

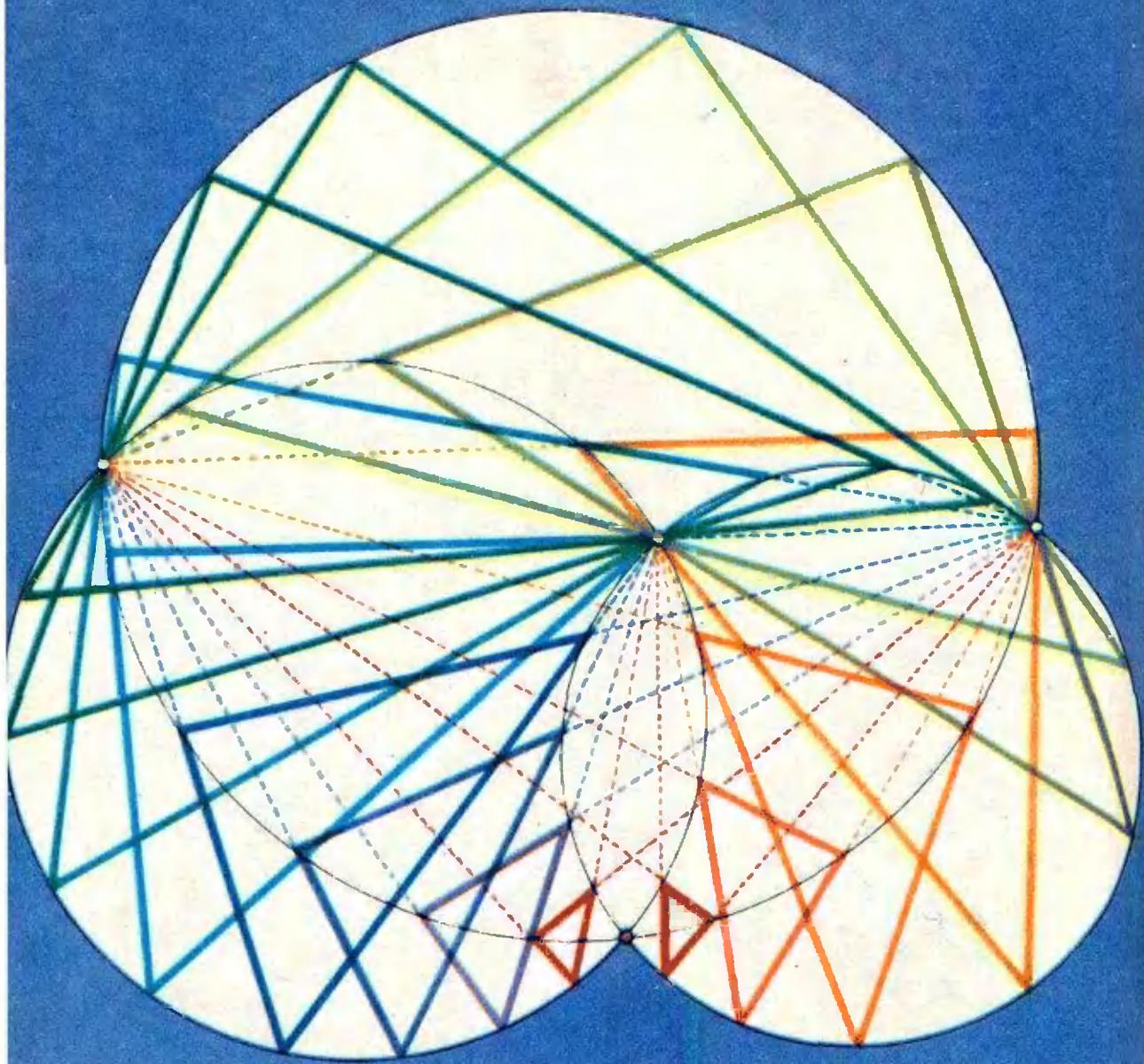
1974

2

Квант

*Научно-популярный
физико-математический
журнал*





На этом рисунке вы видите семейство подобных треугольников; стороны (или продолжения сторон) всех этих треугольников проходят соответственно через три фиксированные точки. Понятно, почему вершины этих треугольников лежат на окружностях, — они являются вершинами равных углов, опирающихся на фиксированный отрезок.

Судя по рисунку, площади треугольников сначала увеличиваются, когда треугольники удаляются от красной точки по ходу часовой стрелки (их цвет при этом меняется почти как в радуге — от синего до красного), а потом уменьшаются.

Где же находится треугольник наибольшей площади? Прочтите решение задачи М207, помещенное на с. 38—42, и вы узнаете ответ на этот вопрос.

Квант

2

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР



Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин
Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
Н. Б. Васильев,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Капица,
В. А. Кириллин,
главный художник
А. И. Климанов,
С. М. Козел,

зам. главного редактора

В. А. Лешковцев,
Л. Г. Макара-Лиманов,
А. И. Маркушевич,
Н. А. Патрикеева,
И. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. П. Савин,
И. Ш. Слободенский,

зам. главного редактора

М. Л. Смолянский,
Я. А. Смородинский,
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбург,
А. И. Ширшов.

Редакция:

В. Н. Березин,
А. П. Виленкин,
художественный редактор
Т. М. Макарова,
И. Б. Мамулова,
Н. А. Миц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова,
зам. редакции
Л. В. Чернова

В НОМЕРЕ

- 2 А. А. Бельский, Л. Е. Садовский. Кольца
8 А. Б. Шварцбург. Магнитное поле Земли
13 И. М. Яглом. Заплаты на кафтане
22 И. И. Воробьев. Необычное путешествие
- Математический кружок**
26 О. Т. Долгов. Игра п 15
- Задачник «Кванта»**
34 Задачи М246—М250; Ф258—Ф262
36 Решения задач М205—М207; Ф213—Ф217
- Практикум абитуриента**
46 И. А. Кушнир. Метод вспомогательного элемента
52 Новосибирский государственный университет
- Рецензии, библиография**
56 И. Зорич. Беседы старого учителя
- «Квант» для младших школьников**
57 Задачи
58 Б. А. Кордемский. Топологические опыты своими руками
- 61 **Ответы, указания, решения**
- Уголок коллекционера**
В. А. Лешковцев. Первый полет к Венере (3-я с. обложки)
- Смесь** (с. 12, 60)

На первой странице обложки вы видите старинный морской компас. Этот компас с позолоченной короной сделан, как предполагается, в 1790 году и, возможно, находился в капитанской каюте корабля Британского королевского флота. Компас подвешивали на цепи и двумя перекрещенными кольцами прикрепляли к потолку каюты. Это обеспечивало горизонтальное положение магнитной стрелки при любой качке. Смотреть на компас нужно было снизу. Сейчас этот компас хранится в Национальном морском музее в Гринвиче (Великобритания).

О том, почему магнитная стрелка показывает направление север—юг, всегда ли она устанавливается в этом направлении, когда и почему стрелка отклоняется, вы можете прочитать в статье А. Б. Шварцбурга «Магнитное поле Земли», помещенной в этом номере нашего журнала.

А. А. БЕЛЬСКИЙ,
Л. Е. САДОВСКИЙ

КОЛЬЦА

$$a(b+c) = ab+ac$$

$$(b+c)a = ba+ca$$

С понятием кольца сталкиваются еще в средней школе: впервые — овладевая действиями сложения и умножения чисел, затем — обучаясь действиям с многочленами (полночленами). И в том и в другом случае общими оказываются определенные правила (аксиомы), которым подчиняются эти операции. Ради изучения именно этих общих свойств операций сложения и умножения (чисел, полиномов или, как мы увидим далее, объектов иной природы) как таковых, в их внутренней связи между собой, безоткосительно к природе элементов, над которыми они производятся, и было введено в алгебре понятие кольца.

Что же такое кольцо? Точное определение этого объекта связано с понятием операции. С него мы и начнем.

Рассмотрим произвольное множество M . Будем говорить, что на нем определена операция, если установлено правило, по которому любым двум элементам a и b из M ставится в соответствие третий элемент c того же множества. Так, например, если M — множество всех целых чисел (для него принято стандартное обозначение Z), то сложение $c = a + b$ и умножение $c = ab$ являются двумя различными операциями на этом множестве. Если, скажем, M — это множество из двух различных элементов a и b (общепринятое обозначение $M_2 = \{a, b\}$), то все возможные операции на нем можно полностью описать. Для этого сначала нужно перечислить всевозможные пары элементов из M_2 . Вот они: (a, a) , (a, b) , (b, a) , (b, b) *); затем следует решить, какой элемент из M_2 отнести той или иной паре.

Удобнее всего конкретную операцию на множестве, состоящем из

конечного числа элементов, описывать таблицей (такой способ предложил английский математик А. Кэли (1821—1895), по имени которого такие таблицы теперь и называются таблицами Кэли).

В левом столбце и в верхней строке записываются элементы множества M так, как это указано в таблице 1; на пересечении строки, которая начинается с элемента a , и столбца, который начинается с элемента b , указывается тот элемент, который сопоставляется рассматриваемой операции паре (a, b) . Например, если паре (a, b) сопоставляется элемент a , то это обстоятельство записывается так, как в таблице 1'. Далее, если паре (b, a) ставится в соответствие элемент b , то получается таблица 1''.

	a	b
a		
b		

Табл. 1

	a	b
a		a
b		

Табл. 1'

*) Таким образом, мы различаем пары (a, b) и (b, a) , то есть рассматриваем так называемые «упорядоченные пары».

Заполненная таблица полностью определяет операцию. В таблицах 2—5 приведены примеры разных операций на множестве из двух элементов. Читателю будет полезно описать таблицами все остальные операции на этом множестве (всего их 16; советуем их найти).

В таблице 6 приведен пример операции на множестве $M_3 = \{a, b, c\}$ из трех элементов. Подсчитайте, сколько операций существует на M_3 .

В известных нам из арифметики случаях операциям присвоены названия: скажем, сложение, вычитание, умножение. В общем случае, о котором только что шла речь, операции специальных названий не имеют. Лишь для удобства ту или иную операцию иногда называют умножением, еще реже — сложением, хотя

вполне можно было бы воспользоваться любым другим, специально выдуманным, названием. То же самое относится и к символам, которыми обозначаются результаты применения операций. Например, если a и b — числа, то, складывая их, мы получаем число $a + b$ (используется символ «+»), вычитая — получаем число $a - b$ (символ «-») и т. д. В общем случае таких «связывающих» символов у нас нет, но их можно придумать. Например, будем обозначать через $a * b$ результат применения той или иной определенной операции к паре (a, b) . Если a и b — числа, а рассматриваемая операция — сложение, то символ «*» становится символом «+». Например, операцию, описанную таблицей 3, можно описать и так:

$$\begin{aligned} a * a &= a, \\ a * b &= a, \\ b * a &= b, \\ b * b &= b. \end{aligned}$$

Если при данной операции парам (a, b) и (b, a) сопоставляется один и тот же элемент, то есть $a * b = b * a$, то говорят, что элементы a и b *коммутируют* относительно данной операции или являются *перестановочными* (относительно данной операции). Так, например, относительно операции, описанной в таблице 2, элементы a и b коммутируют, а относительно операции, описанной в таблице 3, эти элементы не коммутируют. Если операция такова, что относительно нее коммутируют все пары, то говорят, что она *коммутативна*. Конечно, сложение и умножение целых чисел — коммутативные операции, таблицы 2 и 6 тоже задают коммутативные операции.

Докажите, что таблица Кэли коммутативной операции симметрична относительно главной диагонали (так называют линию, идущую из левого верхнего угла таблицы в правый нижний угол).

Сформулируем теперь в общем виде еще одно свойство, которым может обладать (или не обладать) операция. Пусть a, b и c — три (не обязательно

	a	b
a		a
b	b	

Табл. 1*

	a	b
a	a	b
b	b	a

Табл. 2

	a	b
a	a	a
b	b	b

Табл. 3

	a	b
a	b	a
b	b	b

Табл. 4

	a	b
a	a	b
b	a	a

Табл. 5

	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

Табл. 6

различных) элемента множества M . Если $a * (b * c) = (a * b) * c$ для этих элементов, то их называют *ассоциирующими*.

Подчеркнем, что в обеих частях последнего равенства элементы a, b, c , независимо от расстановки скобок, выписываются в одном и том же порядке. В этом смысле тройка элементов a, b, c является упорядоченной.

Так, например, элементы b, a, b из M_2 относительно операции, описанной в таблице 3, — ассоциирующие, а относительно операции из таблицы 5 не являются ассоциирующими (проверьте это!). Операция, относительно которой все тройки элементов множества M являются ассоциирующими, называется *ассоциативной*. Сложение и умножение целых чисел — операции не только коммутативные, но и ассоциативные. Читателю будет полезно придумать пример такой операции, которая была бы коммутативной, но не ассоциативной.

Теперь мы готовы дать определение кольца. *Кольцо* — это множество M с двумя специфическими операциями. Одну из них принято называть *сложением* и обозначать элемент, сопоставляемый ему паре (a, b) , через $a \div b$, а другую принято называть *умножением* и обозначать элемент, сопоставляемый паре (a, b) , через ab . Специфика этих операций заключена в следующих пяти требованиях, которые к ним предъявляются:

сложение должно быть коммутативным и ассоциативным, то есть для всех пар (a, b) и для всех троек (a, b, c) элементов из M должны иметь место равенства:

$$1) a \div b = b \div a;$$

$$2) (a \div b) \div c = a \div (b \div c);$$

3) в множестве M должен существовать такой элемент 0 , что $a \div 0 = a$ при всех a из M ; этот элемент 0 принято называть нулем;

4) для каждого a из M должен существовать такой элемент c из M , что $a \div c = 0$; элемент c называют

противоположным элементу a и часто обозначают через $-a$ (так что в данном случае $c = -a$);

5) от умножения требуется лишь одно: оно должно быть дистрибутивно связано со сложением, то есть для любых a, b, c из M должны иметь место равенства

$$a(b \div c) = ab \div ac;$$

$$(b \div c)a = ba \div ca$$

(различать эти два равенства надо потому, что умножение не предполагается коммутативным). Часто указанное свойство называют «распределительностью умножения относительно сложения».

Вот что такое кольцо. Очень важно иметь в виду, что из требований 1) — 4) следует «единственность» нуля и «единственность противоположного элемента». Означает это следующее: а) если 0_1 и 0_2 — два элемента кольца M , удовлетворяющие требованию 3), то $0_1 = 0_2$; б) если $a \div c_1 = a \div c_2 = 0$, то $c_1 = c_2$. Иными словами: в кольце только один нуль, и каждый элемент кольца имеет лишь один противоположный элемент. В самом деле, ведь в силу 1) и 3)

$$0_1 = 0_1 \div 0_2 = 0_2 \div 0_1 = 0_2.$$

Этим доказано а). Далее, если к обеим частям равенства

$$a \div c_1 = a \div c_2$$

прибавить, скажем, c_1 , то получится

$$c_1 \div (a \div c_1) = c_1 \div (a \div c_2),$$

или, в силу 2),

$$(c_1 \div a) \div c_1 = (c_1 \div a) \div c_2,$$

или, ввиду того что $a \div c_1 = c_1 \div a = 0$, получаем

$$0 \div c_1 = 0 \div c_2,$$

или $c_1 = c_2$, чем и доказывается б).

Примерами колец могут служить известные нам уже множество всех целых чисел, множество всех рациональных чисел, множество всех полиномов с вещественными коэффициентами относительно обычных операций сложения и умножения. Если внимательно присмотреться, то станет ясно следующее обстоятельство:

в названных примерах колец умножение подчинено нескольким требованиям, помимо требования 5). Перечислим их, продолжая нумерацию:

6) *умножение коммутативно, то есть* $ab = ba$ *при всех* a *и* b ;

7) *умножение ассоциативно, то есть* $(ab)c = a(bc)$ *при всех* a , b *и* c ;

8) *в кольце существует такой элемент* e , *что* $ae = a$ *для всех* a .

Если кольцо M удовлетворяет условию 6), то его называют *коммутативным*; если оно удовлетворяет условию 7), то его называют *ассоциативным*; наконец, если M удовлетворяет условию 8), то говорят, что M *обладает единицей* и обозначают элемент e символом 1.

Следовательно, примеры колец, о которых говорилось выше, — это примеры колец коммутативных, ассоциативных и обладающих единицей. Именно о таких кольцах мы будем говорить ниже. Но сразу отметим, что в теории колец значительное место занимают разделы о кольцах, не подчиненных тем или иным требованиям из числа 6) — 8) (например, о некоммутативных или о неассоциативных кольцах).

Сейчас мы построим еще один пример кольца.

Напомним, что для любых двух целых чисел a и b , где $b \neq 0$, существуют такие целые числа q и r , что

$$a = bq + r \quad (1)$$

и одновременно

$$0 \leq r < |b|. \quad (2)$$

Число q называют *частным*, а число r — *остатком* от деления a на b . Советуем читателю, повторяя эту тему школьной арифметики, доказать, что числа q и r , упомянутые выше, единственны, то есть если

$$a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2,$$

где $0 \leq r_1, r_2 < |b|$, то $r_1 = r_2$ и $q_1 = q_2$.

Рассмотрим множество всевозможных остатков от деления целых чисел на фиксированное число n . Легко сообразить, что это множество

состоит из чисел $0, 1, 2, \dots, n-1$. Обозначим его через Z_n . Введем на Z_n две операции: сложение и умножение. Конечно, обычное сложение или обычное умножение целых чисел не являются операциями на Z_n : ведь числовая сумма или числовое произведение остатков от деления на n может быть больше, чем n , и не принадлежать Z_n . Поэтому, определяя операции на Z_n , нужно элементы этого множества рассматривать не как числа, а как-то иначе. Условимся под символом \bar{k} , где k — число из Z , понимать остаток от деления на n числа k . В частности, если $0 \leq k < n$, то символ \bar{k} означает то же самое число k , но рассматриваемое как остаток из Z_n .

Назовем *суммой* двух остатков \bar{a} и \bar{b} из Z_n остаток $\overline{a+b}$:

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}. \quad (3)$$

Конечно, такое определение было бы совершенно безукоризненным, если бы было сказано, что a и b — остатки от деления на n : тогда $\overline{a+b}$ — остаток от деления на n вполне определенного целого числа — числа $a+b$. Но по причинам, которые будут ясны ниже, мы не требуем неравенств $0 \leq a, b < n$ — числа a и b предполагаются любыми. В этом случае естественно высказать следующее сомнение: допустим, a_1, a_2, b_1, b_2 — разные целые числа, но $\bar{a}_1 = \bar{a}_2$ и $\bar{b}_1 = \bar{b}_2$; тогда, согласно сказанному, сумма остатков \bar{a}_1 и \bar{b}_1 — это, с одной стороны, остаток $\overline{a_1 + b_1}$, а с другой — остаток $\overline{a_2 + b_2}$. Действие можно считать определенным только в том случае, если $\overline{a_1 + b_1} = \overline{a_2 + b_2}$, а это равенство нужно доказывать.

Вот его доказательство. Пусть, в соответствии с (1), $a_i = nq'_i + r'_i$, $i = 1, 2$, и $b_j = nq''_j + r''_j$, $j = 1, 2$, где r'_i и r''_j — остатки. Тогда $\overline{a_1 + b_1} = \overline{n(q'_1 + q''_1) + r'_1 + r''_1}$ и $\overline{a_2 + b_2} = \overline{n(q'_2 + q''_2) + r'_2 + r''_2}$. С другой сторо-

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Табл. 7. Сложение в Z_3

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

Табл. 8. Сложение в Z_4

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Табл. 9. Умножение в Z_3

ны, $a_2 + b_2 = n(q_2 + q_2) + r' + r''$,
и снова

$$\overline{a_2 + b_2} = \overline{r' + r''}.$$

Следовательно, $\overline{a_1 + b_1} = \overline{a_2 + b_2}$,
что и требовалось доказать.

Итак, одна операция на Z_n определена. Она называется сложением, а результат ее применения к двум остаткам из Z_n , как уже говорилось, называется суммой.

Предложение 1. Сложение на Z_n удовлетворяет требованиям 1) — 4), перечисленным в определении кольца.

Доказательство. Благодаря равенству (3), которое подробно обсуждалось, выше, коммутативность и ассоциативность введенного сложения непосредственно следуют из коммутативности и ассоциативности сложения целых чисел. Аксиома 3) о существовании нуля выполняется благодаря существованию остатка $\bar{0}$ (его дают числа, кратные n): $\overline{a + 0} = \overline{a + 0} = \overline{a}$. Наконец, противоположным остатку \overline{a} служит, очевидно, остаток $\overline{-a}$, так что $\overline{-a} + \overline{a} = \overline{0}$, и аксиома 4) также выполняется.

Вот несколько таблиц сложения в Z_n (см. табл. 7—8).

Введем теперь в Z_n умножение.

Положим для $\overline{a}, \overline{b}$ из Z_n

$$\overline{ab} = \overline{ab} \quad (4)$$

и назовем \overline{ab} произведением \overline{a} и \overline{b} , а само действие — умножением. Конечно, и в этом случае нужно доказать, что определение корректно, то есть нужно убедиться в следую-

щем:

$$\text{если } \overline{a_1} = \overline{a_2} \text{ и } \overline{b_1} = \overline{b_2}, \text{ то } \overline{a_1 b_1} = \overline{a_2 b_2}.$$

Пусть, в самом деле, $a_i = q_i n + r'$, $i = 1, 2$, и $b_j = q_j n + r''$, $j = 1, 2$. Тогда

$$\begin{aligned} \overline{a_1 b_1} &= \overline{(q_1 n + r')(q_1 n + r'')} = \\ &= \overline{n(nq_1 q_1 + r' q_1 + r'' q_1) + r' r''} = \\ &= \overline{r' r''} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{и} \\ \overline{a_2 b_2} &= \overline{(q_2 n + r')(q_2 n + r'')} = \\ &= \overline{n(nq_2 q_2 + r' q_2 + r'' q_2) + r' r''} = \\ &= \overline{r' r''}. \end{aligned}$$

Предложение 2. Умножение на Z_n удовлетворяет аксиомам 5) — 8), перечисленным в определении кольца.

Доказательство. Дистрибутивная связь со сложением, а также коммутативность и ассоциативность умножения следуют, благодаря (4), из аналогичных свойств умножения целых чисел. Роль единицы для умножения играет остаток $\bar{1}$.

Итак, Z_n — кольцо коммутативное, ассоциативное и обладающее единицей.

Умножение в каком бы то ни было кольце R существенно характеризуется тем, в каких случаях оказывается выполненным равенство

$$ab = 0. \quad (5)$$

Так, например, в кольце Z целых

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Табл. 10. Умножение в Z_4

чисел равенство (5) выполняется лишь тогда, когда либо $a = 0$, либо $b = 0$. Аналогичное утверждение справедливо и для Z_3 (см. табл. 9). Но в кольце Z_6 , например, равенство (5) справедливо при $a = \bar{2}$ и $b = \bar{3}$, то есть произведение ненулевых сомножителей оказывается здесь равным нулю. Принято говорить, что элемент a кольца R является *делителем нуля*, если $a \neq 0$ и если существует такой элемент $b \neq 0$ в R , что $ab = 0$. Таким образом, остаток $\bar{2}$ в Z_6 является делителем нуля; с другой стороны, в рассмотренных выше кольцах Z и Z_3 делителей нуля нет совсем.

Наряду с равенством (5) умножение в кольце характеризуется и тем,

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$						
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Табл. 11. Умножение в Z_6

какие его элементы удовлетворяют равенству

$$xy = 1. \quad (6)$$

Такие элементы называют *обратимыми*. В кольце Z множество обратимых элементов состоит всего лишь из 1 и -1 ; в кольце Z_3 обратимы все элементы, кроме 0, а в кольце Z_6 обратимы только остатки $\bar{1}$ и $\bar{5}$, потому что $\bar{5} \cdot \bar{5} = \bar{1}$. (Советуем читателю проверить, что в Z_6 все остальные элементы x не являются обратимыми.)

Мы познакомились, таким образом, с понятием кольца, рассмотрели простейшие примеры и первые структурные характеристики этого нового объекта: делители нуля и обратимые элементы. Теперь можно приступить к изучению таких важных вопросов, как, например, вопрос о простых элементах кольца и разложении на простые множители. Этой цели мы сейчас перед собой не ставим: ей естественно посвятить отдельный разговор.

В заключение — несколько задач для самостоятельного решения.

1. Докажите, что множество полиномов с действительными коэффициентами с обычными сложением и умножением является кольцом без делителей нуля. Каково множество обратимых элементов этого кольца?

2. Составьте таблицы сложения и умножения в Z_6 и Z_7 и докажите, что в этих кольцах не только нет делителей нуля, но и что каждый ненулевой элемент в них обратим.

3. Докажите, что свойствами, о которых говорится в предыдущей задаче, обладает любое кольцо Z_p при простом числе p .

4. Докажите, что в кольце Z_n каждый ненулевой элемент либо обратим, либо является делителем нуля.

5. Докажите утверждение 4 для любого кольца, обладающего единицей, состоящего из конечного числа элементов и ассоциативного.

А. Б. ШВАРЦБУРГ

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ



Магнитная стрелка, помещенная в сосуд с водой, служила путешественникам для ориентации в море еще в средние века. Долгое время считалось, что стрелка указывает на север, точнее — на Полярную звезду. Однако наблюдения при дальних морских путешествиях и на суше показали, что это неверно. Поэтому мореплавателям особенно важно было знать:

Куда указывает стрелка компаса?

Христофор Колумб по пути в Новый Свет обратил внимание на важное свойство магнитной стрелки. Вскоре после отплытия (в сентябре 1492 года), продвигаясь на запад от берегов Пиренейского полуострова, он заметил, что магнитная стрелка все больше отклоняется от направления север — юг. Наблюдения по Солнцу показали, что за четыре дня конец стрелки сместился на целое деление (шкала компаса состояла из 32 делений, так что каждое соответствовало углу в $11\frac{1}{4}^\circ$). Многие моряки восприняли это неожиданное и непонятное явление как плохое предзнаменование. Рассказывают даже, что капитану, во избежание волнений на борту, пришлось заявить команде, что сместилась Полярная звезда, вызвав этим смещение стрелки. Однако по мере приближения к Америке смещение стало уменьшаться, и постепенно стрелка приблизилась к привычному положению.

Таким образом было установлено два важных факта: 1) магнитная стрелка может отклоняться от направления север — юг; 2) величина отклонения изменяется в зависимости от места наблюдения.

Величину угла между географическим меридианом и направлением стрелки (в горизонтальной плоскости) называют склонением.

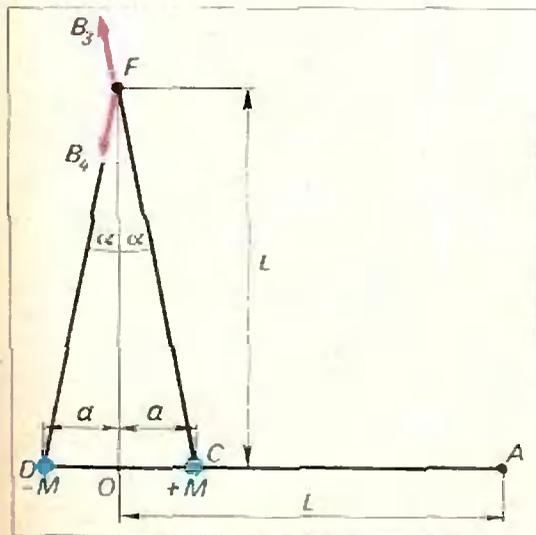
Представлению о том, что магнитная стрелка направлена строго на север, был нанесен еще один удар: ученые обнаружили, что стрелка не устанавливается горизонтально; точнее, было замечено, что в северном полушарии ее северный конец отклоняется вниз. Наименьший угол между направлением стрелки и горизонтальной плоскостью назвали наклоном. Наклонение в разных местах также оказалось различным, причем распределение величин склонения и наклона по поверхности Земли выглядело чрезвычайно сложно. После этого возникло естественное предположение, что причина отклонения стрелки как-то связана с Землей. Такое предположение получило развитие в знаменитой книге английского естествоиспытателя Гильберта «О магните, магнитных телах и великом магните Земли», которая увидела свет еще в 1600 году. Чтобы объяснить поведение магнитной стрелки, автор уподобляет земной шар стержнеобразному магниту, уже знакомому ученым в то время. Подобная модель во многом сохранила свое значение и сегодня. С помощью та-

кой модели можно приближенно описать магнитное поле Земли, однако это довольно грубое описание. На поверхности Земли магнитное поле обнаруживает отступления от этой модели, а далеко от Земли, в космосе, такая модель хорошо описывает магнитное поле Земли.

Магнитный диполь

Электрическое поле двух зарядов, раздвинутых на расстояние l , носит название поля электрического диполя. Хотя в природе нет магнитных зарядов, существуют магнитные поля, картина силовых линий которых подобна картине силовых линий электрического поля диполя. Таково, например, поле намагниченного стержня на достаточно больших расстояниях от него. По аналогии с электрическим такое поле называют полем магнитного диполя. При описании такого поля можно считать (хотя на самом деле это не так), что оно создается двумя «магнитными массами», помещенными на концах намагниченного стержня (см. рисунок). В течение многих лет ученые так и рассуждали, уподобляя магнитные массы электрическим зарядам.

Найдем сначала индукцию в «далекой» точке A на оси диполя такой,



что расстояние $OA = L \gg DC$. В этой точке вектор магнитной индукции B направлен по прямой DC , то есть по оси диполя. Численное значение B можно найти по аналогии с законом Кулона, поскольку мы пользуемся аналогией с электрическими зарядами. Значение индукции поля «магнитной массы» — M в точке A составляет

$$B_1 = -\frac{kM}{(L+a)^2}.$$

Для поля электрического заряда было бы $E = \frac{k'Q}{(L+a)^2}$. Здесь k и k' — коэффициенты, зависящие от выбора системы единиц. В этой же точке индукция поля «магнитной массы» M равна

$$B_2 = \frac{kM}{(L-a)^2}.$$

Используя принцип суперпозиции, найдем результирующее значение индукции в точке A :

$$B_{\parallel} = B_1 + B_2 = 4 \frac{kMaL}{(L^2 - a^2)^2}.$$

Так как $L \gg a$, можно считать, что

$$B_{\parallel} = 4 \frac{kMaM}{L^3}.$$

Величина $2kMa$ носит специальное название — магнитный момент диполя; обозначим эту важную величину через p , тогда

$$B_{\parallel} = \frac{2p}{L^3}. \quad (1)$$

Найдем теперь индукцию в плоскости, перпендикулярной оси диполя. Индукция поля, созданного «магнитной массой» M в точке F (см. рисунок), направлена по прямой FC и составляет

$$B_3 = \frac{kM}{(FC)^2}.$$

Индукция B_4 в этой же точке, созданная полюсом $-M$, численно равна B_3 , а направлена по прямой DF . Проектируя векторы индукции B_3 и B_4 на ось OF и CD , увидим, что сумма проекций на ось FO равна 0. Результирующая проекция на ось CD составит

$$B_{\perp} = 2B_3 \sin \alpha = 2 \frac{kMaM}{(FC)^2 FC}.$$

Используя определение момента диполя $p = 2kMa$ и замечая, что при больших расстояниях FC ($FC \gg 2a$) можно приближенно положить $FC = L$, запишем формулу для величины магнитной индукции в плоскости, перпендикулярной оси диполя:

$$B_{\perp} = \frac{p}{L^3}. \quad (2)$$

Сравнение формул (1) и (2) показывает, что поле диполя сложнее поля точечного заряда: величина индукции зависит не только от расстояния до источника поля, но и от угла радиуса-вектора точки, в которой измеряется индукция с осью диполя. При изменении этого угла от 0 до $\frac{\pi}{2}$ индукция поля (на том же расстоянии L) уменьшается вдвое.

