

# Квант

11  
НОЯБРЬ  
1972

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ  
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



Главный редактор — академик **И. К. Кикоин**

Первый заместитель главного редактора — академик **А. Н. Колмогоров**

**Редакционная коллегия:**

Л. А. Арцимович, М. П. Башмаков, С. Т. Беляев, В. Г. Болтянский, И. П. Бронштейн, Н. Б. Васильев, П. Ф. Гинзбург, Ю. И. Ефремов, В. Г. Зубов, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, А. Н. Климаков (*главный художник*), С. М. Козел, В. А. Лешковцев (*зам. главного редактора*), Л. Г. Макар-Лимаков, А. И. Маркушевич, М. Д. Миллионщиков, П. А. Патрикеева, П. С. Петраков, П. Х. Розов, А. П. Савин, П. Ш. Слободенский, М. Л. Смолянский (*зам. главного редактора*), Я. А. Смородинский, В. А. Фабрикант, А. Т. Цветков, М. П. Шаскольская, С. П. Шварцбург, А. П. Шринов.



На первой и второй страницах обложки изображены ледники восточного Кавказа (район горы Чунха). Механизм движения ледников подробно рассмотрен в статье В. Г. Брэгга «О структуре льда», опубликованной на стр. 11.

Фото Г. И. Анохина.

Заведующая редакцией **Л. В. Чернова**. Главный художник **А. И. Климаков**  
Художественный редактор **Т. М. Макарова**. Корректор **Л. Сомова**  
Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы  
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, тел. 234-08-11, 234-07-93

Введено в набор 26/IX-1972 г.

Подписано в печать 26/IX-1972 г.

Бумага 70×100<sup>1/16</sup>

Уч.-изд. л. 4, Уч.-изд. л. 5,2. Уч.-изд. л. 5,93. Тираж 313370 экз. Т-03400 Цена 30 коп. Зак. 1437.

Издательство «Наука» Фабрика-комбинат Главполиграфпрома  
Государственного комитета Совета Министров СССР  
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли  
г. Цехов, Московской области

**РУКОПИСИ НЕ ВОЗВРАЩАЮТСЯ**



ОСНОВАН  
В  
1970 ГОДУ

# Квант

11  
НОЯБРЬ  
1972

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ  
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

## В НОМЕРЕ

- |    |   |                           |
|----|---|---------------------------|
| 2  | Клетчатые доски и полимино                | <i>А. Ю. Соifer</i>       |
| 11 | О структуре льда                          | <i>В. Г. Брэгг</i>        |
| 18 | Машина учится распознавать                | <i>А. С. Варпаховский</i> |
| 22 | У нас в гостях журнал «Земля и Вселенная» |                           |
| 24 | СЕТІ в вопросах и задачах                 | <i>Л. М. Гиндилис</i>     |
| 29 | Ракетой к Солнцу                          | <i>В. И. Левантовский</i> |
| 31 | Гений XVIII века                          | <i>А. Я. Яковлев</i>      |

## ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- |    |            |                  |
|----|------------|------------------|
| 34 | Лучи света | <i>Х. Рачлис</i> |
|----|------------|------------------|

## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- |    |                                    |
|----|------------------------------------|
| 40 | Задачи М171—М175, Ф183—Ф187        |
| 42 | Решения задач М129—М134, Ф148—Ф152 |

## ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- |    |  |                       |
|----|--|-----------------------|
| 52 | Расстояния между скрещивающимися прямыми | <i>М. Л. Крайзман</i> |
|----|--|-----------------------|

## ИНФОРМАЦИЯ

- |    |   |  |
|----|---|--|
| 58 | XIV Международная математическая олимпиада школьников | <i>В. А. Скворцов,<br/>И. С. Петраков,<br/>С. Белкин,<br/>В. Шварц</i> |
|----|---|--|

## РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

- |    |                              |                        |
|----|------------------------------|------------------------|
| 61 | Лаборатория в единой комнате | <i>В. А. Лешковцев</i> |
|----|------------------------------|------------------------|

## УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

- |    |                              |                       |
|----|------------------------------|-----------------------|
| 62 | Марки, посвященные Л. Эйлеру | <i>А. В. Алатыкис</i> |
|----|------------------------------|-----------------------|

## ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

### «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

(3-я стр. обложки)

СМЕСЬ (стр. 21, 39)

# Клетчатые доски и полимино

А. Ю. Сойфер

Профессор Южнокалифорнийского университета С. Голомб — автор ряда работ по теории информации, теории кодирования, математической статистике и их приложениям к теории математических машин и генетике. Но не эти работы, представляющие безусловный интерес для специалистов, определили широкую популярность имени профессора Голомба — ею он обязан прежде всего придуманной им в часы досуга игре, точнее, целой серии игр, связанных с так называемым «полимино». Голомб опубликовал в 1965 году книгу «Полимино», содержащую много красивых и интересных математических задач. Часть этих и им подобных задач известна нашему читателю по недавно вышедшей в издательстве «Мир» книге Мартина Гарднера «Математические головоломки и развлечения»\*) (главы 12 и 46), а также по серии публикаций в разделе «Психологический практикум» журнала «Наука и жизнь» за 1967—1968 гг., где, в частности, описаны голомбовские игры «пентамино» и «гексатрион» и ряд связанных с ними задач.

«История» полимино начинается со статьи Голомба «Шахматные доски и полимино», которую он, будучи еще аспирантом Гарвардского университета, опубликовал в 1954 году в журнале *American Mathematical Monthly* («Американский математический ежемесячник»). Публикуемый отрывок из этой статьи («А. М. М.», 61 № 10. Перевод И. И. Яглома), введет вас в круг основных понятий, связанных с полимино, даст примеры «типичных» задач на полимино. В идущей далее статье пойдет речь уже о некоторых более общих задачах на ту же тему. Итак, слово С. Голомбу.

Мы начнем с хорошо известной задачи:

*дана шахматная доска, из которой вырезана пара противоположных угловых клеток (рис. 1) и дана коробка домино, каждая косточка которого покрывает ровно две клетки шахматной доски. Возможно ли покрыть эту доску с помощью 31-й косточки домино?*

Ответ на этот вопрос гласит: «Нет»; для доказательства достаточно рассмотреть обычную раскраску шахматной доски (рис. 1). Каждая положенная на доску и покрывающая два квадрата косточка домино покрывает один светлый и один темный квадрат,

а  $n$  косточек домино —  $n$  светлых и  $n$  темных квадратов, то есть поровну тех и других. Но изображенная на рисунке 1 шахматная доска содержит больше темных клеток, чем светлых. Поэтому ее и нельзя покрыть косточками домино.

Мы по-прежнему будем использовать в качестве «игрового поля» обычную шахматную доску размера  $8 \times 8$ , но обобщим домино в «полимино» — и наши теоремы охватят все простейшие типы полимино, изображенные на рисунке 2. Более точно: мы определим  $n$ -мино как совокупность  $n$  квадратов шахматной доски, сгруппированных «по принципу ладьи», то есть так, что поставленная на любую клетку  $n$ -мино ладья может

\*) Издательство «Мир», М., 1971.

за конечное число ходов перейти на любую другую клетку того же  $n$ -мино.

Сначала мы рассмотрим тримино. Ясно, что шахматную доску размера  $8 \times 8$  нельзя покрыть тримино, так как 64 не делится на 3. Попробуем вместо этого покрыть шахматную доску 21-м тримино и одним мономино.

Шахматную доску нельзя покрыть 21-м прямым тримино и одним мономино, расположенным в верхнем левом углу доски. Чтобы доказать это, мы раскрасим теперь доску в три цвета:  $a$ ,  $b$  и  $c$  (рис. 3). Как видите, у нас получилось 21 поле цвета  $a$ , 22 поля цвета  $b$  и 21 поле цвета  $c$ . Каждое прямое тримино покрывает одно поле цвета  $a$ , одно поле цвета  $b$  и одно поле цвета  $c$ , то есть прямые тримино всегда покрывают одинаковое число  $a$ -клеток,  $b$ -клеток, и  $c$ -клеток. Верхний левый угол — это  $a$ -клетка и после покрытия ее мономино у нас останутся неравные количества  $a$ -,  $b$ - и  $c$ -клеток. Следовательно, покрыть оставшиеся 63 клетки прямыми тримино невозможно.

Точно так же мы убеждаемся, что после покрытия мономино любой  $a$ - или  $c$ -клетки оставшуюся часть доски нельзя покрыть прямыми тримино. Остается рассмотреть лишь  $b$ -клетки. Но если мономино покрывает, например,  $b$ -клетку, расположенную в нижнем левом углу, то в силу симметрии доски относительно изображенной на рисунке 3 прямой  $x$  мы приходим к уже рассмотренной задаче покрытия прямыми тримино доски, в верхнем левом углу которой лежит мономино. Верхний левый угол доски — это  $a$ -клетка, и в этом случае покрытие невозможно; значит, оно невозможно и тогда, когда мономино лежит в нижнем левом углу.

Таким образом, устанавливается, что для того, чтобы покрытие было возможно, мономино должно покрывать непременно такую  $b$ -клетку, которая относительно прямых  $x$  и  $y$  (см. рис. 3) симметрична также  $b$ -клеткам. Единственные такие клет-

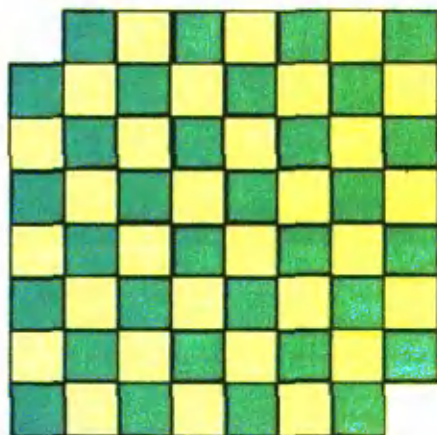


Рис. 1.

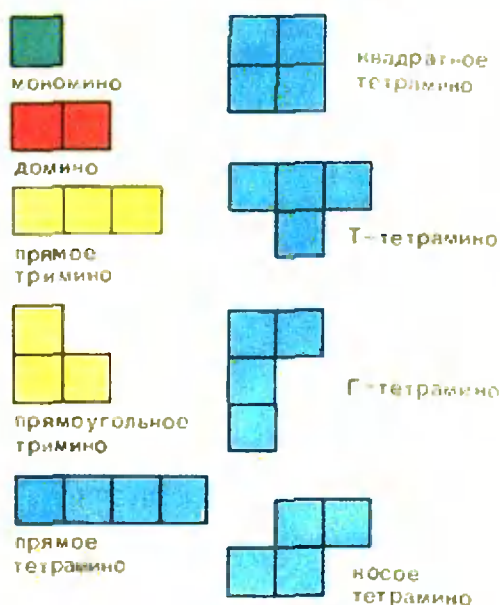


Рис. 2.

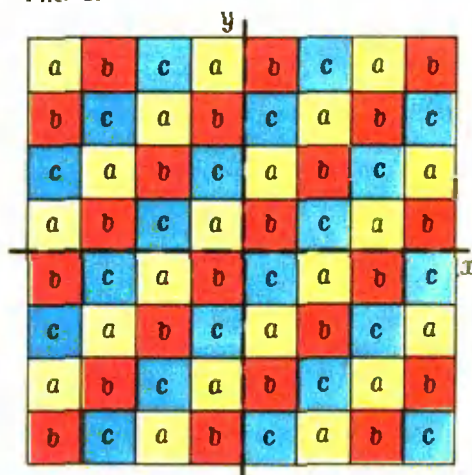


Рис. 3.



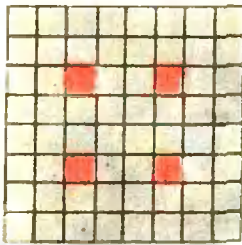


Рис. 4.

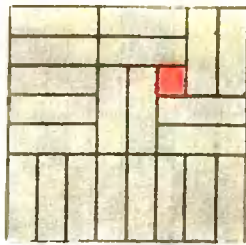


Рис. 5.

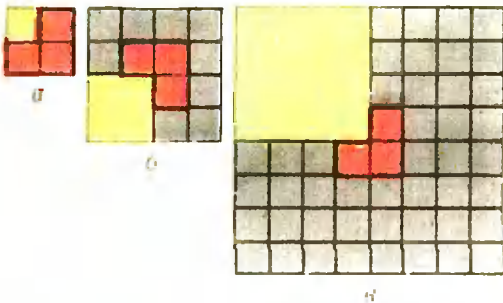


Рис. 6.

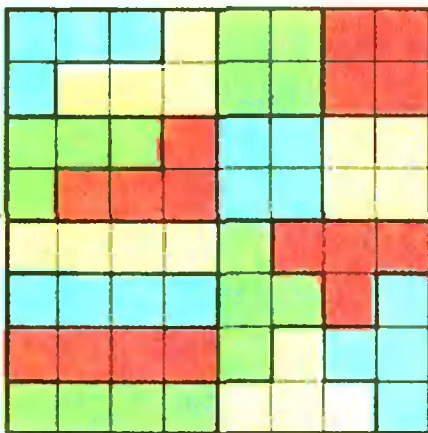


Рис. 7.

ки — это те, что закрашены на рисунке 4. А из рисунка 5 следует, что если мономино покрывает одну из этих клеток, то оставшуюся часть доски действительно можно покрыть прямыми тримино.

Итак, *необходимое и достаточное условие возможности покрытия шахматной доски одним мономино и 21-м прямым тримино состоит в том, что мономино покрывает одну из закрашенных на рисунке 4 клеток.*

До сих пор мы имели дело с «доказательствами невозможности». Следующий результат имеет противоположный характер: *независимо от того, какую клетку шахматной доски занимает мономино, оставшиеся клетки могут быть покрыты 21-м прямоугольным тримино.*

Доказательство проводится по индукции для шахматной доски «общего вида» размером  $2^n \times 2^n$ . Для доски  $2 \times 2$  ясно, что где бы ни лежало на ней мономино, оставшиеся три клетки можно покрыть прямоугольным тримино (рис. 6, а). Взяв теперь доску размером  $4 \times 4$ , мы разделим ее на четыре части, размером каждая  $2 \times 2$  (рис. 6, б). Пусть мономино покрывает клетку, скажем, желтой части на рисунке 6, б. Так как каждая четверть доски — это доска размера  $2 \times 2$ , то ее можно покрыть одним тримино и одним мономино, покрывающим произвольную клетку этой доски. В желтой части доски мономино уже есть; что же касается остальных трех четвертей, то мы расположим на них мономино в центральных (для большой доски) клетках — после этого мы сможем заменить наши мономино на одно прямоугольное тримино (см. тот же рисунок 6, б). Итак, мы покрыли шахматную доску размером  $4 \times 4$  одним (произвольно расположенным) мономино и пятью прямоугольными тримино.

Случай доски  $8 \times 8$ , как и самый общий случай, рассматриваются аналогично (см. рис. 6, в).

Теперь перейдем к тетрамино. Шахматную доску легко полностью покрыть прямыми, квадратными. Т-тетрамино или Г-тетрамино — это ясно из рисунка 7. С другой стороны, покрыть доску косыми тетрамино невозможно — ведь косые тетрамино невозможно расположить на доске даже так, чтобы полностью покрыть ряд клеток, примыкающих к какой-либо одной стороне доски...

\* \*

Продолжим занятия полимино, начатые знакомством со статьей профессора Голомба.

Вы уже видели, что некоторые задачи на полимино вовсе не предполагают непременно, что речь идет о «стандартной» шахматной доске  $8 \times 8$ ; мы рассматривали и доски  $2^n \times 2^n$  для произвольного натурального числа  $n$ . Так пойдём теперь дальше и будем говорить о произвольных квадратных досках  $n \times n$  и, более того, о произвольных прямоугольных досках  $m \times n$ .

**Задача 1.** Найти все такие пары натуральных чисел  $(m, n)$ , что клетчатую доску  $m \times n$  можно было бы выложить линейным  $k$ -мино.

1-й способ решения.

Если хотя бы одно из чисел  $m, n$  делится на  $k$ , то доску  $m \times n$  можно выложить линейным  $k$ -мино (проверьте!).

Предположим, что ни одно из чисел  $m, n$  не делится на  $k$ , а доска  $m \times n$  тем не менее уложена линейным  $k$ -мино. Раскрасим доску  $k$  цветами диагональным способом, циклически меняя цвета: 1-й, 2-й, ...,  $k$ -й, 1-й, 2-й, ... (рис. 8).

Раскрашенная таким способом доска имеет интересное свойство: как бы на ней ни было расположено линейное  $k$ -мино, горизонтально или вертикально, оно покрывает ровно по одной клетке каждого из  $k$  цветов. Итак, по предположению доска покрыта линейным  $k$ -мино, а каждое  $k$ -мино покрывает одинаковое число клеток каждого цвета (по одной клет-

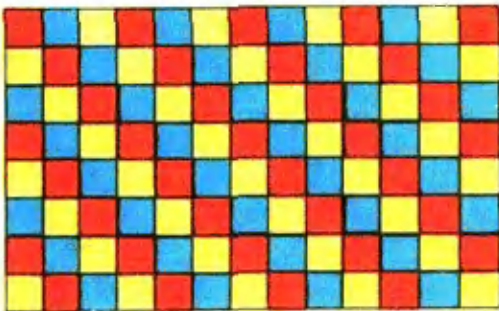


Рис. 8. Диагональная раскраска при  $k=3$ .

ке); следовательно, и вся доска содержит одинаковое число клеток каждого из  $k$  цветов.

Нетрудно доказать (докажите!), что для любых натуральных чисел  $m$  и  $k$  найдутся такие целые неотрицательные числа  $q$  и  $r_1$ , что  $r_1 \leq \frac{k}{2}$  и имеет место хотя бы одно из следующих равенств:

$$m = kq + r_1$$

или

$$m = kq - r_1.$$

Рассмотрим два случая.

1.  $m = kq + r_1$ . Разрежем данную доску на две прямоугольные доски:  $kq \times n$  и  $r_1 \times n$ . Доску  $kq \times n$  можно выложить линейным  $k$ -мино, так что она содержит одинаковое число клеток каждого цвета. А так как в данной доске также содержится равное число клеток каждого цвета, то этим свойством обладает и доска  $r_1 \times n$ .

2.  $m = kq - r_1$ . В этом случае дополним данную доску до клетчатой доски размером  $kq \times n$  (приложив к ней прямоугольную доску размером  $r_1 \times n$ ) и распространим раскраску данной доски до диагональной раскраски доски  $kq \times n$ . Получившуюся доску  $kq \times n$  можно выложить линейным  $k$ -мино, поэтому она содержит одинаковые количества клеток каждого цвета. Исходная доска содержит также равные количества клеток каждого цвета, следовательно, то же можно сказать и о доске  $r_1 \times n$ .

Итак, в обоих случаях мы получили клетчатую доску размером  $r_1 \times n$ , раскрашенную диагональным способом и содержащую одинаковые количества клеток каждого цвета. Повернем теперь эту доску на  $90^\circ$ , то есть рассмотрим доску  $n \times r_1$ , к которой и применим все рассуждения, с помощью которых установлено, что интересующие нас доски содержат одинаковое число клеток каждого цвета. В результате мы получим, что доска  $r_2 \times r_1$ , где  $0 < r_2 \leq \frac{k}{2}$

и  $0 < r_1 \leq \frac{k}{2}$  также содержит

равные количества клеток каждого цвета.

Но, с другой стороны, цветных диагоналей в такой доске всего

$$r_2 + r_1 - 1 \leq \frac{k}{2} + \frac{k}{2} - 1 < k,$$

так что в ней не будет ни одной клетки хотя бы одного из употребленных для раскраски цветов. Противоречие!

Итак, доску  $m \times n$  можно выложить линейным  $k$ -мино тогда и только тогда, когда хотя бы одно из чисел  $m$ ,  $n$  делится на  $k$ .

Эту задачу можно решить, используя иную раскраску.

2-й способ решения.

Предположим, что ни одно из чисел  $m$ ,  $n$  не делится на  $k$ , а доска  $m \times n$  выложена линейным  $k$ -мино.

Разделим с остатком  $m$  и  $n$  на  $k$ :

$$\begin{aligned} m &= kq_1 + r_1; & 0 < r_1 < k, \\ n &= kq_2 + r_2; & 0 < r_2 < k. \end{aligned}$$

Раскрасим доску  $k$  цветами следующим образом: 1-й столбец — 1-м цветом, 2-й — 2-м, ...,  $k$ -й —  $k$ -м,  $(k+1)$ -й — 1-м и т. д.,  $m$ -й —  $r_1$ -м цветом (рис. 9).

Раскрашенная таким способом доска имеет следующее свойство: если линейное  $k$ -мино положить на доску вертикально, то оно будет покрывать  $k$  клеток одного цвета, а если горизонтально — то ровно по одной клетке каждого цвета. Доска, по предположению, выложена  $k$ -мино; поэтому

$$S_1 \equiv S_2 \equiv \dots \equiv S_k \pmod{k},$$

где  $S_l$  ( $l=1, 2, \dots, k$ ) есть число

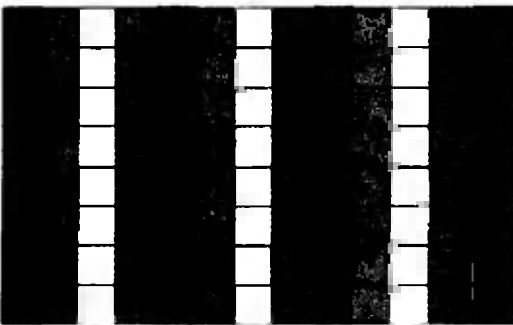


Рис. 9. Столбцовая раскраска при  $k=4$ .

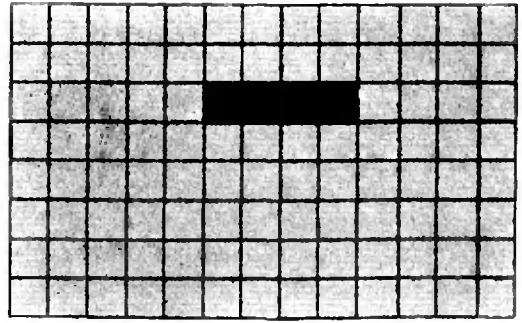


Рис. 10.

клеток  $l$ -го цвета, содержащихся в доске.

С другой стороны, как легко подсчитать,

$$S_{r_1} - S_{r_1+1} = n;$$

следовательно,

$$S_{r_1} - S_{r_1+1} \equiv r_2 \pmod{k},$$

так что

$$S_{r_1} \not\equiv S_{r_1+1} \pmod{k}.$$

Полученное противоречие показывает, что для существования искомой укладки необходимо  $m \vdots k$  или  $n \vdots k$ ).

Уж не подумали ли вы, что решения задач об укладке доски полимино непременно связано с тем или иным способом раскрашивания доски? Ничего подобного!

3-й способ решения.

Предположим, что доска  $m \times n$  выложена линейным  $k$ -мино и

$$\begin{aligned} m &= kq + r_1; & 0 < r_1 < k; \\ n &\equiv r_2 \pmod{k}; & 0 < r_2 < k. \end{aligned}$$

Будем говорить, что  $k$ -мино «растет из  $l$ -го столбца», если оно расположено горизонтально и начинается в  $l$ -м столбце (рис. 10).

Обозначим через  $t_l$  количество  $k$ -мино, растущих из  $l$ -го столбца. По предположению доска выложена  $k$ -мино; поэтому

$$\begin{aligned} t_1 &\equiv r_2 \pmod{k}, \\ t_2 &\equiv 0 \pmod{k}, \\ t_3 &\equiv 0 \pmod{k}, \\ &\dots \dots \dots \\ t_k &\equiv 0 \pmod{k}, \\ t_{k+1} &\equiv r_2 \pmod{k}, \\ t_{k+2} &\equiv 0 \pmod{k}, \\ &\dots \dots \dots \\ t_{kq+1} &\equiv r_2 \pmod{k}. \end{aligned}$$

\*)  $m \vdots k$ , как обычно, означает, что  $m$  делится на  $k$ .



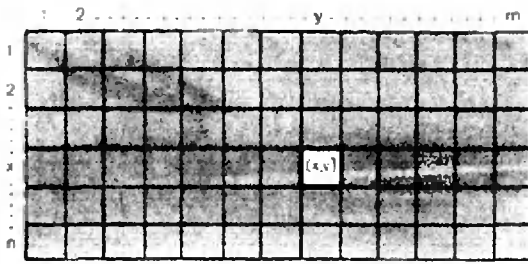


Рис. 11.

С другой стороны, ясно, что  $k$ -мино, растущее из  $(kq+1)$ -го столбца, «вырастет» за пределы прямоугольника, откуда  $t_{kq+1} = 0$ . Мы и здесь пришли к противоречию, показывающему, что для существования укладки доски  $m \times n$   $k$ -мино необходима делимость хотя бы одного из чисел  $m$ ,  $n$  на  $k$ .

Для дальнейших задач нам понадобится «система координат» на доске, мы занумеруем строки и столбцы доски (см. рис. 11).

Каждая клетка теперь задается парой чисел  $(x, y)$ , где  $x$  и  $y$  — соответственно номера строки и столбца, в которых эта клетка расположена.

**Задача 2.** Имеется прямоугольная клетчатая доска  $m \times n$  и линейное  $k$ -мино. Клетку доски  $(x, y)$  будем называть «удачно расположенной», если фигуру  $F$ , получающуюся из доски в результате вырезания этой клетки, можно выложить линейным  $k$ -мино. Найти множество  $M$  всех удачно расположенных клеток доски.

При  $k = 1$ , очевидно,  $M$  совпадает с множеством всех клеток доски. Допустим, что  $k = 2$ . Предположим, что из прямоугольника вырезана одна клетка и полученная фигура  $F$  выложена домино; тогда  $(mn-1)$  —

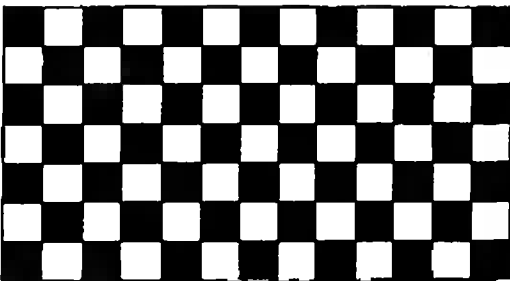


Рис. 12.

четное число, следовательно,  $m$  и  $n$  нечетны. Устроим на данной доске шахматную раскраску. Мы считаем, для определенности, что в левом нижнем углу — черная клетка (рис. 12).

Как бы ни было расположено домино, оно покрывает одну белую и одну черную клетки; следовательно, в фигуре  $F$  черных и белых клеток одинаковое число. Во всей же доске черных клеток на одну больше чем белых, поэтому вырезанная клетка могла быть только черной.

Множество черных клеток в нашей системе координат запишется как множество клеток  $(x, y)$ , для которых  $x \equiv y \pmod{2}$  (проверьте!).

Рисунки 13 и 14 иллюстрируют возможность укладки в случае, когда вырезана произвольная черная клетка.

Итак, при  $m \equiv n \equiv 1 \pmod{2}$  множество  $M$  удобно расположенных клеток совпадает с множеством таких

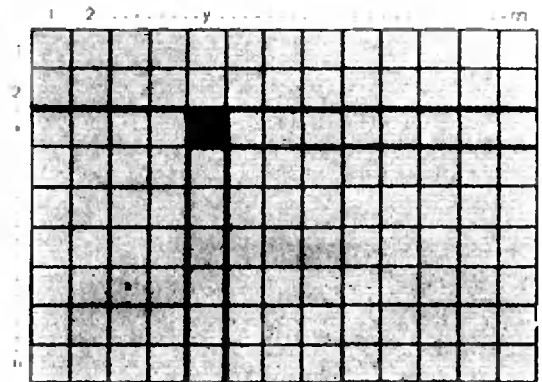


Рис. 13.

$$\begin{aligned} m \equiv n \equiv 1 \pmod{2} \\ x \neq y \pmod{2} \end{aligned}$$

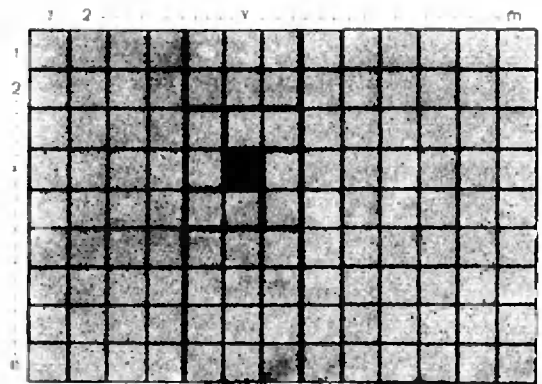


Рис. 14.

$$\begin{aligned} m \equiv n \equiv 1 \pmod{2} \\ x = y \pmod{2} \end{aligned}$$

клеток  $(x, y)$ , что  $x \equiv y \pmod{2}$ ; если хотя бы одно из чисел  $m, n$  кратно 2, то доска  $m \times n$  удачно расположенных клеток не имеет.

Пусть теперь  $k > 2$ . В этом случае  $1 \not\equiv -1 \pmod{k}$ .

Предположим, что полученная после вырезания клетки  $(x, y)$  фигура  $F$  уложена линейным  $k$ -мино. Устроим на данной доске столбцевую циклическую раскраску в  $k$  цветов (см. рис. 9). Мы уже отмечали свойство доски, раскрашенной таким способом: если линейное  $k$ -мино расположено на доске вертикально, то оно покрывает  $k$ -клеток одного цвета, а если горизонтально, то ровно по одной клетке каждого цвета. По предположению, фигура  $F$  выложена линейным  $k$ -мино; поэтому

$$P_1 \equiv P_2 \equiv \dots \equiv P_k \pmod{k}, \quad (1)$$

где  $P_l$  ( $l = 1, 2, \dots, k$ ) — количество клеток  $l$ -го цвета в фигуре  $F$ .

Пусть

$$\begin{aligned} m &= kq_1 + r_1 \quad (0 \leq r_1 < k), \\ n &= kq_2 + r_2 \quad (0 \leq r_2 < k). \end{aligned}$$

Обозначим через  $S_l$  ( $l = 1, 2, \dots, k$ ) число клеток  $l$ -го цвета во всей доске. Легко подсчитать, что

$$S_1 = \dots = S_{r_1} = n(q+1), \quad (2a)$$

$$S_{r_1+1} = \dots = S_k = nq. \quad (2b)$$

Фигура  $F$  содержит ровно на одну клетку меньше, чем вся доска, поэтому из соотношений (1) и (2) следует, что возможны лишь два случая: либо  $r_1 = 1$  и вырезанная клетка — первого цвета, либо  $r_1 + 1 = k$  и вырезанная клетка —  $k$ -го цвета.

