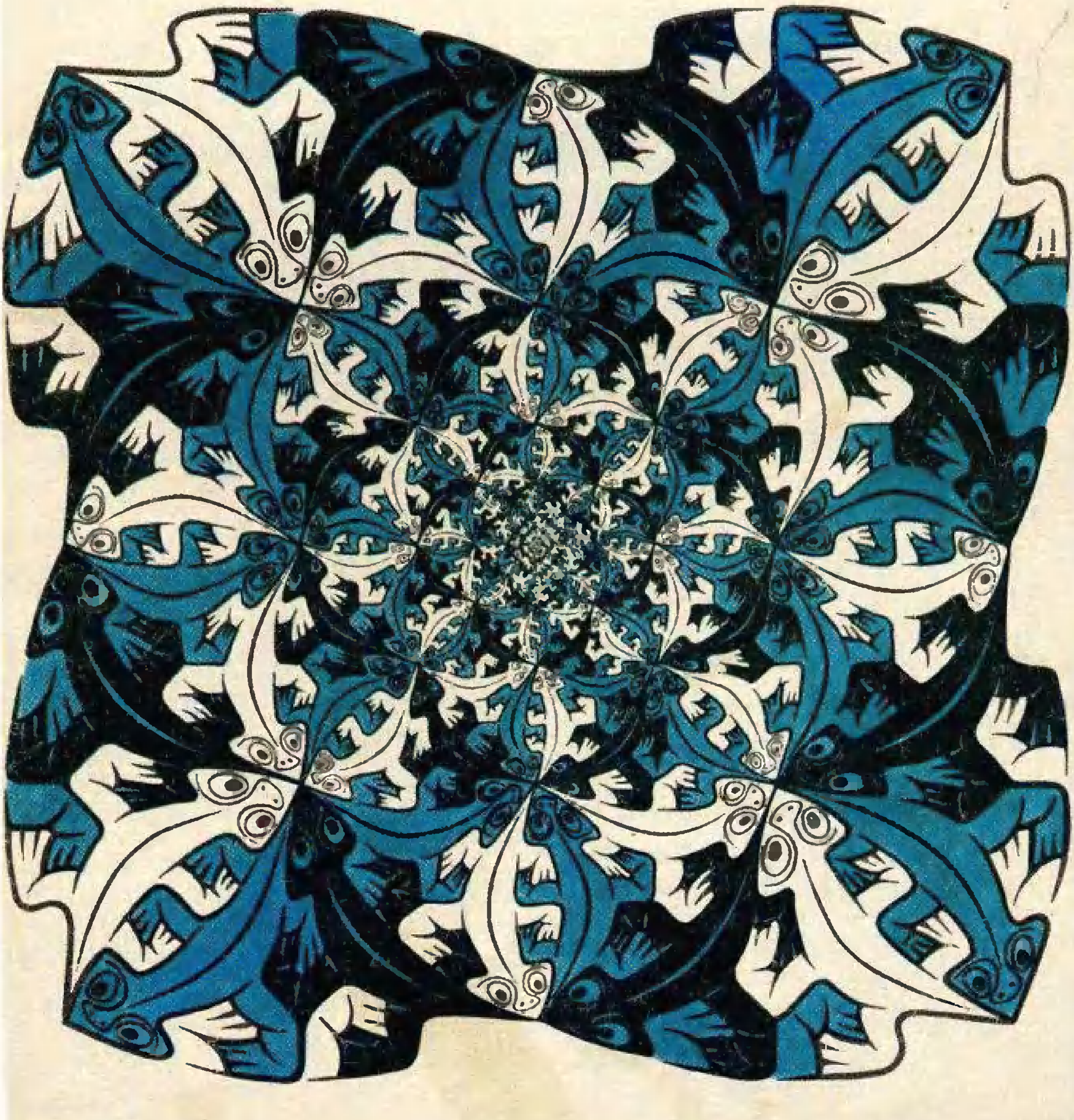
Квант

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

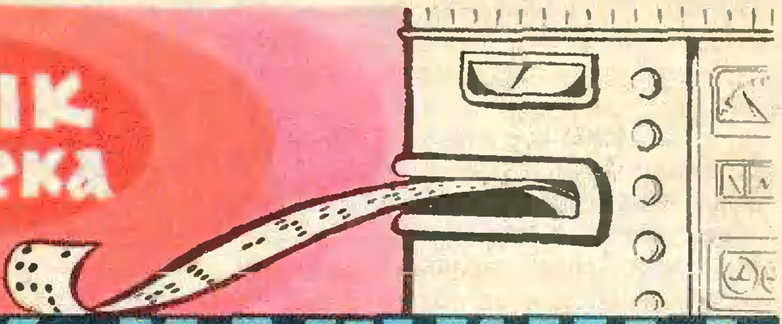
10

1971



В номере:

Язык человека и язык машины



Р. С. Гутер

Многие читатели «Кванта», очевидно, имеют некоторое представление о том, что умеют делать электронные вычислительные машины. Тем более интересно познакомиться с тем, как они это делают.

Заметим, что для выполнения разных задач вовсе не требуются разные машины: электронные вычислительные машины универсальны, то есть для новой задачи нужна не новая машина, а новая программа для нее. О программах, способах их составления и записи как раз и будет идти речь в настоящей статье.

Любая электронная вычислительная машина включает в себя

1) устройства ввода и вывода;

2) запоминающее устройство (короче: память);

3) арифметическое устройство (или просто арифметика);

4) устройство управления (управление).

Ввод и вывод предназначены для «общения» человека с машиной. Они позволяют «сообщать» машине исходные данные и способ их обработки (то есть программу) и «узнавать» у машины полученные результаты. Память машины хранит всю нужную информацию: исходные данные, промежуточные и окончательные результаты, и, конечно, программу.

Арифметика служит для выполнения операций над числами, которые поступают туда из памяти (в основном это обычные арифметические операции, чем и объясняется термин). Наконец, управление руководит самим процессом решения задачи: вызывает из памяти сведения об очередной операции и расшифровывает их, пересылает из памяти в арифметику нужные числа и отсылает обратно в память полученный результат.

Представление о связи перечисленных устройств можно получить из рисунка 1, изображающего так называемую блок-схему вычислительной машины.

Память машины состоит из большого числа (обозначим его через N) одинаковых *ячеек*, пронумерованных подряд от 0 до $N-1$. Номер ячейки называется ее *адресом*. Каждая ячейка содержит определенное число

Рис. 1.

двоичных разрядов, то есть в ней может помещаться набор из нулей и единиц, так называемое *машинное слово*.

Арифметическое устройство машины может выполнять определенный набор элементарных операций. Алгоритм решения любой задачи нужно записать в виде последовательности таких элементарных операций, которую и называют программой. Программа состоит из отдельных команд, каждая из которых содержит сведения об одной элементарной операции.

Команда (изображаемая машинным словом) делится на две части: операционную и адресную. Операционная часть команды содержит сведения о характере выполняемой операции (сложить, умножить и т. д.): элементарные операции машины перенумеровываются и в разрядах ячейки памяти машины, отведенных для операционной части, записывается номер требуемой операции. Этот номер называют кодом операции (мы будем говорить просто код).

Адресная часть команды содержит адреса ячеек, содержимое которых участвует в операции. Число адресов в команде у различных машин может быть различным. Мы ограничимся рассмотрением трехадресных машин, в адресной части которых указаны адреса трех ячеек памяти: первый, второй и третий адреса команды. Для арифметической операции (например, сложения) в первом и втором адресах записываются номера ячеек, содержащих исходные числа (слагаемые). Третий же адрес указывает номер ячейки, куда следует записать результат (то есть сумму). Для других элементарных операций использование адресов может быть иным (в частности, один, два или даже все три адреса могут оказаться ненужными для какой-либо команды, тогда соответствующие адресные ячейки заполняют просто нулями).

Пусть, например, система команд (набор элементарных операций) машины содержит $64=2^6$ элементарных операций. Тогда для их нумерации достаточно шести двоичных разрядов, то есть код операции можно записать в памяти машины шестизначным двоичным числом. Программисту же обычно удобнее разбить это число на две «триады», каждая из которых затем записывается одной цифрой в восьмеричной ($2^3=8$) системе счисления, получая, таким образом, двузначное восьмеричное число. Если, например, $N=4096=2^{12}$, то в такой «двоично-восьмеричной» системе для записи любого адреса потребуется не двенадцатиразрядное, а лишь четырехразрядное, легче записываемое и читаемое число.

Если, скажем, код 01 означает операцию сложения, а 04 — деление, то машинное слово

01 1254 3172 6314

означает команду: числа, записанные в ячейках с адресами 1254 и 3172, сложить, и сумму записать в ячейку с адресом 6314. Аналогично слово

04 4365 2710 5024

предписывает разделить число из ячейки 4365 на число из ячейки 2710 и поместить частное в ячейку 5024.

Адрес ячейки, из которой устройство управления должно извлечь для выполнения очередную команду, записан в специальном счетчике команд, являющемся частью устройства управления. Если в счетчике записан некоторый адрес *Я*, то говорят, что «управление находится в ячейке *Я*». При выполнении команды, соответствующей арифметической операции, к содержимому счетчика команд автоматически прибавляется единица, так что управление передается ячейке со следующим адресом. Поэтому, если мы хотим, чтобы машина выполнила какую-либо последовательность арифметических операций, необходимо поместить соответствующие команды в ячейках памяти подряд.

Напишем, например, программу для вычисления величины

$$y=\frac{a+bx}{ax+b}.$$

Кроме операций сложения и деления, коды которых мы уже приводили, здесь употребляется еще операция умножения. Примем, что код умножения есть 05. Предположим, что числа a и b помещены в ячейки памяти с адресами 1274 и 1275, число x — в ячейку 1362, а для числа y отведем ячейку 1400. Программу будем записывать в ячейки, начиная с 4000.

Тогда программу можно записать, например, так (самое левое число означает адрес ячейки; после двоеточия идет ее содержимое):

4000: 05 1275 1362 1701
4001: 01 1274 1701 1702
4002: 05 1274 1362 1703
4003: 01 1703 1275 1704
4004: 04 1702 1704 1400
4005: 77

Кроме упомянутых выше ячеек памяти, в программе участвуют также ячейки 1701—1704, которые используются для записи и хранения промежуточных результатов. Код 77 в ячейке 4005, в которую придет управление после выполнения команды деления, означает операцию остановки машины (на месте адресов этой команды мы, согласно сказанному выше, ставим нули). На рисунке 2 показано, как выглядит первая из команд программы в ячейке памяти машины. (Сравните повнимательнее обе записи, и у вас не останется неясностей по поводу «двоично-восьмеричной» системы).

Для выполнения программы нужно ввести ее в память, ввести в отведенные для них ячейки числовые значения и внести в счетчик команд адрес 4000 ячейки, с которой начинается программа.

Наша программа, как говорят, «написана на языке машины». В конечном счете любая программа для машины должна быть написана на этом языке — ведь другого языка машина не воспринимает. Но, как мы видели, этот «язык машины» очень далек от обычного и привычного математического языка человека; на нем трудно писать и еще труднее читать.

Программа будет выглядеть гораздо проще и привычнее, если обозначить адреса ячеек памяти обычными буквами, которые употребляются в программируемой формуле, а вместо кода операции писать знак действия. Тогда та же программа будет выглядеть так:

$b\cdot x=R_1,$ $a+R_1=R_2,$ $a\cdot x=R_3,$ $R_3+b=R_4,$ $R_2:R_4=y.$

Про такую программу говорят, что она записана в «содержательных» обозначениях.

Да и смысл «содержательных» обозначений не всегда стоит воспринимать буквально. Вот простой пример. Произведение $b\cdot x$, вычисленное первой командой нашей программы и записанное в ячейке R_1 (1701), требуется только как слагаемое во второй команде и после использования может быть стерто. Поэтому числитель, вычисляемый второй командой, можно записать в ту же ячейку, не занимая новой. Такая команда

01 1274 1701 1701

(то есть «Сложить числа из ячеек 1274 и 1701 и сумму записать в ячейку 1701») на языке «содержательных» обозначений примет вид

$$a+R_1=R_1.$$

Это есть запись в содержательных обозначениях команды: («сложить

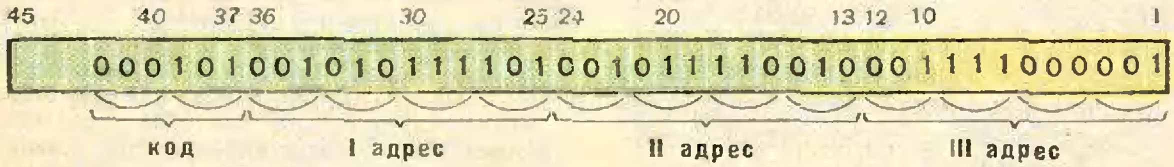


Рис. 2.

числа из ячеек a и R_1 и сумму записать в ячейку R_1»), что, конечно, отнюдь не следует понимать как «равенство» $a=0$. Кстати, часто вместо знака $=$ поэтому и пишут что-нибудь вроде $\rightarrow$; но мы будем использовать стрелки для других целей.

Как уже говорилось, выполнение арифметической команды автоматически передает управление следующей ячейке, прибавляя единицу в счетчик команд. Но очень часто не удается расположить все нужные команды «в один столбик». Так, при решении квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ в зависимости от знака дискриминанта $D=b^2-4ac$ нужно вычислять либо действительные, либо мнимые корни, что делается, как известно, по-разному.

Для изменения порядка выполнения команд в числе элементарных операций машины предусмотрены специальные команды управления (точнее — передачи управления), которые не совершают операций над содержимым ячеек памяти, а изменяют содержимое счетчика команд.

Простейшей командой такого типа является команда безусловной передачи управления, которая всегда передает управление указанной в ней ячейке памяти. При ее выполнении содержимое счетчика команд стирается и в него записывается адрес, указанный в команде, так что следующая команда будет вызываться устройством управления уже из указанной ячейки.

Поскольку для этого достаточно занять один адрес в команде, а два других адреса остаются свободными, то их можно использовать, заставив машину при выполнении этой же команды совершать еще какое-либо действие. Обычно передачу управления совмещают с пересылкой содержимого одной ячейки памяти в другую. Приняв, например, что в счетчик команд заносится третий адрес команды передачи управления, можно записать ее на языке содержательных обозначений так:

$$a \rightarrow b, \quad c$$

(«переслать содержимое ячейки a в ячейку b и передать управление ячейке c»).

Более сложно работают команды условной передачи управления, передающие управление лишь при выполнении некоторого условия. Именно такие команды требуются при программировании разветвляющихся процессов. Рассмотрим одну из таких команд:

$$a<b, \quad c.$$

При ее выполнении сравниваются числа, записанные в ячейках памяти a и b. Если написанное в команде неравенство справедливо, то управление передается ячейке c, то есть вместо содержимого счетчика команд в него заносится третий адрес написанной команды (как при безусловной передаче управления). Если же $a \geqslant b$, то к содержимому счетчика прибавляется единица, как при арифметических операциях.

С помощью описанных команд можно уже запрограммировать решение и некоторых задач невычислительного характера. Пусть, например, в ячейках x_1 и x_2 записаны некоторые числа, из которых требуется выбрать большее и записать его в ячейку x. Это можно сделать с помощью следующей программы:

1) $x_1 < x_2$, 3,
2) $x_1 \rightarrow x$, 4,
3) $0 + x_2 = x$,
4) *стоп*

Первая ее команда — условная передача управления: если x_2 больше x_1, то управление будет передано команде 3). Это — арифметическая команда, в результате выполнения которой в ячейке x будет записано число x_2. (Часто встречающееся число 0 оказывается удобным «закрепить» за ячейкой, имеющей номер 0, что и делается почти во всех машинах.) Затем управление перейдет к следующей ячейке 4), в которой находится команда *стоп*.

Если же $x_1 \geqslant x_2$, то команда 1) передаст управление следующей ячейке 2), где находится команда безусловной передачи управления, засылающая в ячейку x большее число x_1 и передающая управление сразу на *стоп*.

Вместо указания номера или условного обозначения команды, которой передается управление, часто просто проводят стрелку до нужной команды. Вот как, например, выглядит аналогичная программа, от которой требуется выбрать наибольшее из трех чисел x_1, x_2, x_3 и записать его в ячейку x:

$$\begin{array}{l}
x_2 < x_1 \\
x_2 \rightarrow x \\
0 + x_1 = x \\
x_3 < x \\
0 + x_3 = x \\
\textit{стоп}
\end{array}$$

Приведенные примеры носят иллюстративный характер. Каждая команда в них выполняется лишь один раз, и время на ее написание в десятки или сотни тысяч раз превышает время выполнения. Машине же разумно поручать такие задачи, в которых требуется выполнять большое число сравнительно однообразных действий, чтобы одни и те же команды выполнялись большое число раз, а программа была по возможности короткой. Такое построение программ достигается с помощью применения циклов групп команд, выполняющихся по нескольку раз.

Рассмотрим в качестве примера вычисление суммы

$$\Sigma = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{N^2}.$$

Все слагаемые здесь получаются одинаково. Если в ячейке n лежит номер слагаемого, то для нахождения самого слагаемого достаточно выполнить команды

$$\begin{array}{c}
«1» : n = R, \\
R \cdot R = R
\end{array}$$

«1» — это адрес ячейки, где лежит число 1. (В силу сказанного выше вместо аналогичного обозначения «0» мы можем писать просто 0.) Если в ячейке Σ уже записана сумма всех предыдущих слагаемых, то после вычисления очередного слагаемого нужно выполнить команду

$$\Sigma + R = \Sigma,$$

а затем увеличить на единицу номер слагаемого, выполнив команду

$$n + «1» = n,$$

после чего можно возвратиться к написанным выше командам вычисления слагаемых. Требуемую программу можно окончательно записать так:

$$\begin{array}{l}
0 + 0 = \Sigma \\
«1» \rightarrow n \\
n + «1» = n \\
«1» : n = R \\
R \cdot R = R \\
\Sigma + R = \Sigma \\
n < N \\
\textit{стоп}
\end{array}$$

Попробуйте в качестве упражнения составить циклическую программу для вычисления произвольной степени $y = x^n$, предполагая, что не известное вам n, записанное в некоторой ячейке памяти, может быть любым целым положительным числом.

1000	ПРОГРАММА	1040	Σ	1100	
1001		1041	n	1101	
1002		1042	R	1102	
1003		1043		1103	
1004		1044		1104	
1005		1045		1105	
1006		1046		1106	
1007		1047		1107	
1010	N	1050		1110	
1011	«1»	1151		1111	
1012		1052		1112	

Рис. 3.

Чтобы машина выполнила программу, последнюю необходимо перевести на язык машины, или, как говорят, закодировать.

Кодировка программы — почти механическая работа, выполняемая по формальным правилам. Коды операции можно записать в табличку и заглядывать в нее. Для облегчения распределения памяти можно воспользоваться специальными бланками, в которых отмечают, в какой ячейке хранится та или иная величина. На рисунке 3 показана часть такого бланка («памятки» или «шпаргалки») с распределением памяти для приведенной выше программы. Например, команда $n + «1» = n$ находится в ячейке 1002 и имеет вид 01 1041 1011 1041.

Если кодирование программы выполняется по простым формальным правилам, то нельзя ли поручить эти обязанности самой машине? — Оказывается, можно. Но это уже тема для специального разговора.

ГЕОАКУСТИЧЕСКАЯ РАЗВЕДКА подводных месторождений полезных ископаемых

О. Г. БЕСПАЛОВ
А. И. НАСТЮХА

В поисках новых источников сырья люди все чаще обращаются к несметным богатствам кладовых полезных ископаемых, скрытых водной гладью морей и океанов. По оценкам ученых размеры запасов нефти, металлических руд и других минералов, находящихся на дне и под дном водных пространств, в несколько раз превосходят запасы этих ископаемых, имеющиеся на суше.

Но как узнать, где под водой скрыты эти сокровища? Для этого надо знать геологическое строение земной коры покрытых водой районов. По картам геологического строения специалисты могут судить, где и какие полезные ископаемые следует искать.

Для геологических исследований морского дна, как и на суше, применяются геофизические методы разведки — сейсморазведка и бурение скважин. Но для получения подробных сведений о геологии района нужно наугад бурить очень много скважин, каждую из которых непросто пробурить даже на суше. А бурение скважины в морском дне является еще более громоздким и чрезвычайно дорогостоящим делом.

Сейсморазведка исследует геологическое строение земной коры с помощью взрывов. В земле бурят небольшую скважину и в ней взрывают заряд. Образовавшиеся при взрыве расширяющиеся газы вызывают деформацию почвы, сжимая слой частиц, непосредственно окружающий место взрыва. Возникшие в сжатом слое силы упругости передают давление соседним слоям, и от точки взрыва по породе во все стороны распространяется упругая ударная волна (рис. 1).

Предположим, что под первым слоем породы I на глубине S залегает слой II, сложенный из породы другой плотности. Глубину залегания слоя II определить нетрудно (см. рис. 1):

$$S = \sqrt{S_1^2 - \frac{(S_2)^2}{2}},$$

где $S_1 = \frac{1}{2} ABC$ — путь, пройденный прямой волной до слоя II (такой же путь проходит отраженная волна), S_2 — расстояние по поверхности между точкой взрыва и сейсмоприемником, регистрирующим момент прихода отраженной волны.

Энергия упругих волн при прохождении по земным породам частично поглощается. Доля поглощенной энергии зависит от частоты колебаний волны. При взрыве образуются волны инфразвуковых (ниже 16 герц) и звуковых (от 16 герц до 20 000 герц) частот. Волны этих частот сравнительно мало поглощаются земными породами, и этим определяется их использование в сейсморазведке.

Сейсморазведка успешно применяется для изучения строения морского дна. Но взрывы в воде опасны для жизни морских животных и причиняют непоправимый ущерб рыбным богатствам. Поэтому при морской сейсморазведке взрывы приходится производить редко и на большом удалении друг от друга, что затрудняет получение подробных данных о строении того или иного района.

Эхолокация, применяемая моряками для измерения глубины моря и регистрации рельефа дна, по принципу действия подобна сейсморазведке, но в отличие от нее использует ультразвуковые волны (частота от 20 000 герц до 60 000 герц).

Применение ультразвуковых волн в данном случае возможно потому, что путь прямой и отраженной волн лежит в воде, в которой ультразвуковые колебания поглощаются незначительно. Но о геологическом строении дна с помощью ультразвуковой эхолокации ничего узнать нельзя, так как ультразвук сильно поглощается земными породами и затухает уже в первых донных слоях.

В последние годы разработан метод исследования строения морского дна, получивший название «геоакустическая локация», который объединяет положительные стороны сейсморазведки и эхолокации. Геоакустическая локация, как и сейсморазведка, ведется с помощью волн звуковых частот. Но частота посылок упругих волн увеличена, подобно тому, как это делается при эхолокации. Это стало возможным вследствие того, что в качестве источника звуковых волн стали применять безопасный для жизни обитателей моря электрический разряд в воде.

Электрический разряд происходит, если к двум погруженным в воду электродам подключить источник высокого напряжения. Таким источником может быть заряженная до высокого напряжения конденсаторная батарея. Между электродами возбуждается электрическая дуга с током в несколько десятков тысяч ампер. Конденсаторная батарея при этом разряжается, и накопленная в ней

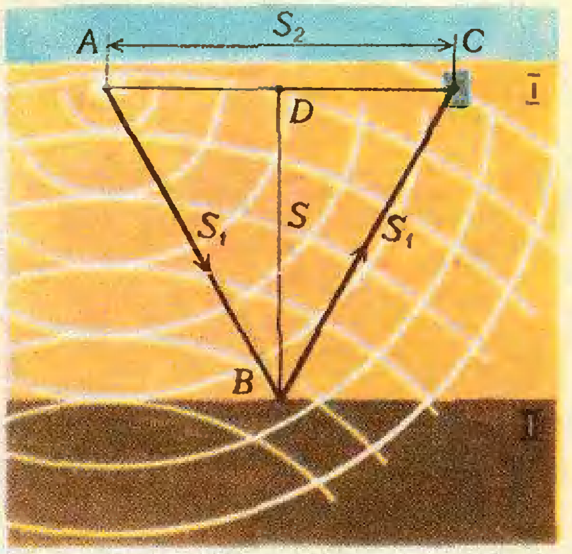
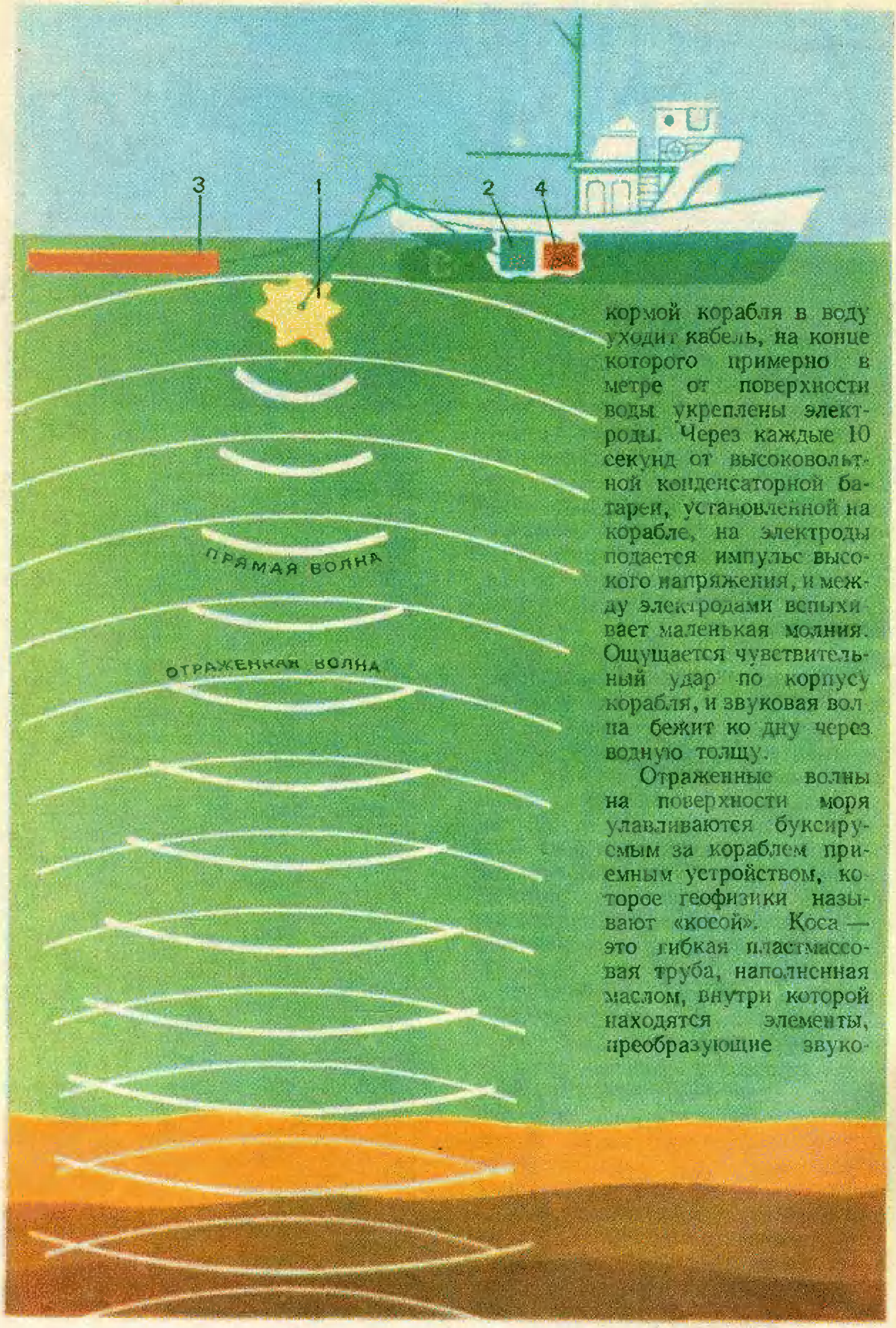


Рис. 1. Принципиальная схема сейсморазведки.

