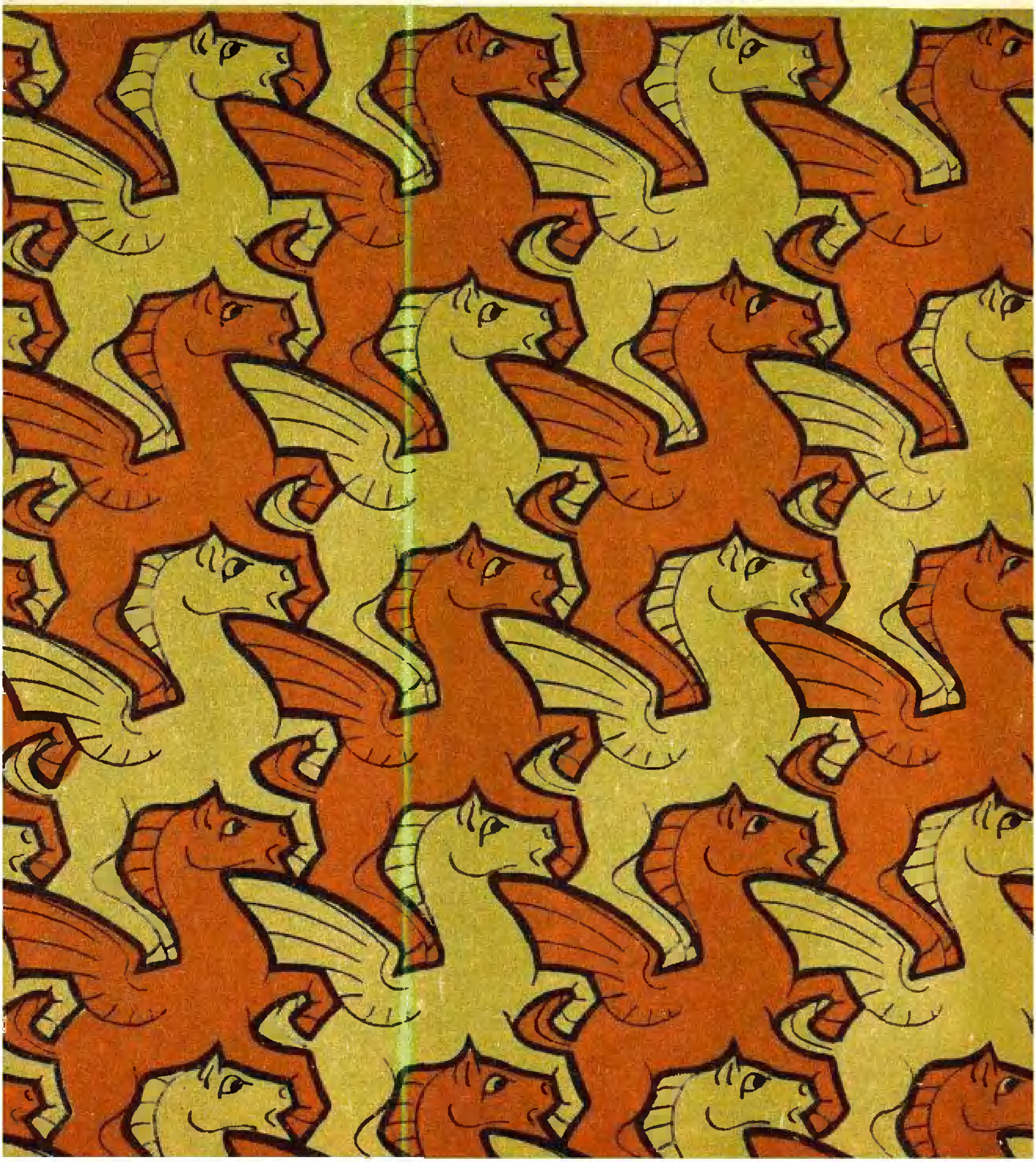
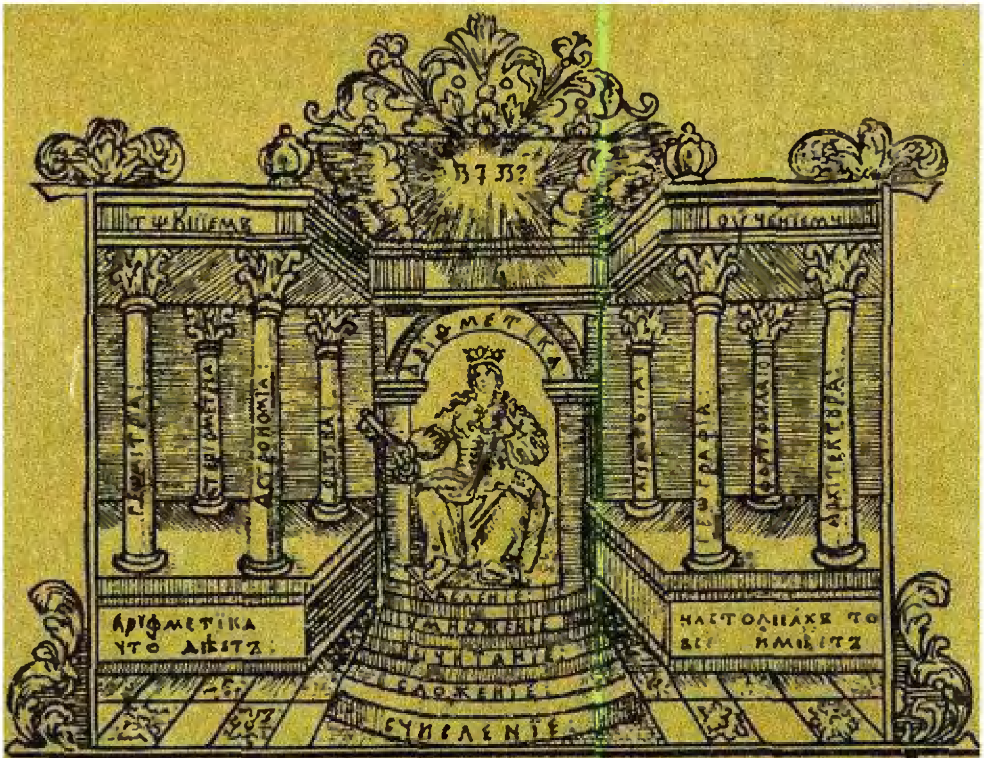
Квант

1974
6

Научно-популярный физико-математический журнал





Арїѳметїка практїка

или дѣятелная.

Что єсть арїѳметїка;

Арїѳметїка или численница, єсть художество честное, независтное, и всѣмъ удобопонятное, многополезнѣйшее, и многохвалнѣйшее, ѿ древнѣйшихъ же и новѣйшихъ, въ разная времена явлшихся изряднѣйшихъ арїѳметїкωвъ, изобрѣтенное, и изложенное.

Коликогуба єсть арїѳметїка практїка;

Єсть сугуба.

1 Арїѳметїка полїтїка, или гражданская.

2 Арїѳметїка логїстїка, не ко гражданству токмω, но и къ движенїю небесныхъ круговъ принадлежащая.

Первая страница книги Л. Ф. Магницкого «Арифметика» (см. с. 14).

Основан в 1970 году.

Квант

1974
6

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

На первой странице обложки вы видите замечательный паркет, изобретенный голландским художником М. Эшером (1898—1972). Как и всякий паркет он обладает «фундаментальной областью» (два коня — коричневый и желтый). Все остальные кони могут быть получены из них параллельными переносами. Постарайтесь отыскать все нужные для этого параллельные переносы.

Г. М. ГЕРШТЕЙН

СИГНАЛЫ. СПЕКТРЫ

В современной жизни нас буквально захлестывает поток разнообразной информации, объем которой неуклонно возрастает. Эта информация передается при помощи радио, телевидения, телефона и телеграфа в виде сигналов. Весьма важной характеристикой любых сигналов является их спектр, органически связанный с формой и длительностью сигналов. Спектральные представления позволяют сравнивать разные по природе физические процессы и изучать акустические, электромагнитные, оптические и другие явления с единой точки зрения. Поэтому полезно иметь понятие о сигналах и их спектрах, знать связь между спектрами и другими характеристиками сигналов. Об этом и будет идти речь в настоящей статье.

О сигнале

Первоначальную информацию о богатом и разнообразном мире, окружающем нас, мы получаем при помощи глаз и ушей. Мы любуемся восхитительным зрелищем восхода или заката солнца на море или на опушке леса, радугой и северным сиянием, полотнами прославленных мастеров живописи, стройными зданиями, разнообразными машинами и т. п. Глядя на текст и формулы, мы воспринимаем выраженные ими мысли других людей. То же самое происходит, когда мы слушаем речь или музыку. Во всех этих случаях человек воспринимает сообщения, которые играют роль носителей информации. С этой точки зрения различные звуки и изображения являются примерами сообщений.

Для передачи звука или изображения на далекие расстояния сообщение прежде всего преобразуют в соответствующий электрический сигнал, то есть в электрический процесс $u(t)$, характеризуемый определенной зависимостью электрической величины u от времени t, или, как говорят, кодируют сообщение. Звуки сравнительно просто кодируются микрофонным устройством. На микрофон воздействуют упругие колебания воздуха, роль сообщения играет звуковое давление p на мембрану микрофона, изменяющееся во времени по закону $p(t)$. При этом, например, в угольном микрофоне соответствующим образом изменяется сопротивление микрофона и ток в его цепи, в результате чего на выходе микрофонного устройства напряжение $u(t)$ изменяется во времени по тому же закону, что и звуковое давление $p(t)$.

Значительно сложнее кодировать изображение. Сначала специальное фотоэлектрическое устройство преобразует оптическое изображение в электрическое, в котором распределение напряжений соответствует яркости различных участков изображения. Затем с помощью электронного луча, обегающего электрическое изображение, осуществляется последовательное преобразование этого изображения в электрический сигнал $u(t)$, характеризуемый определенной зависимостью u от времени t. В зависимости $u(t)$ и зашифрована информация о данном изображении.

При изучении электрического сигнала обычно несущественно, какая именно электрическая величина подразумевается под u — напряжение, ток или заряд. Важно не что изменяется, а как изменяется эта величина во времени. Можно отвлечься от физической природы этой величины и интересоваться характером математической зависимости $u(t)$, то есть функцией времени t, например, непрерывная она или импульсная, синусоидальная или несинусоидальная и т. д. В конечном счете для нас важно, что независимо от физической природы сообщения кодирующий его сигнал передается в виде определенной функции времени.

Временное и спектральное представления сигнала

Изучая некоторое событие, мы обычно интересуемся тем, где и когда оно произошло, какие перемещения в пространстве и изменения во времени имели место. Поэтому мы привыкли рассматривать большинство величин как функции пространственных координат и времени.

Иное дело сигнал. Значение пространственных координат источника сигнала не имеет особого смысла, поскольку в земных масштабах сигналы, переносимые электромагнитными волнами, распространяются практически мгновенно (напомним, что в воздухе скорость электромагнитной волны $\approx 3\cdot10^8$ *м/с*). Например, при трансляции спектакля из московского театра радиослушатели во Владивостоке услышат звук, произнесенный на сцене, даже раньше сидящих в задних рядах партера москвичей, поскольку электромагнитные волны распространяются примерно в миллион раз быстрее звуковых.

Зато очень важно знать, как сигнал изменяется со временем, так как именно в зависимости $u(t)$ и содержится передаваемая информация. Эту зависимость можно записать аналитически или представить в виде графика $u(t)$. Но можно сигнал охарактеризовать по-другому, с точки зрения его спектрального состава, и тоже представить графически соответствующим образом. Что же такое спектр сигнала? Попробуем в этом разобраться.

Будем рассматривать, главным образом, такие сигналы, которые являются периодическими, то есть функция $u(t)$ удовлетворяет соотношению

$$u(t+nT)=u(t),$$

где T — постоянная величина, называемая периодом, n — любое целое число. Периодический процесс можно характеризовать также частотой $\nu=\frac{1}{T}$. Теоретически предполагается, что такая периодичность длится вечно и не имеет начала и конца во времени. Практически к периодическим процессам относят такие процессы, длительность которых намного больше периода.

На рисунке 1 представлены графики трех различных периодических процессов. Легко заметить, что у них одинаковая частота, но различная форма колебаний. В дальнейшем вы увидите, что эти различные по форме колебания имеют разный спектральный состав.

Рассмотрим такой опыт. Пусть есть много различных резонансных контуров, настроенных на частоты ν_0, $2\nu_0$, $3\nu_0$ и т. д., и электрические сигналы, соответствующие указанным процессам, одновременно воздействуют на эти контуры. Оказывается, что первый сигнал $u_1(t)$ возбуждает колебания в трех контурах, настроенных на частоты ν_0, $2\nu_0$ и $3\nu_0$; на второй сигнал $u_2(t)$ откликнется значительно больше контуров, а при воздействии последнего сигнала $u_3(t)$

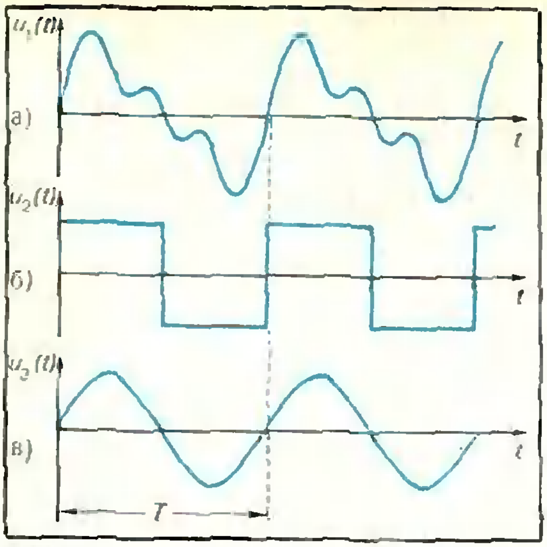


Рис. 1.

колебания возникают только в одном контуре с собственной частотой ν_0. Очевидно, для таких колебательных контуров периодический процесс $u_3(t)$ является простейшим, поскольку он вызывает возбуждение только на одной частоте, равной ν_0. Этот процесс вам, безусловно, знаком, он представляет собой так называемое синусоидальное, или гармоническое, колебание, описываемое соотношением

$$u(t) = A\sin(2\pi\nu_0 t + \varphi) = A\sin(\omega_0 t + \varphi),$$

и удовлетворяющее условиям

$$A,\ \omega_0,\ \varphi = \text{const},$$

где A — амплитуда, φ — начальная фаза, $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ — круговая частота колебаний.

Как же объяснить тот факт, что каждый из сигналов $u_1(t)$ и $u_2(t)$ одновременно возбуждает несколько контуров, настроенных на разные частоты? Можно заметить, что эти сигналы ведут себя так, как если бы каждый из них представлял собой сумму нескольких синусоидальных колебаний с разными частотами. Строго это свойство было доказано французским ученым Фурье и сформулировано им в виде замечательной теоремы. Она утверждает, что практически любую периодическую функцию, частота которой равна ν_0, можно представить в виде суммы синусоид с соответствующим образом подобранными амплитудами и начальными фазами и частотами, кратными ν_0 (такие синусоиды часто называют гармониками), или, как говорят, эту функцию можно разложить в ряд Фурье. Эта теорема может быть записана следующим образом:

$$u(t) = A_1\sin(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2\sin(2\omega_0 t + \varphi_2) + A_3\sin(3\omega_0 t + \varphi_3) + \ldots + A_k\sin(k\omega_0 t + \varphi_k) + \ldots$$

или, более кратко,

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\sin(k\omega_0 t + \varphi_k),$$

где k — номер гармоники, определяющий ее частоту, A_k — амплитуда гармоники, φ_k — начальная фаза гармоники, ω_0 — круговая частота исследуемого процесса.

Таким образом, сигнал, представленный в виде суммы синусоид, можно удобно и просто охарактеризовать совокупностью величин A_k и φ_k. Совокупность величин A_k называется *спектром амплитуд*. Этот спектр наглядно представляют графически, откладывая по оси ординат значения A_k и по оси абсцисс ν и изобра-

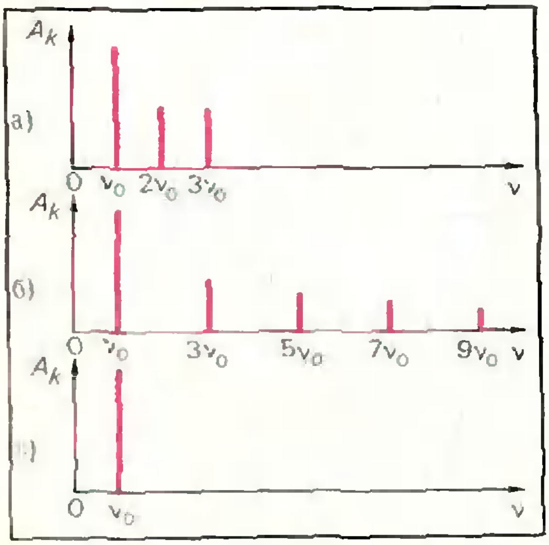


Рис. 2.

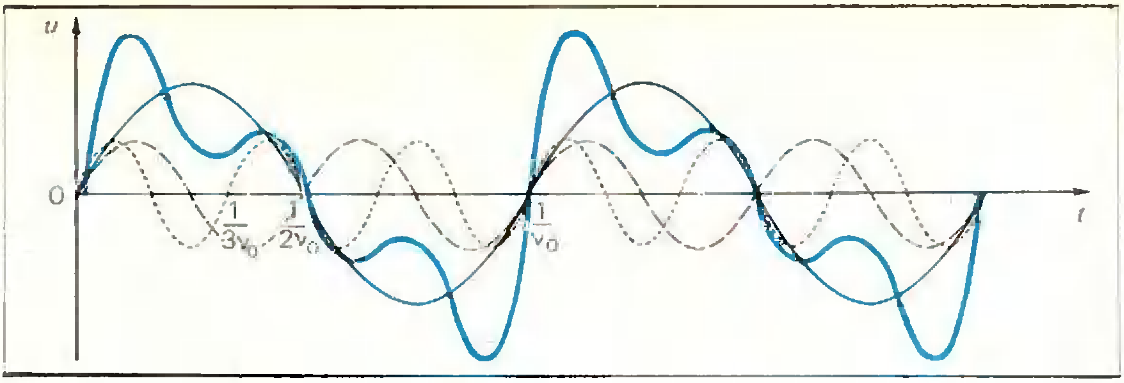


Рис. 3.

жая амплитуды отдельных гармоник вертикальными отрезками соответствующей длины. Такой спектр является линейчатым и гармоническим. Последнее означает, что между частотами гармоник существуют простые кратные соотношения. Если процесс не периодичен, он также может быть представлен суммой синусоид, но спектр подобного процесса не будет гармоническим. Совокупность величин φ_k называют спектром фаз. При анализе сигналов в большинстве случаев достаточно знать только амплитудные спектры. Поэтому для краткости амплитудные спектры называют часто просто спектрами, что мы и будем делать в дальнейшем.

Как правило, с увеличением номера гармоник их амплитуды убывают, и, начиная с некоторого номера, амплитуды последующих гармоник становятся столь малыми, что ими можно пренебречь. Поэтому практически спектры имеют ограниченное число спектральных линий. Одной из характеристик спектра является его ширина. Шириной спектра называют интервал на шкале частот, в котором размещается такой спектр.

На рисунке 2 приведены спектры функций $u_1(t)$, $u_2(t)$ и $u_3(t)$, полученные, например, с помощью упомянутого выше набора резонансных контуров. Они наглядно иллюстрируют связь между временными и спектральными представлениями сигнала. Мы видим, что чем резче изменения функции во времени, тем богаче и шире ее спектр. Это естественно. Чтобы, складывая непрерывные и плавно изменяющиеся синусоиды, получить резкие изменения результирующей функции, требуется сложить большое число синусоид с разными частотами, амплитудами и фазами. Для воспроизведения же непрерывного процесса, близкого к синусоидальному, достаточно небольшого числа таких синусоид. В качестве примера на рисунке 3 показано графическое сложение трех синусоид с частотами и амплитудами, соответствующими спектру рисунка 2, *а*, и начальными фазами, равными нулю. Результирующая кривая (она показана синим) по форме совпадает с кривой на рисунке 1, *а*.

Спектры звуков

Звуковые сообщения обычно подразделяют на музыкальные звуки и шумы.

Музыкальный звук представляет собой периодически изменяющийся процесс, например, такой, как на рисунке 4, *а*. В частности, если этот процесс — гармонический, говорят о музыкальном тоне. Используя разложение Фурье, музыкальный звук можно рассматривать как совокупность основного музыкального тона и нескольких высших гармоник — обертонов. В спектре соответствующего сигнала наибольшую амплитуду имеет основной тон, с ростом номера гармоник амплитуда их заметно

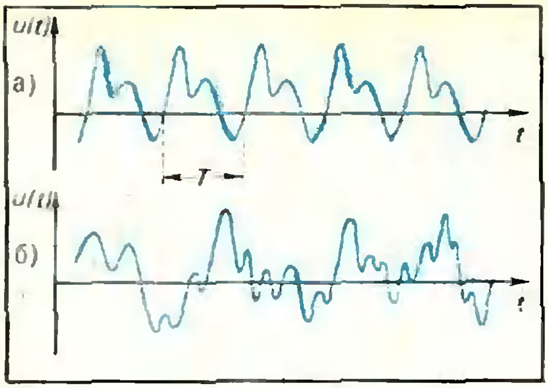


Рис. 4.

падает, так что практически спектр музыкального тона имеет сравнительно немного гармоник. Роль этих гармоник в эмоциональном восприятии музыки очень велика. Они определяют тембр музыкальных звуков. Беря одну и ту же ноту на различных инструментах, мы получим звуки с разным числом гармоник и разными соотношениями между их амплитудами. Соответственно и спектры этих звуков будут различными, благодаря чему наше ухо различает, на каком именно инструменте звучит данная нота. На рисунке 5 представлены графики и спектры звуков рояля и кларнета для одной и той же ноты.

Такие отрывистые звуки, как удары барабана, стук кастаньет, являются шумами. Сигналы шумов отличаются непериодичностью и сложной зависимостью от времени (например, такой, как на рисунке 4, б). Один из таких спектров — спектр шума компрессора — показан на рисунке 6. В нем очень много различных частотных компонент. Спектр шума значительно шире и богаче спектра музыкальных тонов. В этом легко убедиться, произведя, например, простой опыт с камертонами, имеющими различные собственные частоты колебаний. На длительное звучание чистого музыкального тона откликнется только один из камертонов. Если же вблизи резко ударять по барабану, зазвучат многие камертоны. То есть чистый тон может быть представлен одной частотой, а удары барабана — большим числом частот.

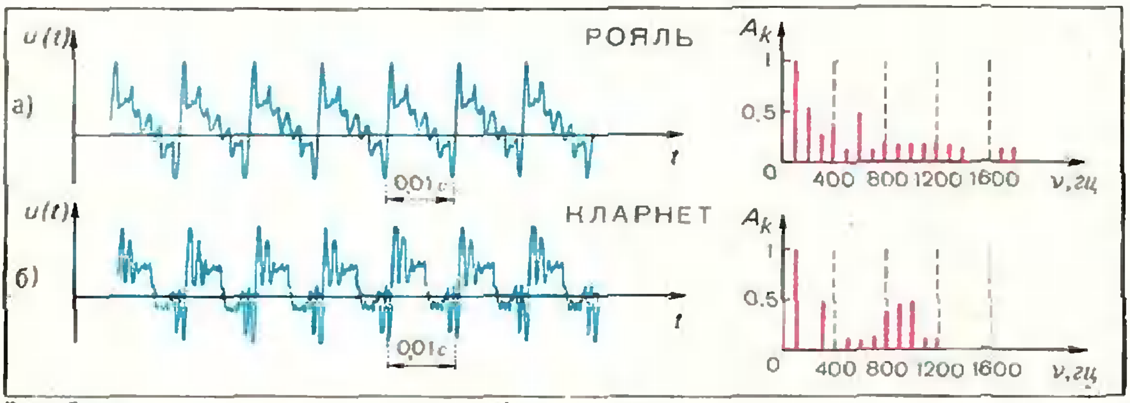


Рис. 5.

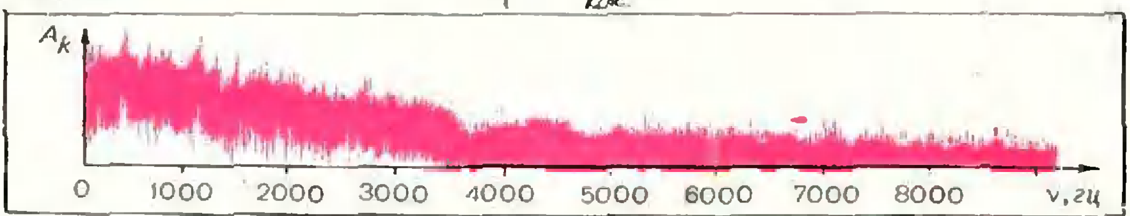


Рис. 6.

Качественное отличие различных шумов выражается в том, что спектр одного шума может иметь более интенсивные спектральные *компоненты* в области низких частот, а другого шума — на более высоких частотах, то есть в различных пропорциях между спектральными компонентами.

Какого цвета шум?

Спектральные представления позволяют создать *единый и наглядный* язык для описания процессов различной физической природы, использовать подчас неожиданные ассоциации и аналогии.

Так, *например*, специалисты иногда используют термин «белый шум». С точки зрения филологов это — бессмыслица, и они могут язвительно заметить, что шум не имеет цвета, *мы его не видим*, а слышим. Однако для физика это вполне понятное, довольно точное и емкое определение, использующее аналогию между звуком и светом.

Известно, что ощущение белого цвета является результатом воздействия на глаз целой гаммы световых лучей, от красного до фиолетового. Белый свет имеет сплошной спектр, в котором представлены все частоты видимой части шкалы электромагнитных волн (от $3{,}8\cdot10^{14}$ до $7{,}5\cdot10^{14}$ *гц*). Хотя существует определенное распределение энергии по частотам и максимум энергии, излучаемой источником белого света, приходится на конкретный участок видимого спектра (в частности, максимум энергии излучения Солнца находится в желто-зеленой части), излучение в остальных участках видимого спектра тоже достаточно интенсивное, то есть в белом свете энергия красного, зеленого, синего и других цветов более или менее равномерно распределена по всему диапазону видимых световых волн.

Аналогично этому «белый шум» — это такой шум, в сплошном спектре

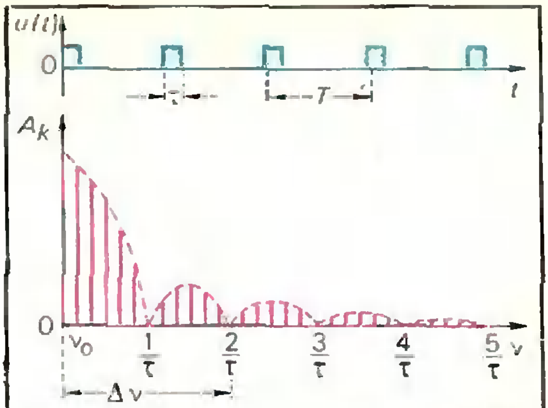


Рис. 7.

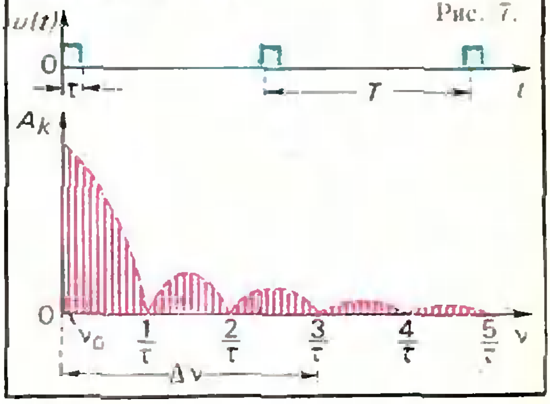


Рис. 8.

которого присутствуют все звуковые частоты, причем различные спектральные компоненты отличаются по энергии не очень сильно.

Спектры импульсных сигналов

В современной технике, например, в телеграфии, радиолокации, телевидении часто используются сигналы в виде периодически повторяющихся импульсов *прямоугольной* формы (рис. 7 и 8). Как видно из этих рисунков, такие сигналы имеют богатый спектр, содержащий много спектральных линий, сгруппированных в своеобразные «лепестки», *причем* частоты, соответствующие «узлам» этих лепестков, равны n/τ, где n — номер лепестка. Теоретически подобные спектры имеют бесконечную протяженность *по частоте*, но поскольку после третьего лепестка амплитуды гармоник становятся пренебрежимо малыми, практически можно ограничиться первыми тремя лепестками. Ширина такого ограниченного спектра $\Delta\nu$ связана с длительностью импульса τ простой зависимостью:

$$\Delta\nu = \frac{3}{\tau},$$

то есть ширина спектра прямоугольного импульса обратно пропорциональна его длительности.

Это соотношение имеет большое практическое значение. Оно показывает, что чем меньше длительность импульсов, то есть чем меньше занимается линия связи, тем более широким является спектр такого сигнала и тем более широкая полоса частот требуется для достаточно правильного его воспроизведения.

Так, например, при передаче телеграфных сигналов средняя длительность импульсов (точек и тире) примерно равна 0,1 *с*. Этому соответствует ширина спектра $\Delta\nu = 30$ *гц*. Если, для того чтобы меньше времени занимать линию связи, передавать телеграфный сигнал в 100 раз быстрее ($\tau = 0{,}001$ *с*), $\Delta\nu$ возрастает до 3000 *гц*. Следовательно, чем быстрее передается сигнал, тем шире его спектр.

Иногда сама природа сообщения требует быстрой передачи соответствующего сигнала. Так, в частности, обстоит дело в телевидении. Поскольку зрительное ощущение изображения сохранится в нашем глазу только в течение примерно 1/25 секунды, нужно за это время успеть передать один кадр, то есть в виде импульсов последовательно передать информацию о яркостях примерно 500 000 элементов изображения (по современным стандартам). В данном случае каждый импульс длится меньше миллионной доли секунды, при этом спектр телевизионного сигнала занимает полосу частот шириной в десятки миллионов герц что обусловливает особые трудности его передачи.

На примере прямоугольных импульсов мы столкнулись с весьма любопытной закономерностью, справедливой и для других видов импульсов. Эту закономерность можно выразить математически, переписав приведенное выше соотношение в виде

$$\tau\cdot\Delta\nu = \text{const}.$$

Физический смысл этого соотношения состоит в том, что невозможно одновременно сконцентрировать такой сигнал во времени и по частотам. Если, например, стремясь сжать сигнал во времени, то есть быстрее передать информацию, мы уменьшаем длительность импульсов τ, при этом увеличивается полоса частот и спектр сигнала расширяется.

