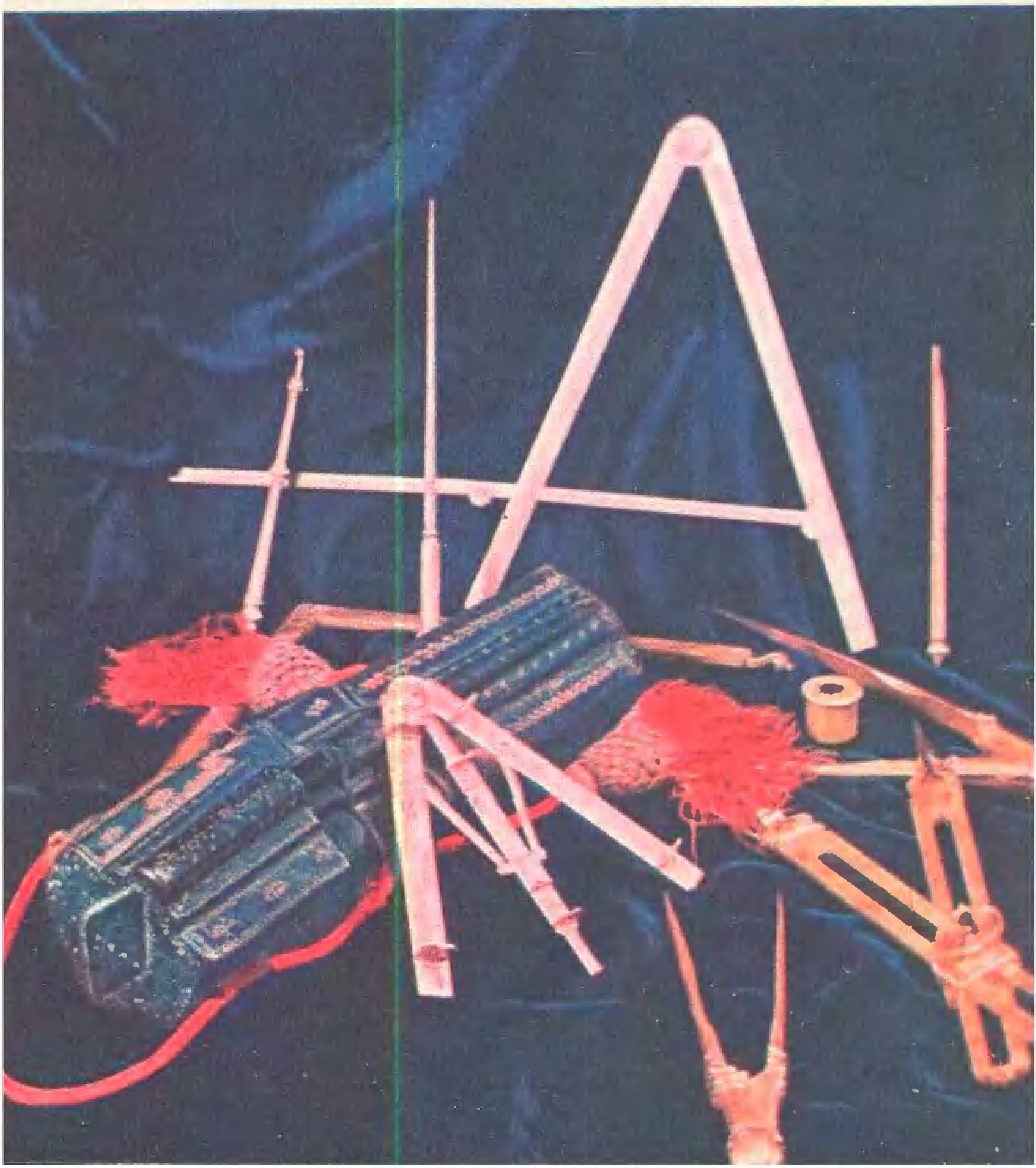
Квант

1974
10

Научно-популярный физико-математический журнал



VIII Всесоюзная олимпиада школьников по математике









Основан в 1970 году.

