Квант

1974
4

Научно-популярный физико-математический журнал

На приведенной здесь гравюре изображен бывший дворец царицы Прасковьи Федоровны (справа), в котором первоначально размещалась Академия наук, в том числе ее Физический кабинет. Рядом здание Кунсткамеры Петра I, также переданное Академии наук. Гравюра взята из книги «План столичного города Санкт-Петербурга с изображением знатнейших оного проспектов, изданный трудами Императорской Академии наук и художеств» в 1753 году.

Основан в 1970 году.

Квант

1974
4

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ

На первой странице обложки воспроизведена картина художника Иващенко «Прыжок»

АКАДЕМИЯ НАУК СССР 250

28 января (по старому стилю) 1724 года был опубликован сенатский указ об учреждении Академии наук. Указ извещал, что «Всепресветлейший державнейший Петр Великий... указал учинить Академию, в которой бы учились языкам, также протчим наукам и знатным художествам и переводили бы книги» *).

В соответствии с указом Академия являлась научно-исследовательским учреждением, при котором состояли университет и гимназия. Главная задача академиков определялась так: «Должность их: все тое, что уже в науках учинено — свидетельствовать, что к исправлению и размножению оных потребно есть — производить, что каждый в таком случае изобрел — сообщать и секретарю вручать. О всех декувертах, которые свидетельствованию и апробации их поданы будут, имеют они непристрастное рассуждение чинить: сиречь истины ли оные, великой ли или малой пользы суть и известны ли оные были прежде всего или нет!».

Со дня своего основания Академия наук стала играть выдающуюся роль в прогрессе всех отраслей знания, в изучении природных богатств страны. С Академией наук связаны как отдельные достижения в отечественной науке, так и создание новых направлений.

Особенно выдающуюся роль стала играть Академия наук после победы Великой Октябрьской социалистической революции.

Сквозь дым полыхающего пожара гражданской войны В. И. Ленин с гениальной прозорливостью видел контуры будущего социалистического советского государства. Он понимал, что в построении социализма наука должна играть выдающуюся роль. Этим объясняется большое внимание, которое В. И. Ленин уделял развитию Академии наук. Идя по пути, намеченному великим Лениным, Академия наук подчинила всю свою деятельность развитию социалистического общества. Выполняя свой патриотический долг перед Родиной, ученые Академии наук самоотверженно трудились и вместе с советским народом, его армией ковали победу в Великой Отечественной войне.

Крупные научные достижения советских ученых обеспечили высокий технический уровень развития промышленности и всего народного хозяйства страны. Академия наук СССР всемерно содействовала созданию национальных научных центров — Академий наук союзных республик, филиалов Академии наук. За последние годы возникли новые научные центры в Сибири, на Урале, Дальнем Востоке.

Успехи советских ученых сейчас получили всемирное признание.

---

*) Полное собрание законов, т. VII СПБ, 1830, № 4443.

АКАДЕМИЯ НАУК И ПРОГРЕСС МАТЕМАТИКИ

Б. В. Гнеденко

В мае 1974 года будет торжественно отмечаться выдающееся событие в истории отечественной науки — 250-летие Академии наук СССР. В связи с этим мы помещаем в настоящем номере две статьи, рассказывающие о вкладе Академии наук в развитие математики и физики в дореволюционный период. В следующем номере мы расскажем о развитии советской математики и физики.

Советский народ отмечает знаменательный праздник в жизни нашей страны — двухсотпятидесятилетний юбилей высшего научного учреждения — Академии наук СССР. Большой и славный путь прошла Академия наук за четверть тысячелетия своего существования, и этот путь отмечен замечательными открытиями во всех областях научного знания, огромной помощью развитию народного хозяйства и культуры нашей Родины. С Академией наук тесно связан прогресс просвещения буквально с первых дней ее существования.

Указ об учреждении Академии наук был издан 28 января 1724 года по старому стилю. Этому предшествовала длительная переписка Петра I со многими выдающимися учеными того времени — Г. В. Лейбницем, Х. Вольфом и другими — по поводу путей быстрого приобщения России к научному прогрессу. И еще в 1718 году, когда в России не было не только Академии наук и университетов, но и налаженной системы школьного образования, Петр писал: «Сделать Академию, а ныке приискать из русских кто учен и к тому склонность имеет . . .»

По планам Петра Петербургская Академия должна была значительно отличаться от академий, уже имевшихся в Западной Европе. И если иностранные академии были лишь местом, где подводились итоги научных исследований, проводившихся в университетах, частных лабораториях, домашней обстановке, то высшее научное учреждение России должно было стать основным источником науки в России, принимать участие в обучении молодых людей и приобщении их к научным исследованиям, а также играть основную роль в популяризации научных знаний. Тем самым, как тогда было сказано, «. . . одно здание с малыми убытками, тое же бы с великой пользою чинило, что в других странах разные собрания чинят».

По проекту, который был одобрен Петром, академики обязывались обучать молодых людей и готовить себе научную смену. И эти обязанности большинством ученых Академии выполнялись в действительности. Уже с первых дней существования Академии в ней начали воспитываться молодые люди, многие из которых впоследствии стали выдающимися деятелями науки, культуры и просвещения России. Вспомним сейчас, что студентами Академии были поэт В. К. Тредиаковский, путешественник и географ С. П. Крашенинников, ученый и литератор М. В. Ломоносов.

При Академии первоначально были организованы гимназия и университет, поскольку в ту пору не было других источников, откуда Академия могла бы получать научно подготовленную молодежь. Контингент студентов был определен в 30 человек, был разработан учебный план для их обучения. При этом подчеркивалось специально «. . . смотреть, чтоб один студент вдруг многими лекциями отягчен не был» Чтобы была реальная возможность поддерживать число студентов университета, была учреждена гимназия, при которой предписывалось 20 человек «содержать на коште академическом и годных производить в студенты, а негодных отдавать в Академию художеств».

Академия была основана, но в России не было ученых. Вот почему первые академики были приглашены из-за пределов страны. Всего были приглашены 23 академика. Их выбор был исключительно удачен, подавляющее большинство из них энергично принялись за организацию работы и научные исследования. И уже очень скоро Академия имела превосходную для своего времени химическую лабораторию, астрономическую обсерваторию, физический кабинет, механическую и оптическую мастерские, типографию, библиотеку и ряд других учреждений.

Математика с первых дней существования Академии играла в ней значительную роль. Среди 23 приглашенных академиков семь были математиками. Имена многих из них прочно вошли в историю математики: Николай и Даниил Бернулли, Леонард Эйлер, Христиан Гольдбах.

Петр I не дожил до торжества открытия Академии: ее первое собрание состоялось лишь в августе 1725 года, спустя полгода после его смерти. Но начало работы было достаточно успешным: регулярно проходили собрания, началось бурное изучение страны и ее природных ресурсов, проводилось систематическое изучение важнейших явлений природы, выполнялись первоклассные математические исследования. Начиная с 1728 года Академия стала выпускать научный журнал «Комментарии Петербургской Академии», а через шесть лет после этого Даниил Бернулли, к тому времени возвратившийся в Швейцарию, писал Л. Эйлеру: «Не могу Вам довольно объяснить, с какой жадностью повсюду спрашивают о Петербургских мемуарах . . . Желательно, чтобы их печатание было ускорено». Речь шла при этом о математических работах, которые были опубликованы в этом первом научном русском журнале. Так уже на заре своего существования Академия превратилась в один из крупнейших научных центров мира, в которых проводились математические исследования.

Д. Бернулли (1700—1782) проработал в России всего лишь несколько лет, но и за этот срок он оставил заметный след в истории русской науки. Именно ему Академия обязана приглашением в свой состав Л. Эйлера. В изданиях Академии Д. Бернулли опубликовал ряд работ, положивших начало таким важным областям математических исследований, как математическая гидродинамика, математическая теория колебаний, механика газов, а также теория тригонометрических рядов. Теория тригонометрических рядов спустя сто лет была подробно развита французским математиком Фурье в связи с развитием математической теории распространения тепла. Однако впервые тригонометрические ряды были использованы при решении задач механики и математической физики еще Д. Бернулли.

В заключение этого краткого рассказа о Д. Бернулли мне хотелось бы здесь упомянуть еще об одном его результате, который теперь известен каждому, кто знакомится с элементами математического анализа. На заседании Академии наук 30 января 1729 года он сообщил доказательство следующего (теперь элементарного) факта (существование числа e):

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots\text{*)}.$$

В ту пору это было серьезной научной новостью. Впрочем, заметим, что все действительно серьезные открытия постепенно становятся широко известными, входят в программы университетского и школьного обучения.

Х. Гольдбах (1690—1764) был юристом по образованию и как математик проработал в Академии очень короткий срок. Основная его деятельность в России прошла в ведомстве иностранных дел, где он занимал крупный пост. В математику он вошел в первую очередь как автор знаменитой задачи Гольдбаха. Этой задаче можно дать несколько почти эквивалентных формулировок, мы приведем одну из них: *любое четное число, большее двух, представимо в виде суммы двух простых чисел.* Этот факт был замечен Гольдбахом на четных числах первых десятков. На протяжении двухсот лет к решению проблемы Гольдбаха не было видно и пути подхода. И лишь в тридцатые годы нашего века такие пути были найдены в работах Л. Г. Шнирельмана и И. М. Виноградова.

Несомненно, что самый яркий след из всех членов Петербургской Академии в области математики в XVIII веке оставил в истории науки Л. Эйлер. Продукция его была огромна: сейчас известны 865 его работ, в том числе 43 отдельных тома. Печатание его исследований продолжалось до 1862 года. Наша страна благодарна Эйлеру и за подготовку ряда учеников, внесших позднее большой вклад

Л. Эйлер

в развитие науки и культуры. Назовем несколько имен — С. К. Котельников, А. И. Лексель, Ф. И. Шуберт, С. Я. Румовский, М. Софронов, Н. И. Фусс, М. Е. Головин, С. Е. Гурьев, В. И. Висковатов. Они работали впоследствии во многих областях математики, механики, астрономии, физики, преподавания. Не малую помощь и поддержку оказал Л. Эйлер и М. В. Ломоносову в научных начинаниях последнего.

Нет возможности в краткой статье даже просто перечислить те вопросы, которыми занимался в математике Л. Эйлер и получил в них основополагающие результаты. Им были усовершенствованы и развиты дифференциальное и интегральное исчисления, в значительной мере созданы методы решения дифференциальных уравнений, существенно продвинуто решение сложнейших задач теории чисел, созданы основы вариационного исчисления, исследованы задачи страхования и теории ошибок наблюдений, изучен ряд задач небесной механики и в том числе разработана теория движения Луны,

*) См. «Квант», 1972, № 5, с. 17.

фактически создана теория движения твердого тела, решены многочисленные задачи внешней баллистики. Многие из областей исследования, которые заинтересовали Л. Эйлера, находились в непосредственной связи с актуальными вопросами практики того времени. Эйлер ввел в науку ряд понятий, которые стали на многие десятилетия основным объектом ее изучения. Так, к Эйлеру восходит рассмотрение знаменитой в теории чисел функции дзета, с помощью которой до сих пор изучаются свойства распределения простых чисел в ряду целых положительных чисел.

Ко времени Эйлера в математике было изучено несколько задач, в которых требовалось найти максимум или минимум некоторой величины в зависимости от выбора некоторой линии. Вот классические примеры этого рода: *среди всех плоских линий данной длины l найти ту, которая ограничивает максимальную площадь. Среди всех кривых, соединяющих точки A и B (кривые предполагаются плоскими, находящимися в вертикальной плоскости, точка A находится выше точки B), найти ту, по которой тяжелая точка, двигаясь под действием силы тяжести, из точки A попадает в B в кратчайший срок. Начальная скорость предполагается равной нулю.* Это известная задача о брахистохроне, поставленная известным швейцарским математиком Иоганном Бернулли и одновременно решенная тремя знаменитыми математиками того времени — Ньютоном, Яковом Бернулли и Лопиталем.

Эйлер уловил важность подобного типа задач и создал общий метод их решения — вариационное исчисление, которой в полной мере используется в науке и в наши дни.

Эйлер оказал исключительное влияние и на систему преподавания математики от самых ее начал до известных в ту пору ее вершин. Им были написаны учебники арифметики, элементарной алгебры, введение в математический анализ и аналитическую геометрию, создана система изложения тригонометрии, дошедшая до нас в почти неизмененном виде. Им были введены принятые теперь обозначения тригонометрических функций. Ему же принадлежат обозначения чисел e, π, $i=\sqrt{-1}$.

Многие ученики Л. Эйлера впоследствии стали академиками. Особого упоминания заслуживает С. Е. Гурьев (1764—1813), который за четверть века до французского математика О. Коши обратил внимание на необходимость строгости при изложении математического анализа. Вопросам обоснования математики, в том числе и математического анализа, и были посвящены основные его труды. Основным трактатом Гурьева в указанном направлении следует считать книгу «Опыт усовершенствования элементов геометрии» (СПб., 1798). Я приведу слова Гурьева, которыми он начал свой трактат: «Читая математические откровения нынешних времен и обращаясь к началам, на коих оные обыкновенно утверждаются, всегда я представляю себе огромное здание, непрестанно возвышающееся на слабых основаниях, всегда сокрушался о преклонности к падению сей чрезвычайной громады полезнейших роду человеческому знаний». Заметим, что вопросы обоснования математики, построения ее прочного фундамента, начиная с XIX века занимают видное место в математических исследованиях, и наша наука может гордиться тем, что одним из зачинателей этого движения был наш соотечественник.

Следующий этап в развитии математики в Академии наук связан с именами М. В. Остроградского (1801—1862) и В. Я. Буняковского (1804—1889).

М. В. Остроградский *) оставил значительный след в разви-

*) Более подробно об М. В. Остроградском рассказано в «Кванте», 1971, № 9, с. 11.

тии математического анализа, математической физики, механики, вариационного исчисления. Знаменитая формула Остроградского в теории кратных интегралов до сих пор излагается в математическом анализе и служит основным орудием математической физики. В самой математической физике исследования Остроградского касались вопросов распространения тепла в твердых телах и в жидкости, распространения волн на поверхности жидкости, уравнений теории упругости, теории удара, вопросов магнетизма и электричества.

Остроградский оставил также значительный след в истории математического образования. Он сам был превосходным педагогом, стремившимся опоэтизировать изложение математики, сделать его идейно насыщенным и в то же время тесно связанным с задачами практики. Он создал учебники для школы, являлся организатором математического образования в военных учебных заведениях, выступил со своим педагогическим кредо в очень интересной и теперь монографии «Размышления о преподавании» (Париж, 1860), написанной им совместно с французским педагогом А. Блюмом.

Интересно заметить, что в ту пору, когда Россия была еще далека от освобождения крестьян от крепостной зависимости, Остроградский считал возможным и полезным приглашение в качестве инструкторов по трудовому воспитанию «. . . уважаемых и опытных рабочих, которые осторожно будут руководить ручными работами учеников».

Профессию учителя Остроградский ценил очень высоко и стремился показать молодым людям высокое призвание педагогического труда. Он мечтал о том времени, когда люди науки «с воодушевлением займутся жизненно важными вопросами преподавания наук.

Все упростится тогда в жизни нации, и наука станет деятельным, настойчивым помощником, соучастником всех моральных и материальных достижений».

М. В. Остроградский

Современник и большой друг Остроградского — В. Я. Буняковский — скорее был просветителем, чем оригинальным исследователем. Впрочем, некоторые его результаты до сих пор живут в науке. Вспомним знаменитое неравенство Буняковского — Коши — Шварца, найденное независимо друг от друга тремя названными учеными и широко используемое в современной математике. Большую роль в истории математической культуры России сыграл его превосходный для своего времени курс теории вероятностей.

В первой половине XIX века в России жил и трудился один из величайших математиков прошлого — создатель неевклидовой геометрии — Н. И. Лобачевский*) (1792—1856). По образному выражению английского геометра конца прошлого века, Лобачевский был Коперником геометрии, тем ученым, который смог

*) См. «Квант», 1972, № 12, с. 7.

пересилить освященные тысячелетиями традиционные взгляды и предложить свои новые. Его взгляды оказались для современников настолько новыми и необычными, что они их не понимали, а многие и издевались над их автором. В результате Н. И. Лобачевский остался вне Академии наук.

Вторая половина прошлого века в Академии наук и в математической жизни всей страны прошла под огромным влиянием идей и результатов замечательного математика П. Л. Чебышева*) (1821—1894). Под его влиянием выросла превосходная по составу и силе полученных результатов петербургская математическая школа. Она работала с большим успехом в ряде областей математики и в первую очередь в теории функций, математическом анализе, теории чисел и теории вероятностей. Эта школа была тесно связана с запросами практики, и сам Чебышев не уставал говорить о том, что практика является исходным пунктом для математических теорий и одновременно на ней проверяется их научная и общественная ценность.

Научное творчество П. Л. Чебышева началось еще в бытность его студентом Московского университета. За работу «Вычисления корней уравнения» физико-математический факультет присудил ему в 1841 году серебряную медаль. В 1847 году Чебышев переехал в Петербург, и вся дальнейшая его жизнь была связана с Петербургским университетом, а также с Академией наук, куда он был привлечен для подготовки к изданию рукописей Л. Эйлера по теории чисел. Работа была закончена исключительно быстро — уже через два года вышли из печати два тома работ Л. Эйлера по теории чисел, снабженные подробными указателями. В эти два тома вошли многие неопубликованные результаты, хранившиеся в рукописях и в записных

*) См. «Квант», 1971, № 5, с. 1.

П. Л. Чебышев

книжках Л. Эйлера. Несомненно, что интерес П. Л. Чебышева к теории чисел в значительной мере был связан с этой его издательской деятельностью.

В том же 1849 году вышла из печати и была защищена в качестве докторской диссертации книга П. Л. Чебышева «Теория сравнений». В течение многих лет эта книга служила основным учебником по теории чисел для университетов. Но, пожалуй, еще важнее то обстоятельство, что в качестве приложения к этой книге было опубликовано замечательное исследование «Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины», оказавшее решающее влияние на направление дальнейших работ по теории чисел. Это дополнение было быстро переведено на французский язык и издано во французском журнале. Внимание математической общественности к результату П. Л. Чебышева было вполне естественным, поскольку ему удалось сделать фундаментальный шаг в изучении закономерностей распределения простых чисел в ряду натуральных впервые после Евклида. Знаменитому древнегреческому геометру принадлежит доказательство того факта, что простых чисел существует бесконечно много, Чебышев же открыл замечательную асимптотическую закономерность их распределения среди всех целых положительных чисел. Мы приведем этот результат в формулировке, которая была опубликована Чебышевым во второй его статье «О простых числах»: *Обозначим через* $\pi(x)$ *число простых чисел, меньших по величине, чем* x. *Тогда для всех достаточно больших* x *выполняются неравенства*:

$$0{,}92149 \leqslant \pi(x) : \frac{x}{\ln x} \leqslant 1{,}10555,$$

где $\ln x$ *означает логарифм по основанию* $e = 2{,}7128\ldots$ *числа* x.

Далее Чебышев доказал, что *если при* $x \to \infty$ *отношение* $\pi(x) : \frac{x}{\ln x}$ *стремится к некоторому пределу, то этим пределом может быть только число 1.*

Доказательство существования этого предела потребовало более громоздких и сложных рассуждений и появилось лишь спустя пятьдесят лет после открытия Чебышева. Это доказательство было получено одновременно двумя математиками: французским ученым Ж. Адамаром и бельгийским — Ш. Ж. де ла Валле Пуссеном. Метод Чебышева вполне элементарен и, нужно думать, его возможности еще далеко не исчерпаны.

Второе направление математических исследований, в котором Чебышев оставил яркий след, связано с теорией вероятностей. Здесь он указал на новый важный объект исследований и разработал простые и в то же время очень сильные методы исследования. В первую очередь мы должны указать на знаменитый *закон больших чисел* в форме Чебышева, который до сих пор излагается в неизмененном виде во всех, даже самых коротких учебниках теории вероятностей, и при этом его доказательство приводится в предложенной им форме. Этот результат Чебышева дает весьма общие условия, при которых суммарное воздействие большого числа случайных ингредиентов оказывается почти постоянным. Значение открытой Чебышевым закономерности представляет не только общетеоретический интерес, но и имеет большое практическое значение.

Третье направление исследований, в котором Чебышеву принадлежит сама идея его возникновения, связано с так называемым наилучшим приближением функций. Эта область математической мысли, целиком являясь в своих основах изобретением Чебышева, превратилась в наши дни в богатую результатами и связями с другими ветвями знания часть математики. Исходным пунктом для построения этой теории явилась чисто практическая задача, возникшая у Чебышева в связи с поручением факультета Петербургского университета подготовить и прочитать курс практической механики.

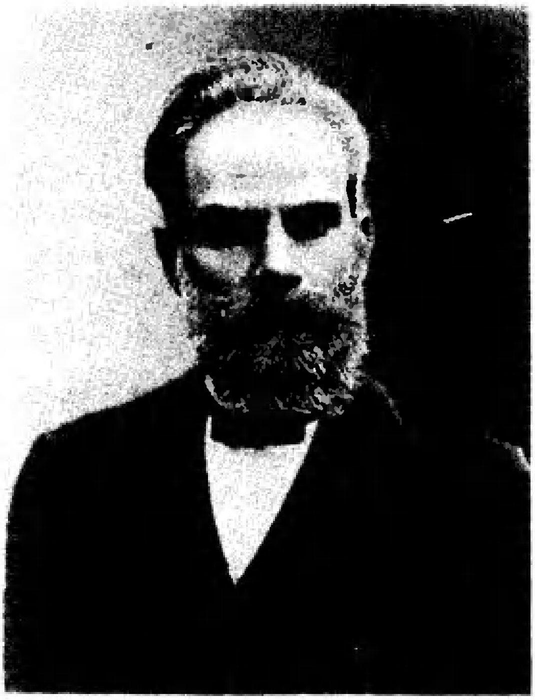
Перед Чебышевым возник вопрос об уменьшении возможных отклонений движения штока от прямолинейного в так называемом параллелограмме Уатта, а уже этот чисто практический вопрос привел его к постановке ряда новых математических задач. Простейшая из них широко известна: *среди всех многочленов степени* n

$$P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

найти тот, для которого $\max|P_n(x)|$ *при* $|x| \leqslant 1$ *имеет минимальное значение.*

Ответ был найден П. Л. Чебышевым еще в 1859 году; оказалось, что искомый многочлен (теперь его называют многочленом Чебышева) имеет следующий вид:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x).$$



А. М. Ляпунов

Упражнение. Напишите в явном виде многочлены Чебышева при $n = 1, 2, 3$ и 4.

Остановимся еще на результатах двух выдающихся учеников П. Л. Чебышева — А. М. Ляпунова (1857—1918) и А. А. Маркова (1856—1922).

А. М. Ляпунов еще в Петербургском университете получил от П. Л. Чебышева тему самостоятельной работы, которую успешно завершил. Эта тема была связана с одним из труднейших вопросов механики: устойчивостью форм у жидких вращающихся масс. Она получила дальнейшее развитие в его магистрской диссертации.

После успешной защиты диссертации А. М. Ляпунов был приглашен для преподавания в Харьковский университет. Естественно, что первые годы преподавания требовали от Ляпунова большой затраты времени на подготовку, тем более, что преподавать приходилось ряд математических дисциплин и теоретическую механику. Но эта подготовка и последующая необходимость осмысливать материал для изложения приводили к постановке новых научных вопросов, требующих тщательного исследования. В Харьковском университете Ляпунов занялся таким новым направлением математики, которое получило позднее название теории устойчивости движения.

К изучению поведения решений систем дифференциальных уравнений при неограниченном возрастании аргумента сводятся многочисленные задачи теории и практики. Ляпунов разработал эффективные методы их исследования. В ту пору работы Ляпунова представляли интерес в первую очередь для задач небесной механики (вопросы устойчивости солнечной системы и т. п.). Однако, начиная с тридцатых годов нашего века, идеи и методы Ляпунова получили непосредственное практическое значение для задач авиации, радиотехники, машиностроения и т. д. Ляпунов заложил основы теории устойчивости движения, разработал методы исследования и рассмотрел важнейшие частные случаи. Эти идеи были разработаны им в ряде работ и объединены в 1892 году в докторской диссертации «Общая задача устойчивости движения», принесшей ему мировую известность.

В 1900 году А. М. Ляпунов был избран членом-корреспондентом Академии наук, а через год — ее действительным членом. После избрания Ляпунов переехал в Петербург, и, бросив преподавание, целиком отдался научным изысканиям.

На рубеже двух столетий Ляпунов обратился к вопросам теории вероятностей и изучил одну из задач своего учителя — разыскание наиболее общих условий, при выполнении которых нормированные суммы независимых случайных величин при большом числе слагаемых имеют почти нормальное распределение. Доказанная им теорема получила название центральной предельной теоремы теории вероятностей.

А. А. Марков

После 1901 года Ляпунов полностью отдал свои силы решению задачи Чебышева о равновесии жидких вращающихся масс. Он был недоволен своими первоначальными результатами, поскольку в них он исследовал лишь первые приближения. Согласно же его мнению, решение естественнонаучной задачи требует полного и строгого решения, поскольку иначе можно прийти к ошибочным выводам. Современник Ляпунова французский математик А. Пуанкаре занимался той же задачей, но при этом он довольствовался лишь первым приближением. В результате они пришли к противоположным выводам, приведшим к длительному научному спору. Астроном Дарвин (сын известного естествоиспытателя Чарльза Дарвина) выступил с космогонической теорией, построенной на приближенных результатах Пуанкаре. В конце концов спор закончился полной победой результатов Ляпунова.

С именем А. А. Маркова связаны крупные сдвиги в развитии теории дифференциальных уравнений, теории непрерывных дробей и их применения к вопросам теории функций, теории квадратичных форм и теории вероятностей. Особенно важные результаты были получены А. А. Марковым в теории вероятностей, где он заслуженно считается одним из основоположников современного состояния этой науки. Он ввел новый объект исследования в теории вероятностей, получивший наименование «цепей Маркова». Речь при этом идет о последовательностях случайных событий, вероятность появления или непоявления которых зависит от того, появилось или нет в предыдущем месте соответствующее событие. Для цепей Маркова самим автором был получен ряд глубоких результатов. Были рассмотрены, используя цепи Маркова, закономерности чередования гласных и согласных на примерах двух классических произведений русской литературы — «Евгений Онегин» А. С. Пушкина и «Детские годы Багрова внука» С. Т. Аксакова.

А. А. Марков не дожил до того периода, когда понятие цепи и процесса Маркова стало центральным не только в теории вероятностей, но также в физике, теории автоматического управления, разнообразных применениях теории вероятностей в биологических и производственных задачах, в теории информации.

Большое значение для развития отечественной общественной мысли сыграли многочисленные выступления А. А. Маркова против произвола царского режима и церкви. Он не прошел мимо событий 1905 года, отлучения Л. Н. Толстого от церкви, отказа царского правительства утвердить избрание Максима Горького в Академию.

Мы продолжим наш очерк в следующем номере, где расскажем о достижениях Академии в советское время.

ОЧЕРК РАЗВИТИЯ ФИЗИКИ В АКАДЕМИИ НАУК

С. И. Вавилов

Выдающийся советский физик академик Сергей Иванович Вавилов, бывший с 1945 по 1951 год Президентом Академии наук СССР, много внимания уделял вопросам истории физики. Среди его работ есть статья под названием «Очерк развития физики в Академии наук за 220 лет». Она была напечатана в 1945 году, к юбилею Академии, в «Очерках по истории Академии наук», выпущенных Издательством АН СССР. В этой статье С. И. Вавилов охарактеризовал вклад членов Академии в развитие отечественной физики. Небольшие редакционные дополнения к статье приводятся в квадратных скобках.

«... собирая Академию в России, где не было еще университетов и даже средних школ, Петр, несомненно, понимал, что она не может быть копией Парижской Академии наук и Лондонского Королевского общества. Русская Академия не могла быть вершиной ученой пирамиды, как во Франции и в Англии, по причине отсутствия самой этой пирамиды. В задачу новой Академии прежде всего входило ее создание. По этой причине на берегах Невы возникла Академия совсем особого рода. Наряду с учеными заседаниями, на которых... Бернулли, Эйлером и другими делались сообщения по самым острым вопросам европейской науки, все академики занимались университетским и гимназическим преподаванием и прежде всего были профессорами. На академиков возлагалась, помимо того, большая и трудная работа по разностороннему изучению России, ее природы, истории, народов, языка; академики постоянно привлекались к техническим экспертизам, к организации производства. Это необходимо иметь в виду, рассматривая первый период физики в Академии до самого конца XVIII века. Число лиц, причастных к развитию физики в Академии наук в течение всего XVIII века, очень невелико; это — академики, официально занимавшие кафедру физики или фактически работавшие в этой области, небольшой технический персонал механиков, оптиков и отдельные изобретатели, вроде знаменитого Кулибина.

Научная жизнь Академии долгое время, до недавнего прошлого, целиком определялась личным составом ее членов. Поэтому, естественно, наш очерк строится на комментированном списке членов Академии...