энергия, достигающая нескольких десятков килоджоулей, выделяется в виде тепла и света за короткое время (равное примерно 0,00015 *сек*) в пространстве между электродами. Эта энергия достаточно велика и эквивалентна энергии, выделяющейся при взрыве нескольких граммов тринитротолуола *). Выделившееся тепло приводит к тому, что жидкость в междуэлектродном пространстве быстро превращается в пар, который, расширяясь, возбуждает волну в воде подобно тому, как это происходит при взрыве заряда в земле. Эта волна распространяется по воде во все стороны. Достигнув дна, волна частично отражается и устремляется к поверхности воды. Другая часть волны проникает в глубь донной породы и снова частично отражается от границ раздела слоев породы. Отраженные от дна и донных слоев волны регистрируются приемной аппаратурой.

А теперь проведем несколько минут на палубе экспедиционного корабля, ведущего геоакустическую разведку. Корабль с установленной на нем разведочной аппаратурой (рис. 2) малым ходом движется вдоль исследуемого геологического разреза. За

*) Тринитротолуол — одно из наиболее распространенных взрывчатых веществ.



кормой корабля в воду уходит кабель, на конце которого примерно в метре от поверхности воды укреплены электроды. Через каждые 10 секунд от высоковольтной конденсаторной батареи, установленной на корабле, на электроды подается импульс высокого напряжения, и между электродами вспыхивает маленькая молния. Ощущается чувствительный удар по корпусу корабля, и звуковая волна бежит ко дну через водную толщу.

Отраженные волны на поверхности моря улавливаются буксируемым за кораблем приемным устройством, которое геофизики называют «косой». Коса — это гибкая пластмассовая труба, наполненная маслом, внутри которой находятся элементы, преобразующие звуко-

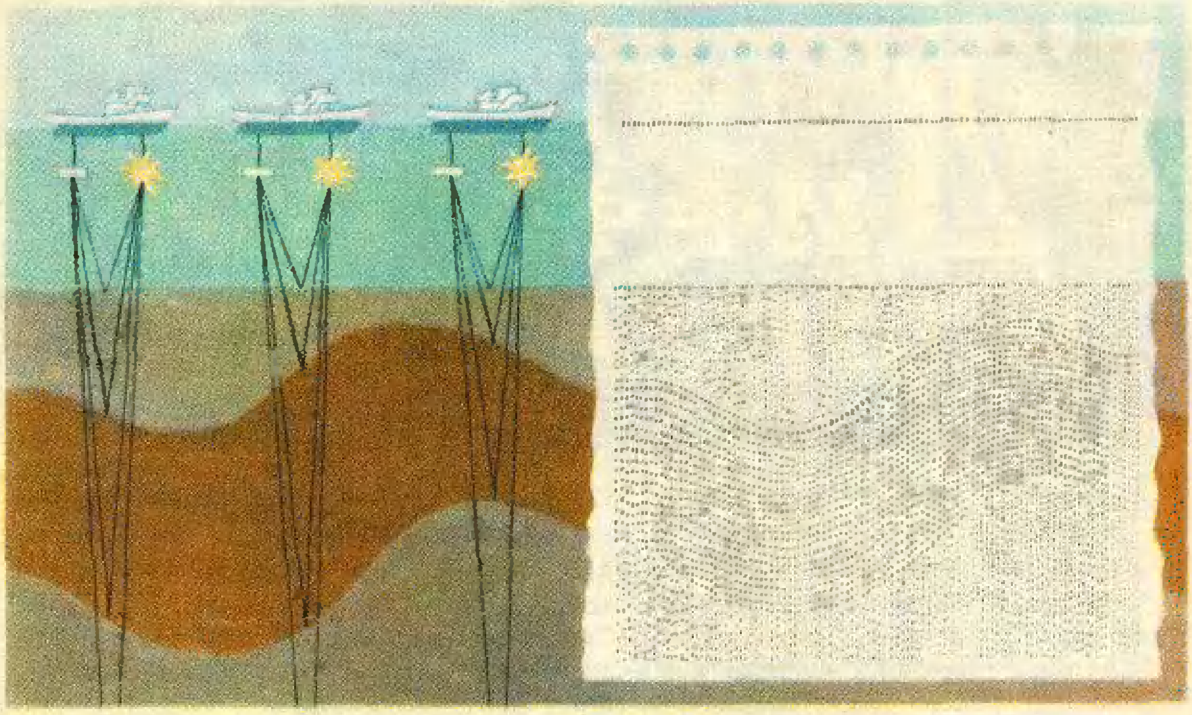


Рис. 3.

вую энергию отраженных волн в электрические импульсы (пьезоэлектрические элементы).

По кабелю, связывающему косу с кораблем, электрические импульсы идут на усилитель, а после усилителя записываются самописцем. В самописец заложена широкая лента электрочувствительной бумаги. У верхнего края ленты стоит «перо». Когда звуковая волна от электрического разряда начинает свой бег ко дну, перо начинает двигаться поперек бумажной ленты к ее нижнему краю, как бы повторяя в меньшем масштабе движение волны. А когда отраженные волны приходят на приемную косу и с нее через усилитель на перо, перо оставляет на чувствительной бумаге точки, соответствующие слоям породы, встреченным на своем пути звуковой волной.

Перед очередным разрядом перо возвращается кверху, а бумага чуть-чуть протягивается, и самописец снова готов к регистрации отраженных волн.

Через несколько минут с начала работы пунктирные строчки на бумаге образуют наглядный и легко читаемый рисунок строения исследуемого геологического разреза (рис. 3).

Метод геоакустической локации может применяться не только для поиска полезных ископаемых. С его помощью можно решать задачи инженерной геологии — выбирать места для плотин гидроэлектростанций, для фундаментов портовых сооружений, молов, туннелей, трубопроводов, и даже искать затопленные водой древние города. Стоимость разведки этим методом в 5—10 раз дешевле сейсморазведки и разведки бурением скважин.

Диффузия в металлах

Б. Куллити

Диффузия — весьма распространенное в природе явление, имеющее огромное практическое значение. Мы помещаем здесь статью Б. Куллити, подготовленную издательством «Наука» для очередного выпуска сборника «Над чем думают физики». Статья опубликована в журнале Scientific American». **Перевод выполнен В. К. Федяниным.**

Советские ученые внесли значительный вклад в изучение диффузии. Желающие более детально ознакомиться с этим явлением, могут найти много интересных сведений в научно-популярной книге Я. Е. Гегузина «Очерки о диффузии в кристаллах», выпущенной издательством «Наука» в 1970 году.

Запах духов, как известно, ощущается на довольно большом расстоянии. Объясняется это тем, что пары духов весьма легко диффундируют в воздухе. Капли жидкого красителя в воде легко диффундируют по всему сосуду. Намного труднее наблюдать диффузию в твердом теле. По этой причине изучение диффузии в твердых телах стало одним из наиболее интересных исследований в физике наших дней.

Как и во многих других областях человеческой деятельности, в данном случае умение предшествовало знанию. Столетиями рабочие сваривали металлы и получали сталь нагреванием твердого железа в атмосфере углерода, не имея ни малейшего представления о происходящих при этом диффузионных процессах. Лишь в 1896 году началось научное изучение проблемы.

Английский металлург сэр Вильям Робертс-Аустин в простом эксперименте измерил диффузию золота в свинце. Он наплавил тонкий диск золота на конец цилиндра из чистого свинца длиной в дюйм*), поместил этот цилиндр в печь, где поддерживалась температура порядка 200° С, и держал его в печи 10 дней. Затем он разрезал цилиндр на тонкие диски и измерил количество золота, которое продиффундировало в каждый срез свинца. Оказалось, что к «чистому» концу через весь цилиндр прошло вполне измеримое количество золота; в противоположном направлении в глубь золотого диска продиффундировал свинец (рис. 1). Робертс-Аустин обнаружил, что нагретый металл диффундирует в другой, когда они тесно прижаты друг к другу.

С точки зрения атомного строения вещества проницаемость твердых тел не является странной. В настоящее время мы хорошо представляем себе, что даже наиболее плотное твердое тело — всего-навсего довольно слабо

*) Дюйм≈2,5 см.

связанный набор атомов. В кристаллах, образующих металл, атомы располагаются в фиксированной решетке в определенных положениях, из которых их довольно трудно сместить. Однако идеальных и полностью застроенных кристаллических решеток не существует. В них всегда имеется некоторое количество вакансий, или «дырок», в которые могут «перепрыгнуть» диффундирующие атомы. Перепрыгнув в некую вакансию, атом оставляет после себя новую вакансию. В эту вакансию может перейти соседний атом; итак, путем непрерывных перемещений атомов в решетке атом может пройти через кристалл (рис.2).

Что же заставляет атом покидать свое место в решетке и «перескакивать» в вакансию? Дело в том, что на самом деле атомы в решетках не находятся в строго фиксированных положениях. В результате теплового движения атомы непрерывно колеблются относительно некого среднего или, точнее, усредненного по различным возможным местам их нахождения положения. Амплитуда этих колебаний может заметно меняться от атома к атому и во времени. Время от времени атом настолько далеко отходит от своего положения равновесия, что может перескочить в соседнее вакантное место. Тенденция к этому, безусловно, резко возрастает, если мы подогреваем тело, заставляя тем самым атомы совершать более сильные колебания. Таким образом, скорость диффузии очень быстро возрастает с повышением температуры. Например, цинк диффундирует в медь при 300° С почти в 100 миллионов раз быстрее, чем при комнатной температуре.

В эксперименте Робертса-Аустина атомы золота при 200° С колебались достаточно энергично, чтобы начать перескакивать в вакансии решетки (то же имело место и для атомов свинца). В конце концов, если бы эксперимент проводился достаточно долго, атомы золота равномерно распределились бы по всему свинцовому цилиндру. Можно провести очень простую аналогию. Если в коробку с белыми шариками положить несколько черных шариков и коробку достаточно долго встряхивать, то черные шарики окажутся равномерно распределенными среди белых.

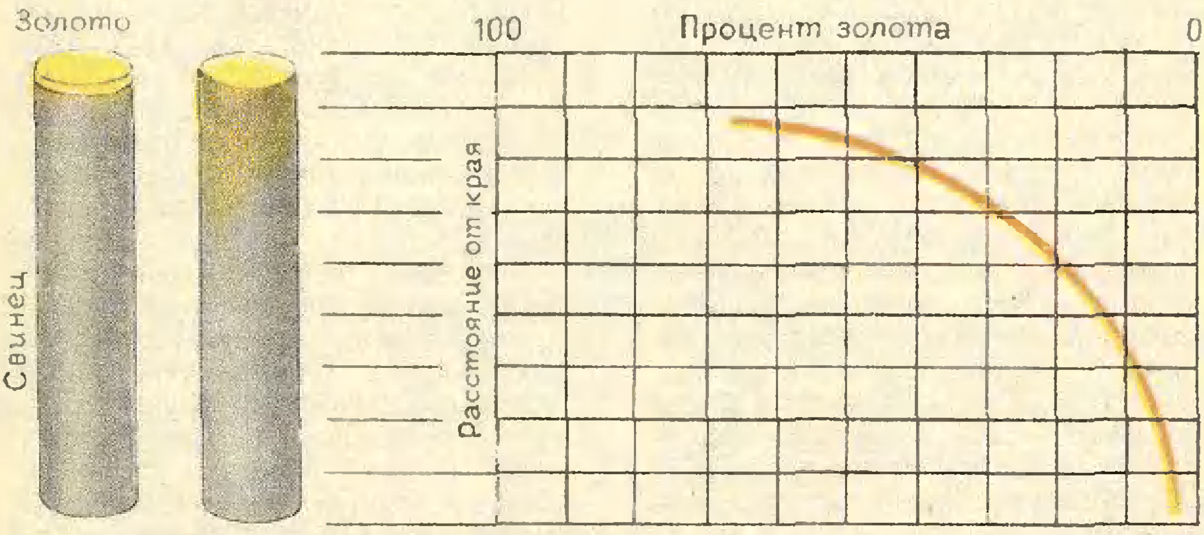


Рис. 1. Рисунок поясняет первые диффузные опыты Робертса-Аустина. Золото было наложено на чистый свинец (серый цилиндр слева) и образец подогревался. Справа изображен этот же цилиндр после того, как произошла диффузия золота в свинец и свинца в золото. Этот цилиндр был разрезан на тонкие диски для измерения количества содержащегося в них продиффундировавшего золота. Кривая, представленная на графике справа, показывает изменение концентрации золота в зависимости от расстояния от верхнего края правого цилиндра.

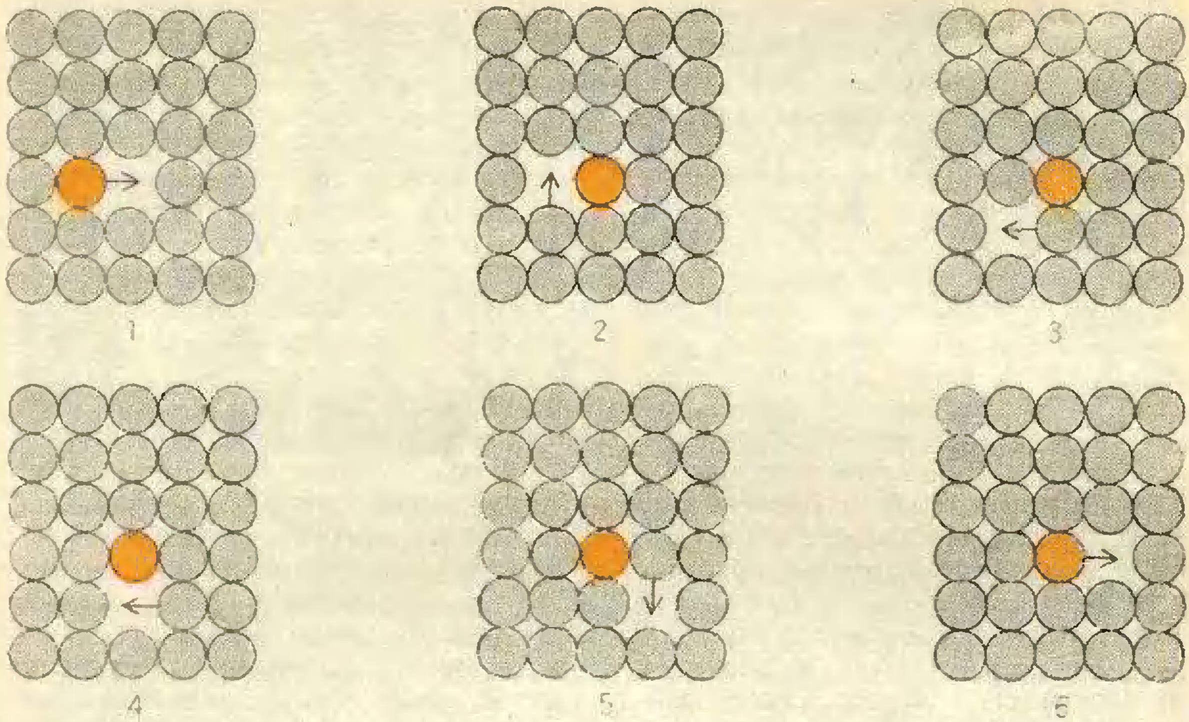


Рис. 2. В атомных плоскостях кристалла возможно наличие вакантных мест. Этот рисунок иллюстрирует, каким образом золото (желтый кружок) может диффундировать в кристалле свинца. Переход атома золота в положение, изображенное на правом нижнем рисунке, возможен при наличии всего лишь одной вакансии в решетке свинца.

Диффузия атомов в чистом металле (так называемая «самодиффузия») может быть измерена с использованием незначительной доли радиоактивных атомов этого элемента. Скажем, для того чтобы измерить скорость самодиффузии в меди, надо электроосадить небольшое количество радиоактивного изотопа меди на конец цилиндра из обычной меди и нагреть этот цилиндр до некоторой определенной температуры. После того как пройдет достаточно времени, чтобы могла произойти диффузия, образец нарезается тонкими пластинками и с помощью счетчика Гейгера измеряется радиоактивность каждого последовательного среза. Эти данные позволяют подсчитать скорость диффузии.

Металл может диффундировать в другой металл лишь при наличии вакансий в кристаллических решетках, поскольку атомы даже двух различных металлов имеют размеры примерно одного и того же порядка. Однако атомы неметаллического элемента, размеры которых много меньше, чем размеры атомов металла, могут втиснуться между атомами в металлическом кристалле. При этом диффузия не зависит от вакансий и, следовательно, происходит намного быстрее. Одним из наиболее важных примеров такого случая может служить диффузия углерода в железо.

В своей наипростейшей форме сталь является сплавом углерода и железа. Свойства стали меняются в зависимости от содержания в сплаве углерода. Сталь с небольшим содержанием углерода (скажем, порядка одной четверти процента) не очень прочна и хорошо куется. Повышение содержания углерода делает сталь более прочной, но более хрупкой. Такая деталь машины, как передаточный механизм, должна обладать твердой поверхностью, чтобы сопротивляться износу, и быть достаточно упругой в своих внутренних частях, чтобы не сломаться при внезапных ударах. Эти свойства приобретаются в процессе, называемом поверхностной закалкой. Кусок металла разогревается и выдерживается в газе, богатом углеродом, например в метане. Атомы углерода из газа медленно диффундируют в сталь (рис. 3). Через несколько часов они проникают на глубину порядка одной двенадцатой дюйма. Поверхность, или «оболочка», этого куска стали после такой обработки содержит около 1,2% углерода, тогда как внутренняя его часть содержит всего лишь четвертую часть процента (рис. 4).

Знание процессов, происходящих при диффузии атомов в металл, может помочь нам при изучении внутреннего строения металла. Вообще говоря, кусок металла состоит из маленьких кристаллов, или «зерен». Внутренняя структура отдельного зерна в высшей степени регулярна — она представляет собой почти идеальную решетку с некоторым числом вакансий или других незначительных отклонений от идеальности. Но в совокупности зерна не составляют упорядоченной структуры. Их взаимное расположение совершенно случайно. Очень редко одно зерно подгоняется своей гранью к другому так, чтобы регулярное расположение атомов в нем было как бы продолжением расположения атомов другого зерна. Обычно грани этих зерен образуют некий угол скоса, называемый «углом расхождения». Атомы, располагающиеся в пограничной области между зернами, притягиваются обоими кристаллами и в конце концов попадают внутрь одного из них. В результате в этой области создается бо́льшая разупорядоченность атомов, чем в зернах. Диффундирующие атомы намного быстрее проходят через такие пограничные области, чем через регулярную решетку самого зерна. Хорошо известно, что атомы металла диффундируют намного быстрее в мелкозернистом металле, который весь буквально изрешечен границами зерен, чем в металле, построенном из больших кристаллов.

М. Ахтер и Р. Смолуховский поставили опыт с целью выяснения влияния угла расхождения между зернами на скорость диффузии. Они приготовили цилиндр из меди, состоящий из больших нитевидных кристаллов, располагавшихся таким образом, что плоскости решеток составляли некоторые углы между собой. К концу этого медного образца был приварен сплав меди с серебром и все это было нагрето до температуры 675° С. Через 10 дней приготовили

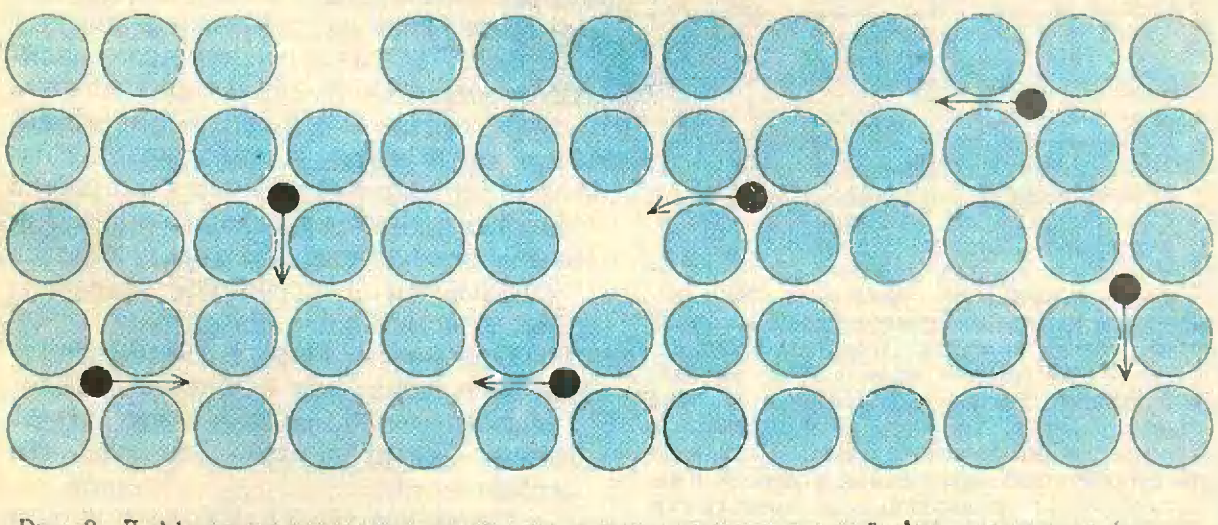


Рис. 3. Диффузия углерода в железе не зависит от наличия вакансий. Атомы углерода (черные кружки) достаточно малы, чтобы располагаться между атомами железа (голубые кружки).

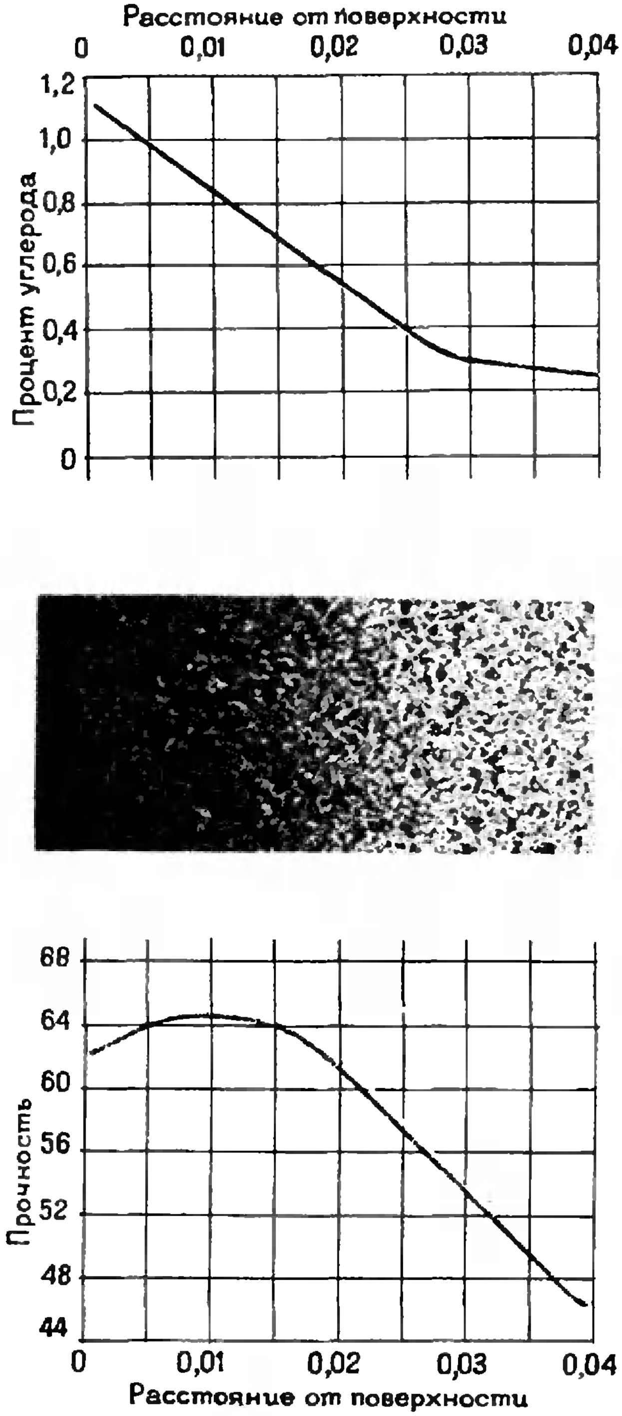


Рис. 4. Поверхностно закаленная сталь возникает в результате специфической диффузии в нее атомов углерода. В средней части рисунка приведена микрофотография, иллюстрирующая распределение углерода в куске стали, поверхность которого находилась в контакте с углеводородом. Верхняя кривая дает процентное содержание углерода в зависимости от расстояния до поверхности куска стали. Нижняя кривая характеризует прочность стали в различных частях куска.

срезы этого цилиндра и исследовали их под микроскопом, с тем чтобы оценить диффузию серебра в зависимости от расстояния до места наплава. Оказалось, что серебро быстрее диффундировало в пограничных областях между зернами, чем через внутренние области зерен. Через одни пограничные области прошло несколько больше серебра, чем через другие. Измерив углы расхождения для различных пограничных областей, Ахтер и Смолуховский обнаружили довольно закономерные связи. В случае, когда угол расхождения был меньше 20°, диффузия по границе зерна происходила не быстрее, чем через зерно. Для областей с углом расхождения свыше 20° скорость диффузии в этой области увеличивалась, достигая максимума при угле в 45°, после чего она опять уменьшалась. Угол в 45° являлся некоторым оптимальным углом расхождения. Если часть симметричной решетки поворачивается на угол в 90° по отношению ко всей решетке, то ее атомные ряды опять оказываются продолжением атомных рядов остальной решетки, и мы вновь имеем идеальную структуру.

Вакансионный механизм диффузии в металлах был твердо установлен лишь 20 лет назад экспериментами Э. Киркендайла в Уайнском университете. Киркендайл решил проверить предположение, являющееся основой всех экспериментальных и теоретических работ по диффузии в твердых телах. Полагая, что кристалл является идеальной структурой, теоретики считали, что если определенное число атомов диффундирует в одном направлении, то такое же число движется и в противоположном направлении с тем, чтобы сохранялась идеальность и непрерывность структуры кристалла.

Однако в 1942 г. Киркендайл, изучая диффузию в латуни (сплаве меди и цинка), показал, что атомы цинка диффундируют быстрее, чем атомы меди.

Отчет Киркендайла большинством читавших его был квалифицирован как экспериментальная ошибка. Для того чтобы убедить сомневающихся, Киркендайл в сотрудничестве с А. Смигелкас провели новую серию опытов. Они нанесли толстый слой меди на противоположные стороны стержня из латуни, а между медью и латунью с обеих сторон латунного стержня они поместили молибденовую проволоку, для того чтобы она фиксировала границу между медью и латунью. После этого образец был нагрет до высокой температуры. Если бы атомы меди входили в латунный стержень так же быстро, как атомы цинка выходили из него, то первоначальный размер латунного стержня не изменился бы. На это указывало бы неподвижное положение молибденовой проволоки. Но на самом деле молибденовая проволока сместилась, и смещение ее указывало на то, что латунный стержень сократился; то есть атомы цинка выходили быстрее из стержня, чем атомы меди входили в него. Под микроскопом можно было разглядеть довольно большие поры, образовавшиеся в стержне в результате появления большого числа вакансий, возникающих там, откуда из стержня быстро выходили атомы цинка.

Результаты эти были опубликованы в 1947 г., и то, что теперь носит название «эффекта Киркендайла», произвело настоящую сенсацию среди металлургов и всех исследователей, которые занимались свойствами твердых тел.

Были проверены старые опыты, поставлены новые.

Поскольку эффект Киркендайла был тут же обнаружен во многих сплавах, не осталось никаких сомнений, что он существует на самом деле.

Несомненно, исследование диффузии углубит наше понимание свойств твердого тела и всех тех инженерно-технических процессов, в которых диффузия играет основную роль.

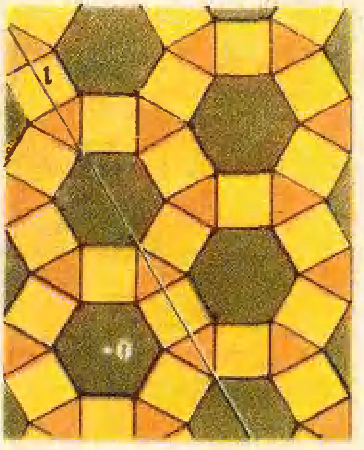
РИСУНОК ЭШЕРА

Если плоскость покрыть многоугольниками так, чтобы два многоугольника имели либо общую сторону, либо общую вершину, либо совсем не имели общих точек, то такое покрытие называется паркетом.