Теперь применим модель магнитного диполя к описанию магнитного поля Земли. Представим себе, что внутри земного шара находятся две «магнитные массы», образующие диполь. Ось диполя продолжена так, что пересекает поверхность Земли. Точки пересечения называются магнитными полюсами. Величина индукции магнитного поля вблизи полюсов вдвое больше, чем на магнитном экваторе. Непосредственные измерения показывают, что вблизи магнитных полюсов $B = 0,7 \cdot 10^{-4}$ тл, а вблизи экватора $B = 0,4 \cdot 10^{-4}$ тл. Если не интересоваться специально областями вблизи полюса или экватора, то для оценки принимают среднее значение $B = 0,5 \cdot 10^{-4}$ тл.

С помощью формул (1) или (2) можно узнать дипольный момент, соответствующий определенным значениям индукции. Считая, что радиус Земли равен $R_0 = 6400$ км, получим, что величина магнитного момента Земли составляет

$$p = 8 \cdot 10^{15} \text{ тл} \cdot \text{м}^3.$$

Вариации и аномалии магнитного поля

Одним из первых пунктов, где систематически начали измерять ве-

личину магнитного склонения, был Лондон. Вот значения склонения по годам: в 1540 году — $7,2^\circ$; в 1560 — $9,6^\circ$; в 1580 — $10,9^\circ$. Оказывается, склонение меняется со временем, причем скорость этого изменения не постоянна. После 1580 года начинается уменьшение склонения. Около 1660 года значение этой величины перешло через нуль и стало отрицательным, то есть стрелка стала отклоняться не к востоку, а к западу. Угол отклонения возрастал и в 1820 году составил около 24° . Потом западное склонение стало уменьшаться и сейчас составляет около 16° .

Сейчас значения склонения измеряются на Земле в нескольких десятках тысяч пунктов. Результаты измерений наносят на так называемые магнитные карты. На этих картах проведены линии, соединяющие пункты с одинаковым значением склонения (так же как на географических картах — точки, лежащие на одинаковой высоте над уровнем моря).

Таким образом, из-за изменения склонения с течением времени — так называемых вариаций — магнитные карты теряют ценность, и через несколько лет их нужно составлять заново. Склонение магнитной стрелки нельзя объяснить с помощью представлений о постоянном магнитном диполе, расположенном в центре Земли. Такие представления описывают лишь усредненное поведение магнитного поля. На Земле существует немало магнитных аномалий, характеризующихся значительным отступлением величины и направления магнитного поля от дипольной модели. Так, в южной оконечности Южной Америки индукция магнитного поля падает до $2,5 \cdot 10^{-5}$ тл — меньше, чем на магнитном экваторе. Некоторые аномалии связаны с залеганием магнитных материалов. Такова, например, знаменитая Курская магнитная аномалия, где индукция магнитного поля превышает величину $2 \cdot 10^{-4}$ тл. Это больше значения индукции вблизи магнитных полюсов Земли.

Магнитосфера Земли и солнечный ветер

До сих пор речь шла о магнитном поле на поверхности Земли. Однако магнитное поле Земли играет важную роль в физических процессах, протекающих на больших высотах, там, где «дует» солнечный ветер. Солнечным ветром называют поток газа, радиально удаляющийся по всем направлениям от Солнца. Газ солнечного ветра полностью ионизирован и состоит из протонов и электронов. В таком состоянии он хорошо проводит электрический ток.

Солнечный ветер не достигает Земли, этому препятствует создаваемое Землей магнитное поле. Поток идущих от Солнца частиц отклоняется и обтекает Землю в области, называемой магнитосферой. Магнитосфера расположена на большом расстоянии от земной поверхности, намного больше, чем радиус Земли. Поэтому магнитное поле здесь значительно слабее, чем на поверхности Земли. Тем не менее магнитосфера все же играет роль своеобразного «щита», прикрывающего Землю от проникновения частиц из космоса. Расчет показывает, что поток частиц, распространяющихся в плоскости магнитного экватора, затормозится далеко от поверхности Земли, на расстоянии примерно в 8—9 земных радиусов.

С другой стороны, поток солнечного ветра, движущийся вдоль магнитной оси Земли в направлении вблизи магнитного полюса, встречает на своем пути лишь очень слабую, стремящуюся к 0, горизонтальную составляющую магнитного поля Земли. Поэтому такие потоки частиц подходят гораздо ближе к поверхности Земли и вызывают сильные возмущения в ионосфере Земли.

Геомагнитное динамо

В последнее время благодаря успехам космонавтики появилась возможность непосредственно измерить магнитное поле на поверхности ближай-

ших к нам планет Солнечной системы. Оказалось, что на Луне или совсем нет собственного магнитного поля, или его индукция, во всяком случае, меньше одной десяти тысячной индукции магнитного поля Земли *). После этого вопрос о причинах существования магнитного поля Земли и о его изменениях приобрел особую остроту. Магнитное поле Земли можно приближенно описать, если предположить, что оно индуцируется некоторым электрическим током, текущим глубоко в недрах Земли. Действительно, картина силовых линий электрического поля кольца с током подобна картине магнитных силовых линий поля намагниченного стержня, которым мы заменяли магнитное поле Земли. Физические причины, приводящие к существованию такого тока, пока еще не установлены окончательно. Существует несколько теорий, пытающихся объяснить происхождение этого тока. В последнее время среди геофизиков пользуется популярностью так называемая «теория геомагнитного динамо» или, короче, «динамо-теория». Расскажем вкратце, в чем состоят физические основы этой теории.

Результаты геологических исследований позволяют считать, что в центре Земли находится жидкое электропроводящее ядро. Радиус ядра составляет около 3900 км. Согласно «динамо-теории», токи в ядре образуются за счет электромагнитной индукции при вращательном движении проводящего ядра в магнитном поле. Магнитное поле создается этими же токами. Таким образом, магнитное поле само себя поддерживает, подобно тому, как это происходит в динамо-машине (отсюда и пошло название теории). Однако еще до начала работы такой машины должно существовать некоторое «затравочное» поле.

*) Подробнее о магнитном поле Луны см. статью: Гинцбург М. А. Измерение магнитных полей на Луне. «Квант», 1973, № 11.

«Затравочное» поле, необходимое для «запуска динамо» могло быть создано различными физическими механизмами. Одно из наиболее простых объяснений связано с тем, что небольшое намагничивание присуще любому вращающемуся телу. Предположение о существовании такого намагничивания высказывал еще П. Н. Лебедев. В его опытах делалась попытка обнаружить намагничивание, создаваемое вращающимся диском. Хотя техника эксперимента того времени и не позволила надежно зафиксировать возникновение намагничивания, впоследствии опыты были повторены другими учеными на более совершенных установках. В частности, было экспериментально измерено намагничивание стержня, возникающее при вращении этого стержня вокруг продольной оси. Оценки показывают, что индукция поля, возникающая при вращении Земли, составляет ничтожно малую величину, порядка 10^{-11} индукции поля Земли. Однако столь малое поле, возникнув, могло усиливаться за счет действия «геомагнитного динамо», как описано выше. Источником энергии, необходимой для создания поля, могло служить вращение Земли.

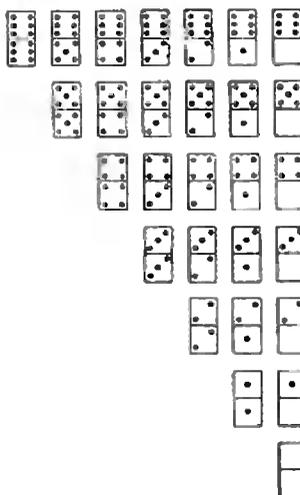
Эту теорию нельзя считать окончательной, и вопрос происхождения магнитного поля Земли во многом остается открытым. Поскольку эта проблема связана с особенностями состояния вещества вблизи центра Земли, объяснение магнетизма Земли было бы важным результатом и для геологии, и для астрономии. Решение этой проблемы, вероятно, помогло бы связать факт отсутствия дипольного магнитного поля на Луне с внутренним строением этой планеты.

Задача-пасьянс

Тщательно перемешаем кости домино и разложим их лицевой стороной вниз в виде треугольника



Мы хотим разместить их в таком виде:



Для этого откроем нижнюю кость и поместим ее на предназначенное ей место. Кость, которая занимала это место, открываем и помещаем на соответствующее ей место, и так далее.

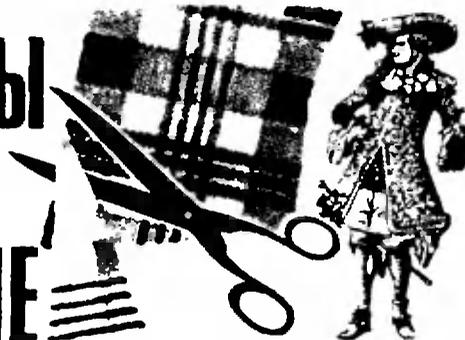
Пасьянс считается удавшимся, если такими действиями нам удастся перевернуть все кости (то есть если место нижней кости будет занято лишь на последнем ходу).

Какова вероятность такого исхода? (Или в какой части случаев пасьянс удастся?)

Е и Э Парилис

И. М. ЯГЛОМ

ЗАПЛАТЫ НА КАФТАНЕ



В № 1 журнала «Квант» за этот год была опубликована следующая задача Е. Б. Дынкина:

M185*. На кафтане площадью 1 помещается 5 заплат, площадь каждой из которых не меньше $\frac{1}{2}$. Докажите, что найдутся две заплаты, площадь общей части которых не меньше $\frac{1}{5}$.

Мы разберем решение этой задачи и обсудим некоторые ее обобщения и варианты*). Наше изложение будет сопровождаться задачами, в которые, в частности, будут отнесены отдельные детали проводимых доказательств; номера наиболее трудных задач помечены звездочкой.

Мы будем обозначать как сам кафтан, так и его площадь (по условию равную 1) буквой M ; заплаты на кафтане (и площади этих заплат) мы обозначим через M_1, M_2, M_3, M_4 и M_5 , а, скажем, общую часть заплат M_1 и M_2 (и площадь этой общей части) — через M_{12} ; аналогично этому общую часть заплат M_1, M_2 и M_3 (и ее площадь) мы обозначим через M_{123} и т. д. То обстоятельство, что, например, через M_1 мы обозначаем как заплату (геометрическую фигуру!), так и площадь этой заплаты (число!), не должно нас смущать — из текста каждый раз будет понятно, в каком смысле мы употребляем запись M_1 .

Начинаем решать задачу

Из того, что общая площадь всех заплат

$$M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 \geq \frac{5}{2}$$

больше площади $M = 1$ кафтана, вытекает, что наши заплаты *перекрываются* — и задача состоит в том, чтобы оценить площади их общих частей (точнее — оценить *наибольшее* из чисел $M_{12}, M_{13}, \dots, M_{45}$).

Мы утверждаем, что

$$M - (M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5) + (M_{12} + M_{13} + M_{14} + \dots + M_{45}) \geq 0. \quad (1)$$

В самом деле, если бы заплаты *не перекрывались*, то была бы отрицательная разность $M - (M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5)$, равная площади части кафтана, *вовсе не покрытой заплатами*. Но на самом деле наши заплаты пересекаются — и сумма $M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5$ оказывается гораздо больше общей площади S покрытой заплатами части кафтана (где, разумеется, $S \leq M = 1$): часть M_{12} кафтана учитывается в сумме $M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5$ дважды, поскольку она входит и в слагаемое M_1 и в слагаемое M_2 , часть M_{123} — трижды и т. д. Попробуйте теперь доказать, что

$$S \geq \sum M_i - \sum M_{ij} \quad (*). \quad (1')$$

*) Краткое решение этой задачи приведено в «Кванте» № 10, 1973.

*) В этой формуле $\sum M_i = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5$, $\sum M_{ij} = M_{12} + M_{13} + \dots + M_{45}$ — это суммы площадей соответствующих частей кафтана. Такие же обозначения применены и в других формулах

Если вам не удастся этого сделать, прочтите следующий раздел статьи, а потом вернитесь к этому неравенству.

Из (1'), поскольку $M \geq S$, вытекает неравенство (1).

Неравенство (1) уже позволяет оценить попарные пересечения M_{12}, M_{13}, \dots заплат. В самом деле, из него следует, что

$$(M_{12} + M_{13} + \dots + M_{45}) \geq \\ \geq (M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5) - M \geq \\ \geq \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}.$$

А так как общее число попарных пересечений заплат M_{ij} равно $C_5^2 = 10$, то наибольшее из чисел $M_{12}, M_{13}, \dots, M_{45}$ не меньше чем

$$\frac{3}{2} : 10 = \frac{3}{20}.$$

Полученная нами оценка, однако, хуже требуемой оценки $\frac{1}{5}$ ($= \frac{4}{20}$).

Упражнение

1. На кафтане площади 1 имеется 9 заплат площади $\frac{1}{5}$. Докажите, что найдутся такие две заплаты, площадь общей части которых не меньше $\frac{1}{45}$.

Формула включений и исключений

Наша оценка (1') для площади S всей покрытой заплатами части кафтана не точна. Постараемся точнее определить эту площадь. В правую часть формулы (1') не войдет площадь никакой части кафтана, покрытой сразу тремя заплатами: например, M_{123} войдет в имеющие знак «плюс» члены M_1, M_2, M_3 и в имеющие знак «минус» члены M_{12}, M_{13}, M_{23} — то есть полностью *выпадет* из формулы (1'). Поэтому лучшей оценкой для S может служить выражение

$$\sum M_i - \sum M_{ij} + \sum M_{ijk}.$$

Однако и эта величина еще не равна S , поскольку каждая часть кафтана M , покрытая сразу *четырьмя* заплатами, учитывается в ней *дваж-*

ды: в самом деле, скажем, величина M_{1234} учитывается в 8 членах $M_1, M_2, M_3, M_4; M_{123}, M_{124}, M_{134}, M_{234}$ последнего выражения, входящих в него со знаком «плюс», и лишь в 6 членах $M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{23}, M_{24}$ и M_{34} , входящих в это выражение со знаком «минус». Поэтому следующим приближением к истинной величине S явится выражение

$$\sum M_i - \sum M_{ij} + \sum M_{ijk} - \\ - \sum M_{ijkl},$$

которое уже «почти равно» S — в нем точно учитываются все участки кафтана M , покрытые заплатами не более чем четырехкратно. Однако участок M_{12345} кафтана, покрытый всеми пятью заплатами, из последнего выражения *выпадает*: в самом деле, он входит во все члены этого выражения, то есть как в 15 членов $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5; M_{123}, M_{124}, \dots, M_{345}$, имеющих перед собой знак «плюс», так и в 15 членов $M_{12}, M_{13}, \dots, M_{45}; M_{1234}, M_{1235}, M_{1245}, M_{1345}$ и M_{2345} , имеющих перед собой знак «минус». Поэтому для того, чтобы получить точное выражение для S , мы должны член M_{12345} к последней сумме прибавить. Вот точное равенство:

$$S = \sum M_i - \sum M_{ij} + \sum M_{ijk} - \\ - \sum M_{ijkl} + M_{12345} \quad (2)$$

(здесь $i, j, k, l = 1, 2, 3, 4$ или 5). Но площадь σ части кафтана, *не покрытой ни одной заплатой*, равна $M - S$; так как $\sigma \geq 0$, то имеем

$$\sigma = M - \sum M_i + \sum M_{ij} - \\ - \sum M_{ijk} + \sum M_{ijkl} - M_{12345} \geq 0. \quad (3)$$

Формула (3) получается последовательным исключением покрытых заплатами участков кафтана M и включением тех из них, которые оказываются исключенными *двукратно*; ее иногда называют *формулой включений и исключений*. Эта формула используется во многих комбинаторных рассуждениях.

Формула включений и исключений справедлива и для отличного от пяти числа заплат. В общем случае n заплат формула включений и исключений принимает внешне несколько пугающей своей сложностью, но по существу — вполне прозрачный вид:

$$\sigma = M - \sum M_{i_1} + \sum M_{i_1 i_2} - \sum M_{i_1 i_2 i_3} + \sum M_{i_1 i_2 i_3 i_4} - \dots + (-1)^{n-1} \sum M_{i_1 i_2 i_3 \dots i_{n-1}} + (-1)^n M_{123 \dots n} \geq 0 \quad (4)$$

(здесь все индексы i_1, i_2, \dots, i_{n-1} могут принимать любые из значений $1, 2, 3, \dots, n$, причем для пересечения $M_{i_1 i_2 \dots i_k}$ заплат $M_{i_1}, M_{i_2}, \dots, M_{i_k}$ все значения i_1, i_2, \dots, i_k обязательно различны).

Упражнения

- 2. Докажите формулу (4) при $n=6$.
- 3*. Докажите формулу (4).

4. Дом пионеров регулярно посещают 220 школьников. При доме пионеров имеется шесть спортивных секций: легкоатлетическая (л), волейбольная (в), баскетбольная (б), футбольная (ф), секция самбо (с) и шахматная секция (ш). Число участников этих секций таково: (л) — 30 человек, (в) — 26 человек, (б) — 32 человека, (ф) — 31 человек, (с) — 28 человек и (ш) — 36 человек. Несколько секций посещают 53 школьника; из них 24 школьника посещают три или больше секций, 9 школьников — не меньше четырех секций и 3 школьника — даже пять секций (в последнюю тройку школьников входит и один чудак, который посещает все шесть спортивных секций). Сколько из посещающих дом пионеров школьников не участвуют ни в одной спортивной секции?

Решение задачи M185

Мы видели, что «сокращенная» формула включений и исключений

$$M - \sum M_i + \sum M_{ij} \geq 0 \quad (1)$$

не дает точной оценки интересующей нас величины $\max M_{ij}$ (наибольшей из величин M_{ij}); поэтому нам придется привлечь «полную» формулу

$$M - \sum M_i + \sum M_{ij} - \sum M_{ijk} + \sum M_{ijkl} - M_{12345} \geq 0. \quad (3')$$

Применим теперь формулу включений и исключений (4) (где мы счи-

таем теперь, что $n = 4$) к части M_1 кафтана M , покрытой своими заплатами M_{12}, M_{13}, M_{14} и M_{15} . Мы получаем

$$\sigma_1 = M_1 - \sum M_{1i} + \sum M_{1ij} - \sum M_{1ijk} + M_{12345} \geq 0,$$

где σ_1 — часть заплаты M_1 , не покрытая другими заплатами, и номера (или индексы) i, j, k пробегают все возможные значения 2, 3, 4 или 5. Аналогичные неравенства можно выписать и для участков M_2, M_3, M_4 и M_5 кафтана:

$$\sigma_2 = M_2 - \sum M_{2i} + \sum M_{2ij} - \sum M_{2ijk} + M_{12345} \geq 0,$$

$$\sigma_5 = M_5 - \sum M_{5i} + \sum M_{5ij} - \sum M_{5ijk} + M_{12345} \geq 0.$$

Сложив полученные таким путем 5 неравенств, отвечающих участкам M_1, M_2, \dots, M_5 кафтана, получаем (проверьте это):

$$\sum M_i - 2 \sum M_{ij} + 3 \sum M_{ijk} - 4 \sum M_{ijkl} + 5M_{12345} \geq 0. \quad (5)$$

Найдем теперь такую комбинацию неравенств (3') и (5), в которой *вовсе отсутствует сумма* $\sum M_{ijk}$ «тройных перекрытий заплат». Очевидно, для этого достаточно прибавить к (3') умноженное на $1/3$ неравенство (5). Мы получим такое неравенство

$$M - \frac{2}{3} \sum M_i + \frac{1}{3} \sum M_{ij} - \frac{1}{3} \sum M_{ijkl} + \frac{2}{3} M_{12345} \geq 0. \quad (6)$$

Из него следует также, что

$$M - \frac{2}{3} \sum M_i + \frac{1}{3} \sum M_{ij} \geq 0. \quad (7)$$

Действительно, часть M_{12345} кафтана входит в каждую из его частей M_{ijkl} ,

в силу чего $\sum M_{ijkl} > 5M_{12345}$, и по-

12	13	14	15	23
24	25	34	35	45
123	124	125	134	135
145	234	235	245	345

Рис. 1.

этому

$$-\frac{1}{3} \sum M_{ijkl} + \frac{2}{3} M_{12345} \leq 0.$$

Теперь уже легко получить требуемый ответ. Из (7) следует, что

$$\begin{aligned} \sum M_{ij} &\geq 2 \sum M_i - 3M \geq \\ &\geq 2 \left(5 \cdot \frac{1}{2} \right) - 3 = 2. \end{aligned}$$

Но так как общее число «попарных пересечений заплат» M_{ij} равно 10, то хоть одно из них не меньше чем

$$2:10 = \frac{1}{5},$$

что и требовалось доказать!

Нетрудно видеть, что равенство здесь будет иметь место лишь тогда, когда $S = M$, то есть когда кафтан весь покрыт заплатами, когда все $M_i = 1/2$, все M_{ij} одинаковы (и равны $1/5$) и когда все $M_{ijkl} = 0$. На рисунке 1 приведена схема покрытия кафтана заплатами, где прямоугольник M — это кафтан и цифры на отдельных квадратиках указывают, какими заплатами покрыты соответствующие участки кафтана. Эта схема показывает, что $1/5$ — точная оценка. То, что на ней заплаты состоят из отдельных кусков, не должно вас смущать — в задаче М185 важна только площадь заплаты, а не ее форма.

Теперь мы можем сформулировать общую задачу, частным случаем которой является задача М185:

Формулировка общей задачи; случай двух заплат

На кафтане M площади 1 имеется n заплат M_1, M_2, \dots, M_n , площадь каждой из которых не меньше известного нам числа α ; требуется оценить площадь наибольшего из пересечений M_{ij} заплат.

Другими словами, для каждой конфигурации из n заплат на кафтане мы находим максимальное по площади пересечение M_{ij} , а потом отыскиваем минимум этого максимума M_{ij} по всем возможным конфигурациям заплат*). Такого рода «минимаксные» (то есть связанные с нахождением минимума некоторых максимумов) задачи играют в современной математике очень большую роль.

Искомое число $\min \max M_{ij}$ зависит, разумеется, от заданного числа α , то есть является функцией от α ; так как оно зависит также и от числа n заплат, то мы обозначим эту функцию через $f_n(\alpha)$ (где, очевидно, $0 \leq \alpha \leq 1$, а $n \geq 2$). Решение задачи М185 сводится к доказательству равенства

$$f_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5};$$

общая задача требует указать формулу, выражающую $f_n(\alpha)$ через α и n .

Для того чтобы понять, какого ответа можно ожидать в этой общей задаче, мы начнем с (совсем простого!) случая $n = 2$. Итак, мы считаем, что на кафтане M площади 1 имеются две заплаты M_1 и M_2 , площадь каждой из которых не меньше α ; нам надо указать наименьшую возможную площадь $f_2(\alpha)$ пересечения M_{12} этих двух заплат.

Ясно, что если $\alpha \leq 1/2$, то заплаты могут вовсе не пересечься (рис. 2, а); если же $\alpha \geq 1/2$, то наименьшая возможная площадь $f_2(\alpha)$ пересечения

*) Мы предполагаем, что такой минимум существует, хотя это далеко не очевидно.

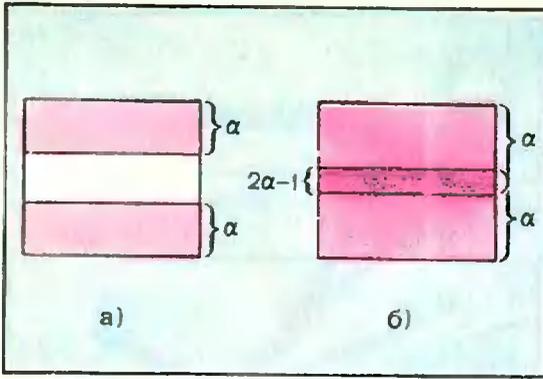


Рис. 2.

M_{12} заплат равна $2\alpha - 1$ (рис. 2, б). Таким образом,

$$f_2(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \alpha \leq 1/2, \\ 2\alpha - 1 & \text{при } 1/2 \leq \alpha \leq 1, \end{cases} \quad (8)$$

— то есть график функции $y = f_2(\alpha)$ представляет собой ломаную линию (рис. 3). Это обстоятельство наводит на мысль, что и в общем случае график искомой функции $f_n(\alpha)$ окажется ломаной линией.

У п р а ж н е н и е

5. Опишите функцию $y = f_3(\alpha)$.

У к а з а н и е: рассмотрите три сектора M_1 , M_2 и M_3 круга M , оси симметрии l_1 , l_2 и l_3 которых попарно образуют углы в 120° , а центральные углы (измеряемые в долях полного угла!) равны α ; начните с небольших значений α (рис. 4) и выясните, что произойдет при росте α вплоть до $\alpha = 1$.

Случай пяти заплат

Обратимся теперь к исходному случаю 5 заплат M_1 , M_2 , M_3 , M_4

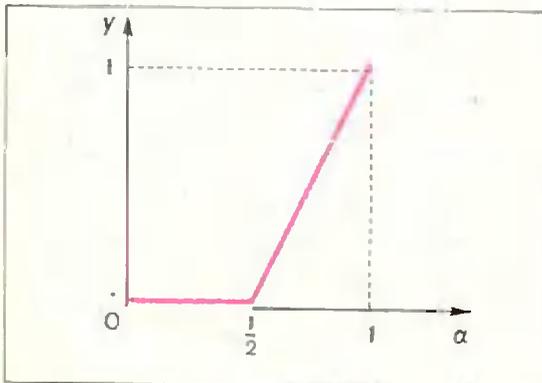


Рис. 3.

и M_5 на кафтане M , про которые мы теперь будем считать, что площадь каждой заплаты не менее α . Наша задача состоит в том, чтобы определить функцию $f_5(\alpha)$.

Прежде всего ясно, что $f_5(\alpha) \geq 0$ — график функции $y = f_5(\alpha)$ лежит не ниже оси $y = 0$ (рис. 5). Для того чтобы наш график совпал с осью, то есть чтобы было возможно обращение всех M_{ij} в 0, очевидно, необходимо (и достаточно), чтобы общая площадь всех заплат (по условию задачи не меньшая 5α) не превосходила площади 1 кафтана:

$$f_5(\alpha) = 0 \text{ при } 0 \leq \alpha \leq 1/5.$$

Далее воспользуемся неравенством (1) (с. 13). Из него следует, что

$$\sum M_{ij} \geq \sum M_i - M \geq 5\alpha - 1.$$

Поэтому, так как общее число «парных пересечений» заплат равно 10,

$$f_5(\alpha) \geq \frac{1}{10}(5\alpha - 1) = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{10}. \quad (9)$$

Неравенство (9) выполняется при всех α ; таким образом, график функции $y = f_5(\alpha)$ лежит не ниже прямой $y = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{10}$ (рис. 6). Однако для того, чтобы (9) обращалось в равенство, необходимо, чтобы $\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{10}$ было больше 0; кроме того, для этого неравенство (1) должно обращаться в равенство—и, значит, все M_{ijk} должны

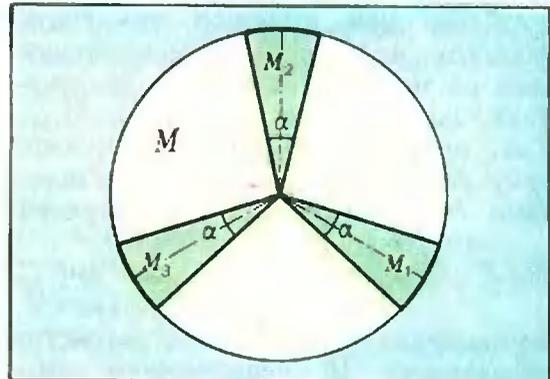


Рис. 4.

быть равны 0, и все M_{ij} должны иметь одну и ту же величину $\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{10}$. Но если все $M_{ijk} = 0$, то каждую заплату площади α (например, заплату M_1) «заплаты на заплате» M_{12}, M_{13}, M_{14} и M_{15} площади $\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{10}$ должны покрывать уже без перекрытий, что возможно только, если $4(\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{10}) \leq \alpha$ и, значит, $\alpha \leq \frac{2}{5}$ (ср. с разбором выше случая обращения функции $f_5(\alpha)$ в 0).

Таким образом, нам удалось продолжить график функции $y = f_5(\alpha)$:

$$f_5(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{10} \text{ при } \frac{1}{5} \leq \alpha \leq \frac{2}{5}.$$

Далее нам придется обратиться к неравенству (7) (с. 15), явившемуся основным инструментом решения задачи M185. Из этого неравенства вытекает, что

$$\sum M_{ij} \geq 2 \sum M_i - 3M \geq \geq 2(5\alpha) - 3 = 10\alpha - 3,$$

откуда

$$f_5(\alpha) \geq \frac{1}{10}(10\alpha - 3) = \alpha - \frac{3}{10}. \quad (10)$$

Неравенство (10) выполняется при всех α (т. е. график функции $y = f_5(\alpha)$ целиком лежит над прямой $y = \alpha - \frac{3}{10}$;

рис. 7); однако в равенство оно обращается лишь при $\frac{2}{5} \leq \alpha \leq \frac{3}{5}$ (см. упражнение 6,а).

Далее нам придется применить формулу включений и исключений уже не только к областям M_i кафтана, но и к областям M_{ij} и M_{ijk} . Так, применяя эту формулу к кафтану M_{12} , покрытому тремя заплатами M_{123}, M_{124} и M_{125} , получаем

$$\sigma_{12} = M_{12} - \sum M_{12i} + \sum M_{12ij} - M_{12345} \geq 0.$$

Выписывая 10 подобных неравенств, отвечающих 10 пересечениям M_{ij} заплат, и затем складывая их все, получаем (проверьте это!), что

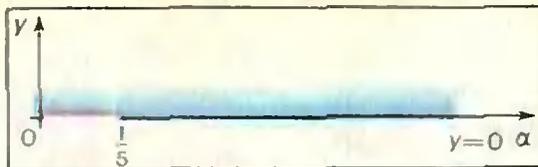


Рис. 5.

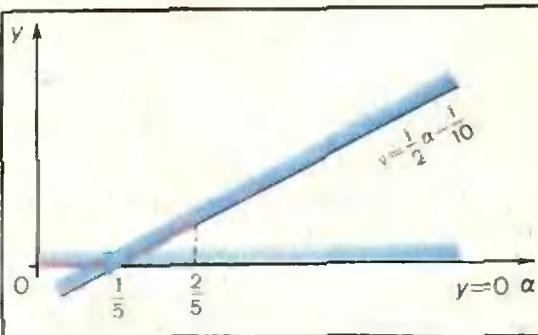


Рис. 6.

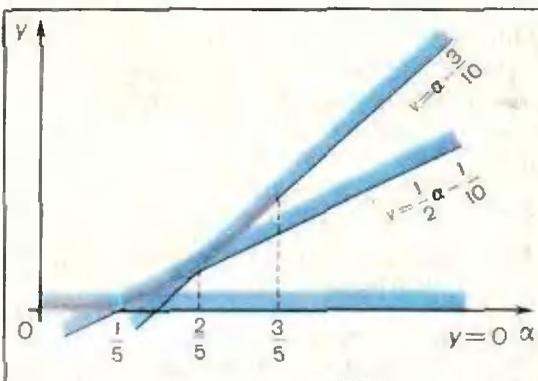


Рис. 7.

$$\sum M_{ij} - 3 \sum M_{ijk} + 6 \sum M_{ijkl} - 10M_{12345} \geq 0. \quad (11)$$

Аналогично, применив формулу включений и исключений к кафтану M_{123} , покрытому двумя заплатами M_{1234} и M_{1235} , мы получим, что

$$M_{123} - \sum M_{123i} + M_{12345} \geq 0.$$

Складывая 10 таких неравенств, отвечающих десяти «тройным пересечениям заплат» M_{ijk} , получаем, наконец, такое неравенство:

$$\sum M_{ijk} - 4 \sum M_{ijkl} + 10M_{12345} \geq \geq 0. \quad (12)$$

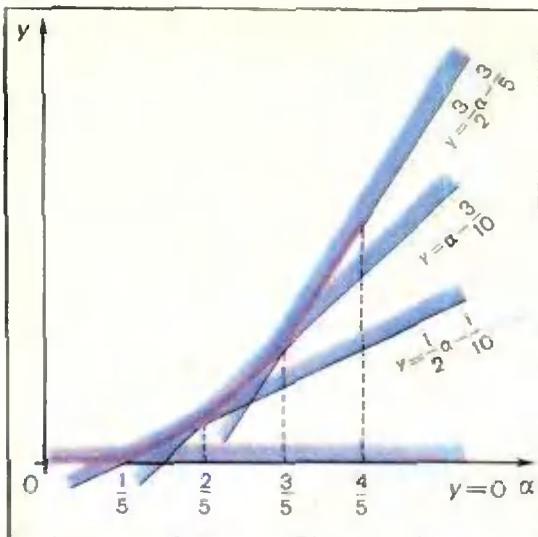


Рис. 8.

