

Научно-популярный физико-математический

Квант

11

1970

журнал
Академии
наук СССР
и
Академии педагогических
наук СССР

XX $\frac{566}{43}$



Главный редактор — академик **И. К. КИКОИН**
 Первый заместитель главного редактора —
 академик **А. Н. КОЛМОГОРОВ**

**Редакционная
 коллегия:**

Л. А. Арцимович,	<i>академик</i>
М. И. Башмаков	
В. Г. Болтянский,	<i>член-корреспондент АПН СССР</i>
И. Н. Бронштейн	
Н. Б. Васильев	
И. Ф. Гинзбург	
В. Г. Зубов,	<i>академик АПН СССР</i>
П. Л. Капица,	<i>академик</i>
В. А. Кириллин,	<i>академик</i>
Г. И. Косоуров	
В. А. Лешковцев	<i>(зам. главного редактора)</i>
В. П. Лишевский	
А. И. Маркушевич,	<i>академик АПН СССР</i>
М. Д. Миллионщиков,	<i>академик</i>
Н. А. Патрикеева	
Н. Х. Розов	
А. П. Савин	
И. Ш. Слободецкий	
М. Л. Смолянский	<i>(зам. главного редактора)</i>
Я. А. Смородинский,	<i>доктор физико-математических наук</i>
В. А. Фабрикант,	<i>академик АПН СССР</i>
Я. Е. Шнайдер	<i>(ответственный секретарь)</i>

Заведующая редакцией **Л. В. Чернова.**
 Главный художник **Е. П. Леонов.**
 Технический редактор **Т. М. Макарова.**
 Корректор **Л. С. Сомова.**
 Издательство «Наука». Главная редакция
 физико-математической литературы
 Адрес редакции:
 Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.
 Телефон: 2340311.

Сдано в набор 24. 7. 70 г. Под. к печати 13.10.70 г.
 Бумага 70×100 $\frac{1}{16}$. Физ. печ.л.4. Услови.печ.л.5,6.
 Уч.-изд. л.5,39 Тираж 176000 экз. Т-15428.
 Цена 30 коп. Заказ. 1250
 Чеховский полкграфкомбинат Главполнграфпрома
 Комитета по печати при Совете Министров СССР
 г. Чехов Московской области.

В НОМЕРЕ:

- Электростатика на языке силовых линий *Л. Г. Асламазов*
2
- Сокращение алгебраических дробей *А. Н. Виленкин*
11
- Принцип Ферма и законы геометрической оптики *Г. Я. Мякишев*
16
- Максимум, минимум и теорема о средних *А. П. Савин*
24
- Задачник «Кванта»
27
- Задачник «Кванта». Решения *Н. Б. Васильев*
М. И. Башмаков
И. Ш. Слободецкий
29
- Оранжевое небо *Г. И. Косоуров*
44
- Сколько полюсов у магнита *Н. А. Минц*
49
- Всесоюзная заочная олимпиада
51
- Развивайте пространственное воображение *Н. Г. Федин*
54
- Такая ли помощь нужна поступающим? *А. Ф. Хрусталеv*
59
- История календаря и хронология *Л. С. Хренов*
61
- Ответы, указания, решения
63
- Кроссворд
3-я стр. обложки

Электростатика на языке

Л. Г. Асламазов

СИЛОВЫХ ЛИНИЙ

Обычно электростатику изучают так: записывают закон Кулона для силы взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2 : $F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$ (r — расстояние между зарядами) — и затем с помощью иногда простых, а иногда сложных математических расчетов получают всевозможные следствия этого закона, считая, что заряд любого тела можно представить как совокупность распределенных нужным образом точечных зарядов.

Но часто точный математический анализ электрического поля и распределения зарядов оказывается слишком сложным. Тогда на помощь приходят простые соображения — симметрия и картины силовых линий поля. Конечно, они не могут дать столь же полного представления, как математические расчеты, зато наглядны и помогают «увидеть» и предсказать, какие особенности будет иметь электрическое поле и как будут взаимодействовать заряды.

Что такое силовые линии поля

Возьмем точечный заряд q . Этот заряд создает в окружающем пространстве электрическое поле, которое полностью определено, если в каждой точке пространства задана напряженность поля — сила, которая действовала бы на точечный единичный положительный заряд, если бы его поместили в эту точку. Для того чтобы наглядно представить электрическое поле во всем пространстве, можно попробовать изображать его множеством векторов, нарисованных

в различных точках пространства так, чтобы каждый из них показывал напряженность поля (ее величину и направление) в той точке, из которой он выходит. Однако сразу становится очевидным, что такой способ изображения поля неудачен: отдельные стрелки, накладываясь друг на друга, создадут запутанную картину, разобраться в которой будет невозможно.

Фарадей предложил изображать поле силовыми линиями. Это линии, направление которых в каждой точке совпадает с направлением напряженности поля в этой точке. Для точечного заряда нарисовать силовые линии совсем просто. Это прямые (лучи), проходящие через точку, в которой находится заряд. Если заряд положительный, то силовые линии на-

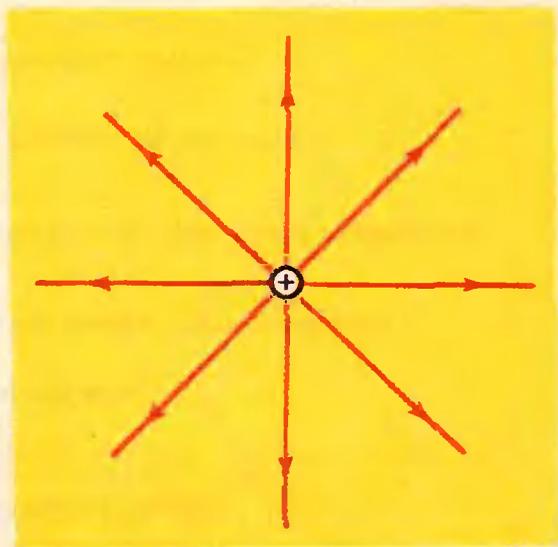


Рис. 1.

правлены от заряда (рис. 1); силовые линии поля, созданного отрицательным зарядом (в дальнейшем для краткости мы будем говорить «поле заряда»), идут к заряду.

Попробуем нарисовать картину силовых линий поля в более сложном случае — для двух одинаковых по величине точечных зарядов — положительного и отрицательного (эту пару зарядов называют «диполем»). Вспомним принцип суперпозиции: напряженность поля системы зарядов равна сумме напряженностей полей, создаваемых отдельными зарядами (рис. 2). Нельзя ли получить картину силовых линий поля диполя, сложив картины силовых линий полей отдельных зарядов или, точнее, наложив их одну на другую? К сожалению, нет. В этом случае силовые линии поля должны были бы пересекаться. Это, очевидно, невозможно, так как в точке пересечения силовых линий напряженность поля имела бы два значения! Значит, простым наложением картин силовых линий полей точечных зарядов нельзя нарисовать картин силовых линий поля системы зарядов.

Качественную картину силовых линий можно получить, поместив в электрическое поле взвесь твердых частичек в жидком изоляторе. В электрическом поле на концах частичек наводятся одинаковые разноименные заряды. Благодаря этому они ориентируются вдоль силовых линий поля. Для поля диполя получается картинка, показанная на рисунке 3, а. Силовые линии идут от положительного заряда к отрицательному (рис. 3, б). Если взять два одинаковых одноименных заряда, то картина силовых линий будет такой, как показанная на рисунках 4, а и 4, б.

Такие же картины получаются, если аккуратно найти векторы напряженности электрического поля в различных точках и по ним уже строить силовые линии поля (рис. 2).

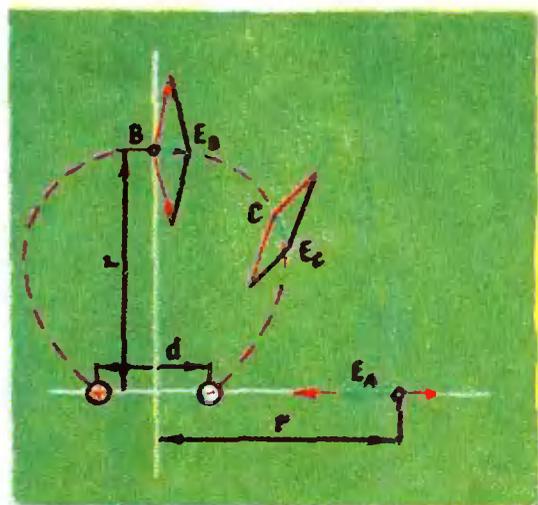


Рис. 2.

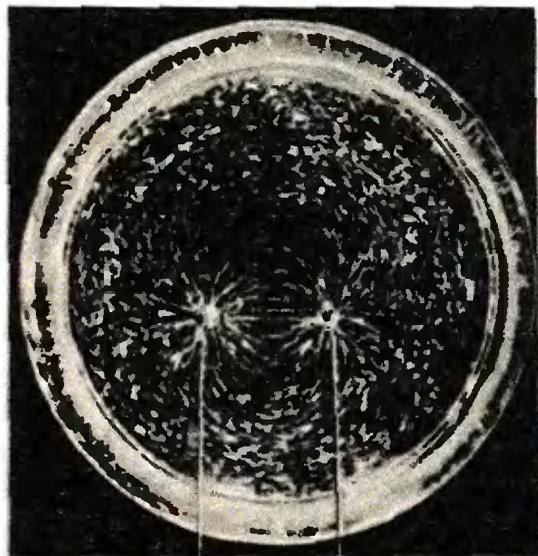


Рис. 3, а.

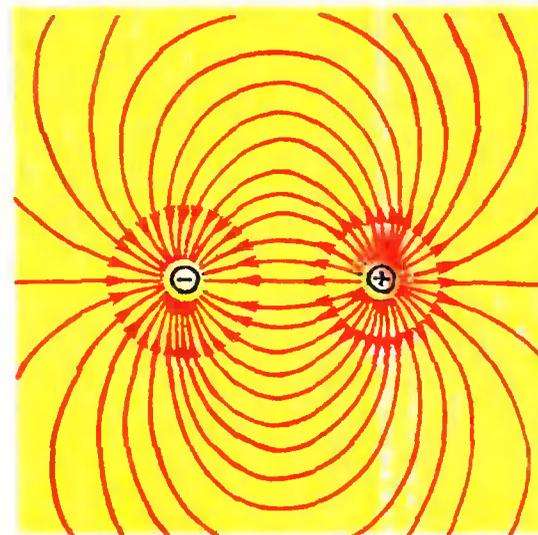


Рис. 3, б.

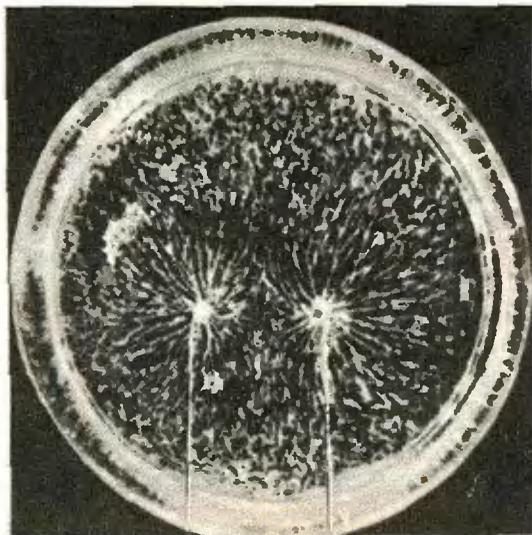


Рис. 4, а.

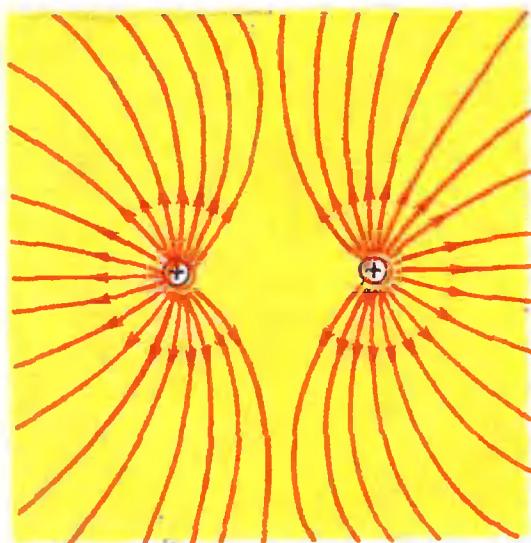


Рис. 4, б.

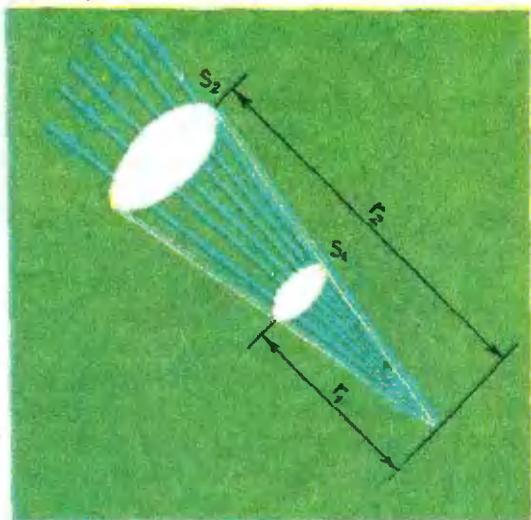


Рис. 5.

Рассматривая рисунки 3 и 4, можно заметить, что при разноименных зарядах силовые линии как бы связывают заряды между собой, а в случае одноименных зарядов силовые линии как бы расталкиваются. Если приписать силовым линиям свойства сокращаться вдоль своей длины и расталкиваться в поперечном направлении, то мы могли бы сказать, что силовые линии, связывающие разноименные заряды, притягивают их друг к другу, а силовые линии разноименных зарядов, расталкиваясь, отталкивают и сами заряды друг от друга. Конечно, нельзя считать, что силовые линии поля существуют реально, но при таком толковании часто один лишь взгляд на картину поля позволяет предсказать результат взаимодействия зарядов. Эти же «свойства» силовых линий, как нетрудно сообразить, могли бы нам помочь нарисовать правильную картину силовых линий.

Теорема Гаусса

Итак, картина силовых линий показывает направление вектора напряженности поля в каждой точке. Но это еще не все. Оказывается, эти картины могут говорить и о большем — о величине напряженности поля.

Возьмем точечный положительный заряд q . Выделим конус с вершиной в точке, в которой находится заряд, и проследим за силовыми линиями, проходящими через площадку с площадью S_1 , находящуюся на расстоянии r_1 от заряда (рис. 5). На расстоянии r_2 эти же силовые линии будут проходить через площадку с большей площадью S_2 . Отношение диаметров площадок равно отношению $\frac{r_2}{r_1}$, поэтому $\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$. Но это означает, что плотность силовых линий $n = \frac{N}{S}$ (число силовых линий, проходящих через площадку единичной площади) обратно пропор-

циональна квадрату расстояния до заряда. Так как $\frac{n_1}{n_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$, то $n \sim \frac{1}{r^2}$.

Точно так же меняется напряженность поля точечного заряда: $E = \frac{q}{r^2}$.

Таким образом, плотность силовых линий пропорциональна напряженности поля: $n \sim E$. Нужно только, чтобы силовые линии нигде не прерывались. Для точечного положительного заряда силовые линии должны начинаться на заряде и уходить на бесконечность. В случае отрицательного заряда силовые линии должны идти из бесконечности и заканчиваться на заряде.

Оказывается, что всегда можно нарисовать картину силовых линий так, чтобы их плотность была пропорциональна напряженности поля. Для этого силовые линии должны всегда начинаться на положительных зарядах и заканчиваться на отрицательных (или уходить на бесконечность), причем, число силовых линий, выходящих из заряда или идущих к нему, должно быть пропорционально величине этого заряда.

Проведем мысленно сферу с центром в точке, в которой находится заряд. Если условиться считать, что из каждого положительного заряда выходит (а на каждом отрицательном заряде оканчивается) $4\pi q$ силовых линий, то их плотность на сферической поверхности будет равна $\frac{4\pi q}{4\pi r^2} = \frac{q}{r^2}$, то есть будет равна напряженности поля. Полное же число силовых линий, пересекающих поверхность сферы, не зависит от ее радиуса и равно $4\pi q$. Ясно, что таким же будет число силовых линий, выходящих из любой замкнутой поверхности, внутри которой находится заряд (или входящих в нее), какую бы форму ни имела эта поверхность.

Это утверждение называется теоремой Гаусса. Она справедлива, конечно, и для любого распределения зарядов. Можно показать, что для любой системы зарядов число силовых

линий, выходящих из замкнутой поверхности произвольной формы, минус число силовых линий, входящих в нее, равно $4\pi Q$, где Q — суммарный заряд, который находится в объеме, ограниченном этой поверхностью. Если заряд Q отрицателен, то число линий, которые выходят из объема, ограниченного поверхностью, меньше числа силовых линий, входящих в него. Если в объеме, ограниченном поверхностью, нет зарядов, то из него выходит столько же силовых линий, сколько и входит.

Потенциал и эквипотенциальные поверхности

Прежде чем приступить к реализации наших знаний — решению конкретных задач, вспомним еще об одной характеристике поля — потенциале. Дело в том, что для него тоже можно отыскать геометрическую картину, тесно связанную с картиной силовых линий. Эта связь часто помогает рисовать и анализировать картину силовых линий поля.

Напомним сначала, что такое потенциал электрического поля.

Если, передвигая в поле заряд, мы вернемся в начальную точку, то полная работа, которую мы совершим, будет равна нулю. Поэтому работа, которая совершается при перенесении точечного заряда из одной точки поля в другую, не зависит от формы пути. Иначе можно было бы вначале пойти по тому пути, где она меньше, а возвратиться по тому, где она больше. Полная работа не была бы равна нулю. Благодаря тому, что работа не зависит от формы пути, и можно ввести понятие потенциала. Потенциал поля в данной точке равен работе, которая совершается полем при перенесении единичного точечного положительного заряда из данной точки поля в бесконечность.

Потенциал может быть как положительным, так и отрицательным. Потенциал поля положительного заряда положителен, а потенциал поля отрицательного заряда отрицателен. В первом случае сила, действующая

на переносимый заряд со стороны поля, направлена в ту же сторону, в которую движется заряд, а во втором — против движения (поле совершает отрицательную работу). Потенциал — это скаляр, не имеющий направления в пространстве. У точечного заряда q на расстоянии r от него потенциал равен $\frac{q}{r}$. Если надо найти потенциал

поля нескольких зарядов, то мы должны сложить потенциалы полей, создаваемых отдельными зарядами, разумеется, с учетом их знаков. Как же связан потенциал с картиной силовых линий? Проведем поверхность, потенциал на которой всюду постоянен. Такие поверхности называют эквипотенциальными. Для точечного заряда эквипотенциальные поверхности — это сферы с центром в точке, в которой находится заряд. Нетрудно увидеть, что силовые линии поля всегда должны быть перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям. Если бы это было не так, то существовала бы составляющая напряженности поля вдоль эквипотенциальной поверхности, и поэтому при перемещении заряда вдоль нее совершалась бы работа. Потенциал менялся бы вдоль поверхности, и она не могла бы быть эквипотенциальной. Можно увидеть и еще одну важную связь эквипотенциальных поверхностей с силовыми линиями поля. Если взять две близкие эквипотенциальные поверхности, то разность их потенциалов равна работе по перенесению точечного единичного положительного заряда с одной поверхности на другую. Так как сила, действующая на такой заряд, равна напряженности поля, то $\Delta\phi = E\Delta r$, или $E = \frac{\Delta\phi}{\Delta r}$. Это означает, что эквипотенциальные поверхности гуще там, где более сильное поле, и реже там, где поле меньше: при одинаковой разности потенциалов расстояние Δr между поверхностями больше там, где меньше поле, и наоборот.

Вот теперь мы можем перейти к решению конкретных задач.

Поле равномерно заряженной полой сферы

Мы можем сразу утверждать, что в силу симметрии поля силовые линии направлены везде по радиусу и густота силовых линий по всем направлениям одинакова. Внутри сферы поле, очевидно, равно нулю. Иначе силовые линии поля внутри сферы были бы направлены к центру или от центра сферы. Это означало бы, что в центре сферы находится точечный заряд.

Для того чтобы найти электрическое поле вне сферы, вспомним, что напряженность поля равна густоте силовых линий, если только полное число силовых линий, выходящих из заряда Q , равно $4\pi Q$. Проведем сферу радиуса R с центром в центре заряженной сферы. Число силовых линий, пересекающих поверхность проведенной нами сферы, равно напряженности поля, умноженной на площадь поверхности сферы: $N = E \cdot S = E \cdot 4\pi R^2$. Согласно теореме Гаусса

$$N = 4\pi Q, \text{ отсюда } E = \frac{Q}{R^2}.$$

Напряженность поля вне сферы такая же, как у точечного заряда, расположенного в центре сферы. Ясно, что и потенциал в любой точке поля вне сферы будет таким же, как потенциал поля точечного заряда. Потенциал всех точек, лежащих на поверхности сферы, одинаков и равен $\frac{Q}{r}$, где r — радиус сферы. Таким же будет потенциал любой точки внутри сферы: при перемещении заряда в эту точку от поверхности сферы мы не совершаем работы (внутри сферы напряженность поля, а следовательно, и сила, действующая на заряд, равны нулю). Зависимость напряженности электрического поля равномерно заряженной сферы от расстояния до центра сферы показана на рисунке 6, б.

Отсутствие поля внутри заряженной сферы можно, конечно, показать

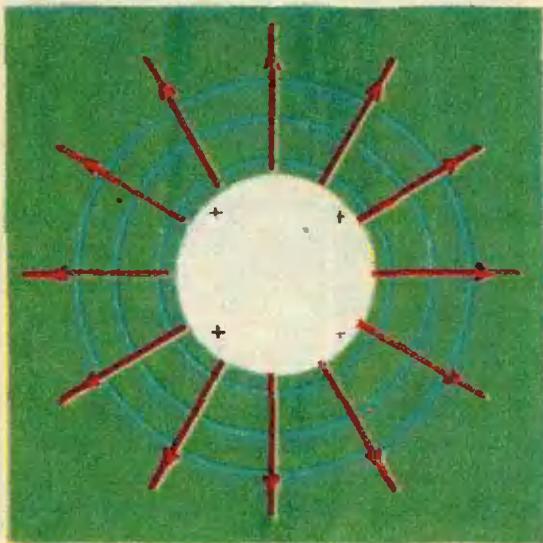


Рис. 6,а

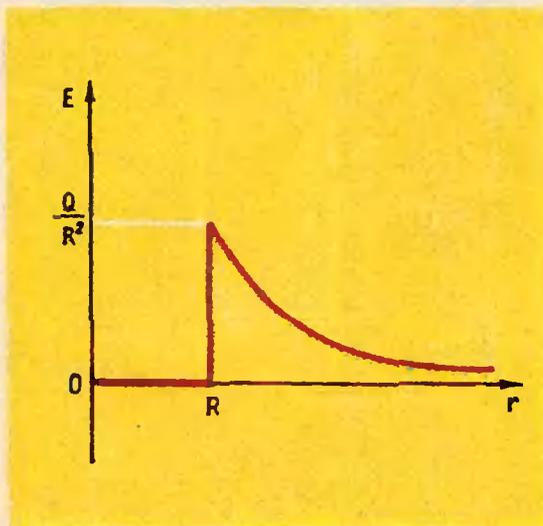


Рис. 6,б.

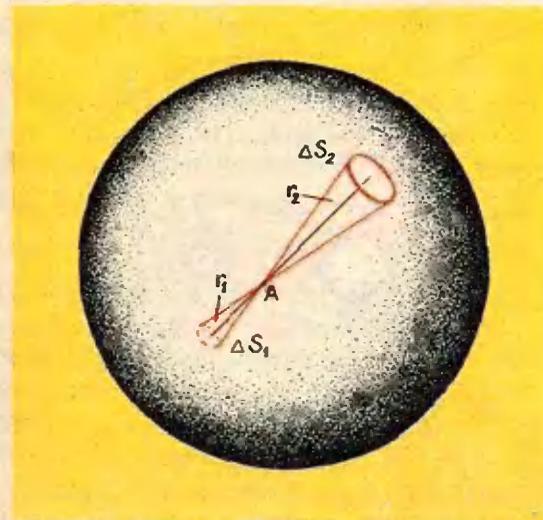


Рис. 7.

и непосредственно из закона Кулона. Возьмем внутри сферы произвольную точку A (рис. 7). Представим себе узкий конус, который идет из точки A , вырезая на поверхности сферы две маленькие сферические площадки ΔS_1 и ΔS_2 . Если r_1 и r_2 — расстояния от точки A до этих участков, то $\frac{\Delta S_1}{\Delta S_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$.

Так как сфера заряжена равномерно, то заряды участков пропорциональны их площадям. Поэтому $\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$, а поля, создаваемые в точке A этими участками, взаимно уничтожаются:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{q_1}{r_1^2}}{\frac{q_2}{r_2^2}} = 1.$$

Таким образом можно разбить на пары участков всю сферу. Следовательно, поле в точке A равно нулю.

Представление о силовых линиях позволило получить этот же результат проще и быстрее.

Равномерно заряженная плоскость и плоский конденсатор

Рассмотрим теперь поле бесконечной (правильнее сказать, очень большой) равномерно заряженной плоскости, на единице площади которой находится заряд σ .

Ясно, что силовые линии поля, создаваемого плоскостью, перпендикулярны к плоскости и их плотность всюду одинакова (рис. 8): если бы силовые линии были наклонены в одну сторону, то это означало бы, что одно направление вдоль плоскости отличается от других; если бы плотность силовых линий была в разных точках вблизи плоскости различна, то это означало бы, что одни точки, чего, разумеется, быть не может, отличаются чем-то от других.

Проведем цилиндрическую поверхность с основаниями, параллельными плоскости и равными по площади единице. Силовые линии поля не пересекают боковой поверх-

ности цилиндра, а число силовых линий, проходящих через основания цилиндра, согласно теореме Гаусса, равно $4\pi\sigma$. Это означает, что в каждом направлении (налево от плоскости и направо от нее) проходит $2\pi\sigma$ силовых линий через единицу площади (рис. 8). Таким образом, напряженность поля равномерно заряженной бесконечной пластины везде одинакова, не зависит от расстояния до пластины и равна

$$E=2\pi\sigma.$$

Если взять теперь две противоположно заряженные плоскости (рис. 9), то по обе стороны от конденсатора, образованного этими плоскостями, поля уничтожают друг друга. Внутри же между пластинами поля направлены одинаково и, складываясь, дают напряженность поля

$$E=4\pi\sigma.$$

Хотя поле у краев конденсатора будет искажено, в средней части мы можем считать его одинаковым как по величине, так и по направлению. Такое поле называют однородным.

Проводник в электрическом поле

До сих пор мы считали положение зарядов заданным, и нам оставалось только найти электрическое поле, которое создают эти заряды. Задача усложняется, когда у нас имеются проводники, по которым заряды могут свободно перемещаться. Если, например, поднести к проводнику заряд (рис. 10), то электроны в проводнике начнут двигаться под действием поля этого заряда. На поверхности проводника будут появляться при этом заряды, поле которых внутри проводника направлено противоположно внешнему полю. Это будет продолжаться до тех пор, пока поле внутри проводника не станет равным нулю. При этом заряды, появившиеся на поверхности проводника, изменят, конечно, и поле вне проводника.

§ Поле внутри проводника всегда

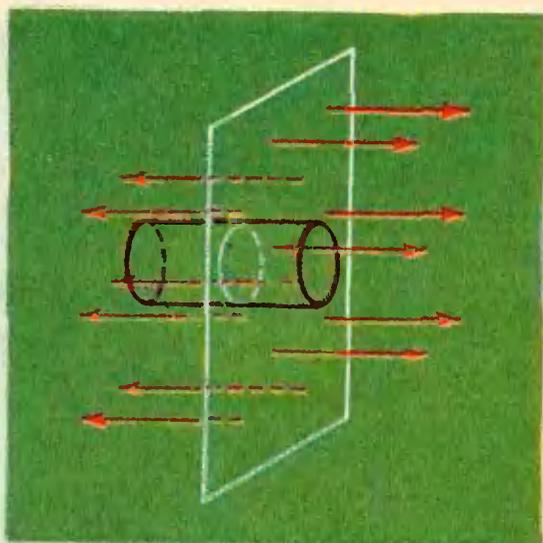


Рис. 8.