1 случай. Вырезанная клетка  $(x, y)$  — первого цвета, то есть  $y \equiv 1 \pmod{k}$ ,  $r_1 = 1$ ,  $m \equiv 1 \pmod{k}$ , и кроме того,

$S_1 - 1 \equiv S_2 \equiv S_3 \equiv \dots \equiv S_k \pmod{k}$ , откуда  $n(q+1) - 1 \equiv nq \pmod{k}$ , то есть  $n \equiv 1 \pmod{k}$ .

Итак,  $m \equiv n \equiv y \equiv 1 \pmod{k}$ .

2 случай. Вырезанная клетка  $(x, y)$  —  $k$ -го цвета, то есть  $y \equiv 0 \pmod{k}$ ,  $r_1 = k - 1$ ,

$m \equiv -1 \pmod{k}$  и, кроме того,

$$S_1 \equiv S_2 \equiv \dots \equiv S_{k-1} \equiv S_k - 1 \pmod{k},$$

откуда  $nq - 1 \equiv n(q+1) \pmod{k}$ , то есть  $n \equiv -1 \pmod{k}$ .

Итак,

$$m \equiv n \equiv -1 \pmod{k}; \quad y \equiv 0 \pmod{k}.$$

Повернем теперь данную доску на  $90^\circ$ , то есть рассмотрим доску  $n \times m$  и применим к ней изложенные выше рассуждения. Вот окончательные выводы: если  $m \equiv n \equiv 1 \pmod{k}$ , то координаты удачно расположенной клетки  $(x, y)$  должны удовлетворять соотношению  $x \equiv y \equiv 1 \pmod{k}$ . Если же  $m \equiv n \equiv -1 \pmod{k}$ , то координаты удачно расположенной клетки  $(x, y)$  должны удовлетворять соотношению

$$x \equiv y \equiv 0 \pmod{k}.$$

В остальных случаях удачно расположенных клеток доска  $m \times n$  не имеет.

Рисунки 15 и 16 показывают, что если  $m \equiv n \equiv 1 \pmod{k}$ , то любая клет-

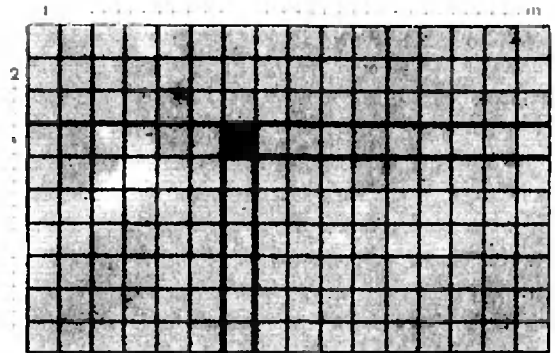


Рис. 15.

$$\begin{aligned} m \equiv n \equiv 1 \pmod{k} \\ x \equiv y \equiv 1 \pmod{k} \end{aligned}$$

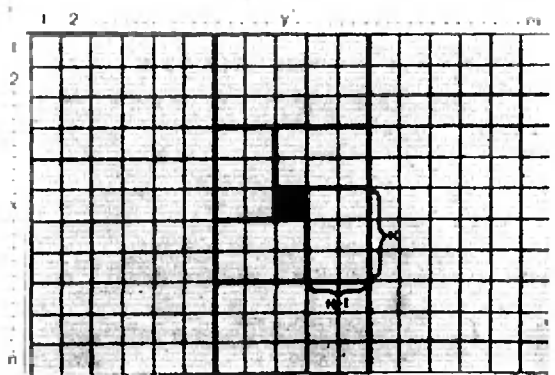


Рис. 16.

$$\begin{aligned} m \equiv n \equiv -1 \pmod{k} \\ x \equiv y \equiv 0 \pmod{k} \end{aligned}$$

Удачно расположенные клетки			Примечания
$k$	$m, n$	координаты удачно расположенных клеток	При иных наборах $m, n, k$ доска не содержит ни одной удачно расположенной клетки
$k = 1$	$m, n$ — любые натуральные числа	$x \leq n, y \leq m$	
$k = 2$	$m \equiv n \equiv 1 \pmod{2}$	$x \equiv y \pmod{2}; x \leq n, y \leq m$	
$k > 2$	$m \equiv n \equiv 1 \pmod{k}$	$x \equiv y \equiv 1 \pmod{k}; x \leq n, y \leq m$	
	$m \equiv n \equiv -1 \pmod{k}$	$x \equiv y \equiv 0 \pmod{k}; x \leq n, y \leq m$	

ка  $(x, y)$ , для которой  $x \equiv y \equiv 1 \pmod{k}$ , удачно расположена; если же  $m \equiv n \equiv -1 \pmod{k}$ , то удачно расположена любая клетка  $(x, y)$ , для которой  $x \equiv y \equiv 0 \pmod{k}$ .

Итак, задача решена.

Ответ удобно записать в виде таблицы (см. таблицу сверху).

Мы видим, что если доска  $m \times n$ , при  $k > 2$  и содержит удачно расположенные клетки, то их количество  $v$  сравнительно с числом всех клеток доски невелико; докажите, что

$$v = \frac{[m + (-1)^r(k-1)][n + (-1)^r(k-1)]}{k^2},$$

где  $r=1$ , если  $m \equiv n \equiv 1 \pmod{k}$ , и  $r=-1$ , если  $m \equiv n \equiv -1 \pmod{k}$ .

Но число таких клеток можно увеличить! Склеим пару противоположных сторон нашей доски: мы получим клетчатый цилиндр (рис. 17).

### Задача 3.

а) Из прямоугольной клетчатой доски  $m \times n$  склеили цилиндр. Найти множество всех удачно расположен-

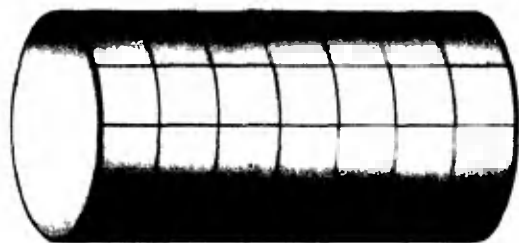


Рис. 17.

ных клеток цилиндра для линейного  $k$ -мино.

б) Если  $m \neq n$ , то, в зависимости от того, какую пару противоположных сторон мы склеили, можно получить два различных цилиндра. Какой из этих цилиндров имеет большее число удачно расположенных клеток?

Пойдем теперь дальше и скроем основания нашего цилиндра (рис. 18).

Полученная фигура, называемая тором, имеет безусловное «преимущество» по сравнению с клетчатой доской или клетчатым цилиндром: все ее клетки равны. В частности, если клетчатый тор имеет хотя бы одну удачно расположенную клетку, то все его клетки являются удачно расположенными.

Тороидальная клетчатая доска имеет и другие достоинства. Решим, к примеру, следующую задачу.

### Задача 4.

а) Найти все такие натуральные числа  $n$ , что квадратную доску  $n \times n$  можно уложить прямоугольным тримино, изображенным на рисунке 19.

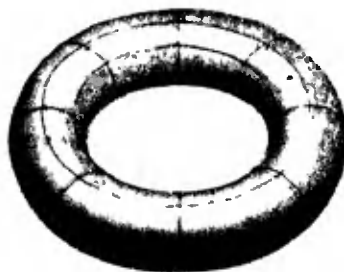


Рис. 18.

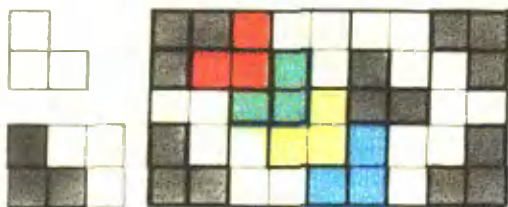


Рис. 19, 20, 21.

б) Найти все такие натуральные числа  $n$ , что тороидальную доску, полученную из квадратной клетчатой доски  $n \times n$ , можно выложить тримино, изображенным на рисунке 19.

Так как тримино состоит из трех клеток, то для возможности укладки доски  $n \times n$  тримино необходимо, чтобы  $n$  было кратно 3.

Прямоугольник размером  $2 \times 3$ , конечно, можно уложить тримино (рис. 20). Сложнее уложить прямоугольник размером  $5 \times 9$  (рис. 21). Теперь не представляет большого труда доказать (докажите!), что квадрат  $n \times n$  можно уложить тримино при  $n = 3k$ , где  $k = 2, 3, \dots$

Докажите, что квадрат  $3 \times 3$  нельзя уложить нашим тримино. Что же касается тороидальной доски, склеенной из квадрата  $n \times n$ , то ее можно выложить тримино при любом  $n$ , делящемся на 3.



Рис. 22.

Для доказательства этого факта нам осталось показать, что тороидальную доску  $3 \times 3$  можно выложить тримино. Рисунок 22 показывает возможность такой укладки (при склеивании тора красные клетки соберутся, образовав тримино требуемого вида).

#### Упражнения

1. Имеется прямоугольная клетчатая доска  $m \times n$  и домино. Пара различных клеток доски называется «хорошей», если фигуру,

получающуюся из доски в результате вырезания этих двух клеток, можно уложить домино. Найти все хорошие пары клеток.

2. Имеется прямоугольная клетчатая доска  $m \times n$  и натуральное число  $k$ ,  $k < \frac{m}{2}$ .

Играют двое. Первый играющий вычеркивает любую клетку доски, затем второй вычеркивает любую клетку, отличную от вычеркнутой; очередной ход играющего состоит в вычеркивании любой клетки доски, отличной от ранее вычеркнутых. После того как играющие сделали поочередно по  $k$  ходов, определяется победитель. Выиграл второй, если фигура, полученная после вырезания всех вычеркнутых клеток, может быть уложена домино; в противоположном случае победителем считается первый играющий.

Найдите стратегию игры для одного из играющих, позволяющую ему выиграть вне зависимости от игры противника.

3. а) Найти все такие натуральные числа  $n$ , что квадратную клетчатую доску  $n \times n$  можно уложить  $\Gamma$ -тетрамино (см. рис. 2).

б) Изменится ли результат, если вместо плоской доски укладывать цилиндрическую тороидальную?

4. а) Найти все такие натуральные числа  $n$ , что квадратную клетчатую доску  $n \times n$  можно уложить  $\Gamma$ -тетрамино.

б) Изменится ли результат, если вместо плоской доски укладывать цилиндрическую тороидальную?

5. а) Из прямоугольной клетчатой доски  $m \times n$  склеили цилиндр. При каком условии его можно уложить линейным  $k$ -мино?

б) Если  $m \neq n$ , то из доски  $m \times n$  можно склеить два различных цилиндра. Может ли случиться так, что один из них можно уложить линейным  $k$ -мино, а другой — нет?

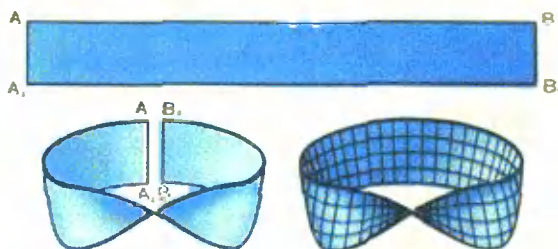


Рис. 23.

6. Прямоугольную доску (на которой клетчатая сетка имеется с обеих сторон) перегнули и склеили, как показано на рисунке 23. Получился лист Мёбиуса.

а) При каком условии лист Мёбиуса, склеенный из доски  $m \times n$ , можно уложить линейным  $k$ -мино?

б) Если  $m \neq n$ , то из клетчатой доски  $m \times n$  можно склеить два различных листа Мёбиуса. Может ли случиться так, что один из них можно уложить линейным  $k$ -мино, а другой — нет?



# О СТРУКТУРЕ ЛЬДА

В. Г. Брэгг

Статья известного английского физика Вильяма Брэгга «О структуре льда» появилась в 1938 году. В 1939 году эта статья в переводе Н. А. Шишакова была опубликована в журнале «Успехи физических наук». Ниже мы приводим сокращенный вариант этой статьи.

Публикацию подготовил И. Ш. Слободецкий.

В последние годы при изучении кристаллического характера льда и снега выяснились некоторые факты, которые позволяют получить новые объяснения старых проблем. Одной из них является движение льдов и снегов на горах, всегда служившее предметом удивления. Чтобы определить характер величественных движений Альпийских ледников, в середине XIX века были предприняты попытки систематических измерений. При этом оказалось, что лед течет, приспособляясь к извилинам и спускам в долинах, подобно воде. Тогда же было установлено, что середины ледников движутся быстрее краев. Объяснение этой любопытной пластичности льда, являющегося в то же время очень хрупким веществом, наталкивалось в те времена на великие трудности, но теперь эту задачу можно считать решенной.

Оказывается, что имеется удивительная связь между величественными картинами движения ледников и мельчайшими деталями строения молекул воды и кристаллов льда.

Предметом внимания прежних наблюдателей была также удивительная правильность в строении снежинок, в особенности бросающаяся в глаза при наблюдении их в северных странах. Однако только в конце прошлого столетия этот факт подвергся систематическим наблюдениям, послужившим затем предметом классификации. При этом крайне изумительным и загадочным казалось совершенное сходство между всеми шестью лучами в любой снежинке и в то же время огромное различие в строении различных снежинок. Примеры их представлены на рисунке 1.

В последнее время расположение атомов и молекул в кристаллах льда

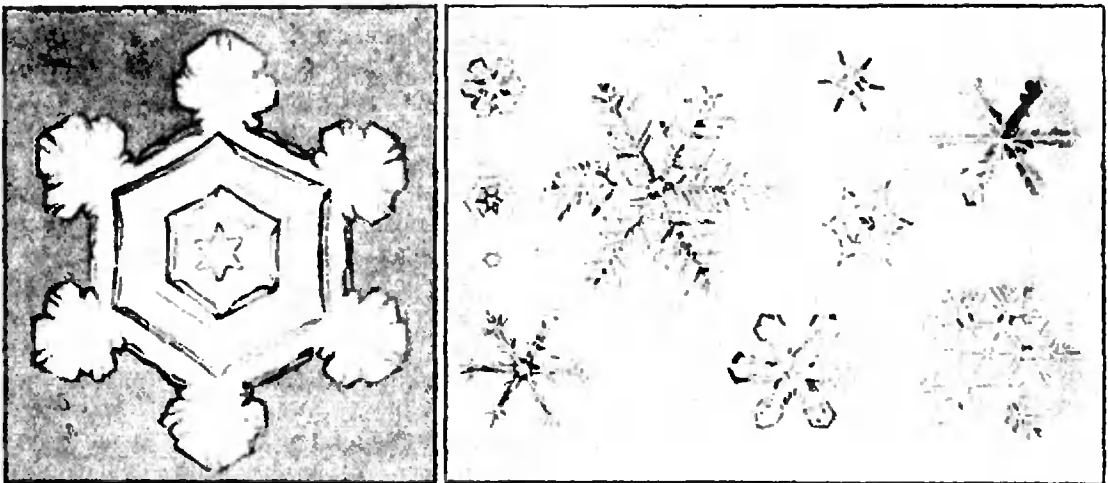


Рис. 1.

и снега сделалось предметом чрезвычайного интереса для химиков и физиков. Это и понятно, так как известные вещества земной поверхности наполовину образованы из кислорода, причем два его соединения с водородом — вода  $H_2O$  и гидроксил  $OH$  — играют фундаментальную роль в огромном множестве процессов в природе.

Основные черты кристаллической структуры обыкновенного льда были выяснены при помощи рентгеновских методов исследования лет пятнадцать назад. Атомы кислорода в кристаллах льда расположены так же, как шары, изображенные на рисунке 2. Структура в целом является гексагональной (в одной из плоскостей атомы кислорода образуют правильные шестиугольники).

Первая попытка физического объяснения так называемой пластичности льда была предпринята Тиндалем и Гексли в 1857 году. В основу объяс-

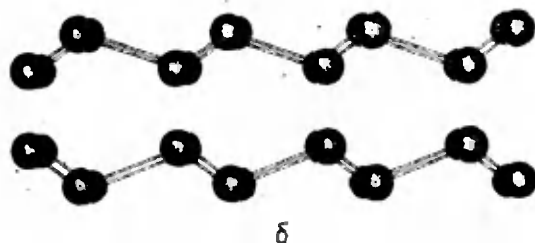
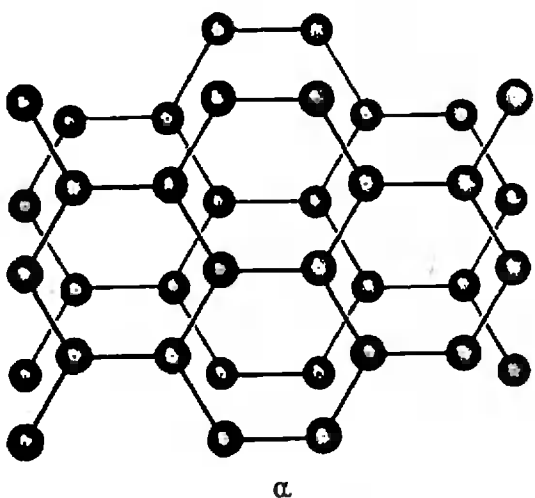


Рис. 2.



Рис. 3.

нения было положено наблюдавшееся Фарадеем замечательное явление смерзания приведенных в соприкосновение кусков льда. Такое смерзание происходит при самом слабом контакте в том случае, когда куски находятся в воде (рис. 3). Фарадей говорил, что молекулы воды переходят от жидкости к твердому телу гораздо легче в том случае, когда они окружены значительной уже затвердевшей массой. Тонкий слой воды вблизи мест соприкосновения обоих кусков затвердевает и скрепляет их вместе, даже если бы он и не мог замерзнуть сам по себе, находясь вдали от массы льда. Согласно такому взгляду замерзание зависит не только от температуры, но также и от окружающих условий. Аналогично, водяной пар внутри трещины, то есть между двумя поверхностями, будет конденсироваться и превращаться в лед гораздо легче, чем на открытом месте, где контакт возможен лишь с одной поверхностью льда.

Лед, находящийся под напряжением, трескается. Тиндаль и Гексли предполагали, что трещины «залечиваются» вследствие осаждения пара или жидкости, происходящих от окружающих частей льда. Поэтому ледяной массив может приспосабливаться к форме своего ложа и ледник в целом как бы течет.

Джемс Томсон в 1860 году предложил иное объяснение этого явления. Признав факт, который наблюдался Фарадеем, Томсон тем не менее отверг прежнее его объяснение; скрепление кусков льда друг с другом он приписывал действию давления, которое оказывают куски

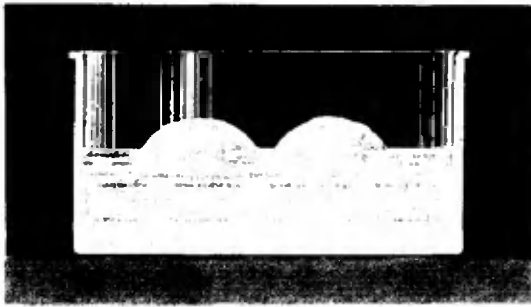


Рис. 4.

друг на друга. Действительно, если вода при замерзании расширяется, то всякое давление, поскольку оно препятствует этому расширению, должно препятствовать и замерзанию, а это эквивалентно понижению точки замерзания. Поэтому при  $0^\circ$  лед под давлением должен плавиться. Это в действительности и наблюдается на опыте. Если какой-либо острый предмет, например, кончик ножа, поместить на кусок льда, то острие проникает вглубь не потому, что лед режется или крошится, а потому, что лед плавится под давлением. Согласно Томсону при сдавливании вместе двух кусков льда в месте соприкосновения должно происходить плавление; получающаяся при этом вода вытесняется и где-нибудь поблизости вновь замерзает, поскольку она уже не находится более под давлением.

Тиндаль продемонстрировал эффект смерзания ледяных кусочков следующим образом. Лед разбивался на мелкие куски, которые затем подвергали сдавливанию в специальной форме. В результате получалась сплавленная прозрачная масса льда. Таким путем, подвергая порошок льда давлению в несколько сотен килограммов на  $1 \text{ см}^2$ , можно изготовлять ледяные чашечки и другие предметы разнообразной формы.

Объяснение явления течения ледников, казалось бы, становится теперь очевидным. Согласно Томсону и Тиндалю изменение формы движущегося ледника происходит в результате плавления льда в местах сильных давлений и последующего затвердевания освобождающейся при этом плавлении воды.

Конечно, утверждение Томсона, что лед плавится под давлением, является совершенно правильным. Однако нельзя согласиться с его предположением, что фарадеевское смерзание плавающих кусков льда основано на этом же принципе. Томсон утверждал, что уже при простом соприкосновении кусков возникает некоторое давление благодаря капиллярному действию\*). Это давление и является причиной эффекта Фарадея. Чтобы показать неосновательность возражений Томсона, Фарадей в 1860 году поставил свой опыт при таких условиях, когда капиллярное действие отсутствует. Он сделал из льда несколько дисков, придав им плоско-выпуклую форму, и пустил их плавать по воде выпуклой стороной кверху. При таких условиях куски могли касаться друг друга только под водой (рис. 4). При слабом их соприкосновении друг с другом они смерзались вместе настолько прочно, что для приведения всей массы в движение на воде достаточно было воздействовать лишь на какую-либо одну точку. Деревянные же диски при соприкосновении как по ватерлинии, так и под водой и, следовательно, при наличии капиллярного действия друг на друга, не обнаруживали никаких признаков скрепления.

Несмотря на это, как принцип Фарадея, так и принцип Томсона не дали удовлетворительного объяснения движению ледников. Например, они не объясняли процесса смерзания льда при тех низких температурах, при которых существуют некоторые ледники мира. Впрочем, и сам Фарадей указывал, что два куска льда не смерзаются под давлением, если они охлаждены ниже нуля.

Много лет спустя эти вопросы вновь были подняты Мак-Коннеллом, которому долгое время приходилось жить в Давосе в Швейцарии. Некоторые из предварительных опытов

\* За счет сил поверхностного натяжения пленки воды, находящейся между касающимися друг друга кусками льда.

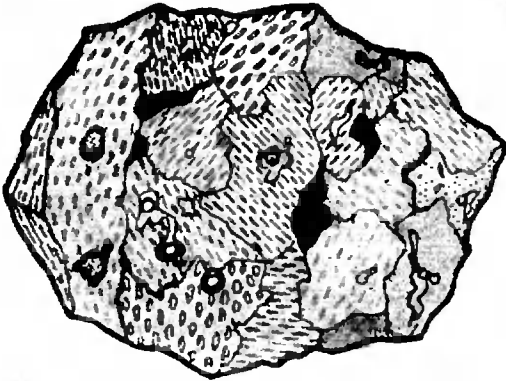


Рис. 5.

привели его к заключению, что секрет пластичности льда может быть объяснен лишь при изучении свойств монокристаллов льда. Большинство же разновидностей льда, в особенности искусственный лед и ледниковая масса, представляют собой конгломерат из отдельных небольших кристаллов (рис. 5). Монокристаллы достаточно большой величины были вырезаны Мак-Коннелом из льда, образовавшегося на поверхности озера или в открытом сосуде. В опытах Мак-Коннела изучались упругие и пластические деформации при следующих условиях:

1. Образец брался в виде пластинки длиной 10—15 сантиметров и примерно по 2—3 сантиметра в ширину и толщину и располагался на двух опорах естественной поверхностью льда кверху.

2. Тот же образец поворачивался на прямой угол так, что «поверхность озера» становилась вертикальной.

3. В качестве образца брался длинный столб, который в исходном массиве был вертикальным.

В первом случае образец оказался согнутым, как обыкновенный стержень (рис. 6). Во втором случае деформация оказалась такой же по характеру, как в первом случае, но значительно меньше по величине. В третьем случае деформация приобрела совершенно своеобразный характер (рис. 7), показывая, что на этот раз имеет место движение вдоль некоторых плоскостей скольжения.

Скольжение вертикально расположенных стеклянных пластинок, соединенных друг с другом при помощи масла или другой вязкой среды (рис. 8), служит хорошей моделью такой деформации. Эта модель достаточно хорошо иллюстрирует явление. В третьем случае процесс деформирования продолжался непрерывно и неопределенно долго, то есть деформация являлась пластической. Наоборот, в первых двух случаях деформация была упругой, так как она не изменялась со временем и оказывалась пропорциональной нагрузке.

Чтобы получить более ясное представление об эффекте скольжения у льда, обратимся к модели его структуры, изученной при помощи рентгеновских лучей. Оказывается, что кристалл льда можно рассматривать как совокупность параллельных слоев, соединенных друг с другом при помощи связей, перпендикулярных этим слоям. Каждый слой имеет складчатое строение (см. рис. 2, б);

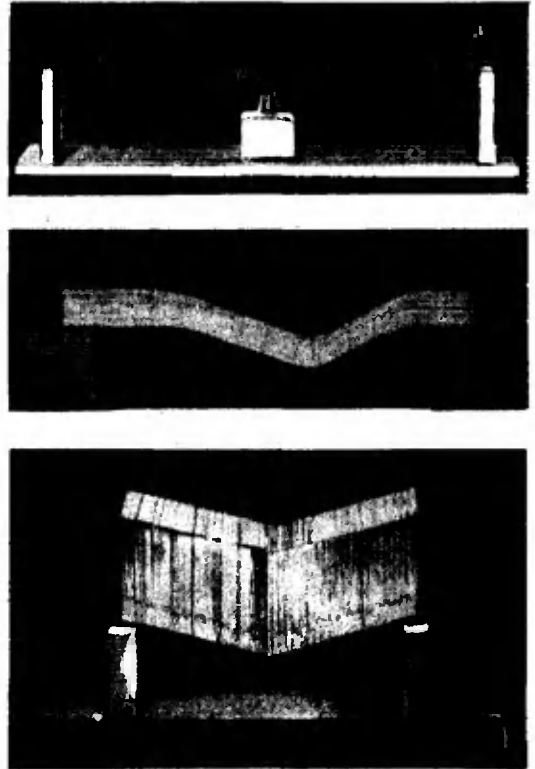


Рис. 6, 7, 8.



надо полагать, что он должен иметь значительную внутреннюю прочность и сравнительно малую способность сопротивляться смещению в собственной плоскости по отношению к смежным слоям. При таком скольжении связи, перпендикулярные слоям, разрываются между двумя атомами и немедленно восстанавливаются между другой парой атомов. С этим движением можно сравнить движение щетки по грубой поверхности: отдельные щетинки попеременно то уступают действию силы, то снова разгибаются, чтобы найти затем новый контакт. Эти слои в кристалле льда оказываются параллельными поверхности льда на поверхности озера или сосуда.

Возвращаясь к опытам Мак-Коннела, мы можем сказать, что описанная в третьем случае установка кристалла действительно хорошо воспроизводится слоями стекла, которые скользят друг относительно друга. В первых же двух случаях изгибание образцов льда происходит аналогично изгибанию деревянной полоски под нагрузкой. При этом деформация получается меньшей, когда полоска положена на ребро, чем тогда, когда она положена плашмя.

В противоположность металлам кристаллы льда не упрочняются при холодной обработке. Слон при скольжении относительно друг друга остаются неискаженными и не разорванными, так что условия существования кристаллов не изменяются. В металле же происходит нарушение прежнего расположения атомов и условия становятся более сложными.

Смерзание кусков льда друг с другом и плавление льда под давлением представляют собой следствия особенностей строения льда, которое в свою очередь является следствием специального характера связей, удерживающих атомы и молекулы льда вместе. Последние годы ознаменовались значительными успехами в наших знаниях об атомных связях. Для настоящей цели достаточно отметить, что в некоторых случаях один

атом присоединяет к себе другие атомы только в некоторых особых точках его поверхности. Более правильным было бы выразить эту мысль, сказав, что точки, которыми атомы связываются друг с другом, распределены по поверхности атомов согласно определенному правилу. В частности, атом углерода привязывается к себе четыре других атома в точках, которые лежат на поверхности в четырех вершинах правильного тетраэдра. В других случаях (например, в случае жидкой ртути) не существует такого закономерного расположения точек связи. И действительно, внутренние свойства жидкости определяются отсутствием таких направляющих связей, которые создают структуру, или маскировкой их другими более сильными связями.

Можно представить себе такие крайние случаи. В одном из них существуют только силы первого рода. Это значит, что атомы имеют взаимное притяжение только в том случае, когда они прилаживаются друг к другу имеющимися на их поверхностях контактными точками. Совокупность таких атомов могла бы быть либо твердым телом либо группой атомов, не связанных взаимным притяжением. В последнем случае при наличии достаточной тепловой энергии группа атомов должна была бы образовать газ. Можно, однако, считать, что при таких обстоятельствах могло иметь место случайное сцепление. Если запас тепла уменьшится, то такое соединение атомов становится более частым и более постоянным, из-за чего в отдельных местах начинается затвердевание. Каждая группа соединенных таким образом атомов становится кристаллом, если, конечно, процесс идет не настолько быстро, чтобы образование настоящего кристаллического расположения сделалось невозможным. Атомы или молекулы должны стремиться занять готовые для них места на уже сформировавшихся кристаллах. Таким путем растут кристаллы

из паров без образования жидкости как промежуточной фазы.

В другом крайнем случае можно представить себе атомы или молекулы, которые не имеют направленного притяжения. Если тепловые колебания недостаточно сильны для того, чтобы атомы или молекулы были изолированы друг от друга, то они собираются вместе и образуют жидкость, вязкость которой будет зависеть от того, насколько легко могут двигаться отдельные молекулы среди роя других молекул. При дальнейшем охлаждении вязкость может возрастать непрерывно или внезапными скачками, вплоть до той степени, когда эта совокупность молекул сможет быть названа твердым телом.

Естественные вещества лежат между этими двумя крайностями, причем лед, по-видимому, ближе к первой из них, чем другие вещества. Действительно, его кристаллы образуются непосредственно из пара. С другой стороны, молекулы водяного пара непрерывно отрываются от кристаллов в результате действия тепла или по другой причине и смешиваются с молекулами окружающей среды. Лед «сублимируется». Легкость или трудность конденсации и отрыва молекул должны определяться каким-то соотношением между плотностью пара, температурой и поверхностными условиями. В трещинах шансы на конденсацию выше, чем на открытых местах, так как в трещинах, начиная с их ребер, молекулы находятся под двойным действием. Отрыв молекул с большей вероятностью происходит с выпуклой поверхности. Этот эффект совершенно аналогичен эффекту зависимости упругости пара от формы жидкости, с которой пар соприкасается, как на это и было указано Фарадеем. В трещине равновесие между сублимацией и осаждением должно быть иным, чем снаружи, причем последнее возрастает за счет первого. Иными словами, упругость пара понижается, то есть температура точки замерзания повышается.