Д а н и и л Б е р н у л л и (1700—1782)... в своем знаменитом трактате по гидродинамике (который он писал в Петербурге) и длинном ряде мемуаров по механике и акустике проявил себя как один из самых замечательных представителей математической физики. В Петербурге он пробыл 8 лет (1725—1733), но до конца жизни сохранил тесную связь с Академией...

[Даниил Бернулли ввел в механику принцип сохранения «живой силы» (суммы произведений масс тел на квадраты скоростей). Исходя из

Д. Бернулли

этого принципа, он получил знаменитый закон, характеризующий движение жидкостей по трубам.]

Иоганн Лейтман (1667—1736)... занял в Академии кафедру механики и оптики, и его по праву можно назвать отцом оптотехники и точной механики в России. Он был известен Петру I как автор книг о часах и шлифовании стекол, и Петр стремился пригласить его в Россию еще до основания Академии. Прибыв в Петербург в 1726 году, он вскоре взялся за налаживание работ по точной механике и оптике... Есть достаточные основания думать, что особое внимание и успехи в практических областях оптики в Петербурге в XVIII веке в работах Ломоносова, Кулибина, Эпинуса, Эйлера и других были в значительной мере определены деятельностью академика Лейтмана.

Великий Леонард Эйлер (1707—1783)... был в Петербургской Академии сначала профессором физиологии, затем физики и, наконец, математики... Вместе с Петром I и Ломоносовым Эйлер стал добрым гением нашей Академии, определившим ее славу, ее крепость, ее продуктивность. Физика Эйлера, конечно, блекнет в лучах его математической славы, но сама по себе она очень импозантна и заслуживает гораздо большего внимания, чем ей уделяется до сих пор. Несмотря на роковые ошибки волновой оптики Эйлера, именно она подготовила оптику Френеля. Диоптрические фолианты *) Эйлера, написанные в Петербурге, знаменовали поворотный пункт в развитии геометрической оптики. Его «Письма о некоторых физических и философических материях, писанные к некоторой немецкой принцессе» — великолепная популярная и полная оригинальных идей энциклопедия физики XVIII века. По отличному русскому переводу «Писем», сделанному учеником Эйлера академиком Румовским, учились физике многие поколения русских людей.

Георг Рихман (1711—1753)... навеки запечатлел свое имя в истории физики как экспериментатор, трагически погибший на посту во имя науки... Занимался он вопросами о парообразовании, воздушными насосами и машинами для подъема воды, а также другими разнообразными естественно-научными и техническими явлениями и задачами. К электрическим опытам Рихман перешел задолго до знаменитой публикации Франклина... Известие об опытах Франклина в 1752 году произвело во всем мире такое же впечатление, как в свое время первые наблюдения Галилея с телескопом, а в конце XIX века — опыты Рентгена. Всюду, в том числе и в Петербурге, лихорадочно принялись за их повторение. Рихман с громадным увлечением занялся наблюдениями над грозами и атмосферным электричеством у себя на дому, на углу 5-й линии и Большого проспекта Васильевского острова. Хорошо известны

[*) Имеется в виду сочинение Эйлера под названием «Диоптрика».]

обстоятельства гибели Рихмана во время опыта 26 июля 1753 года [он погиб от удара молнии]. Работа Рихмана в Академии — одна из трагических, но славных страниц академической физики.

Михаил Васильевич Ломоносов (1711—1765)... Во всех областях науки и «художеств», которыми занималась Петербургская Академия в XVIII веке (за исключением математики), Ломоносов был, бесспорно, самым замечательным и наиболее самобытным представителем. Для русского государства Ломоносов стал воплощенным доказательством талантов, склонностей и умения русского народа в деле науки и культуры... Известно, что Ломоносов считал основной «профессией» своей химию, но в химии Ломоносов по преимуществу был великим физико-химиком. Вместе с тем, и в областях чисто физических Ломоносов проявил себя с поразительной широтой и оригинальностью. Заслуги Ломоносова в физике начинаются с создания необходимых условий для развития ее в России...

Во втором издании [переведенной М. В. Ломоносовым] «Вольфианской экспериментальной физики», в 1760 году, Ломоносов поместил «Прибавления к экспериментальной физике», заключающие краткие упоминания о некоторых результатах в области физики, полученных им самим. Это, прежде всего, его кинетическая теория теплоты, или, как он говорит, «моя система теплотворного движения», одна из замечательных предшественниц современной кинетической теории; далее, его оригинальная и, несмотря на ошибочность, весьма остроумная и глубокая «новая теория о цветах», в которой впервые делается конкретная попытка связать учение о свете и веществе; наконец, его теория атмосферного электричества...

Опубликование научных рукописей Ломоносова, а также изучение его забытых печатных научных мемуаров открыло перед нами Ломоносова как замечательного оптика, изобретателя и конструктора новых телескопов, микроскопов, фотометров, перископов, строившего их в лаборатории-мастерской вместе с подручными мастерами...

Глубиной и своеобразием поражают многие записи и афоризмы Ломоносова, касающиеся законов сохранения движения и вещества, теории атомов и эфира, вопроса о соотношении тяжелой и инертной масс...

Франц Эпинус (1724—1802) явился в Академии представителем нового поколения и существенно нового направления в физике. Для этого поколения ньютоновский метод решения задач о притягательных и отталкивательных силах становится бесспорным, хотя еще недавно для Бюльфингера, Эйлера, Ломоносова он был сомнительным. Утверждая с самого начала в своем знаменитом трактате «Опыт теории электричества и магнетизма» (Петербург, 1755): «Полагаю несомненной аксиомой, что тело не может действовать там, где его нет», Эпинус фактически пользуется ньютоновской схемой в своей теории электростатических взаимодействий и индукции. Имя Эпинуса связано и с другими важными физическими результатами. Ему принадлежит открытие пироэлектрических свойств турмалина, реализация первого ахроматического микроскопа*), построенного в Петербурге и долгое время хранившегося в Физическом кабинете Академии наук...

Беглый просмотр деятельности [некоторых] академиков-физиков дает довольно ясную картину состояния и развития физики в Петербургской Академии в XVIII веке. По своему качеству эта физика занимала од-

[*) Ахроматический микроскоп имеет сложный объектив, в котором изображения предметов, образованные световыми волнами различной длины, практически совпадают и потому не искажаются.]

Михаил Васильевич Ломоносов

но из первых мест, если не первое в Европе. Нужно иметь в виду при этом общее состояние физики в Европе в эту эпоху. Это было время разработки ньютоновского наследства, с одной стороны, его укрепления, с другой — критики. Сам XVIII век в физике не дал результатов, по значению своему хотя бы приближенно равноценных ньютоновским. Очень сильно продвинулась электростатика, оптика, главным образом геометрическая; большая подготовительная работа в XVIII веке была сделана в учении о теплоте, но все же принципиально новое и большое в электромагнетизме, оптике и теплоте суждено было сделать физикам XIX века. На общем фоне физики в XVIII веке работам Эйлера, Ломоносова, Эпинуса принадлежит очень почетное место. При этом в области оптики Эйлер и Ломоносов подготовили почву для развития теории световых волн.

Таково общее научное значение нашей академической физики в XVIII веке. Но у нее была и своя особая черта, имевшая значение по преимуществу для России. Академические физики почти до конца века большое внимание уделяли техническим вопросам. Практическая оптика, оптическое приборостроение на Васильевском острове в XVIII веке находились на такой высоте, которой могла позавидовать любая страна мира. Работы Лейтмана с учениками, оптическая мастерская Ломоносова, работы по геометрической оптике Эйлера и его учеников, ахроматический микроскоп Эпинуса, телескопы, рефлекторы Кулибина — все это было самым передовым для своего времени... Петербургские академики-физики вели систематические метеорологические и магнитные наблюдения, давали консультации по техническим вопросам и непрерывно занимались учебной работой. У них был и свой центр — Физический кабинет с «инструментальной палатой», т. е. мастерской. В Кабинете велись опыты, подготавливались демонстрации для студентов и для показов на заседаниях Академии и при дворе...

Василий Владимирович Петров (1761—1834)... В 1795 году В. В. Петров стал экстраординарным профессором только что образованной Медико-хирургической академии. Здесь он собрал образцовый для своего времени физический кабинет, где и были произведены основные его экспериментальные работы. Они собраны в трех книгах: 1) «Собрание физико-химических новых опытов и наблюдений», 1801; 2) «Известие о Гальвани — Вольтовских опытах», 1803; 3) «Новые электрические опыты», 1804. В этих томах перед нами очень большой опытный материал... по выяснению природы различных случаев люминесценции*), по знаменитым опытам с вольтовой дугой, открытой Петровым, и по электростатике. В отличие от Ломоносова, Петров совсем не был склонен к широким обобщениям, он был эмпириком, строившим, однако, свои опыты весьма рационально и продуманно. Среди русских ученых и иностранцев, работавших в России в то время, В. В. Петров был, несомненно, крупным явлением...

[*) Люминесценция — особый вид свечения. Так светятся светлячки и гнилушки, циферблаты часов и стрелки компасов, покрытые особым веществом — люминофором.]

Э. Х. Ленц

Эмилий Христианович Ленц (1804—1865)... прочно вписал свое имя в историю электромагнетизма наряду с Омом и Джоулем и стал основателем направления русской физики, концентрировавшего внимание на электромагнетизме и развитии прецизионных измерений в этой области.

[Среди многочисленных научных работ Ленца особенно известны две: «Об определении направления гальванических токов, возбуждаемых электродинамической индукцией» и «О законах выделения тепла гальваническим током». В первой из них он установил правило, определяющее направление индуцированных токов (знаменитое правило Ленца), во второй — открыл закон теплового действия тока (закон Джоуля—Ленца).]

Борис Семенович Якоби (1801—1874)... Говоря современным языком, Якоби во многих областях своей деятельности, какова открытая и развитая им гальванопластика, электрические машины, электрический телеграф, электрические эталоны, был техническим физиком, но наряду с этим он занимает вместе с Ленцем видное место в чисто физическом исследовании законов электромагнетизма.

Якоби был одним из самых замечательных представителей той новой фазы в истории физики, когда ее результаты сразу в виде важнейшего фактора переходили в технику, электромагнетизм превращался в электротехнику. Физики Якоби и Ленц в 1839 году катались по Неве на построенной ими моторной лодке с двигателем, развивавшим от 64 элементов Грова одну лошадиную силу. В физическом кабинете строились и испытывались различные новые телеграфные аппараты и в разных видах развивалась гальванопластика, замечательные образцы которой служат украшением Физического института Академии наук. Физик Якоби вместе с Ленцем составляет проект громоотвода для порохового погреба, является изобретателем электрических минных взрывателей.

Имя академика Якоби, выдающегося физика, гениального электротехника и изобретателя, по праву должно быть поставлено наряду с другими славными именами академиков-физиков — Эйлера, Ломоносова, Петрова…

Генрих Иванович Вильд (1833—1902) — организатор швейцарской и русской метеорологической сети, автор замечательных фотометрических и поляризационных приборов, выдающийся исследователь земного магнетизма. России Г. И. Вильд отдал 27 лучших творческих лет своей жизни. Русская метеорологическая сеть до работы Вильда насчитывала всего 31 станцию, при его отъезде она имела 650 станций, оборудованных новыми приборами…

Аксель Вильгельмович Гадолин (1828—1892)… особенно известен своей работой 1867 года «Вывод всех кристаллографических систем и их подразделений из одного общего начала»…

Б. С. Якоби

Борис Борисович Голицын (1862—1916)… Научная работа Голицына сначала протекала в разнообразных направлениях (критические состояния вещества, лучи Рентгена, спектроскопия, физиологическая оптика). Очень интересны и важны оптические работы Б. Б. Голицына… Среди них особенное значение получило экспериментальное доказательство спектроскопического явления Допплера *), продолжающее и в высокой степени уточняющее опыты А. А. Белопольского. С начала нового столетия интересы Голицына сконцентрировались на новой геофизической дисциплине — сейсмологии, одним из основателей которой Голицын по праву и может считаться. Голицын дал первые эскизы теории, разработал аппаратуру, организовал довольно обширную сеть сейсмологических станций…»

(*) При движении источника излучения и принимающего устройства относительно друг друга частота принимаемого излучения не совпадает с частотой испускаемого излучения. Таким образом, спектральные линии регистрируемого излучения оказываются смещенными по сравнению со спектром испускаемого излучения.)

А. К. КИКОИН

СВОБОДНОЕ ПАДЕНИЕ ТЕЛ НА ВРАЩАЮЩУЮСЯ ЗЕМЛЮ

Иногда можно встретить утверждения о том, что из-за того, что Земля вращается вокруг своей оси, в разных местах на поверхности Земли различна *сила тяжести*, действующая на какое-нибудь тело. Говорят также, что в разных местах Земли различен *вес* тела. И то, и другое связано с тем, что в различных местах на вращающейся Земле различно *ускорение свободного падения* тел. Верно ли все это? В этой статье мы постараемся ответить на этот вопрос.

1. Механическое движение, как известно, относительно. Это значит, что, если пользоваться различными системами отсчета, то относительно этих систем движение одного и того же тела окажется различным. Если, например, связать систему координат с летящим с постоянной скоростью в горизонтальном направлении самолетом, то в этой системе координат сброшенный (вернее, выпавший) с самолета груз движется вниз по вертикальной прямой (рис. 1). Но в системе координат, связанной с какой-нибудь точкой на поверхности Земли, например, с точкой O (см. рис. 2), тот же груз движется по кривой, называемой параболой. Различны, следовательно, траектории движения. Различны и скорости движения. Если условно считать систему координат, связанную с Землей, неподвижной, то при скорости движения самолета (и связанной с ним системы координат) относительно Земли, равной $\mathbf{v}_c$, скорость $\mathbf{v}$ груза относительно Земли в любой момент времени равна

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_{\text{г}}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{v}_{\text{г}}$ — скорость движения груза относительно самолета в рассматриваемый момент времени. Так как скорость $\mathbf{v}_{\text{г}}$ — это скорость свободного падения, то

$$\mathbf{v}_{\text{г}} = \mathbf{g}t,$$

где $\mathbf{g}$ — ускорение свободного падения, а t — время, отсчитанное от

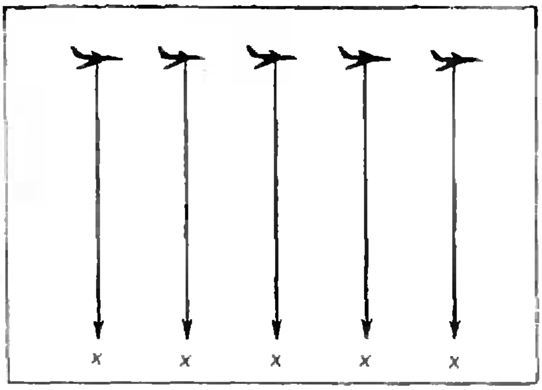


Рис. 1.

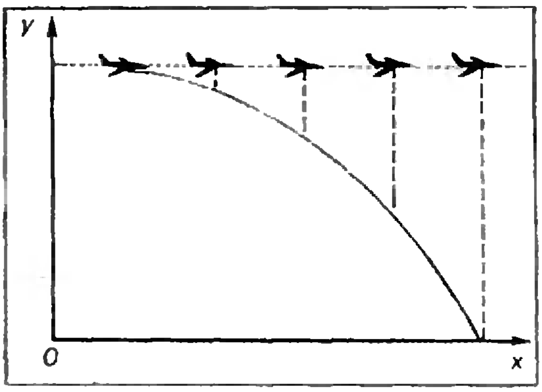


Рис. 2.

того момента, когда груз отделился от самолета. Таким образом,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \mathbf{g}t.$$

Следовательно, и скорости в неподвижной и движущейся системах координат различны.

В рассмотренном примере скорость движущейся системы координат, то есть скорость самолета относительно Земли, была постоянной. Но бывает и так, что с ускорением движется не только тело относительно подвижной системы координат, но и сама эта подвижная система координат движется ускоренно относительно неподвижной. Скорость тела относительно неподвижной системы в *любой момент времени* (скорости со временем изменяются!) и в этом случае равна сумме скорости тела относительно подвижной системы и скорости этой системы координат относительно неподвижной. Если, например, подвижная система координат движется относительно неподвижной с постоянным ускорением $\mathbf{a}_1$, а тело относительно подвижной системы координат движется с постоянным же ускорением $\mathbf{a}_2$, то правило сложения скоростей в этом случае имеет вид

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)\, t,$$

где t — время, отсчитанное от одного и того же начального момента.

Из этой формулы видно, что относительно неподвижной системы координат тело движется с ускорением $\mathbf{a}$, которое равно

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2. \qquad (2)$$

2. Любопытным примером такого случая может служить свободное падение тел на Землю. Надо учесть, что Земля вращается вокруг своей оси. Поэтому система координат, связанная с какой-нибудь точкой поверхности Земли (кроме ее полюсов), движется с ускорением. Согласно формуле (2) ускорение падающего тела, измеренное относительно неподвижной системы координат, складывается из ускорения движущейся системы относительно неподвижной и ускорения самого тела относительно движущейся системы координат. Но что это за неподвижная система отсчета? Где взять такую систему на вращающейся Земле? С чем должна быть связана та система координат, которую в данном случае можно было бы считать неподвижной?

Прежде всего, это может быть система координат, связанная с каким-нибудь телом отсчета *вне* Земли, не участвующим в ее вращении. Таким телом отсчета, условно неподвижным, могло бы, например, служить Солнце. Тогда ускорение $\mathbf{a}$ падающего на Землю тела в системе координат, связанной с Солнцем, равно сумме ускорения тела относительно системы, связанной с выбранной точкой на Земле, и ускорения этой точки относительно Солнца. Но можно поступить и проще, не покидая Землю. Ведь и на поверхности Земли есть точки, не участвующие в ее вращении. Это — точки полюсов Земли, через которые проходит ось ее вращения. Вот мы и можем сравнить результаты измерения ускорения свободного падения тела на полюсе и в любой другой точке поверхности Земли, например, на экваторе*).

Так как свободное падение тела в неподвижную точку Земли (на полюс) — это движение прямолинейное, то для описания этого движения достаточно одной координатной оси. На полюсе эту ось естественно направить вдоль оси вращения Земли, вдоль линейки со шкалой, которая должна быть установлена на полюсе (рис. 3) для измерения ускония (см. учебное пособие «Физика-8», 1973, с. 55).

Результат такого измерения легко предсказать: согласно второму закону

*) В действительности и точки полюсов участвуют в годовом движении Земли вокруг Солнца. Однако угловая скорость этого движения гораздо меньше угловой скорости суточного вращения Земли; поэтому в большинстве случаев систему координат, связанную с полюсами, можно считать неподвижной.

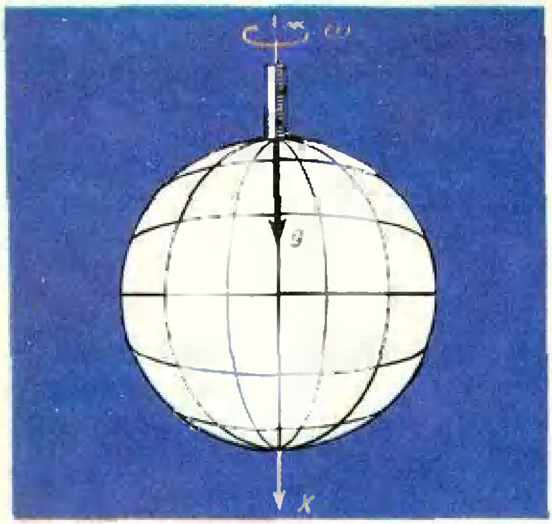


Рис. 3.

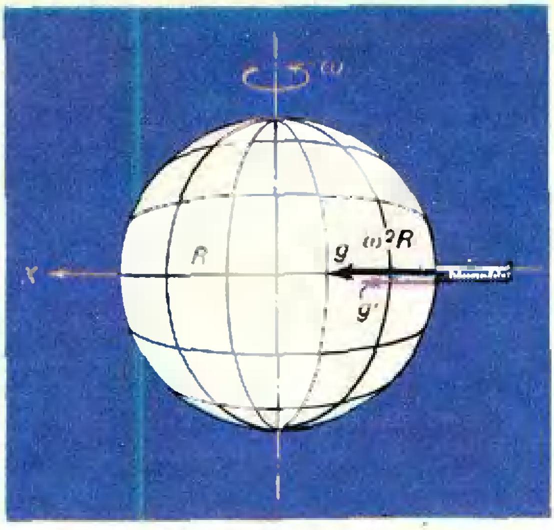


Рис. 4.

Ньютона и закону всемирного тяготения абсолютное значение этого ускорения равно

$$g = \gamma \frac{M}{R^2},$$

где γ — гравитационная постоянная, M — масса Земли и R — ее радиус. Направлено это ускорение по полярному радиусу к центру Земли. Величина $g = \gamma \frac{M}{R^2}$ — значение ускорения свободного падения относительно неподвижной (инерциальной) системы отсчета.

А какое значение ускорения падающего тела будет получено при измерениях на экваторе? Для этих измерений и здесь нужно установить линейку со шкалой (рис. 4). Координатную ось мы и здесь направим к центру Земли вдоль экваториального радиуса. Разумеется, и на экваторе абсолютное значение ускорения, вызванного притяжением Земли, будет таким же, как и на полюсе. Вращение Земли не влияет на силу, с которой она притягивает тела *). Но измерение ускорения на экваторе производится относительно системы отсчета, которая сама движется с ускорением относительно выбранной нами неподвижной системы. Ведь наша линейка движется вместе с Землей по окружности экватора и, следовательно, движется с центростремительным ускорением, равным ω^2R, где ω — угловая скорость суточного вращения Земли и R — ее радиус. Направлено это ускорение тоже к центру Земли и тоже по экваториальному радиусу. Значение ускорения, полученное при измерении на экваторе относительно ускоренно движущейся системы координат (линейки), будет поэтому несколько иным по сравнению с измеренным на полюсе. Обозначим это значение ускорения через g'. Тогда, согласно формуле (2), мы можем написать

$$g = g' + \omega^2R \qquad (3)$$

(ускорение свободно падающего тела относительно неподвижной системы координат (g) равно сумме ускорения тела относительно подвижной системы (g') и ускорения самой подвижной системы относительно неподвижной (ω^2R)).

Иначе говоря, ускорение g' свободного падения, измеренное на экваторе, то есть относительно ускоренно движущейся системы отсчета, не равно ускорению g, измеренному на полюсе. Оно меньше g на величину ω^2R:

$$g' = g - \omega^2R. \qquad (4)$$

*) Мы пренебрегаем различием в силе тяготения на экваторе и на полюсе, вызванным нестрогой сферичностью Земли.

3. Мы рассмотрели случай свободного падения тел на полюсе и на экваторе Земли. Рассмотрим теперь свободное падение тела в произвольном месте (где-то между экватором и полюсами Земли).

Из рисунка 5 видно, что теперь центростремительное ускорение, связанное с вращением Земли, направлено не к центру Земли, как на экваторе, а к той точке на оси вращения Земли, которая является центром соответствующего параллельного круга. (Радиус этого круга на рисунке 5 обозначен буквой r.) Повторяя приведенные выше рассуждения, мы придем к выводу, что ускорение свободного падения g', измеренное в любом месте, будет меньше, чем ускорение g, измеренное на полюсе. Надо учесть центростремительное ускорение соответствующей точки земной поверхности. Но теперь направления ускорений g и $\omega^2 r$, входящих в формулу (4), образуют угол φ, представляющий собой широту точки, в которой измеряется ускорение g'. Пользуясь правилом сложения векторов, мы найдем, что вектор g' направлен уже не к центру Земли, а несколько отклонен к экватору (см. рис. 5).

Понятно, что ускорение $\omega^2 r$ на широте φ меньше, чем ускорение $\omega^2 R$ на экваторе. Легко видеть, что на любой широте φ отношение r/R равно $\cos\varphi$, так что $r = R\cos\varphi$ и $\omega^2 r = \omega^2 R \cos\varphi$. Соответственно,

$$g' = g - \omega^2 R \cos\varphi \text{ *)}.$$

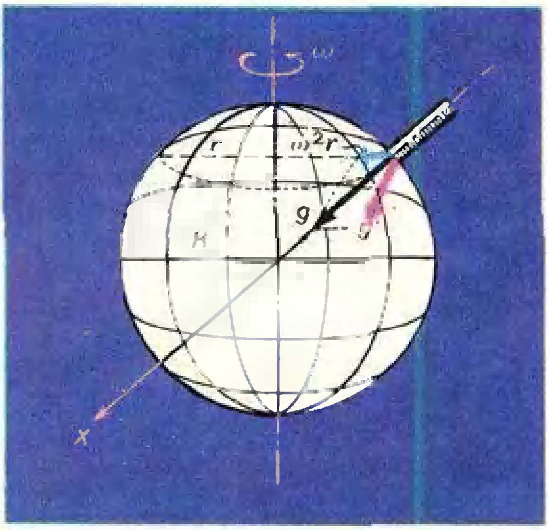


Рис. 5.

4. Посмотрим теперь, насколько численно отличается значение g' для данной широты φ от g. Для этого нужно, очевидно, только вычислить величину $\omega^2 R$.

Угловая скорость ω вращения Земли невелика, так как период вращения Земли равен одним суткам, то есть 86164 *с*. Следовательно,

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} = 7{,}3\cdot 10^{-5}\ рад/с.$$

Радиус Земли на экваторе равен 6378 *км*, или $\approx 6{,}38\cdot 10^6$ *м*. Таким образом, на экваторе ($\varphi = 0$)

$$\omega^2 R = (7{,}3\cdot 10^{-5})^2\cdot 6{,}38\cdot 10^6 = 3{,}4\cdot 10^{-2}\ м/с^2.$$

На столько и отличается ускорение свободного падения на экваторе от того ускорения, которое наблюдалось бы, если бы Земля не совершала своего суточного движения. В любом другом месте это различие еще меньше. Разница настолько мала, что об этом не стоило бы и статью писать, если бы не принципиальная важность самого вопроса о движении тел относительно ускоренно движущихся систем координат. Впрочем, стоит, может быть, добавить, что как ни мала разница между g' и g, она иногда играет и существенную роль. Так, например, часы с маятником (период колебаний маятника зависит от ускорения свобод-

*) Мы не учли, что в верхней точке траектории тело обладало линейной скоростью вращения вокруг земной оси, большей скорости вращения точки отсчета на Земле (поскольку угловая скорость суточного вращения одна и та же, а расстояние до центра вращения от начальной точки падения тела больше, чем от точки отсчета на Земле). Следовательно, упавшее тело окажется смещенным к востоку относительно основания линейки. Вследствие этого при падении тела с верхнего конца линейки на Землю появляется дополнительное ускорение — так называемое ускорение Кориолиса, — которое мы и не учитываем.

ного падения) на экваторе отстают от совершенно таких же часов на полюсе больше, чем на 3 минуты за сутки. В большинстве же случаев разницей между g' и g можно пренебречь.

5. Теперь обсудим вопрос о силе тяжести, действующей на вращающейся Земле, и о весе тел на ней.

Сила тяжести, приложенная к какому-нибудь телу массой m на поверхности Земли, — это сила всемирного тяготения между этим телом и Землей. Абсолютное значение этой силы равно

$$F = \gamma \frac{mM}{R^2},$$

и направлена она к центру Земли. Ясно, что на эту силу вращение Земли никаким образом влиять не может.

По второму закону Ньютона эта сила равна произведению массы тела на ускорение, сообщаемое этой силой:

$$\gamma \frac{mM}{R^2} = mg. \quad (5)$$

Следовательно,

$$g = \gamma \frac{M}{R^2}.$$

Ускорение g, входящее в выражение для силы тяжести, — это ускорение в «неподвижной», или, как говорят, в инерциальной системе отсчета. Как известно, только для таких систем верны законы движения Ньютона, которыми мы пользовались, записывая формулу (5). Иначе обстоит дело с величиной, называемой весом тела.

Вес тела — это сила, с которой тело действует на опору, на которой оно помещено, или на подвес, к которому оно подвешено. Сила эта может быть любой, в зависимости от того, с каким ускорением относительно неподвижной системы координат движется опора или подвес вместе с телом.

Если опора или подвес покоятся относительно неподвижной системы координат или движутся относительно нее без ускорения, то вес тела просто равен силе тяжести, действующей на него.

Но весы, при помощи которых измеряется вес тела в любом месте Земли, кроме ее полюсов, движутся с ускорением (из-за вращения Земли). Поэтому везде, кроме полюсов, *вес тела не равен силе тяжести*. Вес тела P, измеряемый весами, движущимися с ускорением a относительно неподвижной Земли, равен

$$P = m(g - a). \quad (6)$$

В нашем случае роль ускорения a играет ускорение $\omega^2 R \cos\varphi$. Поэтому

$$P = m(g - \omega^2 R \cos\varphi). \quad (6a)$$

Так как ускорение $\omega^2 R \cos\varphi$ различно на разных широтах, то различен и измеренный на разных широтах вес тела. Наименьшим вес тела будет на экваторе. Впрочем, величины веса тела на экваторе и на полюсе различаются так же мало, как и величины ускорения свободного падения, измеренные в этих точках.

