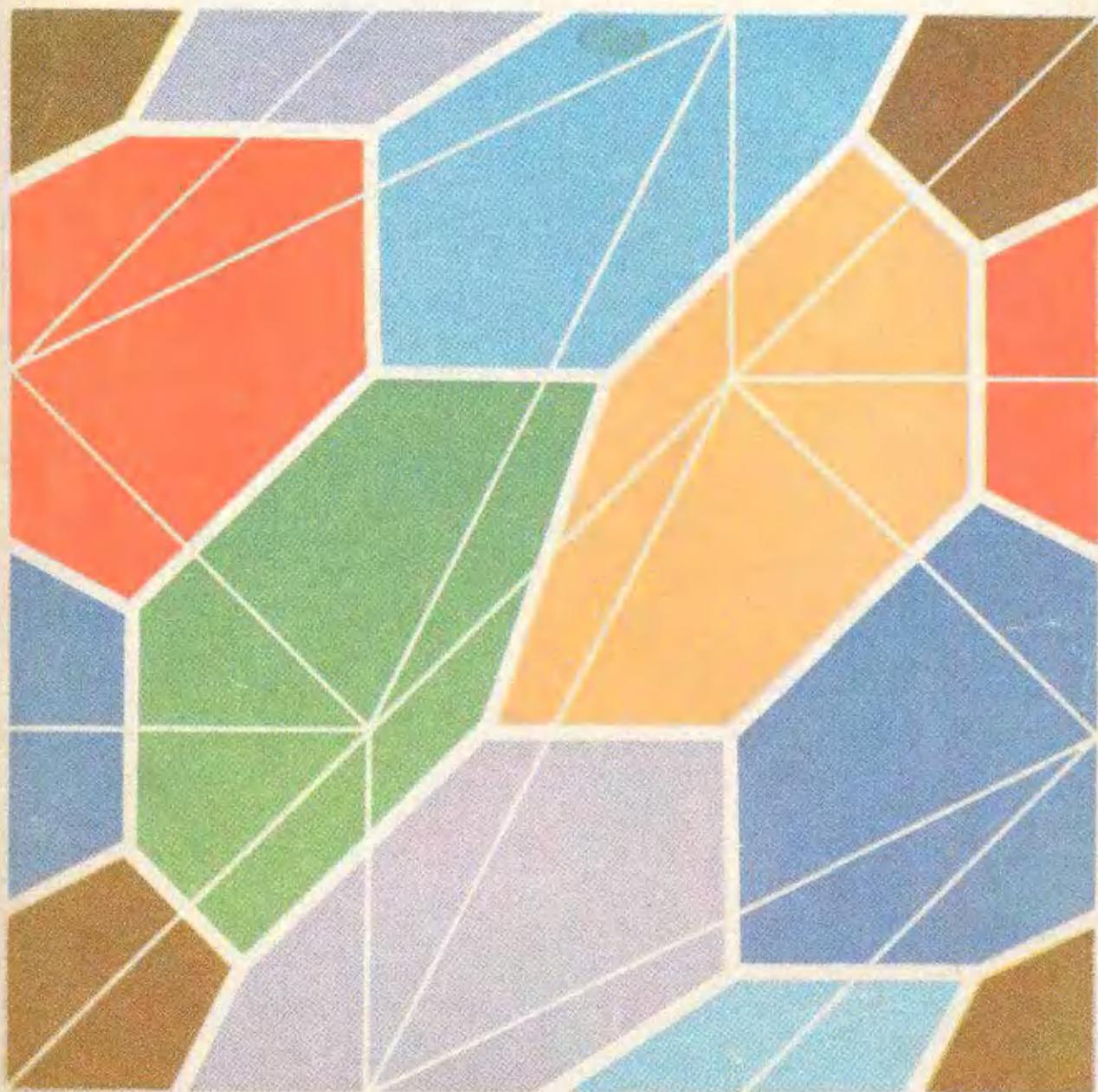


# Квант

4

АПРЕЛЬ  
1972

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ  
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



Главный редактор — академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

**Редакционная коллегия:**

Л. А. Арцимович, М. И. Башмаков, С. Т. Беляев,  
В. Г. Болтянский, И. Н. Бронштейн, Н. Б. Васильев,  
И. Ф. Гинзбург, Ю. Н. Ефремов, В. Г. Зубов, П. Л. Капица,  
В. А. Кириллин, А. И. Климанов (*главный художник*),  
С. М. Козел, В. А. Лешковцев (*зам. главного редактора*),  
Л. Г. Макар-Лиманов, А. И. Маркушевич, М. Д. Миллионщи-  
ков, Н. А. Патрикеева, И. С. Петраков, Н. Х. Розов, А. П. Савин,  
И. Ш. Слободецкий, М. Л. Смолянский (*зам. главного редакто-  
ра*), Я. А. Смородинский, В. А. Фабрикант, А. Т. Цветков,  
М. П. Шаскольская, С. И. Шварцбург, А. Т. Ширшов.



На первой и четвертой страницах обложки помещены рисунки к статье А. П. Савина «Карты и раскраски» [художник В. Егоров]. Статья помещена на стр. 30.

Заведующая редакцией Ч. В. Чернова. Главный художник А. И. Климанов  
Художественный редактор О. Н. Яковлева. Корректор М. Л. Медведева  
Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической  
литературы, 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15. Тел. 234-08-11, 234-07-93

Сдано в набор 16/11-1972 г. Подписано в печать 29/11-1972 г. Бумага 70×100<sup>1/16</sup> Физ. печ. л. 5.  
Уч.-изд. л. 6.5. Уч.-изд. л. 7.45. Тираж 340 985 Т-01574. Цена 30 коп. Заказ 2538.  
Суховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР.  
Чехов, Московская обл.

**РУКОПИСИ НЕ ВОЗВРАЩАЮТСЯ**

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ  
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

## В НОМЕРЕ:

- |           |  |   |
|-----------|--|---|
| <u>2</u>  | День космонавтики  |   |
| <u>4</u>  | Расстановка кубиков                                      | <i>Н. Б. Васильев</i>                   |
| <u>10</u> | Оптический телескоп                                      | <i>В. Е. Беломучкин, С. М. Козел</i>    |
| <u>19</u> | Косоугольные координаты и области Дирихле                | <i>В. Л. Гутенмахер</i>                 |
| <u>23</u> | Почему Луна не из чугуна?                                | <i>М. А. Корец, З. Л. Понизовский</i>   |
| <u>25</u> | Справедливый выбор                                       | <i>А. Н. Виленкин, А. И. Шкирельман</i> |
| <u>28</u> | Конус максимального объема в природе                     | <i>С. М. Петров</i>                     |
| <u>30</u> | Карты и раскраски  | <i>А. П. Савин</i>                      |
| <u>34</u> | Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки | <i>А. А. Пресман</i>                    |

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- |           |  |                     |
|-----------|--|---------------------|
| <u>36</u> | Применение алгебраических тождеств к получению геометрических неравенств | <i>З. А. Скопец</i> |
|-----------|--|---------------------|

## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- |           |                                   |
|-----------|-----------------------------------|
| <u>40</u> | Задачи М136—М140; Ф148—Ф152       |
| <u>42</u> | Решение задач М96—М100; Ф108—Ф115 |

## ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- |           |   |                       |
|-----------|---|-----------------------|
| <u>54</u> | Прямая и плоскость  | <i>Л. Е. Евтушик</i>  |
| <u>60</u> | Варианты вступительных экзаменов по математике 1971 года      |                       |
| <u>62</u> | Решение задач по электростатике                               | <i>Г. Я. Мякишев</i>  |
| <u>67</u> | Вступительные экзамены по физике на физическом факультете МГУ | <i>А. В. Устинова</i> |

## РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

- |           |                                |   |
|-----------|--------------------------------|---|
| <u>69</u> | Рассказ о замечательном физике | <i>И. М. Беккерман</i>                  |
| <u>70</u> | Новые книги                    | <i>М. Л. Смолянский, Г. Н. Дьяченко</i> |

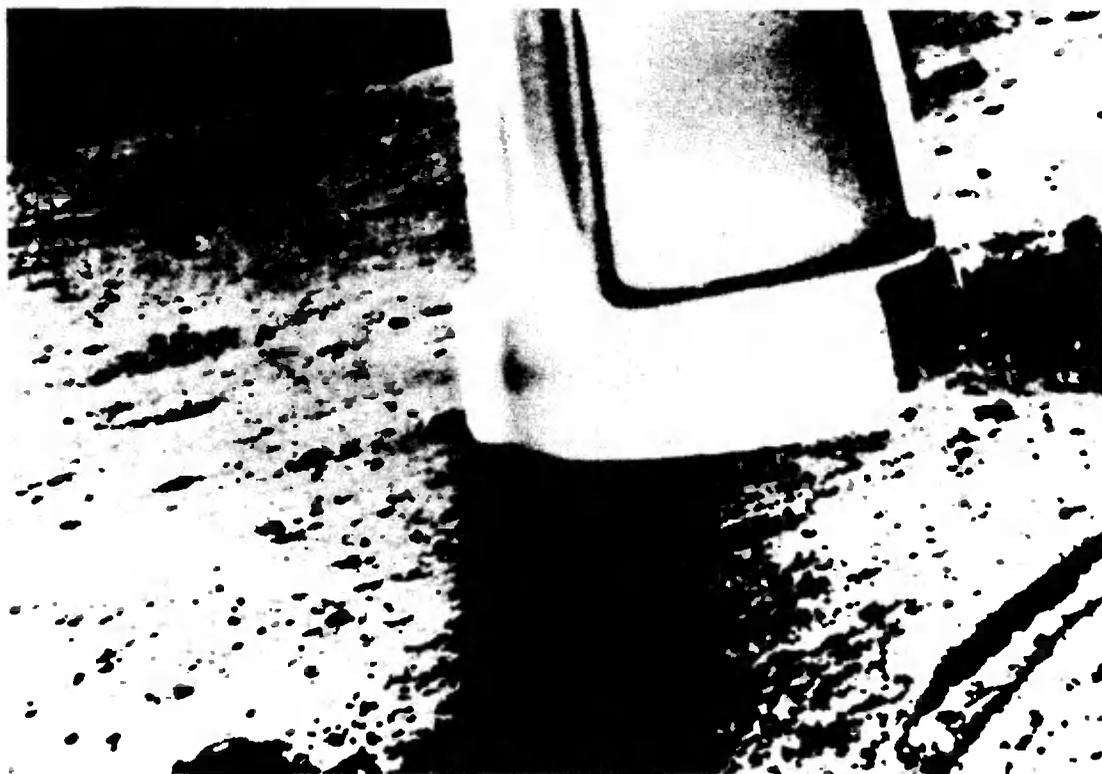
## УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

- |           |                                     |                        |
|-----------|-------------------------------------|------------------------|
| <u>72</u> | Марки, посвященные Дню космонавтики | <i>В. А. Лешковцев</i> |
|-----------|-------------------------------------|------------------------|

## ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ  
(3 стр. обл.)

СМЕСЬ (стр. 18, 27, 39, 41, 68)



## День космонавтики

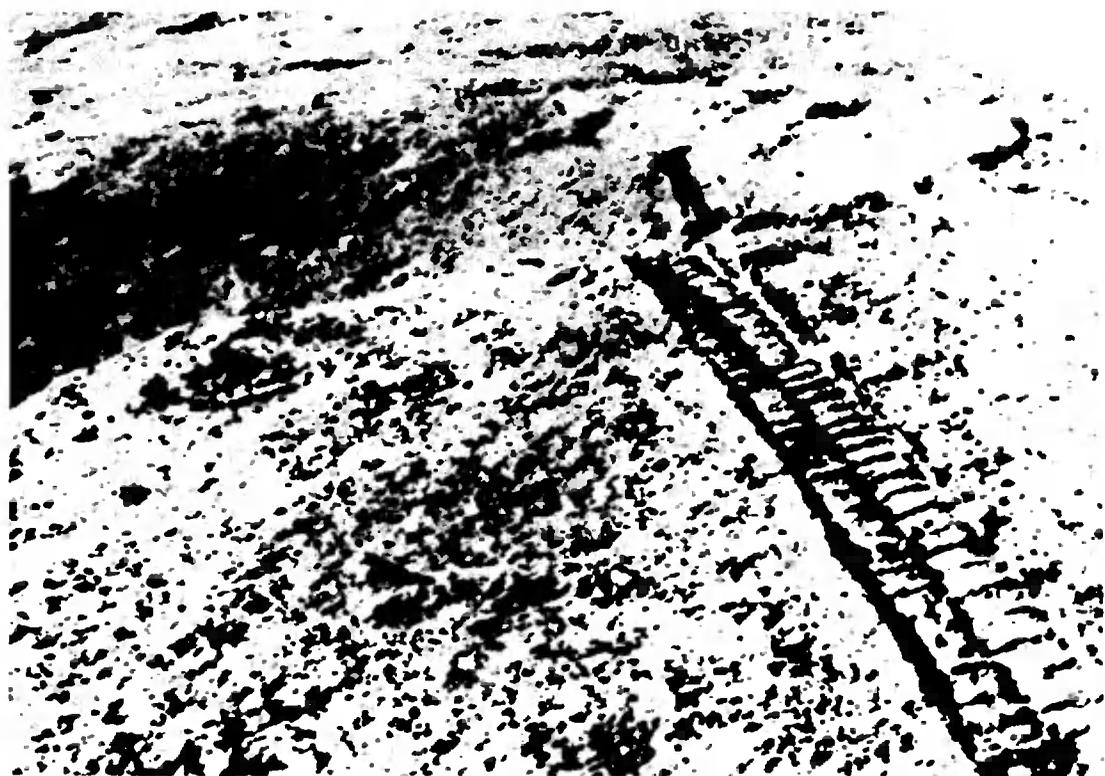
В 1972 году исполняется 15 лет с момента запуска первого искусственного спутника Земли и 11 лет с момента первого полета человека в Космос. Оба эти события произошли в нашей стране. Советский Союз навсегда останется в памяти людей как страна, первой проложившая дорогу в космические просторы.

Немногим более десяти лет отделяют нас от этих событий. За эти годы наука узнала о Луне, Венере, Марсе, Солнце и космических просторах больше, чем за все предыдущие столетия упорных наблюдений и исследований.

К настоящему моменту в Космос запущено более тысячи различных аппаратов, половина которых сделана руками советских ученых, инженеров, рабочих. Наша космическая программа поражает мир своей последовательностью. В ней отчетливо выделяются три основных направления: исследования околоземного космического пространства и самой Земли, имеющие не только научное, но и большое практическое значение; изучение Луны; исследования планет Солнечной системы.

Советские искусственные спутники серии «Метеор» позволили создать постоянную службу наблюдения за метеорологическими процессами в атмосфере, ледниковым покровом, поверхностью океанов и т. д. Спутники серии «Молния» необычайно расширили возможности передачи информации. Они являются надежной основой для создания международной системы космической связи «Интеркосмос».

Спутники оказывают неоценимую помощь в изучении водного режима и составлении карт труднодоступных районов, поисках полезных ископаемых и охране лесных богатств, облегчении условий навигации кораблей и самолетов и борьбе с вредителями в сельском хозяйстве.

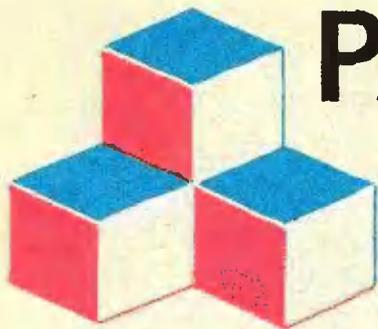


Длительный полет советских космонавтов А. Г. Николаева и В. И. Севастьянова на корабле «Союз-9» подтвердил возможность успешной продолжительной работы человека за пределами земной атмосферы. Космонавты не раз выходили в открытый космос; отлажены системы управления в групповых полетах; произведены стыковки космических кораблей; опробованы методы космической сварки. На повестку дня поставлен вопрос о создании орбитальных обсерваторий, где периодически сменяемые группы ученых будут проводить научные исследования по широкой программе. Первая пилотируемая орбитальная научная станция была создана в нашей стране 7 июня 1971 года после успешной стыковки орбитальной научной станции «Салют» и космического корабля «Союз-11».

Успешно развиваются также исследования Луны. Особенно большой вклад в них внесли полеты автоматических станций «Луна-16», «Луна-17» и «Луна-20». Первая и третья доставили на Землю образцы лунного грунта. Вторая опустила на поверхность Луны передвижную исследовательскую лабораторию «Луноход-1», в течение многих месяцев выполнявшую сложную научную программу. (Одна из снятых Луноходом панорам лунной поверхности помещена на приведенной здесь фотографии.)

Советский Союз далеко продвинулся по пути изучения планет Солнечной системы, прежде всего Венеры и Марса. Четыре наших спускаемых аппарата находятся на поверхности Венеры. Они сообщили детальные сведения о температуре, давлении и химическом составе атмосферы этой загадочной планеты. 2 декабря 1971 года впервые в истории спускаемый аппарат автоматической станции «Марс-3» произвел мягкую посадку на поверхность Марса. Станции «Марс-2» и «Марс-3» стали искусственными спутниками Марса.

Огромный путь пройден нашей космической наукой и техникой за полтора десятилетия. А впереди — неизведанная дорога к более далеким планетам, к звездам и населенным разумными существами мирам. И кто знает, какие удивительные открытия подарит нам она в недалеком будущем.



# РАССТАНОВКА КУБИКОВ

*Н. Б. Васильев*

В этой статье мы расскажем решение одной из задач, предлагавшихся девятиклассникам и десятиклассникам на прошлогодней Всесоюзной математической олимпиаде в Риге (см. «Квант» № 11, 1971). Она формулировалась так.

**Задача.** Куб с ребром длины  $n$  разбит на  $n^3$  единичных кубиков. Выберем несколько кубиков и проведем через центр каждого из них три прямые, параллельные ребрам. Какое наименьшее число кубиков можно выбрать так, чтобы проведенные через них прямые перечеркнули все кубики?

а) Укажите ответ для маленьких значений  $n$ : для  $n=2, 3, 4$ .

б) Попробуйте найти ответ для  $n=10$ .

в) Решите общую задачу. Если вам не удастся найти точный ответ, докажите какие-либо неравенства, оценивающие сверху и снизу число отмеченных кубиков.

г) Заметьте, что эту задачу можно сформулировать так. Рассмотрим всевозможные наборы  $(x_1, x_2, x_3)$ , где каждая из букв  $x_1, x_2, x_3$  принимает одно из  $n$  значений  $1, 2, \dots, n$ . Какое наименьшее число наборов нужно выбрать, чтобы для каждого из остальных наборов среди выбранных нашелся такой, который отличался бы от него только в одном месте (значением только одной из координат  $x_1, x_2, x_3$ )? Попробуйте найти оценки для числа наборов в более общей задаче, когда

рассматриваются наборы не из трех, а из четырех и большего количества букв.

**Формулировка с ладьями**

Чтобы не путаться в словах «куб», «кубик» и «выбранный кубик», удобно переформулировать задачу в других терминах. Весь куб  $n \times n \times n$  мы назовем «пространственной шахматной доской», каждый из кубиков  $1 \times 1 \times 1$  — «клеткой», каждый выбранный кубик — «клеткой, занятой ладьей». Будем считать, что ладья, стоящая в какой-то клетке  $x$ , держит под ударом все клетки, расположен-

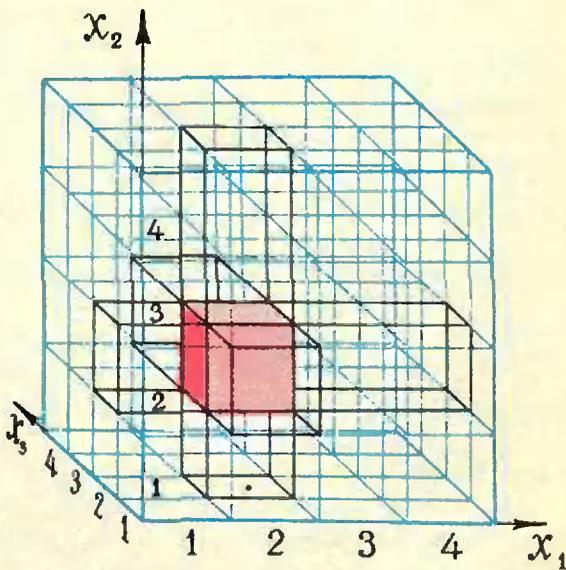


Рис. 1. Ладья, стоящая на поле 222 (розовый кубик), бьет десять полей: кроме самого поля 222, еще 122, 322, 422 (в направлении  $x_1$  в «ширину»), 212, 232, 242 (в направлении  $x_2$  в «высоту»), 221, 223 и 224 (в направлении  $x_3$  в «глубину»).

ные вдоль трех прямых, параллельных ребрам куба и проходящих через центр клетки  $x$  (в том числе будем считать, что ладья бьет и саму эту клетку  $x$  (рис. 1)). Тогда вопрос, поставленный в условии, можно сформулировать так: какое наименьшее число ладей можно расставить на доске  $n \times n \times n$ , чтобы они били всю доску (то есть все клетки без исключения)?

**Упражнение 1.** Решите аналогичную задачу для «плоской» шахматной доски  $n \times n$ . (Ответ:  $n$ . Заметьте, что если на доске  $n \times n$  стоит меньше чем  $n$  ладей, то найдутся горизонталь и вертикаль, свободные от ладей).

### Первоначальные грубые оценки

Обозначим через  $A_n$  наименьшее количество ладей, которые могут побить всю доску  $n \times n \times n$ .

Поскольку на доске  $n \times n \times n$  каждая ладья бьет  $3n - 2$  клетки, а всего клеток  $n^3$ , то, чтобы побить всю доску, нужно расставить по крайней мере  $\frac{n^3}{3n - 2}$  ладей. Другими словами,

$$A_n \geq \frac{n^3}{3n - 2}. \quad (1)$$

Отсюда следует, что

$$A_2 \geq 2, A_3 \geq 4, A_4 \geq 7, A_5 \geq 10.$$

Легко придумать пример расстановки  $n^2$  ладей, бьющих всю доску (их можно расставить в одном горизонтальном «слое»).

Это дает такую грубую оценку:

$$A_n \leq n^2. \quad (2)$$

**Упражнение 2.** Докажите, что

$$A_n \leq \frac{3n^2}{4}, \quad (3)$$

воспользовавшись следующим соображением: если расставить  $n_1$  ладей вдоль ребра  $n_1$  доски  $n_1 \times n_2 \times n_3$ , то после этого останется решить задачу для доски  $n_1 \times (n_2 - 1) \times (n_3 - 1)$ .

### Запись расстановок «в плане»

При  $n = 2$ , очевидно, двух ладей достаточно, чтобы держать под ударом все восемь клеток (рис. 2), то

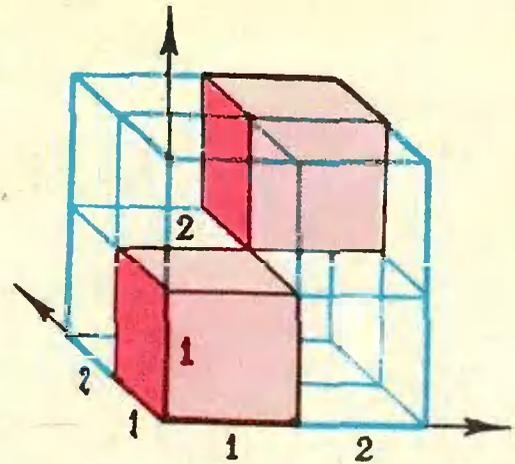


Рис. 2. Ладьи 111 и 222 бьют всю доску  $2 \times 2 \times 2$ .

есть  $A_2 = 2$ . Несколько труднее исследовать случай  $n = 3$ . Пример нужной расстановки пяти ладей показан на рисунке 3.

В этом рисунке уже довольно трудно разобраться. С увеличением  $n$  дело еще ухудшится. Поэтому необходимо придумать более удобный способ описания расстановок ладей. Можно было бы, конечно, просто перечислять все «координаты» ладей, как это сделано в подписях под рисунками, но мы предложим более наглядный способ записи.

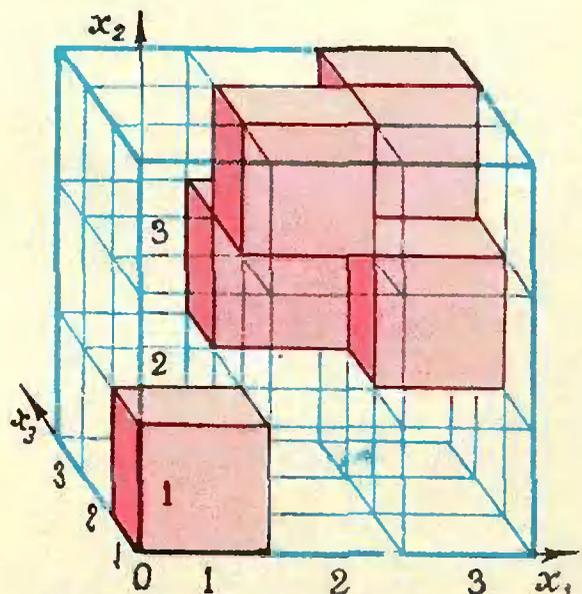


Рис. 3. Ладьи 111, 223, 232, 322 и 333.

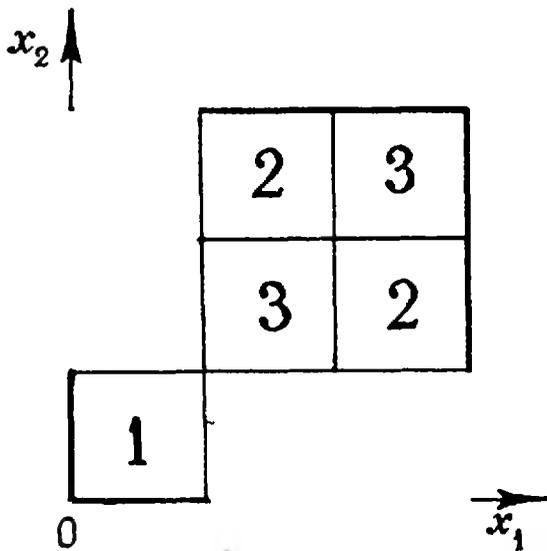


Рис. 4.

Будем называть *слоем* множество клеток, центры которых лежат в плоскости, параллельной одной из граней доски, и *линией* — множество клеток, центры которых лежат на одной прямой, параллельной ребру; слой состоит из  $n^2$  клеток, линия — из  $n$  клеток. Нарисуем проекцию доски на одну из граней, скажем, на плоскость  $Ox_1x_2$  (вид спереди) и на каждом поле полученной доски  $n \times n$  напишем номер слоя, в котором встречается ладья, проектирующаяся на это поле. Тогда расстановка ладей, изображенная на рисунке 3, запишется так, как показано на рисунке 4 (ситуации, когда в одной линии стоит больше одной ладьи, у нас не будут встречаться, поэтому на каждом поле доски  $n \times n$  будет записываться не более чем одно число). Заметьте, что на рисунке 4 для каждого пустого поля в строке и столбце, на пересечении которых оно стоит, встречаются все номера: 1, 2 и 3. Это и означает, что каждое поле доски  $3 \times 3 \times 3$ , которое не бьется в направлении  $x_3$ , бьется или в направлении  $x_1$ , или в направлении  $x_2$ .

Итак, мы убедились, что  $A_3 \leq 5$ . То, что  $A_3 \geq 4$ , было уже доказано (см. (1)). Возникает вопрос: чему же равно  $A_3$ : 4 или 5? Мы предоставляем читателям возможность разо-

браться в случаях  $n=3$ ,  $n=4$  и т. д., а затем перейдем сразу к общему случаю.

У п р а ж н е н и е 3. а) Докажите, что 4 ладьи нельзя расставить так, чтобы они били всю доску  $3 \times 3 \times 3$ ; б) укажите пример расстановки 8 ладей, которые бьют всю доску  $4 \times 4 \times 4$ ; в) докажите, что  $A_4=8$ .

### Общий случай. Формулировка результата

В нашей задаче едва ли не самое трудное — выдвинуть правильную гипотезу: чему равно  $A_n$ . Зная ответ, уже значительно легче и построить пример (то есть оценить  $A_n$  сверху), и доказать, что меньшим числом ладей обойтись нельзя. А ответ таков:

$$A_n = \begin{cases} \frac{n^2}{2}, & \text{если } n \text{ четно,} \\ \frac{n^2+1}{2}, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

В частности,  $A_4=8$ ,  $A_5=13, \dots$ ,  $A_{10}=50$ .

Примеры «оптимальной» расстановки  $A_n$  ладей ясны из рисунков 5, а ( $n$  четно) и 5, б ( $n$  нечетно). Легко проверить, что все поля, которые не бьются в направлении  $x_3$ , бьются либо в направлении  $x_1$ , либо в направлении  $x_2$ : в каждом «кресте» — строке и столбце, на пересечении которых стоит пустое поле — встречаются все номера от 1 до  $n$ .

Осталось доказать, что в меньшем количестве ладьи не могут побить всю доску.

### Первое доказательство

Пусть  $M$  ладей расставлены так, что они бьют все клетки доски. Выберем из всех слоев тот, в котором количество ладей минимально (если таких слоев несколько, возьмем любой из них). Можно считать, что он расположен параллельно плоскости  $Ox_1x_2$ . Обозначим этот слой через  $S$ , а количество ладей в нем — через  $m$ . Пусть эти  $m$  ладей бьют  $m_1$  рядов в направлении  $x_1$  и  $m_2$  рядов в направлении  $x_2$  (можно считать, что  $m_1 \geq m_2$ ; разумеется,  $m \geq m_1$  и  $m \geq m_2$ ). Тогда

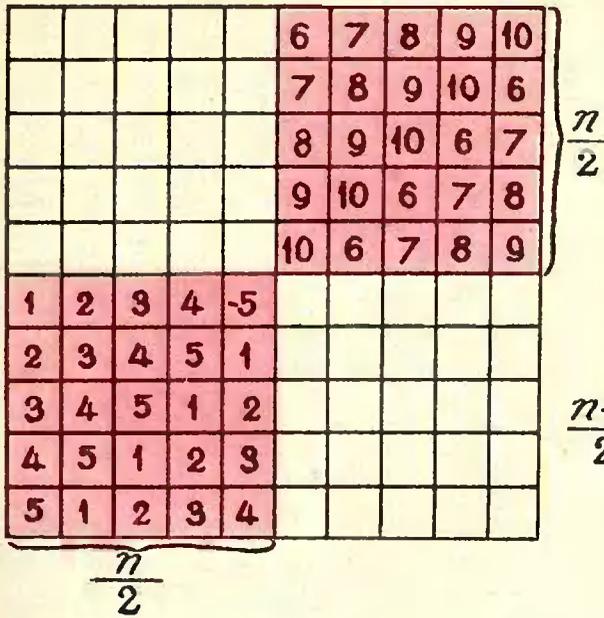


Рис. 5 а).

в слое  $S$  эти ладьи оставляют непобитыми  $(n-m_1)(n-m_2)$  клеток, которые должны биться в направлении  $x_3$ . (На рисунке 6 слой  $S$  — передний, клетки, занятые ладьями, — красные,  $n=9$ ,  $m=m_1=4$ ,  $m_2=3$ ).

Рассмотрим теперь все  $n$  «горизонтальных» слоев — слоев, параллельных плоскости  $Ox_1x_3$ . В тех  $n-m_1$  из них, которые не содержат ладей слоя  $S$ , как мы убедились, должно быть не менее  $(n-m_1)(n-m_2)$  ладей. В каждом из остальных  $m_1$  слоев

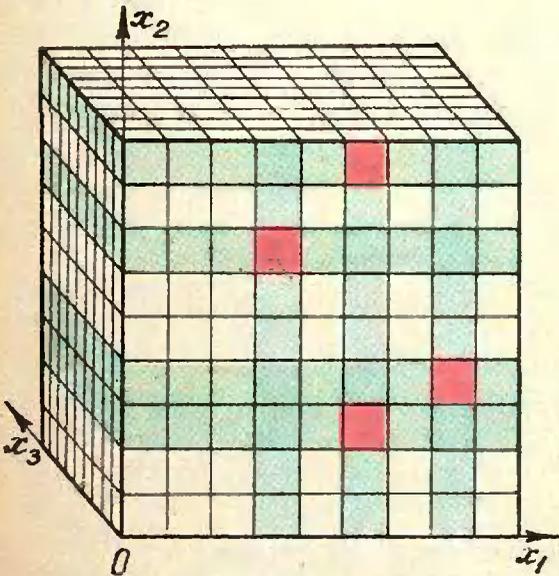


Рис. 6.

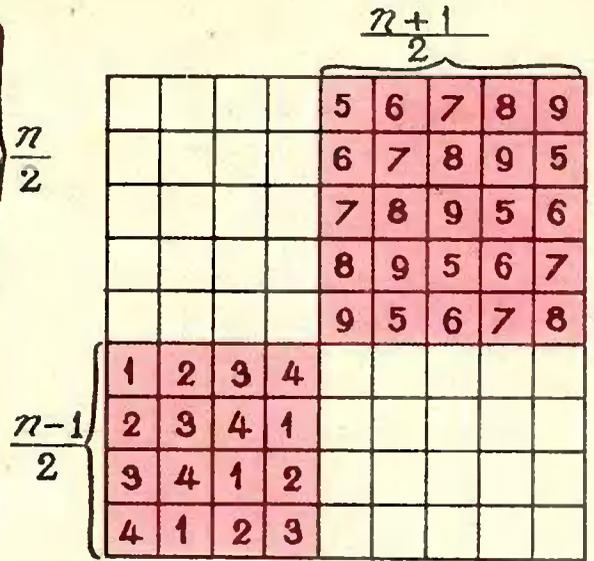


Рис. 5 б).

(зеленых на рисунке 6) — не менее  $m$  ладей (по выбору  $m$ ). Поэтому

$$M \geq (n-m_1)(n-m_2) + mm_1 \geq (n-m_1)^2 + m_1^2.$$

Но минимальное значение правой части при целом  $m_1$ , как легко доказать, как раз равно  $\frac{n^2}{2}$  при нечетном  $n$  и  $\frac{n^2+1}{2}$  при четном  $n$  (график функции  $f(x) = (n-x)^2 + x^2$  изображен на рисунке 7).

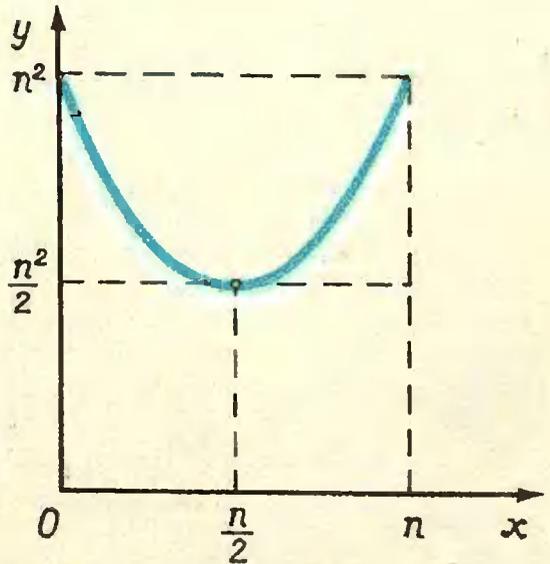


Рис. 7.

## Второе доказательство

**Лемма.** Пусть в таблице  $n \times n$  стоят целые неотрицательные числа так, что если в каком-то поле стоит 0, то сумма всех чисел строки и столбца, на пересечении которых стоит это поле, не меньше  $n$ . Тогда сумма всех чисел таблицы не меньше  $\frac{n^2}{2}$  (и следовательно, если все числа в таблице целые, то при нечетном  $n$  эта сумма не меньше  $\frac{n^2+1}{2}$ ).

Из леммы нужная оценка для  $A_n$  получается легко: достаточно спроектировать доску на одну из граней и написать в каждом поле полученной таблицы  $n \times n$ , сколько ладей в нее спроектировалось. Ясно, что условие леммы для полученной таблицы будет выполнено.

Осталось доказать лемму. Мы не будем этого делать, поскольку эта лемма уже встречалась недавно в «Кванте»: как это ни парадоксально, она предлагалась в том же прошлом году в качестве отдельной задачи на Международной олимпиаде (см. «Квант» № 12, 1971 г.). К сожалению, второе доказательство нашей задачи, а тем самым и лемма не рассказывались на разборе задач Всесоюзной олимпиады, так что этой леммы не знали ни руководители советской команды (иначе они, разумеется, добились бы, чтобы ее не предлагали школьникам, как слишком известную), ни участникам нашей команды (иначе бы они все решили ее безупречно).

Итак, основная задача, о которой идет речь в пунктах а), б) и в) условия, решена.

## Замечания по поводу обобщений

Что же касается более общей задачи, сформулированной в пункте г), — аналогичной задачи не для «трехмерной», а для « $k$ -мерной» доски ( $k \geq 4$ ), то здесь окончательный результат не известен. Для минимального числа  $A_n^k$  ладей, бьющих всю доску  $n \times n \times \dots \times n$  (мы сохраняем шахматную терминологию, но напомним, что теперь клетка  $x$  — это набор из  $k$  чисел  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ ,

где каждое  $k$  принимает значение от 1 до  $n$ ), легко получить оценки, аналогичные (1), (2):

$$A_n^k \leq n^{k-1}, \quad A_n^k \geq \frac{n^k}{k(n-1)+1}.$$

**Упражнение 4.** Докажите эти неравенства. Постарайтесь улучшить оценку  $n^{k-1}$ , используя те же соображения, что и в упражнении 2.

Поскольку  $A_n^2 = n$  и  $A_n^3$  равно  $\frac{n^2}{2}$  или  $\frac{n^2+1}{2}$ , напрашивается гипотеза, что  $A_n^k$  близ-

ко к  $\frac{n^{k-1}}{k-1}$ . Эту гипотезу, наряду с другими,

обсуждали участники олимпиады и члены жюри не только во время олимпиады, но и после нее. Один из наиболее интересных результатов нам сообщили выпускник физико-математической школы при Ленинградском университете Д. Григорьев и наш читатель Б. Гинзбург: им (независимо) удалось доказать, что если  $M$  ладей бьют всю доску и при этом никакие две не бьют друга, то

$M \geq \frac{n^{k-1}}{k-1}$  (доказательство мы помещаем в конце статьи). По-видимому, этот результат верен и без дополнительного предположения, выделенного курсивом, то есть верно неравенство  $A_n^k \geq \frac{n^{k-1}}{k-1}$ , причем, как показывают примеры, при  $n > k$  эта оценка довольно близка к точной (ны даже в точности совпадает с ней).

Однако оценка  $\frac{n^{k-1}}{k-1}$  заведомо не является «очень точной» при всех  $n$  и  $k$ .

Например, если  $n=2$ , то  $\frac{n^{k-1}}{k-1} = \frac{2^{k-1}}{k-1}$ , и «грубая» оценка  $\frac{n^k}{k(n-1)+1} = \frac{2^k}{k+1}$  оказывается лучше (при  $k > 3$ );

при больших  $k$  число  $\frac{2^k}{k+1}$  примерно в два раза больше, чем  $\frac{2}{k-1}$ .

**Упражнение 5.** Найдите  $A_2^4$ ,  $A_3^4$ ,  $A_2^5$ .

## Несколько слов про задачи о кодах

Одна задача, очень близка в нашей по формулировке, является значительно более исследованной — прежде всего, потому, что она важна для приложений. В «шахматных терминах» она звучит так: какое наибольш-

шее число ладей можно расставить на  $k$ -мерной доске  $n \times n \times \dots \times n$ , чтобы они не били друг друга? (Другой вариант: чтобы никакое поле не билось двумя ладьями?) Иначе говоря: какое множество  $Y$  наборов  $y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$  можно составить так, чтобы а) каждые два набора в  $Y$  отличались более чем в одной координате, или б) каков бы ни был набор  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ , в множестве  $Y$  найдется не больше одного набора  $y$ , отличающегося от  $x$  лишь в одной координате? Сформулированные задачи прямо относятся к теории информации, точнее, к ее разделу, — теории кодов, исправляющих ошибки. Эта теория занимается задачами такого типа: составить множество  $Y$  «слов»  $(y_1, y_2, \dots, y_k)$  такое, что если при передаче одного из этих слов (скажем, по телеграфу или по каналу связи в вычислительной машине) вкратась ошибка в какой-то «букве», то эту ошибку можно было бы обнаружить, а еще лучше, исправить, то есть восстановить переданное «слово». Поэтому множество  $Y$ , удовлетворяющее условию а), называется «кодом, обнаруживающим одиночные ошибки», а удовлетворяющее условию б) — «кодом, исправляющим одиночные ошибки». Вы видите, что в математике слово «код» используется не совсем так, как в книгах про шпионов.

**У п р а ж н е н и е 6.** Пусть  $B_n^k$  — наибольшее число ладей, которые можно расставить на  $k$ -мерной доске  $n \times n \times \dots \times n$  так, чтобы они не били друг друга. а) Какое число больше:  $B_n^k$  или  $A_n^k$ ? б) Найдите  $B_n^2, B_n^3, B_n^4$ .

Теория кодов представляет собой, пожалуй, самый яркий пример применения современной алгебры в далекой от нее, на первый взгляд, области, прямо связанной с техническими приложениями. Ей посвящено много научных работ и несколько толстых книг\*), она быстро развивается и заслуживает специального знакомства.

\*) У. Питерсон. Коды, направляющие ошибки, «Мир», 1964; Э. Берлекэмп Алгебраическая теория кодирования, «Мир», 1971.

