Квант

1973

6

Научно-популярный физико-математический журнал

На первой странице обложки — фотография кристалла кварца, выросшего в естественных условиях. О том, как получить кристаллы искусственным путем, вы можете прочитать в статье А. А. Варламова и Д. В. Казаковцева «Выращивание кристаллов».

Фото Э. Герчука

В городе Дзержинске при школе № 2 организован Клуб юных физиков — КЮФ. В нем занимаются ученики 9-х и 10-х классов.

На наших фотографиях вы видите ребят — членов клуба — за работой.

Фото Д. Воздвиженского

Основан в 1970 году

Квант

1973
6

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ

1 марта 1973 года скончался член редакционной коллегии журнала «Квант», выдающийся физик, крупный организатор науки и общественный деятель, член президиума Академии наук СССР, академик-секретарь Отделения общей физики и астрономии АН СССР, руководитель научного отдела Института атомной энергии им. И. В. Курчатова, председатель Национального комитета советских физиков, председатель научного совета по комплексной проблеме «Физика плазмы», профессор Московского университета, Герой Социалистического Труда, лауреат Ленинской и Государственных премий СССР академик Лев Андреевич Арцимович.

Лев Андреевич АРЦИМОВИЧ

Л. А. Арцимович родился 25 февраля 1909 года в Москве. В 1928 году он окончил физико-математический факультет Белорусского университета и в 1930 году поступил лаборантом в Ленинградский физико-технический институт. Вскоре он начал самостоятельные научные исследования.

Основной областью его научных интересов, в которую он внес наибольший вклад, была атомная физика. Он впервые количественно изучил явление полного внутреннего отражения рентгеновских лучей. Позже он, совместно с И. В. Курчатовым, исследовал реакцию «нейтрон+ +протон», в результате которой получается ядро тяжелого водорода. В 1936 году Л. А. Арцимович остроумными опытами опроверг предположение американского физика Шенкланда о том, что при взаимодействии электронов и позитронов в определенных условиях нарушается закон сохранения энергии. В 1936—1940 годах он исследовал различные явления, сопровождающие прохождение быстрых электронов через вещество. При этом он доказал, что все эти явления, вопреки мнению некоторых ученых, правильно описываются квантовой механикой.

В годы войны Л. А. Арцимович выполнил ряд важных работ в области электронной оптики. В послевоенные годы Л. А. Арцимович занялся решением важной научно-технической проблемы — электромагнитным методом разделения изотопов атомных ядер. Разработка этой проблемы потребовала создания большого научного коллектива, которому удалось создать надежные промышленные установки для разделения изотопов и обеспечить производство чистых изотопов различных элементов для нужд физики, техники, биологии и медицины.

С 1951 года и до последних дней своей жизни Л. А. Арцимович возглавлял экспериментальные исследования по физике горячей плазмы и управляемых термоядерных реакций в нашей стране. Ему и его сотрудникам удалось впервые осуществить термоядерную реакцию в лабораторных условиях. В последние годы на установках «Токамак» советские физики достигли рекордных результатов как по температуре водородной плазмы, так и по времени ее устойчивого существования.

Отдавая дань научным заслугам Л. А. Арцимовича, Академия наук СССР в 1946 году избрала его членом-корреспондентом, а в 1953 году — академиком. С 1957 года Л. А. Арцимович был бессменным академиком-секретарем Отделения физико-математических наук, а затем — Отделения общей физики и астрономии АН СССР.

Немало времени отдал Лев Андреевич воспитанию научной смены. Он преподавал в Ленинградском политехническом институте, Ленинградском университете, Московском инженерно-физическом институте. В последние годы жизни он руководил кафедрой атомной физики в МГУ.

Л. А. Арцимович был человеком с необычайным богатством интересов, далеко выходивших за пределы его специальности. Он обладал большим человеческим обаянием и обостренным чувством юмора. Многие из его шутливых высказываний давно стали «физическими афоризмами».

Лев Андреевич не дожил до создания технического термоядерного реактора. Но благодарное человечество не забудет имя того, кто внес неоценимый вклад в создание будущих термоядерных электростанций.

Задачи о телах вращения и теоремы Гюльдена

Б. С. Эппель

Мы предлагаем читателю решить (или по крайней мере попробовать решить) очень несложную задачу из задачника по геометрии Н. А. Рыбкина *) (№ 5 § 24).

Задача 1. *Равносторонний треугольник со стороной a вращается вокруг внешней оси, которая параллельна стороне и удалена от нее на расстояние, равное апофеме треугольника.*

Определить объем и поверхность полученного тела.

Напомним, что апофема — это радиус окружности, вписанной в правильный многоугольник.

Интересующий нас объем равен удвоенной разности объемов усеченного конуса с образующей BC (рис. 1) и цилиндра с образующей KC:

$$V = 2(V_{\text{ус. к. } BC} - V_{\text{цил. } KC}) = 2\left[\frac{1}{3}\pi KC\cdot(MB^2+MK^2+ MB\cdot MK) - \pi MK^2\cdot KC\right].$$

Теперь по стороне треугольника a найдите отрезки, участвующие в формуле. После упрощений вы получите, что $V=\frac{1}{2}\pi a^3$.

При желании точно так же можно вычислить и величину поверхности. Она равна $2\pi a^2\sqrt{3}$.

Как видите, решение связано с довольно громоздкими выкладками.

---

*) Н. А. Рыбкин, Сборник задач по геометрии, ч. 2, М., «Просвещение», 1972.

Вообще решения задач о вычислении объемов и поверхностей тел вращения, как правило, не сложны, но довольно громоздки. В то же время решения таких задач с помощью теорем Гюльдена записываются буквально в несколько строк.

Сформулируем эти теоремы.

1-я теорема Гюльдена (о площади поверхности вращения). *Поверхность тела, образованного вращением плоской линии (замкнутой или незамкнутой) вокруг оси, лежащей в плоскости этой линии и не пересекающей ее, равна произведению длины вращающейся линии на длину окружности, радиусом которой служит расстояние от оси вращения до центра тяжести линии:*

$$S = P \cdot 2\pi R,$$

где P — длина вращающейся линии (или ее периметр, если она замкнутая), а R — расстояние от центра тяжести до оси вращения.

2-я теорема Гюльдена (об объеме тела вращения). *Объем тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг оси, расположенной в той же плоскости и не пересекающей фигуру, равен площади фигуры, умноженной на длину окружности, радиусом которой служит расстояние от оси вращения до центра тяжести фигуры:*

$$V = S \cdot 2\pi R,$$

где S — площадь вращаемой фигуры, R — расстояние от центра тяжести до оси вращения.

Подчеркнем, что в первой теореме речь идет о центре тяжести масс, равномерно распределенных по длине линии, а во второй теореме — о центре тяжести масс, равномерно распределенных по всей площади фигуры.

Вследствие того, что теоремы Гюльдена не доказываются в школьном курсе (они доказываются методами интегрального исчисления) *), прямо использовать их для решения задач в практике школы или экзамена не принято. Но предпосылать элементарному решению быстрое получение ответа с помощью теорем Гюльдена, не скрывая своего знакомства с этими теоремами, можно, и предосудительного в этом ничего нет. Знание же ответа облегчает длинные и громоздкие выкладки, и, главное, вносит уверенность в работу.

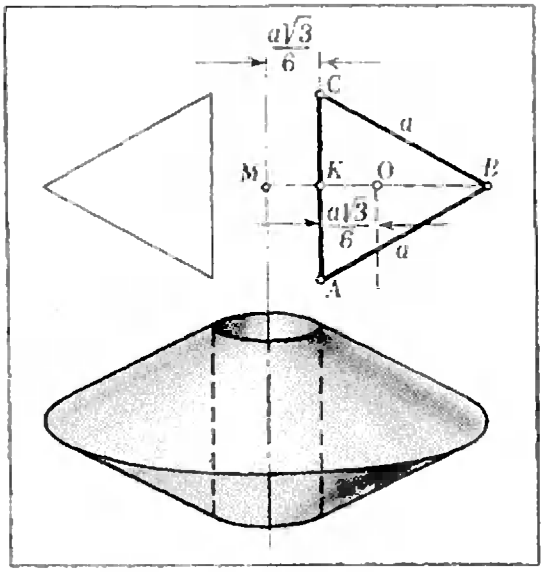


Рис. 1.

Теоремы несят немного «физический привкус». Для их применения нужно уметь находить центры тяжести линий и плоских фигур.

В тех случаях, с которыми нам придется столкнуться, это несложно. Так, центром тяжести отрезка является его середина. Это дает возможность находить центр тяжести любой ломаной линии (в частности, центр тяжести контура многоугольника): надо поместить в середине каждого звена ломаной массу, численно равную длине этого звена; тогда центр тяжести этих масс и будет центром тяжести ломаной линии.

Нетрудно находить и центры тяжести простейших плоских фигур. Например, центром тяжести круга и правильного многоугольника служит их центр, центром тяжести треугольника — точка пересечения его медиан; параллелограмма (квадрата,

*) См. статью В. Г. Болтянского на с. 9.

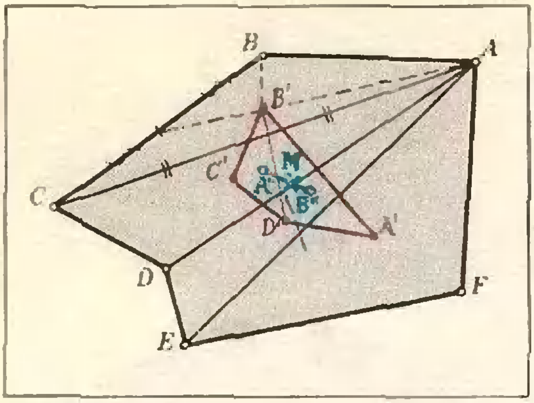


Рис. 2.

ромба, прямоугольника) — точка пересечения диагоналей.

Центр тяжести произвольного n-угольника строится так. Разобьем n-угольник на треугольники, в каждом из которых найдем центр тяжести. Потом в каждом центре тяжести треугольника поместим массу, численно равную площади этого треугольника. Центр тяжести этих масс и будет центром тяжести исходного многоугольника (рис. 2).

Упражнение. Постройте центр тяжести трапеции и центр тяжести ее контура; то же в случае дельтоида (это два равнобедренных треугольника, имеющих общее основание, вершины которых лежат по разные стороны от него) произвольного неправильного пятиугольника.

Но одно дело построить точку — центр тяжести, а другое — суметь найти расстояние от него до оси вращения. В тех случаях, когда вам это будет удаваться (а в школьных и экзаменационных задачах — это, *как правило*, можно сделать), проверка с помощью теорем Гюльдена будет возможна.

Решение большинства задач, помещенных в задачнике по геометрии Н. А. Рыбкина (ч. 2, § 24), можно проверить с помощью теорем Гюльдена.

Вернемся теперь к задаче, с которой мы начали статью, и покажем ее решение (лучше сказать, проверку решения) с помощью теорем Гюльдена. Найдем вначале R — расстояние от оси вращения до центра тяжести (см. рис. 1):

$$OM = R = OK + KM = \frac{a\sqrt{3}}{3};$$

$$S = P\cdot 2\pi R = 2\pi a^2\sqrt{3};$$

$$V = S\cdot 2\pi R = \frac{1}{2}\pi a^3.$$

Проверьте с помощью теорем Гюльдена ответы к задачам №№ 3, 4, 6, 7, 9, 10 (§ 24 того же задачника).

А вот типичная задача средней трудности.

Задача 2*). *Правильный треугольник, сторона которого a, вращается около оси, проходящей вне его через конец его стороны под острым углом α к этой стороне. Определить площадь поверхности тела вращения.*

Ответ: $2\pi a^2\sqrt{3}\sin(30^\circ+\alpha)$.

Получим его с помощью теоремы Гюльдена. Из $\Delta\, AOM$ (рис. 3)

$$R = AO\cdot\sin(30^\circ+\alpha) = \frac{a\sqrt{3}}{3}\times$$
$$\times\sin(30^\circ+\alpha),$$

$$S = P\cdot 2\pi R = 2\pi a^2\sqrt{3}\sin(30^\circ+\alpha).$$

*) П. В. Стратилатов, Тригонометрия. Дополнительный материал к курсу геометрии 9, 10 классов, М., «Просвещение», 1972, задача 294; П. В. Стратилатов. Сборник задач по тригонометрии, М., «Просвещение», 1965, задача 553.

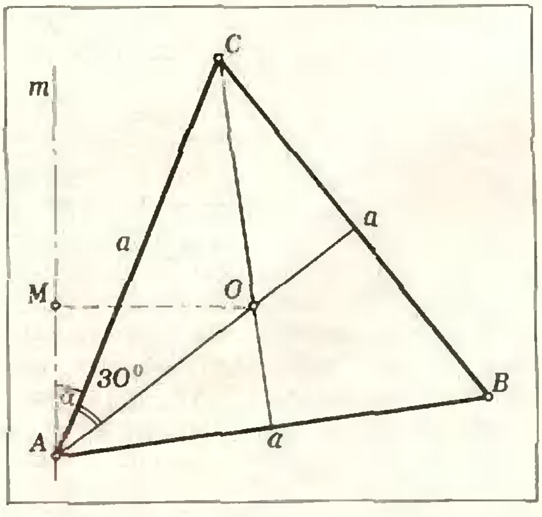


Рис. 3.

Сравнив это решение с обычным, вы полнее оцените краткость проверки.

Проверьте, используя теоремы Гюльдена, ответы к задачам №№ 296 (555), 300 (559), 303 (585) (П. В. Стратилатов, Сборник задач по тригонометрии).

Покажем еще несколько интересных применений теорем Гюльдена к решению задач.

Задача 3*. *Плоская ломаная состоит из n равных отрезков, имеющих длину a и соединенных в виде зигзага под углом α друг к другу. Определить поверхность, образуемую вращением этой линии около оси, которая проходит через один из концов ее параллельно биссектрисе угла α* *).

Традиционное решение этой задачи довольно громоздко, оно включает в себя суммирование арифметической прогрессии (точнее, первых n нечетных чисел) и вполне оправдывает «звездочку» — знак повышенной трудности, которая стоит около ее номера. Между тем теорема Гюльдена позволяет решить задачу совсем коротко, почти в уме.

В самом деле, центр тяжести ломаной находится, как легко видеть, на расстоянии $\frac{na}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$ от оси вращения, а длина ломаной равна na (рис. 4). Следовательно,

$$S = P\cdot 2\pi R = na\cdot\pi na\sin\frac{\alpha}{2} = \pi n^2a^2\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Впрочем, из рисунка 4 нетрудно усмотреть изящное решение задачи традиционным методом: легко догадаться, что искомая поверхность вращения равна боковой поверхности конуса с образующей AM, служащей продолжением последнего звена AB. Ведь поверхность вращения отрезка

*) Н. А. Рыбкин, Сборник задач по тригонометрии, М., Учпедгиз, 1956, § 23, задача 7.

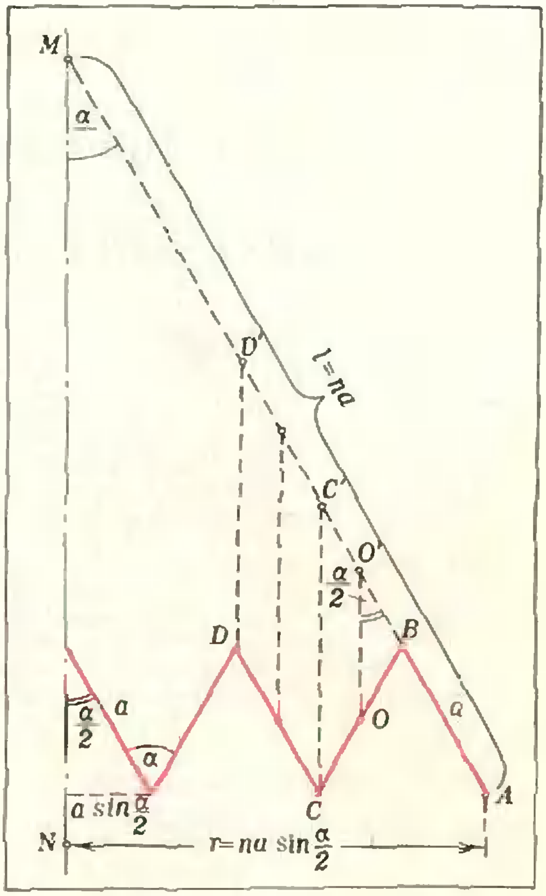


Рис. 4.

BC' равна поверхности вращения отрезка BC (эти поверхности симметричны относительно плоскости, перпендикулярной оси вращения и проходящей через точку B). Поверхности вращения отрезков DC и $D'C'$ также равны (они совмещаются параллельным переносом). Остается найти боковую поверхность конуса с образующей AM:

$$S = \pi rl = \pi\left(na\sin\frac{\alpha}{2}\right)an = \pi a^2n^2\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Вот еще одна задача.

Задача 4. *Прямоугольник вращается около оси, проходящей через его вершину параллельно диагонали. Определить объем и поверхность тела вращения, если диагональ прямоугольника равна d, а угол между диагоналями равен φ.*

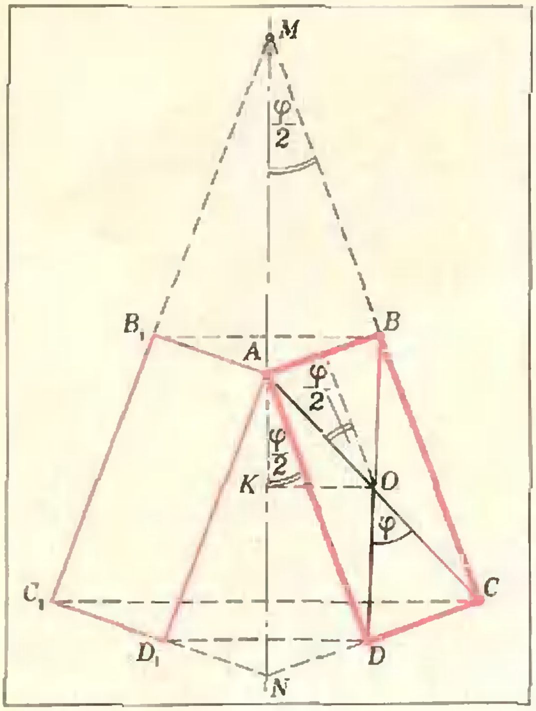


Рис. 5.

Здесь площадь прямоугольника равна $\frac{d^2}{2}\sin\varphi$, его периметр равен

$$2d\left(\sin\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}\right)=$$

$$=2\sqrt{2}\,d\sin\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right),$$

а центр тяжести находится на расстоянии $R=\frac{d}{2}\sin\varphi$ от оси вращения. Следовательно, по теоремам Гюльдена

$$V=\frac{1}{2}\pi d^3\sin^2\varphi,$$

$$S=2\pi d^2\sqrt{2}\sin\varphi\sin\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right).$$

Обычное решение довольно громоздко: нужно найти объемы двух усеченных конусов с образующими BC и CD (рис. 5) без объемов двух полных конусов с образующими AB и AD. Однако если продолжить стороны BC и CD до пересечения с осью вращения в точках M и N, то искомый объем значительно короче вычислится как сумма объемов двух полных конусов с образующими CM и CN без удвоенного объема тела, образованного вращением треугольника ABM (сумма объемов полных конусов с образующими AB и BM). Удвоенный объем потому, что надо бы вычитать сумму объемов тел, полученных от вращения двух треугольников ABM и ADN. Но один из этих треугольников может быть совмещен со вторым с помощью переноса, параллельного оси. Поэтому объемы этих тел вращения равны между собой.

Точно так же при вычислении поверхностей в этой задаче боковые поверхности усеченных конусов могут быть заменены боковыми поверхностями полных конусов, что тоже заметно сокращает выкладки.

Последние наши задачи также позволяют использовать для их решения все упрощения и преимущества, которые дают теоремы Гюльдена. Предоставляем решить ее читателю.

З а д а ч а 5. *Ромб со стороной a и острым углом α вращается около оси, проходящей вне ромба параллельно стороне на расстоянии $\frac{a}{4}$ от этой стороны. Определить объем и поверхность тела вращения.*

З а д а ч а 6. *Квадрат $ABCD$ со стороной a вращается около оси, проходящей вне его на расстоянии b от ближайшей вершины A квадрата и составляющей угол α со стороной AB. Определить объем и поверхность тела вращения.*

В. Г. Болтянский

Доказательства теорем Гюльдена

В статье Б. С. Эппеля, помещенной в этом номере «Кванта», сформулированы две теоремы Гюльдена. Обычно они доказываются (с применением интегралов) в курсах «высшей математики». Ниже приводятся простые доказательства этих теорем, которые, хотя и основаны на техже идеях, что и «интегральные» доказательства, но в явном виде интегралов не содержат.

В этих доказательствах не обсуждается, что такое длина произвольной кривой, что такое площадь поверхности, объем тела и т. д. Подобные вопросы относятся к теории измерения геометрических величин. (Кстати, при доказательстве теорем Гюльдена методами интегрального исчисления они, как правило, тоже не рассматриваются.) Читателю, который хотел бы получить ответы на эти вопросы, можно порекомендовать прочесть первые две статьи V тома «Энциклопедии элементарной математики» (изд-во «Наука», 1966).

Прежде всего установим справедливость следующего предложения.

Лемма. *Пусть в плоскости по одну сторону от прямой l расположено несколько материальных точек одинаковой массы. Тогда центр тяжести этой системы точек удален от прямой l на расстояние, равное среднему арифметическому расстояний этих точек от прямой l.*

Эта лемма легко доказывается методом математической индукции. Обозначим число рассматриваемых материальных точек через n, сами точки через $M_1, M_2, \ldots, M_n$, массу каждой точки через m, а расстояния точек от прямой l через $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

Перейдем к доказательству леммы. Если $n = 1$, то утверждение леммы очевидно. Без труда проверяется справедливость леммы и при $n = 2$. Проведем теперь очередной шаг индукции, то есть покажем, что если лемма справедлива для меньшего, чем n, числа материальных точек, то она справедлива и для n точек. Пусть P — центр тяжести материальных точек $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$. Согласно предположению индукции, точка P находится от прямой l на расстоянии

$$r = \frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_{n-1}}{n-1}.$$

Мы можем теперь систему материальных точек $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ заменить одной точкой P, сосредоточив в ней массу, равную $(n-1)m$. Теперь остается найти центр тяжести O *двух* материальных точек P и M_n. Так как точка P имеет массу $(n-1)m$, а точка M_n — массу m, то $PO : OM_n = 1 : (n-1)$. Следовательно, если r^* — расстояние от точки O до прямой l (рис. 1), то

$$(r - r^*) : (r^* - r_n) = 1 : (n-1).$$

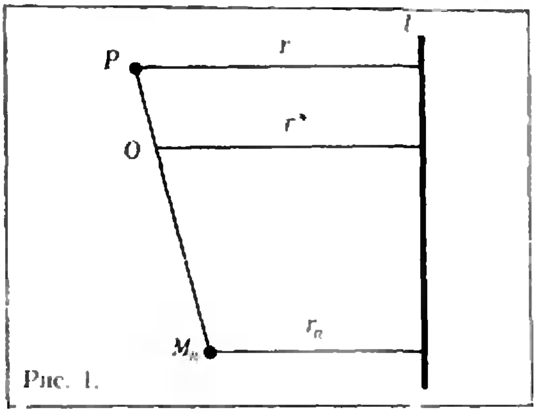


Рис. 1.

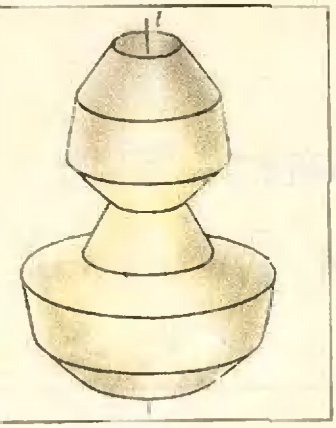


Рис. 2. Рис. 3.

откуда

$$r^* = \frac{(n-1)\,r + r_n}{n} =$$

$$= \frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_{n-1} + r_n}{n}.$$

Таким образом, утверждение леммы справедливо для n материальных точек. Проведенная индукция и доказывает лемму.

Перейдем теперь к доказательству первой теоремы Гюльдена. Прежде всего докажем, что эта теорема справедлива, если плоская линия, о которой идет речь в теореме, является n-звенной л о м а н о й, у которой все звенья имеют одну и ту же длину m. Середины звеньев ломаной обозначим через M_1, M_2, ..., M_n, а расстояния этих точек от прямой l — через r_1, r_2, ..., r_n (рис. 2). При вращении рассматриваемой ломаной вокруг прямой l получается поверхность (рис. 3), состоящая из n частей, каждая из которых представляет собой боковую поверхность усеченного конуса. Так как боковая поверхность усеченного конуса равна произведению длины образующей на длину окружности среднего сечения, то площадь получившейся поверхности вращения равна

$$S = m\cdot 2\pi r_1 + m\cdot 2\pi r_2 + \ldots + m\cdot 2\pi r_n.$$

Замечая, что длина рассматриваемой ломаной (рис. 2) равна $P = nm$, можно переписать выражение для площади так:

$$S = P\cdot 2\pi R, \qquad (1)$$

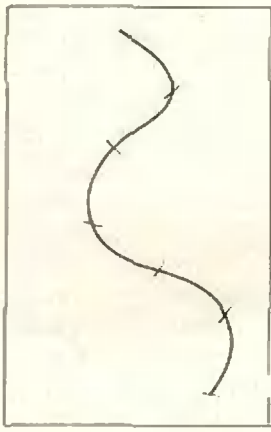
где

$$R = \frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_n}{n}. \qquad (2)$$

Но центр тяжести ломаной, то есть центр тяжести системы точек M_1, M_2, ..., M_n, в каждой из которых сосредоточена масса m, согласно лемме, отстоит от прямой l на расстоянии R. Это и означает, что в рассматриваемом частном случае первая теорема Гюльдена справедлива.

Обратимся теперь к общему случаю. Пусть K — плоская линия, а Π — поверхность, получающаяся при вращении линии K вокруг прямой l. Разведем ножки циркуля на некоторое расстояние m и будем, начиная от одного конца линии K, откладывать засечки вдоль линии K (рис. 4) столько раз, сколько мы сможем это сделать. Соединяя последовательно точки, полученные при выполнении этих засечек, мы получим ломаную L, вписанную в линию K, причем все звенья ломаной L имеют одну и ту же длину m (рис. 5). При вращении ломаной L вокруг прямой l получится поверхность T, вписанная в поверхность Π.

Как мы уже знаем, площадь S поверхности T вычисляется по формуле (1), где P — длина линии L, а R — расстояние центра тяжести линии L от прямой l. Будем теперь в этом построении считать, что $m \to 0$. Тогда



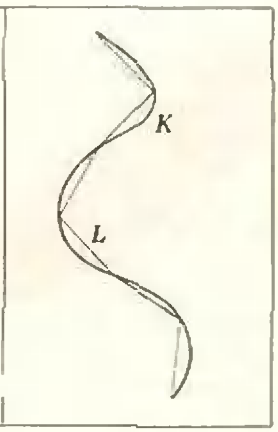


Рис. 4. Рис. 5.

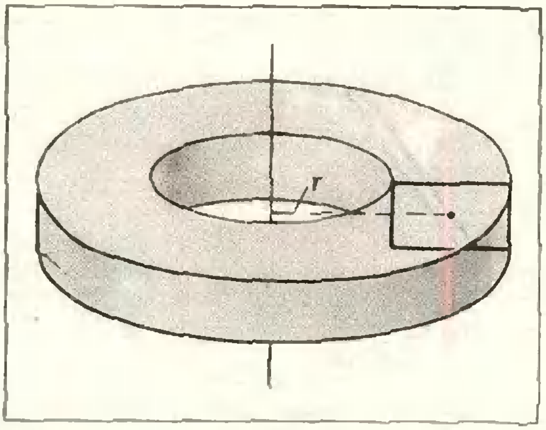


Рис. 6.

длина P ломаной L будет стремиться к длине линии K, площадь поверхности T будет стремиться к площади поверхности Π, а центр тяжести ломаной L будет приближаться к центру тяжести линии K. Так как для любого m соотношение (1) для ломаной L справедливо, то, переходя к пределу при $m \to 0$, мы найдем, что соотношение (1) справедливо и для линии K. Этим и завершается доказательство первой теоремы Гюльдена.

Обратимся теперь к доказательству второй теоремы Гюльдена. Прежде всего рассмотрим *шайбу*, то есть тело, получающееся при вращении прямоугольника вокруг прямой, которая не пересекает прямоугольника и параллельна двум его сторонам (рис. 6). Объем шайбы легко вычислить как разность объемов двух цилиндров. Предоставляем читателю самостоятельно вычислить этот объем V и убедиться, что для шайбы справедливы вторая теорема Гюльдена, то есть

$$V = S \cdot 2\pi r, \qquad (3)$$

где S — площадь вращающегося прямоугольника, а r — расстояние его центра тяжести от оси вращения l.

Пусть теперь F — плоская фигура площади S, а l — лежащая в ее плоскости прямая, не пересекающая фигуры F. Возьмем произвольное натуральное число n и проведем $n-1$ прямых, перпендикулярных l и разбивающих фигуру F на n «долек», каждая из которых имеет одну и ту же площадь $\frac{1}{n}S$ (рис. 7). Каждая «долька» ограничена двумя отрезками, перпендикулярными l, и двумя дугами, соединяющими концы этих отрезков. (Правда, если фигура F — не выпуклая, то могут быть и более сложные «дольки», как, например, на рис. 8; однако проводимые рассуждения применимы и к этому случаю.) Заменим эти дуги отрезками, параллельными l, так, чтобы площадь дольки при этом не изменилась (то есть чтобы «долька» превратилась в прямоугольник той же площади $\frac{1}{n}S$). Проделав это с каждой «долькой», мы превратим F в «ступенчатую» фигуру G, мало отличающуюся от фигуры F. Фигура G составлена из n прямоугольников, каждый из которых имеет площадь $\frac{1}{n}S$. Центры тяжести этих прямо-

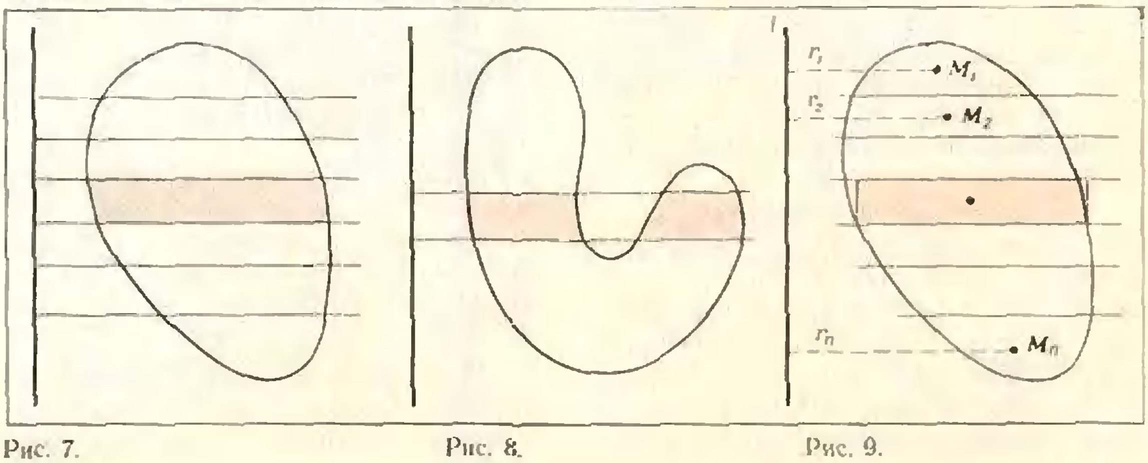


Рис. 7. Рис. 8. Рис. 9.

угольников обозначим через M_1, M_2, ..., M_n (рис. 9), а их расстояния от прямой l—через $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

При вращении фигуры F вокруг прямой l получается тело X, объем которого требуется найти, а при вращении фигуры G вокруг прямой l получается тело Y, мало отличающееся от тела X. Так как фигура G составлена из n прямоугольников, то тело Y составлено из n шайб. Вычисляя объем каждой шайбы по формуле (3), легко найдем объем V тела Y:

$$V = \frac{1}{n} S \cdot 2\pi r_1 + \frac{1}{n} S \cdot 2\pi r_2 + \ldots + \frac{1}{n} S \cdot 2\pi r_n,$$

то есть

$$V = S \cdot 2\pi R, \qquad (4)$$

где R вычисляется по формуле (2). Заметим теперь, что центр тяжести площади фигуры G, то есть центр тяжести системы точек M_1, M_2, ..., M_n, в каждой из которых сосредоточена масса $\frac{1}{n} S$, согласно лемме, отстоит от прямой l на расстоянии R. Формула (4) означает, следовательно, что для фигуры G вторая теорема Гюльдена справедлива.

Будем теперь в этом построении считать, что $n \to \infty$. Тогда объем тела Y, получающегося при вращении фигуры G, будет стремиться к объему тела X, а центр тяжести фигуры G будет стремиться к центру тяжести фигуры F. (Заметим, что площади фигур F и G одинаковы.) Так как для любого n соотношение (4) для фигуры G справедливо, то, переходя к пределу при $n \to \infty$, мы найдем, что соотношение (4) справедливо и для фигуры F. Этим завершается доказательство второй теоремы Гюльдена.

Вторую теорему Гюльдена можно условиться считать «трехмерной» теоремой Гюльдена, так как она говорит об о б ъ е м е тела вращения. Первую теорему Гюльдена можно назвать «двумерной», так как она говорит о п л о щ а д и поверхности вращения. Можно по аналогии сформулировать «одномерную теорему Гюльдена»:

Пусть в плоскости по одну сторону прямой l даны несколько точек. Тогда суммарная длина C окружностей, получающихся при вращении этой системы точек вокруг прямой l, равна произведению числа точек на длину окружности, радиусом которой служит расстояние от оси вращения l до центра тяжести этой системы точек:

$$C = n \cdot 2\pi R,$$

где n — число точек, а R — расстояние от центра тяжести до оси вращения.

Читатель без труда сам докажет эту простенькую теорему.

Любопытно, что все три теоремы Гюльдена (трехмерная, двумерная и одномерная) могут быть объединены одной общей формулировкой. Делается это так. Будем называть *нульмерной фигурой* любое множество, состоящее из конечного числа точек. Далее, *нульмерным объемом* нульмерной фигуры условимся называть ч и с л о т о ч е к этой фигуры. Линии условимся называть *одномерными фигурами*; длину линии будем называть ее *одномерным объемом*. Поверхности (в частности, плоские фигуры) условимся называть *двумерными фигурами*, а площадь поверхности — ее *двумерным объемом*. Наконец, тела будем называть *трехмерными фигурами*, а объем тела будем также называть его *трехмерным объемом*.

Т е о р е м а Г ю л ь д е н а. *Пусть в плоскости по одну сторону прямой l расположена $(k-1)$-мерная фигура F (здесь k — любое из чисел 1, 2, 3). Через S обозначим $(k-1)$-мерный объем фигуры F, а через R — расстояние от ее центра тяжести до прямой l. При вращении фигуры F вокруг прямой l получается k-мерная фигура, k-мерный объем которой вычисляется по формуле*

$$V = S \cdot 2\pi R.$$

При $k = 3$ это дает «трехмерную» теорему Гюльдена; при $k = 2$ и 1 получаем (только в иных обозначе-

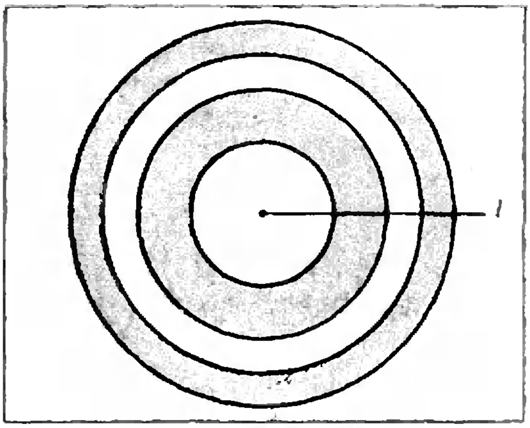


Рис. 10.

