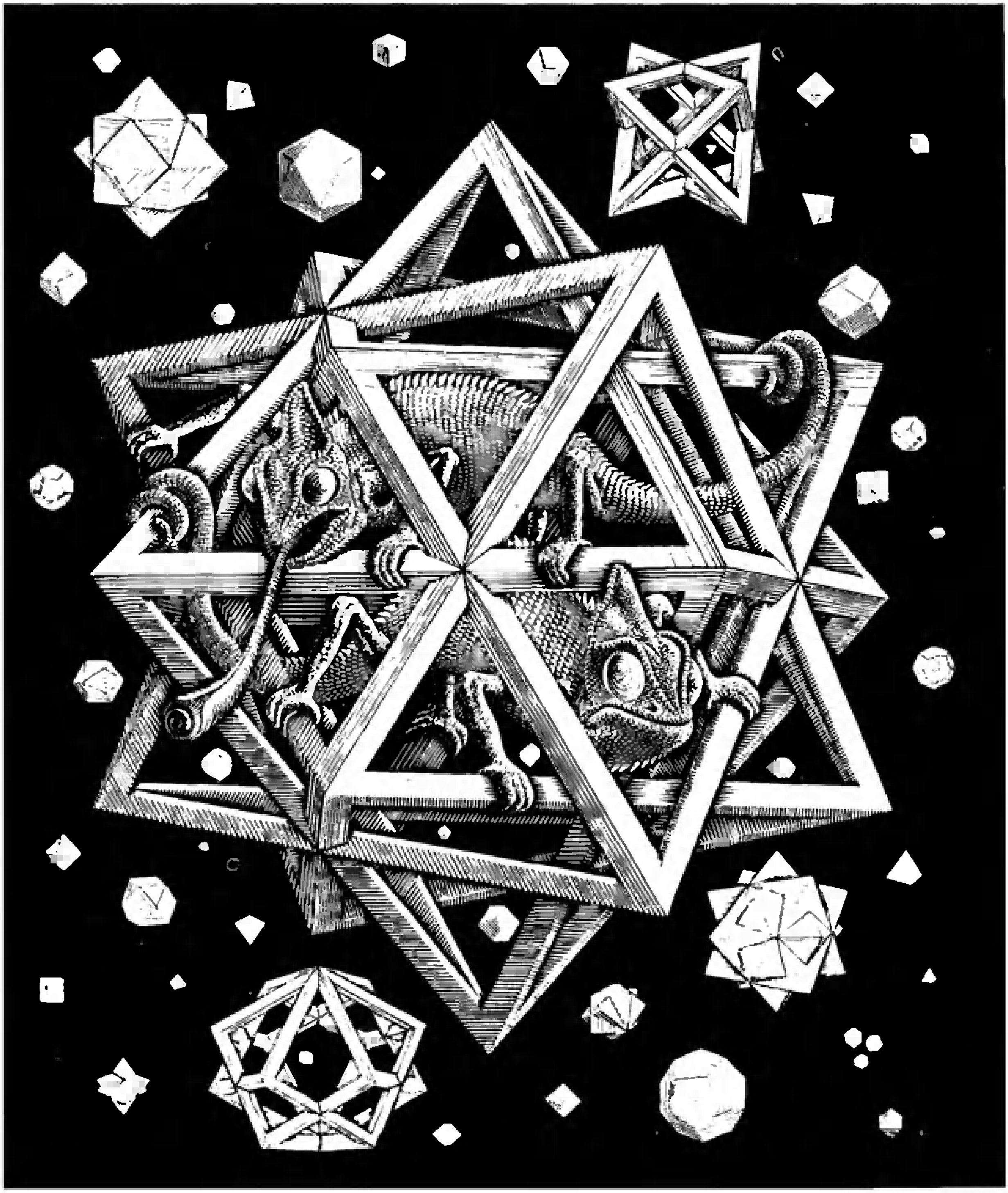
kvant.mccme.ru

Квант

1973

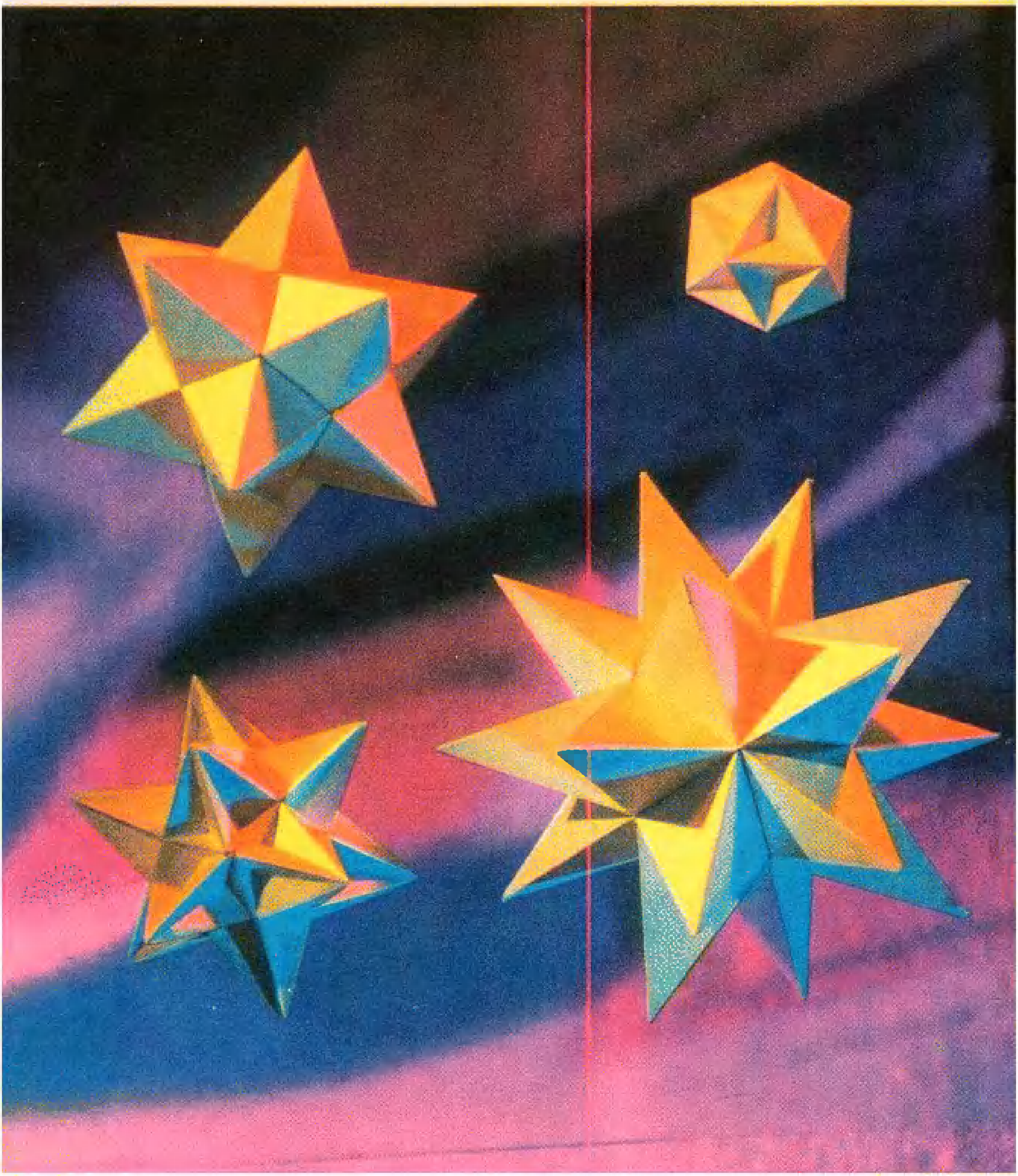
5

Научно-популярный физико-математический журнал



kvant.mccme.ru

На первой странице обложки вы видите фантазию известного голландского художника М. Эшера на тему «Правильные многогранники».
На второй и четвертой страницах обложки приведены все существующие правильные многогранники.
О правильных многогранниках вы можете прочесть в статье В. Н. Березина на стр. 26.



kvant.mccme.ru

Основан в 1970 году

Квант

1973
5

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

Главный редактор — *академик* **И. К. Кикоин**
Первый заместитель главного редактора
академик **А. Н. Колмогоров**

Редакционная коллегия:

Л А Арцимович,
М И Башмаков,
С Т Беляев,
В Г Болтянский,
И Н Бронштейн,
Н Б Васильев,
И Ф Гинзбург,
Ю Н Ефремов,
В Г Зубов,
П Л Капица,
В А Кириллин,
А И Климанов
(*главный художник*),
С М Козел,
В А Лешковцев
(*зам главного редактора*),
Л Г Макар Лиманов,
А И Маркушевич,
М Д Миллионщиков,
Н А Патрикеева,
И С Петраков,
Н Х Розов,
А П Савин,
И Ш Слободецкий,
М Л Смолянский
(*зам главного редактора*),
Я А Смородинский,
В А Фабрикант,
А Т Цветков,
М П Шаскольская,
С И Шварцбурд,
А И Ширшов

Редакция:

В Н Березин,
А Н Виленкин,
Т М Макарова
(*художественный редактор*),
И Б Мамулова,
Н А Минц,
Т С Петрова,
В А Тихомирова,
Л В Чернова
(*зав редакцией*)

Художник В. В Андреев

В НОМЕРЕ:

kvant.mccme.ru

К. Р. КОВАЛЕНКО
М. Г. КРЕЙН

БАЛЛИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА В КОСМОСЕ

Представим себе, что с поверхности Земли взлетает космический корабль, и в момент остановки (в системе отсчета, связанной с центром масс Земли) из него выбрасываются с одной и той же по величине скоростью v_0 по разным направлениям одинаковые тела. Возникает вопрос: *в какую часть околоземного пространства могут попасть эти тела?*

Решению этой задачи и ряда связанных с ней задач посвящена настоящая статья. Спешим предупредить читателя, что в такой постановке задача была рассмотрена еще в прошлом столетии, а именно, в статье профессора Б. К. Млодзеевского «Об огибающей орбит при ньютоновском притяжении», опубликованной в 1886 году, а затем, с более простым выводом, в статье знаменитого русского механика Н. Е. Жуковского «Замечание по поводу статьи Б. К. Млодзеевского», опубликованной в том же году.

Ниже будет приведено еще более элементарное изложение этих вопросов, которое потребует от читателя знания простейших свойств эллипса, а также двух *законов сохранения* для движения под действием ньютоновской силы притяжения и первого закона Кеплера *).

---

*) Все эти сведения можно найти, например, в статье Я. А. Смородинского «Движение планет», «Квант» № 1, 1971.

kvant.mccme.ru

1. Постановка задачи. Исходные предложения

При решении задачи мы будем пренебрегать сопротивлением атмосферы Земли; выбранную систему отсчета, связанную с Землей, будем считать инерциальной, тела — материальными точками массы m, а Землю — однородным шаром массы m_0.

Как известно, такой шар притягивает материальную точку с силой, направленной к его центру и равной $F=\gamma\frac{m_0m}{r^2}$, где γ — гравитационная постоянная, а r — расстояние материальной точки до центра шара.

Поэтому рассматриваемая нами задача сводится к идеализированной задаче, изученной еще Ньютоном:

*В неподвижном *) центре O сосредоточена масса m_0, которая притягивает материальную точку массы m* с силой $F=\gamma\frac{m_0m}{r^2}$. *Требуется исследовать возможные движения этой материальной точки.*

При движении материальной точки под действием силы тяготения имеют место два закона сохранения: механической энергии и момента количества движения.

Закон сохранения полной механической энергии говорит о том, что энергия

$$E=E_к+E_п=\frac{mv^2}{2}-\gamma\frac{m_0m}{r}\text{ **)} \qquad (1)$$

сохраняет постоянное значение, то есть в любой момент времени $E=E_0$, где E_0 — начальная энергия

$$E_0=\frac{mv_0^2}{2}-\gamma\frac{m_0m}{r_0}. \qquad (2)$$

*) Строго говоря, в результате взаимного притяжения и материальная точка, и Земля будут двигаться относительно их общего центра масс. Но так как масса m пренебрежимо мала по сравнению с массой m_0, то Землю можно считать неподвижной.

**) О том, как подсчитать потенциальную энергию в поле тяготения, можно прочитать, например, в статье Н. М. Сперанского «Потенциальная энергия тел в поле тяготения», «Квант» № 6, 1972.

В частности, отсюда следует, что

$$-\gamma\frac{m_0m}{r}<E_0, \text{ или } \gamma\frac{m_0m}{r}>-E_0.$$

Если $E_0<0$, то r остается ограниченным. Известно, что в этом и только в этом случае материальная точка описывает эллипс, причем один из его фокусов совпадает с центром O (первый закон Кеплера). Поэтому начальная скорость v_0, для которой $E_0<0$, называется эллиптической. Если $E_0=0$, точка движется по параболе, и соответствующая начальная скорость называется параболической. Если $E_0>0$, движение точки происходит по гиперболе, а скорость называется гиперболической.

Закон сохранения момента количества движения *) (момента импульса) заключается в том, что величина

$$L=mv\rho=mvr\sin\alpha \qquad (3)$$

(рис. 1) сохраняет постоянное значение.

Теперь рассмотрим несколько конкретных задач, относящихся к движению материальной точки по эллиптической траектории.

2. Независимость большой полуоси эллипса от направления начальной скорости

Изложенные предложения позволяют с помощью несложных выкладок

*) Как известно, этот закон сохранения связан со вторым законом Кеплера.

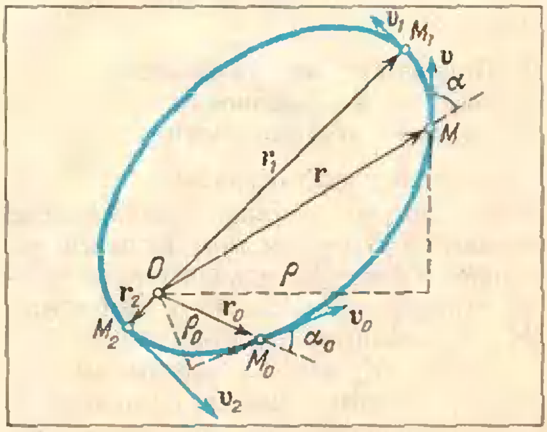


Рис. 1.

kvant.mccme.ru

найти большую полуось эллипса. В самом деле, для тех моментов, когда материальная точка попадает в одну из вершин M_1 или M_2 эллипса, то есть проходит через апогей или перигей, равенство $E = E_0$ дает

$$\frac{v_{1,2}^2}{2} - \gamma\frac{m_0}{r_{1,2}} = \frac{v_0^2}{2} - \gamma\frac{m_0}{r_0}, \quad (4)$$

а равенство $L = L_0$ дает

$$mv_{1,2}r_{1,2} = mv_0r_0\sin\alpha_0. \quad (5)$$

Исключив $v_{1,2}$ из выражений (4) и (5), получаем квадратное уравнение относительно $r_{1,2}$:

$$\left(\frac{v_0^2}{2} - \gamma\frac{m_0}{r_0}\right)r_{1,2}^2 + \gamma m_0 r_{1,2} - \frac{v_0^2r_0^2\sin^2\alpha_0}{2} = 0. \quad (6)$$

Два корня этого уравнения, r_1 и r_2, дают значения $r_{1,2}$ в апогее и перигее. Так как большая полуось эллипса $a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$, то по теореме Виета из (6) находим

$$a = -\frac{\gamma m_0}{2\left(\frac{v_0^2}{2} - \gamma\frac{m_0}{r_0}\right)} = \frac{\gamma m_0 r_0}{2\gamma m_0 - r_0 v_0^2}. \quad (7)$$

Таким образом, при фиксированной массе притягивающего центра большая полуось эллиптической траектории материальной точки определяется ее начальным положением (r_0) и величиной начальной скорости (v_0), а от направления этой скорости никак не зависит.

3. Попадание из начального положения в заданное. Эллипсоид «безопасности»

Решим следующую задачу.

Какое нужно сообщить направление начальной скорости при заданной величине v_0, чтобы материальная точка перешла из начального положения M_0 в заданное положение M?

Точка M должна лежать на эллипсе, поэтому найти направление начальной скорости — это значит найти направление касательной к эллипсу в точке M_0. Это можно сделать, *воспользовавшись оптическим свойством эллипса, согласно которому начальная скорость должна быть направлена (в ту или иную сторону) по биссектрисе угла, смежного углу* $\widehat{(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0')}$ (рис. 2), где $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}_0'$ — радиусы-векторы, проведенные из фокусов в точку M_0.

Один из фокусов эллипса известен (совпадает с точкой O), а другой надо определить. Очевидно, что расстояния r_0' и r' от точек M_0 и M до этого фокуса удовлетворяют условиям

$$r_0 + r_0' = 2a,$$
$$r + r' = 2a.$$

Отсюда следует, что

$$r_0' = 2a - r_0 \quad \text{и} \quad r' = 2a - r,$$

то есть r_0' и r' вполне определяются положением точек M_0 и M и величиной начальной скорости. Стало быть, искомый фокус лежит на пересечении двух окружностей с центрами в точках M_0 и M и с радиусами, равными соответственно r_0' и r'.

Если расстояние $M_0M > r_0' + r' = 4a - r_0 - r$, то задача не имеет решения, так как окружности не пересекаются.

Если $M_0M < r_0' + r'$, то указанные выше окружности будут иметь две точки пересечения F_1 и F_2, как показано на рисунке 2, и у задачи будет два решения.

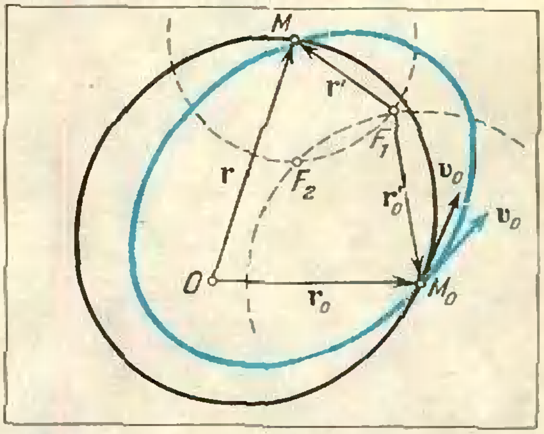


Рис. 2.

kvant.mccme.ru

Если $M_0M = r_0 + r'$, то окружности касаются. В этом и только в этом случае будет существовать одно решение.

Выясним, где в пространстве должна находиться точка M, чтобы выполнялось последнее условие. Из рисунка 3 видно, что

$$OM + MM_0 = r + r' + r_0 = r + (4a - r_0 - r) = 4a - r_0 = \mathrm{const}, \quad (8)$$

то есть заданная точка M лежит на эллипсоиде, полученном вращением эллипса с фокусами в точках O и M_0 и с большой осью, равной $4a - r_0$, вокруг прямой OM_0. Этот эллипсоид можно, не совсем, правда, естественно, назвать эллипсоидом «безопасности». На самом деле точки внутри эллипсоида являются опасными, а точки вне эллипсоида — безопасными.

После сказанного становится ясным следующее:

1. Если точка M лежит вне эллипсоида безопасности, то из заданной точки M_0 при заданной начальной скорости v_0 в нее попасть невозможно.

2. Если точка M лежит внутри эллипсоида безопасности, то в нее можно попасть по двум различным траекториям.

3. Если точка M лежит на эллипсоиде безопасности, то в нее можно попасть по единственной траектории.

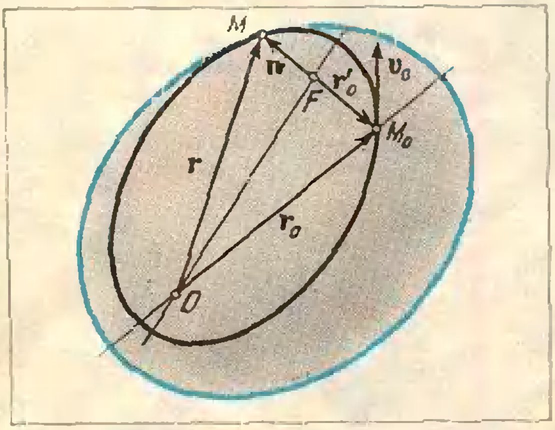


Рис. 3.

4. Перелет из начального положения M_0 в заданное M с минимальной начальной скоростью

Эллипсоид безопасности имеет определенные фокусы O и M_0, а большая ось эллипсоида безопасности, равная $4a - r_0$, согласно (7) увеличивается с увеличением начальной скорости v_0; при $v_0 \to \sqrt{2\gamma m_0/r_0}$ эллипсоид безопасности неограниченно расширяется.

Если начальная скорость не определена, то в заданную точку M можно попасть разными способами. Наименьшее же значение начальной скорости, при котором возможен перелет из точки M_0 в точку M, соответствует тому, что точка M попадает на поверхность эллипсоида безопасности.

Тогда, согласно (8):

$$4a = r_0 + r + MM_0 = 2p, \quad (9)$$

где p — полупериметр треугольника с вершинами в точках O, M_0, M (см. рис. 3). Вспомнив зависимость (7) между a и v_0 и используя соотношение (9), получаем минимальную начальную скорость

$$v_{0\,\min} = \sqrt{2\gamma m_0\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{p}\right)}.$$

5. Попадание на земную поверхность

Для удобства будем считать, что точка M_0 находится над северным полю-

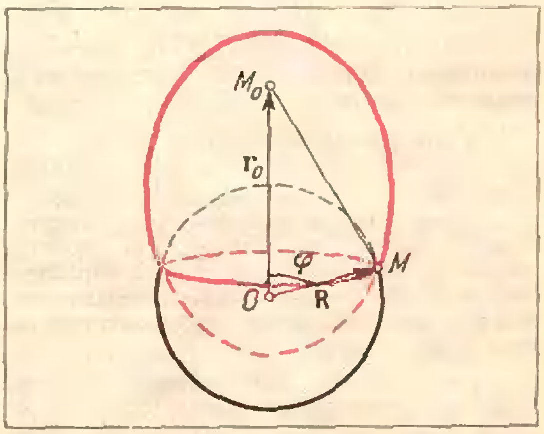


Рис. 4.

kvant.mccme.ru

сом на продолжении земной оси (рис. 4).

При достаточно малых значениях v_0 эллипсоид безопасности будет пересекаться с земной поверхностью по некоторой параллели. Из рисунка 4 видно, что большая ось эллипсоида безопасности, равная $4a - r_0 = M_0M + R$, возрастает при возрастании угла φ. При $\varphi = 180°$

$$4a - r_0 = r_0 + 2R,$$

то есть $a = \frac{1}{2}(r_0 + R)$.

Из равенства (7) находим соответствующее значение начальной скорости

$$\hat{v}_0 = \sqrt{\frac{2\gamma m_0 R}{r_0(r_0 + R)}},$$

или, учитывая, что $\gamma m_0 = gR^2$,

$$\hat{v}_0 = \sqrt{\frac{2gR^3}{r_0(r_0 + R)}}.$$

Это — наименьшая начальная скорость, позволяющая попасть в любую точку земной поверхности. В частности, если r_0 приближается к R, то $\hat{v}_0$ стремится к $\sqrt{gR}$, то есть к первой космической скорости, что вполне естественно. С увеличением r_0 скорость $\hat{v}_0$ убывает, что также вполне естественно. При $v_0 > \hat{v}_0$ можно будет попасть в любую точку Земли по двум различным траекториям, а при $v_0 = \hat{v}_0$ это же имеет место для всех точек земной поверхности, кроме Южного полюса.

Упражнения

1. При $v_0 = v_{\text{параб}}$ ($E_0 = 0$) расстояние от фокуса O параболической трактории до ее вершины A равно

$$h = r_0 \sin^2 \alpha_0 = \frac{1}{2} r_0 (1 - \cos 2\alpha_0)$$

рис. 5).

Проверить, что эта формула непосредственно следует из «оптического» свойства параболы: плоский пучок лучей, направленный на параболическое зеркало параллельно его оси, после отражения от зеркала собирается в его фокусе.

Указание. При решении воспользоваться классическим определением параболы: парабола есть геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки,

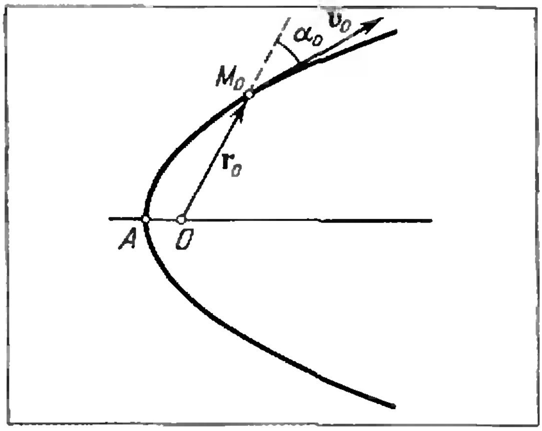


Рис. 5.

называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

2. Показать, что для гиперболической скорости v_0 ($E_0 > 0$) действительная полуось a гиперболической орбиты равна

$$a = \frac{\gamma m_0 r_0}{r_0 v_0^2 - 2\gamma m_0}$$

и не зависит от направления начальной скорости v_0.

Указание. Воспользоваться определением гиперболы: гипербола есть геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, имеет одно и то же абсолютное значение.

Подробнее о гиперболе можно прочитать, например, в статье Я. А. Смородинского «Движение комет и открытие атомного ядра», «Квант» № 12, 1971.

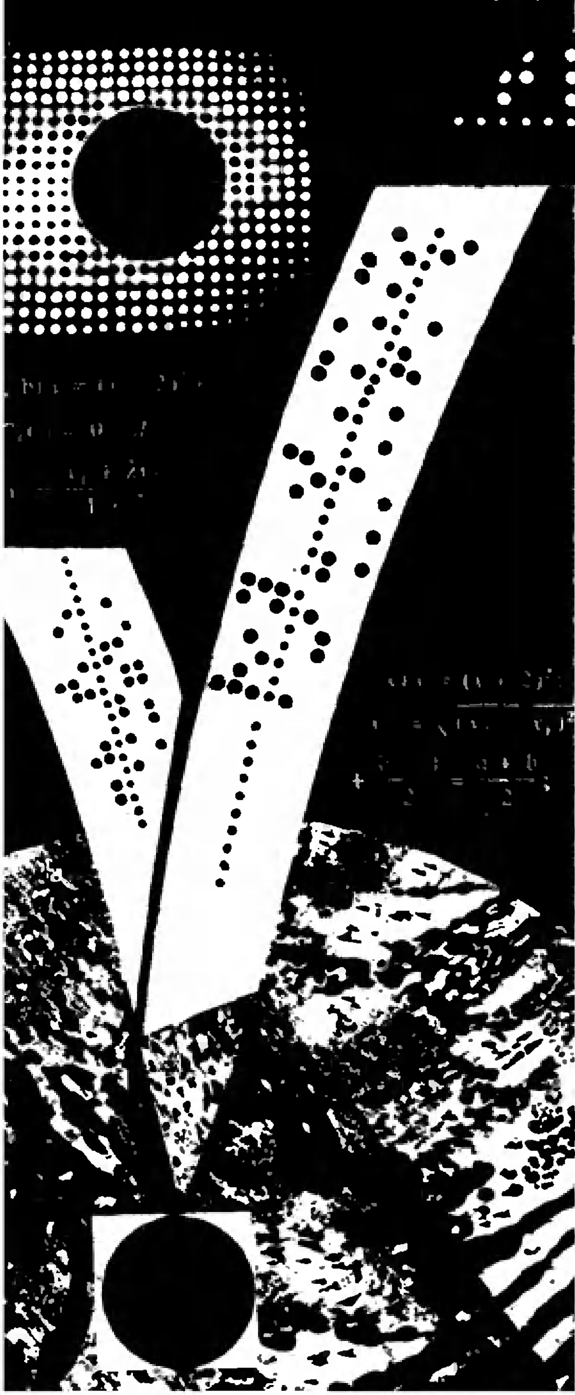
3. В поле положительно заряженного центра с зарядом Q с начальной скоростью v_0 движется материальная точка массы m с положительным зарядом q. Как известно, под действием кулоновской силы отталкивания $F = \frac{Qq}{r^2}$ материальная точка будет двигаться по гиперболе. Показать, что действительная полуось гиперболической орбиты находится по формуле:

$$a = \frac{Qqr_0}{mr_0v_0^2 + 2Qq}.$$

kvant.mccme.ru

Я. И. ХУРГИН

КИБЕРНЕТИК ИЩЕТ ПОДЗЕМНЫЕ КЛАДОВЫЕ



Поиск

Труд поисково-геологических экспедиций овеян романтикой: костры и песни под гитару, заросли и болота, проявления лучших и худших черт человеческих, всплывающих на фоне трудностей... И нет зацепки для вмешательства «трезвого» математика.

Но это лишь на первый взгляд. Давайте приглядимся внимательнее, забудем на время о романтике и выясним, ради чего геологи организуют различные экспедиции, какая у них цель, как они ее достигают? Ясно, что в экспедиции геологи отправляются не только для собственного удовольствия. Их цель — поиск полезных ископаемых.

Что же они делают? Ищут... И когда находят — это праздник, радость: их тяжелый труд не пропал даром. Ибо бывает, что работа проходит вхолостую. Конечно, геологи действуют не вслепую, имеется огромный опыт предшественников, геологическая наука, новые и еще более новые методы геофизики, геохимии, геоморфологии и других гео...наук. И все равно случается, что деятельность поисковых партий терпит фиаско: в результате большой работы ничего не находят.

Но как-то нехорошо в наш век, в период научно-технической революции вместо действий наверняка

kvant.mccme.ru

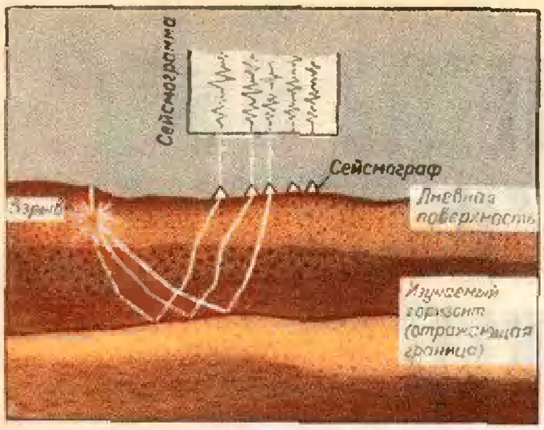


Рис. 1.