Теперь мы имеем четыре неравенства (3'), (5), (11) и (12), связывающие одни и те же величины M , $\sum M_i$, $\sum M_{ij}$, $\sum M_{ijk}$, $\sum M_{ijkl}$ и M_{12345} .

Сложив неравенства (3'); (5), умноженное на $1/2$; (11), умноженное на $1/6$, мы приходим к неравенству

$$M - \frac{1}{2} \sum M_i + \frac{1}{6} \sum M_{ij} - \frac{1}{6} M_{12345} \geq 0, \quad (13)$$

из которого выпали как член $\sum M_{ijk}$, так и член $\sum M_{ijkl}$. Из (13), очевидно, следует, что тем более

$$M - \frac{1}{2} \sum M_i + \frac{1}{6} \sum M_{ij} \geq 0$$

и, значит,

$$\sum M_{ij} \geq 3 \sum M_i - 6M \geq 3(5\alpha) - 6,$$

откуда

$$f_5(\alpha) \geq \frac{1}{10} (15\alpha - 6) = \frac{3}{2} \alpha - \frac{3}{5}. \quad (14)$$

Таким образом, график функции $y = f_5(\alpha)$ лежит не ниже прямой $y = \frac{3}{2} \alpha - \frac{3}{5}$ (рис. 8).

Аналогично, складывая неравенства (3'); (5), умноженное на $3/6$;

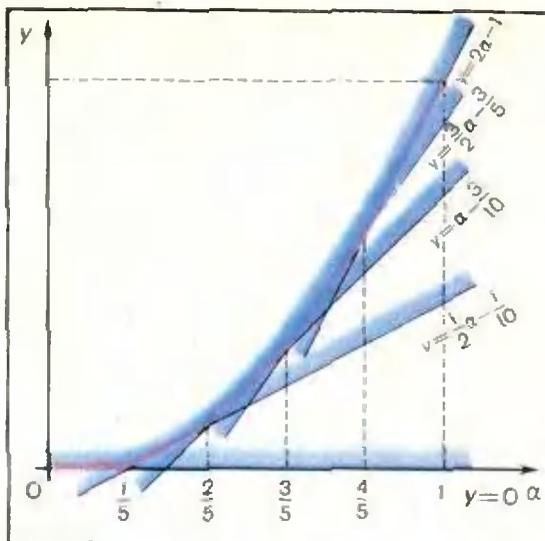


Рис. 9.

(11), умноженное на $3/10$; (12), умноженное на $1/10$, мы получим неравенство

$$M - \frac{2}{5} \sum M_i + \frac{1}{10} \sum M_{ij} \geq 0, \quad (15)$$

из которого выпали все члены, кроме M , $\sum M_i$ и $\sum M_{ij}$. Из (15), очевидно, следует, что

$$\sum M_{ij} \geq 4 \sum M_i - 10M \geq 4(5\alpha) - 10 = 20\alpha - 10$$

и, значит,

$$f_5(\alpha) \geq \frac{1}{10} (20\alpha - 10) = 2\alpha - 1.$$

Таким образом, график функции $y = f_5(\alpha)$ лежит не ниже прямой $y = 2\alpha - 1$, то есть не ниже изображенной на рисунке 9 ломаной; нетрудно убедиться, что он совпадает с этой ломаной.

Упражнения

6. Докажите, что

а) $f_5(\alpha) = \alpha - \frac{3}{10}$ при $2/5 \leq \alpha \leq 3/5$;

б) $f_5(\alpha) = \frac{3}{2} \alpha - \frac{3}{5}$ при $3/5 \leq \alpha \leq 4/5$;

в) $f_5(\alpha) = 2\alpha - 1$ при $4/5 \leq \alpha \leq 1$.

7. Опишите функцию

а) $f_4(\alpha)$; б) $f_6(\alpha)$.

Случай n заплат

Этот случай рассматривается аналогично случаю $n = 5$; изложим коротко соответствующие рассуждения.

Прежде всего ясно, что для того, чтобы n заплат M_1, M_2, \dots, M_n , площадь каждой из которых не меньше α , не перекрывались, надо, чтобы их общая площадь $\sum M_i \geq n\alpha$ не превосходила площади $M = 1$ кафтана; поэтому

$$f_n(\alpha) = 0 \text{ при } 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{n}.$$

Далее рассмотрим основное неравенство (4) (формулу включений и исключений, с. 15). Из этого неравенства следует, что

$$M - \sum M_i + \sum M_{ij} \geq 0 \quad (16)$$

(почему?); и, значит,

$$\sum M_{ij} \geq \sum M_i - M \geq n\alpha - 1.$$

А так как общее число «попарных пересечений заплат» M_{ij} в общем случае равно числу $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ сочетаний из n по 2, то

$$f_n(\alpha) \geq \frac{1}{n(n-1)/2} (n\alpha - 1) = \frac{2}{n-1} \alpha - \frac{2}{n(n-1)}. \quad (17)$$

При этом неравенство (17) может обращаться в равенство, только если обращается в равенство (16), то есть если в формуле включений и исключений (4) обращаются в 0 все следующие за $\sum M_{ij}$ члены (и если, кроме того, все заплаты M_i имеют площадь α и полностью покрывают кафтан M). Но в этом случае $n - 1$ «попарных пересечений заплат» $M_{12}, M_{13}, \dots, M_{1n}$ покрывают заплату M_1 без перекрытий (ибо все $M_{ijk} = 0$). А так как в этом случае все

$$M_{1i} = \frac{2}{n-1} \alpha - \frac{2}{n(n-1)},$$

то

$$(n-1) \left[\frac{2}{n-1} \alpha - \frac{2}{n(n-1)} \right] \leq \alpha,$$

и, значит, $\alpha \leq \frac{1}{n}$ (и, разумеется, $\alpha \geq \frac{1}{n}$).

Далее нам придется применять формулу включений и исключений уже к заплатам M_i (вместо всего кафтана M), к их пересечениям M_{ij}, M_{ijk} и т. д. Применим, например, эту формулу к заплате M_1 , покрытой «заплатами второго порядка» $M_{12}, M_{13}, \dots, M_{1n}$:

$$M_1 - \sum M_{1i_1} + \sum M_{1i_1 i_2} - \sum M_{1i_1 i_2 i_3} + \dots + (-1)^{n-2} \sum M_{1i_1 i_2 \dots i_{n-2}} + (-1)^{n-1} M_{123 \dots n} \geq 0$$

(где $i_1, i_2, \dots, i_{n-2} = 2, 3, \dots, n$).

Складывая n таких неравенств, отвечающих заплатам M_1, M_2, \dots, M_n , получаем неравенство

$$\sum M_i - 2 \sum M_{i,i_1} + 3 \sum M_{i,i_1,i_2} - \dots + (-1)^{n-2} (n-1) \sum M_{i,i_1, \dots, i_{n-1}} + (-1)^{n-1} \cdot n M_{123 \dots n} \geq 0 \quad (18)$$

(ср. с неравенством (5) на с. 15). Из неравенства (4) и (18) нетрудно исключить член $\sum M_{i,i_1,i_2}$ — для этого достаточно сложить (4) с умноженным на $1/3$ неравенством (18):

$$M - \frac{2}{3} \sum M_{i,i_1} + \frac{1}{3} \sum M_{i,i_1,i_2} - \frac{1}{3} \sum M_{i,i_1,i_2,i_3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{n-3}{3} \times M_{123 \dots n} \geq 0. \quad (19)$$

Из (19) следует, что

$$M - \frac{2}{3} \sum M_{i,i_1} + \frac{1}{3} \sum M_{i,i_1,i_2} \geq 0 \quad (19a)$$

и, значит,

$$\sum M_{i,i_1} \geq 2 \sum M_{i,i_1,i_2} - 3M \geq 2(n\alpha) - 3 = 2n\alpha - 3.$$

Таким образом,

$$f_n(\alpha) \geq \frac{1}{n(n-1)} (2n\alpha - 3) =$$

$$= \frac{4}{n-1} \alpha - \frac{6}{n(n-1)}, \quad (20)$$

причем в равенство (20) обращается лишь при $\frac{2}{n} \leq \alpha \leq \frac{3}{n}$ (см. упр. 8).

Продолжая поступать так же, как выше, окончательно найдем

$$f_n(\alpha) = 2 \frac{r-1}{n-1} \alpha - \frac{r(r-1)}{n(n-1)} \quad (21)$$

при $\frac{r-1}{n} \leq \alpha \leq \frac{r}{n}$, $r = 1, 2, \dots, n$.

У п р а ж н е н и я

8. Докажите, что (20) обращается в равенство лишь при $\frac{2}{n} \leq \alpha \leq \frac{3}{n}$.

9*. Докажите, что $f_n(\alpha) = \frac{6}{n-1} \alpha - \frac{12}{n(n-1)}$ при $\frac{3}{n} \leq \alpha \leq \frac{4}{n}$.

10*. Докажите равенство (21).

Дополнительные замечания

1. Конечно, даже «общие» формулы (21) далеко не исчерпывают тематику этой заметки, ее можно продолжать довольно далеко.

2°. Метод «выравнивания заплат». Задача M185 получила в письмах читателей «Кванта» довольно много решений; некоторые читатели формулировали и общую задачу о n заплате площади, не меньшей α на кафтане площади 1. Однако лишь В. Хонину из г. Первоуральска в его очень интересном письме удалось решить до конца эту «общую» задачу и найти формулы, по существу, равносильные формулам (21). При этом путь, которым шел В. Хонин, в корне отличен от развитого в настоящей заметке. Хонин исходит, по существу, из рисунка 1, изображающего «оптимальное» покрытие кафтана пятью заплатами: из этого рисунка видно, что в самой выгодной ситуации все части кафтана покрыты либо двумя, либо тремя заплатами, причем все пересечения M_{ij} заплат (где i и $j = 1, 2, \dots, 5$) и все пересечения M_{ijk} равны между собой.

Исходя из этого, Хонин разрабатывает своеобразную процедуру «перекройки» заплат с целью выравнивания их площадей и площадей их пересечений, при которой искомая величина $\max M_{ij}$ все время не увеличивается; таким путем он доказывает, что и в общем случае «оптимальное» их расположение (к которому мы приходим в процессе постепенного «выравнивания» заплат) будет близко к рисунку 1, что позволяет ему найти формулы (21). При этом предложенный В. Хониным метод решения задачи является весьма перспективным и в случае более сложных задач.

Во время подготовки статьи к публикации в редакцию пришла заметка ученика 9 класса из г. Львова А. Макаревича, в которой развит подход к решению задачи M185 и ее обобщений, аналогичный предложенному В. Хониным. К сожалению, из-за недостатка места мы не можем опубликовать эту интересную заметку.

3°. О методах «линейного программирования». Рисунок 9 показывает, что решение «общей» задачи сводится к решению системы линейных неравенств, связывающих величину y ($= f_n(\alpha)$) с числом α . Вопросы, сводящиеся к решению систем линейных неравенств, играют большую роль в современных приложениях математических методов к экономическим задачам; для их решения выработаны специальные методы — так называемые «методы линейного программирования»^{*)}. В 1968 году методы линейного программирования применил для решения «общей» задачи студент Московского университета Сергей Пирогов, при этом ему удалось не только доказать формулу (21), но и решить более общие задачи.

^{*)} См., например, популярную книгу: С. Г а с с, Путешествие в страну линейного программирования, М., «Мир», 1973; см. также гл. 13 превосходной книги: А. К о ф м а н, Р. Ф о р, Займемся исследованием операций, М., «Мир», 1966.

И. И. ВОРОБЬЕВ

НЕОБЫЧНОЕ
ПУТЕШЕСТВИЕ

Почему-то все думают, что гравитацию ослабить нельзя. Оказывается, сделать это очень просто. Представьте себе, что два одинаковых массивных шара насажены на легкий длинный жесткий стержень. Когда шары сведены вместе и находятся на расстоянии R от центра Земли, они притягиваются к Земле с силой F . Раздвинем шары, сохраняя расстояние от них до центра Земли прежним; на каждый шар теперь действует сила, равная $\frac{F}{2}$ (рис. 1). Но направлены эти силы к центру Земли, то есть под некоторым углом α друг к другу! А значит, результирующая сила $F_p = F \cos \frac{\alpha}{2}$. Гантель притягивается слабее, чем материальная точка той же массы.

Конечно, никакого ослабления гравитационных сил не происходит. Дело же в том, что равнодействующая гравитационных сил, приложенных к составляющим тело частицам, не равна арифметической сумме этих сил. Тело массы m в поле тяготения можно считать материальной точкой той же массы только в том случае, если оно однородно и имеет форму шара. Тогда сила, действующая на материальную точку, помещенную в центре такого шара, равна силе, действующей на тело. Тем не менее, изучая движение тела в гравитационном поле, обычно рассматривают силы, действующие на материальную точку. Это можно делать,

когда размеры тела малы по сравнению с расстоянием до Земли. В нашем примере это условие не выполняется, но для заметного ослабления притяжения длина стержня должна быть достаточно велика. При этом силы притяжения шаров Землей приводят к внутренним упругим напряжениям в стержне.

Нельзя ли воспользоваться таким «ослаблением гравитации» для каких-нибудь практических целей, скажем, для космических путешествий? Да, этот эффект можно приспособить для ухода с орбиты. Это показали советские ученые В. В. Белецкий и М. Е. Гиверц.

Конструкция «гравилета» — корабля, работающего на принципе «ослабления гравитации», отличается от обычной. Главное отличие в том, что он состоит из двух массивных частей, расстояние между которыми можно менять. Корабль похож на очень длинную раздвижную гантель.

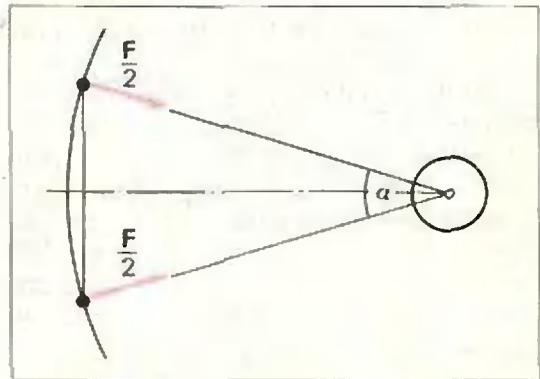


Рис. 1.

Пусть при движении по орбите вокруг Земли части корабля раздвигаются и сдвигаются так, что угол α удерживается постоянным (рис. 2). (Чтобы удерживать заданный угол α , надо специально управлять ориентацией корабля, а не только сдвижением и раздвижением его частей.) Тогда сила, действующая на гантель по всей орбите, отличается от силы, действующей на материальную точку той же массы, постоянным множителем $\cos \frac{\alpha}{2}$. Иными словами, для гантели сила притяжения к Земле равна не $\gamma \frac{mM}{R^2}$, а $\gamma' \frac{mM}{R^2}$, где

$\gamma' = \gamma \cos \frac{\alpha}{2}$. Здесь γ — гравитационная постоянная, m — масса гантели, M — масса Земли, R — расстояние до центра Земли.

Размеры корабля все-таки невелики по сравнению с расстоянием R , поэтому угол α довольно мал, то есть величина $\cos \frac{\alpha}{2}$ близка к единице. Все физические законы, справедливые для материальной точки в поле тяжести Земли, справедливы и для нашего корабля, нужно только гравитационную постоянную γ всюду заменять на γ' . Так, потенциальная энергия гантели в поле тяжести Земли будет равна $\gamma' \frac{mM}{R}$.

Выполняются в нашем случае и все законы Кеплера. В частности,

орбита корабля должна быть эллипсом, в одном из фокусов которого находится Земля.

Пусть наш корабль движется по орбите с прижатыми друг к другу шарами. Что произойдет, если быстро раздвинуть шары на угол α в перигее *)? Гравитационная постоянная изменится в $\cos \frac{\alpha}{2}$ раз, уменьшится и потенциальная энергия корабля. Значит, его кинетическая энергия увеличится. Корабль пойдет по новой орбите, тоже по эллипсу, но немного большему. Так как γ' все же крайне мало отличается от γ , то в апогее он удалится от Земли тоже крайне незначительно, а в перигее вернется в ту же точку.

Чтобы выбрать правильную тактику ухода с орбиты, разберемся, как меняется скорость при движении по орбите. На первой половине эллипса, от перигея до апогея (рис. 3), сила притяжения направлена под тупым углом к скорости, поэтому скорость уменьшается по величине. От апогея до перигея скорость все время увеличивается, потому что сила притяжения направлена под острым углом к скорости. На одной половине эллипса сила тяготения тормозит корабль, на другой — его разгоняет, причем работы по разгону и торможению равны по величине.

*) Перигей — точка орбиты, ближайшая к Земле. Апогей — самая удаленная от Земли точка орбиты.

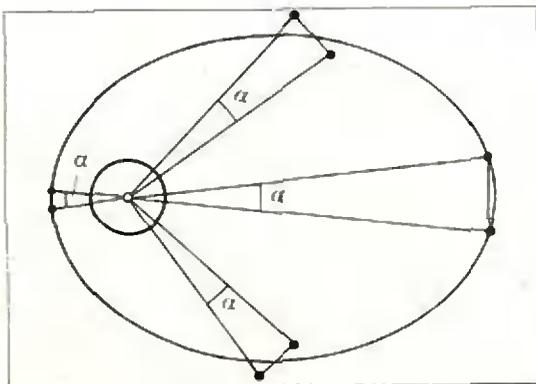


Рис. 2.

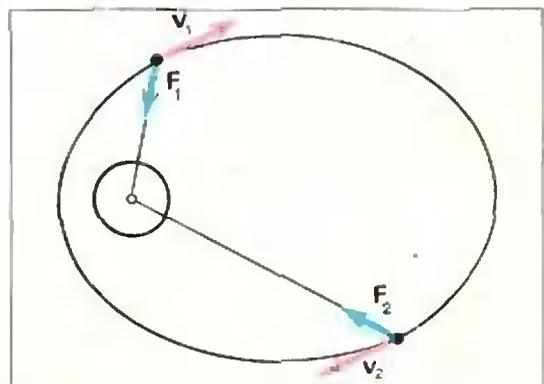


Рис. 3.

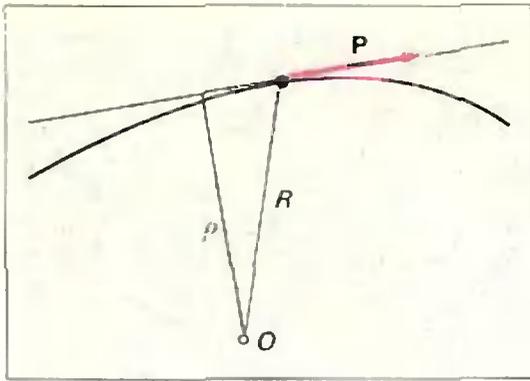


Рис. 4.

Теперь становится ясно: нужно ослабить силу притяжения в то время, когда она тормозит корабль, и вернуть ей прежнее значение, когда она корабль разгоняет! Для этого в перигее нужно быстро развести шары на угол α и удерживать этот угол до апогея, а в апогее свести шары вместе, в перигее снова их раздвинуть и так далее. Работы по разгону и торможению перестанут компенсироваться, раз за разом энергия гантели будет увеличиваться, и корабль сможет уйти от Земли.

Прежде чем приступить к детальному расчету, опишем траекторию нашего «пульсирующего» корабля. Она состоит из половинок эллипсов, у которых расстояния в апогее увеличиваются, а в перигее уменьшаются. (Как именно, будет ясно из дальнейшего.) По мере уменьшения перигейного расстояния скорость в перигее растет, ибо момент импульса гантели все время остается постоянным. При увеличении скорости сил притяжения может уже не хватить, чтобы завернуть траекторию, и корабль уйдет от Земли по параболической или гиперболической траектории.

Если частица с массой m движется в поле тяжести Земли (точка O на рисунке 4) со скоростью v , то ее импульс p равен mv и направлен по касательной к траектории. Опустим из центра Земли перпендикуляр на прямую, определяемую импульсом.

Длину этого перпендикуляра p называют прицельным параметром. Моментом импульса L называется произведение $mv\rho$. Так как момент силы тяжести относительно центра Земли равен нулю, момент импульса частицы не изменяется при движении. Величина $v = \omega r$ называется моментом скорости. В двух точках орбиты — в апогее и в перигее — прицельный параметр совпадает с расстоянием до центра Земли *).

Начнем последовательно вычислять скорости и расстояния в перигеях и апогеях. Момент импульса остается неизменным, а изменение кинетической энергии на каждой половине эллипса равно работе в поле тяжести Земли. Только при движении от перигея к апогею нужно в формуле для работы использовать γ' , а при движении от апогея к перигею — γ . Обозначим последовательно перигей и апогей буквами Π_0, A_0, Π_1, A_1 и т. п. Скорости и расстояния до центра Земли в перигее обозначим $v_0, r_0; v_1, r_1$, а в апогее — $V_0, R_0; V_1, R_1$ и т. д.

Запишем закон сохранения момента импульса:

$$L = mv_0 r_0 = mV_0 R_0 = mv_1 r_1 = mV_1 R_1.$$

Введем момент скорости $v = \frac{L}{m}$ и выразим расстояния через скорости:

$$\frac{1}{r_0} = \frac{v_0}{v}, \quad \frac{1}{R_0} = \frac{V_0}{v}, \quad \frac{1}{r_1} = \frac{v_1}{v} \text{ и т. д.}$$

Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \frac{\gamma' m M}{r_0} - \frac{\gamma' m M}{R_0}.$$

Сокращая на массу m и выражая расстояния через скорости, получим

$$v_0^2 - V_0^2 = \frac{2\gamma' M}{v} (v_0 - V_0).$$

* Закон сохранения момента импульса эквивалентен закону площадей Кеплера. (Сморodinский Я. А. Движение планет. «Квант», 1971, № 1)

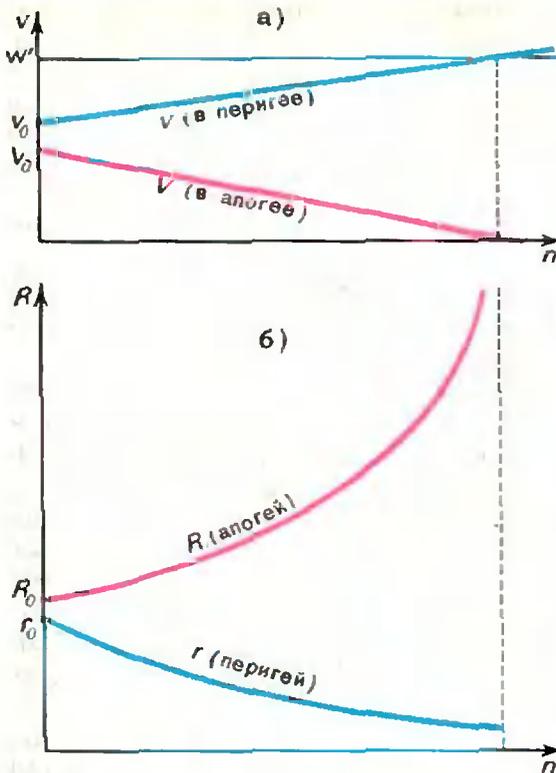


Рис. 5.

Отсюда

$$v_0 + V_0 = \frac{2\gamma' M}{v}.$$

Обозначим $2 \frac{\gamma' M}{v}$ через ω' , тогда

$$v_0 + V_0 = \omega'. \quad (1)$$

Совершенно аналогично при переходе от апогея A_0 к перигею Π_1 получим

$$V_0 + v_1 = \omega, \quad (2)$$

где $\omega = \frac{2\gamma M}{v}$. Из равенств (1) и (2) следует, что

$$v_1 - v_0 = \omega - \omega'.$$

Это означает, что за один оборот вокруг Земли скорость возрастает на постоянную величину $\omega - \omega'$.

Теперь нетрудно построить графики зависимости скоростей и расстояний в перигее и апогее от числа оборотов n (рис. 5, а, б).

После n оборотов

$$\begin{aligned} v &= v_0 + n(\omega - \omega'), \\ V &= V_0 - n(\omega - \omega'), \end{aligned}$$

$$r = \frac{v}{v_0 + n(\omega - \omega')},$$

$$R = \frac{v}{V_0 - n(\omega - \omega')}.$$

Из анализа этих зависимостей видно, что в тот момент, когда скорость в перигее превзойдет ω' , наш корабль уже не вернется к Земле.

Что это за скорость $v = \omega'$? В перигее $\omega' = 2\gamma' \frac{M}{v}$. Подставим $v =$

$$= rv. \text{ Получим } v = 2\gamma' \frac{M}{rv}, \text{ отку-}$$

$$\text{да } v = \sqrt{\frac{2\gamma' M}{r}}. \text{ Значит, } v = \omega' -$$

это вторая космическая скорость на расстоянии r от центра Земли. Теперь стал ясен смысл ω и ω' — это вторые космические скорости для γ и γ' при заданном моменте импульса $L = mv$.

А теперь давайте обсудим, насколько реален такой космический корабль. Если он имеет длину l на орбите радиуса R , то $\alpha \approx \frac{l}{R}$.

Тогда, так как для малого α $\cos \frac{\alpha}{2} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2$, получим относительное

$$\text{отличие сил притяжения } \frac{\gamma - \gamma'}{\gamma} \approx \frac{l^2}{8R^2}.$$

Для корабля длиной около 20 м на орбите радиуса примерно 10 000 км относительное ослабление гравитации всего $0,5 \cdot 10^{-12}$. Но для корабля длиной около 200 км эффект уже значителен — $0,5 \cdot 10^{-8}$. Такому кораблю для того, чтобы уйти от Земли, нужно немного больше года.

Интересно, что чем меньше радиус начальной орбиты, тем быстрее корабль покинет Землю. Ведь за то же время он успеет совершить большее число оборотов, причем начиная с большей скорости. Чем сильнее корабль притягивают, тем быстрее он уходит. По расчетам В. В. Белецкого, с расстояния двадцать тысяч километров от центра сверхплотной звезды Сириус В космический корабль длиной 200 км смог бы уйти всего за полтора часа.



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
КРУЖОК

Игра в 15

О. Т. Долгов

- Так это же известная задача!
- А как она решается?
- Да нет! Условие известное,
а решения я не знаю...

Милл. Диалог

1. Слово Сэму Лойду

В «Кванте» уже рассказывалось о книге Мартина Гарднера «Математические досуги» («Квант», 1973, № 6). 33-я глава «Досугов» называется «Игра в 15 и другие головоломки».

В плоской квадратной коробочке лежат 15 шашек с номерами. «Нормальное» расположение шашек показано на рисунке 1. На рисунке 2 показано другое расположение: шашки с номерами 14 и 15 переставлены. Нужно, передвигая по очереди по одной шашке, перевести это расположение в «нормальное». Шашки передвигают на свободное соседнее место, вынимать их из коробочки не разрешается.

Игру в 15 изобрел в семидесятых годах прошлого века Сэм Лойд. По-важное увлечение ею быстро охва-

тило Англию, а потом перекинулось и через Ла-Манш. Свой рассказ об этом Гарднер иллюстрирует цитатой из самого Лойда:

«Люди буквально помешались на этой головоломке. Из уст в уста передавались рассказы о лавочнике, забывшем открыть свою лавку, о священнике, простоявшем под уличным фонарем долгую зимнюю ночь в надежде припомнить, как ему удалось решить задачу...»

Один известный редактор из Балтимора рассказывает, что как-то раз он ушел в полдень на ленч и лишь поздней ночью был обнаружен вконец отчаявшимися сотрудниками газеты сидящим за столом и гоняющим взад — вперед по тарелке маленькие кусочки пирога!»

В 1879 году была опубликована математическая теория игры в 15, после чего игра быстро вышла из моды.

Математическую теорию, подорвавшую интерес к головоломке Лойда, Гарднер в своей книге не изла-

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Рис. 1.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Рис. 2.

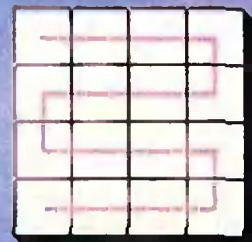


Рис. 3.

гает. Между тем теория эта проста и поучительна.

2. Четные и нечетные перестановки

Расположим числа 1, . . . , 15 в произвольном порядке. Например, так:

1, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 5, 9, 10, 11,
12, 15, 14, 13. (1)

или так:

1, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 5, 9, 10, 11,
12, 14, 15, 13. (2)

Каждое из подобных расположений называется *перестановкой*.

Будем говорить, что в данной перестановке числа i и j образуют *беспорядок*, если $i > j$, но i стоит в этой перестановке левее j .

Пример. Числа 8 и 6 в перестановке (1).

Назовем перестановку *четной* (нечетной), если в ней четное (нечетное) число беспорядков.

Примеры. В перестановке (1) — девять, а в перестановке (2) — восемь беспорядков, так что (1) — нечетная, а (2) — четная перестановка.

3. Перестановки и игра в 15

Начертим на коробочке для игры в 15 такую ломаную, как на рисунке 3. Пройдем по этой ломаной из левого верхнего угла коробочки и выпишем номера шашек, которые мы будем последовательно проходить.

Примеры. Если шашки расположены так, как на рисунке 1,

то мы получим перестановку (1); для расположения на рисунке 2 получится перестановка (2).

Проходя через пустую клетку, мы не пишем никакого номера. Поэтому одна и та же перестановка соответствует шестнадцати различным расположениям шашек в коробочке. Например, перестановка

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,
12, 13, 14, 15

соответствует любому из расположений на рисунке 4.

При игре в 15 шашки можно передвигать по горизонталям и вертикалям, занимая соседнюю пустую клетку. Если шашка передвигается по горизонтали, то и старому, и новому расположению соответствует, очевидно, одна и та же перестановка (рис. 4, а, б). Если шашку передвигают по вертикали, то может случиться, что перестановка не меняется (рис. 4, б, в), но обычно старому и новому расположению соответствуют разные перестановки (рис. 5).

Однако эти перестановки всегда имеют, оказывается, *одинаковую четность* (либо обе четные, либо обе нечетные).

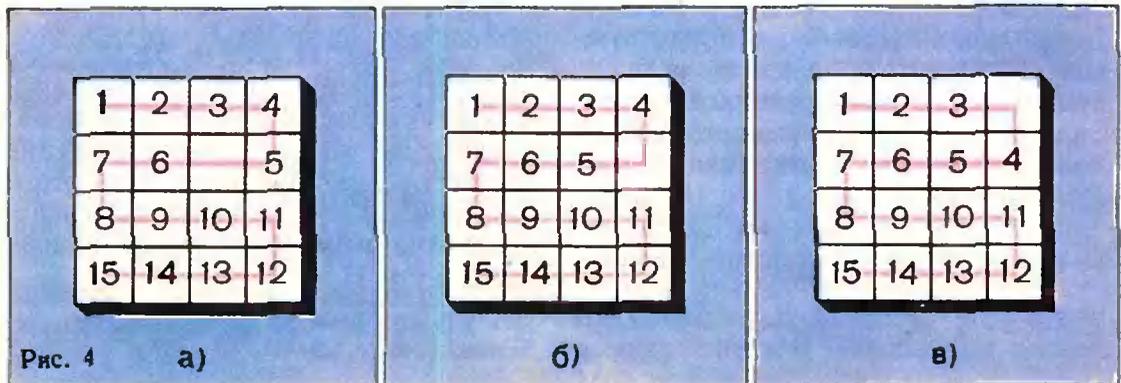
Проверим это сначала в случае, изображенном на рисунке 5. Расположению на рисунке 5, а соответствует перестановка

. . . . , 6, 5, 11, 9, 10, , (а)

расположению на рисунке 5, б — перестановка

. . . . , 10, 6, 5, 11, 9, (б)

(многоточия заменяют совпадающие в



1	4	14	8
5	6		15
11	9	10	7
3	2	13	12

Рис. 5. а)

1	4	14	8
5	6	10	15
11	9		7
3	2	13	12

б)

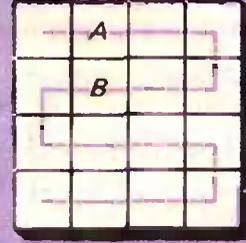


Рис. 6.

