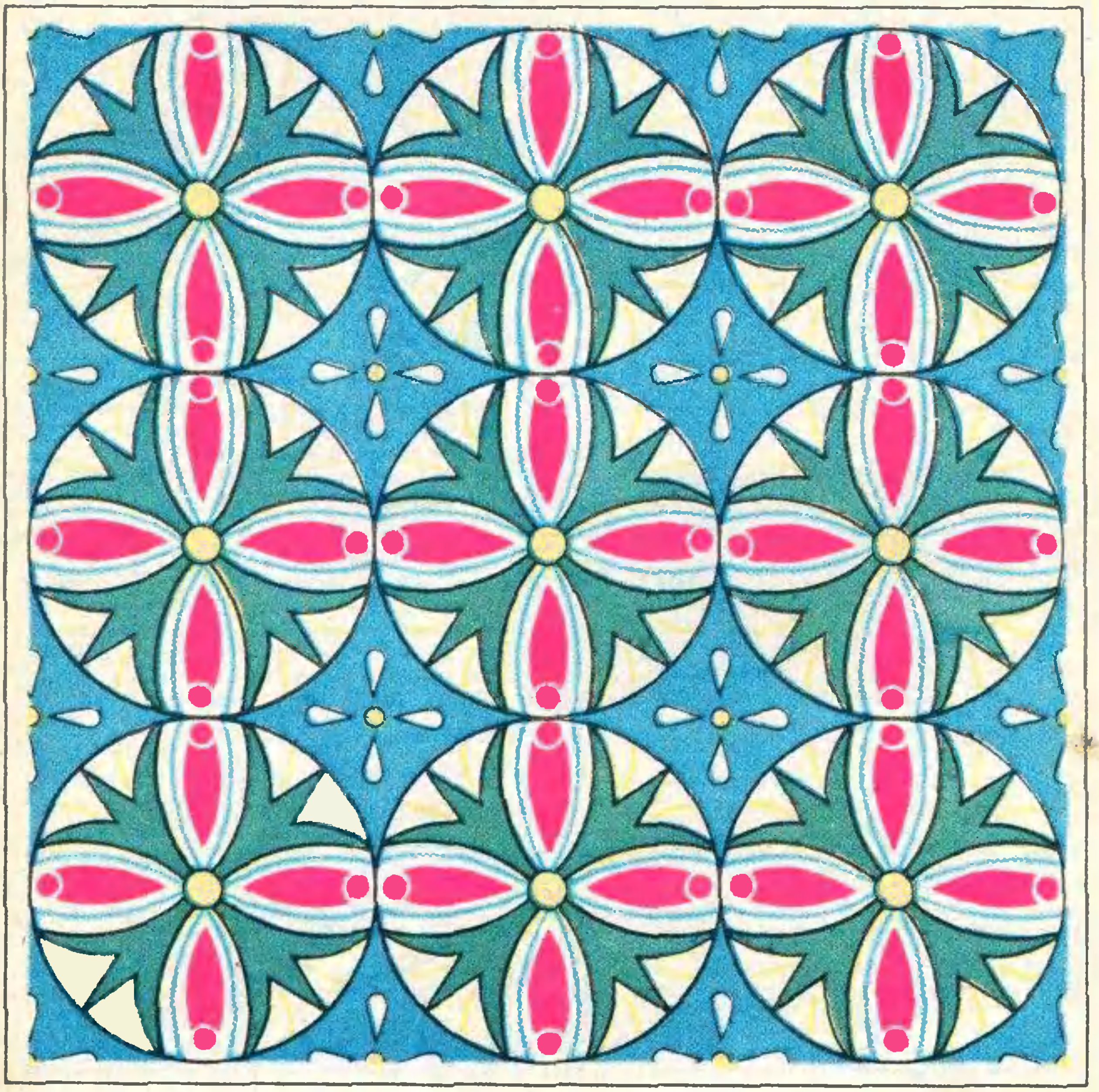
Квант

7

ИЮЛЬ

1972

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



На первой странице обложки изображен двумерный орнамент, получающийся переносами квадрата по горизонтали и по вертикали.

На соседнем рисунке изображен линейный орнамент («бордюр»), получающийся переносами исходной фигуры (определите ее самостоятельно) лишь по горизонтали.

Об уравнениях, которыми можно описывать подобные орнаменты, рассказано в статье М. И. Бржозовского «Симметрия и уравнения орнаментов», помещенной на стр. 14. Прочитав ее, попробуйте описать уравнениями нарисованные здесь орнаменты.

Заведующая редакцией *Л. В. Чернова.* Главный художник *А. И. Климанов.*
Художественный редактор *О. Н. Яковлева.* Корректор *А. Л. Ипатова.*
Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы
[illegible] Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Квант». Тел. 234-08-11, 231-07-93

Сдано в набор [illegible]-72 г. Подписано в печать 30/V-72 г. Бумага 70×100 1/16
[illegible] печ. л. 5,2 Уч.-изд. л. 5,64 Тираж 310 440 экз. Т-10502 Цена 30 коп. Заказ 620
Чеховский полиграфический комбинат Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР г. Чехов Московской обл.

РУКОПИСИ НЕ ВОЗВРАЩАЮТСЯ

ОСНОВАН
В
1970 ГОДУ

КВАНТ

7
ИЮЛЬ
1972

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ

ВЕТВИ И ГРАНИЦЫ

Р. П. Шейнцвит

Рассмотрим задачу:

На складе имеются предметы (каждый — по одному), вес и стоимость которых указаны в таблице.

Порядковый номер	Вес в центнерах	Стоимость (в рублях)
1	11	120
2	7	140
3	6	60
4	5	80
5	12	160
6	9	110
Всего	50	670

Грузоподъемность автомашины — 3200 кг. Требуется так загрузить автомашину, чтобы общая стоимость взятых предметов была как можно большей.

Очевидно, выгоднее брать предметы, имеющие при малом весе большую стоимость.

Введем понятие *удельной стоимости* предмета d_i, то есть стоимости одного центнера i-го предмета в рублях: $d_1=10{,}9$; $d_2=20$; $d_3=10$; $d_4=16$; $d_5=13{,}3$; $d_6=12{,}2$.

Если загрузить автомашину предметами с наибольшей удельной стоимостью — вторым, четвертым, пятым и шестым,— то сумма их весов окажется больше грузоподъемности автомашины $(7+15+12+9>32)$.

Если же взять только 2-й, 4-й и 5-й предметы, то машина окажется недогруженной на 8 *ц*. Можно тогда погрузить еще только один 3-й предмет, причем суммарная стоимость получится равной 440 руб., а машина будет недогружена на 2 *ц*. Можем ли мы быть уверены, что не существует лучшего способа загрузки машины?

Может быть, выгоднее оставить какой-либо из предметов с большей удельной стоимостью, но зато увеличить общую стоимость путем полного использования грузоподъемности машины?

Как видим, «в лоб» задачу решить трудно. А в реальных условиях, когда речь зачастую идет не о шести, а о шестидесяти предметах, и браться за нее нельзя, не вооружившись математическими методами. Переведем задачу на язык математики (как говорят, математизируем ситуацию). Пусть $x_i=1$, если i-й предмет погружается на автомашину, и $x_i=0$ в противном случае $(i=1, \ldots, 6)$. Тогда общая стоимость погруженных предметов в рублях равна $120x_1+140x_2+60x_3+80x_4+160x_5+110x_6$, а их общий вес в центнерах равен $11x_1+7x_2+6x_3+5x_4+12x_5+9x_6$.

Итак, отвлекаясь от «жизненной» ситуации, мы получаем чисто математическую задачу: найти значения переменных $x_1, \ldots, x_6$ (каждое из которых может быть равно 0 или 1), при которых функция

$$f(x_1, \ldots, x_6) = 120x_1 + 140x_2 + \\ +60x_3 + 80x_4 + 160x_5 + 110x_6$$

достигает максимума, если выполнено условие (ограничение)

$$11x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 + \\ +12x_5 + 9x_6 \leqslant 32. \qquad (1)$$

Функцию f называют *целевой функцией* задачи; она определена на множестве всех упорядоченных шестерок из нулей и единиц (*шестимерных векторов*, каждая компонента которых равна 0 или 1).

Всего, очевидно, имеется $2^6=64$ таких векторов, причем каждый из них дает некоторый способ загрузки автомашины. Но не каждый из этих 64 способов загрузки допустим: вектор (1,0,1,0,1,1) соответствует погрузке на машину 1-го, 3-го, 5-го и 6-го предметов, однако их общий вес (38 *ц*) превышает допустимый.

Естественно назвать вектор *допустимым*, если для него выполняется условие (1). Итак, решением задачи является допустимый вектор, максимизирующий целевую функцию f.

Теперь допустим, что 1-й предмет погружен на автомашину. Тогда $x_1=1$, и мы получаем новую задачу:

Найти значения переменных $x_2, \ldots, x_6$*), *при которых достигает максимума функция* $f_2(x_2, x_3, \ldots, x_6) = 140x_2 + 60x_3 + 80x_4 + 160x_5 + 110x_6$ *при условии* $7x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 12x_5 + 9x_6 \leqslant 21$.

Если же 1-й предмет не погружен, то $x_1=0$, и мы получаем такую задачу:

Найти значения переменных $x_2, \ldots, x_6$, *максимизирующих функцию*

$$f(x_2, \ldots, x_6) = 140x_2 + 60x_3 + \\ +80x_4 + 160x_5 + 110x_6$$

при условии

$$7x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 12x_5 + 9x_6 \leqslant \\ \leqslant 32.$$

*) Условия $x_i=0$ или 1, предполагаемые на протяжении всей статьи, мы в дальнейшем специально не оговариваем.

Таким образом, одну задачу с 6 переменными можно свести к двум задачам с 5 переменными; те в свою очередь сводятся к четырем задачам с 4 переменными и т. д., так что в конце концов мы получаем 64 задачи с одной переменной каждая. Но уж если надо решать такую систему, то проще непосредственно проверить условие (1) для каждого из 64 возможных векторов, для допустимых из них вычислить значение целевой функции и выбрать тот вектор, для которого значение максимально, то есть, как говорят, решить задачу «полным перебором».

А как же быть в тех случаях, когда число предметов (компонент векторов) велико? Ведь уже при 20 предметах число возможных вариантов превышает миллион! Ясно, что метод полного перебора в задачах такого рода в большинстве случаев непригоден.

Мы расскажем сейчас об одном методе, позволяющем, как правило, значительно уменьшить число сравниваемых вариантов, необходимое для получения решения. Метод этот, известный под названием «метод ветвей и границ», мы опишем в процессе его применения к нашей задаче.

Процесс отбора предметов для погрузки на автомашину можно изобразить в виде *графа**). Начальный узел 0 соответствует множеству P всех 64 6-мерных векторов. От узла

*) См. статью М. И. Башмакова «Паросочетания и транспортные сети» в № 4 «Кванта» за 1970 год. Впрочем, дальнейшее будет понятно и тем, кто не читал этой статьи.

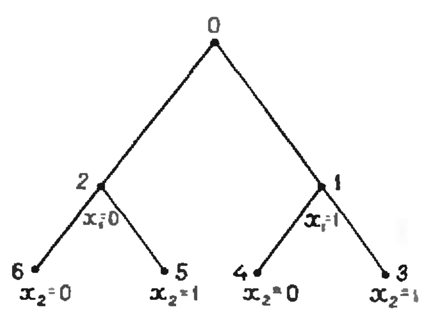


Рис. 1.

0 начинается *ветвление* к узлам 1 и 2 (рис. 1). Узел 1 находится правее и ниже узла 0. Он соответствует таким способам погрузки, при которых 1-й предмет обязательно погружается на автомашину. Очевидно, узел 1 соответствует подмножеству P_1 таких 32 векторов из P, у которых $x_1=1$. Узел 2 находится левее и ниже узла 0 и соответствует подмножеству P_2 таких 32 векторов из P, у которых $x_1 = 0$. Дальнейшее построение графа ясно. На рисунке 1 показан граф после двух шагов ветвления.

Каждый узел графа соответствует подмножеству векторов из P, у которых некоторые из компонент уже зафиксированы. Если построение множеств P_1 и P_2 рассматривать как первый шаг ветвления (первый уровень графа), то на k-м шаге (k-й уровень графа) мы получим 2^k узлов, каждый из которых соответствует множеству 2^{6-k} векторов (вариантов загрузки автомашины). Узлы, полученные на шестом шаге ветвления, представляют по одному вектору каждый, так что среди этих узлов находится решение задачи. Итак, если провести ветвление полностью, то придется построить граф с числом узлов $1 + 2 + 4 + \dots + 64 = 127$.

Но мы постараемся действовать таким образом, чтобы попутно обнаруживать «бесперспективные» узлы, из которых не могут выходить ветви, ведущие к решению. Чем раньше (выше) «отсечь» эти ветви, тем меньший перебор придется нам делать потом. С этой целью сопоставим каждому узлу 2 числа (которые будем записывать под узлом). Верхнее из них показывает *наибольшую возможную суммарную стоимость (границу стоимости) взятых предметов* при любом способе погрузки, описываемом векторами данного узла. Нижнее число показывает, какой *общий вес отбираемых предметов* допустим на данном шаге (это число равно разности между грузоподъемностью автомашины и весом всех уже погруженных предметов). Для примера найдем верхнее и нижнее числа для 1-го узла. Поскольку во всех соответствующих ему вариантах погрузки 1-й предмет обязательно берется, нижнее число на этом шаге равно $32 - 11 = 21$. Граница стоимости (верхнее число) равна сумме стоимостей всех предметов, так как мы еще не исключили возможности выбора ни одного из них. Поэтому верхнее число 1-го узла равно 670. Для второго узла верхнее число равно 550 (670—120), так как первый предмет не берется: нижнее же число равно здесь 32.

Пусть P_i — вес i-го предмета, C_i — его стоимость. Очевидно, что при переходе от любого узла, находящегося на i-м уровне графа, направо вниз верхнее число не меняется, а нижнее уменьшается на P_{i+1}, при переходе же от этого узла налево вниз нижнее число не меняется, а верхнее уменьшается на C_{i+1}. *Будем на каждом этапе ветвить тот узел, у которого верхнее число наибольшее. Если же у двух узлов верхние числа совпадают, то будем ветвить тот из них, у которого нижнее число меньше.* Если в процессе ветвления встретится узел с отрицательным нижним числом, это значит, что при соответствующих данному узлу способах погрузки автомашина будет перегружена, и ветвление такого узла не имеет смысла. Производя ветвление по указанному способу, мы придем к узлу, находящемуся на последнем, шестом уровне графа, с неотрицательным нижним числом.

Этот узел соответствует некоторому допустимому способу погрузки, при котором значение целевой функции равно верхнему числу. Все неветвленные узлы, у которых верхнее число меньше, чем у этого узла, незачем ветвить, так как при ветвлении верхнее число не может увеличиваться. Может оказаться, что верхнее число найденного узла больше, чем у любого другого узла. Тогда этот узел и дает решение задачи. На рисунке 2 показан окончательный граф.

Построение графа проходит по следующим этапам (числа означают номера узлов):

1) 0→1→3→5→7→9; 2) 6→→11→13; 3) 8→15; 4) 2→17→19→→21→23→25; 5) 12→27→29; 6) 4→→31→33→35; 7) 10→37; 8) 20→→39→41→43; 9) 22→45→47; 10) 32→→49→51→53; 11) 14→55; 12) 34→→57→59.

Дальнейшее ветвление бесполезно, так как узел 55 находится на последнем уровне графа и имеет наибольшее верхнее число. Этот узел и дает решение задачи. Он соответствует вектору (1,1,0,1,0,1): нужно погрузить на автомашину 1-й, 2-й, 4-й и 6-й предметы. При этом суммарная стоимость (максимум целевой функции) равна 450 руб.

В процессе построения графа было «отсечено» свыше 50% бесперспективных вариантов. При увеличении числа переменных процент таких вариантов обычно растет.

Кроме того, процесс можно ускорить, если сразу найти из каких-либо соображений «достаточно хорошее» решение. Так, в данном случае достаточно хорошее решение, соответствующее узлу 26, было найдено из соображений, связанных с удельной стоимостью.

Мы надеемся, что читатель ощутит общность описанного подхода к решению подобных задач. Конечно, наша задача достаточно проста: из каждого узла выходят лишь 2 ветви, и не составляет труда найти границы (верхнее и нижнее числа). В других задачах процессы ветвления и ограничения могут быть сложнее и зависеть от опытности и остроумия тех, кто ее решает. Что же касается трудоемкости самой реализации процесса, то здесь на помощь приходят электронно-вычислительные машины. Задачи, подобные рассматриваемой, часто называют «задачами о рюкзаке» (замените автомашину туристским рюкзаком, а ее грузоподъемность — предельными возможностями туриста, собирающегося в поход и совершающего трудный выбор среди «совершенно необходимых» предметов).

Конечно, задачи эти приходится решать далеко не только перед отпуском или каникулами. Ведь формирование годового плана предприятия во многих случаях — та же задача о рюкзаке. Неудивительно, что метод ветвей и границ «работает» во многих планово-экономических задачах, имеющих большое значение для народного хозяйства.

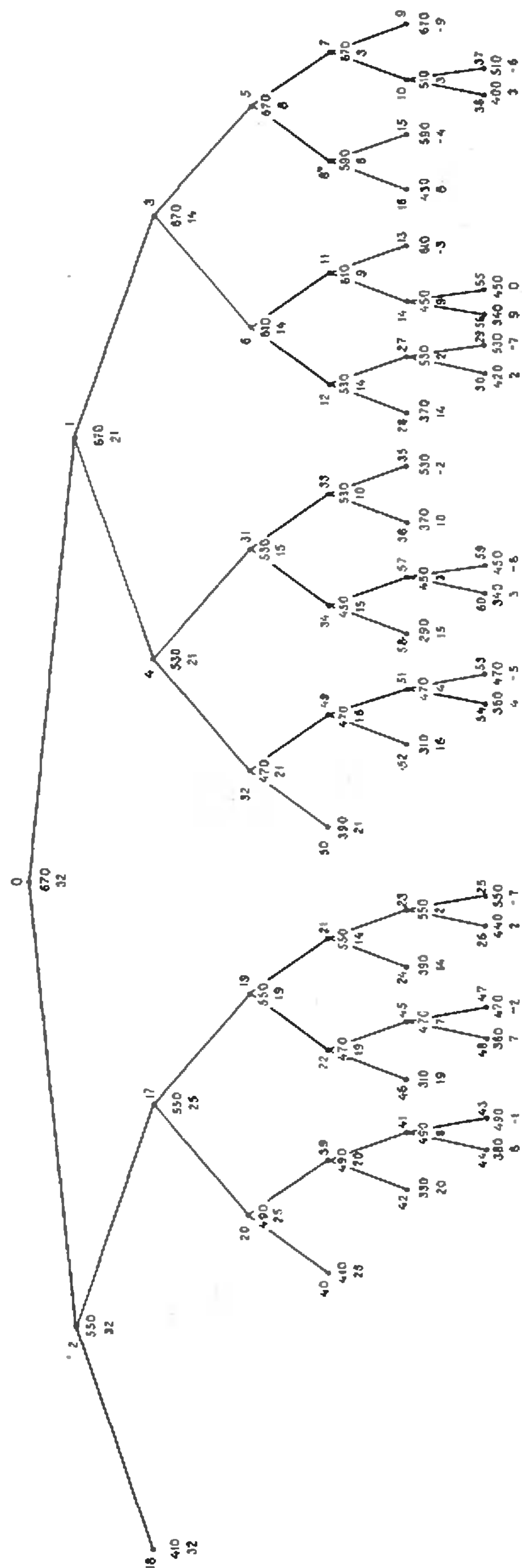


Рис. 2.

АТОМ ИЗЛУЧАЕТ КВАНТЫ

Б. С. Ратнер

В «Рассказе о кванте»*) были рассмотрены основные свойства электромагнитного излучения. Наименьшая порция энергии, которая может быть испущена или поглощена в виде излучения с частотой ν, называется квантом. Энергия кванта $E = 2\pi h\nu$, где $h = 1{,}05459 \cdot 10^{-34}$ *дж·с* — знаменитая постоянная Планка. (В старой литературе под постоянной Планка подразумевали величину $h = 2\pi h = 6{,}6262 \cdot 10^{-34}$ *дж·с*.)

Диапазон энергии квантов, встречающихся в природе, необычайно широк (см. рис. 1). Если энергия кванта, соответствующего длинным радиоволнам (например, волнам длиною 1000 *м*), составляет всего $E = \frac{2\pi hc}{\lambda} = 1{,}2 \cdot 10^{-9}$ *эв* (то есть в миллиард раз меньше энергии светового кванта), то энергия жестких γ-квантов, возникающих при распаде падающих на Землю частиц космических лучей, достигает значений $\approx 10^{15}$ *эв* (1 *эв* $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *дж*).

В этой статье мы расскажем о том, как образуются световые и рентгеновские кванты, а также гамма-кванты.

*) См. «Квант» № 1, 1970 г., стр. 6.

Возникновение света

Солнечный свет и пламя спички, свет неоновой рекламы и свечение раскаленного металла, несмотря на кажущееся различие, имеют одну природу. Возникновение света во всех источниках обусловлено изменениями, происходящими в атомах.

Согласно теории Бора атом любого элемента может находиться лишь в строго определенных дискретных состояниях. Каждому состоянию соответствует определенная внутренняя энергия атома E_n. Возможные значения энергии атома получили название энергетических уровней и обозначаются на схеме уровней горизонтальными прямыми (см. рис. 2, *а*). Расстояние между прямыми ΔE

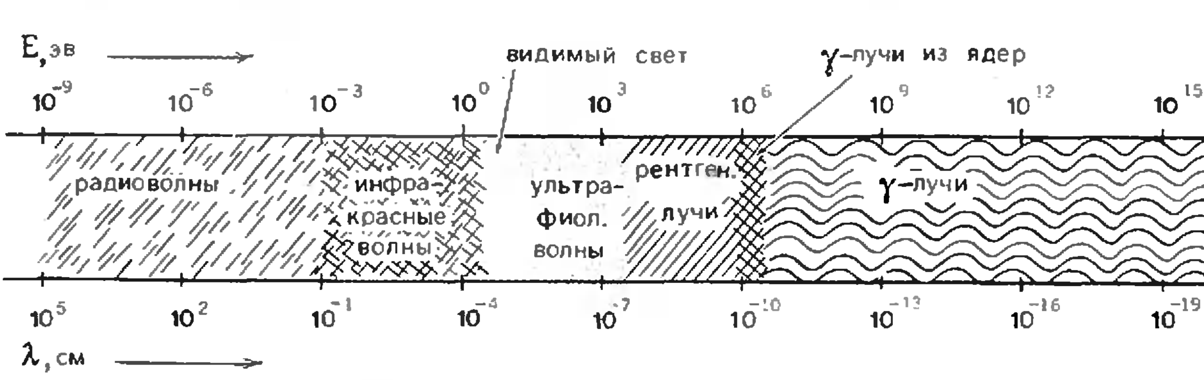


Рис. 1. Диапазон энергии квантов электромагнитного поля, встречающихся в природе.

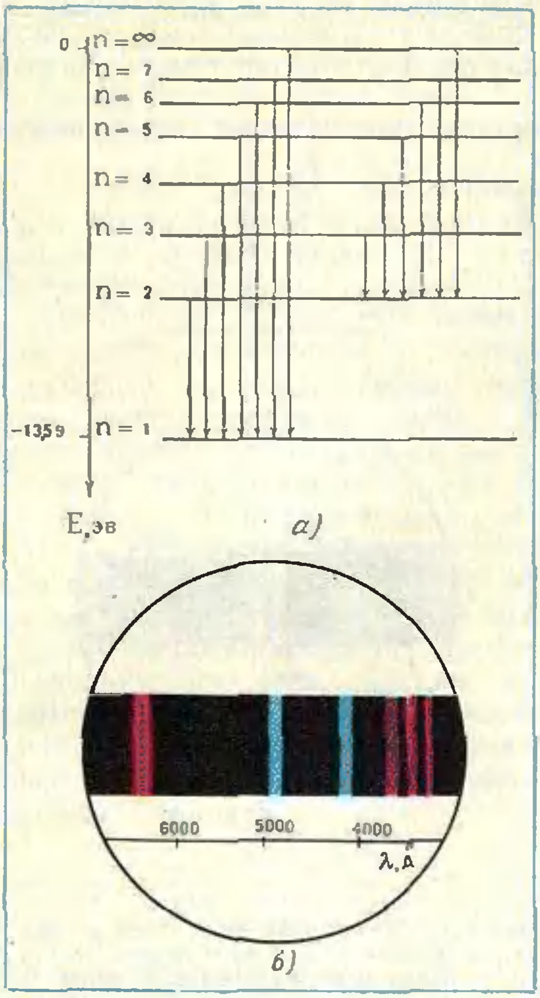


Рис. 2. а) Схема уровней атома водорода. Показаны переходы на уровни с $n=1$ и $n=2$. б) Спектр излучения атомарного водорода в видимой области — переходы на уровень с $n=2$. Такая картина наблюдается в спектрометре.

равно разности энергий соответствующих уровней атома. Низший энергетический уровень E_1 характеризует основное состояние атома. В этом устойчивом состоянии находятся в нормальных условиях все атомы. При поглощении энергии атом переходит в одно из возбужденных состояний E_2, E_3, E_4,... Способ возбуждения атома может быть самым различным: облучение быстрыми электронами, тепловое возбуждение, воздействие световых квантов или электрический разряд. Во всех случаях возбуждения энергия передается электронам атома, поэтому часто говорят не о переходах атома с одного уровня на другой, а о переходах электрона. Возбужденные состояния атома неустойчивы. За время $\tau \approx 10^{-8}$ *с* атом переходит в основное состояние, излучая энергию в виде квантов электромагнитного поля. Энергия кванта $E = 2\pi h\nu = E_2 - E_1$.

Рассмотрим атом водорода, простейший из атомов, состоящий из протона и связанного с ним электрона. Энергия любого уровня может быть найдена из следующей формулы:

$$E_n = -\frac{13{,}59}{n^2}\ \text{эв},$$

где $n = 1, 2, \ldots$ — так называемое главное квантовое число, характеризующее энергию уровня. В невозбужденном состоянии атома электрон находится на уровне с $n = 1$. При возбуждении электрон может оказаться на уровне с $n = 2, 3, \ldots$ Из формулы видно, что с увеличением энергии возбуждения расстояние между соседними уровнями (то есть разность энергий) уменьшается. Отрицательным значениям энергии E_n соответствуют связанные состояния электрона. Следовательно, до тех пор, пока электрон удерживается в поле атома, спектр имеет прерывный (дискретный) характер. Сообщив атому водорода энергию, превышающую значение $E = 13{,}59$ *эв*, мы ионизуем его.

При переходе электрона с более высокого уровня на более низкий испускается квант света. Его энергия равна разности энергий уровней:

$$E_{n_i n_k} = E_{n_i} - E_{n_k} = 13{,}59\left(\frac{1}{n_k^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)(\text{эв}).$$

Зная энергию кванта, мы можем найти длину волны испущенного света, наблюдаемого в спектроскопе:

$$\lambda = \frac{2\pi hc}{E}\ (\text{см}).$$

Схема энергетических уровней атома водорода показана на рисунке 2, *а*. Серия спектральных линий, соответствующих переходам на уровень с $n = 2$ со всех вышележащих уровней (серия

Бальмера), находится в видимой области (рис. 2, *б*). Переходы в основное состояние дают излучение в ультрафиолетовой части спектра (серия Лаймана).

В атомах более сложных, чем водород, электроны группируются в оболочки, то есть группы уровней с близкой энергией, имеющих одно и то же главное квантовое число *n*. Различные оболочки обозначают буквами *K*, *L*, *M* и т. д. На ближайшей к ядру *K*-оболочке располагается не более 2-х электронов, на *L*-оболочке — 8, на *M*-оболочке — 8, на *N*-оболочке — 18 и т. д. Наружные электроны связаны с атомом слабее внутренних; объясняется это увеличением расстояния до ядра и частичным экранированием притяжения ядра со стороны внутренних электронов.

С увеличением заряда ядра энергия связи *k*-электронов быстро растет (пропорционально Z^2) и составляет в атоме натрия 1,1 *кэв*, а в атоме вольфрама — 70 *кэв*. Поэтому кванты видимого света, энергия которых составляет от 1,6 до 4,1 *эв*, испускаются сложными атомами при переходах электронов между уровнями внешней оболочки.

Широко известен опыт, в котором пламя газовой горелки вспыхивает желтым светом, когда в него бросают щепотку поваренной соли. Два очень близкие по энергии кванта, излученные атомами натрия в желтой части спектра, ответственны за этот эффект (см. рис. 3).

Испускание света в газосветных трубках, используемых для рекламы, также обусловлено переходами между определенными уровнями атомов газа, возбуждаемых с помощью электрического разряда. Однако чаще нам приходится сталкиваться с источниками света, обладающими сплошным (непрерывным) спектром. Именно к таким источникам света относятся солнце, лампы накаливания и лампы дневного света (люминесцентное освещение). В чем причина перехода от отдельных линий к сплошному

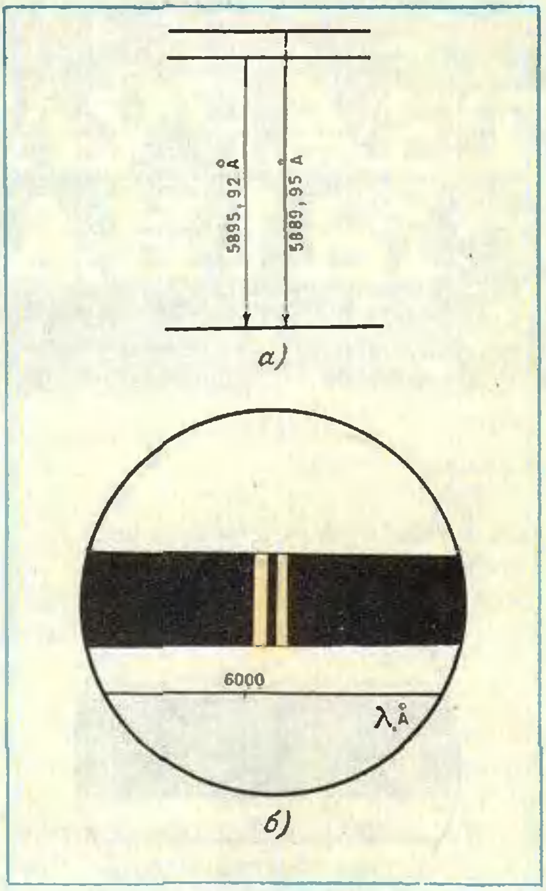


Рис. 3. а) Спектр излучения атома натрия в видимой области. б) В поле зрения спектрометра наблюдаются две желтые линии.

