его, удобно сначала определить падение напряжения между точками  $F$  и  $B$ . Для этого схему можно перерисовать так, как показано на рисунке 12.

$$R_0 = 3 \text{ Ом}, R'_0 = \frac{3}{4} \text{ Ом},$$

$$U_{FB} = U_{AB} \frac{R_0}{R_0 + R_1} = \frac{3}{11} U_{AB}.$$

Теперь таким же способом найдем, что

$$U_{ED} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} U_{FD} = \frac{1}{3} U_{FD} = \frac{1}{11} U_{AB} = 4,6 \text{ В}.$$

Эту задачу правильно решили практически все читатели, приславшие нам письма.

Ф6. Найдите, чему равен заряд заземленного металлического шара радиуса  $r$ , если на расстоянии  $R$  от его центра находится точечный заряд  $q$ .

Потенциал шара должен быть равен нулю. Потенциал поля в центре шара, равный, конечно, потенциалу шара, складывается из потенциала поля точечного заряда  $q$  и поля, создаваемого зарядом  $Q$  шара. Заряд  $Q$  распределен по шару не равномерно, но если шар разбить на маленькие участки с зарядами  $\Delta q$ , то потенциал поля, создаваемого зарядом шара в центре, можно выразить как суммарный потенциал полей точечных зарядов  $\Delta q$ . Таким образом, можно записать для центра шара:  $\Delta \varphi = \sum \frac{\Delta q}{r} = \frac{1}{r} \sum \Delta q = \frac{Q}{r}$ , причем  $\frac{Q}{r} + \frac{q}{R} = 0$ .

$$\text{Отсюда } Q = -\frac{r}{R} q.$$

Правильный ответ получили многие читатели, но правильных решений мы получили очень мало. Многие читатели использовали формулу для емкости конденсатора  $C = \frac{\Delta Q}{\Delta \varphi}$ , полагая емкость шара равной  $r$ . Но это справедливо лишь для изолированного шара с равномерно распределенным зарядом.

# ЗАДАЧИ ДЛЯ 5 КЛАССА

В этом номере «Кванта» мы заканчиваем публикацию самых интересных задач из нового пробного учебника для 5 класса.

**1233.** Из 8 монет одна фальшивая (более легкая). Как определить фальшивую монету двумя взвешиваниями на весах с двумя чашечками без гирь?

**1234.** Среди 20 монет имеется одна фальшивая, отличающаяся по весу от настоящих. С помощью трех взвешиваний на весах с чашечками без гирь определить фальшивую монету и установите — легче она или тяжелее настоящих.

**1236.** У меня есть только стенные часы, которые остановились. Я отправляюсь к своему знакомому, часы которого идут верно, нахожусь у него некоторое время и, возвратившись домой, ставлю свои часы верно. Каким образом мне это удалось сделать, если предварительно мне не было известно, сколько времени занимает дорога?

**1237.** Для нумерации страниц словаря потребовалось 6869 цифр.

Сколько страниц имел словарь?

**1238.** Сколько делителей у числа  $3^6 \cdot 5^4$ ?

**1241.** При делении числа  $N$  на 2 в остатке получается 1, а при делении на 3 в остатке получится 2. Какой остаток получится при делении числа  $N$  на 6?

**1245.** Если от задуманного трехзначного числа отнять 7, то оно разделится на 7, если же от него отнять 8, то оно разделится на 8, и если отнять 9, то оно разделится на 9. Какое число было задумано?

**1246.** Какой цифрой оканчивается число  $66^{66} \cdot 33^{33} \cdot 7^7$ ?

**1248.** Докажите, что число  $7^{777} + 1$  не делится нацело на 5.

**1249.** Докажите, что сумма двух любых последовательных нечетных чисел делится нацело на 4.

**1250.** Некоторое шестизначное число начинается цифрой 7. Откинув эту цифру слева и приписав ее справа, получим число, в 5 раз меньшее первоначального. Найти первоначальное число.



1251. Если между цифрами двузначного числа вписать ноль, то полученное трехзначное число будет в 9 раз больше первоначального. Найти двузначное число.

1252. В шестизначном числе первая цифра совпадает с четвертой, вторая с пятой и третья — с шестой. Доказать, что это число делится на 7, 11 и 13.

1254. К числу 43 справа и слева припишите по одной цифре так, чтобы число делилось на 45.

1259. Может ли сумма четырех последовательных натуральных чисел быть простым числом? А сумма трех?

