

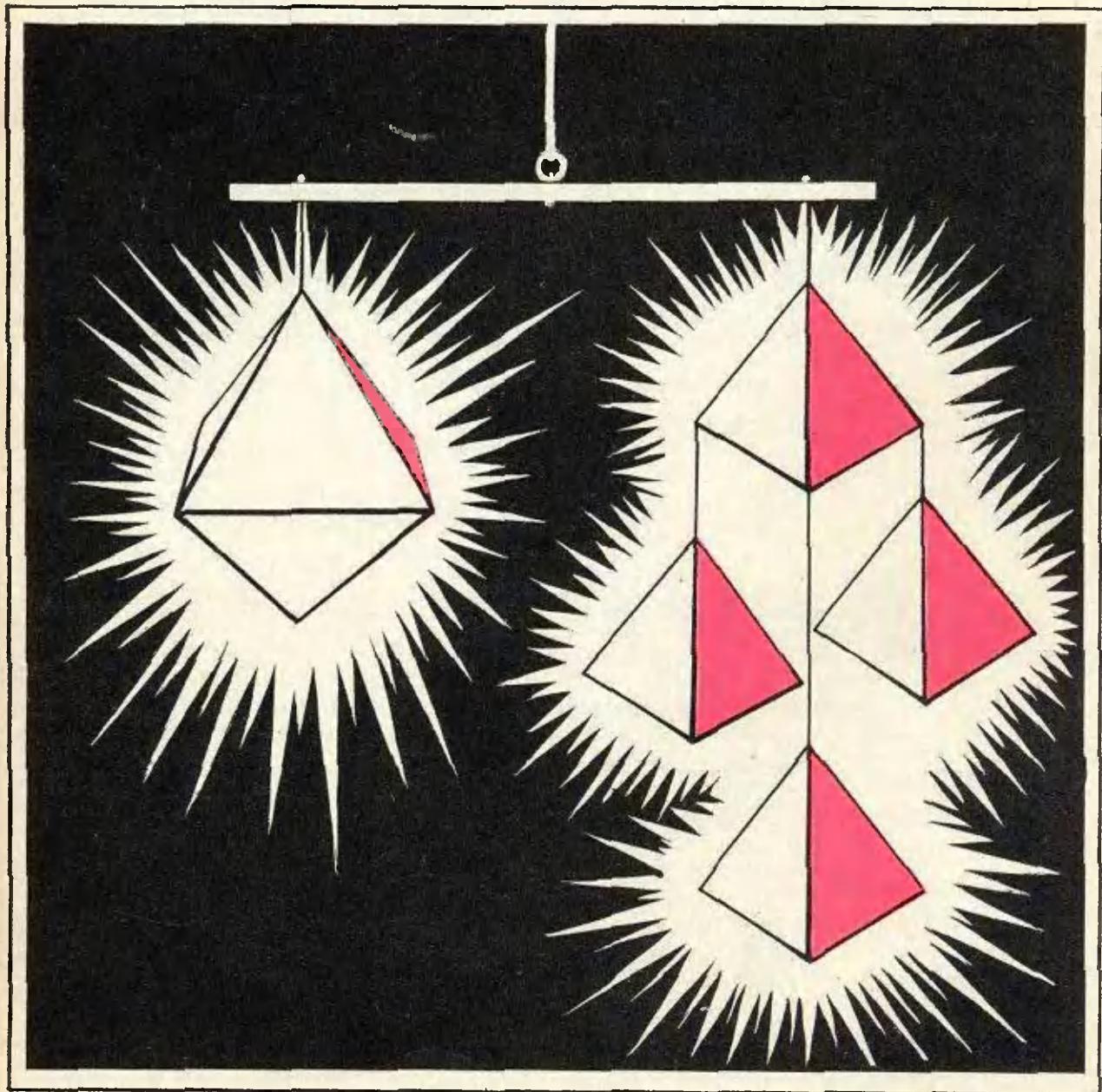
Квант

Научно-популярный физико-математический

11

1971

журнал
Академии
наук СССР
и
Академии педагогических
наук СССР



В номере:

Взаимодействие атомов и молекул 1	<i>Г. Я. Мякишев</i>
О наилучших приближениях 8	<i>Д. Б. Фукс, М. Б. Фукс</i>
Поле тяжести сферически- однородного тела 16	<i>И. И. Огиевецкий</i>
«Неприводимый» случай 20	<i>В. Г. Янкелевич</i>
Лаборатория «Кванта»	
Демонстрация орбит тел, движущихся под действием центрального притяжения 22	<i>Р. Вуд</i>
Задачник «Кванта»	
Задачи 24	
Решения задач M70-M73; Ф79-Ф82 26	<i>Н. Б. Васильев, А. Л. Тоом, Б. Б. Буховцев, И. Ш. Слободецкий</i>
V Всесоюзная математическая олимпиада 35	<i>В. Л. Гутенмахер</i>
V Всесоюзная физическая олимпиада 42	<i>И. А. Зайцев</i>
Практикум абитуриента	
Графики в задачах на равномерные процессы 48	<i>Б. А. Кордемский</i>
Статика 54	<i>Л. Г. Асламазов</i>
Информация	
Заочная олимпиада Азиатской части СССР 58	
Рецензии, библиография	
От галактик до элементарных частиц 63	<i>В. А. Лешковцев</i>
Ответы, указания, решения 64	
Уголок коллекционера	
Значки Всесоюзных олимпиад 3-я стр. обл.	<i>Г. Н. Дьяченко</i>
Кроссворд 4-я стр. обл.	

Электромагнитная природа межмолекулярных сил

Приступить к теоретическому исследованию межмолекулярных сил до начала 20 века было почти невозможно. Простые и хорошо изученные гравитационные силы при взаимодействии тел столь малой массы как молекулы явно не могли играть заметной роли. Оставалось предположить, что молекулярные силы имеют электромагнитную природу. О каких-либо других силах в то время ничего не знали.

Любой атом и тем более молекула — это сложная система из большого числа заряженных частиц. Как она устроена, было не известно. А ведь от строения молекул, несомненно, зависят силы их взаимодействия. Однако исследования начались и начались, естественно, с самых простых случаев.

Ориентационные силы

У многих молекул, например, у воды, распределение положительных и отрицательных зарядов таково, что в среднем центры этих зарядов не совпадают. Такую молекулу приближенно можно рассматривать как электрический диполь: совокупность двух точечных зарядов $+q$ и $-q$ на небольшом расстоянии l друг от друга (рис. 1). Электрические свойства такой молекулы характеризуются дипольным моментом

$$p = ql.$$

Рассчитывать значения дипольных моментов молекул на первых порах не умели. До появления квантовой механики это вообще было невозможно.

Но, если считать дипольные моменты p_1 и p_2 двух молекул известными, то зависимость силы взаимодей-

ствия между ними от расстояния можно вычислить с помощью обычного закона Кулона. Сила притяжения между двумя диполями максимальна, когда они располагаются так, как показано на рисунке 2, вдоль одной линии. Эта сила возникает из-за того, что расстояние между разноименными зарядами 2 и 3 чуть меньше, чем между одноименными 1, 3 и 2, 4.

Естественно, сила взаимодействия диполей зависит от их взаимной ориентации. Поэтому она называется ориентационной. Хаотическое тепловое движение непрерывно меняет ориентацию молекул-диполей. Учитывая это, силу взаимодействия между диполями нужно вычислять как среднюю по всевозможным ориентациям. Расчеты привели к следующему результату: сила притяжения пропорциональна произведению дипольных моментов p_1 и p_2 молекул и обратно пропорциональна расстоянию между ними в седьмой степени:

$$F_{ор} \sim \frac{p_1 p_2}{r^7}.$$

Это очень быстрое убывание по сравнению с кулоновской силой взаимодействия заряженных тел, которая пропорциональна $\frac{1}{r^2}$.

Индукционные (поляризационные) силы

Можно указать еще один достаточно простой тип взаимодействия молекул. Оно возникает между двумя молекулами, одна из которых обладает дипольным моментом, а вторая — нет.

Дипольная молекула создает электрическое поле, которое поляризует молекулу с электрическими зарядами, равномерно распределенными по объ-

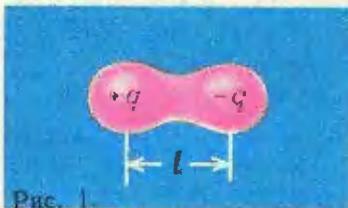


Рис. 1.

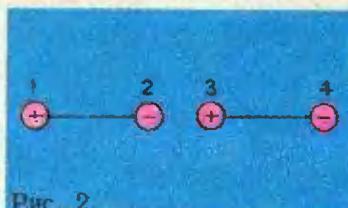


Рис. 2.

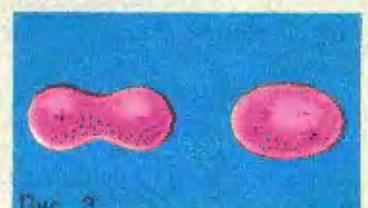


Рис. 3.

ему. Положительные заряды смещаются по направлению электрического поля, а отрицательные — против. В результате неполярная молекула немного растягивается (поляризуется) и у нее возникает дипольный момент (рис. 3).

Силу взаимодействия можно рассчитать и в этом случае. Она пропорциональна дипольному моменту p полярной молекулы, коэффициенту α , характеризующему способность неполярной молекулы поляризоваться и опять-таки обратно пропорциональна седьмой степени расстояния между молекулами:

$$F_{\text{п}} \sim \frac{p\alpha}{r^7}.$$

Данные силы притяжения называются индукционными или поляризационными, так как они возникают благодаря поляризации молекул, вызванной электростатической индукцией.

Дисперсионные силы

Хорошо известно, что силы притяжения существуют и между неполярными молекулами. Например, атомы инертных газов не имеют дипольного момента, но тем не менее взаимодействуют друг с другом. Природа этих сил была выяснена только после создания квантовой механики.

Качественно и грубо приближенно появление этих сил можно объяснить так. В атомах и молекулах электроны каким-то сложным образом движутся вокруг ядер. И в среднем по времени дипольные моменты молекул могут оказаться равными нулю.

Но в каждый момент времени электроны занимают какое-то определенное положение. Поэтому мгновенное значение дипольного момента отлично от нуля. Мгновенный диполь создает поле, поляризующее соседние неполярные атомы. Из-за этого появляется взаимодействие мгновенных диполей. Полная сила взаимодействия между неполярными молекулами есть средний результат взаимодействия всевозможных мгновен-

ных диполей с дипольными моментами, которые они наводят в соседних молекулах благодаря индукции.

Квантовый расчет приводит к выводу, что сила взаимодействия в этом случае пропорциональна произведению поляризуемостей молекул α_1 и α_2 и обратно пропорциональна седьмой степени расстояния:

$$F_{\text{д}} \sim \frac{\alpha_1 \alpha_2}{r^7}.$$

Данные силы называются дисперсионными по той причине, что дисперсия вещества (зависимость показателя преломления света от частоты) определяется теми же свойствами молекул, что и эти силы.

Дисперсионные силы действуют между всеми атомами и молекулами, так как механизм их появления не зависит от того, есть ли у них постоянные дипольные моменты или нет. Обычно эти силы превосходят по величине как ориентационные, так и индукционные силы. Только при взаимодействии молекул с большими дипольными моментами, например, молекул воды, ориентационная сила больше дисперсионной (для молекул воды в три раза). При взаимодействии же полярных молекул (СО, НСІ и т. п.) дисперсионные силы в десятки и сотни раз превосходят все остальные.

Но главное, что все три типа сил притяжения одинаковым образом убывают с расстоянием как $\frac{1}{r^7}$. Впрочем, на больших сравнительно с размерами молекул расстояниях начинает сказываться конечность скорости распространения электромагнитных взаимодействий. Из-за этого на расстояниях порядка 10^{-5} см силы притяжения начинают убывать уже как $\frac{1}{r^8}$. Это было обнаружено в опытах Дерягина.

Силы отталкивания

Теперь обратим внимание на силы отталкивания, действующие между молекулами на очень малых расстояниях. С одной стороны, здесь поло-

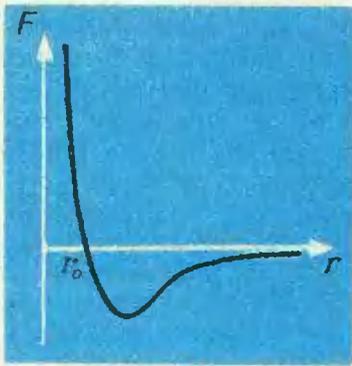


Рис. 4.

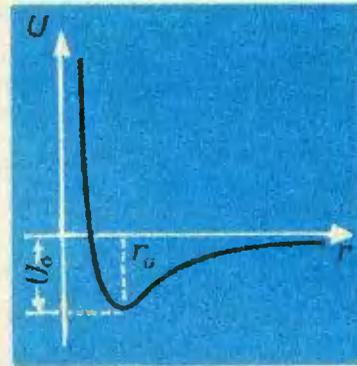


Рис. 5.

жение проще, а с другой, — сложнее. Проще в том смысле, что эти силы очень быстро нарастают при сближении молекул, и поэтому та или иная быстрота изменения силы с расстоянием не оказывает заметного влияния на течение разнообразных процессов.

Сложность состоит в том, что силы отталкивания в значительно большей мере, чем силы притяжения, зависят от индивидуальности молекул. Зная, как молекула *A* отталкивает молекулы *B* и *C*, мы еще не в состоянии судить, какие силы отталкивания будут действовать между молекулами *B* и *C*. При непосредственном сближении молекул индивидуальность их строения сказывается в большей мере, чем при больших расстояниях между ними.

К достаточно хорошим результатам приводит допущение, что силы отталкивания возрастают по закону

$$F_{\text{от}} \sim \frac{1}{r^{13}}.$$

Учитывая, что силы притяжения с уменьшением расстояния увеличиваются пропорционально $\frac{1}{r^7}$, а силы отталкивания растут как $\frac{1}{r^{13}}$, можно нарисовать примерную зависимость силы от расстояния. На рисунке 4 силы отталкивания считаются положительными, а силы притяжения отрицательными. При расстоянии r_0 , равном примерно сумме радиусов молекул, сила равна нулю.

Потенциальная энергия взаимодействия молекул

При изучении поведения большой совокупности молекул удобнее пользоваться не силой взаимодействия молекул, а потенциальной энергией.

Нужно вычислять средние характеристики системы, а понятие средней силы взаимодействия молекул лишено смысла, так как сумма всех сил, действующих между молекулами, согласно третьему закону Ньютона равна нулю. Средняя же потенциальная энергия, как мы скоро увидим, в существенной мере определяет состояние и свойства вещества.

Так как изменение потенциальной энергии равно работе силы, то по известной зависимости силы от расстояния можно найти зависимость от расстояния потенциальной энергии*).

При этом надо учитывать, что если сила меняется с расстоянием как $\frac{1}{r^n}$, где n — некоторое число, то потенциальная энергия будет меняться по закону $U \sim \frac{1}{r^{n-1}}$. Это видно уже из соображений размерности. Энергия имеет размерность работы, то есть произведения силы на расстояние. Поэтому размерность энергии равна размерности силы, умноженной на размерность расстояния.

*) См. статью Р. Г. Минца «Графики потенциальной энергии», «Квант» № 5, 1971, стр. 8—16.

Потенциальная энергия может быть определена с точностью до произвольной постоянной. При условии, что потенциальная энергия $U \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, график потенциальной энергии в зависимости от расстояния между молекулами будет иметь вид, изображенный на рисунке 5. U_0 — глубина потенциальной ямы.

Однако потенциальная кривая (кривая, определяющая зависимость потенциальной энергии от расстояния) будет иметь форму, изображенную на рисунке 5, если молекулы сближаются вдоль линии, соединяющей их центры (например, если молекулы движутся навстречу друг другу в плоскости A на рисунке 6). Если же это не так, то потенциальная кривая будет такой, как показано на рисунках 7 (молекулы сближаются в плоскости B) и 8 (молекулы сближаются в плоскости C).

Главная задача

Многое можно объяснить и понять, исходя из определенных представлений о характере взаимодействия молекул в веществе. Мы остановимся только на одном очень общем вопросе: каким образом знание зависимости потенциальной энергии от расстояния между молекулами позволяет установить количественный критерий различия между газами, жидкостями и

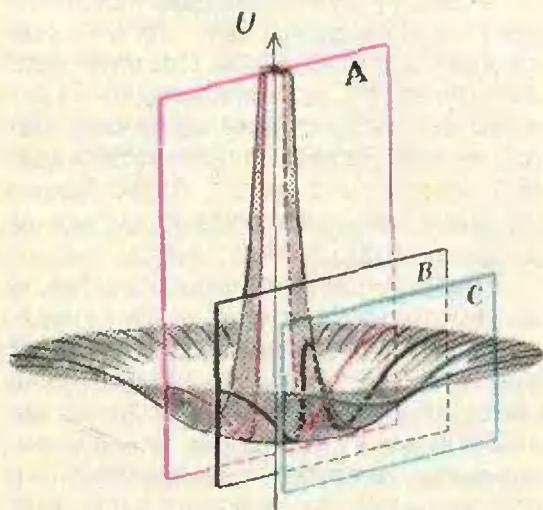


Рис. 6.

твердыми телами с точки зрения молекулярно-кинетической теории.

Предварительно, правда, нужно рассмотреть движение молекул с энергетической точки зрения.

Движение частицы в заданном потенциальном поле

Зная зависимость потенциальной энергии от расстояния, можно установить характер движения тела, используя лишь закон сохранения энергии.

Пусть одна из молекул неподвижна, и мы рассматриваем движение другой молекулы. Характер движения молекулы зависит от ее полной энергии. Согласно закону сохранения энергии полная энергия молекулы остается постоянной:

$$E = E_k + U = \text{const},$$

где E_k — кинетическая энергия, а U — потенциальная.

Рассмотрим вначале случай, когда $E = E_1 > 0$ (рис. 9). Полную энергию можно изобразить прямой, параллельной оси r , так как при любых r она имеет одно и то же значение. При движении молекулы вдоль r ее кинетическая и потенциальная энергии непрерывно изменяются: чем больше потенциальная энергия, тем меньше кинетическая и наоборот. Если частица движется справа налево, то ее кинетическая энергия растет, и в точке $r = r_0$ (минимум потенциальной энергии) достигает максимума. С дальнейшим уменьшением r кинетическая энергия начинает убывать. В точке $r = r_1$ кинетическая энергия равна нулю, так как в этой точке полная энергия равна потенциальной. Попасть в область $r < r_1$ частица не может. При этом ее положительная потенциальная энергия оказалась бы больше полной энергии, и, следовательно, кинетическая энергия сделалась бы отрицательной. Но кинетическая энергия всегда положительна.

В точке $r = r_1$ частица останавливается и начинает двигаться назад, ибо на нее действует сила отталкива-

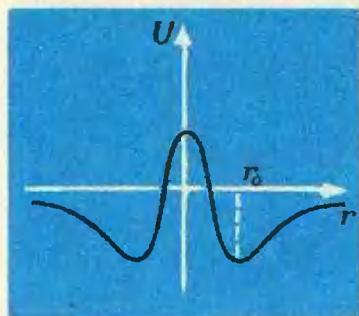


Рис. 7.

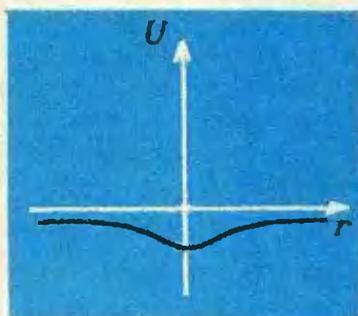


Рис. 8.

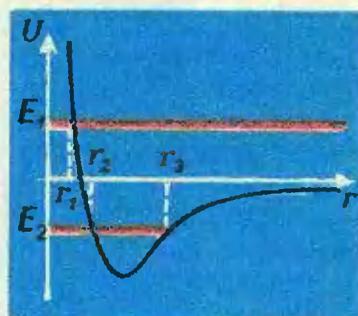


Рис. 9.

ния. Эта точка называется точкой поворота. В дальнейшем молекула движется в положительном направлении r и уходит на бесконечность.

Совершенно иная картина будет наблюдаться при $E = E_2 < 0$ (см. рис. 9). В этом случае молекула находится в потенциальной яме и не может из нее выйти. В точках поворота r_2 и r_3 кинетическая энергия равна нулю. Возникает так называемое связанное состояние. Молекулы совершают колебания друг возле друга. Разделение системы на две независимые частицы невозможно без увеличения полной энергии до $E > 0$.

Энергия взаимодействия молекул в газах, жидкостях и твердых телах

Установим теперь количественный критерий различия между газами, жидкостями и твердыми телами с точки зрения молекулярно-кинетической теории.

Газы

Можно получить более глубокое представление о состоянии вещества, называемом реальным газом, если нарисовать картину зависимости потенциальной энергии одной из молекул от расстояния до ее ближайших соседей (рис. 10). При перемещении молекулы ее потенциальная энергия на большей части пути почти точно равна нулю, так как расстояние между молекулами в газе в среднем гораздо больше их размеров. В точках 1 и 2 расположены ближайшие соседи рассматриваемой молекулы. Данная молекула проходит на довольно зна-

чительном расстоянии от соседа 1 и на более близком от соседа 2.

Средняя потенциальная энергия молекулы отрицательна и очень мала. Ее величина равна площади фигуры, ограниченной потенциальной кривой между точками 1 и 2 и осью r , деленной на длину отрезка 1—2 (среднее значение на отрезке 1—2). Полная средняя энергия обязательно больше нуля (прямая на рис. 10), так как при $E < 0$ мы имели бы связанное состояние молекул. Это возможно лишь при условии, что в газе средняя кинетическая энергия молекулы больше среднего значения ее потенциальной энергии:

$$\bar{E}_k > |\bar{U}|.$$

Ведь

$$\bar{E} = \bar{E}_k + \bar{U},$$

а \bar{U} — отрицательна.

Жидкости

В жидкостях и твердых телах молекулы находятся на малом расстоянии друг от друга. Поэтому каждая молекула взаимодействует сразу с несколькими своими соседями. Ограничимся учетом взаимодействия данной молекулы с двумя ближайшими соседями, находящимися примерно на расстоянии $2r_0$ друг от друга.

Искомую потенциальную кривую можно получить наложением кривой, изображенной на рисунке 7 (парное взаимодействие) на такую же кривую, смещенную относительно первой на расстояние чуть больше $2r_0$. Потенциальные энергии складываются, и поэтому глубина потенциальной ямы увеличивается почти вдвое, а мак-

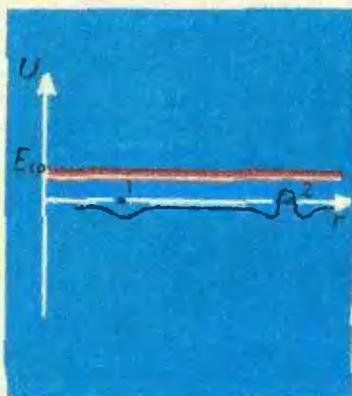


Рис. 10.

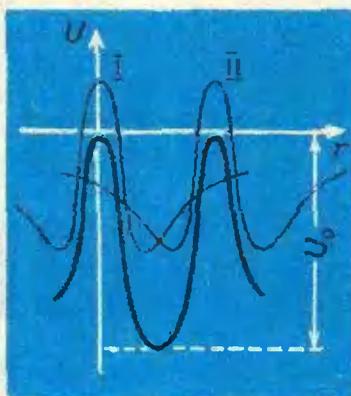


Рис. 11.

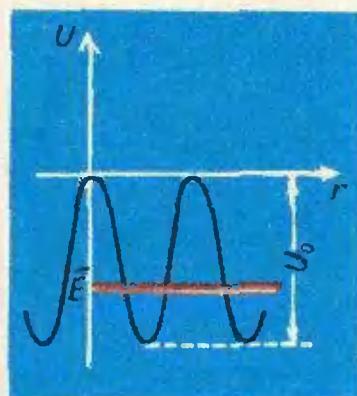


Рис. 12.

симумы энергии уменьшаются (рис. 11). Ход потенциальной кривой с учетом взаимодействия с другими молекулами показан на рисунке 12.

Для того чтобы молекула не могла покинуть жидкость, ее средняя энергия должна быть отрицательна ($\bar{E} < 0$). Только в этом случае молекула останется внутри потенциальной ямы, образованной ее соседями. Если же $\bar{E} > 0$, то молекула не удержится внутри жидкости и покинет ее.

Так как $\bar{E} = \bar{E}_k + \bar{U}$ и $\bar{U} < 0$, то в жидкости средняя кинетическая энергия меньше абсолютного значения средней потенциальной энергии: $\bar{E}_k < |\bar{U}|$, причем лишь незначительно меньше ($\bar{E}_k \approx |\bar{U}|$), так что $|\bar{E}| \leq |U_0|$ — минимального (по абсолютной величине) значения потенциальной энергии. Именно поэтому колебания молекулы в яме не продолжаются долго. Из-за хаотичности движения молекул их энергия непрерывно меняется и становится то больше, то меньше энергии \bar{E} .

Как только энергия молекулы превышает высоту потенциального барьера, отделяющего одну яму от другой, молекула перескакивает из одного положения равновесия в другое. Этим как раз и определяется характер теплового движения молекул в жидкости и текучесть жидкостей. Время «седлой жизни» молекулы — это время нахождения ее внутри определенной потенциальной ямы. С повышением

температуры средняя энергия увеличивается, и перескоки происходят чаще.

Твердые тела

Потенциальная энергия взаимодействия молекулы твердого тела со своими ближайшими соседями похожа на энергию взаимодействия молекул жидкости (рис. 12). Только глубина потенциальной ямы здесь несколько больше, так как молекулы расположены ближе друг к другу. Условие $\bar{E}_k < |\bar{U}|$ выполняется и для твердых тел. Но кинетическая энергия молекул твердого тела значительно меньше, чем у молекул жидкости. Ведь твердые тела образуются при охлаждении жидкостей. Соответственно, в твердых телах средняя кинетическая энергия движения молекул значительно меньше абсолютного значения средней потенциальной энергии:

$$\bar{E}_k \ll |\bar{U}|.$$

На рисунке 12 средняя энергия молекулы внутри потенциальной ямы изображена отрезком прямой. Частица совершает колебания у дна потенциальной ямы. Высота барьеров между соседними ямами велика, и молекулы почти не перемещаются из одного положения равновесия в другое. Для перемещения молекула должна получить энергию, значительно превышающую среднюю. Это событие маловероятно. Вот почему твердые тела, в отличие от жидкостей, сохраняют свою форму.

лежащая выше оси абсцисс, соответствующая приближениям с положительными знаменателями). Ясно, что эта геометрическая задача сложнее аналогичной задачи из части I: там мы искали точки решетки в полосе, заключенной между двумя параллельными прямыми, а здесь мы ищем их в бесконечно сужающемся кверху гиперболическом кресте.

Наши дальнейшие рассуждения будут основаны на том, что, оказывается, при отыскании рациональных приближений с коэффициентом качества, меньшим заданного числа, можно ограничиться рассмотрением лишь подходящих дробей приближаемого числа. В этом мы убедимся в следующем параграфе с помощью новой геометрической реализации алгоритма Евклида — «алгоритма вытягивания носов». Это остроумное название принадлежит известному советскому математику Борису Николаевичу Делоне.

§ 2. Алгоритм вытягивания носов.

Этот алгоритм можно представлять себе, как изображение алгоритма Евклида на плоскости.

Пусть нам даны:

- 1) ось l на плоскости;
 - 2) точка O на оси l ;
 - 3) исходящие из O и расположенные по разные стороны от оси l векторы $a_1 = \vec{OA}_1, a_2 = \vec{OA}_2$;
- мы предполагаем, что угол A_1OA_2 , содержащий ось l , меньше 180° , что A_1 лежит от оси l дальше, чем A_2 .