ниях) «двумерную» и «одномерную» теоремы.

Наконец, отметим (для читателя, знакомого с понятиями многомерной геометрии), что приведенная выше общая формулировка теоремы Гюльдена применима к n-мерному евклидову пространству — только вместо плоскости надо рассматривать $(n-1)$-мерную плоскость, а в качестве l надо взять $(n-2)$-мерную плоскость. Число k в этой теореме может (в случае n-мерного пространства) принимать любое из значений $1, 2, \ldots, n$.

А чтобы не огорчались читатели, не знакомые с понятиями многомерной геометрии, сформулируем получающуюся теорему для $n=2$ (то есть для случая плоскости).

Теорема Гюльдена на плоскости. *Пусть на прямой по одну сторону от точки O расположена $(k-1)$-мерная фигура F (здесь k — любое из чисел 1, 2). Через S обозначим $(k-1)$-мерный объем фигуры F, а через R — расстояние ее центра тяжести от точки O. При вращении фигуры F вокруг точки O получается k-мерная фигура, k-мерный объем которой вычисляется по формуле*

$$V = S\cdot 2\pi R.$$

В частности, при $k=1$ (то есть в случае, когда фигура F состоит из нескольких отрезков, рис. 10) эта формула позволяет вычислить сумму площадей нескольких концентрических колец.

Разные задачи

1. Исключить x, y, z из уравнений

$$\begin{aligned} xy\ (x+y)&=c,\\ yz\ (y+z)&=a,\\ zx\ (z+x)&=b,\\ xyz&=d. \end{aligned}$$

2. Построить треугольник ABC $(BC>AB>CA)$ по заданному углу A и суммам длин сторон $AB+BC$ и $AB+AC$.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} (ax)^{\lg a}&=(by)^{\lg b},\\ b^{\lg x}&=a^{\lg y}. \end{aligned}$$

4. Найти частное от деления на $p-1$ числа, написанного в p-ичной системе счисления с помощью $p-1$ единиц (то есть числа $111\ldots1$). Как записывается это частное в p-ичной системе счисления?

5. Три точки A, B и C лежат на одной прямой. Построена окружность с центром в точке A. Найти геометрическое место точек пересечения прямых, соединяющих точки B и C с диаметрально противоположными точками окружности.

6. Три окружности проходят через точки M и N. Найти геометрическое место таких точек P, что касательные PA, PB и PC, проведенные из точки P к этим окружностям (A, B, C — точки касания), удовлетворяют соотношению $PA\cdot PB=k\cdot PC^2$.

7. Доказать, что если p — простое число, то остаток от деления C_{p-1}^{m} на p равен $(-1)^m$.

8. Доказать, что если p — простое число, больше трех, то $\frac{1}{2}C_{2p}^{p}-1$ делится на p^3.

Электрон движется с трением

М. И. Каганов, Г. Я. Любарский

Введение

Слово «трение» напоминает о движущихся частях машин, о санках, скользящих по снежному насту, о метеорите, раскаляющемся при пролете через атмосферу. В одних случаях без трения нельзя обойтись, в других — делают все возможное, чтобы от него избавиться. С трением приходится считаться лыжнику-слаломисту и инженеру-конструктору; поскользнувшийся прохожий сетует на отсутствие трения, а физики в лабораториях изыскивают способы уменьшения трения хотя бы на доли процента. Но, пожалуй, кто бы ни думал о трении, все представляют себе какое-либо макроскопическое тело (нога, колесо, винт парохода), взаимодействующее со средой или с другими телами.

А можно ли говорить о трении при движении микроскопической частицы, например, электрона?

В этой статье мы рассмотрим движение электронов в металле. Известно, что электроны совершают беспорядочное, хаотическое движение. Но если по проводнику идет ток, то, кроме хаотического теплового движения, есть еще и направленное движение электронов.

Очень сложно описать поведение каждого электрона в отдельности. Поэтому мы заменим движение всех частиц потоком одинаковых «средних» частиц, движущихся в одном направлении с одинаковыми средними скоростями. Это можно сделать, так как при векторном сложении всех скоростей скорости хаотического движения, направленные в разные стороны, дают в сумме нуль, и остаются только скорости направленного движения электронов под действием электрического тока. Оказывается, рассматривая поток «средних» электронов, можно не только понять процессы, происходящие в металлах, но и вывести правильные формулы, описывающие эти процессы. Конечно, такое «усредненное» рассмотрение проще, чем подробное.

Электронный газ

То, что металлы хорошо проводят электрический ток, давно привело к мысли, что в металле есть свободные электроны.

Свободных электронов много. В одном кубическом сантиметре металла их около $10^{22} \div 10^{23}$. Подобно молекулам в газе, они находятся в непрерывном движении. Так и говорят: «электронный газ» или «газ электронов проводимости». Правда, свойства этого газа существенно отличаются от свойств обычных газов. Электронный газ в металлах подчиняется законам квантовой механики. Из всех необычных (квантовых) свойств электронного газа для нас важно одно: средняя скорость хаотического движения электронов в металле слабо зависит от температуры и для большинства металлов приблизительно равна $\langle v \rangle \approx$ $\approx 10^8$ *см/с* *).

«Средний» электрон

Если по металлическому проводнику течет ток, значит, к нему приложена разность потенциалов, причем между током I и разностью потенциалов U существует простая пропорциональность

$$I = \frac{U}{R}.$$

Это — знаменитый закон Ома.

Сопротивление R пропорционально длине проводника L и обратно пропорционально площади его поперечного сечения S:

$$R = \frac{\rho L}{S}.$$

Коэффициент пропорциональности ρ (удельное сопротивление) зависит только от материала проводника и от того, в каких условиях этот проводник находится (какова его температура, например). Величину $1/\rho$ обычно обозначают буквой σ. Это — удельная электропроводность. Если ввести теперь плотность тока $j = \frac{I}{S}$ и напряженность электрического поля $E = \frac{U}{L}$, то закон Ома перепишется в дифференциальной форме *)

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \qquad (1)$$

Величины, входящие в (1), не зависят от геометрических размеров проводника. Буквы **j** и **E** напечатаны жирным шрифтом, чтобы показать: напряженность электрического поля и плотность тока — векторы.

Так как заряд переносят электроны (заряд каждого электрона $e \approx$ $\approx 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ электростатических единиц **), $[e] = \frac{г^{1/2} см^{3/2}}{с}$), то плотность тока можно выразить через число электронов в единице объема ($n \approx$ $\approx 10^{23}$ $см^{-3}$) и среднее арифметическое значение их скорости $\overline{\mathbf{v}}$:

$$\mathbf{j} = en\,\overline{\mathbf{v}}. \qquad (2)$$

По металлу течет ток; имеется направленный поток электронов; $\overline{\mathbf{v}}$ — скорость этого потока.

Формулу (2) можно «прочесть» несколько иначе, не учитывая хаоти-

*) Речь идет о средней квадратичной скорости: $\langle v \rangle = \sqrt{\overline{v^2}}$; черта над v^2 здесь и в дальнейшем обозначает среднее арифметическое значение.

*) См. статью Я. А. Смородинского «Закон Ома» («Квант» № 4, 1971).

**) Мы в этой статье будем пользоваться системой СГСЭ, в которой единицы электрических величин (заряда, тока, напряженностей электрического и магнитного полей) выражаются через механические единицы (*см*, *г*, *с*).

ческого движения электронов. В каждом кубическом сантиметре металла есть n электронов, и все они движутся со скоростью $\bar{\mathbf{v}}$. Подмена беспорядочно движущихся электронов, «сносимых» приложенным к металлу электрическим полем, одинаково движущимися «средними» электронами производится для упрощения, чтобы легче исследовать свойства проводников.

Со стороны приложенного к проводнику электрического поля на электрон действует сила, равная

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E}. \qquad (3)$$

Из формул (1), (2) и (3) следует, что скорость «среднего» электрона пропорциональна приложенной силе:

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\sigma}{e^2 n}\mathbf{F}, \qquad (4)$$

то есть «средний» электрон движется по законам механики Аристотеля *). Механика Аристотеля правильно описывает движение в тех случаях, когда тело движется с трением и приложенная постоянная сила уравновешивается силой трения. Следовательно, «средний» электрон под действием электрического поля движется по металлу с трением.

Подвижность

Главная характеристика частиц в механике Аристотеля — их подвижность u — скорость частицы под воздействием единичной силы. Согласно формуле (4) подвижность «среднего» электрона равна $\sigma/e^2 n$.

В отличие от средней скорости, подвижность не зависит от величины приложенной силы.

Принято же подвижность выражать через удельную электропроводность, а наоборот, удельную электропроводность выражать через подвижность:

$$\sigma = ne^2 u. \qquad (5)$$

*) См. статью М. И. Каганова, Г. Я. Любарского «О механике Аристотеля» («Квант» № 8, 1972).

Может возникнуть вопрос: зачем одну характеристику металла (электропроводность σ) выражать через две другие?

Это делают потому, что величины n и u определяют различные, можно сказать, независимые характеристики металла. Число свободных электронов в единице объема n практически не изменяется с температурой, мало зависит от состояния образца данного металла (монокристалл или поликристалл, очень чистый или с небольшим количеством примесей). Подвижность u характеризует силу сопротивления среды движению электронов. С изменением температуры она может измениться в сотни, тысячи раз; значительно увеличивается подвижность при очистке металла от примесей. Число электронов n и подвижность u допускают независимое экспериментальное определение.

Следует подчеркнуть еще одно. Введение подвижности означает определенное проникновение в природу электропроводности: формула (5) имеет право на существование только в том случае, если ток переносится электронами. Вся совокупность экспериментальных фактов подтверждает такую точку зрения.

Эффект Холла

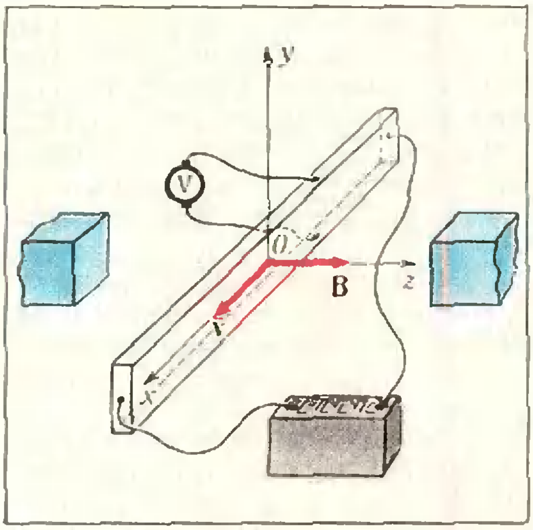
Если проводник, по которому течет ток, поместить в магнитное поле $\mathbf{B}$ так, как показано на рисунке, то в направлении оси y возникает разность потенциалов, пропорциональная величине тока и магнитного поля. Это явление называется эффектом Холла.

На электрон, находящийся в проводнике с током, кроме силы, действующей со стороны электрического поля, действует также сила Лоренца

$$F = \frac{e}{c} vB\sin(\widehat{\mathbf{v}\mathbf{B}}),$$

направление которой перпендикулярно скорости $\mathbf{v}$ и магнитному полю $\mathbf{B}$.

На «средний» электрон также действует сила Лоренца, величину кото-



рой можно определить, подставив вместо скорости **v** среднюю скорость $\overline{\mathbf{v}}$. В нашем примере, согласно формуле (2), $\overline{v}=\frac{j}{en}$, а $\sin(\widehat{\mathbf{v}\mathbf{B}}) = 1$ (см. рисунок). Поэтому

$$F=\frac{jB}{nc}. \qquad (6)$$

Под действием этой силы электроны двигались бы в направлении оси y. На самом же деле, как только некоторое число электронов скопится на краю пластины (деться им некуда), возникнет электрическое поле, действующее в направлении, противоположном силе Лоренца, и накопление зарядов прекратится.

Ясно, что установившимся движение зарядов будет тогда, когда

$$eE_y = F.$$

Подставив сюда значение F из формулы (6), получим значение напряженности поля Холла

$$E_y=\frac{jB}{nec}. \qquad (7)$$

Мы получили значение поля Холла, возникающего в проводнике, помещенном в магнитное поле B, когда по нему течет ток с плотностью j. При этом мы рассматривали только «средние» электроны, движущиеся со средней скоростью.

Простота полученной формулы должна несколько насторожить. Верна ли она всегда? Не является ли ее простота следствием упрощенного («усредненного») рассмотрения? К сожалению, приходится констатировать, что это действительно так. Подробное, учитывающее движение каждого электрона рассмотрение приводит к более сложной формуле, но (и это для нас важно!) порядок величины поля Холла получится тот же. Поэтому простая формула (7) позволяет оценить число свободных электронов в единице объема: ведь все величины, входящие в формулу (7), за исключением n (числа частиц — носителей заряда), определяются экспериментально.

Измерения показывают, что у хороших металлов, как мы и говорили, $n = 10^{22} \div 10^{23}$ *см*$^{-3}$. Это означает, что от каждого атома металла оторвался и свободно движется по кристаллу по крайней мере один или даже несколько электронов.

Зная число электронов в единице объема, можно подсчитать подвижность электронов в металле. Возьмем из справочника удельное сопротивление меди ρ_{Cu} (как правило, в справочнике приводится значение удельного сопротивления при комнатной температуре):

$$\rho_{Cu} \approx 1{,}7\cdot10^{-6}\ \text{ом}\cdot\text{см} \approx 1{,}8\cdot10^{-18}\ \text{с}.$$

Не удивляйтесь, что размерность удельного сопротивления — секунда. Проверьте это, воспользовавшись выражением для удельной электропроводности через подвижность.

Разделив $\sigma = 1/\rho$ на $ne^2 \approx \approx 4\cdot10^{22}\ (4{,}8\cdot10^{-10})^2 = 0{,}9\cdot10^4$, получим, что подвижность электронов в меди приблизительно равна $6\cdot10^{12}$ *с/г*. Много это или мало? Если сравнивать с подвижностью электронов той же меди при очень низких температурах, то мало. При температурах, близких к абсолютному нулю, подвижность в сотни и тысячи раз больше. Если сравнивать с подвижностью электронов в других проводниках, то много. Электроны меди — одни из наиболее подвижных.

Для того чтобы ощутить, что представляет собой подвижность, вычислите скорость «среднего» электрона, скажем, когда по металлу течет ток, плотность которого равна 1 $а/мм^2$ *).

Если вы не ошиблись при расчете, то вас, наверное, поразило, как мала средняя скорость: под действием электрического поля электронный газ медленно перемещается по проводнику. Это конечно, ни в коей мере не противоречит утверждению о том, что средняя скорость хаотического движения очень велика.

Время свободного пробега

Тот факт, что по проводнику под действием постоянного поля течет постоянный ток, показывает, что электроны, приобретающие энергию от электрического поля, отдают ее металлу (точнее было бы сказать: кристаллической решетке металла); в металле при прохождении тока выделяется тепло (его называют джоулевым). Чтобы не противоречить ранее высказанному утверждению о свободе электронов в металлах (мы его скоро проверим!), предположим, что каждый электрон движется в течение времени τ под действием внешнего поля, а потом, в коротком акте столкновения с чем-то, отдает приобретенную от электрического поля энергию (τ — время свободного пробега электрона). Так как ускорение электрона равно eE/m, то прирост скорости за время τ равен $\frac{e\tau}{m}E$, а средний ток есть **)

$$j = \frac{ne^2\tau}{m}E. \qquad (8)$$

Сравнивая эту формулу с формулами (1) и (5), находим

$$\rho = \frac{m}{ne^2\tau}; \quad u = \frac{\tau}{m}. \qquad (9)$$

Это — очень важные формулы. Они связывают макроскопические величины (удельное сопротивление, подвижность) с параметрами, характеризующими движение отдельных электронов. Не надо, правда, забывать, что τ — тоже средняя характеристика.

Вместо времени свободного пробега иногда удобно пользоваться понятием длины свободного пробега:

$$l = \langle v \rangle \tau, \qquad (10)$$

l — расстояние, которое проходит (в среднем) электрон между двумя столкновениями, $\langle v \rangle$ — средняя скорость хаотического движения электронов. Для электронного газа, как мы уже говорили, $\langle v \rangle$ не зависит от температуры и температурные зависимости l и τ совпадают.

Теперь проверим, можно ли в действительности считать электроны проводимости свободными. Выше мы подсчитали подвижность электронов меди. Она оказалась равной $6 \cdot 10^{12}$ $с/г$. Отсюда и из формул (9) и (10) следует:

$$\tau \approx 2 \cdot 10^{-14}\ с;\ l \approx 2 \cdot 10^{-6}\ см, \qquad (11)$$

так как $m \approx 10^{-27}$ $г$, а

$$\langle v \rangle \approx 3 \cdot 10^{8}\ см/с.$$

Значения τ и l полностью подтверждают наше представление о свободе электронов проводимости: между двумя столкновениями электрон проходит расстояние, в сто раз превышающее размеры атома! При понижении температуры электропроводность металлов возрастает, возрастает подвижность электронов, а следовательно, возрастает и время свободного пробега — более отчетливо проявляется свобода электрона.

Можно ли непосредственно измерить время свободного пробега электронов τ или их длину свободного пробега l? Отвечая на этот вопрос, мы не должны забывать, что в эксперименте мы всегда имеем дело со всеми электронами сразу — просто с образцом металла (проволочкой, пластинкой). Или, другими словами, следим за движением «среднего» электрона, под-

*) Экспериментальное определение скорости носителей заряда описано в статье В. В. Майера «С какой скоростью движутся ионы» («Квант» № 4, 1973)

) Формулу (8) можно вывести значительно более аккуратно. Постарайтесь это сделать, рассмотрев электроны, пересекающие плоскость, расположенную перпендикулярно вектору **E.

чиняющегося законам механики Аристотеля.

Теплопроводность.

Мы рассмотрели одну причину, заставляющую двигаться «средний» электрон,— действие электрического поля. Можно заставить двигаться электроны и другим способом: поддерживать на концах металлического образца разность температур $T_1 - T_2$. Электроны устремляются от теплого конца к холодному в попытке выравнять температуру — по металлу потечет ток. В разомкнутом проводнике возникнет электрическое поле, препятствующее движению электронов (в разомкнутом проводнике $j = 0$), но если поддерживать разность температур, то тепло будет перетекать, и переносить его будут электроны.

Противоречия в этой фразе нет: $j = 0$ означает, что от холодного и от горячего концов образца движется с одинаковой средней скоростью одинаковое число электронов. Но обе группы электронов несут различные количества тепловой энергии: группа, которая движется от нагретого конца, несет больше тепла.

Анализ процесса переноса тепла электронами показывает, что коэффициент теплопроводности (коэффициент пропорциональности между $\frac{T_1 - T_2}{L}$, где L — длина проводника, и плотностью потока тепла) равен *)

$$\varkappa = \frac{1}{3} Cl\langle v\rangle, \qquad (12)$$

где C — теплоемкость электронного газа, которая линейно зависит от абсолютной температуры (это еще одно проявление квантовых свойств газа электронов проводимости). Из формул (12), (9) и (10) видно, что из отношения $\rho\varkappa/T$ выпадают величины, зависящие от температуры *), то есть $\rho\varkappa/T$ не зависит от температуры металла:

$$\frac{\rho\varkappa}{T} = \text{const}. \qquad (13)$$

Более подробное рассмотрение показало бы, что «константа» не зависит даже от сорта металла. Для всех металлов она одна и та же. Формула (13) была получена на основании анализа экспериментальных фактов и носит название закона Видемана — Франца. Ее вывод показывает, что мы правильно понимаем «устройство» металла.

Заключение

Ясно, что, заменив хаотически движущиеся электроны одинаковыми «средними» электронами, мы упростили задачу исследования свойств металла. Но простота не дается даром. За нее надо платить. Чем же мы платим за эту простоту? Во-первых, тем, что не всегда получаем точные формулы (мы специально отметили это обстоятельство после вывода формулы для поля Холла). Во-вторых (и это самое главное), отказом от углубления наших представлений. Мы согласились выражать силу трения «среднего» электрона через подвижность, выразили подвижность через среднее время свободного пробега и... остановились. Остановились в продвижении к более полному пониманию процессов, происходящих в металле при прохождении через него электрического тока. Исследование поведения всех электронов, их взаимодействия с ионами кристаллической решетки металла позволило бы нам не только ввести подвижность и время свободного пробега, но и вычислить эти величины. Тем самым определить, как удельное сопротивление зависит от температуры.

---

*) Мы говорим только об электронной части коэффициента теплопроводности. Тепло переносят не только электроны. Через диэлектрик (изолятор), в котором нет свободных электронов, тоже распространяется тепло, правда хуже, чем через металл.

*) Напомним еще раз, что среднее квадратичное значение тепловой скорости электронов $\langle v\rangle$ не зависит от температуры.

О наполнении и закупоривании бутылок

М. Л. Гервер

Все успел: обед разогрел,
Быстро съел — за уроки сел,
«Квант» почитал — в футбол поиграл...
Милг. «Мисти-фисти, или сказки про пострела»

Человек каждый день много дел разных делает. Идет утром в школу (если он школьник), домой вернется — обед разогреет и т. д. (см. эпиграф). Дела обычно менять местами можно: сначала в футбол поиграть — потом за уроки сесть, сперва обед съесть — потом его разогреть...

Стоп! С обедом что-то не вышло — не все на свете переставлять разрешается.

Это относится и к совсем серьезным вещам: высотному крану нечего делать на стройке, пока фундамент дома не заложен; нельзя «для сокращения сроков» пахать, сеять и молотить одновременно...

С тем, что задержка в одном деле может помешать начать другие, приходится считаться при планировании — например, когда оценивают, сколько времени потребует большой комплекс взаимосвязанных работ. В заметке на шутливом примере показано, какого рода математические задачи могут встретиться при этом.

1. *Постановка задачи*

Привезли на автоматическую линию бутылки, очень много: N штук. А на линии работают 2 автомата: I и II. I бутылки наполняет, II — закупо-

Таблица 1

№ бутылки	Время наполнения в секундах	Время закупоривания в секундах
1	7	10
2	9	8
3	3	1
4	2	4
5	11	6
6	5	12

ривает. Бутылки разные: с широким горлышком и с узким, высокие, пузатые — нестандартные. Про каждую бутылку известно, сколько времени уходит на ее наполнение и сколько — на ее закупоривание.

Сколько проработает автоматическая линия с момента, когда начнет наполняться первая бутылка, до момента, когда будет закупорена последняя? Это зависит от того, в каком порядке бутылки будут в автоматы попадать (например, для 6 бутылок есть $P_6=720$ таких порядков). Возникают, таким образом, два вопроса:

Как быстро определить тот порядок, при котором время работы линии будет наименьшим? И как вычислить это наименьшее время?

2. Численный пример

Начнем с примера: пусть партия из 6 бутылок характеризуется таблицей 1.

Попробуем подавать бутылки в автоматы именно в том порядке, в котором они указаны в таблице: сначала 1-ю, потом 2-ю и так до 6-й. Тогда автоматы будут работать так.

Через 7 секунд наливающий автомат наполнит 1-ю бутылку (рис. 1), через $7+9=16$ *с.* — 2-ю, через $16+3=19$ *с.* — 3-ю, через $19+2=21$ *с.* — 4-ю, через $21+11=32$ *с.* — 5-ю, через $32+5=37$ *с.* — 6-ю*).

Закупоривающий автомат покончит с 1-й бутылкой через $7+10=17$ *с.* и лишь тогда сможет заняться 2-й бутылкой (которая, тем самым, простоит наполненная целую секунду). Со 2-й бутылкой он покончит через $17+8=25$ *с.* (так что 3-я бутылка простоит в ожидании пробки уже 6 *с.*). Через $25+1=26$ *с.* будет закупорена 3-я бутылка, через $26+4=30$ *с.* — 4-я. Теперь закупоривающий автомат мог бы заняться 5-й бутылкой, но та, как мы знаем, еще не наполнена, поэтому автомат 2 *с.* простоит без дела. Через $32+6=38$ *с.* будет закупорена 5-я бутылка, а через $38+12=50$ *с.*, наконец, и 6-я.

Построим вспомогательную таблицу 2.

*) Считается, что, наполнив бутылку, автомат может, не теряя ни секунды, начать наполнять следующую.

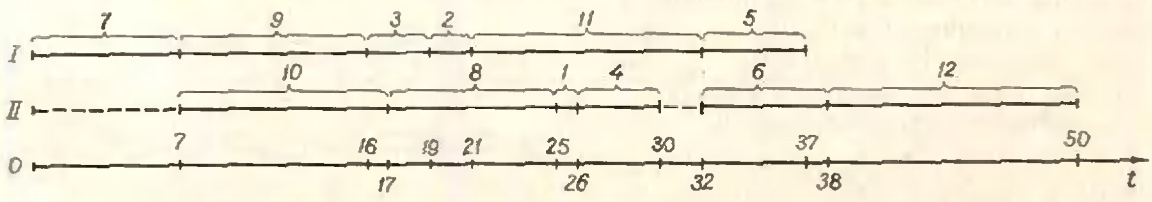


Рис. 2.

Таблица 2

7	31+10=41	7+41=48
7+ 9=16	23+ 8=31	16+31=47
16+ 3=19	22+ 1=23	19+23=42
19+ 2=21	18+ 4=22	21+22=43
21+11=32	12+ 6=18	32+18=$\boxed{50}$
32+ 5=37	12	37+12=49

Числа, стоящие в ее первом столбце, уже знакомы нам: здесь записано, через сколько секунд автомат I наполнит первую бутылку, первые две бутылки, первые три бутылки и т. д. Этот столбец получается последовательным сложением (сверху вниз) чисел, стоящих во втором столбце таблицы 1. Второй столбец таблицы 2 удобнее *сначала читать снизу вверх*: в таком порядке, чтобы получился этот столбец, складывали числа из третьего столбца таблицы 1. Третий столбец 2 — сумма первых двух ее столбцов.

Второй столбец таблицы 2 имеет следующий смысл: если бы автомат II работал *без простоев*, то он закупорил бы все бутылки за 41 *с*.; если бы он закупоривал без простоев все бутылки начиная со 2-й, то потратил бы на это 31 *с*.; на закупоривание без простоев всех бутылок, начиная с 3-й, нужно 23 *с*. и т. д.

В нашем примере автомат II работал без простоев лишь после того, как в него попала 5-я бутылка. Она была туда подана (см. 5-ю строку таблицы 2) через 32 *с*. после начала работы автоматической линии; после этого автомат II работал 18 *с*., так что вся работа линии длилась 50 *с*. (см. третий столбец таблицы 2).

В п. 5 мы вернемся к этому примеру, а теперь покажем, как вычислить время работы автоматической линии в общем случае — при условии, что порядок подачи бутылок на линию задан.

3. Время работы автоматической линии

В нашем примере 50 *с*. — это наибольшее число в третьем столбце таблицы 2. Это не случайно: справедливо следующее

Утверждение 1. *Пусть времена наполнения и закупоривания бутылок задаются таблицей 3, и пусть бутылки попадают в автоматы именно в том порядке, в котором они указаны в этой таблице. Построим по таблице 3 вспомогательную таблицу 4 (подобно тому, как выше, по таблице 1 была построена таблица 2).*

Тогда время работы автоматической линии равно наибольшему числу в третьем столбце таблицы 4.

Доказательство. Проведем две горизонтальные прямые: I и II (рис. 2.) На прямой I отложим (сле-

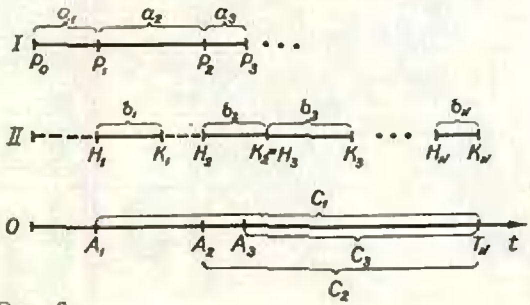


Рис. 2.

Таблица 3

№ бутылки	Время наполнения	Время закупоривания
1	a_1	b_1
2	a_2	b_2
3	a_3	b_3
...	...	...
$N-2$	a_{N-2}	b_{N-2}
$N-1$	a_{N-1}	b_{N-1}
N	a_N	b_N

ва направо) отрезки P_0P_1, $P_1P_2, \ldots, P_{N-1}P_N$ (с длинами $a_1, a_2, \ldots, a_N$). На прямой II отложим (тоже слева направо) отрезки $H_1K_1, H_2K_2, \ldots, H_NK_N$ (с длинами $b_1, b_2, \ldots, b_N$). Точку H_1 расположим при этом на одной вертикали с P_1, и далее — при любом i, $1 < i \leqslant N$, — точку H_i будем располагать на одной вертикали с более правой из точек P_i и K_{i-1} (это соответствует тому, что автомат II начинает закупоривать очередную бутылку, когда она наполнена и когда закупорена предыдущая бутылка). Ортогонально спроектируем на горизонтальную ось времени t точки $P_0, P_1, \ldots, P_N$ в точки $O, A_1, \ldots, A_N$ и точку K_N в точку T_N. Ясно, что T_N — время работы автоматической линии в рассматриваемом нами случае.

Длину отрезка A_iT_N на оси t обозначим через C_i $i = 1, \ldots, N$; тогда $T_N = A_i + C_i$.

Между отрезками $H_1K_1, H_2K_2, \ldots, H_NK_N$ на прямой II могут быть просветы, и точка H_i располагается либо на одной вертикали с P_i, либо правее; поэтому $C_i \geqslant B_i = b_i + b_{i+1} + \ldots + b_N$. Следовательно, $T_N \geqslant A_i + B_i$ ($i = 1, \ldots, N$).

Возьмем самый правый из просветов между отрезками H_iK_i. Правее его идут отрезки H_nK_n, $H_{n+1}K_{n+1}, \ldots, H_NK_N$, образующие один *сплошной* (без просветов) отрезок *) длины B_n. Так как H_n не совпадает с K_{n-1} (их разделяет просвет), то H_n лежит на одной вертикали с P_n и A_n. Итак, $T_N = A_n + B_n$.

Таким образом, T_N равно максимальному из чисел $A_i + B_i$ ($i = 1, \ldots, N$). Утверждение 1 доказано.

Таблица 4 строится по заданной таблице 3 чрезвычайно быстро: первые два столб-

*) При этом может случиться, что $n = N$.

Таблица 4

$a_1 = A_1$	$B_2 + b_1 = B_1$	$A_1 + B_1$
$A_1 + a_2 = A_2$	$B_3 + b_2 = B_2$	$A_2 + B_2$
$A_2 + a_3 = A_3$	$B_4 + b_3 = B_3$	$A_3 + B_3$
...	...	...
$A_{N-3} + a_{N-2} = A_{N-2}$	$B_{N-1} + b_{N-2} = B_{N-2}$	$A_{N-2} + B_{N-2}$
$A_{N-2} + a_{N-1} = A_{N-1}$	$B_N + b_{N-1} = B_{N-1}$	$A_{N-1} + B_{N-1}$
$A_{N-1} + a_N = A_N$	$b_N = B_N$	$A_N + B_N$

Таблица 5

№ бутылки	Время I	Время II
1	a	b
2	c	d

Таблица 5′

№ бутылки	Время I	Время II
2	c	d
1	a	b

ца ее получаются (каждый) за $N-1$ сложение, третий столбец — еще за N сложений (всего, таким образом, $3N-2$ сложения).

Итак, если порядок, в котором бутылки попадают на автоматическую линию, задан, то время работы линии вычисляется быстро. Остается научиться быстро определять по таблице 3 «наилучший» порядок подачи бутылок на линию, то есть такой порядок, при котором это время будет наименьшим.

4. Наилучший порядок

Сначала рассмотрим случай, когда бутылок всего две.

Пусть для одной из них времена наполнения и закупоривания равны a и b, а для другой соответственно c и d. Какой тогда порядок лучше — указанный в таблице 5 или указанный в таблице 5′?

Время работы линии в первом варианте (табл. 5) обозначим через t. В обозначениях таблицы 4 для $N=2$

$$A_1 = a, \qquad B_1 = b + d$$
$$A_2 = a + c, \qquad B_2 = d.$$

Согласно утверждению 1 время t равно большему из чисел $A_1 + B_1$ и $A_2 + B_2$:

$$t = \max(A_1 + B_1, A_2 + B_2) = \max(a + b + d, a + c + d).$$

Обозначим сумму $a+b+c+d$ через S. Тогда формулу для t можно переписать так:

$$t = \max(S - c, S - b) = S - \min(b, c)$$

(если от S отнять меньшее из чисел b и c, то получится большее из чисел $S-b$ и $S-c$).

Аналогичная формула, разумеется, справедлива и для t', где t' — время работы линии во втором варианте (табл. 5′):

$$t' = S - \min(a, d).$$

Итак, если $\min(a, d) \geqslant \min(b, c)$, то $t \geqslant t'$.

Другими словами, при $N=2$ лучший порядок определяется по следующему правилу: выберем наименьшее из чисел a, b, c и d; если это a или d, то лучше первый вариант (табл. 5), если же это b или c, то — второй (табл. 5′). То есть при $N=2$ *в таблице, указывающей лучший порядок, наименьшее из чисел должно стоять либо в левом верхнем, либо в правом нижнем углу.*

На случай произвольного N последнее предложение обобщается так.

Утверждение 2. *«Наилучший» порядок можно определять по следующим правилам. Выберем в таблице 3 наименьшее из чисел $a_1, b_1, \ldots, a_N, b_N$*). Если это число равно a_k, то k-ю бутылку нужно подавать на линию самой первой; если же это число равно b_k, то k-ю бутылку нужно подавать на линию последней. Выяснив таким образом судьбу k-й бутылки, вычеркнем k-ю строку из таблицы 3. Среди оставшихся чисел a_i, b_i ($1 \leqslant i \leqslant N$, $i \neq k$) снова выберем наименьшее *). Если оно равно a_l, то l-ю бутылку отправим в начало очереди, а если оно равно b_l, то l-ю бутылку отправим в конец очереди (которую образуют все бутылки, кроме k-й). И так до последней бутылки.*

Мы докажем утверждение 2 в п. 6, а сейчас применим утверждения 1 и 2 к нашему примеру.

*) Если таких наименьших чисел несколько, можно взять любое из них.

Таблица 1′

№ бутылки	Время наполнения	Время закупоривания
4	2	4
6	5	12
1	7	10
2	9	8
5	11	6
3	3	1

5. Численный пример (окончание)

Наименьшее из чисел, обозначающих времена в таблице 1, равно 1. Это время закупоривания 3-й бутылки. Поэтому отправим 3-ю бутылку в самый конец очереди. Вычеркнем 3-ю строку из таблицы 1 и снова найдем наименьшее число. На этот раз оно равно 2 — это время наполнения 4-й бутылки. По нашим правилам отправляем 4-ю бутылку в начало очереди. Продолжая действовать так же, получим таблицу 1′.

Сколько будет работать линия при новом порядке? Составим, как обычно, таблицу 2′.

Максимальное число в ее 3-м столбце равно 44. Это и есть время работы линии. По сравнению со старым порядком мы выиграли 6 секунд.

Замечание: Переставим в таблице 1′ последние две строки (то есть поменяем 3-ю и 5-ю бутылки). Первые четыре строки в таблицах 1′ и 2′ при этом не изменятся, а последние две станут такими, как в таблицах 1″ и 2″ на странице 26.

Согласно утверждению 1 время работы линии будет по-прежнему равно 44 с. Таким образом, может случиться, что несколько различных порядков — «наилучшие». Утверждение 2 позволяет быстро найти один из них.

6. Доказательство утверждения 2

Выберем в таблице 3 какие-нибудь две строки, стоящие друг за другом, и поменяем их местами (см. табл. 6 и 6′).

Посмотрим, как изменится при этом таблица 4. Если мы переставим строки с номерами i и $(i+1)$, то при $k<i$ и при $k>i+1$ числа A_k и

Таблица 2′

2	$37+4=41$	$2+41=43$
$2+5=7$	$25+12=37$	$7+37=\boxed{44}$
$7+7=14$	$15+10=25$	$14+25=39$
$14+9=23$	$7+8=15$	$23+15=38$
$23+11=34$	$1+6=7$	$34+7=41$
$34+3=37$	1	$37+1=38$

Таблица 1″

3	3	1
5	11	6

Таблица 2″

23+3=26	6+1=7	26+7=33
26+11=37	6	37+6=43

Таблица 6

i	a	b
$i+1$	c	d

Таблица 6′

$i+1$	c	d
i	a	b

B_k не изменятся. Изменения произойдут только в строках с номерами i и $i+1$ (см. табл. 7 и 7′).