спектру? Оказывается, только разреженные газы, в которых взаимодействие между атомами невелико, дают линейные спектры. Если же вследствие высокой температуры или большого давления атомы газа часто испытывают соударения, то линии излучения уширяются настолько, что образуют непрерывный спектр. (Любопытно, что хотя спектр солнечного света сплошной, спектр атмосферы Солнца, который удается измерить во время полного солнечного затмения, состоит из отдельных ярких линий).

В твердом теле высокорасположенные уровни отдельных атомов, участвующие в образовании оптических спектров, из-за взаимодействия атомов превращаются в широкие энергетические зоны. Переходы между ними дают сплошной спектр, почти одинаковый для всех раскаленных твердых тел и зависящий, в основном, от температуры. Так, в раскаленном кузнечном горне почти не различаются куски угля, шлака и железа.

Возникновение рентгеновских квантов

По своей природе рентгеновские лучи тождественны со светом и отличаются от него лишь тем, что имеют меньшие длины волн.

Рентгеновские лучи образуются в вакуумной трубке. Между источником электронов (катод) и анодом поддерживается разность потенциалов до 50 *кв*. Попадание ускоренных электронов на анод вызывает испускание из анода пучка рентгеновских лучей. Какова физическая природа этого процесса? Если электрон с энергией E_0 проходит через электрическое поле ядра, то он претерпевает отклонение. Поскольку при этом электрон испытывает ускорение, он, согласно электродинамике, должен излучить энергию. Закон сохранения энергии запишется в виде

$$E_0 = E + 2\pi h\nu,$$

где E_0 — первоначальная энергия электрона, E — энергия электрона после испускания кванта частоты ν. Электрон при торможении может потерять любую часть своей кинетической энергии, поэтому спектр тормозного излучения будет сплошным.

Попробуем определить верхнюю границу рентгеновского спектра (по энергии) (или минимальную длину волны). Из закона сохранения энергии следует, что наибольшая энергия кванта равна кинетической энергии электрона:

$$2\pi h\nu_{max} = \frac{2\pi hc}{\lambda_{min}} = eU,$$

где U — величина ускоряющего напряжения. На рисунке 4 изображен рентгеновский спектр молибдена. Мы видим помимо непрерывного рентгеновского спектра отдельные узкие линии. Эти линии представляют характеристическое рентгеновское излучение, которое возникает в тех случаях, когда энергия возбуждающих электронов становится равной или

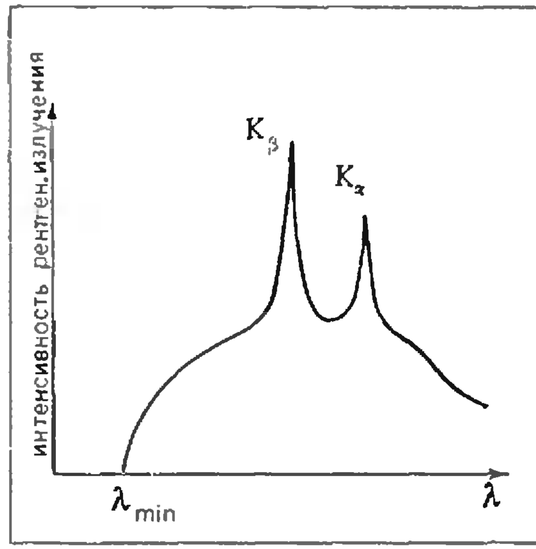


Рис. 4. Рентгеновский спектр излучения молибдена. (По оси ординат отложена интенсивность рентгеновского излучения, характеризующая количество испущенных квантов.) В области малых длин волн на сплошной спектр тормозного излучения накладываются линии *К*-серии характеристического излучения.

большей некоторого критического значения (для каждого элемента свое определенное значение). Теперь, после ознакомления с атомными спектрами, можно понять его происхождение. В тяжелых атомах энергия ближайшей к ядру *К*-оболочки составляет десятки *кэв*. Ускоренный в рентгеновской трубке быстрый электрон может вырвать из атома один из *k*-электронов. Образующаяся дырка заполняется электроном из верхней *L*- или *М*-оболочки. Одновременно испускается квант характеристического излучения. Более редкое событие — наблюдение излучения, возникающего при выбивании электрона из *L*-оболочки.

Спектральные линии характеристического излучения образуют закономерные последовательности, или серии, расположенные в различных частях рентгеновского спектра. Обозначают эти серии буквами *K*, *L*, *M*, *N*. Серия *K* — самая коротковолновая, состоит из линии K_α (переход из *L*-оболочки в *K*), K_β (переход из *М*-оболочки в *K*) и т. д. Следующая (в сторону длинных волн) — серия

L; далее идут серии *M* и *N*, которые наблюдаются только у тяжелых элементов. Длина волны рентгеновских лучей в тысячи раз меньше длин волн, испускаемых в видимой части спектра при переходах электронов внешней оболочки атомов.

Возникновение γ-квантов

Вскоре после открытия радиоактивного распада элементов Э. Резерфорд осуществил свой известный опыт по определению природы нового излучения. На одну из составляющих лучей, испускаемых препаратом радия, магнитное поле не оказывало никакого воздействия — это были γ-кванты.

С тех пор вот уже более полувека испускание γ-квантов ядрами является предметом тщательного изучения физиков.

Ядра, как и атомы, помимо основного состояния с минимальной энергией могут находиться в дискретных возбужденных энергетических состояниях. Расстояние между энергетическими уровнями колеблется в зависимости от массы ядра и энергии возбуждения от десятка *кэв* до нескольких *Мэв*. Время жизни ядра в возбужденных состояниях не превышает 10^{-13} — 10^{-14} *с*. Переход ядра из возбужденного состояния в основное чаще всего сопровождается испусканием γ-квантов.

Энергия γ-кванта равна разности энергии начального и конечного состояний. Иногда энергия возбуждения ядра может превратиться в кинетическую энергию электрона, который вследствие этого покидает атом. Этот процесс, называемый внутренней конверсией, чаще всего происходит на ближайшей к ядру электронной оболочке.

У некоторых ядер встречаются состояния, распад которых в основное состояние запрещен определенными правилами квантовой механики. Время жизни таких состояний, называемых изомерными, гораздо больше обычных времен жизни возбужденных состояний и достигает нескольких часов, дней и даже лет.

На рисунке 5 показана схема уровней ядра $^{83}_{36}$Kr.

Как образуются возбужденные состояния ядер? Радиоактивный распад элементов сопровождается испусканием α-частиц с образованием ядра $A-4$, $Z-2$, где A — массовое число и Z — заряд исходного ядра. При β-распаде ядро испускает две частицы — электрон и антинейтрино, образуя ядро A, $Z-1$. В результате обоих типов распадов ядро обычно остается в возбужденном состоянии. Эти же состояния возникают в ходе различных ядерных реакций. Так например, после реакции захвата медленного нейтрона возникает новое ядро, возбужденное до энергии 8 *Мэв*. В ускорителях кольцевого типа (бетатроны и синхротроны) и в линейных ускорителях электроны приобретают энергию в несколько десятков, сотен и даже тысяч *Мэв*. При торможении электронов в мишени образуются мощные пучки γ-квантов.

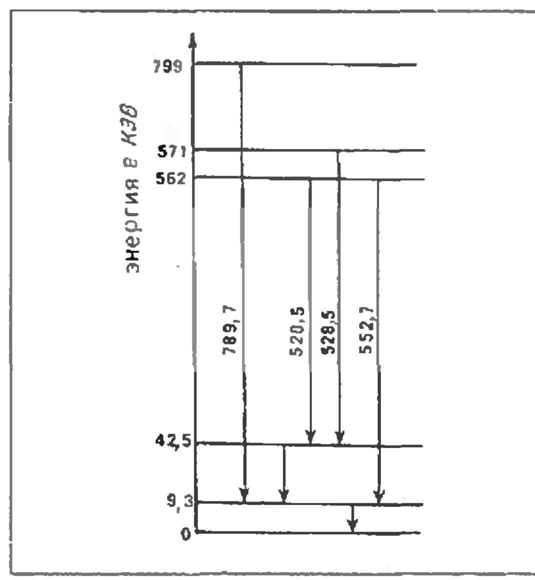


Рис. 5. Расположение уровней в ядре криптона $^{83}_{36}$Kr. Уровень с $E = 42{,}5$ кэв — изомерный, время жизни $T = 1{,}86$ года.

Так или не так действовал Ферма?

(о факторизации чисел)

Б. А. Кордемский

С именем знаменитого Пьера Ферма связано много тайн. Однажды он получил письмо с вопросом: «Является ли простым число 100895598169?» Ферма незамедлительно ответил, что это двенадцатизначное число является произведением двух простых чисел: 898423 и 112303.

Способ исследования числа он не раскрыл.

Отыскание простых множителей натурального числа называют для краткости «факторизацией» («фактор», значит — множитель, составная часть; в этом последнем смысле слово обычно и употребляется). Даже с такими помощниками, как электронные вычислительные машины, факторизация больших чисел — чрезвычайно трудоемкая задача, тем более трудно сделать это «ручным способом». Несколько первых простых чисел (2, 3, 5, 7, 11, . . .) легко проверяются на их пригодность в качестве возможных множителей испытуемого числа — по известным признакам делимости на эти числа. Упрощает вычисления и знание признаков делимости на какие-либо из последующих простых чисел *).

Ясно также, что для всякого заданного числа N достаточно испытать в качестве возможных множителей простые числа, меньшие, чем $\sqrt{N}$. Действительно, если у числа N есть множитель $m>\sqrt{N}$, то ему соответствует, как результат деления N на m, и некоторый множитель, меньший, чем $\sqrt{N}$.

Как прием факторизации можно использовать известный алгоритм Евклида для отыскания наибольшего общего делителя (НОД) двух чисел. Состоит он, как вы, быть может, помните, в следующем *): находим остаток r_1 от деления большего числа на меньшее, затем находим остаток r_2 от деления предшествующего делителя на r_1, затем остаток r_3 от деления r_1 на r_2 и т. д. Последний не равный нулю остаток (он непременно существует, поскольку числа r_i убывают) и есть НОД заданных чисел (если он равен 1, то они взаимно просты).

Для примера применим этот алгоритм к числам 104 и 39:

104 : 39 = 2 (остаток 26);
39 : 26 (остаток 13);
26 : 13 = 2 (остаток 0).
Ответ: НОД (104,39) = 13.

Как же применить алгоритм Евклида к факторизации чисел?

Для выявления простых множителей числа N образуем другое число P — произведение всех простых чисел от наименьшего из «подозреваемых» множителей числа N до наибольшего среди всех простых, меньших, чем $\sqrt{N}$. К этим числам N и P мы и применим алгоритм Евклида.

Пусть, например, $N = 851$. Замечаем, что $\sqrt{N}<31$. Устанавливаем по признакам делимости, что N не делится на 3, 7, 11, 13. Кроме того, сразу видно, что 851 при делении на 17 дает в остатке 1. Остается испытать делимость N на 19, 23 и 29. Для такого небольшого числа, как 851, это легко сделать прямым делением

*) См. например, заметку о признаках делимости на 19 и 7 в «Кванте» № 6, 1970, стр. 10.

*) Обоснование и примеры применения алгоритма Евклида приведены в статье А. Н. Виленкина «Сокращение алгебраических дробей» («Квант» № 11, 1970) и Вагутена «Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики» («Квант» № 6, 1972).

на каждый из предполагаемых множителей. Но для уяснения метода поступим так, как было бы целесообразно действовать в случае большого числа.

Образуем $P = 19 \cdot 23 \cdot 29 = 12673$. Далее, $12673 : 851 = 14$ (остаток 759), $851 : 759 = 1$ (остаток 92); $759 : 92 = 8$ (остаток 23); $92 : 23 = 4$ (остаток 0).

Число 23 есть НОД чисел N и P и, следовательно, один из множителей числа 851. Деля 851 на 23, получаем 37 — число простое.

Факторизация числа 851 окончена: $851 = 23 \cdot 37$.

Для числа, предложенного Ферма, аналогичные вычисления длились бы значительно дольше. (Попробуйте!) Похоже, что сам Ферма считал иначе. Но как?

На подступах к разгадке?

В одной из современных математических книг высказано предположение, что, по-видимому, «некоторые математики 17-го века, потратившие много усилий на разработку теории чисел, владели незнакомыми нам способами узнавать простые числа». Но так как мастера-вычислители 17-го века не раскрыли потомкам своих секретов факторизации чисел, то естественно, что способы, изобретенные позже, могли оказаться и переоткрытиями.

Ферма — один из создателей теории чисел — в своих вычислениях пользовался самыми разнообразными свойствами чисел. В частности, он, несомненно, знал, что всякое нечетное число N (равно как и всякое четное, кратное 4) можно представить в виде разности квадратов двух целых чисел x и y:

$$N = a \cdot b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = x^2 - y^2,$$

где a и b $(a > b)$ — какие-либо возможные нечетные сомножители нечетного числа N (тогда $a + b$ и $a - b$ — четные числа, а x и y — целые).

Если N — простое число, то $a = N$, $b = 1$, разложение $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ единственно и не дает иных сомножителей, кроме N и 1. Если же N — составное, то найдется разложение $(x+y)(x-y)$, которое дает хотя бы одну пару множителей, отличных от N и 1.

Например, простое число 17 имеет только одно представление в виде разности квадратов, а именно $17 = 9^2 - 8^2 = 17 \cdot 1$; составное же число 203 имеет два таких представления:

$$203 = 102^2 - 101^2 = 203 \cdot 1$$

и

$$203 = 18^2 - 11^2 = 29 \cdot 7.$$

Так в «лаборатории факторизации чисел» появляется еще один прием, который мы назовем «факторизацией по разности квадратов». При этом для подбора требующихся квадратных чисел x^2 и y^2 можно применить такую схему действий (алгоритм): 1) найти наименьший превосходящий заданное число N квадрат: x^2 (например, по таблице квадратов чисел или предварительно извлекая $\sqrt{N}$ с избытком); 2) из найденного x^2 вычесть N.

Если остаток сам является квадратным числом, то есть $x^2 - N = y^2$, то процесс подбора окончен; $N = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$. Если же остаток не есть квадрат, то надо повторить операцию вычитания N из следующего по старшинству квадратного числа и так продолжать до получения квадратного остатка.

Поясним этот алгоритм примером поиска множителей двух составных чисел: $N_1 = 153583$ и $N_2 = 689$.

Для числа N_1: $\sqrt{153583} \approx 392$; $392^2 = 153664$; $153664 - 153583 = 81 = 9^2$; имеем $153583 = 392^2 - 9^2 = 401 \cdot 383$ — оба множителя — простые числа. Заметим, попутно, что оба они близки по величине один к другому и, следовательно, к $\sqrt{N}$. В этом — причина краткости пути к успеху.

Для числа $N_2 = 689$ ближайший избыточный квадрат $729 = 27^2$.

Вычисляем:

$$27^2-N_2=729-689=40;$$
$$28^2-N_2=784-689=95;$$
$$29^2-N_2=841-689=152;$$
$$30^2-N_2=900-689=211;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$33^2-N_2=1089-689=400=20^2.$$

Следовательно, $689=33^2-20^2=53\cdot 13$.

Успех достигнут только на седьмой попытке. Сравнивая множители числа 689, мы замечаем, что они сильно различаются по величине, что и вызвало удлинение нашей процедуры.

Возможная уловка

Начиная факторизацию какого-либо составного числа N, мы, разумеется, не знаем заранее, близки ли по величине его сомножители. Но если несколько последовательных шагов выполнения алгоритма не привели процесс подбора требующихся квадратных чисел к завершению,— ответ определился: искомые множители не близки по величине к $\sqrt{N}$.

В таком случае применим хитрость: начнем все снова, предварительно умножив заданное N, скажем на 3 (сохраняя тем самым нечетность). Это увеличит меньший из двух сомножителей числа N в 3 раза и сделает величины сомножителей числа $3N$ более близкими между собой, а, следовательно, и к $\sqrt{3N}$.

А если заранее предположить еще более значительное различие между сомножителями числа N, то можно умножить его сразу на 5, 7 или 8 (в последнем случае образуется число четное, но представимое разностью квадратов целых чисел). Умножение на 2 в любом случае было бы непригодным, а на 4 — бесполезным. Докажите это самостоятельно.

Вернемся к числу $N_2=689$ и применим в качестве «уловки» умножение на 5. Это дает $5\cdot N_2=3445$; $\sqrt{3445}\approx 59$; $59^2=3481$; $3481-3445=36=6^2$. Имеем $3445=59^2-6^2=65\times 53$; $5N_2=65\cdot 53$; $N_2=53\cdot 13$.

Успех с одной попытки, а не с семи, как прежде.

Может быть, так и действовал Ферма?

Намереваясь применить теперь прием «факторизации по разности квадратов» к числу $N=100895598169$, дерзнем на введение дополнительного множителя. Пусть интуиция навела нас на множитель 8 (проба меньших множителей, предположим, нас не воодушевила).

Имеем $8N=807164785352$. Ищем наименьшее число, квадрат которого больше, чем $8N$:

$$\sqrt{807164785352}=898424 \text{ (с избытком)}$$

Далее: $898424^2-8N=898424$.

Хотя получившаяся разность и не является квадратом, продолжать применение алгоритма излишне: дерзость вознаграждена неожиданным сюрпризом — общим множителем 898424! Разложение числа $8N$ обеспечивается теперь простым вынесением общего множителя за скобки: $8\cdot N=898424\times(898424-1)=8\cdot 112303\cdot 898423$.

Окончательно: $N=112303\cdot 898423$.

...Так ли все происходило в «лаборатории» Ферма или как-нибудь иначе — сведений нигде нет; но в любом случае наше совместное гипотетическое «путешествие» в прошлое с позиций настоящего, было, надеюсь, для читателя не бесполезным.

Упражнения

1. Найти НОД чисел 80 887 и 40 091.
2. Доказать, что $N=55\,637$ имеет только один простой множитель, меньший, чем 30. (Воспользоваться числом $p=17\cdot 19\cdot 23\cdot 29=215\,441$.)
3. Найти все множители числа N из задачи 2.
4. Применить «факторизацию по разности квадратов» к разложению числа 131 289 на простые множители.
5. Выполнить «факторизацию по разности квадратов» числа 500 207. (Применить «уловку» предварительного умножения на 3).
6. Применяя «факторизацию по разности квадратов» непосредственно к числу $N=20\,099$, убедитесь в том, что $20\,099=199\cdot 101$.

Сколько потребовалось шагов? Зная результат разложения N, объясните, почему самым лучшим множителем, ускоряющим процесс разложения N, оказалось бы число 8? Сколько потребуется шагов для разложения числа $8N$?

Уравнения орнаментов

М. И. Бржозовский

Подбирая должным образом уравнения, можно получать самые разнообразные, подчас весьма причудливые картинки. Например, можно получить «рожицу», изображенную на рисунке А. Как это сделать? Предварительно нам придется вспомнить, что числовой плоскостью называется множество всех пар действительных чисел (см. статью А. Н. Колмогорова «Что такое график функции», «Квант» № 2, 1970 г.) Любое множество точек числовой плоскости условимся называть *геометрической фигурой*, расположенной на числовой плоскости.

Можно, в частности, рассмотреть множество всех таких пар действительных чисел (x, y), для которых $f(x, y)=0$, где $f(x, y)$ — заданное выражение. В этом случае говорят, что получающаяся геометрическая фигура описывается уравнением $f(x, y)=0$.

Так, уравнение $x^2-y=0$ описывает параболу; уравнение $x^2-y^2=0$ — две прямые ($y=x$ и $y=-x$), пересекающиеся в точке (0, 0); уравнение $x^2+y^2=2$ — окружность с центром в точке (0,0) и радиусом $\sqrt{2}$; уравнение $|x|+|y|=1$ — квадрат с центром в точке (0, 0) и вершинами, лежащих на координатных осях.

Теперь рассмотрим следующие уравнения:

$$\left(x+y\operatorname{ctg}\frac{\pi n}{32}\right)\sqrt{\frac{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{49}-1}{1-\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{81}}}=0 \qquad (1)$$

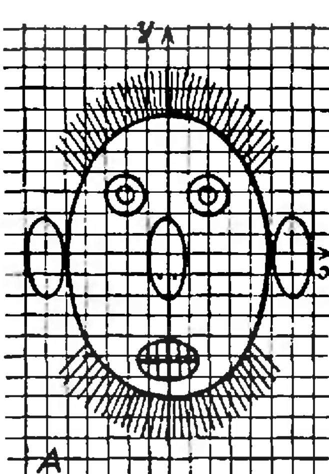


Рис. А.

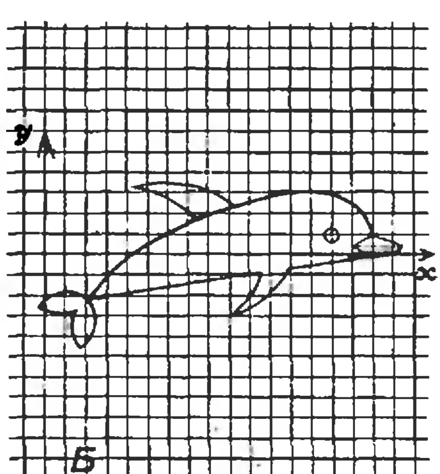


Рис. Б.

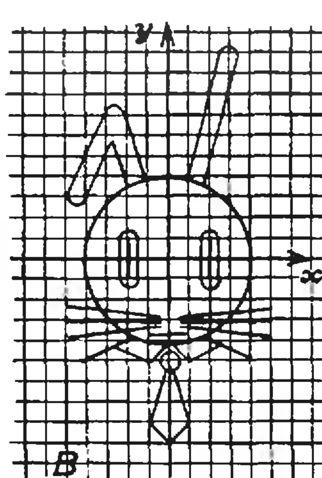


Рис. В.

(n — целое число, принимающее значения $8 \leqslant |n| \leqslant 16$);

$$(x \pm 2)^2 + (y-3)^2 = k \left(k=1 \text{ и } k=\frac{1}{4}\right); \qquad (2)$$

$$4(x+l)^2+y^2=4 \ (l=0,\ l=-5,\ l=5); \qquad (3)$$

$$|2x^2-5|x|+2|+|3y-8|x|+7|=0; \qquad (4)$$

$$(y+5)(2x+m)\sqrt{9-4x^2-9(y+5)^2}=0 \qquad (5)$$

$$(m=0,\ m=\pm 1,\ m=\pm 2).$$

Уравнениям (1) соответствует овал лица, волосы и борода, уравнения (2) описывают глаза, уравнения (3) дают уши и нос, уравнению (4) соответствуют центры глаз и ноздри, уравнения (5) описывают рот и зубы рожицы, изображенной на рисунке А.

На рисунках Б и В изображены еще две фигуры, которые тоже можно описать уравнениями (их нам прислал ученик 10 класса Ленинградской школы № 239 Юрий Миньковский). В фигуре на рисунке В используется даже кусок графика логарифмической функции.

Помещаемая ниже статья рассказывает, как можно получать уравнения, описывающие различные орнаменты.

Рассмотрим функцию $y = \cos x$. Эта функция четна ($\cos(-x) = \cos x$) и периодична ($\cos(2\pi + x) = \cos x$), поэтому ее график обладает зеркальной симметрией относительно оси ординат Oy и состоит из одинаковых периодически повторяющихся кусков.

Мы будем говорить, что график функции $y = \cos x$ (его уравнение можно записать так: $y - \cos x = 0$) является *линейным орнаментом.*

Таким образом, линейный орнамент получается с помощью переносов некоторой основной фигуры вдоль некоторого направления.

Если сам линейный орнамент считать основной фигурой и произвести над ним серию переносов вдоль нового направления, то мы получим *двумерный орнамент.*

Повороты основной фигуры на углы, кратные $\frac{360°}{n}$, приводят к *круговым орнаментам.*

Рассмотрим сначала один простой пример.

На рисунке 1 в качестве основной фигуры F_0 взята окружность с центром в начале координат и радиусом $r = 1$, ее уравнение в декартовой системе координат: $x^2 + y^2 = 1$. Заметим, что все точки окружности (кроме одной) лежат в полосе $-1 \leqslant x < 1$ (отмеченной красным цветом).

Перенесем фигуру F_0 вправо вдоль оси Ox на 2 единицы масштаба; она займет положение F_1, а красная область перейдет в синюю, определяемую неравенствами $1 \leqslant x < 3$ (см.

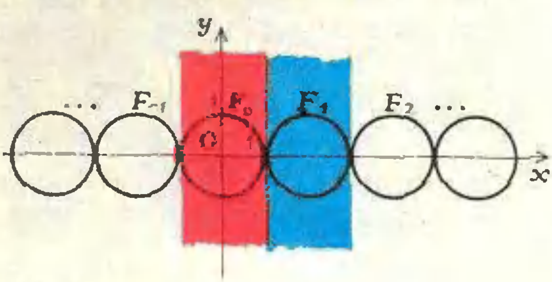


Рис. 1.

рис. 1). Уравнение окружности F_1 в той же системе координат записывается уже в виде

$$(x-2)^2+y^2=1.$$

Аналогично можно получить цепочку окружностей F_{-1}, F_2, F_{-2}, ..., F_k, F_{-k},... Они образуют линейный орнамент.

Всю эту цепочку окружностей можно описать одним уравнением, если ввести в рассмотрение функцию $[x]$ — целая часть x *).

Вот это уравнение:

$$\left(x-2\left[\frac{x+1}{2}\right]\right)^2+y^2=1.$$

Если x находится в промежутке $[2k-1,\ 2k+1)$, то это уравнение, как нетрудно проверить, задает одну из окружностей:

$$(x-2k)^2+y^2=1.$$

Вообще, если $f(x, y)=0$ (при $a\leqslant x<a+T$)— уравнение некоторой геометрической фигуры, которую мы назовем основной фигурой F_0, то линейный орнамент, полученный из F_0 переносами на kT единиц по оси Ox (где $T>0$, $k=0, \pm 1, \pm 2,...$), описывается уравнением

$$f\left(x-T\left[\frac{x-a}{T}\right],\ y\right)=0. \qquad (6)$$

Пусть теперь основная фигура F_0, заданная в полосе ($b\leqslant y<b+S$) переносится (по диагонали) на kT единиц по оси Ox и на kS единиц по оси Oy. Тогда получается линейный орнамент со звеньями из фигур F_i, расположенный вдоль отрезка, соединяющего начало координат $(0,0)$ с точкой $(T,\ S)$, а уравнение

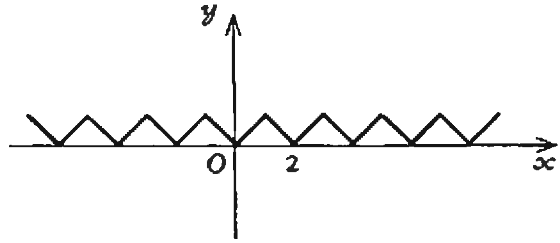


Рис. 2.

этого орнамента будет

$$f\left(x-T\left[\frac{y-b}{S}\right],\ y-S\left[\frac{y-b}{S}\right]\right)=0 \quad (7)$$

(при $S\neq 0$). При $T=0$ получается линейный орнамент, расположенный вдоль оси Oy. Комбинацией переходов (6) и (7) получаются уравнения двумерных орнаментов.

Интересно отметить, что если функция $y=f(x)$ определена в интервале $a\leqslant x<a+T$, то функция

$$y=f\left(x-T\left[\frac{x-a}{T}\right]\right)$$

определена на всей вещественной оси $-\infty<x<\infty$, периодична с периодом T и совпадает с $f(x)$ в интервале $a\leqslant x<a+T$.

Функцию $f\left(x-T\left[\frac{x-a}{T}\right]\right)$ называют периодическим продолжением функции $f(x)$. Например, если $y=|x|$ в промежутке $(-1,\ 1)$, то

$$y=\left|x-2\left[\frac{x+1}{2}\right]\right|$$

— периодическая функция с периодом $T=2$, ее график приведен на рисунке 2.

На рисунке 3 изображен линейный орнамент, составленный из дуг окружностей радиуса $R=1$. Основу этого орнамента составляет фигура F_0 (красная часть рисунка 3), заданная уравнением

$$\left(x-\left[\frac{x+1}{2}\right]\right)^2+\left(y-\left[\frac{y+1}{2}\right]\right)^2=1.$$

*) Функция $[x]$, называемая «целой частью x», определяется равенством $[x]=k$, если $k\leqslant x<k+1$, где k — целое число (наибольшее целое число, не превосходящее x).

После серии переносов фигуры F_0 по оси Ox (при $T = 4$, $a = -2$) мы получим сам орнамент, уравнение которого после некоторых упрощений примет вид

$$\left(x-2\left[\frac{x+2}{4}\right]-\left[\frac{x+1}{2}\right]\right)^2+$$
$$+\left(y-\left[\frac{y+1}{2}\right]\right)^2=1.$$

Будем считать теперь этот орнамент основной фигурой и произведем над ним серию переносов по оси Oy (при $S = 4$). Мы получим двумерный орнамент, изображенный на рисунке 4. Предлагаем читателю самому написать соответствующее уравнение.

Интересный орнамент со сложной симметрией (если еще изменять цвета при преобразовании переноса в некоторых направлениях) изображен на рисунке 5. Основу белой части орнамента составляет фигура F_0 — белая часть квадрата $-2 \leqslant x < 2$, $-2 \leqslant y < 2$, ее уравнение

$$\left[\left|x-\left[\frac{x+1}{2}\right]\right|+\left|y-\left[\frac{y+1}{2}\right]\right|\right]=0$$

по своей структуре напоминает уравнение основной фигуры, изображенной на рисунке 3. Производя над F_0 сначала серию переносов по оси Ox (при $T = 4$, $a = -2$), а затем по оси Oy (при $S = 4$, $b = -2$), мы получим всю белую часть орнамента, уравнение которой таково:

$$\left[\left|x-2\left[\frac{x+2}{4}\right]-\left[\frac{x+1}{2}\right]\right|+\right.$$
$$\left.+\left|y-2\left[\frac{y+2}{4}\right]-\left[\frac{y+1}{2}\right]\right|\right]=0.$$

Уравнение черной части орнамента получается из этого уравнения заменой x на $x-2$ и y на $y-2$.

Теперь рассмотрим синюю, желтую и красную части трехцветного шестиугольного паркета, изображенного на рисунке 6. В основе синей части паркета лежит шестиугольник

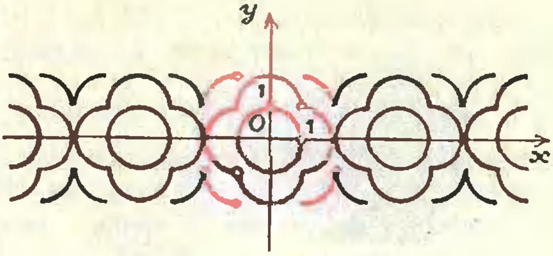


Рис. 3.