жить по-старинке в ситуации «повезет — не повезет». И кажется, что следует прикрикнуть на геологов, потребовать с них работы наверняка, раз им «создают все условия» …

Геологи ищут не клад, спрятанный пиратом от посторонних взоров, а подземные кладовые, где уголь и нефть, золото и вольфрам, железо и уран — богатства, не сравнимые по масштабам с любыми кладами. И, конечно, они при поиске тоже как-то оценивают свои шансы. Оценки эти до сих пор носят качественный характер, хотя опираются на различного рода информацию, носящую как качественный, так и количественный характер.

Но сейчас во всех отраслях промышленности решается проблема оптимизации: надо все делать возможно быстрее, дешевле, с наименьшим количеством погрешностей и ошибок. И возникает необходимость учета всех причин, создающих помехи, средств для их преодоления, необходимость количественной оценки качества проведенных работ.

Итак, речь пойдет о новом подходе к проблеме поиска полезных ископаемых, точнее, о проблеме поиска месторождений нефти и газа.

Что искать?

Поверхность Земли на много километров в глубину представляет собой многослойный бутерброд: чередуются пласты песчаные, глинистые, известняки и т. д. Нефть или газ могут залегать лишь в пористых пластах, где между частичками породы имеются достаточные промежутки. Под влиянием всяких катаклизмов ровные пласты осадочных пород изменили свою геометрию, появились впадины и подъемы, горные кряжи и разломы. В большинстве случаев месторождения нефти и газа приурочены к подземным холмам с непроницаемой для жидкости или газа покрышкой; она может быть глинистой или соляной. Под этим плотным куполом находятся пористые пласты, в которых и залегает жидкость или газ. Поэтому первая задача геологов при поиске нефти или газа — это обнаружить подземные купола, или, как их называют геологи, локальные*) поднятия. Вот о поиске локальных поднятий и пойдет сейчас речь.

Модель

Как составить себе представление о структуре земных пластов на глубине нескольких километров под поверхностью Земли? Ответ ясен: надо бурить скважины, отбирать с разных глубин куски породы — керн, и затем сопоставлять результаты исследования различных скважин. Но бурить много скважин — это очень дорого, бурение скважины на глубину 2—4 *км* стоит сотни тысяч рублей, а сейчас бурят и более глубокие скважины. И поэтому для получения предварительной информации используются различные косвенные методы, такие, например, как гравиразведка или электроразведка. Наиболее информативный среди них — сейсморазведка.

Этот метод, простой по идее, но достаточно сложный при осуществлении, состоит в следующем (рис. 1). В неглубокой скважине производят взрыв (незначительной силы). Упругая волна — результат взрыва — рас-

*) Слово «локальный» означает местный, не выходящий за определенные пределы.

kvant.mccme.ru

пространяется в толще Земли, отражаясь от границ раздела пластов, образованных различными породами. Отраженная волна регистрируется сейсмоприемником, расположенным на поверхности Земли — на дневной поверхности, как говорят геологи.

Если предположить, что граница, от которой регистрируются отражения, является плоской, а скорость распространения упругих волн вдоль всего пути волны постоянна, то можно явно выписать зависимость времени прихода волны на дневную поверхность от координат сейсмоприемника и параметров среды. Эта зависимость носит в сейсморазведке название *годографа отраженной волны*, а задача восстановления отражающей границы по заданному годографу называется обратной кинематической задачей сейсморазведки. При сделанных предположениях эта задача однозначно разрешима, и такой метод используется на практике под названием *метода эффективной скорости*.

Введенные выше предположения в совокупности образуют так называемую модель реальной среды. Та модель, которая используется в методе эффективной скорости, весьма приближенно описывает реальную ситуацию. Разумеется, ее можно было бы усложнить, чтобы приблизить к реальной среде. Но нам важно подчеркнуть, что построение модели среды — неотъемлемая часть решения обратной кинематической задачи сейсморазведки. В той или иной форме она всегда присутствует при интерпретации данных сейсморазведки. Однако любая принятая модель лишь приближенно отражает действительное положение вещей. Это, конечно, не единственная трудность, возникающая при интерпретации сейсмических наблюдений: имеются еще аппаратурные погрешности, наблюдаются искажения регистрируемой отраженной волны колебаниями, отраженными от других границ, и т. п. Но все же, как показывают и опыт, и общие рассуждения, источник наибольших погрешностей — это несоответствие или, как принято говорить, неадекватность выбираемой модели реальной среде.

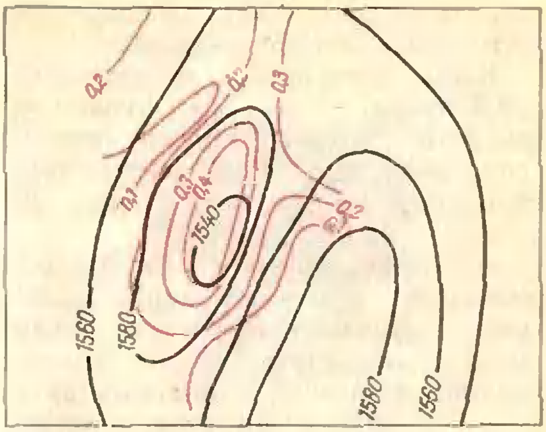


Рис. 2.

При этом приходится принимать во внимание следующее немаловажное обстоятельство: слишком простая модель среды позволяет лишь очень грубо решить интересующую нас задачу, а достаточно сложная вообще не допускает ее решения (по крайней мере, с помощью имеющихся в нашем распоряжении средств и за реальные сроки). И приходится, как всегда, искать компромисс между желаниями и возможностями...

Верить ли карте?

Итак, интерпретация сейсмических наблюдений позволяет приближенно восстановить форму интересующей нас отражающей поверхности. Обратим внимание на это слово: п р и б л и ж е н н о.

Геологи, так же как и географы, для наглядного представления рельефа строят карту равных уровней (рис. 2). Здесь черными линиями отмечены все точки, которые на изучаемой поверхности расположены на одинаковой глубине. Число, которое написано около этой линии, указывает глубину в метрах, или уровень. На карте представлено всегда несколько таких линий уровня, причем последовательные уровни отличаются между собой на постоянную величину (здесь на 20 метров). Если поверхность кру-

kvant.mccme.ru

тая, то такие линии расположены густо, если пологая — редко.

Когда поверхность представляет собой купол, то ее линии уровня — замкнутые кривые, причем окрестности вершины купола соответствует внутренняя, самая маленькая по размерам линия.

Итак, результатом сейсморазведочных работ является карта линий уровня изучаемого горизонта, и если где-то на этой карте есть ряд замкнутых линий уровня, вложенных друг в друга, причем внутренние линии соответствуют меньшим глубинам, то эта часть карты соответствует куполу — локальному поднятию.

Теперь нужно бурить скважину, чтобы выяснить, есть ли в этом поднятии нефть или газ. И каждому ясно, что бурить надо в вершине купола, то есть внутри самой маленькой по размерам линии уровня, ибо здесь наибольшие шансы наверняка попасть в залежь, если она на самом деле существует.

Но подчас пробурят первую скважину, а она не даст притока нефти или газа, затем бурят еще одну, две, три, и вот оказывается, что никакого локального поднятия нет, геофизическая информация о наличии купола оказалась ошибочной. Следовательно, зря бурили эти скважины, впустую потрачены большие средства и значительное время.

Как же это могло произойти? Кто в этом виновен? И главное: как избежать таких ошибок?

Вспомним выделенное выше слово п р и б л и ж е н н о. Глубины залегания, а следовательно, форма и расположение линий уровня определяются геофизиками не точно, а с погрешностями, и порой с весьма значительными.

Винить их в этом не нужно. Дело в том, что ошибки, как я выше говорил, это следствие как аппаратурных погрешностей, так и самого метода. И если аппаратурные погрешности можно заметно уменьшить, то погрешности метода принципиально не устранимы. Если бы нам были известны точно скоростные характеристики среды, то есть скорости распространения упругой волны во всех пластах вдоль пути этой волны, то проблемы поиска локальных поднятий вообще не существовало бы: добраться до локального поднятия принципиально было бы столь же легко, как добраться из Москвы в Киев, пользуясь компасом и точной географической картой.

Однако, когда карта линий уровня — ее называют структурной картой — уже нарисована (а далась она не даром — затрачены большой и квалифицированный труд, средства и время), то очень соблазнительно относиться к такой карте с доверием. Такова уж человеческая природа: трудно все время относиться с недоверием к окружающему, особенно, если проще этому верить. Да и что же здесь можно поделать: другой информации в распоряжении геофизика или геолога вроде бы и нет.

Формализация

О кладоискателях написано много, и я уверен, читатель легко восстановит в памяти соответствующие сюжеты. Всякий раз, когда кладоискатель сталкивается с трудностями, связанными с возможностью разных путей для достижения своей цели, он как-то оценивает свои шансы на каждом из путей. Но это оценка интуитивная, качественная. Если бы кладоискателем оказался кибернетик, то он прежде всего приложил бы усилия для выработки критерия количественной оценки шансов добиться успеха, а затем выбор пути на каждом шаге уже не представлял бы для него трудностей: надо было бы действовать так, чтобы критерий давал все время наибольшее из возможных значений.

В нашей задаче поиска подземных кладовых — локальных поднятий — ситуация та же: нужно построить критерий для выбора наилучшей последовательности действий или, как принято сейчас говорить, для выбора наилучшей стратегии.

kvant.mccme.ru

Заметим теперь, что информация, получаемая в ходе поискового процесса, носит статистический характер, и поэтому при построении критерия и выбора стратегий целесообразно воспользоваться вероятностным подходом.

Итак, речь пойдет о подходе к поисковому процессу с математических позиций. Но для этого и сам процесс следует должным образом формализовать.

Прежде всего нужно дать четкое определение изучаемому объекту — локальному поднятию.

Определим в каждой точке Q с координатами (x, y) на изучаемой части плоскости (дневной поверхности) функцию (расстояние от дневной поверхности до поверхности купола) $h = H(Q) \equiv H(x, y)$, значения которой описывают поверхность изучаемого горизонта. Линия уровня представляет собой множество тех точек Q, координаты которых удовлетворяют уравнению $H(x, y) = h_0$, где h_0 — определенное число.

Локальное поднятие — это область на плоскости, ограниченная замкнутой линией уровня при каком-то фиксированном значении h_0, *внутри которой всюду* $H(x, y) > h_0$.

Здесь следует сделать два замечания.

Во-первых, из определения вытекает, что внутри локального поднятия находится бесконечно много других локальных поднятий, ибо внутри выбранных нами линий уровня лежат другие также замкнутые линии уровня. Впрочем, это многообразие нам не помешает.

Во-вторых, следует ограничить размеры изучаемых локальных поднятий. Действительно, весьма малые купола не имеют промышленного значения, а слишком большие могут вообще иметь другой смысл.

Поэтому практически на каждой территории нас интересуют локальные поднятия, диаметр D (то есть наибольшая хорда) которых заключен в некоторых пределах (между минимальным, меньше которого разработка залежи нерентабельна, и тем, который соответствует максимально возможному размеру поднятия на изучаемой территории).

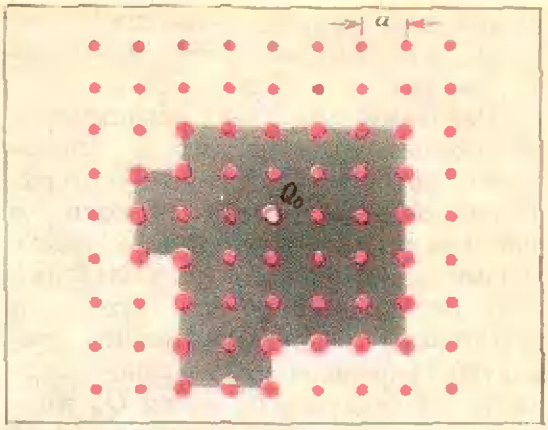


Рис. 3.

На практике исходные данные сейсморазведки дают возможность определить глубины залегания изучаемого горизонта лишь в некоторых отдельных точках, да и то с погрешностями. Затем вся поверхность этого горизонта определяется путем интерполяции (то есть приближенно восстанавливается), и, конечно, положения точек этой поверхности будут еще менее точными.

Итак, положения точек изучаемой поверхности определяются с ошибками, а следовательно, и положения точек ее линий уровня тоже определяются с ошибками.

Для дальнейшего нам полезно изменить объект изучения: мы будем интересоваться не наличием или отсутствием в данной области локального поднятия, а будем выяснять относительно отдельных точек, принадлежат ли они к локальному поднятию.

Разобьем плоскость (x, y) квадратной сетью с шагом a. Функцию $H(Q) \equiv H(x, y)$, описывающую поверхность локального поднятия, будем задавать только в узлах сети, и вместо произвольных кривых будем рассматривать лишь полигоны, то есть кривые, стороны которых идут вдоль линий сети. На рисунке 3 закрашена внутренность такого замк-

kvant.mccme.ru

нутого полигона, охватывающего точку Q_0, которую мы также помещаем в узле сети.

Реальные локальные поднятия в платформенных областях — достаточно хорошо устроенные поверхности: они медленно меняются, и шаг сети выбирается так, чтобы между узлами не было резких колебаний этой поверхности. Тогда можно с достаточной точностью заменить предыдущее определение локального поднятия на следующее: *точка Q_0 принадлежит локальному поднятию, если найдется хотя бы один замкнутый полигон, охватывающий точку Q_0, во всех узлах Q_i которого изучаемая поверхность расположена ниже, чем в точке Q_0: $H(Q_i) < H(Q_0)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Диаметр полигона предполагается при этом ограниченным, так же как и выше для произвольных линий.

Вероятностный подход

В соответствии с определением точка Q_0 либо принадлежит локальному поднятию, либо не принадлежит. Но наши знания о положении точек изучаемой поверхности содержат погрешности, носящие статистический характер. Поэтому утверждение о принадлежности точки Q_0 локальному поднятию может быть высказано лишь с некоторой вероятностью. Введем соответствующую характеристику.

Именно, определим в каждой изучаемой точке Q с координатами (x, y) изучаемой области ф у н к ц и ю д о с т о в е р н о с т и $d(Q) \equiv d(x, y)$, представляющую собой вероятность того, что точка Q принадлежит локальному поднятию.

Функция достоверности наглядно может быть задана так же, как и структурная карта — набором ее линий уровня. Точки, расположенные на этой линии уровня, с одинаковой вероятностью принадлежат локальному поднятию. При этом линии уровня функции достоверности, вообще говоря, не совпадают с линиями уровня поверхности, которая строится по геофизическим данным.

Теперь возникает вопрос о том, как же построить функцию достоверности по информации, имеющейся в распоряжении геофизиков. Отклонения значений глубины залегания, полученных в результате сейсморазведочных работ, от действительных значений глубины залегания изучаемой поверхности в каждой точке Q — это случайные величины. Для изучения их вероятностных характеристик были сопоставлены данные сейсморазведки с данными последующего бурения, которые, как значительно более точные, были приняты за действительные. Обработка данных на больших регионах Волго-Уральской нефтегазоносной провинции дала возможность выяснить вероятностные характеристики этих случайных величин.

В соответствии с последним определением нужно, чтобы нашелся х о т я б ы о д и н замкнутый полигон, охватывающий точку Q_0, во всех узлах Q_i которого значения функции $H(Q_i)$ будут меньше, чем $H(Q_0)$. Так как сами величины $H(Q_i)$ — случайны, то и событие «найдется хотя бы один замкнутый полигон, охватывающий точку Q_0», — тоже случайное. Его вероятность и есть вероятность принадлежности точки Q_0 локальному поднятию, то есть значение функции достоверности $d(Q_0)$.

Зная вероятностные свойства случайных величин $H(Q_i)$, можно написать формулы для вычисления значений функций достоверности. Однако эти формулы очень громоздки, и для вычислений их использовать нецелесообразно.

Поэтому для вычисления значений функции достоверности используется другой прием, основанный на так называемом методе Монте-Карло (или методе статистических испытаний). Здесь приходится уже воспользоваться быстродействующей вычислительной машиной. Но это тема отдельной статьи. Сейчас лишь под-

kvant.mccme.ru

черкну, что именно на этом пути были получены окончательные результаты, о которых сейчас и пойдет речь.

Некоторые результаты и перспективы

Сама собой напрашивается мысль: на структурную карту (то есть на карту линий уровня изучаемого горизонта, построенную по данным сейсморазведки) нанести и значения функции достоверности. Можно даже, пользуясь обычными приемами интерполяции, нанести линии уровня функции достоверности (на рисунке 2 и далее линии уровня функции достоверности нанесены красными линиями).

Теперь можно приступить к обсуждению того нового, что внесла в структурную карту функция достоверности.

Оказалось, что на участках, где наибольшие значения функции достоверности были достаточно высокими (более 0,8), наблюдалось, как правило, совпадение локального поднятия, построенного по данным сейсморазведки, (будем его в дальнейшем называть геофизическим поднятием) с реальным поднятием (см. рис. 4, где локальное поднятие закрашено).

При наибольших значениях функции достоверности порядка 0,5 — 0,6 часто отмечалось смещение геофизического поднятия от реального, причем участки с наибольшими значениями функции достоверности тяготели по расположению к реальному поднятию (рис. 5 и 6). Из этого следует важный практический вывод: *закладывать поисковую скважину следует не в тех точках, которые оказываются по геофизическим построениям самыми высокими (то есть в своде геофизического поднятия), а в точках с наибольшими значениями функции достоверности, ибо они с наибольшей вероятностью на обследуемой области принадлежат реальному локальному поднятию.*

Наконец, геофизические структуры, на которых максимальные значения функции достоверности были не более 0,35, как правило, оказывались ложными: их наличие опровергалось последующим бурением. В этом случае все затраты на разбуривание подобных ложных структур оказывались непроизводительными.

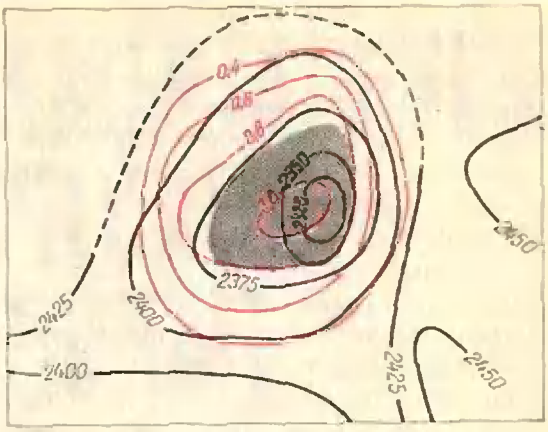


Рис. 4.

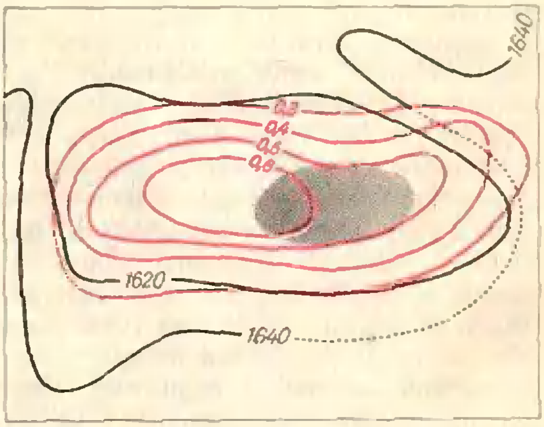


Рис. 5.

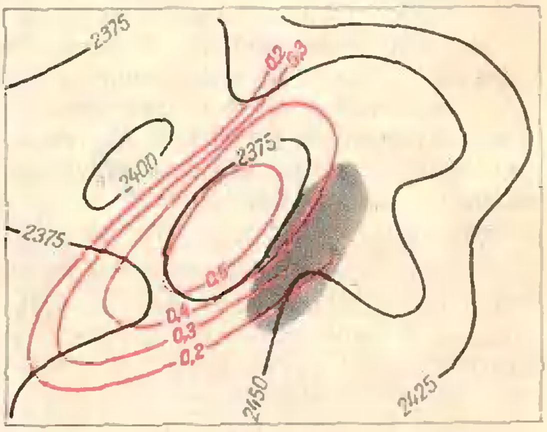


Рис. 6.

kvant.mccme.ru

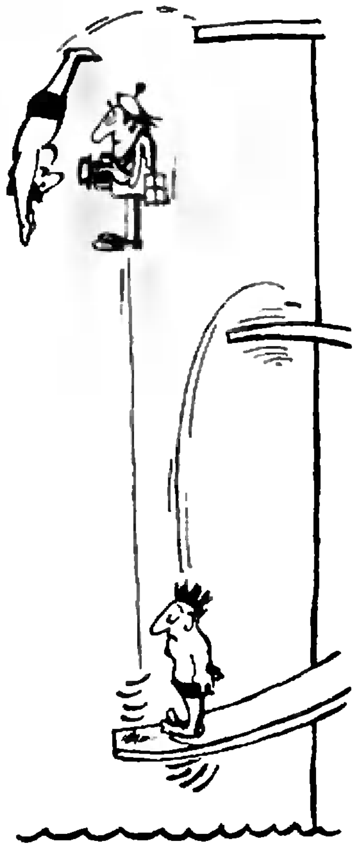
Хочу заметить, что эти выводы были сделаны на основании очень большого экспериментального материала, по сотням геофизических поднятий, и, конечно, обработка геофизического материала дала значительно больше сведений, чем здесь упомянуто.

Таким образом, новый подход к проблеме поиска и созданный математический аппарат уже показал свою жизнеспособность и высокую эффективность в проблеме оценки достоверности при поиске локальных поднятий. Однако те же методы дают возможность построить функцию достоверности для оценки принадлежности точки к своду локального поднятия (это существенно при выборе точки заложения первой поисковой скважины) и функцию достоверности для зоны водонефтяного контакта, то есть границы нефтяной залежи. Далее, используя функцию достоверности принадлежности точек локальному поднятию, можно построить хорошую оценку средней площади, занимаемой локальным поднятием. Этот же прием дает возможность с новых позиций подойти к важнейшей проблеме подсчета запасов нефти (или газа) на месторождении. Таким образом, в области нефтегазовой геологии и геофизики методы, опирающиеся на функцию достоверности, уже принесли значительный эффект, и их последовательное использование приведет к еще большим успехам.

Но здесь мне хотелось бы подчеркнуть, что методы вероятностного поиска с успехом могут быть использованы и при решении других поисковых задач в геологии, да и многих аналогичных задач из других областей науки и техники.

«Тур карикатур»

В газете «Советский спорт» от 24 декабря 1972 года была опубликована следующая карикатура (перепечатанная из зарубежной газеты).



Художник снабдил ее подписью: «Без слов». Мы предлагаем другую подпись: «Может ли быть такое?» Попробуйте оценить карикатуру с этой точки зрения.

В. Александров

kvant.mccme.ru

Б. ТЕЙЛОР,
Д. ЛАНГЕНБЕРГ,
У. ПАРКЕР

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

Среди большого числа разнообразных физических величин совершенно особое место занимают так называемые фундаментальные физические постоянные (постоянная Планка, скорость света, заряд и масса электрона и т. п.). Мы называем их фундаментальными не случайно. Эти постоянные связаны с самыми глубокими и общими физическими закономерностями природы. Они входят в основные, важнейшие теории современной физики, так сказать, в фундамент физических знаний. Физики стремятся определить значения этих величин с максимально доступной степенью точности, измеряя их снова и снова. Эксперименты по повторному определению численных значений фундаментальных постоянных позволяют получать сведения о степени справедливости основных физических теорий. Для этих экспериментов часто привлекаются новые методы, постоянно возникающие в процессе развития физики.

Мы помещаем здесь сокращенный перевод статьи американских физиков, которым недавно удалось существенно повысить точность определения фундаментальных физических постоянных. Полный перевод этой статьи, выполненный В. И. Рыдником, опубликован в журнале «Успехи физических наук», том 105, выпуск 3, ноябрь 1971 года.

Публикация подготовлена В. А. Лешковцевым.

kvant.mccme.ru

Вопреки распространенному мнению, физика во многих своих областях — не особенно точная наука. Физики зачастую вполне удовлетворяются измерением какой-либо величины с точностью до нескольких процентов и такой же степенью совпадения экспериментального результата с его теоретическим предсказанием. В некоторых случаях большим достижением считается совпадение обоих результатов даже только по порядку величины (то есть их расхождение менее чем в 10 раз). Столь невысокая точность имеет в основном двоякое происхождение. Во-первых, в большинстве экспериментов физики имеют дело со сложными системами, и в опытах одновременно фигурирует несколько взаимосвязанных, но часто мало понятных явлений. Во-вторых, существующие теории обычно дают лишь приближенное описание, основывающееся на упрощенной качественной модели системы.

Вместе с тем в физике существует ряд особых величин, которые можно и нужно знать с очень высокой точностью. Это — фундаментальные физические постоянные. К их числу, в частности, относятся скорость света в пустоте c, постоянная Планка h, заряд электрона e и масса электрона m_e. Мы выбрали именно эти фундаментальные постоянные с целью проиллюстрировать совершенно различное их «происхождение».

Скорость света и постоянная Планка — примеры постоянных, которые естественно фигурируют в математических формулировках основных физических теорий. Например, в теории относительности Эйнштейна энергия E и масса m связаны знаменитым соотношением $E = mc^2$; в квантовой теории энергия E и частота ν фотона связаны соотношением $E = h\nu$.

Заряд и масса электрона являются примерами постоянных, характеризующих не только эту элементарную частицу, но и все прочие частицы, из которых построено вещество (тогда к этим постоянным добавляются численные множители). Например, заряд α-частицы вдвое больше фундаментальной единицы электрического заряда, а масса покоя нейтрального π-мезона в 264,1 раза больше фундаментальной единицы массы (то есть равна 264,1 m_e).

Разумеется, в природе существует много других величин, которые могут быть измерены с высокой точностью, например, плотность кусочка золота или расстояние от Земли до Солнца. Такие величины, однако, не считаются фундаментальными постоянными. Они слишком тесно связаны с частными свойствами того материала или системы, над которыми производятся измерения. Другой кусочек золота при высокой степени точности измерения даст другую плотность. Вместе с тем марсианин мог бы совершенно справедливо заметить, что расстояние от Марса до Солнца ничуть не менее «фундаментально», чем расстояние от Солнца до Земли. В сущности, эти величины не универсальны; они не фигурируют в основных уравнениях теоретической физики.

Почему важна точность?

Почему важно знать численные значения фундаментальных постоянных с высокой точностью? Прежде всего потому, что количественные предсказания основных физических теорий зависят от численных значений постоянных, входящих в эти теории. Для получения точного количественного описания физического мира существенно располагать точным знанием этих численных значений. Точное определение фундаментальных постоянных в разного рода физических экспериментах еще более важно по той причине, что оно позволяет проверить согласованность и правильность самих основных физических теорий.

Если присмотреться к структуре физической науки, то можно заметить, что физика состоит из ряда как будто разнородных областей — физики твердого тела, атомной физики, ядерной физики, физики элементар-

kvant.mccme.ru

ных частиц и т. д. Фактором, связывающим воедино все эти области, является физическая теория; все они имеют единую основу, все опираются на представления квантовой механики, теории электромагнетизма, специальной теории относительности, статистической механики и т. п. Фундаментальные постоянные, включенные в эти теории,— как бы звенья в теоретической цепи, связывающей всю физику. Измерения этих постоянных на все более высоком уровне точности нужны не только для того, чтобы узнать новый лишний знак после запятой, но и потому, что этот новый знак может привести к обнаружению ранее не известной несогласованности или, наоборот, может устранить имеющуюся несогласованность в нашем описании физического мира.

Относительная точность, с которой сегодня измеряются многие фундаментальные постоянные, достигает миллионных долей. Под нею здесь понимается та относительная неопределенность, которую мы должны приписать нашему знанию численного значения какой-либо величины. Эта неопределенность указывает пределы, в которых результат может отличаться от истинного значения величины. Она есть количественная мера нашего сомнения в численном значении данной величины.

Для практических целей относительная точность в одну миллионную долю может считаться весьма высокой. Такая точность соответствует определению длины футбольного поля с погрешностью, равной толщине одной страницы этого журнала. Существует несколько величин, значения которых были измерены с точностью, еще в тысячу раз более высокой. Это соответствует погрешности в толщину данной страницы уже при измерении расстояния от Нью-Йорка до Сан-Франциско!

С необходимостью чрезвычайно точного определения фундаментальных постоянных физики столкнулись при разработке квантовой электродинамики. Эта теория описывает различные взаимодействия элементарных частиц. Она предсказала целый ряд очень тонких эффектов, для обнаружения которых потребовались измерения с такой же высокой относительной точностью, как и при измерении фундаментальных постоянных. Если бы точность определения фундаментальных постоянных была невелика, теория не смогла бы предсказать наличие таких явлений.

Высокая степень точности в определении скорости света необходима для расчета орбит искусственных спутников и траекторий космических кораблей, при решении вопроса о том, движутся ли земные континенты, и вообще тогда, когда необходимо очень точно измерить большие расстояния.

Уроки прошлого

В период с 1907 по 1917 годы Роберт Милликен произвел серию экспериментов по определению численного значения фундаментальной единицы электрического заряда e с помощью своего знаменитого метода падающей масляной капли. В методе Милликена изучалось движение несущих небольшой заряд маленьких масляных капель в воздухе между двумя параллельными горизонтальными металлическими пластинами. Вначале определялось время, за которое капля опускалась на определенное расстояние под действием одной лишь силы тяжести. Затем между пластинами создавалась определенная разность потенциалов, заставлявшая каплю подниматься (то есть двигаться против силы тяжести), и вновь измерялось время, за которое капля проходила заданное расстояние. Из многих наблюдений за движением различных капель вычислялось значение e (это вычисление требовало предварительного определения других величин, фигурирующих в опыте, — местного значения ускорения силы тяжести, расстояния между пластинами, давления и вязкости воздуха и плотности масла). Окончательное опубликованное Милликеном в

kvant.mccme.ru

1917 году значение e составило $(4{,}774 \pm 0{,}002) \cdot 10^{-10}$ ед. СГСЭ.

В 30-х годах в связи с появлением нового метода определения e выяснилось, что в милликеновское значение вкралась существенная ошибка. Новый метод заключался в раздельном определении двух других физических постоянных — числа Авогадро N и числа Фарадея F *). Число Авогадро равно количеству атомов (или молекул), содержащихся в 1 моле вещества; моль определяется как масса в граммах, равная атомному (или молекулярному) весу вещества. Число Фарадея есть количество электричества, которое должно протечь через раствор электролита, чтобы на электроде выделился 1 моль одновалентного элемента, находящегося в растворе. Число Фарадея и число Авогадро в случае одновалентных элементов связаны простым соотношением $F = Ne$ **).