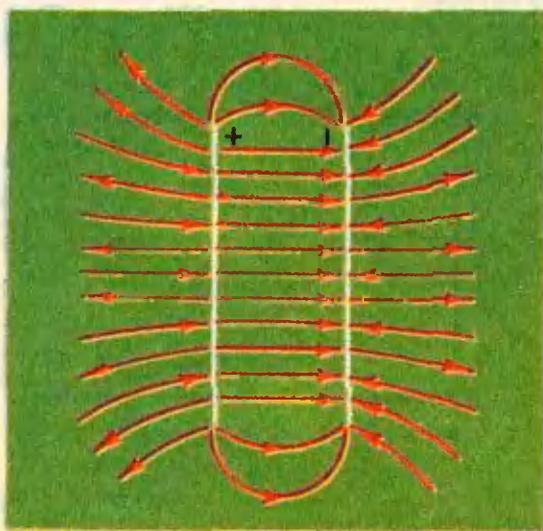


Рис. 9.

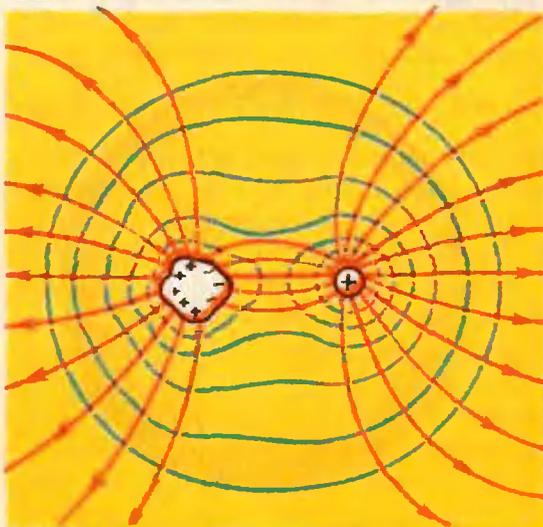


Рис. 10.

равно нулю. Иначе это поле вызвало бы движение свободных электронов, которые находятся в проводнике. По той же причине у поверхности проводника напряженность поля должна быть обязательно направлена перпендикулярно к поверхности. Потенциал всех точек проводника одинаков (при перемещении заряда внутри проводника не совершается никакой работы). В частности, эквипотенциальной является поверхность проводника.

Мы можем сделать еще один вывод. Если проводник заряжен, то заряды расположены только на его поверхности. В противном случае не будет равным нулю поле внутри проводника.

Для того чтобы представить себе, как распределяется заряд по поверхности проводника, рассмотрим простой случай — две сферы с радиусами r и R , соединенные тонким проводником. Конечно, заряд одной сферы сказывается на распределении заряда по поверхности другой, но так как нас интересует сейчас только качественный результат, то этим мы пренебрежем. Полагая также, что сферы находятся далеко друг от друга (по сравнению с их радиусами), мы можем считать, что потенциал большей сферы равен $\frac{q_1}{R}$, а меньшей $\frac{q_2}{r}$ (q_1 и q_2 — находящиеся на них заряды). Записав условие равенства потенциалов сфер: $\frac{q_1}{R} = \frac{q_2}{r}$, мы найдем, что заряды на сферах пропорциональны их радиусам. Плотность заряда, то есть заряд, приходящийся на единицу площади поверхности сферы, будет больше у меньшей сферы:

$$n_2 = \frac{q_2}{r^2}; \quad n_1 = \frac{q_1}{R^2} \quad \text{и} \quad \frac{n_1}{n_2} = \frac{r}{R}. \quad \text{Так}$$

как напряженность поля у поверхности проводника пропорциональна плотности заряда, то она будет больше вблизи меньшей сферы и меньше у большей сферы. (С единицы площади поверхности выходит n силовых линий.)

Аналогично распределяется заряд и по поверхности любого проводника: плотность заряда, а значит, и на-

пряженность поля у поверхности наибольшая в тех местах, которые имеют наибольшую кривизну, например, у вытянутого конца проводника.

Это можно увидеть и рисуя эквипотенциальные поверхности. Вдали от тела поле такое же, как у точечного заряда, поэтому эквипотенциальные поверхности — это сферы. Вблизи заряженного проводника эквипотенциальные поверхности повторяют форму тела (рис. 10). По мере удаления от проводника эквипотенциальные поверхности должны трансформироваться, приближаясь к сферам. Нарисовав так несколько эквипотенциальных поверхностей, нетрудно заметить, что они проходят ближе друг к другу там, где поверхность проводника наиболее неровная и выпуклая. В то же время возле участков с вогнутой поверхностью эквипотенциальные поверхности идут реже. А это и означает, что поле больше вблизи сильно искривленных выпуклых участков и меньше у вогнутых участков.

Равновесие системы зарядов, устойчивость атомов

Еще совсем недавно, в начале нашего века, не было понятно, почему устойчив атом. Одна из моделей атома была такой: положительный заряд атома равномерно распределен по шару, в центре которого устойчиво покоятся электроны (модель Томсона). Однако опыты Резерфорда показали, что положительный заряд атома сконцентрирован в области, размеры которой малы по сравнению с размером атома. И тогда стало ясно, что частицы в атоме не могут находиться в состоянии покоя. Для того чтобы атом был устойчив, они непременно должны двигаться.

В самом деле, мы теперь можем легко показать, что неподвижные точечные заряды не могут сами по себе образовывать устойчивые системы. Действительно, для того чтобы заряд в некоторой точке поля находился в устойчивом равновесии, необходимо,

чтобы в этой точке на него не действовала сила (напряженность была равна нулю) и чтобы при отклонении заряда в любую сторону на него действовала сила, возвращающая его в ту точку, в которой находился этот заряд (векторы напряженности поля во всех окрестных точках должны быть направлены в ту точку, в которой находится заряд). Но это невозможно, так как для того, чтобы поле было таким, в точке, в которой находится заряд, должен еще находиться заряд противоположного знака! Таким образом, при смещении заряда равновесие обязательно нарушится, и заряды либо слипнутся, либо разлетятся.

Представление о вращающихся вокруг ядер электронах было впервые введено Резерфордом. И хотя динамическая модель атома с электронами, вращающимися вокруг ядра, столкнулась со многими на первый взгляд неразрешимыми трудностями, дальнейшее развитие физики показало ее правильность. Но это уже тема для другого рассказа.

Задачи

1. Нарисуйте примерную картину силовых линий поля двух разноименных и различных по величине зарядов.

2. Могут ли силовые линии электростатического поля быть замкнутыми?

3. Иногда говорят, что силовые линии — это траектории, по которым двигался бы в поле положительный заряд, если его, внеся в это поле, предоставить самому себе. Правильно ли это утверждение?

4. Имеются две концентрические сферы с радиусами R_1 и R_2 и зарядами q_1 и q_2 ($R_1 < R_2$). Как напряженность поля зарядов сфер зависит от расстояния до их общего центра?

5. Как напряженность поля однородно заряженного шара зависит от расстояния до центра шара?

6. Найдите, как зависит от расстояния напряженность поля бесконечной равномерно заряженной нити.

7. Найдите напряженность поля очень длинного равномерно заряженного цилиндра.

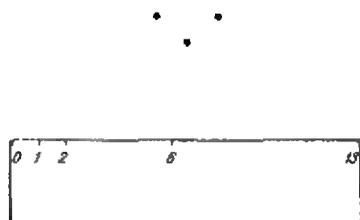
8. Покажите, что внутри полого проводника поле равно нулю независимо от формы проводника и полости (экранирование).

НАИПРОСТЕЙШИЕ ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

53	7 331
317	23 333
599	23 339
797	31 193
2 393	31 379
3 793	37 397
3 797	
73 331	2 399 333
373 393	7 393 931
593 993	7 393 933
719 333	23 399 339
739 397	37 337 999
739 399	59 393 133
	73 939 133

Числа в этой таблице обладают тем замечательным свойством, что после отбрасывания нескольких (но не всех) последних знаков они опять остаются простыми. Например, из числа 3793 возникают простые числа 379, 37, 3. Здесь собраны все наипростейшие простые числа наибольшей длины. Среди них есть две пары последовательных нечетных чисел.

Наипростейших простых девятизначных (и более длинных) чисел не существует.



Хотя на этой линейке нанесены лишь 4 деления, с ее помощью можно измерить все (целочисленные) расстояния от 1 до 13 см.

Какое наименьшее число делений надо нанести на линейку длиной 9 см, чтобы она измеряла все расстояния от 1 до 9 см?

А на 12-сантиметровую линейку?

Сокращение алгебраических дробей

А. Н. Виленкин

Упрощение выражений требует изобретательности, большой практики и знания многих приемов. В этой статье описан один из них. Он вполне доступен ученикам 7 классов.

Начнем с примера. Упростить выражение

$$\left(\frac{1-x}{x^2+x^3-x^4} - \frac{x^3+x-2}{x^6-x^3-2x^2-x} \right) : \left(\frac{1+x}{x^3+x^4+x^5} - \frac{1-x+x^2}{x^3} \right). \quad (1)$$

Обычно в таких примерах ищут общие множители знаменателей, сокращают на все, на что только можно, — словом, всячески облегчают себе работу. Ну что же, сразу видно, что во второй скобке общим знаменателем будет знаменатель первой дроби. Это мы учтем. А теперь, не мудрствуя лукаво, произведем действия в скобках и сократим на x . После этого получится выражение

$$\frac{x^8 - 2x^6 + x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1}{-x^6 + x^5 + 2x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 1} \cdot \frac{x^2 + x + 1}{-x^3 - x + 1}.$$

Произведем и это умножение. Получим

$$\frac{x^8 - x^7 - 3x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 - 1}{x^9 - x^8 - x^7 - 3x^6 + x^5 + 4x^4 + 4x^3 + x^2 - 2x - 1}. \quad (2)$$

Проделав все эти действия, мы представили выражение (1) в виде отношения двух многочленов. Ясно, что к такому «стандартному» виду (алгебраическая дробь) можно привести любое рациональное выражение, то есть выражение, составленное из букв и чисел с помощью знаков арифметических действий — сложения, вычитания, умножения и деления*).

Упростить алгебраическую дробь (2) можно, сократив ее числитель и знаменатель на их общий делитель. (Напомним, что многочлен $P(x)$ называется делителем многочлена $Q(x)$, если $Q(x)$ делится на $P(x)$ без остатка, то есть $Q(x) = P(x)R(x)$, где $R(x)$ — некоторый многочлен.) Таким образом, задача свелась к нахождению наибольшего общего делителя (НОД) двух многочленов. Но сначала надо сказать, что это такое, НОД многочленов.

* З а м е ч а н и е д л я у ч и т е л я. При «алгебраическом» подходе, принятом в этой статье, мы смотрим на x просто как на букву, символ, и нас не интересует, какие значения можно подставлять вместо x : нам важно только, что над рациональными выражениями можно совершать арифметические операции по тем же правилам, что и над числами. При этом дроби $\frac{x-1}{x^2-1}$ и $\frac{1}{x+1}$ мы не различаем. Если встать на другую точку зрения, «функциональную», то есть смотреть на рациональные выражения как на записи правил, по которым вычисляются значения функций, и интересоваться, какие значения переменных можно в них подставлять, а какие нет, то при каждом сокращении надо следить за областью определения функций.

О п р е д е л е н и е. Наибольшим общим делителем чисел или многочленов называется такой их общий делитель, который делится без остатка на любой их общий делитель.

Мы будем обозначать НОД чисел или многочленов a, b так: $\text{НОД}(a, b)$. Например, $\text{НОД}(5, 10) = 5$; $\text{НОД}(x^2, 3x - x^2) = x$; $\text{НОД}(x^3 - x^2, x - 1) = x - 1$.

Поиски наибольшего общего делителя

Для чисел известно два способа нахождения НОД.

С п о с о б 1. Раскладываем оба числа на простые множители и берем произведение тех из них, которые встречаются в обоих числах. Например, сокращая дробь $\frac{3770}{9425}$, можно написать: $\frac{3770}{9425} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 29}{5 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 29}$;

$$\text{НОД}(3770, 9425) = 5 \cdot 13 \cdot 29 = 1885, \quad \frac{3770}{9425} = \frac{2}{5}.$$

Чем плох такой способ? Во-первых, нужно сначала доказать, что любое натуральное число можно разложить на простые множители и притом единственным образом. Во-вторых, для того чтобы найти это разложение, придется проделать большую работу, причем в основном напрасную. Ведь мы найдем все делители каждого из чисел, а нам нужен лишь их наибольший общий делитель.

Как мы увидим дальше, еще хуже будет обстоять дело с многочленами: разложение всегда существует, а найти его, вообще говоря, невозможно, — разве лишь, если кто-то специально подстроил так, что разложение легко находится (как бывает в конкурсных примерах).

Но можно и не разлагать числа на множители.

С п о с о б 2. Алгоритм Евклида. Он основан на следующих леммах.

Л е м м а 1. Любое натуральное число q можно разделить с остатком на другое натуральное число p , то есть представить q в виде $q = kp + r_1$, где $0 \leq r_1 < p$.

Л е м м а 2. Если число d является НОД чисел p и p_1 , то это же число d является НОД чисел p и q .

Заметим, что эта лемма позволит нам не только найти, но и доказать существование НОД двух чисел, потому что она сводит вопрос о существовании и нахождении НОД к меньшим числам.

Докажите эти леммы самостоятельно. В лемме 1 надо разбить числовую ось на куски точками $0, p, 2p, 3p, \dots$ и найти, в каком из них лежит точка q . В лемме 2 надо предположить, что число d делится на любой общий делитель чисел p и p_1 , а также что оба числа p, p_1 делятся на d , и доказать, что число d обладает этими же двумя свойствами относительно чисел p и q .

Теперь на примере, рассмотренном в способе 1, изложим собственно алгоритм Евклида — последовательность действий, которая позволяет найти НОД чисел q и p . Слева мы пишем последовательность формул в общем виде, а справа — для примера.

Ш а г 1. Используя лемму 1, делим q на p . Получаем:
 $q = k_0 p + r_1, \quad 0 \leq r_1 < p; \quad 9425 = 2 \cdot 3770 + 1885, \quad 0 \leq 1885 < 3770.$
 На основании леммы 2 заключаем, что
 $\text{НОД}(q, p) = \text{НОД}(p, r_1); \quad \text{НОД}(9425, 3770) = \text{НОД}(3770, 1885).$

Ш а г 2. Смотрим, равно ли r_1 нулю.
 Если r_1 равно нулю, то заканчиваем процесс и переходим к шагу 3.

Если p_1 не равно нулю, то вместо пары q, p берем пару p, p_1 и возвращаемся к шагу 1.

$1885 \neq 0$, поэтому вместо пары $9425, 3770$ берем пару $3770, 1885$ и возвращаемся к шагу 1.

Шаг 1. Используя лемму 1, делим p на p_1 . Получаем:

$$p = k_1 p_1 + p_2, \quad 0 \leq p_2 < p_1;$$

$$3770 = 2 \cdot 1885 + 0, \quad 0 \leq 0 < 1885.$$

На основании леммы 2 заключаем, что

$$\text{НОД}(p, p_1) = \text{НОД}(p_1, p_2);$$

$$\text{НОД}(3770, 1885) = \text{НОД}(1885, 0);$$

$$p_1 = k_2 p_2 + p_3, \quad 0 \leq p_3 < p_2;$$

$$\dots$$

$$p_{m-1} = k_m p_m + 0.$$

Заметим, что p_i образуют убывающую последовательность, после каждого шага 1 p_i уменьшается по крайней мере на 1, так что когда-нибудь остаток p_{m+1} станет равным нулю, и мы от шага 2 перейдем к шагу 3. В данном примере это случилось после двух циклов (то есть двух применений шага 1 и шага 2).

Шаг 3 (последний). Число p_m и есть НОД (q, p). В нашем примере $\text{НОД}(9425, 3770) = 1885^*$.

Доказательство: $\text{НОД}(p_m, 0) = p_m$ (проверьте это сами), и на основании леммы 2

$$\text{НОД}(q, p) = \text{НОД}(p, p_1) = \text{НОД}(p_1, p_2) = \dots = \text{НОД}(p_m, 0) = p_m.$$

В примере $\text{НОД}(9425, 3770) = \text{НОД}(3770, 1885) = \text{НОД}(1885, 0) = 1885$.

Итак, с числами мы разобрались.

Вернемся к многочленам

Нам надо сократить дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, т. е. найти $\text{НОД}(Q(x), P(x))$.

Способ 1. Разложение на множители каждого из многочленов. Если мы предоставим виртуозам, потому что никаких общих приемов здесь нет, более того, их не существует. Дело в том, что, как показывает приведенная ниже лемма 1', выделить в многочлене $Q(x)$ линейный множитель $x - a$ — это все равно что найти корень уравнения $Q(x) = 0$ (проверьте это самостоятельно **). Существуют формулы для нахождения (комплексных!) корней многочленов второй, третьей, даже четвертой степени (хотя и очень громоздкие). Но в 1823 году замечательный норвежский математик Нильс Хенрик Абель доказал, что для уравнений пятой степени и выше не существует формул, выражающих корни через коэффициенты с помощью четырех арифметических действий и операции извлечения корня.

Итак, мало того, что мы вынуждены применять комплексные числа, мы к тому же оказались в глупом положении. Разложение, может быть, и существует, а найти его невозможно. Но, как мы сейчас увидим, можно найти НОД многочленов (нам ведь только это и нужно), используя лишь действия сложения, вычитания, умножения и, возможно, деления чисел. Тогда, если многочлены с самого начала имеют целые или рациональные коэффициенты, мы обойдемся лишь рациональными числами.

Способ 2. Алгоритм Евклида для многочленов. Заметим, что леммы 1 и 2 верны и для многочленов, точнее, лемму 1 надо заменить на такую:

Лемма 1'. *Многочлен $Q(x)$ можно разделить с остатком на многочлен $P(x)$, то есть представить в виде $Q(x) = K(x)P(x) + P_1(x)$, где степень многочлена $P_1(x)$ меньше степени многочлена $P(x)$.*

*) Описание способа 2 можно рассматривать как введение в программирование, именно из таких повторяющихся циклов состоит программа для большой вычислительной машины.

**) У к а з а н и е. В лемме 1' положить $P(x) = x - a$; тогда $P_1(x)$ будет равно значению многочлена $Q(x)$ при $x = a$, то есть $Q(a)$.

В лемме 1 число p_1 было меньше p по величине, а у многочленов за «размер» принимается степень многочлена. Пример деления многочленов с остатком приведен ниже, с помощью него вы сами докажете эту лемму.

Пример. Делим многочлен $2x^5 + 4x^4 - 2x^3 - x + 1$ на многочлен $x^2 + 2x + 5$ уголком. Получается:

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} 2x^5 + 4x^4 - 2x^3 - x + 1 \\ - 2x^5 + 4x^4 + 10x^3 \\ \hline - 12x^3 - 24x^2 - 60x \\ - 12x^3 - 24x^2 - 60x \\ \hline 24x^2 + 59x + 1 \\ - 24x^2 + 48x + 120 \\ \hline 11x - 119 \end{array} & \begin{array}{l} x + 1 \\ \hline x^2 + 2x + 5 \\ \hline 2x^3 - 12x + 24 \end{array} \end{array}$$

$2x^5 + 4x^4 - 2x^3 - x + 1 = (2x^3 - 12x + 24)(x^2 + 2x + 5) + (11x - 119)$. Теперь у нас есть требуемые леммы и можно действовать по алгоритму Евклида, то есть построить последовательность делений с остатками (для многочленов!), в которых степени многочленов последовательно уменьшаются:

$$Q(x) = K_0(x)P(x) + P_1(x), \quad \text{Степени многочленов } P_i(x) \text{ уменьшаются при увеличении } i.$$

$$P(x) = K_1(x)P_1(x) + P_2(x),$$

$$P_1(x) = K_2(x)P_2(x) + P_3(x),$$

$$\dots$$

$$P_{m-2}(x) = K_{m-1}(x)P_{m-1}(x) + P_m(x),$$

$$P_{m-1}(x) = K_m(x)P_m(x).$$

При этом $\text{НОД}(Q(x), P(x)) = \text{НОД}(P(x), P_1(x)) = \dots = \text{НОД}(P_{m-1}(x), P_m(x)) = \text{НОД}(P_m(x), 0) = P_m(x)$. Последнее частное $P_m(x)$ и есть НОД исходных многочленов (проверьте все это).

Практически эти формулы получаются делением уголком, которое в самом первом примере выглядит так:

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} x^9 - x^8 - x^7 - 3x^6 + x^5 + 4x^4 + 4x^3 + x^2 - 2x - 1 \\ - x^9 - x^8 - 3x^6 + x^5 + x^4 + 2x^3 - x \\ \hline -x^7 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 1 \end{array} & \begin{array}{l} x^6 - x^7 - 3x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 - 1 \\ \hline x \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} x^8 - x^7 - 3x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 - 1 \\ - x^8 - 3x^5 - 2x^4 - x^3 + x^2 + x \\ \hline -x^7 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 1 \\ - x^7 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 1 \\ \hline 0 \end{array} & \begin{array}{l} -x^7 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 1 \\ \hline -x - 1 \end{array} \end{array}$$

Теперь осталось сократить алгебраическую дробь (2) на последний делитель $-x^7 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 1$, то есть разделить числитель и знаменатель в (2) на полученный НОД. Проделав все это, получим $\frac{x-1}{x^2-x-1}$.

Это и есть ответ.

Если вы читали статью Н. М. Бескина «Цепные дроби» («Квант» № 8), то можете заметить, что описанный здесь прием есть в точности сокращение многочленов разложением в цепную дробь, проводимое так же, как и для рациональных чисел. Мы переписывали дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ следующим образом:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{K_0(x)P(x) + P_1(x)} = \frac{1}{K_0(x) + \frac{P_1(x)}{P(x)}}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{K_0(x) + \frac{1}{K_1(x) \frac{P_1(x)}{P_1(x) + P_2(x)}}} = \frac{1}{K_0(x) + \frac{1}{K_1(x) + \frac{P_2(x)}{P_1(x)}}$$

и так далее. В конце концов $\frac{P_m(x)}{P_{m-1}(x)} = \frac{1}{K_m(x)}$, осталось лишь свернуть цепную дробь из многочленов. В рассматриваемом примере это делается так: $\frac{1}{x + \frac{1}{-x + 1}} = \frac{x-1}{x^2 - x - 1}$.

У п р а ж н е н и я .

Упростить выражения:

$$1. \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{(3x^2 + 3x - 3)^2}$$

$$2. \frac{x^3 + a^3}{x^4 + a^2x^2 + a^4}$$

$$3. \frac{a(x^2 + 2) - 2ax - (x-1)^2 - 1}{x^4 + 4}$$

$$4. \frac{x^2 + 6}{2(x^4 + 4x^2 - 12) + \frac{1}{7}(x^4 + 11x^2 + 30)}$$

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

В отмеченных ниже местах должно стоять следующее:

«Квант» № 6

Стр. 6, правая колонка. В рисунке к задаче 3 нижняя черточка лишняя; весь рисунок перевернут.

Стр. 21, правая колонка, 1 строка сверху:

$$\dots = (1+x^t) [(1+x)^p - (1+x^p)] \times \dots;$$

7 строка сверху: $x^{kp+s} \dots$

2 строка снизу: $\dots C_{119}^{33} = C_{23}^6 C_4^3 \dots$

Стр. 22, левая колонка, 2 строка сверху: $\dots C_6^6 = C_4^1 C_3^1 \dots$

Стр. 30, правая колонка. В решении задачи 3 ограничение $b \geq 0$ лишнее, случай $b < 0$ надо рассматривать отдельно.

Стр. 31, левая колонка, 6 строка снизу:

$$x = \frac{a(2 + \operatorname{tg} \alpha)}{\operatorname{tg} \alpha};$$

3 строка снизу:

$$V = \frac{a^3(2 + \operatorname{tg} \alpha)^3}{6 \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

Стр. 4, в задаче 15 система имеет вид:

$$\begin{cases} x + 3y = 3, \\ ax + 4y = 6. \end{cases}$$

в задаче 35 система имеет вид:

$$\begin{cases} 3|x| - 5y = -3, \\ 2x + |y| = 11. \end{cases}$$

Стр. 35, в задаче 3 (вариант 2) уравнение таково:

$$\log_3(\log_2 x - 1)^2 = \sqrt{5}^{\log_5 4}.$$

Стр. 52, правая колонка, 3 строка снизу: $\dots p^2 + 13 = 17 \dots$

Стр. 59, правая колонка. В задаче 4, б) ответ: 5(11) 540; при делении допущена ошибка.

Стр. 60, правая колонка,

$$8. \frac{5}{6} < x < 2. \quad 23. S_{\sigma} = \frac{1}{2} \pi b^2 \dots$$

$$24. V = -\frac{2}{3} l^2 \dots$$

Стр. 61, левая колонка, 37. $0 < t \leq 0,1$.

Стр. 63, правая колонка, 11 строка снизу:

$$\begin{cases} 500 - 80 = 420 = 100a + b, \\ 2500 - 496 = 2004 = 100b + a. \end{cases}$$

3 стр. обложки, кроссворд развернут на 90°.

«Квант» № 7

Стр. 43. На пересечении 5 строки снизу и 8 столбца должно стоять 256;

12 >> >> >> 46656;

14 >> >> >> 823 543.

Стр. 49, правая колонка, 14 строка сверху:

$$\dots \frac{4}{9} \dots$$

Стр. 52, правая колонка, 15 строка сверху:

$$\sqrt{4r^2 - h^2} = \frac{r}{\sin \frac{\pi}{n}};$$

левая колонка, 14 строка снизу: $\dots A_n A_1 = = 2r$.

Стр. 59, задача 1234: \dots с помощью четырех взвешиваний...

ПРИНЦИП ФЕРМА И ЗАКОНЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Г. Я. Мякишев

ЗАКОНЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Распространение световых волн представляет собой довольно сложный процесс. Однако если свойства среды, в которой распространяется свет, мало меняются на расстояниях, равных примерно длине световой волны, то оказываются справедливыми сравнительно простые законы геометрической оптики. Всего их четыре.

1. В однородной среде свет распространяется прямолинейно.

2. *Закон отражения.* Луч падающий, луч отраженный и перпендикуляр к отражающей поверхности лежат в одной плоскости, причем угол отражения β равен углу падения α (рис. 1).

3. *Закон преломления.* Луч падающий, луч преломленный и перпендикуляр к поверхности раздела лежат в одной плоскости, причем отношение синуса угла падения i к синусу угла преломления r (рис. 2) — постоянная величина, не зависящая от угла падения:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n.$$

Величина n называется показателем преломления второй среды по отношению к первой.

4. *Независимость световых пучков.* Пересекаясь в пространстве, световые пучки не оказывают никакого воздействия друг на друга. Так, когда

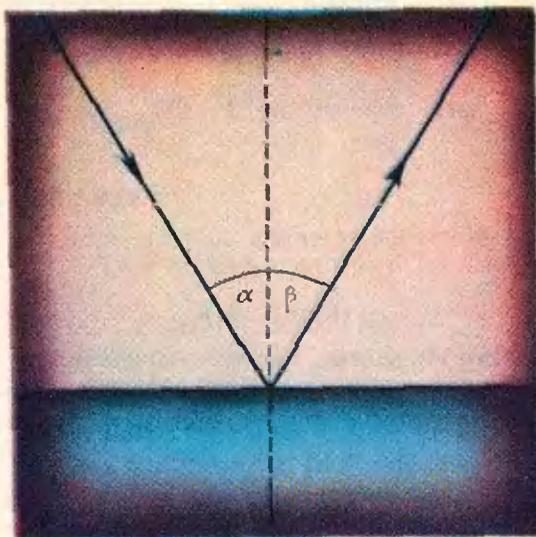


Рис. 1.

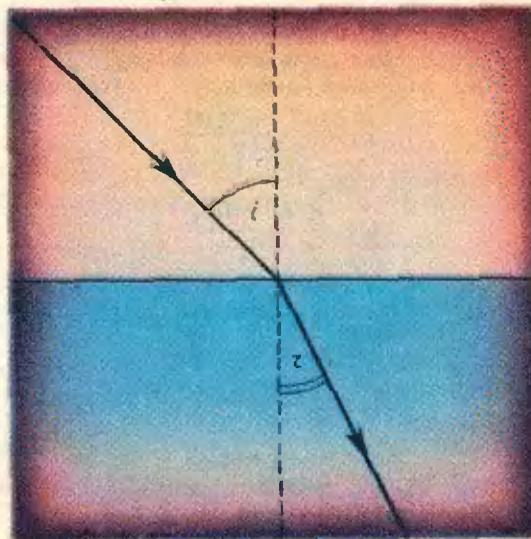


Рис. 2.