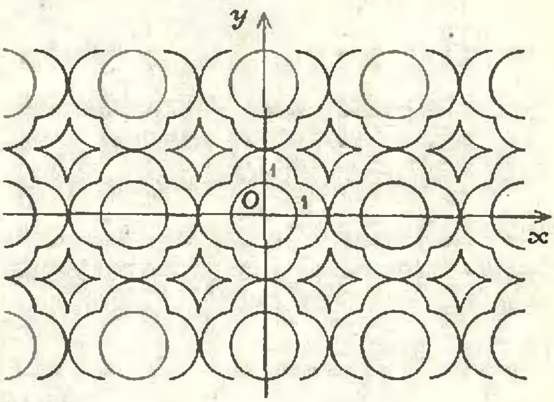


Рис. 4.

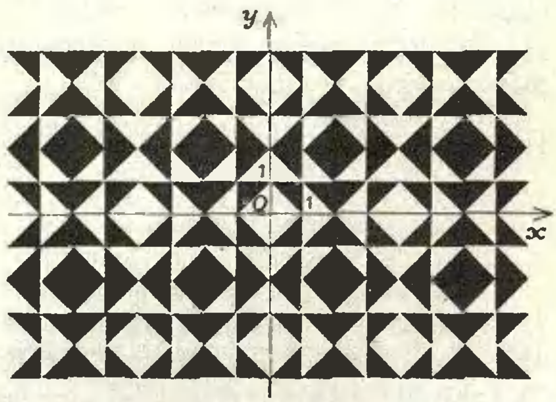


Рис. 5.

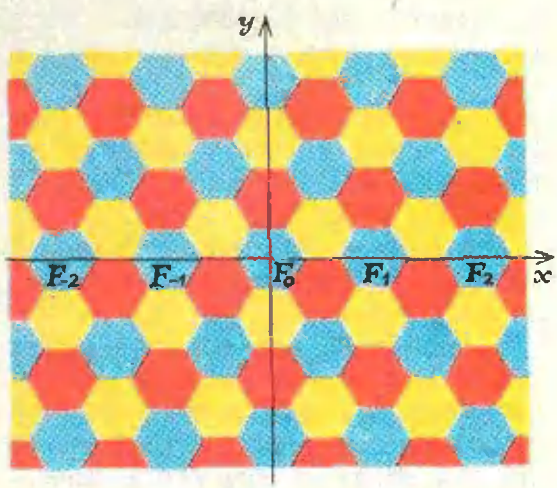


Рис. 6.

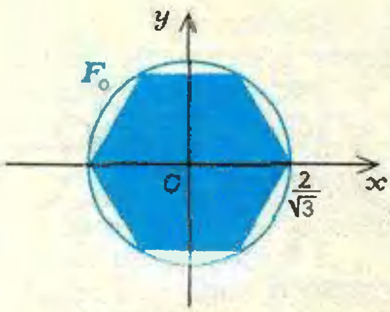


Рис. 7.

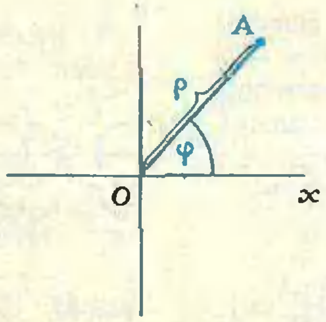


Рис. 8.

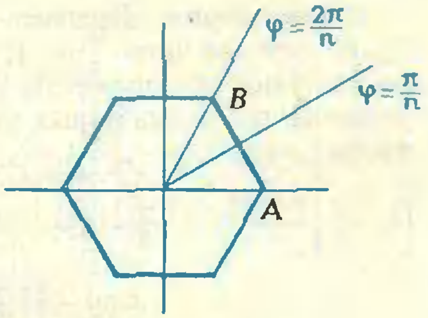


Рис. 9.

F_0 — множество всех внутренних точек шестиугольника с центром в начале координат, вписанного в окружность радиуса $R=\frac{2}{\sqrt{3}}$ (рис. 7). Уравнение этого шестиугольника можно записать в виде

$$\left[|y|+\left|\frac{x\sqrt{3}-1}{2}\right|+\right.$$
$$\left.+\left|\frac{x\sqrt{3}+1}{2}\right|\right]=1,$$

так как для этих и только этих точек выполняются неравенства

$$1\leqslant|y|+\left|\frac{x\sqrt{3}-1}{2}\right|+$$
$$+\left|\frac{x\sqrt{3}+1}{2}\right|<2.$$

Чтобы получить синюю часть паркета, можно сначала произвести над F_0 серию переносов по оси Ox $\left(\text{при } T_1=2\sqrt{3},\ a=-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, а затем полосу из фигур F_i (на оси Ox) перенести по диагонали (при $T_2=\sqrt{3}$, $S=3$, $b=-1$). Уравнение красной части паркета получается из построенного уравнения заменой y на $y-2$, а желтой части — заменой y на $y+2$.

Интересные круговые орнаменты получаются, если воспользоваться полярными координатами.

В полярной системе координат каждая точка A имеет две координаты (рис. 8): расстояние ρ от этой точки до начала координат O и угол φ, который образует луч OA с фиксированной осью (на рисунке 8 — с осью Ox); отсчитывается этот угол в положительном направлении (против часовой стрелки) от оси Ox. «Начало координат» (точка O) имеет координаты $\rho=0$ и любой угол φ; любая другая точка имеет однозначно определенную положительную координату ρ и определенную с точностью до кратных 2π координату φ.

В полярной системе координат, как и в декартовой, можно описывать фигуры уравнениями. Например, уравнение окружности F_0 на рисунке 1 будет $\rho=1$ (как видим, оно гораздо проще уравнения в декартовой системе координат).

Если $f(\rho,\varphi)=0$ — уравнение основной фигуры, содержащейся в секторе $0\leqslant\varphi<\frac{2\pi}{n}$, то по аналогии с формулой (6) уравнение

$$f\left(\rho,\ \varphi-\frac{2\pi}{n}\cdot\left[\frac{n\varphi}{2\pi}\right]\right)=0 \qquad (8)$$

задает круговой орнамент, составленный из фигур F_i.

Например, можно написать уравнение правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R. Уравнение $\rho\cdot\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{n}\right)=R\cos\frac{\pi}{n}$ внутри сектора $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{2\pi}{n}$ задает сторону AB (рис. 9), а после серии поворотов отрезка AB на углы, кратные $\frac{2\pi}{n}$, получается и весь n-угольник. Его уравнение по формуле (8) может быть написано в виде

$$\rho\cdot\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{n}-\frac{2\pi}{n}\left[\frac{n\varphi}{2\pi}\right]\right)=R\cos\frac{\pi}{n}.$$

При $R = \frac{2}{\sqrt{3}}$ и $n = 6$ получается правильный шестиугольник, изображенный на рисунке 7.

На рисунке 10 изображен орнамент, составленный из системы замыкающихся круговых цепочек по шесть кругов в каждой. Основу этого орнамента составляет множество всех внутренних точек первого черного круга с радиусом $r = 1$, вписанного в сектор $0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{3}$. Уравнение этого круга будет

$$\left[\rho^2 - 4\rho\cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) + 4\right] = 0.$$

После серии поворотов на углы, кратные $\frac{\pi}{3}$, получается первая круговая цепочка, состоящая из шести кругов радиуса $r = 1$, центры которых расположены на окружности радиуса $R = 2$. Уравнение этой цепочки легко находится по формуле (8):

$$\left[\rho^2 - 4\rho\cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi + \frac{\pi}{3}\left[\frac{3\varphi}{\pi}\right]\right) + 4\right] = 0,$$

а следующие круговые цепочки получаются из первой растяжением полярных радиусов соответственно в 3,

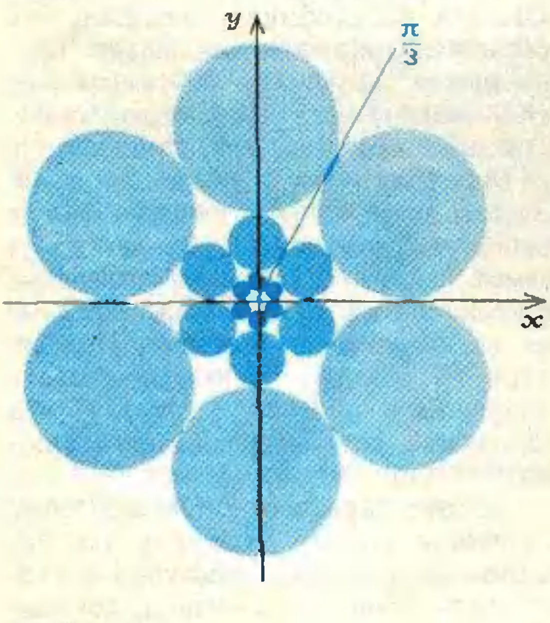


Рис. 10.

9, ..., 3^k, ... раз. Уравнение всего орнамента получится из последнего уравнения заменой ρ на $\rho \cdot 3^{-\left[\frac{\varphi}{2\pi}\right]}$.

В самом деле, если угол φ меняется в пределах $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, то полярный радиус остается без изменения, так как $\left[\frac{\varphi}{2\pi}\right] = 0$. Если φ меняется в пределах $2\pi \leqslant \varphi < 4\pi$, то $\left[\frac{\varphi}{2\pi}\right] = 1$ и $\rho \cdot 3^{-\left[\frac{\varphi}{2\pi}\right]} = \frac{\rho}{3}$, а замена ρ на $\frac{\rho}{3}$ в последнем уравнении соответствует преобразованию растяжения всех полярных радиусов в 3 раза. При $4\pi \leqslant \varphi < 6\pi$ получаем $\left[\frac{\varphi}{2\pi}\right] = 2$, что соответствует растяжению полярных радиусов в $3^2 = 9$ раз и т. д.

Окончательно уравнение орнамента записывается в виде

$$\left[3^{-2\left[\frac{\varphi}{2\pi}\right]}\rho^2 - 4\rho\cdot 3^{-\left[\frac{\varphi}{2\pi}\right]} \times \right.$$
$$\left. \times\cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi + \frac{\pi}{3}\left[\frac{3\varphi}{\pi}\right]\right) + 4\right] = 0.$$

Конструирование симметричных конфигураций связано, вообще говоря, с группами преобразований (на плоскости или в пространстве). Но об этом мы рассказывать пока не будем, а посоветуем читателям обратить внимание на следующие книги.

Литература

1. Герман Вейль. Симметрия. «Наука», 1968 г.
2. Мартин Гарднер. Этот правый левый мир. «Мир», 1967 г.
3. Г. Дисафоре и М. Орчин. Симметрия в химии. «Мир», 1967 г.
4. М. Хаммермеш. Теория групп и ее применение к физическим проблемам. «Мир», 1966 г.

Спор, длившийся полвека

А. К. Кикоин

В 1686 году немецкий философ и естествоиспытатель Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716) опубликовал маленькую в две страницы статью с очень длинным заглавием, таким длинным, что мы не станем приводить его здесь полностью. Но начиналось заглавие так: «Краткое доказательство примечательной ошибки Декарта и других относительно...».

Статья эта положила начало знаменитому научному спору между Лейбницем и его сторонниками, с одной стороны, и последователями Декарта (картезианцами, как их обычно называют) — с другой. Сам Рене Декарт (1596—1650) умер еще за 36 лет до появления статьи Лейбница. Этот спор длился более 50 лет.

Какую же ошибку знаменитый философ Лейбниц заметил у не менее знаменитого философа Декарта? О чем шел столь долгий спор?

У всех движущихся тел общим является, конечно, то, что они ...движутся. Но можно ли сказать, что у одних тел «больше движения», а у других меньше, что одни тела движутся «сильнее» других? К тому времени, когда возник спор Лейбниц — Декарт, ученые уже были убеждены в том, что можно и нужно говорить о «силе» движения, о «количестве движения». Не было только ясно, какая величина выражает «силу» или количество движения. Казалось бы, достаточной характеристикой движения является скорость: более «сильно», то есть с большим количеством движения, движется то тело, у которого скорость больше! Но будет ли правильно утверждать, что маленькая пуля, скорость которой равна, например, 700 *м/с*, движется «сильнее», чем крупный снаряд, движущийся со скоростью всего в 300 *м/с*? Очевидно, что важна не только скорость тела. Важно еще, велико или мало движущееся тело.

О величине, выражающей «силу» движения, количество движения, и шел упомянутый спор.

Философские взгляды Лейбница и Декарта были во многом противоположными, но как физики они сходились в том, что «силу» движения нужно характеризовать тем действием, которое движущееся тело оказывает на другое тело, когда оно с ним взаимодействует (например, при ударе). Сходились они и в том, что когда при взаимодействии тел движение передается от одного тела к другому, оно (движение) сохраняется. Это значит, что количество движения (или «сила» движения), потерянное одним из тел, приобретается другим. Значит, и выражается «сила» движения такой величиной, которая при движении тел и их взаимодействиях сохраняется.

В 1644 году Декарт в своей книге «Начала философии» доказывал, что свойством сохранения обладает произведение «величины тела» (то есть его массы) на абсолютное значение его скорости. Это произведение и выражает «силу» движения тела. Здесь Декарт допустил очень важную ошибку: свойством сохранения на самом деле обладает произведение массы тела на **вектор** скорости, а не на ее абсолютное значение. Но Декарт не считал нужным учитывать направление движения, считая, что «движение движению не противоположно».

Против предложенной Декартом величины «силы» движения («количества движения») и выступил в своей статье 1686 года Лейбниц, доказывавший, что «силу» движения должно выражать произведение «величины тела» (массы) на квадрат скорости, так как именно величина этого произведения не меняется в процессе движения. После этого и начался великий спор:

$$mv \text{ или } mv^2?$$

Если выразить сущность спора на современном языке механики, то она сводится к следующему.

Декарт считал, что большей «силой» движения или большим количеством движения обладает тело, у которого больше значение величины mv. И вот почему: если взять два покоящихся тела с массами m_1 и m_2 и подвергнуть их действию сил F_1 и F_2 в течение одного и того же промежутка времени t, то отношение сил F_1 и F_2 будет равно

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1 a_1}{m_2 a_2}.$$

Умножим и разделим правую часть этого уравнения на t. Тогда получим

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1 a_1 t}{m_2 a_2 t}.$$

Но $a_1 t = v_1$, а $a_2 t = v_2$. Поэтому

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1 v_1}{m_2 v_2}.$$

Так как отношение сил равно отношению величин mv, то mv и есть количество движения («сила» движения).

Лейбниц же рассуждал так: если взять два тела с массами m_1 и m_2 и подвергнуть их действию сил F_1 и F_2 так, чтобы под действием этих сил оба тела прошли одно и то же расстояние S, то отношение сил будет равно

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1 a_1}{m_2 a_2}.$$

Умножив и разделив правую часть этого равенства на S, получим

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1 a_1 S}{m_2 a_2 S}.$$

Но, как известно, $a_1 S = \frac{v_1^2}{2}$, а $a_2 S = \frac{v_2^2}{2}$. Поэтому

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}{\frac{1}{2} m_2 v_2^2} = \frac{m_1 v_1^2}{m_2 v_2^2}.$$

Так как отношение сил равно отношению значений величины mv^2, то mv^2 и выражает «силу» движения, или количество движения.

Для картезианцев, таким образом, «силой» движения является величина mv, а для Лейбница и его сторонников — величина mv^2. В 1695 году в ходе спора Лейбниц предложил для величины mv^2 $\left(\text{точнее, для } \frac{mv^2}{2}\right)$ название «живая сила», и оно до сих пор не вышло из употребления. На языке современной механики $\frac{mv^2}{2}$ — это кинетическая энергия тела. Сила, приложенная к телу, изменяет кинетическую энергию, и это изменение равно работе силы, то есть равно FS. Величина же mv — это импульс тела. Он тоже изменяется под действием приложенной к телу силы, и его изменение равно импульсу силы, то есть равно Ft.

Кто же был прав в этом споре?

Как это ни странно, но в этом долгом споре нет ни победителя, ни побежденного. Обе стороны были и правы, и не правы. Правы потому, что обе величины — mv и mv^2 являются важными характеристиками движения. Значение величины mv определяет **время**, в течение которого первоначально покоившееся тело под действием данной силы изменяет свою скорость от нуля до v. Значение же mv^2 $\left(\text{точнее, значение } \frac{mv^2}{2}\right)$ определяет **расстояние**, которое тело должно пройти под действием данной силы, пока его скорость изменяется от нуля до v.

На это именно и указал в 1743 году французский ученый Даламбер. Так как каждая из предложенных участниками спора величин может считаться мерой «силы» движения, то спор, длившийся так долго, есть, по словам Даламбера «...бесплодный...спор о словах, недостойный философов». Спор, таким образом, пришел к естественному концу.

Но обе стороны были неправы потому, что ни величина $m|v|$, где $|v|$ — модуль скорости, ни величина $\frac{mv^2}{2}$ не обладают свойством сохранения при взаимодействиях. Свойством сохранения в действительности обладает величина $m\mathbf{v}$. Что касается $\frac{mv^2}{2}$, то во всех случаях, когда кинетическая энергия переходит в какой-либо другой вид энергии, например, в потенциальную энергию взаимодействия, в тепло, в энергию электрического тока и т. д., она вообще не сохраняется. Она, в сущности, не сохраняется и в том процессе, изучение которого и привело к идее о сохранении величины mv^2,— в процессе упругого удара шаров. Если, например, сталкиваются два шара одинаковой массы, движущиеся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями v, то значения mv^2 до и после столкновения одинаковы. Но в самый момент удара величина mv^2 (точнее, кинетическая энергия $mv^2/2$) равна нулю! Сохраняется не mv^2, а то, что мы называем теперь полной энергией.

Может показаться странным, что спор, начавшийся в 1686 году, мог продолжаться так долго. Ведь в том же 1686 году Ньютон представил свой знаменитый труд «Математические начала натуральной философии», в котором была изложена механика Ньютона. А из нее как будто бы ясно видно, что спорить, собственно, и не о чем было. Но дело в том, что механика Ньютона далеко не сразу получила всеобщее признание, особенно за пределами Англии. Поэтому спорящие стороны не пользовались ни понятием массы, ни понятием силы в «ньютоновском» смысле. Слово «сила» означало у спорящих именно «силу» движения, а не причину ускорения тел. К тому же Ньютон не знал, конечно, о существовании закона сохранения энергии (ведь само понятие работы и энергии появилось лишь спустя сто с лишним лет) и, вообще, не придавал значения законам сохранения. И еще долго слово «сила» применялось одновременно и в ньютоновском смысле (сила — причина ускорения), и в смысле Лейбница, хотя то, что у Лейбница называется «силой», в действительности есть энергия. Отголоском тех далеких времен в какой-то мере являются такие современные выражения, как электродвижущая сила (энергия, приходящаяся на единицу электрического заряда), лошадиная сила (до недавнего времени — единица мощности) и т. д.

Любопытно, что когда в 1847 году появилась статья известного немецкого ученого Германа Гельмгольца, в которой был сформулирован один из самых важных законов природы — закон сохранения энергии, то в заголовке этой статьи стояли слова: «О сохранении силы»!

ФИГУРЫ ЛИССАЖУ

Н. А. Силаева

В «Кванте» № 1 за 1972 год мы уже рассказывали об опытах с одним из самых простых физических приборов — маятником *). В этой статье мы расскажем еще о нескольких опытах, которые вы можете провести у себя дома.

Самые простые колебания тела — это колебания, при которых отклонение x тела от положения равновесия изменяется по закону

$$x = a \sin(\omega t + \varphi),$$

где a — амплитуда, ω — частота, φ — начальная фаза колебаний.

Такие колебания называются гармоническими. Гармонические колебания совершают математический маятник, грузик на пружине, напряжение в электрическом контуре.

В этой статье мы рассмотрим случай, когда тело участвует одновременно в двух гармонических колебаниях. Если оба колебания происходят вдоль одной прямой, то уравнение движения тела будет представлено суммой уравнений двух движений:

$$x = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Нетрудно построить график смещения тела от положения равновесия в зависимости от времени. Для этого нужно сложить ординаты кривых, соответствующих первому и второму движениям. На рисунке 1 показан пример сложения двух гармонических колебаний (черные синусоиды). Красная линия соответствует результирующему колебанию. Оно уже не является гармоническим.

Более сложные траектории получаются при сложении колебаний в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Примером такого колебания может служить движение тела, изображенного на рисунке 2. В этом случае вид траекторий зависит от соотношения частот, амплитуд и фаз взаимно перпендикулярных колебаний. Эти траектории называют фигурами Лиссажу, по имени французского физика Лиссажу, который в 1863 году впервые описал их. Установка, использованная Лиссажу,

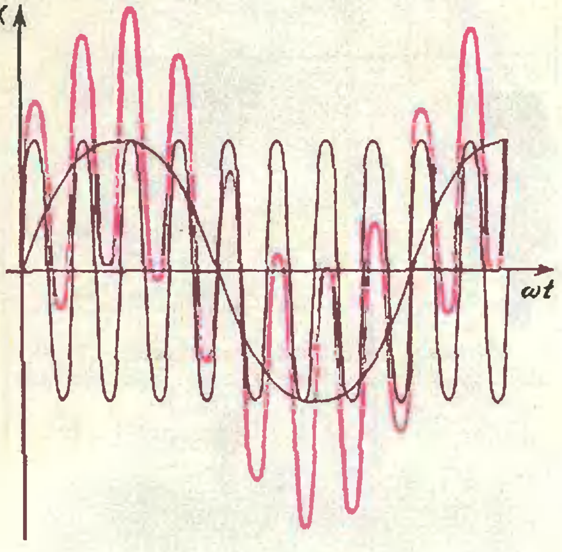


Рис. 1. Колебания, описываемые черными кривыми, имеют одинаковые начальные фазы и амплитуды, но различные частоты.

*) Г. Л. Коткин, Опыты с маятниками, «Квант» № 1, 1972 г.

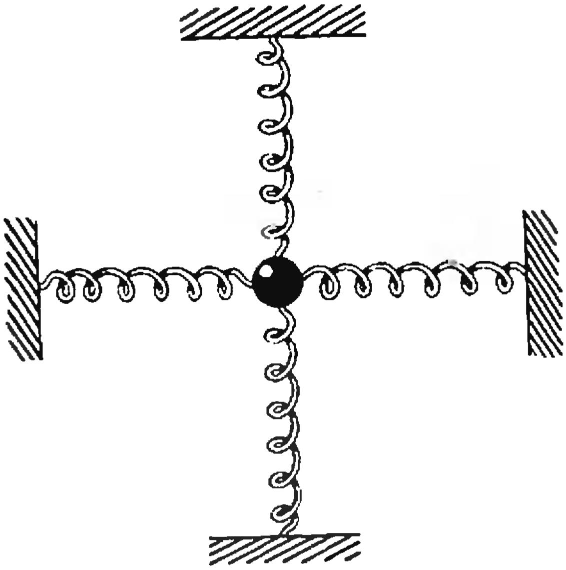


Рис. 2.

показана на рисунке 3. Камертон T' колеблется в горизонтальной плоскости, камертон T — в вертикальной. Луч света проходит через линзу и попадает на зеркальце, прикрепленное к камертону T', отражается им, попадает на зеркальце, прикрепленное к камертону T, и после вторичного отражения попадает на экран. При колебании только одного камертона светлое пятно на экране колеблется вдоль прямой линии. Если колеблются оба камертона, пятно может описывать замысловатые траектории.

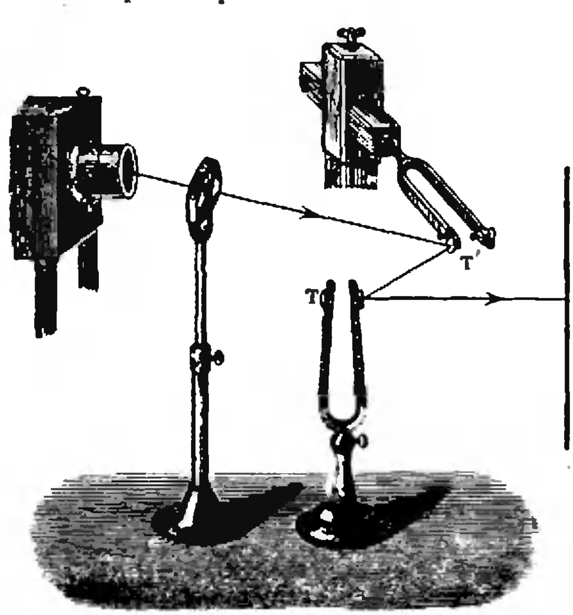


Рис. 3. Установка Лиссажу.

Траектория движения тела в том случае, когда оно одновременно участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, описывается системой уравнений

$$x = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1),\quad y = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \tag{1}$$

где x и y — проекции смещения тела на оси X и Y.

Допустим для простоты, что $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ и $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Тогда

$$x = A_1 \sin \omega t,\quad y = A_2 \sin \omega t. \tag{2}$$

Это означает, что $y = \frac{A_2}{A_1}x$; следовательно, соотношения (2) описывают отрезок прямой. Угол наклона α к оси X определяется уравнением

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A_2}{A_1}.$$

Пусть теперь $\varphi_1 = \varphi_1' + \frac{3\pi}{2}$. Тогда

$$x = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1'),\quad y = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \tag{3}$$

Разберем сначала самый простой случай, когда $A_1 = A_2$, $\varphi_1' = \varphi_2 = 0$ и $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, то есть

$$x = A \cos \omega t,\quad y = A \sin \omega t. \tag{4}$$

Точка с координатами x и y, определяемыми этими уравнениями, описывает окружность радиуса A. Действительно, $x^2 + y^2 = A^2 \cos^2 = \omega t + A^2 \sin^2 \omega t = A^2$. А это и означает, что траектория движения — окружность.

Пусть теперь $A_1 \neq A_2$. Построим траекторию движения для случая $A_1 = 1$, $A_2 = 2$. В момент максимального отклонения $x = A_1 = 1$, то есть $\cos \omega t = 1$, $\omega t = 0$ и, следовательно, $y = 2 \sin \omega t = 0$. Аналогично, при $x = 0$ $y = 2$, при $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $y = \sqrt{2}$ и так далее.

Построив по этим координатам график, мы получим эллипс, большая полуось которого равна A_2, а малая — A_1, то есть эллипс вытянут по оси Y (рис. 4, *а*) *). Нетрудно показать, что при $A_1 = 2$ и $A_2 = 1$ мы получим эллипс, вытянутый по оси X (рис. 4,*б*).

Таким образом, ясно, что, меняя соотношение амплитуд, можно получать различные эллипсы.

Пусть теперь $\omega_1 = 2\omega$, $\omega_2 = \omega$, $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = 0$. Тогда система уравнений (3) приобретает вид

$$x = A_1 \cos 2\omega t,$$
$$y = A_2 \sin \omega t.$$

Преобразуем уравнение для x следующим образом:

$$x = A_1 (\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t) =$$
$$= A_1 (1 - 2\sin^2 \omega t) = A_1 \left(1 - 2\frac{y^2}{A_2^2}\right).$$

Эта кривая — часть параболы с осью вдоль оси X и вершиной в точке $x = A_1$ (рис. 5). Таким образом, мы получили незамкнутую кривую.

Рассмотрим теперь влияние частот на форму траектории, а амплитуды поперечного и продольного колебаний, описываемых системой уравнений (3), возьмем одинаковыми.

Построим, например, кривые, соответствующие уравнениям

$$\begin{cases} x = A\cos\omega t, \\ y = A\sin 2\omega t, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = A\cos\omega t, \\ y = A\sin 4\omega t. \end{cases}$$

Сделать это проще всего так. Возьмем окружность радиуса A (рис. 6), отметим на ней точки, соответствующие углам ωt, равным 0, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{8}$, π, . . . , 2π.

---

*) То, что система уравнений

$$\begin{cases} x = A_1 \cos\omega t, \\ y = A_2 \sin\omega t \end{cases}$$

описывает эллипс, можно показать и аналитически:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = \cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1,$$

то есть точка с координатами x и y лежит на эллипсе. (См. статью И. Н. Бронштейна «Эллипс», опубликованную в «Кванте» № 9, 1970 г.)

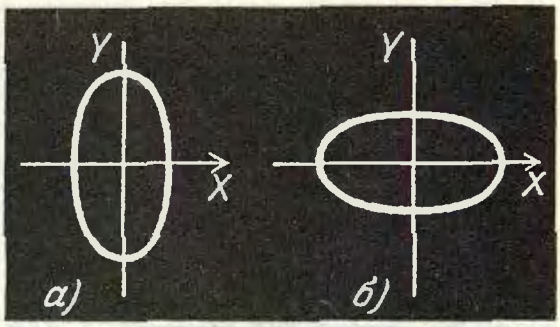


Рис. 4.

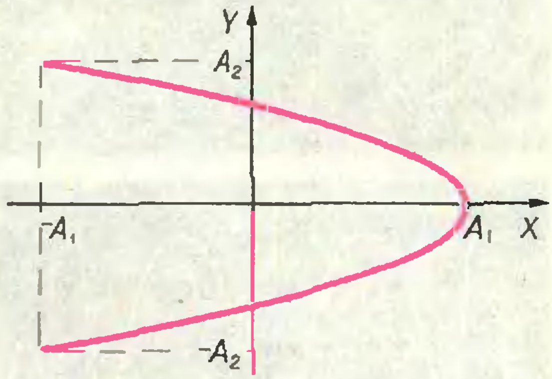


Рис. 5.

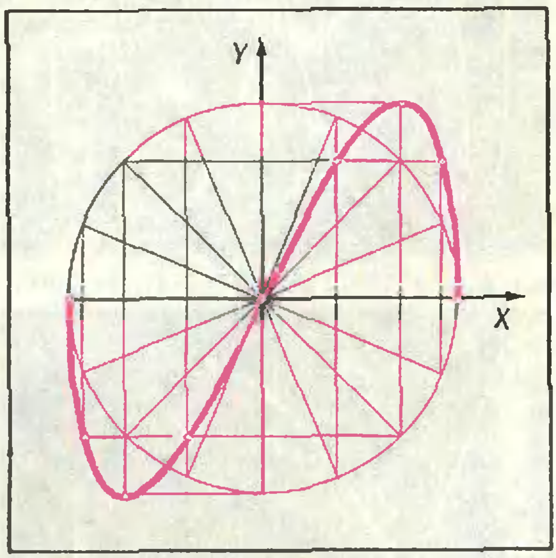
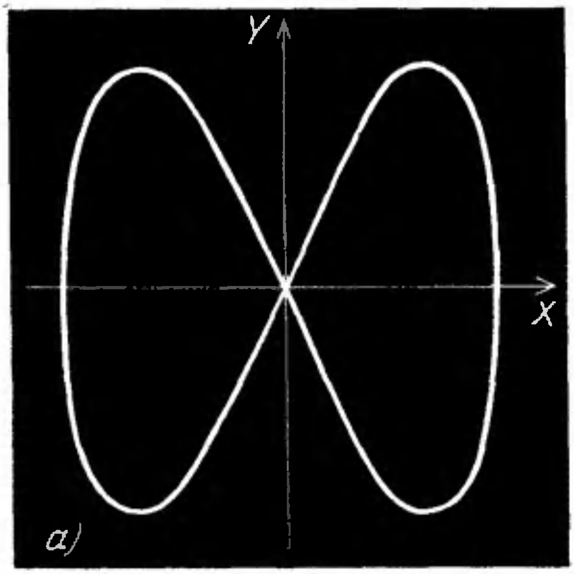


Рис. 6. Построение кривой, соответствующей системе $x = A\cos\omega t$, $y = A\sin 2\omega t$.