При обычных давлениях вода имеет наибольшую плотность вблизи  $4^{\circ}\text{C}$ . При дальнейшем понижении температуры вплоть до температуры замерзания, плотность становится все меньшей и меньшей. Очевидно, что некоторые из молекул образуют комплексы, которые занимают большее пространство, чем те же молекулы, взятые в отдельности, так как межатомные силы заставляют атомы принимать определенное расположение в пространстве. При этом совсем нет необходимости считать эти комплексы постоянными: по всей вероятности, они постоянно возникают, распадаются и возникают вновь.

Рассмотрим теперь снежные хлопья. Два главных факта, требующих объяснения, таковы: бесконечное разнообразие гексагональных форм и симметрия каждой снежинки. Шестиугольная форма снежинок, очевидно, находится в связи с гексагональной формой кристаллов льда, но все же всегда было очень трудно объяснить, почему шесть лучей каждой снежинки так похожи один на другой и в то же время так сильно отличаются от лучей всякой другой снежинки. Удовлетворительное объяснение можно дать следующим путем.

Весь вопрос может быть рассмотрен в свете тех же эффектов сублимации и осаждения, как и в случае смерзания кусков льда. Когда такая шестиугольная конструкция вырастет из некоторого ядра в атмосфере водяного пара или в жидкости, содержащей растворенную воду, то характер роста должен зависеть от условий, при которых этот рост происходит. Если в окружающем пространстве много пара или температура низка, то рост идет быстро и лучи снежинок стремятся проникнуть в окружающее пространство, в котором еще содержатся многочисленные молекулы воды. Рост идет на концах лучей и на вспомогательных ветвях, которые образуют с первыми угол в  $60^{\circ}$ . Если же снежинка переносится в пространство с малой плот-



Рис. 9.



Рис. 10.

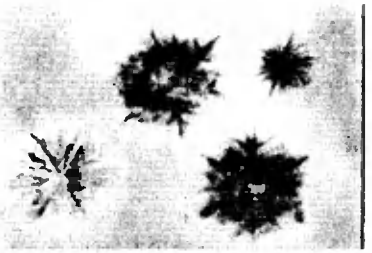


Рис. 11.

ностью пара или с более высокой температурой, то происходит обратный процесс. Молекулы гораздо легче отрываются от концов ветвей, чем от центральных областей снежинки, и отлагаются на ней не с прежней скоростью. Благодаря этому снежинка утолщается в центральной части, а ее ветви укорачиваются и даже закругляются. Так как снежинки размером невелики, часто не более нескольких миллиметров в диаметре, то условия вокруг каждой из них можно считать одинаковыми во всех точках. Если удлиняется один луч, то удлиняются также и остальные лучи. При всем этом, падая на Землю, снежинки могут встречать самые разнообразные местные условия, в соответствии с чем они могут приобретать множество различных форм, в то время как лучи каждой отдельной снежинки останутся совершенно сходными.

Согласно этому объяснению большое разнообразие форм снежинок основано на существовании двух противоположных процессов: быстрого роста ветвей, ведущего к перистой их форме, и уплотнение в центрах этой перистой структуры. В первом процессе рост в большей степени преобладает над сублимацией, чем во втором, так что оба они скорее различаются по степени, чем по качеству. Форма каждой снежинки говорит нам о тех изменениях в атмосферных условиях, которые пришлось ей пережить.

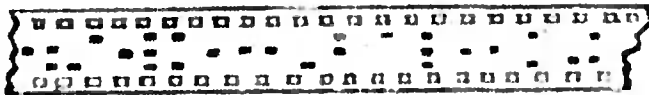
Еще более медленный рост кристаллов льда может быть осуществлен, если выдерживать лед при температуре как раз ниже температуры замерзания в одной части откачанного сосуда и предоставлять ему суб-

лимироваться на металлическую пластинку в другой части сосуда, поддерживаемой при значительно более низкой температуре. Кристаллы принимают форму шестиугольных призм.

Изображенные на рисунке 9 перистые формы были получены при быстром охлаждении смеси глицерина, спирта и сравнительно больших количеств воды. Более плотные шестиугольные призмы на рисунке 10 получены более медленным охлаждением такой же смеси, но с меньшим количеством воды. Если полученные таким образом призмы заставить плавиться или возгораться, то в некоторый момент появляется стадия более открытой структуры, весьма напоминающей естественные снежинки в некоторых их формах (рис. 11).

Тиндалем был произведен прекрасный опыт, при помощи которого ему удалось продемонстрировать структуру льда. Этот опыт называется «получением ледяных цветов». Пучок света от дугового фонаря пропускается через кусок льда. В различных точках этого куска, где имеются загрязнения или неправильности, тепло задерживается и вызывает плавление. Получающиеся в этом случае пустоты имеют гексагональную форму, так как разрушение структуры идет в направлении, как раз противоположном росту. Эти фигуры представляют собой, так сказать, отрицательные снежинки. При помощи подходящей аппаратуры эти фигуры могут быть спроектированы на экран. Если на пути лучей от фонаря ко льду поместить кювету с водой, то тепловые лучи поглощаются, и рост таких пустот в кристалле прекращается.

# МАШИНА УЧИТСЯ РАСПОЗНАВАТЬ



А.С. Варпаховский

Как вы, очевидно, знаете, для решения любой задачи на электронной вычислительной машине (ЭВМ) машине необходимо «сообщить» исходные *данные* решаемой задачи и *программу* действий, которые требуются произвести над этими данными\*). Получив такие сведения, ЭВМ выполняет предписанные действия над данными («думает») и в результате получает искомое решение.

Нынешние ЭВМ научились очень неплохо «думать», но все еще крайне неповоротливы в отношении восприятия («чтения») необходимых предварительных сведений: они напоминают первоклассника, хорошо успевающего по арифметике, но сильно отстающего по чтению.

Всякая ЭВМ строится из некоторого (очень большого!) числа «элементов», которые могут находиться в двух различных состояниях; для наглядности можно представлять себе каждый такой элемент как лампочку, которая либо выключена (состояние 0), либо включена (состояние 1). Поэтому все, что сообщается машине, нужно сначала «перевести» на язык нулей и единиц. Любые сведения — будь то набор чисел, система уравнений или шахматная позиция — «записываются» в машине в виде подходящих последовательностей нулей и единиц. Чтобы хранить и записывать нужные сведения, ЭВМ снабжается

специальным устройством — памятью. Память ЭВМ представляет собой набор ячеек из некоторого определенного числа элементов каждая (скажем, шести). В любой ячейке можно записать какую-нибудь последовательность из нулей и единиц (число различных таких последовательностей равно  $2^6 = 64$ ).

Допустим, например, что машине нужно «сообщить» число 19. Для этого числу 19 приписывается сначала определенный код в виде последовательности нулей и единиц: 010011\*). Затем данный код наносится на специальную ленту (перфоленду): в нужных местах этой ленты пробиваются отверстия. Наконец, лента вводится в машину, которая в соответствии с отверстиями на ленте переводит в требуемые состояния элементы ячейки, отведенной для записи данного числа. Процесс схематически изображен на рисунке 1.

Легко представить, сколько времени идет на изготовление ленты, каким трудоемким оказывается весь процесс, когда машине требуется сообщить большое число данных. Как же упростить и автоматизировать передачу данных машине? Нельзя ли давать машине нужные ей сведения в обычной форме (скажем, в виде напечатанного текста), предоставив кодирование самой машине? В принципе, конечно, можно. Но для этого

\*) См., например, статьи Р. С. Гутера «Что умеют машины» («Квант» № 5, 1970) и «Язык человека и язык машины» («Квант» № 10, 1971).

\*) Этот код есть, конечно, не что иное, как запись числа 19 в двоичной системе счисления; см., например, статью Р. С. Гутера «Вычислительные машины и системы счисления» («Квант» № 9, 1971).



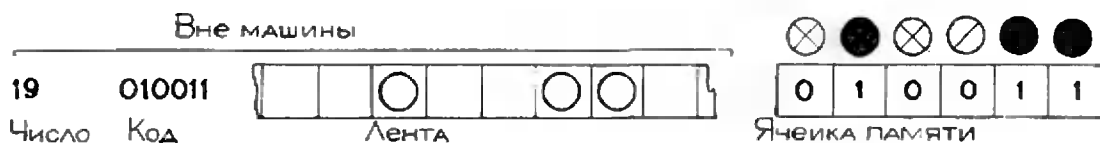


Рис. 1.

машина должна уметь различать все символы («буквы») того «алфавита», из которых составлен соответствующий текст.

Несмотря на кажущуюся простоту, такая задача по *распознаванию* букв очень сложна. Пока не может быть даже и речи о том, чтобы машина «читала» любые индивидуальные рукописные тексты. Мы поэтому будем здесь говорить прежде всего о «чтении» печатных текстов — с буквами строго определенной формы и размера.

Рассмотрим сначала текст, составленный всего из двух «букв» — нуля и девятки. Поле, занимаемое одной буквой, разобьем на участки (клетки); некоторые из клеток окажутся закрашенными (хотя бы частично), другие останутся незакрашенными (см. рис. 2).

В поле буквы выделим некоторую определенную зону, которая — клетка за клеткой — «просматривается» машиной (на рисунке 2 выбранная зона обведена жирной линией).

Машина отличает достаточно плотно и достаточно полно закрашенные клетки от прочих и подсчитывает общее число этих клеток в зоне своего обзора. Ясно, что в нашем примере при «осмотре» нуля закрашенных клеток должно быть меньше, чем при «осмотре» девятки. Поэтому

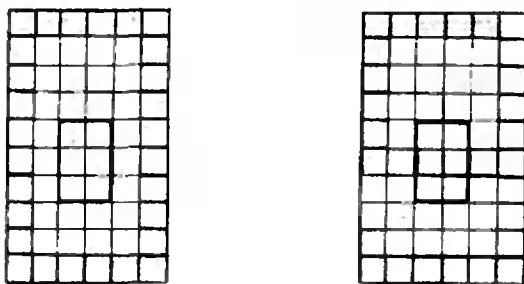


Рис. 2.

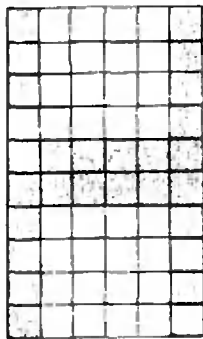
признак для отличия нуля от девятки можно «запрограммировать» в машине следующим образом: если число закрашенных клеток в зоне меньше некоторого данного числа  $m$ , машине предписывается заполнить соответствующую ячейку памяти кодом нуля, в противном случае — кодом девятки.

Такая процедура может показаться слишком длинной и утомительной, но не нужно забывать о чудесном быстродействии машины — десятки и сотни тысяч операций в секунду; машина будет «узнавать» букву за ничтожные доли секунды! Хуже то, что такой способ не гарантирует абсолютной правильности чтения, — наличие случайных разрывов в начертании буквы, неплотность закрашки и другие дефекты могут привести к ошибке.

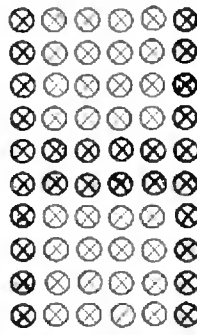
Весь процесс, конечно, усложняется при переходе к большему количеству букв — здесь приходится последовательно применить несколько признаков для различения отдельных букв.

Скажем, добавив к нулю и девятке тройку, мы позволим машине на основе прежнего признака решить только такой вопрос: «ноль или не ноль». В последнем случае («не ноль») потребуются применить какой-нибудь дополнительный признак для отличия девятки от тройки.

В случае, когда букв много и форма каждой буквы строго определена (например, берутся все буквы машинописного шрифта определенного образца), можно поступать иначе. ЭВМ предварительно снабжается «эталоном» (образцами) всех букв, которые ей потребуется различать. Для этого ЭВМ «запоминает», какие клетки поля каждой буквы должны быть закрашены, а какие — нет. Скажем, эталон буквы «н» можно записать



Поле Буквы



Ячейки памяти

Рис. 3.

в 10 последовательных ячейках памяти, как показано на рисунке 3.

Тем же способом в память машины вводятся и все другие эталоны. В процессе чтения каждая читаемая буква проверяется последовательно всеми эталонами. При проверке очередным эталоном машина сравнивает содержимое каждой клетки (закрашенность или незакрашенность этой клетки) с состоянием соответствующего элемента ячейки памяти и подсчитывает общее число «разночтений». После сравнения со всеми эталонами машина выбирает тот из них, для которого число разночтений — наименьшее; код выбранной буквы заносится в очередную ячейку памяти, и машина переходит к чтению следующей буквы.

Такое механическое чтение заранее определенного шрифта было бы достаточно надежным, хотя ошибки не исключены даже в этом случае. Нетрудно, например, представить себе, что буква «С» может из-за различных неправильностей оказаться «ближе» к эталону буквы «о», чем к своему собственному. Дополнительные трудности связаны с введением заглавных (больших) букв и знаков пунктуации (точки, запятой и пр.).

Главное неудобство данной системы чтения заключается в ее негибкости: стоит немного изменить шрифт,

и чтение перестает быть правильным. Происходит это потому, что при таком способе чтения ЭВМ различает буквы не по характерным особенностям их формы, а по конкретному способу их написания. Буква «о» из другого шрифта может значительно отличаться от эталонной соотношением своих частей: быть более узкой, иметь более крутые закругления и т.п. Число разночтений (при сравнении с эталонной буквой «о») окажется тогда очень большим, и машина может «спутать» букву «о» с какой-нибудь другой буквой. Следовательно, при переходе на другой шрифт нужно вводить в машину новые эталоны, заставляя машину каждый раз как бы заново «учить» алфавит.

Желательно, конечно, заставить машину правильно распознавать буквы исключительно по их строению, структуре — так, чтобы даже значительные различия в соотношении частей букв не влияли на результат чтения. Здесь, однако, как раз кроются основные трудности, которые особенно наглядно проявляются при чтении рукописных текстов. Например, букву «а» даже один и тот же человек пишет по-разному в разных случаях, не говоря уже о разных людях. И если человек, разбирая какой-либо текст, прибегает к помощи многочисленных смысловых, логических и грамматических связей, то машина такой помощи, вообще говоря, лишена и должна рассчитывать только на свое «зрение».

Чтобы отчетливее представить, какие здесь возникают проблемы и как можно подойти к их решению, остановимся на простом примере рукописного текста, записанного азбукой Морзе. В этом случае символов всегда два: «точка» и «тире» (не считая всевозможных различных по длине пропусков между символами и группами символов). Главное затруднение состоит в том, что некоторые «точки» у одного «морзиста» могут оказаться длиннее некоторых «тире» у другого. По этой причине нельзя заранее снабдить машину точным предписанием: все знаки, длина которых меньше данного числа  $l$ , должны считаться точками, все прочие знаки — тире. Можно, однако, сделать так, чтобы по достаточно длинному тексту одного морзиста машина сама определила такое пограничное число  $l$ . Ведь у всякого морзиста длины всех



Рис. 4.

точек будут близки к определенному числу  $l_1$ , а длины всех тире — к некоторому определенному числу  $l_2$ . Если найти эти два числа  $l_1$  и  $l_2$  и положить  $l = \frac{l_1 + l_2}{2}$ , то

можно ожидать, что почти все точки окажутся короче  $l$ , а почти все тире — длиннее  $l$ . Для определения же чисел  $l_1$  и  $l_2$  машина «просматривает» какой-нибудь большой кусок текста и отмечает длины всех встречающихся в нем знаков. Например, в случае текста, показанного на рис. 2, машина находит, что знаки длины 1\*) встретились 4 раза, длины 2—3 раза, длины 3—1 раз, длины 4—3 раза, длины 5—1 раз:

Длина знака	1	2	3	4	5
Число знаков	4	3	1	3	1

Получается, что самый частый короткий знак — это знак длины 1, а самый частый длинный знак имеет длину 4. Эти два числа машина «принимает» в качестве  $l_1$  и  $l_2$  и вычисляет  $l = \frac{1 + 4}{2} = 2,5$ .

Теперь машина будет считать точками все знаки, длина которых меньше 2,5, а все другие знаки будет считать тире. Время от времени для большей надежности машина может производить перерасчет чисел  $l_1$ ,  $l_2$  и  $l$ .

Такой способ распознавания точек и тире (с некоторыми усовершенствованиями) был испробован на конкретной машине и дал прекрасные результаты: более 90% символов машина прочитала правильно.

Конечно, решающие успехи в этой области еще впереди; но кое-что уже сделано, и ученые продолжают интенсивно работать в этой области. Задача научить машину читать привлекает внимание многих исследователей как одна из наиболее важных, интересных и трудных задач в совершенствовании ЭВМ. Общая же задача «распознавания образов» справедливо считается едва ли не важнейшей задачей современной кибернетики \*\*).

\*) Все длины округляются до ближайшего целого числа.

\*\*) Подробнее см., например, книгу М. М. Бонгарда «Проблема узнавания» (М., изд-во «Наука», 1967).

## Несостоявшийся обед

Дорофей Мартынович Дубодумов, переехав на лето на дачу, решил дать обед и пригласить всех восьмерых своих соседей.

«— Что вы, что вы, — замахали на него руками. — Разве вы не знаете, что Порфирий Аполлинариевич никогда не примет приглашения, если вы позовете Афанасия Мефодиевича или Амвросия Евлампиевича, или если одновременно будут приглашены Авдотья Пафнутьевна и Никодим Гаврилович. Амвросий Евлампиевич и Афанасий Мефодиевич, правда, не будут возражать против каких-либо приглашений, зато Авдотья Пафнутьевна придет только в том случае, если будет приглашен и Никодим Гаврилович, который ни за что не примет приглашения, если на обеде будет Афанасий Мефодиевич. Розалия Леопольдовна приносит визиты только в сопровождении Акакия Акакиевича. Клеопатра Ивановна не будет возражать против приглашения Розалии Леопольдовны только в том случае, если будет приглашен Порфирий Аполлинариевич, но если не будет приглашена Розалия Леопольдовна, тогда Клеопатра Ивановна будет и против приглашения Никодима Гавриловича. Чтобы принял приглашение Акакий Акакиевич, надо пригласить либо Авдотью Пафнутьевну, либо Клеопатру Ивановну, кроме того, он откажется от приглашения, если на обеде будет Никодим Гаврилович без Порфирия Аполлинариевича, а о том, что Акакий Акакиевич не придет, если будет приглашен Афанасий Мефодиевич или Амвросий Евлампиевич, так даже и говорить не стоит».

(Окончание см. стр. 39)

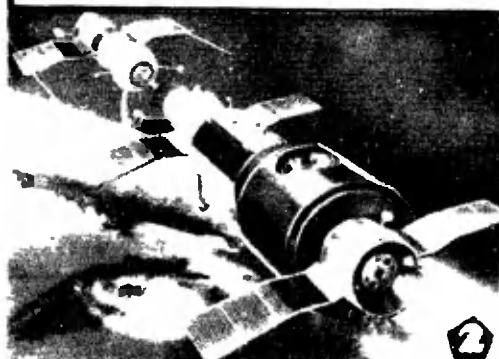


## ЗЕМЛЯ и ВСЕЛЕННАЯ

# 1



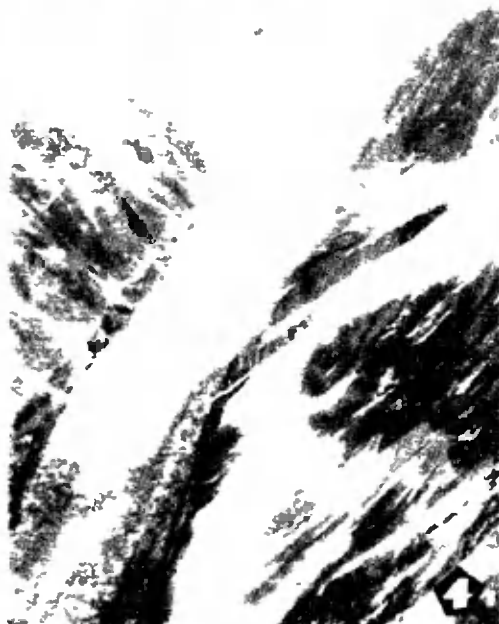
# 1



# 2



# 3



# 4

1. Невидимые миру звезды — «черные дыры» — стали предметом поиска. Их открытие будет иметь первостепенное научное значение. («Земля и Вселенная», № 2, 1972).

2. Так в июне 1971 года происходило сближение транспортного космического корабля «Союз-11» с орбитальной станцией «Салют». («Земля и Вселенная», № 2 и № 3, 1972).

3. Тридцать миллионов лет назад на севере Сибири произошла космическая катастрофа, в результате которой возник Понгайский кратер. («Земля и Вселенная», № 5, 1971).

4. «Медвежий» — пример пульсирующего ледника, причины неожиданных перемещений которого пытаются выяснить гляциологи. («Земля и Вселенная», № 3, 1972).



# У НАС В ГОСТЯХ ЖУРНАЛ "ЗЕМЛЯ И ВСЕЛЕННАЯ"

В январе 1965 года вышел из печати первый номер нового научно-популярного журнала Академии наук СССР «Земля и Вселенная». Журнал призван удовлетворять огромный интерес к проблемам исследования космоса, астрономии и физики Земли, возникший в последние десятилетия.

Основные задачи журнала:

- пропагандировать важнейшие научные достижения, показывая мировоззренческое значение наук о Земле и космосе, а также их тесную связь с другими областями знания;
- вскрывать антинаучную сущность всякого рода сенсационных «гипотез» и «теорий» в области астрономии и геофизики, распространение которых дискредитирует советскую науку;
- оказывать помощь преподавателям и лекторам;
- содействовать широкому участию любителей в массовых наблюдениях и исследованиях, важных для астрономии, геофизики и геодезии;
- способствовать широкому развитию любительского телескопостроения.

За годы своего существования журнал опубликовал много интересных материалов, посвященных исследованиям Луны и планет Солнечной системы, квазарам, пульсарам, реликтовому излучению и другим загадочным объектам, открытым радиовстрономами. Он рассказал об изучении нашей Галактики и процессов, происходящих в других галактиках, о новых разделах астрономии (рентгеновская астрономия, нейтринная астрономия и т. д.), о причинах землетрясений, цунами, движении земных материков.

Материалы, публикуемые в журнале «Земля и Вселенная», имеют различный уровень трудности. Часть из них рассчитана на хорошо подготовленных читателей; другая не требует никакой специальной подготовки.

Мы помещаем две статьи постоянных авторов журнала. Статья Л. М. Гиндилиса связана с весьма сложной проблемой, и некоторые ее выводы, касающиеся теории фотонных ракет, нашим читателям придется принять «на веру». Но сама проблема поисков космических цивилизаций настолько интересна, что мы охотно публикуем эту статью. Статья В. И. Левантовского посвящена одной любопытной задаче современной космонавтики. По своему характеру она значительно ближе к материалам, публикуемым в нашем журнале.

# СЕТИ В ВОПРОСАХ И ЗАДАЧАХ

Л. М. Гиндилис

Сейчас много говорят и пишут о проблеме связи с внеземными цивилизациями. Специалисты коротко называют ее СЕТИ, по первым буквам английских слов Communication with Extraterrestrial Intelligence, что в переводе на русский язык означает «связь с внеземным разумом». Пишут не только в фантастических произведениях, но и в серьезных, вполне серьезных научных работах. Этой теме уже не раз были посвящены научные семинары, совещания, конференции. Недавно в Армении, в Бюраканской астрофизической обсерватории, прошла I Международная конференция по этой проблеме. В ее работе приняли участие многие выдающиеся советские и зарубежные ученые — специалисты в области астрономии, физики, биохимии, биологии, истории, философии, социологии, кибернетики, теории информации и связи. В течение нескольких дней они обсуждали возможности обнаружения внеземных цивилизаций, проблему установления контакта с внеземным разумом\*). Действительно, можно ли установить контакт с разумными обитателями других миров, отдаленных от нас гигантскими расстояниями, которые легче записать с помощью цифр, чем представить силой воображения?

Как это сделать?

Вооружимся карандашом и бумагой и вместе подумаем над этой проблемой.

Конечно, интереснее всего было бы слетать к ним в гости, посмотреть, как они живут, чем занимаются, поделиться опытом... Итак, садимся в ракету. Чтобы вырваться из сферы земного притяжения, надо развить скорость 11,2 км/с. Это — так называемая вторая космическая скорость (вопрос в скобках: почему вторая, а что же такое первая космическая скорость?) А чтобы покинуть Солнечную систему, необходимо развить скорость, которая превышает третью космическую (чему она равна?).

Пусть наша ракета мчится со скоростью порядка третьей космической скорости. Сколько времени потребуется нам, чтобы долететь до ближайшей к Солнцу звезды? (Как она называется, на каком расстоянии от нас находится?). А до центра Галактики? До Туманности Андромеды?

Если вы не ошиблись в вычислениях, результат их может вызвать уныние. Чтобы долететь даже до ближайшей звезды, не хватит никакой человеческой жизни. Что же делать? Ну, конечно, увеличить скорость. Для нас с вами это не представляет никакого труда: ведь мы проводим мысленный эксперимент, поэтому мы можем использовать любые средства, даже те, которые недоступны технике сегодняшнего дня. Запрещается нам только одно: нарушать законы физики. Итак, увеличиваем скорость.

Какова максимально возможная скорость?

Это вы, конечно, знаете; она равна скорости света в пустоте — 300 000 км/с. При такой скорости, чтобы долететь до ближайшей звезды, потребуется

\*) Об этих дискуссиях вы можете прочитать в журнале «Земля и Вселенная» № 2 и № 3 за 1972 г.

немногим более четырех лет. Конечно, точно со скоростью света не может лететь ни одно материальное тело. Такая скорость доступна лишь для частиц, лишенных массы покоя. Но ракета может достичь скорости сколь угодно близкой к скорости света, так что полет до ближайшей звезды действительно займет около четырех лет.

А сколько времени потребуется, чтобы долететь до центра нашей Галактики? До туманности Андромеды?

Ну, это совсем просто. Расстояние до центра Галактики составляет приблизительно 34 000 световых лет, следовательно, если лететь со скоростью света, то потребуется 34 тысячи лет. Действительно просто, но неутешительно: опять-таки слишком долго. Положение кажется безвыходным — ведь мы летим с максимально возможной скоростью. Где же выход? Впрочем, стоп! В нашем рассуждении есть неточность. Мы не учли различия в темпе течения времени на Земле и в нашей ракете. Для наблюдателя, остающегося на Земле и следящего по своим часам за нашим полетом, действительно пройдет 34 000 лет. Но на движущемся корабле согласно теории относительности время течет по-другому. Чем ближе скорость корабля к скорости света, тем медленнее течет на нем время. Значит, если мы достаточно близко подойдем к скорости света, то сумеем долететь куда угодно и почти не состаримся.

Пусть корабль движется с постоянной скоростью  $v$ . Вам поставлена задача: за 10 лет долететь до туманности Андромеды. Какова должна быть скорость корабля? Чему равно ее отношение к скорости света?

Расстояние до туманности Андромеды приближенно равно двум миллионам световых лет. Чтобы пролететь это расстояние за 10 лет, релятивистское сокращение времени, то есть отношение собственного времени  $\tau$  космического корабля ко

времени  $t$ , измеряемому по часам земного наблюдателя, должно быть равно

$$\frac{\tau}{t} = \frac{10}{2\,000\,000} \frac{v}{c}.$$

Но при постоянной скорости корабля эта величина

$$\frac{\tau}{t} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Отсюда

$$\frac{v}{c} \approx 1 - 1,25 \cdot 10^{-11} =$$

$$= 0,999\,999\,999\,987\,5.$$

Итак, если корабль будет двигаться со скоростью 0,999 999 999 987 5  $c$ , он за 10 лет сможет долететь до туманности Андромеды.

Но, чтобы достигнуть такой скорости, корабль должен быть предварительно ускорен с помощью какого-то двигателя. Следовательно, надо еще учесть время ускорения корабля. Коэффициент полезного действия ракеты тем выше, чем ближе скорость истечения рабочего тела («топлива») к конечной скорости ракеты. Поэтому наиболее эффективным средством достижения околосветовых скоростей является использование фотонной ракеты, работающей за счет реакции аннигиляции вещества и антивещества. Конечным продуктом этой реакции является  $\gamma$ -излучение. Итак, скорость истечения рабочего тела равна скорости света.

Пусть фотонный корабль движется с ускорением  $a = g = 10 \text{ м/с}^2$  (для нас это очень удобно: никаких перегрузок, никакой невесомости). Каково собственное время ускорения корабля от нулевой скорости до скорости  $v$ , которую мы только что определили? Чему равно время ускорения в системе неподвижного наблюдателя?

Из теории фотонной ракеты известно\*), что если она движется с

\*) См., например, С. Хорнер, «Осуществимы ли космические полеты?» Сборник «Межзвездная связь», М., Мир, 1965, стр. 158—176.

постоянным ускорением  $a$  и если массовое число, то есть отношение начальной массы ракеты к конечной (после выгорания топлива), равно  $\mu$ , то время ускорения, или длительность полета на активном участке траектории, в системе отсчета, связанной с ракетой, равно

$$\tau = \frac{c}{a} \ln \mu. \quad (1)$$

То же время в системе неподвижного наблюдателя

$$t = \frac{c}{2a} (\mu - \mu^{-1}). \quad (2)$$

При этом ракета в ускоренном полете проходит путь

$$x = \frac{c^2}{2a} (\mu + \mu^{-1} - 2) \quad (3)$$

и достигает в конце этого пути скорости

$$v = c \frac{1 - \mu^{-2}}{1 + \mu^{-2}}. \quad (4)$$

Определим прежде всего  $\mu$ . Из последней формулы получаем

$$\mu^2 = \frac{c+v}{c-v} \approx \frac{2}{1 - \frac{v}{c}}.$$

Подставляя сюда найденное выше значение скорости  $v$ , находим  $\mu = 4 \cdot 10^6$ . Теперь можно определить величины  $\tau$ ,  $t$ ,  $x$ . Они равны:  $\tau = 3,9 \cdot 10^7 \text{ с} \approx 12 \text{ лет}$ ,  $t = 6 \cdot 10^{12} \text{ с} \approx 2 \cdot 10^5 \text{ лет}$ ,  $x = 1,8 \cdot 10^{23} \text{ см} \approx 2 \cdot 10^5 \text{ световых лет}$ .