**Т е о р е м а.** Пусть  $X$  — множество всех наборов  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{k+1})$ , где каждая из  $k+1$  координат  $x$  принимает  $n$  значений:  $1, 2, \dots, n$ ;  $Y$  — подмножество  $X$  такое, что (1) любые два набора из  $Y$  отличаются хотя бы двумя координатами и (2) для каждого  $x$  из  $X$  существует набор  $y$  из  $Y$ , отличающийся от  $x$  не более чем в одной координате. Тогда в  $Y$  не более  $n^k/k$  элементов.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $\alpha(x) = 1$ , если  $x$  принадлежит  $Y$ , и  $\alpha(x) = 0$ , если нет. Положим  $\beta(x) = \beta(x_1, x_2, \dots, x_k) =$

$$= \sum_{1 \leq x_{k+1} \leq n} \alpha(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1});$$

$$\gamma_i(x) = \gamma_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k) =$$

$$= \sum_{1 \leq x_i \leq n} \beta(x_1, \dots, x_k), \text{ где } i = 1, 2, \dots, k.$$

(«Укороченные» наборы из  $k$  и  $(k-1)$  координат мы будем обозначать той же буквой  $x$ , помня, что у аргументов  $\beta$  всегда выброшено  $x_{k+1}$ , а у  $\gamma_i$  —  $x_{k+1}$  и  $x_i$ .) По условию (1)  $\beta(x) \leq 1$  для любого  $x$ . По условию (2), если  $\beta(x) = 0$  для некоторого  $x$ , то  $\sum_{1 \leq i \leq k} \gamma_i(x) \geq n$  для этого  $x$ . Поэтому для всех  $x$  без исключения

$$\sum_i \gamma_i(x) (1 - \beta(x)) \geq n (1 - \beta(x)).$$

Просуммируем все такие неравенства, соответствующие  $n^k$  различным наборам  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ . Это суммирование обозначим буквой  $\Sigma'$ , а суммирование по всем координатам, кроме  $x_i$ , — через  $\Sigma_i'$ . Пусть общее число элементов  $Y$  равно  $M$ . Тогда, поскольку  $\Sigma' \beta(x) = M$  и  $\Sigma_i' \gamma_i(x) = M$  для каждого  $i$ , получим

$$\sum_i (nM - \Sigma_i' \gamma_i^2(x)) \geq n^k + 1 - nM.$$

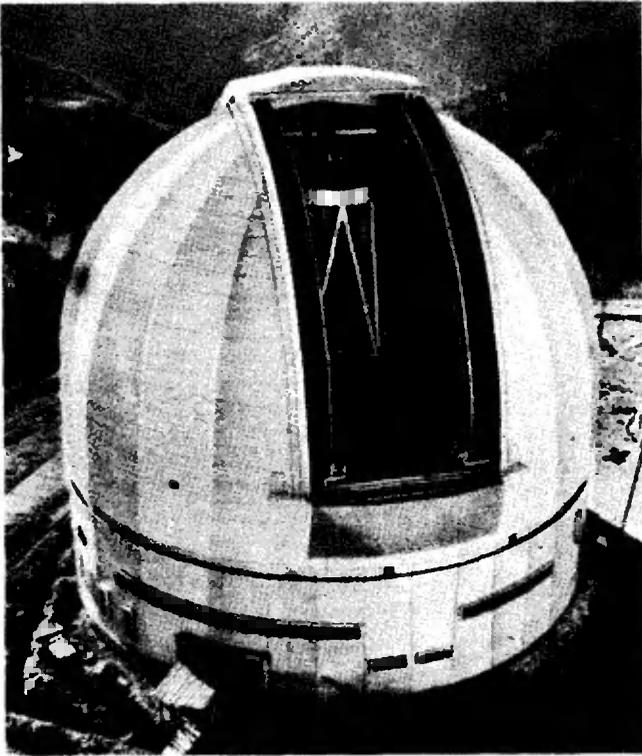
Поскольку сумма квадратов  $N$  вещественных чисел всегда не меньше квадрата их суммы, деленной на  $N$ , левая часть не больше

$$\begin{aligned} \sum_i (nM - \Sigma_i' \gamma_i^2(x)) &\leq \\ &\leq \sum_i \left( nM - \frac{(\Sigma_i' \gamma_i(x))^2}{n^{k-1}} \right) = knM - \frac{kM^2}{n^k - 1}. \end{aligned}$$

Таким образом, верно неравенство

$$knM - \frac{kM^2}{n^k - 1} \geq n^k + 1 - nM, \quad \text{откуда} \\ M \leq n^k/k.$$

# ОПТИЧЕСКИЙ ТЕЛЕСКОП



**В. Е. Белонучкин**  
**С. М. Кóзел**

Визуальный телескоп выполняет две основные функции. Во-первых, он создает на сетчатке глаза отчетливое изображение далекого предмета, сильно увеличенное по сравнению с тем, которое создается в случае невооруженного глаза, и это позволяет различить подробности, недоступные невооруженному глазу. Во-вторых, телескоп собирает свет небесного тела и узким пучком передает его в наш глаз.

Между тем в книгах по оптике можно встретить такие утверждения: «Даже в самый мощный телескоп звезды представляются нам светящи-

мися точками» и «Изображения объектов, наблюдаемых в телескоп, не могут быть более яркими, чем при наблюдении невооруженным глазом».

Для чего же служит телескоп, что можно и чего нельзя увидеть с помощью телескопа? Чтобы ответить на эти вопросы, необходимо разобраться в принципиальном устройстве телескопа.

Вместе с человеческим глазом телескоп составляет единую систему. Так как именно глаз есть тот «прибор», к которому телескоп должен быть приспособлен, следует несколько

слов сказать о самом глазе, прежде чем обращаться к телескопу.

В данном случае речь будет идти о замечательной способности глаза перестраиваться (аккомодировать) при наблюдении предметов, находящихся на различных расстояниях. Известно, что глаз обладает значительной областью аккомодации. У нормального человеческого глаза эта область простирается на расстояния от 10 см до бесконечности. В тех случаях, когда глаз вооружен телескопом (или другим зрительным прибором), изображение предмета, создаваемое в приборе, должно, конечно, располагаться в области аккомодации. При рассмотрении хода лучей в оптических приборах полагают, что глаз аккомодирован на бесконечность. Это означает, что лучи от каждой точки изображения предмета должны попадать в глаз параллельным пучком. В этом случае ход лучей в оптических приборах оказывается наиболее простым (так называемый телескопический ход лучей).

Телескопы бывают разные. В зависимости от того, какие оптические системы используются в качестве объектива и окуляра, различают несколько

типов телескопов. Объективом телескопа может служить линза (или система линз) (рис. 1, а, б). Такие телескопы называют рефракторами. Если в качестве объектива используется зеркальная система (например, такая, как на рис. 1, в), телескоп называют рефлектором.

Мы не будем здесь обсуждать достоинства и недостатки различных оптических систем. Для ответа на вопросы, которые мы перед собой поставили, достаточно рассмотреть одну из оптических схем, например, простейший телескоп — трубу Кеплера (рис. 1, а).

Объективом трубы Кеплера служит длиннофокусная собирающая линза ( $L_1$ ). Эта линза дает в своей фокальной плоскости ( $F_1, F_1'$ ) первое действительное изображение удаленного объекта, которое рассматривается глазом через окуляр ( $L_2$ , также собирающая линза). Окуляр, играющий роль лупы, дает второе изображение (мнимое), которое и рассматривается глазом. Легко понять, что при телескопическом ходе лучей передний фокус окуляра совпадает с задним фокусом объектива и, следовательно, длина трубы  $l = f_1 + f_2$ , где

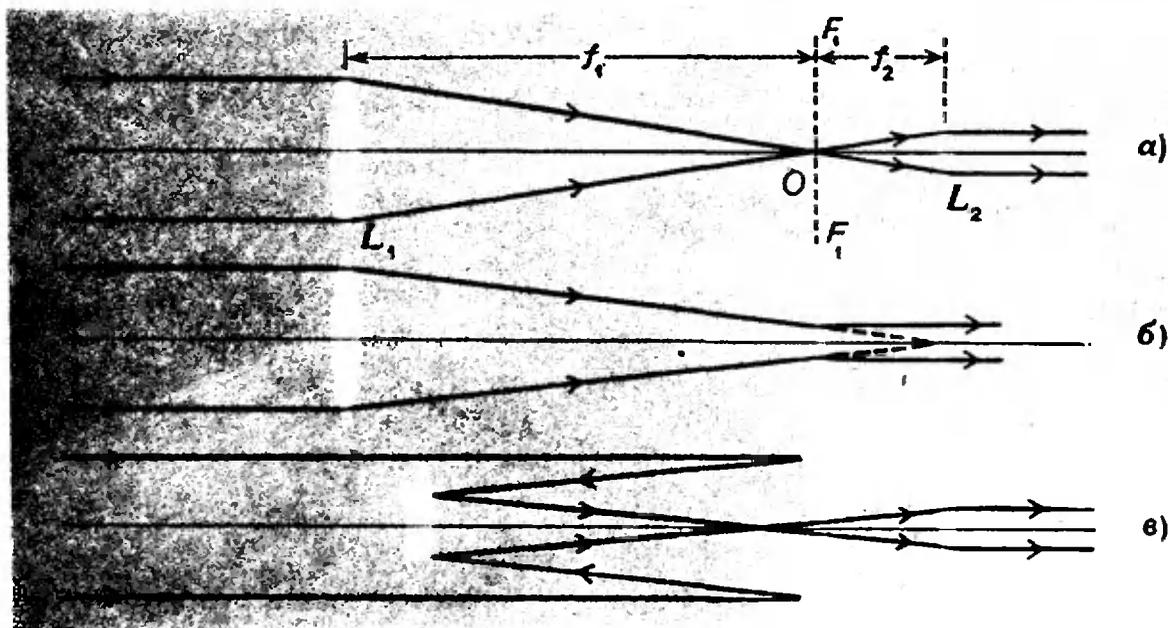


Рис. 1. а) Астрономическая труба Кеплера. б) Труба Галилея. в) Отражательный телескоп [рефлектор] системы Кассегрена, объективом телескопа служит система из вогнутого и выпуклого зеркал.

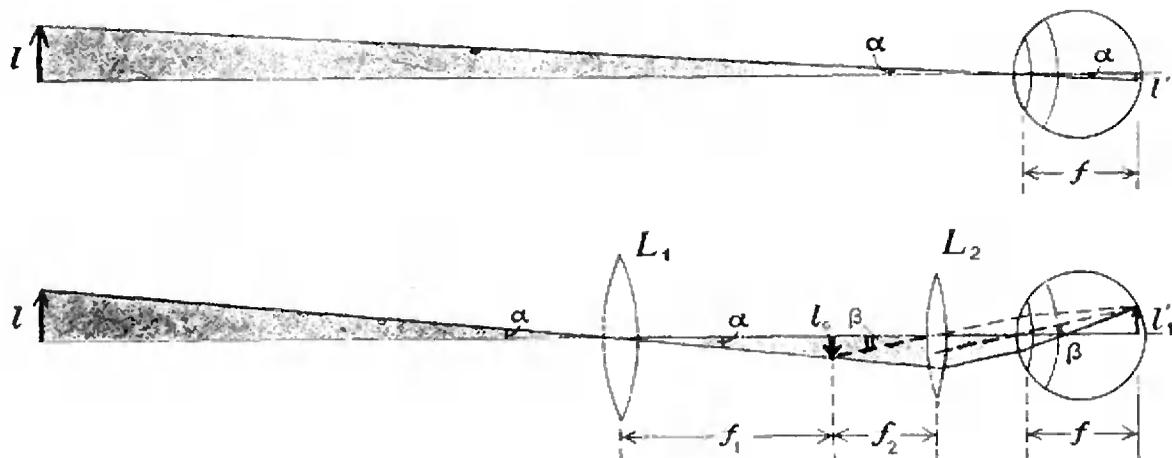


Рис. 2.

$f_1, f_2$  — фокусные расстояния объектива и окуляра.

Допустим, что с помощью трубы Кеплера мы рассматриваем поверхность Луны. Чем отличается наблюдаемая нами картина от той, что мы видели невооруженным глазом? Прежде всего, конечно, размерами. Если какие-то две точки лунной поверхности видны невооруженным глазом под углом  $\alpha$ , то при наблюдении в телескоп глаз видит их изображение под другим, большим углом  $\beta$  (рис. 2)\*. Угловое увеличение, даваемое телескопом, характеризуется

отношением  $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$ . Расстояние

между изображениями рассматриваемых точек лунной поверхности на сетчатке глаза в первом случае равно  $l' = \alpha f$ , а во втором —  $l'_1 = \beta f$  ( $f$  — фокусное расстояние хрусталика глаза);

оно изменяется в  $\gamma = \frac{l'_1}{l'} = \frac{\beta}{\alpha}$  раз.

Следовательно, угловое увеличение телескопа является также и мерой увеличения линейных размеров изображения на сетчатке глаза. Если линейные размеры изображения на сетчатке увеличиваются в  $\gamma$  раз, то площадь изображения увеличивается в  $\gamma^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$  раз.

\*) Будем для простоты считать, что углы  $\alpha$  и  $\beta$  достаточно малы, так что  $\sin \alpha \approx \alpha$  и  $\sin \beta \approx \beta$ .

Определим теперь, чему равно угловое увеличение телескопа. Для этого рассмотрим рисунок 3. Параллельный пучок лучей попадает в объектив  $L_1$  под углом  $\alpha$  к оптической оси. Пучок лучей выходящих из окуляра  $L_2$ , отклонился на угол  $\beta$  (пунктиром показана побочная оптическая ось окуляра). Из треугольников  $ABO_1$  и  $ABO_2$  получаем:

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{AO_1} = \frac{AB}{f_1};$$

$$\beta \approx \operatorname{tg} \beta = \frac{AB}{AO_2} = \frac{AB}{f_2}$$

( $f_1$  и  $f_2$  — фокусные расстояния объектива и окуляра соответственно). Следовательно,

$$\gamma = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{f_1}{f_2},$$

то есть увеличение, даваемое телескопом, численно равно отношению длин фокусных расстояний объектива и окуляра.

Теперь мы знаем, как сделать телескоп с большим увеличением: для этого нужны длиннофокусные объективы и короткофокусные окуляры. Но не следует забывать, что телескоп и глаз наблюдателя составляют единую оптическую систему. Поэтому при подборе оптимальных параметров объектива и окуляра необходимо учитывать и параметры глаза как оптического прибора. Разберемся в этом подробнее. Рассмотрим, на-

пример, вопрос о яркости изображения лунной поверхности, наблюдаемой в телескоп.

Яркость оценивается наблюдателем по освещенности изображения на сетчатке. Рассмотрим параллельный пучок лучей от некоторого малого элемента лунной поверхности, лежащего на оптической оси телескопа. Диаметр пучка лучей, выходящих из окуляра, равен, очевидно,  $d = \frac{D}{\gamma}$ ,

где  $D$  — диаметр объектива (то есть диаметр пучка лучей, проходящих в объектив).

Рассмотрим случай  $d < d_{зр}$ . В этом случае весь световой поток, попадающий в объектив, доходит до сетчатки (мы не учитываем здесь неизбежных потерь света в оптической системе, составляющих обычно даже в хороших инструментах 20—30%). Освещенность изображения на сетчатке пропорциональна световому потоку, проникающему в зрачок (следовательно, пропорциональна  $D^2$ ), и обратно пропорциональна площади изображения (то есть обратно пропорциональна квадрату увеличения телескопа  $\gamma^2 = \frac{f_1^2}{f_2^2}$ ).

Таким образом, при  $d < d_{зр}$  имеем

$$E \sim D^2 \left( \frac{f_2}{f_1} \right)^2.$$

В случае  $d > d_{зр}$  в зрачок будет проникать только часть светового по-

тока, поступающего в объектив, так как лучи, идущие через периферические части объектива, в зрачок не попадут. Из рисунка 4 видно, что в этом случае диаметр  $D'$  работающей части объектива равен

$$D' = \frac{f_1}{f_2} d_{зр} = \gamma d_{зр}.$$

Следовательно,

$$E' \sim (D')^2 \left( \frac{f_2}{f_1} \right)^2 = \left( \frac{f_1}{f_2} \right)^2 d_{зр}^2 \times \left( \frac{f_2}{f_1} \right)^2 = d_{зр}^2,$$

то есть

$$E' \sim d_{зр}^2.$$

Освещенность изображения протяженного предмета на сетчатке в случае невооруженного глаза  $E_0$  пропорциональна, очевидно,  $d_{зр}^2$ . Таким образом, при условии, что  $d > d_{зр}$ , освещенность изображения на сетчатке глаза такая же, как и в случае невооруженного глаза. При  $d < d_{зр}$  освещенность изображения на сетчатке глаза, вооруженного телескопом, меньше  $E_0$ .

Какое же увеличение телескопа целесообразно устанавливать? Ответ на этот вопрос сводится к правильному подбору окуляра под данный объектив.

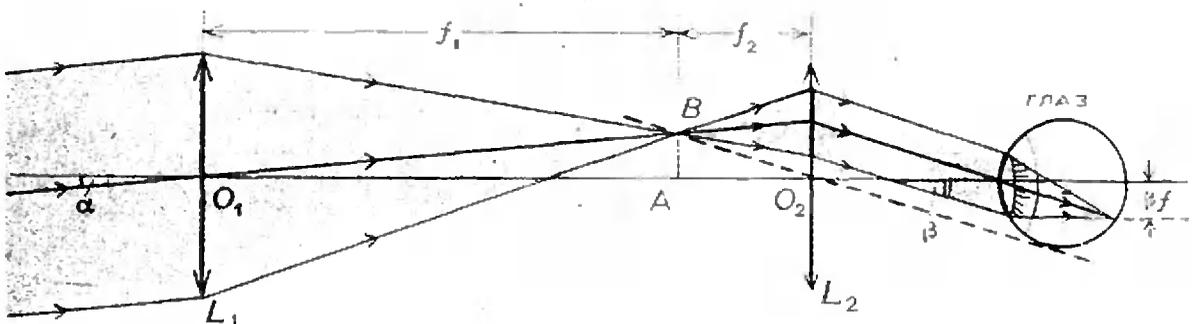


Рис. 3.

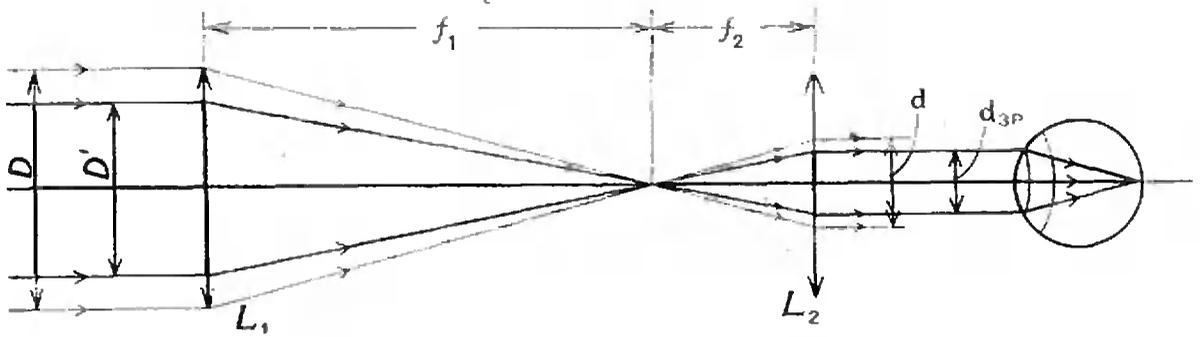


Рис. 4. Пучок лучей в телескопе. Изображен случай  $d > d_{3p}$ . Видно, что периферические части объектива не работают.

Заметим, что объектив является наиболее ответственной и дорогой частью любого инструмента; для изготовления большого объектива астрономического телескопа требуются многие годы кропотливого труда. Во всем мире в настоящее время насчитывается лишь два десятка телескопов-рефракторов с диаметром объектива от 25 дюймов и выше (1 дюйм = 2,54 см) и примерно такое же число телескопов-рефлекторов с диаметром зеркала свыше 40 дюймов. Крупнейший в мире рефрактор Иеркской обсерватории в США имеет диаметр объектива, равный 40 дюймам; у крупнейшего из действующих рефлекторов диаметр зеркала равен 200 дюймам (Маунт Паломар, США). В Советском Союзе строится рефлектор с диаметром зеркала 6 метров (около 250 дюймов).

Итак, нужно подобрать окуляр. Ясно, что всякий окуляр, при котором диаметр  $d$  выходящего пучка окажется больше  $d_{3p}$ , должен быть немедленно забракован. Как видно из рисунка 4, при таком окуляре мы не используем возможностей большого объектива, и вполне можно было бы обойтись объективом меньшего размера. Из расчетов, проведенных выше, следует, что при  $d < d_{3p}$  мы проигры-

ваем в яркости изображения. Таким образом, существуют весьма веские основания выбирать окуляр таким, чтобы  $d = d_{3p}$ . Как видите, телескоп должен быть в высокой степени приспособлен к человеческому глазу.

Увеличение телескопа при  $d = d_{3p}$  называется нормальным:

$$\gamma_{\text{норм}} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{D}{d_{3p}}.$$

При выборе увеличения астрономы принимают во внимание, что диаметр зрачка зависит от условий наблюдения: при дневных наблюдениях в глаз попадает много света, и зрачок сужается ( $d_{3p} \approx 3$  мм), при ночных наблюдениях зрачок расширяется ( $d_{3p} \approx 6$  мм). В соответствии с этим должно выбираться значение  $\gamma_{\text{норм}}$ . Обычно астрономы устанавливают увеличение несколько больше  $\gamma_{\text{норм}}$ . В этом случае изображение на сетчатке глаза оказывается более качественным, так как в значительной степени удается устранить искажения

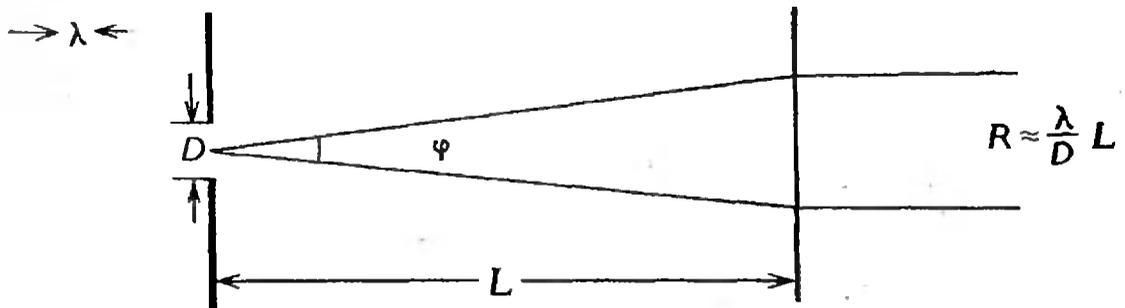


Рис. 5. Дифракция волны на малом отверстии. Угол расходимости дифрагированного пучка  $\varphi \approx \frac{2\lambda}{D}$ .

(абберации), вносимые глазной оптикой (работает не весь зрачок, а лишь его центральная часть).

Теперь мы сформулируем последний и очень важный вопрос. Мы видели, что при  $d < d_{зр}$  (при  $\gamma > \gamma_{норм}$ ) получается проигрыш в яркости изображения. Но допустим, что мы рассматриваем с помощью телескопа объект, обладающий значительной яркостью, и проигрыш в яркости при  $d < d_{зр}$  несуществен (например, при наблюдении поверхности Солнца все равно приходится ослаблять солнечный свет во много раз, чтобы не повредить глаза.) Выбрав увеличение  $\gamma > \gamma_{норм}$ , мы получим на сетчатке изображение большего размера. Увидим ли мы при этом какие-либо новые детали объекта?

По существу это вопрос о качестве изображения, и его можно сформулировать иначе: в точности ли изображение подобно самому объекту? Ясно, что если оптическая система вносит aberrации, то такое подобие не существует. Но допустим, что оптическая система идеальна и наблюдение ведется при идеально спокойной атмосфере. Оказывается, что даже в этом случае изображение не точно подобно наблюдаемому объекту. Существуют искажения, которые обусловлены принципиально неустранимой причиной — дифракцией световых волн.

Дифракционные явления возникают при прохождении волн около препятствий. Эти явления протекают одинаково для волн любой физической природы. Проще всего ставить дифракционные опыты с волнами на поверхности воды. Для этой цели можно

использовать установку, описанную в статье «Волны в мелкой тарелке» («Квант» № 1, 1971). Мы будем говорить о дифракции световых волн. Если поместить на пути волн препятствие, в котором имеется небольшое отверстие, то можно наблюдать характерное дифракционное явление — расходимость волнового пучка. Рисунок 5 иллюстрирует явление. В теории дифракции показывается, что угол расходимости волнового пучка

приблизительно равен  $\varphi \approx \frac{\lambda}{D}$ , где  $\lambda$  —

длина падающей волны,  $D$  — размер отверстия. Если на достаточно большом расстоянии  $L$  за отверстием расположить экран, на нем можно увидеть характерную дифракционную картину, состоящую из ряда чередующихся светлых и темных областей (см. рис. 5). Радиус центрального светлого пятна, на долю которого приходится значительная часть энергии волнового пучка (около 85%),

приблизительно равен  $L \cdot \frac{\varphi}{2} = \frac{\lambda}{D} \cdot L$ .

Таким образом, из-за дифракции волны заходят в область геометрической тени. Можно сказать, что дифрагированный волновой пучок представляет собой совокупности волн, направления распространения которых

заклучены в интервале от  $-\frac{\varphi}{2}$  до  $+\frac{\varphi}{2}$ . Если

на пути такого пучка поставить линзу с фокусным расстоянием  $F$ , то в фокальной плоскости линзы образуется дифракционная картина подобно тому, как это изображено на рисунке 6. Радиус центрального

светлого пятна равен  $R \approx \frac{\varphi}{2} \cdot F \approx \frac{\lambda}{D} \cdot F$ .

Дифракция приводит к тому, что лучки не сходятся за линзой в одной точке (фокусе), как это получается по правилам геометрической оптики, а образуют освещенную область (см. рис. 6; масштаб дифракционной картины сильно увеличен). Осталось сделать последний шаг — убрать диафрагму с отверстием. Тогда роль такой диафрагмы будет играть просто оправа линзы, и в описанной выше формуле, определяющей размер центрального пятна, под  $D$  нужно понимать диаметр самой линзы.

Мы приходим к весьма важному выводу: изображение светящейся

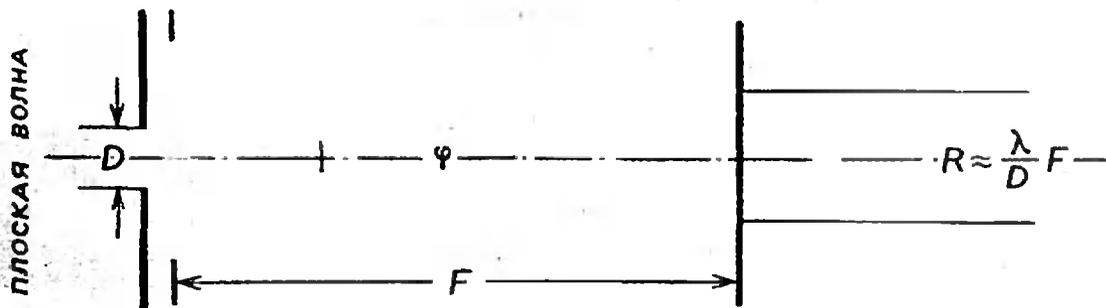
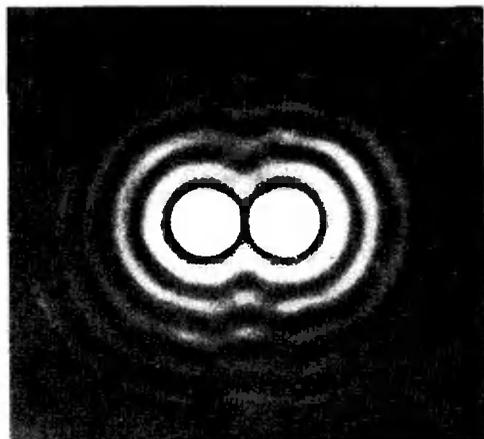
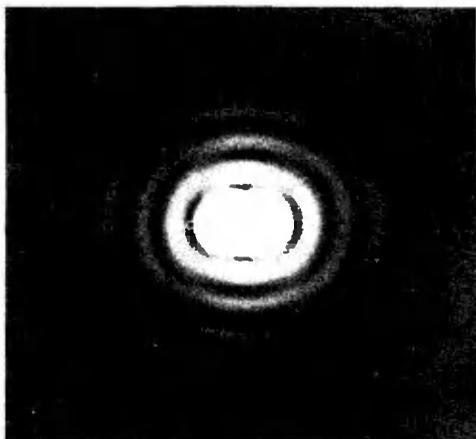


Рис. 6. Дифракция в фокусе линзы.



а



б

Рис. 7. Дифракционные картины в фокальной плоскости объектива при наблюдении двух близких звезд: а) звезды хорошо разрешаются, б) разрешение близко к предельному.

точки, даваемое объективом, представляет собой не точку, а дифракционное пятно. Именно наличие дифракции ставит предел возможности различать детали удаленных объектов с помощью телескопа.

Пусть, например, мы рассматриваем в телескоп две звезды, угловое расстояние между которыми мало. В фокальной плоскости объектива каждая звезда изображается в виде дифракционного пятна. При сравнительно большом угловом расстоянии между звездами эти изображения разделены (рис. 7, а). Но при уменьшении углового расстояния дифракционные пятна будут сближаться, и в какой-то момент изображения коснутся друг друга. При дальнейшем уменьшении углового расстояния между звездами их изображения будут сливаться (рис. 7, б), и вместо двух отдельных звезд мы будем видеть одно продолговатое пятно. В этом случае говорят, что объекты (звезды) остались неразрешенными. Наблюдения и расчеты показывают, что минимальное угловое расстояние между двумя светящимися точками (например, звездами), при котором их можно различить отдельно (разрешить) с помощью данного объектива, примерно равно  $\psi_{\min} \approx \frac{\lambda}{D}$ .

Две звезды или две точки протяженного объекта (например, Луны),

находящиеся на угловом расстоянии, меньшем  $\psi_{\min}$ , не разрешаются. Именно поэтому изображения звезд не отличимы от изображений точечных объектов.

Величину  $R = \frac{1}{\psi_{\min}} \approx \frac{D}{\lambda}$  часто

называют разрешающей способностью или разрешающей силой объектива.

Важно подчеркнуть, что большие объективы дают изображения более высокого качества, так как уменьшается влияние дифракции. Это одна из причин, побуждающих астрономов строить большие инструменты.

Теперь мы вплотную подошли к ответу на вопрос, сформулированный выше: можно ли увидеть новые детали объекта, если выбрать увеличение больше нормального? Изображение, полученное при помощи объектива, рассматривается глазом через окуляр телескопа. При  $\gamma \geq \gamma_{\text{норм}}$  (или  $d \leq d_{3p}$ ) световые пучки, выходящие из окуляра и попадающие в зрачок, не ограничиваются какими-либо дополнительными диафрагмами (включая сюда и зрачок). А это означает, что дифракционными явлениями на пути света от фокальной плоскости объектива до сетчатки можно пренебречь, и, следовательно, изображение на сетчатке подобно изображению в фокальной плоскости объектива. Мы ничего не выигрываем в качестве изображения и не улучшаем

разрешения телескопа, переходя к более высокому увеличению. Можно показать, что в случае  $\gamma < \gamma_{\text{норм}}$  (или  $d > d_{\text{зр}}$ ) изображение на сетчатке имеет более низкое качество, чем изображение в фокальной плоскости объектива (так как пучок ограничивается зрачком и, следовательно, еще раз испытывает дифракцию). Но этот случай мы уже забраковали, исходя из других соображений.

Проведем небольшой расчет. Пусть телескоп, в котором установлено нормальное увеличение, наведен на две близкие друг к другу звезды (для простоты одну из них расположим на оптической оси). Пусть звезды находятся на пределе разрешения данного телескопа, то есть

$$\alpha = \psi_{\text{min}} \approx \frac{\lambda}{D}.$$

В этом случае в фокальной плоскости (и на сетчатке глаза) образуется изображение такого типа, как на рисунке 7, б. Угловое расстояние между изображениями звезд равно

$$\beta = \alpha \cdot \gamma_{\text{норм}} = \frac{\lambda}{D} \cdot \frac{D}{d_{\text{зр}}} = \frac{\lambda}{d_{\text{зр}}}.$$

Но величина  $\frac{\lambda}{d_{\text{зр}}}$  является дифракционным пределом разрешения самого глаза. Приняв для  $\lambda$  значение  $6 \cdot 10^{-5}$  см и для  $d_{\text{зр}}$  значение 0,3 см, получим  $\frac{\lambda}{d_{\text{зр}}} = \frac{6 \cdot 10^{-5}}{0,3} = 2 \cdot 10^{-4}$  рад  $\approx 0,7'$ . Эта цифра находится в хорошем согласии с известным значением предельного угла для глаза: обычно считают, что глаз разрешает две светящиеся точки, если угловое расстояние между ними не менее одной угловой минуты.

Теперь легко вычислить и радиусы дифракционных пятен на сетчатке. В рассматриваемом примере центр одной дифракционной картины расположен на оптической оси, центр другой смещен на расстояние, равное радиусу центрального пятна (рис. 7, б, случай предельного разрешения)

$$\rho = \beta f = \frac{\lambda}{d_{\text{зр}}} f.$$

Радиус дифракционного изображения каждой звезды (а, следовательно, и площадь) не зависит от свойств самого телескопа (при условии, что  $\gamma = \gamma_{\text{норм}}$ ). Но ведь световая энергия, которую перехватывает объектив, пропорциональна квадрату его диаметра. Отсюда следует, что и освещенность дифракционного изображения звезды на сетчатке глаза будет изменяться пропорционально  $D^2$ . Вспомним, что освещенность изображения протяженного объекта при  $\gamma = \gamma_{\text{норм}}$  не зависит от  $D$ . Это значит, что в телескоп звезды можно наблюдать и днем на фоне яркого неба.

Чем больше диаметр объектива телескопа, тем менее яркие звезды можно увидеть с помощью такого телескопа. Для характеристики яркости звезд астрономы используют определенную шкалу звездных величин. По этой шкале увеличение звездной величины на единицу соответствует уменьшению ее яркости в 2,5 раза. Полярная звезда, например, и пять звезд Большой Медведицы относятся к звездам второй величины. Невооруженным глазом человек видит звезды до 6-й величины (таких звезд в обоих полушариях около 6 тысяч). С помощью четырехдюймового телескопа можно видеть на пределе звезды около 12-й величины (2 миллиона звезд). Сорокадюймовый рефрактор Йеркской обсерватории позволяет увидеть звезды до 17-й величины (150 миллионов). Наконец, пятиметровый гигант обнаруживает звезды слабее 20-й величины (более 1 миллиарда).

Таким образом, проникающая сила телескопа, оцениваемая предельной наблюдаемой звездной величиной, закономерно растет с ростом диаметра объектива.

Основной характеристикой телескопа является диаметр объектива. Окуляр правильно сконструированного визуального телескопа должен быть подобран под данный объектив с учетом свойств человеческого глаза. Можно сказать, что окуляр служит

для согласования пучка лучей, прошедших через объектив, с глазом.

Если мы сравним два телескопа с диаметрами объективов  $D_1$  и  $D_2$  ( $D_1 > D_2$ ), то больший телескоп дает выигрыш в световом потоке, равный

отношению  $\frac{D_1^2}{D_2^2}$ ; в то же время он

дает выигрыш и в разрешающей способности в  $\frac{D_1}{D_2}$  раз. Разумеется,

такой выигрыш может быть реализован в случае объективов высокого качества и при достаточно хороших атмосферных условиях.

Мы часто думаем о телескопе как о комбинации высококачественных оптических элементов, забывая при этом, что астрономический телескоп является сложнейшим инженерно-техническим сооружением, в котором высокая оптическая точность сочетается с совершенством механической конструкции. И тем не менее, в основе устройства телескопа лежат простые физические принципы. Обсуждению этих принципов и была посвящена настоящая статья.

### У п р а ж н е н и я

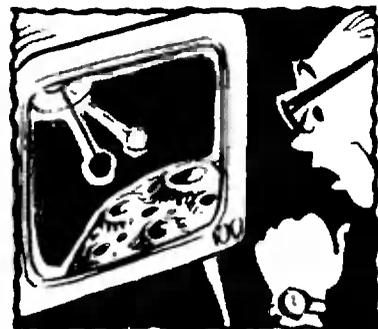
1. Можно ли с помощью самого большого в мире телескопа ( $D=5$  м) увидеть на поверхности Луны Советский луноход ( $H \approx 1$  м)? Каков размер деталей лунной поверхности, которые можно изучать с помощью такого телескопа?

2. В школьном физическом кружке построена зрительная труба Кеплера, объективом которой служит линза с фокусным расстоянием  $F=50$  см и диаметром  $D=75$  мм. Каково фокусное расстояние окуляра, если при наблюдении с помощью трубы Кеплера Луна кажется в 8 раз менее яркой по сравнению с наблюдением невооруженным глазом? Потери света в трубе составляют 50%. Диаметр зрачка принять равным 3 мм. Какой окуляр следовало бы использовать в данном случае?

3. Наблюдатель рассматривает удаленный предмет с помощью трубы Кеплера. В качестве объектива и окуляра трубы используются линзы с фокусными расстояниями  $F_1=30$  см и  $F_2=5$  см. Наблюдатель видит четкое изображение предмета, если расстояние между объективом и окуляром не менее  $L_1=33$  см и не более  $L_2=34,5$  см. На каких расстояниях этот наблюдатель отчетливо видит предметы невооруженным глазом?

## ИЗМЕРЕНИЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ НА ЛУНЕ С ПОМОЩЬЮ ТЕЛЕВИЗОРА

Преподаватель американского колледжа Хупер смотрел у себя дома по телевизору высадку космонавтов на Луну. Вдруг он заметил, что из одного из отсеков корабля свисал, качаясь на чем-то вроде каната, какой-то тяжелый предмет. Простая, но красивая идея пришла ему в голову. Посмотрев на свои часы, он определил, что период колебаний, за которыми он следил, составляет около 5 сек.



Длину подвеса можно было оценить, сравнивая его с ростом космонавта, стоявшего рядом; она оказалась равной примерно 1 м. Отсюда, пользуясь формулой маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

можно было оценить и ускорение силы тяжести на поверхности Луны

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} = \frac{4 \cdot 3,14^2 \cdot 100}{5^2} \approx \approx 160 \left( \frac{\text{см}}{\text{сек}^2} \right).$$

Эта величина почти точно равна 1/6 ускорения силы тяжести на Земле. Так, не выходя из дому, Хупер произвел настоящий «космический» эксперимент.

Д. Бородин

# Косоугольные координаты и области Дирихле

В.А. Тутенмахер

В «Кванте» № 11 (1971) были помещены условия трех задач II тура 10 класса, предложенные на Всесоюзной математической олимпиаде 1971 г. В этой статье решается третья, последняя из этих задач.

Вот ее формулировка:

а) Рассмотрим функцию  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ .

Доказать, что для любой точки  $(x, y)$  найдутся такие целые числа  $(m, n)$ , что  $f(x-m, y-n) = (x-m)^2 + (x-m)(y-n) + (y-n)^2 \leq \frac{1}{2}$ .

б) Обозначим через  $\bar{f}(x, y)$  наименьшее из чисел  $f(x-m, y-n)$  при всех целых  $m$  и  $n$ . Утверждение задачи а) состояло в том, что выполнено неравенство  $\bar{f}(x, y) \leq \frac{1}{2}$  для всех  $(x, y)$ . Докажите, что на самом деле верно более сильное неравенство  $\bar{f}(x, y) \leq \frac{1}{3}$ . Найдите все точки, для которых имеет место равенство  $\bar{f}(x, y) = \frac{1}{3}$ .

в) Рассмотрим функцию  $f_a(x, y) = x^2 + axy + y^2$  ( $a \geq 0$ ). Найдите какое-либо число  $C$  (зависящее от  $a$ ) так, чтобы для всех  $(x, y)$  выполнялось неравенство

$$|\bar{f}_a(x, y)| \leq C.$$

Постарайтесь найти точную оценку.

Путь к решению этой задачи состоит в том, чтобы перевести ее условие на язык геометрии. С этой целью введем на плоскости косоугольную систему координат.

Это делается так (рис. 1).

Возьмем на плоскости какой-нибудь отрезок  $l$  и будем считать его единицей длины. Проведем две направленные прямые так, чтобы они пересеклись под углом  $\varphi$  ( $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ).

Точку пересечения этих прямых обозначим буквой  $O$ . Будем считать, что эти прямые — числовые оси  $Ox$ ,  $Oy$ , а точка  $O$  — начало отсчета на каждой из них.

Пусть на плоскости взята какая-нибудь точка  $M$ . Проведем через нее прямые, параллельные осям  $Ox$  и  $Oy$ . Отметим точки  $M_1$  и  $M_2$  пересечения этих прямых с осями  $Ox$  и  $Oy$ . Точка  $M_1$  лежит на числовой оси  $Ox$ , поэтому ей соответствует определенное число  $x$  — ее координата на этой оси. Точке  $M_2$  тоже соответствует определенное число  $y$  — ее координата на оси  $Oy$ .

Обратно, каждому двум числам  $x$ ,  $y$  можно поставить в соответствие некоторую точку плоскости, у которой  $x$  и  $y$  будут координатами.

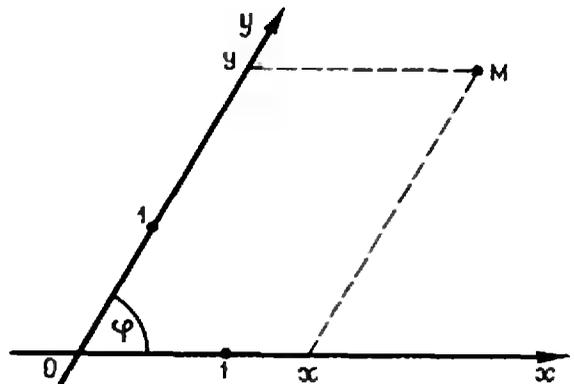


Рис. 1.

