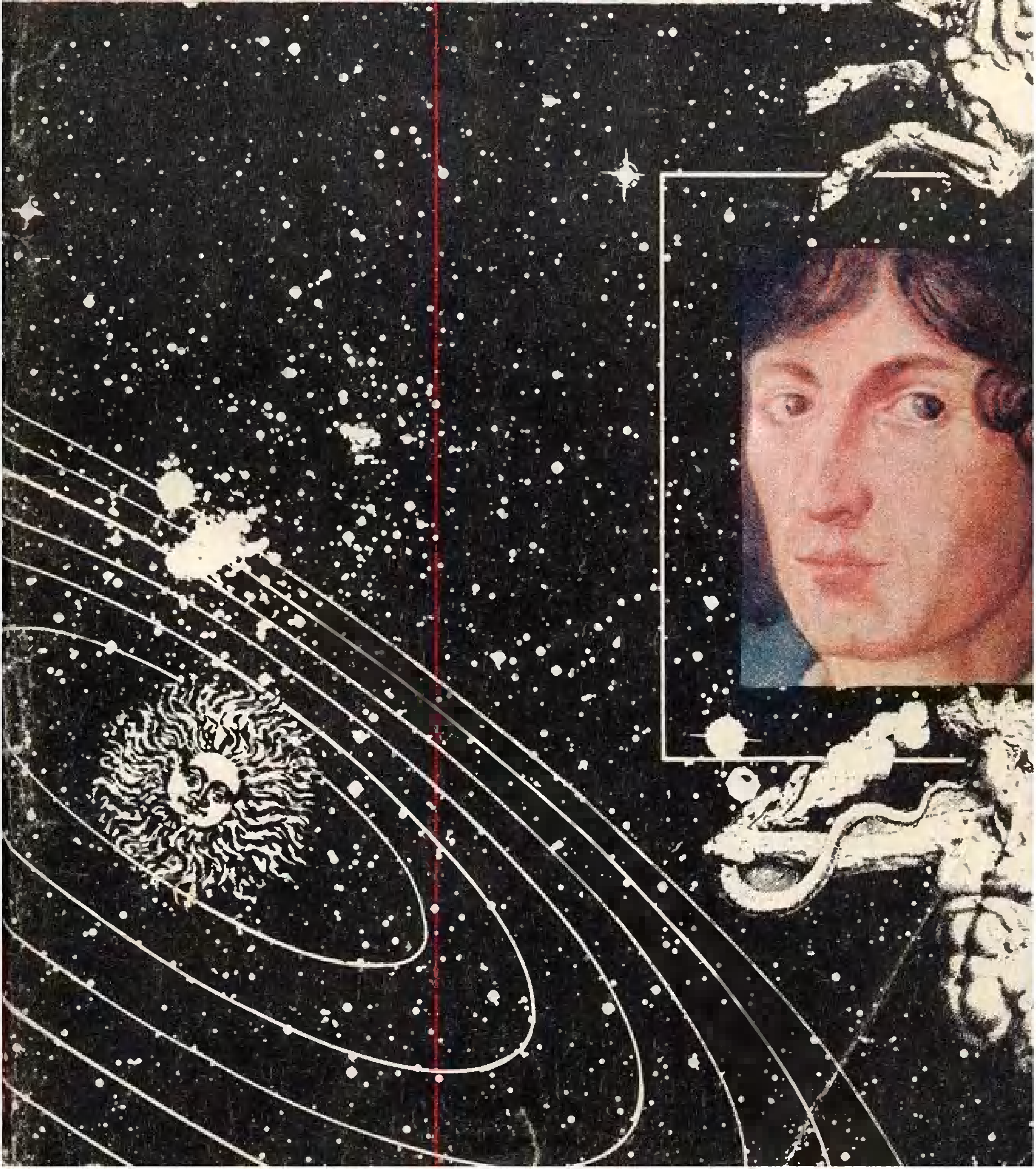
Квант

2

1973

Научно-популярный физико-математический журнал



Квант

Основан в 1970 году

1973
2

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

Портрет Николая Коперника, который мы приводим на первой странице обложки, был написан неизвестным художником в 1575 году.

На второй странице обложки — кабинет геометрии Краковского университета, где учился Коперник с 1491 года. Поскольку учебников не хватало, основные теоремы чертили на стенах.

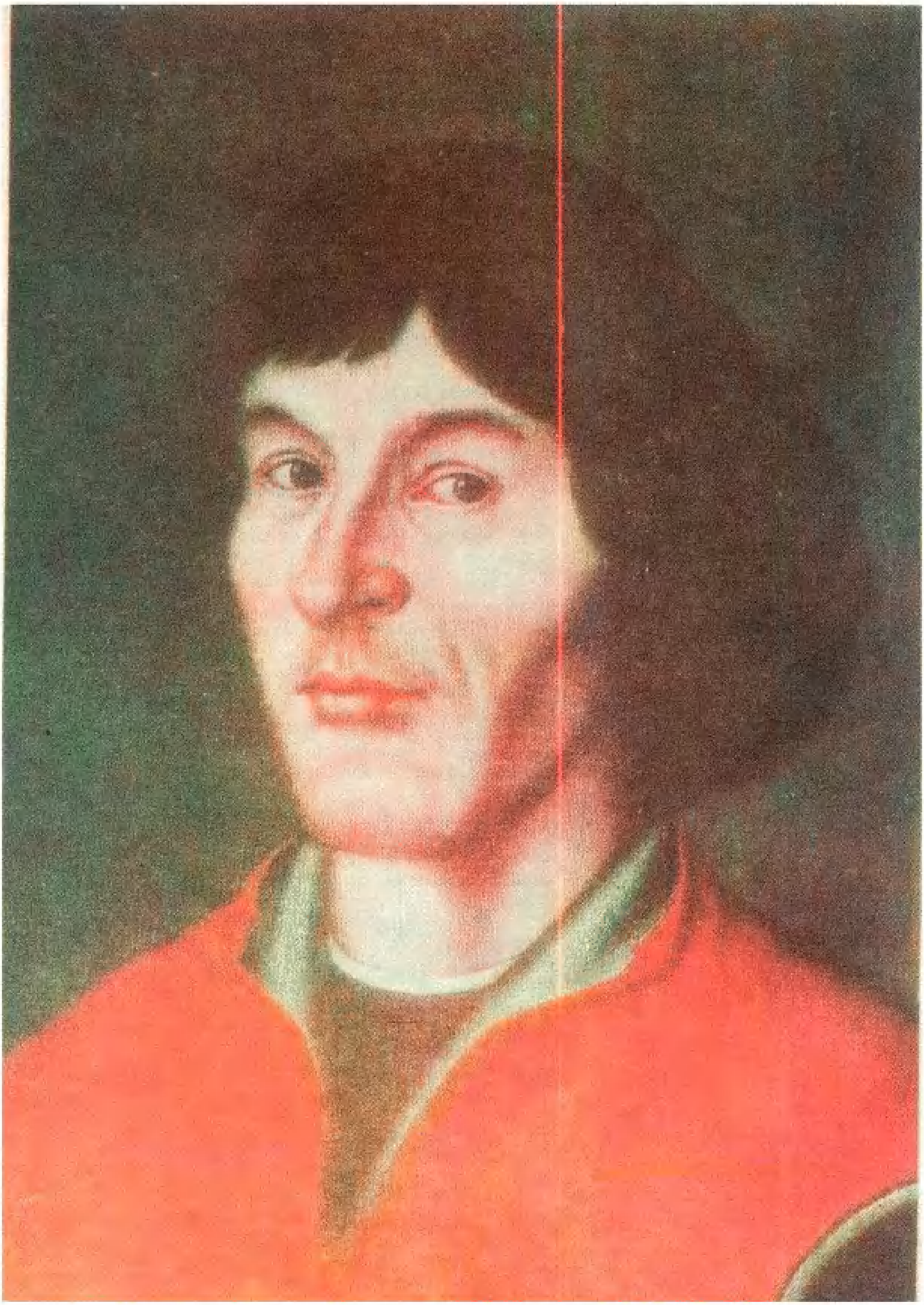
На четвертой странице вы видите еще один портрет Коперника. Предполагают, что это автопортрет ученого.

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Квант», тел. 234-08-11, 234-07-93

Сдано в набор 16/XI 1972 г.
Подписано в печать 26/XII 1972 г.
Бумага 70×100 1/16 Физ. печ. л. 3
Усл. печ. л. 6,5 Уч.-изд. л. 7,66
Тираж 379 580 экз.
Т-20448
Цена 30 коп. Заказ 2102

Чеховский полиграфический комбинат «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются



Николай Коперник

Я. А. Смородинский

Жизнь Коперника

В этом году весь мир отмечает юбилей великого польского астронома Николая Коперника. Коперник родился 500 лет тому назад, 19 февраля 1473 года, в городе Торуни. Учился в Краковском университете, потом прожил почти 10 лет в Италии. В Болонье, Риме, Падуе и Ферраре он изучал медицину, юриспруденцию и астрономию. Возвратившись в Польшу (около 1506 года), он в течение нескольких лет был секретарем и врачом своего дяди епископа.

В 1512 году, после смерти дяди, Коперник переехал в город Фромборк, расположенный на берегу Балтийского моря. Здесь он продолжал упорно заниматься астрономией. Много раз ему приходилось прерывать научные изыскания из-за большого количества административных обязанностей, которые он должен был исполнять, будучи управляющим южной частью провинции Вармии. Несмотря на это, он упорно работал над своим основным (и фактически единственным) астрономическим сочинением «О вращении небесных сфер». Первые главы этой книги, содержащие разные тригонометрические теоремы, были изданы учеником Коперника Георгом Ретиком в 1542 году. Но значительно раньше, еще в 20-х годах XVI века, в Европе была известна рукопись Коперника, так называемый «Малый комментарий», в которой содержались новые представления о строении Солнечной системы. Главную же свою книгу Коперник не решался издать почти до самой смерти. Лишь умирая (в 1543 году), он смог подержать в слабеющих руках отпечатанные листы этой книги.

Что же сделал Коперник, и почему его книга оказала столь большое влияние на развитие науки?

Идеи Коперника положили начало новой эре в науке. Их трудно было понять людям, воспитанным на авторитете древних ученых и на догматах церкви. Поняли Коперника немногие. Но среди них были Кеплер и Галилей.

Среди тех, кто не смог понять Коперника, был Лютер, один из руководителей Реформации, положившей конец беспредельному господству католической церкви в Европе. Он написал о Копернике:

«Рассказывают о новом астрономе, который хочет доказать, будто Земля вращается вокруг себя, а не небо, Солнце и Луна; все равно, как если бы кто-либо сидит в телеге или на корабле и движется, а думает, что он остается на месте, а земля и деревья идут и движутся. Но тут дело вот в чем: если кто-либо хочет быть умным, то должен выдумать что-либо собственное и считать самым лучшим то, что он выдумал. Дурак хочет перевернуть все искусство астрономии...»

В книгу Коперника без ведома автора было добавлено предисловие богослова и математика Оссиандера, который следил за ее печатанием. В этом предисловии он успокаивает читателя (и цензоров): «...во всем же, что касается гипотез, пусть никто не ожидает получить от астрономии че-

---

Портрет Николая Коперника, репродукцию с которого мы приводим, был написан неизвестным польским художником, современником Коперника. Этот портрет считается одним из наиболее достоверных изображений ученого. Перевод подрисуночных подписей выполнен Т. А. Кротовой.

го-нибудь истинного, поскольку она не может дать что-либо подобное; если же он сочтет истинным то, что придумано для другого употребления, то после такой науки окажется более глупым, чем когда приступал...»

Идея автора предисловия состояла в том, что теория Коперника удобна для вычислений, но не имеет никакого отношения к реальному миру. Тем не менее в 1616 году, при жизни Галилея и Кеплера, декретом инквизиции книга Коперника была включена в список запрещенных церковью книг.

Но все эти меры оказались бесполезными. Новая наука завоевывала себе признание, древняя наука уходила в историю.

Древние идеи

В неведомую глубь веков ушло время, когда человек впервые увидел среди неподвижных звезд семь небесных тел, положение которых изменялось на его глазах. Солнце, Луна, Меркурий, Венера, Марс, Юпитер и Сатурн удивляли и пугали древних наблюдателей неба. Движение их предвещало тревоги и радости. Солнце приносило с собой времена года, Луна сменяла дни и ночи, багровый Марс был предвестником войны.

Еще египтяне знали, что движения Солнца и Луны можно предсказывать. Те, кто умел это делать, занимали особое положение — они были жрецами, знающими тайны богов. Жрецы объявляли о начале года, о праздниках, о сроках работ на полях. С тех пор на многие сотни лет наблюдение небесных тел было связано с календарем. Сам Коперник углубился в астрономию, когда в 1514 году папа Лев X призвал к исправлению календаря. (Эта реформа — переход к новому стилю — была проведена позже, в 1574 году.)

Греки пошли значительно дальше египтян. Они задумались над тем, как устроена вся планетная система, как движутся планеты. Еще в III веке до нашей эры Аристарх Самос-

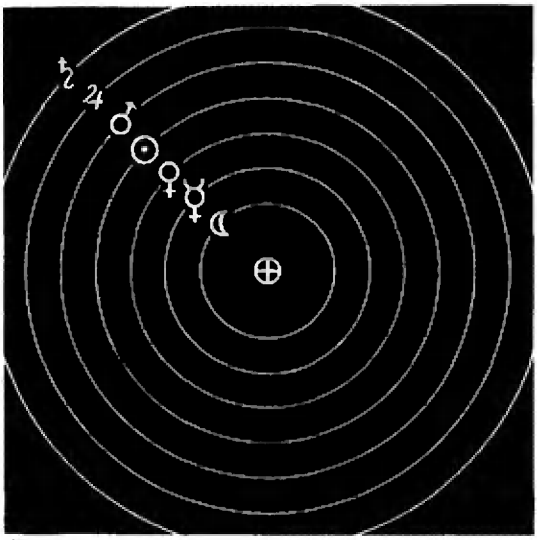


Рис. 1.

ский высказал идею о гелиоцентрической системе — системе планет с Солнцем в центре. Во II веке до нашей эры на острове Родосе и в Александрии наблюдал звезды Гиппарх, который первым научился предсказывать положение Солнца и Луны, создав теорию их движения. Астрономы видели, что каждая планета движется по своим особым правилам; поэтому они говорили о теории Марса, теории Луны и т. д. Только Кеплер смог объединить эти разрозненные теории в единую схему.

Первую последовательную схему планетной системы дал Клавдий Птолемей, работавший в Александрии в середине II века нашей эры. Он в значительной степени опирался на труды Гиппарха, которые не дошли до наших дней. Система Птолемея продержалась 15 веков и дожила, почти не изменившись, до Коперника. Вплоть до XVI века никто не сомневался в ее истинности *).

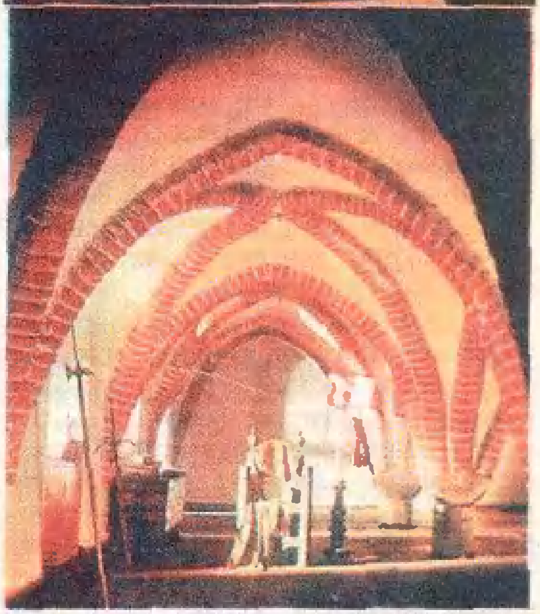
Птолемей считал, что в центре Вселенной расположена Земля, а вокруг нее вращается семь сфер, которые влекут за собой семь планет (рис. 1)

*) Сочинение Птолемея называлось «Математический трактат в XIII книгах». В арабском переводе, в котором с ним познакомились средневековые ученые, оно называлось «Альмагест» (от греческого «μεγίζτη» — величайшее). Под этим названием оно цитируется и сейчас

в таком порядке: Луна, Меркурий, Венера, Солнце, Марс, Юпитер, Сатурн. На рисунке 1 в действительности изображена не система Птолемея — она значительно более сложна. До того, как о ней рассказать, поймем сначала, что означало для греков (да и для Коперника) построить теорию движения планеты.

Кинематика без динамики

Белым пятном в системе знаний древних естествоиспытателей было то, что они не имели ни малейшего представления о динамике. Причина движения тел была для них недоступна. Когда камень толкали, все было понятно — хотя и в этой задаче никаких количественных соотношений получить не могли (да и не думали об этом). Когда же дело касалось планет, то ни о каких причинах движения и речи быть не могло — планеты двигались сами по себе, просто потому, что движение заключено в их природе. Почти вся наука о движении описана у Коперника так: «Аристотель говорит, что единому и простому телу присуще и простое движение; из простых же движений одно прямолинейное, другое круговое; из прямолинейных одно идет вверх, другое вниз. Поэтому всякое простое движение идет или к середине вниз, или от середины вверх, или вокруг середины, и это движение круговое. Только земле и воде, которые считаются тяжелыми, следует двигаться вниз, то есть стремиться к середине; воздух же и огонь, обладающие легкостью, должны двигаться вверх и удаляться от середины. И кажется вполне сообразным приписать этим четырем стихиям прямолинейное движение, а небесным телам предоставить вращаться кругом середины. Так утверждает Аристотель». Вот и вся механика древних. Итак, планеты должны двигаться по окружностям и, наверное, с постоянной скоростью, так как (опять из Коперника): «Круговое движение всегда совершается равномерно, ибо оно имеет неубывающую причину...» Отсюда и



Рукопись книги «De revolutionibus orbium coelestium» («О вращении небесных сфер»), открытая на той странице, где Коперник нарисовал циркулем Солнечную систему, хранится в Кракове, и коснувшись пальцами бумаги, еще можно ощутить «бороздки», оставленные циркулем великого астронома. В предисловии к своему труду Коперник признается, что лишь уговоры и упреки друзей убедили его дать согласие на издание своего трактата.

«Зал правосудия» в замке Гейльсберг. Здесь Коперник жил с дядей епископом после возвращения из Италии, вплоть до смерти могущественного прелата в 1512 году.

схема геоцентрической системы. Но система, изображенная на рисунке 1, хотя и очень эффектна, противоречит наблюдениям; с ее помощью нельзя разобраться в истинном движении планет.

Эта задача и стояла перед Птолемеем. Как совместить «принцип инерции Аристотеля» с реальным миром? Как описать реальный мир на основании одной кинематики?

Движение сфер

Древние наблюдатели видели, что движение планет сложное. Они разделяли это сложное движение на несколько более простых. Первым главным движением было суточное движение неба, вторым — его годовое движение. В этих двух движениях участвовали все семь сфер, которые тянули за собой планеты. Восьмая сфера, к которой прикреплены звезды, была неподвижна. Еще Гиппарх усовершенствовал эту систему. Чтобы учесть движение точки весеннего равноденствия (точки пересечения плоскости экватора с орбитой Земли), он приписал восьмой сфере медленное движение на один градус за 100 лет (по 36″ в год) *).

Однако эти простые движения не удовлетворяли «принципу инерции Аристотеля». Скорости их были непостоянны. Поэтому говорили о существовании двух неравенств. Первое неравенство — это неравномерность движения планет по орбитам; второе — наблюдавшееся «попятное» движение планет — изменение направления их движения по небу на противоположное. Только у Солнца и Луны не было второго неравенства. Поэтому уже теория Гиппарха позволяла определять их положение с ошибкой, меньшей одной минуты. С этими неравенствами надо было справиться, и Птолемей справился с ними великолепно.

*) В действительности смещение точки весеннего равноденствия происходит немного быстрее — на 50″ в год.

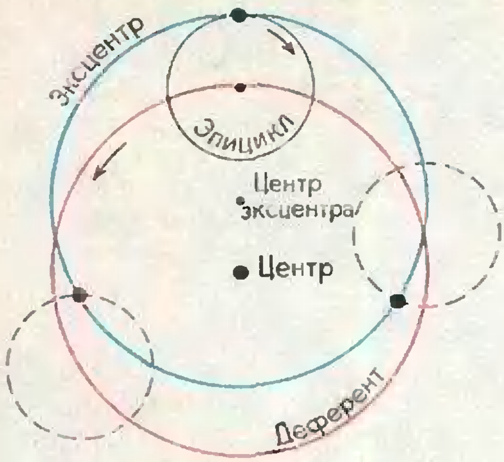


Рис. 2.

Эксцентр и эквант

Выход из, казалось бы, безнадежного положения был весьма остроумен. Надо предположить, что по окружности вокруг центра Мироздания (Земли в системе Птолемея) движется не сама планета, а лишь центр другой окружности, названной *эпициклом* (рис. 2). Планета же движется по эпициклу с той же угловой скоростью по величине, но обратной по направлению, с какой центр эпицикла движется по основной орбите, названной *деферентом* *). В результате таких построений оказывается (хорошее упражнение для читателя!), что планеты по-прежнему движутся по окружности (она называется *эксцентром*), но центр ее смещен относительно Земли.

Таким образом была установлена важная кинематическая эквивалентность схемы движения эпицикла по деференту и эксцентра. Но столь простая схема описывала лишь путь Солнца, которое всегда движется по небу в одном направлении, не поворачивая вспять. Угловая скорость движения Солнца по эксцентру (относительно его центра) предполагалась постоянной. Тогда, очевидно,

*) Такое движение в механике называют парой вращения.

Рис. 3.

угловая скорость движения, наблюдаемая с Земли, окажется переменной. Так просто объяснялось первое неравенство.

Для планет теорию нужно было усложнить. Особенно трудно было объяснить движение Меркурия, у которого, как мы теперь знаем, самый большой эксцентриситет: он равен 0,2 и в 10 раз больше, чем у Земли.

К двум окружностям добавили третью — экватор. Центр экванта обладал той особенностью, что наблюдатель, находящийся в нем, видел бы равномерное движение планеты. Иными словами, хотя угол ψ (рис. 3) изменяется со временем неравномерно, угол φ растет пропорционально времени. Таким образом как бы вводилась фиктивная планета, движущаяся равномерно по экванту. Гипотеза экванта (при дополнительном условии, что центр эксцентра делит отрезок центр — центр экванта пополам) улучшила теорию, но и она оказалась все же недостаточной. Пришлось вводить дополнительные предположения, например, что центр экванта сам движется по окружности или что по эпициклу катится другой эпицикл. В конечном счете для описания движения планет надо было вводить почти 40 различных круговых движений. Да и сама гипотеза экванта была на самом деле чужда кинематике. Схема, таким образом, была сложной и неудовлетворительной с принципиальной точки зрения. Однако она позволяла очень точно рассчитывать положение Солнца и планет и поэтому удовлетворяла всех. Рассчитанные на ее основе астрономические таблицы (так называемые Альфонсинские таблицы) были во всеобщем употреблении с XIII века *). Правда, надо иметь в виду, что только в конце XV века подлинное учение Птолемея стало распространяться в университетах Европы — до этого учились по тяжелым латинским переводам арабских трактатов.

В то время наиболее важно было рассчитывать движение Солнца и Луны; для этого теории Птолемея было вполне достаточно. Причина этого обстоятельства, как мы сейчас знаем, лежит в малости эксцентриситетов (малой вытянутости) планетных орбит, которые поэтому могут приближенно описываться системой Птолемея.

Солнце — Центр Вселенной

Итак, не практические цели стояли перед Коперником, когда он начал размышлять над системой планет. Вопрос о календарной реформе был только лишним поводом. Коперник не мог принять сложной системы катящихся сфер Птолемея. Он не оставил после себя никаких дневников или записей, по которым можно было бы восстановить ход его мыслей. Никто не знает, о чем он думал почти сорок лет, создавая свою систему.

Когда сейчас мы смотрим на систему Птолемея, то обнаруживаем много

*) Таблицы, с большой точностью рассчитанные по системе Коперника, были опубликованы в 1551 году Эразмом Рейнгольдом. Ночью 17 августа 1563 года Тихо Браге увидел, что Юпитер и Сатурн почти совпадают на небе. Посмотрев в таблицы, он обнаружил, что Альфонсинские таблицы предсказывают время этого события с ошибкой в месяц, а Коперниковские — в 7 дней. Этот случай дал толчок работам Тихо Браге, а потом и Кеплера.

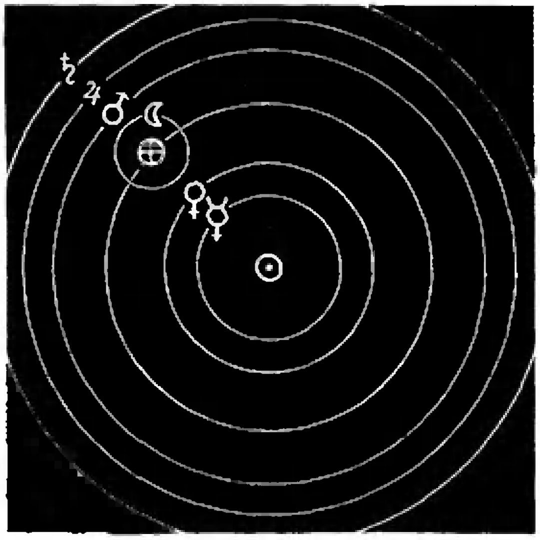


Рис. 4.

закономерностей, которые трудно считать случайными и на которые не мог не обратить внимания Коперник. Почему центры эпициклов Меркурия, Венеры и Солнца, всегда лежат на одной прямой? Почему периоды обращения Марса, Юпитера и Сатурна в их эпициклах равны одному земному году?

Немало таких проблем связано с системой Птолемея.

Гипотеза Коперника была проста. Надо поменять в старой Птолемеевской системе Землю и Солнце местами, оставив только Луну вращаться вокруг Земли (рис. 4). Но эта простая гипотеза была недоступна для понимания большинства современников Коперника. Первый раз в истории науки наблюдатель был лишен своего привилегированного положения, и обсуждался вопрос о картине мира с точки зрения другой (движущейся относительно наблюдателя) координатной системы. Такой шаг был революционным не только с точки зрения церкви — Земля и человек перестали быть главными во Вселенной,— но и с точки зрения механики — никогда еще относительность движения не использовалась для решения конкретных задач. Поместив центр планетной системы на Солнце, Коперник сразу же упростил ее схему.

После того, что было рассказано, читателю будет понятно введение в «Малый комментарий», в котором Коперник кратко формулирует свою идею (см. стр. 9).

По схеме Коперника суточное движение неба объяснялось вращением Земли вокруг своей оси, годичное движение — обращением ее вокруг Солнца. Исчезло второе неравенство — попятное движение планет стало следствием разной угловой скорости движения Земли и других планет на своих орбитах. Замечательным образом отпала необходимость и в гипотезе о вращении восьмой сферы: для объяснения движения звезд достаточно было предположить, что плоскость орбиты Земли медленно вращается в сторону, обратную движению самой Земли по орбите.

Но не следует думать, что простая схема Коперника полностью решила задачу. Напомним, что естественное движение планет должно было сводиться к комбинациям равномерных движений по окружностям. Для этого и вводились эпициклы, эксцентры и экванты.

Дадим опять слово Копернику: «...становится очевидным, что вследствие одного обращения Земли может происходить все то, чего древние пытались достичь для каждой планеты при помощи эпициклов. Однако, вопреки мнению Аполлония и древних, движение планет не оказывается равномерным, даже после отнесения этой неравномерности за счет обращения Земли. Следовательно, планеты движутся не по концентрическим кругам, а иным образом, каким — мы покажем в дальнейшем...»

Теперь мы знаем, что непостоянство скорости движения планет по орбитам следует из законов Кеплера и его не нужно избегать в теории. Но Коперник остается в плену своих законов кинематики и стремится достичь равномерности движения введением все тех же эпициклов и эксцентров (однако без эквантов). В результате его схема планетной системы оказывается достаточно сложной и совсем не похожей на простую гелиоцентрическую модель, с которой он начал. Конец «Малого комментария» выглядит так: «Таким образом, Меркурий движется при помощи всего семи кругов, Венера — при помощи пяти, Земля — при помощи трех, а Луна вокруг них — при помощи четырех; наконец, Марс, Юпитер и Сатурн — при помощи пяти кругов каждый. Таким образом, для Вселенной будет достаточно 34 кругов, при помощи которых можно объяснить весь механизм мира...».

Теория Коперника, как и многие другие теории (даже современные), оказывается очень эффективной в первом ее приближении. При попытках же улучшить ее согласие с опытом она начинает усложняться и терять убедительность. Такое положение обычно свидетельствует об органических пороках теории. Этот симптом увидел Кеплер, открывший основной дефект теории Коперника: планеты на самом деле движутся по эллипсам, а не по окружностям, и описание их движения многими окружностями в принципе не может быть простым. Однако в рассуждениях Коперника заключалось важное открытие. Предположив, что центр эксцентра движется по окружности, он заметил то, чего не заметили древние: планеты стали двигаться не по окружности, а по овалу. «Против отклонения путей планет от кругового совершенства Птолемей с основанием возражал бы Копернику, но я не возражаю»,— писал Кеплер.

Система Коперника не была существенно точнее Птолемеевой. Более того, изменение системы отсчета не могло изменить результатов вычислений. Однако переход к гелиоцентрической системе настолько изменял все представления о строении мира, что за ним вскоре последовали открытия Галилея и Кеплера, а затем и создание механики Ньютоном. Поэтому книга Коперника оказалась фундаментом, на котором построена вся современная наука. Именно в этом смысле слова ее считают одной из величайших книг, когда-либо написанных рукой человека.

Николая Коперника
малый комментарий относительно установленных им гипотез о небесных движениях

Наши предки ввели множество небесных сфер, как я полагаю, для того, чтобы сохранить принцип равномерности для объяснения видимых движений светил. Им казалось слишком нелепым, что небесное тело в своей совершенной сферичности не будет всегда двигаться равномерно. Однако они полагали возможным, что при сложении или совместном участии нескольких правильных движений светила будут казаться по отношению к какому-либо месту движущимися неравномерно.

Этого не могли добиться Калипп и Евдокс, старавшиеся получить решение посредством концентрических кругов и ими объяснить все особенности движений планет, не только относящиеся к видимым круговращениям звезд, но даже и те, когда, как нам кажется, планеты то поднимаются в верхние части неба, то опускаются, чего, конечно, концентричность никак не может допустить. Поэтому было сочтено лучшим мнение, что это можно воспроизвести при помощи эксцентрических кругов и эпициклов, с чем, наконец, большая часть ученых и согласилась.

Однако, все то, что об этом в разных местах дается Птолемеем и многими другими, хотя и соответствует числовым расчетам, но тоже возбуждает немалые сомнения. Действительно, все это оказалось достаточным только при условии, что надо выдумать некоторые круги, называемые эквантами. Но тогда получалось, что светило двигалось с постоянной скоростью не по несущей его орбите и не вокруг собственного ее центра. Поэтому, подобные рассуждения не представлялись достаточно совершенными, не вполне удовлетворяли разум.

Так вот, обратив на это внимание, я часто размышлял, нельзя ли найти какое-нибудь более рациональное сочетание кругов, которым можно было бы объяснить все видимые неравномерности, причем каждое движение само по себе было бы равномерным, как этого требует принцип совершенного движения. Когда я приступил к этой весьма, конечно, трудной и почти неразрешимой задаче, то у меня все же появилась мысль, как этого можно добиться при помощи меньшего числа сфер и более удобных сочетаний по сравнению с тем, что было сделано раньше, если только согласиться с некоторыми нашими требованиями, которые называют аксиомами. Они следуют ниже в таком порядке.

Первое требование. Не существует одного центра для всех небесных орбит или сфер.

Второе требование. Центр Земли не является центром мира, но только центром тяготения и центром лунной орбиты.

Третье требование. Все сферы движутся вокруг Солнца, расположенного как бы в середине всего, так что около Солнца находится центр мира.

Четвертое требование. Отношение, которое расстояние между Солнцем и Землей имеет к высоте небесной тверди, меньше отношения радиуса Земли к ее расстоянию от Солнца, так что по сравнению с высотой тверди оно будет даже неощутимым.

Пятое требование. Все движения, замечающиеся у небесной тверди, принадлежат не ей самой, но Земле. Именно Земля с ближайшими к ней стихиями вся вращается в суточном движении вокруг неизменных своих полюсов, причем твердь и самое высшее небо остаются все время неподвижными.

Шестое требование. Все замечаемые нами у Солнца движения не свойственны ему, но принадлежат Земле и нашей сфере, вместе с которой мы вращаемся вокруг Солнца, как и всякая другая планета; таким образом, Земля имеет несколько движений.

Седьмое требование. Кажущиеся прямые и попятные движения планет принадлежат не им, но Земле. Таким образом, одно это ее движение достаточно для объяснения большого числа видимых в небе неравномерностей.

При помощи этих предпосылок я постараюсь коротко показать, как можно вполне упорядоченно сохранить равномерность движений. Однако здесь ради краткости я полагаю нужным опустить математические доказательства, поскольку они предназначены для более обширного сочинения. Впрочем, при описании этих кругов мы укажем величины полудиаметров орбит, при помощи которых каждый сведущий в математике легко поймет, как хорошо подобная композиция кругов подойдет к числовым расчетам и наблюдениям.

Поэтому пусть никто не полагает, что мы вместе с пифагорейцами легкомысленно утверждаем подвижность Земли; для этого он найдет серьезные доказательства в моем описании кругов. Ведь те доводы, при помощи которых натурфилософы главным образом пытаются установить ее неподвижность, опираются большей частью на видимость; все они сразу же рухнут, если мы также на основании видимых явлений заставим Землю вращаться.

Вычисления, ошибки, контроль

Н. Б. Демидович

Ошибки наблюдения

Считать точно не всегда означает считать правильно. Рассмотрим для примера следующую задачу.

Сторона квадратного участка земли равна 1,4 м. Чему равен его полупериметр p и площадь S (рис. 1)?

Решение напрашивается само собой: $p = 1{,}4 + 1{,}4 = 2{,}8$ (*м*), $S = 1{,}4 \times 1{,}4 = 1{,}96$ (*м*^{2}). Но насколько точен этот ответ? Абсолютно точен, если длина стороны участка задана точно. А если она не задана, а, например, измерена дециметровой мерной лентой? Тогда естественно предположить, что 1,4 *м* — это деление ленты, ближайшее к истинной длине измеряемой стороны участка. Отсюда ясно лишь, что точная длина отличается от 1,4 *м* не более чем на 0,05 *м*, то есть абсолютная величина ошибки наблюдения (она называется *абсолютной погрешностью* измеряемой величины x и обозначается Δ_x) не превосходит 0,05 *м*.

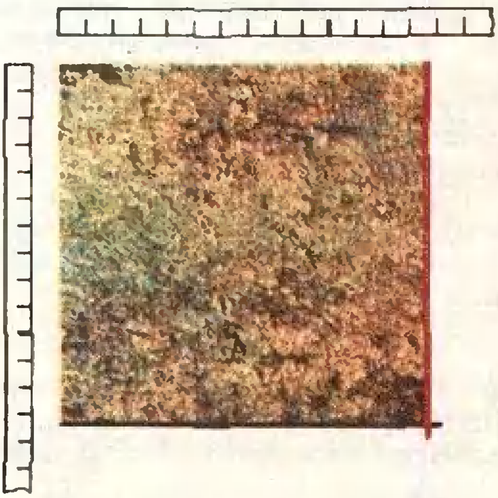


Рис. 1.

Возникает практически важный вопрос: с какой точностью при указанных предпосылках можно определить площадь? Этим и подобными ему вопросами занимается специальный раздел математики — теория приближенных вычислений. Продемонстрируем на данной задаче ее методы.

Пусть истинная длина стороны (далее все длины измеряются в метрах) равна $1{,}4 + \alpha$, где $|\alpha| \leqslant 0{,}05$, то есть $-0{,}5 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}05$. Тогда *полупериметр участка равен*

$$p = (1{,}4 + \alpha) + (1{,}4 + \alpha) = 2{,}8 + 2\alpha.$$

Абсолютная погрешность Δ_p значения полупериметра 2,8 не превосходит $2 \times 0{,}05 = 0{,}1$, то есть

$$2{,}7 = 2{,}8 - 0{,}1 \leqslant p \leqslant 2{,}8 + 0{,}1 = 2{,}9.$$

Легко проверяемая формула

$$|(x_{\text{прибл}} \pm y_{\text{прибл}}) - (x_{\text{точн}} \pm y_{\text{точн}})| \leqslant \leqslant \Delta_x + \Delta_y$$

показывает, что при сложении и вычитании чисел их абсолютные погрешности складываются.