Итак, в нашем примере фотонный корабль, двигаясь с постоянным ускорением  $a = 10 \text{ м/с}^2$ , за 12 лет достигнет скорости  $0,999\,999\,999\,987\,5 \text{ с}$  и при этом успеет пройти приблизительно десятую часть пути до туманности Андромеды. Двигаясь далее по инерции с постоянной скоростью  $v$ , он приблизительно через 1,6 миллиона лет по земным часам будет находиться на расстоянии  $200\,000$  световых лет от цели. Так как релятивистское сокращение времени при данной скорости составляет  $5 \cdot 10^{-6}$ , то собственное время корабля, прошедшее с момента выключения дви-

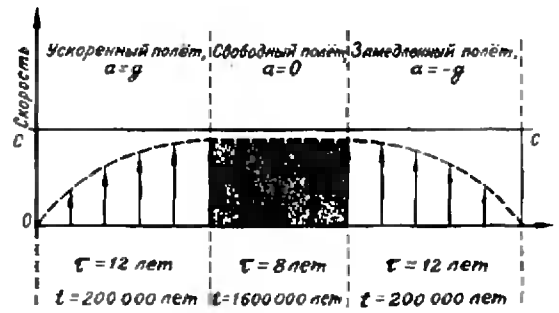


Рис. 1. Схема полета к туманности Андромеды,

гателя, составит  $5 \cdot 10^{-6} \times 1,6 \cdot 10^6 = 8 \text{ лет}$ . Пусть в этот момент космонавты вновь включают двигатель, чтобы погасить приобретенную скорость. И пусть ускорение (замедление) по-прежнему равно  $g$ . Очевидно, для того чтобы погасить скорость до нуля, потребуются те же 12 лет, и при этом путь будет пройден тот же, что и при ускорении:  $2 \cdot 10^5$  световых лет. Полное время полета в один конец по часам космонавтов составит:  $12 + 8 + 12 = 32$  года (рис. 1).

Если ускорение увеличить в 10 раз, то длительность ускоренного полета сократится в 10 раз. Тогда для того, чтобы достигнуть туманности Андромеды, космонавтам потребуется:  $1,2 + 5 \cdot 10^{-6} (2 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^4) + 1,2 = 1,2 + 9,8 + 1,2 = 12,2$  года. Величина  $4 \cdot 10^4$  лет равна времени полета с ускорением по земным часам.

В разобранном только что примере корабль ускорился до некоторой скорости  $v$ , близкой к скорости света, а затем большую часть пути продолжил полет по инерции. Это не наилучший способ путешествия. Ведь чем дольше работает двигатель фотонного корабля, тем выше скорость, развиваемая им в конце активного участка траектории. Поэтому минимальное время полета достигается тогда, когда корабль движется с постоянным ускорением до половины пути, а затем начинает тормозиться с тем же ускорением (замедлением), так что в конце пути скорость корабля равна нулю. В справедливости этого положения вы можете убедиться, используя приведенные выше формулы.

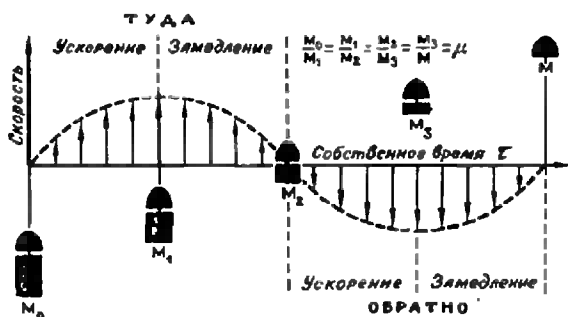


Рис. 2. Схема полета с возвратом космонавтов на Землю.

До сих пор мы интересовались только временем полета. Подумаем теперь о необходимой мощности. Пусть корабль движется описанным выше оптимальным образом с постоянным ускорением до половины пути и последующим замедлением на оставшемся участке. На обратном пути все повторяется в том же порядке (рис. 2). Пусть ускорение корабля  $g$ , конечная масса 10 тонн, дальность полета 1 000 световых лет (совсем рядом по сравнению с туманностью Андромеды!). Какова начальная масса корабля? Чему равен энергетический эквивалент этой массы? Какова мощность двигателя?

Поскольку дальность полета равна 1 000 световых лет, длина участка ускорения составляет 500 световых лет. Полагая  $x=500$ , из формулы (3) находим  $\mu=10^3$ . Следовательно, если  $M_0$  — начальная масса ракеты, то в конце участка ускорения ее масса  $M_1=10^{-3} M_0$ . Поскольку длина участка торможения также составляет 500 световых лет, а ускорение (замедление) по-прежнему равно  $g$ , то масса ракеты в конце этого участка равна  $M_2=10^{-3} M_1=10^{-6} M_0$ . На обратном пути, после торможения, масса ракеты будет равна  $M=10^{-6} M_2=10^{-12} M_0$ . Это и есть полезная масса корабля, равная по условию 10 тоннам. Отсюда получаем  $M_0=10^{13}$  тонн, что равно массе марсианского спутника Фобоса. Энергетический эквивалент этой массы  $E=M_0 c^2 \approx 10^{40}$  эрг. Это в  $10^{13}$  раз превышает современное потребление энергии в год по всему земному шару.

Определим теперь мощность двигателя, которая из теории фотонной ракеты равна

$$P=M_0 ca. \quad (5)$$

Подставляя сюда значение  $M_0$ , найдем  $P=3 \cdot 10^{25}$  вт. Это всего в 10 раз меньше мощности излучения Солнца. Но масса Солнца равна  $2 \cdot 10^{33}$  г, а масса нашей ракеты всего  $10^{19}$  г. Следовательно, удельная мощность Солнца (в расчете на 1 г массы) составляет около  $10^{-7}$  вт/г, а удельная мощность двигателя фотонной ракеты в нашем примере должна быть равна  $3 \cdot 10^6$  вт/г, то есть на 13,5 порядков выше. Это, конечно, фантастически большая величина. Если бы масса Братской ГЭС была 1 кг, она имела бы подобную удельную мощность. Для сравнения отметим, что современные судовые реакторы имеют удельную мощность порядка  $10^{-2}$  вт/г.

Трудности, с которыми мы встретились, вполне понятны. Стремясь достигнуть наших «братьев по разуму», мы пытались разогнать тяжелое тело (корабль с космонавтами) до около-световой скорости. Но в природе есть частицы, лишенные массы покоя (фотоны, нейтрино), которые не нужно разгонять, ибо они могут существовать, только двигаясь со скоростью света. Не воспользоваться ли нам их услугами? В повседневной жизни мы постоянно делаем это, когда слушаем радио, смотрим телевизор или говорим по телефону. Электромагнитные волны добросовестно переносят информацию нашим абонентам. Так давайте попробуем воспользоваться ими для связи с другими цивилизациями.

Предположим, что мы располагаем энергией порядка  $10^{40}$  эрг и можем построить либо фотонную ракету с мощностью двигателей  $3 \cdot 10^{25}$  вт либо передатчик такой же мощности. Какой путь нам избрать? При заданной мощности двигателей фотонная ракета, как мы видели, позволит улететь на расстояние 1 000 световых лет и вернуться обратно. В

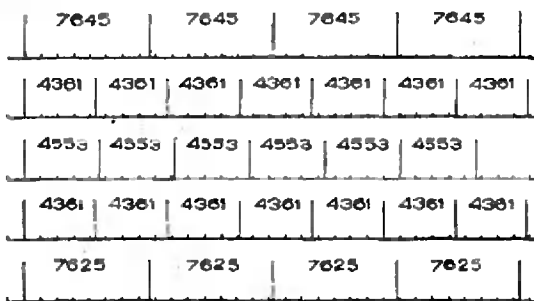


Рис. 3.

сфере такого радиуса содержится около 10 миллионов звезд. Но ракета может полететь только на одну из них. Как ее выбрать? Не слишком ли велик риск ошибиться?

Попробуем встать на другой путь. Будем излучать электромагнитные волны по всем направлениям в пространстве, передавая с их помощью определенную информацию. С энергетической точки зрения это самый невыгодный тип связи (когда энергия рассеивается во всех направлениях). Зато любой абонент, в каком бы направлении он ни находился, сможет принять наши сигналы, так что мы наверняка не промахнемся.

Вычислим дальность, на которой возможен прием сигналов от нашего передатчика. Поток энергии, проходящий через единицу поверхности на расстоянии  $R$  от передатчика, равен

$$\frac{P}{4\pi R^2} \text{ вт/м}^2,$$

где  $P$  — мощность передатчика.

Если  $A$  — эффективная площадь приемной антенны, то мощность принятого сигнала будет равна

$$P_c = \frac{PA}{4\pi R^2} \text{ вт.}$$

Положим  $R=10^8$  световых лет, что равно диаметру нашей Галактики, и пусть  $A=10^4 \text{ м}^2$  (подобные радиотелескопы уже есть на Земле). Тогда мощность сигнала будет равна  $2,4 \cdot 10^{-14} \text{ вт}$ . Такой сигнал вполне можно зарегистрировать с помощью

высокочувствительной приемной аппаратуры. Значит, где бы в пределах Галактики ни находился наш абонент, он сможет зарегистрировать посланные нами сигналы. При этом передатчик может непрерывно работать целый год, прежде чем мы исчерпаем имеющийся запас энергии ( $10^{40} \text{ эрг}$ ). За это время он сможет передать  $10^{14}$ — $10^{16}$  бит информации. Для сравнения укажем, что одна страница печатного текста содержит приблизительно  $10^4$  бит информации. Следовательно, мы могли бы передать текст объемом в  $10^{10}$ — $10^{11}$  страниц. Это целая библиотека — десятки миллионов томов по 1 000 страниц в каждом томе.

Вот и решайте теперь, что лучше: лететь туда, не зная куда, или послать свой радиопривет всем, кто может его услышать.

В связи с этим последняя задача на дешифровку. Вы получили сигнал из космоса, изображенный на рисунке 3. Он состоит из пяти последовательных серий импульсов. Числа в каждой серии представляют собой расстояния между импульсами (измеренные в долях длительности одного импульса, то есть  $t/\Delta t$ ).

Попробуйте расшифровать это сообщение.

### НЕИЗВЕСТНЫЙ СВЕРХТЯЖЕЛЫЙ ЭЛЕМЕНТ?

До недавнего времени считалось, что обнаруженный в метеоритах ксенон образуется только в результате деления плутония-244. В 1969 г. было высказано предположение, что ксенон может возникнуть и при делении еще неизвестного летучего сверхтяжелого элемента, который к моменту падения метеорита уже распался.

Что сейчас знают ученые об этом пока неуловимом гипотетическом элементе? Его теплота испарения, по мнению профессора Э. Андерса и Дж. Ларимера (США), составляет  $(54 \pm 3) \text{ ккал/моль}$ , а температура кипения  $(2500 \pm 400)^\circ \text{ К}$ . Наиболее подходящими «кандидатами» на место этого элемента могут быть элементы с номерами 111 (эка-золото) и 115 (эка-висмут) в таблице Менделеева. За ними, по степени вероятности, следуют элементы 113 (эка-таллий), 114 (эка-свинец), 112 (эка-ртуть) и 116 (эка-полоний). Элементы от 105 (эка-тантал) до 110 (эка-платина) недостаточно летучи, и их, очевидно, нужно исключить из этого списка.



# РАКЕТОЙ К СОЛНЦУ

В. И. Левантовский

На первый взгляд кажется, что пасть ракетой в Солнце так же просто, как яблоку упасть на Землю.

Во многих фантастических рассказах, посвященных космическим полетам, как самая ужасная катастрофа, которая может постигнуть исследователей Солнечной системы, рисуется падение космического корабля на Солнце. Иногда падение происходит вследствие технической несправности, иногда — из-за ошибки пилота при управлении кораблем...

Между тем, падение на Солнце по случайной причине так же невозможно, как, скажем, нечаянное падение на Луну самолета, который выполняет фигуры высшего пилотажа. Дело в том, что перевести космический корабль на траекторию падения к Солнцу можно, лишь затратив большое количество энергии, для чего требуется слишком много топлива.

Вычислим скорость, которую ракета-носитель должна сообщить космическому аппарату, чтобы он мог достичь Солнца. Если бы старт происходил с непритягивающей Земли, то ракете достаточно было бы развить скорость, противоположную орбитальной скорости Земли и равную ей по величине, то есть равную 29,77 км/с. Тем самым гелиоцентрическая скорость космического аппарата (скорость относительно Солнца) оказалась бы равной нулю, и он начал бы падение на Солнце по прямолинейной траектории.

Учтем теперь эффект земного притяжения. Пусть геоцентрическая скорость космического аппарата (скорость относительно Земли), постепенно падая, становится вдали от

Земли («на бесконечности»), где уже не ощущается притяжение Земли, равной  $v_{\infty}=29,77$  км/с. Напишем для этого случая закон сохранения механической энергии:

$$\frac{mv_{\Pi}^2}{2} - \frac{\gamma Mm}{r_{\Pi}} = \frac{mv_{\infty}^2}{2} \quad (1)$$

( $m$  и  $M$  — соответственно массы космического аппарата и Земли,  $v_{\Pi}$  и  $r_{\Pi}$  — скорость и расстояние от центра Земли в начале пассивного полета (в конце разгона),  $\gamma$  — гравитационная постоянная). В правой части здесь отсутствует потенциальная энергия ракеты в поле земного притяжения, равная нулю на бесконечности. Отсюда получаем

$$v_{\Pi}^2 = v_{\infty}^2 + \frac{2\gamma M}{r_{\Pi}} \quad (2)$$

Но второй член в правой части формулы равен квадрату скорости освобождения  $v_{осв}$  (второй космической скорости). В этом можно убедиться, положив в последнем уравнении  $v_{\Pi}=v_{осв}$ ,  $v_{\infty}=0$  (в соответствии с определением скорости освобождения).

Итак,

$$v_{\Pi} = \sqrt{v_{\infty}^2 + v_{осв}^2} \quad (3)$$

Приняв  $v_{осв}=11,19$  км/с (условное значение у поверхности Земли) и  $v_{\infty}=29,77$  км/с, найдем:  $v_{\Pi}=31,8$  км/с. Такую скорость надо сообщить ракете, чтобы она могла достичь Солнца. Эту скорость иногда называют *четвертой космической скоростью*. Она почти вдвое больше третьей космической скорости (16,67 км/с), обеспечивающей уход из Солнечной системы.

Посмотрим теперь, какие трудности должна преодолеть техника, чтобы космический аппарат мог развить четвертую космическую скорость и достичь Солнца.

Допустим, что солнечный зонд стартует с круговой орбиты искусственного спутника, которая расположена на высоте 200 км над земной поверхностью. Учитывая, что скорость спутника равна 7,8 км/с, найдем начальную скорость старта с орбиты:  $31,8 - 7,8 = 24$  км/с.

Воспользуемся известной формулой, дающей отношение начальной массы  $M$  ракетной системы к конечной массе (полезной нагрузке)  $m_n$ :

$$\frac{M}{m_n} = e^{v/c} \left( \frac{s-1}{s - e^{v/c}} \right)^n, \quad (4)$$

где  $e$  — основание натуральных логарифмов,  $v$  — скорость, которую нужно сообщить полезной нагрузке,  $c$  — скорость истечения газов из сопла ракеты,  $n$  — число ступеней,  $s$  — конструктивный параметр, указывающий отношение массы ступени, заполненной топливом, к массе пустой ступени. Величины  $s$  и  $c$  предполагаются одинаковыми для всех ступеней.

Предположим, что конструктивный параметр имеет чрезвычайно хорошее значение  $s=20$ , и пусть двигатели, разгоняющие космический зонд до скорости 24 км/с, используют в качестве горючего жидкий водород и в качестве окислителя жидкий кислород. Такое топливо обеспечивает скорость истечения  $c$  порядка 4 км/с.

При  $n=1$  и  $n=2$  в нашем случае оказывается, что  $s < e^{v/c}$ . Это означает, что одноступенчатая и даже двухступенчатая ракеты не могут при  $c=4$  км/с обеспечить достижение нужной скорости. При  $n=3$  получим  $M/m_n=1380$ , а при  $n=5$  отношение  $M/m_n=906,6$ .

Следовательно, при существующем сейчас химическом топливе (т. е.

при  $c=4$  км/с; значение  $c$  для химических топлив и в будущем не сможет превысить 5 км/с) на каждый килограмм полезной нагрузки, доставляемой к Солнцу, должно приходиться 1380 кг массы, стартующей с орбиты при трехступенчатом варианте и 906,6 кг — в случае пяти ступеней. Увеличение числа ступеней даже до 10 снижает отношение масс  $M/m_n$  лишь до 627,9.

Если предположить, что масса космического зонда равна 500 кг, то при  $n=5$  получаем  $M=453,3$  т. Чтобы смонтировать на околоземной орбите пятиступенчатую ракетную систему такой массы, понадобится запас с Земли пяти ракет такого класса, как американская лунная система «Сатурн-5». С энергетической точки зрения послать небольшой зонд на Солнце не легче, чем осуществить несколько лунных экспедиций!

Дело обстоит бы совершенно иначе, если бы на околоземной орбите включались не химические, а ядерные двигатели. Если даже предположить весьма умеренное для таких двигателей значение  $c=8$  км/с, то при  $n=2$  будем иметь отношение  $M/m_n=30,11$ . Значит, двухступенчатый ядерно-реактивный аппарат, стартующий с круговой орбиты, мог бы иметь массу в 15 т при прежней полезной нагрузке  $m_n=0,5$  т. При этом не нужен монтаж на орбите: запуск спутника такой массы давно уже стал возможным.

Однако попасть на Солнце можно и с помощью обычных химических двигателей, если воспользоваться гравитационными полями Юпитера или Венеры. Юпитер может отбросить к Солнцу космический зонд, подобно тому как Луна отбрасывает к Земле облетающую ее станцию, а Венера может приблизить к Солнцу пролетающую вблизи нее траекторию космического зонда.

# Гений XVIII века

А. Я. Яковлев

В мае 1727 года, в теплый весенний день по «Невской перспективе» шел двадцатилетний юноша. Он только что приехал из Базеля (Швейцария), где получил свою первую ученую степень.

Еще в 1721 году знаменитый Иоганн Бернулли, профессор Базельского университета, заметил необычайные способности четырнадцатилетнего студента. В течение ряда лет молодой Леонард Эйлер каждую субботу проводил в доме Бернулли. Тогда же он подружился с сыновьями своего учителя — Николаем и Даниилом, впоследствии профессорами Петербургской Академии.

По рекомендации братьев Бернулли получил приглашение в Петербург и молодой магистр искусств Леонард Эйлер.

Уже через несколько месяцев приезжий довольно бегло говорил на «непостижимом» русском языке. Вскоре в академических изданиях появились его первые работы: труды по математике, механике, физике. Со следующего года ни один том трудов Академии не выходил без нескольких работ молодого ученого. А в возрасте 26 лет Леонард Эйлер, будущий «общий учитель всех математиков второй половины XVIII века», стал академиком.

В течение 14 лет Эйлер написал более 75 крупных работ. Он читал лекции студентам Академического университета, принимал экзамены, составил прекрасное «Руководство к арифметике», занимался вопросами устройства механических пил и пожарных насосов, работал в Комиссии мер и весов, в Географическом департаменте, где руководил созданием генеральной карты России.



Л. Эйлер (1707—1783)

Эйлер был блестящим вычислителем. Он быстро и точно выполнял громоздкие расчеты. Не ограничиваясь чисто математической стороной дела, он глубоко занялся картографией и сам вычертил немало карт. «География Российская через мои и господина Гейнзиуса труды гораздо в исправнейшее состояние приведена, — писал впоследствии Эйлер. — Кроме разве Франции почти ни одной земли нет, которая бы лучше карты имела».

В начале сороковых годов обстановка в Петербургской Академии резко обострилась. Руководство Академией захватили Бирон, Шумахер и другие невежественные вельможи. В 1741 году Эйлер принял настойчивое приглашение прусского короля Фридриха II и переехал в Берлин. Вначале он был членом Правления Академии и директором класса (отделения) математики, а с 1759 года фактически возглавил Берлинскую Академию наук.

В Берлине Эйлер продолжал свои труды в области математики и механики. Однако большинство своих теоретических работ Эйлер по-

прежнему печатал в изданиях Петербургской Академии.

Все это время Эйлер продолжал оставаться почетным членом Российской Академии наук и получал большую по тем временам пенсию (200 рублей в год). Леонард Эйлер редактировал математические отделы русских журналов, приобретал для Петербурга книги и инструменты; на квартире у него годами жили ученики — адъюнкты из Петербурга. Ему посылались на отзыв письменные работы. В 1747 году Шумахер послал Эйлеру два сочинения М. В. Ломоносова, надеясь получить отрицательный ответ и отстранить Ломоносова от научной деятельности. Но ответ Эйлера разбил планы Шумахера.

«Все сии сочинения, — писал Эйлер, — не токмо хороши, но и превосходны, ибо он изъясняет физические и химические материи... с таким основательством, что я совершенно уверен в справедливости его изъяснений».

С июня 1766 года Эйлер снова в Петербурге. К этому времени зрение его резко ухудшилось. Еще в тридцатых годах, занимаясь кропотливыми вычислениями и вычерчивая карты, Эйлер потерял зрение на левый глаз; теперь и правый глаз почти ничего не видел. Крупнейшие ученые всего мира с тревогой узнавали об ухудшении его зрения. Однако сам Эйлер относился к потере зрения с величайшим спокойствием. Обладая феноменальной памятью, он научился писать вслепую мелом на доске и давал в то же время устные пояснения. Несмотря на полную слепоту, Эйлер проявлял удивительную трудоспособность, диктуя статьи и целые книги академику Н. И. Фуссу, М. Е. Головину (племяннику М. В. Ломоносова), своему сыну Иоганну Альбрехту и многочисленным ученикам. В то же время он не прекращал административную и организационную работу в Академии.

18 сентября 1783 года Эйлер внезапно почувствовал себя плохо.

Он успел лишь произнести «Я умираю» и потерял сознание. Через несколько часов он скончался от кровоизлияния в мозг.

По образному выражению французского ученого Кондорсе, «Эйлер перестал жить и вычислять». Его похоронили на Смоленском кладбище в Петербурге. Надпись на памятнике гласила: «Леонарду Эйлеру — Петербургская Академия». В 1956 году прах Эйлера перенесли в Ленинградский некрополь.

Эйлер прожил долгую плодотворную жизнь. Россия стала его второй Родиной. Здесь выросли пятеро его детей, 38 внуков. Потомки великого ученого и сейчас живут в нашей стране.

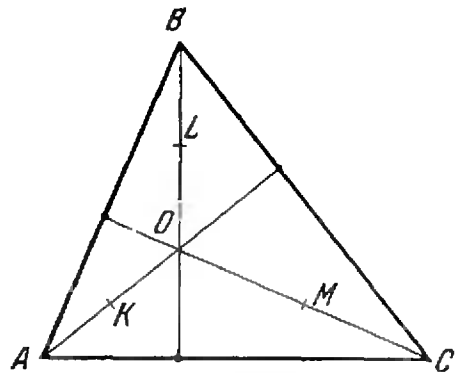
Леонард Эйлер был избран академиком восьми стран мира. Он оставил важнейшие труды по самым различным отраслям математики, механики, физики и ряду прикладных наук; многие из них по сей день входят в курсы высших учебных заведений. Двухтомная «Морская наука» сыграла колоссальную роль в развитии кораблестроения и кораблевождения в XVIII веке. «Теория движения Луны» и основанные на ней таблицы более сотни лет использовались мореплавателями всех стран мира. Трехтомная «Диоптрика» и другие сочинения по физике помогли создать высококачественные телескопы и микроскопы. Трудно даже перечислить отрасли науки и техники, в которых трудился великий ученый. Но в первую очередь он был математиком. Его работы по механике, физике, астрономии, как правило, представляют собой математическую постановку и математическое разрешение рассматриваемых задач.

В начале нашего века Швейцарское общество естествоиспытателей решило издать полное собрание сочинений Эйлера. Свыше 850 крупных научных работ составили 72 больших тома.

Чтобы только разобраться в научном наследии Эйлера, нужна целая человеческая жизнь...

На «карте» современной математики имя Эйлера встречается на каждом шагу. В математическом анализе при интегрировании иррациональных функций применяют *подстановки Эйлера*, сводящие задачу к более простой: к интегрированию рациональных функций. Один из простейших приближенных методов решения дифференциальных уравнений — *метод ломаных Эйлера*. В высших разделах анализа важную роль играют так называемые *эйлеровы интегралы* (В-функция и Г-функция). В теории чисел известна *теорема Эйлера* о сравнениях и *функция Эйлера* — число натуральных чисел, меньших данного числа и взаимно простых с ним. В механике при описании движения тел пользуются *углами Эйлера*, определяющими взаимное положение различных систем координат. В гидродинамике рассматривается *число Эйлера* — отношение разности давлений в двух характерных точках потока жидкости. Можно было бы назвать еще десятки функций, формул, теорем, связанных с именем Эйлера.

Для произвольного «простого» многогранника (то есть многогранника, не имеющего «дыр») справедлива *теорема Эйлера*: если обозначить число вершин через  $V$ , число граней через  $F$ , а число ребер через  $E$ , то  $V + F - E = 2$ . (Например, у куба или параллелепипеда  $V=8$ ,  $F=6$ ,  $E=12$ ; у шестигранной призмы («карандаша»)  $V=12$ ,  $F=8$ ,  $E=18$ ; у пирамиды с четырехугольным основанием  $V=5$ ,  $F=5$ ,  $E=8$ ). Этой замечательной теоремой (и знаменитой задачей о «кенигсбергских мостах», также решенной Эйлером) было, по существу, положено начало новой математической дисциплине — топологии \*).



Тригонометрические функции связаны с показательной функцией от мнимого аргумента *формулами Эйлера*:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x; \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2};$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Эти формулы также играют основополагающую роль для области математики — теории функции комплексного переменного.

Предлагаем в заключение решить следующую задачу, предложенную Л. Эйлером. Назовем *середины отрезков высот треугольника от ортоцентра до каждой из вершин (точки K, M, L на рисунке) точками Эйлера*. Доказать, что *середины сторон любого треугольника, основания его высот и точки Эйлера лежат на одной окружности*. Эту окружность называют *окружностью девяти точек*, или *окружностью Эйлера*. Радиус ее равен половине радиуса окружности, описанной около этого же треугольника. Прямую, соединяющую ортоцентр треугольника с центром описанного круга, называют *прямой Эйлера*. Центр окружности Эйлера лежит на этой прямой как раз посередине между ортоцентром и центром описанного круга.

#### Л и т е р а т у р а

1. А. П. Юшкевич. Эйлер. Большая Советская Энциклопедия, 2-е изд., т. 48.
2. История естествознания в России. Т. 1, ч. 1, М., «Наука», 1957.

\* ) См. подробнее Р. Курант и Г. Роббинс «Что такое математика?», М., «Просвещение», 1967, гл. V (особенно § 1).

# ЛУЧИ СВЕТА

Х. Рачлис

Недавно издательство «Мир» выпустило в свет небольшую научно-популярную книгу Х. Рачлиса «Физика в ванне». Мы помещаем здесь одну из глав этой книги. Перевод ее осуществлен Р. И. Нудельманом.

В конце этого номера журнала в разделе «Рецензии, библиография» вы можете прочитать короткий рассказ об этой книге.

Нальем в ванну немного воды так, чтобы глубина ее достигала примерно 10 сантиметров. Закроем кран и выждем, пока все волны улягутся, а потом взглянем вниз. Там мы увидим изображение своего лица, почти такое же, как в настоящем зеркале, только чуть туманнее. Сделаем его поярче, осветив лицо карманным фонариком.

А теперь попробуем осторожно пошевелить воду пальцем. Видите, изображение исказилось — вначале задрожало, заколыхалось, а затем постепенно успокоилось и вновь стало неподвижным. Вот оно уже приняло свой первоначальный вид. Взболтаем воду сильнее. На сей раз изображение исчезло совсем.

Почему водная поверхность образует зеркальное изображение? И почему оно не такое отчетливое, как в обычном зеркале? Почему изображение становится более ярким, если подсвечивать лицо фонариком? Почему оно исчезает, когда поверхность воды становится неровной?

Выяснение всех этих вопросов хорошо начать вот с чего — осветить фонариком поверхность воды, погасив предварительно свет в ванной. Спереди на фонарик лучше всего одеть картонную трубку примерно 30 сантиметров длиной. Если кто-то из вас не сумеет достать готовую трубку, можно сделать ее самому, скатав несколько листов бумаги и закрепив конец клейкой лентой.

В такой трубке фонарик даст почти нерасходящийся пучок света, как показано на рисунке 1. Направим этот пучок вниз, на поверхность воды, и понаблюдаем, что с ним произойдет.

Для начала будем держать фонарик наклонно. Отражается ли свет от поверхности воды? Существует несколько способов проверить это. Один из них — попытаться найти световой зайчик на стене возле ванны. Иногда отраженный пучок можно даже увидеть, особенно если в воздухе есть пылинки. Можно попробовать самому вызвать облачко «чистой пыли» — для этого нужно разбросать в воздухе, чуть повыше отраженного пучка, мельчайший порошок тальк. А можно воспользо-

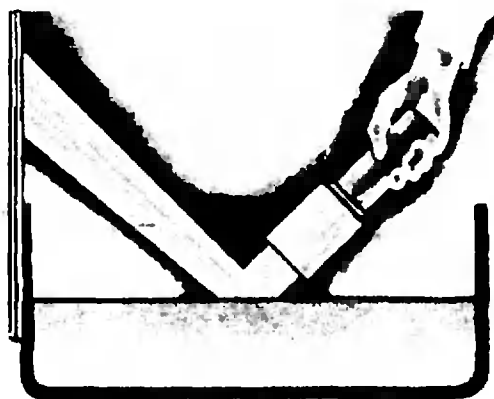


Рис. 1



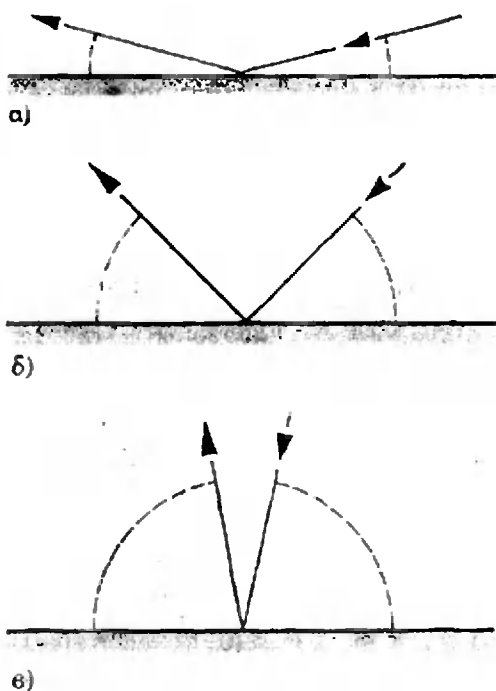


Рис. 2.