Чтобы найти точки с координатами $x = A\cos\omega t$ и $y = A\sin 2\omega t$, вспомним, что в случае окружности единичного радиуса ($r = 1$) $\cos\omega t$ численно равен проекции радиуса-вектора $r(\omega t)$ на ось X, а $\sin\omega t$ — проекции на ось Y. Так как мы



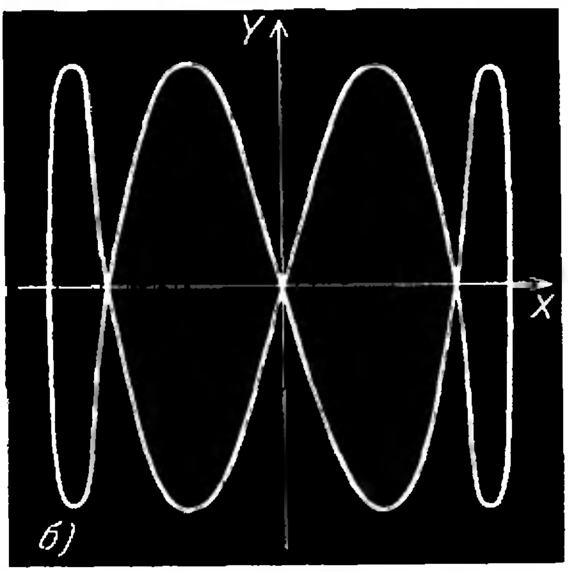


Рис. 7.

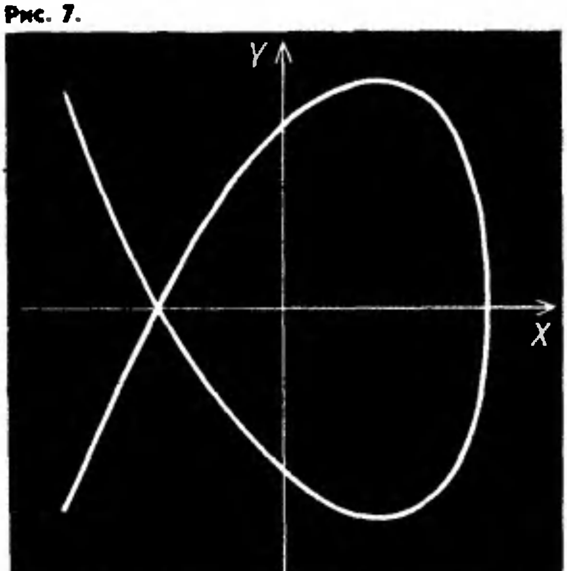


Рис. 8.

взяли окружность радиуса A, то координаты x и y каждой точки окружности — это проекции радиусов-векторов этих точек на оси X и Y.

Для обоих случаев получаются замкнутые кривые, число петель которых соответствует отношению $n = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ (рис. 7, *а*, *б*).

Фигура, приведенная на рисунке 8, незамкнута. Она соответствует системе уравнений

$$x = \cos 2\,\omega t,$$
$$y = \sin 3\,\omega t.$$

В каком же случае получаются незамкнутые фигуры? Можно ли найти общие закономерности? Рассмотрим уравнения в виде

$$x = A_1 \cos p\omega t,$$
$$y = A_2 \sin q\omega t.$$

Прежде всего заметим, что в той точке, где кривая поворачивает обратно по той же траектории, скорости тела вдоль осей X и Y одновременно обращаются в нуль. Ведь именно в этом случае тело, двигаясь вдоль кривой, останавливается, а затем начинает двигаться обратно. Если $x = A_1 \cos p\omega t$, то

$$v_x = \frac{A_1 \cos p\omega t_2 - A_1 \cos p\omega t_1}{t_2 - t_1} =$$

$$= \frac{-2A_1 \sin\frac{p\omega t_2 + p\omega t_1}{2} \sin\frac{p\omega t_2 - p\omega t_1}{2}}{t_2 - t_1}.$$

Когда $t_2 \approx t_1 = t$ (разность $t_2 - t_1$ мала), $\sin\frac{p\omega t_2 - p\omega t_1}{2} \approx \frac{p\omega t_2 - p\omega t_1}{2}$.

В результате

$$v_x = -A_1 p\omega \sin p\omega t.$$

Аналогично для v_y получаем

$$v_y = A_2 q\omega \cos q\omega t.$$

Посмотрим, когда скорости v_x и v_y обращаются в нуль.

$$v_x = 0, \text{ если } p\omega t = k\pi,$$

$$v_y = 0, \text{ если } q\omega t = \frac{\pi}{2} + m\pi.$$

Из этих условий ясно, что фигура Лиссажу получается незамкнутой в

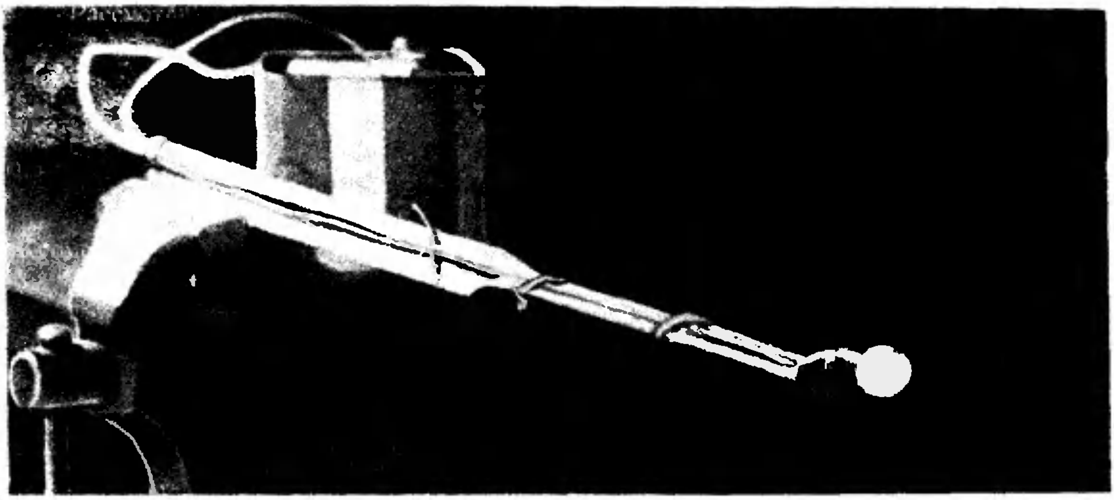


Рис. 9.

тех случаях, когда

$$\frac{p}{q} = \frac{2k}{2m+1}.$$

В частности, кривая на рисунке 8 удовлетворяет этому условию.

Фигуры Лиссажу можно наблюдать на экране осциллографа. На вертикальную развертку подается одно гармоническое колебание, на горизонтальную — другое. Их сумма может принимать разнообразные формы. Для этого достаточно менять частоту переменного напряжения на обкладках осциллографа.

Каждый из вас может сам сделать очень простое устройство для наблюдения и фотографирования фигур Лиссажу. Возьмите обыкновенную металлическую линейку и изогните ее так, чтобы плоскость одной половины линейки была перпендикулярна плоскости второй ее половины (см. рис. 9).

Один из концов линейки зажмите в тиски. Если теперь качнуть свободный конец линейки, он будет описывать в воздухе замысловатые фигуры. Это и будут фигуры Лиссажу.

Движение свободного конца линейки складывается из независимых колебаний двух частей линейки. Одна — от тисков до перегиба и вторая — от перегиба до конца. Колебания каждой части перпендикулярны плоскости линейки на этом отрезке. Поскольку угол перегиба линейки равен $\frac{\pi}{2}$, колебания взаимно перпендикулярны. Вид траектории конца линейки зависит от длины и ширины линейки и от того, в каком месте ее перегнуть.

Для получения разных фигур можно использовать одну и ту же линейку. Чтобы изменять соотношение частот вертикального и горизонтального колебаний, достаточно зажимать линейку в тиски в разных местах.

Так как частота колебаний зависит от длины линейки, то, меняя соотношения между длинами частей линейки, вы будете менять соотношения между частотами взаимно перпендикулярных колебаний конца линейки. При этом вы будете получать различные траектории конца линейки.

Чтобы сфотографировать получающиеся фигуры, к свободному концу надо прикрепить маленькую лампочку от карманного фонарика. Лампочка проводами, протянутыми вдоль линейки, соединяется с батарейкой (рис. 9). Поместив наш сложный маятник в темной комнате, можно сфотографировать колебания линейки. Время экспозиции должно быть достаточно велико. Его вы можете определить, проведя несколько опытов с разной экспозицией. На

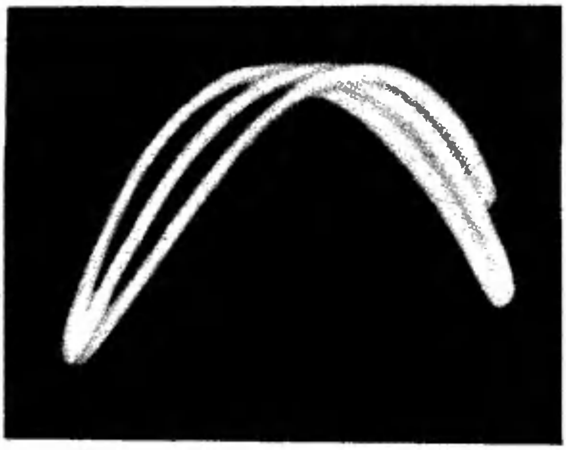


Рис. 10. а.

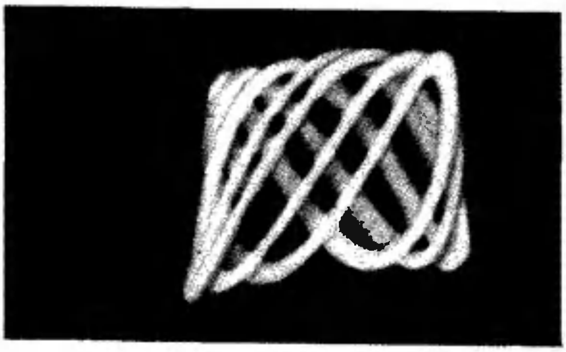


Рис. 10. б.

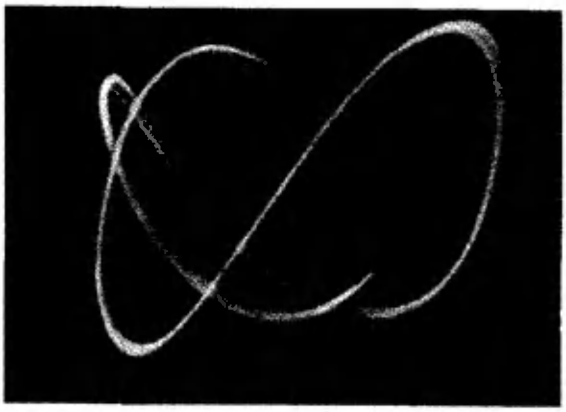


Рис. 10. в.

рисунке 10 приведены фотографии, полученные именно таким способом.

Попробуйте провести подобные опыты самостоятельно.

Упражнения

1. Докажите, что все кривые, описываемые системой уравнений

$$x = A_1 \cos p\omega t, \quad y = A_2 \cos q\omega t,$$

незамкнуты.

2. Получите уравнение кривой

$$x = A_1 \cos \omega t,$$
$$y = A_2 \cos 2\omega t.$$

НЕСКОЛЬКО ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1. Правда и ложь

Некто всегда говорит правду, а некто другой всегда лжет. Какой вопрос надо им задать, чтобы они дали на него одинаковый ответ?

2. Только правда

Некто всегда говорит правду, но когда ему дважды задали один и тот же вопрос, он дал на него разные ответы. Какой это вопрос?

3. Переправа через реку

К реке подошли три туриста. На берегу стояла одна двухместная лодка, и не было никаких других средств переправы. Пользуясь этой лодкой, каждый из туристов переправился на противоположный берег, причем было сделано четное число рейсов. Сколько именно? (Найти наименьшее четное число рейсов.)

4. Лотерейный билет

Я купил лотерейный билет, у которого сумма цифр его пятизначного номера равна возрасту моего соседа. Каков номер этого билета?.

Примечание. Мой сосед без труда решил эту задачу.

Б. Ю. Коган

(Ответы смотрите на стр. 50.)

Э. Г. Готман

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ И ЕЕ СЛЕДСТВИЯ

В этой статье рассказывается о том, как с помощью теоремы косинусов решать разнообразные геометрические задачи. Сама теорема косинусов не доказывается.

Для вычисления элементов треугольника по двум сторонам и углу между ними или по трем сторонам применяется соотношение

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ bc\cos A, \quad (\cdot)$$

называемое «теоремой косинусов».

Теорему косинусов можно использовать и при решении более трудных задач.

Пример 1. *Найти площадь параллелограмма, если известны его стороны a и b и острый угол α между диагоналями.*

Решение. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, причем $AB = a$ и $BC = b$ (рис. 1). Будем считать, что $a > b$ *). Тогда угол BOC между диагоналями — острый, и согласно условию задачи $\measuredangle BOC = \alpha$.

Если обозначить длину диагонали AC через $2x$, а длину диагонали BD через $2y$, то площадь параллелограмма S равна $2xy\sin\alpha$. Из треугольников AOB и BOC, используя теорему косинусов, найдем стороны a и b:

$$a^2 = x^2 + y^2 + 2\ xy\cos\alpha,$$
$$b^2 = x^2 + y^2 - 2\ xy\cos\alpha.$$

Поэтому

$$a^2 - b^2 = 4xy\cos\alpha,$$

откуда

$$xy = \frac{a^2 - b^2}{4\cos\alpha}.$$

Следовательно,

$$S = \frac{(a^2 - b^2)\sin\alpha}{2\cos\alpha}$$

или

$$S = \frac{a^2 - b^2}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

Примечание. Если A — угол параллелограмма, то $S = ab\sin A$, откуда следует, что $0 < S \leqslant ab$. Поэтому

$$\frac{a^2 - b^2}{2}\operatorname{tg}\alpha \leqslant ab \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\alpha \leqslant \frac{2ab}{a^2 - b^2}.$$

Таким образом, чтобы задача имела решение, необходимо параметры a, b и α выбрать так, чтобы выполнялись неравенства

$$a > b > 0, \quad \alpha \leqslant \operatorname{arctg}\frac{2ab}{a^2 - b^2}.$$

*) Если $a = b$, то параллелограмм является ромбом, а угол между диагоналями — прямой.

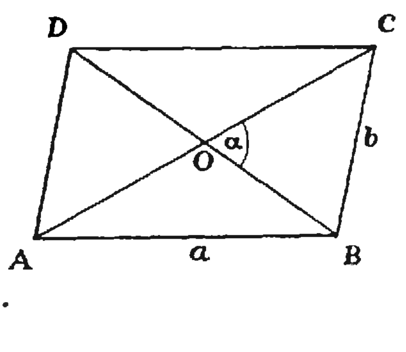


Рис. 1.

С помощью известных формул геометрии и тригонометрии из теоремы косинусов можно вывести некоторые соотношения, связывающие элементы любого треугольника.

Пример 2. *Доказать, что стороны, углы и площадь S треугольника ABC удовлетворяет соотношению*

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}.$$

Решение. Из формулы $S = \frac{1}{2} bc \sin A$ находим, что $bc = \frac{2S}{\sin A}$. Подставив в формулу $a^2 = b^2 + c^2 - 2\ bc \cos\ A$ вместо $2bc$ выражение $\frac{4S}{\sin A}$, получим соотношение

$$a^2 = b^2 + c^2 - 4\ S \operatorname{ctg} A. \qquad (1)$$

Следовательно,

$$\operatorname{ctg} A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}.$$

Если в соответствии с этой формулой выразить через стороны треугольника $\operatorname{ctg} B$ и $\operatorname{ctg} C$ и полученные выражения сложить, то мы получим тождество

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}.$$

Пример 3. *Доказать, что для любого треугольника справедливы неравенства*

а) $\sin \frac{A}{2} \leqslant \frac{a}{2\sqrt{bc}}$,

б) $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \leqslant \frac{a}{2h_a}$,

где a, b, c — стороны треугольника ABC и h_a — высота, проведенная из вершины A.

Решение. а) Формулу (•) можно записать так:

$$a^2 = (b - c)^2 + 2bc\,(1 - \cos A).$$

Если $1 - \cos A$ заменить теперь $2 \sin^2 \frac{A}{2}$, то мы придем к такой формуле

$$a^2 = (b - c)^2 + 4bc \sin^2 \frac{A}{2}. \qquad (2)$$

Поэтому

$$a^2 \geqslant 4bc \sin^2 \frac{A}{2},$$

или

$$\sin \frac{A}{2} \leqslant \frac{a}{2\sqrt{bc}},$$

причем равенство достигается только при $b = c$.

б) Формулу (2) легко привести к такому виду:

$$a^2 = (b - c)^2 + 4S \operatorname{tg} \frac{A}{2}. \qquad (3)$$

Для этого достаточно выполнить следующие преобразования:

$$bc \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{2S}{\sin A} \sin^2 \frac{A}{2} =$$

$$= \frac{2S \sin^2 \frac{A}{2}}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} = S \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

Из формулы (3) вытекает неравенство $a^2 \geqslant 4S \operatorname{tg} \frac{A}{2}$, откуда $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \leqslant \frac{a^2}{4S}$.

Учитывая, что $S = \frac{1}{2} a h_a$, получим неравенство $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \leqslant \frac{a}{2h_a}$.

Из приведенных примеров видно, что формулу

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\ A$$

с помощью несложных преобразований можно привести к одному из видов 1—3. Аналогично выводятся следующие соотношения:

$$a^2 = (b + c)^2 - 4bc \cos^2 \frac{A}{2}, \qquad (4)$$

$$a^2 = (b + c)^2 - 4S \operatorname{ctg} \frac{A}{2}. \qquad (5)$$

Рассмотрим теперь несколько задач, решающихся с помощью формул (1) — (5).

Пример 4. *Вычислить площадь треугольника, если даны его стороны.*

Решение. Перепишем соотношения (3) и (5) следующим образом:

$$4S\operatorname{tg}\frac{A}{2}=a^2-(b-c)^2,$$

$$4S\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=(b+c)^2-a^2.$$

Если периметр треугольника обозначить через $2p$, то

$$a^2-(b-c)^2=(a+b-c)\times$$
$$\times(a+c-b)=4(p-b)\times(p-c),$$
$$(b+c)^2-a^2=(a+b+c)\times$$
$$\times(b+c-a)=4p(p-a).$$

Следовательно,

$$S\operatorname{tg}\frac{A}{2}=(p-b)(p-c),$$

$$S\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=p(p-a).$$

Перемножив эти равенства почленно, получим известную формулу Герона для вычисления площади треугольника

$$S^2=p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Пример 5. *Дан равносторонний треугольник ABC со стороной a. Через точку M, лежащую на стороне AB, параллельно сторонам AC и BC треугольника проведены прямые, пересекающие эти стороны соответственно в точках K и L. Вычислить площадь треугольника KLM, если $KL=d$* (рис. 2).

Решение. Обозначим отрезки KM и LM соответственно через x и y. Треугольники AKM и BLM равносторонние, следовательно,

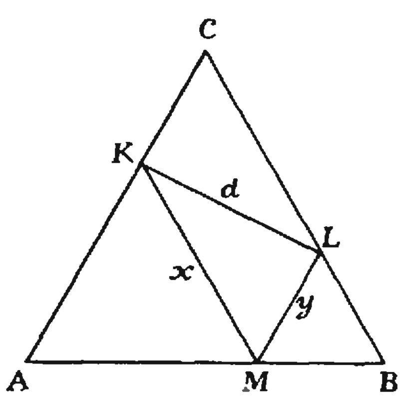


Рис. 2.

$AM=x$, $BM=y$, $x+y=a$ и $\angle KML=60°$. Для вычисления площади S треугольника KLM воспользуемся формулой (5):

$$d^2=(x+y)^2-4S\operatorname{ctg}30°.$$

Получим

$$d^2=a^2-4S\sqrt{3},$$

откуда

$$S=\frac{(a^2-d^2)\sqrt{3}}{12}.$$

Примечание. Из полученной формулы видно, что $d<a$. Можно показать, что одного этого условия, налагаемого на параметры a и d, еще недостаточно, чтобы задача имела решение. В самом деле, применим теорему косинусов к треугольнику KLM:

$$d^2=x^2+(a-x)^2-2x(a-x)\times$$
$$\times\cos 60°$$

или

$$d^2=3\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4},$$

где $0<x<a$.

Отсюда следует, что при $x=\frac{a}{2}$ отрезок KL имеет наименьшее значение $d_{\min}=\frac{a}{2}$ и также, что $d<a$.

Таким образом, множество допустимых значений параметра d определяется неравенством $\frac{a}{2}\leqslant d<a$.

Пример 6. *Данный треугольник разделить на две равновеликие части отрезком наименьшей длины.*

Решение. Пусть отрезок MN делит площадь треугольника ABC пополам (рис. 3). Если точки M и N лежат на сторонах угла BAC и S — площадь треугольника ABC, то площадь треугольника AMN равна $\frac{1}{2}S$, и по формуле (3)

$$MN^2=(AM-AN)^2+2S\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

Отсюда сразу находим, что при $AM=AN$ отрезок MN имеет наименьшую длину, равную $\sqrt{2S\operatorname{tg}\frac{A}{2}}$.

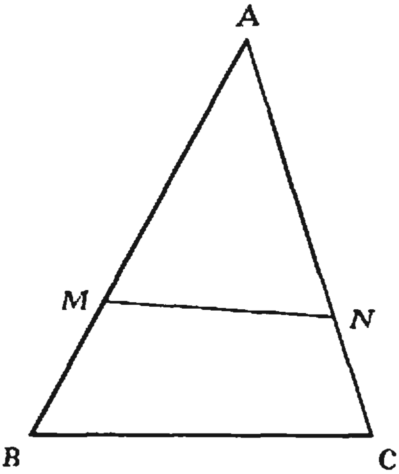


Рис. 3.

Длину отрезка AM легко вычислить, поскольку

$$S = AM^2 \sin A = \frac{1}{2} bc \sin A,$$

откуда

$$AM = \sqrt{\frac{bc}{2}}.$$

Ясно, что если концы отрезка MN лежат на сторонах угла B треугольника, то наименьшая длина этого отрезка равна $\sqrt{2S \operatorname{tg} \frac{B}{2}}$.

Пусть $a < b < c$, тогда

$$\sqrt{2S \operatorname{tg} \frac{A}{2}} < \sqrt{2S \operatorname{tg} \frac{B}{2}} < \sqrt{2S \operatorname{tg} \frac{C}{2}}.$$

Поэтому длина минимального отрезка MN равна $\sqrt{2S \operatorname{tg} \frac{A}{2}}$. При этом $AM = AN = \sqrt{\frac{bc}{2}}$.

Построение отрезка MN всегда возможно; так как $c < a + b < 2b$, то $\sqrt{\frac{bc}{2}} < b$ и подавно $\sqrt{\frac{bc}{2}} < c$.

В заключение приведем несколько задач, которые предлагаем читателю решить самостоятельно.

1. На сторонах треугольника с углом $60°$ вне его построены равносторонние треугольники. Докажите, что сумма площадей данного треугольника и треугольника, построенного на стороне, противолежащей углу в $60°$, равна сумме площадей двух других треугольников.

2. На сторонах треугольника ABC, угол C которого равен $135°$, вне его построены квадраты $ABMN$, $BCKL$ и $CAPQ$. Докажите, что площадь шестиугольника $KLMNPQ$ равна удвоенной площади квадрата $ABMN$.

3. Вычислите площадь параллелограмма $ABCD$, если $AB=5$, $BC=2$ и угол между его диагоналями составляет $45°$.

4. Выразите тригонометрические функции половинных углов треугольника через его стороны.

5. Докажите, что стороны треугольника ABC удовлетворяют равенству $a^2+b^2=2c^2$ тогда и только тогда, когда углы треугольника связаны соотношением

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = 2 \operatorname{ctg} C.$$

6. Стороны треугольника ABC связаны зависимостью $a^2 + b^2 = nc^2$, где $n > 1$. Докажите, что $\cos C \geqslant \frac{n-1}{n}$.

7. Докажите, что углы любого треугольника удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \leqslant \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C.$$

8. В окружность вписан равносторонний треугольник со стороной a. Докажите, что

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2,$$

где x, y, z — расстояния от произвольной точки окружности до вершин треугольника.

9. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон AB и AC в точках M и N. Определите угол A треугольника, если $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{6}$ и $\frac{AN}{NC} = \frac{1}{7}$.

10. Найдите площадь треугольника ABC, зная угол A и отрезки m и n, на которые точка касания вписанной окружности делит сторону BC.

11. Даны прямая l и две точки A и B, не лежащие на ней. Найдите на прямой l точку M, для которой отношение $\frac{AM}{BM}$ принимает а) наибольшее значение; б) наименьшее значение.

12. Докажите, что углы любого треугольника удовлетворяют неравенству

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}.$$

13. Около окружности радиуса r описана трапеция с основаниями a и b ($a > b$). Вычислить угол между ее боковыми сторонами.

14*). Докажите, что для всякого треугольника ABC справедливо такое соотношение:

$$16S^2 = (a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) + (b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + b^2 - c^2) + (b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2).$$

*) Эту задачу прислал наш читатель В. П. Гаспарян.

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

ЗАДАЧИ

В этом номере мы помещаем задачи, предлагавшиеся на заключительных турах Всесоюзной математической и физической олимпиад в апреле этого года.

Решения задач этого номера можно присылать не позднее 15 сентября по адресу: 117071, Москва В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», редакция журнала «Квант».

После адреса на конверте укажите, решения каких задач вы посылаете (например: «Задачник «Кванта», М151, Ф153.)

Решения задач по математике и физике, а также новые задачи по каждому предмету посылайте в отдельных конвертах. В начале писем укажите свою фамилию, имя, отчество, домашний адрес (а также класс и школу, в которой вы учитесь).

М151. Каждая из девяти прямых разбивает квадрат на два четырехугольника, площади которых относятся как 2 : 3. Доказать, что по крайней мере три из этих девяти прямых проходят через одну точку. (8, 10 кл.).

Б. М. Ивлев

М152. Пусть a, b, m, n — натуральные числа, причем a взаимно просто с b и $a>1$. Доказать, что если a^m+b^m делится на a^n+b^n, то m делится на n (9*), 10 кл.).

Д. Ю. Григорьев.

М153. Двое играют в следующую игру. Один называет цифру, а другой вставляет ее по своему усмотрению вместо одной из звездочек в следующей разности:

$$\begin{array}{r} * * * * \\ - * * * * \\ \hline \end{array}$$

Затем первый называет еще одну цифру и так далее 8 раз, пока все звездочки не заменятся на цифры. Тот кто называет цифры, стремится к тому, чтобы разность получилась как можно больше, а второй — чтобы она стала как можно меньше. Доказать, что

а) второй может расставлять цифры так, чтобы получившаяся при этом разность стала не больше 4000, независимо от того, какие цифры называл первый;

б) первый может называть цифры так, чтобы разность стала не меньше 4000, независимо от того, куда расставляет цифры второй (8 кл.).

Ю. И. Ионин.

М154. На прямой дано 50 отрезков. Доказать, что верно хотя бы одно из следующих утверждений:

а) некоторые восемь отрезков имеют общую точку;

б) найдется восемь отрезков, никакие два из которых не имеют общей точки (8, 9 кл.).

А. Г. Харазишвили.

М155. Дано несколько квадратов, сумма площадей которых равна 1.

*) В 9 классе эта задача предлагалась для частного случая $b=1$

Доказать, что их можно поместить без наложений в квадрат площади 2 (9, 10 кл.).

Г. А. Гальперин.

Ф163. Согласно одной из первых моделей атома водорода (модель Томсона), он представляет собой равномерно заряженный положительным электричеством шар, в центре которого находится электрон. В целом атом нейтрален. Найти радиус такого атома, если известно, что минимальная энергия, которую нужно сообщить электрону для удаления его из атома на большое расстояние, равна W. Заряд электрона e. (10 кл.)

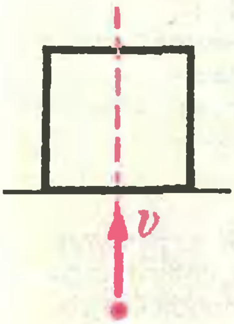


Рис. 1.

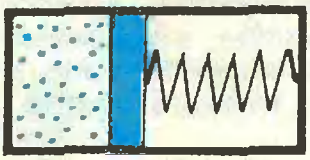


Рис. 2.

Ф164. Кубик из пенопласта массой $M=100$ *г* лежит на горизонтальной подставке. Высота кубика равна $a=10$ *см*. Снизу кубик пробивает вертикально летящая пуля, массой $m=10$ *г* (см. рис. 1). Скорость пули при входе в кубик $v_1=100$ *м/с*, при вылете $v_2=95$ *м/с*. Подпрыгнет ли кубик? (8, 9 кл.)

А. Р. Зильберман

Ф165. Определить, во сколько раз изменится освещенность изображения Солнца, полученного плосковыпуклой линзой, если линзу разрезать по диаметру и сложить плоскими сторонами. (10 кл.)

В. Н. Листвин

Ф166. В расположенном горизонтально цилиндре с одной стороны от закрепленного поршня находится 1 *моль* идеального газа. В другой части цилиндра вакуум. Пружина, расположенная между поршнем и стенкой цилиндра, находится в недеформированном состоянии (рис. 2). Цилиндр теплоизолирован от окружающей среды. Поршень освобождают и после установления равновесия объем, занимаемый газом, увеличивается вдвое. Как изменится температура газа и его давление? Теплоемкости цилиндра, поршня и пружины пренебрежимо малы. (9 кл.)

Е. И. Бутиков, А. А. Быков, А. С. Кондратьев

Ф167. К выходу «черного ящика» подключен идеальный амперметр. Если ко входу подключена батарея с э.д.с. E и внутренним сопротивлением r, то ток через амперметр ровно в 2 раза меньше, чем в том случае, когда ко входу ящика подключены две такие батареи, соединенные последовательно. Нарисовать простейшую возможную схему внутреннего устройства «черного ящика». (8, 9 кл.)