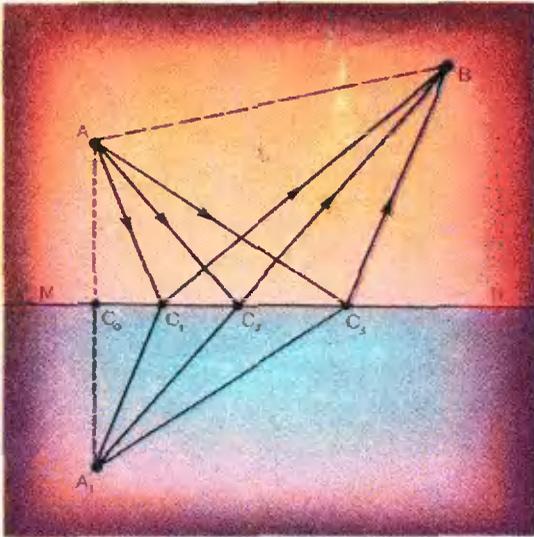


Рис. 3.

вы читаете книгу, световой поток, идущий из окна и пронизывающий пространство между книгой и глазами, ни в коей мере не мешает вам видеть буквы.

ПРИНЦИП ФЕРМА

В середине XVII века итальянский ученый Ферма выдвинул принцип, из которого вытекали все законы геометрической оптики. Закладывается он в следующем: свет, идущий из одной точки в другую, всегда распространяется по пути, требующему минимального времени*).

Давайте получим законы геометрической оптики так, как это сделал Ферма около 300 лет назад.

1. **Закон прямолинейного распространения света.** Расстояние вдоль прямой — кратчайшее расстояние между двумя точками. Скорость света в однородной среде во всех точках одна и та же. Следовательно, меньше всего времени свету нужно именно при прямолинейном распространении.

2. **Закон отражения.** Как из точки A попасть в точку B за кратчайшее время (рис. 3)? Конечно вдоль прямой AB . Свет так и идет в однородной среде. Но если он предва-

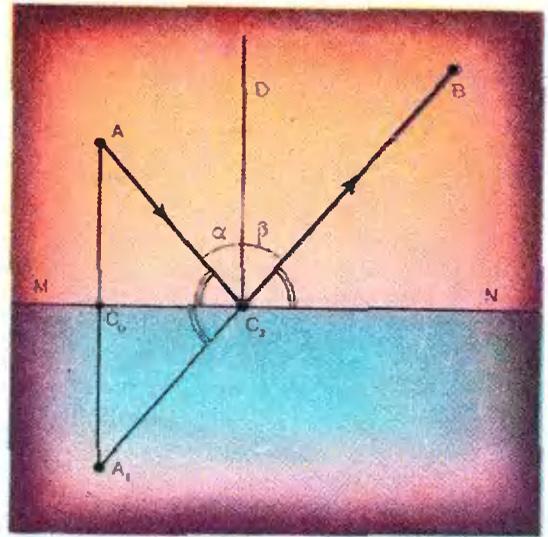


Рис. 4.

рительно должен отразиться от зеркала и лишь потом попасть в точку B , то сразу не ясно, какому пути соответствует минимальное время. Нарисуем несколько возможных путей AC_1B , AC_2B и AC_3B . Благодаря тому, что свет как до, так и после отражения распространяется в однородной среде, то минимальному времени соответствует путь минимальной длины.

Какой же путь наименьший? Несложный прием помогает его отыскать. Построим точку A_1 — изображение точки A . Она лежит на продолжении перпендикуляра AC_0 , опущенного на зеркало из точки A , на расстоянии $A_1C_0 = AC_0$ от зеркала. Соединив точки C_1 , C_2 и C_3 с точкой A_1 , легко убедиться в том, что $AC_1 = A_1C_1$, $AC_2 = A_1C_2$ и $AC_3 = A_1C_3$. Поэтому, подсчитывая путь из точки A в точку B , мы можем заменить отрезок AC_1 отрезком A_1C_1 , отрезок AC_2 — отрезком A_1C_2 и отрезок AC_3 — отрезком A_1C_3 . Ясно, что кратчайший путь тот, при котором луч падает на зеркало в точке C_2 , лежащей на прямой A_1B : прямая A_1B короче любой ломаной, проходящей через точки A и B .

Теперь остается показать, что при отражении луча от зеркала в точке C_2 выполняется закон отражения, то есть что угол падения α равен углу отражения β (рис. 4). Так как треугольники AC_2C_0 и $A_1C_2C_0$ равны,

*) Более строго принцип Ферма формулируется так: свет распространяется тем путем, который требует либо минимального, либо максимального времени. Однако в большинстве случаев справедлива более простая формулировка.

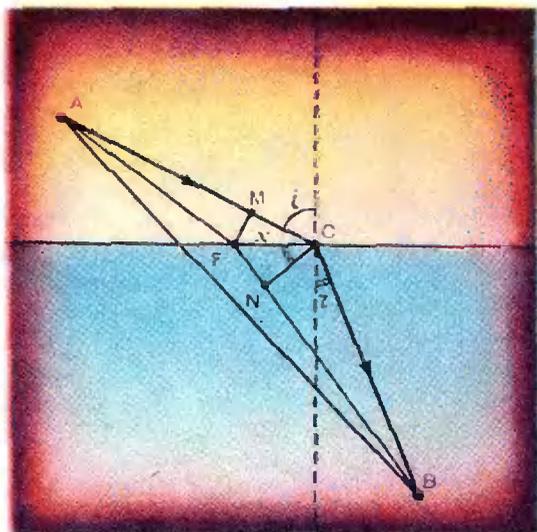


Рис. 5.

то $\angle AC_2C_0 = \angle A_1C_2C_0$. С другой стороны, $\angle C_0C_2A_1 = \angle BC_2N$. Следовательно, $\angle AC_2C_0 = \angle BC_2N$, а значит, и $\alpha = \beta$.

Нетрудно сообразить, что если бы лучи AC_2 , BC_2 и перпендикуляр DC_2 не лежали в одной плоскости, то путь от точки A до зеркала и затем от зеркала до точки B был бы длиннее.

Таким образом, закон отражения полностью следует из принципа Ферма.

Интересно, что впервые закон отражения был получен Героном Александрийским, жившим в I веке. Герон считал, что свет распространяется по кратчайшему пути. Для однородной среды это совпадает с принципом наименьшего времени Ферма. Но объяснить таким образом закон преломления оказалось уже невозможным.

3. *Закон преломления.* Свет из точки A падает на плоскую границу раздела двух сред (рис. 5) и преломляется, попадая затем в точку B . Если скорости света в первой (верхней) и второй (нижней) средах различны (для определенности будем считать, что $v_1 > v_2$), то ясно, что путь по прямой AB требует совсем не минимального времени. Время будет меньше, если свет проходит несколько больший путь в первой среде,

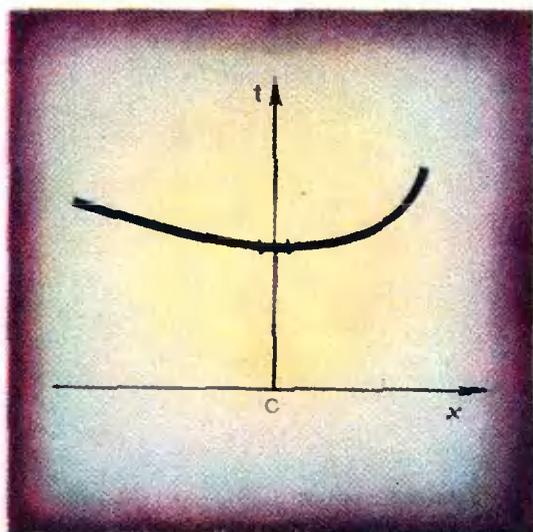


Рис. 6.

где он распространяется с большей скоростью, но зато — несколько меньший путь во второй среде.

Предположим, что свет затрачивает наименьшее время, если его путь проходит через точку C . Тогда любой другой путь левее и правее точки C займет большее время. Произвольную траекторию луча AFB можно задать с помощью переменной x — расстояния между точкой C и точкой F на поверхности раздела сред. Кривая зависимости времени распространения света от x должна иметь минимум в точке C , то есть при $x=0$ (рис. 6). Вблизи минимума время очень мало меняется с изменением x . Приближенно при очень малых x это время вообще можно считать постоянным: на очень маленьком отрезке вблизи $x=0$ кривую можно заменить маленьким отрезком прямой, параллельной оси x .

Сравним времена распространения света на путях ACB и AFB , считая, что $x=FC$ очень мало. На пути ACB свет в первой среде проходит дополнительный путь MC (FM — перпендикуляр к AC ; так как FC очень мало, то $AF=AM$). Во второй среде дополнительный путь проходит уже луч, распространяющийся по пути AFB ($CN \perp FB$). Так как время распространения света от точки A к точке B не должно меняться при

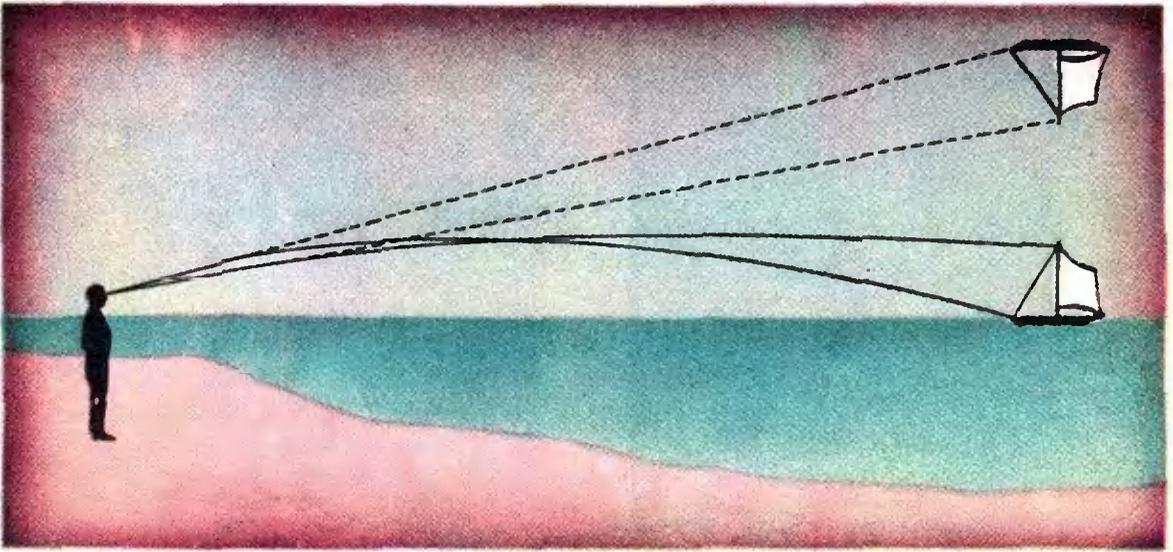


Рис. 7.

малых x , то времена прохождения светом отрезков MC и FN должны быть одинаковы. Следовательно,

$$\frac{MC}{v_1} = \frac{FN}{v_2}.$$

Угол CFM равен углу падения i , а угол FCN — углу преломления r (так как x мало, то $\angle NCB \approx 90^\circ$). Поэтому $MC = x \sin i$ и $FN = x \sin r$. Подставляя эти выражения в предыдущее уравнение, получим

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Если отношение скоростей распространения света в первой и второй средах обозначить n , то

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n,$$

где n — показатель преломления.

Теперь остается заметить, что если бы луч AC , луч CB и перпендикуляр к поверхности раздела сред в точке C не лежали в одной плоскости, то путь от точки A к точке B занимал бы большее время, чем в том случае, когда все они лежат в одной плоскости.

Итак, мы получили и третий закон геометрической оптики — закон преломления. Причем из принципа Ферма следует не только закон преломления, но и то, что показатель преломления равен отношению скоростей света в первой и второй средах!

4. *Принцип независимости световых пучков.* Этот принцип также неявно содержится в принципе Ферма по той простой причине, что свет идет по пути, соответствующему минимуму времени, независимо от того, пересекают ли данный пучок другие световые пучки или нет.

НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ

С помощью принципа Ферма можно довольно просто объяснить многие физические явления. Например, миражи. Когда вы идете в жару по асфальтированной или песчаной дороге, впереди вдруг можно увидеть лужу. Однако, подойдя поближе, вы убедитесь, что там так же сухо, как и везде вокруг. В чем же дело?

Воздух над раскаленным песком или асфальтом в знойный день сильно нагревается. Скорость распространения света в горячем воздухе больше, чем в холодном. Поэтому время прохождения света в нижних слоях меньше, чем в верхних. Из-за этого свет идет не по прямой, а искривляет свой путь, опускаясь в нижние слои горячего воздуха. Искривление же луча создает иллюзию отражения света от какой-то поверхности, и нам кажется, что свет отражается от воды.

Иногда мираж можно наблюдать и над холодной поверхностью моря (рис. 7), когда температура нижних слоев воздуха быстро растет с уда-

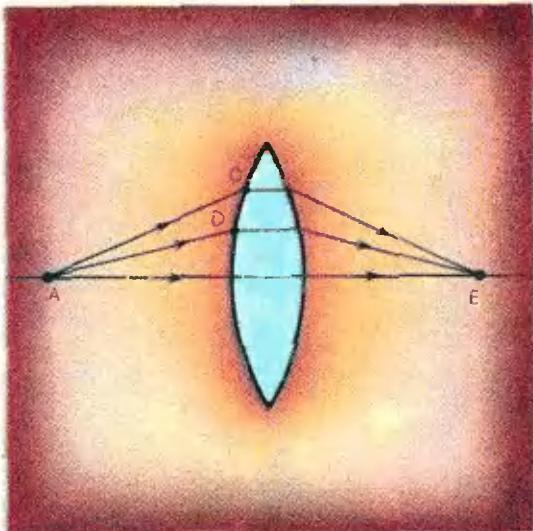


Рис. 8.

лением от морской поверхности. В этом случае лучи света искривляются, поднимаясь в верхние более теплые слои атмосферы.

Другое интересное следствие принципа Ферма — принцип обратимости траектории распространения света. Если свет прошел из точки A в точку B по траектории, обеспечивающей минимальное время прохождения, то, очевидно, и на пути из точки B в точку A (то есть, если источник будет находиться в точке B), то движение по той же траектории потребует минимального времени.

Еще один пример. Всем известны фокусирующие свойства линзы. Свет из точки A (рис. 8) идет всевозможными путями, преломляется в стекле и собирается в точке E . Противоречие? Ведь свет всегда идет по пути, требующему минимального времени! Почему же независимо от направления, в котором вышел луч, он приходит в одну и ту же точку E ? На самом деле никакого противоречия нет. Путь ADE короче пути ACE , однако расстояние, пройденное в оптически более плотной среде — стекле, в первом случае больше. Таким образом, время прохождения в обоих случаях одинаково и оба луча одновременно придут в точку E . Пути ADE и ACE для света равноценны! Если бы это было не так, мы не смогли бы построить фокусирующей системы.

Именно благодаря тому, что для лучей света, вышедших из точки A в различных направлениях и прошедших затем через линзу, одному и тому же минимальному времени распространения соответствуют траектории, идущие в точку E , линза и фокусирует падающий на нее свет.

Принцип Ферма позволяет не только объяснить работу сколь угодно сложной оптической системы, но и рассчитать ее. Впрочем, рассчитать оптическую систему мы могли бы, и пользуясь законами отражения и преломления, известными задолго до работы Ферма. Что же нового дает принцип Ферма? Во-первых, этот закон обладает большей общностью, а чем большей общностью обладает закон, тем больше его значение. Поэтому открытие принципа Ферма — это большой шаг в развитии геометрической оптики. Во-вторых, из принципа Ферма можно вывести несколько новых важных следствий. Одно из самых важных — то, что показатель преломления равен отношению скоростей распространения света в первой и второй средах.

Преломление на сферической поверхности

Рассмотрим в качестве примера расчета оптической системы вывод известной вам формулы линзы. Для этого достаточно рассмотреть преломление света на сферической поверхности. Все лучи, вышедшие из точечного источника S , после преломления на сферической поверхности не будут собираться в одной точке S_1 . Это связано с тем, что только поверхность очень сложной формы может обеспечить совершенно одинаковые времена распространения света от S к S_1 по всевозможным траекториям. Такую поверхность сделать очень трудно, и ее даже не пытаются изготовить. Сделать же сферическую поверхность несравненно проще. Хотя сферическая поверхность и не фокусирует всех лучей, но узкий пучок лучей, идущих вблизи перпендикуляра к поверхности (его называют параксимальным пучком) собирается практически в одной точке.

Пусть точечный источник света S расположен на расстоянии a от сферической поверхности радиуса R (рис. 9). Показатель преломления воздуха будем считать равным единице, а показатель преломления стеклянной сферы, равным n , то есть скорость распространения света в воздухе в n раз больше

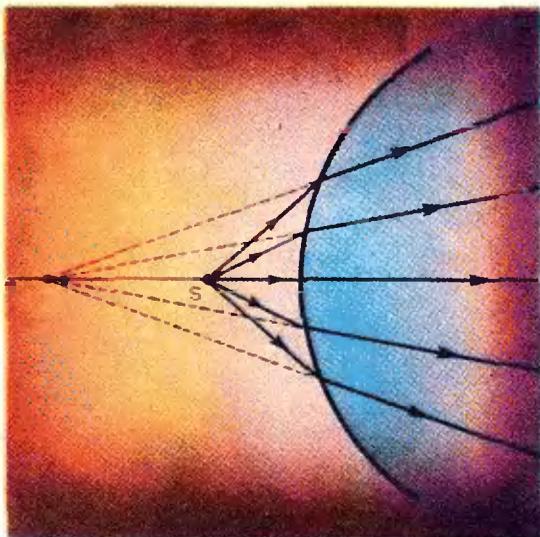


Рис. 10.

Посмотрим теперь, что будет при $a < \frac{R}{n-1}$. Из формулы (1) следует, что при этом $b < 0$. Это означает, что точка S_1 должна быть не справа от сферической поверхности, а слева от нее. Но лучи, падающие на сферическую поверхность, очевидно, не могут пересекаться перед этой поверхностью. Пересекаться перед поверхностью могут лишь их продолжения (рис. 10). В таких случаях говорят, что изображение точки мнимое. Минимуму изображению источника и соответствует отрицательный знак расстояния b .

Фокусное расстояние линзы и формула линзы.

Используя формулу (1), полученную с помощью принципа Ферма, можно рассчитать линзу, то есть найти ее фокусное расстояние f и получить формулу, связывающую расстояние a от предмета до линзы, расстояние b от линзы до изображения и фокусное расстояние линзы (иными словами, получить формулу линзы). Можно, конечно, то же самое сделать и непосредственно, применяя сам принцип Ферма ко всей линзе, однако этот путь более сложен.

Линза представляет собой прозрачное тело, ограниченное сферическими поверхностями. На рисунке 11 изображена двояковыпуклая линза с радиусами кривизны ее поверхностей, равными R_1 и R_2 . Линия, соединяющая центры O_1 и O_2 сферических поверхностей, называется главной оптической осью линзы.

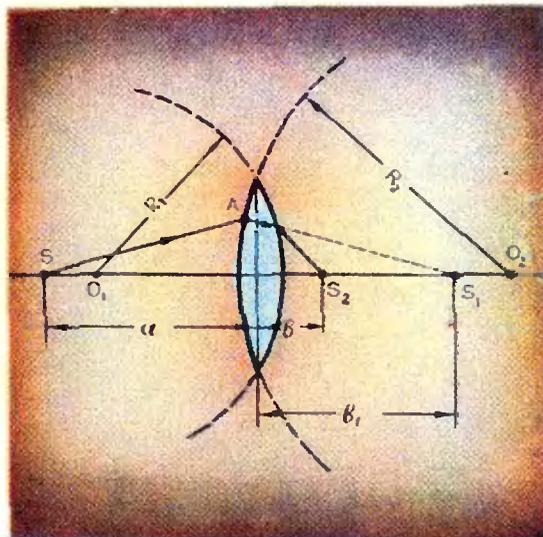


Рис. 11.

Будем считать линзу тонкой, то есть считать что расстояния a и b , а также радиусы кривизны R_1 и R_2 много больше толщины линзы. Тогда в расчетах толщиной линзы вообще можно пренебречь.

После преломления светового луча, вышедшего из точки S , он пойдет в направлении AS_1 . Если бы не было второй поверхности, то изображение точки S оказалось бы в точке S_1 на расстоянии b_1 от линзы, определяемом уравнением

$$\frac{1}{a} + \frac{n}{b_1} = \frac{n-1}{R_1}, \quad (2)$$

где n — показатель преломления материала линзы.

Но в действительности свет преломляется еще раз на второй сферической поверхности и изображение, даваемое линзой, оказывается в точке S_2 на оптической оси на расстоянии b от линзы. Используем обратимость световых лучей. Если поместить источник в точку S_2 , то после преломления на сферической поверхности радиуса R_2 лучи пойдут так, что их продолжения пересекутся в точке S_1 , давая мнимое изображение источника. Используя формулу (1) и учитывая, что $b_1 < 0$, мы можем записать уравнение

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{b_1} = \frac{n-1}{R_2}. \quad (3)$$

Складывая теперь уравнения (2) и (3), получим

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (4)$$

Эта формула, так же как и формула (1), разумеется, справедлива только для узкого пучка лучей, распространяющихся под малым углом к оптической оси.

При $a \rightarrow \infty$ расстояние b равно фокусному расстоянию линзы

$$b = f = \frac{1}{(n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}.$$

Если, наоборот, $b \rightarrow \infty$, то, как следует из принципа обратимости, $a = f$, и поэтому

$$a = f = \frac{1}{(n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}.$$

Таким образом, фокусное расстояние линзы определяется уравнением

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (5)$$

Это означает, что формулу линзы (4) можно переписать так:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. \quad (6)$$

Если одна или две выпуклые поверхности линзы заменяются вогнутыми, то в формуле (5) нужно изменить знак радиуса кривизны соответствующей поверхности. Таким образом, формула (5) позволяет найти фокусное расстояние не только собирающей, но и рассеивающей линзы.

Более подробно с принципом Ферма и его применениями можно познакомиться в книге «Фейнмановские лекции по физике», т. 3.

Задачи

1. Докажите, что если n_{12} показатель преломления для перехода из среды 1 в среду 2, а n_{13} — показатель преломления для перехода из среды 1 в среду 3, то показатель преломления из среды 2 в среду 3 равен

$$n_{23} = \frac{n_{13}}{n_{12}}.$$

2. Когда мы смотрим на заходящее Солнце, то оно на самом деле находится уже ниже линии горизонта. Объясните это явление, воспользовавшись принципом Ферма.

3. Каким должно быть зеркало, чтобы свет из точки A всегда приходил в точку B независимо от того, в каком направлении он вышел из точки A ?

4. Воспользовавшись принципом Ферма, выведите формулу сферического зеркала.

Из работы П. Ферма

Ученейший Декарт предложил закон преломления, который, как считают, согласуется с опытом, но, чтобы доказать его, он выдвинул постулат, по которому вообще необходимо было принять, что движение света в плотной среде происходит более легко и беспрепятственно, чем в редкой, что, как кажется, противоречит естественным фактам.

Итак, поскольку мы пытаемся вывести истинный закон преломления из противоположной аксиомы, а именно, что движение света происходит более легко и беспрепятственно в редкой, чем в плотной среде, мы прежде всего встречаемся с соотношением Декарта. Можно ли вообще без ложных умозаключений прийти прямо противоположным путем к истине — это пусть рассмотрят и исследуют более тонкие и строгие математики. Мы же, оставив в стороне пустые умствования, полагаем, что лучше твердо владеть самой истинной, чем вдаваться в излишние и бесполезные споры.

Наше доказательство основано на одном постулате: природа действует наиболее легкими и доступными путями. Мы полагаем, что именно так нужно выражать эту мысль, а не так, как это принято обычно говорить, что природа всегда действует по кратчайшим линиям.

Подобно тому, как Галилей, когда рассматривал движение тяжелых тел в природе, измерял отношение этого движения не столько расстоянием, сколько временем, мы также рассматриваем не кратчайшие расстояния или линии, а те, которые могут быть пройдены легче, удобнее и за более короткое время...

Максимум, минимум и теорема о средних

А. П. Савин

В математике принято называть теоремами такие утверждения, которые могут быть многократно использованы при выводе других утверждений, в частности при решении задач. Мне хочется рассказать о применении следующей замечательной теоремы:

Среднее арифметическое нескольких положительных чисел не меньше, чем их среднее геометрическое, и равенство этих средних выполняется лишь тогда, когда все заданные числа равны:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

или

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)^n \geq a_1 a_2 \dots a_n.$$

Есть много разных доказательств этого утверждения, одно из них вы можете прочитать в статье С. Т. Берколайко и С. Б. Каток*). Где же эта теорема применяется?

Конечно, зная ее, вы можете использовать в качестве среднего среднее арифметическое, если вам хочется, чтобы среднее было побольше, и среднее геометрическое, если хотите, чтобы оно было поменьше. Например, вычисляя среднюю успеваемость в классе. Это, конечно, шутка. А если серьезно?

Оказывается, с помощью этой теоремы можно находить наибольшие или наименьшие значения многих алгебраических выражений. Начнем с простейших.

*) С. Т. Берколайко, С. Б. Каток, Об одном индуктивном методе доказательства неравенств, «Квант», № 8, стр. 33.

Пример 1. *Какое наибольшее значение может иметь многочлен $2x - x^2$?*

Решение. Преобразуем многочлен так: $2x - x^2 = x(2 - x)$ и обозначим $2 - x$ через y .

По теореме

$$\begin{aligned} 2x - x^2 = xy &\leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \\ &= \left(\frac{x+2-x}{2}\right)^2 = 1. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что наибольшее значение многочлена равно 1, и оно достигается, если $x = 2 - x$, то есть при $x = 1$ (нетрудно проверить, что x и $2 - x$ не могут быть оба отрицательными; поскольку мы ищем наибольшее значение, достаточно рассматривать их лишь тогда, когда они оба положительны).

Пример 2. *Какое наименьшее значение может иметь выражение $x + \frac{1}{x}$ для положительных значений x ?*

Решение. Обозначим $\frac{1}{x}$ через y . По теореме

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} = 2\left(\frac{x+y}{2}\right) &\geq \\ &\geq 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{\frac{x}{x}} = 2. \end{aligned}$$

Итак, наименьшее значение равно 2, оно достигается при $x = \frac{1}{x} = 1$.*).

*) В школе проходят метод выделения полного квадрата, которым решаются оба эти примера:

$$1) 2x - x^2 = 1 - (1 - x)^2 \leq 1;$$

$$2) x + \frac{1}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2 \geq 2.$$

Но уже пример 3 выделением полного квадрата не решается.

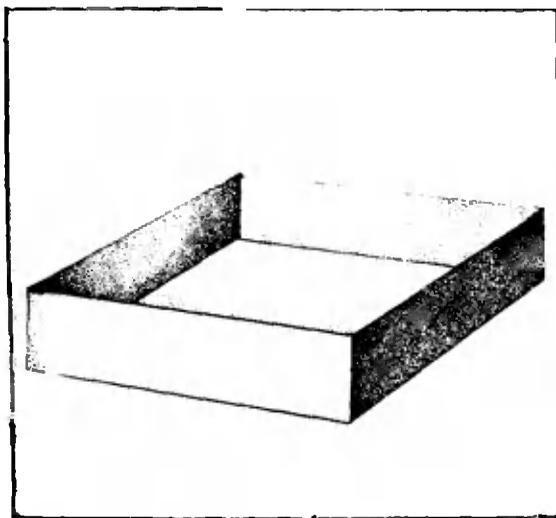


Рис. 1.

Исследуем более общий случай.
Пример 3. Найти наименьшее значение выражения $ax^n + \frac{b}{x^m}$ для положительных значений x , если a и b положительны, а m и n — натуральные числа.