Тем самым

$$A_i+B_i=(A_{i-1}+B_{i+2})+a+b+d,$$
$$A'_i+B'_i=(A_{i-1}+B_{i+2})+b+c+d,$$
$$A_{i+1}+B_{i+1}=(A_{i-1}+B_{i+2})+a+c+d,$$
$$A'_{i+1}+B'_{i+2}=(A_{i-1}+B_{i+2})+a+b+c.$$

Обозначая $A_{i-1}+B_{i+2}$ через H и используя формулы для t и t' из п. 4, находим

$$\max(A_i+B_i,\quad A_{i+1}+B_{i+1})=H+t,$$
$$\max(A'_i+B'_i,\ A'_{i+1}+B'_{i+1})=H+t'.$$

Наибольшее из чисел A_k+B_k (при $k\neq i$ и $k\neq i+1$) обозначим через K. Время работы линии в двух сравниваемых между собой вариантах обозначим через T и через T'. Тогда, согласно утверждению 1,

$$T=\max\ (K,\ H+t),$$
$$T'=\max\ (K,\ H+t').$$

Ясно, что если $t\geqslant t'$, то $T\geqslant T'$*). В п. 4 мы доказали, что $t\geqslant t'$, если $\min\ (a,\ d)\geqslant\min\ (b,\ c)$.

Поэтому только что полученный результат можно сформулировать так:

Лемма. *Выберем в таблице 3 две произвольные соседние строки (см.*

*) Отметим, что если $t>t'$, то не обязательно $T>T'$. Может случиться, что $\max\ (K, H+t,\ H+t')=K$ и тогда $T=T'$ независимо от того, какое из чисел t и t' больше.

Таблица 7

$A_{i-1}+a=A_i$	$B_{i+1}+b=B_i$	A_i+B_i
$A_i+c=A_{i+1}$	$B_{i+2}+d=B_{i+1}$	$A_{i+1}+B_{i+1}$

Таблица 7′

$A'_{i-1}+c=A'_i$	$B'_{i+1}+d=B'_i$	$A'_i+B'_i$
$A'_i+a=A'_{i-1}$	$B'_{i+2}+b=B'_{i+1}$	$A'_{i+1}+B'_{i+1}$

табл. 6). *Если для них*

$$\min(a, d) \geqslant \min(b, c),$$

то эти строки можно переставить (*см. табл.* 6'), *и время работы линии при этом не увеличится.*

Отсюда уже следует утверждение 2 из п. 4. Докажем его.

Начнем с двух простых замечаний.

1) Порядок, к которому мы придем, применяя правила п. 4, не зависит от того, в каком порядке бутылки были расставлены первоначально. Поэтому достаточно доказать утверждение 2 в том случае, когда порядок, указанный в таблице 3, уже был «наилучшим» (точнее, одним из «наилучших» *).

2) Допустим, что, последовательно применяя правила п. 4, мы решили (на некотором шаге) передвинуть какую-то бутылку ближе к концу очереди: с i-го места на $(i+s)$-е. Тогда это можно сделать в s этапов: сначала переставить выбранную бутылку на $(i+1)$-е место, потом на $(i+2)$-е и т. д. То же верно и в случае, если мы должны передвинуть какую-то бутылку ближе к началу очереди: это также можно сделать в несколько этапов, меняя местами лишь рядом стоящие бутылки. Если убедиться, что на каждом этапе применима лемма, то тем самым будет доказано, что выполнение правил п. 4 не увеличивает времени работы линии. Согласно предыдущему замечанию только в этом и осталось убедиться, чтобы доказать утверждение 2.

Случаи, когда какая-то бутылка переносится в начало или в конец очереди, рассматриваются совершенно аналогично. Рассмотрим, например, второй из них.

Пусть по правилам п. 4 решено на некотором шаге перенести какую-то бутылку с i-го на $(i+s)$-е место, и пусть на этом шаге i-я и $(i+1)$-я строки задаются таблицей 6. Тогда число b является наименьшим среди чисел, обозначающих времена наполнения и закупоривания для всех бутылок, еще не расставленных к этому моменту на свои окончательные места. В частности, $b = \min(a, b, c, d)$. Тем самым, $\min(a, d) \geqslant \min(b, c)$. Значит, лемма применима. Точно так же доказывается, что она применима на любом этапе. Таким образом, доказательство полностью закончено.

*) См. замечание в конце п. 5.

Упражнения

1. В п. 3 мы подсчитали, что если порядок подачи бутылок на автоматическую линию задан, то время работы линии вычисляется за $3N-2$ сложения (где N — число бутылок). А сколько действий нужно произвести для определения «наилучшего» порядка?

Если называть «действием» выбор наименьшего числа в таблице из двух столбцов и произвольного числа строк, то потребуется N действий (см. утверждение 2 в п. 4). Пока N невелико, данное определение «действия» разумно,— например, можно считать, что при составлении таблицы 1' по таблице 1 в п. 5 мы действительно потратили N действий ($N=6$). При больших N нахождение наименьшего числа в таблице явно перестает быть элементарным актом, так что «действием» разумнее назвать *сравнение двух чисел* (и выбор меньшего из них). Сколько таких действий-сравнений требуется для определения наилучшего порядка?

2. Можно рассматривать «задачу о бутылках» не для двух, а для n автоматов. (В математической литературе решенная в заметке задача известна под названием «задача Джонсона для $n=2$».)

При $n>2$ (даже при $n=3$) эта задача до сих пор не решена. Во многом это объясняется следующим. При $n=2$ добавление $(N+1)$-й бутылки к N бутылкам, уже расположенным наилучшим образом, не влияет на взаимный порядок первых N бутылок. При $n>2$ это перестает быть верным: уже при $n=N=3$ можно так задать времена a_i, b_i, c_i ($i=1, 2, 3$) обработки трех бутылок тремя автоматами, что «в присутствии 3-й бутылки» 1-я бутылка должна подаваться на линию раньше 2-й, а «в отсутствие 3-й бутылки», наоборот, 2-я бутылка должна подаваться на линию раньше 1-й. Приведите пример, подтверждающий это.

3. Проверьте, что при $n=3$ бутылки, расставленные «наилучшим образом», подаются на каждый из автоматов в одном и том же порядке. При $n>3$ это уже не обязательно так: чтобы сделать время работы линии наименьшим, может иногда понадобиться отставить в сторону очередную бутылку, обработанную некоторым автоматом A, и на следующий автомат B подать ее уже после бутылки, которая выйдет из автомата A позже этой. Приведите соответствующий пример.

С корнем квадратным — сквозь историю

$\sqrt{2}=1.4142135623730950\,4$

Совокупность цифр — эта бескрайняя азбука весьма выразительного языка математики — вот уже тысячелетиями поражает воображение человечества. Традиция интереса к очень крупным числам восходит, по крайней мере, к Архимеду, который, решив определить, сколько песчинок может поместиться во Вселенной, разработал систему классов и порядков арифметических величин. Он даже предложил принципы, с помощью которых можно «придумывать» названия сколь угодно больших чисел.

Однако интерес к квадратному корню из двух, видимо, возник еще раньше. В собрании Вавилонских исторических ценностей, хранящемся в Йельском университете (Нью-Хейвен, штат Коннектикут), есть круглая глиняная табличка, относящаяся к 1750 г. до нашей эры. На ней изображен рассеченный диагоналями квадрат и четкими клинописными знаками выписаны три цифры (см. фотографию). Когда их прочли, стало ясно, что без малого четыре тысячи лет назад в Вавилоне умели определять диагональ квадрата по его стороне, умножая ее длину на квадратный корень из двух. Цифры на табличке как раз и представляют собой эту величину, выведенную с точностью до пятого знака: 1, 24, 51, 10. Ну что ж, это совсем неплохое приближение к истине, ведь $1+24/60+51/60^2+10/60^3=1{,}41421$.

Невольно хочется повторить: это подсчитано в XVIII веке до нашей эры!

За пять столетий до нашей эры школа Пифагора сделала одно из величайших математических открытий. Пифагорейцы пытались доказать, что любое число может быть выведено путем сложения, вычитания, умножения и деления положительных целых чисел. А корень квадратный из двух — число иррациональное и конечным числом таких операций не получается. Это и было обнаружено последователями Пифагора. Однако они любили всяческую секретность и «законспирировали» свое открытие на долгие годы.

Его доказательство впервые появилось в «Началах» Евклида около 300 г. до нашей эры. А затем примерно в 140 г. нашей эры Теону из Смирны удалось разработать интереснейший алгоритм вычисления корня квадратного из двух; этот алгоритм стал предтечей всей методики использования непрерывных дробей.

В XIX веке математик Дж. М. Бурман довел вычисление квадратного корня из двух до 486-го десятичного знака. Его победа, добытая «голыми руками», омрачается тем, что в 316-м знаке Бурман допустил ошибку, и далее его вычисление уже неверно.

В последнее время интерес к подобным операциям стал не только данью традиции. «Неупорядоченные» величины, вроде корня квадратного из двух, могут служить для моделирования случайно происходящих массовых явлений, например возникновения и исчезновения рыночного

На фотографии вы видите глиняную табличку, которой около четырех тысяч лет.

Она хранится в Вавилонской коллекции Йельского университета. На ней в шестидесятиричной системе счисления, принятой в Вавилоне, записан $\sqrt{2}$ с точностью до пятого знака.

спроса, характера движения машин на шоссе в часы «пик», числа телефонных вызовов в большой сети, для составления расписания прибытия самолетов. Все это входит в круг математической теории с прозаическим названием «теория массового обслуживания».

Математикам необходимо знать, появляются ли где-либо в этой величине $\sqrt{2}$ такие последовательности, как, например, 7, 7, 7, 7, 7 или 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Подобные события теория пока предсказать не в силах, так что приходится добиваться ответа эмпирически, путем приближения и приближения к истине. Поэтому с момента появления скоростных электронных вычислительных машин математики не жалели сил и довели вычисление $\sqrt{2}$ до стотысячного знака. Недавним достижением была титаническая работа сотрудника Отдела математических методов в инженерном деле при Колумбийском университете профессора Жака Дутки (Нью-Йорк). Он специально разработал совершенно новый алгоритм и подсчитал величину пресловутого корня до миллион восемьдесят второго десятичного знака! Это наиболее длинная из всех вычисленных величин за всю историю математики.

Хотя алгоритм профессора Дутки и рассчитан на эффективное и быстрое вычисление, мощная ЭВМ «ИБМ 360-91» потратила на эту работу сорок семь с половиной часов машинного времени. А ведь обычно решение даже сравнительно сложных задач отнимает у современной ЭВМ если не секунды, то лишь минуту. К этому нужно добавить сотни часов, ушедших у группы специалистов, составлявших программу для вычислений. В напечатанном виде результат работы Дутки занимает книгу в двести одну страницу сжатого текста — 5000 десятичных знаков на каждой странице.

Теперь Дутка и его сотрудники намерены заняться числами π — отношением длины окружности к диаметру — и e — основанием натурального логарифма. Эти «орешки» будут еще труднее, чем корень квадратный из двух, но к π математики испытывают прямо-таки «историческую нежность», а e — одна из важнейших констант во всей системе исчисления, во всей высшей математике.

(The Sciences, Aug — Sept, 1971, с. 25 — 26, *перевод и переработка Б. И. Силкина*)

А. А. Егоров

Площадь под гиперболой, логарифм и экспонента

1. Введение. Определение логарифма

Показательная функция $x \to a^x$ изучается в школе после нескольких обобщений операции возвышения в степень: сначала определяются степени с натуральным показателем, затем с рациональным и, наконец, с иррациональным показателем. Логарифм определяется затем как функция, обратная показательной.

Мы поступим иначе: начнем сразу с определения логарифма, а потом перейдем к обратной функции — «экспоненте». Определение, которое мы сейчас дадим, позволит наглядно изучить основные свойства этих функций и получить оценки, особенно важные для физических приложений, а также продемонстрировать один из часто встречающихся в математике способов построения новых функций по уже известным.

Такой известной функцией послужит нам функция $x \to \frac{1}{x}$, график которой $y = \frac{1}{x}$ — знакомая вам гипербола.

Определение. Пусть b — положительное число. Обозначим через $\ln b$ число, модуль которого равен площади фигуры, ограниченной графиком функции $y = \frac{1}{x}$, осью абсцисс $y = 0$ и прямыми $x = 1$ и $x = b$, а знак — плюс, если $b > 1$ (рис. 1, *а*), и минус, если $b < 1$ (рис. 1, *б*); если $b = 1$, то $\ln b = 0$. Функция $b \to \ln b$ называется *натуральным логарифмом*.

Мы увидим скоро, что $\ln b$ действительно есть логарифм числа b по основанию e, где $e = 2{,}71828\ldots$ — замечательная математическая константа, о которой уже рассказывалось в «Кванте» (см. статью Л. Г. Лиманова «О числе e и $n!$» в № 5 за 1972 г.).

Для тех, кто знаком с понятием интеграла (например, по статье Ю. И. Ионина в «Кванте» № 9), наше определение логарифма можно сформулировать так:

$$\ln b = \begin{cases} \int\limits_1^b \frac{1}{x}\,dx, & \text{если } b > 1, \\ 0, & \text{если } b = 1, \\ -\int\limits_b^1 \frac{1}{x}\,dx, & \text{если } 0 < b < 1. \end{cases}$$

Мы будем иногда ссылаться на статьи «О числе e» и «Интеграл», но лишь для сопоставления: предварительного знакомства с ними от читателя не требуется. Читателю, который хотел бы детально и строго проследить за всеми рассуждениями и решить задачи (а в них заключена значительная часть содержания статьи), потребуется знание основных свойств действительных чисел *). Однако ста-

*) См., например, пробный учебник Б. Е. Вейца и И. Т. Демидова «Алгебра и начала анализа», 9 класс, М., «Просвещение», 1969.

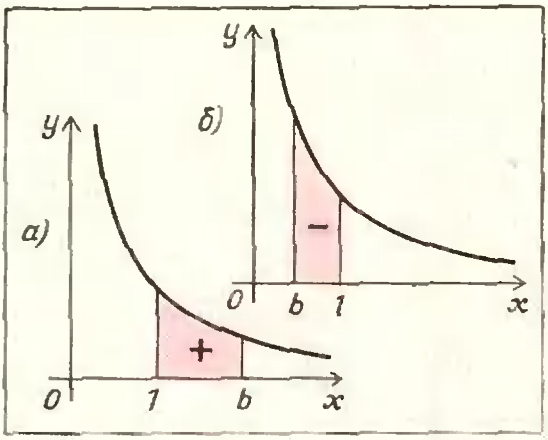


Рис. 1.

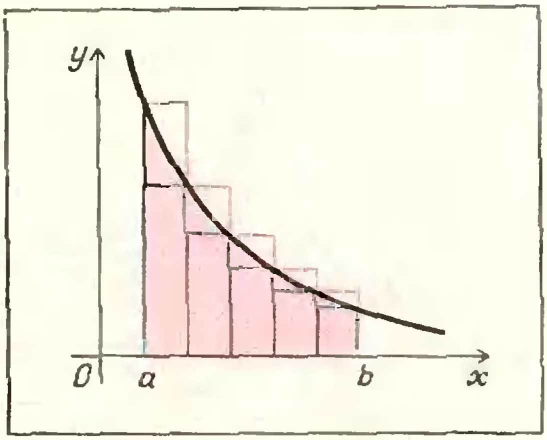


Рис. 2.

тья написана по возможности так, чтобы основные факты, касающиеся свойств логарифма и экспоненты, можно *было понять, пользуясь лишь* наивными представлениями о действительных числах, непрерывности, пределе и т. п., не вникая в тонкости, связанные со строгими определениями этих понятий.

2. Площадь

Одно из понятий, которое следовало бы строго определить, — это понятие площади. Действительно, нужно объяснить, что мы понимаем под площадью «криволинейной трапеции» (см. рис. 1). Ведь в школе речь идет только о площадях многоугольника, круга и его частей, а наша трапеция с одного бока ограничена гиперболой.

Здесь мы ограничимся замечанием, что площадь — это функция, которую можно определить на достаточно широком классе фигур (в этот класс включаются и многоугольники, и все выпуклые ограниченные фигуры, и наша «трапеция») так, чтобы выполнялись условия:

1) площадь любой фигуры — число неотрицательное;

2) площади равных (конгруэнтных) фигур равны;

3) если фигуру разрезать на две части, для каждой из которых площадь определена, то сумма этих площадей равна площади всей фигуры;

4) площадь прямоугольника со сторонами a и b равна ab.

Описывать класс фигур, для которых можно *определить такую функцию* S, мы не будем, но докажем, что условиями 1—4 площадь S «криволинейной трапеции» $a \leqslant x \leqslant b$; $0 \leqslant y \leqslant \leqslant \frac{1}{x}$ (рис. 2) определяется однозначно.

Для этого разделим отрезок $[a, b]$ на n равных частей и построим две «лестницы» — ступенчатые фигуры, состоящие из прямоугольников с основаниями $\frac{b-a}{n}$ на оси Ox, из которых одна содержит нашу криволинейную трапецию, а другая содержится в ней (рис. 2). Пусть S_n' и S_n'' — площади этих «лестниц» *). Ясно, что $S_n' < S < S_n''$. С другой стороны, ясно, что

$$S_n'' - S_n' = \frac{b-a}{n}\left(a^{-1} - b^{-1}\right),$$

то есть при достаточно большом n разность между S_n'' и S_n' может быть сделана сколь угодно малой. Поэтому существует только одно число S, заключенное между S_n' и S_n'' при всех n (отсюда следует также, что обе последовательности S_n' и S_n'' с ростом n приближаются к S, то есть, что S является их общим пределом).

*) Эти площади мы умеем определять с помощью условий 3 и 4.

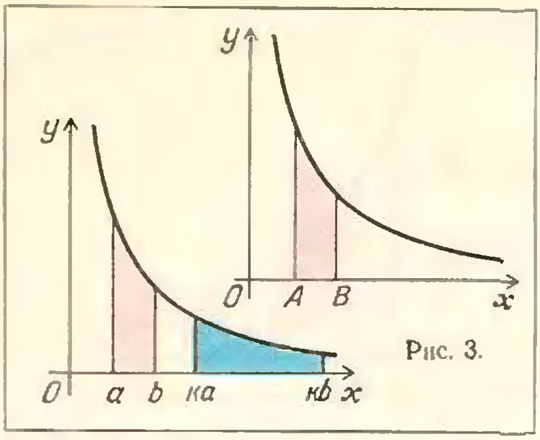


Рис. 3.

Рис. 4.

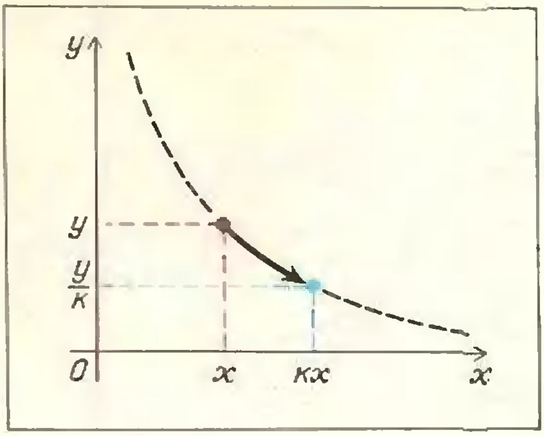


Рис. 5.

Итак, определение площади «трапеции» под гиперболой, а с ним и определение функции $y = \ln x$ уточнено.

Теперь мы выведем основное свойство натурального логарифма.

3. Основное свойство натурального логарифма

Это свойство выражается формулой

$$\ln x_1x_2 = \ln x_1 + \ln x_2 \qquad (1)$$
$$(\text{при } x_1 > 0 \text{ и } x_2 > 0)$$

и означает, что натуральный логарифм произведения равен сумме натуральных логарифмов сомножителей.

Прежде чем доказывать формулу (1), установим одно важное свойство криволинейных трапеций для функции $y = \frac{1}{x}$.

Обозначим через $S\,[A,\ B]$ площадь криволинейной трапеции с вершинами A, B (рис. 3). Тогда, если $b > a > 0$ и k — произвольное положительное число, то (рис. 4)

$$S\,[a,\ b] = S\,[ka,\ kb]. \qquad (2)$$

Для доказательства рассмотрим преобразование плоскости, состоящее в растяжении в k раз от оси Oy и в сжатии в k раз к оси Ox, то есть преобразование, переводящее точку $(x,\ y)$ в точку $\left(kx,\ \frac{y}{k}\right)$ (рис. 5). Легко видеть, что это преобразование переводит красную трапецию в голубую (рис. 4). В самом деле, если точка $(x,\ y)$ принадлежит красной трапеции, то $a \leqslant x \leqslant b$ и $0 \leqslant xy \leqslant 1$, но тогда $ka \leqslant kx \leqslant kb$ и $0 \leqslant (kx)\cdot\frac{y}{k} \leqslant 1$, то есть точка $\left(kx,\ \frac{y}{k}\right)$ принадлежит голубой трапеции. Наоборот, если $\left(kx,\ \frac{y}{k}\right)$ — некоторая точка голубой трапеции, то $(x,\ y)$ — точка красной.

Заметим теперь, что при нашем преобразовании площадь любой фигуры не меняется. Действительно, так как не меняются площади прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат (основания таких прямоугольников умножаются на k, а высоты — на $\frac{1}{k}$), то не меняются и площади ступенчатых фигур, вписанных в криволинейные трапеции, и, следовательно, площади самих криволинейных трапеций.

Итак, $S\,[a,\ b] = S\,[ka,\ kb]$ *).

Далее, вы без труда докажете, что $S\,[a,\ b] = \ln b - \ln a$ (рис. 6). Но

*) Те, кто читали статью про интеграл, конечно, заметили, что это равенство сразу проверяется с помощью «изменения масштаба» по x:

$$\int\limits_a^b \frac{1}{x}\,dx = \int\limits_{ka}^{kb} \frac{1}{x}\,dx.$$

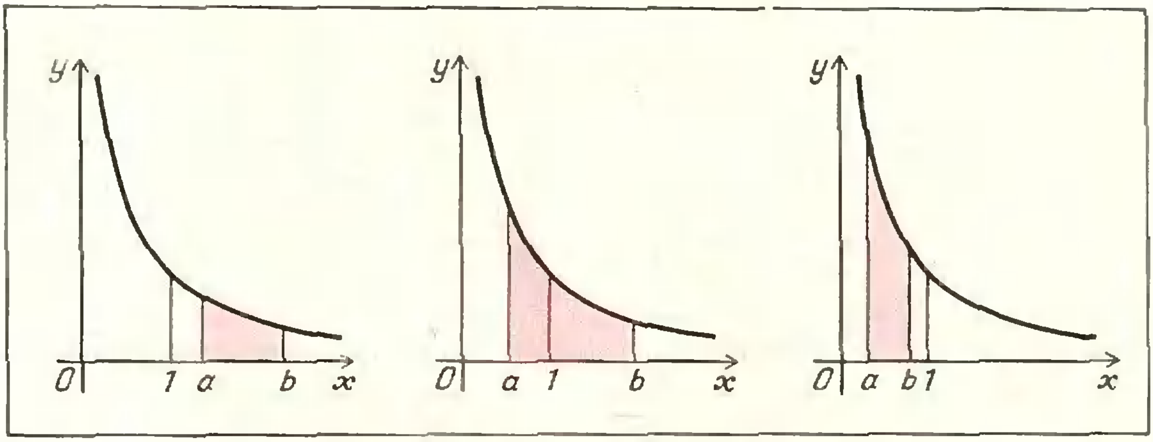


Рис. 6.

тогда

$$\ln b - \ln a = \ln kb - \ln ka. \qquad (2')$$

Хотя пока эта формула доказана лишь при $b > a$, она справедлива для любых положительных a и b: ведь при $a > b$ верно равенство

$$\ln a - \ln b = \ln ka - \ln kb,$$

равносильное (2′).

Основное свойство логарифмов сразу получается из (2′). Достаточно положить $b = x_2$, $a = 1$, $k = x_1$. В частности, при $x_2 = x_1^{-1} = x$ получаем

$$\ln x = -\ln \frac{1}{x}. \qquad (3)$$

Из основного свойства (1) легко выводятся следующие формулы:

$$\ln x_1 x_2 \ldots x_n = \ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n, \qquad (4)$$

$$\ln \frac{x_1}{x_2} = \ln x_1 - \ln x_2. \qquad (5)$$

Они понадобятся нам в дальнейшем.

4. График функции $x \to \ln x$

Формула (1) позволяет уточнить поведение функции $y = \ln x$. Прежде всего убедимся в том, что $\ln x$ неограниченно возрастает при возрастании x. Действительно, так как $\ln 2 > 0$ и в силу (4) $\ln 2^n = \ln (2 \cdot 2 \cdot \ldots 2) = \ln 2 + \ln 2 + \ln 2 + \ldots + \ln 2 = n \ln 2$, то $\ln 2^n$ при увеличении n возрастает неограниченно, а это и означает неограниченное возрастание функции $y = \ln x$ (в самом деле, $\ln x > n \ln 2$ при $x > 2^n$ — монотонное возрастание функции $\ln x$ вы без труда докажете сами).

Исследуем теперь поведение логарифма при x, близких к 0. Так как

$$\ln \frac{1}{2^n} = -\ln 2^n = -n \ln 2,$$

то при $0 < x < \frac{1}{2^n}$ получаем $\ln x < -n \ln 2$, то есть при достаточно малых x значение логарифма может быть сделано сколько угодно большим по модулю отрицательным числом.

Теперь мы можем нарисовать примерный график $y = \ln x$ (рис. 7).

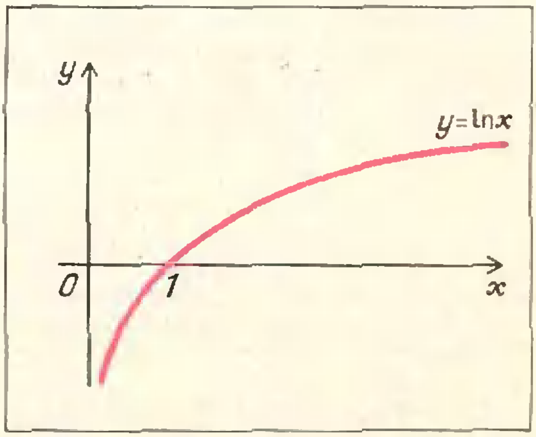


Рис. 7.

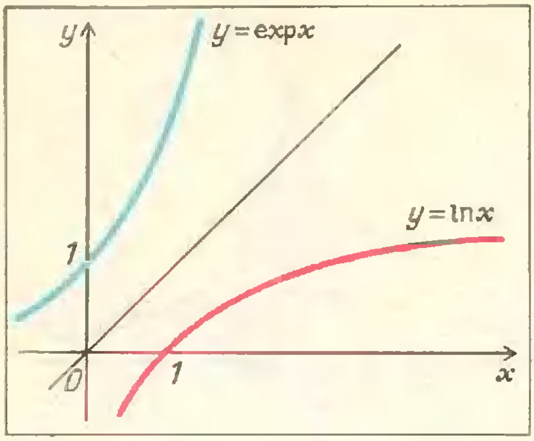


Рис. 8.

5. Экспонента

Можно доказать, что функция, изученная нами в предыдущих параграфах, принимает все действительные значения *). При этом каждое значение принимается, конечно, ровно один раз, то есть при любом x уравнение $\ln y = x$ имеет единственное решение. Для числа y, являющегося решением этого уравнения, принято обозначение

$$y = \exp x.$$

Получившаяся новая функция $x \to \exp x$, обратная к функции $x \to \ln x$, называется экспонентой.

Заметим, что по определению экспоненты справедливо равенство

$$\exp(\ln x) = \ln(\exp x) = x. \qquad (6)$$

График $y = \exp x$ симметричен графику $y = \ln x$ относительно прямой $y = x$. В самом деле, поскольку $y = \exp x$ равносильно $\ln y = x$, то график экспоненты получается из графика логарифма преобразованием плоскости, при котором точка (x, y) переходит в точку (y, x), а это преобразование — симметрия относительно прямой $y = x$ (рис. 8 **)).

*) Мы не будем этого доказывать, но заметим, что это почти очевидно «из соображений непрерывности». Строгое доказательство этого факта можно провести примерно так же, как доказательство существования $\sqrt{a}$ для любого $a \geqslant 0$.

**) Для того чтобы убедиться в правильности этого рисунка, вам следует доказать, что $\ln x < x$ при всех $x > 0$.

Таким образом, экспонента — возрастающая функция, определенная на всей числовой прямой $-\infty < x < +\infty$ и принимающая положительные значения. Кроме того, экспонента принимает сколь угодно большие значения при неограниченном возрастании x и стремится к нулю при x, стремящемся к $-\infty$.

6. Основное свойство экспоненты

Это свойство выражается следующей формулой:

$$\exp(x_1 + x_2) = \exp x_1 \cdot \exp x_2. \quad (7)$$

Для его доказательства воспользуемся основным свойством натурального логарифма и соотношением (6). Так как $\ln y_1 y_2 = \ln y_1 + \ln y_2$, то для $y_1 = \exp x_1$ и $y_2 = \exp x_2$ получаем $\ln y_1 y_2 = x_1 + x_2$, то есть $y_1 \cdot y_2 = \exp(x_1 + x_2)$ или $\exp x_1 \cdot \exp x_2 = \exp(x_1 + x_2)$.

Из основного свойства exp (или из соответствующих свойств функции ln) легко вывести, что

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$$

и

$$\exp(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \exp x_1 \cdot \exp x_2 \ldots \cdot \exp x_n.$$

Обозначим число $\exp 1$ через e. Другими словами, e — это решение уравнения $\ln e = 1$.

Пользуясь основным свойством экспоненты, мы докажем, что для рациональных $x = \frac{m}{n}$ $\exp x = e^x$.

Прежде всего при натуральном m

$$\exp m = \exp(1 + 1 + \ldots + 1) = \exp 1 \cdot \exp 1 \cdot \ldots \cdot \exp 1 = e^m$$

и $\exp(-m) = \frac{1}{\exp m} = \frac{1}{e^m} = e^{-m}$.

Итак, $\exp m = e^m$ при любом целом m.

Кроме того, при натуральном n

$$\left(\exp\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \exp 1 = e,$$

то есть

$$\exp\frac{1}{n}=\sqrt[n]{e}.$$

Для произвольного рационального $x=\frac{m}{n}$ (где $n>0$, m и n — целые) получаем

$$\exp\frac{m}{n}=\left(\exp\frac{1}{n}\right)^m=\left(\sqrt[n]{e}\right)^m=e^{\frac{m}{n}},$$

то есть $\exp x=e^x$ при любом рациональном x.

Если же α — иррациональное число, то формулу $e^\alpha=\exp\alpha$ удобнее всего считать определением степени числа e с показателем α.

Таким образом, для всех x

$$\exp x=e^x. \qquad (8)$$

Из последнего равенства и соотношения (6) следует, что логарифм данного положительного числа x — это показатель степени, в которую нужно возвести число e, чтобы получить число x:

$$e^{\ln x}=\exp\ln x=x.$$

7. Показательные функции и логарифмы с произвольным основанием

Теперь мы можем определить $y=a^x$ при любом $a>0$, $a\neq 1$, и любом x, положив

$$a^x=\exp(x\ln a)=e^{x\ln a},$$

а также логарифм числа $x>0$ по основанию a, положив

$$\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}.$$

Легко убедиться в том, что для этих функций выполнены те же основные свойства:

$$a^{x_1+x_2}=a^{x_1}\cdot a^{x_2},$$

$$\log_a x_1x_2=\log_a x_1+\log_a x_2$$

(при $x_1>0$, $x_2>0$) и

$$a^{\log_a x}=x.$$

Мы предлагаем читателю самостоятельно убедиться в том, что эти определения совпадают с традиционными. Но в дальнейшем мы будем заниматься такими свойствами логарифмов и экспоненты, где существенно, что в роли основания берется именно число e, а не какое-то другое.

8. Скорость изменения показательной функции и логарифма

До сих пор мы говорили о свойствах логарифмов и показательных функций, которые известны из школьного курса. Сейчас речь пойдет о таких свойствах, которые связаны со скоростью изменения этих функций и которые особенно важны для приложений в физике.

Начнем с некоторых определений. Приращением Δf функции $x\to f(x)$ на отрезке $[x_0, x_1]$ называется разность $\Delta f=f(x_1)-f(x_0)$, приращением аргумента — разность $\Delta x=x_1-x_0$. Отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ естественно называть *средней скоростью* изменения функции $x\to f(x)$ на отрезке $[x_0, x_1]$ (если x — время, а $f(x)$ — путь, пройденный движущимся телом к моменту x, то $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ — средняя скорость движения за промежуток времени от x_0 до x_1). Пусть теперь x_0 фиксировано, а x_1 приближается к x_0. Если при этом отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ стремится к некоторому пределу, то это предельное значение — «мгновенная скорость» изменения функции в точке x_0 — называется *производной* функции $x\to f(x)$ в точке x_0 и обозначается через $f'(x_0)$. Значение производной характеризует поведение функции вблизи точки x_0.

Производная имеет наглядный геометрический смысл. Пусть M_0 — точка графика $y=f(x)$, соответствующая $x=x_0$, то есть точка с координатами $(x_0, f(x_0))$, M_1 — точка $(x_1, f(x_1))$. Проведем прямую M_0M_1. Угловой коэффициент этой прямой, то

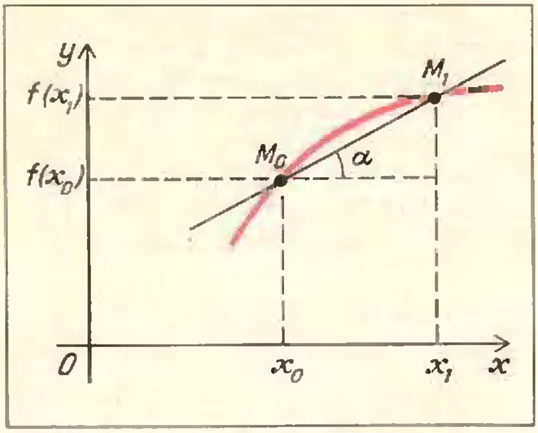


Рис. 9.

есть тангенс угла ее наклона к оси Ox равен (рис. 9)

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}.$$

Когда точка x_1 приближается к x_0, секущая стремится к предельному положению — к *касательной*, проведенной к кривой $y=f(x)$ в точке x_0. Таким образом, значение производной при $x=x_0$ равно угловому коэффициенту касательной к графику в точке $(x_0, f(x_0))$.

Попробуем вычислить «мгновенную» скорость изменения для функции $f(x)=\ln x$. Ее приращение на отрезке $[x_0, x_1]$ равно

$$\ln x_1-\ln x_0=\ln\frac{x_1}{x_0}=$$
$$=\ln\left(1+\frac{x_1-x_0}{x_0}\right),$$

поэтому

$$\frac{\ln x_1-\ln x_0}{x_1-x_0}=\frac{1}{x_0}\cdot\frac{\ln(1+h)}{h},\qquad(9)$$

где

$$h=\frac{x_1-x_0}{x_0}.$$

Когда x_1 стремится к x_0, величина h стремится к 0. Таким образом, остается выяснить, как ведет себя отношение $\frac{\ln(1+h)}{h}$ при малых h.