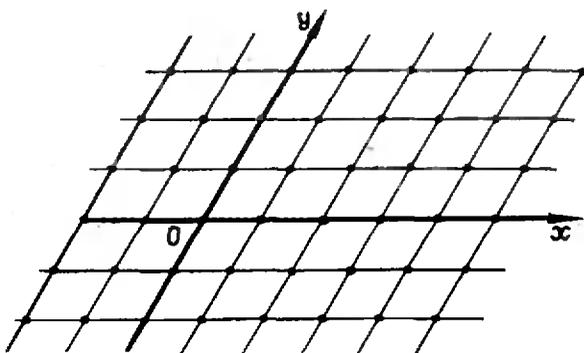


Рис. 2.

Таким образом мы установили взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и парами чисел.

Точки с целыми координатами  $(m, n)$  — это узлы сетки, составленной из ромбов со стороной 1 и углом  $\varphi$  (см. рис. 2).

Выясним теперь, как будет выглядеть в этой системе координат формула для расстояния между двумя точками  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$ . Для этого проведем через точки  $A$  и  $B$  прямые, параллельные осям координат (см. рис. 3). Отрезок  $AB$  является диагональю параллелограмма, образованного этими прямыми. Длины сторон параллелограмма равны  $|x_1 - x_2|$  и  $|y_1 - y_2|$ . Можно проверить (воспользовавшись теоремой косинусов), что

$$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + 2 \cos \varphi (x_1 - x_2) \times (y_1 - y_2) + (y_1 - y_2)^2.$$

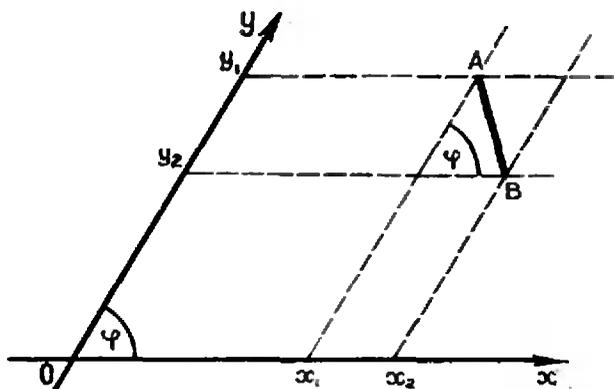


Рис. 3.

Положим теперь  $\cos \varphi = \frac{a}{2}$  (конечно, при условии, что  $0 < a < 2$  \*) и вернемся к исходной задаче. Ее формулировка будет выглядеть вкратце так.

Пусть  $\bar{f}_a(x, y)$  — квадрат расстояния от точки  $(x, y)$  до ближайшего к ней узла сетки.

а) Доказать, что  $\bar{f}_1(x, y) \leq \frac{1}{2}$ .

б) Доказать, что  $\bar{f}_1(x, y) \leq \frac{1}{3}$ .

в) Найти максимум функции  $\bar{f}_a(x, y)$ .

Для того чтобы ответить на все эти вопросы, мы сначала решим такую чисто геометрическую задачу. Имеется сетка (см. рис. 2), состоящая из одинаковых ромбов. Для каждого узла сетки надо найти множество точек, расстояние от которых до этого узла не больше, чем расстояние до всех других узлов. Будем называть в дальнейшем это множество областью Дирихле \*\*).

Для того чтобы найти области Дирихле, сделаем следующее построение.

Во всех ромбах сетки проведем меньшие диагонали. В результате мы

\*) Эти ограничения на  $a$  наиболее естественны. В конце статьи мы рассмотрим случай  $a \geq 2$ .

\*\*\*) Известный немецкий математик П. Г. Лежен Дирихле с большим успехом использовал это понятие в своих работах по теории чисел.

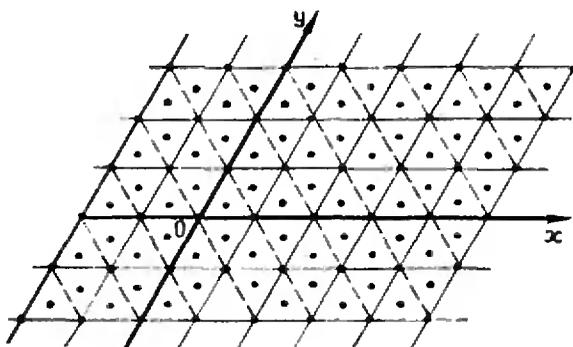


Рис. 4.

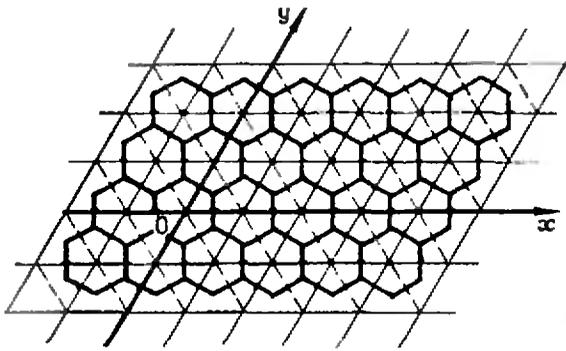


Рис. 5.

получим сетку с теми же узлами, состоящую из одинаковых остроугольных равнобедренных треугольников (см. рис. 4).

Внутри каждого треугольника отметим красным цветом центр его описанной окружности. Затем соединим красными отрезками центры треугольников, имеющих общую сторону (см. рис. 5).

Эта сетка разбивает плоскость на одинаковые шестиугольники. Внутри каждого из них лежит ровно один узел, который является его центром симметрии и центром его описанной окружности.

Мы утверждаем, что полученные шестиугольники и являются областями Дирихле. В самом деле, рассмотрим, например, шестиугольник с центром в узле  $O$ . Каждая его сторона является перпендикуляром к отрезку, соединяющему узел с одним из соседних к нему узлов. Причем этот перпендикуляр проходит через середину соответствующего отрезка (рис. 6). Следовательно, точки шестиугольника находятся от точки  $O$  на расстоянии не большем, чем от узлов сетки, окружающих точку  $O$ . (Здесь мы пользуемся известным фактом: если провести перпендикуляр через середину отрезка  $AB$ , то он разбивает плоскость на две части: одна из этих частей состоит из точек, которые ближе к  $A$ , чем к  $B$ , а другая — из точек, которые ближе к  $B$ , чем к  $A$ .)

Вообще говоря, нам надо доказать, что каждая точка шестиугольника нахо-

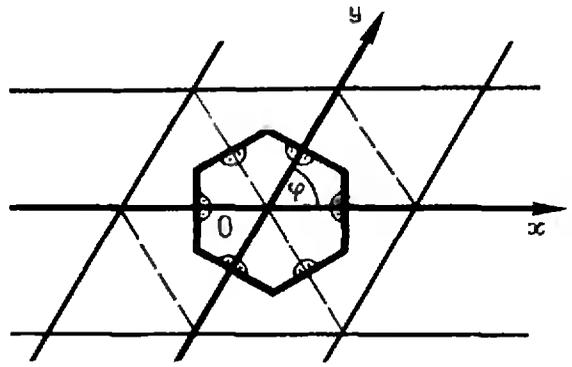


Рис. 6.

дится не дальше от точки  $O$ , чем от всех других узлов сетки. Мы доказали это только для соседних с  $O$  узлов сетки, и мы можем пока утверждать, что область Дирихле является частью этого шестиугольника.

Приведем рассуждение, показывающее, что она с ним совпадает.

Заметим, что область Дирихле для всех узлов также лежит в соответствующих им шестиугольниках. Но по своему определению области Дирихле должны покрывать всю плоскость, так как всякая точка плоскости отстоит по меньшей мере от одного из узлов не дальше, чем от всех других. Следовательно, каждая область Дирихле заполняет весь свой шестиугольник.

Теперь уже легко ответить на все поставленные в задаче вопросы.

Ответим сразу на вопрос в). Наиболее удаленные от узлов решетки точки располагаются, очевидно, в вершинах шестиугольников (см. рис. 6). Расстояние от любой из этих точек до ближайшего узла — центра шестиугольника — равно радиусу описанной около шестиугольника окружности. Он равен радиусу описанной около равнобедренного треугольника с углом  $\varphi$  при вершине и боковыми сторонами, равными 1. Следовательно, наибольшее расстояние равно  $\frac{1}{2 \cos \frac{\varphi}{2}}$ .

Квадрат расстояния  $(\bar{f}_a(x, y))$  для этих точек равен

$$\frac{1}{4 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{2(\cos \varphi + 1)} = \frac{1}{a + 2};$$

$$(2 \cos \varphi = a, 0 < a < 2).$$

Поэтому для всех точек  $(x, y)$  плос-

кости мы получаем

$$\bar{f}_a(x, y) \leq \frac{1}{a+2}. \quad (*)$$

При  $a=1$  (пункт б) задачи)

$$\bar{f}_1(x, y) \leq \frac{1}{3}.$$

В этом случае

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \text{ и } \varphi = 60^\circ,$$

следовательно, красная сетка состоит из правильных шестиугольников со стороной  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , а равенство

$$\bar{f}_1(x, y) = \frac{1}{3}$$

достигается в вершинах этих шестиугольников, координаты которых задаются следующими двумя формулами:

$$\left( \frac{1}{3} + m, \frac{1}{3} + n \right),$$

$$\left( -\frac{1}{3} + m, -\frac{1}{3} + n \right),$$

где  $m$  и  $n$  — произвольные целые числа.

При  $a=0$  и  $a=2$  задача сильно упрощается.

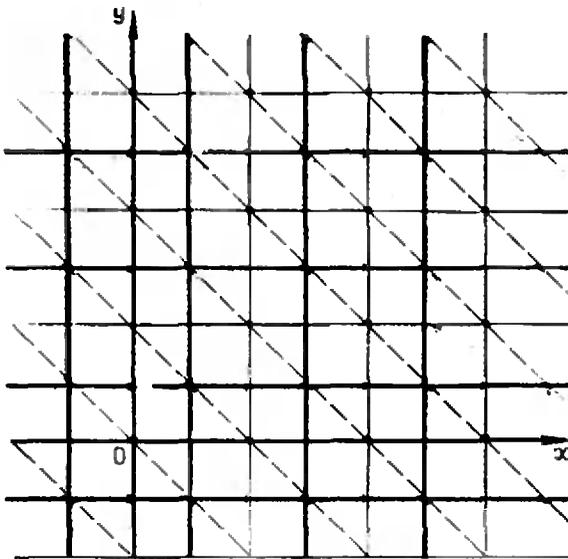


Рис. 7.

Действительно,  $f_0(x, y) = x^2 + y^2$ . Все наши рассуждения сохраняются (можно считать  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  и система координат  $Oxy$  получается прямоугольной (см. рис. 7)), только вместо шестиугольников получаются квадраты и оценка  $\bar{f}_0(x, y) \leq \frac{1}{2}$ . Случай  $a=2$ ,

когда  $f_2(x, y) = (x+y)^2$ , нужно разбирать отдельно, здесь  $\bar{f}_2(x, y)$  равно квадрату разности между числом  $x+y$  и ближайшим к нему целым числом, так что максимум  $\bar{f}_2(x, y)$  равен  $\frac{1}{4}$ .

Итак, оценка  $(*) \bar{f}_a(x, y) \leq \frac{1}{a+2}$  верна и при  $a=0, a=2$ .

Остается рассмотреть случай  $a > 2$ . Покажем, что для каждой точки  $(x, y)$  наименьшего из чисел  $\bar{f}_a(x-m, y-n)$  не существует.

В самом деле, пусть  $a = 2 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$ . Зафиксируем точку  $(x, y)$  и рассмотрим  $f_{2+\varepsilon}(x-k, y+k)$ , где  $k$  — какое-то целое число:

$$f_{2+\varepsilon}(x-k, y+k) = (x-k)^2 + 2(x-k)(y+k) + (y+k)^2 + \varepsilon(x-k)(y+k) = -\varepsilon k^2 + \varepsilon(x-y)k + (x+y)^2 + \varepsilon xy.$$

Мы получили квадратный трехчлен относительно  $k$ , первый коэффициент которого меньше нуля. Следовательно, при  $k$ , стремящемся к  $+\infty$ , эта величина будет стремиться к  $-\infty$ , то есть может быть сделана меньше любого отрицательного числа. Таким образом,  $\bar{f}_a(x, y)$  не определено при  $a > 2$ .

Более естественным ограничением на  $a$  в условии задачи было бы не  $a \geq 0$ , а  $-2 \leq a \leq 2$ .

Для отрицательных  $a$  ( $-2 < a < 0$ ) решение переносится без всяких изменений: полагаем  $a = 2 \cos \varphi$  и берем угол  $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ .

Поскольку решетка получается в этом случае такая же, как и при угле  $\varphi = \pi - \varphi$ , мы получаем такую же оценку, что и при острых углах, то есть  $\bar{f}_a(x, y) \leq \frac{1}{2+|a|}$ .

# Почему Луна не из чугуна?

Луна ведь обыкновенно делается в Гамбурге; и прескверно делается.

Н. В. Гоголь. «Записки сумасшедшего».

Как известно, лапутянские ученые поведали Гулливеру, что у Марса есть два спутника. Больше того, лапутяне сообщили, на каких расстояниях от Марса эти спутники движутся. Земные астрономы открыли их лет на сто позже, причем многие детали сообщения лапутян подтвердились. Откуда же Свифт знал о спутниках Марса?

Долго тут видели простое совпадение, пока не пришла мода сваливать подобные «чудеса» на пришельцев из космоса. По мнению некоторых лиц, пришельцы в закодированном виде сообщили людям ряд астрономических сведений. Сохранялись эти сведения разными способами — в сказках, песнях, мифах.

Очевидно, передаваемый детьми из поколения в поколение диалог: «Почему Луна не из чугуна? — Потому что на Луну не хватило б чугуна», — тоже представляет собой отрывок из сведений о поверхности Луны, сообщенных пришельцами. Следовательно, рано или поздно, а наука должна была подтвердить заключенную в этом диалоге идею.

Действительно, исследование Луны показало, что Луна содержит 15% железа (а Земля 35%). Кроме того, отсутствие магнитного поля у Луны объясняется либо отсутствием, либо гораздо меньшим объемом расплавленного, обогащенного железом ядра. А именно конвекционными движениями в этом ядре Земли сейчас и объясняют ее магнитное поле. И, наконец, удельный вес Земли 5,5, а Луны всего 3,34 г/см<sup>3</sup>, что соответствует

плотности вещества, состоящего в основном из силикатов земной коры. По мнению профессора С. Ранкорна (Англия), можно полагать, что и 4,5 миллиарда лет назад, при образовании Земли и ее спутника, Луна уже получила значительно меньше железа. Почему? На этот вопрос ответа нет. Возможно, пришельцы знали это, но продолжение диалога утеряно при бесконечных повторениях.

Из чего же все-таки сделана Луна, раз уж на нее не хватило чугуна? Для ответа на этот вопрос нам приходится искать другие источники. Как известно, барон Мюнхаузен открыл на Земле остров, состоящий из сыра. С его слов это замечательное и достоверное сообщение было опубликовано Г. А. Бергером еще в 1786 году. С тех пор неоднократно появлялись предположения, что и Луна состоит из того же материала. Впрочем, вопрос о том, из какого сорта сыра состоит Луна, вызывал жесткие дискуссии.

Известному американскому геофизику профессору О. Андерсону из Колумбийского университета было поручено измерить скорость распространения звука в лунных породах и найти аналоги среди земных пород. Результаты, естественно, ждали с нетерпением.

Под новый год О. Андерсон разослал своим знакомым открытку.

Вот вольный перевод стихотворения вверху открытки:

Снизшло к нам озаренье,  
И исчезли все сомненья,  
Сообщаем всему миру,  
Что Луна — головка сыру.

Эта заметка заимствована из журнала «Природа», № 12, 1971. Перепечатывается с небольшими изменениями.



If brightens the spirits  
In times like these,  
To know the Moon  
is made of cheese.

Внизу профессор О. Андерсон приводит скорости распространения звука  $v_{зв}$  (км/сек) в исследованных образцах:

Лунные породы и сыры	Скорость звука, $v_{зв}$ (км/сек)
Образец лунной породы 10 017 . . .	1,84
Норвежский сыр . . . . .	1,83
Итальянский сыр . . . . .	1,75
Итальянский сыр (римский) . . . . .	1,75
Вермонтский сыр . . . . .	1,72
Швейцарский сыр . . . . .	1,65
Висконсинский сыр . . . . .	1,57
Образец лунной породы 10 046 . . .	1,25

Как видно из таблицы, по данному физическому параметру показатели для сыров совпадают с показателями для образцов лунных пород. Таким образом, можно считать, что именно сыр — земной аналог лунного грунта. К сожалению, из приведенной таблицы по-прежнему неясно,

какой именно сорт сыра играет эту роль. Однако удалось решить и эту загадку.

Сейсмические колебания лунной почвы после сбрасывания на Луну взлетных ступеней ракет затухали не за секунды, как полагалось по всем правилам, а за десятки минут. Выказывалось предположение, что это может быть вызвано существованием каких-то таинственных полостей, происхождение которых неизвестно. Но ведь в сыре-то (по крайней мере в некоторых сортах) обязательно должны быть дырки! Пересчитайте на соответствующие размеры, и непонятный эффект будет полностью объяснен. Более того. Так как самые крупные дыры встречаются в сыре швейцарском, то решается, наконец, и вопрос о сорте сыра.

Итак, Луна не из чугуна, а из швейцарского сыра. Отсюда совет ученым — внимательно пересмотреть весь фольклор и все детские считалки. Лучше всего поручить это ЭВМ.

М. А. Корец,  
З. Л. Позниовский



## А. Н. Виленкин, А. И. Шнирельман

Однажды два школьника Алеша и Боря нашли монетку и стали думать, как ее разделить между собой, чтобы было по-честному. Решено было подбросить найденную монетку: если она упадет кверху решеткой (цифрой), то ее возьмет Алеша, а если сверху окажется герб, то монетка достанется Боре. Так они и сделали. Монетка досталась Алеше.

На другой день они опять нашли монетку, только на этот раз с ними был еще Витя. Теперь монетку надо было делить уже на троих. Для этого под рукой была лишь монетка.

Школьники начали рассуждать. «Если бы с нами был еще Гриша, то проблема была бы решена — мы бы подбросили монетку два раза и распределили ее в зависимости от выпаданий решетки и герба следующим образом: РР — Алеше, РГ — Боре, ГР — Вите, ГГ — Грише. Но Гриша не появлялся, и школьники начали думать.

Первым нарушил молчание Витя. Он сказал: «Гриши нет, но давайте считать, что он тут, подбросим монетку два раза и посмотрим, кому она должна достаться. Если Грише, то бросим ее заново, а если кому-нибудь из нас, то он ее и возьмет.

В этот момент Алеша придумал еще один способ. Алеша вспомнил, как им рассказывали про приближенные действительных чисел десятичными дробями, и провел целое математическое исследование. Вот что он сказал.

«Ребята! Я вспомнил, как мы разделили монетку вчера, и думаю, что мы можем так же разделить ее и сегодня». Ребята, конечно, не поняли, и Алеша начал объяснять.

«Бросания монетки можно рассматривать как определение очередной цифры некоторого числа. Выпаданию решетки сопоставим цифру 0, а гербу — 1. Теперь возьмем отрезок числовой оси  $(0, 1)$ ; числа в нем имеют вид

$$A = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

Каждая из цифр  $a_i$  может быть равна 0 или 1 — я считаю, что число  $A$  записано в двоичной системе счисления\*). При первом бросании мы определяем первую цифру  $a_1$  числа  $A$ , при втором — вторую цифру и так далее.

\*) Алеша читал статью И. М. Яглома «Системы счисления» («Квант» № 6, 1970) и Р. С. Гутера «Вычислительные машины и системы счисления» («Квант» № 9, 1971).

Геометрически это можно изобразить так. При первом бросании мы определяем, в правой или в левой половине отрезка  $(0, 1)$  лежит число  $A$ . Если  $a_1=0$ , то в левой, а если  $a_1=1$ , то в правой. Затем мы эту половину делим пополам и, еще раз бросая монетку, определяем цифру  $a_2$ , то есть ту четверть отрезка  $(0, 1)$ , в которой лежит  $A$ , и так далее.

Вчера мы сделали так: разбили отрезок  $(0, 1)$  пополам, одну половину — отрезок  $(0, \frac{1}{2})$  — выделили мне, а другую — отрезок  $(\frac{1}{2}, 1)$  — Боре. Затем мы нашли, в чью часть отрезка попало число  $A$ . Для этого мы определили число  $A$  с нужной нам степенью точности (потребовалось ровно одно подбрасывание монетки, поскольку нас интересует только цифра  $a_1$ ). Если  $a_1=0$ , то монетку брал я, если  $a_1=1$ , то Боря.

А сегодня мы можем разделить отрезок на три равные части:  $(0, \frac{1}{3})$  — мне,  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  — Боре,  $(\frac{2}{3}, 1)$  — Вите, — и затем бросаниями монетки определить с достаточной точностью число  $A$ , а следовательно, и владельца монетки».

Боря начал спорить. Он сказал, что последовательности  $0,0111\dots$  и  $0,1000\dots$  равны в двоичной системе одному и тому же числу  $\frac{1}{2}$ . Если бы они были вдвоем, то было бы как раз удобно последовательность  $0,0111\dots$  отнести в Алешину часть, а последовательность  $0,1000\dots$  — в Борину. Но теперь число  $A$  может оказаться равным  $\frac{1}{3}$  или  $\frac{2}{3}$ , поэтому, во-первых, надо оговорить, кому принадлежит эта точка; во-вторых, для определе-



Рис. 2.

ния числа  $A$  с достаточной степенью точности может потребоваться бесконечное число бросаний, а это им не под силу; в-третьих, если при первом бросании выпадет 1, то Витя потеряет спортивный интерес, а если выпадет 0, то в роли наблюдателя останется Алеша; в-четвертых...

Споры продолжались, но тут заговорил и Витя. Он сказал вот что. «У нас есть два способа разделить монетку на троих и один способ разделить ее на двоих. Давайте этим способом определим, каким из двух способов делить ее на троих, и разделим, а то домой пора — сегодня «Динамо» играет».

Алеша и Боря сразу согласились. Боря подбросил монетку, выпал Витин способ, а еще после двух бросаний монетка и досталась Вите. Ребята пошли домой, обсуждая достоинства и недостатки предложенных ими способов, а также пытаясь оценить, сколько бросаний могло реально потребоваться по Алешину способу.

Попробуйте и вы решить несколько задач, предположив, что ребята



Рис. 1.



Рис. 3.

нашли хорошую монетку, при бросании которой в среднем в половине случаев выпадает герб, а в половине — решетка.

1. Проверьте, что после  $k$  бросаний определен лишь отрезок длины  $2^{-k}$ , в котором лежит точка  $A$ .

2. По Алешинному способу хозяин монетки не выявлен, если часть, указанная монеткой, содержащая по определению точку  $A$ , содержит также одну из «критических» точек  $1/3$  или  $2/3$ . Выпишите последовательности, соответствующие этим точкам. Найдите, в какой части случаев (после  $k$  бросаний) мы все еще рискуем оказаться в одной из указанных точек. (Доказав, что выпадание монетки по строго определенному закону маловероятно, мы избавимся от первого Боринного возражения.)

3. Проверьте, что Витин способ можно описать в Алешинной терминологии так. Мы определяем с помощью монетки число  $A$ , но отрезок  $(0, 1)$  распределяем более хитро:

Алеша:

$$\left(0, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{12}{16}, \frac{13}{16}\right), \left(\frac{60}{64}, \frac{61}{64}\right), \dots$$

Боря:

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right), \left(\frac{13}{16}, \frac{14}{16}\right), \left(\frac{61}{64}, \frac{62}{64}\right), \dots$$

Витя:

$$\left(\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{14}{16}, \frac{15}{16}\right), \left(\frac{62}{64}, \frac{63}{64}\right), \dots$$

При таком разбиении отрезка  $(0, 1)$  возникает много «критических» точек, как Витя предлагал их распределять?

4. Докажите, что доля случаев, в которых один из школьников после  $2k$  бросаний монетки получает монетку (по Витиному способу), равна сумме длин тех «его» частей отрезка  $(0, 1)$ , в которых может оказаться точка  $A$  после  $2k$  бросаний.

5. Докажите, что Витин способ выбора владельца монетки справедлив.

6. Используя задачу 1, обобщите задачу 4 для Алешинного способа в предположении, что после  $2k$  бросаний владелец монетки определен.

7. Докажите, что Алешин способ справедлив.

8. Используя задачу 4, найдите долю случаев, в которых после  $2k$  бросаний владелец монетки не определен

а) по Алешинному способу;

б) по Витиному способу.

Какой из способов рациональнее? Ответив на этот вопрос, вы ответите и на второе Боринно возражение.

## ДВЕ ИГРЫ

### Игра в пешки

Имеется прямоугольная клетчатая доска размером  $m \times n$  и пешки:  $m$  белых и  $m$  черных. В начальной позиции пешки расположены на доске так, что в каждой вертикали имеется ровно одна белая и одна черная пешка, причем белая пешка должна быть расположена выше черной пешки (рис. 1).

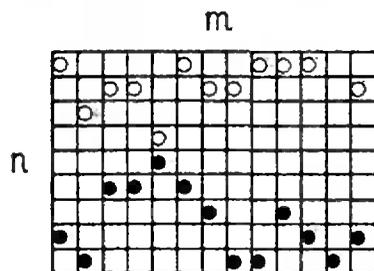


Рис. 1.

Играют двое. За ход разрешается одну любую (свою) пешку передвинуть по вертикали на любое (ненулевое) число клеток доски вперед или назад. Перескакивать через пешки противника или занимать клетки, в которых они расположены, не разрешается. Выигрывает тот, кто запер своего соперника, не оставив ему возможности произвести очередной ход. (На рисунке 2 изображен проигрыш черных.) И, наконец, последнее правило: белые начинают.

Определите, при каких начальных позициях выигрывают белые вне зависимости от стратегии черных, а при каких — черные.

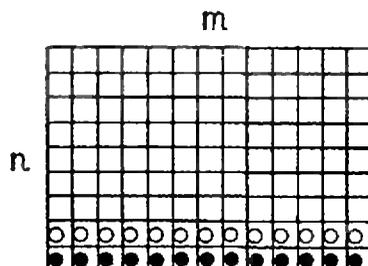


Рис. 2.

(Продолжение см. на стр. 41)

# Конус максимального объема в природе

С. М. Петров

Рассмотрим известную задачу:

**Задача 1.** Угол при вершине в осевом сечении конуса равен  $\alpha$ . Найти центральный угол  $\beta$  в развертке его боковой поверхности.

**Решение.** Изобразим на рисунке 1 осевое сечение конуса и на рисунке 2 — его развертку. Замечаем\*), что  $2\pi R = \beta L$  или

$$\beta = 2\pi \frac{R}{L} = 2\pi \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (1)$$

**Задача 2.** Дан круг радиуса  $L$  (рис. 2). Вырезать из него развертку конуса наибольшего объема.

**Решение.** Имеем (см. рис. 1)

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{1}{3} \pi \left( L \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2 \times \\ \times L \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3} \pi L^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (2)$$

Если зафиксировать образующую  $L$  и менять угол  $\alpha$ , то объем  $V$  достигнет наибольшего значения одновременно с функцией

$$y = \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}, \quad (3)$$

где  $0 < \alpha < \pi$ .

\*) Разумеется, углы измеряются в радианах.

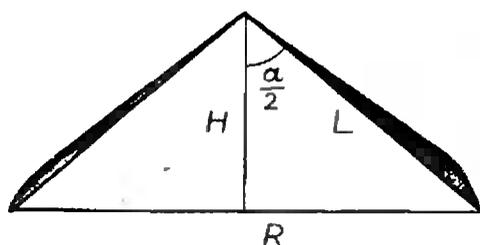


Рис. 1.

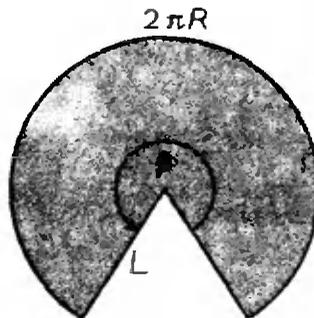


Рис. 2.

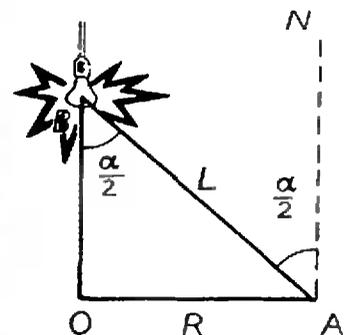


Рис. 3.

Сделаем замену переменных:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = u. \quad \text{Тогда}$$

$$y = u^2 \sqrt{1-u^2} = \sqrt{u^4(1-u^2)} = \\ = \sqrt{\frac{1}{2} u^2 u^2 (2-2u^2)}.$$

Так как  $u^2 + u^2 + (2-2u^2) = 2 = \text{const}$ , то подкоренное выражение достигнет своего максимума\*) при  $u^2 = u^2 = 2-2u^2$ . Отсюда  $u^2 = \frac{2}{3}$ , и

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad (4)$$

$$\alpha = 2 \arcsin \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 2 \arcsin \frac{2,44949}{3} \approx \\ \approx 2 \arcsin 0,8165 = 2 \cdot 54^\circ 44' = 109^\circ 28'. \quad (5)$$

Учитывая (1) и (4), находим

$$\beta = 2\pi \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\pi \sqrt{6}}{3} \approx \\ \approx 120^\circ \cdot 2,44949 \approx 293^\circ 56'. \quad (6)$$

\*) См. статью А. П. Савина «Максимум, минимум и теорема о средних», «Квант» № 11, 1970.

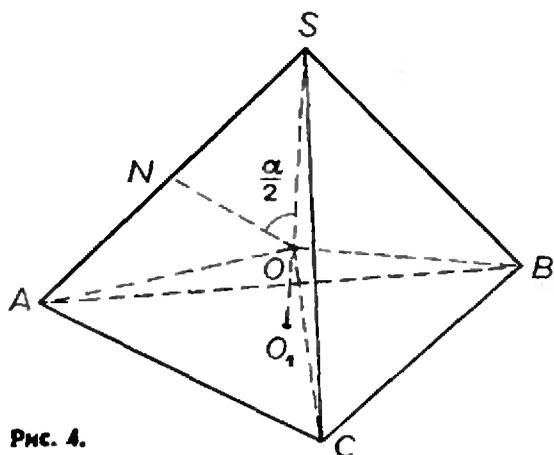


Рис. 4.

Вычислим максимальный объем конуса. Для этого найденное в (4) значение  $\sin \frac{\alpha}{2}$  подставим в (2):

$$\begin{aligned}
 V_{\max} &= \frac{1}{3} \pi L^3 \left( \frac{\sqrt{6}}{3} \right)^2 \sqrt{1 - \left( \frac{\sqrt{6}}{3} \right)^2} = \\
 &= \frac{1}{3} \pi L^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\pi L^3 \sqrt{3}}{27} = \\
 &= 0,4030L^3 \quad (7)
 \end{aligned}$$

Интересно отметить, что такие конусы встречаются в природе, разумеется, с известным приближением. Вот один физический пример.

**Задача 3.** Пусть электрическая лампочка может передвигаться (например, на блоке) по вертикальной прямой  $OB$  (рис. 3). На каком расстоянии от горизонтальной плоскости  $OA$  ее следует поместить, чтобы в точке  $A$  получить наибольшую освещенность?

**Решение.** Известно, что освещенность  $E$  пропорциональна косинусу угла падения лучей ( $\angle BAN = \frac{\alpha}{2}$ ) и обратно пропорциональна квадрату расстояния ( $AB = L$ ), то есть

$$E = C \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{L^2}, \quad (8)$$

где  $C$  зависит от силы света лампочки.

Учитывая, что  $L = \frac{R}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ , приведем формулу (8) к виду

$$E = \frac{C}{R^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Подмечаем, что  $E$  пропорциональна функции (3), то есть данная задача свелась к задаче 2.

Таким образом, если лампочку поместить в вершине конуса максимального объема, то окружность его основания получит наибольшую освещенность (1).

Наконец, еще одно явление.

В учебнике по органической химии Л. А. Цветкова («Просвещение», М., 1969, стр. 16) находим:

«Все валентные связи атома углерода направлены к вершинам тетраэдра, одинаково удалены друг от друга, угол между ними составляет  $109^{\circ}28'$ ».

Проверим, что и здесь появляется осевое сечение конуса наибольшего объема.

Пусть в центре  $O$  правильного тетраэдра  $SABC$  (рис. 4) находится атом углерода, а четыре валентности направлены к его вершинам. Докажем, что треугольники  $AOS$ ,  $BOS$  являются осевыми сечениями конуса максимального объема, то есть, что например,

$$\sin \frac{\angle AOS}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Обозначим  $\angle AOS$  через  $\alpha$ . Проведем  $ON \perp AS$ , тогда  $\angle NOS = \frac{\alpha}{2}$ . Далее,  $\triangle AO_1S \sim \triangle ONS$  (очевидно). Отсюда  $\angle SAO_1 = \angle NOS = \frac{\alpha}{2}$ .

Если обозначить ребро тетраэдра через  $a$ , то  $AO_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ ,

$$SO_1 = \sqrt{AS^2 - AO_1^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \sin \frac{\alpha}{2} &= \sin \angle NOS = \sin \angle SAO_1 = \\
 &= \frac{SO_1}{AS} = \frac{a\sqrt{6}}{3a} = \frac{\sqrt{6}}{3},
 \end{aligned}$$

что соответствует формуле (4).

Интерес вызывает построение графика функции

$$y = \sin^2 x \cos x,$$

которое мы предоставляем читателям.

# Карты и раскраски

А. П. Савин

На обложке журнала изображен причудливо раскрашенный квадрат. Если мы склеим из него цилиндр, а затем склеим еще и основания цилиндра (см. рис. 1), то получим поверхность, напоминающую бублик. В математике она называется тором. Раскраска квадрата станет раскраской некоторой карты, расположенной на торе, состоящей из семи окрашенных в разные цвета стран, причем любые две страны будут иметь общую границу. Можно ли увеличить число стран с выполнением этого условия (то есть чтобы любые две страны имели общую границу)? Оказывается нельзя.

Прежде чем приступить к доказательству этого утверждения, рассмотрим

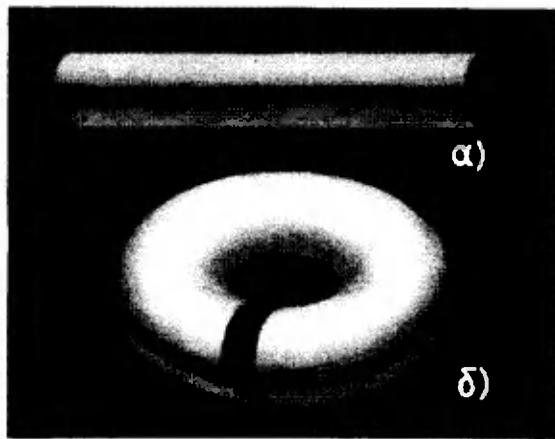


Рис. 1.

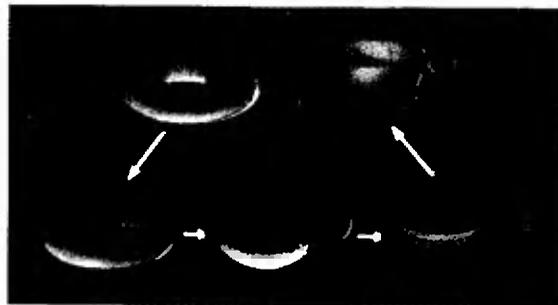


Рис. 2.

более подробно построение тора из квадрата.

Первый шаг построения — склеивание цилиндра — не вызывает никаких вопросов, но следующий шаг — склеивание оснований цилиндра — уже не очевиден. Ведь если бы квадрат был, например, сделан из бумаги, то как из бумажного цилиндра сделать изображенный на рисунке изящный бублик? Ваши попытки склеить цилиндр приведут к угловатой фигуре со складками наподобие мехов гармонии или юбки-гофре. Вот если бы квадрат был резиновый, то после склеек мы могли бы получить неплохую камеру для автомобильного колеса. Накачав ее воздухом, мы получим тор.

Изменилось ли что-нибудь от того, что мы взяли другой материал? Да, конечно. Форма тора стала более приятной, но зато изменились углы между границами стран, длины границ, площади самих стран.

А что сохранилось? Число стран, число границ каждой страны, примыкание стран — то есть на новой карте каждая страна граничит с теми же странами, что и на старой. И эти свойства сохраняются и в том случае, если мы будем наш резиновый тор деформировать, не разрезая его и не производя никаких новых склеек.

Свойства фигур, которые не изменяются при таких деформациях, называются топологическими. Их изучением занимается одна из молодых математических наук — топология.

Известный популяризатор науки М. Гарднер \*) сказал, что «топологами принято называть математиков,

\*) Очень советуем прочесть недавно вышедшую великолепную книгу М. Гарднера «Математические головоломки и развлечения», М., изд-во «Мир», 1971.

которые не могут отличить кофейную чашку от бублика».

Не трудно убедиться, что бублик действительно можно непрерывной деформацией преобразовать в чашку. А если на бублике была нарисована карта, то она станет картой-узором на чашке, и при этом отмеченные нами свойства карты не изменятся (рис. 2).

Если одну фигуру можно непрерывно деформировать в другую, то они называются гомеоморфными.

Попробуйте самостоятельно доказать, что квадрат и треугольник гомеоморфны кругу, а кольцо нет (рис. 3).

В дальнейшем мы будем рассматривать карты, у которых каждая из стран гомеоморфна кругу.

Для карт такого вида имеется очень красивая общая теорема о числе  $V$ -вершин карты — точек, где сходятся три или более страны,  $\Gamma$ -числе границ — отрезков, отделяющих одну сторону от другой и  $C$ -числе стран карты.

Теорема утверждает, что число  $\chi^*$ )

$$\chi = V - \Gamma + C$$

— одно и то же для всех карт на данной поверхности, а, следовательно, и на всех поверхностях, гомеоморфных данной. Число  $\chi$  называют «эйлеровой характеристикой» поверхности. Леонард Эйлер доказал, что на сфере

$$V - \Gamma + C = 2.$$

Это утверждение называется теоремой Эйлера. Его можно сформулировать так: «Эйлерова характеристика сферы равна 2». Проверить это нетрудно: рассмотрим какой-нибудь многогранник, например, тетраэдр. Его поверхность гомеоморфна сфере (мы можем «раздуть» его в сферу), имеем  $V=4$ ,  $\Gamma=6$ ,  $C=4$ ;  $V - \Gamma + C = 4 - 6 + 4 = 2$ . Для куба  $V=8$ ,  $\Gamma=12$ ,  $C=6$ ,  $V - \Gamma + C = 8 - 12 + 6 = 2$ .

Докажем теорему Эйлера в общем случае.

Представим себе, что наша карта является схемой рисовых полей, причем границы стран — плотины, отделяющие одно поле от другого.

Предположим, что одно из полей залито водой, и мы хотим, последовательно снимая одну за другой плотины, оросить все остальные поля.

Чтобы не разрушить при этом лишних плотин, на каждом очередном шаге будем снимать плотину между двумя такими полями, из которых одно уже орошено, а другое еще нет.

Теперь докажете самостоятельно, что для системы оставшихся плотин справедливы следующие утверждения:

1) Число разрушенных плотин равно  $C - 1$ .

2) Из любой вершины карты можно пройти по оставшимся плотинам в любую другую вершину, причем единственным образом.

3) Из утверждения 2) выведите, что число вершин карты равно на 1 больше числа оставшихся плотин.

Из 1) и 3) следует, что  $\Gamma - (C - 1) + 1 = V$ , то есть  $V - \Gamma + C = 2$ .

Это и есть теорема Эйлера для сферы.

Аналогично можно доказать, что для тора  $V - \Gamma + C = 0$ . (То есть эйлера характеристика тора равна нулю.)

Условие 1) останется таким же; условие 2), а, следовательно, и условие 3) изменятся, так как на торе

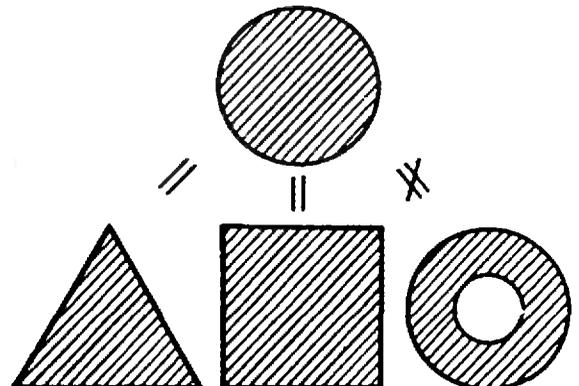


Рис. 3.

\*)  $\chi$  — греческая буква «хи».