В нашем журнале (см. «Квант» № 3, 1970, стр. 21) мы приводили ряд задач, связанных с паркетами.

Для некоторых паркетов можно указать такие преобразования плоскости, которые переводят фигуры, составляющие паркет, друг в друга так, что сам паркет не меняется.

Для паркета, приведенного на этом рисунке, такими не меняющимися его



преобразованиями будут поворот вокруг точки на 60° и симметрия относительно прямой *l*. Какие еще не меняющие этот паркет преобразования вы можете указать?

Паркет совершенно другого рода вы видите на рисунке голландского художника Эшера (см. обложку). Этот паркет замечателен тем, что одним из не меняющих его преобразований является увеличение вдвое всех расстояний относительно центра (преобразование подобия). Поэтому, строго говоря, на рисунке изображено бесконечное число уменьшающихся ящериц. Попытайтесь придумать другие паркеты, не меняющиеся при преобразовании подобия.

Л. Лиманов

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ БИНОМИАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

А. И. Ширшов

В «Кванте» № 6 за 1970 год была опубликована статья Д. Б. Фукса и М. Б. Фукса «Арифметика биномиальных коэффициентов». В этой статье авторы предложили следующую задачу: *пусть p — простое число; выяснить, на какую степень p делится число* $C_{p^n+1}^{p^n} - C_{p^n}^{p^{n-1}}$.

Эта задача привлекла внимание многих наших читателей. Редакция получила письма от В. Г. Гайдаловича (Ташкент), С. П. Крутика (станица Старо-Щербиновская Краснодарского края), ученика 9 класса А. Меркурьева (Ленинград), В. В. Приленского (Москва) и других товарищей, которые предлагают разной степени полноты решения этой задачи.

Мы попросили видного советского алгебраиста, члена-корреспондента Академии наук СССР А. И. Ширшова подробно осветить решение поставленной задачи.

Школьникам хорошо знакомы многие научно-популярные книги и статьи по математике. Они пишутся по возможности просто, подробно и доступно, ярким и живым языком, с занимательными примерами и красочными картинками — так, чтобы заинтересовать читателя, дать ему возможность легко разобраться в материале.

А как пишутся серьезные математические статьи в солидных научных журналах? Предлагаемая вниманию читателей статья А. И. Ширшова даст представление о научном математическом стиле изложения. По своему содержанию она вполне доступна старшеклассникам, но написана специально так, как пишутся заметки, скажем, в журнал «Доклады Академии наук СССР».

Научно-математический стиль характеризуется сжатостью и лаконичностью. Как правило, изложение разбивается на отдельные ступеньки — леммы, поднимаясь по которым, мы и приходим к заключительному результату — теореме. Научная статья всегда содержит постановку задачи, объяснение вводимых понятий и используемых обозначений, ссылки на литературу. Доказательства подробно не воспроизводятся — намечается лишь их идея и общий ход рассуждений. Поэтому читать такую статью можно лишь с карандашом и бумагой в руках, восстанавливая промежуточные выкладки; понимание ее содержания требует определенного напряжения и самостоятельных размышлений.

Любителям математики, несомненно, будет интересно познакомиться с научным математическим стилем изложения.

В статье [1] высказано предположение, что числа вида $C_{p^k}^{p^{k-1}} - C_{p^{k-1}}^{p^{k-2}}$, где p — простое, делятся на достаточно высокую степень числа p. Однако доказано это утверждение лишь в случае $p=2$ (теорема 5 из [1]).

Настоящая заметка посвящена доказательству более общей теоремы.

Все рассматриваемые в дальнейшем числа m, k, t, s и т. д. натуральные, причем p — простое число. Символ (m, n), как обычно, означает наибольший общий делитель чисел m и n. Символом $[k, s]_n$ мы будем обозначать произведение всех таких натуральных чисел t, что $k \leqslant t \leqslant s$ и $(t, n)=1$; например, $[7, 19]_3 = 7\cdot 8\cdot 10\cdot 11\cdot 13\cdot 14\cdot 16\cdot 17\cdot 19$. Напомним также, что $n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-1)n$ и

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}. \qquad (1)$$

Лемма 1. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Это хорошо известная формула Архимеда, доказываемая по индукции (см. [2], стр. 16).

Лемма 2. $1^2+3^2+5^2+ \ldots +(2n-1)^2 = C_{2n+1}^3$.

Доказательство по индукции (см. [2], стр. 17).

Лемма 3. Если числа m и s таковы, что $1 \leqslant s < m$ и $(m, s) = 1$, то существует единственное число s', $1 \leqslant s' < m$, для которого $ss' - 1$ делится на m, то есть

$$ss' - 1 = mr. \qquad (2)$$

Доказательство. Достаточно убедиться, что среди чисел $1, 2, \ldots, m-1$ найдется такое единственное число s', что ss' при делении на m дает в остатке 1. Рассмотрим числа

$$s,\ 2s,\ 3s,\ \ldots,\ (m-1)\,s. \qquad (3)$$

Как известно (см. [3]), множество целых чисел разбивается на m классов, каждый из которых состоит из всех чисел, дающих при делении на m одинаковый остаток. Ни одно из чисел (3), очевидно, не принадлежит классу чисел, делящихся на m. Кроме того, никакие два из чисел (3) не могут принадлежать одному классу, ибо если бы два из чисел (3) при делении на m давали один и тот же остаток, то, вычитая из большего числа меньшее, мы получили бы число из (3), делящееся на m.

Таким образом, $m-1$ число (3) принадлежит различным классам чисел, не делящихся на m; таких классов $m-1$. Поэтому каждому из этих классов принадлежит ровно одно из чисел (3), и, в частности, одно и только одно из чисел (3) при делении на m дает в остатке 1.

Лемма 4. Если $s_1, \ldots, s_q$ — все такие различные числа, что $1 \leqslant s_i < m$ и $(m, s_i) = 1$ для $i = 1, \ldots, q$, то числа $s'_1, \ldots, s'_q$, каждое из которых обладает указанным в лемме 3 свойством, быть может, только порядком отличаются от чисел $s_1, \ldots, s_q$.

Доказательство. На основании равенства $s_i s'_i - 1 = mr_i$ (см. (2)) заключаем, что $(m, s'_i) = 1$, $i = 1, \ldots, q$. Далее, числа $s'_1, \ldots, s'_q$ все различны. В самом деле, пусть $s'_i = s'_j$, и пусть для определенности $s_i > s_j$; тогда разность чисел $s_i s'_i - 1$ и $s_j s'_i - 1$ должна делиться на m, а это невозможно в силу $(m, s'_i) = 1$ и $0 < s_i - s_j < m$.

Следовательно, $s'_1, \ldots, s'_q$ — все такие различные числа, что $1 \leqslant s'_i < m$ и $(m, s'_i) = 1$ для $i = 1, \ldots, q$. Лемма доказана.

Лемма 5. Если $(m, s) = 1$ и $\frac{a}{s(m-s)}$ — целое число, то число $\frac{a}{s(m-s)} + a(s')^2$ делится на m.

Доказательство. Используя формулу (2), имеем

$$\frac{a}{s(m-s)} + a(s')^2 = \frac{a}{s(m-s)}\{1 + ss'(m-s)s'\} =$$

$$= \frac{a}{s(m-s)}\{1 + (mr+1)(ms' - mr - 1)\} = mt,$$

где число t легко сосчитать (при необходимости).

Лемма 6. Число

$$\ldots M = [1,\ p^{k-1}]_p \left\{\frac{1}{1+(p^{k-1}-1)} + \frac{1}{2(p^{k-1}-2)} + \ldots \right.$$
$$\ldots + \frac{1}{(p-1)(p^{k-1}-p+1)} + \frac{1}{(p+1)(p^{k-1}-p-1)} + \ldots$$
$$\left. \ldots + \frac{1}{(p^{k-1}-1)\cdot 1} + 1^2 + 2^2 + \ldots + (p-1)^2 + (p+1)^2 + \ldots + (p^{k-1}-1)^2 \right\}$$

(в выражении в фигурных скобках выписываются все числа, взаимно простые с p) является целым и делится на p^{k-1}.

Доказательство. Если взять $m = p^{k-1}$, то числа

$$1, 2, \ldots, p-1,\ p+1, \ldots, p^2-1,\ p^2+1, \ldots, p^{k-1}-1 \tag{4}$$

удовлетворяют условию леммы 4. Поэтому, произведя необходимую перестановку слагаемых в фигурных скобках, число M можно представить как сумму чисел вида

$$[1,\ p^{k-1}]_p \left\{\frac{1}{s(p^{k-1}-s)} + (s')^2\right\},$$

где s принимает значения (4). Из определения символа $[1, p^{k-1}]_p$ следует, что $\frac{[1,\ p^{k-1}]_p}{s(p^{k-1}-s)}$ — целое число, а потому применение леммы 5 завершает доказательство.

Лемма 7.

$$(p^k c)! = [1,\ p^k c]_p (p^{k-1}c)!\, p^{p^{k-1}c}. \tag{5}$$

Доказательство. Произведение сомножителей в левой части равенства (5), не делящихся на p, даст, очевидно, первый сомножитель в правой части этого равенства. Легко сообразить, что в левой части равенства (5) будет, кроме того, $p^{k-1}c$ сомножителей, делящихся на p; разделив каждый из них на p, получим два следующих сомножителя в правой части равенства (5).

Лемма 8.

$$(p^k)! = [1,\ p^k]_p [1,\ p^{k-1}]_p \ldots [1,\ p^2]_p [1,\ p]_p\, p^{\frac{p^k-1}{p-1}},$$
$$(p^k - p^{k-1})! = [1,\ p^k - p^{k-1}]_p [1,\ p^{k-1} - p^{k-2}]_p \ldots$$
$$\ldots [1,\ p^2 - p]_p [1,\ p-1]_p\, p^{p^{k-1}-1}.$$

Доказательство обеих формул нетрудно провести индукцией по k с привлечением леммы 7.

Лемма 9.

$$C_{p^k}^{p^{k-1}} - C_{p^{k-1}}^{p^{k-2}} = p\, \frac{[p^k - p^{k-1},\ p^k]_p - [1,\ p^{k-1}]_p}{[1,\ p^{k-1}-p^{k-2}]_p [1,\ p^{k-2}-p^{k-3}]_p \ldots [1,\ p^2-p]_p [1,\ p-1]_p}$$

Доказательство. Выражение в правой части этого равенства получается несложными преобразованиями из левой его части, если использовать формулу (1) и лемму 8.

Лемма 10. Для любых целых чисел $\alpha, x_1, \ldots, x_n$ верно равенство

$$(\alpha + x_1)(\alpha + x_2)\ldots(\alpha + x_n) - x_1 x_2 \ldots x_n =$$
$$= \alpha x_1 x_2 \ldots x_n \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) + \alpha^2 N,$$

где N — некоторое целое число.

Доказательство. При $n=1$ равенство тривиально. Применим метод индукции:

$$(\alpha+x_1)\ldots(\alpha+x_{n-1})(\alpha+x_n)-x_1\ldots x_{n-1}x_n=$$

$$=\left\{x_1\ldots x_{n-1}+\alpha x_1\ldots x_{n-1}\left(\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_{n-1}}\right)+\alpha^2N_1\right\}\times$$

$$\times(\alpha+x_n)-x_1\ldots x_n=\alpha x_1\ldots x_{n-1}+\alpha x_1\ldots x_n\left(\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_{n-1}}\right)+$$

$$+\alpha^2x_1\ldots x_{n-1}\left(\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_{n-1}}\right)+\alpha^3N_1+\alpha^2N_1x_n=$$

$$=\alpha x_1\ldots x_{n-1}x_n\left(\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_{n-1}}+\frac{1}{x_n}\right)+\alpha^2N,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 11.

$$[p^k-p^{k-1},p^k]_p-[1,\ p^{k-1}]_p=\frac{1}{2}p^{2k-1}(p-1)[1,\ p^{k-1}]_p\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{1\cdot(p^{k-1})}+\ldots+\frac{1}{(p-1)(p^{k-1}-p+1)}+\frac{1}{(p+1)(p^{k-1}-p-1)}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{1}{(p^{k-1}-1)\cdot 1}\right\}+p^{4k-2}Q,$$

$$p>2;$$

$$[2^k-2^{k-1},\ 2^k]_2-[1,\ 2^{k-1}]_2=2^{2k-2}[1,\ 2^{k-1}]_2\left\{\frac{1}{1\cdot(2^{k-1}-1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3\,(2^{k-1}-3)}+\ldots+\frac{1}{(2^{k-1}-1)\cdot 1}\right\}+2^{4k-2}Q$$

(в выражениях в фигурных скобках выписываются все числа, взаимно простые с p и 2 соответственно).

Доказательство. Очевидно, что

$$(p^k-p^{k-1}+s)(p^k-s)=p^{2k-1}(p-1)+s(p^{k-1}-s).$$

Распишем теперь произведение $[p^k-p^{k-1},\ p^k]_p$ и, используя это равенство, перемножим попарно сомножители, равноудаленные от концов:

$$[p^k-p^{k-1},\ p^k]_p=(p^k-p^{k-1}+1)(p^k-p^{k-1}+2)\ldots$$

$$\ldots(p^k-p^{k-1}+p-1)(p^k-p^{k-1}+p+1)\ldots(p^k-2)(p^k-1)=$$

$$=\{p^{2k-1}(p-1)+1\,(p^{k-1}-1)\}\{p^{2k-1}(p-1)+2\,(p^{k-1}-2)\}\ldots$$

$$\ldots\{p^{2k-1}(p-1)+(p-1)(p^{k-1}-p+1\}\{p^{2k-1}(p-1)+$$

$$+(p+1)(p^{k-1}-p-1)\}\ldots\{p^{2k-1}(p-1)+$$

$$+\frac{1}{2}(p^{k-1}-1)\frac{1}{2}(p^{k-1}+1)\}.$$

Получившееся выражение преобразуем согласно лемме 10, взяв $\alpha=$ $=p^{2k-1}(p-1)$ и в качестве x_i выбрав числа

$$1\cdot(p^{k-1}-1),\,2\,(p^{k-1}-2),\ldots,\frac{1}{2}(p^{k-1}-1)\frac{1}{2}(p^{k-1}+1).$$

Заметив, что

$$1(p^{k-1}-1)\cdot 2(p^{k-1}-2)\dots\frac{1}{2}(p^{k-1}-1)\frac{1}{2}(p^{k-1}+1)=[1,\ p^{k-1}]_p,$$

можем записать:

$$[p^k-p^{k-1},\ p^k]_p=[1,\ p^{k-1}]_p+p^{2k-1}(p-1)[1,\ p^{k-1}]_p\cdot\frac{1}{2}\left\{\frac{2}{1(p^{k-1}-1)}+\dots\right.$$

$$\left.\dots+\frac{2}{\frac{1}{2}(p^{k-1}-1)\frac{1}{2}(p^{k-1}+1)}\right\}+p^{4k-2}Q=$$

$$=[1,p^{k-1}]_p+\frac{1}{2}p^{2k-1}(p-1)[1,\ p^{k-1}]_p\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{1(p^{k-1}-1)}+\dots+\frac{1}{(p^{k-1}-1)1}\right\}+p^{4k-2}Q,$$

что и доказывает лемму при $p>2$.

Случай $p=2$ рассматривается по такой же схеме.

Лемма 12.

$$1^2+2^2+\dots+(p-1)^2+(p+1)^2+\dots+(p^{k-1}-1)^2=$$

$$=\frac{1}{6}p^{k-1}(p^{k-1}+1)(2p^{k-1}+1)-p^kL,\qquad p>2$$

(в левой части выписываются все числа, взаимно простые с p).

Доказательство. Достаточно представить левую часть в виде

$$\sum_{i=1}^{p^{k-1}}i^2-p^2\sum_{i=1}^{p^{k-2}}i^2$$

и обе суммы вычислить согласно лемме 1.

Теорема. Справедливы следующие равенства:

$$C_{p^k}^{p^{k-1}}-C_{p^{k-1}}^{p^{k-2}}=p^{3^{k-1}}R,\quad p>3;$$

$$C_{3^k}^{3^{k-1}}-C_{3^{k-1}}^{3^{k-2}}=3^{3^{k-2}}S;$$

$$C_{2^k}^{2^{k-1}}-C_{2^{k-1}}^{2^{k-2}}=2^{3^{k-3}}T,$$

где $k\geqslant3$, а R, S, T — некоторые целые числа.

Доказательство теоремы осуществляется последовательным использованием лемм 9, 11, 6, 12, 2.

Замечание. Из доказательства теоремы можно дополнительно увидеть, что указанные в теореме числа S и T не делятся на 3 и 2 соответственно. Автору неизвестно, как обстоит дело в общем случае — делится или не делится на p число R.

Цитированная литература

1. Фукс Д. Б., Фукс М. Б., Арифметика биномиальных коэффициентов. «Квант» № 6, 1970, стр. 17—25.
2. Соминский И. С., Метод математической индукции. М., Физматгиз, 1961.
3. Егоров А. А., Сравнения по модулю и арифметика остатков. «Квант» № 5, 1970, стр. 27—33.

Примечание редакции. Как сообщил нам читатель Ю. Трахтман (Днепропетровск), ему удалось получить некоторые условия, при которых числа R, S, T, фигурирующие в теореме, не делятся на p, 3, 2 соответственно. Однако этот результат формулируется в терминах, незнакомых школьникам и доказывается неэлементарными средствами.

С. А. Кривошлыков

В редакцию нашего журнала пришло письмо.

«Я купил волчок в магазине «Игрушка». При запуске он переворачивается и начинает вращаться на рукоятке.

Меня интересует, какие законы физики лежат в основе его движения? Как рассчитать размеры волчка?

Ученик 10 класса Титаревской средней школы В. Ткачев»

Нам кажется, что ответ на это письмо будет интересен многим нашим читателям. Ниже мы публикуем статью ученика 10 класса школы № 45 г. Киева Сергея Кривошлыкова, содержащую ответы на поставленные вопросы. Это несколько переработанный его доклад на IV научной конференции школьников Киева.

Волчок, о котором пишет Ткачев (его часто называют волчком Томсона), представляет собой шарик со срезанной верхушкой. В центре среза находится ножка — ось, за которую волчок раскручивается (рис. 1*).

Если волчок раскрутить шариком вниз, то он, вращаясь, наклоняется, ложится набок, касается своей ножкой поверхности стола, а затем вскакивает на нее и продолжает спокойно вращаться на ножке шариком кверху (рис. 2). С уменьшением скорости вращения волчок опять возвращается в первоначальное положение. Такое поведение волчка кажется на первый взгляд очень странным. Вскакивая на ножку, волчок увеличивает свою потенциальную энергию. Что заставляет его это делать? Ведь известно, что всякая система стремится к минимуму потенциальной энергии. Рассмотрим явления, связанные с вращением твердого тела вокруг своей оси.

Возьмем большой маховик (например, велосипедное колесо), который может свободно вращаться вокруг жесткой горизонтальной оси.

* Размеры приведены в *мм*.

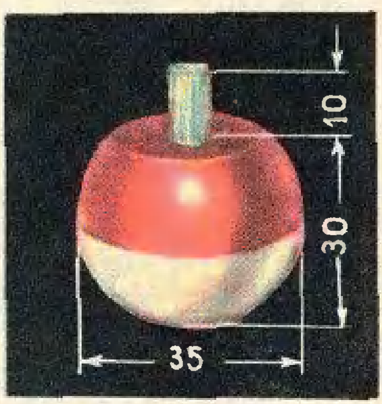


Рис. 1.

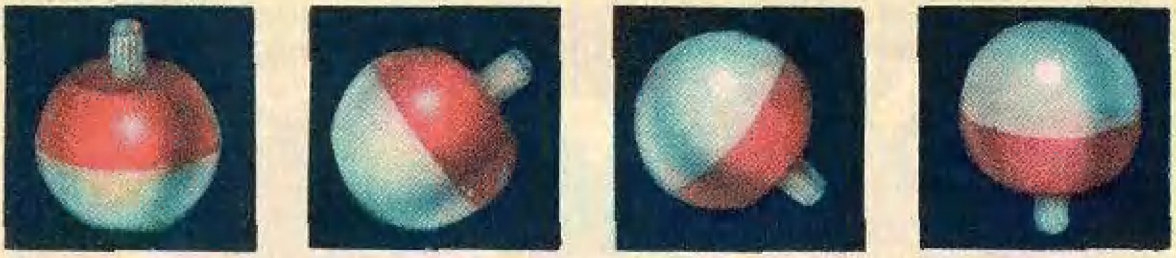


Рис. 2.

Раскрутив маховик, попробуем, взявшись руками за ось, повернуть ее в вертикальной плоскости (как показано зелеными стрелками на рисунке 3). Мы почувствуем значительное сопротивление этому повороту. Вращающийся маховик стремится сохранить свой момент количества движения (его величину и направление, а значит, угловую скорость вращения и направление оси вращения *). Приложим большее усилие. Как ни странно, но мы не получим предполагаемого поворота. Ось повернется не в вертикальной плоскости, как мы хотели, а в горизонтальной, так, как показано красными стрелками.

Это, впрочем, неожиданно лишь на первый взгляд. Как мы знаем, при вращательном движении тел вектор момента внешних сил равен скорости изменения вектора момента количества движения: $\mathbf{M} = \frac{\Delta(I\omega)}{\Delta t}$ (аналогично тому, как при прямолинейном движении тела внешняя сила, приложенная к телу, равна скорости изменения импульса тела: $\mathbf{F} = \frac{\Delta(m\mathbf{v})}{\Delta t}$). Поэтому вектор $\Delta(I\omega)$ изменения момента импульса маховика за малое время Δt параллелен вектору $\mathbf{M}$ момента сил $\mathbf{F}$ (рис. 4), то есть лежит в горизонтальной плоскости. В этой же плоскости лежит и новый вектор момента импульса. Причем, так как вектор $\mathbf{M}$ перпендикулярен вектору $(I\omega)$, то изменение момента импульса $\Delta(I\omega)$ перпендикулярно самому вектору $I\omega$ момента импульса. (На рисунке 4 вектор $\Delta(I\omega)$ сделан непропорционально большим.) Поэтому момент импульса в нашем случае не изменяется по величине и меняет лишь направление. Это означает, что не меняется и угловая скорость вращения маховика вокруг его горизонтальной оси.

Если так же поворачивать ось в том случае, когда маховик вращается в противоположную сторону, то ось опять повернется в горизонтальной плоскости, но в противоположную сторону.

---

*) См. статью А. К. Кикоина «Вращательное движение тел» («Квант» № 1, 1971).

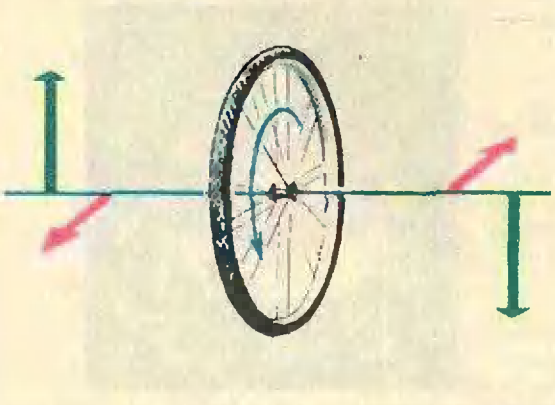


Рис. 3.

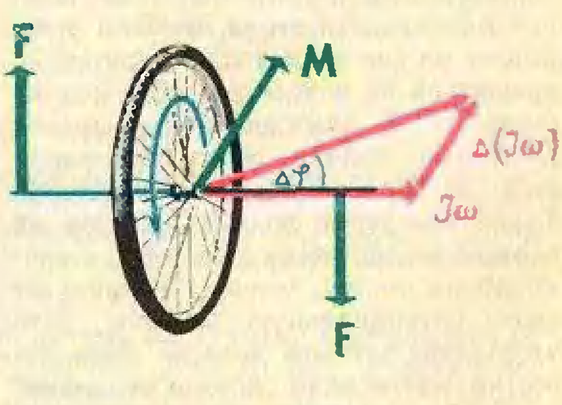


Рис. 4.

Отклонение оси быстро вращающегося тела в направлении, перпендикулярном плоскости действия поворачивающих сил, называется прецессией.

Если момент внешних сил постоянен, то и скорость изменения вектора $I\omega$ постоянна $\left(\frac{\Delta(I\omega)}{\Delta t} = \text{const}\right)$. В этом случае ось маховика вращается с некоторой угловой скоростью Ω, которую называют угловой скоростью прецессии. Чем больше момент сил, приложенных к маховику, тем больше угловая скорость прецессии

$$\Omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta(I\omega)}{I\omega}}{\Delta t} = \frac{\Delta(I\omega)}{\Delta t}\,\frac{1}{I\omega} = \frac{M}{I\omega}$$

(так как угол $\Delta\varphi_{\text{мал}}$, то $\Delta\varphi = \frac{\Delta(I\omega)}{I\omega}$).

Ясно также, что чем быстрее вращается маховик (чем больше ω и $I\omega$), тем меньше угловая скорость прецессии при одном и том же моменте внешних сил (так как тем меньше угол $\Delta\varphi$ за время Δt (см. рис. 4).

Рассмотрим вращающийся обыкновенный дискообразный волчок. В начале вращения, когда угловая скорость велика, его ось практически вертикальна. Затем угловая скорость вращения под действием сил трения в точке A и о воздух уменьшается, и волчок начинает прецессировать вокруг вертикальной оси, описывая коническую поверхность с вершиной A (рис. 5). Почему это происходит?

Рассмотрим силы, действующие на волчок. Сила тяжести P и сила реакции опоры N создают момент сил, стремящийся опрокинуть волчок. Это приводит к тому, что ось волчка смещается перпендикулярно плоскости действия этих сил, то есть прецессирует. Направление смещения оси показано на рисунке 5 красной стрелкой. При прецессии ось волчка описывает коническую поверхность с вершиной в точке A.

Следует заметить, что прецессия оси волчка существовала и в самом начале его вращения из-за неизбежного толчка, который мы ему сообщили при раскручивании (идеально раскрутить волчок невозможно), но эта прецессия была небольшой.

Кроме момента пары сил P и N, на волчок действует еще момент силы трения $F_{\text{тр}}$ относительно центра масс волчка. На рисунке 6 показано увеличенное острие волчка. Если точка касания острия с поверхностью не лежит на оси вращения волчка (волчок наклонился), то момент силы трения лежит в плоскости рисунка и направлен к вертикали. Изменение момента импульса волчка, обязанное моменту силы трения, тоже направ-

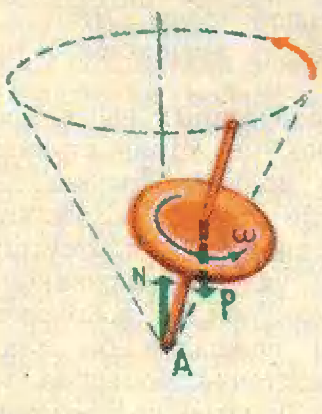


Рис. 5.

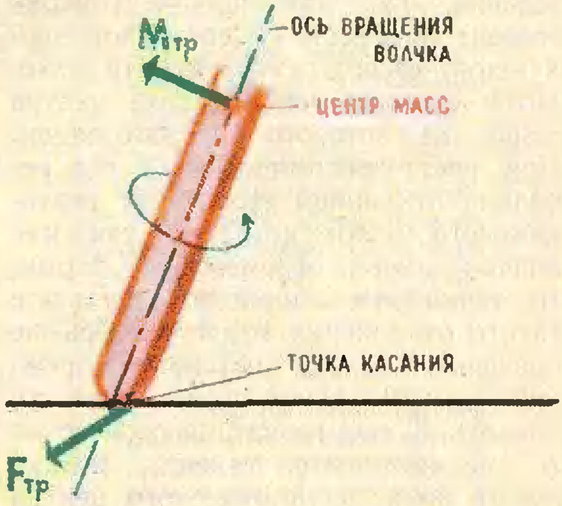


Рис. 6.

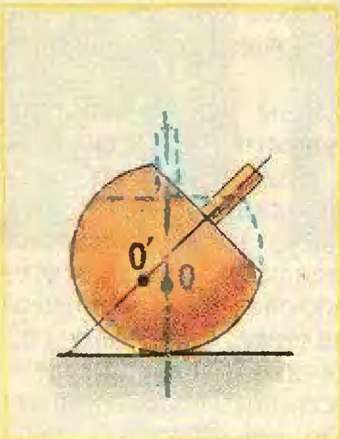


Рис. 7.