Мы видим, таким образом, что когда мы пользуемся «неподвижной», то есть инерциальной системой координат, то для веса тела мы можем написать выражение

$$P = mg.$$

Но когда мы пользуемся неинерциальной системой координат, то есть системой координат, движущейся с ускорением, то вторым законом Ньютона пользоваться нельзя. Нельзя, значит, пользоваться и формулой $P = mg'$, которая получается именно из второго закона Ньютона. Тем не менее, мы написали формулы (6) и (6a), которые как раз и означают, что $P = mg'$, где g' — ускорение относительно неинерциальной системы координат. Но ведь это же «незаконно»? Да, незаконно. Но о том, почему такие «незаконные» формулы пишутся, будет рассказано в другой статье.

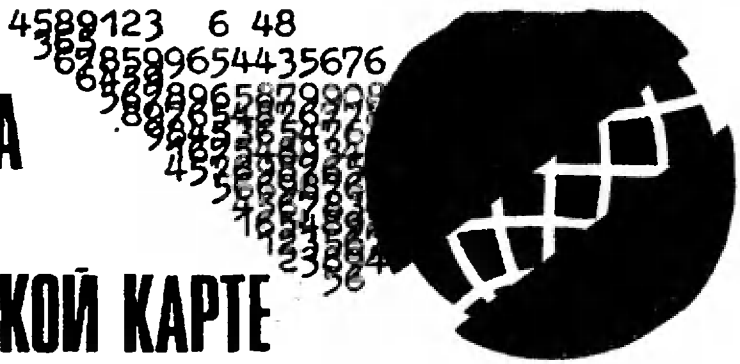
Упражнения

1. В северном полушарии падающий камень из-за вращения Земли слегка отклоняется в сторону экватора. Куда отклонится падающий камень в южном полушарии?

2. С какой угловой скоростью должна была бы вращаться Земля, чтобы ускорение свободного падения тела на экваторе было равно нулю? Каков был бы в этом случае вес тела? Какая сила тяжести действовала бы на него?

Э. Г. БЕЛАГА

АРИФМЕТИКА НА ГЕОГРАФИЧЕСКОЙ КАРТЕ



Одна из глав превосходной книги по теории графов *) начинается с описания . . . болезни:

«Гипотезу четырех красок можно с полным основанием назвать еще «болезнью четырех красок», так как она во многом похожа на заболевание. Она в высшей степени заразна. Иногда она протекает сравнительно легко, но в некоторых случаях приобретает затяжной или даже угрожающий характер. Никаких прививок против нее не существует . . .»

Это высказывание американского математика Ф. Харари, очень похожее на памятку врача-эпидемиолога, стоит дополнить мнением известного математика и педагога О. Оре:

«Наиболее знаменитая среди этих задач **)— проблема четырех красок, впервые поставленная перед математиками Де Морганом около 1850 года. Никакая другая проблема не вызывала столь многочисленных и остроумных работ в теории графов. Благодаря своей простой формулировке и раздражающей неуловимости она до сих остается мощным стимулом исследований различных свойств графов» ***).

*) Ф. Харари, Теория графов, перевод с англ. изд-во «Мир», М., 1973.

**) Имеются в виду задачи теории графов. — *Прим. ред.*

***) О. Оре, Теория графов, перевод с англ., изд-во «Наука», М., 1968.

По-видимому, именно «раздражающая неуловимость» этой проблемы-гипотезы и есть главный возбудитель болезни, описанной Ф. Харари; что же касается «простой формулировки», то она, вероятно, известна большинству читателей: *всякую карту на сфере можно раскрасить не более чем в четыре цвета так, чтобы любые две соседние страны были окрашены в разные цвета.*

Имеется в виду, конечно, идеализированная карта: на географических картах один (синий) цвет всегда соответствует водным поверхностям. Мы будем считать, что на наших картах их нет, как нет и стран, состоящих из двух и более не связанных между собой частей (так обстоит дело, например, с Данией и ее заморской провинцией Гренландией). Эти примеры показывают, что понятие карты нуждается в уточнении.

Наша цель — рассказать об одном из наиболее ранних и, пожалуй, наиболее остроумных походов к решению этой проблемы — условно его можно назвать арифметическим: работа в этом направлении продолжается и поныне, и наш рассказ не будет почти ничем напоминать первоначального изложения первооткрывателей.

Условия заданий, решения которых приведены в конце номера, являются фактически частью текста; некоторые из них не сложнее картинок из альбомов «Раскрась сам».

Карты на сфере

Картой на сфере мы будем называть всякое разбиение сферы отрезками гладких кривых на конечное число областей — *стран* карты. Относительно этих отрезков кривых естественно предполагать следующее:

1) каждый из них не имеет самопересечений;

2) любые два из них либо совсем не пересекаются, либо пересекаются в концевых точках;

3) концевые точки любого из них входят в число концевых точек одного или нескольких других отрезков, то есть не являются «висячими».

Ясно, что всякий из этих отрезков, составляющих в совокупности *границу карты*, является частью *границы двух стран* (или всей этой границей); такие страны мы и будем называть *соседними*. Отметим, кстати, что строгое доказательство утверждения, начинающегося выше словами «ясно, что...» и называемого теоремой Жордана, чрезвычайно громоздко, несмотря на всю его очевидность.

Сферические карты удобно рисовать в виде разделенного на страны «континента», окруженного «океаном» — одной из стран (на рисунке 1 страной A; «континентов» может быть и несколько, как на рисунке 2). Страны M и E на рисунке 1 — не соседние, хотя и имеют общую точку границы; страны D и E обладают даже двумя разрозненными участками общей границы.

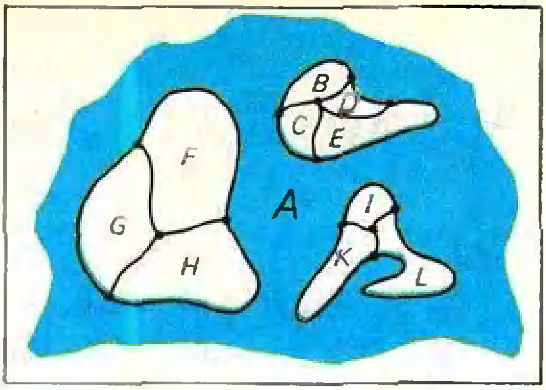


Рис. 2. Карта, для которой число не связанных между собой кусков графа границ (число «островов» в «океане» A) равно трем ($K_{\text{гр}} = 3$).

Потребуем еще, чтобы на карте не было стран, имеющих только одного соседа («острова» в «океане»); карты с такими странами раскрашивать, конечно, ничуть не труднее, но изложение осложняется исключениями и уточнениями.

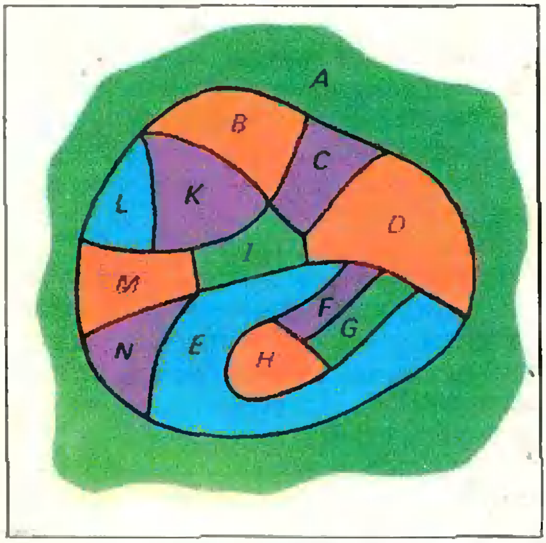


Рис. 1. Карта (страны от A до N), правильно раскрашенная в четыре цвета.

Раскраски карт

Раскраску карты в n цветов назовем *правильной n-раскраской*, если любая пара соседних стран окрашена в разные цвета. Нарисовав несколько сферических карт и раскрасив их, вы легко убедитесь в том, что хотя есть карты, для правильной раскраски которых достаточно трех или даже двух красок, но такие карты «нетипичны» — обычно нужны четыре краски.

Задание 1. *Нарисуйте карту из четырех стран, которую нельзя было бы правильно раскрасить двумя или тремя красками.*

Задание 2. а) *На плоскости даны n окружностей. Докажите, что при любом расположении этих*

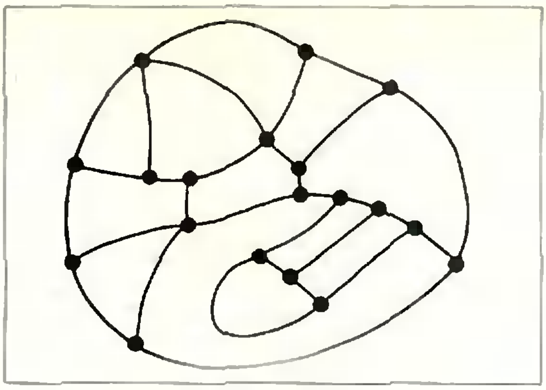


Рис. 3. Граф границ карты.

окружностей образуемую ими карту можно правильно раскрасить двумя красками.

б) *Сформулируйте условия, необходимые и достаточные для того, чтобы карту можно было правильно раскрасить двумя красками.*

В результате многолетней кропотливой работы было доказано, что любая карта, содержащая не более 41 страны, имеет правильную 4-раскраску. Из этого ясно, что если и существует пример, опровергающий нашу гипотезу, то построить его трудно. Вместе с тем правильная 5-раскраска существует для любой сферической карты. Попытайтесь самостоятельно найти доказательство этого факта, установленного еще в конце XIX века.

Графы карты

Всякую систему точек и линий, соединяющих некоторые из этих точек и попарно не пересекающихся, называют *графом*; точки называют *вершинами*, линии — *ребрами* графа.

Как видно из определения и свойств 1) — 3) карты на сфере, она характеризуется своим *графом границ*; его вершины — точки, в которых сходятся не менее трех стран, ребра — участки границ между вершинами (рис. 3). Мы определим также *граф столиц и дорог карты*; его вершины — «столицы» стран (произвольные, но фиксированные точки, выбранные по одной внутри каждой страны), ребра — «дороги», соединяющие столицы соседних стран (по одной на каждую пару соседей) и проходящие через участок границы между ними (рис. 4, 5).

Раскраску карты можно заменить раскраской вершин графа столиц и дорог этой карты; *правильность* раскраски имеет тот же смысл, если условиться две вершины любого гра-

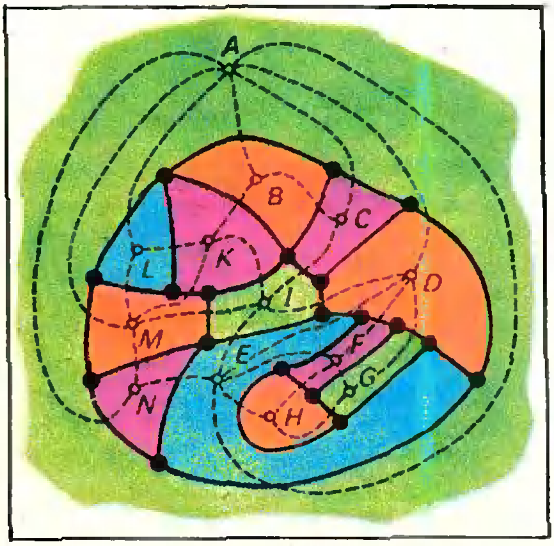


Рис. 4. Страны от A до N, их столицы и дороги.

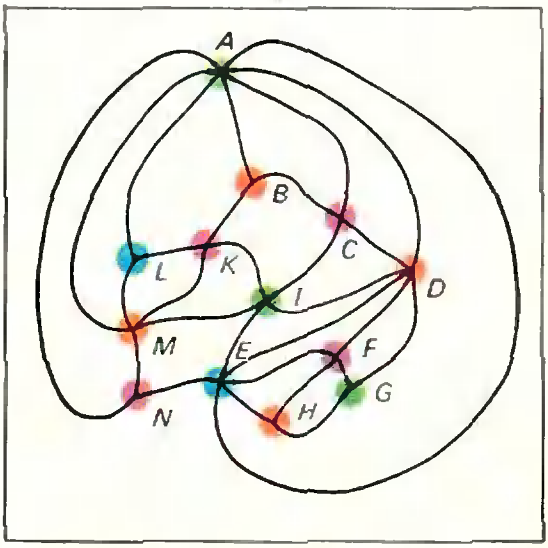


Рис. 5. Граф столиц и дорог карты и его правильная 4-раскраска.

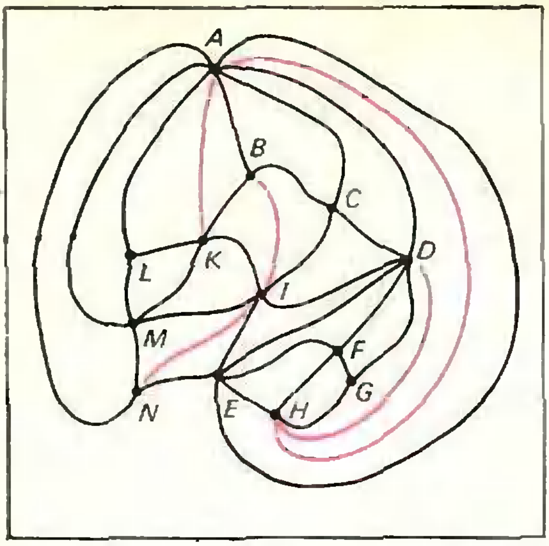


Рис. 6. Красными линиями изображены ребра, достраивающие граф столиц и дорог карты рисунка 1 до графа триангуляции; ребра эти можно было бы строить и по-другому (например, ME вместо NI и т. п.).

фа считать соседними, когда они соединены ребром.

Приступая к раскраске вершин графа столиц и дорог карты на сфере, проверим, можно ли его дополнить ребром, не пересекающим других ребер графа, и если можно, то дополним (например, граф на рисунке 5 — ребром AK). Любая правильная 4-раскраска вновь полученного графа будет правильной и для исходного графа; обратное, вообще говоря, неверно — две несоседние вершины стали соседними и должны быть разноцветными. Мы продолжим этот процесс добавления ребер.

З а д а н и е 3. *Докажите, что этот процесс завершится в тот момент, когда граф будет разбивать сферу на криволинейные треугольники.* (На рисунке 6 изображен граф, полученный из графа рисунка 5.)

Такой граф называют графом триангуляции сферы *), а треугольники называют гранями графа. На рисунке 7 изображен граф вершин и ребер (в привычном геометрическом понимании этих слов — «вершина тетраэдра», «ребро куба») правильного двадцатигранника — икосаэдра; грань 20 выглядит как внешняя часть треугольника XYZ.

З а д а н и е 4. *Какой должна быть карта, чтобы ее граф столиц и дорог был графом триангуляции?*

З а д а н и е 5. *а) Докажите, что граф вершин и ребер правильного восьмигранника — октаэдра — может быть правильно раскрашен тремя красками.*

б) Сформулируйте условия, необходимые и достаточные для того, чтобы граф триангуляции обладал правильной 3-раскраской.

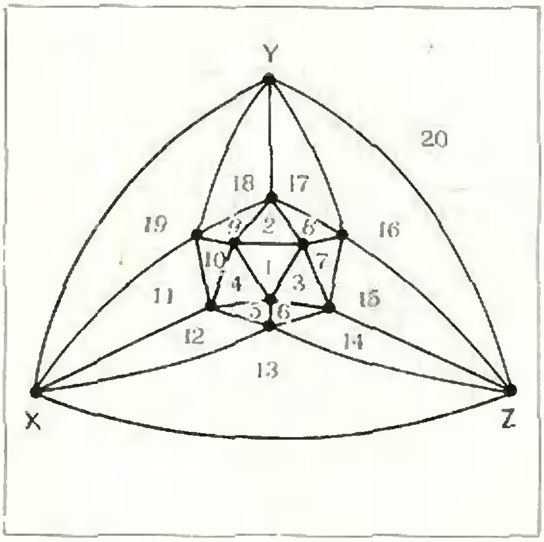


Рис. 7. Граф икосаэдра.

Геометрия раскраски

Правильной 4-раскраске вершин любого графа триангуляции сферы можно придать простой и красивый геометрический смысл. Этим и объясняется наше желание перейти от графа столиц и дорог карты к его графу триангуляции, хотя сама задача раскраски на первый взгляд усложняется.

Рассмотрим некоторый тетраэдр, каждая из четырех вершин которого раскрашена в свой цвет (рис. 8, *д*). Предположим теперь, что некоторый граф триангуляции сферы правильно

*) Триангуляция (геодезический термин) — разбиение местности на треугольники.

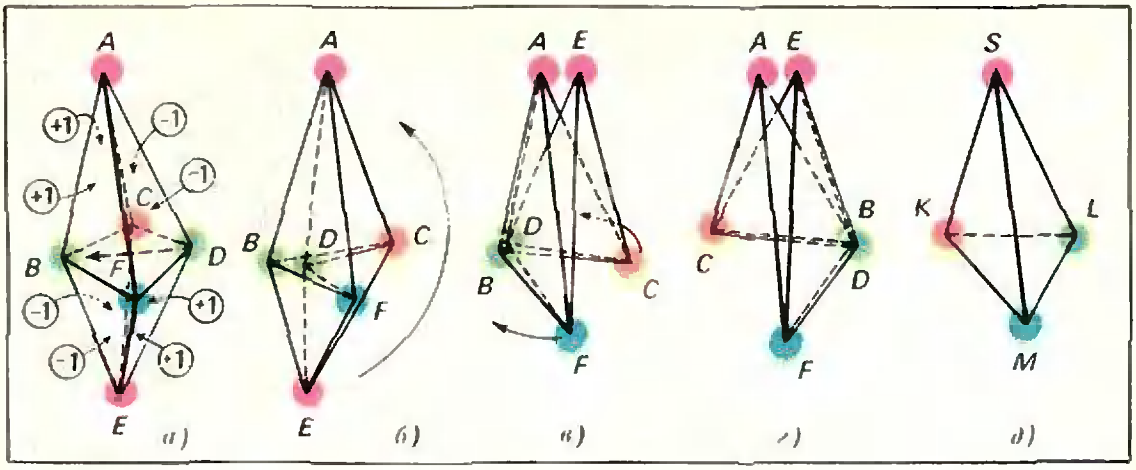


Рис. 8. Процесс наложения поверхности октаэдра на поверхность тетраэдра.

раскрашен в те же четыре цвета. Тем самым каждой его вершине соответствует вершина тетраэдра, причем любым двум соседним — разные. А это означает, что каждому ребру и каждой грани графа соответствует *некоторое ребро и некоторая грань* тетраэдра: ребру графа — то ребро тетраэдра, вершины которого окрашены в те же два цвета, что и вершины ребра графа, а грани графа — подобным же образом определяемая грань тетраэдра. Мы можем представлять себе это соответствие как наложение раскрашенной триангулированной поверхности сферы на четырехгранную поверхность тетраэдра, вершины которого символизируют четыре цвета раскраски. Это наложение можно начинать с любой окрашенной в некоторый цвет вершины триангуляции, совместив ее с вершиной тетраэдра того же цвета. Переходя к соседней вершине триангуляции и совмещая ее с соответствующей по цвету вершиной тетраэдра (которая всегда отлична от первой!), мы одновременно получим совмещение ребра триангуляции с ребром тетраэдра. Подобным же образом совместим грань триангуляции с гранью тетраэдра, и затем, шаг за шагом добьемся нужного наложения.

Описанный процесс наложения изображен на рисунке 8 (*а* — *д*) для поверхности правильного восьмигранника — октаэдра. Внимательно проследив детали этого процесса на примере рисунка 8, нетрудно уяснить себе, *почему* такое наложение при правильной 4-раскраске возможно *и как оно происходит (в частности,* поверхность сферы приходится считать гибкой и допускающей в случае необходимости самопересечения).

Арифметика раскраски

Если при наложении конкретной вершины триангуляции достаточно указать вершину тетраэдра, в которую она переходит (то есть цвет этой вершины), а при наложении конкретного ребра — ребро тетраэдра (то есть два цвета), то при наложении конкретной грани недостаточно указать грань тетраэдра — нужно еще знать, какой стороной она накладывается на эту грань — «лицевой» или «тыльной». Проследить это можно на примере наложения, изображенного на рисунке 8. Сформулируем теперь следующее правило.

(*) *Если при наложении грани графа триангуляции на грань тетраэдра ее внешняя сторона легла на внешнюю сторону грани тетраэдра, то сопоставим этой грани графа триангуляции число +1; если же на внутреннюю, то* — 1 (см. рис. 8, *а*).

Эти числа называют *числами Хивуда* раскраски — в честь английского математика П. Хивуда, пионера задач о раскрасках и первооткрывателя «арифметических» законов в проблеме четырех красок.

Основное, хотя и вполне очевидное свойство *чисел Хивуда состоит* в следующем:

Лемма. *Если числа Хивуда двух соседних граней триангуляции равны, то эти грани отображаются на разные (но, конечно, всегда соседние) грани тетраэдра, если же они не равны, то эти грани отображаются на одну грань тетраэдра, одна «лицевой» стороной, другая — «тыльной».*

Эта лемма только детализирует определение чисел Хивуда; а вот следующие три арифметические свойства этих чисел на первый взгляд довольно неожиданны:

1) Сумма всех чисел Хивуда правильной раскраски вершин графа триангуляции делится на 4 (это свойство стало известно недавно).

2) Возьмем любую вершину триангуляции; сумма чисел Хивуда граней, сходящихся в этой вершине, делится на три (этот фундаментальный факт был открыт Хивудом в 1898 году).

3) Наоборот, если нам удастся *подобрать числа ± 1 для граней графа* триангуляции так, чтобы они удовлетворяли условию 2), то задача о раскраске решена — можно накладывать триангуляцию на поверхность тетраэдра, соблюдая правило (*); условие 2) обеспечит выполнимость такого наложения.

Иллюстрацией утверждений 1), 2), 3) может служить рисунок 9, где изображен граф икосаэдра и его правильная 4-раскраска.

Мы докажем только утверждение 1); доказательство утверждения 2) аналогично и составляет содержание задания 6; доказательство 3) не совсем элементарно, и мы его не приводим. Отметим только, что делимость на три связана с тем, что в каждой вершине тетраэдра сходятся *три* грани, а делимость на четыре — с тем, что у тетраэдра *четыре* грани.

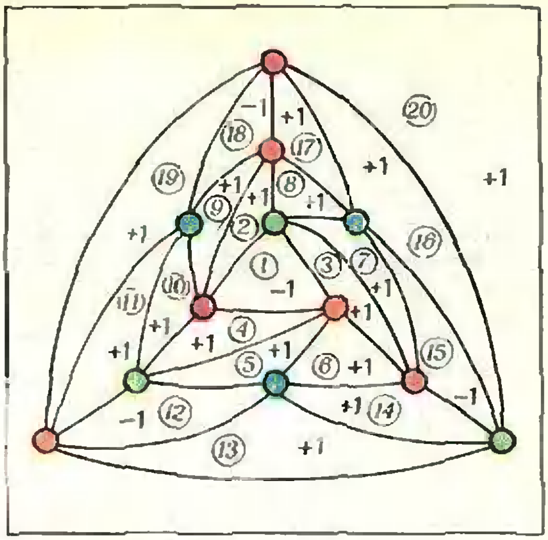


Рис. 9. Граф икосаэдра и его числа Хивуда. Правильная 4-раскраска была построена из чисел Хивуда наложением на поверхность тетраэдра (см. рис. 8, *д*); центральная грань раскрашивается случайным образом; раскраска остальных вершин определяется условием 3).

Делимость на четыре

Итак, пусть вершины некоторого графа триангуляции правильно раскрашены в четыре цвета и каждой грани графа сопоставлено число Хивуда. Докажем, что сумма всех чисел Хивуда делится на четыре.

Разобьем совокупность граней триангуляции на четыре группы: все грани каждой из этих групп отображаются в одну и ту же грань тетраэдра, и любая пара граней из разных групп — в разные грани тетраэдра. Может случиться, что на некоторые *из граней тетраэдра не наложится ни* одна из граней графа триангуляции (к примеру, на рисунке 8, *д* такими гранями оказываются грань KLM и грань KSM). В таком случае соответствующие группы не будут содержать ни одной грани графа триангуляции.

Мы докажем, что суммы чисел Хивуда граней, входящих в каждую их этих групп, равны между собой (если какая-то из групп пуста, то есть не содержит ни одной грани, то естественно считать соответствующую сумму равной нулю; тогда и другие суммы будут равны нулю). Так как сумма всех чисел Хивуда распадается на суммы по четырем группам граней, то из равенства этих сумм по группам и будет следовать делимость на четыре.

Выберем произвольным образом две грани тетраэдра. Рассмотрим соответствующие им группы граней триангуляции и составим суммы чисел Хивуда граней по каждой из этих групп. Возьмем теперь любую грань графа триангуляции, входящую в одну из этих групп, и то ее ребро, которое отображается на общее ребро двух граней тетраэдра, выбранных нами вначале. Рассмотрим ту грань триангуляции, которая имеет с первой именно *это* общее ребро; понятно, что такая соседняя грань определяется однозначно. При этом она может отображаться лишь на одну из выбранных граней тетраэдра и поэтому либо входит в ту же группу граней, что и первая,— тогда по лемме числа Хивуда этих граней не равны, либо входит во вторую из этих групп — и тогда по той же лемме числа Хивуда этих двух граней равны. Отсюда следует, что если в одну из двух рассматриваемых нами сумм входит какое-то слагаемое (число Хивуда некоторой грани), то либо в другую сумму входит равное слагаемое (число Хивуда единственной соседней грани из второй группы), либо в ту же сумму входит равное по величине, но противоположное по знаку слагаемое (число Хивуда опять единственной соседней грани, но на этот раз из той же группы). Этим равенство двух сумм доказано.

З а д а н и е 6. *Докажите тем же методом свойство 2) чисел Хивуда.*

Не раскрашивать, а вычислять

Свойство 3) чисел Хивуда позволяет заменить задачу нахождения правильной 4-раскраски некоторой арифметической задачей на графе: ищутся значения неизвестных x (чисел Хивуда), удовлетворяющих условиям $x = \pm 1$ и соотношениям 2) делимости на 3. Подсчитаем число неизвестных и число соотношений.

С каждым графом на сфере связаны четыре целых числа: число его вершин — B, ребер — P, областей, на которые граф разбивает сферу, — Γ и число K связных компонент, на которые распадается граф (из одной вершины такой компоненты можно попасть в любую другую вершину той же компоненты, «путешествуя» по ребрам графа; в вершину же другой компоненты попасть так невозможно).

З а д а н и е 7. *Докажите, что для любого графа на сфере*

$$B - P + \Gamma - K = 1.$$

З а д а н и е 8. *Докажите, что для любой карты число компонент ее графа столиц и дорог равно* 1.

Следствием заданий 7 и 8 является знаменитая **теорема Эйлера**: *Числа B, P и Γ графа столиц и дорог любой карты удовлетворяют равенству* $B - P + \Gamma = 2$.

З а д а н и е 9. *Докажите, что для любого графа триангуляции сферы справедливо равенство*: $2B = \Gamma + 4$.

Итак, вернемся к нашим неизвестным — числам Хивуда. Количество неизвестных равно числу Γ граней триангуляции, число соотношений 2) равно числу B вершин триангуляции. Как следует из равенства задания 9, число неизвестных почти вдвое превосходит число соотношений делимости (каждое из этих неизвестных может принимать только два значения: $+1$ и -1). Поэтому и кажется обоснованной (вот уже более 70 лет!) надежда, что такие числа всегда могут быть найдены. Вероятно, теперь читатели смогут лучше оценить слова О. Оре о «раздражающей неуловимости» проблемы четырех красок.

задачник Кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 июня 1974 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», M256, M257» или «...Ф268». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные отмечены звездочкой.

Задачи

M256—M260; Ф268—Ф272

M256. Около окружности описан многоугольник. Точки касания его сторон с окружностью служат вершинами второго, вписанного в эту окружность многоугольника. Докажите, что произведение расстояний от произвольной точки M окружности до сторон одного многоугольника равно произведению расстояний от этой точки до сторон второго.

(Под расстоянием от точки M до стороны понимается расстояние до прямой, на которой лежит эта сторона.)

А. Н. Чернышев

M257. При каких натуральных $n \geqslant 2$ неравенство

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant$$
$$\geqslant p\,(x_1 x_2 + x_2 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n)$$

выполняется для любых действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если а) $p = 1$; б) $p = {}^4/_3$; в) $p = {}^6/_5$?

Нгуен Конг Ким (Ханой, ДРВ)

M258. На плоскости даны три точки K, L, N. Про четырехугольник известно, что он выпуклый и что середины некоторых трех его сторон лежат в данных точках K, L, N. Найдите множества точек, в которые может попасть:

а) середина четвертой стороны;

б) вершина этого четырехугольника.