(а) и (б) числа). При переходе от (а) к (б) один беспорядок (11, 10) исчезает и три новых (10, 6), (10, 5) и (10, 9) возникают. Общее число беспорядков возрастает на 2, так что (а) и (б) имеют действительно одинаковую четность.

В общем случае, когда шашку с номером n передвигают с клетки A на пустую клетку B (рис. 6), доказательство проводится совершенно аналогично. На участке ломаной между A и B располагается всегда четное число шашек. Пусть у m из них номера меньше n , у k — больше n ; тогда m беспорядков при передвижении шашки исчезает и k беспорядков возникает. Общее число беспорядков изменяется на $k - m$. Это — четное число, так как по условию число $k + m$ четно. Таким образом, перестановки, соответствующие старому и новому расположению, обязательно имеют *одинаковую четность*.

4. Неразрешимость головоломки Лойда

Перестановки (1) и (2), соответствующие расположениям шашек на рисунках 1 и 2, имеют разную четность. Значит, эти расположения нельзя получить друг из друга: головоломка Лойда неразрешима.

5. Выйдет — не выйдет?

Ну, а если произвольно расположить шашки в коробочке? В каких случаях

головоломка выйдет (расположение удастся перевести в «нормальное»), а в каких — не выйдет?

Мы уже знаем: если перестановка, соответствующая расположению, четная, то головоломка заведомо не выйдет. А если нечетная? Тогда, оказывается, обязательно выйдет.

Доказывать это утверждение можно по-разному. Ниже мы сделаем это примерно таким же способом, как С. Бобров в своей книге «Волшебный двурог» *).

6. Как перепрыгнуть через две шашки

Начертим на коробочке замкнутый путь в виде буквы П (рис. 7). Вдоль этого пути шашки можно передвигать одну за другой, «гуськом». Таким образом, можно, например, расположение, изображенное на рисунке 8, а, постепенно перевести в «нормальное» (рис. 8, б, в, г, д). Это удастся сделать потому, что относительный порядок шашек вдоль пути П (начиная с шашки 1, по часовой стрелке) одинаков:

{1, 2, 3, 4, 8, 12, 15, 11, 7, 6, 10, 14, 13, 9, 5}.

Пусть теперь для некоторого расположения шашек этот порядок иной, и пусть мы хотим это расположение перевести в «нормальное». Для этого нам хорошо бы научиться целенаправленно изменять порядок шашек вдоль пути П.

* Бобров С. Волшебный двурог. Детгиз, 1946, с. 29—41, 89—117.

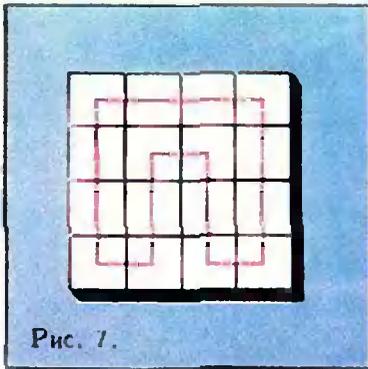


Рис. 7.

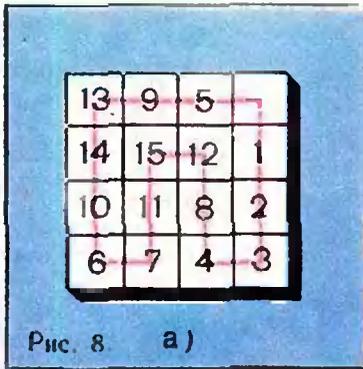
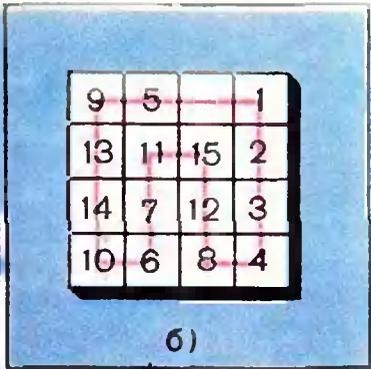
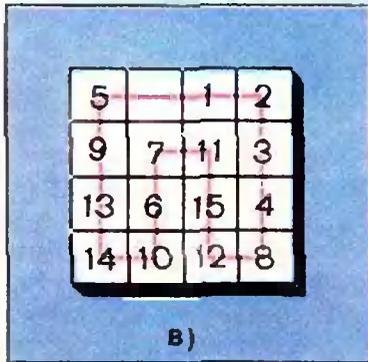


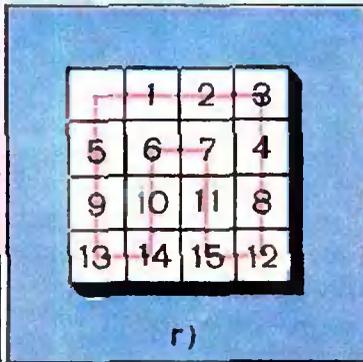
Рис. 8 а)



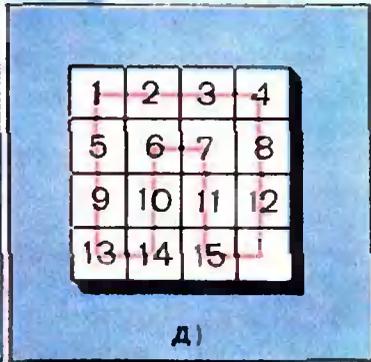
б)



в)



г)



д)

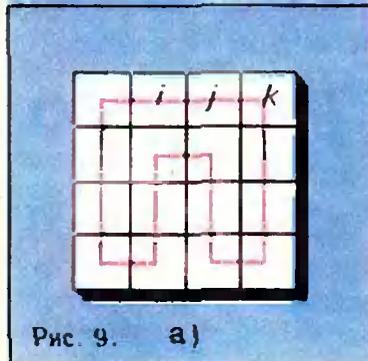
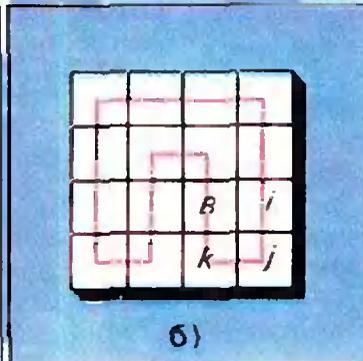
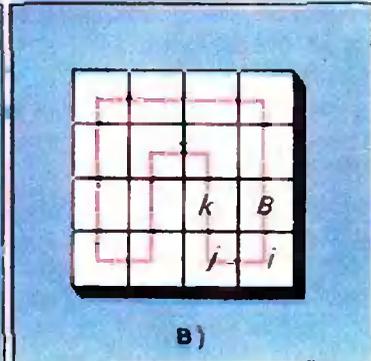


Рис. 9 а)



б)



в)

Ниже мы укажем прием, с помощью которого это можно делать.

Пусть шашки с номерами i, j и k стоят друг за другом вдоль пути Π (рис. 9, а). Передвигая все шашки «гуськом» вдоль Π , легко добиться, чтобы шашки i, j, k и пустая клетка B расположились так, как на рисунке 9, б. Передвигая теперь шашку i на пустую клетку B , мы из порядка $\{\dots, i, j, k, \dots\}$ получим порядок $\{\dots, j, k, i, \dots\}$ — шашка с номером i «перепрыгнула» по часовой стрелке через две соседние: j и k .

Так же просто заставить любую шашку «прыгнуть» через две соседние против часовой стрелки. Например, чтобы на рисунке 9, а шашка k «перепрыгнула» через i и j , нужно сначала передвинуть шашки «гуськом» вдоль пути Π в положение, изображенное на рисунке 9, в, а затем передвинуть шашку k на пустое место B .

Итак, мы указали прием, с помощью которого можно заставить любую шашку «прыгнуть» через две шашки, стоящие на пути Π рядом с ней.

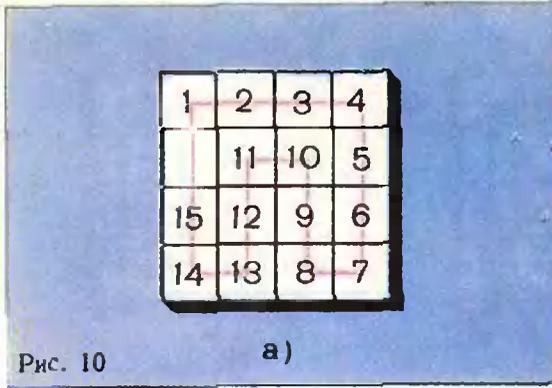
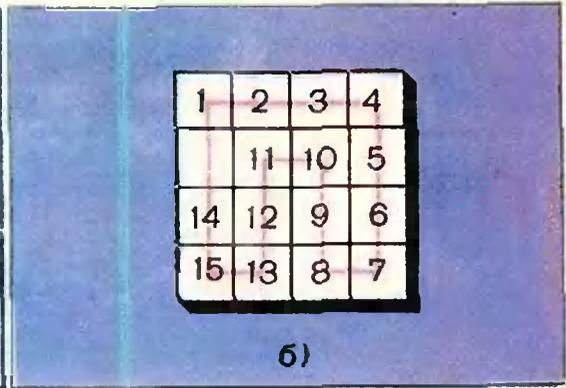


Рис. 10

а)



б)

7. Все, кроме двух, — по местам!

С помощью этого приема легко перевести любое расположение шашек в одно из двух расположений, приведенных на рисунках 10, а, б.

Прежде всего поведем вдоль пути Π шашку 2 к шашке 1. Перепрыгивая против часовой стрелки через две шашки столько раз, сколько понадобится, доведем ее либо до «своего» места (рядом с «единицей»), либо до соседнего (между ней и шашкой 1 останется некоторая шашка i), — в обоих случаях остановимся в тот момент, когда следующий прыжок был бы через шашку 1. Если между «двойкой» и «единицей» останется шашка i , заставим ее прыгнуть через две шашки (в том числе через «двойку») по часовой стрелке, — тогда «двойка» очутится рядом с «единицей» (причем с нужной стороны).

Затем таким же способом подведем «тройку» к «единице» и «двойке». Потом «четверку» — к «единице», «двойке» и «тройке». И так далее — вплоть до шашки 13.

Передвигая после этого все шашки «гуськом» вдоль Π , придем к одному из двух расположений, изображенных на рисунке 10.

8. Хорошие и плохие расположения

Все расположения шашек разбились, таким образом, на два класса. Расположения 1-го класса можно перевести в такое, как на рисунке 10, а, расположения 2-го — в такой, как на рисунке 10, б.

Подумаем, почему отсюда следует утверждение, сделанное в п. 5, и что еще отсюда следует.

Если некоторое расположение P можно перевести в расположение Q , то и обратно, Q можно перевести в P . Поэтому все расположения 1-го класса можно перевести друг в друга. Согласно п. 4 соответствующие им перестановки — одинаковой четности, причем нечетные, так как расположению на рисунке 10, а соответствует нечетная перестановка

1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 15, 12, 9,
6, 7, 8, 13, 14

(тринадцать беспорядков).

Точно так же переводятся друг в друга и все расположения 2-го класса, причем им соответствуют четные перестановки.

Тем самым, «нормальное» расположение относится к 1-му классу, а расположение на рисунке 2 — ко 2-му. Назовем расположения 1-го класса *хорошими*, а 2-го класса — *плохими*.

Подведем итог доказанному.

Хорошие расположения — это те и только те, которым соответствуют нечетные перестановки, все их можно перевести в расположение, изображенное на рисунке 1.

Все остальные расположения плохие, им соответствуют четные перестановки, их нельзя перевести в расположение, изображенное на рисунке 1, и можно перевести в расположение, изображенное на рисунке 2.

З а м е ч а н и е. Соображения, приведенные в п. 6 и в п. 7, фактически позволяют

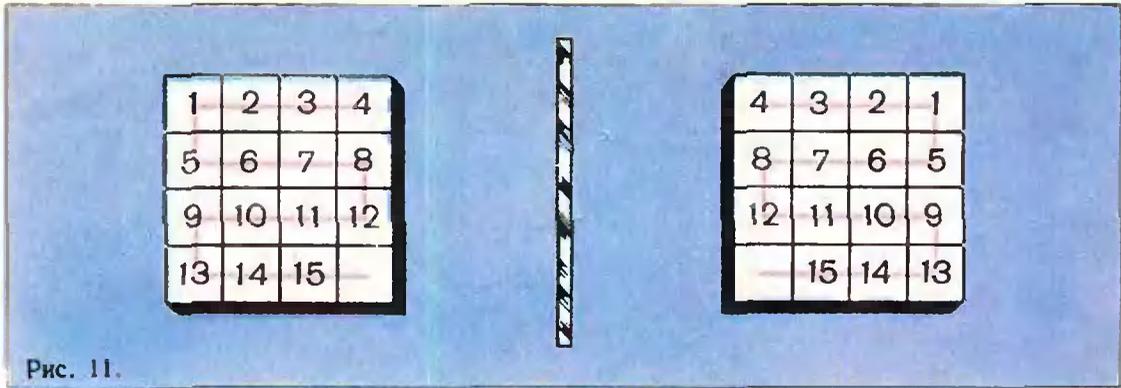


Рис. 11.

перевести любое хорошее расположение в «нормальное», однако вовсе не указывают, как добиться цели скорейшим путем. Последний вопрос мы оставляем в стороне и заниматься им не будем.

Вместо этого подумаем, каких расположений больше: хороших или плохих?

9. Перед зеркалом

Поставим коробочку с «нормальным» расположением шашек перед зеркалом (рис. 11). Нарисуем на коробочке такую ломаную, чтобы ее зеркальное отражение выглядело так же, как на рисунке 3. Расположению R , которое мы увидим в зеркале, соответствует четная перестановка

4, 3, 2, 1, 5, 6, 7, 8, 12, 11, 10,
9, 13, 14, 15

(двенадцать беспорядков). Значит, расположение R плохое.

Пусть X — любое хорошее расположение. Докажем, что расположение Y , являющееся его зеркальным отражением, плохое. Последовательно перемещая шашки, переведем расположение X в «нормальное» *перед зеркалом*. Тогда в зеркале расположение Y перейдет в R . Расположение R плохое, значит, и Y плохое.

Так как, кроме того, каждое хорошее расположение отражается в зеркале по-своему, то тем самым доказано, что хороших расположений столько же, сколько плохих.

Одновременно доказано, что четных перестановок столько же, сколько нечетных.

Упражнения

1. В учебниках по высшей алгебре ра-

венство числа четных перестановок числу нечетных устанавливается обычно при помощи понятия «транспозиция». Ниже мы рассматриваем перестановки не из 15, а из n чисел: 1, ..., n . Четность и нечетность таких перестановок определяется так же, как в п. 2.

Определение. Если в некоторой перестановке поменять местами какие-нибудь два числа (не обязательно стоящие рядом), то получится новая перестановка. Это преобразование перестановки называется *транспозицией*.

а) От любой перестановки из чисел 1, ..., n можно перейти к любой другой перестановке из тех же чисел при помощи нескольких транспозиций. Проверьте это.

б) Докажите, что всякая транспозиция меняет четность перестановки (четную перестановку переводит в нечетную, а нечетную — в четную).

в) Выведите отсюда, что при $n \geq 2$ четных перестановок из чисел 1, ..., n столько же, сколько нечетных.

2. Докажите, что число всех перестановок из чисел 1, ..., n равно произведению $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ (это произведение обозначается $n!$; читается: «эн-факториал»).

С ростом n число $n!$ возрастает необычайно быстро, например, $15! = 1\,307\,674\,368\,000$.

3. С помощью понятия «транспозиция» можно по-новому доказать неразрешимость головоломки Лойда.

Обозначим пустое место в коробочке числом 16. Тогда любому расположению шашек соответствует некоторая перестановка из чисел 1, ..., 16. Четность такой перестановки при каждом передвижении шашки на свободное место *меняется* (согласно упр. 1, б)). Перестановки, соответствующие расположениям, изображенным на рисунках 1 и 2, по-прежнему имеют разную четность (снова согласно 1, б)). Значит, если бы от одного из этих расположений можно было бы перейти к другому, то при этом пришлось бы сделать *нечетное* число передвижений шашек. Это, однако, заведомо невозможно! Почему?

4. Докажите следующее утверждение, являющееся усилением упражнения 1, а): от

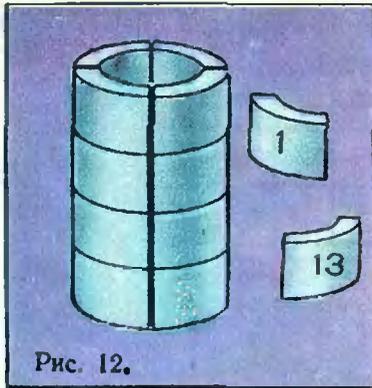


Рис. 12.

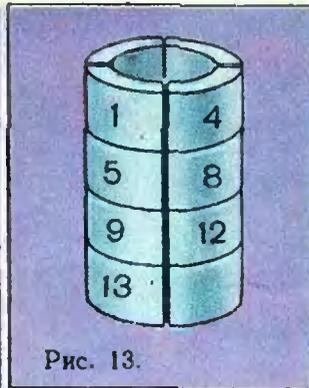


Рис. 13.

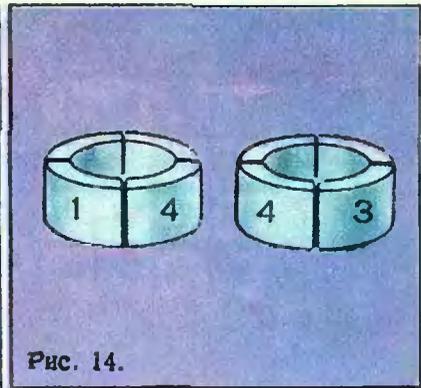


Рис. 14.

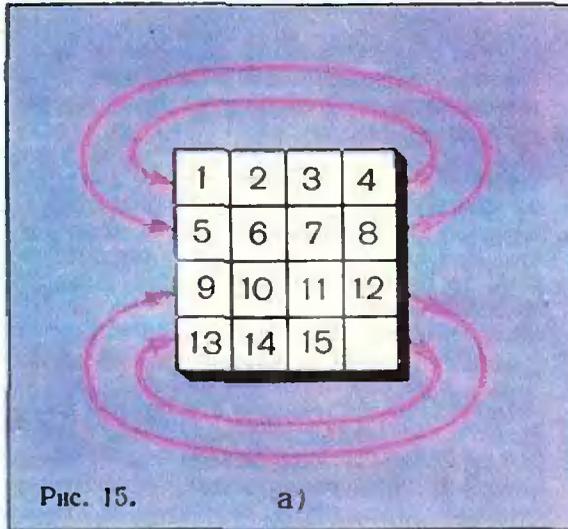
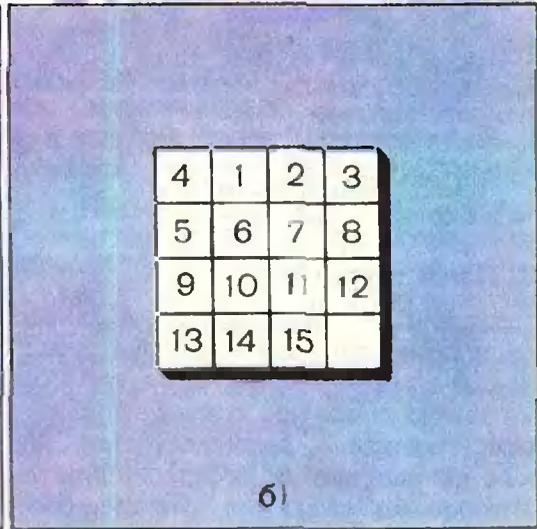


Рис. 15.

а)



б)

любой перестановки из чисел $1, \dots, n$ можно перейти к любой другой перестановке из тех же чисел, меняя местами *только соседние числа*.

5. Двухэтажная игра в 31. В коробочку с размерами $2 \times 4 \times 4$ положим 31 кубик «в 2 этажа»: 16 кубиков внизу, 15 — наверху. Одно место в коробочке оставим пустым.

На кубиках напишем номера: $1, \dots, 31$, причем на каждом кубике напишем его номер дважды: на верхней и нижней грани.

Дно и крышку в коробочке сделаем прозрачными и напротив каждого кубика сделаем отверстия (такие, чтобы кубики через них не пролезали, но их легко было передвигать, не вынимая из коробочки). Теперь коробочку можно как угодно переворачивать: у нее больше нет «постоянного верха» и «постоянного низа». Кубики можно перемещать по каждому этажу и передвигать с этажа на этаж.

Получилась «двухэтажная игра в 31». Разработайте теорию этой игры.

6. Игра в 15 на цилиндре. Полый цилиндр (рис. 12) разрежем на 16 оди-

наковых изогнутых шашек, проведя 4 вертикальных и 3 горизонтальных разреза. Одну шашку выбросим. Остальные перенумеруем числами $1, \dots, 15$ и поместим в специальную коробочку в форме полости между двумя цилиндрами. Во внешнем прозрачном цилиндре сделаем 16 отверстий — «игра в 15 на цилиндре» готова (рис. 13).

Как и в обычной игре в 15, шашки разрешается передвигать по одной на свободное соседнее место; кроме того, разрешается одновременно поворачивать 4 шашки (рис. 14), как обойму шарикоподшипника.

Можно ли любое расположение шашек перевести в любое другое?

З а м е ч а н и е. Не обязательно делать коробочку и шашки цилиндрическими. Можно использовать обычную игру в 15, разрешив дополнительно «циклические сдвиги строк» (рис. 15): например, «циклический сдвиг 1-й строки» переводит расположение, изображенное на рисунке 15, а, в расположение, изображенное на рисунке 15, б.

Последнее замечание поможет вам справиться с упражнением 6 и облегчит нам формулировку следующей задачи.

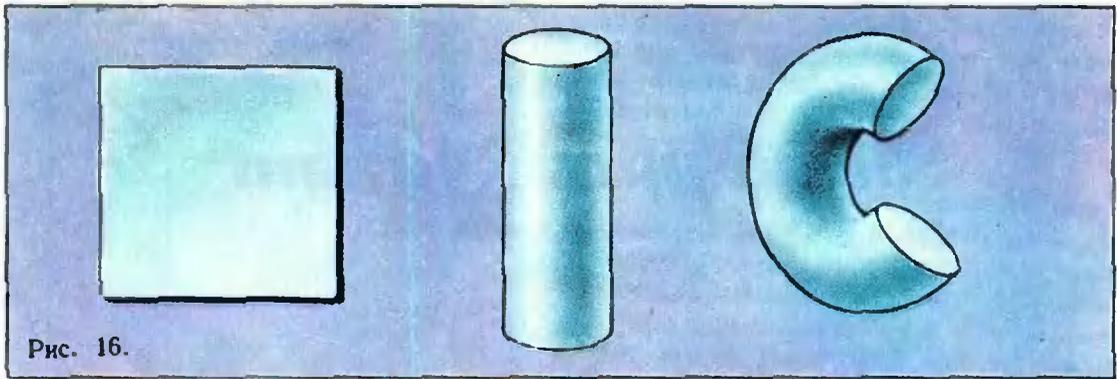


Рис. 16.

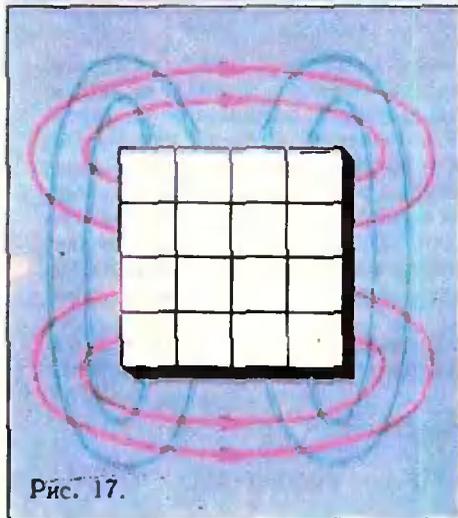


Рис. 17.

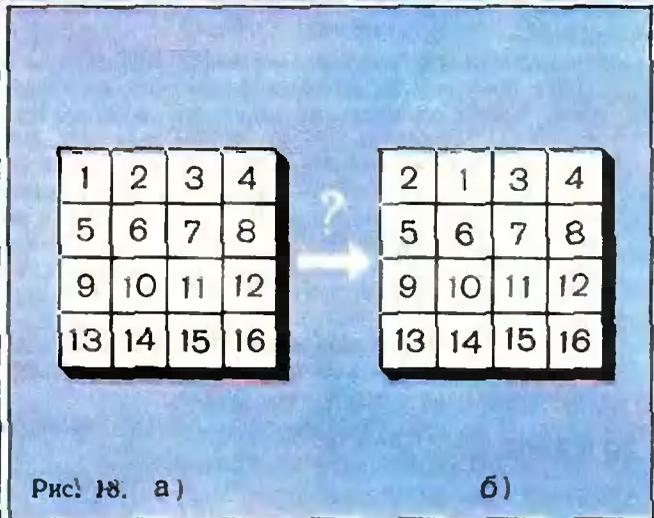


Рис. 18. а)

б)

7. Игра в 16 на торе. Чтобы сделать из прямоугольника цилиндр, нужно склеить противоположные вертикальные края. Если после этого склеить и противоположные горизонтальные края (рис. 16), получится *тор* (поверхность бублика).

Чтобы изготовить «игру в 16 на торе», не обязательно вырезать шашки из бублика. Достаточно в обычной игре в 15 заполнить пустую клетку шашкой с номером 16 и разрешить «циклические сдвиги и строк и столбцов» (рис. 17).

а) Можно ли такими сдвигами перевести расположение, изображенное на рисунке 18, а, в расположение, изображенное на рисунке 18, б?

б) Можно ли любое расположение перевести в любое другое?

в) Решите общую задачу об игре в n^2 на торе.

* * *

Эта статья была уже подготовлена к публикации, когда редакция «Кванта» получила письмо об игре в 15 от школьника — десяти-

тиклассника А. Григоряна. Имя Саши Григоряна, ученика бакинской средней школы № 211, знакомо нам давно: он регулярно присылает решения задач в «Задачник «Кванта» и является одним из победителей прошлого года конкурса «Кванта». В письме про игру в 15 Саша четко и правильно излагает самостоятельно разработанную им теорию этой игры (близкую к теории, описанной в статье). Редакция благодарит А. Григоряна за интересное письмо и желает ему новых успехов.

задачник Кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1-го апреля 1974 г. по адресу: 117071, Москва В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М246, М247» или «... Ф258». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте; «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

Задачи

М246—М250; Ф258—Ф262

М246. На плоскости даны две прямые m и n и точка O . Постройте треугольник, две высоты которого лежат на данных прямых m и n , а центр описанной окружности находится в точке O .

Ю. А. Грязнов

М247. Квадрат 6×6 нужно заполнить 12 плитками, из которых k имеют форму уголка, а остальные $12 - k$ — прямоугольника (см. рис. 1). При каких k это возможно?

Э. Туркевич

М248. В выпуклый n -угольник $A_1A_2 \dots A_n$ вписан n -уголь-

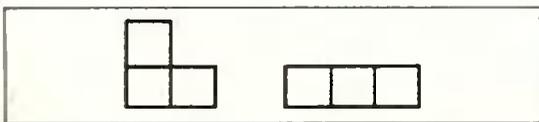


Рис. 1.

ник $B_1B_2 \dots B_n$, площадь которого равна P (вершина B_i лежит на стороне A_iA_{i+1} для $i = 1, 2, \dots, n-1$, а вершина B_n — на A_1A_n). Около того же n -угольника $A_1A_2 \dots A_n$ описан n -угольник $C_1C_2 \dots C_n$, площадь которого равна Q , так, что

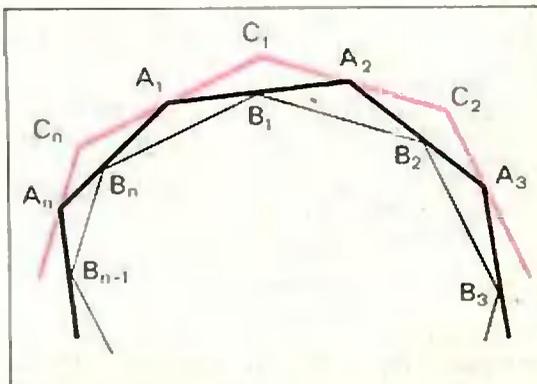
$$C_1C_2 \parallel B_1B_2, C_2C_3 \parallel B_2B_3, \dots, \\ \dots C_nC_1 \parallel B_nB_1$$


Рис. 2.

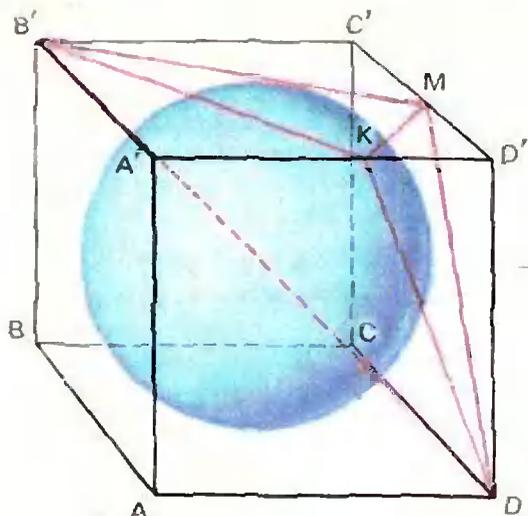


Рис. 3.

(вершина A_i лежит на стороне $C_{i-1}C_i$ для $i = 2, \dots, n$, а вершина A_1 — на стороне C_nC_1 , см. рис. 2). Найдите площадь n -угольника $A_1A_2 \dots A_n$.

И. А. Кушир

M249*. На ребрах $A'D'$ и $C'D'$ куба $ABCD A'B'C'D'$ выбирают две точки K и M так, что плоскость KDM касается шара, вписанного в куб (рис. 3). Докажите, что величина φ двугранного угла при ребре $B'D$ тетраэдра $B'DKM$ не зависит от выбора точек K и M . Найдите эту величину φ .

И. Ф. Шарыгин

M250. а) * При дворе короля Артура *) собрались n рыцарей. Некоторые из них враждуют друг с другом, но у каждого рыцаря не менее $\frac{n}{2}$ друзей среди собравшихся. Докажите, что Мерлин — советник короля Артура — может посадить рыцарей за круглым столом так, чтобы рядом с каждым сидели его друзья.

б) Докажите, что если у каждого рыцаря четное (n , конечно, положительное) количество друзей, то Мер-

*) См. Марк Твен. Янки при дворе короля Артура.

лин может рассадить рыцарей за несколько круглых столов так, чтобы никто не сидел рядом со своим врагом (у Артура есть столики на двоих, на троих и т. д.).

Ф258. Кольцо из тонкой проволоки разрывается, если его зарядить зарядом Q . Диаметр кольца и диаметр проволоки увеличили в 3 раза. При каком заряде будет разрываться это новое кольцо?