Отсюда следует, что $e = F/N$, то есть e легко получить из известных значений F и N. Число Авогадро определялось путем тщательного измерения плотности, атомного веса и постоянной кристаллической решетки (расстояния между атомными плоскостями кристаллических веществ). Число Фарадея определялось измерением массы элемента, электролитически выделившегося на электроде при пропускании через раствор электролита, содержащего этот элемент, известного тока в течение известного времени.

Полученное таким путем значение e оказалось равным $(4{,}8021 \pm \pm 0{,}0009) \cdot 10^{-10}$ ед. СГСЭ, что существенно отличается от найденного Милликеном. Главный источник ошибки в измерениях Милликена, как позднее выяснилось, заключался в том, что он использовал неправильное значение вязкости воздуха. Милликен взял его, основываясь почти целиком на измерениях одного из своих студентов, но впоследствии оказалось, что этот студент допустил незамеченную ошибку. После того как данные Милликена были пересчитаны с учетом правильного значения вязкости воздуха, оказалось, что найденное значение e великолепно согласуется с полученным косвенным путем из измерений чисел Авогадро и Фарадея.

Этот случай хорошо иллюстрирует тот общий факт, что экспериментально найденное значение постоянной меняется с каждым новым ее определением. Причина заключается в том, что трудно измерить все фигурирующие в опыте величины с высокой точностью; любой мыслимый эффект, который мог бы повлиять на результат, требует тщательного и длительного изучения. И даже при этом случается «прозевать» существенный эффект.

*) Его называют также постоянной Фарадея, так как оно одинаково для всех веществ.

**) В случае, если валентность элемента равна n, в этом соотношении следует заменить N на N/n.

Определение отношения e/h

Вероятно, наилучший пример тех важных следствий, которые может иметь исключительно точное повторное определение фундаментальных постоянных, дают проведенные в последние годы измерения величины e/h группой ученых из Пенсильванского университета; в состав этой группы входили авторы настоящей статьи и Э. Дененстайн. Эти измерения, осуществленные благодаря открытию явления, наблюдающегося в твердых телах при низких температурах, привели к результату, который оказал существенное влияние на такие далекие от физики твердого тела области, как физика элементарных частиц, квантовая электродинамика, физика рентгеновских лучей и атомная физика. Использованное в измерениях замечательное явление, наблюдаемое в сверхпроводящих материалах, известно под названием эффекта Джозефсона (для переменного тока).

kvant.mccme.ru

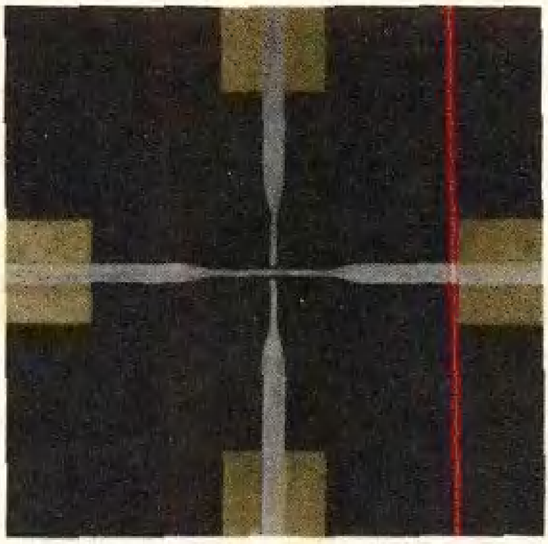


Рис. 1.

Оно было впервые предсказано студентом Кембриджского университета Джозефсоном в 1962 году. Он теоретически показал, что если почти вплотную приблизить два сверхпроводника (то есть вещества, которые полностью утрачивают сопротивление электрическому току при температурах, близких к абсолютному нулю) и поддерживать между ними постоянную разность потенциалов U, то через зазор между сверхпроводниками потечет переменный ток, не испытывающий сопротивления, — «переменный сверхпроводящий ток».

На фотографии 1 показано устройство, осуществляющее такое неплотное соединение сверхпроводников. На ней виден сверхпроводящий контакт типа «бутерброда» из двух сверхпроводящих пленок, разделенных слоем изолятора толщиной около 10^{-7} *см*. Джозефсон нашел, что частота ν переменного сверхпроводящего тока должна быть пропорциональна приложенной к контакту постоянной разности потенциалов U с коэффициентом пропорциональности $2e/h$, то есть $\nu = (2e/h)\,U$.

Соотношение Джозефсона, вытекающее из некоторых общих предположений о природе сверхпроводимости, является, по-видимому, точным и не зависит от типа сверхпроводника и таких условий опыта, как температура, напряженность магнитного поля и многое другое. Благодаря этому опыт по определению отношения e/h оказался весьма простым в сравнении с большинством экспериментов по измерению других фундаментальных постоянных. В этом опыте необходимо лишь измерить разность потенциалов между двумя сверхпроводниками и частоту переменного сверхпроводящего тока. Окончательный результат измерений дал значение e/h, примерно в 20 раз более точное, чем наилучшее найденное ранее из экспериментов с рентгеновскими лучами значение этого отношения.

Лучшее значение e/h приводит к более точному значению фундаментальных постоянных

Новое значение отношения e/h, измеренное с помощью эффекта Джозефсона, привело к важному пересмотру численных значений других фундаментальных постоянных. Дело в том, что лишь несколько таких постоянных можно измерить непосредственно и притом с высокой точностью. Значения же остальных приходится вычислять, соответствующим образом комбинируя эти постоянные. Существенно, что результаты таких комбинаций имеют примерно ту же точность, что и входящие в них непосредственно измеренные постоянные. Для наилучшего значения какой-либо постоянной используют своего рода усреднение ее значений, полученных прямым и косвенными путями.

Значения некоторых важнейших фундаментальных постоянных, полученные авторами этой статьи в 1969 году, приведены в таблице. Для сравнения в ней указаны значения тех же постоянных, определенные в 1963 году Коэном и Дюмоном. Они считались наиболее точными вплоть до 1969 года.

Числа в скобках указывают неопределенность в последних цифрах значения постоянной. Из таблицы видно, что новые значения точнее, так как относительные погрешности в из-

kvant.mccme.ru

Название постоянной	Обозначение	Единица измерения	Значение 1969 г.	Относительная погрешность, 10^{-6}	Значение 1963 г.	Относительная погрешность, 10^{-6}
Заряд электрона	e	10^{-19} *к*	1,6021917 (70)	4.4	1,60210 (2)	12
Постоянная Планка	h	10^{-34} *дж·с*	6,626196 (50)	7,6	6,62559 (16)	24
Масса электрона	m_e	10^{-31} *кг*	9,109558 (54)	6	9,10908 (13)	11
Число Авогадро	N	10^{26} *кмоль*$^{-1}$	6,022169 (40)	6,6	6,02252 (9)	15

мерениях 1969 года значительно меньше, чем в измерениях 1963 года.

Эти измерения хорошо иллюстрируют связь, которая имеется между значениями фундаментальных постоянных: существенное изменение значения одной из них влечет за собой заметные изменения значений остальных величин.

Интересно также наблюдать, как меняется наше знание фундаментальных постоянных по мере развития физики. В качестве характерного примера мы приводим на рисунке 2 график, который показывает, как менялось принятое значение массы электрона в период после 1950 года. Около каждой точки указаны значения m_e (в единицах 10^{-31} *кг*). Вертикальными черточками показаны погрешности, приписываемые этим зна-

Рис. 2.

чениям. По оси ординат отложены относительные отклонения значений m_e от значения, принятого в 1969 году.

Этот график наглядно показывает, что ни одну совокупность фундаментальных постоянных нельзя принимать за истину в последней инстанции. Мы можем надеяться, что значения 1969 года ближе к истине, чем предшествующие. Однако, будучи реалистами, мы не можем отвергнуть возможность того, что в будущем могут потребоваться дальнейшие существенные изменения численных значений постоянных. Здесь вполне уместно привести слова Гёте: «Не ошибается лишь тот, кто ни к чему не стремится».

Чего же следует ожидать в будущем? Можно ли непрерывно совершенствовать измерения, чтобы с их помощью удалось получать все более точные значения постоянных? Будут ли в дальнейшем совершенствоваться и теории, извлекая пользу из уточненных значений постоянных, так что можно будет производить все более строгие сопоставления теории и опыта? На все эти вопросы ответ, безусловно, положительный. Можно считать общим правилом, что когда существующие методы достигают своего предела возможностей, открываются новые явления и получают новый толчок эксперимент и физическая теория.

kvant.mccme.ru

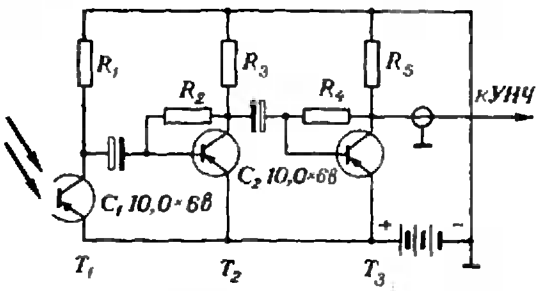
В. В. Майер

Опыты с инфракрасным излучением

Приемником инфракрасного излучения может служить самодельный фототранзистор. Его нетрудно изготовить, спилив головку металлического корпуса любого мощного транзистора (например, П-210). Такой фототранзистор реагирует практически только на инфракрасные лучи, непосредственно примыкающие к видимой области спектра.

Если на изготовленный вами фототранзистор направить свет от включенной в сеть переменного тока лампы накаливания, на его выводах появится переменное напряжение частотой 100 *гц*. Величина этого напряжения очень мала, ее следует усилить.

Схема простейшего предварительного усилителя изображена на рисунке. В качестве транзисторов T_2 и T_3 можно использовать любые низкочастотные транзисторы. Питание усилителя осуществляется от батареи карманного фонаря КБС-Л-0,50.



$R_1 = 2$ *ком*; $R_2 = 100$ *ком*; $R_3 = 10$ *ком*; $R_4 = 100$ *ком*; $R_5 = 10$ *ком*; T_2 и T_3 — любые низкочастотные транзисторы. Транзистор T_1 можно включить и иначе — использовав выводы эмиттер — база. При этом вывод базы подключается к плюсу батареи, а сопротивление R_1 нужно взять равным $30 \div 50$ *ком*.

При правильной сборке прибор начинает работать сразу при включении питания. Наладка заключается в подборе величины резистора R_1.

Выход предварительного усилителя при помощи экранированного провода следует подключить к гнездам «звукосниматель» любого промышленного радиоприемника или проигрывателя (можно использовать и самодельный усилитель низкой частоты). При освещении фототранзистора светом включенной в сеть лампы накаливания вы услышите звук частотой 100 *гц*. (Если сильный «фон» переменного тока слышен и без освещения транзистора, то предварительный усилитель следует заключить в металлическую коробку, соединенную с «землей» устройства, — это уменьшит наводки из сети.)

Теперь, когда у вас есть приемник инфракрасного излучения, попробуйте ответить на следующие вопросы:

1. Почему при освещении фототранзистора лампой накаливания, включенной в сеть переменного тока, из динамика усилителя слышен звук («фон») частотой 100 *гц*?

2. Как, не меняя схемы приемника, существенно усилить звук?

3. Убедитесь, что датчик действительно реагирует на инфракрасные лучи (пластинка эбонита толщиной 0,5—1 *мм* полностью задерживает видимый свет и пропускает инфракрасные лучи).

4. Попытайтесь найти какой-нибудь инфракрасный фильтр (попробуйте использовать, например, различные типы фотографических светофильтров).

5. На пути пучка света, падающего на фототранзистор, расположите два поляроида (их можно взять из школьного набора по поляризации света). Вращайте один из поляроидов вокруг его оси. Что вы при этом наблюдаете? Какие выводы вы можете сделать из своих наблюдений?

6. Докажите закон отражения для инфракрасных лучей.

7. Проверьте, фокусируются ли инфракрасные лучи линзой?

8. Какие эксперименты по изучению свойств инфракрасного излучения вы можете еще поставить?

kvant.mccme.ru

В. С. Абрамович

Суммы одинаковых степеней натуральных чисел

На вопрос: «Умеете ли вы складывать одинаковые степени последовательных натуральных чисел?», многие недоуменно пожмут плечами: кто же не умеет ... складывать? Однако складывать можно по-разному. Всем, наверное, известна небольшая история — легенда о 8-летнем Гауссе. В то время как его одноклассники трудились над вычислением суммы $1+2+3+\ldots$ $\ldots+20$, Гаусс увидел простую закономерность

$$1+20=\ldots=10+11=21$$

и сразу получил ответ: 210.

Конечно, найти суммы при сложении вторых, третьих, четвертых,... степеней натуральных чисел уже значительно сложнее. В этой статье рассказывается о трех простых способах построения формул суммирования, с помощью которых вы легко вычислите любую такую сумму.

Итак, суммы, которыми мы будем заниматься, имеют вид

$$S_q(n)=1^q+2^q+\ldots+n^q. \quad (1)$$

Число q предполагается целым и неотрицательным. Например,

$$S_2(4)=1^2+2^2+3^2+4^2=30,$$
$$S_{10}(2)=1^{10}+2^{10}=1025.$$

Ясно, что $S_0(n)$ для любого натурального n совпадает с n, так как все n слагаемых в этом случае равны 1.

§ 1. Что дает бином Ньютона?

При вычислении сумм (1) нам поможет бином Ньютона. (О биноме Ньютона см. Н. Я. Виленкин, «Комбинаторика», «Наука», 1969.)

$$(k-1)^{q+1}=k^{q+1}-C_{q+1}^1k^q+ + C_{q+1}^2k^{q-1}-\ldots+ +(-1)^q\,C_{q+1}^qk-(-1)^q. \quad (2)$$

Перенесем первое слагаемое из правой части в левую и, полагая последовательно $k=1, 2,\ldots, n$, сложим полученные результаты. Если использовать обозначение (1), мы получим

$$-n^{q+1}=-C_{q+1}^1S_q(n)+ + C_{q+1}^2S_{q-1}(n)-\ldots+ +(-1)^qC_{q+1}^qS_1(n)-(-1)^q\,S_0(n).$$

Из этого тождества находим

$$S_q(n)= =\frac{1}{q+1}\{n^{q+1}+C_{q+1}^2S_{q-1}(n)-\ldots+ +(-1)^qC_{q+1}^qS_1(n)-(-1)^q\times \times S_0(n)\}. \quad (3)$$

При $q=1$:

$$S_1(n)=\frac{1}{2}\{n^2+C_2^2S_0(n)\}= =\frac{1}{2}(n^2+n).$$

Теперь, получив выражение для $S_1(n)$, положим в (3) $q=2$:

$$S_2(n)=\frac{1}{3}\{n^3+C_3^2S_1(n)-S_0(n)\}= =\frac{1}{3}\left\{n^3+\frac{3}{2}(n^2+n)-n\right\}= =\frac{1}{3}\left(n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n\right).$$

kvant.mccme.ru

Так последовательно мы можем получить с помощью тождества (3) выражения для $S_3(n)$, $S_4(n)$ и т. д.

В эффективности таких формул вы можете убедиться, проделав некоторые конкретные вычисления. Например, с помощью полученного выражения для $S_2(n)$ такая большая сумма, как $1^2+2^2+\ldots+99^2+100^2$ находится очень быстро: $S_2(100)=338350$. А сколько потребовалось бы времени для последовательного сложения!

§ 2. Вместо q членов — один

Итак, к каждой из формул для вычисления сумм $S_q(n)$, $q=1, 2, \ldots$ можно последовательно прийти с помощью общего соотношения (3). Такие соотношения, которые определяют новый член некоторой последовательности по ее предыдущим членам, называются *рекуррентными*.

Конечно, более предпочтительными являются такие рекуррентные соотношения, которые содержат в правой части возможно меньше членов, — в лучшем случае только один: предшествующий определяемому.

Для последовательности сумм $S_q(n)$ такое простое рекуррентное соотношение существует.

Для того чтобы его записать, введем следующее обозначение. Пусть $P_m(n)$ — некоторый многочлен степени m относительно n:

$$P_m(n)=a_0n^m+a_1n^{m-1}+\cdots+a_{m-1}n+a_m.$$

Тогда $P^*_m(n)$ — это многочлен степени $m+1$, получающийся из многочлена $P_m(n)$ заменой в нем степеней n^k выражениями:

$$\frac{n^{k+1}-n}{k+1} \quad (k=0, 1,\ldots, m).$$

Очевидно следующее простое свойство: если $P(n)$ и $Q(n)$ — два многочлена, то

$$[P(n)+Q(n)]^*=P^*(n)+Q^*(n). \quad (4)$$

Теперь докажем теорему, состоящую из двух утверждений.

Теорема 1.

1°. Сумма $S_q(n)$ представляет собой многочлен степени $q+1$ относительно n без свободного члена.

2°. Сумма $S_q(n)$ связана с суммой $S_{q-1}(n)$ $(q=1, 2,\ldots)$ соотношением

$$S_q(n)=n+qS^*_{q-1}(n). \quad (5)$$

Доказательство. Оба пункта докажем, применяя полную математическую индукцию.

1°. Так как $S_0(n)$ совпадает с n, то первое утверждение при $q=0$ справедливо. Предположим, что оно верно для сумм $S_0(n)$, $S_1(n),\ldots$ $\ldots, S_{q-1}(n)$. Тогда в правой части (3) мы получим многочлен степени $q+1$ без свободного члена, то есть утверждение верно и для следующей суммы $S_q(n)$. Следовательно, оно имеет место для всех сумм $S_q(n)$, $q\geqslant 0$.

2°. Соотношение (5) выполняется, очевидно, для $q=1$:

$$S_1(n)=n+n^*=n+\frac{n^2-n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Предположим, что оно справедливо для $q=1, 2,\ldots, m-1$. Тогда согласно тождеству (3) для $q=m$ получим

$$S_m(n)=\frac{1}{m+1}\{n^{m+1}+C^2_{m+1}[n+(m-1)S^*_{m-2}(n)]-C^3_{m+1}[n+(m-2)\times S^*_{m-3}(n)]+\cdots+(-1)^mC^m_{m+1}[n+S^*_0(n)]-(-1)^mC^{m+1}_{m+1}n\}=$$

$$=\frac{1}{m+1}\{n^{m+1}+n(C^2_{m+1}-C^3_{m+1}+\cdots+(-1)^{m+1}C^{m+1}_{m+1})+(m-1)C^2_{m+1}S^*_{m-2}(n)-(m-2)C^3_{m+1}S^*_{m-3}(n)+\cdots+(-1)^mC^m_{m+1}S^*_0(n)\}.$$

kvant.mccme.ru

Воспользуемся теперь тем, что

$$1-C^1_{m+1}+C^2_{m+1}-\cdots+(-1)^{m+1}C^{m+1}_{m+1}=0$$

и, следовательно,

$$C^2_{m+1}-C^3_{m+1}+\cdots+(-1)^{m+1}C^{m+1}_{m+1}=C^1_{m+1}-1=m.$$

Замечая еще, что

$$C^k_{m+1}\,\frac{m-k+1}{m+1}=C^k_m$$

и используя свойство (4) операции*, получим такое выражение для $S_m(n)$:

$$S_m(n)=\frac{n^{m+1}+nm}{m+1}+[C^2_mS_{m-2}(n)-C^3_mS_{m-3}(n)+\cdots+(-1)^mC^m_mS_0(n)]^*.$$

Полагая в (3) $q=m-1$, получим, что выражение в квадратных скобках равно $mS_{m-1}(n)-n^m$, следовательно, $S_m(n)=\frac{n^{m+1}+nm}{m+1}+[mS_{m-1}(n)-n^m]^*=\frac{n^{m+1}+nm}{m+1}+mS^*_{m-1}(n)-\frac{n^{m+1}-n}{m+1}=n+mS^*_{m-1}(n)$.

Таким образом, (5) верно и для $q=m$. Теорема доказана.

Пример. Предположим, вы знаете, что

$$S_3(n)=\frac{1}{4}\,(n^4+2n^3+n^2).$$

Найдем выражение для $S_4(n)$:

$$S_4(n)=n+4S^*_3(n)=n+(n^4+2n^3+n^2)^*=n+\frac{n^5-n}{5}+2\,\frac{n^4-n}{4}+\frac{n^3-n}{3}=\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}.$$

§ 3. Общая формула

Бином Ньютона, однако, может дать значительно больше, чем тождество (3), доказанное в § 1.

Рассмотрим следующие преобразования (m и n предполагаются натуральными числами):

$$m^n-1=[(m-1)+1]^n-1=(m-1)C^1_n+(m-1)^2C^2_n+\cdots+(m-1)^nC^n_n.$$

Пусть $m\neq1$. Разделив обе части тождества на $m-1$, получим

$$1+m+m^2+\cdots+m^{n-1}=C^1_n+(m-1)C^2_n+\cdots+(m-1)^{n-1}C^n_n. \qquad (6)$$

Это равенство справедливо для всех натуральных m и n, в том числе и для $m=1$ (в этом случае оно очевидно). Поскольку слева и справа мы имеем многочлены степени $n-1$ относительно m, то это возможно лишь в том случае, если многочлены тождественно равны, то есть их коэффициенты совпадают (в данном случае все они равны единице). Если раскрыть скобки в правой части (6) и приравнять коэффициенты при m^k, $k=0, 1,\ldots, n-1$, единице, то получится ряд тождеств, связывающих биномиальные коэффициенты. Для нас важно следующее: если степени m^k, $k=0, 1,\ldots, n-1$ слева и справа в (6) заменить *любыми* числами $a_0, a_1,\ldots,a_{n-1}$, равенство не нарушится: ведь коэффициенты перед числами a_k останутся равными единице! Таким образом, мы приходим к следующему тождеству, верному для любых чисел $a_0, a_1,\ldots, a_{n-1}$:

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=C^1_n+(a_1-a_0)C^2_n+(a_2-2a_1+a_0)C^3_n+\cdots+[a_{n-1}-C^1_{n-1}a_{n-2}+C^2_{n-1}a_{n-3}-\cdots+(-1)^{n-1}]C^n_n. \quad (7)$$

Теорема 2. Сумма $S_q(n)$ в общем случае может быть вычислена по формуле

$$S_q(n)=C^1_n+(2^q-1)C^2_n+(3^q-2\cdot2^q+1)C^3_n+\cdots+[(q+1)^q-C^1_qq^q+C^2_q(q-1)^2-\cdots+(-1)^q]C^{q+1}_n. \quad (8)$$

kvant.mccme.ru

Доказательство. Положим в тождестве (7) $a_k=(k+1)^q$, $k=0, 1, \ldots, n-1$ и рассмотрим вначале значения $n \leqslant q+1$. Так как в этом случае $C_n^p=0$ для $p>q+1$, то из (7) вытекает формула (8) при условии $1 \leqslant n \leqslant q+1$. Однако слева и справа мы имеем многочлены степени $q+1$ относительно n без свободного члена и, следовательно, они должны совпадать для *всех* n. Действительно, в противном случае их разность — многочлен степени не выше $q+1$ — имел бы $q+2$ вещественных корня: $0, 1, 2, \ldots, q+1$.

Попытайтесь самостоятельно доказать, что тогда этот многочлен тождественно равен нулю *).

Формула (8) представляет сумму $S_q(n)$ в виде линейной комбинации сочетаний $C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^{q+1}$.

$$S_0(n)=C_n^1,$$
$$S_1(n)=C_n^1+C_n^2,$$
$$S_2(n)=C_n^1+3C_n^2+2C_n^3,$$
$$S_3(n)=C_n^1+7C_n^2+12C_n^3+6C_n^4,$$
$$S_4(n)=C_n^1+15C_n^2+50C_n^3+60C_n^4+24C_n^5,$$

и т. д.

Исследовать любопытные закономерности, возникающие между коэффициентами этих комбинаций, например, законы образования коэффициентов по столбцам, предоставляем читателям.

Приведем в заключение еще несколько задач о суммах S_q.

Упражнения

1. Покажите, что

$$S_1=S_1,$$
$$2(S_1)^2=2S_3,$$
$$4(S_1)^3=3S_5+S_3,$$
$$8(S_1)^4=4S_7+4S_5,$$

и вообще, что при $k=1, 2, 3, \ldots$

$$2^{k-1}(S_1)^k=C_k^1S_{2k-1}+C_k^3S_{2k-3}+C_k^5S_{2k-5}+\ldots,$$

причем последний член стоящего справа выражения равен S_k либо kS_{k+1}, в зависимости от того, нечетно k или четно.

2. Покажите, что

$$3S_2=3S_2,$$
$$6S_2S_1=5S_4+S_2,$$
$$12S_2(S_1)^2=7S_6+5S_4,$$
$$24S_2(S_1)^3=9S_8+14S_6+S_4$$

и вообще, что при $k=1, 2, 3, \ldots$

$$3\cdot 2^{k-1}S_2(S_1)^{k-1}=(C_k^0+2C_k^1)S_{2k}+(C_k^2+2C_k^3)S_{2k-2}+\ldots,$$

причем последний член стоящего справа выражения равен либо $(k+2)S_{k+1}$, либо S_k, в зависимости от того, нечетно k или четно.

3. Покажите, что

$$S_3=(S_1)^2,$$
$$S_5=(S_1)^2\cdot\frac{4S_1-1}{3},$$
$$S_7=(S_1)^2\cdot\frac{6(S_1)^2-4S_1+1}{3},$$

и вообще, что S_{2k-1} (где $2k-1 \geqslant 3$) является многочленом от $S_1=\frac{n(n+1)}{2}$ степени k, делящимся на $(S_1)^2$.

4. Покажите, что

$$S_4=S_2\,\frac{6S_1-1}{5},$$
$$S_6=S_2\,\frac{12(S_1)^2-6S_1+1}{7},$$
$$S_8=S_2\,\frac{40(S_1)^3-40(S_1)^2+18S_1-3}{15},$$

и вообще, что $\frac{S_{2k}}{S_2}$ является многочленом степени $k-1$ от S_1.

5. Докажите, что при $k \geqslant 1$ (но не при $k=0$)

$$S_k(-x-1)=(-1)^{k-1}S_k(x).$$

6. Найдите сумму: $1+27+125+\ldots+(2n-1)^3$.

7. Найдите сумму: $2^2+5^2+8^2+\ldots+(3n-1)^2$.

*) Если вам не удастся это сделать, вы можете найти доказательство в «Кванте» № 12, 1972, стр. 37

Правильные многогранники

Выпуклые правильные многогранники — тетраэдр, октаэдр, гексаэдр (куб), додекаэдр и икосаэдр — принято называть *платоновыми телами* *).

Платоновы тела рассматриваются в школьных учебниках, в том числе в учебнике А. П. Киселева «Геометрия», часть вторая.

Напомним определение правильного многогранника, данное в этом учебнике: «*Многогранник называется правильным, если все его грани — равные правильные многоугольники и все многогранные углы равны*». Из этого определения следует, что в правильных многогранниках равны все плоские углы, все двугранные углы и все ребра. В учебнике доказывается, что никаких других правильных многогранников, кроме платоновых тел, (см. 4-ю страницу обложки) быть не может.

Доказательство приводится вполне строгое. И все же правильных многогранников *не пять, а девять*. Их вы видите на обложке нашего журнала. Дело в том, что у остальных четырех многогранников (их мы в дальнейшем будем называть *звездчатыми*) грани — пересекающиеся правильные многоугольники, а у двух из них каждая из граней представляет собой самопересекающийся многоугольник. Такие многоугольники и многогранники в курсе А. П. Киселева из рассмотрения исключены, хотя приведенное выше определение правильного многогранника, как и следствие из него, остаются в силе.

Теперь немного истории. Два звездчатых многогранника были построены *Иоганном Кеплером* (1571—1630). Только спустя без малого двести лет французский геометр *Луи Пуансо* (1777—1859) указал на существование еще двух правильных звездчатых многогранни-

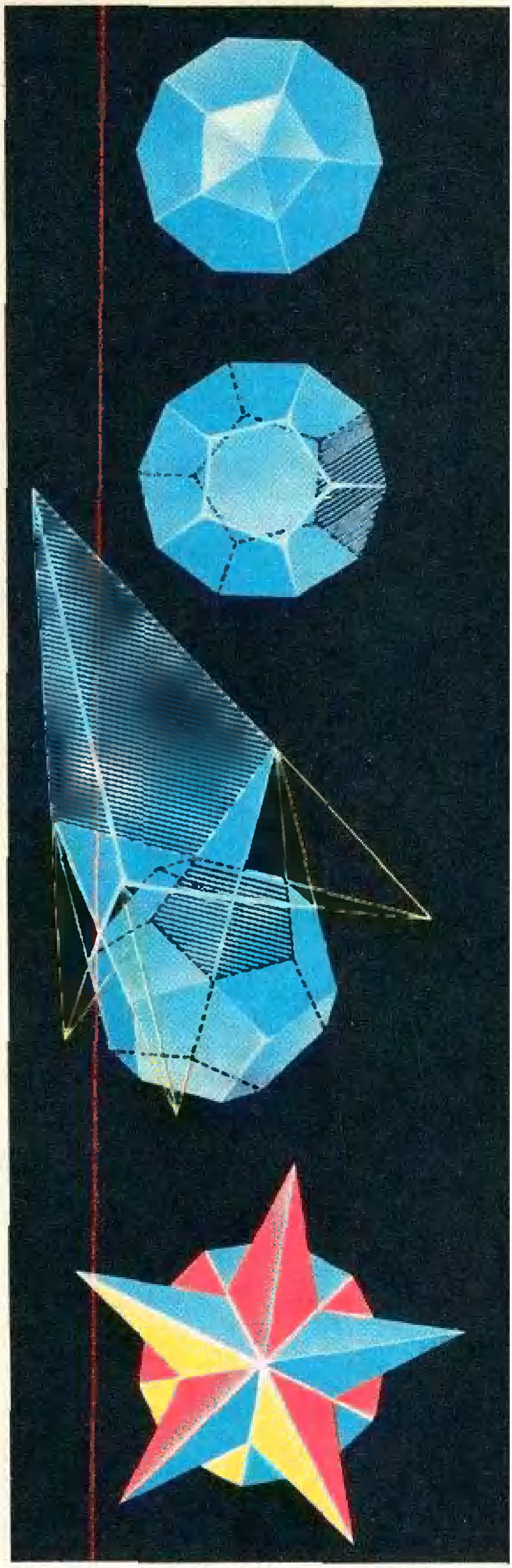
*) Древнегреческий философ Платон (427—347 гг. до н. э.), который упомянул о правильных многогранниках в одной из своих работ, на самом деле не являлся их первооткрывателем. Тетраэдр, гексаэдр и додекаэдр были известны задолго до Платона. Например, при раскопках найдена модель додекаэдра, служившая детской игрушкой более 2500 лет назад.