А. П. Савин

M259. Назовем *квартетом* четверку клеток на клетчатой бумаге, центры которых лежат в вершинах прямоугольника со сторонами, параллельными линиям сетки. (Например, на рисунке 1 нарисовано три квартета.)

Какое наибольшее число квартетов, не имеющих общих клеток, можно разместить:

а) в квадрате 5×5?

б) в прямоугольнике $m \times n$ клеток?

А. Григорян, ученик 10 класса

М260*. Окружность разбита точками $A_1, A_2, \ldots, A_n$ на n равных частей, каждая из которых окрашена в какой-то цвет. Две дуги (с концами в точках разбиения) называются *одинаково окрашенными*, если при некотором повороте окружности одна из них полностью, включая цвет каждой части, совпадает с другой. (Например, на рисунке 2 дуги A_2A_6 и A_6A_{10} одинаково окрашены.)

Докажите, что если для каждой точки разбиения A_i можно указать две непересекающиеся одинаково окрашенные дуги с общим концом A_i, то всю окружность можно разбить на несколько одинаково окрашенных дуг, то есть окраска «периодическая». Рассмотрите сначала случай, когда красок всего две: скажем, красная и черная.

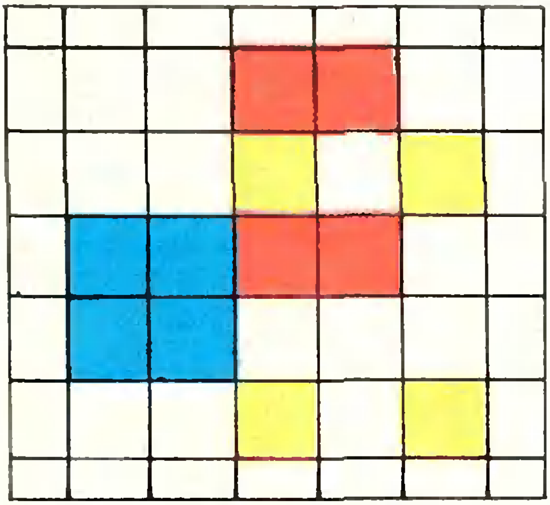


Рис. 1.

Г. А. Гуревич

Ф268. Для определения отношения теплоемкостей газа при постоянном давлении и при постоянном объеме иногда применяется следующий метод. Определенное количество газа, начальная температура, объем и давление которого равны соответственно T_0, V_0 и p_0, нагревается платиновой проволокой, через которую в течение определенного времени проходит электрический ток: один раз при постоянном объеме V_0, причем газ достигает давления p_1, другой раз при постоянном давлении p_0, причем объем газа становится равным V_1. Показать, что $\frac{c_p}{c_V} = \frac{(p_1 - p_0)V_0}{(V_1 - V_0)p_0}$.

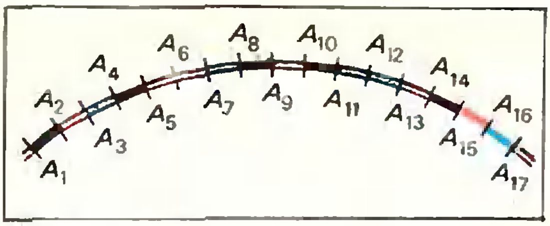


Рис. 2.

Ф269. Математический маятник, который состоит из тяжелого металлического шара массы m и тонкой проводящей нити длины l, совершает малые колебания в горизонтальном однородном магнитном поле с индукцией **B**, направленной перпендикулярно к плоскости колебаний маятника. Максимальный угол, на который отклоняется маятник от вертикали, равен α_0. Как изменится этот угол, если в тот момент, когда маятник проходит положение равновесия, к нему подсоединить с помощью гибких тонких проводов конденсатор емкостью C (рис. 3), причем за время контакта, которое очень мало, конденсатор успевает полностью зарядиться?

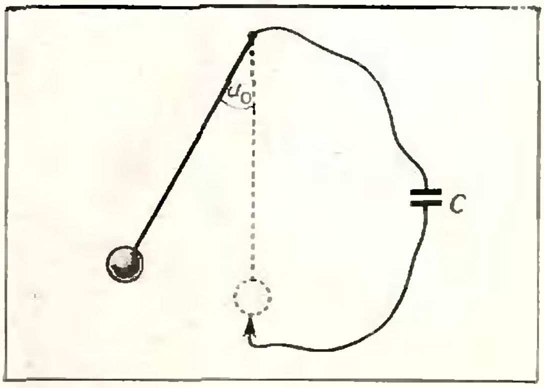


Рис. 3.

Ф270. В длинной пробирке на расстоянии l_1 от запаянного конца имеется короткий столбик ртути (рис. 4). Масса ртути m. С какой угловой скоростью ω нужно вращать пробирку вокруг вертикальной оси, чтобы ртуть достигла конца пробирки? Длина пробирки l, температура воздуха в пробирке не меняется. Атмосферное давление равно p_0.

Ф271. Подсчитать среднюю плотность ρ электрических зарядов в атмосфере, если известно, что напряженность электрического поля на поверхности Земли равна 100 $в \cdot м^{-1}$, а на высоте $h = 1{,}5$ *км* эта напряженность падает до 25 $в \cdot м^{-1}$.

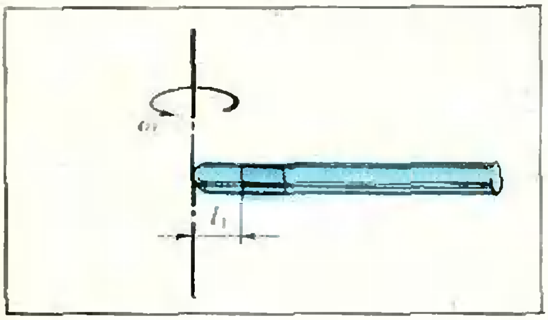


Рис. 4.

Ф272. К стенке, наклоненной под углом α к вертикали, подвешен маятник длины l (рис. 5). Маятник отклонили в плоскости, перпендикулярной к стенке, на небольшой угол β от вертикального положения и отпустили. Найти период колебаний маятника, если $\beta > \alpha$ и удар шарика о стенку абсолютно упругий.

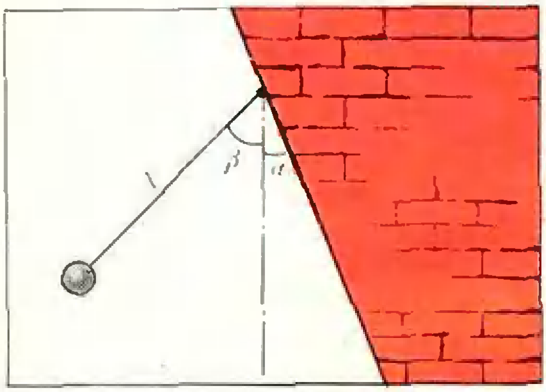


Рис. 5.

Решения задач

М211—М218; Ф223—Ф227

М211. *Дано n точек, $n > 4$. Докажите, что можно соединить их стрелками так, чтобы из каждой точки в каждую можно было попасть, пройдя либо по одной стрелке, либо по двум (каждые две точки можно соединить стрелкой только в одном направлении; идти по стрелке можно только в указанном на ней направлении).*

При $n = 5$ требуемый граф (так называется система точек, соединенных стрелками) представлен рисунком 1. Теперь произведем индукционный переход: докажем, что, если можно соединить стрелками n точек так, как требуется в условии, то можно соединить и $n + 1$ точку. Пусть n точек уже соединены — получился граф с n вершинами. Можно считать, что любые две из этих n точек соединены стрелкой: иначе мы проведем все недостающие стрелки (направив их в любую сторону), и условие задачи тем более будет выполняться. Обозначим новую точку через C.

Рассмотрим два случая.

а) n — четное. Тогда эти n точек разобьем на пары. Пусть точки A_k, B_k — одна из пар ($1 \leqslant k \leqslant n/2$) и из A_k идет стрелка в B_k. Тогда проведем из C стрелку в A_k и из B_k проведем стрелку в C (см. рис. 2). Так проделаем для каждой пары. Новый граф с $n + 1$ вершиной построен. Докажем, что он удовлетворяет условию задачи. Пусть X, Y — две любые различные его вершины. Нам надо доказать, что из X в Y можно прийти, пройдя одну или две стрелки. Если и X и Y не совпадают с C, то это так по индукционному предположению. Пусть X или Y совпадает с C. Тогда другая из этих точек (Y или X) входит в какую-то пару из тех, на которые мы разбили первые n точек. Таким образом, X и Y — это какие-то две из трех точек, изображенных на рисунке 2. Глядя на этот рисунок, легко перебрать все возможные при этом варианты и убедиться, что требование выполняется.

б) n — нечетное. В этом случае разобьем первые n вершин на несколько пар и одну тройку. Сделаем это следующим образом. Выберем любую вершину A_1. Она

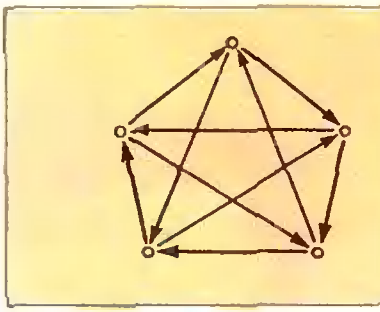


Рис. 1.

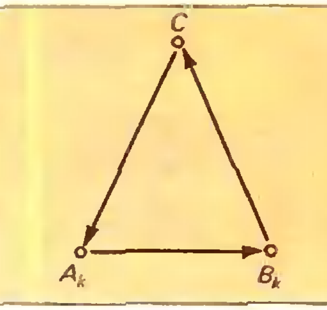


Рис. 2.

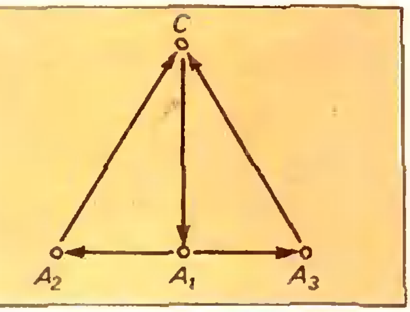


Рис. 3.

соединена стрелками со всеми остальными $n-1$ вершинами: $A_2, \ldots, A_n$. Из A_1 выходят не менее чем две стрелки или в A_1 входят не менее чем две стрелки. Действительно, в противном случае n было бы меньше четырех.

Пусть из A_1 выходят не менее чем две стрелки (другой случай аналогичен) и приходят в вершины A_2, A_3. Остальные вершины разобьем на пары. Теперь соединим стрелками новую вершину с тройкой A_1, A_2, A_3 — как показано на рисунке 3, а со всеми парами — как показано на рисунке 2. Как и в случае а), легко доказать, что полученный граф удовлетворяет условию задачи. Индукционный переход закончен. Итак, мы доказали по индукции, что n точек можно соединить так, как требуется в условии, при $n \geqslant 5$. Если вы поняли доказательство, то без труда разберетесь в следующем парадоксе. При $n=3$ требуемый граф тоже существует (рис. 2), а при $n=4$ такого графа нет (в этом легко убедиться перебором). Но, применив индукционный переход к частному случаю $n=3$, получаем: если такой граф существует при $n=3$, то он существует и при $n=4$. Получилось противоречие *). В чем дело?

М212. *На суде в качестве вещественного доказательства предъявлено 14 монет. Эксперт обнаружил, что семь из них — фальшивые, остальные — настоящие, причем узнал, какие именно фальшивые, а какие — настоящие. Суд же знает только, что фальшивые монеты весят одинаково, настоящие монеты весят одинаково и фальшивые легче настоящих. Эксперт хочет тремя взвешиваниями на чашечных весах без гирь доказать суду, что все обнаруженные им фальшивые монеты действительно являются фальшивыми, а остальные — настоящими. Сможет ли он это сделать?*

На рисунках 4, а, б, в показано, какими тремя взвешиваниями эксперт может убедить суд, что монеты $Ф_1$, $Ф_2$, ..., $Ф_7$ — фальшивые, а $Н_1$, $Н_2$, ..., $Н_7$ — настоящие. Каждый раз правая чашка перевешивает, а это возможно лишь в том случае, если фальшивых монет больше на левой чашке, чем на правой (а настоящих — на правой больше, чем на левой).

Этот способ легко обобщить, и тогда тот факт, что данные n монет — фальшивые, а другие n — настоящие, удается доказать, произведя $[\log_2 n]+1$ взвешиваний. Несмотря на то, что такая система взвешиваний очень экономна (при $n=1000$ достаточно 10 взвешиваний), мы не можем доказать, что она оптимальна. Интересно было бы доказать, что минимальное число взвешиваний все же растет неограниченно при $n \to \infty$ (или опровергнуть это).

А. Л. Тоом

М213. *Дан угол с вершиной О и окружность, касающаяся его сторон в точках А и В. Из точки А параллельно ОВ проведен луч,*

*) Почти как в §§ 2 и 3 статьи М. Милта «Что сказал проводник» («Квант», 1973, № 8).

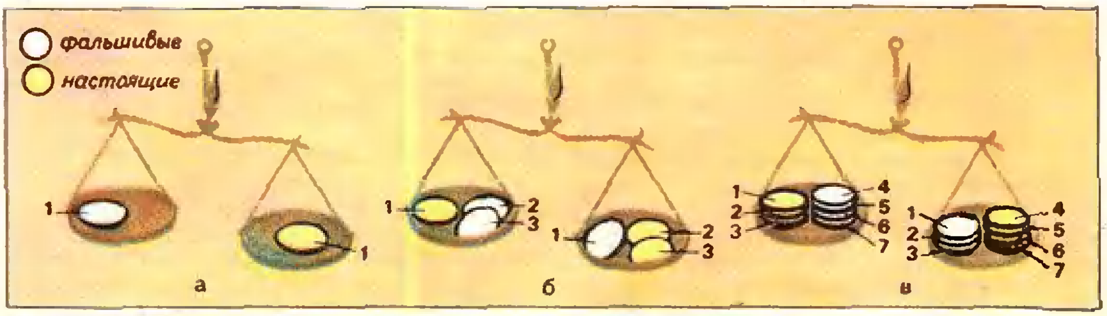


Рис. 4.

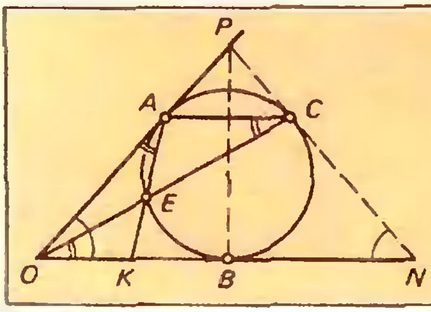


Рис. 5.

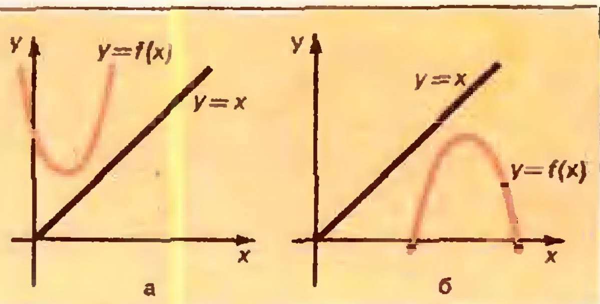


Рис. 6.

пересекающий окружность в точке C. Отрезок OC пересекает окружность в точке E, а прямые AE и OB пересекаются в точке K. Доказать, что $OK = KB$.

Мы получили много различных решений этой задачи, в которых используются теоремы о касательных и секущих, о подобии треугольника, о вписанных углах и т. п. Приведем одно из самых коротких и красивых.

Проведем касательную к окружности в точке C; пусть P и N — точки ее пересечения со сторонами AO и OB угла AOB (рис. 5). Ясно, что PB — ось симметрии треугольника OPN, поэтому все четыре касательные равны:

$$OA = OB = BN = CN.$$

Треугольники NOC и OAK подобны, поскольку

$$\angle CNO = \angle AOK, \quad \angle NOC = \angle ACO = \angle OAK$$

(каждый из последних двух углов измеряется половиной дуги AE). Отсюда

$$\frac{OK}{OB} = \frac{OK}{OA} = \frac{CN}{ON} = \frac{1}{2}.$$

M214. *Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ таков, что уравнение $f(x) = x$ не имеет вещественных корней. Доказать, что уравнение $f(f(x)) = x$ также не имеет вещественных корней.*

Эту задачу можно решить чисто алгебраически, воспользовавшись тем, что если $f(x)$ — многочлен, то $f(f(x)) - x$ всегда делится (как многочлен) на $f(x) - x$, то есть

$$f(f(x)) - x = (f(x) - x)g(x).$$

Здесь $g(x)$ — многочлен второй степени. Несложные выкладки показывают, что дискриминант этого многочлена отрицателен. Большинство читателей прислали, однако, более красивое решение, использующее наглядные соображения, связанные с графиками.

Условие, что уравнение $f(x) = x$ не имеет вещественных корней, означает, что парабола $y = f(x)$ целиком расположена выше или целиком — ниже прямой $y = x$ (рис. 6). Другими словами, для всех x

$$f(x) > x,$$

но тогда для всех x

$$f(f(x)) > f(x) > x,$$

или для всех x

$$f(x) < x,$$

а тогда для всех x

$$f(f(x)) < f(x) < x.$$

Таким образом, в обоих случаях уравнение $f(f(x)) = x$ не имеет решений.

M215*. *На бесконечном клетчатом листе белой бумаги n клеток закрашено в черный цвет. В моменты времени $t = 1, 2, \ldots$ происходит одновременное перекрашивание всех клеток листа по следующему правилу: каждая клетка k приобретает тот цвет, который имело в предыдущий момент большинство из трех клеток: самой клетки k и ее соседей справа и сверху (если две или три из этих клеток были белыми, то k становится белой, если две или три из них были черными, — то черной).*

а) Доказать, что через конечное время на листе не останется черных клеток.

б) Доказать, что черные клетки исчезнут не позже, чем в момент времени $t = n$.

Пусть Ч — какое-то множество черных клеток. Обозначим буквой Г (от слова «голосование») оператор перекрашивания, то есть через Г(Ч) будем обозначать множество клеток, которые получатся из Ч, через $Г^2$(Ч) — множество Г(Г(Ч)), в которое перейдет Ч за два шага, через $Г^3$(Ч) — за три шага и т. д. (см. рис. 7; кстати, этот рисунок опровергает предположение, что общее количество клеток в Г(Ч) всегда меньше, чем в Ч).

Утверждение а) сразу следует из двух таких почти очевидных предложений.

(1) Если к множеству Ч добавить еще черных клеток, то к множеству Г(Ч) тоже могут только добавиться черные клетки, но ни одна не пропадет. Используя знак $\subset$ ($A \subset B$ означает, что множество A целиком содержится в B, в частности, может с ним

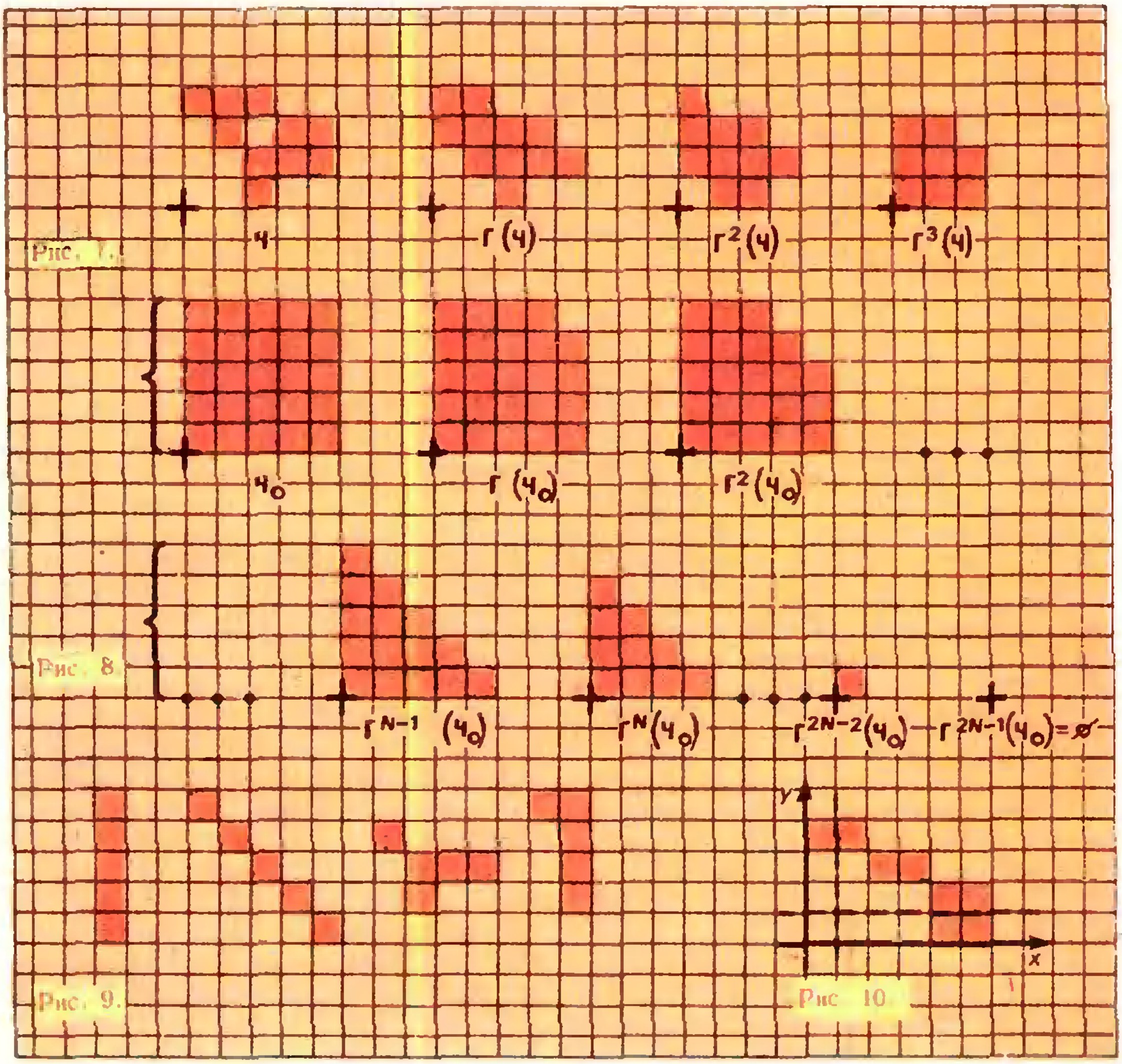


Рис. 7. Рис. 8. Рис. 9. Рис. 10.

совпадать), это можно записать так:

$$Ч \subset Ч' \Rightarrow Г(Ч) \subset Г(Ч').$$

(2) Если $Ч_0$ — множество всех клеток внутри квадрата на клетчатой бумаге (со стороной N клеток), то через конечное число шагов от $Ч_0$ ничего не останется (рис. 8); точнее, уже через $(2N-1)$ шагов получится *пустое* множество черных клеток: $Г^{2N-1}(Ч_0) = \varnothing$.

Ясно, что любое множество Ч можно заключить в достаточно большой квадрат $Ч_0$; согласно (2) этот черный квадрат $Ч_0$ за конечное число шагов «вымрет», а согласно (1) и множество Ч не может просуществовать дольше, чем $Ч_0$. Тем самым задача а) решена.

Доказать б) значительно труднее.

Приведем решение задачи б), придуманное на олимпиаде десятиклассником *А. Гомилко* из Хмельницкого (за это он получил специальный приз).

Кстати говоря, то, что решение б) не может быть очень простым, показывает разнообразие примеров множеств из n клеток, вымирающих ровно за n шагов (рис. 9).

Докажем утверждение б) индукцией по n — количеству клеток в начальном множестве Ч; для $n = 1$ оно очевидно.

Пусть уже доказано, что если в Ч меньше n клеток, то

$$Г^{n-1}(Ч) = \varnothing.$$

Рассмотрим теперь Ч, состоящее из n клеток. Заключим его в прямой угол $x \geq 0$, $y \geq 0$ (оси координат Ox и Oy направим вправо и вверх по линиям сетки, сторона клетки равна 1) так, чтобы в полосе $0 \leq x \leq 1$ лежала хоть одна черная клетка и в полосе $0 \leq y \leq 1$ — тоже (рис. 10).

Пусть $Ч^1$ — часть Ч, лежащая в полуплоскости $x \geq 1$. По предположению индукции, $Г^{n-1}(Ч^1) = \varnothing$. А клетки из $0 \leq x \leq 1$ не оказывают никакого влияния на то, что происходит выше прямой $x = 1$. Следовательно, $Г^{n-1}(Ч)$ целиком лежит в полосе $0 \leq x \leq 1$ (очевидно, что в

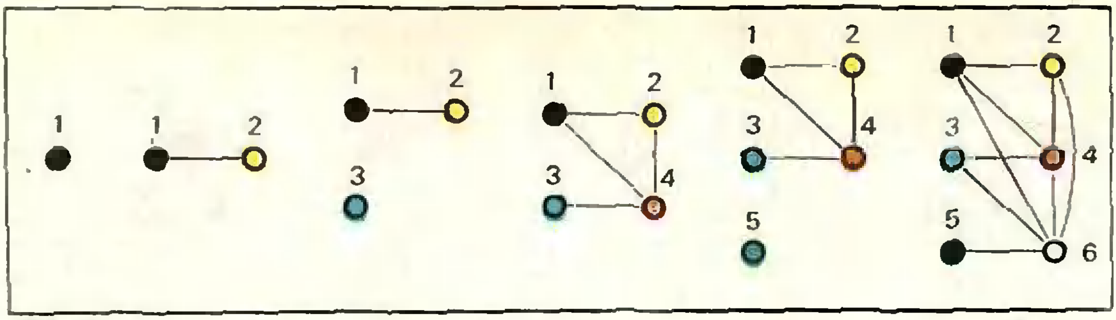


Рис. 11.

полуплоскости $x < 0$ черные *клетки возникнуть* не могут).

Точно так же доказывается, что $Г^{n-1}(Ч)$ содержится в полосе $0 \leqslant y \leqslant 1$. Отсюда следует, что $Г^{n-1}(Ч)$ может содержать максимум одну клетку: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ и, значит, $Г^{n}(Ч) = \varnothing$.

Н. Б. Васильев

М216. *N человек не знакомы между собой. Нужно так познакомить друг с другом некоторых из них, чтобы ни у каких трех людей не оказалось одинакового числа знакомых. Докажите, что это можно сделать при любом N.*

Решим задачу методом математической индукции. При $N < 3$ утверждение задачи очевидно.

Предположим, что удалось познакомить k человек, так, что никакие трое из них не имеют равного числа знакомых. Присоединим $k+1$-го. Укажем способ, как познакомить $(k+1)$-го чтобы в группе из $(k+1)$-го человека по-прежнему никакие трое не имели равного числа знакомых. Если среди первых k человек найдется человек, знакомый со всеми остальными, то $k+1$ не будем ни с кем знакомить. Если же такого нет, то познакомим $(k+1)$-го со всеми.

В первом случае $(k+1)$-й не имеет знакомых, а каждый из остальных имеет хоть одного знакомого — того, который был знаком со всеми. Во втором случае $(k+1)$-й имеет k знакомых, количество знакомых у каждого из первых k человек возросло на единицу, но ни у одного из них не стало k знакомых.

На рисунке 11 показаны схемы знакомств при $k = 6$, получающиеся описанным способом.

Существует и много других решений этой задачи. Например, если занумеровать n человек числами от 1 до n и познакомить i с j, если

$$|i-j| \leqslant \frac{n}{2},$$

то равное количество знакомых имеют только пары людей с номерами k и $n-k$ (при $k \leqslant \frac{n}{2}$ человек с номером $(k-1)$ имеет, очевидно, на одного знакомого меньше, чем его сосед k).

Г. А. Гальперин

М217. *Дан выпуклый n-угольник с попарно непараллельными сторонами и точка внутри него. Доказать, что через эту точку нельзя провести больше n прямых, каждая из которых делит площадь n-угольника пополам.*

Если через точку O проходят две прямые, каждая из которых делит площадь многоугольника M пополам, то в симметричных друг другу углах между этими прямыми лежат одинаковые по площади куски многоугольника M (они закрашены на рис. 12).