ваться еще одним способом: если в семье кто-нибудь курит, попросите его пустить дым на отраженный пучок. Частицы пыли или дыма в воздухе отражают свет в сторону глаза, и пучок становится видимым.

Если же возле того места, где пучок света попадает на воду, выставить ладонь, на ней покажется яркое пятно — это значит, там проходит отраженный пучок света. Медленно поднимая руку, чтобы проследить за пучком, мы в конце концов коснемся яркого пятна на стене.

Присмотримся, под каким углом пучок ударяется о поверхность воды, а затем попытаемся установить, под каким углом он отражается. Для этой цели лучше всего воспользоваться методом обнаружения пучка с помощью талька или дыма. Что можно сказать относительно угла, под которым пучок падает в воду, и угла, под которым он отражается? Они явно одинаковы.

Попробуем изменять наклон пучка. На рисунке 2 показаны некоторые типичные случаи отражения. Если световой пучок входит в воду под

небольшим углом, как на рисунке 2 а, отражение от поверхности происходит под таким же небольшим углом. Если же угол между световым пучком и поверхностью воды больше, как на рисунке 2, б, отраженный луч отходит от воды также под большим углом. Если же пучок идет почти вертикально вниз, как на рисунке 2, в, он отражается почти вертикально вверх.

А теперь направим пучок света наклонно к воде так, чтобы на стене образовалось световое пятно. При этом поверхность воды должна быть слегка неровной (дотронемся до нее несколько раз пальцем). Что произойдет с четким отраженным пятном на стене? Смотрите, оно расширяется, становится размытым, искажается, оно дрожит и колеблется.

Множество лучей (очень узких пучков) света, посылаемых фонариком, падает на воду почти под одинаковым углом. Если поверхность воды спокойная и ровная, то она отразит все лучи света под одинаковыми углами, то есть все лучи отразятся согласованно и пучок света останется, как и был, собранным. Вот почему, когда поверхность гладкая, на стене образуется небольшое яркое пятно.

Когда же мы «потревожили» воду, на ее поверхности образовалась рябь. И хотя отраженные лучи по-прежнему отходят от поверхности под тем же углом, под каким падающие лучи приходили к каждому участку воды, теперь каждый участок поверхности все время меняет свое положение (рис. 3). Из-за этого наклоны каждого отдельного луча света к воде постоянно меняются, и луч всякий раз отражается в другом месте на стене. Пучок света прыгает, расширяется — он становится то меньше, то больше, в зависимости от того, насколько взбудоражена поверхность воды.

Итак, только гладкие поверхности могут давать сконцентрированное отражение. На неровной поверхности отражения расходятся во все стороны.



Рис. 3.

Почему на поверхности образуется зеркальное изображение? Допустим, кто-либо смотрит в воду, стремясь увидеть в ней отражение маленького предмета А (рис. 4). На рисунке глаз Б смотрящего человека показан сильно увеличенным — это позволяет лучше разобраться, что же происходит со светом. Предположим, что лучи солнечного света падают на предмет А и отражаются им.

Как правило, предметы не бывают такими гладкими, как поверхность спокойной воды или зеркала. Строго говоря, если на поверхности предмета есть неровности, составляющие всего 1/25 000 сантиметра, этого уже

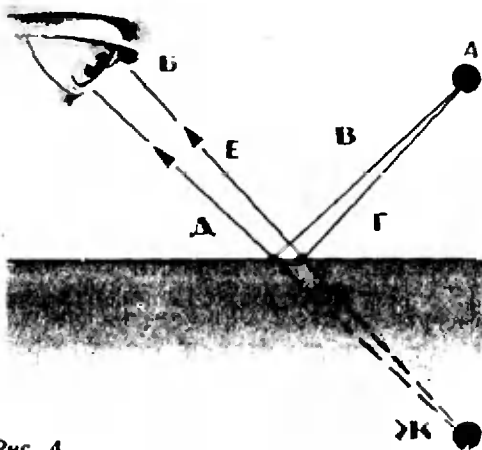


Рис. 4.

достаточно, чтобы отражать свет во всех направлениях. Представим себе, что предмет А имеет такие неровности. Рассмотрим, например, солнечные лучи В и Г, отраженные от предмета. Они пойдут от поверхности воды, как показано буквами Д и Е, и в конечном счете попадут в глаз Б.

Обратите внимание, насколько расходятся лучи В и Г по мере того, как идут наклонно по направлению к воде. После отражения от поверхности, каждый под своим углом, они продолжают расходиться, пока не попадут в глаз. Глаз не может знать, откуда к нему приходят лучи на самом деле. Ему кажется, что они выходят из точки Ж, расположенной ниже поверхности воды. Другими словами, глаз видит подобие, или изображение, предмета *под поверхностью* воды.

В большинстве случаев предметы бывают больше, чем предмет А, показанный на рисунке 4. Но справедливость рассуждения от этого не меняется. Каждая точка большого предмета дает свое собственное изображение. В глазу же изображение всех этих точек складывается в одно изображение, которое выглядит точно так же, как сам предмет.

Разумеется, чтобы создать подобное изображение, нужна очень гладкая отражающая поверхность, которая позволяет лучам отразиться таким образом, что после отражения они располагаются друг относительно друга так же, как и до отражения. На гладкой поверхности так оно и получается, а неровная поверхность искажает изображение, ибо отражает лучи как попало.

Любая гладкая поверхность отражает свет точно так же, как гладкая поверхность воды. Большинство зеркал изготавливается из очень гладкого стекла, покрытого с обратной стороны тонким слоем хорошо отражающего серебра (или другого металла). Хорошо отполированный стол или же натертый пол также дают зеркальное отражение, равно как и оконное стекло. Зеркалом могут служить и

блестящие бока автомобиля. Но их изогнутая поверхность отражает свет не под таким углом, как плоская поверхность, поэтому изображение выглядит искаженным.

Теперь попробуем ответить на вопрос: почему изображение в воде не такое ясное, как в зеркале? Это объясняется несколькими причинами. Снова возьмем фонарик и осветим наполненную водой ванну. Весь ли свет отражается? Нет, часть его, причем большая, проходит сквозь воду и освещает дно ванны.

Доля световой энергии, отражающейся от воды, невелика — каких-нибудь 10 процентов. Что же касается зеркала, то там наблюдается обратная картина. Слой металла, расположенный на тыльной стороне зеркала, отражает большую часть падающего на него света — около 95 процентов. Именно поэтому изображения, которые мы видим в обычном зеркале, намного ярче изображений на поверхности воды.

Вторая причина, по которой изображение в воде кажется нам более темным, заключается в том, что, глядя в ванну, мы своей головой загораживаем свет. Свет от висящей под потолком лампы или солнечный свет, льющийся в окно, может падать на лицо только обходным путем — ему приходится сначала отразиться от стен, от пола или от стенок ванны. Надо ли добавлять, что раз лицо плохо освещено, то и изображение получается тусклым. Когда же мы подсвечиваем лицо фонариком, часть света отражается непосредственно от лица, затем идет в воду, и в результате изображение становится ярче.

### Изогнутая прямая палка

Что происходит со светом, который не отражается от поверхности воды в ванне? Чтобы ответить на этот вопрос, сделаем следующий опыт. Нальем ванну, как обычно для купания, и опустим в воду прямую палку, слегка ее наклонив. Теперь, если мы посмотрим на палку, она больше не

покажется нам прямой: та ее часть, которая находится в воде, как бы изогнута кверху (рис. 5).

Ну, а если чуть вынуть палку из воды? Тогда наружная ее часть вновь будет совершенно прямой, а погруженная в воду по-прежнему кажется изогнутой кверху.

Теперь совсем вынем палку из воды — она совершенно прямая, как и была. Место изгиба полностью распрямилось.

Вам, видимо, ясно, что палка вовсе не изгибается в момент погружения в воду и не распрямляется, когда мы вынимаем ее из воды. Если кто-либо в этом сомневается, пусть пощупает «изогнутую» часть палки, находящуюся в воде. На ощупь она совершенно прямая. Тут явно имеет место какой-то оптический обман, в силу которого мы видим то, чего в действительности нет. Зеркальное изображение — это ведь тоже обман такого рода. Предметы, которые кажутся нам находящимися за зеркалом, на самом деле находятся в другом месте.

Исследуем это явление глубже. Для этого воспользуемся фонариком с трубкой, который мы изготовили ранее, когда речь шла о зеркалах.

Затемним, насколько возможно, ванную комнату, после чего направим фонарик вниз и пустим пучок света в воду. Наклоняя фонарик то так,

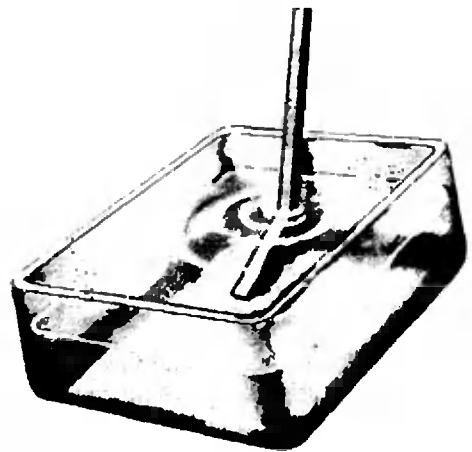


Рис. 5.

то эдак, заставим пучок идти то вертикально вниз, то скользить почти у самой воды. Видно, что в том месте, где он входит в воду, световой пучок резко преломляется. В воздухе он идет совершенно прямо, в воде тоже, но там, где вода встречается с воздухом, световой пучок резко изгибается вниз (рис. 6).

Кое-кого из вас может, пожалуй, смутить то обстоятельство, что палка в воде кажется изогнутой кверху, а световой пучок — изогнутым книзу. Если вы этого не заметили, еще раз обратите внимание на различие рисунков 5 и 6.

Это противоречие кажущееся, и его легко объяснить, если более подробно разобраться, что происходит с идущим из воды светом. На рисунке 7 показана прямая палка АБ, какая она есть на самом деле. В глаз наблюдателя, расположенный над водой, попадает свет, отраженный от конца палки Б. Но, переходя из воды в воздух, луч света, идущий от Б, идет не по прямой, а изгибается в точке Г и, очевидно, следует по пути БГВ, раз он попадает в глаз наблюдателя.

Наблюдатель не может знать, откуда в действительности приходит световой луч. Луч входит в глаз по направлению ГВ, значит, наблюдателю кажется, будто свет приходит по прямой, которая проходит чуть в стороне от Г, то есть откуда-то из точки Д. Там, по его мнению, и находится конец палки.

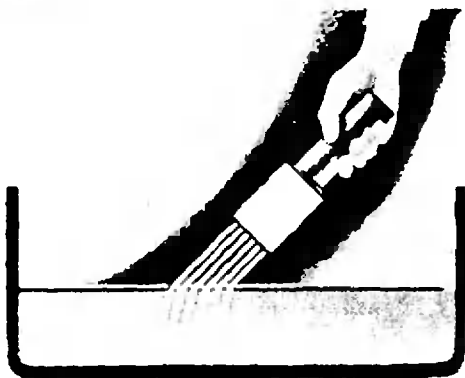


Рис. 6.

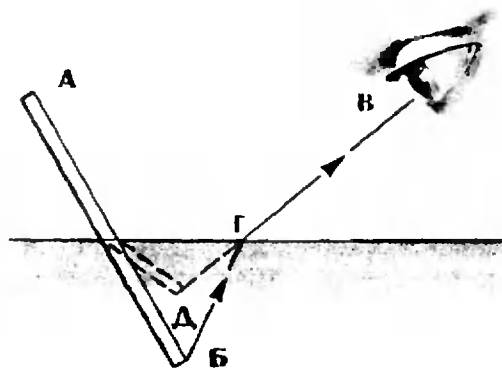


Рис. 7.

Обратим внимание, что точка Д расположена выше точки Б, именно поэтому палка кажется загнутой кверху. Кроме того, палка выглядит короче, чем в действительности. Эти два правила применимы ко всем предметам, погруженным в воду. Если предмет погружен в воду лишь частично, его подводная часть всегда кажется короче. Более того, все предметы в воде кажутся ближе к поверхности, чем это есть на самом деле.

Кому-нибудь из вас приходилось стрелять в рыбу из подводного ружья? Кому приходилось, тот, вероятно, знает, как это трудно. Дело в том, что рыба находится вовсе не там, где мы ее видим. Если целиться прямо в рыбу, стрела непременно пройдет выше. Поэтому нужно целиться чуть пониже, внося поправку на искривление световых лучей.

Только в одном случае очень узкий параллельный пучок света не будет изгибаться — если он идет вертикально, то есть прямо вниз. В этом случае свет входит в воду под прямым углом и идет вниз без излома.

Искривление светового пучка при переходе из одного прозрачного вещества (например, воды или стекла) в другое прозрачное вещество (например, воздух) называется *преломлением*. Преломление имеет очень важное значение: на нем основано действие всех оптических приборов, в

которых есть линзы. Зрение людей и животных также основано на преломлении света линзой (хрусталиком), которая находится в глазу.

Можно было бы еще очень много рассказать об интересных явлениях, происходящих со светом в ванне. Но пусть это станет предметом ваших самостоятельных исследований.

### Самостоятельные исследования

1. Скрепите вместе два тоненьких зеркальца, прижав их краями друг к другу, и поставьте зеркала на какую-нибудь цветную картинку. В зеркалах получаются замечательные kaleidosкопические узоры.

Раздвиньте зеркала и проследите за тем, как изменяются изображения. Объясните, что происходит.

2. Изображение в зеркале перевернуто по отношению к предмету, который вы рассматриваете. Если, глядя в зеркало, вы закроете левый глаз, вам покажется, будто изображение закрыло правый глаз. Но если посмотреть в зеркало, приставленное под прямым углом к другому зеркалу, то перевернутое изображение вновь перевертывается и все предметы видны такими, какие они есть на самом деле.

Поставьте два зеркала под прямым углом друг к другу и посмотрите на себя. Странно, не правда ли? Интересно, сумеет кто-нибудь из вас причесаться, глядя на свое «исправленное» изображение?

3. Попробуйте написать на листке свое имя, глядя при этом в зеркало и следя за изображением руки. Между глазом и рукой поставьте книгу, чтобы исключить прямое наблюдение за рукой. Вам удалось написать? Нет? Чем это объяснить?

4. Возьмите наполненный водой стакан и посмотрите сквозь него на карандаш, который установлен за стаканом вертикально. Переставьте карандаш влево, теперь вправо. Что при этом видно? Попробуйте сначала держать карандаш близко к стакану, потом отодвиньте его на расстояние вытянутой руки. Как найти объяснение тому, что происходит?

## Несостоявшийся обед

(Окончание. Начало см. стр. 21)

Дорофей Мартьяныч долго шевелил губами и морщил лоб, обдумывая, кого же приглашать на обед, наконец, плюнул на свою затею.

Какое максимальное количество гостей (и кого именно) мог пригласить Дорофей Мартьяныч на обед, чтобы приглашенные не имели к нему претензий по составу гостей?

А. С. Сорокин

## Задача Ньютона

На одном лугу площадью  $3\frac{1}{2}$  акра паслось 12 быков; за 4 недели они съели всю траву, которая первоначально была на лугу, а также и ту, которая выросла в течение этих 4 недель. На другом лугу площадью 10 акров пасся 21 бык; эти быки за 9 недель съели траву, имевшуюся первоначально, а также ту, которая вырастала за эти дни.

Сколько быков нужно пустить на луг площадью 24 акра, чтобы они при тех же условиях могли прокормиться 18 недель?

(Из «Всеобщей арифметики» И. Ньютона по английскому изданию 1728 года.)

Решения задач этого номера можно посылать не позднее 31 декабря по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», редакция журнала «Квант». После адреса на конверте укажите, решения каких задач вы посылаете; например: «Задачник «Кванта», М146, М148». В начале письма укажите свою фамилию, имя, отчество, домашний адрес, а также класс и школу, в которой вы учитесь. Решение каждой задачи (если вы посылаете сразу несколько) должно быть написано на отдельном листке (листочках), страницы пронумерованы. Решения задач по каждому из предметов — математике и физике, а также новые задачи, — просьба присылать в отдельных конвертах.

## Задачи

**М171.** На плоскости нарисован правильный шестиугольник, длина стороны которого равна 1. При помощи только линейки построить отрезок длины  $\sqrt{7}$ .

*А. В. Аялев*

**М172.** Докажите, что при любом простом  $p$  число

$$\underbrace{11\dots1}_{p} \dots \underbrace{22\dots2}_{p} \dots \underbrace{33\dots3}_{p} \dots \underbrace{99\dots9}_{p} - 123456789$$

делится на  $p$ .

*М. Я. Гервер*

**М173\*.** В квадратной таблице  $4 \times 4$  расставлены числа 1, 2, 3, ...

16 так, что сумма четырех чисел в каждой строке, в каждом столбце и на каждой из двух диагоналей равна одному и тому же числу, причем 1 и 16 стоят в противоположных углах таблицы. Докажите, что в этом «магическом квадрате» сумма любых двух чисел, расположенных симметрично относительно центра квадрата, одна и та же.

*Л. Г. Лиманов*

**М174.** На сторонах треугольника  $ABC$ , как на основаниях, построены равнобедренные треугольники  $AB_1C$ ,  $BA_1C$  и  $AC_1B$  (рис. 1). Докажите, что перпендикуляры, опущенные из

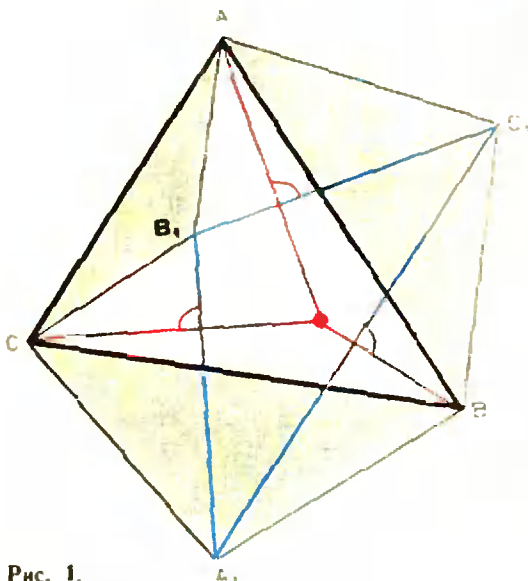


Рис. 1.

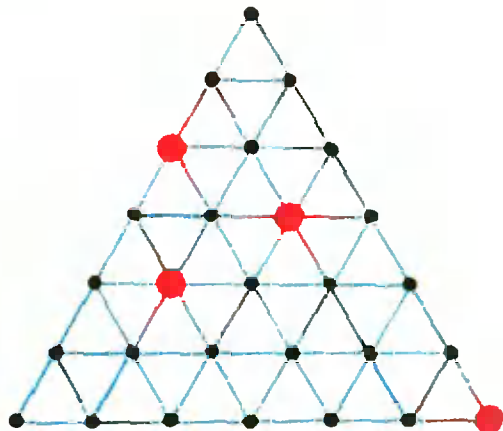


Рис. 2.



точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  соответственно на прямые  $B_1C_1$ ,  $C_1A_1$  и  $A_1B_1$ , пересекаются в одной точке.

*А. Г. Гейн*

**М175\*** а) Каждая сторона правильного треугольника разбита на  $m$  равных частей, и через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам, разрезающие треугольник на  $m^2$  маленьких треугольников. Среди вершин полученных треугольников нужно отметить  $N$  вершин так, чтобы ни для каких двух отмеченных вершин  $A$  и  $B$  отрезок  $AB$  не был параллелен ни одной из сторон (на рисунке 2  $m=6$ ). Каково наибольшее возможное значение  $N$  (при заданном  $m$ )?

б) разделим каждое ребро тетраэдра на  $m$  равных частей, и через точки деления проведем плоскости, параллельные граням. Среди вершин полученных многогранников отметим  $N$  вершин так, чтобы никакие две отмеченные вершины не лежали на прямой, параллельной одной из граней. Каково наибольшее возможное  $N$ ?

в) среди целочисленных решений уравнения

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = m,$$

удовлетворяющих условиям  $0 \leq x_i \leq m$  (для всех  $i=1, 2, \dots, k$ ), нужно выбрать  $N$  решений так, чтобы ни в каких двух из выбранных решений никакое неизвестное  $x_i$  не принимало одного и того же значения. Чему равно наибольшее возможное значение  $N$ ? (Задачи а) и б) являются частным случаем задачи в) соответственно при  $k=2$  и  $k=3$ .)

*М. Л. Гервер*

**Ф183\***. Динамометр, который скользит по гладкому горизонтальному столу, тянут с постоянной силой  $F=4$  н. Что показывает динамометр, если масса его пружины равна массе

корпуса и отградуирован динамометр был в горизонтальном положении?

*Г. Л. Коткин*

**Ф184.** При передаче телевизионного изображения на Земле за 1 секунду передается 25 кадров. Это означает, что 1 кадр передается за  $\frac{1}{25}$  секунды. В то же время, как известно, передача одного кадра изображения Луны советской автоматической станцией «Луна» длилась 25 минут. Почему так велика разница во временах передачи 1 кадра изображения в обоих случаях?

**Ф185.** Волейбольный мяч массой 200 г и объемом 8 л накачан до избыточного давления 0,2 атм. Мяч был подброшен на высоту 20 м и после падения на твердый грунт подскочил почти на ту же высоту. Оцените максимальную температуру воздуха в мяче в момент удара о грунт. Температура наружного воздуха 300° К, теплоемкость воздуха при постоянном объеме  $c_v=0,16$  кал/г·град.

**Ф186.** При повороте автобуса или автомобиля пассажиров отбрасывает в сторону, противоположную направлению поворота. В то же время, поворот самолета совсем не ощущается его пассажирами. Объясните эту разницу.

*И. Ш. Слободецкий*

**Ф187.** Тонкая металлическая пластина площади  $S$  залита слоем жидкого диэлектрика с плотностью  $\rho$  и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  так, что толщина этого слоя много меньше линейных размеров пластины. Что произойдет с жидкостью, если пластине сообщить электрический заряд  $+Q$ ?

*В. Л. Кривченков*

\*) В «Кванте» №№ 9, 10 следует читать номера задач: Ф173—Ф177 и Ф178—Ф182.

# ЗАДАЧНИК «Квант»



## Решения

В этом номере мы публикуем решения задач М129—М134

### М129

а) В ведро налили 12 л молока. Как, пользуясь лишь сосудами в 5 и 7 л, разделить молоко на две равные части?

б)\* Решите общую задачу: при каких  $a$  и  $b$  можно разделить пополам  $(a+b)$  л молока, пользуясь лишь сосудами в  $a$  л,  $b$  л и  $(a+b)$  л?

РЕЗЕРВУАР ↘										
І сосуд	7	2	2	0	7	4	4	0	7	6
ІІ сосуд	0	5	0	2	2	5	0	4	4	5
РЕЗЕРВУАР ↙										

Табл. 1.

І	$a, a-b$	$a-b, a-2b$	$a-2b, 0$	$0, a-2a-(l_1+1)b$	$a-2a-(l_1+1)b, 2a-(l_1+1)b$	$2a-(l_1+1)b, d_2=2a-l_2b$	$d_2=2a-l_2b, d_m=ma-l_mb$
ІІ	$0, b$	$0, b$	$0, 0$	$0, d_1, d_1'$	$b, 0$	$0, 0$	$0, 0$

Табл. 2.

І	$0, b, b$	$(-l_1-1)b, a$	$a$
ІІ	$b, 0, b$	$b, d_1=-a-l_1b$	$d_m=-ma-l_mb$

Табл. 3.

Для решения задачи а) достаточно привести табличку (см. таблицу 1). Для того

чтобы решить задачу б), поступим следующим образом. Пусть  $a \geq b$ . Назовем сосуд емкостью в  $a+b$  литров резервуаром, сосуд емкостью в  $a$  литров — первым сосудом, а сосуд емкостью в  $b$  литров — вторым сосудом. Докажем, что  $c$  литров можно получить тогда и только тогда, когда  $c = ma + lb$ , где  $m$  и  $l$  — целые числа,  $0 \leq c \leq a$ . Если  $a$  и  $b$  — целые числа, то это можно сформулировать так:  $c$  литров можно получить тогда и только тогда, когда  $0 \leq c \leq a$  и  $c$  делится на наибольший общий делитель  $a$  и  $b$  (см. статью В. Н. Вагутена «Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики», «Квант» № 6, 1972). Мы решаем задачу, не предполагая, что  $a$  и  $b$  — целые числа; если это заранее известно, то решение можно упростить; например, не нужно отдельно рассматривать случаи  $m > 0$  и  $m < 0$ .

Обозначим через  $d_k$  остаток от деления  $ka$  на  $b$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ ):  $d_k = ka - l_k b$ ,  $0 \leq d_k < b$ .

Нам достаточно доказать, что можно получить  $d_m$  литров. Действительно, поскольку  $d_m = ma - l_m b$  — наименьшее неотрицательное число вида  $ma + lb$ , где  $l$  — целое, то, добавляя к  $d_m$  еще  $l + l_m$  порций по  $b$  литров, мы сможем получить нужное количество

	$v_1 + v_2 \leq a$		$a \geq v_1 + v_2 > b$		$b \geq v_1 + v_2$	
I сосуд	$a$	$v_1 + v_2 - b$	$a$	$v_1 + v_2 - b$	$v_1 + v_2$	$0$
II сосуд	$v_1 + v_2 - a$	$b$	$0$	$b$	$0$	$v_1 + v_2$

Табл. 4.

$c = ma + lb$  литров. Как получить  $d_m$  литров, ясно из таблицы 2 (для  $m > 0$ ) и таблицы 3 (для  $m < 0$ ).

Докажем теперь, что  $v$  литров можно получить только тогда, когда  $v = ma + lb$ . Действительно, пусть после нескольких переливаний в первом сосуде оказалось  $v_1 = m_1a + l_1b$  литров, а во втором —  $v_2 = m_2a + l_2b$  литров. (На самом деле один из сосудов либо пуст, либо полон, но мы этим не воспользуемся.) Тогда, как бы мы ни организовывали следующее переливание, число литров в каждом из сосудов будет равно



а)

б)

Рис. 1. Ситуации, когда в первом сосуде  $x$  литров, а во втором —  $y$  литров, составляется точка с координатами  $(x, y)$ , а последовательность переливаний изображена красными и голубыми стрелочками — красные означают переливания из одного сосуда в другой, а голубые — переливания с использованием резервуара. Рисунок а соответствует таблицам 1 и 2, рисунок б — таблице 3.

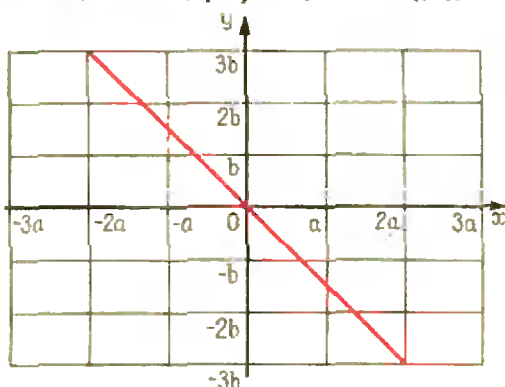


Рис. 2. Заметьте, что если разрезать изображенную здесь плоскость на прямоугольнички  $a \times b$  (по черным линиям) и сложить стопкой все прямоугольнички, содержащие отрезки красного луча, идущего вправо вниз (или влево вверх), то получится рисунок 1б (соответственно 1а) (голубые отрезки возникают в местах разрезов).

$m_1a + l_1b$ . В случае, когда используется резервуар, это очевидно, остальные случаи собраны в таблице 4.

Теперь уже можно решить задачу. Из доказанного следует, что с помощью переливаний можно получить  $\frac{a+b}{2}$  литров тогда и

только тогда, когда  $\frac{a+b}{2} = ma + lb$ , откуда

$$(2m-1)a + (2l-1)b = 0 \quad \text{или} \quad \frac{a}{b} =$$

$\frac{2l-1}{1-2m}$ . То есть можно отыскать такое число  $c$ , что  $a/c$  и  $b/c$  — нечетные целые числа.

Оказывается, наши таблицы, указывающие порядок переливаний, удобно интерпретировать геометрически (рис. 1, 2).

Л. Г. Лимаков

### М130

Какое наибольшее число точек можно разместить:

- на плоскости;
- в пространстве

так, чтобы ни один из треугольников с вершинами в этих точках не был тупоугольным?

Отвечаем: а) 4 точки; б) 8 точек. Примеры расположения такого количества точек: а) в вершинах квадрата; б) в вершинах куба.

(Разумеется, в условии подразумевается, что никакие три точки не должны лежать на одной прямой — без этого ограничения можно разместить сколько угодно точек.)

Докажем, что большее количество точек разместить нельзя.

Заметим прежде всего (это относится и к плоской, и к пространственной задаче), что если  $A_i$  и  $A_j$  — какие-то две из  $n$  точек  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , удовлетворяющих условию задачи, то все эти точки должны принадлежать множеству таких точек  $M$ , для которых одновременно  $\angle MA_iA_j \leq 90^\circ$  и  $\angle MA_jA_i \leq 90^\circ$ . Это множество — полоса между прямыми (в пространстве — плоскостями), проходящими через точки  $A_i$  и  $A_j$  и перпендикулярными к отрезку  $A_iA_j$  (рис. 3); мы будем ниже обозначать эту полосу через  $P_{ij}$ .