1

2

2а

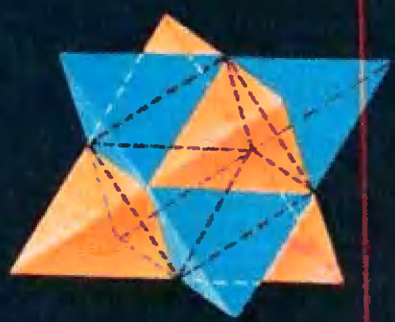
2б



kvant.mccme.ru

3

3а



4

ков. (Все четыре звездчатых многогранника приведены на 2-й странице обложки.) Доказать, что других правильных многогранников не существует, Пуансо не сумел.

Спустя год (в 1811 году) это сделал французский математик Огюстен Луи Коши (1789—1857). Он воспользовался тем, что согласно определению правильного многогранника, его можно наложить на самого себя так, что произвольная его грань совместится с наперед выбранной. Из этого следует, что все грани звездчатого многогранника равноудалены от некоторой точки — центра сферы, вписанной в многогранник.

Плоскости граней звездчатого многогранника, пересекаясь, образуют еще и правильный выпуклый многогранник, то есть платоново тело, описанное около той же сферы. Это платоново тело Коши назвал ядром данного звездчатого многогранника. Тем самым звездчатый многогранник можно получить, продолжая плоскости граней одного из платоновых тел.

Любое ли платоново тело может служить ядром правильного звездчатого многогранника? Чтобы разобраться в этом, обратимся к многогранным углам звездчатого многогранника. Плоские углы такого многогранного угла равны и благодаря равенству соответствующих двугранных углов могут быть совмещены друг с другом поворотом многогранного угла относительно оси, проходящей через его вершину. Одновременно с совмещением плоских углов совместятся и соответствующие грани ядра, повернувшегося вместе со звездчатым многогранником.

На рисунках 1, 2 и 3 выделены грани ядер — додекаэдра и икосаэдра, которые переходят друг в друга при таких поворотах, и показаны многогранные углы, к которым приводит продолжение граней.

На рисунке 4 рассмотрен случай, когда продолжение ребер правильного многогранника, октаэдра, приводит к образованию не одного, а двух правильных многогранников — пересекающихся тетраэдров.

Докажите самостоятельно, что никакие другие повороты платоновых тел и соответствующие продолжения их граней не приводят к образованию новых правильных многогранников.

В. Н. Березин

kvant.mccme.ru

Задачник «Кванта»

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 30 июня 1973 года по адресу: 117071, Москва В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», M201, M205» или «... Ф215».

Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Оригинальные задачи, предлагаемые для публикации, присылайте вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

Задачи из разных номеров журнала присылайте в разных конвертах. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Задачи повышенной трудности отмечены звездочкой.

Задачи

M201—206; Ф213—217

M201. Прямая l_1 пересекает стороны a; b и c треугольника (или их продолжения) в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно; прямая l_2 пересекает их в точках A_2, B_2 и C_2. Докажите, что если точки A_1 и A_2 симметричны относительно середины стороны a, а точки B_1 и B_2 симметричны относительно середины стороны b, то точки C_1 и C_2 симметричны относительно середины стороны c.

Нгуен Конг Кви (Ханой)

M202. Докажите, что из последовательности

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots,\ a+nd,\ \ldots,$$

являющейся бесконечной арифметической прогрессией ($d \neq 0$), тогда и только тогда можно выбрать подпоследовательность, являющуюся бесконечной геометрической прогрессией, когда отношение a/d рационально.

Н. Б. Васильев

M203. а) Докажите, что если проекции точки пересечения диагоналей AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$ на прямые AB, BC, CD и DA соединить последовательно четырьмя прямыми (рис. 1), то эти прямые будут касаться одной окружности.

б) Сформулируйте и докажите обратную теорему.

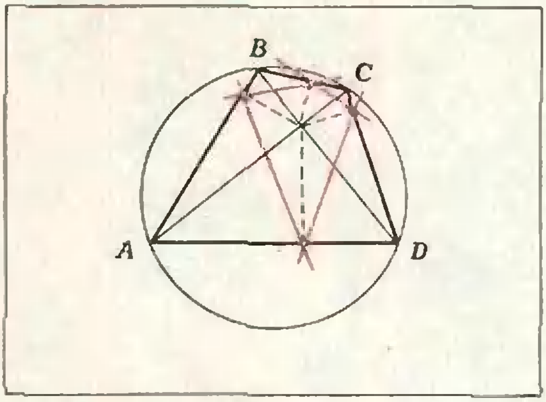


Рис. 1.

M204. Назовем натуральное число хорошим, если в его десятичной записи встречаются подряд цифры 1973, и плохим — в противном случае. (Например, число 197 639 917 — плохое, 116 519 732 — хорошее.) Докажите, что существует такое натуральное число n, что среди всех n-значных чисел (от 10^{n-1} до $10^n - 1$)

kvant.mccme.ru

больше хороших, чем плохих. Постарайтесь найти возможно меньшее такое n.

Г. А. Гуревич

М205.* 24 студента решали 25 задач. У преподавателя есть таблица 24×25, в которой записано, кто какие задачи решил. Оказалось, что каждую задачу решил хотя бы один студент *). Докажите, что

а) можно отметить некоторые задачи «галочкой» так, что каждый из студентов решил четное число (в частности, быть может, нуль) из отмеченных задач;

б) можно отметить некоторые из задач знаком «+», а некоторые из остальных — знаком «—» и приписать каждой задаче некоторое целое положительное число баллов так, что каждый студент набрал поровну баллов за задачи, отмеченные знаками «+» и «—».

(Замечание. Эти утверждения верны только в том случае, если количество задач хотя бы на единицу больше количества студентов.)

Ф213. Максимально допустимая скорость движения автомобиля по скользкой дороге при прохождении поворота радиуса R равна v_{max}. На повороте дорога наклонена под углом α к горизонту. Какова минимальная скорость, с которой должен двигаться автомобиль, чтобы проехать поворот?

Ф214. В схеме, изображенной на рисунке 2, $R_1 = 10$ *ком*, $R_2 = R_3 = 5$ *ком*, а к клеммам 1—2 приложено переменное напряжение $U = 127$ *в*. Диоды можно считать идеальными — при одном направлении тока их сопротивление бесконечно мало, при другом — бесконечно велико. Найти, какая мощность выделяется на сопротивлении R_1.

Л. П. Баканина

*) Мы надеемся что аналогичное утверждение будет верным для задач **М181**—**М205**, тем более, что читателей «Кванта» много больше 24.

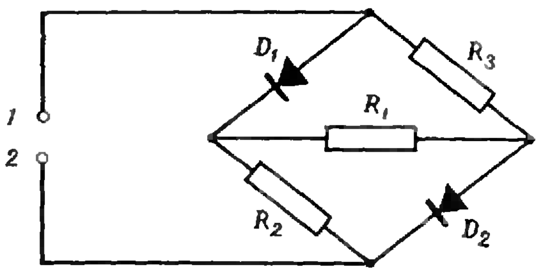


Рис. 2.

Ф215. Два мыльных пузыря радиусов R_1 и R_2 сливаются в один пузырь радиуса R_3. Найти атмосферное давление, если коэффициент поверхностного натяжения мыльной пленки равен σ.

Ф216. Вставая и приседая в определенные моменты времени, мальчик на качелях легко увеличивает амплитуду своих качаний. Объясните, почему это удается.

Ф217*. Электронно-лучевая трубка с ускоряющим напряжением U помещена в однородное магнитное поле с индукцией $\mathbf{B}$, направленной вдоль оси трубки. На экране при этом наблюдается небольшое расплывчатое пятно. Если менять величину индукции, то можно заметить, что при некоторых значениях B_0, $2B_0$, $3B_0$, ... электронное пятно фокусируется — собирается в точку. Объясните это явление. Как с помощью такого эксперимента определить отношение заряда электрона к его массе?

kvant.mccme.ru

Решения задач

М160—164; Ф178—182

М160. *Когда закончился хоккейный турнир (в один круг), оказалось, что для любой группы команд можно найти команду (может быть, из этой же группы), которая набрала в играх с командами этой группы нечетное число очков. Докажите, что в турнире участвовало четное число команд. (Поражение — 0 очков, ничья — 1 очко, выигрыш — 2 очка.)*

Пусть число команд равно N. Представим сначала результаты турнира в виде турнирной таблицы $N \times N$. На пересечении i-й строки и j-го столбца поставим число очков, набранных i-й командой в матче с j-й командой; будем обозначать его через a_{ij}. Будем считать, что команда в матче «с самой собой» набрала 0 очков, тогда на диагонали будут стоять нули ($a_{ii} = 0$).

Заметим теперь, что если $a_{ij} = 0$, то есть i-я команда проиграла j-й, то $a_{ji} = 2$, так как в этом случае j-я команда выиграла у i-й. Точно так же, если $a_{ij} = 1$, то и $a_{ji} = 1$. Итак, в турнирной таблице обязательно выполняется условие $a_{ij} + a_{ji} = 2$.

Каждой команде в турнирной таблице соответствует строка и столбец. Число очков, набранных i-й командой в матчах с группой команд с номерами $j_1, \ldots, j_k$, равно сумме чисел $a_{ij_1}, \ldots, a_{ij_k}$, стоящих на пересечении i-й строки со столбцами $j_1, \ldots, j_k$.

Теперь мы можем забыть про хоккейный турнир, сформулировав по-новому задачу на языке таблиц.

Пусть квадратная таблица $N \times N$, состоящая из целых чисел a_{ij}, удовлетворяет следующим двум условиям:

1) все числа a_{ii}, стоящие на ее диагонали, четны, и сумма $a_{ij} + a_{ji}$ каждых двух чисел, симметричных относительно этой диагонали, тоже обязательно четна;

2) для каждой группы столбцов найдется такая строка, что сумма чисел на пересечении этой строки со столбцами этой группы нечетна.

Нужно доказать, что условия 1) и 2) могут выполняться только в том случае, когда N четно.

Разумеется, решив эту новую задачу, мы решим и задачу М160.

Будем доказывать утверждение задачи от противного. Допустим, что существует таблица $N \times N$ с нечетным N, удовлетворяющая условиям 1) и 2). Мы покажем, что тогда можно построить таблицу $(N-2) \times (N-2)$, также удовлетворяющую условиям 1) и 2). Применив это построение $(N-1)/2$ раз, мы получили бы таблицу, состоящую из единственного числа и удовлетворяющую условиям 1) и 2). Этого, однако, не может быть, так как для таблицы 1×1 оба условия одновременно не выполняются. Значит, сделанное предположение окажется неверным и утверждение задачи будет доказано.

Для того чтобы из таблицы $N \times N$ построить таблицу $(N-2) \times (N-2)$, сохранив условия 1) и 2), мы введем следующие преобразования таблиц:

Преобразование I. Меняем местами i-ю строку с j-й и i-й столбец с j-м.

Преобразование II. i-й столбец заменяем на сумму i-го и j-го столбца, а затем i-ю строку на сумму i-й и j-й строки.

Поясним преобразование II; i-ю и j-ю строки можно рассматривать как наборы N чисел $(a_{i1}, \ldots, a_{iN})$ и $(a_{j1}, \ldots, a_{jN})$; суммой строк назвать строку: $(a_{i1} + a_{j1}, \ldots, a_{iN} + a_{jN})$; например,

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{c}(010102)\\(101110)\end{array} \\ \hline (111212) \end{array}$$

Аналогично определяется сумма i-го и j-го столбцов.

Прежде всего заменим все четные числа в таблице на 0, а нечетные — на 1. Получим таблицу, которая симметрична, то есть $a_{ij} = a_{ji}$, кроме того, $a_{ii} = 0$, поэтому условие 1) для нее выполнено. Очевидно, что для нее сохраняется и условие 2).

Рассмотрим последний, N-й столбец этой таблицы. Согласно свойству 2) для него найдется такая строка, что на их пересечении стоит единица; если k — номер строки, то $a_{kN} = 1$ и, следовательно, $a_{Nk} = 1$. (Здесь мы применили условие 2) к одному столбцу.)

Сделаем теперь преобразование I: поменяем местами k-ю строку с $(N-1)$-й и k-й столбец с $(N-1)$-м.

В результате таблица будет иметь следующий вид:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & \ldots\ldots & a_{1\,(N-1)} & a_{1N} \\ a_{21} & \ldots\ldots & a_{2\,(N-1)} & a_{2N} \\ a_{31} & \ldots\ldots & a_{3\,(N-1)} & a_{3N} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{(N-2)\,1} & \ldots & a_{(N-2)\,(N-1)} & a_{(N-2)\,N} \\ a_{(N-1)\,1} & \ldots & 0 & 1 \\ a_{N1} & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

kvant.mccme.ru

Применив теперь несколько раз преобразование II (используя два крайних столбца и две крайние строки), мы можем привести таблицу к такому виду:

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} \tilde{a}_{11} & \ldots & \tilde{a}_{1\,(N-2)} & 0 & 0 \\ \tilde{a}_{i1} & \ldots & \tilde{a}_{i\,(N-2)} & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde{a}_{(N-2)\,1} & \ldots & \tilde{a}_{(N-2)\,(N-2)} & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Напомним, что число 2 мы заменяем на 0. Вычеркнув из этой таблицы последние два столбца и последние две строки, мы получим новую таблицу $(N-2)\times(N-2)$. Остается проверить, что она удовлетворяет условиям 1) и 2).

Преобразования I и II переводят симметричные таблицы в симметричные и не меняют четности чисел, стоящих на диагонали. Следовательно, новая таблица будет удовлетворять условию 1).

Остается проверить, что преобразования I, II сохраняют условия 2). Для преобразований I это совершенно ясно. Остается доказать это для преобразования II.

Если рассматриваемая группа столбцов не содержит i-го столбца и можно указать k-ю строку, удовлетворяющую условию 2), где k не равно i, то, очевидно, и после преобразования k-я строка будет ему удовлетворять.

Если этого сделать нельзя, то есть $k=i$ (хотя бы одна строка до преобразования существует!), то для j-й строки соответствующая сумма четна. Отсюда ясно, что в преобразованной таблице сумма для i-й строки по-прежнему нечетна.

Аналогично разбираются случаи, когда в группу столбцов входит i-й столбец. Если в нее не входит j-й столбец, то надо взять строку, «обслуживающую» группу, пополненную j-м столбцом, а если входит, то, наоборот, его надо убрать. Мы сумели от таблицы $N\times N$ перейти к таблице $(N-2)\times(N-2)$. Таким образом, наша задача полностью решена.

Оказывается, что наша задача — частный случай такой общей теоремы из линейной алгебры:

если $a_{ij}+a_{ji}=0$, и система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1N}x_N = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2N}x_N = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \ldots + a_{NN}x_N = 0, \end{cases}$$

имеет только нулевое решение, то N четно. Эта теорема верна и для обычных чисел, и для «поля»*) из двух элементов 0 и 1, и для любого другого «поля». Проще всего ее доказывать, используя понятие *определителя* систем линейных уравнений. Так и поступил читатель *Э. Туркевич* (Черновцы), приславший нам решение задачи **М160**. Но можно доказывать ее и с помощью «элементарных преобразований» таблицы a_{ij}, как поступили мы выше.

Постарайтесь самостоятельно доказать эту теорему и вывести из нее решение задачи.

Б. Макаревич

М161. *Озеро имеет форму невыпуклого n-угольника. Докажите, что множество точек озера, из которых видны все его берега, либо пусто, либо заполняет внутренность выпуклого m-угольника, где $m\leqslant n$.*

Пусть l — сторона многоугольника. Прямая, являющаяся продолжением l, делит плоскость на две полуплоскости; обозначим через D_l полуплоскость, которая примыкает к отрезку l с той же стороны, что и озеро (с другой стороны к отрезку l примыкает берег). При этом граничная прямая в полуплоскость D_l не включается.

Пересечение D всех n полученных полуплоскостей либо пусто, либо является выпуклой фигурой с числом сторон $m\leqslant n$.

Докажем, что D совпадает с множеством точек, из которых видны все берега озера.

1. Пусть O — точка из D. Докажем, что все берега видны из точки O. Пусть A_1, A_2, ..., A_n — вершины многоугольника — озера.

Соединим отрезками точки O, A_1, A_2 и посмотрим, где может быть точка A_3.

Как видно из рисунка 1, вершина A_3 не может находиться с той же стороны от прямой

---

*) Полем называется множество, в котором введены операции сложения и умножения, обладающие обычными свойствами: они коммутативны, ассоциативны, имеют обратные операции — вычитание и деление и т. п.; условие $a_{ij}+a_{ji}=0$ в поле из 0 и 1 равносильно условию $a_{ij}=a_{ji}$, поскольку $0+0=1+1=0$, а $0+1=1+0=1$.

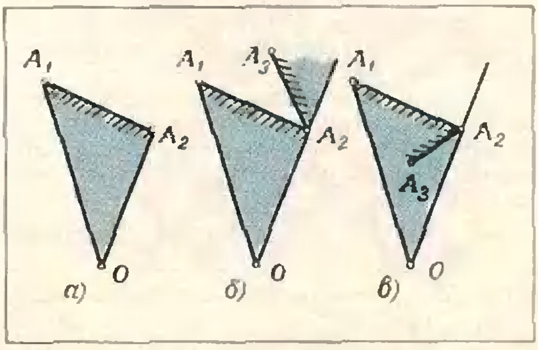


Рис. 1.

kvant.mccme.ru

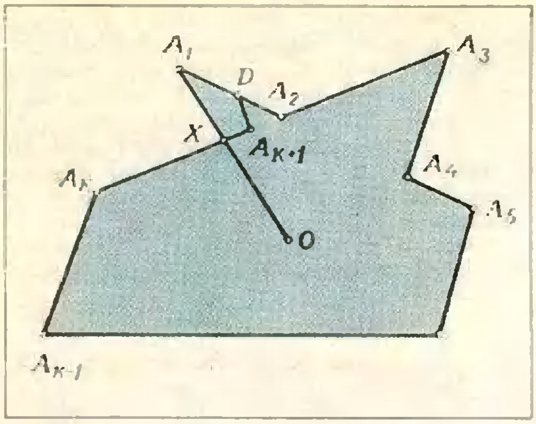


Рис. 2.

OA_2, что и вершина A_1 (заштрихована та сторона отрезков, к которой примыкает озеро). Значит, точки A_1 и A_3 находятся по разные стороны прямой OA_2.

Пусть точка X движется по берегу озера (от A_1 к A_2, от A_2 к A_3 и т. д.). Когда X движется от A_1 к A_2, отрезок OX вращается в некоторую сторону (например, пусть он вращается по часовой стрелке). Так как A_1 и A_3 лежат по разные стороны отрезка OA_2, то при движении точки X от A_2 к A_3 отрезок будет вращаться в ту же сторону. Рассуждая аналогично с точками A_2, A_3, A_4, ..., мы видим, что при движении от A_3 к A_4, от A_4 к A_5 и т. д. отрезок OX вращается в ту же сторону.

Когда отрезок OX совершит полный оборот, точка X совпадет с точкой A_1. Действительно, предположим, что точка X не совпала с A_1; например $OX < OA_1$. Тогда при дальнейшем движении точка X не сможет попасть в точку A_1, так как она не сможет выйти за пределы многоугольника $DA_2A_3 \ldots A_kA_{k+1}$ (рис. 2) — контур многоугольника не замкнется.

Следовательно, внутрь $\Delta\, OA_1A_2$ не попадет ни одна точка контура, и берег A_1A_2, а значит, и все берега озера из точки O видны.

2. Пусть из точки O видны все берега озера. Рассмотрим сторону $l = CB$ многоугольника $A_1 \ldots A_n$. Тогда ясно, что $\Delta\, OCB$ лежит полностью внутри озера, значит, точка O лежит внутри D_l. Таким образом, точка O лежит внутри всех полуплоскостей D_l, то есть лежит внутри D.

Итак, мы показали, что множество точек, из которых видны все берега, совпадает с множеством D и, значит, либо пусто, либо является выпуклым многоугольником с числом сторон m, где $m \leqslant n$.

И. Н. Бернштейн

М162. *Последовательность натуральных чисел*

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < \ldots \quad (A)$$

такова, что каждое натуральное число либо входит в последовательность (A) либо представляется в виде суммы двух чисел из последовательности (A), быть может, одинаковых.

Докажите, что $a \leqslant n^2$ *для всех* $n = 1, 2, \ldots$

Рассмотрим первые $(n-1)$ членов последовательности (A)

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{n-1}, \qquad (1)$$

и все натуральные числа, которые можно представить в виде суммы двух из этих чисел:

$$\begin{gathered} a_1 + a_1,\ a_1 + a_2,\ a_1 + a_3,\ \ldots,\ a_1 + a_{n-1},\\ a_2 + a_2,\ a_2 + a_3,\ \ldots,\ a_2 + a_{n-1},\\ a_{n-1} + a_{n-1}. \end{gathered} \qquad (2)$$

Нетрудно подсчитать, что здесь написано $\frac{n(n-1)}{2}$ попарных сумм. Даже если все числа (1) и (2) различны, все равно их общее количество не превышает

$$(n-1) + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2+n-2}{2} < \frac{2n^2}{2} = n^2.$$

Таким образом, найдутся натуральные числа от 1 до n^2, которые не содержатся среди чисел (1) и (2). Поэтому, если последовательность (A) удовлетворяет условию задачи (каждое натуральное число может быть представлено в виде суммы не более двух чисел из (A)), то $a_n \leqslant n^2$.

Из нашего рассуждения можно получить и более точную оценку:

$$a_n \leqslant \frac{n^2-n}{2}. \qquad (3)$$

Интересно выяснить, нельзя ли получить еще лучшую оценку. Последовательности, удовлетворяющие условию задачи, которые удается построить, очень далеки (при больших n) от той границы, которую дает неравенство (3). Мы приведем два примера.

1) Зафиксируем некоторое натуральное число k и рассмотрим последовательность: $1, 2, 3, \ldots, k-1, 2k-1, 3k-1, 4k-1, \ldots$ ($a_n = nk - (k-1)^2$ при $n = k, k+1, k+2, \ldots$). Эта последовательность, очевидно, удовлетворяет условию задачи. Как легко видеть, при $n = 2k$

$$a_n = a_{2k} = 2k^2 - (k-1)^2 = k^2 + 2k - 1 = \frac{n^2+4n-4}{4}. \qquad (4)$$

Однако, хотя оценка (4) для a_n при $n = 2k$ лишь примерно вдвое хуже (3), но с ростом n расхождение между a_n и $\frac{n^2+n}{2}$ сильно увеличивается: ведь a_n растет как линейная функция от n.

2) Рассмотрим последовательность всех натуральных чисел, представимых в виде

kvant.mccme.ru

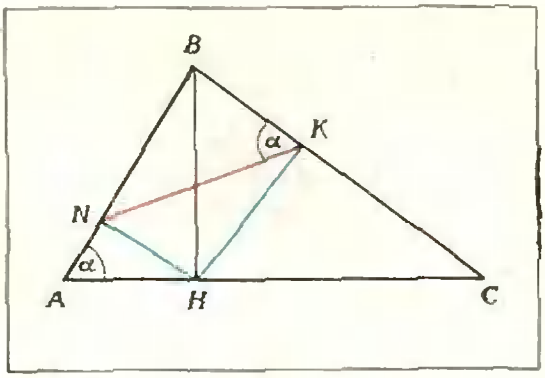


Рис. 3.

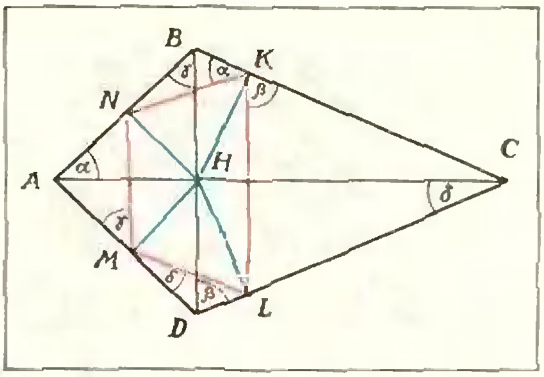


Рис. 4.

суммы двух квадратов целых чисел:
1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20 ...

Поскольку каждое натуральное число представимо в виде суммы четырех квадратов *), эта последовательность тоже удовлетворяет условию задачи. (*Как можно доказать, она растет быстрее любой линейной функции от* n: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/n \to \infty$, но медленнее n^2: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/n^2 = 0$. Оказывается, a_n растет примерно как $n\sqrt{\ln n}$.)

M163. *Докажите, что если диагонали выпуклого четырехугольника взаимно перпендикулярны, то проекции их точки пересечения на все четыре стороны (или их продолжения) лежат на одной окружности.*

Многие читатели правильно указали, что добавка «или их продолжения» в условии не нужна, поскольку перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла, не может не попасть на гипотенузу.

Заметим, что если из основания высоты BH произвольного треугольника ABC с острыми углами A и C (рис. 3) опустить перпендикуляры HK и HN на стороны BC и BA соответственно, то треугольники KBN и ABC подобны (угол B общий и $AB \cdot BN = BH^2 = BC \cdot KB$, то есть $AB : BC = KB : BN$), поэтому

$\angle BKN = \angle BAC$ (и $\angle BNK = \angle BCA$).

Используя это, легко проверить, что углы, обозначенные на рисунке 4 одинаковыми буквами — α, β, γ и δ, равны друг другу, поэтому сумма противоположных углов K и M четырехугольника $KLMN$ равна

$$(\pi - \alpha - \beta) + (\pi - \gamma - \delta) = (\pi - \beta - \delta) + (\pi - \alpha - \gamma) = \pi,$$

поэтому он вписанный.

Верно и обратное: если в четырехугольнике $ABCD$ основания перпендикуляров, опущенных из точки пересечения диагоналей на стороны, являются вершинами вписанного четырехугольника, то диагонали $ABCD$ *перпендикулярны. Это доказывается точно так же.*

Н. Б. Васильев.

M164. *На белых клетках бесконечной шахматной доски, заполняющей верхнюю полуплоскость* (рис. 5), *записаны какие-то числа так, что для каждой черной клетки сумма чисел, стоящих в двух соседних с ней клетках, справа и слева, равна сумме двух других чисел, стоящих в соседних с ней клетках, сверху и снизу. Известно число, стоящее в одной клетке* n*-й строки (голубой крестик на рисунке), а требуется узнать число, стоящее над ним в* $(n+2)$*-й строке (красный знак вопроса на рисунке). Сколько еще чисел, стоящих в двух нижних строках (голубые точки на рисунке), нужно для этого знать?*

Введем следующие обозначения (см. рис. 6): x — неизвестное число в $(n+2)$-ой строке, d_n — данное число в

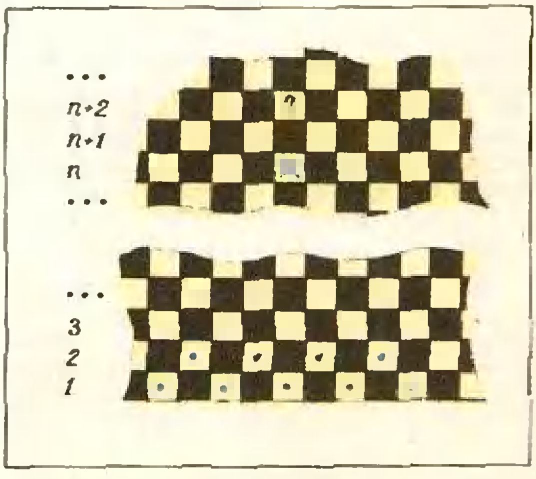


Рис. 5.

*) См., например, задачу 249 из книги Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова, И. М. Яглома «Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра». «Наука», М., 1965.

kvant.mccme.ru

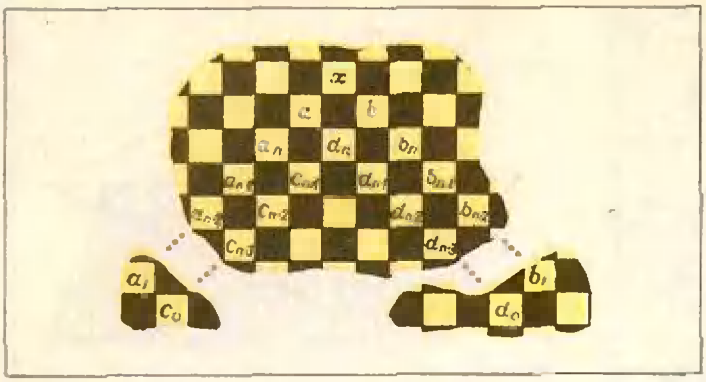


Рис. 6.

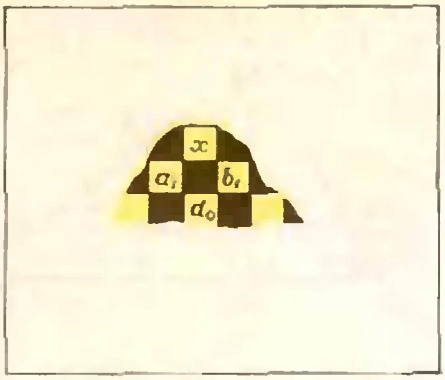


Рис. 7.

n-й строке. Числа a и b нам не даны, но известно что $x + d_n = a + b$, откуда $x = d_n + (a - d_n) + (b - d_n)$. Так как $b + d_{n-1} = d_n + b_n$, то $b - d_n = b_n - d_{n-1}$. Аналогично

$$b_n - d_{n-1} = b_{n-1} - d_{n-2} = b_{n-2} - d_{n-3} = \ldots = b_1 - d_0.$$

Тем самым, $b - d_n = b_1 - d_0$. Точно так же

$$a - d_n = a_n - c_{n-1} = a_{n-1} - c_{n-2} = \ldots = a_1 - c_0.$$

Значит, $x = d_n + (a_1 - c_0) + (b_1 - d_0)$.

Итак, чтобы определить x, нужно, кроме d_n, знать всего 4 числа a_1, b_1, c_0 и d_0 в первой и нулевой строках.

Нельзя ли обойтись меньше, чем четырьмя числами?

В вырожденном случае (при $n = 0$) — можно: тогда $x = a_1 + b_1 - d_0$ (см. рис. 7), и, кроме d_0, достаточно знать только два числа (a_1 и b_1).

При $n \geq 1$ обойтись меньше, чем четырьмя числами, нельзя, причем, кроме d_n, нужно знать именно числа a_1, b_1, c_0 и d_0: если хотя бы одно из этих чисел неизвестно, то знание даже *всех остальных чисел* в первой и нулевой строках не дает возможности определить x. Докажем это.