При умножении чисел удобнее иметь дело с относительной погрешностью. *Относительной погрешностью* ε_x числа x называется отношение абсолютной погрешности Δ_x к абсолютной величине числа x: $\varepsilon_x = \dfrac{\Delta_x}{x_{\text{точн}}}$. Поскольку значения $x_{\text{точн}}$ мы не знаем, можно ε'_x заменить на ε_x, где $\varepsilon_x = \frac{\Delta_x}{x_{\text{прибл}}}$. В данном примере $\varepsilon_x = \frac{0,05}{1,4} \approx 0,036 = 3,6\%$.

Заменяя значения $\varepsilon'_x = \frac{\Delta x}{x_{\text{точн}}}$ на $\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x_{\text{прибл}}}$, мы, конечно, допускаем некоторую погрешность, но обычно она настолько мала, что ею всегда пренебрегают.

При умножении и делении чисел происходит сложение их относительных погрешностей. Доказательство этого утверждения мы оставляем читателю, заметив только, что надо оценить числа

$$\varepsilon_{xy} = \left| \frac{(x+\alpha)(y+\beta) - xy}{xy} \right|$$

и

$$\varepsilon_{\frac{x}{y}} = \left| \frac{\frac{x+\alpha}{y+\beta} - \frac{x}{y}}{\frac{x}{y}} \right|.$$

Теперь вернемся к нашей задаче. Площадь участка получается как произведение длин сторон, поэтому ее относительная погрешность имеет порядок 7,2%. Прямые вычисления дают

$$S = (1,4 + \alpha)^2 = 1,96 + 2,8\alpha + \alpha^2.$$

Здесь 1,96 — наш первоначальный ответ, а два других слагаемых — его отклонения от точного ответа. Оценим абсолютную погрешность результата:

$$\Delta_S \leqslant |2,8\alpha + \alpha^2| \leqslant |2,8\alpha| + \alpha^2 \leqslant |2,8 \cdot 0,05| + |0,05|^2 = 0,1425 < 0,15.$$

Значит, площадь S лежит в пределах

$$1,81 = 1,96 - 0,15 < S < 1,96 + 0,15 = 2,11.$$

Последняя формула наглядно показывает, что в первоначальном ответе 1,96, содержащем два знака после запятой, может не оказаться ни одной верной цифры.

Так теория приближенных вычислений избавляет нас от иллюзии, будто большое число точно вычисленных цифр всегда обеспечивает соответствующую точность самого результата. Более того, она дает ответ, как точность результата зависит от точности исходных данных, их количества и вида действий, производимых над ними.

Округление чисел

В исходном примере мы решили, что число 1,4 *м* получилось при измерении дециметровой мерной лентой и потому погрешность измерения не превосходит 0,05 *м*. При вычислениях часто получается «хвост» из цифр, в правильности которых у нас нет никакой уверенности, поэтому полученное число следует округлить. Грамотно округленное число обладает следующим свойством: *его погрешность не превосходит половины единицы последнего разряда.* Таким образом, число 1,4 *м* было задано грамотно, а ответ $S = 1,96$ *м* следует округлить до $S = 2$ *м*. С этой точки зрения число 1,0 *м* имеет следующий смысл: его абсолютная погрешность не превосходит 0,05 *м*, в отличие от числа 1 *м*, абсолютная погрешность которого не больше 0,5 *м*.

Один пример

В теории приближенных вычислений, в частности, разрабатываются такие приемы счета, которые, гарантируя достижение необходимой точности результата, сводят число операций к минимуму.

Рассмотрим, например, умножение положительных n-разрядных правильных десятичных дробей, то есть чисел вида

$$A = 0, a_1 a_2 \ldots a_i \ldots a_n, \qquad (1)$$

где $0 \leqslant a_i \leqslant 9$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Известно, что десятичная дробь (1) является сокращенной записью числа

$$A = \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_i}{10^i} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}.$$

Будем считать дробь (1) приближенным, грамотно округленным числом. Тогда она имеет абсолютную погрешность, не превосходящую $\frac{5}{10^{n+1}}$.

Пусть

$$A = 0,\, a_1\, a_2\, \ldots\, a_n,$$
$$B = 0,\, b_1\, b_2\, \ldots\, b_n$$

— два приближенных числа, а α и β — их соответствующие отклонения от точных чисел, причем одинаково: $|\alpha| \leqslant 0,5 \cdot 10^{-n}$, $|\beta| \leqslant 0,5 \cdot 10^{-n}$. Вычислим абсолютную ошибку произведения:

$$\Delta_{AB} = (A + \alpha)\cdot(B + \beta) - AB = \alpha\cdot B + \beta\cdot A + \alpha\cdot\beta.$$

Здесь $|\alpha\cdot\beta| = |\alpha|\cdot|\beta| \leqslant 0,5 \times 10^{-n}\cdot 0,5\cdot 10^{-n} = 0,25\cdot 10^{-2n}$, то есть этот член по модулю не превосходит четверти последней возможной цифры результата и потому может не приниматься во внимание. Оценим сумму двух средних слагаемых, учитывая, что $A < 1$ и $B < 1$. Получим

$$|\alpha\cdot B + \beta\cdot A| < |0,5\cdot 10^{-n}\cdot 1 + 0,5\cdot 10^{-n}\cdot 1| = 10^{-n}. \qquad (2)$$

Значит, из $2n$ цифр произведения гарантируется верность лишь первых $n-1$ цифр, n-я цифра в силу (2) уже оказывается сомнительной (она может отличаться от верной на ± 1). Верность цифр $(n+1)$-й и далее формула (2) совершенно не гарантирует. Поэтому эти цифры незачем включать в окончательный ответ.

Отсюда следует, что при умножении приближенных чисел школьным способом — «лесенкой влево» — мы половину работы делаем впустую. Спрашивается, а можно ли эту половину работы вообще не делать? Оказывается, можно. Для этого надо использовать сокращенный способ умножения — «лесенкой вправо». Далее в целях наглядности изложения мы ограничимся примером умножения приближенных чисел $0,587 \times 0,736$.

Как известно, умножение десятичных дробей выполняется аналогично умножению целых чисел. Ниже приводится три способа умножения

$$\begin{array}{r} \times\ 0,587 \\ 0,736 \\ \hline 3\,522 \\ 17\,61\ \ \\ 410\,9\ \ \ \ \\ \hline 0,432\,032 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 0,587 \\ 0,736 \\ \hline 4\,109\ \ \ \ \\ +\ \ 1761\ \ \\ 3522 \\ \hline 0,432032 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 0,587 \\ 0,736 \\ \hline 4\,109 \\ 176 \\ 35 \\ \hline 0,4\,320 \end{array}$$

(а) — «лесенкой влево» (школьный); (б) — «лесенкой вправо»; (в) — «сокращенный»

При способе (б), в отличие от способа (а), умножение начинается со старших цифр множимого и множителя; учет единиц переноса от соседней правой цифры множимого (реже — от двух соседних) производится сразу. После небольшой тренировки этот способ становится не труднее способа (а).

Способ (в) представляет собой сокращенную модификацию способа (б), в которой частичные произведения не вычисляются до конца, а сразу округляются. Место округления обеспечивает в окончательном ответе одну лишнюю цифру, которая необходима для правильного округления последней, сомнительной, цифры.

Окончательный ответ нашего примера по всем трем способам его вычисления будет 0,432. Для его получения по способу (в) потребовалось вдвое меньше работы и времени, чем по способам (а) и (б). Указанный прием особенно пропагандировал выдающийся советский математик, инженер и кораблестроитель, академик А. Н. Крылов, чью книгу *) мы рекомендуем нашему читателю.

Последовательные приближения и контроль вычислений

Приближенность исходных данных (ошибка наблюдения и измерения) является не единственной причиной ошибки результата. Другим источником ошибки результата служит приближенность самого процесса вычисления. Причины такого явления коре-

*) А. Н. Крылов, Лекции о приближенных вычислениях, М., ФМ, 1954.

няются или в принципиальной невозможности провести точное вычисление (например, $\sqrt{2}$, $\sin 20^\circ$), или в неудобстве использования точной формы результата (так, точная простая дробь $^1/_7$, как правило, заменяется на приближенную десятичную дробь 0,143). Разработка способов вычислений с наперед заданной сколь угодно большой степенью точности представляет собой важное прикладное направление классической высшей математики. Понятие об этих способах читатель получит, взглянув на последнюю страницу таблиц Брадиса. Там приводятся формулы — так называемые бесконечные ряды,— по которым вычисляются значения синуса, тангенса, логарифма и других табличных функций. Анализ этих формул выявляет основной методический прием — замену вычисления искомой функции вычислением многочлена, то есть другой, более простой функции, значения которой с заданной степенью точности равны значениям искомой функции.

Другим способом проведения вычисления с заданной степенью точности является метод последовательных приближений. Продемонстрируем его на вычислении квадратного корня из числа A.

В качестве нулевого приближения $\sqrt{A}$ возьмем произвольное положительное число x_0.

Рассмотрим на числовой прямой (рис. 2) отрезок, ограниченный точками x_0 и $\frac{A}{x_0}$. Построим второе приближение x_1 как среднее арифметическое x_0 и $\frac{A}{x_0}$:

$$x_1=\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{A}{x_0}\right):$$

Имеем по свойству среднего арифметического $x_0 \leqslant x_1 \leqslant \frac{A}{x_0}$ и по свойству обратных величин $\frac{A}{x_0} \geqslant \geqslant \frac{A}{x_1} \geqslant x_0$. Иными словами, отрезок

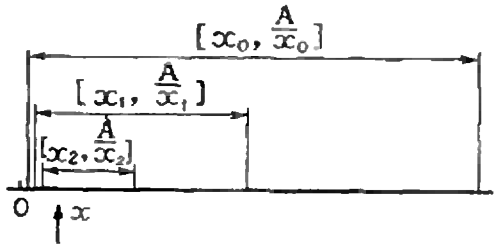


Рис. 2.

$\left[x_1, \frac{A}{x_1}\right]$ целиком расположен внутри отрезка $\left[x_0, \frac{A}{x_0}\right]$, то есть вложен в него. По первому приближению аналогичным образом строим второе, по нему — третье и так далее.

Запишем формулу $(n+1)$-го приближения:

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{A}{x_n}\right) \quad (n=0, 1, \ldots). \quad (3)$$

Отрезки $\left[x_0, \frac{A}{x_0}\right]$, $\left[x_1, \frac{A}{x_1}\right]$, ..., $\left[x_n, \frac{A}{x_n}\right]$, $\left[x_{n+1} \frac{A}{x_{n+1}}\right]$, ... последовательно вложены один в другой, и их длины последовательно уменьшаются не менее чем вдвое; это следует из формул

$$\frac{1}{2}\left(x+\frac{A}{x}\right)-\frac{A}{\frac{1}{2}\left(x+\frac{A}{x}\right)}=$$
$$=\left(\frac{A}{x}-x\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{A-x^2}{A+x^2}$$

и

$$\left|\frac{A-x^2}{A+x^2}\right|<1.$$

Эти отрезки стягиваются к единственной точке x, принадлежащей всем отрезкам. Для вычисления x подставим его в формулу (3): $x= =\frac{1}{2}\cdot\left(x+\frac{A}{x}\right)$, $x=\frac{A}{x}$, $x=\sqrt{A}$.

Точка $x=\sqrt{A}$ принадлежит всем отрезкам, поэтому x_n стремится к $x=\sqrt{A}$, то есть метод последовательных приближений решает поставленную задачу. Остается заметить, что вычисление следует прекращать после того, как x_{n+1} станет равным x_n с заданным количеством десятичных знаков.

Метод последовательных приближений обладает одним большим достоинством: случайная ошибка в промежуточных действиях не повлияет на величину результата, а лишь увеличит время на его получение.

Вообще при проведении вычислений контролю должно быть уделено самое серьезное внимание. Конечно, процесс вычислений можно повторить заново, но это вдвое увеличит общее время работы. В особо ответственных случаях приходится идти и на этот шаг, но возможны и другие методы контроля, учитывающие специфику конкретного расчета. Например, если от одного аргумента x вычисляется $\sin x$ и $\cos x$, то естественно затем подсчитать $\sin^2 x + \cos^2 x$ и сравнить с единицей.

Еще один пример

Особый интерес представляет методика, позволяющая контролировать каждый этап вычислений. Продемонстрируем ее на примере решения системы линейных алгебраических уравнений.

Пусть нам задана система двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 19, \\ 3x + 7y = 23. \end{cases} \tag{4}$$

Запишем ее коэффициенты и свободные члены в виде таблицы:

$$\left|\begin{array}{c|c|c} 5 & 2 & 19 \\ \hline 3 & 7 & 23 \end{array}\right|$$

Пополним эту таблицу *контрольным столбцом*, элементы которого равны сумме элементов соответствующей строки. Получим расширенную таблицу:

$$\left|\begin{array}{c|c|c||c} 5 & 2 & 19 & 26 \\ \hline 3 & 7 & 23 & 33 \end{array}\right| \tag{5}$$

В дальнейшем будем рассматривать таблицу (5) как изображение двух систем с одинаковыми коэффициентами и разными свободными членами: системы (4) и системы

$$\begin{cases} 5\tilde{x} + 2\tilde{y} = 26 \\ 3\tilde{x} + 7\tilde{y} = 33. \end{cases} \tag{6}$$

Решая системы (4) и (6) методом Гаусса, поделим все элементы первой строки на ее первый член. Получим таблицу

$$\left|\begin{array}{c|c|c||c} 1 & 0,4 & 3,8 & 5,2 \\ \hline 3 & 7 & 23 & 33 \end{array}\right| \tag{7}$$

Контроль состоит в том, что на любом этапе сумма первых трех чисел любой строки должна равняться четвертому числу; здесь это выполняется.

Далее умножим все элементы первой строки на первый член второй строки. Получим

$$\left|\begin{array}{c|c|c||c} 3 & 1,2 & 11,4 & 15,6 \\ \hline 3 & 7 & 23 & 33 \end{array}\right|$$

Вычтем почленно из 2-й строки 1-ю:

$$\left|\begin{array}{c|c|c||c} 3 & 1,2 & 11,4 & 15,6 \\ \hline 0 & 5,8 & 11,6 & 17,4 \end{array}\right| \tag{8}$$

Из второй строки (8) получаем

$$y = \frac{11,6}{5,8} = 2, \quad \tilde{y} = \frac{17,4}{5,8} = 3.$$

Наконец, из 1-й строки таблицы (7) находим

$$x = 3,8 - 2\cdot 0,4 = 3,$$
$$\tilde{x} = 5,2 - 3\cdot 0,4 = 4.$$

Искомое решение: $x = 3$, $y = 2$; решение системы (6): $\tilde{x} = 4$, $\tilde{y} = 3$. Имеют место равенства

$$\tilde{x} = x + 1, \quad \tilde{y} = y + 1, \tag{9}$$

значит, система решена верно. Отметим, что если в окончательном ответе равенства (9) не выполняются, то или при счете имели место слишком грубые округления, или была где-то допущена ошибка. Наличие контрольного столбца на каждом этапе вычислений позволяет быстро найти место ошибки или неточности.

Равенства (9) являются обоснованием способа контроля. Если мы возьмем систему (6), решениями которой являются решения системы (4), увеличенные на единицу, $\tilde{x}=x+1$, $\tilde{y}=y+1$, то свободные члены системы (6) будут равны сумме коэффициентов строк системы (4). Например, для первой строки системы (4)

$$5(\tilde{x}-1)+2(\tilde{y}-1)=19,$$
$$5\tilde{x}-5+2\tilde{y}-2=19,$$
$$5\tilde{x}+2\tilde{y}=19+5+2=26.$$

Указанное свойство легко проверяется и в общем случае. А поскольку при решении мы переходим к эквивалентным системам, то и в них суммы коэффициентов должны быть равны числам в контрольном столбце.

Ошибки метода

Существует еще одна группа причин, приводящая к ошибке результата. Она носит название «ошибка метода». Проявляется она, например, в том случае, когда вместо точной системы уравнений рассматривается система более простых уравнений, приближенно описывающих тот же процесс. Причины такой замены бывают самые разнообразные: отсутствие точной системы уравнений, невозможность подготовить исходные данные для точной системы, невозможность или большая сложность точно решить имеющуюся точную систему и другие. В качестве примера рассмотрим задачу из учебника физики.

Самолет летит горизонтально на высоте H со скоростью v. На каком горизонтальном расстоянии от объекта он должен сбросить бомбу для прямого попадания в этот объект?

При упрощающем предположении — отсутствии сопротивления воздуха — задача легко решается.

Искомое расстояние S получается из формулы $S=v\cdot t$ при $\frac{gt^2}{2}=H$, отсюда $S=v\cdot\sqrt{\frac{2H}{g}}$.

Согласно этому предположению траектория бомбы представляет собой параболу (синяя кривая на рисунке 3). Но в действительности сопротивление воздуха делает траекторию более крутой. Она носит название «баллистической кривой» (красная кривая на рисунке 3) и строится на основе опытных данных и дополнительных теоретических предположений. Баллистическая кривая заметно уменьшает «ошибку метода», но в силу своего экспериментального характера несколько увеличивает «ошибку наблюдения» и «ошибку округления».

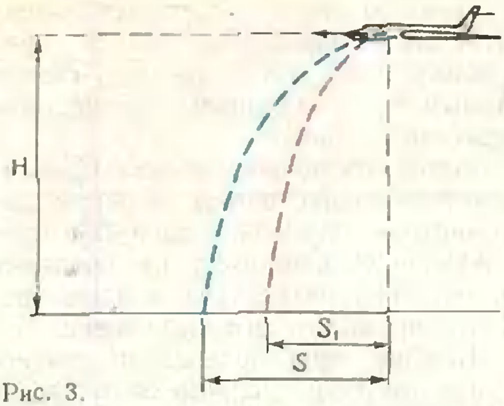


Рис. 3.

Теперь можно подвести некоторые итоги. Приведенные примеры и рассуждения показывают, что процесс численного расчета любой практической задачи должен быть тщательно спланирован.

Этапами на этом пути служат:

1) выбор метода решения с оценкой ошибки, которую он дает;

2) оценка точности исходных данных;

3) выбор схемы счета с оценкой точности округления промежуточных величин и разумной организацией контроля.

Существенное влияние на дальнейшее развитие методов вычислений оказывает вычислительная техника, особенно электронные цифровые вычислительные машины (ЭЦВМ), которые позволяют выполнять расчеты, состоящие из миллиардов арифметических действий. Это обстоятельство требует повышенного внимания к накоплению ошибок и выбору схем счета, менее «чувствительных» к ним.

Гравитационная масса

Д. Бородин

Физики имеют дело с двумя массами — инертной и гравитационной. Первая входит в законы движения Ньютона, вторая — в закон всемирного тяготения.

Согласно закону всемирного тяготения величина силы притяжения между двумя материальными точками равна

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (1)$$

где γ — гравитационная постоянная *), m_1 и m_2 — массы материальных точек, r — расстояние между ними. Массы m_1 и m_2, входящие в эту формулу,— те же самые величины, которые входят во второй закон Ньютона

$$F = ma, \qquad (2)$$

связывающий силу и ускорение тела.

Роль массы в формулах (1) и (2) совершенно различна. В выражении (2) она определяет инертность материальной точки, а в выражении (1) характеризует поле тяжести, которое создает материальная точка, и силу, с которой это поле действует на другую материальную точку. Заметим, что в силу третьего закона Ньютона нам все равно, какую массу (m_1 или m_2) считать создающей поле, а какую — находящейся в этом поле: действие равно противодействию. То, что масса, входящая в закон тяготения (1),— ее называют гравитационной (или тяготеющей) массой — оказывается той же, что и инертная масса, входящая в формулу (2), есть великий закон природы.

Его называют *принципом эквивалентности гравитационной и инертной масс*.

В обыденной жизни мы к этому принципу настолько привыкли, что не обращаем на него внимания. А между тем мы его используем, когда определяем массу тела, взвешивая его на весах; производя эту операцию, мы, не задумываясь о физике, молчаливо предполагаем, что сила притяжения к земле пропорциональна инертной массе этого тела. Мы сказали «пропорциональна». На самом деле на практике обе массы — и гравитационная, и инертная — измеряются в одних и тех же единицах и численно равны. Поэтому мы никогда и не думаем, какая именно масса фигурирует в том или ином случае. Единицу измерения массы принято выбирать так, чтобы во втором законе Ньютона не было никаких коэффициентов; тогда в законе всемирного тяготения появляется численный коэффициент γ. Можно, конечно, ввести новую единицу для гравитационной массы так, что $m' = \sqrt{\gamma} m$; тогда и в формуле (1) исчезает коэффициент γ, но появляется m'. Таким образом можно подчеркнуть физическое различие инертной и гравитационной масс; однако на практике это было бы очень неудобно.

*) По последним измерениям гравитационная постоянная (постоянная тяготения)

$$\gamma = 6{,}6732\,(31) \cdot 10^{-11}\ н м^2/кг^2$$

(скобки означают возможную неточность в двух последних знаках).

Принцип эквивалентности

С древних времен в физике господствовал авторитет Аристотеля*), считавшего, что скорость тела увеличивается только при увеличении силы. И лишь Галилей (1564—1642) понял, что если на тело действует постоянная сила, оно движется с постоянным ускорением. Если же на тело никакие силы не действуют, то оно движется с постоянной скоростью. Галилей, размышляя о том, как падают тела на землю, создал теорию этого явления.

Рассказывают, что Галилей для проверки своей теории бросал со знаменитой падающей башни в Пизе шарики, сделанные из разных материалов. Никто не знает, было ли это действительно так, однако Галилей на самом деле открыл важный закон природы: все тела, независимо от их массы, падают на землю с одинаковым ускорением. В этом и заключается суть теории свободного падения. Кстати, и само понятие ускорения — «скорость изменения скорости» — было впервые введено именно им. Но зная, что причиной ускорения падающего тела является «тяжесть», Галилей не знал, что источник ее — Земля. Более того, он даже не мог себе представить, что между телами, разделенными расстояниями, может вообще существовать какое-то взаимодействие. Действие на расстоянии считалось в то время совершенно невозможным. Когда Галилей узнал, что Кеплер объяснил приливы и отливы в океанах действием Луны, он отверг такие измышления как ненаучные. Идея Кеплера стала достоянием физики, когда Ньютон (1642—1726) открыл закон всемирного тяготения.

Пусть, например, тело массы m движется в гравитационном поле другого тела с массой M. Из второго закона Ньютона

$$F = ma$$

и закона всемирного тяготения

$$F = \gamma \frac{mM}{r^2}$$

следует, что ускорение в поле тяжести

$$a = \gamma \frac{M}{r^2}$$

не зависит от массы движущегося тела (но зависит, конечно, от массы тела — источника поля).

Вывод этот настолько прост, что в нем долгое время не видели почти ничего существенного. Важность закона эквивалентности была по-настоящему осознана только Эйнштейном (1889—1955).

Таким образом, ускорение свободного падения оказывается одинаковым для любых тел. Поэтому, установив опытным путем равенство ускорений, можно было бы вывести из этого факта и принцип эквивалентности. На самом деле точно измерить ускорение падающего тела трудно, и приходится придумывать хитрые опыты, чтобы доказать этот принцип с достаточной точностью. Об этих опытах мы и расскажем в дальнейшем. Однако сначала рассмотрим пример другого поля — электростатического, в котором нет ничего подобного принципу эквивалентности.

Поле и заряд

Закон Кулона для силы взаимодействия зарядов

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e_1 e_2}{r^2}$$

вполне аналогичен закону всемирного тяготения. Однако ускорение заряда в электрическом поле зависит от величины заряда. Таким образом, мы уже не можем утверждать, что все заряды движутся в электрическом поле с одинаковым ускорением, как то было с телами в гравитационном

*) Аристотель жил с 384 по 322 год до нашей эры. Он был наставником греческого полководца Александра Македонского. Авторитет Аристотеля был настолько велик, что его утверждения перестали считаться догмой лишь через восемнадцать столетий после его смерти.

поле. Если обозначить напряженность поля через $\mathbf{E}$, то сила, действующая на заряд e, будет равна $e\mathbf{E}$. Уравнение Ньютона при этом выглядит так:

$$m\mathbf{a} = e\mathbf{E},$$

а ускорение

$$\mathbf{a} = \frac{e}{m}\mathbf{E},$$

как мы видим, зависит от отношения заряда к массе, то есть от величины, различной для разных частиц.

Здесь надо подчеркнуть, что электрический заряд e определяет силу, с которой поле действует на частицу, а инертная масса m — ускорение, возникающее под действием этой силы. В гравитационном поле сила определяется той же самой инертной массой, которая определяет и ускорение. Иначе говоря, роль гравитационного «заряда» (то есть гравитационной массы по нашей терминологии) играет все та же инертная масса, и отношение обеих масс (играющее роль отношения e/m) в случае гравитационного поля равно единице. Это и есть принцип эквивалентности.

Вращающаяся Земля

Рассмотрим тело, находящееся во вращающейся системе координат, например, на Земле. На него (с точки зрения земного наблюдателя) действует центробежная сила инерции *), направленная перпендикулярно оси вращения Земли. Величина центробежной силы инерции равна

$$F_{цб} = m\omega^2 r.$$

(m — инертная масса, r — расстояние от оси вращения, ω — угловая скорость).

Так как эта сила пропорциональна инертной массе, то в поле центробежных сил также действует закон Галилея: ускорение тела

$$a = \omega^2 r$$

не зависит от его массы. Например, на экваторе это ускорение равно 0,02 *м/с*^{2}.

Для того чтобы понять, как возникает центробежная сила инерции, рассмотрим простую задачу о грузике, подвешенном на нитке. Наблюдатель вне Земли будет видеть, что грузик и подвес вращаются вместе с Землей. Грузик имеет ускорение $\omega^2\rho$ (ρ — расстояние до оси Земли); значит, на него действует сила $F_{цс} = m_и\omega^2\rho$, направленная к оси вращения ($m_и$ — инертная масса). Эта сила создается притяжением к центру Земли $F_T = m_г g$ ($m_г$ — гравитационная масса) и натяжением нити $\mathbf{F}_г + \mathbf{F}_н = \mathbf{F}_{цс}$ (рис. 1, *а*).

Если мы теперь перепишем баланс сил так:

$$\mathbf{F}_г + \mathbf{F}_н - \mathbf{F}_{цс} = 0,$$

то можно сказать, что груз находится в равновесии (как это видит наблюдатель на Земле) под действием трех сил. Третья сила, $-\mathbf{F}_{цс}$, направленная в сторону от оси вращения, и есть центробежная сила инерции $\mathbf{F}_{цб}$ (рис. 1, *б*).

Опыты Этвеша

Вопрос о проверке принципа эквивалентности занимал еще Ньютона. Им же был проделан и первый опыт. Ньютон наблюдал качание маятников, сделанных из разных материалов (рис. 2). Из принципа эквивалентности следует, что период колебаний

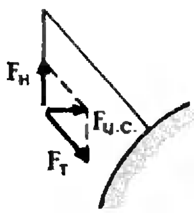


Рис. 1,*а*.

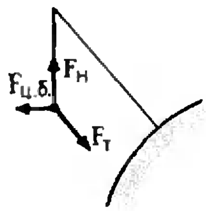


Рис. 1,*б*.

*) Это та самая сила, которая прижимает пилота к креслу на крутом вираже. Силы такого типа, появляющиеся при переходе в неинерциальную систему координат, называются инерциальными.

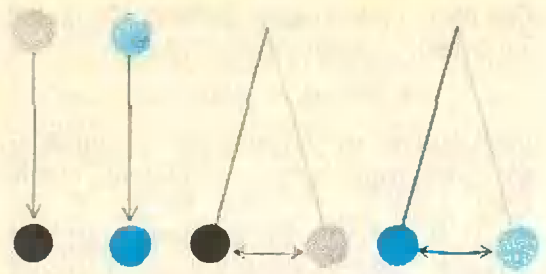


Рис. 2. Опыт Ньютона. Если $m_г \neq m_и$, то периоды колебаний этих маятников будут разными.

маятника определенной длины не должен зависеть от материала, из которого сделан маятник. Напротив, если принцип эквивалентности неверен, то период должен зависеть от отношения гравитационной массы к массе инертной. Ньютон показал, что период маятника не изменяется с точностью до 10^{-3}, то есть $\frac{\Delta m}{m} < 0{,}001$ (здесь Δm — разница между гравитационной и инертной массами).

Аналогичные опыты были повторены Бесселем, уменьшившим ошибку до $^1/_{6000}$.

В 1890 году новые опыты провел венгерский физик Этвеш.

Идея Этвеша состояла в том, что если подвесить тело на крутильных весах, то на него будут действовать две силы: сила притяжения к Земле, пропорциональная гравитационной массе, и центробежная сила инерции, пропорциональная инертной массе.

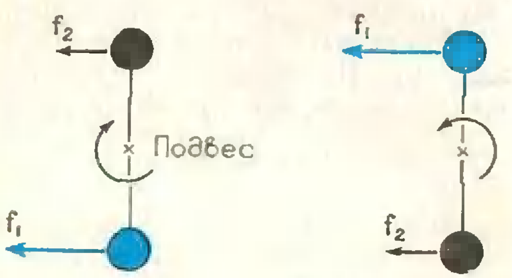


Рис. 3. Опыт Этвеша. На рисунке показаны проекции сил, действующих на коромысло крутильных весов.

Если $m_г \neq m_и$, то силы f_1 и f_2 окажутся разными, и нить весов закрутится. Если шарики поменять местами, повернув весы на 180°, то нить закрутится в другую сторону.

Для того чтобы сравнить гравитационные массы двух тел, сделанных из разных материалов, были изготовлены образцы с одинаковыми инертными массами. Образцы уравновешивались на коромысле крутильных весов. Предположим теперь для простоты, что коромысло расположено по географической параллели (рис. 3). Если гравитационные массы образцов не равны их инертным массам, то углы отклонения образцов от вертикали будут разными, так как результирующие силы будут составлять разные углы с вертикалью. Спроектируем эти силы на горизонтальную плоскость: мы обнаружим, что проекции сил не равны друг другу. Это значит, что возникнет момент сил (равный произведению разности сил $f_1 - f_2$ на половину длины коромысла), который будет закручивать нить. Этот момент можно определить, если зафиксировать два положения коромысла, расположив грузы вдоль параллели с запада на восток и с востока на запад. Таким образом можно проверить, изменится направление закручивания нити или нет.

Этвеш производил опыты с образцами, сделанными из разных материалов (меди, воды и даже сала), сравнивая их с образцами из платины, и увидел, что нить не закручивается. Он пришел к выводу, что гравитационная масса равна инертной массе по крайней мере с точностью до $5 \cdot 10^{-9}$.

Сейчас непонятно, как Этвеш достиг такой точности; для этого ему надо было учесть даже такие поправки, как гравитационное поле своего собственного тела! Вообще, надо сказать, что одно из самых тонких рассуждений в физике — это рассуждение об ошибках такого опыта, в котором искомый эффект на самом деле не был обнаружен *).

*) Подробное описание опытов Этвеша было опубликовано лишь в 1922 году его учениками после смерти автора. Опыт в то время не был никем повторен, и многие детали опыта, в частности, вопрос о его точности остались не до конца выясненными.

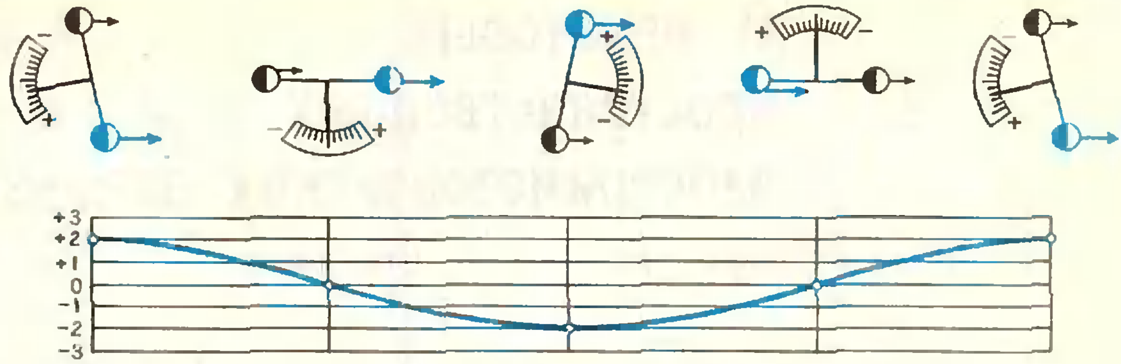


Рис. 4. Опыт Дике. На рисунке схематически показано положение стрелки, регистрирующей закручивание нити крутильных весов в разное время суток, если $m_г \neq m_и$. Внизу приведен гипотетический график показаний стрелки в таком опыте.

Опыты Дике и Брагинского

Более точные эксперименты были проведены только в 1962 году. Американский физик Дике поставил новые опыты, в которых гравитационной силой, действующей на коромысло крутильных весов, была сила притяжения грузиков не Землей, а Солнцем. Если коромысло не трогать, не поворачивать его на 180°, как это делалось в опытах Этвеша, то направление закручивания нити крутильных весов, казалось бы, будет оставаться неизменным. Дике, однако, заметил, что если принцип эквивалентности несправедлив, то коромысло весов должно медленно поворачиваться из-за действия на образцы силы притяжения со стороны Солнца (рис. 4). Ориентация коромысла относительно Солнца изменяется со временем из-за вращения Земли, и экспериментатор должен был бы наблюдать крутильные колебания нити с периодом в 24 часа. Таких колебаний обнаружено не было. Преимуществом опытов Дике по сравнению с опытами Этвеша было то, что в новых опытах экспериментатор не должен был сам изменять положение коромысла; это избавляло его от опасности дополнительных ошибок.

Анализ показал, что в опытах Дике ошибка была уменьшена до 10^{-10}.

Результат Дике был улучшен советским физиком В. Б. Брагинским. Брагинский использовал идею Дике, но понизил возможную относительную ошибку до 10^{-12}.

Вряд ли можно ожидать, что в ближайшее время кто-либо займется новыми опытами: слишком много труда надо на это затратить, и слишком малы шансы, что принцип эквивалентности может оказаться несправедливым при измерении с еще большей точностью.

Ошибка Галилея

Галилей рассуждал так: Возьмем два камня, большой и маленький. Предположим, что большой камень падает быстрее маленького. Свяжем их вместе и бросим эти связанные камни с высоты вниз. Если большой камень падает быстрее маленького, то маленький должен тормозить движение большого. Но тогда связанные вместе камни падали бы медленнее одного большого, но быстрее маленького. С другой стороны, масса связанных камней больше массы каждого из них, значит, они должны по условию падать быстрее. Получается видимое противоречие. Положение не спасает и противоестественное предположение, что большой камень падает медленнее. Казалось бы, отсюда следует закон равенства ускорений всех тел.

На самом деле это не так. Ошибка рассуждений — в неявном предположении, что ускорение тел зависит только от одной физической величины — «тяжести» (то есть от гравитационной массы). Если бы масс было две (гравитационная и не равная ей инертная), то подобное «доказательство» провести было бы нельзя.

О некоторых пространственных изопериметрических задачах

М. Г. Крейн, А. А. Нудельман

Введение

Прежде чем приступить к предмету настоящей статьи, предлагаем читателю самостоятельно доказать (или вспомнить) следующие хорошо известные предложения.

Предложение 1.

Среди всех параллелограммов с заданным периметром наибольшую площадь имеет квадрат.

Предложение 2.

Среди всех параллелограммов с заданными периметром и длиной одной из диагоналей наибольшую площадь имеет ромб.

Очевидно, что предложение 2 эквивалентно следующему:

Предложение 2′.

Среди всех треугольников с заданными периметром и длиной одной из сторон наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.

Предложение 3.

Среди всех треугольников с заданным периметром наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

Предложения 1—3 относятся к числу так называемых *изопериметрических задач*: среди фигур определенного вида с заданным периметром требуется найти фигуру наибольшей площади. Отметим здесь, что предложения 1 и 3 являются частными случаями более общего утверждения: среди всех n-угольников с заданным периметром наибольшую площадь имеет правильный n-угольник. Из него предельным переходом легко получить, что среди всех фигур с заданным периметром (на вид фигур не накладывается ограничений) наибольшую площадь имеет круг *).