Из этого замечания следует, что если рассмотреть выпуклую оболочку  $V$  данных  $n$  точек — наименьший выпуклый многоугольник (многогранник), содержащий все эти точки, — то все точки  $A_1, A_2, \dots, A_n$

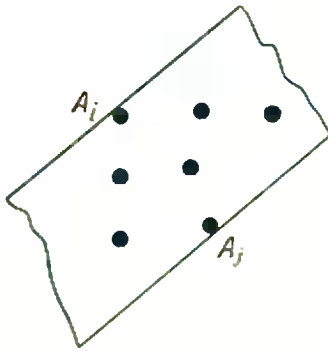


Рис. 3.

должны лежать на границе множества  $V$ ; ни одна из них не может оказаться внутри  $V$ ; ведь  $V$  содержится в каждой из полос  $\Pi_{ij}$ .

Решение задачи а) получается теперь в два слова. В этом случае  $V$  — выпуклый  $n$ -угольник с вершинами  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Сумма его углов равна  $180^\circ(n-2)$ , и если каждый из углов не больше  $90^\circ$ , то

$$180^\circ(n-2) \leq 90^\circ n,$$

откуда  $n \leq 4$ .

Решение задачи на плоскости прислали многие читатели. Пространственная задача намного труднее, и полного доказательства мы не получили ни от кого из читателей. Приведем решение, которое впервые нашли известные геометры Л. Данцер и Б. Грюнбаум (1962 г.).

Рассмотрим, кроме многогранника  $V$  (здесь под  $V$  можно понимать или выпуклую оболочку заданных  $n$  точек  $A_1, A_2, \dots, A_n$  или пересечение — общую часть — всех  $n(n-1)/2$  полос  $\Pi_{ij}$ ) еще следующие многогранники:

$V_i$ , получающиеся из  $V$  сдвигом на вектор  $\vec{A_i A_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $V_i$ , разумеется, совпадает с  $V$ ), и  $V'$ , получающийся из  $V$  растяжением (гомотетией) с коэффициентом 2 и центром в точке  $A_i$ .

Докажем следующие три утверждения.

1°. Многогранник, получающийся из  $V$  сдвигом на вектор  $\vec{A_i A_j}$ , не имеет общих внутренних точек с  $V$  (то есть может пересекаться с  $V$  только на границе).

2°. Никакие два из многогранников  $V_1, V_2, \dots, V_n$  не имеют общих внутренних точек.

3°. Все  $V_i$  содержатся в  $V'$ .

Докажем 1°. При сдвиге на  $\vec{A_i A_j}$  полоса  $\Pi_{ij}$  переходит в новую полосу, которая не имеет с ней общих внутренних точек — эти две полосы имеют только общую граничную плоскость. Но  $V$  содержится в  $\Pi_{ij}$ , поэтому тем более верно 1°.

2° сразу следует из 1°: достаточно заметить, что  $V_j$  получается из  $V_i$  сдвигом на вектор  $\vec{A_i A_j}$  (рис. 4).

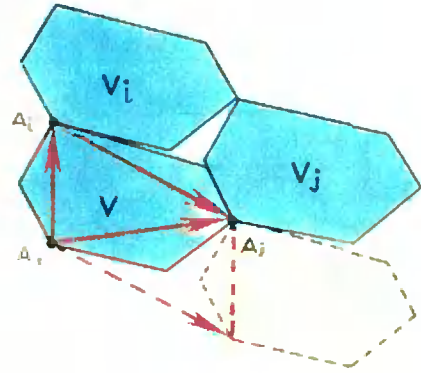


Рис. 4.

3° следует из более общего факта: если  $ABC$  — три точки выпуклого многогранника,  $W$  и  $W'$  — многогранник, полученный из  $W$  растяжением в 2 раза с центром в точке  $A$ , то четвертая вершина  $D$  параллелограмма  $ABDC$  (то есть точка, получающаяся из  $C$

сдвигом на вектор  $\vec{AB}$ ) принадлежит  $W'$ . Этот факт доказывается легко: точка  $K$ , из которой при растяжении получается  $D$  — середина отрезка  $AD$  — является одновременно и серединой отрезка  $BC$ , поэтому она принадлежит  $W$  (ведь многогранник  $W$  выпуклый), поэтому  $D$  принадлежит  $W'$  (рис. 5).

Итак, утверждения 2° и 3° доказаны. Пусть  $v$  — объем многогранника  $V$ . Тогда объем каждого из  $V_i$  тоже равен  $v$ , а объем  $V'$  равен  $8v$ . Из 2° и 3°, очевидно, следует, что  $nv \leq 8v$ , откуда  $n \leq 8$ .

Заметим, что попутно мы решили задачу, предлагавшуюся на XIII Международной олимпиаде (см. «Квант» № 12 за 1971 год, стр. 54, задача 2): видимо, задачу M130 б) в полном объеме международное жюри сочло слишком трудной для олимпиады и включило только вторую ее половину.

В связи с доказанным утверждением возникает целый ряд вопросов, которые уже не удастся решить тем красивым, но довольно искусственным способом, о котором мы рассказали. Например, какое наибольшее число точек в пространстве можно раз-

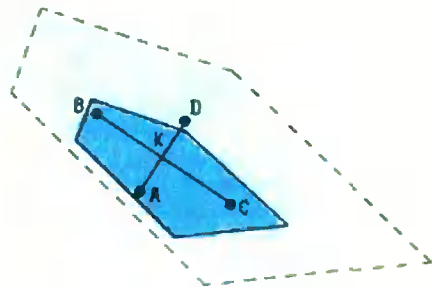


Рис. 5.

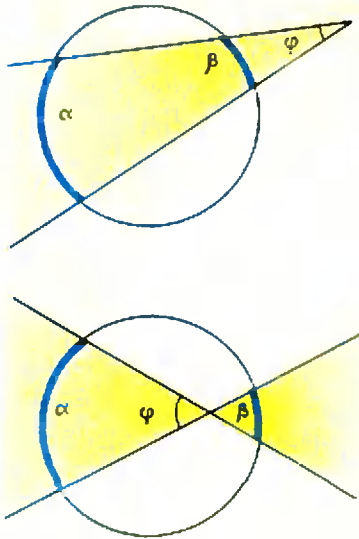


Рис. 6.

местить так, чтобы все углы треугольников с вершинами в этих точках были острыми? Из нашего решения видно, что 8 точек расположить нельзя (убедитесь в этом). Нетрудно построить пример, когда точек 5. Может ли их быть 6? 7? Более общий и, вероятно, очень трудный вопрос — какое наибольшее число точек можно расположить так, чтобы все углы не превосходили данного  $\alpha$ ?

Если кому-либо из читателей удастся продвинуться в решении этих вопросов, мы вернемся к ним еще раз.

### М131

Докажите, что четыре точки, в которых биссектрисы углов между продолжениями противоположных сторон вписанного четырехугольника пересекают его стороны, являются вершинами ромба.

Мы решим задачу, используя известные теоремы об угле между двумя секущими (рис. 6). Обозначения ясны из рисунка 7. Поскольку  $PN$  и  $QK$  — биссектрисы, то

$$\begin{aligned} \alpha_6 - \alpha_1 &= \alpha_2 - \alpha_2, \\ \alpha_7 - \alpha_4 &= \alpha_3 - \alpha_3. \end{aligned}$$

Сложив эти два равенства, получим  $\alpha_6 + \alpha_7 = \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_4 = \alpha_5 + \alpha_8$ , следовательно, сумма дуг в каждой части последнего равенства равна половине окружности. Поэтому прямые  $PN$  и  $QK$  перпендикулярны друг другу. Отсюда следует, что в треугольнике  $KPM$  биссектриса угла  $P$  является одновременно высотой; тогда она одновременно является и медианой; треугольник  $KPM$  равнобедренный. То же самое можно сказать о треугольнике  $LQN$ . Таким об-

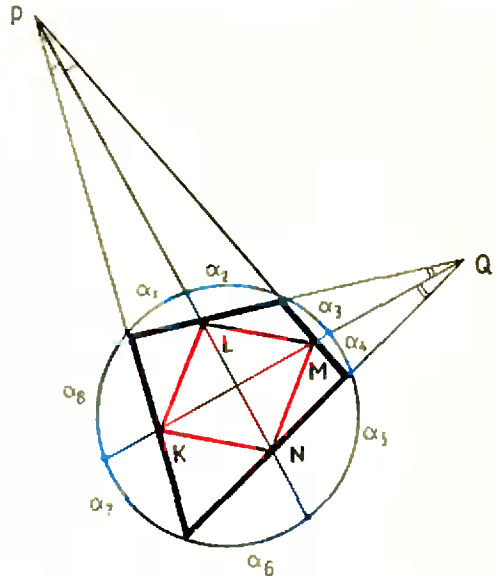


Рис. 7.

разом, в четырехугольнике  $KLMN$  диагонали делят друг друга пополам и взаимно перпендикулярны, поэтому он — ромб.

Н. Б. Васильев

### М132

Пусть по окружности вписано  $n$  чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , каждое из которых равно  $(+1)$  или  $(-1)$ , причем сумма  $n$  попарных произведений соседних чисел равна 0 (как в задаче М93, стр. 42) и вообще для каждого  $k = 1, 2, \dots, n-1$  сумма  $n$  попарных произведений чисел, отстоящих друг от друга на  $k$  мест, равна 0 (то есть  $x_1x_2 + \dots + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = 0$ ,  $x_1x_4 + x_2x_5 + \dots = 0$  и т. д.); пример для  $n=4$  дан на рисунке 8).

а) Докажите, что  $n$  — квадрат целого числа.

б) Существует ли такой набор  $n$  чисел при  $n=16$ ?

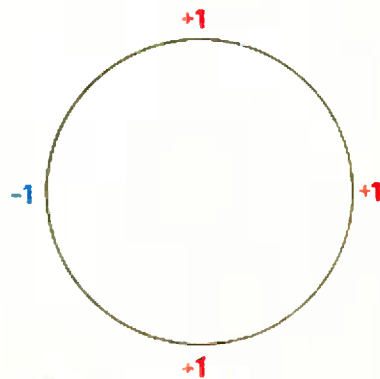


Рис. 8.

Докажем, что  $n$  — квадрат целого числа. Положим  $m = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ . Тогда  $m$  — целое число,

$$\begin{aligned} m^2 &= (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 = \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + (x_1x_2 + x_2x_3 + \\ &+ \dots + x_{n-1}x_n) + (x_1x_3 + x_2x_4 + \dots + x_{n-1}x_n) \times \\ &\times (x_1 + x_2) + \dots + (x_1x_n + x_2x_1 + x_3x_2 + \\ &+ \dots + x_nx_{n-1}). \end{aligned}$$

Как следует из условия задачи, в правой части этого равенства сумма чисел в первой скобке равна  $n$ , а сумма чисел в любой другой скобке равна 0. Значит,  $n = m^2$ . Задача а) решена.

Посмотрим, при каких  $n$  можно подобрать числа  $x_1, \dots, x_n$ , удовлетворяющие условию задачи. Как следует из задачи М93,  $n$  должно делиться на 4; значит,  $n$  — квадрат четного числа. Если  $n=4$ , то такие числа подобрать можно:  $x_1=x_2=x_3=1, x_4=-1$ . Следующее возможное значение для  $n$  — это 16.

Докажем, что для  $n=16$  такие числа  $x_1, \dots, x_{16}$  подобрать нельзя.

Предположим, что заданы числа  $x_1, \dots, x_{16}$ , удовлетворяющие условию задачи, и попытаемся прийти к противоречию.

Пусть  $m = x_1 + \dots + x_{16}$ . Можно считать, что  $m \geq 0$  (иначе мы могли бы заменить все числа  $x_i$  на  $-x_i$  без нарушения условий задачи), как было показано,  $m^2 = n = 16$ , то есть  $m=4$ .

Если  $p$  из чисел  $x_i$  равны  $+1$  и  $q$  равны  $-1$ , то

$$p + q = n = 16 \text{ и } p - q = m = 4.$$

Значит,  $p=10, q=6$ .

Будем считать, что числа  $x_i$  выписаны в вершинах правильного 16-угольника. Отметим звездочками те вершины, где стоит число  $-1$  (всего 6 звездочек). Пусть мы повернули всю картину на  $\frac{k}{16}$  частей полного оборота ( $k=1, 2, \dots, 15$ ).

Докажем, что при этом ровно 2 звездочки перейдут в вершины, где раньше были звездочки. Действительно, пусть  $r$  чисел, равных  $-1$ , перешли на места, где стояли  $-1$ . Тогда в сумме  $x_1x_{k+1} + x_2x_{k+2} + \dots + x_{16-k+1}x_1$  будет  $(6-r)$  слагаемых, в которых первый сомножитель равен  $-1$ , а второй  $+1$ , и  $(6-r)$  слагаемых, в которых второй сомножитель равен  $-1$ , а первый  $+1$ ; значит,  $2(6-r)$  слагаемых, равных  $-1$ .

Так как сумма равна 0, то  $2(6-r) = 8$ , то есть  $r=2$ .

Теперь можно переформулировать нашу задачу следующим образом: можно ли в вершинах правильного 16-угольника расставить 6 звездочек так, чтобы две из них стояли в противоположных вершинах, и для любого числа  $k$  от 1 до 7 существовало бы ровно две пары звездочек таких, что расстояние между звездочками в одной паре равно  $k$  (под расстоянием между двумя точками понимается длина меньшей из дуг, их соединяющих, причем длина всей окружности принята за

16 частей; расстояние между точками  $X$  и  $Y$  мы будем обозначать  $(XY)$ .

Обозначим через  $A$  и  $B$  диаметрально противоположные точки, отмеченные звездочкой, и через  $C, D, E, F$  — другие отмеченные точки. Подсчитаем сумму всех расстояний между точками  $A, B, C, D, E, F$ . Расстояние 8 встречается один раз, а расстояния от 1 до 7 по два раза — итого общая сумма  $2(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) + 8 = 64$ .

Посмотрим, какие расстояния реализуются между точками  $C, D, E, F$ . Так как  $(AX) + (BX) = 8$  для любой точки  $X$ , то сумма  $\Sigma$  всех расстояний между точками  $C, D, E, F$  равна  $64 - (AB) - 4 \cdot 8 = 24$ . Кроме того, если какое-то расстояние  $k$  реализуется между точками  $C, D, E, F$ , то это значит, что среди чисел  $(AC), (AD), (AE), (AF)$  и  $(BC), (BD), (BE), (BF)$   $k$  встречается меньше двух раз; но тогда и  $(8-k)$  встречается меньше двух раз, то есть  $(8-k)$  тоже реализуется как расстояние между точками  $C, D, E, F$ . Посмотрим, как же могут располагаться точки  $C, D, E, F$ . Легко проверить, что возможны два случая.

1) Какие-то три точки (например,  $C, D, E$ ) образуют треугольник, содержащий центр окружности. Пусть  $F$  лежит между  $C$  и  $D$ . Тогда

$$\begin{aligned} (CD) + (DE) + (CE) &= 16, \\ (CF) + (DF) &= (CD), \end{aligned}$$

и, кроме того,  $(EF)$  больше  $(CE)$  или  $(DE)$ . Так как и  $(CD) + (DE) > 8$  и  $(CD) + (CE) > 8$ , то

$$\Sigma = (CD) + (DE) + (CE) + (CF) + (DF) + (EF) = 16 + (CD) + (EF) > 24,$$

хотя, как мы показали раньше, эта сумма должна равняться 24. Значит, первый случай невозможен.

2) Точки  $C, D, E, F$  лежат с одной стороны от некоторого диаметра. Пусть они расположены по окружности в следующем порядке  $C, D, E, F$ . Тогда  $(CD) + (DF) = (CF)$  и  $(CE) + (EF) = (CF)$ , поэтому сумма  $\Sigma$  равна  $3(CF) + (DE)$ . Значит,  $3(CF) + (DE) = 24$ . Так как  $CF > DE$ , то  $(CF) = 7, (DE) = 3$ . Если  $(CD) = 1$ , то  $(DF) = 6$ ; но при этом расстояние  $2 = 8 - 6$  не реализуется между точками  $C, D, E, F$ , что противоречит ранее доказанному. Если  $(CD) = 2$ , то хотя  $(CF) = 7$ , расстояние 1 не реализуется. Если  $(CD) = 3$ , то  $(EF) = 1$ , и этот случай не отличается от случая  $(CD) = 1$ .

Итак, мы получили, что расставить звездочки требуемым способом (а значит, и подобрать числа  $x_i$ ) нельзя. Задача б) решена.

Ответ на вопрос в) нам не известен, но, по-видимому, удовлетворяющие условию задачи числа можно подобрать только при  $n=4$ .

Д. Н. Бернштейн

М133

Один из простейших многоклеточных организмов — водоросль «вольвокс» — пред-



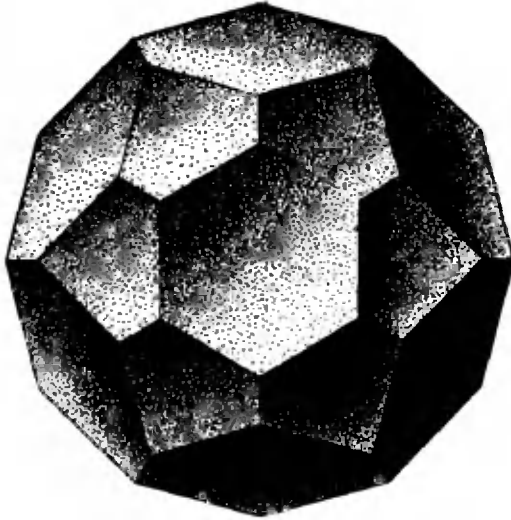


Рис. 9.

ставляет собой сферическую оболочку, сложенную в основном семиугольными, шестиугольными и пятиугольными клетками (то есть клетками, имеющими семь, шесть или пять соседних; в каждой «вершине» сходятся три клетки (рис. 9). Бывают экземпляры, у которых есть и четырехугольные, и восьмиугольные клетки, но биологи заметили, что если таких «нестандартных» клеток (меньше, чем с пятью и более, чем с семью сторонами) нет, то пятиугольных клеток всегда ровно на 12 больше, чем семиугольных (всего клеток может быть несколько сотен и даже тысячи). Не можете ли объяснить этот факт?

Утверждение задачи следует из формулы Эйлера. (О формуле Эйлера смотрите «Квант» № 4, 1972, стр. 31 или Курат и Робби и с «Что такое математика?» М., «Просвещение», 1967). Действительно, обозначим число вершин вольвокса через  $V$ , число ребер — через  $P$ , а число граней с  $i$  вершинами — через  $\Gamma_i$ . Тогда по формуле Эйлера

$$2 = V - P + \sum \Gamma_i.$$

Но  $3V = \sum_i i \Gamma_i$ , поскольку, по условию, в каждой вершине сходятся три грани, а  $2P = \sum_i i \Gamma_i$  — к каждому ребру примыкают две грани. Следовательно,

$$12 = 6V - 6P + 6 \sum \Gamma_i = \sum_{2i} \Gamma_i - \sum_{3i} \Gamma_i + \sum_{6i} \Gamma_i = \sum (6 - i) \Gamma_i.$$

По условию, нестандартных граней нет, то есть  $\Gamma_3 = \Gamma_4 = \Gamma_8 = \Gamma_9 = \dots = 0$ . Поэтому  $\Gamma_5 - \Gamma_7 = 12$  — в замечательном соответствии с наблюдениями биологов.

М134

Какое множество точек заполняют центры тяжести треугольников, три вершины которых лежат соответственно на трех сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  данного треугольника  $ABC$ ?

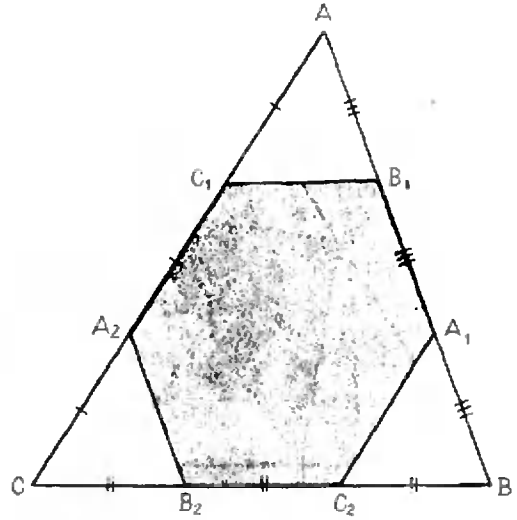


Рис. 10.

Нам будет удобно рассматривать не только полноценные треугольники, но и вырожденные треугольники тоже. Докажем сначала, что любая точка синего шестиугольника является центром тяжести вписанного треугольника (рис. 10). Для этого нам понадобится такая

**Лемма.** Если точка  $O_1$  является центром тяжести вписанного треугольника  $K_1L_1M_1$ , а точка  $O_2$  — центром тяжести вписанного треугольника  $K_2L_2M_2$ , то для любой точки отрезка  $[O_1, O_2]$  можно указать вписанный треугольник, для которого она является центром тяжести.

**Доказательство.** Нам будет удобно пользоваться механической интерпретацией понятия центра тяжести. Пусть точка  $O_3$  принадлежит отрезку  $[O_1, O_2]$ . Тогда можно положить такие грузики  $p_1$  и  $p_2$  в точки  $O_1$  и  $O_2$ , что она является их центром тяжести. Поместим теперь грузики

$\frac{p_1}{3}$  в вершины треугольника  $K_1L_1M_1$ ,

а грузики  $\frac{p_2}{3}$  — в вершины треугольника

$K_2L_2M_2$  (рис. 11). Центр тяжести этих шести грузиков совпадает с точкой  $O_3$ . С другой стороны, он является центром тяжести

трех грузиков  $\frac{p_1 + p_2}{3}$ , помещенных в вер-

шины треугольника  $K_3L_3M_3$ , полученного следующим образом. Точки  $K_3, L_3$  и  $M_3$  — это

центры тяжести пар грузиков  $\frac{p_1}{3}, \frac{p_2}{3}$ ,

помещенных в точки  $K_1, K_2; L_1, L_2$  и  $M_1, M_2$  соответственно. Таким образом, исходя из треугольников  $K_1L_1M_1$  и  $K_2L_2M_2$  и произвольной точки  $O_3$  отрезка  $[O_1, O_2]$ , мы построили треугольник  $K_3L_3M_3$ , центром тяжести которого она является. Лемма доказана.

Теперь легко доказать, что любая точка синего шестиугольника является центром

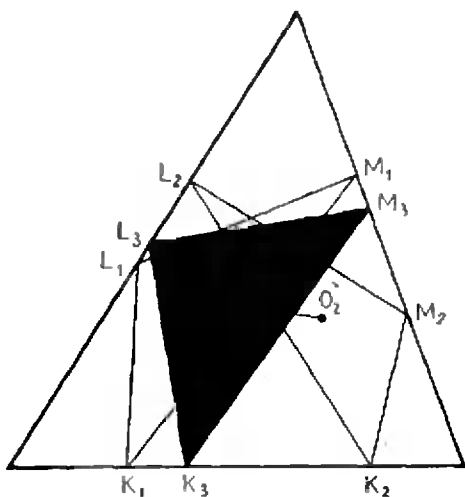


Рис. 11.

тяжести некоторого вписанного треугольника. Действительно, достаточно доказать это для его вершин, а затем воспользоваться леммой — с ее помощью мы от вершин сможем перейти к границе, а потом и к любой внутренней точке. Но для вершин такие треугольники строятся без труда: это треугольники, у которых вершины лежат в вершинах основного треугольника и две вершины слились в одну.

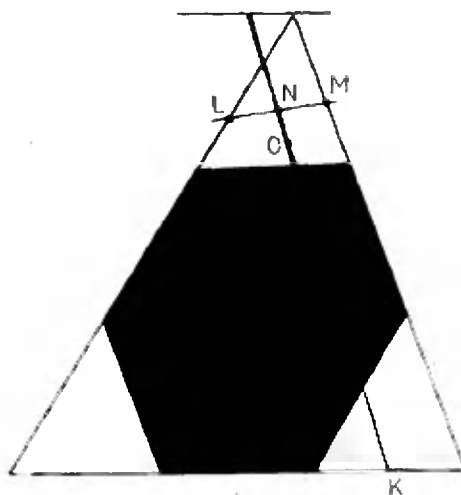


Рис. 12.

Остается доказать, что точки, лежащие внутри треугольников  $AB_1C_1$ ,  $A_1BC_2$ ,  $A_2B_2C_3$ , не могут быть центрами тяжести вписанных треугольников. Действительно, пусть для некоторой точки  $O$  треугольника  $AB_1C_1$  найден треугольник  $KLM$ , для которого она является центром тяжести (рис. 12). Но тогда она делит отрезок  $KN$  в отношении 1:2, что невозможно.

Л. Г. Лиманов

## В этом номере мы публикуем решения задач Ф148—Ф152

Ф148

Ядро массы  $M$ , летящее со скоростью  $v$ , распадается на два одинаковых осколка. Внутренняя энергия ядра  $E_1$ , внутренняя энергия каждого из осколков  $E_2$  ( $E_1 > 2E_2$ ). Определить максимальный возможный угол между вектором скорости одного из осколков и вектором  $v$ .

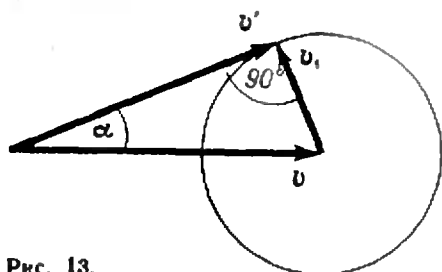


Рис. 13.

В системе координат, связанной с центром масс ядра и движущейся относительно Земли со скоростью  $v$ , осколки разлетаются в противоположные стороны с одинаковыми скоростями. Кинетическая энергия этих осколков равна разности внутренней энергии ядра и

внутренних энергий осколков. Если скорость каждого из осколков равна  $v_1$ , то

$$2 \frac{mv_1^2}{2} = E_1 - 2E_2.$$

Отсюда найдем скорость каждого из осколков:

$$v_1 = \sqrt{\frac{E_1 - 2E_2}{m}} = \sqrt{\frac{2(E_1 - 2E_2)}{M}}.$$

Скорость осколка в системе координат, связанной с Землей, равна векторной сумме скоростей  $v$  и  $v_1$ . Скорость  $v_1$  осколка в системе координат, связанной с центром масс ядра, может иметь произвольное направление. Но вектор  $v'$  скорости осколка в системе координат, связанной с Землей, составляет наибольший угол с вектором  $v$  в том случае, когда вектор  $v_1$  перпендикулярен вектору  $v'$  (рис. 13). В этом случае вектор скорости осколка  $v'$  составляет с вектором  $v$  угол  $\alpha$  такой, что

$$\sin \alpha = \frac{v_1}{v} = \sqrt{\frac{2(E_1 - 2E_2)}{Mv^2}}.$$

Ф149

Во сколько раз уменьшится сила притяжения двух маленьких шариков, один из ко-

терых заряжен, а другой нейтрален, если расстояние между шариками увеличить вдвое?

Заряженный шарик является источником электрического поля, поляризующего нейтральный шарик. В результате поляризации нейтральный шарик становится диполем — в целом нейтральным шариком с зарядами  $+q'$  и  $-q'$ , расстояние между которыми равно диаметру шарика  $2r$  (рис. 14). Величина заряда  $q'$ , или, как говорят, степень поляризации шарика, пропорциональна напряженности поля в центре этого шарика, то есть величине  $\frac{q}{R^2}$ , где  $q$  — заряд другого шарика:

$$q' = \frac{\alpha q}{R^2}$$

( $\alpha$  — коэффициент пропорциональности).

Теперь найдем силу взаимодействия зарядов шариков. Эта сила равна сумме силы притяжения между зарядом  $q$  и зарядом  $-q'$  и силы отталкивания между зарядом  $q$  и зарядом  $+q'$ :

$$F = \frac{qq'}{(R-r)^2} - \frac{qq'}{(R+r)^2} = \frac{\alpha q^2}{R^2} \left( \frac{1}{(R-r)^2} - \frac{1}{(R+r)^2} \right) = \frac{\alpha q^2}{R^2} \frac{4Rr}{(R^2-r^2)^2}$$

Так как  $R \gg r$ , то в знаменателе формулы можно пренебречь  $r^2$  по сравнению с  $R^2$ . В результате получим:

$$F = \frac{\alpha q^2}{R^2} \frac{4Rr}{R^2} = \frac{4\alpha q^2 r}{R^5}$$

Таким образом, сила взаимодействия шариков пропорциональна  $\frac{1}{R^5}$ , где  $R$  — расстояние между центрами шариков. При увеличении расстояния между шариками в 2 раза сила их взаимодействия уменьшится в 32 раза:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\frac{4\alpha q^2 r}{R^5}}{\frac{4\alpha q^2 r}{(2R)^5}} = 2^5 = 32.$$

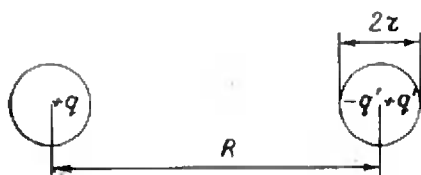


Рис. 14.

В некоторой галактике обнаружена звезда  $Z$  с планетой  $H$ , делающей за время  $T_1$  один оборот вокруг звезды и за время  $T_2$  один оборот вокруг собственной оси. Спутник планеты  $C$  делает один оборот вокруг планеты за время  $T_3$ . Через какое время повторится в данном месте планеты затмение спутника  $C$ ?

Все тела вращаются в одной плоскости.

Пусть в системе координат, связанной с неподвижными звездами, планета и спутник вращаются так, как показано на рисунке 15, а.  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$  — угловая скорость вращения планеты по орбите,  $\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}$  —

угловая скорость вращения планеты вокруг собственной оси и  $\omega_3 = \frac{2\pi}{T_3}$  — угловая скорость вращения спутника вокруг планеты.

В системе координат, связанной с планетой, но не вращающейся относительно неподвижных далеких звезд, звезда вращается вокруг планеты с угловой скоростью  $\omega_1$ , как показано на рисунке 15, б, а спутник вращается вокруг планеты с угловой скоростью  $\omega_3$ .

Теперь перейдем в систему координат, связанную с планетой и вращающуюся вместе с ней. В этой системе координат звезда вращается вокруг планеты с угловой скоростью  $\omega' = \omega_1 - \omega_2$ , а спутник — с угловой скоростью  $\omega'' = \omega_3 - \omega_2$ .