Из нашего определения логарифма, как мы вскоре увидим, легко получаются оценки, из которых следует, что при приближении h к нулю величина $\frac{\ln(1+h)}{h}$ приближается к 1, то есть

$$\ln(1+h)\approx h \text{ (при малых } h). \qquad (10)$$

Эту очень важную для приближенных расчетов формулу можно переписать еще так:

$$\exp h\approx 1+h \text{ (при малых } h). \qquad (11)$$

Отсюда мы выведем основные формулы для скорости изменения логарифма и экспоненты:

$$(\ln x)'=\frac{1}{x} \qquad (12)$$

и

$$(\exp x)'=\exp x. \qquad (13)$$

9. Оценки натурального логарифма вблизи единицы

Вот одно из основных свойств логарифма:

$$\left|x-\frac{x^2}{x+1}\right|=\left|\frac{x}{x+1}\right|<$$
$$<|\ln(1+x)|<|x|. \qquad (14)$$

Для доказательства этих неравенств при $x>0$ достаточно сравнить площадь криволинейной трапеции $ABCD$ с площадями двух прямоугольников $AD'CB$ и $ADC'B$ (рис. 10). Действительно, площадь криволинейной трапеции равна $\ln(1+x)$, площадь $AD'CB$ равна

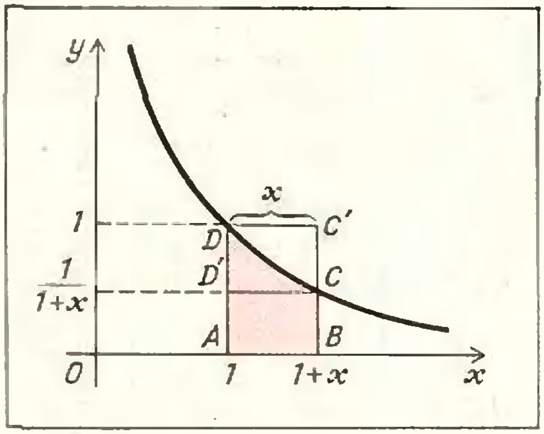


Рис. 10

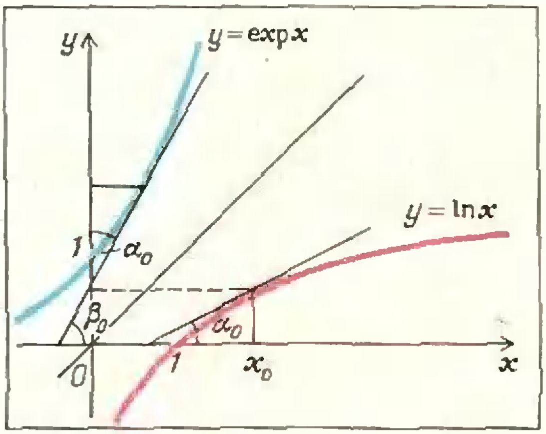


Рис. 11.

$AB \cdot BC = x \cdot \frac{1}{x+1}$, площадь $ADC'B$ равна $AB \cdot AD = x \cdot 1 = x$.

При $-1 < x < 0$ доказательство проведите сами.

Неравенства (14) позволяют оценить среднюю скорость изменения логарифма (9) так ($x_1 > x_0$):

$$\frac{1}{x_1} < \frac{\ln x_1 - \ln x_0}{x_1 - x_0} =$$

$$= \frac{\ln\left(1 + \frac{x_1 - x_0}{x_0}\right)}{x_1 - x_0} < \frac{1}{x_0}.$$

Поэтому при x_1, стремящемся к x_0, средняя скорость стремится к $\frac{1}{x_0}$. Тем самым формула (12) для производной логарифма доказана. Итак, мы доказали существование касательной к графику функции $y = \ln x$ в каждой его точке и обнаружили, что при $x = x_0$ тангенс угла наклона касательной равен $\frac{1}{x_0}$.

Для нахождения углового коэффициента касательной к графику экспоненты воспользуемся тем, что этот график получается из графика логарифма симметрией относительно прямой $y = x$. Из рисунка 11 видно, что $\alpha_0 + \beta_0 = \frac{\pi}{2}$, а так как α_0 — угол наклона касательной к графику логарифма в точке x_0, y_0, то $\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{1}{x_0}$.

Окончательно получаем

$$\operatorname{tg}\beta_0 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_0\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_0} = x_0 = e^{y_0},$$

то есть угловой коэффициент касательной к графику экспоненты при любом x равен значению экспоненты в точке x. Тем самым мы доказали и формулу (13).

Подчеркнем, что обе эти формулы справедливы именно для натуральных логарифмов и показательной функции с основанием e. *Для других* показательных функций скорость изменения в точке не равна, а лишь пропорциональна значению в точке x_0 (см. задачу 8).

Вернемся еще раз к неравенству (14). Из него сразу же вытекают приближенное равенство (10) и эквивалентное ему (11): ведь при $|x| \ll 1$ величина x^2 значительно меньше x (например, при $|h| < 0{,}1$ относительная погрешность формул (10) и (11) не превышает 1%, то есть отношение левой части к правой отличается от 1 не более чем на одну сотую).

Из этого же неравенства (14) нетрудно вывести замечательную формулу для числа e:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

и более общую формулу для экспоненты

$$\exp x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad (15)$$

(см. задачу 1); другое доказательство этих формул было приведено в статье *«О числе e и $n!$»*.

10. Разложение экспоненты в ряд

Формула (15) предыдущего пункта неудобна для вычислений, так как для обеспечения достаточной точности приходится брать очень большие значения n.

Здесь мы выведем другое выражение для экспоненты, представив ее в виде суммы бесконечного ряда слагаемых

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{x^k}{1\cdot 2\ldots k} + \ldots \qquad (16)$$

подобно тому, как бесконечная геометрическая прогрессия $1 + x + x^2 + \ldots$ представляет при $|x| < 1$ функцию $y = \frac{1}{1-x}$.

Такое представление удобно по двум причинам. Во-первых, для вычисления экспоненты с высокой точностью (например, при составлении таблиц) по формуле $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ хватает сравнительно небольшого числа слагаемых и, во-вторых, это разложение позволяет глубже изучить экспоненту (например, доказать иррациональность числа e (см. задачи 11, 12).

Мы ограничимся доказательством формулы (16) при $x > 0$.

Итак, пусть $T_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ и $S_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$. Мы должны доказать, что

$$\lim S_n(x) = \exp x.$$

По формуле бинома получаем

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,\frac{x^2}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\,\frac{x^k}{n^k} + \ldots + \frac{x^n}{n^n} = 1 + x + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}x^k + \ldots + \frac{x^n}{n^n}.$$

Числа, стоящие в правой части этого равенства в круглых скобках, все меньше единицы. Если их заменить единицами, то правая часть увеличится, так что

$$T_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < S_n(x) \qquad (17)$$

С другой стороны, отбрасывая в правой части неравенства все слагаемые, кроме k первых, получим

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n > 1 + x + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2!} + \ldots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{x^k}{k!}.$$

При k постоянном и n, стремящемся к ∞, правая часть этого неравенства стремится к $S_k(x)$, поскольку каждый из сомножителей в круглых скобках стремится к 1, а так как $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ стремится к $\exp x$, то

$$\exp x > S_k(x)$$

при любом k, то есть последовательность $S_k(x)$ ограничена, и (при $x > 0$) возрастает. Следовательно, она имеет предел, причем

$$\lim_{k\to\infty} S_k(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots \leqslant \exp x.$$

Кроме того, из неравенства (17) получаем, переходя к пределу при n, стремящемуся к ∞, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) \geqslant \exp x.$$

Итак,

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Задачи

1. а) Докажите неравенства

$$\left|\frac{nx}{n+x}\right| < \left|n\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right| < |x|$$

($x > -n$; n — натуральное).

б) Выведите из этих неравенств формулу

$$\exp x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

2. Найдите пределы: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}$; г) $\lim\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

3. Найдите площади криволинейных трапеций для функций $y=a^x$ и $y=\log_a x$.

4. Найдите пределы: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+x}+\frac{1}{n+2x}+\dots+\frac{1}{n+nx}\right)$.

5. Докажите, что

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}<\ln n<1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}.$$

6. Докажите, что последовательность

$$c_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)$$ имеет предел.

7. Докажите, что $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots=\ln 2$.

8. Найдите угловые коэффициенты касательных к кривым $y=a^x$ и $y=\log_a x$.

9. Найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1).$$

10. Используя геометрическое определение логарифма, докажите при $x>0$ неравенства $\frac{2x}{2+x}<\ln(1+x)<\frac{x(x+2)}{2(x+1)}$, выведите отсюда, что

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+x^3.$$

11. Докажите, что $0<e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\dots+\frac{x^n}{n!}\right)<\frac{x^ne^x}{(n+1)!}$ при $x>0$.

12. Пользуясь неравенствами предыдущей задачи, докажите, что число e а) иррационально; б) не является корнем никакого квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ с целыми коэффициентами ($a>0$).

Задачи

1. На плоскости нарисован треугольник ABC и проведены две пересекающиеся прямые. Точки P и Q движутся равномерно по этим прямым, причем точку пересечения прямых они проходят не одновременно. В каждый момент времени строится точка R такая, что треугольник PQR подобен треугольнику ABC, причем преобразование подобия сохраняет ориентацию треугольника.

Найти геометрическое место точек R.

2. Обозначим через $\varphi(n)$ количество натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n.

Выразить через $\varphi(n)$ количество правильных звездчатых многоугольников (то есть самопересекающихся многоугольников, все стороны которых равны и все углы равны).

3. Точка P лежит на окружности, описанной вокруг правильного $(2n+1)$-угольника, причем P лежит между вершинами A_1 и A_{2n+1}.

Доказать, что сумма расстояний от точки P до вершин с нечетными индексами равна сумме расстояний от нее до вершины с четными индексами.

4. В треугольниках ABC и DEF дано, что $AB=DE$, $AC=DF$ и $\angle BAC>\angle EDF$. Доказать, что $\angle ABC$ меньше, равен или больше, чем $\angle DEF$, в зависимости от того, будет ли сумма $\angle ACB+\angle DFE$ меньше, равна или больше $180°$.

5. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Доказать, что если $BO=OD$ и $AB+BC=AD+DC$, то этот четырехугольник или является параллелограммом, или симметричен относительно диагонали AC.

А. А. Варламов,
Д. В. Казаковцев

Выращивание кристаллов

В этой статье рассказывается о работе, проделанной в Киевском Доме пионеров Андреем Варламовым и Дмитрием Казаковцевым, когда они учились в 9 классе школы № 145 г. Киева.
Предлагаем вам самостоятельно проделать описанные опыты. Тем, кто заинтересуется выращиванием кристаллов, можем порекомендовать прочитать статью М. О. Кдня «Как вырастить кристалл» («Квант» № 5, 1970).

На рисунке 1 вы видите фотографию кристалла, выросшего в естественных условиях. Этот кристалл состоит из мелких кристалликов пирита и кальцида. Многие кристаллы имеют довольно причудливую форму. В природе кристаллы растут на протяжении миллионов лет. А нельзя ли ускорить этот процесс? Оказывается, можно. Промышленность уже давно снабжает технику искусственными кристаллами. Тем интереснее получить их самостоятельно. Именно такую задачу мы и поставили перед собой.

Теорию роста кристаллов мы излагать не будем, с ней можно ознакомиться по статье Р. Фуллмана «Рост кристаллов» («Квант № 6, 1971). Перейдем сразу к обзору методов выращивания монокристаллов.

Самый простой, но очень важный метод — выращивание кристаллов из растворов. К нему относится, в первую очередь, выращивание кристаллов путем постепенного снижения температуры раствора. Этот метод основан на свойстве многих кристаллических веществ изменять свою растворимость с изменением температуры. Он хорош тем, что не требует сложной аппаратуры и позволяет выращивать кристаллы очень многих веществ. Однако он пригоден только для хорошо растворимых соединений. При выращивании кристаллов малорастворимых веществ нужна громоздкая установка, чтобы вместить достаточное количество раствора.

Другой способ — испарение растворителя. При этом создается небольшое пересыщение раствора, за счет которого и идет кристаллизация. Одним из недостатков этого способа является появление кристаллов-паразитов там, где стенки сосуда граничат с поверхностью испаряющегося раствора. Но этот способ очень прост и потому широко используется. Подливая по мере испарения новые порции насыщенного раствора, можно вырастить и кристаллы малорастворимых соединений.

Интересен способ, предназначенный для выращивания кристаллов труднорастворимых соединений в том случае, если существуют два хорошо растворимых компонента, дающих в результате реакции интересующее нас вещество. Оба компонента растворяют в отдельных сосудах. Затем при непрерывном размешивании раствор одного из них при помощи бюретки вводится по каплям в раствор второго. Образующегося при реакции пересыщения достаточно для кристаллизации нужного нам вещества.

Мы выбрали самый простой способ — испарение растворителя. Установка представляла собой сосуд из органического стекла емкостью около 750 *мл*. В него налито примерно 600 *мл* насыщенного раствора медного купороса. По мере испарения в сосуд подливались новые порции раствора. Верхнюю часть стенок мы смазали тонким слоем вазелинового масла. Поэтому стенки не смачивались раствором, и кристаллы-паразиты на них почти не появлялись.

Первоначально из поликристаллической массы медного купороса мы отобрали семь кристалликов более или менее правильной формы. Каждый был опущен на тонкой (0,15 *мм*) лесе в сосуд с насыщенным раствором медного купороса. По мере роста удалялись неудачные кристаллы, обросшие паразитами и потерявшие типичную для монокристаллов медного купороса форму. Через две недели осталось только три лучших кристалла, а через месяц — всего один. Он был уже довольно велик, поэтому линейный рост его замедлился из-за большой поверхности кристаллизации. Вместо обычного в таких случаях перемешивания раствора мы решили вращать сам кристалл. Для этого подвесили его на лесе (длиной около 0,7 *м*), конец которой укрепили на оси микродвигателя. За 10—12 секунд работы двигателя леса закручивалась настолько, что после закрепления оси обеспечивала медленное вращение монокристалла в течение примерно получаса. Пожалуй, проще было бы просто перемешивать раствор вращающейся от микроэлектродвигателя мешалкой. В течение всего времени эксперимента сосуд был прикрыт целлофаном, чтобы в него не попадала пыль.

Несколько необычно мы получили второй кристалл. Во время более интенсивного испарения (при понижении относительной влажности и повышении температуры) возникало большое пересыщение. Пока сам кристалл был мал, его рост не мог скомпенсировать испарение. Поэтому на неровностях лесы начинали расти кристаллы-паразиты. Один из них нам так понравился, что мы вырастили его отдельно. В этом случае не было затравки, внесенной в раствор извне, весь кристалл был выращен в нашем растворе. Полученный кристалл имел более правильную форму, так как он был свободен от дефектов затравки.

Рис. 1.

Рис. 2. Искусственно выращенный кристалл галида (каменной соли).

Задачник «Кванта»

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 30 августа 1973 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М206, М207» или « . . . Ф218».
Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Оригинальные задачи, предлагаемые для публикации, присылайте вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «. . . новая задача по математике»). Задачи из разных номеров журнала присылайте в разных конвертах.
В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений).
Задачи повышенной трудности отмечены звездочкой.
После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Задачи

М206-М210, Ф218-Ф222

М206. Дана бесконечная последовательность цифр. Докажите, что для любого натурального числа n, взаимно простого с числом 10, в последовательности можно указать такую группу стоящих подряд цифр, что записываемое этими цифрами число делится на n.

В. Уфнаровский

М207. Даны два треугольника $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$. Опишите вокруг треугольника $A_1A_2A_3$ треугольник $M_1M_2M_3$ наибольшей площади, подобный треугольнику $B_1B_2B_3$ (при этом вершина A_1 должна лежать на прямой M_2M_3, вершина A_2 — на прямой M_3M_1, вершина A_3 — на прямой M_1M_2).

Н. Д. Нагаев

М208. Известно, что разность между наибольшим и наименьшим из вещественных чисел

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{10}$$

равна 1. Какой

а) наибольшей,

б) наименьшей

может быть разность между наибольшим и наименьшим из 10 чисел

$$x_1,\ \frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \ldots;\ \frac{x_1+x_2+\ldots+x_{10}}{10}?$$

Каков будет ответ, если чисел не 10, а n?

В. Б. Пеллер

М209. Для любого треугольника ABC можно вычислить такую сумму:

$S = \mathrm{tg}^2\, A/2 + \mathrm{tg}^2\, B/2 + \mathrm{tg}^2\, C/2.$

Докажите, что

а) $S < 2$ для всех остроугольных и прямоугольных треугольников;

б) $S > 2$ для тупоугольных треугольников с тупым углом, большим $2\ \mathrm{arctg}\ {}^4/_3$;

в) среди треугольников с тупым углом φ таким, что $\frac{\pi}{2} < \varphi < 2\mathrm{arctg}\,\frac{4}{3}$, имеются и такие, что $S > 2$, и такие, что $S < 2$.

М. Л. Гервер

М210*. Рассмотрим последовательности, состоящие из 3000 цифр 1 и 2. В такой последовательности разрешается поменять местами любые две соседние тройки цифр. Две последовательности называются эквивалентными, если одну из них можно перевести в другую несколькими такими перестановками. Сколько всего существует неэквивалентных последовательностей?

Г. А. Гуревич

Ф218. Железнодорожный состав идет с постоянной скоростью $v = 72$ *км/ч* по горизонтальному участку пути. На сколько должна измениться мощность, развиваемая локомотивом, чтобы состав с той же скоростью продолжал двигаться во время сильного вертикального дождя. Считать, что каждую секунду на состав падает $m = 100$ *кг* воды, которая затем стекает на землю по стенкам вагонов. Изменением сил трения пренебречь.

С. М. Козел

Ф219. В вертикальном цилиндре имеется n молей идеального одноатомного газа. Цилиндр закрыт сверху поршнем массы M и площади S. Вначале поршень удерживался неподвижным, газ в цилиндре занимал объем V_0 и имел температуру T_0. Затем поршень освободили, и после нескольких колебаний он пришел в состояние покоя. Пренебрегая в расчетах всеми силами трения, а также теплоемкостью поршня и цилиндра, найти температуру и объем газа при новом положении поршня.

Вся система теплоизолирована. Атмосферное давление равно P_a.

Ф220. Экран освещается параллельным пучком лучей, перпендикулярным плоскости экрана. Как изменится освещенность экрана, если на пути света поставить призму ABC с малым углом раствора α и показателем преломления n, причем грань AB параллельна экрану (рис. 1)? Отражением света от призмы пренебречь.

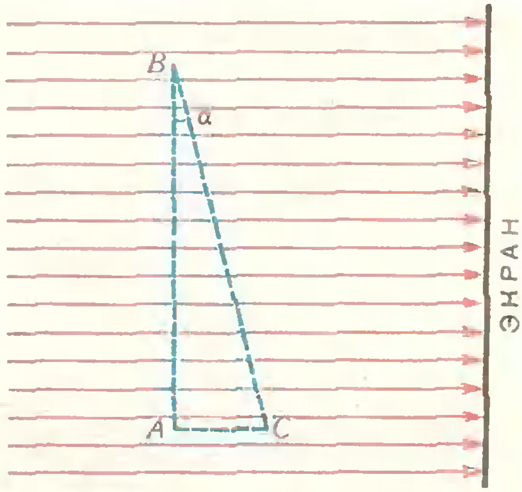


Рис. 1.

Ф221. На неподвижном круглом *цилиндре радиуса R лежит доска*, как показано на рис. 2. Толщина доски равна h. При каком соотношении между h и R равновесие доски будет устойчивым? Трение между доской и цилиндром велико.

В. Д. Кривченков

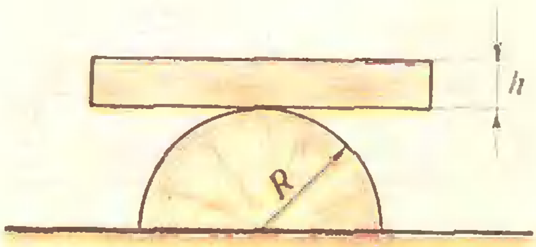


Рис. 2.

Ф222*. Громоотвод соединен с землей при помощи тонкостенной трубки диаметром 2 *см* и толщиной стенок 2 *мм*. После удара молнии трубка мгновенно превратилась в круглый стержень. Объясните это явление и оцените силу тока разряда, если известно, что при сжатии цилиндрический образец диаметром 3 *мм*, сделанный из того же материала, что и трубка, разрушается при силе 140000*н*.

П. Л. Капица

Решения задач

М165-М169, Ф183-Ф187

М165. *На окружности расположено множество F точек, состоящее из 100 дуг. Известно, что при* л ю б о м *повороте R окружности множество $R(F)$ имеет общую точку с F. (Другими словами, для любого α от 0° до 180° в множестве F можно указать две точки, отстоящие друг от друга на α.) Какую наименьшую сумму длин могут иметь 100 дуг, образующих множество F? Каков будет ответ, если дуг не 100, а n?*

Решим задачу для n дуг.

Обозначим сумму длин n дуг, образующих множество F через S *).

S может быть сколь угодно близко к $\frac{180^\circ}{n}$. Достаточно привести пример: располагаем $(n-1)$ дугу, длина каждой из которых равна $\frac{a^\circ}{n}$ так, чтобы центры любых двух соседних отстояли на $\frac{180^\circ}{n}$, а за $(n-1)$-й помещаем n-ю дугу с длиной $\frac{180^\circ}{n}$ так, чтобы расстояние между их ближайшими концами равнялось $\frac{180^\circ}{n}$.

Легко проверяется, что указанная система дуг удовлетворяет условию задачи. При соответствующем выборе a° сумма длин дуг будет как угодно близка к $\frac{180^\circ}{n}$.

*) Поскольку нас интересует только относительная длина дуг, мы будем измерять ее в градусах.

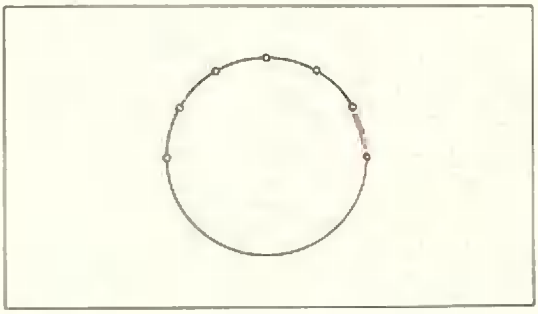


Рис. 1.

Если же точку на окружности считать дугой нулевой длины, то, заменив в примере все дуги, кроме последней, на точки, получаем множество F с суммой длин дуг, равной $\frac{180^\circ}{n}$ (рис. 1).

Докажем, что сумма S длин дуг не может быть меньше этого числа. Представим себе, что мы имеем два экземпляра нашей окружности, на которых размещены те же самые n дуг. Повернем одну из окружностей на угол φ, $0 < \varphi < 360^\circ$. Рассмотрим множество U_{ij} всех таких значений φ, для которых при таком повороте i-я дуга повернутой окружности пересекается с j-й дугой неподвижной окружности. Нарисуем отдельно «контрольную» окружность (с выбранной на ней начальной точкой $\varphi = 0$ (рис. 2)) и отметим на ней множества U_{ij} для всех i, j от 1 до n. Ясно, что U_{ij} является дугой с длиной, равной сумме длин i-й и j-й дуг.

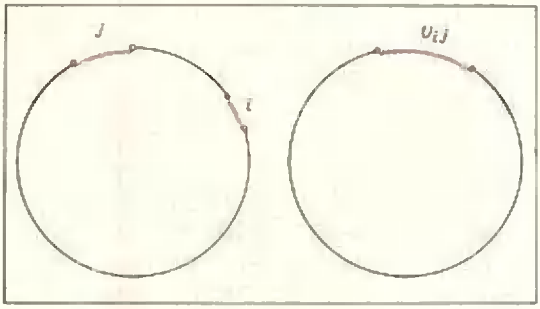


Рис. 2.

Отмеченные множества U_{ij} должны заполнять всю «контрольную» окружность, так как при любом повороте какие-то две дуги нашего множества должны пересекаться, поэтому сумма длин всех U_{ij} не меньше 360°. С другой стороны, эта сумма равна $2n \cdot S$, так как каждая дуга множества входит в сумму $2n$ раз.

Отсюда получаем, что $S \geqslant \frac{360^\circ}{2n} = \frac{180^\circ}{n}$.

Нетрудно заметить, что неравенство должно быть строгим (если отдельные точки не считать дугами), так как любые две области U_{ii} и U_{jj} имеют общий участок, содержащий начало отсчета.

Ю. П. Лысов

М166. а) *Школьники одного класса в сентябре ходили в два туристских похода. В первом походе мальчиков было меньше 2/5 общего числа участников этого похода и во втором — тоже меньше 2/5. Докажите, что в этом классе мальчики составляют меньше 4/7 общего числа учеников, если известно, что*

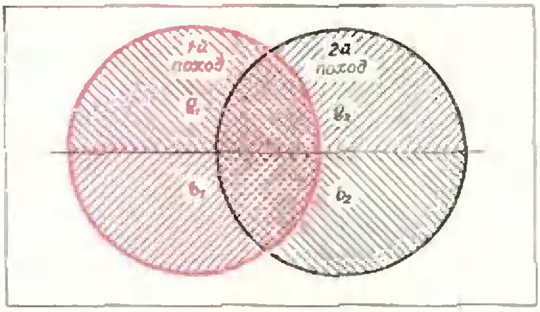


Рис. 3.

каждый из учеников был по крайней мере в одном походе.

б) *Пусть в i-м походе ($i = 1, 2, \ldots, n$) мальчики составляли α_i часть общего количества участников этого похода. Какую наибольшую долю могут составлять мальчики на общей встрече всех туристов (всех, кто был хотя бы в одном из n походов)?*

а) В первом походе, как видно из условия, количество мальчиков было меньше 2/3 количества девочек — участниц этого похода. Тем более оно меньше 2/3 общего количества девочек — учениц класса. Точно так же мальчиков — участников второго похода — меньше 2/3 общего количества девочек в классе. Поскольку каждый ученик был хотя бы в одном походе, всего мальчиков в классе меньше 4/3 количества девочек. Следовательно, мальчиков в этом классе не больше 4/7 общего числа учеников.

С помощью обозначений, которые ясны из рис. 3 (b и g — первые буквы английских слов *boy* и *girl*), наше решение можно записать так.

По условию $5b_1 < 2(b_1 + g_1)$, откуда $3\,b_1 < 2\,g_1 \leqslant 2\,g$. Точно так же доказывается, что $3\,b_2 < 2\,g_2 \leqslant 2\,g$. Поскольку $b \leqslant b_1 + b_2$, получаем

$$3\,b \leqslant 3\,b_1 + 3\,b_2 < 4\,g,$$

откуда $7\,b < 4\,(b + g)$.

б) Эта задача решается аналогично. Пусть b_i и g_i — число мальчиков и девочек в i-м походе, b и g — число мальчиков и девочек на общей встрече. Тогда по условию $b_i = \alpha_i(b_i + g_i)$, откуда $(1-\alpha_i)\,b_i = \alpha_i g_i \leqslant \alpha_i g$, поэтому если все $\alpha_i < 1$, то

$$b \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}g\right) = g \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_i},$$

откуда

$$b\left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}\right) \leqslant (b+g) \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}$$

(здесь $\sum\limits_{i=1}^{n}$ — знак суммирования:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_i + \ldots + x_n).$$

Итак, мы доказали, что если $\alpha_i < 1$ для всех i, то мальчики будут составлять не более $\dfrac{c}{1+c}$ от общего числа участников походов, где $c = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_i}{1-\alpha_i}$.

Нужно еще убедиться в то, что эта граница может достигаться. Для этого требуется, чтобы все написанные неравенства превратились в равенства. Легко понять, что это будет так, если девочки во всех походах были одни и те же, а мальчики — разные, то есть каждый из мальчиков был только в одном походе. Покажем, что это может быть при любых α_i. Пусть $\dfrac{\alpha_i}{1-\alpha_i} = \dfrac{m_i}{N}$ (числа α_i и, следовательно, $\dfrac{\alpha_i}{1-\alpha_i}$ рациональные; мы можем записать $\dfrac{\alpha_i}{1-\alpha_i}$ в виде дробей с одним и тем же знаменателем). Тогда, если в i-м походе N (одних и тех же) девочек и m_i (разных) мальчиков, то на встречу придут $M = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$ мальчиков и N девочек; отношение M к N как раз равно c, а отношение M к $M+N$ равно $\dfrac{c}{1+c}$.

Вернемся для примера к задаче а).

Если количество походов $n = 2$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = \dfrac{2}{5}$, то точной оценкой доли мальчиков является число $\dfrac{c}{1+c}$, где

$$c = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}} + \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3},$$

то есть число $\dfrac{c}{1+c} = \dfrac{4}{7}$. Здесь $\dfrac{\alpha_i}{1-\alpha_i} = \dfrac{2}{3}$ ($i = 1, 2$), если в каждом походе были 3 (одни и те же) девочки и 2 мальчика (в первом походе — одни, во втором — другие), то всего 7 участников, из них 4 мальчика. (Если вам кажется, что 7 — слишком маленькое количество учеников в классе, то можете умножить одновременно все числа: 3, 2, 7 и 4, скажем, на 4 или на 5; поскольку нас интересуют только их отношения, это не повлияет на результат). Таким образом, число 4/7 в условии задачи а) нельзя заменить меньшим.

Возвращаясь снова к задаче б), заметим, что если $\alpha_j = 1$ для некоторого j (хотя бы для одного), то мы уже не можем дать никакой (отличной от 1) оценки сверху для доли мальчиков на общей встрече (не зная, сколько участников в каждом походе). Действительно, если, независимо от других походов, взять число участников j-го похода очень большим (все они — мальчики), то долю мальчиков на общей встрече можно сделать сколь угодно близкой к 1.

М167. *Докажите, что в любой арифметической прогрессии a, $a + d$, $a + 2d$, ..., $a + nd$, ..., составленной из натуральных чисел, найдется бесконечно много членов, в разложение которых на простые множители входят в точности одни и те же простые числа.*

Многие читатели, как показывают письма, не поняли условия задачи. Разберемся в нем подробнее.

Как известно, любое натуральное число N можно разложить на простые множители:

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r},$$

и такое разложение единственно. В задаче **М167** требуется доказать, что в любой арифметической прогрессии из натуральных чисел можно выбрать такое бесконечное множество членов, что простые множители p_1, p_2, ..., p_r в разложении каждого из них — те же самые для всех этих членов (а степени α_1, α_2, ..., α_r могут быть, конечно, разными). Перейдем теперь к решению задачи.

Прежде всего заметим, что если первый член a и разность d прогрессии имеют общий наибольший делитель $q > 1$, то на q можно разделить все члены прогрессии. Ясно, что достаточно решить задачу для этой новой прогрессии, поскольку если какие-то члены новой прогрессии имеют одни и те же простые множители, то и после умножения на q они будут иметь одни и те же простые множители. Итак, мы можем считать, что a и d взаимно просты. Верна такая лемма: *если НОД $(a, d) = 1$, то существует такое k, что $a^k - a$ делится на d* (мы напомним ниже, как это доказывается).

Тогда при любом целом $m > 0$

$$a^{km} - a = (a^k - a)(a^{k(m-1)} + a^{k(m-2)} + \ldots + 1)$$

делится на d, то есть $a^{km} - a = nd$, где n — целое число. Таким образом, для каждого натурального m число $a^{km} = a + nd$ входит в нашу прогрессию. Таким образом, существует бесконечно много членов прогрессии, являющихся некоторой степенью ее первого члена a. Ясно, что все эти члены имеют одни и те же простые множители.

Доказательство леммы. Рассмотрим последовательность чисел a, a^2, a^3, ... В ней найдутся два числа, дающие одинаковый остаток при делении на d. Пусть это будут a^s и a^t $(s < t)$. Тогда их разность $a^t - a^s = a^s(a^{t-s} - 1)$ делится на d. Поскольку a и d взаимно просты, то $a^{t-s} - 1$ делится на d, поэтому $a^{t-s+1} - a$ делится на d, то есть k можно взять равным $t - s + 1$.

Это рассуждение уже приводилось в статье «Малая теорема Ферма» («Квант» № 10, 1972). Там же было сказано, что в роли k можно взять число $\varphi(d)$ — количество чисел, меньших d и взаимно простых с ним. («Теорема Эйлера»: $a^{\varphi(d)} - 1$ делится на d, если НОД $(a, d) = 1$).

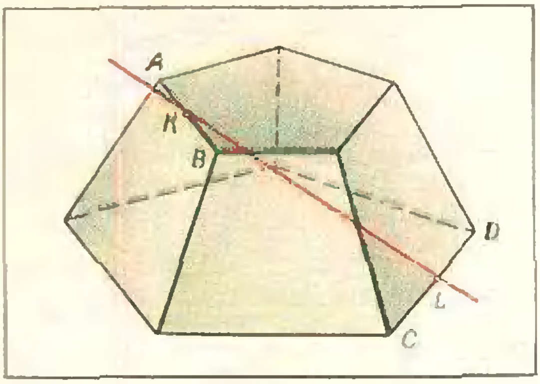


Рис. 4.

М168. *В правильной усеченной пирамиде (рис. 4) точка K — середина некоторой стороны AB верхнего основания, L — середина некоторой стороны CD нижнего основания. Докажите, что проекции отрезков AB и CD на прямую KL равны по длине.*

Если a и b — два отрезка (на плоскости или в пространстве), то проекцию отрезка a на прямую, на которой лежит отрезок b, мы будем обозначать через $\text{пр}_b a$. Тогда (рис. 5)

$$\text{пр}_b a = a \cos\alpha, \qquad (1)$$

где α — угол между прямыми, на которых

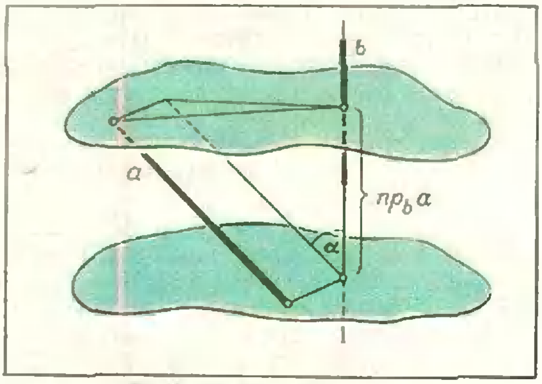


Рис. 5.

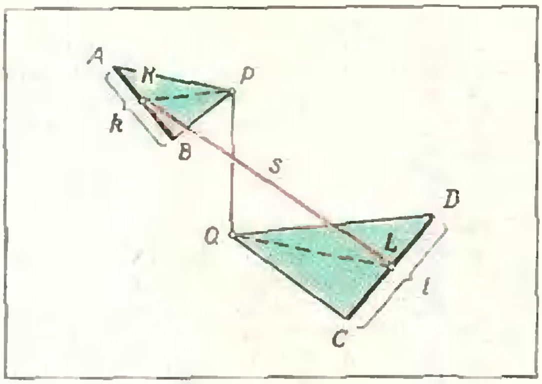


Рис. 6.

лежат отрезки a и b. (В этой и следующих формулах a, $\text{пр}_a b$ и т. п. означают длины соответствующих отрезков.) Наименьший угол между прямыми не превосходит $\pi/2$, поэтому $\cos\alpha \geqslant 0$. Из (1) следует равенство

$$a\, \text{пр}_a b = b\, \text{пр}_b a, \qquad (2)$$

которое пригодится нам при решении задачи.

Обозначим через P центр верхнего, а через Q — центр нижнего оснований пирамиды. Мы докажем следующий факт, несколько более общий, чем нужное нам утверждение задачи M168.

Пусть плоскости двух подобных равнобедренных треугольников ABP и CDQ с вершинами P и Q перпендикулярны отрезку PQ (и, тем самым, параллельны между собой). Обозначим отрезок, соединяющий середины K и L оснований AB и CD, через s. Тогда (рис. 6).

$$\text{пр}_s k = \text{пр}_s l. \qquad (3)$$

Пользуясь (2), мы вместо (3) можем доказывать такое равенство:

$$k\, \text{пр}_k s = l\, \text{пр}_l s. \qquad (4)$$

Теперь воспользуемся тем, что как это следует из (1), длина $\text{пр}\, b_a$ не меняется при параллельном переносе отрезков a и b. Поэтому мы можем спроектировать отрезок $k = AB$ на плоскость треугольника CDQ и получим:

$$\text{пр}_{A'B'} K'L = \text{пр}_{A'B'} KL = \text{пр}_{AB} KL = \text{пр}_k s, \qquad (5)$$

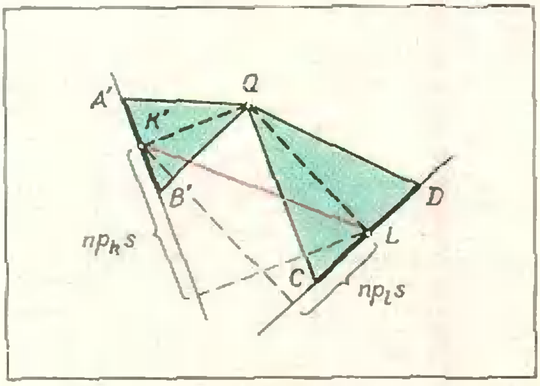


Рис. 7.