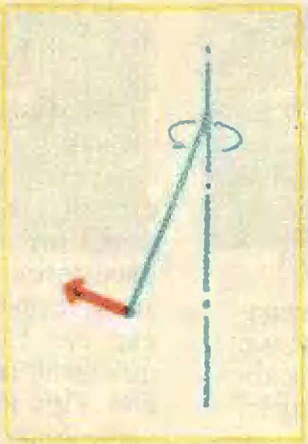


Рис 8.

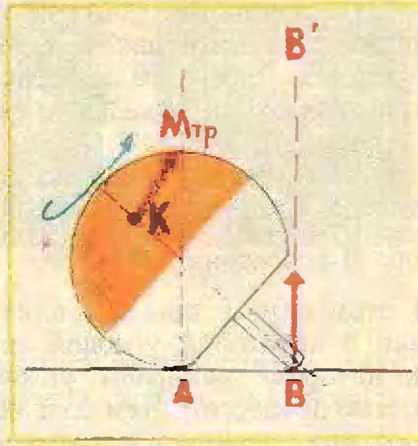


Рис. 9.

лено к оси; поэтому благодаря трению ось волчка стремится занять вертикальное положение. В этом легко убедиться, если запустить волчок наклонно. Через некоторое время его ось встанет вертикально. Момент сил трения направлен к вертикали (правило буравчика), следовательно, изменение момента количества движения волчка тоже направлено к вертикали, а ось волчка стремится стать перпендикулярно плоскости вращения.

Итак, на наклонный волчок действуют два момента сил: момент пары сил — реакции опоры и силы тяжести и момент силы трения. Движение волчка всегда происходит при наличии этих двух моментов.

Вернемся теперь к волчку Томсона и попробуем объяснить его поведение. Так как волчок Томсона состоит из сферы со срезанной верхушкой, то его центр тяжести находится ниже геометрического центра шара, из которого он изготовлен. При раскручивании волчка мы невольно отклоняем его ось от вертикального положения. Но так как волчок имеет сферическую форму, то точка его опоры в результате такого отклонения меняется. Ось же вращения волчка останется прежней — вертикальной и не будет совпадать с его геометрической осью. А так как центр тяжести волчка лежит ниже геометрического центра шарика, то в результате такого отклонения его центр тяжести уже не будет лежать на оси вращения (рис. 7). Он займет положение O' и будет вращаться вместе с волчком около вертикальной оси. При вращении с большой угловой скоростью центр тяжести волчка будет подниматься точно так же, как поднимается шарик на нити, если нить раскручивать так, как показано на рисунке 8.

Волчок не задерживается в боковом положении, а по инерции проскакивает его, касаясь своей ножкой плоскости, на которой он вращается (рис. 2). Как только это произойдет, точка опоры волчка перескочит из точки A в точку B (рис. 9), и волчок, вращаясь около своей оси, начнет прецессировать около оси BB'. Иными словами, волчок Томсона будет вести себя как «обыкновенный» волчок. Под действием момента силы трения он совместит свою ось с вертикальной осью BB' и будет продолжать вращаться шариком кверху.

Из приведенных выше рассуждений видно, что столь странным поведением волчка Томсона мы обязаны силе трения. Действительно, если бы сила трения отсутствовала, то волчок, ударившись ножкой о плоскость, вернулся бы в боковое положение и вращался бы так, пока имел достаточно большую угловую скорость. А затем под действием момента силы тяжести вернулся бы в исходное положение (рис. 2).

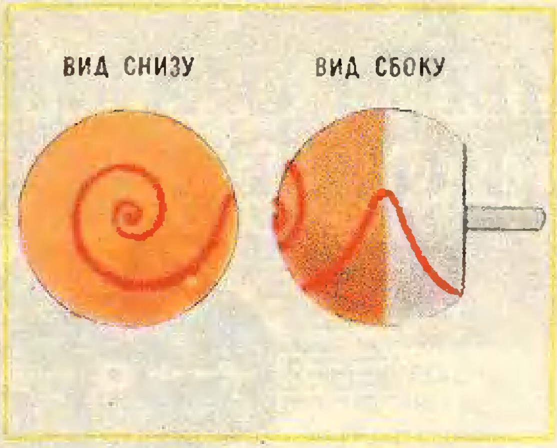


Рис. 10.

С волчком Томсона можно провести интересный опыт. Если волчок запустить по поверхности, покрытой тонким слоем пудры, то пудра оставит на поверхности волчка след — траекторию точки касания волчка с плоскостью. Этот след показан на рисунке 10. Линия на волчке закручивается спиралью, но на экваторе шарика волчка она начинает раскручиваться в обратную сторону. Почему это происходит? Закон сохранения момента количества движения требует, чтобы волчок вращался в одну и ту же сторону, как в исходном положении, так и в перевернутом. Пусть мы запустили волчок по часовой стрелке (если смотреть на него сверху). Если бы волчок перевернулся, не переставая вращаться вокруг своей оси, то в перевернутом состоянии он вращался бы уже против часовой стрелки. Поэтому, для того чтобы выполнялся закон сохранения момента количества движения, волчок в какой-то момент времени должен прекратить вращаться вокруг оси, проходящей через его ножку, а затем начать вращаться в обратную сторону. Судя по рисунку 10, это и происходит в тот момент, когда волчок лежит на боку.

Что касается расчетов размеров волчка, то он может быть любым, но таким, чтобы центр его масс не совпадал с геометрическим центром сферы, из которой он изготовлен.

ЗАДАЧИ О ШАХМАТНОМ ТУРНИРЕ

1. В турнире*) участвовало 8 шахматистов. Все они набрали разное число очков, причем второй призер набрал столько же, сколько набрали все шахматисты, занявшие места с 5-го по 8-е. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие 3-е и 5-е места?

2. В турнире играли два ученика 7-го класса и несколько учеников 8-го. Семиклассники набрали вместе 8 очков, а все восьмиклассники набрали поровну. Сколько восьмиклассников могло участвовать в турнире?

3. В турнире участвовало n шахматистов — гроссмейстеры и мастера. После окончания турнира оказалось, что каждый участник набрал ровно половину своих очков в партиях против мастеров. Доказать, что $\sqrt{n}$ — целое число.

4. Шахматист играет для тренировки не менее одной партии в день и, чтобы не переутомиться, не более 12 — в неделю. Доказать, что можно найти несколько последовательных дней, в течение которых он сыграет ровно 20 партий.

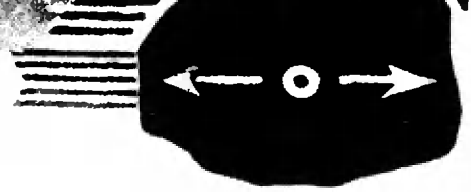
5. Каждый шахматист в турнире половину своих очков набрал во встречах с участниками, занявшими три последних места. Сколько человек участвовало в турнире?

6. Доказать, что по окончании турнира его участников можно перенумеровать так, что окажется, что ни один участник не проиграл следующему непосредственно за ним.

---

*) Мы предполагаем, что шахматисты играют друг с другом по одной партии, то есть турнир проводится в один круг.

Межзвездные корабли на гравитационных рессорах



(ФАНТАСТИЧЕСКИЙ ПРОЕКТ)

И. А. Воробьев

Даже до самых близких звезд очень далеко. Еще дальше до других галактик. От галактики Туманность Андромеды свет добирается до нас около миллиона лет.

Мыслимо ли слетать к ней, скажем, за неделю? По земному времени так скоро до Андромеды не добраться. Свет, и тот идет годы и годы. А быстрее света корабль двигаться не может. Другое дело — по времени самого межзвездного путешественника, если его корабль летит с достаточно большой скоростью. При движении с большими скоростями происходит замедление решительно всех процессов в одинаковое число раз. Чем больше скорость, тем больше это замедление.

Как же надо лететь, если мы хотим за неделю совершить путешествие к Туманности Андромеды? Расстояние в 10^6 световых лет надо преодолеть за $\frac{1}{52}$ года. Расчеты по формуле теории относительности дают невероятный результат: необходимо лететь с постоянным ускорением $a = 700\,g$! (g — ускорение свободного падения).

Но как быть с перегрузками? При ускорении $700\,g$ наш вес увеличится в 700 раз! Все равно, что по звездолетчику проехаться асфальтовым катком. Наша кровь тоже потяжелеет в 700 раз. А она должна циркулировать по всему телу. С такой значительной нагрузкой сердце не справится. Пилоты при резких виражах иногда временно слепнут — кровь не поднимается к мозгу, хотя здесь ускорение a не превосходит $5 \div 10\,g$. Можно лечь, чтобы уменьшить нагрузку на сердце, — тогда нужно поднимать кровь на меньшую высоту. Но даже десятикратную перегрузку в таком положении можно выдержать лишь три-пять минут.

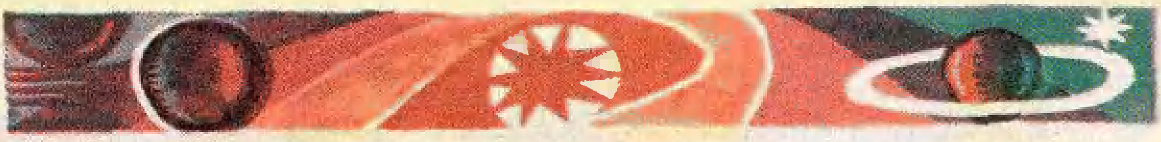
Нельзя ли придумать лучший способ, который позволит двигаться с любым ускорением без всяких перегрузок?

Нельзя ли предложить конструкцию корабля, избавляющую астронавта от каких-либо перегрузок?

Прежде чем броситься на врага, полезно его изучить.

Откуда берется вес?

Если встать на пружинные весы, стрелка отклонится от нулевого положения. Земля притягивает тело, а так как относительно весов мы неподвижны, то эта сила должна уравновеситься упругой силой пружин. Стрелка покажет нам вес $P = mg$ (m — масса). Пусть мы измеряем вес (показания пружинных весов) в лифте, поднимающемся с ускорением. Стрелка покажет $m\,(a+g)$, появляется пере-



грузка: упругая сила не только уравновешивает притяжение Земли, но и придает телу ускорение a. Если же лифт свободно падает, то вес будет нулевым — все тела падают с одинаковым ускорением, наше перемещение будет точно таким же, как перемещение пружины, и пружина не сожмется. Взяв яблоко, мы не почувствуем его веса, оно не давит на руку, а свободно падает вместе с рукой.

Итак, вес $P=m(a+g)$, если a направлено вверх. Когда a направлено в ту же сторону, что и ускорение свободного падения g и $|a| = |g|$ (свободное падение), наступает состояние невесомости. Это состояние испытывают космонавты при полете с выключенными двигателями, ибо тогда они как раз и движутся с ускорением свободного падения.

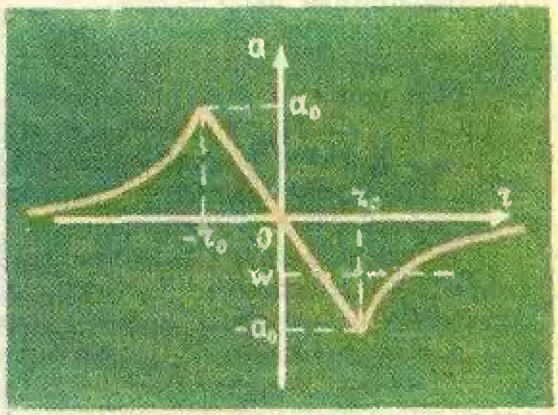
Важно, что вес обусловлен и ускорением, и гравитационным притяжением. Появилась возможность компенсировать одно другим. Создать невесомость можно потому, что ускорение свободного падения не зависит ни от массы, ни от вещества падающих тел. Это свойство открыл еще Галилей. Но и сейчас исследователи порой не удерживаются от соблазна проверить это свойство. В 1964 году Ролл, Кротков и Дикке установили равенство ускорений для золота и алюминия с точностью до 0,00000000001!

С невесомостью мы встречаемся в кабине свободно падающего лифта. Там нет никаких перегрузок. Возьмем массивное тело, создающее ускорение свободного падения a, по величине равное желаемому ускорению путешествия. Установим на нем двигатели, способные обеспечить как раз это ускорение. Путешественник со всеми удобствами размещается в отдельной кабине, свободно падающей на это тело. Кабина падает с ускорением a, но двигатели работают, и тело уходит с тем же ускорением.

При нулевой начальной скорости расстояние между кабиной и массивным телом будет неизменным. В свободно падающей кабине — невесомость, но в то же время она несется с необходимым ускорением.

Но долетев до половины пути, нужно начать тормозить. Согласование ускорения тела и ускорения свободного падения кабины нарушится, и кабина врежется в массивное тело. Кроме того, существует опасность отстать или упасть на тело при любом изменении ускорения корабля (массивного тела). Значит, надо лучше продумать конструкцию корабля.

Просверлим в направлении ускорения шахту через центр массивного тела, которому придали форму шара. Ускорение свободного падения будет



меняться в зависимости от расстояния до центра шара. Обозначим ускорение на поверхности шара a_0, радиус шара r_0. Построим график для ускорения a на расстоянии r от центра шара (см. рисунок) *).

На расстояниях от $-r_0$ до r_0 (то есть внутри шара) ускорение свободного падения изменяется по закону $a = a_0 \frac{r}{r_0}$, а при $r < -r_0$ и $r > r_0$

*) Подробно эта задача разобрана в статье Я. А. Смородинского «Похожие движения». Зависимость силы притяжения тела от расстояния до центра шара была найдена при решении задачи Ф43 («Квант» № 5, 1971).

(вне шара) ускорение $a = -a_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^2$. Отрицательный знак ускорения означает, что оно всегда направлено к центру шара.

Когда шар движется без ускорения, его центр является точкой устойчивого равновесия. При малых отклонениях возникает возвращающая сила. При ускорении корабля w, меньшем a_0, всегда найдется положение кабины, при котором ускорение свободного падения равно w. Чтобы найти по графику это положение, проведем прямую ниже оси r на расстоянии w. Появятся две точки пересечения, их ординаты дадут искомые расстояния. Точка внутри шахты соответствует устойчивому равновесию. При малом изменении ускорения корабля кабина будет колебаться около новой точки равновесия, сама следя за согласованностью ускорений, причем все это время в кабине будет сохраняться невесомость.

При торможении с тем же ускорением точка равновесия будет с другой стороны от центра шара.

Мы предложили радикальный способ борьбы с перегрузками. Какие «если» стоят на пути реализации этого фантастического проекта?

Законам природы он не противоречит. Основные трудности заключаются в источнике энергии: это общая трудность любого проекта межзвездного корабля. Но где взять массивное тело? Можно взять или тело очень большого объема или использовать вещество очень большой плотности. Чтобы легче было об этом размышлять, разберитесь в упражнениях, помещенных ниже.

Упражнения

1. Если реактивный самолет пикирует вниз с ускорением 1,5 g, то чему равен вес летчика и куда направлена сила веса?

2. Найдите отношения радиуса и массы шара той же плотности, что и Земля, к радиусу и массе Земли, если ускорение на поверхности шара составляет 1000 g.

А если плотность шара в 10^6 раз больше земной? (При некоторых физических условиях, например, на звездах, называемых белыми карликами, плотность вещества значительно превышает привычные нам значения.)

ЭКЗОТИЧЕСКИЕ АТОМЫ

Мы все привыкли к тому, что атом построен так: в центре атома находится ядро, вокруг которого вращается Z электронов. Ядро имеет заряд Ze ($-e$ — заряд электрона), так что атом в целом нейтральный.

Лет 15 назад было открыто, что частицы μ- и π-мезоны (массы которых в 205 и 280 раз больше электронной массы соответственно) могут захватываться на орбиту и вращаться вокруг ядра, совсем как электрон, только на расстоянии в среднем в 205 или 280 раз меньшем.

Потом было обнаружено, что такой же эффект можно наблюдать и с более тяжелым K-мезоном, масса которого в 990 раз больше массы электрона. Соответственно он приближается к ядру на расстояние в 990 раз более близкое.

Летом 1970 года были открыты еще более экзотические атомы. На орбиту в атоме таллия «сел» антипротон. Правда, спустя очень короткое время (около 10^{-10} *сек*) он исчез — аннигилировал с одним из нуклонов в ядре, но все же можно было зарегистрировать рентгеновские лучи, которые он испускал, прыгая с орбиты на орбиту в таком атоме.

Кроме антипротона в роли «заменителя» электронов в атоме выступила еще одна частица — отрицательный сигма-гиперон Σ^-, масса которого больше протона и составляет 2395 масс электрона. Его (вернее, спектр рентгеновских лучей, который он испускает) обнаружили в атомах серы, хлора и цинка. Примерно через $1{,}5 \cdot 10^{-10}$ *сек* Σ^--гиперон распался на нейтрон и отрицательный π-мезон. Но даже за такое малое время можно рассчитывать получить сведения о том, как эта частица взаимодействует с ядром.

Я. А. Смородинский

ИСКУССТВЕННЫЕ МИРАЖИ

Р. Вуд

Имя замечательного американского физика Роберта Вуда известно всем физикам и всем любителям физики. Это связано с тем, что он был не только основателем современной физической оптики, не только виртуозом и чародеем эксперимента, но и любителем эффектного опыта и блестящим демонстратором.

Ниже мы помещаем его статью с описанием эффектных демонстрационных опытов. Она была опубликована в журнале «Philosophical Magazine» в 1899 году. Публикация подготовлена Л. А. Савиной.

Профессор Эверетт, обсуждая явление миража («Nature» 19 ноября 1874 г.), показал, что для образования резко очерченных миражей необходимо наличие горизонтальной плоскости с максимальным коэффициентом преломления. При движении вверх и вниз от этой плоскости оптическая плотность уменьшается пропорционально расстоянию от нее.

Горизонтальный или почти горизонтальный луч отклоняется к плоскости с максимальной плотностью и пересекает ее *). Затем он меняет свою кривизну и снова отклоняется к плоскости, которую пересекает снова и снова, проходя по траектории, близкой к синусоиде.

Наблюдая траекторию луча света в сосуде, наполненном раствором соли (оптическая плотность раствора увеличивалась с глубиной), я подумал, что, изменяя коэффициент преломления жидкости, можно было бы заставить луч перемещаться по синусоиде.

В результате получились довольно красивые опыты, которые можно показывать в аудитории. По-видимому, стоит их опубликовать, хотя, как я узнал позже, подобные эксперименты были уже описаны Винером.

Я сделал сосуд из толстого листового стекла длиной приблизительно 50 *см*, высотой 10 *см* и шириной 2 *см*. На 3 *см* наполнил его концентрированным раствором квасцов, а сверху налил слой водного раствора спирта ($\sim$10%) толщиной в 3 *см*. (Добавка спирта повышает коэффициент преломления воды.) Доливать воду в сосуд нужно осторожно при помощи пипетки, форма которой показана на рисунке 1.

В качестве жидкости с высоким коэффициентом преломления, удельный вес которой больше удельного веса воды, но меньше удельного веса раствора квасцов, я использовал смесь

*) О природе миражей рассказывается в статье Г. Я. Мякишева «Принцип Ферма и законы геометрической оптики» («Квант» № 11, 1970).

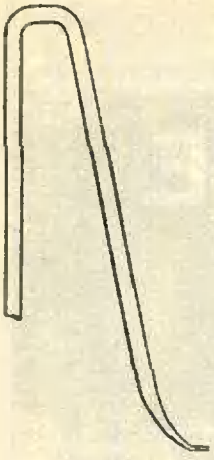


Рис. 1.

глицерина с 85%-ным спиртом. Правильная пропорция смеси легко находится экспериментально. Смесь должна плавать на растворе квасцов и тонуть в воде. Вводится она между двумя слоями жидкостей при помощи пипетки. Толщина слоя — около 3 *см*.

Все три раствора нужно подкислить несколькими каплями серной кислоты и добавлением хинина сделать флюоресцирующими. Разница в поверхностном натяжении между слоями может причинить неприятности: когда пипетка вынимается, она может потянуть за собой смесь глицерина и спирта вверх через воду. При этом произойдет полное разрушение слоев. Чтобы этого не происходило, к воде добавляют спирт; можно добавлять воду к глицериновой смеси. Пипетку нужно выводить медленно и очень наклонно, так, чтобы тяжелая жидкость могла быть смыта до того, как трубка достигнет поверхности.

Теперь можно осторожно встряхнуть сосуд, чтобы ускорить диффузию, после чего нужно оставить его в покое на несколько минут, пока не исчезнут четкие границы между слоями.

Если теперь параллельный пучок света пустить наклонно в один конец сосуда, то будет видно, как он перемещается по жидкости очень красивой голубой волной, кривизна которой меняется в зависимости от угла падения луча. Лучи света, движущиеся по синусоиде, показаны на рисунках 2 и 3.

Профессор Эверетт в своей статье показал, что параллельный или слегка расходящийся луч, входящий в среду, описанную выше, будет сжиматься в линию, а затем последовательно расходиться и сходиться (рис. 4).

Я никогда не видел описания этого эксперимента, хотя Экснер утверждал, что глаза некоторых насекомых работают аналогичным способом: зрительный орган состоит из прозрачного цилиндрического тела, ось которого имеет высокий коэффициент преломления; по мере отклонения от оси оптическая плотность непрерывно уменьшается.

Красивые миниатюрные пустынные миражи, которые я видел на городских тротуарах Сан-Франциско, навели меня на мысль воспроизвести это явление в миниатюре в аудитории. Хотя я уже кратко описал опыты такого типа, сейчас повторю описание более подробно.

Три или четыре совершенно плоских металлических пластины (каждая длиной приблизительно 1 *м* и шириной 30 *см*) монтируются конец к концу на железных треножниках и аккуратно выравниваются. Пластины должны быть достаточно толстыми (скажем, 0,5 *см*), чтобы не коро-

Рис. 2.

Рис. 3.

Рис. 4.

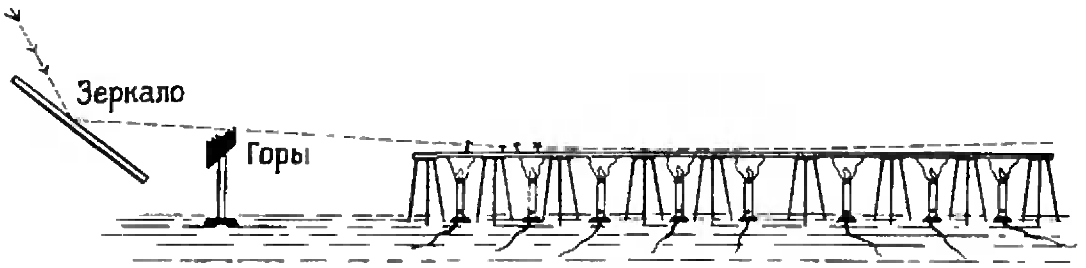


Рис. 5.

биться от нагревания. Я весьма успешно использовал гипсовые пластинки, отлитые из алебастра (обожженного гипса) на толстом листовом стекле, хотя эти пластинки хрупкие и недолговечные. Возможно, очень хороши были бы пластинки из шифера (кровельного сланца), так как они выдерживают довольно сильный нагрев и их можно сделать плоскими и гладкими.

Пластинки нужно посыпать толстым слоем песка, чтобы устранить отражение от поверхности. Поверхность песка должна казаться совершенно ровной. Для успешного проведения эксперимента нужна абсолютно ровная пустыня; поэтому не считайте, что вы уделили слишком много внимания регулированию пластинок. На одном конце пустыни нужно создать искусственное небо. Лучше всего использовать большое зеркало, установленное на окне и отражающее небо.

Между небом и пустыней нужно установить небольшую цепь гор, вырезанных из картона. Отдельные вершины должны иметь высоту от 1 до 2 *см*, а долины между ними — лишь немного возвышаться над уровнем пустыни. Общее расположение показано на рисунке 5.

Затем пластинки нагреваются с помощью газовых горелок, которые нужно время от времени передвигать, чтобы нагревание было равномерным.

Если мы теперь посмотрим вдоль пустыни немного выше уровня песка, мы увидим горы, четко выделяющиеся на фоне неба: по мере повышения температуры перед горной цепью начинает образовываться озеро, и через несколько мгновений появляется перевернутое изображение вершин, как будто бы отраженное в воде. Если смотреть немного ниже, подножья гор полностью исчезают в призрачном озере, которое теперь кажется вышедшим из берегов. Эти картины показаны на рисунке 6, причем фотографировался действительный мираж в искусственной пустыне. На первой фотографии показан вид над холодными пластинками, на второй — кажущееся озеро с отраженными в воде вершинами и на третьей — исчезновение подножий горных цепей. Для того чтобы усилить эффект, в песок были посажены две или три пальмы, вырезанные из бумаги.

В жаркой пустыне вертикальные размеры предметов могут увеличиваться. Если убрать горы и на песок

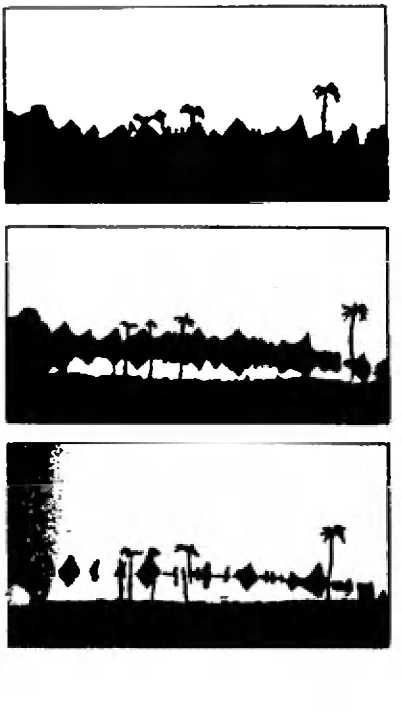


Рис. 6.


Рис. 7.

в дальнем конце пустыни положить небольшой мраморный шарик, то при определенном положении глаза круговой контур превратится в эллипс, а если глаз опускать, изображение сожмется в отрезок и в конце концов исчезнет. Увеличение размеров в этом случае вызвано тем, что прямое и отраженное изображения наблюдаются одновременно и при этом смещены друг относительно друга. Я наблюдал подобный случай на озере: когда вода теплая, а воздух холодный, пятна снега на противоположном берегу (слишком маленькие для того, чтобы различать их глазом с высоты нескольких метров над уровнем озера) становятся четко видимыми, если спуститься вниз к кромке воды.

Атмосферные условия, необходимые для возникновения миражей, могут также вызвать пылевые вихри, часто наблюдаемые в пустыне, а в большом масштабе и смерчи. Эти смерчи, так же как и миражи, можно воспроизвести в маленьком масштабе.

Одну из металлических пластин я посыпал кварцевым песком и нагревал несколькими горелками. Через несколько минут по поверхности начали двигаться очень красивые маленькие смерчи, скручивая тонкий песок в воронкообразные вихри; иногда это длилось 10—15 секунд.

Однако вихри, созданные таким способом, нельзя наблюдать в большой аудитории. Поэтому я искал способы создать их в бóльшем масштабе. Для этого после удаления песка хорошо нагревал пластинку и посыпал ее нашатырем: от горячей поверхности сразу же поднималось плотное облако белого пара и вскоре в центре появился самый настоящий миниатюрный смерч высотой около 2 см. Помещая пластинку в луч фонаря в темной комнате, можно демонстрировать вихри в большой аудитории. Я считаю, что лучше сначала насыпать на пластинку нашатырь, а затем нагревать ее: тогда вихри возникают почти непрерывно и часто сохраняются довольно долго.

На рисунке 7 показана мгновенная фотография одного из этих смерчей, сделанная при ярком солнечном свете.

Этот метод создания атмосферных вихрей предпочтительнее старого способа их создания с помощью быстро вращающегося барабана с поперечными перегородками *), так как здесь вихри возникают по тем же причинам и при тех же условиях, что и в природе.

---

*) См. статью Н. Е. Жуковского «Основы теории вихрей» («Квант» № 4, 1971).

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

ЗАДАЧИ

В этом номере «Задачник «Кванта» составлен из задач, предлагавшихся на заключительных турах пятой Всесоюзной олимпиады по математике и физике.