Ф259. Тонкостенный цилиндр катится по горизонтальной плоскости с ускорением a . Брусок A , размеры которого малы по сравнению с радиусом цилиндра, скользит по внутренней поверхности цилиндра так, что угол между радиусом-вектором точки A и вертикалью остается постоянным. Найдите этот угол, если коэффициент трения бруска о поверхность цилиндра равен k .

Ф260. На вход схемы (см. рис. 4) подаются прямоугольные импульсы напряжения величиной U_0 и длительностью τ . Период повторения импульсов T (рис. 5). Найдите установившееся через очень много периодов

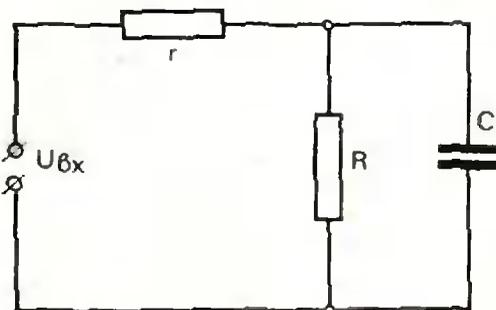


Рис. 4.

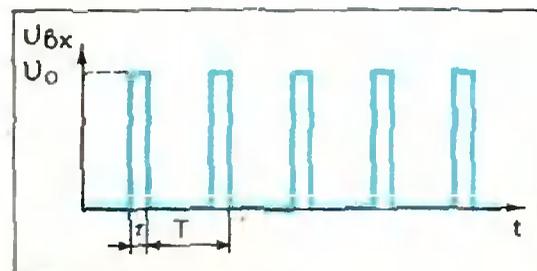


Рис. 5.

напряжение на конденсаторе, если в течение периода напряжение на конденсаторе изменяется очень мало.

Ф261. На границе раздела двух жидкостей с разными плотностями плавает, погрузившись в нижнюю жидкость на глубину h , толстостенный стакан с тонким дном. Стакан заполнен доверху верхней жидкостью. Внешний радиус стакана R , внутренний — r . В дне стакана появилась дыра. Насколько изменится глубина погружения стакана после того, как жидкость перестанет втекать в него?

Ф262. Тонкостенный цилиндрический стакан, имеющий тонкое дно, закрыт невесомым тонким поршнем. Между поршнем и дном в стакане вставлена пружина. Внутри стакана находится воздух при атмосферном давлении p_0 . Стакан плавает в воде, как показано на рисунке 6, расстоя-

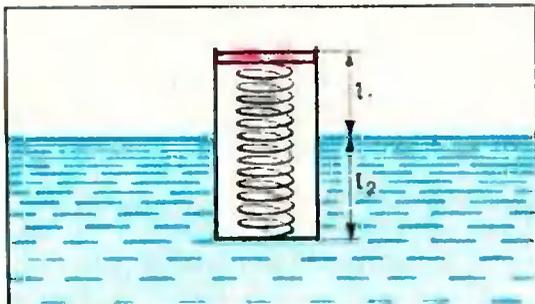


Рис. 6.

ние от поверхности воды до поршня равно l_1 , глубина погружения стакана равна l_2 . Площадь поршня S , жесткость пружины k , плотность воды ρ . На какую максимальную глубину можно погрузить стакан под воду, чтобы он еще мог всплыть? Объемом пружины пренебречь.

Решения задач

M205—M207, Ф213—Ф217

M205. 24 студента решали 25 задач. У преподавателя есть таблица 24×25 , в которой записано, кто какие задачи решил. Оказалось, что каждую задачу решил хотя бы один студент. Докажите, что

а) можно отметить некоторые задачи «галочкой», так что каждый из студентов решил четное число (в частности, быть может, нуль) из отмеченных задач;

б) можно отметить некоторые из задач знаком «+», а некоторые из остальных знаком «-», и приписать каждой задаче некоторое целое число баллов, так, что каждый студент набрал поровну баллов за задачи, отмеченные знаками «+» и «-».

Обе задачи а) и б) легко решить с помощью теоремы о системах линейных уравнений. Сначала сформулируем подходящим образом задачу б).

Пусть число студентов — m , задач — n . Зададим числа a_{ij} ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$) следующим образом: a_{ij} равно 1, если i -й студент решил j -ю задачу, и 0, если нет. Мы должны доказать, что существуют такие целые числа x_j ($1 \leq j \leq n$) — положительные, отрицательные и нули, что

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n &= 0, \quad (1) \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

или, короче, для каждого i от 1 до m

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0.$$

Действительно, если мы припишем j -й задаче знак числа x_j и количество баллов, равное $|x_j|$ (а задачи, для которых $x_j = 0$, пропустим), то i -е уравнение в (1) как раз будет означать, что i -й студент решил «положительные» задачи и «отрицательные» задачи с одной и той же суммой баллов.

Конечно, система уравнений имеет очевидное решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ (его называют *тривиальным*), но нас оно не интересует: хотя бы одна задача должна быть отмечена знаком «+» или «-».

Т е о р е м а. Если $m < n$, то система уравнений (1) всегда имеет нетривиальное

решение (x_1^0, \dots, x_n^0) , причем x_j выражается через числа a_{ij} и число 1 с помощью четырех арифметических действий.

Доказательство проведем индукцией по m . Для $m = 1$ мы имеем одно уравнение (с $n \geq 2$ неизвестными):

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0.$$

Если $a_{11} = 0$, можно взять

$$x_1^0 = 1, \quad x_2^0 = x_3^0 = \dots = x_n^0 = 0. \quad (2)$$

Если $a_{11} \neq 0$, то можно взять

$$x_2^0 = 1, \quad x_3^0 = \dots = x_n^0 = 0,$$

$$x_1^0 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}.$$

Пусть для $(m-1)$ уравнений утверждение доказано. Выведем отсюда теорему для m уравнений.

Если $a_{11} = 0$, то по-прежнему можно взять решение (2). Если $a_{11} \neq 0$, то вычтем из i -го уравнения первое, умноженное на $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$, чтобы коэффициент при x_1 стал $-a_{i1}$. Получим систему, эквивалентную исходной:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0,$$

$$a_{21}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0,$$

$$\dots$$

$$a_{m1}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0.$$

Ее последние $(m-1)$ уравнений, по предположению индукции (поскольку $m-1 < n-1$), имеют нетривиальное общее решение: $(x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0)$. Подставив его в первое уравнение (2), найдем

$$x_1^0 = -\frac{a_{12}x_2^0 + a_{13}x_3^0 + \dots + a_{1n}x_n^0}{a_{11}}.$$

Ясно, что все a_{ij} выражаются через a_{ij} с помощью четырех арифметических действий; по предположению индукции, то же верно для x_j^0 ($j = 2, \dots, n$), а следовательно, и для x_1^0 .

Поскольку в нашей задаче a_{ij} равно 0 или 1, то найденные в теореме x_j будут рациональными числами; если мы умножим все эти числа на общее кратное знаменателей, то получим решение в целых числах: если (x_1^0, \dots, x_n^0) — решение системы (1), то (Kx_1^0, \dots, Kx_n^0) тоже удовлетворяют этой системе.

Перейдем к задаче а). Во-первых, ее можно также вывести непосредственно из теоремы; нужно только «числа» и «арифметические операции» определить иначе. А именно, пусть множество «чисел» состоит из двух элементов: 0 и 1, сложение и умножение определяются по формулам:

$$0 + 0 = 1 + 1 = 0; \quad 0 + 1 = 1 + 0 = 1; \quad (3)$$

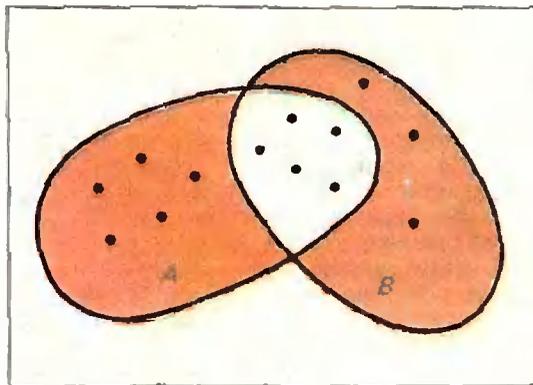


Рис. 1.

$0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0; \quad 1 \cdot 1 = 1$. Можно проверить, что эти действия удовлетворяют всем обычным свойствам, включая возможность вычитания и деления на число, отличное от нуля; как говорят, множество $\{0, 1\}$ с операциями (3) образует поле. Найдем нетривиальное решение системы уравнений (1) в этом поле. Решением будет набор $(x_1^0, \dots$

$\dots, x_n^0)$ нулей и единиц. Если отметить галочками те задачи, для которых $x_j^0 = 1$, то все студенты решат четное число отмеченных задач: ведь сумма четного числа единиц по правилам (3) равна 0, а нечетного — 1.

Второе решение задачи а) можно вывести из б). Пусть уже найден набор целых чисел x_j^0 , удовлетворяющих системе (1). Заменим все четные числа x_j^0 на 0, а нечетные — на 1, и отметим задачи, которым соответствует единица*). Ясно, что каждая сумма $\sum a_{ij}x_j^0$ осталась четной (каждое слагаемое изменено на четное число). Поэтому каждый студент решил четное число отмеченных задач.

Наконец, приведем совсем элементарное третье решение задачи а). Соображение, которым мы будем пользоваться — «если в M клетках сидят более M кроликов, то хотя бы в одной клетке сидит не менее двух кроликов» — называется обычно «принципом Дирихле»**).

Подсчитаем, сколькими способами может преподаватель расставить галочки у n задач. Другими словами, сколько имеется раз-

*) Можно считать, что не все x_j^0 четные. Действительно, если все x_j^0 четные, то рассмотрим набор $x_j^0 = \frac{x_j^0}{2}$, тоже являющийся решением.

**) Статью под таким названием см. в «Кванте № 7», 1971.

ных подмножеств у множества из n элементов, включая «пустое» подмножество и «полное» подмножество из всех n элементов. У каждой задачи, назависимо от остальных, мы можем поставить галочку или не поставить. Таким образом, искомое число равно 2^n . Для каждого из 2^n подмножеств A сопоставить цифру 1 тем студентам, которые решили нечетное число задач, из подмножества, A и 0 — тем, кто решил четное число задач. Таким образом, каждому подмножеству A мы поставим в соответствие столбец из нулей и единиц. Таких столбцов, очевидно, $2^n < 2^n$. Следовательно, найдутся два разные подмножества A и B такие, что им соответствует один и тот же столбец из нулей и единиц. Мы утверждаем, что условие задачи будет выполнено, если отметить теперь те задачи, которые входят ровно в одно из множеств A и B ; другими словами, нужно поставить «галочки» у задач из множества, закрашенного на рисунке 1:

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \Delta B^*$$

Поскольку у каждого студента число решенных задач из A и B имеют одинаковую четность, то в $A \Delta B$ количество решенных им задач четно; это совершенно ясно из рисунка 10: ведь число элементов в $A \Delta B$ равно сумме числа элементов в A и в B минус удвоенное число элементов $A \cap B$.

Н. Б. Васильев

M206. Дана бесконечная последовательность цифр. Докажите, что для любого натурального числа n , взаимно простого с числом 10, в последовательности можно указать такую группу стсящих подряд цифр, что записываемое этими цифрами число делится на n

Будем считать, что нам задана бесконечная последовательность цифр $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, \dots$, записанная слева направо. Рассмотрим такие числа: $a_m, a_{m-1}a_m, a_{m-2}a_{m-1}a_m, \dots, a_1 a_2 \dots a_m$

(черта, как обычно, обозначает десятичную запись числа). Если m достаточно велико — больше n , — то найдутся два числа

$a_{m-1}a_{m-1+1} \dots a_m$ и $a_{m-j}a_{m-j+1} \dots a_m$, где $i < j$, дающие при делении на n одинаковый остаток. Действительно, при делении на n возможно n различных остатков: 0, 1, 2, ..., $n-1$. Поэтому, если $m > n$, то среди m остатков, получающихся при делении выписанных выше чисел на n , обязательно найдутся два одинаковых остатка: ведь если бы все остатки были различны, то их было бы не больше n , а $m < n$. Рассуждения такого рода уже неодно-

кратно встречались на страницах «Кванта». В «Кванте» № 7 за 1971 год помещена статья Орлова «Принцип Дирихле», в которой приводится много задач, решающихся с помощью подобных рассуждений.

Итак, $a_{m-i} \dots a_m$ и $a_{m-j} \dots a_m$ дают одинаковый остаток при делении на n . Поэтому их разность

$$\begin{aligned} & a_{m-j}a_{m-j+1} \dots a_{m-i-1}0 \dots 0 - \\ & = 10^{i+1}a_{m-j}a_{m-j+1} \dots a_{m-i-1} \end{aligned}$$

делится на n .

В условии задачи сказано, что числа n и 10 взаимно просты, поэтому ни один простой делитель числа n не может входить в число 10^{i+1} , следовательно, $a_{m-j}a_{m-j+1} \dots a_{m-i-1}$ делится на n .

Л. Г. Лиманов

M207. Даны два треугольника $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$. Опишите вокруг треугольника $A_1A_2A_3$ треугольник $M_1M_2M_3$ наибольшей площади, подобный треугольнику $B_1B_2B_3$ (при этом вершина M_1 должна лежать на прямой A_2A_3 , вершина M_2 — на прямой A_3A_1 , вершина M_3 — на прямой A_1A_2).

Будем придерживаться следующих обозначений: большая жирная буква (например, X) обозначает треугольник, большие и маленькие буквы с индексами 1, 2, 3 ($X_1, X_2, X_3, x_1, x_2, x_3$) — вершины и противоположные им стороны этого треугольника (причем

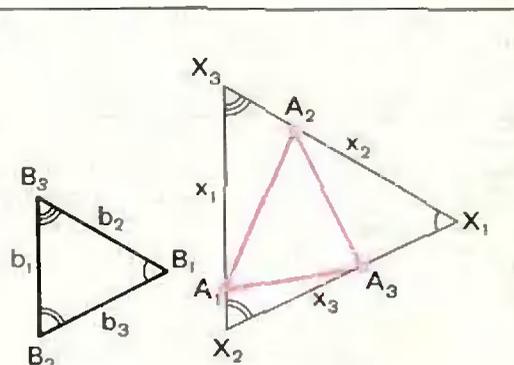


Рис. 2.

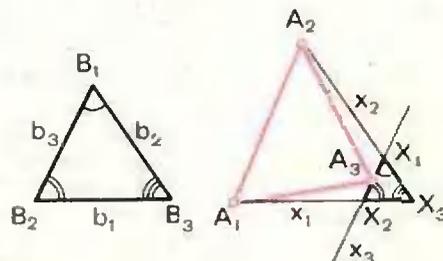


Рис. 3.

* См. статью Гиндикин С. Г., Сколько существует операций над множествами, «Квант», 1973, № 7.

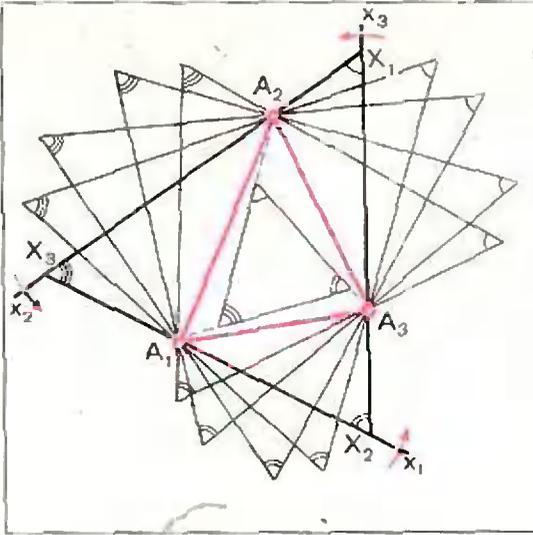


Рис. 4.

маленькие буквы обозначают также и прямые, на которых лежат стороны: X_2X_3 — прямая x_1 , X_3X_1 — прямая x_2 , X_1X_2 — прямая x_3 .

Пусть треугольник B как угодно расположен в плоскости треугольника A . Проведем через вершины A_1 , A_2 , и A_3 прямые x_1 , x_2 , x_3 , соответственно параллельные прямым b_1 , b_2 и b_3 . Ясно, что треугольники X и B подобны, поскольку стороны их соответственно параллельны (рис. 2, 3). Таким образом, мы построили треугольник X , подобный треугольнику B , стороны которого или их продолжения проходят через вершины A_1 , A_2 , A_3 треугольника A . (Многие читатели считали, что треугольник, подобный B , должен быть описан вокруг A в естественном, «узком» смысле слова, то есть точкам A_1 , A_2 , A_3 не разрешается лежать на продолжениях сторон x_1 , x_2 , x_3 , а только на самих сторонах, как на рисунке 2, но не на 3. В конце мы скажем о тех изменениях, которые придется внести в решение при таком, более «узком» понимании).

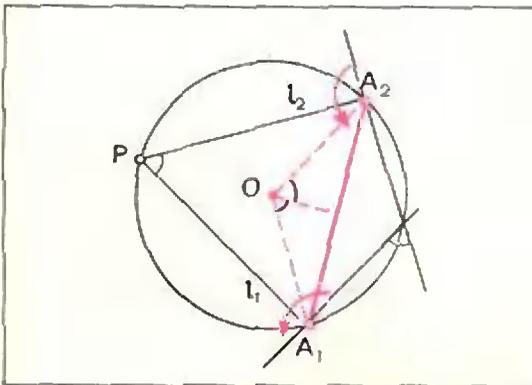


Рис. 5

Если вращать одновременно с одной и той же угловой скоростью прямую x_1 вокруг ее точки A_1 , x_2 — вокруг A_2 и x_3 — вокруг A_3 , то мы получим целое семейство треугольников X . Все это семейство мы обозначим буквой S . Ясно, что каждый треугольник X семейства S подобен B . На рисунке 4 видно, как меняется треугольник X при повороте прямых x_1 , x_2 , x_3 ; не очень ясно только, что происходит в «критический» момент, когда треугольник X становится совсем маленьким; мы увидим скоро, что в некоторый момент прямые x_1 , x_2 , x_3 проходят через одну точку, так что треугольник X вырождается в эту точку; затем прямые x_1 , x_2 , x_3 приближаются к своим первоначальным положениям (это происходит, когда каждая из них повернется на угол 180°).

Выясним более точно, как устроено семейство S . Заметим, что, когда две прямые равномерно вращаются вокруг двух своих точек A_1 и A_2 (рис. 5), точка их пересечения P описывает окружность с центром O ,

для которого $\sphericalangle OA_1A_2 = \sphericalangle OA_2A_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi$,

где φ — постоянный угол между прямыми,

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

При этом для точек P по одну сторону от прямой A_1A_2 угол A_1PA_2 равен φ , а по другую — $(\pi - \varphi)$. Отсюда следует, что каждая из точек X_1 , X_2 , X_3 — вершин треугольников X — описывает окружности. Центры этих окружностей обозначим через O_1 , O_2 , O_3 (окружность с центром O_1 проходит через A_2 и A_3 и т. д.).

Найдем теперь треугольник n и а н б о л ь ш е й площади. Воспользуемся тем, что все треугольники X подобны, то есть и площадь, и длина каждой стороны максимальна у одного и того же из них. Рассмотрим, например, как меняется длина стороны X_2X_3 (рис. 6). Поскольку окружности, по которым пробегает X_2 и X_3 , обе проходят через точку A_1 , то основания K_2 и K_3 перпендикуляров O_2K_2 и O_3K_3 , опущенных на прямую x_1 , — середины отрезков A_1X_2 и A_1X_3 . Поэтому

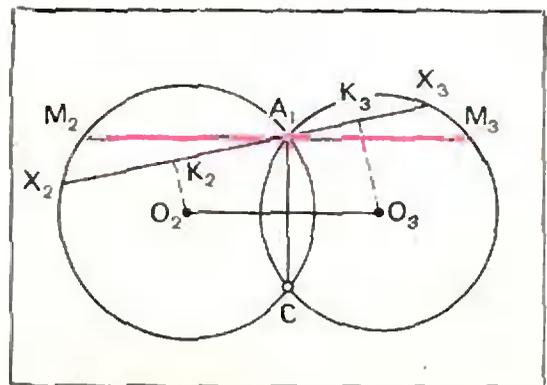


Рис. 6.

$|X_2X_3| = 2|K_2K_3|$. Но длина $|K_2K_3|$ — проекции отрезка O_2O_3 на прямую x_1 максимальна, очевидно, тогда, когда $x_1 \parallel O_2O_3$. Итак, мы доказали, что сторона x_1 максимального треугольника M из семейства S параллельна O_1O_2 . Разумеется, точно так же получим, что у этого треугольника $x_2 \parallel O_1O_3$, $x_3 \parallel O_2O_1$. Отсюда ясно, как построить этот треугольник M .

Минимальный треугольник семейства S получается, когда прямые x_1, x_2, x_3 перпендикулярны линиям центров соответствующих пар окружностей: O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 ; при этом все стороны треугольника X равны нулю. Таким образом, все три вершины треугольника X совпадают — он вырождается в точку; обозначим ее C . Через эту точку C проходят все три окружности. Рисовать семейства треугольников вида S проще всего, начиная именно с окружностей: убедитесь*) в том, что если взять произвольно три окружности, проходящие через одну точку C , обозначить отличные от C точки их попарного пересечения через A_1, A_2, A_3 , то можно принять любую точку на окружности за одну из трех вершин треугольника X , стороны которого проходят через точки A_1, A_2, A_3 , а вершины лежат на наших окружностях. Заметим еще, что при гомотетии с центром в точке C и коэффициентом 2 центры окружностей O_1, O_2, O_3 переходят в вершины M_1, M_2, M_3 максимального треугольника семейства S (рис. 7, а). Таким образом, треугольник O всегда подобен B^{**} .

Мы указали выше, какой именно треугольник семейства S наибольший. Но это еще не полностью решает задачу M207. Дело в том, что множество треугольников, подобных B и описанных вокруг A , не исчерпывается одним семейством S . Например, треугольник X на рисунке 3 не входит в семейство S , порожденное треугольником B рисунка 2. Вообще, если отразить треугольник B относительно какой-либо прямой (безразлично какой) и, исходя из полученного треугольника B' , построить семейство S' треугольников, — так же, как вначале мы строили семейство S , исходя из B , — то семейства S и S' не будут содержать общих треугольников***).

*) «Убедитесь» можно понимать здесь двояко: и как «проверьте на примерах, вооружившись циркулем, линейкой и бумагой», и как «точно сформулируйте и докажете в общем виде».

***) Заметим, что возможен случай, когда треугольник O вырождается в точку (и все три окружности совпадают). Подумайте, когда это происходит и во что превращается в этом случае семейство S .

****) Окружности, связанные с семейством S' , получаются из окружностей, связанных с S , симметричной относительно прямых a_i (см. рис. 7, б).

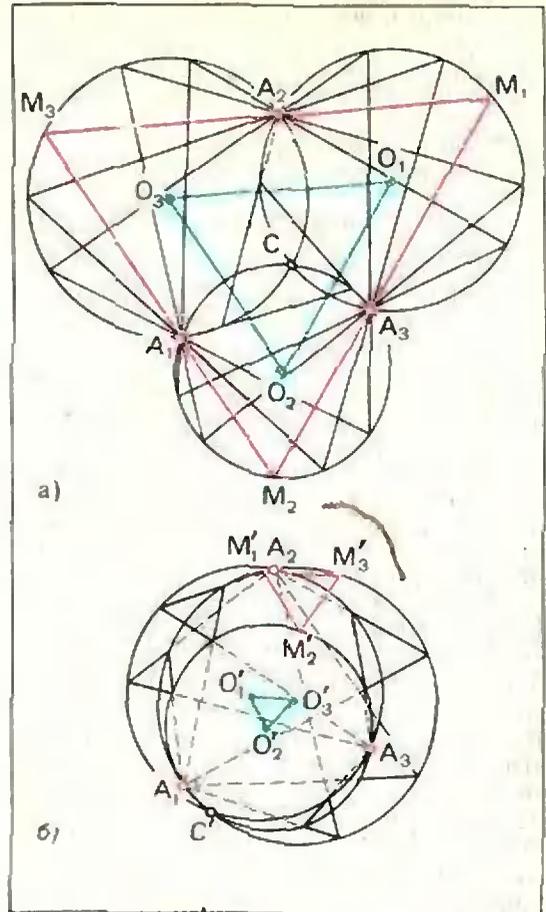


Рис. 7.

Таким образом, нужно найти наибольший треугольник в каждом из них и из этих двух треугольников выбрать больший.

Оказывается, однако, что можно сразу сказать, в каком из двух семейств S и S' наибольший треугольник больше. Чтобы сделать это, а также чтобы разобраться, все ли нужные треугольники «охвачены» двумя семействами S и S' , введем понятие «ориентации» треугольника. Заметим, что все рассматриваемые нами треугольники имеют определенную нумерацию вершин: мы говорим «треугольник», подразумевая «треугольник», вершины которого занумерованы цифрами 1, 2, 3». Ориентация такого треугольника — это направление обхода («по» или «против» часовой стрелки), определяемое указанным порядком вершин: от 1 к 2, затем к 3, затем обратно к 1. На рисунке 8 черные треугольники ориентированы по часовой стрелке, красные — против. Ясно, что два гомотетичных треугольника (стороны которых соответственно параллельны) ориентированы одинаково, треугольники, получающиеся друг из друга поворотом, — тоже, а треугольники, симметричные относительно прямой, ориентированы противоположно друг другу. Таким образом, все треугольники семейства S

имеют одну ориентацию (такую же, как В), все треугольники S' — противоположную. Так вот, можно доказать, что **наибольший треугольник принадлежит семейству, ориентация которого совпадает с ориентацией А.** (Докажите это самостоятельно.)

Теперь обсудим вопрос о том, все ли треугольники, описанные вокруг А и подобные В, мы изучили. Пока что мы рассмотрели все треугольники такого вида, получающиеся из В поворотом, гомотетией и, быть может, еще симметрией относительно прямой. Это всевозможные треугольники X, которые подобны В «с сохранением нумерации вершин», то есть так, что $\rightarrow X_1 = \rightarrow B_1, \rightarrow X_2 = \rightarrow B_2, \rightarrow X_3 = \rightarrow B_3$. Итак, если требовать в условии именно такого подобия (то есть подразумевать, что $\rightarrow M_1 = \rightarrow B_1, \rightarrow M_2 = \rightarrow B_2, \rightarrow M_3 = \rightarrow B_3$), то решение можно считать законченным: все множество допустимых треугольников X исчерпывается двумя семействами S и S', которые мы изучали.

Если же допускать подобия с «перенумерацией вершин» (то есть такие, что $\rightarrow X_1 = \rightarrow B_i, \rightarrow X_2 = \rightarrow B_j, \rightarrow X_3 = \rightarrow B_k$, где (i, j, k) — любая перестановка из цифр 1, 2, 3), то получится не два, а 12 семейств S_{ijk} и S'_{ijk} . Вершины треугольников из этих семейств заполнят 18 окружностей*). На рисунке 9, а или 9, б можно выбрать любую тройку прямых, попарно не параллельных и проходящих (по одной) через точки A_1, A_2, A_3 — обозначить их соответственно x_1, x_2, x_3 — и получится один из представителей семейства S_{ijk} или S'_{ijk} (при этом $x_1 \parallel b_1, x_2 \parallel b_2, x_3 \parallel b_3$). Оказывается, что и из этих 12 семейств можно указать то, в котором наибольший треугольник больше, чем во всех других. Чтобы сформулировать результат, условимся обозначать вершины треугольников А и В так, что $\rightarrow A_1 \leq \rightarrow A_2 \leq \rightarrow A_3$ и $\rightarrow B_1 \geq \rightarrow B_2 \geq \rightarrow B_3$ (теперь мы можем это себе позволить), и расположим треугольник В так, чтобы ориентации А и В совпали. Тогда самый большой треугольник принадлежит семейству S_{123} . Это утверждение доказали участники математического кружка из г. Кировска под руководством Н. Д. Нагаева, приславшего задачу М207 в «Квант». Они рассматривали, правда, только те шесть семейств треугольников:

$$S_{123}, S_{231}, S_{312}, S'_{132}, S'_{321}, S'_{213}, \quad (1)$$

ориентация треугольников в которых совпадает с ориентацией треугольника А, но в остальных семействах, как мы уже говорили, максимальные треугольники заведомо меньше.

Наконец, коснемся решения задачи про треугольники, описанные в «узком» смысле слова — так, что вершины A_i лежат на сторонах x_i , а не на их продолжениях. Ясно, что из всех семейств такие треугольники могут

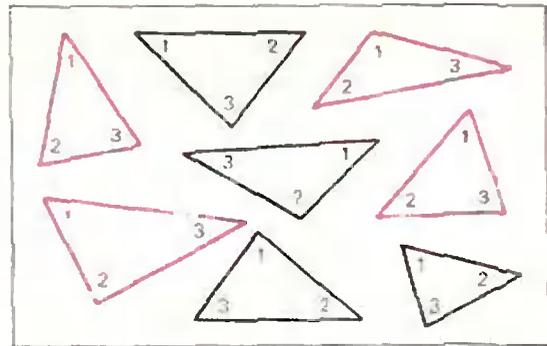


Рис. 8.

встретиться только в тех, которые дают ориентацию, совпадающую с ориентацией А. При заданном соответствии номеров вершин остается, таким образом, одно семейство. Если и А, и В — треугольники остроугольные, то, как можно доказать*, максимальный треугольник М принадлежит допустимому множеству (описан в «узком» смысле). В общем случае это может быть не так,

* См., например, задачу 54 из книги: Морозова Е. А. и Петраков И. С. Международные математические олимпиады. М., «Просвещение», 1971.

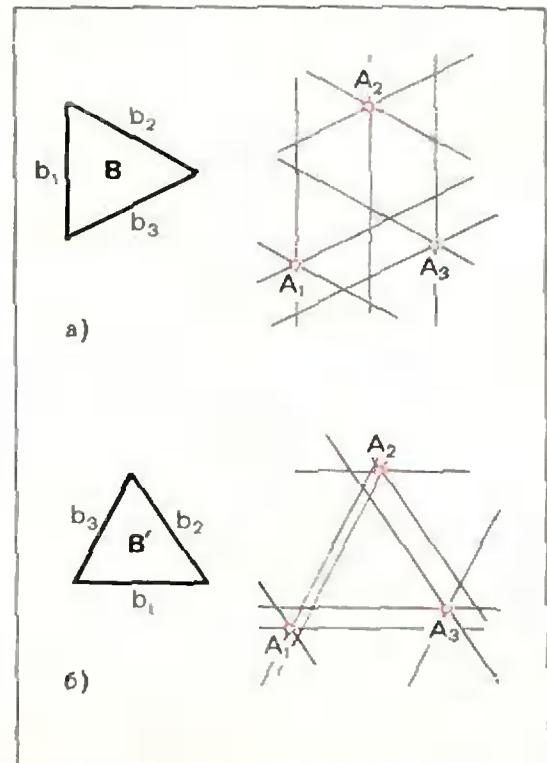


Рис. 9.

*) Если В равносторонний, то семейств 2; если В равнобедренный, то 6.

и тогда в допустимом множестве (если оно вообще не пусто!) придется выбрать тот треугольник, который получается из M поворотом сторон x_1, x_2, x_3 на наименьший возможный угол. Это будет, конечно, треугольник, одна из сторон которого содержит одну из сторон треугольника A .

Н. Б. Васильев

Ф213. Максимально допустимая скорость движения автомобиля по скользкой дороге при прохождении поворота радиуса R равна V_{\max} . На повороте дорога наклонена под углом α к горизонту. Какова минимальная скорость, с которой должен двигаться автомобиль, чтобы проехать поворот?

Рассмотрим силы, действующие на автомобиль в первом случае (рис. 10, а). Это сила тяжести mg , сила нормальной реакции со стороны дороги N и сила трения $F_{\text{тр}} = kN$ (k — коэффициент трения колес о дорогу). Поскольку автомобиль движется с максимально допустимой скоростью, сила трения препятствует «заносу» автомобиля (движению вверх по дороге) и направлена вниз по наклонной плоскости дороги.