Пусть, например, число a_1 неизвестно (см. рис. 6). Тогда ничто не мешает задать его произвольно. Это было бы совершенно очевидно, если бы число d_n не было известно. В этом случае числа первой и нулевой строк не связаны никакими соотношениями, — их можно задать все совершенно произвольно, а по ним определить все остальные числа (сначала во второй строке, затем в третьей, и т. д.). При этом $d_n = P - N$, где P — сумма чисел первой строки, стоящих между a_1 и b_1 (исключая сами a_1 и b_1), а N — сумма чисел нулевой строки, стоящих между c_0 и d_0 (исключая сами c_0 и d_0); равенство $d_n = P - N$ легко доказывается индукцией по n; при этом нужно воспользоваться выведенной ранее формулой $x = d_n + (a_1 - c_0) + (b_1 - d_0)$.

Таким образом, $d_n = P - N$ — единственное соотношение, связывающее d_n и числа нулевой и первой строк; a_1 в него не входит. Значит, зная d_n и все числа нулевой и первой строк, кроме a_1, мы не можем определить a_1, — наоборот, оно может быть задано произвольно. Но, зафиксировав b_1, c_0, d_0 и d_n и придавая a_1 различные значения, мы будем получать разные значения и для x.

Итак, знание a_1, b_1, c_0 и d_0 необходимо и достаточно для определения x при данном d_n.

М. Л. Гервер.

Ф178. *В закрытом кубическом сосуде с ребром 1 см имеется n молекул газа. Стенки кубика таковы, что молекулы газа, попав на стенку, остаются на ней 10^{-2} с. Оценить, сколько молекул газа находится на стенках.*

Сосуд находится при комнатной температуре.

Отношение числа молекул n_1, находящихся на стенках, к числу молекул n_2, которые движутся между стенками, равно отношению времени τ, в течение которого молекула находится на стенке, ко времени t ее полета от одной стенки до другой:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\tau}{t}.$$

Так как $n_1 + n_2 = n$, то

$$\frac{n_1}{n} = \frac{\tau}{t + \tau}.$$

Отсюда

$$n_1 = n\frac{\tau}{t + \tau} = n\frac{1}{1 + \dfrac{t}{\tau}}.$$

Оценим величину t. Средняя квадратичная скорость молекул газа с молекулярной массой μ при температуре $T°$ К равна

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

kvant.mccme.ru

Для определенности будем считать, что все молекулы движутся с такой скоростью перпендикулярно к стенкам сосуда. Тогда время, за которое молекула пролетит расстояние l между стенками, равно

$$t=\frac{l}{v}=\frac{l}{\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}},$$

и

$$n_1=n\frac{1}{1+\frac{l}{\tau}\sqrt{\frac{\mu}{3RT}}}.$$

Пусть в сосуде находится воздух ($\mu = 29$ *кг/кмоль*) при температуре $T=300°$ К. Подставляя в формулу для n_1 значения всех величин, получим

$$n_1=n\frac{1}{1+\frac{10^{-2}}{10^{-2}}\sqrt{\frac{29}{3\cdot 8{,}3\cdot 10^3\cdot 300}}}\approx$$

$$\approx n\frac{1}{1+0{,}02}\approx 0{,}98\ n.$$

Ф179. *Подводная лодка, погружаясь вертикально, излучает короткие звуковые импульсы сигнала гидролокатора длительностью τ_0 в направлении дна. Длительность отраженных сигналов, измеряемых гидроакустиком на лодке, равна τ. Какова скорость погружения лодки?*

Скорость звука в воде V. Дно горизонтально.

Рассмотрим, с чем связано изменение длительности сигнала. Для этого удобно перейти от длительности сигнала к его протяженности. Пусть сигнал, излучаемый гидролокатором на лодке, имеет форму, показанную на рисунке 8, то есть его интенсивность скачком меняется от нуля до некоторой величины в момент времени t, остается постоянной в течение времени τ_0 и опять скачком падает до нуля в момент времени $t+\tau_0$. Если лодка неподвижна, то протяженность излучаемого сигнала (расстояние между передним и задним фронтами) равна $l_0=V\tau_0$. Если лодка опускается, протяженность сигнала становится меньше. Действительно, пусть

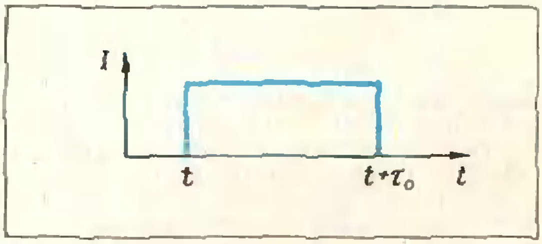


Рис. 8.

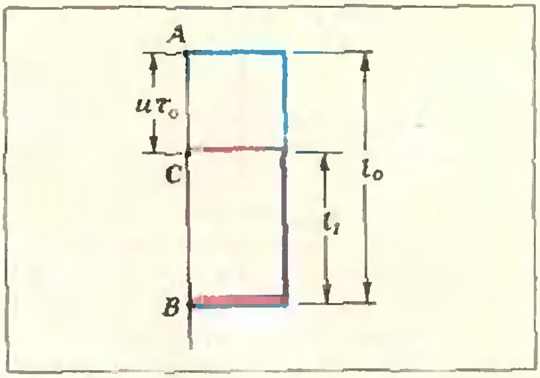


Рис. 9.

в момент начала сигнала лодка находится в некоторой точке A (рис. 9), а к тому времени, когда сигнал прекращается, — в точке C, причем $AC=u\tau_0$, где u — скорость погружения лодки. Передний фронт сигнала за время τ_0 переместится в точку B, пройдя расстояние l_0. Следовательно, протяженность сигнала равна $l_1=BC=(V-u)\tau_0$. Этот сигнал доходит до дна, отражается от него без изменения протяженности и движется навстречу лодке. В некоторый момент времени передний фронт сигнала поравняется с лодкой. Задний же фронт сигнала продолжает двигаться со скоростью $V+u$ относительно лодки, следовательно, длительность сигнала, принимаемого на лодке, равна

$$\tau=\frac{l_1}{V+u}=\frac{(V-u)\tau_0}{(V+u)}.$$

Отсюда

$$u=V\frac{\tau_0-\tau}{\tau_0+\tau}.$$

Ф180. *В однородное электрическое поле, напряженность которого равна E, внесли металлический шар. Известно, что плотность поверхностных зарядов на «полюсе» шара в точке A (рис. 10) равна σ_0. Определить плотность поверхностных зарядов в точке B, направление на которую из центра шара составляет угол α с направлением внешнего электрического поля.*

Очевидно, что распределение наведенных на шаре зарядов должно быть симметричным относительно оси AC. Так как в целом шар

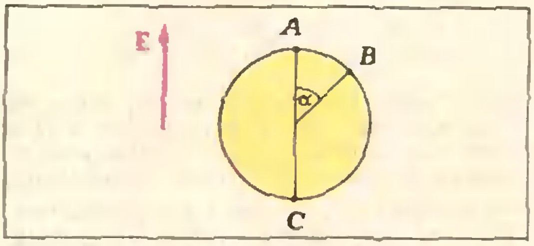


Рис. 10.

kvant.mccme.ru

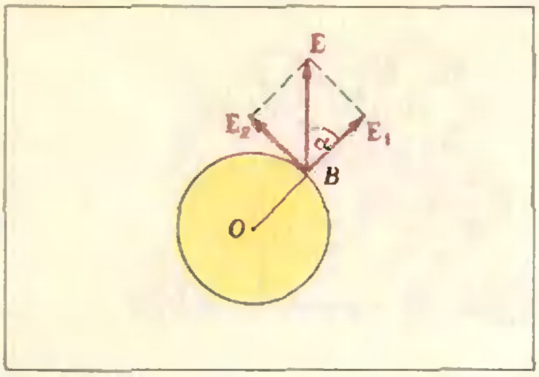


Рис. 11.

электронейтрален, то заряды выше и ниже «экватора» имеют разные знаки. Следовательно, на втором полюсе C плотность поверхностных зарядов равна $-\sigma_0$, а на экваторе она равна нулю.

Поскольку заряды на поверхности проводника всегда распределяются так, что их плотность пропорциональна напряженности электрического поля, то можно считать, что плотность наведенных зарядов σ в каждой точке шара будет пропорциональна напряженности внешнего поля E:

$$\sigma \sim E.$$

(Это следует также из соображений размерностей — размерности σ и E одинаковы).

Воспользуемся принципом суперпозиции и разложим поле с напряженностью $\mathbf{E}$ в точке B на две составляющие (рис. 11) — по направлению OB (вектор $\mathbf{E}_1$) и перпендикулярно к OB (вектор $\mathbf{E}_2$):

$$E_1 = E\cos\alpha,$$
$$E_2 = E\sin\alpha.$$

Плотность зарядов σ в точке B тоже представим как сумму плотностей зарядов, которые возникают в этой точке: $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, причем σ_1 создается полем с напряженностью $\mathbf{E}_1$, а σ_2 — полем с напряженностью $\mathbf{E}_2$.

Но в поле с напряженностью $\mathbf{E}_2$ точка B лежит на «экваторе» сферы, поэтому $\sigma_2 = 0$. В поле же с напряженностью $\mathbf{E}_1$ точка B является «полюсом» сферы. Поэтому $\sigma_1 \sim E_1$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_0} = \frac{E_1}{E}.$$

Отсюда

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_0\frac{E_1}{E_0} = \sigma_0\cos\alpha.$$

Ф181. *Спутник движется вокруг Земли по почти круговой орбите со скоростью v. Изменение его орбиты связано с тем, что на спутник действует со стороны микрочастиц сила трения $F = av^{\alpha}$, где a и α — константы. Найти α, если известно, что радиус орбиты спутника меняется очень медленно.*

Сразу оговорим, что будем решать задачу для случая, когда радиус орбиты меняется с постоянной скоростью.

Работа против силы трения совершается за счет уменьшения механической энергии спутника.

Пусть спутник массы m движется со скоростью v по круговой орбите радиуса R. Его кинетическая энергия равна $W_к = \frac{mv^2}{2}$, а потенциальная $W_п = -\gamma\frac{mM}{R}$, где M — масса Земли, γ — гравитационная постоянная (см., например, статью Н. М. Сперанского «Потенциальная энергия тел в поле тяготения», «Квант» № 6, 1972).

Центростремительное ускорение спутнику сообщает сила тяготения. Поэтому по второму закону Ньютона

$$\frac{mv^2}{R} = \gamma\frac{mM}{R^2},$$

откуда

$$v = \left(\gamma\frac{M}{R}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теперь выражение для $W_к$ можно записать так:

$$W_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}\gamma\frac{Mm}{R}.$$

Тогда полная механическая энергия спутника равна

$$W = W_к + W_п = -\frac{1}{2}\gamma\frac{Mm}{R}.$$

Если радиус орбиты за время Δt уменьшится на малую величину ΔR ($\Delta R \ll R$), то изменение энергии спутника будет равно

$$\Delta W = -\frac{1}{2}\gamma\frac{Mm}{R} - \left(-\frac{1}{2}\gamma\frac{Mm}{R-\Delta R}\right) = \frac{1}{2}\gamma\frac{Mm}{R(R-\Delta R)}\Delta R \approx \frac{1}{2}\gamma\frac{Mm}{R^2}\Delta R.$$

Работу против силы трения за это время можно посчитать так:

$$A = F_{тр.\,ср}v_{ср}\Delta t = av_{ср}^{\alpha+1}\Delta t \approx a\left(\gamma\frac{M}{R}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}\Delta t$$

($v_{ср}\Delta t$ — это расстояние, на которое спутник переместится за время Δt).

Приравняем полученные выражения для работы и изменения полной энергии спутника:

$$a\left(\gamma\frac{M}{R}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}\Delta t = \frac{1}{2}\gamma\frac{Mm}{R^2}\Delta R.$$

kvant.mccme.ru

Разделив обе части равенства на Δt, получим

$$a\left(\gamma\frac{M}{R}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}=\frac{1}{2}\gamma\frac{Mm}{R^2}\frac{\Delta R}{\Delta t},$$

где $\frac{\Delta R}{\Delta t}$ — скорость приближения спутника к Земле — величина постоянная. Проанализируем полученное равенство. Оно должно выполняться при любых значениях переменной R. Для этого необходимо, чтобы показатели степени при R в обеих частях равенства были одинаковы, то есть

$$-\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=-2,$$

откуда $\alpha=3$.

Ф182. *Оцените, на какую высоту вы смогли бы подпрыгнуть на Луне.*

Эту задачу трудно решить строго.

Большинство читателей, приславших нам решение этой задачи, рассуждали так. При прыжке на Земле центр тяжести человека поднимается на высоту $h_З$. Это означает, что человек совершает работу $A=mgh_З$. Такую же работу может совершить человек и при прыжке на Луне. Но на Луне ускорение свободного падения составляет $1/6$ часть земного: $g_Л=\frac{1}{6}g_З$.

Поэтому из равенства работ

$$mg_Лh_Л=mg_Зh_З$$

следует, что на Луне человек может подпрыгнуть на высоту в 6 раз большую, чем на Земле ($h_Л=h_Зg_З/g_Л$). Если на Земле при прыжке центр тяжести человека поднимается на высоту $h'=60$ *см*, то на Луне вы сможете подпрыгнуть на высоту 3,6 *м*.

В этом решении не учтена, однако, существенная деталь. Вспомним, как мы прыгаем на Земле: приседаем, затем резко выпрямляем ноги. Пусть, приседая, человек опускает свой центр тяжести на $h''=50$ *см*, а, подпрыгивая, поднимает его на $h'=60$ *см* (по сравнению с тем положением центра тяжести, когда человек просто стоит) на Земле и на высоту h — на Луне. Будем считать, что человек во время прыжка совершает одинаковую работу на Земле и на Луне*), то есть

$$mg_З(h'+h'')=mg_Л(h''+h).$$

Отсюда

$$h=6h'+5h''=6{,}1\ м.$$

И. Ш. Слободецкий

---

*) Это равносильно предположению, что одинакова сила, которая действует на туловище со стороны ног.

Кто где живет?

Вокруг стола сидят четверо жителей острова Трисельска.

Напомним, что на этом острове три села: Правдово, Чередово и Лгуново. Жители села Правдово всегда говорят правду; жители Чередова через раз говорят правду, а через раз лгут, причем первый ответ может оказаться как правдой, так и ложью; жители Лгунова всегда лгут.

Имена сидящих за столом по часовой стрелке — Петр, Иван, Юрий и Олег. Каждому из них были заданы следующие три вопроса.

1) Из какой деревни ваш сосед слева?

2) Из какой деревни человек, сидящий против вас?

3) Из какой деревни ваш сосед справа?

Ответы были следующие:

Петр: 1) из Правдова; 2) из Чередова; 3) из Чередова.

Иван: 1) из Лгунова; 2) из Чередова; 3) из Чередова.

Юрий: 1) из Лгунова; 2) из Правдова; 3) из Чередова.

Олег: 1) из Лгунова; 2) из Правдова; 3) из Чередова.

Из какой деревни был родом каждый из спрошенных?

kvant.mccme.ru

А. А. Рывкин

Периодические функции

Определения

Все вы, по-видимому, знаете, что такое периодическая функция. Однако для того, чтобы заняться изучением ее свойств, нужно все же дать ее строгое определение. Оказывается, сделать это не так просто. Вот, например, одно определение и «следствие» из него.

Определение. *Функция $y=f(x)$ называется периодической, если существует число $T\neq 0$ такое, что при всех значениях x из области определения этой функции $f(x+T)=f(x)$.*

Докажем теперь лемму 1:

Если $T>0$ — период функции $f(x)$, то $-T$ — тоже период этой функции.

Доказательство состоит в выписывании цепочки равенств:

$$f(x-T)=f[(x-T)+T]=f(x).$$

В самом деле, ведь T — период функции $f(x)$, а потому, если его прибавить к аргументу $x-T$, то значение функции не изменится (первое равенство). Остается раскрыть скобки и получить $f(x)$.

Прежде, чем читать дальше, попытайтесь найти ошибку в этом доказательстве.

Все проведенные здесь рассуждения справедливы. Только из них не следует, что $-T$ является периодом $f(x)$. Если вы еще не обнаружили ошибку в доказательстве, то рассмотрите функцию $\sin(\sqrt{x})^2$. Ее область определения $x\geqslant 0$, и для любого x из этой области определения

$$\sin(\sqrt{x+2\pi})^2=\sin(\sqrt{x})^2,$$

то есть 2π с точки зрения сформулированного определения — период функции. Вместе с тем -2π не будет ее периодом, так как левее $x=0$ функция $\sin(\sqrt{x})^2$ не определена и, например, $\sin(\sqrt{0-2\pi})^2$ не существует.

Теперь ясна и ошибка доказательства: прежде чем рассматривать значение $f(x-T)$, нужно быть уверенным, что это значение существует, а это ниоткуда не следует. Вот почему удается сконструировать опровергающий пример.

Чтобы лемма 1 могла быть доказана, необходимо иное определение периодической функции.

Определение 1. *Функция $f(x)$, определенная хотя бы в одной точке, называется периодической, если существует такое число $T\neq 0$ (называемое периодом), что для любого x из области определения этой функции*

а) числа $x-T$ и $x+T$ также принадлежат ее области определения;

б) $f(x+T)=f(x)$.

При таком определении приведенное выше доказательство леммы 1 становится верным.

Используя определение периодической функции, можно установить, является ли та или иная функция периодической.

Пример 1. *Доказать, что функция $y=\sin\lg x$ не является периодической.*

Установить этот факт легко — достаточно заметить, что данная функция определена при всех $x>0$ и не существует при всех $x\leqslant 0$. Следовательно, какое бы $T>0$ мы ни выбрали, наша функция будет определена при $x=T/2$ и не будет

kvant.mccme.ru

определена при $x = \frac{T}{2} - T = -\frac{T}{2}$, то есть она не является периодической.

Пример. 2. *Доказать, что функция*

$$\cos x + \sin(x\sqrt{2})$$

— не периодическая.

Пусть существует число $T \neq 0$ такое, что

$$\cos(x+T) + \sin[\sqrt{2}(x+T)] \equiv$$
$$\equiv \cos x + \sin(\sqrt{2}x)$$

для всех x. Положим в этом тождестве $x = 0$ и $x = -T$; тогда получим следующие два равенства:

$$\begin{cases} \cos T + \sin(\sqrt{2}T) = 1 & (1) \\ \cos T - \sin(\sqrt{2}T) = 1. & (2) \end{cases}$$

Из соотношений (1) и (2) следует, что $\cos T = 1$, а $\sin(\sqrt{2}T) = 0$, откуда $T = 2\pi k$ и $T = \pi n/\sqrt{2}$. Приравнивая эти значения ($T \neq 0$, и поэтому $k \neq 0$, $n \neq 0$), найдем $\sqrt{2} = n/2k$, то есть $\sqrt{2}$ — рациональное число. Полученное противоречие доказывает, что функция $\cos x + \sin(\sqrt{2}x)$ — не периодическая.

Пример 3. *Доказать, что функция* $y = 3\sin x + \sin 2x$ *является периодической.*

Обычно рассуждают так. Пусть T — период этой функции. Тогда равенство

$$3\sin(x+T) + \sin 2(x+T) =$$
$$= 3\sin x + \sin 2x \quad (1)$$

должно удовлетворяться при всех x, в том числе и при $x = 0$. Воспользовавшись этим, придем к уравнению относительно T:

$$3\sin T + \sin 2T = 0, \quad (2)$$

то есть $(3 + 2\cos T)\sin T = 0$. Так как выражение в скобках в нуль не обращается, $\sin T = 0$, $T = k\pi$.

Однако найденные таким образом значения T вовсе не обязаны быть периодами функции. Перейдя от соотношения (1) к соотношению (2), мы смягчили ограничения на T, содержавшиеся в (1). Ведь первое соотношение должно быть справедливым при *всех* x, в то время как второе обеспечивает его справедливость лишь при $x = 0$. Таким образом, мы установили, что все периоды рассматриваемой функции заключены среди чисел вида $x = k\pi$. Однако это совсем не означает, что все числа такого вида являются ее периодами.

Далее, поскольку

$$3\sin\frac{\pi}{2} + \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 3,$$

$$3\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) + \sin 2\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -3,$$

то есть $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right)$, то π не будет периодом функции. Число 2π и все числа вида $2k\pi$ — ее периоды, в чем легко убедиться непосредственной проверкой.

Основной период

Определение 2. *Наименьший положительный период периодической функции $f(x)$ называют основным.*

Наиболее внимательные из читателей, наверное, тут же возразят: прежде, чем давать чему-то название, хорошо бы убедиться в существовании определяемого объекта. Мы займемся выяснением существования основного периода после того, как докажем еще одно свойство периодических функций.

Лемма 2. *Если T_1 и T_2 — периоды функции $f(x)$, причем $T_1 + T_2 \neq 0$, то $T_1 + T_2$ — период $f(x)$.*

Доказательство. Пусть $y = x + T_1$. Так как T_1 — период функции f, то $f(y)$ существует одновременно с $f(x)$. T_2 — тоже период f. Следовательно, $f(y + T_2)$ существует и

$$f(y + T_2) = f(y) = f(x + T_1) = f(x),$$

то есть $f(x + T_1 + T_2) = f(x)$.

По условию, $T_1 + T_2 \neq 0$. Таким

kvant.mccme.ru

образом, доказано, что $T_1 + T_2$ — период функции f.

Следствие 1. *Если T_1 и T_2 — периоды функции f и $T_1 \neq T_2$, то $T_1 - T_2$ — период функции f.*

Следствие 2. *Если T_1 и T_2 — периоды функции f, причем $mT_1 + nT_2 \neq 0$, где m и n — целые, то $mT_1 + nT_2$ — период функции f.*

Доказательство этих следствий проведите самостоятельно.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ периодическая и известно, что у нее нет положительных периодов, меньших некоторого числа $\alpha > 0$, то она имеет основной период.*

Доказательство. Пусть T — период. Если внутри отрезка $[0, T]$ есть еще хотя бы один период T', то найдется период T_1, лежащий на отрезке $\left[0, \frac{T}{2}\right]$. В самом деле, $T - T'$ — тоже период, и если $T' \leqslant \frac{T}{2}$, то положим $T_1 = T'$, а если $T' > \frac{T}{2}$, то $T - T' < \frac{T}{2}$ и можно положить $T_1 = T - T'$.

Теперь берем период T_1 и отрезок $[0, T_1]$ и продолжаем те же рассуждения, получая период T_2 и так далее.

Но длина отрезка $[0, T_k]$ по крайней мере вдвое меньше длины отрезка $[0, T_{k-1}]$, поэтому при некотором n отрезок $[0, T_n]$ будет иметь длину, меньшую α, и потому не будет содержать ни одного периода.

Значит, на некотором этапе мы должны были остановиться, найдя тем самым наименьший положительный период функции $f(x)$.

Нам удалось доказать теорему благодаря условию, что $f(x)$ не имеет положительных периодов, меньших некоторого $\alpha > 0$. Это условие выглядит излишне жестким и появляется желание доказать более сильное утверждение: периодическая функция $f(x)$, отличная от константы, имеет основной период. К сожалению, такое утверждение ложно. Чтобы установить это, достаточно привести опровергающий пример.

В качестве такого примера можно взять функцию Дирихле. Эту функцию определяют так: она равна нулю во всех иррациональных точках числовой оси и единице — во всех рациональных точках. Легко убедиться в том, что функция Дирихле будет периодической, ее период — любое рациональное число, отличное от нуля. Однако основного периода у нее нет, поскольку среди всех положительных рациональных чисел нет наименьшего (нуль не является положительным числом).

Теорема 2. *Если у периодической функции $f(x)$ есть основной период, то все ее периоды кратны основному.*

Доказательство. Если T — основной период функции $f(x)$, то kT, где $k \neq 0$ — целое, тоже ее период (по следствию 2 из леммы 2).

Докажем теперь, что у $f(x)$ нет иных положительных периодов, кроме kT.

Пусть $T_1 > 0$ — период $f(x)$ и $T_1 \neq kT$ ни при каком натуральном k. Тогда найдется такое целое $n > 0$, что

$$nT < T_1 < (n+1)T,$$

то есть

$$0 < T_1 - nT < T,$$

откуда следует, что $T_1 - nT$ — положительный период $f(x)$, меньший T, что противоречит условию, в силу которого T — основной период $f(x)$.

Период суммы функций

Часто возникает потребность в определении периода функции, образованной как комбинация других периодических функций.

Пример 4. *Найти основной период функции*

$$\sin 3x + \operatorname{tg} 2x.$$

Основной период функции $\sin 3x$ равен $\frac{2\pi}{3}$, а основной период $\operatorname{tg} 2x$ равен $\frac{\pi}{2}$. Период суммы $\sin 3x + \operatorname{tg} 2x$ будем искать среди чисел, являющихся периодами каждой из этих функций, а потому содержащих целое число раз оба эти периода. Если же мы хотим найти среди таких периодов наименьший, то следует взять наименьшее общее кратное периодов

kvant.mccme.ru

слагаемых *), то есть построить наименьший отрезок, содержащий целое число отрезков длины $\frac{2\pi}{3}$ и целое число отрезков длины $\frac{\pi}{2}$. Таким будет отрезок длины 2π, а число 2π — наименьшим из всех сконструированных таким образом периодов для $\sin 3x + \operatorname{tg} 2x$.

К сожалению, мы не доказали, что 2π — основной период функции $\sin 3x + \operatorname{tg} 2x$. Не доказали, ибо искали периоды этой функции с помощью некоторого специального приема — среди чисел, являющихся периодами каждого из слагаемых. Если бы можно было установить, что период суммы $f_1 + f_2$ непременно является периодом каждого слагаемого f_1 и f_2 в отдельности, то обнаружение основного периода было бы закончено. Однако такое утверждение заведомо неверно. Убедиться в этом легко на простом примере:

$$f_1 = \sin x + x, \quad f_2 = \sin x - x,$$
$$f_1 + f_2 = 2 \sin x.$$

Здесь f_1 и f_2 не являются периодическими функциями — обе они имеют единственный корень $x = 0$. Вместе с тем их сумма $f_1 + f_2$ — функция периодическая с периодом 2π.

Доказать, что 2π — основной период функции $\sin 3x + \operatorname{tg} 2x$ можно, опираясь на свойства самой этой функции, изученные на любом отрезке длины 2π, например, на отрезке $[0, 2\pi]$. На этом отрезке функция имеет те же самые точки разрыва, что и $\operatorname{tg} 2x$. Поэтому ее период должен быть обязательно кратным числу $\frac{\pi}{2}$. Остается убедиться на примерах, что $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ не являются периодами этой функции. Возьмите для этой цели $x = \frac{\pi}{6}$ и проведите необходимые выкладки.

При решении примеров, подобных примеру 4, многие школьники ссылаются на достаточно общую теорему, в которой устанавливается, что *основной период суммы периодических функций $f = f_1 + f_2$ есть наименьшее кратное основных периодов T_1 и T_2 функций f_1 и f_2 соответственно.* Некоторые даже приводят доказательство этой теоремы!

В формулировке теоремы, которую мы привели — целый каскад ошибок и некорректностей. Если даже добавить в условии, что $T_1 > 0$ и $T_2 > 0$, то нет никаких оснований надеяться, что отрезки длины T_1 и T_2 окажутся соизмеримыми. Поэтому сумма двух периодических, причем очень «хороших» функций, может оказаться функцией непериодической (см. пример 2). Дополним условие теоремы словами, «если оно существует», относящимися к наименьшему общему кратному периодов T_1 и T_2. Примеры 5 и 6 опровергают утверждение и такой уточненной теоремы.

Пример 5. Пусть $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$. Тогда $f(x) = \operatorname{tg} x$. Основные периоды функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ есть 2π, в то время как основной период $f(x)$ равен π.

Пример 6. Пусть

$$f_1(x) = \sqrt{\lg \sin x}, \; f_2(x) = \operatorname{tg} x,$$
$$f(x) = \sqrt{\lg \sin x} + \operatorname{tg} x.$$

Основной период f_1 равен 2π (эта функция определена лишь в точках $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ числовой оси), основной период f_2 равен π. Функция $f(x)$ не определена нигде на числовой оси, так как все точки, входящие в область определения первой функции, не попадают в область определения второй. Поэтому ее нельзя считать периодической.

На самом деле имеет место гораздо более слабая теорема и формулирует-

*) Обычно это понятие определяется для натуральных чисел. Говоря о наименьшем общем кратном периодов T_1 и T_2, мы будем иметь в виду отрезок наименьшей длины, в котором отрезки длины T_1 и T_2 содержатся целое число раз.

kvant.mccme.ru

ся она для *периодов*, а не для *основных периодов*.

Теорема 3. *Если $T_1 > 0$ — период $f_1(x)$, $T_2 > 0$ — период $f_2(x)$, причем T_1 и T_2 соизмеримы и существуют значения x, принадлежащие одновременно области определения f_1 и f_2, то $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ — периодическая функция, имеющая своим периодом число T, равное общему кратному (в том числе и наименьшему) периодов T_1 и T_2.*

Доказательство. Пусть T — наименьшее общее кратное соизмеримых отрезков T_1 и T_2. Тогда имеются такие натуральные k и l, что $T = kT_1$ и $T = lT_2$. Если x — любое из области определения $f(x)$, то

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = \\ = f_1(x + kT_1) + f_2(x + lT_2) = \\ = f_1(x+T) + f_2(x+T) = f(x+T).$$

Все ограничения, имевшиеся в условии теоремы, были использованы в приведенной цепочке равенств.

Вообще говоря, может быть доказана аналогичная теорема о гораздо более широком классе комбинаций функций f_1 и f_2, включая произведение, частное. Однако рассмотрение конкретных практических ситуаций здесь, по-видимому, гораздо эффективнее построения какой-либо строгой теории.

Упражнения

Будут ли периодическими следующие функции и, если да, то найти их основные периоды:

1. $2^{|\sin x|}$;
2. $\cos 3\pi x - \sin 2\pi x$;
3. $\sin 2x \sin 3x \cos 5x$;
4. $\lg \sin x + \lg \cos x$;
5. $\lg \lg (1 + \sin x) + \lg \lg (1 - \sin x)$;
6. $|\sin \arcsin x|$;
7. $\arcsin \sin x$;
8. $\sin \dfrac{1}{x}$;
9. x^2.

10. Докажите, что функция $\cos x^2$ не является периодической.

11. Докажите, что если функция $\cos x + \sin ax$ периодическая, то a — рациональное число.

Расшифруйте!