Решение. Представим данное выражение следующим образом:

$$\begin{aligned} ax^n + \frac{b}{x^m} &= \\ &= \underbrace{\frac{a}{m} x^n + \frac{a}{m} x^n + \dots + \frac{a}{m} x^n}_{m \text{ раз}} + \\ &+ \underbrace{\frac{b}{nx^m} + \frac{b}{nx^m} + \dots + \frac{b}{nx^m}}_{n \text{ раз}}. \end{aligned}$$

Тогда по теореме о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$$\begin{aligned} \frac{ax^n + \frac{b}{x^m}}{n+m} &\geq \sqrt[n+m]{\frac{a^m x^{mn}}{m^m} \cdot \frac{b^n}{x^{mn} n^n}} = \\ &= \sqrt[n+m]{\frac{a^m b^n}{m^m n^n}}. \end{aligned}$$

Равенство достигается при $\frac{a}{m} x^n = \frac{b}{nx^m}$, то есть при

$$x^{m+n} = \frac{bm}{an}, \text{ или } x = \sqrt[n+m]{\frac{bm}{an}}.$$

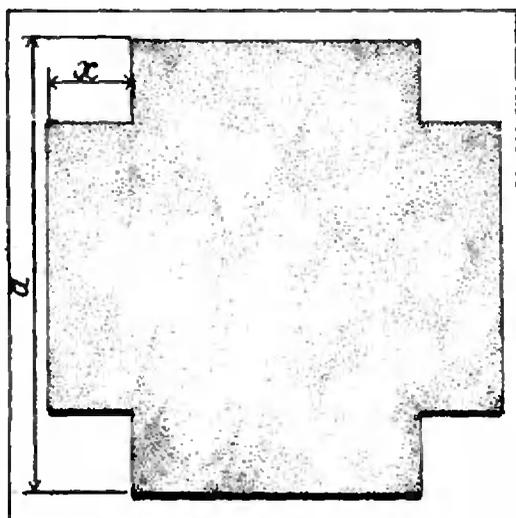


Рис. 2.

Итак, наименьшее значение данного выражения равно

$$(m+n) \sqrt[n+m]{\frac{a^m b^n}{m^m n^n}}.$$

Рассмотрим еще один пример.

Пример 4. Из квадратного листа жести со стороной a сделать ящик наибольшего возможного объема, открытый сверху, вырезая равные квадраты по углам и загибая затем жести так, чтобы образовать бока ящика (см. рис. 1).

Решение. Пусть сторона каждого из вырезаемых квадратов равна x (см. рис. 2), найдем объем V ящика: $V = (a-2x)^2 x$. Применяя теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом, получаем

$$4V = (a-2x)(a-2x)4x \leq$$

$$\leq \left(\frac{a-2x+a-2x+4x}{3} \right)^3 = \left(\frac{2a}{3} \right)^3.$$

Следовательно, $V \leq \frac{1}{4} \left(\frac{2a}{3} \right)^3 = \frac{2a^3}{27}$.

Равенство достигается при $a-2x = 4x$, то есть $x = \frac{a}{6}$.

Заметим, однако, что среднее геометрическое — не самое маленькое из средних, оно больше, чем среднее гармоническое, определяемое как количество данных чисел, деленное на сумму их обратных ве-

личин. Таким образом, имеется цепочка неравенств

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

Попробуйте последнее неравенство доказать самостоятельно.

В заключение отметим, что в высшей математике есть метод нахождения максимумов и минимумов функций дифференцированием. Однако рассмотренные неравенства оказались более удобными для подсчета на электронных вычислительных машинах наибольших и наименьших значений некоторых типов выражений. Эти методы получили название геометрического программирования.

Задачи

1. Из круговых секторов данного периметра P найти сектор наибольшей площади.

2. В данной окружности найдите наименьшую хорду, проходящую через точку A внутри окружности.

3. Найдите минимум выражения

$$2x^3 + \frac{3}{\sqrt{x}}$$

4. Докажите, что если сумма положительных переменных x_1, x_2, \dots, x_n постоянна, то произведение $x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} \dots x_n^{k_n}$, где k_1, k_2, \dots, k_n — данные целые положительные числа, имеет наибольшее значение, когда переменные пропорциональны своим показателям:

$$\frac{x_1}{k_1} = \frac{x_2}{k_2} = \frac{x_3}{k_3} = \dots = \frac{x_n}{k_n}.$$

Докажите, что то же самое верно и для рациональных положительных чисел k_1, k_2, \dots, k_n .

КАК НАЙТИ ОШИБКУ

Вы перемножили два длинных многочлена. Как проверить, не ошиблись ли вы в вычислениях?

Приведем два способа, позволяющих найти некоторые возможные ошибки (но, разумеется, не дающие полной гарантии правильности проведенных вычислений).

Способ 1. Возьмем сумму коэффициентов первого многочлена, умножим на сумму коэффициентов второго. Должна получиться сумма коэффициентов произведения. Это будет значение многочлена при $x=1$.

Приведенный способ позволяет найти ошибки в арифметике (например, если было использовано «равенство» $2 \cdot 3 = 5$), но не в алгебре. Скажем, если вы на каком-то этапе написали $2x^2 \cdot 3x^3 = 6x^4$, то этим способом ошибка не выявится.

Способ 2. Отличается от первого тем, что коэффициенты при четных степенях x берутся со знаком плюс, а при нечетных со знаком минус. В остальном этот способ совпадает с первым. Здесь мы получаем значение многочлена при $x=-1$.

Второй способ сложнее первого, зато позволяет выявить и некоторые алгебраические ошибки. При проверке «равенства» $2x^2 \cdot 3x^3 = 6x^4$ получается $2 \cdot (-3) = -6$. Это равенство абсурдно, значит, в вычислениях была допущена ошибка.

ЗАДАЧНИК

Кванта

В этом номере мы заканчиваем публикацию задач Всесоюзной математической олимпиады (в скобках после задачи указан класс для которого предлагалась задача).

M51. Доказать, что если произведение трех положительных чисел равно 1, а сумма этих чисел строго больше суммы их обратных величин, то ровно одно из этих чисел больше 1. (VIII)

M52. Пять отрезков таковы, что из любых трех можно составить треугольник. Доказать, что хотя бы один из этих треугольников остроугольный. (IX)

М. Серюв

M53. В треугольнике ABC через середину M стороны BC и центр O вписанной в этот треугольник окружности проведена прямая MO , которая пересекает высоту AN в точке E . Доказать, что отрезок AE равен радиусу вписанной окружности. (X)

M54. Два равных между собой прямоугольника расположены так, что их контуры пересекаются в восьми точках. Доказать, что площадь общей части этих прямоугольников больше половины площади каждого из них. (X)

Г. Гальперин

M55. Все натуральные числа, в десятичной записи которых не больше n цифр, разбиты на две группы. В первую группу входят все числа с нечетной суммой цифр, во вторую — с четной суммой цифр. Доказать, что если $1 \leq k < n$, то сумма k -х степеней всех чисел первой группы равна сумме k -х степеней всех чисел второй группы. (X)

F61. Кубик, скользящий без трения по гладкому горизонтальному полу, ударяется одной из своих боковых граней о вертикальную стенку. Коэффициент трения кубика о стенку равен k . Под каким углом к стенке отскочит кубик, если до столкновения с ней он двигался по направлению, составляющему со стенкой угол α ?

F62. Тонкая нерастяжимая веревка состоит из двух частей: масса единицы длины одной из частей равна ρ_1 , а другой — ρ_2 . Вербка охватывает очень легкий обруч радиуса R (масса обруча пренебрежимо мала по сравнению с массой охватывающей его веревки), концы ее прикреплены к полу (рис. 1). По участку веревки,

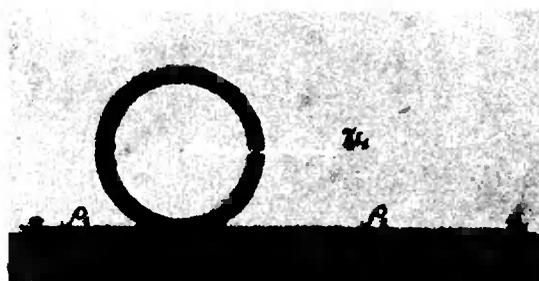


Рис. 1.

масса единицы длины которого равна ρ_1 , обруч катится со скоростью v_1 . С какой скоростью будет катиться обруч по второму участку веревки?

В. Д. Егоров

Ф63. Человек, чтобы не поскользнуться на обледеневшей горке, спускается с нее. Почему это целесообразно?

Ф64. С деревянным шариком и высоким сосудом с водой проводятся четыре опыта: в первом опыте шарик взвешивается плавающим в сосуде (рис. 2, а), во втором опыте шарик взвешивается, будучи привязанным ко дну сосуда (рис. 2, б), в третьем опыте шарик удерживается под водой с помощью тонкого стержня (рис. 2, в), и, наконец, в четвертом опыте шарик всплывает во время взвешивания (рис. 2, г). В каком случае масса гири, уравновешивающей сосуд с шариком, будет больше?

Ф65. Пластины плоского конденсатора заряжены до потенциалов $+q$ и $-q$ относительно земли. Емкость конденсатора, образованного пластинами, равна C , а емкости конденсаторов, которые образуют каждая из пластин с землей — C_1 . Во сколько раз изменится напряженность электрического поля между пластинами, если одну из них заземлить?

Л. Г. Асламазов

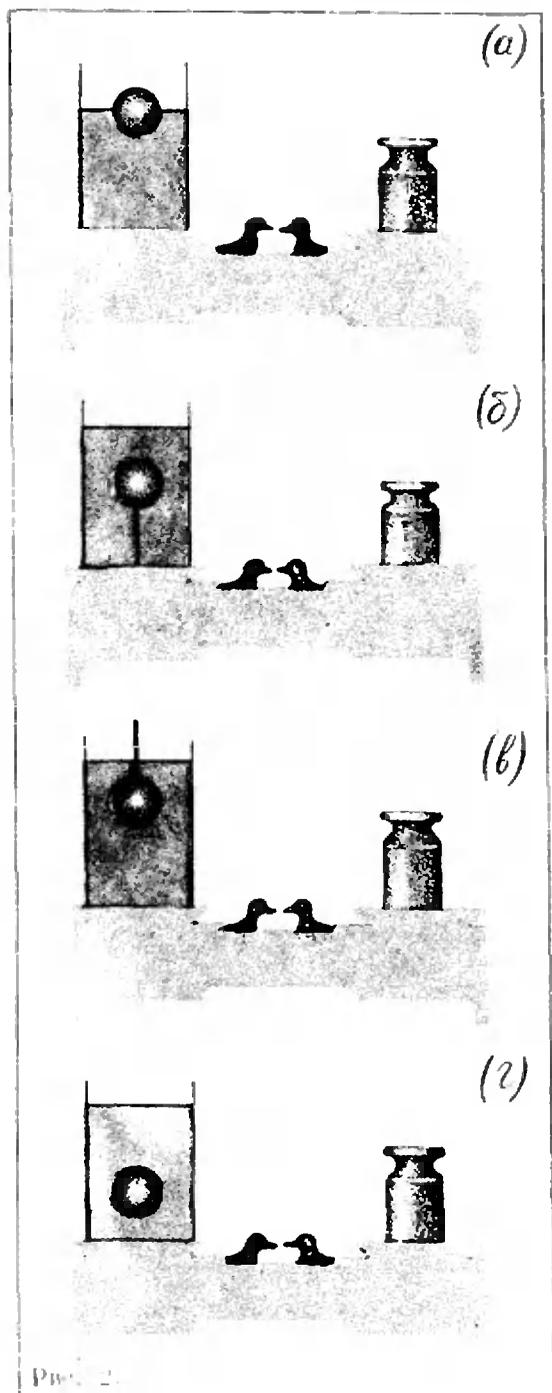


Рис. 2.

РЕШЕНИЯ

М11. На 44 деревьях, расположенных по окружности, сидели 44 веселых чижа (на каждом дереве по чижу). Время от времени два чижа одновременно перелетают на соседние деревья в противоположных направлениях (один — по часовой стрелке, другой — против). Докажите, что чижи никогда не соберутся на одном дереве. А если чижей и деревьев n ?

Решение. Решаем задачу сразу для n чижей и n деревьев. Занумеруем деревья по порядку (скажем, по часовой стрелке) числами от 1 до n (рис. 1). Обозначим количество чижей на k -м дереве в какой-нибудь момент времени через a_k (на первом дереве — a_1 , на втором — a_2 и т. д.). Рассмотрим выражение

$$S = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \dots \\ \dots + k a_k + \dots + n a_n.$$

Покажем, что когда два чижа перелетают на соседние деревья в противоположных направлениях, то S либо не меняется, либо меняется на n .

Действительно, пусть какой-то один чиж перелетает с k -го дерева на следующее по часовой стрелке. Тогда в сумме S меняются два слагаемых. Если $k < n$, то меняются k -е и $(k+1)$ -е слагаемые, и их сумма становится равной

$$k(a_k - 1) + (k+1)(a_{k+1} + 1) = k a_k + (k+1)a_{k+1} + 1,$$

то есть увеличивается на 1. Если $k = n$, то меняются n -е и первое слагаемые, а их сумма

$$n(a_n - 1) + 1(a_1 + 1) = n a_n + 1 \cdot a_1 - (n - 1)$$

уменьшается на $n-1$. Наоборот, если чиж перелетает на соседнее дерево против часовой стрелки, то сумма или уменьшается на 1, или увеличивается на $n-1$. Поэтому, когда два чижа одновременно перелетают на соседние деревья (один по часовой стрелке, другой — против), то сумма S или не меняется вовсе, или меняется на n .

В начальный момент времени на каждом дереве сидело по одному чижу,

$$S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + \dots + n \cdot 1 = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

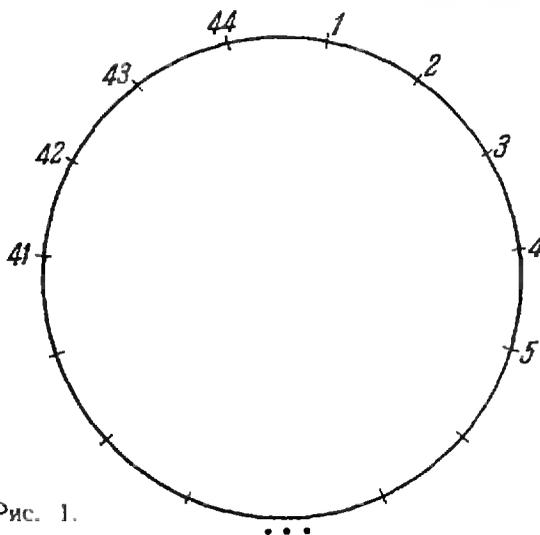


Рис. 1.

Таким образом, после любого числа перелетов сумма будет равна $\frac{n(n+1)}{2} + nr$, где r — некоторое целое число. Если бы все чижи собрались на каком-то одном q -м дереве, то S было бы равно nq , то есть выполнялось бы равенство $\frac{n(n+1)}{2} + nr = nq$, откуда $n+1+2r = 2q$; $n = 2(q-r) - 1$.

Таким образом, если n четно, например, $n = 44$, то чижи не смогут собраться на одном дереве. Покажем, что при нечетных n это может случиться*).

Рассмотрим исходную ситуацию, когда на каждом дереве сидело по одному чижу. «Прикажем» одному чижу сидеть на месте и назовем его «неподвижным». Разобьем оставшихся чижей на пары сидящих на одинаковом расстоянии в r перелетов от неподвижного в ту и другую сторону ($r = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$).

Ясно, что каждая такая пара может за r перелетов попасть на то дерево, где сидит неподвижный чиж.

Аналогичное решение прислали Д. Григорьев из г. Ленинграда, В. Лузгин из г. Георгиевска Ставропольского края и другие читатели.

Приведенное решение типично для задач, в которых требуется выяснить, можно ли в результате ряда каких-то преобразований получить определенный результат. В данном случае преобразование — это перелет двух чижей в противоположных направлениях, и мы хотим выяснить, могут ли в результате все чижи собраться на одном дереве. Чтобы доказать, что *можно*, достаточно привести пример, как это сделать. Доказать, что ни при каких преобразованиях *нельзя* получить требуемый результат, часто бывает удобно так: найти какую-то величину, которая сохраняется при всех рассматриваемых преобразованиях и для которой начальное значение отличается от требуемого в конечном состоянии (такая величина называется *инвариантом* данных преобразований). В нашей задаче такой величиной является остаток от деления суммы S на n .

Тем, кто решил эту задачу, будет интересно разобраться в следующем более общем вопросе. Пусть даны два разных расположения a чижей на n деревьях. Назовем их эквивалентными, если из одного можно получить другое (при перелетах чижей, как указано в условии задачи). Как узнать, будут ли эти расположения эквивалентны? Еще один вопрос. Ясно, что множество всех возможных расположений a чижей на n деревьях распадается на несколько классов эквивалентности. Сколько будет таких классов?

М12. Какие четырехугольники можно разрезать прямой линией на два подобных между собой четырехугольника?

Решение. Докажем, что этим свойством обладают только трапеции и параллелограммы.

Предположим, что четырехугольник $ABCD$ разрезан прямой на два подобных четырехугольника. Ясно, что эта прямая пересекает две противоположные стороны.

*) Необходимость этого этапа доказательства, как видно из писем, ясна далеко не всем нашим читателям. Остановимся на этом поподробнее. Что мы пока доказали? Только то, что если чижам удалось собраться на одном дереве, то чижей было непременно нечетное число (это необходимое условие). Теперь надо доказать, что это условие и достаточное, то есть, что если чижей нечетное число, то они смогут собраться на одном дереве (из того, что мы пока доказали, достаточность условия никак не следует).

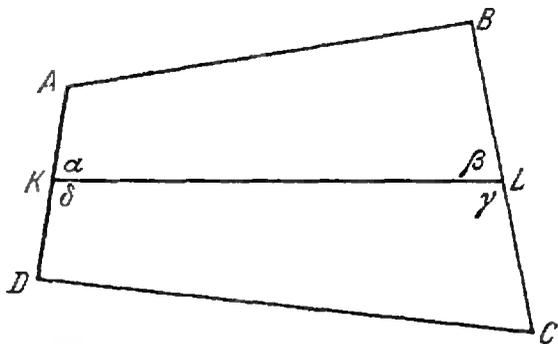


Рис. 2.

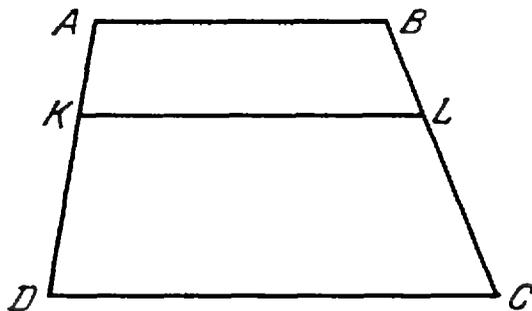


Рис. 3.

ложные стороны четырехугольника. Пусть она пересекает сторону AD в точке K и сторону BC в точке L (рис. 2). В дальнейшем мы несколько раз используем такое очевидное соображение: если про два четырехугольника $EFGH$ и $PQRS$ известно, что они подобны и что вершине E соответствует вершина P , то $\angle E = \angle P$, $\angle G = \angle R$ и, кроме того, либо $\angle F = \angle Q$ и $\angle H = \angle S$, либо $\angle F = \angle S$ и $\angle Q = \angle H$.

Итак, предположим, что четырехугольники $ABLK$ и $CDKL$ подобны (нам понадобится только то, что их углы соответственно равны), и докажем, что у четырехугольника $ABCD$ какие-то две стороны параллельны. Углу α четырехугольника $ABLK$ ($\angle \alpha = \angle AKL$) может соответствовать один из углов четырехугольника $KLCD$.

- 1) $\angle \alpha$ соответствует $\angle D$. Тогда $\angle \alpha = \angle D$, $\angle \gamma = \angle B$, $AB \parallel KL \parallel CD$.
- 2) $\angle \alpha$ соответствует $\angle C$. Тогда $\angle \alpha = \angle C$, $\angle \delta = \angle B$; $\angle B + \angle C = \angle \alpha + \angle \delta = 180^\circ$, $AB \parallel CD$; при этом $\angle A = \angle \gamma$, $\angle D = \angle \beta$ (случай $\angle \beta = \angle \gamma$, $\angle A = \angle D$ отдельно рассматривать не нужно, поскольку при этом $\angle \beta + \angle \gamma = 180^\circ$ и $\angle A = \angle D = \angle \beta = \angle \gamma = 90^\circ$).
- 3) $\angle \alpha$ соответствует $\angle \gamma$. Тогда $\angle B = \angle D$, $AD \parallel BC$ и $AB \parallel DC$, то есть $ABCD$ — параллелограмм.
- 4) $\angle \alpha$ соответствует $\angle \delta$. Тогда $\angle \alpha = \angle \delta = 90^\circ$, $\angle B = \angle C$ и либо $\angle \beta = \angle \gamma = 90^\circ$, $AD \parallel BC$ (равнобедренная трапеция или прямоугольник), либо $\angle \beta = \angle D$, $\angle \gamma = \angle A$, $\angle A + \angle D = 180^\circ$, $AB \parallel CD$, и с точностью до обозначений этот случай сводится к случаю 2).

Мы доказали, что $ABCD$ — параллелограмм или трапеция. Легко заметить, что, наоборот, любой параллелограмм или любую трапецию можно разбить на два подобных четырехугольника. Параллелограмм любой прямой, проходящей через центр, разбивается на два равных четырехугольника (разумеется, если только прямая не идет по диагонали). Трапецию с основаниями $a < b$ разбивает на две подобных прямая, параллельная основаниям и делящая высоту в отношении \sqrt{b}/\sqrt{a} ; нужно, конечно, проверить, что соответственные стороны при этом пропорциональны (рис. 3): $AK/KD = BL/LC = AB/KL =$

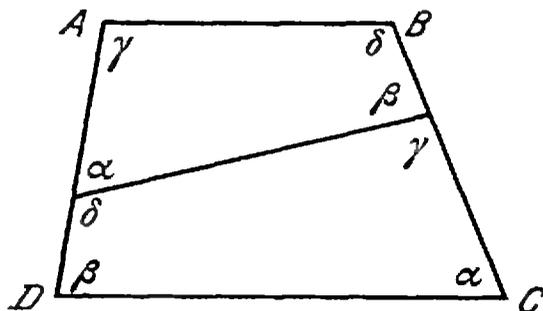


Рис. 4.

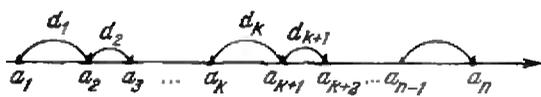


Рис. 5.

$KL/DC = \sqrt{b}/\sqrt{a}$. Попробуйте выяснить, когда можно разбить трапецию на два подобных четырехугольника более хитрым способом, соответствующим случаю 2), — так, как показано на рисунке 4 (ответ: тогда и только тогда, когда $\sqrt{a}/\sqrt{b} < \sin \alpha / \sin \beta$, где $\alpha < \beta$ — углы при большем основании трапеции b).

М13. Докажите, что если разность между наибольшим и наименьшим из n вещественных чисел a_1, a_2, \dots, a_n равна d , а сумма модулей всех $\frac{n(n-1)}{2}$ попарных разностей этих чисел

$$\sum_{i < j} |a_i - a_j| \text{ равна } s, \text{ то } (n-1)d \leq s \leq \frac{n^2}{4}d.$$

Решение: Нанесем точки a_1, a_2, \dots, a_n на числовую ось. Тогда d — расстояние между крайними из этих точек, самой левой и самой правой, а $s = \sum_{i < j} |a_i - a_j|$ — сумма всех попарных расстояний между этими точками. Можно, очевидно, считать, что точки обозначены через a_1, a_2, \dots, a_n в порядке возрастания: $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ (рис. 5). Обозначим расстояние между соседними точками a_k и a_{k+1} через $d_k (k = 1, 2, \dots, n-1)$. Очевидно,

$$d = d_1 + d_2 + \dots + d_{n-1}.$$

Выразим теперь s через величины d_k . Для этого заменим в сумме s длину каждого отрезка $|a_i - a_j|$ суммой тех d_k , из которых он состоит: $|a_i - a_j| = d_i + d_{i+1} + \dots + d_{j-1}$. Ясно, что d_k входит в те отрезки, у которых левый конец лежит в одной из точек a_1, \dots, a_k , а правый — в одной из точек a_{k+1}, \dots, a_n , то есть в общей сложности d_k входит в сумму $k(n-k)$ раз. Поэтому

$$s = \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)d_k.$$

Теперь доказываемые утверждения следуют из двух совсем простых неравенств: для всех $k = 1, \dots, n-1$

$$1) \quad k(n-k) \geq n-1 \Leftrightarrow kn - k^2 - n + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (k-1)(n-k-1) \geq 0;$$

$$2) \quad k(n-k) \leq \frac{n^2}{4} \Leftrightarrow n^2 - 4nk + 4k^2 \geq 0 \Leftrightarrow (n-2k)^2 \geq 0.$$

Пользуясь этими оценками, получаем

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)d_k \geq \sum_{k=1}^{n-1} (n-1)d_k = (n-1)d,$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)d_k \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n^2}{4}d_k = \frac{n^2}{4}d.$$

Правильные решения этой задачи прислали восьмиклассник М. Прегер из г. Томска, десятиклассник И. Протасов из г. Киева, С. Поздняков из г. Вильнюса и другие читатели.

Интересно выяснить еще, являются ли указанные в условии задачи оценки точными, нельзя ли, скажем, вместо $n-1$ поставить в левом неравенстве большее число? Для того чтобы убедиться в противном, достаточно привести пример такого случая, когда неравенство превращается в равенство (причем в обоих его частях стоят положительные числа). Такой пример легко придумать, разобравшись в нашем доказательстве: нужно расположить

точки a_1, a_2, \dots, a_n так, чтобы все d_{k_1} , кроме первого — d_1 , равнялись нулю, то есть взять $a_1 < a_2 = a_3 = \dots = a_n$. Тогда $s = (n-1) d_1 = (n-1) d$.

Что касается второго неравенства $s \leq \frac{n^2}{4} d$, то при четном $n = 2m$ в нем тоже может достигаться равенство (достаточно взять $a_1 = a_2 = \dots = a_m < a_{m+1} = \dots = a_{2m}$), а при нечетном $n = 2m+1$ его можно несколько уточнить: нетрудно сообразить, что при нечетном n наибольшее из чисел $k(n-k)$ равно $\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{n^2-1}{4}$ (докажите это строго!); пользуясь этим вместо неравенства 2), можно так же, как и выше, доказать более сильное неравенство $s < \frac{n^2-1}{4} d$. Равенство в нем достигается, когда $a_1 = \dots = a_m < a_{m+1} = \dots = a_{2m+1}$.

М14. У выпуклого белого многогранника некоторые грани покрашены черной краской так, что никакие две черные грани не имеют общего ребра. Докажите, что если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- а) черных граней больше половины;
- б) площадь черных граней составляет больше половины площади поверхности многогранника, то в этот многогранник нельзя вписать шар.

Решение. Начнем с задачи б). Предположим, что в многогранник можно вписать шар. Отметим на каждой грани точку касания с шаром и проведем из нее отрезки к вершинам этой грани. Тогда грань разобьется на треугольники. К каждому ребру многогранника примыкает два таких треугольника, лежащих в смежных гранях. Они равны по трем сторонам (поскольку две касательные, проведенные из одной точки к шару, равны). По условию к каждому ребру примыкает не более одной черной грани. Таким образом, к каждому черному треугольнику примыкает равный ему белый*). Следовательно, сумма площадей черных граней не больше суммы площадей белых граней. Задача б) решена.

Точно так же решается и задача а), о которой уже шла речь в статье «Невписываемые многогранники» Е. М. Андреева (см. «Квант» № 8, задача 9 в конце статьи). В этой статье разобран целый ряд вопросов, которые возникают в связи с нашей задачей: бывают ли многогранники, удовлетворяющие подобным условиям, какие еще существуют «признаки неописываемости» и т. п. Правда, как можно судить по названию статьи, в ней речь идет о том, можно ли тот или иной многогранник вписать в сферу, а в нашей задаче — можно ли его описать около сферы. Оказывается, однако, что обе теории совершенно аналогичны.

Более точно, каждому выпуклому вписанному многограннику можно поставить в соответствие описанный так, что при этом каждой вершине, ребру, грани вписанного многогранника сопоставляется соответственно грань, ребро, вершина описанного. Делается это так. В каждой вершине многогранника, вписанного в сферу, проводится касательная плоскость. Заметьте, что если вершины принадлежали одной грани, то соответствующие им плоскости будут пересекаться в одной точке — вершине нового многогранника, соответствующей грани исходного вписанного. Если две вершины вписанного многогранника соединены ребром, то соответствующие касательные плоскости будут пересекаться по ребру описанного многогранника. Тем самым мы построили отображение множества вписанных многогранников в множество описанных; легко видеть, что это отображение на все множество описанных многогранников и что у него есть обратное отображение

*) Но, конечно, к белому треугольнику тоже может примыкать белый — важно лишь, что разным черным треугольникам соответствуют разные белые.