Рассмотрим вместе с M еще и многоугольник M', симметричный ему относительно точки O (рис. 13). Внутри любого из углов, образованных двумя нашими прямыми, контуры многоугольников M и M' должны пересекаться (в противном случае площадь одного из кусков больше площади другого; совпадать даже частично контуры M и M' не могут, поскольку у M по условию нет параллельных сторон). Пусть всего таких прямых k штук. Тогда существует $2k$ углов, в каждом из которых должны лежать различные точки пересечения контуров M

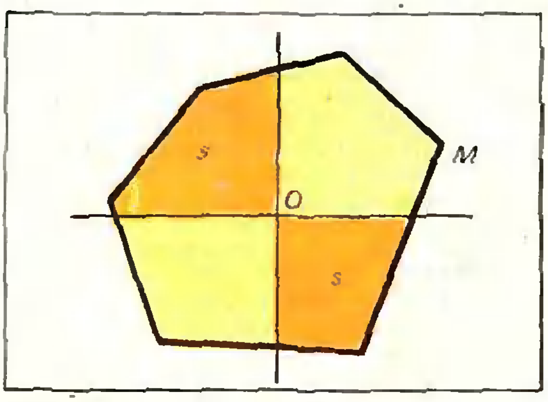


Рис. 1

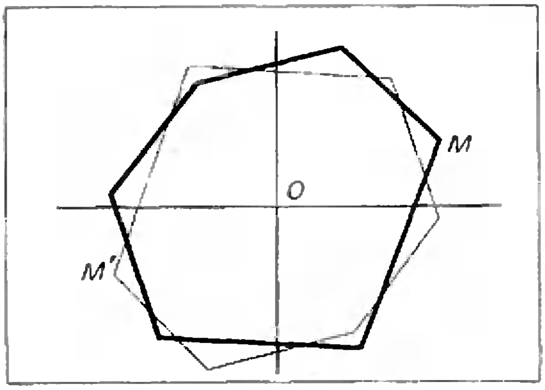


Рис. 13.

и M' (на рис. 13 $k=3$). Но на каждой стороне многоугольника M, очевидно, лежит не более двух таких точек: M' — выпуклый, а контур выпуклого многоугольника пересекается с прямой не более чем в двух точках. Следовательно, всего точек пересечения не более $2n$ (на рисунке 13 их как раз $2\cdot 6=12$). Поэтому $2k \leqslant 2n$, а значит $k \leqslant n$. Задача решена.

Заметим еще следующее. Будем вращать направленную прямую l, проходящую через O, вокруг точки O и рассмотрим разность площадей слева и справа от l, как функцию от угла поворота φ (φ меняется от 0 до π; при $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$ прямая l совпадает сама с собой, но имеет противоположное направление); положим

$$S_л(\varphi)-S_п(\varphi)=f(\varphi).$$

Тогда f меняется монотонно на каждом интервале, на котором прямая l не проходит через вершины M или точки пересечения контуров M и M' (докажите это). Конечно, эта функция непрерывна и

$$f(0)=-f(\pi).$$

Отсюда следует, что хотя бы одна прямая, проходящая через O и делящая площадь M пополам, существует. Докажите, что если ни одна из этих прямых не проходит через «особую точку» — вершину M или точку пересечения контуров M и M', — то всего таких прямых нечетное число.

Н. Б. Васильев

М218. *Доказать, что если x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — положительные числа, то*

$$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2 \geqslant 4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1).$$

Поскольку $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, то

$$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2-(x_1-x_2+x_3-x_4+x_5)^2=(2x_1+2x_3+2x_5)(2x_2+2x_4)=4p+4x_1x_4+4x_5(x_2-x_1),$$

где $p=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1$. Отсюда

$$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2 \geqslant 4p+4x_5(x_2-x_1). \quad (1)$$

Аналогично доказывается, что

$$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2 \geqslant 4p+4x_3(x_1-x_2). \quad (2)$$

Нужное неравенство следует из (1), если $x_2 \geqslant x_1$, и из (2), если $x_1 \geqslant x_2$.

Подумайте, при каком наибольшем c_n для всех положительных x_1, x_2, …, x_n верно неравенство

$$(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)^2 \geqslant c_n(x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n+x_nx_1).$$

Б. Д. Гинзбург

Ф223. *Модели корабля толчком сообщили скорость $v_0=10$ м/с. При движении модели на нее действует сила сопротивления, пропорциональная скорости:* $\mathbf{F}=-k\mathbf{v}$. *а) Найти путь, пройденный моделью за время, в течение которого ее скорость уменьшилась вдвое. б) Найти путь, пройденный моделью до полной остановки. Считать $k=0{,}5$ кг/с. Масса модели $m=0{,}5$ кг.*

Согласно второму закону Ньютона изменение импульса корабля за малое время Δt равно импульсу силы F, действующей на корабль:

$$m\Delta v = F\Delta t.$$

Сила F переменна, поэтому изменение импульса корабля за большой промежуток времени t равно импульсу средней силы $F_{ср}t$:

$$mv-mv_0=F_{ср}t.$$

Так как сила F пропорциональна скорости корабля, то

$$F_{ср}=-kv_{ср} \quad \text{и} \quad mv-mv_0=-kv_{ср}t.$$

Но произведение $v_{ср}t$ равно пути s, пройденному кораблем. Поэтому

$$m(v-v_0)=-ks,$$

откуда

$$s=\frac{m}{k}(v_0-v).$$

Теперь легко найти путь, пройденный кораблем за время, в течение которого скорость корабля уменьшилась вдвое:

$$s_1=\frac{m}{k}\left(v_0-\frac{1}{2}v_0\right)=\frac{m}{2k}v_0=5\text{ м},$$

и путь, пройденный кораблем до полной остановки:

$$s_2=\frac{m}{k}(v_0-0)=\frac{m}{k}v_0=10\text{ м}.$$

Итак, задача решена, однако интересно рассмотреть еще вопрос о том, какое время пройдет до полной остановки корабля. Для этого найдем, как меняется со временем скорость корабля.

Так как $m\Delta v = F\Delta t$ и $F = -kv$, то

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{k}{m}v.$$

Мы получили, что скорость изменения скорости корабля пропорциональна самой скорости. Но, как известно (см., например, статью С. Д. Осятинского и Л. З. Румшиского «Экспонента», «Квант», 1972, № 12), если изменение какой-либо величины пропорционально самой этой величине, то такая величина изменяется по экспоненциальному закону, поэтому

$$v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Из этой формулы следует, что $v = 0$ при $t \to \infty$! То есть путь s_2 корабль мог бы пройти за бесконечно большое время! Это означает, что второй вопрос задачи при условии $F \sim v$ следует уточнить. Будем считать, что тело остановилось, если его скорость уменьшилась, например, в тысячу раз (число может быть, конечно, и другим; все зависит от цели эксперимента).

Ф224. *По деревянным сходням, образующим угол α с горизонтом, втаскивают за веревку ящик. Коэффициент трения ящика о сходни μ. Под каким углом к горизонту следует направить веревку, чтобы с наименьшим усилием втаскивать ящик: а) равномерно, б) с заданным ускорением a?*

Рассмотрим силы, действующие на ящик (рис. 14). Это — сила тяжести $m\mathbf{g}$, сила натяжения веревки $\mathbf{F}$, сила реакции сходней $\mathbf{N}$ и сила трения $\mathbf{F}_{тр}$, величина которой $F_{тр} = \mu N$. Спроектируем все силы на направление вдоль сходней и перпендикулярно к ним и запишем соответствующие уравнения движения.

Так как ящик не перемещается в направлении, перпендикулярном к сходням, то сумма проекций сил на это направление

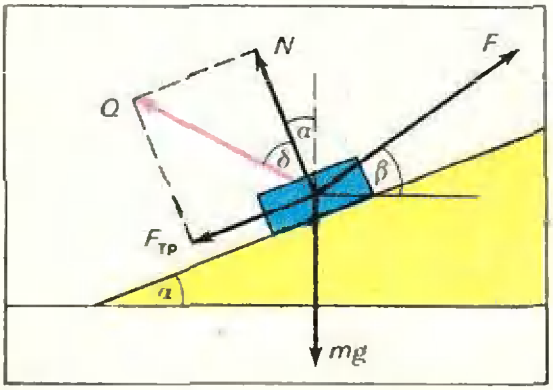


Рис. 14

должна быть равна нулю, то есть

$$N + F\sin(\beta - \alpha) - mg\cos\alpha = 0. \quad (1)$$

Вдоль сходней ящик движется с ускорением a (в частном случае при равномерном движении $a = 0$), поэтому сумма проекций сил должна быть равна ma:

$$F\cos(\beta - \alpha) - mg\sin\alpha - \mu N = ma. \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2)

$$F = \frac{ma + mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos(\beta - \alpha) + \mu\sin(\beta - \alpha)}. \quad (3)$$

В полученное выражение для силы F угол β входит только в знаменатель. Следовательно, величина силы F будет минимальной при таком значении угла β, при котором знаменатель в формуле (3) максимален, то есть максимальна величина

$$\cos(\beta - \alpha) + \mu\sin(\beta - \alpha).$$

Сделаем некоторые преобразования. Представим коэффициент трения μ как тангенс некоторого угла γ:

$$\operatorname{tg}\gamma = \mu; \qquad \gamma = \operatorname{arctg}\mu;$$

$$\sin\gamma = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Тогда можно записать:

$$\cos(\beta - \alpha) + \mu\sin(\beta - \alpha) = \sqrt{1+\mu^2}\cos(\beta - \alpha - \gamma).$$

Последнее выражение максимально и равно $\sqrt{1+\mu^2}$ при $\beta - \alpha - \gamma = 0$, то есть при

$$\beta = \alpha + \gamma = \alpha + \operatorname{arctg}\mu. \quad (4)$$

При таком значении угла β и минимальна сила F. Причем, если ящик движется равномерно ($a = 0$), то

$$F_{min} = \frac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\sqrt{1+\mu^2}},$$

а при движении с ускорением a

$$F_{min} = \frac{ma + mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Однако это решение верно не для любого ускорения. Так как направление силы $\mathbf{F}$ не зависит от a, а абсолютная величина силы $\mathbf{F}$ увеличивается с увеличением ускорения, то при некотором значении ускорения $a = a_0$ сила $\mathbf{F}$ станет такой, что ее составляющая $F\sin(\beta - \alpha)$, перпендикулярная к наклонной плоскости, будет равна по абсолютной величине составляющей силы тяжести $mg\cos\alpha$. При этом обратятся в нуль как сила $\mathbf{N}$, так и сила $\mathbf{F}_{тр}$. В дальнейшем (при $a > a_0$) для того чтобы ящик не оторвался от полозьев, направление силы $\mathbf{F}$ должно меняться с увеличением ускорения a так, чтобы составляющая силы $\mathbf{F}$, перпендикулярная

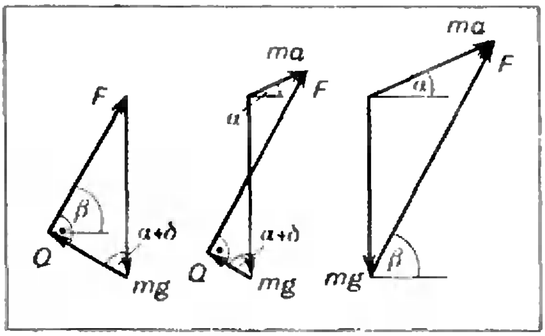


Рис. 15. Рис. 16. Рис. 17

к наклонной плоскости, оставалась равной составляющей силы тяжести, то есть

$$F\sin(\beta-\alpha)=mg\cos\alpha.$$

Для составляющих этих сил, параллельных наклонной плоскости, можно записать

$$F\cos(\beta-\alpha)-mg\sin\alpha=ma.$$

Из двух последних равенств найдем:

$$\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{g\cos\alpha}{g\sin\alpha+a},$$

откуда

$$\beta=\alpha+\operatorname{arctg}\frac{g\cos\alpha}{g\sin\alpha+a}. \qquad (5)$$

Величину a_0 можно найти из тех соображений, что при $a=a_0$ значения угла β из (4) и (5) совпадают:

$$\alpha+\operatorname{arctg}\frac{g\cos\alpha}{g\sin\alpha+a_0}=\alpha+\operatorname{arctg}\mu,$$

откуда

$$a_0=g\left(\frac{\cos\alpha}{\mu}-\sin\alpha\right).$$

Итак,

при $a\leqslant a_0$ (следовательно, и при равномерном движении тоже)

$$\beta=\alpha+\operatorname{arctg}\mu,$$

при $a>a_0$

$$\beta=\alpha+\operatorname{arctg}\frac{g\cos\alpha}{g\sin\alpha+a}.$$

Мы решили задачу. Однако, приведем еще одно решение. Это — красивое геометрическое решение.

При равномерном движении вдоль сходней сумма всех сил должна быть равна нулю. Заменим силы **N** и $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ их равнодействующей $\mathbf{Q}=\mathbf{N}+\mathbf{F}_{\text{тр}}$ (рис. 14) и будем складывать силы **Q**, **F** и $m\mathbf{g}$. Они должны образовать замкнутый треугольник.

Заметим, что направление силы **Q** составляет с перпендикуляром к наклонной плоскости угол δ такой, что

$$\operatorname{tg}\delta=\frac{F_{\text{тр}}}{N}=\frac{\mu N}{N}=\mu,$$

то есть при изменении величины и направления силы **F** направление силы **Q** остается неизменным. Следовательно, абсолютная величина вектора **F** будет минимальна, если он перпендикулярен к вектору **Q** (рис. 15) (так как величина и направление вектора $m\mathbf{g}$ не меняются). При этом с горизонтом сила **F** будет составлять угол

$$\beta=\alpha+\delta=\alpha+\operatorname{arctg}\mu$$

(углы β и $\alpha+\delta$ равны как углы с взаимно перпендикулярными сторонами).

Точно так же решается задача, когда ящик движется с ускорением $a<a_0$. В этом случае сумма векторов $m\mathbf{g}$, **Q** и **F** должна быть равна $m\mathbf{a}$ (рис. 16). Это изменит абсолютную величину силы **F**, но не изменит ее направления.

При $a>a_0$, когда силы **N**, $\mathbf{F}_{\text{тр}}$, а, следовательно, и **Q** равны нулю, сила **F** должна соединять концы векторов $m\mathbf{g}$ и $m\mathbf{a}$ (рис. 17). Легко видеть, что в этом случае

$$\beta=\operatorname{arctg}\frac{g+a\sin\alpha}{a\cos\alpha}=\alpha+\operatorname{arctg}\frac{g\cos\alpha}{g\sin\alpha+a}.$$

Ф225. *В стакан налиты две несмешивающиеся жидкости: четыреххлористый углерод CCl_4 и вода. При нормальном атмосферном давлении CCl_4 кипит при 76,7° С, вода — при 100° С. При равномерном нагревании стакана в водяной бане кипение на границе раздела жидкостей начинается при температуре 65,5° С. Определить, какая из жидкостей быстрее выкипает при таком «пограничном» кипении и во сколько раз. Давление насыщенных паров воды при 65,5° С составляет 192 мм рт. ст.*

Для кипения однородной жидкости необходимо, чтобы давление насыщенного пара в пузырьках, образующихся по всему объему жидкости, было равно внешнему атмосферному давлению *).

При «пограничном» кипении в пузырьках, находящихся на границе воды и четыреххлористого углерода, содержится как

*) В действительности давление насыщенного пара должно быть больше атмосферного на величину $\Delta p=\rho gh+\frac{2\sigma}{R}$, где ρgh — гидростатическое давление на глубине h, $\frac{2\sigma}{R}$ — добавочное давление под изогнутой поверхностью жидкости (σ — коэффициент поверхностного натяжения, R — радиус пузырька). Обычно этой величиной можно пренебречь по сравнению с внешним атмосферным давлением.

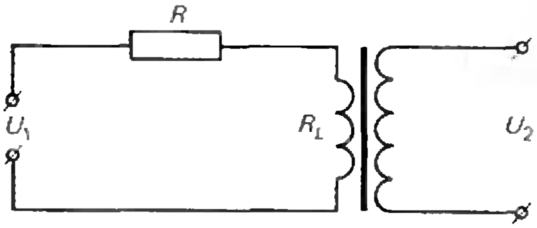


Рис. 18.

водяной пар, так и газообразный CCl_4, причем сумма их парциальных давлений равна атмосферному давлению:

$$p_{атм} = p_1 + p_2.$$

Здесь $p_1 = 192$ *мм рт. ст.* — парциальное давление насыщенного водяного пара, p_2 — парциальное давление насыщенного CCl_4. Поскольку $p_{атм} = 760$ *мм рт. ст.*, то

$$p_2 = p_{атм} - p_1 = 568 \text{ мм рт. ст.}$$

Во время кипения пузырьки поднимаются вверх, доходят до поверхности жидкости и лопаются. Следовательно, отношение масс жидкостей m_1 и m_2, испарившихся за некоторое время, равно отношению плотностей паров воды (ρ_1) и CCl_4 (ρ_2) в пузырьке.

Из уравнения Менделеева — Клапейрона плотность насыщенного пара

$$\rho_н = \frac{p_н\mu}{RT},$$

где $p_н$ — давление насыщенного пара, μ — молекулярная масса пара, T — температура и R — газовая постоянная. Поэтому

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{p_1\mu_1}{p_2\mu_2} = \frac{192\cdot 18}{568\cdot 154} \approx \frac{1}{25}.$$

Отсюда следует, что CCl_4 при «пограничном» кипении испаряется в 25 раз быстрее воды.

Ф226. Решение этой задачи см. в статье И. А. Зайцева «Электрические машины постоянного тока», которая будет опубликована в следующем номере нашего журнала.

Ф227. *На тороидальный сердечник из феррита с магнитной проницаемостью* $\mu = 2000$ *намотаны две катушки: первичная, содержащая* $n_1 = 2000$ *витков, и вторичная с* $n_2 = 4000$ *витков. Когда на первичную катушку было подано напряжение* $U_1 = 100{,}0$ *в, на разомкнутой вторичной было* $U_2 = 199{,}0$ *в. Найти, какое напряжение будет на разомкнутой вторичной катушке, если сердечник заменить на сердечник того же размера, но из феррита с* $\mu' = 20$. *Рассеяние магнитного потока и потери в сердечнике не учитывать.*

Сердечник с катушками представляет собой повышающий трансформатор с отношением числа витков

$$k = \frac{n_2}{n_1} = 2. \qquad (1)$$

Напряжение на разомкнутой вторичной катушке U_2 равно э. д. с. E_2, наводимой на ее концах. Величину E_2 можно связать с величиной э. д. с. E_1, возникающей в первичной катушке, таким соотношением:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{n_2}{n_1}. \qquad (2)$$

Нарисуем схему этого трансформатора, учитывая активное сопротивление первичной цепи и, как обычно, разделяя активное и реактивное сопротивления (рис. 18). По первичной цепи трансформатора идет переменный ток, действующее значение которого

$$I = \frac{U_1}{\sqrt{R^2 + R_L^2}}, \qquad (3)$$

где R — активное сопротивление катушки, а R_L — ее индуктивное сопротивление. При разомкнутой вторичной обмотке э. д. с. индукции в первичной обмотке E_1 равна напряжению на индуктивном сопротивлении, то есть

$$E_1 = IR_L = U_1\frac{R_L}{\sqrt{R^2 + R_L^2}}. \qquad (4)$$

Тогда из (1) — (4) получаем

$$U_2 = \frac{kU_1}{\sqrt{(R/R_L)^2 + 1}}. \qquad (5)$$

Аналогичное соотношение можно написать и для трансформатора с сердечником, имеющим магнитную проницаемость μ'. Так как $R_L = \omega L$, а $L \sim \mu$, то при замене сердечника изменится индуктивное сопротивление первичной обмотки, причем

$$\frac{R'_L}{R_L} = \frac{\mu'}{\mu}.$$

Таким образом,

$$U'_2 = \frac{kU_1}{\sqrt{(R/R'_L)^2 + 1}} = \frac{kU_1}{\sqrt{(R/R_L)^2(\mu/\mu')^2 + 1}}.$$

В этой формуле нам неизвестна только величина $(R/R_L)^2$. Найдем ее из равенства (5):

$$(R/R_L)^2 = \left(k\frac{U_1}{U_2}\right)^2 - 1.$$

Поэтому окончательно

$$U'_2 = \frac{kU_1}{\sqrt{(\mu/\mu')^2\left[\left(k\frac{U_1}{U_2}\right)^2 - 1\right] + 1}} \approx 20 \text{ в}.$$

И. Ш. Слободецкий

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Аргумент комплексного числа

Ю. В. Сидоров

В этой статье рассматривается понятие аргумента комплексного числа и тригонометрическая форма записи комплексного числа. При этом предполагается, что читатель знает определение комплексного числа, понятие модуля и геометрическую интерпретацию комплексного числа *).

Определения

Начнем с определения аргумента комплексного числа. Чаще всего встречаются два определения.

Определение 1. *Аргументом комплексного числа $z \neq 0$ называется угол между действительной осью и вектором $\vec{Oz}$, отсчитываемый от положительного направления действительной оси. При этом, если отсчет ведется против хода часовой стрелки, то величина угла считается положительной, а если по ходу часовой стрелки, то отрицательной* (см. рисунок).

Определение 2. *Аргументом комплексного числа $a + bi \neq 0$ называется угол φ, который удовлетворяет одновременно двум равенствам:*

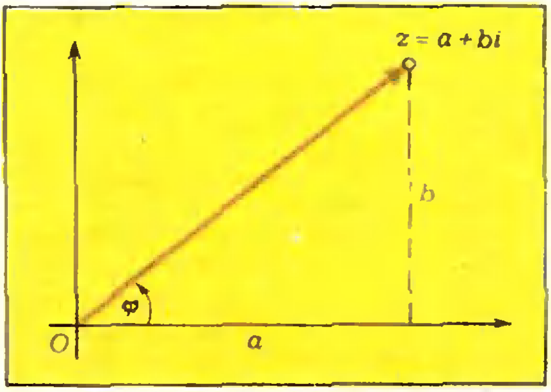
$$\begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases} \qquad (1)$$

Чтобы до конца понять определение аргумента, необходимо усвоить следующее.

1°. В обоих определениях угол может выражаться и в градусах, и в радианах. В школьном курсе математики равноправны обе записи. Для определенности договоримся в этой статье измерять углы только в *радианах*, причем слово «радиан», как обычно, будем опускать. Такой выбор не случаен — в высшей математике чаще всего применяется именно радианное измерение углов. Поэтому *аргумент комплексного числа следует считать отвлеченным числом.*

Таким образом, в определении 1 слово «угол» надо понимать как «алгебраический угол», то есть отвлеченное число, выражающее число радиан величины «геометрического угла». Аналогично, в определении 2 число φ означает число радиан, а не градусов.

*) См., например, В. Г. Болтянский, Ю. В. Сидоров, М. И. Шабунин, «Лекции и задачи по элементарной математике», М., «Наука», 1971, а также В. В. Пекарскас, «Геометрия комплексных чисел», «Квант», 1973, № 6, с. 54.



2°. *Определения 1 и 2 эквивалентны*: если φ является аргументом числа $z = a + bi \neq 0$ в смысле определения 1, то выполняются равенства (1); наоборот, если φ — аргумент комплексного числа $z = a + bi \neq 0$ в смысле определения 2, то φ — угол между положительным направлением действительной оси и вектором z. Это утверждение при $a > 0$, $b > 0$ вытекает непосредственно из рисунка (см. с. 41) и определений синуса и косинуса. Для остальных чисел z доказательство аналогично (проверьте!).

Таким образом, не имеет значения, какое из определений 1 или 2 выбрано за исходное — другое будет являться необходимым и достаточным критерием.

3°. *Для числа $z = 0$ понятия аргумента не существует.* Поэтому для краткости во всех дальнейших рассуждениях, связанных с понятием аргумента, будем предполагать (и этого нельзя забывать!), что $z \neq 0$.

4°. Для фиксированного комплексного числа $z \neq 0$ аргумент определяется *неоднозначно*: если φ_0 — некоторый аргумент числа z, то каждое из чисел

$$\varphi_0 + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad (2)$$

тоже является аргументом этого же числа z, и никакое число, не совпадающее ни с одним из чисел, указанных в (2), не является аргументом числа z (докажите!).

Таким образом, *для каждого фиксированного числа $z \neq 0$ имеется бесконечное множество аргументов, из которых каждые два отличаются друг от друга на число, кратное 2π.*

5°. Многозначность аргумента, описанная в 4°, затрудняет понимание действий над аргументом комплексного числа. Но часто именно благодаря этой многозначности удается решать довольно трудные задачи.

В некоторых пособиях по элементарной математике в определение аргумента включается ограничение вида $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, то есть считается, что аргумент комплексного числа z — это наименьший неотрицательный угол между положительным направлением действительной оси и вектором z. Тогда для каждого числа z аргумент определяется однозначно, и на первый взгляд кажется, что вся теория должна быть проще. Однако такое ограничение лишь еще больше усложняет правила действий над аргументами (например, сумма аргументов двух комплексных чисел уже не всегда является аргументом какого-либо комплексного числа). Иногда это приводит к значительным неточностям *), поэтому лучше придерживаться общепринятого определения (1 или 2).

Аргумент комплексного числа

Рассмотрим вопрос о нахождении аргумента комплексного числа. Но сначала договоримся об обозначениях.

Для обозначения того факта, что число φ является аргументом комплексного числа z, пишут

$$\varphi = \arg z \text{ или } \arg z = \varphi. \quad (3)$$

Например, каждое из соотношений

$$\frac{\pi}{2} = \arg i$$

и

$$\arg i = \frac{\pi}{2}$$

означает только то, что число $\pi/2$ является аргументом числа i.

Заметим, что соотношения (3), хотя и выглядят формально как равенства, являются *необычными* равенствами. Одним из свойств обычных равенств является, например, следующее: если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$ (A, B, C — числа или геометрические фигуры). А равенства (3) таким свойством не обладают. Например, можно записать, что

$$\frac{\pi}{4} = \arg(1+i), \ \arg(1+i) = \frac{9\pi}{4},$$

---

*) См., например, В. В. Зайцев, В. В. Рыжков, И. М. Сканави, «Элементарная математика», М., «Наука», 1967, с. 41: в формуле (15.1) сумма $\varphi_1 + \varphi_2$ может быть больше 2π, и поэтому смысл формулировки теоремы после этой формулы непонятен. Аналогичная неточность допущена на той же странице в формуле (15.2) и в тексте после нее.

Примечание редактора. Сейчас готовится новое, переработанное издание этой книги, оно выйдет из печати в 1974 году.

но

$$\frac{\pi}{4} \neq \frac{9\pi}{4}.$$

Таким образом, соотношения (3) можно читать так: «φ равняется аргументу числа z» или «аргумент числа z равняется φ», но смысл этих фраз только один: φ *является аргументом числа z* или, другими словами, φ *является одним из аргументов числа z*.

Символ arg z применяется также в следующем случае. Если $\varphi_0 = \arg z$, то есть φ_0 является одним из аргументов числа z, то все значения аргумента этого числа z, как отмечалось в 4°, указаны в (2). Этот факт записывают в виде формулы

$$\arg z = \varphi_0 + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (4)$$

Например, все значения аргумента числа i содержатся в формуле

$$\arg i = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Отметим, что «равенства» вида (4) часто встречаются при решении тригонометрических уравнений. Например, решение уравнения $\sin x = 1$ записывается так:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Смысл последнего «равенства» такой же, как и соотношения (4): для каждого целого k число $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ удовлетворяет уравнению $\sin x = 1$ и только эти числа являются корнями уравнения $\sin x = 1$.

Для нахождения всех значений аргумента комплексного числа $z = a + bi \neq 0$ нужно найти все числа φ, удовлетворяющие обоим равенствам (1), то есть решить совместно уравнения (1).

П р и м е р 1. *Найти все значения аргумента числа* $z = -5$.

Так как $a = \operatorname{Re} z = -5$, $b = \operatorname{Im} z = 0$, то решениями первого уравнения $\cos\varphi = -1$ из системы (1) являются числа $\varphi = \pi + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, а решениями второго уравнения $\sin\varphi = 0$ — числа $\varphi = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Общими корнями обоих уравнений являются числа

$$\varphi = \pi + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

О т в е т: $\arg(-5) = \pi + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Заметим, что ответ в примере 1 можно записать и в другом виде, например:

$$\arg(-5) = -\pi + 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

или

$$\arg(-5) = 3\pi + 2m\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Нужно иметь в виду, что все эти формально различные записи эквивалентны (в каждом из этих ответов содержатся все значения аргументов числа −5), то есть это *одинаковые ответы, написанные разными формулами*.

Аргумент комплексного числа $z = a + bi \neq 0$ можно находить проще: сначала определить, в какой четверти находится точка $z = a + bi$ (например, используя геометрическую интерпретацию комплексного числа), а затем воспользоваться одним (любым) из уравнений (1) (докажите!).

П р и м е р 2. *Найти все значения аргумента числа* $z = -1 + i$.

Так как $\operatorname{Re} z = -1$, $\operatorname{Im} z = 1$, то точка $z = -1 + i$ лежит во второй четверти. Второе из уравнений (1) имеет вид $\sin\varphi = 1/\sqrt{2}$. Одним из решений этого уравнения, лежащим во второй четверти, является число $\varphi_0 = 3\pi/4$. Окончательный ответ получаем по формуле (4).

О т в е т: $\arg(-1 + i) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Заметим, что если $\varphi = \arg(a + bi)$, $a \neq 0$, то

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}. \qquad (5)$$

Однако *обратное утверждение неверно*: из равенства (5) нельзя заключить, что $\varphi = \arg(a+bi)$. Например, для числа $-1+i$ значение $\varphi = -\pi/4$ является решением уравнения (5), но не является аргументом этого числа.