Из точки A_1 отложим вектор a_2 (то есть отложим отрезок, равный и параллельный отрезку OA_2 и направленный в ту же сторону). Из конца этого вектора отложим еще раз вектор a_2 , и так далее, столько раз, сколько можно его отложить, не пересекая прямую l . Скажем, он отложился m_1 раз. Конец последнего отложенного вектора обозначим через A_3 , а вектор OA_3 через a_3 . Из точки A_2 отложим вектор a_3 столько раз, сколько его можно отложить, не пересекая ось l (скажем, m_2 раз). По-

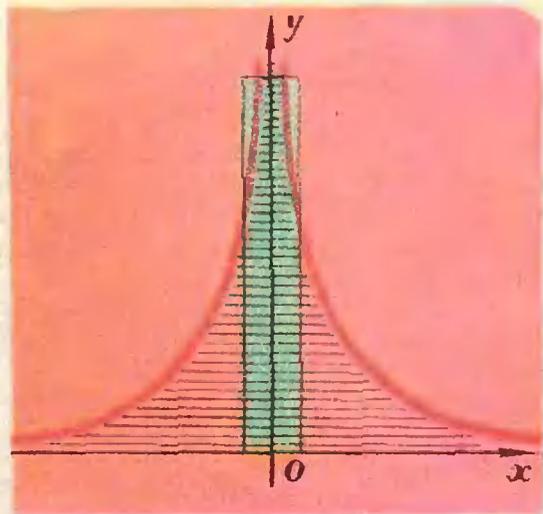


Рис. 2.

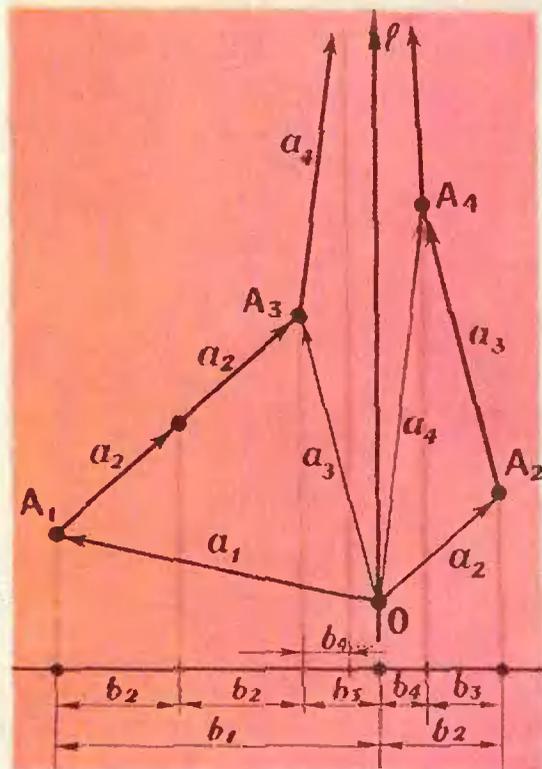


Рис. 3.

лучим точку A_4 . Вектор \vec{OA}_4 обозначим через a_4 , из точки A_3 откладываем a_4 и т. д.

Получаются две ломаные: $A_1 A_3 A_5 \dots$ и $A_2 A_4 A_6 \dots$, объёмлющие ось l (рис. 3). Может случиться, что какая-то из точек A_k попадет прямо на l — на этом процесс прекращается. Может оказаться, что этого не произойдет — тогда процесс будет бесконечным.

Все вместе и называется алгоритмом вытягивания носов (АВН).

Спроектируем теперь все построения на прямую, перпендикулярную к оси l . Сама ось l перейдет при этом в одну точку, векторы a_k — в отрезки, которые мы обозначим через b_k ($k = 1, 2, 3, \dots$). Получим уже известный нам алгоритм Евклида для отрезков b_1 и b_2 . В частности,

$$b_1/b_2 = [m_1; m_2, m_3, m_4, \dots] \quad (1)$$

и, значит,

$$b_2/b_1 = [0; m_1, m_2, m_3, \dots]. \quad (2)$$

Теперь покажем, как используется АВН при решении нашей геометрической задачи (см. § 1). Рассмотрим упоминавшуюся в § 1 решетку, точки которой отвечают приближениям числа α (нам удобно считать, что $0 < \alpha < 1$; очевидно, что при доказательстве теоремы Гурвица — Бореля можно ограничиться такими числами).

Применим АВН к векторам $a_1 = \vec{OA}_1$ и $a_2 = \vec{OA}_2$, на которых построена наша решетка, и к оси $l = OY$. Получатся две ломаные линии $A_1 A_3 A_5 \dots$, $A_2 A_4 A_6 \dots$, объёмлющие ось OY (рис. 4).

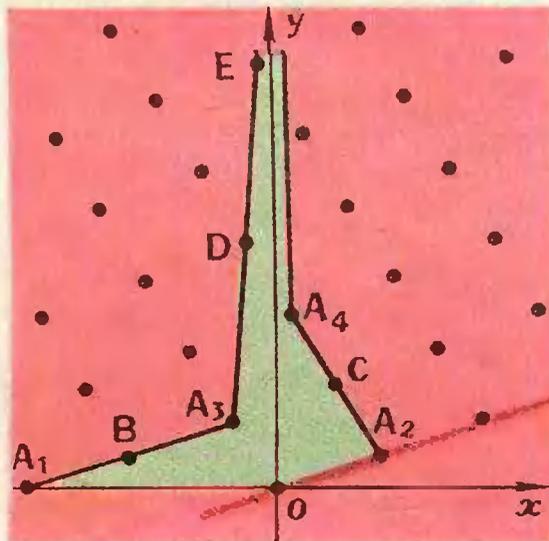


Рис. 4.

Числа m_1, m_2, \dots , фигурирующие в АВН, представляющие собой не что иное, как неполные частные числа α . Более точно, разложение числа α в цепную дробь выглядит так:

$$\alpha = [0; m_1, m_2, \dots]$$

(напомним, что $0 < \alpha < 1$).

Докажем теперь несколько свойств наших ломаных.

Теорема 1. Точки A_1, A_2, A_3, \dots являются точками решетки.

Справедливость этого утверждения ясна из рисунка 4. Его полное доказательство основано на теореме 2 части I. Подробности мы оставляем читателю.

Теорема 2. Между ломаными $A_1, A_3 A_5 \dots$ и $A_2 A_4 A_6 \dots$ (то есть в заштрихованной на чертеже области) точек решетки нет.

Доказательство. АВН состоит в последовательном откладывании векторов: $A_1 B, BA_3; A_2 C, CA_4; A_3 D, DE; \dots$ Для каждого такого вектора построим параллелограмм, сторонами которого служат этот вектор и тот вектор, параллельно которому он откладывается. Получим последовательность параллелограммов

$$OA_2 BA_1, OA_2 A_3 B, OA_2 CA_3, OCA_4 A_3, OA_4 DA_3, \dots$$

Эти параллелограммы покрывают всю область между нашими ломаными (это видно из рисунка 5, но нуждается, конечно, в аккуратном доказательстве, мы оставляем его читателю). Площади этих параллелограммов равны (каждые два соседних расположены как на рисунке 6). Значит, все они имеют такую же площадь как параллелограмм OA_2BA_1 (то есть площадь 1). Значит, все эти параллелограммы — основные параллелограммы нашей решетки (см. § 2 части I). А значит, ни внутри этих параллелограммов, ни на их сторонах точек решетки нет. Отсюда и получается требуемое.

(Теорема о том, что внутри основного параллелограмма и на его сторонах нет точек решетки, в части I была приведена в качестве задачи — не забудьте ее доказать!)

Следствие. Для того чтобы гиперболический крест содержал бесконечно много точек нашей решетки, лежащих выше оси Ox , необходимо и достаточно, чтобы он содержал бесконечно много точек из последовательности A_1, A_2, A_3, \dots

В самом деле, если крест содержит бесконечно много точек из указанной последовательности, то, значит, он содержит бесконечно много точек решетки (точки A_n — точки решетки). Если же лишь конечное число из точек A_n лежат внутри креста, то, значит, выше некоторой горизонтальной прямой обе ломаные находятся вне креста (рис. 7). Но между этими ломаными точек решетки нет, значит, выше этой горизонтальной прямой в кресте нет точек решетки.

Доказанное следствие раскрывает особую роль, которую играют точки A_n . Возникает вопрос, каким же приближениям числа α соответствуют эти точки.

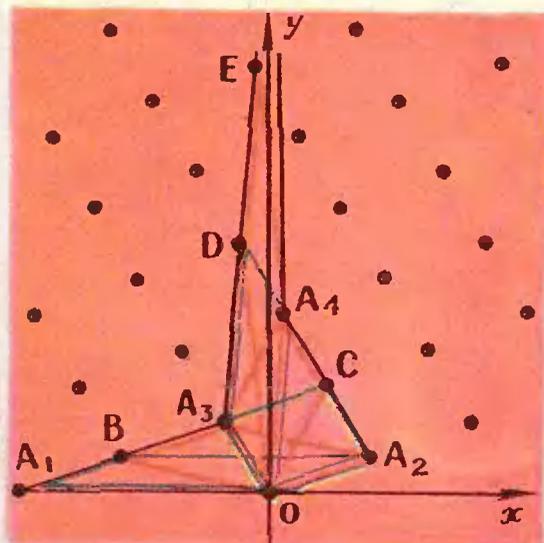


Рис. 5.

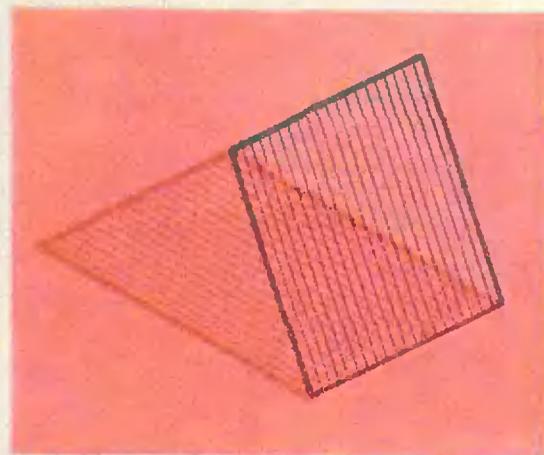


Рис. 6.

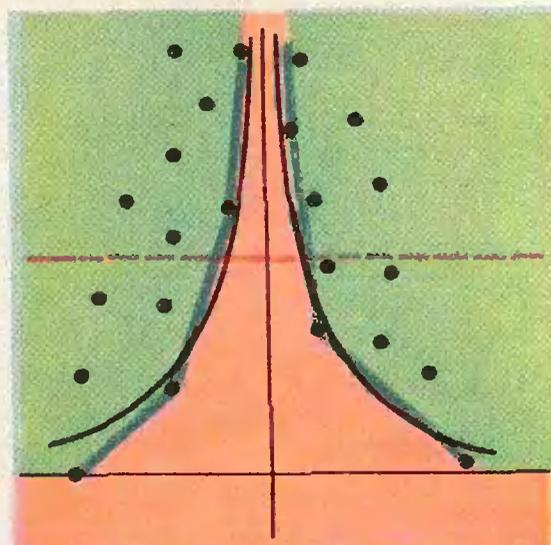


Рис. 7.

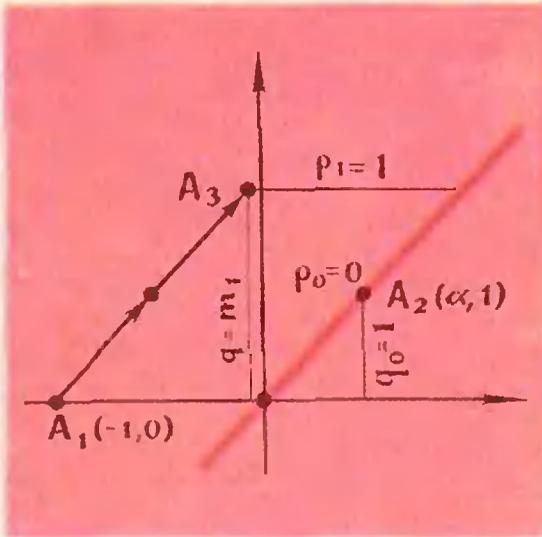


Рис. 8.

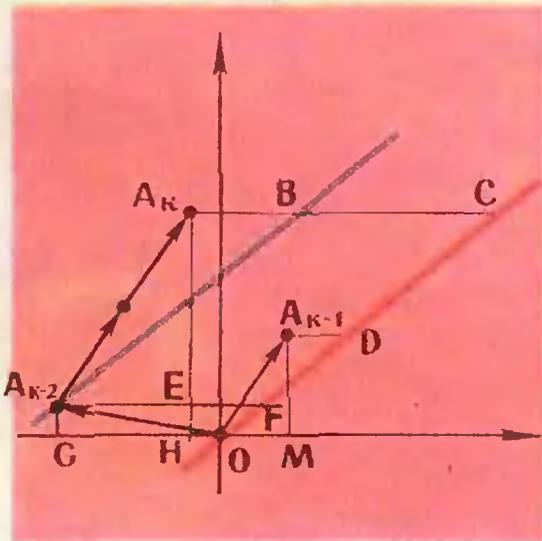


Рис. 9.

Остается последний вопрос: как найти коэффициенты качества подходящих дробей?

Счастливым образом этот вопрос удастся полностью решить, и ответ записывается изящной и удобной формулой.

§ 3. Коэффициенты качества подходящих дробей.

Теорема 4. Пусть $\alpha = [0; m_1, m_2, \dots]$, μ_k — коэффициент качества $k-1$ -й подходящей дроби. Тогда:

$$\frac{1}{\mu_k} = m_k + [0; m_{k+1}, m_{k+2}, \dots] + [0; m_{k-1}, m_{k-2}, \dots, m_1]$$

Теорема 3. Точка A_k (при $k \geq 2$) отвечает $(k-2)$ -й подходящей дроби α_{k-2} числа α .

Доказательство.

Для A_2 и A_3 это ясно: A_2 соответствует $p=0, q=1$, то есть приближению, равному $0=\alpha_0$ (напомним, что $m_0=0$); A_3 соответствует $p=1, q=m_1$ (рис. 8), то есть приближению $1/m_1=\alpha_1$.

Пусть нам уже известно, что при $i \leq k-1$, где $k \geq 4$, точка A_i отвечает приближению α_{i-2} . Покажем, что A_k отвечает α_{k-2} .

Мы должны доказать, что $A_k C = p_{k-2}$, $A_k H = q_{k-2}$ (рис. 9). Треугольник $A_{k-2} A_k E$ подобен треугольнику $O A_{k-1} M$; треугольник $A_{k-2} A_k B$ подобен треугольнику $O A_{k-1} D$; коэффициент подобия в обоих случаях равен m_{k-2} . Имеем:

$$\begin{aligned} A_k C &= BC + A_k B = A_{k-2} F + \\ &+ m_{k-2} A_{k-1} D = \\ &= p_{k-4} + m_{k-2} p_{k-3} = p_{k-2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_k H &= EH + A_k E = A_{k-2} G + \\ &+ m_{k-2} A_{k-1} M = \\ &= q_{k-4} + m_{k-2} q_{k-3} = q_{k-2} \end{aligned}$$

(см. статью Н. М. Бескина).

Теорема доказана.

Теорема 3 вместе со следствием из теоремы 2 приводит нас к следующему выводу:

Если для данного иррационального числа α есть бесконечно много приближений с коэффициентом качества, меньшим данного, то их бесконечно много уже среди подходящих дробей числа α .

Доказательство.

Рассмотрим точки A_{k+2} и A_{k+1} , отвечающие приближениям α_k и α_{k-1} (рис. 10). Через $q_k, r_k; q_{k-1}, r_{k-1}$ обозначим их расстояния до осей OX, OY . Мы знаем, что $\mu_k = r_{k-1}q_{k-1}$ (см. § 3). Докажем три формулы:

$$q_k r_{k-1} + q_{k-1} r_k = 1 \quad (3)$$

$$r_k / r_{k-1} = [0; m_{k+1}, m_{k+2}, \dots] \quad (4)$$

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = [m_k; m_{k-1}, m_{k-2}, \dots, m_1]. \quad (5)$$

Формула (3) доказывается так. Разобьем параллелограмм $OA_{k+1}BA_{k+2}$ прямыми, параллельными осям координат, на треугольники: $A_{k+1}QO, OPA_{k+2}, A_{k+2}MB, BRA_{k+1}$ и прямоугольник $MPQR$ (см. рис. 11). Площадь параллелограмма $OA_{k+1}BA_{k+2}$ равна 1, так как это — основной параллелограмм нашей решетки. Находим площади частей:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} r_{k-1} q_{k-1} + \frac{1}{2} r_k q_k + \\ &+ \frac{1}{2} r_{k-1} q_{k-1} + \frac{1}{2} r_k q_k + \\ &+ (r_{k-1} - r_k)(q_k - q_{k-1}) = \\ &= q_k r_{k-1} + q_{k-1} r_k. \end{aligned}$$

Формула (4), по существу, нам уже известна: если отбросить часть нашего алгоритма вытягивания носов, предшествующую получению точки A_{k+2} , мы получим тот же алгоритм для векторов OA_{k+1}, OA_{k-2} . Поэтому формула (4) прямо следует из формулы (2).

Самое неожиданное доказательство имеет формула (5). Построим ломаную $A_{k+2} \dots A'_2$ (рис. 12), симметричную ломаной $A_{k+2} \dots A_2$ относительно точки O . Эта ломаная вместе с ломаной $A_{k+1} \dots A_1$ представляет собой, как это видно, результат применения ABH к векторам $\vec{OA}_{k+2}, \vec{OA}_{k+1}$ и отрицательного

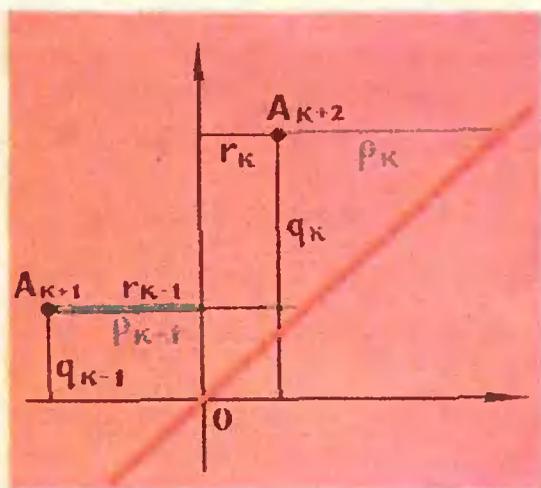


Рис. 10.

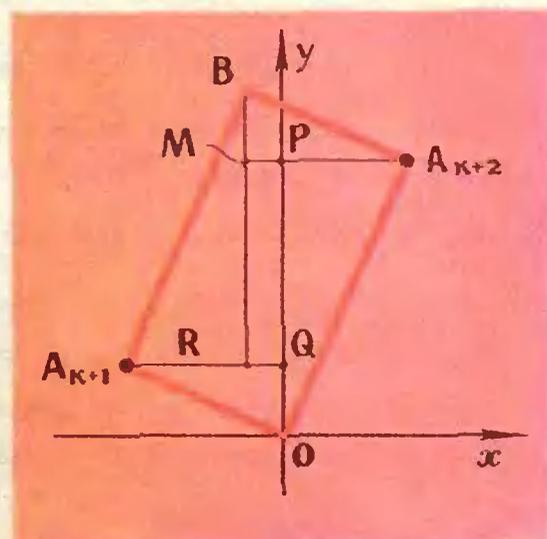


Рис. 11.

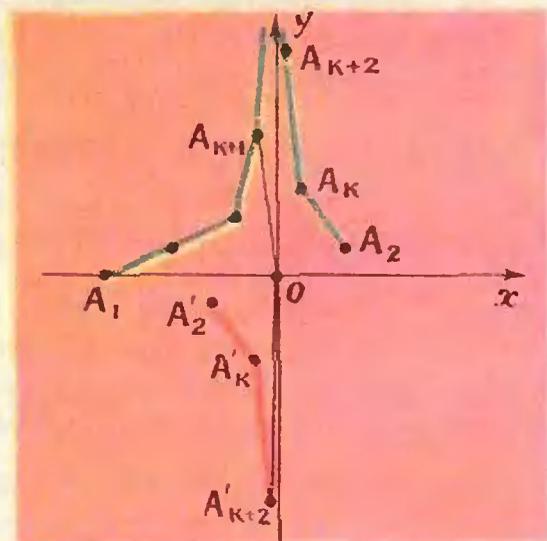


Рис. 12.

направления оси OX . Этот алгоритм, как мы видим, конечный, и кончается в точке A_1 . Устроен он так: сначала из точки A_{k+2} складывается m_k раз вектор OA_{k+1} , затем из точки A_{k+1} откладывается m_{k-1} раз вектор $\overrightarrow{OA'_k}$ и т. д. Последнее откладывание: вектор $\overrightarrow{OA'_2}$ откладывается m_1 раз.

В силу формулы (4) имеем:

$$q_k/q_{k-1} = [m_k; m_{k-1}, \dots, m_1].$$

Итак, все формулы доказаны. Докажем теперь теорему 4.

Имеем:

$$\frac{1}{\mu_k} = \frac{q_k r_{k-1} + q_{k-1} r_k}{r_{k-1} q_{k-1}} = \frac{r_k}{r_{k-1}} + \frac{q_k}{q_{k-1}} = [0; m_{k+1} \dots] + [m_k; m_{k-1}, \dots, m_1]$$

что и требовалось доказать.

§ 4. Доказательство теоремы Гурвица-Бореля.

Мы должны показать, что бесчисленное множество подходящих дробей числа $\alpha = [0; m_1, m_2, \dots]$ имеют коэффициенты качества, меньшие $\frac{1}{\sqrt{5}}$, то есть, что для бесконечно многих k имеют место неравенства $\mu_k < \frac{1}{\sqrt{5}}$ или $\frac{1}{\mu_k} > \sqrt{5}$. Воспользуемся теоремой 7.

Возможны три случая.

1°. Среди чисел m_1, m_2, \dots бесконечно много отличных от 1 и от 2. Этот случай — самый простой. Если $m_k > 2$, то $m_k \geq 3$ и $\frac{1}{\mu_k} = m_k + \frac{1}{m_{k+1} + \dots} + \frac{1}{m_{k-1} + \dots} > m_k \geq 3 > \sqrt{5}$.

2°. Среди чисел m_1, m_2, \dots лишь конечное число отличается от 1 и 2, но двоек бесконечно много. В этом случае для бесконечно многих k имеем: $m_k = 2, m_{k-1} \leq 2, m_{k+1} \leq 2$. Для таких k

$$\frac{1}{\mu_k} = m_k + [0; m_{k+1}, \dots] + [0; m_{k-1}, \dots] > 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{8}{3} > \sqrt{5}.$$

3°. Начиная с некоторого, все неполные частные равны 1. Пусть, скажем, $m_{k_0} > 1$ и $m_k = 1$ при $k > k_0$. Если разность $k - k_0$ четна, то

$$\frac{1}{\mu_k} = 1 + [0; 1, 1, \dots, 1, m_{k_0}, \dots] > 1 + 2[0; 1, 1, \dots] = 1 + \frac{4}{\sqrt{5} + 1} = \sqrt{5}$$

(мы воспользовались здесь тем, что, если k четно и $m'_{k+1} > m_{k+1}$, то

$$[m_0; m_1, \dots, m_k, m'_{k+1}, \dots] > [m_0; m_1, \dots, m_k, m_{k+1}, \dots]$$

и равенством $[1; 1, 1, \dots] = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$).

Докажите эти факты самостоятельно).

Строго говоря, остался не рассмотренным случай, когда все неполные частные равны 1. В этом случае имеем

$$\frac{1}{\mu_k} = 1 + [0; 1, 1, \dots] + [0; 1, 1, \dots, 1]$$

и при четном k получаем

$$\frac{1}{\mu_k} < 1 + 2[0; 1, 1, \dots] = \sqrt{5}$$

в силу свойств цепных дробей.

Во всех случаях доказано существование бесконечно многих приближений с коэффициентом качества, меньшим $1/\sqrt{5}$.

Ясно, что в то же время в случае 3° и только в этом случае число $\sqrt{5}$ нельзя увеличить. Строго говоря, в этом случае

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_k} = \sqrt{5},$$

то есть при очень больших k число $1/\mu_k$ очень близко к $\sqrt{5}$.

Таким образом, все утверждения теоремы Гурвица — Бореля нами доказаны.

Фактически мы доказали даже больше. Ясно, что теорема 7 позволяет решать вопрос о наилучших приближениях *индивидуально* для каждого α . Например, если неполные частные данного числа α не равны все 1, начиная с некоторого номера, то есть если случай 3° не имеет места, то, как видно из нашего рассуждения, $\sqrt{5}$ можно заменить на $2^2/3$ (а на самом деле даже на $2\sqrt{2}$; докажите). Из теоремы 7 следует, что

$$m_k < \frac{1}{\mu_k} < m_k + 2.$$

Отсюда видно, что если неполные частные числа α растут неограниченно, то число $\frac{1}{\mu_k}$ может быть сколь угодно велико, то есть число μ_k может быть сколь угодно мало, то есть для данного α существуют приближения со сколь угодно малым коэффициентом качества.

Если же числа m_k все меньше некоторого числа N , то коэффициент качества приближений этого числа не может быть меньше, чем $\frac{1}{N+2}$. Например, коэффициент качества рациональных приближений числа $\sqrt{2} = [1; 2, 2, \dots]$ не может быть меньше $\frac{1}{4}$ (фактически наименьший коэффициент качества среди приближений числа $\sqrt{2}$ имеет дробь $\frac{3}{2}$; этот коэффициент равен $6 - 4\sqrt{2} \approx 0,34$).

Так удивительным образом оказывается, что «самые лучшие» иррациональные числа, как $\sqrt{2}$, приближаются рациональными числами хуже всего.



Поле тяжести сферически-однородного тела

И. И. Огневецкий

Закон всемирного тяготения Ньютона равным образом определяет и падение яблок на землю, и движение Луны вокруг Земли, и орбиты планет. Он основывается на том, что сила притяжения между материальными точками с массами m_1 и m_2 , находящимися на расстоянии l друг от друга, равна

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{l^2}, \quad (1)$$

где $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$ — гравитационная постоянная (в системе СИ). Но Земля, Луна и другие реальные тела не точечны, они имеют конечные размеры. Как определить силу притяжения между протяженными телами?

Решение этой проблемы привело Ньютона к созданию важнейшей отрасли математики — интегрального исчисления. Чтобы найти силу притяжения материальной точки к протяженному телу, следует мысленно разбить это тело на маленькие (в пределе — бесконечно малые) части, вычислить вклад в силу притяжения от каждой из этих частей по формуле (1) и затем сложить (проинтегрировать) эти вклады. Небесные тела можно приближенно считать сферически-однородными, то есть такими, что в каждой данной точке их плотность целиком определяется расстоянием этой точки от центра тела. Ньютон обнаружил замечательный факт:

сила притяжения между сферически-однородными телами с массами m_1 и m_2 определяется формулой (1), если под l понимать расстояние между их центрами, то есть они взаимодействуют так, как если бы их массы были сосредоточены в их центрах *).

Мы расскажем здесь, как доказать этот факт на основе элементарных и красивых геометрических соображений.

Сферически-однородное тело можно представить себе как совокупность вложенных друг в друга однородных сферических поверхностей. Для них имеют место два следующих утверждения.

1. Однородная сферическая поверхность радиуса R и плотности ρ притягивает точечную массу m , расположенную вне ее на расстоянии d от центра, с силой

$$F = \gamma \frac{4\pi R^2 \rho m}{d^2} = \gamma \frac{M \cdot m}{d^2}, \quad (2)$$

где M — масса всей поверхности. Иными словами, сила притяжения вне сферической поверхности такая же, как если бы вся масса поверхности была сосредоточена в ее центре. Отсюда сразу же следует аналогичное утверждение для сферически-однородного тела.

*) Этим свойством часто пользуются как очевидным, без доказательства. Использовалось оно и в некоторых статьях «Кванта». Поэтому очень полезно понять, как оно доказывается.

2. Внутри однородной сферической поверхности сила притяжения всюду равна нулю.

При доказательстве мы будем существенно использовать понятие инверсии. Инверсией относительно окружности с центром O и радиусом R называют такое преобразование плоскости, при котором каждой точке Q на плоскости сопоставляется ее образ — точка \bar{Q} , лежащая на луче OQ , причем

$$OQ \cdot O\bar{Q} = R^2. \quad (3)$$

Точки Q и \bar{Q} называются взаимно обратными. Аналогичным образом можно определить инверсию (в пространстве) относительно сферы с радиусом R .