М106. Докажите, что если для чисел p_1, p_2, q_1, q_2 выполнено неравенство

$$(q_1 - q_2)^2 + \\ + (p_1 - p_2)(p_1q_2 - p_2q_1) < 0,$$

то квадратные трехчлены

$$x^2 + p_1x + q_1 \text{ и } x^2 + p_2x + q_2$$

имеют вещественные корни и между двумя корнями каждого из них лежит корень другого.

И. Ф. Шарыгин

М107. а) Дан выпуклый многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ (рис. 1). На стороне A_1A_2 взяты точки B_1 и D_2, на стороне A_2A_3 — точки B_2 и D_3, ..., на стороне A_nA_1 точки B_n и D_1 так, что если построить параллелограммы $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, ..., $A_nB_nC_nD_n$, то прямые A_1C_1, A_2C_2, ..., A_nC_n пересекутся в одной точке. Докажите, что

$$A_1B_1 \cdot A_2B_2 \cdot \ldots \cdot A_nB_n = \\ = A_1D_1 \cdot A_2D_2 \cdot \ldots \cdot A_nD_n.$$

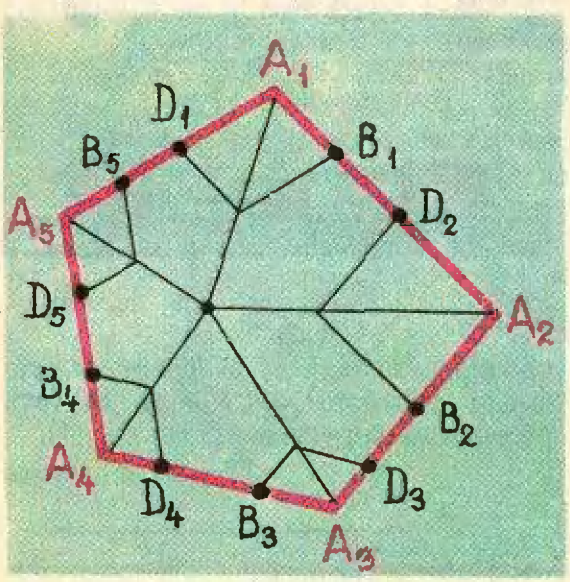


Рис. 1.

б) Докажите, что для треугольника верно и обратное утверждение: пусть на стороне A_1A_2 выбраны точки B_1 и D_2 на стороне A_2A_3 — точки B_2 и D_3, на стороне A_3A_1 — точки B_3 и D_1 так, что

$$A_1B_1 \cdot A_2B_2 \cdot A_3B_3 = \\ = A_1D_1 \cdot A_2D_2 \cdot A_3D_3;$$

тогда, если построить параллелограммы $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, $A_3B_3C_3D_3$, то прямые A_1C_1, A_2C_2 и A_3C_3 пересекутся в одной точке.

В. Л. Гутенмахер

М108. а) Докажите, что прямая, разбивающая данный треугольник на два многоугольника равной площади и равного периметра, проходит через центр окружности, вписанной в треугольник.

б) Докажите, аналогичное утверждение для произвольного многоугольника, в который можно вписать окружность.

Ю. И. Ионин

М109. а) В вершине A_1 правильного 12-угольника $A_1A_2A_3 \ldots A_{12}$ стоит знак минус, а в остальных — плюсы. Разрешается одновременно менять знак на противоположный в любых шести последовательных вершинах многоугольника. Докажите, что за несколько таких операций нельзя добиться того, чтобы в вершине A_2 оказался знак минус, а в остальных вершинах — плюсы.

б) Докажите то же утверждение, если разрешается одновременно менять знаки не в шести, а в четырех последовательных вершинах многоугольника.

в) Докажите то же утверждение, если разрешается одновременно менять знаки в трех последовательных вершинах многоугольника.

М110. На бесконечном листе клетчатой бумаги N клеток выкрашено в черный цвет. Докажите, что из листа можно вырезать конечное число квадратов так, что будут выполнены два условия:

1) все черные клетки будут лежать в вырезанных квадратах;

2) в любом вырезанном квадрате K площадь черных клеток составит не менее $\frac{1}{5}$ и не более $\frac{4}{5}$ площади K.

Г. А. Розенблюм

Ф118. В камеру сгорания ракетного реактивного двигателя поступает в секунду масса m водорода и необходимое для полного сгорания количество кислорода. Выходное сечение сопла S. Давление в этом сечении P, абсолютная температура T. Определить силу тяги двигателя. (9—10 кл.)

Г. Л. Коткин

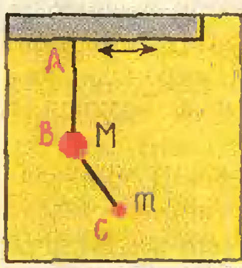


Рис. 2.

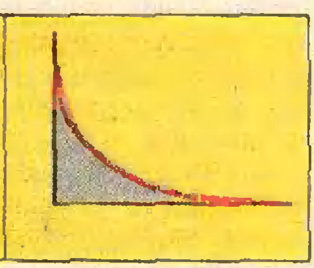


Рис. 3.

Ф119. К маятнику AB с шариком массы M подвешен маятник BC с шариком массы m (рис. 2). Точка A совершает колебания в горизонтальном направлении с периодом T. Найти длину нити BC, если известно, что нить AB все время остается вертикальной. (10 кл.)

Г. Л. Коткин

Ф120. Конькобежец на ледяной дорожке старается пройти вираж как можно ближе к внутренней бровке. Велосипедист на велотреке проходит вираж возможно дальше от внутренней бровки. Как объяснить это различие в движении конькобежца и велосипедиста на вираже? Профиль трека изображен на рисунке 3. (8 кл.)

М. М. Балашов

Ф121. В герметически закрытом сосуде в воде плавает кусок льда массы M, в который вмерзла свинцовая дробинка массы m. Какое количество тепла нужно затратить, чтобы дробинка начала тонуть? Плотность свинца 11,3 *г/см*^{3}, плотность льда 0,9 *г/см*^{3}, теплота плавления льда 80 *кал/г*. Температура воды в сосуде равна 0° С. (8 кл.)

Ф122. Три тела с массами m_1, m_2 и m_3 могут скользить по горизонтальной плоскости без трения (рис. 4), причем $m_1 \gg m_2$ и $m_2 \ll m_3$. Определить максимальные скорости, которые могут приобрести два крайних тела, если в начальный момент времени они покоились, а среднее тело имело скорость v. Удары считать абсолютно упругими. (9 кл.)

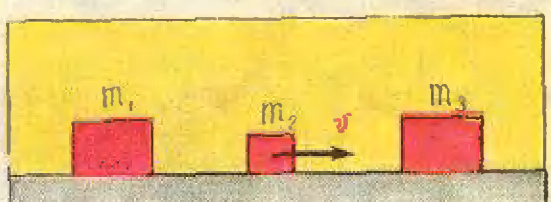
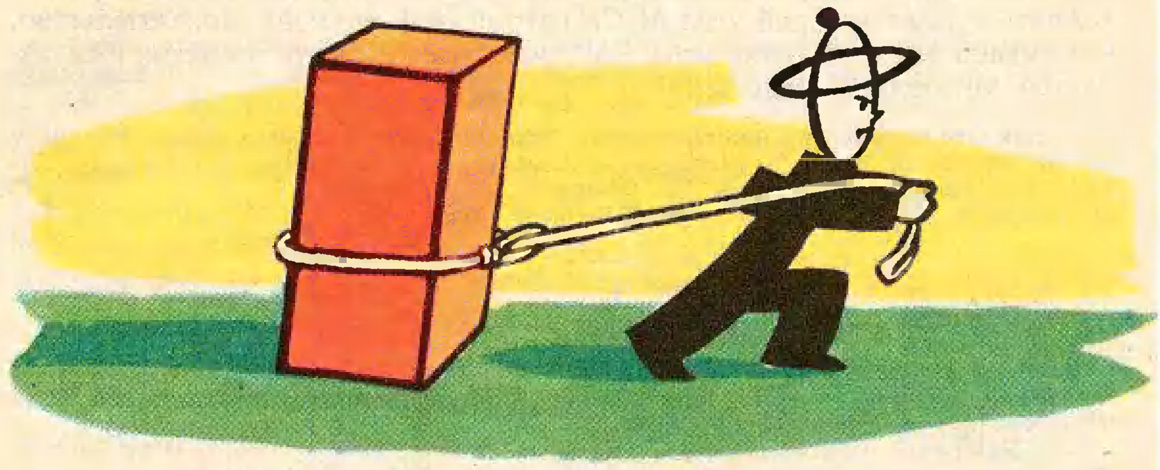


Рис. 4.

Е. Кузнецов

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»



РЕШЕНИЯ

В этом номере мы публикуем решения задач М64—М69

М64

На плоскости даны прямая l и две точки P и Q, лежащие по одну сторону от нее. Найти на прямой l такую точку M, для которой расстояние между основаниями высот треугольника PQM, опущенных на стороны PM и QM, наименьшее.

Заметим, что основания высот PK и QH треугольника PQM лежат на окружности c с диаметром PQ. Рассмотрим два случая.

1) Окружность c имеет одну или две общие точки с прямой l. Тогда ясно, что любая из этих точек и является искомой точкой M; треугольник PQM прямоугольный и расстояние между основаниями высот равно нулю; точки K и H совпадают с M.

2) Окружность c не имеет общих точек с прямой l. Тогда нетрудно доказать, что вписанный острый угол, опирающийся на дугу KH, равен $90-\angle PMQ$. Действительно, при любом положении точки M хотя бы одна из точек K или H лежит на стороне треугольника PQM, а не на ее продолжении; пусть, например, H. Тогда $\angle KHP=90°-\angle QMP=\angle KPM=90°-\angle KMP$. Таким образом, хорда KH тем меньше, чем больше угол QMP (рис. 1).

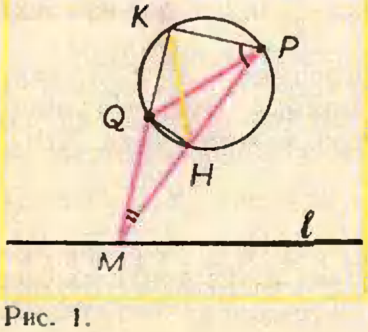


Рис. 1.

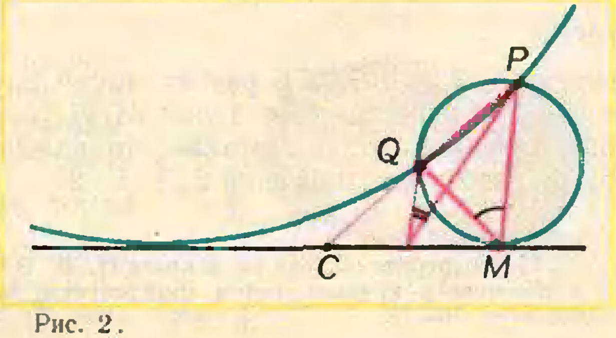


Рис. 2.

Остается решить такую задачу: найти на прямой l точку M, для которой угол PMQ наибольший. Нетрудно догадаться, что точка M должна обладать таким свойством: окружность, проходящая через точки P, Q и M, касается прямой l. Чтобы построить точку M, нужно (в случае, если отрезок PQ не параллелен прямой l) от точки C пересечения PQ и l отложить на прямой l отрезки $CM_1 = CM_2 = \sqrt{CP \cdot CQ}$, а затем из полученных точек M_1 и M_2 выбрать ту, для которой угол M_iCP острый (или прямой). Доказательство, что именно для этой точки угол PMQ максимален, почти очевидно и оставляется читателю *) (рис. 2).

Как это ни странно, многие читатели, приславшие нам письма, забыли про одну из возможностей 1) и 2). Наиболее полные решения прислали *О. Ким, Г. Левин, А. Пухальский, В. Лузгин, Ю. Оболонков, А. Костюрин.*

М65

а) Пусть E, F, G — такие точки на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC, для которых $\frac{AE}{EB} = \frac{BF}{FC} = \frac{CG}{GA} = k$, где $0 < k < 1$.

Найти отношение площади треугольника KLM, образованного прямыми AF, BG и CE к площади треугольника ABC (рис. 3а).

б) Разрежьте треугольник шестью прямыми на такие части, из которых можно сложить семь равных треугольников.

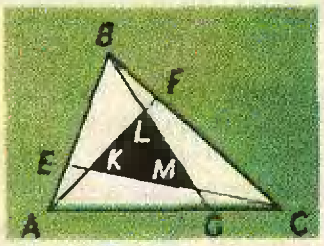


Рис. 3а.

а) Обозначим площадь треугольника с вершинами X, Y, Z, через $s(XYZ)$. Пользуясь тем, что отношение треугольников с одинаковыми высотами (или с одинаковыми основаниями) равно отношению оснований (соответственно отношению высот), нетрудно доказать, что

$$s(ACK) = \frac{1}{k} s(ABK) = \frac{k+1}{k^2} s(AEK) =$$
$$= \frac{k+1}{k^2+k+1} s(AEC) = \frac{k}{k^2+k+1} s(ABC).$$

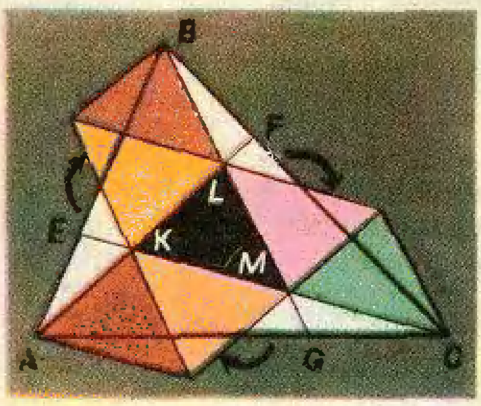


Рис. 3б.

Точно так же можно доказать, что
$$s(BLA) = s(CMB) = \frac{k}{k^2+k+1} s(ABC).$$
Поэтому
$$\frac{s(KLM)}{s(ABC)} = 1 - \frac{3k}{k^2+k+1} =$$
$$= \frac{(1-k)^2}{k^2+k+1} = \frac{(1-k)^3}{1-k^3}.$$

б) Заметим, что при $k = \frac{1}{2}$ это отношение равно $\frac{1}{7}$ и каждый из трех отрезков AF, BG, CE разбит двумя другими в отношении $3:3:1$, так что если провести через точки M, K, L еще три прямые, соответственно параллельные этим отрезкам, то каждая из сторон треугольника ABC будет разбита в отношении $2:1:1:2$.

---

*). Подробнее об этом см. в книге Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «Прямые и кривые», серия «Библиотечка физико-математической школы». «Наука», 1969, стр. 76—78.

Теперь уже нетрудно из 13 кусков, на которые разрезан треугольник ABC, собрать 7 равных треугольников (один из них состоит из единственного куска KLM; рис. 3б).

Аналогичное решение задачи прислали *А. Алексеев* из Ленинграда, *А. Аляев* из Пензенской области, *Э. Туркевич*, *А. Черняк*, *Ю. Оболенков*.

М66

Вот несколько примеров, когда сумма квадратов k последовательных натуральных чисел равна сумме квадратов $(k-1)$ следующих натуральных чисел:

$$3^2+4^2=5^2,\ 36^2+37^2+38^2+39^2+40^2=41^2+42^2+43^2+44^2,$$
$$55^2+56^2+57^2+58^2+59^2+60^2=61^2+62^2+63^2+64^2+65^2.$$

Найдите общую формулу, охватывающую все такие случаи.

Докажем, что для каждого натурального k существует ровно одно натуральное n такое, что

$$(n-k+1)^2+(n-k+2)^2+\ldots+(n-1)^2+n^2=(n+1)^2+ (n+2)^2+\ldots+(n+k-1)^2. \qquad (1)$$

(Заметьте, что в правой части равенства стоит $(k-1)$ слагаемое, а в левой — k). Равенство (1) эквивалентно следующим:

$$n^2=[(n+1)^2-(n-k+1)^2]+[(n+2)^2-(n-k+2)^2]+\ldots +[(n+k-1)^2-(n-1)^2], \qquad (2)$$

$$n^2=k(2n-k+2)+k(2n-k+4)+\ldots+k(2n+k-2), \qquad (3)$$

$$n^2=2k(k-1)n. \qquad (4)$$

Таким образом, высказанное утверждение доказано: равенство (1) для натуральных k и n выполняется тогда и только тогда, когда $n=2k^2-2k$. (При переходе от (3) к (4) мы воспользовались тем, что сумма $(k-1)$ членов арифметической прогрессии $(2n-k+2)+(2n-k+4)+\ldots+(2n+k-2)$ равна $(k-1)\frac{(2n-k+2)(2n+k-2)}{2}=2(k-1)n$). Тем самым мы получили искомую общую формулу. Ее можно записать, например, так:

$$(2k^2-3k+1)^2+(2k^2-3k+2)^2+\ldots+(2k^2-2k)^2= =(2k^2-2k+1)^2+(2k^2-2k+2)^2+\ldots+(2k^2-k-1)^2,$$

где k — произвольное натуральное число. Примеры, приведенные в условии, получаются из нее при k, равном 2, 4 и 5.

Эту формулу (или другие, эквивалентные ей) нашли очень многие наши читатели — большинство из них либо приводит доказательство, близкое к нашему, либо использует в выкладках формулу для суммы квадратов натуральных чисел (см. лемму 1, на стр. 17).

М67

Ювелиру заказано золотое колечко шириной h, имеющее форму тела, ограниченного поверхностью шара с центром O и поверхностью цилиндра радиуса r, ось которого проходит через точку O (рис. 4). Мастер сделал такое колечко, но выбрал r слишком маленьким. Сколько золота ему придется добавить, если r нужно увеличить в k раз, а ширину h оставить прежней?

Нетрудно доказать, что объем *шарового кольца* — тела, получающегося при вращении сегмента AB вокруг диаметра MN, не пересекающего этот сегмент, — равен $\frac{\pi}{6}AB^2\cdot A_1B_1$, где A_1B_1 — проекция хорды AB на диаметр MN. Эта формула приводится, например, в книге Ж. Адамара «Элементарная геометрия», ч. II, гл. IV, 500.

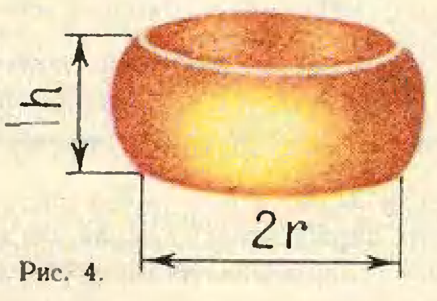


Рис. 4.

Объем колечка равен $\frac{\pi}{6}h^3$, то есть не зависит от радиуса r, так что золота мастеру добавлять не придется.

М68

Сетка линий, изображенная на рисунке 5 (см. также обложку «Кванта» № 2, 1971) состоит из концентрических окружностей радиусов 1, 2, 3, 4, ... с центром в точке O, прямой l, проходящей через точку O, и всевозможных касательных к окружностям, параллельных прямой l. Вся плоскость разбита этими линиями на клетки, которые раскрашены в шахматном порядке. В цепочке розовых точек, показанных на рисунке, каждые две соседние точки являются противоположными вершинами темной клетки. Докажите, что все точки такой бесконечной цепочки лежат на одной параболе (поэтому весь рисунок как бы соткан из желтых и темных парабол).

Примем прямую l за ось Ox, а точку O — за начало координат прямоугольной системы, как показано на рисунке 5. Единица масштаба уже задана в условии. Сетка линий, о которой идет речь в условии, составлена из окружностей радиуса n с центром O (уравнение такой окружности $x^2+y^2=n^2$) и прямых $y=m$, где m и n — всевозможные целые числа; $n>0$. Таким образом, каждой точке пересечения (или касания) этих линий — каждому «узлу» (x, y) нашей сетки — соответствует определенная пара значений $n=\sqrt{x^2+y^2}$ и $m=y$. Заметим, что когда мы переходим от одной из розовых точек к соседней розовой точке, то и m, и n изменяются на единицу, так что их разность $n-m=\sqrt{x^2+y^2}-y$ остается постоянной; эта разность для всех розовых точек равна 6.

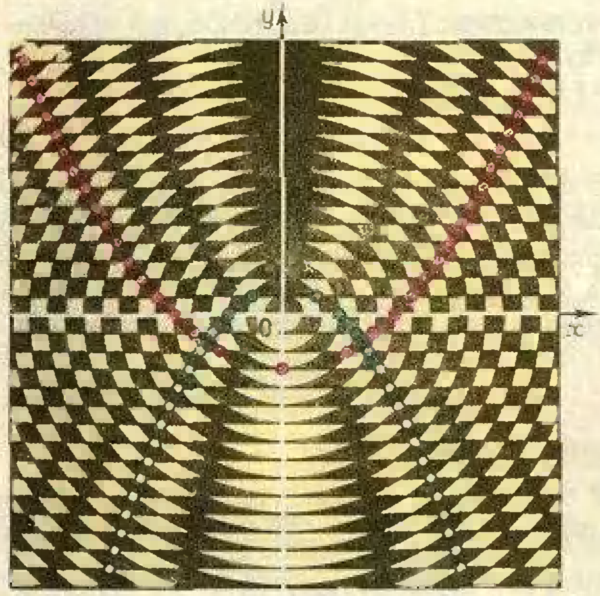


Рис. 5.

Уравнение $\sqrt{x^2+y^2}-y=6$ эквивалентно следующим: $x^2+y^2=(y+6)^2$; $y=\frac{x^2}{12}-3$. Таким образом, все розовые точки лежат на *параболе* $y=\frac{x^2}{12}-3$.

В другой подобной цепочке точек, которую мы нарисовали голубым цветом, при переходе от точки к соседней $\sqrt{x^2+y^2}$ и y меняются на единицу так, что постоянной остается их сумма: $\sqrt{x^2+y^2}+y=4$. Это уравнение после преобразований тоже превращается в уравнение параболы $y=-\frac{x^2}{6}+\frac{3}{2}$.

Точно так же можно показать, что любая бесконечная цепочка точек, в которой соседние точки являются противоположными вершинами одной клетки (или одного сегмента), лежит на параболе $y=-\frac{x^2}{2p}+\frac{p}{2}$,

где p — некоторое целое число, отличное от нуля. Обратно, на любой из этих парабол лежит такая бесконечная цепочка точек (это точки пересечения параболы со всевозможными прямыми $y=m$).

Заметим, что если $p<0$, то есть если ветви параболы уходят вверх, то при четном p парабола идет по темным клеткам, а при нечетном p — по желтым; если же $p>0$, то наоборот. При этом через каждую точку пересечения прямых и окружностей нашей сетки (исключая точки касания, лежащие на прямой $x=0$), проходят две параболы; одна идет по желтым клеткам, другая — по темным; одна направлена ветвями вверх, другая — вниз.

Решение этой задачи прислали многие читатели. Некоторые пользуются в своем решении таким геометрическим определением параболы: *парабола — это множество точек, одинаково удаленных от данной точки и данной прямой.* По существу решение задачи **М 68** очень близко к доказательству эквивалентности этого определения параболы и известного из школьного курса (*парабола — график квадратного трехчлена*). Если выбрать систему координат так, чтобы данная точка была началом координат, а данная прямая имела уравнение $y=c$, то условие, что точка (x, y) одинаково удалена от данной точки и данной прямой, запишется уравнением $\sqrt{x^2+y^2}=|y-c|$, которое эквивалентно уравнению $y=-\frac{x^2}{2c}+\frac{c}{2}$.

М69

Число 76 обладает таким любопытным свойством: последние две цифры числа $76^2 = 5776$ дают снова число 76.

а) Есть ли еще такие двузначные числа?

б) Найдите все трехзначные числа A такие, у которых последние три цифры числа A^2 составляют число A.

в) Существует ли бесконечная последовательность цифр $a_1, a_2, a_3, \ldots$ такая, что для любого n квадрат числа «$a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1$» имеет вид «$\ldots a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1$»? (Кавычками здесь обозначена десятичная запись числа. Очевидный ответ $a_i=0$ при всех $i>1$ мы исключаем.)

Ответ в этой задаче следующий: при любом $n>1$ существует ровно два таких n-значных числа $n>1$, квадрат которых оканчивается на A (не считая очевидных: 0 ... 0000 и 0 ... 0001),— при $n=2$ это 76 и 25, при $n=3$ — 376 и 625, при $n=4$ — 9376 и 0625, при $n=5$ — 09376 и 90625 и т. д., так что существует две бесконечные последовательности цифр, о которых идет речь в пункте в): одна начинается с цифр 6, 7, 3, 9, 0, 1,... , другая — с цифр 5, 2, 6, 0, 9, 8, ...*).

Начнем с задачи а). Самый простой способ найти нужные нам двузначные числа, который указывают многие читатели, состоит в следующем. Если A^2 оканчивается теми же двумя цифрами, что и A, то $A^2-A=A(A-1)$ делится на $100=25\cdot4$, а поскольку числа A и $(A-1)$ взаимно просты (не имеют общих делителей, больших 1), то одно из них должно делиться на 25, а другое — на 4. Попробуем, подходит ли каждое из чисел 25, 50 и 75 на роль A или на роль $A-1$ (оба эти числа двузначны). Для этого нужно лишь проверить, какие из соседних с ними чисел делятся на 4. Это будут только 76 и 24, поэтому A может равняться только 25 и 76.

Аналогично можно решить и задачу б), но мы докажем сразу более общее утверждение: если квадрат числа $B=$«$a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1$» оканчивается цифрами «$\ldots a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1$», то можно и притом единственным образом выбрать цифру a_n так, чтобы квадрат числа $A=$«$a_n a_{n-1}\ldots a_1$» оканчивался на «$\ldots a_n a_{n-1}\ldots a_1$».

Пусть $B^2=$«$\ldots b_n a_{n-1} a_{n-2}\ldots a_1$». Тогда $(n\geqslant2 \Rightarrow 2n>n+1)$

$$A^2=(10^n a_n+B)^2=10^{2n}a_n+2\cdot10^n a_n B+B^2=«\ldots c_n a_{n-1} a_{n-2}\ldots a_1»,$$

где c_n — последняя цифра числа $2a_n a_1+b_n$. Мы должны подобрать a_n так, чтобы c_n равнялось a_n, то есть чтобы $2a_n a_1+b_n-a_n=(2a_1-1)a_n+b_n$ делилось на 10. Очевидно, что это можно сделать и притом единственным образом. В интересующих нас случаях $a_1=5$ и $a_1=6$ функции $b_n\to a_n$, которые мы должны указать, особенно просты: если $a_1=5$, то $a_n=b_n$, а если $n=6$, то $a_n=10-b_n$ при $b_n>0$ и $a_n=0$ при $b_n=0$.

Подробнее этот подход к решению задачи **М68** обсуждается в книге Я. И. Перельмана «Занимательная алгебра», стр. 81—85.

*) Мы не исключаем из рассмотрения числа «$a_n a_{n-1}\ldots a_1$», у которых первая цифра a_n (или несколько первых цифр) равна нулю. Читатели, которые таких чисел не рассматривали, естественно, дошли только до четырехзначного числа 9376 и трехзначного 625.

Для тех, кто разобрался в статье М. И. Башмакова «Любите ли вы возиться с целыми числами» («Квант» № 3, 1971), заметим, что доказанное только что утверждение можно сформулировать еще так: из разрешимости сравнения $x^2-x\equiv 0$ по модулю 10^n следует его разрешимость по модулю 10^{n+1}. Это утверждение мы использовали для того, чтобы построить два нетривиальных решения уравнения $x^2-x=0$ в 10-адических числах *) — числах, «бесконечных влево»: $x_1=$ «...890625» и $x_2=$«...109376» (тривиальными мы называем решения $0=$ «...0000» и $1=$ «...0001»). Проверьте следующие свойства двух построенных чисел: $x_1+x_2=1$; $x_1x_2=0$. Подумайте, при каких еще m уравнение $x^2-x=0$ имеет решения в m-адических числах, отличные от 0 и 1 (другими словами, попробуйте решить задачу, аналогичную **М68**, в m-ичной системе счисления).

Н. Б. Васильев

В этом номере мы публикуем решения задач Ф75-Ф78

Ф75

Поршень с площадью S шарнирно связан с шайбой C, скользящей без трения по рычагу AB (рис. 6). Длина рычага L. Какую наименьшую силу нужно приложить к рычагу, для того чтобы увеличить давление в жидкости на Δp?