Но если сначала определить, в какой четверти находится точка $a+bi$, и затем найти такое решение уравнения (5), которое является углом в этой четверти, то получим аргумент числа $a+bi$ (докажите!).

Пример 3. *Найти один из аргументов числа* $1-i\sqrt{3}$.

Точка $1-i\sqrt{3}$ лежит в четвертой четверти. Находим какое-нибудь решение уравнения (5), то есть $\operatorname{tg}\varphi = -\sqrt{3}$, которое является углом в этой четверти, например: $\varphi = -\pi/3$.

Ответ: $\arg(1-i\sqrt{3}) = -\dfrac{\pi}{3}$.

В этом примере по смыслу вопроса ответ неоднозначен. Являются верными также следующие ответы:

$$\arg(1-i\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{3},$$

$$\arg(1-i\sqrt{3}) = -\frac{7\pi}{3},$$

$$\arg(1-i\sqrt{3}) = \frac{41\pi}{3}$$

и другие.

Пример 4. *Найти аргумент числа* $\sqrt{3}+i$.

Аналогично тому, как это сделано в примерах 2 или 3, находим (найдите!):

$$\arg(\sqrt{3}+i) = \frac{\pi}{6}$$

(то есть $\pi/6$ является одним из аргументов числа $\sqrt{3}+i$). Остается выяснить, как писать ответ: достаточно указать одно значение аргумента или нужно найти все?

Вспомним, например, задачу: решить уравнение $x^2 = 1$. Это уравнение имеет два корня $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$. Чтобы ответ был полным, в него необходимо включить оба корня. Часто и в геометрических задачах встречаются неоднозначные ответы. Например: найти сторону AB треугольника ABC, если $AC = 8$ *см*, $BC = 7$ *см*, $\angle A = \pi/3$. Полный ответ должен быть таким: $AB = 3$ *см* или $AB = 5$ *см* (докажите!).

Так же и в нашем примере 4: чтобы ответ был полным, нужно найти *все* значения аргумента числа $\sqrt{3}+i$. Так как один аргумент $\pi/6$ уже найден, то все значения аргумента этого числа находим по формуле (4).

Ответ: $\arg(\sqrt{3}+i) = \dfrac{\pi}{6}+2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Таким образом, вопрос примера 4 является просто короткой формулировкой вопроса примера 2.

Обратим внимание на одну распространенную ошибку. Иногда абитуриенты пытаются находить аргумент числа $a+bi$ по формуле $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$, а некоторые даже принимают эту формулу за определение аргумента. Однако для каждого x функция $\operatorname{arctg} x$ имеет только одно значение, причем $-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \dfrac{\pi}{2}$. Значит, формула $\arg(a+bi) = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$ верна только при $a > 0$, причем дает только одно из значений аргумента.

Можно доказать (докажите!) справедливость следующей формулы:

$$\arg(a+bi) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } a = 0, \quad b > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{если } a = 0, \quad b < 0; \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, & \text{если } a > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

По этой формуле можно находить одно из значений аргумента, но часто проще поступать так, как сделано в примерах 2 или 3.

Тригонометрическая форма комплексного числа

Рассмотрим понятие тригонометрической формы комплексного числа. Вспомним, что *модулем* комплексного числа $z = a + bi$ называется число

$$r = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Пусть $\varphi = \arg(a + bi)$, перепишем формулы (1) так:

$$\cos\varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{r},$$

откуда $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, а потому

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (6)$$

Таким образом, *любое комплексное число $a + bi \neq 0$ можно записать в виде* (6), *где r — модуль числа $a + bi$, а φ — один из аргументов этого числа*:

$$r = |a + bi|, \ \varphi = \arg(a + bi).$$

Верно и обратное утверждение (докажите!): *если комплексное число $a + bi$ представлено в виде* (6), *где $r > 0$*, то

$$r = |a + bi|, \ \varphi = \arg(a + bi).$$

Определение. *Представление комплексного числа z в виде*

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad (7)$$

где $r > 0$, называется тригонометрической формой записи комплексного числа.

Сказанное выше означает, что *каждое комплексное число $z \neq 0$ можно представить в тригонометрической форме* (7), *причем*

$$r = |z|, \ \varphi = \arg z.$$

Для того, чтобы найти тригонометрическую форму заданного комплексного числа, нужно найти модуль этого числа, какой-нибудь аргумент этого числа, а затем записать это число в виде (7). Если при этом $|z| = r = 1$, то множитель r в формуле (7), как обычно, опускается, то есть в этом случае тригонометрическая форма записи имеет вид

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Например, для числа i запись

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

является тригонометрической формой записи этого числа.

Заметим, что в силу многозначности $\arg z$ тригонометрическая форма фиксированного комплексного числа также неоднозначна. Например, для числа i тригонометрической формой являются также записи

$$i = \cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2},$$

$$i = \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$$

и другие.

Необходимо подчеркнуть, что не всякая запись комплексного числа через тригонометрические функции является тригонометрической формой этого числа. Например, запись числа i в виде $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}$ или $i = (-1)\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ не является тригонометрической формой числа i. Так как аргументами числа i являются числа

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots,$$

и только они, то и тригонометрическая форма числа i обязательно имеет вид

$$i = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),$$

где k — любое целое число.

Рассмотрим еще один пример. Число

$$z = 1 + \cos\frac{10\pi}{9} + i\sin\frac{10\pi}{9}$$

можно представить в виде (проверьте!)

$$z = 2\cos\frac{5\pi}{9}\left(\cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9}\right) =$$

$$= 2\cos\frac{14\pi}{9}\left(\cos\frac{14\pi}{9} + i\sin\frac{14\pi}{9}\right).$$

Вторая из этих записей является

тригонометрической формой данного числа, а первая — нет, так как $\cos\frac{5\pi}{9}<0$.

Итак, *если* $r=|z|$, $\varphi_0=\arg z$ (*то есть* φ_0 *является одним из аргументов числа* z), *то для каждого целого* k *запись*

$$z=r[\cos(\varphi_0+2k\pi)+i\sin(\varphi_0+2k\pi)]$$

является тригонометрической формой комплексного числа z, *и никакая другая запись не является тригонометрической формой этого числа.*

На этом в школьном курсе математики заканчивается рассмотрение свойств аргумента комплексного числа.

Одно свойство аргумента

С помощью тригонометрической формы легко выводится следующее правило умножения и деления комплексных чисел (проверьте!): *если*

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),$$
$$z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2),$$

то

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)],$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)].$$

Из этого правила непосредственно вытекает следующая важная

Теорема. *Пусть* $\varphi_1=\arg z_1$ и $\varphi_2=\arg z_2$. *Тогда*

$$\varphi_1+\varphi_2=\arg(z_1z_2),$$
$$\varphi_1-\varphi_2=\arg\frac{z_1}{z_2}.$$

Вспомним, что запись $\varphi=\arg z$ означает только тот факт, что число φ является одним из аргументов комплексного числа z. Значит, формулы в теореме следует читать так: *сумма аргументов сомножителей является аргументом произведения, а разность аргументов делимого и делителя является аргументом частного.*

Обратим внимание на одну распространенную ошибку. Иногда первую часть теоремы записывают в виде «формулы» $\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$, которая *не имеет смысла*, так как $\arg z$ — многозначная функция, а в школьном курсе математики не рассматриваются понятия суммы и равенства двух многозначных функций.

Следует иметь в виду, что если $\varphi_1=\arg z_1$, $\varphi_2=\arg z_2$ и $\varphi=\arg(z_1z_2)$, то может оказаться, что $\varphi\neq\varphi_1+\varphi_2$. Например, $2\pi=\arg 3$, $\frac{\pi}{2}=\arg i$, $\frac{\pi}{2}=\arg 3i$, но $\frac{\pi}{2}\neq 2\pi+\frac{\pi}{2}$. Поэтому необходимо правильно понимать формулировку теоремы.

Отметим одно следствие из теоремы — формулу возведения комплексных чисел в целую степень (докажите ее!): *если* $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, *то*

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),$$
$$n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots$$

Упражнения

1. Доказать формулу

$$\arg(a+bi)=\begin{cases}\arcsin\dfrac{b}{\sqrt{b^2+a^2}}, & \text{если } a\geqslant 0;\\ \pi-\arcsin\dfrac{b}{\sqrt{b^2+a^2}}, & \text{если } a<0.\end{cases}$$

2. Найти аргументы следующих чисел: а) $(1+i)^2$; б) $\frac{i}{1+i}$; в) $1+\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}$; г) $1+\cos\frac{10\pi}{9}+i\sin\frac{10\pi}{9}$.

3. Записать в тригонометрической форме следующие числа: а) -3; б) $-i$; в) $\sin\frac{\pi}{7}+i\cos\frac{\pi}{7}$; г) $\sin\frac{2\pi}{5}+i\left(1-\cos\frac{2\pi}{5}\right)$; д) $\sin\frac{6\pi}{5}+i\left(1+\cos\frac{6\pi}{5}\right)$.

4. Пусть $\varphi_1=\arg z_1$, $\varphi_2=\arg z_2$. Доказать, что $z_1=z_2$ тогда и только тогда, когда $|z_1|=|z_2|$ и существует такое целое число k, что $\varphi_1=\varphi_2+2k\pi$.

5. Пусть $\varphi=\arg z$. Найти $\arg(zi)$ и доказать, что геометрически произведение zi означает поворот вектора z на угол $\frac{\pi}{2}$.

6. Доказать, что если $\varphi=\arg z$, то $\arg\frac{1}{z}=-\varphi$ и $\arg\bar z=-\varphi$.

7. Пусть $\varphi_1=\arg z_1$, $\varphi_2=\arg z_2$ и $\varphi=\arg(z_1z_2)$. Доказать, что $\varphi=\varphi_1+\varphi_2+2k\pi$, где k — некоторое целое число.

8. Доказать, что если $\varphi=\arg(z_1z_2)$, то существуют такие числа φ_1 и φ_2, что $\varphi_1=\arg z_1$, $\varphi_2=\arg z_2$ и $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Мы уже рассказывали о факультетах физико-математического профиля Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова *). Ниже приводятся материалы вступительных экзаменов 1973 года по математике и физике на этих факультетах.

Математика

Механико-математический факультет

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$2(\cos x)^{5/2} - \cos 2x = 1 + \frac{\sin x}{\sqrt{3}}\left(1 - \sqrt{\cos x}\right).$$

2. В трапеции $ABCD$ точка K — середина основания AB, точка M — середина основания CD. Найти площадь трапеции, если известно, что DK есть биссектриса угла D трапеции, BM есть биссектриса угла B трапеции, наибольший из углов при нижнем основании трапеции равен $60°$, а ее периметр равен 30.

3. Решить неравенство

$$5x + \sqrt{6x^2 + x^3 - x^4}\,\log_2 x > (x^2 - x)\log_2 x + 5 + 5\sqrt{6 + x - x^2}.$$

4. Точки K и M являются соответственно серединами ребер AB и AC треугольной пирамиды $ABCD$, площадь основания ABC которой равна p. Найти площадь грани BDC, если сечение MDK имеет площадь q, а основание высоты пирамиды попадает в точку пересечения медиан треугольника ABC.

5. Найти все пары чисел x, y, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2y^2 - x^4y^4} = y^6 + x^2(1 - x), \\ \sqrt{1 + (x + y)^2} + x(2y^3 + x^2) \leqslant 0. \end{cases}$$

*) См. «Квант», 1973, № 4.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$1 + \cos 2x + \cos^2 x \log_{1/3} \operatorname{tg}^2 x + 3\sin x = 2\sin x \log_{1/3} \operatorname{tg}^2 x.$$

2. В трапеции $ABCD$ точки K и M являются соответственно серединами оснований AB и CD. Известно, что $AM \perp DK$ и $CK \perp BM$, а угол CKD равен $60°$. Найти площадь трапеции, если ее высота равна 1.

3. Решить неравенство

$$\sqrt{2 - 5x - 3x^2} + 2x > 2x \times 3^x \sqrt{2 - 5x - 3x^2} + 4x^2 \cdot 3^x.$$

4. В треугольной пирамиде $ABCD$ через ребро AD, равное a, и точку E — середину ребра BC — проведено сечение, образующее с гранями ACD и ABD соответственно углы α и β. Найти объем пирамиды, если площадь сечения ADE равна S.

5. Найти все пары чисел x, y, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} 4y^2 = 2x^2 + \sqrt{2(x + 2y)^2 - (x + 2y)^4}, \\ x^4 + 2 \leqslant 4y(x^2 - 1). \end{cases}$$

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Вариант 3

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin y \cos x + \sin x = 0, \\ 2\cos^2 y + \sin y \sin x = \cos 2y \cos x. \end{cases}$$

2. Решить неравенство

$$\log_{2x - \frac{1}{25}}\left(\frac{x^2 - 14x + 51}{50}\right) \leqslant 0.$$

3. В прямоугольном треугольнике ACB из вершины прямого угла C проведены биссектриса $CL = a$ и медиана $CM = b$. Найти площадь треугольника ACB.

4. Точки A, B, C, D, E, F лежат на поверхности шара радиуса $\sqrt{2}$.

Отрезки AD, BE и CF пересекаются в одной точке S, которая находится на расстоянии 1 от центра шара. Известно, что объемы пирамид $SABC$ и $SDEF$ относятся как $1:9$, объемы пирамид $SABF$ и $SDEC$ относятся как $4:9$, а объемы пирамид $SAEC$ и $SDBF$ относятся как $9:4$. Найти длины отрезков SA, SB, SC.

5. Из пункта A одновременно стартуют три бегуна и через некоторое время одновременно финишируют в том же пункте, пробежав по маршруту, состоящему из прямолинейных отрезков AB, BC, CA, образующих треугольник ABC. На каждом из указанных отрезков скорости бегунов постоянны и равны у первого бегуна 10 *км/ч*, 16 *км/ч* и 14 *км/ч* соответственно, а у второго бегуна 12 *км/ч*, 10 *км/ч* и 16 *км/ч* соответственно. Третий бегун в пунктах B и C оказывался не один и менял скорость на всем маршруте лишь один раз. Треугольник ABC — остроугольный или тупоугольный?

Физический факультет

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$2\sin x + \cos 2x = 1.$$

2. Решить уравнение

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{3x} - \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1} - 128 = 0.$$

3. Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии равна 62. Известно, что пятый, восьмой и одиннадцатый члены этой прогрессии являются соответственно первым, вторым и десятым членами арифметической прогрессии. Найти первый член геометрической прогрессии.

4. Прямой круговой конус с вершиной S вписан в треугольную пирамиду $SPQR$ так, что окружность основания конуса вписана в основание PQR пирамиды. Известно, что $\angle PSR = \pi/2$, $\angle SQR = \pi/4$, $\angle PSQ = 7\pi/12$. Найти отношение площади боковой поверхности конуса к площади основания PQR пирамиды.

5. Дан круг с центром O. Через точку внутри круга проведены диаметр AB и хорда CD. Из точки D опущен перпендикуляр DF на хорду AC (F — между A и C), а из точки F опущен перпендикуляр FH на AB. Точка M — середина хорды CD. Известно, что $AM = 2MO$, $8AH = 5AB$. Найти $\angle AMO$.

Физика

Факультеты механико-математический, вычислительной математики и кибернетики

Билет 1

1. Небольшое тело соскальзывает без начальной скорости с гладкой наклонной плоскости, длина которой $l = 16$ *см*, а угол наклона $\alpha = 30°$. Затем оно падает на гладкую горизонтальную плоскость, находящуюся на расстоянии $h = 20$ *см* от нижнего конца наклонной плоскости. На какую наибольшую высоту H от горизонтальной плоскости поднимется тело после удара об нее, если этот удар абсолютно упругий?

2. Электролиз. Законы Фарадея.

3. Собирающие и рассеивающие линзы. Формула линзы. Построение изображения в линзах.

Билет 2

1. Маленький шарик массы $m = 1{,}3$ *г*, имеющий заряд $q = 2\cdot10^{-5}$ *к*, подвешен на нити внутри заряженного плоского конденсатора, пластины которого горизонтальны. Период малых колебаний этого шарика $T_1 = 1$ *с*. Если же поменять знаки зарядов пластин конденсатора на обратные, сохраняя величину зарядов, то период колебаний шарика станет $T_2 = 1{,}5$ *с*. Найти напряженность E электрического поля внутри конденсатора.

2. Законы Бойля — Мариотта, Гей-Люссака, Шарля. Графики этих законов. Абсолютная температурная шкала. Объединенный закон Бойля — Мариотта — Гей-Люссака.

3. Световой поток, сила света, освещенность.

Билет 3

1. Над столом подвешена маленькая лампочка, расположенная в вершине конусообразного абажура, у которого угол между осью и образующей $\alpha = 30°$. На пути лучей параллельно поверхности стола поместили плоскопараллельную стеклянную пластинку с показателем преломления $n = 1{,}5$. При этом диаметр светового пятна на столе уменьшился на величину $d = 2$ *см*. Какова толщина h пластинки?

2. Примеры колебательных движений. Гармонические колебания. Период, частота и амплитуда колебаний. Период колебаний математического маятника (без вывода).

3. Поток магнитной индукции. Электромагнитная индукция. Электродвижущая сила индукции. Закон Ленца. Явление самоиндукции. Индуктивность.

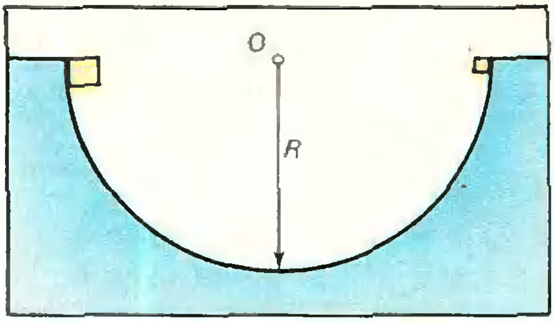


Рис. 1.

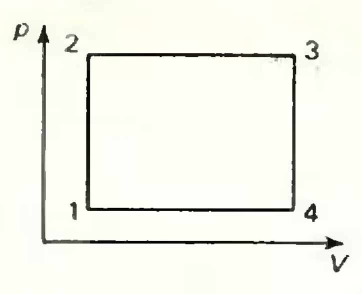


Рис. 2.

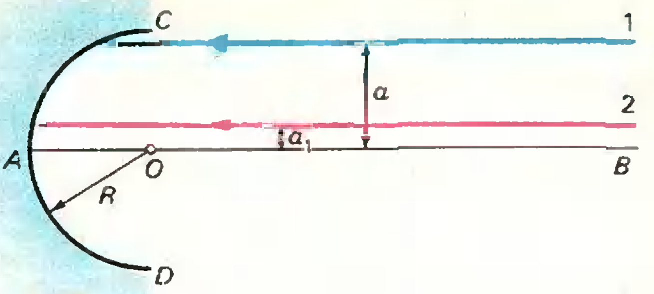


Рис. 3.

Билет 4

1. Горизонтальный цилиндр объемом $V = 5{,}5$ *л* разделен на две части тонким подвижным поршнем. Оба конца цилиндра закрыты. С одной стороны поршня находится азот при температуре $t_1 = 77°$ C, а с другой — гелий при температуре $t_2 = -23°$ C. Массы газов одинаковы. Найти объемы V_1 и V_2, занимаемые азотом и гелием. Трение между стенками цилиндра и поршнем отсутствует.

2. Упругие силы. Закон Гука.

3. Закон преломления света. Относительный и абсолютный показатели преломления. Ход лучей в призме. Полное отражение. Предельный угол.

Физический факультет

Ниже приводятся некоторые задачи из вариантов вступительных экзаменов на физический факультет.

1. Два малых тела, массы которых относятся как 1 : 2, одновременно начинают соскальзывать без трения по внутренней поверхности полусферы радиуса R (рис. 1). Удар тел абсолютно неупругий. На какой угол α от вертикали отклонятся тела после удара?

2. На краях подвижной платформы, длина которой $l = 10$ *м*, вес $P = 500$ *кГ*, стоят два человека: вес первого $P_1 = 60$ *кГ*, а второго $P_2 = 40$ *кГ*. В момент $t = 0$ они начинают бежать по платформе навстречу друг другу, причем скорость первого в два раза больше скорости второго. На какое расстояние x откатится платформа, когда первый человек добежит до ее конца? Трением платформы о рельсы пренебречь.

3. В сосуде с водой плавает кусок льда, в который вмерзла свинцовая дробинка. Масса льда M, масса дробинки m, температура воды в сосуде 0° С. Какое наименьшее количество тепла нужно затратить, чтобы дробинка начала тонуть? Плотность льда ρ_1, скрытая теплота плавления льда λ, плотность свинца ρ_2.

4. Цикл состоит из двух изохор и двух изобар (рис. 2). Температуры газа в точках *1* и *3* равны соответственно T_1 и T_3. Определить работу, совершенную одной грамм-молекулой газа за цикл, если известно, что точки *2* и *4* лежат на одной изотерме.

5. При включении лампочки в сеть с напряжением $U = 200$ *в* она потребляет мощность $W_1 = 40$ *вт* и ярко горит, причем температура нити $t_1 = 3000°$ С. При включении в сеть с $U = 100$ *в* лампочка потребляет мощность $W_2 = 25$ *вт* и еле светится, так как температура нити при этом равна $t_2 = 1000°$С. Найти величину сопротивления нити лампочки R_0 при температуре $t = 0$ °С.

6. Определить концентрацию электронов в пучке электронно-лучевой трубки осциллографа вблизи экрана. Сечение пучка $S = 1$ *мм*², сила тока $I = 1{,}6$ *мка*. Электроны вылетают из катода без начальной скорости и ускоряются между катодом и анодом электрическим полем с разностью потенциалов $U = 28\,500$ *в*.

Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *к*, масса $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ *кг*.

7. На зеркало-полусферу CAD радиуса $R = 30$ *см* падают два луча, параллельных линии AB, которая проходит через центр O и перпендикулярна к CD (рис. 3).

Один луч проходит на расстоянии $a = 24$ *см*, а другой на расстоянии $a_1 = 1$ *см* от линии AB. После отражения от зеркала эти лучи пересекут AB в каких-то двух точках. Найти расстояние x между этими точками.

8. На столе поставлены стеклянная призма с преломляющим углом $\alpha = 45°$ и показателем преломления стекла n и тонкая линза с фокусным расстоянием f. Главная оптическая ось линзы перпендикулярна к вертикальной грани призмы, на которую направлен горизонтальный параллельный пучок света определенной длины волны. На каком расстоянии x от главной оптической оси будет находиться точка, в которой сойдутся лучи, прошедшие сквозь призму и линзу?

ПОПРАВКА

В «Кванте» № 2 за 1974 год на с. 61 конец решения задачи I (НГУ, вариант I) должен выглядеть так: $u = 22$, $|1 - y^2| = 3^{11}$, откуда с учетом ОДЗ получаем $y = -\sqrt{3^{11} + 1}$.

Редакция благодарит читателя В. С. Марочкина (Пермь), обратившего наше внимание на ошибку в решении.

Телевидение готовит в вуз

Математика

В апреле на математическом отделении телекурсов читаются лекции на темы: «Комплексные числа», «Задачи на составление уравнений», «Прямые и плоскости в пространстве», «Многогранники», «Поверхности и объемы тел». Некоторые задачи из домашних заданий по этим темам предлагаются читателям «Кванта» для самостоятельного решения.

1. Найти действительные значения x, при которых комплексные числа

$$z_1 = \sqrt{x^2-3}+3-i\sin\frac{\pi x}{4}$$

и

$$z_2 = \sqrt{x^2+5}+1-i\sin^2\frac{\pi x}{4}$$

являются сопряженными.

2. Произведение некоторого натурального числа на число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, равно 1008. Найти исходное число.

3. В котлован равномерно поступает вода. 10 одинаковых насосов, действуя одновременно, могут откачать воду из наполненного котлована за 12 часов, а 15 таких же насосов, действуя одновременно,— за 6 часов. За сколько часов могут откачать воду из наполненного котлована 25 таких же насосов, действуя одновременно?

4. Полная поверхность прямоугольного параллелепипеда равна 192 $см^2$; если уменьшить каждое из ребер на один сантиметр, то полная поверхность уменьшится на 70 $см^2$. Найти длину диагонали параллелепипеда.

5. В наклонном параллелепипеде две смежные боковые грани имеют площади S_1 и S_2 и образуют двугранный угол, равный 150°. Найти объем параллелепипеда, если его боковое ребро равно a.

6. Основанием пирамиды служит равнобочная трапеция, основания которой равны a и $2a$. Боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания; высота пирамиды равна a. Найти боковую поверхность пирамиды.

7. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, высота пирамиды равна h. Через сторону основания пирамиды и середину бокового ребра, не пересекающегося с этой стороной, проведено сечение. Определить расстояние от вершины пирамиды до плоскости этого сечения.

8. Двугранный угол при боковом ребре правильной четырехугольной пирамиды равен α. Определить двугранный угол при основании пирамиды.

В этом номере мы публикуем также контрольные работы № 4, 5 по темам, пройденным в феврале и марте. Решения задач контрольных работ можно присылать по адресу: 113162, Москва, Шаболовка, 53, Московские подготовительные телекурсы, математика, КР № 4, 5. К решению приложите незаклеенный конверт с Вашим адресом.

Контрольная работа № 4

1. Решить уравнение

$$\sin^4 x+\cos^4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lg(x^2+y^2)=\lg\left(2\cdot 5^{\log_{25}2500}\right), \\ \lg(x+y)-\lg(x-y)=\dfrac{\log_5 49}{\log_5 100}. \end{cases}$$

3. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x}<1.$$

4. Решить уравнение

$$2\cos^2 x+\sin\frac{x}{3}+1=0.$$

5. Решить неравенство

$$\log_x(3x)\leqslant\sqrt{\log_x(3x^3)}.$$

Контрольная работа № 5

1 (МГУ, 1972). Из двух расположенных на реке пунктов A и B (B по течению ниже A), расстояние между которыми равно 36 *км*, одновременно выходят навстречу друг другу две лодки (первая выходит из пункта A) и встречаются через 3 часа после выхода. Скорость второй лодки в стоячей воде в четыре раза больше скорости течения реки. Расстояние от пункта A до пункта B и обратно первая лодка проходит за 24 часа. Найти скорость течения реки.

2 (МИФИ, 1972). Коллекция марок состоит из трех альбомов. В первом из альбомов находится одна пятая всех марок, во втором — несколько седьмых и в третьем — 303 марки. Сколько марок в коллекции?

3 (МГУ, 1972). В прямую призму $ABCDA'B'C'D'$, нижним основанием которой является ромб $ABCD$, а AA', BB', CC', DD' — боковые ребра, вписан шар радиуса R. Найти площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины A, B и C', если известно, что $\sphericalangle BAD=\alpha$.

4 (МИФИ, 1973). В треугольной пирамиде $SABC$ длина ребра SC равна a. Это ребро наклонено к плоскости основания ABC под углом α. Двугранный угол при ребре SC равен β, а двугранный угол при ребре AB — прямой; $SA = SB$, $AC = BC$. Найти радиус шара, вписанного в пирамиду.

5 (МИФИ, 1972). Найти объем наименьшего по объему конуса среди всех тех конусов, которые можно описать около шара радиуса R.

Физика

На физическом отделении телевизионных физико-математических курсов для поступающих в вузы в марте — апреле 1974 года изучается раздел «Колебания и волны». На лекциях и практических занятиях обсуждаются вопросы, касающиеся механических колебаний и волн, звука, электромагнитных колебаний и волн. В заключение будет прочитана обзорная лекция по волновым процессам.

Ниже приводятся типичные для домашних заданий задачи по разделу «Колебания и волны».

1. К двум одинаковым невесомым вертикальным пружинам подвешены грузы разной массы. Периоды колебаний пружин с грузами составляют соответственно $T_1 = 1{,}0$ *с* и $T_2 = 1{,}1$ *с*. Определить разность удлинений пружин в положении равновесия.

2. Математический маятник колеблется так, что расстояние между крайними положениями маятника $2A = 6{,}0$ *см*, а наибольшая скорость движения маятника $v_{max} = 0{,}40$ *м/с*. Определить период колебаний маятника.

3. Частоты колебаний двух математических маятников, находящихся в одном и том же месте Земли, относятся как $n = \frac{\nu_1}{\nu_2} = 0{,}90$. Определить длины маятников l_1 и l_2, если их разность $\Delta l = l_1 - l_2 = 21$ *см*.

4. Кинетическая энергия математического маятника при прохождении им положения равновесия равна $W_к = 0{,}10$ *дж*. Определить величину возвращающей силы в момент времени, равный одной восьмой периода колебаний маятника, если длина нити $l = 1{,}0$ *м* и масса материальной точки $m = 1{,}0$ *кг*.