Во втором случае сила трения $F'_{\text{тр}} = kN'$ (N' — сила реакции дороги в этом случае) препятствует скольжению автомобиля под действием силы тяжести вниз по плоскости дороги и потому направлена вверх (рис. 10, б).

Запишем уравнения движения автомобиля для первого и второго случаев. Для этого спроектируем все силы на вертикальную и горизонтальную оси.

Так как автомобиль в вертикальном направлении не перемещается, то

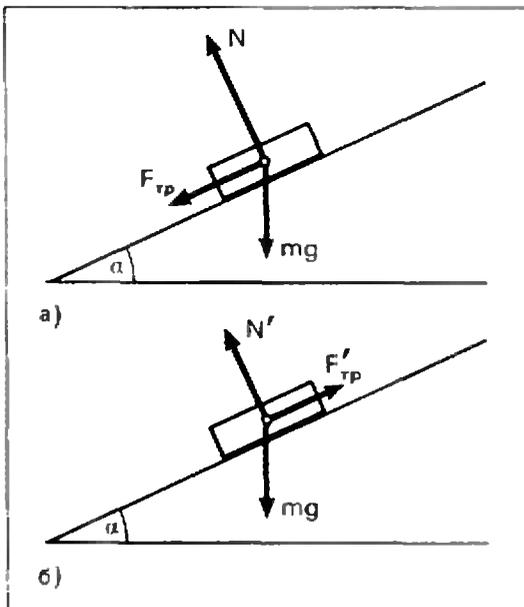


Рис. 10.

при движении с $v = v_{\max}$

$$N \cos \alpha - mg - F_{\text{тр}} \sin \alpha = 0,$$

или

$$N (\cos \alpha - k \sin \alpha) - mg = 0, \quad (1)$$

а при движении с $v = v_{\min}$

$$N' \cos \alpha - mg + F'_{\text{тр}} \sin \alpha = 0,$$

или

$$N' (\cos \alpha + k \sin \alpha) - mg = 0. \quad (2)$$

В горизонтальной плоскости автомобиль движется по окружности радиуса R с центростремительным ускорением, равным $\frac{v^2}{R}$. Согласно второму закону Ньютона

при движении с $v = v_{\max}$

$$N \sin \alpha + F_{\text{тр}} \cos \alpha = \frac{mv_{\max}^2}{R},$$

или

$$N (\sin \alpha + k \cos \alpha) = \frac{mv_{\max}^2}{R}, \quad (3)$$

а при движении с $v = v_{\min}$

$$N' \sin \alpha - F'_{\text{тр}} \cos \alpha = \frac{mv_{\min}^2}{R}$$

или

$$N' (\sin \alpha - k \cos \alpha) = \frac{mv_{\min}^2}{R}. \quad (4)$$

Из уравнения (2) найдем N' , подставим в уравнение (4) и получим

$$\frac{mv_{\min}^2}{R} = mg \frac{\sin \alpha - k \cos \alpha}{\cos \alpha + k \sin \alpha}.$$

Отсюда

$$v_{\min} = \sqrt{Rg \frac{\text{tg } \alpha - k}{1 + k \text{tg } \alpha}}. \quad (5)$$

Для того чтобы найти k , воспользуемся уравнениями (1) и (3). Из уравнения (1) выразим N , подставим в уравнение (3) и получим

$$\frac{\sin \alpha + k \cos \alpha}{\cos \alpha - k \sin \alpha} = \frac{v_{\max}^2}{Rg}$$

и

$$k = \frac{v_{\max}^2 - Rg \text{tg } \alpha}{v_{\max}^2 \text{tg } \alpha + Rg}.$$

Тогда

$$v_{\min} = \sqrt{Rg \frac{v_{\max}^2 (\text{tg}^2 \alpha - 1) + 2Rg \text{tg } \alpha}{Rg (1 - \text{tg}^2 \alpha) + 2v_{\max}^2 \text{tg } \alpha}}.$$

Ф214. В схеме, изображенной на рисунке 11, $R_1 = 10$ ком, $R_2 = R_3 = 5$ ком, а к клеммам 1—2 приложено переменное напряжение $U = 127$ в. Диоды можно считать идеальными — при одном направлении тока их сопротивление бесконечно мало, при другом — бесконечно велико. Найти, какая мощность выделяется на сопротивлении R_1 .

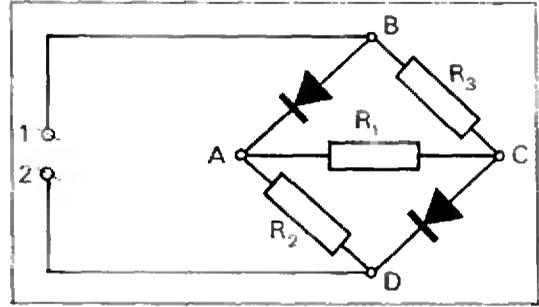


Рис. 11.

Так как диоды идеальные, можно считать, что половину периода изменения напряжения на клеммах участка цепи AB и CD накоротко замкнуты, а другую половину периода — разомкнуты. Это означает, что в первом случае данная схема эквивалентна схеме, приведенной на рисунке 12, а, а во втором — схеме, приведенной на рисунке 12, б.

Количество теплоты, выделяемой на сопротивлении R_1 в течение первой половины периода, равно

$$Q_1 = \frac{U^2}{R_1} \frac{T}{2}$$

(T — период изменения напряжения в цепи, $U = 127$ в — действующее значение напряжения).

В течение второй половины периода через сопротивление R_1 идет ток

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3}$$

и на нем выделяется количество теплоты

$$Q_2 = I^2 R_1 \frac{T}{2} = \frac{U^2}{(R_1 + R_2 + R_3)^2} R_1 \frac{T}{2}$$

За период T на сопротивлении R_1 выделяется количество теплоты

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{T}{2} U^2 \left[\frac{1}{R_1} + \frac{R_1}{(R_1 + R_2 + R_3)^2} \right]$$

Это означает, что в среднем (по периоду) на сопротивлении R_1 выделяется мощность

$$P = \frac{Q}{T} = \frac{U^2}{2} \left[\frac{1}{R_1} + \frac{R_1}{(R_1 + R_2 + R_3)^2} \right] \approx 1 \text{ вт.}$$

Ф215. Два мыльных пузыря радиусов R_1 и R_2 сливаются в один пузырь радиуса R_3 . Найти атмосферное давление, если коэффициент поверхностного натяжения мыльной пленки равен σ .

При решении этой задачи будем исходить из того, что после слияния двух

мыльных пузырей в один суммарная масса воздуха в них не изменяется:

$$m_3 = m_1 + m_2. \quad (1)$$

Согласно уравнению Менделеева—Клапейрона, масса воздуха в пузыре равна

$$m = \frac{pV\mu}{RT}, \quad (2)$$

где $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ — объем пузыря, μ — молекулярная масса воздуха, T — температура (она равна температуре окружающего воздуха и одинакова для всех пузырей) и R — универсальная газовая постоянная.

Запишем условие равновесия пузыря:

$$p = p_a + p_{\text{доб}} = p_a + \frac{2\sigma}{R_p}, \quad (3)$$

где $p_{\text{доб}} = \frac{2\sigma}{R_p}$ — добавочное давление под сферической поверхностью мыльной пленки радиуса R_p^* , а p_a — атмосферное давление.

*) Заметим, что в данном случае σ — коэффициент поверхностного натяжения мыльной пленки (заданный в условии), численно равный удвоенному значению коэффициента поверхностного натяжения мыльного раствора, приводимого в таблицах.

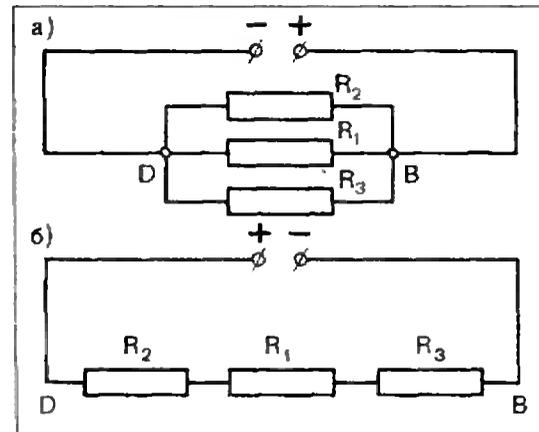


Рис. 12.

Из соотношений (2) и (3)

$$m_1 = \left(p_a + \frac{2\sigma}{R_1} \right) \frac{4}{3} \pi R_1^3 \frac{\mu}{RT},$$

$$m_2 = \left(p_a + \frac{2\sigma}{R_2} \right) \frac{4}{3} \pi R_2^3 \frac{\mu}{RT},$$

$$m_3 = \left(p_a + \frac{2\sigma}{R_3} \right) \frac{4}{3} \pi R_3^3 \frac{\mu}{RT}.$$

Найденные выражения для m_1 , m_2 , и m_3 подставим в равенство (1). В результате получим:

$$\begin{aligned} \left(p_a + \frac{2\sigma}{R_1} \right) R_1^3 + \left(p_a + \frac{2\sigma}{R_2} \right) R_2^3 = \\ = \left(p_a + \frac{2\sigma}{R_3} \right) R_3^3, \end{aligned}$$

откуда

$$p_a = \frac{2\sigma (R_3^2 - R_1^2 - R_2^2)}{R_1^3 + R_2^3 + R_3^3}.$$

Ф216. Вставая и приседая в определенные моменты времени, мальчик на качелях легко увеличивает амплитуду своих качаний. Объясните, почему это удается.

Качели с мальчиком — это маятник. Свободные колебания маятника затухают из-за наличия сил сопротивления: энергия колебаний маятника переходит в тепло. Для того чтобы сделать колебания незатухающими, нужно каким-либо способом компенсировать эти потери.

Можно маятнику с помощью специального механизма периодически поставлять энергию извне. Если энергия, сообщенная маятнику, например, за период, будет больше потерянной энергии за это же время, то амплитуда колебаний будет нарастать. При этом, однако, будут увеличиваться и потери энергии. Поэтому, когда поступающая извне энергия сравняется с теряемой энергией, амплитуда колебаний перестанет изменяться. Такие колебания называют автоколебаниями. Примером механической автоколебательной системы является маятник в часах.

Другой способ увеличения амплитуды колебаний — изменение параметров самой системы. Именно о таком способе говорится в данной задаче.

Рассмотрим сначала колебания простейшей колебательной системы — математического маятника. Если маятник в силу каких-то случайных причин начал колебаться, то раскачать его, то есть увеличить амплитуду колебаний, можно следующим образом: всякий раз, когда маятник проходит положение равновесия, будем поднимать его, а когда маятник максимально отклонен, будем его опускать. Таким образом мы периодически (с частотой, в два раза большей частоты колебаний маятника) меняем длину нити

маятника — параметр самой системы. Поэтому такой способ возбуждения колебаний называют параметрическим возбуждением.

Когда мы поднимаем маятник, мы совершаем над ним работу, увеличиваем его потенциальную энергию. Опуская маятник, мы предоставляем возможность силе тяжести совершить работу, что уменьшает энергию маятника. Но все дело в том, что извне поступает энергии больше, чем расходуется. Действительно, поднимая за нить маятник на высоту h , тем самым укорачивая на h длину нити, мы совершаем работу

$$A_1 \approx F_{H_1} h = \left(mg + m \frac{v^2}{R} \right) h,$$

поскольку сила натяжения нити F_{H_1} в положении равновесия не только уравнивает силу тяжести, но и сообщает маятнику центростремительное ускорение. Когда же в точке максимального отклонения от положения равновесия мы даем возможность маятнику опуститься, то есть увеличиваем до первоначального значения R длину нити, сила тяжести совершает работу

$$A_2 = mgh \cos \alpha,$$

так как перемещение маятника по верткали равно $h \cos \alpha$.

Таким образом, в систему за один полупериод поступает энергия

$$\dot{E} = A_1 - A_2 > 0.$$

В результате этого амплитуда колебаний будет увеличиваться (конечно, если эта поступающая энергия больше выделяемого тепла из-за действия сил сопротивления).

Теперь вернемся к задаче с качелями. Из вышесказанного ясно, что для того чтобы раскачать качели, мальчик должен приседать всякий раз, когда качели максимально отклонены, и вставать при прохождении положения равновесия. И в этом случае как бы меняется длина нити маятника (если длиной нити считать расстояние от точки подвеса до положения центра тяжести мальчика), а роль силы натяжения нити выполняет сила реакции со стороны ног — N . В положении

равновесия $N = mg + m \frac{v^2}{R}$ и

$$A_1 \approx \left(mg + \frac{mv^2}{R} \right) h,$$

где h — высота подъема центра тяжести мальчика. Когда качели максимально отклонены и мальчик приседает, сила тяжести совершает работу

$$A_2 = mgh \cos \alpha.$$

Таким образом, за период система получает энергию

$$\begin{aligned} E = 2(A_1 - A_2) \approx \\ \approx 2h \left[m \frac{v^2}{R} + mg(1 - \cos \alpha) \right]. \end{aligned}$$

Эта величина положительна, поэтому энергия и, следовательно, амплитуда колебаний будет увеличиваться.

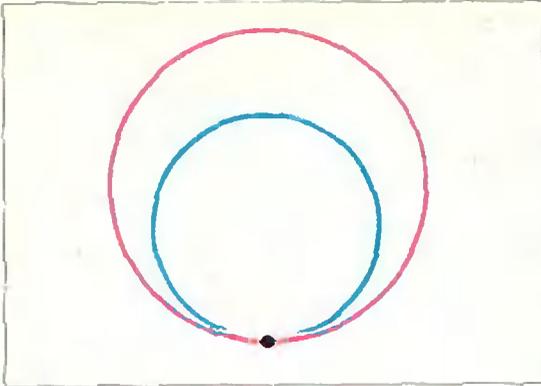


Рис. 13.

Ф217. Электронно-лучевая трубка с ускоряющим напряжением U помещена в однородное магнитное поле с индукцией B , направленной вдоль оси трубки. На экране при этом наблюдается небольшое расплывчатое пятно. Если менять величину индукции, то можно заметить, что при некоторых значениях $B_0, 2B_0, 3B_0, \dots$ электронное пятно фокусируется — собирается в точку. Объясните это явление. Как с помощью такого эксперимента определить отношение заряда электрона к его массе?

Электроны вылетают из электронной пушки трубки с небольшим угловым разбросом скоростей и попадают в магнитное поле. При этом в направлении оси электроны имеют одинаковые составляющие скоростей, которые согласно закону сохранения энергии равны

$$v_1 = \sqrt{\frac{2eU}{m}},$$

и различные составляющие, перпендикулярные оси, намного меньше, чем v_1 .

На составляющие скоростей, параллельные оси трубки, магнитное поле никак не влияет, поэтому движение вдоль оси является равномерным и прямолинейным. Наличие же перпендикулярных оси составляющих приводит к искривлению траектории движения электронов. Действительно, на электрон, влетающий в магнитное поле перпендикулярно его силовым линиям, действует сила Лоренца

$$F = evB,$$

где e — заряд электрона, v — его скорость, в данном случае равная перпендикулярной составляющей скорости электрона. Эта сила сообщает электрону центростремительное ускорение

$$a_{ц} = \frac{v^2}{R},$$

где R — радиус окружности, по которой будет двигаться электрон. Согласно второму закону Ньютона

$$m \frac{v^2}{R} = evB,$$

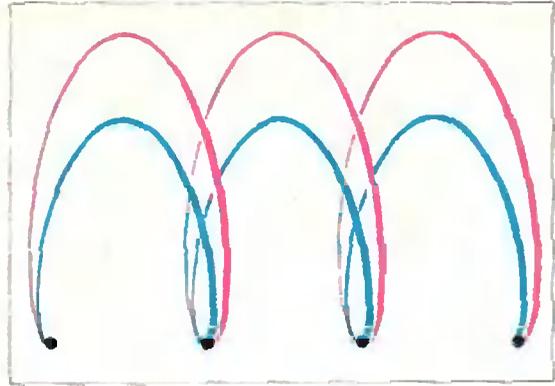


Рис. 14.

$$R = \frac{mv}{eB},$$

и период вращения электрона по окружности

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{eB}.$$

Мы получили очень важный результат: какими бы ни были составляющие скоростей электронов, перпендикулярные оси трубки, все электроны совершают один оборот за одно и то же время. Если бы составляющие скоростей электронов, параллельные оси трубки, были все равны нулю, то траекториями электронов были бы окружности разных радиусов, проходящие через одну точку — точку вылета электронов из пушки (рис. 13). Причем в эту точку все электроны приходили бы одновременно.

Так как электроны участвуют еще в равномерном прямолинейном движении вдоль оси трубки, то результирующими траекториями их движений будут винтовые линии. Причем эти линии будут пересекаться на каждом шаге винта (рис. 14), так как составляющие скоростей, параллельные оси, одинаковы для всех электронов. В точках пересечения траекторий и фокусируется электронный пучок.

Итак, электронное пятно на экране будет собираться в точку, если расстояние L от электронной пушки до экрана будет кратно шагу винтовой линии $h = v_1 T$, то есть

$$L = n v_1 T = \frac{n}{B} 2\pi \sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

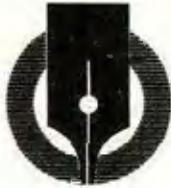
Причем, при $B = B_0$ $n = 1$, при $B = 2B_0$ $n = 2$ и т. д.

С помощью такого эксперимента можно определить отношение заряда электрона к его массе. Действительно, из последней формулы

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 U}{L^2 B_0^2}.$$

Измерив U , L и B_0 , найдем отношение $\frac{e}{m}$.

И. Ш. Слободецкий



ПРАКТИКУМ
АБИТУРИЕНТА

Метод вспомогательного элемента

И. А. Кушнир

Решение большой группы задач по геометрии облегчается введением дополнительных элементов, непосредственно не заданных в условии задачи. Эти элементы могут быть длинами, площадями, объемами, углами. С их помощью составляется уравнение, где неизвестным будет искомый элемент или элемент, с помощью которого легко найдется искомый. Иногда с помощью этого элемента составляется не уравнение, а соотношение, требуемое условием задачи.

Вспомогательный линейный элемент

В планиметрических задачах линейный элемент или отношение линейных элементов удобно ввести, если рассматриваемые фигуры подобны. Тогда с помощью пропорций или вспомогательных геометрических построений составляется уравнение, в котором введенный элемент как член уравнения сокращается, а найти искомый не представляет большого труда.

Рассмотрим решение задачи, предложенной в Новосибирском государственном университете.

Задача 1 (НГУ, 1969). *Через некоторую точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, соответственно параллельные сторонам треугольника. Эти прямые делят треугольник на шесть частей, из которых три — треугольники с площадями S_1, S_2, S_3 . Найти площадь данного треугольника.*

Приступая к решению, замечаем подобие треугольников с площадями S_1, S_2, S_3 (рис. 1) и треугольника ABC с площадью S . Кроме того, сумма длин сторон DQ, QE и FK маленьких треугольников равна длине стороны BC треугольника ABC . Используем эти стороны как вспомогательные элементы, получаем уравнение

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{DQ}{BC}, \quad \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{QE}{BC}, \quad \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{FK}{BC}.$$

Сложим их:

$$\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{DQ + QE + FK}{BC} = 1.$$

$$\text{Итак, } S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2.$$

Вспомогательный отрезок рекомендуется вводить, если в условии задачи не даны линейные элементы и требуется найти зависимость между углами.

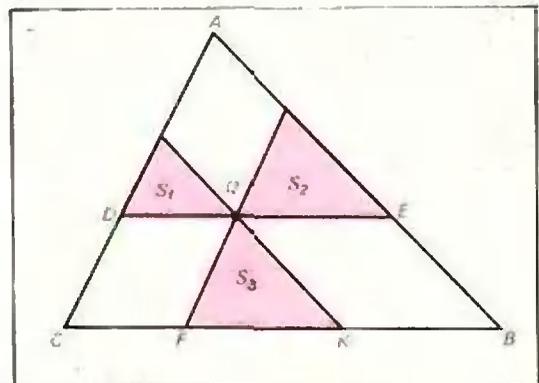


Рис. 1.

Задача 2 (МГУ, физфак, 1967).
Найти косинус угла при основании равнобедренного треугольника, зная, что точка пересечения его высот лежит на вписанной в треугольник окружности.

По условию ортоцентр H треугольника ABC ($AB = AC$) должен находиться внутри треугольника, поэтому $\rightarrow A < 90^\circ$ (рис. 2). Введем вспомогательный элемент a — длину отрезка BD , обозначим $\rightarrow ABC$ через x , центр вписанной окружности — через O . Тогда

$$\rightarrow HCD = \frac{\pi}{2} - x, HD = a \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = a \operatorname{ctg} x = 2OD, OD = a \operatorname{tg} \frac{x}{2},$$

откуда

$$\operatorname{ctg} x = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{5},$$

$$\cos x = \frac{2}{3}.$$

Особенно большое значение имеет введение вспомогательного элемента для нахождения отношений различных геометрических величин.

Задача 3 (МАИ, 1968). *Большее основание правильной усеченной четырехугольной пирамиды образует с боковой гранью угол α , а с плоскостью, проходящей через противоположные стороны верхнего и нижнего оснований, — угол β . Найти отношение площадей оснований.*

Введем вспомогательный элемент a — длину стороны большего основания пирамиды (рис. 3). Площадь этого основания будет a^2 . Длину стороны верхнего основания можно выразить через a , α и β . Рассмотрим равнобедренную трапецию EE_1F_1F , получающуюся в сечении пирамиды плоскостью, перпендикулярной основаниям и проходящей через середины сторон AB и CD . Введем еще вспомогательные отрезки $E_1H = h$, $E_1F_1 = x$. Тогда

$$HF = \frac{1}{2}(a + x),$$

$$EH = \frac{1}{2}(a - x), h = HF \operatorname{tg} \beta =$$

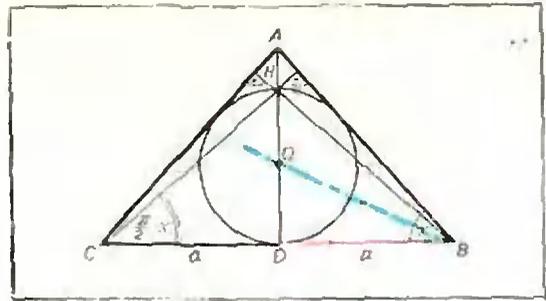


Рис. 2.

$$= \frac{1}{2}(a + x) \operatorname{tg} \beta = EH \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}(a - x) \operatorname{tg} \alpha.$$

Получаем уравнение $(a + x) \operatorname{tg} \beta = (a - x) \operatorname{tg} \alpha$, откуда

$$x = \frac{a \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)},$$

$$\frac{s}{S} = \frac{x^2}{a^2} = \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)}.$$

Вспомогательный элемент — площадь или объем

Введение площади и объема в качестве вспомогательного элемента аналогично введению линейного элемента. Сравнивая площади и объемы отдельных частей фигуры, можно получить или уравнение относительно неизвестных задачи, или необходимое соотношение. Лучше находить те площади и объемы, сумма (разность) которых дает площадь заданной фигуры, а также отношение площадей

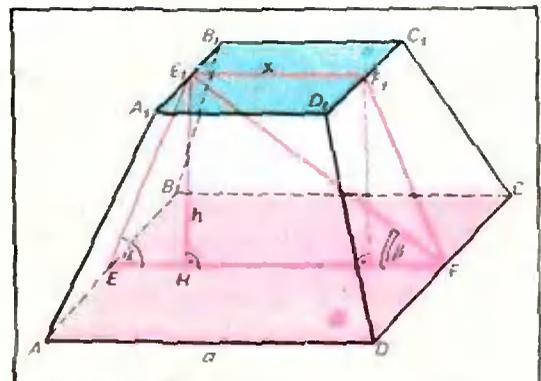


Рис. 3.

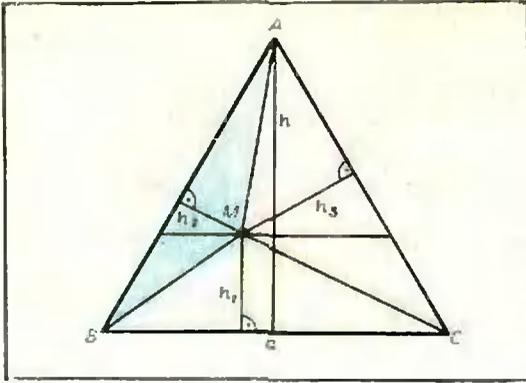


Рис. 4.

тех фигур, у которых линейные элементы — либо искомые, либо являются компонентами необходимого соотношения.

Задача 4 (МГУ, мехмат, 1960). Через центр правильного треугольника проведена прямая, параллельная основанию. На этой прямой внутри треугольника взята произвольная точка M . Доказать, что расстояние от точки M до основания треугольника есть среднее арифметическое расстояний от точки M до боковых сторон треугольника.

Пусть h_1, h_2, h_3 — расстояния от точки M до сторон треугольника BC, AB, AC соответственно (рис. 4). Ясно, что $S_{\triangle AMB} + S_{\triangle CMB} + S_{\triangle AMC} = S_{\triangle ABC}$, или $ah_1 + ah_2 + ah_3 = ah$, где a — сторона треугольника ABC , h — его высота. Итак,

$$h = h_1 + h_2 + h_3, \text{ но } h_1 = \frac{h}{3},$$

$$\text{поэтому } h_2 + h_3 = h - h_1 = \frac{2}{3}h = 2h_1,$$

$$h_1 = \frac{h_2 + h_3}{2}.$$

Задача 5. Дан четырехугольник $ABCD$, описанный около круга. Доказать, что квадраты расстояний от центра окружности до противоположных вершин относятся, как произведения сторон, сходящихся в этих вершинах.

Обозначения приведены на рисунке 5. Требуется доказать, что

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{ad}{bc}.$$

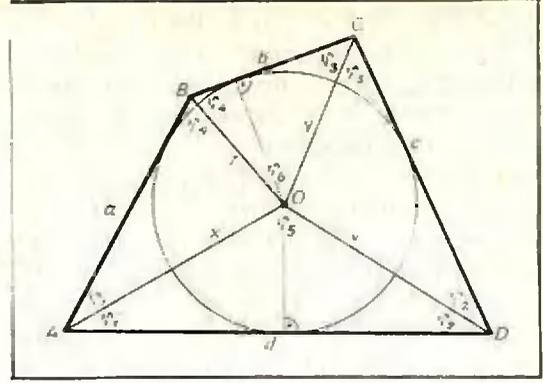


Рис. 5.

Высоты треугольников AOD и BOC равны, поэтому

$$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle BOC}} = \frac{d}{b}. \quad (1)$$

С другой стороны,

$$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle BOC}} = \frac{xv \sin \varphi_5}{yz \sin \varphi_6}. \quad (2)$$

Докажем, что $\sin \varphi_5 = \sin \varphi_6$. Для этого заметим, что $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = \pi$ (это половина суммы всех углов четырехугольника), $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_5 = \pi$, $\varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_6 = \pi$. Отсюда следует, что $\varphi_5 + \varphi_6 = \pi$, $\sin \varphi_5 = \sin \varphi_6$, и из формулы (2) получаем

$$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle BOC}} = \frac{xv}{yz}. \quad (2')$$

Из соотношений (1) и (2') имеем $\frac{xv}{yz} = \frac{d}{b}$, аналогично $\frac{xz}{yv} = \frac{a}{c}$. Перемножив последние два равенства, получим

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{ad}{bc},$$

а разделив первое из них на второе, получим

$$\frac{v^2}{z^2} = \frac{cd}{ab}^*.$$

Разберем задачу, где вспомогательным элементом будет объем.

*) Дополнительный материал о методе площадей можно прочитать в журнале «Квант», 1971, № 12.

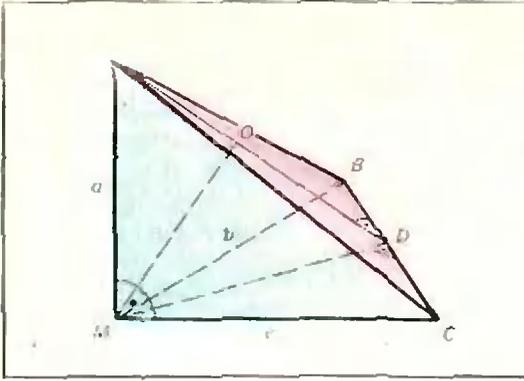


Рис. 6.

Задача 6. (НГУ, 1971). В треугольной пирамиде боковые ребра взаимно перпендикулярны и равны a, b, c . Высота пирамиды, опущенная из вершины на основание, равна h . Доказать, что

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}.$$

Вычислим объем пирамиды двумя способами: считая ее основанием в первом случае треугольник ABC (рис. 6), а во втором — грань AMC . Пусть $MA = a, MB = b, MC = c, MO = h, AD \perp BC$. Тогда $AC = \sqrt{a^2 + c^2}, BC = \sqrt{b^2 + c^2}, AB = \sqrt{a^2 + b^2}$. Далее, $MD \perp BC$ (почему?), из $\triangle BMC$ имеем $BD \cdot BC = BM^2$, откуда

$$BD = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}. \text{ Но } AD^2 = AB^2 - BD^2 = \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{b^2 + c^2},$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + c^2} \times \sqrt{\frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{b^2 + c^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2},$$

$$V_{MABC} = \frac{1}{6} h \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}. \quad (3)$$

Если основание — треугольник AMC , то

$$V_{MABC} = \frac{1}{6} abc. \quad (4)$$

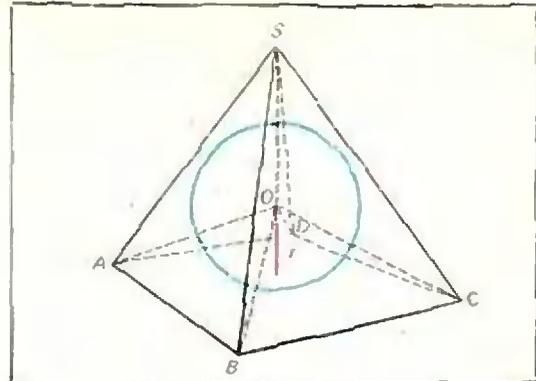


Рис. 7.

Сравнивая (3) и (4), получаем: $\frac{1}{6} h \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2} = \frac{1}{6} abc$, откуда $(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) h^2 = a^2b^2c^2$. Разделив обе части последнего равенства на $a^2b^2c^2h^2$, получаем требуемое равенство.

Задача 7. Доказать, что объем пирамиды, описанной около шара, вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3} S \cdot r$, где r — радиус шара, вписанного в пирамиду, S — полная поверхность пирамиды.

Разобьем исходную пирамиду на части, каждая из которых является пирамидой с вершиной в точке O (в центре шара), основаниями этих пирамид будут грани исходной пирамиды (рис. 7). Объем исходной пирамиды V равен сумме объемов этих пирамид V_1, V_2, \dots, V_k . Но $V_i = \frac{1}{3} S_i \cdot r$, так как высотой пирамиды V_i является радиус r шара, проведенный в точку касания шара и грани. Отсюда $V = V_1 + V_2 + \dots + V_k = \frac{1}{3} (S_1 + S_2 + \dots + S_k) r = \frac{1}{3} S r$. Заметим, что утверждение задачи верно и для произвольного многогранника, в который можно вписать шар.

Вспомогательный элемент — угол

Если искомые или заданные элементы удобно выразить с помощью три-

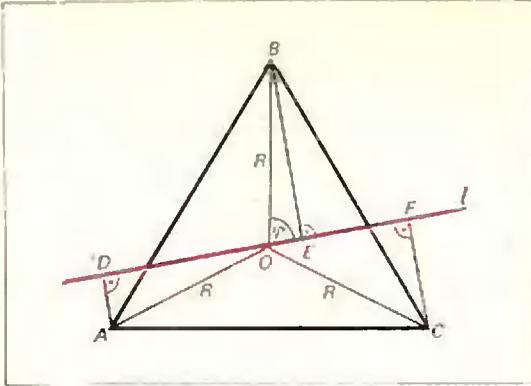


Рис. 8.