Инверсия обладает многими замечательными свойствами и находит большое число красивых применений*). Нам понадобится только одно

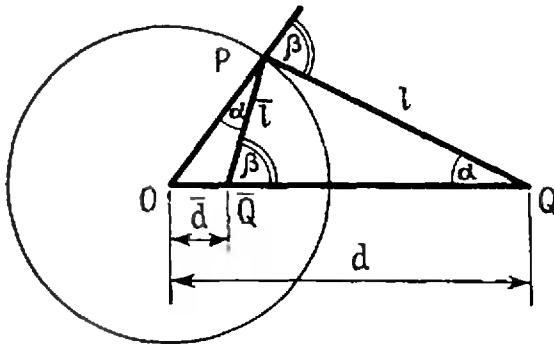


Рис. 1.

свойство. Пусть P — любая точка окружности, а Q и \bar{Q} — точки, взаимно обратные относительно этой окружности (рис. 1). Введем обозначения

$$OQ = d, \quad O\bar{Q} = \bar{d}, \quad PQ = l, \quad P\bar{Q} = \bar{l}.$$

Для наглядности нарисуем два треугольника OPQ и $O\bar{Q}P$ отдельно (рис. 2); легко видеть, что они подоб-

*) В «Кванте» № 8 за этот год была опубликована статья А. П. Савина «Инверсия и задача Аполлония». В ней рассказывалось о некоторых свойствах инверсии.

ны, так как они имеют общий угол в вершине O и прилегающие к ней стороны пропорциональны: из (3) следует, что $\frac{\bar{d}}{R} = \frac{R}{d}$.

Отсюда

$$\frac{\bar{l}}{l} = \frac{\bar{d}}{R} = \frac{R}{d}. \quad (4)$$

Иными словами, хотя сами длины отрезков l и \bar{l} зависят от положения точки P на окружности, их отношение \bar{l}/l постоянно и не зависит от выбора точки P на окружности.

Приступим теперь к доказательству утверждения 1. Пусть S — однородная сферическая поверхность плотности ρ и пусть точечная масса m находится в точке Q на расстоянии d от центра ($d > R$). Выделим бесконечно малый элемент поверхности ΔS вблизи некоторой точки P , и проведем плоскость через центр сферы O , точку P и точку Q (см. рис. 1).

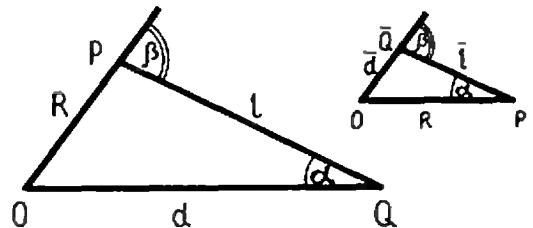


Рис. 2.

Согласно закону (1), элемент ΔS притягивает точечную массу m с силой

$$\Delta F = \gamma \frac{m\rho \Delta S}{r^2}. \quad (5)$$

Нам нужно сложить силы притяжения от всех элементов ΔS сферы. Из соображений симметрии ясно, что суммарная сила будет направлена вдоль луча OQ . Поэтому нас интересует только составляющая ΔF_{OQ} , равная

$$\Delta F_{OQ} = \gamma \frac{m\rho \Delta S \cos \alpha}{r^2}. \quad (6)$$

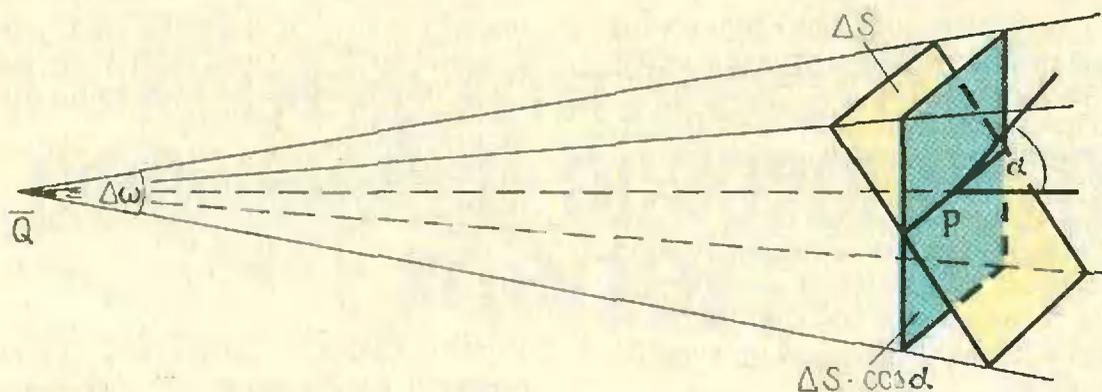


Рис. 3.

Привлечём теперь инверсию и заменим в (6) l на $\bar{l} \frac{d}{R}$ согласно (4):

$$\Delta F_{OQ} = \gamma \frac{m\rho R^2 \cos \alpha \Delta S}{d^2 \bar{l}^2} = \gamma \frac{m\rho R^2 \Delta \omega}{d^2}, \quad (7)$$

где введена величина

$$\Delta \omega = \frac{\cos \alpha \Delta S}{r^2}.$$

Сделаем важное наблюдение. Заметим, что α есть также угол между нормалью (радиусом OP) к элементу поверхности ΔS и направлением \overline{QP} *, и $\cos \alpha$ положителен для любой точки P .

Легко убедиться поэтому, что $\Delta \omega$ — это телесный угол, под которым виден элемент поверхности ΔS из точки \bar{Q} .

Если ввести конус с вершиной в точке \bar{Q} и образующими, обегаящими контур ΔS , то телесный угол при вершине этого конуса как раз и будет $\Delta \omega$ (рис. 3).

Численно угол $\Delta \omega$ равен площади, которую высекает этот конус из сферы единичного радиуса с центром в точке \bar{Q} .

* Именно здесь и существенна операция инверсии. С ее помощью мы ввели в знаменатель (6) вместо расстояния l расстояние \bar{l} , благодаря чему в формуле возник телесный угол $\Delta \omega$.

Полное притяжение всей поверхностью равно сумме вкладов от всех элементов ΔS :

$$F = \sum_S \Delta F_{OQ} = \gamma \frac{m\rho R^2}{d^2} \sum_S \Delta \omega = \gamma \frac{m\rho 4\pi R^2}{d^2} = \gamma \frac{mM}{d^2}, \quad (8)$$

так как $\sum_S \Delta \omega = 4\pi$ — полному телесному углу, под которым видна вся сфера из внутренней точки \bar{Q} , а $4\pi R^2 \rho = M$ есть полная масса сферической поверхности. Тем самым утверждение I доказано.

Рассмотрим теперь материальную точку \bar{Q} массы m внутри полой сферической поверхности. Снова из соображений симметрии очевидно, что сила, создаваемая сферической поверхностью в целом, может быть направлена только вдоль линии $O\bar{Q}$.

Поэтому нам нужно сложить составляющие силы $\Delta F_{O\bar{Q}}$ от элементов сферы ΔS , равные

$$\Delta F_{O\bar{Q}} = \gamma \frac{m\rho \Delta S \cos \beta}{\bar{l}^2} = \gamma \frac{m\rho R^2 \Delta S \cos \beta}{d^2 \bar{l}^2}, \quad (9)$$

если опять использовать прием с инверсией и заменить \bar{l} на $l \frac{d}{R}$ согласно соотношению (4).

Рассечем сферу S на две части $S_{\text{П}}$ и $S_{\text{Л}}$ плоскостью, проходящей через точку \bar{Q} перпендикулярно линии

$O\bar{Q}$ и образующей в пересечении со сферой диск (рис 4). Очевидно, что части сферической поверхности S_{Π} и $S_{Л}$, лежащие справа и слева от этого диска, будут притягивать материальную точку \bar{Q} в разные стороны, направо и налево. Соответственно (см. рис. 4), $\cos \beta > 0$ для точек P из S_{Π} и $\cos \beta < 0$ для точек из $S_{Л}$. Учтем теперь, что $\frac{\Delta S |\cos \beta|}{r^2} = \Delta \omega$ — телесному углу, под которым виден элемент ΔS из точки Q^*).

Складывая силы $\Delta F_{O\bar{Q}}$, находим полную силу

$$F = \sum_S \Delta F_{O\bar{Q}} = \frac{\gamma m p R^2}{a^2} \left(\sum_{S_{\Pi}} \Delta \omega - \sum_{S_{Л}} \Delta \omega \right), \quad (10)$$

где суммы распространены, соответственно, на части поверхности S_{Π} и $S_{Л}$. Но $\sum_{S_{\Pi}} \Delta \omega = \sum_{S_{Л}} \Delta \omega = \omega_D$ — телесному углу, под которым диск D виден из точки Q . В самом деле (см. рис. 4), для конуса с вершиной

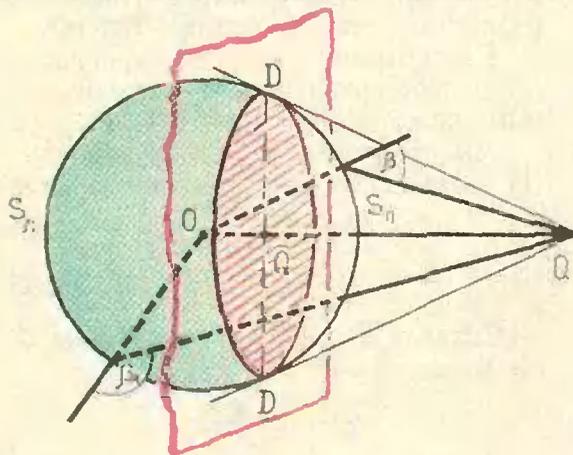


Рис. 4.

Q , образованного касательными к сфере S , линия касания есть как раз окружность D (проверьте это). Таким образом,

$$F = 0 \quad (11)$$

*) Как и для точки вне сферы, при вычислении силы в точке внутри сферы мы обнаруживаем, что в формулу входит телесный угол, на этот раз для инвертированной точки, лежащей вне сферы.

для любой точки \bar{Q} , лежащей внутри S . Доказательство утверждения 2 завершено, внутри однородной сферической поверхности сила тяготения действительно обращается в нуль.

Весьма примечательно, что Ньютон придавал очень большое значение доказанным выше предположениям о гравитационных свойствах протяженных сферически-однородных тел и поверхностей. Только после доказательства этих предположений Ньютон опубликовал полученный им на много лет ранее вывод законов движения планет Кеплера из формулы (1) для точечных тел (см. Дж. Орир, «Популярная физика», Москва, 1964 г., стр. 87—98).

Упражнения

1. Замечательным свойством математических методов является то, что одна и та же «математическая модель» может описывать факты из совершенно, казалось бы, далеких друг от друга областей физики. Пользуясь тем, что закон Кулона, описывающий взаимодействие двух точечных электрических зарядов, математически записывается так же, как и гравитационный закон Ньютона, сформулируйте «электростатические аналоги» предположений 1 и 2.

2. Докажите, что сила притяжения точечной массы однородной неограниченной пластинкой обратно пропорциональна расстоянию этой массы от пластинки.

3. Найдите силу притяжения, оказываемого однородной материальной полусферой на точечную массу, расположенную на прямой, соединяющей центр сферы с ее полюсом.

4. В воображаемом плоском мире Хинтона (см. «Квант» № 4, 1970) сила взаимодействия точечных масс обратно пропорциональна расстоянию между ними. Имея в виду, что «сферами» плоского мира являются окружности, сформулируйте и докажите для мира Хинтона предположения, аналогичные предположениям 1 и 2. Покажите, что сила притяжения, которую испытывает воображаемый житель одной из планет хинтоновской системы, пропорциональна расстоянию жителя от центра планеты. В случае, если в системе имеются кольцообразные планеты, то во внутренности кольца гравитационное поле отсутствует (предполагается, что планеты состоят из однородной материи).

«Неприводимый» случай

В. Г. Янкелевич

Наш читатель семиклассник Миша Балкин спрашивает: «Я увидел в справочнике формулу Кардано для решения кубического уравнения $x^3 + px + q = 0$:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}, \quad \text{где } D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2.$$

Но мне кажется, что эту формулу не всегда можно использовать. Например, если мы хотим найти с помощью этой формулы корни уравнения $x^3 - x = 0$ ($p = -1$, $q = 0$), то получим

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-\sqrt{-\frac{1}{27}}}.$$

Это какие-то мнимые числа, а уравнение имеет три хороших корня: 0, 1 и -1 . Как устранить это противоречие?»

Редакция считает, что ответ на этот вопрос будет интересен многим нашим читателям. Мы публикуем статью школьника 10 класса города Кустаная В. Г. Янкелевича, который рассказывает, как можно решать кубические уравнения в том случае, когда в формуле Кардано получаются отрицательные числа под знаком квадратного корня.

Еще в XVI веке была найдена общая формула, позволяющая выразить решения уравнения третьей степени

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0 \quad (1)$$

через его коэффициенты с помощью арифметических операций и извлечения корней. Эту формулу (ее называют формулой дель Ферро или формулой Тартальи — Кардано) можно записать так:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{c}{54} + \sqrt{-\frac{D}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{c}{54} - \sqrt{-\frac{D}{108}}} - \frac{p}{3}, \quad (2)$$

где $c = 2p^3 - 9pq + 27r$; $D = p^2q^2 - 4q^3 - 4p^2r + 18pqr - 27r^2$. Позже, как только оформилось понятие комплексного числа, стало ясно, что эта формула позволяет получить все решения уравнения (1) с любыми (комплексными) коэффициентами p , q , r . Но, к сожалению, даже если все коэффициенты уравнения — обычные действительные числа, то для нахождения (даже действительных!) решений по формуле (2) приходится извлекать корни

из комплексных чисел; эта трудность возникает, когда $D > 0$ (это как раз тот случай, когда уравнение имеет три различных действительных корня).

Рассмотрим кубическое уравнение (1) с действительным и положительным дискриминантом D *).

Мы покажем, что любое уравнение (1) можно свести к уравнению вида

$$ay^3 - 3by^2 - 3ay + b = 0, \quad (3)$$

где a и b — действительные числа и $a \neq 0$.

Сначала докажем, что уравнение (3) имеет корни

$$y_1 = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{3},$$

$$y_2 = \operatorname{tg} \frac{\varphi + 2\pi}{3}, \quad (4)$$

$$y_3 = \operatorname{tg} \frac{\varphi + 4\pi}{3},$$

*) D называется дискриминантом многочлена $x^3 + px^2 + qx + r$. Можно показать, что $D = (x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2(x_3 - x_1)^2$, где x_1, x_2, x_3 — корни уравнения (1). Если коэффициенты p, q, r действительны и $D < 0$, то уравнение имеет два сопряженных комплексных корня и один действительный, который сразу находится по формуле (2).

где φ определяется из условий

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(можно считать, что $0 \leq \varphi < 2\pi$; тогда φ определяется однозначно). Для доказательства достаточно воспользоваться формулой

$$\frac{\operatorname{tg}^3 \alpha - 3 \operatorname{tg} \alpha}{3 \operatorname{tg}^2 \alpha - 1} = \operatorname{tg} 3\alpha,$$

проверку которой мы предоставляем читателю. Теперь покажем, как уравнение (1) привести к виду (3). Положим $x = my + n$; уравнение (1) примет вид

$$m^3 y^3 + m^2 (3n + p) y^2 + m (3n^2 + 2pn + q) y + (n^3 + pn^2 + qn + r) = 0,$$

где m и n — произвольные параметры. Нам надо подобрать значения a , b , m и n так, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{cases} m^3 = a, \\ m^2 (3n + p) = -3b, \\ m (3n^2 + 2pn + q) = -3a, \\ n^3 + pn^2 + qn + r = b, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2(p^2 - 3q)n = 9r - pq, \\ 3m^3 = -(3n^2 + 2pn + q), \\ a = m^3, \\ b = n^3 + pn^2 + qn + r. \end{cases}$$

Заметим, что если

$$D = -4 \left(q - \frac{p^2}{3} \right)^3 - 27 \left(\frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r \right)^2 > 0,$$

то

$$q - \frac{p^2}{3} < 0,$$

то есть $p^2 - 3q > 0$, и поэтому можно положить

$$n = \frac{9r - pq}{2(p^2 - 3q)},$$

$$m = \pm \sqrt[3]{-\frac{3n^2 + 2pn + q}{3}} =$$

$$= \pm \frac{\sqrt[3]{3D}}{2(3q - p^2)}$$

(m мы выбираем с произвольным знаком),

$$a = m^3, \quad b = n^3 + pn^2 + qn + r.$$

Итак, мы показали, как от общего уравнения (1) перейти к уравнению (3), решив которое, мы сможем найти корни из соотношения

$$x = my + n.$$

Пример. Решить уравнение

$$x^3 + 6x^2 + 6x - 8 = 0. \quad (5)$$

Из приведенных выше вычислений следует, что уравнение (5) с помощью преобразования $x = y - 3$ приводится к виду

$$y^3 - 3y^2 - 3y + 1 = 0. \quad (6)$$

Здесь $a = 1$, $b = 1$, следовательно,

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Корнями уравнения (6) будут:

$$y_1 = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3},$$

$$y_2 = \operatorname{tg} \frac{\varphi + 2\pi}{3} = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} = -1,$$

$$y_3 = \operatorname{tg} \frac{\varphi + 4\pi}{3} = \operatorname{tg} \frac{17\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}.$$

Теперь из соотношения $x = y - 3$ находим корни уравнения (5)

$$x_1 = -1 - \sqrt{3}, \quad x_2 = -4,$$

$$x_3 = -1 + \sqrt{3}.$$

Упражнение

Проверьте, что для уравнения $x^3 + px + q = 0$ можно получить интересную формулу:

$$x = 4r \sin^3 \left(\frac{\varphi + 2k\pi}{3} \right) - \frac{q}{p}, \quad \text{где}$$

$$k = 0, 1, 2; \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$b = -\frac{q}{p}, \quad a = \sqrt{-b^2 - \frac{4p}{27}}.$$

Демонстрация орбит тел, движущихся под действием центрального притяжения

Р. Вуд

В прошлом номере нашего журнала была напечатана статья замечательного американского физика Р. Вуда об искусственных миражах и смерчах. Ниже мы помещаем еще одну статью Вуда, посвященную исследованию орбит тел в центральном поле. Эта статья была опубликована в журнале «Physical Review» за 1897 год.

После того как Вуд опубликовал статью о лабораторной демонстрации орбит планет и комет вокруг Солнца при помощи стального шарика и электромагнита, в журнале «Nature» было опубликовано письмо профессора лондонского университета, в котором утверждалось, что данный опыт не демонстрирует орбиты в гравитационном поле, так как сила притяжения шарика магнитом изменяется обратно пропорционально пятой степени, а не квадрату расстояния, как в случае тяготения.

Вуд взялся за работу всерьез, начертил детальную диаграмму и понял, что шарик пересекает магнитные линии под углом и что его орбита зависит только от горизонтальной составляющей напряженности. После тщательных измерений напряженности магнитного поля в плоскости стекла оказалось, что она почти точно обратно пропорциональна квадрату расстояния.

Тем временем критические отклики появились в нескольких других английских технических журналах, и Вуд с удовольствием послал подтверждение правильности своего опыта, приведя результаты измерений.

До сих пор не было сделано попыток показать в лабораторных условиях движение тел по эллиптической, параболической и гиперболической орбитам под действием центральной притягивающей силы, величина которой менялась бы обратно пропорционально квадрату расстояния. Я провел несколько опытов, исследуя движение маленького стального шарика вокруг магнитного полюса. Опыты дали хорошие результаты, и я считаю, что они могут быть полезны при чтении лекций.

Устройство для демонстрации очень несложно. Оно состоит из стеклянного диска диаметром около 40 см, с маленьким отверстием в центре. В это отверстие пропущен конусообразный конец большого электромагнита. Поверхность диска покрывается копотью (рис. 1). Нужно постараться как можно более точно придать пластине горизонтальное положение, а оси магнита — вертикальное.

Маленький стальной полированный шарик около 5 мм диаметром (например, из подшипника от вело-

сипеда), пущенный на пластину, продельвает некоторый путь по ее закопченной поверхности и оставляет ясный след.

В данных условиях сила тяжести не оказывает существенного влияния на движение, и мы можем учитывать лишь начальную скорость и центральную притягивающую силу, а также потери скорости из-за трения.

Шарик с различными начальными скоростями вылетает из короткой стеклянной трубки на уровне плоскости пластины. При этом получаются траектории, довольно удачно имитирующие эллипс, параболу и гиперболу.

На рисунке 2 помещена фотография пластины, на которой видны все три вида орбит; пятно в центре — это отверстие, занимаемое магнитным полюсом; стрелки показывают направление движения.

Траектория 1 соответствует малой начальной скорости, при которой орбита очень близка к эллипсу с источником притягивающей силы в одном из фокусов. Потеря скорости из-за трения заставляет шарик «падать на Солнце» после того как он совершил один оборот, то есть за «год» существования системы.

В другом опыте был получен эллипс (строго говоря, спираль), почти

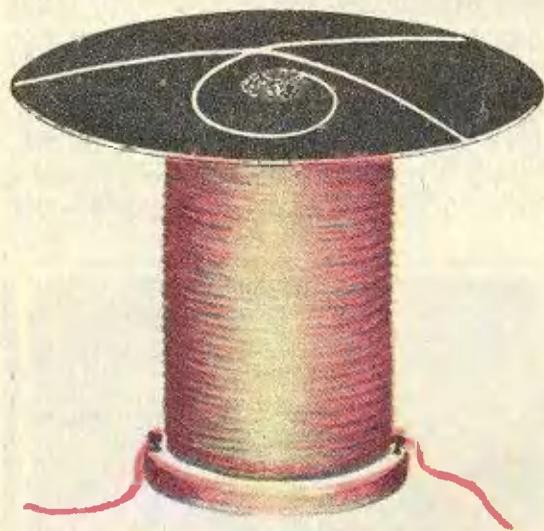


Рис. 1.

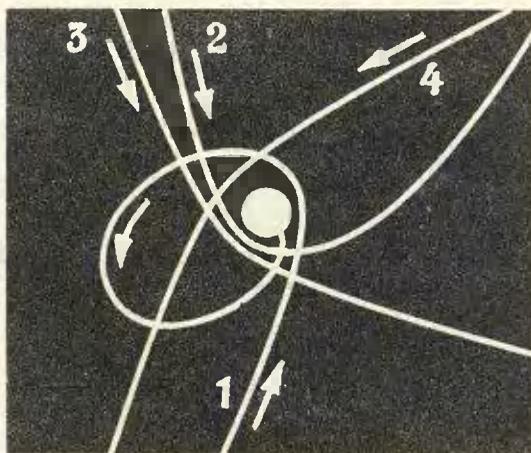


Рис. 2.

закрывающийся; отклонение траектории составляло не более 2 мм, в то время как в опыте, показанном на данном рисунке, оно почти достигало сантиметра.

Правая ветвь кривой с индексом 2 напоминает параболу и возникает при несколько более высокой начальной скорости. Отметим, что шарик движется к перигею по траектории, очень напоминающей гиперболу. Однако, как только он минует полюс, скорость шарика несколько падает, выводя его на параболу. Может быть, более правильно называть эту кривую эллипсом с очень большим эксцентриситетом, поскольку условия образования параболической орбиты трудно обеспечить приближенно.

Траектории 3 и 4 соответствуют гиперболам с еще более высокими начальными скоростями.

Траектории, показанные на рисунке 2, далеко не лучшие из полученных на пластинках. Очень трудно воспроизвести на одной пластинке все три типа кривых, поскольку необходимо ограничиться всего лишь четырьмя-пятью запусками, а для получения кривой определенного типа скорость надо тщательно устанавливать. Если провести серию опытов, можно получить значительно лучшие образцы.

Конечно, легче всего воспроизвести гиперболу, а труднее всего — параболу.

ЗАДАЧИ

M111. В квадрате со стороной 1 расположена фигура, расстояние между любыми двумя точками которой не равно 0,001. Докажите, что площадь этой фигуры не превышает 0,34. (Можно считать, что граница фигуры, о которой говорится в условии, состоит из отрезков прямых и дуг окружностей.)

Постарайтесь получить более точную оценку и доказать аналогичную теорему в пространстве.

Г. В. Розенблюм

M112. В таблице $m \times n$ записаны числа так, что для любых двух строк и любых двух столбцов сумма чисел в двух противоположных вершинах образуемого ими прямоугольника равна сумме чисел в двух других его вершинах. Часть чисел стерли, но по оставшимся можно восстановить стертые. Доказать, что осталось не меньше, чем $(n + m - 1)$ чисел.

M113. Доказать, что для любого натурального n найдется число, составленное из цифр 1 и 2, делящееся на 2^n .

Б. М. Ивлев

M114. По кругу выписано несколько чисел. Если для некоторых четырех идущих подряд чисел a, b, c, d оказывается, что $(a - d)(b - c) < 0$, то числа b и c можно поменять местами. Доказать, что эту операцию можно проделать лишь конечное число раз.

В. Б. Алексеев

M115. В три сосуда налито по целому числу литров воды. В любой сосуд разрешается перелить столько воды, сколько в нем уже содержится, из любого другого сосуда. Доказать,

что несколькими такими переливаниями можно освободить один из сосудов. (Сосуды достаточно велики: каждый может вместить всю воду.)

Г. А. Гальперин

Ф118. На рисунке 1 показана часть схемы, состоящей из неизвестных сопротивлений. Как, имея амперметр,

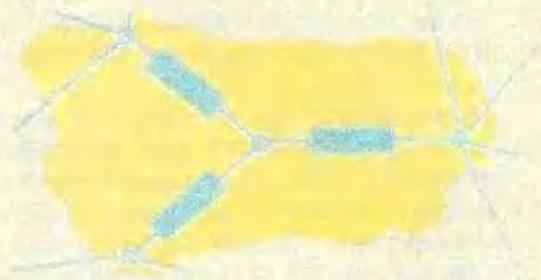


Рис. 1.

вольтметр, источник тока и соединительные провода, можно измерить величину одного из сопротивлений, не разрывая ни одного контакта в схеме?

А. Р. Зильберман

Ф119. Свет от источника S по пути к экрану проходит через покоящийся стеклянный кубик с ребром l (рис. 2). На сколько быстрее свет

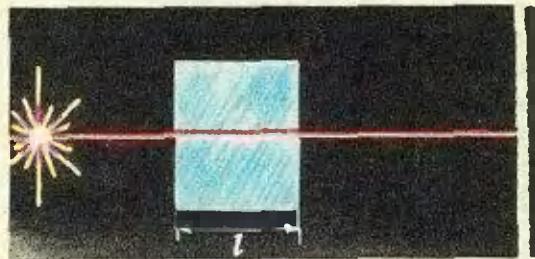


Рис. 2.

дойдет до экрана, если кубик привести в движение со скоростью u ? Скорость света в воздухе c , показатель преломления стекла n ($u \ll c$, $n \gg 1$).

Г. В. Меледин

Ф120. В цилиндре с поршнем находится вода, внутри которой в начальный момент имеется полость объема V . Давление газов в полости пренебрежимо мало. Поршень оказывает на воду постоянное давление P . Какую кинетическую энергию приобретет вода в момент, когда полость исчезнет? Начальная скорость воды равна нулю. Силу тяжести можно не учитывать.

Г. Л. Коткин

Ф121. Оценить максимальную силу, которую будет показывать динамометр, присоединенный к плоскостям, закрывающим магдебургские «полусферы» (полусферы) с радиусом

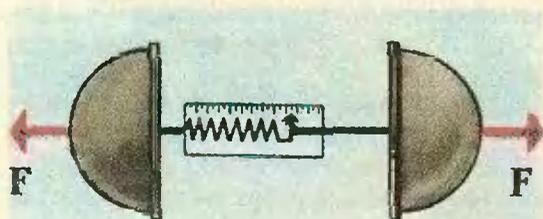


Рис. 3.

$R=20$ см (рис. 3). Полусферы растягиваются в противоположные стороны силами F . Атмосферное давление равно 1 атм.

Ф122. В стакан с водой, вращающийся вокруг своей оси, бросают шарик, который плавает на поверхности воды. В каком месте поверхности будет находиться шарик?

Поправка

В «Кванте» № 8 за 1971 г. на стр. 3 по вине редакции ошибочно помещен «портрет с бронзовой медали Евклида». В действительности, изображения математика Евклида до нашего времени не дошли. Помешенное изображение, по всей видимости, является портретом философа Евклида из Мегары.