Если в некоторый момент на планете наблюдается затмение спутника, то следующее затмение спутника будет наблюдаться на планете через время  $t$ , за которое звезда повернется на угол  $\varphi$ , а спутник — на угол  $2\pi + \varphi$ . Мы предполагаем, что  $\omega_3 > \omega_1$ .

$$\varphi = \omega' t$$

и

$$2\pi + \varphi = \omega'' t.$$

Отсюда

$$2\pi = (\omega'' - \omega') t,$$

$$t = \frac{2\pi}{\omega'' - \omega'} = \frac{2\pi}{\omega_3 - \omega_1} = \frac{T_1 T_3}{T_1 - T_3}.$$

Ясно, что следующее затмение произойдет, когда звезда повернется на угол  $2\varphi$ , затем, когда она повернется на угол  $3\varphi$ , и т. д. Если при некотором целом  $N$  число  $N\varphi$  будет равно целому кратному  $2\pi$ , то  $N$ -е затмение придется в начальную точку. Итак, если  $N\varphi = 2\pi m$ , то есть, если число  $\frac{\varphi}{2\pi}$  можно представить в виде несократимой дроби

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega'}{\omega'' - \omega'} = \frac{T_3(T_3 - T_1)}{T_2(T_1 - T_3)} = \frac{m}{N},$$

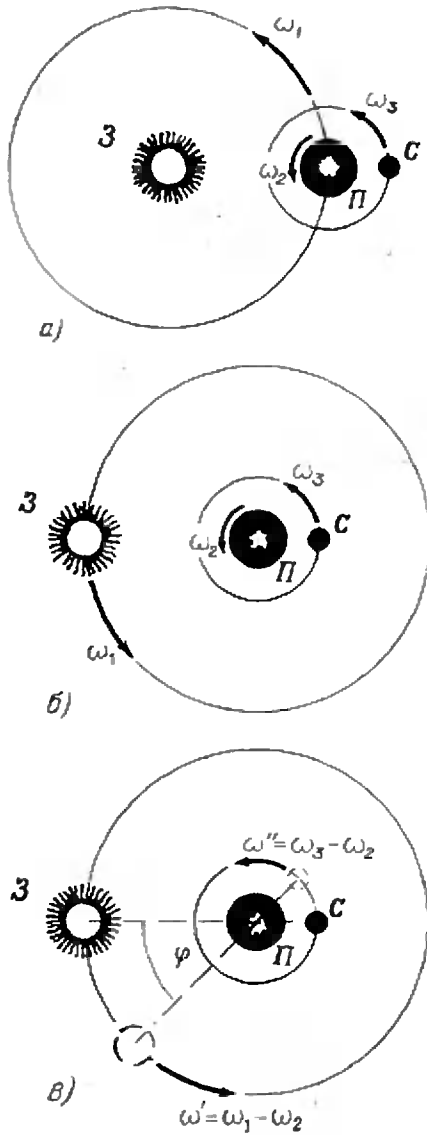


Рис. 15.

то через промежуток времени

$$mt = \frac{2\pi m}{\omega'' - \omega'} = \frac{2\pi m T_3 T_1}{T_1 - T_3}$$

затмение будет приходиться в ту же самую точку. Если же число  $\frac{\varphi}{2\pi}$  иррационально, то  $N\varphi$  ( $N = 1, 2, 3, \dots$ ) никогда не будет целым кратным  $2\pi$  и поэтому затмение никогда не придется в ту же точку.

На практике, конечно, отношение  $\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega'' - \omega'}{2\pi} = \frac{T_3(T_2 - T_1)}{T_2(T_1 - T_3)}$  можно указать только приближенно, и не имеет смысла

да говорить о том, рациональное это число или иррациональное. Но наше рассуждение показывает, что если число  $\frac{T_3(T_2 - T_1)}{T_2(T_1 - T_3)}$

хорошо приближается дробью  $\frac{m}{N}$  с небольшо-

шими числителем и знаменателем, то затмение будет происходить почти точно в одном из  $N$  мест планеты (последовательно проходя через все эти  $N$  мест), а если не приближается, то затмение происходит каждый раз в новом месте.

### Ф151

Два плоских зеркала образуют двугранный угол с раствором  $90^\circ$ . В угол вставлена линза с фокусным расстоянием  $F$  так, что главная оптическая ось линзы составляет угол  $45^\circ$  с каждым зеркалом. Радиус линзы равен ее фокусному расстоянию. Найти положение изображения источника, расположенного на главной оптической оси линзы на расстоянии  $1,5F$  от нее.

Ход нескольких лучей в системе показан на рисунке 16. Если бы не было зеркал, то изображение источника  $S$  находилось бы в точке  $S_1$ . Найдем расстояние  $f_1$  от линзы до изображения  $S_1$ . Источник находится на расстоянии  $1,5F$  от линзы. Записав формулу линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{1,5F} + \frac{1}{f_1},$$

найдем

$$f_1 = 3F.$$

Это означает, что точка  $S_1$  находится на расстоянии  $2F$  от линии пересечения зеркал. Но лучи, идущие к зеркалу  $I$ , отражаются от него, и если бы не было зеркала  $II$ , пересеклись бы в точке  $S_2$ . Точка  $S_2$  находится на прямой, перпендикулярной к оптической оси линзы, на расстоянии  $2F$  от линии пересечения зеркал. Докажем это.

Угол 1 равен углу 2 (как накрест лежащие) и равен углу 3 (это следует из закона отражения). Следовательно, угол 2 равен углу 3. Можно показать и то, что угол 4 равен углу 5. Но отсюда следует, что треугольник  $ABS_2$  равен треугольнику  $ABS_1$  — у них одна общая сторона  $AB$  и равны между собой углы, прилежащие к этой стороне. Очевидно, треугольник  $ABS_2$  является отражением треугольника  $ABS_1$  относительно зеркала  $I$ . Ясно, что треугольник  $S_2OC$  является отражением треугольника  $S_1OC$  относительно прямой  $I-I'$ . Отсюда и следует, что  $OS_2 = OS_1 = OS_1 = 2F$  и так как  $\angle S_1OC = \angle S_2OC = 45^\circ$ , то  $\angle S_2OS_1 = 90^\circ$ .

Нетрудно показать, что лучи, идущие к зеркалу  $II$  в «мнимый источник», точку  $S_2$ , отражаясь, пересеклись бы, если бы не было линзы, в точке  $S_3$ , находящейся на главной оптической оси линзы на расстоянии  $2F$  от линии пересечения зеркал, то есть на расстоянии  $F$  от линзы.

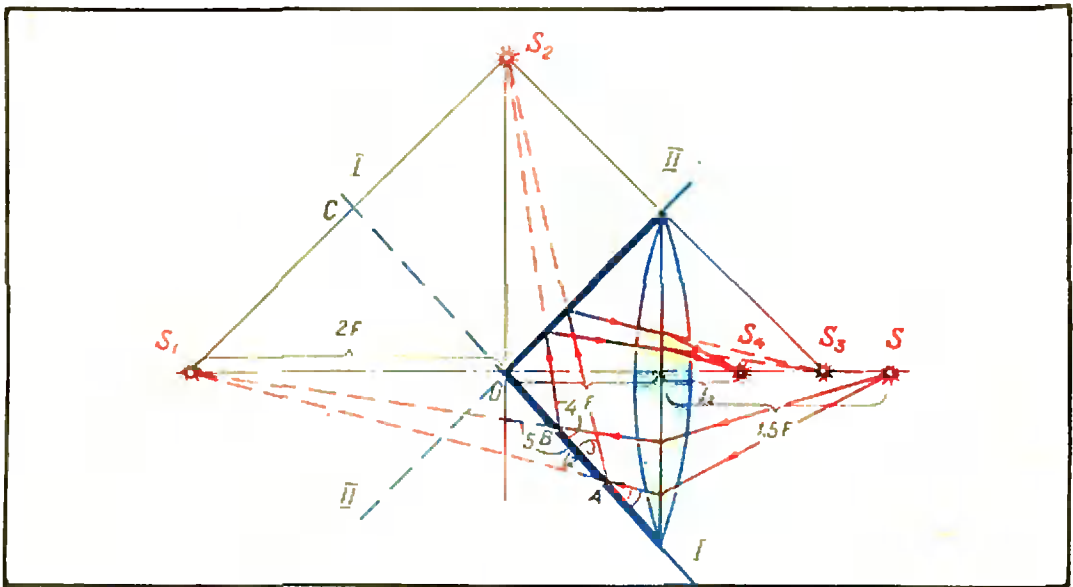


Рис. 16.

Точка  $S_3$  — это мнимый источник для линзы. Найдём его изображение  $S_4$ . Запишем для этого еще раз формулу линзы:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f_2},$$

где  $d = -F$  (так как источник  $S_3$  — мнимый), а  $f_2$  — расстояние от линзы до изображения  $S_4$ .

Из последнего уравнения найдём

$$f_2 = 0,5 F.$$

Таким образом, изображение  $S_4$  источника  $S_1$ , даваемое системой, будет находиться на расстоянии  $0,5 F$  от линзы.

#### Ф152

Объём газового пузыря, образовавшегося в результате глубинного подводного взрыва, колеблется с периодом, пропорциональным  $\rho a r b E c$ , где  $\rho$  — давление,  $\rho$  — плотность воды и  $E$  — полная энергия взрыва. Найдите  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

Известно, что

$$T \sim \rho a r b E c.$$

Величина, стоящая слева в этой формуле, имеет размерность времени [с]. Точно такую же размерность должна иметь величина, стоящая справа. Запишем размерности

всех величин:

$$\rho \rightarrow \left[ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right] \rightarrow \left[ \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2} \right]; \quad r \rightarrow \left[ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right];$$

$$E \rightarrow [\text{дж}] \rightarrow \left[ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} \right].$$

Произведение  $\rho a r b E c$  имеет размерность

$$\left[ \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2} \right]^a \left[ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]^b \left[ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} \right]^c \rightarrow \\ \rightarrow [\text{кг}]^{a+b+c} [\text{м}]^{-a-3b+2c} [\text{с}]^{-2a-2c}.$$

Для того чтобы размерность этого произведения была [с], необходимо, чтобы

$$\begin{aligned} -2a - 2c &= 1, \\ a + b + c &= 0, \\ -a - 3b + 2c &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, найдём

$$a = -\frac{5}{6}; \quad b = \frac{1}{2}; \quad c = \frac{1}{3}.$$

Следовательно,

$$T \sim \rho^{-\frac{5}{6}} \frac{1}{6} \frac{1}{\rho^2} E^{\frac{1}{3}}.$$

И. Ш. Слободецкий.

# Расстояния между скрещивающимися прямыми

М.Л.Крайzman

При решении задач на вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми полезно различать два случая:

- 1) скрещивающиеся прямые перпендикулярны;
- 2) скрещивающиеся прямые не перпендикулярны.

Если скрещивающиеся прямые  $a$  и  $b$  перпендикулярны (1-й случай), то проще всего через одну из скрещивающихся прямых провести плоскость  $\alpha$ , перпендикулярную к другой прямой (рис. 1; из произвольной точки  $M$  на прямой  $a$  опущен перпендикуляр  $OM$  на прямую  $b$ , плоскость  $\alpha$  определяется двумя пересекающимися прямыми  $a$  и  $MO$ , потому что  $b \perp a$  по условию и  $b \perp OM$  по построению, следовательно,  $b \perp \alpha$  по обобщенному признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Затем из точки  $O$  пересечения плоскости  $\alpha$  и прямой  $b$  надо опустить перпендикуляр  $ON$  на прямую  $a$ ,  $ON$  — искомое расстояние.

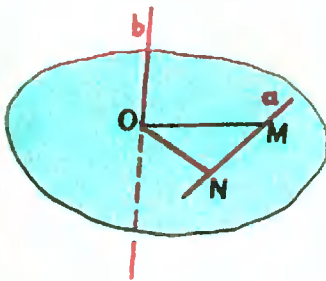


Рис. 1.

**Пример 1.** Определить расстояние между диагональю куба с ребром  $a$  и скрещивающейся с ней диагональю грани.

**Решение.** Будем определять расстояние между  $B_1D$  и  $D_1C$  (рис. 2). Так как  $D_1C \perp DC_1$ , а  $DC_1$  — проекция  $B_1D$  на плоскость  $DD_1C_1C$ , то  $D_1C \perp B_1D$  (по обобщенной теореме о трех перпендикулярах). Из соотношений  $D_1C \perp DC_1$  и  $D_1C \perp B_1D$  следует (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости), что  $D_1C \perp$  плоскости  $DB_1C_1$ . Пусть  $O$  — точка пересечения  $D_1C$  и  $DC_1$ . Опустим из точки  $O$  перпендикуляр  $OK$  на  $B_1D$ ,  $OK$  — искомое расстояние между скрещивающимися прямыми  $B_1D$  и  $D_1C$ . Найдем его. Для этого заметим, что прямоугольные треугольники  $OKD$  и  $B_1DC_1$  подобны и  $OK : B_1C_1 = OD : B_1D$ . Отсюда

$$OK = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

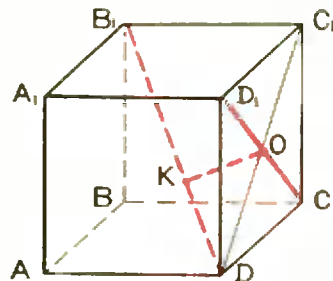


Рис. 2.



Прежде чем перейти к следующим примерам, докажем теорему, выражающую зависимость между углами трехгранного угла, в котором две грани взаимно перпендикулярны.

**Теорема 1.** Если две грани трехгранного угла взаимно перпендикулярны, то косинус плоского угла грани, лежащей против прямого двугранного угла, равен произведению косинусов плоских углов граней, ограничивающих этот прямой двугранный угол.

**Доказательство.** На рисунке 3 пл.  $ASB \perp$  пл.  $BSC$ ,  $\angle ASC = \alpha$ ,  $\angle ASB = \beta$ ,  $\angle BSC = \gamma$ . Мы хотим доказать, что  $\cos \alpha = \cos \beta \cdot \cos \gamma$ . Для этого из точки  $M$  на ребре  $SA$  опустим перпендикуляры  $MO$  на  $BS$  и  $MN$  на  $SC$ . Соединим точки  $N$  и  $O$ . Согласно теореме о трех перпендикулярах  $SC \perp NO$ . Из  $\triangle SMO$  и  $\triangle SON$  находим

$$\cos \beta = \frac{SO}{SM}, \quad \cos \gamma = \frac{SN}{SO}.$$

Перемножим эти равенства:  $\cos \beta \cdot \cos \gamma = \frac{SN}{SM}$ , и найдем  $\cos \alpha$  из  $\triangle SNM$ :  $\cos \alpha = \frac{SN}{SM}$ . Отсюда  $\cos \alpha = \cos \beta \cdot \cos \gamma$ . Теорема доказана.

**Пример 2.** Каждое ребро треугольной призмы равно  $a$ . Одно из боковых ребер образует с прилежащими сторонами основания углы, каждый из которых равен  $\alpha$ . Определить расстояние между этим ребром и скрещивающейся с ним стороной основания.

**Решение.** Требуется определить расстояние между  $AA_1$  и  $BC$  (рис. 4). Известно, что если наклонная, исходящая из вершины угла,

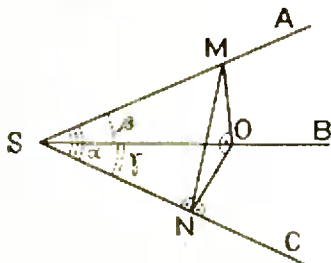


Рис. 3.

образует со сторонами этого угла равные углы, то проекция наклонной на плоскость угла будет его биссектрисой. Поэтому  $AO$  — биссектриса угла  $BAC$ . Но  $\triangle ABC$  — правильный, продолжение  $AD$  биссектрисы будет высотой этого треугольника и поэтому  $AD \perp BC$ . По обобщенной теореме о трех перпендикулярах  $BC \perp AA_1$ , а на основании обобщенного признака перпендикулярности прямой и плоскости  $BC \perp$  пл.  $DAA_1$ . Опустим из точки  $D$  перпендикуляр  $DK$  на  $AA_1$ ;  $DK$  — искомое расстояние между  $BC$  и  $AA_1$ . Пусть  $\angle A_1AO = x$ ; применив теорему 1 к трехгранному углу  $AA_1DC$ , получим:  $\cos \angle A_1AC = \cos \angle A_1AD \cdot \cos \angle DAC$ ;  $\cos \alpha = \cos x \cdot \cos 30^\circ$ . Отсюда

$$\cos x = \frac{\cos \alpha}{\cos 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3} \cos \alpha}{3}.$$

Осталось найти  $KD$  из  $\triangle AKD$ :

$$\begin{aligned} KD &= AD \cdot \sin x = \frac{a\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 - \cos^2 x} = \\ &= \frac{a\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{3} \cos^2 \alpha} = \\ &= \frac{a}{2} \sqrt{3 - 4 \cos^2 \alpha} = \end{aligned}$$

(или, при  $\cos \alpha \neq 0$ )

$$= \frac{a}{2} \sqrt{-\frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha}},$$

причем  $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{5\pi}{6}$ .

Теперь рассмотрим случай, когда скрещивающиеся прямые не перпендикулярны между собой. Так как в задачах на вычисление нет необходимости строить перпендикуляр к

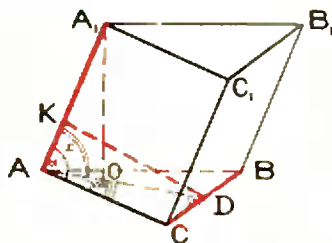


Рис. 4.

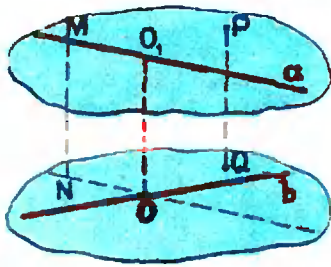


Рис. 5.

данным двум скрещивающимся прямым, а надо лишь определить расстояние между ними, то для этого достаточно через одну из скрещивающихся прямых  $b$  (рис. 5) провести плоскость  $\alpha$ , параллельную второй прямой  $a$ , и найти расстояние  $MN$  от произвольной точки  $M$  прямой  $a$  до плоскости  $\alpha$ ; оно равно длине отрезка перпендикуляра  $OO_1$  к данным двум скрещивающимся прямым. Если мы еще проведем через прямую  $a$  плоскость  $\beta$ , параллельную  $\alpha$ , то  $OO_1$  будет равно расстоянию от любой точки  $P$  на одной плоскости до ее проекции  $Q$  на вторую плоскость ( $PQ \perp \alpha, \beta$ ).

**Пример 3.** Определить расстояние между скрещивающимися диагоналями смежных граней куба, ребро которого равно  $a$ .

**Решение.** На рисунке 6а прямые  $AB_1$  и  $BC_1$  скрещиваются (для прямых  $BA_1$  и  $CB_1$  рассуждения аналогичны). Плоскости  $AD_1B_1$  и  $BDC_1$  параллельны (так как  $AB_1 \parallel DC_1$ ,  $AD_1 \parallel BC_1$ ) и содержат прямые  $AB_1$  и  $BC_1$ . Прямая  $A_1C$  является общим перпендикуляром к этим плоскостям, потому что она перпендикулярна к прямым  $AE$ ,  $D_1E$  и  $C_1F$ ,  $BF$  — достаточно рассмотреть сечения  $A_1CC_1A_1$  (рис. 6б) и аналогично  $A_1BCD_1$ . Из рисунка 6б легко находим:  $A_1E = EF = FC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ . Но  $EF$  — это искомое расстояние.

**Пример 4.** Определить расстояние между скрещивающимися высотами граней правильного тетраэдра с ребром  $a$ .

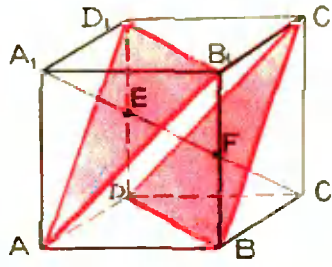


Рис. 6а.

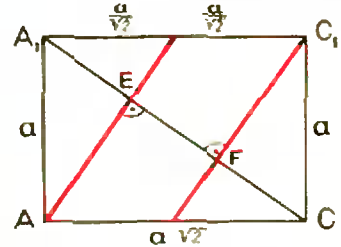


Рис. 6б.

**Решение.** Определим расстояние между  $BD$  и  $SM$  (рис. 7). Для этого через точку  $M$  проведем  $ME \parallel BD$ . Плоскость  $SME$  и  $BD$  параллельны. Найдем расстояние от точки  $O$ , принадлежащей  $BD$ , до плоскости  $SME$ . Для этого проведем  $OK \perp ME$  и соединим точки  $S$  и  $K$ ;  $ME \perp SK$ , откуда  $ME \perp$  пл.  $SOK$ , а из этого следует, что пл.  $SOK \perp$  пл.  $SME$ . Перпендикуляр  $OP$ , опущенный из точки  $O$  на плоскость  $SME$ , лежит в плоскости  $SOK$ , а основание его — точка  $P$  — лежит на прямой  $SK$ , являющейся линией пересечения этих двух взаимно перпендикулярных плоскостей.

Из подобия  $\triangle SOK$  и  $\triangle OPK$  находим  $OP = \frac{SO \cdot OK}{SK}$ . Далее, подставляя  $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ ;  
 $OK = DE = \frac{a}{4}$ ;  $SK = \sqrt{SO^2 + OK^2} = \frac{a\sqrt{105}}{12}$ , находим  $OP = \frac{a\sqrt{70}}{35}$ .

Аналогично находится расстояние между  $BD$  и  $CM$  (рис. 8). Плоскость  $NCH$  параллельна  $BD$ . Строим плоскость  $NO_1L$ , перпендикулярную к  $NCH$ . Тогда искомым расстоянием будет длина отрезка перпендикуляра  $O_1F$ , опущенного из точки  $O_1$  на плоскость  $NCH$ . Из подобия  $\triangle NO_1L$  и  $\triangle NO_1F$  находим:  $O_1F = \frac{NO_1 \cdot O_1L}{NL}$ , и, подставляя все величины, находим, что  $O_1F = \frac{a\sqrt{10}}{10}$ .

Рассмотрим другие методы решения задач на определение расстояния

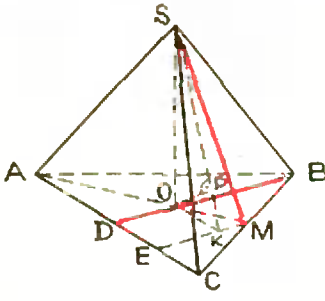


Рис. 7.

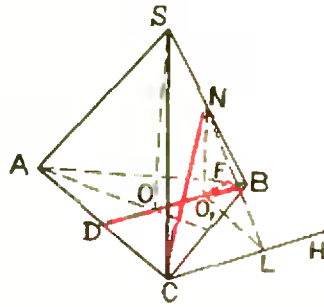


Рис. 8.

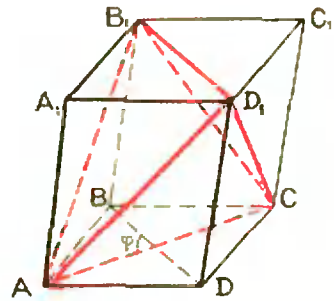


Рис. 9.

между скрещивающимися прямыми. Один из этих методов базируется на теореме об объеме треугольной пирамиды.

**Теорема 2.** Объем треугольной пирамиды равен одной шестой произведения длин двух любых ее скрещивающихся ребер на расстояние между ними и на синус угла между ними.

**Доказательство.** Из произвольной вершины ( $B_1$ ) параллелепипеда  $AC_1$  проведем диагонали  $B_1A$ ,  $B_1D_1$ ,  $B_1C$  граней, сходящихся в этой вершине (рис. 9). Концы этих диагоналей соединим между собой. Получим пирамиду  $B_1AD_1C$ , которая называется вписанной в параллелепипед, а параллелепипед, наоборот, описанным вокруг этой пирамиды (его легко построить, проводя пары параллельных ребра пирамиды).

Объем параллелепипеда равен:

$$V_{AC_1} = V_{B_1AD_1C} + V_{D_1ADC} + V_{B_1ABC} + V_{AA_1B_1D_1} + V_{CB_1C_1D_1}.$$

Так как

$$V_{D_1ADC} = V_{B_1ABC} = V_{AA_1B_1D_1} = V_{CB_1C_1D_1}$$

(основания этих пирамид равновелики и равны половине площади основания параллелепипеда, а высоты их равны высоте  $h$  параллелепипеда), то

$$\begin{aligned} V_{B_1AD_1C} &= V_{AC_1} - 4V_{D_1ADC} = \\ &= V_{AC_1} - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} Sh = V_{AC_1} - \\ &= \frac{2}{3} Sh = \frac{1}{3} V_{AC_1}. \end{aligned}$$

Итак, объем вписанной треугольной пирамиды составляет одну треть

объема описанного параллелепипеда, или после преобразования,

$$\begin{aligned} V_{B_1AD_1C} &= \frac{1}{3} V_{AC_1} = \frac{1}{3} Sh = \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \varphi \right) \cdot h = \\ &= \frac{1}{6} AC \cdot B_1D_1 \cdot h \cdot \sin \varphi. \end{aligned}$$

При решении задач на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми можно использовать особенности описанного параллелепипеда в зависимости от свойств вписанной треугольной пирамиды. Например, попробуйте самостоятельно доказать, что если в пирамиде два скрещивающихся ребра:

- а) равны, то у описанного параллелепипеда грани, в которых лежат эти ребра, будут прямоугольниками;
- б) перпендикулярны, то соответствующие грани будут ромбами;
- в) равны и перпендикулярны, то соответствующие грани будут квадратами.

**Пример 5.** В треугольной пирамиде противоположные (скрещивающиеся) ребра попарно равны между собой и соответственно равны  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Найти расстояние между ними.

**Решение.** Противоположными гранями описанного параллелепипеда являются прямоугольники, и потому сам параллелепипед будет прямоугольным (рис. 10). Искомые расстояния между скрещивающимися ребрами будут равны расстояниям между противоположными гранями, то есть ребрам прямоугольного параллелепипеда.





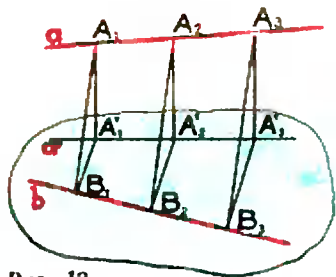


Рис. 12.

катет  $AC$ , перпендикулярна к плоскости основания, а две остальные образуют с ней углы, также равный  $30^\circ$ . Определить расстояние между  $SB$  и  $AC$ .

**Решение.** Найдем проекцию отрезка  $SB$  на отрезок  $AC$ . Для этого из точек  $S$  и  $B$  опустим перпендикуляры  $SO$  и  $BC$  на  $AC$  (рис. 13), и  $SK$  на  $AB$ ; тогда  $\text{Пр}_{AC} SB = OC$ . Найдем отношение  $\frac{OC}{SB}$ . Из равенств  $\angle SKO = \angle SCO = 30^\circ$  следует, что  $OK = OC$  и  $OB$  — биссектриса угла  $ABC$ . Далее находим:  $BC = AB \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2}c$ ,

$$OC = BC \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{c\sqrt{3}}{6},$$

$$SC = OC : \cos 30^\circ = \frac{1}{3}c,$$

$$SB = \sqrt{SC^2 + BC^2} = \frac{c\sqrt{13}}{6}.$$

Следовательно,

$$\frac{OC}{SB} = \frac{c\sqrt{3}}{6} : \frac{c\sqrt{13}}{6} = \sqrt{\frac{3}{13}}.$$

Из произвольной точки  $P$ , взятой на  $SB$ , опустим перпендикуляр  $PQ$  на  $AC$ ; тогда проекцией  $PB$  на  $AC$  будет  $QC$ . Согласно теореме 3  $OC:SB = QC:PB$ , откуда  $\frac{QC}{PB} = \sqrt{\frac{3}{13}}$ ; пусть  $QC = x\sqrt{3}$ ,  $PB = x\sqrt{13}$ . Применим к треугольнику  $CPB$  теорему косинусов:

$$PC^2 = \frac{c^2}{4} + 13x^2 - 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot x\sqrt{13} \cos \angle CBP. \quad (3)$$

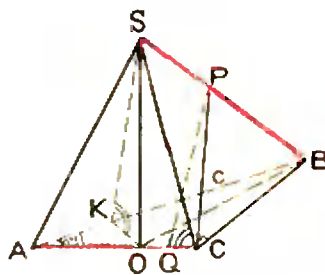


Рис. 13.

Из  $\triangle SCB$  найдем

$$\cos \angle CBS = \frac{CB}{SB} = \frac{c}{2} : \frac{c\sqrt{13}}{6} = \frac{3}{\sqrt{13}},$$

и подставим в (3):

$$PC^2 = \frac{c^2}{4} + 13x^2 - cx\sqrt{13} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = 13x^2 - 3cx + \frac{c^2}{4}.$$

Далее, из  $\triangle QPC$  имеем

$$QP^2 = CP^2 - QC^2 = 13x^2 - 3cx + \frac{c^2}{4} - 3x^2 = 10x^2 - 3cx + \frac{c^2}{4}.$$

Наименьшее значение  $QP^2$  будет равно квадрату расстояния между скрещивающимися прямыми; найдем его. Если  $QP^2 = ax^2 + bx + c$ , то

$$x_{\min} = -\frac{b}{2a} = \frac{3c}{20}; \quad (QP^2)_{\min} = 10 \cdot \frac{9c^2}{400} - 3c \cdot \frac{3c}{20} + \frac{c^2}{4} = \frac{c^2}{40};$$

$$(QP)_{\min} = \frac{c\sqrt{10}}{20}.$$

Упражнения

1. В основании пирамиды  $SABC$  лежит прямоугольный треугольник  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) с катетом  $BC = a$  и прилежащим острым углом  $\alpha$ . Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом  $\beta$ . Определить расстояние между гипотенузой  $AB$  и скрещивающимся с ней боковым ребром  $SC$ .

2. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна  $a$ . Определить расстояние между апофемой пирамиды и скрещивающейся с ней стороной основания, если угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен  $60^\circ$ .

3. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды  $SABCD$  равна  $a$ , а плоский угол при вершине равен  $\alpha$ . Определить расстояние между скрещивающимися ребрами этой пирамиды.