где A', B' и K' — проекции точек A, B и K на плоскость CDQ (рис. 7). Таким образом, мы свели задачу к тому случаю, когда оба треугольника лежат в одной плоскости (и имеют общую вершину).

Если отрезки AB и CD параллельны, то равенство (4) очевидно, поскольку обе проекции равны нулю. Если эти отрезки непараллельны, то получаем:

$$\frac{k}{l} = \frac{A'B'}{CD} = \frac{QK'}{QL} = \frac{\sin \angle QLK'}{\sin \angle QK'L} = \frac{|\cos \angle K'LC|}{|\cos \angle LK'B'|} = \frac{\text{пр}_l s}{\text{пр}_k s},$$

откуда следует (4).

M169. *Пусть $k < n$ — натуральные числа. Расставьте числа $1, 2, 3, \ldots, n^2$ в таблицу $n \times n$ так, чтобы в каждой строке числа шли в порядке возрастания и при этом сумма чисел в k-м столбце была а) наименьшей; б) наибольшей.*

Решим сначала задачу а).

Если расставить числа так, как показано в таблице 1, а — сначала заполнить первые k-столбцов, строку за строкой, числами от 1 до kn, а затем оставшимися числами заполнить последние $(n-k)$ столбцов (как угодно, лишь бы выполнялось условие возрастания чисел в каждой строке)— то сумма чисел в k-м столбце будет равна

Таблица 1*а*

				k	
1	2	...	$k-1$	k	$nk+1$ ...
$k+1$	$k+2$	...	$2k-1$	$2k$	
$2k+1$	$2k+2$	...	$3k-1$	$3k$	
. . .	. . .	. . .	. . .		
$(n-1)k+1$	...		$nk-1$	nk	... n^2

$$k(1+2+\ldots+n) = \frac{kn(n+1)}{2}. \qquad (1)$$

Мы докажем, что это значение суммы является наименьшим. Сначала докажем, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — числа k-го столбца, занумерованные в порядке возрастания:

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_i < \ldots < a_n \qquad (2)$$

то

$$a_i \geqslant ki. \qquad (3)$$

Действительно, рассмотрим числа, стоящие в тех же строках, где стоят $a_1, a_2, \ldots, a_i$, и в первых k столбцах. Из условия (2) и условия, что числа в строках стоят в возрастающем порядке, следует, что эти ki чисел не превосходят числа a_i. Следовательно, среди чисел $1, 2, 3, \ldots, n^2$ имеется по крайней мере ki чисел, не превосходящих a_i. Отсюда вытекает (3). Сложив неравенства (3) по всем

$i = 1, 2, \ldots, n$, получим справа сумму (1), поэтому

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant \frac{kn(n+1)}{2}.$$

Задачу б) можно решать аналогично, начиная с «самых больших» чисел и с самых правых столбцов. Но можно просто свести ее к уже решенной задаче а). Заменим в таблице каждое число a на $(n^2 + 1 - a)$ и затем переставим числа в каждой строке в обратном порядке. Ясно, что это — взаимно-однозначное преобразование множества таблиц из чисел $1, 2, \ldots, n^2$, удовлетворяющих условию задачи. При этом преобразовании каждое число в k-м столбце новой таблицы A' равно числу в той же строке и в $(n + 1 - k)$-м столбце старой таблицы A; поэтому сумма чисел в k-м столбце таблицы A' равна $n(n^2 + 1) - S$, где S — сумма чисел в $(n + 1 - k)$-м столбце A. Так что достаточно решить задачу а) для столбца с номером $(n + 1 - k)$, и мы получим решение задачи б) для столбца с номером k; ответ можно записать так: максимальная сумма в k-м столбце равна

$$n(n^2+1) - \frac{(n+1-k)\,n(n+1)}{2} = \frac{n\,[(n-1)^2 + k(n+1)]}{2}.$$

Таблица 1б.

	k	
$\ldots nk-n$	$n^2-(n-k)$	$\ldots\ldots n^2$
	$n^2-2(n+1-k)+1$	$\ldots n^2-(n+1-k)$
	$n^2-3(n+1-k)+1$	$\ldots n^2-2(n+1-k)$
$\ldots\ldots$	$\ldots\ldots$	$\ldots\ldots$
$1\ldots\ldots$	$nk-n+1$	$.\ kn-k+1$

Таблица 2а.

			4		
1	2	3	4	25	26
5	6	7	8	27	28
9	10	11	12	29	30
13	14	15	16	31	32
17	18	19	20	33	34
21	22	23	24	35	36

Сумма: 84

Таблица 2б.

			4		
16	17	18	34	35	36
13	14	15	31	32	33
10	11	12	28	29	30
7	8	9	25	26	27
4	5	6	22	23	24
1	2	3	19	20	21

Сумма: 159

Пример (получающийся при преобразованиях $A \to A'$, $k \to n + 1 - k$ из таблицы 1а) изображен на таблице 1б. На таблицах 2, а и 2, б вы видите более наглядные числовые примеры для $n = 6$ и столбца с номером $k = 4$.

Н. Б. Васильев

Правильные решения некоторых из задач **М160 — М169** нам прислали (после фамилий указана последняя цифра номеров решенных задач): *П. Агаронов* (Баку) 7; *С. Актеричев* (Магнитогорск) 3; *Р. Али-заде* (п. Джебраил АзССР) 2; *А. Асасян* (Камо АрмССР) 1; Б. Ашавский (Москва) 3, 6, 7; *П. Баньковский* (Уральск) 3, 4, 7; *Г. Баядян* (Кировокан) 7; *О. Багларян* (Сисиан АрмССР) 3, 7, 9; *С. Белолипецкий* (Киржач) 7; *А. Блох* (Харьков) 2, 3, 6, 7, 9; *С. Бышкин* (Севастополь) 3; *А. Вальков* (Ташкент) 2, 3, 6—9; *А. Волков* (Челябинск) 1; *Г. Высоцкая* (Красноярск) 9; *Л. Генгринович* (Ташкент) 3, 4, 7; *С. Гераськин* (Воронеж) 7; *Л.* и *И. Готман* (Арзамас) 8; *А. Григорян* (Баку) 1—4, 6—9; *В. Гринберг* (Москва) 6—9; *Е. Гурвич* (Ташкент) 3, 4; *Е. Гусев* (Павлоград) 6; *Х. Гусейнов* (п. Джебраил АзССР) 1; *К. Данильченко* (Волгоград) 2, 6; *А. Даниэль* (Ленинград) 7; *В. Даушев* (Андижан УзССР) 7; *Н. Демчук* (Мытищи Московской обл.) 8; *Н. Денисов* (Тейково Ивановской обл.) 3; *М. Драчинский* (Тбилиси) 3; *Н. Евлампиев* (Казань) 2, 3; *Р. Егорян* (Раздан) 3; *В. Железный* (Ленинград) 2, 3; *С. Зайцев* (с. Судай Костромской обл.) 2, 3; *Г. Заргарян* (Тбилиси) 6, 7; *В. Зарубин* (п. Летний Отдых Московской обл.) 3; *А. Заславский* (Калинин) 2—4, 7, 9; *С. Зенович* (Ташкент) 3, 4, 7; *Л. Зильберман* (Москва) 9; *Е. Ильтеев* (Орджоникидзе) 7; *А. Калуцкий* (Иссык Алма-Атинской обл.) 4; *Е. Келячина* (Грозный) 3; *А. Карнаух* (Белгород) 3; *В. Квасницын* (п. Коркино Челябинской обл.) 3, 8; *В. Ковтунец* (с. Шостаков Ровенской обл.) 1, 3, 7, 8; *С. Конягин* (Саратов) 2, 3, 5; *В. Колосов* (Киев) 1, 3, 4, 6—8; *Е. Кривонос* (Чусовой) 3; *М. Левин* (Витебск) 3; *М. Лейдерман* (Могилев) 3; *Б. Лемберский* (Киев) 7; *А. Литовченко* (Белокоровичи Житомирской обл.) 3, 4; *А. Лукашев* (Москва) 1—3; *Г. Лутингер* (Черновцы) 6, 8; *А. Макаричев* (Львов) 2, 3, 9; *Г. Малощенок* (Львов) 1, 3, 4, 6—8; *И. Меджибовский* (Москва) 3; *А. Мехович* (Владивосток) 3; *О. Мясникова* (Умань) 4; *А. Насакин* (Курган) 3; *А. Николаев* (Москва) 6, 7, 9; *Б. Палатник* (Баку) 2, 3, 7, 8; *М. Панченко* (Бровары Киевской обл.) 4; *П. Парамонов* (Москва) 1—3, 6, 7; *М. Пастухов* (Свердловск) 3; *Е. Печатников* 2, *А. Печковский* (Москва) 7; *Ю. Пинелис* (Кзыл-Орда) 3; *А. Разгуляев* (Клин Московской обл.) 2; *А. Райнин* (Москва) 1, 2, 5, 9; *С. Родионов* (Саратов) 1—3, 5; *Р. Рожков* (Рязань) 2, 3; *Л. Рудицер* (Харьков) 2, 3, 6—8; *М. Сапир* (Свердловск) 3, 6, 7; *В. Сац* (Киев) 7; *А. Сбоев* (п. Медведок Кировской обл.) 2;

Т. Седрединов (с. Новый Куруш ДагАССР) 3; *С. Скоков* (д. Соковки, г. Слободской) 7; *В. Слепой* (Фрунзе) 3; *Б. Слепченко* (Челябинск) 2, 3, 7—9; *А. Слесаренко* (Рубцовск Алтайского края) 2, 3, 6—9; *А. Слинкин* (Москва) 2, 3, 7—9; *Е. Слободов* (Армавир) 4; *В. Смолко* (Кишинев) 4; *Я. Сойбельман* (Киев) 6, 7, 9; *Ю. Стецко* (Черновцы) 7; *А. Струков* (г. Тейково Ивановской обл.) 3; *С. Табачников* (Москва) 1—4, 6, 8; *А. Тагиев* (Баку) 3, 4; *Я. Тепер* (Ташкент) 1, 3, 5—7; *Э. Туркевич* (Черновцы) 0—2, 7—9; *Д. Тюкавкин* (Иркутск) 2, 3, 5; *И. Файнштейн* (Херсон) 2; *К. Хачатурян* (Москва) 1, 5, 7; *В. Хлебопрос* (Киев) 1—3, 6—8; *М. Хорошин* (Чернигов) 6, 7; *Н. Чамурлиев* (Тбилиси) 3; *Н. Чернов* (Кривой Рог) 2—4; *В. Чертков* (Киев) 3; *А. Шестюк* (Николаев) 2, 7, 8; *А. Шляфер* (Томск) 1, 2, 7; *Ю. Шмелев* (Ярославль) 1—3, 6, 7; *И. Шугалев* (Москва) 1, 3; *Н. Щербина* (Днепропетровск) 1—3, 6—9.

Ю. П. Лысов

Ф183. *Динамометр, который скользит по гладкому горизонтальному столу, тянут с постоянной силой $F = 4$ н. Что показывает динамометр, если масса его пружины равна массе корпуса и отградуирован динамометр был в горизонтальном положении?*

Возникающая при растяжении пружины сила упругости пропорциональна удлинению пружины. Поэтому показание динамометра T равно

$$T = k\Delta L, \tag{1}$$

где k — жесткость пружины, ΔL — ее удлинение.

В обычных условиях, когда динамометр неподвижен, сила упругости в любом сечении пружины одна и та же, то есть любые равные участки пружины удлиняются при растяжении на одну и ту же величину.

При движении динамометра дело обстоит не так. Рассмотрим сечение пружины, которое находится на расстоянии x от конца пружины, прикрепленного к корпусу динамометра (рис. 8). Сила упругости T_x сообщает ускорение корпусу динамометра и участку пружины длиной x. Масса участка пружины длиной x равна

$$M_x = \frac{M}{L}x, \tag{2}$$

где M — масса и L — длина всей пружины.

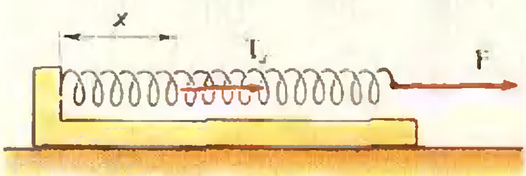


Рис. 8.

Если ускорение динамометра равно a, то, согласно второму закону Ньютона, силу упругости в сечении x можно записать так:

$$T_x = \left(M + M\frac{x}{L}\right)a. \tag{3}$$

Так как ускорение динамометру сообщает сила F, то

$$a = \frac{F}{M+M} = \frac{1}{2}\frac{F}{M}. \tag{4}$$

Поэтому

$$T_x = \frac{1}{2}F\left(1+\frac{x}{L}\right). \tag{5}$$

Итак, сила T_x непостоянна и меняется от сечения к сечению вдоль пружины.

Для того чтобы найти удлинение пружины, мысленно разобьем нерастянутую пружину на одинаковые маленькие пружинки длиной l такие, что силу упругости на протяжении каждой из них можно считать постоянной. Пусть таких пружин будет n ($n \gg 1$). Так как некоторая сила, действующая на n последовательно соединенных пружин, вызывает деформацию, в n раз большую деформации одной такой пружины*), то жесткость короткой пружинки в n раз больше жесткости пружины динамометра:

$$k' = kn.$$

Будем отсчитывать пружинки от конца пружины, прикрепленного к корпусу динамометра. Удлинение i-й пружинки равно

$$\Delta l_i = \frac{T_i}{k'} = \frac{T_i}{kn}.$$

Но, как следует из формулы (5),

$$T_i = \frac{1}{2}F\left(1+\frac{il}{nl}\right) = \frac{1}{2}F\left(1+\frac{i}{n}\right).$$

Поэтому

$$\Delta l_i = \frac{1}{2kn}F\left(1+\frac{i}{n}\right).$$

Полное удлинение пружины равно

$$\Delta L = \sum_{i=1}^{n}\Delta l_i = \frac{1}{2kn}F\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right).$$

Так как $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)$ представляет собой сумму членов арифметической прог-

*) Это следует из того факта, что сила упругости всех пружин при таком соединении одна и та же.

рессии с разностью прогрессии $\frac{1}{n}$, то

$$\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)=\frac{3n+1}{2},$$

и

$$\Delta L=\frac{F}{4k}\,\frac{3n+1}{n}.$$

Но $n \gg 1$, поэтому

$$\Delta L \approx \frac{F}{4k}\,\frac{3n}{n}=\frac{3}{4}\,\frac{F}{k}.$$

Подставив это выражение для ΔL в формулу (1), найдем показания динамометра

$$T=k\cdot\frac{3F}{4k}=\frac{3}{4}F=3н.$$

Ф184. *При передаче телевизионного изображения на Земле за одну секунду передается 25 кадров. Это означает, что один кадр передается за 1/25 секунды. В то же время, как известно, передача одного кадра изображения Луны советской автоматической станцией «Луна» длилась 25 минут. Почему так велика разница во временах передачи одного кадра изображения в обоих случаях?*

Для передачи изображения необходимо прежде всего преобразовать его в электрический сигнал. Это происходит в передающей телевизионной трубке. Кадр изображения проецируется на светочувствительный мозаичный экран. Каждая из ячеек экрана заряжается, причем тем больше, чем больше ее освещенность. Так получается электрическое изображение передаваемого объекта. Затем электронный луч последовательно обегает различные участки этого изображения, двигаясь слева направо (вдоль строки) и сверху вниз (по строкам); электрическое изображение преобразуется в электрический сигнал.

Предположим, мы хотим передать картинку, показанную на рисунке 9. Яркость картинки по горизонтали меняется по синусоидальному закону. Пусть число максимумов яркости равно m; число строк, на которое разбивается картинка, равно n, а частота смены кадров — f_k. Электрический сигнал, несущий информацию о картинке, имеет форму, показанную на рисунке 10.

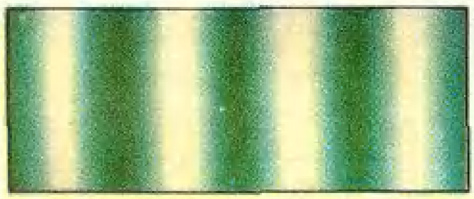


Рис. 9.

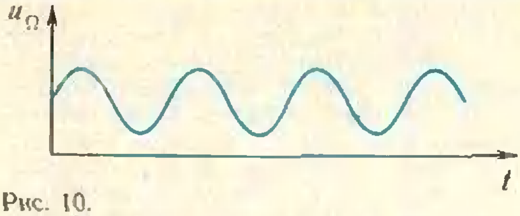


Рис. 10.

За время передачи одной строки сигнал имеет m максимумов, за время передачи одного кадра — nm максимумов, а за 1 секунду — nmf_k максимумов. Значит, циклическая частота сигнала Ω равна

$$\Omega=2\pi f=2\pi mnf_k.$$

Следовательно, частота сигнала Ω пропорциональна частоте смены кадров

$$\Omega \sim f_k.$$

Величина сигнала меняется со временем по синусоидальному закону, который можно записать так:

$$u_\Omega=U_0+U_1\sin\Omega t=U_0(1+k\sin\Omega t),$$

где $k=\frac{U_1}{U_0}$.

Для того чтобы передать этот низкочастотный сигнал на большие расстояния, им модулируют сигнал высокой частоты ω ($\omega \gg \Omega$), величина которого меняется по закону

$$u=U_0'\sin\omega t.$$

В результате модуляции амплитуда высокочастотного сигнала уже не постоянна, а меняется со временем так же, как модулирующий низкочастотный сигнал (рис. 11).

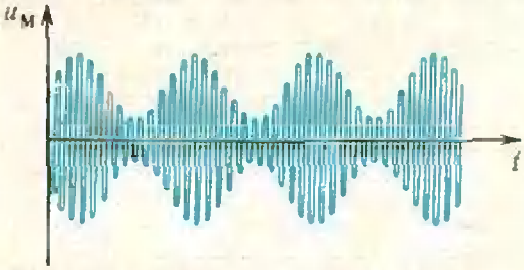


Рис. 11.

Таким образом,

$$u_М=U_0'(1+k\sin\Omega t)\sin\omega t$$

($u_М$ — величина амплитудно-модулированного сигнала).

После несложных тригонометрических преобразований получим

$$u_М=U_0'\sin\omega t+\frac{1}{2}kU_0'\sin(\omega+\Omega)t+$$
$$+\frac{1}{2}kU_0'\sin(\omega-\Omega)t.$$

Это означает, что в нашем случае амплитудно-модулированный сигнал представляет собой сумму трех синусоидальных сигналов с частотами ω, $\omega+\Omega$ и $\omega-\Omega$. Если же кадр является более сложным, то он передается в интервале частот шириной 2Ω. Чем больше частота смены кадров, тем шире указанный интервал частот. Телевизионный приемник, следовательно, должен принимать сигналы в некотором диапазоне частот.

Но наряду с сигналом, несущим данную информацию, в эфире всегда существуют всевозможные случайные сигналы, называемые шумами. Шумы имеют различные частоты и можно считать, что в каждом интервале частот их энергия примерно одинакова. Чем шире полоса частот, воспринимаемая приемником, тем сильнее шумы или, как говорят, выше уровень шумов. Если основной сигнал слаб, он может забиваться шумами, и мы не сможем его распознать.

На Земле передающие станции обладают достаточной мощностью, и уровень сигнала намного выше уровня шумов. Поэтому частота смены кадров может быть достаточно большой (что действительно необходимо для осуществления нормального зрительного восприятия телепередачи).

Иное дело в космосе. Мощности передатчиков на космических кораблях малы, уровень основного сигнала низок. Увеличивая же время передачи одного кадра, то есть сужая полосу частот, можно существенно уменьшить уровень шумов, что поможет выделить сигнал, несущий информацию.

Ф185. *Волейбольный мяч массой 200 г и объемом 8 л накачан до избыточного давления 0,2 атм. Мяч был подброшен на высоту 20 м и после падения на твердый грунт подскочил почти на ту же высоту. Оцените максимальную температуру воздуха в мяче в момент удара о грунт. Температура наружного воздуха 300° К, теплоемкость воздуха при постоянном объеме $c_v = 0{,}16$ кал/г · град.*

Так как мяч после удара о землю поднялся почти на ту же высоту, с которой он падал, потерями энергии при ударе можно пренебречь и считать, что сжатие воздуха в мяче во время удара происходит адиабатически.

Согласно закону сохранения энергии (первому закону термодинамики) изменение внутренней энергии газа ΔU равно

$$\Delta U = Q + A, \qquad (1)$$

где Q — количество тепла, сообщенного газу, и A — работа, совершенная над газом при его сжатии. Так как в данном случае $Q = 0$, то

$$\Delta U = A. \qquad (2)$$

Как известно, изменение внутренней энергии газа не зависит от процесса и равно

$$\Delta U = c_v m \Delta T = c_v m\,(T_{max} - T), \qquad (3)$$

где T — начальная температура газа, m — его масса.

Работа по сжатию воздуха совершается за счет механической энергии мяча. Если пренебречь потенциальной энергией деформации камеры и грунта в момент наибольшего сжатия (когда температура воздуха максимальна, а мяч покоится), то работа A равна

$$A = Mgh, \qquad (4)$$

где M — масса мяча, h — высота, на которую он был подброшен.

Подставив выражения для ΔU и A в формулу (2), получим

$$c_v m\,(T_{max} - T) = Mgh. \qquad (5)$$

Массу воздуха в мяче можно определить из уравнения газового состояния:

$$PV = \frac{m}{\mu} RT,$$

где $P = P_{атм} + P_и$ ($P_{атм} = 1$ *атм* — атмосферное давление, $P_и$ — избыточное давление), V — объем мяча. Отсюда

$$m = \frac{(P_{атм} + P_и)\,V\mu}{RT}. \qquad (6)$$

Из (5) и (6) находим

$$T_{max} = T\left[1 + \frac{MghR}{\mu\,(P_{атм} + P_и)\,Vc_v}\right] \approx$$
$$\approx 1{,}02T = 306^\circ \text{ К}.$$

Ф186. *При повороте автобуса или автомобиля пассажиров отбрасывает в сторону, противоположную направлению поворота. В то же время поворот самолета совсем не ощущается его пассажирами. Объясните эту разницу.*

При повороте автомобиля пассажир продолжает двигаться по инерции прямолинейно. Он не вылетает из автомобиля только потому, что его удерживает, например, стенка автомобиля, которая сообщает необходимое центростремительное ускорение или пассажир держится за поручни. Подсчитаем эту удерживающую силу, действующую на пассажира массы $m = 50$ *кг*, если радиус поворота $R = 20$ *м* и скорость движения автомобиля $v = 36$ *км/ч*.

Согласно второму закону Ньютона

$$F = ma = m\frac{v^2}{R} = \frac{50\ кг \cdot 100\ м^2/с^2}{20\ м} = 250\ н,$$

что составляет половину веса пассажира.

Теперь рассмотрим, что происходит при повороте самолета. На горизонтально летящий самолет в плоскости, перпендикулярной направлению его полета, действуют две силы: сила тяжести **P** и аэродинамическая подъемная сила **N**. При повороте самолета равнодействующая **F** этих сил должна быть направлена к центру окружности, по которой движется самолет. Это означает, что сила **N** не вертикальна, а составляет некоторый

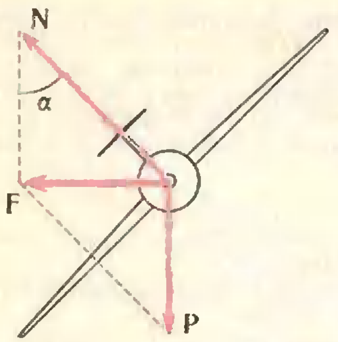


Рис. 12.

угол α с вертикалью (рис. 12). Но сила **N** — это сумма подъемных сил крыльев и она перпендикулярна крыльям, следовательно, корпус самолета наклонен в сторону поворота *).

Сила **F** *сообщает самолету необходимое* центростремительное ускорение.

Пассажир, находящийся в самолете, движется по окружности того же радиуса с тем же центростремительным ускорением. Это ускорение сообщает пассажиру равнодействующая силы тяжести mg и силы реакции самолетного кресла $\mathbf{N}_1$. Причем сила реакции должна составлять с вертикалью тоже угол α $\left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{g}\right)$. Отсюда следует, что положение пассажира относительно самолета точно такое же, как во время горизонтального полета самолета. При повороте меняется только величина и направление силы $\mathbf{N}_1$. При горизонтальном полете сила $\mathbf{N}_1$ вертикальна и равна по абсолютной величине силе тяжести, при повороте она составляет с вертикалью угол α и равна по абсолютной величине $\sqrt{(mg)^2+\left(\frac{mv^2}{R}\right)^2}$, то есть увеличивается на

$$\Delta N_1 = \sqrt{(mg)^2+\left(\frac{mv^2}{R}\right)^2} - mg$$

(v — скорость самолета, R — радиус поворота). При $m = 50$ *кг*, $v = 720$ *км/ч* и $R = 10$ *км* эта добавка составляет

$$\Delta N_1 \approx 50\ н.$$

Она много меньше веса пассажира и почти не ощущается им.

---

*) Такой наклон самолета получается благодаря тому, что при повороте руля направления из-за давления воздуха на киль самолет поворачивается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр тяжести самолета. При этом одно из крыльев самолета движется быстрее другого относительно набегающего потока воздуха. На это крыло действует большая аэродинамическая подъемная сила (она пропорциональна скорости движения), и самолет наклоняется в сторону поворота.

Ф187. *Тонкая металлическая пластинка площади* S *залита слоем жидкого диэлектрика с плотностью* ρ *и диэлектрической проницаемостью* ε *так, что толщина этого слоя много меньше линейных размеров пластины. Что произойдет с жидкостью, если пластине сообщить электрический заряд* $+Q$?

Заряженная пластина создает электрическое поле, напряженность которого в вакууме равна

$$E_0 = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S},$$

а в диэлектрике

$$E = \frac{Q}{2\varepsilon_0\varepsilon S}.$$

Ослабление поля в диэлектрике связано с поляризацией диэлектрика. При этом в тонком слое около пластины появляется заряд $-Q_1$, а на свободной поверхности диэлектрика — заряд $+Q_1$ (рис. 13). Внутри же диэлектрика отрицательные и положительные заряды диполей компенсируют друг друга. Наведенные заряды Q_1 и $-Q_1$ создают поле с напряженностью

$$E_1 = 2\frac{Q_1}{2\varepsilon_0 S} = \frac{Q_1}{\varepsilon_0 S},$$

направленное против поля пластины.

Согласно принципу суперпозиции

$$E = E_0 - E_1$$

или

$$\frac{Q}{2\varepsilon_0\varepsilon S} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} - \frac{Q_1}{\varepsilon_0 S}.$$

Из этого уравнения можно найти величину заряда Q_1:

$$Q_1 = Q\,\frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon}.$$

На заряд Q_1 свободной поверхности жидкости действуют две электрические силы: сила притяжения к заряду $-Q_1$, равная

$$F_1 = Q_1\cdot\frac{1}{2}E_1 = Q_1\cdot\frac{Q_1}{2\varepsilon_0 S} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\left(\frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon}\right)^2,$$

и сила отталкивания от заряда пластины Q,

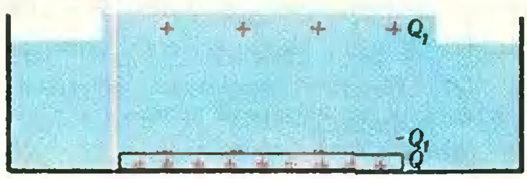


Рис. 13.

равная

$$F_2 = Q_1 \cdot E_0 = Q\,\frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon} \cdot \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\left(\frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon}\right).$$

Силы F_1 и F_2 направлены в противоположные стороны.

Так как сила F_2 больше силы F_1 ($\varepsilon > 1$), то жидкость над пластиной будет подниматься. Пусть высота поднятия жидкости в сосуде равна h. Запишем условие равновесия поднявшейся жидкости:

$$(\rho h S)\,g = F_2 - F_1 = \frac{Q^2(\varepsilon^2 - 1)}{8\varepsilon_0 S \varepsilon^2}.$$

Отсюда

$$h = \frac{Q^2(\varepsilon^2 - 1)}{8\varepsilon_0 S^2 \varepsilon^2 \rho g}.$$

И. Ш. Слободецкий

Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф178—Ф187**, успешно справились с задачами **Ф179** и **Ф186**. Правильные решения остальных задач прислали (жирная цифра после фамилии — последняя цифра номера решенной задачи): *С. Алехин* (Липецк) **5, 7**; *М. Азметов* (Уфа) **2, 5, 7**; *П. Анциферов* (Фатеж Курской обл.) **3**; *А. Амельченко* (Магнитогорск) **1**; *С. Аликов* (Сельск) **2**; *А. Бушмакин* (Иваново Брестской обл.) **2**; *А. Бузулуцков* (Новосибирск) **3**; *А. Боржиевский* (Оршино) **3**; *Л. Брагинский* (Фрунзе) **0, 2, 4, 5, 7**; *Н. Василюк* (Кобрин) **2**; *О. Войнова* (п. Кош-Тегирмен Кирг. ССР) **4**; *Н. Головко* (Прохладный) **1**; *Е. Гусев* (Павлоград) **2**; *А. Григорян* (Баку) **3**; *С. Громик* (Дзержинск) **1**; *Д. Габриэлян* (Белая Калитва Ростовской обл.) **5**; *С. Герц* (Хуст УССР) **2**; *А. Даценко* (Кривой Рог) **0, 8**; *И. Дубинский* (Киев) **2**; *Н. Демчук* (Мытищи) **1**; *Ж. Дорофеева* (Цаган Аман) **4**; *А. Данизл* (Москва) **3**; *В. Евсеев* (Новокузнецк) **2**; *Р. Егорян* (Раздан Арм. ССР) **8**; *В. Жук* (Грозный) **5**; *В. Железный* (Ленинград) **3**; *С. Жаров* (Ефремов Тульской обл.) **5, 8**; *С. Запесочный* (Ужгород) **8**; *В. Зохентаут* (Харьков) **1**; *В. Игнатьев* (Волгоград) **5**; *О. Ильичева* (с. Чинберлей Пензенской обл.) **1**; *Л. Коган* (Черновцы УССР) **2, 5**; *С. Карпенко* (Киев) **3**; *Н. Кулешов* (Кременчуг) **5**; *И. Кисловский* (Иркутск) **2**; *С. Корнилов* (Грозный) **0, 3, 4, 5**; *С. Кондратьев* (Сызрань) **0**; *А. Кутлимуратов* (Хазарасп) **4**; *В. Колосов* (Киев) **0, 4**; *Я. Коган* (Глазов УАССР) **4**; *И. Куцык* (Ярославль) **5**; *Ю. Лурье* (Грозный) **1, 3, 5, 7, 8**; *С. Лукацук* (Челябинск) **8**; *А. Львов* (Саратов) **5**; *С. Лазебшей* (Житомир, п. Озерное) **5**; *А. Литовченко* (п/о Белокоровичи Житомирской обл.) **2**; *В. Меерсон* (Николаев) **2**; *С. Моргунов* (Баку) **4**; *А. Минибаев* (Уфа) **1, 2**; *И. Мацяс* (Макеевка) **1, 2**; *Р. Михайлов* (Геокчай Аз.ССР) **2**; *С. Мысотков* (Златоуст) **5**; *А. Марков* (Орджоникидзе) **5**; *А. Никонов* (Актюбинск) **8**; *А. Николаев* (Москва) **0, 2, 4**; *А. Опара* (Саратов) **8**; *Ю. Перфильев* (Саратов) **2, 8**; *Я. Певзнер* (Ленинград) **5**; *О. Поваляев* (Подольск) **5**; *Ю. Полонский* (Зеленодольск) **5**; *И. Парнета* (Кременчуг) **2**; *С. Прокопьева* (Темиртау Карагандинской обл.) **1, 2**; *А. Погуляй* (Уфа) **5**; *В. Поляков* (с. Октябрьское УССР) **3**; *А. Панин* (Гомель) **1**; *А. Резников* (Киев) **0, 6**; *Л. Рудицер* (Харьков) **2**; *М. Ригмант* (Магнитогорск) **1, 8**; *А. Солдатов* (п/о Юганец Горьковской обл.) **4**; *Я. Симкин* (Москва) **1, 8**; *М. Султангалиев* (с. Ваныш Башк. АССР) **4, 5**; *В. Спиридонов* (Владимир) **0, 2, 5**; *В. Сомило* (Инта) **3**; *К. Сеникян* (Ереван) **5**; *А. Степанян* (Сисиан Арм. ССР) **5**; *А. Стрекин* (Череповец) **2**; *Ю. Смоленцев* (Ессентуки) **5, 8**; *В. Татаринов* (п. Знобь-Новгородское Сумской обл.) **2**; *О. Теряев* (Днепропетровск) **3**; *Н. Торочкова* (Борисов Минской обл.) **2**; *О. Торонов* (Оренбург) **5**; *В. Удовыченко* (с. Ешень Читинской обл.) **0, 2**; *Н. Федин* (Омск) **3, 5, 7, 8**; *Д. Фушман* (Черновцы УССР) **5, 7**; *С. Хоменко* (Подольск) **2, 3, 5, 7, 8**; *Б. Ходоровский* (Днепропетровск) **2**; *Р. Хознев* (Глазов УАССР) **1, 4**; *Л. Циферблат* (Львов) **5**; *С. Черемшанцев* (Ленинград) **8**; *В. Чертков* (Киев) **0, 8**; *В. Чистяков* (Буй) **4, 5**; *М. Шапошников* (Рязань) **5**; *В. Шендрик* (Алма-Ата) **1, 4, 5, 8**; *Ф. Шульгин* (Калинин) **1, 2, 8**; *К. Шварцман* (Кишинев) **5**; *А. Штокалов* (Северодонецк) **2**; *А. Шумахов* (Тула) **0, 1, 2**; *А. Шик* (Туапсе) **2**; *М. Шапиро* (Горький) **5**; *Е. Щемелев* (Горький) **2**; *С. Щукин* (Днепропетровск) **2, 8**; *Ю. Яковчук* (Николаев) **3**; *А. Яценко* (Первомайск УССР) **1, 2**.

С. Г. Семенчинский

В. В. Пекарскас

Геометрия комплексных чисел

В «Программе вступительных экзаменов по математике» имеется, в частности, такой пункт: «Комплексные числа и арифметические действия над ними. Модуль и аргумент комплексного числа». Строгого построения теории комплексных чисел от поступающих не требуется, но они должны владеть правилами действий с этими числами и знать их геометрическую интерпретацию.

В этой статье разбирается несколько задач, взятых из опыта приемных экзаменов. В каждой задаче по существу используются лишь основные определения и геометрическая интерпретация некоторых понятий, связанных с комплексными числами.

Задача 1. *Изобразить на плоскости точку, соответствующую числу* $z=\frac{2+i}{i-2}$.

Решение. Прежде всего представим данное число в алгебраической форме:

$$\frac{2+i}{i-2}=-\frac{(2+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=-\frac{3+4i}{5}=$$

$$=-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i.$$

Теперь изобразить число z на комплексной плоскости уже нетрудно — получается точка в третьем квадранте (нарисуйте ее сами!).

Задача 2. *Комплексное число* $z=a+bi$ *изображается точкой* $M(a, b)$. *Где находится точка* $z_1=z+3-2i$?

Решение. Имеем

$z+3-2i=(a+3)+(b-2)i$.

Поэтому число $z_1=(a+3)+(b-2)i$ изображается точкой $M_1(a+3, b-2)$, которая получается из точки M сдвигом вправо на три единицы и вниз на две единицы.

Задача 3. *Рассматриваются комплексные числа* z *такие, что* $|z|=2$. *Где расположены точки* $2z-3i+1$?

Решение. Точки z, для которых $|z|=2$, расположены на окружности радиуса 2 с центром в точке (0, 0) (рис. 1). Тогда точки $2z$ будут лежать на концентрической окружности радиуса 4. В самом деле, точка $2z$ лежит на том же исходящем из начала координат луче, что и точка z, но отстоит от начала в 2 раза дальше, чем точка z.