Из приведенной формулы также следует, что ширина спектра $\Delta\nu$ прямоугольных импульсов определяется только их длительностью τ и не зависит от частоты повторения импульсов $\nu = 1/T$. Это важно практически, так как позволяет легко определить минимальное значение τ, при котором полоса частот, занимаемая данным сигналом, не превысит допустимую для данной системы передачи и приема импульсных сигналов.

Однако, с изменением частоты ν изменяется число спектральных линий в каждом лепестке, то есть их густота. Так, с увеличением интервала между импульсами уменьшается ν, и число этих линий в лепестках спектра увеличивается (рис. 7 и 8). Очевидно, в предельном случае перехода от периодически повторяющихся импульсов к одиночному импульсу ($T\to\infty$ и $\nu\to 0$) спектр должен стать сплошным, что действительно подтверждается опытом.

Большой практический интерес представляет спектр импульсов, возникающих при включении рубильников, контактов различных электрических цепей, когда ток в цепи резко возрастает от нуля до определенной величины (рис. 9, *а*). Такой сигнал имеет сплошной спектр, показанный на рисунке 9, *б*, где по горизонтальной оси отложена непрерывно меняющаяся частота ν. Из

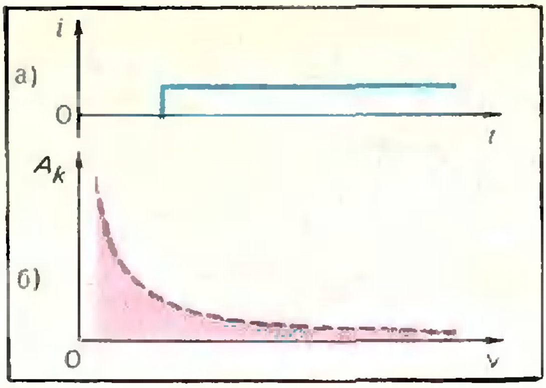


Рис. 9.

рисунка видно, что наибольшую интенсивность имеют спектральные компоненты низких частот. Действие таких импульсов мы часто обнаруживаем, сидя за радиоприемником, когда вблизи проходят трамваи, троллейбусы, работает электросварка и т. п.

Заключение

Спектральные представления универсальны, они объективно характеризуют практически важные свойства любых колебаний и волн. Как мы видели, спектры самым тесным образом связаны с формой и длительностью соответствующих процессов и сигналов. Спектральные представления позволяют сравнивать разные объекты информации (музыка, речь, помехи, изображения и др.) с единых позиций, определять ширину спектра кодирующих их сигналов и на основании этого судить о возможности передачи этих сигналов по тем или иным линиям связи.

Упражнения

1. Попробуйте убедиться в том, что несинусоидальный периодический процесс $u_2(t)$ (рис. 1, *б*) можно приближенно представить суммой пяти синусоид с частотами и амплитудами, соответствующими спектру рисунка 2, *б*, и начальными фазами, равными нулю. Сложите алгебраически ординаты этих синусоид для нескольких периодов сигнала $u_2(t)$ и постройте результирующую кривую.

2. В диапазоне каких частот могут создавать помехи прямоугольные электрические импульсы длительностью 10 *мкс* каждый, повторяющиеся 2 000 раз в секунду?

Задачи

1. Семиклассник Петя утверждает, что с помощью циркуля и линейки можно построить приближение любого острого угла с абсолютной погрешностью не более 0,0000001 градуса. Прав ли он?

2. Решить систему уравнений:

$$a\sqrt[10]{a}+b\sqrt[10]{b}=1973,$$

$$a\sqrt[10]{b}+b\sqrt[10]{a}=1974.$$

3. Можно ли расположить на плоском столе четыре одинаковые монеты, чтобы каждая из них касалась трех остальных?

4. Расшифровать равенства:

а) $\mathrm{tg}\times\mathrm{tg}=\mathrm{ctg}$;

б) $\sin\times\sin=\arcsin$.

5. Будет ли при каких-либо натуральных значениях букв верно равенство

$$\sqrt[3]{t}+\sqrt[3]{g}=\sqrt[3]{tg}?$$

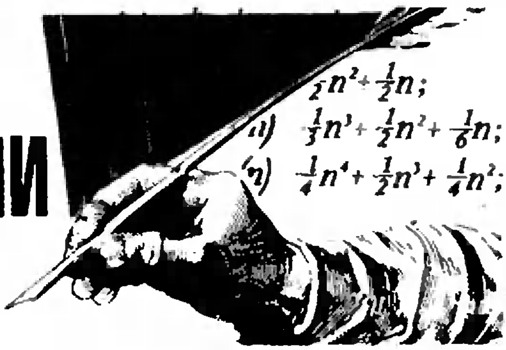
6. Сколькими способами можно «расшифровать» пример:

$$\begin{array}{r} -\,\text{фуит} \\ \text{фут} \\ \hline \text{пуд?} \end{array}$$

В. Ф. Акулич
И. Ф. Акулич

В. С. АБРАМОВИЧ

ЧИСЛА БЕРНУЛЛИ



$$B_3=B_5=B_7=\ldots=0$$

С древних времен математики пытались постичь тайны удивительного мира чисел. Этот мир привлекает своим многообразием, строгостью и совершенством законов. Здесь есть «великаны» и есть «карлики», обычные «трудяги» и такие «знаменитости», как π и e. Но еще более многообразен мир числовых последовательностей. Здесь и последовательность натуральных чисел

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

и полная глубоких тайн последовательность простых чисел

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots,$$

и последовательность «биномиальных коэффициентов»

$$C_1^1,\ C_2^1,\ C_2^2,\ C_3^1,\ C_3^2,\ C_3^3,\ldots,$$

появляющихся при возведении в степени 2, 3, 4, ... «бинома» $a+b$:

$$(a+b)^k=a^k+C_k^1a^{k-1}b+C_k^2a^{k-2}b^2+\ldots+C_k^{k-1}ab^{k-1}+b^k. \tag{1}$$

Числа C_k^m являются основным инструментом увлекательной области математики — комбинаторики *). Они нам будут нужны и в этой статье. Напомним, что вычисляются они очень просто — по формуле

$$C_k^m=\frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-m+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m}, \tag{2}$$

$1\leqslant m\leqslant k$, с помощью которой вы легко выведете их важнейшее свойство:

$$C_k^{m-1}+C_k^m=C_{k+1}^m \tag{3}$$

(теорема Паскаля). Формулу (2) можно переписать еще и в таком, более «компактном» виде:

$$C_k^m=\frac{k!}{m!\,(k-m)!}, \tag{2*}$$

где $n!=1\cdot 2\cdot\ \ldots\ n$ при $n>0$; значение $0!$ полагается равным единице (значок ! называется факториалом). Из формулы (2*) немедленно вытекает еще одно свойство биноминальных коэффициентов:

$$C_k^m=C_k^{k-m}. \tag{3*}$$

*) Об этой науке рассказано в книге Н. Я. Виленкина с одноименным названием, М., «Наука», 1969.

Очевидно, что $C_k^0=1$. (Это также сразу получается из (2*), если учесть, что $0!=1$.) Кроме того, будем считать, что при $m>k$ числа $C_k^m=0$ по определению.

В этой статье речь пойдет об одной замечательной последовательности чисел, которую открыл выдающийся швейцарский математик Якоб Бернулли (1654—1705).

Последовательность эта играет в математике важную роль, что объясняется ее связью с вопросами суммирования функций, простыми числами, великой теоремой Ферма, а также другими задачами.

1. Что такое числа Бернулли?

Возникли эти числа у Бернулли в связи с изучением им сумм*)

$$S_k(n)=1^k+2^k+\ldots+n^k. \tag{4}$$

С помощью разложения (1) напишем тождество

$$(a-1)^{k+1}-a^{k+1}=-C_{k+1}^1a^k+C_{k+1}^2a^{k-1}+\ldots+(-1)^kC_{k+1}^ka+(-1)^{k+1}.$$

Полагая $a=1, 2, \ldots, n$ и складывая результаты слева и справа, мы получим:

$$-n^{k+1}=-C_{k+1}^1S_k(n)+C_{k+1}^2S_{k-1}(n)+\ldots+$$
$$+(-1)^kC_{k+1}^kS_1(n)+(-1)^{k+1}S_0(n),\quad S_0(n)\equiv n.$$

Отсюда вытекает рекуррентное соотношение

$$S_k(n)=\frac{1}{k+1}\,[n^{k+1}+C_{k+1}^2S_{k-1}(n)-\ldots+$$
$$+(-1)^kC_{k+1}^kS_1(n)+(-1)^{k+1}S_0(n)], \tag{5}$$

из которого легко получить сумму $S_k(n)$, если известны суммы $S_1(n)$, $S_2(n)$, . . ., $S_{k-1}(n)$, причем по индукции следует, что $S_k(n)$ является многочленом степени $k+1$ без свободного члена.

Например, проверьте, что

$$S_1(n)=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n,$$

$$S_2(n)=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n,$$

$$S_3(n)=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2.$$

Определение. *Числами Бернулли* B_k называются коэффициенты при первой степени n в многочленах $S_k(n)$, $k=0, 1, 2, \ldots$

Так например, из формул для $S_1(n)$, $S_2(n)$, $S_3(n)$ следует, что

$$B_0=1,\ B_1=\frac{1}{2},\quad B_2=\frac{1}{6},\quad B_3=0. \tag{6}$$

Из определения и рекуррентного соотношения (5) вытекает простой способ вычисления чисел Бернулли. Так как $S_k(n)$ является многочленом без свободного члена, то, разделив обе части формулы (5) на n и

*) Подробно о суммах $S_q(n)$ см. в статье В. С. Абрамовича «Суммы одинаковых степеней натуральных чисел», «Квант», 1973, № 5.

полагая затем $n=0$, получим рекуррентную формулу для вычисления чисел B_k:

$$B_k=\frac{1}{k+1}\left[C_{k+1}^2B_{k-1}-C_{k+1}^3B_{k-2}+\ldots+(-1)^kC_{k+1}^kB_1-(-1)^kB_0\right],$$
$$B_0=1. \tag{7}$$

Проверьте с помощью этой формулы значения первых четырех чисел Бернулли (см. (6)).

Бернулли удалось доказать, что и другие коэффициенты многочлена $S_k(n)$ вычисляются с помощью чисел B_k. Коэффициент при n^2 оказывается равным $\frac{B_{k-1}}{k-1}C_k^2$, коэффициент при n^3 равен $\frac{B_{k-2}}{k-2}C_k^3$, наконец, коэффициент при степени n^k оказывается не зависящим от k и всегда равным $\frac{B_1}{1}C_k^k=\frac{1}{2}$. Особняком стоит коэффициент при старшей степени $k+1$, который сразу находится из формулы (5). Он равен $\frac{1}{k+1}$.

Таким образом, *формула Бернулли* имеет вид

$$S_k(n)=B_kn+\frac{B_{k-1}}{k-1}C_k^2n^2+\frac{B_{k-2}}{k-2}C_k^3n^3+\ldots+\frac{B_1}{1}C_k^kn^k+\frac{n^{k+1}}{k+1}. \tag{8}$$

В следующем параграфе мы покажем, что формула (8) на самом деле вдвое короче.

2. Числа Бернулли с нечетными номерами

Теорема. *Все числа Бернулли с нечетными номерами, кроме B_1, равны нулю: $B_{2m+1}=0$ при $m\geqslant1$.*

Для доказательства воспользуемся равенством (1); применим его к разности $(1+a)^{2m}-(1-a)^{2m}$:

$$(1+a)^{2m}-(1-a)^{2m}=2\left(C_{2m}^1a+C_{2m}^3a^3+C_{2m}^5a^5+\ldots+C_{2m}^{2m-1}a^{2m-1}\right).$$

Полагая здесь $a=1, 2, \ldots, n$ и складывая полученные результаты, слева получим:

$$(S_{2m}(n)+(n+1)^{2m}-1)-(S_{2m}(n)-n^{2m})=(n+1)^{2m}+n^{2m}-1.$$

Справа же получим выражение

$$2\left(C_{2m}^1S_1(n)+C_{2m}^3S_3(n)+\ldots+C_{2m}^{2m-1}S_{2m-1}(n)\right). \tag{9}$$

Итак, имеем

$$(n+1)^{2m}+n^{2m}-1=2\left(C_{2m}^1S_1(n)+C_{2m}^3S_3(n)+\ldots+C_{2m}^{2m-1}S_{2m-1}(n)\right).$$

Вычислим коэффициент при n^1 в выражениях, получившихся в правой и левой частях. В выражении, стоящем в левой части, этот коэффициент будет равен $2m$ (очевидно). Получить вид коэффициента при первой степени n в выражении, стоящем в правой части, немногим сложнее: для этого достаточно в формуле (9) заменить суммы $S_j(n)$ $(j=1, 3, \ldots, 2m-1)$ числами Бернулли с теми же номерами (это утверждение следует из самого определения чисел Бернулли). Значит, имеет место такое тождество:

$$C_{2m}^1B_1+C_{2m}^3B_3+C_{2m}^5B_5+\ldots+C_{2m}^{2m-1}B_{2m-1}=m.$$

Но так как $C_{2m}^1 = 2m$, а $B_1 = \frac{1}{2}$, то должно быть:

$$C_{2m}^3 B_3 + C_{2m}^5 B_5 + \ldots + C_{2m}^{2m-1} B_{2m-1} = 0. \qquad (10)$$

Полагая здесь последовательно $m = 2, 3, 4, \ldots$ и учитывая, что $C_n^k = 0$ при $k > n$, получим:

$$B_3 = B_5 = B_7 = \ldots = 0.$$

3. Связь с простыми числами

Христиан Штаудт (1798—1867), исследуя числа Бернулли, получил красивый и глубокий результат, раскрывающий арифметическую природу этих чисел. Пусть задано число B_k. Рассмотрим все простые числа p, не превосходящие $k+1$, и такие, что $p-1$ нацело делит k (то есть номер данного числа Бернулли). По всем таким p составим конечную сумму вида $\sum \frac{1}{p}$ — назовем ее суммой, соответствующей данному числу Бернулли B_k (рассмотрением как раз таких сумм и занимался Штаудт). Оказалось, что число B_k и соответствующая ему сумма $\sum \frac{1}{p}$ взаимно дополняют друг друга до целого числа. Итак, $B_k + \sum \frac{1}{p}$ — всегда число целое!

Приведем пример, позволяющий оценить важность этого результата Штаудта. Пусть нам известно, что B_6 таково, что $0 < B_6 < 1$. Мы хотим найти его точное значение; оказывается, что теперь это уже сделать легко.

Действительно, делителями 6 являются числа 1, 2, 3, 6. Увеличив их на единицу, получим числа 2, 3, 4, 7. Из них простыми являются числа 2, 3 и 7. Подсчитываем сумму $\sum \frac{1}{p}$:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{41}{42}.$$

Таким образом, по теореме Штаудта $\frac{41}{42} + B_6$ должно быть целым числом, но так как по условию $0 < B_6 < 1$, то единственным подходящим целым числом является 1. Поэтому

$$B_6 = 1 - \frac{41}{42} = \frac{1}{42}.$$

Упражнение 1. Найдите B_{14}, которое заключено между числами 1 и 2.

4. О теореме Куммера

В 1850 году великим немецким математиком Эрнстом Куммером (1810—1893) был получен важный результат, относящийся к проблеме существования решения в целых числах уравнения Ферма $x^n + y^n = z^n$, $n \geqslant 3$ — к проблеме Ферма. Хотя результат этот и не решает полностью проблемы, тем не менее он и по сей день остается одним из самых значительных, полученных в этом направлении. Этот результат оказывается тесно связанным с числами Бернулли.

Прежде, чем сформулировать теорему Куммера, введем следующее определение (предложенное Куммером). Пусть задано простое число $p \geqslant 3$. Назовем его *регулярным*, если ни один из числителей чисел Бернулли B_2, B_4, ..., B_{p-3} не делится на него нацело. Тогда теорема Куммера читается так: *уравнение Ферма $x^p + y^p = z^p$, где p — регулярное, не решается в целых числах x, y, z, отличных от* 0. Можно проверить, что простые числа 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... будут регулярными. Возникает вопрос: а не являются ли все простые числа регулярными? Оказывается, что нет. Однако первое нерегулярное простое число обнаруживается не так быстро. Это — двенадцатое по счету простое число 37. Удалось показать, что нерегулярных простых чисел бесконечно много. Что же касается регулярных простых чисел, то до сих пор неизвестно, является ли их число конечным или нет.

Упражнения

2. Покажите, что функция

$$f(x) = S_k(x) - \frac{x^k}{2}$$

является четной при нечетном k и нечетной при четном k.

3. С помощью теоремы Куммера проверьте справедливость великой теоремы Ферма для $p = 3, 5, 7, 11, 13, 17$.

4. Пользуясь теоремой Паскаля (3), найдите коэффициенты разложения

$$S_k(n-1) = a_0 C_n^1 + a_1 C_n^2 + \ldots + a_k C_n^{k+1}. \qquad (11)$$

Выведите отсюда явную формулу для чисел Бернулли (опираясь на эту формулу, Штаудт и доказал свою знаменитую теорему).

5. Пусть $S_k(n) = b_{0,k} n^{k+1} + b_{1,k} n^k + \ldots + b_{k,k} n$. Обозначим

$$S_k'(n) = (k+1) b_{0,k} n^k + k b_{1,k} n^{k-1} + \ldots + b_{k,k}.$$

Используя формулу (5) и метод математической индукции, докажите, что

$$S_k'(n) = k S_{k-1}(n) + B_k. \qquad (12)$$

6. Подумайте, как использовать соотношение (12) для определения коэффициентов многочлена $S_k(n)$, то есть для доказательства формулы Бернулли.

Первый учебник математики, напечатанный в России

Первым российским учебником математики была книга «Арифметика» Леонтия Филипповича Магницкого, изданная в 1703 г. в Москве. В течение полустолетия книга эта служила единственным учебником. По нему занимались в Московской Навигацкой школе и цифирных или арифметических школах будущие астрономы, геодезисты, ученые капитаны и адмиралы Российского флота. Среди них учившиеся у самого Л. Ф. Магницкого в Навигацкой школе исследователь Камчатки и Курильских островов С. И. Челюскин, геодезисты Ф. Ф. Лужин и И. М. Евреинов, составившие первые географические карты Камчатки, вице-адмирал — гидрограф и картограф, исследователь Каспийского моря, Чукотского полуострова и Охотского моря Ф. И. Соймонов, адмирал Н. Ф. Головин, генерал-адмирал М. М. Голицын, капитан-командор А. И. Чириков и многие другие.

Самоучкой занимался по «Арифметике» Л. Ф. Магницкого Михаил Васильевич Ломоносов. Он, так же как до него Л. Ф. Магницкий, учился в Славяно-греко-латинской академии, а в ней математику не преподавали.

М. В. Ломоносов называл «Арифметику» Л. Ф. Магницкого «вратами учености» и, по свидетельству некоторых биографов М. В. Ломоносова, даже выучил ее наизусть.

«Арифметика» Л. Ф. Магницкого содержит примерно 600 страниц текста. Из них более 40 страниц отдано предисловию. И это было естественно — поскольку книга представляет собой не только учебник, но и популярное введение в математику. Она объясняет, зачем нужна математика, какую роль она играет в жизни.

Талантливо написанная книга математика-педагога, самоучки, крестьянского сына Леонтия Магницкого обессмертила его имя.

В. Н. Березин

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

О силе шахматных фигур

Е. Я. Гик

Если вы умеете играть в шахматы, то наверняка знаете, что легкую фигуру (коня или слона) можно смело отдать за три пешки, а ферзя за две ладьи; конь и пара пешек компенсируют потерю ладьи и т. д. Конечно, истинная сила фигуры зависит от конкретной позиции: вы без труда приведете примеры, когда одна пешка матует вражеского короля, окруженного всей армией своих фигур. И все же ясно, что каждая фигура в шахматной игре имеет некоторую среднюю силу. Для сравнения сил фигур за единицу обычно принимают силу пешки, выражая через нее силы остальных фигур. В учебниках, как правило, предлагается такая шкала:

$$F_{\text{п}} = 1,\quad F_{\text{К}} = F_{\text{С}} = 3,\quad F_{\text{Л}} = 5,\quad F_{\Phi} = 9$$

(через F_x мы обозначаем силу фигуры x).

Эта шкала подтверждается многочисленной практикой и опытом шахматистов. Однако существуют и чисто математические пути определения силы шахматных фигур. Один из наиболее распространенных способов связан с подвижностью фигур. Рассмотрим для примера ходы короля (рис. 1). С каждого из угловых полей он может сделать 3 хода, с неугловых полей крайних вертикалей и горизонталей — по 5 ходов, наконец, с остальных полей доски король в состоянии переместиться на любое из 8 соседних полей. Суммируя, получаем число возможных ходов короля на шахматной доске, обозначим это число через $S_{\text{Кр}}$:

$$S_{\text{Кр}} = 3\cdot 4 + 5\cdot 24 + 8\cdot 36 = 420.$$

Из рисунков 2—6 находим числа S_x для других фигур:

$$S_{\Phi} = 21\cdot 28 + 23\cdot 20 + 25\cdot 12 + 27\cdot 4 = 1456,$$

$$S_{\text{Л}} = 14\cdot 64 = 896,$$

$$S_{\text{С}} = 7\cdot 28 + 9\cdot 20 + 11\cdot 12 + 13\cdot 4 = 560,$$

$$S_{\text{К}} = 2\cdot 4 + 3\cdot 8 + 4\cdot 20 + 6\cdot 16 + 8\cdot 16 = 336,$$

$$S_{\text{п}} = 2\cdot 10 + 3\cdot 32 + 4\cdot 6 = 140.$$

Если мы теперь разделим S_x — число возможных ходов фигуры x — на N_x — число полей, на которых эта фигура может стоять, то получим среднее число ходов фигуры с одного поля доски. Назовем это число P_x *подвижностью* фигуры x:

$$P_x = \frac{S_x}{N_x}. \qquad (*)$$

Очевидно, $N_x = 64$ для всех фигур, кроме пешки, а $N_{\text{п}} = 48$. По формуле (*) находим:

$$P_{\text{Кр}} = 6{,}5625;\ P_{\Phi} = 22{,}75;\ P_{\text{Л}} = 14;\ P_{\text{С}} = 8{,}75;\quad P_{\text{К}} = 5{,}25;\quad P_{\text{п}} = 2{,}5.$$

Будем считать, что сила фигуры прямо пропорциональна ее подвижности. Принимая, как и выше, силу пешки $F_{\text{п}}$ за единицу, силы остальных фигур выразим через нее по формуле

$$F_x = \frac{P_x}{P_{\text{п}}}.$$

В результате получится следующая шкала (значения округлены до

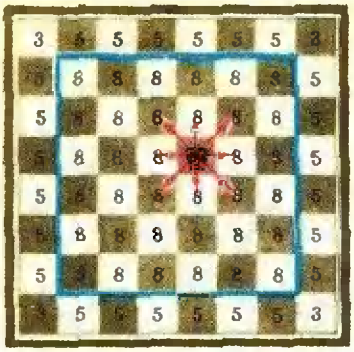


Рис. 1. Подвижность короля.

Рис. 2. Подвижность ферзя.

Рис. 3. Подвижность ладьи.

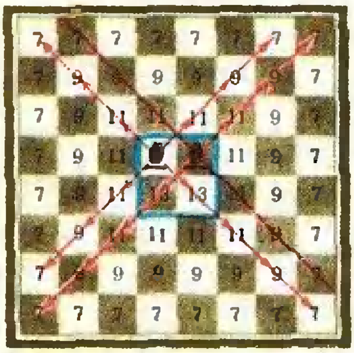


Рис. 4. Подвижность слона.

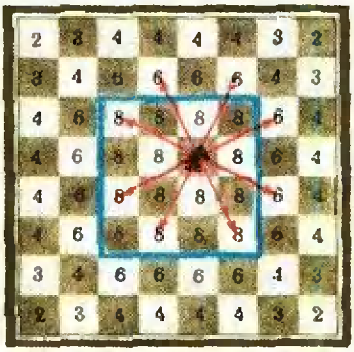


Рис. 5. Подвижность коня.

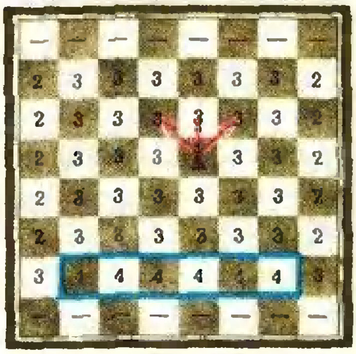


Рис. 6. Подвижность пешки.

десятых долей):

$$F_{\text{п}} = 1;\quad F_{\text{Кр}}' = 2{,}6;\quad F_{\text{Ф}} = 9{,}1;$$
$$F_{\text{Л}} = 5{,}6;\quad F_{\text{С}} = 3{,}5;\quad F_{\text{К}} = 2{,}1.$$

В вычислениях мы для простоты не учитывали возможность рокировки, а для пешки рассматривали также диагональные ходы, которые она совершает при взятии. На рисунках 1—6 выделены поля, с которых соответствующая фигура может сделать максимальное число ходов. Эти поля сосредоточены в центре, лишь ладья одинаково «сильна» на всех полях доски.

Король в полученной шкале получил очень низкую оценку, хотя на самом деле его «потеря» невозместима *). Однако с точки зрения подвижности найденная оценка вполне отвечает действительности. Наша шкала имеет и некоторые расхождения с практикой. Ее основной дефект заключается в слишком большом превосходстве дальнобойных фигур (ферзя, ладьи и слона) над конем. В шахматах действия дальнобойных фигур почти всегда ограничены другими фигурами. Мы могли бы учесть это обстоятельство, вводя поправочные коэффициенты, но сейчас нас интересует сама идея, и на деталях мы не останавливаемся.

Математический подход к оценке силы фигур позволяет рассматривать разнообразные обобщения. Представьте себе, что вы играете в шахматы привычными фигурами, но на необычной доске, например, размером 50 × 50. Исходя из одной интуиции, вам будет довольно сложно определить сравнительную силу фигур на этой доске. Например, ясно, что слон здесь сильнее коня, но вот насколько, сразу сказать трудно. Пользуясь введенным выше понятием подвижности, мы можем найти вполне разумные значения для силы фигур и на такой

*) При программировании на ЭВМ для силы короля обычно выбирают очень большое число, подчеркивая этим его исключительность.

доске. Аналогичным образом можно исследовать силу фигур на цилиндрической, сферической, пространственной и других шахматных «досках».

Другое обобщение состоит в изменении правил движения фигур. Шахматные композиторы, специализирующиеся в «фантастических шахматах», изобрели десятки так называемых «сказочных» фигур: канцлер, кентавр, ночной сверчок, всадник, жук, леопард, гиппопотам, лев, зебра, имитатор, жираф и другие. Канцлер может ходить как ладья и конь, кентавр — как конь и слон, всадник — дальнобойная фигура, совершающая непрерывные прыжки по маршруту обычного коня в одном направлении (например, a1 — b3 — c5 — d7 или a1 — c2 — — e3 —g4), лев ходит через поле в любом направлении и т. д. Наш способ позволяет без труда находить и силу сказочных фигур.

Упражнения

1. Найдите подвижность $P_x(n)$ каждой шахматной фигуры x на доске размера $n \times n$, пользуясь формулой (*).

2. Как меняется подвижность фигур при неограниченном увеличении размеров доски?

3. На обычной доске ладья по силе равна слону и коню ($14 = 8{,}75 + 5{,}25$). На какой еще доске это возможно? На доске какого размера одинаковую силу имеют король и слон?

4. Сколькими способами на доске размером $n \times n$ можно поставить двух ферзей, чтобы они не угрожали друг другу?

5. Сколькими способами можно поставить на доске $n \times n$ трех ферзей, чтобы они не угрожали друг другу?

6. Кто сильнее на бесконечной шахматной доске — ферзь или две ладьи?

7. Определите подвижность и силу кентавра, канцлера, всадника и льва.

8. Какую подвижность на бесконечной доске имеет конь типа (a, b), передвигающийся на a полей в одном направлении и на b полей — в перпендикулярном (обычный конь получается при $a = 2$, $b = 1$)?

Домино — пасьянс

28 косточек домино уложены в прямоугольник 7×8. Границы косточек не изображены. Требуется восстановить их.

2	2	3	0	0	4	4
2	5	4	4	0	1	1
6	1	5	4	4	0	0
3	2	6	6	3	3	5
1	5	5	6	4	3	0
1	1	5	2	6	0	0
3	2	5	1	2	2	6
6	4	3	6	3	5	1

6	6	0	6	6	0	0
4	5	2	6	6	5	1
4	4	5	5	4	3	3
0	5	1	4	1	3	2
2	5	2	6	1	1	1
3	1	5	3	4	2	2
3	2	6	0	0	0	2
5	3	3	4	0	1	4

Л. П. Мочалов

задачник кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 августа 1974 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М266, М267» или «... Ф278». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).
После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.
Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

Задачи

М266—М270; Ф278—Ф282

М266. Дан выпуклый n-угольник.

а) Докажите, что если для каждой тройки последовательных вершин n-угольника построить окружность, проходящую через эти три вершины, и из n полученных окружностей выбрать такую, у которой радиус наибольшей, то эта окружность содержит внутри себя весь данный n-угольник;

б) Докажите, что если для каждой тройки последовательных сторон n-угольника построить окружность, касающуюся этих сторон, и из n полученных окружностей выбрать такую, у которой радиус наименьший, то она будет содержаться внутри данного n-угольника.

А. В. Карзанов

М267. В последовательности троек целых чисел (2, 3, 5) (6, 15, 10)... каждая тройка получается из предыдущей таким образом: первое число множится на второе, второе — на третье, а третье — на первое, и полученные произведения дают новую тройку.

Докажите, что ни одно из чисел, получаемых таким образом, не будет степенью целого числа: квадратом, кубом и т. д.

Ф. А. Бартенев

М268. В углу шахматной доски стоит фигура. Первый игрок может ходить ею два раза подряд как обычным конем (на два поля в одном направлении и на одно — в перпендикулярном), а второй — один раз как конем с удлиненным ходом (на три поля в одном направлении и на одно — в перпендикулярном). Так они ходят по очереди. Первый стремится к тому, чтобы поставить фигуру в противоположный угол, а второй — ему помешать. Кто из них выигрывает (размеры доски — $n \times n$, где $n \geqslant 4$)?

П. Кацыло, ученик 10 класса (Москва)

М269. Обозначим через $T_k(n)$ сумму произведений по k чисел от 1 до n. Например,

$$T_2(4) = 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 1\cdot 4 + 2\cdot 4 + 3\cdot 4 = 35.$$

а) Найдите общую формулу для $T_2(n)$ и $T_3(n)$.

б) Докажите, что $T_k(n)$ выражается многочленом от n степени $2k$ (для каждого натурального $k \geqslant 2$).