1.

```
    ***
 ×
    *3*
   -----
    3**
   **3*
  3**3
  ------
  ******
```

2.

```
 *******  | *6*
−         |------
 *6**       6***
 -----
   ***
  −
   **6
  -----
   ****
  −
   ***6
  -----
      0
```

Где ошибка?

— Сколько корней у квадратного уравнения?

— Два, конечно,— ответите вы.

— Но всегда ли?

Рассмотрим такое уравнение:

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \\ + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} = 1$$

(здесь a, b и c — попарно различные числа).

Подставим $x=a$. Первое и третье слагаемые обратятся в нуль. Второе дает единицу. Подставив $x=b$, увидим, что первые два слагаемых обращаются в нуль, а третье дает единицу.

Подстановка $x=c$ приводит к такому же результату. Таким образом, хотя мы имеем квадратное уравнение, корней, по крайней мере, три! Получили противоречие: уравнение второй степени имеет больше двух корней!

Как же это получилось?

kvant.mccme.ru

Л. А. Боровинский

Задачи на максимум и минимум

В повседневной жизни, в практических и научных задачах часто возникает необходимость определения условий, при которых мы получим наилучшие результаты при определенных усилиях. В других случаях, наоборот, необходимо знать, при каких условиях можно достичь определенной цели при минимальных затратах труда или времени. Такие условия называются оптимальными.

Часто, даже не замечая этого, мы решаем задачи на определение оптимальных условий, пользуясь жизненным опытом и смекалкой. Однако интуиция и жизненный опыт могут быть обманчивы или недостаточно точны. В лучшем случае они подскажут нам условия, которые обеспечивают получение хорошего, но не наилучшего результата. Для точного нахождения оптимальных условий необходимо прибегнуть к испытанному оружию — математике.

Многие законы физики могут быть сформулированы как некоторые экстремальные принципы, то есть требования экстремума (максимума или минимума) определенных физических величин. Мы знаем, например, что состояния равновесия механической системы можно найти из условий экстремума потенциальной энергии системы, причем в состоянии устойчивого равновесия потенциальная энергия минимальна, а в состоянии неустойчивого равновесия — максимальна. Тот, кто знаком с принципом Ферма, согласно которому свет между двумя точками идет всегда по пути, требующему минимального времени, из этого принципа может вывести все законы геометрической оптики.

Есть существенное различие между оптимальными условиями для процессов, управляемых человеком, и для процессов, происходящих в природе самопроизвольно. В первом случае оптимальные условия определяют наиболее выгодный, но не единственно возможный, ход процесса. А во втором — условия экстремума в границах применимости законов природы определяют либо единственно возможный, либо наиболее вероятный ход процесса.

Сложные задачи на определение оптимальных или экстремальных условий решаются с помощью теории дифференциального исчисления, вариационного исчисления или линейного программирования.

Однако существует много простых задач на определение экстремумов функций, которые можно решить, не пользуясь этими сложными математическими теориями. Для их решения нужно знать только свойства элементарных функций (например, квадратного трехчлена или тригонометрических функций). Можно также воспользоваться известной теоремой:

Среднее геометрическое n положительных чисел не больше их среднего арифметического, то есть

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n.$$

Рассмотрим несколько конкретных задач.

Задача 1. *Электронагревательный прибор потребляет мощность от источника тока, э. д. с. которого равна E, а внутреннее сопротивление и сопротивление подводящих проводов в сумме равны r. Какое сопротивление R должен иметь прибор, чтобы в нем выделялась максимальная мощность?*

kvant.mccme.ru

По закону Ома для полной цепи ток равен

$$I=\frac{E}{R+r},$$

а по закону Джоуля — Ленца мощность, выделяемая на сопротивлении R, равна

$$P=I^2R=\frac{E^2R}{(R+r)^2}=\frac{E^2}{R+2r+\frac{r^2}{R}}.$$

При малом R ($R \ll r$) полезная мощность мала, так как почти вся мощность, забираемая от источника, выделяется в подводящих проводах и в источнике. Если R велико ($R \gg r$), полезная мощность опять мала, так как мал ток в цепи. Следовательно, существует некоторое значение R, при котором полезная мощность будет максимальной.

Рассмотрим выражение

$$R+2r+\frac{r^2}{R}=2r+\left(R+\frac{r^2}{R}\right).$$

Ясно, что полезная мощность достигает наибольшей величины, когда это выражение будет минимальным. Величина $2r$ задана, а произведение членов R и $\frac{r^2}{R}$, стоящих в скобках, не зависит от R и постоянно, поэтому, согласно указанной выше теореме, наименьшее значение знаменателя будет достигнуто тогда, когда $R=\frac{r^2}{R}$, то есть $R=r$.

Наибольшее значение полезной мощности при этом равно

$$P_{max}=\frac{E^2r}{4r^2}=\frac{E^2}{4r}.$$

Отметим, что в этом случае к. п. д. источника составляет только 50%. Поэтому получать максимальную мощность от источника целесообразно только в течение коротких промежутков времени, например, при работе стартера автомашины. Чтобы более целесообразно использовать запас энергии источника тока, сопротивление R должно быть значительно больше r. При этом полезная мощность будет меньше максимальной, но зато к. п. д. будет ближе к 100%. Проверьте это.

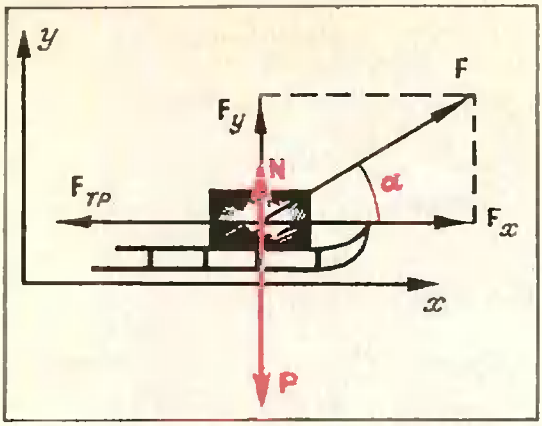


Рис. 1.

З а д а ч а 2. *Нагруженные сани движутся по горизонтальной поверхности под действием силы* **F**, *приложенной к центру тяжести. Какой угол α должна составлять линия действия силы* **F** *с горизонтом, чтобы равномерное движение саней происходило под действием наименьшей силы? Коэффициент трения саней о снег равен k.*

Разложим силу **F** на горизонтальную и вертикальную составляющие $\mathbf{F}_x$ и $\mathbf{F}_y$ (рис. 1). Сила нормального давления саней на снег равна разности веса саней и вертикальной составляющей силы **F**:

$$N=P-F\sin\alpha. \qquad (1)$$

Поэтому сила трения

$$F_{тр}=kN=k(P-F\sin\alpha). \qquad (2)$$

Сани будут двигаться равномерно при условии компенсации горизонтальных сил: $F_x=F_{тр}$, то есть

$$F\cos\alpha=k(P-F\sin\alpha). \qquad (3)$$

Отсюда находим силу F как функцию угла α:

$$F=\frac{kP}{k\sin\alpha+\cos\alpha}. \qquad (4)$$

Очевидно, что сила F будет минимальной при таком значении угла α, при котором знаменатель в формуле (4) максимален. Для определения этого угла преобразуем знаменатель выражения (4) так, чтобы

kvant.mccme.ru

в него входила только одна тригонометрическая функция угла α. Для этого представим коэффициент трения k как тангенс некоторого угла φ:

$$\operatorname{tg}\varphi = k; \qquad \varphi = \operatorname{arctg} k;$$

$$\sin\varphi = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}; \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Так как k задано, угол φ можно считать известным. Подставляя в (4) $\operatorname{tg}\varphi$ вместо k и умножая числитель и знаменатель на $\cos\varphi$, получим

$$F = \frac{P\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\varphi\sin\alpha + \cos\alpha} =$$

$$= \frac{P\sin\varphi}{\sin\varphi\sin\alpha + \cos\varphi\cos\alpha} = \frac{P\sin\varphi}{\cos(\alpha-\varphi)} =$$

$$= \frac{Pk}{\sqrt{1+k^2}\cos(\alpha-\varphi)}.$$

Теперь ясно, что сила F будет минимальной тогда, когда $\cos(\alpha-\varphi) = 1$, то есть

$$\alpha_{\min} = \varphi = \operatorname{arctg} k.$$

При этом минимальное значение силы F равно

$$F_{\min} = \frac{kP}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Из решения этой задачи можно сделать практический вывод: когда необходимо везти на санях груз по дороге с большим коэффициентом трения (например, если дорога посыпана песком), нужно тянуть сани за короткую веревку. Если же коэффициент трения мал, веревка должна быть длинной. Объясните это.

Задача 3. *Точки 1 и 2 движутся по осям x и y к началу координат (рис. 2). В момент $t_0 = 0$ точка 1 находится на расстоянии $s_1 = 10$ см, а точка 2 — на расстоянии $s_2 = 5$ см от начала координат. Первая точка движется со скоростью $v_1 = 2$ см/с, а вторая — со скоростью $v_2 = 4$ см/с. Каково наименьшее расстояние между ними?*

В момент t расстояние между точками равно

$$d = \sqrt{(s_1 - v_1t)^2 + (s_2 - v_2t)^2} =$$

$$= \sqrt{(10-2t)^2 + (5-4t)^2} =$$

$$= \sqrt{20t^2 - 80t + 125}\ (\text{см}).$$

Под корнем стоит квадратный трехчлен, из которого можно легко выделить полный квадрат. Действительно,

$$20t^2 - 80t + 125 = 5\,[(2t-4)^2 + 9].$$

Ясно, что минимум этого выражения, а значит, и расстояния d будет при $t = 2$, откуда

$$d_{\min} = \sqrt{45}\ \text{см} \approx 6{,}7\ \text{см}.$$

В заключение рассмотрим задачу, для решения которой используется так называемый метод приращений, не входящий в программу средней школы.

Задача 4. *Группа спортсменов организовала на берегу моря следующее соревнование. Стартуя из точки A (рис. 3) на берегу моря, каждый спортсмен должен достичь буйка B, расположенного на расстоянии $l = 120$ м от берега. Береговую линию можно считать прямой; расстояние от старта A до основания перпендикуляра BC, опущенного на эту линию, равно $L = 200$ м. Каждый спортсмен имеет право пробежать любое расстояние по берегу от старта A*

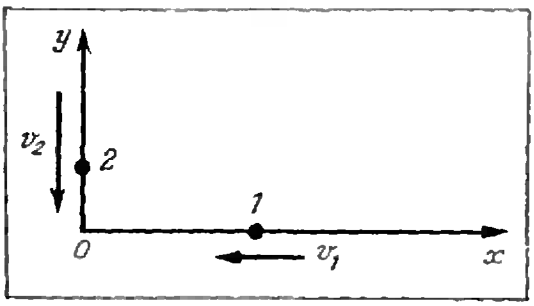


Рис. 2.

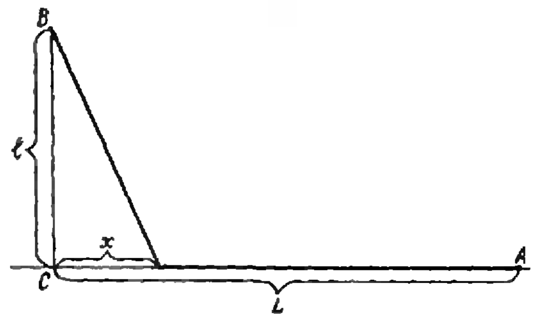


Рис. 3.

kvant.mccme.ru

по направлению к основанию перпендикуляра BC, а затем плыть к буйку. Победителем считается тот, кто доплывает до буйка B быстрее всех. Из какой точки берега наиболее выгодно начать плыть к буйку спортсмену, который знает, что при беге по песчаному берегу его скорость равна 13 км/ч, а скорость плавания — 5 км/ч.

Пусть x — расстояние от точки C до того места, откуда спортсмен начинает плыть к буйку. Тогда спортсмен пробегает расстояние $L-x$, а проплывает расстояние $\sqrt{l^2+x^2}$. Общее время движения от старта A до буйка B равно

$$t=\frac{L-x}{v_1}+\frac{\sqrt{l^2+x^2}}{v_2}.$$

Пусть длина отрезка x увеличивается на малую величину Δx. Тогда время движения станет равным

$$t'=\frac{L-(x+\Delta x)}{v_1}+\frac{\sqrt{l^2+(x+\Delta x)^2}}{v_2}.$$

Изменение времени равно

$$\Delta t=t'-t=-\frac{\Delta x}{v_1}+$$
$$+\frac{\sqrt{l^2+(x+\Delta x)^2}-\sqrt{l^2+x^2}}{v_2}=$$
$$=-\frac{\Delta x}{v_1}+$$
$$+\frac{l^2+(x+\Delta x)^2-l^2-x^2}{v_2[\sqrt{l^2+(x+\Delta x)^2}+\sqrt{l^2+x^2}]}=$$
$$=\left\{\frac{2x+\Delta x}{v_2[\sqrt{l^2+(x+\Delta x)^2}+\sqrt{l^2+x^2}]}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{v_1}\right\}\Delta x.$$

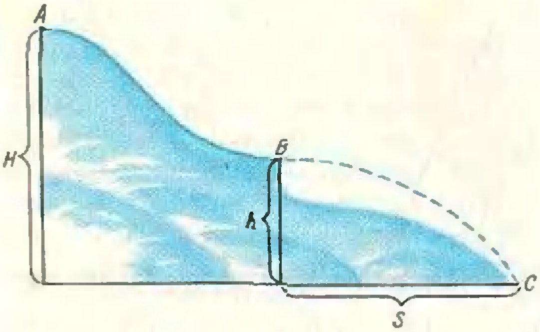


Рис. 4.

Так как $\Delta x \ll x$, выражение для Δt можно упростить. Тогда

$$\Delta t\approx\left\{\frac{x}{v_2\sqrt{l^2+x^2}}-\frac{1}{v_1}\right\}\Delta x.$$

Поскольку $\Delta x>0$, знак Δt совпадает со знаком выражения в фигурных скобках.

При малых x ($x\to 0$) выражение в фигурных скобках отрицательно, а значит, t убывает с ростом x. При $x\gg l$ выражение в фигурных скобках положительно, и время растет с ростом x. Поскольку функция Δt меняется непрерывно с увеличением x, существует такое значение x_m, при котором Δt обращается в нуль, то есть убывание t с увеличением x сменяется ростом t. Это значение x_m и будет соответствовать минимальному времени t.

Итак,

$$\frac{x_m}{v_2\sqrt{x_m^2+l^2}}-\frac{1}{v_1}=0,$$

откуда

$$x_m=l\,\frac{v_2}{\sqrt{v_1^2-v_2^2}}.$$

Подставляя численные значения всех величин, получим $x_m=50$ м.

Длина L в решении не использовалась. Однако знать ее необходимо. Подумайте, почему.

Упражнения

1. Имеется множество наклонных плоскостей с одинаковыми основаниями, равными b, *но с разными высотами. При какой высоте* h время соскальзывания тела по наклонной плоскости без трения будет минимальным?

2. Верхняя точка трамплина находится на высоте H над землей, а на высоте h трамплин обрывается (рис. 4). Какой должна быть высота h при заданной высоте H, чтобы лыжник, съехав с трамплина, мог пролететь наибольшее расстояние S (считая по горизонтали)?

Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

kvant.mccme.ru

Новосибирский государственный университет

Новосибирский государственный университет основан в 1959 году в научном центре Сибирского отделения АН СССР. В НГУ имеются факультеты:

математический с отделениями математики, прикладной математики и механики;

физический;

естественный с отделениями химии и биологии;

геолого-геофизический;

гуманитарный с отделениями русского языка и истории;

экономический со специализацией по экономической кибернетике.

Университет расположен в Академгородке в 20 километрах от Новосибирска. Обучение студентов проводится на базе научных институтов Сибирского отделения АН СССР: гидродинамики, математики, вычислительного центра, ядерной физики, теоретической и прикладной механики, теплофизики, физики полупроводников, автоматики и электрометрии, геологии и геофизики, неорганической химии, органической химии, химической кинетики и горения, катализа, истории, филологии и философии, цитологии и генетики.

На первых двух курсах студенты изучают современные методы исследования, что позволяет им уже с третьего курса проходить практику в одной из научно-исследовательских лабораторий сначала два-три дня в неделю, а на пятом курсе — полную рабочую неделю.

Со второго курса студенты привлекаются к участию в работе научных семинаров на кафедрах.

В университете преподают ведущие ученые Сибирского отделения АН СССР.

Приемные экзамены в университет проводятся с 11 июля.

Приведем варианты вступительных экзаменов 1972 года по математике и задачи по физике, предлагавшиеся на физическом факультете.

Математика

В каждом варианте предлагалось 4 задачи, на решение которых отводилось 5 астрономических часов.

Специальности: математика, прикладная математика и механика, физика, экономическая кибернетика

Вариант 1

1. При каких вещественных значениях a, b, c $(a \cdot b \cdot c \neq 0)$ система уравнений

$$\begin{cases} x^2 = (y-z)^2 + a \\ y^2 = (z-x)^2 + b \\ z^2 = (x-y)^2 + c \end{cases}$$

имеет вещественные решения? Найти эти решения.

2. В остроугольном треугольнике ABC углы при вершинах A и B равны α и β соответственно, а радиус описанной окружности с центром в точке O равен R. Найти радиус окружности, которая проходит через точку C, касается стороны AB и центр которой лежит на отрезке OC.

3. Решить уравнение

$$2\cos x = \sqrt{2 + \sin 3x}.$$

4. В треугольной пирамиде $SABC$ грани SAC и ABC перпендикулярны и являются равными равнобедренными треугольниками ($AS = AC = AB = a$, $\angle SAC = 30°$). Найти высоту прямого кругового конуса, окружность основания которого проходит через точки A, B и C, а боковая поверхность — через точку S.

Вариант 2

1. Найти вещественные решения системы уравнений

$$(x+y)^2 = (y+z)^2 = \frac{1}{4}(x+z)^2 = \frac{2}{x+y+z}.$$

2. Три круга радиуса R каждый касаются внутренним образом круга радиуса $2R$. Углы треугольника, образованного точками касания, острые и равны α, β, γ. Определить площадь части большого круга, получающейся после выбрасывания всех трех меньших кругов.

kvant.mccme.ru

3. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}-\frac{5}{2\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}=1$$

4. Основанием пирамиды $SABC$ является равнобедренный треугольник ABC с основанием $BC=7a$ и углом при основании α таким, что $\sin\alpha=0{,}8$. Боковые грани пирамиды образуют с основанием одинаковые двугранные углы, равные 45°. Перпендикулярно к плоскости SBC проведена плоскость P, пересекающая боковые стороны треугольника ABC в точках, находящихся на равном расстоянии $4a$ от прямой BC. Найти объем той из частей пирамиды, возникающих в результате сечения плоскостью P, которая не содержит точку A.

Специальности: химия, биология, геология, геофизика

Вариант 3

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(x+y)^{\frac{1}{x-y}}=2\sqrt{3}\\ (x+y)\cdot 2^{y-x}=3.\end{cases}$$

2. На основании AC равнобедренного треугольника ABC выбрана точка D и проведены прямые DP и DQ, параллельные сторонам BC и AB соответственно. P — точка пересечения прямых DP и AB, и точка Q — прямых DQ и BC. Найти длину отрезка PQ, если $AC=1$, $AD=l$ $(0<l<1)$ и $\angle ACB=\alpha$.

3. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x=\frac{\operatorname{ctg}4x+1}{\operatorname{ctg}4x-1}.$$

4. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 1. Найти длину бокового ребра, если известно, что биссекториальная плоскость двугранного угла при основании делит объем пирамиды в отношении 2 : 1 (считая от вершин).

Физика

Каждому абитуриенту на письменном экзамене предлагалось 5 задач.

№ 1. «Экспериментальная» задача, в которой требовалось объяснить физическое явление, демонстрировавшееся экзаменаторами на лабораторном столе.

№ 2. «Легкая» задача, которую может решить каждый средне подготовленный абитуриент.

№ 3 и 4. Задачи, требующие достаточно уверенного знания основных физических законов и некоторой сообразительности.

№ 5. Задача повышенной трудности, требующая умения разбираться в непривычной или усложненной физической ситуации.

Ниже приведена бо́льшая часть задач (в скобках указан номер каждой задачи в экзаменационном билете).

Задача 1. (*1*). Две катушки с проводом висят так, что их оси горизонтальны и лежат на одной прямой. Зазор между торцами катушек около 3 *см*. При включении катушек в электрическую сеть через лабораторный автотрансформатор катушки притягиваются.

Почему притягивающиеся катушки начинают отталкиваться, когда между ними вставлен медный лист? Почему картина меняется, если вместо медного вставлен железный лист?

Задача 2. (*1*). Имеются два динамика и два звуковых генератора. При поочередном подключении каждого динамика к своему генератору в обоих случаях слышны звуки одинаковой на слух громкости и частоты. При одновременном подключении — звук той же частоты, но с периодическим усилением и ослаблением громкости. Объяснить явление.

Задача 3. (*1*). Черный диск с одним узким белым сектором приводится во вращение. При освещении диска периодически вспыхивающей лампой видны три неподвижных белых сектора, расположенных через 120°. Найти скорость вращения диска по наблюдаемой картине при известной частоте вспышек ν освещающей лампы.

Задача 4. (*2*). Двойной маятник вращается вокруг вертикальной оси так, что обе нити лежат в одной плоскости с осью и составляют с ней постоянные углы α и β (рис. 1). Длины нитей одинаковы и равны l. Найти угловую скорость вращения маятника. Ускорение свободного падения равно g.

Задача 5. (*2*). В цилиндрическом сосуде радиуса R, наполненном жидкостью плотности ρ до высоты h, возле дна в боковой стенке имеется отверстие, заткнутое пробкой. Какую работу нужно совершить, чтобы вдвинуть пробку в сосуд на длину l?

Пробка имеет форму цилиндра радиуса r, длиной больше l. Трение не учитывать. Сосуд достаточно высок, так что вода из него не выливается.

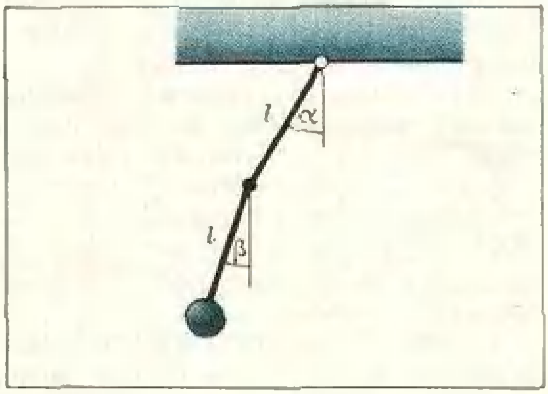


Рис. 1.

kvant.mccme.ru

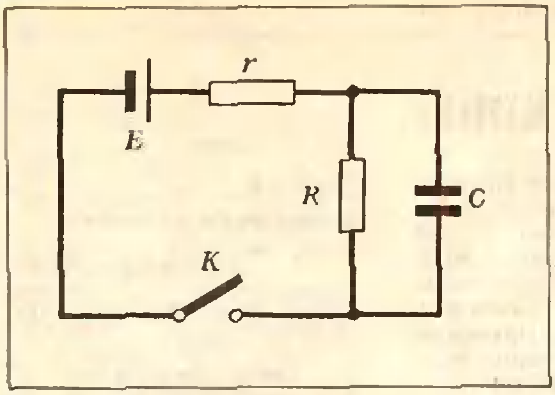


Рис. 2.

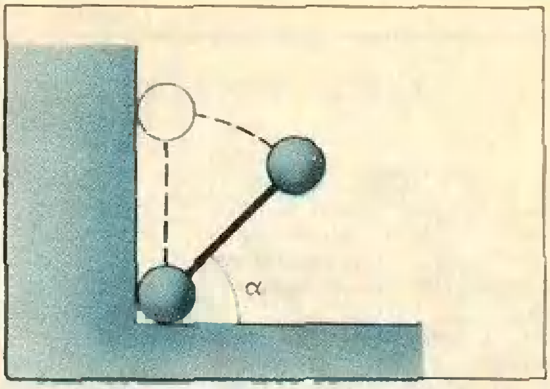


Рис. 4.

З а д а ч а 6. (*3*) Точку подвеса маятника длины l мгновенно приводят в движение в горизонтальном направлении с постоянной скоростью v, затем после перемещения на расстояние a мгновенно останавливают. Перед началом движения маятник покоился. При какой скорости подвеса колебания маятника, возникшие с началом движения, прекращаются сразу же после остановки? Угол отклонения маятника от вертикали считать малым.

З а д а ч а 7. (*3*) Имеется параллельный пучок одинаковых ядер, движущихся со скоростью v. Ядра в пучке самопроизвольно делятся на две части одинаковой массы. Максимальная скорость осколков, движущихся в направлении пучка, оказалась равной u. Найти скорость осколков, движущихся в направлении, перпендикулярном пучку (для неподвижного наблюдателя).

З а д а ч а 8. (*3*) Жука фотографируют в двух масштабах, поднеся фотоаппарат на расстояние l, равное сначала тройному, а затем пятикратному фокусному расстоянию объектива. Во сколько раз надо изменить диаметр диафрагмы объектива, чтобы освещенность изображения на пленке в обоих случаях была одинаковой? Считать, что диаметр объектива много меньше l.

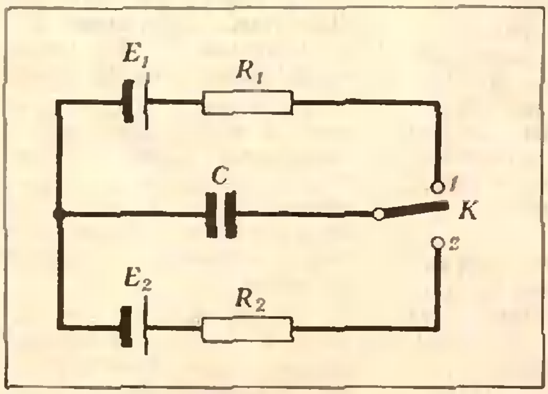


Рис. 3.

З а д а ч а 9. (*4*) В цепи (рис. 2) течет постоянный ток. Ключ размыкают. Через какое приблизительно время заряд на конденсаторе уменьшится на $\frac{1}{1000}$ своей первоначальной величины?

З а д а ч а 10. (*4*) Брусок весом P удерживается в воздухе N струями воды, бьющими вертикально вверх из отверстий сечением S каждое. Скорость воды на выходе из отверстия равна v. Отталкиваясь от бруска, вода разлетается в горизонтальной плоскости. На какой высоте над отверстиями удерживается брусок? Плотность воды ρ, ускорение свободного падения g.

З а д а ч а 11. (*5*) Ключ K (рис. 3) замыкают поочередно с каждым из контактов на очень маленькие одинаковые промежутки времени, причем изменение заряда конденсатора за время каждого включения очень мало. Какой заряд окажется на конденсаторе после очень большого числа переключений?

З а д а ч а 12. (*5*) Определить силу, действующую на вертикальную стенку со стороны падающей гантели в момент, когда ось гантели составляет угол α с горизонтом (рис. 4).

Гантель начинает свое движение без начальной скорости. Вес каждого шара гантели P, расстояние между шарами много больше радиуса шаров; трением пренебречь.

З а д а ч а 13. (*5*) На непроводящем кольце массы m и радиуса R равномерно распределен небольшой заряд q. Кольцо может свободно вращаться вокруг своей оси. В начальный момент кольцо покоится. Имеется перпендикулярное к плоскости кольца магнитное поле, индукция которого в центральной области кольца радиуса $a \leqslant R$ равна $2B$, а в остальной области равна B. Затем всюду магнитное поле равномерно уменьшается до нуля. Какую скорость приобретает кольцо после исчезновения магнитного поля?

А. А. Атавин,
С. Т. Беляев,
В. А. Цецохо

kvant.mccme.ru

Новые книги

*В этом номере мы продолжаем *) публиковать аннотации на книги, выходящие в 1973 году, представляющие интерес для наших читателей.*

Во II квартале 1973 года выйдут в свет следующие книги (заказы можно направлять через магазины «Книга — почтой»).

Математика

Издательство «Наука»

1. Лидский В. Б., Овсянников Л. В., Тулайков А. Н. и другие. *Задачи по элементарной математике* (объем 22 л., тираж 200 000 экз., цена 72 коп.).

Эта книга представляет собой сборник задач повышенной трудности по элементарной математике. Все задачи снабжены решениями или обстоятельными указаниями. При составлении данного издания учтен опыт вступительных экзаменов за последние годы.

Книга рассчитана на учащихся 10-х классов и может быть использована при самостоятельной подготовке к вступительным экзаменам в вузы.

2. Калнин Р. А., *Алгебра и элементарные функции* (объем 5 л., тираж 200 000 экз., цена 13 коп.).

Книга содержит материал по алгебре и элементарным функциям в объеме курса техникумов. Она может быть также использована при самостоятельной подготовке к вступительным экзаменам в вузы.

3. Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Шноль Э. Э., *Функции и графики* (объем 5 л., тираж 200 000 экз., цена 13 коп.).

Данная книга входит в «библиотеку физико-математической школы». В ней изложены важнейшие математические понятия — понятия функции, графиков функции и так далее. Приведены простейшие примеры построения графиков функции.

Книга рассчитана на школьников 8—10 классов, интересующихся математикой. Она также может быть использована в работе математических кружков.

4. Литлвуд Дж., *Математическая смесь* (объем 8 л., тираж 40 000 экз., цена 45 коп.).

Книга состоит из ряда очерков, хотя и весьма различных по сюжету, но объединенных математической тематикой. В них и небольшие исследования по теории математики, и популярное изложение ряда математических вопросов, и интересные задачи, и, наконец, просто математические шутки.

Живой и увлекательный язык делает эту книгу интересной для самого широкого круга читателей.

Издательство «Мир»

5. Кэррол Л., *История с узелками* (объем 23 л., тираж 200 000 экз., цена 1 руб. 36 коп.).

Имя Льюиса Кэррола — автора знаменитых сказок «Алиса в Стране Чудес» и «Алиса в Зазеркалье» — хорошо известно советскому читателю. Однако Л. Кэррол, математик по образованию, был также автором занимательных математических головоломок и задач, изящных логических парадоксов.

В этой книге собраны наиболее интересное из того, что было опубликовано из этого жанра Л. Кэрролом. Книга доставит огромное удовольствие самому широкому кругу читателей.

Физика

Издательство «Наука»

6. Гурский И. П., *Элементарная физика* (объем 25 л., тираж 200 000 экз., цена 80 коп.).