5. Материальная точка массой $m = 2{,}0$ *г* с зарядом $q = +8{,}0\cdot10^{-6}$ *к*, укрепленная на конце изолирующей нити длиной $l = 1{,}2$ *м*, находится в электрическом поле напряженностью $E = 1{,}4\cdot10^3$ *в/м* и вращается вокруг вертикальной оси так, что угол, составляемый нитью с вертикалью, $\alpha = 20°$. Найти период обращения точки, если силовые линии электрического поля вертикальны и направлены вверх.

6. В однородном электрическом поле, силовые линии которого горизонтальны, на тонкой нити длиной $l = 35$ *см* подвешена материальная точка массой $m = 15$ *г* с зарядом $q = 3{,}0\cdot10^{-6}$ *к*. Найти период собственных колебаний точки, если напряженность электрического поля $E = 4{,}0\cdot10^4$ *в/м*.

7. Определить длину поперечной волны, распространяющейся вдоль шнура, если расстояние между двумя ближайшими точками, имеющими одинаковое смещение, $l = 0{,}40$ *м*, а разность фаз колебаний этих точек равна $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi/3$.

8. Катушка с индуктивностью $L = 0{,}13$ *гн* включена в сеть переменного тока последовательно с конденсатором емкости $C = 1{,}5$ *мкф*. Определить тепловую мощность, выделяемую в катушке, если действующее значение напряжения в сети $U = 100$ *в*, частота $\nu = 400$ *гц*, активное сопротивление катушки $R = 15$ *ом*.

9. Два одинаковых по форме плоских электрода опущены параллельно друг другу в электролит с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 24$. Найти удельное сопротивление электролита, если на частоте $\nu = 10^6$ *гц* активное и емкостное сопротивления электролита одинаковы.

10. В цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ *гц* последовательно с сопротивлением $R = 100$ *ом* поочередно включают сначала катушку с индуктивностью $L = 0{,}20$ *гн*, а затем конденсатор емкостью $C = 10$ *мкф*. Определить отношение амплитудных значений токов, текущих через сопротивление R.

11. При изменении емкости переменного конденсатора на $\Delta C = 50$ *пф* резонансная частота контура увеличилась с $\nu_1 = 100$ *кгц* до $\nu_2 = 120$ *кгц*. Определить величину индуктивности контура.

12. Колебательный контур, настроенный на частоту $\nu = 15$ *Мгц*, состоит из катушки с индуктивностью $L = 5{,}0\cdot10^{-6}$ *гн* и плоского конденсатора, в котором зазор между пластинами заполнен слюдой. Найти ширину зазора, если диэлектрическая проницаемость слюды $\varepsilon = 6{,}0$, а площадь пластины $S = 15$ *см²*.

13. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности и двух параллельно соединенных одинаковых конденсаторов. После того, как эти конденсаторы соединили последовательно, резонансная частота контура изменилась на $\Delta\nu = 2{,}0$ *Мгц*. Найти величину индуктивности контура, если емкость каждого конденсатора $C = 40$ *пф*.

14. В колебательном контуре, состоящем из катушки с индуктивностью $L = 15\times10^{-6}$ *гн* и двух последовательно соединенных конденсаторов, после пробоя одного из них длина электромагнитной волны, излучаемой контуром, изменилась на $\Delta\lambda = 20$ *м*. Найти величину емкости пробитого конденсатора, если емкость второго $C_2 = 120$ *пф*.

А. Н. Борзяк, В. И. Давыдов, П. Т. Дыбов, И. А. Дьяконов, А. С. Иванов

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

Методическое пособие по разделу «Неравенства»?

В настоящее время многие издательства нашей страны издают литературу по математике, предназначенную для поступающих в высшие учебные заведения. Эти книги и брошюры преследуют, в основном, две цели — чисто информационную и методическую.

Из книги, изданной тем или иным институтом, абитуриент узнает варианты письменных работ, предлагавшиеся поступающим в этот институт, знакомится с решениями типичных задач. Это помогает ему более правильно ориентироваться в вопросе выбора своей будущей специальности, судить об уровне требований, предъявляемых к поступающим. Помимо этих материалов справочного характера, в таких книгах, как правило, имеются и разделы, в которых освещаются вопросы, наиболее трудные для поступающих. Эти разделы являются, по существу, методическими пособиями по важнейшим разделам программы вступительных экзаменов.

И если единственным требованием к материалам справочного характера может быть, пожалуй, только правильность ответов или решений, то методические разделы должны удовлетворять значительно более высоким требованиям.

К сожалению, не все издательства относятся с должной ответственностью к книгам, предназначенным для поступающих. Иногда выпускаемые ими методические пособия страдают весьма серьезными недостатками. Между тем совершенно ясно, что неудачное пособие может оказаться как минимум бесполезным.

Недавно Саратовский экономический институт выпустил небольшую книгу, предназначенную для поступающих в вузы инженерно-экономического профиля *). Почти половину объема книги занимает рассмотрение неравенств, и этот материал, как указывает в предисловии автор, позволяет ее рекомендовать "как методическое пособие по разделу «Неравенства»". Между тем ознакомление с книгой показывает, что с этим мнением автора ни в коем случае нельзя согласиться — столь много в ней неряшливых формулировок, неразумных рекомендаций и прямых ошибок.

Известно «классическое» недоразумение: очень многие абитуриенты считают, что прежде чем решить неравенство, надо найти его область допустимых значений. Однако можно легко привести примеры, где предварительное нахождение ОДЗ совершенно излишне с логической точки зрения и вносит, кроме того, значительные усложнения в решение. Между тем автор пишет: «В общем случае следует помнить, что нахождение ОДЗ функций, входящих в неравенство, является необходимым условием при решении любого неравенства» (с. 50). Сам автор, впрочем, решая линейные и квадратные неравенства, не выполняет этого «необходимого» условия.

Конечно, нахождение ОДЗ часто является полезным, но оно, безусловно, не является необходимым, и решение, скажем, примера 5 (с. 52) проводится гораздо проще без нахождения ОДЗ: неравенство $\sqrt{\dfrac{3x-1}{2-x}}>1$ *равносильно* неравенству $\dfrac{3x-1}{2-x}>1$, поскольку все решения последнего неравенства а в т о м а т и ч е с к и входят в ОДЗ исходного. Авторский текст можно считать хорошей иллюстрацией как раз того, почему нахождение ОДЗ не всегда полезно: ведь автор сначала решает неравенство $\dfrac{3x-1}{2-x}\geqslant 0$, а затем $\dfrac{3x-1}{2-x}>1$, что, по меньшей мере, неэкономно. Весьма странно, что даже в тех случаях, когда автор пользуется эквивалентностью неравенств, он все равно отыскивает ОДЗ, не объясняя, зачем (см. с. 47—49).

В примере 3 (с. 65) автор находит ОДЗ тригонометрического неравенства,

*) А. И. Першин, Сборник конкурсных задач по математике (для поступающих в вузы), Изд-во Саратовского ун-та, 1973 г., 80 с., тираж 30 000 экз., цена 30 коп.

однако (типичная ошибка абитуриентов!) после отыскания решения он ни словом не обмолвился о том, что все полученные решения входят в ОДЗ, хотя как раз в рассматриваемом примере это логически необходимо.

В книге систематически используется, помимо общеизвестного понятия ОДЗ, и иной, отнюдь не общепринятый термин «область допустимых решений неравенства», который автор нигде не определяет. Это значительно затрудняет точное понимание текста, тем более, что, скажем, в конце решения примера 6 (с. 54) этот термин имеет один смысл, а при решении примера 2 (с. 51) — другой.

Некоторые теоретические положения и рекомендации книги либо не ясны, либо просто не верны. Например, перечисляя основные свойства неравенств, автор формулирует и следующее: «если $a > b$, то $1/a < 1/b$» (с. 35); на с. 39 утверждается, что неравенства

$$ax^2 + bx + c > 0,$$
$$ax^2 + bx + c < 0$$

«равносильные, так как умножением на -1 приводятся друг к другу» и так далее. На с. 49—50 автор доказывает теорему: «неравенство $f(x)/\varphi(x) \geq 0$ не эквивалентно неравенству $f(x)\,\varphi(x) \geq 0$». Но, во-первых, теорема в такой формулировке не справедлива (следовало бы сказать «вообще говоря, не эквивалентно»). А во-вторых, негативная теорема для поступающего бесполезна — гораздо важнее было бы доказать теорему «неравенство $f(x)/\varphi(x) \geq 0$ в своей ОДЗ эквивалентно неравенству $f(x)\,\varphi(x) \geq 0$».

Особо следует сказать о приводимых на с. 68 в качестве образца рассуждениях по поводу одного показательного неравенства. Получив в результате необходимых преобразований его решение $x > 0$, автор далее пишет: «Проверка. Подставим любое значение $x > 0$, например, $x = 1$ ...» и, проведя вычисления, приходит к верному числовому неравенству. Остается, однако, не ясным, какой смысл и какое значение придает автор этой проверке.

При рассмотрении неравенства $\sqrt{f(x)} < g(x)$ абитуриенты часто проводят следующее ошибочное рассуждение: так как $\sqrt{f(x)} \geq 0$ по определению корня, а $g(x)$ больше, чем $\sqrt{f(x)}$, то следовательно (?), $g(x) > 0$. Подобный логический дефект допускает и автор, решая неравенство $|x-a| < b$: он пишет: «число b положительно, так как оно больше неотрицательного числа $|x-a|$» (с. 38), как будто, например, неравенства $|x-3| < -1$ не существует.

Хотя автор приводит в параграфе об иррациональных неравенствах шесть примеров (с. 50—54), читатель вряд ли сможет научиться правильно решать такие неравенства: в примерах 1 и 3 фактически не нужно решать неравенства, в примерах 2 и 4 неравенства просто не решены, в решении примера 5 большую часть занимают лишние выкладки и допущена логическая ошибка, а в примере 6 столько неясных и неточных утверждений, что понять его весьма сложно. При рассмотрении тригонометрических неравенств скрупулезно воспроизводятся простые выкладки, но никаких указаний по самому трудному для абитуриентов вопросу — как решать простейшие тригонометрические неравенства — не дается.

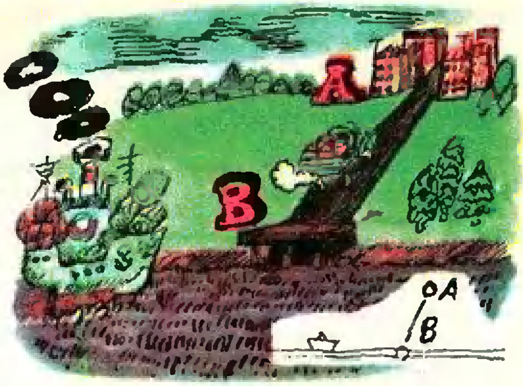
В книге имеется и значительное число мелких погрешностей (не говоря об опечатках). Так, на с. 56 читатель может узнать, что неравенство $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 \geq 0$ равносильно неравенству $2 < \sin x < -1/2$; на с. 61 сообщается, что «общей частью решений $0 \geq x \geq -2$ и $0 < x < 2$ будет область $-2 \leq x < 2$»; на с. 31 утверждается, что неравенству $1/y < 2$ «удовлетворяют только те значения y, которые больше $1/2$» (видимо, для большей убедительности это утверждение иллюстрируется чертежом), и так далее. Ответы к ряду примеров приведены неверно (см. №№ 241, 291, 295, 296, 306 и др.). Не могут не вызвать удивления безвкусно «комбинированные» задачи типа: «Найти... отношение скоростей пешеходов, если известно, что расстояние от A до B равно x_1 *км*, где x_1 есть положительный корень уравнения $2x^2 - x - 6 = 0$» (с. 17—19).

Указанный список вовсе не исчерпывает всех недостатков книги, но уже и этого слишком много для методического пособия. Следует ясно понимать, что высокий спрос на книги для поступающих не может служить основанием для снижения требовательности к этому виду литературы.

Г. В. Дорофеев

«Квант» для младших школьников.

Задачи



1. Грузы в город A предполагается доставлять по реке до некоторого пункта B, а затем автомашиной по шоссе BA (см. рисунок). Цена перевозки по реке вдвое меньше, чем по шоссе. Как провести шоссе AB, чтобы затраты на перевозки были наименьшими?

2. В сосуде с водой удерживают под самой поверхностью воды два целлулоидных шарика одинаковых масс, но разных диаметров. Если отпустить шарики, какой из них подскочит выше? (Силы сопротивления не учитывать.)

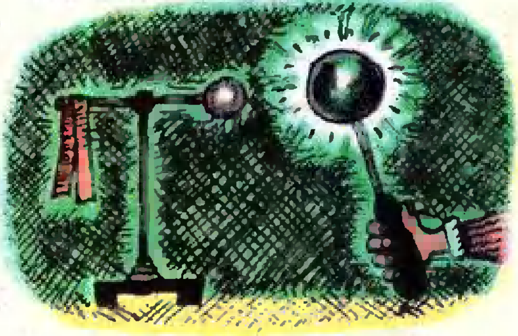
3. Прогуливаясь по городу, трое студентов-математиков заметили, что водитель автомашины грубо нарушил правила уличного движения. Номер машины (четырехзначный) студенты не запомнили, но каждый из них приметил по одной его особенности:

1) две первые цифры числа были одинаковы;

2) две последние цифры совпадали;

3) число являлось точным квадратом.

Можно ли по этим данным узнать номер машины?



4. Имеется металлический заряженный шарик на изолирующей ручке. Каким образом можно заряд этого шарика полностью передать электроскопу?

5. На площади установлено 5 громкоговорителей, разбитых на две группы: в одной 2, в другой 3 аппарата. Расстояние между группами равно 50 *м*. Где надо встать, чтобы звуки обеих групп были слышны с одинаковой силой?

Художник Э. Назаров

Турист в незнакомом городе

Б. А. Кордемский

Художник М. Златковский

Представьте себе город, улицы которого, как линии тетради в клетку, — одни протянулись с севера на юг, другие — с востока на запад. В этом городе есть турбаза. Туристу, находящемуся в пункте A, нужно попасть на эту турбазу. Но у него нет карты, а в городе нет указателей, и расспрашивать жителей турист не может — он не знает языка. Он хочет всякий раз случайным образом определять и направление движения, и сколько кварталов нужно пройти в этом направлении, прежде чем снова изменить его. Но как это — «определять случайным образом»; как вообще можно реализовать «случайность»?

Эврика! Туристу нужен набор так называемых «случайных чисел», объединенных в пары. Абсолютная величина первого числа будет указывать, сколько кварталов туристу нужно пройти в горизонтальном направлении (горизонтальным естественно назвать направление «восток — запад», «запад — восток»; а вертикальным — «север — юг», «юг — север»), а знак числа — само направление: на восток, если плюс, и на запад, если минус. Аналогично, абсолютная величина второго числа будет указывать, сколько кварталов нужно пройти в вертикальном направлении, причем на юг, если это число отрицательное, и на север — если положительное.

Но где же взять «случайные числа»? Их может выдать ЭВМ, если задать ей соответствующую программу, но у туриста ЭВМ, конечно, нет. Зато у него есть газета с таблицей номеров выигравших лотерейных билетов. Турист наудачу выбирает часть таблицы, затем в номере каждого лотерейного билета берет две последние

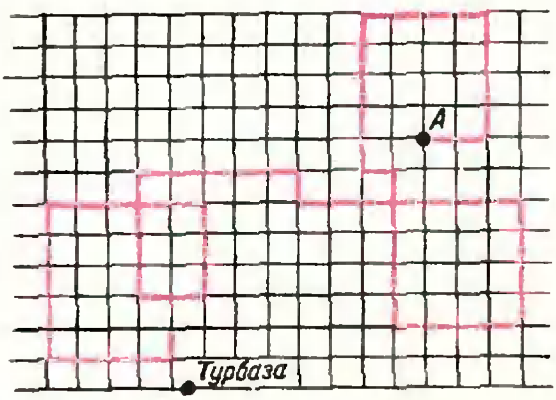
31013	179	Фотоаппарат	90
31019	110	25 рублей	—
31026	060	25 рублей	—
31030	199	50 рублей	—
31031	115	Часы «Полет»	35
31045	026	100 рублей	—
31047	101	Фотоаппарат	15
31068	178	50 рублей	—
31069	100	Часы «Полет»	35
31070	096	50 рублей	—

цифры и рассматривает их уже как пару. Получается такой набор пар случайных чисел: (7, 9), (1, 0), (6, 0), (9, 9), (1, 5), (2, 6), (0, 1), (7, 8), (0, 0), (9, 6). Недостатком этих чисел является то, что все они оказываются положительными. Но этот недостаток легко исправить: вычесть, например, из каждого числа образовавшегося набора случайных чисел какое-нибудь фиксированное число, скажем, 5. При этом пара (7, 9) превратится в пару (2, 4), что означает: «нужно идти два квартала на восток, затем четыре квартала на север»; пара (1, 0) — в пару (—4, —5), то есть «четыре квартала на запад и пять кварталов на юг». Набор таких пар уже задает туристу маршрут. В данном случае «код» получившейся случайной маршрутной линии будет записываться так: (2, 4), (—4, —5), (1, —5), (4, 4), (—4, 0), (—3, 1), (—5, —4), (2, 3), (—5, —5), (4, 1).

Теперь турист может отправляться в путь.

Заметим, что на турбазу турист может так и не попасть; впрочем, ему достаточно оказаться в любом из соседних с ней кварталов, так как оттуда дорога ему уже известна.

Выбранный маршрут изображен на рисунке; легко видеть, что он случайно оказался не очень длинным, хотя и далеко не самым коротким: ведь от турбазы туриста отделяло всего $15\frac{1}{2}$ кварталов, а ему пришлось пройти больше 66!



В этом примере случайные числа дали нам возможность промоделировать реальную случайность, а именно, случайность, диктующую туристу выбор того или иного направления. При этом, правда, для каждого звена маршрутной линии пришлось искусственно ввести ограничения — не более четырех кварталов в направлениях, задаваемых положительными числами (восток и север), и не более пяти кварталов в направлениях, определяемых отрицательными числами (юг и запад). И еще: заменив числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 на —5, —4, —3, —2, —1, 0, 1, 2, 3, 4, мы «подправили» случайные числа так, что «отрицательные» направления — юг и запад — оказались предпочтительнее (—5, —4, —3, —2, —1 — их пять из десяти) «положительных» — севера и востока (их четыре из десяти).

Такую модель «случайности» математики называют «грязной», однако не считают ее недопустимой.

З а д а ч а. Пусть турист знает, что турбаза находится на юго-западе города. Значит, сохраняя в выборе направления принцип случайности, все же целесообразнее направления юг и запад сделать более предпочтительными. Но эти направления задаются отрицательными числами; поэтому в наборе однозначных случайных чисел нужно иметь больше отрицательных, чем положительных чисел. Чтобы выполнялось это требование, можно, например, все числа выписанного набора уменьшить не на 5, а на 7. Интересно, попадет ли теперь турист на базу скорее, чем в первый раз? Составьте новый «код» и схему его случайного маршрута.

В нашей заметке случайные числа оказались полезными: они помогли туристу найти турбазу. Помогают они и во многих других задачах. Поэтому мы вам о них и рассказали.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Свободное падение тел на вращающуюся Землю»

1. К экватору.

2. $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$, где g — ускорение свободного падения, измеренное на полюсе, R — экваториальный радиус Земли; $P = 0$; $F_т = \gamma \frac{mM}{R^2}$ (m — масса тела).

К статье «Арифметика на географической карте»

З а д а н и е 1. Например, карта, состоящая из стран A, F, G, H (см. рис. 2, с. 24).

З а д а н и е 2. а) Воспользоваться методом математической индукции по числу окружностей. Проводя очередную окружность, нужно оставить раскраску вне ее неизменной, а внутри поменять цвета.

б) Для этого необходимо и достаточно, чтобы в каждой вершине карты сходилось четное число границ. Необходимость этого условия очевидна: если в какой-нибудь вершине карты сходится нечетное число границ, то уже страны, окружающие эту вершину, нельзя правильно раскрасить двумя красками.

Для доказательства достаточности условия проведите индукцию по числу стран карты (для перехода от $n+1$ к n удалите страну со всеми ее границами).

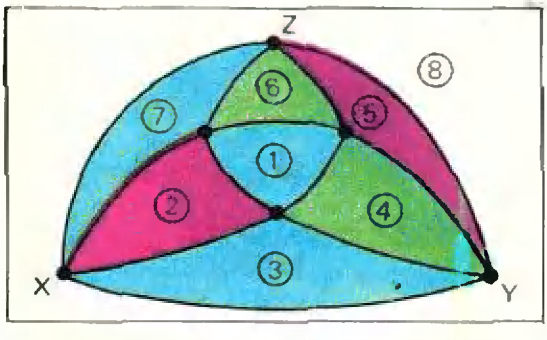


Рис. 1. Правильная раскраска графа октаэдра в 3 цвета. Грань 8 октаэдра — это «треугольник» XYZ; понятно, что в данном случае она должна быть окрашена в зеленый цвет.

З а д а н и е 4. Каждая точка границы карты должна принадлежать не более чем трем странам.

З а д а н и е 5. а) Смотри рисунок 1.

б) Для этого необходимо и достаточно, чтобы в каждой вершине графа триангуляции сходилось четное число граней (см. задание 3).

З а д а н и е 6. Доказательство утверждения 2) отличается от доказательства утверждения 3) только двумя особенностями:

а) рассматривается совокупность не всех граней триангуляции, а только тех, которые сходятся в данной вершине;

б) эта совокупность разбивается на три части по числу граней тетраэдра, сходящихся в той вершине тетраэдра, на которую отображается данная вершина триангуляции.

З а д а н и е 7. Воспользуйтесь индукцией по числу ребер P при заданном числе вершин B. П о с ы л к а и н д у к ц и и. $P = 0$; $Г = 1$, $K = B$.

Ш а г и н д у к ц и и: добавим ребро (не пересекающее, разумеется, других ребер); это ребро либо соединит две компоненты и тем самым уменьшит K на 1, не изменив числа $Г$ стран, либо соединит две вершины одной компоненты, не изменив числа K компонент и увеличив число $Г$ стран на 1. Число B остается все время постоянным.

З а д а н и е 8. Вот «географическая» формулировка этой задачи — из столицы любой страны можно проехать в столицу любой другой страны.

З а д а н и е 9. Используйте теорему Эйлера, а также равенство $2P = 3Г$, следующее из того, что каждое ребро триангуляции входит в две грани, а каждая грань имеет три ребра.

К статье «Аргумент комплексного числа»

2. а) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; б) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$; в) $\frac{4\pi}{9} + 2k\pi$; г) $-\frac{4\pi}{9} + 2k\pi$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

3. а) $3(\cos\pi + i\sin\pi)$; б) $\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$; в) $\cos\frac{5\pi}{14} + i\sin\frac{5\pi}{14}$;

г) $2\sin\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$;

д) $2\sin\frac{\pi}{10}\left(\cos\frac{9\pi}{10} + i\sin\frac{9\pi}{10}\right)$.

5. $\varphi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

К статье «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

М а т е м а т и к а

В а р и а н т 1

1. $x_1 = 2n\pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, n, k — целые числа.

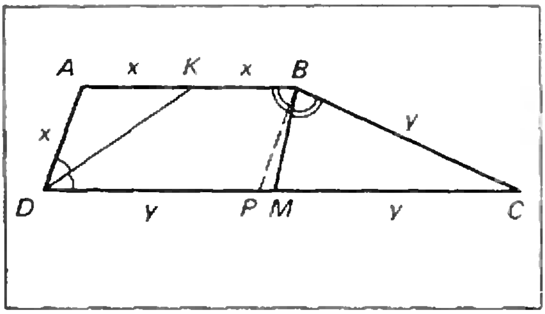


Рис. 2.

Указание. Уравнение представить в виде

$$(\sqrt{\cos x}-1)\left(2\cos^2 x+\frac{\sin x}{\sqrt{3}}\right)=0$$

и отобрать те корни двух получающихся уравнений, которые удовлетворяют условию $\cos x \geqslant 0$.

2. $S=15\sqrt{3}$. Решение. Из условия видно, что углы при нижнем основании трапеции — острые, а потому ее нижнее основание больше верхнего. Пусть AB — верхнее основание трапеции $ABCD$ (рис. 2; убедитесь, что решение не изменится, если верхним основанием считать CD), так что $AB < CD$. Положим $AK=KB=x$, $CM=MD=y$; тогда $x<y$.

Так как $\angle AKD=\angle KDM$ (почему?), то треугольник DAK — равнобедренный, откуда $AD=x$. Аналогично, $BC=y$ (докажите!). Проведем $BP\,||\,AD$; так как $BP=x<y=BC$, то в треугольнике BPC угол BPC больше угла BCP (и этот факт получается независимо от того, лежит ли точка P левее или правее точки M). Следовательно, в трапеции $\angle ADC>\angle BCD$, а потому $\angle ADC=60°$.

По теореме косинусов из треугольника BPC получаем:

$$y^2=x^2+4(y-x)^2-2x(y-x) \qquad (1)$$

(убедитесь в этом!); далее, по условию задачи,

$$x+y=10 \qquad (2)$$

(докажите!). Решая систему уравнений (1), (2), находим:

$$x_1=5,\ y_1=5;\ x_2=3,\ y_2=7.$$

Первое решение необходимо отбросить (почему?), а второе решение (оно, кстати, показывает, что точка P действительно лежит левее точки M) позволяет найти площадь трапеции (как?).

3. $5/2<x\leqslant 3$. Решение. ОДЗ неравенства — промежуток $0<x\leqslant 3$ (убедитесь в этом!) Неравенство переписывается в виде

$$(5-x\log_2 x)(1-x+\sqrt{6+x-x^2})<0 \quad (3)$$

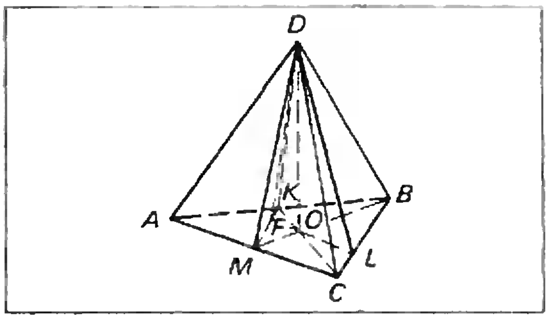


Рис. 3.

(проведите соответствующие выкладки!). Так как при всех x из промежутка $0<x\leqslant 3$ справедлива цепочка неравенств $x\log_2 x\leqslant \leqslant 3\log_2 3<5$ (докажите!), то вместо (3) получаем неравенство $\sqrt{6+x-x^2}<x-1$. Его решения должны удовлетворять условию $x>1$ (почему?) и находятся обычным методом (как?).

4. $S=\sqrt{4q^2+\dfrac{p^2}{12}}$. Решение. Ясно из условия, что BM и CK — медианы треугольника ABC, так что основанием высоты пирамиды является точка O пересечения этих медиан (рис. 3). Обозначим высоту пирамиды через H, ребро BC — через a, высоту треугольника ABC, опущенную из вершины A на сторону BC, — через h (на чертеже эта высота не нарисована). По условию

$$p=\frac{ah}{2}. \qquad (4)$$

В трапеции $MKBC$ (почему это трапеция?) проведем высоту FL, проходящую через точку O. Тогда DF — высота треугольника (сечения) MDK, а DL — высота треугольника (грани) BDC (докажите!). Так как $FL=h/2$ (почему?) и так как $FO:OL=1:2$ (откуда это следует?), то

$$FO=h/6,\quad LO=h/3.$$

Следовательно, по условию

$$q=\frac{a}{4}\sqrt{H^2+\frac{h^2}{36}} \qquad (5)$$

(убедитесь в этом!), а искомая площадь грани BDC

$$S=\frac{a}{2}\sqrt{H^2+\frac{h^2}{9}}.$$

Используя (4) и (5), получаем:

$$S^2=\frac{a^2}{4}\left(H^2+\frac{h^2}{9}\right)=4\frac{a^2}{16}\left(H^2+\frac{h^2}{36}\right)+\frac{1}{12}\frac{a^2h^2}{4}=4q^2+\frac{p^2}{12}.$$

5. $x=1$, $y=-1$. Решение. Вычтем из первого данного соотношение второе;

получим

$$\sqrt{2x^2y^2-x^4y^4}-\sqrt{1+(x+y)^2}\geqslant$$
$$\geqslant y^6+x^2+2xy^3,$$

или

$$\sqrt{1-(1-x^2y^2)^2}-\sqrt{1+(x+y)^2}\geqslant$$
$$\geqslant (x+y^3)^2. \quad (6)$$

Так как первый корень в левой части неравенства (6) всегда меньше или равен 1, а второй — всегда больше или равен 1 (почему?), то левая часть неравенства (6) всегда неположительна, тогда как его правая часть, очевидно, всегда неотрицательна. Следовательно, неравенство (6) может выполняться, лишь если одновременно

$$(x+y^3)^2=0,\quad \sqrt{1-(1-x^2y^2)^2}=$$
$$=\sqrt{1+(x+y)^2},$$

или

$$(x+y^3)^2=0,\ (1-x^2y^2)^2=(x+y)^2=0$$

(почему?). Эти равенства дают

$$x_1=1,\ y_1=-1;\ x_2=-1,\ y_2=1,$$

однако вторая пара не удовлетворяет исходным соотношениям.