в) Укажите метод нахождения многочленов $T_k(n)$ ($k = 2, 3, 4, 5, \ldots$) и примените его для отыскания многочленов $T_4(n)$ и $T_5(n)$.

Э. А. Ясиновый

М270. Пусть AB и CD — две хорды окружности, а точки K и H построены так, что все четыре угла KAB, KCD, HBA и HDC — прямые. Докажите, что прямая KH проходит через центр окружности и через точку пересечения прямых AD и BC.

И. Ф. Шарыгин, А. И. Яновский

Ф278. Спутник Земли движется по круговой орбите на высоте $h = 760$ *км* над поверхностью Земли. Его хотят перевести на эллиптическую орбиту с максимальным удалением от поверхности Земли $H = 40\,000$ *км* и минимальным расстоянием от поверхности $h = 760$ *км*. Насколько для этого необходимо изменить скорость спутника? Каким будет период обращения спутника по новой, эллиптической, орбите?

А. Боржиевский, ученик 10 класса (Оршинская с. ш., Хмельницкая обл.)

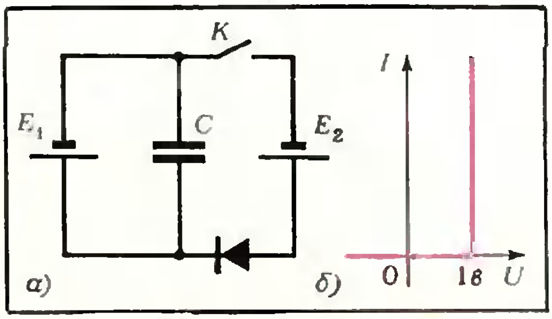


Рис. 1.

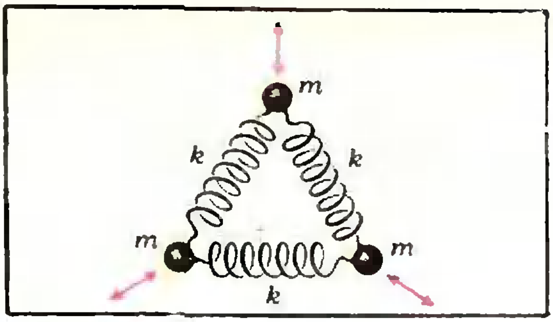


Рис. 2.

Ф279. Цилиндр, изготовленный из нетеплопроводящего материала, разделен нетеплопроводящей перегородкой на две части, объемы которых V_1 и V_2. В первой части находится газ при температуре T_1 под давлением p_1. Во второй — такой же газ, но при температуре T_2 и под давлением p_2. Какая температура установится в цилиндре, если убрать перегородку?

Ф280. Источник света находится на расстоянии $3a$ от линзы с фокусным расстоянием a. Во сколько раз изменится средняя освещенность пятна на экране, который находится на расстоянии $1{,}5\,a$ от линзы, если между источником и линзой поместить плоскопараллельную стеклянную пластинку толщины $0{,}5\,a$? Показатель преломления стекла равен n.

Ф281. В схеме, изображенной на рисунке 1, *а*, первоначально ключ K разомкнут. Э. д. с. первой батареи $E_1 = 1$ *в*, а ее внутреннее сопротивление $r_1 = 0{,}2$ *ом*. Э. д. с. второй батареи $E_2 = 2$ *в*, внутреннее сопротивление $r_2 = 0{,}4$ *ом*. Емкость конденсатора $C = 10$ *мкф*. На какую величину изменится заряд конденсатора при замыкании ключа, если диод имеет вольтамперную характеристику, показанную на рисунке 1, *б*?

Ф282. Найти частоту «симметричных» колебаний системы, показанной на рисунке 2. Массы всех шаров m, коэффициенты упругости пружинок k.

Г. Л. Коткин

Решения задач

М222—М230; Ф233—Ф237

М222. *Докажите, что у каждого выпуклого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом сторон.*

Предположим, что любые две грани некоторого выпуклого многогранника имеют различное число сторон. Рассмотрим ту грань Г, у которой число сторон наибольшее; пусть оно равно m. Следовательно, число сторон у любой из остальных граней строго меньше m. Значит, и количество оставшихся граней строго меньше m (ведь даже если бы существовали 1-угольники и 2-угольники, мы смогли бы набрать всего лишь $m-1$ разных многоугольников). С другой стороны, к грани Г примыкают ровно m других граней многогранника (к каждой стороне — по одной). Мы получили противоречие.

Стало быть, какие-то две грани обязательно имеют р а в н о е число сторон.

Приведенное решение почти дословно повторяет решение следующей, довольно известной задачи (на «принцип Дирихле» *)).

В кинотеатре «Октябрь» на последнем сеансе обязательно найдутся два человека, число знакомых у которых одинаково.

Однако наша задача геометрическая п о с у щ е с т в у — в ее решении неявно используется условие выпуклости многогранника — там, где утверждается, что к грани, имеющей m сторон, примыкают m граней. Это значит, что к каждому ребру грани многогранника примыкает ровно одна грань, и к разным ребрам этой грани примыкают разные грани. Однако это неверно для невыпуклых многогранников — на рисунке 1 к ребрам a, b примыкает одна и та же грань α, так что в подсчете граней она учитывается дважды, и приведенное выше рассуждение становится неправильным.

*) См. статью А. И. О р л о в а «Принцип Дирихле», «Квант», 1971, № 7.

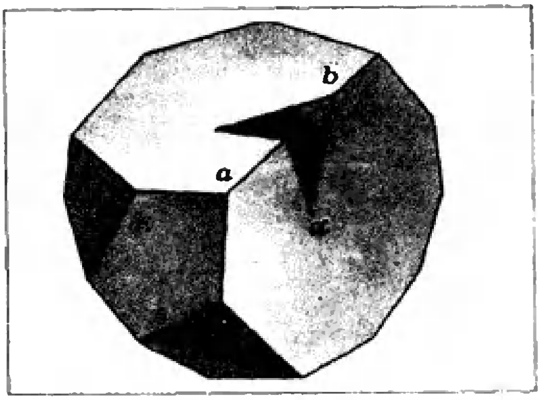


Рис. 1.

Утверждение задачи тем не менее сохраняется и для невыпуклых многогранников (без «сквозных дыр») — его доказательство основано на формуле Эйлера *)

$$В - Р + Г = 2;$$

оно довольно громоздко и не столь изящно, чтобы приводить его здесь.

Г. А. Гальперин

М223. *Натуральное число называется совершенным, если оно равно сумме всех своих делителей, кроме самого этого числа. (Например, число 28 — совершенное: $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.) Докажите, что совершенное число не может быть полным квадратом.*

Пусть $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_m^{r_m}$, где $p_1, \dots, p_m$ — различные простые, $r_1, \dots, r_m$ — натуральные числа (согласно основной теореме арифметики, каждое целое число $n > 1$ представляется в таком виде единственным образом).

Делители числа n — это числа вида

$$p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m},$$

где $0 \leqslant k_1 \leqslant r_1, \dots, 0 \leqslant k_m \leqslant r_m$. Поэтому сумма всех делителей числа n (включая 1 и n) равна произведению

$$S = (1 + p_1 + \dots + p_1^{r_1}) \dots (1 + p_m + \dots + p_m^{r_m}).$$

Так как n — совершенное число, то S должно быть равно $2n$, то есть быть числом четным. Но если n — квадрат целого числа, то все показатели $r_1, \dots, r_m$ — четные числа, поэтому каждая круглая скобка в произведении S

$$\underbrace{(1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{r_i})}_{1 + r_i \text{ слагаемых}}$$

есть число нечетное, следовательно, и S нечетное.

Получили противоречие, значит, совершенное число не может быть полным квадратом.

Некоторые читатели свои решения выводят из формулы $2^{p-1}(2^p - 1)$ для ч е т -

*) См. статью А. П. С а в и н а «Карты и раскраски», «Квант», 1972, № 4.

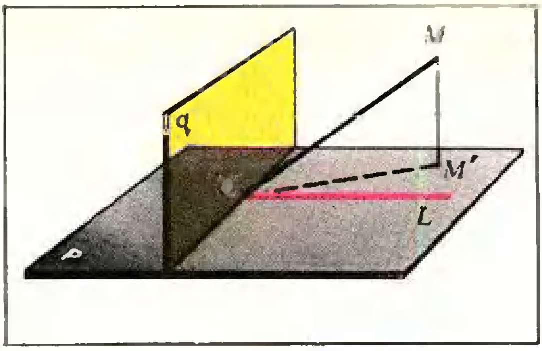


Рис. 2.

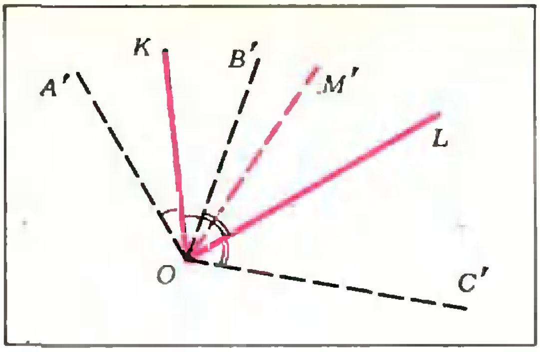


Рис. 3.

ных совершенных чисел *). Такие решения неполны: ведь пока никто не доказал, что не существует нечетных совершенных чисел.

М224. *У трехгранного угла проведены биссектрисы плоских углов. Докажите, что попарные углы между тремя этими биссектрисами либо все тупые, либо все острые, либо все прямые.*

Самое простое решение этой задачи основано на понятии скалярного произведения векторов. Напомним, что скалярным произведением векторов **a** и **b** называется число

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\varphi,$$

где $|\mathbf{a}|$ и $|\mathbf{b}|$ — длины векторов **a** и **b**, φ — угол между ними. Таким образом, угол между **a** и **b** острый, прямой или тупой, если соответственно $\mathbf{ab} > 0$, $\mathbf{ab} = 0$ и $\mathbf{ab} < 0$. Конечно, для любых векторов $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$. Нам потребуется еще дистрибутивность (распределительное свойство) скалярного произведения: для любых трех векторов **a**, **b** и **c**

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$$

(это свойство подробно обсуждалось в «Кванте», 1972, № 6).

Пусть дан трехгранный угол. Направим по его ребрам векторы единичной длины **a**, **b** и **c**. Тогда векторы $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{c}+\mathbf{a}$ идут по биссектрисам плоских углов. Скалярные произведения

$$\left.\begin{array}{l}(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \\ (\mathbf{b}+\mathbf{c})(\mathbf{c}+\mathbf{a}) = \\ (\mathbf{c}+\mathbf{a})(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \end{array}\right\} 1 + \mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ca}$$

одинаковы — таким образом, углы между биссектрисами будут одновременно острыми, прямыми или тупыми. Такое решение предлагал и автор задачи Э. Г. Готман.

Для тех, кто незнаком с векторами, приведем более наглядное, чисто геометрическое объяснение. Отметим сначала такой факт

*) См. «Квант», 1971, № 8, с. 2.

Если OL — луч, лежащий в плоскости p, OM — луч, не перпендикулярный этой плоскости, OM' — проекция луча OM на плоскость p, то угол LOM острый, прямой или тупой в зависимости от того, острый, прямой или тупой угол LOM'; действительно, если через точку O провести плоскость q перпендикулярно лучу OL, то точки M и M' всегда лежат по одну и ту же сторону от плоскости q (ведь $MM' \perp p$ и $q \perp p$, см. рис. 2). Пусть OA, OB, OC — ребра трехгранного угла; OK, OL, OM — биссектрисы углов AOB, BOC, COA; p — плоскость, проходящая через OK и OL, OA', OB', OC', OM' — проекции лучей OA, OB, OC, OM на плоскость p.

Лучи OA и OC симметричны лучу OB относительно прямых OK и OL соответственно. Поэтому OA' и OC' симметричны OB' относительно тех же прямых, причем все три луча OA, OB и OC составляют одинаковые углы с плоскостью p.

Рассмотрим сначала ситуацию в плоскости p — для проекций. Если $\angle KOL < 90°$ (рис. 3), то $\angle A'OC' = 2\angle KOL < 180°$ содержит внутри себя лучи OK, OL, ясно, что углы, которые составляют прямые OK и OL с биссектрисой OM' угла $A'O'C'$ — острые. Если $\angle KOL > 90°$ (рис. 4), то $\angle A'OB' + \angle B'OC' = 2\angle KOL > 180°$, поэтому биссектриса OM' угла $A'OC'$ составляет с OK и с OL тупые углы. (Случай $\angle KOL = 90°$ рассмотрите сами.)

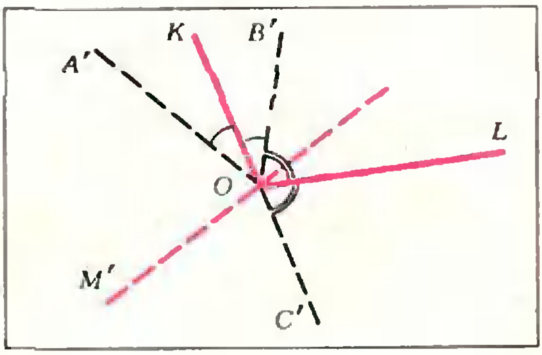


Рис. 4.

Из факта, упомянутого выше, теперь сразу следует, что углы LOM и KOM — острые, тупые или прямые, если таков угол KOL.

Н. Б. Васильев

М225. *Грани кубика занумерованы числами 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, что сумма номеров на противоположных гранях равна 7. Кубик катят из левого нижнего в правый верхний угол шахматной доски размером 50 × 50 клеток (каждая клетка доски равна грани кубика) так, что он каждый раз переваливается через свое ребро на соседнюю клетку; при этом разрешается двигаться только вправо или вверх. На каждой из клеток по пути кубика пишется номер грани, которая опиралась на эту клетку. Какое наибольшее значение может иметь сумма всех 99 выписанных чисел? Какое наименьшее?*

Пусть мы каким-то образом прокатили кубик из левого нижнего угла доски в правый верхний. Будем считать, что после каждого перекатывания через ребро на клетке доски отпечатывается число, записанное на той грани кубика, которая опиралась на эту клетку.

Отпечатавшиеся числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_{99}$ выпишем подряд в строчку, а их сумму обозначим через Σ:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{99} = \Sigma.$$

Если числа на всех гранях кубика заменить средним числом 3,5, то сумма отпечатавшихся чисел будет равна

$$\Sigma_{\text{ср}} = 3{,}5 \cdot 99 = 346{,}5.$$

Нам необходимо определить наибольшее и наименьшее значения Σ. Оценим для этого величину $|\Sigma - \Sigma_{\text{ср}}|$.

Самое важное свойство чисел в последовательности $\alpha_1, \ldots, \alpha_{99}$ заключается в следующем. Пусть в этой последовательности число α встретилось два раза подряд (α — одно из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6).

Так как числа α и $(7-\alpha)$ находятся на противоположных гранях кубика, то нетрудно проверить, что между двумя встречающимися подряд числами α обязательно содержится число $7-\alpha$. Поэтому для каждого $1 \leqslant \alpha \leqslant 3$ возможны три ситуации:

1) либо чисел α в последовательности столько же, сколько и чисел $7-\alpha$;

2) либо чисел α ровно на одно больше, чем чисел $7-\alpha$;

3) либо чисел α ровно на одно меньше, чем чисел $7-\alpha$.

В случае 1) от замены всех чисел α и $7-\alpha$ на 3,5 их вклад в Σ не изменится. В случаях 2) и 3) от замены всех чисел α и $7-\alpha$ на 3,5 их вклад в Σ увеличится или уменьшится на $(3{,}5-\alpha)$. В результате вся сумма увеличится или уменьшится самое большее на

$$(3{,}5-1)+(3{,}5-2)+(3{,}5-3)=4{,}5.$$

Таким образом,

$$342 = \Sigma_{\text{ср}} - 4{,}5 \leqslant \Sigma \leqslant \Sigma_{\text{ср}} + 4{,}5 = 351.$$

Значения $\Sigma_{\max} = 351$ и $\Sigma_{\min} = 342$ действительно достигаются, если катить кубик так, как это показано на рисунках 5 и 6.

Г. А. Гальперин

М226. *В трех вершинах квадрата находятся три кузнечика. Они играют в чехарду. При этом, если кузнечик A прыгает через кузнечика B, то после прыжка он оказывается от B на том же расстоянии (но, естественно, по другую сторону и на той же прямой; рис. 7). Может ли после нескольких прыжков один из кузнечиков попасть в четвертую вершину исходного квадрата?*

Докажем, что попасть в четвертую вершину ни один из кузнечиков не может.

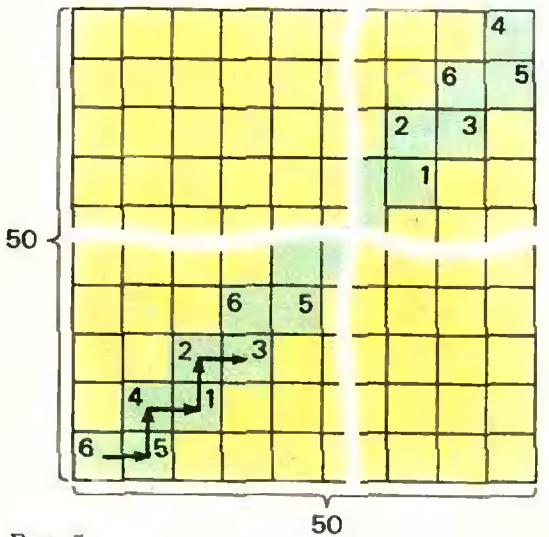


Рис. 5.

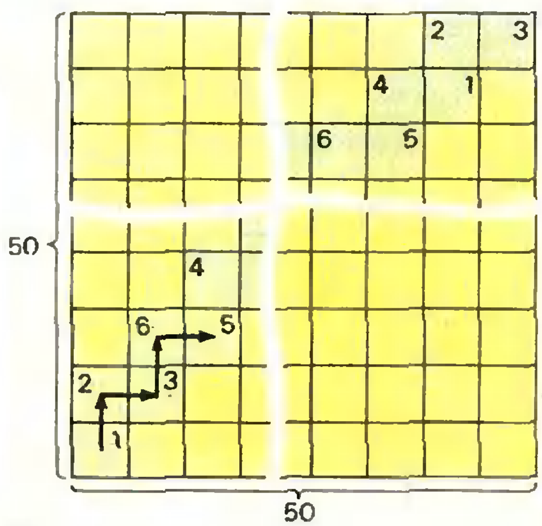


Рис. 6.

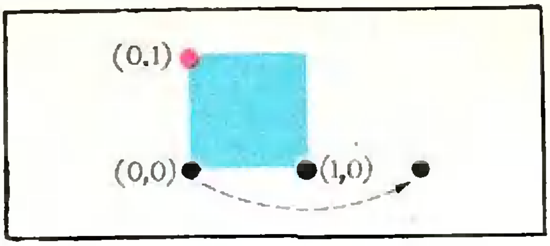


Рис. 7.

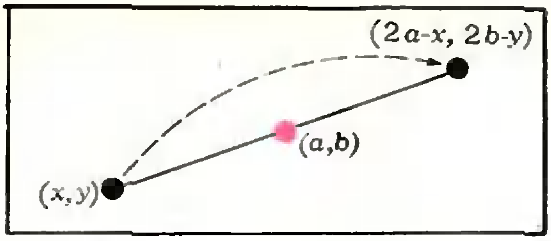


Рис. 8.

Введем координаты на плоскости так, чтобы три точки, в которых находятся кузнечики в самом начале, получили координаты: (0, 0), (0, 1) и (1, 0). Если кузнечик сидит в точке (x, y) и прыгает через кузнечика (a, b), то он оказывается в точке $(2a-x, 2b-y)$ (рис. 8). Отсюда видно, что при прыжках четность обеих координат у каждого кузнечика сохраняется. Поэтому в те точки, у которых обе координаты нечетны,— в частности, в точку (1, 1) — ни один из кузнечиков попасть не может.

Это решение можно о б ъ я с н и т ь и без координат. На рисунке 9 изображено множество точек: синих, красных и черных. (Этими цветами мы пометили кузнечиков, чтобы отличать их друг от друга). Нетрудно проверить, что *при симметрии относительно* любой своей точки это множество точек переходит в себя, причем точка каждого цвета переходит в точку того же цвета. Отсюда следует, что каждый кузнечик может попасть т о л ь к о в точку своего цвета.

Докажите, что каждый кузнечик после нескольких прыжков может оказаться в л ю б о й точке своего цвета. Попробуйте также ответить на более трудный вопрос: могут ли два кузнечика оказаться одновременно в л ю б ы х д в у х з а д а н н ы х точках соответствующего цвета? в какие тройки точек могут попасть одновременно три кузнечика?

На вопрос этот существует простой и красивый ответ, но мы не будем лишать читателей удовольствия найти его самостоятельно, а вернемся к нему в одном из следующих номеров журнала.

М227. *На каждой стороне параллелограмма взято по точке. Площадь четырехугольника с вершинами в этих точках равна половине площади параллелограмма. Докажите, что хотя бы одна из диагоналей четырехугольника параллельна одной из сторон параллелограмма.*

Очевидно, что если хотя бы одна из диагоналей четырехугольника $KLMN$ (рис. 10) параллельна стороне параллелограмма $ABCD$, то площадь четырехугольника s равна половине площади параллелограмма S.

Предположим теперь, что диагональ LN не параллельна AD. Зафиксируем положения точек L, M и N и посмотрим, как меняется площадь s в зависимости от положения точки K на стороне BC. Поскольку площадь треугольника LMN не меняется, а площадь треугольника KLN с фиксированным основанием LN пропорциональна расстоянию от точки K до прямой LN, то ясно, что при движении точки K от B к C площадь четырехугольника $KLMN$ будет меняться монотонно: возрастать, если $LC > BN$, и убывать, если $LC < BN$. Нам известно, что если $KM \parallel AB$, то площадь s равна половине S; но так как величина s меняется монотонно, то значит, при всех других положениях точки K площадь s будет или больше, или меньше $S/2$.

Таким образом, $s = S/2$ только тогда, когда либо $LN \parallel AD$, либо $KM \parallel AB$, что *и требовалось доказать.*

Можно было бы обойтись и без соображений монотонности (впрочем, весьма поучительных), а просто выразить отношение площадей s/S через длины отрезков $|BC| = |AD| = a$, $|AB| = |CD| = b$, $|AM| = x_1$,

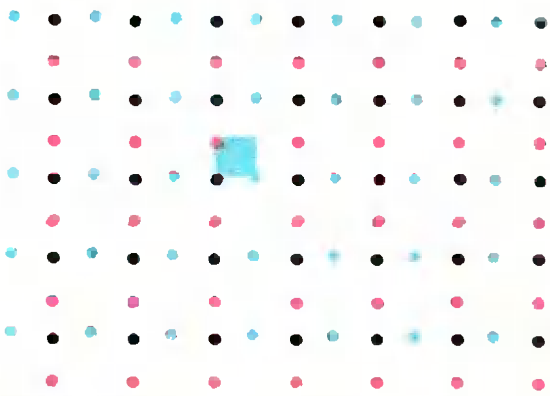


Рис. 9.

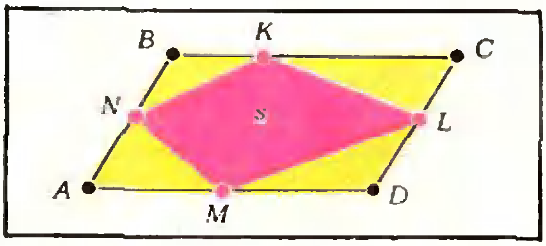


Рис. 10.

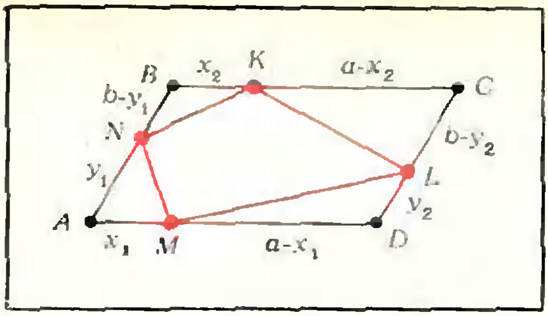


Рис. 11.

$|BK| = x_2$, $|AN| = y_1$, $|DL| = y_2$ (рис. 11):

$$\frac{s}{S} = 1 - \frac{x_1 y_1 + x_2 (b - y_1)}{2ab} -$$

$$- \frac{(a - x_2)(b - y_2) + (a - x_1)\, y_2}{2ab} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)}{2ab}.$$

Отсюда видно, что $\frac{s}{S} = \frac{1}{2}$ только если $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$.

М228. *Лист клетчатой бумаги размером $n \times n$ клеток раскрасили в n цветов (каждую клетку закрасили в один из цветов или не закрасили вообще). Правильной называется раскраска, при которой в каждой строке и в каждом столбце нет двух клеток одного цвета. Всегда ли можно «докрасить» весь лист правильным образом, если первоначально были правильно закрашены*

а) n^2-1 *клетка* (рис. 12);

б) n^2-2 *клетки*;

в) n *клеток*?

а) Ответ: *можно*. Докажем даже более общее утверждение: *если правильно закрашены все клетки квадрата $n \times n$, кроме некоторых клеток одной строки (или одного столбца), то квадрат можно правильно докрасить.*

Пусть, например, недокрашены некоторые клетки первой строки. Покрасим каждую такую клетку в тот цвет, который еще не встречается в ее столбце. Нужно доказать, что в первой строке при этом не может оказаться двух клеток одинакового, скажем, красного, цвета. Для этого рассмотрим прямоугольник $(n-1) \times n$, полученный из квадрата вычеркиванием первой строки. Поскольку раскраска была правильной, то в каждой из $n-1$ строк прямоугольника красный цвет встречался один раз,— следовательно, всего красных клеток в нем $n-1$, а в каждом из n столбцов прямоугольника красная клетка встречалась не более одного раза,— следовательно, красная клетка не встречалась т о л ь к о в о д н о м из столбцов прямоугольника. Следовательно, лишь в одной клетке первой строки квадрата может появиться этот цвет.

б) и в) Ответ: *вообще говоря, нельзя*. Примеры приведены на рисунках 13 и 14 (здесь $n = 6$; аналогичные примеры можно, конечно, привести и для любого n). Тот же ответ: *нельзя* верен, конечно, и для промежуточного между n и n^2-2 числа закрашенных клеток (в качестве примера можно взять «промежуточный» между 13 и 14 рисунок). С другой стороны, кажется совершенно очевидным, что если в квадрате размером $n \times n$ правильно закрашено менее n клеток, то его можно правильно докрасить, хотя аккуратное доказательство этого факта написать непросто. Еще более интересная задача — найти какие-либо простые условия на раскраску части клеток квадрата $n \times n$, необходимые и достаточные для докрашиваемости, в духе «теоремы о различных представителях» (см. гл. 5 книги М. Холла «Комбинаторика», решение задачи М15 в «Кванте» № 11, 1970 г. или статью М. И. Башмакова «Паросочетания и транспортные сети» в № 4 за тот же год).

Н. Б. Васильев

М229. *В центре квадрата находится полицейский, а в одной из вершин — гангстер. Полицейский может бегать по всему квадрату, а гангстер — только по его сторонам. Известно, что максимальная скорость по-*

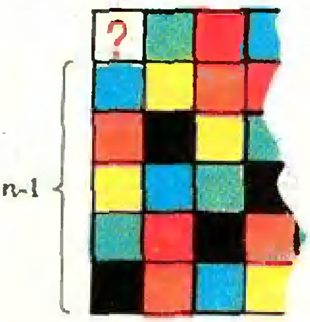


Рис. 12.

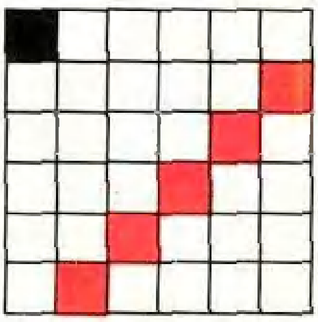


Рис. 13.

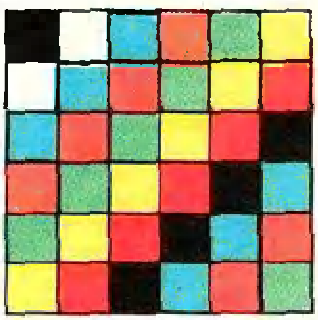


Рис. 14.

лицейского равна u, а гангстера — v. Цель полицейского — оказаться с гангстером на одной стороне квадрата. Докажите, что

а) *если* $\frac{u}{v} > \frac{1}{3}$, *то он может добиться своей цели;*

б) *если* $\frac{u}{v} < \frac{1}{3}$, *то гангстер может помешать ему это сделать.*

В условии задачи ничего не говорится о том, что произойдет с полицейским и гангстером в случае, если $\frac{u}{v} = \frac{1}{3}$. В приводящемся здесь решении разбирается и этот вопрос.

Введем систему координат с началом в центре исходного квадрата $ABCD$ и осями, параллельными его сторонам. Положим сторону квадрата $ABCD$ равной 1 и будем считать, что максимальная скорость гангстера $v = 1$ (нам ведь важно лишь отношение u/v). Точки, в которых находятся полицейский и гангстер, обозначим через П ($x_П$, $y_П$) и Г ($x_Г$, $y_Г$) соответственно.

а) Пусть $u > \frac{1}{3}$. Докажем, что тогда полицейский достигнет своей цели (то есть окажется с гангстером на одной стороне квадрата; будем говорить, что в этом случае он д о г о н я е т (или л о в и т гангстера).

Обозначим через Г′ точку с координатами $\left(\frac{1}{3}x_Г, \frac{1}{3}y_Г\right)$; очевидно, что если точка Г движется по контуру квадрата $ABCD$ с максимальной скоростью $v = 1$, то Г′ движется по контуру подобного ему квадрата $A'B'C'D'$ (рис. 15) с максимальной скоростью $v_{Г'} = \frac{1}{3}$.

Полицейский будет л о в и т ь гангстера в несколько этапов.

Первый этап. Полицейский догоняет Г′. Это всегда можно сделать, так как $u > v_{Г'}$.

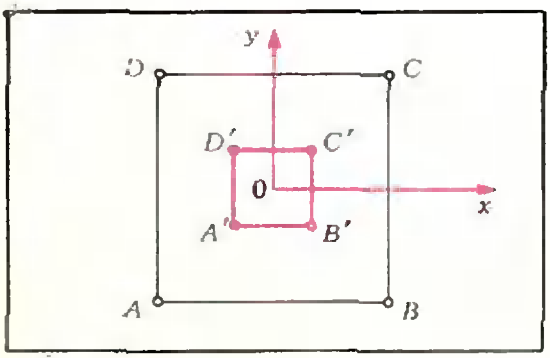


Рис. 15.