Найдите ошибку

Как известно, точкой, сумма расстояний от которой до вершин данного четырехугольника минимальна,

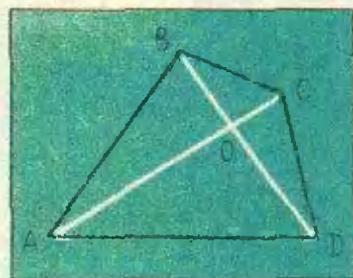


Рис. 1.

является точка пересечения его диагоналей (рис. 1). Будем уменьшать одну из сторон четырехугольника, например, BC (рис. 2), пока сторона BC

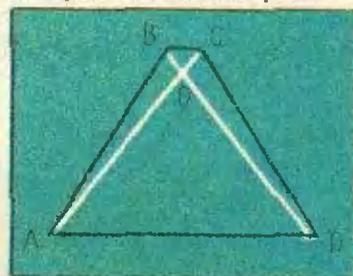


Рис. 2.

не превратится в точку. При этом точка O будет приближаться к BC и на рисунке 3 сольется с ней.

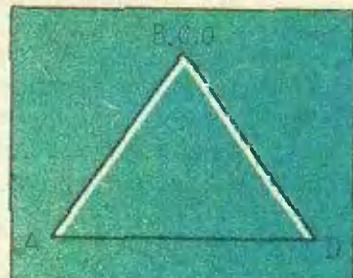


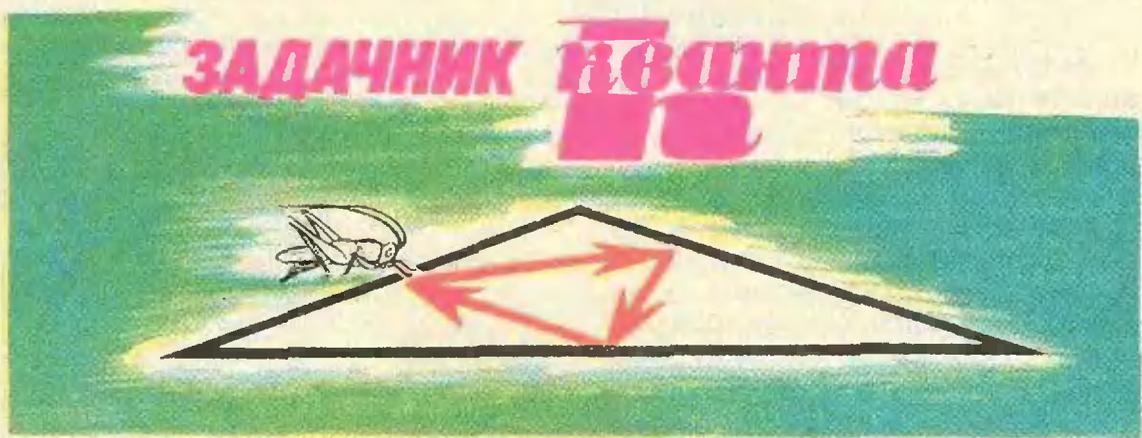
Рис. 3.

Значит, точкой, сумма расстояний от которой до вершин данного треугольника минимальна, является одна из его вершин. Но есть теорема, утверждающая, что такой точкой является точка, из которой все три стороны треугольника видны под углом 120° , а не одна из вершин.

Где же ошибка?

А. Скоблин

ЗАДАЧНИК Кванта



РЕШЕНИЯ

В этом номере мы публикуем решения задач М70—М73

М70

Пусть l_1, l_2, \dots, l_n — несколько прямых на плоскости, среди которых есть две пересекающиеся. Докажите, что можно и притом единственным способом выбрать на каждой из этих прямых по точке X_1, X_2, \dots, X_n так, чтобы перпендикуляр, восстановленный в точке X_i к прямой l_i , проходящий через точку X_{i+1} (для всех $i=1, 2, \dots, n-1$), и перпендикуляр, восстановленный к l_n в точке X_n , проходил через точку X_1 .

Попробуйте сформулировать и доказать аналогичную теорему в пространстве.

Эту задачу можно сформулировать еще следующим образом. Пусть p_i — отображение, которое каждой точке M (на плоскости) ставит в соответствие ее проекцию на прямую l_i , то есть $p_i(M)$ — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую l_i . Требуется доказать, что на прямой l_1 существует единственная точка X_1 такая, которая после n отображений

$$X_1 \xrightarrow{p_n} X_n \xrightarrow{p_{n-1}} X_{n-1} \xrightarrow{p_{n-2}} \dots \xrightarrow{p_2} X_2 \xrightarrow{p_1} X_1$$

переходит в себя.

Для произвольной точки X прямой l_1 обозначим через $f(X)$ ту точку на прямой l_1 , в которую переходит

X после n отображений p_n, p_{n-1}, \dots, p_1 (рис. 1); это записывается так:

$$f = p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_n.$$

Выберем на каждой из наших прямых l_i начало отсчета и направление, то есть превратим каждую из них в числовую ось (единицу масштаба мы выбираем на всех прямых одинаковой). (Мы отождествляем точку (на прямой) и соответствующее ей число — ее координату — так, что отображения p_1, p_2, \dots, p_n и f можем считать теперь функциями, которые

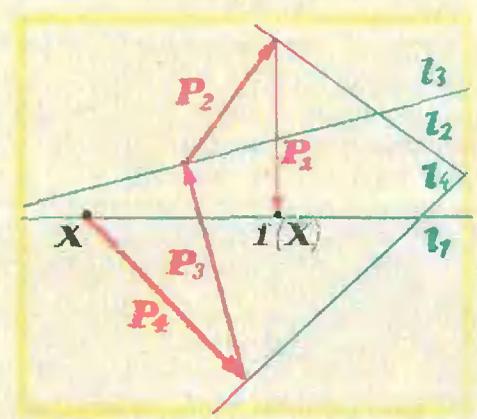


Рис. 1. Отображение $f: x \rightarrow f(x)$ называется произведением отображений p_4, p_3, p_2, p_1 .

каждому числу ставят в соответствие новое число.)

Докажем, что отображение f — линейное: $f(x) = ax + b$.

Для этого достаточно доказать три следующие почти очевидные утверждения.

(1) Если l и l' — две прямые и $p: l \rightarrow l'$ — отображение, сопоставляющее каждой точке ее проекцию на l' , то p — линейное отображение.

(2) Если p_1 и p_2 — линейные отображения, то $p_1 \circ p_2$ — тоже.

(3) Если p_1, p_2, \dots, p_n — линейные отображения, то $f = p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_n$ — тоже линейное отображение.

Ясно, что (3) выводится из (2) с помощью индукции. Проверка (2): если $p_1(x) = a_1x + b_1$ и $p_2(x) = a_2x + b_2$, то $(p_1 \circ p_2)(x) = p_1(p_2(x)) = a_1a_2x + (a_1b_2 + b_1)$. Для доказательства (1) проверьте такую формулу:

$$p(x) = x \cos \alpha + c,$$

где α — угол между положительными направлениями осей Ox и $O'x'$, c — координата точки $p(O)$ в системе Ox' (рис. 2; рассмотрите также случай, когда прямые l и l_1 параллельны).

Теперь для решения задачи достаточно показать, что линейное уравнение $x = ax + b$ имеет решение и притом только одно. Если это не так (то есть, если решений нет или больше одного), то $a = 1$. Докажем, что этого не может быть. Заметим, что при каждом проектировании $p_k: l_{k+1} \rightarrow l_k$ расстояние между любыми двумя точками не увеличивается:

$$|p_k(x) - p_k(x')| \leq |x - x'|,$$

а если прямые l_{k+1} и l_k не параллельны, то строго уменьшается. Отсюда следует, что для любых двух точек x и x'

$$|f(x) - f(x')| < |x - x'|.$$

Но если $a = 1$, то есть, если $f(x) = x + b$, то f сохраняет расстояния между любыми двумя точками (просто сдвигает их все на расстояние b). Получили противоречие. Доказательство закончено.

Задача М70 и наше решение без всяких изменений переносятся на тот случай, когда прямые расположены не на плоскости, а в пространстве (среди них могут быть и скрещивающиеся). При этом p_k означает проектирование на прямую l_k в пространстве: отображение, которое ставит в соответствие каждой точке основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую l_k .

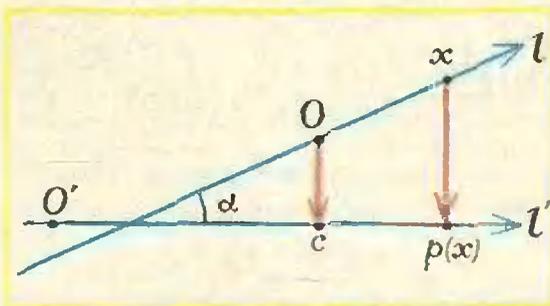


Рис. 2. Отображение, которое каждой точке одной прямой ставит в соответствие ее проекцию на другую прямую, записывается линейной функцией.

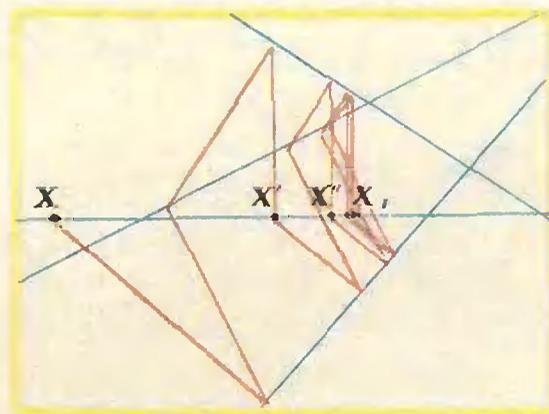


Рис. 3. Точку X_1 , для которой $f(X_1) = X_1$, практически легко найти методом последовательных приближений: начав с произвольной точки X , опускаем перпендикуляры на данные прямые и находим последовательно после каждого «цикла» точки $X' = f(X)$, $X'' = f(X')$ и так далее. Нетрудно доказать, что расстояния $|X - X_1|$, $|X' - X_1|$, $|X'' - X_1|$, ... образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $|a| < 1$, так что, повторив построение несколько раз, мы можем найти положение точки X_1 с любой желаемой точностью. Подобный метод очень часто используется для отыскания решений уравнений вида $f(X) = X$; он применим тогда, когда функция f уменьшает расстояние между любыми двумя точками. В нашем случае, когда f — линейная функция, разумеется, решение уравнения $f(X) = X$ можно найти точно (подумайте, как найти точку X_1 , если известны X , X' и X'').

Есть и другая возможность обобщения: рассматривать вместо прямых плоскости. Можно доказать, например, такой факт: если даны n плоскостей в пространстве, среди которых есть три пересекающиеся в одной точке, то можно и притом единственным образом выбрать на каждой из этих плоскостей по точке X_k ($k=1, \dots, n$) так, чтобы перпендикуляр, восстановленный в точке X_k к соответствующей плоскости, проходил через точку X_{k+1} (причем $X_{n+1} = X_1$). Теперь уже $f = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$ будет линейным отображением плоскости на плоскость и в координатах будет записываться так: $f(x, y) = (x', y')$, где $x' = a_1x + b_1y + c_1$, $y' = a_2x + b_2y + c_2$.

Докажите, что если система уравнений

$$\begin{cases} x = a_1x + b_1y + c_1 \\ y = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases}$$

не имеет решений или имеет больше одного решения (это бывает, если $(a_1-1)(b_2-1) - a_2b_1 = 0$), то система $x = a_1x + b_1y$, $y = a_2x + b_2y$ имеет решение (x_0, y_0) , отличное от $(0, 0)$, и что отображение f не меняет расстояния между точками $(0, 0)$ и (x_0, y_0) , чего в нашей задаче быть не может.

Наиболее полные решения задачи прислали Ф. Шмидель из Москвы, Ю. Оболонков из Воронежа, М. Розов из Минска.

М71

Прямоугольная таблица из m строк и n столбцов заполнена числами. Переставим числа в каждой строке в порядке возрастания. Докажите, что если после этого переставить числа в каждом столбце в порядке возрастания, то в каждой строке они по-прежнему будут стоять в порядке возрастания.

Подумайте, что будет, если действовать в другом порядке: в первоначальной таблице сначала переставить числа по возрастанию в столбцах, а потом — строках: получится ли в результате та же самая таблица, что и в первом случае или другая?

Рассмотрим таблицу, у которой в каждой строке числа стоят в порядке возрастания, и докажем, что, если $l < r$, то наибольшее число r -го столбца (обозначим его через b) не меньше наибольшего числа l -го столбца (обозначим его через a). Действительно, число, стоящее на пересечении той строки, где стоит a , и r -го столбца, не меньше a (потому что в строке числа идут в порядке возрастания).

Аналогично можно доказать, что k -е по величине (считая от наибольшего) число в r -столбце (b_k) не меньше k -го по величине числа в l -м столбце

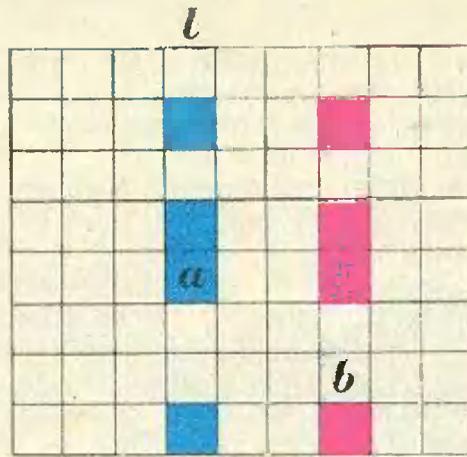


Рис. 4. Если числа в голубых клетках не меньше a , то числа в розовых клетках тоже не меньше a .

(a_k). Действительно (рис. 4), в l -м столбце имеется k чисел, не меньших a_k , следовательно, в тех же строках в r -м столбце имеется k чисел, не меньших a_k , поэтому $b_k \geq a_k$. Отсюда следует, что если переставить числа по столбцам в порядке возрастания, то k -е число в r -м столбце будет не меньше k -го числа в l -м столбце для любых $l < r$, то есть что в k -й строке числа идут в порядке возрастания. Утверждение задачи доказано.

В зависимости от того, как переставлять числа (сначала по столбцам или сначала по строкам), могут полу-

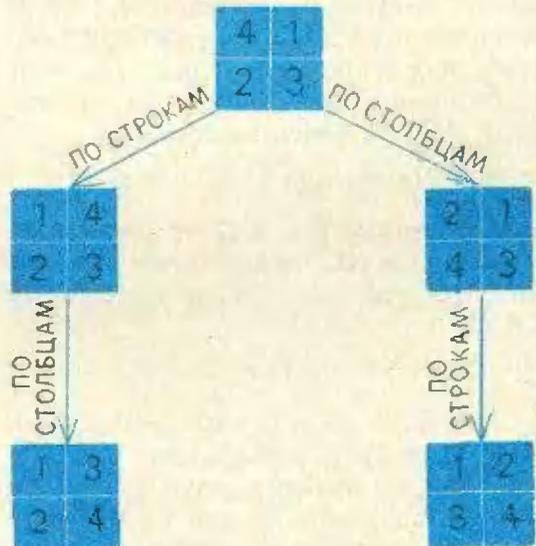


Рис. 5.

читься разные таблицы. Чтобы убедиться в этом, достаточно привести пример (рис. 5).

Правильно решили задачу Р. Аюлов, А. Бредо, Л. Брагинский, Г. Высоцкая, С. Григорян, А. Гордиенко, И. Джаббаров, А. Клеин, А. Кмижнерман, И. Кочубеевский, Г. Левин, М. Прегер, Е. Скрыт, А. Слинкин, А. Черняк и другие. Кроме решений, близких к нашему много и других, в которых проводится индукция; в некоторых работах доказано, что можно осуществлять перестановки последовательно в каждом столбце так, что при этом все время числа будут стоять по строкам в порядке возрастания.

Н. Б. Васильев

M72

Решите уравнение

$$\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x} = p. \quad (1)$$

где p — произвольное вещественное число.

Наивная попытка решения: возведем обе части уравнения в куб

$$2 + 3\sqrt[3]{1-x^2} \left(\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x} \right) = p^3 \quad (2)$$

и подставим сюда первоначальное равенство (1):

$$2 + 3p\sqrt[3]{1-x^2} = p^3. \quad (3)$$

Теперь легко найти x :

$$x = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{p^3 - 2}{3p} \right)^3}. \quad (4)$$

Нам было прислано много писем, где получен (этим и другими способами) этот ответ. Немало было и таких писем, в которых было верно найдено множество значений p , при которых формула (4) имеет смысл:

$$p = -1, \quad 0 < p \leq 2.$$

Некоторые заметили даже, что значения $p = -1$ надо отбросить, так как значение $x = 0$, даваемое формулой при этом p , не подходит. Но при этом не было доказано, что при всех p , $0 < p \leq 2$ значения x , даваемые формулой (4), являются решениями. (Обычно таким доказательством служит проверка, но тут ее проделать очень сложно.) А это надо доказывать,

так как не все преобразования, проделанные выше, сохраняют равносильность: уравнение (2) не эквивалентно (3). Чтобы убедиться в этом, подставьте $x=0$, $p=-1$ в (2) и (3). Равенство (3) обратится в тождество, а (2) — нет. Поэтому утверждения, встречавшиеся в письмах, что это преобразование эквивалентно, неверны. (В самом деле: попробуйте из (3) вывести (2). Вам придется использовать равенство (1), условие задачи, а этого нельзя делать, так как именно его и надо доказать.) Раз так, то и другие корни могут оказаться посторонними.

Разберем более детально преобразования, которые мы проделали с уравнением. Обозначим для краткости $\sqrt[3]{1-x} = u$ и $\sqrt[3]{1+x} = v$.

От уравнения

$$u + v = p$$

мы перешли к уравнению

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = p^3 \quad (2)$$

с помощью эквивалентного преобразования (возвышения обеих частей в куб). Следующий шаг, который мы хотим сделать, — подставить p вместо $u+v$ и перейти к уравнению

$$u^3 + v^3 + 3uvp = p^3, \quad (3)$$

которое мы запишем так:

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 - p^3 + 3uvp &= 0, \\ (u+v)^3 - p^3 - 3uv(u+v-p) &= 0. \end{aligned}$$

Применим формулу для разности двух кубов и затем вынесем $(u+v-p)$ за скобку:

$$(u+v-p)(u^2 + v^2 + p^2 + up + pv - uv) = 0. \quad (3')$$

Итак, нам удалось записать уравнение (3) в таком виде (3'), по которому уже нетрудно изучить, почему оно не равносильно (2). Ясно, что левая часть (3') равна нулю, когда хотя одна скобка равна нулю:

$$1) \quad u + v - p = 0,$$

$$2) \quad u^2 + v^2 + p^2 + up + pv -$$

$$-uv = 0.$$

Первое равенство — это наше исходное уравнение. Значит, все посторонние решения связаны со вторым и надо выяснить, когда оно выполняется. Умножив его на 2, можно записать его так:

$$(u+p)^2 + (v+p)^2 + (u-v)^2 = 0.$$

Это равенство выполняется только при $u=v=-p$.

В применении к нашему уравнению:

$$\sqrt[3]{1-x} = \sqrt[3]{1+x} = -p.$$

Значит, $x=0$ при $p=-1$ — единственный посторонний корень. Все остальные корни, даваемые формулой (4), при $0 < p \leq 2$ удовлетворяют уравнению (1).

Выпишем еще раз тождества, которые мы попутно установили (для симметрии мы заменим p на $-w$):

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw &= (u+v+w)(u^2 + v^2 + w^2 - uv - vw - wu), \\ 2(u^2 + v^2 + w^2 - uv - vw - wu) &= \\ &= (u-v)^2 + (v-w)^2 + (w-u)^2. \end{aligned}$$

Они часто бывают полезны при доказательстве неравенств и в других задачах.

М73

На лотерейном билете требуется отметить 8 клеточек из 64. Какова вероятность того, что после розыгрыша, в котором также будет выбрано 8 каких-то клеток из 64 (причем все такие возможности мы считаем равновероятными), окажется, что угаданы ровно 4 клетки? 5 клеток?.. все 8 клеток?

Как известно, 8 клеток из 64 могут быть выбраны $C_{64}^8 = \frac{64!}{8!56!}$ способами ($n!$ — произведение всех целых чисел от 1 до n включительно*). Все эти способы равновероятны. Следовательно, вероятность того, что выпадет какой-то один определенный способ, равна $1/C_{64}^8$. Теперь надо подсчитать, во скольких случаях оказались угаданными ровно k клеток ($0 \leq k \leq 8$). Число таких случаев равно числу спо-

*) См., например, статью Н. Я. Виленкина «Комбинаторика» в «Кванте» № 1, 1971 г.

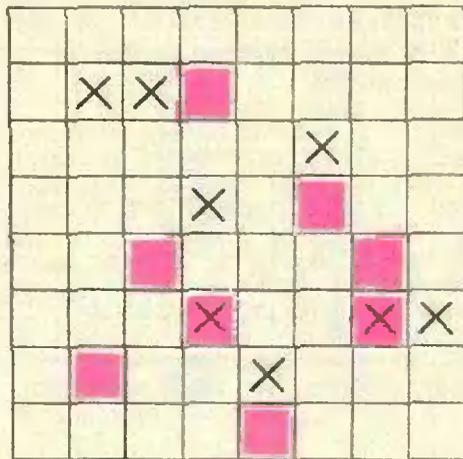


Рис. 6. Красные клетки — выигравшие; выбранные нами 8 клеток отмечены крестом. На этом рисунке $k=2$, $8-k=6$.

собов, при которых выбираются k клеток из 8 отмеченных и $8-k$ клеток из 56 неотмеченных. Поэтому оно равно $C_8^k \cdot C_{56}^{8-k}$. Чтобы найти искомую вероятность f_k — вероятность угадать ровно k клеток, надо умножить вероятность одного способа на это число. Получим

$$f_k = \frac{C_8^k \cdot C_{56}^{8-k}}{C_{64}^8}.$$

Таким образом, вероятности угадать 0, 1, ..., 8 клеток равны соответственно

$$f_0 = \frac{C_8^0 \cdot C_{56}^8}{C_{64}^8},$$

$$f_1 = \frac{C_8^1 \cdot C_{56}^7}{C_{64}^8}, \dots, f_8 = \frac{C_8^8 \cdot C_{56}^0}{C_{64}^8}. \quad (1)$$

Сумма этих девяти чисел, конечно, равна единице.

Формально задача решена, но с практической точки зрения это еще не ответ. Хотелось бы представить себе, насколько велики шансы угадать то или иное число клеток, если мы купим и заполним, скажем, десять лотерейных билетов. Для этого надо приближенно представить эти числа в виде десятичных дробей. С помощью логарифмической линейки это можно сделать, пользуясь, например, прямо формулами (1). Так поступили А. Злотник из г. Жуковского. Мы опишем другой, как нам кажется, более простой способ.

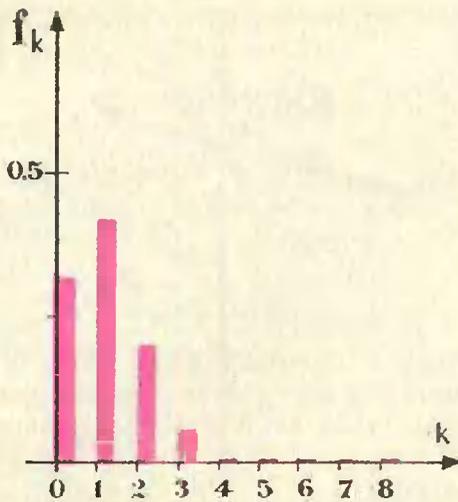


Рис. 7. Здесь показаны числа f_k — вероятности угадать k клеток ($k = 0, 1, 2, \dots, 8$). При $k \geq 4$ величина f_k очень близка к нулю.

Сначала вычислим отношение $(k+1)$ -го из этих чисел к k -му:

$$\frac{f_{k+1}}{f_k} = \frac{C_8^{k+1} \cdot C_{56}^{8-k-1}}{C_{64}^8} \cdot \frac{C_8^k \cdot C_{56}^{8-k}}{C_{64}^8} = \frac{(8-k)^2}{(k+1)(48+k+1)}$$

в частности,

$$\begin{aligned} \frac{f_1}{f_0} &= \frac{64}{49} \approx 1,31; & \frac{f_2}{f_1} &= \frac{49}{100}; \\ \frac{f_3}{f_2} &= \frac{12}{51} \approx 0,235; & \frac{f_4}{f_3} &= \frac{25}{208} \approx 0,12; \\ \frac{f_5}{f_4} &\approx 0,06; \dots \end{aligned}$$

Вычислим отношения f_2, f_3, f_4 к f_0 с двумя

знаками после запятой:

$$\frac{f_2}{f_0} = 0,64; \quad \frac{f_3}{f_0} \approx 0,15; \quad \frac{f_4}{f_0} = 0,02.$$

Ясно, что $f_5/f_0 < 0,02 \cdot 0,12$ и при выбранной степени точности f_6, f_7, f_8 равны нулю. Мы можем составить уравнение

$$f_0(1+1,31+0,64+0,15+0,02)=1,$$

откуда $f_0 \approx 0,32$. Теперь находим f_1, f_2, f_3, f_4 :

$$f_1 \approx f_0 \cdot 1,31 \approx 0,42; \quad f_2 \approx f_0 \cdot 0,64 \approx 0,20;$$

$$f_3 \approx f_2 \cdot 0,24 \approx 0,047; \quad f_4 \approx f_3 \cdot 0,12 \approx 0,0056.$$

Таким образом, если вы заполните десять билетов, то среди них скорее всего все будут такие, на которых угадано 0, 1, 2 и, быть может, 3 клетки; вероятность угадать 4 и более клеток очень мала. Умножая f_4 на $\frac{f_5}{f_4} \approx 0,06$ и так далее, можно полу-

чить приближенные значения f_5, f_6, f_7, f_8 . В частности, $f_8 \approx 2 \cdot 10^{-10}$. Это значит, что для того, чтобы иметь реальные шансы угадать все 8 клеток, надо заполнить несколько десятков миллиардов билетов.

С помощью приближенного метода расчета, который мы применили, можно показать, что если число N клеток на лотерейном билете много больше числа m клеток, которые нужно отмечать, а m достаточно велико, то вероятность угадать k клеток приблизительно равна

$$f_k = \frac{C_m^k C_{N-m}^{m-k}}{C_N^m} \approx \frac{\mu^k \cdot e^{-\mu}}{k!},$$

где $\mu = \frac{m^2}{N-2m}$, а $e \approx 2,718\dots$ — постоянное число (при этом нужно пользоваться тем, что $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\dots = e^x$ для любого x).

А. Л. Тоом

В этом номере мы публикуем решения задач Ф79—Ф82

Ф79

Уровень воды, попавшей в лодку, совпадает с уровнем воды в озере. Где уровень воды будет выше, если в лодку бросить полено?

При опускании полена в лодку лодка погрузится в озеро, вытеснив дополнительно объем воды $\Delta V = \frac{m}{\rho}$ (m — масса полена, ρ — плотность воды). С другой стороны, так как полено плавает в воде, то уровень воды в лодке должен измениться точно

так же, как изменился бы он при доливании в лодку воды массой, равной массе полена, и объемом, равным объему погруженной части полена, то есть $V = \frac{m}{\rho}$. (Мы можем мысленно убрать полено и заполнить получившуюся впадину водой — при этом уровень воды в лодке не изменится.) Такой же объем воды дополнительно вытесняет лодка при бросании в нее полена. Поэтому уровень воды в лодке будет совпадать с уров-

нем воды в озере, если толщина стенок лодки пренебрежимо мала, и будет немного выше уровня воды в озере, если стенки толстые.

Правильное решение прислали Р. Хаснутдинов (пос. Октябрьский БАССР), А. Зисман (Псков), И. Вигдорович (Симферополь), О. Маслюк (Новомиргород Кировоградской обл.), В. Рудько (Киев), А. Старченко (пос. Петропавловск Днепропетровской обл.), А. Демидов (Москва), Л. Брагинский (Фрунзе), Ф. Тухватуллин (Ташкент), Н. Шишкин (Нальчик), Н. Филиппов (Ленинград), Н. Сидоров (Москва).

И. Ш. Слободецкий

Ф80

Вдоль наклонной плоскости под углом β к направлению спуска бросают кубик (рис. 8). Найти установившуюся скорость движения кубика, если коэффициент трения его о плоскость $k = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол наклона плоскости к горизонту.