Постановка задач

Рассмотрим теперь пространственные аналоги предложений 1—3; в них параллелограммы заменяются параллелепипедами, треугольники — тетраэдрами (треугольными пирамидами), а площади — объемами.

З а д а ч а 1. *Среди всех параллелепипедов с заданной суммой длин ребер найти параллелепипед, имеющий наибольший объем.*

З а д а ч а 2. *Среди всех параллелепипедов с заданными суммой длин ребер и длиной одной из диагоналей найти параллелепипед, имеющий наибольший объем.*

Прежде чем переформулировать задачу 2 так, чтобы получить аналог предложения 2′, введем некоторые определения.

Замкнутую ломаную линию, состоящую из четырех звеньев, вершины которой не лежат в одной плоскости, назовем *пространственным четырехугольником*. О тетраэдре, вершины которого совпадают с вершинами пространственного четырехугольника, будем говорить, что он *натянут* на этот четырехугольник (рис. 1).

Легко видеть, что объем тетраэдра, натянутого на пространственный

*) Изящное доказательство этого утверждения, не использующее предельного перехода, читатель найдет в книге: Г. Р а д е м а х е р и О. Т е п л и ц. Числа и фигуры, М., Физматгиз, 1962.

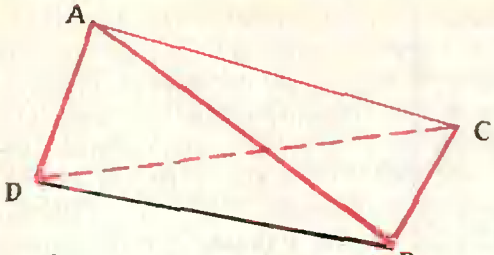


Рис. 1.

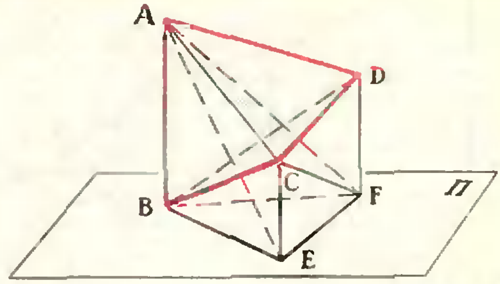


Рис. 3.

четырехугольник, сторонами которого являются диагональ параллелепипеда и три его последовательно соединенных ребра (рис. 2), составляет одну шестую часть объема параллелепипеда. Поэтому задача 2 эквивалентна следующей задаче:

Задача 2′. *Среди всех пространственных четырехугольников с заданными периметром 2p и длиной одной из сторон h найти такой, что натянутый на него тетраэдр имеет наибольший объем.*

После решения этой задачи легко решается

Задача 3. *Среди всех пространственных четырехугольников с заданным периметром 2p найти такой, что натянутый на него тетраэдр имеет наибольший объем.*

Решения задач

Решение задачи 1

Так как среди параллелограммов с фиксированными длинами сторон наибольшую площадь имеет прямоугольник, а среди параллелепипедов с фиксированными длинами ребер наибольший объем имеет прямоугольный параллелепипед, то при решении задачи 1 достаточно рассматривать прямоугольные параллелепипеды.

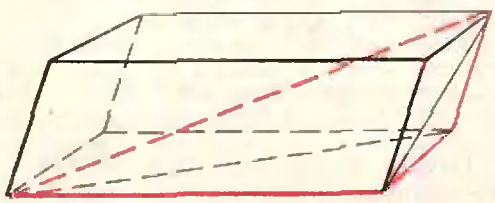


Рис. 2.

Если длины ребер прямоугольного параллелепипеда обозначить через a_1, a_2, a_3, то известное неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\sqrt[3]{a_1a_2a_3} \leq \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)$$

(где знак равенства имеет место лишь в случае $a_1 = a_2 = a_3$) приводит к следующему результату:

Теорема 1. *Среди всех параллелепипедов с заданной суммой длин ребер наибольший объем имеет куб.*

Решение задачи 2′

Приступим к рассмотрению задачи 2′. При ее решении будет использовано следующее вспомогательное предложение.

Обозначим через П плоскость, перпендикулярную стороне AB пространственного четырехугольника $ABCD$ (рис. 3). Спроектировав $ABCD$ на П, получим треугольник BEF.

Лемма 1. *Объем V тетраэдра, натянутого на $ABCD$, вычисляется по формуле*

$$V = \frac{1}{3}hS, \qquad (1)$$

где h — длина стороны AB, S — площадь треугольника BEF.

Для доказательства достаточно заметить, что тетраэдры $ABCD$ и $ABEF$ равновелики, так как каждый из них равновелик тетраэдру $ABCF$.

Формула (1) сразу подсказывает путь решения задачи 2′: нужно длины и положения сторон BC, CD и

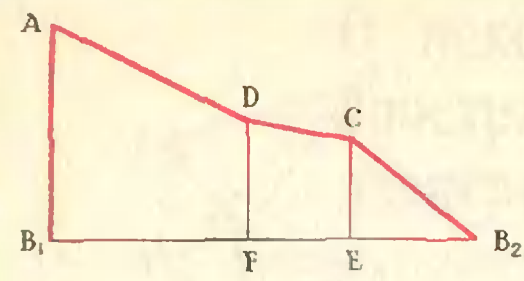


Рис. 4.

AD (рис. 3) выбрать так, чтобы площадь треугольника BEF оказалась наибольшей из возможных.

Чтобы добиться этого, позаботимся сначала о том, чтобы его периметр был наибольшим. Развернем на плоскость грани $ABFD$, $FDCE$, CEB, проектирующие четырехугольник $ABCD$ на плоскость П. В получившейся плоской фигуре (рис. 4) длина стороны B_1B_2 равна периметру треугольника BFE, откуда ясно, что этот периметр будет наибольшим в том случае, когда отрезки AD, DC, CB образуют один и тот же угол $\alpha = \arccos \frac{h}{2p-h}$ со стороной AB (рис. 5). Таким образом, пространственный четырехугольник со стороной $AB = h$ и периметром $2p$, для которого треугольник BEF имеет наибольший периметр, можно получить в результате следующего построения: прямоугольник со стороной $AB_1 = h$ и диагональю $AB_2 = 2p - h$ сворачивается в треугольную призму так, что точки B_1 и B_2 совпадают, а ее боковым ребром служит отрезок AB_1. При этом линия B_1ADCB_2 превратится в искомый пространственный четырехугольник.

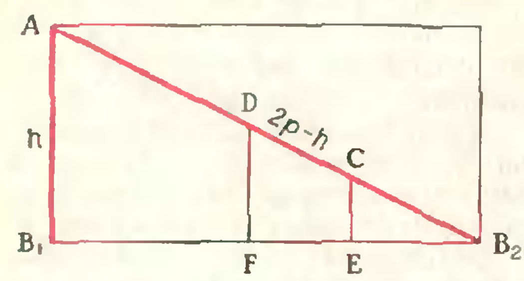


Рис. 5.

Таким образом, наша задача свелась к изопериметрической задаче для треугольника BEF. Как мы знаем, при заданном периметре площадь этого треугольника максимальна, когда $BF = FE = EB$, вследствие чего у четырехугольника $ABCD$, являющегося решением задачи 2′, стороны AD, DC и CB равны. Этими условиями и тем, что AD, DC и CB образуют один и тот же угол с AB, четырехугольник $ABCD$ определяется однозначно.

Итак, доказана

Теорема 2. *Среди всех тетраэдров, натянутых на пространственные четырехугольники $ABCD$ с заданными периметром $2p$ и длиной h стороны AB, наибольший объем имеет тетраэдр, натянутый на четырехугольник, стороны которого AD, DC и CB имеют равные длины и образуют равные углы со стороной AB.*

Одновременно получен способ построения экстремального четырехугольника: для этого нужно прямоугольник, у которого одна сторона равна h, а диагональ равна $2p - h$, свернуть в правильную треугольную призму.

Решение задачи 3

Подсчитаем максимальный объем, о котором идет речь в теореме 2. Из рисунка 5 мы видим, что периметр треугольника BFE равен $\sqrt{(2p-h)^2 - h^2} = 2\sqrt{p(p-h)}$, а значит, его наибольшая площадь равна

$$\left[\frac{2\sqrt{p(p-h)}}{3}\right]^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{p(p-h)}{3\sqrt{3}};$$

наконец, наибольший объем натянутого тетраэдра, в соответствии с формулой (1), равен

$$V = \frac{1}{3} h \frac{p(p-h)}{3\sqrt{3}} = \frac{p}{9\sqrt{3}} h(p-h). \qquad (2)$$

Теперь легко решается задача 3. Она отличается от задачи 2′ тем, что в ней задается *только периметр* четырехугольника.

Очевидно, что для ее решения достаточно в предыдущей задаче задать такое значение h, при котором правая часть формулы (2) принимает наибольшее значение. Это значение h находится с помощью неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$h(p-h) \leqslant \left[\frac{h+(p-h)}{2}\right]^2 = \frac{p^2}{4};$$

оно равно $\frac{p}{2}$, так как $h = p - h$ именно при $h = \frac{p}{2}$. Отсюда следует решение задачи 3:

Теорема 3. *Среди всех тетраэдров, натянутых на пространственные четырехугольники с заданным периметром, наибольший объем имеет тетраэдр, натянутый на четырехугольник, у которого все стороны равны и равны углы, образованные любой парой сторон.*

Действительно, если $h = \frac{p}{2}$, то длина каждой из трех остальных сторон равна $\frac{2p-h}{3} = \frac{p}{2}$; равенство углов можно получить непосредственным вычислением (так как $h = \frac{p}{2}$, то все углы равны $\arccos {}^1/_3$), однако проще заметить, что в рассматриваемом четырехугольнике все стороны равноправны.

Средствами, выходящими за рамки элементарной математики, можно доказать, что параллелепипед, дающий решение задачи 2, дает также решение следующей задачи: *при тех же условиях найти параллелепипед с наибольшей полной поверхностью.*

Некоторые обобщения

Формула (1) может быть обобщена на тела более сложной формы, чем тетраэдр, и позволяет решить для таких тел задачи, подобные задачам 2′ и 3, аналогичным путем: сведением пространственной изопериметрической задачи к плоской изопериметрической задаче.

Пусть задана некоторая n-звенная пространственная ломаная $A_0 A_1 \ldots A_n$. Будем говорить, что она является *простым каркасом*, если всякая плоскость, проходящая через ее концы A_0 и A_n, имеет с ломаной $A_1 A_2 \ldots A_{n-1}$ не более одной общей точки.

О многограннике, гранями которого служат треугольники $A_0A_1A_2$, $A_0A_2A_3$, ..., $A_0A_{n-1}A_n$ и треугольники $A_nA_0A_1$, $A_nA_1A_2$, ..., $A_nA_{n-2}A_{n-1}$, будем говорить, что он *натянут* на данный простой каркас (рис. 6) (указанные грани образуют его «обшивку»).

Так как многогранник, натянутый на простой каркас, можно составить из тетраэдров $A_0A_1A_2A_n$, $A_0A_2A_3A_n$, ..., $A_0A_{n-2}A_{n-1}A_n$, к каждому из которых применима лемма 1, то верна

Лемма 2. *Объем V многогранника, натянутого на простой каркас, вычисляется по формуле*

$$V = \frac{1}{3} hS,$$

где h — расстояние между концами A_0 и A_n, S — площадь многоугольника $A'_0A'_1 \ldots A'_{n-1}A'_n (A'_n = A'_0)$, являющегося проекцией каркаса на плоскость П, перпендикулярную прямой A_0A_n.

Используя тот же прием, что при доказательстве теоремы 2, читатель легко докажет, опираясь на решение изопериметрической задачи для n-угольников, следующую теорему:

Теорема 4. *Среди всех многогранников, натянутых на простые n-звенные каркасы $A_0A_1 \ldots A_n$ с данным периметром L и с данным расстоянием h между концами, наибольший объем имеет многогранник, натянутый на каркас, расположенный на боковых гранях правильной n-угольной призмы, у которой отрезок A_0A_n служит ребром, а основание имеет периметр $\sqrt{L^2-h^2}$; при этом стороны каркаса образуют с A_0A_n равные углы $\alpha = \arccos \frac{h}{L}$.*

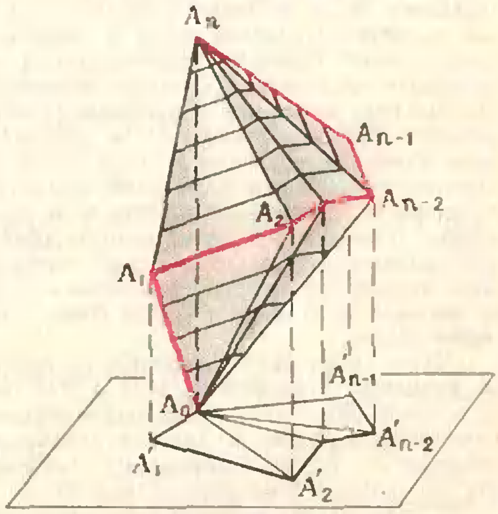


Рис. 6.

Таким образом, наибольший объем равен

$$\frac{1}{12}\,h\,(L^2-h^2)\,\frac{1}{n}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{n}\,.$$

Если же не фиксировать расстояние между концами каркаса, то из теоремы 4 немедленно следует

Теорема 5. *Среди всех многогранников, натянутых на простые n-звенные каркасы данной длины L, наибольший объем имеет многогранник, натянутый на каркас, расположенный на боковых гранях правильной n-угольной призмы с высотой* $\frac{L}{\sqrt{3}}$ *и периметром основания* $L\sqrt{\frac{2}{3}}$, *причем стороны каркаса образуют с высотой призмы равные углы* $\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. *Этот наибольший объем равен*

$$\frac{1}{18\sqrt{3}}L^3\cdot\frac{1}{n}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{n}\,.$$

Известно, что среди n-угольников с заданными длинами сторон наибольшую площадь имеет тот, который можно вписать в окружность. Используя этот факт, читатель сможет доказать, что среди всех многогранников, натянутых на простые n-звенные каркасы с данными длинами звеньев $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и расстоянием h между концами, наибольший объем имеет многогранник, натянутый на каркас, расположенный на боковых гранях прямой призмы с высотой h, сторонами основания $b_k = a_k\frac{\sqrt{L^2-h^2}}{L}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, где $L=a_1+a_2+\ldots+a_n$, причем основание призмы можно вписать в окружность.

Откажемся теперь от требования, чтобы каркас был непременно составлен из прямолинейных отрезков: будем рассматривать «гладкие» пространственные кривые. Кривая называется гладкой, если в каждой ее точке можно провести касательную и направление касательной «плавно» изменяется при малых изменениях положения точки касания. Таким образом, мы не рассматриваем кривых с «изломами», хотя ценой некоторого усложнения изложения можно было бы распространить результаты и на такие кривые. Гладкую пространственную кривую AB назовем *простым гладким каркасом*, если всякая плоскость, проходящая через ее концы A и B, имеет с ней не более одной общей точки.

Пусть точка M перемещается по простому каркасу. Тогда отрезки AM и BM опишут некоторые поверхности, составляющие «обшивку» каркаса; о теле, ограниченном «обшивкой», будем по-прежнему говорить, что оно натянуто на каркас (рис. 7).

С помощью предельного перехода можно показать, что объем тела, натянутого на гладкий простой каркас, также вычисля-

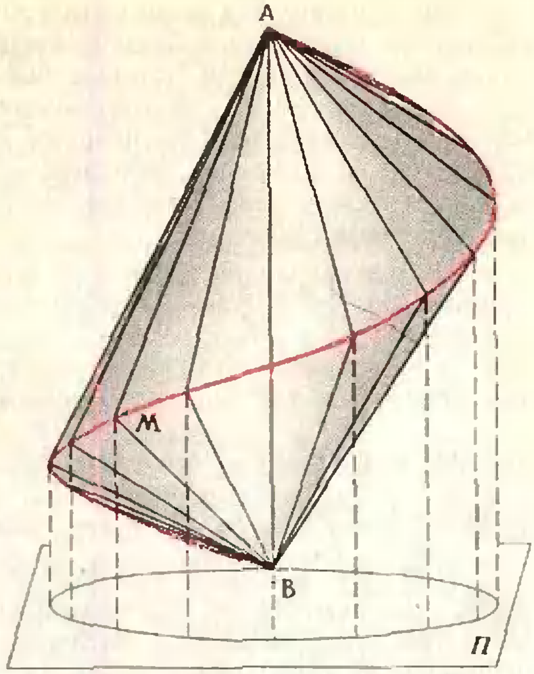


Рис. 7.

ется по формуле (1), в которой S теперь обозначает площадь фигуры, ограниченной проекцией каркаса на плоскость П. Характер предельного перехода интуитивно ясен: нужно заменить гладкий каркас «близкими» к нему ломанными; однако проведение точных рассуждений — дело довольно скрупулезное.

Используя изопериметрическое свойство окружности, можно, как и выше, убедиться в справедливости следующих теорем:

Теорема 6. *Среди всех тел, натянутых на простые гладкие каркасы с данной длиной L и с данным расстоянием h между концами, наибольший объем имеет тело, натянутое на каркас, представляющий собой один виток винтовой линии с шагом h, расположенный на круговой цилиндрической поверхности с радиусом основания* $\frac{\sqrt{L^2-h^2}}{2\pi}$ (рис. 7).

Теорема 7. *Среди всех тел, натянутых на простые гладкие каркасы с данной длиной L, наибольший объем имеет тело, натянутое на каркас, представляющий собой один виток винтовой линии с шагом* $h=\frac{L}{\sqrt{3}}$, *расположенный на круговой цилиндрической поверхности с радиусом основания* $\frac{L}{\pi\sqrt{6}}$.

Числа C_n^k, многочлены, последовательности

(несколько подходов к одной задаче)

В. Н. Вагутен

Напомним одну задачу из «Задачника «Кванта», элементарное решение которой было напечатано в «Кванте» № 12 за 1972 год.

М138. *Докажите, что если m и n—целые числа и $1<m<n$, то*

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^m C^k = 0,$$

где C^k — биномиальные коэффициенты.

Разные доказательства этих тождеств послужат нам удачным поводом для того, чтобы познакомить читателя с некоторыми важными математическими понятиями и фактами, не входящими в школьную программу (конечные разности, интерполяционная формула для многочленов, производная многочлена, степенной ряд экспоненты). Вслед за определениями и теоремами в каждом параграфе читатель встретит слова «вернемся теперь к нашей задаче», а за ними — новое решение задачи **М138**.

Доказательства теорем можно пропустить, но лучше их разобрать, хотя сделать это нелегко, так как они написаны очень коротко.

Введение. Биномиальные коэффициенты и формулировка задачи

Мы перечислим несколько свойств чисел C_n^k. Каждое из свойств **0.1**—**0.3** можно принять за определение этих чисел.

0.1. C_n^k — коэффициенты многочлена

$$(a+x)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}x + \ldots + C_n^k a^{n-k}x^k + \ldots + C_n^n x^n. \qquad (1)$$

0.2. $C_n^0 = 1$; $C_n^n = 1$; для каждого $k = 1, 2, \ldots, n-1$

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k. \qquad (2)$$

0.3. Для всех n и k $(0 \leqslant k \leqslant n)$

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}, \text{ или } C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \qquad (3)$$

где $m! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m$; $0! = 1! = 1$.

Упражнение 0. а) Найдите числа C_n^k для всех n от 1 до 10, пользуясь каждым из определений **0.1**, **0.2**, **0.3**. б) Выведите **0.2** из **0.1**, пользуясь тождеством $(a+x)^n = (a+x)^{n-1}(a+x)$. в) Выведите **0.3** из **0.2**, пользуясь методом математической индук-

ции (то есть проверьте, что если формула (3) верна для $n-1$, то она верна и для n).
г) Проверьте, что $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Многочлен $a+x$ иногда называют «биномом» (*бином* — то же, что *двучлен*), формулу (1) — формулой «бинома Ньютона», а числа C_n^k — «биномиальными коэффициентами».

Положим в равенстве (1) a равным 1. Получим

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^k x^k + \ldots + C_n^n x^n. \qquad (4)$$

Подставив сюда $x=-1$, получим

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^k C_n^k + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0. \qquad (5)$$

Оказывается, что кроме соотношения (5) для чисел C_n^k верны еще следующие равенства:

$$\begin{aligned} -C_n^1 + 2C_n^2 - 3C_n^3 + \ldots + (-1)^n nC_n^n &= 0,\\ -C_n^1 + 2^2C_n^2 - 3^2C_n^3 + \ldots + (-1)^n n^2 C_n^n &= 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\\ -C_n^1 + 2^{n-1}C_n^2 - 3^{n-1}C_n^3 + \ldots + (-1)^n n^{n-1} C_n^n &= 0. \end{aligned} \qquad (6)$$

Именно эти равенства требовалось доказать в задаче **М138**; о них и будет идти речь в конце каждого параграфа.

В дальнейшем мы будем часто пользоваться короткой записью сумм с помощью значка Σ. Например, формулу (1) можно коротко записать так: $(a+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} C_n^k a^{n-k} x^k$, формулу (4) — $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} C_n^k x^k$, равенство (5) — $\sum\limits_{k=0}^{k=n} (-1)^k C_n^k = 0$ и, наконец, равенства (6), которые требуется доказать в задаче **М138** —

$$\sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k k^m C_n^k = 0 \qquad (6')$$

при каждом натуральном $m < n$.

§ 1. Последовательности и конечные разности

Пусть на множестве целых неотрицательных чисел 0, 1, 2, 3 ... задана функция f. Это значит, что задана *последовательность*

$$f(0),\ f(1),\ f(2),\ f(3),\ \ldots$$

Если из каждого члена последовательности f, разумеется, кроме первого, вычесть предшествующий ему член последовательности, то мы получим новую последовательность — *последовательность разностей*

$$f(1)-f(0),\ f(2)-f(1),\ f(3)-f(2),\ \ldots$$

Обозначим соответствующую ей функцию через Δf: $\Delta f(0) = f(1) - f(0)$; $\Delta f(1) = f(2) - f(1)$; $\Delta f(2) = f(3) - f(2)$ ...

Если проделать эту же операцию — переход от f к Δf — с последовательностью Δf, то мы получим последовательность

$$f(2) - 2f(1) + f(0),\ f(3) - 2f(2) + f(1),\ \ldots$$

Обозначим ее через $\Delta^2 f$.

Эта последовательность называется *последовательностью вторых разностей для* f. Еще раз взяв разности, получим *последовательность третьих разностей* — $\Delta^3 f$:

$$f(3)-3f(2)+3f(1)-f(0),\ f(4)-3f(3)+3f(2)-f(1),\ \ldots$$

и так далее.

Таким образом, по определению

$$\Delta^{n+1}f(x)=\Delta^n f(x+1)-\Delta^n f(x). \qquad (7)$$

(Напомним, что аргумент x функций f, Δf, $\Delta^2 f$, ... принимает целые неотрицательные значения: $x=0, 1, 2, \ldots$).

Рассмотрим в качестве первого примера постоянную функцию f:

$$f(0)=f(1)=f(2)=\ldots=a.$$

Для нее последовательность разностей Δf будет, очевидно, состоять из одних нулей. Кратко это запишем так: $\Delta f\equiv 0$ (при всех x).

Естественно, что и последовательности $\Delta^2 f, \ldots, \Delta^n f$ так же будут состоять из одних нулей, то есть $\Delta^n f\equiv 0$.

Если f — линейная функция: $f(x)=ax+b$, то есть если последовательность представляет собой арифметическую прогрессию b, $a+b$, $2a+b$, $3a+b$, ..., то все члены последовательности Δf будут равны одному и тому же числу a. Отсюда $\Delta^2 f\equiv 0$.

Если f — квадратный трехчлен $f(x)=ax^2+bx+c$, то Δf — линейная функция (от номера x):

$$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)=$$
$$=a(x+1)^2+b(x+1)+c-ax^2-bx-c=2ax+b.$$

Тогда $\Delta^2 f$ — постоянная функция: $\Delta^2 f=2a$. Следовательно, $\Delta^3 f=0$ и, конечно, $\Delta^n f=0$ для всех $n>2$.

Упражнение 1. а) Пусть $f(x)=x^3$. Найдите Δf, $\Delta^2 f$, $\Delta^3 f$, ... б) Тот же вопрос, если $f(x)=2^x$.

Наши наблюдения обобщаются в следующих двух теоремах.

1.1. *Число $\Delta^n f(x)$ выражается через значения функции f по формуле*

$$\Delta^n f(x)=C_n^0 f(x+n)-C_n^1 f(x+n-1)+\ldots+(-1)^n C_n^n f(x)=$$
$$=\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k C_n^k f(x+n-k). \qquad (8)$$

1.2. *Если $f(x)$ — многочлен степени $m<n$, то $\Delta^n f=0$.*

Оба утверждения **1.1** и **1.2** доказываются индукцией по n. Для $n=1, 2, 3$ мы их уже проверили. Предполагая, что они верны для n, доказываем для $n+1$.

1.1. Используя (7), (8) и (2), получаем

$$\Delta^{n+1}f(x)=\Delta^n f(x+1)-\Delta^n f(x)=$$
$$=C_n^0 f(x+n+1)-C_n^1\ f(x+n)+\ldots+(-1)^n\ C_n^n\ f(x+1)-$$
$$-C_n^0\ f(x+n)+\ldots+(-1)^n\ C_n^{n-1}f(x+1)-(-1)^n C_n^n f(x)=$$
$$=C_{n+1}^0 f(x+n+1)-C_{n+1}^1 f(x+n)+\ldots-(-1)^{n+1}C_{n+1}^n f(x+1)+(-1)^{n+1}\times$$
$$\times C_{n+1}^{n+1}f(x).$$

1.2. Пусть $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_jx^j+\ldots+a_m x^m$. Напишем m равенств (они следуют из (4))

$$(x+1)^j-x^j=C_j^1x^{j-1}+C_j^2x^{j-2}+\ldots+C_j^{j-1}\ x+1$$

(здесь $j=1, 2, \ldots, m$). Умножим их соответственно на коэффициенты a_j и сложим. Получим: в левой части $\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$, в правой — некоторый многочлен от $g(x)$ степени не выше $m-1$. Если $m<n$, то $m-1<n-1$ и по предположению индукции $\Delta^{n-1}g=0$. Следовательно, $\Delta^n f=\Delta^{n-1}(\Delta f)=\Delta^n g=0$.

Вернемся теперь к нашей задаче.

Равенство (6′), согласно 1.1. в точности означает, что $\Delta^n f(0) = 0$ для функции $f(x) = x^m$, а это следует прямо из утверждения 1.2.

Задача 1. Пусть $f(x) = a + a_1 x + \ldots + a_n x^n$. Найдите $\Delta^n f$. Пользуясь этим результатом, вычислите сумму

$$\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k k^n C_n^k .$$

Задача 2. Докажите, что есть $\Delta^{n+1} f(x) = 0$ для всех x, то $f(x)$ — многочлен степени не выше n.

Задача 3. Найдите все последовательности f, для которых $\Delta f(x) = \lambda f(x)$, где λ — некоторое число.

§ 2. Многочлены и интерполяционная формула

Мы знаем, что через две точки можно провести единственную прямую. Другими словами, если заданы две пары чисел (α_0, β_0), (α_1, β_1), причем $\alpha_0 \neq \alpha_1$, то существует единственный многочлен степени не выше первой $P(x) = ax + b$ такой, что $P(\alpha_0) = \beta_0$ и $P(\alpha_1) = \beta_1$.

Этот факт обобщается следующим образом.

Пусть заданы $n+1$ различных чисел $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и $n+1$ чисел $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$. Тогда справедливы следующие утверждения.

2.1. *Существует многочлен P степени не выше n такой, что*

$$P(\alpha_i) = \beta_i \quad (\text{для всех } i = 0, 1, \ldots, n). \tag{9}$$

2.2. *Многочлен P определяется единственным образом.*

Для доказательства 2.1 достаточно предъявить такой многочлен. Для этого рассмотрим сначала многочлены

$$D_k(x) = \frac{(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_{k-1})(x-\alpha_{k+1})\ldots(x-\alpha_n)}{(\alpha_k-\alpha_0)(\alpha_k-\alpha_1)\ldots(\alpha_k-\alpha_{k-1})(\alpha_k-\alpha_{k+1})\ldots(\alpha_k-\alpha_n)} \tag{10}$$

(в числителе и знаменателе по n множителей). Ясно, что

$$D_k(\alpha_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k; \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases}$$

Умножим теперь $D_k(x)$ на число β_k и сложим все эти многочлены. Для полученного многочлена

$$P(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \beta_k D_k(x) \tag{11}$$

выполнены все равенства (9).

Для доказательства 2.2 нам понадобятся две важные теоремы о корнях многочленов.

2.3. *Если многочлен*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \tag{12}$$

степени не выше n имеет $n+1$ различных корней, то этот многочлен равен 0, то есть $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

2.4. («Теорема Безу».) *Если α — корень многочлена $f(x)$, то многочлен $f(x)$ делится на $x - \alpha$, то есть*

$$f(x) = (x-\alpha)\, g(x), \tag{13}$$

где $g(x)$ — некоторый многочлен.

Доказательство 2.4. Напишем n тождеств $(x^j-\alpha^j)=(x-\alpha)(x^{j-1}+x^{j-2}\alpha+\ldots+\alpha^{j-2}x+\alpha^{j-1})$, $(j=1, 2, \ldots, n)$, умножим их соответственно на коэффициенты a_j и сложим все эти тождества. Получим формулу, справедливую для любого многочлена (12) и любого числа α:

$$f(x)-f(\alpha)=(x-\alpha)\,g(x),$$

где $g(x)$ — некоторый многочлен. В частности, если $f(\alpha)=0$, получаем (13).

Доказательство 2.3 проведем индукцией по n. Для $n=1$ утверждение 2.3 очевидно. Докажем, что если оно верно для $n-1$, то верно и для n. Пусть $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — корни многочлена (12). Тогда, согласно 2.4

$$f(x)=(x-\alpha_n)\,g(x),$$

причем многочлен $g(x)$ имеет степень не выше $n-1$ и имеет n различных корней $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$. По предположению индукции, $g(x)$ равен нулю; из (14) следует, что $f(x)$ тоже равен нулю.

Доказательство 2.2. Пусть p_1 и p_2 — два многочлена, для каждого из которых верны равенства (9). Тогда их разность удовлетворяет условиям теоремы 2.3 (многочлен $f(x)=p_1(x)-p_2(x)$ степени не выше n имеет $n+1$ корней $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$) и поэтому равна нулю, то есть $p_1(x)=p_2(x)$.

Итак, мы доказали, что через $n+1$ точку $(\alpha_0, \beta_0), (\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_n, \beta_n)$ можно провести единственную кривую вида

$$y=f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n,$$

и даже привели формулу, позволяющую сразу написать нужный многочлен. Эта формула (11) называется *интерполяционной формулой Лагранжа*.

Упражнение 2. а) Найдите квадратный трехчлен, который в точках 2, 3, 5 принимает значения соответственно 7, 11, 13. б) Найдите многочлен степени не выше 4, график которого проходит через точки $(-2, -7)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 9)$.

Вернемся к нашей задаче. Построим многочлен степени не выше n, который в точках $\alpha_k=k$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$ принимает значения соответственно $\beta_k=k^m$. Из формулы (11) следует, что этот многочлен равен $\sum\limits_{k=0}^{k=n} k^mD_k(x)$, где

$$D_k(x)=\frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)(x-k-1)\ldots(x-n)}{k(k-1)\ldots1(-1)(-2)\ldots(k-n)}. \tag{15}$$

Ясно, что коэффициент при x^n у многочлена (15) равен

$$\frac{1}{k(k-1)\ldots1(-1)(-2)\ldots(k-n)}=(-1)^{k-n}\frac{1}{k!\,(n-k)!}=\frac{(-1)^n}{n!}(-1)^kC_n^k,$$

поэтому коэффициент при x^n у многочлена $P(x)$ равен

$$(1/n!)\,(-1)^n\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^kk^mC_n^k.$$

С другой стороны, ясно, что многочлен $P(x)$ есть просто x^m, ведь $m<n$. Поэтому коэффициент при x^n у $P(x)$ равен нулю.

Задача 4. Докажите, что набор чисел $y_0, y_1, \ldots, y_n$ удовлетворяет условию: «для любого многочлена $f(x)$ степени не выше $n-1$ справедливо равенство

$$\sum_{k=0}^{k=n} f(k)\,y_k=0»,$$

в том и только том случае, если $y_k=t(-1)^k\,C_n^k$, где t — некоторое число.

Задача 5 (обобщение). Докажите, что если числа $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ попарно различны, то система уравнений

$$\begin{gathered} y_0 + y_1 + \ldots + y_n = 0, \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n = 0, \\ \alpha_0^2 y_0 + \alpha_1^2 y_1 + \ldots + \alpha_n^2 y_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_0^{n-1} y_0 + \alpha_1^{n-1} y_1 + \ldots + \alpha_n^{n-1} y_n = 0 \end{gathered}$$

имеет решением набор чисел

$$y_k = \frac{t}{(\alpha_k - \alpha_1)(\alpha_k - \alpha_2)\ldots(\alpha_k - \alpha_{k-1})(\alpha_k - \alpha_{k+1})\ldots(\alpha_k - \alpha_n)}$$

($k=0, 1, \ldots, n+1$), где t — произвольное число, и не имеет других решений.

§ 3. Производная многочлена и кратные корни

Пусть $f(x)$ — многочлен степени n:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k.$$

Тогда по определению многочлен степени $n-1$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + n a_n x^{n-1} = \sum_{k=1}^{k=n} k a_k x^{k-1}$$

называется *производной многочлена* $f(x)$. Оказывается верным следующее утверждение.

3.1. *Если многочлен* $f(x)$ *делится на* $(x-\alpha)^{m+1}$, то *многочлен* $f'(x)$ *делится на* $(x-\alpha)^m$. Другими словами, если число α является корнем кратности $m+1$ многочлена $f(x)$, то α является корнем кратности не менее m многочлена $f'(x)$.

Для доказательства **3.1.** мы используем такую лемму.

3.2. *Если* $f(x) = (x-\alpha) g(x)$, *то*

$$f'(x) = g(x) + (x-\alpha) g'(x). \tag{16}$$

Доказательство 3.2. Если $g(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$, то, как нетрудно проверить, пользуясь определением производной многочлена, и правая, и левая часть равенства (16) равна

$$(b_0 - b_1\alpha) + 2(b_1 - b_2\alpha)x + \ldots + (n-1)(b_{n-2} - b_{n-1}\alpha)x^{n-2} + n b_{n-1} x^{n-1}.$$

Доказательство 3.1 проведем индукцией по m. Проверим 3.1 при $m=1$. Если $f(x)$ делится на $(x-\alpha)^2$, то $f(x) = (x-\alpha) g(x)$, где $g(x)$ делится на $(x-\alpha)$, и, как видно из (16), $f'(x)$ тоже делится на $(x-\alpha)$.

Докажем, что если 3.1 верно для $m-1$, то оно верно и для m. Пусть $f(x)$ делится на $(x-\alpha)^{m+1}$. Тогда $f(x) = (x-\alpha) g(x)$, где $g(x)$ делится на $(x-\alpha)^m$, и из (16) следует, что $f'(x)$ делится на $(x-\alpha)^m$ ($g'(x)$ делится на $(x-\alpha)^{m-1}$ по предположению индукции).

Упражнение. 3. а) Имеет ли многочлен $x^3 - x^2 - 8x + 12$ кратные корни? б) Найдите a, b и c такие, что многочлен $x^3 + ax^2 + bx + c$ делится на $(x+1)^2$.

Вернемся теперь к нашей задаче. Равенство (6′) означает в точности, что многочлен $f_m(x) = \sum_{k=0}^{k=n} k^m C_n^k x^{k-1}$ имеет число $x = -1$ своим корнем. Докажем более сильное утверждение: *многочлен* $x f_m(x)$ *имеет число* (-1) *корнем кратности* $n-m$, то есть делится на $(x+1)^{n-m}$ (если $m < n$).

Для $x f_0(x) = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k x^k = (1+x)^n$ это очевидно. Для $0<m<n$ проведем индукцию по m. Пусть $x f_{m-1}(x)$ имеет число (-1) корнем крат-

ности $n-(m-1)$. Тогда согласно **3.1** многочлен

$$(xf_{m-1}(x))'=\left(\sum_{k=0}^{k=n}k^{m-1}C_n^k x^k\right)'=\sum_{k=0}^{k=n}k^mC_n^kx^{k-1}=f_m(x)$$

а, следовательно и многочлен $xf_m(x)$ имеет (-1) корнем кратности $n-(m-1)-1=n-m$.