1260. Ученики  $A$ ,  $B$  и  $C$  состязались в беге на 100 м. Когда  $A$  добежал до конца,  $B$  отставал от него на 10 м. Когда  $B$  добежал до конца,  $C$  отставал от него на 10 м. На сколько метров отставал  $C$  от  $A$ , когда  $A$  закончил бег?

1262. Покажите, что любую сумму денег можно уплатить, если продавец и покупатель имеют лишь трехкопеечные и пятикопеечные монеты.

1265. Отец поручил сыну измерить длину двора шагами. Это было зимой. Для проверки отец измерил ту же длину двора своими шагами. Отец шагал с того же места, что и сын, и шел в том же направлении, так что в некоторых случаях следы отца и сына совпадали. Всего следов на снегу получилось 61. Чему равна длина двора, если шаг сына 0,54 м, а шаг отца 0,72 м?

1267. Докажите теоремы:

1) Если произведение трёх целых чисел — число нечетное, то и их сумма — число нечетное;

2) Если сумма двух целых чисел — число нечетное, то их произведение — число четное.

1268. Ребра прямоугольного параллелепипеда выражаются натуральными числами, а его объем — простым числом, большим 2. Докажите, что сумма длин двух неравных ребер — число четное.

1269. Может ли существовать прямоугольный параллелепипед, длины ребер которого — натуральные числа, а площадь поверхности — простое число?

1272. Разделите 7 яблок на 12 человек поровну, не разрезая ни одного яблока на 12 и большее число равных частей.

1273. Сократите дроби:

$$\frac{37\ 373\ 737}{81\ 818\ 181}; \quad \frac{609\ 609\ 609}{205\ 205\ 205}$$

1275. Найдите значение выражения:

$$\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{19 \cdot 20}$$

1276. Докажите, что

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{199} - \frac{1}{200} = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{200}$$

1277. Найдите наименьшее натуральное число, при делении которого на каждую из дробей  $\frac{28}{297}$  и  $\frac{35}{396}$  получаются целые числа.

1278. Поезд проходит данное расстояние за 10 час. Если бы он увеличил скорость на 10 км/час, он ехал бы 8 час. Найдите скорость и расстояние.

1279. Автомобиль половину пути ехал со скоростью 50 км/час, а вторую половину со скоростью 30 км/час. С какой средней скоростью проехал автомобиль весь путь?

1280. От Горького до Астрахани теплоход идет 5 суток, а обратно 7 суток. За сколько суток дойдут плоты от Горького до Астрахани?

1281. Я отпил  $\frac{1}{6}$  чашечки черного кофе и долил его молоком. Затем я выпил  $\frac{1}{3}$  чашечки и снова долил ее молоком. Потом я выпил полчашечки и опять долил ее молоком. Наконец, я выпил полную чашечку. Чего я больше выпил кофе или молока?

1282. Повар варил суп и положил в него мало соли. Пришлось досали-

вать готовый суп. На следующий раз повар учел эту ошибку и в то же количество супа положил в 2 раза больше соли, чем в первый раз. Этого тоже оказалось мало, но досаливать пришлось уже вдвое меньшим количеством соли. Какую часть нужного количества соли положил повар в суп в первый раз?

**1283.** Сеня уплатил в кассу столовой за 3 блюда, а Саша за 2 (все блюда стоили одинаково). За столом к ним присоединился Костя, и они втроем съели эти 5 блюд. При расчете оказалось, что Костя должен уплатить товарищам 50 коп. Сколько денег из этой суммы должен получить Сеня, а сколько Саша?

**1284.** Передние покрышки колес автомобиля стираются через 25 000 км, а задние через 15 000 км. Когда целесообразно поменять местами покрышки, чтобы они одинаково стирались? (Предположите, что замена передних и задних покрышек произошла один раз, хотя на практике шоферы производят эту замену чаще.)

**1286.** Несколько школьников завтракали вместе и должны были заплатить 1 руб. 75 коп. Оказалось, что у двоих не было при себе денег, поэтому каждому из оставшихся пришлось уплатить на 10 коп. больше, чем пришлось денег на долю каждого. Сколько школьников завтракало?

**1287.** Сумма трех дробей равна 1. Разность между первой и второй дробями равна третьей. Сумма первых двух дробей в 5 раз больше третьей дроби. Найдите эти дроби.

**1289.** Разность двух неотрицательных дробей равна  $\frac{2}{9}$ . Числитель одной дроби больше другой в 4 раза, а знаменатель этой дроби больше другой в 3 раза. Найдите дроби.

**1290.** Дано несколько натуральных чисел. Каждое из них разделили на

сумму всех данных чисел. Чему равна сумма всех частных?