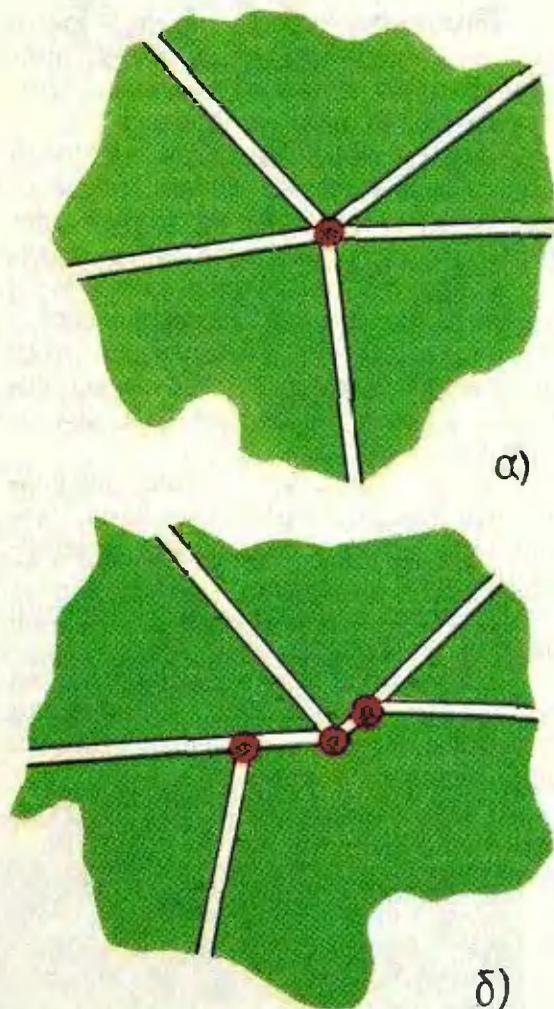


Рис. 4.

окажутся две замкнутые кривые, составленные из неразрушенных плотин, но не мешающих орошению всех полей. Одна из них схватывает тор по параллели, а другая — по меридиану аналогично кривым, являющимся линиями склейки квадрата при построении тора.

Вернемся, наконец, к задаче, сформулированной в начале статьи: «Существуют ли такие карты на торе с числом стран, большим семи, у которых каждые две страны имеют общую границу?».

Покажем, что достаточно рассмотреть лишь те карты, в каждой вершине которых сходятся ровно по три страны.

Действительно, пусть в какой-то вершине искомой карты сходятся более трех стран (см. рис. 4). Неслож-

но преобразовать карту так, чтобы во всех вершинах сходилось ровно по три страны, число стран останется при этом прежним, а число вершин увеличится. Метод такой перестройки хорошо виден из рисунка. При этом те страны, которые имели общую границу (но не вершину), также будут иметь общую границу.

Теперь приступим к счету. Пусть число стран на карте равно  $n$  (то есть  $C=n$ ), тогда, поскольку каждая страна имеет с каждой из  $n-1$  других не менее одной границы, то число границ у каждой страны не менее  $n-1$ .

Каждая граница принадлежит ровно двум странам, поэтому общее число границ не менее  $\frac{n(n-1)}{2}$ . Итак, мы

получили, что  $\Gamma \geq \frac{n(n-1)}{2}$ . Подсчитаем число вершин. В каждой вершине сходится ровно три границы, а каждая граница соединяет ровно 2 вершины. Поэтому удвоенное число границ равно утроенному числу вершин, или  $2\Gamma = 3V$  или  $V = \frac{2}{3}\Gamma$ .

Подставим полученное выражение для  $V$  в формулу Эйлера:  $-\frac{\Gamma}{3} + C = 0$  или  $\Gamma = 3C$ .

Так как  $C=n$ , а  $\Gamma \geq \frac{n(n-1)}{2}$ , то  $3n \geq \frac{n(n-1)}{2}$  или  $7n \geq n^2$ .

Отсюда  $n \leq 7$ .

Доказательство окончено.

Покажите, что если не все страны гомеоморфны кругу (например, у карты есть страны в виде кольца), то число стран, удовлетворяющих условию задачи, также не превосходит семи.

Попробуйте самостоятельно доказать, что для поверхности шара наибольшее число стран, попарно граничащих друг с другом, равно четырем.

Примером карты с четырьмя странами на шаре может служить тетраэдр, у которого страны — его грани. Чтобы превратить тетраэдр в шар,

нужно только его раздуть (так, как будто он резиновый). На рисунке 5 изображена развертка, окрашенная в четыре цвета.

Рисунок на обложке журнала можно считать разверткой тора.

А для более сложной поверхности — «кренделя» (см. рис. 6) развертка будет совсем не простой. Одна из таких разверток изображена на четвертой странице обложки. Чтобы склеить из нее «крендель», нужно склеивать отрезки, находящиеся на границе развертки, так, чтобы при этом вершины с одинаковыми номерами совпадали. Эта развертка разбита на 8 стран. По ее периферии указаны цвета тех стран, с которыми граничит каждая страна на соответствующих участках границы. Проверьте, что на этой карте каждая страна граничит с каждой. Докажите, что на «кренделе» нельзя построить карту с числом стран, большим восьми и обладающую указанным свойством. Формула Эйлера для «кренделя» выглядит так:  $V - \Gamma + C = -2$ .

Рассмотрим теперь раскраски произвольных карт на поверхностях. Мы будем называть раскраску карты правильной, если любые две страны, имеющие на карте общую границу, окрашены в различные цвета.

Построенные нами примеры карт шара, тора и «кренделя» позволяют сделать следующие утверждения:

Существуют карты на шаре, для правильной раскраски которых не-



Рис. 5.



Рис. 6.

ходимо иметь краски четырех различных цветов.

Существуют карты на торе, для правильной раскраски которых необходимо иметь краски семи различных цветов.

Существуют карты на «кренделе», для правильной раскраски которых необходимы краски восьми различных цветов.

Интересно, что для правильной раскраски любой карты на торе достаточно семи цветов. А на «кренделе» восьми цветов достаточно для правильной раскраски любой карты.

Что же касается поверхности шара — самой простой из рассмотренных поверхностей, то для нее этот вопрос до сих пор не решен.

#### Проблема четырех красок

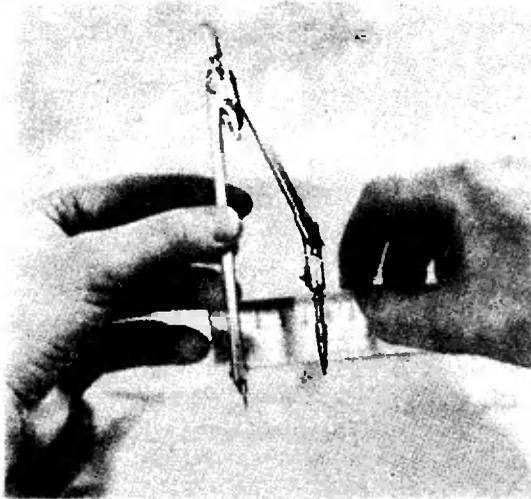
Можно ли произвольную карту на поверхности шара (или на плоскости) правильно раскрасить четырьмя красками?

До сих пор не найдено ни одной карты, для правильной раскраски которой было бы недостаточно четырех красок, и в то же время никем не доказано, что четырех красок достаточно для правильной раскраски любой карты. Известно, однако, что пяти красок достаточно для правильной раскраски любой карты на поверхности шара (и на плоскости).

#### Литература

- Г. Радемахер и О. Теплиц, Числа и фигуры, М., Физматгиз, 1962.  
Е. Б. Дыкин и В. А. Успенский, Математические беседы, М.—Л., ГТТИ, 1952.

# РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ЦИРКУЛЯ И ЛИНЕЙКИ



## А. А. Пресман

Графический способ решения квадратного уравнения с помощью параболы неудобен. Если строить параболу по точкам, то требуется много времени, и при этом степень точности получаемых результатов невелика.

И однажды, вспомнив про геометрические построения, учащиеся задали мне такой вопрос: «А почему мы не решаем квадратные уравнения с помощью циркуля и линейки? Ведь окружность очень легко построить!».

Так возникла на уроке математическая проблема:

По данным действительным коэффициентам  $a$ ,  $b$  и  $c$  уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$  определить радиус и координаты центра окружности, пересекающей ось  $Ox$  в точках, абсциссы которых являются корнями данного уравнения (всюду далее мы считаем, что  $a \neq 0$ ).

Сразу ясно, что таких окружностей много, поэтому допустим, что искомая окружность пересекает ось абсцисс в точках  $B(x_1, 0)$  и  $C(x_2, 0)$ , где  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ , и проходит (для определенности) через точку  $A(0, 1)$  (рис. 1). Тогда по теореме о секущих

$$OC \cdot OB = OE \cdot OA,$$

откуда

$$OE = \frac{OB \cdot OC}{OA} = \frac{x_1 \cdot x_2}{1} = \frac{c}{a}.$$

Центр  $S$  окружности находится в точке пересечения перпендикуляров  $SF$  и  $SK$ , восстановленных в серединах хорд  $AE$  и  $BC$ , поэтому

$$OK = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-\frac{b}{a}}{2} = -\frac{b}{2a},$$

$$OF = \frac{1 + \frac{c}{a}}{2} = \frac{a + c}{2a}.$$

Отсюда вытекает следующий способ нахождения корней квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$  с помощью циркуля и линейки.

Построим точки  $S\left(-\frac{b}{2a}, \frac{c+a}{2a}\right)$  (центр окружности) и  $A(0, 1)$ . Затем проведем окружность с радиусом  $SA$ . Абсциссы точек пересечения окружности с осью  $Ox$  являются корнями исходного квадратного уравнения.

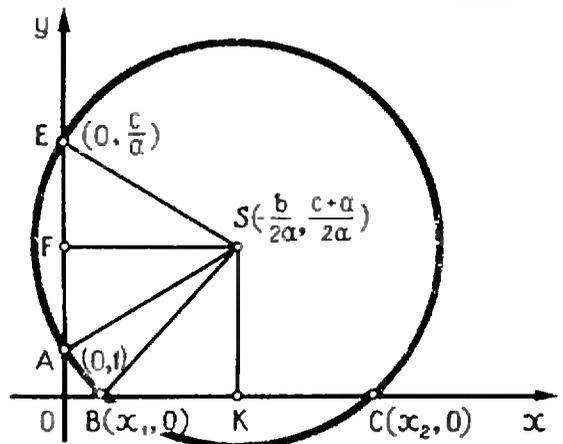


Рис. 1.

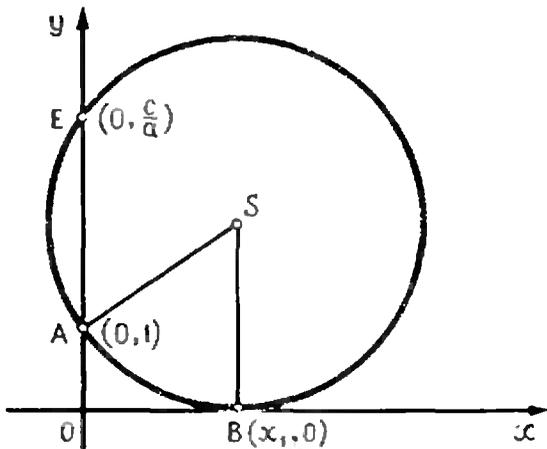


Рис. 2.

Подробное доказательство правильности приведенного способа представляется читателю. Отметим три случая, которые надо рассматривать, и способ графически найти комплексные (!) корни исходного уравнения.

**Случай 1.** Радиус окружности больше ординаты центра.

Окружность пересекает ось  $Ox$  в точках  $B(x_1, 0)$  и  $C(x_2, 0)$  (рис. 1).

**Случай 2.** Радиус окружности равен ординате центра, окружность касается оси  $Ox$  в точке  $B(x_1, 0)$  (рис. 2).

В этом случае уравнение имеет равные действительные корни, абсцисса точки касания

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a}.$$

**Случай 3.** Радиус окружности меньше ординаты центра, окружность не имеет общих точек с осью  $Ox$  (рис. 3).

В этом случае уравнение имеет комплексные и сопряженные корни:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} i.$$

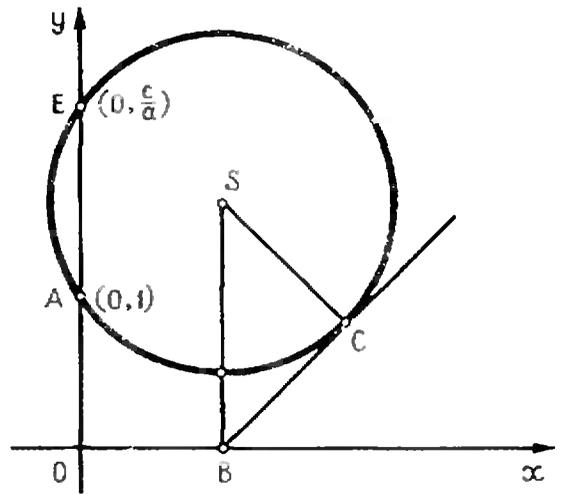


Рис. 3.

Вещественная часть комплексного корня выражается отрезком  $OB = -\frac{b}{2a}$  — абсциссой центра. Абсолютная величина коэффициента мнимой части выражается отрезком касательной  $BC$ .

С помощью приведенного способа легко провести исследование корней квадратного уравнения на знак и геометрически доказать формулы Виета. Однако в этом случае нельзя использовать формул Виета при обосновании способа, поэтому в заключение укажем алгебраическую интерпретацию предложенного графического решения квадратного уравнения.

Вместо уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

рассмотрим эквивалентную ему систему уравнений

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c + ay^2 - (c + a)y = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Очевидно, если квадратное уравнение имеет корень  $x_1$ , то система имеет решение  $x = x_1, y = 0$ , и наоборот. Первое уравнение системы задает окружность (проверьте!), а второе — ось  $Ox$ . В пересечении получаем точки вида  $(x_i, 0)$ , где  $x_i$  — корни квадратного уравнения.

# Применение алгебраических тождеств к получению геометрических неравенств

## 3. А. Скопец

Алгебраические тождества, справедливые за отдельными исключениями, для множества комплексных чисел, можно с успехом применить для получения интересных геометрических неравенств, связывающих линейные и угловые элементы плоских фигур. Ниже несколько геометрических неравенств получено именно таким образом. Заметим, что найти чисто геометрические доказательства этих неравенств довольно трудно. Комплексные числа мы будем обозначать малыми буквами латинского алфавита  $a, b, c, \dots$ . Напомним, что комплексное число — это выражение  $x+iy$ , где  $x$  и  $y$  — действительные числа, а  $i$  — мнимая единица ( $i^2 = -1$ ). Если на плоскости задана прямоугольная (декартова) система координат  $Oxy$ , то каждому комплексному числу  $a = x+iy$  можно сопоставить точку  $A$  плоскости с абсциссой  $x$  и ординатой  $y$ . Приведем некоторые определения, связанные с комплексными числами.

I. *Модулем* комплексного числа  $a = x+iy$  называется неотрицательное число  $\sqrt{x^2 + y^2}$ , равное расстоянию

от начала координат  $O$  до соответствующей точки  $A$  (рис. 1). Для обозначения модуля комплексного числа  $a$  пользуются символом  $|a|$ . Итак,

$$|a| = |x+iy| = \sqrt{x^2 + y^2} = OA. \quad (1)$$

Суммой двух комплексных чисел  $a_1 = x_1+iy_1$  и  $a_2 = x_2+iy_2$  называется число  $a = (x_1+x_2) + i(y_1+y_2)$ . (Построение точки  $A$  по точкам  $A_1, A_2$  показано на рисунке 2.) Поскольку  $OA \leq OA_1 + OA_2$ , то согласно (1)

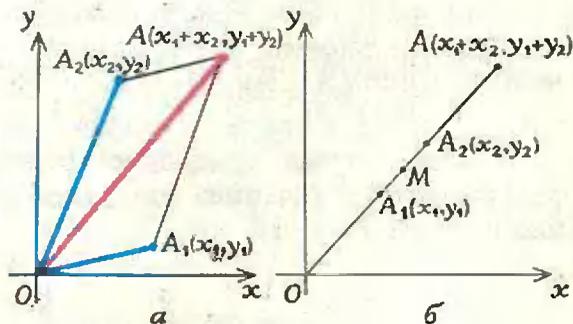


Рис. 2.  $OM = MA$ ;  $A_1M = MA_2$

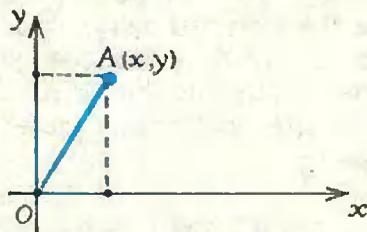


Рис. 1.

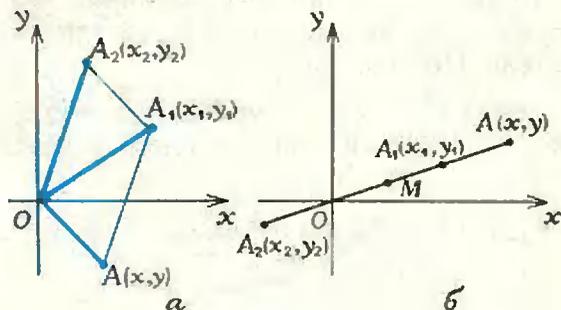


Рис. 3.  $OM = MA_1$ ;  $A_2M = MA$

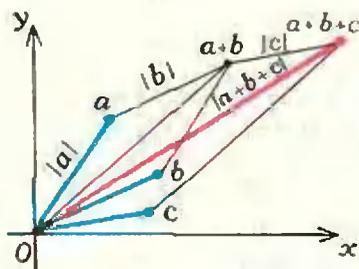


Рис. 4.

имеем

$$|a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2|. \quad (2)$$

Знак равенства в (2) означает, что точки  $O$ ,  $A_1$  и  $A_2$  расположены на одной прямой, причем точка  $O$  не принадлежит отрезку  $A_1A_2$ .

Итак, модуль суммы двух комплексных чисел не превосходит суммы модулей слагаемых.

Разность  $a_1 - a_2$  двух комплексных чисел  $a_1$  и  $a_2$  — это такое число  $a$ , что  $a + a_2 = a_1$  (геометрическое построение приведено на рисунке 3). Поскольку  $OA = A_1A_2$ , то

$$|a_1 - a_2| = A_1A_2. \quad (3)$$

Следовательно, модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между соответствующими им точками.

Далее,  $OA_1 - OA_2 \leq A_1A_2 \leq OA_1 + OA_2$ . Поэтому

$$|a_1| - |a_2| \leq |a_1 - a_2| \leq |a_1| + |a_2|. \quad (4)$$

Если точки  $O$ ,  $A_1$  и  $A_2$  принадлежат одной прямой, то один из знаков неравенства в (4) превращается в равенство.

Таким образом, модуль разности двух комплексных чисел не больше суммы их модулей и не меньше их разности.

Легко проверить (рис. 4) справедливость, например, следующего неравенства:

$$|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|. \quad (5)$$

Заметим, что если числу  $a$  соответствует точка  $A$  с координатами  $x$ ,  $y$ , то числу  $-a$  соответствует точка с координатами  $-x$ ,  $-y$ . Эти две точки симметричны относительно начала координат  $O$  (рис. 5). Следова-

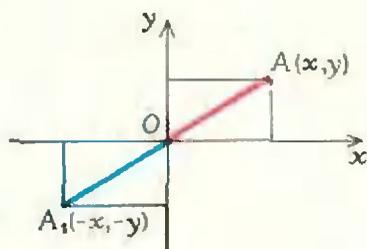


Рис. 5.

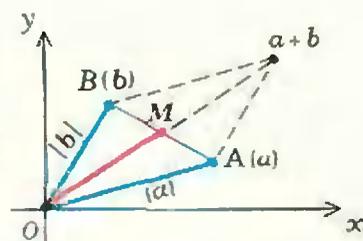


Рис. 6.

тельно,  $|-a| = |a|$ . Поэтому

$$|a - b + c| = |a + (-b) + c| \leq |a| + |b| + |c|. \quad (6)$$

II. Произведением двух чисел  $x_1 + iy_1$  и  $x_2 + iy_2$  называется число  $(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$  (оно получается так:  $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 + i^2y_1y_2$ , а потом  $i^2$  заменяется минус единицей и приводятся подобные члены). Нам нужны следующие легко проверяемые свойства умножения:

$$ab = ba, \quad a(b+c) = ab+ac, \quad |ab| = |a||b|.$$

Мы ограничимся этими сведениями о комплексных числах. Подробное изложение этих вопросов можно найти в учебнике алгебры для десятого класса средней школы.

Наша задача будет заключаться в применении комплексных чисел к некоторым задачам геометрии.

III. Ниже будет показано, как можно получать геометрические неравенства из простых алгебраических тождеств, связывающих комплексные числа.

1. Рассмотрим тождество:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b),$$

где  $a$  и  $b$  — комплексные числа. Отсюда имеем

$$|a+b||a-b| = |a^2 - b^2| \leq |a|^2 + |b|^2$$

или

$$2OM \cdot AB \leq OA^2 + OB^2, \quad (7)$$

где  $M$  — середина отрезка  $AB$ ,  $O$  — начало координат (рис. 6).

Итак, сумма квадратов двух сторон треугольника не меньше произведения третьей стороны на удвоенную медиану, проведенную к этой стороне.

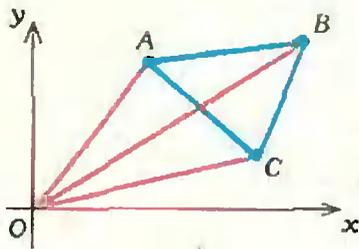


Рис. 7.

2. Легко проверить следующее тождество:

$$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = -(b-c)(c-a)(a-b).$$

Из этого тождества следует, что

$$|b-c||c-a||a-b| \leq |a^2||b-c| + |b^2||c-a| + |c^2||a-b|$$

или (рис. 7)

$$BC \cdot CA \cdot AB \leq OA^2 \cdot BC + OB^2 \cdot CA + OC^2 \cdot AB. \quad (8)$$

Следствие 1. Если  $ABC$  — равносторонний треугольник, то

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 \geq d^2, \quad (8')$$

где  $d$  — длина стороны треугольника.

Итак, сумма квадратов расстояний любой точки плоскости до вершин равностороннего треугольника не меньше квадрата его стороны.

Следствие 2. Если  $O$  — центр окружности, описанной около произвольного треугольника, то из (8) следует

$$AB \cdot BC \cdot CA \leq R^2(AB + BC + CA)$$

или

$$\frac{AB \cdot BC \cdot CA}{AB + BC + CA} \leq R^2. \quad (8'')$$

Таким образом, отношение произведения трех сторон треугольника к их сумме не превосходит квадрата радиуса окружности, описанной около треугольника.

3. Проверкой убеждаемся в истинности такого тождества:

$$(b-c)(b+c)^2 + (c-a)(c+a)^2 + (a-b)(a+b)^2 = (a-b)(a-c)(b-c).$$

Обозначим через  $k_1, k_2, k_3$  соответственно расстояния от центра окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , до сторон  $BC, CA, AB$  (рис. 8). Центр этой окружности при-

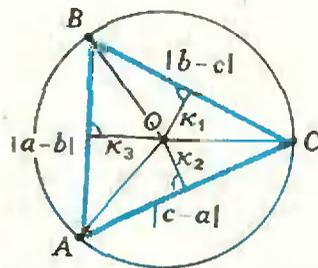


Рис. 8.

ем за начало координат. Тогда

$$|b+c| = 2k_1, |c+a| = 2k_2, |a+b| = 2k_3.$$

Из данного тождества следует

$$AB \cdot BC \cdot CA \leq 4(k_1^2 \cdot BC + k_2^2 \cdot CA + k_3^2 \cdot AB).$$

Но  $S_{OBC} = \frac{1}{2} k_1 \cdot BC = \frac{1}{2} R^2 \sin 2A$ , если  $\angle A \leq 90^\circ$ . Следовательно,

$$k_1 \cdot BC = R^2 \cdot \sin 2A.$$

Аналогично, если углы  $B$  и  $C$  не тупые, то

$$k_2 \cdot CA = R^2 \sin 2B, \quad k_3 \cdot AB = R^2 \sin 2C.$$

Поэтому

$$AB \cdot BC \cdot CA \leq 4R^2(k_1 \sin 2A + k_2 \sin 2B + k_3 \sin 2C).$$

Учитывая, что

$$k_1 = R \cos A, \quad k_2 = R \cos B, \quad k_3 = R \cos C, \quad AB \cdot BC \cdot CA = 4RS_{ABC},$$

имеем

$$4RS_{ABC} \leq 4R^3(\cos A \sin 2A + \cos B \sin 2B + \cos C \sin 2C).$$

Отсюда

$$\frac{S_{ABC}}{R^2} \leq \cos A \sin 2A + \cos B \sin 2B + \cos C \sin 2C. \quad (9)$$

Итак, для всякого нетупоугольного треугольника имеет место неравенство (9).

IV. Задачи для самостоятельного решения.

**Задача 1.** Вывести из тождества  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$  неравенство  $2OM \cdot AB \geq OA^2 - OB^2$ , где  $M$  — середина  $AB$ ,  $O$  — начало координат,  $a, b$  — числа, соответствующие точкам  $A, B$ . Выяснить, когда оно обращается в равенство.

**Задача 2.** Вывести из тождества  $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) = -(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$  нера-

венство  $OH \leq \frac{R^2}{2r}$ , где  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника,  $R$  — радиус этой окружности,  $H$  — ортоцентр треугольника,  $r$  — радиус вписанной окружности. (Ортоцентром треугольника называется точка пересечения его высот или их продолжений.)

**Задача 3.** Доказать, что  $AB \cdot CD + BC \cdot DA \geq CA \cdot BD$ , где  $A, B, C, D$  — произвольные точки плоскости.

**Задача 4.** Доказать, что  $AB \cdot AM \cdot BM + BC \cdot BM \cdot CM + CA \cdot CM \cdot MA \geq AB \cdot BC \cdot CA$ .

**Задача 5.** Вывести из тождества 
$$\frac{a}{(a-b)(a-c)(a-d)} +$$

$$+ \frac{b}{(b-c)(b-d)(b-a)} +$$

$$+ \frac{c}{(c-d)(c-a)(c-b)} +$$

$+ \frac{d}{(d-a)(d-b)(d-c)} = 0$  неравенство

$OA \cdot BC \cdot BD \cdot CD + OB \cdot CA \cdot CD \cdot AD + OC \cdot AB \cdot AD \cdot BD \geq OD \cdot AB \cdot BC \cdot CA$ , где  $O, A, B, C, D$  — произвольные (различные) точки плоскости.

#### Указания

1) Равенство имеет место для точек  $O, A, B$ , расположенных на одной прямой.

2) Воспользоваться тем, что если  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ , а центр окружности, описанной около треугольника, совпадает с началом координат, то  $h = a + b + c$  ( $a, b, c, h$  — комплексные числа, соответствующие точкам  $A, B, C, H$ ). Заметить, что  $h - a = k_1(b + c)$ ,  $h - b = k_2(c + a)$ ,  $h - c = k_3(a + b)$ , где  $k_1, k_2, k_3$  — вещественные числа. Из этой системы следует, что  $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ .

3) Рассмотреть тождество

$$(m-a)(b-c) + (m-b)(c-a) + (m-c)(a-b) = 0.$$

4) Рассмотреть тождество

$$(m-a)(m-b)(a-b) + (m-b)(m-c) \times (b-c) + (m-c)(m-a)(c-a) = (a-b)(b-c)(c-a).$$

## ИСТОРИЯ СОВЕРШЕННЫХ ЧИСЕЛ ПРОДОЛЖАЕТСЯ

В «Кванте» № 8 за 1971 год был опубликован рассказ об удивительной многовековой истории совершенных чисел. Напомним, что совершенным называется натуральное число, равное сумме всех своих делителей. Первым таким числом является 6, затем идет 28. Всего до последнего времени было найдено 23 совершенных числа.

И вот стало известно следующее, 24-е совершенное число. Согласно сообщению журнала «Scientific American» (июнь 1971 г.) американский математик Б. Такерман получил самое большое из известных сегодня простых чисел, а именно

$$2^{10\ 937} - 1$$

(полная запись этого числа содержит 6002 цифр). Одновременно указано и новое совершенное число:

$$2^{10\ 936} (2^{10\ 937} - 1)$$

(это число записывается с помощью 12 003 цифр). Вычисления заняли 40 минут машинного времени одного из самых крупных современных вычислительных комплексов.

Однако и это открытие не проясняет никаких закономерностей в появлении совершенных чисел. В частности, полученное совершенное число, как и все предыдущие, — четное.

Н. Розов

## ЗАДАЧИ

**М136.** Можно ли увезти из камеломни 50 камней, веса которых 370 кг, 372 кг, 374 кг, ..., 468 кг (веса составляют арифметическую прогрессию с разностью 2 кг), на семи трехтонках?

*В. П. Федотов*

**М137.** Пусть  $a, b, c, d$  — длины четырех последовательных сторон четырехугольника,  $S$  — его площадь.

а) Докажите, что  $2S \leq ab + cd$ .

б) Докажите, что  $2S \leq ac + bd$ .

в) Докажите, что если хотя бы в одном из этих неравенств достигается равенство, то четырехугольник можно вписать в окружность.

**М138.** Докажите, что если  $m$  и  $n$  — целые числа и  $1 \leq m < n$ , то

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k^m C_n^k = 0,$$

где  $C_n^k$  — биномиальные коэффициенты, то есть коэффициенты многочлена

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k.$$

(Например, если  $n=4$ , то  $C_4^0=1$ ,  $C_4^1=4$ ,  $C_4^2=6$ ,  $C_4^3=4$ ,  $C_4^4=1$  и верны

равенства

$$\begin{aligned} & -1 \cdot 4 + 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 0, \\ & -1^2 \cdot 4 + 2^2 \cdot 6 - 3^2 \cdot 4 + 4^2 \cdot 1 = 0, \\ & -1^3 \cdot 4 + 2^3 \cdot 6 - 3^3 \cdot 4 + 4^3 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

*М. И. Сидоров*

**М139.** Из вершины  $B$  параллелограмма  $ABCD$  проведены его высоты  $BK$  и  $BH$ . Известны отрезки  $KH=a$  и  $BD=b$ . Найдите расстояние от точки  $B$  до точки пересечения высот треугольника  $BKH$ .

*Ф. А. Бартнев*

**М140.** С натуральным числом (записываемым в десятичной системе) разрешается проделывать следующие операции:

- А) приписать в конце цифру 4;
- Б) приписать в конце цифру 0;
- В) разделить на 2 (если число чётно).

Например, если с числом 4 проделать последовательно операции В, Б, А и Б, то получится число 140.

а) Как из числа 4 получить число 1972?

б) \* Докажите, что из числа 4 можно получить любое натуральное число.

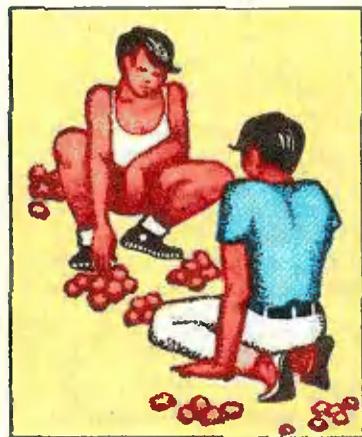
*А. К. Толпыго*

## ДВЕ ИГРЫ

(начало см. на стр. 27)

### Новый ним

На столе лежат  $n$  кучек камней; кроме того, каждый из двух играющих имеет некоторое число камней (возможно, играющие и не знают, сколько камней имеет противник). За ход можно либо взять любое число камней из одной любой кучки, либо положить любое число камней в одну из кучек, либо положить любое число камней просто на стол, образовав тем самым еще одну кучку. Выигравшим считается тот,



кто после своего хода соберет у себя все камни.

Определите, при каких начальных положениях (то есть количествах камней в каждой из кучек и у каждого из двух играющих) выигрывает первый играющий, а при каких — второй.

А. Ю. Соффер

**Ф148.** Ядро массы  $M$ , летящее со скоростью  $V$ , распадается на два одинаковых осколка. Внутренняя энергия ядра  $E_1$ , внутренняя энергия каждого из осколков  $E_2$  ( $E_1 > 2E_2$ ). Определить максимально возможный угол между вектором скорости одного из осколков и вектором  $Y$ .

**Ф149\*.** Во сколько раз уменьшится сила притяжения двух маленьких шариков, один из которых заряжен, а другой нейтрален, если расстояние между шариками увеличить вдвое?

И. Ф. Гинзбург

**Ф150.** В некоторой галактике обнаружена звезда  $Z$  с планетой  $\Pi$ , делающей за время  $T_1$  один оборот вокруг звезды и за время  $T_2$  один оборот вокруг собственной оси. Спутник  $S$  планеты  $\Pi$  делает один оборот вокруг планеты за время  $T_3$ . Через какое время повторится в данном месте планеты затмение спутника  $S$ ? Все тела вращаются в одной плоскости.

Г. Л. Коткин

**Ф151.** Два плоских зеркала образуют двугранный угол с раствором  $90^\circ$ . В угол вставлена линза с фокусным расстоянием  $F$  так, что главная оптическая ось линзы составляет угол  $45^\circ$  с каждым зеркалом. Радиус линзы равен ее фокусному расстоянию. Найти положение изображения источника, расположенного на главной оптической оси линзы на расстоянии  $1,5 F$  от нее.

**Ф152.** Объем газового пузыря, образовавшегося в результате глубоководного подводного взрыва, колеблется с периодом, пропорциональным  $P^a \cdot \rho^b \cdot E^c$  ( $P$  — давление,  $\rho$  — плотность воды,  $E$  — полная энергия взрыва). Найти  $a$ ,  $b$  и  $c$ .



## РЕШЕНИЯ

В этом номере мы публикуем решения задач М96—М100

### М96

Про пять положительных чисел известно, что если из суммы любых трех из них вычесть сумму двух оставшихся, то разность будет положительной. Докажите, что произведение всех десяти таких разностей не превосходит квадрата произведения данных пяти чисел.

Пусть  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  — данные числа. Тогда  $(a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - a_5)(a_1 + a_3 + a_4 - a_2 - a_5) = a_1^2 - (a_2 + a_3 - a_4 - a_5)^2 \leq a_1^2$ .

Аналогично доказывается, что

$$(a_2 + a_3 + a_1 - a_4 - a_5) \times (a_2 + a_4 + a_3 - a_1 - a_5) \leq a_2^2,$$

$$(a_3 + a_4 + a_2 - a_1 - a_5) \times (a_3 + a_5 + a_1 - a_4 - a_2) \leq a_3^2.$$

$$(a_4 + a_5 + a_3 - a_1 - a_2) \times (a_4 + a_1 + a_2 - a_3 - a_5) \leq a_4^2.$$

$$(a_5 + a_1 + a_4 - a_2 - a_3) \times (a_5 + a_2 + a_3 - a_1 - a_4) \leq a_5^2.$$

Остается перемножить эти неравенства, и задача решена.

Докажите более общее утверждение: если даны  $2n+1$  положительных чисел таких, что разность между суммой любых  $n+1$  чисел и суммой  $n$  остальных положительна, то произведение  $B$  всех  $C_{2n+1}^n$  таких разностей и произведение  $A$  всех  $2n+1$  данных чисел связаны неравенством

$$B^n \leq A^{C_{2n+1}^{n-1}}.$$

### М97

В трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AB=a$  и  $CD=b$  проведен отрезок  $A_1B_1$ , соединяющий середины диагоналей. В полученной трапеции  $A_1B_1CD$  снова проведен отрезок  $A_2B_2$ , соединяющий середины диагоналей, и так далее (рис. 1). Может ли в последовательности длин отрезков  $AB, A_1B_1, A_2B_2, \dots$  какое-то число встретиться дважды? Будет ли эта последовательность монотонной (возрастающей или убывающей?) Стремится ли она к какому-нибудь пределу?

Пусть  $A_1$  и  $B_1$  — середины диагоналей  $AC$  и  $BD$  трапеции,  $E$  и  $F$  — середины бо-

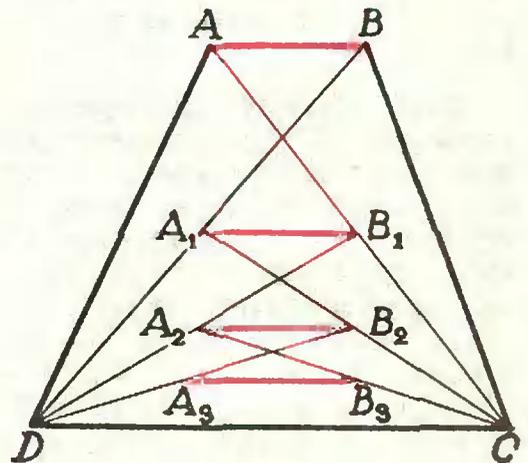


Рис. 1.

вых сторон  $AD$  и  $BC$  (рис. 2). Поскольку  $A_1F$  — средняя линия треугольника  $ACB$ , а  $B_1F$  — средняя линия треугольника  $DCB$ , то точки  $A_1$  и  $B_1$  лежат на отрезке  $EF$  и

$$a_1 = A_1B_1 = |A_1F - B_1F| = \left| \frac{a-b}{2} \right|.$$

(Эта формула верна независимо от того, какое из чисел  $a$  и  $b$  больше). Точно так же доказывается, что

$$a_{n+1} = \left| \frac{a_n - b}{2} \right|, \quad (1)$$

где  $a_n = A_nB_n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) — интересующая нас последовательность. Тем самым задача сведена к чисто алгебраической задаче о последовательности, определяемой соотношением (1) с начальным членом  $a_0 = a > 0$ .

Если  $a_n > b$ , то  $a_{n+1} = \frac{a_n - b}{2} < a_n - b$ .

Поэтому если  $a > b$ , то каждый член последовательности будет меньше предыдущего по крайней мере на  $b$  до тех пор, пока не встретится член  $a_m$  такой, что  $a_m \leq b$  (если  $a \leq b$ , то положим  $m=0$ ,  $a_m = a_0 = a$ ; многие читатели рассматривали только этот случай; только он рассматривается и в книге «Математические задачи» \*).

Итак, мы рассматриваем теперь только  $n \geq m$ .

Если  $a_n \leq b$ , то  $a_{n+1} = \frac{b - a_n}{2} \leq \frac{b}{2} < b$ .

Таким образом, все следующие за  $a_m$  члены последовательности будут меньше  $b$  и поэтому при всех  $n \geq m$

$$a_{n+1} = \frac{b - a_n}{2}. \quad (2)$$

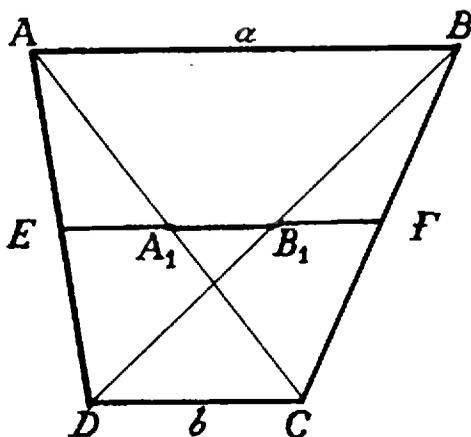


Рис. 2.

\* Е. Б. Дынкин, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь, А. К. Толпыго, «Математические задачи», изд. 3-е, «Наука», 1971, задача 147.

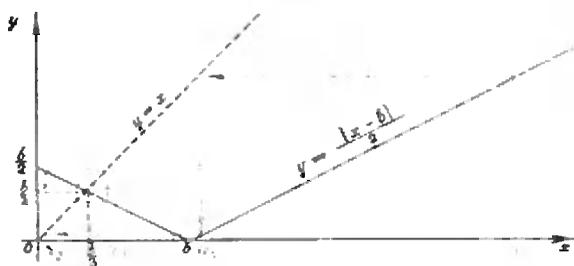


Рис. 3. Члены последовательности  $a_n$ , определяемой условиями  $a_0 = a$ ,  $a_{n+1} = \left| \frac{a_n - b}{2} \right|$  — абсциссы вершин ломаной, окрашенной в зеленый цвет. Звенья этой ломаной попеременно параллельны осям  $Ox$ ,  $Oy$ , а ее вершины лежат попеременно на прямой с уравнением  $y=x$  и на графике функции  $y = \left| \frac{x-b}{2} \right|$ .

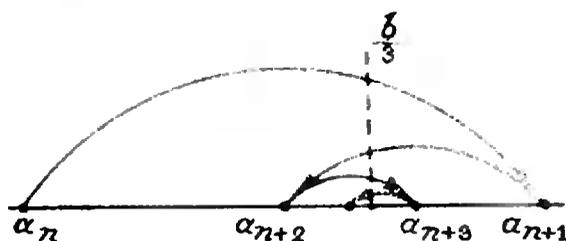


Рис. 4.

Уравнение  $x = \frac{b-x}{2}$  имеет единственное решение  $x = \frac{b}{3}$ . Поэтому если у последовательности  $\{a_n\}$  существует предел, то он равен  $\frac{b}{3}$ .

Пусть  $a_m \neq \frac{b}{3}$ . Положим  $a_n = \frac{b}{3} +$

$\delta_n$ . Тогда из (2) следует, что  $\frac{b}{3} + \delta_{n+1} = \frac{b}{3} - \frac{\delta_n}{2}$ , то есть

$$\delta_{n+1} = -\frac{\delta_n}{2} \quad (3)$$

— при переходе от  $n$  к  $n+1$  разность  $a_n - \frac{b}{3} = \delta_n$  меняет знак и по абсолютной величине уменьшается вдвое. Теперь все ясно: в последовательности  $a_n$  никакое число не может встретиться дважды, поскольку каждый член ближе к  $\frac{b}{3}$ , чем предыдущий.

Эта последовательность не монотонна, но стремится к пределу  $\frac{b}{3}$  (рис. 3, 4).

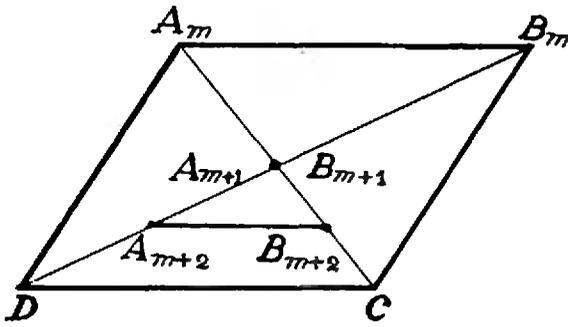


Рис. 5.