Для того чтобы давление в жидкости увеличилось на Δp, сила, действующая на шток, должна возрасти на величину $\Delta p\cdot S$. Это означает, что сила, действующая на шайбу C со стороны рычага, должна возрасти на $N=\frac{\Delta pS}{\cos\alpha}$; эта сила перпендикулярна рычагу вследствие отсутствия трения между рычагом и шайбой. Сам рычаг находится в равновесии. Это означает, что сумма моментов, приложенных к нему относительно оси, проходящей через точку A, должна быть равна нулю, то есть момент силы N, действующей на рычаг со стороны шайбы, должен быть равен моменту силы F, приложенной к рычагу.

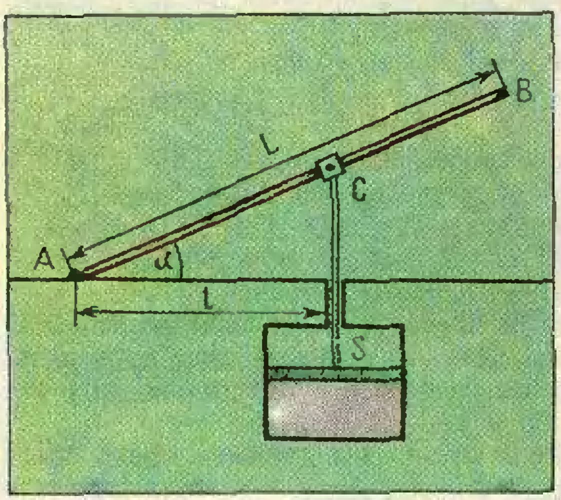


Рис. 6.

Очевидно, что сила F минимальна, если она приложена в точке B и направлена перпендикулярно рычагу. Именно в этом случае плечо силы F максимально и равно L. Записав условие равновесия рычага

$$FL=N\frac{l}{\cos\alpha},$$

получим

$$F=\frac{\Delta pSl}{L\cos^2\alpha}.$$

Большинство ошибок при решении было связано с вычислением силы, действующей на рычаг в точке C.

Правильное решение задачи прислали *И. Алтунин* (Могилев), *Е. Кулешов* (Речица Гомельской обл.), *С. Черников* (Семипалатинск), *С. Иванов* (Москва), *А. Костюрин* (пос. Красково Московской обл.), *М. Козловский* (Москва), *А. Старченко* (пос. Петропавловка Петропавловского р-на Днепропетровской обл.).

---

*) В статье М. И. Башмакова речь идет только о p-адических числах при простом p. Аналогично можно построить m-адические числа и при составном m, но они уже не будут обладать многими хорошими свойствами, которыми обладают p-адические и обычные вещественные числа. Например, произведение двух отличных от нуля m-адических чисел может равняться нулю, квадратное уравнение, как мы сейчас увидим, может иметь больше двух корней и т. п.

Ф76

Тяжелый обруч с невесомыми спицами расположен в вертикальной плоскости и может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр. В толще его обода закреплен маленький шарик, имеющий такую же массу, как и сам обруч. Каким будет период колебаний обруча вокруг оси? Как он изменится, если: а) этот обруч перенести на Луну? б) поместить в жидкость, в которой он будет двигаться без трения?

Займемся аналогиями. С ними читатели могут познакомиться, прочитав статью Я. А. Смородинского «Похожие движения» в восьмом номере журнала за этот год. Воспользуемся аналогией с математическим маятником длины R.

Если максимальный угол отклонения маятника и прикрепленного к обручу шарика равен α_0 (рис. 7), то при этом они находятся на высоте $h=R\,(1-\cos\alpha_0)$ от положения равновесия. При угле отклонения α кинетическая энергия маятника (и обруча с шариком) равна разности потенциальных энергий при угле α_0 и угле α. Для математического маятника получаем

$$\frac{mv^2}{2}=mgR\,(\cos\alpha-\cos\alpha_0).$$

Поэтому скорость маятника

$$v=\sqrt{2gR\,(\cos\alpha-\cos\alpha_0)}.$$

Так же, как и у маятника, меняется потенциальная энергия обруча с шариком. Потенциальная энергия самого обруча не меняется, но кинетическая энергия в этом случае равна сумме кинетических энергий шарика $E_ш=\frac{mv^2}{2}$ и обруча $E_о=\frac{mv^2}{2}$ (по поводу кинетической энергии обруча см. статью А. К. Кикоина «Вращательное движение тел», «Квант» № 1, 1971). Поэтому в случае обруча с шариком из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{mv^2}{2}+\frac{mv^2}{2}=mgR\,(\cos\alpha-\cos\alpha_0),$$

и скорость шарика

$$v=\sqrt{gR\,(\cos\alpha-\cos\alpha_0)}.$$

При любом угле отклонения от положения равновесия скорость шарика в $\sqrt{2}$ раз меньше скорости математического маятника. Следовательно,

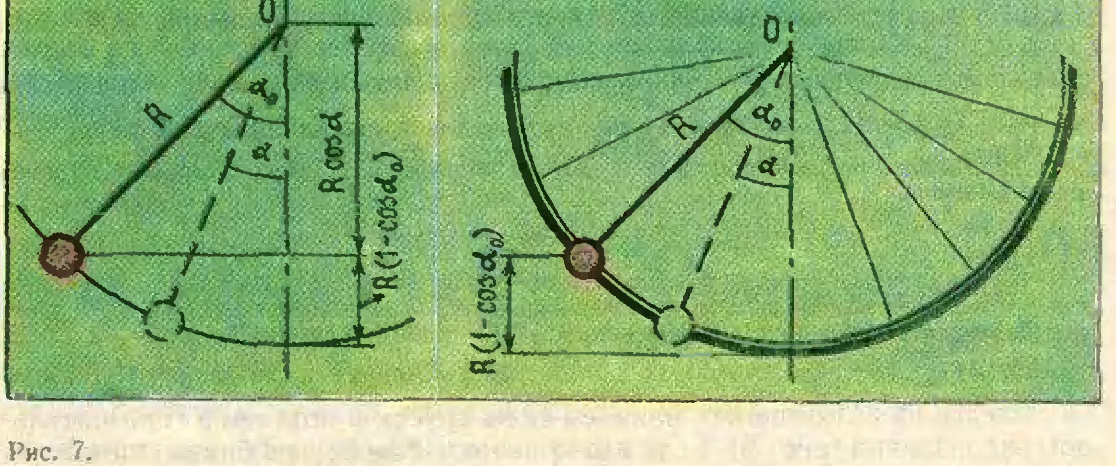


Рис. 7.

и период колебаний обруча с шариком в $\sqrt{2}$ раз больше периода колебаний маятника и равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}.$$

Можно подойти к решению этой задачи и иначе. Если математический маятник отклонен от положения равновесия на угол α, то его возвращает к положению равновесия составляющая силы тяжести, касательная к траектории движения маятника (рис. 8):

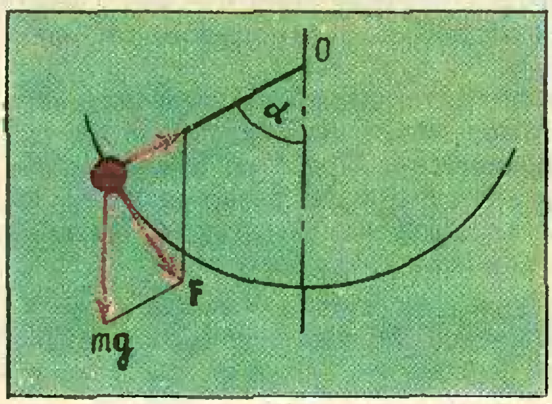


Рис. 8.

$$F = mg\sin\alpha.$$

Так как угол α мал, то $\sin\alpha \approx \alpha \approx \frac{x}{R}$, где x—смещение маятника от положения равновесия. Отсюда

$$F \approx mg\frac{x}{R}.$$

Поэтому для касательной составляющей ускорения маятника мы можем записать уравнение

$$mg\frac{x}{R} = ma \text{ или } a = \frac{g}{R}x = cx,$$

где $c = \frac{g}{R}$—некоторый постоянный для данного маятника коэффициент. Период колебаний маятника равен $2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$, то есть $2\pi/\sqrt{c}$.

Аналогичный результат мы получим и для грузика, прикрепленного к пружинке и колеблющегося вдоль горизонтальной плоскости. Уравнение движения такого грузика $kx = ma$, а период колебаний $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

В нашем случае сила, возвращающая шарик к положению равновесия, равна, как и в случае математического маятника, $mg\frac{x}{R}$, а ускорение a сообщается и шарику, и обручу, то есть массе $2m$. Поэтому $mg\frac{x}{R} = 2ma$; значит, $c = \frac{g}{2R}$ и период колебаний системы $T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$.

Если обруч с шариком перенести на Луну или поместить в сосуд с жидкостью, то его период колебаний изменится точно так же, как период колебаний математического маятника: в первом случае увеличится в $\sqrt{6}$ раз $\left(g_Л = \frac{1}{6}g_З\right)$ из-за изменения ускорения свободного падения, а во втором — уменьшится в $\sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_т}}$ раз (ρ — плотность воды и $\rho_т$ — плотность материала шарика) из-за влияния архимедовой выталкивающей силы.

Правильное решение прислали *С. Иванов* (Москва), *Г. Зайцев* (Гагра), *А. Проскуряков* (Москва).

Ф77

Прямоугольный брусок, высота которого значительно превышает длину и ширину, стоит на горизонтальной поверхности. Как определить коэффициент трения между бруском и поверхностью, имея лишь один измерительный прибор — линейку?

Сделав из нитки петлю, накинем ее на брусок и потянем в горизонтальном направлении (рис. 9). Если нитка накинута на брусок близко от поверх-

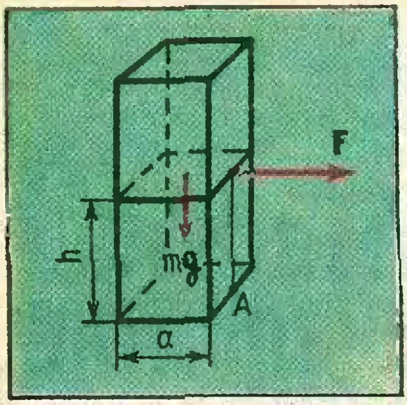


Рис. 9.

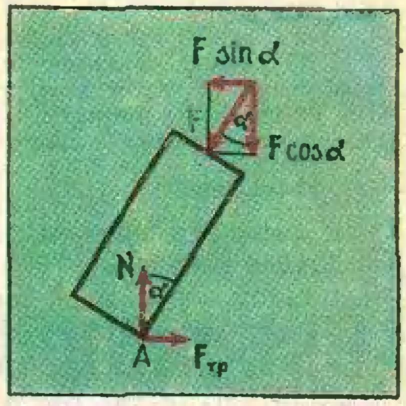


Рис. 10.

ности, брусок будет скользить. Если мы будем поднимать нить по бруску, то, когда она будет на некоторой высоте h_0 от поверхности, брусок уже не будет скользить, а начнет переворачиваться. При этом сила F, с которой мы тянем брусок, равна силе трения:

$$F = kmg,$$

а момент силы F относительно оси, проходящей через точку A, равен моменту силы тяжести:

$$Fh_0 = mg\frac{a}{2},$$

где a — сторона квадрата в основании бруска.

Решая совместно эти два уравнения, найдем

$$k = \frac{a}{2h_0}.$$

Измерив a и h_0 с помощью линейки, найдем коэффициент трения бруска о поверхность.

Такое решение прислали *И. Сидоров* (Москва), *А. Петров* (Асбест Свердловской обл.), *М. Розов* (Минск), *С. Юдин* (Волгоград), *Д. Шапиро* (Челябинск), *А. Александров* (Глазов Удм. АССР), *Г. Симоненков* (Каунас).

Интересное решение прислали А. Калика из Баку и С. Соболев из Москвы. Вот оно.

Наклонив брусок и удерживая его под некоторым углом к вертикали, приложим к бруску некоторую силу F, направленную вдоль бруска (рис. 10). При этом на брусок будут действовать еще сила реакции $N = mg + F\cos\alpha$ и сила трения $F_{тр}$. Если сила трения не достигает максимального значения, равного $kN = k(mg + F\cos\alpha)$, то конец бруска не будет скользить. При этом сила трения равна $F\sin\alpha$. Таким образом, конец бруска не проскальзывает при

$$F\sin\alpha < kmg + kF\cos\alpha,$$

то есть при

$$F < \frac{kmg}{\sin\alpha - k\cos\alpha}.$$

Нетрудно увидеть, что при $k > \operatorname{tg}\alpha$ брусок нельзя заставить двигаться, какой бы большой ни была сила F. Найдем угол α_0, при котором брусок начнет смещаться. Измерив с помощью линейки высоту от горизонтальной плоскости до края наклонившегося бруска и ширину бруска и вычислив $\operatorname{tg}\alpha_0$, найдем коэффициент трения k.

Ф78

20 г гелия, заключенного в цилиндре под поршнем, очень медленно переводят из состояния I ($P_1 = 4{,}1$ *атм*, $V_1 = 32$ *л*) в состояние II ($P_2 = 15{,}5$ *атм*, $V_2 = 9$ *л*). Какой наибольшей температуры достигает газ при этом процессе, если график зависимости давления от объема — прямая линия (рис. 11)?

Нанесем на график сетку изотерм — гипербол $PV = \text{const}\,\frac{m}{\mu}RT$. Чем выше температура газа, тем дальше находится вершина гиперболы от начала координат. Поэтому ясно, что во время процесса I—II газ достигает такой наибольшей температуры, при которой соответствующая гипербола не пересекает прямую I—II, а только касается ее.

Так как точка с координатами P и V, соответствующая максимальной температуре, лежит как на гиперболе, так и на прямой, то ее координаты должны удовлетворять двум уравнениям: уравнению гиперболы

$$PV = \frac{m}{\mu}RT$$

и уравнению прямой

$$P = \alpha V + \beta$$

(α и β — постоянные. Их мы определим немного позже). Подставляя P из второго уравнения в первое, получим квадратное уравнение для V:

$$\alpha V^2 + \beta V - \frac{m}{\mu}RT = 0.$$

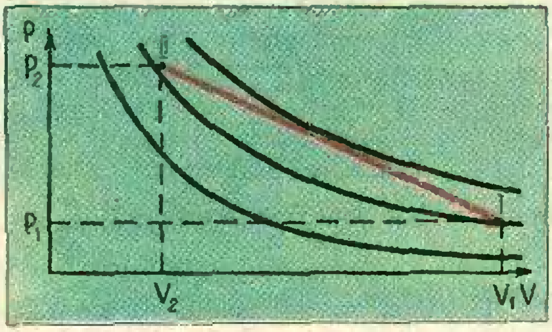


Рис. 11.

Так как гипербола и прямая должны иметь лишь одну общую точку, то это уравнение может иметь только один корень, то есть его детерминант должен быть равен нулю:

$$\beta^2 + 4\alpha\frac{m}{\mu}RT = 0.$$

Решая последнее уравнение относительно T, найдем

$$T = -\frac{\beta^2\mu}{4\alpha mR}.$$

В это выражение нужно подставить значения коэффициентов α и β. Так как точки I и II принадлежат одной и той же прямой $P = \alpha V + \beta$, то $P_1 = \alpha V_1 + \beta$ и $P_2 = \alpha V_2 + \beta$. Решая эту систему уравнений, найдем

$$\alpha = -\frac{P_2 - P_1}{V_1 - V_2}, \qquad \beta = \frac{P_2V_1 - P_1V_2}{V_1 - V_2}.$$

Поэтому

$$T = \frac{(P_2V_1 - P_1V_2)^2\,\mu}{4\,(P_2 - P_1)\,(V_1 - V_2)\,mR}.$$

Подставив численные значения входящих в это выражение величин, получим

$$T \approx 490^\circ\ \text{K}.$$

Правильное решение прислали *М. Прегер* (Томск), *В. Рудько* (Киев), *Н. Федин* (Омск), *Г. Зайцев* (Гагра), *Л. Книжнерман* (Москва), *О. Маслюк* (Новомиргород Кировоградской обл.), *В. Трунков* (Гомель), *Е. Розов* (Минск), *А. Петров* (Асбест Свердловской обл.), *Л. Циферблат* (Львов), *И. Вигдорович* (Симферополь), *В. Тырышкин* (Куйбышев), *В. Мартынов* (Йошкар-Ола), *В. Климов* (Солнечногорск Московской обл.), *А. Товбш* (Одесса), *Г. Фаст* (Караганда), *М. Гликман* (Кишинев), *А. Зисман* (Псков), *А. Есин* (Янгиюль Ташкентской обл.), *А. Тарнопольский* (Николаев), *М. Саркисян* (пос. Агаран Мегринского р-на Арм. ССР).

И. Ш. Слободецкий

Системы алгебраических уравнений

М. И. Шабунин

На вступительных экзаменах в вузы нередко предлагаются системы алгебраических уравнений; в частности, такие системы возникают в задачах на составление уравнений. Опыт экзаменов показывает, что многие поступающие с решением систем уравнений справляются неудовлетворительно.

Дело в том, что обычно учащиеся вопрос о нахождении решений системы понимают просто как формальное выполнение ряда «привычных» алгебраических преобразований. При этом упускается из виду, что некоторые из применяемых преобразований могут привести к появлению посторонних решений или к потере решений исходной системы.

Без соответствующего обоснования решение системы уравнений логически неполноценно. В частности, мы можем не заметить потери некоторых решений. К сожалению, обоснованные, грамотно изложенные решения систем в работах поступающих встречаются крайне редко.

Подробное изложение всех важных вопросов, относящихся к системам уравнений, потребовало бы слишком много места *). Поэтому мы ограничимся тем, что приведем основные теоретические положения, касающиеся решения трех алгебраических уравнений с тремя неизвестными, а затем рассмотрим несколько примеров.

Сначала напомним некоторые определения.

Систему трех уравнений с тремя неизвестными можно записать в виде

$$\begin{cases} f_1(x,\ y,\ z)=0, \\ f_2(x,\ y,\ z)=0, \\ f_3(x,\ y,\ z)=0 \end{cases} \qquad (1)$$

или, опуская для краткости неизвестные, в виде

$$\begin{cases} f_1=0, \\ f_2=0, \\ f_3=0. \end{cases}$$

Мы будем рассматривать только алгебраические системы, то есть такие системы, у которых левая часть каждого уравнения системы является многочленом относительно неизвестных.

Решением системы (1) называется тройка чисел $(x_0,\ y_0,\ z_0)$, при подстановке которых соответственно вместо x, y, z каждое уравнение системы (1) становится верным числовым равенством. *Решить систему* означает найти все ее решения.

Две системы уравнениней

$$\begin{cases} f_1=0, \\ f_2=0, \\ f_3=0. \end{cases} \qquad (2)$$

и

$$\begin{cases} g_1=0, \\ g_2=0, \\ g_3=0. \end{cases} \qquad (3)$$

*) Читателю можно рекомендовать обратиться, например, к книге В. Г. Болтянского, Ю. В. Сидорова и М. И. Шабунина «Лекции и задачи по элементарной математике», М., «Наука», 1971.

называются *равносильными* (*эквивалентными*), если они имеют одни и те же решения, то есть если всякое решение системы (2) является решением системы (3) и, наоборот, всякое решение системы (3) является решением системы (2). Для обозначения равносильности систем (2) *и* (3) используется запись «(2) $\Longleftrightarrow$ (3)».

Заметим, что если мы нашли все решения системы (3), равносильной системе (2), то тем самым найдены и все решения системы (2). В этом случае проверку проводить не нужно, то есть не нужно подставлять найденные при решении системы (3) значения неизвестных в исходную систему (2).

Уравнение

$$F(x, y, z) = 0 \tag{4}$$

назовем *следствием* системы (1), если каждое решение системы (1) удовлетворяет уравнению (4). Запись «(1) $\Longrightarrow$ (4)» будет означать, что уравнение (4) есть следствие системы (1).

Будем говорить, что система (1) равносильна *совокупности систем*

$$\begin{cases} F_1 = 0, \\ F_2 = 0, \\ F_3 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

и

$$\begin{cases} G_1 = 0, \\ G_2 = 0, \\ G_3 = 0, \end{cases} \tag{6}$$

если выполнены следующие условия:

а) каждое решение системы (1) является решением по крайней мере одной из систем (5), (6);

б) каждое решение любой из систем (5), (6) является решением системы (1).

Запись «(1) $\Longleftrightarrow$ [(5) $\vee$ (6)]» будет означать, что система (1) равносильна совокупности систем (5) и (6).

Если система (1) равносильна совокупности систем (5) и (6), то можно решить системы (5), (6) и объединить множества решений этих систем; это объединение и даст все решения системы (1) (совокупность систем появляется при рассмотрении разных случаев типа $x>0$, $x<0$, $x=0$).

Сформулируем теперь несколько свойств, наиболее часто используемых при решении систем уравнений. Мы не будем доказывать эти свойства; используя приведенные определения, читатель легко сможет самостоятельно провести необходимые обоснования.

I. Пусть одно из уравнений системы (1), для определенности первое, «распадается» на два уравнения, например представляется в виде

$$g_1(x, y, z)\, g_2(x, y, z) = 0,$$

где g_1 и g_2 — многочлены от x, y, z. Тогда система (1) равносильна совокупности следующих двух систем:

$$\begin{cases} g_1 = 0, \\ f_2 = 0, \\ f_3 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} g_2 = 0, \\ f_2 = 0, \\ f_3 = 0. \end{cases}$$

Это утверждение легко обобщается на случай, когда два или три уравнения системы (1) «распадаются» на несколько уравнений.

II. Если уравнение (4) является следствием системы (1), то, присоединив к системе (1) уравнение (4), мы получим систему {(1), (4)} четырех уравнений, равносильную исходной.

III. Пусть уравнение (4), являющееся следствием системы (1), «распадается» на два уравнения:

$$F_1(x, y, z) \cdot F_2(x, y, z) = 0,$$

где F_1, F_2 — многочлены от x, y, z. Тогда система (1) равносильна совокупности следующих двух систем:

$$\begin{cases} f_1 = 0, \\ f_2 = 0, \\ f_3 = 0, \\ F_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} f_1 = 0, \\ f_2 = 0, \\ f_3 = 0, \\ F_2 = 0. \end{cases}$$

IV. Система уравнений (1) равносильна каждой из следующих систем:

$$\begin{cases} f_1 - f_2 = 0, \\ f_2 = 0, \\ f_3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} f_1 - f_2 = 0, \\ f_2 - f_3 = 0, \\ f_3 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1 + f_2 = 0, \\ f_1 + f_3 = 0, \\ f_2 + f_3 = 0 \end{cases}$$

(возможность прибавлять к одному уравнению системы другое, умноженное на произвольное число).

V. Пусть одно из уравнений системы (1), например первое ее уравнение $f_1(x, y, z) = 0$, равносильно уравнению $x = \varphi(y, z)$ — многочлену от y и z. Тогда система (1) равносильна системе

$$\begin{cases} x = \varphi(y, z), \\ f_2[\varphi(y, z), y, z] = 0, \\ f_3[\varphi(y, z), y, z] = 0. \end{cases}$$

Это утверждение лежит в основе *метода исключения неизвестных*: система (1) сводится к системе уравнений

$$\begin{cases} f_2[\varphi(y, z), y, z] = 0, \\ f_3[\varphi(y, z), y, z] = 0 \end{cases}$$

с двумя неизвестными y, z.

Прежде чем переходить к разбору примеров, сделаем одно замечание. При рассмотрении конкретной системы далеко не всегда удается сразу заметить ту комбинацию данных уравнений, которая служит «ключом» к решению, найти такой способ преобразований, который позволяет добиться достаточного упрощения. Никаких общих рецептов для нахождения решения систем дать, разумеется, нельзя. Только достаточно богатый опыт может помочь «увидеть» те особенности предлагаемой системы, которые позволят свести ее к другой, решаемой просто.

Пример 1. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} xy + z^2 = 2, \\ yz + x^2 = 2, \\ xz + y^2 = 2. \end{cases} \qquad (7)$$

Решение. Вычитая из второго уравнения этой системы первое уравнение и разлагая разность левых частей на множители, получим

$$(x - z)(x - y + z) = 0.$$

Аналогично, вычитая из третьего уравнения системы (7) второе уравнение, найдем

$$(y - x)(x + y - z) = 0.$$

В силу свойства IV система (7) равносильна системе

$$\begin{cases} (x - z)(x - y + z) = 0, \\ (y - x)(x + y - z) = 0, \\ xz + y^2 = 2. \end{cases} \qquad (8)$$

Так как левые части первых двух уравнений системы (8) представляют собой произведения двух многочленов, то система (8) равносильна (свойство I) совокупности следующих четырех систем:

$$\begin{cases} x - z = 0, \\ y - x = 0, \\ xz + y^2 = 0; \end{cases} \qquad (8_1)$$

и

$$\begin{cases} x - z = 0, \\ x + y - z = 0, \\ xz + y^2 = 2; \end{cases} \qquad (8_2)$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0, \\ y - x = 0, \\ xz + y^2 = 2; \end{cases} \qquad (8_3)$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0, \\ x + y - z = 0, \\ xz + y^2 = 2. \end{cases} \qquad (8_4)$$

Ясно, что каждая из полученных четырех систем проще исходной системы (7).

Решив системы (8_1), (8_2), (8_3), (8_4) методом исключения неизвестных (свойство V) и объединив решения этих систем, мы получим следующие восемь троек чисел:

$$(1,\ 1,\ 1),\ (-1,\ -1,\ -1),$$
$$(\sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{2}),$$
$$(-\sqrt{2},\ 0,\ -\sqrt{2}),\ (\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 0),$$
$$(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ 0),$$
$$(0,\ \sqrt{2},\ \sqrt{2}),$$
$$(0,\ -\sqrt{2},\ -\sqrt{2}).$$

Эти восемь наборов чисел и образуют все множество решений исходной системы (7), поскольку

$$(7) \Leftrightarrow (8) \Leftrightarrow [(8_1) \vee \vee (8_2) \vee (8_3) \vee (8_4)].$$

В данном случае проверка является излишней.

Пример 2 (МФТИ, 1969). *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} x^2y = x + y - z, \\ z^2x = x - y + z, \\ y^2x = y - x + z. \end{cases} \qquad (9)$$

Решение. Сложив попарно уравнения этой системы, получим систему

$$\begin{cases} x^2y + z^2x = 2x, \\ x^2y + y^2z = 2y, \\ z^2x + y^2z = 2z, \end{cases} \qquad (10)$$

которая (в силу свойства IV) равносильна системе (9). Система (10) проще системы (9), так как каждое уравнение системы (10) «распадается» на два уравнения.

Систему (10) можно переписать так:

$$\begin{cases} x(z^2+xy-2)=0, \\ y(x^2+yz-2)=0, \\ z(y^2+xz-2)=0; \end{cases}$$

согласно утверждению I, она равносильна совокупности следующих восьми систем:

$$\begin{cases} x=0, \\ y=0, \\ z=0; \end{cases} \quad (10_1) \qquad \begin{cases} x=0, \\ y=0, \\ y^2+xz-2=0; \end{cases} \quad (10_2)$$

$$\begin{cases} x=0, \\ x^2+yz-2=0, \\ z=0; \end{cases} \qquad (10_3)$$

$$\begin{cases} z^2-xy-2=0, \\ y=0, \\ z=0; \end{cases} \qquad (10_4)$$

$$\begin{cases} z^2+xy-2=0, \\ x^2+yz-2=0, \\ z=0; \end{cases} \qquad (10_5)$$

$$\begin{cases} x=0, \\ x^2+yz-2=0, \\ y^2+xz-2=0; \end{cases} \qquad (10_6)$$

$$\begin{cases} z^2+xy-2=0, \\ y=0, \\ y^2+xz-2=0; \end{cases} \qquad (10_7)$$

$$\begin{cases} z^2+xy-2=0, \\ x^2+yz-2=0, \\ y^2+xz-2=0. \end{cases} \qquad (10_8)$$

Система (10_1) имеет решение $(0, 0, 0)$; системы (10_2), (10_3), (10_4) не имеют решений; система (10_5) имеет решения $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$; система (10_6) имеет решения $(0, \sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(0, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$; система (10_7) имеет решения $(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$; система (10_8) совпадает с системой (7), рассмотренной в примере 1. Так как

$$(9) \Leftrightarrow (10) \Leftrightarrow [(10_1) \vee (10_2) \vee \ldots \vee (10_7) \vee (7)],$$

то совокупность всех решений системы (9) — это объединение множества решений систем (10_1), (10_5), (10_6), (10_7), (7). В результате получается указанное выше решение системы (7) и еще одно решение $(0, 0, 0)$.