А. Р. Зильберман

РЕШЕНИЯ

В этом номере мы публикуем решения задач М108—М109.

М108

а) Докажите, что прямая, разбивающая данный треугольник на два многоугольника равной площади и равного периметра, проходит через центр окружности, вписанной в треугольник.

б) Докажите аналогичное утверждение для произвольного многоугольника, в который можно вписать окружность.

Решим сразу задачу. б). Пусть некоторая прямая пересекает контур многоугольника, описанного около окружности с центром O, в точках P и Q, которые делят периметр многоугольника пополам. Тогда отрезки OP и OQ разбивают этот миогоугольник на два равновеликих многоугольника (чтобы убедиться в этом, достаточно соединить точку O со всеми вершинами миогоугольника и заметить, что высоты у всех получившихся треугольников с вершиной O равны радиусу окружности). Но если и прямая PQ делит площадь многоугольника на две равные части, то точка O должна лежать на отрезке PQ (иначе образуется «лишний» треугольник OPQ (см. рис. 1)).

То же рассуждение позволяет доказать чуть более общий факт (для треугольника он приведен в книге «Задачи и теоремы по геометрии» З. А. Скопеца и В. А. Жарова, Учпедгиз, 1962, задача 565): *прямая, пересекающая описанный многоугольник, делит его площадь и периметр в одинаковых отношениях тогда и только тогда, когда она проходит через центр окружности.*

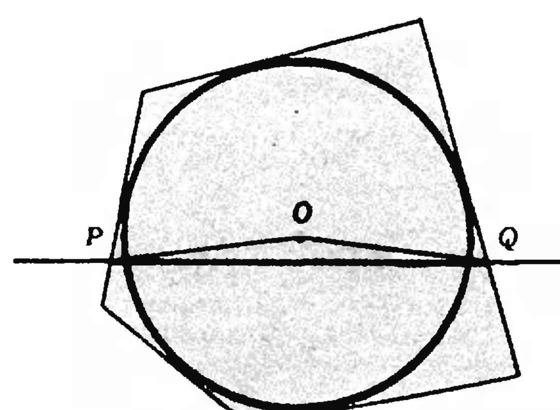


Рис. 1.

Любителям геометрических неравенств предоставляется исследовать вопрос: сколько существует прямых, делящих пополам площадь и периметр треугольника со сторонами a, b и c? Ответ и указание даны на стр. 60. Максимальное количество таких прямых — три, и они, по доказанному, всегда пересекаются в одной точке.

Что же касается n-угольника при $n > 3$, то здесь таких прямых может быть даже бесконечно много, причем если многоугольник не описанный, то они могут и не проходить через одну точку (например, в равнобочной трапеции с основаниями a и b можно подобрать длину боковой стороны так, что будет существовать прямая, параллельная основаниям, которая делит пополам и площадь, и периметр; кроме нее этим свойством обладают и все прямые, проходящие через середину средней линии и пересекающие основания трапеции).

Можно доказать, основываясь на соображениях «непрерывности», что по крайней мере одна прямая, делящая пополам и площадь, и периметр, существует для **л ю б о г о** выпуклого многоугольника (и вообще для любой ограниченной выпуклой фигуры). Прежде всего, ясно, что если двигать прямую, перпендикулярную фиксированному направлению Ox, то наступит такой момент (единственный), когда она разделит пополам площадь, и такой момент, когда она разделит пополам периметр. Пусть x_S и x_P — координаты соответствующих точек на оси Ox. Теперь зафиксируем точку O и повернем ось Ox вокруг нее на угол φ $(0 < \varphi \leqslant \pi)$ (рис. 2). Для каждого угла φ, то есть для каждого положения оси Ox, мы сможем аналогично определить числа $x_S(\varphi)$ и $x_P(\varphi)$. Ясно, что каждая из функций x_S и x_P зависит от φ «непрерывно», причем при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ каждая из них принимает значения, равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку (ведь ось Ox смотрит при этом в противоположные стороны). Следовательно, при каком-то промежуточном значении $\varphi = \varphi_0$ значения x_S и x_P должны равняться друг другу (рис. 3). Это и есть основное свойство «непрерывности», которым мы пользуемся.

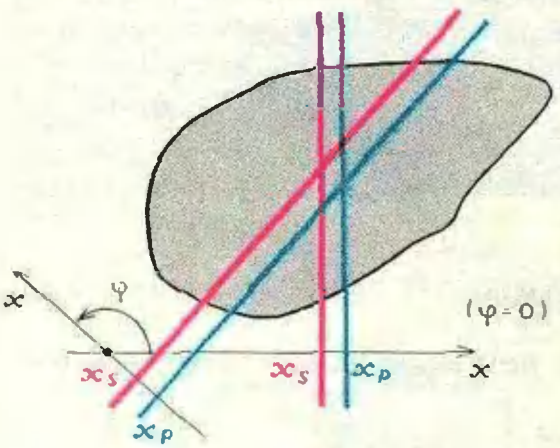


Рис. 2. Красные прямые делят пополам площадь, синие — периметр.

Как оформлять подобные доказательства строго, подробно рассказывается в книге Н. Стинрода и У. Чинна «Первые понятия топологии», одной из лучших книг популярной серии «Современная математика» («Мир», 1967).

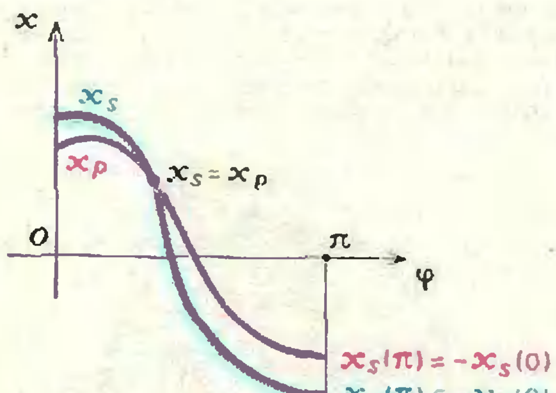


Рис. 3. Две непрерывные кривые — красная и синяя — должны пересекаться.

М109

а) В вершине A_1 правильного 12-угольника $A_1A_2A_3 \ldots A_{12}$ стоит знак минус, а в остальных — плюсы. Разрешается одновременно менять знак на противоположный в любых шести последовательных вершинах многоугольника. Докажите, что за несколько таких операций нельзя добиться того, чтобы в вершине A_2 оказался знак минус, а в остальных вершинах — плюсы.

б) Докажите то же утверждение, если разрешается одновременно менять знаки не в шести, а в четырех последовательных вершинах многоугольника.

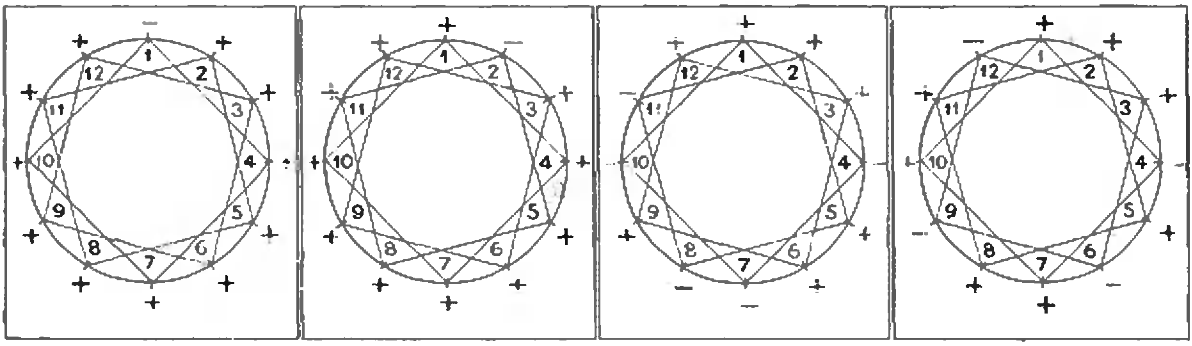
в) Докажите то же утверждение, если разрешается одновременно менять знаки в трех последовательных вершинах многоугольника.

Начнем с задачи в). Разобьем все 12 вершин на три группы по четыре вершины в каждой: первая группа — вершины с номерами 1, 4, 7, 10, вторая — 2, 5, 8, 11, третья — 3, 6, 9, 12 (рис. 4, вершины каждой группы составляют квадрат). Ясно, что какие бы три последовательные вершины 12-угольника мы ни выбрали, в каждую из трех наших групп попадет ровно одна из выбранных вершин. Таким образом, смена знака у трех последовательных вершин вызовет изменение количества минусов (и плюсов) в каждой группе ровно на единицу.

Теперь докажем, что от расположения A знаков на рисунке 4 нельзя перейти к расположению $Б$. У расположения A и во второй, и в третьей группе количество минусов равно нулю. После первой смены знаков, где бы она не произошла, во второй и в третьей группе будет по одному минусу; потом, после второй смены знаков в каждой из этих двух групп станет 0 или 2 минуса, затем — 1 или 3 минуса, потом — 0,2 или 4 минуса, затем снова 1 или 3 минуса в каждой и т. д. Таким образом, в этих двух группах будет одновременно либо четное число минусов, либо нечетное. Но у расположения $Б$ во второй группе 1 минус, в третьей — 0. Поэтому мы его заведомо не сможем получить из A.

Аналогично можно решить задачи а) и б). Подумайте, какие группы вершин удобно рассмотреть в этих случаях. Мы не будем отдельно записывать решения этих задач, а сразу попытаемся выяснить более общий вопрос.

Пусть в вершинах правильного n-угольника расставлены плюсы и минусы, и разрешается изменять знак одновременно в любых k вершинах, стоящих подряд (n и k — данные натуральные числа, $k<n$); какие расположения знаков можно получить из данного, а какие — нет?



А **Б** **В** **Г**

Рис. 4.

Рассмотрим сначала частный случай, непосредственно обобщающий задачи а)—в) n — делится на k.

Пусть $n=kn_1$. Разобьем все n вершин на k групп так, что в каждую группу включаются n_1 вершин правильного n_1-угольника. Каждому расположению плюсов и минусов поставим в соответствие набор $y = (y_1, y_2, \ldots, y\ )$, где

$$y_i = \begin{cases} 0, & \text{если в } i\text{-й группе четное число минусов,} \\ 1, & \text{если в } i\text{-й группе нечетное число минусов.} \end{cases}$$

Ясно, что смена знаков в любых k последовательных вершинах вызывает изменение количества минусов в каждой группе на единицу, то есть из расположения, которому соответствовал набор y, получается расположение, которому соответствовал *противоположный* набор $\bar{y}$, получающихся из y заменой всех нулей на единицы и единиц — на нули: Назовем два расположения x, x' плюсов и минусов *эквивалентными* ($x \sim x'$), если их наборы y, y' либо равны, либо противоположны *). (Например, на рисунке 4, где $n=12$, $k=3$ расположение B эквивалентно A, а $Г \sim Б$.

Докажем, что одно из расположений можно перевести в другое тогда и только тогда, когда они эквивалентны. В одну сторону это уже, по существу, доказано: из расположения X с набором y при сменах знаков будут последовательно получаться расположения с наборами $\bar{y}$, y, $\bar{y}$, y и т. д., то есть, если из X можно получить X', то $X \sim X'$. Докажем обратное: если $X \sim X'$, то из начального расположения знаков X можно получить расположение X'. Ясно, что можно получить в вершинах с номерами 1, 2,..., $(n-k+1)$ те знаки, которые нам хочется, последовательно меняя (если нужно) знаки у вершин с 1-й по k-ю, затем со 2-й по $(k+1)$-ю,... с $(n-k+1)$-й по n-ю. Таким образом, мы можем получить расположение X'', которое, во-первых, совпадает с X' во всех вершинах, кроме, быть может, $(k-1)$ вершин с $(n-k+2)$-й по n-ю, и во-вторых, эквивалентно X' ($X'' \sim X'$ потому, что оба они эквивалентны X). Но тогда расположения X'' и X' должны совпадать полностью. Действительно, поскольку $y_1'' = y_1'$ (знаки у всех вершин 1-й группы расположений X'' и X' совпадают) и $X'' \sim X'$, то $y_i'' = y_i'$ для всех $i=2, 3, \ldots, k$, следовательно, в вершинах с номерами от $(n-k+2)$ до n у X'' должны стоять те же знаки, что у X'.

Наше утверждение доказано (для $n=kn_1$). Из доказательства видно, что все множество возможных расположений знаков разбивается на 2^{k-1} классов по 2^{n-k+1} элементов в каждом.

---

*) Легко проверить, что это действительно отношение эквивалентности на множестве всех наборов. (Об этом понятии см. статью М. М. Глухова «Отношение эквивалентности и разбиения множеств» в «Кванте» № 2, 1972).

Если вы разобрались в этом доказательстве, то построить переход от A к B и от $Б$ к $Г$ на рисунке не составит для вас никакого труда.

Прежде чем исследовать общий случай, полезно прочитать статью В. Н. Вагутена *), особенно лемму на стр. 33 и рассмотреть некоторые примеры, скажем $n=12$, $k=8$; $n=12$, $k=9$ или даже более простые $n=3$, $k=2$; $n=4$, $k=3$. Окончание решения вы найдете на стр. 60, но прежде попробуйте найти его самостоятельно.

Наиболее полные и оригинальные решения задач **М108—М109** прислали *Г. Гринченко, В. Кореняко и М. Илларионов* из Воронежа, *Э. Туркевич* из Черновцов, *А. Черняк* из Минска, *Н. Чернов* из Кривого Рога, *А. Шерстюк* из Николаева, *М. Прегер* из Томска, *Л. Ханин* из Ленинграда.

Н. Б. Васильев.

В этом номере мы публикуем решения задач Ф129—Ф130.

Ф129

Тело находится в точке A внутри неподвижной полой сферы (рис. 5). В каком случае тело скорее достигнет нижней точки B сферы: если оно будет скользить по поверхности сферы? если оно будет скользить вдоль прямой AB? Трение в обоих случаях пренебрежимо мало, начальная скорость тела равна нулю и расстояние AB много меньше радиуса сферы.

Движение тела по поверхности сферы совершенно аналогично движению математического маятника с длиной подвеса, равной радиусу сферы R. Так как $AB \ll R$, то отклонение тела от положения равновесия (точки B) мало. Поэтому для периода колебаний маятника можно воспользоваться формулой $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$. Время движения тела от точки A до точки B равно четверти периода колебаний, то есть

$$t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

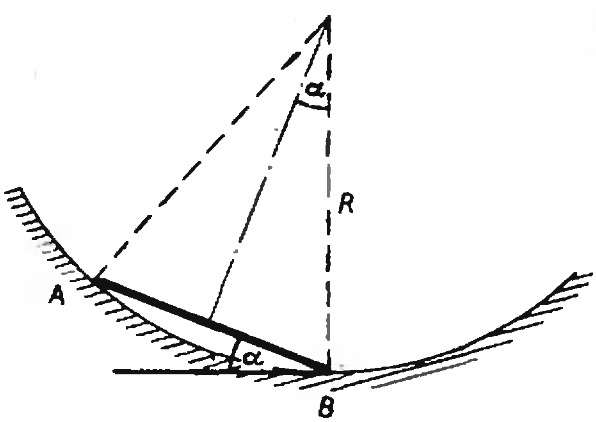


Рис. 5.

Движение тела по наклонной плоскости — равноускоренное. Ускорение a ему сообщает составляющая силы тяжести, параллельная наклонной плоскости. Если угол наклона плоскости к горизонту равен α, эта составляющая равна $mg\sin\alpha$. Так как $AB = \frac{at_2^2}{2}$ (t_2 — время движения тела по наклонной плоскости) и $AB = 2R\sin\alpha$, то

$$t_2 = \sqrt{\frac{2AB}{a}} = \sqrt{\frac{4R\sin\alpha}{g\sin\alpha}} = 2\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Мы получили $t_2 > t_1$, то есть тело достигнет точки быстрее в том случае, если оно будет двигаться по поверхности сферы.

Ф130

Внутри гладкой сферы находится маленький заряженный шарик. Какой величины заряд нужно поместить в нижней точке сферы для того, чтобы шарик удерживался в ее верхней точке? Диаметр сферы равен d, заряд шарика q, его масса m.

Заряд Q, который нужно поместить в нижней точке сферы, должен быть таким, чтобы электрическая сила, действующая на верхний заряд, была не меньше силы тяжести шарика mg.

*) Смотри «Квант» № 6, 1972.

То есть $\frac{qQ}{d^2} \geqslant mg$. Отсюда $Q \geqslant \frac{mgd^2}{q}$.

Однако нам нужно еще проверить, будет ли равновесие шарика устойчивым. Рассмотрим малое отклонение шарика от положения равновесия (рис. 6).

Равновесие шарика устойчиво, если проекция силы F электрического взаимодействия зарядов на касательную к сфере больше или равна проекции силы тяжести на ту же касательную.

$$\frac{qQ}{d^2} \sin\alpha \geqslant mg \sin 2\alpha.$$

(Сила N реакции перпендикулярна поверхности сферы.)

Так как угол α отклонения шарика от положения равновесия мал, то $\sin\alpha \approx \alpha$, $\sin 2\alpha \approx 2\alpha$ и $l \approx d$. Поэтому

$$2mg\,\alpha \leqslant \frac{qQ}{d^2}\alpha.$$

Следовательно, для устойчивого равновесия шарика в верхней точке сферы в нижнюю точку сферы должен быть помещен заряд $Q \geqslant \frac{2mgd^2}{q}$.

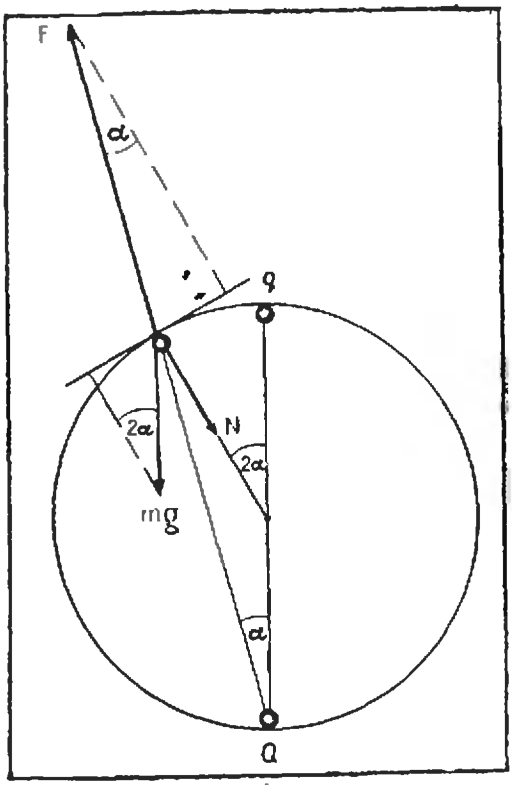


Рис. 6.

Редакция получила 150 писем с решениями задач **Ф123—Ф130**. Наиболее трудной оказалась задача **Ф123**, самой легкой — задача **Ф124**.

Правильные решения задач прислали: *А. Айзиковский* (Кременчуг) **Ф124, Ф125, Ф126**; *А. Александров* (Глазов УАССР) **Ф129**; *Т. Аманбаев* (ст. Ново-Казалинск Кзыл-Ординской обл. Каз. ССР) **Ф125**; *П. Анненков* (с. Тоцкое Оренбургской обл.) **Ф124, Ф125**; *С. Арасланова* (с. Н.-Ивкино Кировской обл.) **Ф125, Ф129**; *Д. Архипов* (Рязань) **Ф127**; *Э. Ахмедов* (Баку) **Ф128**; *А. Боевский* (Гомель) **Ф123, Ф124, Ф125, Ф126, Ф129, Ф130**; *В. Белов* (Вологда) **Ф124, Ф125, Ф126, Ф128, Ф129**; *Л. Брагинский* (Фрунзе) **Ф125, Ф126, Ф128, Ф129**; *И. Ваксер* (Минск) **Ф128, Ф129**; *В. Воронцов* (п. Ивня Белгородской обл.) **Ф129**; *С. Галахваридзе* (Тбилиси) **Ф124, Ф125, Ф126, Ф127**; *А. Григорян* (Баку) **Ф129**; *Б. Дариняпов* (с. Кижинга Бур. АССР) **Ф125**; *А. Довжиков* (Ленинград) **Ф129**; *Е. Долгов* (Москва) **Ф124, Ф125, Ф126, Ф129, Ф130**; *В. Долматов* (Ташкент) **Ф125, Ф126**; *А. Едренкин* (Горький) **Ф129**; *А. Ельков* (Москва), **Ф128**; *В. Зайцев* (Острогожск Воронежской обл.) **Ф129**; *К. Зарембо* (Харьков) **Ф128, Ф129**; *Н. Зыков* (Саратов) **Ф128, Ф129**; *А. Истомин* (Подольск Московской обл.) **Ф125, Ф126**; *Я. Итин* (Речица Гомельской обл.) **Ф125, Ф127**; *А. Каримов* (Уфа) **Ф128, Ф129**; *М. Кауль* (Фрунзе) **Ф125**; *М. Кацнельсон* (Магнитогорск) **Ф124**; *Л. Книжнерман* (Москва) **Ф128, Ф129, Ф130**; *В. Кокосуй* (Гомель) **Ф129**; *А. Кохман* (Москва) **Ф129**; *В. Коротких* (Новокузнецк) **Ф125**; *С. Котко* (Воронеж) **Ф129**; *Г. Левин* (Куйбышев) **Ф128**; *О. Лимонов* (Тимошевск Краснодарского края) **Ф123**; *В. Логозинский* (Ртищево Саратовской обл.) **Ф128, Ф129**; *А. Лучевой* (Грозный) **Ф127**; *Ю. Лурье* (Грозный) **Ф128, Ф129**; *С. Лягушкин* (Днепропетровск) **Ф128, Ф129, Ф130**; *А. Мамула* (с. Дыбинцы Богуславского р-на Киевской обл.) **Ф128**; *В. Михнев* (Пятигорск) **Ф129**; *Р. Мухамедов* (п. Старая Кулатка) **Ф127**; *А. Набатов* (Евпатория) **Ф128**; *С. Поташев* (Ульяновск) **Ф129**; *М. Прегер* (Томск) **Ф130**; *Л. Рудицер* (Харьков) **Ф125, Ф129**; *О. Саакян* (Ереван) **Ф125, Ф126, Ф127**; *Л. Сафиулин* (с. Б. Сабы Сабинского р-на Татарской АССР) **Ф124**; *А. Сбоев* (п. Медведок Нолинского р-на Кировской обл.) **Ф124, Ф126**; *П. Сергеев* Грозный) **Ф123, Ф124, Ф126, Ф128, Ф129, Ф130**; *И. Сидоров* (Москва) **Ф125, Ф126**; *Г. Симоненков* (Каунас) **Ф126, Ф127**; *Л. Смушкевич* (Магнитогорск) **Ф123, Ф124, Ф125**; *М. Темкин* (Минск) **Ф129**; *В. Терентьев* (Павлово Горьковской обл.) **Ф126**; *О. Трупов* (Джалал-Абад Кирг. ССР) **Ф125, Ф127**; *Ф. Тахватулин* (Ташкент) **Ф129, Ф130**; *Н. Федин* (Омск) **Ф124, Ф125, Ф128, Ф129**; *М. Флеров* (Москва) **Ф125, Ф130**; *Д. Фушман* (Черновцы) **Ф125, Ф126, Ф127**; *Л. Циферблат* (Львов) **Ф123**; *С. Черников* (Семипалатинск) **Ф125, Ф127**; *Ю. Шашков* (Щигры Курской обл.) **Ф129**; *И. Юрченко* (Киев) **Ф129**.

И. Ш. Слободецкий

Применение тригонометрии при решении геометрических задач

А. Г. Мордкович

При решении геометрических задач довольно часто приходится обращаться за помощью к тригонометрии. Иногда это обращение обязательно — когда задан какой-либо угол и для вычисления линейных элементов используются тригонометрические функции угла, иногда это обращение желательно — когда мы сами вводим в рассмотрение вспомогательные углы, чтобы, используя затем тригонометрические функции, вычислить нужные нам линейные элементы или установить некоторое соотношение между линейными элементами. Если же говорить о формах применения тригонометрии при решении геометрических задач, то к числу основных следует отнести обычные тригонометрические преобразования, теорему косинусов и, в большей степени, теорему синусов, тригонометрические тождества и тригонометрические уравнения, использование обратных тригонометрических функций.

А теперь перейдем к рассмотрению задач.

Задача 1. *Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании α. В пирамиду вписан шар, к шару проведена касательная плоскость, параллельная основанию пирамиды. Определить боковую поверхность полученной усеченной пирамиды.*

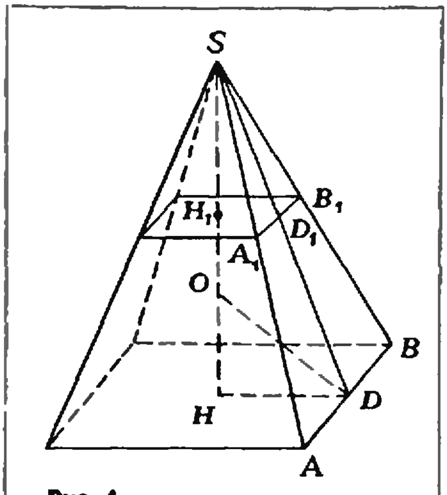


Рис. 1.

Решение. Нет необходимости изображать на рисунке вписанный шар. Вполне достаточно показать центр шара (рис. 1) — это точка O пересечения высоты пирамиды с биссектрисой линейного угла SDH — и учесть, что высота HH_1 усеченной пирамиды равна диаметру шара.

Имеем: $OH = r = HD \cdot \operatorname{tg} \angle ODH = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$,

$$HH_1 = 2r = a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

$$S_{бок} = 4 \cdot \frac{AB + A_1B_1}{2} \cdot DD_1 = 2(a + A_1B_1) \cdot DD_1.$$

Для дальнейших вычислений нам понадобится вспомогательный рисунок 2:

$$A_1B_1 = 2H_1D_1 = 2HE = 2(HD - DE) = 2\left(\frac{a}{2} - D_1E\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha\right) =$$

$$= a - 2HH_1\,\mathrm{ctg}\,\alpha = a - 2a\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{ctg}\,\alpha,\quad DD_1 = \frac{D_1E}{\sin\alpha} = \frac{HH_1}{\sin\alpha} = \frac{a\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha},$$

$$S_{\text{бок}} = 2\left(a + a - 2a\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{ctg}\,\alpha\right)\cdot\frac{a\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \frac{4a^2\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\alpha}.$$

Задача 2. *Определить радиус окружности, если вписанный в нее угол со сторонами a и b опирается на дугу α.*

Решение. Вписанный угол равен $\frac{\alpha}{2}$. Обозначим хорду, соединяющую концы вписанного угла, через x (рис. 3); тогда по теореме косинусов $x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\frac{\alpha}{2}$. Далее, по теореме синусов $\frac{x}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 2R$, откуда

$$R = \frac{x}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\frac{\alpha}{2}}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

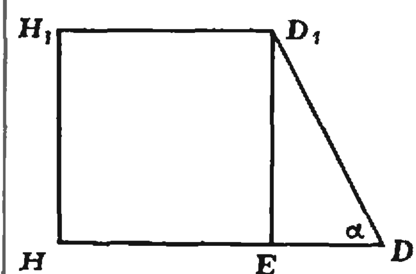


Рис. 2.

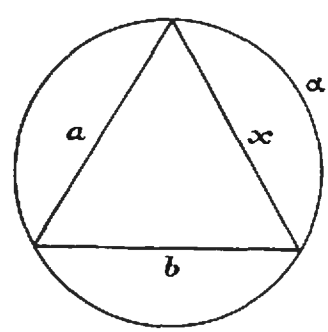


Рис. 3.

Задача 3. *Плоские углы трехгранного угла равны соответственно α, β, γ. Найти его двугранные углы.*

Решение. Пусть S — вершина трехгранного угла (рис. 4), SM — общая сторона плоских углов α и β. Найдем величину двугранного угла при ребре SM. Отложим отрезок $SC = 1$, через точку C проведем плоскость, перпендикулярную прямой SM, и обозначим через A и B точки пересечения этой плоскости с лучами SN и SP. Тогда $\measuredangle ACB$ — линейный угол интересующего нас двугранного угла.

Пусть $\measuredangle ACB = x$, тогда $AC = \mathrm{tg}\,\alpha$, $BC = \mathrm{tg}\,\beta$, $AS = \sec\alpha$, $BS = \sec\beta$. Из треугольника ABS по теореме косинусов имеем

$$AB^2 = AS^2 + BS^2 - 2AS\cdot BS\cdot\cos\gamma,$$

то есть

$$AB^2 = \sec^2\alpha + \sec^2\beta - 2\sec\alpha\cdot\sec\beta\cdot\cos\gamma.$$

С другой стороны, из треугольника ABC по теореме косинусов имеем

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC\cdot BC\cos x,$$

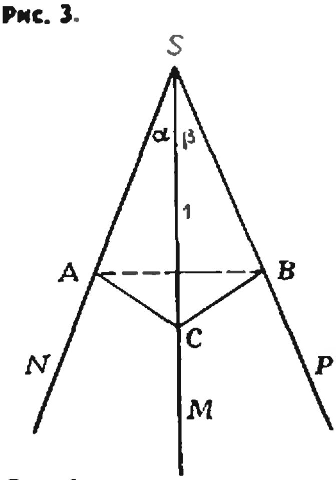


Рис. 4.

то есть

$$AB^2 = \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cdot\cos x.$$

Таким образом,

$$\sec^2\alpha + \sec^2\beta - 2\sec\alpha\sec\beta\cos\gamma = \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos x,$$

откуда

$$\cos x = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

Значит, двугранный угол, противолежащий плоскому углу γ, равен $\arccos\left(\frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}\right)$. Аналогично находятся остальные двугранные углы.

Если три плоских и три двугранных угла считать основными элементами трехгранного угла, то рассмотренная задача позволяет сделать вывод о том, что по любым трем основным элементам трехгранного угла можно найти остальные три.

Задача. 4. *Через вершину угла α при основании равнобедренного треугольника проведена прямая, пересекающая противолежащую боковую сторону и составляющая с основанием угол β $(\beta < \alpha)$. В каком отношении эта прямая делит площадь треугольника?*

Решение. Пусть $AB = BC = a$, $DC = x$, $BD = a - x$ (рис. 5). Треугольники ABD и ACD имеют общую высоту, поэтому их площади относятся как основания, то есть как стороны BD и CD:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x} - 1.$$

Таким образом, для решения задачи нам достаточно найти отношение $\frac{a}{x}$.