**1291.** Я задумал трехзначное число. Если из цифр этого числа составить всевозможные двузначные числа и затем их сложить, то треть суммы и будет равна задуманному числу. Найдите задуманное число.

**1292.** Мама купила яблоки для своих детей Вани, Нины и Миши. Дети должны были поделить яблоки между собой поровну. Ваня пришел домой первым, сосчитал яблоки, взял третью часть и ушел. Потом пришла Нина и, полагая, что пришла первой, сосчитала оставшиеся яблоки, взяла свою долю и также ушла. Наконец, пришел Миша и взял себе третью часть оставшихся яблок. После всего этого осталось 8 яблок. Сколько яблок купила мама для детей?

**1293.** Двум братьям необходимо было быть на железнодорожной станции, которая находится на расстоянии 4 км от их дома. Чтобы не опоздать к отходу поезда, оставалась лишь одна возможность — ехать на велосипедах. Но у старшего брата велосипед оказался неисправным. Если идти пешком, то опоздаешь на 10 мин. Однако оба брата попали на станцию одновременно и за 10 мин до отхода поезда. Скажите, как они поступили, если ходьба пешком втрое медленнее езды на велосипеде и если ехать на велосипеде вдвоем нельзя?

**1294.** Какое число обладает таким свойством, что если к нему прибавить произвольное число, умножить полученную сумму на это же произвольное число, затем из произведения вычесть то же самое произвольное число и на него же разделить полученную разность, то в результате получится это же самое произвольно взятое число?

# Что мы знаем и чего не знаем о гравитации

Тот, кто читал роман И. А. Ефремова «Туманность Андромеды», помнит о железной звезде — «ужасе астролетчиков», которая своим громадным притяжением захватывает навечно пролетающие мимо тела.

Еще более удивительными небесными объектами должны быть звезды, предсказанные немецким астрономом Карлом Шварцшильдом. Силы тяготения вблизи таких звезд настолько чудовищны, что испущенный ими свет не может удалиться за пределы близких окрестностей звезды. А луч света, посланный издалека к такой звезде, никогда не сумеет достичь ее поверхности. Какая-то странная гравитационная мышеловка! Но, несмотря на всю необычайность подобных небесных тел, теория предсказывает их существование с достаточной степенью строгости.

Казалось бы, силы тяготения настолько привычны и всецелу, что человек давным-давно должен был бы знать о них все, что его интересует. Ведь это так просто: положим камень на весы и измерим силу, с которой он притягивается к Земле! Но, задумавшись над природой такого явления, мы сразу окажемся в плену у перенесенных вопросов.

В самом деле, почему любые два тела всегда притягиваются друг к другу, а не отталкиваются под влиянием гравитационных сил? Почему нельзя отгородиться от действия сил притяжения, подобно тому, как занавеска отделяет нас от солнечных лучей? Какова природа невидимых «пружин», которые

притягивают даже очень далекие друг от друга тела? Много есть вопросов, связанных с гравитацией, на которые наука еще не сумела ответить.

Но многое нам уже известно. В 1687 году Исаак Ньютон открыл закон всемирного тяготения, который позволил понять, как движутся небесные тела. Следующий важный шаг в познании гравитации принадлежит Альберту Эйнштейну. В 1916 году он создал так называемую общую теорию относительности, которую теперь принято именовать теорией пространства, времени и тяготения. Эта теория заставила ученых пересмотреть свои взгляды на такие важные физические понятия, как пространство и время. Ньютон считал, что свойства пространства и ход времени совершенно не зависят от окружающих тел. Эйнштейн доказал, что чем тяжелее тело, тем сильнее искривлено пространство вблизи него и тем медленнее течет время в его окрестностях. Пространство, время и тяготение оказались не независимыми друг от друга, а теснейшим образом взаимосвязанными.

Теория Эйнштейна объяснила некоторые загадочные факты, например, смещение перигелия у планеты Меркурий. Но она поставила перед учеными ряд новых сложных проблем. Из нее, например, следует, что любое тело, движущееся с ускорением, должно излучать гравитационные волны. Однако до сих пор никому не уда-

лось их обнаружить и зарегистрировать.

Теория предсказывает также необычайное космическое явление, получившее название гравитационного коллапса. У некоторых звезд масса может оказаться настолько большой, что гигантские силы притяжения начнут безудержно сжимать звезду, так, что никакое внутреннее давление не сумеет уравновесить действие сил притяжения. При этом звезда сожмется до ничтожных размеров, сравнимых с размерами Земли, освободив и излучив в окружающее пространство огромное количество энергии.