Точка $2z+1-3i$ получается из точки $2z$ сдвигом вправо на единицу и сдвигом вниз на три единицы. Поэтому точки $2z+1-3i$, где $|z|=2$, образуют окружность с центром в точке (1, —3) и радиуса 4.

Задача 4. *Какое множество точек комплексной плоскости задается условием* $2<|z+1-2i|\leqslant 3$?

Решение. Пусть $z_1=z+1-2i$; тогда данное условие принимает вид

$$2<|z_1|\leqslant 3. \qquad (1)$$

Точки z_1, удовлетворяющие условию $|z_1|=3$, лежат на окружности радиуса 3 с центром в начале координат. Условию $|z_1|<3$ удовлетворяют все внутренние точки круга радиуса 3 с центром в начале координат. Условию $|z_1|>2$ удовлетворяют все точки, лежащие вне

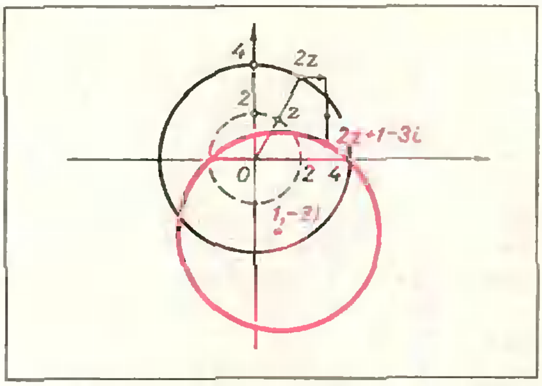


Рис. 1.

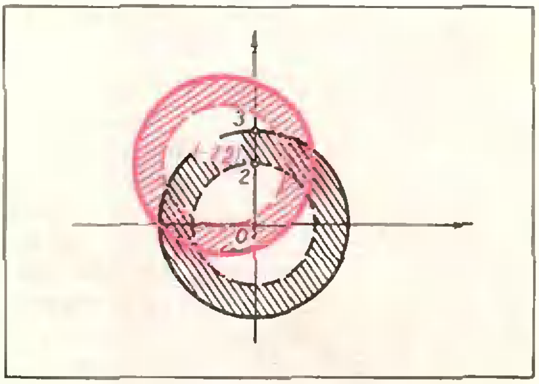


Рис. 2.

круга радиуса 2 с центром в начале координат. Таким образом, множество точек z_1, удовлетворяющих условию (1), есть кольцо между концентрическими окружностями с центром в начале координат и радиусами 2 и 3 (рис. 2); точки внутренней окружности этому множеству не принадлежат.

Так как $z = z_1 - 1 + 2i$, то точка z получается из точки z_1 сдвигом на единицу влево и на две единицы вверх. Поэтому окончательно получается кольцо между концентрическими окружностями радиусов 2 и 3 с центрами в точке $(-1, 2)$ (внутренняя окружность исключается).

Задача 5 (МГУ, экономический факультет, 1970). *Указать точки плоскости, соответствующие тем комплексным числам, которые удовлетворяют условию* $|z|\,i + z = 2 + i$.

Решение. Пусть $z = a + bi$; тогда данное условие примет вид

$$i\sqrt{a^2+b^2} + a + bi = 2 + i.$$

По определению равенства комплексных чисел отсюда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a = 2, \\ \sqrt{a^2+b^2} + b = 1, \end{cases}$$

которая легко решается. В результате находим удовлетворяющее условию задачи число $z = 2 - \dfrac{3}{2}i$.

Задача 6. *Найти множество точек, изображающих комплексные числа $z = x + iy$, для каждого из которых комплексное число в алгебраической форме*

$$\sqrt{3x-y} + i\sqrt{x-3y} \qquad (2)$$

лежит на окружности радиуса 2 с центром в начале координат.

Решение. Поскольку число (2) есть комплексное число в алгебраической форме, то x и y должны быть такими, чтобы $\sqrt{3x-y}$ и $\sqrt{x-3y}$ принимали действительные значения. Следовательно, должны выполняться неравенства

$$3x - y \geqslant 0, \quad x - 3y \geqslant 0. \qquad (3)$$

Выделяемую этими неравенствами область плоскости xOy удобнее всего изобразить геометрически (рис. 3; искомая область отмечена двойной штриховкой).

Так как число (2) должно лежать на окружности радиуса 2 с центром в начале координат, то

$$\left|\sqrt{3x-y} + i\sqrt{x-3y}\right| = 2,$$

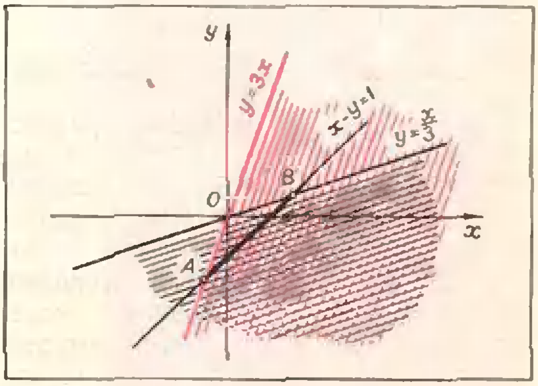


Рис. 3.

откуда, по определению модуля, получаем

$$2\sqrt{x-y}=2,$$

или

$$x-y=1.$$

Таким образом, искомые точки (x, y) должны удовлетворять равенству $x-y=1$ и лежать в отмеченной ранее области, определяемой уравнениями (3); легко убедиться, что всем этим условиям удовлетворяют точки отрезка AB (рис. 3).

З а д а ч а 7. *Комплексные числа z удовлетворяют условию*

$$|z+2+i|=|z-1-4i|. \qquad (4)$$

Где расположены точки, изображающие эти числа?

Р е ш е н и е. Как известно, $|z_1-z_2|$ есть расстояние между точками, изображающими комплексные числа z_1 и z_2. Поэтому число

$$|z+2+i|=|z-(-2-i)|$$

есть расстояние от точки, изображающей число z, до точки M $(-2, -1)$, а число

$$|z-1-4i|=|z-(1+4i)|$$

есть расстояние то точки, изображающей число z, до точки N $(1, 4)$. Условие (4) тогда означает, что искомые точки равноудалены от точек M и N. Следовательно, искомые точки лежат на прямой, перпендикулярной отрезку MN и проходящей через его середину.

З а д а ч а 8. *Указать множество точек, изображающих те комплексные числа, которые одновременно удовлетворяют двум условиям*

$$|z-2i|\leqslant\frac{3}{2}, \quad \frac{\pi}{3}<\arg z<\frac{2\pi}{3}. \quad (5)$$

Р е ш е н и е. Точки, изображающие те комплексные числа, которые удовлетворяют первому из условий (5), заполняют круг (включая окружность) радиуса $^3/_2$ с центром в точке (0,2) (рис. 4). Второму условию удовлетворяют комплексные числа, изображающиеся точками, которые расположены между лучами, выходящими из начала координат и составляющими углы $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}$ с осью абсцисс (исключая сами эти лучи). Следовательно, обоим условиям (5) удовлетворяют точки, принадлежащие одновременно двум указанным множествам (искомое множество на рис. 4 отмечено двойной штриховкой).

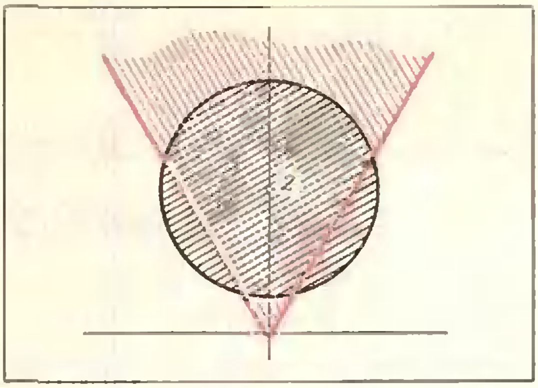


Рис. 4.

З а д а ч а 9 (МГУ, ф-т психологии, 1966). *Указать, где расположены точки, изображающие комплексные числа z, для которых*

$$\log_{\sqrt{3}}\frac{|z|^2-|z|+1}{2+|z|}<2. \qquad (6)$$

Р е ш е н и е. Неравенство (6), согласно свойствам логарифмов, равносильно двойному неравенству

$$0<\frac{|z|^2-|z|+1}{2+|z|}<3,$$

которое можно переписать (поскольку $2+|z|>0$ при любом z) в виде

$$0<|z|^2-|z|+1<6+3|z|.$$

Но неравенство $|z|^2-|z|+1>0$ справедливо при любом z (так как *дискриминант квадратного трехчлена* x^2-x+1 отрицателен), а неравенство $|z|^2-|z|+1<6+3|z|$, то есть $|z|^2-4|z|-5<0$ выполняется при $|z|<5$ (неравенство $x^2-4x-5<0$ выполняется при $-1<x<5$, но $|z|\geqslant 0$ при любом z). Поэтому условию (6) удовлетворяют комплексные числа z, удовлетворяющие условию $|z|<5$; эти числа заполняют внутренность круга радиуса 5 с центром в начале координат.

Задача 10. *Где расположены комплексные числа z такие, что неравенство*

$$|z+2|a^2-2|z+2|a+1>0 \quad (7)$$

верно для всех действительных значений a?

Решение. Если $z=-2$, то неравенство (7) принимает вид $1>0$ и, очевидно, справедливо для всех действительных значений a. Если же $z\neq-2$, то (7) представляет собой неравенство второй степени относительно a. Так как в этом случае $|z+2|>0$, то это неравенство будет справедливо для всех a в тех и только в тех случаях, когда дискриминант квадратного трехчлена отрицателен, то есть если

$$|z+2|^2-|z+2|<0.$$

Отсюда немедленно получаем двойное неравенство

$$0<|z+2|<1.$$

Учитывая, что и при $|z+2|=0$ неравенство (7) выполняется при всех a, заключаем, что искомые комплексные числа заполняют внутренность круга радиуса 1 с центром в точке $(-2,\ 0)$.

Упражнения

1 (МГУ, геологический ф-т, 1961). При каких действительных значениях x и y числа $-3+ix^2y$ и x^2+y+4i изображаются точками, симметричными относительно оси абсцисс?

2 (МГУ, экономический ф-т, 1970). Где расположены комплексные числа z, удовлетворяющие условию $|z|-z=1+2i$?

Указать, где расположены комплексные числа z, удовлетворяющие следующим соотношениям:

3. $|i-1-2z|\geqslant 9$;
4. $|z-i|=|z+i|=|z-1+i|$;
5. $|z-2|^2+|z+2|^2=26$,

6. $\left|z+3\pi-\pi\sqrt{3}i\right|=\pi,\ \arg z=\frac{5}{6}\pi$.

7 (МГУ, ф-т психологии, 1966). Где расположены комплексные числа z, для которых

$$\log_{1/2}|z-2|>\log_{1/2}|z|?$$

8 (МГУ, филологический ф-т, 1971). Где расположены комплексные числа z, для которых

$$\log_2(1+|z^2-i|)+\log_{16}\frac{1}{(1+|z^2+i|)^4}=0?$$

Геометрические задачи

1. Найти число треугольников, стороны которых — натуральные числа, не превышающие 2.

2. Найти число треугольников, стороны которых — натуральные числа, не превышающие n. Разберите два случая:

а) $n=2p$ (p — натуральное);

б) $n=2p+1$ (p — натуральное).

3. Доказать, что число

$$\frac{4p^3+9p^2+5p}{6}$$

целое при натуральных p.

4*. Найти число треугольников, стороны которых — натуральные числа, не превышающие 20, и площадь которых — целое число.

5**. Найти число треугольников, стороны которых — натуральные числа, не превышающие

а) $2p$ (p — натуральное),

б) $2p+1$ (p — натуральное),

и площадь которых — целое число.

6. Доказать, что в любом многоугольнике есть по крайней мере две стороны, отношение которых больше или равно 1 и меньше 2.

7. Точки P, Q, R, S делят стороны четырехугольника $ABCD$ так, что

$$AP:PB=DQ:QC=m$$

и

$$AR:RD=BS:SC=n.$$

Доказать, что отрезки PQ и RS делят друг друга в том же отношении.

Н. В.

Технические вузы с повышенной математической подготовкой

Сейчас в ряде вузов страны готовят специалистов по новой специальности «инженер-математик».
Что это за специальность и чем будут заниматься студенты, получившие эту квалификацию, после окончания института, рассказывает декан факультета прикладной математики МАИ профессор В. К. Саульев.
После статьи В. К. Саульева мы помещаем информации о некоторых вузах, в которых готовят инженеров-математиков.

О новой квалификации «инженер-математик»

В нынешнюю эпоху научно-технического прогресса роль математики все более и более возрастает. Если до войны была известна только математическая физика, то в послевоенные годы появились математическая экономика, математическая лингвистика, математическая биология и так далее вплоть до математической электрокардиологии. Эта тенденция к математизации наук будет далее расти.

Появление быстродействующих ЭВМ стимулировало развитие самой математики, особенно ее прикладных направлений. Так, за последние 20—25 лет созданы математическая теория надежности, теория информации, математическая теория оптимального управления, теория принятия решений в условиях неопределенности, теория массового обслуживания, теория планирования эксперимента, математическая теория управления запасами, теория математического программирования, теория исследования операций, теория статистического моделирования и т. д.

Трудно переоценить значение этих и им аналогичных математических теорий для народного хозяйства нашей страны. Однако у нас сейчас имеется большой дефицит специалистов по прикладной математике, в частности на специалистов по математическому обеспечению ЭВМ и АСУ. В связи с этим в ряде вузов страны организован выпуск специалистов по прикладной математике, получающих квалификацию инженера-математика.

Как показывает само название, инженеры-математики занимают промежуточное положение между математиками, которых готовят университеты, и традиционными инженерами. Тонкая прослойка из таких специалистов в инженерной среде безусловно оказывает на нее благотворное влияние (повышается уровень математической культуры, используются более точные формулы для расчетов, резко повышается к. п. д. работы ЭВМ). Аналогичную роль играют, например, инженеры-экономисты.

Типичная функция инженера-математика: в коллективе он, совместно с обычными инженерами соответствующих профилей, например разработчиками АСУ, решает конкретные технические задачи или задачи управления. При этом основной творческий вклад инженера-математика состоит в разработке приемлемых вычислительно-аналитических алгоритмов.

Более сложная и трудная функция инженера-математика состоит в построении математических моделей, например технологических процессов. «Разыгрывая» на ЭВМ разные варианты математической модели, инженер-математик может выбрать из них оптимальный, то есть наилучший в данных условиях. Здесь знания одной прикладной математики уже недостаточно. Необходимы некоторые инженерные знания, которых не дают университеты, выпускающие «чистых» математиков.

И, конечно же, инженер-математик должен в совершенстве уметь программировать на ЭВМ.

В. К. Саульев

Московский авиационный институт

МАИ имеет семь факультетов. Это факультет летательных аппаратов, факультет установок летательных аппаратов, факультет самолетостроения и вертолетостроения (специальности: самолетостроение, вертолетостроение, гидроаэродинамика), факультет двигателей летательных аппаратов (специальность: авиационные двигатели), факультет систем автоматического управления летательных аппаратов (специальности: авиаприборостроение, гироскопические приборы и устройства, автоматизированные системы управления, электронные вычислительные машины, прикладная математика), радиотехнический факультет (специальности: радиотехника, конструирование и производство радиоаппаратуры), факультет экономики и организации производства летательных аппаратов (специальности: автоматические системы управления, экономика и организация машиностроительной промышленности, организация механизированной обработки экономической информации).

При МАИ имеется подготовительное отделение.

Ниже мы помещаем типичные варианты вступительных экзаменов в МАИ по математике и физике 1972 года.

Математика

В а р и а н т 1

1. Решить уравнение
$$3^{x-1}\cdot x^2+x\,(3^x-2^x)=2\,(2^x-3^{x-1}).$$

2. Доказать, что в любом треугольнике ABC
$$h_a=2p\,\frac{\sin B/2\cdot\sin C/2}{\cos A/2},$$
где h_a — высота, опущенная из вершины A, $2p$ — периметр треугольника.

3. Решить уравнение
$$\log_{\sin x}\frac{1}{4}\,(4\sin x-\cos x)=3.$$

4. Расстояние между городами A и B равно 60 *км*. Два поезда выходят одновременно: один из A в B; другой из B в A. Поезд, идущий из A в B, пройдя 20 *км*, стоит полчаса, затем отправляется дальше и через 4 минуты встречает поезд, идущий из B в A. Оба поезда прибывают к месту назначения одновременно. Определить скорости поездов.

5. Вершина правильной четырехугольной пирамиды лежит в центре грани куба, а ее основание — в плоскости противоположной грани, причем стороны основания пирамиды, равные $2\sqrt{2}$ *см*, параллельны диагоналям основания куба. Найти объем части пирамиды, находящейся вне куба, если ребро куба равно 1 *см*.

В а р и а н т 2

1. Составить квадратное уравнение с действительными коэффициентами, если один из его корней $z=a+bi$ $(b\geqslant 0)$ удовлетворяет уравнению
$$(z+2i)^2+4\,z-4i\bar z+17=0,$$
где
$$\bar z=a-bi.$$

2. При каких действительных значениях b система
$$\begin{cases}x^2-2\,x+y^2=0,\\ y-ax+ab=0\end{cases}$$
имеет действительные решения при любых действительных a?

3. Доказать, что $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=4\operatorname{tg}\beta$, если $5\sin\alpha=3\sin(\alpha+2\beta)$.

4. В треугольнике ABC сторона AC равна b, сторона AB равна c, а биссектриса внутреннего угла A пересекается со стороной BC в точке D такой, что $DA=DB$. Найти длину стороны BC.

5. Сфера касается всех боковых ребер правильной четырехугольной призмы и ее оснований. Найти отношение площади поверхности сферы, лежащей вне призмы, к площади полной поверхности призмы.

Физика

Вариант 1

1. В чем состоят явления дифракции и интерференции?

2. Проводник длиной 10 *см* перемещают в однородном магнитном поле с индукцией 0,1 *тл* так, что он составляет угол 60° с направлением поля. С каким ускорением нужно двигать проводник, чтобы разность потенциалов на концах проводника возрастала равномерно на 1 *в* за 1 *с*?

3. Какой энергией должен обладать протон, чтобы приблизиться к ядру атома азота на расстояние 10^{-16} *м*? Заряд электрона $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *к*, порядковый номер азота в таблице Менделеева 7, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ *ф/м*.

4. При 0° С стеклянная колба вмещает 680 *г* ртути, а при 100° С — 670 *г* ртути. Определить коэффициент линейного расширения стекла. Коэффициент объемного расширения ртути 0,00018 *град*$^{-1}$.

5. В последнюю секунду свободного падения тело прошло путь вдвое больший, чем в предыдущую секунду. С какой высоты падало тело? Постройте график скорости от времени и укажите на нем рассматриваемые пути.

Р. Н. Молодежникова, И. И. Семенов

Московский институт электронной техники

Московский институт электронной техники (МИЭТ) является вузом с повышенной физико-математической подготовкой. На основных факультетах института курс высшей математики близок к курсу математики на физическом факультете МГУ и почти в два раза превышает объем курса математики, читаемого в технических вузах. На вступительных экзаменах математика является профилирующим предметом, и абитуриенты-медалисты, получившие оценку «пять» на экзаменах по математике (письменном и устном), зачисляются в институт без дальнейшей сдачи экзаменов.

На письменный экзамен по математике отводится четыре часа, варианты для письменного экзамена состоят из пяти задач, причем две из них по алгебре, две по тригонометрии и одна геометрическая задача. Обязательно в каждом варианте имеется пример на решение неравенства. Эти задачи подбираются так, чтобы они решались только с помощью методов и приемов, которые сообщаются учащимся в средней школе. Однако при этом требуется, чтобы в процессе решения были обоснованы все действия, были проведены необходимые исследования величин, входящих как в исходные данные задач, так и в их решения.

В билет для устного экзамена включается два теоретических вопроса (алгебра и геометрия); каждому абитуриенту предлагается ряд примеров (как правило, не менее трех) на построение графиков, на решение алгебраических и тригонометрических уравнений и неравенств, на свойства элементарных функций, на комплексные числа или по другим разделам программы.

В настоящее время при большинстве вузов страны, в том числе и при МИЭТ, имеются заочные и вечерние подготовительные курсы, организуются циклы лекций по подготовке в вуз. В нашем институте на заочных и вечерних подготовительных курсах обучается около 2300 человек. Слушатели заочных курсов могут получать устные или письменные консультации, на вечерних курсах — посещать лекции и практические занятия. Они получают методическую литературу, выполняют контрольные задания.

В заключение приведем два варианта вступительных экзаменов в МИЭТ в 1972 году.

Вариант 1

1. Решить неравенство

$$\log_x 2x \leqslant \sqrt{\log_x (2x^3)}.$$

2. Известно, что сумма первых n членов некоторой числовой последовательности при любом n выражается формулой

$$S_n = 5n^2 - 2n.$$

Доказать, что эта последовательность — арифметическая прогрессия и найти ее 20-й член.

3. Решить уравнение

$$2\,\mathrm{tg}\,2x + \mathrm{tg}\,3x = \mathrm{tg}\,5x.$$

4. Проверить равенство

$$\cos(2\,\mathrm{arctg}\,2) - \sin(4\,\mathrm{arctg}\,3) = \frac{9}{25}.$$

5. Дан равнобедренный треугольник с основанием $2a$ и высотой h. В него вписана окружность и к ней проведена касательная, параллельная основанию. Найти радиус окружности и длину отрезка касательной, заключенного между сторонами треугольника.

Вариант 2

1. Решить систему уравнений

$$|z + 1 - i| = |3 + 2i - z| = |z + i|,$$

где $z = x + iy$ — комплексное число.

2. При каких x три числа $\lg 2$, $\lg(3^x - 1)$ и $\lg(3^x + 3)$, взятые в указанном порядке, составляют арифметическую прогрессию?

3. Решить неравенство

$$4\log_{16}\cos 2x + 2\log_4 \sin x + \log_2 \cos x + 3 < 0,$$

если $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

4. Решить уравнение

$$\frac{3(\cos 2x+\operatorname{ctg} 2x)}{\operatorname{ctg} 2x-\cos 2x}-2(\sin 2x+1)=0.$$

5. Острый угол прямоугольного треугольника равен α, радиус окружности, касающейся гипотенузы и продолжений двух катетов, равен R. Найти длину гипотенузы этого треугольника.

А. В. Ефимов

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Развитие науки, техники, производства ставит перед конструкторами новые задачи, требует инженеров новых специальностей. Московский институт радиотехники, электроники и автоматики — один из новых вузов столицы. Институт готовит инженеров широкого профиля по следующим специальностям, охватывающим основные направления новой техники в области радиоэлектроники: радиотехника, конструирование и производство радиоаппаратуры, автоматика и телемеханика, автоматизированные системы управления, электронные вычислительные машины, конструирование и производство электронно-вычислительной аппаратуры, полупроводниковые приборы, промышленная электроника, электронные приборы, электроакустика и ультразвуковая техника.

Дневное отделение МИРЭА имеет три факультета: радиотехнические системы и устройства (РТ), автоматизированные системы управления (АСУ), электронные и квантовые приборы (ЭКП).

Ниже мы приводим три варианта вступительного письменного экзамена по математике 1972 года в МИРЭА.

Вариант 1

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3+y^3=91, \\ x+y=7. \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\lg(3x-5)}{\lg(3x^2+25)}=\frac{1}{2}.$$

3. Решить уравнение

$$\frac{1}{2}(\cos 5x+\cos 7x)-\cos^2 2x+\sin^2 3x=0,$$

$$|x|<\frac{\pi}{3}.$$

4. В треугольнике ABC на основании BC или на его продолжении взята произвольным образом точка D и около треугольников ACD и BAD описаны окружности. Доказать, что отношение радиусов этих окружностей есть величина постоянная. Найти такое положение точки D, для которого эти радиусы будут иметь наименьшую величину.

5. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-3x+2}-x-3>0.$$

Вариант 2

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{y}{3}=3, \\[2mm] \dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$3^{2x+3}-4\cdot 3^{x+1}+1=0.$$

3. Решить уравнение

$$\sin^3 z\cdot\cos z-\sin z\cdot\cos^3 z=\frac{\sqrt{2}}{8},\quad |z|<0{,}2.$$

4. Расстояние между центрами двух пересекающихся кругов радиусов R и r равно d. Найти площадь их общей части.

5. Вычислить

$$a^{1972}+a^{\frac{1}{1972}},\ \text{если}\ a^2+a+1=0.$$

Вариант 3

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3-y^3=124, \\ x^2+xy+y^2=31. \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$3^{2-x}\cdot 2^{2x}+7\cdot 2^x=2\cdot 3^x.$$

3. Решить уравнение

$$\sin 2x=\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2},\quad |x|<\frac{\pi}{2}.$$

4. Доказать, что во всяком треугольнике имеет место следующее соотношение:

$$\frac{a(a+c-b)}{b(b+c-a)}=\frac{1-\cos A}{1-\cos B}.$$

5. Найти $\log_3 10$, если известны: $\log_2 15=a$, $\log_6 12=b$.

О. П. Чопенко

«Математические досуги» Мартина Гарднера

В «Кванте» № 5 за 1972 год мы рассказывали о вышедшей книге яркого и своеобразного американского популяризатора математики и физики Мартина Гарднера *«Математические головоломки и развлечения»* *). Напомним, что эта книга содержит сорок шесть очерков на всевозможные математические темы, ранее публиковавшихся в разное время в журнале Scientific American (раздел «Математические игры»).

Сейчас издательство «Мир» выпустило в свет еще тридцать восемь очерков М. Гарднера, объединенных в одну книгу под названием *«Математические досуги»* **). Забегая вперед, скажем, что вторая книга нам понравилась еще больше, чем первая.

Сначала несколько слов о самом М. Гарднере.

В 1946 году занятия семинара известного американского философа Рудольфа Карнапа, специализирующегося главным образом в математической логике, теории вероятностей и физике, в числе прочих студентов посещал некто Мартин Гарднер, который спустя несколько лет явился к учителю с магнитофонными записями его выступлений и предложил себя в качестве ...редактора. Р. Карнап не без долгих колебаний доверил Гарднеру эту работу и не ошибся. М. Гарднер обладает теми качествами, которых не хватало его учителю: умение ясно и четко излагать мысли, писать занимательно, ярким и простым языком.

Большое влияние на творчество М. Гарднера оказал известный многим читателям «Кванта» профессор Роберт Уильямс Вуд *), который в свободное от основной работы время с юношеским пылом метал бумеранги, решал геометрические задачи, помогал полиции раскрывать преступления, разоблачал псевдоученых, писал научно-фантастические рассказы и стихи, рисовал...

Постепенно Мартин Гарднер, который стал писать для зрелого, развитого читателя, не обязательно имеющего специальное математическое или физическое образование, пришел к нескольким творческим установкам, которые особенно ясно прослеживаются в его «Математических досугах».

Во-первых, в изложении идеи следует опираться лишь на то, что широкий читатель хорошо знает и что он сумеет самостоятельно, без ухищрений, воспроизвести. Чем большую работу читатель выполняет самостоятельно, чем неожиданней для него окажутся результаты и выводы, тем большее удовлетворение он получит.

Во-вторых, любой рассматриваемый факт, помимо того, что он занимателен, удивителен, забавен, должен быть непременно глубоко поучительным, важным с позиций науки.

В-третьих, Мартина Гарднера, как правило, мало волнуют проблемы утверждения своего приоритета. Он стремится продемонстрировать яркие идеи интересных авторов, почерпнутые им в архиве науки.

Это не означает, впрочем, что Гарднер пренебрегает историей. Она является прекрасным орнаментом в рассказах о задачах, когда, например, оказывается, что даже такой замечательный ученый, каким был Леонард Эйлер, изредка ошибался. (А читатель может избежать этой ошибки и разобраться в сути дела.)

Наконец, в-четвертых, математика и физика у Гарднера не выглядят изолированными, а предстают как часть мировой культуры. Поэтому его этюды представляют особую ценность для общего политехнического образования.

Идеи в книгах Гарднера не кажутся приглаженными и тщательно проработанными во всех деталях, приводящих к «круглому» ответу. Напротив, благодаря умышленным недомолвкам они напоминают в миниатюре задачи, которые ставит сама жизнь. Ясность достигается за счет подбора образных примеров, специального введения интермедий, подготавливающих читателя к переходам мысли, а также умеренности пользования символикой.

---

*) Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. М., «Мир», 1972.

**) Гарднер М. Математические досуги. М., «Мир», 1972.

*) См., например, «Квант» №№ 10, 11, 12, 1971.

Даже по небольшим выдержкам из «Математических досугов», которые мы печатаем в 5-м и 6-м номерах «Кванта», можно судить о том, насколько широк круг интересов Мартина Гарднера.

Мартин Гарднер по существу создал новый жанр популярной литературы. Его книги по праву можно назвать математическими развлечениями XX века.

Читая его новеллы, нельзя не получить удовольствия от раскрытия самых неожиданных связей между развлечениями и серьезной наукой и не удивиться остроумному применению математических понятий и вычислительной техники для анализа игр и головоломок.

Трудно да и незачем пересказывать содержание этой великолепной книги. Ее нужно прочесть.

В заключение мы приводим несколько отрывков из этой книги.

Казнь врасплох и связанный с ней логический парадокс

Осужденного бросили в тюрьму в субботу.

— Тебя повесят в полдень, — сказал ему судья, — в один из семи дней на следующей неделе. Но в какой именно день это должно произойти, ты узнаешь лишь утром в день казни.

Судья славился тем, что всегда держал свое слово. Осужденный вернулся в камеру в сопровождении адвоката. Как только их оставили вдвоем, защитник удовлетворенно ухмыльнулся.

— Неужели не понятно? — воскликнул он. — Ведь приговор судьи нельзя привести в исполнение!

— Как? Ничего не понимаю, — пробормотал узник.

— Сейчас объясню. Очевидно, что в следующую субботу тебя не могут повесить: суббота — последний день недели, и в пятницу днем ты бы уже знал наверняка, что тебя повесят в субботу. Таким образом, о дне казни тебе стало бы известно до официального уведомления в субботу утром, следовательно, приказ судьи был бы нарушен.

— Верно, — согласился заключенный.

— Итак, суббота, безусловно, отпадает, — продолжал адвокат, — поэтому пятница остается последним днем, когда тебя могут повесить. Однако и в пятницу повесить тебя нельзя, ибо после четверга осталось бы всего два дня — пятница и суббота. Поскольку суббота не может быть днем казни, повесить тебя должны лишь в пятницу. Но раз тебе об этом станет известно еще в четверг, то приказ судьи опять тоже отпадает. Итак, последний день, когда тебя еще могли бы казнить, это четверг. Однако четверг тоже не годится, потому что, оставшись в среду живым, ты сразу поймешь, что казнь должна состояться в четверг.

— Все понятно! — воскликнул заключенный, воспрянув духом. — Точно так же я могу исключить среду, вторник и понедельник. Остается только завтрашний день. Но завтра меня наверняка не повесят, потому что я знаю об этом уже сегодня!

И вдруг, к немалому удивлению осужденного, в четверг утром в камеру является палач. Осужденный, конечно, этого не ждал, но самое удивительное, что приговор оказался совершенно точным — его можно привести в исполнение в полном соответствии с формулировкой.

В чем же здесь противоречие?

Проблемы уличного движения в городе Флойдз-Ноб

Роберт Эббот предложил вниманию читателей лабиринт, изображенный на рисунке 1, сопроводив его следующим пояснением.

«В городке Флойдз-Ноб, штат Индиана, имеется лишь 37 зарегистрированных автомашин, и мэр городка решил назначить своего двоюродного брата Генри Стейблза, большого шутника, известного своей любовью к эксцентрическим поступкам, начальником отдела регулирования уличного движения, решив, что тот без труда справится с возложенными на него обязанностями. Вскоре мэр пожалел о принятом решении.

Проснувшись однажды утром, жители городка увидели множество новых дорожных знаков. Знаки эти были развешены так, что движение на некоторых улицах стало односторонним, а повороты на перекрестках — делом весьма сложным и запутанным.

Жители городка были за то, чтобы сорвать все дорожные знаки. Однако начальник полиции — второй двоюродный брат мэра — обнаружил, что водители настолько выходят из себя от такого обилия знаков, что рано или поздно совершают запрещенный поворот, и городская казна получает от штрафов за эти нарушения больше, чем от штрафов за

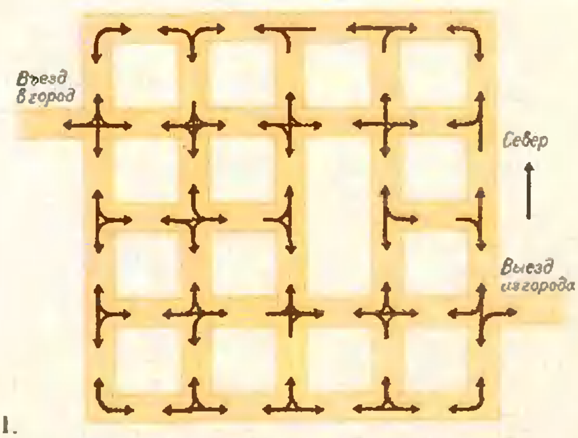


Рис. 1.

превышение скорости на пригородном шоссе.

Кроме того, жители городка не без злорадства ожидали, как на следующий день, в субботу, через город проследует Мозес Мак-Адам, самый богатый фермер вокруге, имевший обыкновение проводить конец недели в загородном доме. Все надеялись позабавиться над Мозесом, полагая, что проехать через город без единого нарушения невозможно. Но Мозес тайком раздобыл план города со всеми дорожными знаками и хорошенько изучил его. Когда настала суббота, он, к удивлению жителей, проехал через весь город без единого нарушения!»

Можете ли вы восстановить маршрут, по которому Мозес следовал через город? Очутившись на любом перекрестке, вы имеете право двигаться в направлении одной из стрелок, то есть поворачивать в нужную сторону разрешается лишь при условии, если имеется закругление, по которому можно свернуть, а следовательно, прямо — лишь при условии, если в нужную сторону идет прямая линия. Поворачивать, двигаясь задним ходом, запрещается. Нельзя разворачиваться и на 180°. Покидать перекресток разрешается только в направлении какой-нибудь из стрелок. Например, достигнув первого после въезда в город перекрестка, вы должны будете выбрать одну из двух возможностей: поехать на север или прямо (то есть на восток).

Если вы поедете прямо, то на следующем перекрестке сможете либо свернуть на юг, либо продолжить свой путь на восток. Хотя на втором перекрестке имеется закругление к северу, но стрелки, выходящей из него на север, нет, поэтому покидать второй перекресток, держа курс на север, воспрещается.

Игра в веревочку

Достойно сожаления, что искусство составления веревочных узоров не получило широкого распространения; особенно полезным оно могло бы оказаться в руках учителей начальных классов, медицинских сестер, ухаживающих за больными, вынужденными в течение длительного времени находиться в постели, и психиатров, рекомендующих ручной труд в качестве терапии.

Чтобы удовлетворить аппетиты читателей, я объясню, как сделать один из простейших и наиболее известных ромбических узоров. Его называют «ромбы осэджей», потому что этот узор впервые показал индеец из племени осэджей, однако в США его чаще называют «лестницей Якова». Читатель должен взять полтора метра мягкого шнура, связать его концы и «показать, на что он способен». Немного попрактиковавшись, вы сможете строить «лестницу Якова» менее чем за 10 секунд.

Исходное положение — такое же, как и в большинстве веревочных узоров: петля надета на большие пальцы и мизинцы обеих рук (рис. 2, *а*). Указательным пальцем правой руки подденьте участок шнура между мизинцем и большим пальцем левой руки и, не спуская шнура с пальца, отведите правую руку вправо. Указательным пальцем левой руки подденьте участок шнура между мизинцем и большим пальцем правой руки (указательный палец левой руки должен при этом пройти между участками шнура, наброшенного на указательный палец правой руки) и отведите левую руку влево. У вас получится фигура, показанная на рисунке 2, *б*. Освободив большие пальцы обеих рук и натянув шнур, вы получите фигуру, показанную на рисунке 2, *в*. Поверните руки ладонями от себя, чтобы вам легче было поддеть кончиками больших пальцев самый дальний участок шнура в точках, обозначенных на рисунке 2, *в* буквами *А*. Поддев, разверните руки в прежнее положение. При этом участок, который был самым дальним от вас, пройдет под всеми остальными участками шнура и станет самым ближним (рис. 2, *г*). Согните большие пальцы над ближайшими к ним участками шнура и подденьте ими следующий участок в точках, обозначенных буквами *А* на рисунке 2, *г*. Сбросьте петли с мизинцев. У вас получится веревочная фигура, изображенная на рисунке 2, *д*.