К сожалению, некоторые читатели пишут: «Поскольку последовательность не монотонная, она не стремится к пределу». Это рассуждение, конечно, неверно. Докажем строго, пользуясь определением предела, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{b}{3}. \quad (4)$$

Пусть задано  $\epsilon > 0$ . Тогда если  $n > N$ , где  $N = N(\epsilon)$  — наименьшее целое число, для которого  $2^N \epsilon > 2^m |\delta_m|$ , то  $\left| a_n - \frac{b}{3} \right| = |\delta_n| = \frac{|\delta_m|}{2^{n-m}} < \frac{|\delta_m|}{2^{N-m}} < \epsilon$ .

Тем самым (4) доказано.

Разумеется, предел равен  $\frac{b}{3}$  и в том случае, когда  $a_m = \frac{b}{3}$  — в этом случае все последующие члены тоже равны  $\frac{b}{3}$ . Выясним, при каких значениях  $a$  возникает этот случай. Если  $m=0$ , то  $a = \frac{b}{3}$ . Если  $m=1$  и  $a_1 = \frac{a-b}{2} = \frac{b}{3}$ , то  $a = \frac{5b}{3}$ .

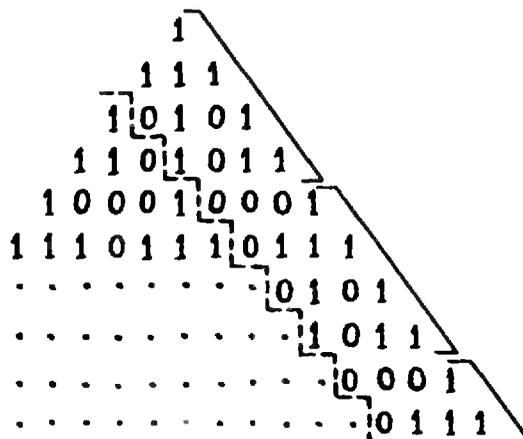


Рис. 6.

Вообще, если  $a_m = \frac{b}{3}$ , то  $a = a_0$  получается из  $a_m = \frac{b}{3}$  после  $m$ -кратного применения формулы  $a_{n-1} = 2a_n + b$ . Таким образом, как нетрудно проверить, значения  $a$ , при которых  $a_m = \frac{b}{3}$ , составляют последовательность  $\frac{b}{3}, \frac{5b}{3}, \frac{13b}{3}, \dots, \frac{(2^k - 3)b}{3}, \dots$ . При этих (и только этих)

значениях  $a$  последовательность получается монотонной (и с некоторого места — постоянной).

Мы не выделили отдельно случай, когда  $a_m = b$  (при этом  $a_{m+1} = 0, a_{m+2} = \frac{b}{2}, \dots$ ), — с алгебраической точки зрения он ничем не примечателен, но соответствующие  $n=m$  и  $n=m+1$  трапеции вырождаются в параллелограмм и в треугольник (точки  $B_{m+1}$  и  $C_{m+1}$  совпадают, рис. 5); начиная с  $n=m+2$ , получаются настоящие трапеции, и, как всегда,  $a_n$  стремится к пределу  $\frac{b}{3}$ .

### M98

Докажите, что в таблице

1
1 1 1
1 2 3 2 1
1 3 6 7 6 3 1
. . . . .

где каждое число равно сумме трех, стоящих над ним, в каждой строке (начиная с третьей) есть четное число. В каждой ли строке (кроме первых двух) встречается число, делящееся на три?

Исследуем сначала вопрос о делимости на два. Будем в нашей таблице вместо четных чисел писать 0, а вместо нечетных — 1. Тогда таблицу из 0 и 1 нужно будет составлять по тому же правилу (каждое число получается как сумма трех, стоящих над ним в предыдущей строке), только сложение нужно выполнять «по модулю два» — по правилам  $0+0=0, 0+1=1+0=1, 1+1=0$ .

Первое решение основано на таком соображении: последние четыре числа в каждой строке зависят только от того, каковы последние четыре числа в предыдущей строке, и поэтому нет ничего удивительного в том, что эта четверка периодически повторяется (с периодом 4, см. рис. 6)\*).

\*) Аналогичное решение приводится в книге Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова и И. М. Яглома «Избранные задачи и теоремы элементарной математики», изд. 4-е, «Наука», 1965, задача 10.

Другое решение, предложенное рядом читателей — доказательство от противного. Предположим, что какая-то строка целиком состоит из единиц:

III ... III

Тогда предыдущая строка, как легко убедиться, может быть только такой:

100100 ... 001001,

а идущая перед ней — только такой:

110000110000 ... 000011000011.

Но это невозможно, поскольку в каждой строке нашей таблицы нечетное количество чисел.

Что касается делимости на 3, то, как легко убедиться, уже в следующей, четвертой строке таблицы (верхней строке из одной единицы удобно присвоить номер 0)

1 4 10 16 19 16 10 4 1

ни одно число не делится на 3 (причем все дают при делении на три остаток 1). Разобравшись в структуре нашей таблицы «по модулю 3» (на рис. 7 числа, дающие при делении на три остаток 0, 1 и 2, заменены соответственно желтыми, черными и красными кружочками), можно заметить, что тем же свойством будут обладать строки с номерами

1,  $1+3=4$ ,  $1+3+3^2=13$ ,  $1+3+3^2+3^3=40$  и т. д.

Читатели в своих письмах сообщают и о других свойствах чисел этой таблицы. Много разных свойств можно вывести, пользуясь тем, что в  $n$ -й строке нашей таблицы стоят коэффициенты многочлена

$$(1+x+x^2)^n = \sum_{k=0}^{2n} B_n^k x^k$$

(действуя примерно так же, как в статье «Арифметика биномиальных коэффициентов», «Квант» № 6, 1970). Например, сразу ясно,

что  $\sum_{k=0}^{2n} B_n^k = 3^n$ ,  $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k B_n^k = 1$ , и нетрудно

доказать, что  $\sum_{k=0}^{2n} (B_n^k) = B_{2n}^{2n}$  (см. задачу 61

в книге А. М. и И. М. Ягломов «Неэлементарные задачи в элементарном изложении», Гостехиздат, 1954). Проверьте, что

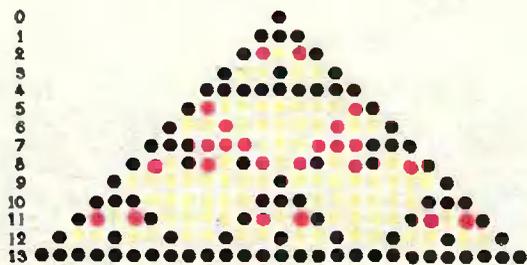


Рис. 7.

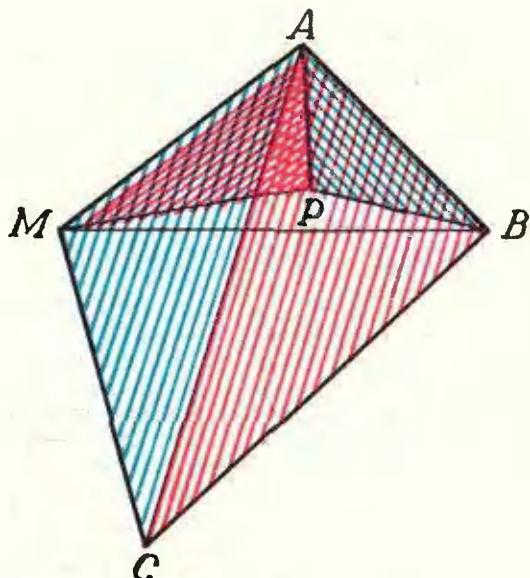


Рис. 8.

если  $p$  — простое,  $s < p$  и  $r < p$ , то

$$B_{mp+r}^{lp+s} \equiv B_m^l B_r^s + B_m^{l-1} B_r^{s+p} \pmod{p}$$

(если  $k > 2n$ , то  $B_n^k$  считается равным 0).

Решения задач М96 — М98 прислали многие читатели. Не менее двух из этих задач решили А. Григорян (Баку), С. Конягин (Саратов), А. Меркуров (Ленинград), М. Розов (Минск), М. Пресер (Томск), А. Слинкин (Москва), А. Черняк (Минск), Э. Туркевич (Черновцы), С. Котанов (п. Цалка Грузинской ССР), Г. Тимофеев (Саратов), Ю. Кисин (Старая Русса), В. Надежко (Ленинград), А. Блохин (Киселевск Кемеровской обл.), Е. Гундурь (Ворошиловград), А. Макарычев (Львов), И. Шпарлинский (Москва).

### М99

В треугольнике  $ABC$  сторона  $AC$  — наибольшая. Докажите, что для любой точки  $M$  плоскости  $AM+CM$  не меньше  $BM$ . В каких случаях возможно равенство?

Докажем сначала такую лемму.

Лемма. Для любых четырех точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $M$  на плоскости

$$AC \cdot BM \leq AB \cdot CM + BC \cdot AM \quad (1)$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда  $ABCM$  — выпуклый вписанный четырехугольник (или когда одно из слагаемых в правой части равно нулю из-за того, что некоторые две точки совпадают).

Доказательство леммы. Выберем точку  $P$  так, что  $\angle BAP = \angle CAM$  и  $\angle MAP = \angle CAB$ , а  $PA = \frac{AB \cdot AM}{AC}$  (рис. 8).

Тогда  $\triangle BAP \sim \triangle CAM$  (первый получает-

ся из второго сжатием в отношении  $AB:AC$  и поворотом на угол  $BAC$ ), а  $\triangle MAP \sim \triangle CAB$  (первый получается из второго поворотом на угол  $CAM$  и сжатием в отношении  $AM:AC$ ). Теперь воспользуемся неравенством треугольника

$$BM \leq BP + PM. \quad (2)$$

Поскольку

$$BP = \frac{AB}{AC} \cdot CM \text{ и } PM = BC \cdot \frac{AM}{AC},$$

получаем (1). Равенство в (2) достигается, когда точка  $P$  лежит на отрезке  $BM$ . Легко убедиться, что это будет только в том случае, когда четыре точки  $A, B, C, M$  лежат на окружности (в указанном порядке, причем какие-то две соседние могут совпадать).

По поводу этого доказательства могут возникать такие сомнения: гонится ли оно для любого расположения точек  $A, B, C, M$  на плоскости, не зависит ли оно от особенностей рисунка? Проще всего рассеять их, записав решение аналитически с помощью комплексных чисел (см. статью З. А. Скопца на стр. 36 и задачу 3 к ней на стр. 39).

Из леммы утверждение задачи выводится мгновенно: если  $AB \leq AC$  и  $BC \leq AC$ , то  $AC \cdot BM \leq AB \cdot CM + BC \cdot AM \leq AC \cdot CM + AC \cdot AM$ ,

откуда

$$BM \leq AM + CM.$$

Одновременно получаем, что равенство достигается в следующих случаях:

если треугольник  $ABC$  равнобедренный ( $AC$  — боковая сторона) и точка  $M$  лежит в его вершине;

если треугольник  $ABC$  равносторонний и точка  $M$  лежит на дуге  $AC$  его описанной окружности, не содержащей точку  $B$ .

Решение с помощью леммы («неравенства Птолемея») прислали *А. Меркурьев, С. Котанов, А. Черняк*.

Уже перечисление случаев, когда достигается равенство, показывает, что прямое доказательство (без леммы) не может быть очень простым. Все же такое решение, требующее очень внимательного перебора различных случаев расположения точки  $M$ , сумели получить *М. Розов, М. Прегер, А. Черняк* (он прислал два решения).

### М100

Докажите, что сумма 45 чисел  $\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 5^\circ + \operatorname{tg} 9^\circ + \dots + \operatorname{tg} 173^\circ + \operatorname{tg} 177^\circ$  равна 45.

Докажем, что

$$\operatorname{ctg} 1^\circ + \operatorname{ctg} 5^\circ + \operatorname{ctg} 9^\circ + \dots + \operatorname{ctg} 173^\circ + \operatorname{ctg} 177^\circ = 45.$$

Это то же самое, поскольку

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 1^\circ &= \operatorname{ctg} 89^\circ, \operatorname{tg} 5^\circ = \operatorname{ctg} 85^\circ, \dots, \\ \operatorname{tg} 89^\circ &= \operatorname{ctg} 1^\circ, \\ \operatorname{tg} 93^\circ &= \operatorname{ctg} 177^\circ, \operatorname{tg} 97^\circ = \operatorname{ctg} 173^\circ, \dots, \\ \operatorname{tg} 177^\circ &= \operatorname{ctg} 93^\circ. \end{aligned}$$

Нетрудно доказать по индукции, что

$$\operatorname{ctg} nx = \frac{p_n(\operatorname{ctg} x)}{q_n(\operatorname{ctg} x)},$$

где  $p_n(y) = y^n - \frac{n(n-1)}{2} y^{n-2} + \dots$  и

$q_n(y) = ny^{n-1} - \dots$  — многочлены от  $y$ .

(Аналогичную формулу можно написать и для  $\operatorname{tg} nx$ , но ее вид будет несколько отличаться для четных и нечетных  $n$ , поэтому мы предпочли иметь дело с котангенсами. На самом деле коэффициентами многочленов  $p_n(y)$  и  $q_n(y)$  являются биномиальные коэффициенты:

$$\begin{aligned} p_n(y) &= y^n - C_n^2 y^{n-2} + C_n^4 y^{n-4} - \dots, \\ q_n(y) &= C_n^1 y^{n-1} - C_n^3 y^{n-3} + C_n^5 y^{n-5} - \dots \end{aligned}$$

Нам, впрочем, понадобится только первый коэффициент многочлена  $q_n$ .)

Поскольку для каждого из углов  $1^\circ + 4^\circ k$ , где  $k=0, 1, 2, \dots, 44$ ,

$$\operatorname{ctg} 45(1^\circ + 4^\circ k) = \operatorname{ctg}(45^\circ + 180^\circ k) = 1,$$

то

$$\frac{p_{45}(\operatorname{ctg}(1^\circ + 4^\circ k))}{q_{45}(\operatorname{ctg}(1^\circ + 4^\circ k))} = 1,$$

то есть все числа  $y = \operatorname{ctg}(1^\circ + 4^\circ k)$  являются корнями уравнения

$$p_{45}(y) - q_{45}(y) = 0. \quad (*)$$

Нам важен коэффициент при  $y^{44}$ , поэтому запишем (\*) так:

$$y^{45} - 45y^{44} + \dots = 0. \quad (**)$$

Теперь осталось заметить, что все 45 чисел  $\operatorname{ctg}(1^\circ + 4^\circ k)$  различны (поскольку  $\operatorname{ctg} 1^\circ > \operatorname{ctg} 5^\circ > \dots > \operatorname{ctg} 177^\circ$ ). Тем самым это все 45 различных корней уравнения (\*). Следовательно, по теореме Виета их сумма равна 45.

Это решение прислал *Э. Туркевич*. Такое же решение имел в виду и автор задачи *В. П. Бешкарев* (Горький).

Однако двое наших читателей — *С. Т. Берколайко* (Белгородская обл.) и *В. Я. Гомолич* (Одесса) — сумели доказать утверждение задачи прямым вычислением. Мы проведем промежуточные результаты их решений, чтобы показать, как много нужно было проявить искусства, если не пользоваться «наукой».

*С. Т. Берколайко:*

Применяя тождество

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(\alpha + 60^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 120^\circ) &= 3 \operatorname{tg} 3\alpha \quad (***) \\ 15 \text{ раз к } \alpha &= 1^\circ + 4^\circ k \quad (k=0, 1, 2, \dots, 14), \\ \text{складывая все 15 равенств и, применяя сно-} & \\ \text{ва (***)}, \text{ приводим исходную сумму к такой:} & \\ 9(\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ) + 9, & \\ \text{после чего остается доказать, что круглая} & \\ \text{скобка равна 4.} & \end{aligned}$$

В. Я. Гомолит:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{44} \operatorname{tg}(1^\circ + 4^\circ k) &= \sum_{k=1}^{45} \operatorname{tg}(45^\circ + 4^\circ k) = \\ &= \sum_{k=1}^{45} \frac{1 + \operatorname{tg} 4^\circ k}{1 - \operatorname{tg} 4^\circ k} = 45 + \sum_{k=1}^{45} \operatorname{tg} 8^\circ k + \\ &+ \sum_{k=1}^{45} \operatorname{tg} 4^\circ k \operatorname{tg} 8^\circ k, \quad (****) \end{aligned}$$

после чего доказывается, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{45} \operatorname{tg} 4^\circ k &= 0, \quad \sum_{k=1}^{45} \operatorname{tg} 8^\circ k = 0, \\ \sum_{\substack{j, k=1, \\ j \neq k}}^{45} \operatorname{tg} 4^\circ k \operatorname{tg} 8^\circ j &= 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что обе суммы в (\*\*\*\*) равны 0.

Н. Б. Васильев

В этом номере мы публикуем решения задач Ф108—Ф115

### Ф108

Десять муравьев решили утащить со стола лежащую на нем соломинку. Как им нужно поступить, если сила, с которой может тащить соломинку каждый из муравьев, несколько меньше  $\frac{1}{10}$  силы трения, действующей на соломинку, когда она перемещается по столу? Поднять соломинку муравьям не под силу.

Многие читатели предлагали муравьям катить соломинку или смазать стол какой-нибудь жидкостью, чтобы уменьшить коэффициент трения между соломинкой и столом. Мы не будем останавливаться на этих решениях и разберем случаи, когда у муравьев нет «под руками» жидкости и соломинку нельзя катить, например, потому, что она изогнута и повернуть ее муравьям не под силу.

Хотя соломинку нельзя просто тащить по столу, прикладывая силу горизонтально, это можно сделать, если силу приложить под углом к плоскости стола. При этом муравьи «проиграют» в горизонтальной силе, но выиграют за счет уменьшения давления соломинки на стол и, следовательно, за счет уменьшения силы трения, действующей на соломинку.

Пусть сила  $F$  приложена к соломинке под углом  $\alpha$  к столу (рис. 9). Так как стол в вертикальном направлении не перемещается, то

$$F \sin \alpha + N - mg = 0.$$

Здесь  $N$  — сила реакции стола,  $m$  — масса

соломинки. Отсюда

$$N = -F \sin \alpha + mg.$$

Соломинка будет перемещаться по столу в том случае, когда горизонтальная составляющая силы  $F$  больше силы трения  $kN$ :

$$F \cos \alpha > (mg - F \sin \alpha) k.$$

Отсюда находим, что сила  $F$  должна быть больше  $\frac{mgk}{\cos \alpha + k \sin \alpha}$ .

Проведя тригонометрические преобразования, получим, что для того, чтобы соломинка двигалась по столу, муравьи должны тащить ее с силой

$$F \geq \frac{mgk}{\cos(\alpha - \beta) \sqrt{k^2 + 1}}, \quad \text{где } \beta = \operatorname{arctg} k.$$

Необходимая для преодоления трения сила  $F$  минимальна при  $\alpha = \beta = \operatorname{arctg} k$ . В этом

случае  $F \geq \frac{mgk}{\sqrt{k^2 + 1}}$ .

Эта сила в  $\sqrt{k^2 + 1}$  раз меньше силы трения, действующей на соломинку при ее скольжении по столу, если приложенная к соломинке сила горизонтальна.

Есть еще одно интересное решение этой задачи. Хотя муравьи не могут тащить соломинку, прикладывая силу горизонтально, но они могут перемещать ее, поворачивая.

Пусть сила  $F$  приложена к одному из концов соломинки (рис. 10). Соломинка начнет поворачиваться, причем точка, вокруг

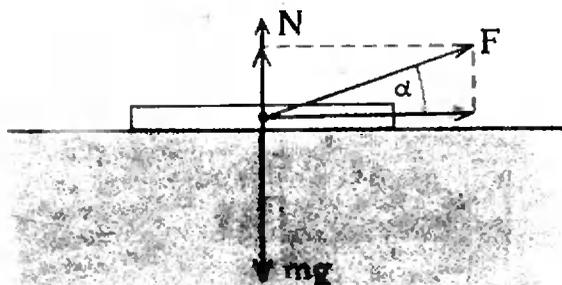


Рис. 9.

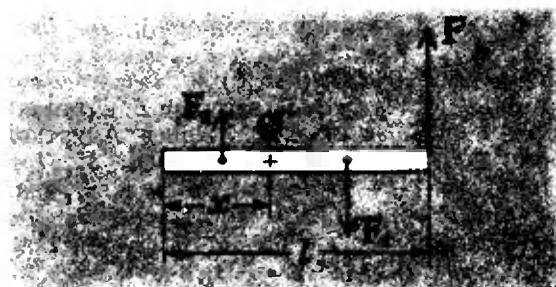


Рис. 10.

которой будет вращаться соломинка, не совпадет с ее серединой.

Сила трения каждого из кусков соломинки пропорциональна весу этих кусков

$$F_1 = m \frac{l-x}{l} gk, \quad F_2 = m \frac{x}{l} gk.$$

Теперь можно записать условие равенства нулю моментов сил относительно точки O:

$$F(l-x) - F_1 \left( \frac{l-x}{2} \right) - F_2 \frac{x}{2} = 0. \quad (1)$$

Подставляя значения  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F \approx mgk$  (так как по условию  $F$  лишь несколько меньше  $mgk$ ), найдем, что

$$x = \frac{l}{\sqrt{2}}.$$

Это расстояние меньше половины длины соломинки. Таким образом, соломинка вращается не вокруг середины, а вокруг точки, находящейся ближе к одному из концов. Повернув соломинку на  $180^\circ$ , муравьи передвинут ее на некоторое расстояние. Теперь всю операцию можно повторить, толкая соломинку с другого конца. И так далее.

Исследуем еще формулу (1). Подставляя в нее  $F_1 = m \frac{l-x}{2} gk$  и  $F_2 = m \frac{x}{l} gk$  и обозначая  $\alpha = \frac{F}{mgk}$ , получим

$$\alpha = \frac{2x^2 + l^2 - 2lx}{2l(l-x)}.$$

Те, кто умеет находить минимум функции, приравняв ее производную нулю, могут найти, что  $\alpha$  минимально при  $x = l \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \approx 0,3l$ . Оно равно 0,43. Таким образом, для того, чтобы вращать соломинку, муравьям достаточно приложить к одному из концов силу, равную 0,43  $mgk$ .

Правильное решение прислали: В. Белов (Вологда), И. Братовская (Усолье-Сибирское Иркутской обл.); М. Вайнмахер (Кривой Рог); Ф. Галиев (Ташкент); Е. Голубев (Мамонов Калининградской обл.); Д. Грак (Смолевичи Минской обл.); Е. Громак (Новокузнецк); Г. Зайцев (Гагра); Л. Книжнерман (Москва); С. Кузьмич (Житомир); Е. Латышев (Баку), А. Левыкин (Райчихинск Амурской обл.), С. Лесушин (Днепропетровск), М. Прегер (Томск), А. Редченко (с. Новопетровка Сумской обл.), А. Ренков (с. Поломощное Кемеровской обл.); Л. Салнина (Благовещенск), В. Сервах (Фрунзе), Н. Федин (Омск), М. Флеров (Москва), Г. Шепетько (Давид-Городок Брестской обл.); М. Юдсон (Волгоград), С. Чекмарев (Москва).

В опыте было установлено, что температура  $m=142$  г ледяной воды в легком сосуде, подвешенном посредине комнаты, поднялась на  $\Delta t=4^\circ \text{C}$  за полчаса. Когда же в сосуде находилось такое же количество льда, то из его таяния потребовалось 10 часов. Какова, исходя из этого эксперимента, удельная теплота плавления льда? Удельная теплоемкость воды  $c_B=1 \text{ кал/г}$ .

Найдем количество тепла  $Q$ , которое подводится к сосуду за полчаса. Так как этого количества тепла оказалось достаточно для нагревания воды, то

$$Q = c_B m \Delta t.$$

За 10 часов к сосуду подводится в 20 раз большее количество тепла. Поэтому

$$\lambda m = 20 c_B m \Delta t.$$

Отсюда

$$\lambda = 20 c_B \Delta t = 80 \text{ кал/г}.$$

Правильное решение этой задачи прислали около 100 читателей.

Ф110

Если вольтметр подключить параллельно верхнему сопротивлению  $r_1$  (рис. 11), то он покажет  $u_1=6$  в, если параллельно нижнему сопротивлению  $r_2$ , то  $u_2=4$  в, а если его подключить к точкам А и В, то он покажет  $u=12$  в. Каковы в действительности падения напряжения на сопротивлениях  $r_1$  и  $r_2$ ?

Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало.

При подключении вольтметра к точкам А и В его показание равно э.д.с. источника. Поэтому если вольтметр подключен к сопротивлению  $r_1$ , а внутреннее сопротивление вольтметра равно  $r$ , то по цепи идет ток

$$I = \frac{u}{r_2 + \frac{r_1 r}{r_1 + r}}.$$

Это означает, что

$$u_1 = \frac{u}{r_2 + \frac{r_1 r}{r_1 + r}} \frac{r_1 r}{r_1 + r}. \quad (1)$$

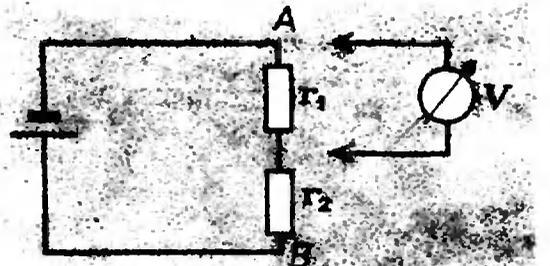


Рис. 11.

Точно так же

$$u_2 = \frac{u}{r_1 + \frac{r_2 r}{r_2 + r}} \cdot \frac{r_2 r}{r_2 + r}. \quad (2)$$

Разделив конечное уравнение (1) на уравнение (2), получим

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Таким образом,  $\frac{r_1}{r_2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ .

При отключенном вольтметре падение напряжения на сопротивлениях  $r_1$  и  $r_2$  равно  $u=12$  в. Так как отношение сопротивлений известно, нетрудно найти и падение напряжения  $u_1$  и  $u_2$  на сопротивлениях:

$$u_1 + u_2 = u, \quad \frac{u_1}{u_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Отсюда

$$u_1 = \frac{ur_1}{r_1 + r_2} = \frac{u}{1 + \frac{r_2}{r_1}} = 7,2 \text{ в};$$

$$u_2 = u - u_1 = 4,8 \text{ в}.$$

Правильное решение прислали: П. Анненко (с. Тоцкое Оренбургской обл.), Е. Долгов (Москва), А. Кацнельсон (Новомосковск Тульской обл.), С. Кузьмич (Житомир), Е. Латышев (Баку), А. Левыкин (Райгачинск Амурской обл.), А. Мамула (с. Дыбинцы Киевской обл.), В. Переседов (Похвистнево), М. Прегер (Томск), Л. Рудицер (Харьков), Л. Салкина (Благовещенск), А. Сбоев (п. Медведок Кировской обл.), П. Сергеев (Грозный), Ш. Слепой (Черновцы), Н. Ткаченко (Днепропетровск), И. Турищев (Кропоткин Краснодарского края), Н. Федин (Омск), Г. Цибенко (Славянск Донецкой обл.), Л. Циферблат (Львов), В. Шабунин (Москва), Е. Шахнович (Калинин обл.), Р. Шиганов (Люберцы Московской обл.), И. Юрченко (Киев).

### Ф111

Имеется однородный шнур со взрывчатым веществом. Скорость горения шнура равна  $v$ , скорость распространения взрывной волны по воздуху  $c$ . Найти форму линии, по которой нужно расположить шнур, чтобы взрывы от всех точек шнура пришли в заданную точку одновременно.

Можно ли сделать то же самое с поверхностью со взрывчаткой и получить сходящуюся сферическую волну с большой плотностью энергии?

Если скорость распространения взрывной волны больше скорости горения шнура, то расположить шнур так, чтобы взрывные

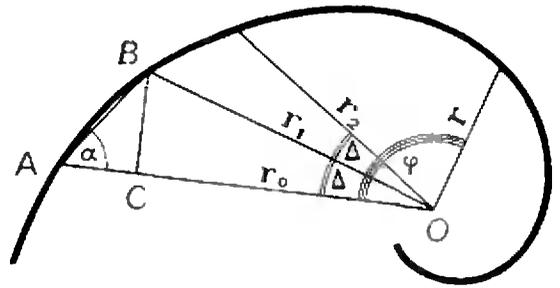


Рис. 12.

волны от всех точек шнура пришли в заданную точку одновременно, невозможно. Если  $v=c$ , то шнур, очевидно, нужно расположить по прямой, проходящей через заданную точку. В случае  $v > c$  ответ не так очевиден. Разберем этот случай подробнее.

Пусть красная кривая на рисунке 12 — это линия, по которой нужно расположить шнур для того, чтобы взрывные волны пришли в точку  $O$  одновременно. Выберем на линии две близкие точки  $A$  и  $B$  такие, чтобы кривую  $AB$  можно было считать прямой (для этого отрезок  $AB$  должен быть много меньше расстояний  $r_0$  и  $r_1$  от точки  $O$  до точек  $A$  и  $B$ ). Время, за которое сторае участок шнура  $AB$ , обозначим  $\tau$ . Тогда  $AB = v\tau$ . Малость  $AB$  означает, что  $\tau$  мало. При  $\tau \rightarrow 0$  точка  $B$  «стремится» к точке  $A$ , а направление отрезка  $AB$  — к направлению касательной к красной кривой в точке  $A$ .

Найдем угол  $\alpha$ , который образует отрезок  $AB$  с радиусом  $OA$ . Для этого отложим на радиусе  $OA$  отрезок  $OC$ , равный длине радиуса  $r_2$ , и проведем отрезок  $BC$ . Так как отрезок  $AB$  мал, то отрезок  $BC$  совпадает с дугой окружности радиуса  $r_1$  с центром в точке  $O$  и угол  $ACB$  близок к прямому (а при  $\tau \rightarrow 0 \Rightarrow ACB \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ). Это означает, что

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB}.$$

Но  $AB = v\tau$ , а  $AC = r_0 - r_1$ . Так как время распространения взрывной волны из точки  $B$  должно быть на  $\tau$  меньше времени распространения волны из точки  $A$ , то  $r_1 = r_0 - c\tau$ . Следовательно,  $AC = r_0 - r_0 + c\tau = c\tau$  и

$$\cos \alpha = \frac{c\tau}{v\tau} = \frac{c}{v}.$$

Таким образом, угол, образуемый касательной к красной кривой и радиусом, проведенным к точке кривой из точки  $O$ , не зависит от расстояния кривой до точки  $O$ , и красная кривая пересекает все лучи, выходящие из точки  $O$  под одним и тем же углом  $\alpha = \arccos \frac{c}{v}$ . Таким свойством,

как известно, обладает логарифмическая спираль. Значит, кривая, по которой нужно рас- положить шнур — это логарифмическая спираль. Ее уравнение в полярных координатах  $r=r_0 e^{-\varphi \operatorname{ctg} \alpha}$ . Это уравнение можно полу- чить и непосредственно.

Разделим угол  $\varphi$  на малые углы  $\Delta$ . Тогда кривая разделится на  $k$  частей, где

$$k = \frac{\varphi}{\Delta}. \text{ Найдем изменение радиуса } r \text{ при}$$

его повороте на угол  $\Delta$ :

$$r_1 = r_0 - AC = r_0 - CB \operatorname{ctg} \alpha.$$

Но  $CB = r_1 \cdot \Delta$ , следовательно,

$$r_1 = r_0 - r_1 \Delta \operatorname{ctg} \alpha.$$

Отсюда

$$r_1 = \frac{r_0}{1 + \Delta \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Аналогично

$$r_2 = \frac{r_1}{1 + \Delta \operatorname{ctg} \alpha} = r_0 \left( \frac{1}{1 + \Delta \operatorname{ctg} \alpha} \right)^2;$$

$$r_3 = \frac{r_2}{1 + \Delta \operatorname{ctg} \alpha} = r_0 \left( \frac{1}{1 + \Delta \operatorname{ctg} \alpha} \right)^3;$$

$$\dots$$

$$r = r_0 \left( \frac{1}{1 + \Delta \operatorname{ctg} \alpha} \right)^k.$$

Но  $k = \frac{\varphi}{\Delta}$ , следовательно,

$$r = r_0 \left( \frac{1}{1 + \Delta \operatorname{ctg} \alpha} \right)^{\frac{\varphi}{\Delta}} =$$

$$= r_0 e^{\frac{\varphi}{\Delta} \ln \left( \frac{1}{1 + \Delta \operatorname{ctg} \alpha} \right)}.$$

Так как при малых  $x$  ( $x \ll 1$ )  $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$ ,

а  $\ln(1-x) \approx -x$ , то

$$r = r_0 e^{\frac{\varphi}{\Delta} (-\Delta \operatorname{ctg} \alpha)} = r_0 e^{-\varphi \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Можно, конечно, и поверхность сделать такой, чтобы взрывные волны от всех ее точек пришли в заданную точку одновременно. Она должна быть поверхностью вращения логарифмической спирали вокруг оси, проходящей через заданную точку и лежащей в плоскости спирали.

Правильное решение прислали В. Беликов (Москва), Л. Книжнерман (Москва), И. Турицев (Кропоткин Краснодарского края), Н. Федин (Омск), Г. Фильковский (Баку), М. Хасанов (с. Бураево БАССР), В. Шабунин (Москва).

Имеется стопка из  $k$  плоскопараллельных пластинок, показатели преломления которых равны  $n_1, n_2, \dots, n_k$ . Толщина каждой пластинки  $d$ . На сколько сместится после прохождения стопки пластинок луч, падающий на пластинку с показателем преломления  $n_1$  под углом  $\alpha$  к поверхности пластинки.

Если угол падения луча на пластинку с показателем преломления  $n_1$  равен  $\beta_1$  ( $\beta = 90^\circ - \alpha$ ), а угол преломления  $\gamma_1$  (рис. 13), то

$$\frac{\sin \beta_2}{\sin \gamma_2} = n_1. \quad (1)$$

Отношение синусов углов падения и преломления луча на второй границе пластинки равно  $\frac{n_2}{n_1}$ :  $\frac{\sin \beta_2}{\sin \gamma_2} = \frac{n_2}{n_1}$ .

Но  $\beta_2 = \gamma_1$ , поэтому

$$\frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получим

$$\frac{\sin \beta_1}{\sin \gamma_2} = n_2. \quad (3)$$

То есть угол  $\gamma_2$  такой же, каким он был, если бы свет падал непосредственно на вторую пластинку.

Аналогично

$$\frac{\sin \beta_3}{\sin \gamma_3} = \frac{\sin \gamma_2}{\sin \gamma_3} = \frac{n_3}{n_2}. \quad (4)$$

Из (3) и (4) следует, что

$$\frac{\sin \beta_1}{\sin \gamma_3} = \frac{n_3}{n_2} n_2 = n_3.$$

Ясно, что, продолжая записывать последовательно соотношения между углами

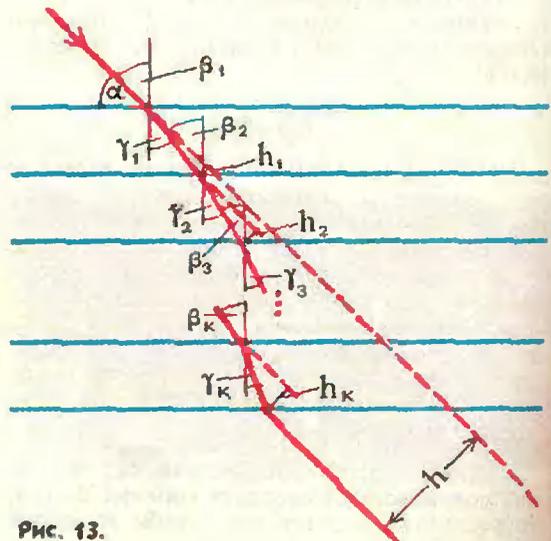


Рис. 13.

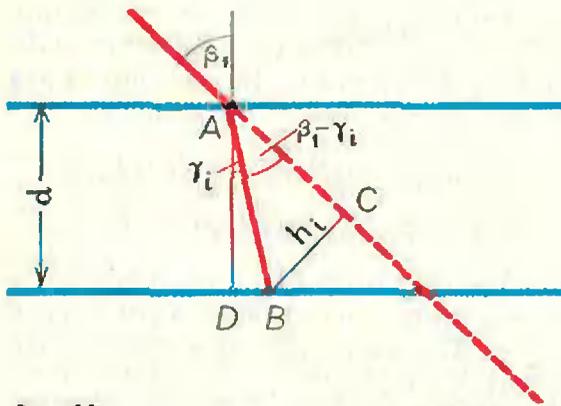


Рис. 14.

падения и преломления луча для каждой из пластинок, мы получим, что угол, под которым идет луч в каждой из пластинок, такой же, как если бы свет падал на нее из воздуха

$$\frac{\sin \beta_1}{\sin \gamma_i} = n_i.$$

Отсюда, в частности, следует, что после прохождения всей стопки пластинок луч выйдет параллельным своему первоначальному направлению:

$$n_{k+1} \approx 1 \text{ и } \frac{\sin \beta_1}{\sin \gamma_{k+1}} = 1, \text{ то есть}$$

$$\beta_1 = \gamma_{k+1}.$$

Смещение луча, очевидно, равно сумме его смещений в отдельных пластинках

$$h = h_1 + h_2 + \dots + h_k.$$

Найдем смещение  $h_i$  (рис. 14). Для этого вначале из треугольника  $ADB$  находим  $AB$ :

$$AB = \frac{AD}{\cos \gamma_i} = \frac{d}{\cos \gamma_i}.$$

Теперь из треугольника  $ACB$  получаем

$$\begin{aligned} h_i &= AB \cdot \sin(\beta_1 - \gamma_i) = \\ &= d \frac{\sin(\beta_1 - \gamma_i)}{\cos \gamma_i} = \\ &= d(\sin \beta_1 - \cos \beta_1 \operatorname{tg} \gamma_i). \end{aligned}$$

$$\text{Так как } \operatorname{tg} \gamma_i = \frac{\sin \gamma_i}{\sqrt{1 - \sin^2 \gamma_i}} =$$

$$= \frac{\frac{\sin \beta_1}{n_i}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin \beta_1}{n_i}\right)^2}} = \frac{\sin \beta_1}{\sqrt{n_i^2 - \sin^2 \beta_1}},$$

$$\begin{aligned} \text{то } h_i &= d \sin \beta_1 \left(1 - \frac{\cos \beta_1}{\sqrt{n_i^2 - \sin^2 \beta_1}}\right) = \\ &= d \cos \alpha \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n_i^2 - \cos^2 \alpha}}\right). \end{aligned}$$

Полное смещение луча равно

$$\begin{aligned} h &= h_1 + h_2 + \dots + h_k = \\ &= d \cos \alpha \left( k - \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n_1^2 - \cos^2 \alpha}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n_2^2 - \cos^2 \alpha}} - \dots - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n_k^2 - \cos^2 \alpha}} \right) = \\ &= d \cos \alpha \left( k - \sin \alpha \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{n_i^2 - \cos^2 \alpha}} \right). \end{aligned}$$

Правильное решение прислали В. Белов (Вологда), Е. Долгов (Москва), А. Мамула (г. Дыбины Киевской обл.), В. Муханов (Канаш УАССР), С. Потапов (Ульяновск), М. Прегер (Томск), Л. Рудицер (Харьков), А. Сбоев (п. Медведок Кировской обл.), Л. Сергеев (Грозный), Ш. Слепой (Черновцы), Н. Ткаченко (Днепропетровск), А. Удальцов (Калининград Московской обл.), Н. Федин (Омск), С. Филенко (Запорожье), Г. Фильковский (Баку), М. Флеров (Москва), С. Чекмарев (Москва), Г. Шепетько (Давид-Городок Брестской обл.).

### ◆ 113

**Сосуд наполовину заполнен водой, в которой плавает кусок льда. Поверх льда наливают керосин, верхний уровень которого устанавливается на высоте  $h$  от дна сосуда (рис. 15). Как изменится эта высота, когда лед растает?**

В том случае, когда кусок льда полностью покрыт керосином (как это показано на рисунке), задача решается очень просто. Зафиксируем мысленно оболочку, охватывающую кусок льда, и растопим лед. Очевидно, объем образовавшейся воды будет меньше объема льда. Следовательно, общий уровень жидкости в сосуде уменьшится.

Предположим теперь, что керосин не покрывает лед.

Ясно, что если бы в сосуде были только вода и лед, то после таяния льда уровень воды не изменился бы. Действительно, так как сила давления на дно сосуда равна весу содержимого сосуда, а он при таянии льда не меняется, то не меняется и сила давления на дно сосуда. Это означает, что не меняется и давление на дно сосуда. Но лед не оказывает непосредственного давления на дно — он плавает. Поэтому давление на дно равно давлению воды

$$P = \rho_B g h_B.$$

После таяния льда давление тоже равно давлению воды

$$P = \rho_B g h'_B.$$

Это означает, что  $h_B = h'_B$ .

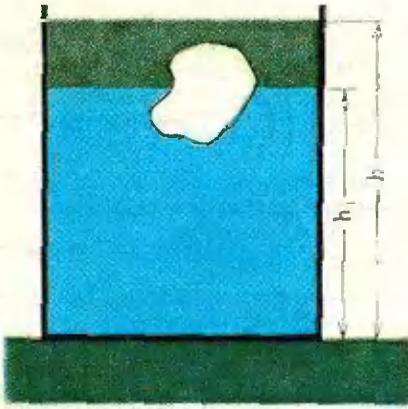


Рис. 15.