Общая теория относительности впервые позволила поставить вопрос о том, как устроена Вселенная и как она развивается с течением времени. Она явилась фундаментом современной научной космологии.

Теория тяготения Эйнштейна облачена в очень сложные математические «одежды». Многие из ее выводов неожиданны и необычны, и рассказать о них доступным образом нелегко. Но ее значение в современной физике исключительно велико. Поэтому каждая новая научно-популярная книга, посвященная этой теме (а таких книг совсем немного), обычно вызывает большой интерес.

Мы расскажем здесь о некоторых книгах, в которых освещены различные проблемы современной теории гравитации.

Наиболее простое и общедоступное изложение основ теории гравитации со-





держится в популярной книге М. Гарднера «Теория относительности для миллионов», изданной в 1966 году «Атомиздатом». В пятой главе рассказано об основном исходном постулате теории — равенстве гравитационной и инертной масс любого тела, — подтвержденном с огромной степенью точности специально поставленными экспериментами. В главе шестой описываются взгляды современной физики на силы тяготения, как на результат изменения геометрических свойств пространства и времени под влиянием тяготеющих масс. Три главы (7, 9 и 10) посвящены различным космическим проблемам, связанным с теорией гравитации. В них рассматриваются разные варианты моделей Вселенной и подробно обсуждается вопрос о так называемом «красном смещении» — изменении цвета небесных объектов под влиянием их движения, происходящего с огромными скоростями.

Наиболее современное описание космологических проблем можно найти в небольшой брошюре академика В. Л. Гиззбурга «Как устроена Вселенная и как она развивается во времени», выпущенной издательством «Знание» в 1968 году. (В основу этой брошюры положены три статьи автора в журнале «Наука и жизнь» №№ 1, 2, 3 за 1968 год.)

Вначале автор расска-

зывает о первых космологических моделях Вселенной, которые были предложены еще до создания общей теории относительности. Затем, после краткой характеристики основ специальной и общей теории относительности, он рассматривает новые модели, связанные с этими теориями. Согласно модели Эйнштейна Вселенная образует замкнутую трехмерную сферу, не изменяющуюся со временем. В модели советского ученого А. А. Фридмана Вселенная либо расширяется, либо сжимается. В модели Леметра Вселенная на некотором этапе замедляет свое развитие, как бы застывая в неподвижности, чтобы затем вновь начать стремительно расширяться.

В. Л. Гиззбург приводит интереснейшие данные о радиогалактиках, которые находятся на расстояниях порядка 5–8 миллиардов световых лет от Земли. Их излучение рассказывает нам о процессах, происходивших в те времена, когда не было еще не только Земли, но, по-видимому, и Солнца.

В 1969 году издательство «Наука» выпустило научно-популярную книгу П. Бергмана «Загадка гравитации». Автор книги в течение нескольких лет был сотрудником Эйнштейна.

Бергман включил в свою книгу все основные вопросы, связанные с современной теорией гравитации. В книге три главы: I. Ньютоновская физика и специальная теория относительности. II. Общая теория относительности. III. Последние достижения. Книга содержит увлекательный рассказ об основах теории, предсказанных ею эффектах и нерешенных проблемах, над которыми физики работают в наши дни.

Звезды Шварцшильда, гравитационный коллапс, природа недавно открытых загадочных небесных объектов «квазаров», космическое радиоизлучение, рассказывающее нам, как выглядела Вселенная миллиарды лет тому назад, и многое другое, не менее интересное, описано



на страницах этой книги. Обо всем этом автор рассказывает, практически не пользуясь математическим аппаратом, почти без формул, делая упор на физическую картину рассматриваемых им вопросов. И все-таки это очень нелегкое чтение. Книга рассчитана на увлеченных физикой читателей, тех, кто обладает значительной физической и математической подготовкой, и не пожалеет времени на неторопливый и внимательный разбор ее страниц.

Автор стремится помочь читателю. Он выносит все основные расчеты в специальную математическое дополнение, помещает в конце книги небольшой толковый словарь наиболее трудных терминов и понятий. И все же в отдельных частях книга остается сложной для понимания школьников старших классов. Правда, есть в ней немало и таких параграфов, которые доступны значительно менее подготовленным читателям. Их особенно много в третьей, заключительной главе книги.

В перечисленных нами книгах целый мир новых идей и фактов, будущих экспериментов, открытых и неоткрытых явлений и законов. И каждый, кто всерьез прикоснется к этому миру, безусловно получит большое удовольствие.