Согните теперь мизинцы над ближайшими к ним участками шнура, и тыльной стороной мизинцев подденьте шнур в точках, обозначенных буквами *А* на рисунке 2, *д*. Освободив большие пальцы, вы получите фигуру, изображенную на рисунке 2, *е*. Согните большие пальцы над двумя ближайшими к ним участками шнура и подденьте их тыльной стороной следующие (третьи от них) участки шнура в точках, обозначенных буквами *А* на рисунке 2, *е*. Верните большие пальцы в исходное положение. У вас получится фигура, изображенная на рисунке 2, *ж*.

Большим и указательным пальцами правой руки возьмите шнур в точке *А* (рис. 2, *ж*), потяните на себя и наденьте петлю на большой палец левой руки. Затем возьмите петлю, которая была уже надета на большой палец левой руки, в точке *В* (рис. 2, *ж*) и поднимите ее, тем самым вы спустите эту петлю с большого пальца. Этот обмен петель часто встречается в веревочных узорах. Левой рукой произведите аналогичный обмен петель на большом пальце правой руки. (Мастера веревочных узоров могут обменивать петли на обоих пальцах одновременно без помощи другой руки, но начинающему лучше придерживаться описанной выше последовательности.) После всех операций у вас должна получиться фигура, показанная на рисунке 2, *з*.

Теперь все готово для последнего движения. Согнув указательные пальцы, введите их кончики в маленькие треугольники, помеченные буквами *А* на рисунке 2, з. Высвободите мизинцы из петель и одновременно поверните обе руки ладонями от себя, как можно сильнее растопырив большие и указательные пальцы. (Выполняя заключительную операцию, следите за тем, чтобы шнур имел достаточно большую «слабину», иначе узор не раскроется полностью.) Туго натяните шнур. Если все было сделано правильно, вы увидите дорожку из ромбов, изображенную на рисунке 2, *и*. Внезапное появление красивых узоров из хаоса веревочных переплетений принадлежит к числу наиболее приятных особенностей большинства манипуляций с веревочкой.

Тем, кто в совершенстве овладел искусством составления веревочных узоров, может доставить удовольствие выступление в «парном разряде», когда одну и ту же петлю удерживают двое играющих: один — правой, другой — левой рукой. Играя вдвоем, нетрудно одновременно сплести два одинаковых узора на двух петлях (первая петля накинута на правую руку первого игрока и на левую руку второго, вторая петля — на левую руку первого игрока и на вторую руку второго). Гораздо труднее одновременно сплести два различных узора. Такой трюк требует огромного мастерства и точной координации движений.

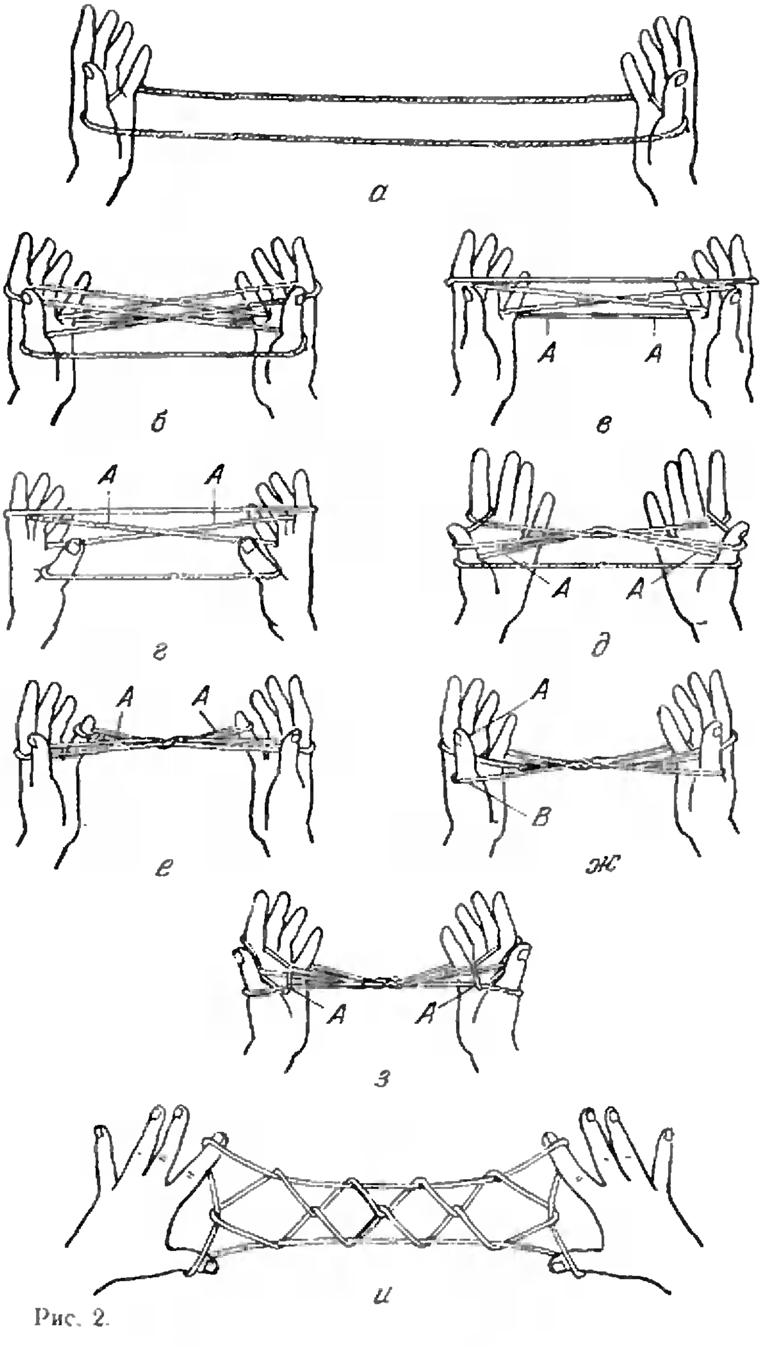


Рис. 2.

Еще одна задача на взвешивание

Из пяти данных предметов никакие два не весят одинаково. Эти пять предметов надо расположить в ряд по мере возрастания их веса. У нас есть рычажные весы с двумя чашами, но нет гирь. Как решить задачу, произведя не более семи взвешиваний?

Ясно, что для двух предметов достаточно одного взвешивания. Три предмета придется взвешивать трижды. Пускай первое взвешивание определит, что *А* тяжелее, чем *В*. Положим на весы *В* и *С*. Если *В* окажется тяжелее, то задача будет решена с помощью двух взвешиваний; если же тяжелее окажется *С*, то потребуется третье взвешивание, с помощью которого мы сравним между собой предметы *С* и *А*. Если перед вами четыре предмета, то можно легко обойтись пятью взвешиваниями.

Когда число предметов доходит до пяти, задача перестает быть правильной, а с дальнейшим ростом числа взвешиваемых предметов трудность задачи очень быстро увеличивается. Насколько мне известно, пока не существует общего метода для упорядочения n предметов с помощью наименьшего возможного числа взвешиваний.

В. Н. Березин,
М. Л. Смолянский

Новые книги

В этом номере мы продолжаем публиковать аннотации на книги, выходящие в 1973 году и представляющие интерес для наших читателей.

В III квартале 1973 года выйдут в свет следующие книги (заказы можно направлять через магазины «Книга—почтой»):

Математика

Издательство «Наука»

1. Кириллов А. А. *Пределы.* (Объем 5 л., тираж 100 000 экз., цена 15 к.)

В книге рассмотрен один из самых трудных разделов школьной программы — теория пределов.

На конкретных, хорошо подобранных примерах, автор ясно и очень доходчиво объясняет этот столь трудный раздел программы.

Книга предназначена для самостоятельно занимающихся математикой школьников 9—10 классов. Она также может быть использована учителями математики для внеклассной работы.

2. Панов Д. Ю. *Счетная линейка.* (Объем 11 л., тираж 200 000 экз., цена 39 к.)

В наше время умение пользоваться логарифмической линейкой необходимо каждому школьнику в самых разнообразных случаях.

Первая часть книги в простой и чрезвычайно наглядной форме учит начинающих производить простейшие вычисления с помощью логарифмической линейки (которые, однако, вполне достаточны для школьных целей).

Вторая часть книги служит более специальным целям и предназначена для читателей, уже умеющих считать на линейке.

Книга рассчитана на широкий круг читателей.

3. Солодовников А. С., Кантор И. Л. *Гиперкомплексные числа.* (Объем 7 л., тираж 35000 экз., цена 23 к.)

Авторы книги в популярной форме рассказывают об одном из обобщений комплексных чисел — гиперкомплексных числах.

Книга рассчитана на учащихся старших классов; она также представляет интерес для учителей математики, ведущих факультативные занятия.

4. Бескин Н. М. *Деление отрезка в данном отношении.* (Объем 3 л., тираж 50 000 экз., цена 10 к.)

В этой книге изложены некоторые вопросы, связанные с задачей о делении отрезков в данном отношении. В процессе изложения этого вопроса автор знакомит читателя с некоторыми вопросами аффинной и проективной геометрии.

Книга рассчитана на учащихся 8—10 классов. Она может быть также полезна учителям математики при проведении факультативных занятий.

Издательство «Просвещение»

5. Виленкин Н. Я., Шварцбурд С. И. *Математический анализ.* Пособие для учащихся математических школ. (Объем 31,7 л., тираж 100 000 экз., цена 1 р. 10 к.)

Книга предназначена, в первую очередь, для учащихся физико-математических школ. В достаточно доступной форме, однако используя основные теоретико-множественные понятия, авторы излагают основные понятия математического анализа, представленные в программе средней школы. При изложении материала авторы широко используют наглядные представления. Большое число задач и упражнений помогают усвоению материала.

Физика

Издательство «Наука»

1. Коган Б. Ю., *Сто задач по механике.* (Объем 5 л., тираж 200 000 экз., цена 14 к.)

Книга представляет собой сборник нестандартных задач по механике, носящих, в основном, занимательный характер. Ко всем задачам даны подробные решения.

Книга рассчитана на школьников старших классов, которые интересуются физикой. Она будет также полезна учителям физики, ведущим факультативные занятия.

7. *Физика. Часть I. Вселенная.* Под редакцией Ахматова А. С. (Объем 35 л., тираж 100 000 экз., цена 1 р. 47 к.)

Эта книга является переводом американского учебника для средней школы по курсу общей физики. Полный курс состоит из четырех частей: «Вселенная», «Оптика и волны», «Механика», «Электричество и строение атома».

Публикуемая первая часть курса «Вселенная» знакомит читателя с фундаментальными физическими понятиями: время, пространство и так далее, а также с путями развития современной физики.

Книга является полезным дополнением к существующим учебникам по физике. Она рассчитана на широкий круг читателей: учащихся школ, студентов техникумов, лиц, занимающихся самообразованием, представляет большой интерес для преподавателей физики в средней школе.

8. Бишоп Р. *Колебания.* (Объем 10 л., тираж 15 000 экз., цена 70 к.)

В популярной и увлекательной форме рассказывается о колебаниях в природе и технике. Затрагивается широкий круг вопросов: колебания машин и приборов, колебания инженерных сооружений, термоупругие колебания, методы борьбы с вредными колебаниями и использование полезных колебаний. Изложение иллюстрируется большим количеством примеров и фотографий.

Книга предназначена для широкого круга читателей, интересующихся техникой вообще и проблемой колебаний в частности.

9. Ферсман А. Е. *Рассказы о самоцветах*. (Объем 18 л., тираж 20 000 экз., цена 1 р. 10 к.)

Эта книга написана одним из самых крупных знатоков природы. Основываясь на своем богатейшем опыте и опираясь на сведения, почерпнутые из русских летописей, индейских и арабских лапидарий, автор вводит читателя в сложный и прекрасный мир цветных камней.

Написанная прекрасным языком, богато иллюстрированная, она несомненно вызовет интерес у самого широкого круга читателей.

Издательство «Мир»

10. Сиборг Г., Корлисс У. *Человек и атом*. (Объем 21 л., тираж 75 000 экз., цена 1 р. 26 к.)

В этой книге изложены практически все области применения атомной энергии — в медицине, биологии, энергетике и так далее. Популярное изложение материала делает эту книжку интересной для широкого круга читателей.

Атомиздат

11. Кюри Е. *Мария Кюри*. (Объем 20 л., тираж 150 000 экз., цена 1 р. 20 к.)

Эта книга написана дочерью известной французской ученой Марии Кюри. Ева Кюри — младшая дочь Марии Кюри, журналистка — сумела очень ярко и занимательно изложить творческую биографию и жизненный путь Марии Кюри. Ни одна женщина в мире не пользовалась такой научной популярностью, как Мария Кюри. Она была членом шести научных учреждений, академий и научных обществ; она являлась дважды лауреатом Нобелевских премий (по физике и по химии).

Эта увлекательная книга, безусловно, будет интересна самому широкому кругу читателей.

Астрономия

Издательство «Наука»

12. *Астрономический календарь на 1974 год*, под ред. П. И. Бакулина. (Объем 15 л., тираж 20 000 экз., цена 70 к.)

Этот ежегодник рассчитан на участников астрономических кружков, любителей астрономии. Он содержит сведения об астрономических явлениях в 1974 году, статьи, посвященные достижениям в различных областях астрономии, инструкции для наблюдений, информацию о различных астрономических совещаниях и конференциях, материалы, посвященные юбилейным астрономическим датам.

13. Цесевич В. П. *Что и как наблюдать на небе*. (Объем 25 л., тираж 25 000 экз., цена 1 р.)

Книга является пособием для любительских научных наблюдений за небесными светилами. Содержит описание звездного неба, основных понятий астрономии и астрофизики, освещает современные данные о телах Солнечной системы — Луне и планетах, Солнце и звездах. Систематически излагаются способы наблюдений, доступных любителю астрономии, и обработки этих наблюдений.

Научная фантастика

Издательство «Мир»

1. Лем С. *Солярис. Эдем*. (Объем 21 л., тираж 100 000 экз., цена 1 р. 13 к.).

Творчество Лема, автора ряда широко известных романов, хорошо известно нашему читателю. В новом сборнике будут опубликованы его романы «Эдем» и «Солярис». В них рассказывается о покорении человечеством космоса, о проблемах, которые могут возникнуть перед людьми во время космических путешествий.

2. *Нежданно-негаданно*. Сборник научно-фантастических рассказов. (Объем 14 л., тираж 100 000 экз., цена 46 к.).

В сборник включены рассказы, в которых авторы юмористически рассматривают последствия научных открытий, различных фантастических ситуаций и так далее.

Читатели познакомятся с новыми именами, с творчеством Ж. Стернберга, Х. Артьенса и других.

Все рассказы интересно и занимательно написаны.

3. Рассел Э. *Ниточка к сердцу*. (Объем 14 л., тираж 100 000 экз., цена 76 к.).

Английский писатель Эрик Фрэнк Рассел считается одним из лучших фантастов своей страны. Его творчество характеризуется юмором и оптимизмом, лиричностью, сюжетной напряженностью и яркостью в обрисовке характеров. Научно-фантастические рассказы Э. Ф. Рассела отличаются высокими художественными достоинствами.

4. *Фантастика социалистических стран*. Сборник научно-фантастических рассказов. (Объем 12 л., тираж 100 000 экз., цена 66 к.).

В сборнике публикуются новые произведения авторов социалистических стран. Читатель познакомится с рассказами болгарского автора С. Славчева, поляка С. Вайнфельда и других.

Для всех произведений характерен занимательный, напряженный сюжет, их авторы предлагают вниманию читателей увлекательные научно-фантастические гипотезы.

М. Л. Смолянский

Брошюры по физике

Издательство «Знание» уже около 20 лет выпускает серию брошюр под общим названием «Физика», рассчитанную на широкий круг читателей. Большая часть их рассказывает о современных проблемах теоретической и экспериментальной физики. Авторы этих брошюр — известные ученые, активно участвующие в разработке освещаемых ими проблем. Они обычно стремятся донести до читателя прежде всего основные физические идеи, лежащие в основе исследований, и потому почти не пользуются сложным математическим аппаратом. Тем не менее для полного понимания таких брошюр необходимо, как правило, предварительное знакомство с вузовским курсом общей физики. Но и увлеченные физикой старшеклассники найдут немало интересных сведений на страницах этих брошюр.

Почти каждый год среди брошюр этой серии встречаются и такие, которые вполне доступны старшеклассникам. Приведем несколько примеров.

В серии «Физика» выпускаются биографии выдающихся ученых, создавших новые разделы этой науки. Обычно выход в свет таких брошюр связан с юбилейными датами. Так, в работе академика Б. М. Понтекорво *«Энрико Ферми»* (№ 8, 1971) рассказывается о жизни и основных научных достижениях замечательного итальянского ученого. Брошюра тем более интересна, что автор ее много лет сотрудничал с Ферми и был одним из самых любимых его учеников.

Брошюра, выпущенная к 100-летию со дня рождения Эрнеста Резерфорда, называется *«О физике XX века»* (№ 6, 1971) и содержит три лекции Резерфорда, прочитанные им в 1909, 1923 и 1936 годах. Эти популярные лекции посвящены атомарному строению электричества, строению атома и искусственному превращению элементов. Лекциям предпослано предисловие академика П. Л. Капицы, который на протяжении почти 14 лет работал в Кембридже у Резерфорда.

Исключительная роль, которую физика играет в научно-технической революции, вызывает все возрастающий интерес к истории этой науки. Некоторые крупные ученые высказывают мнение о том, что нельзя рассчитывать на успех в предвидении путей развития физики в будущем, если мы не будем достаточно понимать ее прошлое. В связи с этим возникла идея создать антологию предисловий к выдающимся трудам ученых XVI—XX веков. Такой сборник *«Становление физики»* (№ 8, 1972) составил профессор С. П. Капица. Каждому предисловию предпослана краткая биография его автора. В брошюре приведены целиком или в выдержках предисловия к наиболее знаменитым трудам по физике русских и иностранных ученых: Гильберта, Ньютона, Ломоносова, Гельмгольца, Менделеева, Эйнштейна, Перрена, Планка, Дирака.

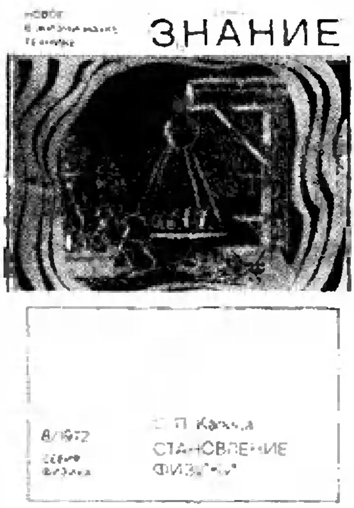
Некоторые брошюры серии «Физика» помогают читателям ориентироваться в фактах и событиях, относящихся к развитию физики и ее достижениям. Например, брошюра А. И. Баженова *«Физики-лауреаты»* (№ 11, 1971) рассказывает о физиках-лауреатах Нобелевской премии. Шесть известных советских физиков — академики И. Е. Тамм, И. М. Франк, П. А. Черенков, Л. Д. Ландау, Н. Г. Басов и А. М. Прохоров — были награждены Нобелевскими премиями. Основной раздел брошюры посвящен советским физикам-лауреатам и тем трудам, за которые им были присуждены эти премии. В брошюре дана также краткая справка о Нобелевских премиях и приведен полный список Нобелевских лауреатов по физике со времени основания премий.

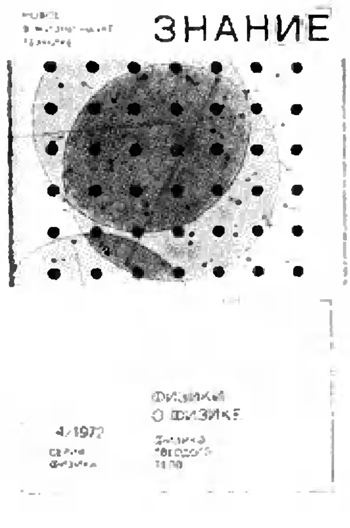
Следует упомянуть и о брошюре академика П. Л. Капицы, стоящей несколько в стороне от основной тематики серии «Физика». Имеется в виду его сборник *«Физические задачи»* (№ 6, 1972). Он был выпущен в связи с пожеланиями многих читателей, особенно молодых. В этот сборник вошли также несколько статей П. Л. Капицы на тему о воспитании физиков.

Помещенные в сборнике задачи во многом не похожи на обычные задачи по физике. Условия этих задач часто не содержат всех необходимых данных, и школьнику надо самому дополнять их сведениями из справочников и таблиц. Решение таких задач требует не только умения оперировать заученными формулами, но и глубокого понимания существа рассматриваемых физических явлений. Поясняя причины, побудившие его составить столь необычные задачи, автор пишет: «Хорошо известно, что для плодотворной научной работы требуется не только знание и понимание, но, главное, еще самостоятельное аналитическое и творческое мышление. Как одно из эффективных средств воспитания, выявления и оценки этих качеств при обучении молодежи и были составлены эти задачи».

Расскажем коротко о брошюрах, которые выйдут в 1973 году. Первые две брошюры содержат популярный обзор достижений в различных областях физики. Одна из них написана физиком-теоретиком, профессором М. И. Кагановым. Она называется *«Магноны и плазмоны»* (№ 1, 1973) и посвящена исследованиям так называемых квазичастиц. Автор пишет, что понятие «квазичастица», впервые выдвинутое еще в тридцатых годах советским физиком-теоретиком Я. И. Френкелем, оказалось очень плодотворным в физике твердого тела, где квазичастица прекрасно справляется с тем, ради чего она создана: с описанием движения атомных частиц в конденсированных средах.

В брошюре *«Электрические свойства плазмы»* (№ 2, 1973) доктор физико-математических наук В. Н. Цытович рассматривает проблемы использования плазмы как источника сильных электрических полей, в частности, для новых методов ускорения заряженных частиц. Автор рассказывает о развитии идей академика В. И. Векслера об ускорении сгустков заряженных частиц и перспективах создания новых мощных ускорителей, основанных на использовании плазмы.





Брошюру академика А. А. Логунова и В. А. Ярба *«Серпуховский ускоритель»* (№ 3, 1973) можно отнести к числу наиболее доступных школьникам брошюр этого года. В ней приводится краткое описание основных характеристик серпуховского ускорителя протонов с энергией, достигающей 76 миллиардов электрон-вольт. Авторы подробно рассказывают о результатах исследований в области физики высоких энергий, выполненных на этом ускорителе.

В 1973 году издательство «Знание» намечает выпустить в серии «Физика» ряд других брошюр по различным вопросам физики (о новейших достижениях в области изучения нейтрино, о проблемах гравитации, об успехах и перспективах термоядерных исследований, о проблемах квантовой электроники, оптики и физики атмосферы). Подготавливается также издание брошюры, составленной из статей, посвященных научной деятельности недавно умершего выдающегося советского физика-теоретика академика Игоря Евгеньевича Тамма.

Будет издан очередной сборник *«Физики о физике»*, содержащий статьи зарубежных физиков, опубликованные в последнее время в иностранной научно-популярной печати. Сборники «Физики о физике» выпускаются ежегодно и охватывают широкий круг физических проблем. Так, сборник, выпущенный в 1972 году (№ 4, 1972) был посвящен новым идеям и методам в физике твердого тела. Тема сборника «Физики о физике» 1973 года — астрофизика и физика плазмы.

Брошюры серии «Физика» выходят один раз в месяц и распространяются по предварительной подписке, как обычное подписное издание. Стоимость годовой подписки — 1 руб. 20 коп.

Ф. Кедров

Л. В. Кованцова

Киевская заочная физико-математическая школа

Всем известно, как велико значение математики для наук, занимающихся изучением окружающего нас мира. Ее развитие тесно связано с творчеством многих поколений ученых-математиков; эта постоянно развивающаяся наука вызывает все больший интерес, который с годами не ослабевает, а усиливается. Особенно радостно видеть, с какой заинтересованностью и любовью относятся к математике школьники, как тонко они чувствуют и понимают ее. В этом — большая заслуга преподавателей, раскрывающих перед учащимися загадочный мир математики, мир формул и теорем.

В последнее время очень много внимания уделяется вопросу улучшения форм школьного образования — введению целесообразной методики, использованию вспомогательных средств в процессе обучения. Обучение в заочной физико-математической школе — одна из новых форм изучения математики.

Первая заочная математическая школа была открыта в 1963 году при Московском университете. Затем такие же школы были организованы при Ленинградском и Новосибирском университетах, а в 1968 году — при Киевском университете. В настоящее время в Киевской школе насчитывается более 2,5 тысяч учащихся.

Специализированные заочные школы строят работу независимо от планов, по которым работают обычные средние школы.

В задачах, которые даются в специализированных заочных физико-математических школах, должны быть такие элементы, которые создают активный запас математических знаний. Необходимо, чтобы учащийся, решая задачу, смог сам подумать над тем, чтобы число вводимых в нее данных не было ни избыточным, ни недостаточным.

Какие же темы разрабатывают учащиеся Киевской заочной физико-математической школы?

Это, прежде всего, метод координат, функции и их графики, элементы комбинаторики, пределы, производная, уравнения и неравенства, тригонометрические уравнения, геометрические преобразования, неевклидовы геометрии.

Эти вопросы охватывают полный курс школьного обучения, и в то же время они намного сложнее, объемнее. Так, метод координат в наших заданиях используется намного шире, чем это делается в средней школе. Учащиеся знакомятся с такими тонкими вопросами высшей математики, как аксиоматический метод, неевклидовы геометрии. Кроме элементарных форм геометрических преобразований, рассматриваемых в средней школе, учащимся сообщаются сведения о более сложных формах — проективных, аффинных, то есть учащиеся знакомятся с теоретико-групповыми основаниями в геометрии.

Мы считаем нужным давать учащимся специализированной школы элементы комбинаторики даже при условии, что они есть в программах обычной школы. Это становится тем более необходимым, когда эти элементы из программы исключены. Для учащихся специализированных школ элементы комбинаторики нужны не как самоцель, а как отправная точка для вырабатывания у них теоретико-вероятностного подхода к элементам реальной действительности.

Большую помощь в работе Киевской заочной школы оказывает Украинское телевидение, в тесном единении с которым школа работает с первых дней своего существования. Каждый понедельник в эфир выходят передачи для учащихся нашей школы, подготовленные и читаемые профессорами и преподавателями Киевского университета, учеными АН УССР.

Начиная с этого года, издательство «Вища школа» выпускает целую серию брошюр*) для учащихся, увлекающихся математикой. Здесь и «Метод координат», и «Геометрические преобразования», и «Производная», и многие другие. Все брошюры будут выходить на украинском языке.

Назначение такой литературы — закрепить школьные знания, выработать у школьника навыки математического мышления, а в некоторых случаях вывести читателя за пределы школьных программ и сообщить ему новые сведения, новые методы математического рассуждения.

---

*) См. «Квант» № 4, 1973, с. 66.

Ежегодно в январе школа проводит набор учащихся. В школе три курса. Набор проводится на 1-й и 2-й курсы.

Ниже приводятся задачи вступительной контрольной работы, предлагавшиеся в 1972 году.

7 класс

1. Некоторая комиссия собиралась 40 раз. Каждый раз на заседании присутствовало по 10 человек, причем никакие двое из членов комиссии не были вместе на одном заседании более одного раза.

Доказать, что число членов комиссии более 60.

2. Плоскость разбита на квадратные клетки, в каждой из которых записано некоторое натуральное число. Известно, что каждое число равно среднему арифметическому четырех чисел, стоящих в четырех соседних клетках.

Доказать, что все числа, вписанные в клетки, равны между собой.

3. Разложить на 4 множителя выражение $x^8 + x^4 + 1$.

4. Остаток от деления на 24 квадрата простого числа, большего 3, равен единице. Доказать это или опровергнуть.

5. Внутри треугольника найти такую точку, что линии, соединяющие ее с тремя вершинами треугольника, делят треугольник на три части, площади которых пропорциональны трем данным числам p, q и r.

6. Найти прямоугольный треугольник с заданным острым углом, в котором гипотенуза выражается тем же числом, что и площадь.

7. Куб, все грани которого выкрашены краской, распилили на 1000 одинаковых кубиков, полученные кубики сложили в ящик и тщательно перемешали. Каковы вероятности (доли случаев) вынуть наугад из ящика кубик с одной, двумя и тремя окрашенными гранями?

8. Найти частное от деления $a + a^2 + \ldots + a^{100}$ на $a^{-1} + a^{-2} + \ldots + a^{-100}$.

9. Сколько цифр имеет число 2^{100}?

10. Какое наибольшее число тупых углов может быть в пятиугольнике?

11. В каких пределах может меняться угол при вершине равнобедренного треугольника, если основание остается меньше боковой стороны?

12. Доказать, что если три угла выпуклого четырехугольника тупые, то диагональ, исходящая из четвертого угла, длиннее, чем другая диагональ.

13. При каких значениях параметра a дробь

$$\frac{(a-1)^3}{a^5 - 3a^4 + 4a^3 - 4a^2 + 3a - 1}$$

имеет максимальное значение?

8 класс

1. Через точку M на стороне AB треугольника ABC провести прямую так, чтобы она поделила площадь треугольника пополам.

2. При каких значениях n существует выпуклый n-угольник, у которого одна сторона имеет длину 1, а длины всех диагоналей — целые числа?

3. Доказать, что если обе стороны прямоугольника и его диагональ выражаются целыми числами, то площадь прямоугольника численно делится на 12.

4. Доказать, что сумма

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

не является целым числом ни при каком целом n.

5. 25 *м* ленты толщиной в 0,1 *мм* намотали на картонную трубку. Получился валик диаметром в 1 *дм*. Каков диаметр трубки?

6. Доказать, что если целое число n не делится на 17, то $n^8 - 1$ или $n^8 + 1$ делится на 17.

7. Найти сумму n членов

$$3 + 33 + 333 + \ldots + 333\ldots3$$

8. В трапеции $ABCD$ $(BC \parallel AD)$ даны $AD = 57$, $BC = 33$, $\angle BAD = 60°$, E и F — середины сторон BC и AD. Площадь трапеции равна 180. Пусть AE и BF пересекаются в точке M, а ED и FC пересекаются в точке N. Найти площадь четырехугольника $FMEN$. Какие из данных задачи можно отбросить, чтобы при этом не изменился ответ?

9. К какому трехзначному числу можно приписать такие три цифры слева, что получится его квадрат? (Найти все такие числа.)

10. В $\triangle ABC$ провести прямую ab, параллельную стороне AB, так, чтобы площадь прямоугольника $abcd$ (точки c и d — основания перпендикуляров, опущенных из a и b на AB) была наибольшей.

11. Кусок перфоленты имеет форму прямоугольника со сторонами 30 и 90 *см*. На нем записана некоторая информация в двоичном коде, то есть в виде упорядоченной совокупности нулей и единиц. Цифры записаны на дорожках, расстояния между которыми 1 *см*. Расстояние между крайними дорожками и краями перфоленты составляет 1,5 *см*. Известно, что на участке дорожки длиной 3 *см* записаны хотя бы две единицы. Справедливо ли утверждение, что на всем куске перфоленты можно насчитать не менее 990 единиц?

12. Доказать, что в прямоугольном треугольнике ABC имеет место соотношение $c^3 \geqslant 8RS$, где c — гипотенуза, R — радиус описанного круга, S — площадь треугольника.

VI Международная олимпиада по физике

В июле 1973 года состоится очередная Международная физическая олимпиада школьников. Предыдущая, VI Международная олимпиада, была проведена в 1972 году в Румынии, в Бухаресте. Мы помещаем здесь короткую информацию об этой олимпиаде.

Команду Советского Союза представляли: Вайдман Лев — учащийся 10 класса спецшколы-интерната № 45 г. Ленинграда, Лягушин Сергей — учащийся 10 класса средней школы № 23 г. Днепропетровска, Мкртчян Рубен — учащийся 10 класса физико-математической школы № 1 г. Еревана, Плетнев Игорь — учащийся 10 класса спецшколы-интерната № 18 г. Москвы, Провоторов Сергей — учащийся 10 класса спецшколы-интерната № 45 г. Ленинграда.

Все участники олимпиады должны были выполнить задания теоретического и экспериментального туров. Для решения четырех задач теоретического тура было дано 5 часов, для выполнения экспериментальной задачи — 4 часа.

На VI Международной олимпиаде были присуждены всего две первые премии. Одну из них (и спецпризы за четкое решение задач по механике и электричеству) получил школьник из Венгрии Золтан Сабо, другую — школьник из СССР Сергей Провоторов. По статуту Международной физической олимпиады командное первенство не определяется.

Результаты выступления участников команды СССР на VI Международной олимпиаде по физике:

Провоторов Сергей (54,6 балла)— I премия и спецприз за четкое решение задачи по оптике;

Лягушин Сергей (45,6 балла)— III премия;

Мкртчян Рубен (43,2 балла)— III премия;

Плетнев Игорь (37,2 балла)— похвальная грамота;

Вайдман Лев (36,0 балла)— похвальная грамота.

Ниже приводятся задачи I и II туров VI Международной физической олимпиады.

I тур

1. Три цилиндра одинаковой массы, одинаковой длины и одинакового внешнего радиуса положены на наклонную плоскость. В начальный момент они находятся в состоянии покоя. Коэффициент трения скольжения f по наклонной плоскости задан и одинаков для всех цилиндров.

Первый цилиндр полый (в виде трубы), второй — однородный, а третий имеет такую же полость, как первый, но закрытую крышками пренебрежимой массы и заполненную жидкостью такой же плотности, как и стенки. Трением между жидкостью и стенками пренебречь.

Плотность вещества первого цилиндра в n раз больше плотности вещества второго или третьего цилиндров. Найти:

1) Линейные ускорения осей цилиндров в том случае, когда скольжение отсутствует. Сравнить эти ускорения.

2) Каким должен быть угол наклона плоскости α, чтобы ни один цилиндр не скользил.

3) Взаимные отношения угловых ускорений в случае качения со скольжением всех цилиндров. Сравнить эти ускорения.

4) Силу взаимодействия между жидкостью и стенками в случае скольжения третьего цилиндра. Масса жидкости m известна.

2. Два цилиндра A и B одинаковых диаметров имеют свободно передвигающиеся поршни малой массы с общим стержнем. Стержень представляет собой короткую трубку, снабженную краном, который вначале закрыт. Цилиндр A вместе с поршнем теплоизолирован, а цилиндр B находится в термостате, имеющем температуру $t = 27°$ C (см. рис. 1).

Вначале поршень цилиндра A закреплен и внутри цилиндра находится 32 *кг* аргона под давлением больше атмосферного. Цилиндр B объемом $V = 5{,}54$ $м^3$ содержит некоторое количество кислорода под атмосферным давлением.

После освобождения поршень цилиндра A движется достаточно медленно (квазистатически). В состоянии равновесия объем аргона увеличился в 8 раз, а плотность кислорода в цилиндре B увеличилась в 2 раза. Известно количество теплоты $Q = 747{,}9 \times 10^4$ *дж*, переданное термостату. Молекулярная масса аргона $\mu = 40$ *кг/кмоль*. Требуется:

1) Доказать на основании кинетической теории газов, учитывая упругие столкновения молекул с поршнем, что процесс в

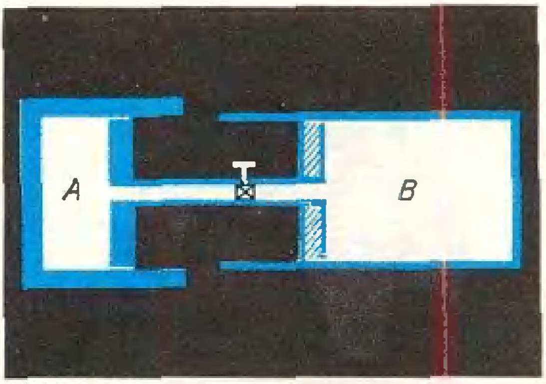


Рис. 1.