гонометрических функций, то вводится вспомогательный угол. Затем с помощью теоремы синусов или косинусов решением треугольника находятся компоненты для записи некоторого условия в виде уравнения.

Задача 8 (МГУ, мехмат, 1962). Через центр правильного треугольника в плоскости этого треугольника проведена произвольная прямая. Доказать, что сумма квадратов расстояний от вершин треугольника до этой прямой не зависит от выбора прямой.

Пусть точка O — центр треугольника ABC (рис. 8). Точки D, E, F — соответственно проекции вершин A, B, C на прямую l , R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC . Введем вспомогательный угол φ , обозначив им $\angle BOE$. Тогда

$$\angle AOD = \angle AOB - \angle BOD = \varphi - \frac{\pi}{3}.$$

$$\angle COE = \frac{2\pi}{3} - \varphi, \quad BE = R \sin \varphi,$$

$$AD = R \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{3} \right),$$

$$CF = R \sin \left(\frac{2\pi}{3} - \varphi \right) =$$

$$= R \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{3} \right),$$

$$AD^2 + BE^2 + CF^2 =$$

$$= R^2 \left[\sin^2 \varphi + \sin^2 \left(\varphi - \frac{\pi}{3} \right) + \right.$$

$$\left. + \sin^2 \left(\varphi + \frac{\pi}{3} \right) \right] = \frac{3}{2} R^2$$

(проверьте самостоятельно, что сумма в квадратных скобках равна $\frac{3}{2}$).

Задача 9 (МФТИ, 1967). В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCD, B_1, C_1, D_1$ лежит квадрат со стороной a . Через диагональ AC нижнего основания $ABCD$ проведена плоскость, пересекающая верхнее основание A_1, B_1, C_1, D_1 . В трехгранные углы B и D_1 вписаны шары, касающиеся этой плоскости и имеющие радиусы $r = \frac{a}{5}$, $R = \frac{a}{4}$. Най-

ти высоту параллелепипеда.

Диагональное сечение DBB_1, D_1 параллелепипеда (рис. 9) пройдет через центры шаров O и O_1 . Пусть L и L_1 — точки касания шаров и оснований параллелепипеда, N и N_1 — точки касания шаров с данной плоскостью (мы пока не знаем, расположены ли они вне параллелепипеда

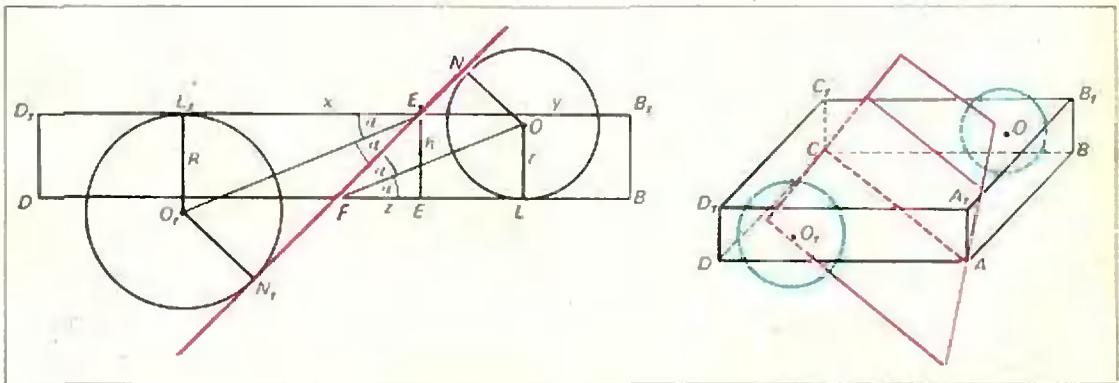


Рис. 9.

или внутри него, но нам это и не понадобится), OF и O_1E_1 — биссектрисы углов NQL и $N_1O_1L_1$ (точка F — середина BD), EE_1 — высота параллелепипеда, $OL = ON = r$, $O_1L_1 = O_1N_1 = R$. Положим $\angle BFE_1 = 2\alpha$, $L_1E_1 = x$, $E_1B_1 = y$, $FE = z$. Тогда $h = z \operatorname{tg} 2\alpha$, $z = FB - BE = \frac{a\sqrt{2}}{2} - y$, $y = a\sqrt{2} - x - D_1L_1 = a\sqrt{2} - x - R\sqrt{2}$ и $z = x + R\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{2} = x - \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Из подобия треугольников $O_1L_1E_1$ и OLF следует, что $\frac{x}{R} = \frac{FL}{r}$, $FL = FB - LB = \frac{a\sqrt{2}}{2} - r\sqrt{2} = \frac{3a\sqrt{2}}{10}$; $x = \frac{3}{8}a\sqrt{2}$, $z = \frac{a\sqrt{2}}{8}$. Из треугольника OLF находим $\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{FL} = \frac{\sqrt{2}}{3}$, откуда $h = \frac{3}{14}a$.

Задача 10 (МГУ, мехмат, 1963). Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно b , угол между боковыми гранями равен φ . Найдите сторону основания.

Опустим из точек B и C перпендикуляры на боковое ребро AS (рис. 10). Легко убедиться, что основанием обонх этих перпендикуляров является одна точка D (докажите!), а потому $\angle BDC = \varphi$.

Введем вспомогательный угол $\angle BAS = \alpha$ и проведем апофему SK

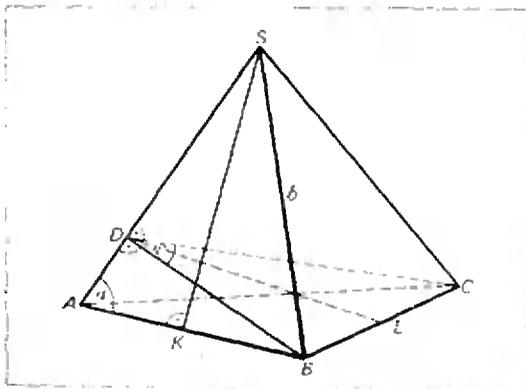


Рис. 10.

пирамиды. Ясно, что $AB = 2AK = 2b \cos \alpha$. Следовательно, для решения задачи достаточно вычислить $\cos \alpha$. Так как $\alpha < 90^\circ$, то из треугольника BAD имеем $\alpha = \operatorname{arcsin} \frac{BD}{AB}$.

В свою очередь длина отрезка BD определяется из треугольника BLD (DL — высота треугольника BDC):

$$BD = \frac{BL}{\sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{AB}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}$$

$$\alpha = \operatorname{arcsin} \frac{1}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}, \text{ откуда}$$

$$AB = b \sqrt{4 - \frac{1}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}}$$

Упражнения

1 (МФТИ, 1969). В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке D и стороны BC в точке E . Найдите углы треугольника, если

$$\frac{BD}{AD} = \frac{1}{2}, \frac{BE}{CE} = \frac{1}{3}$$

2 (МФТИ, 1969). В правильном тетраэдре $ABCD$ отрезок MN соединяет середину ребра AC с центром грани BDC , а точка E лежит на середине ребра AB . Найдите угол между отрезками MN и DE .

3 (МИФИ, 1971). В трапеции, основания которой равны a и b , через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите длину отрезка этой прямой, отсекаемого боковыми сторонами трапеции.

4 (МИЭТ, 1970). Дан треугольник ABC , на стороне AC взята точка E так, что $AE : EC = a$, на стороне AB взята точка D так, что $AD : DB = b$. Проведены отрезки CD и BE . Найдите отношение площади получившегося четырехугольника к площади данного треугольника.

5 (МГУ, физфак, 1969). В шар вписана пирамида, боковые ребра которой равны s . Основание ее — прямоугольник, стороны которого стягивают дуги α и β радиан в сечении шара плоскостями боковых граней. Определите радиус описанного шара.

6 (МГУ, мехмат, 1961). На окружности радиуса R даны две точки A и B , расстояние между которыми равно l . Какое наибольшее значение может принимать сумма $AC^2 + BC^2$ если точка C также лежит на этой окружности?

7 (НГУ, мехмат, 1969). Двугранный угол при боковом ребре правильной четырехугольной пирамиды равен α , радиус вписанного шара равен R . Найдите полную поверхность пирамиды.

Новосибирский государственный университет

В Новосибирском государственном университете имеются следующие факультеты: математический с отделениями математики, прикладной математики и механики; физический; естественный с отделениями химии и биологии; геолого-геофизический; гуманитарный с отделениями русского языка и истории; экономический со специализацией по экономической кибернетике.

Университет расположен в Академгородке в 20 километрах от Новосибирска. Обучение студентов проводится на базе научных институтов Сибирского отделения АН СССР: гидродинамики, математики, вычислительного центра, ядерной физики, теоретической и прикладной механики, теплофизики, физики полупроводников, автоматки и электротехники, геологии и геофизики, неорганической химии, органической химии, химической кинетики и горения, катализа, истории, филологии и философии, цитологии и генетики.

В этом номере мы помещаем образцы вариантов письменных экзаменов по математике и физике в НГУ в 1973 году.

М а т е м а т и к а

Механико-математический факультет,
физический факультет, экономический
факультет

В а р и а н т 1

1. Решить уравнение

$$\log_3(1-y)^2 = 5 + \sqrt{14 \log_{\sqrt{3}}(1-y) + 7 \log_{\sqrt{3}} \frac{(1+y)^2}{3}} - 5.$$

2. В треугольнике ABC биссектриса угла BAC равна a . Окружность, построенная на этой биссектрисе как на диаметре, делит стороны AB и AC в отношении 2:1 и 1:1, считая от точки A . Найти площадь треугольника ABC .

3. Решить уравнение

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{\frac{1}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}.$$

4. Дана четырехугольная пирамида $SABCD$ ($SA = SB = SC = SD = 5$), основанием которой является прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = CD = 4$, $AD = BC = 3$. Через диагональ BD под углом 30° к плоскости основания проведена плос-

кость, пересекающая ребро SC в точке S' .
Найти объем пирамиды $S'BCD$.

В а р и а н т 2

1. Решить уравнение

$$\log_{\sqrt{2}}(3x^2 - 1) + 2 = \sqrt{1 + \log_{\sqrt{x}} x^3 + \frac{6}{\log_{3x^2-1} 2 \sqrt{2}}}.$$

2. Одна из боковых сторон трапеции перпендикулярна основаниям и равна $2a$. На этой стороне как на диаметре построена окружность, которая делит другую боковую сторону на три отрезка. Отношение длин этих отрезков равно 1:2:2 (считая от верхнего основания). Найти площадь трапеции.

3. Решить уравнение

$$\sqrt{\cos^2 x - \cos^2 3x} = \sin 2x.$$

4. В правильном тетраэдре $SABC$ через вершину A параллельно ребру BC проведена плоскость, перпендикулярная боковой грани SBC (S — вершина тетраэдра, ABC — основание). Найти радиус шара, касающегося ребер SA , SB , SC и проведенной плоскости. Ребра тетраэдра равны a .

В а р и а н т 3

1. Решить уравнение

$$\log_x(x^3 + 1) = \sqrt{\log_{\sqrt{x}}[x^2(1 + x^2)] + 4}.$$

2. В трапеции $ABCD$ нижнее основание AD в 2 раза больше верхнего, равного a , угол A при основании равен 45° , а окружности, построенные на боковых сторонах как на диаметрах, касаются друг друга. Найти площадь трапеции.

3. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}} = \sin x + \cos x.$$

4. В куб с ребром a вписан шар. Через середины двух смежных ребер куба проведена плоскость, касающаяся шара. Найти площадь сечения куба этой плоскостью.

Факультет естественных наук, геолого-геофизический факультет

В а р и а н т 4

1. Решить уравнение

$$4 \log_x \sqrt{x} + 2 \log_{4x} x^2 = 3 \log_{2x} x^3.$$

2. В прямоугольном треугольнике ABC катеты AB и BC относятся, как 1 : 2. На гипотенузе AC выбраны точки M и N так, что отрезки BM и BN делят угол B на три равные части. Найти отношение отрезков BM и BN .

3. Решить уравнение

$$\sin^3 x + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} \right) = \cos^3 x.$$

4. В правильную треугольную усеченную пирамиду вписан шар радиуса r , касающийся оснований и боковых ребер. Найти объем пирамиды, если стороны оснований относятся, как 1 : 2.

В а р и а н т 5

1. Решить уравнение

$$\log_2^2 x + \log_4 x - 2 = 1.$$

2. В трапецию вписана окружность радиуса r . Точки касания с боковыми сторонами делят их соответственно в отношении 1 : 2 и 1 : 3, считая от верхнего основания. Найти площадь трапеции.

3. Решить уравнение

$$\sin x - \cos x = 4 \sin x \cos^2 x.$$

4. Три шара, касаясь друг друга, касаются некоторой плоскости. Точки касания шаров с плоскостью образуют треугольник со сторонами, равными 4, 2 и 3. Найти радиусы шаров.

Ф и з и к а

Физический факультет

На письменном экзамене по физике каждому абитуриенту предлагалось 6 задач.

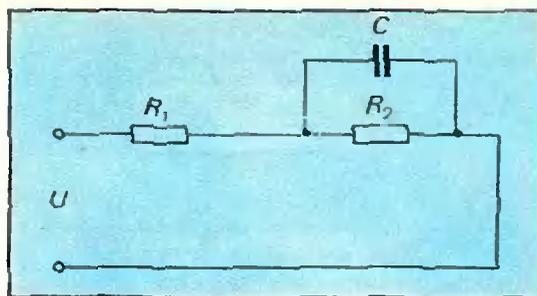


Рис. 1.

В первой задаче требуется объяснить физическое явление, демонстрируемое экзамениатором на демонстрационном столе.

Вторая и третья — легкие задачи, которые может решить почти каждый абитуриент. Четвертая и пятая — задачи, требующие достаточно уверенных знаний основных физических законов и некоторой сообразительности.

Шестая задача — повышенной трудности. Для ее решения надо уметь разбираться в непривычной или усложненной физической ситуации.

На решение задач отводилось 4,5 астрономических часа. В методических указаниях

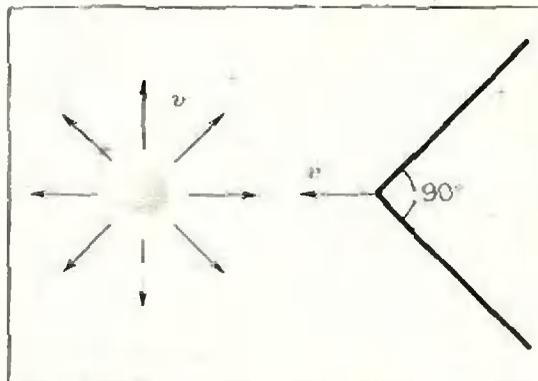


Рис. 2.

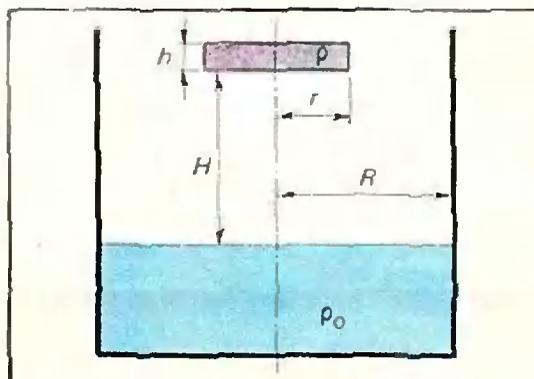


Рис. 3

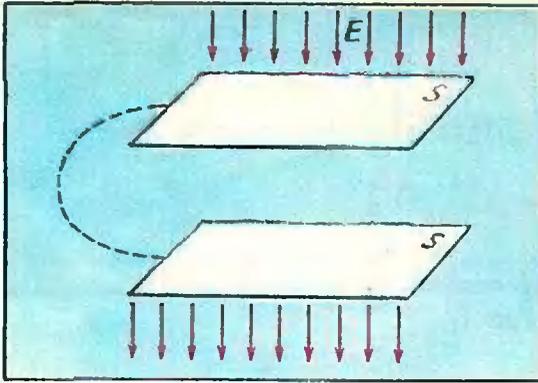


Рис. 4.

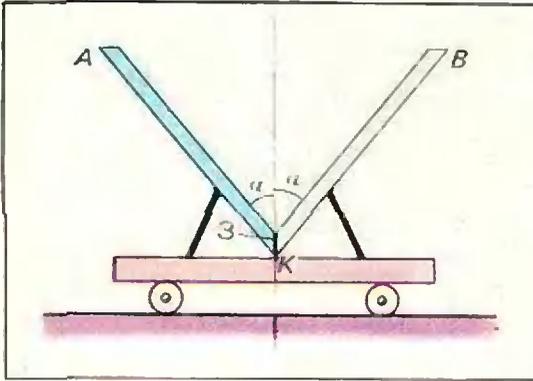


Рис. 5.

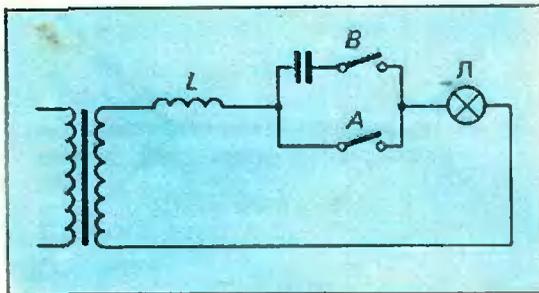


Рис. 6.

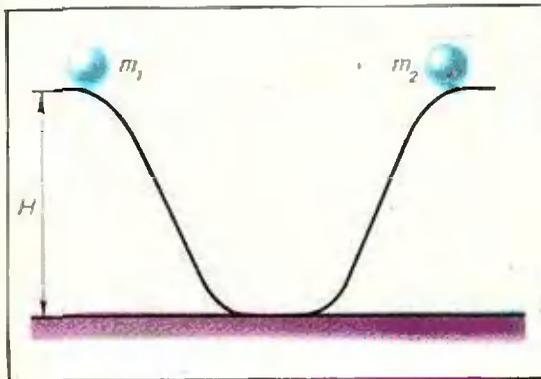


Рис. 7.

ях, раздаваемых абитуриентам вместе с вариантами задач, рекомендовалось вначале решать первые три задачи, а также подчеркивалось, что для получения высокой оценки не обязательно решение всех задач.

В приводимых ниже вариантах письменного экзамена по физике после условия каждой задачи в скобках указана ее оценка в баллах и процент решивших эту задачу.

Вариант 1

1. На столе имеются: два источника света — лампочка накаливания и лазер, дающий параллельный пучок лучей; фотозыщелочный элемент; гальванометр для регистрации фототока и плоскопараллельная стеклянная пластинка. Включается источник света, и регистрируется фототок. Затем на пути света ставится пластинка, и опять регистрируется ток. Один раз источником служит лампочка, второй раз — лазер. Оказалось, что фототок после введения пластинки в первом случае возрос, а во втором — уменьшился. Объяснить — почему. (5 б., 48%.)

2. Найти заряд на конденсаторе емкости C , если в цепи, изображенной на рисунке 1, течет постоянный ток. Напряжение на клеммах U , сопротивления в цепи R_1 и R_2 . (3 б., 82%.)

3. Бесконечный конус с углом раствора 90° движется к центру покоящегося шара со скоростью v (рис. 2). Направление скорости совпадает с осью конуса. В некоторый момент шар разбивается на очень большое число осколков, которые равномерно летят во все стороны с той же скоростью v . Какая часть осколков попадает на конус? Влиянием веса* пренебречь. (5 б., 52%.)

4. В цилиндр радиуса R , частично заполненный водой, падает цилиндрическая пробка радиуса r и высоты h (рис. 3). Начальная высота нижнего торца пробки над уровнем воды H ; начальная скорость равна нулю. Сколько энергии выделится в виде тепла после того, как движение пробки и воды прекратится? Плотность пробки ρ , плотность воды ρ_0 , ускорение свободного падения g . (6 б., 36%.)

5. Плоский конденсатор находится во внешнем однородном электрическом поле E , перпендикулярном пластинам (рис. 4). Площадь пластин конденсатора S . Какие заряды окажутся на каждой из пластин, если конденсатор замкнуть проводником накоротко? (7 б., 34%.)

6. Изогнутая под углом 2α узкая трубка АКВ неподвижно закреплена на тележке так, что каждое колено ее составляет угол α с вертикалью (рис. 5). Половина трубки АК заполнена водой, удерживаемой заслонкой З. Тележка может двигаться по горизонтальной плоскости. Заслонку З открывают. Найти скорость тележки в тот момент, когда середина столбика воды проходит самое ниж-

* Точнее, силы тяжести. (Прим. ред.)

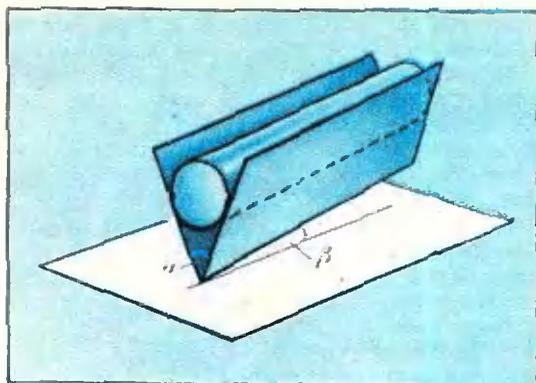


Рис. 8.

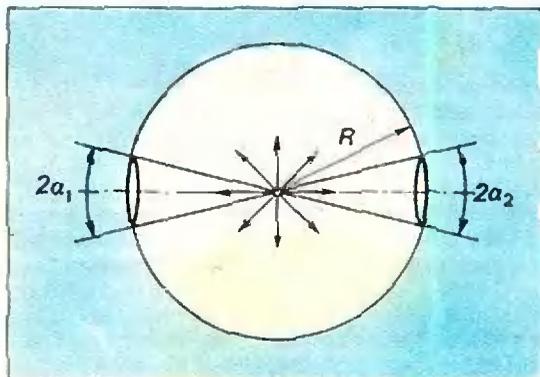


Рис. 9.

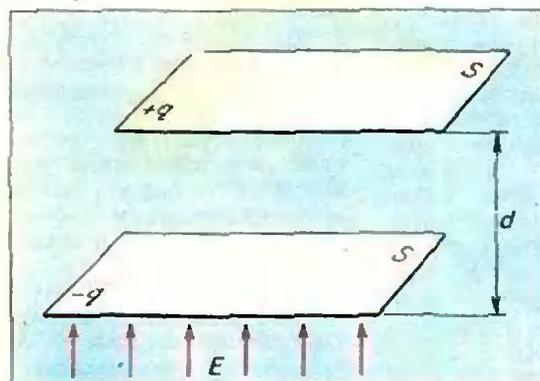


Рис. 10.

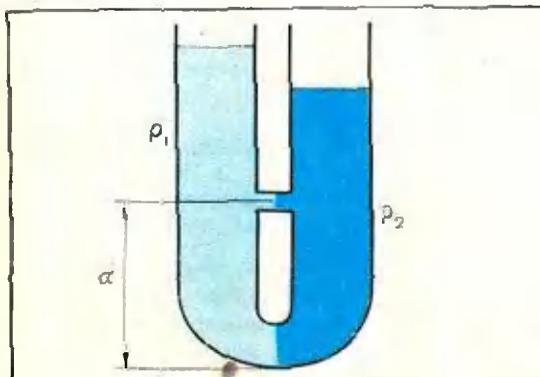


Рис. 11.

нее положение. Начальные скорости равны нулю. Трение и капиллярность не учитывать. Масса тележки с трубкой M , масса воды m , $AK = BK = l$. Ускорение силы тяжести g . (8 б., 10%.)

В а р и а н т 2

1. На столе собрана схема, изображенная на рисунке 6. Когда замыкают ключ A , лампочка L загорается тускло. Когда замыкают ключ B , свет становится очень ярким. Почему в первом случае лампочка горит слабее, чем во втором? (5 б., 62%.)

2. Два шарика с массами m_1 и m_2 одновременно начинают соскальзывать без трения и вращения с двух горок одинаковой формы и высоты H (рис. 7). При столкновении шарики слипаются. На какую высоту поднимутся слипшиеся шарики? (3 б., 80%.)

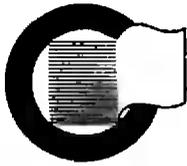
3. Определить ускорение цилиндра, скользящего по желобу, имеющему вид двугранного угла с раствором α (рис. 8). Ребро двугранного угла наклонено под углом β к горизонту. Плоскости двугранного угла образуют одинаковые углы с горизонтом. Коэффициент трения между цилиндром и поверхностью желоба k . (5 б., 40%.)

4. В центре незакрепленной сферы радиуса R и массы M разрывается снаряд массы m на мелкие осколки, разлетающиеся во все стороны равномерно с одинаковой скоростью v . В сфере имеются два круговых отверстия с центрами, лежащими на одном диаметре (рис. 9). Углы α_1 и α_2 близки, но не одинаковы. Осколки, не вылетевшие через отверстия, прилипают к поверхности сферы. Найти конечную скорость сферы. Сопротивлением воздуха и силой тяжести пренебречь. (6 б., 59%.)

5. Плоский конденсатор находится во внешнем однородном электрическом поле E , перпендикулярном пластинам конденсатора (рис. 10). Площадь каждой из пластин S , по пластинам равномерно распределены заряды $+q$ и $-q$, расстояние между пластинами d . Какую работу нужно совершить, чтобы перевернуть конденсатор на 180° вокруг оси, перпендикулярной полю? (6 б., 36%.)

6. В U-образной трубке с соприкасающимися внутренними стенками в равновесии находятся жидкости с плотностями ρ_1 и ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$) так, что граница раздела проходит точно через низ трубки (рис. 11). На высоте a от нижней точки трубки появилось небольшое отверстие и началось перетекание жидкости. Насколько изменится уровень в колене с жидкостью ρ_2 , когда перетекание жидкости прекратится?

Трубку считать достаточно тонкой для того, чтобы не происходило перемешивания жидкостей (возможен только разрыв столба жидкости в месте появления отверстия). (8 б., 34%.)



РЕЦЕНЗИИ,
БИБЛИОГРАФИЯ

Беседы старого учителя

«Беседы по физике». Трудно было бы придумать лучшее название для этой книги*). Михаил Иванович Блудов, опытный педагог и методист, решил поделиться с юными читателями своими знаниями, побеседовать с ними о физике. О чем конкретно? Ведь современная физика слишком обширна и многогранна, чтобы можно было рассказать о ней в столь небольшой по объему книге. Правда, лежащая перед нами первая часть «Бесед» охватывает только два раздела — механику и теплоту, но ведь и это очень много. Если же попытаться перечислить вопросы, которые здесь освещены, то станет совсем непонятно, как книга не разрослась до толстого фолианта.

А все дело в мастерстве автора. Он не излагает того, что читатель знает (или должен знать) из школьного курса, а если и говорит, к примеру, о законе сохранения энергии, то подходит к нему с совершенно новых для ученика позиций. Книга не дублирует, а дополняет, иллюстрирует школьный курс

*) Блудов М. И. Беседы по физике. Часть I, изд. 2-е, перераб. М., «Промсвещение», 1972, 176 с., 68 к.

физики. Причем все эти дополнительные сведения преподносятся, как правило, в форме живой, непринужденной беседы. Автор часто непосредственно обращается к читателю или прибегает к форме диалога. Так, в главе «Что такое работа» приводится разговор между Игорем и его отцом-инженером, и в результате сухое определение приобретает иное звучание, как бы обрастает живыми фактами из окружающей действительности.

Кинематика считается, пожалуй, наиболее скучным разделом физики. Однако М. И. Блудов сумел интересно рассказать не только об основных понятиях кинематики (скорость, ускорение и т. д.), но и о ее математическом аппарате — векторах и операциях с ними. Вслед за этим идет глава (или правильнее будет сказать — беседа) о сигналах безопасности на транспорте, об измерении скорости автомобиля, локомотива, судна, самолета, ветра, пули.

Примеры для иллюстрации основных положений механики заимствованы или из повседневной жизни, или из самых новейших научных и технических проблем, наиболее близких интересам школьника. Автор очень часто обращается к астрономии, космонавтике и другим смежным с физикой наукам.

Увлекательность повествованию придают исторические отступления, а подчас и целые разделы, носящие историко-познавательный характер. Таковы, например, беседа «Четыре затруднительных положения» о знаменитых апориях*) Зенона или «Беседа в венецианском арсенале», знакомящая с механикой Галилея.

В главе «Неосуществимая мечта» читателю предлагается доказать невозмож-

*) Апория (гр. *aporia*) в переводе означает «безвыходное положение, тупик, непреодолимая трудность».



ность реализации различных проектов вечных двигателей. Эта глава — прекрасная проверка знаний и сообразительности учащихся, она поможет выработать у них способность к логическим рассуждениям.

В главах, посвященных молекулярной физике и тепловым явлениям, также изложен обширный материал — от броуновского движения до элементов метеорологии. Говоря об агрегатных состояниях вещества, автор упоминает и о плазме, много места отводит кристаллофизике, поверхностным явлениям в жидкости и т. д.

Книга М. И. Блудова вышла вторым изданием. Предыдущее, появившееся в 1964 году, быстро завоевало популярность у читателей — школьников и педагогов. Книга была отмечена дипломом на Всесоюзном конкурсе научно-популярных книг, проводимом ежегодно обществом «Знание». Теперь содержание ее претерпело некоторые изменения, в частности, добавлен ряд новых разделов, отражены последние достижения в освоении космоса.

Мы уверены, что первая часть книги «Беседы по физике» принесет несомненную пользу всем читателям.

И. Зорич

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. Группа школьников покупала различные альбомы. Каждый ученик покупал альбомы одного типа, причем столько, сколько стоил один альбом этого типа. Все ребята расплачивались монетами по 10 копеек, каждый получил сдачу, и эта сдача не совпала ни у каких двух школьников.

Какую сдачу могли получать школьники и какое наибольшее число школьников могло быть в этой группе?

2. По реке плывет веселая лодка и рядом с ней щепка.

Что легче для гребца: обогнать щепку на несколько метров или на столько же отстать от нее?

3. В следующем примере цифры заменены буквами:

$$\begin{array}{r}
 \text{деталь} \\
 + \\
 \text{деталь} \\
 \hline
 \text{изделие}
 \end{array}$$

Восстановите запись.

4. На разных берегах ручья стоят взрослый человек и ребенок. У каждого в руках по доске, чуть более короткой, чем расстояние между берегами. Как они могут поменяться местами?

5. Найти число, сумма цифр которого равна разности между 328 и самим числом.

6. Вагон освещается шестью лампочками, соединенными последовательно. На каждой из них написано: 110 в, 25 вт. Одна из лампочек перегорела, и ее заменили другой, на которой написано: 110 в, 40 вт. Будет ли эта лампочка гореть ярче остальных?



Топологические опыты своими руками

Б. А. Кордемский

В этой статье мы предлагаем вам познакомиться с топологией — наукой, исследующей те свойства фигур, которые остаются неизменными при растяжениях без разрывов или сжатиях без склеивания. Для этого вам предстоит выполнить некоторые опыты: раскрасить карту, освободиться из веревочного «плена», разрезать бумажные полоски на нерасцепляющиеся кольца.

В сущности, ведь и сама топология началась с поисков раскрытия секретов некоторых занимательных геометрических головоломок, заинтересовавших в свое время Леонарда Эйлера и других математиков.