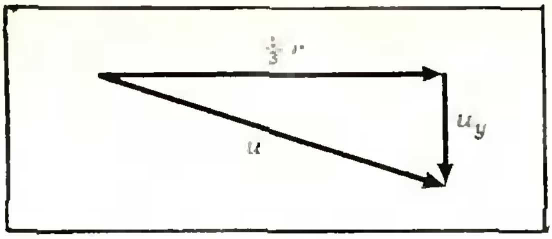


Рис. 16.

Первый этап считается законченным, когда точки П и Г′ совпадают.

Второй этап. Можно считать без ограничения общности, что к концу первого этапа точка Г окажется на стороне AB; тогда $x_П = \frac{1}{3}x_Г$.

На протяжении всего второго этапа полицейский должен двигаться таким образом, чтобы все время выполнялось равенство $x_П = \frac{1}{3}x_Г$; понятно, что для этого необходимо и достаточно, чтобы то же соотношение все время имело место для горизонтальных составляющих скоростей полицейского и гангстера. Так как $u > \frac{1}{3}v$, то по оси Oy полицейский может развивать любую скорость, не превосходящую $\sqrt{u^2 - \left(\frac{1}{3}v\right)^2_1}$ (рис. 16). Потребуем еще, чтобы на втором этапе полицейский двигался к стороне AB с максимальной по оси Oy скоростью. Возможны два случая:

1) Г остается все время на AB. Тогда П через некоторое время достигнет AB, и следовательно, гангстер будет «пойман»; задача решена.

2) В какой-то момент Г уйдет со стороны AB. Как только Г достигнет границы AB (будем считать, точки B) начинается

Третий этап. К началу этого этапа точки Г и B совпадают, а точка П находится от каждой из сторон AB и BC на расстоянии, не большем $\frac{1}{3}$. На третьем этапе полицейский д о л ж е н с максимальной скоростью *приближаться по перпендикуляру* к той стороне, на которой находится гангстер (если Г = B, то безразлично, к какой именно,— к стороне AB или же к стороне BC).

Чтобы добежать из точки B до точки A или до точки C, гангстеру понадобится единица времени, а полицейскому, чтобы достигнуть соответствующей стороны (AB или BC), понадобится строго меньше единицы времени. Следовательно, полицейский «поймает» гангстера на одной из сторон AB или BC. Тем самым случай а) полностью разобран.

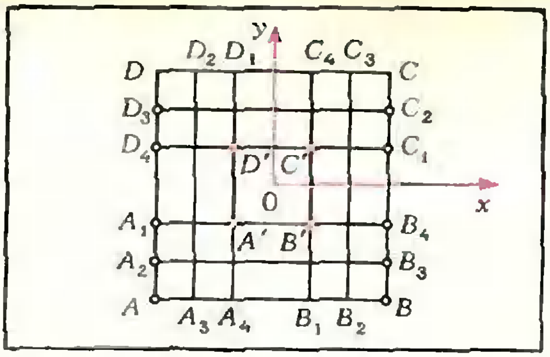


Рис. 17.

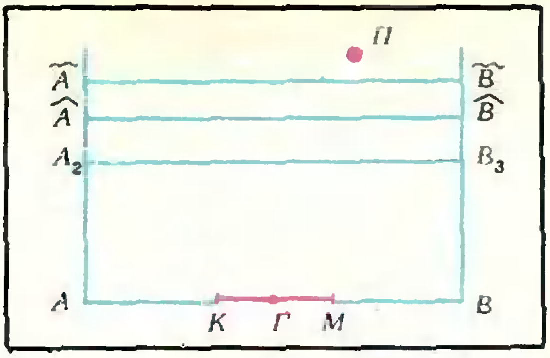


Рис. 18.

б) Пусть теперь $u<\frac{1}{3}$. Покажем, что в этом случае гангстер может выбрать такую *стратегию*, при которой полицейский не сумеет его «догнать».

Понятно, что если $u=\frac{1}{3}$ (напомним, что $v=1$), то гангстеру будет труднее «убежать» от полицейского. Посмотрим, что будет в этом, самом неблагоприятном для гангстера случае.

В центре квадрата $ABCD$ построим квадрат $A'B'C'D'$, подобный исходному с коэффициентом подобия $k={}^1/_3$; проведем прямые A_2B_3, A_1B_4, D_4C_1, D_3C_2, параллельные стороне AB, и прямые A_3D_2, A_4D_1, B_1C_4, B_2C_3, параллельные BC, так, чтобы $AA_3=A_3A_4=AA_2=A_2A_1=B_1B_2=B_2B=D_4D_3=D_3D$ (рис. 17).

Пусть в самом начале гангстер Г находится в середине стороны AB, а полицейский П — над прямой A_2B_3. Проведем две вспомогательные прямые $\hat{A}\hat{B}$ и $\tilde{A}\tilde{B}$, параллельные AB, так, чтобы полицейский П оказался над прямой $\tilde{A}\tilde{B}$ (рис. 18).

Покажем, что мы всегда можем выбрать некоторый отрезок KM так, чтобы он содержал середину стороны AB и чтобы из любой его точки ганстер Г успел бы добежать до любой из вершин A или B раньше, чем полицейский П успеет добежать от $\hat{A}\hat{B}$ до AB. В самом деле, расстояние от $\hat{A}\hat{B}$ до AB больше ${}^1/_6$; следовательно, П понадобится больше ${}^1/_2$ единицы времени для того, чтобы добежать от $\hat{A}\hat{B}$ до AB; значит, в качестве отрезка KM мы можем выбрать, например, отрезок, симметричный относительно середины стороны AB, с длиной, строго меньшей

$$2\left(3|A\hat{A}|-\frac{1}{2}\right).$$

Опишем теперь *стратегию* гангстера Г. Пока полицейский П находится выше прямой $\tilde{A}\tilde{B}$, гангстер остается на месте — в середине AB. Рано или поздно полицейский достигнет $\tilde{A}\tilde{B}$ (иначе он никогда не поймает гангстера); при этом возможны две ситуации:

(1) либо $x_П\neq\frac{1}{3}x_Г$,

(2) либо $x_П=\frac{1}{3}x_Г$.

Если имеет место случай (2), то Г начинает бегать с максимальной скоростью по отрезку KM вправо — влево. Если при этом $x_П=\frac{1}{3}x_Г$ все время, то горизонтальная составляющая скорости полицейского должна быть равна $\frac{1}{3}$ горизонтальной составляющей скорости гангстера; а так как последняя равна 1, то, следовательно, горизонтальная составляющая скорости П должна быть равна $\frac{1}{3}$, то есть u — максимальной скорости полицейского. Но, значит, вертикальная составляющая скорости П равна нулю, и поэтому полицейский все время будет находиться на $\tilde{A}\tilde{B}$ и никогда не поймает Г. Поэтому случай (2) все время быть не может (*так как такая стратегия для полицейского заведомо ошибочна*), полицейский сойдет с $\tilde{A}\tilde{B}$ и при этом $x_П\neq{}^1/_3\,x_Г$.

Будем считать, что гангстер замечает то, что полицейский сошел с прямой $\tilde{A}\tilde{B}$, достаточно быстро, например, еще до того, как полицейский достиг прямой $\hat{A}\hat{B}$.

Итак, сейчас у нас $x_П\neq\frac{1}{3}x_Г$, П — выше прямой $\hat{A}\hat{B}$, Г — на отрезке KM.

Дальнейшее поведение Г должно быть таково. Предположим, без ограничения общности, что $x_П<\frac{1}{3}x_Г$; тогда Г с максимальной скоростью движется вправо к точке B (или же если $x_П > \frac{1}{3} x_Г$, то он должен двигаться влево — к точке A). В силу выбора отрезка KM, полицейский не успеет добежать до прямой AB за то время, которое потребуется гангстеру, чтобы достичь точки B; значит, *П не сможет поймать* Г на стороне AB. Далее, поскольку мы предположили, что в «начальный» момент $x_П < \frac{1}{3} x_Г$ и Г бежит вправо со скоростью $3u$, то неравенство $x_П < \frac{1}{3} x_Г$ будет иметь место все время. Поэтому, когда Г достигнет точки B, то П будет находиться левее прямой B_1C_4 (рис. 19).

Теперь Г бежит с максимальной скоростью по стороне BC к ее середине. Чтобы добежать до середины, Г требуется $^1/_2$ единицы времени; за это время П пройдет путь длины не более чем $^1/_6$, и следовательно, не успеет достигнуть прямой B_2C_3.

Итак, мы пришли к уже рассмотренной конфигурации: Г — в середине стороны BC, а П — левее прямой B_2C_3. При этом точка Г из середины стороны AB переместилась в середину стороны BC; значит, прошла по крайней мере 1 единица времени. Дальнейшее поведение Г аналогично описанному выше. Совершенно очевидно, что при такой стратегии гангстера полицейский не «поймает» его ни за какое конечное время.

Таким образом, мы знаем, каково должно *быть поведение гангстера в самом «плохом»* случае: $u = \frac{1}{3}$; понятно, что при $u < \frac{1}{3}$ указанная для него стратегия будет тем более верной.

Г. А. Гальперин, А. Б. Ходулев

М230. *Докажите, что из любого выпуклого равностороннего (но не обязательно правильного) пятиугольника можно вырезать правильный треугольник, одна из сторон которого совпадает со стороной пятиугольника (рис. 20).*

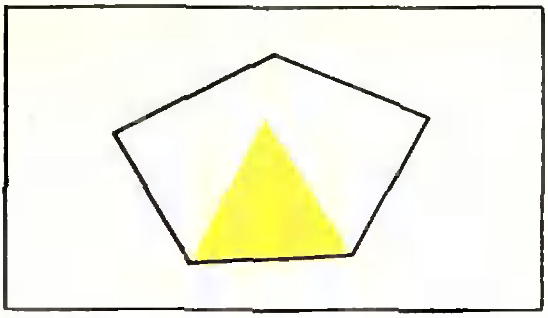


Рис. 20.

Предположим, что для некоторого *равностороннего выпуклого пятиугольника* $ABCDE$ со стороной, равной единице, утверждение задачи неверно. Можно считать, что н а и б о л ь ш а я из диагоналей — AD, что точки A и D лежат на горизонтальной прямой (D правее A), точки B и C — в ее верхней полуплоскости, причем C не ближе к прямой AD, чем B (рис. 21). Ясно, что

$$1 < |AD| < |AE| + |ED| = 2. \quad (*)$$

Поскольку в треугольниках ABD и ACD сторона AD — наибольшая, углы ABD и ACD, а тем более ABC и BCD все больше 60°, следовательно, равносторонние треугольники, построенные на сторонах AB, BC и CD, должны пересекаться отрезком AD (ведь *каждый из них, по предположению,* пересекается контуром пятиугольника, а отрезками AB, BC и CD эти треугольники пересечься не могут). Таким образом, углы BAD и CDA меньше 60°.

Отметим на отрезке AD точки B_1, C_1 и на его продолжении — точку C_3, для которых $|AB_1| = |C_1D| = |B_1C_3| = 1$, и построим в верхней полуплоскости равносторонние треугольники AB_1B_2, C_1DC_2, $B_1C_3C_4$ (рис. 22). Точка B должна лежать где-то на дуге B_1B_2 с центром A, точка C — на дуге C_1C_2 с центром D. С другой стороны, поскольку $|BC| = 1$ и C лежит не ниже B (но и не выше, чем на расстоянии $\sqrt{3}/2$ от прямой AD), то точка C должна лежать п р а в е е дуги C_2C_4 с центром B_1. Но из (*)

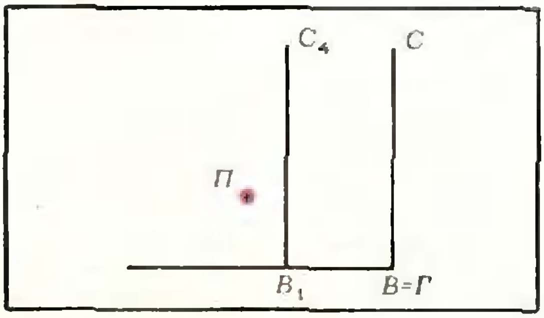


Рис. 19.

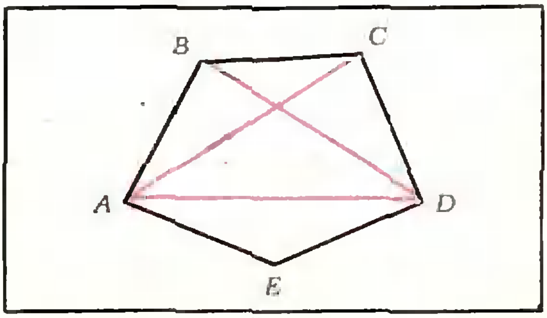


Рис. 21.

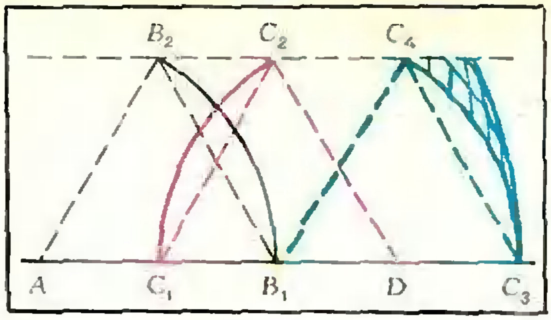


Рис. 22.

следует, что $\triangle C_1DC_2$ расположен левее $\triangle B_1C_3C_4$, поэтому дуга C_1C_2 расположена левее дуги C_3C_4. Получили противоречие. Значит, углы BAD и CDA не могут быть одновременно меньше 60°, и существует хотя бы один равносторонний треугольник (построенный либо на стороне AB, либо на BC, либо на CD), который не будет пересекаться контуром пятиугольника.

Из различных решений задачи **М230** мы выбрали именно это, поскольку оно поддается обобщению и позволяет доказать утверждение задачи **М230** для любого равностороннего выпуклого $(2n+1)$-угольника.

Н. Б. Васильев

Ф233. *При скоростном спуске лыжник скользит вниз по склону ($\varphi=45°$), не отталкиваясь палками. Коэффициент трения лыж о снег $k=0{,}1$. Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости лыжника $F_c=\alpha v^2$, где α — постоянная величина, равная 0,7 н/(м/с)². Какую максимальную скорость может развить лыжник, если его масса 70 кг?*

Рассмотрим движение лыжника, спроектировав все действующие на него силы на оси координат, направленные параллельно наклонной плоскости, которую образует склон, и перпендикулярно к ней (рис. 23).

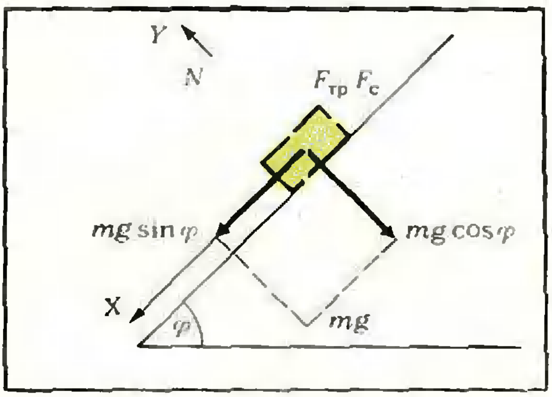


Рис. 23.

Так как вдоль оси Y лыжник не перемещается, то

$$N-mg\cos\varphi=0. \qquad (1)$$

Проекция силы тяжести на ось X, равная $mg\sin\varphi$, и сила трения $F_{тр}=kN$ не зависят от скорости движения лыжника, а сила сопротивления воздуха $F_c=\alpha v^2$ возрастает с увеличением скорости лыжника. Поэтому ясно, что при увеличении скорости лыжника наступит такой момент, когда сумма силы сопротивления воздуха и силы трения станет по абсолютной величине равна проекции силы тяжести. После этого скорость лыжника перестанет возрастать, и лыжник будет двигаться равномерно. Скорость v_{max}, при которой это произойдет, и есть максимальная скорость лыжника.

Запишем уравнение равномерного движения лыжника вдоль оси X:

$$mg\sin\varphi-kN-\alpha v_{max}^2=0. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) найдем

$$v_{max}=\sqrt{\frac{mg}{\alpha}(\sin\varphi-k\cos\varphi)}=$$

$$=\sqrt{\frac{70\cdot 9{,}8}{0{,}7}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-0{,}1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\approx 25\ (м/с).$$

Ф234. *Взрывная камера заполняется смесью метана и кислорода при комнатной температуре и давлении $p_0=760$ мм рт. ст. Парциальные давления метана и кислорода одинаковы. После герметизации камеры в ней происходит взрыв. Найти установившееся давление внутри камеры после охлаждения продуктов сгорания до первоначальной температуры, при которой давление насыщенных паров воды $p_н=17$ мм рт. ст.*

Запишем прежде всего уравнение реакции взрыва:

$$CH_4+2O_2=CO_2+2H_2O.$$

Из этого уравнения видно, что каждый моль метана соединяется с двумя молями кислорода. В результате реакции получается 1 моль углекислого газа и 2 моля воды.

До взрыва парциальные давления метана и кислорода были одинаковы и равны $\frac{1}{2}p_0$. Согласно уравнению газового состояния давление газа пропорционально числу молей газа. Тогда из равенства парциальных давлений метана и кислорода следует, что в сосуде находилось одинаковое число молей этих газов. Следовательно, при взрыве весь кислород прореагирует с метаном, причем в сосуде останется еще половина первоначального количества метана, который не вступил в реакцию.

Таким образом, после взрыва в сосуде будут находиться метан, углекислый газ и вода, и полное давление будет равно сумме парциальных давлений метана, углекислого газа и водяного пара:

$$p=p_{CH_4}+p_{CO_2}+p_{H_2O}.$$

После охлаждения смеси газов до первоначальной температуры парциальное давление оставшегося метана будет равно половине его первоначального парциального давления, то есть $\frac{1}{4}p_0$.

Число молей углекислого газа в сосуде равно числу молей прореагировавшего, а значит, и оставшегося метана. Поэтому парциальное давление углекислого газа будет также равно $\frac{1}{4}p_0$.

Теперь выясним, каково давление водяных паров. Предположим, что вся образовавшаяся при взрыве вода находится в парообразном состоянии. Так как число молей воды в два раза больше числа молей оставшегося в сосуде метана, то парциальное давление паров воды должно быть равно $\frac{1}{2}p_0=380$ *мм рт. ст.* Это, однако, больше давления насыщенных паров воды. Следовательно, бо́льшая часть водяных паров при охлаждении сконденсируется, и парциальное давление насыщенных паров воды в сосуде будет равно $p_н=17$ *мм рт. ст.*

Окончательно после взрыва и охлаждения смеси полное давление в сосуде

$$p=p_{CH_4}+p_{CO_2}+p_{H_2O}=$$
$$=\frac{1}{4}p_0+\frac{1}{4}p_0+p_н=397 \text{ мм рт. ст.}$$

При решении мы пренебрегли тем, что в результате конденсации воды объем, занимаемый газом, уменьшился. Это допустимо, так как объем воды в жидком состоянии мал по сравнению с объемом пара.

Ф235. *Маленькая капля воды падает в воздухе с постоянной скоростью благодаря тому, что на нее со стороны воздуха действует сила трения, вызванная столкновениями молекул воздуха с каплей. Как изменится скорость падения капли при увеличении температуры воздуха?*

Испарением капли пренебречь.

На водяную каплю, движущуюся в воздухе, действуют две силы: сила тяжести и сила сопротивления. Если эти силы одинаковы по абсолютной величине, то капля движется с постоянной скоростью. Величина этой скорости, очевидно, зависит как от массы капли, так и от силы сопротивления, вызванной соударениями с каплей молекул воздуха. При изменении температуры воздуха изменяется скорость теплового движения молекул. Поэтому естественно ожидать, что скорость падения капли тоже изменится.

Теперь проведем количественные расчеты.

Рассмотрим столкновения молекул воздуха с каплей и найдем, как зависит сила сопротивления от скорости теплового движения молекул. При этом будем считать, что:

1) столкновения молекул с каплей — упругие;

2) молекулы, сталкивающиеся с каплей, движутся или вертикально вверх, или вертикально вниз;

3) скорости всех молекул одинаковы.

Эти допущения упрощают рассуждения, но при этом они не изменяют реальной картины явления.

Вначале рассмотрим столкновение параллельного пучка частиц с неподвижной стенкой. Обозначим площадь поперечного сечения пучка s, скорость частиц u, число частиц в единице объема n. За время Δt со стенкой сталкиваются те молекулы, которые находятся от нее на расстоянии, не большем чем $u\Delta t$. Число таких частиц равно $su\Delta tn$, их общая масса $m=su\Delta tnm_0$ (m_0 — масса одной частицы), а импульс

$$mu=su^2\Delta tnm_0.$$

После упругого столкновения импульс частиц меняется на противоположный, поэтому изменение импульса равно

$$\Delta(mu)=2\,mu.$$

Это означает, что на частицы со стороны стенки и на стенку со стороны частиц действуют средние силы, равные по абсолютной величине

$$F=\frac{\Delta(mu)}{\Delta t}=2su^2nm_0.$$

Таким образом, сила, действующая на стенку, пропорциональна квадрату скорости частиц относительно стенки.

Теперь рассчитаем силу сопротивления для движущейся капли. Обозначим скорость капли v, а скорость теплового движения молекул воздуха u. Молекулы, налетающие на каплю снизу, движутся относительно капли со скоростью $u+v$, а налетающие на каплю сверху — со скоростью $u-v$. Поэтому снизу на каплю действует сила $F_1=k(u+v)^2$, а сверху — $F_2=k(u-v)^2$ (k — коэффициент пропорциональности, не зависящий от скоростей v и u).

Результирующая сила

$$F=F_1-F_2=4\,kuv.$$

Итак, сила сопротивления, действующая на каплю, пропорциональна скоростям u и v. Кроме этой силы, на каплю действует еще сила тяжести Mg. При равномерном движении

$$Mg=4\,kuv,$$

откуда

$$v=\frac{Mg}{4ku}.$$

То есть скорость падения капли обратно пропорциональна тепловой скорости движения молекул воздуха. Но, как известно, $u \sim \sqrt{T}$. Следовательно,

$$v \sim \frac{1}{\sqrt{T}}.$$

Поэтому при увеличении температуры воздуха скорость падения капли уменьшится.

Ф236. *Определить период колебаний полярной молекулы в однородном электрическом поле, напряженность которого $E=300$ в/см. Полярную молекулу можно представить в виде жесткой гантельки длины l ($l=10^{-8}$ см), на концах которой находятся две материальные точки массы m ($m=10^{-24}$ г), несущие на себе заряды $+e$ и $-e$ соответственно ($e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ к).*

В положении устойчивого равновесия молекула располагается вдоль поля (рис. 24). Если ее вывести из этого состояния, то возникает вращательный момент, поворачивающий молекулу вокруг ее центра тяжести. Этот момент создают электрические силы F_1 и F_2, действующие на заряды со стороны электрического поля (рис. 25).

Если рассматривать заряды каждый в отдельности, то можно сказать, что электрические силы для них играют роль возвращающих сил. Поэтому заряды колеблются подобно математическим маятникам длиной $\frac{l}{2}$.

Воспользуемся этой аналогией и запишем период колебаний молекулы так:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l/2}{g'}},$$

где g' — ускорение, которое электрическое поле сообщает каждому заряду. Так как $g' = \frac{F_{эл}}{m}$, а $F_{эл} = eE$, то

$$g' = \frac{eE}{m}.$$

Поэтому окончательно

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{lm}{2eE}} \approx 2\cdot 10^{-11}\ с.$$

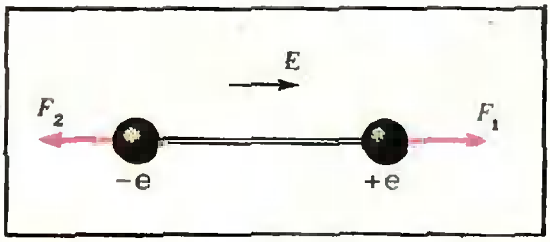


Рис. 24.

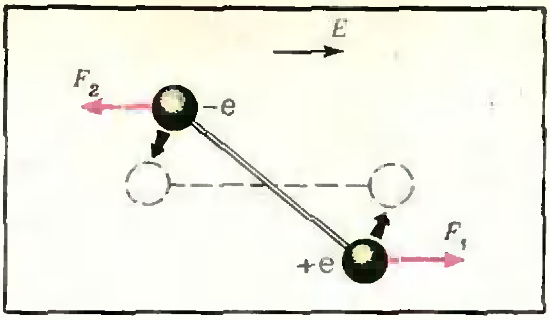


Рис. 25.

Ф237. *Почему лицо фехтовальщика в проволочной маске не видно публике, а спортсмен видит все так же хорошо, как и без маски?*

Отвечая на этот вопрос, остановимся на двух наиболее существенных факторах.

Во-первых, лицо человека в маске освещено гораздо хуже, чем сама маска и окружающие предметы. Поэтому свет, отраженный лицом, очень слаб по сравнению со светом, идущим от маски и других предметов. Вот почему для наблюдателя из публики лицо фехтовальщика в маске практически неразличимо. Сам же спортсмен, наоборот, хорошо видит ярко освещенные предметы вокруг себя на фоне слабого света, отраженного внутренней стороной проволочной маски. К тому же изображение маски в глазу спортсмена получается сильно размытым (несфокусированным), так как маска расположена слишком близко к глазу.

Аналогично объясняется, почему днем невооруженным глазом нельзя увидеть звезд: солнечный свет, рассеянный атмосферой, гораздо сильнее света звезд.

Во-вторых, поскольку проволочная сетка находится близко от лица спортсмена, она закрывает для наблюдателя довольно большую часть лица. В то же время спортсмену эта маска почти не мешает.

В заключение рассмотрим еще одну подобную задачу — почему днем с улицы ничего не видно внутри комнаты, если смотреть через окно, занавешенное сетчатой тканью? Очевидно, в этом случае тот факт, что сильно освещенная снаружи занавеска отражает много света по сравнению с предметами внутри комнаты, играет решающую роль. Если смотреть из комнаты на улицу, то яркие предметы будут хорошо видны, так как внутренняя сторона занавески освещена слабо. Однако, видно будет значительно хуже, если в комнату попадают прямые солнечные лучи и стены комнаты хорошо отражают свет,— тогда и изнутри занавеска освещена хорошо. Чтобы хорошо видеть то, что происходит на улице, необходимо в этом случае подойти вплотную к окну.

И. Ш. Слободецкий

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Механические колебания

В. А. Тихомирова

Гармоническим колебательным движением называют движение, происходящее по закону

$$x = x_0 \cos(\omega t + \varphi_0). \qquad (1)$$

Здесь x — смещение тела из положения равновесия, x_0 — амплитуда колебаний, $\omega t + \varphi_0 = \varphi$ — фаза колебаний, ω — циклическая частота, которую можно связать с частотой колебаний ν или периодом колебаний T соотношениями $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$, и φ_0 — начальная фаза. Наибольшую трудность при изучении этих величин вызывает обычно понятие фазы колебаний. Из уравнения (1) видно, что, зная фазу колебаний и амплитуду, можно определить не только положение тела в данный момент времени, но и направление движения тела. Поэтому говорят, что фаза колебаний *характеризует стадию* колебательного движения в рассматриваемый момент. Начальная фаза показывает, с какой стадии начался колебательный процесс. Пусть, например, математический маятник (рис. 1, *а*) колеблется с начальной фазой $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. Это означает, что он начинает двигаться из положения равновесия влево. Через четверть периода, когда фаза колебаний $\varphi = \omega t + \varphi_0 = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} + \frac{\pi}{2} = \pi$, маятник дойдет до крайнего левого положения (рис. 1, *б*) и т. д. Особенно важными понятия фазы и начальной фазы становятся при сравнении или сложении нескольких колебаний.

Уравнение (1) — это кинематический закон, описывающий гармоническое колебание и связывающий основные кинематические величины, характеризующие это движение. Вспомним, когда возможно такое движение, от чего зависят амплитуда, частота и начальная фаза колебаний. Самые простые и наглядные примеры колебательных систем — это пружинный (рис. 2) и математический маятники. Будем говорить только о свободных (или собственных) колебаниях этих маятников *).

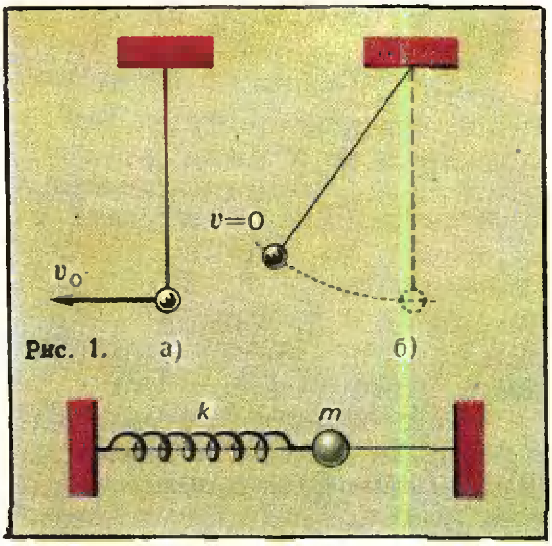


Рис. 1.

Рис. 2.

*) Уравнение (1) описывает и вынужденные колебания.

Если каким-нибудь образом вывести маятник из состояния равновесия, сообщив ему некоторую начальную энергию, он будет совершать периодически повторяющееся движение. Отличительной особенностью колебаний по сравнению с остальными видами периодических движений является то, что существует особое положение — положение равновесия, к которому маятник периодически возвращается, но не останавливается в этом положении, а продолжает двигаться дальше по инерции.

Следовательно, в системе, обладающей инертностью, обязательно должна быть так называемая возвращающая сила. В пружинном маятнике это — сила упругости, в математическом — составляющая силы тяжести. Возвращающая сила связана со смещением маятника от положения равновесия:

$$F_в = -kx.$$

Это равенство по виду напоминает закон Гука для упругих деформаций:

$$F_{упр} = -k_{упр}x,$$

где x — величина деформации, $k_{упр}$ — коэффициент упругости. Поэтому возвращающую силу часто называют квазиупругой силой (приставка «квази» означает «как бы»), а k — коэффициентом квазиупругости. Коэффициент k зависит от природы возвращающей силы.

Таким образом, основной закон динамики — второй закон Ньютона для гармонических колебаний записывается так:

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m}x. \qquad (2)$$

Решением этого уравнения и является выражение (1).

Начальная фаза φ_0 зависит, конечно, только от начальных условий. Циклическая частота ω зависит от m и k, характеризующих инертные и квазиупругие свойства системы, следующим образом:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Но если вы забыли эту формулу, то вспомнить ее помогут простые физические соображения и метод размерностей.

Действительно, чем больше коэффициент квазиупругости k, тем больше ускорение маятника в любой момент времени, тем быстрее маятник совершает колебания. Чем больше масса маятника, тем меньше его ускорение, тем медленнее происходят колебания.