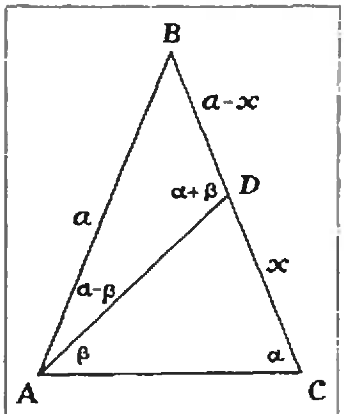


Рис. 5.

Применим к треугольнику ABD теорему синусов

$$\frac{a-x}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Отсюда

$$\frac{x}{a} = \frac{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

В итоге

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{a}{x} - 1 =$$

$$= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)} - 1 = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{2\sin\beta\cos\alpha}.$$

Задача 5. *Все боковые грани правильной четырехугольной пирамиды наклонены к основанию под углом α, а апофема боковой грани равна a. Через одну из сторон основания проведено сечение, составляющее с плоскостью основания угол β $(\beta < \alpha)$. Вычислить площадь сечения.*

Решение. Выясним прежде всего, что представляет собой сечение (рис. 6). Оно параллельно стороне AB, а боковая грань, проходящая через AB, пересекает сечение по прямой EF. Но если через прямую, параллельную некоторой плоскости, проведена плоскость, пересекающая первую плоскость, то линия пересечения параллельна данной прямой, а значит, и прямой CD. Итак, сечение — трапеция.

А теперь проведем вычисления. Имеем

$$KH = SK \cdot \cos\alpha = a\cos\alpha,$$

$$KL = CD = 2a\cos\alpha.$$

Применим к треугольнику MKL теорему синусов:

$$\frac{ML}{\sin\alpha} = \frac{KL}{\sin[180^\circ - (\alpha+\beta)]},$$

откуда

$$ML = \frac{KL\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{a\sin 2\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Применим к треугольнику MSL теорему синусов:

$$\frac{SL}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{MS}{\sin(\alpha-\beta)},$$

$$MS = \frac{a\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Из подобия треугольников SEF и ABS получаем: $\frac{MS}{KS} = \frac{EF}{AB}$. Отсюда получаем

$$EF = \frac{AB\cdot MS}{KS} = \frac{2a\cos\alpha\cdot a\sin(\alpha-\beta)}{a\cdot\sin(\alpha+\beta)} = \frac{2a\cos\alpha\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

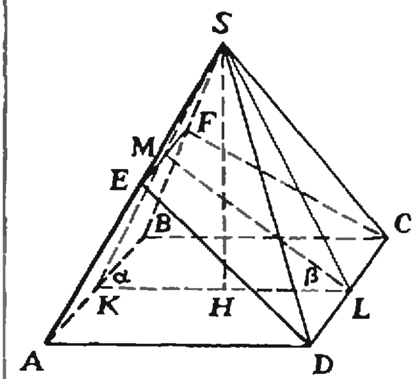


Рис. 6.

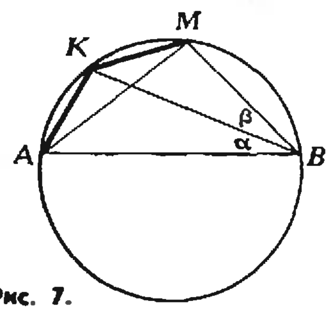


Рис. 7.

Теперь у нас есть все необходимое для вычисления площади сечения. Имеем

$$S = \frac{1}{2}(CD + EF)\cdot ML = \frac{1}{2}\left[2a\cos\alpha + \frac{2a\cos\alpha\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\right] \times \frac{a\sin 2\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{a^2\sin^2 2\alpha\cdot\cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

Задача 6. *На одной из дуг AB окружности даны произвольная точка K и точка M — середина дуги. Эти точки соединены хордами с точками A и B. Доказать, что $AK\cdot KB = AM^2 - KM^2$.*

Решение. Обозначим угол KBA через α, а угол KBM — через β (рис. 7). Применим к треугольнику AKB теорему синусов: $\frac{AK}{\sin\alpha} = 2R$, $AK = 2R\sin\alpha$. Аналогично из треугольника AMB находим $AM = 2R\sin(\alpha+\beta)$, а из треугольника KBM — $KM = 2R\sin\beta$.

Рассмотрим теперь треугольник KMB. Имеем $\angle KBM = \beta$, $\angle MKB = \angle MAB = \angle ABM = \alpha+\beta$, $\angle KMB = 180^\circ - \beta - (\alpha+\beta) = 180^\circ - (\alpha + 2\beta)$, $KB = 2R\sin[180^\circ - (\alpha+2\beta)] = 2R\sin(\alpha+2\beta)$. Нам нужно доказать, что $AK\cdot KB = AM^2 - KM^2$, то есть что

$$2R\sin\alpha\cdot 2R\sin(\alpha+2\beta) = 4R^2\sin^2(\alpha+\beta) - 4R^2\sin^2\beta$$

или

$$\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+2\beta) = \sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2\beta.$$

Задача свелась к доказательству тригонометрического тождества. Доказывается оно несложно, и мы предоставляем это сделать читателю.

Задача 7. *В треугольнике один угол вдвое больше другого, а стороны, противолежащие этим углам, отличаются друг от друга на 2 см. Найти эти стороны, если известно, что третья сторона треугольника равна 5 см.*

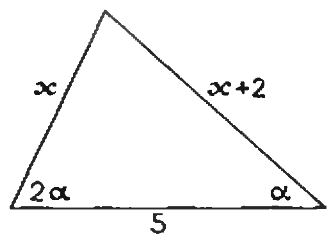


Рис. 8.

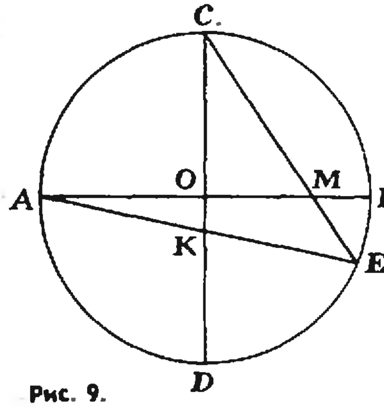


Рис. 9.

Решение. Эту задачу можно решить средствами планиметрии, но мы, будучи верны взятой теме, разберем решение этой задачи с помощью тригонометрии (рекомендуем читателю попробовать найти планиметрическое решение). Обозначим через α один из углов треугольника, 2α — другой угол, а противолежащие стороны соответственно x и $x+2$ (рис. 8).

По теореме синусов $\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{5}{\sin(180^\circ - 3\alpha)} = \frac{x+2}{\sin 2\alpha}$; отсюда $x = \frac{5\sin\alpha}{\sin 3\alpha}$, $x+2 = \frac{5\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}$.

Теперь задача сводится к решению тригонометрического уравнения $\frac{5\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha} - \frac{5\sin\alpha}{\sin 3\alpha} = 2$. Применив формулу $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, получим $\frac{10\cos\alpha}{3-4\sin^2\alpha} - \frac{5}{3-4\sin^2\alpha} = 2$ и далее $8\cos^2\alpha - 10\cos\alpha + 3 = 0$; $(\cos\alpha)_1 = \frac{3}{4}$, $(\cos\alpha)_2 = \frac{1}{2}$. Но по смыслу задачи $\alpha < 60^\circ$, следовательно, $\cos\alpha > \frac{1}{2}$. Поэтому из найденных значений подходит только $\cos\alpha = \frac{3}{4}$. Имеем далее $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $x = \frac{5}{3-4\sin^2\alpha} = 4$, $x+2 = 6$.

Упражнения

1. В треугольнике ABC угол A равен α, сторона BC равна a. Найти длину биссектрисы AD, если угол между AD и высотой AE равен β.

2. Основанием пирамиды служит равнобочная трапеция, у которой острый угол равен α, а площадь равна S. Все боковые грани наклонены к плоскости основания под углом β. Найти объем пирамиды.

3. Образующая конуса равна l и составляет с высотой угол α. Через две образующие конуса, угол между которыми равен β, проведена плоскость. Найти расстояние от этой плоскости до центра вписанного в конус шара.

4. Высота треугольника, равная 6 *см*, делит угол треугольника в отношении $2:1$, а сторону на отрезки, меньший из которых равен 3 *см*. Определить стороны треугольника.

5. В окружность вписан правильный треугольник ABC. На дуге BC взята произвольная точка M и соединена хордами с вершинами треугольника. Доказать, что $MA = MB + MC$.

6. Доказать, что сумма квадратов диагоналей трапеции равна удвоенному произведению ее оснований, сложенному с суммой квадратов боковых сторон.

7. Плоские углы трехгранного угла равны соответственно α, β, γ. Найти угол между плоскостью, в которой лежит угол α, и противолежащим ребром трехгранного угла.

8. Дан треугольник ABC, на стороне AC взята точка E так, что $AE:EC = a$, на стороне AB взята точка D так, что $AD:DB = b$. Проведены отрезки CD и BE. Найти отношение площади получившегося четырехугольника к площади данного треугольника (МИЭТ, 1970).

9. В окружности проведены два взаимно перпендикулярных диаметра AB и CD. Хорда AE пересекает CD в точке K так, что $CK:KD = 2:1$. Хорда EC пересекает AB в точке M. Доказать, что $AM:MB = 3:1$ (рис. 9).

ВАРИАНТЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ 1971 ГОДА.

Московский государственный педагогический институт имени В. И. Ленина

Вариант 1

1. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$, у которой все ребра равны a. Через вершину A основания проведена плоскость, параллельная диагонали BD и образующая с плоскостью основания угол 30°. Найти площадь сечения.

2. Две точки движутся равномерно по двум окружностям, радиусы которых относятся как 1 : 6. Определить скорость движения каждой точки, если известно, что за 10 *сек* точка, движущаяся по большой окружности, прошла на 2 *м* больше и совершила при этом в 5 раз меньше оборотов.

3. Решить неравенство

$$\frac{x+1}{x-1}+1>\frac{x-1}{x}.$$

4. Решить уравнение

$$\log_{\sqrt{2}\sin x}(1+\cos x)=2.$$

Вариант 2

1. Основанием пирамиды $SABC$ служит равнобедренный треугольник ABC, у которого $AB=AC=b$, $BC=a$. Определить площадь сечения, проходящего через ребро SA и перпендикулярного к плоскости основания, если боковые грани образуют с плоскостью основания равные двугранные углы α.

2. Из пункта A в пункт B выехали одновременно два автомобиля. Скорость второго автомобиля больше скорости первого на 10 *км/час*. Через полчаса из A в B выехал третий автомобиль со скоростью 60 *км/час*, который догнал первый автомобиль и через полтора часа после этого догнал второй автомобиль. Найти скорости автомобилей.

3. Решить уравнение:

$$\frac{x+3}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{3x+1}.$$

4. Решить уравнение:

$$\sin x\,(1+\cos x)=1+\cos x+\cos^2 x.$$

Ленинградский государственный педагогический институт имени А. И. Герцена

Математический факультет

1. Упростить выражение:

$$\left[\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3+2a^{3/2}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b^{3/2}}+\frac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}\right]^{-2}.$$

2. Найти все значения α, при которых выражение

$$\lg\left[(6\alpha-5)x^2-5(\alpha-1)x+2\alpha-6\right]$$

имеет смысл при любом x.

3. Решить уравнение:

$$\lg x+\frac{\cos x}{1+\sin x}=2.$$

4. Полная поверхность правильной четырехугольной пирамиды равна S, а двугранный угол при основании равен α. Определить объем пирамиды.

Физический факультет

1. Упростить выражение:

$$\left[\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}\right)^{-1}+\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{a}\right)^{-1}\right]^{-2}:\frac{x-a}{4x^{1/2}+4a^{1/2}}.$$

2. Решить уравнение:

$$\frac{1}{x}(\lg 1-\lg 243)+\lg 3^{x-4}=0.$$

3. Упростить выражение:

$$\frac{2(\sin 2\alpha+2\cos^2\alpha-1)}{\cos\alpha-\sin\alpha-\cos 3\alpha+\sin 3\alpha}.$$

4. Высота конуса равна h. Плоские углы при вершине правильной четырехугольной пирамиды, вписанной в этот конус, равны α. Определить объем конуса.

Ленинградский горный институт

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}=2, \\ \dfrac{3}{x+y}+\dfrac{4}{x-y}=7. \end{cases}$$

2. Доказать тождество:

$$\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)=\sin^2\beta.$$

3. Решить уравнение:

$$x+\lg(1+2^x)=x\lg 5+\lg 6.$$

4. При каких значениях b имеет смысл выражение:

$$\lg\left(1+\frac{6b+5}{3+2b}\right)?$$

5. Непараллельные боковые стороны трапеции перпендикулярны друг к другу. Одна из них составляет с основанием угол α другая составляет такой же угол с диагональю. Вычислить площадь трапеции, если ее высота равна h.

Ленинградский технологический институт имени Ленсовета

1. Доказать тождество:

$$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha+\sin 2\alpha=\sqrt{2}\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$$

2. Все боковые грани четырехугольной пирамиды — правильные треугольники. Найти ее двугранные углы.

3. Найти все значения параметра a, при которых графики функций $y=ax-1$ и $y=\frac{1}{x-1}$ пересекаются только в одной точке. Построить для найденных значений a чертежи.

4. Найти область определения функции

$$y=\log_x\left(\cos\frac{3\pi}{1+x^2}\right).$$

5. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$\log_{(a+x)} x(a-x)<\log_{(a+x)} x$$

имеет хотя бы одно решение.

Ленинградский инженерно-строительный институт

1. Вычислить:

$$(1{,}5)^3\cdot(2{,}25)^{1{,}5}\cdot 0{,}75^{-3}:\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}-(2^{-1})^{-1}-\left(2\,\frac{3}{7}\right)^0\right].$$

2. Привести к виду, удобному для логарифмирования:

$$2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)-1.$$

3. Основанием пирамиды служит ромб, меньшая диагональ которого равна d, а острый угол равен α. Каждая боковая грань наклонена к основанию под углом β. Найти объем пирамиды.

4. Решить уравнение:

$$\sqrt{2}\cdot(0{,}5)^{\frac{5}{4\sqrt{x}+10}}-\sqrt[(\sqrt{x}+1)]{4}=0.$$

5. Упростить:

$$\sqrt[\log_b a]{a^2}-2\sqrt[\log_b a]{a}\cdot\sqrt[\log_a b]{b}+\sqrt[\frac{1}{2}\log_a b]{b}.$$

Ленинградский институт точной механики и оптики

1. Упростить при $y>-1$

$$\left[\frac{xy+x}{(y+1)^{3/2}}+\frac{x^2-(y+1)\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{y+1}}\right]:\left(x+\sqrt[6]{x^3+x^3y^2+2yx^3}\right)-\frac{(1+y^{-1})^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{y^{-1}}}.$$

2. Решить уравнение:

$$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0.$$

3. Решить уравнение:

$$\cos 7x+\sin^2 2x=\cos^2 2x-\cos x.$$

Ленинградский гидрометеорологический институт

1. Упростить

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{4+(a^{4x}-a^{-4x})^2}}{a^{2x}+a^{-2x}}+2-}$$
$$-\left(a^{-\frac{x}{2}}\right)^2.$$

2. Решить уравнение:

$$\log_3^2 4x-\log_3 12x=1.$$

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2(x^2-3)+xy+1=0, \\ y^2(3x^2-6)+xy+2=0. \end{cases}$$

4. Решить уравнение: $\sec^4 x-\operatorname{tg}^4 x=7$

Ленинградский технологический институт холодильной промышленности

1. Ромб, у которого меньшая диагональ равна его стороне a, вращается около прямой, проходящей через конец большой диагонали перпендикулярно к последней. Вычислить объем V и поверхность S полученного тела вращения.

2. Решить уравнение:

$$\frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}=4 \quad (\sin x\neq 0,\ \cos x\neq 0).$$

3. Решить систему:

$$\begin{cases} \log_y x-\log_x y=\frac{8}{3}, \\ xy=16. \end{cases} \qquad \begin{cases} x>0, \\ y>0. \end{cases}$$

4. Привести к виду, удобному для логарифмирования:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta).$$

5. Решить уравнение:

$$5^{\lg x}-3^{-1+\lg x}=3^{1+\lg x}-5^{-1+\lg x}.$$

Ленинградская лесотехническая академия имени С. М. Кирова

1. Найти первый член и знаменатель возрастающей геометрической прогрессии, в которой $a_5-a_1=10$, $a_4-a_2=4$.

2. Решить уравнение:

$$\frac{\lg x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\lg 5-1}{\frac{1}{4}\lg(x-1)}=\lg 0{,}01.$$

3. Решить уравнение.

$$\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}+1=\cos x.$$

4. Радиус основания конуса равен R, а образующая наклонена к плоскости основания под углом α. В этом конусе через его вершину проведена плоскость под углом φ к высоте конуса. Определить площадь проведенного сечения.

Ленинградский технологический институт целлюлозно-бумажной промышленности

1. Решить уравнение:

$$3\sin x+\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=1-3\sin x\cos x.$$

2. Решить уравнение:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^{x-1}=\frac{8\lg 9}{25\lg 27}\cdot\log_3\sqrt[5]{9}.$$

3. Доказать тождество:

$$(\operatorname{tg}255^\circ-\operatorname{tg}555^\circ)(\operatorname{tg}795^\circ+\operatorname{tg}195^\circ)=8\sqrt{3}.$$

4. Упростить:

$$1-\frac{\frac{1}{\sqrt{a-1}}-\sqrt{a+1}}{\frac{1}{\sqrt{a+1}}-\frac{1}{\sqrt{a-1}}}:$$
$$:\frac{\sqrt{a+1}\cdot\sqrt{a^2-1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}.$$

Решение задач по электростатике

(электроемкость)

Г. Я. Мякишев

Электроемкость — последняя тема раздела «Электростатика». При решении задач на эту тему могут потребоваться все сведения, полученные при изучении электростатики: сохранение электрического заряда, понятия напряженности поля и потенциала, поведение проводников в электростатическом поле, изменение напряженности поля в диэлектриках, закон сохранения энергии. Поэтому и задачи очень разнообразны. Однако если предыдущие понятия хорошо усвоены, то особых трудностей при решении задач на электроемкость не должно встретиться.

Введение понятия электроемкости основано на том, что все точки проводника при сообщении ему заряда Q приобретают один и тот же потенциал φ. Отношение заряда к потенциалу при этом не зависит от величины заряда и называется электроемкостью уединенного проводника:

$$C = \frac{Q}{\varphi}.$$

Емкость уединенного проводящего шара (в вакууме) в системе СГСЭ равна его радиусу:

$$C = R.$$

Емкость шара в диэлектрике в системе СИ равна

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R.$$

Наиболее интересна емкость системы двух проводников, заряды которых одинаковы по величине и имеют противоположные знаки. Такая система называется конденсатором, и ее емкость равна:

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi},$$

где Q — заряд одной из обкладок конденсатора, а $\Delta\varphi$ — разность потенциалов между обкладками. Емкость конденсатора практически не зависит от окружающих тел.

Для плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d} \text{ (СГСЭ)}; \quad C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} \text{ (СИ)}.$$

Здесь S — площадь пластин, а d — расстояние между ними.

Энергия конденсатора может быть вычислена по одной из трех формул

$$П = \frac{Q\Delta\varphi}{2} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C(\Delta\varphi)^2}{2},$$

то есть для любой пары значений из трех величин Q, C, $\Delta\varphi$. При параллельном соединении конденсаторов их емкости складываются:

$$C = \sum_i C_i.$$

При последовательном соединении величина, обратная емкости батареи, равна сумме величин, обратных емкостям отдельных конденсаторов:

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}.$$

Напомнив основные понятия и формулы, перейдем теперь к решению конкретных задач.

Задача 1. Пластины заряженного плоского конденсатора попеременно заземляются. Будет ли при этом конденсатор разряжаться?

Решение. Будет. Каждая из пластин обладает определенной,

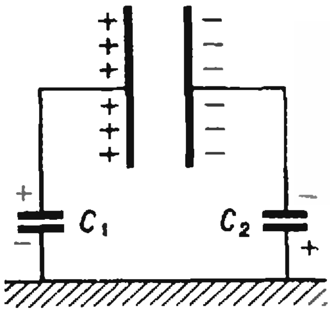


Рис. 1.

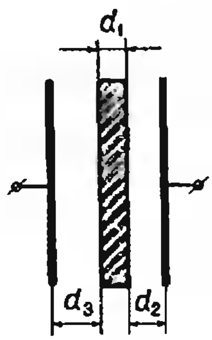


Рис. 2.

обычно небольшой, емкостью относительно земли. (Это происходит из-за того, что вблизи краев пластин силовые линии искривляются и достигают земли). Эквивалентная схема показана на рисунке 1. Емкость пластин относительно земли изображена в виде конденсаторов C_1 и C_2.

При замыкании левой пластины нейтрализуется часть заряда, находящегося на ней. Это же произойдет при замыкании правой пластины. Конденсатор будет разряжаться тем медленнее, чем больше емкость конденсатора по сравнению с емкостью каждой пластины относительно земли.

Задача 2. В плоский воздушный конденсатор с расстоянием d между обкладками вводится диэлектрическая пластина, толщина которой $d_1 < d$. Определить емкость конденсатора с диэлектрической пластиной. Диэлектрическая проницаемость материала пластины ε. Площадь пластины и каждой обкладки S.

Решение. Если в плоский конденсатор внести очень тонкую проводящую пластину, параллельную обкладкам, то на ее поверхностях появятся заряды противоположных знаков, равные по величине. При этом электрическое поле в конденсаторе не изменится, а значит, не изменится и его емкость. (Ведь заряды обкладок остаются неизменными и разность потенциалов между ними не меняется.) Поэтому можно считать, что на поверхностях диэлектрической пластины нанесены тонкие проводящие слои. В этом случае образуются три последовательно соединенных конденсатора с емкостями

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d_1}, \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_2} \quad \text{и} \quad C_3 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_3},$$

где d_2 и d_3 — расстояния между поверхностями диэлектрической пластины и обкладками, причем $d_2 + d_3 = d - d_1$ (рис. 2). Емкость C батареи трех конденсаторов определяется по формуле:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{\varepsilon_0 S}\left(\frac{d_1}{\varepsilon} + d_2 + d_3\right).$$

Отсюда

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{\varepsilon d + d_1 (1 - \varepsilon)}.$$

Задача. 3. Найти емкость батареи конденсаторов, изображенной на рисунке 3. Емкость каждого конденсатора равна C.

Решение. Данная схема соединения конденсаторов эквивалентна схеме, изображенной на рисунке 4. В этом можно убедиться, проверив, что каждый из конденсаторов соединен с источником и с другими конденсаторами точно так же, как в исходной схеме. Вследствие равенства емкостей всех конденсаторов разность потенциалов между точками A и B равна нулю. Поэтому конденсатор

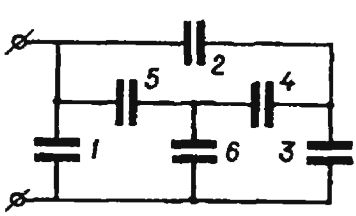


Рис. 3.

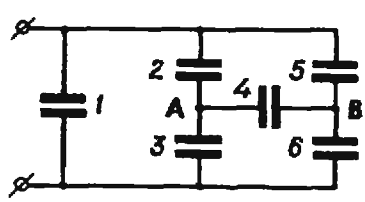


Рис. 4.

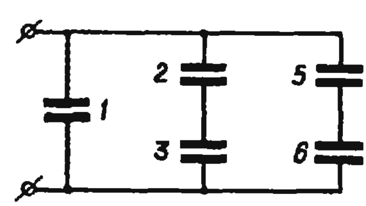


Рис. 5.

C_4 не заряжен и его емкость можно не учитывать. Упрощенная эквивалентная схема приведена на рисунке 5. В результате получаем схему из трех параллельных ветвей, две из которых содержат по два последовательно включенных конденсатора. Общая емкость системы

$$C = C_1 + \frac{C_2C_3}{C_2 + C_3} + \frac{C_5C_6}{C_5 + C_6} = 2C.$$

Задача 4. Два конденсатора емкостью C_1 и C_2 заряжены до разностей потенциалов $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$ ($\Delta\varphi_1 \neq \Delta\varphi_2$). Доказать, что при параллельном соединении этих конденсаторов их общая электростатическая энергия уменьшается. Объяснить, почему происходит уменьшение энергии.

Решение. Энергия конденсаторов до соединения была равна $\Pi_0 = \frac{1}{2}\left(C_1\Delta\varphi_1^2 + C_2\Delta\varphi_2^2\right)$. После соединения заряд батареи конденсаторов будет $Q = Q_1 + Q_2$, а энергия, запасенная в батарее, $\Pi = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_1 + C_2} = \frac{1}{2}\frac{(C_1\Delta\varphi_1 + C_2\Delta\varphi_2)^2}{C_1 + C_2}$. Разность энергий $\Pi_0 - \Pi = \frac{C_1C_2}{2(C_1 + C_2)} \times$

$$\times \left(\Delta\varphi_1^2 + \Delta\varphi_2^2 - 2\Delta\varphi_1\Delta\varphi_2\right) > 0.$$

Электростатическая энергия уменьшилась вследствие того, что при соединении конденсаторов проводниками заряды перетекали с одного конденсатора на другой. В проводниках, соединяющих конденсаторы, выделялось при этом тепло. Количество выделенного тепла не зависит от сопротивления соединительных проводов. При малом сопротивлении проводов в них будут протекать большие токи, и наоборот.

Упражнения

1. Заряженная положительно пылинка массы $m = 10^{-8}$ *г* находится в равновесии внутри плоского конденсатора, пластины которого расположены горизонтально. Между пластинами создана разность потенциалов $\Delta\varphi_1 = 6000$ *в*. Как нужно изменить разность потенциалов, чтобы пылинка осталась в равновесии, если ее заряд уменьшился на 1000 электронов? Расстояние между пластинами $d = 5$ *см*, заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *к*.

2. Изменятся ли показания электрометра, соединенного с гальваническим элементом, если параллельно с ним включить конденсатор?

3. Найти разность потенциалов между точками A и B схемы, изображенной на рисунке 6. Емкости конденсаторов $C_1 = 0{,}5$ *мкф* и $C_2 = 1$ *мкф*, э. д. с. источников $E_1 = 2$ *в* и $E_2 = 3$ *в*.

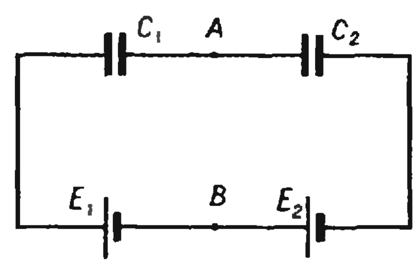


Рис. 6.

4. Конденсаторы емкостью $C_1 = 1$ *мкф* и $C_2 = 2$ *мкф* заряжены до разности потенциалов $\Delta\varphi_1 = 10$ *в* и $\Delta\varphi_2 = 50$ *в* соответственно. После зарядки конденсаторы соединены одноименными полюсами. Определить разность потенциалов $\Delta\varphi$ между обкладками конденсаторов после их соединения.

К логическим задачам

(*см. стр.* 28)

1. Например, можно спросить: «Лжец ли ты?», и они ответят одинаково. Можно также спросить: «Говоришь ли ты правду?», и они тоже ответят одинаково.

2. На вопрос «Спрашивал ли я Вас сегодня о чем-нибудь?» в первый раз правдивый ответ — «нет», а во второй раз — «да». Есть и другие вопросы.

3. Если туристы подошли к одному берегу, то перебраться на противоположный берег за четное число рейсов, очевидно, невозможно. Значит, туристы подошли к противоположным берегам реки: двое к одному берегу, а третий — к другому. В этом случае переправу можно осуществить за два рейса.

4. Так как сумма цифр пятизначного числа не превосходит 45, то моему соседу не больше 45 лет. Но ему не может быть и меньше 45 лет, ибо тогда можно было бы назвать несколько пятизначных чисел, у которых сумма цифр равна возрасту соседа. Значит, ему 45 лет, а мой лотерейный билет имеет номер 99 999.

Электромагнитная индукция

Л. Г. Асламазов

Решение задач на электромагнитную индукцию основывается на использовании закона Фарадея: если магнитный поток, пронизывающий некоторый контур, за время Δt изменяется на величину $\Delta\Phi$, то в контуре наводится электродвижущая сила $E_{инд} = k\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ (k — численный коэффициент, зависящий от выбора системы единиц). В этой формуле через $\Delta\Phi$ мы обозначили абсолютную величину изменения магнитного потока, считая $E_{инд}$ всегда положительной.

Направление индуцируемого в контуре тока находится по правилу Ленца: ток направлен так, чтобы его магнитное поле противодействовало изменению магнитного потока.

Магнитный поток равен произведению составляющей индукции магнитного поля B_1, перпендикулярной плоскости контура, на площадь контура S (рис. 1): $\Phi = B_1S = BS\cos\alpha$. Следовательно, изменение магнитного потока может происходить из-за изменения индукции магнитного поля, площади контура или его ориентации.

Перейдем теперь к решению задач.

Задача 1. Проволочная рамка пронизывается магнитным полем, перпендикулярным плоскости рамки и равномерно растущим со временем по закону: $B = at$. Каков характер тока, текущего по рамке?

Скорость изменения магнитного потока в этом случае постоянна: $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{a(t_2 - t_1)}{\Delta t}S = aS$ где S — площадь рамки. Поэтому э. д. с., наводимая в рамке, а, следовательно, и ток будут постоянными.

Задача 2. Проволочная рамка находится в постоянном магнитном поле, направление индукции которого составляет угол $\alpha = 60°$ с перпендикуляром к плоскости рамки. Чему равно среднее значение э. д. с. индукции, возникающей в рамке при выключении поля в течение времени $\Delta t = 0{,}001$ *сек*? Площадь рамки $S = 50$ *см*^{2}, индукция поля $B = 1000$ *гс*.

Изменение магнитного потока в данном случае равно начальному его значению, так как конечное значение равно нулю (магнитное поле выключается): $\Delta\Phi = \Phi_0 = BS\cos\alpha$. Величина э. д. с. индукции $E_{инд} = kBS\cos\alpha/\Delta t$. Вычисления будем производить в системе СИ, в которой $k = 1$, магнитный поток измеряется в веберах (1 *вб* $= 1$ *тл*$\cdot$*м*$^2 = 10^8$ *гс*$\cdot$*см*^{2}), время —

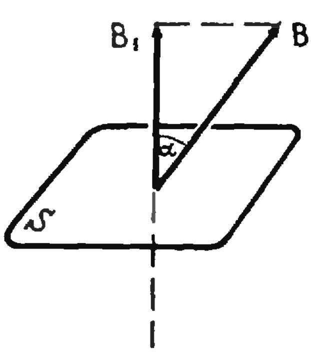


Рис. 1.