В нашем случае давление на дно тоже не меняется. Но теперь оно равно сумме давлений столбов воды и керосина

$$P = \rho_{\text{в}} g h_1 + \rho_{\text{к}} g (h - h_1) = (\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{к}}) g h_1 + \rho_{\text{к}} g h$$

Если уровень воды в сосуде после таяния льда равен  $h_1'$ , а уровень керосина  $h'$ , то  $(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{к}}) g h_1' + \rho_{\text{к}} g h' = (\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{к}}) g h_1 + \rho_{\text{к}} g h$ .

Пусть объем льда, находящийся в воде, равен  $V_1$ , объем льда, находящийся в керосине, равен  $V_2$ , а масса льда равна  $m$ . Представим себе, что, убрав лед, мы оставили его невесомую оболочку и налили в нее воду и керосин так, что уровень их в оболочке совпадает с уровнем воды в сосуде. Ясно, что эта оболочка будет находиться в равновесии. Но это означает, что на оболочку со стороны воды действует архимедова выталкивающая сила  $F$ , равная весу налитых в оболочку жидкостей

$$F = \rho_{\text{в}} g V_1 + \rho_{\text{к}} g V_2$$

Если в оболочку поместить сам лед, то сила  $F$  не изменится. Но лед плавает. Это означает, что  $F = mg$  и

$$\rho_{\text{в}} g V_1 + \rho_{\text{к}} g V_2 = mg \quad (1)$$

Если бы в сосуде находились только лед и вода, то в воде находился бы такой объем льда  $V_1'$ , что

$$\rho_{\text{в}} g V_1' = mg \quad (2)$$

Из формул (1) и (2) следует, что в нашем случае в воде находится объем  $V_1$ , который меньше  $V_1'$ , то есть меньше объема льда, который был бы погружен в воду в отсутствие керосина над ним. Но в последнем случае, как мы показали, уровень воды в сосуде не изменился бы. Это означает, что вода, образовавшаяся при таянии льда, заполнила бы как раз объем  $V_1'$  погруженной в воду части льда.

В нашем случае объем воды, образовавшийся при таянии льда, тот же, а объем

погруженной в воду части льда  $V_1'$  меньше. Поэтому при таянии льда уровень воды в сосуде повысится:  $h_1' > h_1$ . Но давление на дно сосуда должно остаться прежним. Поэтому

$$(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{к}}) g h_1 + \rho_{\text{к}} g h = (\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{к}}) g h_1' + \rho_{\text{к}} g h'$$

$$(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{к}}) (h_1' - h_1) = \rho_{\text{к}} (h - h')$$

Так как  $h_1' > h_1$ , то  $h > h'$ : уровень керосина в сосуде при таянии льда уменьшится.

Правильное решение прислали С. Арасланова (п. Н-Ивкино Кировской обл.), А. Баевский (Гомель), В. Беликов (Москва), М. Вайнмахер (Кривой Рог), Д. Габриэлян (Белая Калитва), А. Кудай (Москва), Л. Мальгезон (Сафоново Мурманской обл.), А. Панфилов (Свердловск), А. Пурукин (Москва), Н. Федин (Омск).

## Ф114

Два шарика с массами  $m_1$  и  $m_2$  могут колебаться на пружинках одинаковой жесткости вдоль стержня, прикрепленного к бруску с массой  $M$  (рис. 16). Брусок лежит на горизонтальной плоскости. В начальный момент шарики притянуты друг к другу с помощью ниточки, сила натяжения которой равна  $T$ . Ниточку пережигают. При каком минимальном коэффициенте трения между бруском и плоскостью брусок не сдвинется с места?

Будем считать, что брусок не перемещается по плоскости. В этом случае пружинки совершают гармонические колебания

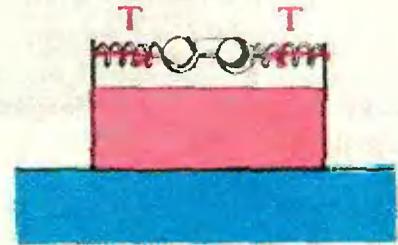


Рис. 16.

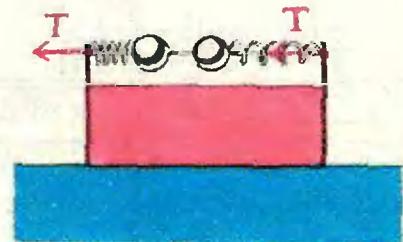


Рис. 17.

на пружинках с разными частотами

$$\left( \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m_2}}, \quad \text{где} \right.$$

$k$  — жесткость пружины). Так как частоты различны, то непременно наступит момент, когда оба грузика отклонены в одну сторону и обе пружины максимально деформированы (рис. 17). Ясно, что при этом деформации пружинок такие же, какими они были до пережигания нити, только теперь одна из пружинок растянута, а другая сжата. Действительно, общая энергия каждого грузика с пружиной, к которой он прикреплен, после пережигания нити не меняется. Но в тот момент, когда деформация пружинки максимальна, грузик неподвижен. Поэтому общая энергия в этот момент равна просто энергии деформации пружинки. Из равенства потенциальных энергий деформации пружины следует равенство ее деформаций.

Поскольку деформации пружинок равны начальным, то равны начальным и величины сил натяжения пружинок, то есть силы, с которыми пружинки действуют на брусок. До пережигания нити эти силы были равны  $T$  и направлены в разные стороны. Теперь же они направлены в одну сторону. Это означает, что на брусок действует сила  $2T$ . Брусок не сдвинется с места, если  $2T$  меньше силы трения бруска о плоскость:

$$2T < (M + m_1 + m_2)gf$$

( $f$  — коэффициент трения).

Из этого неравенства следует, что коэффициент трения должен быть больше, чем

$$\frac{2T}{(M + m_1 + m_2)g}$$

Правильное решение прислали С. Алексеев (с. Бобрышево Пристенского р-на Курской обл.), А. Баевский (Гомель), В. Белов (Вологда), В. Беликов (Москва), М. Вайнмахер (Кривой Рог), В. Волин (Москва), С. Галахваридзе (Тбилиси), Ф. Галиев (Ташкент), Е. Громач (Новокузнецк), М. Дзик (Кратово Тюменской обл.), А. Истомин (Подольск Московской обл.), А. Кацнельсон (Новомосковск Тульской обл.), В. Коротких (Новокузнецк), А. Кудлай (Москва), С. Легушин (Днепропетровск), И. Мартынович (д. Каклетень Брестской обл.), М. Прегер (Томск), М. Розов (Минск), П. Сергеев (Грозный), А. Смирнов (Горький), Н. Федин (Омск), М. Флеров (Москва), Г. Фурман (Черновцы), Г. Шепетько (Давид-Городок Брестской обл.).

## Ф115

«Черный ящик» — коробка с неизвестной схемой внутри имеет два вывода. Последовательно с ящиком включают сопротивление  $R=4$  ом и затем эту цепь подключают

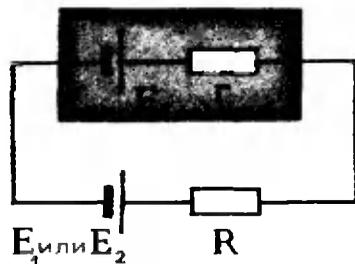


Рис. 18.

к источнику с э. д. с.  $E_1=5$  в (рис. 18). При этом по цепи идет ток  $I_1=1$  а. Если цепь подключить к источнику с э. д. с.  $E_2=20$  в, то по ней будет идти ток  $I_2=2$  а. Какая схема находится внутри ящика?

Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы.

Мы получили много схем с реле и сложными цепями, включающими электронные лампы или полупроводники. Однако в ящике может находиться и совсем простая схема: сопротивление  $r$  и источник  $E$  ( $E_1 < E < E_2$ ) (рис. 18).

При подключении ящика к источнику с э. д. с.  $E_1$  по цепи должен идти ток

$$I_1 = \frac{E - E_1}{R + r}. \quad (1)$$

При подключении к ящику источника с э. д. с.  $E_2$  по цепи пойдет ток

$$I_2 = \frac{E_2 - E}{R + r}. \quad (2)$$

Решая уравнения (1) и (2) совместно, найдем

$$E = \frac{I_1 E_2 + I_2 E_1}{I_1 + I_2} = 10 \text{ в,}$$

$$r = 3,5 \text{ ом.}$$

Правильное решение прислали А. Баевский (Гомель), В. Белов (Вологда), В. Борщев (Уфа), Л. Брагинский (Фрунзе), М. Вайнмахер (Кривой Рог), А. Кацнельсон (Новомосковск Тульской обл.), О. Ким (Ульяновск), О. Кокотская (Брянск), В. Кууск (Ржев), А. Левыкин (Райгахинск Амурской обл.), С. Легушин (Днепропетровск), Л. Малькензон (Сафоново-Мурманской обл.), А. Мартиросян (Кафан), А. Панфилов (Свердловск), А. Редченко (с. Новопетровка Сумской обл.), П. Сергеев (Грозный), М. Флеров (Москва), Г. Фурман (Черновцы), С. Черников (Семипалатинск).

И. Ш. Слободецкий



# ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

Л. Е. ЕВТУШИК

В 1962 году поступавшие на механико-математический факультет МГУ столкнулись с такой задачей.

**Задача 1.** В треугольной пирамиде  $ABCD$  высота  $AK$  проходит через точку  $K$  пересечения высот основания  $BCD$ , а боковые ребра  $AB$  и  $AC$  взаимно перпендикулярны. Найдите отношение площадей боковых граней  $ADB$  и  $ADC$ , если  $AB=b$ ,  $AC=c$ .

Это столкновение было не в пользу большинства школьников. Почему? Так ли уж трудна задача? Мы советуем вам подумать самостоятельно над этой и другими поучительными конкурсными задачами, которые здесь будут рассматриваться, а если у вас будут затруднения, мы попробуем вместе разобраться в причинах неудачи.

Многие, по-видимому, решили, что все зависит от хитроумных вычислений, потому что привыкли решать в школе в основном задачи на вычисление. А между тем изюминка задачи заключалась «только» в том, чтобы доказать, что  $AD \perp AB$ ,  $AD \perp AC$ , и тогда все просто:

$$S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} AD \cdot AB = \frac{1}{2} AD \cdot b,$$

$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} AD \cdot AC = \frac{1}{2} AD \cdot c,$$

$$\frac{S_{\triangle ADB}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{b}{c}.$$

Таким образом, главное в задаче — это доказательство факта, который, как мы увидим, основан на важном разделе стереометрии «Прямые и плоскости». Мы еще вернемся к нашему примеру. А сейчас подчеркнем, что причина многих неудач в стереометрии — это недооценка раздела «Прямые и плоскости». Теоремы этого раздела часто усваиваются формально и не закрепляются на решении достаточного числа серьезных стереометрических задач. Между тем решение стереометрической задачи почти всегда опирается на теоремы, выражающие отношения между прямыми и плоскостями: параллельность и перпендикулярность, углы и расстояния, принадлежность и пересечение. Будет очень полезно, если, разбирая наши решения, вы подметите места, где применяется та или иная теорема, и сформулируете четко каждую из них.

Возьмем отношение перпендикулярности прямой и плоскости, которое играет решающую роль в первой задаче, да и во многих других задачах. Известна такая теорема.

**Теорема 1.** Если прямая  $h$  перпендикулярна двум прямым  $m$  и  $n$  плоскости  $P$ , проходящим через точку  $K$  пересечения  $h$  с плоскостью  $P$ , то прямая  $h$  перпендикулярна любой прямой плоскости  $P$ , проходящей через  $K$ .

В этом случае говорят, что прямая  $h$  перпендикулярна плоскости  $P$ . Из теоремы 1 легко вывести более общее утверждение.

**Теорема 2.** Если прямая  $h$  перпендикулярна двум произвольным непараллельным прямым  $a$  и  $b$  плоскости  $P$ , то  $h$  перпендикулярна любой прямой плоскости  $P$ .

В самом деле, возьмем произвольную прямую  $c$  в плоскости  $P$  и проведем через точку  $K$  три прямые:  $a' \parallel a$ ,  $b' \parallel b$ ,  $c' \parallel c$  (рис. 1). По условию  $h \perp a$ , а это значит, что, в соответствии с определением угла между скрещивающимися прямыми (в нашем случае  $h$  и  $a$ ),  $h \perp a'$ . Аналогично  $h \perp b'$ . Так как  $a'$  и  $b'$  не совпадают (ибо по условию  $a \not\parallel b$ ), то из теоремы 1 следует, что  $h \perp c'$ . Но  $c \parallel c'$ , поэтому  $h \perp c$ .

Вспомните теперь условие задачи 1 и посмотрите на рисунок 2. Замечаем, что так как прямая  $AK$  перпендикулярна плоскости  $BCD$ , то  $DC \perp AK$ . Но  $DC \perp MB$  (по условию  $MB$  — высота грани  $BCD$ ). Следовательно, по теореме 2  $DC$  перпендикулярна плоскости  $ABK$ . Прямая  $AB$  лежит в этой плоскости, значит  $DC \perp AB$ . А теперь вспомним, что по условию задачи  $AB \perp AC$ . Итак,  $AB \perp DC$  и  $AB \perp AC$ , откуда по теореме 2  $AB$  перпендикулярна плоскости  $ACD$ , и, значит,  $AB \perp AD$ . Аналогично доказывается, что  $AC \perp AD$ . Далее следуют те нехитрые вычисления, которые мы уже привели вначале. Как

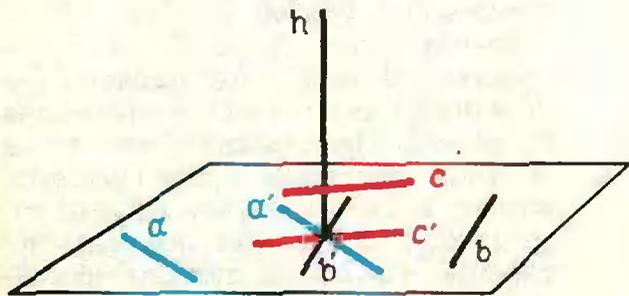


Рис. 1.

видите, все решение задачи состоит по существу в двукратном применении теоремы 2 с полным использованием тех свойств пирамиды, которые даны в условии задачи.

Одному из этих свойств (некоторая высота треугольной пирамиды проходит через точку пересечения высот противоположной грани) мы уделим внимание в связи с последующей задачей. Назовем такие треугольные пирамиды *ортоцентрическими*. Если внимательно просмотреть решение задачи 1, то можно заметить там доказательство такого утверждения:

*У ортоцентрической пирамиды каждая пара противоположных ребер взаимно перпендикулярна.*

Докажите сами обратное утверждение:

*Если каждая пара противоположных ребер треугольной пирамиды взаимно перпендикулярна, то эта треугольная пирамида — ортоцентрическая.*

После доказательства этого утверждения можно сделать такой вывод:

*У ортоцентрической пирамиды любая высота проходит через точку пересечения высот противоположной грани (подумайте почему?).*

Теперь мы докажем еще одно свойство ортоцентрической пирамиды.

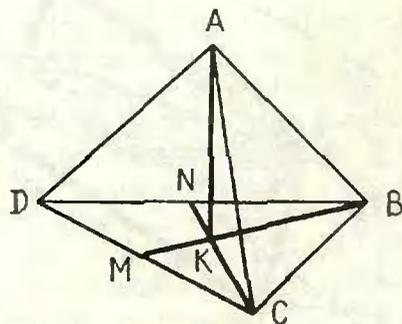


Рис. 2.

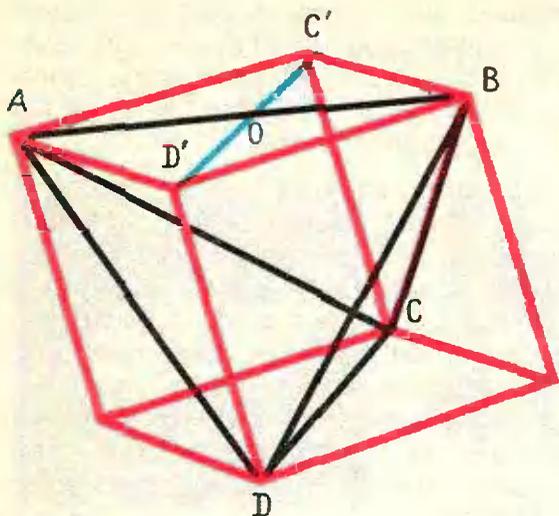


Рис. 3.

**Задача 2.** Длины ребер ортоцентрической пирамиды  $ABCD$  связаны соотношением

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2.$$

**Решение.** В этой задаче существенную роль играет следующее построение. Через каждую пару скрещивающихся ребер пирамиды (на рисунке 3 они окрашены в черный цвет) всегда можно провести пару параллельных плоскостей. Три такие пары плоскостей «вырезают» в пространстве параллелепипед (его ребра мы нарисовали красным цветом). Через каждую вершину пирамиды пройдет только три плоскости из шести, стало быть вершина пирамиды будет и вершиной параллелепипеда. Каждое ребро пирамиды  $ABCD$  будет принадлежать по построению только од-

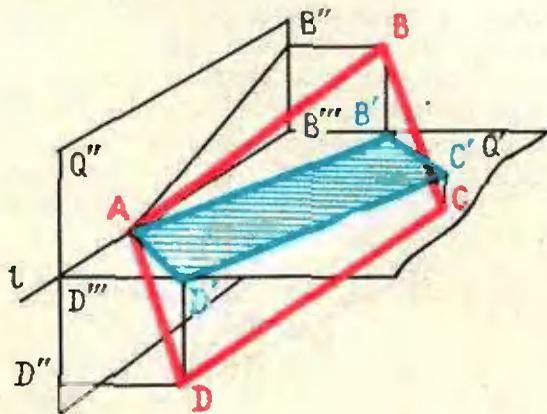


Рис. 4.

ной из шести плоскостей и, следовательно, будет диагональю соответствующей грани построенного параллелепипеда. Теперь настало время вспомнить, что пирамида  $ABCD$  ортоцентрическая, и потому у нее противоположные ребра взаимно перпендикулярны:  $AB \perp CD$ ,  $AC \perp BD$ ,  $AD \perp BC$ . Отсюда следует, что диагонали каждой грани параллелепипеда взаимно перпендикулярны (например,  $AB \perp D'C'$ ), то есть все грани параллелепипеда — ромбы, а значит, длины всех ребер параллелепипеда равны одному числу — обозначим его через  $a$ . Далее находим

$$AB^2 + D'C'^2 = (2AO)^2 + (2D'O)^2 = 4AD'^2 = 4a^2.$$

Но  $D'C' = DC$ , поэтому находим  $AB^2 + DC^2 = 4a^2$ , и аналогично  $AC^2 + BD^2 = 4a^2$ ,  $AD^2 + BC^2 = 4a^2$ , что и доказывает утверждение задачи.

**Задача 3** (МГУ, мехмат, 1969). Прямоугольные проекции плоского четырехугольника на две взаимно перпендикулярные плоскости являются квадратами со сторонами, равными  $a$ . Найти периметр четырехугольника, зная, что одна из его сторон равна  $\frac{a}{2} \sqrt{5}$ .

**Решение** этой задачи достаточно длинное, и потому мы выделим те этапы, на которое оно распадается.

**Обозначения.** Пусть  $ABCD$  — данный четырехугольник (рис. 4) и  $AB = \frac{a}{2} \sqrt{5}$ . Обозначим

взаимно перпендикулярные плоскости буквами  $Q'$  и  $Q''$ , а линию их пересечения буквой  $l$ . Пусть  $B'$  — проекция точки  $B$  на  $Q'$ , а  $B''$  — проекция  $B$  на  $Q''$ . Аналогично  $D'$  — проекция  $D$  на  $Q'$  и  $D''$  — проекция  $D$  на  $Q''$ . Предположим, что точка  $A$  лежит на прямой  $l$ . Это предположение, а также другие факты, облегчающие вычисление искомого периметра  $ABCD$ , мы должны обосновать.

**Обоснования.** 1. Проекция четырехугольника  $ABCD$  на лю-

бую плоскость  $P$  не изменится, если плоскость  $P$  заменить плоскостью  $P' \parallel P$  (рис. 5).

Действительно, фигура  $A_1D_1C_1B_1A_2D_2C_2B_2$  — прямоугольная призма, а две проекции четырехугольника ( $A_1B_1C_1D_1$  и  $A_2B_2C_2D_2$ ) — ее равные основания. Поэтому проекции четырехугольника  $ABCD$  останутся по-прежнему квадратами со стороной  $a$ , если мы будем считать, что плоскости  $Q'$  и  $Q''$  каждая параллельно самой себе перенесены в точку  $A$ . Это упростит чертеж и вычисления.

2. Если проекция четырехугольника  $ABCD$  — квадрат, то сам четырехугольник  $ABCD$  — параллелограмм.

Это следует из того, что плоскость  $ADD_1A_1$  (рис. 5) параллельна плоскости  $BCC_1B_1$  ( $A_1D_1 \parallel B_1C_1$  и  $AA_1 \parallel BB_1$ ), а в таком случае  $AD \parallel BC$ ; аналогично  $AB \parallel DC$ .

3. По условию  $AB' = AB'' = a$ . Проведем через проектирующие перпендикуляры  $BB'$  и  $BB''$  (рис. 4) плоскость  $BB'B''B'''$ . Эта плоскость перпендикулярна и плоскости  $Q'$ , и плоскости  $Q''$  (по какой теореме?).

Поэтому прямая  $l$  перпендикулярна плоскости  $BB'B''B'''$  и  $\angle B'V''B''' = 90^\circ$  (плоскости  $Q'$  и  $Q''$  перпендикулярны). Таким образом,  $BB'B''B'''$  — прямоугольник. Но прямоугольный треугольник  $ABB'$  равен треугольнику  $ABB''$  (вспомним, что  $AB' = AB'' = a$ ), поэтому  $BB' = BB''$  и, значит,

$$BB' = B'B'''$$

Аналогично доказывается, что

$$DD' = D'D'''$$

(как бы ни располагалась точка  $D$  относительно плоскостей  $Q'$  и  $Q''$ ).

На этой основе проводим, наконец, несложные подсчеты.

Вычисления. Так как по условию  $AB = \frac{a}{2}\sqrt{5}$  и  $AB' = a$ , то

$$B'B''' = BB' = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\sqrt{5}\right)^2 - a^2} = \frac{a}{2}.$$

Следовательно, в прямоугольном тре-

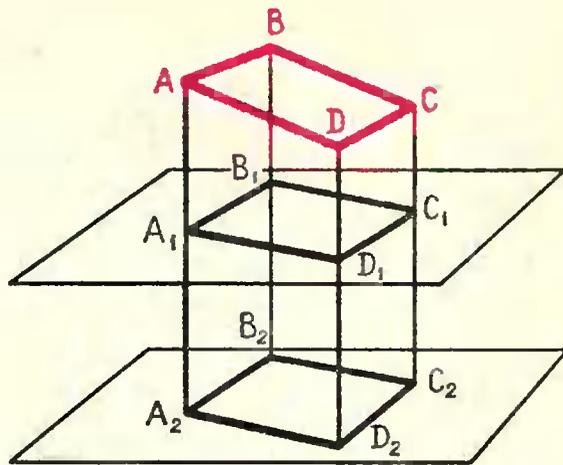


Рис. 5.

угольнике  $AB'B'''$  выполняются соотношения:  $B'B''' = \frac{1}{2} AB'$  и  $\angle B'AB''' = 30^\circ$ . Но  $\angle B'AD' = 90^\circ$ , значит,  $\angle D'AD''' = 60^\circ$ . Зная теперь, что  $AD' = a$ , находим

$$DD' = D'D''' = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

И, наконец, из прямоугольного треугольника  $ADD'$  находим

$$AD = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{7}.$$

Так как  $ABCD$  — параллелограмм, то его периметр равен

$$2(AB + AD) = a(\sqrt{5} + \sqrt{7}).$$

Следующая задача предлагалась на письменном экзамене физического факультета МГУ в 1964 году.

Задача 4. Из концов отрезка  $AB = a$  исходят два луча  $Ax \perp AB$  и  $Bv \perp AB$ , причем  $Ax \perp Bv$ . На луче  $Ax$  отложен отрезок  $AP = u$ , а на луче  $Bv$  — отрезок  $BQ = v$  так, что  $2uv = a^2$ . Доказать, что расстояние от середины отрезка  $AB$  до прямой  $PQ$  равняется  $\frac{a}{2}$ .

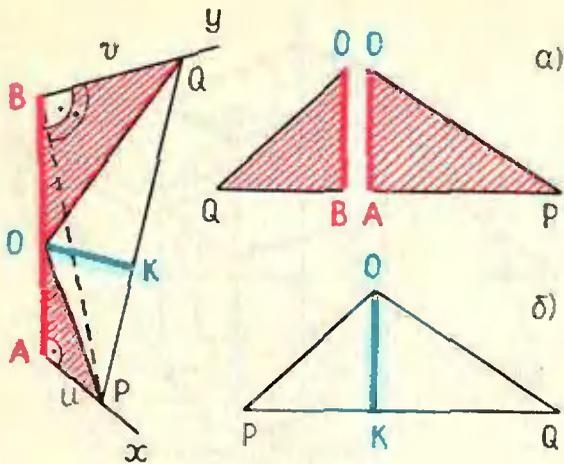


Рис. 6.

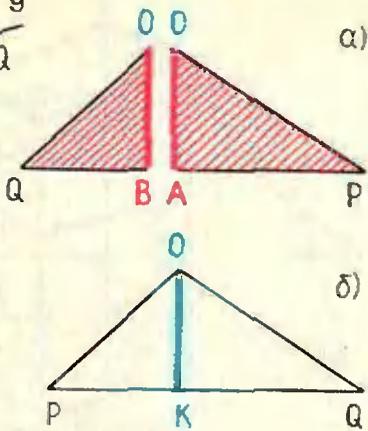


Рис. 7.

Если вдуматься в условие задачи, то можно заметить неожиданность факта, который нам предстоит доказать. В самом деле, отрезок  $PQ$  (рис. 6) не занимает фиксированного положения, так как отрезки  $AP = u$  и  $BQ = v$  могут меняться, лишь бы только  $2uv = a^2$  оставалось постоянным. И тем не менее расстояние от середины  $AB$  до подвижного отрезка  $PQ$  должно оставаться неизменным, а именно  $\frac{a}{2}$ .

**Решение.** Так как  $AB \perp AP$ , то  $BP^2 = u^2 + a^2$ . Но  $BQ \perp AB$  и  $BQ \perp AP$  (по условию), следовательно, по теореме 2 прямая  $BQ$  перпендикулярна плоскости  $ABP$  и, значит  $BQ \perp BP$ , то есть  $\triangle BQP$  — прямоугольный, и  $PQ^2 = BP^2 + BQ^2 = u^2 + a^2 + v^2$ . А так как  $2uv = a^2$ , то  $PQ^2 = u^2 + 2uv + v^2 = (u + v)^2$ , то есть  $PQ = u + v$ .

Итак, мы обнаружили, что всегда  $PQ = BQ + AP$ . Этот факт, как мы увидим, и является причиной того, что  $OK = \frac{AB}{2}$ . Чтобы в этом убе-

диться, достаточно внимательно присмотреться к рисунку 6, увидеть его пространственно. Если мысленно оторвать прямоугольные треугольники  $OBQ$  и  $OAP$  от фигуры, поместить их в одну плоскость с треугольником  $OPQ$ , то можно заметить, что треугольник, сложенный из  $OBQ$  и  $OAP$  (рис. 7, а), оказывается равным тре-

угольнику  $OPQ$  (рис. 7, б) именно потому, что  $PQ = PA + BQ$ . Это и доказывает, что  $OK = \frac{a}{2}$ .

**Задача 5.** (МГУ, мехмат, 1971). Все грани треугольной пирамиды — равные равнобедренные треугольники, а высота пирамиды совпадает с высотой одной из ее боковых граней. Найти объем пирамиды, если расстояние между наибольшими противоположными ребрами равно единице.

**Решение.** Пусть  $ABCD$  — данная пирамида (рис. 8), где, согласно условию,  $AB = AC = BD = CD$  и  $AD = BC$  (нетрудно показать, что в точности два противоположных ребра пирамиды должны равняться основанию равнобедренного треугольника). Обозначим длину высоту  $DK$  пирамиды через  $h$  (мы пока не знаем, где лежит точка  $K$ ). Нам предстоит прежде всего выяснить, какие ребра пирамиды будут наибольшими и в какой грани лежит высота пирамиды.

Высота пирамиды не может лежать ни в грани  $ADC$ , ни в равной ей грани  $ABD$ , так как аналогичная высота другой грани была бы больше  $h$  (длина наклонной больше длины перпендикуляра). Поэтому высота пирамиды  $DK$  должна лежать в грани  $BDC$ , и, значит,  $DK \perp AK$ .

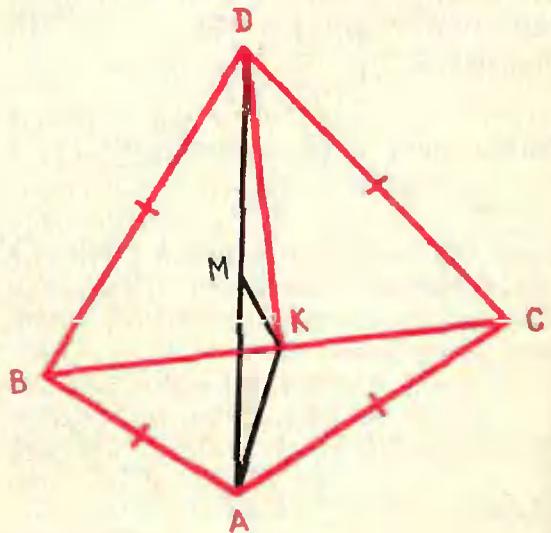


Рис. 8.

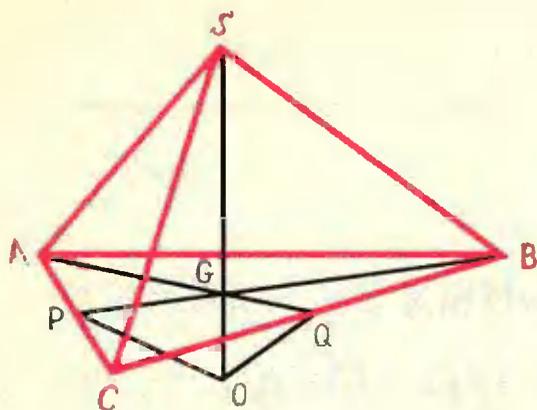


Рис. 9.

Но по условию  $DK=AK=h$ , поэтому  $AD=BC=h\sqrt{2}$ ,  $KC=\frac{h}{2}\sqrt{2}$  и

$$DC = \sqrt{h^2 + \left(\frac{h}{2}\sqrt{2}\right)^2} = h\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Итак, ребра  $AD$  и  $BC$  больше ребер  $AB$ ,  $AC$ ,  $BD$ ,  $CD$ . Опустим из точки  $K$  перпендикуляр на ребро  $AD$ :  $KM \perp AD$ . Раз  $BC \perp DK$  и  $BC \perp AK$ , то  $BC \perp KM$ . Следовательно,  $KM$  есть общий перпендикуляр ребер  $AD$  и  $BC$ , и по условию он равен 1; но в равнобедренном прямоугольном треугольнике  $ADK$  выполняются равенства  $KM = \frac{1}{2}AD = \frac{h}{2}\sqrt{2}$ , откуда

$$\frac{1}{2}h\sqrt{2} = 1, \quad h = \sqrt{2}.$$

**Задача 6.** (МГУ, мехмат, 1965). В треугольной пирамиде  $SABC$  плоские углы при вершине  $S$  — прямые. Доказать, что вершина  $S$ , точка  $G$  пересечения медиан основания  $ABC$  и центр  $O$  описанного около пирамиды шара принадлежат одной прямой.

**Решение.** Точка  $P$  (рис. 9) является центром окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , так как  $AP=PC$ ,  $\angle ASC=90^\circ$ . Прямая, соединяющая центр шара с центром окружности сечения, перпендикулярна плоскости сечения, то есть  $PO \perp ACS$ . Аналогично  $QO \perp BCS$ . Но  $SB \perp ACS$  и  $AS \perp BCS$ , потому что все плоские углы при вершине  $S$  — прямые. Значит,  $PO \parallel SB$ , и точки  $P$ ,  $O$ ,  $S$  и  $B$  лежат в одной плоскости, а также  $OQ \parallel AS$ ,

и точки  $O$ ,  $Q$ ,  $A$  и  $S$  лежат в одной плоскости. У этих плоскостей есть две (несовпадающие) общие точки  $S$  и  $O$ , поэтому прямая  $SO$  — линия пересечения этих плоскостей. В первой плоскости лежит медиана  $BP$ , а во второй — медиана  $AQ$ , следовательно, точка  $G$  пересечения медиан лежит в обеих плоскостях, то есть на прямой  $SO$  пересечения плоскостей, а это и требовалось доказать.

## Упражнения

1. Доказать теорему о трех перпендикулярах, опираясь на теорему 2.

2. Доказать, что ортоцентрическими пирамидами являются все правильные треугольные пирамиды и все треугольные пирамиды с прямыми плоскими углами при вершине.

3. (МГУ, мехмат, 1969). Прямоугольные проекции треугольника  $ABC$  на две взаимно перпендикулярные плоскости являются правильными треугольниками со сторонами, равными 1. Найти периметр треугольника  $ABC$ , если известно, что  $AB = \frac{1}{2}\sqrt{5}$ .

4. (МГУ, мехмат, 1970). Отрезок  $AB$  единичной длины, являющийся хордой сферы радиуса 1, расположен под углом  $\pi/3$  к диаметру  $CD$  этой сферы. Расстояние от конца  $C$  диаметра до ближайшего к нему конца  $A$  хорды равно  $\sqrt{2}$ . Определить величину отрезка  $BD$ .

5. (МГУ, мехмат, 1971). Основание четырехугольной пирамиды — квадрат, а все боковые грани — прямоугольные треугольники, у которых вершины прямых углов лежат на основании пирамиды. Найти объем пирамиды, если ее высота равна единице, а один из двугранных углов при вершине равен  $120^\circ$ .

6. (физфак. МГУ, 1970). В треугольной пирамиде  $SABC$  все ребра равны друг другу. На ребре  $SA$  взята точка  $M$  такая, что  $SM=MA$ , на ребре  $SB$  — точка  $N$  такая, что  $SN=SB/3$ . Через точки  $M$  и  $N$  проведена плоскость, параллельная медиане  $AD$  основания  $ABC$ . Найти отношение объема треугольной пирамиды, отсекаемой от исходной проведенной плоскостью, к объему пирамиды  $SABC$ .

7. Три зеркала образуют трехгранный угол, все двугранные углы которого прямые. Показать, что луч света, пришедший в этот трехгранный угол по прямой  $l$ , после отражения от зеркальных поверхностей уйдет по прямой, параллельной  $l$ .

8. Построить отрезок, имеющий заданную длину, параллельный данной плоскости, причем концы отрезка должны лежать на двух данных скрещивающихся прямых.

# ВАРИАНТЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ 1971 ГОДА

Московский государственный университет  
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

1. Решить уравнение:

$$x^2 \log_3(x^2) - (2x^2 + 3) \log_3(2x + 3) = \\ = 3 \log_3 \left( \frac{x}{2x + 3} \right).$$

2. Найти все  $x$  из отрезка  $0 \leq x \leq \pi$ , удовлетворяющие неравенству

$$\sin 2x + \sin x - \sqrt{2} \cos x < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3. Боковые грани четырехугольной пирамиды — равные равнобедренные треугольники, а в основании пирамиды лежит ромб, одна диагональ которого в два раза длиннее другой. Найти объем  $V$  пирамиды, если известно, что площадь боковой поверхности равна 6, а среди боковых ребер есть два ребра, составляющих тупой угол.

4. Найти все значения  $\alpha$ , при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \leq \alpha, \\ x^2 - 2x \leq 3 - 6\alpha \end{cases}$$

имеет единственное решение.

5. В четырехугольник  $ABCD$  можно вписать и вокруг него можно описать окружность. Диагональ  $AC$  делит площадь четырехугольника пополам. Найти длину диагонали  $BD$ , если радиус вписанной окружности равен  $r$ , а периметр четырехугольника равен  $p$ .

Отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета

1. Четверо лингвистов (каждый по отдельности) занимаются математической обработкой текста. Каждый из них работает с

постоянной производительностью. Если первые трое будут работать по одному часу, а четвертый — два часа, то вместе они успеют обработать 26 страниц текста. Если третий будет работать два часа, а остальные — по часу, то будет обработано 32 страницы текста. Если второй будет работать два часа, а остальные — по часу, то будет обработано 40 страниц текста. Сколько страниц текста будет обработано, если первый будет работать три часа, второй — пять часов, а третий — семь часов?

2. Большая сторона прямоугольника равна  $d$ . Проводится окружность с центром в одной из вершин прямоугольника и радиусом, равным его меньшей стороне. Из прямоугольника удаляется общая часть с полученным кругом.

При каком значении длины меньшей стороны площадь оставшейся части будет максимальной?

3. Определить, сколько целочисленных решений имеет неравенство

$$(n^2 - 2)(n^2 - 22)(n^2 - 52)(n^2 - 152) < 0.$$

4. Определить, при каких  $a$  неравенство  $\log_{a+1}(|x|+4) > 1$  выполняется при любом действительном  $x$ .

5. Среди комплексных чисел  $z$  найти все те, для которых

$$\log_2(1 + |z^2 - i|) + \log_{16} \frac{1}{(1 + |z^2 + i|)^4} = 0.$$

6. Исследовать и решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^7 y^{31} = a, \\ x^2 y^9 = b. \end{cases}$$

7. Доказать, что если  $p$  и  $q$  — целые числа, причем  $p^2 - 7q^2 = 2pq$ , то  $p = q = 0$ .

# Московский энергетический институт

Факультет электронной техники

Электромеханический факультет

1. Упростить выражение:

$$\frac{(a+x)^{-\frac{1}{2}} + (a-x)^{-\frac{1}{2}}}{(a+x)^{-\frac{1}{2}} - (a-x)^{-\frac{1}{2}}},$$

если  $x = \frac{2ab}{b^2+1}$  и  $a > 0, b > 1$ .

2. Решить уравнение

$$\frac{1}{\lg x} + \frac{2}{\lg 10x} + \frac{3}{\lg 100x} = 0.$$

3. Вычислить:

$$(\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ) \operatorname{sec} 200^\circ \operatorname{ctg} 530^\circ.$$

4. Решить уравнение:

$$4 \sin^2 x + 3 \operatorname{tg}^2 x = 1.$$

5. Полная поверхность правильной четырехугольной пирамиды равна  $S$ , а плоский угол при вершине равен  $\alpha$ . Найти объем пирамиды.

1. Упростить выражение:

$$\left[ \frac{x + \sqrt{xy}}{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}} + \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^3 + 2x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}}{3x^2 + 3y\sqrt{xy}} \right]^{-2} \times (x^2 + xy - 2y^2)^{-1}.$$

2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \lg x + \lg y = \lg(x+y), \\ \lg(\sqrt{8}-y) + \lg(\sqrt{8}+y) = 2 \lg x. \end{cases}$$

3. Привести к виду, удобному для логарифмирования:

$$\operatorname{tg} \alpha - 1 + \sin \alpha - \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{csc}^2 \alpha.$$

4. Решить уравнение:

$$4 \sin x \sin 2x \sin 3x = \sin 4x.$$

5. В прямоугольном параллелепипеде точка пересечения диагоналей нижнего основания соединена с серединой бокового ребра отрезком длины  $m$ . Этот отрезок образует с основанием параллелепипеда угол  $\alpha$  и с боковой гранью угол  $2\alpha$ . Найти объем параллелепипеда.

# Куйбышевский государственный педагогический институт

Математическое отделение физико-математического факультета

Физическое отделение физико-математического факультета

1. Прямоугольный треугольник с гипотенузой  $c$  и острым углом  $\alpha$  служит основанием пирамиды. Ее боковая грань, проходящая через гипотенузу, перпендикулярна основанию, а две другие боковые грани наклонены к нему под углом  $\beta$ . Найти объем пирамиды.

2. Тракторист вспахал три участка. Площадь первого равна  $\frac{2}{5}$  площади всех трех участков, а площадь второго относится к площади третьего как  $1\frac{1}{2} : 1\frac{1}{3}$ . Сколько гектаров в каждом из участков, если в третьем на 16 га меньше, чем в первом?

3. Решить неравенство:

$$(x-3)^{2x^2-7x} > 1.$$

4. Решить уравнение:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 4 \sqrt{2} \cos 2x.$$

1. В основании прямого кругового конуса вписан квадрат, сторона которого равна  $a$ . Плоскость, проходящая через вершину конуса и одну из сторон этого квадрата, дает в сечении с поверхностью конуса треугольник, угол при вершине которого равен  $\alpha$ . Определить объем конуса.

2. Поезд был задержан у семафора на 16 минут и нагнал опоздание на перегоне в 80 км, идя со скоростью на 10 км/час большей, чем полагалось по расписанию. Какова скорость поезда по расписанию?

3. Решить уравнение:

$$\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} x = 8 \cos^2 x.$$

4. Решить неравенство:

$$\log_{1/2} \frac{3-2x}{1-x} > 1.$$



# Решение задач по электростатике

(Закон Кулона. Напряженность электрического поля)

Г. Я. Мякишев

Задачи по электростатике часто предлагаются на вступительных экзаменах. Причем они весьма различны по методам решения.

Задачи по электростатике (в отличие, например, от задач по механике и молекулярной физике) могут вызвать дополнительные затруднения, связанные с использованием различных систем единиц. Наряду с системой СИ в электростатике продолжают пользоваться абсолютной системой единиц. Различие обеих систем состоит в том, что основные формулы, используемые для решения задач, имеют коэффициенты, отличающиеся величиной и размерностью. Причем именно в абсолютной электростатической системе СГСЭ коэффициенты формул электростатики имеют самый простой вид. Поэтому электростатические задачи удобнее решать в этой системе.