Задача 6. Для того, чтобы многочлен

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$$

делился на $(x+1)^m$, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\begin{array}{c}
a_0-a_1+a_2-a_3+\ldots+(-1)^na_n=0,\\
-a_1+2a_2-3a_3+\ldots+(-1)^nna_n=0,\\
-a_1+2^2a_2-3^2a_3+\ldots+(-1)^nn^ma_n=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
-a_1+2^ma_2-3^ma_3+\ldots+(-1)^nn^ma_n=0.
\end{array}$$

Докажите это.

§ 4. Степенные ряды и экспонента

Формальным степенным рядом называется выражение

$$A(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_mz^m+\ldots,$$

где $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$ — произвольная последовательность чисел (z — так же, как в записи многочлена, «переменная» буква). Тот же ряд коротко записывается так: $\sum\limits_{m=0}^{m=\infty}a_mz^m$. В частности, если все a_m при $m>n$ равны 0, получается обычный многочлен степени n.

Так же как для многочленов, для степенных рядов естественно определяются операции сложения, умножения, замены переменной. А именно, пусть

$$A(z)=\sum_{m=0}^{m=\infty}a_mz^m,\ B(z)=\sum_{m=0}^{m=\infty}b_mz^m,\ C(z)=\sum_{m=0}^{m=\infty}C_mz^m,$$

λ — число. Тогда по определению

1°) $A(z)+B(z)=C(z)$, если $a_m+b_m=c_m$ для всех m;

2°) $A(z)\cdot B(z)=C(z)$, если $a_mb_0+a_{m-1}b_1+\ldots+a_{m-k}b_k+\ldots$ $\ldots+a_0b_m=c_m$ для всех m; в частности, $\lambda A(z)=C(z)$, если $\lambda a_m=c_m$;

3°) $A(\lambda z)=B(z)$, если $\lambda^ma_m=b_m$ для всех m.

Нетрудно проверить, что для определенных таким образом операций над формальными степенными рядами выполняются все основные свойства сложения и умножения, которые справедливы для чисел и для многочленов.

Упражнение 4. Найдите произведение:

а) $(1+z+z^2+z^3+\ldots)(1+z+z^2+z^3+\ldots)$;

б) $(1+z+z^2+z^3+\ldots)(1-z+z^2-z^3+\ldots)$.

Назовем *экспонентой* степенной ряд

$$\operatorname{Exp}(z)=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{z^m}{m!}+\ldots=\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{z^m}{m!}.$$

Докажем основное свойство этого ряда.

4.1. *Для любых двух чисел α и β*

$$\operatorname{Exp}((\alpha+\beta)z)=\operatorname{Exp}(\alpha z)\cdot\operatorname{Exp}(\beta z)\qquad(17)$$

Нужно проверить, что коэффициенты при z^m (для каждого m) справа и слева совпадают (определение 2°), то есть что

$$\frac{(\alpha+\beta)^m}{m!}=\frac{\alpha^m}{m!0!}+\frac{\alpha^{m-1}\beta}{(m-1)!1!}+\ldots+\frac{\alpha^{m-k}\beta^k}{(m-k)!\,k!}+\ldots+\frac{\beta^m}{0!m!}.$$

Но это равенство прямо следует из формул (1) и (3).

Пользуясь (17), индукцией по k легко доказать равенство

$$\operatorname{Exp}(kz)=(\operatorname{Exp}(z))^k.$$

Вернемся теперь к нашей задаче. Рассмотрим $n+1$ формальных степенных рядов

$$\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{k^m z^m}{m!}=\operatorname{Exp}(kz)$$

$(k=0,1,2,\ldots,n)$. Умножим k-й ряд соответственно на $(-1)^kC_n^k$ и сложим все эти ряды (для этого достаточно сложить коэффициенты при z^m для всех m). Получим ряд

$$\sum_{m=0}^{m=\infty}\left(\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k k^m C_n^k\right)\frac{z^m}{m!}=\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k(-1)^k\operatorname{Exp}(kz)=(-1)^n\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k(-1)^{n-k}\times$$
$$\times(\operatorname{Exp}(z))^k=(\operatorname{Exp}(z)-1)^n=\left(z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots\right)^n.$$

Ясно, что этот ряд будет начинаться с члена z^n, то есть коэффициенты при $z^{n-1}, z^{n-2}, \ldots, z$ и свободный член этого ряда равны 0. Но это и означает, что верны равенства (6).

Задача 7. Пользуясь последним равенством, найдите сумму

$$\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k\, k^n C_n^k.$$

Задача 8. По определению $A'(z)=\left(\sum_{m=0}^{m=\infty}a_m z^m\right)'=\sum_{m=1}^{m=\infty}ma_m z^{m-1}$.

Докажите, что $(\operatorname{Exp}(z))'=\operatorname{Exp}(z)$.

Конечно, эта статья трудна для неискушенного читателя, впервые встретившегося с целым рядом непривычных понятий. Для того, чтобы освоиться с каждым из этих понятий, нужно проделать большое число упражнений и прочесть менее формальные и более подробные разъяснения.

Автор надеется, что у некоторых из начинающих читателей возникнет желание продолжить знакомство с этими понятиями, а у более искушенных — подумать, как связаны между собой приведенные четыре доказательства.

Литература

А. О. Гельфонд. Исчисление конечных разностей, М., «Наука», 1967.

Коэффициент полезного действия ракеты

А. В. Бялко

Начнем с небольшой задачи. За какое время электрический утюг потребляет столько энергии, сколько необходимо для его запуска на орбиту спутника Земли? (Мощность утюга $P = 1$ *квт*, масса $m = 1$ *кг*.)

Кинетическая энергия спутника, движущегося по круговой орбите, $\frac{mv^2}{2} = \frac{mgR}{2}$, где v — первая космическая скорость, R — радиус Земли. Потенциальной энергией mgh для не слишком высоких орбит можно пренебречь по сравнению с кинетической. Приравнивая энергию утюга-спутника к Pt, найдем что

$$t = \frac{mgR}{2P} = 3{,}2 \cdot 10^4 c \approx 9 \text{ ч}.$$

Всего 9 часов! 9 киловатт-часов, 36 копеек необходимы для выведения на орбиту спутника Земли каждого килограмма массы. Почему же для осуществления космических программ требуются затраты, соизмеримые с национальными бюджетами небольших стран?

Потому, что эта энергия, 9 *квт-ч*, необходима, но недостаточна. Потому, что ракета как тепловая машина имеет очень низкий коэффициент полезного действия. Попробуем его найти.

Сначала выведем формулу, связывающую массу и скорость ракеты, то есть решим «задачу Циолковского». Сложность здесь состоит в том, что масса ракеты при разгоне все время уменьшается — выгорает топливо. Такие процессы изучают, решая дифференциальные уравнения. Чтобы этого избежать, представим себе, что сгорание происходит не непрерывно, а некими малыми порциями. Скажем, каждый раз ракета выбрасывает $\frac{1}{N}$-ю часть своей массы, как бы выстреливает снарядом, масса которого в N раз меньше массы ракеты в этот момент (рис. 1).

Скорость такого «снаряда» относительно ракеты будем считать постоянной и называть скоростью истечения V. При каждом таком «выстреле» выполняется закон сохранения количества движения. Пусть вначале масса ракеты была M_0, а скорость равна нулю. Тогда $\frac{M_0}{N} V$ — количество движения массы, выброшенной после первого толчка и $\left(1 - \frac{1}{N}\right) M_0 v_1$ — равное ему коли-

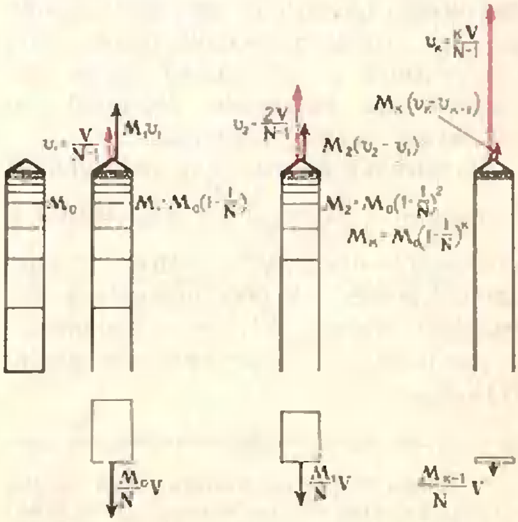


Рис. 1.

чество движения ракеты. Итак,

$$M_1 = M_0\left(1-\frac{1}{N}\right),\quad v_1=\frac{V}{N-1}.$$

После второго «выстрела» масса ракеты станет $M_2 = M_1\left(1-\frac{1}{N}\right) = M_0\left(1-\frac{1}{N}\right)^2$. Закон сохранения количества движения, записанный в системе отсчета, связанной с ракетой, летящей со скоростью v_1, дает $\frac{M_1V}{N} = M_2(v_2-v_1)$, и, таким образом,

$$v_2 = v_1 + V\frac{M_1}{NM_2} = \frac{2V}{N-1}.$$

После k-го «выстрела», как нетрудно видеть, скорость ракеты станет $v_k = \frac{kV}{N-1}$, а оставшаяся масса $M_k = M_0\left(1-\frac{1}{N}\right)^k$. Если нам нужно достичь скорости v, то необходимо сделать $k=\frac{v}{V}(N-1)$ «выстрелов», и оставшаяся (полезная) масса будет равна

$$m = M_k = M_0\left\{\left(1-\frac{1}{N}\right)^{N-1}\right\}^{v/V}.$$

Реальный процесс истечения, конечно, происходит непрерывно. Это значит, что для того, чтобы рассмотренное нами движение хорошо описывало происходящее на самом деле, нам нужно брать как можно бо́льшие числа N, тогда движение ракеты будет состоять из большого числа маленьких по величине толчков, то есть будет почти непрерывным.

Оказывается, что при увеличении N величина $\left(1-\frac{1}{N}\right)^{N-1}$ стремится к конечному пределу *). Этот предел равен 0,36788... и обозначается в математике через e^{-1}, e — основание натуральных логарифмов — равно 2,71828...

*) Более подробное решение этой задачи смотрите в статье «Экспонента» С. Д. Осятинского и А. З. Румшиского, «Квант» № 12, 1972 год.

Таким образом, масса ракеты, достигшей скорости v, равна

$$m = M_0e^{-v/V}.$$

Эта формула была получена К. Э. Циолковским в 1903 году и носит его имя. Из нее видно, что ракета может достичь скорости, большей скорости истечения топлива, но при этом ее оставшаяся масса будет много меньше начальной.

Если, например, скорость истечения равна 2 *км/с*, то при достижении первой космической скорости 7,9 *км/с* конечная масса будет в $e^{3,95}\approx 52$ раза меньше начальной, а при достижении второй космической скорости 11,2 *км/с* — в $e^{5,6}\approx 270$ раз меньше той же начальной массы. При этом надо учесть, что значительная часть оставшейся массы приходится на конструкции ракеты, так что доля действительно полезного груза становится еще меньше. Чтобы уменьшить бесполезную массу, разгоняемую до конечной скорости, ракеты делают многоступенчатыми. При этом корпуса низших ступеней сбрасываются, когда в них кончается горючее.

Формулу Циолковского можно записать по-другому:

$$v = V\ln\frac{M_0}{m}.$$

Отсюда следует, что для получения больших скоростей движения ракеты при заданных m и M_0 нужно максимально увеличить скорость истечения. Однако для ракет, использующих энергию, выделяющуюся в результате химической реакции, то есть химических ракет, невозможно сделать скорость истечения больше некоторой величины, предельной для каждой реакции. И в этом нетрудно убедиться.

Пусть q — теплотворная способность данного топлива, то есть энергия, выделяющаяся при сгорании 1 *кг* его. Эта энергия расходуется на нагревание отходящих газов и на сообщение им кинетической энергии.

Рассмотрим ракетный двигатель, закрепленный неподвижно, так называемый стендовый двигатель. При сгорании массы μ (мы считаем вместе и горючее, и окислитель) выделяется энергия $q\mu$, но только часть ее превращается в кинетическую энергию продуктов реакции $\mu\frac{V^2}{2}$. Поэтому $\frac{V^2}{2} < q$. Если ввести коэффициент полезного действия стендового двигателя η_0 — отношение полезной *) энергии к затраченной, — то получим

$$\mu\frac{V^2}{2} = \eta_0 q\mu,$$

$$V = \sqrt{2\eta_0 q},$$

то есть скорость истечения для данной химической реакции не может превысить ее предельной скорости истечения $V_0 = \sqrt{2q}$ (так как $\eta_0 < 1$).

Рассмотрим несколько химических реакций и вычислим для них предельные скорости истечения.

1. Горение ацетилена:

$$2C_2H_2 + 5O_2 = 4CO_2 + 2H_2O + 611 \text{ ккал}.$$

Число килокалорий в правой части уравнения реакции показывает, какая энергия выделяется при сгорании массы, равной сумме молей горючего и окислителя. В данном случае — при сгорании двух молей C_2H_2 и пяти молей O_2, то есть всего $2\cdot 26 + 5\cdot 32 = 212$ *г*. Таким образом, теплотворная способность этого топлива

$$q = \frac{611}{212}\,\frac{ккал}{г} = 2880\,\frac{ккал}{кг} = 1{,}2\cdot 10^7\,\frac{м^2}{с^2},$$

а предельная скорость истечения

$$V_0 = \sqrt{2q} = 4{,}9\,\frac{км}{с}.$$

*) Заметим, что энергия $\frac{\mu V^2}{2}$ не является по-настоящему полезной. Ведь основная задача — разогнать до нужной скорости полезную массу, а не отходящие газы.

2. $2H_2 + O_2 = 2\underset{(газ)}{H_2O} + 115{,}6$ *ккал*.

Вычисляем аналогично

$$q = 3220\frac{ккал}{кг};\quad V_0 = 5{,}2\,\frac{км}{с}.$$

3. $2\,Al + \frac{3}{2}O_2 = Al_2O_3 + 394$ *ккал*;

$$q = 3860 \text{ ккал/кг};\qquad V_0 = 5{,}6 \text{ км/с}.$$

Наибольшая из всех возможных предельная скорость истечения достигается в реакции горения металлического бериллия:

$$Be + \frac{1}{2}O_2 = BeO + 146 \text{ ккал};$$

$$q = 5840 \text{ ккал/кг};\quad V_0 = 7 \text{ км/с}.$$

Практическому использованию этой реакции, однако, мешает то обстоятельство, что металлический бериллий и его соединения очень ядовиты.

Рассмотрим теперь коэффициент полезного действия ракеты в целом, то есть отношение ее полезной энергии, равной $\frac{mv^2}{2}$, к затраченной. Последнюю с небольшой ошибкой можно считать равной qM_0, поскольку подавляющая часть начальной массы приходится на топливо. Таким образом,

$$\eta = \frac{mv^2}{2M_0 q} = \frac{v^2}{2q}\,e^{-v/V}.$$

Или, подставляя вместо q его выра-

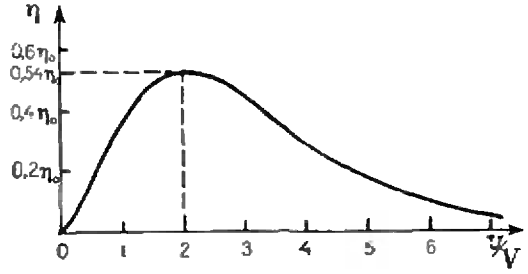


Рис. 2.

жение из формулы $V^2 = 2\eta_0 q$, получаем

$$\eta = \eta_0 \left(\frac{v}{V}\right)^2 e^{-v/V}.$$

График зависимости η от $\frac{v}{V}$ дан на рисунке 2.

Итак, только часть затраченной энергии, равная $\eta q M_0$, превращается в кинетическую энергию ракеты.

Возникает вопрос, куда девается остальная часть затраченной энергии, поскольку в тепло при сгорании топлива переходит лишь $(1 - \eta_0)\, q\, M_0$. Ответ состоит в том, что остальная энергия, а именно

$$(1-\eta)\, qM_0 - (1-\eta_0)\, qM_0 = (\eta_0 - \eta)\, qM_0 = \eta_0 \left[1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2 e^{-v/V}\right] qM_0,$$

является кинетической энергией отходящих газов ракеты (в системе отсчета Земли), которая в конечном счете также переходит в тепло, нагревая атмосферу.

Таким образом, мы видим, что при достижении ракетой скорости, заметно большей скорости истечения, реальный коэффициент полезного действия становится весьма малым. Например, если ракета со скоростью истечения $V = 2$ *км/с* достигает второй космической скорости $v = 11{,}2$ *км/с*, то $\eta = 0{,}116\eta_0$ и, соответственно, $0{,}884\eta_0$ полной энергии ракеты уносят отходящие газы.

Создание мощных двигателей с большими скоростями истечения, использующих энергию ядерной реакции или разгон ионов в электрическом поле, существенно повысит к. п. д. ракет. Это дело недалекого будущего.

Разные задачи

1. Брошены два игральных кубика. Какая сумма чисел на их верхних гранях наиболее вероятна?

2. $\sqrt[6]{4{*}{*}{*}{*}}$ — целое число. Найти это число.

3. $\sqrt[5]{{*}{*}{*}{*}{*}4}$ — целое число. Найти его.

4. Задумано число. Если записать его в двоичной системе, а затем зачеркнуть в нем последнюю цифру, то получится то же самое число, но записанное уже в троичной системе. Если же и в этом числе снова зачеркнуть последнюю цифру, то опять получится задуманное число, но изображенное в десятичной системе.

Найти задуманное число.

5. Найти двузначное число, которое, будучи записано в двоичной, четвертичной и восьмеричной системах счисления, каждый раз изображается одинаковыми цифрами (но различными в различных системах).

6.
```
 four
+five
 ----
 nine
```

Известно, что four кратно 4, five кратно 5, nine кратно 3.

Расшифровать это сложение.

7. В шахматном турнире участвовали ученики 9 и 10 классов. Каждый игрок играл один раз с каждым участником турнира. Десятиклассников было в 10 раз больше, чем девятиклассников, а набрали они в 4,5 раза больше очков, чем девятиклассники. Сколько в турнире было девятиклассников и сколько очков они набрали?

П. Ю. Германович

Про лису и собаку

М. Л. Гервер

Эта заметка не имеет отношения к зоологии: «лиса» и «собака» — просто удобные условные названия для двух движущихся точек, одна из которых «пытается поймать» другую.

§ 1. Формулировка задачи

Лиса бежит по прямой с постоянной скоростью. Собака гонится за лисой с той же скоростью, причем бежит так, что видит лису все время перед собой. Лиса бежит из точки $Л_0$ (рис. 1) в направлении, указанном стрелкой. Собака в начальный момент находится в точке C_0. При каких C_0 собака догонит лису?

Сейчас трудно установить, кто придумал эту красивую задачу — ее уже много лет предлагают на мехмате МГУ студентам, которые недавно узнали, что такое производная. После того, как тема «Производная» была включена в программу математических школ, про лису и собаку стали рассказывать и школьникам, заранее предупреждая, что это — «задача с двумя звездочками».

В начале 1972 года мы предложили задачу про лису и собаку в 10 «б» классе 57-й школы г. Москвы. Первыми в классе ее решили (разными способами) К о л я Н а д и р а ш в и л и, В о л о д я Л и д с к и й и С е р е ж а Г л я д к о в *). Одно из решений (придуманное С. Глядковым) удалось упростить настолько, что оно стало совсем «элементарным».

Это решение (не требующее знакомства с понятием производной) и будет приведено ниже. Прежде, чем читать его, попробуйте, конечно, решить задачу сами. Может быть, это не удастся (я уже предупреждал, что задача трудная) — тогда постарайтесь хотя бы угадать ответ. Он довольно неожиданный.

§ 2. Попробуем угадать ответ

1. Обозначим прямую, по которой бежит лиса $Л$, через l. В точке $Л_0$ восставим к ней перпендикуляр p (рис. 2).

*) Сейчас все трое — уже первокурсники.

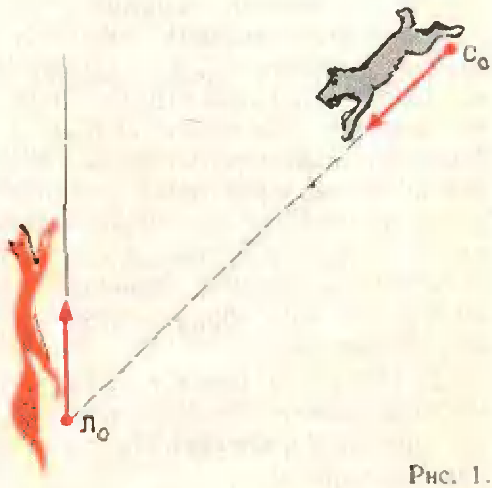


Рис. 1.

Если собака находится в начальный момент на прямой l, все ясно: если C_0 расположена перед $Л_0$, то собака бежит навстречу лисе и ловит ее; если C_0 — сзади $Л_0$, то собака никогда не догонит лису.

Пусть теперь C_0 — вне прямой l. Если она позади $Л_0$ (ниже перпенди-

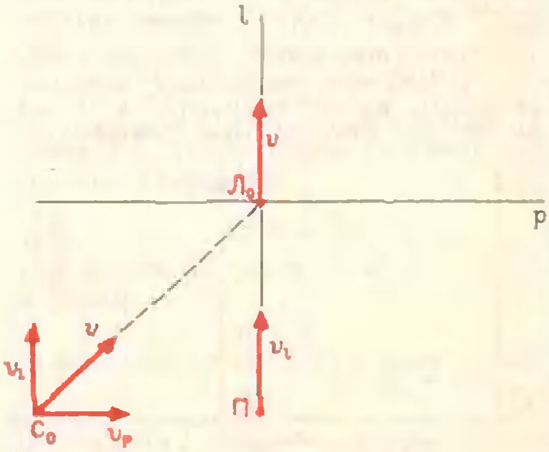


Рис. 2.

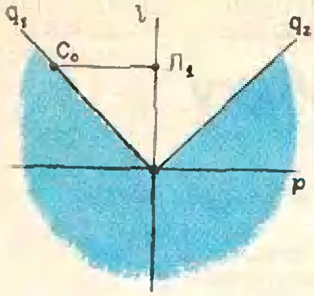


Рис. 3.

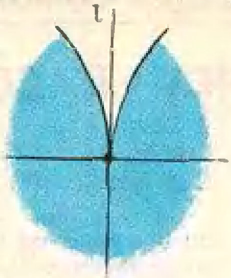


Рис. 4.

куляра p), то лису не догнать. Доказать это можно, например, так.

Разложим скорость собаки $\mathbf{v}$ на две составляющие: $\mathbf{v}_l$ (вдоль l) и $\mathbf{v}_p$ (вдоль p). Спроектируем точку C_0 на прямую l в точку $П$ ($C_0П \perp l$). Тогда $\mathbf{v}_l$ можно истолковать как скорость *) с которой точка $П$ движется вдоль прямой l вслед за $Л$. Поскольку $v_l < v$, то расстояние между $П$ и $Л$ не уменьшается с течением времени **), так что собака в этом случае не догонит лису.

2. Пока все было просто. Трудности начинаются, когда точка C_0 — вне прямой l и впереди $Л_0$ (выше перпендикуляра p).

Проведем из точки $Л_0$ два луча: q_1 и q_2 (рис. 3) — под углом 45° к прямым l и p. Зона, окрашенная на рисунке 3, безопасна для лисы: если C_0 находится в этой зоне, то собака, бегущая из точки C_0, не догонит лису. Чтобы доказать это, возьмем точку C_0 даже не внутри, а на границе зоны (например, на луче q_1).

*) $\mathbf{v}$ — это вектор, а v — его длина.
**) Расстояние между $П$ и $Л$ даже увеличивается; расстояние между C и $Л$, как мы покажем ниже, наоборот, уменьшается.

Пусть $Л_1$ — такая точка на прямой l, что $C_0Л_1 \perp l$. Даже если бы собака бежала наперерез лисе по перпендикуляру $C_0Л_1$, то и тогда она подбежала бы к прямой l лишь одновременно с лисой ($Л_0Л_1 = C_0Л_1$). На самом же деле собака бежит к l по более длинному пути. Значит, когда лиса окажется в точке $Л_1$, собака еще не добежит до l. Легко проверить, что при этом она окажется позади лисы — за перпендикуляром $C_0Л_1$. А в такой ситуации, как мы уже видели, она не сможет догнать лису.

3. Так или примерно так начинает решать обсуждаемую задачу большинство людей.

Интуиция подсказывает, что зону, безопасную для лисы, можно еще расширить. Как же она выглядит? Примерно так, как на рисунке 4? Нет, оказывается, не так...

§ 3. В движущейся системе координат

Сделаем решительный шаг, который резко упростит все дальнейшие рассуждения. Выберем прямоугольную систему координат x, y так, чтобы она равномерно двигалась вместе с лисой *) в направлении оси y. Пусть в начальный момент лиса находилась в начале координат нашей движущейся системы (в точке O). Тогда она все время будет находиться в этой точке.

Как будет двигаться собака относительно системы x, y?

Возьмем на плоскости (x, y) какую-нибудь точку C (рис. 5, a).

*) Относительно неподвижного наблюдателя.

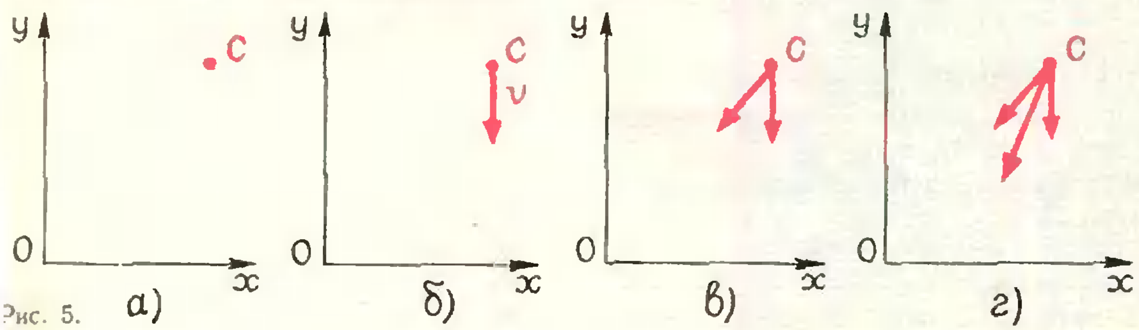


Рис. 5.

Если бы эта точка находилась в покое относительно системы координат x, y, то это означало бы, что она движется вместе с лисой) — в том же направлении и с той же скоростью.

Чтобы точка C находилась в покое с точки зрения неподвижного наблюдателя, нужно скомпенсировать движение системы x, y, то есть нужно заставить точку C двигаться относительно системы x, y в направлении, противоположном направлению оси y, причем абсолютная величина скорости этого движения должна быть та же, что и у лисы (рис. 5, *б*).

По условию задачи собака бежит прямо на лису (с точки зрения неподвижного наблюдателя). Значит, относительно системы x, y собака участвует в двух движениях: во-первых, равномерно движется со скоростью v в направлении, противоположном оси y, во-вторых, приближается с той же скоростью к началу координат. Стрелки на рисунке 5, *в* — это векторы скоростей в каждом из указанных движений. Результирующую скорость движения собаки относительно системы координат x, y найдем по правилу параллелограмма (рис. 5, *г*).

До сих пор мы рисовали точку C в одном и том же месте на плоскости (x, y). На рисунке 6 показано, как результирующая скорость зависит от расположения точки C. Чем больше угол между векторами, которые складываются, тем короче вектор результирующей скорости. Если расположить точку C на отрицательной полуоси оси y, то векторы, которые складываются, будут иметь противоположные направления и результирующая скорость окажется равной нулю. Так, разумеется, и должно быть: если собака находится строго сзади лисы, то она бежит за ней, не приближаясь и не отставая, то есть находится в покое относительно системы x, y.

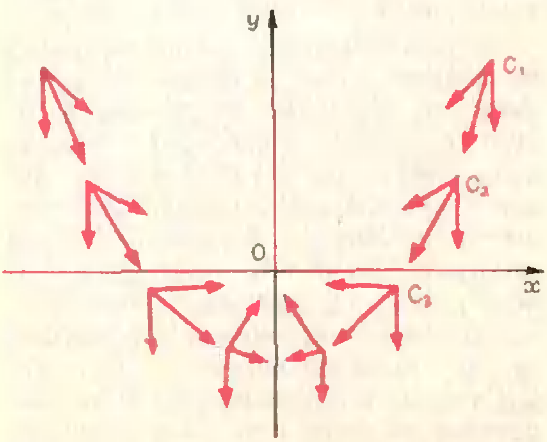


Рис. 6.

§ 4. Собака бежит по параболе

1. В школе много занимаются квадратными уравнениями. Каждый старшеклассник знает, как выглядит парабола (график квадратного трехчлена).

Снова посмотрим на рисунок 6. Очень похоже, что точки C_1, C_2, C_3 лежат на параболе. Мы сейчас покажем, что это так и есть, если эти точки указывают несколько последовательных положений бегущей собаки.

2. Некоторые из вас знают, другие — без труда проверят следующее свойство параболы:

Парабола есть геометрическое место точек, равноудаленных от некоторой точки O и от некоторой прямой d *).

Мы сейчас проверим это свойство в случае, когда точка O является началом координат, а прямая d параллельна оси x и расположена «под ней», то есть при некотором $a>0$ задается уравнением $y = -a$. В этом случае (рис. 7) квадрат расстояния от точки (x, y) до точки O равен (по теореме Пифагора)

$$x^2 + y^2,$$

расстояние от точки (x, y) до прямой d равно

$$|y + a|,$$

а квадрат этого расстояния равен

*) Точка O называется *фокусом*, а прямая d — *директрисой параболы*.

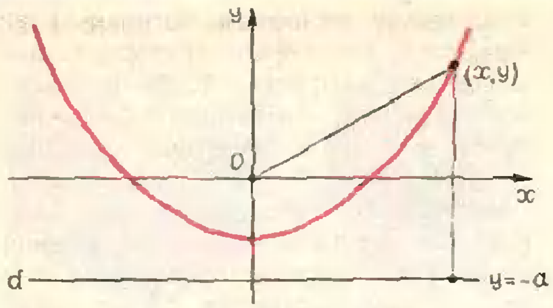


Рис. 7.

$(y+a)^2$. Для точек, равноудаленных от O и d, выполняется, таким образом, соотношение

$$x^2+y^2=(y+a)^2,$$

или, что то же самое,

$$x^2=2ay+a^2.$$

Последнее уравнение перепишем окончательно в виде

$$y=\frac{x^2-a^2}{2a}. \qquad (A)$$

Все точки, равноудаленные от O и d, лежат, таким образом, на параболе, которая задается уравнением (A). Так как при выводе уравнения (A) мы делали тождественные преобразования, то, *и обратно, все точки указанной параболы равноудалены от точки O и прямой d.*

3. Прежде чем идти дальше, отметим что при $b\neq a$ $(b>0)$ парабола

$$y=\frac{x^2-b^2}{2b} \qquad (B)$$

не имеет с параболой (A) ни одной общей точки. Действительно, если бы некоторая точка (x, y) принадлежала обеим параболам, то выполнялось бы соотношение

$$\frac{x^2-a^2}{2a}=\frac{x^2-b^2}{2b}.$$

Но эквивалентное ему равенство $x^2=-ab$ невозможно, так как $x^2\geqslant 0$, а $-ab<0$.

4. Возьмем на плоскости (x, y) точку C_0, не лежащую на оси y, а в остальном произвольную. Отложим от нее в направлении, противоположном оси y, отрезок $C_0D_0=OC_0$ (рис. 8) и проведем через точку D_0 прямую d, параллельную оси x. Расстояние между осью x и прямой d обозначим через a. Согласно п. 2 парабола (A) равноудалена от O и d и проходит через точку C_0.

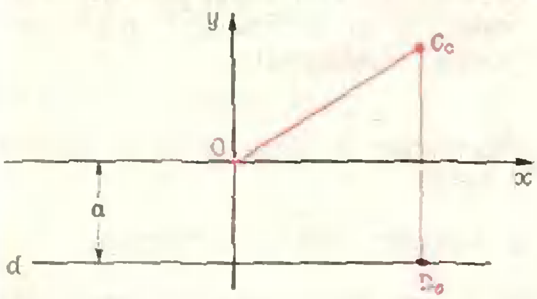


Рис. 8.

Докажем, что именно по этой параболе и побежит собака (относительно системы x, y), если в начальный момент она находилась в точке C_0.

Для доказательства представим себе, что OC_0 и C_0D_0 — это туго натянутые веревки; в точке D_0 веревка C_0D_0 привязана к кольцу, которое надето на прямую d и может свободно скользить по ней; веревка OC_0 *крепко привязана в точке O*. Еще, пожалуй, представим себе, что в точке C_0 находится не собака, а, скажем, обезьяна (у собаки не хватит прыти проделать то, что мы ей сейчас поручим). Дадим обезьяне веревки и попросим подтягиваться по ним обеим сразу — одновременно к точке O и к прямой d.

Каждый, кто когда-нибудь лазил по канату (даже по одному, а не по двум сразу), легко представит себе, что получится. Перебирая лапами, наша собака (то есть обезьяна) будет приближаться с одинаковой скоростью к точке O и к прямой d. Через некоторое время она очутится в точке C_1 (рис. 9); кольцо, скользящее без трения по прямой d, передвинется в такое положение D_1, что $C_1D_1\perp d$; так как обе веревки укоротятся на один и тот же кусок, то отрезки OC_1 и C_1D_1 будут равны.

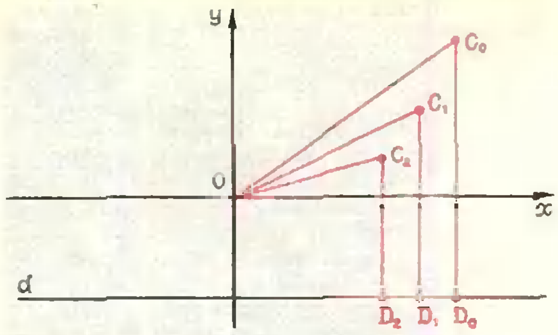


Рис. 9.

Потом она окажется в точке C_2 ($C_2D_2 \perp d$, $OC_2 = C_2D_2$) и т. д.

Так как C_0, C_1, C_2 и т. д. равноудалены от O и d, то движение, как мы и обещали показать, происходит по параболе (А).

§ 5. Решение задачи

Теперь уже легко ответить на вопрос задачи: при каких C_0 собака догонит лису? — Только при C_0 лежащих на полупрямой l перед точкой $Л_0$. Вся плоскость, кроме этого луча, — зона, безопасная для лисы. Действительно, если точка C_0 лежит в указанной зоне, то относительно системы координат x, y, движущейся вместе с лисой, собака побежит по параболе. Через некоторое время она пересечет ось x и окажется позади лисы. А в этом случае поймать лису она не сможет.

Благодаря введению движущейся системы координат, мы сможем легко разобраться и в более тонких деталях.

Двигаясь из точки C_0 по параболе (А), собака все время приближается к ее директрисе d, а тем самым — и к ее фокусу O. Другими словами, расстояние $CЛ$ между собакой и лисой все время сокращается. При этом (см. рис. 7) оно стремится к пределу, равному $a/2$. Пусть координаты C_0 были x_0, y_0; расстояние $C_0Л_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ обозначим через r_0; совсем легко проверить, что тогда $a/2 = (r_0 - y_0)/2$. Таким образом, расстояние $CЛ$, первоначально равное r_0, никогда не может стать меньше, чем $s = (r_0 - y_0)/2$.

А может ли оно стать равным s? Этот вопрос нам поможет решить рисунок 6. Скорость движения собаки по параболе все время уменьшается. И хотя (в системе координат x, y) собаке нужно пробежать путь конечной длины, чтобы $CЛ$ стало равным $(r_0 - y_0)/2$, сделать это за конечное время она не сможет. Точное доказательство этого факта потребует некоторых вычислений.