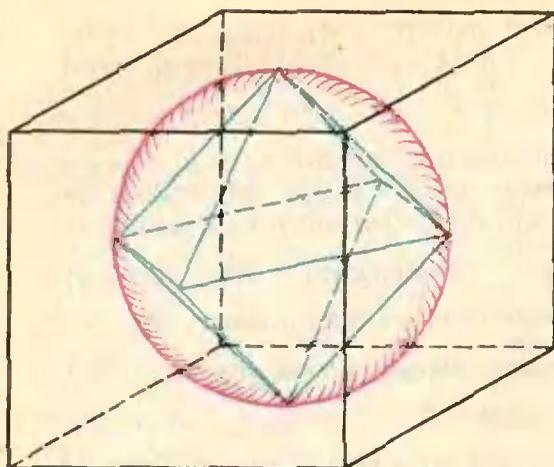


Рис. 6.

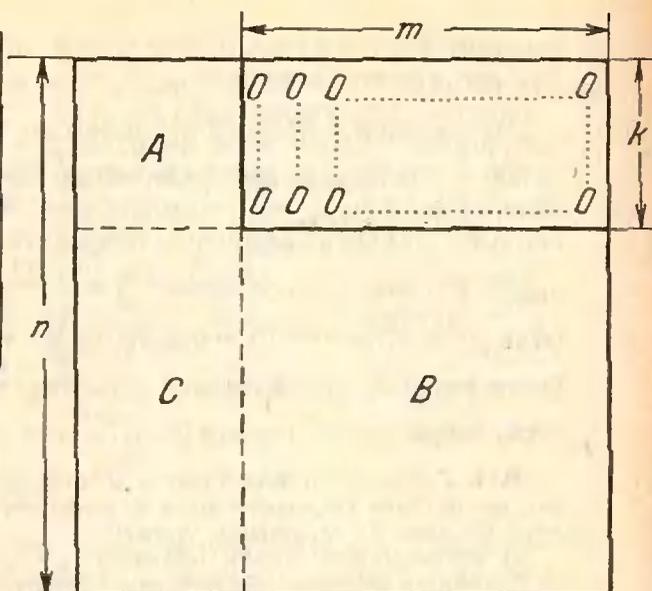


Рис. 7.

(мы пользуемся терминологией, о которой говорилось в статье А. Н. Колмогорова «Что такое функция» в «Кванте» № 1), — другими словами, что каждому описанному многограннику можно сопоставить вписанный, из которого этот описанный получится указанным выше способом. Достаточно в каждой грани отметить точку касания — вершину будущего вписанного многогранника — и доказать, что все точки касания граней, имеющих общую вершину, лежат в одной плоскости (рис. 6). Оба эти отображения, связывающие множество выпуклых вписанных и описанных многогранников, составляют прекрасный пример ситуации, которую математики обычно называют словом «двойственность» (это слово мельком упоминалось в статье Е. М. Андреева). Подумайте, какие описанные многогранники будут двойственны таким вписанным: куб, правильная n -угольная призма, правильная n -угольная пирамида, правильная усеченная пирамида, додекаэдр.

Мы очень рекомендуем читателям вернуться к статье «Невписываемые многогранники» и, пользуясь двойственностью, о которой мы сейчас говорили, перенести ее содержание на «неописываемые» многогранники.

М15. Квадратная таблица $n \times n$ заполнена неотрицательными числами так, что сумма чисел в каждой строке и сумма чисел в каждом столбце равна 1. Докажите, что из таблицы можно выбрать n положительных чисел, никакие два из которых не стоят ни в одном столбце, ни в одной строке.

Решение. Заметим сначала, что если мы будем переставлять между собой строки (или столбцы) нашей таблицы, то это не повлияет ни на условие задачи, ни на то, что нам требуется доказать. Предположим, что перестановками строк и столбцов мы собрали в правый верхний угол размером $m \times k$ одни нули (рис. 7). Докажем, что $m+k$ всегда не больше n . Подсчитаем сумму чисел, стоящих в куске, обозначенном на рисунке буквой С. Ясно, что сумма чисел, стоящих в куске В, равна m (m столбцов, в каждом из которых сумма равна 1). Аналогично сумма чисел в куске А равна k (k строк). Так как общая сумма всех чисел в таблице равна n , то на долю куска С остается $n-m-k$. Это число неотрицательное, так как по условию в таблице все числа неотрицательны. Итак, $n-m-k \geq 0$, то есть $m+k \leq n$, что мы и утврждали.

Теперь мы можем переформулировать задачу так: в таблице $n \times n$ стоят числа, и известно, что никакой перестановкой строк и столбцов нельзя вы-

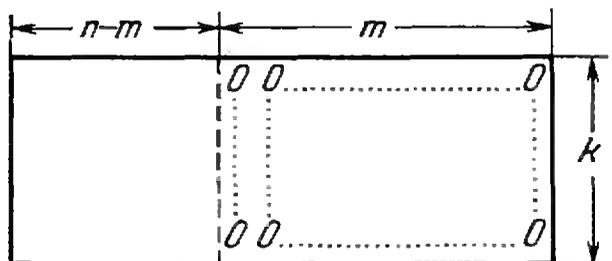


Рис. 8.

	Аня	Бэла	Вера	Галя	Даша	Ева
Илья	0	*	*	0	*	0
Коля	*	0	0	*	0	0
Лева	0	0	*	0	*	0
Марк	0	0	0	0	*	0
Никита	0	0	0	0	*	0
Ося	0	0	0	0	*	0

Таблица знакомств.

делить в ней угол из нулей размером $m \times k$ такой, что $m + k > n$; доказать, что можно выбрать n отличных от нуля чисел, никакие два из которых не стоят ни в одном столбце, ни в одной строке. (Для нас теперь не важно, что числа положительные и что суммы по строкам и столбцам равны 1. Эти условия мы уже использовали. В дальнейшем мы различаем только «нули» и «не нули».)

Если вы читали статью М. И. Башмакова «Паросочетания и транспортные сети» в № 4 нашего журнала, то вы легко сообразите, что наша новая формулировка задачи есть просто запись на языке «таблиц» теоремы о сватовстве. Действительно, запишем в строки таблицы $n \times n$ юношей, а в столбцы — девушек (пусть их тех и других по n). На пересечении s -й строки и t -го столбца поставим «не-нуль» (звездочку), если s -й юноша знаком с t -й девушкой, и «нуль», если незнаком. Получим таблицу (как говорят математики, «матрицу») знакомств.

Возьмем произвольную группу из k юношей. Поставим соответствующие им строки первыми. Если с какой-то девушкой ни один из этих юношей не знаком, то в соответствующем столбце в первых k строках стоят нули. Если все столбцы, соответствующие всем таким девушкам, мы переставим последними (пусть их число равно m), то мы получим угол из нулей размером $m \times k$ (рис. 8). В каждом из первых $m - n$ столбцов есть хотя бы один «не-нуль» в первых строках, так как соответствующая девушка имеет друзей из числа выбранных нами k юношей. Так как $m + k \leq n$, то $m - n \geq k$, то есть таких девушек не меньше k . Мы видим, что данные задачи полностью совпадают с данными «теоремы о сватовстве». Выбор n невест для всех юношей — это и есть выбор n «не-нулей», стоящих в разных строках и столбцах.

Теперь вы можете прочесть простое (по индукции) доказательство «теоремы о сватовстве», которое и дает полное решение задачи. Конечно, сводить задачу к этой теореме вовсе не обязательно. Индуктивное рассуждение можно проводить и сразу — переставляя строки и столбцы (так поступил, например, читатель Д. Григорьев из г. Ленинграда). При этом получается новое доказательство «теоремы о сватовстве»*).

*) Но, разумеется, просто вычеркнув последний столбец и последнюю строку в таблице, удовлетворяющей условию задачи, мы можем получить таблицу, уже не удовлетворяющую этому условию, — подобным образом «грубо» проводить индукцию нельзя.

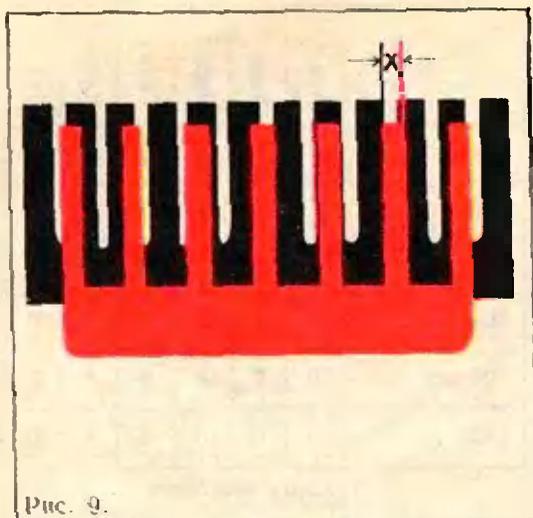


Рис. 9.



Рис. 10.

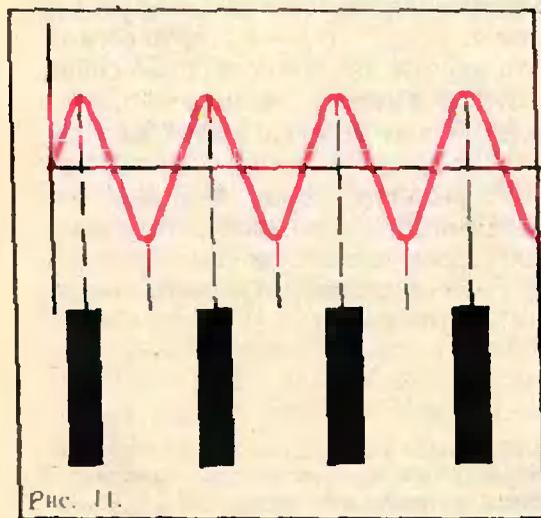


Рис. 11.

Ф18. Если смотреть на свет сквозь две гребенки с разной частотой зубьев, наложенные друг на друга, то светлые участки будут чередоваться с темными. С какой скоростью будут перемещаться эти участки, если одну из гребенок двигать относительно второй со скоростью 1 см/сек ? У неподвижной гребенки на 1 сантиметр приходится 5 зубьев, у движущейся — 6 .

Решение. Совместим какие-нибудь зубья гребенок (рис. 9). Тогда следующие зубья будут находиться на расстоянии $\frac{1}{5} \text{ см} - \frac{1}{6} \text{ см} = \frac{1}{30} \text{ см}$ друг от друга. Сместим теперь гребенку на это расстояние. Тогда картина светлых и темных полос сместится на $\frac{1}{5} \text{ см}$ — расстояние между зубьями неподвижной гребенки. Если гребенку сместить на 1 см , то картина светлых и темных полос сместится на $\frac{1}{5} \text{ см} \cdot 30 = 6 \text{ см}$.

Это означает, что при движении гребенки с большей частотой зубьев со скоростью 1 см/сек светлые и темные полосы перемещаются со скоростью $v = 6 \text{ см/сек}$ в ту же сторону, в которую смещается подвижная гребенка.

Картина чередующихся светлых и темных полос, движущихся с постоянной скоростью, — очень удобная модель перемещения волн любой физической природы. Если смотреть на движущиеся полосы через щель (рис. 10), то щель будет периодически закрываться то желтыми, то черными полосами:



Рис. 12.



Рис. 13.

мы увидим колебания. Черному и желтому цвету полос соответствуют две противоположные фазы колебаний (рис. 11). Длина волны равна суммарной ширине светлой и темной полос. Подсчитав число черных или желтых полос, проходящих мимо щели за одну секунду, можно определить частоту колебаний и их период.

Эта простая модель позволяет разобраться во многих физических явлениях и провести много интересных опытов.

С помощью черно-желтых полос можно моделировать не только линейные волны, но и любые другие, например кольцевые (рис. 12). Движение таких кольцевых волн можно показать, нарисовав черно-желтую Архимедову спираль (рис. 13). При вращении спирали через щель будет видно, как волны бегут к центру или от центра в зависимости от направления вращения спирали.

Если полосы не перемещаются, мы получим картину неподвижных волн. Такие картинки называют растрами. Неподвижные волны-растры не нужно путать со стоячими волнами. Модель стоячих волн — это чередующиеся черно-желтые полосы, периодически меняющие свою окраску на противоположную.

Когда несколько синусоидальных волн накладываются друг на друга, возникают новые, уже не синусоидальные волны. Их называют групповыми волнами. Групповые волны отличаются от складываемых синусоидальных волн и длиной, и скоростью распространения, и другими параметрами. Простейшие групповые волны — волны биений. Они получаются, когда складываются две волны с неодинаковыми, но близкими друг к другу длинами.

Для того чтобы построить модель групповых волн, нужно наложить друг на друга две системы полос. Если эти системы одинаковы, их можно наложить так, что полосы одной системы совпадут с полосами другой. Такие волны называются когерентными. Если системы полос немного отличаются друг от друга расстоянием между полосами, то мы получим картину биений (рис. 14). Подобная картина получалась у вас в опытах с расческами.

Нетрудно найти длину волны биений, порождаемых волнами с длинами λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$). Если две черные полосы совпадают, то ближайшими совпадающими красными полосами будут n -я линия системы полос с длиной волны λ_1 и $(n+1)$ -я линия системы полос с длиной волны λ_2 . Это означает, что длина волны биений равна

$$L = n\lambda_1 = (n+1)\lambda_2.$$



Рис. 14.

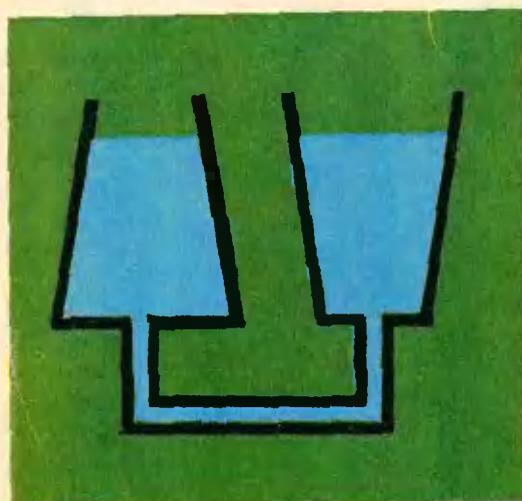


Рис. 15.

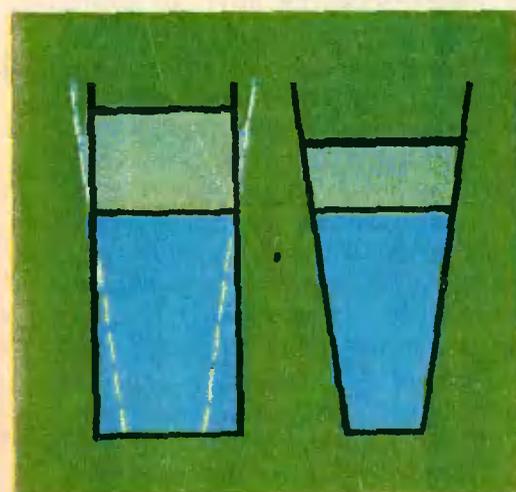


Рис. 16.

Из равенства $n\lambda_1 = (n+1)\lambda_2$ найдем,

$$\text{что } n = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

$$\text{Поэтому } L = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Чем меньше отличаются друг от друга накладываемые волны, тем больше длина групповых волн. Это используется при измерении длины волны высокочастотных колебаний. Для измерения подбирают длину второй волны так, чтобы при сложении волн получались биения с большой длиной волны. Такие биения легко увидеть и измерить с помощью осциллографа. Зная длину волны биений и длину волны одних колебаний, нетрудно определить длину волны исследуемых колебаний.

Волны биения, которые показаны на рисунке 14, — неподвижные волны. Если одну или обе системы волн привести в движение, то будут перемещаться и групповые волны. Скорость v групповых волн можно найти так же, как мы находили скорость движения групповых волн, получающихся при наложении расчесок. Она равна

$$v = \frac{\lambda_1 v_2 - \lambda_2 v_1}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

где v_1 — скорость волн с длиной λ_1 , а v_2 — скорость волн с длиной λ_2 .

Эта формула является обобщением формулы, выведенной нами для расчесок.

Таким способом эту задачу решили Вячеслав Милешин (Бельцы, Молдавия) и Александр Карпенко (Лисичанск, Ворошиловградская обл.). Похожим способом решили ее Люцман Петрасик (Лида, Гродненская обл.) и Сергей Юшманов (Вильяны, Латвия). Некоторые из читателей, правильно решая задачу, неверно подсчитали расстояние между зубьями расчесок. Если расческа содержит n зубьев на 1 см, то на 1 см приходится еще и n промежутков между зубьями (а не $n-1$). Из двух крайних зубьев на одном сантиметре первый принадлежит этому сантиметру, а последний — следующему.

Ф19. Форма сообщающихся сосудов показана на рисунке 15. Куда потечет вода по трубке, соединяющей сосуды, если нагреть воду в одном из сосудов?

Решение. Независимо от того, какой сосуд нагревается, вода поте-

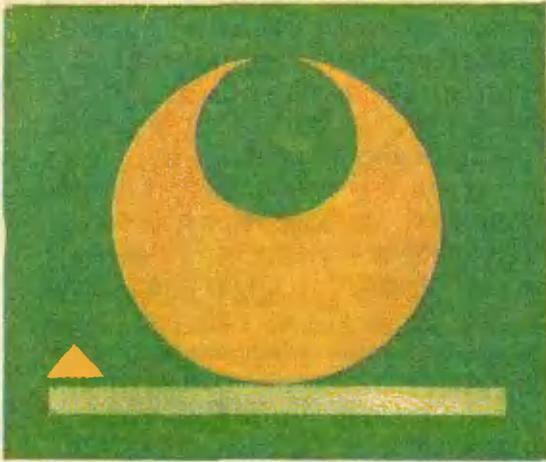


Рис. 17.

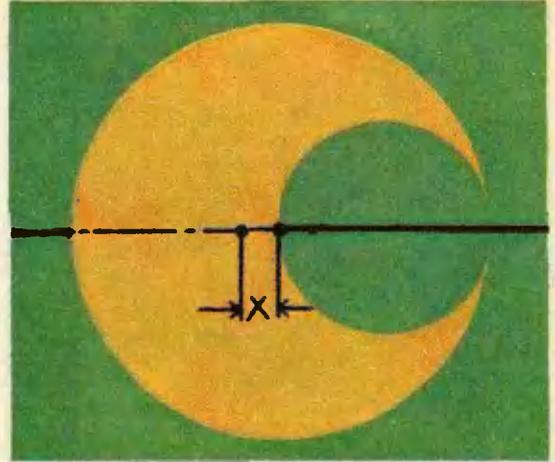


Рис. 18.

чет направо. Пусть нагревается жидкость в правом сосуде. Тогда она расширится и займет больший объем. Если бы сосуд был цилиндрическим (рис. 16), то давление жидкости на дно не изменилось бы: уменьшение плотности воды в точности скомпенсировалось бы увеличением высоты столба жидкости. Это следует из того, что сила давления на дно цилиндрического сосуда, с одной стороны, равна силе тяжести, действующей на находящуюся в сосуде воду, а с другой стороны, равна давлению жидкости на дно, умноженному на площадь дна: $P = pS$. Так как ни сила тяжести, ни площадь дна при нагревании жидкости не меняются, то не меняется и давление на дно цилиндрического сосуда.

В коническом расширяющемся сосуде при таком же уменьшении плотности жидкости увеличение высоты столба меньше, чем в цилиндрическом сосуде. Это происходит по двум причинам: во-первых, расширяется меньшее количество жидкости, а значит, меньше изменение ее объема; во-вторых, при расширении вода должна заполнить объем, заштрихованный на рисунке. Поэтому давление на дно сосуда при нагревании жидкости уменьшается. Так как при равновесии жидкости в трубке, соединяющей сосуда, давление у ее конца в левом сосуде должно быть равно давлению у ее конца в правом сосуде, то жидкость будет перетекать из левого сосуда в правый.

Рассматривая аналогично нагревание и расширение жидкости в левом сосуде, мы найдем, что при нагревании левого сосуда давление на его дно увеличивается. Это означает, что и в этом случае жидкость будет перетекать из левого сосуда в правый.

Правильно решили эту задачу Владимир Метлицкий (Ангарск Иркутской обл.) и Александр Карпенко. Ученик 8 класса Ефим Каплин (Винница, Украина) обратил внимание на то, что в нагретом сосуде вода испаряется интенсивнее, чем в том, температура которого не меняется. Это должно сказаться на перетекании воды. Однако, если температуры сосудов невысоки, то этим эффектом можно пренебречь.

Ф20. Параллельно оси цилиндра радиуса R на расстоянии $\frac{R}{2}$ от его центра просверлено круглое отверстие. Радиус отверстия равен $\frac{R}{2}$. Цилиндр лежит на дощечке, которую медленно поднимают за один конец (рис. 17). Найти предельный угол наклона дощечки, при котором цилиндр еще будет находиться в равновесии. Коэффициент трения цилиндра о дощечку равен 0,2.

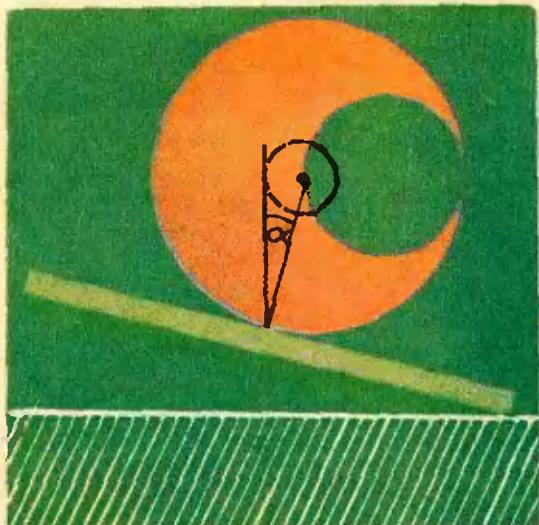


Рис. 19.

Решение. Найдем сначала положение центра тяжести цилиндра с отверстием. Ясно, что он должен лежать на прямой, проходящей через центры цилиндра и отверстия. Центр тяжести целого цилиндра лежит на его оси, а центр тяжести цилиндра, заполняющего отверстие, — на оси отверстия. Рассматривая целый цилиндр как два тела — цилиндр с отверстием и «вставка», заполняющая отверстие, и обозначив через x расстояние от оси цилиндра до центра тяжести цилиндра с отверстием (рис. 18), мы можем записать, что

$$x \cdot \left(Mg - Mg \frac{\pi \left(\frac{R}{2} \right)^2}{\pi R^2} \right) = \frac{R}{2} Mg \frac{\pi \left(\frac{R}{2} \right)^2}{\pi R^2}$$

(M — масса целого цилиндра, $M \frac{\pi \left(\frac{R}{2} \right)^2}{\pi R^2}$ — масса «вставки»). Отсюда

$\frac{3}{4} x = \frac{1}{8} R$, то есть центр тяжести цилиндра с отверстием находится на расстоянии $\frac{1}{6} R$ от его оси.

Если дощечку медленно поднимать за один из концов, цилиндр будет поворачиваться, занимая устойчивое положение, при котором его центр тяжести будет находиться на вертикали, проходящей через точку касания цилиндра с дощечкой. При этом положения, которые может занимать центр тяжести цилиндра, лежат на окружности радиуса $\frac{1}{6} R$ с центром на оси цилиндра. Очевидно, что устойчивое положение невозможно, и цилиндр начнет скатываться без проскальзывания, если вертикаль, проходящая через точку касания цилиндра с дощечкой, не пересекается с этой окружностью (рис. 19). В этом случае момент силы тяжести относительно точки касания цилиндра с дощечкой не может быть равен нулю ни при каком положении цилиндра. Таким образом, угол, при котором цилиндр нач-

нет скатываться, равен $\alpha_1 = \arcsin \frac{\frac{1}{6} R}{R} = \arcsin \frac{1}{6}$. Но нам еще нужно проверить, не начнется ли скольжение цилиндра по дощечке при меньшем угле. Скольжение наступит, когда составляющая силы тяжести вдоль дощечки станет равной максимальному значению силы трения: $M_1 g \sin \alpha_2 = k M_1 g \cos \alpha_2$ (M_1 — масса цилиндра с отверстием), откуда

$$\alpha_2 = \arctg k = \arctg \frac{1}{5} = \arcsin \frac{\frac{1}{5}}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{5} \right)^2}} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{26}}.$$

Так как $\alpha_1 < \alpha_2$, то качение цилиндра начнется раньше скольжения и

цилиндр потеряет устойчивость при угле наклона дощечки

$$\alpha = \alpha_1 = \arcsin \frac{1}{6}.$$

Правильно решили эту задачу Люцман Петрасник, Владимир Метлицкий, Михаил Кузнецов (дер. Гольцевская Всегодской обл.), Владимир Корнеев (Москва), Александр Карпенко, Алексей Ефимов (Москва) и другие.

Ф21. Оси якорей двух одинаковых электродвигателей постоянного тока жестко соединены друг с другом. Если к обмоткам якорей подключены одинаковые источники с э. д. с. E , то угловая скорость вращения якорей без нагрузки равна ω_0 ; если двигатели затормозить так, чтобы они не вращались, то через обмотки якорей идет ток I_0 . Один из источников тока переключили так, чтобы вращающие моменты якорей были противоположны. Какой внешний момент нужно приложить к оси якорей для того, чтобы они вращались с заданной угловой скоростью ω ? Трение в двигателях пренебрежимо мало; магнитное поле статора создается постоянным магнитом.

Решение. При полностью заторможенном якоре по его обмотке идет ток $I_0 = \frac{E}{R}$. Это означает, что сопротивление обмотки якоря $R = \frac{E}{I_0}$.

При вращении якоря электродвигателя в его обмотке возникает э. д. с. индукции E_n , пропорциональная угловой скорости вращения якоря:

$$E_n = k\omega \quad (k \text{ — коэффициент пропорциональности}).$$

Запишем для электродвигателя закон сохранения энергии:

$$EIt = I^2 R t + Nt.$$

Или, сократив на время t работы двигателя, получим

$$EI = I^2 R + N;$$

здесь N — мощность, потребляемая электродвигателем от сети, $I^2 R$ — тепловые потери в обмотке якоря, N — мощность, отдаваемая нагрузке, R — сопротивление обмотки якоря и I — ток в обмотке.

Из этого уравнения следует, что при отсутствии нагрузки ($N = 0$) ток через обмотку якоря равен нулю. Но по закону Ома ток, идущий через обмотку, должен быть равен $I = \frac{E - E_n}{R}$. Это означает, что в отсутствие нагрузки э. д. с. индукции, возникающая в обмотке якоря, равна э. д. с. источника: $E = E_n$.

После переключения одного из источников в обмотках якорей будет возбуждаться э. д. с. $E'_n = k\omega = E_n \frac{\omega}{\omega_0} = E \frac{\omega}{\omega_0}$. При этом по обмоткам будут идти токи

$$I_1 = \frac{E - E'_n}{R} = \frac{\left(E - E \frac{\omega}{\omega_0}\right)}{\frac{E}{I_0}} = I_0 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right), \quad I_2 = \frac{E + E'_n}{R} = I_0 \left(1 + \frac{\omega}{\omega_0}\right).$$

Причем как работа источников, так и работа внешней силы будут идти на нагревание обмоток. Поэтому $E I_1 + E I_2 + N' = I_1^2 R + I_2^2 R$.

Так как $N' = F \cdot v = F \cdot r\omega = M\omega$ (F — приложенная к якору внешняя сила, M — ее момент относительно оси и $v = \omega r$ — угловая скорость точек на поверхности оси якорей), то, заменив N' , I_1 , I_2 и R их выражениями через M , ω , ω_0 и E , получим

$$M\omega + EI_0 \left[\left(1 + \frac{\omega}{\omega_0}\right) + \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right) \right] = I_0^2 \frac{E}{I_0} \left[\left(1 + \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right],$$

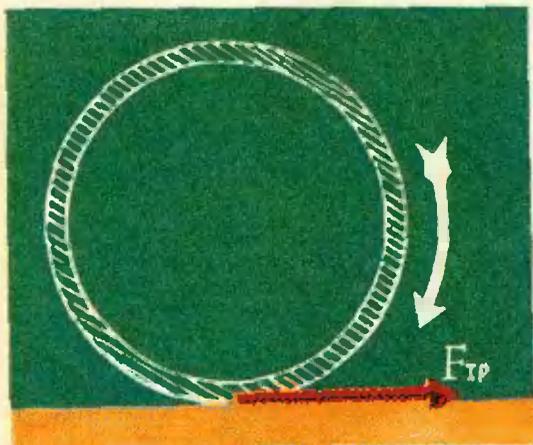


Рис. 20.

$$\begin{aligned} \text{откуда } M\omega + 2EI_0 &= \\ &= EI_0 \left[2 + 2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] \\ \text{и } M &= \frac{2EI_0\omega}{\omega_0^2} \end{aligned}$$

Ф22. Два кузнеца обрабатывают кусок железа. Сначала его кладут на наковальню и бьют молотком по очереди, потом подвешивают к потолку и бьют одновременно с разных сторон. Сила удара каждого кузнеца одинакова в обоих случаях. В каком случае кусок железа больше нагревается за один удар?