На кубик действуют сила тяжести $P = mg$, сила нормальной реакции $N = mg \cos \alpha$ и сила трения $F_{\text{тр}}$ (рис. 8).

Рассмотрим составляющие сил вдоль плоскости. Вниз в сторону

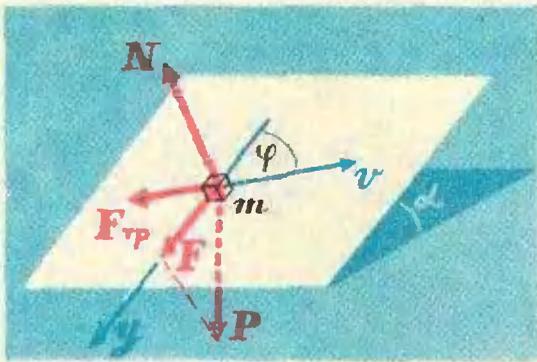


Рис. 8.

наибыстрейшего спуска (ось y) действует составляющая силы тяжести $F = mg \sin \alpha$; в сторону, противоположную скорости, действует сила трения $F_{\text{тр}} = kN = kmg \cos \alpha$. По условию, $k = \operatorname{tg} \alpha$, поэтому $F_{\text{тр}} = \operatorname{tg} \alpha \cdot mg \cos \alpha = mg \sin \alpha = F$.

Таким образом, задача сводится к рассмотрению движения кубика под действием двух одинаковых по величине сил. Одна из них направлена всегда против скорости кубика, другая — вдоль оси y .

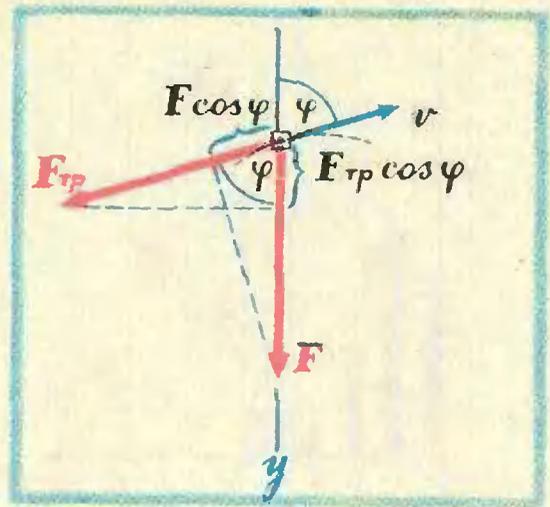


Рис. 9.

Пусть в некоторый момент скорость v составляет с осью y угол φ (рис. 9). Тангенциальное (направленное по касательной к траектории) ускорение a кубика определяется силой $F_{\text{тр}} = F$ и проекцией $F \cos \varphi$ силы F на то же направление:

$$a = \frac{F + F \cos \varphi}{m}.$$

Ускорение a_y (вдоль оси y) определяется силой F и проекцией $F_{\text{тр}} \cos \varphi$ силы $F_{\text{тр}}$ на ось y . Легко видеть, что по величине это ускорение равно тангенциальному:

$$a_y = \frac{F + F_{\text{тр}} \cos \varphi}{m} = \frac{F + F \cos \varphi}{m} = a.$$

Таким образом, быстрота изменения величины полной скорости $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ и быстрота изменения величины составляющей скорости вдоль оси y $a_y = \frac{\Delta v_y}{\Delta t}$ одинаковы. Но если быстрота изменения во времени двух каких-либо величин одинакова, то сами эти величины различаются лишь на постоянную, не зависящую от времени. Обозначим эту постоянную через V . Тогда в любой момент времени

$$v = v_y + V.$$

Найти константу V можно, подставив в эту формулу значения v и v_y

В настоящее время используются соленоиды со сверхпроводящей обмоткой. Такие соленоиды могут длительное время создавать магнитное поле без затраты энергии. Однако, если вследствие каких-либо причин участок обмотки утратит сверхпроводящие свойства, то произойдет авария. На этом участке будет выделяться большое количество тепла и произойдет взрыв.

Придумайте простейшее приспособление, исключающее подобие аварии.

Схемы с реле не годятся — слишком велико время их срабатывания. Взрыв произойдет раньше, чем сработает реле. Поэтому единственный выход — замкнуть соленоид на сопротивление. Обычно поступают так. Провод для соленоида делается армированным медью. При утрате сверхпроводимости арматура будет служить буфером, по которому пойдет ток, и выделение тепла будет распродоточено по цепи.

Правильное решение прислали С. Черников (Семипалатинск), Н. Ефимов (Воронеж), В. Скворцов (Ленинград).

Найдите условие, при котором через сопротивление r , подключенное в точках А и В схемы, изображенной на рисунке 12, не будет идти ток.

Ток не будет идти через сопротивление r , если разность потенциалов точек А и В равна нулю. Примем потенциал точки F за нуль. Тогда потенциал точки С равен E_1 , а потенциал точки D равен E_2 . Через сопротивление r_1 идет ток $I = \frac{E_1}{r_1 + r_3}$,

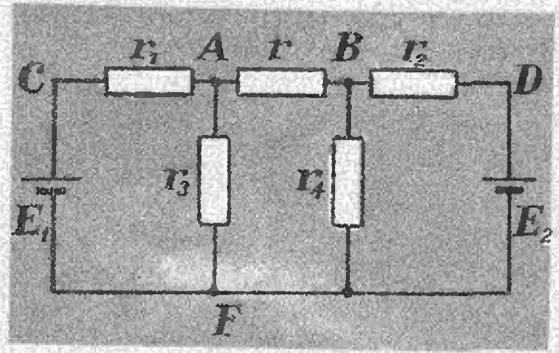


Рис. 12.

и поэтому падение напряжения на сопротивлении r_1 равно $U_1 = Ir_1 = E_1 \frac{r_1}{r_1 + r_3}$, а потенциал точки А равен

$$\varphi_A = E_1 - E_1 \frac{r_1}{r_1 + r_3} = E_1 \frac{r_3}{r_1 + r_3}.$$

Аналогично найдем потенциал точки В:

$$\varphi_B = E_2 \frac{r_4}{r_2 + r_4}.$$

Из условия $\varphi_A = \varphi_B$ получим

$$E_1 \frac{r_3}{r_3 + r_1} = E_2 \frac{r_4}{r_2 + r_4}.$$

Это — общее условие отсутствия тока через сопротивление r . Оно включает и очевидный симметричный случай $r_1 = r_2$, $r_3 = r_4$ и $E_1 = E_2$.

И. Ш. Слободецкий

ФИГУРКИ НА ВЕСАХ

На одном коромысле весов (см. рисунок на обложке) висит октаэдр, на другом — четыре тетраэдра. Оказывается, если ребра всех фигур равны, то объем октаэдра равен сумме объемов четырех тетраэдров, а потому весы находятся в равновесии. Попробуйте доказать это утверждение. Воспользуйтесь преобразованием подобия и докажете,

что, если из тетраэдра вырезать октаэдр с ребрами вдвое меньшими, чем ребра исходных тел, то останутся четыре тетраэдра (тоже с вдвое меньшими ребрами).

Итак, если все тела сплошные, то один октаэдр уравнивается четырьмя тетраэдрами. А если тела полые или состоят лишь из ребер?

V Всесоюзная математическая олимпиада

В. Л. Гутенмахер

С 15 по 20 апреля в Риге проходила V Всесоюзная математическая олимпиада. Но жюри олимпиады (председатель Ян Бардзинь, зам. председателя Николай Васильев) начало свою работу уже с 13 апреля. Из ста задач, которые привезли с собой члены жюри, нужно было отобрать наиболее интересные и оригинальные задачи. На этот раз, в отличие от прошлых лет, жюри решило дать школьникам задания, которые были бы близки к серьезной математической науке, а на втором туре провести даже некоторый эксперимент: предложить одну более трудную задачу, разбив ее на серию постепенно усложняющихся вопросов, в решении которых предлагалось бы продвигаться как можно дальше.

Первый и второй тур олимпиады проходили 16 и 17 апреля отдельно по восьмым, девятым и десятым классам.

Мы помещаем ниже список из 23 задач, которые предлагались школьникам. Среди них, по существу, всего 14 различных задач. 10 задач мы публикуем в «Задачнике Кванта» (см. «Квант» №№ 10, 11).

ЗАДАЧИ

8 класс (первый день)

1. Доказать, что существует стоящее число, делящееся на 2^{100} , в десятичной записи которого участвуют только цифры 1 и 2.

2. Дан треугольник $A_1A_2A_3$. На его стороне A_1A_2 взяты точки B_1 и D_2 , на стороне A_2A_3 — точки B_2 и D_3 , на стороне A_3A_1 — точки B_3 и D_1 так, что если построить параллелограммы $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ и $A_3B_3C_3D_3$, то прямые A_1C_1 , A_2C_2 и A_3C_3 пересекутся в одной точке. Доказать, что если $A_1B_1 = A_2D_2$ и $A_2B_2 = A_3D_3$, то $A_3B_3 = A_1D_1$.

3. Двое играют в такую игру. Первый записывает один под другим два ряда по 10 чисел так, чтобы выполнялось следующее правило: если число b записано под числом a , а число d — под числом c , то $a + d = b + c$. Второй игрок, зная это правило, хочет определить все написанные числа.

Ему разрешается задавать первому игроку вопросы типа «Какое число стоит в первой строке на третьем месте?» или «Какое число стоит во второй строке на девятом месте?» и т. п. За какое наименьшее число таких вопросов второй игрок сможет узнать все числа?

4. См. задачу M111.

8 класс (второй день)

5. См. задачу M108.

6. Доказать, что из 25 различных положительных чисел можно выбрать два таких числа, что ни одно из оставшихся не равно ни сумме, ни разности (между большим и меньшим) выбранных чисел.

7. См. задачу M109.

9 класс (первый день)

1. См. задачу M113.

2. На каждой стороне треугольника ABC взято по две точки: на AB — точки D и E , на BC — точки F

и G и на CA — точки H и K . Дано, что $AD=BE$, $BF=CG$ и $CH=AK$. В треугольниках ADK , BEF и CGH проведены медианы из вершин A , B и C . Доказать, что прямые, на которых лежат эти медианы, пересекаются в одной точке.

3. См. задачу M115.
4. См. задачу M111.
5. См. задачу M112.

9 класс (второй день)

6. Куб с ребром длины n разбит на n^3 единичных кубиков. Выберем несколько кубиков и проведем через центр каждого из них три прямые, параллельные ребрам. Какое наименьшее число кубиков можно выбрать так, чтобы проведенные через них прямые перечеркнули все кубики?

Решите эту задачу, если:

- а) $n=4$,
 - б) $n=10$,
 - в) n — любое натуральное число.
7. Доказать, что все прямые, делящие одновременно и площадь, и периметр треугольника пополам, пересекаются в одной точке.

8. См. задачу M110.

10 класс (первый день)

1. См. задачу M106.
2. См. задачу M107, а.
3. Проекция тела на две плоскости — круги. Доказать, что эти круги имеют равные радиусы.
4. См. задачу M111.
5. См. задачу M114.

10 класс (второй день)

6. Куб с ребром длины n разбит на n^3 единичных кубиков. Выберем несколько кубиков и проведем через центр каждого из них три прямые, параллельные ребрам. Какое наименьшее число кубиков можно выбрать так, чтобы проведенные через них прямые перечеркнули все кубики:

- а) Укажите ответ для маленьких значений n : для $n=2, 3, 4$.

б) Попробуйте найти ответ при $n=10$.

в) Решите общую задачу. Если вам не удастся найти точный ответ, докажите какие-либо неравенства, оценивающие сверху и снизу число отмеченных кубиков.

г) Заметьте, что эту задачу можно сформулировать так.

Рассмотрим всевозможные наборы (x_1, x_2, x_3) , где каждая из букв x_1, x_2, x_3 принимает одно из n значений $1, 2, \dots, n$. Какое наименьшее число наборов нужно выбрать, чтобы для каждого из остальных наборов среди выбранных нашелся такой, который отличается от него только в одном месте (значением только одной из координат x_1, x_2, x_3)? Попробуйте найти оценки для более общей задачи, когда рассматриваются наборы не из трех, а из четырех или большего числа букв.

7. а) Рассмотрим функцию $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$. Доказать, что для любой точки (x, y) найдутся такие целые числа (m, n) , что

$$f(x-m, y-n) = (x-m)^2 +$$

$$+ (x-m)(y-n) + (y-n)^2 \leq \frac{1}{2}.$$

б) Обозначим через $\bar{f}(x, y)$ наименьшее из чисел $f(x-m, y-n)$ при всех целых m и n . Утверждение задачи а) состояло в том, что выполнено неравенство $\bar{f}(x, y) \leq \frac{1}{2}$ для всех (x, y) . Докажите, что на самом деле верно более сильное неравенство $\bar{f}(x, y) \leq \frac{1}{3}$. Найдите все точки, для которых имеет место равенство $\bar{f}(x, y) = \frac{1}{3}$.

в) Рассмотрим функцию

$$f_a(x, y) = x^2 + axy + y^2 \quad (a \geq 0).$$

Найдите какое-либо число C (зависящее от a) так, чтобы для всех (x, y) выполнялось неравенство $|\bar{f}_a(x, y)| \leq C$. Постарайтесь найти точную оценку.

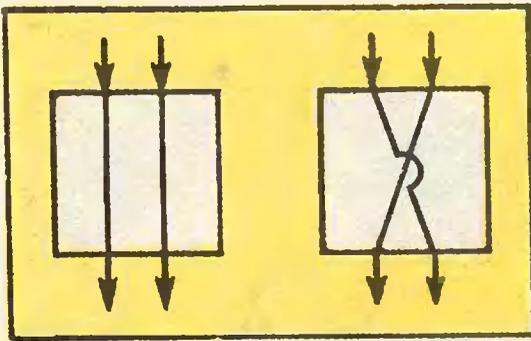


Рис. 1.

8. Переключатель (рис. 1) с двумя входами и двумя выходами может находиться в двух различных состояниях. На рисунке 2 изображена схема телефонной связи с тремя входами и тремя выходами, которая обладает таким свойством «универсальности»; меняя состояния переключателей, можно осуществить любое из шести соединений трех входов с тремя различными выходами, то есть

1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	2	3	3	1	2	2	3	1	2	1	3	3	2	1	3	2	1	1	3	2	1	3	2

(Проверьте это. Заметьте, что общее число различных состояний этой схе-

мы равно $2^3=8$, поскольку каждый из переключателей может находиться в двух состояниях.)

а) Постройте схему с четырьмя входами и четырьмя выходами, которая была бы «универсальной», то есть осуществляла бы любое из 24 возможных соединений входов и выходов.

б) Какое минимальное число переключателей нужно для такой схемы?

в) Назовем схему с n входами и n выходами n -универсальной, если она осуществляет любое из $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ возможных соединений n входов с n различными выходами. На рисунке 3 изображена схема с восемью входами и восемью выходами, где A и B — 4-универсальные схемы. Докажите, что она является 8-универсальной.

Оцените сверху и снизу число переключателей в минимальной n -универсальной схеме.

В первый день, как и предполагалось, наиболее легкими оказались задачи 1—3 в восьмом, 1 и 2 в девятом и 1—3 в десятом классах. Школьники успешно справились с ними, причем были найдены разные и иногда

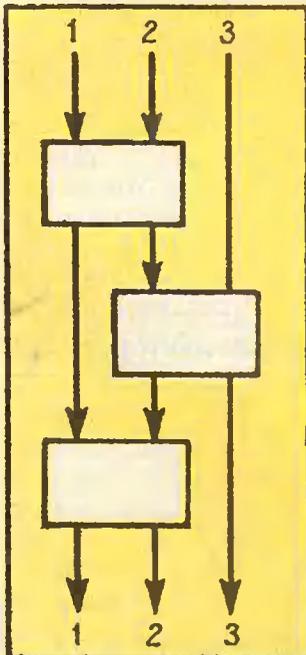


Рис. 2.

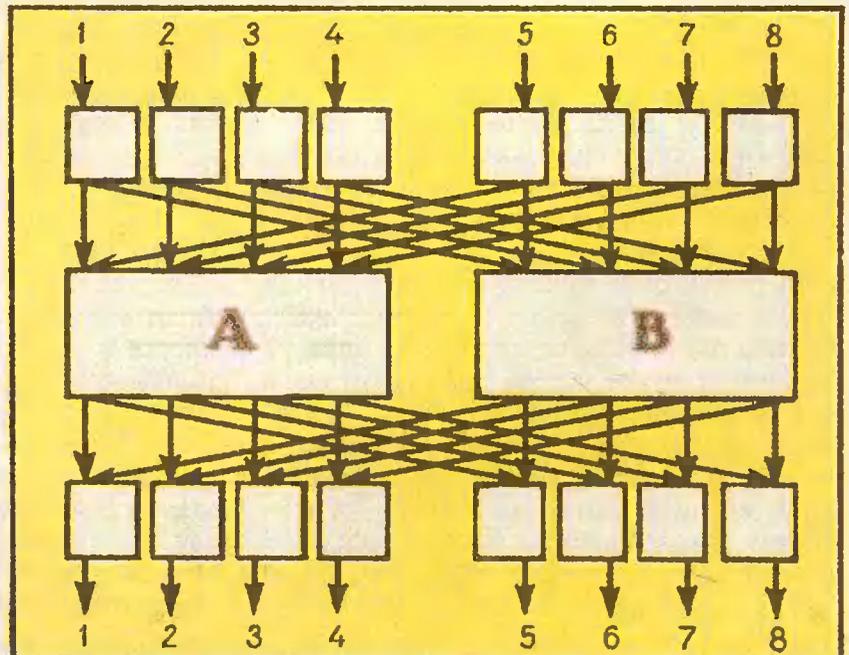


Рис. 3.



не известные жюри способы доказательства.

Камнем преткновения стала задача № 4, предложенная во всех классах. Многие пробовали решить эту задачу, но при этом упускали из виду, что расположение кругов может быть достаточно экзотическим: круги могут налегать друг на друга, их центры могут быть расположены близко друг к другу и т. п. По существу, в этой задаче фигура, покрытая кругами, может иметь почти произвольную форму, и нужно придумать такое рассуждение, которое годится для любой такой фигуры. У этой задачи есть очень короткое и красивое решение. В каждом классе ее удалось решить лишь одному школьнику (в таблице на стр. 39 указано, сколько людей решило каждую задачу

полностью или с небольшими просчетами). Повторялись в равных классах и другие задачи, однако их формулировки отличались друг от друга. Например, задача 1 в девятом классе отличается от задачи 1 в восьмом классе тем, что вместо числа 100 поставлено число n . Задача 7 девятого класса отличается от задачи 5а восьмого класса тем, что не названа точка, в которой пересекаются прямые, и, таким образом, существенно усложнена.

В качестве более интересного примера дублирования мы приведем задачи 3 (8 класс) и 5 (9 класс). Первая из этих задач — просто частный случай второй (для $m=2$, $n=10$), но в формулировке 8 класса более четко выделено, что именно требуется в ее решении: (1) указать ответ (этот ответ — 11 вопросов — нашли почти

все); (2) доказать, что за 11 вопросов узнать все числа можно (это очень просто); (3) доказать, что за 10 или меньше вопросов узнать числа нельзя.

Задача 3 (8 класс). Пусть a и c — какие-то два числа, стоящие в верхней строке, а b и d — числа, стоящие под ними:

$$\begin{matrix} \dots & a & \dots & c & \dots \\ \dots & b & \dots & d & \dots \end{matrix}$$

Условие, которому удовлетворяет это число, состоит только в том, что $a+d=c+b$. Перепишем это условие так: $a-b=c-d$. Отсюда следует, что разность между числом в верхней строке и числом, стоящим под ним, для всех столбцов одна и та же; обозначим эту разность через y . Таблицу можно записать так:

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & \dots & x_9 & x_{10} \\ x_1-y & x_2-y & \dots & x_9-y & x_{10}-y \end{matrix}$$

здесь x_1, \dots, x_{10}, y — произвольные числа. Эту таблицу можно определить за 11 вопросов. Например, можно за 10 вопросов найти 10 чисел x_1, \dots, x_{10} из первой строки, а затем, задав один вопрос «какое число стоит во второй строке на первом месте?», найти y .

Почти очевидно, что меньше, чем за 11 вопросов нельзя найти 11 неизвестных. Однако жюри не считало, что это очевидно, и требовало пояс-

нений. Большую трудность представляла для участников запись их полного и четкого решения задач. Записывать строчки и таблицы, состоящие из большого числа элементов, и свободно обращаться с ними, могут очень немногие школьники. В решении следующей задачи имеется трудность как раз такого рода.

Задача 6 (8 класс). Будем доказывать утверждение задачи от противного. Допустим, что либо сумма двух чисел из 25 либо их разность содержится среди оставшихся чисел.

Расположим данные числа в порядке возрастания:

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{24} < a_{25}.$$

Рассмотрим наибольшее число a_{25} в паре с любым из остальных чисел. Очевидно, что сумма таких чисел не содержится среди данных чисел, так как

$$a_{25} + a_i > a_{25} \quad (i=1, 2, \dots, 24).$$

Следовательно, разности этих чисел

$a_{25} - a_{24} < a_{25} - a_{23} < \dots < a_{25} - a_1$ должны содержаться среди данных чисел. Единственный возможный вариант:

$$a_{25} - a_{24} = a_1, a_{25} - a_{23} = a_2, \dots, \dots, a_{25} - a_1 = a_{24}$$

или, что то же самое,

$$a_{24} + a_1 = a_{23} + a_2 = \dots = a_{13} + a_{12} = a_{25}.$$

Число участников, решивших каждую задачу

8 класс	№ задачи	I день					II день								
		1	2	3	4		5а	5б	6	7а	7б	7в			
	Решило	30	7	22	1		42	15	13	13	14	9			
9 класс	№ задачи	1	2	3	4	5	6а	6б, в		7	8				
		56	31	0		1	6	9		1	16	15			
10 класс	№ задачи	1	2	3	4	5	6а*	6б—в		7а*	7б	7в	8а*	8б	8в
		26	43	65		1	5	32		1	18	5	3	19	15

* Различные результаты, полученные участниками по этим задачам, не укладываются точно в рамки сформулированных вопросов; указано число школьников, получивших наиболее полные и точные результаты, построивших интересные примеры и т. п.

Теперь рассмотрим число a_{24} в паре с любым из первых двадцати трех чисел. С парой чисел a_1 и a_{24} все в порядке, так как $a_{24} + a_1 = a_{25}$. Суммы же чисел

$$a_{24} + a_2, \dots, a_{24} + a_{23}$$

не содержатся среди данных чисел, так как

$$a_{24} + a_i > a_{24} + a_1 = a_{25}, \\ (i=2, 3, \dots, 23).$$

Следовательно, разности этих чисел должны содержаться среди данных чисел. Запишем их в порядке возрастания:

$$a_{24} - a_{23} < a_{24} - a_{22} < \dots < a_{24} - a_2.$$

Из равенства $a_{23} + a_2 = a_{25}$ следует, что $a_{24} - a_2 < a_{23}$ и поэтому единственный возможный вариант:

$$a_{24} - a_{23} = a_1, \quad a_{24} - a_{22} = a_2, \dots \\ \dots, a_{24} - a_{12} = a_{12}, \dots, a_{24} - a_2 = a_{22}.$$

Но в таком случае разность $a_{24} - a_{12}$ не содержится среди оставшихся чисел, а сумма $a_{24} + a_{12}$ вообще не содержится среди данных чисел. Получили противоречие. Тем самым утверждение задачи доказано.

Задача оказывается верной и для n чисел, где $n \geq 4$. Доказательство можно провести аналогичным образом, причем для четного n можно получить противоречие на первом же шаге наших рассуждений. Попробуйте сами записать это доказательство.

Неожиданными для жюри явились результаты сравнительно легкой стереометрической задачи 3 (10 класс). Задача оказалась посильной лишь одной трети десятиклассников. Это свидетельствует, пожалуй, о том, что пространственное представление у большинства участников олимпиады развито недостаточно.

Задача 3 (10 класс). Тут речь идет об обычной ортогональной проекции. Определение проекции тела на данную плоскость содержится в школьном учебнике. Нам понадобится определение проекции тела на прямую.

Проекцией точки на данную прямую назовем основание перпендику-

ляра, опущенного из этой точки на прямую. Если точка лежит на данной прямой, то ее проекцией будет сама эта точка.

Проекцией тела на данную прямую назовем множество проекций всех его точек.

Пусть P — плоскость и l — прямая, лежащая на P . Из теоремы о трех перпендикулярах следует, что проекция любой точки на прямую l может быть получена последовательным проектированием этой точки на плоскость P и проектированием полученной точки на прямую.

По условию задачи проекция тела на две плоскости — круги. Допустим, что эти плоскости пересекаются по прямой l . Из сказанного следует, что проекция тела на прямую l совпадает с проекциями каждого из кругов на l . Отсюда заключаем, что проекции обоих кругов l совпадают друг с другом.

Ясно, что проекция круга на прямую l лежащую в его плоскости, представляет собой отрезок, равный диаметру круга. Следовательно, эти круги имеют одинаковые диаметры и одинаковые радиусы.

Случай, когда данные плоскости параллельны друг другу достаточно очевиден.

Заметим, что задача допускает и другие решения; введение нового понятия — проекция тела на прямую, — безусловно, не является необходимым.

Можно сказать, что остальные задачи первого дня у десятиклассников, хотя и были более трудными, но все допускали значительно более короткие решения, чем приведенное выше решение задачи № 3.

Вариант девятого класса нужно признать несколько перегруженным: здесь не было ни одной «совсем простой» задачи. В частности, задача 3 никем не была решена полностью.

Особенно тяжелым был второй тур, где собраны задачи, требующие длительного размышления. А поскольку десятиклассникам не предложили так же, как в десятом классе,

решать только одну задачу, то, стараясь сделать все, некоторые не сделали ничего.

Первый тур в 8 классе был напряженным. Ни одному ученику не удалось решить все задачи. Однако на втором туре к удивлению жюри три человека решили все задачи. Две из трех задач второго тура состояли из нескольких вопросов. В задаче 5 пункт б) являлся обобщением пункта а), а полное решение задачи 7 а), б), в) позволяло школьнику сформулировать и доказать утверждение, естественно обобщающее все три пункта этой задачи.

Эксперимент II тура наиболее последовательно был выдержан в 10 классе, где участникам было предложено выбрать только одну задачу и посвятить все пять часов её решению. Любопытно, что все три задачи оказались равноценными. Десятиклассники разделились на три примерно

равные группы «специалистов» по каждой задаче. В каждой из задач был достигнут «потолок» — задача была доведена (или почти доведена) до конца, то есть до тех результатов, которыми располагало жюри. Например, в задаче 6 были полностью сделаны пункты а) — в); в задаче 7 для $0 \leq a \leq 2$ была найдена точная оценка

$$C = \frac{1}{a+2}.$$

О задачах 6—8 будет рассказано в отдельных статьях в первых номерах «Кванта» в следующем году, и, если вам удастся получить до тех пор интересные результаты по этим задачам, напишите нам!

Члены жюри проверяли каждую работу более 500 участников олимпиады не менее двух раз, а наиболее спорные работы просматривали 10, а то и больше человек. В заключение всем школьникам были рассказаны решения задач и был проведен индивидуальный разбор их работ.



На этих встречах ребята могли посмотреть свои тетради и побеседовать с членами жюри, выяснить все интересующие их вопросы по задачам, узнать новые задачи. Например, член жюри Н. Константинов провел двухчасовой кружок, на котором школьники предлагали придуманные ими самими задачи и совместными усилиями их решали. Не смогли решить только одну задачу, предложенную участником олимпиады Н. Романовым.

Задача. Каждая точка плоскости окрашена в один из трех цветов: красный, синий или желтый. Обязательно ли найдутся три точки одного цвета, которые образуют треугольник, подобный данному?

Не остались в стороне и руководители команд. Для них члены жюри прочли несколько лекций.

В заключение мы приведем еще одну исследовательскую задачу из портфеля жюри, которая предназначалась для II тура, но не была включена из-за перегрузки вариантов.

Задача. Пусть $-1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 1$. Если при некотором a , таком, что $-1 \leq a \leq 0$,

$|(a - x_1)(a - x_2) \dots (a - x_n)| > 1$,
то при любом x , таком, что $0 \leq x \leq 1$,
 $|(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)| \leq 1$.