Пусть C — точка на параболе (А) с координатами (x, y), E — проекция точки C на ось x; $u(x)$ — скорость, с которой E приближается к O. Из рисунка 10 видно, что $u(x)/v = x/\sqrt{x^2+y^2}$. Используя уравнение (А), находим, что $\sqrt{x^2+y^2} = y + a = (x^2+a^2)/2a$, откуда $u(x) = 2avx/(x^2+a^2) < 2vx/a$.

Таким образом, при $a/2 \leqslant x \leqslant a$ скорость $u(x) < 2v$; от $a/2$ до $a/4$ проекция E движется со скоростью $u(x)$, меньшей v; от $a/4$ до $a/8$ — со скоростью $u(x) < v/2$ и т. д. То есть на прохождение каждого из этих отрезков тратится время, большее T $\left(T = \frac{a}{2} : 2v = \frac{a}{4} : v = \frac{a}{8} : \frac{v}{2}\right.$ и т. д.$\left.\right)$. Значит E не сможет дойти до точки $x = 0$ ни за какое конечное время. Иначе говоря, $CЛ$ всегда больше, чем $(r_0 - y_0)/2$.

Задачи

1. Пусть за лисой гонится из точки C_0 не собака, а охотник, стреляющий без промаха с расстояния r. Пренебрежем временем полета пули, то есть будем считать, что охотник догнал лису, если приблизился к ней на расстояние r. При каких C_0 лисе не убежать?

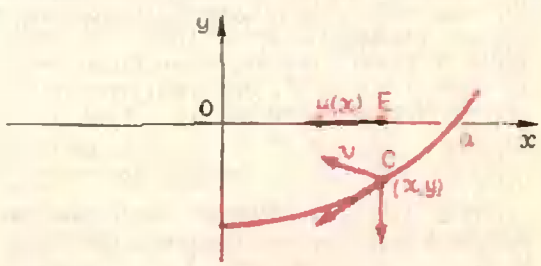


Рис. 10.

2. В § 4 использовалось, что парабола — это геометрическое место точек, равноудаленных от фокуса O и директрисы d. Вот еще несколько задач о параболе*).

а) Сколько общих точек могут иметь парабола и прямая?

б) Докажите, что через каждую точку параболы $y = ax^2 + bx + c$ можно провести ровно одну прямую, не параллельную оси y, которая не имеет с параболой других общих точек; такая прямая называется касательной к параболе.

Напишите уравнение касательной к параболе $y = x^2$ в точке $(x_0, y_0 = x^2)$; в какой точке эта касательная пересекает ось x?

Напишите уравнение касательной к параболе (А) в точке x_0, $y_0 = (x_0 - a^2)/2a$; как связаны направление этой касательной и направление вектора скорости, которую имеет собака в точке (x_0, y_0) при движении по параболе (А)?

в) Поверхность, которая получается, если вращать параболу вокруг ее оси симметрии (например, параболу $y = x^2$ вокруг оси y), называется параболоидом вращения. В зеркальных телескопах применяют зеркала, имеющие форму параболоида вращения. Свет далекой звезды, идущий параллельным пучком, упав на зеркало телескопа, собирается в фокусе. Объясните этот факт.

3. Мы выяснили, что в движущейся системе координат x, y собака бежит за лисой по параболе. А как она движется относительно неподвижного наблюдателя? Нарисуйте кривую погони, по которой бежит собака в неподвижной системе координат.

4. На кривую погони немного похожа другая интересная кривая — «трактриса». В замечательной книге Г. Штейнгауза «Математический калейдоскоп» она определяется так: когда ребенок, гуляющий по тротуару, тащит тележку по мостовой, то тележка описывает линию, которая называется «трактриса» (что значит «линия влечения»).

Пусть, как и раньше, лиса $Л$ бежит по прямой l со скоростью v из некоторой точки $Л_0$, а собака C бежит прямо на нее (из некоторой точки C_0, не принадлежащей l и находящейся позади $Л_0$), но не с постоянной, а с переменной по величине скоростью. Обозначим через α угол $СЛЛ_0$. Как скорость собаки должна зависеть от α, чтобы собака бежала по трактрисе, то есть чтобы отрезок $СЛ$ имел одну и ту же длину? Пересекаются ли еще где-нибудь, кроме точки C_0, трактриса и кривая погони, проходящие через эту точку? (Точка $Л_0$ при построении обеих кривых — одна и та же.)

*) О других интересных свойствах параболы можно узнать, например, из книги И. М. Гельфанда, Е. Г. Глаголевой и Э. Э. Шноля «Функции и графики», «Наука», 1965.

ТРИ ДЕРЕВНИ

На острове Трисельске имеется всего три деревни: Правдово, Чередово и Лгуново. Известно, что жители первой деревни всегда говорят правду, жители третьей деревни всегда лгут, а в ответах чередовцев ложь чередуется с правдой (первый ответ чередовца может оказаться как правдой, так и ложью).

Как-то раз приезжий встретился с пятью островитянами, которым он по характерным чертам их внешности мысленно дал следующие прозвища: Косоглаз, Борода, Курнос, Алощек и Длинноух. Желая узнать, в каких деревнях эти люди живут, приезжий попросил первых двух рассказать ему по порядку, кто из какой деревни родом. Косоглаз ответил, что Борода — чередовец, Курнос правдовец, Алощек также родом из Чередова, а Длинноух лгуновец. Борода, однако, утверждал, что Косоглаз чередовец, Курнос из Лгунова, Алощек праздовец, а Длинноух из Чередова. Можно ли из полученных ответов сделать верные выводы о родной деревне каждого из пяти островетян?

ЮНЫМ МЫСЛИТЕЛЯМ

В Клубе Юных Мыслителей на вступительном экзамене каждому поступающему была прежде всего вручена записка следующего содержания:

ИМНОУРТДЕНМНДИИДОНО ВТНЛВАМЕРЕЕКТЕСИ

причем было сказано, что теперь каждый поступающий должен сам знать, что ему для продолжения экзамена надо делать. Какое указание давала записка?

ЗАДАЧНИК КВАНТА

Задачи

М186 — М190; Ф198 — Ф202

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 30 марта 1973 года по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», M186, M187 или «... Ф200».

Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Оригинальные задачи, предлагаемые для публикации, присылайте вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

M186. Найдите все решения уравнения

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$$

в целых числа, отличных от 1.

В. Слепченко, ученик 10 класса

M187. На плоскости заданы две точки A и B. Найдите геометрическое место третьих вершин C треугольника ABC, у которого:

а) высота AA' равна стороне BC;
б) медиана AA_1 равна стороне AC;
в) медиана AA_1 равна стороне BC;
г) высота CC' равна медиане BB_1;
д) высота BB' равна медиане CC_1.

М. А. Квантов

M188. Между некоторыми из $2n$ городов установлено воздушное сообщение, причем каждый город связан не менее чем с n другими (беспосадочными рейсами). Докажите, что даже если отменить любые $n-1$ рейсов, то все равно из любого города можно добраться в любой другой на самолетах (с пересадками). Укажите все случаи, когда такая «связность» нарушается при отмене n рейсов.

А. К. Кельманс

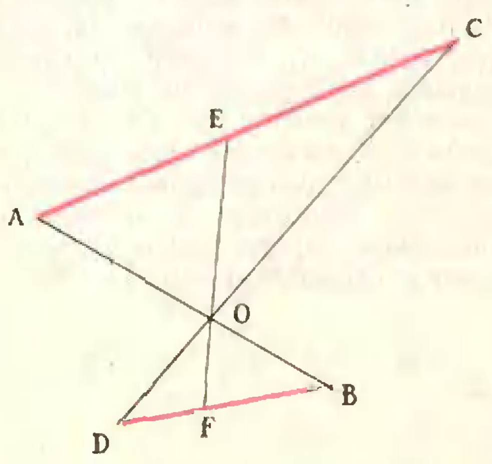


Рис. 1.

M189. Три отрезка AB, EF и CD проходят через одну точку O, причем точка E лежит на отрезке AC, а точка F — на отрезке BD. Докажите, что EF меньше хотя бы одного из двух отрезков — AB или CD (рис. 1).

Д. Ю. Григорьев

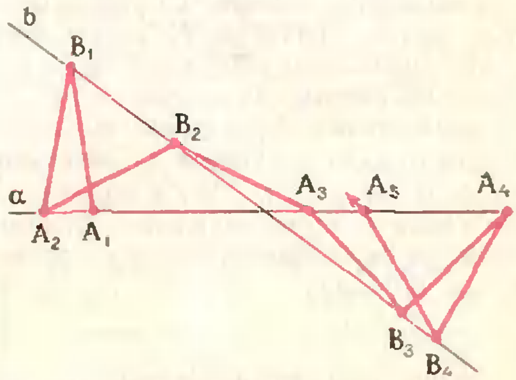


Рис. 2.

M190*. На плоскости даны две прямые a и b. В точке A_1, находящейся на прямой a на расстоянии меньше 1 от прямой b, сидит блоха. Затем блоха последовательно прыгает в точки B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, ..., руководствуясь следующими правилами (рис. 2):

(1) точки $A_1, A_2, A_3, \ldots$ лежат на прямой a, точки $B_1, B_2, B_3, \ldots$ — на прямой b;

(2) $A_1B_1 = B_1A_2 = A_2B_2 = B_2A_3 = A_3B_3 = \ldots = 1$;

(3) точка A_n не совпадает с A_{n+1}, кроме случая, когда $A_nB_n \perp a$ (и, аналогично, B_n совпадает с B_{n+1}, только если $B_nA_{n+1} \perp b$). (Нетрудно видеть, что условиями (1) — (3) последовательность прыжков, начиная с B_1A_2, определяется однозначно.)

Докажите, что если угол между прямыми a и b измеряется рациональным числом градусов, то путь блохи будет периодическим, то есть в некоторый момент она попадет в начальную точку A_1 и затем будет последовательно проходить те же самые точки $B_2, A_2, B_3, \ldots$, как в начале пути, а если — иррациональным числом, то блоха не попадет ни в какую точку более двух раз.

Ф198. Конькобежец решил затормозить и свел вместе пятки. Хотя это и трудно (почему?), но конькобежцу удается удерживать пятки вместе. Как он будет двигаться дальше?

Г. Л. Коткин

Ф199. Нейтрон легко проходит через слой свинца, но задерживается в таком же слое парафина, воды или другого соединения, содержащего водород. Объясните, почему.

П. Л. Капица.

Ф200. В результате импульсного разряда конденсатора через разреженный гелий происходит нагревание газа до температуры T. Оценить величину T, если напряжение на конденсаторе $U = 30$ *кв*, емкость конденсатора $C = 18$ *мкф* и газ занимает объем 10 *л* при давлении 10^{-2} *мм рт. ст.*

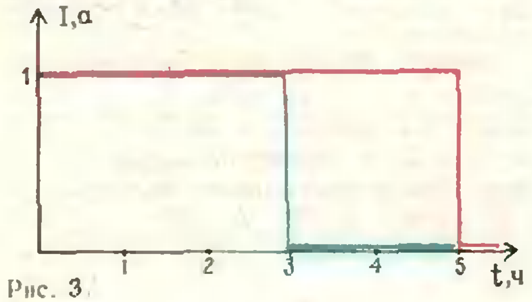


Рис. 3

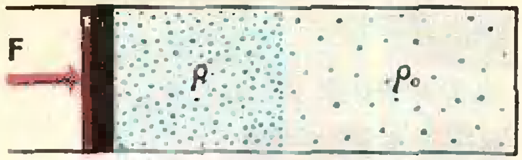


Рис. 4.

Ф201. Если к некоторому сопротивлению подключить аккумулятор, то зависимость тока в цепи от времени будет такой, как показано на рисунке 3 красной линией. Если к этому же сопротивлению подключить другой такой же аккумулятор, но частично разряженный, то зависимость тока от времени будет такой, как показано на рисунке 3 синей линией. Если оба аккумулятора подключить к тому же сопротивлению вместе, соединив их параллельно, то вначале по цепи будет идти ток 1,5 *а*. Нарисуйте график дальнейшего изменения тока в цепи со временем.

Внутреннее сопротивление аккумулятора в процессе разрядки не меняется.

Ф202. Труба радиуса r заполнена пористым веществом плотности ρ_0. Невесомый поршень, на который действует постоянная сила F, вдвигаясь в трубу, уплотняет вещество до плотности ρ (рис. 4). С какой скоростью движется поршень, если уплотнение происходит скачком, то есть в трубе как бы перемещается с некоторой скоростью поверхность, справа от которой плотность вещества ρ_0, а слева ρ? В начальный момент поверхность совпадает с плоскостью поршня.

Решения задач

М146—М150; Ф164—Ф169

М146. *а) В вершинах правильного 7-угольника расставлены черные и белые фишки. Докажите, что найдутся три фишки одного цвета, лежащие в вершинах равнобедренного треугольника.*
б) Верно ли аналогичное утверждение для 8-угольника?
в) Выясните, для каких правильных n-угольников аналогичное утверждение верно, а для каких — нет.

а) Ясно, что среди семи вершин обязательно найдутся две соседние вершины с фишками одного цвета (если бы цвета чередовались, то многоугольник имел бы четное число сторон).

Обозначим эти вершины через A_1 и A_2. Можно считать, что стоящие в них фишки — белые (рис. 1). Заметим, что существуют три вершины, каждая из которых образует вместе с вершинами A_1 и A_2 равнобедренный треугольник; обозначим их через A_0, A_3 и B. Если в одной из них стоит белая фишка, то соответствующий треугольник — $A_0A_1A_2$, — $A_3A_1A_2$ или BA_1A_2 — искомый. Если же во всех трех этих вершинах черные фишки, то треугольник A_0A_3B — искомый.

То же самое рассуждение годится для любого правильного n-угольника с нечетным $n \geqslant 5$ (в роли A_0, A_3 выступают соседние с A_1 и A_2 вершины, в роли B — середина большей из дуг A_1A_2).

б) Для $n = 8$ утверждение неверно. Пример расстановки черных и белых фишек, при которой никакие три фишки одного цвета не располагаются в вершинах равнобедренного треугольника, изображен на рисунке 2, *а*.

Еще легче построить аналогичные примеры для $n = 3$, 4 и 6 (рис. 2, *б*, *в*, *г*); возможны и другие примеры.

в) Ответ: утверждение верно для $n = 5$, $n = 7$ и $n \geqslant 9$.

Примеры, изображенные на рисунке 2, показывают, что утверждение неверно для $n = 3, 4, 6, 8$. Выше мы доказали, что оно верно для $n = 5$, $n = 7$ и для больших нечетных n. Докажем, что оно верно для всех $n \geqslant 9$.

Предположим, что для некоторой расстановки фишек в вершинах правильного n-угольника утверждение неверно. Прежде всего, ясно, что где-то найдутся две соседние вершины с фишками одного цвета, — если цвета фишек чередуются, то уже среди пяти последовательных вершин встретится требуемый равнобедренный треугольник. Можно считать, что это — вершины A_4 и A_5 с фишками белого цвета (рис. 3). Тогда последовательно

Рассматриваем	Делаем вывод
$A_3A_4A_5$ и $A_4A_5A_6$	A_3 и A_6 — черные
$A_3A_6A_9$	A_9 — белая
$A_1A_5A_9$ и $A_5A_7A_9$	A_1 и A_7 — черные
$A_1A_2A_3$ и $A_6A_7A_8$	A_2 и A_8 — белые
$A_2A_5A_8$	противоречие

Можно показать, что верно и более сильное утверждение: *при любом разбиении множества* $\{1, 2, \ldots, 9\}$ *на два подмножества хотя бы в одном из подмножеств встретятся три числа, из которых одно равно полусумме двух других.* Мы доказали это ут-

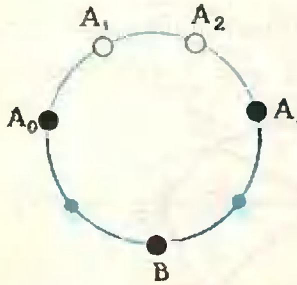


Рис. 1.

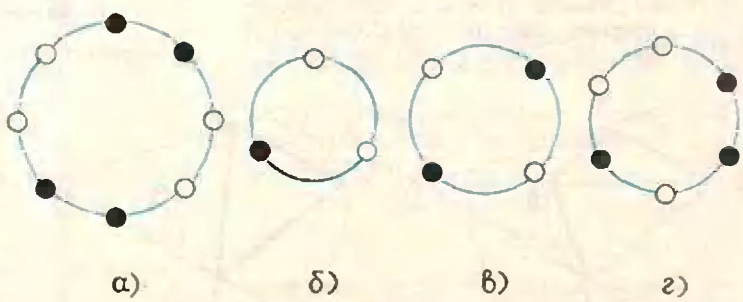


Рис. 2.

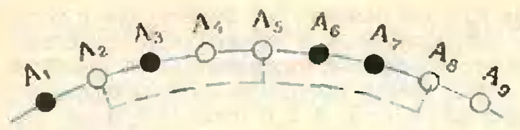


Рис. 3.

верждение при дополнительном предположении, что 4 и 5 принадлежат одному подмножеству. Другие случаи разбираются аналогично.

М147. *Докажите, что если четырехугольник ABCD, вписанный в окружность, таков, что касательные к окружности в точках A и C пересекаются на продолжении диагонали BD, то*
а) касательные в точках B и D пересекаются на продолжении диагонали AC;
б) биссектрисы внутренних углов A и C четырехугольника пересекаются на диагонали BD (а углов B и D — на AC).

а) Пусть A, B и C — три точки на окружности, K — точка пересечения касательных, проведенных в точках A и C. Найдем условие, определяющее положение точки D пересечения прямой BK с окружностью (рис. 4).

$\triangle ABK \backsim \triangle DAK$: угол K у этих треугольников общий, а $\sphericalangle BAK = \sphericalangle ADK$, поскольку каждый из них измеряется половиной дуги AB. Поэтому

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BK}{AK} = \frac{AK}{DK} \qquad (1)$$

(попутно мы доказали известную теорему: $AK^2 = BK \cdot KD$).

Точно так же $\triangle CBK \backsim \triangle DCK$, и поэтому

$$\frac{BC}{CD} = \frac{BK}{CK} = \frac{CK}{DK}. \qquad (2)$$

Правые части в (1) и (2) равны, потому что $AK = CK$, отсюда

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}. \qquad (3)$$

Заметим, что отношение AD/CD монотонно увеличивается при движении точки D по дуге окружности от A к C. Действительно, по теореме синусов, примененной к $\triangle ACD$ (рис. 5)

$$\frac{AD}{CD} = \frac{\sin \sphericalangle C}{\sin \sphericalangle A} = \frac{\sin(180^\circ - \sphericalangle D - \sphericalangle A)}{\sin \sphericalangle A} =$$
$$= \sin(180^\circ - \sphericalangle D) \cdot \operatorname{ctg} \sphericalangle A - \cos(180^\circ - \sphericalangle D);$$

здесь $180^\circ - \sphericalangle D$ — величина постоянная, $\sin(180^\circ - \sphericalangle D) > 0$, а $\operatorname{ctg} \sphericalangle A$ монотонно убывает при увеличении $\sphericalangle A$ от 0 до $180^\circ - \sphericalangle D$, то есть при движении точки D от C к A. Отсюда следует, что условию (3) соответствует одно определенное положение точки D (при заданных A, B и C).

Таким образом, условие (3) не только необходимо, но и д о с т а т о ч н о для того, чтобы точки B, D и точка пересечения касательных, построенных в точках A и C, лежали на одной прямой.

Точно так же можно доказать, что условие, необходимое и достаточное для того, чтобы касательные, проведенные в точках B и D, пересекались на прямой AC, можно записать так:

$$\frac{BA}{DA} = \frac{BC}{DC}. \qquad (3')$$

Но условия (3) и (3′), очевидно, совпадают: и (3), и (3′) можно записать в симметричном виде:

$$AB \cdot CD = BC \cdot AD.$$

Это делает утверждение задачи а) очевидным.

б) Пусть L_1 — точка пересечения биссектрисы угла A треугольника BAD с прямой BD (рис. 6). Тогда, как известно,

$$\frac{BL_1}{L_1D} = \frac{AB}{AD}.$$

Аналогично, если L_2 — точка пересечения биссектрисы угла C с BD, то

$$\frac{BL_2}{L_2D} = \frac{BC}{CD}.$$

Поэтому из условия (3) следует, что

$$\frac{BL_1}{L_1D} = \frac{BL_2}{L_2D}.$$

Но каждому значению отношения $\frac{BL}{DL}$ соответствует одна точка L на отрезке BD,

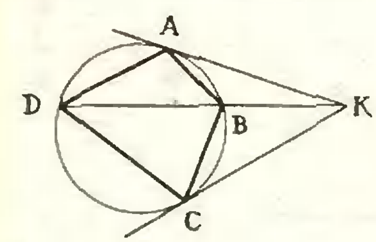


Рис. 4.

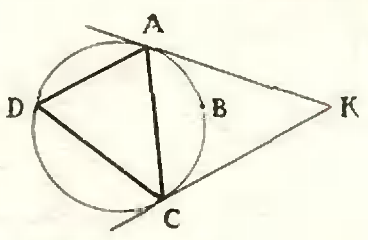


Рис. 5.

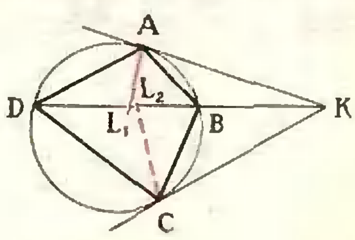


Рис. 6.

поскольку при движении точки L от B к D эта величина монотонно возрастает. Поэтому точки L_1 и L_2 совпадают.

М148. *Последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ определяется следующими условиями: $x_0 = 1$, $x_1 = \lambda$, для любого $n > 1$*

$$(\alpha+\beta)^n x_n = \alpha^n x_n x_0 + \alpha^{n-1} \beta x_{n-1} x_1 + \\ + \alpha^{n-2} \beta^2 x_{n-2} x_2 + \ldots + \beta^n x_0 x_n.$$

Здесь λ, α, β — заданные положительные числа. Найдите x_n и выясните, при каком n величина x_n будет наибольшей.

Выпишем равенства, определяющие x_n, для нескольких первых значений $n>1$ (пользуясь условием $x_0 = 1$):

$$[(\alpha+\beta)^2 - \alpha^2 - \beta^2]\, x_2 = \alpha\beta x_1^2,$$

$$[(\alpha+\beta)^3 - \alpha^3 - \beta^3]\, x_3 = \alpha^2\beta x_2 x_1 + \alpha\beta^2 x_1 x_2,$$

$$[(\alpha+\beta)^4 - \alpha^4 - \beta^4]\, x_4 = \\ = \alpha^3\beta x_3 x_1 + \alpha^2\beta^2 x_2^2 + \alpha\beta^3 x_1 x_3.$$

Отсюда находим (пользуясь условием $x_1 = \lambda$)

$$x_2 = \frac{\lambda^2}{2}, \qquad x_3 = \frac{\lambda^3}{2\cdot 3}, \qquad x_4 = \frac{\lambda^4}{2\cdot 3\cdot 4}.$$

Естественно предположить, что

$$x_n = \frac{\lambda^n}{n!},$$

где $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$. Докажем по индукции, что это действительно так для всех n (если считать, как это принято, что $0! = 1! = 1$, то формула $x_n = \frac{\lambda^n}{n!}$ верна для $n = 0$ и $n = 1$). Мы можем считать известным, что $x_k = \frac{\lambda^k}{k!}$ для всех $k \leqslant n-1$. Тогда из равенств

$$[(\alpha+\beta)^n - \alpha^n - \beta^n]\, x_n = \\ = \sum_{k=1}^{k=n-1} \alpha^{n-k}\beta^k x_{n-k} x_k = \\ = \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{\alpha^{n-k}\beta^k\lambda^{n-k}\lambda^k}{(n-k)!\,k!} = \\ = \frac{\lambda^n}{n!}\sum_{k=1}^{k=n-1} C_n^k \alpha^{n-k}\beta^k = \\ = [(\alpha+\beta)^n - \alpha^n - \beta^n]\,\frac{\lambda^n}{n!}$$

следует, что $x_n = \frac{\lambda^n}{n!}$, поскольку $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ и общий множитель левой и правой частей положителен при $n > 1$.

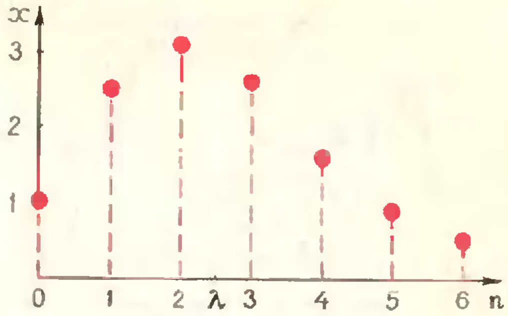


Рис. 7.

Мы использовали выше формулу

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

для коэффициентов разложения бинома

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k a^{n-k} b^k,$$

о которой рассказано в статье В. Н. Вагутена (см. стр. 27—34).

Выясним, при каком n величина x_n наибольшая. Неравенство

$$\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \leqslant \frac{\lambda^n}{n!}$$

эквивалентно неравенству $n \leqslant \lambda$. Таким образом, при переходе от $n-1$ к n число x_n увеличивается, если $n<\lambda$, и уменьшается, если $n > \lambda$. Отсюда мы получаем ответ на вопрос задачи: наибольшее значение x_n принимает при $n = [\lambda]$ ($[\lambda]$ — наибольшее целое число, не превосходящее λ); если λ — целое число, то $x_{[\lambda]-1} = x_{[\lambda]}$ — два наибольших числа последовательности x_n.

На рисунке 7 в качестве иллюстрации приведен график последовательности $n \to x_n$ для $\lambda = 2{,}5$.

М149. *Пусть O — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$. Докажите, что*

а) если равны периметры треугольников ABC, BCD, CDA и DAB, то $ABCD$ — прямоугольник;

б) если равны периметры треугольников ABO, BCO, CDO и DAO, то $ACBD$ — ромб.

а) Обозначим стороны и диагонали четырехугольника, как показано на рис. 8. Из равенств

$$x_1 + x_2 + y_1 = x_3 + x_4 + y_1,$$

$$x_2 + x_3 + y_2 = x_1 + x_4 + y_2,$$

складывая их друг с другом (и вычитая одно из другого), находим: $x_2 = x_4$, $x_1 = x_3$. Следовательно, $ABCD$ — параллелограмм.

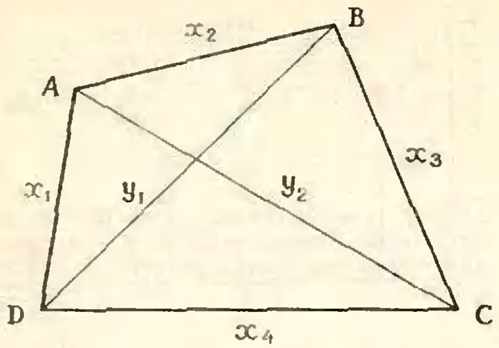


Рис. 8.

Из равенства

$$x_1+x_2+y_1=x_2+x_3+y_2=x_2+x_1+y_2$$

теперь следует, что $y_1=y_2$, то есть $ABCD$ — прямоугольник.

б) Выберем на каждой диагонали AC, BD больший из отрезков, на которой она делится точкой O. Можно считать, изменив, если нужно, обозначения, что $AO \geq OC$, $BO \geq OD$ (рис. 9). Тогда периметр треугольника AOB не меньше периметра треугольника COD, причем равенство возможно, только если $AO=OC$ и $BO=OD$. (Для того чтобы убедиться в этом, достаточно построить треугольник $A'OB'$, симметричный треугольнику AOB относительно точки O: $A'OB'$ объемлет COD.) Но если $AO=OC$ и $BO=OD$, то из равенства периметров сразу следует, что $AB=BC=CD=DA$, то есть $ABCD$ — ромб.

Н. Б. Васильев

М150. *Из чисел 1, 2, ..., k составляются всевозможные наборы $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ длины n (легко видеть, что их k^n). Выбраны два подмножества P и Q таких наборов (один и тот же набор может входить и в P, и в Q). Известно, что если взять произвольный набор $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ из P и произвольный набор $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ из Q, то они будут совпадать хотя бы в одном месте (то есть $p_i=q_i$ для некоторого i). Тогда либо в P, либо в Q не более, чем k^{n-1} наборов.*

Докажите это утверждение
а) для $k=2$ и любого n;
б) для $n=1, 2, 3$ и любого k;
в) для произвольных $k \geq 2$ и $n \geq 1$.

Попробуйте найти другие ограничения на количество элементов в подмножествах P и Q, связанных таким условием.

а) $k=2$. Набор $\bar{d}$ назовем противоположным набору d, если $\bar{d}$ получен из d заменой всех 1 на 2, а 2 на 1. Обозначим через $\overline{M}$ множество всех наборов, противоположных наборам из M. Наборы d и $\bar{d}$ ни на одном месте не совпадают. Поэтому, если d входит в P, то $\bar{d}$ не может входить в Q. Значит, $\overline{P}$ и Q не содержат одинаковых наборов. Поэтому либо в $\overline{P}$, либо в Q не более половины всех наборов. Но в P и в $\overline{P}$ одинаковое количество наборов. Значит, либо в P, либо в Q не более половины всех наборов, то есть не более чем 2^{n-1} наборов.

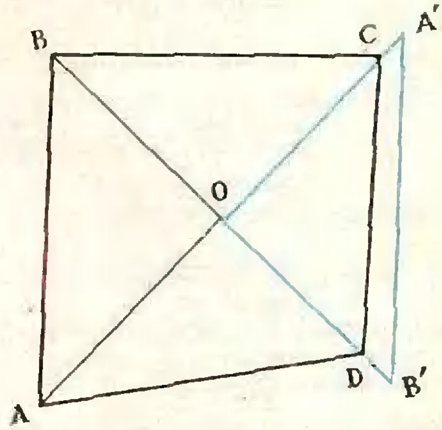


Рис. 9.

б) Для $n=1$ утверждение очевидно.

Для $n=2$ задачу можно сформулировать так: k^2 точек расставлены на плоскости в узлах квадратной решетки $(k-1) \times (k-1)$ (рис. 10). Некоторые из этих точек нужно закрасить красным, некоторые — синим цветом так, чтобы любая из красных и любая из синих точек лежали либо в одном столбце, либо в одной строке (то есть ситуация в) невозможна). Одну точку можно закрашивать в оба цвета (случай г). Нужно

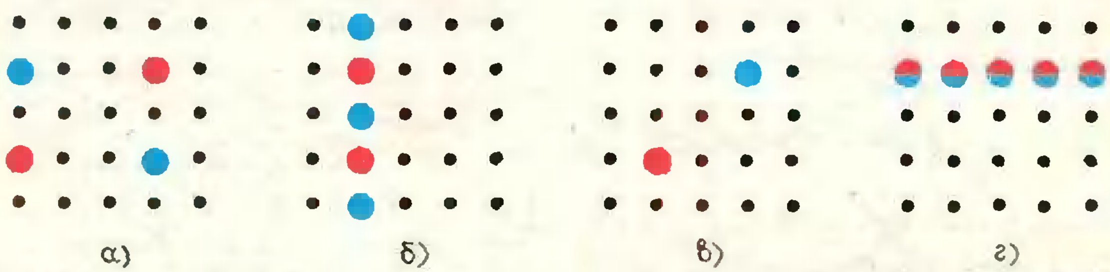


Рис. 10.

доказать, что всегда точек какого-то одного цвета не более k. Рисунки а) и б) соответствуют следующим двум случаям.

1) *В подмножестве P есть два таких набора (a_1, a_2) и (b_1, b_2), что $a_1 \neq b_1$ и $a_2 \neq b_2$.*

Тогда в Q могут входить только 2 набора (a_1, b_2) и (b_1, a_2). Но $2 \leqslant k$, и утверждение верно.

2) *В подмножестве P любые два набора совпадают в одном месте (для определенности — в первом).*

Тогда любой набор из P имеет вид (a, b), где a — фиксировано. Но таких наборов не более k.

Подобным, но значительно более длинным рассмотрением случаев можно доказать утверждение и при $n = 3$. Рассмотрим сразу общий случай.

в) Пусть P содержит p наборов, Q содержит q наборов. Докажем индукцией по n при фиксированном k более сильное утверждение: если $p \geqslant k^{n-1}$, *то при выполнении условий задачи* $p + (k-1)q \leqslant k^n$. Отсюда будет следовать, что если $p \geqslant k^{n-1}$, то $q \leqslant k^{n-1}$.

Если $n = 1$, то по условию $p \geqslant 1$. Если $p = 1$, то $q \leqslant 1$. Если $2 \leqslant p \leqslant k$, то $q = 0$. В любом случае $p + (k-1)q \leqslant k$.

Пусть для $n = s$ утверждение доказано. Рассмотрим $n = s + 1$. Пусть $p \geqslant k^s$. Надо доказать, что $p + (k-1)q \leqslant k^{s+1}$. Обозначим через P_1 множество всех наборов из P, оканчивающихся цифрой 1. Зачеркнув в наборах из P_1 последнюю цифру 1, мы получим множество P_1' наборов длины s. Число наборов в P_1 (столько же наборов и в P_1') обозначим через p_1. Точно так же рассмотрим множества $P_2, \ldots, P_k$ (наборов, оканчивающихся на $2, \ldots, k$); $P_2', \ldots, P_k'$; $Q_1, \ldots, Q_k$; $Q_1', \ldots, Q_k'$ и числа $p_2, \ldots, p_k$; $q_1, \ldots, q_k$. По условию любые 2 набора из P_r и Q_t совпадают хотя бы в одном месте, но если $r \neq t$, то в последнем разряде они совпадать не могут, поэтому любые 2 набора из P_r' и Q_t' при $r \neq t$ совпадают хотя бы в одном месте. Так как $p \geqslant k^s$, то $p_i \geqslant k^{s-1}$, хотя бы для одного p_i (так как набор P разбит на k наборов). Можно считать, что

$$p_1 \geqslant k^{s-1}, \ldots, p_m \geqslant k^{s-1},$$
$$p_{m+1} < k^{s-1}, \ldots, p_k < k^{s-1}. \quad (4)$$

Рассмотрим 2 случая:

1) $m = 1$, то есть

$$p_1 \geqslant k^{s-1}, \quad p_2 < k^{s-1}, \ldots, p_k < k^{s-1}. \quad (5)$$

Из сказанного выше о P_r' и Q_t' и предположения индукции вытекают следующие неравенства:

$$\begin{cases} p_1 + (k-1)q_2 \leqslant k^s, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_1 + (k-1)q_k \leqslant k^s. \end{cases} \quad (6)$$

Из этих неравенств следует, что

$$q_2 \leqslant k^{s-1}, \ldots, q_k \leqslant k^{s-1}, \quad (7)$$

так как $p_1 \geqslant k^{s-1}$. Сложив неравенства (6) и разделив полученное неравенство на $k-1$, получим

$$p_1 + q_2 + \cdots + q_k \leqslant k^s. \quad (8)$$

Если $q_1 \geqslant k^{s-1}$, то точно так же получим

$$q_1 + p_2 + \cdots + p_k \leqslant k^s. \quad (9)$$

Складывая (8) и (9), получим $p + q \leqslant 2 \cdot k^s$, а так как $p \geqslant k^s$, то

$$q \leqslant k^s. \quad (10)$$

Если же $q_1 < k^s$, то неравенства (9) и (10) тем более выполняются ввиду неравенств (5) и (7). В обоих случаях, складывая (8) и (9) и прибавляя (10), умноженное на $k-2$, получим $p + q + (k-2)q \leqslant 2 \cdot k^s + (k-2)k^s$, или $p + (k-1)q \leqslant k^{s+1}$.

2) $m > 1$. Тогда, так же как и в случае 1), получим

$$\begin{cases} p_1 + q_2 + \cdots + q_k \leqslant k^s, \\ p_2 + q_1 + q_3 + \cdots + q_k \leqslant k^s, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_m + q_1 + \cdots + q_{m-1} + q_{m+1} + \\ \qquad + \cdots + q_k \leqslant k^s \end{cases} \quad (11)$$

и

$$q_1 \leqslant k^{s-1}, \quad q_2 \leqslant k^{s-1}, \ldots, q_k \leqslant k^{s-1}. \quad (12)$$

Складывая неравенства (11), получим

$$p_1 + \cdots + p_m + (m-1)(q_1 + \cdots + q_m) + \\ + m(q_{m+1} + \cdots + q_k) \leqslant m \cdot k^s. \quad (13)$$

Прибавляя к (13) неравенства из (4) для $p_{m+1}, \ldots, p_k$ и неравенства (12), первые m из которых умножены на $k-m$, а остальные на $k-m-1$, получим $p_1 + \cdots + p_k + (k-1)(q_1 + \cdots + q_m) \leqslant m \cdot k^s + (k-m) \times \times k^{s-1} + m(k-m)k^{s-1} + (k-m)(k-m-1)k^{s-1} = mk^s + (k-m)k^s = k^{s+1}$, то есть

$$p + (k-1)q \leqslant k^{s+1},$$

что и требовалось доказать

Б. В. Алексеев

Большинству читателей, которые присылали нам в 1971 году решения задач из «Задачника «Кванта», мы направили письма, в которых указано, какие задачи решены верно, где допущены ошибки. Ниже мы приводим список тех, кто прислал правильные и полные решения некоторых из задач

M141 — M150. Жирная цифра после фамилии означает последнюю цифру номера задачи.