Решение. Во втором. Ясно, что как при ударе кузнеца по куску железа, лежащему на наковальне, так и при ударе кузнецов по висящему куску железа производится одна и та же работа: роль второго кузнеца, ударяющего по куску железа, в первом случае берет на себя наковальня. Эта работа идет на нагревание куска железа и, кроме того, на совершение механической работы при расширении этого железа. В том случае, когда железо лежит на наковальне, его центр тяжести при расширении поднимается — совершается работа против силы тяжести. Зато в том случае, когда кусок подвешен, его центр тяжести при расширении опускается. Это означает, что во втором случае, когда в тепло переходит не только работа, совершенная кузнецами, но и часть потенциальной энергии куска железа (работа, совершаемая железом при расширении, отрицательна), он нагреется за один удар больше, чем в первом.

Ф23. На горизонтальной плоскости находятся две одинаковые тонкостенные трубы массы m каждая. Оси их параллельны, а радиусы равны R . Вначале одна из труб покоится, а вторая катится без проскальзывания по направлению к первой до столкновения. Скорость поступательного движения трубы равна v . Как зависят от времени (нарисуйте графики) скорости поступательного движения и угловые скорости вращения труб?

Коэффициент трения скольжения труб о горизонтальную поверхность равен k , трение между трубами при столкновении пренебрежимо мало, удар абсолютно упругий.

Решение. Так как трение между трубами пренебрежимо мало, то можно считать, что при соударении труб вращение одной из них не передается второй. Поэтому, рассматривая соударение труб, мы можем не учитывать вращение первой (первоначально движущейся) трубы.

Запишем для столкновения труб законы сохранения энергии и импульса:

$$mv_0 = mv_1 + mv_2, \quad \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}$$

(v_1 и v_2 — скорости поступательного движения соответственно первой и второй труб после соударения).

Решая эти уравнения совместно, найдем, что $v_1 = 0$ и $v_2 = v_0$, то есть при соударении трубы обмениваются скоростями поступательного движения — точно так же, как при соударении двух одинаковых шариков.

Рассмотрим теперь, что будет происходить с первой, первоначально двигавшейся трубой после удара. В системе координат, связанной с осью трубы, катящейся без проскальзывания по плоскости со скоростью v_0 , скорость точки, касающейся плоскости, равна — v_0 . Это означает, что такая труба вращается вокруг своей оси так, что линейная скорость вращения

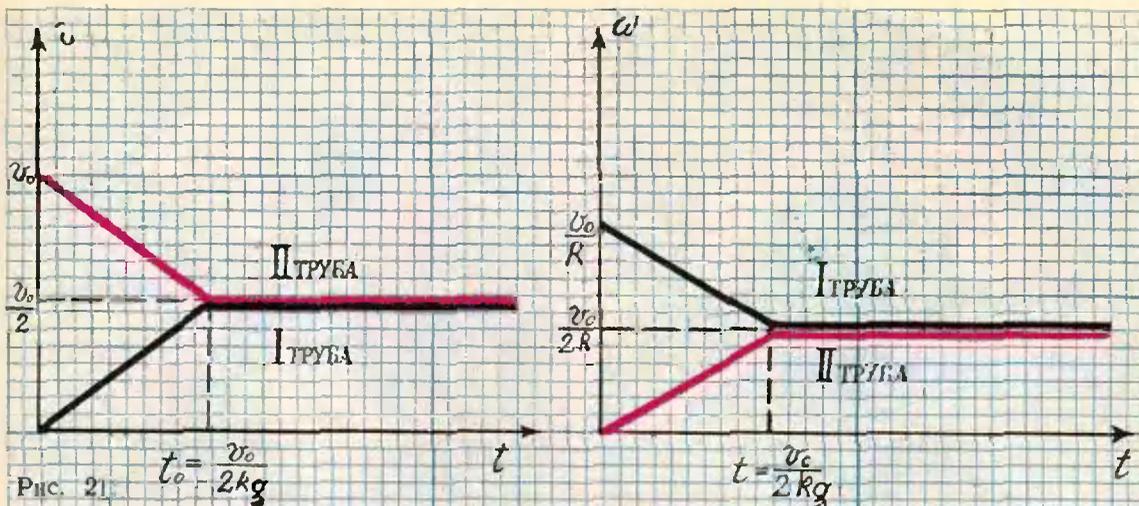


Рис. 21

точек ее поверхности равна по величине скорости поступательного движения оси трубы. Поэтому первая труба после столкновения вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega = \frac{v_0}{R}$.

Сила трения $F_{\text{тр}} = kmg$ (рис. 20), действующая на эту трубу, замедляет ее вращение и одновременно сообщает ей ускорение $a = \frac{F_{\text{тр}}}{m} = kg$ в направлении первоначального движения трубы. К моменту t эта труба будет иметь скорость поступательного движения $u_1 = at = kgt$ и будет вращаться вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega_1 = \frac{v_0 - kgt}{R}$. Скорость поступательного движения трубы увеличивается, а скорость вращения трубы уменьшается пропорционально времени. К моменту t_0 , когда скорость поступательного движения оси трубы станет равна линейной скорости вращения трубы вокруг оси, проскальзывание трубы относительно плоскости прекратится, и после этого ни скорость вращения трубы ω_1 , ни скорость поступательного движения оси трубы u_1 уже не будут меняться. Из условия $kgt_0 = v_0 - kgt_0$ найдем, что $t_0 = \frac{v_0}{2kg}$. В этот момент

$$u_1 = \frac{v_0}{2} \text{ и } \omega_1 = \frac{v_0}{2R}.$$

Рассматривая аналогично движение второй трубы, найдем, что действующая на нее сила трения уменьшает скорость ее поступательного движения, $u_2 = v_0 - kgt$, и увеличивает угловую скорость вращения $\omega_2 = \frac{kgt}{R}$.

К моменту $t = \frac{v_0}{2kg}$ проскальзывание трубы относительно плоскости прекратится. В этот момент труба будет иметь не меняющиеся в дальнейшем скорость поступательного движения $u_2 = \frac{v_0}{2}$ и угловую скорость вращения вокруг оси $\omega_2 = \frac{v_0}{2R}$.

Графики зависимости скоростей поступательного движения труб и их угловых скоростей вращения от времени показаны на рисунке 21.

Верное решение этой задачи прислали Михаил Кузнецов и Сергей Юшманов.



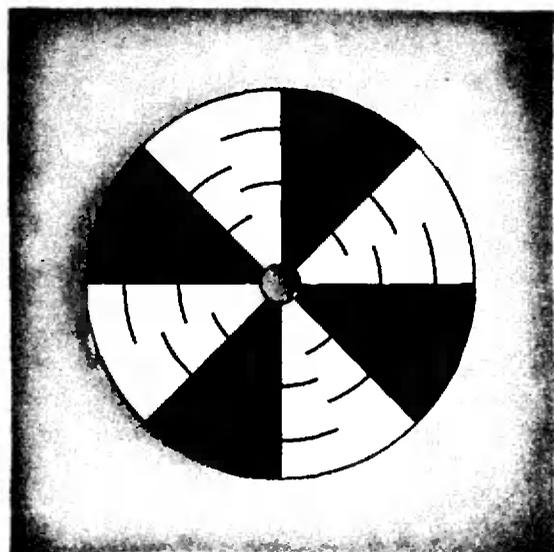
Г. И. Косоуров

ОРАНЖЕВОЕ НЕБО

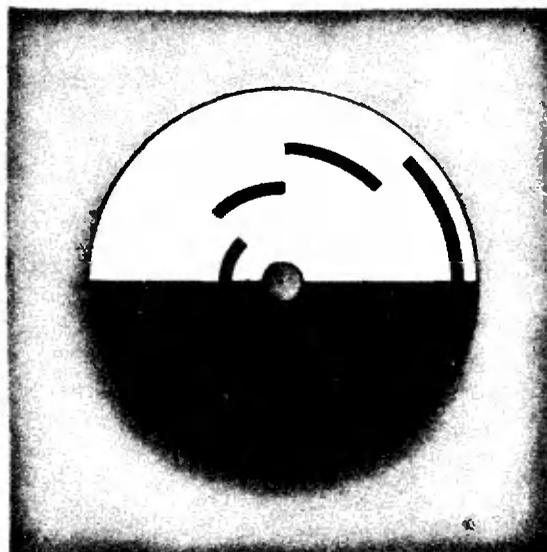
В этой статье мы предлагаем несколько опытов по цветовому зрению. Все они связаны с различными цветовыми иллюзиями, вызванными необычными условиями работы глаза или его цветовым утомлением.

Механизм восприятия цветов глазом очень сложен и до конца еще не изучен. Известно, что сетчатка глаза содержит два рода светочувствитель-

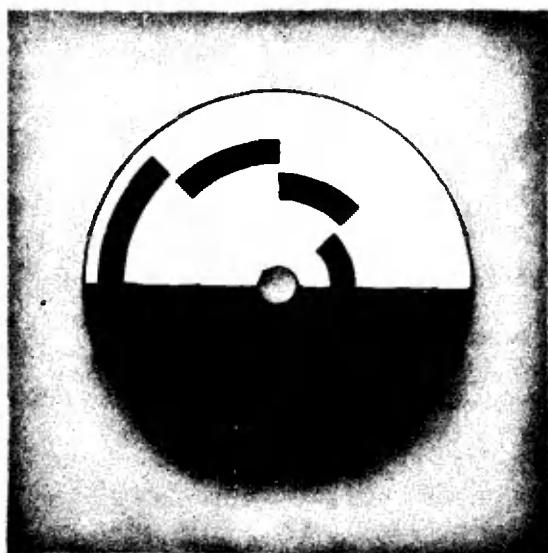
ных клеток, которые носят названия палочек и колбочек. В палочках содержится фотохимически чувствительный пигмент — зрительный пурпур, или родопсин. Под действием света родопсин обесцвечивается и действует на первые волокна, передающие возбуждение в мозг. При ярком свете он обесцвечивается полностью и палочки слепнут. В темноте идет



а



б



в



г

Рис. 1. При вращении изображенных здесь черно-белых дисков на них возникают цветные окружности. Окраска зависит от яркости освещения и скорости вращения.

обратный процесс — восстановление зрительного пурпура. Палочковое, сумеречное зрение обладает очень большой чувствительностью, но оно ахроматично. Палочки не чувствуют цвета. При достаточно большой яркости вступает в силу колбочковый механизм зрения. Колбочковое зрение цветочувствительно. Есть много убедительных опытов, приводящих к

выводу, что колбочки содержат фотохимически чувствительные пигменты трех сортов с максимумом чувствительности в красной, зеленой и синей областях спектра. Различная степень выцветания всех трех пигментов дает в нашем сознании ощущение цвета и позволяет видеть мир во всем разнообразии красок, оттенков, полутонов и переходов.

На трехцветной природе цветового зрения основано воспроизведение цветов в кино, в телевидении, в цветной фотографии и в полиграфии. Методы количественного измерения цветов также основаны на трехцветном принципе.

Однако ощущение цвета можно вызвать не только красками, но и, например, прерывистым освещением. Перечертите тушью на чертежную бумагу черно-белые диски, показанные на рисунках 1 (а, б, в, г). Достаточно, чтобы диски имели диаметр 8—12 см. Вырежьте диски и приведите их в не очень быстрое вращение, примерно 1—3 оборота в секунду. Для этого можно надеть их на ось наматывателя кинопроектора, проигрывателя, магнитофона или просто сделать из дисков волчки. Вместо черных дуг вы увидите цветные окружности. Окраска зависит от скорости вращения, освещенности и характера рисунка. Например, у диска на рисунке 1, а дуги, следующие за черным сектором (по направлению вращения), при слабом освещении кажутся красными, а при ярком — желтыми. При некоторой скорости вращения и ярком освещении черные секторы кажутся синими. Полного объяснения этому явлению пока еще нет.

Краски различаются не только цветом, но и насыщенностью. Если постепенно добавлять к красной краске белила, цвет будет становиться все более розовым. На картинах и тем более на типографских копиях с картин трудно получить насыщенные тона и большие градации яркости. Отношение яркости самой белой краски к яркости самой черной едва достигает ста, а в природе мы имеем дело с различием в яркости во много тысяч раз. Поэтому копии с картин кажутся слишком бледными либо, наоборот, слишком темными. Это нарушает один из элементов восприятия объемности — воздушную перспективу. Изображение пейзажа или жанровой сцены выглядит плоским. Зна-

чительно шире диапазон передаваемых яркостей при проекции на экран диапозитивов. Именно поэтому так выразительны и объемны фотографии на цветной обратимой пленке — слайды.

Восприятие картины можно значительно улучшить, освещая ее специальным образом. Возьмите цветную вклейку из «Огонька», сфотографируйте ее и отпечатайте контактным способом с пленки на пленку контрастный черно-белый диапозитив. Вставьте диапозитив в проектор с большим световым потоком (подойдет проектор типа «Свет») и спроектируйте диапозитив на оригинал так, чтобы контуры проекции и оригинала точно совпадали. Результат не заставит вас пожалеть о затраченном труде. Картина оживет, приобретет объемность и особую выразительность. Выключите проектор, и вы убедитесь, насколько тускла и невыразительна картина при равномерном освещении.

Следующие опыты относятся к так называемым последовательным цветовым образам. Это явление связано с тем, что полное восстановление цветочувствительного пигмента — процесс сравнительно медленный. Если продолжительное время смотреть на одноцветный рисунок, а потом перевести взгляд на белую бумагу, стену или потолок, то белый цвет будет восприниматься так, как будто в нем недостает цвета, утомившего глаз. На белой поверхности будет виден тот же рисунок, но окрашенный в цвет, который называют дополнительным. Вырежьте из цветной бумаги красный, оранжевый, желтый, зеленый, синий и фиолетовый квадратики размером 2×2 см. Положите один из цветных квадратиков перед собой на лист белой бумаги и смотрите на него, не напрягая глаз, секунд тридцать. Смотреть надо, как говорят, в одну точку, чтобы изображение квадрата не перемещалось по сетчатке. Переведите взгляд на белое поле, и через секунду-две вы увидите на бумаге четкое изображение квадрата в дополнительном цвете. Так вы

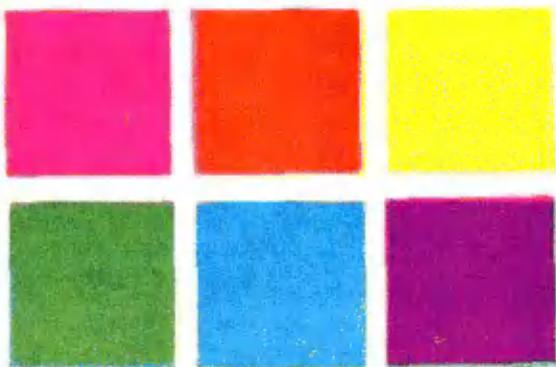


Рис. 2. Цвета квадратиков одного ряда являются дополнительными к цветам квадратиков другого ряда.

узнаете, что дополнительным к красному цвету является зеленый, к синему — оранжевый, а к желтому — фиолетовый (рис. 2). Каждая пара дополнительных цветов в смеси должна давать белый или серый ахроматический цвет.

Для смешения дополнительных цветов положите рядом два дополнительных квадратика и поставьте между ними стеклянную пластинку (рис. 3). Расположите глаз так, чтобы один квадратик видеть сквозь стекло, а другой — отраженным в стекле. Меняя наклон стекла и тем самым соотношение между световыми потоками, идущими от квадратиков, можно добиться того, что окраска в месте перекрытия изображений почти исчезнет. Для полной ахроматизации изображения нужен точный подбор цветов. Чаще всего получается бурая окраска. Но если взять два явно не дополнительных цвета, например зеленый и желтый или красный и фиолетовый, яркая окраска получится при любой их смеси. Еще более яркие цветовые образы возникают, если квадратик класть не на белую бумагу, а на дополнительный фон.

После того, как вы приобрели опыт наблюдения на простых фигурах, попробуйте сделать из цветной бумаги аппликацию, подобную приведенной на рисунке перед статьей, то есть заменив в пейзаже цвета на дополни-

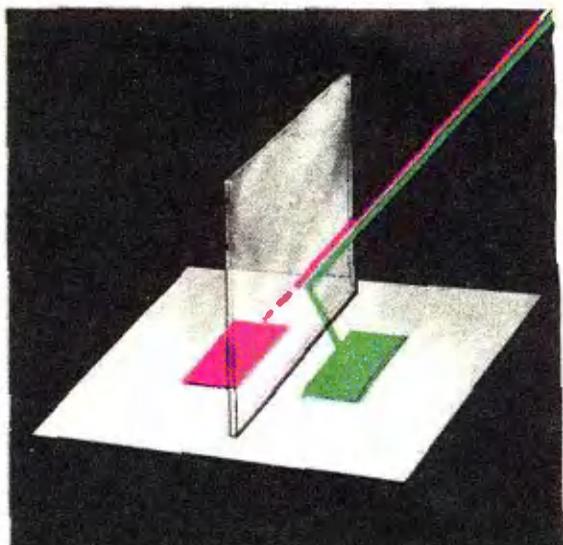


Рис. 3.

тельные. Рассматривая картинку так же, как рассматривали квадратик, вы очень скоро научитесь видеть на белом фоне пейзажи в натуральных цветах. Для успеха нужно только достаточно яркое освещение.

Самую поразительную и самую непонятную цветовую иллюзию дает наш последний опыт. Мы уже говорили, что в основе воспроизведения цветов лежит трехцветная система. Если три раза сфотографировать одну и ту же сцену через три светофильтра: красный, зеленый и синий — и, отпечатав позитивные копии, спроектировать их тремя проекторами на одно и то же место экрана через те же светофильтры, то на экране появится цветное изображение с правильной передачей цветов. При этом светофильтры должны быть подобраны так, чтобы в сумме они давали белый цвет. Можно ограничиться двумя фотографиями через два дополнительных светофильтра, например, красный и зеленый. При этом тоже получается хорошая цветопередача, хотя и не столь совершенная, как в трехцветном способе. Но, оказывается, при проекции можно ограничиться и одним цветным светофильтром.

Снимите одну и ту же цветную сцену, не перемещая аппарат, два раза на панхроматическую пленку через красный и зеленый светофильтры.

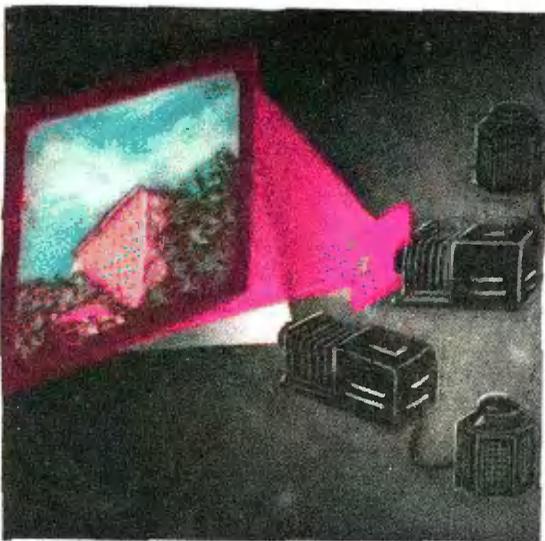


Рис. 4.

В точном подборе светофильтров нет необходимости. Вполне подойдут светофильтры из школьного набора. Контактным отпечатком на пленку позитивные копии. Полученные диапозитивы вставьте в два проектора и спроектируйте диапозитивы на экран так, чтобы контуры изображений точно совпали. Перед объективом проектора, в который вставлен диапозитив, снятый через красный фильтр, поставьте красный светофильтр, а второе изображение оставьте черно-белым (рис. 4). Вы увидите *цветные* изображение во всем богатстве красок, несмотря на то что проектируете вы только красное и черно-белое изображения с разным распределением света и тени. Любые объективные исследования света, отраженного разными местами экрана, дадут только красный цвет различной степени чистоты или насыщенности. Ощущение цветов в данном случае чисто субъективное. Проекторы лучше включать через автотрансформаторы (рис. 4), чтобы можно было независимо регулировать освещенность, даваемую на экран каждым из них. Как правило, ощущение наиболее правильной цветопередачи возникает при небольшой освещенности экрана.

Таким образом, простое и очевидное полно тайн и загадок.

Скользкость льда

Один английский физик печатно сознался, что мы до того привыкли к скользкости льда, что если бы его — до того как он сам задумался над этим вопросом — спросили невзначай, отчего лед скользкий, он ответил бы: «оттого что он скользкий», и только подумавши, пришел бы к правильному объяснению.

В местах, в которых нога нажимает на лед или снег, они под влиянием давления, вызываемого весом тела, плавятся, — и между ногой и почвой получается слой жидкой смазки, которая значительно уменьшает силу трения и делает снег и лед скользкими, как скользкая панель, покрытая слоем жидкой грязи. Когда нога сходит с места, смазка эта снова замерзает, образуя на снегу ледяной след.

Что тут не в степени гладкости дело, видно из того, что самый шероховатый и бугристый лед является едва ли не более скользким, чем зеркально гладкий, — потому что у последнего площадь соприкосновения с ногой больше, а следовательно, давление ноги на лед меньше.

Вообще, чем на меньшей поверхности сосредоточено давление тела на лед и чем менее низка температура льда, тем более скользким должен он быть. Поэтому на коньках можно скатиться дальше с горы, чем без коньков, и кататься на коньках тем легче, чем температура ближе к 0°. Когда температура воздуха выше 0°, лед становится рыхлым, по крайней мере в верхних слоях, и коньки слишком врезаются в лед. В большие же морозы коньки как бы прилипают ко льду: жидкой смазки образуется очень мало, и она замерзает раньше, чем нога успеет сойти с места.

Проф. Б. Вейнберг.
«Снег, иней, град, лед и ледники», 1919 г.

ЛАБОРАТОРИЯ КВАНТА

Сколько полюсов у магнита

Н. А. Миц

Конечно, все знают, что у магнита два полюса — северный и южный. Убедиться в этом совсем легко. Если взять металлическую железную спицу или линейку и гладить ее постоянным магнитом все время в одном и том же направлении, то спица намагничивается. С помощью компаса легко узнать, какой из концов спицы стал северным полюсом, а какой — южным. Если спицу разломать, то каждый из ее кусков будет отдельным магнитом, и у каждого будет, конечно, два полюса — северный и южный. На сколько бы частей мы ни поломали спицу, у каждого из кусочков всегда будет два полюса — северный и южный.

Опыт с намагничиванием железной полосы проделал ученик 8 (теперь уже 9) класса из г. Артемовска Донецкой области Игорь Гофман, но у него получился магнит с удивительными свойствами. Вот что он пишет: «В качестве полосового магнита я использовал стальную намагниченную линейку, а для определения силовых линий — металлические опилки. Получилась картина, на которой видны 5 полюсов (рис. 1). Ведя компасом вдоль линейки, я заметил, что стрелка поворачивается то одним, то другим концом, что доказывает наличие разноименных полюсов».

В чем же дело? Только что мы с уверенностью говорили о том, что у магнита всегда два полюса, а у магнита, сделанного Игорем — несколько. Картина магнитных силовых линий выглядит так, как будто несколько

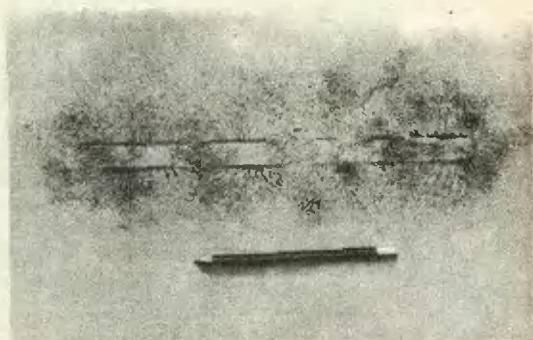
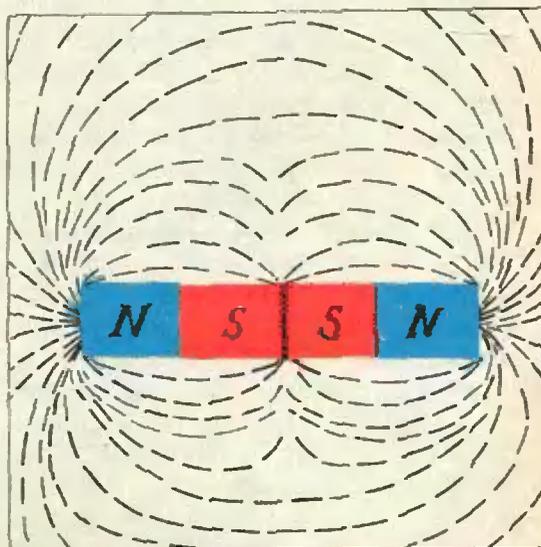


Рис. 1.

магнитов положены один за другим и их одноименные полюсы соприкасаются (рис. 2). Конечно, у магнита, показанного на нашем рисунке, четыре полюса — два северных и два южных, но если мы будем проверять, где какие полюсы у нашего магнита с помощью компаса, то нам будет ка-

Рис. 2.



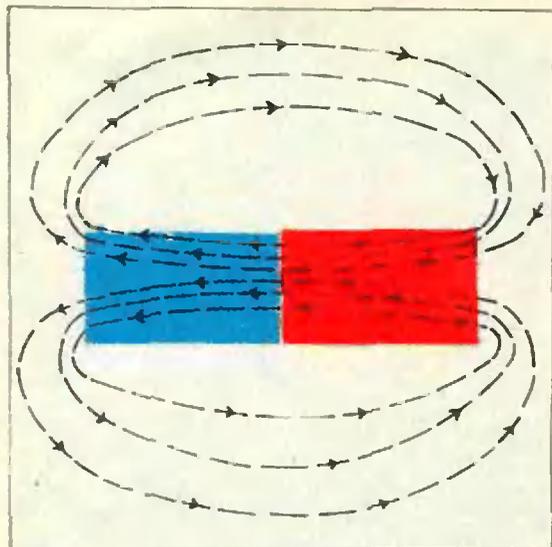


Рис. 3.

заться, что у него три полюса — два северных по краям и южный посередине.

Игорь не пишет, как ему удалось получить магнит с несколькими полюсами. Это можно сделать так. Взять спицу и гладить ее одновременно одноименными полюсами двух магнитов от середины вправо и влево. Получится магнит с тремя полюсами. Большее количество полюсов можно получить, намагнитив только концы спицы, или при помощи катушек. Нужно включить несколько катушек так, чтобы магнитные поля, создаваемые соседними катушками, были противоположны. Если теперь внутрь катушек поместить стержень, сделанный из высококачественной магнитной стали, и затем выключить ток, то стержень будет иметь несколько полюсов. При этом катушки должны быть достаточно длинными, так как короткие магниты очень легко размагничиваются. Связано это вот с чем. Любой магнит можно размагнитить, если поместить его во внешнее магнитное поле, направленное против поля внутри самого магнита. Но магнитные поля, создаваемые самим магнитом внутри и снаружи, направлены противоположно (рис. 3). Внешнее поле, создаваемое самим магнитом, размагничивает его. Чем короче магнит, тем сильнее внешнее размагничивающее

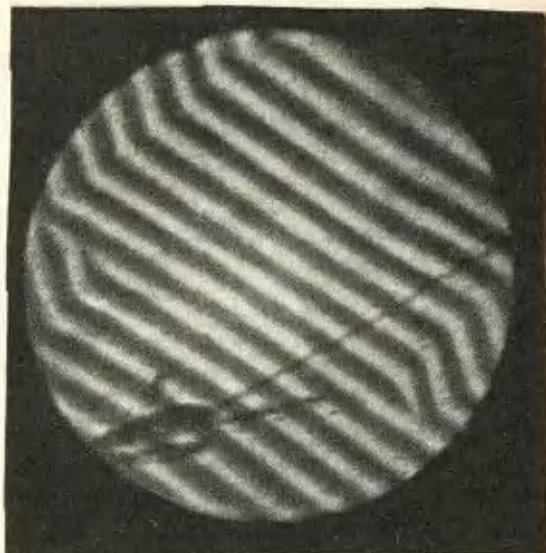


Рис. 4.