Запишем зависимость ω от m и k в таком виде:

$$\omega = Ak^{\alpha}m^{\beta},$$

где A — безразмерный коэффициент пропорциональности, α и β — безразмерные показатели степени. Теперь воспользуемся правилом размерностей, по которому размерности левой и правой частей любого равенства должны быть одинаковыми, то есть

$$[\omega] = [k^{\alpha}]\,[m^{\beta}].$$

В системе СИ $[\omega] = c^{-1}$, $[k] = кг \cdot c^{-2}$, $[m] = кг$, поэтому

$$c^{-1} = кг^{\alpha}c^{-2\alpha}\,кг^{\beta}.$$

Найдем, при каких α и β это равенство обратится в тождество. Для этого приравняем показатели степени у одинаковых оснований слева и справа и получим систему

$$\begin{cases} -1 = -2\alpha, \\ \alpha + \beta = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{ и } \beta = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\omega = A\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Коэффициент A, который в самом деле равен 1, методом размерностей найти, конечно, нельзя.

Теперь об амплитуде колебаний. Конечно, она зависит от энергии, которую сообщили маятнику в начальный момент. Конкретнее поговорим об этом при решении следующей задачи.

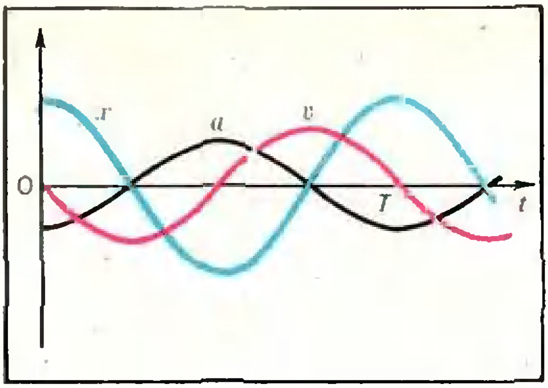


Рис. 3.

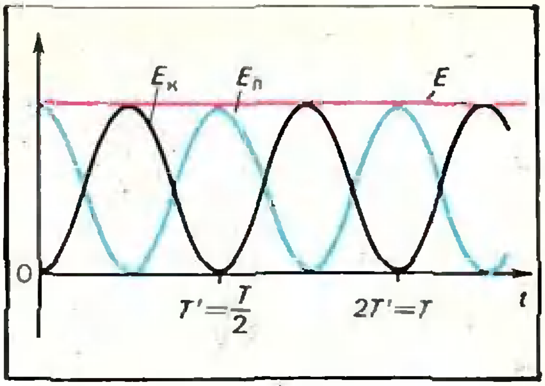


Рис. 4.

З а д а ч а 1. *Пружинный маятник совершает гармонические колебания с циклической частотой ω и амплитудой x_0. Найти максимальные значения ускорения и скорости маятника, а также величину его механической энергии.*

По второму закону Ньютона для гармонических колебаний

$$a = -\omega^2 x.$$

Поскольку смещение x меняется по гармоническому закону, а ω^2 — величина постоянная, то ускорение маятника a тоже меняется по гармоническому закону, причем его амплитуда

$$a_0 = \omega^2 x_0.$$

Знак минус в уравнении движения говорит о том, что колебания ускорения противоположны по фазе колебаниям смещения.

Раз смещение маятника и его ускорение меняются со временем по гармоническому закону, то естественно предположить, что и скорость маятника меняется по такому же закону. Строгие расчеты действительно подтверждают эти предположения. Амплитуду колебаний скорости можно найти, воспользовавшись законом сохранения энергии.

Механическая энергия маятника E складывается из кинетической энергии шарика $E_к = mv^2/2$ и потенциальной энергии упругой деформации пружины $E_п = kx^2/2$. При прохождении положения равновесия, когда невесомая пружина недеформирована, а скорость шарика v_0 максимальна, полная энергия

$$E = E_{к\,max} = \frac{mv_0^2}{2}.$$

В момент наибольшего удаления шарика от положения равновесия, когда его скорость равна нулю, а деформация пружины максимальна, энергия

$$E = E_{п\,max} = \frac{kx_0^2}{2}.$$

Полная энергия маятника с течением времени не меняется (мы рассматриваем незатухающие свободные колебания), поэтому

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{kx_0^2}{2},$$

откуда

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\, x_0 = \omega x_0.$$

Колебания скорости опережают по фазе колебания смещения на четверть периода, то есть на $\frac{\pi}{2}$.

Графики зависимости смещения x, скорости v и ускорения a от времени даны на рисунке 3.

Итак, полная механическая энергия, самым тесным образом связанная с амплитудой смещения x_0 или с амплитудой скорости v_0, есть величина постоянная. Но ведь она скла дывается из кинетической и потенциальной энергии. Запишем выражение для потенциальной энергии упругой деформации:

$$E_п = \frac{kx^2}{2} = \frac{kx_0^2}{2}\cos^2\omega t =$$

$$= \frac{kx_0^2}{4}(1+\cos 2\omega t).$$

Отсюда видно, что потенциальная энергия тоже меняется с течением времени по гармоническому закону, но частота ее колебаний в 2 раза больше частоты колебаний смещения маятника.

Кинетическую энергию можно представить как разность полной энергии, равной $E = \frac{kx_0^2}{2}$, и потенциальной энергии:

$$E_к = E - E_п = \frac{kx_0^2}{4}(1-\cos 2\omega t).$$

Следовательно, кинетическая энергия изменяется в противофазе по сравнению с потенциальной. Графически это показано на рисунке 4, где T' — период колебаний энергии, а T — период колебаний смещения.

Мы видим, что рассматривая колебания, можно говорить не только о колебаниях смещения, скорости, ускорения, но также и о колебаниях кинетической и потенциальной энергий. Теперь рассмотрим несколько конкретных задач и убедимся в том, что для их решения достаточно выяснить природу возвращающей силы, записать для нее соответствующее выражение, а также воспользоваться законом сохранения энергии.

Задача 2. *На чашку весов, подвешенную на пружине, падает с высоты h груз массы m и остается на чашке (рис. 5, а). Коэффициент упругости пружины равен k. Массы пружины и чашки малы по сравнению с массой груза. Определить амплитуду и период свободных колебаний чашки с грузом.*

Система, действительно, будет совершать колебания, так как она представляет собой пружинный маятник, расположенный вертикально. Но, кроме силы упругости пружины, на чашку с грузом действует еще сила тяжести. Какова ее роль? Эта сила, оказывается, изменяет положение равновесия системы, смещая его вниз на величину Δx (рис. 5, б).

Рассмотрим две системы координат: OX и $O'X'$. Запишем закон движения маятника в первой системе:

$$ma = -kx + mg.$$

Но

$$x = x' + \Delta x.$$

Величину Δx можно найти из условия равенства сил тяжести и упругости в положении равновесия: $mg = k\Delta x$. Поэтому

$$ma = -kx' - k\frac{mg}{k} + mg,$$

то есть

$$ma = -kx'.$$

Следовательно, ускорение системе сообщает только сила упругости.

Период колебаний равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Амплитуду колебаний найдем, исходя из закона сохранения энергии.

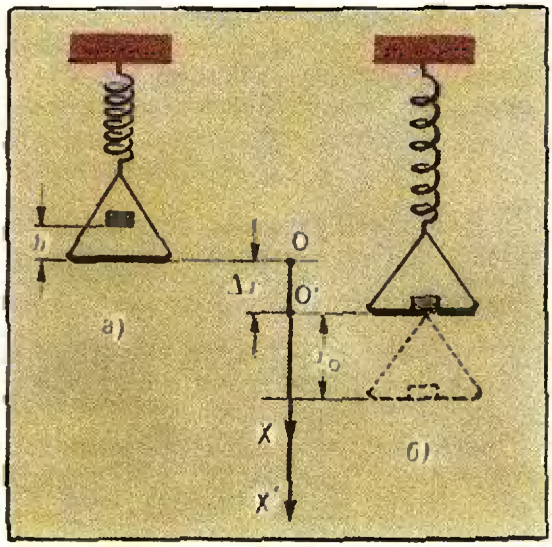


Рис. 5.

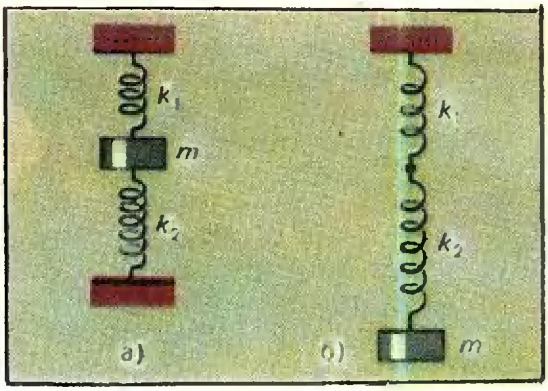


Рис. 6.

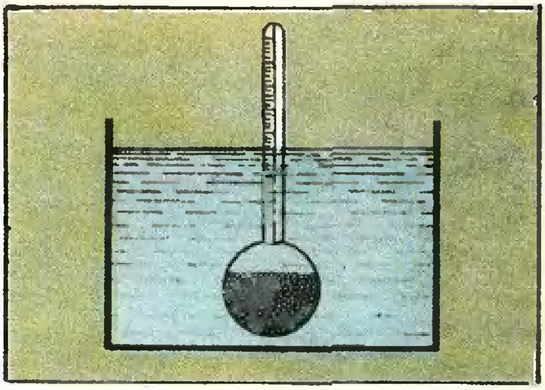


Рис. 7.

В начальный момент груз обладает потенциальной энергией тяготения. В момент, когда пружина максимально растянута, потенциальная энергия упругой деформации запасена в пружине (за начало отсчета высот принимаем наинизшее положение чашки с грузом, поэтому во втором случае груз не обладает никакой энергией). Приравняем эти энергии *):

$$mg(h+\Delta x+x_0)=\frac{k(\Delta x+x_0)^2}{2},$$

где

$$\Delta x=\frac{mg}{k}.$$

Отсюда

$$x_0=\frac{mg}{k}\sqrt{1+\frac{2kh}{mg}}$$

З а д а ч а 3. *Найти частоту колебаний маятников, изображенных на рисунке 6. Коэффициенты упругости пружин равны k_1 и k_2, масса груза m. Массами пружин пренебречь.*

Рассмотрим сначала первый маятник (рис. 6, *а*). Если сместить груз из положения равновесия, например, вниз на величину x, то верхняя пружина дополнительно растянется на длину x, а нижняя — сожмется тоже на x. Но обе дополнительные силы упругости направлены вверх, то есть они возвращают груз в положение равновесия, поэтому можно записать: $ma=-k_1x-k_2x=-(k_1+k_2)x$. По уравнению движения маятника

$$a=-\omega^2x,$$

поэтому

$$\omega=\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}.$$

Во втором случае (рис. 6, *б*) при смещении груза из положения равновесия вниз на величину x обе пружины растянутся, но их удлинения x_1 и x_2 будут разными. Однако

$$x_1+x_2=x.$$

Так как пружины невесомы, силы упругости должны быть одинаковыми*): $k_1x_1=k_2x_2$. Поэтому закон движения груза:

$$ma=-k_1x_1=-k_2x_2=-\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}x,$$

откуда

$$\omega=\sqrt{\frac{k_1k_2}{(k_1+k_2)m}}.$$

Заметим, что частота колебаний первого маятника больше, чем частота колебаний второго.

*) Это можно сделать, так как чашка невесома, и начальная энергия чашки с грузом равна энергии падающего груза.

*) Рассмотрим, например, вторую пружину. На нее со стороны первой пружины действует сила $F_1=k_1x_1$, направленная вверх, и со стороны груза действует сила F_2, равная по третьему закону Ньютона силе упругости второй пружины и направленная вниз (то есть $F_2=k_2x_2$). Запишем уравнение движения для пружины: $m_2a_2=F_2-F_1=k_2x_2-k_1x_1$. Так как пружина невесома, то есть $m_2=0$, то $k_2x_2=k_1x_1$.

Действительно,

$$\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}-\sqrt{\frac{k_1k_2}{(k_1+k_2)\,m}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{m}}\left[\frac{(k_1+k_2)-\sqrt{k_1k_2}}{\sqrt{k_1+k_2}}\right]>0,$$

так как среднее арифметическое $\frac{k_1+k_2}{2}$ всегда больше или равно среднему геометрическому $\sqrt{k_1k_2}$.

Задача 4. *Ареометр массой m представляет собой шарик, заполненный дробью, и цилиндрическую трубку с поперечным сечением S. Он помещен в жидкость с плотностью ρ (рис. 7). Ареометр погружают в жидкость несколько глубже, чем это нужно для его равновесия, и затем отпускают. Найти период свободных колебаний ареометра.*

В положении равновесия сила тяжести уравновешивается выталкивающей силой. Если ареометр глубже погружен в жидкость, выталкивающая сила становится больше силы тяжести, возникает равнодействующая сила, направленная вверх. Пройдя по инерции положение равновесия, ареометр оказывается погруженным в жидкость меньше, чем это нужно для равновесия, возникает равнодействующая сила, направленная вниз. Таким образом, изменение выталкивающей силы выполняет роль возвращающей силы:

$$\Delta F_{\text{выт}}=-\rho g\Delta V=-\rho gSx$$

(знак минус говорит о том, что изменение выталкивающей силы противоположно изменению объема погруженной части ареометра). Следовательно, в этом случае $k=\rho gS$, поэтому

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho gS}}.$$

Задача 5. *Математический маятник длиной l укреплен на тележке, скатывающейся без трения с наклонной плоскости с углом наклона α. Найти положение равновесия маятника и период его колебаний.*

Поскольку маятник находится на тележке, скатывающейся с наклонной плоскости с ускорением $a=g\sin\alpha$, то его положением равновесия будет положение, при котором маятник движется относительно плоскости с тем же ускорением a, что и тележка.

На шарик действуют две силы: сила тяжести mg и сила натяжения нити $F_{\text{н}}$. Равнодействующая этих сил в положении равновесия и должна сообщить шарику ускорение a:

$$F_{\text{р}}=ma=mg\sin\alpha.$$

Из рисунка 8 видно, что это возможно только в том случае, когда нить маятника перпендикулярна к наклонной плоскости.

Итак, составляющая силы тяжести вдоль плоскости, равная $mg\sin\alpha$, должна обеспечить маятнику ускоренное движение по наклонной плоскости. Сила натяжения, всегда перпендикулярная к траектории движения шарика относительно тележки, тоже не может выступать в роли возвращающей силы. Поэтому остается одна сила — составляющая силы тяжести, перпендикулярная к плоскости и равная $mg\cos\alpha$. Можно сказать, что маятник совершает колебания как бы в ином поле тяжести с ускорением свободного падения $g'=g\cos\alpha$.

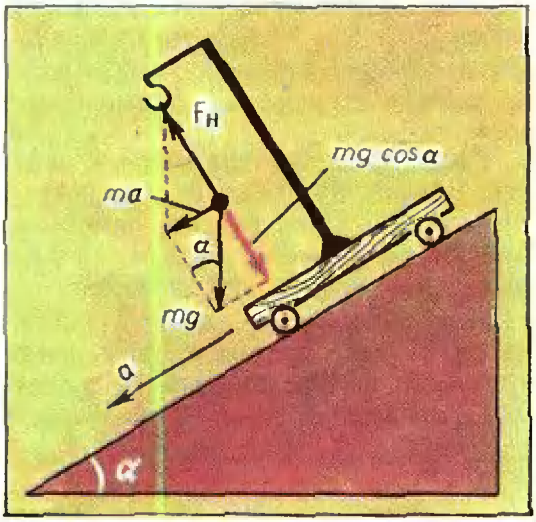


Рис. 8.

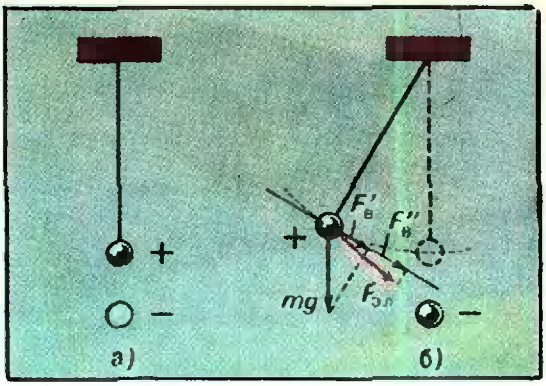


Рис. 9.

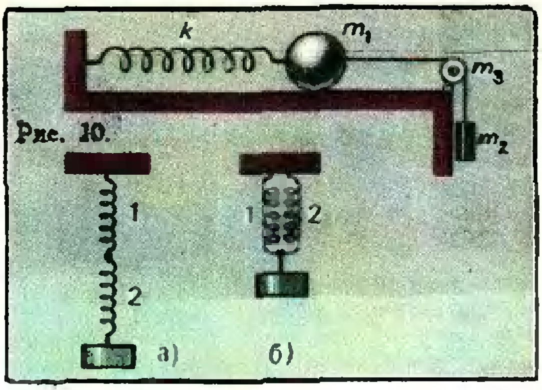


Рис. 10.

Рис. 11.

Период таких колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\cos\alpha}}.$$

Задача 6. *Маятник состоит из металлического шарика, подвешенного на шелковой нити. Как изменится период его колебаний, если шарику сообщить положительный заряд, а другой шарик, заряженный отрицательно, поместить внизу, на одной вертикали с нитью маятника (рис. 9, а)?*

Кроме силы тяжести и силы натяжения нити, на заряженный шарик маятника действует еще электрическая сила притяжения к противоположно заряженному шарику, находящемуся ниже. Эта сила, как и сила тяжести, будет давать составляющую на направление движения (рис. 9, *б*), что увеличит возвращающую силу:

$$F_в = F'_в + F''_в.$$

При этом увеличится среднее значение ускорения маятника, а период, соответственно, уменьшится. Положение равновесия маятника останется вертикальным.

Упражнения

1. Математический маятник, состоящий из нити длиной 243 *см* и стального шарика диаметром 4 *см*, совершает гармонические колебания с амплитудой 10 *см*. Определить скорость шарика при прохождении положения равновесия и наибольшее значение возвращающей силы. Плотность стали равна 7,8 *г/см*^{3}.

2. Тело массой M, скрепленное с пружиной, совершает колебания с амплитудой x_0 на гладком горизонтальном столе. В тот момент, когда тело проходит положение равновесия, на него сверху падает и прилипает к нему кусок пластилина массы m. Как изменится амплитуда колебаний?

3. Шар массой $m_1 = 0{,}2$ *кг* лежит на абсолютно гладкой поверхности. С помощью нити, перекинутой через блок, к нему прикреплен груз массой $m_2 = 0{,}1$ *кг* (рис. 10). Блок представляет собой тонкостенный цилиндр массой $m_3 = 0{,}3$ *кг*. При равновесии этой системы легкая пружина растянута на $\Delta l = 5$ *см*. Определить циклическую частоту свободных колебаний шара, если груз без толчка немного оттянули вниз и отпустили.

4. Груз массой 0,5 *кг*, подвешенный на невесомой пружине, колеблется с частотой 0,4 *гц*. Каковы будут частоты колебаний того же груза на двух таких пружинах, если один раз они соединены последовательно, а другой раз параллельно (рис. 11)?

5. В U-образную трубку налита ртуть. Найти период колебаний ртути, если площадь поперечного сечения трубки S, масса ртути m и плотность ртути ρ.

6. Горизонтальная подставка совершает в вертикальном направлении гармонические колебания с амплитудой x_0. Какова может быть максимальная частота этих колебаний, если лежащий на подставке предмет не отделяется от нее?

7. Лифт поднимается вверх сначала с ускорением a_1 в течение времени t_1, затем с замедлением a_2 в течение времени t_2. В лифте находится математический маятник длиной l. Сколько колебаний он совершит за время движения?

8. Как изменится период колебания маятника (см. задачу 6 в статье), если отрицательно заряженный шарик поместить в точке подвеса?

Л. Е. Садовский

«Прикладная математика» — новая специальность в технических вузах

Инженерам любой специальности необходимы знания в области фундаментальных дисциплин, сложившихся в ходе многовекового исследования законов мира. Важнейшие из этих дисциплин: математика и физика. Развиваясь в процессе деятельности человека, они сами оказываются поразительной силой, способствующей прогрессу знаний и техники.

Основные факты, полученные точными науками (теоремы, физические законы и т. п.), составляют научный капитал, который, в отличие от действующей техники и технологии производства, почти не стареет со временем. Яркой иллюстрацией стабильности и преемственности знаний в области фундаментальных дисциплин может служить сопоставление частей современного математического образования. Здесь и созданная более 2000 лет назад «школьная» геометрия и еще более древние основы алгебры. С ними соседствуют дифференциальное и интегральное исчисления, а также аналитическая геометрия и линейная алгебра. Эти разделы стандартного курса высшей математики в вузах имеют примерно двухсотлетний возраст. Наконец, современные методы решения оптимизационных задач (на определение наибольших и наименьших значений функций) — в том числе линейное, нелинейное и динамическое программирование, принцип максимума и т. п.— немногим старше двадцати — тридцати лет. В то же время некоторые из них сами являются удачным синтезом давно известных методов перебора различных вариантов и новых соображений, обеспечивающих определенную целенаправленность (и, следовательно, экономичность) подобного перебора. Методы оптимизации включены в учебные планы специальностей с повышенной математической подготовкой.

Более старые разделы науки сосуществуют с новыми и ими не отменяются. Меняется лишь относительный вес отдельных частей, методика обучения, оценки значимости тех или иных разделов. Так, например, по новой программе средней школы систематический курс математики вводится на год раньше (в четвертом классе). В нем рано появляются теоретико-множественные понятия, алгебраическая символика, современная терминология, начала геометрии, а в старших классах — начала математического анализа и исследование элементарных функций.

Аналогичный процесс перестройки программы математических курсов, перенос акцентов на новые разделы, некоторое сокращение «традиционных» разделов, потерявших прежнее значение, происходит и в высшей школе. Во многом эта перестройка оказалась вызванной современной научно-технической революцией, о которой столь часто теперь говорят и пишут. Бесспорно, что одним из важнейших условий этой революции явился прогресс в области математических знаний и вычислительной техники. Быстродействующие электронные цифровые вычислительные машины (ЭВМ), созданные математиками в содружестве с инженерами, за тридцать последних лет существенно расширили возможности исследований (не только математических!), вызвали переоценку ценностей, внесли принципиально новое в сферу управления экономикой, в управление процессами производства, в его автоматизацию и т. п.

ЭВМ преподносят нам еще один пример преемственности и стабильности математических идей: можно проследить два направления, слияние которых отмечено созданием ЭВМ. Одно из них идет от Б л е з а П а с к а л я (1623—1662) и его счетной машины (см. «Квант», 1973, № 8, с. 10). Второе — от Г о т ф р и д а Л е й б н и ц а (1646—1716); он хотел разработать математический аппарат, пригодный для проведения рассуждений и доказательств теорем, и построить на основе этого аппарата машину, способную проводить доказательства автоматически.

Первая линия продолжалась в работах по созданию все более совершенных счетных машин: арифмометров, автоматических суммирующих машин и т. п. Вторая поддерживалась работами Д ж о р д ж а Б у л я (1815—1864), заложившего основы алгебры логики, затем Фреге и Расселом, которые и создали собственно теорию исчисления высказываний (математическую логику), и другими математиками.

По-видимому, впервые оба эти направления соприкоснулись в идеях Чарльза Бэбеджа (1792—1871), в проекте его аналитической машины предусмотрены важнейшие части ЭВМ: ячейки памяти для хранения данных, арифметические устройства, устройство, управляющее работой машины (программа).

Современные ЭВМ — это синтез идей, восходящих к Паскалю и Лейбницу. Эти идеи вместе с возможностями современной общей алгебры привели к созданию теории алгебраических моделей вычислительных машин и теоретическому программированию.

ЭВМ требуют надлежащего математического обеспечения — а его создают люди. По данным одной из крупнейших в мире фирм, производящих вычислительную технику, современные ЭВМ лишь на 40% — «железо», на остальные же 60% — математическое обеспечение (то есть программы решения различных задач, трансляторы, диспетчеризация времени по отдельным задачам и т. п.). В штате этой фирмы и ее филиалов работают 100 000 математиков. По некоторым оценкам стоимость создания программного обеспечения достигает 80% стоимости десятилетней эксплуатации ЭВМ. Предназначенные первоначально для решения научных (вычислительных) задач, ЭВМ, оказались незаменимыми в сфере управления и обработки информации*).

Любопытно, что так называемые счетно-аналитические машины**), предназначенные для обработки информации (в частности, для бухгалтерских расчетов), в последующем (до появления ЭВМ) использовались для решения научных задач. Сопряжение их в системы совместно работающих машин предшествовало созданию современных ЭВМ. Сейчас 80% всех ЭВМ используется для обработки информации и для управления. Сложность задач управления, огромный объем информации, подлежащей обработке, потребовали создания специализированных систем и способствовали превращению искусства управления в науку.

До последних лет внимание привлекала автоматизация тех или иных процессов производства (в металлургии, химии, пищевой промышленности). Речь шла о проведении известной работы новыми средствами. Вузы давно готовят инженеров по автоматизации конкретных производств (в настоящее время более чем по 350 специальностям). Автоматизация производства приводит обычно к существенному сокращению обслуживающего персонала, в то время как автоматизация процессов управления к резкому сокращению обслуживающего персонала не приводит. Эффект от автоматизации управления состоит в проведении новыми средствами новой работы, осуществить которую старыми средствами невозможно. Кроме того, с помощью новых средств в ходе самого процесса работы можно добиться оптимизации тех или иных величин, подобно тому как в процессе полета космической ракеты в наземных управляющих центрах удается провести упреждающие расчеты и провести коррекцию скорости и других параметров.

Одно из новых средств — это автоматизированные системы управления (АСУ). Их основная задача — автоматизация управления на тех или иных уровнях (отдельное предприятие, отдельная отрасль хозяйства или транспорта, государство и даже содружество государств). Цель управления — достижение обоснованных и по возможности наилучших решений в проведении различного рода мероприятий.

АСУ в практическом решении задач опираются на современную вычислительную технику, а в методологическом плане — на современные разделы математики (теорию управления, исследование операций*), мате-

---

*) Понятие информации является в математике одним из начальных, его нельзя определить (подобно понятию множества) с помощью иных более элементарных понятий. Здесь же под термином «информация» можно понимать некоторую совокупность фактов или данных, несущих содержательные сведения о чем-либо. Понятие содержательности относительно. Так например, для окончившего среднюю школу сообщение о том, что Средиземное и Черное моря соединены проливами, не содержит новых сведений, тогда как для лица, географию не изучавшего, это сообщение содержит нечто новое.

**) Счетно-аналитические машины работают с данными, нанесенными на специальные карты (перфокарты) в виде пробивок (перфораций). В комплект машин входят: *табулятор* (суммирующая машина), *мультиплейер* (умножающая машина), *сортировальный автомат* (осуществляет простейшие логические операции — подбор массивов карт по определенным признакам), *перфоратор* (наносит данные на карты) и другие устройства.

*) *Операцией* называется всякое действие (или система действий), подчиненное единому замыслу и направленное к достижению определенной цели. Примерами операций могут служить: система мероприятий по переброске грузов из пунктов производства в пункты потребления в кратчайшее время (с минимальными затратами); запуск группы искусственных спутников для организации систем связи и т. п. Исследование операций связано с выбором такой системы действий, которая по определенным признакам (*критериям*) предпочтительнее других (*оптимальна*).

матическое программирование, системный анализ, случайные процессы и многие другие).

Естественно, что создание и эксплуатация подобных систем предусматривает наличие вычислительной техники и надлежащего математического обеспечения.

В девятой пятилетке планируется создание более 1500 различных АСУ и подготовка более 75 тысяч инженеров по комплексному обеспечению эксплуатации всех звеньев АСУ и ее информационной базы *).

Более чем в 40 вузах страны подготовка таких специалистов начата. Несколько лет в университетах и крупнейших вузах ведется подготовка инженеров-математиков (или математиков-инженеров). За прошедшие годы страна получила примерно 10 тысяч инженеров-математиков. С 1969 года специальность «инженер-математик» преобразована в новую специальность — «прикладная математика», имеющую несколько специализаций. Основные из них:

1) математическое обеспечение АСУ,
2) математическое обеспечение ЭВМ,
3) применение средств вычислительной техники (к решению инженерных, экономических, управленческих и других задач).

В девятой пятилетке планируется подготовить 50 тысяч математиков-прикладников.

Проблемы, с которыми сталкивается инженер-математик, весьма разнообразны и по своему происхождению, и по трудности. Поэтому охарактеризовать их можно лишь в общих чертах.

Специалисты по математическому обеспечению АСУ занимаются, в основном, проектированием принципиальных схем АСУ, математическим описанием и выбором оптимальных вариантов процессов производства, управления, сбора и обработки информации, построением оптимальных объемных планов (на год, квартал), оперативным планированием (например, суточным), экономико-статистическими исследованиями (от взаимосвязей со смежными производствами и реализации продукции до системы материального поощрения) и другими.

АСУ представляет собой своеобразную иерархическую систему. В ней цель каждой подсистемы состоит в принятии определенных решений. При движении от более крупных частей к более мелким происходит постепенная детализация задач. Чем задача конкретнее, тем она, как правило, сложнее. К самым трудным относятся вопросы оперативного планирования и управления. Большие затруднения вызывает установление критериев полезности, оптимальности. Обычно создание обоснованного критерия — часть решения задачи. Примерно таким кругом задач описывается специализация математического обеспечения АСУ — одной из указанных выше специализаций «прикладной математики».

Студенты МИИТа специальности «прикладная математика» на практике в машинном зале. ▲ ▶

Вторая специализация (математическое обеспечение ЭВМ) — это так называемое внутреннее математическое обеспечение ЭВМ: составление наборов (пакетов) программ, направленных на решение определенного круга задач; изучение различных языков программирования; создание трансляторов — устройств, воспринимающих текст программ, написанных на «почти человеческом» языке, и переводящих их на язык машины; исследование различных режимов работы отдельной ЭВМ и вычислительных систем, разработка структуры вычислительного процесса.

Третья специализация (применение средств вычислительной техники) связана с подготовкой математиков для поисковых работ в различных областях техники, технологии, экономики, обработки информации, управления. Здесь требуется умение сформулировать задачу на языке математики — построить ее «математическую модель», изучить эту модель, установить, если это требуется, критерии полезности и выявить условия, их оптимизирующие.

Основная характеристика специальности «прикладная математика» — широкая математическая подготовка и отличное владение ЭВМ в соединении со знанием ряда общетеоретических (физика, механика) и инженерных дисциплин (электротехника, радиоэлектроника, теория автоматического управления, инженерная графика).

Становление специальности «прикладная математика» сопровождалось существенным увеличением объема математических курсов (до 1700 часов) и курсов по ЭВМ

*) Инженеров по конструированию и эксплуатации ЭВМ наши вузы выпускают уже много лет.