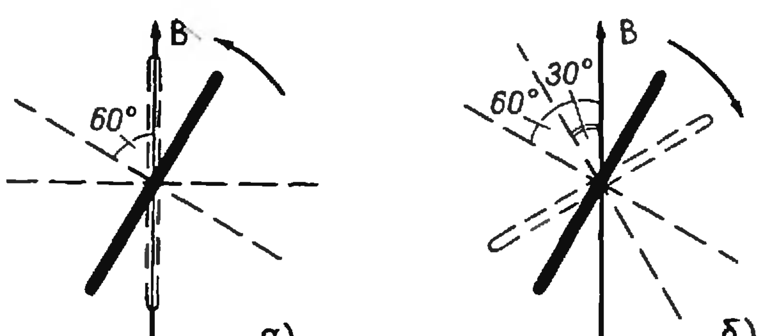


Рис. 2.

в секундах, а э. д. с. — в вольтах. Подставляя данные задачи, находим $E_{инд} = 0,25$ *в*.

Задача 3. Исходные данные те же, что и в задаче 2. Чему будет равна э. д. с. индукции, если поле оставить неизменным, а рамку повернуть на угол $\beta = 30°$ вокруг оси, перпендикулярной полю, за время $\Delta t = 1$ *сек*.

При повороте рамки на угол 30° возможны два варианта: либо поле окажется лежащим в плоскости рамки (рис. 2, *а*), либо будет составлять с перпендикуляром к плоскости рамки угол 30° (рис. 2, *б*). В первом случае конечное значение магнитного потока равно нулю ($\cos 90° = 0$) и $E_{инд} = 0,25$ *в*. Во втором случае $\Delta\Phi = BS (\cos 30° - \cos 60°) = 1,8 \times 10^{-4}$ *вб*, а $E_{инд} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 1,8 \cdot 10^{-4}$ *в*.

В рассмотренных задачах изменялся магнитный поток через контур (на рисунках мы изображали контур в виде прямоугольной рамки, хотя форма его несущественна). В результате в контуре наводилась э. д. с. индукции, пропорциональная скорости изменения магнитного потока. Интересно, что количество электричества, переносимое по контуру под действием этой э. д. с., уже не зависит от скорости изменения магнитного потока и определяется только разностью его начального и конечного значений.

В самом деле, под действием $E_{инд} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ в контуре появляется ток, величина которого определяется по закону Ома $I = \frac{E_{инд}}{R} = \frac{\Delta\Phi}{R\Delta t}$, где R — сопротивление контура. Следовательно, по контуру переносится заряд $Q = I \cdot \Delta t = \frac{\Delta\Phi}{R}$.

Посмотрим, какой заряд протекал по рамке в задачах 2 и 3, если сопротивление рамки $R = 1$ *ом*.

Изменение магнитного потока при выключении поля (задача 2) $\Delta\Phi = BS \cos\alpha = 2,5 \cdot 10^{-4}$ *вб*. Поэтому заряд, протекший по рамке, равен $Q = \frac{\Delta\Phi}{R} = 2,5 \cdot 10^{-4}$ *к*.

В задаче 3 в первом случае, очевидно, протечет такой же заряд. Во втором случае $q = 1,8 \cdot 10^{-4}$ *вб/ом* $= 1,8 \cdot 10^{-4}$ *к*.

Задача 4. Квадратная рамка со стороной a помещается в однородное магнитное поле, перпендикулярное ее плоскости (рис. 3, *а*). При этом по рамке протекает заряд Q. Какой заряд протечет по рамке, если ей при неизменном поле придать форму двух равных квадратов без пересечения (рис. 3, *б*) и с пересечением (рис. 3, *в*). Сопротивление рамки равно R.

Индукция магнитного поля B легко находится по данному заряду Q. Изменение потока при внесении рамки в магнитное поле равно $\Delta\Phi_0 = Ba^2$, и следовательно, $Q = \Delta\Phi_0/R = Ba^2/R$, откуда $B = QR/a^2$.

Изменение магнитного потока при изгибе рамки в два квадрата без

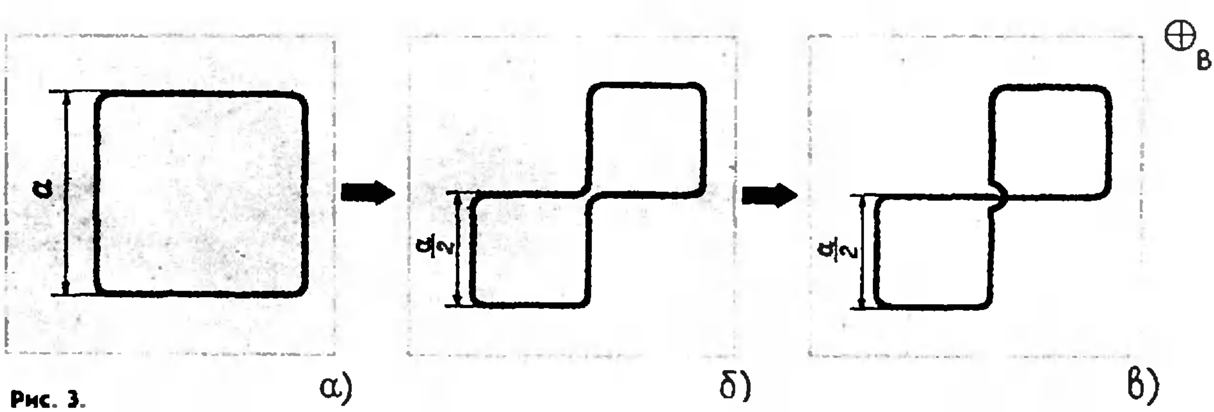


Рис. 3.

пересечения (рис. 3, *б*):

$$\Delta\Phi_1 = B\left(a^2 - 2\,\frac{a^2}{4}\right) = \frac{Ba^2}{2}$$

Поэтому заряд, протекающий в этом случае по рамке,

$$q_1 = \frac{\Delta\Phi_1}{R} = \frac{Ba^2}{2R}.$$

При повороте одного из квадратов на 180° вокруг диагонали (рис. 3, *в*) общая площадь контура не меняется. Однако в конечном положении магнитные потоки, пронизывающие отдельные квадраты, вычитаются друг из друга так, что общий поток через контур равен нулю. Поэтому при повороте квадрата изменение магнитного потока $\Delta\Phi_2 = \frac{2Ba^2}{4} - 0 = \frac{Ba^2}{2}$. При этом, по рамке протекает заряд $q_2 = \frac{Ba^2}{2R}$. Полный заряд, протекший по рамке при ее изгибе и повороте, равен $q_3 = \frac{Ba^2}{R}$.

Перенос электричества по контуру сопровождается выделением джоулева тепла. Рассмотрим, например, такую задачу.

Задача 5. По горизонтальным рельсам, расположенным в вертикальном магнитном поле с индукцией B, скользит проводник длины l (рис. 4). Концы рельсов замкнуты на сопротивление R. Определить мощность тепловых потерь на сопротивлении, если проводник движется с постоянной скоростью v. Сопротивлением рельсов и проводника пренебречь.

Найдем изменение магнитного потока через контур, образованный движущимся проводником, рельсами и сопротивлением за время Δt. При движении проводника площадь контура увеличивается на величину $\Delta S = lv\cdot\Delta t$. Изменение потока $\Delta\Phi = B\cdot\Delta S = Blv\cdot\Delta t$. Поэтому

$$E_{\text{инд}} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = Blv$$

Под действием этой э. д. с. в кон-

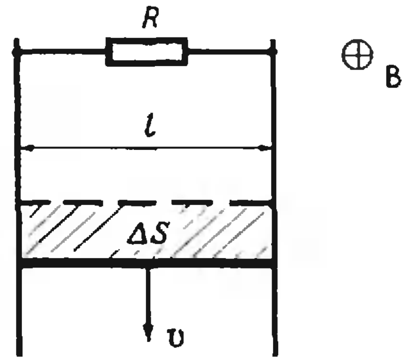


Рис. 4.

туре течет ток

$$I = \frac{E_{\text{инд}}}{R} = Blv/R$$

Выделяющееся при этом на сопротивлении R тепло определяется по закону Джоуля — Ленца: $Q = I^2Rt$. Мощность тепловых потерь

$$W = \frac{Q}{t} = I^2R = B^2l^2v^2/R.$$

Полезно разобрать, за счет какой энергии выделяется тепло на сопротивлении.

Как известно, на проводник с током в магнитном поле действует сила (закон Ампера). В нашем случае (магнитное поле перпендикулярно проводнику) эта сила равна BIl и направлена противоположно скорости. По условию задачи проводник движется с постоянной скоростью. Это означает, что к нему приложена сила F, уравновешивающая тормозящую силу со стороны магнитного поля. Работа силы F и переходит в тепло, которое выделяется на сопротивлении. Мощность этой силы равна мощности тепловых потерь:

$$N = F\cdot v = BIlv = B^2l^2v^2/R = W.$$

Из полученных формул следует, что при увеличении сопротивления R ток в контуре будет уменьшаться ($I = Blv/R$). Однако падение напряжения на сопротивлении, равное разности потенциалов на концах проводника, останется неизменным ($U = IR = Blv$).

Теперь легко найти величину разности потенциалов, возникающей на концах проводника, движущегося в магнитном поле, перпендикулярном направлению его движения. Можно считать, что проводник скользит по воображаемым рельсам, замкнутым на бесконечно большое сопротивление. Тогда разность потенциалов на концах проводника равна Blv.

В том случае, когда индукция магнитного поля имеет составляющую в плоскости движения проводника, при вычислении разности потенциалов ее можно не учитывать (она не дает вклада в магнитный поток), то есть существенна только перпендикулярная плоскости составляющая магнитной индукции.

Задача 6. Определить разность потенциалов, возникающую между концами крыльев самолета, летящего горизонтально со скоростью $v = 800$ *км/час*. Расстояние между концами крыльев $l = 30$ *м*. Вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли $B = 0{,}5$ *гс*.

Воспользовавшись формулой $U = Blv$ и перейдя в систему СИ: $v = 800$ *км/час* ≈ 222 *м/с*, $B = 0{,}5$ *гс* $= 5 \cdot 10^{-5}$ *тл*, найдем $U = 0{,}33$ *в*. Горизонтальную составляющую магнитного поля Земли можно не учитывать, так как она лежит в плоскости движения самолета.

Заметим, что возникающую разность потенциалов нельзя измерить вольтметром, находящимся в самолете, подсоединив его к концам крыльев. Магнитный поток через контур, образуемый крыльями самолета и вольтметром с проводами, при движении самолета не изменяется, и ток через вольтметр равен нулю.

Задача 7. Горизонтальный проводник длины $l = 1$ *м* движется в вертикальном магнитном поле с индукцией $B = 1000$ *гс*. Скорость проводника $v = 100$ *м/с* образует угол $\alpha = 60°$ с самим проводником (рис. 5).

Определить разность потенциалов на концах проводника.

Такой проводник мы опять можем представлять себе скользящим по горизонтальным рельсам, замкнутым на бесконечно большое сопротивление. Определим изменение магнитного потока за время Δt через контур, образованный проводником, сопротивлением и рельсами. Площадь контура изменяется на величину $\Delta S = lv \cdot \Delta t \cdot \sin\alpha$, следовательно, $\Delta\Phi = Blv \cdot \Delta t \cdot \sin\alpha$.

Изменение магнитного потока вызывает появление в контуре э. д. с. индукции $E_{инд} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = Blv\sin\alpha$, которая и равна разности потенциалов U на концах проводника. Подставляя численные данные, находим $U = 8{,}65$ *в*.

При изменении магнитного потока через контур, содержащий конденсатор, на конденсаторе появляется заряд.

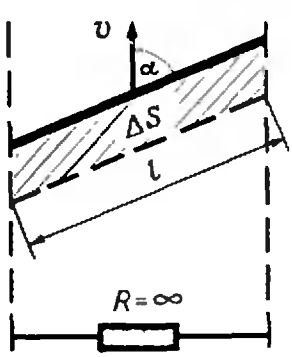


Рис. 5.

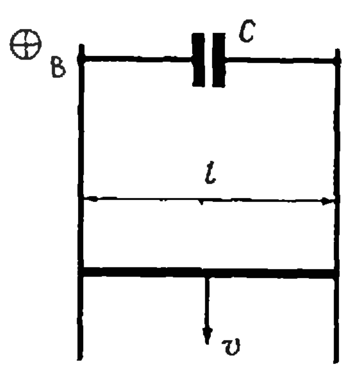


Рис. 6.

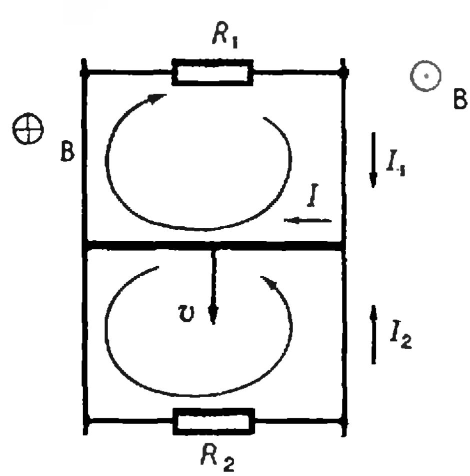


Рис. 7.

Задача 8. Проводник длины $l = 1$ *м* скользит по горизонтальным рельсам в вертикальном магнитном поле с индукцией $B = 1000$ *гс*. Концы рельсов замкнуты на конденсатор емкостью $C = 1$ *мкф* (рис. 6). Определить заряд на конденсаторе, если скорость проводника $v = 100$ *м/сек*.

Напряжение на конденсаторе U равно разности потенциалов на концах движущегося проводника: $U = Blv$. Значит, заряд на конденсаторе $Q = CU = BlvC = 10^{-5}$ *к*.

Заметим, что при движении проводника с постоянной скоростью заряд на конденсаторе остается неизменным и ток по проводнику не течет.

Рассмотрим более сложную задачу, в которой э. д. с. индукции наводится в двух связанных между собой контурах.

Задача 9. Проводник длины $l = 1$ *м* скользит по горизонтальным рельсам в вертикальном магнитном поле с индукцией $B = 10^{-2}$ *тл*. Концы рельсов замкнуты на сопротивления $R_1 = 1$ *ом* и $R_2 = 2$ *ом* (рис. 7). Определить ток, текущий через проводник, если скорость проводника $v = 10$ *м/с*. Сопротивлением рельсов и проводника пренебречь.

Проводник, рельсы и сопротивления образуют два контура. Э. д. с. индукции, наводимые в этих контурах, одинаковы по величине и равны Blv (см. задачу 5). Однако направлены они в разные стороны. Площадь контура с сопротивлением R_1 при движении проводника увеличивается. В контуре возникает ток, магнитное поле которого ослабляет внешнее поле. Площадь контура с сопротивлением R_2 уменьшается; магнитное поле возникающего в нем тока должно складываться с внешним полем.

Ток через движущийся проводник равен сумме токов, текущих в отдельных контурах: $I = I_1 + I_2$; $I_1 = E_{инд}/R_1 = Blv/R_1$; $I_2 = E_{инд}/R_2 = Blv/R_2$. Поэтому $I = Blv\,(R_1 + R_2)/R_1 R_2 = 0{,}15$ *а*. Направление тока I показано на рисунке 7. Если изменить направление движения проводника, то направления всех токов также изменятся.

Упражнения

1. Возникает ли индукционный ток, если контур

а) движется поступательно в однородном магнитном поле;

б) вращается вокруг оси, лежащей в плоскости контура и перпендикулярной индукции однородного поля;

в) вращается вокруг оси, лежащей в плоскости контура и направленной по вектору индукции однородного поля;

г) движется поступательно мимо полюса прямого магнита (плоскость контура перпендикулярна прямой, соединяющей полюса магнита)?

2. В замкнутую накоротко катушку из медной проволоки вводят магнит, создающий внутри нее поле $B = 100$ *гс*. Какой заряд протекает при этом по катушке? Радиус витка катушки $r = 10$ *см*, площадь сечения проволоки $S = 0{,}1$ *мм*^{2}, удельное сопротивление меди $1{,}75 \cdot 10^{-8}$ *ом·м*.

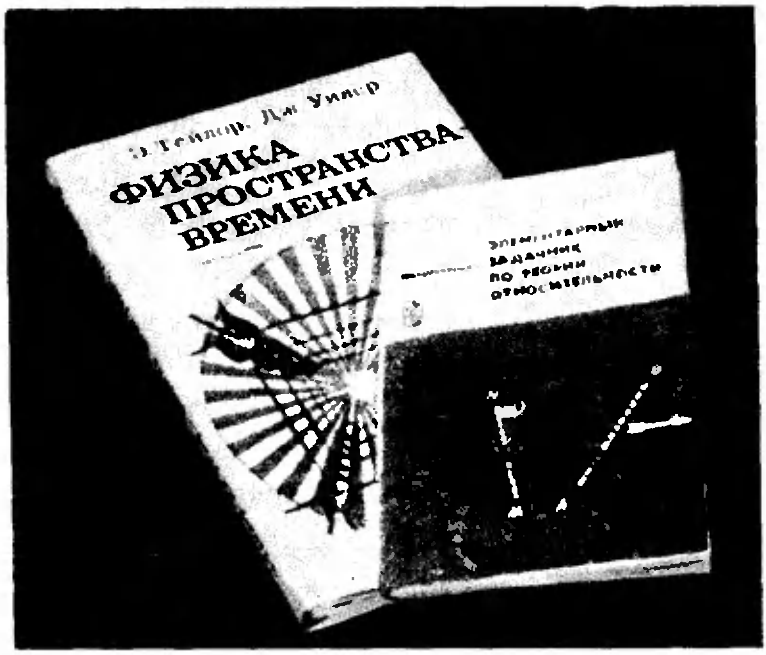
3. Катушка, содержащая $n = 1000$ витков изолированного провода, находится в магнитном поле, индукция которого равномерно меняется со скоростью $\frac{\Delta B}{\Delta t} = 1\ \frac{тл}{с}$. Концы катушки подсоединяют: а) к сопротивлению $R = 10$ *ом*, значительно превосходящему сопротивление катушки; б) к конденсатору емкостью $C = 10$ *мкф*. Определить: а) мощность тепловых потерь на сопротивлении; б) заряд на конденсаторе. Радиус витка катушки $r = 10$ *см*.

4. Одно время считалось, что голубь определяет свое местонахождение по величине магнитного поля Земли, которое ощущает по напряжению, индуцируемому в нем при полете. Оцените величину напряжения между концами крыльев голубя при полете со скоростью $v = 20$ *км/час*, считая, что расстояние между концами крыльев $l = 30$ *см*, а индукция магнитного поля Земли $B = 0{,}5$ *гс*.

Может ли голубь использовать это напряжение для определения своего местонахождения, если в атмосфере существуют случайные электрические поля напряженностью до 10^{-2} *в/см*?

5. По вертикальным рельсам, расположенным в горизонтальном магнитном поле с индукцией B на расстоянии l друг от друга, скользит проводник. Какой максимальной скорости он может достигнуть, если накоротко замкнуть: а) только верхние концы рельсов; б) и верхние, и нижние концы. Масса проводника m, сопротивление его R. Сопротивлением рельсов пренебречь.

Сколько стоит грамм света?



Еще совсем недавно специальная теория относительности была уделом узкого круга специалистов. Всего лет пятнадцать тому назад ее специально изучали только физики. Постепенно она начала проникать в программы технических вузов. А теперь с основами теории Эйнштейна знакомятся на факультативных занятиях тысячи старшеклассников. Еще больше ребят читает популярную литературу по этому вопросу, в изобилии появившуюся за последние несколько лет.

Но если вы хотите по-настоящему изучить теорию относительности, просто читать даже очень хорошие книжки мало. Критерием того, все ли вы осознали, действительно ли поняли, может служить только маленькое самостоятельное исследование — решение задач.

Мы коротко расскажем здесь о двух книгах, которые помогают научиться решать задачи по теории относительности. В одной из них излагается и сама теория относительности, очень ярко и серьезно, но в то же время доступно сильному школьнику старших классов. Речь идет об изданной вторым изданием в 1971 году книге Э. Тейлора и Дж. Уилера «Физика пространства — времени»*). Авторы этой книги — известные американские физики и выдающиеся педагоги. Вторая книга—«Элементарный задачник по теории относительности» Ю. И. Соколовского *). Эта книга издана в серии «Библиотечка физико-математической школы», выпускаемой издательством «Наука». Фамилия автора задачника известна многим читателям в связи с его много раз издававшимися популярными книгами по теории относительности. Книги Э. Тейлора и Дж. Уилера и Ю. И. Соколовского совершенно разные, и такая не совсем обычная рецензия — сразу про две книги — пишется для того, чтобы подчеркнуть то, что их объединяет. Объединяют же эти книги помещенные в них задачи.

Для старшеклассников, решивших изучать теорию относительности, нужны школьные задачи: по крайней мере необходимо, чтобы математический аппарат не выходил за рамки школьной программы. Вообще говоря, таких задач существует не так уж мало, но они разбросаны по разным недоступным для школьников книгам. Теперь старшеклассники и учителя получили хороший подарок — школьные сборники задач по теории относительности. Каждая из указанных нами книг содержит около сотни задач. Есть среди них легкие, доступные начинающему, есть трудные, которые потребуют довольно глубоких знаний. Задачи заставляют

*) Э. Тейлор, Дж. Уилер, Физика пространства — времени, «Мир», 1971 г.

*) Ю. И. Соколовский, Элементарный задачник по теории относительности (с решениями), «Наука», 1971 г.

задумываться над многими казавшимися очевидными вещами. Иногда читатель должен будет перечитать уже прочитанное в других книгах и, быть может, прочитать новые.

Книгу Э. Тейлора и Дж. Уилера можно, конечно, использовать одновременно и как учебник. Научить теории относительности — основная цель ее авторов, и с ней они справились блестяще. Задачник Соколовского требует, чтобы читатель держал вместе с ним на своем столе какую-нибудь из учебных или научно-популярных книг по теории относительности. Уровень книг тоже разный; вполне возможно, что начинающему читателю «Физика пространства—времени» покажется сложной, и тогда следует прежде прочитать какую-нибудь другую книгу, попроще.

Формулировки задач в книге Э. Тейлора и Дж. Уилера иногда неожиданны, но всегда интересны. Загадки и парадоксы теории относительности часто смущают и совсем не просты. «Когда Эйнштейн был ребенком, — пишут Тейлор и Уилер,—он ломал голову над такой загадкой: пусть бегун смотрит на себя в зеркало, которое он держит перед собой в вытянутой руке; если он бежит почти со скоростью света, сможет ли он увидеть себя в зеркале?» Необычные правила сложения скоростей, зависимость времени от системы отсчета, постоянство скорости света во всех инерциальных (то есть движущихся равномерно и прямолинейно друг относительно друга) системах отсчета — разве все это не удивительно? Вопрос, который стоит в заголовке этой рецензии, тоже оказывается не бессмысленным. В задачнике Ю. И. Соколовского эта задача сформулирована так: «Сколько стоит один грамм света при тарифе на электроэнергию 4 копейки за киловатт-час и коэффициенте полезного действия электрического источника света 10%?» Как вы думаете — сколько? Цифра в ответе поражает — оказывается, 10 миллионов рублей. Проверьте, если не верите *).

Вот еще простая задача из этого же задачника: «Писатели-фантасты (С. Лем в «Астронавтах», Г. Мартынов в «Каллистянах» и др.) рассказывают о необычных ощущениях космонавтов при равномерном и прямолинейном полете межзвездного корабля с околосветовой скоростью. Авторы видят причину болезненного состояния космонавтов в увеличении их масс «в соответствии с теорией относительности Эйнштейна». Выскажите суждение о правдоподобности такого влияния околосветовой скорости полета на самочувствие космонавтов».

Основное правило Уилера, которое приводится перед задачами к первой главе книги «Физика пространства — времени», заслуживает того, чтобы его процитировать. Звучит оно так: «Никогда не начинай вычислений, пока не знаешь ответа. Каждому вычислению предпосылай оценочный расчет; привлеки простые физические соображения (симметрию! инвариантность! сохранение!) до того, как начинать подробный вывод; продумай возможные ответы на каждую загадку. Будь смелее, ведь никому нет дела до того, что именно ты предположил. Поэтому делай предположения быстро, интуитивно. Удачные предположения укрепляют эту интуицию. Ошибочные предположения дают полезную встряску». Постарайтесь следовать этому полезному правилу при решении всяких задач.

Во втором издании «Физики пространства — времени» приводятся решения задач, но не спешите заглядывать в них! Все задачи, конечно, вряд ли можно решить. Быть может, это и не нужно, хотя решенная задача — это ответ на еще один каверзный вопрос, знакомство с новым физическим явлением или разрешение старого парадокса.

В целом довольно удачен подбор задач и в книге Ю. И. Соколовского. Иногда, впрочем, хорошие задачи страдают от употребленной терминологии. Довольно тяжеловесно и малопонятно звучат, например, слова: «альфацентрически одновременных событий» (задача №14) или «события M и N, альфацентрически и бетацентрически одноместные событию A» (задача № 15).

Может быть, в задачнике следовало бы уделить больше внимания вопросу об инвариантных величинах. Решения многих трудных задач Ю. И. Соколовский излагает чересчур кратко. Хочется пожелать, чтобы при переиздании задачника они были написаны подробнее.

Обе книжки, о которых здесь рассказано, написаны людьми, имеющими большой педагогический опыт и не один год преподающими теорию относительности. Они, без сомнения, принесут пользу и удовлетворение тем, кто решится их серьезно изучать.

А. Б. Геллер

*) Эта же задача рассматривается в книге Л. Д. Ландау и Ю. Б. Румера «Что такое теория относительности?».

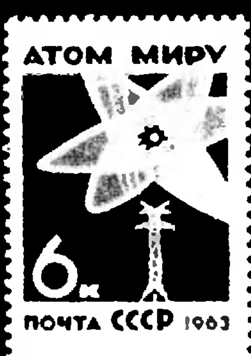

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

АТОМНАЯ ЭНЕРГИЯ НА СЛУЖБЕ МИРА

Использование атомной энергии в мирных целях началось в июле 1954 г., когда в Советском Союзе вошла в строй атомная электростанция Академии Наук СССР в Обнинске. Этому событию посвящена серия из трех марок, выпущенных в январе 1956 г. Одну из этих марок, на которой показан внешний вид этой электростанции, вы видите на фото.

Особую выгоду дает установка атомных реакторов на судах. Так, немногим более 80 кг атомного горючего достаточно ледоколу «Ленин», чтобы плавать круглый год, не заходя в порт для заправки. На фото приведена марка с изображением атомного ледокола «Ленин».

В 1962 г. в Советском Союзе была выпущена серия из двух марок «Атомная энергия на службе мира». Эти марки вы видите на фото. На одной из них в центре — силуэт высотного здания университета, а по краям — условные изображения, символизирующие применение атома в металлургии, медицине, сельском хозяйстве и других областях. На второй марке — контурная карта СССР с условным изображением атома.



В 1963 г. у нас в стране вышла марка, посвященная теме «Атом — миру», с условным изображением атома на фоне линии электропередач. Эта марка приведена на фото. Марки, символизирующие использование атомной энергии в мирных целях, выпускались во многих странах мира. Так, например, интересна марка Чехословакии (см. фото в правом верхнем углу), выпущенная в 1954 г. в серии «Чехословацкое машиностроение». На ней изображены заводские корпуса, а на переднем плане — паровая машина и схема строения атома. Текст на марке гласит: «От паровой машины до атомной электростанции».

На фото также приведены марки Индонезии, Польши, Югославии и марка Организации объединенных наций с символическим изображением атома.

А. В. Алтынис

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, УКАЗАНИЯ

К статье «Фигуры Лиссажу»

1. $v_x = -A_1 p\omega \sin p\omega t,$
$v_y = -A_2 q\omega \sin q\omega t.$

Кривая незамкнута, когда v_x и v_y обращаются в нуль.

$$v_x = 0, \text{ если } p\omega t = k\pi,$$
$$v_y = 0, \text{ если } q\omega t = m\pi$$

Следовательно, $\frac{p}{q} = \frac{k}{m}$ выражается отношением целых чисел.

2. $y = A_2 (2\cos^2 \omega t - 1) =$
$$= A_2 \left(2 \frac{x^2}{A_1^2} - 1\right).$$

Это — часть параболы с вершиной в точке $y = -A_2$ и осью вдоль оси Y (см. рис. 1).

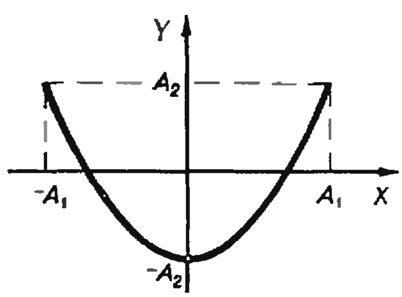


Рис. 1.

К статье «Теорема косинусов и ее следствия»

3. Задача решения не имеет, так как неравенство $\operatorname{tg} \alpha \leqslant \frac{2ab}{a^2 - b^2}$ при $a = 5$, $b = 2$ и $\alpha = 45°$ не выполняется (см. пример 1)

4. $$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$
$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$
$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

5. Показать, что для всякого треугольника имеет место соотношение
$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B - 2\operatorname{ctg} C = \frac{2c^2 - a^2 - b^2}{2S}.$$

6. Установить, что
$$\cos C = \frac{(n-1)(a^2+b^2)}{2nab},$$
и применить неравенство $\frac{a^2+b^2}{ab} \geqslant 2$

7. Воспользоваться неравенством $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \leqslant \frac{a^2}{4S}$, и соотношением $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$.

9. 120°.

10. Пусть $BC = a$, $AB = c$ и $CA = b$. Тогда $|b-c| = |m-n|$ и $a = m + n$. Поэтому по формуле $a^2 = (b-c)^2 + 4S \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ имеем $(m+n)^2 = (m-n)^2 + 4S \operatorname{tg} \frac{A}{2}$. Отсюда $S = mn \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$. В частности, если $\angle A = 90°$, то $S = mn$.

11. Пусть перпендикуляр к отрезку AB, проведенный через его середину, пересекает прямую l в точке O. Тогда $OM = x$, $OA = OB = r$, $\angle AOM = \alpha$, $\angle BOM = \beta$ и
$$\left(\frac{AM}{BM}\right)^2 = \frac{(r-x)^2 + 4rx\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{(r-x)^2 + 4rx \sin^2 \frac{\beta}{2}}.$$

Затем воспользоваться известным неравенством $\frac{a+m}{b+m} \geqslant \frac{a}{b}$ (при $0<a<b$ и $m \geqslant 0$).

12. Воспользуйтесь результатом а) примера 3.