Книга представляет собой пособие по физике для поступающих в вузы. В ней сжато и последовательно рассматриваются все вопросы, вошедшие в программу вступительных экзаменов. Изложение материала сопровождается решением типовых задач.

Книга рассчитана на учащихся старших классов средней школы, слушателей подготовительных отделений и лиц, занимающихся самообразованием.

7. Григорьев В. И., Мякишев Г. Я., *Силы в природе* (объем 20 л., тираж 50 000 экз., цена 73 коп.).

Книга вводит читателя в мир физических представлений на примерах основных типов взаимодействия сил в природе.

Написанная хорошим языком, с большим числом иллюстраций, эта книга будет полезна школьникам старших классов, учителям, ведущим факультативные занятия.

8. Иванов Б. Н., *Принципы современной физики* (объем 8 л., тираж 30 000 экз., цена 50 коп.).

В книге в относительно простой и доступной форме излагаются основные понятия и принципы современной физики и дается представление о современном состоянии физики в целом.

Книга представляет интерес для учителей средней школы, а также будет доступна подготовленным школьникам старших классов.

---

*) См. «Квант» № 2, стр. 74, 1973.

kvant.mccme.ru

9. *Астрономичкесий календарь. Постоянная часть*, под редакцией П. И. Бакулина (объем 55 л., тираж 20 000 экз., цена 3 р. 16 коп.).

Книга содержит сведения из сферической и теоретической астрономии, некоторые задачи практической астрономии, основные понятия астрономии.

В ней также приведены описания некоторых астрономических инструментов и методика работы с ними.

Книга рассчитана на участников астрономических кружков, любителей астрономии и т. д.

10. Ефремов Ю. Н., *Глубины Вселенной* (объем 9 л., тираж 25 000 экз., цена 32 коп.).

Книга посвящена строению окружающего нас мира звезд и галактик, истории его изучения и методам определения расстояний во Вселенной.

Книга написана живо и увлекательно. Ее с интересом прочтут школьники старших классов, интересующиеся проблемами астрономии.

Издательство «Просвещение»

11. Мякишев Г. Я., *Элементарные частицы*. (Объем 8 л., тираж 100 000 экз., цена 30 коп.).

В книге рассказывается о тех трудностях, с которыми встретились ученые при попытке построения теории элементарных частиц, о задачах, вставших перед ними.

Книга написана доходчивым языком и доступна школьникам старших классов.

М. Л. Смолянский

Специальность — прикладная математика

Из Бугурусланского района Оренбургской области в редакцию «Кванта» пришло письмо. Его автор — выпускник Верхнепавлушкинской восьмилетней школы — Василий Кудеров пишет:

«Я бы очень хотел специализироваться по профессии прикладная математика. Математику я люблю. Знания по математике у меня есть. Читаю дополнительную литературу по математике. Математика притягивает меня».

Таких писем много. Они приходят от школьников, мечтающих стать специалистами по прикладной математике.

В беседе с нами директор методического кабинета Министерства приборостроения, средств автоматизации и систем управления СССР Е. Л. Некрасов сообщил, что по этой специальности готовятся математики-прикладники. Наряду со всесторонним средним образованием, с высоким общематематическим образованием, они получают знания и навыки применения математики в решении задач экономики, управления и научных исследованиях. При этом в решении задач используется умение учащихся составлять алгоритмы и программы для электронно-вычислительных машин.

Правила приема в техникумы по этой специальности обычные: устный экзамен по математике и письменный экзамен по русскому языку и литературе.

Е. Л. Некрасов сообщил также, что в Министерстве приборостроения, средств автоматизации и систем управления СССР специальность «прикладная математика» открыта в следующих техникумах:

МОСКОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТЕХНИКУМ

Москва, 105264, Измайловский б-р, 19, телефон 163-00-70. Принимаются только жители г. Москвы и Московской области.

ЛЕНИНГРАДСКИЙ МЕХАНИЧЕСКИЙ ТЕХНИКУМ № 1

Ленинград, 197137, Песочная наб., 14, телефон 33-55-60. Принимаются только жители Ленинграда и Ленинградской области.

ДНЕПРОПЕТРОВСКИЙ ТЕХНИКУМ АВТОМАТИКИ И ТЕЛЕМЕХАНИКИ

Днепропетровск, 320600, ул. Дзержинского, 2/4, телефон 44-05-55. Для иногородних есть общежитие.

РОСТОВСКИЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ ТЕХНИКУМ

Ростов-на-Дону, 344037, 24-я линия, 2/15, телефон 5-04-33. Для иногородних есть общежитие.

В. Н. Березин

kvant.mccme.ru

Экзамены по математике в школах ГДР

В различных странах учебные планы и программы различны. В этой статье мы расскажем об особенностях обучения в 10-летних и 12-летних школах ГДР, о курсе математики в этих школах, об уровне экзаменационных требований.

В Германской Демократической Республике успешно осуществляется Единая социалистическая система образования, закон о которой был принят Народной Палатой Республики в 1965 году. Наряду со всеобщим обязательным десятилетним образованием, обучением в расширенных (12-летних) средних школах, а также средних специальных и высших учебных заведениях, система предусматривает и весьма широкое профессионально-техническое образование.

В этой системе нет «тупиковых» школ. В Конституции ГДР (статья 26) записано, что «государство обеспечивает возможность перехода на последующую более высокую ступень образования . . . в соответствии с с принципом успеваемости и общественными потребностями».

В первый класс принимаются дети, которым к 30 мая текущего года исполнилось 6 лет, то есть почти на год раньше, чем в наши школы. Но курс математики в школах ГДР значительно отстает от курса соответствующих классов советской школы. Например, программа по математике пятого класса школы ГДР почти полностью совпадает с программой наших четвертых классов.

В седьмом классе много времени уделяется вычислениям с процентами и составлению отношений, применению логарифмической линейки; в этом же классе изучается извлечение квадратного корня и элементы начертательной геометрии. Решение квадратных уравнений впервые рассматривается в девятом классе, а понятие о тригонометрических функциях — в десятом. В целом десятилетняя школа ГДР дает математическую подготовку лишь немногим бо́льшую, чем наша восьмилетка. Большинство выпускников десятилетки умеют применять полученные знания: быстро и безошибочно считают на логарифмической линейке, уверенно пользуются таблицами, справочниками. Но решение простейшей текстовой задачи вызывает у них подчас непреодолимые затруднения. А некоторых знакомых нам разделов в десятилетней школе вообще не изучают: нет пределов, не рассматривают прогрессий, почти не решают тригонометрических уравнений — это признано необязательным для всеобщего десятилетнего образования и перенесено в двенадцатилетнюю, расширенную школу.

В расширенной школе на изучение математики отводится 300 уроков (по 5 уроков в неделю в XI и XII классах). Помимо традиционных разделов изучаются математическая индукция, теория пределов, векторная алгебра и аналитическая геометрия, а также основы дифференциального и интегрального исчисления — примерно в объеме первого курса некоторых наших втузов.

Весьма интересна система оценок, принятая в школах ГДР. За решение каждой задачи начисляется несколько баллов; если задача решена не полностью или с ошибкой, то число баллов уменьшается или вовсе не присуждается. К тексту письменной работы по математике за 10 классов (см. ниже) приложена (только для учителя!) инструкция по оценке. В ней указано, что задача № 1 оценивается в 6 баллов, по одному баллу за составление первого уравнения, составление второго уравнения, исключение одного неизвестного, нахождение первого числа, нахождение второго числа и за проверку.

Точно так же «расценены» остальные задачи; вся работа может быть оценена 40 баллами. Далее в инструкции приведена шкала:

39 и 40 баллов — отметка «1» — «очень хорошо»;

от 32 до 38 баллов — отметка «2» — хорошо»;

от 24 до 31 балла — отметка «3» — «удовлетворительно»;

от 14 до 23 баллов — отметка «4» — «достаточно»;

от 0 до 13 баллов — отметка «5» — «недостаточно».

Аналогично оцениваются и письменные работы в году; за устные ответы оценки ставятся редко (даже и по физике, химии, биологии, истории). Как правило, отметка «3» ставится за 60%, а отметка «4» — за 33% выполнения задания. Эта отметка позволяет переходить из класса в класс, но абсолютно исключает возможность попасть в 12-летнюю школу, и тем более в вуз.

После окончания 8-го класса каждый ученик получает рекомендацию на предмет продолжения образования.

При этом 15—20% лучших учеников рекомендуются в 12-летнюю школу, окончание которой дает право поступления в вуз (без экзаменов, но по рекомендации школы), 10—15% наиболее слабых учеников рекомендуются в трехлетние профессиональные школы, дающие специальность и общее десятилетнее образование. Остальные продолжают обучение в IX и X классах.

Большинство окончивших 10-летнюю школу попадает в двухлетние производствен-

kvant.mccme.ru

ные школы, готовящие квалифицированных рабочих; во многих из этих школ есть и трехлетние отделения, дающие не только рабочую квалификацию, но и полное среднее образование, эквивалентное 12-летней школе.

Лучшие выпускники профессиональных или производственных школ могут быть приняты в трехлетние «инженерные школы» — типа наших техникумов. Они готовят специалистов средней квалификации — технологов, экономистов, механиков, строителей (в отличие от «диплом-инженеров» — выпускников вузов).

Ниже приводятся задачи, предлагавшиеся в 1972 году на письменных экзаменах по математике за курс десятилетней школы (в массовой, вечерней и профессиональной школах — один и тот же вариант). Мы рекомендуем девятиклассникам выполнить эту работу *).

Далее приводится один из вариантов экзаменационной работы за курс двенадцатилетней школы. Ее могут выполнить десятиклассники, знакомые с элементами дифференциального и интегрального исчисления и, разумеется, ученики физико-математических школ.

Для выполнения каждой из этих работ на экзамене отводится по 4 урока (180 минут).

Письменный выпускной экзамен по математике (10 класс)

Задачи для обязательного решения

1. Сумма двух чисел равна 4. Если утроенное первое число уменьшить на удвоенное второе, получится 52. Вычислите эти числа. Сделайте проверку.

2. Фабрика-кухня электростанции готовит ежедневно 600 порций с картофельным гарниром. На каждую порцию требуется 250 *г* картофеля.

а) Сколько тонн картофеля нужно запасти на 30 дней?

б) В соответствии с решениями VIII съезда СЕПГ для лучшего обслуживания трудящихся ночной смены нужно готовить дополнительно по 150 порций в день. На сколько дней хватит теперь запасенного картофеля?

3. 17 ноября 1970 г. советская межпланетная станция «Луна-17» доставила на Луну первый самодвижущийся аппарат «Луноход-1». Из первоначального пункта высадки A Луноход прошел отрезок длиной 82 *м* до пункта B, затем повернул на угол 91,2° против часовой стрелки и прошел новый отрезок длиной 96 *м* до пункта C. Вычислите (с помощью логарифмической линейки) расстояние от пункта высадки A до конечного пункта C.

*) Задачу № 5 из этой работы мы не публикуем. Для ее решения необходимы сведения из курса начертательной геометрии, которого в наших школах нет.

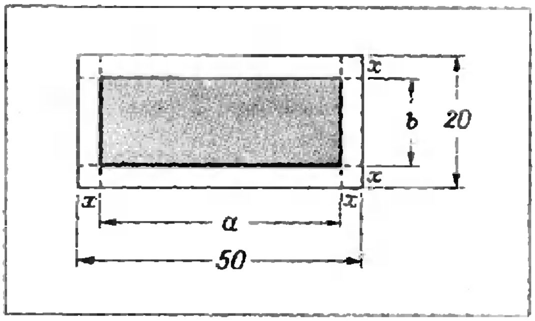


Рис. 1.

4. Две функции заданы своими уравнениями:

$$y_1 = f_1(x) = 2x + 1;$$
$$y_2 = f_2(x) = x^2 + 2x - 3.$$

а) Постройте график первой функции в прямоугольной системе координат.

б) Вычислите корень этой функции *).

в) График второй функции есть парабола. Вычислите координаты ее вершины и постройте график этой функции на том же чертеже.

г) Вычислите корни второй функции.

д) Графики данных функций пересекаются в точках P_1 и P_2. Найдите координаты точек пересечения.

6. а) Вычислите 12,5% от 528 *га*.

б) Найдите все углы x в интервале $0° \leqslant x \leqslant 360°$, для которых $\sin x = 0{,}6600$.

в) Произведение разности двух различных чисел на третье число равно x. Представьте это соотношение в форме равенства с помощью буквенных обозначений.

г) Формулу объема конуса $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ преобразуйте, разрешив равенство относительно r.

Задачи по выбору

Решите одну из задач 7.1, 7.2, 7.3.

7.1. Докажите следующие утверждения:

а) Сумма пяти последовательных натуральных чисел делится на 5.

б) Если меньшее из этих чисел — четное, то та же сумма делится и на 2.

7.2. Из листа жести прямоугольной формы размером 50×20 *см* нужно сделать открытый ящик в форме прямоугольного параллелепипеда. Для этого в четырех углах листа вырезают квадратики со стороной x (рис. 1). Закрашенный прямоугольник со сторонами a и b является основанием (дном) ящика.

а) Вычислите площадь дна при $x = 1{,}5$.

б) Найдите x, при котором площадь дна составляет 400 *см*². Вычислите для этого случая a и b.

*) То есть значение x, при котором функция обращается в нуль.

kvant.mccme.ru

7.3. Дано линейное неравенство

$$\frac{8\,(2x+1)}{5} < 3x + 2.$$

а) Решите неравенство в области действительных чисел.

б) Укажите множества (перечислите элементы множеств):

1) множество M_1 решений неравенства в области натуральных чисел;

2) множество M_2 решений неравенства в области целых чисел при условии $-4 < x < 1$;

3) множество M всех элементов, входящих и в множество M_1, и в множество M_2.

Письменный экзамен по математике на аттестат зрелости

Задачи для обязательного решения

1. Дан четырехугольник с вершинами A (1; 2), B (9; 8), C (6; 12), K (2; 9).

а) Изобразите этот четырехугольник в прямоугольной системе координат.

б) Составьте уравнения прямых AB и KC и докажите, что AB параллельно KC.

в) Вычислите угол BAK.

г) Найдите абсциссу точки P на оси Ox, для которой $\measuredangle BPA = 90^\circ$.

2. Дано уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

а) Постройте эллипс по точкам при $a = 5$ и $b = 4$ (в каждом квадранте найдите не менее трех точек).

б) Найдите объемы V_x и V_y эллипсоидов, полученных вращением данного эллипса вокруг осей Ox и Oy; примените интегральное исчисление.

в) Докажите, что отношение этих объемов $V_x : V_y = b : a$.

3. В теории автоматического регулирования встречается функция $y = f(t) = -t^3 + 9t^2$. Исследуйте эту функцию на промежутке $0 \leqslant t \leqslant 6$.

а) Найдите в этом промежутке абсциссу t_0 точки перегиба графика функции; вычислите также ординату y_0 точки перегиба.

б) Составьте уравнение касательной к кривой в точке перегиба.

в) Вычислите координаты точки пересечения этой касательной с осью t.

г) Докажите, что все функции, задаваемые уравнениями вида $y = f(x) = Ax^3 + Bx^2$ $(A \neq 0,\ B \neq 0)$ имеют экстремальное значение при $x = 0$.

4. Из полукруглого листа железа, радиус которого 4 *дм*, требуется вырезать равнобедренную трапецию максимальной площади (рис. 2).

а) Выразите площадь трапеции как функцию переменной x.

б) Определите значение x в случае, когда площадь принимает максимальное значение (не применяя вторую производную для нахождения экстремума).

Задачи по выбору

Решите одну из задач 5.1, 5.2, 5.3.

5.1. Дано уравнение гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

а) Найдите координаты фокусов F_1 и F_2 и вершин A_1 и A_2.

б) Проверьте, что точки P_1 (5; 9/4) и P_2 (5; −9/4) лежат на гиперболе.

в) Постройте гиперболу (схематически).

г) Через точки A_1 и P_1 проходит прямая m, через A_2 и P_2 — прямая n. Найдите уравнения этих прямых и вычислите координаты их точки пересечения K.

д) Проверьте, что точка K лежит на эллипсе, центр которого и полуоси a и b такие же, как у данной гиперболы.

5.2. Основанием пирамиды $SABC$ служит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 4$ *см* и $BC = 6$ *см*; ребро SC перпендикулярно плоскости основания и равно 8 *см*.

а) Выберите систему координат и определите в ней координаты вершин пирамиды.

б) Вычислите координаты середин ребер AB, AC и SC — точек M_1, M_2 и M_3.

в) Составьте уравнение прямой M_1M_3 в выбранной системе координат; вычислите угол, который составляет эта прямая с ребром SC (с помощью логарифмической линейки).

г) Составьте уравнение плоскости, определяемой прямой M_1M_3 и точкой M_2.

5.3. Дана функция $y = e^{-0,5\,x}$ в промежутке $-4 \leqslant x \leqslant 4$.

а) Постройте график этой функции, определив координаты хотя бы трех точек.

б) В точке пересечения кривой с осью Oy постройте касательную и составьте ее уравнение.

в) Выберите на графике данной функции точку $P\,(x_1;\ y_1)$, абсцисса которой $x_1 > 0$, и через эту точку проведите вертикальную прямую. Построенная прямая, график данной функции и оси координат определят некоторую криволинейную трапецию; обозначим ее площадь через S. Докажите, что $S = 2\,(1 - y_1)$.

А. Я. Халамайзер

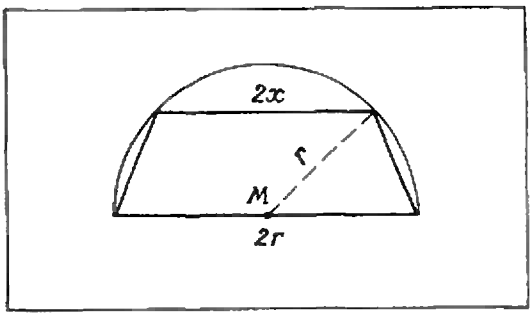


Рис. 2.

kvant.mccme.ru

«Квант» для младших школьников

1. Доказать, что при любом натуральном n число

$$6^{2(n+1)}-2^{n+3}\cdot 3^{n+3}+36$$

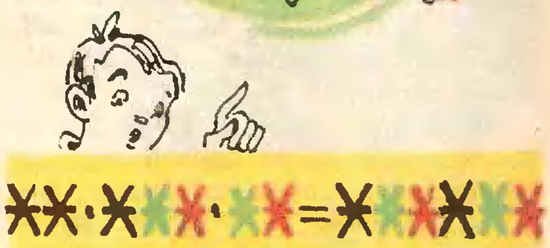
делится на 900.

2. Имеются два больших непрозрачных сосуда. В одном из них — керосин, в другом — керосин с водой. Как можно различить эти сосуды, имея в своем распоряжении динамометр и гирьку на веревочке?

3. Все натуральные числа от 1 до 100 разбиты на две группы: четные и нечетные числа. Определить, в какой из групп сумма всех цифр, использованных для записи чисел, больше и на сколько.

4. Первый автомобиль едет со скоростью 60 *км/ч*. С какой скоростью должен ехать второй автомобиль, чтобы проходить каждый километр на 2 минуты быстрее? На 1 минуту быстрее? Вообще, на сколько быстрее может проходить второй автомобиль 1 *км*?

5. На рисунке в формуле цифры заменены цветными звездочками (для каждой цифры — своя звездочка). Восстановите формулу.



6. Почему ручки к дверям привинчивают у «свободного» края?

kvant.mccme.ru

А. Д. Бендукидзе

О распределении простых чисел

Если вы прочли статью «О простых числах», напечатанную в «Кванте» № 4, то у вас, наверное, возник вопрос: как эти числа распределены? Как часто встречаются они в ряду натуральных чисел? Чему равно число простых чисел, не превосходящих данного n? Об этом и пойдет сейчас речь.

1. Как мы уже знаем, множество простых чисел, являющееся частью бесконечного множества натуральных чисел, само является бесконечным. Естественно возникает вопрос: как эта часть расположена в целом? К сожалению, никакого простого закона в распределении простых чисел не обнаружено, хотя некоторые закономерности легко доказываются.

Возьмем, например, множество простых чисел, не превосходящих 100: **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97**.

В начале этого ряда стоят 2 и 3. Они и в ряду натуральных чисел стоят по соседству. Легко сообразить, что это единственный случай, когда из двух соседних натуральных чисел оба простые — ведь все простые числа, кроме числа 2, нечетны.

Идем дальше. После 3 стоит 5; «расстояние» между ними равно двум. Таково же «расстояние» между членами следующей пары — 5 и 7. А вот между 7 и 11 уже три составных числа. Далее опять пара соседних нечетных чисел: 11 и 13. Наиболее «удаленными» в нашем списке являются 89 и 97 — между ними семь составных чисел. Но продолжая этот ряд простых чисел, мы обнаружим и числа, «расстояние» между которыми больше восьми. Такими будут, например, 113 и 127, 139 и 149. При этом опять встретятся числа с наименьшим возможным «расстоянием», например, 149 и 151, 179 и 181, 191 и 193. Постараемся теперь выяснить, насколько большим может быть «расстояние» между двумя соседними простыми числами.

Возьмем, например, число 100 и докажем, что можно найти 100 последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одного простого. Для этого перемножим все натуральные числа от двух до 101 включительно. Полученное число обозначим через A:

$$A = 2\cdot3\cdot4\cdot5 \ldots 98\cdot99\cdot100\cdot101.$$

Ясно, что оно без остатка делится на 2, 3, 4, ..., 100, 101. Рассмотрим теперь следующие 100 последовательных натуральных чисел:

$$A+2,\ A+3,\ A+4,\ \ldots,\ A+99,\ A+100,\ A+101.$$

Все эти числа составные. В самом деле, первое из них делится на 2 (так как на 2 делятся оба слагаемых), второе — на 3 (оба слагаемых делятся на 3), третье — на 4 и так далее. Последнее $A+101$ делится на 101.

Итак, мы нашли 100 последовательных чисел и все они составные. Аналогично можно найти 1000, 10 000 и более следующих друг за другом составных чисел. Таким образом, «расстояние» между двумя соседними простыми числами может быть сколь угодно большим.

2. Если не принимать во внимание единственное исключение — числа 2 и 3, то наименьшее «расстояние» между соседними простыми числами равно двум. В первой сотне 8 таких пар:

(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73)

Такие пары простых чисел называются близнецами. Но неизвестно даже, конечно или бесконечно мно-

kvant.mccme.ru

жество близнецов. Наибольшей из известных пар-близнецов является пара (1000000009649, 1000000009651).

3. Коснемся еще одного вопроса, связанного с простыми числами. Возьмем отрезок ряда натуральных чисел от 1 до некоторого n включительно. На этом отрезке имеется определенное количество простых чисел. Число их принято обозначать через $\pi(n)$ *). Чему равно $\pi(n)$ для отдельных значений n?

Для малых n это легко подсчитать. Например, $\pi(1) = 0$, $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 2$, $\pi(4) = 2$, $\pi(5) = 3$, $\pi(6) = 3$, $\pi(7) = 4$, $\pi(8) = 4$, $\pi(9) = 4$, $\pi(10) = 4$.

Сразу замечается нерегулярное изменение $\pi(n)$. Вообще, никакой простой формулы для $\pi(n)$ написать нельзя.

Тем не менее, увеличивая n, можно заменить, что «средняя плотность» простых чисел, то есть отношение $\pi(n):n$ становится все меньше и меньше. Это хорошо видно из следующей таблицы:

n	$\pi(n)$	$\pi(n):n$
10	4	0,4
100	25	0,4
1 000	168	0,17
10 000	1 229	0,12
100 000	9 592	0,096
1 000 000	78 498	0,078
10 000 000	664 579	0,066
100 000 000	5 761 455	0,057
1 000 000 000	50 847 478	0,051

Доказано, что с возрастанием n отношение $\pi(n):n$ приближается к нулю. Впервые этот факт доказал Леонард Эйлер — величайший математик XVIII века. В дальнейшем великий русский математик Пафнутий Львович Чебышев уточнил результат Эйлера, доказав более общую теорему (см. «Квант» № 5 за 1971 год, стр. 1—3), но об этом мы уже рассказывать не будем.

*) π — греческая буква «пи», n — латинская буква «эн», $\pi(n)$ — читается так: «пи от эн».

Внимание — град!

9 июня 1926 года необычайно крупный град выпал в Одессе. Отдельные градины достигали 300 *г*, а ледяной покров, который образовался на земле, доходил до 30 *см*.

В июле 1928 года выпал град в городе Поттере (США); градины достигали 10 *см* в диаметре, а масса отдельных градин доходила до 600 *г*. Градины были ровные, шарообразные и состояли из концентрических слоев льда, намерзших на центральное ядро. Они падали довольно далеко одна от другой и целиком зарывались в землю.

Механизм образования града понять несложно.

Если учесть, что температура воздуха в тропосфере понижается в среднем на 5—6° С при подъеме на каждый километр, то легко подсчитать, что на высоте 6—8 *км* над Землей, то есть высоте, характерной для верхней границы грозового облака, температура существенно ниже нуля даже в июльский полдень. Капельки переохлажденной воды и отдельные кристаллики льда, сталкиваясь между собой, образуют ядра будущих градин. Проходя через многокилометровую толщу облака (6—7 *км*), ядра обрастают слоями прозрачного льда. Толщина нарастающей оболочки зависит от процесса возгонки водяного пара с поверхности градин и в еще большей степени от интенсивности восходящих потоков воздуха внутри облака. Эти потоки, во-первых, «подбрасывают» к летящей вниз градине новые переохлажденные капли воды, которые тут же намерзают на градину. Во-вторых, если потоки достаточно мощные, они могут на время увлечь градину вверх, тем самым существенно удлиняя путь ледяного шара в переохлажденной жидкости. В этих случаях размеры градин, падающих на землю, могут стать катастрофически большими.

Л. В.

kvant.mccme.ru

К статье «Баллистическая задача в космосе»

1. Пусть O — фокус параболы, A — вершина ($OA = h$), а $OB = 2\,OA$ — перпендикуляр, опущенный на директрису. Для начальной точки M_0 имеем $r_0 = OM_0 = M_0N$, где M_0N — расстояние от точки M_0 до директрисы (рис. 1). Из оптического свойства параболы следует, что касательная к параболе в точке M_0 является биссектрисой угла $\angle OM_0M$. Из рисунка видно, что

$$r_0 = M_0N = OB + OM_0 \cos 2\alpha_0 = 2h + r_0 \cos 2\alpha_0.$$

Отсюда

$$h = \frac{r_0}{2}(1 - \cos 2\alpha_0).$$

2. Материальная точка уходит по гиперболе на бесконечность. При этом ее предельная скорость имеет (согласно формуле (1)) величину

$$v_\infty = \lim_{r\to\infty} v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

и направлена по асимптоте.

Так как тангенс угла наклона асимптоты к оси гиперболы равен $\frac{b}{a}$ (рис. 2), то, как легко показать, расстояние от фокуса до асимптоты равно b. Поэтому закон сохранения момента импульса дает

$$mv_\infty b = mv_0 r_0 \sin\alpha_0.$$

Отсюда, подставляя значение v_∞, получаем

$$b = \frac{v_0 r_0 \sin\alpha_0}{\sqrt{\frac{2E}{m}}}.$$

С другой стороны, расстояние h от фокуса до вершины гиперболы будет положительным корнем уравнения (6), которое можно будет теперь переписать в виде

$$h^2 + \frac{\gamma m_0}{\frac{v_0^2}{2} - \frac{\gamma M}{r_0}}h - b^2 = 0. \qquad (*)$$

Так как $(h + a)^2 = a^2 + b^2$, то

$$h^2 + 2ah - b^2 = 0.$$

Сопоставляя это уравнение с (*), получаем

$$a = \frac{\gamma m_0 r_0}{r_0 v_0^2 - 2\gamma m_0}.$$

Заметим, что отрицательный корень уравнения (*) дает взятое со знаком минус расстояние от фокуса F до вершины второй ветви гиперболы (по которой движение не происходит).

3. Решение этой задачи аналогично решению задачи 2.

Указания.

1. Величина потенциальной энергии в кулоновском поле отталкивания равна

$$W_п = \frac{Qq}{r}.$$

2. Движение точки в этом случае происходит по второй, так называемой «мнимой» ветви соответствующей гиперболы.

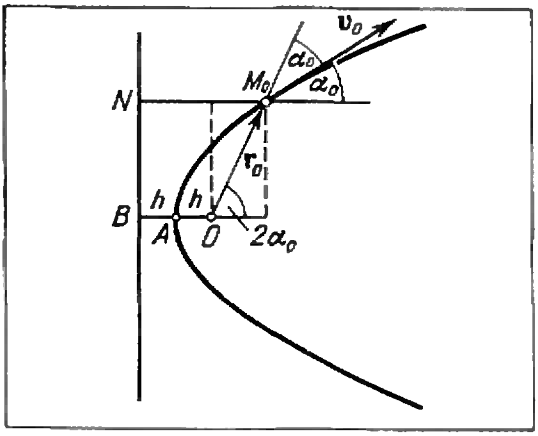


Рис. 1.

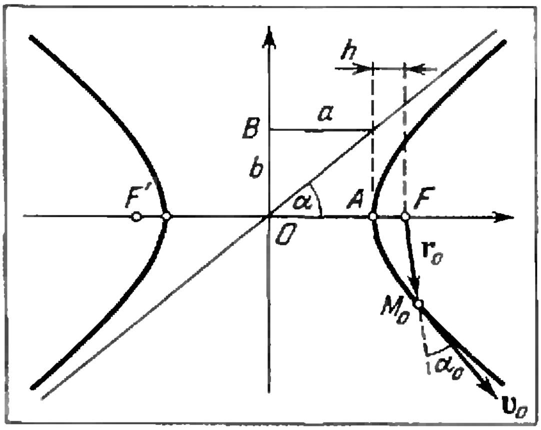


Рис. 2.

kvant.mccme.ru

К статье «Опыты с инфракрасным излучением»

1. Нить лампы накаливания, включенной в сеть переменного тока частотой 50 *гц*, раскаляется всякий раз, когда идущий через нее ток достигает максимального (по абсолютной величине) значения, то есть 100 раз в секунду.

2. Приемник реагирует на поток инфракрасного излучения, но сила звука в громкоговорителе пропорциональна изменению этого потока. За 0,005 *с* нить лампы не успевает сильно охладиться, поэтому изменение потока составляет лишь малую его часть. Чтобы увеличить изменение потока, достаточно прерывать падающий на фототранзистор световой пучок вращающимся вентилятором. В этом нетрудно убедиться, проведя перед фототранзистором ладонью с «растопыренными» пальцами: из динамика будет слышен звук значительно более сильный, чем при простом освещении фототранзистора лампой накаливания.