(около 400 часов)*). Изучение многих математических дисциплин сочетается с работой на ЭВМ — решением ряда конкретных задач.

Всего в рабочем плане специальности из 4700 учебных часов около 2600 часов отведено математике АСУ и ЭВМ. Поэтому специалисты в указанной области и классифицируются как математики.

Подготовка математиков-прикладников ведется в университетах и наиболее крупных втузах страны (в частности, в Ленинградском и Львовском политехнических, Харьковском радиотехническом, Казанском авиационном институтах, в Днепропетровском институте инженеров железнодорожного транспорта, в МАИ, МИЭМ, МИФИ, ФИЗТЕХе, МИИТе).

МИИТ, например, одним из первых в стране (наряду с МИЭМом) начал готовить инженеров-математиков, а с 1969 года он ведет подготовку математиков-прикладников по всем трем указанным выше специализациям. МИИТ готовит также инженеров-электриков по ЭВМ и по АСУ, инженеров по автоматике в промышленности, автоматике, телемеханике и связи на транспорте.

В ФИЗТЕХе математики-прикладники специализируются в области «исследование операций и больших систем».

Чтобы стать математиком-прикладником, вовсе не обязательно стремиться в университеты или в столичные города. Эта возможность открыта любителям математики, физики и их приложений во многих учебных заведениях страны. Все студенты, специализирующиеся по прикладной математике, получают прекрасную математическую подготовку, овладевают дисциплинами общественного и инженерного цикла и вычислительной техникой. На последнем курсе они знакомятся с новейшими ЭВМ, их математическим обеспечением, процессами обработки информации. И самое существенное — овладевают методами прикладной математики, усваивают мировоззрение математика-прикладника. Это означает, что на первый план выдвигается развитие математического мышления, его культуры, а не усвоение некоторого перечня рецептов, алгоритмов, программ, которыми все равно нельзя запастись на все случаи жизни: каждая новая задача связана, как правило, со специфической ситуацией, в которой старые рецепты, алгоритмы, методы уже не работают. Требуются новые — нужно уметь их создавать.

Полученные знания и умение решать конкретные задачи открывают для выпускника широкие и заманчивые перспективы. Научные и проектные институты, конструкторские бюро и лаборатории, вычислительные центры и АСУ богаты широким ассортиментом интересных и сложных проблем, которые ждут своего решения, ждут инженеров-математиков.

---

*) В их числе: линейная алгебра и аналитическая геометрия, математический анализ, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, общая алгебра, теория графов и комбинаторика, численные методы, теория функций комплексной переменной и специальные функции, функциональный анализ, теория вероятностей и математическая статистика, теория случайных процессов, математическая логика, теория информации и кодирования, теория массового обслуживания, теория игр и исследование операций, методы оптимизации, теория надежности и планирования эксперимента, электронные вычислительные машины и программирование, теория алгоритмических языков, элементы и устройства АСУ.

Московский институт инженеров железнодорожного транспорта

В «Кванте» № 7 за 1973 год мы рассказывали о Московском институте инженеров железнодорожного транспорта. В этом номере мы помещаем варианты вступительного письменного экзамена по математике и задачи устного экзамена по физике в 1973 году.

Математика

Вариант 1

(специальности: мосты и тоннели, промышленное и гражданское строительство, экономика строительства, экономика транспорта, эксплуатация транспорта, строительство железных дорог, промышленная теплоэнергетика, тепловозостроение, строительные и дорожные машины).

1. Двое рабочих A и B начали уборку картофеля с участка в 8 часов утра с одинаковой производительностью. В 9 часов к ним присоединился третий рабочий C. В 11 часов B и C ушли, остальную часть участка доделал один A за 6 часов.

За сколько часов каждый рабочий смог бы убрать участок, работая отдельно, если известно, что рабочему C нужно для этого на 5 часов меньше, чем A?

2. Решить неравенство

$$|x^2-3x|+x-2<0.$$

3. Высота правильной треугольной призмы равна h. Прямая, соединяющая центр верхнего основания с серединой стороны нижнего основания, наклонена к плоскости нижнего основания под углом α. Найти полную поверхность призмы.

4. Решить уравнение

$$\sin 3x-4\sin x\cos 2x=0.$$

Вариант 2

(специальности: автоматизированные системы управления, электронные вычислительные машины, автоматика и телемеханика в промышленности).

1. Мальчик и автобус одновременно отправились от железнодорожной станции к пляжу. Через некоторое время мальчик встретил автобус, возвращавшийся с пляжа. Он успел пройти еще некоторое расстояние от места первой встречи с автобусом, когда тот же автобус, идущий второй раз от станции к пляжу, догнал его. Известно, что расстояние между пунктами первой и второй встречи составляет 4/15 расстояния от станции до пляжа. Во сколько раз скорость автобуса больше скорости мальчика?

2. При каких значениях a корень уравнения

$$\frac{a+3}{x+1}-\frac{5-3a}{x-2}=\frac{ax+3}{x^2-x-2}$$

не меньше 1?

3. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб. Одна из диагоналей параллелепипеда равна a и образует с плоскостью основания угол α, а с одной из боковых граней — угол β. Найти объем параллелепипеда.

4. Найти $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=a$.

Вариант 3

(специальность: прикладная математика)

1. Несколько человек купили облигации. Деньги вносили по очереди, причем каждый последующий вносил на 2 рубля больше, чем предыдущий. На облигации пал выигрыш в сумме 460 руб. Выигрыш был разделен пропорционально внесенной каждым сумме денег. Сколько человек участвовало в покупке облигаций, если известно, что их было меньше 20 человек и первый получил при разделе выигрыша 20 руб., а внес целое число рублей.

2. Решить уравнение

$$\sqrt{x+1}-1-\sqrt{\frac{x-1}{x}}=0.$$

3. Найти площадь треугольника, вписанного в окружность, если концы его стороны, равной 20 *см*, отстоят от касательной, проведенной через противолежащую вершину, на 25 *см* и 16 *см*.

4. Известно, что $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=m$. Найти $\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta-\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta$.

Физика

1. По наклонной доске пустили катиться снизу вверх шарик. На расстоянии $l=40$ *см* от начала пути шарик побывал дважды: через $t_1=2$ *с* и $t_2=3$ *с* после начала движения. Определить начальную скорость и ускорение движения шарика, считая его постоянным.

2. Маленький шарик массой m, привязанный к нити, вращается в горизонтальной плоскости, отстоящей от точки подвеса нити на расстояние h. Скорость вращения по величине постоянна. Найти частоту вращения маятника.

3. На стержне длиной 1,5 *м*, который может вращаться вокруг горизонтальной оси, укреплены два тела с массами $m_1=2$ *кг* и $m_2=3$ *кг*. Определить скорость второго тела при переходе стержня из горизонтального в вертикальное положение. Первое тело отстоит от оси вращения на 0,5 *м*, второе — на 1 *м*. Массой стержня пренебречь.

4. Найти время, необходимое математическому маятнику длиной $l=1$ *м*: а) на прохождение расстояния от точки максимального отклонения до положения равновесия; б) на прохождение первой половины этого расстояния; в) на прохождение второй половины этого расстояния.

5. Два одинаковых свинцовых шарика движутся навстречу друг другу со скоростями $v_1 = 40$ *м/с* и $v_2 = 20$ *м/с*. Определить, на сколько градусов они нагреются в результате неупругого центрального столкновения. Удельная теплоемкость свинца $c = 130$ *дж/кг·град*.

6. Определить среднюю плотность планеты ρ, продолжительность суток на которой $t = 6$ *ч*, если на ее экваторе пружинные весы показывают на 10% меньший вес, чем на полюсе. Гравитационная постоянная $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ *м³/кг·с²*.

7. Электромотор питается от батареи с э. д. с. 12 *в*. Какую механическую мощность развивает мотор при протекании по его обмотке тока 2 *а*, если при полном затормаживании якоря по цепи течет ток 3 *а*?

8. Электронагревательные приборы, на которых помечено $P_1=600$ *вт*; $U_1 = 220$ *в* и $P_2= 400$ *вт*; $U_2= 220$ *в*, включены последовательно в сеть с напряжением 220 *в*. Какая мощность будет выделяться на каждом из них?

9. В магнитном поле, индукция которого $B = 0{,}05$ *тл*, вращается стержень длиной $l = 1$ *м* с постоянной угловой скоростью $\omega = 20$ *рад/с*. Ось вращения проходит через конец стержня и параллельна силовым линиям магнитного поля. Найти разность потенциалов, возникающую на концах стержня.

10. По горизонтальным рельсам, расположенным в вертикальном магнитном поле с индукцией $B = 10^{-2}$ *тл*, скользит проводник длиной $l = 1$ *м* с постоянной скоростью $v = 10$ *м/с*. Концы рельсов замкнуты на постоянное сопротивление $R = 2$ *ом*. Определить, какое количество тепла выделяется на сопротивлении за 1 секунду. Сопротивлением рельсов и проводника пренебречь.

11. Рубиновый лазер излучает в импульсе $N = 2 \cdot 10^{19}$ световых квантов с длиной волны $\lambda = 6{,}94 \cdot 10^{-5}$ *см*. Чему равна средняя мощность вспышки лазера, если ее длительность $\tau = 2 \cdot 10^{-3}$ *с*?

В. И. Коровин,
Ю. М. Лужнов,

Московский институт электронного машиностроения

В «Кванте» № 7 за 1973 год мы уже рассказывали о МИЭМе. В этом номере мы публикуем варианты вступительного письменного экзамена по математике в 1973 году.

Вариант 1

1. Прямоугольный участок площадью 420 *м²* нужно обнести проволочным забором и разгородить по диагонали пополам. Определить размеры участка, если на это потребовалось 111 *м* проволоки. Какой формы прямоугольный участок с той же площадью нужно выбрать, чтобы на это потребовалось наименьшее количество проволоки?

Решить уравнения

2. $\sqrt{x+1} - \sqrt{a-x} = 1$, где $a>0$.

3. $$\sqrt{2\sin(x+2) - \sqrt{2}\cos^2 x} = \sqrt{\sin x(2\cos 2 - \cos x)}.$$

4. Решить неравенство
$$(\log_3^2 x^2 + 2\log_3 x - 2)(2^{2x} - 9)^2 < 0.$$

5. Один из двухгранных углов трехгранного угла равен A; прилежащие к данному двугранному углу плоские углы равны α и β. Найти третий плоский угол.

Вариант 2

1. Для изготовления проволочного каркаса прямоугольного параллелепипеда, у которого одна из сторон основания вдвое больше другой, потребовалось 140 *см* проволоки. Найти стороны основания параллелепипеда, если его полная поверхность равна 504 *см²*. Какие размеры должен иметь параллелепипед данной формы и данной поверхности, чтобы на изготовление его проволочного каркаса потребовалось бы наименьшее количество проволоки?

Решить уравнения

2. $\sqrt{x} - \sqrt{a-x} = \sqrt{2}$.

3. $$\sqrt{\sin x(2-\cos x)} = \sqrt{2\sin x - \operatorname{tg} 3\cos x(2-\cos x)}.$$

4. Решить систему неравенств
$$\begin{cases} \log_{1/81}^2 x - \log_{1/81} x - 1 < 0, \\ x^2 - 13x + 30 < 0. \end{cases}$$

5. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом α. Все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одинаковым углом α. Определить радиус шара, вписанного в пирамиду.

В. А. Тонян

Московский авиационный институт

О МАИ мы подробно рассказывали в «Кванте» № 6 за 1973 год. Сейчас на всех факультетах МАИ, кроме факультета прикладной математики, все вступительные экзамены проводятся в письменной форме, причем по математике проводятся два экзамена: по алгебре и по геометрии с тригонометрией. В варианты по математике и по физике наряду с примерами и задачами включаются теоретические вопросы. Абитуриенты, поступающие на факультет прикладной математики, сдают по математике устный и письменный экзамены, поэтому для них варианты письменного экзамена по математике не содержат теоретического вопроса. Помещенные ниже материалы познакомят читателей с вариантами заданий, предлагавшимися на вступительных экзаменах в МАИ в 1973 году.

Математика

Факультет прикладной математики

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{\frac{1-x}{2-x}}=1.$$

2. Из двух городов навстречу друг другу одновременно выехали автобус и такси. Когда такси прошло половину пути, автобусу осталось до конца маршрута 19,2 *км*, а когда автобус проехал половину пути, такси осталось до конца маршрута 12 *км*. Найти отношение скоростей такси и автобуса, если скорости такси и автобуса на всем пути постоянны, и каждый должен приехать в тот город, из которого выехал другой.

3. При каких действительных значениях a сумма квадратов корней уравнения

$$2\log_4(2x^2-x+2a-4a^2)+\log_{0.5}(x^2+ax-2a^2)=0$$

больше единицы?

4. Две окружности радиусов R и $\frac{R}{2}$ касаются друг друга внешним образом. Один из концов отрезка длины $2R$, образующего угол 30° с линией центров, совпадает с центром окружности меньшего радиуса. Какая часть отрезка лежит вне окружностей?

5. Вершина правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ совпадает с отрезком, соединяющим центры верхнего и нижнего оснований куба. Стороны основания $ABCD$ параллельны соответствующим сторонам основания куба. Найти объем части куба, лежащей внутри пирамиды, если $\angle ASB=\operatorname{arctg}{}^4/_3$, а ребро куба равно единице.

Письменный экзамен по алгебре

Вариант 2

1. Решение квадратного уравнения. Формулы Виета.

2. Решить уравнение

$$2^{x-1}(2^x+3^{x-1})=9^{x-1}.$$

3. Найти сумму первых семи членов геометрической прогрессии, сумма первого и четвертого членов которой равна 9, а сумма второго и третьего равна 6.

4. Скорый поезд проходит расстояние между станциями на 3,5 часа быстрее товарного. Если бы каждый поезд шел то время, которое тратит другой поезд на путь между станциями, то скорый поезд прошел бы на 350 *км* больше, чем товарный. Если бы скорость каждого поезда была увеличена на 10 *км/ч*, то скорый поезд прошел бы расстояние между станциями на 2,4 часа быстрее товарного. Вычислить скорости поездов и расстояние между станциями.

5. При каких значениях a неравенство

$$\frac{x^2\log_2 a^2+x+\log_a 2}{2x-3-x^2}<1$$

выполняется для любых значений x?

Письменный экзамен по геометрии

Вариант 3

1. Доказать теорему синусов.

2. Вычислить $(\sin\alpha-\sin\beta)\sin\alpha+(\cos\alpha-\cos\beta)\cos\alpha$, если $\sin\frac{\alpha-\beta}{4}=a$.

3. Решить уравнение:

$$(1-\operatorname{tg}x)(1+\sin 2x)=1+\operatorname{tg}x.$$

4. В трапеции $ABCD$ проведены диагонали AC и BD, пересекающиеся в точке F. Из вершины C проведена прямая CK, параллельная боковой стороне AD, которая пересекает продолжение BD в точке L так, что $DF=BL$. Найти отношение $AB:CD$.

5. Круг радиуса R и равносторонний треугольник со стороной $R\sqrt{3}$ лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях. Одна из сторон треугольника лежит в плоскости круга. Отрезок, соединяющий центры круга и треугольника, образует с их плоскостями углы, равные 30°. Найти длину части стороны треугольника, лежащей внутри круга.

Физика

Билет 1

1. Изоляторы и проводники. Закон сохранения электрических зарядов.

2. Какое количество теплоты выделится при конденсации 20 *г* водяного пара при 100° С и охлаждении полученной воды до 20° С? Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ *дж/кг·град*. Удельная теплота парообразования воды при 100° С $r = 539$ *ккал/кг*.

3. Груз весом 100 *н* лежит на абсолютно гладкой наклонной плоскости, образующей угол 30° с горизонтом. Какую силу нужно приложить к грузу параллельно плоскости, чтобы удержать его в равновесии? Найти силу реакции плоскости.

4. Два шарика с массами $m_1 = 2$ *г* и $m_2 = 3$ *г* движутся в горизонтальной плоскости со скоростями, соответственно равными $v_1 = 6$ *м/с* и $v_2 = 4$ *м/с*. Направления движения шариков составляют друг с другом угол $\alpha = 90°$. Шарики неупруго соударяются. Чему равен суммарный импульс этих шариков после удара?

5. На расстоянии $d = 0{,}14$ *м* от вершины вогнутого зеркала находится предмет, высота которого $l = 0{,}06$ *м*. Фокусное расстояние зеркала $F = 0{,}11$ *м*. Найти высоту L изображения предмета.

Билет 2

1. Конденсаторы. Емкость плоского конденсатора.

2. Летчик стреляет с самолета из пушки. Скорость самолета относительно Земли 900 *км/ч*. Скорость снаряда относительно самолета 750 *м/с*. Определить начальную скорость снаряда относительно Земли, если а) выстрел производится в направлении полета, б) в противоположную сторону.

3. Какой массы состав может вести электровоз равномерно вверх по уклону 0,004, если сила тяги электровоза равна 250 *кн*, а коэффициент трения $k = 0{,}06$?

4. В радиатор автомобиля влили 2 *л* воды при 40° С, а затем добавили 4 *л* при 85° С. Определить температуру смеси.

5. Какая сила действует на проводник длиной 10 *см* в однородном магнитном поле с магнитной индукцией 2,6 *тл*, если ток в проводнике 12 *а*, а угол между направлениями тока и линиями индукции а) 90°, б) 30°?

Билет 3

1. Законы преломления света. Полное отражение света.

2. Скорость распространения волны в среде равна 200 *м/с*. Вычислить период колебаний, если ближайшее расстояние между точками, колеблющимися в противоположных фазах, равно 20 *см*.

3. Магнитный поток, пронизывающий контур проводника, равномерно изменился на 0,6 *вб* так, что э. д. с. индукции оказалась равной 1,2 *в*. Найти время изменения магнитного потока и силу индукционного тока, если сопротивление проводника 0,24 *ом*.

4. На горизонтальном участке пути автомобиль двигался со скоростью 72 *км/ч* в течение 10 *мин*, а подъем преодолевал со скоростью 36 *км/ч* в течение 20 *мин*. Чему равна средняя скорость на всем пути?

5. Пассажирский реактивный самолет имеет 4 двигателя, развивающих силу тяги 10 *Т* каждый, и летит со скоростью 900 *км/ч*. Сколько керосина израсходуют двигатели на перелет в 4000 *км*? К. п. д. двигателей 0,25. Теплота сгорания керосина $q = 46{,}2 \cdot 10^6$ *дж/кг*.

Билет 4

1. Фотоэлектрический эффект. Фотоэлементы и их применение.

2. Человек массой 60 *кг* бежит со скоростью 8 *км/ч*. Догнав тележку, движущуюся со скоростью 2,9 *км/ч*, он вскакивает на нее. Какова будет скорость тележки после этого, если ее масса 80 *кг*?

3. В стакане находится 100 *г* воды при температуре 10° С. В нее опущено 40 *г* льда при температуре —10° С. Что останется в стакане после уравнивания температур?

Удельная теплоемкость воды $c_1 = 4200$ *дж/кг·град*. Удельная теплоемкость льда $c_2 = 2100$ *дж/кг·град*. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ *дж/кг*.

4. Тело свободно падает с высоты 80 *м*. Какой путь проходит оно в последнюю секунду падения?

5. При силе тока 10 *а* выделяется во внешней цепи мощность 200 *вт*, а при силе тока 15 *а* мощность во внешней цепи 240 *вт*. Каково внутреннее сопротивление, э. д. с. и сила тока короткого замыкания генератора?

Билет 5

1. Законы Бойля — Мариотта и Гей-Люссака.

2. Человек высотой $h = 1{,}75$ и находится на расстоянии $r = 6$ *м* от столба. На каком расстоянии от себя человек должен положить горизонтально на землю плоское зеркало, чтобы видеть в него верхушку столба высотой $H = 7$ *м*?

3. В каком диапазоне длин волн работает радиопередатчик, если емкость его колебательного контура может меняться от 60 *пф* до 240 *пф*, а индуктивность составляет 50 *мкгн*?

4. Какова высота телевизионной башни в Останкине, если шарик, падая с башни без начальной скорости, последние 185 *м* пути пролетел за 2 *с*? Сопротивление воздуха не учитывать.

5. Самолет при разбеге имеет максимальную скорость $v = 75$ *м/с*, длина разбега перед взлетом $S = 500$ *м*, масса самолета $m = 19$ *т*, коэффициент трения $k = 0{,}02$. Движение во время разбега считать равноускоренным. Какова должна быть минимальная мощность двигателей, чтобы обеспечить взлет самолета?

Московское высшее техническое училище

Московское ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени высшее техническое училище имени Н. Э. Баумана — старейшее техническое учебное заведение нашей страны, основанное в 1830 году. Сейчас МВТУ готовит инженеров широкого профиля по новой технике для работы в научно-исследовательских институтах, конструкторских бюро и на заводах машиностроительной и приборостроительной промышленности.

Подготовка инженеров по специальностям МВТУ, охватывающим почти все отрасли новой техники в машиностроении и приборостроении, осуществляется по индивидуальным планам и программам с широкой теоретической, общеинженерной, специальной и практической подготовкой.

При МВТУ организовано подготовительное отделение, которое готовит слушателей для поступления на дневные факультеты училища.

Ниже мы помещаем варианты письменной работы по математике и билеты устного экзамена по физике в МВТУ в 1973 году.

Математика

Вариант 1

1. Трое рабочих могут выполнить работу за 1 час. 20 мин., работая вместе. Первый из них, работая один, может выполнить эту работу вдвое скорее третьего и на 1 час скорее второго. За какое время каждый, работая отдельно, может выполнить эту работу?

2. В куб со стороной a вписан шар. Определить радиус другого шара, касающегося трех граней куба и первого шара.

3. Решить уравнение
$$1-\sin^4 x-\frac{5}{3}\cos^4 x=0.$$

4. Решить уравнение
$$10^{1+x^2}-10^{1-x^2}=99.$$

5. Решить неравенство
$$\frac{3}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x}>2.$$

Вариант 2

1. Определить бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, в которой второй член равен 6, а сумма членов равна 1/8 суммы квадратов членов.

2. Через гипотенузу прямоугольного треугольника проведена плоскость, наклоненная к катетам треугольника под углами α и β соответственно. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью треугольника.

3. Решить уравнение
$$\sin x+\cos x\cdot\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=-\sqrt{3}.$$

4. Решить уравнение
$$\log_3^2 4x-\log_3 12x=1.$$

5. Решить неравенство
$$\log_{1,5}\frac{2x-8}{x-2}<0.$$

Физика

Билет 1

1. Давление атмосферы. Опыт Торричелли. Величина атмосферного давления. Единицы измерения давления.

2. Спектры испускания. Спектры поглощения. Понятие о спектральном анализе.

3. Предмет высотой 5 *см* находится на расстоянии 12 *см* от вогнутого зеркала с фокусным расстоянием 10 *см*. Где и какого размера получится изображение предмета?

Билет 2

1. Основные положения молекулярно-кинетической теории, ее опытные обоснования. Броуновское движение. Диффузия в газах, жидкостях и твердых телах. Взаимодействие молекул.

2. Ход лучей в призме и плоскопараллельной пластинке. Полное внутреннее отражение. Предельный угол.

3. Под каким углом к горизонту необходимо бросить тело, чтобы горизонтальная дальность его полета была вдвое больше высоты подъема? Сопротивление воздуха не учитывать.

Билет 3

1. Магнитное поле прямого проводника с током и катушки с током. Действие магнитного поля на ток.

2. Энергия кинетическая и потенциальная. Переход потенциальной энергии в кинетическую и обратно. Закон сохранения энергии в механике. Единицы измерения энергии.

3. В двух баллонах газобаллонного автомобиля содержится газ (горючее для двигателя) под давлением 200 *ат*. Емкость каждого баллона 80 *л*. Сколько килограммов газа было израсходовано за время поездок, если давление в баллонах понизилось до 100 *ат*? Температура 0° С. Плотность горючего при нормальных условиях 0,6 *кг/м*³

Ленинградский государственный университет

Ленинградский ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени государственный университет им. А. А. Жданова готовит специалистов по математике и физике на трех факультетах.

Математико-механический факультет имеет специальности: математика, механика, астрономия и гидроаэродинамика.

Студенты физического факультета получают специальности: физика, геофизика, радиофизика и электроника.

Факультет прикладной математики — процессов управления выпускает специалистов по прикладной математике.

Вступительные экзамены на математико-механический факультет и факультет прикладной математики — процессов управления проводятся в августе, а на физический факультет — в июле. Ниже мы приводим варианты письменного вступительного экзамена по математике и задачи устного экзамена по физике в ЛГУ в 1973 году.

Математика

Вариант 1

(математико-механический факультет и факультет прикладной математики — процессов управления)

1. Машинно-тракторная станция должна послать в совхоз для выполнения определенной работы некоторое количество тракторов, причем известно, что 10 тракторов выполнят эту работу за 12 рабочих дней. Кроме того, известно, что совхоз выплачивает в течение всего периода работ в совхозе ремонтной бригаде 30 руб. за 1 день и каждому трактористу 4 руб. 80 коп. за 1 день работы в совхозе и 4 руб. за перегон трактора в совхоз и обратно (в течение периода работ тракторы находятся в совхозе). При каком количестве тракторов суммарная оплата рабочим за выполнение всех работ будет наименьшей? Чему равна минимальная оплата рабочим?

2. Решить уравнение

$$(2+a)\cos^2 x+\sin x\cos x=(1-a)\sin^2 x$$

при всех значениях параметра a.

3. Выбрать число b так, чтобы наибольшее значение функции

$$|-2x^2+x+b|$$

на промежутке $0\leqslant x\leqslant 1$ было наименьшим.

4. В прямоугольнике $ABCD$ дано: $AB=a$, $AD=b$. Найти на стороне AB точку E, для которой $\angle CED=\angle AED$.

5. В конусе высота равна диаметру основания. Через некоторую образующую конуса проведена плоскость, касательная к боковой поверхности конуса, и в этой плоскости через вершину конуса проведена прямая под углом α к образующей. Найти угол, который составляет проведенная прямая с плоскостью основания.

Вариант 2

(химический и психологический факультеты и экономический факультет (кроме отделении политэкономии))

1. Из сосуда емкостью в v литров, наполненного p-процентным раствором кислоты, отлили некоторое количество раствора и добавили такое же количество q-процентного раствора ($q<p$). Крепость полученного раствора оказалась в k раз меньше крепости раствора, который получится, если при переливании вместо q-процентного раствора использовать раствор в 2 раза большей крепости. Сколько было израсходовано q-процентного раствора?

2. Решить неравенство

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}>\frac{x}{2}.$$

3. Решить уравнение

$$(\cos 2x+\cos x+1)^2=$$
$$=2(2\cos x+1)(\cos 2x-\cos x).$$

4. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) проведена медиана AD. Найти угол BAD, если угол при вершине B равен α.

5. В правильной треугольной пирамиде известны радиус r круга, описанного около основания, и угол α наклона боковой грани к плоскости основания. Найти радиус описанного шара.

Вариант 3

(геологический факультет и отделение политэкономии экономического факультета)

1. Рабочий по плану за несколько дней должен был изготовить 260 деталей. Первые 2 дня он работал по плану, а в последующие дни рабочий перевыполнял план, изготовляя ежедневно на 10 деталей больше, чем это предусматривалось планом. Поэтому уже за 2 дня до срока было изготовлено 268 деталей. Сколько деталей должен был изготовлять рабочий по плану за один день?

2. Решить уравнение

$$2\log_{\sin x}\operatorname{tg} x+\log_{\operatorname{tg} x}\sin x=3.$$

3. На плоскости найти геометрическое место точек, координаты которых x и y удовлетворяют уравнению

$$x=|x-y^2|+y.$$

4. Определить площадь трапеции, если ее основания равны 6 *см* и 11 *см*, одна из боковых сторон — 4 *см*, а сумма углов при нижнем основании равна $\pi/2$.

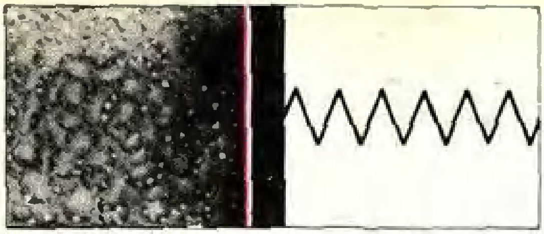


Рис. 1.

5. Две равные правильные четырехугольные пирамиды расположены в пространстве так, что их основания совпадают, а вершины расположены по разные стороны от общей плоскости основания. Известно, что сторона основания равна a, а плоский угол при вершине равен α. Найти радиус шара, вписанного в восьмигранник, образованный этими пирамидами.

Вариант 4

(биолого-почвенный и географический факультет)

1. Два велосипедиста выезжают одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми равно 54 *км*, и через 2 часа встречаются. Не останавливаясь, они продолжают движение с той же скоростью, и второй прибывает в A на 54 минуты раньше, чем первый в B. Определить скорости велосипедистов.

2. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x}-1}\geqslant 0.$$

3. Решить уравнение

$$\log_{\operatorname{tg} x}(2+4\cos^2 x)=2.$$

4. К окружности, вписанной в треугольник с периметром 18 *см*, проведена касательная параллельно основанию треугольника. Отрезок касательной между боковыми сторонами 2 *см*. Найти основание треугольника.

5. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, а боковое ребро равно l. Через центр основания проведена плоскость параллельно одной из сторон основания и параллельно противоположному боковому ребру. Найти площадь сечения.

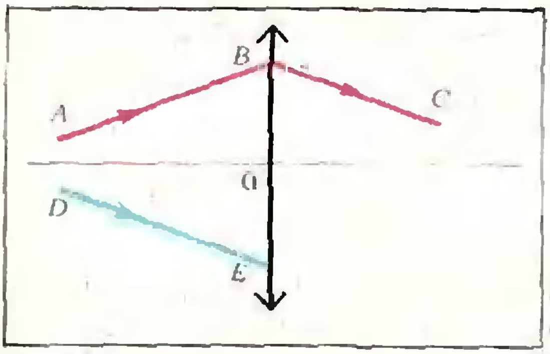


Рис. 2.

Физика

(математико-механический факультет, факультет прикладной математики — процессов управления, физический факультет)

1. Свинцовая пуля массы m, летящая со скоростью v, попадает в первоначально покоящийся свинцовый шар массы M и застревает в нем (удар лобовой). При каком отношении масс пули и шара они нагреются до наибольшей температуры?

2. Нижние концы очень легкой лестницы-стремянки соединены веревкой. Найти ее натяжение T, когда электромонтер весом P поднялся по стремянке до ее середины. Пол идеально гладкий. Каждая сторона лестницы составляет с полом угол α.