поле, которое он создает при той же намагниченности образца. Поэтому длинные магниты сохраняются лучше, чем короткие, и очень короткие магниты нельзя получить.

Способность сохранять намагниченность зависит не только от расстояний между полюсами, но и от свойств материала, из которого сделан магнит. Например, магнитофонная лента, на которой записана музыка, состоит из большого числа коротких поперечных магнетиков. Эти магнетики отличаются друг от друга величиной поля, которое они создают. Можно оценить количество таких магнетиков на 1 мм ленты. Будем считать, что звуковая частота 1000 гц и лента движется со скоростью 10 см/сек. Тогда количество магнетиков в одном сантиметре будет $\frac{1000}{10} = 100$. То есть 10 магнетиков в каждом миллиметре!

На рисунке 4 показано чередование областей с различной магнитной ориентацией в кристалле. Светлые полосы — северный полюс направлен на зрителя, темные — наоборот. Снимок получен в специальных условиях под микроскопом. Увеличено в 500 раз.

ВСЕСОЮЗНАЯ ЗАОЧНАЯ ОЛИМПИАДА

Условия олимпиады

Мы публикуем тексты задач Всесоюзной заочной олимпиады по математике, физике и химии для учащихся школ и других средних учебных заведений. Эта олимпиада, ставшая уже традиционной, является составной частью Всесоюзных физико-математической и химической олимпиад.

Те, кто успешно справятся с задачами заочной олимпиады, будут приглашены на областные (краевые, республиканские) олимпиады на равных правах с победителями районных олимпиад. Приглашения будут рассылаться органами народного образования по домашним адресам. Лучшие из победителей областных и республиканских олимпиад примут участие в заключительном туре Всесоюзной олимпиады, а также будут приглашены в летнюю школу Сибирского отделения Академии наук СССР.

Перед каждой задачей в скобках указаны классы, для учеников которых она предлагается, однако можно попробовать свои силы и на задачах для более старших классов. Чтобы стать победителем олимпиады, не обязательно решить много задач. Иногда достаточно остроумного решения одной. Но решить задачу — это не значит только дать ответ; нужно обязательно обосновать его, дать точное доказательство. Задачи не требуют никаких знаний, выходящих за пределы программы средней школы. Решения задач по каждому предмету должны высылаться в отдельном конверте стандартного формата. На конверте указать название предмета. В письмо нужно вложить согнутый вдвое конверт с обратным домашним адресом и маркой (в этом конверте вам пришлют извещение о результатах работы). Решения надо писать очень разборчиво. Условия задач не переписываются, но называются их номера.

В начале письма не забудьте указать (разборчиво):

1. Свою фамилию, имя и отчество.
2. Почтовый домашний адрес (подробный).
3. Класс, школу (училище, техникум и т. д.), адрес.
4. Фамилию, имя и отчество своего учителя по данному предмету.

Последний день, когда вы еще можете послать решение, — 1 февраля 1971 года (по почтовому штемпелю). Письма, отправленные позже, рассматриваться не будут.

Участники олимпиады направляют решения по адресам:

— проживающие в Сибири, Казахстане, на Дальнем Востоке и в Средней Азии: Новосибирск, 90, Олимпиада;

— проживающие в Карельской и Коми АССР, в Архангельской, Вологодской, Калининградской, Кировской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской и Псковской областях РСФСР: Ленинград, В-164, ЛГУ, Олимпиада;

— жители остальной территории Европейской части РСФСР, включая Урал: Москва, В-234, МГУ, Олимпиада;

— жители Эстонской ССР: Тартуский государственный университет, Олимпиада;

— живущие в остальных республиках — в адрес университета столицы своей республики, с пометкой «Олимпиада».

Центральный оргкомитет обращается ко всем родителям, учителям математики, физики, химии и директорам школ с просьбой ознакомить с условиями задач старшеклассников.

Желаем всем участникам олимпиады самых больших успехов.

Центральный оргкомитет

Всесоюзной олимпиады школьников

Математика

1. (7—10) В футбольном турнире участвуют 19 команд. Доказать, что в каждый момент турнира найдется команда, сыгравшая четное число матчей (быть может, ни одного).

2. (7—10) На клетчатой бумаге со стороной клетки, равной единице, проведена произвольная окружность радиуса $R > 1$. Доказать, что внутри этой окружности лежит не менее $\pi(R-1)^2$ узлов сетки.

3. (7—10) В квадрате 5 на 5 закрашены 16 клеток. Доказать, что можно выбрать в нем квадрат 2 на 2 такой, в котором закрашено не менее трех клеток.

4. (7—8) Доказать, что число 1970 нельзя представить в виде разности квадратов двух целых чисел.

5. (7—8) Можно ли из 99 одинаковых квадратных плиток составить замкнутую цепочку (так, чтобы каждые два соседних квадрата имели общую сторону и не налегали друг на друга)?

6. (7—10) В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса CD (D — точка на боковой стороне AB) и прямая DE , перпендикулярная CD (E — точка на прямой AC). Доказать, что $CE = 2AD$.

7. (9—10) Доказать, что хотя бы одно из двух чисел $\sqrt[n]{m}$; $\sqrt[m]{n}$ не превосходит $\sqrt[3]{3}$; m и n — любые натуральные числа, большие 1.

8. (8—10) Внутренняя точка четырехугольника $ABCD$ называется *симпатичной*, если сумма площадей треугольников APB и CPD равна сумме площадей треугольников BPC и DPA . У каких четырехугольников имеются три симпатичные точки, не лежащие на одной прямой?

9. (8—10) Решить относительно x уравнение

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-x} + \frac{1}{a+b-x}.$$

10. (7—10) Можно ли представить единицу в виде суммы

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \dots + \frac{1}{n_{1971}},$$

где $n_1, n_2, n_3, \dots, n_{1971}$ — различные нечетные натуральные числа?

Физика

1. (8) Тяжелый прут согнули в середине под углом 90° и подвесили свободно за один из концов. Какой угол с вертикалью образует прикрепленная сторона?

2. (8) При прохождении потока нейтронов через пластинку кадмия толщиной 1 мм количество частиц уменьшилось на 15%, а их скорость не изменилась. Какая доля потока нейтронов пройдет через пластинку толщиной 8 мм из того же материала?

3. (8—9) Математический маятник длины l и массы m раскачивают следующим образом: каждый раз, когда маятник проходит положение равновесия, на него в течение короткого промежутка времени действует сила F , направленная параллельно скорости. Через сколько колебаний маятник отклонится на 90° ?

4. (8—10) Пуля массы m , летевшая с начальной скоростью v пробивает один подвешенный грузик массы m и застревает во втором таком же. Пренебрегая временем взаимодействия пули с грузиком, найти количество тепла, выделившегося в первом грузике, если во втором выделилось количество тепла, равное Q .

5. (8—10) Однородная нить свободно висит так, что оба ее конца находятся на одинаковой высоте. Натяжение нити в нижней точке T . Масса нити m . Найти натяжение вблизи точки подвеса.

6. (9—10) P — V диаграмма процесса над идеальным газом представляет собой параллелограмм (рис. 1). Изобразить T — V диаграмму этого процесса.

7. (10) Найти заряд на заземленной пластине конденсатора (рис. 2).

8. (10) Трём одинаковым изолированным конденсаторам емкостью C каждый были сообщены заряды q_1, q_2 и q_3 соответственно. Потом конденсаторы соединили так, как показано на рисунке 3. Какие заряды остались на конденсаторах?

9. (10) Схема, изображенная на рисунке 4, подключена к источнику переменного напряжения с амплитудой 220 в и периодом 1/50 сек. Найдите максимальное значение напряжения на сопротивлении R и долю периода, в течение которой ток в цепи отличен от нуля. Нарисуйте график зависимости падения напряжения на сопротивлении R от времени. Считать, что зависимость тока, идущего через диод от приложенного к нему напряжения (изображенная на графике пунктиром) с достаточной точностью представляется ломаной ABC . Внутренним сопротивлением батареи можно пренебречь.

10. (9—10) В системе оптической связи передающий луч лазера имеет вид конуса с углом при вершине $\alpha = 10^{-4}$ рад (угол расходимости пучка). В приемном устройстве световая энергия фокусируется с помощью линзы диаметра $D = 1$ м на фотозащитный элемент. Оказалось, что при изменении расстояния L между передатчиком и приемником с 5 до 10 км сигнал на выходе фотозащитного элемента уменьшился из-за поглощения света в атмосфере в 2 раза. Во сколько раз изменится сигнал при изменении расстояния L с 10 до 20 км?

Химия

1. (8) Если предположить, что Тунгусский метеорит, взорвавшийся в 1908 г., был железокремнистым и его осколки попали в землю, то не можете ли вы сказать, какие

химические процессы произошли с этими осколками за время их пребывания в земле? (В состав метеоритов входят: железо, магний, никель, кремний; почвы в районе взрыва кислые, глубина залегания осколков не более 0,3 м.)

2. (8) Имеются три сплава: припой, латунь и бронза. Какие реакции нужно провести, чтобы определить каждый из сплавов?

3. (8) При нагревании 12,8 г белого кристаллического вещества оно полностью разложилось на азот и воду. При 0° С объем выделившегося азота составил 4,48 л. Определите, какое вещество было нагрето.

4. (8) При стоянии железистых минеральных вод из них выделяется осадок. Как избежать этого явления? Объясните процессы, протекающие при этом.

5. (9) При добавлении нескольких капель раствора соляной кислоты к насыщенному раствору хлорида серебра раствор мутнеет, но если добавить значительное количество раствора HCl, раствор вновь становится прозрачным. Объясните эти явления.

6. (9) На 31,6 г перманганата калия подействовали концентрированной соляной кислотой. Газообразный продукт реакции полностью израсходовался на взаимодействие с 625 мл раствора сернистой кислоты концентрации 0,8 М. Определите концентрацию ионов водорода в растворе, полученном при

взаимодействии газа с сернистой кислотой. Какое количество 36% соляной кислоты ($d=1,18$) потребуется для взаимодействия перманганатом калия?

7. (9) Опишите принцип действия батарейки для карманного фонаря. Приведите уравнения реакций, протекающих в ней.

8. (9—10) Определите, как изменится давление в изолированной системе при превращении озона в кислород при температуре 527° С, если на преобразование грамм-моля озона из кислорода расходуется 34 ккал, а теплоемкость кислорода составляет 5 кал/моль·град.

9. (10) Почему для удаления лакокрасочных покрытий, изготовленных на основе натуральных высыхающих масел, применяют водный раствор КОН?

10. (10) Исходя из неорганических веществ синтезируйте щавелевую кислоту, меченую полностью: а) изотопом водорода — дейтерием; б) изотопом углерода C^{13} ; в) дейтерием и C^{13} . Исходным материалом для получения углерода C^{13} служит карбонат бария, меченый C^{13} .

11. (10) Для нейтрализации 10 г спиртового раствора смеси анилина и фенола потребовалось 49,02 мл 2,24% раствора едкого калия ($d=1,02$), а при добавлении к 5 г того же раствора избытка бромной воды получено 8,26 г осадка. Найдите концентрацию анилина и фенола в исходном растворе.

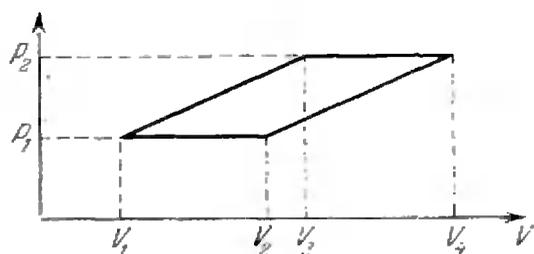


Рис. 1.

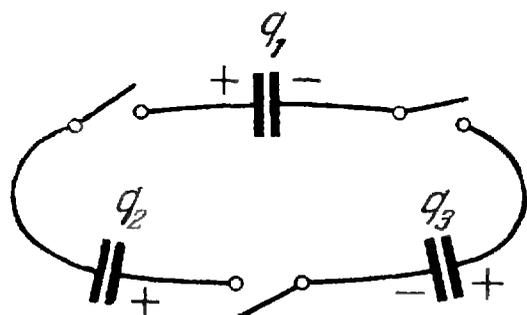


Рис. 3.

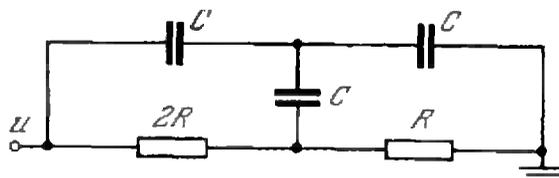


Рис. 2.

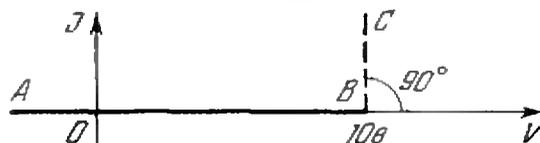
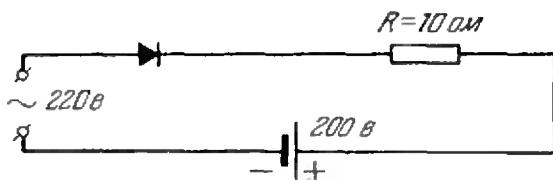


Рис. 4.

РАЗВИВАЙТЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ВООБРАЖЕНИЕ

Н. Г. Федин

На экзаменах часто предлагают стереометрические задачи, для решения которых самое важное — представить себе, как расположены фигуры в пространстве. Иногда пространственные соображения подсказывают идеи решения планиметрических задач. В этой статье мы и расскажем о некоторых вопросах и задачах, которые в какой-то степени должны заинтересовать старшеклассников и помочь им расширить горизонты своего пространственного воображения.

Скрещивающиеся прямые

1. Нарисуем две скрещивающиеся прямые a и b . На рисунке 1 дано их изображение.

Вы удивлены, что прямые изображены параллельными? Напрасно. Это верный чертёж, хотя и не наглядный. Известно, что скрещивающиеся прямые a и b можно расположить в параллельных плоскостях α и β так, чтобы прямая a лежала в плоскости

α , а прямая b — в β , а затем спроектировать их на плоскость γ , пересекающую плоскости α и β (рис. 2). В этой плоскости мы и получим изображения a_1 и b_1 прямых a и b .

2. Пусть даны две скрещивающиеся прямые a и b и точки A_1, A_2 на прямой a и B_1, B_2 на прямой b (рис. 3). Проведем прямые A_1B_1 и A_2B_2 .

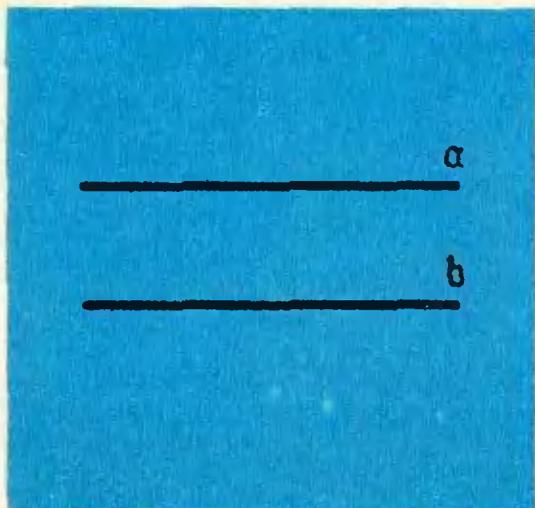


Рис. 1.

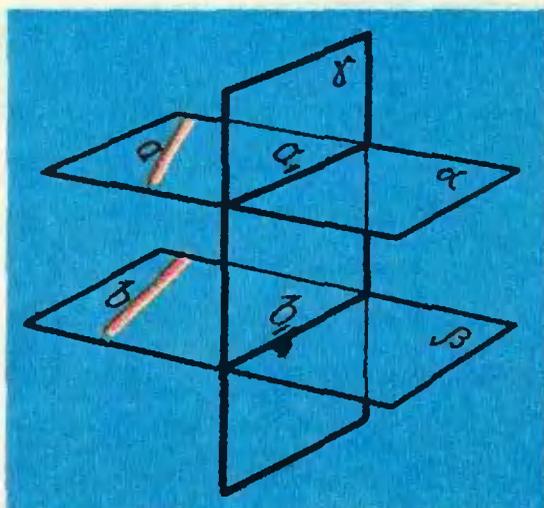


Рис. 2.

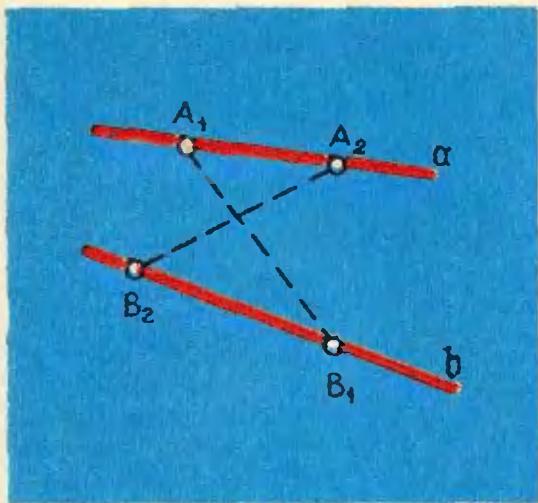


Рис. 3.

Могут ли эти прямые пересекаться?

Конечно, чертеж нас может подвести. Но если допустить, что прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются, то получится, что четыре точки A_1, A_2, B_1, B_2 лежат в одной плоскости, а следовательно, будут лежать в одной плоскости и исходные прямые, чего не может быть. Мы приходим к выводу, что прямые A_1B_1 и A_2B_2 не могут пересекаться.

3. Имеет ли фигура, состоящая из двух скрещивающихся прямых, центр симметрии?

Может показаться, что центр симметрии у двух скрещивающихся прямых существует и совпадает с серединой M их общего перпендикуляра (рис. 4). Однако это не так. В самом деле, если бы центр симметрии у этих двух прямых был, то прямая a при центральной симметрии перешла бы в параллельную прямую b , но b не параллельна a . Следовательно, скрещивающиеся прямые не могут иметь центра симметрии.

4. Имеют ли две скрещивающиеся прямые ось симметрии?

Этот вопрос значительно труднее вопроса о центре симметрии скрещивающихся прямых. Оказывается, что две скрещивающиеся прямые имеют три оси симметрии: l_1, l_2 и l_3 . Одна из них является общим перпендику-

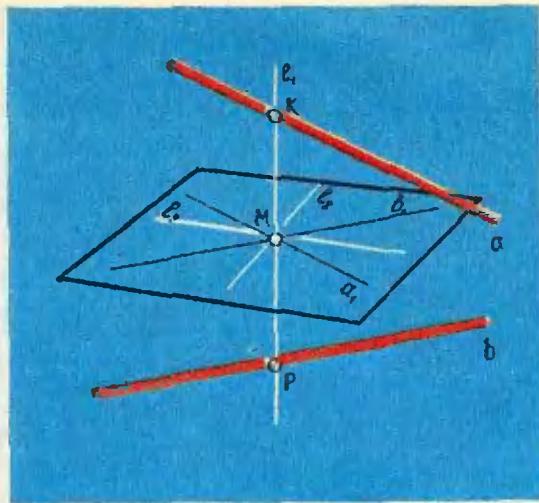


Рис. 4.

ляром к исходным прямым a и b . Две другие взаимно перпендикулярны, пересекаются в середине M отрезка KP и являются биссектрисами смежных углов, образованных прямыми a_1 и b_1 , соответственно параллельными a и b (рис. 4). Попробуйте доказать этот факт самостоятельно.

Решение планиметрических задач стереометрическим способом

Обычно планиметрические задачи решаются на плоскости, а стереометрические задачи связываются с изображением пространственной фигуры на плоском чертеже. Такие приемы решения задач или доказательства теорем никого не удивляют, они являются общепринятыми. А вот решение планиметрических задач стереометрическим, пространственным, трехмерным способом — это уже необычно и любопытно. Конечно, решаются этим методом далеко не все задачи, а только задачи определенного типа.

5. На плоскости даны три луча, исходящие из одной точки (рис. 5, а) и делящие плоскость на три угла, каждый из которых меньше 180° . В каждом из трех углов дано по одной точке: A_1, B_1 и C_1 — так, что эти точки не лежат на одной прямой. Требуется построить треугольник

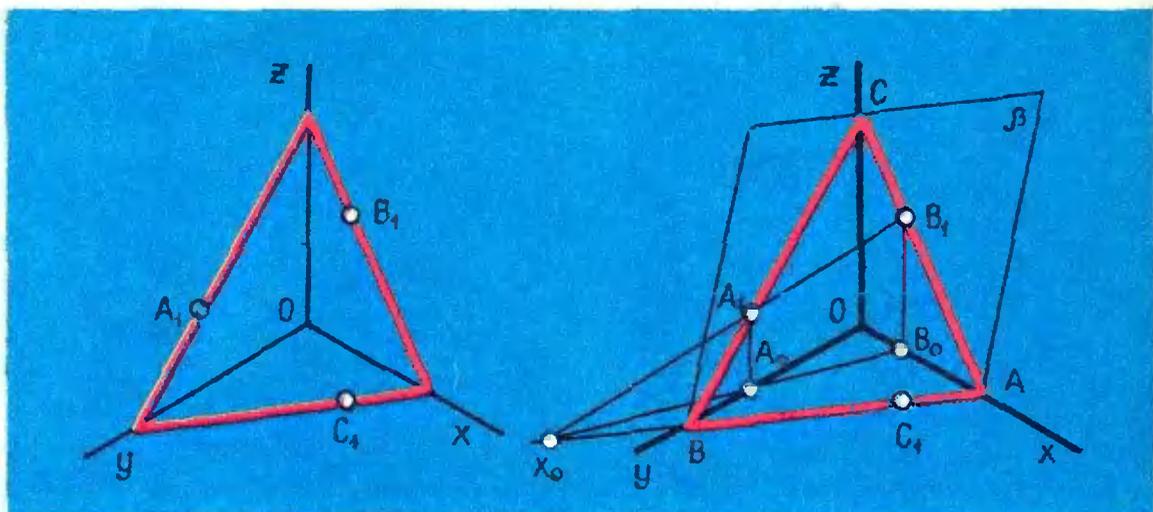


Рис. 5, а.

ABC , вершины которого лежат на данных лучах, а стороны проходят через данные точки.

Решить эту задачу планиметрическим путем трудно, однако стереометрически она решается довольно легко. Представим себе (рис. 5, б), что лучи образуют в пространстве ребра трехгранного угла с вершиной в точке O . Точки A_1, B_1, C_1 представим себе расположенными в гранях трехгранного угла. Эти точки определяют некоторую плоскость. Обозначим эту плоскость через β ; она пересечет грани трехгранного угла по искомым сторонам BC, CA и AB . Осталось построить линии пересечения плоскостей граней трехгранного угла с плоскостью β .

Для этого спроектируем данные точки на плоскость xOy параллельно Oz . Точки A_1, B_1, C_1 перейдут соответственно в точки A_0, B_0, C_1 (точка C_1 останется на месте).

Таким образом, мы свели задачу к проекционной, что в школе часто называют задачей на сечение многогранного угла плоскостью. Находим точку x_0 пересечения прямой A_1B_1 с плоскостью xOy , это будет точка пересечения прямых A_1B_1 и A_0B_0 . Точки x_0 и C_1 лежат и в плоскости β , и в плоскости xOy , следовательно, секущая плоскость β пересечет плоскость xOy по прямой x_0C_1 .

Затем найдем точки пересечения

Рис. 5, б.

прямой x_0C_1 с лучами (ребрами) Ox, Oy , получим точки A и B . Проводя BA_1 и AB_1 , получим в пересечении с осью (лучом Oz) третью точку — вершину C искомого треугольника ABC . Пространственное представление помогло нам найти идею решения планиметрической задачи.

6. На плоскости даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ так, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке S , а прямые AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 пересекаются в точках x, y и z . Доказать, что точки x, y и z лежат на одной прямой l .

Эта задача известна в геометрии под названием теоремы Дезарга*).

Вот идея ее доказательства. Представим себе, что точка S является вершиной пирамиды с основанием ABC и секущей плоскостью $A_1B_1C_1$ (рис. 6). Тогда прямые AB, BC и AC лежат в плоскости ABC , а прямые A_1B_1, B_1C_1 и A_1C_1 лежат в плоскости $A_1B_1C_1$. Поэтому точки x, y, z лежат и в плоскости треугольника ABC , и в плоскости треугольника $A_1B_1C_1$, то есть они расположены на линии пересечения этих плоскостей, на прямой l .

Строгое доказательство теоремы Дезарга проведите самостоятельно.

*) Жерар Дезарг — французский математик и инженер (1593—1662).

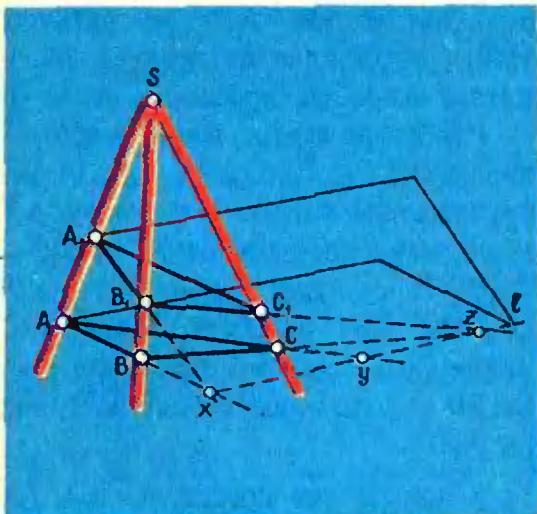


Рис. 6.

Условие, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке S , использовано вот в каком месте: прямые AB и A_1B_1 (и другие) не скрещиваются в пространстве, а пересекаются в точке x . В дальнейших рассуждениях участвуют только плоскости треугольников, о пирамиде можно забыть.

Интересно, справедлива ли эта теорема для четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, у которых прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 и DD_1 пересекаются в одной точке S ? Будут ли при этом условии четыре точки пересечения продолжений сторон AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 , CD и C_1D_1 , DA и D_1A_1 лежать на одной прямой? Вообще говоря, это не так. Для двух четырехугольников аналогичная теорема будет верна при некоторых дополнительных условиях.

Постарайтесь самостоятельно найти эти условия.

У к а з а н и е. Рассмотрите прямую, соединяющую точки пересечения диагоналей четырехугольников.

Интересно, что в условиях задач не фигурировали ни длина отрезков, ни величина углов. В этих задачах речь шла только о точках пересечения прямых и плоскостей, о принадлежности точек прямой. Планиметрическую фигуру мы рассматривали как проекцию некоторой пространственной фигуры на плоскость. Такой метод проекции или проектирования

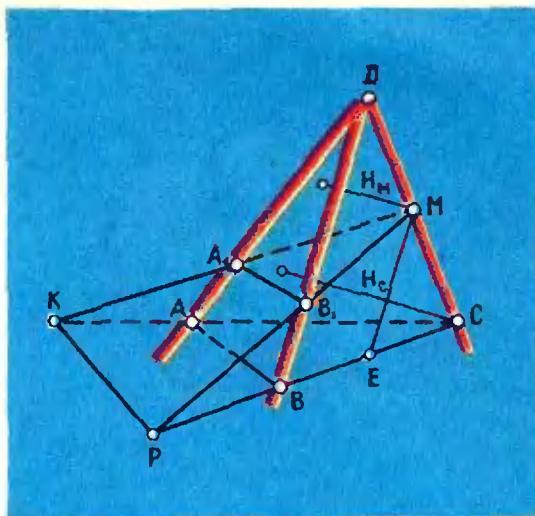


Рис. 7.

характерен для особой ветви геометрии, которая называется проективной геометрией.

Пересечение и изображение фигур

Рассмотрим несколько задач.

7. Дана треугольная пирамида $ABCD$ с вершиной D . На продолжениях сторон CA и CB взяты точки K и P такие, что $AC = 2AK$ и $BC = 2BP$; M — середина ребра CD . Через точки K , P , M проведена секущая плоскость. В каком отношении эта плоскость разделит объем пирамиды?

Для решения задачи посмотрим, что представляет собой сечение пирамиды плоскостью KPM , то есть плоскостью, определяемой тремя точками K , M и P (рис. 7).