цилиндре A описывается уравнением $TV^{2/3} = \text{const}$.

2) Определить параметры P, V, T аргона в начальном и конечном состояниях.

3) Вычислить конечное давление смеси газов, получающейся после открытия крана, соединяющего два цилиндра.

3. Плоский заряженный конденсатор с прямоугольными пластинами установлен в вертикальном положении так, чтобы нижняя сторона соприкасалась с диэлектрической жидкостью. Расстояние между пластинами гораздо меньше линейных размеров пластин. Известны: напряженность начального электрического поля E заряженного конденсатора, плотность ρ и относительная диэлектрическая постоянная ε жидкости, высота пластин конденсатора H.

Определить высоту поднятия жидкости между пластинами и объяснить это явление. Явлением капилярности пренебречь.

4. Тонкая плосковыпуклая линза диаметра $2r$ с радиусом кривизны R и коэффициентом преломления n_0 установлена в таком положении, чтобы слева находился воздух ($n_1 = 1$), а справа—прозрачная среда с коэффициентом преломления $n_2 \neq 1$ (выпуклая сторона обращена к воздуху). В воздухе на расстоянии p_1 от линзы на главной оптической оси установлен точечный источник монохроматического света.

1) Доказать следующее соотношение между положением изображения, отстоящего на расстоянии p_2 от линзы, и положением источника p_1 в приближении параксиальных пучков: $\frac{f_1}{p_1} + \frac{f_2}{p_2} = 1$, где f_1 и f_2— фокусные расстояния в воздухе и в среде с коэффициентом преломления n_2 соответственно.

2) Линзу разрезают перпендикулярно плоской грани на две равные части, которые затем раздвигают на расстояние $\delta \ll r$ (билинза Бийе). На оси симметрии этой системы на расстоянии p_1 ($p_1 > f_1$) от оси (см. рис. 2) установлен точечный источник света. Справа от системы на экране E, установленном параллельно линзе на расстоянии d, образуется N интерференционных полос, если справа находится тоже воздух.

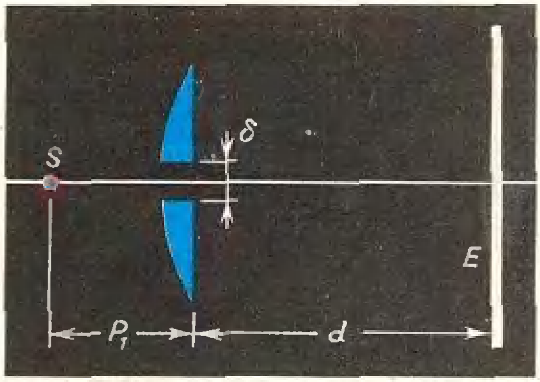


Рис. 2.

Определить число интерференционных полос N в зависимости от длины волны λ.

Примечание. Все коэффициенты преломления являются абсолютными.

II тур

Экспериментальная задача

Даны два цилиндрических тела (одинаковые по внешней геометрической форме), изготовленные из одинакового вещества, линейка с делениями, деревянный брусок и сосуд с водой.

Известно, что одно тело однородно, а другое имеет внутреннюю полость со следующими характеристиками:

а) форма полости цилиндрическая,

б) ось полости параллельна оси тела,

в) длина полости практически равна длине тела.

Определить экспериментально и обосновать теоретически:

1) относительную плотность вещества тел (относительно воды),

2) радиус цилиндрической полости,

3) расстояние между осями полости и цилиндрического тела.

Указать источники погрешностей и оценить, какие из них оказывают наиболее существенное влияние на конечные результаты.

Попробуйте определить погрешности (например, среднеквадратичные) количественно.

Описать все найденные варианты решения задачи с использованием только имеющихся у вас средств.

М. Д. Карасев, Г. С. Тарасюк

«Квант» для младших школьников

ЗАДАЧИ

1. В кружках треугольника на рисунке справа были расставлены все числа от 1 до 7 (каждое по одному разу), причем сумма чисел вдоль каждого отрезка прямой была одна и та же.

Определите, какое число было записано в вершине треугольника и чему равнялись указанные суммы.

2. В трех сообщающихся сосудах находится вода. Левый сосуд открыт. Одинаковое ли давление в точках A, B и C, если они лежат на одной горизонтали?

3. На рисунке справа изображена фигура в виде буквы T с четырьмя отмеченными клетками. Разделите эту фигуру по линиям сетки на четыре одинаковые части, причем так, чтобы в каждой из частей было по одной отмеченной клетке.

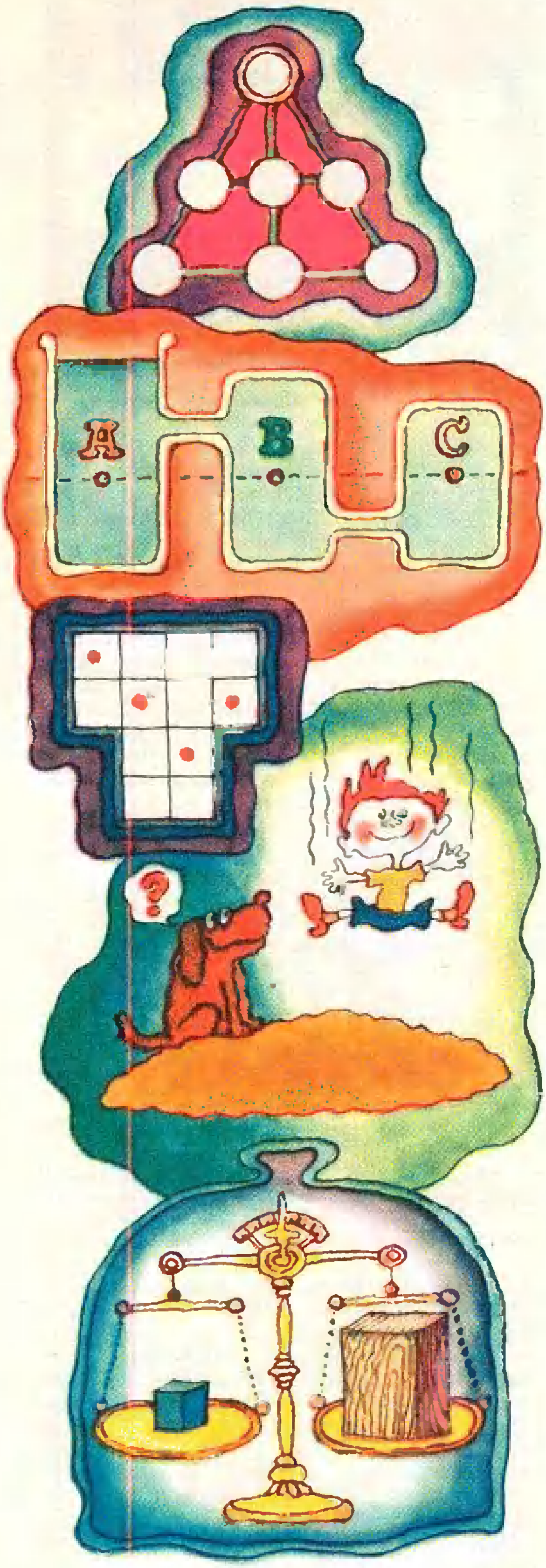
4. Прыгать с обрыва в песок безопаснее, чем на твердую землю. Почему?

5. Как объяснить следующие равенства:

$$09 = 0 \times 9 + (0 + 9),$$
$$19 = 1 \times 9 + (1 + 9),$$
$$29 = 2 \times 9 + (2 + 9),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$99 = 9 \times 9 + (9 + 9),$$
$$109 = 10 \times 9 + (10 + 9),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$1239 = 123 \times 9 + (123 + 9)$$

и так далее?

6. Деревянный и чугунный бруски по отдельности уравновешены в воздухе гирей 10 *кг*. Что произойдет, если бруски положить на разные чашки весов, а весы поместить под стеклянный колпак и откачать воздух?



Пальцы — счетная машина

Считать люди научились давно, и антропологам еще предстоит найти первобытное общество, члены которого не умели считать. Долгое время среди ученых существовало мнение, что первобытные племена могли считать только до двух, так как для обозначения чисел у них были слова «один», «два» и «много». При этом поражала их сверхъестественная способность, просмотрев стадо овец, сказать, что одна овца пропала. Объясняли это феноменальной памятью древних людей, которая позволяла им запоминать «форму» всего стада или каждую овцу по ее виду. Более поздние исследования показали, что применение одного слова для всех чисел, больших двух, не означало, что люди ничего не знали о разнице между пятью и шестью камнями и что обозначение одним словом голубого и зеленого не означало, что они не видят разницы в цвете между зеленой травой и голубым небом. Племена с ограниченным запасом слов имели тщательно разработанные способы счета на пальцах рук и ног.

Первобытные общества различались не только своим выбором основания системы счисления, но и манерой счета. Так как у большинства людей правая рука более активная, то счет обычно начинали с большого пальца или мизинца левой руки, дотрагиваясь правой рукой до пальцев левой руки, либо загибая пальцы левой руки, либо отгибая пальцы, ранее сжатые в кулак. Известны и другие способы счета. Так, например, жители островов Бенгальского залива начинали счет с мизинца, дотрагиваясь до своего носа очередным пальцем, а на острове между Австралией и Новой Гвинеей люди считали до пяти, постукивая пальцами левой руки, а затем переходили не на правую руку, а на левое запястье, локоть, плечо, левую грудь и т. д. и продолжали счет, изменяя этот порядок на обратный, но уже с правой стороны тела. Математики заметили, что постукивание при счете применялось для обозначения порядковых чисел (первый, второй и т. д.), а когда пальцы поднимались сразу, то это обозначало количественные числа.

Хотя подавляющее большинство систем счета на пальцах имело в основании число десять (они были, как мы теперь говорим, десятичными), можно также легко считать на пальцах в системах с другими основаниями. Пальцы особенно удобны для счета в самой простой системе — двоичной *). *Прямой и согнутый пальцы* можно сравнить с триггером в современных вычислительных машинах, в которых используется двоичная система. При счете на пальцах в двоичной системе прямой палец может означать единицу, а согнутый — нуль. Тогда самое большое число, выраженное пальцами обеих рук, будет равно 1111111111, то есть $2^{10}-1 = 1023$ в десятичной системе, причем самая

*) Мы публикуем переработанную статью известного американского ученого-популяризатора М. Гарднера (Scientific American, 9, 1968, с. 218—230). Публикация подготовлена А. С. Варпаховским.

*) Двоичная система—это система, в основании которой лежит число 2. В двоичной системе участвуют только две цифры — 0 и 1, а число 2 представляет собой уже единицу следующего разряда. Так, число 2 записывается как 10, число 3 как 11, число 4 как 100, число 1000 как 1 111 101 000 и т. д.

Таблица сложения выглядит так: $0+0=0$; $0+1=1$; $1+1=10$.

Таблица умножения имеет следующий вид: $0 \cdot 0 = 0$; $0 \cdot 1 = 0$; $1 \cdot 1 = 1$.

Подробнее о двоичной системе счисления вы можете прочитать в книге Ф о м и н а С. В. *«Системы счисления»* М., «Наука», 1968.

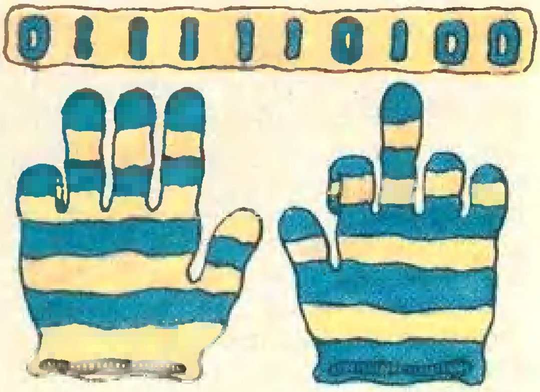


Рис. 1.

младшая единица соответствует мизинцу правой руки. Два в двоичной системе выражается как 10, то есть мизинец в согнутом состоянии, а безымянный палец — прямой. Если еще выпрямить и мизинец, то это будет означать 11, то есть три в десятичной системе. На рис. 1 показано, как на пальцах обеих рук представить 500 в двоичной системе. Если немного попрактиковаться, то можно легко научиться не только представлять на пальцах десятичные числа в двоичной системе, но и осуществлять сложение и вычитание в этой системе единиц.

Уже в средние века был известен метод умножения чисел от 6 до 10, то есть чисел, больших 5. В 1492 году было определено общее правило использования дополнения двух чисел до 10. (Дополнение числа n равно $10-n$.) Для умножения 7 на 8 берутся их дополнения: 3 и 2. Разность между любым из двух исходных чисел и ему непарным дополнением определяет цифру десятков, то есть в нашем случае 5, а произведение дополнений определяет вторую цифру результата, то есть $2\times3=6$, окончательный результат $50+6=56$. Применение этого метода к умножению на пальцах сводилось к следующему. Пальцы каждой руки нумеруются от 6 до 10, начиная с мизинца. Для умножения 7 на 8 палец под номером 7 одной руки соединяется с пальцем под номером 8 другой руки (рис. 2). Дополнением 7 являются три верхних пальца левой руки, а дополнением 8 — два верхних пальца правой руки. Сумма всех остальных пальцев обеих рук определяет цифру десятков, то есть 5. К пятидесяти прибавляем произведение верхних пальцев 2 и 3, ответ равен 56. Этот простой способ использования пальцев для вычисления произведения любой пары чисел от 6 до 10 широко применялся в период Ренессанса и, говорят, до сих пор применяется крестьянами в некоторых районах Европы. Вместо использования дополнения до 10 можно пред-

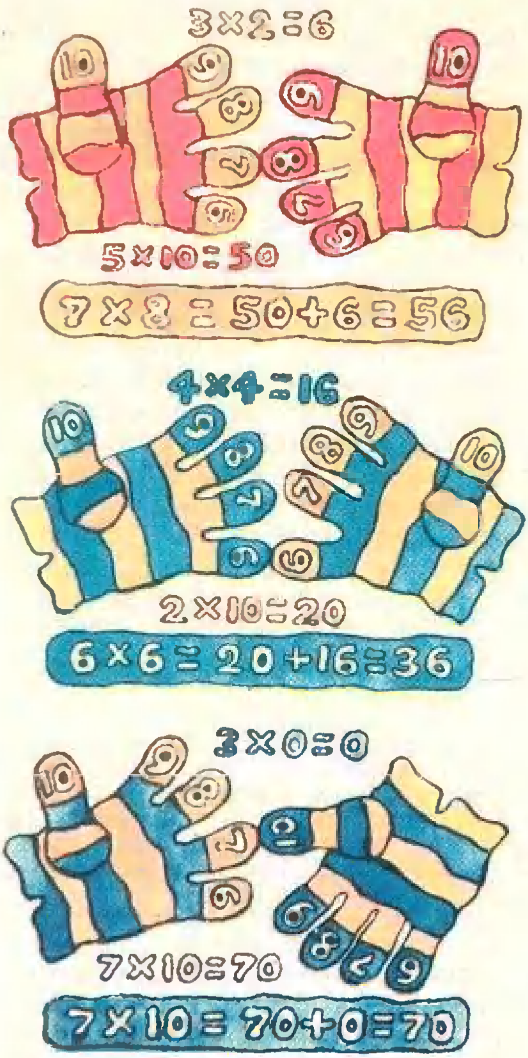


Рис. 2.

ставить 7 и 8 в виде биномов $(5+2)$ и $(5+3)$, а затем выполнить умножение

$$\begin{array}{r} 5+2 \\ 5+3 \\ \hline 25+10 \\ 15+6 \\ \hline 25+25+5=56 \end{array}$$

Способ умножения на пальцах можно легко обобщить и на следующие полудекады, хотя для всех полудекад, оканчивающихся на 5, применяется несколько другое правило. Рассмотрим полудекаду 11—15, и пусть надо перемножить 14 и 13. Пальцам присваиваются номера от 11 до 15 и пальцы с номерами перемножаемых чисел соединяются (рис. 3). Семь нижних пальцев умножаются на 10 и получают 70. Далее определяется произведение нижних пальцев $4\times3=12$ и $70+12=82$. Затем прибавляют 100. Окончательный ответ 182. Можно по-разному объяснить такое правило умножения, но проще всего это сделать на примере перемножения биномов:

$$\begin{array}{r} 10+3 \\ 10+4 \\ \hline 100+30 \\ 40+12 \\ \hline 100+70+12=182 \end{array}$$

Если полудекада оканчивается на нуль, то сложение производится по первому способу! Для полудекады от 16 до 20 каждый нижний палец имеет значение 20 и добавлять нужно 200. Так, при умножении 17×19 (рис. 4) шесть нижних пальцев умножаются на 20, что дает 120. Произведение верхних пальцев равно 3, и, таким образом, получаем $17\times19=$ $=120+3+200=323$.

На пальцах можно перемножить числа и из разных полудекад, но процедура в этом случае гораздо сложнее, так как одинаковые пальцы каждой руки имеют разные значения. Но всегда можно большое число разбить на малые числа, выполнить несколько умножений, а результат получить, просуммировав результаты умножений. Например, $9\times13=(9\times6)+$ $+(9\times7)$.

На первый взгляд может показаться, что считать на пальцах довольно сложно. Однако если немного попрактиковаться, то думаю, читатель убедится в том, что способ счета на пальцах весьма удобен.

Рис. 3.

Рис. 4.

Ответы, указания, решения

К статье «О наполнении и закупоривании бутылок»

1. Указание. Легко уложиться в N^2 действий (если, следуя правилам, указанным в п. 4, для каждой очередной бутылки все сравнения производить заново: наименьшее из чисел $a_1, b_1, \dots, a_N, b_N$ ищется за $2N-1$ сравнение, затем строка, содержащая это число, вычеркивается; минимальное среди оставшихся чисел определяется за $2N-3$ сравнения и т. д.). Эту оценку можно, однако, сильно улучшить. Наилучшую оценку можно получить, если воспользоваться методом, описанным в статье «Кто поедет в Рио?» («Квант» № 8, 1972).

К статье «Геометрия комплексных чисел»

1. $x=1$, $y=-4$ и $x=-1$, $y=-4$. Указание. Данные комплексные числа должны быть комплексно-сопряженными.

2. $z=\frac{3}{2}-2i$.

3. Вне окружности (и на самой окружности) радиуса $\frac{9}{2}$ с центром в точке $(-^1/_2, {}^1/_2)$.

4. $z=\frac{1}{2}$. Указание. Если точка z удовлетворяет условию задачи, то она равноудалена от точек (0, 1), (0, —1) и (1, —1).

5. Окружность радиуса 3 с центром в начале координат. Указание. Положить $z=x+iy$ и привести данное соотношение к виду $x^2+y^2=9$.

6. $$z_1=-\left(3-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\pi+\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)\pi i,$$
$$z_2=-\left(3+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\pi+\left(\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)\pi i.$$

7. Полуплоскость правее прямой $x=1$ (исключая эту прямую), за исключением точки (2, 0). Указание. Данное неравенство эквивалентно неравенству $0<|z-2|<|z|$. Неравенству $|z-2|<|z|$ удовлетворяют все такие точки плоскости, расстояние от которых до точки (2, 0) меньше, чем до начала координат.

8. Действительная и мнимая оси. Указание. Данное соотношение привести к виду $|z^2-i|=|z^2+i|$ и, положив $z=x+iy$, воспользоваться определением модуля комплексного числа.

К «Геометрическим задачам»

см. стр. 57

1—3. Пусть длина наибольшей стороны равна a. Длины других сторон обозначим через x, y; они должны удовлетворять соотношениям $0<x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$, $x+y>a$. На координатной плоскости этим треугольникам соответствуют точки в части квадрата $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$, причем x и y — целые. Подсчитав число таких точек и учитывая, что точек с координатами, удовлетворяющими уравнению $x+y>a$, столько же, сколько точек, удовлетворяющих уравнению $x+y<a$, причем точкам, симметричным относительно диагонали квадрата (прямой $y=x$), соответствуют одинаковые треугольники, получим

$$\frac{a(a+1)}{4}+\frac{\left[\frac{a+1}{2}\right]}{2}$$

треугольников ([ ]— целая часть числа). Просуммировав число треугольников от $a=1$ до $a=2p$, получим искомое число треугольников:

$$\frac{4p^3+9p^2+5p}{6}$$

(для $n=2p+1$ подсчитайте сумму самостоятельно).

6. Предположим, что таких сторон нет. Расположим стороны по убыванию: $r_1\geqslant r_2\geqslant\dots\geqslant r_n>0$. Тогда $r_1\geqslant 2r_2$, $r_2\geqslant 2r_3$, ..., $r_{n-1}\geqslant 2r_n$. Сложив эти неравенства и приведя подобные члены, получим: $r_1\geqslant r_2+r_3+\dots+r_{n-1}+2r_n>r_2+\dots+r_n$. Это противоречит тому, что $r_1, r_2, \dots, r_n$ — стороны многоугольника.

7. а) Поместить веса в точки $A-1$, $B-m$, $C-mn$ и $D-n$ и найти двумя способами центр тяжести этой системы.

б) Обозначим точку пересечения PQ и RS через T. Выберем точку D' так, чтобы $ABCD'$ был параллелограммом. Построим в нем аналогично точки Q', R' и T'. Для него доказываемая теорема верна (проверьте!), далее рассмотрите отрезок $T'T''\parallel QQ'\parallel RR'$ и докажите, что T'' и T совпадают.

К статье «Московский авиационный институт»

Математика

Вариант 1

1. Поделив обе части уравнения на 3^{x-1}, получим $(x+2)\left[x+1-3\times\times\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]=0$, откуда $x_1=-2$, $x_2=1$.

2. Умножить левую часть доказываемого равенства на $\cos\frac{A}{2}$ и преобразовать получившееся выражение, учитывая, что центр вписанного в треугольник круга лежит в точке пересечения биссектрис углов треугольника.

3. $\frac{\pi}{12}+2\pi n$; $\frac{5\pi}{12}+2\pi n$; $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

4. 60 *км/ч*, 40 *км/ч*.

5. 23/12 *см*³.

Вариант 2

1. $x^2+4x+5=0$.
2. $0\leqslant b\leqslant 2$.
4. $\sqrt{b(b+c)}$.
5. $\frac{\pi(5\sqrt{2}-6)}{7}$.

Физика

2. При движении проводника длиной l со скоростью v в магнитном поле с индукцией B на концах проводника возникает э. д. с. индукции, равная

$$E=Blv\sin\alpha, \qquad (1)$$

где α — угол между проводником и полем. Так как движение проводника ускоренное, то

$$v=at. \qquad (2)$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), получим

$$a=\frac{E}{Blt\sin\alpha}=\frac{1}{0{,}1\cdot 0{,}1\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}\approx$$

$$\approx 116\ (м/с^2).$$

3. $W=\frac{q\cdot e}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{Ze\cdot e}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$;

$$W=\frac{7\cdot(1{,}6\cdot 10^{-19})^2}{1\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 10^{-15}}=$$

$$=1{,}6\cdot 10^{-12}\ (дж).$$

4. $\alpha_{ст}=\frac{m(1+\beta_{рт}t)-m_0}{3m_0t}=$

$$=\frac{0{,}67\,(1+0{,}00018\cdot 100)-0{,}68}{3\cdot 0{,}68\cdot 100}=$$

$$=0{,}00001\ (град^{-1}).$$

5. В последнюю секунду свободного падения тело прошло путь

$$H_1=H_t-H_{t-\Delta t}=\frac{gt^2}{2}-\frac{g(t-\Delta t)^2}{2},$$

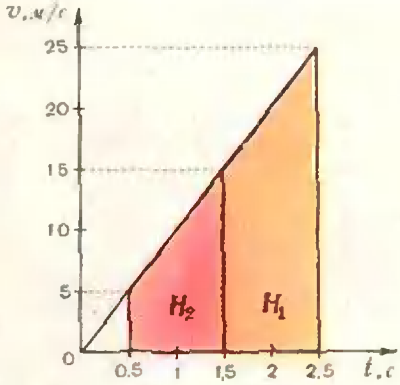
а в предыдущую секунду —

$$H_2=H_{t-\Delta t}-H_{t-2\Delta t}=$$

$$=\frac{g(t-\Delta t)^2}{2}-\frac{g(t-2\Delta t)^2}{2}.$$

По условию задачи

$$H_1=2H_2,$$



откуда

$$t=\frac{5}{2}\Delta t=2{,}5\ с;\quad H_1=\frac{gt^2}{2}\approx 30{,}6\ м.$$

График зависимости скорости тела от времени приведен на рисунке.

К статье «Московский институт электронной техники»

Вариант 1

1. $0<x<\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ и $x\geqslant 2$.
2. $a_{20}=193$.
3. $x=k\pi$ и $x=\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{8}$, $k=0, \pm 1, \ldots$
5. $r=\frac{ah}{a+\sqrt{a^2+h^2}}$,

$$l=\frac{2a(\sqrt{a^2+h^2}-a)^2}{h^2}.$$

Вариант 2

1. $z=\frac{7+5i}{6}$.
2. $x=\log_3 5$.
3. $0<x<\frac{\pi}{24}$ и $\frac{5\pi}{24}<x<\frac{\pi}{4}$.
4. $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{2}$, $n=0, \pm 1, \ldots$
5. $c=\frac{R\sqrt{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

К статье «Московский институт радиотехники, электроники и автоматики»

Вариант 1

1. $x_1=3$, $y_1=4$; $x_2=4$, $y_2=3$.

2. $x=5$.

3. $x=\frac{2k\pi}{11}$, $k=0, \pm 1$.

4. Воспользоваться теоремой синусов. Радиусы минимальны, когда AD — высота треугольника ABC.

5. $x<-\frac{7}{9}$.

Вариант 2

1. $x_1=2,\ y_1=6;\ x_2=1,\ y_2=3$.

2. $x_1=-1,\ x_2=-2$.

3. $z=-\frac{\pi}{16}$.

4. Пусть $R\geqslant r$. Тогда $S=\pi r^2$ при $R-r\geqslant d$; $S=R^2\alpha+r^2\beta-2S_\Delta$, где S_Δ — площадь треугольника со сторонами R, r, d, $\alpha=\arcsin\frac{2S_\Delta}{Rd}$, $\beta=\arcsin\frac{2S_\Delta}{rd}$ при $R+r\geqslant d\geqslant\sqrt{R^2-r^2}$; при $\sqrt{R^2-r^2}\geqslant d\geqslant R-r$ надо в выражении для S писать $\pi-\beta$ вместо β.

5. -1. Указание. $a^3=1$, так как (комплексные) корни данного уравнения являются также корнями уравнения

$$(a^2+a+1)(a-1)=a^3-1=0.$$

Вариант 3

1. $x_1=5,\ y_1=1;\ x_2=-1,\ y_2=-5$.

2. $x=\log_{2/3}\frac{2}{9}$.

Указание. Положить $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$.

3. $x=\frac{\pi}{6}$.

4. Указание. Домножить числитель и знаменатель правой части на $(a+b-c)$ и воспользоваться теоремой косинусов.

5. $\log_3 10=\frac{(b-1)(a+2)-1}{2-b}$.

К задачам

(см. стр. 39)

1. Точка R лежит на прямой. Указание. Взять систему координат, связанную с точкой P; точка R получается поворотом отрезка PQ вокруг точки P на угол CAB и растяжением с коэффициентом $\frac{CA}{AB}$.

2. $\frac{\varphi(n)}{2}-1$. Указание. Разделить окружность на n равных частей точками $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Многоугольник имеет вид

$$A_1A_{r+1}A_{2r+1}\ldots A_{(n-1)r+1}A_{nr+1}$$

(при этом, если $kr+1>n$, то надо брать остаток от деления $kr+1$ на n, то есть $A_{n+1}=A_1$, $A_{n+2}=A_2, \ldots$, а $A_{nr+1}=A_1$). Чтобы получился именно n-угольник, r должно быть взаимно простым с n. Многоугольники $A_1A_{r+1}\ldots$ и $A_1A_{n-r+1}\ldots$ совпадают (они отличаются лишь направлением обхода), а при $r=1$ (и $r=n-1$) получается не звездчатый многоугольник.

3. Воспользоваться теоремой Птолемея.

4. Указание. Поместить треугольники так, чтобы точки A, D и B, E совпали, а C и F лежали по одну сторону от AB. Рассмотреть $\angle FBC$.

5. Легко показать, что площади треугольников ABC и ADC равны. Из формулы Герона следует, что $|AB-BC|=|AD-DC|$. Учитывая, что $AB+BC=AD+DC$, находим, что либо $AB=AD$, $BC=DC$, либо $AB=DC$, $BC=AD$.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант» № 5, 1973)

1. Представить данное выражение в виде $36\,(6^n-1)^2$.

2. Привяжите гирьку на веревочке к динамометру и медленно опускайте ее поочередно в каждый сосуд. При движении гирьки в сосуде с керосином показания динамометра не изменяются. Во втором сосуде при прохождении границы керосин — вода сила, которую показывает динамометр, скачком уменьшается, так как плотность керосина меньше плотности воды.

3. Сумма цифр нечетных чисел больше на 49.

4. Автомобиль не может проходить каждый километр на 1 минуту быстрее и, тем более, на 2 минуты быстрее. Если считать, что максимальная скорость, развиваемая автомобилем, равна 180 *км/ч*, то каждый километр можно проходить быстрее на 40 секунд.

5. $77\cdot713\cdot13=713\,713$.

6. Здесь действует правило рычага: чем меньше плечо, тем большую силу нужно приложить. Если бы ручка была привинчена близко к оси вращения двери, необходимо было бы приложить значительно большее усилие, чтобы открыть дверь.

Корректор *Е. В. Сидоркина*

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15. «Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 6/III 1973 г. Подписано в печать 20/IV 1973 г.
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 5
Усл. печ. л. 6,5 Уч.-изд. л. 7,17 Тираж 182550 экз.
Т-05741 Цена 30 коп. Заказ 378

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

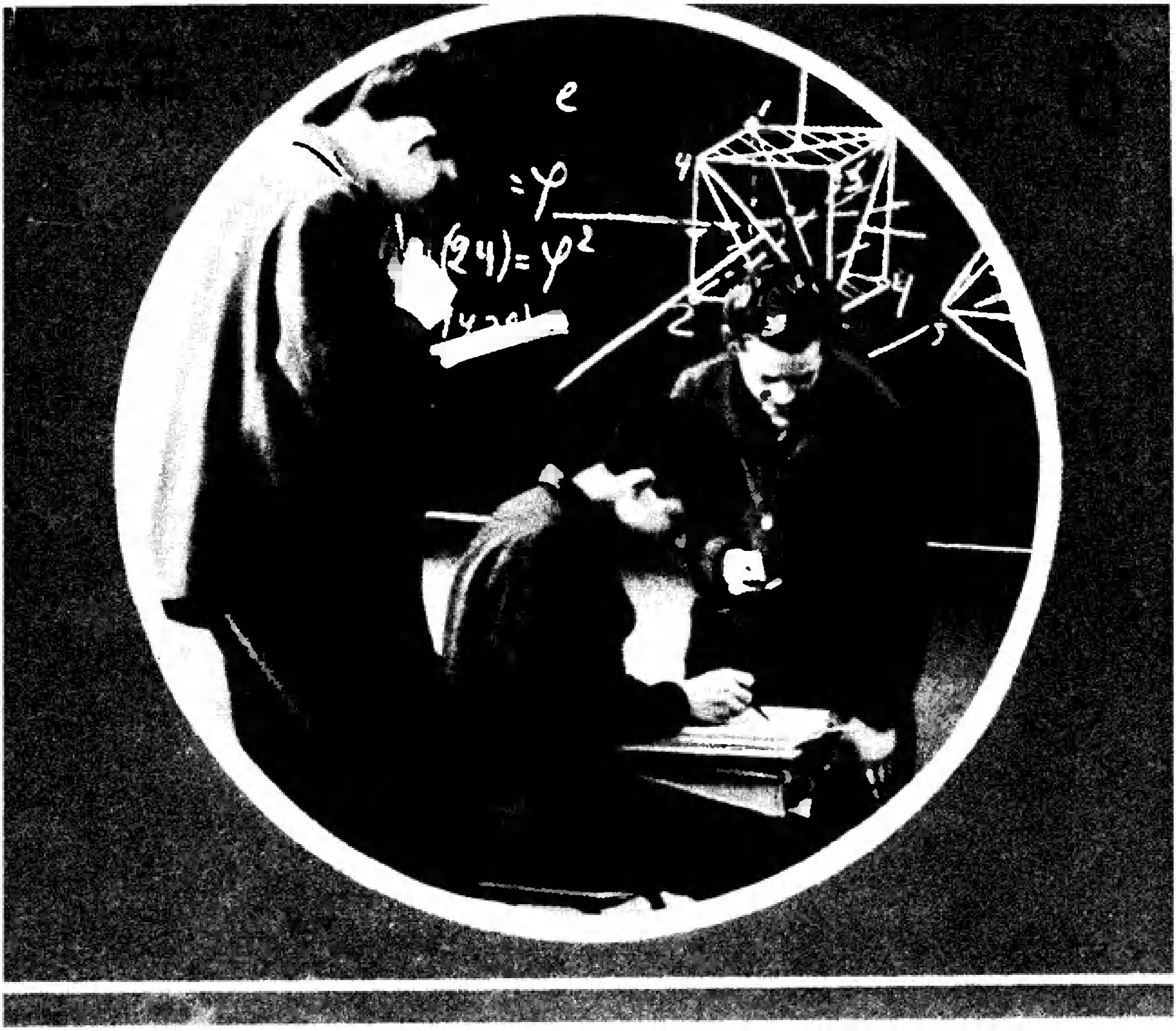
УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ ПЕРВОЙ ЖЕНЩИНЕ-КОСМОНАВТУ

Десять лет тому назад, 16 июня 1963 года, на космическом корабле «Восток-6» стартовала с Земли первая женщина-космонавт Валентина Владимировна Терешкова. Программа ее полета была рассчитана на одни сутки. Однако прекрасная предварительная подготовка и отличное здоровье Валентины Терешковой позволили увеличить этот срок втрое. В парном полете с «Ястребом» — космонавтом-5 Валерием Федоровичем Быковским — «Чайка» — космонавт-6 Терешкова совершила более 48 оборотов вокруг Земли и пролетела около двух миллионов километров. Космонавты успешно выполнили обширную программу научных исследований. Одна из основных задач совместного полета Быковского и Терешковой состояла в том, чтобы изучить и сравнить реакцию мужского и женского организмов на сложные условия космического полета. Ведь в будущих дальних космических экспедициях наряду с мужчинами несомненно будут участвовать и женщины, организм которых имеет немало особенностей.

Отдавая дань глубокого уважения подвигу первой женщины-космонавта, многие страны выпустили почтовые марки, посвященные этому полету. Мы воспроизводим здесь марки СССР, Болгарии, ГДР, Кубы, Польши и Румынии.

В. А. Лешковцев



Продолжается подписка на второе полугодие 1973 г. на научно-популярный физико-математический журнал «Квант».

Журнал рассчитан в первую очередь на учеников 7—10 классов. Он полезен также учителям, особенно тем, кто ведет кружки или факультативные занятия по физике или математике, а также всем любителям математики и физики.

Основное содержание журнала — это «физико-математическая школа», т. е. материалы, помогающие лучше понять физику и математику, научиться применять эти науки для объяснения различных явлений и процессов, с которыми мы сталкиваемся на практике, научиться решать задачи.

В журнале читатель найдет много задач. Среди них задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в различные вузы, задачи, предлагавшиеся на олимпиадах, и просто интересные задачи.

Заметки с описанием физических приборов помогут читателю поставить и провести физический эксперимент.

Журнал публикует на своих страницах статьи обзорного характера, рассказывающие о достижениях науки и проблемах, которые еще ждут своего решения, рассказы об ученых, о том, как рождаются научные открытия.

Журнал постоянно помещает рецензии на книги — уже вышедшие и еще только готовящиеся к изданию.

Журнал распространяется только по подписке.

Цена номера 30 коп. При подписке ссылайтесь на наш индекс 70465.