Четыре краски: меньше нельзя, больше не требуется

— Вадим, взгляни, какую я получила карту для раскрашивания (рис. 1). Раскрасить надо так, чтобы соседние районы не оказались одноцветными (районы, имеющие лишь одну общую точку, соседними не считаются; та-

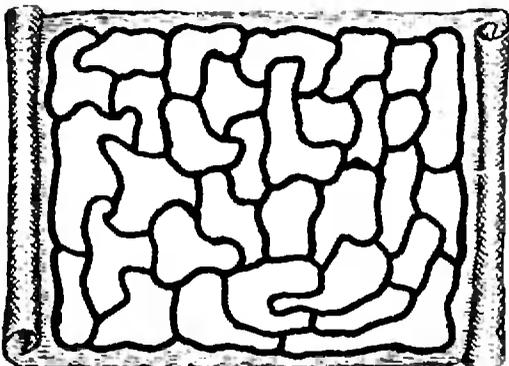


Рис. 1.

кую раскраску называют правильной). Кажется, мне хватит пяти красок.

— Верно, Оля, пяти красок достаточно, чтобы получить правильную раскраску любой карты на плоскости, — подтвердил Вадим, — но на твоём месте я попытался бы ограничиться четырьмя красками. Помнишь, мы слушали лекцию «О проблеме четырех красок», в которой ...

— Действительно, — перебила Оля Вадима, — ведь никем не придумана карта, для раскраски которой оказалась бы необходимой пятая краска. Это же одна из тех знаменитых старинных задач, которые до сих пор не поддаются усилиям математиков. «Проблема четырех красок», кажется, уже давно перешагнула столетний рубеж, а «воз и ныне там»?

— Ну, если считать от лекции, прочитанной в 1840 году, на которой немецкий астроном и геометр Август Мёбиус высказал первоначальный вариант этой проблемы без ее применения к раскрашиванию карт*), то прошло уже свыше 130 лет, — ответил Вадим, — если же считать от 1878 года, то столетний рубеж еще не достигнут.

— Почему ты упоминаешь еще какую-то вторую дату? — полюбопытствовала Оля.

— В 1878 году на одном из заседаний Британского географического общества выдающийся английский математик Артур Кэли четко сформулировал задачу: доказать, что каждую географическую карту на плоскости (или на глобусе) можно правильно закрасить четырьмя красками, — придав тем самым этой проблеме прикладное значение. Именно с этого момента задача получила особую популярность и привлекла к себе внимание многих математиков и любителей математических головоломок. Вскоре появился первый результат: дока-

*) «... на плоскости нельзя начертить пять областей так, чтобы каждые две из них имели общую границу» — из лекции Мёбиуса.

зательство достаточности пяти красок (тоже в Англии, через год после доклада Кэли), а полного доказательства достаточности четырех красок никто не придумал до сих пор.

— Погоди, Вадим, — опять вмешалась Оля. Ты говоришь, что нет полного доказательства, а разве есть какой-нибудь частный результат? Я ничего не знаю об этом.

— Да, Оля, некоторые результаты есть. В последнее время произошел значительный сдвиг в решении «проблемы четырех красок»^{*)}. В 1968 году математики Рингель и Янгс дали исчерпывающий ответ на вопрос о наименьшем числе красок, достаточных для правильной раскраски карты, нанесенной на любую поверхность, кроме ... поверхности обыкновенного глобуса, а следовательно, и плоскости.

— Я знаю, — заметила Оля, — почему ты сказал: «следовательно, и плоскости». Если бы была доказана достаточность или, наоборот, недостаточность четырех красок для раскраски карты, нанесенной на сферу, то тем самым «проблема четырех красок» была бы решена и для плоской карты, так как любую карту на сфере можно превратить в эквивалентную карту на плоскости, и наоборот.

— Правильно, Оля, но есть результаты и для плоских карт. В 1969 году математики Оре и Стемил доказали, что любую карту на плоскости, состоящую не более чем из 39 областей, можно раскрасить четырьмя красками, а в 1971 году советский математик Г. А. Донец доказал это утверждение для карт, состоящих из 41 области.

— Спасибо, Вадим. Пойду раскрашивать карту.

Через несколько дней Вадим заинтересовался, удалась ли Оле раскраска карты четырьмя красками.

— Конечно, — ответила Оля, — на моей карте оказалось всего 32 об-

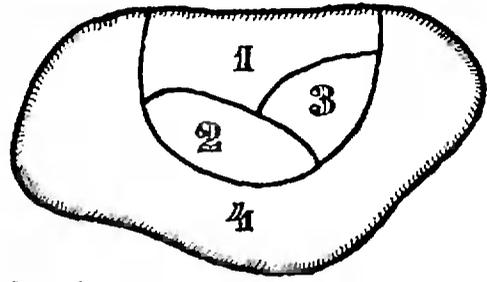


Рис. 2.

ласти. Я попробовала усложнить задачу и закрасить каждой краской ровно по восемь областей. Представь себе — получилось!

— Замечательно! Молодец, Оля! Попробую и я это сделать.

Задача 1. Попробуйте и вы раскрасить каждой из четырех красок ровно по восемь областей на Олиной карте.

Задача 2. Докажите, что найдется карта, которую нельзя закрасить меньше чем четырьмя красками.

Районирование области

Область, изображенная на рисунке 2, разбита на четыре района так, что каждый район граничит с тремя другими.

Задача 3. Перечертите внешний контур этой области в свою тетрадь и придумайте другое разбиение, а именно: разбейте область на шесть частей и раскрасьте пятью красками так, чтобы каждая из пяти красок соприкасалась со всеми остальными красками. Раскраска должна быть «правильной», то есть соприкосновение различных красок должно происходить не в одной или нескольких изолированных точках, а непременно по некоторой линии.

«Плен» из шнуров

В поле зрения топологии находятся и свойства переплетенных линий, в том числе узлы. Топология умеет объяснить секреты «крепкого» и «ложного» узлов, известных ткачам и мо-

^{*)} Вероятно, Вадим прочитал об этом в книге: Харар и Ф. Теория графов. М., «Мир», 1973, с. 158, 162.

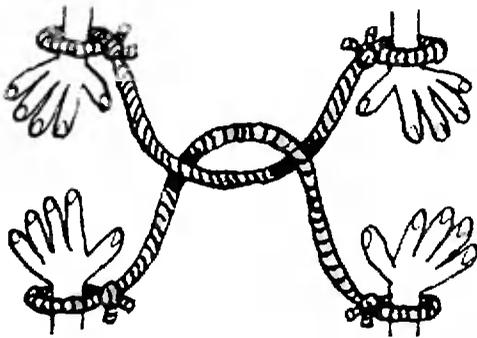


Рис. 3.



Рис. 4.

рякам, альпинистам и фокусникам на эстраде.

Так, например, топологический анализ ситуаций, создавшейся для двух озорников (рис. 3), показывает, что расцепиться они могут, не разрезая шнуров и не развязывая узлов на запястьях рук.

Но как это осуществить практически? Снять шнур через кисти рук невозможно.

Задача 4. Предположим, что озорники расцепились. Шнуры остались привязанными к рукам каждого из них. Пусть теперь они завяжут по обыкновенному узлу на своих шнурах, не отвязывая их от рук. Это возможно.

Софизм

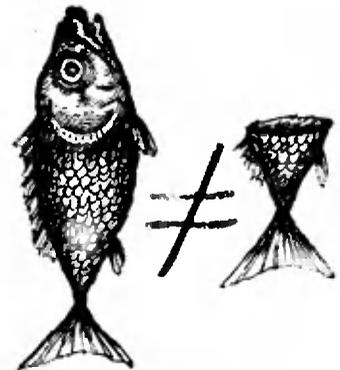
Ученик 7-го класса объясняет своим одноклассникам доказательство «теоремы»: «Квадратный корень из любого натурального числа есть число иррациональное». Он рассуждает так. «Пусть дано натуральное число N , и

$$\sqrt{N} = \frac{p}{q}, \text{ где } p \text{ и } q —$$

натуральные числа. Пусть

дробь $\frac{p}{q}$ — несократимая

(ведь любую дробь можно сокращать, пока у числителя



и знаменателя не сократятся все общие делители). Тогда $\frac{p^2}{q^2} = N$. В левой части стоит несократимая дробь (ведь p и q не имеют общих делителей), а в правой части уравнения — заведомо целое число. Но дробное число не может быть равно целому. Значит, для любого натурального N число \sqrt{N} не является рациональным, откуда следует, что оно иррациональное, что и требовалось доказать».

Где была допущена ошибка?



ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ,
РЕШЕНИЯ

К статье «Метод вспомогательного элемента»

1. $\frac{\pi}{2}$, $\arccos \frac{4}{5}$, $\arcsin \frac{4}{5}$. Указание. BD — вспомогательный отрезок.

2. $\varphi = \arccos \frac{5\sqrt{3}}{18}$. Указание. Ребро тетраэдра — вспомогательный отрезок.

3. $\frac{ab}{a+b}$.

4. $\frac{S_{\square}}{S_{\Delta}} = \frac{ab(a+b+2)}{(a+1)(b+1)(a+b+1)}$.

Указание. Опустить перпендикуляры из точек A , E и B на CD , затем найти, в каком отношении делятся BE и CD . Вспомогательный элемент — площадь.

5. $R = \frac{c}{\sqrt{2(\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2})}}$. Указание.

Вспомогательный элемент — площадь.

6. $4R^2 + 2R\sqrt{4R^2 - l^2}$. Указание. Вспомогательный элемент — угол CAB .

7. $4R^2 \frac{(1 + \sqrt{-\cos \alpha})^3}{(1 + \cos) \sqrt{-\cos \alpha}}$. Указание.

Вспомогательный элемент — либо сторона основания пирамиды, либо угол при вершине пирамиды в ее сечении, проходящем через точки касания шара и двух противоположных боковых граней пирамиды.

К статье «Новосибирский государственный университет»

Математика

Вариант 1

1. ОДЗ: $y < 1$, $y \neq -1$. $14 \log_{\sqrt{3}}(1-y) + 7 \log_{\sqrt{3}} \frac{(1+y)^2}{3} - 5 = 14 \log_3(1-y^2) - 19$. Положим $\log_3(1-y^2) = u$.

Уравнение примет вид $u = 5 + \sqrt{14u - 19}$. Переносим 5 в левую часть, возводя в квадрат и решая полученное квадратное уравнение, находим $u = 22$, $2 \log_3(1-y^2) = 22$, откуда $1-y^2 = 3^{11}$, $y^2 = 1-3^{11}$. Решений нет.

2. Легко видеть, что $\triangle AKD = \triangle ALD = \triangle CLD$ (рис. 1). Отсюда $CD = a$, $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$ и $BD = \frac{3}{4}a$. По теореме Пифагора из $\triangle BKD$ и $\triangle CLD$ находим $KD^2 = DL^2 = BD^2 - KB^2 = CD^2 - 4KB^2$, откуда $3KB^2 = \frac{7}{16}a^2$, $KB = \frac{a}{4} \sqrt{\frac{7}{3}}$. Далее, $KD = \sqrt{BD^2 - KB^2} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{5}{3}}$, $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}KD(AB + AC) = \frac{1}{2}KD \cdot 7KB = \frac{7a\sqrt{35}}{48}$.

3. Преобразуем уравнение к виду $2 \cos(\frac{\pi}{6} - x) = \sqrt{\frac{1}{2} + \cos(\frac{\pi}{6} - x)}$. Пусть $\cos(\frac{\pi}{6} - x) = u$. Решая уравнение $2u = \sqrt{\frac{1}{2} + u}$, находим $u = \frac{1}{2}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \dots$

4. Пусть O — точка пересечения AC и BD (рис. 2). $SO \perp$ пл. BCD (почему?), и перпендикуляр $S'P$ на плоскость BCD попадает на OC . Но $OC = 2,5$, поэтому $\sphericalangle OSC = 30^\circ$. Пусть $S'P = x$. Тогда $PC = \frac{x}{\sqrt{3}}$. Построим $PF \perp OB$, $CT \perp OB$. Имеем $FP = \sqrt{3}x = 3PC$ (из $\triangle S'FP$, $\sphericalangle F = 30^\circ$). Из $\triangle OCB$ ($BC = 3$, $OC = OB = 2,5$) находим $S_{\triangle OCB} = 3$, $CT = \frac{12}{5}$, $CT = PF + PC \sin \sphericalangle COB = 3PC + PC \frac{CT}{OC}$. Отсюда

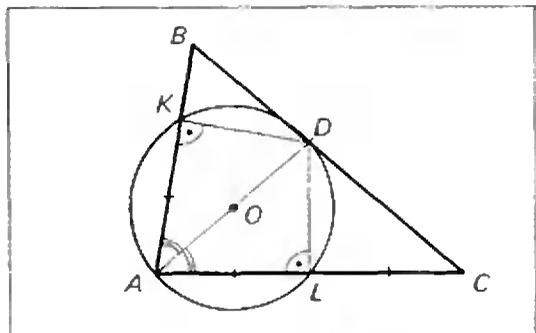


Рис. 1.

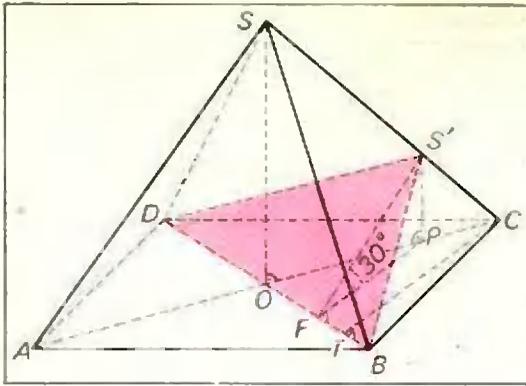


Рис. 2.

$$PC = \frac{20}{33}, \quad S'P = \frac{20\sqrt{3}}{33}, \quad V_{S'BCD} = \frac{40\sqrt{3}}{33}.$$

Вариант 2

$$1. x_1 = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{3}},$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{4 + \sqrt{2}}{12}}.$$

$$2. \frac{a^2(2 + 3\sqrt{6})}{5}.$$

$$3. x = \frac{k\pi}{2}, \quad x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k - \text{целое}).$$

$$4. \frac{a}{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}.$$

Вариант 3

$$1. x = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}.$$

$$2. \frac{6a^2}{3\sqrt{2} - 1}.$$

$$3. x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad x = 2k\pi \quad (k - \text{целое}).$$

$$4. \frac{3a^2}{8}.$$

Вариант 4

$$1. x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = \frac{1}{8}.$$

$$2. (3\sqrt{3} - 4):1.$$

$$3. x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k - \text{целое}).$$

$$4. \frac{7\sqrt{3}}{4} r^2.$$

Вариант 5

$$1. x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = 2, x_4 = \frac{1}{4}.$$

$$2. r^2 = \frac{8\sqrt{3} + 9\sqrt{2}}{6}.$$

$$3. x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad x = \operatorname{arctg}(\sqrt{2} - 1) + k\pi, \quad x = \operatorname{arctg}(-1 - \sqrt{2}) + k\pi, \quad (k - \text{целое}).$$

$$4. 3, 4/3, 3/4.$$

Физика

Вариант 1

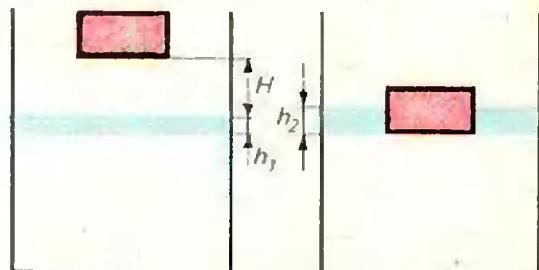
1. Величина фототока пропорциональна световому потоку, падающему на фотозащитный элемент. Когда источником света является лазер и на пути параллельного пучка света ставится стеклянная пластинка, фототок уменьшается потому, что часть светового потока отражается от поверхности пластинки и не попадает на фотозащитный элемент. Конечно, такой же эффект «потери» светового потока имеет место и для лампочки. Однако существует и другой эффект, связанный с преломлением лучей, падающих на пластинку под некоторым углом, и приводящий к увеличению светового потока, а значит, и величины фототока. Пластинка играет роль как бы фокусирующего устройства, посылающего на фотозащитный элемент дополнительный световой поток, прежде не попадавший на него. В данном случае, очевидно, этот эффект превышает эффект потерь.

$$2. q = CU_C, \text{ но } U_C = U_{R_2} = \frac{UR_2}{R_1 + R_2},$$

поэтому

$$q = \frac{CUR_2}{R_1 + R_2}.$$

3. Рассмотрим осколки, летящие вверх и вниз относительно земли. В системе отсчета, связанной с конусом, они движутся вправо под углом $\pm 45^\circ$ к горизонту соответственно, то есть вдоль образующих конуса, и на него не попадут. Все осколки, находящиеся справа от рассмотренных, а их прак-



а)

б)

Рис. 3

тически половина, рано или поздно попадут на конус.

4. За счет уменьшения потенциальной энергии пробки будет совершена работа по подъему вытесненной воды и выделится тепло:

$$\Delta E_{\text{п}} = A + Q. \quad (1)$$

Будем все высоты отсчитывать от нижнего торца плавающей пробки (рис. 3, а и б). Тогда

$$\Delta E_{\text{п}} = m_{\text{пг}}(H + h_1) \quad (2)$$

и

$$A = m_{\text{вг}} \frac{h_2 - h_1}{2}. \quad (3)$$

Массу вытесненной воды (она показана на рисунке 3, а и б синим) можно записать так:

$$m_{\text{в}} = \rho_0 \pi R^2 h_1 = \rho_0 \pi (R^2 - r^2) h_2, \quad (4)$$

а условие плавания пробки — так:

$$\rho_l r^2 h = \rho_0 r^2 h_2. \quad (5)$$

Тогда из равенств (1) — (5) получим

$$Q = \rho g l r^2 h \left[H + \frac{\rho}{2\rho_0} h \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \right].$$

5. $q = CU = \frac{\epsilon_0 S}{d} Ed = \epsilon_0 SE.$

6. Запишем закон сохранения энергии:

$$\Delta E_{\text{п}} = E_{\text{кТ}} + E_{\text{кВ}}.$$

Здесь $\Delta E_{\text{п}} = mg \frac{l}{4} \cos \alpha$ — уменьшение потенциальной энергии воды, $E_{\text{кТ}} = \frac{Mv^2}{2}$ — кинетическая энергия тележки, $E_{\text{кВ}} = \frac{m}{2}(V_{\text{г}}^2 + V_{\text{в}}^2)$ — кинетическая энергия воды, движущейся как по горизонтали (со скоростью $V_{\text{г}}$), так и по вертикали (со скоростью $V_{\text{в}}$).

Обозначим скорость воды относительно трубки через u , тогда относительно земли

$$V_{\text{г}} = u \sin \alpha - v, \quad V_{\text{в}} = u \cos \alpha.$$

Согласно закону сохранения импульса

$$m(u \sin \alpha - v) = Mv, \quad u = \frac{v}{\sin \alpha} \left(1 + \frac{M}{m} \right).$$

Тогда окончательно:

$$mg \frac{l}{4} \cos \alpha = \frac{Mv^2}{2} + \frac{m}{2} \left[\frac{M^2}{m^2} v^2 + v^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha \left(1 + \frac{M}{m} \right)^2 \right],$$

откуда

$$v = \frac{m}{M} \sqrt{\frac{gl \cos \alpha}{2 \left(1 + \frac{m}{M} \right) \left[1 + \left(1 + \frac{m}{M} \right) \operatorname{ctg}^2 \alpha \right]}}.$$

Вариант 2

1. Мощность, выделяемая в лампочке, пропорциональна квадрату тока в цепи. Со-

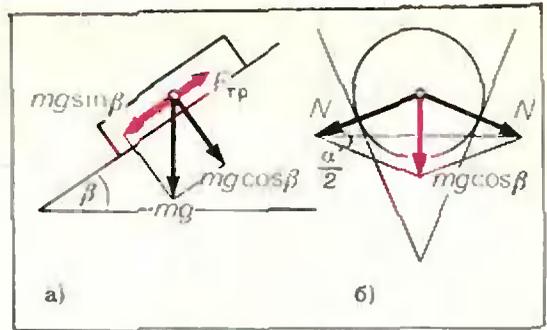


Рис. 4.

гласно закону Ома для переменного тока

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}},$$

где R — активное сопротивление, ωL — индуктивное и $\frac{1}{\omega C}$ — емкостное сопротивление.

В первом случае, когда замыкают ключ A , в цепи есть только активное и индуктивное сопротивления, во втором случае добавляется еще и емкостное сопротивление.

Если $\frac{1}{\omega C}$ близко ωL , то $I_1 < I_2$, и лампочка во втором случае горит более ярко.

2. $h = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 H.$

3. Запишем уравнение движения цилиндра вдоль желоба (рис. 4, а):

$$ma = mg \sin \beta - F_{\text{тр}},$$

где $F_{\text{тр}} \approx 2kN$ (N — сила реакции опоры).

Из рисунка 4, б

$$N = \frac{mg \cos \beta}{2 \sin(\alpha/2)}.$$

Поэтому

$$a = g \left(\sin \beta - \frac{k \cos \beta}{\sin(\alpha/2)} \right).$$

4. Запишем закон сохранения импульса для оси, проходящей через центры отверстий: $m_1 v \cos \alpha_1 - m_2 v \cos \alpha_2 = [M + m - (m_1 + m_2)]u.$

Здесь m_1 и m_2 — массы осколков, вылетающих через соответствующие отверстия, u — скорость сферы.

Так как осколки разлетаются равномерно по всем направлениям, то массы осколков m_1 и m_2 пропорциональны площадям поверхностей соответствующих сферических сегментов, то есть

$$\frac{m_1}{m} = \frac{S_1}{S} \quad \text{и} \quad \frac{m_2}{m} = \frac{S_2}{S},$$

где $S = 4\pi R^2$, $S_1 = 2\pi R h_1 = 2\pi R^2 (1 - \cos \alpha_1)$, $S_2 = 2\pi R^2 (1 - \cos \alpha_2)$. Отсюда

$$m_1 = \frac{m}{2} (1 - \cos \alpha_1) \text{ и } m_2 = \frac{m}{2} (1 - \cos \alpha_2).$$

Поскольку углы α_1 и α_2 близки, можно считать, что $\cos \alpha_1 \approx \cos \alpha_2 \approx \cos \alpha$.

Поэтому окончательно получим

$$u = v \frac{m_1 \cos \alpha_1 - m_2 \cos \alpha_2}{M + m - (m_1 + m_2)} \approx \\ \approx v \frac{m \cos \alpha (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)}{2(M + m \cos \alpha)}$$

5. Перевернуть конденсатор на 180° вокруг горизонтальной оси — это значит поменять местами положительно и отрицательно заряженные пластины.

Поскольку работа по перенесению заряда в электростатическом поле не зависит от формы пути, то для определенности будем считать, что нижняя пластина закреплена, а верхнюю пластину «пронесли» сквозь нижнюю и расположили опять на расстоянии d от неподвижной.

Подсчитаем отдельно работу в поле, созданном неподвижной пластиной, и во внешнем поле E . Если на первом этапе поле нижней пластины само совершило работу по сближению пластин, то на втором этапе пришлось извне совершить такую же работу по разведению пластин. Следовательно, суммарная работа в первом поле равна нулю, и остается только работа против внешнего поля, которая равна

$$A = FS = 2qEd.$$

Можно было подсчитать работу как изменение энергии конденсатора:

$$A = W_2 - W_1 = \\ = \frac{CU_2^2}{2} - \frac{CU_1^2}{2} = \frac{Cd^2}{2} [(E + E_K)^2 - \\ - (E - E_K)^2] = 2Cd^2EE_K = 2qEd.$$

6. Так как на уровне отверстия давление в левом колене больше, чем в правом, первая жидкость, разорвав столб второй на две части, будет стекать в правое колено. При этом часть второй жидкости, которая была над отверстием, поднимается, а которая была под отверстием, начнет перетекать в левое колено через низ трубки. Движение прекратится, когда давления слева и справа на уровне отверстия сравняются. Пусть

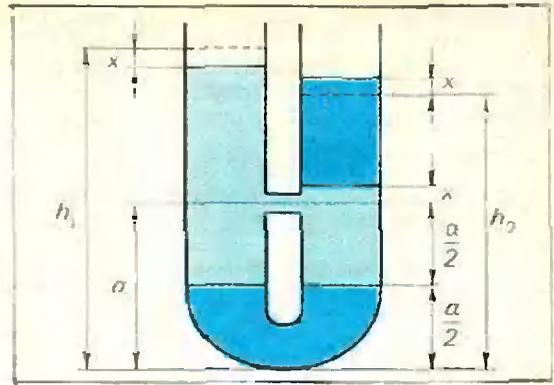


Рис. 5.

уровень жидкости в правом колене поднялся на x , тогда в левом колене уровень должен опуститься также на x . Так как давления на уровне дна трубки тоже одинаковы, жидкости в трубке расположатся так, как показано на рисунке 5.

Запишем условие равенства давлений на уровне отверстия:

$$(h_1 - a - x) \rho_1 = (h_2 - a) \rho_2 + x \rho_1, \quad (1)$$

где h_1 и h_2 — начальные высоты первой и второй жидкостей соответственно.

Из условия равенства начальных давлений внизу трубки имеем

$$h_1 \rho_1 = h_2 \rho_2. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что

$$x = \frac{a}{2} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right).$$

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант», 1974, №1)

1. $\frac{1}{6}$.
2. Вблизи берега (на мелких местах) из-за трения воды о дно скорость частиц воды тем больше, чем выше они над дном. Поэтому верхние слои воды «обгоняют» нижние.
3. 473.
4. Чай холоднее в стакане с сахаром.
5. 2401.
6. Изменится.

Корректор Н. Б. Румянцова

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 16/XI-73 г. Подписано в печать 28/XII-73 г. Бумага $70 \times 100 \frac{1}{16}$. Физ. печ. л. 4 Усл. печ. л. 5,2 Уч.-изд. л. 5,84 Тир. 35000 экз. Т-20129 Цена 30 коп. Зак. 2304

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров
СССР по делам издательства, полиграфии
и книжной торговли, г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

Первый полет к Венере

Венера является ближайшей к Земле планетой Солнечной системы. Еще совсем недавно наши представления о строении и свойствах Венеры были весьма скромными и приблизительными. Плотная атмосфера планеты не позволяла увидеть какие-либо детали ее поверхности, и ученые спорили о том, является ли поверхность Венеры пустыней или она покрыта океаном. Не было точных данных о периоде собственного вращения Венеры, о химическом составе ее атмосферы, температуре и давлении газов на различных высотах и т. п.

Использование автоматических межпланетных станций позволяет детально исследовать планеты Солнечной системы, получить огромное количество точных сведений об их характеристиках. Однако создание таких станций связано с огромными техническими трудностями.

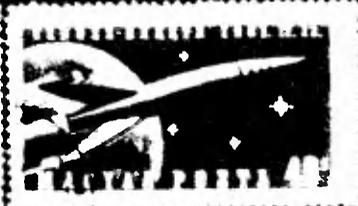
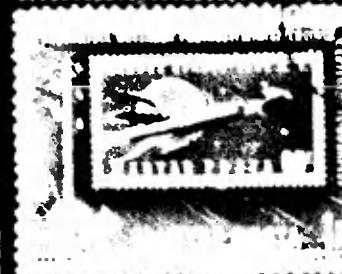
Тринадцать лет тому назад, 12 февраля 1961 года, в Советском Союзе впервые был успешно осуществлен запуск управляемой автоматической станции с борта искусственного спутника на межпланетную трассу. Станция «Венера-1», преодолев 270 миллионов километров, прошла вблизи планеты.



Общий вес станции был равен 643,5 кг. На станции находилась научная аппаратура, предназначенная для исследования космических лучей, измерения магнитных полей, регистрации микрометеоров и заряженных частиц, заполняющих космическое пространство.

Запуск «Венеры-1» открыл новую главу в исследовании космоса. В последующие годы СССР и США не раз отправляли автоматические станции к ближайшим планетам.

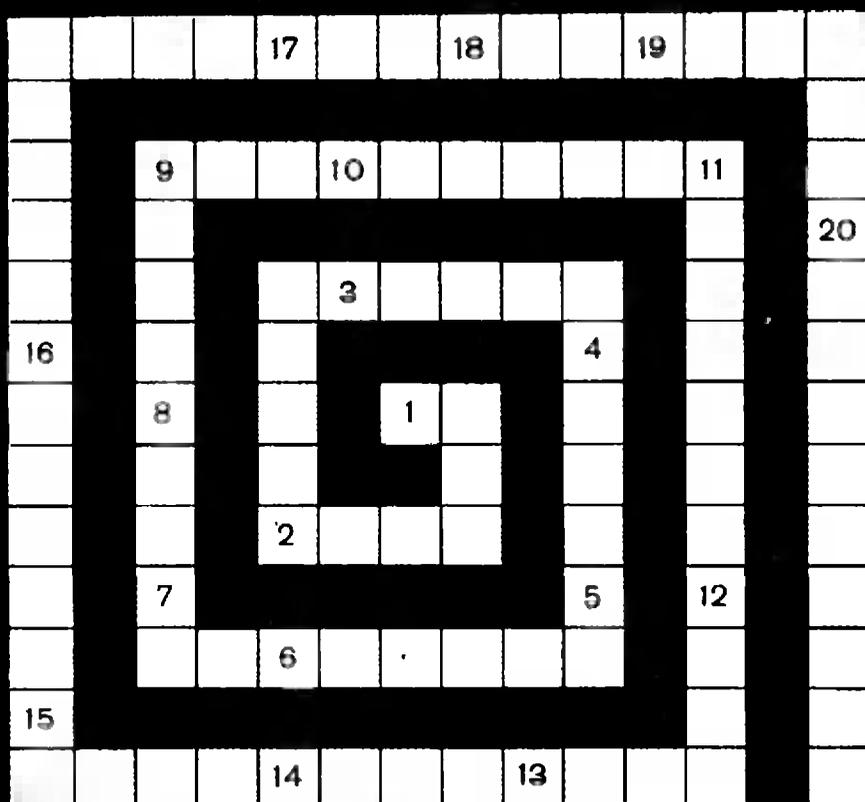
В Советском Союзе и в ряде других стран были выпущены почтовые марки,



посвященные запуску «Венеры-1». Мы приводим здесь марки СССР, Венгрии и Кубы, приуроченные к этому событию. На советской марке достоинством 10 копеек воспроизведен общий вид станции и схема ее сближения с Венерой. На двух венгерских марках показан момент отделения автоматической станции от корпуса ракеты-носителя.

В. А. Лешковцев





Чайнворд

1. Французский математик, который участвовал в наполеоновском походе в 1812 году и был пленен русскими. 2. Древнегреческий математик, автор первого дошедшего до наших дней теоретического трактата по математике. 3. Французский математик, основоположник проектной и начертательной геометрии, участник сражения при Ла-Рошелле в 1628 г. 4. Гениальный французский математик XIX века, убитый на дуэли. 5. Древнегреческий математик, первый открывший формулу Герона. 6. Мера длины, равная примерно четверти дециметра. 7. Известный французский геометр и общественный деятель (в 1792—94 г.г. был морским министром Франции). 8. Голландский математик XVII в., впервые высказавший основную теорему алгебры, доказанную строго в 1799 г. Гауссом. 9. Единица угловой меры, равная $1/32$ окружности. 10. Математик XX века, который не существовал и

не существует. 11. Важнейшее понятие высшей математики, истоки которого имеются у Евдокса и Архимеда. 12. Математик, в честь которого названо число π , вычисленное с 34 десятичными знаками. 13. Один из «семи мудрецов» древности, открывший ряд теорем элементарной геометрии (равенство углов при основании равнобедренного треугольника и др.). 14. Преднамеренно неверный вывод. 15. Математик, друг Декарта, в его честь названы простые числа вида $2^p - 1$ (где p — простое). 16. Повесть С. В. Ковалевской, первой русской женщины — математика. 17. Счетный прибор, которым пользовались древние греки. 18. Среднеазиатский математик, открывший формулу бинома Ньютона. 19. Среднеазиатский ученый (философ, математик, врач и поэт), чье 1000-летие со дня рождения будет отмечаться в 1980 году. 20. Известный советский астрофизик, академик.