Треугольники ABC и KCP подобны, следовательно, $KP \parallel AB$. Тогда KP параллельна плоскости ABD ,

$KP = \frac{3}{2} AB$. Секущая плоскость пересечет грань ABD по отрезку A_1B_1 , параллельному KP , а следовательно, параллельному и AB . Проведем среднюю линию ME треугольника BCD , $CE = EB = BP$, $ME \parallel BD$. Замечаем, что BB_1 — средняя линия треугольника MPE , откуда $BD = 2ME = 4BB_1$, следовательно, $A_1B_1 = \frac{3}{4} AB$ (треугольники ABD и A_1B_1D подобны). Площади подобных

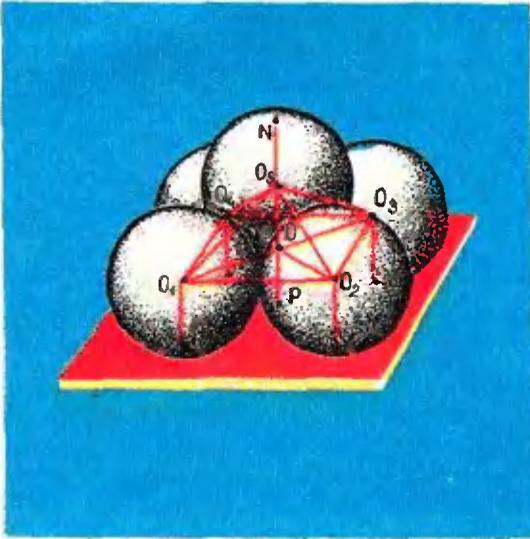


Рис. 8.

фигур относятся, как квадраты сходственных сторон, поэтому

$$S_{\Delta A_1B_1D_1} = \frac{9}{16} S_{\Delta ABD}.$$

Пусть V — объем пирамиды $ABCD$. При вычислении объема V_1 пирамиды A_1B_1MD целесообразно за ее основание принять грань $A_1B_1D_1$. Тогда высота H_M будет составлять половину высоты H_C , так как M — середина отрезка CD . Имеем:

$$V_1 = \frac{1}{3} S_{\Delta A_1B_1D_1} H_M = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{16} S_{\Delta ABD} \times \\ \times \frac{H_C}{2} = \frac{9}{32} \left(\frac{1}{3} S_{\Delta ABD} H_C \right) = \frac{9}{32} V.$$

Объем нижней части пирамиды V'' будет составлять $\frac{2^3}{3^2}$ от объема пирамиды $ABCD$. Теперь находим отношение объемов верхней и нижней частей пирамиды: $V':V'' = 9:23$.

8. На плоскости стола расположены четыре шара радиуса R , касающиеся друг друга (центры шаров образуют квадрат). Затем в «ямку», образованную этими шарами, поло-

жен пятый шар того же радиуса. Найти расстояние от верхней точки пятого шара до плоскости стола *).

Изобразив центры шаров и обозначив их O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 (рис. 8), нетрудно найти искомое расстояние NP как сумму длин отрезков $NO_5 + O_5O + OP$, оно будет равно $2R + O_5O$. Отрезок O_5O — высота правильной пирамиды, у которой все ребра равны $2R$ — расстоянию между центрами шаров.

В заключение предлагаем вам самостоятельно решить несколько задач.

Упражнения

1. На плоскости стола расположены три шара, касающиеся друг друга и имеющие радиус R . Затем в «ямку», образованную этими шарами, положен четвертый шар того же радиуса. Найти расстояние от верхней точки четвертого шара до плоскости стола **).

2. Дан усеченный конус с осью $OO_1 = h$ и радиусами основания r и R . На окружностях оснований берутся всевозможные точки A и B такие, что A и B лежат на разных окружностях и OO_1 и AB — скрещивающиеся отрезки. Найти границы изменения расстояния между OO_1 и AB .

3. Вершина S правильной треугольной пирамиды $ABCS$ перемещается по высоте OS в бесконечность, а затем по высоте приближается к плоскости основания. В каких границах будет изменяться линейный угол двугранного угла при ребре AS ?

*) Интересный вопрос по физике: какова должна быть сила трения между шариками и между шариками и столом, чтобы все это сооружение не рассыпалось?

**) Тот же вопрос по физике.

От редакции

ТАКАЯ ЛИ ПОМОЩЬ НУЖНА ПОСТУПАЮ- ЩИМ?

Помещая рецензию профессора А. Ф. Хрусталева на одно из пособий по математике для поступающих в вуз и полностью соглашаясь с его отрицательной оценкой, редакция хочет обратить внимание на то, что за последние годы резко возросло число таких пособий, которые делают из задач конкурсных экзаменов как бы особую «науку», овладение которой становится невозможным без специального натаскивания; зачастую это дурно влияет на практику школьного преподавания математики, заставляет учителей приспособляться к таким конкурсным изобретениям, которые ничего общего не имеют с действительными требованиями к математической подготовке будущих студентов, расходятся с духом новой школьной программы по математике, часто оказываются ниже ее в научном отношении.

А. Ф. Хрусталева

Повышение требований к знаниям поступающих в высшие учебные заведения привело к большому спросу на методические пособия для углубленного изучения дисциплин средней школы, в частности математики. Среди этих изданий многие обладают высокими педагогическими достоинствами и отличаются удачным подбором материала. Однако, как это ни печально, издаются и книги, написанные небрежно, с существенными логическими недостатками, а иногда и грубыми ошибками. Их авторы, вероятно, не чувствуют той большой ответственности, которую они берут на себя, выступая перед готовящейся к вступительным экзаменам молодежью с непродуманными рекомендациями.

Ленинградская организация общества «Знание» выпустила пособие по математике*), предназначенное для поступающих в высшие технические учебные заведения. Как указано в предисловии, авторы книги большое внимание уделяют узловым моментам теории, указывают методы и приемы

решения многих примеров и задач повышенной трудности.

Не будем обсуждать сейчас некоторые общие методические установки авторов или целесообразность включения в пособие тех или иных разделов (особенно в связи с их несоответствием программе вступительных экзаменов и уровню требований к поступающим во втузы). Очень серьезные претензии к книге вызывают имеющиеся в ней довольно многочисленные неточности и даже ошибки, допускаемые авторами при решении многих задач.

Так, в примере 89 (стр. 100) приводится следующее: «доказательство» тождества $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x = \pi/2$: «Пусть $\operatorname{arctg} x = \alpha$, тогда $\operatorname{tg} \alpha = x$. Пусть $\operatorname{arctg} x = \beta$, тогда $\operatorname{ctg} \beta = x$. Из этих уравнений следует, что $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta$, т. е. α и β — дополнительные

*) П. В. Григорьев, П. А. Соболев, И. С. Серебрянский, Н. В. Травин, Знания — молодежи. (В помощь поступающим в высшие учебные заведения.) Математика, «Знание», Л., 1970, 230 стр., тираж 215 500 экз., цена 44 коп.

углы. Значит, $\alpha + \beta = \pi/2$. Возвращаясь к старым обозначениям, получим $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \pi/2$, что и требовалось доказать». Ясно, что приведенное рассуждение лишено смысла.

Обратимся к задаче 24 (стр. 120): «Доказать, что если корни x_1 и x_2 уравнения $px^2 + nx + n = 0$ таковы, что $x_1/x_2 = a/b$, то

$$\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{n}{p}} = 0 \quad (1)$$

($a \neq 0, b \neq 0, n \neq 0, p \neq 0$). Сразу ясно, что равенство (1), в левой части которого стоит сумма трех арифметических корней из ненулевых чисел, места иметь не может. Тем не менее в книге приводится его «обоснование».

На той же странице решается пример 25: «Доказать, что уравнение $x^2 + ax + 1 = 0$ не имеет рациональных или целых корней, если a — целое и $|a| \neq 2$ ». Прежде всего бросается в глаза неудачная формулировка условия: ведь в главе I уже разъяснялось, что целые числа есть подмножество чисел рациональных. Далее, в доказательстве авторы нигде не используют условие $|a| \neq 2$ и ошибочно считают, что $1/m$ — всегда дробь. Между тем случаи $m = \pm 1$ как раз и исключаются ограничением $a \neq \pm 2$.

Решая пример 76 (стр. 97): «Доказать, что если $|A| < 1$ и $\sin \alpha = A \sin(\alpha + \beta)$, то $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin \beta}{\cos \beta - A}$ », авторы обращают внимание лишь на формальные выкладки, не обосновывая их закономерность. В частности, не объясняется роль ограничения $|A| < 1$. Кстати, условие этой задачи сформулировано некорректно: необходимо еще дополнительно предполагать, что $\cos \beta \neq A$ (см. также задачу 174 на стр. 178).

Весьма неудачно, что при рассмотрении систем тригонометрических уравнений авторы обозначают одной и той же буквой разные целочисленные параметры, появляющиеся в решении. Это может сильно запутать читателя, затруднить отбор необходимых корней (примеры 208, 210—214 на стр. 193—196). Да и сами авто-

ры из-за этого впадают в грубую ошибку при решении задачи 242 (стр. 203—204): например, пара чисел $(\pi/6, \pi/3)$, входящая в указываемый в книге ответ (при значении параметра $k=0$), не удовлетворяет рассматриваемой в этой задаче системе и, наоборот, решение $(\pi/6, 2\pi/3)$ системы не получается из приводимого авторами ответа ни при каком целом значении k .

Воспроизведем еще совершенно недопустимые рассуждения авторов при решении примера 211 (стр. 195). После некоторых преобразований рассматриваемое там уравнение принимает вид

$$\sin 4x + \sin 2x = 1. \quad (2)$$

«Так как стандартным путем последнее уравнение не решается, испробуем две комбинации:

$$\begin{cases} \sin 4x = 1, & \begin{cases} x = (4k + 1)\pi/8, \\ \sin 2x = 0, & \begin{cases} x = k\pi/2 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

(общая часть — пустое множество);

$$\begin{cases} \sin 4x = 0, & \begin{cases} x = \pi/4, \\ \sin 2x = 1, & \begin{cases} x = (4k + 1)\pi/4 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

(общая часть: $x = (4k + 1)\pi/4$. Ответ: $x = (4k + 1)\pi/4$). Между тем нетрудно показать, что, помимо подобранной серии решений, уравнение (2) имеет и еще одну серию (соответствующую действительному корню кубического уравнения, к которому уравнение (2) можно привести, используя универсальную подстановку).

В книге имеется ряд недостатков и при изложении теоретических вопросов. На стр. 110 авторы дают категорическую рекомендацию по поводу решения уравнений: «Преобразования, ведущие к сужению ОДЗ, т. е. к потере корней, недопустимы». Но ведь для некоторых уравнений может и не быть иного пути, кроме перехода к уравнению с более узкой областью допустимых значений. Кстати, и сами авторы иногда пользуются преобразованиями, сужающими ОДЗ, но почему-то не считают нужным привести необходимые комментарии

(пример 121 на стр. 159, где использована формула перехода к логарифмам по основанию x).

По непонятной причине авторы сразу сужают или, лучше сказать, неправильно указывают ОДЗ для системы 76 (стр. 146): здесь допустимы как $x > 0$, $y > 0$, так и $x < 0$, $y < 0$ (другое дело, что из второго уравнения системы сразу следует, что в области $x < 0$, $y < 0$ нет решений, но этот факт не имеет отношения к отысканию ОДЗ).

Исследуя систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными общего вида, авторы утверждают, что если $\Delta = 0$, а хотя бы одно из чисел Δ_x или Δ_y отлично от нуля, то в таком случае $\Delta_x \neq 0$ и $\Delta_y \neq 0$ (стр. 126). Это утверждение просто неверно, в чем легко убедиться на примере системы

$$0 \cdot x - 1 \cdot y = 0, \quad 0 \cdot x + 1 \cdot y = 1,$$

для которой $\Delta = 0$, $\Delta_x = 1$, $\Delta_y = 0$. Поэтому предлагаемое авторами исследование случая несовместности системы нельзя признать удовлетворительным.

В книге приводится (стр. 33) неудачное определение периодической функции (из этого определения и следующей за ним теоремы вытекает, что функция $y = \sin(\sqrt{x})^2$ должна иметь период 2π , что неверно), сообщается (стр. 18), что произведение двух комплексно сопряженных чисел всегда есть действительное положительное число (на самом деле — неотрицательное), утверждается (стр. 212), что задание двух первых членов геометрической прогрессии определяет ее знаменатель (это верно, лишь если определять геометрическую прогрессию как последовательность с ненулевым первым членом), и т. д.

Можно было бы продолжать список ошибочных или неполноценных решений задач, недостатков или неточностей при изложении теоретических вопросов. Но и уже приведенные примеры показывают, что рассматриваемая книга принесет мало пользы поступающим в вузы и, скорее, запутает их.

ИСТОРИЯ КАЛЕНДАРЯ И ХРОНОЛОГИЯ

Так называется книга ^{*}), в которой автору удалось очень интересно и ясно рассказать о сложной истории календаря.

Люди с давних пор воспринимали течение времени, наблюдая постоянную смену дня и ночи, систематическое повторение явлений природы. Измерять же время научились значительно позднее. Начиная с XIX столетия и до наших дней и особенно в последние пятьдесят лет «календарная проблема» привлекает к себе большое внимание во многих странах мира. Ввиду несовершенства введенного с 1582 г. и поныне действующего в большинстве стран Григорианского календаря еще в 1923 г. в Женеве при Лиге наций был организован Международный комитет по реформе календаря. Его цель — создание всемирного и неизменного календаря, удовлетворяющего требованиям экономической и культурной жизни общества.

Как создавалась и совершенствовалась система счета длинных промежутков времени — календарь? Что такое лунные, лунно-солнечные и солнечные календари? Какова математическая основа календарей? Какие календари существовали в странах древности — Египте, Греции, Риме, Вавилоне? Правда ли, что календарь индейцев племени майя в Централь-

^{*}) С. И. Селешников. История календаря и хронология, изд-во «Наука», М., 1970.

ной Америке, существовавший много столетий назад, точнее нашего современного календаря? На эти вопросы дает ответ «История календаря и хронология».

В первой главе книги описаны первобытные формы определения времени, начиная с зарубок на палке или узелков, которые завязывались на особых шнурах. Здесь же приведены и любопытные сведения о счете начала года у разных народов нашей планеты.

Астрономические основы календаря составляют содержание второй главы. В ней подробно рассмотрены три основные единицы измерения времени: солнечные сутки, лунный месяц и солнечный год, составляющие фундамент любой календарной системы.

Третья глава, посвященная солнечным календарям, начинается с их математической теории. Она содержит подробное описание различных календарей, начиная с древнеегипетского и кончая календарем французской революции конца XVIII в., разработанным специальной комиссией под руководством Жильбера Ромма (1750—1785).

В книге (главы IV и V) дается подробное представление о лунных, лунно-солнечных календарях и о календарях народов Азии.

До недавнего времени считали, что колыбелью астрономии были страны Ближнего Востока, Древний Китай и Индия. Однако в последние десятилетия археологи открыли новый центр культуры, расположенный на территории Нового света. Они установили, что на полуострове Юкатан, который когда-то населяли индейцы племени майя, существовала самобытная куль-

тура; особое развитие у этого народа получила астрономия, связанная с практическими потребностями. Пожалуй, впервые в литературе автор отводит такое значительное место календарю и хронологии майя (глава VI), подробно знакомя читателей с применявшимися ими календарными системами.

Описание истории календаря в России и в СССР, начиная с древних славян, доведено автором до наших дней. Здесь не осталось забытым и происхождение семидневной недели.

Заканчивается книга подробным рассказом о Всемирном календаре. Разбирая недостатки действующего календаря, автор приводит различные проекты его реформы, в том числе проект Всемирного календаря, рассмотренный Социальным и Экономическим Советом ООН.

Хронология и некоторые календарные эры описаны в последней главе книги. В приложении приведены различные календари и многие весьма любопытные материалы, в том числе «вечный» табель-календарь для определения дня недели любой календарной даты.

Несмотря на малый объем книги, автору удалось осветить и систематизировать большой круг вопросов, связанных с «календарной проблемой».

Поставленная автором задача — создать «... краткий энциклопедический справочник по вопросам летоисчисления и календаря» — выполнена, и эта книга представляет несомненный интерес для самого широкого круга читателей.

Л. С. Хренов

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ.

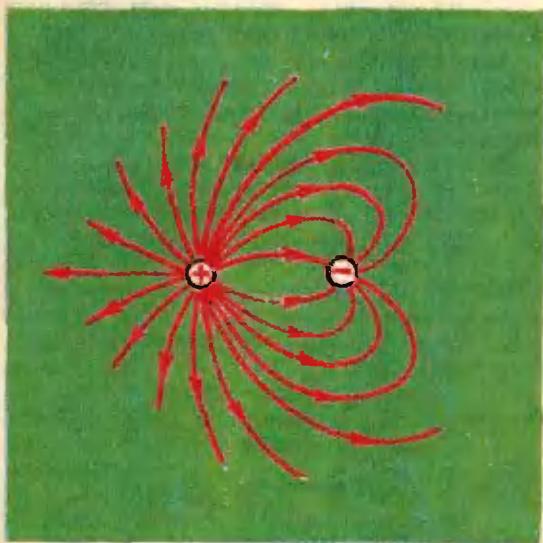


Рис. 1

К статье «Электростатика на языке силовых линий»

1. Картина силовых линий выглядит так, как показано на рисунке. Левый заряд вдвое больше правого.

2. Нет, не могут. Если бы существовала замкнутая силовая линия, то, перенеся вдоль нее заряд, мы совершили бы не равную нулю работу.

3. Нет. Направление касательной к силовой линии совпадает с направлением силы, действующей на заряд, а значит, с направлением ускорения заряда. Траектория же движения заряда — это линия, направление касательной к которой совпадает с направлением скорости заряда.

4. Проведем сферу радиуса r с центром, совпадающим с центром заряженных сфер. Из симметрии следует, что плотность силовых линий, пересекающих поверхность этой сферы, во всех точках одинакова. Это означает, что напряженность поля, равная плотности силовых линий, зависит лишь от расстояния до центра сферы. Полное число силовых линий, пересекающих поверхность проведенной нами сферы равно $4\pi r^2 E$, где E — напряженность поля а поверхности сферы. Согласно теореме Гаусса

$$4\pi r^2 E = 4\pi Q,$$

или

$$E = \frac{Q}{r^2},$$

где Q — заряд, который находится внутри сферы.

Если $r < R_1$, то $Q = 0$ и $E = 0$; если $R_1 \leq r < R_2$, то $Q = q_1$ и $E = \frac{q_1}{r^2}$; если $r \geq R_2$, то

$$Q = q_1 + q_2 \quad \text{и} \quad E = \frac{q_1 + q_2}{r^2}.$$

5. Проведем, как это мы делали при решении предыдущей задачи, сферу радиуса r с центром в центре заряженного шара, найдем,

что $E = \frac{Q}{r^2}$, где Q — заряд, который находится внутри сферы. Если плотность заряда (заряд, приходящийся на единицу объема) ρ , а радиус заряженного шара R ,

то при $r < R$ $Q = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ и

$$E = \frac{4}{3}\pi r \rho, \quad \text{то есть}$$

напряженность поля возрастает пропорционально радиусу проведенной нами сферы.

При $r < R$ $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ и $E = \frac{4\pi R^3 \rho}{3r^2}$

— вне шара напряженность поля меняется так, как менялась бы она в том случае, если бы заряд Q был сосредоточен в центре шара.

6. Эта задача решается тем же способом, что и предыдущие, только для того, чтобы воспользоваться теоремой Гаусса, нужно построить не сферическую поверхность, а цилиндрическую с осью, совпадающей с осью нити. Так как нить бесконечна и заряжена однородно, то силовые линии пересекают цилиндрическую поверхность по радиусам, причем их плотность в каждой точке поверхности одинакова. Это означает, что напряженность поля зависит только от расстояния до нити. Если высота построенного цилиндра равна l , а радиус его основания r , то поверхность цилиндра пересекает $\pi \cdot 2\pi \cdot l \cdot E$ силовых линий. Согласно теореме Гаусса $2\pi \cdot l \cdot E = q \cdot l$

(ρ — заряд, приходящийся на единицу длины нити, $\rho \cdot l$ — заряд, который находится внутри цилиндра). Отсюда $E = \frac{\rho}{2\pi r}$.

7. Задача решается аналогично предыдущей. Если R — радиус заряженного цилиндра, ρ — плотность заряда и r — расстояние до оси цилиндра, то

$$E = \begin{cases} \frac{\pi r^2 \cdot 1 \cdot \rho}{2\pi r \cdot 1} = \frac{1}{2} r \rho & \text{при } r < R, \\ \frac{\pi R^2 \rho \cdot 1}{2\pi r \cdot 1} = \frac{R^2 \rho}{2r} & \text{при } r \geq R. \end{cases}$$

8. Предположим, что поле в полости равно нулю. Так как в полости нет зарядов, на которых могли бы начинаться или заканчиваться силовые линии, то силовые линии обязательно должны пересекать всю полость, не прерываясь. Если вдоль одной из таких силовых линий перенести заряд, то мы совершим некоторую не равную нулю работу. Это означает, что точки границы полости, лежащие на этой силовой линии, имеют различные потенциалы. Но это невозможно, так как полость находится внутри металла. Значит, поле в полости должно обязательно быть равным нулю.

К статье «Сокращение алгебраических дробей»

1. $\frac{x^2 - x - 1}{9(x^2 + x - 1)}$.
2. $\frac{x + a}{x^2 + ax + a^2}$.
3. $\frac{a - 1}{x^2 + 2x + 2}$.
4. $\frac{7}{15x^2 - 23}$.

К статье «Максимум, минимум и теорема о средних»

1. Обозначим радиус некоего сектора через R , длину дуги через L и площадь сектора через S . Тогда $P = 2R + L$, $S = \frac{RL}{2}$.

По теореме

$$4S = 2RL \leq \left(\frac{2R + L}{2}\right)^2 = \left(\frac{P}{2}\right)^2 = \frac{P^2}{4},$$

откуда $S \leq \frac{P^2}{16}$. Равенство достигается при

$$2R = L = \frac{P}{2}.$$

2. Обозначим через R радиус круга и через a расстояние от точки A до центра круга. Тогда для хорды MN , проходящей через точку A ,

выполнено соотношение $xy = (R+a)(R-a)$, где $x = MA$, $y = AN$. Длина хорды MN равна $x + y$. Получаем по теореме

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{(R+a)(R-a)},$$

равенство достигается при $x = y$.

Следовательно, длина хорды минимальна, когда в точке A она делится пополам, т. е. перпендикулярна к диаметру, проходящему через точку A .

3. Обозначим \sqrt{x} через z . Выражение переписывается так: $2z^6 + \frac{3}{z}$. Теперь из примера 3 следует такая оценка значений данного выражения:

$$2z^6 + \frac{3}{z} \geq 7 \sqrt[7]{\frac{2 \cdot 3^6}{1 \cdot 6^6}} = 7 \sqrt[7]{\frac{1}{2^6}} = \frac{7}{\sqrt[7]{32}}.$$

Минимум достигается при

$$\sqrt{x} = \sqrt[7]{\frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 6}} = 2^{-\frac{2}{7}}, \text{ откуда } x = 2^{-\frac{4}{7}}.$$

4. Вынесем за скобки постоянный множитель

$c = k_1^{k_1} k_2^{k_2} \dots k_n^{k_n}$ (его можно не писать) и перепишем произведение так:

$$\begin{aligned} & \frac{x_1}{k_1} \cdot \frac{x_1}{k_1} \dots \frac{x_1}{k_1} \times \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{k_1 \text{ множителей}} \\ & \times \frac{x_2}{k_2} \cdot \frac{x_2}{k_2} \dots \frac{x_2}{k_2} \times \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{k_2 \text{ множителей}} \\ & \dots \dots \dots \\ & \times \frac{x_n}{k_n} \cdot \frac{x_n}{k_n} \dots \frac{x_n}{k_n} \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{k_n \text{ множителей}} \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\frac{x_i}{k_i} + \frac{x_i}{k_i} + \dots + \frac{x_i}{k_i} = \frac{x_i}{k_i} k_i = x_i$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Следовательно, сумма всех множителей в новой записи равна $x_1 + x_2 + \dots + x_n$, то есть постоянна, а произведение будет наименьшим при равенстве множителей, то есть при

$$\frac{x_1}{k_1} = \frac{x_2}{k_2} = \dots = \frac{x_n}{k_n}.$$

По радиусам*

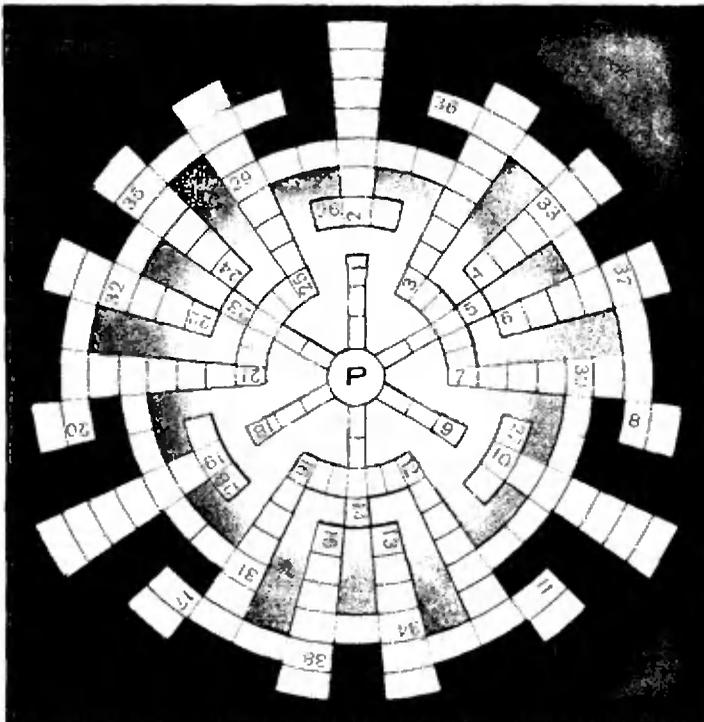
1. [р] Одна из характеристик матрицы.
2. Единица дозы гамма-излучения.
3. Единица длины.
4. Точка лунной орбиты, наиболее удаленная от Земли.
5. [р] Создатель одной из неевклидовых геометрий.
6. Ионизированный газ.
7. Выдающийся французский философ.
8. Международная система единиц.
9. [р] Геометрическая фигура.
10. Электрический аппарат, регулирующий напряжение или силу тока в электрической цепи.
11. Земельная мера.
12. Многоугольник.
13. Единица измерения электрической емкости.
14. [р] Символ, применяемый при записи уравнений.
15. Место, занимаемое цифрой при письменном обозначении числа.
16. Древнегреческий математик.
17. Единица измерения электрического сопротивления.
18. [р] Продукт конденсации водяного пара.
19. Звезда первой величины (в созвездии Орла).
20. Отношение длины окружности к диаметру.
21. Часть передающей или приемной радиостанции.
22. Выдающийся французский астроном, математик и физик.
- 23 [р] Радиоактивный элемент.
24. Основатель теории множеств.
25. Великий древнегреческий философ-материалист, атомист.

По окружностям

3. Твердое вещество.
11. Один из электродов.
12. Основное исходное положение какой-либо теории, учения, науки.
20. Совокупность двух параллельных сил.
21. Величайший математик и механик Древней Греции.
26. Единичный вектор.
27. Единица измерения работы и энергии.
28. Геометрическое тело.
29. Ансамбль из пяти исполнителей.
30. Специалист в одной из областей математики.
31. Швейцарский математик.
32. Инструмент для измерения глубины моря с борта судна.
33. Одно из трех возможных состояний вещества.
34. Земельная мера.
35. Число.
36. Аппарат, широко применяющийся в энергетике, связи, сигнализации, телемеханике и автоматике.
37. Планета.
38. Центральная часть атома.

* Значок [р] означает, что слово пишется, начиная с центра.

КРОССВОРД



Ответ на кроссворд, помещенный в № 10

По горизонтали:

2. Изл. 5. Криптон. 8. Солнце. 9. Индекс. 13. Эксперимент. 15. Котел. 16. Радар. 18. Квантор. 21. Маятник. 22. Студент. 25. Модель. 26. Брауэр. 27. Пленка. 28. Пример. 32. Гиперон. 33. Рисунок. 34. Антенна. 35. Виток. 36. Свист. 37. Аксиоматика. 42. Кантор. 43. Апория. 45. Яркость. 46. Бит.

По вертикали:

1. Клапан. 3. Принцип. 4. Полином. 6. Кулик. 7. Клейн. 10. Октант. 11. Тренне. 12. Радиус. 13. Электроника. 14. Трисектриса. 17. Падение. 18. Катушка. 19. Решетка. 20. Антипод. 23. Код. 24. Вес. 29. Протон. 30. Клемма. 31. Истина. 38. Канон. 39. Изобара. 40. Теплота. 41. Карно. 44. Теория.

ЦЕНА 30 коп.
ИНДЕКС 70465

КВАНТ 11