С. Абрамов (Москва) **6**; *Н. Ажищев* (п. Литовка Львовской обл.) **1**; *И. Акулич* (Хмельницкий) **2, 9**; *Р. Али-заде* (п. Джербанльский) **2, 6**; *А. Агасян* (Ереван) **2**; *А. Асташов* (Львов) **1—3, 5,6, 8—0**; *Р. Бадалян* (г. Кафан) **2**; *Ю. Бакши* (Москва) **1, 3, 5, 6**; *П. Баньковский* (Уральск) **6—9**; *А. Баранов* (Семиозерье) **6**; *А. Борисов* (Кабардино-Балкарская АССР) **2**; *О. Бегларян* (Сисиан) **2, 6, 9**; *К. Безденежных* (Н. Тагил) **6**; *С. Белолипецкий* (Киржач) **2, 7**; *А. Блинов* (Абакан) **2**; *А. Блох* (Харьков) **2—6, 8**; *А. Бочаров* (Николаев) **2**; *А. Вальков* (Ташкент) **1, 5**; *С. Вилкомир* (Горьковская обл.) **3**; *А. Войновский* (Баку) **9**; *А. Волков* (Москва) **1, 2**; *А. Волков* (Челябинск) **2**; *Ю. Вороновский* (Днепропетровск) **2**; *Г. Высоцкая* (Красноярск) **1—3, 6**; *И.* и *М. Гандельсман* (Ленинград) **2, 3, 6**; *И. Гатаулин* (Москва) **2**; *Л. Генгринович* (Ташкент) **1, 2**; *С. Гладков* (Пучеж) **2**; *А. Говш* (Черисе Московской обл.) **1**; *А. Гордиенко* (с. Полтавченское) **1, 2, 6**; *И. Готман* (Арзамас **9**; *А. Григорьева* (Грозный) **2**; *А. Григорян* (Баку) **1, 3, 5—8**; *С. Григорян* (Ереван) **1, 2, 5—9**; *В. Гринман* (Москва) **5**; *Е. Гурвич* (Ташкент) **1, 2**; *Е. Гусев* (Павлоград) **2, 3**; *Г. Данилов* (Магадан) **6, 9**; *Г. Дорман* (Магнитогорск) **1—3, 5**; *В. Дремучев* (Горький) **2**; *С. Дужин* (Могилев) **1, 5, 6**; *Э. Дяченко* (г. Андрушевка Житомирской обл.) **2, 8**; *В. Евдокимов* (Ярославль) **9**; *Е. Еремин* (Москва) **6, 8**; *А. Жданов* (Новошахтинск) **6**; *А. Жданов* (Славянск-на-Кубани) **2, 6**; *В. Железный* (Ленинград) **2**; *А. Журавлев* (Москва) **6**; *Е. Зайцев* (Москва) **5**; *И. Захотей* (с. Карпинено Котовского р-на) **2**; *М. Звегинцев* (Верхне-Днепровск) **2**; *Т. Кабальнова* (Уфа) **2**; *М. Кауль* (Фрунзе) **1, 2, 6—9**; *Л. Книжнерман* (Москва) **8**; *В. Ковтунец* (Ровенская обл.) **6, 8, 9**; *О. Кокотова* (Брянск) **2**; *В. Колосов* (Киев) **7, 9**; *В. Котенев* (Курск) **9**; *В. Кравчук* (Брест) **2**; *К. Кудайберденов* (Алма-Ата) **8**; *Ю. Кузнецов* (Караганда) **6—9**; *А. Кукуш* (Киев) **1—3, 6, 9**; *М. Курдагулян* (ГССР) **9**; *С. Лахтуров* (Черкассы) **2**; *М. Левин* (Витебск) **1, 9**; *М. Лифшиц* (Балашиха) **6**; *Т. Локотом* (Одесса) **7, 9**; *Г. Лутингер* (Черновцы) **2**; *С. Мазуренко* (Минск) **6, 9**; *А. Макаричев* (Львов) **2, 6—9**; *В. Макеев* (Ленинград) **3, 5, 6, 8, 9**; *Г. Малинецкий* (Уфа) **2**; *Б. Марьяновский* (Винница) **6, 8**; *К. Нивников* (Ярославская обл.) **1, 2, 8**; *В. Никифоров* (Чебоксары) **2, 3**; *А. Николаев* (Москва) **1—3, 5**; *Е. Овчинникова* (Североуральск) **2**; *Е. Онегин* (Скопин) **2**; *В. Панарин* (Красноярск) **6**; *И. Пантелеев* (Жуковский) **5**; *А. Папин* (Гомель) **9**; *П. Парамонов* (Волгоградская обл.) **1, 2, 6, 7, 9**; *В. Пекайте* (Варняй) **6**; *А. Печковский* (Москва) **1—3, 5—0**; *А. Питиков* (Пенза) **2**; *П. Полонский* (Москва) **6**; *В. Попов* (с. Октябрьское Ивановской обл.) **2**; *А. Пригода* (Караганда) **2**; *Л. Пугач* (Днепропетровск) **1—3; 5**; *Д. Рогозкин* (Москва) **3**; *С. Родионов* (Саратов) **1, 2, 5**; *Д. Рудицер* (Харьков) **1, 2, 5, 6, 8, 9**; *Ю. Сайфаль* (Давид-Городок) **2**; *М. Сапир* (Свердловск) **1—3, 6**; *В. Сац* (Киев) **2, 3**; *М. Селиверстова* (Московская обл.) **2**; *Д. Сергеев* (Воронеж) **6, 9**; *Р. Сирота* (Харьков) **2, 3, 5, 6**; *А. Скирко* (Политотдельское Волгоградской обл.) **2**; *С. Скоков* (дер. Сковки) **2**; *С. Слепнев* (Горький) **1, 2**; *В. Слепой* (Фрунзе) **1, 7**; *Ш. Слепой* (Черновцы) **6, 8**; *Б. Слепченко* (Челябинск) **1, 2, 6—9**; *А. Слесаренко* (Рубцовск) **2**; *А. Слинкин* (Москва) **1, 3, 5, 8**; *М. Смеркалов* (Рыбинск) **6**; *В. Смирнов* (Белохово) **6**; *М. Спиваковский* (Москва) **2, 3**; *А. Сурков* (Вятские Поляны) **2**; *П. Сухов* (Саратов) **1, 2, 6**; *А. Ткач* (Каменец-Подольский) **2**; *А. Тужилин* (Москва) **6, 7, 9**; *Э. Туркевич* (Черновцы) **1—3, 5—9**; *И. Файнштейн* (Херсон) **2, 3, 6**; *М. Французов* (Никель) **6, 9**; *С. Цанава* (Тбилиси) **8**; *Н. Чернов* (Кривой Рог) **1—3, 5—9**; *Арк. Черняк* (Минск) **1—3**; *В. Чертков* (Киев) **6**; *Е. Чесноков* (Ивановская обл.) **2, 6**; *А. Шамардин* (Воронеж) **2, 3; 5**; *В. Шевалдин* (Свердловск) **2**; *А. Шерстюк* (Николаев) **1—3, 5, 8**; *В. Шрейдер* (с. Михайловка Кустанайской обл.) **2**; *Н. Щербина* (Днепропетровск) **2, 5, 6, 8, 9**; *Р. Юлмухаметов* (Иткулово БАССР) **6**; *Б. Юсин* (Москва), **2, 3**.

Ю. П. Лысов

Ф164. *Кубик из пенопласта массой $M = 100$ г лежит на горизонтальной подставке. Высота кубика равна $a = 10$ см. Снизу кубик пробивает вертикально летящая пуля массой $m = 10$ г (рис. 11). Скорость пули при входе в кубик $v_1 = 100$ м/с, при вылете — $v_2 = 95$ м/с. Подпрыгнет ли кубик?*

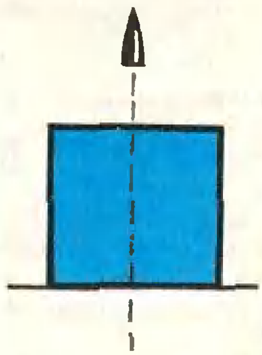


Рис. 11.

Кубик может подпрыгнуть, если сила F, действующая на него со стороны пули, окажется больше силы тяжести $Mg \approx 1$ н. Найдем эту силу. Для этого рассмотрим пулю. На нее со стороны кубика действует такая же по абсолютной величине, но противоположная по направлению сила и сила тяжести mg.

Скорость пули при пролете сквозь кубик меняется незначительно — ее изменение равно 5 *м/с*, что составляет всего 5% от скорости пули при входе в кубик. Поэтому можно считать, что сила F не зависит от скорости пули и постоянна.

Импульс пули при пролете сквозь кубик меняется благодаря действию на пулю двух сил — силы тяжести и силы трения. Если время, за которое пуля пролетает кубик, обозначить τ, то

$$m(v_1 - v_2) = (F + mg)\tau. \qquad (1)$$

Время τ найти нетрудно. Средняя скорость полета пули в кубике равна $v_{\text{ср}} = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$ (так как силы, действующие на кубик, постоянны, то постоянно и ускорение пули, а значит, скорость пули линейно меняется со временем). Размер кубика a. Это расстояние пуля пролетает за время

$$\tau = \frac{a}{v_{\text{ср}}} = \frac{2a}{v_1 + v_2} \approx 10^{-3} c.$$

Подставив это значение τ в формулу (1), найдем

$$F = \frac{m(v_1 - v_2) - mg\tau}{\tau} \approx 50 \text{ н}^{*)}.$$

Сила F больше силы тяжести, которая действует на кубик. Следовательно, кубик подскочит.

Ф165. *Определить, во сколько раз изменится освещенность изображения Солнца, полученного плосковыпуклой линзой, если линзу разрезать по диаметру и сложить плоскими сторонами?*

Освещенность изображения E равна отношению светового потока Φ, проходящего через линзу, к площади изображения S. Отношение освещенностей для рассматриваемых двух случаев можно записать так:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\Phi_2/S_2}{\Phi_1/S_1} = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \cdot \frac{S_1}{S_2}.$$

Освещенность поверхностей линз в обоих случаях одна и та же. Поэтому отношение световых потоков $\dfrac{\Phi_2}{\Phi_1}$ равно отношению площадей линз — целой и разрезанной пополам. Это значит, что $\dfrac{\Phi_2}{\Phi_1} = \dfrac{1}{2}$.

Теперь найдем отношение площадей изображения.

Изображение Солнца лежит в фокальной плоскости линзы. Обозначим фокусное расстояние линзы F, а угол, под которым видно Солнце с Земли, α. Так как Солнце находится очень далеко от Земли, то можно считать, что из каждой точки Солнца на линзу попадает параллельный пучок лучей, собирающихся в фокальной плоскости линзы. Поэтому угол α — это угол между пучками лучей, идущих от крайних точек Солнца.

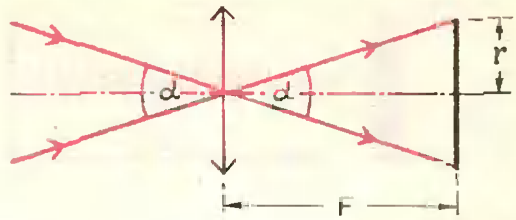


Рис. 12.

Из рисунка 12 видно, что радиус изображения Солнца равен

$$r = F \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Так как угол α мал ($\alpha \approx 30'$), то $\operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2} \approx \dfrac{\alpha}{2}$ и $r = F\dfrac{\alpha}{2}$.

Для того чтобы найти размер изображения во втором случае, нужно знать фокусное расстояние составной линзы.

Заметим, что оптическая сила двух сложенных вплотную тонких линз равна сумме их оптических сил. Действительно, луч, вышедший из фокуса первой линзы, становится после того, как он пройдет эту линзу, параллельным главной оптической оси системы и после прохождения второй линзы попадает в ее фокус. Обозначив фокусное расстояние сложной линзы F', мы можем согласно формуле линзы написать

$$\frac{1}{F'} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2}.$$

Но отсюда следует, что фокусное расстояние линзы, составленной из двух половинок плосковыпуклой линзы, вдвое меньше фокусного расстояния целой линзы. Благодаря этому радиус изображения Солнца во втором случае будет вдвое меньше, чем в первом случае, а площадь изображения — в четыре раза меньше, то есть $\dfrac{S_1}{S_2} = 4$.

Поэтому $\dfrac{E_2}{E_1} = \dfrac{\Phi_2}{\Phi_1} \cdot \dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{1}{2} \cdot 4 = 2$.

Следовательно, освещенность изображения Солнца увеличилась в два раза.

Ф166. *В расположенном горизонтально цилиндре с одной стороны от закрепленного поршня находится 1 моль идеального газа. В другой части цилиндра — вакуум. Пружина, расположенная между поршнем и стенкой цилиндра (рис. 13), находится в недефор-*

---

*) Величина $mg\tau$ много меньше изменения импульса пули, и ею можно было пренебречь. Это связано с очень малым временем взаимодействия пули с кубиком.

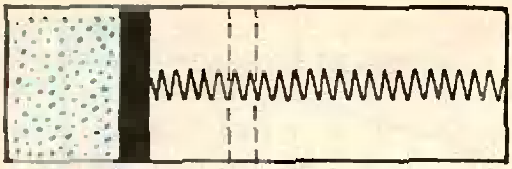


Рис. 13.

мированном состоянии. Цилиндр теплоизолирован от окружающей среды.

Поршень освобождают, и после установления равновесия объем, занимаемый газом, увеличится вдвое. Как изменится температура газа и его давление? Теплоемкости цилиндра, поршня и пружины пренебрежимо малы.

Согласно первому закону термодинамики количество тепла Q, сообщенного газу, равно сумме изменения внутренней энергии газа ΔU и совершенной им работы A:

$$Q = \Delta U + A. \qquad (1)$$

Но в данном случае сосуд теплоизолирован и $Q = 0$. Следовательно,

$$\Delta U + A = 0. \qquad (2)$$

То есть работа газа совершается за счет уменьшения его внутренней энергии, поэтому сразу можно сказать, что температура газа уменьшается.

Пусть вначале температура газа была T_1, давление P_1 и объем V_1, а после того, как поршень освободили и установилось равновесие, параметры газа стали соответственно T_2, P_2 и V_2, причем $V_2 = 2V_1$ (по условию).

Изменение внутренней энергии идеального газа пропорционально изменению температуры газа и равно

$$\Delta U = c_V (T_2 - T_1), \qquad (3)$$

где c_V — теплоемкость 1 моля газа при постоянном объеме.

Далее, работа, совершенная газом, равна изменению потенциальной энергии деформированной пружины:

$$A = \frac{kx^2}{2} \qquad (4)$$

(x — смещение поршня).

Выразим величину $\frac{kx^2}{2}$ через параметры газа.

Так как поршень после установления равновесия находится в покое, то сила упругости пружины $F = kx$ равна силе давления газа P_2S (S — площадь поверхности поршня):

$$kx = P_2S. \qquad (5)$$

Давление же газа связано с его температурой уравнением газового состояния. Для одного моля газа

$$P_2V_2 = RT_2. \qquad (6)$$

Так как объем газа при его расширении увеличился вдвое, а изменение объема газа равно Sx, то $V_2 = 2Sx$, и, следовательно,

$$2P_2Sx = RT_2. \qquad (7)$$

Принимая во внимание соотношения (5) и (7), можно записать

$$kx = \frac{RT_2}{2x} \qquad (8)$$

$$kx^2 = \frac{RT_2}{2}. \qquad (9)$$

Таким образом, работа, совершенная газом, равна

$$A = \frac{kx^2}{2} = \frac{RT_2}{4}. \qquad (10)$$

Подставим выражения (3) и (10) в равенство (2):

$$c_V (T_2 - T_1) + \frac{1}{4} RT_2 = 0.$$

Отсюда

$$T_2 = T_1 \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\frac{R}{c_V}}. \qquad (11)$$

Действительно, T_2 меньше T_1.

Теперь посмотрим как изменится давление газа. Согласно уравнению газового состояния первоначальное давление газа P_1, его объем $V_1 = \frac{V_2}{2}$ и температура T_1 были связаны формулой

$$P_1 \frac{V_2}{2} = RT_1.$$

Разделив это равенство на равенство (6), получим

$$\frac{P_1}{P_2} = 2\frac{T_1}{T_2} = 2\left(1 + \frac{1}{4}\frac{R}{c_V}\right),$$

$$P_2 = \frac{P_1}{2\left(1 + \frac{1}{4}\frac{R}{c_V}\right)}.$$

Давление тоже уменьшилось.

Ф167. *К выходу «черного ящика» подключен идеальный амперметр. Если ко входу «ящика» подключена батарея с э. д. с. E и внутренним сопротивлением r, то ток через амперметр ровно в 2 раза меньше, чем в том случае, когда ко входу ящика подключены две такие батареи, соединенные последовательно. Нарисовать простейшую возможную схему внутреннего устройства «черного ящика».*

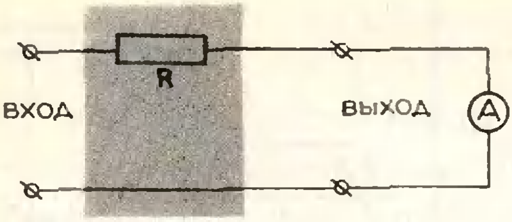


Рис. 14.

Схема внутри ящика не может состоять только из сопротивлений. Действительно, рассмотрим схему, показанную на рисунке 14, где R — сопротивление «ящика». При подключении одного источника через амперметр должен идти ток

$$I = \frac{E}{R+r}, \qquad (1)$$

а при подключении двух источников — ток $2I$, причем

$$2I = \frac{2E}{R+2r}. \qquad (2)$$

Уравнения (1) и (2) несовместимы. Они не имеют решения ни при каком R. Действительно, разделив уравнение (1) на (2), получим

$$\frac{1}{2} = \frac{R+2r}{2(R+r)}$$

или

$$R+r = R+2r,$$

а это невозможно.

Не спасает дела и подключение сопротивления параллельно входу или выходу ящика. (Покажите это!). Поэтому схема внутри ящика должна включать «активный» элемент — источник тока.

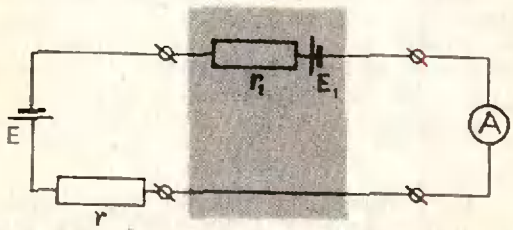


Рис. 15.

Рассмотрим одну из возможных схем, показанную на рисунке 15, и покажем, что она удовлетворяет условию задачи.

При подключении ко входу ящика одной батареи через амперметр пойдет ток

$$I_1 = \frac{E+E_1}{r+r_1},$$

а при подключении двух — ток

$$I_2 = \frac{2E+E_1}{2r+r_1}.$$

Так как $I_2 = 2I_1$, то

$$\frac{2(E+E_1)}{r+r_1} = \frac{2E+E_1}{2r+r_1}.$$

Отсюда найдем

$$E_1 = -E\frac{2r}{3r+r_1}.$$

Это равенство связывает между собой э. д. с. источника E_1 и его внутреннее сопротивление r_1. Знак «—» означает, что источник внутри «ящика» включен навстречу внешнему источнику.

Ф168. *Шестиугольный карандаш толкнули вдоль горизонтальной плоскости, как показано на рисунке 16. При каких значениях коэффициента трения α между карандашом и плоскостью карандаш будет скользить по плоскости, не вращаясь?*

На движущийся карандаш действуют со стороны плоскости две силы: сила нормальной реакции плоскости N и сила трения $F_{тр}$. Так как карандаш не должен перемещаться в вертикальном направлении, то сила N равна по абсолютной величине силе тяжести:

$$N = mg.$$

Сила же трения равна $F_{тр} = \alpha N = \alpha mg$.

Рассмотрим тот момент, когда карандаш начал катиться, поворачиваясь вокруг ребра A. В этом случае обе силы — и сила N и сила $F_{тр}$ — приложены к ребру A. Если равнодействующая R этих сил проходит ниже центра тяжести карандаша, то есть ниже

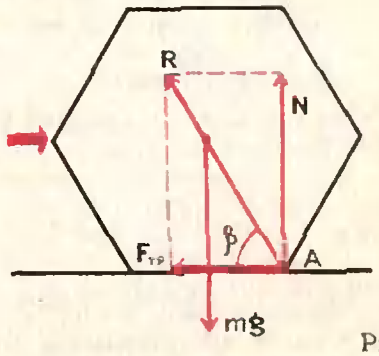


Рис. 16.

оси карандаша, то момент этой силы относительно оси карандаша вызывает вращение карандаша. Если же сила R проходит выше оси, то карандаш не будет вращаться.

Таким образом, условие того, что карандаш не будет вращаться:

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{N}{F_{тр}} > \mathrm{tg}\,60^\circ,$$

или

$$\frac{mg}{\alpha mg} > \sqrt{3}.$$

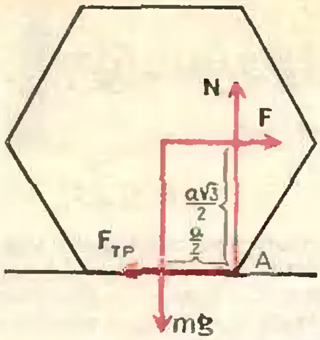


Рис. 17.

Отсюда находим, каким должен быть коэффициент трения:

$$\alpha < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Многие из читателей, приславших нам письма, решали эту задачу, пользуясь системой координат, связанной не с плоскостью, а с карандашом. Это неинерциальная система координат, и в ней на карандаш действует еще сила инерции

$$F_и = ma,$$

где a — ускорение карандаша относительно плоскости.

Так как это ускорение сообщает карандашу сила трения о плоскость $F_{тр} = \alpha mg$, то $a = \alpha g$, и поэтому $F_и = m\alpha g$. Карандаш вращается вокруг ребра A (мгновенная ось вращения), если момент силы $F_и$ относительно этой точки больше момента силы тяжести (рис. 17), то есть если

$$F_и \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2}\, amg, \text{ или}$$

$$\alpha mg\sqrt{3} > mg.$$

Отсюда получаем, что карандаш катится, не вращаясь, если

$$\alpha < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ф169. *Для дальней космической связи используется спутник объемом $V = 100$ м³, наполненный воздухом при нормальный условиях. Метеорит пробивает в его корпусе отверстие площадью $S = 1$ см². Оценить время, через которое давление внутри спутника изменится на 1%. Температуру газа считать неизменной. Универсальная газовая постоянная равна $8{,}3\cdot 10^3$ дж/град·кмоль.*

Для оценки можно принять, что каждая из молекул воздуха в спутнике может двигаться только вдоль одной из трех взаимно перпендикулярных осей, одна из которых перпендикулярна плоскости отверстия (такая упрощенная модель часто используется в кинетической теории газов). Тогда вдоль

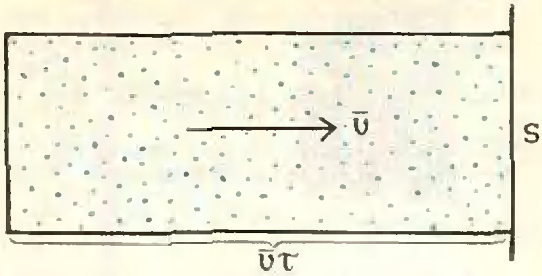


Рис. 18.

этой оси движется в любой момент 1/3 часть всех молекул воздуха в спутнике, причем скорость половины этих молекул, то есть 1/6 часть всех молекул, направлена к отверстию. Из них за время τ отверстия достигнут и вылетят из спутника те молекулы, которые находятся от отверстия на расстоянии $l = \bar{v}\tau$, то есть молекулы, находящиеся в начальный момент в объеме $V_0 = S\bar{v}\tau$, где $\bar{v}$ — средняя квадратичная скорость молекул (рис. 18). (Мы принимаем для оценки, что все молекулы движутся с одинаковыми по абсолютной величине скоростями, равными средней квадратичной скорости $\bar{v}$). Если число молекул в единице объема равно n, то всего за время τ из спутника вылетит

$$N = \frac{1}{6} S\bar{v}\tau n \text{ молекул.}$$

Поскольку часть молекул вылетела из спутника, изменится число молекул в единице объема. Это изменение есть

$$\Delta n = \frac{N}{V} = \frac{1}{6}\frac{S\bar{v}\tau n}{V}.$$

Это соотношение можно переписать в виде

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{1}{6}\frac{S\bar{v}\tau}{V}$$

или

$$\tau = 6\frac{\Delta n}{n}\frac{V}{S\bar{v}}.$$

По условию задачи температура воздуха в спутнике остается неизменной. Как следует из уравнения состояния идеального газа Клапейрона — Менделеева, в этом случае давление пропорционально плотности газа (а следовательно, и числу молекул в единице объема): $P \sim n$. Поэтому

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta n}{n} = 0{,}01.$$

Принимая во внимание выражение для средней квадратичной скорости молекул

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}},$$

можно теперь окончательно записать выражение для τ:

$$\tau = 6\frac{\Delta P}{P}\,\frac{V}{S}\sqrt{\frac{\mu}{3RT}},$$

здесь μ — молекулярная масса воздуха, R — универсальная газовая постоянная.

Подставляя в это выражение числовые значения, получим

$$\tau = 6\cdot 0{,}01\cdot\frac{100}{10^{-4}}\sqrt{\frac{29}{3\cdot 8{,}3\cdot 10^{3}\cdot 273}}\approx$$

$$\approx 120\ с = 2\ мин.$$

Примечание: при решении задачи было сделано несколько упрощающих предположений. В частности, не были учтены явления, связанные с соударениями молекул. Поэтому приведенное решение носит оценочный характер и результат является правильным только по порядку величины. (Строгое решение задачи выходит за рамки школьной программы.)

Редакция получила более 600 писем с решениями задач **Ф159—Ф169**. С задачей **Ф159** до конца не справился ни один читатель. Наиболее интересный подход к ее решению прислал *Е. Щукин* (Москва). Большинство читателей успешно справились с задачами **Ф160**, **Ф162**, **Ф164**. Правильные решения остальных задач прислали следующие читатели (жирная цифра после фамилии означает последнюю цифру номера задачи): *С. Алехин* (Липецк) **6**, **8**; *В. Адушкин* (Новороссийск) **7**; *А. Айдагулови* (д. Ново-Кутово Чекмагушевского р-на Башкирской АССР) **5**, **7—9**; *И. Акулич* (Хмельницкий УССР) **7**; *Н. Агищев* (Липовка Николаевского р-на Львовской обл.) **1**, **7**; *О. Агошина* (Москва) **5**, **7**; *С. Алексеев* (с. Бобрышево Присосненского р-на Курской обл.) **7—9**; *А. Бевеский* (Гомель) **3**, **5**, **6**; *А. Боржиевский* (Оршниг Хмельницкой обл.) **7—9**; *Л. Брагинский* (Фрунзе) **1**, **3**, **5**; *Т. Вайнтрауб* (Кишинев) **6**, **7**; *Д. Габриэлян* (Белая Калитва Ростовской обл.) **7**, **8**; *В. Гернет* (Москва) **3**, **6**, **7**; *Б. Герасимов* (Сарапул Удм. АССР) **6—8**; *Н. Голевко* (Прохладный) **8**, **9**; *Б. Грибовский* (Москва) **3**, **5**; *А. Григорян* (Баку) **3**, **6**, **7**; *В. Евсеев* (Новокузнецк) **6—9**; *В. Еремин* (Медногорск) **6**, **8**; *В. Зубов* (Новый Оскол) **7**; *В. Заборовский* (Ленинград) **7**; *В. Игнатьев* (Волгоград) **5**, **7—9**; *Ю. Ильиных* (Кропоткин Краснодарского края) **8**, **9**; *А. Израилевич* (Свердловск) **7**; *В. Канзюба* (Днепродзержинск) **3**, **8**; *С. Карпенко* (Киев) **7**; *В. Карпинский* (Свердловск) **1**, **3**, **5—7**; *М. Каневский* (Хуст Закарпатской обл. УССР) **8**; *Ю. Ковалев* (Ковров) **6**, **7**; *А. Карташов* (Москва) **3**, **6**, **7**; *В. Колосов* (Киев) **7—9**; *С. Корнилов* (Грозный) **3**, **6**, **7**; *Л. Коган* (Черновцы) **3**, **6—9**; *С. Корнеев* (Новокузнецк) **7—9**; *Ю. Костиков* (Мытищи Московской обл.) **8**, **9**; *В. Кривицкий* (Новокузнецк) **7—9**; *А. Кравченко* (Запорожье) **3**, **6**, **7**; *А. Кричетников* (Сумы) **8**, **9**; *Н. Кулешов* (Кременчуг) **7**; *О. Кузьмин* (Москва) **7**; *М. Курдачаян* (Ереван) **6**; *Г. Лутинген* (Черновцы) **3**, **5**, **6**; *А. Межерицкий* (Полтава) **6**, **7**; *С. Молотков* (Златоуст) **3**, **9**; *С. Мазуренко* (Минск) **6**, **7**; *А. Марков* (Орджоникидзе) **6—9**; *А. Марков* (Миасс) **8**; *Ю. Матвеев* (Альметьевск) **8**; *С. Могунов* (Ирбит Свердловской обл.) **8**, **9**; *А. Макарычев* (Львов) **7**; *Р. Нарников* (Орджоникидзе) **8**, **9**; *А. Насыров* (Булак-Башинск Хаджабадского р-на Андижанской обл. Уз. ССР) **8**; *Ю. Ншит* (Салават) **9**; *А. Николаев* (Москва) **3**; *В. Новиков* (Саратов) **7**; *И. Пантелеев* (Геленджик) **6**, **7**; *Ю. Полонский* (Зеленодольск) **3**, **6—8**; *Б. Потапкин* (Магнитогорск) **6**, **7**; *Н. Попов* (Ленинград) **7**, **8**; *И. Парнета* (Кременчуг) **6—9**; *М. Ригмант* (Магнитогорск) **3**, **6**, **7**; *В. Рекрут* (Киев) **6**, **8**, **9**; *Л. Рудицер* (Харьков) **1**, **6**, **7**; *А. Ролижен* (Фрязино Московской обл.) **3**, **6—9**; *Е. Румянцев* (Мариинск Кемеровской обл.) **7**; *Н. Румянцев* (Грозный) **3**; *Л. Степанов* (Тбилиси) **3**, **7**; *С. Слепнев* (Горький) **6**, **7**; *В. Спиридонов* (ст. Марьяновка Николаевской обл. УССР) **7**, **8**; *Ю. Смоленцев* (Ессентуки) **3**, **6**; *Ю. Сизов* (Минск) **7**; *С. Соколов* (Владимир) **6**, **7**; *О. Степанова* (Москва) **9**; *Симкин* (Москва) **3**, **7**; *Б. Трейгер* (Кировоград) **8**; *Ф. Тахватуллин* (Ташкент) **3**; *О. Торонов* (Оренбург) **7**; *О. Трунов* (Джамал-Абад Киргизской ССР) **3**, **6**, **7**; *Ю. Филиппов* (Пинск) **6**, **7**; *Н. Федин* (Омск) **7**; *Д. Фушман* (Черновцы) **3**, **6—9**; *Ф. Фазылов* (Оренбург) **7**; *С. Хоменко* (Подольск Московской обл.) **3**; *Н. Чернов* (Кривой Рог) **6**; *В. Шифрин* (Ростов-на-Дону) **3**, **6**, **8**; *А. Шерстюк* (Николаев) **3**, **5—7**; *Е. Шестаков* (д. Ровковичи Гомельской обл.) **5**, **6**; *Е. Щукин* (Днепропетровск) **3**, **7**, **8**; *Р. Ямолдинов* (Глазов Удм. АССР) **7**.

И. Ш. Слободецкий

Тригонометрические уравнения

М. И. Шабунин, С. В. Черемных

Практика приемных экзаменов в вузы показывает, что при решении тригонометрических уравнений абитуриенты нередко затрудняются в выборе способа решения.

В простых случаях способ решения однозначно определяется из вида уравнения. В данной статье авторы обращают внимание на вопросы, связанные с выбором наиболее рационального пути решения в тех случаях, когда таких путей несколько. Характер возникающих здесь затруднений и некоторые способы их преодоления иллюстрируются многочисленными примерами. Всюду в статье k, l, m, n — любые целые числа.

Пример 1. *Решить уравнение*

$$2\cos^3 x + 3\sin^2 x - 2\cos x - 3 = 0.$$

Решение. В данном случае все совершенно ясно. Используя формулу $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ и применяя подстановку $y = \cos x$, приведем данное уравнение к виду

$$y(2y^2 - 3y - 2) = 0,$$

откуда $y_1 = 0$; $y_2 = -\frac{1}{2}$; $y_3 = 2$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2l\pi$.

Пример 2. *Решить уравнение*

$$\frac{6\cos^3 2t + 2\sin^3 2t}{3\cos 2t - \sin 2t} = \cos 4t.$$

Решение. Так как $\cos 4t = \cos^2 2t - \sin^2 2t$, то данное уравнение приводится к однородному:

$$6\cos^3 2t + 2\sin^3 2t = (\cos^2 2t - \sin^2 2t)(3\cos 2t - \sin 2t).$$

Легко проверяется, что $\cos 2t \neq 0$. Поэтому, деля уравнение на $\cos^3 2t$ и полагая $u = \operatorname{tg} 2t$, получаем уравнение $(u+3)(u^2+1) = 0$, имеющее один вещественный корень $u = -3$ (при этом $3\cos 2t - \sin 2t \neq 0$).

Ответ: $t = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 3 + \frac{k\pi}{2}$.

Пример 3 (МФТИ, 1970). *Решить уравнение*

$$\sin x(1 - \cos x)^2 + \cos x(1 - \sin x)^2 = 2.$$

Решение. В данном случае путь решения подсказывается симметрией данного уравнения относительно $\sin x$, $\cos x$. Выделяя в явном виде простейшие симметрические многочлены относительно $\sin x$ и $\cos x$ (выражения $\sin x+\cos x$, $\sin x\cdot\cos x$), запишем уравнение в виде

$$(\sin x+\cos x)-4\sin x\cdot\cos x+\sin x\cdot\cos x\,(\sin x+\cos x)=2.$$

Пусть $\sin x+\cos x=u$; тогда $u^2-1=2\sin x\cdot\cos x$ и уравнение примет вид

$$u\,(u^2-4u+1)=0,$$

откуда $u_1=0$, $u_2=2+\sqrt{3}$, $u_3=2-\sqrt{3}$.

Уравнение $\sin x+\cos x=u$ легко решается, причем, так как $|u|=$ $=|\sin x+\cos x|=\left|\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant\sqrt{2}$, то корень $u_2=2+\sqrt{3}$ не подходит.

Ответ: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$; $x=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+2l\pi$.

Следующая группа примеров показывает, что для успешного решения предлагаемых на приемных экзаменах задач недостаточно уметь свести уравнение к одному из известных типов (уравнения, приводимые к одной тригонометрической функции, однородные, симметрические и др.).

Пример 4 (МФТИ, 1970). *Решить уравнение*

$$\sin x+2\cos x=\cos 2x-\sin 2x. \tag{1}$$

Решение. Переходя в уравнении (1) к аргументу x с помощью формул $\sin 2x=2\sin x\cos x$ и $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x$, получаем

$$\sin x+2\sin^2 x+2\cos x+2\sin x\cos x-1=0. \tag{2}$$

Уравнение (2) можно было бы свести к алгебраическому уравнению относительно u с помощью так называемой универсальной подставки $u=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, выразив $\sin x$ и $\cos x$ через u. Нетрудно убедиться, что в этом случае получается уравнение

$$3u^4+2u^3-6u^2-6u-1=0.$$

Мы не будем находить корни этого уравнения, хотя это можно было бы сделать, а попытаемся найти более короткий путь решения, в основе которого лежит разложение левой части уравнения на множители.