## Закон Кулона

Первая группа задач связана с непосредственным применением закона Кулона.

В однородной среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  два точечных тела с зарядами  $q_1$  и  $q_2$  на расстоянии  $R$  взаимодействуют с силой

$$F = k \frac{q_1 q_2}{\epsilon R^2}. \quad (1)$$

В системе СГСЭ  $k=1$ , а в системе СИ  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ , где  $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 8,85 \times 10^{-12} \frac{\Phi}{M}$  электрическая постоянная.

Единица заряда в СИ — кулон содержит  $3 \cdot 10^9$  единиц заряда СГСЭ.

Кулоновские силы направлены вдоль линий, соединяющих заряжен-

ные тела (такие силы называются центральными).

Особых затруднений при решении задач на применение закона Кулона к взаимодействию точечных зарядов обычно не возникает. Это типичные статические задачи, только наряду с механическими силами в них появляется еще электрическая сила. Вот пример подобного рода задачи.

**Задача 1.** Три одинаковых маленьких шарика с массами  $m = 0,1$  г подвешены в одной точке на шелковых нитях длиной  $l = 20$  см. Какие одинаковые заряды следует сообщить шарикам, чтобы каждая нить составляла с вертикалью угол  $\alpha = 30^\circ$ ?

Шарики располагаются по углам равностороннего треугольника  $ABC$  (рис. 1). Катет  $AD$  треугольника  $AOD$  ( $OD$  — вертикаль) равен  $\frac{l}{2}$ .

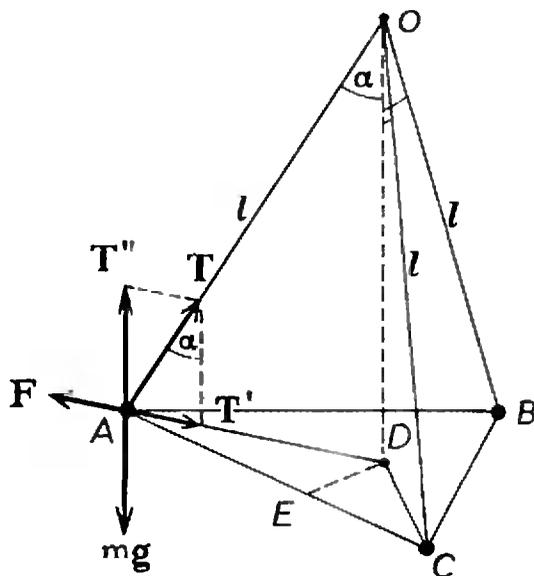


Рис. 1

так как он лежит против угла в  $30^\circ$ . Катет  $DE$  треугольника  $ADE$  равен  $\frac{l}{4}$ . Сторона  $AC = 2AE =$   
 $= 2 \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{16}} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ .

На каждый шарик со стороны соседнего действует сила  $F_1 = \frac{4q^2}{3l^2}$  (рис. 2). Сила, действующая со стороны любых двух шариков на третий,

$$F = 2F_1 \cos \alpha = \frac{4q^2}{l^2 \sqrt{3}}.$$

Шарик находится в равновесии, когда горизонтальная составляющая натяжения нити  $T' = T \sin \alpha = F$ , а вертикальная составляющая  $T'' = T \cos \alpha = mg$  (рис. 1). Отсюда  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{mg}$  и  $q = \frac{l}{2} \sqrt{mg} \approx 100$  ед. СГСЭ.

При решении задач на закон Кулона надо иметь в виду, что этот закон относится к взаимодействию точечных заряженных тел и неприменим к телам произвольной формы. Точечными же можно считать тела в том случае, когда их геометрические размеры значительно меньше расстояния между ними. Поэтому при вычислении сил взаимодействия двух тел, одно из которых или оба не являются точечными, нужно мысленно разделить большое тело на малые элементы так, чтобы каждый элемент можно было рассматривать как точечный заряд.

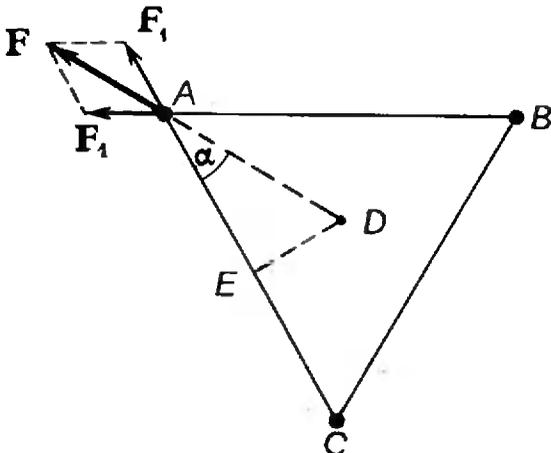


Рис. 2.

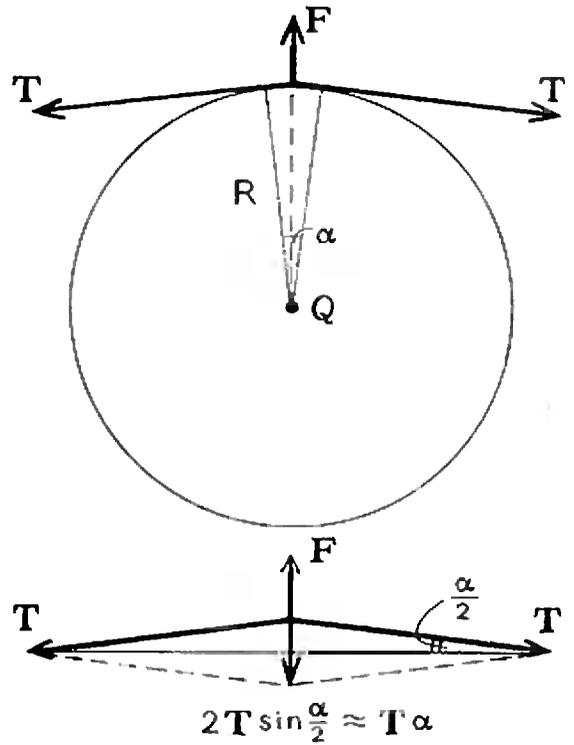


Рис. 3.

**Задача 2.** Тонкое проволочное кольцо радиуса  $R$  несет электрический заряд  $q$ . В центре кольца расположен одноименный с  $q$  заряд  $Q$ , причем  $Q \gg q$ . Определить силу, растягивающую кольцо.

Так как  $Q \gg q$ , то взаимодействием между отдельными элементами кольца можно пренебречь. Выделим малый элемент кольца длины  $R\alpha$  (рис. 3). Со стороны заряда  $Q$  на него действует сила  $F = \frac{Q\Delta q}{R^2}$ ,

где  $\Delta q = \frac{q\alpha}{2\pi}$ .

Силы натяжения кольца  $T$  уравновешивают  $F$ . Из условия равновесия, учитывая, что  $\alpha$  мало, имеем

$$F = 2T \sin \frac{\alpha}{2} = T\alpha.$$

Искомая сила натяжения  $T = \frac{Qq}{2\pi R^2}$ .

Задача решалась в системе СГСЭ. В системе СИ

$$T = \frac{Qq}{8\pi^2 \epsilon_0 R^2}.$$

## Напряженность электрического поля

Взаимодействие между неподвижными заряженными телами осуществляется посредством электрического поля. Количественной характеристикой его является вектор напряженности  $\mathbf{E}(x, y, z)$ , представляющий собой отношение силы, действующей на точечный заряд, к величине этого заряда. Сила, действующая на заряд  $q$ , равна \*)

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \quad (2)$$

При решении задач на вычисление напряженности электрического поля прежде всего необходимо определить напряженность поля точечного заряда. Она равна

$$E = \frac{q}{\epsilon R^2} \text{ в системе СГСЭ}, \quad (3)$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R^2} \text{ в системе СИ}.$$

Если имеется совокупность точечных зарядов, то напряженность поля равна геометрической сумме напряженностей, создаваемых отдельными зарядами.

Для вычисления напряженности поля заряженного тела конечных размеров его нужно мысленно разбить на отдельные элементы и вычислять искомую напряженность как геометрическую сумму напряженностей, созданных всеми элементами. Но лишь в случае простой симметрии в распределении зарядов на теле задача определения напряженности решается

\*) Формула (2) весьма проста, но физическое понимание силы  $F$  содержит моменты, на которых следует остановиться. Электрическое поле действует на заряженные тела, сообщая им ускорение или компенсируя другие силы, если тела неподвижны. Но сами заряды не действуют на поле с какой-либо силой; они его только создают. Электрическое поле не является объектом, подчиняющимся механике Ньютона, и соответственно сила (2) не является обычной силой в смысле механики Ньютона. В уравнении движения (втором законе Ньютона) она играет ту же роль, что и обычные механические силы: тяготение, упругость, трение. Но третий закон Ньютона к ней неприменим вообще.

достаточно просто. Например, если заряд распределен по сфере симметрично, то вне шара напряженность поля определяется формулой (3). Причем под  $R$  надо понимать расстояние от центра сферы, а не от ее поверхности. Элементарное и соответственно не очень строгое доказательство этого приведено в новом учебном пособии «Физика. 9» Б. Б. Буховцева, Ю. Л. Климонтовича, Г. Я. Мякишева. Там же можно посмотреть, как выводится формула для напряженности поля бесконечной заряженной плоскости с плотностью поверхностного заряда  $\sigma$ :

$$E = \frac{2\pi\sigma}{\epsilon} (\text{СГСЭ}) \text{ или}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0\epsilon} (\text{СИ}). \quad (4)$$

**Задача 3.** Выведите формулу (4), исходя из того, что однородное поле в плоском конденсаторе представляет собой сумму полей, созданных зарядами обеих пластин, а его емкость  $C = \frac{\epsilon S}{4\pi d}$ , где  $S$  — площадь обкладок,  $d$  — расстояние между ними.

У положительно и отрицательно заряженных пластин конденсатора поля отличаются, очевидно, лишь знаком; причем внутри конденсатора они складываются, а вне его компенсируют друг друга. Таким образом,  $E = 2E_1 = \frac{U}{d}$ , здесь  $E_1$  — поле одной пластины,  $U$  — разность потенциалов между ними. В свою очередь

$$U = \frac{q}{C} = \frac{4\pi qd}{\epsilon S} = \frac{4\pi\sigma d}{\epsilon} \left( \text{так как } \sigma = \frac{q}{S} \right),$$

откуда

$$E_1 = \frac{2\pi\sigma}{\epsilon}.$$

Однородное электрическое поле между заряженными пластинами сообщает частицам постоянное по величине и направлению ускорение. Поэтому заряженные частицы в таком поле движутся так же, как обычные тела под действием силы тяготения вблизи Земли. Разница состоит

лишь в том, что Земля сообщает всем телам одно и то же ускорение  $g \approx 980 \text{ см/сек}^2$ , а ускорение частицы в электрическом поле зависит от отношения заряда к массе:

$$a = \frac{q}{m} E. \quad (5)$$

**Задача 4.** Математический маятник представляет собой шарик массы  $m=1 \text{ г}$ , подвешенный на шелковой нити длиной  $l=36 \text{ см}$ . Как изменится период колебаний маятника, если, сообщив шарiku положительный или отрицательный заряд  $q=\pm 20 \text{ ед. заряда СГСЭ}$ , поместить маятник в однородное электрическое поле с напряженностью  $E=10 \text{ ед. напряженности СГСЭ}$ , силовые линии которого направлены вертикально вниз.

Без электрического поля период колебаний маятника равен  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \approx 1,2 \text{ сек}$ . В электрическом поле ускорение маятника будет равно  $g + \frac{q}{m} E$ . Следовательно,

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + \frac{q}{m} E}} = 2\pi \sqrt{\frac{lm}{gm + qE}}$$

Если  $q = +20 \text{ ед. заряда СГСЭ}$ , то  $T_1 \approx 1,1 \text{ сек}$  и  $T_1 - T_0 \approx -0,1 \text{ сек}$ .

В случае  $q < 0$   $T_2 \approx 1,35 \text{ сек}$  и  $T_2 - T_0 \approx 0,15 \text{ сек}$ .

**Задача 5.** В сильном однородном электрическом поле напряженностью  $E$  на одной силовой линии в точках 1 и 2, расположенных на расстоянии  $l_0$  друг от друга, находятся протон и электрон (рис. 4). Начальная скорость обеих частиц равна нулю. Чему будет равно рас-

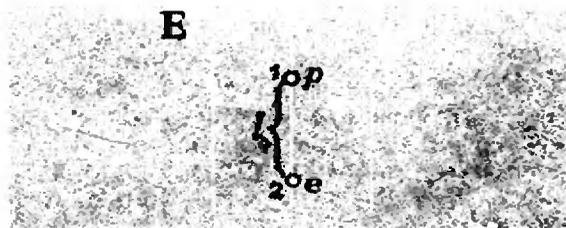


Рис. 4.

стояние между частицами спустя время  $\tau$  после начала движения?

Выберем начало отсчета в точке 2, где находится электрон, и за положительное направление примем направление напряженности электрического поля. Пренебрегая взаимодействием частиц друг с другом (сильное поле), можно считать движения электрона и протона равноускоренными. Тогда, согласно известной кинематической формуле, координата протона в момент времени  $\tau$  будет равна

$$x_1 = l_0 + \frac{e}{m_p} E \frac{\tau^2}{2},$$

где  $e$  — заряд,  $m_p$  — масса протона.

Координата электрона

$$x_2 = -\frac{e}{m_e} E \frac{\tau^2}{2},$$

где  $m_e$  — масса электрона. Искомое расстояние

$$l = x_1 - x_2 = l_0 + \frac{eE\tau^2}{2} \frac{m_p + m_e}{m_p m_e} \approx$$

$$\approx l_0 + \frac{eE\tau^2}{2m_e}, \text{ так как } m_p \gg m_e.$$

**Проводники в электростатическом поле**

При решении большого числа задач нужно знать, как ведут себя в электростатическом поле проводники. Можно показать, что напряженность поля внутри проводника равна нулю, а на его поверхности направлена перпендикулярно проводнику. Заряд внутри проводника также равен нулю; весь он сосредоточен на поверхности проводника.

Поверхностный заряд имеет наибольшую плотность на острие, где кривизна поверхности максимальна. Наглядное подтверждение этому можно получить, решив следующую задачу.

**Задача 6.** Два проводящих шарика радиусов  $r$  и  $R$  соединены длинным проводником. Найти отношение поверхностных плотностей зарядов шариков, если системе сообщен некоторый заряд.

Потенциалы обоих шариков одинаковы. Если заряды шариков обозначить через  $Q_1$  и  $Q_2$ , а их емкости — через  $C_1$  и  $C_2$ , то можно записать следующее равенство:

$$\varphi = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}.$$

Так как  $Q_1 = 4\pi r^2 \sigma_1$  и  $Q_2 = 4\pi R^2 \sigma_2$  ( $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  — поверхностные плотности зарядов),  $C_1 = r$  и  $C_2 = R$ , то  $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{Q_1 R^2}{Q_2 r^2} = \frac{C_1 R^2}{C_2 r^2} = \frac{R}{r}$ .

Поверхностная плотность (как видно из ответа) тем больше, чем меньше радиус кривизны поверхности, причем плотность заряда обратно пропорциональна кривизне поверхности.

Равенство нулю напряженности поля внутри проводящего тела позволяет решить большое количество различных по сложности задач.

**Задача 7.** Найти напряженность электрического поля вблизи участка поверхности проводника с известной плотностью поверхностного заряда  $\sigma$ .

Очень близко к заряженной поверхности электрическое поле определяется поверхностной плотностью заряда по формуле  $E_1 = 2\pi\sigma$ . Ведь очень малый участок поверхности можно считать плоским, и вблизи этого участка будет справедлива формула (4) для напряженности поля равномерно заряженной бесконечной плоскости. Это поле создается по обе стороны заряженной поверхности (рис. 5). Но, кроме того, поле напряженностью  $E_2$  создается вблизи данного элемента поверхности зарядами,



$$E_2 \uparrow \quad \uparrow E_1$$

Рис. 5.

расположенными на всей остальной поверхности проводника. Так как внутри проводника напряженность поля равна нулю, то напряженности  $E_1$  и  $E_2$  в проводнике обязательно равны по величине и противоположны по направлению. Следовательно, вне проводника они также равны по величине, но по направлению совпадают. Результирующая напряженность

$$E = E_1 + E_2 = 2E_1 = 4\pi\sigma.$$

### Упражнения

1. Почему в парикмахерских используются металлические (алюминиевые) расчески, а не обычные пластмассовые?
2. Определить расстояние  $r_1$  между двумя одинаковыми электрическими зарядами, находящимися в масле с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 3$ , если сила взаимодействия между ними такая же, как и в пустоте на расстоянии  $r_2 = 30$  см.
3. Два шарика одинакового радиуса и массы подвешены в воздухе на нитях так, что их поверхности соприкасаются. После того, как каждому шарiku был сообщен заряд  $q = 4 \cdot 10^{-7}$ , шарики разошлись на угол  $2\alpha = 60^\circ$ . Найти массу шариков, если расстояние от точки подвеса до центра шарика  $l = 0,2$  м.
4. Три одинаковых положительных заряда  $q$  расположены в вершинах равностороннего треугольника. Сторона треугольника равна  $a$ . Найти напряженность поля в вершине правильного тетраэдра, для которого этот треугольник служит основанием.
5. Прямоугольной металлической пластинке со сторонами  $a$  и  $b$  сообщен заряд  $q$ . Толщина пластинки  $s$  много меньше  $a$  и  $b$ . Определить напряженность поля, создаваемого этой заряженной пластинкой в точках пространства, близких к центру пластинки. При решении следует воспользоваться формулой (4).
6. Пучок катодных лучей, направленный параллельно обкладкам плоского конденсатора, на пути  $l = 4$  см отклоняется на расстояние  $h = 2$  мм от первоначального направления. Какую скорость  $v$  и кинетическую энергию  $T$  имеют электроны катодного луча? Напряженность электрического поля внутри конденсатора  $E = 22\,500$  в/м. Отношение заряда электрона к его массе  $\frac{e}{m} = 1,76 \cdot 10^{11}$  ед. СИ, заряд электрона  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  к.
7. Мыльному пузырю радиуса  $R$  сообщен заряд  $Q$ . Найти силу, действующую на единицу поверхности пузыря. Мыльную пленку считать проводящей.

# ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ ЭКЗАМЕНЫ ПО ФИЗИКЕ НА ФИЗИЧЕСКОМ ФАКУЛЬТЕТЕ МГУ В 1971 ГОДУ

**А. В. Устинова**

Экзаменационный билет по физике для поступающих на физический факультет МГУ содержит два вопроса и одну задачу. Вопросы и задачи, предлагаемые в билетах, подобраны так, чтобы дать возможность абитуриенту показать знание курса физики в пределах школьной программы, понимание физических явлений и умение правильно применить законы физики для решения поставленной задачи. В процессе экзамена, который принимают два экзаменатора, абитуриенту задаются дополнительные вопросы и примеры. Полный ответ на все предложенные вопросы и правильное решение задачи и примеров заслуживают отличной оценки. Нерешенная задача снижает общую оценку на один балл.

Ниже мы приводим несколько задач по физике, предлагавшихся на вступительных экзаменах на физическом факультете МГУ.

1. Малый тяжелый шарик на нити вращается в вертикальной плоскости. Показать, что шарик не сможет вращаться, если нить не в состоянии выдержать натяжение  $T$ , превышающее вес шарика в 6 раз.

2. Однородный стержень массы  $m$  и длины  $l$  вращается с угловой скоростью  $\omega$  в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец. Определить натяжение  $T$  в стержне в сечении, находящемся на расстоянии  $a$  от оси вращения.

3. Шарик массы  $m_1$ , движущийся со скоростью  $v$ , налетает на покоящийся шарик массы  $m_2$ . Происходит абсолютно упругий центральный удар. Найти, при каком соотношении масс  $m_1$  и  $m_2$  шарики после удара разлетятся в противоположные стороны с равными по абсолютной величине скоростями.

4. Спутник, масса которого  $m=1\text{ т}$ , летит на высоте  $h_1=200\text{ км}$  от поверхности Земли по круговой орбите. Постепенно, в силу торможения о верхние слои атмосферы, радиус орбиты спутника уменьшается (при этом можно считать, что орбита остается круговой). Какую энергию теряет спутник на торможение при переходе на орбиту с  $h_2=180\text{ км}$ ? Точность расчета 5%.

5. Тело, масса которого  $m=20\text{ кг}$ , тянут по горизонтальной поверхности с силой  $F=120\text{ н}$ . Если эта сила приложена к телу под углом  $\alpha_1=60^\circ$  к горизонту, то тело движется равномерно. С каким ускорением  $a$  будет двигаться это тело, если ту же силу приложить под углом  $\alpha_2=30^\circ$  к горизонту? Принять  $g=10\text{ м/сек}^2$ ; точность расчета 10%.

6. Один моль азота (ид. газ,  $\mu=28$ ) является рабочим веществом в замкнутом цикле 1—2—3—4 (см. рис. 1). Известны:  $P_1=2\text{ ат}$ ,  $V_1=10\text{ л}$ ,  $T_1=244^\circ\text{К}$ ;  $P_2=4\text{ ат}$ ,  $V_2=20\text{ л}$  и удельные теплоемкости  $c_V=0,179\frac{\text{кал}}{\text{г}\cdot\text{град}}$

и  $c_P=0,25\frac{\text{кал}}{\text{г}\cdot\text{град}}$ . Какое количество тепла и на каких участках цикла поступает в систему?

7. Два одинаковых баллона соединены короткой трубкой, в которой имеется клапан

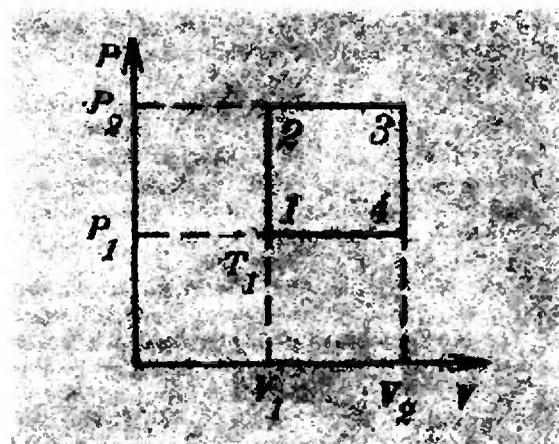


Рис. 1.

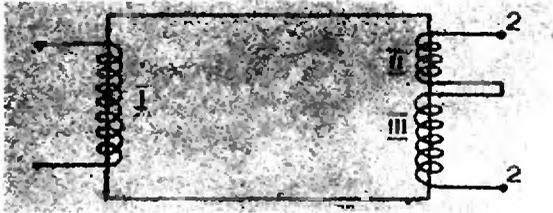


Рис. 2.

давления, пропускающий газ из одного баллона в другой при разности давлений  $\Delta p \geq 80 \text{ см рт. ст.}$ . Один баллон наполнен газом, имеющим при температуре  $t_1 = 17^\circ \text{C}$  давление  $P = 760 \text{ мм рт. ст.}$ , в другом баллоне — вакуум. Какое давление установится в баллонах, если их нагреть до температуры  $t_2 = 109^\circ \text{C}$ ?

8. Через диод с плоскими электродами проходит ток  $I$ . Напряжение на лампе  $U$ . С какой силой  $F$  действуют на анод лампы ударяющиеся в него электроны, если считать, что их скорость у катода равна нулю? Отношение заряда электрона к его массе  $\frac{e}{m} = \lambda$ .

9. На железный сердечник намотаны две катушки (I и II—III), причем вторая (II—III) имеет три вывода (см. рис. 2). При включении катушки I в сеть переменного тока напряжение на участке II второй катушки равно  $U_2 = 20 \text{ в.}$ , а на участке III —  $U_3 = 100 \text{ в.}$  Если в ту же сеть включить клеммы 2—2 то на катушке I будет напряжение  $U_1 = 13,3 \text{ в.}$  Катушка I имеет  $N_1 = 300$  витков. Найти число витков  $N_2$  и  $N_3$  участков II и III второй катушки. Рассеянием потока пренебречь.

10. Электрическая печка имеет две обмотки с сопротивлениями  $R_1 = 10 \text{ ом}$  и  $R_2 = 20 \text{ ом}$ . При параллельном соединении обмоток при включении в сеть печка нагревается на  $\Delta T_1 = 300^\circ$ . Дальнейшее нагревание прекращается, так как теплоотдача становится равной количеству выделяющегося на обмотках тепла. На сколько градусов ( $\Delta T_2$ ) нагреется печка, если ее включить в ту же сеть при последовательном соединении обмоток? Теплоотдача  $Q = k \cdot \Delta T$ , где  $k = \text{const}$ , а  $\Delta T$  — разность между комнатной температурой и температурой печки.

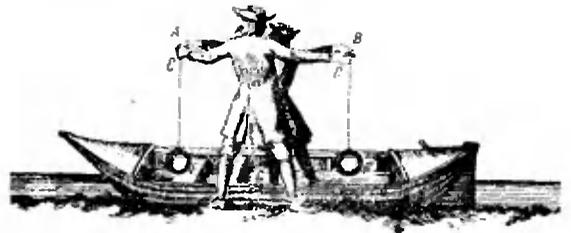
11. Определить радиус  $R$  вогнутого сферического зеркала, если оно дает действительное изображение в  $m = 2$  раза меньше предмета, а расстояние между предметом и изображением  $d = 0,75 \text{ м}$ .

12. На расстоянии  $d = 10 \text{ см}$  от экрана находится точечный источник света. В какое число раз  $k$  изменится освещенность в центре экрана, если источник отодвинуть от экрана на расстояние  $2d$ , а за источником на расстоянии  $d$  от него поместить вогнутое зеркало, радиус кривизны которого равен  $R = 20 \text{ см}$ ? Коэффициент отражения зеркала равен 1. Источник, центр экрана и центр зеркала находятся на одной прямой.

## ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ДВИЖЕНИЯ

Когда Гюйгенс размышлял о законах соударения шаров, он совсем близко подошел к одному важному принципу современной механики — к принципу относительности движения, то есть независимости законов удара от равномерного движения системы (речь идет о принципе Галилея, но Галилей не использовал его для решения задач).

Предположим, что опыт со столкновением одинаковых шаров производится человеком, стоящим на лодке, которая плывет по течению мимо другого человека, стоящего на берегу (рисунок взят из книги У. И. Франкфурта и А. М. Френка «Христиан Гюйгенс». М., изд-во АН СССР, 1962). Человек в лодке сводит руки так,



что шары начинают двигаться равномерно со скоростями, равными, скажем,  $\pm v$ , где  $v$  — скорость лодки.

Шар в руке A до соударения покоится относительно наблюдателя на берегу, а шар в руке B движется относительно берегового наблюдателя со скоростью  $2v$ . После соударения роли шаров переменяются: шар B остановится, а шар A будет двигаться по движению лодки с двойной скоростью  $2v$ . Таким образом, из задачи об ударе одинаковых шаров, движущихся навстречу друг другу, выводится решение задачи об ударе движущегося тела о тело, вначале покоящееся.



РАССКАЗ О ЗАМЕЧАТЕЛЬНОМ ФИЗИКЕ

Второй такой комнаты нет нигде в мире. На стене ее оставили свои автографы, пожалуй, все корифеи эры квантовой физики. Альберт Эйнштейн и Нильс Бор, Макс Планк и Макс Борн, Эрвин Шредингер и Вернер Гейзенберг, Вольфганг Паули и Энрико Ферми, советские ученые А. Ф. Иоффе, И. Е. Тамм, П. Л. Капица, А. И. Шальников... Удивительнее всего, что комната эта — не университетская аудитория и не лабораторный кабинет, а «гостевая» в частном доме, который своей истинно русской архитектурой выделяется среди готических зданий, обрамляющих улицу с поэтическим названием — улица Белых Роз в небольшом голландском городе Лейдене. Хозяином дома в течение двух десятков лет — с 1914 по 1933 год — был Пауль Эренфест.

Имя Эренфеста сейчас не столь популярно, как имена его знаменитых гостей, но тот факт, что все они бывали в его доме, говорит сам за себя. Очевидно, их привлекало не только радушие и хлебосоольство Эренфеста и его жены Татьяны Алексеевны Афанасьевой-Эренфест — ученые приезжали сюда из разных стран, чтобы обсудить с Эренфестом «проклятые» вопросы, грудноразрешимые проблемы, которые преподносила им стремительно развивавшаяся квантовая механика. Еще во времена Лоренца Лейден стал центром теоретической физики; когда же Лоренц передал свою кафедру в Лейденском университете Эренфесту, этот голландский город стал подлинной Меккой для физиков Европы, Америки, Азии.

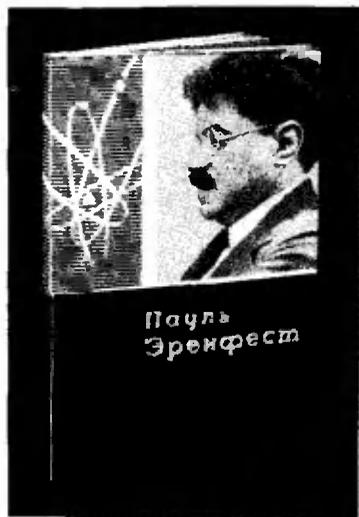
Эренфест был талантливым ученым, замечательным педагогом, воспитавшим целую плеяду известных физиков (его учеником был, в

частности, Энрико Ферми), человеком исключительных душевных качеств. Все это в полной мере почувствует каждый, кто прочтет небольшую книгу В. Я. Френкеля\*). В издательской аннотации сказано, что книга — научная биография Эренфеста; правильнее было бы назвать ее биографическими заметками. Здесь нет систематического, год за годом жизнеописания ученого, его научной деятельности. Автор рассказывает об отдельных этапах нелегкого жизненного пути Эренфеста, о его учителях — Больцмане, Лоренце, Клейне, о теплой дружбе, связывавшей Эренфеста с Эйнштейном и Бором, о тесных контактах с советскими физиками.

Эренфест провел пять лет в дореволюционной России (здесь он из Пауля превратился в Павла Сигизмундовича) и сыграл огромную роль в становлении русской теоретической физики. После Октябрьской революции Эренфест неоднократно бывал в нашей стране, искренне любил ее и всеми средствами способствовал развитию и процветанию советской науки.

Чтобы нарисовать живой, осязательный образ ученого, В. Я. Френкель привлек богатейший фактический материал — устные воспоминания современников, мемуары и статьи, опубликованную и неопубликованную переписку, архивные документы, умело распорядился им, не перегрузив изложения.

Нельзя без волнения читать страницы, повествующие о душевном разладе Эренфеста — гипертрсфиро-



Пауль Эренфест

ванная скромность и болезненная неуверенность мешали ему объективно оценить свое место в науке, о разладе, который в конце концов привел к трагическому исходу.

Книга в целом читается очень легко. Трудными для неподготовленного читателя могут оказаться лишь отдельные места, повествующие о научной деятельности Эренфеста, и, конечно, два приложения, посвященные его фундаментальным исследованиям в области статистической физики и квантовой механики (знаменитые «адиабатические инварианты Эренфеста»), но и здесь автор стремится к максимальной доступности.

Книге предпослано теплое предисловие недавно скончавшегося академика И. Е. Тамма, который, будучи совсем еще юным физиком, обратил на себя внимание Эренфеста и долгие годы ощущал его дружескую поддержку.

Книгу В. Я. Френкеля с увлечением прочтут все, кто интересуется историей современной физики — и молодой ученый, и студент, и школьник.

И. М. Беккерман

\*) В. Я. Френкель. Пауль Эренфест. М., Атомиздат, 1971, 144 стр., цена 25 коп.

# НОВЫЕ КНИГИ

Начиная с этого номера, редакция будет систематически давать аннотации на книги, выходящие в данном году и представляющие интерес для наших читателей. В I и II кварталах 1972 года выйдут в свет следующие книги. (Заказы можно направлять по адресу: *Москва, К-50, ул. Медведева, 1, магазин № 8 Москниги, отдел „Книга-почтой“*. Книги будут высланы наложенным платежом.)

## МАТЕМАТИКА

Издательство «Наука»

1. С. Г. Гиндикин. *Алгебра логики в задачах*. (Объем 18 печ. лист., тираж 50 000 экз., цена 77 коп.)

В книге подробно излагается ряд вопросов математической логики, в том числе: алгебра высказываний, элементы логики предикатов, математические вопросы теории релейно-контактных схем, вероятностная логика.

Весь излагаемый материал разбит на циклы задач, снабженных необходимыми пояснениями, указаниями, ответами, а в ряде случаев подробными решениями.

Большинство вопросов излагается на уровне, доступном для учащихся 9—10 классов физико-математических школ.

2. В. А. Кречмар. *Задачник по алгебре*. (Объем 21 печ. лист., тираж 100 000 экз., цена 69 коп.)

В книге приведены задачи повышенной трудности по алгебре и тригонометрии.

Задачи снабжены указаниями, ответами, а в большинстве случаев подробными решениями. Все задачи систематизированы по разделам. В начале каждого раздела приведены необходимые теоретические сведения.

Книга рассчитана, в первую очередь, для лиц, готовящихся к конкурсным экзаменам в вузы.

3. И. Г. Башмакова. *Диофант и диофантовы уравнения*. (Объем 3 печ. листа, тираж 25 000 экз., цена 10 коп.)

В брошюре подробно рассказывается о работах одного из крупнейших греческих математиков — Диофанте.

На конкретных примерах автор показывает методы Диофанта в решении ряда задач.

В ней также излагаются некоторые современные понятия и методы Диофантова анализа.

Брошюра рассчитана на широкий круг читателей.

Издательство «Мир»

4. М. Гарднер. *Математические досуги, парадоксы, головоломки, фокусы*. (Объем 25 печ. лист., тираж 100 000 экз., цена 1 руб. 47 коп.)

Эта книга написана известным американским популяризатором науки. Вы наверняка читали его предыдущую книгу — «Математические головоломки и развлечения».

В живой и занимательной форме автор рассказывает много удивительного из самых разных разделов математики.

Любители головоломок смогут использовать свои силы в решении парадоксов и задач, а также в постановке математических фокусов.

Книга доступна самому широкому кругу читателей.

5. Л. Керрол. *История с узелками*. (Объем 23 печ. листа, тираж 150 000 экз., цена 1 руб. 15 коп.)

Имя автора этой книги широко известно нашим читателям. В Советском Союзе многократно издавались его книги «Алиса в стране чудес» и «Алиса в «зазеркалье»». В новой книге впервые в нашей стране публикуются все наиболее интересные головоломки и задачи, вышедшие из-под пера этого замечательного писателя.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

Издательство  
«Высшая школа»

6. *Сборник задач по математике для конкурсных экзаменов во ВТУЗы*.

Под ред. М. М. Сканиани. (Объем 25 печ. лист., тираж 300 000 экз., цена 68 коп.)

Настоящий сборник является пособием для поступающих в высшие учебные заведения.

Сборник состоит из двух частей: «Задачи для письменных экзаменов (часть I)» и «Задачи для устных экзаменов и дополнительные задачи (часть II)». Всего в сборнике содержится около 5 000 задач.

Все задачи части первой разбиты на три группы по уровню их сложности.

Все задачи приведены с подробными указаниями или с решениями.

Издательство  
«Просвещение»

7. У. Соьер. *Прелюдия к математике*. (Объем 17 печ. лист., тираж 40 000 экз., цена 70 коп.)

Книга известного американского математика и популяризатора науки У. Соьера знакомит читателей с основными идеями современной математики. В живой и увлекательной форме автор рассказывает о воспитании у учеников математического мышления, о красоте и силе математических методов, об истоках основных направлений в математике.

Подробно об этой книге вы можете прочитать в журнале «Квант» № 1 за 1972 год.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

М. Л. Смолянский

## ФИЗИКА

Издательство «Наука»

1. К. В. Любимов, С. М. Новиков. *Знакомимся с электрическими цепями.* (Объем 5 печ. лист., тираж 100 000 экз., цена 14 коп.)

Данная книга в первую очередь рассчитана на учителей и школьников 6—8 классов. В ней приведены около 70 задач, решение которых поможет школьникам широко и глубоко познакомиться с конструированием и составлением электрических цепей.

2. Ф. С. Завельский. *Время и его измерение.* (Объем 12 печ. лист., тираж 40 000 экз., цена 40 коп.)

В книге описаны различные методы измерения времени и соответствующие типы часов: солнечные, огненные, водяные, маятниковые, молекулярные.

Показано, как в разные эпохи и в связи с развитием науки измерялось и расширялось само понятие о времени. Описание методов и приборов для измерения времени ведется наряду с рассмотрением различных научных и технических задач.

Они так тесно переплетены между собой, что такое описание в некоторой мере соответствует жизни самой науки. Этот рассказ о идеях, методах и приборах — древних и современных — написан популярно и занимательно. Книга рассчитана на широкий круг читателей, начиная со школьников 7—8 классов.

3. В. Г. Горбачкий. *Космические взрывы.* (Объем 12 печ. лист., тираж 25 000 экз., цена 40 коп.)

Книга посвящена самым грандиозным явлениям природы — взрывным процессам в космосе. Вначале автор рассказывает о том, что такое взрыв, как он возникает. Затем ведет читателя от более простых примеров — взрывов в двигателе внутреннего сгорания и др. — к взрывам на Солнце, вспышкам звезд и взрывам в ядрах галактик и к квазарам.

Автор прослеживает роль взрывов в эволюции звезд и галактик. Попутно в книге рассказывается о методах исследований.

Книга доступна широкому кругу лиц, а также школьникам старших классов.

4. М. М. Дагаев. *Наблюдения звездного неба.* (Объем 8 печ. лист., тираж 50 000 экз., цена 27 коп.)

В книге рассказывается об ориентировании по звездному небу и об основных причинах изменения условий видимости созвездий на протяжении года. Описываются наиболее яркие объекты, доступные наблюдениям в малые телескопы. Приводятся методы простейших наблюдений планет, Луны, переменных звезд, метеоров и искусственных спутников Земли, вполне доступные начинающим любителям астрономии. Заключительная глава книги содержит список небесных объектов, рекомендуемых для начальных наблюдений, а также список литературы, полезной для последующих более сложных наблюдений и обработки наблюдаемого материала.

В книге приводятся описание метода изготовления простейшего самодельного телескопа, а также новейшие результаты астрономии. Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

5. В. Л. Левшин, Л. В. Левшин. *Люминесценция и ее применение.* (Объем 9 печ. лист., тираж 25 000 экз., цена 60 коп.)

В книге рассмотрены характерные свойства люминесценции, получение и строение люминесцентных веществ, процессы преобразования и передачи энергии в люминесцентных веществах, приводящие к возникновению люминесценции, связь люминесценции с другими видами излучения. Приводятся многочисленные примеры использования люминесценции в научных исследованиях, для целей освещения, в электронолучевых приборах, приборах, предназначенных для обнаружения невидимым глазом ради-

аций, для исследования протекания различных химических реакций и т. д.

Рассматриваются также методы люминесцентного анализа в химии, биологии, медицине и во многих других областях.

Книга рассчитана на лиц, имеющих знания по физике в объеме средней школы.

Издательство «Мир»

6. Х. Рачлис. *Физика в ванне.* (Объем 5 печ. лист., тираж 50 000 экз., цена 25 коп.)

Молодежь, выбирающая свой жизненный путь, все чаще обращается к науке. Но что такое наука? Как стать исследователем? В чем состоит труд ученого? На эти и множество других вопросов отвечает небольшая по объему книга Х. Рачлиса «Физика в ванне». На примере физических законов известный американский популяризатор науки вводит молодого читателя в мир научных явлений и понятий, приучает его наблюдать и делать выводы.

Эта книга найдет многочисленных читателей и среди тех, кто пишет о науке, и среди тех, кто ее преподает, и прежде всего среди той молодежи, которая ее изучает.

7. Б. М. Понтекорво, В. Н. Понкровский. *Энрико Ферми в воспоминании учеников и друзей.* (Объем 10 печ. лист., тираж 50 000 экз., цена 65 коп.)

В книге академика Понтекорво, ученика Ферми, и В. Н. Понковского рассказывается о жизни и деятельности одного из великих ученых современности — Энрико Ферми. В книге прослеживается становление личности Ферми, рассказывается о том, при каких обстоятельствах он пришел к важнейшим своим открытиям, приводится ряд малоизвестных случаев из его жизни.

Органической частью книги являются воспоминания учеников и друзей Ферми.

Г. Н. Дьяченко

## УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА



### МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ ДНЮ КОСМОНАВТИКИ

12 апреля 1961 года в истории науки и техники произошло выдающееся событие — человек впервые поднялся в космическое пространство. Первым космонавтом стал советский человек коммунист Юрий Алексеевич Гагарин.

С тех пор день 12 апреля отмечается как всенародный праздник — День космонавтики. К этому дню выпускаются специальные почтовые марки, рассказывающие о выдающихся достижениях в области исследования и освоения космического пространства.

Первая такая марка с автографом Ю. А. Гагарина была выпущена в 1962 году. Она изображена в верхнем углу слева. Рядом приведены первые марки с надписью «День космонавтики». Они вышли в свет в 1963 году. На верхней изображен космический корабль «Восток-1», на нижней — ракета-носитель.

В 1964 году ко Дню космонавтики была выпущена серия из трех марок. На одной из них изображен Ю. А. Гагарин, на другой — первые советские искусственные спутники Земли, на третьей — космический аппарат «Марс-1».