13. Перенесем боковую сторону AB трапеции $ABCD$ на вектор $\overline{BC}$ в положение CF

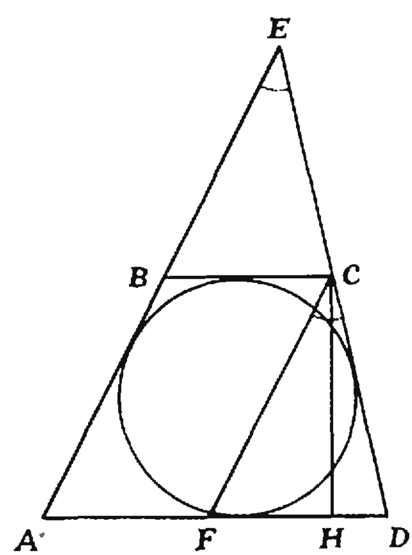


Рис. 2.

(рис. 2). Получим треугольник CDF. Требуется определить угол $\alpha = \angle FCD$.

На основании свойства сторон описанного четырехугольника имеем: $AB + CD = a + b$, так что $CF + CD = a + b$. Кроме того, $DF = a - b$.

Применим к треугольнику CDF формулу (5) (из статьи):

$$DF^2 = (CF + CD)^2 - 4S \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

где $2S = DF \cdot CH$, а $CH = 2r$. Подставив данные, получим

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4(a-b) r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

откуда

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{(a-b) r}{ab}$$

Примечание. Можно доказать, что задача имеет решение тогда и только тогда, когда параметры a, b и r удовлетворяют условию $2r \leqslant \sqrt{ab}$.

14. Воспользуйтесь формулой (1) и тем, что если $A + B + C = \pi$, то $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$.

К задаче М108

Ответ. Пусть $a \geqslant b \geqslant c$, $a + b + c = 2p$. Тогда при $2ab > p^2$ существует одна прямая, делящая периметр и площадь треугольника пополам, при $2ab = p^2$ — две и при $2ab < p^2$ — три.

Указание. Проведем через центр O вписанной окружности прямую, будем поворачивать ее вокруг точки O и следить за тем, по какую сторону от нее лежит больше половины площади (или, что то же самое,

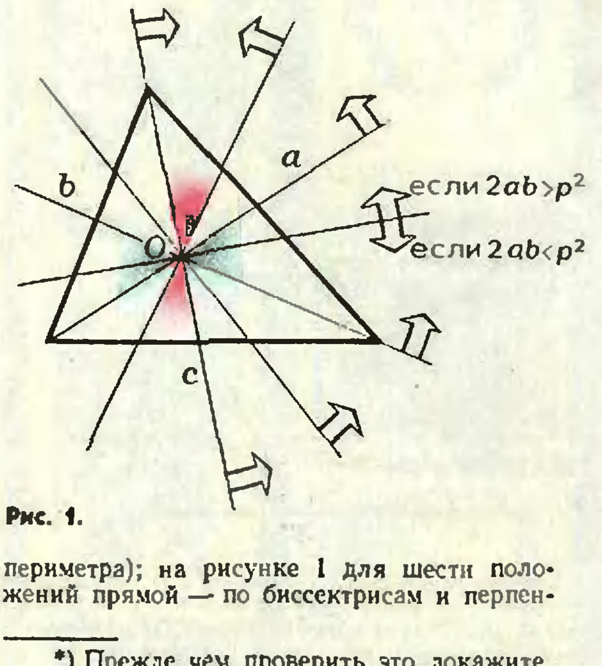


Рис. 1.

периметра); на рисунке 1 для шести положений прямой — по биссектрисам и перпендикулярно к ним — стрелка указывает, где лежит большая часть треугольника *). Для нас важны именно эти положения, поскольку в промежутках между ними величина площади (периметра), лежащей в одной стороне (полуплоскости) — а значит, и в другой — меняется монотонно. После этого уже легко понять, что в розовом секторе лежит ровно одна нужная нам прямая (при любых $a \geqslant b \geqslant c$), в каждом из голубых — еще по одной, если только $2ab < p^2$.

*) Прежде чем проверить это, докажите, что биссектрисы всегда делят полный угол при точке O на шесть острых углов.

К задаче М109

Пусть d НОД (n, k), $n = dn_1$, $k = dk_1$. Тогда (см. пункт 5 «Линейное уравнение» в статье В. Н. Вагутена, стр. 33) существуют такие целые x и y, что $kx - ny = d$. Изменив знак у x, y, можно считать, что $x \geqslant 0$, а $kx - ny$ равно d или $-d$.

Пусть k_1 нечетно. Тогда y можно считать четным (иначе можно заменить x на $x + n_1$, а y на $y + k_1$). Тогда, если заменить знаки в первых k вершинах, затем в следующих за ними k вершинах и т. д. x раз, то в результате изменится знак только у d вершин, стоящих подряд. После этого задача становится, очевидно, эквивалентной той, где разрешается изменять знак у d вершин, стоящих подряд.

Пусть k_1 четно. Тогда y нечетно (ведь $k_1x - n_1y = 1$). Используя то, что $kx - ny = \pm d$, мы можем поменять знак у всех вершин, кроме d, стоящих подряд. Следовательно, мы можем оставить неизменным знак у всех вершин, кроме двух, отстоящих на d друг от друга. Таким образом, мы сможем получить любую комбинацию знаков, у которой в вершинах каждого правильного n_1-угольника та же четность количества минусов, что у первоначального расположения. Легко видеть, что другие получить нельзя.

Ответ. Пусть каждому расположению знаков соответствует набор $(x_1, x_2, \ldots, x_\alpha)$, где x_i равно 0 или 1 в зависимости от того, четное или нечетное количество минусов стоит в вершинах с номерами $i + d_j$ $(j = 0, 1, \ldots, n_1 - 1)$. Тогда при k_1 четном два расположения знаков можно перевести одно в другое в том и только в том случае, если соответствующие им наборы одинаковы, при k_1 нечетном — если они одинаковы или противоположны.

К статье «Применение тригонометрии при решении геометрических задач»

1. $$AD = \frac{a \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right)}{\sin\alpha \cos\beta}.$$

2. $$V = \frac{S\sqrt{S}}{6} \cdot \operatorname{tg}\beta : \sqrt{\sin\alpha}.$$

3. $\dfrac{l\,\mathrm{tg}\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cos\dfrac{\beta}{2}}\times$

$\times\sqrt{\sin\left(\alpha+\dfrac{\beta}{2}\right)\sin\left(\alpha-\dfrac{\beta}{2}\right)}$.

4. $3\sqrt{5}$ *см*, 10 *см*, 11 *см*.

7. $\arcsin(\operatorname{cosec}\alpha\times$

$\times\sqrt{[\cos(\alpha-\beta)-\cos\gamma]\cdot[\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta)]})$.

8. $\dfrac{S_\square}{S_\triangle}=\dfrac{ab(a+b+2)}{(a+1)(b+1)(a+b+1)}$.

К статье «Варианты вступительных экзаменов по математике 1971 года»

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМЕНИ В. И. ЛЕНИНА

Вариант 1

1. $\dfrac{2a^3(2\sqrt{3}-3)}{3}$. Указание. Заметив (и доказав), что $\angle ASC=\angle BSD=90^\circ$ и что диагонали сечения взаимно перпендикулярны, находим диагонали и площадь четырехугольника.

2. 1 *м/сек*; 1,2 *м/сек*.

3. $x<-1-\sqrt{2}$; $0<x<\sqrt{2}-1$; $x>1$.

4. $x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$. Указание. ОДЗ исходного уравнения определяется условиями: 1) $\cos x+1>0$; 2) $\sin x>0$; 3) $\sin x\neq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Перейдя к уравнению

$$1+\cos x=2\sin^2 x$$

и выразив $\sin^2 x$ через $1-\cos^2 x$, получим совокупность уравнений: 1) $\cos x+1=0$, 2) $\cos x=\dfrac{1}{2}$. Из решений выбираем только те, которые входят в ОДЗ исходного уравнения, то есть $x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$.

Замечание. Если $2\sin^2 x$ заменить на $1-\cos 2x$, то получим уравнение $\cos x=-\cos 2x$, откуда $x_1=\pi+2\pi n$, $x_2=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2}{3}\pi n$; $\sin x_1=0$ и потому x_1 не входит в ОДЗ, а из решений серии $\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2}{3}\pi n$ надо отобрать те, которые входят в ОДЗ. Для этого разбиваем серию $\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2}{3}\pi n$ на 3, как говорят, элементарные серии:

$$x_1=\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ x_2=-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ x_3=\pi+2\pi n,$$

из которых только $\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$ входит в ОДЗ.

Вариант 2

1. $\dfrac{1}{8}(a^2+2ab)\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Замечание. Напомним, что центр вписанной в треугольник окружности лежит в точке пересечения биссектрис.

2. 40 *км/ч*; 50 *км/ч*.

3. $x=5$.

4. $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$. Указание. Заменив $\cos^2 x$ на $1-\sin^2 x$ и разложив уравнение на множители, получим совокупность уравнений: 1) $\sin x=1$ и 2) $\sin x+\cos x=2$. Второе уравнение решений не имеет.

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМЕНИ А. И. ГЕРЦЕНА

Математический факультет

1. 1/9. 2. $\alpha>5$.

3. $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$, где $k=0,\ \pm1,\ \pm2\ldots$

4. $\dfrac{S^{3/2}\sin\alpha\sqrt{\cos\alpha}}{6(1+\cos\alpha)^{3/2}}$.

Физический факультет

1. $1-\sqrt{a/x}$. 2. $x_1=-1$, $x_2=5$.

3. $1/\sin\alpha$. 4. $\dfrac{\pi h^3(1-\cos\alpha)}{3\cos\alpha}$

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГОРНЫЙ ИНСТИТУТ

1. $x=1$, $y=0$. Указание. Введите новые неизвестные

$$u=\frac{1}{x+y},\quad v=\frac{1}{x-y}.$$

2. Указание. Заметьте, что

$$2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta).$$

3. $x=1$. Указание. Внесите x под знак логарифма и придите к уравнению $10^x+20^x=6\cdot5^x$. Заметьте, что $5^x>0$, а следовательно, это уравнение можно сократить на 5^x, получив квадратное уравнение относительно неизвестного $y=2^x$.

4. $b < -\frac{3}{2}$ или $b > -1$. Указание. Выражение имеет смысл тогда, когда

$$1+\frac{6b+5}{2b+3}>0.$$

Решите это неравенство, приведя правую часть к общему знаменателю, например, методом интервалов.

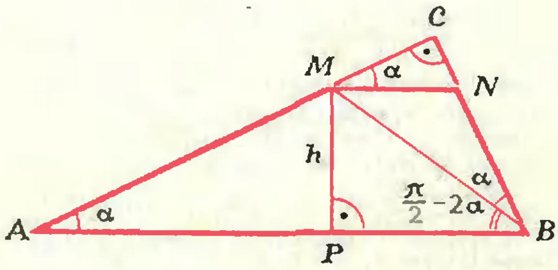


Рис. 1.

5. $\frac{2h^2}{\sin 4\alpha}$. Указание. Достройте трапецию $AMNB$ до прямоугольного треугольника ABC (см. рис. 1). Тогда AB можно выразить через $MP = h$ и углы CAB и MBA:

$$AB = h\operatorname{ctg}\alpha + h\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right).$$

MN найдите из $\triangle MCN$, предварительно вычислив MC как разность AC и AM.

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМЕНИ ЛЕНСОВЕТА

1. Указание. Разложите $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha$ по формуле разности квадратов.

2. Углы между боковыми гранями и плоскостью основания равны $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$, а углы между соседними боковыми гранями равны $2\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$. Указание. Докажите, что пирамида — правильная. Обозначьте боковое ребро пирамиды через x и выразите через него стороны треугольников, содержащих рассматриваемые углы.

3. $a = 0$ или $a = -1$. См. также рисунок 2. Указание. Данные графики всегда проходят через точку $(0, -1)$. Поэтому достаточно потребовать, чтобы уравнение

$$ax - 1 = \frac{1}{x-1}$$

не имело решений, отличных от $x = 0$.

4. $x > \sqrt{5}$ или $\frac{1}{\sqrt{5}} < x < 1$. Указание. Функция определена, если выполняются условия: $x > 0$, $x \neq 1$, $\cos\frac{3\pi}{1+x^2} > 0$. Последнее условие приведите к виду $-\frac{1}{2}+2k < \frac{3}{1+x^2} < \frac{1}{2}+2k$. Убедитесь, что решения существуют только при $k = 0$ или $k = 1$ (проще всего это сделать с помощью рисунка 3, рассматривая график функции $y = \frac{3}{1+x^2}$ и полосы $-\frac{1}{2}+2k < y < \frac{1}{2}+2k$).

5. $a > \frac{1}{2}$. Указание. Рассмотрите отдельно случаи $0 < a+x < 1$ и $a+x > 1$. В первом из них получится система неравенств $x < a-1$, $x < 1-a$, $x > 0$; докажите ее несовместность при любых значениях a. Во втором случае получится система $x > 0$, $x > a-1$, $x > 1-a$, $x < a$. Установите, что при $1-a \geqslant 0$, эта система совместна, когда $\frac{1}{2} < a \leqslant 1$, а при $a-1 > 0$ эта система всегда совместна.

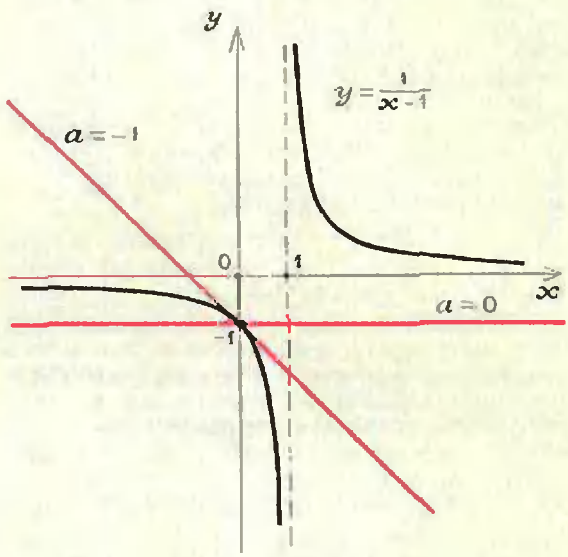


Рис. 2.

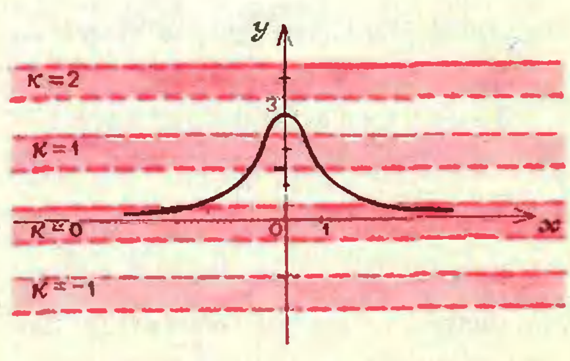


Рис. 3.

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ

1. -27.

2. $2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$. Указание. Воспользуйтесь формулами приведения и соотношением

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2}-1=-\cos\alpha.$$

3. $\frac{d^3}{12}\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$. Указание. Рассмотрите какой-либо прямоугольный треугольник, образованный стороной ромба и его диагоналями. Выразите через d и α его площадь и высоту, опущенную на гипотенузу.

4. $x=25$. Указание. Представьте каждое слагаемое в виде степеней двойки.

5. $(b-a)^2$. Указание. Заметьте, что $\frac{1}{\log_b a}=\log_a b$.

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ИНСТИТУТ ТОЧНОЙ МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

1. $\sqrt{x}$.

2. $x=-2$. Указание. Один из самых красивых методов решения этого уравнения заключается в «угадывании» корня $x=-2$. После этого докажите, что уравнение не имеет других корней, так как в левой части уравнения стоит строго возрастающая функция.

3. $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$ или $x=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$ (k, n — любые целые числа). Указание. Замените $\cos 7x+\cos x$ и $\cos^2 2x-\sin^2 2x$, используя известные соотношения.

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

1. a^x. Указание. Представьте последовательно все подкоренные выражения в виде квадратов.

2. $x=\frac{1}{12}$ или $x=\frac{9}{4}$. Указание. Перейдите к новому неизвестному $y=\log_3 4x$.

3. $\begin{cases} x=0, \\ y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ или $\begin{cases} x=1, \\ y=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-1, \\ y=-1. \end{cases}$

Указание. Освободитесь от членов, не содержащих неизвестные, и придите к уравнению относительно xy.

4. $x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$ (k — любое целое число). Указание. Приведите выражение в левой части уравнения к общему знаменателю и разложите $1-\sin^4 x$ по формуле разности квадратов.

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ХОЛОДИЛЬНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

1. $V=\frac{3}{2}\pi a^3$; $\quad S=4\sqrt{3}\pi a^2$.

Указание. Продолжите стороны ромба до пересечения с осью вращения. Заметьте, что объем данного тела вращения равен сумме объемов двух равных больших конусов минус сумма объемов четырех равных маленьких конусов. Заметьте также, что поверхность тела вращения равна сумме боковых поверхностей больших конусов.

2. $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$ (k — любое целое число). Указание. Приведите уравнение к общему знаменателю, после чего разложите выражение в левой части по формуле разности квадратов. Представьте левую часть в виде произведения и сократите обе части на общий ненулевой множитель.

3. $\begin{cases} x=8, \\ y=2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=\frac{1}{4}, \\ y=64. \end{cases}$

Указание. Заметьте, что $\log_x y=\frac{1}{\log_y x}$. Решите первое уравнение относительно $\log_y x$.

4. $4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$.

5. $x=100$. Указание. Сгруппируйте слагаемые с одинаковыми основаниями в разных частях уравнения, после чего приведите подобные члены.

ЛЕНИНГРАДСКАЯ ЛЕСОТЕХНИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ ИМЕНИ С. М. КИРОВА

1. $a_1=\frac{2}{3}$; $q=2$. Указание. Перейдите к неизвестным a_1 и q, где через q обозначен знаменатель прогрессии. Разделите первое уравнение на второе и полученное уравнение относительно q решите, используя разложение многочлена на множители.

2. $x=5$. Указание. Приведите уравнение к общему знаменателю, после чего воспользуйтесь формулами логарифма степени и произведения.

3. $x=2k\pi$ или $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{2}+2k\pi$ (k — любое целое число). Указание. Воспользуйтесь формулой $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$.

4. $\frac{R^2\operatorname{tg}\alpha}{\cos\varphi}\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\varphi}$. Указание. Проведите плоскость через ось конуса и радиус, перпендикулярный хорде. Рассмотрите получившиеся прямоугольные треугольники.

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ЦЕЛЛЮЛОЗНО-БУМАЖНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

1. $x = \pi(2n+1)$ или

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{3} + k\pi$$

(n, k — любые целые числа). Указание. Воспользуйтесь формулами приведения, после чего разложите обе части уравнения на множители, предварительно сгруппировав их подходящим образом.

2. $x = 4$. Указание. Упростите выражение в правой части уравнения.

3. Указание. Воспользуйтесь формулами приведения и формулами, выражающими тангенс половинного аргумента через косинус основного аргумента.

4. $\sqrt{a^2 - 1}$.

К статье «Решение задач по электростатике»

1. Разность потенциалов нужно уменьшить на 980 *в*.

2. Электрометр будет показывать э. д. с. гальванического элемента независимо от величины емкости конденсатора.

3. Разность потенциалов $\Delta\varphi_{AB} = E_1 - \Delta\varphi_1 = -E_2 + \Delta\varphi_2$, где $\Delta\varphi_1 = \frac{q}{C_1}$ и $\Delta\varphi_2 = \frac{q}{C_2}$ разности потенциалов между пластинами конденсаторов. Исключая из этих уравнений заряд q, получим:

$$\Delta\varphi_{AB} = \frac{C_1E_1 - C_2E_2}{C_1 + C_2} = -1{,}3\ в.$$

4. Заряды конденсаторов до соединения: $q_1 = C_1\Delta\varphi_1$ и $q_2 = C_2\Delta\varphi_2$. Общий заряд на обкладках после соединения $q = q_1 + q_2$. Общая емкость конденсаторов после соединения $C = C_1 + C_2$. Искомая разность потенциалов $\Delta\varphi = \frac{q}{C} = \frac{C_1\Delta\varphi_1 + C_2\Delta\varphi_2}{C_1 + C_2} = 40\ в.$

К статье «Электромагнитная индукция»

1. а) Не возникает, так как при движении не меняются ни величина магнитной индукции, ни угол, который она составляет с плоскостью контура, ни площадь контура.

б) Возникает, так как при вращении меняется угол между вектором магнитной индукции и плоскостью контура.

в) Не возникает, так как линии магнитной индукции лежат в плоскости контура и магнитный поток через контур всегда равен нулю.

г) Возникает, так как вследствие неоднородности магнитного поля прямого магнита меняется величина вектора магнитной индукции.

2. Заряд, протекающий по катушке при введении магнита, равен

$$Q = \frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{n\pi r^2 BS}{\rho 2\pi r n} = \frac{rSB}{2\rho} \approx 3\cdot 10^{-3} к.$$

3. а) В контуре, образуемом катушкой и сопротивлением, действует э. д. с. индукции

$$E_{инд} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = n\pi r^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} \approx 31\ в.$$

Под действием этой э. д. с. в контуре течет постоянный ток $I = E_{инд}/R \approx 3{,}1$ *а* и на сопротивлении R выделяется $W = I^2R = 96$ *вт*. Заряд на конденсаторе

$$Q = CU = Cn\pi r^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} \approx 3\cdot 10^{-4} к.$$

4. Разность потенциалов, возникающая на концах проводника длины l, движущегося в перпендикулярном магнитном поле индукции B со скоростью v: $U = Blv \approx 10^{-4}$ *в*. Соответствующая этой разности потенциалов напряженность электрического поля $E \approx U/l \approx 10^{-5} - 10^{-6}$ *в/см*, что значительно меньше напряженности случайных электрических полей в атмосфере. Ориентироваться таким образом голубь не может.

5. В первом случае ток через проводник равен $I = E_{инд}/R = Blv/R$. Тормозящая сила пропорциональна I, а следовательно, и скорости проводника v. Скорость проводника будет расти до тех пор, пока сила F не уравновесит силу тяжести P: $mg = BlI = B^2l^2v/R$. Отсюда максимальная скорость проводника

$$v = mgR/B^2l^2.$$

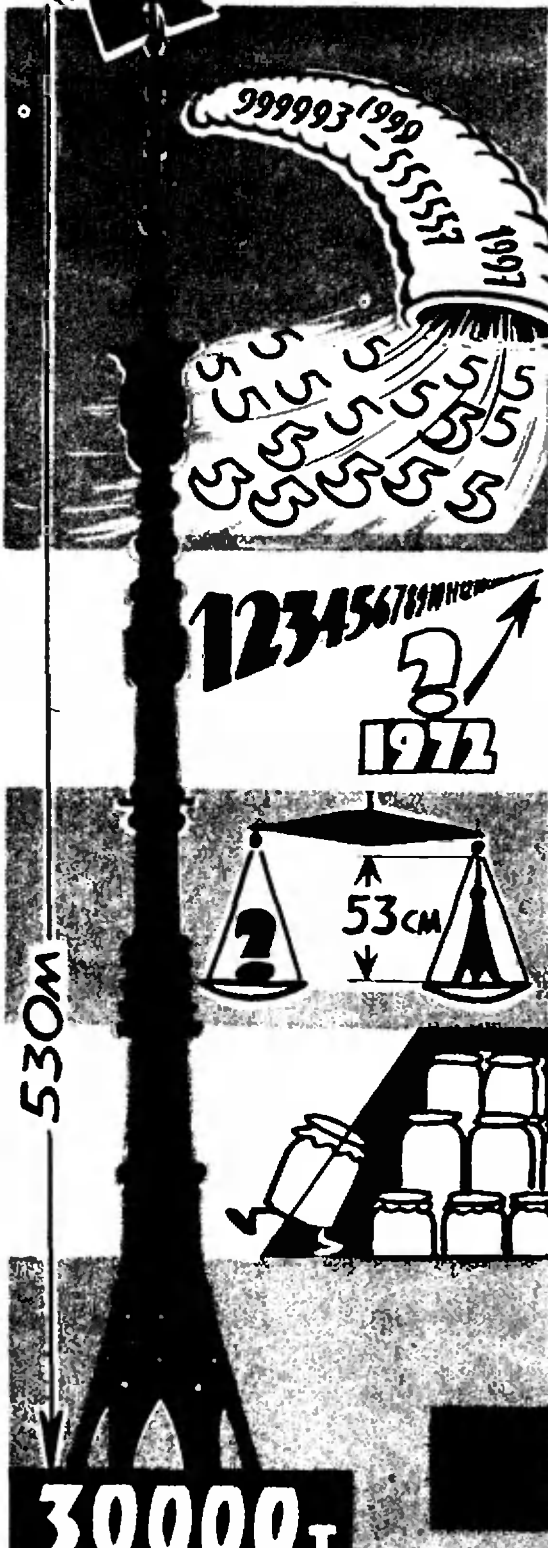
Во втором случае имеется два контура, образованных движущимся проводником, рельсами и каждой перемычкой. Э. д. с. индукции в них одинаковы по величине $E_{инд} = Blv$ и равны IR, где I — ток через движущийся проводник. Отсюда ток через движущийся проводник $I = Blv/R$. В этом случае максимальная скорость проводника та же.

К заметке «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант» № 6, 3-я стр. обложки)

1. 26, 14.
2. Каждая сумма равна сумме чисел, стоящих у вершин треугольника.
3. 3155.
4. —3, —5, —7, —9.
5. 33, 43.
6. А сколько вам лет?

КВАНТ
ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ



1. Доказать, что разность

$$999993^{1999}-555557^{1997}$$

кратна пяти.

2. Для того, чтобы проверить горизонтальность поверхности, строители пользуются прибором, который называют плотничьим уровнем. В изогнутой трубке, заполненной водой, находится пузырек воздуха. Если уровень лежит не горизонтально, пузырек смещается к краю трубки. Когда пузырек больше: в теплую или в холодную погоду?

3. Выпишем подряд, начиная с 1, числа натурального ряда:

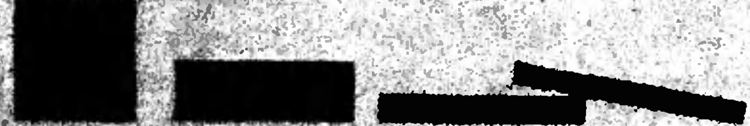
123456789101112131415161718192021...

Какая цифра окажется на 1972-м месте?

4. Останкинская телебашня высотой 530 метров весит 30000 тонн. Сколько будет весить точная модель этой башни высотою 53 см?

5. В погребе стоит 20 одинаковых банок с вареньем. В 8 банках клубничное варенье, в 7 — малиновое, в 5 — вишневое. Каково наибольшее число банок, которые можно в темноте вынести из погреба с уверенностью, что там осталось еще хотя бы 4 банки одного сорта варенья и 3 банки другого?

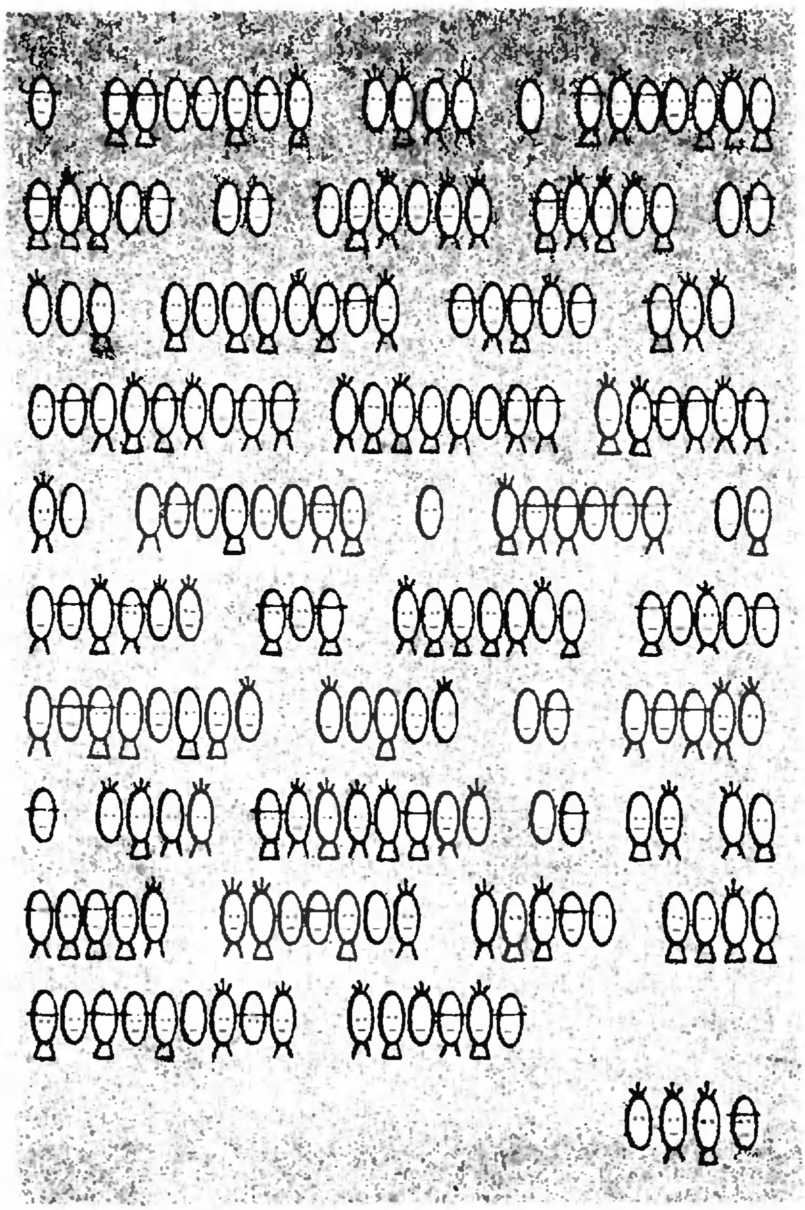
6. Доказать, что из всех прямоугольников одного и того же периметра наибольшую площадь имеет квадрат.



ЦЕНА 30 коп.

ИНДЕКС 70465

Квант 7



НЕ ПРОПАДАЕТ ЛИ В ВАС ШЕРЛОК ХОЛМС!

Федя договорился с бывшим одноклассником, живущим в деревне, что проведет у него отпуск. Его товарищ собирался ехать в тренировочный лагерь, и весь его дом должен был остаться в распоряжении Феди. Федя на целые сутки задержался в городе, и когда он с вещами наконец выбрался в деревню, товарища уже не было, а дверь была на замке. Однако в щели Федя нашел адресованное ему письмо, содержание которого передано на рисунке.

Федя сразу узнал тайнопись, которой они пользовались в школьные годы, но к несчастью он успел за прошедшие годы забыть шифр. Он помнил лишь то, что каждой рожице соответствовала определенная буква, причем буквы Е и Ё не различались.

Однако после некоторого раздумья Феде все же удалось расшифровать тайнопись, найти ключ от двери и попасть в дом.

Как звали школьного товарища Феди, и что он писал в этом письме?