Доказать это утверждение:

- а) при $n=2$; б) при $n=3$;
в) при произвольном n .

V Всесоюзная физическая олимпиада

И. А. Зайцев

С 15 по 20 апреля в Новосибирске проходила V Всесоюзная физическая олимпиада. По уже устоявшейся традиции она проходила в два тура: теоретического и экспериментального. Подбирая задачи, жюри стремилось к тому, чтобы при их решении было достаточно знаний, предполагаемых программой средней школы, но требовалось бы «физическое мышление», понимание, чем можно пренебречь, понимание того, как происходит процесс, о котором говорится в задаче, и т. д. Труднее всего жюри пришлось с задачами экспериментального тура. Они не должны были требовать для решения слишком много времени и в них должна была быть «олимпиадность»:

при решении нужно было проявить находчивость, подумать о том, как лучше поставить опыт, чтобы получить как можно более точный результат. Это, впрочем, относилось как к теоретическим, так и к экспериментальным задачам.

Всего жюри отобрало 14 теоретических и 10 экспериментальных задач. Некоторые задачи повторялись в разных классах. Ниже мы публикуем все задачи, которые предлагались на олимпиаде (часть из них уже была опубликована в «Кванте» № 10, часть мы публикуем в этом номере в «Задачнике «Кванта»).

Каждая из работ участников олимпиады проверялась дважды — вначале одним из членов жюри, затем

каждую из задач в работе проверяли отдельно «специалисты» по этой задаче. Это позволило усреднить требования, уменьшить вероятность ошибки. Лучшие и худшие работы, кроме того, проверялись старшим по варианту.

Работой по подготовке задач и проверкой работ руководили: председатель жюри — академик С. Т. Беляев, его заместители — Е. И. Биченков и И. Ш. Слободецкий.

Приведем для примера решения двух характерных «олимпиадных» задач теоретического тура.

1. Два протона и два позитрона, первоначально покоившиеся в вершинах квадрата со стороной a (рис. 1), разлетаются. Отношение их масс $M/m=2000$, а заряды одинаковы. Найти отношение скоростей протонов и позитронов после разлета (на бесконечности). (10 класс).

Вначале на все частицы действуют одинаковые по величине силы. Но массы протонов в 2000 раз превышают массы позитронов. Это означает, что ускорения позитронов будут в 2000 раз больше ускорений протонов. Поэтому позитроны быстро разлетятся на бесконечность, а затем протоны будут разлетаться, взаимодействуя уже только друг с другом. Это дает возможность при вычислении скоростей позитронов протоны считать неподвижными.

Найдем полную потенциальную энергию позитронов до разлета. Если бы протонов не было, то потенциальная энергия взаимодействия двух позитронов была бы равна $\frac{e^2}{a\sqrt{2}}$ (т. е. работе, которую нужно затратить для сближения двух позитронов). Потенциал поля, которое создает каждый из протонов в точке, где находится позитрон, очевидно, равен $\varphi = \frac{e}{a}$. Поэтому полная потенциальная энергия позитронов будет равна

$$P_1 = \frac{e^2}{a\sqrt{2}} + 2 \frac{e}{a} e + 2 \frac{e}{a} e = \frac{e^2}{a} \left(4 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

(Потенциальную энергию взаимодействия протонов мы можем не учитывать, так как она не меняется — протоны неподвижны.) Вся эта энергия перейдет в кинетическую энергию позитронов при их разлете. Ясно, что скорости позитронов на бесконечности одинаковы. Поэтому

$$\frac{e^2}{a} \left(4 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2 \frac{mv^2}{2} \Rightarrow \Rightarrow \frac{e^2}{a} \left(4 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = mv^2. \quad (1)$$

Теперь рассмотрим разлет протонов. Их потенциальная энергия до разлета, очевидно, равна $P_2 = \frac{e^2}{a\sqrt{2}}$, а полная кинетическая энергия после разлета равна Mu^2 (u — скорость протонов). По закону сохранения энергии

$$\frac{e^2}{a\sqrt{2}} = Mu^2. \quad (2)$$

Разделив теперь уравнение (2) на уравнение (1), получим

$$\frac{1}{4\sqrt{2} + 1} = \frac{M}{m} \left(\frac{u}{v} \right)^2,$$

откуда

$$\frac{u}{v} = \sqrt{\frac{m}{M} \frac{1}{4\sqrt{2} + 1}} \approx 0,007.$$

2. На гладком столе расположена система грузов, изображенная на рисунке 2. Коэффициент трения между грузами M и m равен k . Правый нижний груз тянут вдоль стола с силой F , как указано на рисунке. Найти ускорения всех грузов системы. (8 класс).

Вот как решил эту задачу Вадим Мирный (шк. № 2, г. Москва), получивший на олимпиаде диплом II степени.

Перенумеруем грузы так, как показано на рисунке 2. Выберем систему отсчета, связанную со столом, и положительное направление вправо. Тогда никакой из грузов не может иметь отрицательного ускорения.

Пусть вместо грузов 3 и 4 на столе стоит столб, к которому привязана нить. В этом случае натяжение нити

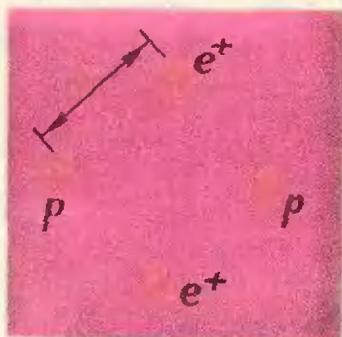


Рис. 1.

будет наибольшим. Но даже в этом случае груз 2 не может иметь ускорения, направленного влево. Поэтому он вообще никогда не может иметь отрицательного ускорения. Ускорение груза 3 равно ускорению груза 2, а ускорение груза 4 направлено вправо, так как на него действует только одна, направленная вправо, сила трения о груз 3.

Докажем, что трение между грузами 3 и 4 — всегда трение покоя. Предположим противное: груз 3 скользит по грузу 4. Тогда сила трения между ними $F_{тр} = kmg$, а сила натяжения веревки $T > kmg$, поэтому ускорение груза 2 направлено влево, чего не может быть. Поэтому ускорения грузов 2, 3 и 4 одинаковы. Обозначим его a_2 , а ускорение груза 1 a_1 . Теперь рассмотрим два случая.

Первый случай. Между грузами 1 и 2 трение покоя и $a_1 = a_2$. Пусть сила трения между ними равна F_1 , а сила трения между грузами 3 и 4 — F_2 ; сила натяжения нити T .

Тогда

$$\begin{cases} \text{для груза 1} & F - F_1 = Ma_1, \\ \text{для груза 2} & F_1 - T = ma_2, \\ \text{для груза 3} & T - F_2 = ma_2, \\ \text{для груза 4} & F_2 = Ma_2. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем:

$$F_1 = \frac{2m + M}{2(M + m)} F,$$

$$a_1 = a_2 = \frac{F}{2(M + m)}.$$

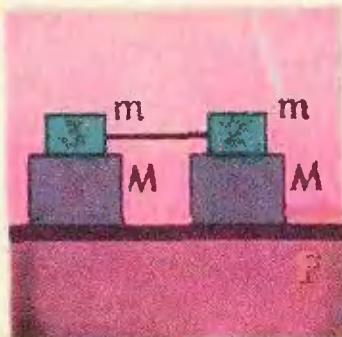


Рис. 2.

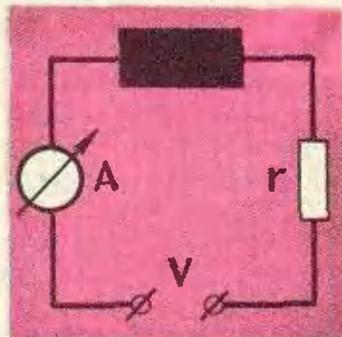


Рис. 3.

Этот же результат можно было получить и не решая систему уравнений. Так как трение между всеми поверхностями — трение покоя, то система грузов движется как твердое тело с массой $\tilde{M} = 2(M + m)$:

$$F = \tilde{M}a_1, \quad a_1 = a_2 = \frac{F}{2(M + m)}.$$

Второй случай. Груз 2 скользит по грузу 1. Тогда на груз 1 действует сила $F' = F - kmg$ и его ускорение равно

$$a_1 = \frac{F - kmg}{M}.$$

Система грузов 2, 3 и 4 движется как твердое тело; его масса $\tilde{M} = 2m + M$ и ускорение

$$a_2 = \frac{kmg}{2m + M}.$$

Ясно, что первый случай осуществляется, если

$$F_1 = F \frac{2m + M}{2(M + m)} \leq kmg,$$

или

$$F \geq \frac{2km(m + M)}{2m + M} g.$$

Если $F < \frac{2km(m + M)}{2m + M} g$, то осуществляется второй случай. Решение системы уравнений было необходимым, чтобы определить, какие условия соответствуют первому случаю, а какие — второму.

Варианты задач, предложенные участникам олимпиады

В скобках после каждой задачи указано число участников, решивших ее.

Задачи теоретического тура

8 класс (129 участников)

1. В герметически закрытом сосуде в воде плавает кусок льда массы M , в который вмержла свинцовая дробинка массы m . Какое количество тепла нужно затратить, чтобы дробинка начала тонуть? Плотность свинца $11,3 \text{ г/см}^3$, льда $0,9 \text{ г/см}^3$, теплота плавления льда 80 кал/г . Температура воды в сосуде равна 0° С . (66)

2. К ящику с двумя клеммами подключили: 1) амперметр, 2) сопротивление $r=1 \text{ ом}$ и 3) источник постоянного напряжения $V_1=5 \text{ в}$ (рис. 3). Амперметр показал ток $I_1=1 \text{ а}$. Когда вместо источника напряжения V_1 включили другой источник напряжения, $V_2=20 \text{ в}$, амперметр показал ток $I_2=2 \text{ а}$. Что находится внутри ящика? (39)

Было много решений этой задачи с реле, двумя лампочками, одна из которых сгорает при большом напряжении, и т. д. Но задача имеет простое и красивое решение. Нашли его немногие.

3. На гладком столе расположена система грузов, изображенная на рисунке 2 (см. стр. 44). Коэффициент трения между грузами M и m равен k . Правый нижний груз тянут вдоль стола с силой F , как указано на рисунке. Найти ускорения всех грузов системы. (34)

4. Конькобежец на ледяной дорожке старается пройти вираж как можно ближе к внутренней бровке. Велосипедист на велотреке проходит вираж возможно дальше от внутренней бровки. Как объяснить это различие в движении конькобежца и велосипедиста на вираже? Профиль трека изображен на рисунке 4. (43)

В этой задаче нужно было показать, что хотя, забираясь вверх, велосипедист проигрывает в расстоянии, зато выигрывает в скорости.

Тем восьмиклассникам, которые занимались по старой программе (их было всего 12), вместо двух последних задач были предложены другие.

1. Оценить максимальную силу, которую будет показывать динамометр, присоединенный к плоскостям, закрывающим полусферы с радиусом $R=20 \text{ см}$ (рис. 5). Полусферы растягиваются в противоположные стороны силами F . Атмосферное давление равно 1 атм .

2. В стакан с водой, вращающийся вокруг своей оси, бросают шарик, который плавает на поверхности воды. В каком месте поверхности будет находиться шарик и почему?

35 восьмиклассников — участников олимпиады не сделали ни одной задачи, 32 решили только одну, 26 — две, 18 — три. Пятеро решили все четыре задачи, хотя и с некоторыми неточностями и мелкими погрешностями.

9 класс (171 участник)

1. Свет от источника S двумя путями приходит к экрану, проходя че-

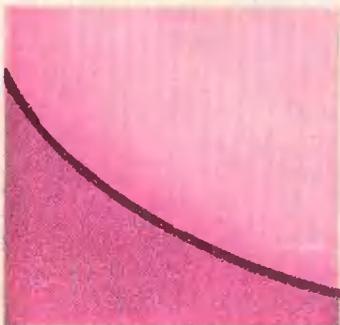


Рис. 4.

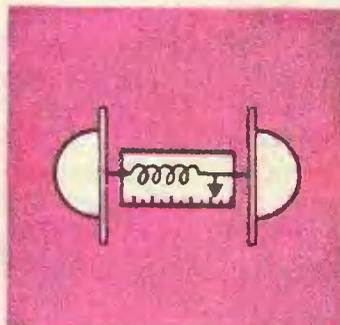


Рис. 5.

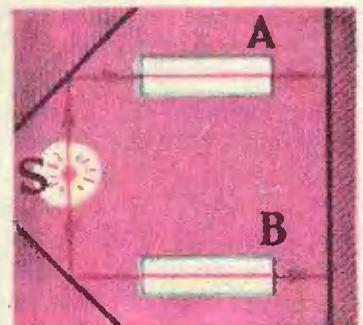


Рис. 6.

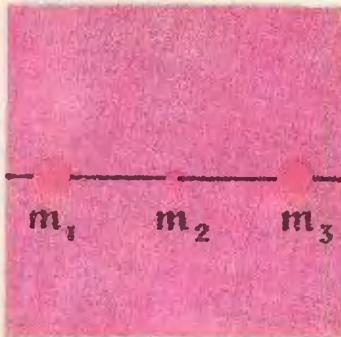


Рис. 7.

рез стеклянные кубики A и B длины l каждый (рис. 6). Скорость света в воздухе равна c , в неподвижном стекле — v . Насколько быстрее свет пройдет по нижнему пути, если кубик B привести в движение со скоростью u ? (77)

Эту задачу нужно было решить в приближении $v \ll c$ и $u \ll c$. Многие участники, однако, решили задачу в общем случае, используя формулы теории относительности.

2. Три тела с массами m_1, m_2, m_3 могут скользить вдоль горизонтальной прямой без трения (рис. 7), причем $m_1 \gg m_2$ и $m_3 \gg m_2$. Определить максимальные скорости двух крайних тел, если в начальный момент времени они покоились, а среднее тело имело скорость V . Удары считать абсолютно упругими. (43)

Не следует решать эту задачу «в лоб», составляя большое число уравнений. Здесь нужно было подумать о следствиях условий $m_1 \gg m_2$ и $m_3 \gg m_2$.

3. Шар радиуса R соскальзывает по лестнице, ширина и высота ступенек которой $a \ll R$ (рис. 8). Соударения шара со ступеньками неупругие, трения нет. Какой наибольшей скорости достигнет шар при достаточно большой длине лестницы? (16)

4. В цилиндре с поршнем находится вода, внутри которой в начальный момент имеется полость объема V (рис. 9). Давление паров в полости пренебрежимо мало. Поршень оказывает на воду постоянное давление P . Какую кинетическую энергию приобретет вода в момент, когда полость

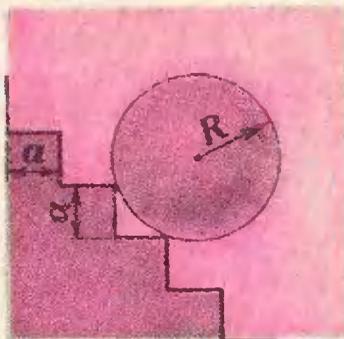


Рис. 8.

исчезнет? Начальная скорость воды равна нулю. Силу тяжести можно не учитывать. (109)

5. В камеру сгорания реактивного двигателя поступает в секунду масса m водорода и необходимсе для полного сгорания количество кислорода. Сечение выходного отверстия сопла двигателя S , давление в этом сечении P , температура $T^\circ \text{K}$. Определить силу тяги двигателя. (70)

30 девятиклассников — участников олимпиады не решили ни одной задачи, 45 решили по одной, 51 — по две, 29 — по три, 13 — по четыре. Только двое сделали все задачи.

10 класс (249 участников)

1. На рисунке 10 показана часть схемы, состоящей из неизвестных сопротивлений. Как, имея амперметр, вольтметр, источник тока и соединительные провода, можно измерить величину одного из сопротивлений, не разрывая ни одного контакта в схеме? (45)

Задача имеет очень короткое и интересное решение. Попробуйте найти его.

2. К маятнику AB с шариком массы M подвешен маятник BC с шариком массы m (рис. 11). Точка A совершает колебания в горизонтальном направлении с периодом T . Найти длину нити BC , если известно, что нить AB все время остается вертикальной. (35)

3. См. задачу 5 для 9 кл. (120)

4. Два протона и два позитрона, первоначально покоившиеся в вер-

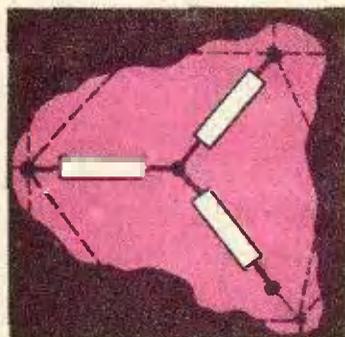


Рис. 10.

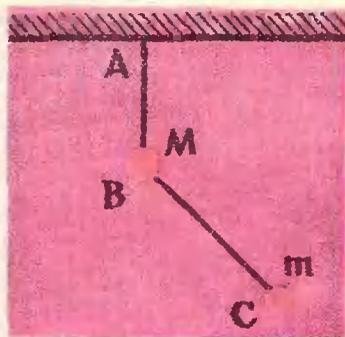


Рис. 11.

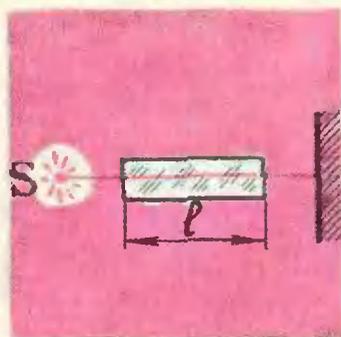


Рис. 12.

шинах квадрата со стороной a (см. рис. 1 на стр. 44), разлетаются. Отношение их масс $M/m=2000$, а заряды одинаковы. Найти отношение скоростей протонов и позитронов после разлета (на бесконечности). (5)

Главное в этой задаче — понять, как будет происходить разлет частиц.

5. Свет от источника S по пути к экрану проходит через стеклянный кубик с ребром l (рис. 12). Насколько быстрее свет дойдет до экрана, если кубик привести в движение со скоростью v ? Скорость света c , показатель преломления стекла n . (97)

См. замечание к задаче 1 для 9 кл.

74 десятиклассника — участника олимпиады не решили ни одной задачи, 69 справились только с одной, 52 — с двумя, 25 — с тремя, 13 — с четырьмя. Все задачи решил только один участник олимпиады.

Задачи экспериментального тура

Выполняя экспериментальную работу, важно было не только выполнить ее правильно, но и сделать это просто, остроумно и оригинально. Нужно было продумать, нельзя ли провести требуемые измерения несколькими методами.

8 класс

1. Определить к. п. д. наклонной плоскости с помощью секундомера, линейки и бруска.

2. Найти отношение коэффициентов трения покоя и скольжения, имея планку и две круглые деревянные палочки.

3. Имеются два шарика, подвешенные на нитях равной длины к одной точке, кусочек пластилина и транспортёр. Масса одного из шариков известна. Определить массу второго.

4. Имеется два черных ящика. В одном из них лампочка, а в другом сопротивление. Найти, где что, пользуясь батарейкой, амперметром и вольтметром.

9 класс

1. См. задачу 2 для 8 кл.

2. Определить удельный вес жидкости с помощью трубки, сосудов с жидкостью и линейки.

3. Определить зависимость периода колебаний физического маятника (палки с отверстиями) от длины. Имеются две одинаковые палки с отверстиями и штатив со штывером, на который можно одеть эти палки.

4. Определить теплоту плавления льда, имея калориметр, термометр, лед, мензурки.

10 класс

1. Определить э. д. с. и внутреннее сопротивление источника, имея источник с известной э. д. с., микроамперметр, два одинаковых конденсатора, известное сопротивление.

2. Определить коэффициент преломления стеклянной плоскопараллельной пластинки.

3. Определить влажность снега с помощью калориметра, термометра, мензурки и воды.

4. См. задачу 3 для 9 кл.

Попробуйте проделать самостоятельно эти работы.

Графики В ЗАДАЧАХ НА РАВНОМЕРНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Б. А. Кордемский

На вступительных экзаменах по математике предлагаются самые разнообразные задачи на составление уравнений. Многие из них относятся к категории задач, описывающих равномерные процессы: перемещение с постоянной скоростью, подача воды по трубе с постоянной пропускной способностью, выполнение работы при постоянной производительности труда, оплата проезда при постоянной таксе и другие.

Часто такие задачи проще всего решать геометрически, строя график зависимости между величинами, о которых идет речь в условии задачи.

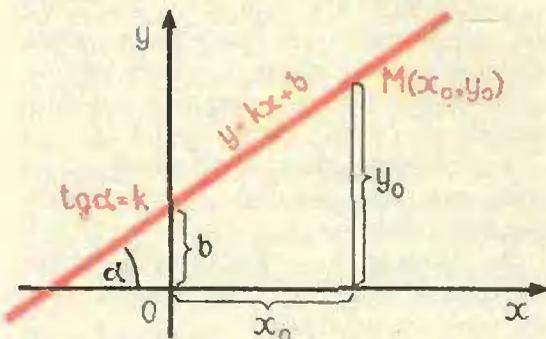


Рис. 1. График равномерного процесса.

На графике равномерный процесс изображается прямой линией (рис. 1); при этом зависимая и независимая переменные y и x связаны между собой соотношением

$$y = kx + b^*).$$

Каждая точка M графика изображает некоторое «состояние» рассматриваемого равномерного процесса: абсцисса x_0 и ордината y_0 точки M рассказывают о значениях величин, характеризующих процесс.

Например, при равномерном движении тела по прямой, принимаемой за координатную ось, график зависимости его координаты от времени представляет собой прямую линию**).

На рисунке 2 абсцисса и ордината точки M_0 показывают, что некто, проехав на такси 3,5 км (OA км) уплатил за проезд 45 копеек (OB коп).

На рисунке 3 прямая AD — график длины огарка равномерно горящей свечи. Отрезок OA (взятый в масштабе оси Oy)

*) Вообще прямая линия может задаваться и соотношением $x = c$ (y произвольно), но такие уравнения в задачах обычно не возникают, поскольку в этом случае y не зависит от x .

**) См. статью Ю. В. Зайчикова «Графики движения», «Квант» № 6, 1970, стр. 39—45.

означает начальную длину свечи; отрезок BM (взятый в том же масштабе) — длину огарка через t единиц времени ($t=OB$ в масштабе оси Ox). В свою очередь отрезок MC рассказывает о длине сгоревшей части свечи к тому же моменту времени t , а отрезок OD дает нам время, за которое свеча сгорит полностью. Очевидно, что отношение $\frac{MC}{AC} = \frac{AO}{OD}$ характеризует скорость, с которой сгорает свеча.

Отметим, что прямую AD на рисунке 3 можно рассматривать и как график длины сгоревшей части свечи, если осью, на которой откладывается длина сгоревшей части свечи, считать прямую AO (A — начало координат, AA' — ось времени).

Этот прием полезен при построении на одном чертеже графиков встречных движений или «встречных» работ (когда одно задание выполняют два человека, бассейн заполняется двумя трубами).

При решении задач на равномерные процессы важно научиться переводить алгебраическое условие задачи на геометрический язык графиков. При этом нет нужды составлять уравнение прямой линии, изображающей равномерный процесс. Для ее построения в соответствующей прямоугольной системе координат достаточно знать какие-либо два «состояния» этого процесса.

На рисунке 4 представлена геометрическая модель следующей задачи (текст условия комментируется замечаниями о соответствующей геометрической интерпретации).

Задача 1. Пароход начали грузить 4 подъемных крана одинаковой мощности. (Пусть отрезок OA произ-

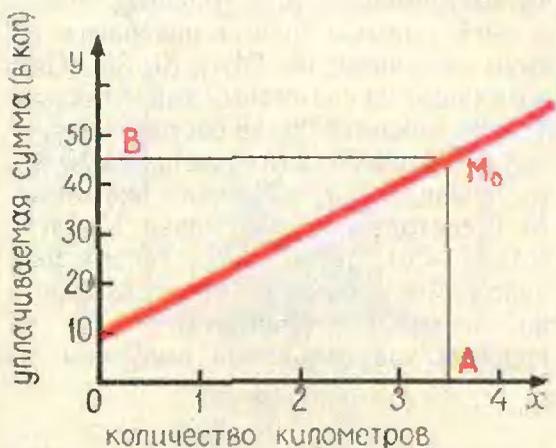


Рис. 2. График оплаты проезда на такси.

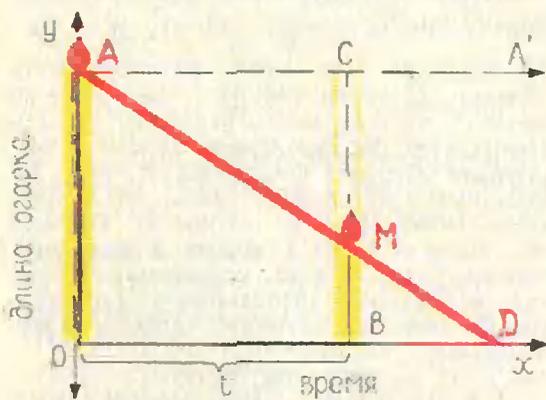


Рис. 3. График длины огарка свечи.

вольной длины — объем всей работы, OA' — предполагаемый график работы этих четырех кранов.) После того как они проработали 2 часа ($OB=AB'=2$ часа), к ним присоединили еще 2 крана меньшей мощности (ломаная $AB'C$ — график «встречной» работы этих двух кранов, отнесенный к системе осей AA' и AO ; масштабы на этих осях те же, что и на осях Ox и Oy), и после этого погрузка была окончена через 3 часа ($BE=3$ часа; DE и DE' — количество работы, выполненной соответственно четырьмя и двумя кранами при их совместном действии).

Если бы все краны начали работать одновременно (новый график работы двух кранов — прямая AF , причем $AF \parallel B'C$), то погрузка была бы окончена в 4,5 часа (отрезок $ON=4,5$ часа).

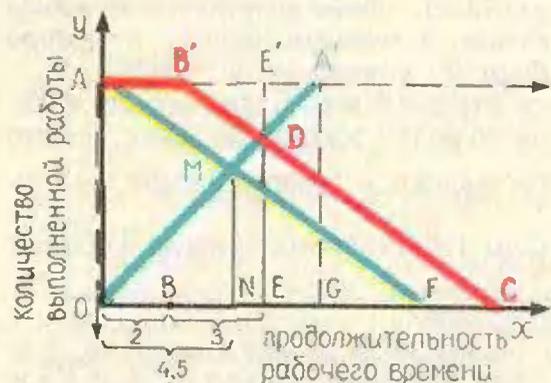


Рис. 4. Графики работы подъемных кранов.

Определить, за сколько часов мог бы окончить погрузку один кран меньшей мощности.

Конечно, эту задачу можно решать обычным способом: ввести неизвестные и составить систему двух уравнений, а затем решить ее*). Но привлечение графиков значительно облегчает рациональный выбор неизвестных и нахождение связей между данными величинами и искомыми. Решение при этом получается короче и нагляднее, поскольку появляется совершенно законная возможность использовать геометрические свойства, например, подобие треугольников.

Решение. Два маломощных крана выполняют всю работу (OA) за OF часов; найдем длину этого отрезка. Для этого рассмотрим две пары подобных треугольников:

$$\triangle ODE \sim \triangle OMN, \text{ откуда } \frac{DE}{MN} = \frac{5}{4,5};$$

$$\triangle CDE \sim \triangle FMN, \text{ откуда } \frac{DE}{MN} = \frac{EC}{NF},$$

или $\frac{5}{4,5} = \frac{OF + 2 - 5}{OF - 4,5}$. Отсюда найдем $OF = 18$. Так как 18 часов — время работы двух кранов малой мощности, то один такой кран завершит погрузку за 36 часов.

Рассуждения, использующие графическую интерпретацию, с успехом можно применять для решения и таких задач, где речь идет о сплавах или смесях двух веществ.

Задача 2. Имеются два сплава золота и серебра; в одном количество этих металлов находится в отношении 2 : 3, в другом — в отношении 3 : 7. Сколько нужно взять от каждого сплава, чтобы получить 8 кг нового сплава, в котором золото и серебро были бы в отношении 5 : 11?