## XIV МЕЖДУНАРОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

С 5 по 18 июля в Польше проходила XIV Международная математическая олимпиада школьников. Работа жюри началась в Варшаве, а сами соревнования проходили в старинном городе западной Польши — Торуне. В олимпиаде приняли участие команды 14 стран: Австрии, Болгарии, Великобритании, Венгрии, ГДР, Кубы, Монголии, Нидерландов, Польши, Румынии, Советского Союза, Чехословакии, Швеции, Югославии. Руководители команд этих стран и составили международное жюри, председателем которого был профессор Торунского университета Станислав Балчежик. Все перечисленные страны участвовали и в прошлой олимпиаде.

Каждая команда состояла из 8 человек (от Кубы было только три участника). В каждой стране команда формировалась по результатам различных национальных соревнований. По признанию многих руководителей команд, международная олимпиада является серьезным стимулом для повышения уровня и популярности национальных олимпиад. В некоторых странах среди победителей национальной олимпиады проводятся дополнительные отборочные соревнования для окончательного определения состава команды. Читателям «Кванта» будет интересно узнать, что в Англии на этом заключительном отборе предлагалась задача из «Кванта» (см. № 4 за 1971 г., задача М 76). Задача «Кванта» используется также в Нидерландах и во многих других странах.

Советская команда была сформирована по итогам VI Всесоюзной математической олимпиады. В нее вошли Белкин Сергей — ученик школы № 7 г. Москвы (ранее обучался в школе № 556 г. Москвы), Бурков Владимир — ученик школы-интерната при МГУ им. Ломоносова (ранее обучался в 25-й школе г. Владимира), Гольберг Андрей — ученик 2-й московской школы, Колмаков Юрий — ученик школы-интерната при МГУ им. Ломоносова (ранее обучался в 1-й школе г. Рассказово Тамбовской области), Коныгин Сергей — ученик 9 класса школы № 9 гор. Саратова, Меркурьев Александр — ученик школы-интерната при Ленинградском университете, Шаповалов Александр — ученик школы-интерната при Московском университете (ранее обучался в школе села

Чемолган Алма-Атинской области), Шварц Владимир — ученик школы-интерната при Ленинградском университете. Запасными членами команды были: Ландо Сергей — ученик 19-й школы г. Перми и Лещинер Дмитрий — ученик 9 класса 2-й московской школы.

Советская команда в составе 8 человек прибыла в Варшаву 7 июля. Соревнования проходили в Торуне 10 и 11 июля.

Максимальное число очков, которое мог набрать участник, равно сорока. 40 очков набрали 8 участников и им были присуждены дипломы первой степени. Их получили Грегош Андрейчик — Польша, Владимир Бурков — СССР, Вильмош Коморник — Венгрия, Сергей Коныгин — СССР, Павел Крестгер — ГДР, Мартин Мирка — Румыния, Шолтгуза — Венгрия, Золтан Фюреди — Венгрия.

Дипломом второй степени награждались участники, набравшие от 30 до 39 очков. Из нашей команды дипломы второй степени получили Сергей Белкин (39 очков), Александр Меркурьев (38 очков), Андрей Гольберг (33 очка), Владимир Шварц (30 очков).

Дипломы третьей степени, которые присуждались участникам, набравшим от 19 до 29 очков, в советской команде получили Юрий Колмаков (28 очков) и Александр Шаповалов (22 очка).

Таким образом, все 8 участников советской команды стали призерами олимпиады.

В целом советская команда набрала наибольшее число очков (270 из 320 возможных). Далее следуют команды Венгрии (263 очка), ГДР (239 очков), Румынии (206 очков), Великобритании (179 очков).

На торжественном закрытии олимпиады, которое состоялось в Варшаве 17 июля, министр просвещения и воспитания Польской Народной Республики Ежи Куберски вручил победителям дипломы и призы.

### Задачи XIV Международной математической олимпиады

Первый день соревнований  
1. Доказать, что из любых десяти различных двузначных натуральных чисел можно выбрать две различные непересекающиеся группы чисел так, что сумма чисел в обеих группах будет одинаковой. (СССР, 5 очков).

2. Доказать, что следующее утверждение справедливо для любого числа  $n \geq 4$ : произвольный вписанный четырехугольник можно разбить на  $n$  четырехугольников, вокруг каждого из которых можно описать окружность. (Нидерланды, 6 очков).

3. Доказать, что для любых неотрицательных целых чисел  $m$  и  $n$  число  $\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$  является целым (полагаем  $0! = 1$ ). (Великобритания, 7 очков).

Второй день соревнований  
4. Найдите все решения  $(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5)$  системы неравенств:

$$(x_1^2 - x_2x_3)(x_2^2 - x_3x_4) \leq 0,$$

$$(x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) \leq 0,$$

$$(x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) \leq 0,$$

$$(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) \leq 0,$$

$$(x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) \leq 0.$$

(Нидерланды, 7 очков.)

5. Пусть  $f$  и  $g$  — действительные функции, определенные на всей прямой и удовлетворяющие уравнению

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y)$$

для всех  $x, y$ . Доказать, что если  $f(x)$  не есть тождественный нуль и если  $f(x) \leq 1$  для всех  $x$ , то  $|g(y)| \leq 1$  для всех  $y$ . (Болгария, 7 очков.)

6. Даны четыре различные параллельные плоскости. Доказать, что существует правильный тетраэдр с вершинами на каждой из этих плоскостей. (Великобритания, 8 очков.)

В. А. Скворцов, И. С. Петракю

\* \* \*

После Всесоюзной математической олимпиады десять ее победителей — 8 десятиклассников и 2 девятиклассника — были приглашены на тренировочный сбор, который проходил в Горках Ленинских с 23 июня по 6 июля в школе памяти В. И. Ленина. В утренние часы участники сбора занимались решением задач, а после обеда загорали, купались, играли в баскетбол, футбол, шахматы.

Многие задачи, предложенные на сборе, были очень интересны. Например:

1. Двое играют в такую игру: на бесконечной клетчатой бумаге каждый имеет право за один ход закрасить некоторое ребро, соединяющее два соседних узла сетки, своим цветом. Каждое ребро красится не более чем в один цвет. Доказать, что второй может помешать начинающему соединить два наперед выбранных узла сетки ломаной линией одного цвета, если расстояние между фиксированными узлами больше единицы.

2. Доказать, что нельзя замостить плоскость выпуклыми равными семиугольниками без наложений.

3. Существует ли на клетчатой бумаге окружность, проходящая ровно через 17 целочисленных точек?

По нашему мнению, эти сборы были очень полезны. Проведенная тренировка помогла нашей команде хорошо выступить на международной олимпиаде. За время сборов создался единый коллектив, что очень важно в любых командных соревнованиях.

6 июля наша команда выехала в Варшаву. В Варшаве участники олимпиады остановились в отеле Ривьера, откуда 8 июля на автобусах отправились на родину Николая Коперника — в город Торунь, где и должны были произойти сами соревнования.

9 июля мы осмотрели город Торунь. Сейчас город готовится к 500-летию юбилею Коперника. Повсюду производится реконструкция многочисленных исторических памятников. Всем зданиям и архитектурным сооружениям старой части города придается тот вид, который они имели во времена Коперника.

10-го и 11-го июля проходили соревнования. Работу писали в 8 аудиториях, в каждой аудитории по одному человеку из каждой команды. Во время соревнований гостеприимные хозяева угощали участников вторым завтраком и весьма приятным соком ораждадом. Нам было предложено для решения 6 задач (за два дня). Среди всех предложенных задач наиболее интересной, по нашему мнению, была третья задача первого дня, несмотря на то, что она допускает три решения: комбинаторное, по индукции и решение, в котором рассматриваются степени простого делителя  $p$ , входящего в числитель

и знаменатель дроби  $\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$  \*).

Задачи первого дня оценивались меньшим числом очков, чем задачи второго дня, но для многих участников олимпиады они оказались сложными.

После соревнований началась увлекательная автобусная экскурсия по Польше. Мы ехали по маршруту: Торунь — Грюнвальд — Оструда — Ольштын — Эльблонг.

13 июля мы на корабле отплыли из Эльблонга во Фромброк и в тот же день возвратились в Эльблонг. Затем 14 июля мы, посетив замок в Мальборне, возвратились в Торунь через Квидзынь и Грудзёндз. 15 июля участники олимпиады выехали на общую экскурсию вместе с руководителями команд. В этот день мы узнали результаты олимпиады. Через Кружвиду, Гнезно, Роголин, Курник мы приехали в Познань. Осмотрев этот город — город старинной культуры, — мы вернулись в Варшаву.

\*) Подробное решение всех задач олимпиады будет приведено в журнале «Математика в школе», № 6, 1972. См. также стр. 63.



За время олимпиады ребята из разных стран связала тесная дружба. Несмотря на то, что мы говорили на разных языках, у нас был общий язык — язык математики. В процессе знакомства с учениками из других команд мы обменивались задачами, рассказывали друг другу, как проходят национальные олимпиады. Нам хочется привести наиболее интересные из задач.

1. Положим, что  $a_n$  — сумма цифр числа  $1972^n$  в десятичной записи. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

Эту задачу нам рассказали члены польской команды. На Общепольской олимпиаде ее решили всего несколько человек.

2. Доказать, что существует такая последовательность целых чисел  $\{a_n\}$ :  $a_0 = 0$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ;  $a_n < a_{n+1}$ , для которой выполнены следующие условия:

1°. Для всякого натурального  $k$  существуют  $a_i$  и  $a_j$  из последовательности  $\{a_n\}$  такие, что  $k = a_i + a_j$  ( $i$  может равняться  $j$ ). 2°.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a_n} = 0$ .

Эту задачу предложили английские школьники.

3.  $p + q = 1$ ,  $q \geq 0$ ;  $p \geq 0$ . Доказать, что для любых натуральных  $m$  и  $n$  выполняется неравенство  $(1 - p^n)^m + (1 - q^m)^n \geq 1$ .

(Венгрия)

4. Дано  $n$  действительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Доказать, что

$$\min_{i,j} [(a_i - a_j)^2] \leq \frac{\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) 12}{n(n-1)(n+1)}.$$

(Венгрия)

5. Доказать, что

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) > \frac{1}{2}.$$

(Чехословакия).

6. Дана трапеция  $ABCD$ ,  $BC \parallel AD$ . На  $CD$  взята точка  $K$ , на  $AB$  точка  $L$  так, что  $AK \parallel CL$ . Доказать, что  $DL \parallel BK$ .

(Голландия)

7. Число  $x$  является комплексным или отрицательным тогда и только тогда, когда существуют положительные действительные числа  $a_0, a_1, \dots, a_n$  такие, что

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0.$$

(Чехословакия)

8. Доказать, что

$$\sqrt[3]{\frac{a_1 a_2 a_3 + a_2 a_3 a_4 + a_3 a_4 a_1 + a_4 a_1 a_2}{4}} \leq \sqrt{\frac{a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_2 a_4}{6}};$$

(все  $a_i > 0$ ).

Эта задача предложена участником команды ГДР П. Крёгером.

9. Доказать, что

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi(2k+1)}{2n}} = n^2.$$

(Болгария)

Мы надеемся, что математические контакты, установленные с нашими сверстниками из разных стран, принесут всем взаимную пользу.

С. Белкин, В. Шварц



Команда СССР на XIV Международной математической олимпиаде. Слева направо сидят: Сергей Белкин [диплом второй степени], Владимир Бурков [диплом первой степени], Андрей Гольберг [диплом второй степени], Юрий Колмаков [диплом третьей степени]; стоят: Сергей Конягин [диплом первой степени], Александр Меркурьев [диплом второй степени], переводчица команды, Александр Шаповалов [диплом третьей степени], Владимир Шварц [диплом второй степени].

# ЛАБОРАТОРИЯ В ВАННОЙ КОМНАТЕ

Физика вездесуща. В любом явлении природы всегда можно найти что-то такое, что уже исследовалось или исследуется физиками. Что бы человек ни сделал — сел, лег, встал, пошел — во всем этом есть повод для физического анализа. Мы непрерывно сталкиваемся с разнообразными физическими явлениями в нашей повседневной жизни и потому почти никогда не задумываемся над этими явлениями. Слишком уж они привычны и обыкновены. Но будь мы повнимательнее и наблюдательнее, жизнь окружила бы нас множеством любопытнейших проблем.

Многие законы физики можно изучать в школьном физическом кабинете. Там на помощь вам придут специальные приборы. Ну, а дома? Много ли физических явлений можно исследовать в домашней обстановке?

Ответ на этот вопрос дает книга Хью Рачлиса «Физика в ванне»<sup>\*</sup>). Автор ее убедительно показывает, что в обычной ванной комнате можно изучать самые разнообразные физические явления — звуковые, световые, тепловые, механические, магнитные.

В этом номере нашего журнала, в разделе «Лаборатория «Кванта», мы публикуем одну из глав книги Рачлиса. Прочитав ее, вы убедитесь, что описанные в ней опыты доступны каждому.

Эксперименты, описанные Рачлисом, очень просты. Они относятся к самым основам

школьного курса физики. Однако, как говорит известная пословица, лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать. И конечно же, лучше хоть один раз сделать самому, чем увидеть, как это делают другие. Автор справедливо пишет:

«Увидеть самому всегда очень важно и притом по нескольким причинам.

Во-первых, именно так поступают ученые. Когда один ученый сообщает о каких-то своих наблюдениях, другие стараются повторить то, что он сделал, и проверить его наблюдения самостоятельно. Если это удается только самому автору, значит, тут что-то неладно. Явление лишь тогда принимается за достоверное, когда его наблюдают многие ученые.

Во-вторых, проверяя какую-либо идею самостоятельно, вы по ходу дела можете подметить и такие явления, о которых в книге не упоминается. Эти неожиданные наблюдения могут привести к новым открытиям, дать новые сведения. Повторяя вслед за книгой те или иные описанные в ней опыты, нужно быть очень внимательным. И тогда не исключено, что вам самим удастся сделать новые открытия».

Книга Рачлиса — первая ступенька к самостоятельным исследованиям. Она показывает, как много интереснейших проблем кроется в самых повседневных событиях. Об этом превосходно сказал сам автор в небольшом введении к своей книге.

«Нас окружает множество предметов, на которые мы не обращаем ни малейшего внимания до той поры, пока с ними не произойдет чего-



либо необычайного. Если, к примеру, пепельница, мирно стоявшая на столе, вдруг сама по себе взлетит в воздух — о, тут уже, конечно, будет серьезный повод для размышлений. Как это могло случиться? Почему? Нельзя ли заставить пепельницу подниматься и опускаться по нашему желанию?

Но для того чтобы начать исследование, вовсе не обязательно ждать таких удивительных происшествий. Допустим, в один прекрасный день та же пепельница на нашем столе тихонько задрезжит. А по улице (мы слышим) в это время проезжает грузовик. С этого тоже может начаться очень интересное исследование — тех колебаний, которые вызывает грузовик, и тех условий, в которых пепельница отзывается на эти колебания.

Вот и с ванной дело обстоит точно так же. Мы наполняем ее водой. Мы входим в нее. Садимся. Вода поднимается. Она колыхается и плещется. По ее поверхности пробегают волны. Вода становится грязной. В ней плавают или тонут разные предметы. Образуются мыльные пузыри. Свет поблескивает на стенках ванны и на поверхности воды. Потом мы открываем слив, и ванна опорожняется. При этом может образоваться водоворот. Все эти события, которые каждый может легко

<sup>\*</sup>) Х. Рачлис, Физика в ванне, М., «Мир», 1972, 96 стр., цена 23 коп.

наблюдать, влекут за собой вопросы, а каждый вопрос может вырасти в целое исследование».

В самом деле — разговор начинается с явлений, которые каждый постоянно видит в ванной, — а затем с логической неизбежностью выходит за ее пределы. Автор ведет нас в цирк и рассказывает о секрете «математических способностей» дрессированных собак. Он объясняет причины, по которым корпус скрипки отличен от корпуса виолончели, коротко рассказывает об остаточном магнетизме скальных пород. Магнитные свойства ванны оказываются прекрасным поводом для беседы о земном магнетизме.

В конце каждой главы приводится несколько любопытных задач, а также указываются самостоятельные исследования, которые можно провести по данной теме.

Эта книга ценна тем, что читателю не требуется знать ничего для того, чтобы понять в ней все. Ее с увлечением прочтет и школьник, только что приступивший к изучению физики, и взрослый человек, который либо не изучал этого предмета прежде, либо забыл его.

Возможно, что кое-кому из наших читателей опыты, приведенные в книге Рачлиса, покажутся слишком простыми. Ведь их основа хорошо известна из школьного курса физики, где имеются опыты и посложнее. Но они всего лишь описаны, часть из них продемонстрировал вам учитель, и весьма немногие вы выполняли сами на уроках и в школьном кабинете физики. Здесь же вам предоставляется возможность неторопливо понаблюдать и подумать самим.

Прочитав эту книгу, вы не пожалеете о потраченном на нее времени. А закрыв последнюю страницу, вы увидите, что такой же занимательной физической лабораторией может стать кухня, двор, река, лес, проселочная дорога.

*В. А. Лешковцев*

## УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

### МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ ЛЕОНАРДУ ЭЙЛЕРУ



Леонард Эйлер (1707—1783) — крупнейший и самый продуктивный математик и механик XVIII века. Его исследования охватили все области математики и ее приложений. Наряду с математикой главной сферой его творчества была механика. Множество теорем, формул и методов увековечили имя Эйлера. За свою жизнь он написал около 800 основополагающих работ. Среди его трудов немало работ, посвященных астрономии, оптике, расчетам наиболее правильных конструкций телескопов, микроскопов и даже обычных очков (см. статью на стр. 31—33).

Первая марка с портретом Леонарда Эйлера вышла в Германской Демократической Республике в 1950 г. в серии, посвященной 250-летию Берлинской Академии наук. Затем три марки с портретом Эйлера вышли в 1957 г. к 250-летию его рождения. На одной из них, выпущенной на родине Эйлера в Швейцарии, изображен его портрет, а с левой стороны приведена одна из выведенных им формул. На другой, выпущенной в Советском Союзе, портрет Эйлера изображен на фоне Петербургской и Берлинской Академий наук, членом которых он являлся. Третья марка выпущена Германской Демократической Республикой в серии «Выдающиеся ученые». Все эти марки вы видите на фото.

*А. В. Алтышкин*

## ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

### К статье «Клетчатые доски и полимино»

1. Если  $m$  и  $n$  нечетны, то доска  $m \times n$  не имеет ни одной хорошей пары клеток. Пусть  $m, n$  четно. Устроим на доске шахматную раскраску. Пары разноцветных клеток — и только они! — являются хорошими парами клеток.

2. Если  $m$  и  $n$  нечетны, то известно, выиграл первый играющий.

Пусть хотя бы одно из чисел  $m, n$  четно. Уложим доску домино. Теперь нетрудно заметить, что второй играющий может выиграть вне зависимости от игры первого; для этого ему достаточно после каждого хода первого играющего зачеркивать вторую клетку того домино укладки, клетку которого зачеркнет первый играющий.

3. а) Легко заметить, что  $n$  должно быть четным. Используя шахматную раскраску, можно показать, что необходимым условием возможности укладки является

$$n \equiv 0 \pmod{4}.$$

Используя рисунок 1, легко показать, что это условие и достаточно.

б) Ответ не изменится:  $n$  любое число, кратное четырем.

4. а) Легко заметить, что  $n$  должно быть четным. Используя столбцовую циклическую раскраску в два цвета, можно показать, что необходимым условием возможности укладки является

$$n \equiv 0 \pmod{4}.$$

С помощью рисунка 2 легко показать, что это условие и достаточно.

б) Ответ не изменится:  $n$  — любое число, кратное четырем.

5. а) Ответ: хотя бы одно из чисел  $m, n$  кратно  $k$ . (Указание: для решения задачи можно использовать любой из методов, использованных в статье при решении задачи 1.)

б) Нет: либо оба цилиндра можно уложить  $k$ -мино, либо оба нельзя.

6. а) Будем считать, для определенности, что для изготовления листа Мебиуса из доски  $m \times n$  мы склеили противоположные стороны длины  $m$ ; тогда лист Мебиуса можно уложить линейным  $k$ -мино, если из чисел  $m,$



Рис. 1.

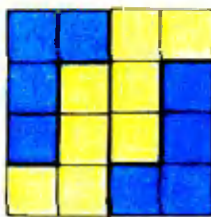


Рис. 2.

$2n$  хотя бы одно кратно  $k$  и только в этом случае. (Указание: для решения задачи можно использовать любой из методов, использованных в статье при решении задачи 1.)

б) Может при любом четном  $k$ , за исключением  $k = 2$ . Для того чтобы ровно один из двух листов Мебиуса можно было уложить линейным  $k$ -мино, необходимо и достаточно, чтобы ровно одно из чисел  $2m, 2n$  было кратно  $k$ .

### К статье «СЕТИ в вопросах и задачах»

Если числа, выражающие расстояния между импульсами, записать в двоичном виде, одно под другим, получим:

$$\begin{array}{r} 7645 = 1110111011101 \\ 4361 = 1000100001001 \\ 4553 = 1000111001001 \\ 4361 = 1000100001001 \\ 7625 = 1110111001001 \end{array}$$

Если теперь стереть нули, то получим:

$$\begin{array}{r} 11111111 \\ 111111 \\ 111111 \\ 111111 \\ 11111111 \end{array}$$

то есть название конференции, о которой говорилось в начале статьи.

### К статье «Расстояния между скрещивающимися прямыми»

$$1. \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sqrt{1 - \cos^2 2\alpha \cos^2 \beta}}$$

$$2. \frac{3a}{7}$$

$$3. \frac{a \sqrt{\cos \alpha}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

### К статье «Международная математическая олимпиада школьников»

Первая задача легко решается, если применить принцип Дирихле. После олимпиады многие участники советской команды исследовали возможность решения задачи для меньшего количества чисел. Для 8 чисел С. Коягинным был построен пример, для которого утверждение задачи не выполняется. Для 9 чисел задача не была решена.

Вторую задачу большинство учащихся решало следующим путем: разбивали данный четырехугольник на трапецию и четырехугольник с углами, равными данным. Затем от трапеции отсекали равнобедренную тра-

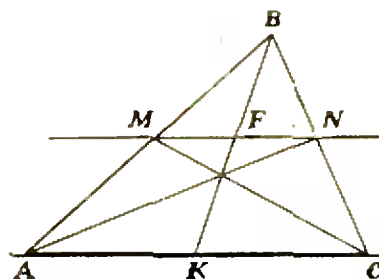


Рис. 1.

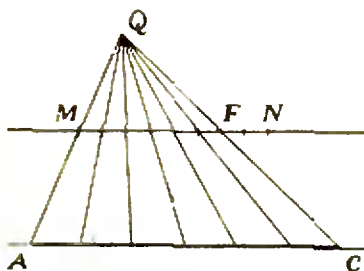


Рис. 2.

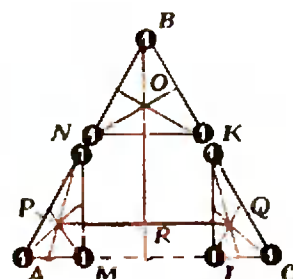


Рис. 3.

тецию и трапецию, которую легко разбить на 2 четырехугольника, около каждого из которых можно описать окружность.

Четвертая задача имеет много различных решений, причем задача упрощается, если заметить, что система неравенств не изменяется при циклической перестановке неизвестных, и что каждому решению системы соответствует второе решение, полу-

чаемое перестановкой  $y_i = \frac{1}{x_i}$ , такое, что если  $x_i = x_j$ , то  $y_i < y_j$  и если  $x_i < x_j$ , то  $y_i > y_j$ .

Пятую задачу можно решить построением неограниченно возрастающей последовательности  $f(x_n)$ . Она имеет более простое решение, если пользоваться снятием верхней грани.

Шестая задача — вычислительного характера. Ее можно решить вычислив расстояния от одной из данных плоскостей до одной из вершин тетраэдра, в зависимости от угла наклона грани тетраэдра, в которой находятся остальные его вершины, к данным четырем параллельным плоскостям.

#### К задачам «Квант» для младших школьников»

(См. «Квант» № 10, 3-я стр. обл.)

1. Проводник — абorigine.
2. Нет. Указание. После каждого хода цвет поля, на котором оказывается конь, меняется.
3. 64 года. Указание.  $1936 = 44^2$ .
4. Указание. Когда человек делает рукопожатие, то его партнер также делает рукопожатие. Поэтому общее число всех совершенных рукопожатий  $2 + 2 + \dots + 2$  — число четное. Рассмотреть это число как сумму двух чисел: рукопожатий, совершенных людьми, сделавшими четное число рукопожатий (оно четно) и людьми, сделавшими нечетное число рукопожатий (получается, что и оно четно).
5. 9801: 1089 = 9.

#### К «Задачам», помещенным в «Кванте» № 10 (стр. 30)

1.  $a = 36$ .
2. Демма. Пусть даны 2 параллельные прямые, тогда любой отрезок на одной из этих прямых можно разделить на  $n$  частей ( $n$  — натуральное).

Доказательство. Схема деления отрезка на 2 части показана на рисунке 1 (проверьте). Теперь мы можем делить отрезок на  $2^m$  частей (для этого каждую половинку делим пополам и т. д.). Чтобы разделить AC (рис. 2) на  $n$  частей, разделим MN на  $2^m$  частей ( $2^m \geq n$ ). Отсчитаем от точки M  $n$  отрезков (отрезок MF) и продолжим AM и FC до пересечения в точке Q. Остальное очевидно.

Решение задачи. Распределим веса так, как показано на рисунке 3, то есть будем считать, что в точках N и K 2 независимых веса а 1 кг. Легко найти центры тяжести треугольников AMN, KLC и BNK (точки пересечения медиан). Теперь в точке R ( $PR = RQ$ ) расположен вес 6 кг, в точке O — вес 3 кг. Осталось разделить OR на 3 части.  
3. Применить инверсию.

Окончание списка читателей, правильно решивших задачи Ф138, Ф140—Ф142, Ф145—Ф147 (см. «Квант» № 10, 1972 г.).

А. Соколовский (Кривой Рог) Ф142, Ф147; М. Султангалиев (с. Ваныш Башкирской АССР) Ф140; О. Саакян (Ереван) Ф140, Ф142; Ф. Симакин (Новокузнецк) Ф142; Е. Соколов (Тула) Ф145; Л. Степанов (Тбилиси) Ф147; Казимир Салова (Варшава, Польша) Ф147; В. Сафонов (Алма-Ата) Ф141; В. Терентьев (Павлово Горьковской обл.) Ф147; О. Торонев (Оренбург) Ф145; О. Трунов (Джалал-Абад) Ф145; Д. Фишман (Черновцы) Ф147; А. Фролов (Москва) Ф142; Г. Фрадин (Днепропетровск) Ф142; Г. Фурман (Черновцы) Ф138, Ф145; М. Хусанков (Чистополь Татарской АССР) Ф147; Н. Хохстанцев (Москва) Ф145; С. Холодков (Калуга) Ф147; М. Хорошин (Чернигов) Ф147; В. Чубов (Армавир) Ф142; А. Шаршаков (Москва) Ф146; В. Шапкин (Октябрьский Башкирской АССР) Ф142; Р. Шигапов (Люберцы Московской обл.) Ф141, Ф142; Н. Юрченко (Киев) Ф138.

#### К задаче «Несостоявшийся обед» (См. стр. 21, 39)

Дорофей Мартынович мог пригласить пятерых гостей: Никодима Гавриловича, Клеопатру Ивановну, Порфирия Аполлинариевича, Розалию Леопольдовну и Акакия Акакиевича.

# КВАНТ

для младших школьников

1. 9 одинаковых книг стоят 11 рублей с копейками, а 13 таких книг — 15 рублей с копейками. Сколько стоит одна книга?

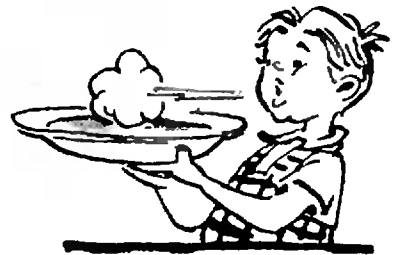
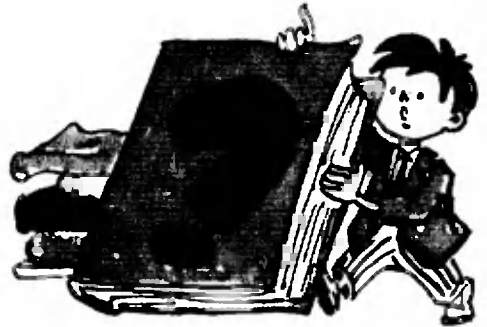
2. У вас есть пружинные весы (динамометр), рассчитанные максимум на 200 н, а вам надо взвесить чемодан, который примерно в 1,5 раза тяжелее. Можете ли вы это сделать? Как?

3. Я отпил треть стакана черного кофе и долил его молоком, потом я выпил четверть стакана и снова долил молоком, затем отпивал  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{6}$  и  $\frac{1}{7}$  стакана и каждый раз доливал его молоком. В другой раз я отпил  $\frac{1}{7}$  стакана кофе и долил его молоком, затем отпил  $\frac{1}{6}$  стакана и снова долил молоком, и так далее до  $\frac{1}{3}$  стакана. В какой раз я выпил больше кофе?

4. Почему чай или кофе остывают быстрее, если на них подуть?

5. Любую ли сумму из целого числа рублей, больше семи, можно уплатить без сдачи денежными билетами в 3 и 5 рублей?

6. В Средней Азии, где летом очень жарко, многие носят именно летом теплые ватные халаты. Как вы думаете, жарче ли в таком халате, чем в легком платье?





## МЕДАЛИ АКАДЕМИИ НАУК СТУДЕНТАМ

Для дальнейшего повышения активности студентов высших учебных заведений в проведении самостоятельных научных исследований Президиум Академии наук СССР принял решение об учреждении медалей Академии наук с премиями за лучшие студенческие научные работы в области естествознания, технических и гуманитарных наук. Ежегодно будут присуждаться 5 медалей с премиями размером 200 рублей каждая. К рассмотрению принимаются не более 15 работ из числа участвовавших во Всесоюзном конкурсе на лучшую научную работу студентов вузов. Этот конкурс ежегодно проводится Министерством высшего и среднего специального образования СССР и Центральным комитетом ВЛКСМ. Решения Президиума Академии наук СССР о присуждении медалей с премиями публикуются в «Вестнике Академии наук СССР», «Вестнике высшей школы» и «Комсомольской правде». Медали и дипломы о присуждении медалей вместе с премиями вручаются на годичном Общем собрании Академии наук СССР.

Мы приводим здесь фотографии макета новых медалей Академии наук СССР.