3. В ящике, перекрытом перегородкой (рис. 1), находится один моль одноатомного идеального газа при нормальных условиях. Сразу за перегородкой расположена в свободном состоянии пружина с поршнем, находящимся в пустоте. Коэффициент упругости пружины k. Перегородку убирают. Какие давление, температура и объем установятся в системе, если нет теплового взаимодействия с внешней средой? В новом положении равновесия пружина сжата не до отказа. Площадь поршня S. Теплоемкостью поршня пренебречь.

4. В блюдце налито m *г* воды, а сверху ставится перевернутый вверх дном нагретый стакан с тонкими стенками. До какой абсолютной температуры T_1 (наименьшей) должен быть нагрет стакан вместе с находящимся в нем воздухом, чтобы после остывания до температуры T_0 окружающего воздуха в него оказалась бы втянутой вся вода? Атмосферное давление p_a, площадь сечения стакана S, высота h, удельный вес воды d. Объем налитой воды меньше объема стакана. Явлениями испарения, поверхностного натяжения и расширения стакана пренебречь. Блюдце считать широким, так что высота налитой в него воды мала.

5. Найти механическую работу, совершенную электрическими силами при повороте ручки настройки конденсатора переменной емкости, подключенного к батарее с э. д. с. $E=300$ *в*. Емкость при этом меняется от $C_1=10$ *мф* до $C_2=100$ *мф*.

6. Облучая металлический шар светом, наблюдаем фотоэффект. Как изменится красная граница фотоэффекта, если на шар поместить положительный заряд q? Радиус шара R_0. Вылетающие электроны регистрируются на расстоянии $R\gg R_0$ от центра шара.

7. На рисунке 2 показан ход луча ABC через линзу. Построить путь луча DE после его прохождения через линзу.

ИНФОРМАЦИЯ

«Прикладная математика» в техникумах

Нет сомнений в том, что читателям журнала «Квант» будет интересно познакомиться с одной из самых молодых и в то же время очень увлекательных специальностей, связанных с математикой. Называется эта специальность — «прикладная математика».

Специальность эта очень дефицитна, в первую очередь в связи с большим развитием электронно-вычислительной техники и связанным с этим значительным расширением сферы применения математических методов. Сейчас в самых различных отраслях народного хозяйства нужна целая армия математиков-прикладников. Они должны уметь применять математические методы, участвуя в решении разнообразных прикладных задач, начиная от постановки задачи и кончая последним этапом — составлением программы решения задачи на электронно-вычислительной машине. Эти специалисты должны уметь с помощью инженера-математика или самостоятельно создавать алгоритмы решения задач и записывать их в виде программ на языке конкретной машины или на одном из алгоритмических языков.

В средние специальные учебные заведения на специальность «прикладная математика» принимаются юноши и девушки, окончившие 8 или 10 классов общеобразовательной средней школы. В первом случае курс обучения длится 2 года 10 месяцев, во втором — только 1 год 10 месяцев, так как окончившие 10 классов принимаются сразу на второй курс.

Недавно Министерство высшего и среднего специального образования СССР утвердило новый учебный план. По этому плану все предметы обязательного курса объединены в общеобразовательный цикл, общематематический цикл (математический анализ, линейная алгебра и аналитическая геометрия, математическая логика, теория вероятностей и математическая статистика) и специальный цикл, состоящий из двух частей:

а) общеспециальные предметы (алгоритмические языки, программирование и вычислительная математика; математическое программирование; основы вычислительной техники и организация вычислительных работ; исследование операций);

б) профилирующие предметы (основы экономики и применение математических методов в решении ее задач; применение математических методов в системах автоматизации и управления, а также в естественнонаучных исследованиях).

В течение всего курса обучения учащиеся проходят 3 вида практики. На 2-м курсе учащиеся в процессе учебной практики составляют программы для решения небольших учебных задач на электронно-вычислительных машинах. На 3-м курсе в рамках технологической практики учащиеся под руководством опытных инженеров-математиков пишут курсовые работы, решая задачи, имеющие практическое значение. Вслед за этой практикой идет преддипломная, которая является непосредственной подготовкой к работе над дипломным проектом.

Для поступления в средние специальные учебные заведения по специальности «прикладная математика» необходимо сдать 2 экзамена: устный по математике и письменный по литературе.

Приводим адреса средних специальных учебных заведений, где имеется специальность «прикладная математика»:

1. Московский математический техникум — г. Москва, 105264, Измайловский бульвар, д. 19. Общежития ММТ не имеет, и **принимаются в техникум только лица, постоянно прописанные в Москве или Московской области.**
2. Ленинградский механический техникум — г. Ленинград, Песочная набережная, д. 14 (общежития техникум не имеет).
3. Днепропетровский техникум автоматики и телемеханики — г. Днепропетровск, ул. Дзержинского, д. 2/4.
4. Ростовский электро-технический техникум — г. Ростов-на-Дону, 24-я линия, д. 2/15.
5. Челябинский политехнический техникум — г. Челябинск, ул. Гагарина, д. 7.
6. Средне-технический факультет Тульского политехнического института — г. Тула, проспект Ленина, д. 90.
7. Ковровский энерго-механический техникум — Владимирская обл., г. Ковров, ул. Шмидта, д. 48.

Ю. Д. Кабалевский

Телевидение готовит в вуз

На отделении математики московских телекурсов в мае рассматривались темы «вписанные и описанные шары», «цилиндр и конус», «решение задач из различных разделов стереометрии», «о доказательствах в математике», «доказательство неравенств». По темам стереометрии мы предлагаем для самостоятельного решения ряд типичных задач из домашних заданий.

Математика

1. (МИФИ, 1973). По окружности в противоположных направлениях движутся два тела, причем первое — равномерно со скоростью v, а второе — равноускоренно с линейным ускорением a. В начальный момент они находились в одной точке окружности A, причем скорость второго тела была равна нулю. Через какое время произойдет первая встреча этих тел, если вторая встреча произойдет в точке A?

2. (МИФИ, 1973). В основании четырехугольной пирамиды лежит квадрат со стороной a. Плоскости, проходящие через вершину пирамиды и диагонали основания, наклонены к плоскости основания соответственно под углами φ и ψ. Найти объем пирамиды, если ее высота пересекает одну из сторон основания пирамиды.

3. (МИФИ, 1973). Высота прямого кругового конуса равна H. Две взаимно перпендикулярные образующие делят окружность основания на две дуги, одна из которых вдвое короче другой. Найти объем конуса.

4. На высоте конуса как на диаметре построена сфера. Площадь части поверхности сферы, лежащей вне конуса, составляет $^1/_2$ площади основания конуса. Найти угол между высотой и образующей конуса.

5. В шар радиуса R вписана прямая треугольная призма. Основанием призмы служит прямоугольный треугольник с острым углом α, а ее наибольшая боковая грань есть квадрат. Найти объем призмы.

6. (МГУ, 1972). В треугольной пирамиде $SABC$ известны плоские углы при вершине S: $\angle BSC = 90°$, $\angle ASC = \angle ASB = 60°$. Вершины A, S и середины ребер SB, SC, AB, AC лежат на поверхности шара радиуса 3 *м*. Доказать, что ребро SA является диаметром этого шара, и найти объем пирамиды.

7. (МГУ, 1972). Три шара попарно касаются друг друга и некоторой плоскости. Точки касания шаров с плоскостью образуют прямоугольный треугольник с катетом, равным 3 *см*, и противоположным углом в 30°. Определить радиусы данных шаров.

В конце мая на телекурсах были изучены темы «о доказательствах в математике» и «доказательство неравенств». По этим темам мы предлагаем вам ряд задач.

8. Доказать, что если $a+b=1$, где a и b — действительные числа, то

а) $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$; б) $a^4+b^4\geqslant\frac{1}{8}$.

9. Доказать, что если $a, b, c, d>0$, то
$$\frac{a+b+c+d}{4}\geqslant\sqrt[4]{abcd},$$
причем знак равенства имеет место лишь при $a=b=c=d$.

10. Доказать, что если $a_1>0$, $a_2>0,\ldots, a_n>0$, $a_1a_2\ldots a_n=1$, $n\geqslant 2$, то
$$a_1+a_2+\ldots+a_n\geqslant n,$$
при этом знак равенства имеет место лишь при $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

11. Доказать, что если $a_1>0$, $a_2>0,\ldots, a_n>0$, то
$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n},$$
причем знак равенства имеет место лишь при $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

12. Доказать, что если положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ составляют арифметическую прогрессию, то
$$\sqrt{a_1a_n}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_n}{2}.$$

13. Доказать, что при $n\geqslant 2$ выполняется неравенство $n^n\leqslant(n!)^2$.

14. Доказать, что если $\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{\pi}{2}$, то
$$\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi(\sin\varphi-\cos\varphi)}\geqslant 4.$$

15. Доказать, что если $\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{\pi}{2}$, то
$$\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi(\sin\varphi-\cos\varphi)}>8.$$

Физика

На отделении физики телевизионных физико-математических курсов для поступающих в вузы в апреле и мае читались лекции и проводились практические занятия по разделам «Геометрическая оптика», «Волновые и квантовые свойства света», «Строение атома.

Атомное ядро». Предлагаем читателям журнала несколько типичных для домашних заданий задач по этим разделам.

1. В лифте на невесомой пружине, длина которой в нерастянутом состоянии $l = 60$ *см*, подвешен точечный источник света массой $m = 80$ *г*. Расстояние от точки подвеса пружины до пола покоящегося лифта $L = 180$ *см*. Определить, во сколько раз изменится освещенность пола под источником, если лифт начнет двигаться вверх равноускоренно с ускорением $a = 2{,}4$ *м/с²*. Коэффициент жесткости пружины $k = 1{,}6$ *н/м*.

2. На высоте $h = 1{,}5$ *м* от освещаемой поверхности расположен точечный источник света, над которым параллельно поверхности расположили полупрозрачное зеркало, отражающее $k = 0{,}6$ падающего на него света. При этом освещенность поверхности под источником увеличилась в $m = 1{,}2$ раза. Найти высоту H, на которой расположено зеркало.

3. Изображение предмета в вогнутом сферическом зеркале в 2 раза больше самого предмета. Определить, на сколько надо передвинуть предмет вдоль оптической оси, чтобы его изображение оказалось в 3 раза меньше самого предмета. Фокусное расстояние зеркала $F = 1$ *м*.

4. Параллельный пучок лучей белого света падает нормально на трехгранную призму с преломляющим углом $\varphi = 30^\circ$. Найти угол δ между лучами красного и синего цвета после прохождения призмы. Показатели преломления призмы для красного и синего цветов равны соответственно $n_к = 1{,}51$ и $n_с = 1{,}54$.

5. На глубине $h = 2{,}5$ *м* под водой находится источник света. На поверхности воды плавает квадратный плот, причем его центр находится непосредственно над источником. Какой должна быть минимальная длина l стороны плота, чтобы ни один луч света не выходил из воды в воздух? Показатель преломления воды $n = 1{,}33$.

6. Предмет находится на расстоянии $l = 1$ *м* от экрана. Если между предметом и экраном поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием $F = 0{,}2$ *м*, то резкое изображение предмета на экране будет при двух положениях линзы. Найти расстояние x между этими положениями линзы.

7. Собирающая линза, находящаяся в воздухе, имеет фокусное расстояние $F_1 = 30$ *см*. Если ее поместить в жидкость с показателем преломления $n = 1{,}63$, то линза превращается в рассеивающую с фокусным расстоянием $F_2 = -120$ *см*. Определить показатель преломления материала линзы.

8. Дифракционная решетка, имеющая $N = 200$ штрихов на миллиметр, освещается нормальным к решетке пучком лучей белого света. Полученный на экране, параллельном решетке, дифракционный спектр первого порядка имеет ширину (расстояние между первыми максимумами красного света с длиной волны $\lambda_к = 7{,}4 \cdot 10^{-5}$ *см* и синего с $\lambda_с = 4{,}4 \cdot 10^{-5}$ *см*) $\Delta l = 60$ *мм*. Определить расстояние от дифракционной решетки до экрана.

9. Точечный источник света, потребляющий электрическую мощность $P = 10$ *вт*, излучает монохроматический свет частоты $\nu = 5 \cdot 10^{14}$ *гц*. Определить максимальное расстояние, с которого человек может видеть источник, если наименьший световой поток, воспринимаемый глазом, должен содержать $k = 10^3$ фотонов в секунду, а площадь зрачка $S = 10$ *мм²*. Световая отдача лампочки $n = 0{,}02$ от потребляемой мощности. Поглощением света в атмосфере пренебречь. Постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ *дж·с*.

10. Работа выхода электронов для никеля $A = 5{,}2$ *эв*. Найти скорость электронов, вылетающих с поверхности никеля при освещении его ультрафиолетовым светом с длиной волны $\lambda = 2 \cdot 10^{-5}$ *см*. Масса электрона $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ *кг*, постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ *дж·с*, скорость света $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ *м/с*.

11. Протон начинает двигаться в электрическом поле из состояния покоя и приобретает скорость $v = 2{,}8 \cdot 10^8$ *м/с*. Найти ускоряющую разность потенциалов, учитывая зависимость массы от скорости. Масса покоя протона $m_0 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ *кг*, заряд $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *к*, скорость света $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ *м/с*.

12. Ионизационная камера электрической емкостью $C = 6{,}0 \cdot 10^{-11}$ *ф* была заряжена до разности потенциалов $\Delta\varphi_1 = 600$ *в*. После облучения камеры γ-лучами разность потенциалов на ней снизилась до $\Delta\varphi_2 = 200$ *в*. Найти дозу излучения, прошедшего через камеру, в рентгенах, если объем камеры $V = 60$ *см³*. Один рентген создает в сухом воздухе $n = 2{,}08 \cdot 10^9$ пар ионов в одном кубическом сантиметре. Заряд иона $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *к*.

13. При единичном акте деления ядра урана выделяется энергия $W = 200$ *Мэв*. Определить, за какой промежуток времени первоначальная загрузка урана в реакторе $m = 10$ *кг* уменьшится на $\eta = 2\%$. Мощность реактора $P = 1$ *Мвт*.

14. Определить энергию, выделяющуюся при синтезе $m = 1{,}0$ *г* гелия из дейтерия и трития по следующей реакции:

$$_1H^2 + {_1H^3} \rightarrow {_2He^4} + {_0n^1},$$

если массы $_1H^2$, $_1H^3$, $_2He^4$, $_0n^1$ соответственно равны $m_1 = 2{,}01410$ *аем*, $m_2 = 3{,}01605$ *аем*, $m_3 = 4{,}00260$ *аем*, $m_4 = 1{,}00866$ *аем*. Одна атомная единица массы соответствует энергии $\Delta W = 931$ *Мэв*.

А. Н. Борзяк,
А. Я. Диденко,
П. Т. Дыбов,
И. А. Дьяконов,
В. В. Рощупкин

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. Почему, когда вы наливаете воду в бутылку через воронку, вода в воронке иногда «застревает»?

2. Человек сидит на стуле и откидывается назад так, что только-только сохраняет равновесие. Что произойдет, если человек будет поднимать ноги, выпрямив колени?

Рисунки Э. Назарова.

3. На почтовом ящике написано: «Выемка писем производится 5 раз в день с 7 до 19 часов». И, действительно, в первый раз почтальон подходит к ящику в 7 часов утра, а в последний — в 7 часов вечера.

Через какие интервалы времени вынимают письма из ящика?

4. При ревизии торговых книг магазина одна из записей в книге оказалась залитой чернилами (см. рисунок). Невозможно было разобрать число проданных метров, но было ясно, что число это — целое. Было также ясно, что вырученная сумма не превосходит 1000 рублей.

Мог ли ревизор восстановить запись?

5. Найти двузначное число, равное сумме числа десятков и квадрата числа единиц.

Фигурные числа

А. Д. Бендукидзе

I

Вот я нарисовал три точки (рис. 1). Нарисовал так, что если их попарно соединить, получится правильный (то есть равносторонний) треугольник (рис. 2). Впрочем, взятые точки и без соединения создают, так сказать, «впечатление» треугольника.

А если точек четыре, — можно ли их расположить аналогичным образом? Оказывается — нет; убедитесь в этом сами. И пять точек тоже не годятся. Но шесть точек расположить в требуемом порядке уже можно (рис. 3). При этом новый — «шеститочечный» — треугольник получается из «трехточечного» линейным увеличением последнего в два раза; это и вызывает добавление новых точек (рис. 4).

Сколько еще точек нужно добавить, *чтобы «впечатление» треугольника* сохранилось? Ответ найти нетрудно: четыре. Соответствующий треугольник — он получается линейным увеличением исходного в три раза — изображен на рисунке 5.

Продолжая добавлять точки, будем получать все новые и новые треугольники. Именно, к уже имеющимся десяти точкам добавим пять, затем к пятнадцати получившимся — еще шесть точек, к ним еще семь и т. д. (сделайте рисунки самостоятельно!).

Попытаемся теперь выяснить, сколько же точек нужно иметь, чтобы из них можно было составить «треугольную конфигурацию».

В наших примерах сначала точек было 3, 6, 10; потом 15, 21, 28, . . . Эти числа, по вполне понятным причинам, называются *треугольными*. Мы хотим выяснить, какой вид имеют треугольные числа. Сделать это нетрудно, если заметить, что

$$3 = 1 + 2$$
$$6 = 1 + 2 + 3$$
$$10 = 1 + 2 + 3 + 4$$
$$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

. . . .

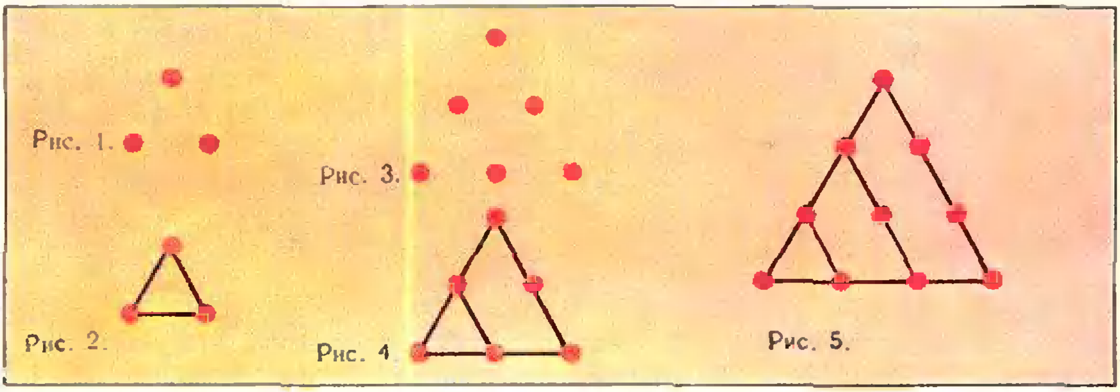


Рис. 1. Рис. 2. Рис. 3. Рис. 4. Рис. 5.

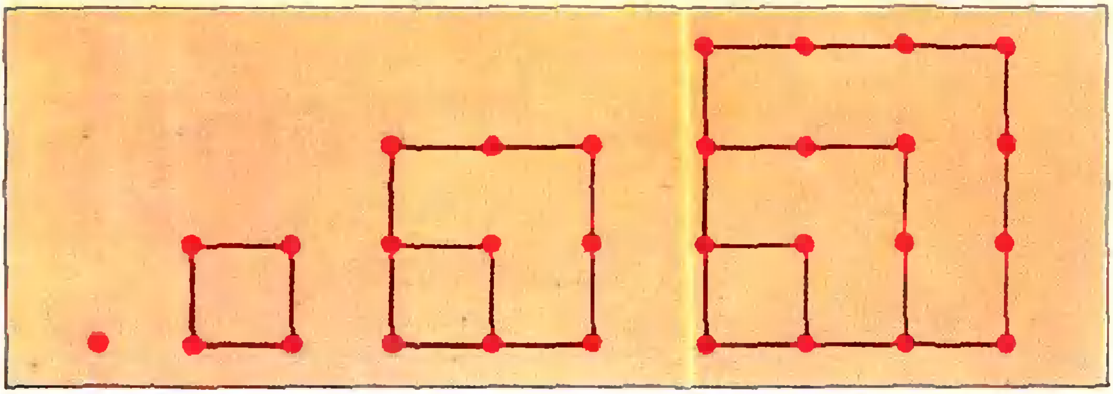


Рис. 6.

Бросается в глаза закономерность, по которой составлены эти числа. Можно доказать, что эта закономерность имеет место и дальше. Значит, если n-е треугольное число обозначить через T_n и считать, что $T_1 = 1$, то будет справедлива следующая формула:

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n.$$

На вид она довольно проста, однако для вычисления явно не пригодна. Чтобы придать ей более удобную для вычисления форму, заметим, что в правой части равенства равноудаленные от начала и конца слагаемые в сумме дают одно и то же число, а именно $n + 1$.

Теперь все очень просто: напишем нашу формулу два раза, поменяв во втором случае порядок слагаемых на обратный:

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n,$$

$$T_n = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1.$$

Сложим эти два равенства «столбиком»; тогда в левой части получим $2T_n$, а в правой — число $n + 1$, взятое n раз. Итак, $2T_n = n(n + 1)$, откуда

$$T_n = \frac{1}{2} n (n + 1).$$

Примененный здесь метод вычисления дал нам возможность упростить довольно громоздкое выражение. В связи с этим хочется привести традиционный рассказ о мальчике по имени Карл, блестяще применившем этот метод при решении аналогичной задачи.

«Однажды учитель начальной школы, которую посещал Карл, желая подольше занять ребят, предложил им трудную задачу: сложить числа 1, 2, 3 и т. д. до 100. Учащиеся погрузились в вычисления . . . Маленький Карл заметил, что пары чисел 1 и 100, 2 и 99, 3 и 98 и т. д. в сумме дают 101. Подсчитав в уме, что таких пар 50, он написал на своей грифельной доске ответ — 5050 и подал ее учителю. Учитель был очень удивлен . . .»

Будущее показало, что учителю удивляться не следовало: маленький Карл стал впоследствии великим Карлом Фридрихом Гауссом, прозванным «королем математиков» еще при жизни!

2

Кроме треугольных чисел существуют также числа *квадратные*, *пятиугольные*, *шестиугольные* и т. д. Они связаны соответственно с квадратом, правильным пятиугольником, правильным шестиугольником и т. д.

Обозначим n-е квадратное число через K_n, а n-е пятиугольное — через $П_n$; тогда

$$K_n = n^2, \quad П_n = \frac{1}{2} n (3n - 1).$$

Чтобы получить эти равенства, нужно каждое из чисел K_n и $П_n$

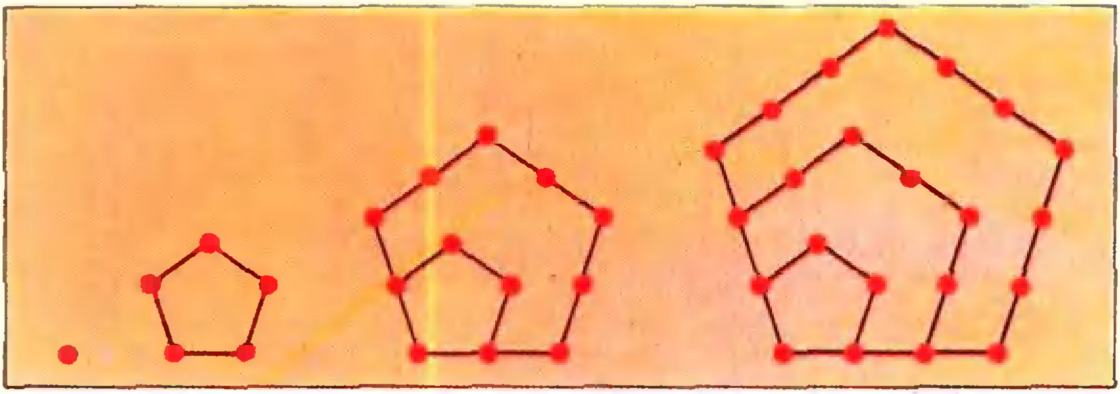


Рис. 7.

представить в виде соответствующей суммы (см. рис. 6 и 7) и применить уже известный нам метод «спаривания» слагаемых. Соответствующие вычисления проделайте сами.

Аналогично можно найти выражения и для шестиугольных, семиугольных и т. д. чисел. Мы решим более общую задачу — найдем формулу для любого *k-угольного* числа.

3

Итак, пусть $F_n^{(k)}$ обозначает n-е k-угольное число. Рассмотрим k-угольник, порождающий это число (см. рис. 8). Возьмем одну из вершин этого многоугольника, например, A, и проведем из нее все диагонали. Сколько их будет? Подсчитаем.

Вершину A можно соединить с каждой из остальных $(k-1)$ вершин; но при соединении A с двумя соседними с ней вершинами мы получим не диагонали, а стороны многоугольника. Значит, диагонали получаются при соединении A с $(k-1)-2=$ $=k-3$ вершинами. Это и есть число диагоналей.

Проведя диагонали из вершины A, мы разобьем k-угольник на $k-2$ треугольника (см. рис. 9). Каждый из этих треугольников связан с n-м треугольным числом T_n. Зная же T_n, мы можем посчитать число точек и в данном k-угольнике, то есть найти формулу для $F_n^{(k)}$. В самом деле, в каждом треугольнике T_n точек, а треугольников $k-2$. Итого — $(k-2)\,T_n$ точек. При этом точки, лежащие на диагоналях, мы считали два раза — ведь диагональ является общей стороной двух смежных тре-

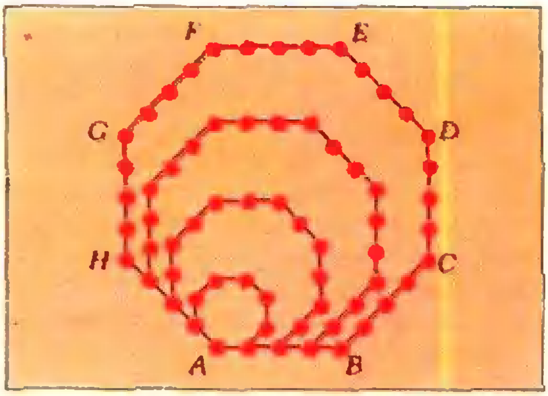


Рис. 8.

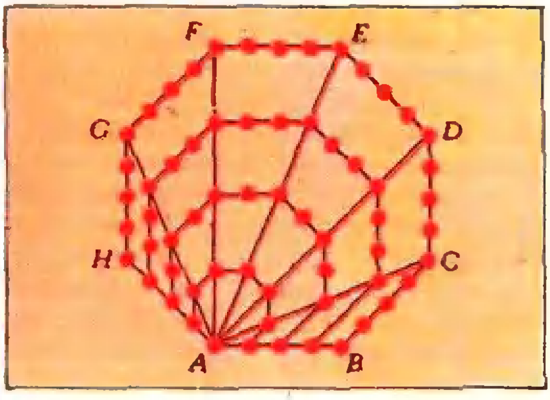


Рис. 9.

угольников, а точку A, которая является общей для всех треугольников $k-2$ раза.

Уточним наш подсчет: на каждой диагонали n точек, а если отбросить точку A, то $n-1$ точка; значит, $(n-1)(k-3)$ точек мы считали по два раза; а точку A мы считали $k-2$ раза и получили при этом на $k-3$ точки больше, чем следовало. Следовательно, из выражения $(k-2)T_n$ нужно вычесть число $(n-1)(k-3)$ и число $k-3$. Это дает для $F_n^{(k)}$ следующее выражение:

$$F_n^k = (k-2)T_n - (n-1)(k-3) - (k-3).$$

Подставив сюда значение T_n, получим после элементарных преобразований искомую формулу:

$$F_n^{(k)} = \frac{1}{2}n\,[(k-2)n + 4 - k].$$

Полагая, в частности, в этой формуле $k = 3, 4, 5$, получим соответственно формулы для T_n, K_n, $П_n$.

4

Многоугольные, или, как их часто называют, *фигурные* числа были известны еще в глубокой древности. Предполагают, что впервые они появились в VI веке до нашей эры — в школе Пифагора. В дальнейшем многие математики интересовались этими числами. Про них доказано много важных и трудных теорем. Приведем одну из них: *всякое натуральное число есть либо сумма не более трех треугольных чисел, либо сумма не более четырех квадратных чисел, либо сумма не более пяти пятиугольных чисел и т. д.*

Эту теорему сформулировал без доказательства один из крупнейших математиков XVII века Пьер Ферма. Она привлекла внимание многих выдающихся математиков — Эйлера, Лагранжа, Лежандра, Гаусса. Каждый из них внес свой вклад в ее доказательство, но полностью теорема была доказана лишь в XIX веке французским математиком Коши.

Решите на досуге

1. От неверно выполненного умножения (неверна одна из цифр произведения) остались лишь такие следы:

$$\begin{array}{r} \times\ {*}0{*} \\ 51 \\ \hline + {*}{*}0{*} \\ \hline {*}{*}46{*} \end{array}.$$

Найти множимое ${*}0{*}$.

2. В шифрованной телеграмме

send more money

(«пришлите больше денег») число $\overline{money}$ есть сумма чисел $\overline{send}$ и $\overline{more}$.

Какие цифры зашифрованы буквами, если $\overline{money}$ — наибольшее из возможных в этой задаче?

3. $$\begin{array}{r} \times\ {*}{*}2 \\ {*}2 \\ \hline {*}00{*} \\ {*}{*}{*}{*}\ \\ \hline {*}{*}{*}11 \end{array}.$$

Найти сомножители и произведение.

4. Наборщик должен был набрать выражение

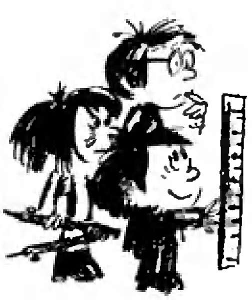
$$\overline{abcd}^2 \times 0, \ldots,$$

где $\overline{abcd}$ — четное четырехзначное число, а $0, \ldots$ — десятичная дробь. Наборщик набрал так:

$$abcd \times 20, \ldots$$

Тем не менее оказалось, что оба эти выражения численно равны. Найти число $\overline{abcd}$ и дробь $0, \ldots$

П. Ю. Германович



КАК ИЗМЕРИТЬ МОЛЕКУЛУ?

Н. А. РОДИНА

Наши основные знания о молекулах можно выразить очень простыми словами:

1. Все тела состоят из мельчайших частиц — атомов и молекул.

2. Атомы и молекулы находятся в состоянии непрерывного движения. Это движение является вечным, не прекращаясь ни при каких условиях.

3. Молекулы всех тел взаимодействуют друг с другом. В разных веществах они взаимодействуют по-разному, в зависимости от вида молекул и от расстояний между ними.

Эти три положения называют основными положениями молекулярно-кинетической теории.