Решение. Будем решать задачу по долям золота в сплавах. Золото составляет $\frac{2}{5}$ первого сплава, $\frac{3}{10}$ второго и $\frac{5}{16}$ искомого; приведя к общему

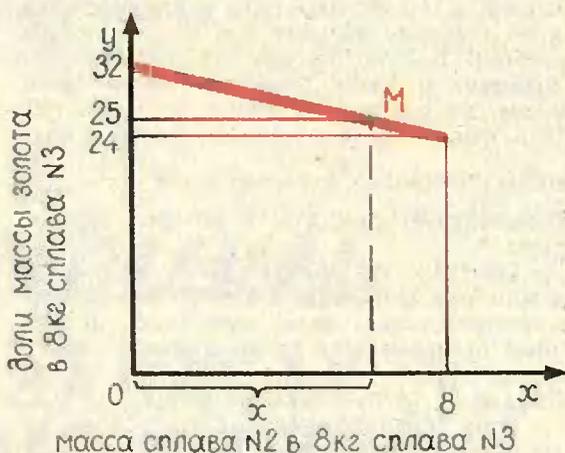


Рис. 5. График массы золота в сплаве № 3.

знаменателю, получим дроби

$$\frac{32}{80}, \frac{24}{80}, \frac{25}{80}.$$

Пусть мы взяли x кг сплава № 2 и $8 - x$ кг сплава № 1. Ясно, что масса золота в сплаве № 2 пропорциональна массе x этого сплава, а масса золота в сплаве № 1 пропорциональна массе $8 - x$ этого сплава, то есть линейно зависит от x . Поэтому масса золота в сплаве № 3, составленном из сплавов № 1 и № 2, также линейно зависит от x . Построим график этой зависимости в системе координат с осями: Ox — «масса сплава № 2 в 8 кг сплава № 3» и Oy — « $\frac{1}{80}$ массы золота в 8 кг сплава № 3»; получится прямая линия (рис. 5).

Эту прямую можно построить по двум ее точкам: $(8, 24)$ и $(0, 32)$. Они возникают из граничных значений для x : если искомый сплав состоит из $x_1 = 8$ кг сплава № 2 (и 0 кг сплава № 1), то, очевидно, $y_1 = 24$; если же сплав № 3 состоит из 8 кг сплава № 1 (то есть $x = 0$), то $y_0 = 32$. Теперь нам надо найти абсциссу x точки M (красной прямой) с ординатой $y = 25$; из подобия треугольников получаем

$$\frac{x}{8} = \frac{32 - 25}{32 - 24},$$

откуда $x = 7$ (кг).

*) См. Н. П. Антонов, М. Я. Вьгодский, В. В. Никитин, А. И. Санкин, «Сборник задач по элементарной математике», М., «Наука», 1960, задача № 462.

Задача 3. *Переплетчик работал над выполнением заказа 9 часов чистого рабочего времени; закончить работу было поручено другому переплетчику, который сдал ее через 4 часа 48 минут. Если бы оба переплетчика работали вместе, они окончили бы переплетные работы за 6 часов 40 минут. За какой промежуток времени смог бы выполнить всю работу каждый переплетчик в отдельности?*

В подобных задачах подразумевается пропорциональная зависимость между временем t и количеством A выполняемой работы: $A=kt$, где коэффициент k характеризует производительность труда.

Удобен прием решения, основанный на предположении, что задача решена, и на рисунке 6 изображены графики соответствующих процессов. На самом деле графики на рисунке 6 мы изобразим произвольно (без точного соответствия числовым данным задачи); исследуя их, отыщем подобные треугольники, из которых и определим интересующие нас величины. При этом, строго говоря, нет нужды соблюдать масштаб по оси Ox даже для построения точек $\frac{24}{5}$, $\frac{20}{3}$ и 9. Для решения задачи важно лишь то, что на «настоящем» рисунке сохранится прямолинейность графиков и подобие треугольников.

Решение. Величину всего заказа изобразим на оси Oy отрезком OA (рис. 6). Построим $AB \parallel Ox$ (соблюдая лишь одно условие: $AB > 9$) и

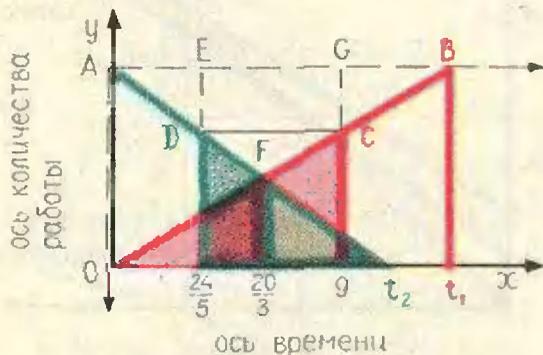


Рис. 6. Графики работы переплетчиков (условные).

проведем прямую OB — график работы первого рабочего; абсцисса t_1 ($t_1 > 9$) точки B — первое искомое время.

Отметим на оси Ox две точки: $\frac{24}{5}$

и 9, соответствующие моментам времени 4 час. 48 мин. и 9 час. На прямой OB отметим точку C с абсциссой 9; ордината точки C — это количество работы, выполненной первым переплетчиком за 9 часов. Тогда отрезок GC соответствует той части всей работы, которая осталась на долю второго рабочего.

Известно, что второй рабочий выполнил ее за $\frac{24}{5}$ часа, поэтому отметим на прямой AB точку E с абсциссой $\frac{24}{5}$ и построим $ED=GC$. Прямая

AD — график работы второго переплетчика. (Этот график отнесен к системе осей AB, AO , на которых выбраны те же масштабы, что на осях Ox и Oy .)

Точка t_2 пересечения прямой AD и оси Ox — второе искомое время. Абсцисса $\frac{20}{3}$ точки F пересечения графиков OB и At_2 — время (6 час. 40 мин.) окончания работ при совместной работе переплетчиков.

Выделяя две пары подобных треугольников (пару с гипотенузами Dt_2, Ft_2 и пару с гипотенузами OC, OF), образуем две пропорции, из которых, учитывая, что ординаты точек C и D равны, получаем два уравнения, каждое из которых содержит только одно неизвестное:

$$9 : \frac{20}{3} = \frac{t_2 - \frac{24}{5}}{\frac{20}{3}}, \quad t_1 : 9 = \frac{12}{12 - \frac{24}{5}}$$

Решая их, находим $t_1 = 15$ час, $t_2 = 12$ час.

Задача 4 (МГУ, мехмат, 1970). Три гонщика A, B, C , стартовав одновременно, движутся с постоянными скоростями в одном направлении по кольцевому шоссе. В момент старта гонщик B находится перед гонщиком A

на расстоянии $\frac{1}{3}$ длины шоссе, а гонщик С — перед гонщиком В на таком же расстоянии. Гонщик А впервые догнал В в тот момент, когда В закончил свой первый круг, а еще через 10 минут А впервые догнал гонщика С. Гонщик В тратит на круг на 2,5 минуты меньше, чем С. Сколько времени тратит на круг гонщик А?

Немудрено запутаться в этой сети переплетающихся движений, если следовать традиционной, «привычной» схеме составления системы уравнений*). Но вся эта сеть становится прозрачной и приводит лишь к одному уравнению, если привлечь графики.

Решение. Пусть Ox — ось времени, Oy — ось расстояний (рис. 7), $OM_1=1$ — длина кольцевого шоссе, M_1M_2 — второй «виток» этого же шоссе. Точки В, С и D таковы, что

$$OB = BC = CM_1 = M_1D = 1/3.$$

Прямая OA — предполагаемый график движения гонщика А. Построим прямую $DD_1 \parallel Ox$ и отметим точку E ее пересечения с OA ; по условию, BE — график движения гонщика В. Пусть x — абсцисса точки E; отметим на оси Ox точку F такую, что $OF = x + 10$, и проведем прямую $FG \perp Ox$ до пересечения с OA в точке G. Тогда, по условию, CG — график движения гонщика С.

Из рисунка находим

$$v_A = \frac{OD}{x} = \frac{4}{3x}, \quad v_B = \frac{BD}{x} = \frac{1}{x},$$

кроме того, по условию,

$$v_C = \frac{1}{x+2,5}.$$

Построим $CC_1 \parallel Ox$; видно, что разность путей $FG - C_1G$ гонщиков А и С за время $x+10$ (мин.) равна $FC_1 = OC = \frac{2}{3}$. Получаем уравнение

$$\frac{4}{3x}(x+10) - \frac{1}{x+2,5}(x+10) = \frac{2}{3}.$$

Решая его, находим $x=20$ (мин.). За это время гонщик А делает $\frac{4}{3}$ кру-

га, следовательно, на один круг он тратит 15 (мин.).

В заключение рассмотрим аналогичную задачу, в условии которой круговые движения еще более запутаны:

Задача 5 (МГУ, мехмат, 1970). Три гонщика (А, потом В и затем С) стартуют с интервалом в 1 минуту из одной точки кольцевого шоссе и движутся в одном направлении с постоянными скоростями. Каждый гонщик затрачивает на круг более 2 минут. Сделав три круга, гонщик А в первый раз догоняет В у точки старта, а еще через 3 минуты он вторично обгоняет С. Гонщик В впервые догнал С также у точки старта, закончив 4 круга. Сколько минут тратит на круг гонщик А?

Решение. На оси времени Ox отмечаем три точки 0, 1, 2 (моменты стартов). На оси расстояний Oy откладываем последовательно четыре равных отрезка, символизирующих длину кольцевого шоссе (рис. 8). Проведем параллельно оси Ox вспомогательные прямые: I, II, III, IV.

При построении графика OA движения гонщика А выберем произвольный наклон к оси Ox , но такой, чтобы абсцисса x (искомое время) точки пересечения прямых OA и I удовлетворяла условию $x > 2$. Из точки А пересечения прямых OA и III опускаем перпендикуляр на ось Ox и отмечаем точку В его пересечения с

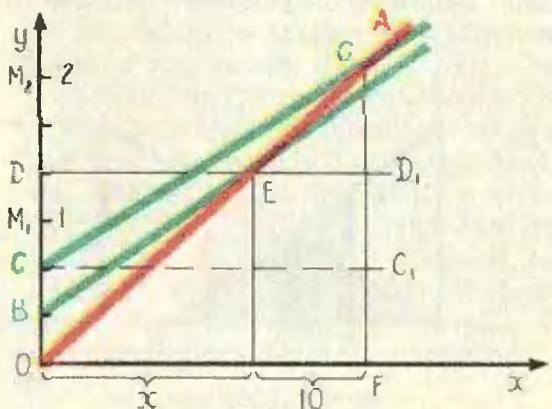


Рис. 7. Графики движения гонщиков, стартовых одновременно.

*) См. статью Н. Н. Колесникова «Письменный экзамен по математике на мехмате МГУ в 1970 году», «Квант» № 3, 1971, стр. 45—50.

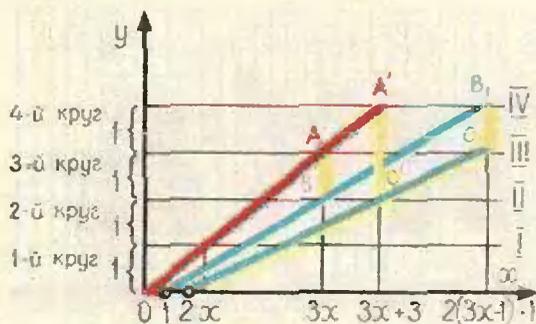


Рис. 8. Графики движения гонщиков, стартующих из одной точки.

прямой II и точку $3x$ на оси Ox . Прямая IB — график движения гонщика B (всякий обгон при движении по окружности и при общей стартовой точке означает, что обгоняющий прошел на один круг больше обгоняемого).

Аналогичным образом по точке B_1 пересечения прямых IB и IV находим точку C на прямой III, определяем ее абсциссу $2(3x-1)+1$ и строим график — прямую $2C$ — движения гонщика C .

Длину кольцевого шоссе можно принять за единицу и найти скорости гонщиков (тангенсы углов наклона графиков, определяемые из соответствующих прямоугольных треугольников):

$$v_A = \frac{1}{x}, \quad v_B = \frac{2}{3x-1}, \quad v_C = \frac{1}{2x-1}.$$

Согласно условию задачи в момент $3x+3$ произошел второй обгон гонщиком A гонщика C , следовательно разность пройденных ими путей (отрезок $A'C'$) равна 2. Составляем уравнение:

$$v_A(3x+3) - v_C(3x+1) = 2,$$

или

$$\frac{3x+3}{x} - \frac{3x+1}{2x-1} = 2.$$

Из двух его корней условию удовлетворяет только $x=3$ (мин.).

Упражнения

1. Арбузы, привезенные на базу, предназначены для двух магазинов. Первый магазин сразу приступил к перевозке арбузов и перевозил их ежедневно одинаковыми

весовыми порциями. Второй магазин приступил к перевозке арбузов на a дней позже и также перевозил их одинаковыми, но иными, чем первый магазин, весовыми порциями. При этих условиях через b дней, прошедших от начала перевозочных операций на базе осталась половина первоначального количества арбузов. За сколько дней были вывезены все арбузы с базы, если перевозку магазины закончили одновременно и вес арбузов, полученных первым магазином, равен весу арбузов, полученных вторым магазином?

2. (МГУ, биофак, 1968). Бак наполняется водой с помощью нескольких насосов. Сначала включили три насоса одинаковой производительности, а через 2,5 часа после начала их работы подключили еще два насоса другой, но тоже одинаковой производительности. В результате через 1 час после подключения двух насосов воды в баке до полного объема не хватало 15 м^3 , а еще через час бак был полон. Один из двух подключенных позже насосов мог бы наполнить бак за 40 часов. Найти объем бака.

3. (МГУ, химфак, 1970). Из пункта A в пункт B выехал автомобиль и одновременно из пункта B в пункт A выехал велосипедист. После встречи они продолжали свой путь. Автомобиль, доехав до пункта B , тотчас повернул назад и догнал велосипедиста через два часа после момента первой встречи. Сколько времени после первой встречи ехал велосипедист до пункта A , если известно, что к моменту второй встречи он проехал $\frac{2}{3}$ всего пути от B до A ?

4. Два спортсмена выбегают одновременно (первый — из A в B , второй — из B в A) и встречаются на расстоянии a м от A . Пробежав дорожку AB до конца, каждый из них поворачивает обратно, и они вновь встречаются на расстоянии b м от B . Найти длину дорожки *).

5. (МГУ, мехмат, 1970). Два бегуна стартуют из одной точки кольцевой дорожки стадиона, а третий бегун стартует одновременно с ними в том же направлении из диаметрально противоположной точки. Пробежав 3 круга, третий бегун впервые после старта догнал второго. Через 2,5 минуты после этого первый бегун впервые догнал третьего. Сколько кругов в минуту пробегает второй бегун, если первый обгоняет его один раз через каждые 6 минут?

* Это — задача № 190 из книги Н. С. Залогина «Конкурсные задачи по математике». Киев, 1964. Использование графиков подскажет полное условие существования решения этой задачи: $3a > 2b$, ускользнувшее от внимания автора книги (он указывает лишь условие $3a > b$, не являющееся достаточным).

СТАТИКА

Л. Г. АСПАМАЗОВ

Какие условия накладываются на силы, приложенные к телу, если тело находится в покое? Ответ на этот вопрос дает статика.

Прежде всего ясно, что сумма всех сил (разумеется, векторная) должна быть равна нулю. В противном случае по II закону Ньютона тело обязательно двигалось бы с ускорением. Но одного этого условия недостаточно. Если, например, приложить к телу две силы, равные по величине, но противоположно направленные (и такие, чтобы линии их действия не совпадали), то, очевидно, векторная сумма сил равна нулю, но тело не будет находиться в покое — оно будет вращаться (рис. 1).

Вторым условием, которому должны удовлетворять силы, является равенство нулю суммы их моментов относительно какой-либо точки. Напомним, что моментом силы F относительно точки O (рис. 2) называется произведение $F \cdot h$, где h — расстояние от точки O до линии дей-

ствия силы (плечо силы). Момент положителен, если сила стремится вращать тело против часовой стрелки, и отрицателен в противоположном случае.

Точку O можно выбирать произвольно. В самом деле, если сумма всех сил, приложенных к телу, равна нулю и сумма моментов всех сил относительно какой-либо точки O равна нулю, то сумма моментов относительно любой другой точки O_1 также равна нулю. Рассмотрим момент силы F , действующей на тело (рис. 2), относительно точки O_1 :

$$Fh_1 = F(h - a \cos \alpha) = Fh - aF \cos \alpha.$$

Величина $F \cos \alpha$ — это проекция силы F на направление OO_1 . Так как векторная сумма всех сил, по условию равна нулю, то и сумма их проекций на любое направление тоже равна нулю. Поэтому $\sum Fh_1 = \sum Fh - a \sum F \cos \alpha = 0$.

Итак, для того чтобы тело находилось в покое, должны быть равны нулю векторная сумма всех сил и ал-

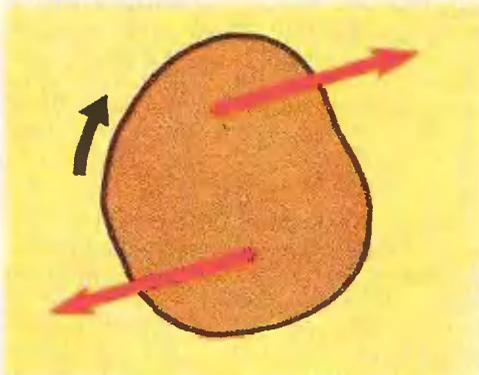


Рис. 1.

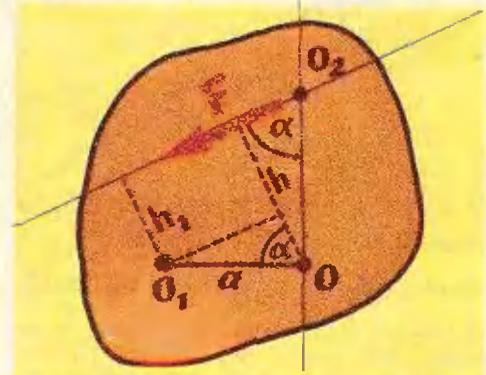


Рис. 2.

гебраическая сумма (то есть сумма с учетом знаков) моментов всех сил относительно произвольной точки. Часто бывает удобно пользоваться следствием первого условия — равенством нулю алгебраической суммы проекций всех сил на произвольно выбранное направление.

Казалось бы (поскольку направление, на которое мы проектируем силы, и точка, относительно которой мы считаем моменты, могут быть произвольными), выбирая различные направления и различные точки, можно получать сколько угодно уравнений для нахождения сил, приложенных к телу. Однако это не так. Часть полученных уравнений окажется следствием других. Для случая, когда все силы лежат в одной плоскости, можно записать всего три уравнения.

Какими именно условиями равновесия удобнее пользоваться, зависит от конкретной задачи.

Задача 1. Труба массы m лежит на земле. Какое минимальное вертикальное усилие надо приложить для того, чтобы приподнять ее за один из концов (рис. 3)?

Задача решается в одну строчку, если воспользоваться уравнением моментов относительно точки O

$$mg \frac{l}{2} - Fl = 0 \quad (l - \text{длина трубы}),$$

откуда $F = \frac{mg}{2}$. Правильный выбор точки позволил сразу же исключить из рассмотрения неизвестную силу N , которая нас в этом случае не интересовала.

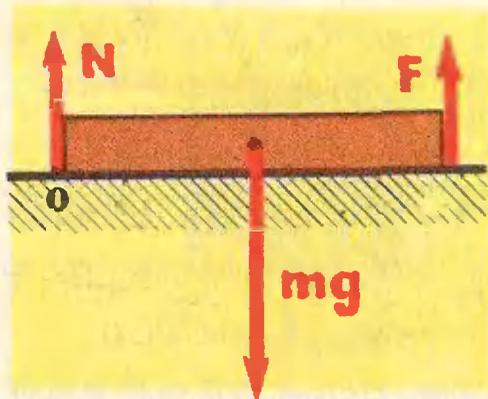


Рис. 3.

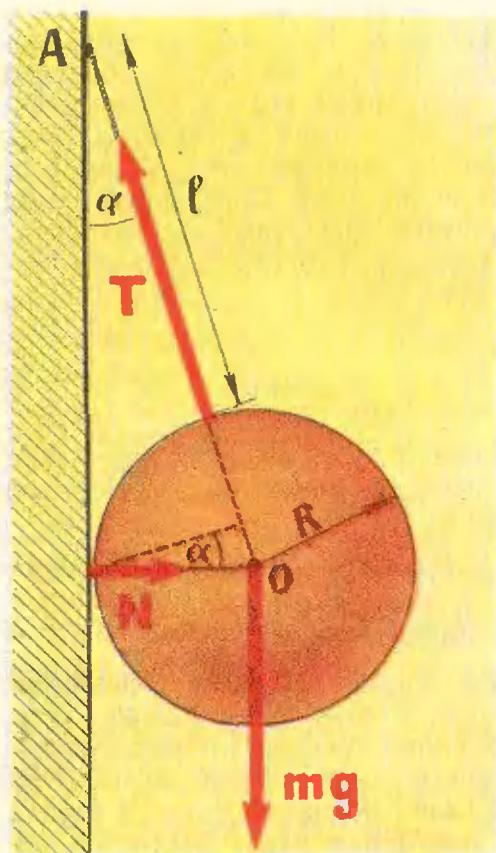


Рис. 4.

Задача 2. К вертикальной гладкой стене в точке A на веревке длины l подвешен шар массы m (рис. 4). Чему равны сила натяжения веревки T и сила давления шара на стенку N , если радиус шара равен R ?

Воспользуемся уравнением моментов относительно центра шара O . Моменты сил mg и N относительно точки O равны нулю. Следовательно, линия действия силы натяжения T также проходит через центр шара.

В качестве двух других условий можно взять, например, равенство нулю проекций всех сил на горизонтальное и вертикальное направления:

$$T \cos \alpha = mg, \quad T \sin \alpha = N.$$

Из чертежа находим, что $\sin \alpha = \frac{R}{l+R}$,

$$\text{а } \cos \alpha = \frac{\sqrt{(l+R)^2 - R^2}}{l+R}.$$

В некоторых случаях оказывается удобным пользоваться только уравнениями моментов.

Задача 3. Шар массы m опирается на две гладкие плоскости, образующие двугранный угол. Нижняя плоскость наклонена к горизонту под углом α , а верхняя — под углом β к нижней (рис. 5). Определить силы, с которыми шар давит на плоскости.

Запишем уравнение моментов относительно точки A :

$$mgR \sin \alpha - N_2 R \sin \beta = 0.$$

Отсюда $N_2 = \frac{mg \sin \alpha}{\sin \beta}$.

Сила N_1 так же легко находится из уравнения моментов относительно точки B :

$$N_1 R \sin \beta - mgR \sin (\beta + \alpha) = 0,$$

или $N_1 = \frac{mg \sin (\beta + \alpha)}{\sin \beta}$.

Во многих случаях равновесие становится возможным только благодаря силам трения, которые уравновешивают приложенные силы. При этом важно понимать, что сила трения покоя не всегда равна kN (k — коэффициент трения, N — сила нормального давления). Это выражение дает только максимально возможное значение силы трения. Так, например, сила трения, действующая на тело, покоящееся на наклонной плоскости с углом наклона α , просто равна составляющей силы тяжести, параллельной наклонной плоскости: $F_{\text{тр}} = mg \sin \alpha$. Она становится равной $kN = kmg \cos \alpha$ только в момент начала движения при $\alpha = \arctg k$. На тело, ле-

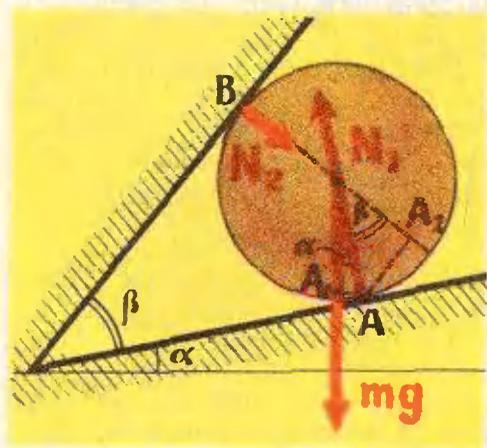


Рис. 5.

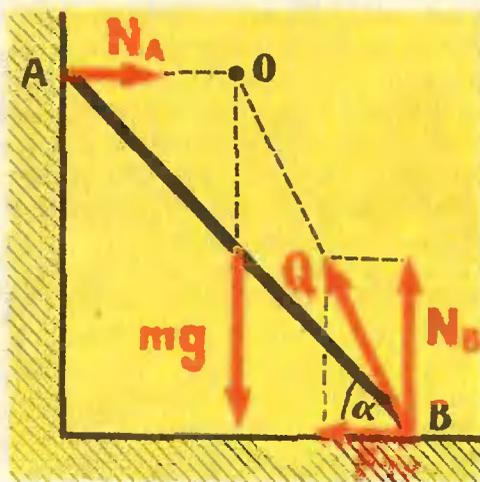


Рис. 6.

жащее на горизонтальной плоскости ($\alpha=0$), сила трения вообще не действует.

Разберем типичный пример задачи с трением.

Задача 4. К совершенно гладкой вертикальной стенке приставлена лестница массы m , наклоненная под углом α к горизонту. Как направлены и чему равны силы, действующие на лестницу со стороны стенки и пола?

Для решения задачи спроектируем все силы, действующие на лестницу, на горизонтальное и вертикальное направления и воспользуемся уравнением моментов относительно точки B (рис. 6):

$$mg \frac{l}{2} \cos \alpha - N_A l \sin \alpha = 0,$$

где l — длина лестницы. Из этого уравнения находим, что давление на стенку

$$N_A = \frac{mg}{2} \operatorname{ctg} \alpha.$$

Сила трения $F_{\text{тр}} = N_A = \frac{mg}{2} \operatorname{ctg} \alpha$, а давление на пол $N_B = mg$. Сила реакции пола равна векторной сумме сил N_B и $F_{\text{тр}}$:

$$Q = \sqrt{N_B^2 + F_{\text{тр}}^2} = \frac{mg}{2} \sqrt{4 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$$

и наклонена к горизонту под углом

$$\beta - \arctg \frac{N_B}{F_{\text{тр}}} = \arctg (2 \operatorname{tg} \alpha).$$

Линию действия этой силы можно получить построением: она должна

проходить через точку O пересечения линий действия сил N_A и mg , так как сумма моментов всех сил относительно этой точки также равна нулю.

Таким образом, мы получили, что для достижения равновесия сила трения должна равняться $\frac{mg}{2} \operatorname{ctg} \alpha$. Это возможно, если коэффициент трения $k \geq \frac{F_{\text{тр}}}{N_B} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{2}$. При $k = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{2}$ сила трения $\frac{mg}{2} \operatorname{ctg} \alpha$ равна максимальному возможному значению kN_B ; при больших k для достижения равновесия достаточно некоторой части максимальной возможной силы трения.

Заметим, что нужное для равновесия значение k зависит от угла: при α , близком к нулю (лестница почти горизонтальна), нужен большой коэффициент трения, а при приближении α к $\frac{\pi}{2}$ он стремится к нулю.

Задача 5. Какой минимальной горизонтальной силой можно опрокинуть через ребро куб, лежащий на горизонтальной плоскости?

Обычно при решении такой задачи исходят из того, что при опрокидывании момент приложенной силы F относительно оси вращения O (рис. 7) уравновешивает момент силы тяжести. Это, конечно, правильно. Но почему мы при этом не учитываем момента силы давления со стороны пола N ? На этот вопрос часто отвечают неверно. Дело в том, что сила N не всегда

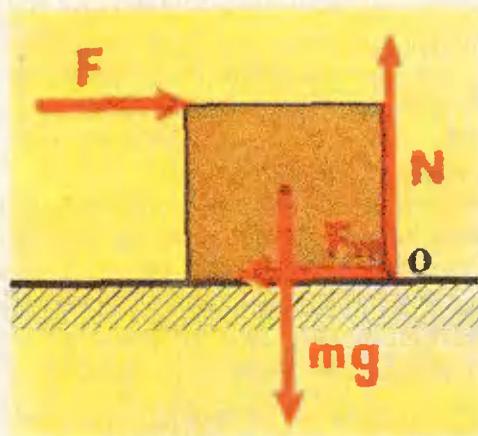


Рис. 7.