Вариант 2

1. $x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi$, k — целое число.
2. $S=4\sqrt{3}/3$.
3. $-1<x\leqslant 1/3$.
4. $V=\dfrac{8S^2\sin\alpha\sin\beta}{3a\sin(\alpha+\beta)}$.
5. $x_1=-2$, $y_1=3/2$; $x_2=0$, $y_2=-1/2$.

Вариант 3

1. $x_1=-\dfrac{\pi}{4}+n\pi$, $y_1=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$; $x_2=\dfrac{\pi}{4}+n\pi$, $y_2=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, n, k — целые числа.

Указание. Выразить $\sin x$ из первого уравнения и подставить во второе уравнение.

2. $\dfrac{29}{50}<x\leqslant 7+4\sqrt{3}$.

3. $S=\dfrac{a}{4}(a+\sqrt{a^2+8b^2})$. Указание. Обозначив длины катетов через x и y, составить по условию задачи систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=4b^2,\\ \dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{\sqrt{2}}{a},\end{cases}$$

и выразить из нее произведение xy.

4. $SA=1$, $SB=\sqrt{2}/3$, $SC=\sqrt{2}/2$.

5. Треугольник ABC — тупоугольный. Указание. Рассмотреть следующие варианты, исчерпывающие все логические возможности.

а) Третий бегун и в точке B, и точке C оказывается вместе с первым бегуном. Доказать, что этот вариант невозможен (бегуны не могут финишировать одновременно).

б) Третий бегун и в точке B, и в точке C оказывается вместе со вторым бегуном. Доказать, что и этот вариант невозможен.

в) Третий бегун в точке B оказывается одновременно с первым бегуном, а в точке C — со вторым. Доказать, что этот вариант также невозможен.

г) Третий бегун в точке B оказывается одновременно со вторым бегуном, а в точке C — с первым. Доказать, что это возможно, лишь если скорость третьего бегуна на отрезках AB, BC, CA равна соответственно 12 км/ч, 12 км/ч, 14 км/ч, в этом случае

$$AB=\frac{5}{4}BC,\quad AC=\frac{28}{15}BC$$

и такой треугольник существует. По теореме косинусов получаем, что угол B (противолежащий наибольшей стороне AC) — тупой.

Вариант 4

1. $x_1=\pi n$, $x_2=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, где k, n — целые числа.
2. $x=-4/3$.
3. Либо 2, либо 12,4.
4. $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\pi r\cdot SD}{r\cdot SD\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}+\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}\right)}=\dfrac{4\sqrt{3}-3}{13}\pi$ (SD — высота опущенная из вершины S на сторону PQ).
5. $\angle AMO=\arccos\dfrac{25}{28}$. Указание. Описать окружность вокруг треугольника CDF и вокруг четырехугольника $CFHB$.

Физика

Факультеты механико-математический, вычислительной математики и кибернетики

Билет 1

$$H=h+\frac{v^2-v_г^2}{2g}=h+l\sin^3\alpha\approx 22\ см.$$

(см. рис. 4).

Билет 2

Если конденсатор не заряжен, то период колебаний шарика (математического

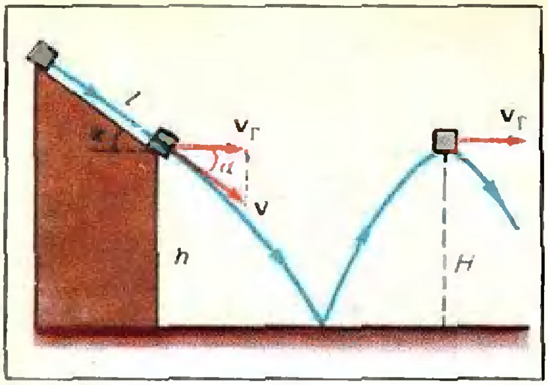


Рис. 4.

маятника) $T = 2\pi\sqrt{l/g} = 2\pi\sqrt{ml/P}$, где l — длина нити. Если конденсатор зарядить, внутри него создается однородное электрическое поле, направленное вертикально. Поэтому на шарик кроме силы тяжести $P = mg$ действует электрическая сила $f = qE$. Поэтому в формуле для периода колебаний нужно P заменить на $F_1 = mg + qE$, если сила f направлена вниз, и на $F_2 = |mg - qE|$, если она направлена вверх. Так как $T_1 < T_2$, то

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg+qE}},$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{|mg-qE|}}.$$

Из этих формул находим

$$l = \frac{T_1^2(mg+qE)}{4\pi^2 m} = \frac{T_2^2|mg-qE|}{4\pi^2 m}.$$

Если $mg > qE$, то шарик до и после перезарядки конденсатора качается под точкой подвеса нити. В этом случае

$$T_1^2(mg+qE) = T_2^2(mg-qE)$$

и, следовательно,

$$E = \frac{mg(T_2^2 - T_1^2)}{q(T_1^2+T_2^2)} \approx 250 \text{ в/м}.$$

Если же $mg < qE$, то шарик после перезарядки конденсатора качается над точкой подвеса. При этом

$$T_1^2(mg+qE) = T_2^2(qE-mg)$$

и, следовательно,

$$E = \frac{mg(T_2^2 + T_1^2)}{q(T_2^2 - T_1^2)} \approx 1690 \text{ в/м}.$$

Билет 3

$$h = \frac{d}{2\left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\right)} \approx 4{,}5 \text{ см}$$

(см. рис. 5).

Билет 4

$$V_1 = \frac{\mu_2 T_1 V}{\mu_1 T_2 + \mu_2 T_1} \approx 0{,}9 \text{ л},$$

$$V_2 = \frac{\mu_1 T_2 V}{\mu_1 T_2 + \mu_2 T_1} \approx 4{,}6 \text{ л}.$$

Физический факультет

1. В момент удара скорости тел горизонтальны. Запишем закон сохранения импульса, учитывая, что масса одного тела равна m, второго — $2m$:

$$2mv_0 - mv_0 = 3mv, \qquad (1)$$

где $v_0 = \sqrt{2gR}$ — скорость тел до удара, v — их скорость после удара.

После удара тела поднимаются на высоту h (рис. 6), скользя по полусфере. При этом вся кинетическая энергия перейдет в потенциальную:

$$\frac{3mv^2}{2} = 3\,mgh. \qquad (2)$$

Тогда

$$\cos\alpha = \frac{R-h}{R}. \qquad (3)$$

Из уравнений (1), (2) и (3) получим

$$\cos\alpha = \frac{8}{9}.$$

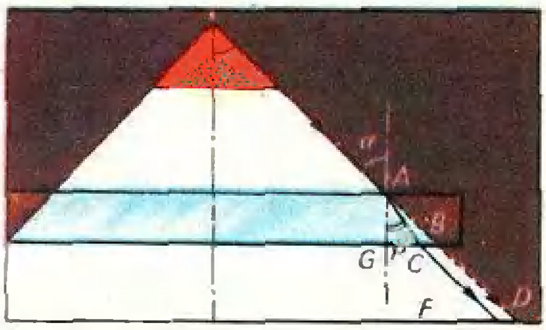


Рис. 5.

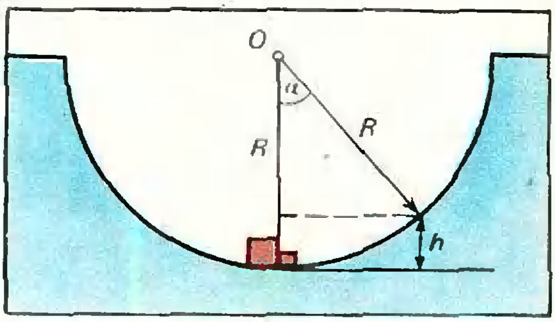


Рис. 6.

2. Запишем закон сохранения импульса:

$$0 = \frac{P_1}{g}(v_1 - v) - \frac{P_2}{g}(v_2 + v) - \frac{P}{g}v, \quad (1)$$

где v_1 — скорость первого человека относительно платформы, v_2 — скорость второго человека относительно платформы (по условию $v_1 = 2v_2$), v — абсолютная скорость платформы. Первый человек добежал до конца платформы за время t, то есть

$$l = v_1 t = 2v_2 t. \quad (2)$$

За это время платформа откатилась на расстояние

$$x = vt. \quad (3)$$

Из уравнений (2) и (3) найдем значения v_1, v_2 и v. Подставив их в уравнение (1), получим

$$x = \frac{(2P_1 - P_2)}{2(P_1 + P_2 + P)}l =$$

$$= \frac{2\cdot 60 - 40}{2(60 + 40 + 500)}\cdot 10 = \frac{2}{3} \ (м).$$

3. $$Q > \lambda\left[M - \frac{m\rho_1(\rho_2 - \rho_{воды})}{\rho_2(\rho_{воды} - \rho_1)}\right].$$

4. Работа на изохорах равна нулю. Работа на изобаре 2—3 (рис. 7) совершается газом:

$$A_1 = p_2(V_2 - V_1).$$

Воспользуемся уравнением состояния газа $pV = RT$ в точках 2 и 3. Тогда

$$A_1 = R(T_3 - T_2),$$

где T_2 — температура изотермы 2—4.

Работа на изобаре 4—1 совершается над газом:

$$A_2 = p(V_2 - V_1) = R(T_2 - T_1).$$

Полная работа, совершенная газом:

$$A = A_1 - A_2 = R(T_3 + T_1 - 2T_2).$$

Температуру изотермы T_2 найдем, воспользовавшись законом Шарля: $\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2}$, то есть $T_2 = \sqrt{T_1T_3}$. Окончательно получим:

$$A = R(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_3})^2.$$

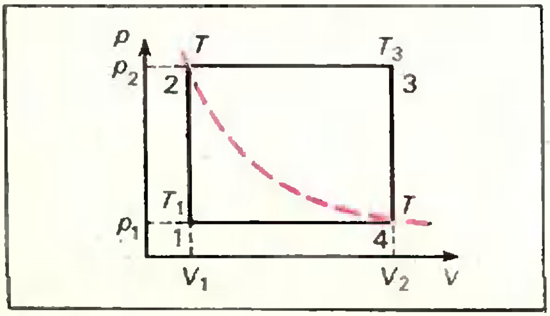


Рис. 7.

5. Сопротивление нити лампочки R растет с увеличением температуры:

$$R_1 = \frac{U_1^2}{W_1} = R_0(1 + \alpha t_1), \quad (1)$$

где α — температурный коэффициент сопротивления материала нити накала;

$$R_2 = \frac{U_2^2}{W_2} = R_0(1 + \alpha t_2). \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) получим:

$$R_0 = \frac{R_2t_1 - R_1t_2}{t_1 - t_2} = 100 \ (ом).$$

Задачу можно решить графически (в координатах R, t).

6. Сила тока электронного пучка I зависит от числа электронов в единице объема n, их скорости v, заряда электрона e и сечения пучка S:

$$I = nevS.$$

Скорость можно найти из закона сохранения энергии электрона в пучке:

$$\frac{mv^2}{2} = eU.$$

Таким образом,

$$n = \frac{I}{eS}\sqrt{\frac{m}{2eU}} = \frac{1{,}6\cdot 10^{-6}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10^{-6}} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{9{,}1\cdot 10^{-31}}{2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 28500}} = 10^5 \ (эл/см^3).$$

7. Построим ход лучей и обозначим через A_1 и F точки пересечения отраженных лучей с линией AB (рис. 8). Тогда

$$x = OA_1 - OF. \quad (1)$$

Для луча 1

$$\sin\alpha = \frac{a}{R}, \quad (2)$$

где α — угол падения луча на зеркало. Из треугольника OA_1K

$$(OA_1)^2 = (A_1K^2) + R^2 - 2(A_1K)R\cos\alpha. \quad (3)$$

Из рисунка 8 ясно, что $OA_1 = A_1K$. Так

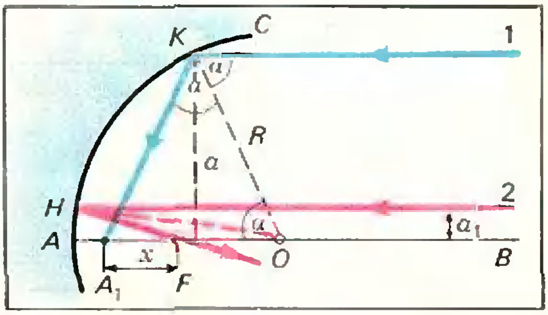


Рис. 8.

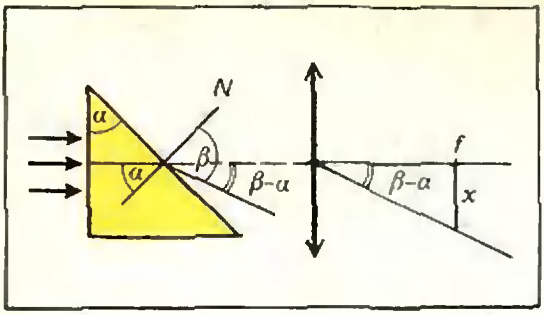


Рис. 9.

как $\cos\alpha = \frac{1}{R}\sqrt{R^2-a^2}$, то из равенства (3) получим:

$$OA_1 = \frac{R^2}{2\sqrt{R^2-a^2}} \approx 25 \text{ (см)}.$$

Аналогично рассмотрим треугольник OHF (красные линии на рис. 8): $OH = R$, $OF = FH$, а $\sin(HOF) = \frac{a_1}{R}$; Тогда $OF = \frac{R^2}{2\sqrt{R^2-a_1^2}} \approx 15$ (см). Подставив в уравнение (1) значения OA_1 и OF, получим:

$$x = 10 \text{ см}.$$

8. Построим ход лучей (рис. 9). Призма отклонит пучок лучей от главной оптической оси линзы на угол $\beta-\alpha$, оставив его параллельным. Эти лучи соберутся в фокальной плоскости линзы в точке S на расстоянии x от главной оптической оси. При этом

$$x = f\,\mathrm{tg}(\beta-\alpha) = f\,\frac{\mathrm{tg}\,\beta-1}{\mathrm{tg}\,\beta+1} \qquad (1)$$

(поскольку $\mathrm{tg}\,\alpha=1$). Известно, что

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=n, \qquad (2)$$

но $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Значит, $\sin\beta=\frac{n\sqrt{2}}{2}$, и

$$\mathrm{tg}\,\beta=\frac{n}{\sqrt{2-n^2}}. \qquad (3)$$

Подставив уравнение (3) в (1), получим:

$$x = f\,\frac{n-\sqrt{2-n^2}}{n+\sqrt{2-n^2}}.$$

К статье «Телевидение готовит в вуз»
(см. «Квант», 1974, № 3)

Математика

Вариант 1

1. -2.

2. $\frac{1}{4}h^2|\mathrm{ctg}\,\alpha-\mathrm{ctg}\,\beta|$.

Решение. Поскольку $\angle BHM=\pi/2$, то искомая площадь равна $\frac{1}{2}h\cdot MH$. Для отыскания длины отрезка MH следует рассмотреть все возможные случаи расположения точек A, C, M и H в зависимости от величины углов α и β.

Если $\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ (рис. 10), то точка H лежит внутри отрезка AC и $AH>AM$ (докажите!). Тогда из треугольников AHB и CHB находим: $AH=h\,\mathrm{ctg}\,\alpha$, $HC=h\,\mathrm{ctg}\,\beta$, а поэтому $AC=h(\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\beta)$, $AM=\frac{1}{2}h(\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\beta)$. Следовательно, в рассматриваемом случае

$$MH=\frac{1}{2}h(\mathrm{ctg}\,\alpha-\mathrm{ctg}\,\beta). \qquad (1)$$

Если $\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то аналогично заключаем, что

$$MH=\frac{1}{2}h(\mathrm{ctg}\,\beta-\mathrm{ctg}\,\alpha). \qquad (2)$$

Если $\alpha=\beta$, то точки M и H совпадают, так что $S_{\triangle BMH}=0$.

Если $\beta=\frac{\pi}{2}$ или $\alpha=\frac{\pi}{2}$, то формулы (1) или (2), очевидно, остаются справедливыми (убедитесь в этом!).

Если $\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\beta>\frac{\pi}{2}$ (рис. 11), то точка H лежит на продолжении стороны

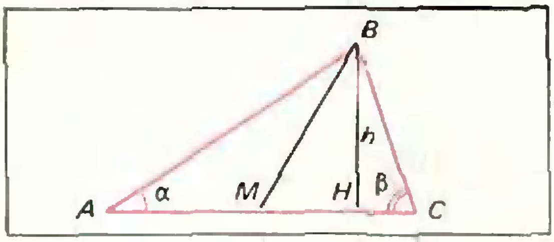


Рис. 10.

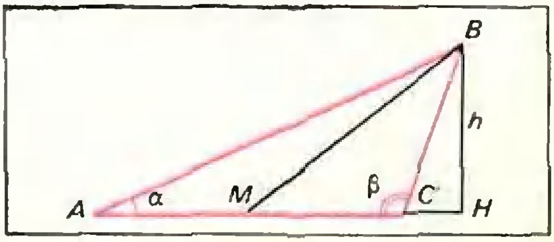


Рис. 11.

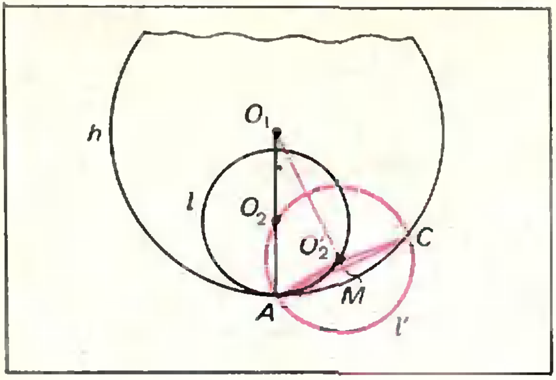


Рис. 12.

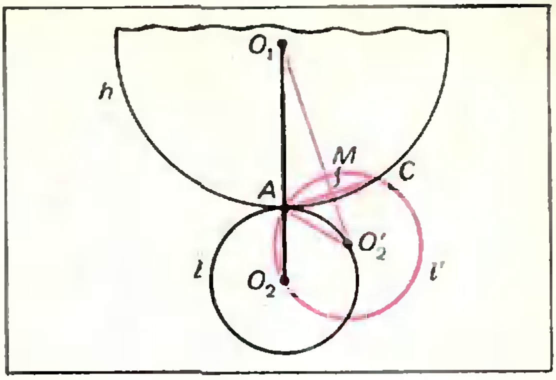


Рис. 13.

AC за точку C (докажите!). Тогда $AH = h\operatorname{ctg}\alpha$, $HC = -h\operatorname{ctg}\beta$, а поэтому $AC = h(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)$, $AM = \frac{1}{2}h(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)$. Следовательно, в рассматриваемом случае

$$MH = \frac{1}{2}h(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta),$$

что совпадает с формулой (1). Если $\alpha > \frac{\pi}{2}$, $\beta < \frac{\pi}{2}$, то снова приходим к формуле (2). Формулы (1) и (2) можно объединить в одну:

$$MH = \frac{1}{2}h\,|\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta|,$$

которая справедлива при любых значениях углов α и β (убедитесь в этом!). Теперь легко получается ответ.

3. $x_1 = 0, y_1 = 0$; $x_2 = 0, y_2 = 2$; $x_3 = 2$; $y_3 = 0$; $x_4 = 2$, $y_4 = 2$.

Указание. Второе уравнение удовлетворяется при $x + y = 0$, однако при этом первое уравнение удовлетворяется лишь если $x = y = 0$. Таким образом, найдено одно решение. Для отыскания других перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(x + y), \\ x^2 - xy + y^2 = 4, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (x + y)^2 = 2(x + y) + 2xy, \\ (x + y)^2 = 4 + 3xy. \end{cases}$$

Легко исключить xy, в результате получим уравнение

$$(x + y)^2 - 6(x + y) + 8 = 0.$$

Остается рассмотреть две возможности: $x + y = 2$ и $x + y = 4$.

4. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Вариант 2

1. 34 и 51.

2. $\frac{\sqrt{3}Rr}{\sqrt{R^2 - Rr + r^2}}$, если окружности касаются внутренним образом; $\frac{\sqrt{3}Rr}{\sqrt{R^2 + Rr + r^2}}$, если окружности касаются внешним образом.

Решение. Когда речь идет о построении правильного треугольника, весьма полезно сделать поворот вокруг одной из вершин этого треугольника на $\pi/3$. Это преобразование (меньшая окружность поворачивается на $\pi/3$) сводит данную задачу к следующей (см. рис. 12, 13): *две окружности h и l' пересекаются в точках A и C, причем $\angle O_1AO_2' = \frac{\pi}{3}$ (если окружности h и l касаются внутренним образом,* рис. 12), *или $\angle O_1AO_2' = \frac{2\pi}{3}$ (если окружности h и l касаются внешним образом,* рис. 13); *найти AC (радиусы R и r окружностей h и l, l' заданы).* Заметим, что точка M на рисунке 13 может находиться как между O_1 и O_2', так и за O_2' (при $2r > R$). Замечая, что $AC = 2\,AM$, а AM — высота треугольника O_1AO_2', находим

$$S_{\Delta O_1AO_2'} = \frac{1}{2}AO_1 \cdot AO_2' \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}Rr,$$

$$AC = 2 \cdot AM = \frac{4S_{\Delta O_1AO_2'}}{O_1O_2'} = \frac{\sqrt{3}Rr}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{3}Rr}{\sqrt{R^2 + r^2 - Rr}}$$

— если окружности касаются внутренним

образом, а если окружности касаются внешним образом, то, заменяя в этих формулах $\frac{\pi}{3}$ на $\frac{2\pi}{3}$, получаем

$$AC = \frac{\sqrt{3}\,Rr}{\sqrt{R^2 + r^2 + Rr}}.$$

Обоснование всех построений предоставляется читателю.

3. $x = (-1)^n \arcsin\left[\sqrt[3]{14} - \sqrt{2}\right] + n\pi,$

$$y = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{14} + \sqrt{2}} + 2k\pi,$$

$$n,\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

4. $x_1 = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{4}, \quad n,\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$

Задачи

1. $\log_a b - \log_b a$.
2. $b < a < c$.
3. 0; 1.

Указание. Ввести вспомогательное неизвестное $y = x - 1$, получить уравнение $2y\left(2^y + \frac{y}{2}\right) = 0$, которое равносильно совокупности двух уравнений:

$$y = 0 \text{ и } 2^y + \frac{y}{2} = 0.$$

Второе из этих уравнений имеет единственный корень $y_1 = -1$ (так как левая часть представляет собой монотонную функцию), а первое дает корень $y_2 = 0$.

4. 1; $\log_2 \frac{\sqrt{29} - 5}{2}$. Указание. Введите вспомогательное неизвестное $y = 2^x - 2^{-x}$.

5. 2.

6. $x_1 = 9,\ y_1 = 3;\quad x_2 = \frac{1}{3},\ y_2 = \frac{1}{9}$.

7. $1 \leqslant x < 2$.

8. $-9 \leqslant x \leqslant -2, \quad 1 < x \leqslant \frac{3}{2}$.

Физика

1. $q = C\left(E_2 + \frac{E_1 - E_2}{R + r_1 + r_2}\ r_2\right) = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ *к*.

2. $R_2 = \frac{r^2}{R_1} = 0{,}5$ *ом*.

3. $t_3 = V_3\left(\frac{t_1}{V_1} + \frac{t_2}{V_2}\right) = 70$ *мин*.

4. $A = \frac{\mu_B UFZ_B pV}{A_B RT} = 1{,}25 \cdot 10^5$ *дж*.

5. $B = 9 \cdot 10^{-6}$ *тл*.

6. $\nu = \frac{E_{\text{инд}}}{\pi l^2 B} \approx 1{,}3$ *гц*.

7. $v = \frac{mgR}{B^2 l^2} \approx 0{,}1$ *м/с*.

8. $R_2 = \frac{U}{I_2 k} - \frac{R}{k^2} - \frac{P}{I_2^2} = 4$ *ом*.

9. $C = \frac{I_{0_2}}{2\pi\nu I_{0_1} R} = 3{,}6 \cdot 10^{-6}$ *ф*.

10. $\nu \approx 5{,}7$ *гц*.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант», 1974, № 3)

1. 10 метров.
2. Одинаково.
3. 6 коров.
4. Свеча станет легче.
5. Если неизвестное сопротивление мало по сравнению с сопротивлением вольтметра, лучше пользоваться схемой 1, в противном случае — схемой 2.

К задачам «Найти число...»

(см. «Квант», 1974, № 3 с. 8)

1. 445.
2. Нет, одно из таких чисел должно делиться на 3.
3. $5776 = 76^2$.
4. 27.
2. $2401 = 7^4$.
6. 400.

Корректор *Т. С. Вайсберг*

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Квант», тел. 234-08-11 Сдано в набор 16/I 74 г. Подписано в печать 27/II 74 г. Заказ 78
Бумага $70 \times 100^1/_{16}$. Физ. печ. л. 4 Усл. печ. л. 5,2
Уч.-изд. л. 6,05 Тир. 385 105 экз. Т-05509
Цена 30 коп.

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Уголок коллекционера

В. И. ЛЕНИН — ВЕЛИЧАЙШИЙ УЧЕНЫЙ XX ВЕКА

22 апреля 1974 года Советский народ отмечает 104 годовщину рождения В. И. Ленина — гениального продолжателя революционного учения Маркса и Энгельса, создателя Коммунистической партии Советского Союза, основателя первого в мире социалистического государства, вождя трудящихся всего мира. Ленин был не только великим государственным и политическим деятелем, но и революционером в науке, открывшим новый этап в развитии марксизма, обогатившим все составные части марксизма — философию, политическую экономию и научный коммунизм.

В. И. Ленин дал глубокий и философский анализ коренной перестройки физической науки в начале XX века.

Эту сложнейшую работу он выполнил в знаменитой книге «Материализм и эмпириокритицизм», изданной в 1909 году.

В. И. Ленин писал в своей книге о том, что атомы и электроны необычайно сложны, и мы никогда не узнаем о них все, а будем и дальше находить у них новые, ранее неизвестные науке свойства. Он писал также, что физика первых лет XX века рождает диалектику, то есть подтверждает своими исследованиями основные положения диалектического материализма. Он высказал твердую уверенность в том, что физика и далее будет развиваться по этому же пути. Оба этих гениальных предвидения полностью сбылись.

С первых дней существования советской власти В. И. Ленин уделял огромное внимание развитию науки. Молодое советское правительство стремилось оказывать всю возможную в те трудные дни помощь ученым и научным организациям. Оно установило тесный контакт с Академией наук. В. И. Ленин внимательно следил за работой И. П. Павлова, К. А. Тимирязева, И. В. Мичурина, И. М. Губкина, Г. М. Кржижановского и других русских ученых. Он стремился направить все усилия ученых нашей страны на решение важнейших проблем строительства социализма.

В наши дни непрерывно возрастает число государств, вступивших на социалистический путь развития. Такие страны имеются теперь не только в Европе, но и в Азии, Африке и Латинской Америке. И в каждой такой стране имя Ленина окружено глубокой любовью и уважением. Это находит подтверждение в выпуске почтовых марок, посвященных Владимиру Ильичу. Мы помещаем здесь некоторые из марок, выпущенных странами, недавно освободившимися от колониальной зависимости.

В. Рудов





Цена 30 коп.
ИНДЕКС 70465

4

ДЕНЬ КОСМОНАВТИКИ

12 апреля 1961 года навсегда останется в памяти всего человечества как день выдающейся победы науки и техники. В этот день человек впервые совершил орбитальный космический полет вокруг Земного шара. Первым космонавтом стал советский человек, коммунист Юрий Алексеевич Гагарин.

Тринадцать лет отделяет нас от этого события. И каждый год приносит новые достижения в области исследования и использования космического пространства. В 1973 году в Советском Союзе в соответствии с программой космических исследований был осуществлен запуск двух космических кораблей: «Союз-12» с космонавтами Василием Григорьевичем Лазаревым и Олегом Григорьевичем Макаровым и «Союз-13» с космонавтами Петром Ильичем Климуком и Валентином Витальевичем Лебедевым. В этих полетах проводились комплексные проверки и испытания усовершенствованных бортовых систем космических кораблей «Союз» и спектрографирование отдельных участков земной поверхности с целью получения данных для решения народнохозяйственных задач. Космонавты Климук и Лебедев регистрировали ультрафиолетовое излучение звезд с помощью установленной на борту «Союз-13» системы телескопов «Орион-2». Это излучение недоступно для земных телескопов, так как оно поглощается атмосферой.

Успешно проходила подготовка к совместному советско-американскому космическому полету, запланированному на 1975 год.

Американские астронавты произвели серию экспериментов с орбитальной космической станцией «Скайлеб». Космический зонд «Пионер» прошел вблизи Сатурна и передал ценную информацию об этой загадочной планете.