В. А. Лешковцев

## ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К задаче «Только ли 2?»  
(см. «Квант» № 6)

Из равенства  $a + b = ab$  найдем  $a$ :

$$a = \frac{b}{b-1}. \quad (*)$$

Заметим, что  $b \neq 1$ .

1. Пусть  $a$  — целое число. Так как числа  $b$  и  $b-1$  взаимно просты (их разность должна делиться на их НОД, но она равна 1), то  $b-1 = 1$  или  $b-1 = -1$ .

Отсюда  $b_1 = 2, a_1 = 2; b_2 = 0, a_2 = 0$ .

2. Если  $b$  произвольное рациональное число, не равное 1, то по формуле (\*) определяем  $a$ .

3. Если  $ab = p$ , то  $p = \frac{b^2}{b-1}$ , откуда

$$b^2 - pb + p = 0, \quad b = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - p},$$

$$b = \frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p(p-4)}}{2}. \quad (**)$$

а) по формуле (\*\*) для любого  $p \geq 4$  или  $p \leq 0$  находим соответствующее  $b$  и по формуле (\*)  $a$ ;

б) надо найти, существует ли такое целое число  $p$ , что

$$p(p-4) = \frac{q^2}{s^2}, \quad (***)$$

где  $\frac{q}{s}$  — несократимая дробь. Решаем уравнение (\*\*\*) в целых числах ( $p, q, s$  и  $m$  — целые числа):

$q^2 = s^2 p(p-4)$ , но из несократимости дроби следует, что  $s = 1$ .

$$p^2 - 4p - q^2 = 0, \quad p = 2 \pm \sqrt{4 + q^2},$$

$$4 + q^2 = m^2,$$

$$(m-q)(m+q) = 4 \cdot 1 = 2 \cdot 2.$$

Единственное решение в целых числах  $m = \pm 2, q = 0$ , приводит к решениям (1).

## Две сценки из жизни

### «Знающий» экскурсовод

Экскурсовод: ...На планеты действует закон Ньютона, поэтому они вращаются вокруг Солнца. Еще на них действует закон Кеплера, но я не буду вам о нем рассказывать, так как он сложный, и вы ничего не поймете... Чтобы улететь от Земли, нужно иметь вторую космическую скорость. Как вы видите на плакате, она равна 11,2 км/сек, в прошлом году она равнялась 11,4 км/сек... Космонавтам приходится трудно. Когда они пролетают через атмосферу, то она сильно давит на корабль и космонавты испытывают перегрузку, но за атмосферой еще хуже — там начинается пространство невесомости...

### В одном НИИ

Аспирант: Я считаю, что каток проседает в битуме из-за того, что от его давления увеличивается скорость молекул, и они разбегаются из-под катка.

Научный руководитель: Над чем вы конкретно сейчас работаете?

Аспирант: Вычисляю зависимость скорости молекул битума от давления на них катка.

Научный руководитель: Хорошо. Что вам нужно, чтобы закончить работу?

Аспирант: Мне бы гидравлический пресс!

Научный руководитель: Пишите заявку. Думаю, достанем.

## Три магических квадрата

65	4	54	64	6	53	70	3	60
24	44	55	23	43	57	20	40	63
34	75	14	36	74	13	33	80	10
67	9	47				69	8	46
26	37	60				25	39	59
30	77	16				29	76	18
72	2	49	66	5	52	68	7	48
19	42	62	22	45	56	27	38	58
32	79	12	35	73	15	28	78	17

Магический квадрат — это квадрат, расчерченный на клетки, в каждую из которых вписано число так, что суммы чисел по любой строке, по любому столбцу и по обеим диагоналям квадрата равны.

Такой магический квадрат размером  $6 \times 6$  можно составить из зеленых квадрати-

ков  $3 \times 3$ , которые видны на рисунке. (Проверьте!).

Задание состоит в том, чтобы заполнить клетки красного квадратика  $3 \times 3$  так, чтобы:

- красный квадратик был магическим;
- весь большой квадрат  $9 \times 9$  также был магическим.

## Ответ на кроссворд, помещенный в № 6.

По горизонтали:

- Размах.
- Раднан.
- Сфера.
- Точка.
- Хвост.
- Член.
- Поле.
- Звено.
- Штрих.
- Прием.
- Поляра.
- Адамар.

По вертикали:

- Карно.
- Масса.
- Банах.
- Гаусс.
- Весы.
- Кулон.
- Вольт.
- Клин.
- Виток.
- Опора.
- Шмидт.
- Идеал.



ЦЕНА 30 коп.

ИНДЕКС 70465

# Квант 7