Уравнение (2) имеет корень $\sin x=-1$ (при этом $\cos x=0$), поэтому левую часть уравнения можно разложить на множители:

$$(1+\sin x)(2\sin x+2\cos x-1)=0.$$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}+\pi n$.

Замечание. Следует подчеркнуть, что метод разложения на множители в сочетании с другими методами является одним из наиболее эффективных приемов решения тригонометрических уравнений.

Пример 5 (МФТИ, 1970). *Решить уравнение*

$$\sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x = 2. \qquad (3)$$

Решение. Перейдем к двойному аргументу по формуле

$$\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}. \qquad (4)$$

С помощью формулы (4) уравнение (3) приводится к виду

$$\cos 4x + \cos 6x + \cos 8x + \cos 10x = 0. \qquad (5)$$

Далее, группируя крайние и средние члены и применяя формулы для суммы косинусов, получаем

$$\cos 7x \cdot \cos 2x \cdot \cos x = 0.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{14} + \frac{k\pi}{7}$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{l\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

Замечание. Возможность приведения уравнения (3) к виду (5) связана с тем, что с помощью формулы (4) уничтожается свободный член в правой части уравнения (3) и получается в конечном счете более простое уравнение (5). В процессе дальнейшего решения группировка может быть произвольной.

Пример 6 (МФТИ, 1971). *Решить уравнение*

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x.$$

Решение. Попытаемся и здесь использовать формулу (4), хотя на первый взгляд кажется, что эта формула малоэффективна. После преобразований получим $\cos 2x + \cos 4x = 1 + \cos 6x$. Преобразуя, далее, правую часть последнего уравнения по формуле $\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$, а левую по формуле суммы косинусов, получаем $\cos 3x (\cos x - \cos 3x) = 0$ или

$$\cos 3x \cdot \sin x \cdot \sin 2x = 0. \qquad (6)$$

Ответ: $x = \frac{k\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{6} + \frac{l\pi}{3}$.

Замечание. К этому же ответу можно прийти и другим путем. Если исходное уравнение записать в виде $\sin^2 2x = (\sin 3x - \sin x)(\sin 3x + \sin x)$ и преобразовать в произведения выражения, стоящие в скобках, то мы снова получим уравнение (6). Оба рассмотренных способа преобразования исходного уравнения примерно равноценны.

Пример 7. *Решить уравнение*

$$\frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} 2x. \qquad (7)$$

Решение. Подстановка $u = \operatorname{tg} x$ достаточно естественна, если вспомнить, что $\operatorname{ctg} 2x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{2 \operatorname{tg} x}$. Применив эту подстановку, получаем

$$\sqrt{3}\, u^4 - 2u^3 - 2\sqrt{3}\, u^2 + 2u + \sqrt{3} = 0. \qquad (8)$$

Далее надо попытаться разложить левую часть уравнения (8) на множители.

Прежде чем продвинуться в этом направлении дальше, сделаем попытку упростить уравнение (7).

Замечая, что $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=-2+\frac{4}{\sin^2 2x}$, находим

$$\frac{1}{\sin^2 2x}=1-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\cos 2x}{\sin 2x}$$

и далее, преобразовывая, получим $\sqrt{3}\cos^2 2x+\sin 2x\cdot\cos 2x=0$. Последнее уравнение легко решается.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$; $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{l\pi}{2}$ (легко проверяется, что при этих значениях x имеем $\sin 2x\neq 0$).

Решение получено, однако для сравнения доведем до конца решение уравнения (7) первым способом, который пока привел нас к уравнению (8). Группировка членов, имеющих множитель $\sqrt{3}$, дает уравнение

$$(u^2-1)\left[\sqrt{3}(u^2-1)-2u\right]=0,$$

которое имеет корни: $u_1=1$; $u_2=-1$; $u_3=\sqrt{3}$; $u_4=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Нетрудно проверить, что эти корни приводят к тому же ответу.

Замечание. Не вызывает сомнений, что в данном случае преобразование уравнения с помощью перехода к аргументу $2x$ является предпочтительным по сравнению с подстановкой $u=\operatorname{tg} x$. Мы еще раз убедились в том, что нередко увеличение аргумента тригонометрических функций, входящих в уравнение, ведет к его упрощению.

Рассмотрим пример другого типа.

Пример 8. *Решить уравнение*

$$\operatorname{tg}(120^\circ+3x)-\operatorname{tg}(140^\circ-x)=2\sin(80^\circ+2x). \qquad (9)$$

Решение. При отыскании разумного пути решения уравнения (9), очевидно, следует обратить особое внимание на аргументы тригонометрических функций, входящих в уравнение. Связь между этими аргументами становится ясной, если заметить, что $\operatorname{tg}(140^\circ-x)=-\operatorname{tg}(x+40^\circ)$. Теперь целесообразность использования замены $x+40^\circ=t$ не вызывает сомнения. С помощью этой замены исходное уравнение преобразуется к виду $\operatorname{tg} 3t+\operatorname{tg} t=2\sin 2t$, или

$$\frac{\sin 4t}{\cos t\cdot\cos 3t}=2\sin 2t. \qquad (10)$$

Так как $\sin 4t=2\sin 2t\cos 2t$, то уравнение (10) можно представить в виде

$$\frac{2\sin 2t\,(\cos 2t-\cos 3t\cdot\cos t)}{\cos t\cdot\cos 3t}=0.$$

Преобразуем выражение, стоящее в скобках, используя формулу

$$\cos 2t=\cos(3t-t)=\cos 3t\cdot\cos t+\sin 3t\cdot\sin t.$$

Тогда задача сведется к нахождению тех решений уравнения

$$\sin t\cdot\sin 2t\cdot\sin 3t=0,$$

которые удовлетворяют условию $\cos t \cdot \cos 3t \neq 0$, то есть к решению уравнения $\sin 3t = 0$.

Ответ: $x = -40^\circ + \frac{n\pi}{3}$.

Пример 9. *Решить уравнение*

$$\cos 3x + \cos \frac{5x}{2} = 2.$$

Решение. Если преобразовать левую часть данного уравнения по формуле суммы косинусов, то мы получим уравнение $\cos\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{11x}{4} = 1$. Так как при любом α справедливо неравенство $|\cos\alpha| \leqslant 1$, то полученное уравнение может иметь решения лишь при выполнении условий

$$\begin{cases} \cos\frac{x}{4} = 1, \\ \cos\frac{11x}{4} = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos\frac{x}{4} = -1, \\ \cos\frac{11x}{4} = -1. \end{cases}$$

Этим способом можно было бы найти решение исходного уравнения. Однако к цели приводит и другой, более простой путь.

Левая часть уравнения может равняться двум лишь в том случае, когда одновременно имеют место равенства $\cos 3x = 1$ и $\cos\frac{5x}{2} = 1$.

Находя решения первого уравнения $\left(x = \frac{2k\pi}{3}\right)$ и подставляя во второе, получаем $\cos\frac{5k\pi}{3} = 1$, откуда $k = 6m$.

Ответ: $x = 4m\pi$.

В следующих примерах требуется умение использовать понятие абсолютной величины.

Пример 10 (МФТИ, 1971). *Решить уравнение*

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{9}\operatorname{ctg} x = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} - 1. \tag{11}$$

Решение. Правую часть уравнения (11) можно записать так: $\sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 1} = |\operatorname{tg} x| - 1$. Грубой ошибкой было бы отбрасывание знака модуля (к сожалению, немало абитуриентов, решавших этот пример, допустило эту ошибку). Уравнение (11) принимает вид

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{9}\operatorname{ctg} x = |\operatorname{tg} x| - 1. \tag{12}$$

Рассмотрим два случая: $\operatorname{tg} x > 0$, $\operatorname{tg} x < 0$ (при $\operatorname{tg} x = 0$ левая часть уравнения теряет смысл).

а) Если $\operatorname{tg} x > 0$, то уравнение (12) приводится к виду $\operatorname{ctg} x = -9$, откуда следует, что $\operatorname{ctg} x < 0$, что противоречит условию $\operatorname{tg} x > 0$. В данном случае решений нет.

б) Если $\operatorname{tg} x < 0$, то, полагая $u = \operatorname{tg} x$, из (12) находим $18u^2 + 9u + 1 = 0$, откуда

$$u_1 = -\frac{1}{6}; \quad u_2 = -\frac{1}{3}.$$

Оба найденных значения отрицательны, так что условие $\operatorname{tg} x<0$ выполняется.

Ответ: $x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{6}+n\pi$; $x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+m\pi$.

Пример 11. *Решить уравнение*

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2+\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x}. \qquad (13)$$

Решение. Так как правая часть уравнения неотрицательна, то должно выполняться условие

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x\geqslant 0. \qquad (14)$$

Если освободиться от радикала путем возведения обеих частей уравнения (13) в квадрат, то получим уравнение

$$\sin^2 x+3\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x=2+\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x,$$

которое после упрощения примет вид

$$\cos 2x=\cos 2x. \qquad (15)$$

Мы получили тождество. Это не означает, однако, что исходному уравнению удовлетворяют все значения x, так как уравнение (15) является лишь следствием уравнения (13). Уравнения (13) и (15) становятся равносильными, если выполняется условие (14). Таким образом, решениями уравнения (13) являются все значения x, удовлетворяющие неравенству (14), и только эти значения. Решение неравенства (14) не представляет труда.

Ответ: $-\frac{\pi}{3}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+2\pi n$.

Замечание. К этому же ответу можно прийти несколько иным путем. Имеем $2+\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=\left[1+\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\right]=4\cos^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$, и поэтому исходное уравнение примет вид $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right|$. Мы снова приходим к условию (14).

Упражнения

Решить уравнения:

1. (МФТИ, 1969). $\sin^4 x+\sin^3 x\cdot\cos x+\sin^2 x\cos^2 x+\sin x\cdot\cos^3 x+\cos^4 x=1$.
2. $\sin^3 x(1+\operatorname{ctg} x)+\cos^3 x(1+\operatorname{tg} x)=2\sqrt{\sin x\cos x}$.
3. (МФТИ, 1971). $\cos^2 x+\cos^2 2x=\cos^2 3x$.
4. $\cos\frac{4x}{3}=\cos^2 x$.
5. (МФТИ, 1970). $\sqrt{1-2\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+2\operatorname{ctg} x}=2$.

Московский институт народного хозяйства имени Г. В. Плеханова

МИНХ им. Г. В. Плеханова — один из крупнейших вузов страны. На его 10 стационарных и одном заочном факультетах обучается более 14 тысяч студентов, а на кафедрах трудятся 500 аспирантов.

В институте имеются следующие факультеты (с дневным и вечерним обучением): общеэкономический, экономической кибернетики, экономики промышленности, экономики и организации материально-технического снабжения, финансовый, торгово-экономический, товароведения промышленных товаров, технологический и механический. Имеется также заочный технологический факультет. Срок обучения на дневных отделениях 4 года, а на вечерних — 5 лет (кроме факультетов экономической кибернетики и механического, где срок обучения соответственно 5 и 6 лет).

Наибольшая математическая подготовка обеспечивается на факультете экономической кибернетики. Студенты наряду с общими экономическими дисциплинами изучают высшую математику и программирование на электронных вычислительных машинах, а также цикл новых экономико-математических дисциплин. Применение ЭВМ в экономических исследованиях и планировании студенты осваивают в специальных лабораториях, оснащенных соответствующими машинами по подготовке и обработке информации и универсальной электронной вычислительной машиной «Урал 11-Б». Сотрудники кафедры и студенты принимают участие в научных исследованиях в содружестве с ГВЦ Госплана СССР и другими организациями.

Выпускники ФЭК обеспечиваются работой в Госплане и ЦСУ СССР и РСФСР, в научно-исследовательских институтах, вычислительных центрах, экономико-математических лабораториях и в плановых органах министерств.

Большую математическую подготовку получают также студенты экономических специальностей. Они изучают высшую математику, программирование, курсы статистики и специальные экономические дисциплины. На этих факультетах готовят экономистов широкого профиля, главным образом для работы в системе планово-экономических органов, в НИИ, на крупных предприятиях.

В своей многогранной деятельности кафедры МИНХ совместно с Госпланом СССР и РСФСР и другими государственными органами помогают братским социалистическим странам в подготовке и повышении квалификации национальных кадров, делятся опытом и оказывают помощь родственным кафедрам многих экономических вузов страны. Изданы оригинальные учебники и учебные пособия.

К проведению научных исследований широко привлекаются студенты, которые участвуют в разработке хоздоговорных тем и других исследованиях, успешно выступают на республиканских конкурсах студенческих научных работ.

На экономических факультетах вступительный экзамен по математике только письменный. На различных факультетах требования по математике разные, поэтому варианты для письменного экзамена предлагались неодинаковой трудности. С этой целью все задачи и варианты в целом получили оценку в «баллах» по трудности. Задачи были разбиты на три группы: легкие (1, 2, 3 балла), средние (4, 5, 6 баллов) и трудные (7, 8, 9 баллов).

Варианты с суммой баллов выше 25 предлагались на факультетах экономической кибернетики, товароведения промышленных товаров, экономики промышленности и торгово-экономическом.

Общеэкономический факультет (24)

1. Из пункта A по одному шоссе выезжают одновременно два автомобиля, а через час вслед за ними третий. Еще через час расстояние между третьим и первым автомобилями уменьшилось в 1,5 раза, а между третьим и вторым — в два раза.

Во сколько раз скорость первого автомобиля больше скорости второго, если известно, что третий не обгонял первый и второй?

2. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Расстояние от центра шара до вершины пирамиды равно a, а угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости основания равен α.

Определить полную поверхность пирамиды.

3. Решить уравнение

$$\cos 7x + \sin^2 2x = \cos^2 2x - \cos x.$$

4. Решить уравнение $\lg^2 100x - \lg^2 10x + \lg^2 x = 6.$

Факультет экономической кибернетики (27)

1. Из пункта A выехал первый велосипедист, а ему навстречу из пункта B одновременно выехал второй. После встречи оба велосипедиста направились в пункт B, и второй прибыл в B на 2 часа раньше первого.

Найти скорости велосипедистов, если известно, что расстояние AB равно 100 *км* и что второй велосипедист все расстояние AB проходит на 3 часа 20 минут быстрее первого.

2. Диагонали прямой четырехугольной призмы составляют с основанием углы α и β. Высота призмы равна H. Определить объем призмы, если диагонали основания пересекаются под углом γ.

3. Решить уравнение

$$(x+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-2} + 11(x+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{x} - 3x - 3 = 0.$$

4. Решить уравнение

$$8\cos^2 x + 2\sqrt{1-\sin^2 x} = 3,$$

если x заключен между $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3}{2}\pi$.

Финансовый факультет (25)

1. Определить стороны треугольника, если медиана и высота, проведенные из одного угла, делят этот угол на три равные части, а сама медиана равна 10 *см*.

2. Решить уравнение

$$\lg^2 2x + \lg^2 3x = \lg^2 2 + \lg^2 3.$$

3. Два автомобиля вышли одновременно навстречу друг другу, первый из города A, а второй из города B, расстояние между которыми 280 *км*, и через 4 часа встретились в пункте D. После встречи первый автомобиль пришел в город B на $2^1/_3$ часа позже, чем второй пришел в город A. Определить среднюю скорость каждого автомобиля.

4. Решить уравнение

$$\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x = \frac{1}{4}\sin 4x.$$

Факультет товароведения промышленных товаров (26)

1. От пристани A одновременно отправились вниз катер и плот. Катер спустился вниз по течению на 96 *км*, затем повернул обратно и вернулся в A через 14 часов. Найти скорость катера в стоячей воде и скорость течения, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 *км* от A.

2. Около круга описана трапеция с углами при основании α и β. Найти отношение площади трапеции к площади круга.

3. Решить уравнение

$$2^{2x} + 2^{x+1}\cdot 3^{x-2} - 8\cdot 3^{2x-3} = 0.$$

4. Решить уравнение

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x} - \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} 2x} = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x.$$

Факультет экономики и организации материально-технического снабжения (24)

1. Решить неравенство

$$\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}(x^2-9x+16)^2 > \log_{\frac{1}{3}} 2.$$

2. Найти объем пирамиды, основанием которой служит треугольник с углами α и β, если высота пирамиды равна h и образует с каждым боковым ребром угол φ.

3. Два туриста вышли одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу и встретились в 4 *км* от пункта B. Продолжая движение и достигнув соответственно пунктов B и A, туристы сразу же повернули обратно. На обратном пути они снова встретились, но уже в 2 *км* от пункта A. Эта встреча произошла через 2 часа после первой. Найти скорость движения туристов и расстояние между пунктами A и B.

4. Решить уравнение

$$\frac{1}{2}+3\sin^2 x-3\sin x=\frac{1}{2}\cos 2x$$

Факультет экономики промышленности (26)

1. Два поезда выходят одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу и встречаются на расстоянии 60 *км* от середины AB. Если бы первый вышел на 2 часа позже второго, то они встретились бы на середине AB. Если же, наоборот, второй вышел бы на 2 часа позже первого, то они встретились бы на четверти пути от B. Найти расстояние AB и скорость поездов.

2. Дана правильная шестиугольная пирамида высоты H, все семь граней которой равновелики.

Найти объем и полную поверхность.

3. Решить уравнение

$$\log_3 x^3+\log_2 x^2=\frac{2\lg 6}{\lg 2}+1.$$

4. Решить уравнение

$$\cos 2x+4\sin^2 x=\sqrt{3}\sin 2x.$$

Торгово-экономический факультет (26)

1. Решить уравнение

$$9\cdot 3^{\log_x^2 4}=\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_x 0,125}$$

2. Основанием пирамиды служит равнобочная трапеция, у которой боковые стороны равны верхнему основанию и равны a, а острый угол равен α. Боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания угол φ. Определить объем пирамиды.

3. Из пункта A в пункт B выехали одновременно два автомобиля. Скорость второго автомобиля больше скорости первого на 10 *км/час*. Через полчаса из A в B выехал третий автомобиль со скоростью 60 *км/час*, который догнал первый и через полтора часа после этого догнал второй. Найти скорости автомобилей.

4. Решить уравнение

$$2\sin^2 3x+\sin^2 6x=2.$$

Неправильные калейдоскопы

В «Кванте» № 8, 1972 г. (стр. 46) в статье «Калейдоскопы» рассказывалось о том, что на фотографии в калейдоскопе можно получить два изображения в одной точке: разные участки объектива будут снимать разные изображения, если хотя бы один угол калейдоскопа будет отличен от $\frac{180^\circ}{n}$.

При этом объектив надо помещать как можно ближе к вершине этого угла. Но если объектив диафрагмировать, то перекрытия исчезнут. На фотографиях в статье различие между снимками было незначительным. Здесь мы помещаем более убедительные снимки.

А. Виленкин

Телевизионные физико-математические курсы для поступающих в вузы

В этом номере мы продолжаем публикацию материалов телевизионных курсов.

На физическом отделении курсов в течение января — февраля изучались следующие темы:

1) Электрические заряды. Электрическое поле.

2) Проводники и диэлектрики в электрическом поле. Электроемкость.

3) Электростатика. Решение задач.

4) Электрический ток. Механизмы проводимости. Закон Ома для участка цепи.

5) Электродвижущая сила. Закон Ома для полной цепи. Закон Джоуля — Ленца.

6) Электрический ток. Решение задач.

Предлагаем вам испробовать свои силы в решении некоторых типовых задач.

1. Два металлических шара имеют одинаковые заряды. Величина каждого заряда $q = +10^{-9}$ *к*. После соединения шаров тонким проводником потенциал их стал равным $\varphi = 120$ *в*. Определить радиус первого шара, если емкость второго $C_2 = 10$ *пкф*.

2. Горизонтально расположенное тонкое кольцо радиуса $R = 20$ *см* равномерно заряжено, плотность заряда $q = +10^{-7}$ *к/см*. Из центра кольца начинает падать тело массой $m = 5$ *г* и зарядом $q_1 = -10^{-8}$ *к*. Определить ускорение тела в тот момент, когда оно будет на расстоянии $h = 30$ *см* от плоскости кольца.

До февраля на телекурсах на занятиях по математике, кроме тем, перечисленных в предыдущем номере журнала, были изучены еще такие темы:

п о п л а н и м е т р и и — треугольники и многоугольники, подобие плоских фигур, метрические соотношения между элементами плоских фигур, окружности, площади, применение тригонометрии при решении планиметрических задач;

п о р а з д е л у «ф у н к ц и и и г р а ф и к и» — свойства функции и применение их к построению графиков функций, приемы построения графиков функций, взаимно-обратные функции, показательная и логарифмическая функция, логарифмы и их свойства.

Предлагаем читателям журнала по указанным темам контрольную работу.

К о н т р о л ь н а я р а б о т а № 2

1. Основания трапеции равны a и b. Найти длину отрезка, соединяющего середины диагоналей.

2. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены квадраты $ADKB$ и $BEPC$. Доказать, что отрезок KE в 2 раза больше медианы BM треугольника ABC.

3. Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки 4 *см* и 2 *см*, а высота, опущенная на ту же сторону, равна $\sqrt{15}$ *см*. Найти длины сторон треугольника, если известно, что они выражаются целыми числами.

4. В окружность вписан правильный треугольник ABC. На дуге BC взята произвольная точка M и соединена хордами с вершинами треугольника. Доказать, что $AM = BM + CM$.

5. На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC построен квадрат. Центр квадрата соединен с вершиной B. На какие отрезки разбилась гипотенуза, если известно, что катеты треугольника равны 21 *см* и 28 *см*.

6. В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Площадь треугольника BOC равна b^2, площадь треугольника AOD равна a^2. Найти площадь трапеции (AD и BC — основания).

7. В треугольнике один из углов равен 60°, а противолежащая этому углу сторона делится точкой касания вписанной окружности на отрезки a и b. Найти площадь треугольника.

8. Вычислить $49^{1-0,25\log_7 25}$

9. Вычислить $\log_{49} 16$, если известно, что $\log_{14} 28 = a$.

10. Построить график функции $y = \sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}$.

И. А. Дьяконов,
А. Г. Мордкович,
И. И. Наслузов

«Квант» для младших школьников

ЗАДАЧИ

1. Мышке до норки 20 шагов. Кошке до мышки 5 прыжков. Пока кошка совершит один прыжок, мышка сделает 3 шага, а один кошачий прыжок равен по длине 10 мышиным шагам.

Догонит ли кошка мышку?

2. Как можно измерить высоту телеграфного столба, имея в своем распоряжении только небольшую линейку? (На столб залезать нельзя).

3. Найдите наименьшие натуральные числа a, b ($b > 1$), удовлетворяющие равенству

$$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = b.$$

4. Канал представляет собой желоб, установленный на сваях. Меняется ли сила давления на сваи, когда по каналу тянут баржу?

5. На прямой через равные промежутки поставили 10 точек, они заняли отрезок длины l. На другой прямой через такие же промежутки поставили 100 точек, они заняли отрезок длины L. Во сколько раз L больше l?

6. По шоссе со скоростью 100 *км/ч* движутся машины. При этом расстояние между машинами, идущими друг за другом, около 15 *м*. Можно ли потребовать, чтобы на более узком участке «для обеспечения безопасности» скорость машин понижалась до 15 *км/ч*?

КАРТЕЗИАНСКИЙ ВОДОЛАЗ

Бумажный кораблик легко держится на воде, но, когда бумага намокает, кораблик тонет. Сухой кораблик держит на поверхности воды воздух, находящийся под куполом. Если купол намокнет и расползется, то воздух из-под него выйдет, и кораблик утонет. А нельзя ли сделать так, чтобы воздух то выходил из-под купола, то входил, а кораблик то тонул, то всплывал — по нашему желанию?

Оказывается, можно. Впервые такую игрушку сделал великий французский ученый и философ Рене Декарт, и теперь ее называют «картезианским водолазом» (по латыни Рене Декарт звучит как Ренатус Картезиус). Только в ней воздух не входит и не выходит, а сжимается или расширяется.

Устройство «водолаза» показано на рисунке. Возьмите молочную бутылку, пузырек от какого-нибудь лекарства и надувной резиновый шарик (им придется пожертвовать). Бутылку наполните водой почти до горлышка. Пузырек опустите отверстием вниз в воду и, наклонив его, впустите в него немного воды. Количество воды в пузырьке надо отрегулировать так, чтобы пузырек держался на поверхности воды, но от малейшего толчка уходил под воду (удобно взять соломинку и через нее вдувать под водой воздух в пузырек, пока он не всплывет). Затем накройте горлышко бутылки резиновой пленкой от шарика и привяжите ее ниткой вокруг горлышка.

Нажмите на пленку — и «водолаз» пойдет ко дну. Отпустите — и «водолаз» всплывет. Тонет он вот почему. Когда вы нажимаете на пленку, воздух под ней сжимается, давление в бутылке увеличивается и загоняет в пузырек еще немного воды. Пузырек становится тяжелее и опускается. Как только вы отпускаете пленку, давление в бутылке уменьшается, сжатый воздух в пузырьке выгоняет лишнюю воду, и «водолаз» всплывает.

А теперь попробуйте решить следующую задачу (если вы сделаете «водолаза», то можете провести и эксперимент).

З а д а ч а. При увеличении давления воздуха над поверхностью воды «картезианский водолаз» тонет. Опускается ли «водолаз» до дна при небольшом увеличении давления или может остановиться «по дороге», не дойдя до дна (то есть можно ли убрать резиновую пленку и использовать эту игрушку как барометр, отметив на бутылке глубины погружения «водолаза», соответствующие разным давлениям над водой)?

А. Н. Виленкин

Экономико-математическая школа при экономическом факультете МГУ

Знания, которыми не обладают школьники, весьма обширны. Эта переделка афоризма Бернарда Шоу как нельзя более относится к экономике: школьники плохо знакомы с экономикой и имеют о ней самые противоречивые сведения. Да и трудно понаслышке составить себе верное представление о столь сложном предмете. Даже титаны человеческой мысли не были едины в ее оценке. Так, один из творцов квантовой механики Макс Планк начинал с экономики, но она показалась ему слишком трудной, и он обратил свой разум к более легкой, по его мнению, физике.

Дать школьникам представление о современной экономической науке, познакомить с основными экономическими понятиями, дающими ключ к пониманию социальной действительности, привить вкус к экономике — вот цель созданной в 1968 году при МГУ Экономико-математической школы (ЭМШ).

В ЭМШ принимаются девятиклассники и десятиклассники. Все поступающие сдают письменный экзамен по математике — отдельно 9-е и отдельно 10-е классы (предлагаемый вариант содержит по 4 задачи, некоторые из них приведены в конце статьи). В сентябре 1972 года на вступительный экзамен пришло около 700 ребят. Пришлось с великим сожалением отобрать из них 120 девятиклассников и 80 десятиклассников. Счастливчики вместе с 70 «старыми» слушателями (ребятами, которые занимались в ЭМШ в девятом классе) в октябре приступили к занятиям.

Занятия в ЭМШ проводятся два раза в неделю во второй половине дня. Девятиклассники (наш первый курс) изучают введение в современную математику и основы политической экономии. В математический курс включены в первую очередь те разделы, которые используются в современной экономической науке и способствуют формированию логического мышления, столь характерного для современного экономиста. Это основы теории множеств, высшей алгебры, элементы математической логики и математического анализа, введение в теорию вероятностей. С политической экономией ребята знакомятся примерно в объеме первого тома «Капитала» К. Маркса. Для них становятся близкими такие понятия, как «товар», «деньги», «капитал», «прибавочная стоимость» и т. д. Многие ребята открывают для себя новую, совершенно неизвестную и увлекательную науку.

Десятиклассники слушают один из спецкурсов на выбор: «Диалектика и политэкономия», «Макроэкономические модели», «Современные методы планирования и управления», «Математические методы анализа экономики», «Экономические приложения теории игр», «Кибернетические системы». Спецкурсы — это серьезные «кусочки» современной науки, но читаются они так, чтобы школьникам было и интересно, и понятно. Помимо спецкурсов у десятиклассников ведутся занятия по элементарной математике, на которых они более глубоко знакомятся с некоторыми разделами школьного курса.

По окончании ЭМШ слушателям выдается Выпускное свидетельство. Основная часть выпускников поступает, конечно, на одно из двух отделений экономического факультета МГУ (отделение политической экономии или отделение планирования и экономической кибернетики). Часть ребят избирает другие экономические вузы, например, Московский институт народного хозяйства, Московский экономико-статистический институт.

Научно-методическое руководство работой ЭМШ осуществляет Предметная комиссия, состоящая из преподавателей кафедр политической экономии и математических методов анализа экономики.

Организационную работу ведет Совет ЭМШ, куда входят аспиранты и студенты экономического факультета.

В работе ЭМШ принимают участие преподаватели, аспиранты и студенты экономического факультета МГУ, мехмата МГУ, научные сотрудники Института мировой экономики и международных отношений и Центрального экономико-математического института Академии наук СССР.

Очередные вступительные экзамены в ЭМШ состоятся в сентябре 1973 г.

Ждем вас, будущие экономисты!

Задачи из вариантов вступительного экзамена по математике в ЭМШ

9-й класс

1. На заводском складе хранилось более ста одинаковых коробок с заготовками. Вследствие потребления количество заготовок через некоторое время уменьшилось. Когда в каждой коробке осталось лишь по семь заготовок, на склад привезли еще 14 полных коробок, после чего общее количество заготовок оказалось на три меньше, чем до потребления. Сколько коробок с заготовками хранилось на складе первоначально?

2. В квадрате со стороной a середины двух смежных сторон соединены между собой и с противоположной вершиной квадрата. Вычислить площадь полученного треугольника.

3. Найти k и l, если они являются корнями уравнения $x^2+kx+l=0$.

4. Тридцать студентов с пяти курсов придумали сорок задач для олимпиады, причем однокурсники — одинаковое число задач, а студенты с разных курсов — разное. Сколько студентов придумали ровно по одной задаче?

5. Утром в магазин привезли шесть бидонов молока, в которых было 15, 16, 18, 19, 20, 31 литров. До обеденного перерыва было продано полностью молоко из трех бидонов, а к закрытию магазина продали целиком молоко еще из двух бидонов. Оказалось, что утром было продано молока вдвое больше, чем после обеда. Установить, из каких бидонов было продано молоко до обеденного перерыва.

6. Высота остроугольного треугольника равна 25 *см*. На каком расстоянии от вершины нужно провести прямую, перпендикулярную этой высоте, чтобы площадь треугольника разделить пополам?

7. Определить a так, чтобы один из корней уравнения

$$x^2-\frac{15}{4}x+a=0$$

был квадратом другого.

8. Семь грибников собрали вместе 100 грибов, причем все семь собрали разное число грибов. Доказать, что есть трое грибников, которые собрали вместе не меньше 50 грибов.

9. На доске написано пять целых чисел. Сложив их попарно, получили следующие десять чисел: 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15. Какие пять чисел были написаны на доске?

10. На основании равнобедренного треугольника как на хорде построена окружность, касающаяся равных сторон треугольника. Найти радиус окружности, если основание треугольника равно a и высота b.

11. Определить a так, чтобы уравнения

$$x^2+x+a=0$$
$$x^2+ax+1=0$$

имели общий корень.

10-й класс

1. Имеется n городов. Каждый город соединен с каждым другим авиалинией, причем не по всем линиям движение возможно в обе стороны. Доказать, что можно выбрать такой маршрут, чтобы проехать по всем городам.

2. Маугли попросил обезьян принести ему орехи. По дороге обратно обезьяны передрались и каждая кинула в каждую по одному ореху. Принесли они 26 орехов. Сколько было обезьян и сколько каждая из них сорвала орехов (все обезьяны сорвали орехов поровну)?

3. Мальчик купил черные карандаши по 3 коп., красные по 5 коп., синие по 7 коп. — всего 8 карандашей на 42 коп. Известно, что количество красных карандашей минус количество черных — полный квадрат. Сколько куплено карандашей каждого вида?

4. Решить в целых числах $3^x+4^x=5^x$.

5. Три рыбака наловили рыбы и легли спать. Первый проснулся, увидел, что число рыб не делится на три, выбросил одну рыбу, забрал треть оставшихся и ушел. Проснулся второй, увидел, что число рыб не делится на три, выбросил одну, забрал треть оставшихся и ушел. Аналогично, не зная, что товарищи ушли, поступил и третий рыбак. Определить минимальное число рыб, которое они могли поймать.

6. Дано число, взаимно простое с 30. Доказать, что остаток от деления его на 30 — число простое.

7. В зоопарке живут слоны, львы и носороги, всего 30 животных. Для них есть три вида клеток, всего 7 штук. В каждой клетке сидит 2 носорога, или 4 льва, или 7 слонов. Сколько клеток каждого вида?

8. Дан выпуклый четырехугольник с периметром P. Его стороны раздвигаются на единицу вовне, затем продолжаются до пересечения. Доказать, что площадь нового четырехугольника больше $P+3$.

9. Сколько имеется чисел от 1 до 1000, которые делятся либо на 5, либо на 7, либо на то и другое?

10. В прямоугольном треугольнике с целочисленными сторонами длина гипотенузы делится на 3. Доказать, что длина каждого из катетов делится на 3.

11. Дано пятизначное число. Если приписать единицу впереди него, то мы получим шестизначное число, которое втрое меньше шестизначного числа, полученного приписыванием единицы в конце. Найти это число.

12. Дана окружность и точка A вне ее. Из точки A проведены секущие AB и AC, пересекающие окружность в точках M и K соответственно. Доказать, что треугольники AMK и ABC подобны.

В. В. Иванов
А. Г. Фонотов

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

Отпугивающая реклама

Всю весну Володя был предельно сосредоточен. Окружающие знали: он будет сдавать экзамены в Московский университет, и относились к нему с подчеркнутым вниманием. Володя работал изо всех сил, каждая минута была на счету. Человек, как говорят, выкладывался.

Зашел он однажды ко мне. Попросил:

—Решите, пожалуйста, задачку, — и положил на стол листок с уравнением

$$x^2\cdot 3^{x-2}+3^{\sqrt{x+2}}=3^x+x^2\cdot 3^{\sqrt{3}}.$$

Взглянув на пример, я сразу же принялся решать его на том же листке. Потом взял другой, чистый, уселся поудобнее и стал писать снова. Когда я достал четвертый листок, то обнаружил, что Володя незаметно исчез. Задача не получалась, и я подумал, что Володя просто решил пошутить.

Спустя несколько дней я встретил Володю на улице.

— Ну как, вышло у вас то уравнение? — спросил он. Хотя в его глазах не было и тени усмешки, я все-таки сказал:

— Ты знаешь, Володя, у меня не нашлось времени, чтобы разгадать твою шутку. Расскажи-ка лучше сам, в чем там дело.

— Да это совсем не шутка, — всполошился Володя. — Это пример с прошлогодних экзаменов. Я его, правда, не умею решать.

— Вот что, Володя, пойдем-ка сейчас ко мне и добьем этот пример.

Мы просидели почти час, а пример так и не поддавался.

— Может быть, ошибка в условии? — предположил я, когда были испробованы все известные мне подходы.

— Нет, все верно, — твердо сказал Володя. — Мы с Толиком из книжки решали, там все так. Да я ее принесу, у меня и другие вопросы были.

И он принес книжку, на титуле которой стояло: «Справочник для поступающих в Московский университет» *). На стр. 183 был наш злополучный пример. Мы полезли в ответы, там значилось: $x=3$; $x=4$. Подставили — ни одно из этих значений не подошло.

— Досадно, Володя, что мы потратили зря столько времени. Но ведь научиться решать подобные уравнения тебе все равно надо. Смотри, на предыдущей странице аналогичное уравнение:

$$x^2\cdot 2^{\sqrt{2x+1}-1}+2^x=2^{\sqrt{2x+1}-1}+$$
$$+x^2\cdot 2^{x-2}.$$

Давай решим его. Видишь, здесь нужно только правильно сгруппировать члены, чтобы разложить на множители.

Увы! Через несколько минут стало ясно, что и этот пример нам не под силу. Заглянули в ответ: $x=2$; $x=4$. Подставили — оба корня не подошли. Когда я заявил Володе, что и этот пример не верен, он взглянул на меня с некоторым недоверием, но все-таки вытащил листок с вопросами.

— Вы знаете, мы в школе не проходили, что такое тангенс по основанию x, а это нужно знать. — И он показал мне пример на стр. 196: требовалось решить уравнение

$$\operatorname{tg}_x\sqrt{1+\cos 2x}=\sin 2x.$$

— Не бывает никаких оснований у тангенса! Здесь, наверное, был логарифм, а при наборе получился тангенс.