Упражнения

Найти все решения систем уравнений:

1. (МФТИ, 1969).

$$\begin{cases} xy+x+y=7, \\ yz+y+z=-3, \\ xz+x+z=-5. \end{cases}$$

2. (МФТИ, 1970).

$$\begin{cases} 3xy-\dfrac{16}{xz}=-5, \\ xz+\dfrac{8}{yz}=4, \\ yz-\dfrac{3}{xy}=1. \end{cases}$$

3. (МФТИ, 1970).

$$\begin{cases} 4xy+x^2+y^2=1, \\ 8xz+x^2+4z^2=-2, \\ 8yz+y^2+4z^2=1. \end{cases}$$

4. (МФТИ, 1969).

$$\begin{cases} 2(x^2+y^2)=xyz, \\ 10(y^2+z^2)=29xyz, \\ 5(z^2+x^2)=13xyz. \end{cases}$$

Найти действительные решения систем уравнений:

5. (МФТИ, 1969).

$$\begin{cases} xyz^2=-y-2x, \\ 2x^2yz=-y-z, \\ 3xy^2z=2x-z. \end{cases}$$

6. (МФТИ, 1969).

$$\begin{cases} x^3+y^3=19xy+7xz+11yz, \\ x^3+z^3=26(xy+xz+yz), \\ y^3+z^3=47xy+35xz+39yz. \end{cases}$$

7. (МФТИ, 1970).

$$\begin{cases} 3x-6y-8z=xyz^2, \\ 2x-5y-7z=-x^2yz, \\ 3x-9y-13z=-xy^2z. \end{cases}$$

ШАХМАТНО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Е. Я. Гик

Ферзь — часовой

В предыдущем разделе наших заметок *) мы установили, что конь может обойти все поля шахматной доски размером 8×8, побывав на каждом из них лишь по разу.

Вопрос об обходе обыкновенной шахматной доски другими фигурами решается значительно проще. Например, для ладьи такой маршрут изображен на рисунке 1. Здесь

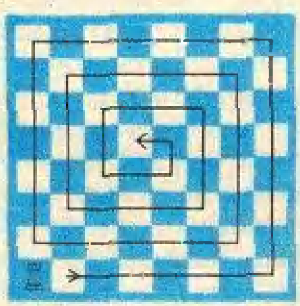


Рис. 1.

ладья добивается своей цели, делая по дороге 14 поворотов. Докажите, что это число нельзя уменьшить.

Указанный путь (он, кстати, подходит также для ферзя и короля) не замкнут. Однако можно предложить и замкнутый маршрут (рис. 2). Здесь ладья при

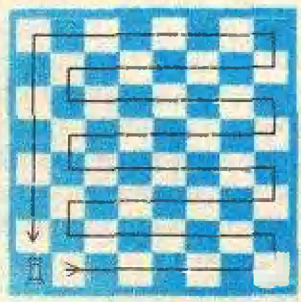


Рис. 2.

желании с конечного поля своего путешествия — a2 может вернуться на исходное — a1. Убедитесь сами, что на нечетной доске (например, размером 7×7 или 9×9) замкнутого пути для ладьи уже не существует.

Понятно, что для слона задача в общем случае поставлена некорректно (слон может ходить лишь по полям одного цвета), но если ограничиться только белыми или черными полями, то она также легко решается.

Теперь мы переходим к одним из наиболее распространенных математических задач на шахматной доске. Эти задачи связаны с различными расстановками фигур, поэтому их обычно называют комбинаторными. Пожалуй, самой известной из них является следующая «задача о восьми ферзях», поставленная в 1850 году великим немецким математиком Ф. Гауссом.

Расставить на шахматной доске 8 ферзей

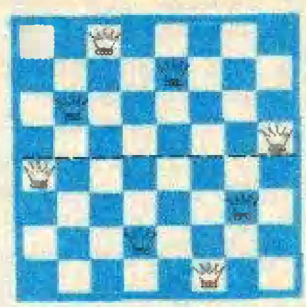


Рис. 3.

так, чтобы никакие два из них не угрожали друг другу *).

На рисунке 3 изображено одно из воз-

*) См. «Квант», № 8, 9.

*) Конечно, с шахматной точки зрения две фигуры одного цвета не могут угрожать друг другу, но мы пользуемся традиционной терминологией.

можных решений задачи, всего же их существует 92. Доказано также, что все они получаются из 12 основных позиций применением зеркального отражения и поворотами доски на 90°, 180° и 270°. Например, отражая зеркально (относительно пунктирной линии) приведенную позицию, получаем другую позицию, устраивающую нас (рис. 4) *).

Любопытно, что сам Гаусс первоначально

Рис. 4.

предполагал, что задача допускает лишь 72 решения, и сомневался в правильности числа 92. В наши дни эта задача и подобные ей решаются за несколько минут. Достаточно составить несложную программу и ввести ее в вычислительную машину, вскоре все 92 позиции будут выданы на печать.

Сформулируем два вопроса, которые приводят нас соответственно к двум классам разнообразных комбинаторных задач.

*) Подробно эта задача решается в книге Л. Я. Окунева «Комбинаторные задачи на шахматной доске» (ОНТИ НКТП СССР, 1936)

1. *Какое наибольшее число одноименных фигур (ферзей, ладей, коней, слонов и королей) можно расставить на доске так, чтобы никакие две из них не угрожали друг другу?*

2. *Какое наименьшее число одноименных фигур можно расставить на доске так, чтобы они держали под угрозой все свободные от фигур поля доски?*

Первое из этих чисел в теории графов называется числом внутренней устойчивости, а второе — числом внешней устойчивости. Понятия эти далеко не абстрактны, и играют важную роль во многих математических задачах. Примером может служить следующая известная

Задача о часовых. *В тюрьме города N около каждой камеры можно поставить часового. Находясь у одной из камер, часовой видит также, что происходит в некоторых других, из которых к этой камере ведут коридоры. Каково наименьшее число часовых, необходимое для наблюдения за всеми камерами?*

Если шахматную доску рассматривать как тюрьму (да простят нам шахматисты такую аналогию), причем ее поля считать камерами, а вертикали, горизонтали и диагонали — коридорами, то «часовыми» естественнее всего назначить ферзей, которые могут вести наблюдение в произвольном направлении.

Оказывается, 5 ферзей вполне способны справиться со всей шахматной «тюрьмой» (рис. 5). По существу мы определили число внешней устойчивости для ферзей, равное 5 (нетрудно показать, что четырех часовых уже недостаточно). Доказано, что существуют 4860 способов, которыми можно расставить

Рис. 5.

5 ферзей-часовых. Кстати, в нашем примере ферзи обладают еще одним интересным свойством: сами они друг другу не угрожают.

Из сказанного следует, что для того, чтобы поймать одинокого ферзя противника (короли на доске отсутствуют), достаточно иметь 5 ферзей. Однако известно, что в шашках 3 дамки справляются с одной (если та не стоит на «большой дороге»), хотя они не в состоянии держать одновременно все черные поля доски. Любопытно выяснить, нельзя ли поймать вражеского ферзя при помощи менее чем пяти ферзей.

Если поставить на доску 9 ферзей, то хотя бы два из них окажутся на одной вертикали или горизонтали, то есть будут угрожать друг другу. Таким образом, число внутренней устойчивости для ферзей равно 8 (рис. 3, 4), а всего подходящих позиций — 92.

Особенно легко наши задачи решаются для ладьи — наверное, проявляется ее прямолинейность. Ладей-часовых надо иметь

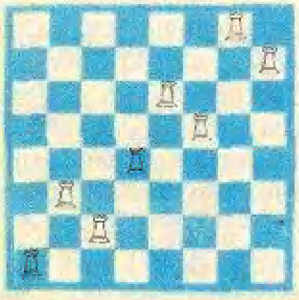


Рис. 6.

8, их достаточно расположить вдоль любой горизонтали или вертикали. Нетрудно также показать, что и число внутренней устойчивости для ладьи равно 8, а соответствующих расположений имеется 8! — число перестановок из 8 элементов *) ($n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$). Позиция на рисунке 6 удовлетворяет обоим требованиям.

Докажите, что если ладьи перенумерованы, то есть отличаются друг от друга, то необходимых расположений

Фигура	Король	Ферзь	Ладья	Слон	Конь	Пешка
Число внешней устойчивости	9	5	8	8	12	32
Число внутренней устойчивости	16	8	8	14	32	32

имеется уже $(8!)^2$. На доске размером $n \times n$ эти числа соответственно равны $n!$ и $(n!)^2$.

Слонов, чтобы справиться со всей доской, достаточно иметь столько же, сколько и ладей — 8 (рис. 7). Однако разместить слонов на доске так, чтобы они не угрожали друг другу, можно почти вдвое больше, чем ладей — 14 (рис. 8). Для доказательства рассмотрим диагонали, идущие вверх слева направо (на рисунке 8 они пунктирные), всего таких диагоналей 15. На каждой из них может стоять не более одного слона, так как слоны не должны угрожать друг другу. Следовательно, общее число слонов не превышает 15. Но ровно 15 слонов также нельзя расставить: крайние из наших диагоналей состоят из одного-единственного поля. Таким образом, искомое число не более 14. Одно из решений приведено на рисунке 8. Аналогичные рассуждения показывают, что на доске размером $n \times n$ можно расставить не больше $2n - 2$ слонов.

Докажите, что число допустимых расстановок слонов на произвольной

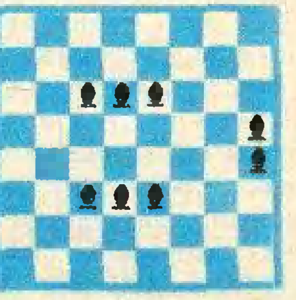


Рис. 7.

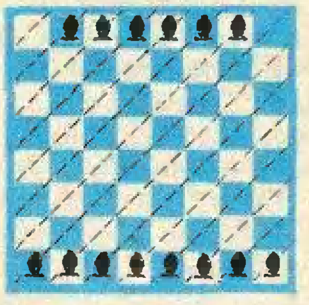


Рис. 8.

доске равно квадрату некоторого числа.

Теперь перейдем к коням. Поставив 32 коня на одни белые или одни черные поля, мы найдем расположение, при котором они не угрожают друг другу. Покажем, что 32 — число внутренней устойчивости для коней. Для этого разобьем доску на 8 равных прямоугольников (рис. 9). Легко заметить, что конь, помещенный в

*) См., например, статью Н. Я. Виленкина «Комбинаторика» («Квант» № 1, 1971).

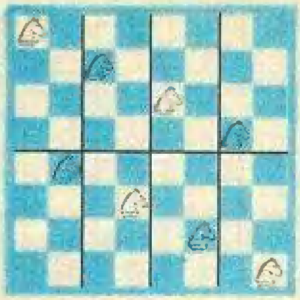


Рис. 9.

прямоугольник, нападает ровно на одно поле этого же прямоугольника, причем для любых двух таких коней поля, на которые они нападают, различны. Поскольку в каждом прямоугольнике 8 полей, то внутри него можно разместить самое большее 4 коня, не угрожающих друг другу, а общее число не превосходит $4\times8=32$. Докажите, что имеется лишь два упомянутых расположения — кони стоят только на белых или только на черных полях.

Число внешней устойчивости для коней равно 12 (рис. 10). Теперь разберемся с королями. Нетрудно проверить, что больше 16 королей, не стоящих рядом (то есть не угрожающих друг другу), расставить нельзя (рис. 11).

Число внешней устойчивости для королей

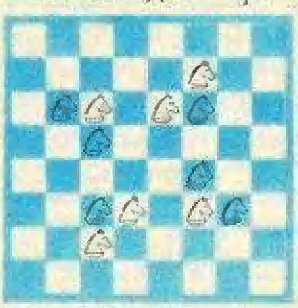


Рис. 10.

равно 9 (рис. 12). В каждом из 9 выделенных прямоугольников рисунка 12 имеется поле, которому может угрожать лишь король, стоящий на поле этого же прямоугольника. Следовательно, для того, чтобы все поля находились под угрозой, в каждой из 9 частей должен стоять хотя бы один король, искомое число равно 9.

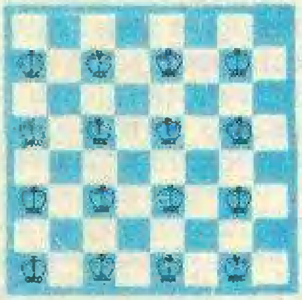


Рис. 11.

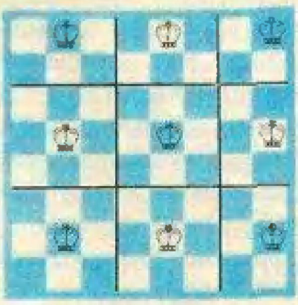


Рис. 12.

Очевидно, две пешки не могут одновременно угрожать друг другу. Однако если в вопросе 1 (стр. 50) слова «друг другу» заменить словами «хотя бы одна другой» и разрешить пешкам становиться на первую горизонталь, то вопросы 1 и 2 станут корректными и для пешек. Ответом является число 32, причем расположение пешек на рисунке 13 удовлетворяет обоим требованиям.

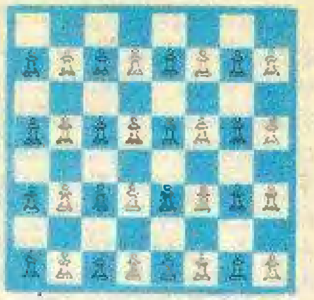


Рис. 13.

В результате наших исследований можно подвести итоги, заполнив таблицу (см. стр. 51).

Воспроизвести недостающие доказательства, найти число соответствующих расположений и сделать выводы из таблицы представляется вам самим. В качестве весьма серьезных задач можно рекомендовать все рассмотренные нами, но на доске размером $n\times n$ *). Заметим, что некоторые из них весьма сложны, а для других решения еще не найдены. Например, число внешней устойчивости для ферзей до сих пор неизвестно. Другими словами, не решена следующая

Проблема. *Каково наименьшее число ферзей, которых можно расставить на шахматной доске размером $n\times n$ так, чтобы все ее свободные поля находились под угрозой?*

---

*) Ряд таких задач рассмотрен в книге А. М. Яглома и И. М. Яглома «Неэлементарные задачи в элементарном изложении», М., Физматгиз, 1954.

Все возрастающая тяга молодежи к знаниям, широкие перспективы дальнейшего развития высшего образования в стране, намеченные XXIV съездом КПСС, предъявляют особые требования к качеству книг, выпускаемых для учащейся молодежи, и, в частности, к качеству пособий для поступающих в вузы. Редакция уже обращала внимание на то, что среди таких пособий встречаются книги, содержащие существенные недостатки и даже грубые ошибки (см. «Квант» № 11, 1970). К сожалению, мы вынуждены еще раз вернуться к этому же вопросу.

В этом номере мы публикуем рецензии на два пособия, изданные в Киеве и Ленинграде.

Выпущенные большими тиражами, эти книги разошлись по всей стране. Мы хотели бы предостеречь наших читателей от излишне доверчивого отношения к подобным книгам.

Редакция журнала «Квант» обратилась с письмом в Министерство высшего и среднего специального образования СССР о необходимости установить надежный контроль за изданием пособий для поступающих в вузы.

Сборники ошибок автора

Недавно издательство Киевского университета выпустило два пособия по математике *), которые, как сказано в аннотации, рассчитаны на поступающих в вузы и могут быть полезны слушателям и преподавателям подготовительных курсов, учащимся старших классов средней школы. Ознакомление с этими пособиями показывает, что они написаны на чрезвычайно низком научно-педагогическом уровне, а потому могут принести лишь вред математической подготовке учащихся.

Многие узловые теоретические вопросы школьного курса математики автор излагает неудачно, неточно или даже с грубыми ошибками, а значительное число разбираемых задач решено неверно. Подробный список замечаний и объяснений недостатков этих книг мог бы занять целый журнал, и потому мы приведем здесь лишь отдельные примеры.

Приводимые в книгах определения основных понятий элементарной математики не всегда точны, а даваемые при этом пояснения неясны и подчас неверны. Так, совершенно запутан вопрос об арифметическом корне.

Можно ли понять точный смысл, скажем, следующего: «... $\sqrt{a^2}$ принимает два значения: a и $-a$. Но положительное из этих двух чисел только одно, оно и равно $\sqrt{a^2}$» (I, стр.45)? Неудивительно, что при таком понимании знака квадратного радикала автор допускает многочисленные ошибки при решении задач: доказывает, что $\sqrt{7-\sqrt{24}}=\sqrt{6}-1$ (I, стр. 170), а затем сообщает, что

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\pm(2-\sqrt{3})$$

(I, стр. 347); $y=1$ объявляет корнем уравнения $\sqrt{y}=-1$ (I, стр. 311); при вычислении значений одних тригонометрических функций через другие употребляет формулы типа $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ (II, стр. 149, 152, 164) и т. д.

В пособиях уделяется внимание только чисто формальным выкладкам, без какого-либо анализа проводимых операций. Именно из-за этого при решении уравнений и систем уравнений часто получаются неверные результаты: решения теряются, посторонние решения не отбрасываются и т. д. (I, стр. 134—135, 202—203; II, стр. 214, 222—227, 312 и др.). Приводимые автором рецепты решения некоторых типов уравнений из-за отсутствия необходимого анализа лишены смысла.

В качестве иллюстрации воспроизведем «решение» уравнения $|ax+b|=c$: «Согласно определению модуля

$$|ax+b|=\begin{cases} ax+b, & \text{если } ax+b>0,\\ -(ax+b), & \text{если } ax+b<0.\end{cases}$$

Следовательно, уравнение... сводится к двум уравнениям, не содержащим знака модуля,

$ax+b=c;\qquad -(ax+b)=c.$

*) В. Ф. Ковалев, Практические занятия по математике для поступающих в вузы. Арифметика и алгебра. Киев, изд-во Киевского университета, 1970, 388 стр., тир. 75 000 экз., цена 88 коп.

В. Ф. Ковалев, Практические занятия по математике для поступающих в вузы. Геометрия и тригонометрия. Киев, изд-во Киевского университета, 1971, 316 стр., тир. 100 000 экз., цена 74 коп.

Для краткости в дальнейшем эти книги при ссылках обозначаются соответственно I и II.

Первое уравнение дает $x=\frac{c-b}{a}$, а второе $x=\frac{-c-b}{a}$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что оба корня удовлетворяют исходному уравнению» (I, стр. 85—86).

Столь же формально излагается и решение неравенств. В тех же случаях, когда автор пытается дать какие-то советы, путаница только увеличивается.

Вот, например, как выглядят рекомендации по поводу решения неравенства

$$\frac{(x+3)(x-2)}{x+3}>0.$$

«При решении подобных неравенств очень часто допускают ошибку, сокращая числитель и знаменатель на общий множитель, в данном случае на $x+3$. Такое сокращение незаконное, поскольку множитель может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Данное неравенство равносильно двум системам неравенств

$$\begin{cases}(x+3)(x-2)\geq 0,\\ x+3>0\end{cases}$$

и

$$\begin{cases}(x+3)(x-2)\leq 0,\\ x+3<0,\end{cases}$$

решая которые, находим $x\geq 2$, $-3<x\leq 2$» (I, стр. 245—246). Заметим, кстати, что второй ответ неверен.

Никакой критики не выдерживает раздел о тригонометрических неравенствах (II, стр. 228—244), где во многих задачах получены бессмысленные ответы.

Изложение теоретического материала по геометрии представляет собой простое собрание формулировок определений и теорем, взятых из школьного учебника. Целесообразность такого «конспекта учебника» не ясна, тем более, что в ряде мест изложение автора оставляет желать лучшего.

Некоторые задачи по геометрии решены неверно или неполно (II, стр. 27, 53, 83, 93 и др.).

Пособия содержат целый ряд вопросов, давно уже исключенных из школьной программы и не требуемых на вступительных экзаменах (схема Горнера, теорема Безу, извлечение корней из комплексных чисел, формула сложного радикала, подробная теория обратных тригонометрических функций). Жаль, что автор не проявил желания особенно тщательно отобрать материал для книг, тем более, что и эти вопросы не всегда изложены наилучшим образом.

Например, уже давно справедливо отказались от рассмотрения «функций» $y=\mathrm{Arc}\sin x$ и др., однако автор зачем-то возрождает этот изжитый подход; приводимые им выводы формул между обратными тригонометрическими функциями и решения простейших уравнений, содержащих эти функции, часто неверны из-за отсутствия необходимых ограничений (II, стр. 244—257).

Книги изобилуют неграмотными оборотами речи, а также фразами, смысл которых совершенно непонятен: «...графиком есть гипербола с вершиной в точке...» (I, стр. 208); «...функция... в этих точках не существует, а если говорить точнее, принимает бесконечно большие значения» (I, стр. 227); «если модуль выражения $2x+8$ больше 7, то само это выражение должно быть больше 7 и меньше —7» (I, стр. 242); «выразим $\cos 2x$ через половинный аргумент» (II, стр. 215) и т. п.

Сказанное со всей очевидностью свидетельствует, что рассматриваемые книги представляют собой не руководства для желающих повторить школьный курс математики, а скорее сборники ошибок, иногда столь грубых, что их сейчас редко встретишь даже в работах абитуриентов.

А. Ф. Хрусталев

Не учебник и не задачник

В 1970 г. издательство Ленинградского отделения общества «Знание» выпустило книгу Я. И. Марьяновского «Знания — молодежи. В помощь поступающим в вузы. «Физика» тиражом 215 500 экземпляров. За основу книги взят «несколько сокращенный вариант лекций автора, которые он читает ряд лет в Центральном лектории в помощь поступающим в высшие учебные заведения» *).

«Изложение рассчитано на читателя, имеющего среднее образование».

Однако, читатель, не торопись приступить к внимательному изучению пособия. Тебя ожидают немалые трудности! Испытай предварительно свои силы.

«Вес — это сила, с которой тело притягивается Землей. Не следует думать, что вес тела равен лишь силе тяготения этого тела к Земле» (стр. 36). Контрольный вопрос к читателю: что следует и что не следует думать про вес?... Если ты, читатель, разобрался в этом, в наших дальнейших комментариях ты не нуждаешься. Смело и самостоятельно двигайся дальше. Наоборот, не отчаивайся, если первое испытание оказалось тебе не под силу. И на экзаменах, бывает, приходится тащить второй билет. Рискнем.

«Изотермический процесс — процесс, поисходящий при постоянной температуре». Запомнили? Пошли дальше: «При изотермическом расширении газ охладится... В этом отношении изотермические процессы сильно отличаются от адиабатических... Так, при адиабатических

---

*) Здесь и далее кавычками выделяются цитаты из рецензируемой книги.

абатическом расширении газ охлаждается...» (стр. 124—125).

Итак, газ в изотермическом процессе охлаждается. Спрашиваем: в чем изотермичность такого процесса и в чем его «сильное отличие» от адиабатического? По-видимому, для многих ответ не очевиден.

Если, читатель, ты не разобрался в предложенных головоломках, значит, книгу тебе читать рано. Надо что-нибудь попроще. В этом случае автор снисходительно «отсылает читателя к элементарному учебнику физики под редакцией академика Г. С. Ландсберга в трех томах» (стр. 2).

Не будем, однако, обольщаться тем, что все, не выдержавшие предложенного испытания, послушаются нас. Что можно посоветовать таким упрямцам?

Для начала им надлежит отбросить укоренившиеся в них застарелые и превратные представления о физических явлениях, определениях и законах. Судите сами.

Считалось раньше, что с ростом высоты растет потенциальная энергия тел. А по Марьяновскому это справедливо лишь «на первый взгляд» и лишь для «высот, много меньших радиуса Земли» (стр. 77—78).

Что следует ожидать от тела, испытывающего в горизонтальном направлении действие двух не равных друг другу сил? Ускоренного движения? Ошиблись. «Например, ящик находится на полу. Мы приложили к нему силу, но ящик неподвижен. Наша сила меньше силы трения покоя». (стр. 23). (Поясним, что в виду имеется не максимальное значение силы трения покоя.)

Как принято поступать, если при вычислении сопротивления участка цепи «ответ получен отрицательным»?

«В этом случае нужно изменить направление тока на противоположное и снова решить задачу» (стр. 175).

Скептики скажут, что направление тока не влияет на знак сопротивления, что ток уже мог быть найден или задан и менять его направление можно лишь изменением полярности всех батарей, включенных в цепь. Ах, уж эти скептики. Держитесь от них подальше, читатель! Скептицизм их — от незнания и стремления скрыть это. Спроси у такого: чему равно минимальное значение вектора (не модуля, а самого вектора)? Держим пари: скептик скажет, что не знает, что такого значения не существует. А наш читатель знает (если уже добрался до стр. 17). Но хватит о скептиках. Пускай учатся. И поймут (со временем) даже такие «наиболее важные» понятия, как «энергия поля в точке» (стр. 148), или «вес выталкивающей силы электростатического поля» (зад. 82), введением которых мы всецело обязаны данной книге.

Уж если мы заговорили о задачах, рассмотрим еще некоторые. Например, задачу № 48. Тело вращается на нити (не стержне!) в вертикальной плоскости с постоянной линейной скоростью. И так как постоянство скорости противоречит закону сохранения энергии (уж этот закон! Все время путается под ногами!), автор поступает так: молчаливо отменяет закон, формулируя условие задачи, и воскрешает его к жизни в решении.

Столь же фантастические события сопутствуют мотоциклисту, выполняющему классический аттракцион «мертвая петля». «Важно понимать»,— пишет автор,— что если «тело съехало с высоты», равной высоте петли, «то в верхней точке петли... оно упало бы». Но, видимо, «важно понимать» также, что верхней точки петли такое тело не достигает.

Но — довольно о физике. У читателя может составиться неверное представление о пособии как книге сугубо специальной и односторонней. Смеем разубедить его. Пища для ума предлагается и математикам (стр. 7, 25, 127, 129, 139, и т. д.), логикам. Следует отметить, что и с точки зрения русского языка в книге не все благополучно. «...Относительный покой относительно системы» (стр. 3). «Твердое тело (если оно не сыпучее)» (стр. 121). «Работа силы — это мера накопленной в ее процессе энергии» (стр. 77).

А один стилистический прием автора будет интересен и лирикам, и физикам одновременно. Речь идет об использовании скобок.

«Силы тяготения (гравитационные)» (стр. 55). «Гравитационные силы (силы тяготения)» (стр. 61).

В заключение проверьте сами прочность ваших новых физических воззрений. Даны два равных одноименных заряда. Где надо разместить третий заряд того же знака, чтобы он пребывал в равновесии? Очевидно, в середине отрезка, соединяющего данные заряды. Так вот, если использованная в этой ситуации (задача № 81) аргументация автора: «Найденное нами положение — единственное, в котором заряд в равновесии. Поэтому равновесие заряда устойчиво» — покажется Вам убедительной, а сам факт устойчивости равновесия — не подлежащим сомнению, автор достиг своей цели. А нам — нам останется лишь пожелать тем из великой армии в 215 500 счастливых обладателей этой книги, кто склонен к некритическому усвоению материала и лишен к тому же чувства юмора: не дай вам бог встретиться с экзаменатором, не успевшим изучить «Пособие» и оставшимся при традиционных взглядах (да, встречаются еще и такие!). Беседа с ним может привести к плачевному результату. Не забывайте, что «эта книга — не учебник и не задачник» (стр. 2). И это — единственная цитата из всех приведенных, которая в комментариях не нуждается.

С. В. Ащеулов,
В. А. Барышев

Лингвистика и математика встречаются на олимпиаде

В. В. Раскин

В воскресенье 13 декабря 1970 года разбором задач II тура, вручением грамот и раздачей увесистых книжных премий закончилась VII традиционная олимпиада по языковедению и математике. Олимпиады по языковедению и математике ежегодно с 1965 года проводит Отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета МГУ. Это олимпиады не по двум разным «предметам», поименованным в названии, а по единому, очень новому и интересному «предмету» — структурной и прикладной лингвистике.