На одной из двух марок, выпущенных в 1965 году, изображен космодром (см. внизу слева). Две марки 1966 года посвящены нашим успехам в исследовании Луны. На первой показана траектория полета автоматической станции «Луна-9», которая 3 февраля 1966 года плавно опустилась на поверхность Луны в районе Океана Бурь. На второй — траектория





полета станции «Луна-10», превратившейся в первый искусственный спутник Луны.

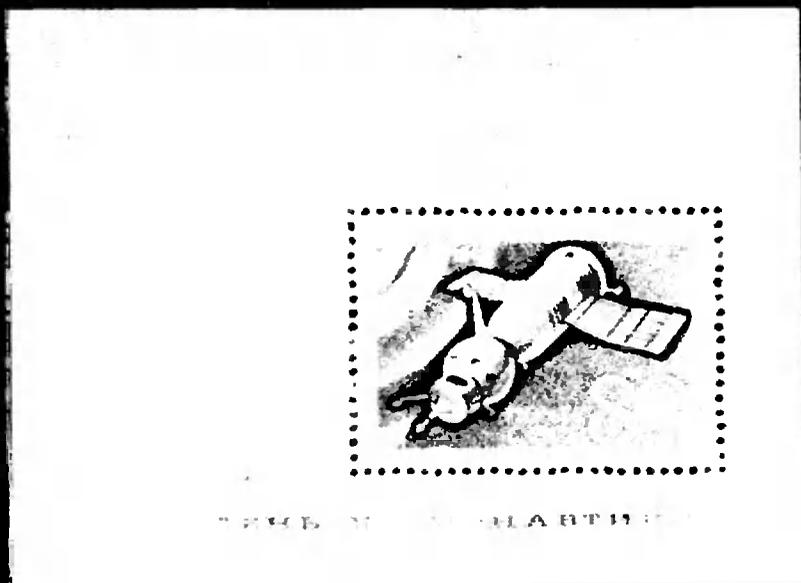
Справа сверху приведены две марки, выпущенные ко Дню космонавтики в 1967 году. На марке слева изображен космонавт А. А. Леонов в момент выхода в космическое пространство. На следующей — один из советских «лунников» вблизи Луны.

Ниже помещена одна из марок 1968 года. На ней показан момент стыковки искусственных спутников «Космос-186» и «Космос-188».

Слева внизу помещен блок с маркой, посвященной Дню космонавтики 1969 года. На ней изображен космический корабль «Союз-3», который пилотировал космонавт Г. Т. Береговой. Справа над блоком приведена марка 1970 года. Ее центральную часть занимает изображение значка «Летчик-космонавт СССР».

Справа внизу показаны две марки, выпущенные ко Дню космонавтики в 1971 году. На верхней изображена медаль Международной федерации авиации с портретом Ю. А. Гагарина. Нижняя марка символически изображает некоторые из многочисленных возможностей использования космических исследований в интересах народного хозяйства.

*В. А. Лешковцев*



## ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Оптический телескоп»

1. Увидеть луноход нельзя. Такой телескоп разрешает при идеальных условиях наблюдения детали лунной поверхности, размеры которых порядка 50 метров.

2.  $F_2 = 10$  мм;  $F_{2\text{норм}} = 20$  мм.

3. Наблюдатель, очевидно, человек близорукий, так как область аккомодации его глаза простирается от 7,5 см до 45 см.

К статье «Справедливый выбор»

2.  $1/3 = 0,010101\dots$ ,  $2/3 = 0,101010\dots$ . После  $2^k$  бросаний отрезок  $(0,1)$  разбивается на  $2^{2k}$  равных частей, в двух из них находится по критической точке. Значит, в  $2/2^{2k} = 1/2^{2k-1}$  части случаев мы рискуем оказаться в одной из точек  $1/3$  или  $2/3$ .

3, 4. Часть  $(0, 3/4)$  делится как обычно, а выпадение ГГ, соответствующее части  $(3/4, 1)$  вчетверо меньшей длины, влечет за собой новые бросания, то есть раздел этой части (и так далее). Но происходит оно лишь при условии, что ГГ уже выпало, то есть в одной четверти случаев.

«Критическими» являются все концы отрезков, фигурирующих в условии задачи 3. Витя предлагал левый конец присоединять к отрезку, а правый — нет. Обычно это записывают так:  $[0, 1/4)$  — точка 0 лежит в отрезке, а  $1/4$  — нет.

5. Длины отрезков каждого из школьников равны между собой.

6. Любому из  $2^{2k}$  вариантов выпадения монетки соответствует часть отрезка  $[0, 1]$  длины  $1/2^{2k}$ . Способы, в которых один из школьников получает монетку, соответствуют «его» частям отрезка.

7. После  $2k+1$  бросания 2 отрезка не определяют владельца монетки, а  $2^{2k+1} - 2 = 2(2^{2k} - 1)$ ,

что делится на 3. После нечетного числа бросаний у школьников оказывается равное число отрезков, а потому Алешин способ справедлив. Для четного числа бросаний надо (формально) сделать еще одно бросание, оно не изменит исхода выбора. Разница лишь в том, что Боре тяжелее «сформить» получение монетки (рядом с ним обе критические точки!).

8. а) После  $2k$  бросаний получаются две «неопределенные» части (содержащие точки  $1/3$  и  $2/3$ ), каждая длиной  $1/2^{2k}$ .

б) В этом случае получается лишь один отрезок  $(2^{2k-1}/2^{2k}, 1)$  длины  $1/2^{2k}$ .

Витин способ немного рациональнее.

К статье «Прямая и плоскость»

3.  $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ . 4. 1. 5.  $V = \frac{1}{3}$ .

6. 1:6.

74

К статье «Варианты вступительных экзаменов по математике 1971 года»

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет

1.  $x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ ,  $x_2 = 3$ . Указание.

ОДЗ уравнения:  $x > 0$ . Данное уравнение привести к виду

$$(2x^2 - 3)[\log_3 x^2 - \log_3(2x + 3)] = 0.$$

$$2. 0 \leq x < \frac{\pi}{4}, \quad \frac{2\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{4}.$$

Указание. Данное неравенство привести к виду

$$\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)\left(\sin x - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) < 0.$$

3.  $V = \frac{4}{3}$ . Решение. Пусть

$SABCD$  — данная пирамида (см. рис. 1), причем  $AC = 2BD$ . Тогда угол  $BAD$  — острый (почему?), а потому ромб  $ABCD$  не является квадратом. Докажем прежде всего, что в равнобедренном треугольнике  $ABS$  равны стороны  $AB$  и  $AS$ .

Предположим противное, тогда либо  $AS = BS$ , либо  $BS = AB$ .

Пусть  $AS = BS$ . Тогда из равенства треугольников, являющихся боковыми гранями пирамиды, следует, что все боковые ребра пирамиды равны между собой (как это доказывается?). Но в таком случае высота пирамиды должна проходить через центр окружности, описанной около ромба  $ABCD$  (почему?). Однако около этого ромба окружность описать нельзя, и мы пришли к противоречию.

Пусть  $BS = AB$ . Тогда из равенства треугольников  $ABS$  и  $ADS$  следует  $DS = BS$ , а из равенства треугольников  $ABS$  и  $CBS$  следует  $AS = CS$  (как?). Так как плоские

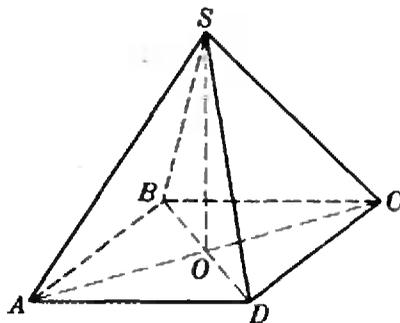


Рис. 1.

углы при вершине  $S$  являются углами при основании равнобедренных треугольников, то все эти углы острые. Далее  $\triangle BSD = \triangle BAD$  (откуда это следует?), а потому угол  $BSD$  — острый. Кроме того, в этих же треугольниках равны медианы  $SO$  и  $AO$ . Поскольку медиана  $SO$  равнобедренного треугольника  $ASC$  перпендикулярна основанию  $AC$ , то треугольник  $AOS$  — прямоугольный. Отсюда следует, что  $\angle ASC = 90^\circ$  (как это получается?). Таким образом, в рассматриваемом случае никакие два боковых ребра пирамиды не могут составлять тупой угол, что противоречит условию задачи.

Итак,  $AB = AS$ . Тогда  $AS = CS$  и  $BS = DS$  (докажите!). (Заметим, что в этом случае  $\triangle ASC = \triangle ABC$ , так что угол, составляемый боковыми ребрами  $AS$  и  $CS$ , тупой.) Отрезок  $SO$ , являющийся медианой, а значит, и высотой равнобедренных треугольников  $ASC$  и  $BSD$ , является высотой пирамиды  $SABCD$  (почему?). Если сторону ромба  $ABCD$  обозначить через  $a$ , то, используя соотношение  $AC = 2BD$ , находим  $AO = \frac{2a}{\sqrt{5}}$ ; далее получаем, что  $BS = a \sqrt{\frac{2}{5}}$  (проведите выкладки подробно).

Следовательно, в треугольнике  $ASB$  известны три стороны:

$$AB = a, \quad AS = a, \quad BS = a \sqrt{\frac{2}{5}},$$

а из условия задачи следует, что площадь этого треугольника равна  $3/2$ . Отсюда находим  $a = \sqrt{5}$  (как?). Теперь получаем, что  $SO = 1$ ,  $AC = 4$ ,  $BD = 2$ , после этого вычисляем объем пирамиды  $SABCD$  (проведите необходимые выкладки).

4.  $\alpha_1 = -1$ ,  $\alpha_2 = 0$ . Решение. Перепишем систему неравенств в виде

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 3 - \alpha \leq 0, \\ x^2 - 2x - 3 + 6\alpha \leq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Если при некотором  $\alpha$  дискриминант хотя бы одного из стоящих в левых частях трехчленов отрицателен, то эта система не имеет решений (почему?). Следовательно, система (1) может иметь решения только при таких  $\alpha$ , для которых одновременно выполнены неравенства

$$1 + \alpha \geq 0, \quad 4 - 6\alpha \geq 0,$$

то есть лишь при  $-1 \leq \alpha \leq \frac{2}{3}$  (проведите необходимые выкладки).

При  $\alpha = -1$  система (1) действительно имеет единственное решение (убедитесь в этом). При  $\alpha = \frac{2}{3}$  система (1) решений не имеет (докажите это).

Пусть теперь  $\alpha$  — некоторое число из промежутка  $-1 < \alpha < \frac{2}{3}$ . В этом случае решением первого неравенства системы (1)

является отрезок

$$-2 - \sqrt{1 + \alpha} \leq x \leq -2 + \sqrt{1 + \alpha}, \quad (2)$$

а решением второго неравенства этой системы — отрезок

$$1 - \sqrt{4 - 6\alpha} \leq x \leq 1 + \sqrt{4 - 6\alpha}. \quad (3)$$

Система (1) имеет единственное решение если отрезки (2) и (3) имеют лишь одну общую точку.

Так как  $-2 - \sqrt{1 + \alpha} < 1 + \sqrt{4 - 6\alpha}$  (почему?), то левый конец отрезка (2) лежит левее правого конца отрезка (3), и отрезки имеют единственную общую точку только в одном случае — когда правый конец отрезка (2) совпадает с левым концом отрезка (3), то есть когда

$$-2 + \sqrt{1 + \alpha} = 1 - \sqrt{4 - 6\alpha}.$$

Решая это иррациональное уравнение, находим корень  $\alpha = 0$  (проведите решение подробно).

5.  $BD = 2rp(p^2 - 4r^2)^{-\frac{1}{2}}$ . Решение. Введем обозначения для длин сторон четырехугольника  $ABCD$  (см. рис. 2). Так как  $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$  (почему?), то из равенства площадей треугольников  $ABC$  и  $ADC$ :

$$\frac{1}{2} xy \sin \angle ABC = \frac{1}{2} zu \sin \angle ADC$$

вытекает, что

$$xy = zu. \quad (4)$$

Поскольку  $x + z = y + u$  (откуда это следует?),

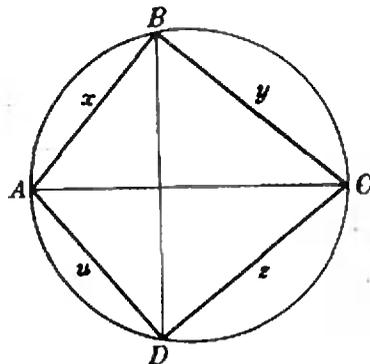


Рис. 2.

то, подставляя выражение  $x = y + u - z$  в равенство (4), получим  $y = z$ , а тогда и  $x = u$  (проведите необходимые выкладки).

Отсюда следует, что  $\triangle ABC = \triangle ADC$  (как?), а тогда  $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$  (докажите это). Далее,  $AC$  — биссектриса равнобедренного треугольника  $BAD$  (почему?), то есть  $AC \perp BD$ .

Напишем следующие выражения для площади  $S$  четырехугольника  $ABCD$ :

$$S = xy, \quad S = \frac{1}{2} AC \cdot BD, \quad S = \frac{1}{2} rp \quad (5)$$

(откуда берутся эти равенства?). Из второго

и третьего равенств (5) следует, что

$$BD = \frac{rp}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (6)$$

а из первого и третьего равенств (5) — что  $2xy = rp$ . Кроме того,  $x + y = p/2$  (проведите все необходимые выкладки). Остается это

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = \frac{p^2}{4} - rp;$$

выражение подставить в формулу (6).

#### Отделение структурной и прикладной лингвистики

1. 130 страниц. Указание. Если  $x_1, x_2, x_3, x_4$  — число страниц, которое обрабатывает каждый лингвист в час, то по условию задачи можно составить три уравнения с четырьмя неизвестными и с помощью этих уравнений вычислить сумму  $3x_1 + 5x_2 + 7x_3$ .

2.  $2d/n$ .

3. 16 целочисленных решений. Указание. Применить метод интервалов.

$$4. -\frac{1 + \sqrt{17}}{2} < a < \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} < a < \frac{\sqrt{17} - 1}{2}.$$

Указание. Пусть для некоторого значения  $a$  исходное неравенство выполнено при всех  $x$ . Тогда оно верно, в частности, при  $x=0$ , а потому число  $a$  должно удовлетворять неравенству  $\log_{a(a+1)} 4 > 1$ , откуда

$$1 < a(a+1) < 4. \quad (1)$$

Обратно, если число  $a$  удовлетворяет двойному неравенству (1), то

$$\log_{a(a+1)} (|x| + 4) \geq \log_{a(a+1)} 4 > 1,$$

то есть исходное неравенство выполнено при всех  $x$ . Таким образом, условию задачи удовлетворяют решения двойного неравенства (1) и только они.

5. Все действительные и все чисто мнимые числа. Указание. Данное равенство преобразовать к виду  $|z^2 - i| = |z^2 + i|$ , откуда, полагая  $z = x + iy$ , получить  $xy = 0$ .

6. Если  $a = b = 0$ , то имеются следующие решения:  $x = 0$ ;  $y$  — любое число;  $x$  — любое число  $y = 0$ .

Если  $a = 0$ , а  $b \neq 0$  (или, если  $a \neq 0$ , но  $b = 0$ ), то система решений не имеет.

Если  $a \neq 0$  и  $b \neq 0$ , то система имеет единственное решение:  $x = a^3/b^{3k}$ ,  $y = b^3/a^2$ .

7. Указание. Пусть данному равенству удовлетворяет пара целых чисел  $p, q$ , причем  $q \neq 0$ . Тогда, разделив данное равенство на  $q^2$ , получим

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 - 2\frac{p}{q} - 7 = 0.$$

Таким образом, рациональное число  $p/q$  является корнем трехчлена  $x^2 - 2x - 7$ . Однако оба его корня иррациональны.

## МОСКОВСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

### Факультет электронной техники

1.  $-b$ . 2.  $x = 10^{(-5 \pm \sqrt{13})/6}$ . 3. 8.

4.  $x = \pm \frac{1}{2} \arccos(\sqrt{3} - 1) + k\pi$ ,

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

5. 
$$\frac{S \sqrt{2} \sqrt{2} S \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \sin \frac{\alpha}{2}}{12 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}$$

### Электромеханический факультет

1.  $\frac{x-y}{4x(x+2y)}$ . 2.  $x=2, y=2$ .

3.  $4 \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$ .

4.  $x_1 = \frac{k\pi}{2}, x_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4}$ , где  $k$  и

$n$  — любые целые числа.

5.  $8m^3 \sin 2\alpha \sin \alpha \sqrt{\cos 3\alpha \cos \alpha}$ .

## КУЙБЫШЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

### Математическое отделение

1.  $\frac{c^3 \sqrt{2} \sin^2 2\alpha \operatorname{tg} \beta}{48 \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}$ . 2. 54,4 га, 43,2 га,

38,4 га. 3.  $3 < x < 7/2, x > 4$ . 4.  $x = (-1)^n \frac{\pi}{16} + \frac{n\pi}{4}$ , где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

### Физическое отделение

1.  $\frac{\pi a^3 \sqrt{\cos \alpha}}{12 \sin \frac{\alpha}{2}}$ . 2. 50 км/час. 3.  $x_1 =$

$= \frac{\pi}{2} + k\pi, x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{24} + \frac{n\pi}{4}$ , где  $k$  и  $n$  — любые целые числа. 4.  $3/2 < x < 5/3$ .

### К статье «Решение задач по электростатике»

1. Пластмасса — диэлектрик и при трении ее о сухие волосы происходит электризация. Волосы отталкиваются друг от друга и не ложатся гладко.

2. Сила взаимодействия одинаковых зарядов в диэлектрике  $F_1 = \frac{q^2}{\epsilon r_1^2}$ , а в вакууме

$F_2 = \frac{q^2}{r_2^2}$ . По условию  $F_1 = F_2$ . Отсюда

$$r_1 = \frac{r_2}{\sqrt{\epsilon}} = 17,3 \text{ см.}$$

3. На каждый шарик действуют сила натяжения нити  $T$ , сила тяжести  $P$  и сила кулоновского отталкивания  $F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2l \sin \alpha)^2}$ .

Суммы проекций этих сил на вертикальное и горизонтальное направления равны нулю:  $T \cos \alpha - P = 0$ ,  $F - T \sin \alpha = 0$ . Отсюда

$$P = \frac{q^2 \cos \alpha}{16\pi\epsilon_0 l^2 \sin^2 \alpha} \sim 6,2 \cdot 10^{-3} \text{ н.}$$

4. Каждый заряд создает в точке  $D$  напряженность поля  $E_1 = \frac{q}{a^2}$  (см. рис. 1). Полная напряженность равна сумме трех векторов.

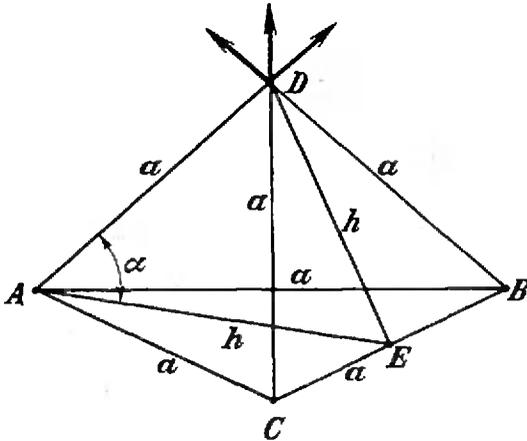


Рис. 1.

Векторы образуют с вертикалью углы  $90^\circ - \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между ребром тетраэдра и высотой  $h$  треугольника  $ABC$ . Горизонтальные составляющие этих векторов в сумме дадут нуль. Вертикальные составляющие одинаковы и равны  $\frac{q}{a^2} \sin \alpha$ . Так как

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}, \text{ то } E = \sqrt{6} \frac{q}{a^2}.$$

5. Поверхностная плотность заряда  $\sigma = \frac{q}{2ab}$ . Внутри металла напряженность равна нулю, а вне его

$$E = 2 \cdot 2\pi \frac{q}{2ab} = \frac{2\pi q}{ab}.$$

6. Составляющая скорости электрона  $v_x$  вдоль пластин конденсатора не меняется. Поэтому электрон пролетает конденсатор за

время  $t = \frac{l}{v_x}$ . В направлении, перпендикулярном пластинам, электрон движется с постоянным ускорением  $a = \frac{eE}{m}$ . За время  $t$  он смещается в этом направлении на расстояние  $h = \frac{at^2}{2} = \frac{e}{m} \frac{El^2}{2v_x}$ . Отсюда начальная скорость электрона  $v_x = l \sqrt{\frac{e}{m} \frac{E}{2h}} =$

$$= 3,98 \cdot 10^7 \frac{\text{м}}{\text{сек}} \quad \text{Кинетическая энергия}$$

$$T = \frac{mv_x^2}{2} = \frac{eEl^2}{4h} = 7,2 \cdot 10^{-16} \text{ дин.}$$

7. Напряженность поля на малом участке поверхности пузыря, созданная всеми зарядами пузыря, за исключением зарядов на самом участке  $E_2 = 2\pi\sigma$  (см. решение задачи 7 в статье). Сила, приходящаяся на единицу поверхности

$$f = E_2 \sigma = 2\pi\sigma^2.$$

К статье «Вступительные экзамены по физике на физическом факультете МГУ»

1. Наибольшее натяжение нити в точке  $A$  (рис. 1). Напишем уравнение движения шарика для этой точки:

$$T_A - mg = \frac{mV_A^2}{R}.$$

Наименьшее натяжение нити в точке  $B$ . Нить еще не «сминается», если

$$T_B = \frac{mV_B^2}{R} - mg \geq 0.$$

Из закона сохранения механической энергии

$$mg \cdot 2R + \frac{mV_B^2}{2} = \frac{mV_A^2}{2}$$

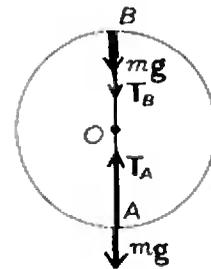


Рис. 1.

можно получить скорость в точке  $A$ .

Из этих уравнений находят

$$T_A \geq 6mg.$$

2. Сила натяжения  $T$  в сечении  $BB$  сообщает массе  $m_{BC}$  части стержня центростремительное ускорение  $a = \omega^2 x$ , где  $x$  — рас-

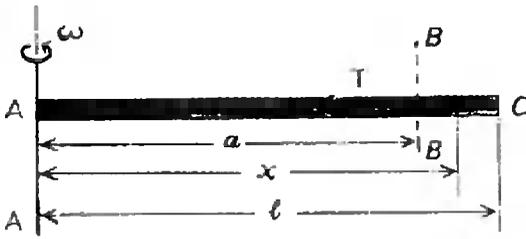


Рис. 2.

стояние от оси  $AA$  до центра тяжести участка  $BC$  (рис. 2). Поэтому

$$T = m_{BC} \omega^2 x,$$

$$m_{BC} = \frac{m}{l} (l - a), \quad x = a + \frac{l - a}{2}.$$

Следовательно,

$$T = \frac{m \omega^2}{2l} (l^2 - a^2).$$

Примечание. При  $a \rightarrow 0$  максимальное натяжение  $T_A = \frac{m \omega^2 l}{2}$ . Если  $a \rightarrow l$ , то  $T_C \rightarrow 0$ ,  $m_C \rightarrow 0$ .

3. Запишем закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии:

$$m_1 v = -m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

$$\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2},$$

где  $v_1$  и  $v_2$  — скорости после удара масс  $m_1$  и  $m_2$ . Преобразуем эти уравнения:

$$m_1(v + v_1)(v - v_1) = m_2 v_2^2, \quad (1)$$

$$m_1(v + v_1) = m_2 v_2. \quad (2)$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$v - v_1 = v_2.$$

По условию

$$|v_1| = |v_2| = v'.$$

Таким образом,

$$v' = \frac{v}{2}.$$

Подставив в уравнение (2), получим

$$\frac{m_2}{m_1} = 3.$$

4. Изменение энергии происходит вследствие работы сил трения:

$$\Delta W = W_{\text{кин}} + \Delta W_{\text{пот}},$$

$$\Delta W_{\text{кин}} = \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_2^2),$$

$$\Delta W_{\text{пот}} = m (g_1 h_1 - g_2 h_2),$$

$$\frac{m v_1^2}{R_0 + h_1} = m g_1, \quad \frac{m v_2^2}{R_0 + h_2} = m g_2,$$

где  $R_0$  — радиус Земли,  $g_1 \approx g_2 \approx g$ .

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{mg}{2} (h_1 - h_2) + mg (h_1 - h_2) = \\ &= \frac{3}{2} mg (h_1 - h_2), \end{aligned}$$

$$\Delta W = \frac{3}{2} \cdot 1000 \cdot 9,8 \cdot 20\,000 \approx 2,9 \cdot 10^8 \text{ (дж)}.$$

5. См. рисунок 3:

$$ma = F \cos \alpha - F_{\text{тр}},$$

$$N = mg - F \sin \alpha,$$

$$F_{\text{тр}} = kN.$$

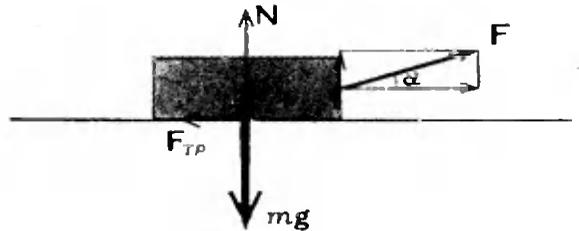


Рис. 3.

$$1) \alpha_1 = 60^\circ, \quad a = 0,$$

$$k = \frac{F \cos \alpha_1}{mg - F \sin \alpha_1} = 0,6.$$

$$2) \alpha_2 = 30^\circ,$$

$$a = \frac{F \cos \alpha_2 - k (mg - F \sin \alpha_2)}{m} = 0,9 \left( \frac{\text{м}}{\text{сек}^2} \right).$$

6. Проведем изотермы  $PV = \text{const}$  через точки 1, 2, 3 и 4 (рис. 4). Из рисунка 4 видно, что  $T_1 < T_2 < T_3$ ,  $T_3 > T_4 > T_1$ . Следовательно, тепло поступает в систему на участках 1—2 и 2—3.

$$Q_{1-2} = \mu c_V (T_2 - T_1),$$

$$Q_{2-3} = \mu c_P (T_3 - T_2).$$

По изохоре 1—2 определим  $T_2$ :

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}, \quad T_2 = 2T_1.$$

По изобаре 2—3 определим  $T_3$ :

$$\frac{V_1}{T_2} = \frac{V_3}{T_3}, \quad T_3 = 4T_1.$$

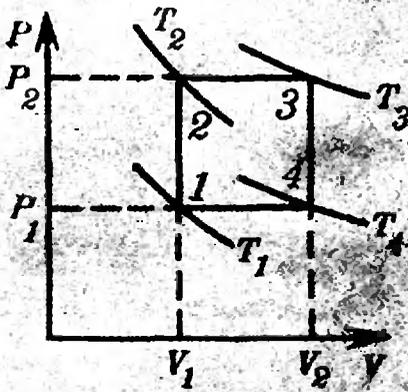


Рис. 4.

Количество тепла, поступившего в систему,

$$Q = Q_{1-2} + Q_{2-3} = 5 \cdot 244 + 7 \cdot 488 = 4636 \text{ (кал)}.$$

7. Уравнение состояния для газа при температуре  $t_1$  связывает неизвестные постоянные ( $V$  — объем баллона,  $m$  — массу газа в нем и  $A = \text{const}$ ) с известными величинами  $P$  и  $T_1$ :

$$\frac{PV}{T_1} = Am.$$

При температуре  $t_2$  масса перераспределяется:

$$\frac{P_1 V}{T_2} = Am_1, \quad \frac{P_2 V}{T_2} = Am_2.$$

$$m_1 + m_2 = m, \quad P_1 - P_2 = \Delta P.$$

Отсюда

$$P_1 = P_2 + \Delta P = \frac{Am_1}{V} T_2,$$

$$P_2 = \frac{A(m - m_1)}{V} T_2.$$

Находим  $P_2$ :

$$2P_2 + \Delta P = P \frac{T_2}{T_1}.$$

Таким образом,

$$P_2 = \frac{1}{2} \left( P \frac{T_2}{T_1} - \Delta P \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left( 760 \frac{382}{290} - 800 \right) \approx 100 \text{ (мм рт. ст.)},$$

$$P_1 = \frac{1}{2} \left( P \frac{T_2}{T_1} + \Delta P \right) \approx 900 \text{ (мм рт. ст.)}$$

## 8. Кинетическая энергия электрона

$$\frac{mv^2}{2} = eU.$$

Импульс силы  $F$  равен

$$F \cdot \Delta t = nmv,$$

где  $n$  — число электронов, попадающих на анод за время  $\Delta t$ . Проходящий через анод ток

$$I = \frac{ne}{\Delta t}.$$

Отсюда

$$F = \frac{nmv}{\Delta t} = I \sqrt{\frac{2U}{\lambda}}.$$

## 9. В сеть включена первая катушка. Напряжение на клеммах 2—2

$$U_{2-2} = U_2 + U_3 = 120 \text{ (в)},$$

число витков на второй катушке

$$N_{2-2} = N_2 + N_3.$$

Тогда

$$\frac{U_{2-2}}{U} = \frac{N_{2-2}}{N_1}, \quad (1)$$

где  $U$  — напряжение в сети.

В сеть включена вторая катушка; тогда

$$\frac{U_1}{U} = \frac{N_1}{N_{2-2}}. \quad (2)$$

Поделив уравнение (1) на уравнение (2), получим

$$\frac{U_{2-2}}{U} \cdot \frac{U}{U_1} = \left( \frac{N_{2-2}}{N_1} \right)^2.$$

Отсюда

$$N_{2-2} = N_1 \sqrt{\frac{U_{2-2}}{U_1}} = 3N_1 = 900,$$

$$\frac{N_3}{N_2} = \frac{U_3}{U_2} = 5, \quad N_3 = 5N_2,$$

$$N_2 = 150, \quad N_3 = 750.$$

## 10. В первом случае (при параллельном соединении обмоток)

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Тепловой баланс печи при установившейся температуре в первом случае

$$0,24 \frac{U^2}{R_1} = k \Delta T_1,$$

где  $U$  — напряжение в сети.

Во втором случае (последовательное соединение обмоток)

$$0,24 \frac{U^2}{R_{II}} = k \Delta T_2,$$

$$R_{II} = R_1 + R_2,$$

$$\Delta T_2 = \frac{\Delta T_1 \cdot R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} =$$

$$= \frac{300 \cdot 10 \cdot 20}{900} \approx 66,6 \text{ (град.)}$$

11. Так как изображение действительное уменьшенное, то предмет  $AB$  находится дальше центра зеркала  $C$  (рис. 5). Строим

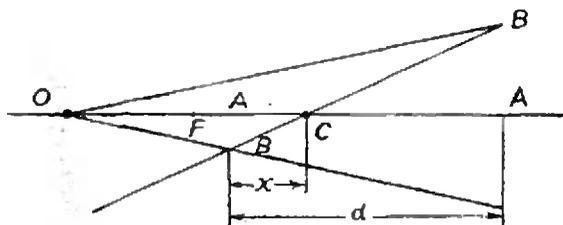


Рис. 5.

ход лучей и обозначаем  $A'C = x$ .  $\triangle ABO \sim \triangle A'B'O$  и  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C$ , следовательно,

$$\frac{AB}{d-x} = \frac{A'B'}{x},$$

$$\frac{AB}{d-x+R} = \frac{A'B'}{R-x}$$

( $R = OC$  — радиус зеркала).

По условию  $\frac{AB}{A'B'} = m$ . Из записанных уравнений найдем

$$R = \frac{2dm}{m^2 - 1} = \frac{2 \cdot 0,75 \cdot 2}{4 - 1} = 1 \text{ (м)}.$$

12. Освещенность в центре экрана в первом случае (рис. 6, а)

$$E_1 = \frac{\Phi}{d^2},$$

где  $\Phi$  — поток лучей, попадающих в центр экрана от точечного источника  $S$ . По-

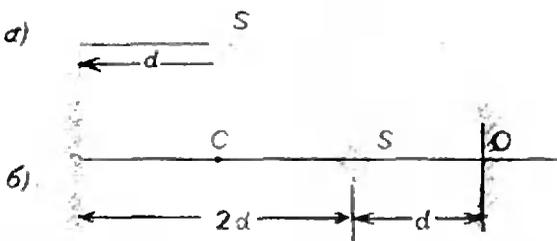


Рис. 6.

ток отраженных лучей равен потоку падающих, поэтому во втором случае (рис. 6, б) освещенность в центре экрана

$$E_2 = \frac{\Phi}{4d^2} + \frac{\Phi}{d^2} = \frac{5}{4} \frac{\Phi}{d^2}.$$

Следовательно,

$$k = \frac{E_2}{E_1} = \frac{5}{4}.$$

К заметке «Две игры»

#### Игра в пешки

Пусть в начальной позиции между белыми и черными пешками одной вертикали  $k_1; k_2; \dots; k_m$  клеток. Если логическая сумма цифр в любом разряде двоичной записи чисел  $k_1; k_2; \dots; k_m$  равна нулю, то выиграют черные. В противном случае победят белые.

#### Новый ним

Пусть  $k_1; k_2; \dots; k_n$  — количества камней в кучках в начальной позиции. Если логическая сумма цифр в любом разряде двоичной записи чисел  $k_1; k_2; \dots; k_n$  равна нулю, то выиграет второй. В противном случае победит первый. Ответ не зависит от количества камней, имеющихся у играющих.

К заметке «Квант» для младших школьников»

(См. «Квант» № 3, 1972)

1. Аня в белом, Валя в зеленом, Наташа в синем платьях.

2. Растянем центральную петлю настолько, чтобы через нее можно было протаскать кольцо. Продев кольцо через центральную петлю, прижмем его к лицевой стороне картона, а затем, ухватив выходящую из центрального отверстия двойную веревочку, потянем ее на себя. Из отверстия покажется двойная петля. Проденем в нее кольцо и, потянув с обратной стороны за веревочку, снова упрячем двойную петлю за картон. После этого проденем кольцо в центральную петлю, оно перейдет на правую петлю.

3. Медные монеты бывают в 1, 2, 3 и 5 копеек, то есть всего 4 типов. Если монет каждого типа не более шести, то всего монет не более 24, а их было 25.

4. Разделите шар на слои одинаковой толщины перпендикулярно диаметру, в концах которого подключены провода. Через все слои идет один и тот же ток, а сопротивление слоя обратно пропорционально его площади. Поэтому больше тепла выделится в слоях с меньшей площадью, то есть у полюсов.

5. Указание. Посмотрите, что произойдет, если бутылка будет заполнена стеклом. Затем «уберите» стекло из бутылки.

6. Указание. Соединить внизу два провода и найти эту пару наверху. Затем соединить два провода из разных пар и внизу определить, какие концы соединены. Этих данных достаточно для решения задачи.



# КВАНТ

## ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

$$? - ? = ?$$

1. Разгадайте числовой ребус, если каждая буква — это цифра.

$$ааф - де = кс$$

$$: \quad \quad \quad - \quad \quad \quad -$$

$$ас \quad х \quad д = га$$

$$с \quad + \quad еф = дм$$

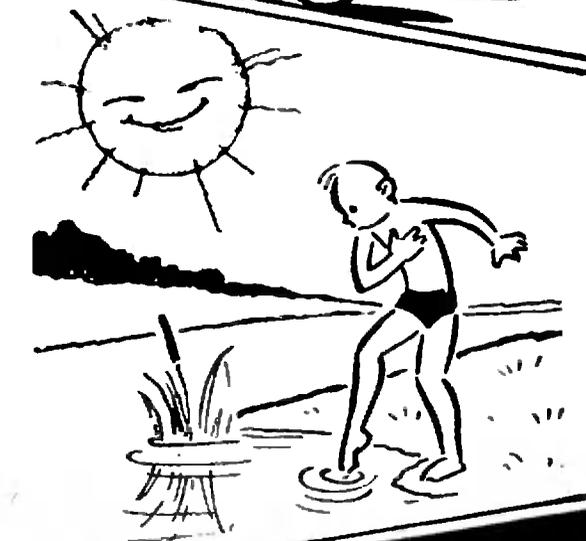
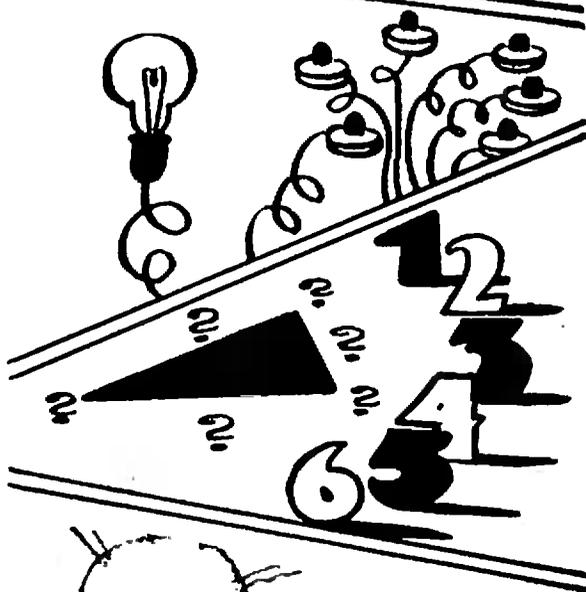
2. Имеется шесть кнопок. Пока ни одна из них не нажата, лампочка не горит. При одновременном нажатии первой, второй и пятой кнопок лампочка загорается. Никакая другая комбинация нажатых кнопок лампочку не включает. Нарисуйте схему простейшей электрической цепи, обладающей такими свойствами.

3. Разместить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 по одному около вершин треугольника и около середин его сторон так, чтобы сумма трех чисел, расположенных около любой стороны, была одна и та же.

4. Когда в жаркий день вы входите в реку, вода кажется холоднее окружающего воздуха, а когда выходите — наоборот. Почему?

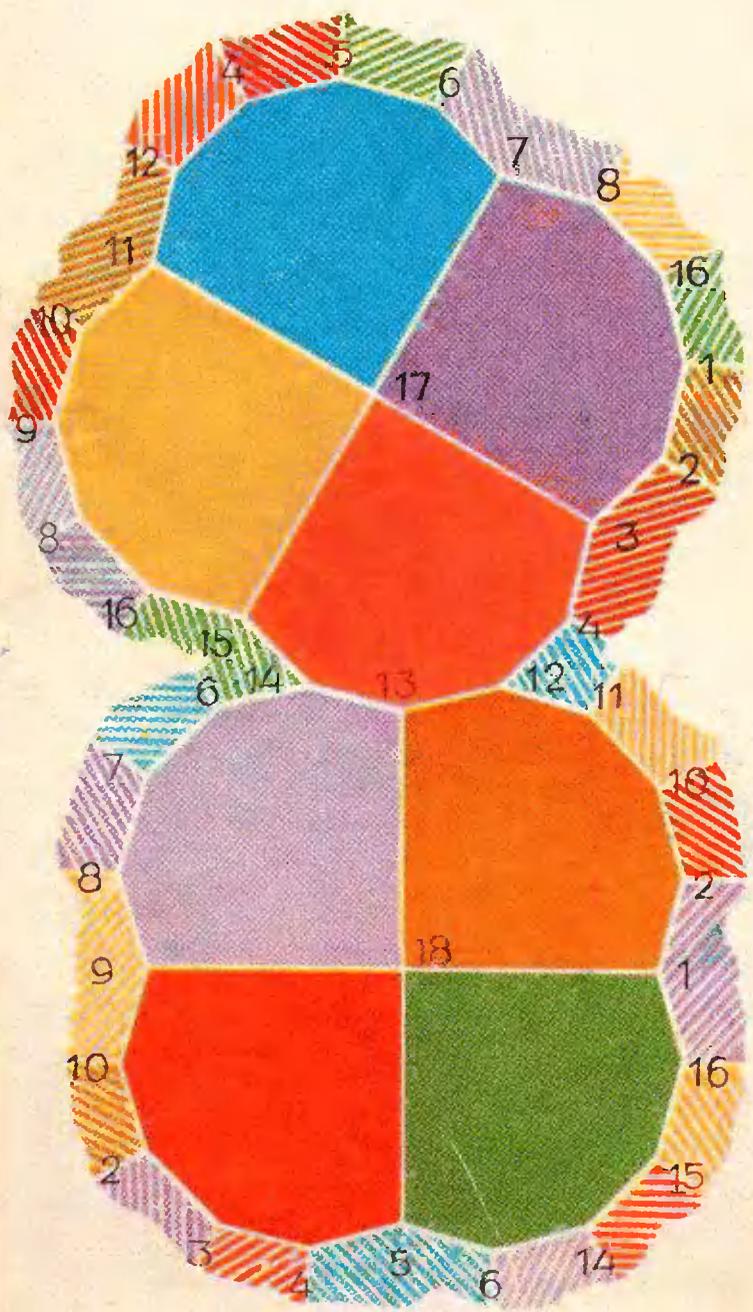
5. Вписать недостающие числа в таблицу на рисунке.

6. Как можно определить плотность камня, если его объем измерить непосредственно невозможно?



10	8	11	9	12	10	13	?	
----	---	----	---	----	----	----	---	--

24-4-42



### РАЗВЕРТКА «КРЕНДЕЛЯ»

На рисунке слева — развертка поверхности «кренделя» (см. также рис. 6, стр. 33). Развертка представляет карту из восьми стран, каждая из которых граничит со всеми остальными.

Чтобы получить из развертки поверхность «кренделя», склеивают участки границ так, чтобы точки, обозначенные одинаковыми цифрами, совпали.

Для наглядности по периферии развертки указаны цвета стран, примыкающих к соответствующему отрезку границы.

Напоминаем, что развертка изготовлена из растяжного материала (например, представляет собой резиновую пленку). Практически проще, разумеется, не склеивать развертку, а нанести с ее помощью карту на «крендель».

Покажите, что подобной карты с большим числом стран не существует.