Я заглянул через Володино плечо в листок с вопросами и понял, что не расстанемся мы до поздней ночи. Оказалось, что невозможно решить уравнение 2 на стр. 192, где вместо $2^{\log_{\sqrt{2}}(x-0,5)}$ напечатано $2^{\log\sqrt{2}(x-0,5)}$; неравенство 4 на стр. 195, где вместо $\log_{\cos x}1,5$ стоит $\log\cos x\ 1,5$; уравнение 3 на стр. 197, где вместо $\sqrt{1+\cos 2x}$ набрано $\sqrt{1}+\cos 2x$; уравнение 2 из второго варианта (стр. 193), где выражение $5\sqrt{x+3-8}$ следует читать как $5\sqrt{x+3}-8$.

Велико число ошибок и в ответах. Например, неверные ответы даны к задачам № 1 из первого и третьего вариантов факультета вычислительной математики и кибернетики, к задаче № 5 из второго варианта отделения общей геологии, к задаче № 5 из второго варианта филологического факультета, к задаче № 2 из второго варианта отделения экономической кибернетики и т. д. и т. п. Причем многие ошибки можно обнаружить, не решая соответствующих задач. Например, на стр. 224 помещен такой ответ: $\log_4 3<x<0$, откуда следует, что $\log_4 3$ — число отрицательное, а каждому выпускнику средней школы известно, что это не так.

Список ошибок и разного рода небрежностей можно было продолжать и продолжать. Володя, воспитанный в духе уважения к печатному слову, был искренне удивлен. Он получил первый в своей жизни, но очень

*) «Справочник для поступающих в Московский университет». Под редакцией В. И. Тропина. Изд-во Московского университета, 1972, 254 стр. Тираж 70 000 экз. Цена 50 коп.

наглядный урок, подтверждающий старую русскую поговорку про бумагу, которая все стерпит. Но разве Володя один? Кто сможет оценить тот ущерб, который нанесен издателями этого справочника? Кто вернет читателям этой книжки драгоценные часы, потраченные попусту? Как знать, быть может, не пошел сдавать экзамены в МГУ будущий Ньютон и не пошел только потому, что не смог решить кем-то неверно переписанные и опубликованные в официальном издании примеры.

Небрежность, с которой составители справочника отнеслись к абитуриентам 1972 года, видна также в списке рекомендуемой литературы (стр. 179), где перечислены относительно давно вышедшие книги по математике, рассчитанные главным образом на поступающих во втузы (заметьте, что МГУ совсем не втуз!). При этом не указывается ни одна из книг, написанных специально по материалам вступительных экзаменов в МГУ. В частности, нет основной книги, ставшей в последние годы наиболее популярной среди выпускников и обобщающей богатейший опыт приемных экзаменов в МГУ за последние 10—15 лет, — «Пособия по математике для поступающих в вузы» Г. В. Дорофеева, М. К. Потапова и Н. Х. Розова. Кстати, именно эта книга допущена Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для слушателей подготовительных отделений высших учебных заведений.

У меня на полке стоит несколько прошлых изданий «Справочника для поступающих в Московский университет». Я покупаю его с 1969 года — с тех пор, как в нем начали полностью помещать варианты письменных работ по математике, предлагавшиеся в МГУ. После этого справочник стал популярным не только среди абитуриентов МГУ, но и среди многих преподавателей вузов и учителей математики. И если работники издательства Московского университета будут так же небрежно относиться к опубликованию этих вариантов, как в 1972 году, то они тем самым серьезно дезориентируют поступающих, и в первую очередь тех из них, кто живет вдали от больших городов.

— А как же Володя? — спросите вы. Он поступил в Московский университет, хорошо учится. Хочется пожелать, чтобы в будущем такие события происходили не вопреки тем изданиям, которые призваны помочь абитуриентам, а благодаря им.

П. А. Серпов

Влажность и климат

Известно, что вода обладает большей теплоемкостью, чем воздух. При нагревании воды на 1° С надо затратить в 3000 раз больше тепла, чем при нагревании такой же массы воздуха.

Средняя температура поверхности мирового океана 17,4° С, тогда как средняя температура воздуха на всем земном шаре 14° С. Таким образом, зимой мировой океан служит как бы гигантской «печкой», которая сбогревает сушу.

Правда, теплосбмен между водой и воздухом происходит несколько своеобразно: существенную роль при этом играет влажность воздуха. Приведем очень любопытную заметку из дневника одного из участников экспедиции на Эльбрус в августе 1927 г.

«23 августа, после 5 часов, один из нас принес ведро воды для хозяйственных нужд экспедиции из ручья, стекавшего с ледника Малый Азау. К 6 часам вода покрылась ледяной пленкой при температуре воздуха +8, 8°, что показывает большое земное излучение, вызванное малым содержанием водяных паров в атмосфере».

На самом деле следует заменить красивые слова «большое земное излучение» на более правильные — «интенсивное испарение». В таких характерных условиях, как, скажем, в Мурманске, «потепление» климата неизбежно сопровождается повышением влажности. Это происходит потому, что климат Мурманска определяется теплым течением Гольфстрим, которое нагревает прибрежные воды Баренцева моря. Мало кому известно, что если бы эти воды в процессе теплосбмена с воздухом теряли бы тепла еще на 1 градус больше, то средняя температура воздуха для Мурманска повысилась бы на 10 градусов!

Новые книги

Начиная с этого номера, мы будем помещать краткие аннотации на книги, выходящие в 1973 году и представляющие интерес для наших читателей.

В I квартале 1973 года выйдут в свет следующие книги (заказы можно направлять через магазины «Книга — почтой»).

Математика
Издательство «Наука»

1. Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Кириллов А. А., *Метод координат*. (Объем 5 л., тираж 200 000 экз., цена 13 коп.)

Книга посвящена изложению одного из основных понятий математики — метода координат. На различных, чрезвычайно удачно подобранных примерах авторы показывают, как «работает» это понятие в математике.

Книга рассчитана на школьников 8—10 классов, интересующихся математикой.

2. Градштейн И. С., *Прямая и обратная теорема*. (Объем 7 л., тираж 50 000 экз., цена 23 коп.)

В книге изучаются отдельные вопросы математической логики, связанные со школьным курсом математики (необходимые и достаточные условия, прямые и обратные теоремы, доказательство от противного и т. д.).

На разборе ряда конкретных примеров автор показывает, как довольно тонкие понятия математической логики, теории множеств могут быть использованы при изучении школьного курса математики.

Книга написана простым и увлекательным языком.

Книга рассчитана на школьников 8—10 классов, будет полезна также для учителей, ведущих факультативные занятия.

Издательство «Мир»

3. Бахман Ф., Шмидт Э., *n-угольники*. (Объем 10 л., тираж 30 000 экз., цена 74 коп.)

В книге популярно, на материалах элементарной математики излагается теория, устанавливающая зачастую совершенно неожиданную связь между геометрией и современной алгеброй.

Большое количество задач, помещенных в книге, очень помогает в усвоении излагаемого материала.

Книга доступна и представляет большой интерес для самого широкого круга читателей, в том числе и для школьников 8—10 классов.

Физика
Издательство «Наука»

4. *Над чем думают физики*. Выпуск 9. (Объем 14 л., тираж 50 000 экз., цена 70 коп.)

Этот сборник переводных статей посвящен вопросам физики элементарных частиц. Сборник составлен из научно-популярных статей, авторы которых являются крупными учеными, творчески работающими в области теоретической и экспериментальной физики.

Сборник рассчитан на самый широкий круг читателей, в том числе и школьников старших классов.

5. Гребенников Е. А., *Николай Коперник*. (Объем 6 л., тираж 25 000 экз., цена 22 коп.)

В книге в популярной форме изложены события, факты и основные идеи, связанные с появлением теории Коперника.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

6. Шкловский И. С., *Вселенная, жизнь, разум*. (Объем 22 л., тираж 50 000 экз., цена 1 р. 20 коп.)

Книга посвящена увлекательной проблеме — существования внеземных цивилизаций. В ней также достаточно полно и популярно изложены основные вопросы современной астрофизики.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, включая школьников старших классов.

7. Гуревич В. З., *Энергия невидимого света*. (Объем 8 л., тираж 25 000 экз., цена 50 коп.)

Эта книга — об инфракрасных лучах. О том, как они помогают управлять ракетами и спутниками, снять карту планеты, о том, как с их помощью расшифровывают состав неизвестного вещества и о многих других примерах использования этих лучей.

Книга рассчитана на широкий круг читателей.

8. Островский Ю. И., *Голография и ее применение*. (Объем 8 л., тираж 30 000 экз., цена 60 коп.)

Голография—это новый бурно развивающийся в последнее время метод регистрации и восстановления световых, акустических радиоволн. В книге изложены основы теории и экспериментальной техники применения голографии.

Книга рассчитана на широкий круг читателей.

Издательство «Атомиздат»

9. Кедров В., *Ирен и Фредерик Жолио-Кюри*. (Объем 9 л., тираж 90 000 экз., цена 29 коп.)

Книга в живой и популярной форме знакомит с жизнью и научным творчеством замечательных французских ученых Ирен и Фредерик Жолио-Кюри.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

М. Л. Смолянский

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К «Задачам»

(см. стр. 38)

1. Сумма очков на верхних гранях двух кубиков не меньше 2 и не больше 12. Наиболее вероятна та сумма, которая может быть получена наибольшим числом сложений двух слагаемых (учитывая и их порядок), каждое из которых есть одно из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. Наибольшим числом сложений—шестью—можно образовать сумму 7:

$$1+6,\ 2+5,\ 3+4,\ 4+3,\ 5+2,\ 6+1.$$

2. $\sqrt[6]{4\bullet\bullet\bullet\bullet}=\sqrt[3]{\sqrt{4\bullet\bullet\bullet\bullet}}=\sqrt[3]{2\bullet\bullet}$ — целое число, то есть $2\bullet\bullet$ — точный куб. Но между числами 200 и 299 единственный точный куб — это число $216=6^3$. Следовательно,

$$\sqrt[6]{4\bullet\bullet\bullet\bullet}=6.$$

3. Пусть $\sqrt[5]{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet 4}=x$, $x^5=\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet 4$.

Легко показать, что x оканчивается цифрой 4. Но $x>10$, так как $10^5=100\,000<\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet 4$ и $x<20$, так как $20^5=2^5\cdot 10^5=32\cdot 10^5$ — число семизначное. Итак, $10<x<20$, поэтому $x=14$.

4. $10=101_3=1010_2$.

5. $63=77_8=333_4=111\,111_2$.

6. $1950+1475=3435$.

7. В турнире участвовал только один девятиклассник, который набрал 10 очков.

(см. стр 44)

Три деревни Косоглаз, Борода и Алощек лгуновцы, Курнос чередовец, Длинноух — правдовец.

Юным мыслителям «Иди немедленно в комнату номер двести три». При решении воспользуйтесь принципом телевидения и сложите из этих 35 букв прямоугольник размером 5×7.

К статье «Тригонометрические уравнения»

1. $x=\frac{k\pi}{2}$. Указание. $1=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2$.

2. $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$. Указание. Привести левую часть уравнения к виду $\cos x+\sin x$ и возвести в квадрат.

3. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}$;

$$x=\pm\frac{1}{2}\ \arccos\ \frac{1-\sqrt{17}}{4}+\pi k.$$

4. $x=3n\pi$; $x=\pm\frac{\pi}{4}+\frac{3k\pi}{2}$.

5. $x=-\operatorname{arctg}(1+\sqrt{2})+\pi n=$

$$=-\frac{3}{8}\pi+\pi n.$$

К статье «Московский институт народного хозяйства имени Г. В. Плеханова»

Общеэкономический факультет

1. Трудность задачи состоит в том, что нужно найти не сами неизвестные величины, а их отношение.

Пусть скорости автомобилей будут соответственно v_1, v_2 и v_3. Тогда

$$\left.\begin{aligned}\frac{2}{3}v_1&=2v_1-v_3,\\ \frac{1}{2}v_2&=2v_2-v_3.\end{aligned}\right\}$$

Имеем систему двух уравнений с тремя неизвестными.

Вычтем из первого уравнения второе:

$$\frac{2}{3}v_1-\frac{1}{2}v_2=2v_1-2v_2,$$

и поделим его на v_2:

$$\frac{2}{3}\left(\frac{v_1}{v_2}\right)-\frac{1}{2}=2\left(\frac{v_1}{v_2}\right)-2,$$

$$\frac{4}{3}\left(\frac{v_1}{v_2}\right)=\frac{3}{2},\quad \frac{v_1}{v_2}=\frac{9}{8}.$$

2. 1) $S_п=S_б+S_{осн}$; (рис. 1)

2) $S_п=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot AD\cdot ES+AD^2=2AD\cdot ES+$

$$+AD^2=AD(2ES+AD);$$

3) $OO_1=OM=a\cos\alpha$ (ΔOSM);

4) $O_1E=OO_1\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=a\cos\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$;

5) $AD=2O_1E=2a\cos\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$;

6) $SE = \dfrac{O_1E}{\cos\alpha} = \dfrac{a\cos\alpha \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} = a \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$;

7) $S_п = 2a\cos\alpha \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\left(2a\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} + 2a\cos\alpha\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right) = 4a^2\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}\cos\alpha \times (1+\cos\alpha) = 8a^2\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$;

$$S_п = 8a^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2} \text{ кв. ед.}$$

Здесь наиболее частая ошибка — неправильное проведение радиуса шара в точку касания. Многие абитуриенты изобразили его параллельным основанию пирамиды.

3. $\cos 7x + \sin^2 2x = \cos^2 2x - \cos x$;

$$\cos 7x + \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1+\cos 4x}{2} - \cos x;$$

$$2\cos 4x\cdot\cos 3x = \cos 4x;$$

$$\cos 4x\cdot(2\cos 3x - 1) = 0.$$

1) $\cos 4x = 0$; $x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{4}k$;

2) $2\cos 3x - 1 = 0$;

$$\cos 3x = \frac{1}{2};$$

$$x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi k.$$

4. $\lg^2 100x - \lg^2 10x + \lg^2 x = 6$;

$$(2+\lg x)^2 - (1+\lg x)^2 + \lg^2 x = 6;$$

$$\lg x = y;$$

$$y^2 + 4y + 4 - 1 - 2y - y^2 + y^2 = 6;$$

$$y^2 + 2y - 3 = 0;$$

$$y_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3};$$

$$y_1 = 1;\quad y_2 = -3;$$

$$\lg x = 1;\quad x_1 = 10;$$

$$\lg x = -3;\quad x_2 = \frac{1}{1000}.$$

Факультет экономической кибернетики

1. $\begin{cases} \dfrac{100}{v_1} - 2\cdot\dfrac{100}{v_1+v_2} = 2, \\ \dfrac{100}{v_1} - \dfrac{100}{v_2} = \dfrac{10}{3}, \end{cases}$

$$100(v_2 - v_1) = 2v_1(v_1+v_2),$$

$$100(v_2 - v_1) = \frac{10}{3}v_1v_2.$$

$$\frac{3\cdot 2v_1(v_1+v_2)}{10v_1v_2} = 1;$$

$$3v_1^2 + 3v_1v_2 = 5v_1v_2;$$

$$3v_1^2 = 2v_1v_2;\quad v_2 = \frac{3}{2}v_1;$$

$$100\cdot\frac{1}{2}v_1 = 2v_1\cdot\frac{5}{2}\cdot v_1;$$

$$v_1 = 10 \text{ км/час};\quad v_2 = 15 \text{ км/час}.$$

2. $AC = H\operatorname{ctg}\beta$; (рис. 2)

$$BD = H\operatorname{ctg}\alpha;$$

$$S_{осн} = \frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\gamma = \frac{1}{2}H^2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\sin\gamma;$$

$$v = \frac{1}{2}H^3\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\sin\gamma.$$

Многие абитуриенты, используя при определении площади основания формулу $S = \dfrac{d_1d_2}{2}\sin\gamma$, полагали, что в основании прямой призмы лежит квадрат, прямоугольник или параллелограмм. Здесь нужно было пояснить, какая фигура лежит в основании, и доказать правомерность этой формулы.

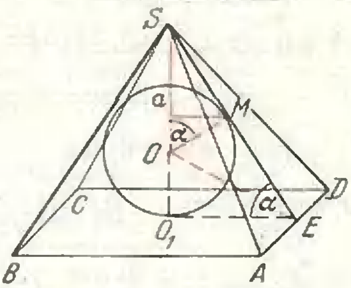


Рис. 1.

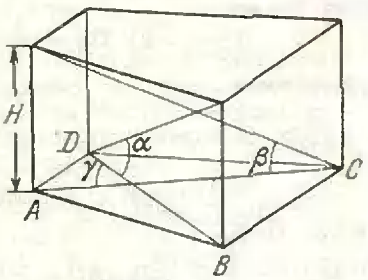


Рис. 2.

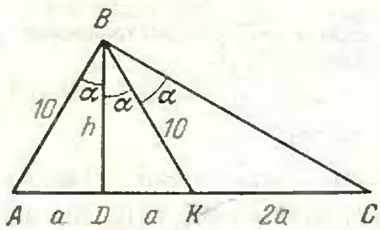


Рис. 3.

3. $(x+1)\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2(x-1)}+11\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-3\right]=0$; $x_1=-1$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=y$; $4y^2+11y-3=0$; $y_1=\frac{1}{4}$; $y_2=-3<0$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$; $x_2=2$. Около 70% абитуриентов не указали корень $x=-1$.

4. Так как при $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$ имеем $\cos x\leqslant 0$, то

$$\sqrt{1-\sin^2 x}=-\cos x,$$

$$8\cos^2 x-2\cos x-3=0,$$

$$\cos x=-\frac{1}{2},$$

$$x_1=\frac{2}{3}\pi,\quad x_2=\frac{4}{3}\pi.$$

Некоторые абитуриенты уединяли радикал и возводили обе части уравнения в квадрат. Другие не учитывали области определения аргумента и писали

$$x=\pm\frac{2}{3}\pi+2k\pi.$$

Финансовый факультет

1. Задача допускает несколько интересных решений с использованием теоремы синусов, теоремы тангенсов, с применением дополнительных построений и др. Приведем одно из них (рис. 3):

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{3a}{h},\quad 3\operatorname{tg}\alpha=\frac{3a}{h},\quad \operatorname{tg}2\alpha=3\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=3\operatorname{tg}\alpha,\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3},\quad \alpha=30^\circ.$$

Ответ: $AB=10$ *см*, $AC=20$ *см*, $BC=10\sqrt{3}$.

2. $\lg^2 2x+\lg^2 3x=\lg^2 2+\lg^2 3$,

$\lg^2 2x-\lg^2 2=\lg^2 3-\lg^2 3x$,

$$\lg x\cdot\lg 4x=\lg\frac{1}{x}\cdot\lg 9x=-\lg x\cdot\lg 9x.$$

1) $\lg x=0$, $x_1=1$;

2) $\lg 4x=-\lg 9x$,

$\lg 4+\lg x+\lg 9+\lg x=0$,

$$2\lg x=-\lg 36,\quad x^2=\frac{1}{36},\quad x_2=\frac{1}{6}.$$

3. Составим таблицу:

Автомобили	Скорость	Время движения до встречи	Пройденное расстояние до встречи	Пройденное расстояние после встречи	Время движения после встречи
I	x	4	$4x$	$4y$	$4\frac{y}{x}$
II	y	4	$4y$	$4x$	$4\frac{x}{y}$

$$\left.\begin{aligned}&4x+4y=280,\\&4\frac{y}{x}-4\frac{x}{y}=\frac{7}{3},\end{aligned}\right\}\quad \frac{y}{x}=t;$$

$$4t-\frac{4}{t}=\frac{7}{3},\qquad 12t^2-7t-12=0;$$

$$t=\frac{4}{3};\quad y=\frac{4}{3}x;\quad x=30\ \textit{км/час},$$

$$y=40\ \textit{км/час}.$$

4. $\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x=\frac{1}{4}\sin 4x$,

$$4\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x=2\sin 2x\cdot\cos 2x,$$

$$\sin 2x(2\sin x\cdot\sin 3x-\cos 2x)=0,$$

$$\sin 2x(\cos 2x-\cos 4x-\cos 2x)=0,$$

$$\sin 2x\cdot\cos 4x=0,$$

$$x=\frac{k\pi}{2},\quad x=\frac{\pi}{8}(2k+1)\quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

Факультет товароведения промышленных товаров

1. 14 *км/час*, 2 *км/час*.

2. $\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$.

3. $x=2$.

4. Решений нет.

Факультет экономики и организации материально-технического снабжения

1 $2<x<3$; $6<x<7$.

2. $V=\frac{2}{3}h^3\sin\alpha\operatorname{tg}^2\varphi\sin(\alpha+\beta)\sin\beta$ *куб. ед.*

3. 6 *км/час*, 4 *км/час*, 10 *км*.

4. $x=\pi k;\ x=(-1)^k\arcsin\frac{3}{4}+\pi k$.

Факультет экономики промышленности

1. 80 *км/час*, 48 *км/час*, 480 *км*.

2. $V=\frac{2\sqrt{3}}{3\cdot 35}H^3;\quad S=\frac{2\sqrt{3}}{5}H^2$.

3. $x=3$.

4. $x=\frac{\pi}{6}+\pi k$.

Торгово-экономический факультет

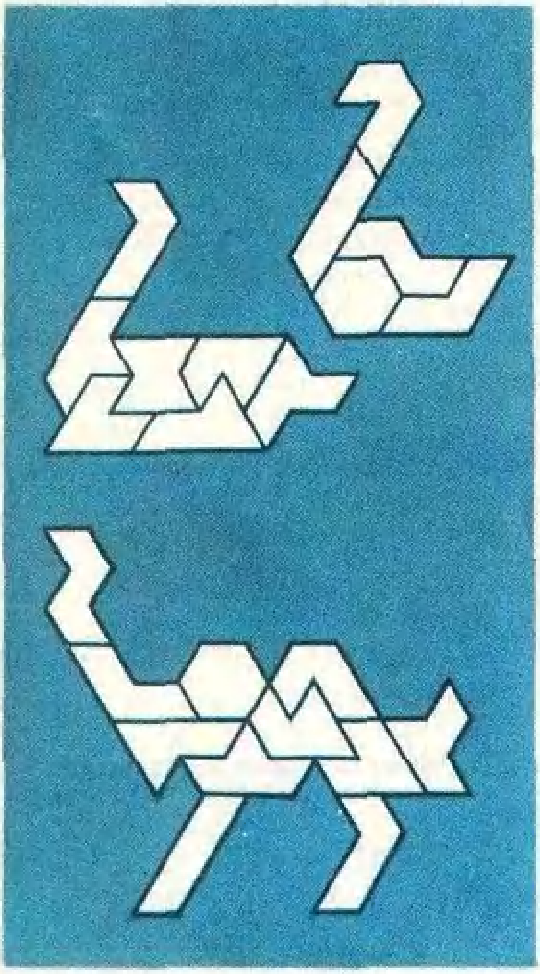
1. $x=2$.

2. $V=\frac{2}{3}a^3\cos\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\varphi$.

3. 40 *км/час*, 50 *км/час*.

4. $x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3},\quad x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$.

К заметке «Наш зоопарк»
(*см. «Квант» № 1, 1973*)



К заметке «Картезианский водолаз»

Барометр сделать не удастся. С увеличением глубины погружения «водолаза» давление воды возрастает, воздух в «водолазе» еще больше сжимается, и «водолаз» все стремительнее опускается на дно. Однако можно отрегулировать «водолаза» так, что он будет опускаться на дно, если атмосферное давление станет выше некоторой величины.

К задачам «Квант» для младших школьников»
(*см. «Квант» № 1, 1973, 3-я стр. обл.*)

1. Есть лишь один случай, когда, зная номер трамвая, нельзя определить возраст детей; отсюда находим номер трамвая. Указание, что один из детей — старший, исключает случай со старшими близнецами.

2. Сумма чисел всех карточек нечетна. Однако можно перевернуть карточки с числом 16 (получив 91) и некоторые другие.

3. $a=1$, $b=9$, $c=8$.

4. Под действием атмосферного давления крышечка «втянется» в бутылку (давление на нее сверху уменьшится).

5. Второму человеку, несущему бревно, станет от этой «помощи» тяжелее. Убедиться в этом вы можете на собственном опыте или воспользовавшись правилом рычага.

К заметке «За сколько ходов»
(*см. «Квант» № 1, 1973*)

1. Для решения воспользуйтесь рисунком 4. Здесь десять квадратов соответствуют полям нашей необычной доски, а отрезками соединены квадраты, между которыми возможен ход коня. Поле с 3 является как бы «транзитным»: связь между двумя ветками полей, которые мы видим на рисунке, а также полем а2, возможна только через него.

2. Сделайте рисунок, аналогичный рисунку 4. Из него будет сразу следовать решение, всего понадобится 22 хода.

3. Цель достигается за 26 ходов.

4. Коня можно съесть за 27 ходов.

5. Перестановку слонов можно осуществить за 36 ходов.

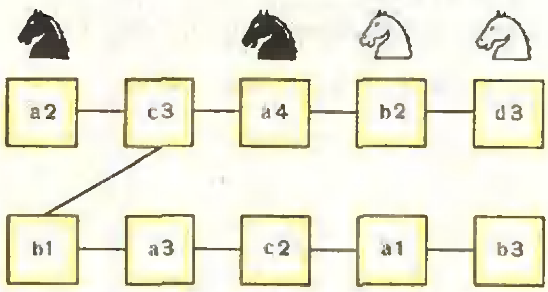


Рис. 4.

К статье «Телевизионные физико-математические курсы для поступающих в вузы»

(см. «Квант» № 1, 1973 г.)

Физика

Вариант 1

1. Пуля пролетит выше центра мишени на величину

$$S = h - \frac{gl}{2v^2}(2L + l) \simeq 0{,}14 \text{ м}.$$

2. После освобождения груза C (см. рисунок в условии задачи) система начинает движение с ускорением $a = g/3$. Это происходит до тех пор, пока груз A не коснется подставки. Взаимодействие грузов с подставкой и между собой (при соударении грузов A и B) считаем абсолютно неупругим. Время движения на этом этапе равно $t_1 = 2\sqrt{\frac{3h}{g}}$; конечная скорость $v_1 = 2\sqrt{\frac{gh}{3}}$ (на графике в координатах v, t — наклонная прямая, идущая вверх).

Далее груз C движется равномерно со скоростью v_1 до тех пор, пока груз B не коснется груза A. Время движения $t_2 - t_1 = \frac{h}{v_1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3h}{g}} = \frac{1}{4}t_1$ (на графике — прямая, параллельная оси абсцисс).

Затем груз C движется с ускорением g, направленным вниз (как в случае движения тела, брошенного вертикально вверх). Пройдя наивысшую точку, груз C опускается и в момент t_3 начинает поднимать груз B.

$$t_3 - t_2 = 2\frac{v_1}{g} = 4\sqrt{\frac{h}{3g}} = \frac{2}{3}t_1.$$

Тангенс угла наклона графика скорости к горизонтальной оси по абсолютной величине втрое больше, чем на первом этапе (на графике — наклонная прямая, идущая вниз и пересекающая ось абсцисс).

В момент t_3 происходит скачкообразная потеря скорости груза C (нить считаем нерастяжимой) в соответствии с законом сохранения количества движения: $mv_1 = 2mv_2$; $v_2 = \frac{1}{2}v_1 = \sqrt{\frac{gh}{3}}$ (на графике — прямая, параллельная оси ординат).

Далее грузы движутся с постоянной скоростью v_2 в течение времени $t_4 - t_3 = \frac{h}{v_2}\sqrt{\frac{3h}{g}} = \frac{1}{2}t_1$ (прямая, параллельная оси абсцисс).

В момент t_4 начинает подниматься груз A, и снова происходит скачкообразное изменение скорости груза C. Закон сохранения количества движения имеет вид: $2mv_2 = 3mv_3$; $v_3 = \frac{2}{3}v_2 = \frac{1}{3}v_1 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{gh}{3}}$ (прямая, параллельная оси ординат).

Затем груз C движется равнозамедленно (наклонная прямая, идущая вверх и пересекающая ось абсцисс).

$$t_5 - t_4 = \frac{v_3}{a} = 2\sqrt{\frac{h}{3g}} = \frac{1}{3}t_1$$

Начиная с момента t_5 картина будет повторяться. При этом периодические движения всей системы затухают, так как начальная скорость груза C стремится к нулю при $t \to \infty$.

3. $m_1 = \dfrac{mgkl}{\lambda(1 - k\,\mathrm{ctg}\,\alpha)} \simeq 1{,}95 \cdot 10^{-3}$ *кг*.

Вариант 2

1. $v_0 = \dfrac{2h - gt^2}{2t\sin\alpha} = 67$ *м/с*

$$s = v_0\cos\alpha\left(2\frac{v_0\sin\alpha}{g} + t\right) = 435 \text{ м}.$$

2. Будем решать задачу на основе закона сохранения энергии. Некоторое усложнение связано с неопределенным характером взаимодействия тел при ударе. Так как шарик отскакивает после удара, ясно, что удар упругий. Но он может быть не абсолютно упругим, то есть часть механической энергии может перейти в немеханические виды, например, в тепловую энергию.

Закон сохранения энергии при ударе:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + Q, \qquad (1)$$

где Q — немеханические виды энергии,
v_0 — скорость шарика перед ударом,
v — скорость шарика после удара,
V — скорость тела после удара.

При движении шарика из начального положения 1 к точке удара A (см. рисунок к условию задачи) сохраняется механическая энергия шарика:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgl. \qquad (2)$$

После удара шарик отскакивает от точки A к точке 2. При этом также сохраняется механическая энергия:

$$mgh = mgl(1 - \cos\alpha) = \frac{mv^2}{2}. \qquad (3)$$

Тело M при ударе получает кинетическую энергию $\frac{MV^2}{2}$, которая переходит в тепловую энергию в процессе совершения работы против сил трения:

$$\frac{MV^2}{2} = F_{\text{тр}} \cdot S = kMgS. \qquad (4)$$

Решая совместно уравнения (1 — 4), получим:

$$mgl = kMgS + mgl(1 - \cos\alpha) + Q \qquad (5)$$

или

$$kMgS = mgl\cos\alpha - Q. \qquad (6)$$

От уравнения (6) легко переходим к неравенству:

$$kMgS \leqslant mgl\cos\alpha \qquad (7)$$

или

$$k \leqslant \frac{ml\cos\alpha}{MS}, \quad k \leqslant 1{,}8\cdot 10^{-3}.$$

Равенство имеет место при $Q = 0$, то есть при абсолютно упругом ударе.

3. $m = \dfrac{\pi d^2 h\rho_1\rho_2}{4(\rho_1 - \rho_2)} = 0{,}41$ *кг*.

Математика

Контрольная работа № 1

1. 1. Указание. В этом примере приходится обращать смешанно-периодические и чисто-периодические бесконечные десятичные дроби в обыкновенные дроби. Вот один из практических приемов такого обращения.

Пусть дана чисто-периодическая дробь $x = 0,\ (a)$, где число a содержит k цифр. Перепишем заданное число так: $x = 0,\ a\,(a)$ и умножим на 10^k. Получим $10^k\cdot x = a,\ (a)$. Если теперь из $10^k x$ вычесть x, то получим $x\cdot(10^k - 1) = a$, откуда $x = \dfrac{a}{10^k - 1}$.

Если дана смешанно-периодическая дробь $x = 0,\ b\,(a)$, где число b содержит n цифр, а число a содержит k цифр, то умножим x на 10^n, получим $10^n\cdot x = b,\ (a)$ или $10^n\cdot x = b,\ a\ (a)$. А теперь умножим обе части последнего равенства на 10^k: $10^{n+k}\cdot x = \{b\}\{a\},\ (a)$ (здесь $\{b\}\{a\}$ означает последовательную запись цифр, образующих число b и число a). Если теперь из $10^{n+k}\cdot x$ вычесть $10^n\cdot x$, то получим $\{b\}\{a\} - b$, откуда уже без труда находится x.

Например, $x = 2{,}708\,(3)$. Тогда $1000x = 2708,\ (3)$ или $1000x = 2708{,}3\ (3)$. Далее, $1000x\cdot 10 = 27\,083,\ (3)$, $10\,000x - 1000x = 27\,083,\ (3) - 2708,\ (3)$, то есть $9000x = 24\,375$, откуда $x = \dfrac{65}{24}$.

2. Указание. Применить неравенство Коши: $\dfrac{1 + a_i}{2} \geqslant \sqrt{1\cdot a_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

3. $\dfrac{72}{a^2 - 3a + 9}$.

4. 2, если $a > 1$; 0, если $0 \leqslant a < 1$. Указание. Учесть, что $\sqrt{a - 2\sqrt{a} + 1} = |\sqrt{a} - 1|$.

5. $-b$. Указание. Так как числа a и b возводятся в дробные степени, то они неотрицательны (причем $b \neq 0$).

6. $\sin 2\alpha$.

7. 2.

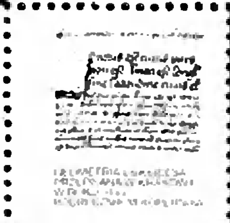
8. 0,6. Указание. Из уравнения $3\,\mathrm{tg}^2\,\alpha - 10\,\mathrm{tg}\,\alpha + 3 = 0$ находим $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{3}$ или $\mathrm{tg}\,\alpha = 3$. Но из условия $\dfrac{5}{4}\pi < \alpha < \dfrac{3}{2}\pi$ заключаем, что $\mathrm{tg}\,\alpha = 3$.

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

НИКОЛАЙ КОПЕРНИК

19 февраля 1973 г. исполняется 500 лет со дня рождения великого польского ученого-астронома Николая Коперника (1473—1543 гг.). Эта дата широко отмечается во всем мире.

Большинство людей обычно доверяет своему практическому опыту. Опыт говорит, например, что утром Солнце поднимается на востоке, движется по небу и вечером заходит на западе. Этот практический опыт был отражен в учении о строении Вселенной древнегреческого ученого Клавдия Птолемея, утверждавшего, что Земля находится в центре Вселенной, а вокруг нее движутся Солнце, планеты и звезды. Учение Птолемея хорошо согласовывалось с Библией, где говорилось, что, создавая мир, бог первым делом сотворил Землю. В течение многих веков ученые вносили поправки в таблицы Птолемея, предсказывающие различные небесные явления, но саму геоцентрическую систему мира никто не подвергал сомнению.



Коперник отверг эти ложные представления о строении Вселенной. Он пришел к выводу, что все планеты движутся по круговым орбитам вокруг Солнца и установил, что Земля обходит Солнце за год, вращаясь при этом вокруг своей оси. Теория Коперника произвела переворот в астрономии и подорвала основы учения церкви.

Копернику посвящено около 50 марок и блоков. Вполне понятно, что наибольшее число таких марок выпущено на его родине в Польше. Первые две марки с портретом Коперника вышли в Польше в 1923 г. (на фото приведена одна из них). В нашем журнале (№ 1, 1971 г.) были воспроизведены 17 марок, посвященных Николаю Копернику. После этого в Польше 11 июня 1971 г. была выпущена еще одна серия (4 марки с купонами), посвященная Копернику, которую вы видите на фото.

На одной из марок показан дом в польском городе Торуни, в котором родился Коперник, а на купоне приведен портрет ученого работы польского художника Яна Матейко. На второй изображен замок в Ольштыне, где Коперник провел часть своей жизни, и астролябия. На третьей — Коллегия Майус в Кракове, где учился Коперник, а на купоне — страница из геометрии Евклида, по которой он учился. На последней марке изображен Собор в Фромборке, где помещалась обсерватория Коперника. На

купоне приведена схема его гелеоцентрической системы.

На фото вы видите также марку Йеменской арабской республики с портретом Николая Коперника и другого великого астронома Иоганна Кеплера, который был сторонником теории Коперника и страстно защищал ее.

А. В. Алтыкис

2

«...я, наконец, после многочисленных и продолжительных наблюдений обнаружил, что если с круговым движением Земли сравнить движения и остальных блуждающих светил и вычислить эти движения для периода обращения каждого светила, то получатся наблюдаемые у этих светил явления. Кроме того, последовательность и величины светил, все сферы и даже само небо окажутся так связанными, что ничего нельзя будет переставить ни в какой части, не произведя путаницы в остальных частях и во всей Вселенной».

Цена 30 коп.

ИНДЕКС 70 465