Структурная и прикладная лингвистика — это такое направление в весьма древней и почтенной науке лингвистике, которое сложилось в последние годы и стремится к внедрению в эту науку точных формулировок, точных описаний и точных методов исследования языка и, в тесной связи с этим, занимается приложением лингвистических знаний на практике: в машинном переводе, информационном поиске и других важнейших современных проблемах, связанных с автоматической переработкой информации и «общением» человека с электронной вычислительной машиной. Структурная и прикладная лингвистика оказывается, таким образом, наукой, соседствующей с математикой, кибернетикой, информатикой (слышали о такой новой науке?), психологией и другими науками.

Больших успехов в этих олимпиадах неизменно добиваются учащиеся математических спецшкол и другие школьники, явно наделенные математическими способностями. При этом отнюдь не всегда, к сожалению, они могут похвастаться хорошей подготовкой по иностранному языку (хотя им и случалось писать в решении единственной задачи олимпиады, проверяющей знания «школьного» иностранного языка: «i knows Inglish veri vel») или большой общей эрудицией. Тем не менее эти успехи не случайны.

Дело в том, что в школе не изучают специального предмета — лингвистики (или языкознания, или языковедения — это все синонимы). Поэтому задачи олимпиад по языковедению и математике носят совершенно особый характер: они не могут опираться на какую-либо определенную сумму знаний, не могут проверять, что школьник знает, что он выучил, а что «знал, да забыл». В отличие от задач на математических, физических, химических, даже литературных олимпиадах и вообще олимпиадах по «школьным предметам», задачи лингвистические сами содержат все необходимое для своего решения, и решаются внимательным анализом и систематизацией данных, четким логическим рассуждением, часто с использованием определенных математических приемов, с привлечением, конечно, языкового чутья и языковой интуиции решающего. Никаких предварительных знаний не требуется!

И вот оказывается, что такое суровое ограничение на форму лингвистических задач, диктуемое особенностями школьной программы, оборачивается весьма выгодной стороной: организуя и систематизируя данные задачи, рассуждая логически, обнаруживая и фиксируя определенные закономерности, самостоятельно «изобретая» метод решения задачи, школьник, сам того не ведая, имитирует, хотя, конечно, весьма приблизительно и условно, на специально подобранном материале, но все-таки реальную работу лингвиста-структуралиста.

Ведь одна из главных проблем, стоящих перед современной наукой,— это научить электронную вычислительную машину перерабатывать информацию, записанную на человеческом языке, потому что только тогда машина сможет справиться с насущными задачами автоматического перевода с одного языка на другой, хранения в памяти огромных массивов информации и быстрого обнаружения в этих массивах нужных сведений (информационный поиск) и другими задачами, без решения которых немыслим дальнейший прогресс. А научить машину понимать человеческий язык очень нелегко. Машина понимает только свой совершенно точный, абсолютно формализованный язык программирования. Поэтому лингвист должен совершенно точно выявить и записать в понятном для машины формализованном виде все свойства и закономерности человеческого языка, необходимые для понимания его машиной. Решая эту проблему, лингвист имеет дело со своего рода лингвистической задачей, только огромного масштаба и несравненно более трудной, и никто не организует ему специально подобранных данных и не наводит прямо или косвенно на правильный метод решения, как это делается в олимпиадной задаче.

Практически все задачи олимпиад по языковедению и математике в той или иной степени «математичны». Взять хотя бы такие, казалось бы, чисто лингвистические задачи, как перевод с одного языка на другой (см., например, задачу I). Правда, на этих олимпиадах Вас просят переводить только с незнакомого языка, или на незнакомый язык, или, еще пуще, с незнакомого да на незнакомый (!). Однако это оказывается вполне посильным делом: задачи составлены таким образом, что полный логический анализ данных обеспечивает возможность такого необычного перевода. Недаром «табличные люди», как их называют организаторы олимпиады, то есть такие участники, которые любят и умеют организовывать данные в таблицы, неизменно добиваются успеха при решении задач этого и других типов.

Другие типы задач еще более «математичны» (см., например, задачи II, III). В них используются те или иные математические приемы: комбинаторные, логические и другие,— но общий принцип остается неизменным: задача не должна требовать предварительных знаний — все должно следовать из условия, решающий должен быть в состоянии все сообразить «на месте».

Вот такие необычные олимпиады стали обычным делом в Московском университете. В них уже приняло участие около 2000 старшеклассников. Многие из призеров учатся сейчас на Отделении структурной и прикладной лингвистики и сами сочиняют задачи для олимпиад. Приглашаем и Вас попробовать применить свои способности, в частности математические, на новом интересном поприще. 21 ноября 1971 года состоится I тур очередной VIII традиционной олимпиады по языковедению и математике. Оргкомитет приглашает всех желающих принять в ней участие пожаловать к 10 часам утра в новый корпус гуманитарных факультетов МГУ (Ленинские горы).

А сейчас предлагаем решить несколько лингвистико-математических задач, с которыми успешно справились участники олимпиад.

Задачи олимпиад по языковедению и математике

I. Даны фразы на датском языке с их переводами

1. Vores hus har et stort loft.
   У нашего дома большой чердак.

2. Vores stad har tre store biografer.

В нашем городе три больших кинотеатра.

3. Loftferne, der er i vores hus, er store.

Чердаки, которые есть в нашем доме, большие.

4. Vores stad har en stor biograf.

В нашем городе большой кинотеатр.

5. Loftet af vores hus er stort.

Чердак нашего дома большой.

Задание 1. Переведите следующие фразы на датский язык:

1. Кинотеатры, которые есть в нашем городе, большие.
2. В нашем доме три больших чердака.
3. Кинотеатр нашего города большой.

Задание 2. Разберите по составу слово loftferne и напишите, что означает каждая его часть.

II. О записи:

внучк... занимал... эт... час...

известно, что она получена из грамматически правильной русской фразы, состоящей из четырех слов, отсечением некоторых конечных букв (не более 3 букв у каждого слова). Причем, отсекались только окончания и, кроме того, у некоторых слов буквы могли и не отсекаться.

Задание. Определить, из скольких предложений могла получиться такая запись.

III. Дается фрагмент из японской таблицы умножения:

футацу × ёцу = яцу
ицуцу × ицуцу = нидзюго
яцу × коконоцу = ситидзюни
ицуцу × яцу = ёндзю
мицу × мицу = дзюхати
коконоцу × мицу = нидзюсити
коконоцу × муцу = ?
коконоцу × ? = хатидзюити
ёцу × ? = сандзюни
футацу × нанацу = ?

Задание. Заполните места, где стоят «?».

ОЛИМПИАДУ ПРОВОДИТ ЭЛЕКТРОННАЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАШИНА

Ю. И. Соркин, Н. Б. Шкундина

В январе — апреле этого года впервые Московским экономико-статистическим институтом была проведена математическая олимпиада для школьников выпускных классов с участием электронно-вычислительной машины. Олимпиада проходила в два тура. Второй тур проводился с помощью машины «Минск-22», к участию в нем были допущены лишь школьники, успешно прошедшие первый тур.

Первый тур проходил заочно. В нем приняли участие все желающие школьники Москвы и близлежащих районов Московской области. На решение пяти задач первого тура давался срок месяц (то есть до 15 февраля).

Задачи первого тура

1. Куб с ребром a срезан плоскостями по углам так, что от каждой грани остался правильный многоугольник. Найти объем полученного тела.

2. Имеет ли уравнение $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$, где a, b и c — длины сторон некоторого треугольника, действительное решение?

3. Сумма нескольких последовательных натуральных чисел равна 1000. Найти все такие последовательности.

4. Доказать, что для тупоугольного треугольника имеет место неравенство $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C > 1$.

5. Определить угол треугольника, в котором медиана, биссектриса и высота делят угол на четыре равные части.

Разбор задач первого тура

1. Ясно, что каждое из восьми срезаемых у куба по углам тел является правильной треугольной пирамидой с прямыми углами между боковыми ребрами (рис. 1). Если

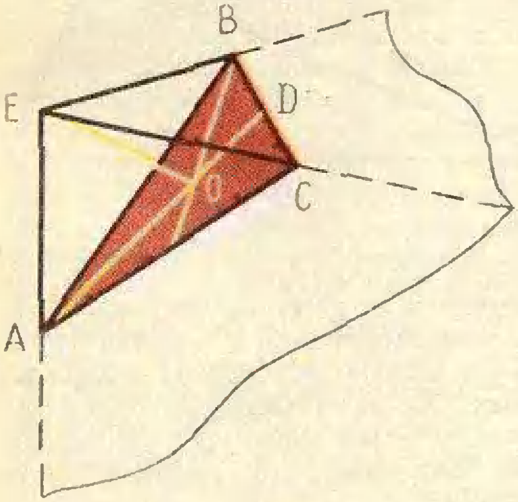


Рис. 1.

обозначить сторону основания пирамиды через b, то $AD=\frac{b\sqrt{3}}{2}$, $OD=\frac{b\sqrt{3}}{6}$, $CD=\frac{b}{2}$, и тогда по теореме Пифагора высота пирамиды $EO=\frac{b\sqrt{6}}{6}$. Площадь основания равна $\frac{b^2\sqrt{3}}{4}$. Поэтому объем такой пирамиды равен $\frac{b^3\sqrt{2}}{24}$, а объем тела, получающегося из куба срезом восьми таких пирамид, равен

$$a^3-\frac{b^3\sqrt{2}}{3}. \qquad (1)$$

Так как по условию задачи от граней куба должны остаться правильные многоугольники, то решений два. Могут быть восьмиугольники или квадраты (рис. 2 *а*, *б*).

В первом случае $b=a(\sqrt{2}-1)$, и тогда из (1) после преобразований получаем $V=\frac{7a^3(\sqrt{2}-1)}{3}$.

Во втором случае $b=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, и тогда из (1) находим $V=\frac{5a^3}{6}$.

Заметим, что лишь 20% школьников нашли оба решения задачи. Остальные находили только одно решение. При этом предпочтения не было для какого-либо одного из двух многогранников — каждый получил приблизительно равное число голосов.

2. Покажем что дискриминант D данного квадратного уравнения

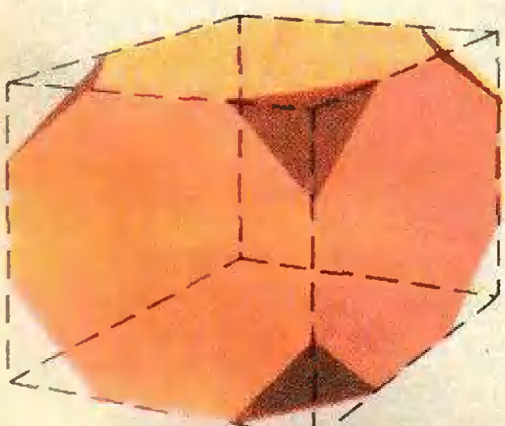


Рис. 2а.

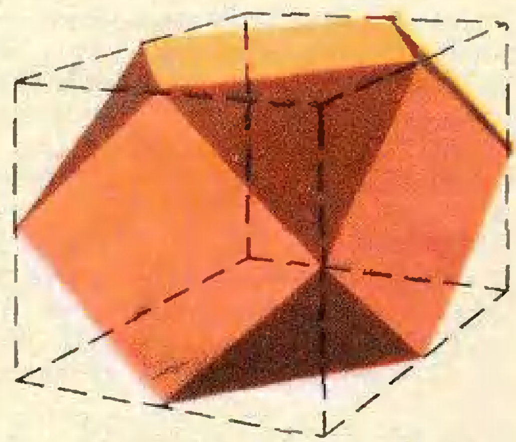


Рис. 2б.

отрицателен. Действительно,

$$D = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 = (b^2 + c^2 - a^2 - 2bc)(b^2 + c^2 - a^2 + 2bc) = [(b-c)^2 - a^2] \times [(b+c)^2 - a^2],$$

но так как a, b и c — длины сторон треугольника, то $|b-c| < a$ и $b+c > a$, то есть соответственно $(b-c)^2 - a^2 < 0$ и $(b+c)^2 - a^2 > 0$, то есть $D < 0$.

3. Пусть искомая последовательность имеет вид

$$k+1,\ k+2,\ \ldots,\ n-1,\ n.$$

Тогда ее сумму можно представить как разность сумм отрезков натурального ряда от 1 до n и от 1 до k, то есть

$$\frac{(n+1)n}{2} - \frac{(k+1)k}{2} = 1000$$

или $n^2 + n - k^2 - k = 2000$.

Левую часть этого равенства разложим на два множителя, а правую на простые множители:

$$(n+k+1)(n-k) = 2^4 \cdot 5^3.$$

Заметим, что оба множителя $n+k+1$ и $n-k$ в левой части этого равенства четными быть не могут, так как их сумма $2n+1$ нечетна. Кроме того, первый множитель больше второго. Тем самым мы приходим к совокупности четырех систем:

$$\begin{cases} n+k+1 = 2000, \\ n-k = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} n+k+1 = 400, \\ n-k = 5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} n+k+1 = 80, \\ n-k = 25, \end{cases} \qquad \begin{cases} n+k+1 = 125, \\ n-k = 16. \end{cases}$$

Первая из этих систем дает тривиальную «последовательность», состоящую из единственного числа 1000. Остальные системы приводят к последовательностям:

198, 199, 200, 201, 202;
28, 29, ..., 51, 52;
54, 55, ..., 69, 70.

4. Пусть для определенности тупым будет угол C. Тогда $0 < B < \frac{\pi}{2} - A$, и поэтому

$$\cos B > \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \sin A > 0,$$

а следовательно, $\cos^2 B > \sin^2 A$. Тогда $\cos^2 A + \cos^2 B > \cos^2 A + \sin^2 A = 1$, то есть $\cos^2 A + \cos^2 B > 1$, и тем самым подавно

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C > 1,$$

что и требовалось доказать.

5. Подавляющее число участников олимпиады решало эту задачу

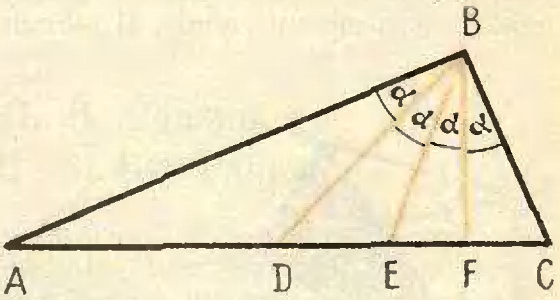


Рис. 3.

введением в рассмотрение вспомогательной окружности (см. «Квант» № 1, 1971). Однако эта задача допускает более короткое решение (Галина Авербух, 10[б] класс школы № 200, Алексей Водовозов, 10[в] класс школы № 569).

Пусть в треугольнике ABC (рис. 3) медиана BD, биссектриса BE и высота BF делят угол B на четыре равные части, каждая из которых обозначена через α. Тогда

$$AF = h \operatorname{tg} 3\alpha;\quad DF = h \operatorname{tg} 2\alpha$$

и

$$FC = h \operatorname{tg} \alpha.$$

Далее

$$AD = AF - DF = h(\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha)$$

$$DC = DF + FC = h(\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \alpha),$$

но по условию $AD = DC$, то есть

$$\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \alpha$$

или

$$2 \operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\frac{2 \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 3\alpha \cos \alpha}.$$

Так как $\sin 2\alpha \neq 0$, то $2 \cos 3\alpha \cos \alpha = \cos 2\alpha$ или

$$\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = \cos 2\alpha,$$

то есть $\cos 4\alpha = 0$.

Отсюда следует, что угол B прямой.

Второй тур

Сорок восемь ребят, успешно прошедших первый тур, собрались 25 апреля в МЭСИ, чтобы продолжить «соревнование».

Во втором туре одним из «членов» организационного комитета олимпиады была электронно-вычислительная машина «Минск-22». На долю этого «члена» выпала основная работа. В машинную память было заложено несколько тысяч задач. Каждая задача была снабжена специальным кодом, указывающим раздел математики, к которому относится эта задача, и степень трудности (все задачи были разбиты на четыре степени сложности). Программа была составлена таким образом, что машина методом случайного выбора составляла варианты (по пять задач) из различных разделов математики одинаковой суммарной трудности.

Машина для каждого участника олимпиады напечатала вариант.

По истечении срока (четыре часа по 45 минут) работы были отданы машине на проверку*). Машина сравнила полученные решения задач со своими и тех, кто решил все пять задач правильно, объявила победителями. Всю эту работу машина проделала за то время, пока участники олимпиады знакомились с институтом.

Шесть учеников десятых классов московских школ были награждены грамотами МЭСИ, памятными подарками:

Елена Савина, Виктор Зак, Сергей Мапенов, Марк Ригель, Александр Розин, Леонид Терехов.

Проведение математической олимпиады машиной явилось завершающим этапом работы по проведению вступительных экзаменов по математике и физике с помощью ЭВМ. Эта большая работа проводится под руководством ректора МЭСИ проф. М. А. Королева, проф. И. Г. Венецкого и доктора технических наук А. Г. Морозова.

*) Все задачи имели числовые ответы.

Некоторые задачи второго тура

1. Вокруг куба описан цилиндр так, что диагональ куба является осью цилиндра. Найти площадь боковой поверхности цилиндра, если площадь диагонального сечения куба равна $18-6\sqrt{2}$.

2. Решить уравнение

$$\lg^2 3+\lg^2 2=\lg^2 3x+\lg^2 2x.$$

3. Сечение делит треугольную пирамиду на два многогранника. Как относятся объемы этих многогранников, если ребра делятся этим сечением в отношении $1:2$; $1:2$; $1:3$, считая от вершины?

4. Найти рациональный корень уравнения

$$\frac{2}{\sqrt{x}}+x\sqrt{x}=3.$$

5. Решить уравнение

$$5^{3x}+9\cdot5^{x}+27\left(5^{-3x}+5^{-x}\right)=64.$$

6. Основанием пирамиды $SABCD$ является ромб с диагоналями $AC=a$; $BD=b$. Боковое ребро SA перпендикулярно к плоскости основания и равно q. Через точку A и середину K ребра SC проведена плоскость, параллельная диагонали основания BD. Определить площадь сечения.

7. Найти наименьший корень уравнения $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x-15}=4$.

8. Решить неравенство

$$x^{\log_2 x-4}<32.$$

9. Конус и цилиндр имеют общее основание, а вершина конуса находится в центре другого основания цилиндра. Чему равен синус угла между осью конуса и его образующей, если известно, что полная поверхность цилиндра относится к полной поверхности конуса как семь к четырем?

10. Найти наименьший корень уравнения

$$\sqrt[3]{x^2+14x+24}-\sqrt[3]{x^2-5x+14}=\sqrt[3]{x+2}.$$

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Системы алгебраических уравнений»

1. $(3,\ 1,\ -2)$; $(-5,\ -3,\ 0)$.
2. $(2,\ -1/2,\ 4)$; $(-2,\ 1/2,\ -4)$;
$$(\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2},\ 2\sqrt{2});$$
$$(-\sqrt{2}/2,\ -\sqrt{2},\ -2\sqrt{2}).$$
3. $(1,\ 0,\ -1/2)$; $(-1,\ 0,\ 1/2)$;
$$(i/\sqrt{3},\ -2i/\sqrt{3},\ i/2\sqrt{3});$$
$$(-i/\sqrt{3},\ 2i/\sqrt{3},\ -i/2\sqrt{3}).$$
4. $(0,\ 0,\ 0)$; $(1,\ 2,\ 5)$; $(-1,\ 2,\ -5)$; $(-1,-2,\ 5)$.
5. $(0,\ 0,\ 0)$; $(-1/2,\ -1,\ 2)$.
6. $(0,\ 0,\ 0)$; $(-1,\ 2,\ 3)$.
7. $(0,\ 0,\ 0)$; $\left(-\sqrt[3]{1/2},\ -2\sqrt[3]{1/2},\ \sqrt[3]{1/2}\right)$; $\left(\sqrt[3]{32/35},\ \frac{7}{4}\sqrt[3]{32/35},\ -\frac{5}{4}\sqrt[3]{32/35}\right)$.

К статье «Шахматно-математические заметки»

(см. «*Квант*» № 9)

1. Занумеруйте все поля доски (кроме центрального, на которое кони не могут попасть) в порядке их обхода конем (рис. 1 *а*) и рассмотрите вспомогательный рисунок 1 *б*.

Рис. 1 *а*.

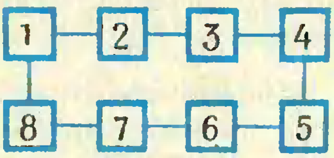


Рис. 1 *б*.

2. Возьмите полосу шириной в 2 поля, идущую по краю доски. Убедитесь, что конь может пройти по всем полям этой полосы, ступив на каждое из них по разу (начать можно с любого поля этой полосы). Разбейте всю доску на такие полосы и начните путь с центрального поля.

3. $m^2n^2-9mn+12m+12n-16$. При $m=n=8$ получаем 3696.

4. Обозначим искомое число полей через $N(n)$. Легко проверить непосредственно, что $N(0)=1$, $N(1)=8$, $N(2)=33$. При $n=3$ конь может оказаться на всех белых полях восьмиугольника с четырьмя белыми полями на каждой стороне, изображенного на рисунке 2 (начальное поле — в центре). Докажите методом математической индукции, что

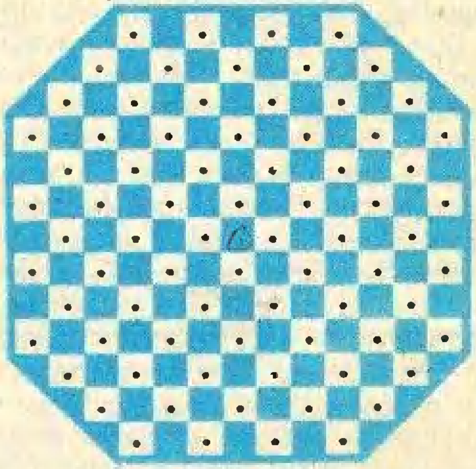


Рис. 2.

при любом $n\geqslant 3$ искомые поля заполняют без просвета все одноцветные поля соответствующего восьмиугольника. Подсчитав число этих полей, получаем: $N(n)=17n^2+4n+1$ при $n\geqslant 3$.

5. Числа m и n должны быть взаимно просты, и хотя бы одно из них должно быть нечетным.

К заметке «Квант» для младших школьников

(«*Квант*» № 9, 1971, 3-я стр. обложки)

1. Нельзя. Хотя весы и уравновешены, тем не менее грузы равной массы, помещенные на чашки весов, будут создавать различные моменты относительно оси коромысла.

2. Вечером темно и поэтому зрачки у человека расширены. Но хрусталик глаза — не идеальная линза. Изображения, которые дают различные участки хрусталика из-за аберрации смещены относительно друг друга. Чем большая часть хрусталика «работает», тем более размытое изображение.

3. Погрузив кончик баллона лампочки в сосуд с водой и сломав его, измерить с помощью линейки объем воды. Затем, заполнив баллон водой полностью, измерить объем баллона. Используя, что $p_1V_1=p_2V_2$, нетрудно теперь найти давление в баллоне.

4. Погрузить баллон в озеро вверх дном, измерить линейкой оставшийся объем воздуха. Далее поступить так же, как в задаче 3.

5. Из-за многократных отражений света на границах кристалликов.

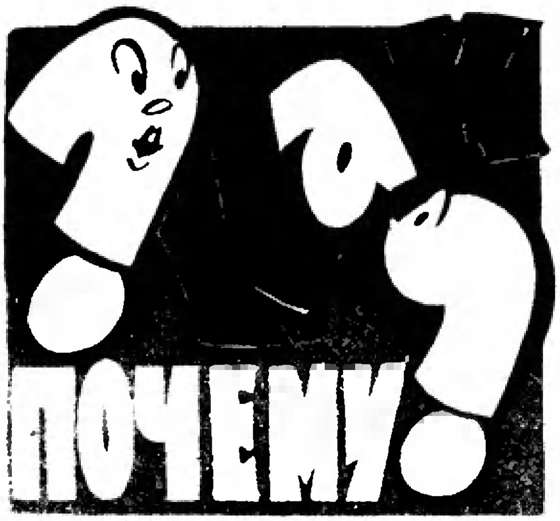
НА МАРКАХ — АТОМНЫЕ РЕАКТОРЫ

Использование атомной энергии в мирных целях неразрывно связано с созданием атомных реакторов. Реактор — это сердце любой атомной электростанции или атомного двигателя. В нем происходит управляемая цепная реакция деления атомных ядер и освобождается атомная энергия. В настоящее время построено много различных типов атомных реакторов.

Первый атомный реактор для мирных целей был построен в Советском Союзе на атомной электростанции в Обнинске, которая вошла в строй в 1954 году. Этому событию была посвящена серия из трех марок, выпущенная в январе 1956 г. На одной из них показана верхняя часть реактора (см. фото).

Атомные реакторы для мирных целей были построены во многих странах мира. На фото приведены марки с изображением первых атомных реакторов ГДР, Чехословакии и Румынии, построенных с помощью Советского Союза, и марка, на которой показан первый атомный реактор, построенный Югославией в Белграде.

Использование атомной энергии в мирных целях символизируют приведенные на фото марки Канады и Франции, на которых также изображены атомные реакторы.



1. Как с помощью длинной тонкой нити, секундомера и стограммовой гирьки определить объем комнаты?

2. Как определить объем комнаты, располагая мотком медной проволоки, весами с набором гирь, аккумулятором, вольтметром и амперметром?

3. На перекрестках улиц некоторых городов установлены электронные устройства, автоматически рассчитывающие и показывающие на световом табло скорость, которую должны поддерживать водители автомашин, чтобы подъехать к следующему светофору под зеленый свет. Обычно показания табло меняются в такой последовательности: вначале 45 *км/час*, потом 50 *км/час* и, наконец, 60 *км/час*. После этого табло обычно гаснет, так как скорость более 60 *км/час* разрешена лишь на малом числе улиц.

Как, наблюдая за показаниями табло, определить расстояние до следующего светофора с помощью одних лишь часов?

В. И. Ланге, А. П. Рымкевич

КВАНТ
ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

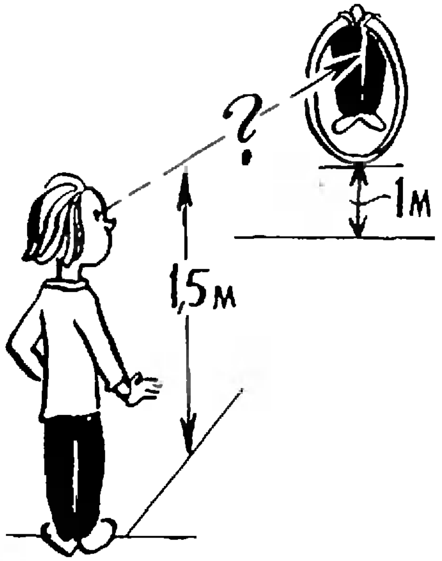
1. Дано число 123456789101112...9899100. Вычеркните из него 150 цифр так, чтобы оставшееся число было наибольшим.

2. На стене вертикально висит зеркало. Нижний край его находится на высоте 1 метра от пола. На какое расстояние нужно отойти от стены, чтобы увидеть в зеркале свои ботинки? Считаем, что глаза человека находятся на высоте 1,5 метра от пола.

3. Имеется 77 телефонов. Можно ли так попарно соединить их, чтобы каждый был соединен ровно с 13?

4. Докажите, что произведение четырех последовательных целых чисел, увеличенное на 1, есть точный квадрат.

А. П. Савин



Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Главный художник А. И. Климанов
Художественный редактор О. Н. Яковлева
Корректор А. Л. Ипатова
Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15
Тел. 234-08-11

Сдано в набор 23/VI 1971 г.
Подписано в печать 20/VIII 1971 г.
Бумага 70×100[1]/16. Физ. печ. л. 4.
Условн. печ. л. 5,2. Уч.-изд. л. 5,69.
Тираж 266 690 экз. Т-14324.
Цена 30 коп. Заказ 1251
Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР г. Чехов Московской области

ЦЕНА 30 коп.

ИНДЕКС 70465

квант 10