5. При вращении одного из поляроидов освещенность фототранзистора падает до нуля, в то время как громкость звука, идущего из динамика, остается неизменной. Отсюда следует, что поляроиды поляризуют только видимую область спектра, оставляя инфракрасные лучи неполяризованными. (Это свойство поляроидов; вообще инфракрасные лучи тоже поляризуются.) Фототранзистор реагирует только на инфракрасные лучи, так как в противном случае при изменении освещенности фототранзистора громкость звука также изменялась бы.

6. Так как фототранзистор реагирует только на инфракрасные лучи, а для видимого света закон отражения доказан, то для проверки этого закона в инфракрасной области достаточно внести датчик в пучок света, отраженный зеркалом.

К статье «Периодические функции»

1. π.

2. Основной период функции $\cos 3\pi x$ равен $\frac{2\pi}{3\pi}=\frac{2}{3}$. Основной период функции $\sin 2\pi x$ равен $\frac{2\pi}{2\pi}=1$.

Для отрезков длины $^2/_3$ и 1 наименьшим общим кратным будет отрезок длины 2.

Докажем, что 2 — основной период. Рассмотрим с этой целью корни уравнения $\cos 3\pi x=\sin 2\pi x$ на отрезке $[0,2]$. Этих корней будет шесть: 0,1; 0,5; 0,9; 1,3; 1,5; 1,7. Функция $\cos 3\pi x-\sin 2\pi x$ при $x=0$ равна 1 и монотонно убывает, по крайней мере на отрезке $[0,\ 0,1]$. Следовательно, у нее не может быть периодов меньших, чем 0,1, то есть по теореме 3 у нее существует основной период.

Предположим, что 2 не является основным периодом. В таком случае им будет некоторое число большее 0,1, которому соответствует отрезок, укладывающийся в 2 целое число раз (теорема 2). Найденные значения корней подсказывают лишь одно такое число — 0,4. Однако оно не является периодом, так как, например, при $x=1,5+0,4=1,9$ данная функция не обращается в нуль. Следовательно, 2 — основной период.

3. Функцию можно записать в виде $\frac{1}{4}(\cos 6x-\cos 10x-1+\cos 4x)$. Периоды стоящих в скобках тригонометрических функций равны соответственно $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{5}$ и $\frac{\pi}{2}$. Наименьшее общее кратное соответствующих отрезков равно π. Непосредственной проверкой убеждаемся, что π — период данной функции. Остается доказать, что это основной период. Для доказательства достаточно изучить корни функции на отрезке $[0,\ \pi]$:

$$0,\ \frac{\pi}{10},\ \frac{3\pi}{10},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{7\pi}{10},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{9\pi}{10},\ \pi.$$

Если π не является основным периодом, то основной период должен укладываться в π обязательно целое число раз. Поэтому можно рассматривать в качестве возможных основных периодов лишь числа $\frac{\pi}{10}$, $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{2}$. Так как ни одно из чисел $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{10}$, $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{2}$ не является корнем, то основным периодом будет число π.

4. 2π.

5. Функция не является периодической, так как ее область определения не содержит ни одной точки.

6. Функция не является периодической, так как она не определена при $|x|>1$.

7. 2π.

8. Функция не является периодической. Если $T>0$ — ее период, то $f(T)=f(T-T)=f(0)$. Левая часть равенства существует при всех $T>0$, в то время как правая не существует.

9. Функция не является периодической, так как из условия $(x+T)^2\equiv x^2$ при $x=0$ следует $T=0$.

10. Пусть a — период функции. Тогда $\cos(x+a)^2=\cos x^2$ при всех x, в том числе при $x=0$, откуда

$$\cos a^2=1,\quad a^2=2\pi n.$$

kvant.mccme.ru

Выберем теперь такое значение для x, чтобы обеспечить несоизмеримость x с a. Например, $x = a\sqrt{2}$. Тогда

$$\cos[a^2(1+\sqrt{2})^2] = \cos 2a^2,$$

откуда либо

$$a^2(1+\sqrt{2})^2 + 2a^2 = 2\pi k,$$

либо

$$a^2(1+\sqrt{2})^2 - 2a^2 = 2\pi k.$$

Воспользовавшись тем, что $a^2 = 2\pi n$ и подставив его в эти два равенства, мы получим либо $5+2\sqrt{2} = \frac{k}{n}$, либо $1+2\sqrt{2} = \frac{k}{n}$ ($n \neq 0$, так как a, по предположению, период). И в том и в другом случае мы приходим к выводу, что $\sqrt{2}$ — число рациональное. Полученное противоречие доказывает непериодичность функции $\cos x^2$.

11. Указание. Предположите, что данная функция является периодической с периодом T и запишите условие периодичности при $x=0$, $x=-T$. Исследуйте полученную систему уравнений.

К статье «Задачи на максимум и минимум»

1. $h = b$.

Указание. Воспользоваться ограниченностью тригонометрической функции $y = \sin x$.

2. $h_{\text{опт}} = \frac{H}{2}$, $S_{\max} = H$.

Указание. При исследовании воспользоваться теоремой о среднем.

Замечание. Мы получили, что дальность полета определяется величинами h и H, то есть зависит только от конструкции трамплина. Если бы это было так на самом деле, то не было бы смысла проводить соревнования по прыжкам с трамплина, так как дальность полета всех лыжников была бы одинаковой. В действительности, чем выше мастерство лыжника, тем меньшую долю энергии он потеряет из-за трения и сопротивления воздуха. Поэтому мастерство лыжника сильно влияет на дальность полета.

К статье «Новосибирский государственный университет»

Математика

Вариант I

1. Ответ: при $a\cdot b\cdot c > 0$

$$x = \pm\frac{b+c}{2bc}\sqrt{abc}, \quad y = \pm\frac{a+c}{2ac}\sqrt{abc},$$

$$z = \pm\frac{a+b}{2ab}\sqrt{abc}.$$

Решение. Исходная система легко приводится к виду

$$\begin{cases} (x-y+z)\cdot(x+y-z) = a, \\ (y-z+x)\cdot(y+z-x) = b, \\ (z-x+y)\cdot(z+x-y) = c. \end{cases}$$

Полагая $x+y-z=u$, $x-y+z=v$, $-x+y+z=w$, получим для u, v, w систему

$$u\cdot v = a, \quad uw = b, \quad vw = c,$$

откуда $(u\cdot v\cdot w)^2 = a\cdot b\cdot c$, $u = \frac{u\cdot v\cdot w}{v\cdot w} = \pm\frac{\sqrt{abc}}{c}$; $v = \pm\frac{\sqrt{abc}}{b}$; $w = \pm\frac{\sqrt{abc}}{a}$ (лишь при $a\cdot b\cdot c > 0$). Здесь для u, v, w берутся выражения либо все со знаком «+», либо все со знаком «—». Возвращаясь к старым переменным

$$\left(x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u+w}{2}, \quad z = \frac{v+2w}{2}\right),$$

находим ответ.

2. Ответ:

$$\frac{2R\sin\alpha\sin\beta}{1+\cos(\alpha-\beta)}.$$

Решение. Для определенности будем считать, что $\alpha \geqslant \beta$. Пусть точки M, K, N — основания перпендикуляров, опущенных соответственно из точек C, O_1, O на сторону AB (рис. 1). Тогда CM — высота ΔABC, K — точка касания окружности искомого радиуса ($O_1K = O_1C = x$) со стороной AB; N — середина стороны AB. $\angle CON$ есть центральный угол описанной около ΔABC окружности, опирающийся на дугу, составленную из дуги, стягиваемой хордой AC, и половины дуги, стягиваемой хордой AB. Поэтому $\angle CON = 2\beta + (\pi - \alpha - \beta) = \pi - \alpha + \beta$. Тогда $\angle OCM = \pi - \angle CON = \alpha - \beta$. Проектируя ломаную CO_1K на

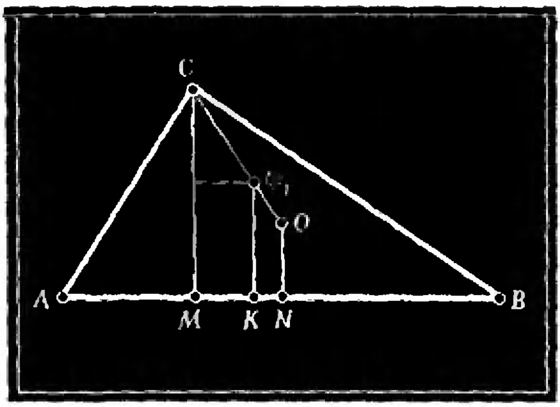


Рис. 1.

kvant.mccme.ru

CM, получим

$$CM = CO_1 \cdot \cos\angle OCM + O_1K = x[1+\cos(\alpha-\beta)].$$

Но $CM = AC\sin\alpha = 2R\cdot\sin\beta\cdot\sin\alpha$.
Отсюда

$$x = \frac{2R\sin\alpha\cdot\sin\beta}{1+\cos(\alpha-\beta)}.$$

3. Ответ: $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$, $x = 2k\pi + \arcsin\frac{\sqrt{17}-1}{4}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Решение. После возведения обеих частей уравнения в квадрат получим уравнение

$$4\cos^2 x = 2 + \sin 3x. \qquad (*)$$

При этом очевидно, что корнями исходного уравнения являются корни уравнения (*), удовлетворяющие условию $\cos x \geq 0$. Теперь проведем эквивалентные преобразования:

$$4\cos^2 x = 2 + 3\sin x - 4\sin^3 x,$$

$$\sin^3 x - \sin^2 x - \frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{2} = 0,$$

$$\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\left(\sin^2 x - \frac{1}{2}\sin x - 1\right) = 0.$$

Отсюда: а) $\sin x = \frac{1}{2}$; б) $\sin^2 x - \frac{1}{2}\times\sin x - 1 = 0$.

а) С учетом условия $\cos x \geq 0$ получаем $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

б) Имеем: $\sin x = \frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$. Но $\frac{1+\sqrt{17}}{4} > 1$, а $1 > \frac{\sqrt{17}-1}{4} > 0$, поэтому (с учетом условия $\cos x \geq 0$) получаем

$$x = \arcsin\frac{\sqrt{17}-1}{4} + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

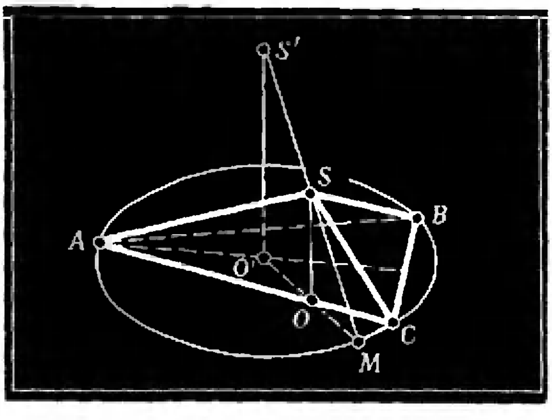


Рис. 2.

4. Ответ: $\frac{a}{\sqrt{3}}\left(2+\sqrt{4-\sqrt{3}}\right)$.

Решение. Так как пл. $SAC \perp$ пл. ABC, то высота SO пирамиды $SABC$ является высотой ΔSAC, опущенной на сторону AC (рис. 2). Тогда $SO = \frac{1}{2}AS = \frac{a}{2}$, $AO = AS\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = a\frac{\sqrt{3}}{2}$ (и $\angle SAC = 30°$!).

Пусть O' — центр окружности основания конуса, S' — его вершина, а $S'M$ — образующая конуса, проходящая через вершину S пирамиды. Тогда, очевидно, точка O лежит на радиусе $O'M$ основания конуса и $\Delta S'O'M \backsim \Delta SOM$. Из подобия этих треугольников находим, что $S'O' = SO\,\frac{O'M}{OM}$.

По теореме синусов для ΔABC имеем

$$O'A = O'M = \frac{AC}{2\sin\angle ABC} = \frac{a}{2\cdot\sin\frac{180°-30°}{2}} = \frac{a}{2\cos 15°}.$$

По теореме косинусов для $\Delta AO'O$ имеем

$$O'O = \sqrt{AO^2 + (AO')^2 - 2AO\cdot AO'\cos\angle OAO'} = \frac{a}{2\cos 15°}\times\sqrt{1+(3-2\sqrt{3})\frac{1+\cos 30°}{2}} = \frac{a\sqrt{4-\sqrt{3}}}{4\cos 15°}.$$

Тогда $OM = O'M - OO' = \frac{a}{4\cos 15°}\times\left(2-\sqrt{4-\sqrt{3}}\right)$.

Теперь остается только вычислить высоту $S'O'$. Имеем

$$S'O' = \frac{a}{2}\cdot\frac{\frac{a}{2\cos 15°}}{\frac{a}{4\cos 15°}\left(2-\sqrt{4-\sqrt{3}}\right)} = \frac{a}{2-\sqrt{4-\sqrt{3}}} = \frac{a}{\sqrt{3}}\left(2+\sqrt{4-\sqrt{3}}\right).$$

Вариант 2

1.

x	1	$2\sqrt[3]{2}$	0
y	0	$-\sqrt[3]{2}$	$-\sqrt[3]{2}$
z	1	0	$2\sqrt[3]{2}$

2. $2R^2(\pi - 2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma)$.

kvant.mccme.ru

3. $x = (2k+1)\pi \pm \arccos\frac{4}{5}$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

4. $\frac{113}{12} a^3$.

Вариант 3

1. $x = 7$, $y = 5$.

2. $PO = \frac{\sqrt{1 - 4l(1-l)\sin^2\alpha}}{2\cos\alpha}$.

3. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}$; k — целое; $k \neq 3l$; $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

4. $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Физика

1. В пространстве между катушками с переменным током возникает переменный магнитный поток. В металлическом листе наводятся вихревые токи так, чтобы создаваемое ими магнитное поле компенсировало изменение потока через металлический лист. Катушки отталкиваются от медного листа, а следовательно, и друг от друга.

Железный лист — ферромагнетик, при его намагничивании возникает притяжение между листом и катушками, которое оказывается сильнее отталкивания за счет вихревых токов.

2. Частоты колебаний ω_1 и ω_2 отличаются на небольшую величину. При сложении возникают биения; амплитуда биений периодически увеличивается и уменьшается. Это соответствует усилению и ослаблению звука.

3. Три белых сектора постоянно видны в том случае, если за время между двумя вспышками полоса, совершив любое число оборотов, сдвинется на угол $\frac{2\pi}{3}$ или $\frac{4\pi}{3}$. Полный угол поворота полосы:

$$\varphi_1 = 2\pi k + \frac{2\pi}{3} \quad \text{или} \quad \varphi_2 = 2\pi k + \frac{4\pi}{3}$$

(k — любое целое число). Заметим, что

$$\varphi_1 = 2\pi\frac{3k+1}{3}, \quad \varphi_2 = 2\pi\frac{3k+2}{3},$$

то есть $\varphi = \frac{2\pi}{3} n$, где n — любое целое число, не делящееся на 3.

Время между вспышками $t = \frac{2\pi}{\nu}$, следовательно, скорость вращения диска

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{\nu}{3} n.$$

4. $\omega^2 = \frac{g \operatorname{tg}\beta}{l|\sin\alpha + \sin\beta|}$.

Заданные углы α и β могут быть реализованы только при вполне определенном соотношении масс. Интересно исследовать, какие углы α и β могут быть реализованы. Например, может ли быть $\alpha = 10°$ и $\beta = 80°$?

5. $A = \pi r^2 \rho g l\left(h - r + \frac{lr^2}{2R^2}\right)$.

6. Маятник начинает колебаться относительно точки подвеса с периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ и начальной скоростью v. Начальная скорость относительно Земли равна нулю. Остановить подвес так, чтобы маятник мгновенно остановился, можно в тот момент, когда скорость маятника относительно Земли равна 0 (маятник при этом проходит положение равновесия). Такая ситуация будет иметь место через промежуток времени $nT = \frac{a}{v}$, где n — натуральное число. Отсюда

$$v = \frac{a}{nT} = \frac{a}{2\pi n}\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

7. В системе координат, движущейся вместе с пучком (со скоростью v), осколки равной массы разлетаются в произвольных направлениях с равными по величине и противоположно направленными скоростями v'. Максимальную относительно неподвижного наблюдателя скорость имеют осколки, отлетающие в направлении движения пучка. Эта скорость $u = v + v'$.

Скорость частиц, отлетающих в перпендикулярном направлении (рис. 3), находится из условия

$$u_1^2 + v^2 = v'^2.$$

Отсюда

$$u_1 = \sqrt{v'^2 - v^2} = \sqrt{u(u - 2v)}.$$

Если $u \leq 2v$, то таких осколков нет.

8. Рассмотрим изображение в фотоаппарате маленького участка жука; линейный

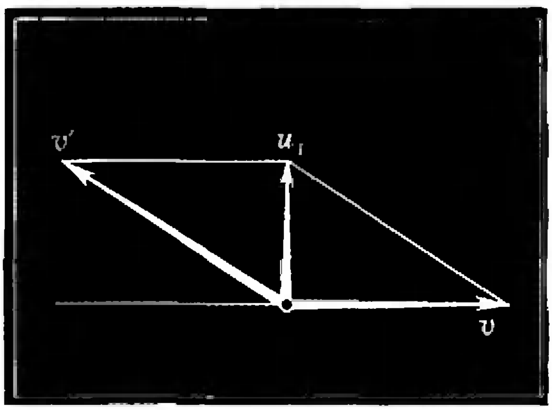


Рис. 3.

kvant.mccme.ru

размер этого участка L_0. Освещенность изображения зависит от потока, падающего на диафрагму, и от площади изображения:

$$E = \frac{\Phi}{S}.$$

Отношение потоков, падающих на объектив в первом и во втором случае, равно

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{d_1^2 l_2^2}{d_2^2 l_1^2} = \frac{25}{9}\frac{d_1^2}{d_2^2}.$$

Воспользовавшись формулой линзы $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ (a — расстояние от жука до объектива, b — расстояние от объектива до изображения), можно найти отношение площадей изображений

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{L_1^2}{L_2^2} = \frac{L_1^2/L_0^2}{L_2^2/L_0^2} = \frac{b_1^2/a_1^2}{b_2^2/a_2^2} =$$

$$= \frac{F^2 l_1^2 (l_2 - F)^2 l_2^2}{F^2 l_2^2 (l_1 - F)^2 l_1^2} = \frac{(l_2 - F)^2}{(l_1 - F)^2} = 4.$$

Поскольку освещенности в первом и во втором случае одинаковы,

$$\frac{\Phi_1}{S_1} = \frac{\Phi_2}{S_2}.$$

Отсюда $\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{S_1}{S_2}$, то есть $\frac{25}{9}\frac{d_1^2}{d_2^2} = 4$

и $\frac{d_1}{d_2} = \frac{6}{5}$.

9. После размыкания ключа по сопротивлению R течет ток $i = \frac{u}{R}$, где u — разность потенциалов на конденсаторе, которая равна $\frac{q}{C}$. Так как нас интересуют очень малые изменения заряда, мы не будем учитывать, что и ток, и разность потенциалов зависят от времени. За время Δt заряд конденсатора уменьшится на величину $i\Delta t$. Тогда

$$\Delta q = i\Delta t = \frac{u\Delta t}{R} = \frac{q\Delta t}{RC}.$$

Отсюда

$$\Delta t = \frac{\Delta q}{q} RC = 10^{-3} RC.$$

10. При ударе о брусок струя меняет направление движения, а следовательно, и импульс: $\Delta(mv) = F_1 \Delta t$.

Изменение количества движения жидкости $\Delta(mv)$ за время Δt связано с тем, что масса воды $\rho S v \Delta t$ на высоте h изменяет вертикальную скорость от v_1 до 0, то есть

$$\Delta(mv) = \rho S v v_1 \Delta t.$$

Из закона сохранения энергии

$\frac{\mu v_1^2}{2} + \mu g h = \frac{\mu v^2}{2}$ (μ — масса небольшой порции воды) найдем $v_1 = \sqrt{-2gh + v^2}$.

Тогда сила $F_1 = \rho S v v_1 = \rho S v \sqrt{v^2 - 2gh}$.

Такая же по величине сила действует со стороны каждой струи на брусок. Так как всего струй N, то общая сила

$$F = N\rho S v \sqrt{v^2 - 2gh}.$$

Из условия равновесия бруска $P = F$:

$$P = N\rho S v \sqrt{v^2 - 2gh}.$$

Окончательно получим

$$h = \frac{v^2}{2g}\left[1 - \left(\frac{P}{\rho S N v^2}\right)^2\right].$$

11. Пусть конденсатор уже зарядился, и разность потенциалов на нем равна U. Тогда при очередном замыкании ключа в положение 1 в начальный момент через сопротивление R_1 пойдет ток $I_1 = \frac{E_1 - U}{R_1}$. За время включения заряд конденсатора изменится на величину $I_1\tau$, где τ — время включения. Когда ключ замкнут в положение 2, пойдет ток $I_2 = \frac{E_2 - U}{R_2}$. Так как U — установившееся напряжение, должно выполняться соотношение $I_1\tau = -I_2\tau$, то есть после двух переключений заряд на конденсаторе остается неизменным:

$$\frac{E_1 - U}{R_1} = -\frac{E_2 - U}{R_2}.$$

Отсюда

$$U = \frac{E_2 R_1 + E_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Заряд на конденсаторе

$$q = CU = C\frac{E_2 R_1 + E_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

12. Из условия равновесия нижнего шарика следует, что

$$R_x = T\cos\alpha.$$

Верхний шарик движется по окружности радиуса l, где l — длина гантели (рис. 4), поэтому

$$P\sin\alpha - T = \frac{mv^2}{l}.$$

Отсюда

$$T = P\sin\alpha - \frac{mv^2}{l}.$$

По закону сохранения энергии

$$Pl = \frac{mv^2}{2} + Pl\sin\alpha,$$

kvant.mccme.ru

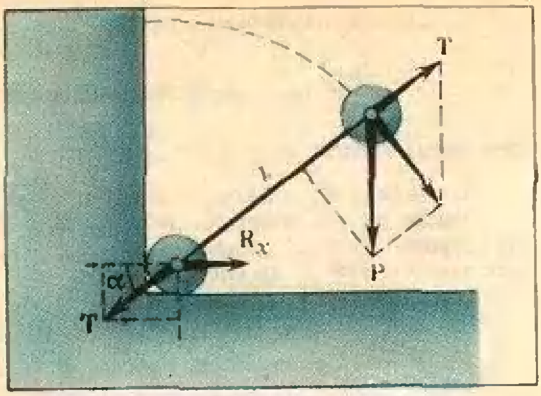


Рис. 4.

то есть

$$\frac{mv^2}{l} = 2P(1 - \sin\alpha).$$

Теперь можно записать

$$T = P\sin\alpha - 2P(1 - \sin\alpha) = P(3\sin\alpha - 2).$$

Сила, действующая на стенку,

$$R_x = P\cos\alpha\,(3\sin\alpha - 2).$$

13. При уменьшении магнитного поля изменяется магнитный поток через кольцо. Возникающее электрическое поле раскручивает кольцо.

Магнитный поток через кольцо равен

$$\Phi = \pi a^2 2B + \pi(R^2 - a^2)B = \pi B(a^2 + R^2).$$

По закону электромагнитной индукции

$$E_{\text{инд}} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \pi(a^2 + R^2)\frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Пусть магнитное поле равномерно уменьшается до 0 за время t; тогда

$$E_{\text{инд}} = \frac{\pi(a^2 + R^2)B}{t}.$$

Э. д. с. индукции равна работе по перемещению единичного заряда вдоль всего кольца в возникающем электрическом поле с напряженностью E,

$$E_{\text{инд}} = 2\pi RE.$$

Отсюда

$$E = \frac{(a^2 + R^2)B}{2Rt}.$$

На каждый элемент кольца длины $\Delta l \ll R$ $\left(\text{заряд такого элемента } \Delta q = \frac{\Delta l}{2\pi R}q, \text{ масса } \Delta m = \frac{\Delta l}{2\pi R}m\right)$ действует сила ΔqE, которая создает ускорение $a = \frac{\Delta qE}{\Delta m}$ и за время t увеличивает скорость от 0 до

$$v = at = \frac{\Delta qE}{\Delta m}t = \frac{q}{m}\,\frac{(a^2 + R^2)B}{2R}.$$

К задачам «Квант» для младших школьников.

(см. «Квант» № 4, 1973.)

1. $a = 5$, $d = 357$.

2. Если сделать в крышке банки только одно отверстие и опрокинуть банку, сок будет выливаться до тех пор, пока давление жидкости на уровне отверстия не станет равным атмосферному. Когда в крышке два отверстия, то воздух, попадающий в банку через «свободное» отверстие, оказывает дополнительное давление на жидкость и «выталкивает» ее.

3. 4, 36, 68.

4. Легче привести в движение стопку книг — при этом надо преодолеть силу трения, действующую на нижнюю обложку книги, соприкасающейся со столом. Во втором случае надо преодолеть еще и силу трения, действующую на верхнюю обложку книги.

5. $38{,}5 \times 16 = 616$.

6. При одинаковых сопротивлениях подводящих проводов и нити лампы величина поверхности у проводов больше, чем у нити, и провода быстрее отдают тепло.

К «Задаче» *(см. «Квант» № 4, 1973, стр. 45)*

Пусть в урнах лежат соответственно a, b, c и d шаров. Тогда проигрышными для начинающего являются те и только те положения, для которых суммы всех цифр, отвечающих одному разряду в записи чисел a, b, c и d в двоичной системе счисления, для всех разрядов кратны трем.

Рассмотренную игру можно обобщить на случай, когда урн n, а шары можно брать не более, чем из k урн ($k \leqslant n$). В этом случае проигрышными положениями будут те, в которых суммы всех цифр, отвечающих одному разряду в двоичной записи количеств шаров в данных урнах, делятся на $k+1$. При $k = 1$ получим игру «ним» (см. статью И. М. Яглома «Две игры со спичками», «Квант» № 2, 1971).

Корректор *Т. С. Вайсберг*

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 5/11 1973 г. Подписано в печать 19/III 1973 г. Зак. 149
Бумага 70×100 1/16 Физ. печ. л. 4 Усл. печ. л. 5,20
Уч.-изд. л. 6,29 Тираж 382 315 экз. Т-00798
Цена 30 коп.

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

kvant.mccme.ru

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ МЕТЕОСЛУЖБЕ

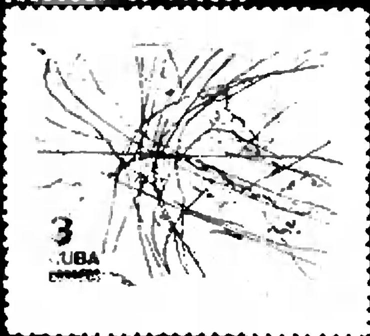
В январе 1972 года исполнилось 100 лет с того дня, когда Главная физическая обсерватория в Петербурге выпустила первый метеорологический бюллетень. В то время метеорологи располагали весьма примитивной техникой и очень малым количеством метеостанций (в России их было около 10).

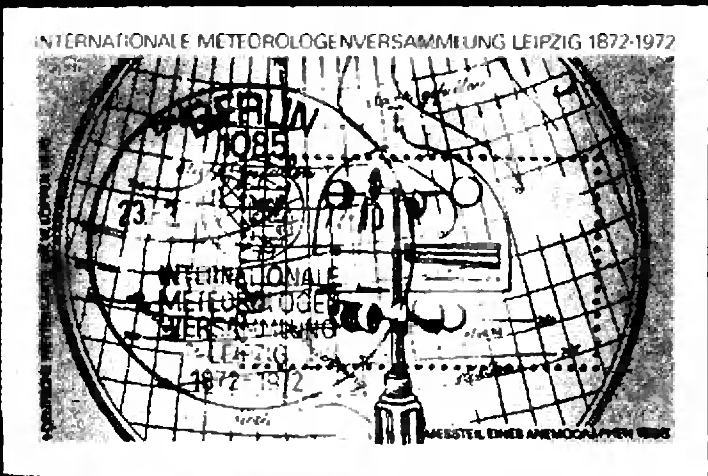
Сейчас изучение атмосферы производится разветвленной сетью метеостанций, построенных как в нашей стране, так и за границей. Работники службы погоды имеют в своем распоряжении самую совершенную технику. При этом используются шары-пилоты, радиозонды, самолеты, ракеты и даже искусственные спутники Земли.

Метеорологии посвящено много марок и блоков, выпущенных в различных странах мира. На фото приведены некоторые из них, связанные с юбилейными датами.

На марках, посвященных 40- и 50-летию гидрометеослужбы СССР, выпущенных в 1961 и 1971 гг. изображены современные средства метеорологических исследований и участки карты погоды.

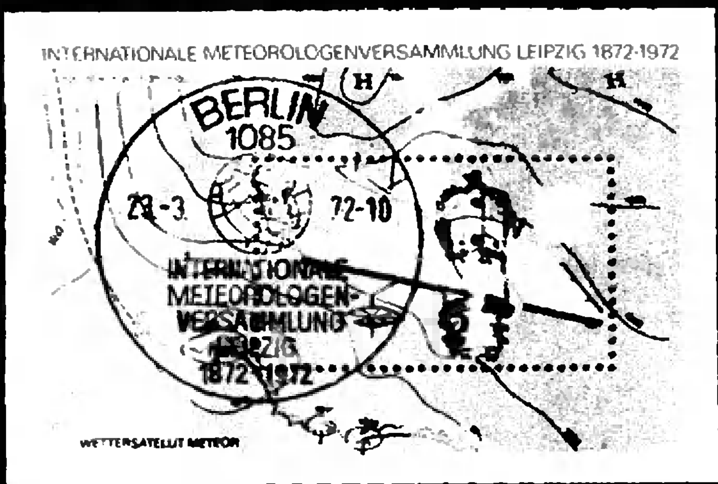
На фото приведена также кубинская марка из серии 1971 года, посвященная Всемирному дню метеорологии (карта Кубы со схемой движения сильнейших ураганов) и два красочных блока, выпущенных в Германской Демократической Республике 23 марта 1972 года в ознаменование 100-летия Лейпцигской встречи метеорологов. На





одном блоке показана первая немецкая метеорологическая карта и анемограф (прибор для определения направления и скорости ветра). На другом блоке изображена современная метеорологическая карта и советский метеорологический спутник «Метеор».

А. В. Лятыкис



kvant.mccme.ru

Цена 30 коп.
Индекс 70465

27/1-42

5