В науке, пожалуй, мало найдется таких областей знания, которые имели бы столь длительную и столь плодотворную историю развития, как знания о молекулах. Упоминание о мельчайших частицах вещества имеется в рукописях, относящихся к XII веку до нашей эры. Значит, уже в течение 32-х веков, то есть 3200 лет, создаются эти знания! Многие великие ученые вложили свой труд в создание молекулярно-кинетической теории. В наше время строение молекул и их поведение изучены достаточно полно для того, чтобы даже перестраивать молекулы, создавать вещества с заранее заданными свойствами. Созданы искусственные рубины, каучук, пластмассы, лекарства и витамины. Вы, наверное, читали о том, с каким трудом добывались раньше эти вещества в естественном виде: рубины добывали из-под земли, каучук — из сока тропических деревьев, пластмасс раньше не знали совсем.

Итак, молекулы изучены хорошо, и их продолжают изучать и в наше время. Более того, основные направления развития современной физики связаны с применением знаний о строении вещества. Это нужно иметь в виду тому, кто собирается в будущем заниматься физикой.

Наш рассказ о молекулах будет посвящен определению размеров молекул.

Можно ли вообразить себе, насколько малы эти размеры? Можно ли, например, показать при помощи пальцев хотя бы расстояние между молекулами воздуха, которое примерно в 10 раз больше диаметра самой молекулы?

Размеры молекул были определены во многих опытах. Опишем один из них; этот опыт провел около 60-ти лет назад английский ученый Роберт Рэлей.

В чисто вымытый большой сосуд налили воду и на поверхность ее поместили каплю оливкового масла. Капля растеклась по поверхности воды и образовала круглую пленку. Постепенно площадь пленки увеличивалась, но затем растекание прекратилось, и площадь перестала изменяться. Рэлей предположил, что молекулы расположились в один ряд, то есть толщина пленки стала равна как раз размеру одной молекулы,

Рис. 1.

и решил определить эту толщину. При этом, конечно, нужно учесть, что объем пленки равен объему капли.

По тем данным, которые были получены в опыте Рэлея, рассчитаем толщину пленки и узнаем, чему равен линейный размер молекулы масла. Капля имела объем 0,0009 $см^3$, а площадь образовавшейся из нее пленки была равна 5500 $см^2$. Отсюда толщина пленки

$$d = \frac{V}{S} = \frac{0{,}0009}{5500}\ см = 0{,}00000016\ см.$$

В опыте Рэлея объем капли был определен по ее массе и плотности масла. Масса капли была равна 0,0008 *г*, плотность масла 0,9 $г/см^3$. Подсчитайте по этим данным объем капли.

Многочисленные опыты показали, что молекулы разных веществ отличаются по размерам. Но когда хотят оценить диаметр молекул (если принять, что они имеют форму шариков), берут величину 0,00000001 *см* *).

Можно ли представить себе частицу, имеющую такие размеры?

Посмотрите на фотографию головки обыкновенной комнатной мухи, сделанную при сильном увеличении (рис. 1). По бокам головки вы видите глаза мухи, они состоят из отдельных элементов, так называемых фасеток. На фотографии каждая фасетка имеет диаметр примерно 1 *мм*. А теперь посмотрите на рисунок, где муха изображена в натуральную величину. Весь глаз мухи имеет диаметр, меньший миллиметра.

---

*) Вы уже, наверное, заметили, какими длинными числами записываются размеры молекул. Более кратко данное число можно записать так: 10^{-8} *см*. Как перейти от одной записи к другой, вы поймете, если сосчитаете, на каком месте после запятой стоит значащая цифра в числе 0,00000001.

Теперь постарайтесь представить себе размер каждой фасетки глаза. Так вот — молекула еще примерно в 100 000 раз меньше такой фасетки!

Конечно, такую частицу нельзя увидеть невооруженным глазом. Но может быть, ее можно увидеть в микроскоп? Каким для этого должно быть увеличение микроскопа?

Капля воды диаметром в 0,5 *см* при увеличении в 2000 раз будет иметь размеры классной комнаты, но и тогда в ней нельзя будет различить отдельные молекулы. При увеличении еще в 2000 раз капля будет иметь в поперечнике 20 *км*, и ее «зернистое» строение начнет вырисовываться перед нашими глазами. Но нужно увеличить ее еще в 250 раз, чтобы увидеть, наконец, строение молекулы воды, но . . . такое увеличение (в общей сложности в 10^9 раз) получить нельзя.

В настоящее время при помощи специальных микроскопов (электронных микроскопов) получают фотографии, на которых можно различить отдельные молекулы, но только такие, которые имеют большие размеры по сравнению с молекулами воды.

На фотографии (рис. 2) вы видите молекулы белка, диаметр которых примерно в 100 раз больше, чем у воды. Зная, что фотография сделана при увеличении в 73 000 раз, попробуйте примерно оценить диаметр молекулы белка.

И, наконец, советуем вам самим проделать опыт по определению размеров молекул масла. Конечно, повторить опыт Рэлея трудно, так как для этого нужно иметь специальный сорт масла и сделать точные измерения. И все же попробуйте! Наградой вам будет сознание, что вы определили величину, которая сравнима с размерами молекул.

Для опыта удобно воспользоваться чистым машинным маслом. Сначала определите объем одной капли этого масла. Придумайте сами, как это сделать при помощи пипетки (ка-

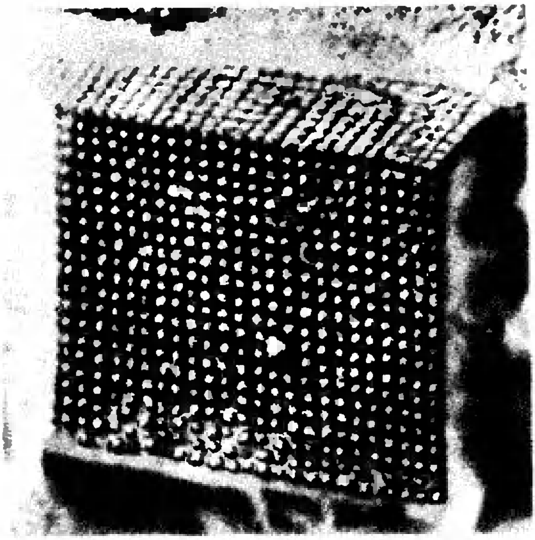


Рис. 2.

пельницы) и мензурки (можно воспользоваться мензуркой, которой отмеривают лекарства).

Налейте в тарелку воды и на ее поверхность поместите (конечно, при помощи той же самой пипетки!) каплю масла. Когда капля растечется, измерьте диаметр пленки линейкой, положенной на края тарелки. Если поверхность пленки не будет иметь форму круга, то или подождите, когда она примет такую форму, или сделайте несколько измерений и определите ее средний диаметр. Затем вычислите площадь пленки и ее толщину. Какое число вы получили? Во сколько раз оно больше размера молекулы масла (0,0000002 *см*)?

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Сигналы. Спектры»

2. От $2\cdot10^3$ *гц* до $3\cdot10^5$ *гц*.

К статье «О силе шахматных фигур»

1. $$P_{Кр}(n) = \frac{4(n-1)(2n-1)}{n^2},$$

$$P_{Ф}(n) = \frac{2(n-1)(5n-1)}{3n},$$

$$P_{Л}(n) = 2(n-1), \quad P_{С}(n) = \frac{2(n-1)(2n-1)}{3n},$$

$$P_{К}(n) = \frac{8(n-1)(n-2)}{n^2},$$

$$P_{П}(n) = \frac{(n-1)(3n-4)}{n(n-2)}.$$

Легко убедиться, что при $n = 8$ из этих формул получаются подвижности фигур, найденные в статье. При четном n белопольный и чернопольный слоны имеют одинаковую подвижность; при нечетном n подвижнее слон того цвета, каких полей больше (найдите эти подвижности самостоятельно). Делением $P_x(n)$ на $P_П(n)$ получается сила фигуры x.

2. Для того чтобы найти подвижность фигуры x при $n\to\infty$, надо вычислить соответствующий предел. Для фигур с ограниченным перемещением по доске (король, конь, пешка) получаем:

$$P_{Кр}(\infty) = \lim_{n\to\infty} P_{Кр}(n) = \lim_{n\to\infty}\frac{4(n-1)(2n-1)}{n^2} = 8\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right) = 8,$$

аналогично $P_К(\infty) = 8$, $P_П(\infty) = 3$. Конечно, эти значения легко предвидеть, если внимательно посмотреть на рисунки 1, 5, 6 статьи: с ростом n доля полей, с которых число ходов фигуры отличается от полученного значения, стремится к нулю.

Движения ферзя, ладьи и слона носят линейный характер, и, очевидно, их подвижность при $n\to\infty$ неограниченно возрастает. Однако для этих фигур можно получить асимптотические оценки:

$$P_{Ф}(n)\approx\frac{10}{3}n, \quad P_{Л}(n)\approx 2n, \quad P_{С}(n)\approx\frac{4}{3}n.$$

Из последних формул следует, что силы дальнобойных фигур при больших значениях n находятся приблизительно в следующем отношении:

$$F_{Ф}(n) : F_{Л}(n) : F_{С}(n) \approx 5 : 3 : 2.$$

3. Уравнение $F_{Л}(n) = F_{С}(n) + F_{К}(n)$ имеет два корня: $n = 8$ и $n = 3$.

Уравнение $F_{Кр}(n) = F_{С}(n)$ имеет один корень $n = 6$.

4. $$\frac{n(n-1)(n-2)(3n-1)}{6}.$$

5. $$\frac{1}{12}n(n-2)^2(2n^3-12n^2+23n-10)$$

при четных n и $\frac{1}{12}(n-1)(n-3)(2n^4-12n^3+25n^2-14n+1)$ при нечетных n. Заметим, что уже для четырех ферзей эту задачу решить до сих пор не удалось.

6. Из задачи 2 следует, что две ладьи сильнее.

8. Подвижность коня на бесконечной доске равна

1, если $a = b = 0$;

4, если $a = b \neq 0$ или одно из чисел a, b равно нулю, а другое — нет;

8 во всех остальных случаях.

К статье «Механические колебания»

1. $v_0 \approx 0{,}2$ *м/с*; $F_{max} = 0{,}1$ *н*.

2. $$x_0 = -x_0\sqrt{\frac{M}{M+m}}.$$

Указание. Воспользоваться законом сохранения импульса при ударе и законом сохранения энергии при колебаниях.

3. $$\omega = \sqrt{\frac{m_2 g}{M(m_1+m_2+m_3)}} \approx 5{,}8\ c^{-1}.$$

4. $\nu_1 = 0{,}28$ *гц*, $\nu_2 = 0{,}56$ *гц*.

5. $$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2\rho g S}}.$$

6. $$\nu_{max} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{x_0}}.$$

Указание. В крайнем верхнем положении ускорение подставки не должно превышать ускорения силы тяжести.

7. $n = \dfrac{t_1\sqrt{g+a_1}+t_2\sqrt{g-a_2}}{2\pi\sqrt{l}}$.

8. Период колебаний не изменится, так как электрическая сила всегда перпендикулярна направлению движения шарика.

К статье «Московский институт инженеров железнодорожного транспорта»

Математика

Вариант 1

1. A — за 15 *ч*, B — за 15 *ч*, C — за 10 *ч*.
2. $1-\sqrt{3}<x<2-\sqrt{2}$.
3. $\dfrac{6\sqrt{6}h^2\operatorname{ctg}\alpha\sin(45°+\alpha)}{\sin\alpha}$.
4. $x=k\pi$, $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+n\pi$, k, n — целые числа.

Вариант 2

1. В 4 раза.
2. $2/3<a\leqslant 4$, $a\neq 2\dfrac{4}{7}$.
3. $\dfrac{a^3\cos^2\alpha\sin\beta\sin\alpha}{2\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}}$.
4. $\dfrac{1}{2}(2a^2-a^4+1)$.

Вариант 3

1. 12 человек.
2. $x=(1+\sqrt{5})/2$.
3. $S=200$ *см²*.
4. $m-1$.

Физика

1. $v_0=0{,}33$ *м/с*; $a=0{,}13$ *м/с²*.
2. $\nu=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{h}}$.
3. $v_2=3{,}4$ *м/с*.
4. $t_1=0{,}5$ *с*; $t_2\approx 0{,}33$ *с*; $t_3\approx 0{,}17$ *с*.
5. $\Delta T=3{,}5°$.
6. $\rho=3{,}03\cdot 10^3$ *кг/м³*.
7. $P=8$ *вт*.
8. $P_1=96$ *вт*; $P_2=144$ *вт*.
9. $U=0{,}5$ *в*.
10. $Q=5\cdot 10^{-3}$ *дж*.
11. $P=28{,}8\cdot 10^2$ *вт*.

К статье «Московский институт электронного машиностроения»

Вариант 1

1. Обозначив через x и y стороны прямоугольника, можем составить следующую систему уравнений

$$\begin{cases} xy=420 \\ 2(x+y)+\sqrt{x^2+y^2}=111. \end{cases}$$

Подставляя значения x из первого уравнения во второе, получим

$$2\left(x+\frac{420}{x}\right)+\sqrt{x^2+\frac{420^2}{x^2}}=111.$$

Обозначим $x+\dfrac{420}{x}=t$, тогда $2t+\sqrt{t^2-840}=111$, откуда $t=41$. Теперь $x+\dfrac{420}{x}=41$, $x_1=20$, $y_1=21$ и $x_2=21$, $y_2=20$.

Длина проволочного забора выражается формулой $l(t)=2t+\sqrt{t^2-840}$. Эта функция возрастающая, и потому принимает наименьшее значение при наименьшем возможном значении t. Но $t=x+\dfrac{420}{x}\geqslant 2\sqrt{420}$, и равенство возможно только при $x=\dfrac{420}{x}$, то есть при $x=y$.

Ответ. Размеры участка 20 *м* × 21 *м*, наименьшее количество проволоки потребуется для квадратного участка.

2. Имеем: $-1\leqslant x\leqslant a$. Освобождаясь от радикалов двукратным возведением в квадрат, получаем:

$$4x^2-(4a-4)x+a^2-4a=0,$$

откуда

$$x_1=\frac{a-1}{2}+\frac{\sqrt{2a+1}}{2},$$

$$x_2=\frac{a-1}{2}-\frac{\sqrt{2a+1}}{2}.$$

Проверка показывает, что подходит только x_1.

Ответ. $x=\dfrac{a-1}{2}+\dfrac{\sqrt{2a+1}}{2}$.

3. Возводя в квадрат и упрощая, получаем уравнение

$$\cos x(2\sin 2-\sqrt{2}\cos x+\sin x)=0.$$

Если $\cos x=0$, то подстановка в исходное уравнение дает:

$$\sqrt{2\sin x\cos 2}=\sqrt{2\sin x\cos 2}.$$

Но $\dfrac{\pi}{2}<2<\pi$ и $\cos 2<0$, значит $\sin x=-1$, $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $n=0,\pm 1,\pm 2,\ \ldots$

Пусть теперь $2\sin 2 - \sqrt{2}\cos x + \sin x = 0$, тогда $2\sin 2 > \sqrt{3}$, поскольку $\sin 2 > \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а $\sin x - \sqrt{2}\cos x =$

$$= \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos x\right) = \sqrt{3}\sin(x-\varphi) \leqslant \sqrt{3}\left(\text{здесь } \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

и последнее уравнение корней не имеет.

Ответ. $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

4. Неравенство выполняется, если

$$\begin{cases} \log_3^2 x^2 + 2\log_3 x - 2 < 0, \\ 2^{2x} - 9 \neq 0. \end{cases}$$

Из первого неравенства находим: $\frac{1}{3} < x < \sqrt{3}$, из второго $x \neq \log_2 3$. Проверим, находится ли точка $\log_2 3$ в промежутке $\left(\frac{1}{3}, \sqrt{3}\right)$. Легко видеть, что $\log_2 3 > 1$; сравним $\log_2 3$ и $\sqrt{3}$, или 3 и $2^{\sqrt{3}}$: $2^{\sqrt{3}} > 2^{1,6} = 2^{\frac{8}{5}} > 3$, так как $3^5 < 2^8$, потому $\sqrt{3} > \log_2 3$.

Ответ: $\frac{1}{3} < x < \log_2 3$, $\log_2 3 < x < \sqrt{3}$.

5. $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos A$.

Вариант 2

1. 3 *см* × 6 *см* × 26 *см*; 6 *см* × 12 *см* × 10 *см*.

2. $x = \frac{a}{2} + \sqrt{a-1}$ при $a \geqslant 2$, при $a < 2$ решений нет.

3. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

4. $3 < x < 10$.

5. $a\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

К статье «Московский авиационный институт»

Математика

Вариант 1

1. $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Указание. Возведя обе части исходного уравнения в квадрат, сделать замену $\frac{x^2-4x+3}{2-x} = t^2$; показать, что достаточно рассмотреть случай $x \leqslant 1$.

2. 5 : 4.

3. $-1 < a < 0$, $\frac{2}{5} < a < \frac{1}{2}$.

4. $\frac{3-\sqrt{7}}{4}$. Указание. Показать, что данный отрезок пересекает бо́льшую окружность в двух точках и один из концов отрезка лежит вне этой окружности.

5. $1 - \sqrt{3}/3$.

Вариант 2

2. $x = \lg 3/\lg 1,5$. Указание. Поделив обе части уравнения на 3^{2x}, после преобразований получим $9y^2 + 3y - 2 = 0$, где $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$. Решив квадратное уравнение, найдем: $y = 1/3$.

3. 127; 127/8.

4. 60 *км/ч*, 40 *км/ч*, 420 *км*.

5. $a > 1$. Указание. Обозначив $\log_2 a$ через t и заметив, что $2x - 3 - x^2 < 0$ для любых значений x, данное неравенство после преобразований можно записать в виде $(2t+1)x^2 - x + \frac{1}{t} + 3 > 0$. Этот квадратный трехчлен положителен для всех значений x, если $2t + 1 > 0$ и $D < 0$ (D — дискриминант). Решив систему неравенств

$$\begin{cases} 2t + 1 > 0, \\ (24t^2 + 19t + 4)t > 0, \end{cases}$$

найдем: $t > 0$.

Вариант 3

2. $8a^2(1-a^2)$. Указание. Раскрыть скобки и привести выражение к виду $1 - \cos(\alpha - \beta)$.

3. $x_1 = -\pi/4 + \pi k$, $x_2 = \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

4. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Указание. Воспользоваться подобием треугольников DFC и BFA и DFA и LFC.

5. $R\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$. Указание. Показать, что одна из вершин треугольника лежит внутри круга, длина отрезка, соединяющего центры треугольника и круга, равна R.

Физика

Билет 1

2. $Q = rm + cm(t_1 - t_2) \approx 5,3 \cdot 10^4$ *дж*.
3. $F = 50$ *н*, $N = 85$ *н*.
4. $p = 16,8 \cdot 10^{-3}$ *кг·м/с*.
5. $L = 0,175$ *м*.

Билет 2

2. а) $v_0 = 1000$ *м/с*; б) $v_п = 500$ *м/с*.
3. $m = 400$ *т*.
4. $t = 70°$ C.
5. а) $F = 3,12$ *н*, б) $F = 1,56$ *н*.

Билет 3

2. $T = 2 \cdot 10^{-3}$ *с*.
3. $\Delta t = 0,43$ *с*, $I = 5,75$ *а*.
4. $v_{ср} = 13,3$ *м/с*.
5. $m = 138$ *т*.

Билет 4

2. $v = 5$ *км/ч.*
3. $m_{\text{льда}} = 10$ *г.*
4. $h = 35$ *м.*
5. $r = 0{,}8$ *ом*, $E = 28$ *в*, $I = 35$ *а.*

Билет 5

2. $S_1 = 1{,}3$ *м.*
3. В диапазоне 206—103 *м.*
4. $H = 525$ *м.*
5. $W_{\min} = 4125$ *квт.*

К статье «Московское высшее техническое училище»

Математика

Вариант 1

1. 3 часа, 4 часа, 6 часов.
2. $\frac{a}{2}(2-\sqrt{3})$.
3. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, k — целое.
4. $x = \pm 1$.
5. $1 < x < 2$.

Вариант 2

1. 12, 6, 3, ...
2. $\arcsin\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}$.
3. $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, k — целое.
4. $x_1 = 9/4$, $x_2 = 1/12$.
5. $4 < x < 6$.

Физика

Билет 1

3. 60 *см*, 25 *см.*

Билет 2

3. $\operatorname{arctg} 2$.

Билет 3

3. 9,6 *кг.*

К статье «Ленинградский государственный университет»

Математика

Вариант 1

1. 30 тракторов, 816 рублей.

2. Если $a = 1$, то $x_1 = \pi/2 + k\pi$, $x_2 = -\operatorname{arctg} 3 + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,

если $\frac{-\sqrt{10}-1}{2} \leqslant a < 1$ или $1 < a \leqslant \frac{\sqrt{10}-1}{2}$, то

$$x_{1,2} = \operatorname{arctg}\frac{1 \pm \sqrt{9-4a-4a^2}}{2(1-a)} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

если $a < \frac{-\sqrt{10}-1}{2}$ или $a > \frac{\sqrt{10}-1}{2}$, то решений нет.

3. $b = 7/16$.

4. Задача имеет решение $a \geqslant b$, при этом точка E находится на расстоянии $a - \sqrt{a^2-b^2}$ от точки A.

5. $\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\alpha\right)$.

Вариант 2

1. Задача имеет решение при $k \leqslant 2$, тогда израсходовано $\frac{(k-1)p}{(k-1)p+(2-k)q}\,v$ (*л*).
2. $1 \leqslant x < 4(2+\sqrt{3})$.
3. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
4. $\operatorname{arctg}\frac{\sin\alpha}{2-\cos\alpha}$.
5. $\frac{1+3\cos^2\alpha}{2\sin 2\alpha}\,r$.

Вариант 3

1. 26 деталей.
2. $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \ldots$
4. 20,4 *см.*
5. $\frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Вариант 4

1. 12 *км/ч*, 15 *км/ч.*
2. $-3/4 < x < 1$.
3. $x = \pi/3 + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
4. 6 *см* или 3 *см.*
5. $\frac{2}{9}al$.

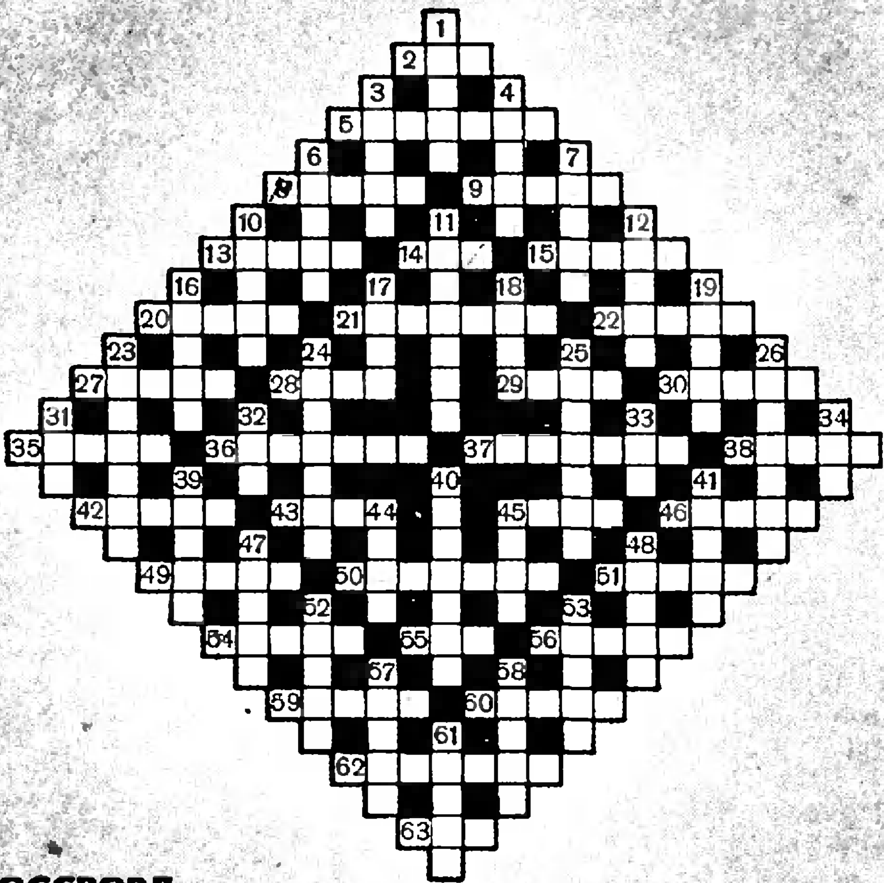
Физика

1. $\frac{m}{M} = 1$.

2. $T = \frac{P}{4}\operatorname{ctg}\alpha$.

3. $$p = \frac{k}{S}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{16}\frac{V_0^2}{S^2} + 3\frac{RT_0}{k}} - \frac{3}{8}\frac{V_0}{S}\right);$$

$$T = T_0 - \frac{k}{3R}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{16}\frac{V_0^2}{S^2} + 3\frac{RT_0}{k}} - \frac{3}{8}\frac{V_0}{S}\right)^2;$$



КРОССВОРД

По горизонтали

2. «Половина» прямой линии. 5. Необычная звезда. 8. Элементарная частица. 9. Химический элемент платиновой группы. 13. Единица светового потока. 14. Английский естествоиспытатель XVII века, автор основного закона теории упругости. 15. Сторона треугольника. 20. Граница фигуры на плоскости. 21. Оптический прибор. 22. Инертный газ. 27. Математический знак. 28. Немецкий физик XIX века. 29. Поток фотонов. 30. Простейшая деформация упругого тела. 35. Результат решения. 36. Математическое действие. 37. Результат математической операции. 38. Двучлен. 42. Единица э. д. с. 43. Галоген. 45. Электрод. 46. Диэлектрик. 49. Электрод. 50. Часть прямой линии. 51. Колебания, распространяющиеся в пространстве. 54. Конец отрезка. 55. Цифра. 56. Геометрическое тело. 59. Выдающийся немецкий физик XX века. 60. Древнегреческий механик. 62. Древнегреческий математик. 63. Выдающийся датский физик XX века.

По вертикали

1. Французский математик XVIII века. 3. Французский физик XVIII века. 4. Мера инертности тела. 6. Немецкий физик XIX века. 7. Английский физик-теоретик XX века. 10. Трансурановый элемент. 11. Зависимая переменная величина. 12. Единица индуктивности. 16. Тригонометрическая функция угла. 17. Известный русский физик XIX века. 18. Математический знак. 19. Отрезок прямой, заключенный внутри окружности. 23. Элементарная частица. 24. Благородный металл. 25. Составная часть атома. 26. Геометрическое тело. 31. Трехзначное число. 32. Мера времени. 33. Заряженная частица. 34. Поток электрических зарядов. 39. Сосуд, используемый в физике низких температур. 40. Раздел математики. 41. Геометрическая мера. 44. Основная единица в системе СИ. 45. Газ. 47. Двузначное число. 48. Оптический термин. 52. Часть измерительного прибора. 53. Квант света. 57. Химический элемент. 58. Способ научного исследования. 61. Объективное свойство природы.

Продолжается подписка на второе полугодие 1974 г. на научно-популярный физико-математический журнал «Квант».

«Квант» адресован всем школьникам 6—10 классов, которые любят математику и физику, любят решать задачи и хотят принимать участие в олимпиадах, горят желанием в будущем серьезно заниматься точными науками.

Наш журнал полезен и тем школьникам, которые еще «не зажглись» физикой или математикой, интерес которых к точным наукам еще дремлет. «Квант» в целом — журнал, который учит думать и работать, а не журнал для «легкого чтения».

Наш журнал полезен так же и учителям. Сейчас происходит коренная переработка школьных программ по математике и физике. «Квант» активно участвует в этой работе. Он систематически печатает статьи по новым программам, разъясняет материал, еще не вошедший в учебник.

В 1974 году «Квант» помещает не только отдельные задачи для младших школьников, но и публикует заметки для них в разделе «Квант» для младших школьников».

К НАШИМ ЧИТАТЕЛЯМ • К НАШИМ ЧИТАТЕЛЯМ

Основное содержание журнала — это «физико-математическая школа»; т. е. материалы, помогающие лучше понять физику и математику, научиться применять эти науки для объяснения различных явлений и процессов, с которыми мы сталкиваемся на практике, научиться решать задачи.

В журнале читатель найдет много задач. Среди них задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в различные вузы, задачи, предлагавшиеся на олимпиадах, и просто интересные задачи.

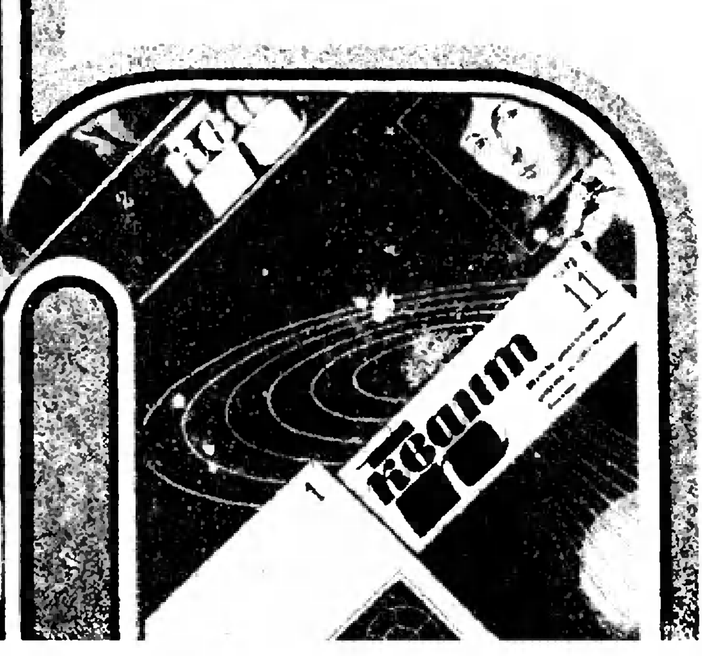
Заметки с описанием физических приборов помогут читателю поставить и провести физический эксперимент.

Журнал публикует на своих страницах статьи обзорного характера, рассказывающие о достижениях науки и проблемах, которые еще ждут своего решения; рассказы об ученых, о том, как рождаются научные открытия.

Журнал постоянно помещает рецензии на книги — уже вышедшие и еще только готовящиеся к изданию.

Журнал распространяется только по подписке.

Цена номера 30 коп. При подписке ссылайтесь на наш индекс 70465.



С 4 по 9 ноября 1973 года в Батуми проходил пятый праздник юных математиков Закавказья. Здесь вы видите два снимка, сделанные во время праздника. На верхнем — «ванна Архимеда», на нижнем — сцена из спектакля «Бал у принцессы Арифметики». О празднике и о спектакле вы можете прочитать на страницах 62 и 66.

Возьмите в руку журнал с изображенными на первой странице обложки кругами и сделайте рукой несколько равномерных вращательных движений в плоскости страницы с изображением. Круги начнут «вращаться». О том, как создается эта иллюзия, можно прочитать в заметке «Вращение, которого нет» на с. 12 этого номера журнала.