проходит через центр кубика. Когда мы прикладываем к кубику силу F , линия действия силы N (равнодействующей сил давления) смещается в сторону точки O , а в момент опрокидывания сила N проходит через эту точку, и ее момент равен нулю.

Выбором точки O для уравнения моментов мы исключаем из рассмотрения силу реакции пола и упрощаем решение задачи. Ясно, что сила F будет минимальной, когда она прикладывается к верхней грани куба и равна $\frac{mg}{2}$.

При любом ли коэффициенте трения между кубиком и полом возможно такое опрокидывание? Очевидно, нет. Для опрокидывания необходимо, чтобы при $F = \frac{mg}{2}$ кубик еще не начал скользить по плоскости. Следовательно, $\frac{mg}{2} \leq F_{\text{трmax}} = kmg$, или $k \geq \frac{1}{2}$.

Интересно, что кубик можно опрокинуть и при меньшем коэффициенте трения силой, меньшей чем $\frac{mg}{2}$. Подумайте, как при этом надо направить силу.

Упражнения

1. Каков должен быть коэффициент трения для того, чтобы клин, заколоченный в бревно, не выскальзывал из него? Угол при вершине клина равен 30° .

2. На наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α стоит цилиндр радиуса r . Какова наибольшая высота цилиндра, при которой он еще не опрокидывается? Цилиндр сделан из однородного материала.

3. Колесо радиуса r и массы m стоит перед ступенькой высотой h . Какую наименьшую горизонтальную силу F надо приложить к оси колеса, чтобы оно могло подняться на ступеньку?

4. На земле лежат вплотную два одинаковых бревна цилиндрической формы. Сверху на них кладут такое же бревно. При каком минимальном коэффициенте трения между бревнами они не раскатятся?

Заочная олимпиада Азиатской части СССР

Мы публикуем тексты задач заочной олимпиады по математике, физике и химии для учащихся школ и других средних учебных заведений Сибири, Казахстана, Дальнего Востока и Средней Азии.

Те, кто успешно справятся с задачами заочной олимпиады, будут приглашены на областные, краевые, республиканские олимпиады на равных правах с победителями районных олимпиад. Приглашения будут рассылаться органами народного образования по домашним адресам. Лучшие из победителей областных и республиканских олимпиад примут участие в заключительном туре Всесоюзной олимпиады, а также будут приглашены в летнюю школу Сибирского отделения Академии наук СССР.

После каждой задачи в скобках указаны классы, для учеников которых она предлагается, однако можно попробовать свои силы и на задачах для более старших классов. Чтобы стать победителем олимпиады, не обязательно решить много задач. Иногда достаточно остроумного решения одной. Но решить задачу — это не значит только дать ответ; нужно обязательно обосновать его, дать точное доказательство. Задачи не требуют никаких знаний, выходящих за пределы программы средней школы. Решения задач по каждому предмету

должны высылаться в отдельном конверте стандартного формата. На конверте укажите название предмета. В письмо нужно вложить согнутый вдвое конверт с обратным домашним адресом и маркой; в этом конверте вам пришлют извещение о результатах работы. Решения надо писать очень разборчиво. Условия задач не переписываются, но указываются их номера.

В начале письма не забудьте указать (разборчиво):

1. Свою фамилию, имя и отчество.
2. Почтовый домашний адрес (подробный).
3. Класс, школу, училище, техникум и т. д., адрес.
4. Фамилию, имя и отчество своего учителя по данному предмету.

Последний день, когда вы еще можете послать решение, — 1 февраля 1972 года по почтовому штемпелю. Письма, отправленные позже, рассматриваться не будут.

Участники олимпиады направляют решения по адресу: Новосибирск, 90, Олимпиада.

Желаем всем участникам олимпиады самых больших успехов.

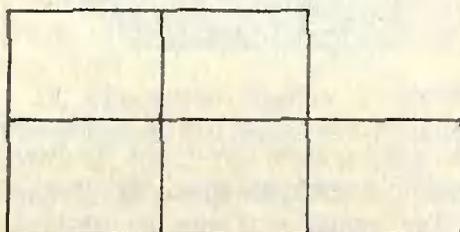
*Комитет по проведению олимпиад
Сибирского отделения
Академии наук СССР*

МАТЕМАТИКА

1. На плоскости даны три точки P_1, P_2, P_3 , не лежащие на одной прямой. Четвертая точка A , отличная от них, симметрично отражается относительно P_1 , полученная точка симметрично отражается относительно P_2 , новая точка отражается относительно P_3 , затем относительно P_1, P_2, P_3, P_1 и так далее. Обязательно ли на некотором шаге полученная точка совпадает с первоначальной точкой A ? (10)

2. В окружность вписывается четырехугольник, после чего в каждый из четырех образовавшихся сегментов вписывается окружность, касающаяся соответствующей стороны четырехугольника в ее середине (рис. 1). Для какого четырехугольника сумма длин полученных четырех окружностей будет наименьшей? (10)

3. Легко доказать, что квадраты $10 \times 10, 20 \times 20, 30 \times 30$ и т. д. покрываются фигурами вида



из пяти клеток, а квадрат 5×5 — нет (сторона клетки принята за единицу).

Можно ли покрыть такими фигурами квадраты $15 \times 15, 25 \times 25, 35 \times 35$ и т. д.? (9—10)

4. На бесконечном листе клетчатой бумаги выбрано пять узлов (узлом называется точка, где пересекаются линии сетки). Докажите, что из этих пяти узлов наверняка можно выбрать два таких, что соединяющий их отрезок проходит еще через один узел сетки. (9—10)

5. Проведите хорду, которая делится двумя данными радиусами дан-

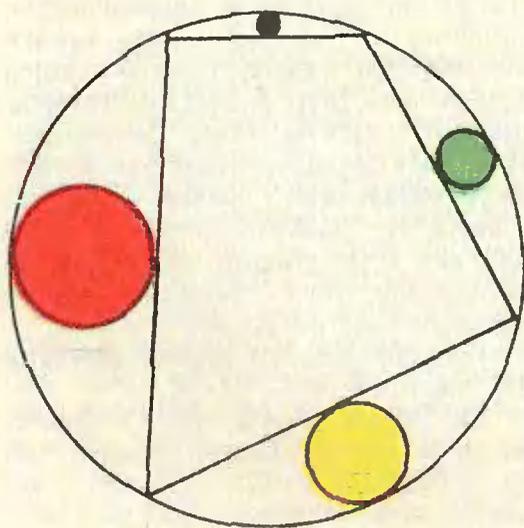


Рис. 1.

ной окружности в данном отношении $k_1:k_2:k_3$. (9—10)

6. Впишите в данный треугольник ABC параллелограмм $BMNK$ так, чтобы точки K, M, N лежали на сторонах AB, BC и AC соответственно и чтобы диагональ KM имела заданную длину. (9)

7. Докажите, что число $11\dots 11$, записываемое 2^n единицами, имеет не менее 2^n различных делителей (включая 1 и само это число). (8—9)

8. Докажите, что в прямоугольном треугольнике отношение квадрата радиуса вписанной окружности к сумме квадратов длин медиан, проведенных из острых углов, не превосходит $1/5$. (8—9)

9. В десяти рюкзаках находится 50 банок консервов, причем в разных рюкзаках — разное количество банок. Разрешается «уравнивать» количество банок в двух рюкзаках, то есть из рюкзака с большим количеством банок перекладывать в рюкзак с меньшим количеством несколько банок так, чтобы разница в количестве банок в них стала минимальной. Докажите, что через некоторое число таких «уравниваний» можно добиться того, чтобы в каждом рюкзаке оказалось ровно по 5 банок. (8)

10. В одной из двух изолированных комнат находится электрическая лампочка, а в другой — пять выключателей, один из которых подсоединен к лампочке. Двум экспериментаторам требуется узнать, какой именно выключатель соединен с лампочкой, действуя следующим образом. Они расходятся по разным комнатам, один щелкает (как угодно) выключателями, другой следит за лампочкой, а потом они встречаются.

Как им решить задачу (часов у них нет)? (8)

11. Докажите, что m^2+1 не делится на 19 ни при каком целом m . (8)

ФИЗИКА

1. Соломинка длины l , массы M падает, сохраняя вертикальное положение. По ней ползет муравей массы m с постоянной скоростью v . Какую работу совершит муравей, перейдя от одного конца соломинки до другого?

Сопротивлением воздуха пренебречь. (8)

2. Устойчиво ли равновесие линейки, симметрично лежащей на закрепленном цилиндре.

Проскальзывания нет. Все размеры заданы. (8—9)

3. В кастрюле с тяжелой крышкой вскипятили воду. Кастрюлю сняли с плиты, после чего в спокойную воду насыпали чайную заварку. Вода бурно закипела. Объясните это явление. (8—9)

4. Плоскую фигуру разрезали на две части по прямой, проходящей через центр тяжести. Равны ли массы этих частей? (8)

5. На гвозде висел, а потом начал соскальзывать однородный канат длины L . Вес куска каната единичной длины равен d . Найти силу давления каната на гвоздь, когда расстояние между его концами равно l . Трением пренебречь. (8—10)

6. Почему спицы велосипедного колеса располагают не по радиусу, а слегка наискось? (рис. 2) (9)

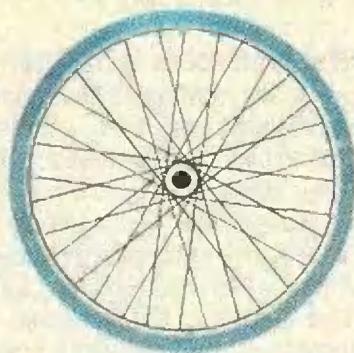


Рис. 2.

7. Указать направление сил трения, действующих на передние и задние колеса автомобиля, если только задние — ведущие. (8)

8. На дне герметически закупоренного сосуда, доверху наполненного водой, находятся два одинаковых

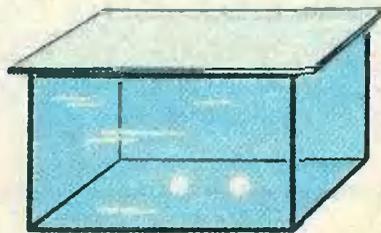


Рис. 3.

пузырька воздуха (рис. 3). Давление на дне равно p . Один из пузырьков всплывает. Каким станет давление на дне? (9—10)

9. Почему конькобежец при торможении сводит носки коньков, а не пятки? (9—10)

10. На тележке массы M закреплена коробка, масса которой пренеб-

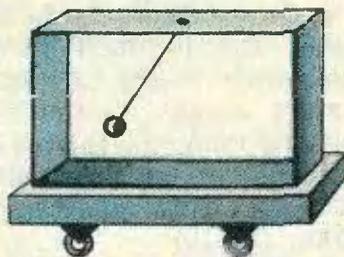


Рис. 4.

8 класс

режимо мала. К верхней грани коробки прикреплен маятник (рис. 4). Длина маятника l , масса груза m . Пренебрегая трением тележки о горизонтальную плоскость, найти период малых колебаний маятника. (9—10)

11. Две концентрические сферы с радиусами R_1 и R_2 заземлены (рис. 5).

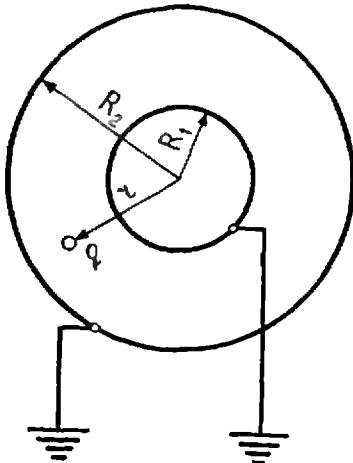


Рис. 5.

Между сферами на расстоянии r от их общего центра находится заряд q . Найти полные заряды на каждой из сфер. (10)

12. На аноде триода с плоскими электродами поддерживается напряжение u (рис. 6). Катод лампы заземлен, а сетка изолирована. Площадь

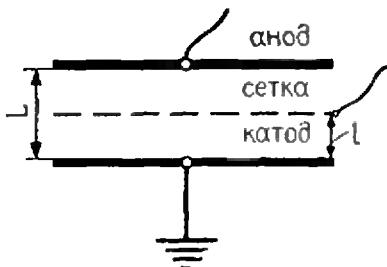


Рис. 6.

пластин S , расстояние между анодом и катодом L , между катодом и сеткой — l . При каком заряде на сетке ток через лампу прекратится? (10)

1. При синтезе из элементов аммиака выделяется 11 ккал/моль, а при синтезе из элементов гидразина (N_2H_4) поглощается 10 ккал/моль. Определите энергию связей N—H и N—N, если энергия связи в молекулярном водороде 104 ккал/моль, а в молекулярном азоте 170 ккал/моль.

2. Известно, что в некоторых природных силикатных минералах анионы имеют структуры, в которых тетраэдры SiO_4^{2-} образуют бесконечные двумерные цепи таким образом, что некоторые из атомов кислорода принадлежат одновременно двум тетраэдрам. (Такие атомы кислорода называют мостиковыми.) Какова будет формула аниона минерала, в котором три атома кислорода в любом тетраэдре SiO_4^{2-} являются мостиковыми? Нарисуйте фрагмент структуры этого аниона. Какие минералы с таким анионом вы знаете? Каковы их механические свойства и как они связаны со структурой минерала?

3. Известно, что ацетат натрия CH_3COONa гораздо легче образует пересыщенные растворы, чем хлористый натрий. Предложите объяснение этому явлению.

4. Образец магниевой стружки сожгли на воздухе и золу растворили в 60 мл 1 М соляной кислоты. На нейтрализацию этого раствора пошло 12 мл 1 М раствора едкого натра. После добавления избытка щелочного раствора прокипятили, а выделившийся при этом газ пропустили в колбу с 10 мл 1 М соляной кислоты. На нейтрализацию раствора в колбе пошло 6 мл 1 М раствора едкого натра. Определите вес образца магния и процентный состав золы.

9 класс

1. Растворимость йода в воде составляет 0,00134 моль/л, а в 0,0070 М растворе йодида калия — 0,0048 моль/л. Рассчитайте растворимость йода в 0,1 М раствора йодида

калия. Покажите, что определенная вами величина растворимости не зависит от предположения о том, в какой из анионов — I_3^- или I_5^- — переходит йод при растворении в растворе йодистого калия.

2. Известно, что в солянокислых растворах металлический барий является более сильным восстановителем, чем кальций, а в щелочных растворах — наоборот, кальций является более сильным восстановителем, чем барий. Объясните это явление.

3. В сосуде содержатся молекулы водорода (H_2), дейтерия (D_2) и дейтероводорода (HD) общим количеством 10^{10} молекул. Анализ этой смеси показал, что количество атомов дейтерия в ней составляет 0,1 ат%. Определите, каково содержание молекул каждого сорта в этой смеси, если распределение атомов дейтерия по различным сортам молекул носит случайный характер.

4. Соединение *A* — слегка окрашенный газ, который легко растворяется в воде без выделения каких-либо газообразных продуктов, образуя кислый раствор *B*. Если 32,5 мг газа *A* растворить в воде, то на нейтрализацию полученного раствора потребуется 10 мл 0,1 М раствора едкого натра. Раствор *B* не реагирует с растворами азотнокислого серебра и йодистого калия, но дает белый осадок с раствором азотнокислого кальция. При взаимодействии раствора *B* с раствором закисного серноокислого железа, подкисленного концентрированной серной кислотой, раствор приобретает коричневую окраску. Когда раствор *B* взаимодействует с алюминием и избытком едкого натра, выделяется газ *B*, который изменяет цвет влажной индикаторной бумаги. Раствор *B* при длительном пребывании в стеклянной колбе разъедает ее. Определите соединение *A* и напишите уравнения всех описанных реакций.

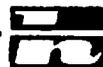
10 класс

1. Определите, к какой величине стремится отношение констант первой и второй ступеней диссоциации k_1/k_2 для органических двухосновных кислот типа $HOOC-(CH_2)_n-COOH$ с увеличением длины углеводородной цепи. Почему у кислот с короткими цепями отношение k_1/k_2 значительно отличается от полученной вами величины?

2. Вещество, именуемое 3-метил-5-этилпиразолом, в действительности является смесью изомерных соединений, находящихся в подвижном равновесии. Какие это соединения? Пояснение: пиразол — пятичленное гетероциклическое соединение состава $C_3H_4N_2$. Два атома азота в цикле непосредственно связаны друг с другом. Нумерация атомов, образующих цикл, начинается с того из атомов азота, который образует связи с большим числом других атомов, и продолжается в сторону второго атома азота.

3. Охарактеризуйте сравнительную силу пентаметилбензойной, пентафторбензойной и бензойной кислот.

4. В результате взаимодействия соли карбоновой кислоты с бромом была получена неорганическая соль и смесь двух газообразных веществ. Полученная соль очень мало растворима в воде, но значительно лучше растворяется в водных растворах аммиака и галогенидов щелочных металлов. Кроме того, эта соль разлагается при действии света. При пропускании смеси газообразных продуктов через раствор гидроксида кальция один из них полностью поглощается и при этом осаждается белое кристаллическое вещество. Прошедшее через раствор вещество при взаимодействии с натрием превращается в газообразный углеводород, 13,4 г которого при $50^\circ C$ и 600 мм ртутного столба занимают объем 15 л. Напишите уравнения реакций, о которых идет речь.



От галактик до элементарных частиц

Издательство «Атомиздат» в 1970 году выпустило любопытную книгу Ф. С. Завельского «Взвешивание миров, атомов и элементарных частиц»^{*}). Сам автор следующим образом определил основную идею своей книги:

«Описывая устройство какой-нибудь конструкции, обычно чертят несколько ее проекций (вид сверху, вид сбоку, ...). Если конструкция сложная, то, кроме этого, вычерчивают один или несколько ее разрезов и притом так, чтобы сечения прошли через наиболее сложные узлы.

В этой книге дан «разрез» Мира по массе. Масса является одной из основных характеристик вещества, поэтому естественно, что рассказ о ней в той или иной мере затрагивает целый ряд важных научных и технических проблем.

Действительно, все тела, начиная от мельчайших элементарных частиц и кончая Вселенной, обладают массой — этой универсальной характеристикой материи. Автор начинает свой рассказ с описания конструкции самых древних весов и единиц измерения и заканчивает его проблемами, над которыми думают физики наших дней.

Сравнительно недавно физики научились измерять величину массы различных элементарных частиц, а астрономы — определять массы звезд и галактик. О том, какими методами они при этом

пользуются, и рассказано в книге Ф. С. Завельского. Но это лишь одна сторона рассматриваемой автором проблемы измерения массы.

Вторая сторона проблемы, также рассмотренная автором, состоит в том, что само понятие массы тела по мере развития физики видоизменялось и углублялось. Ф. С. Завельский в своей книге показывает, как зародились и сформировались научные представления о массе, как они изменялись со временем.

В механике Ньютона масса тела — постоянная величина, не зависящая от характера движения этого тела. В специальной теории относительности масса тела изменяется с изменением скорости его движения. Кроме того, даже у покоящегося тела оказался огромный запас энергии, однозначно определяемый массой тела по знаменитой формуле $E = mc^2$. Выяснилось также, что образование системы взаимодействующих тел неизбежно связано с потерей некоторой доли массы тел, входящих в систему. Но и сегодня, после всех этих открытий, физики не считают, что им уже все известно о том, что же такое масса.

Оригинальный подход автора к проблеме массы заставил его привлечь в свою книгу весьма обширный материал из области физики и астрономии. Это богатство материала сделало книгу очень интересной, но с неизбежностью привело к тому, что в некоторых ее местах изложение рассматриваемых вопросов оказалось слишком



беглым, поверхностным. Нередко автор скороговоркой сообщает об идее какого-либо измерения, не позволяя читателю проникнуть поглубже в суть этого метода. Это сказывается даже в тех местах, где речь идет об определенных основных понятиях, например, в седьмой главе первой части при определении веса и массы. Но что поделать, — ведь в книге существует «закон сохранения объема», вследствие которого широта изложения в какой-то мере неизбежно связана с уменьшением его глубины.

Книга Ф. С. Завельского является, безусловно, интересной попыткой обозреть обширный круг проблем, связанных с измерением массы. Прочитав эту книгу, узнаешь много интересных фактов, получишь более отчетливое представление о том, как сложна и многообразна проблема измерения массы различных тел. Ну, а для тех, кто захочет поглубже изучить какой-либо из заинтересовавших его в книге вопросов, автор дает в конце ее список дополнительной литературы.

В. А. Лешковцев

^{*}) Ф. С. Завельский, Взвешивание миров, атомов и элементарных частиц, Атомиздат, 1970 г., 31000 экз., цена 31 коп.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К заметке «Найдите ошибку»

Мы нашли в треугольнике ABD такую точку, что сумма расстояний от нее до точек A и D и удвоенного расстояния от нее до точки B минимальна.

К статье «Графики в задачах на равномерные процессы»

1. $b + \sqrt{b(b-a)}$ дней.
2. 60 м^3 .
3. 8 часов 45 мин.
4. $3a - b$. Заметьте, что, согласно условию задачи время до второй встречи больше, чем время, затрачиваемое каждым из спортсменов (и, в частности, вторым спортсменом) на весь путь AB . Отсюда и получается условие $3a - 2b > 0$.
5. Полкруга.

К статье «Статика»

1. Для равновесия клина необходимо, чтобы вертикальные составляющие силы давления N и силы трения F были равны: $F \cos \alpha = N \sin \alpha$, где 2α — угол при вершине клина. Коэффициент трения

$$k \geq \frac{F}{N} = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 15^\circ = 0,268.$$

2. $h = 2r \operatorname{ctg} \alpha$. В момент опрокидывания сила тяжести, действующая на цилиндр, должна проходить через границу основания.

3. Из уравнения моментов относительно точки касания колеса и ступеньки получаем: $F(r-h) = mg\sqrt{r^2 - (r-h)^2}$, то есть

$$F = \frac{mg\sqrt{h(2r-h)}}{r-h}.$$

$$4. \frac{1}{2 + \sqrt{3}}.$$

К «Задачам о шахматном турнире»

(см. «Квант № 10, стр. 25)

1. Участник, занявший второе место, набрал не более 6 очков. В противном случае он либо занял бы первое место, либо делил первое — второе. С другой стороны, участники, занявшие пятое — восьмое места, уже в своем «собственном турнире» набрали 6 очков. Из этого следует, что они проиграли все партии шахматистам, занявшим первые четыре места.

2. 7 или 14.

4. Воспользоваться принципом Дирихле.

5. 9 участников.

6. Доказательство можно провести методом математической индукции.

Главный редактор — академик **И. К. Киоинн**.

Первый заместитель главного редактора — академик **А. Н. Колмогоров**.

Редакционная коллегия: Л. А. Арцимович, М. И. Башмаков, В. Г. Болтянский, И. Н. Бронштейн, Н. Б. Васильев, И. Ф. Гинзбург, В. Г. Зубов, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, В. А. Лешковцев (зам. главного редактора), А. И. Маркушевич, М. Д. Миллиончиков, Н. А. Патрикеева, Н. Х. Розов, А. П. Савин, И. Ш. Слободецкий, М. Л. Смолянский (зам. главного редактора), Я. А. Смородинский, В. А. Фабрикант.

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Главный художник А. И. Климанов
Художественный редактор О. Н. Яковлева
Корректор А. Л. Ипатова
Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15
Тел. 231-08-11

Сдано в набор 30/VII 1971 г.
Подписано в печать 21/IX 1971 г.
Бумага 70X100^{1/2}. Физ. печ. л. 4.
Услови. печ. л. 5.2. Уч.-изд. л. 5.09.
Тираж 1 экз. 200 тыс. экз. Т-14362.
Цена 30 коп. Заказ 1452.
Чехословацкий полиграфкомбинат Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР
г. Чехов Московской области

Значки Всесоюзных олимпиад

Первая школьная олимпиада по математике была проведена в Ленинграде весной 1934 года.

По инициативе Московского математического общества осенью 1935 года была проведена Первая Московская математическая олимпиада школьников. Московские математики отнеслись к ней с большим воодушевлением. В оргкомитет вошли почти все крупнейшие математики-москвичи (академики А. Н. Колмогоров, П. С. Александров, С. Л. Соболев; члены-корреспонденты Л. А. Люстерник, Л. Г. Шнирельман; профессор В. Ф. Каган; С. А. Яновская и др.).

С этого времени олимпиады проводились ежегодно. Они завоевали большую популярность. Вслед за математиками свои олимпиады стали проводить физики, химики, астрономы, географы, биологи, а затем и лингвисты.

В 1960 году оргкомитет XXIII Московской математической олимпиады совместно с Министерством просвещения РСФСР провели математическую олимпиаду в более широком масштабе. В ней приняли участие команды 13 областей РСФСР и 9 союзных республик.

Этот опыт оказался весьма успешным и с 1961 года уже стали регулярно проводиться Всероссийские математические олимпиады. Они проводятся в четыре тура: школьная, районная, областная и заключительная.

С 1967 года проводятся уже Всесоюзные физико-математические и химические олимпиады. В них принимают участие команды от всех областей, краев, а также автономных и союзных республик, не имеющих областного деления. Для проведения олимпиад при Министерстве просвещения СССР был организован Центральный оргкомитет, председателем которого является академик И. К. Кикоин.

Четыре победителя из 8—10 классов от каждой области, края, автономных и союзных республик приглашаются на заключительный тур, на котором для каждого класса предлагаются несколько задач различной трудности.

Победители олимпиады отмечаются специальными премиями и похвальными грамотами.

По решению Центрального оргкомитета, начиная с IV Всероссийской олимпиады (1963 г.), выпускаются специальные значки, которыми награждаются все участники олимпиады.

Г. Н. Дьяченко



IV Всероссийская математическая олимпиада (Москва, 1963 г.)

V Всероссийская физико-математическая олимпиада (Москва, 1964 г.)

VI Всероссийская олимпиада по математике, физике и химии (Москва, 1965 г.)

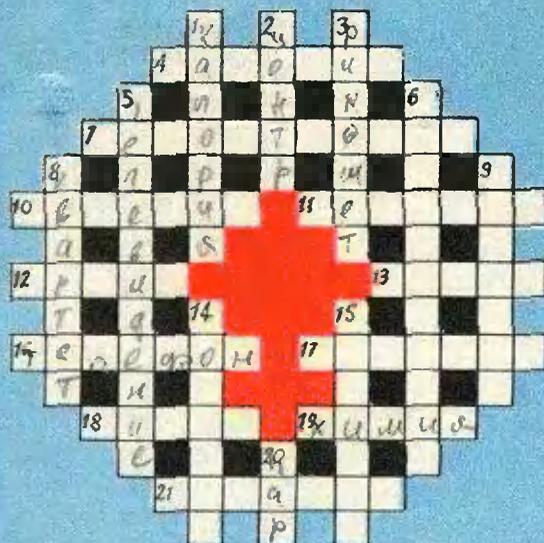
VII Всероссийская олимпиада по математике, физике и химии (Воронеж, Москва, 1966 г.)

II Всесоюзная олимпиада по математике, физике и химии (Ленинград, Ереван, 1968 г.): III Всесоюзная олимпиада по математике, физике и химии (Киев, Алма-Ата, 1969 г.); IV Всесоюзная олимпиада по математике, физике и химии (Симферополь, Свердловск, 1970 г.).



10-6

КРОССВОРД



По горизонтали:

- 4. Объективная реальность, данная нам в ощущениях.
- 7. Величина, характеризующая частоту наступления события при многократном повторении испытаний.
- 10. Событие, происходящее в природе.
- 11. Замедление в развитии или переход к менее совершенным его формам.

По вертикали:

- 1. Единица количества тепла.
- 2. Середина.
- 3. Отскок после удара.
- 5. Передача изображения на расстояние с помощью радиоволи.
- 6. Воспроизведение звуков с сохранением объемности звучания.
- 8. Ансамбль из четырех элементов.
- 9. Итог одного из арифметических действий.
- 14. Вещество, состоящее из макромолекул.
- 15. Единица громкости звука.
- 20. Агрегатное состояние воды.

- 12. Химический элемент третьей группы периодической системы элементов.
- 13. Прозрачная смола, являющаяся хорошим диэлектриком.
- 16. Электроакустическая система передачи звуков на расстояние.
- 17. Выдающийся русский кристаллограф.
- 18. Представитель одной из бурно развивающихся областей науки.
- 19. Наука, изучающая поведение атомов и молекул.
- 21. Выдающийся русский физик.