Квант

1974
10

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

На первой странице обложки вы видите фотографию позолоченной готовальни, изготовленной в XVI веке. В нее входит несколько различных циркулей, угломеров, линейка и т. д. Однако при решении геометрических задач большая часть ее инструментов не нужна: все задачи на построение, которые можно решить с их помощью, решаются и одним циркулем. Впрочем это стало известно лишь 200 лет спустя, когда итальянский математик Маскерони доказал, что все построения, которые производятся циркулем и линейкой, можно сделать одним циркулем (см. статью на с. 2).

§ 1. Зачем нужны построения одним циркулем, где они употребляются?

Эти построения так же не нужны, как и построения циркулем и линейкой. Да, задачи на построение, решаемые в школе (или вообще сколько-нибудь содержательные), не находят никакого применения ни на практике, ни в теории. Они не нужны в машиностроении (в конструировании и изготовлении деталей). Не имеют они отношения и к проблеме возможности решения задач циркулем и линейкой, неразрешимости задач квадратуры круга, трисекции угла и т. д.

А вот для чего задачи на построение (циркулем и линейкой) оказались нужны. На них школьники *учатся самостоятельному решению задач, близких к творческим*, *развивают и проверяют свои способности к этой деятельности*.

Построения циркулем (без линейки) будут нам полезны некоторым иным образом. Но каким именно, мы предпочитаем обсудить в конце статьи, а не заранее.

§ 2. Постановка проблемы

В геометрии Евклида, да и вообще у древних греков, изучаются построения циркулем и линейкой. Ну, а *какие задачи, на построение могут быть решены одним циркулем*? Вот проблема *), которую нашел и решил Маскерони (в 1797 г.).

Когда человек решает готовую (поставленную перед ним) математическую задачу, он, разумеется, «работает математиком». А кем «работал» (лучше сказать, «являлся» или «был») Маскерони, когда *формулировал* свою задачу, — математиком или кем-то другим?

Для проверки мы предложили нескольким нематематикам проблему Маскерони. Спросили их, представляют ли интерес построения циркулем, какие из обычных задач на построение решаются одним циркулем, а какие не решаются и, наконец, любую ли задачу на построение, решаемую циркулем и линейкой, можно решить одним циркулем.

В одном нематематики согласны были между собой: «Не всякую задачу, решаемую циркулем и линейкой, можно решить одним циркулем, ибо прямую циркулем не проведешь», — сказали они. И тогда мы увидели, что нематематик не сможет поставить проблему Маскерони — он не может самостоятельно понять ее существа. Ведь решение Маскерони (забегая вперед, приведем его) состоит в том, что любая задача, разрешимая циркулем и линейкой, может быть решена одним циркулем. Поэтому мы думаем,

---

*) Если хотите, сверхзадача относительно самих задач на построение.

что, формулируя свою проблему, Маскерони «работал математиком», то есть что *формулировка математической проблемы была творчеством математическим*.

Конечно, Маскерони тоже знал, что циркулем прямую не проведешь. Ну, что ж (вероятно, решил Маскерони), а зачем ее проводить? Ну, как же, пусть, например, в задаче сказано «*провести* прямую, которая... обладает определенными свойствами». Так, ведь, строго-то говоря, в задаче должно быть сказано иначе: «*найти*» (или *определить*) прямую, которая... обладает определенными свойствами». А вот, чтобы определить прямую, ее проводить и не обязательно. Достаточно, например, задать на этой прямой две произвольные точки.

Как же быть, если понадобится точка пересечения двух таких «непроведенных» прямых? Ну, точку-то мы, может быть, и одним циркулем сумеем найти, так что это не возражение.

§ 3. Теорема Маскерони

Итак, Маскерони решил, что вместо того, чтобы проводить прямую, он будет указывать на прямой две (различные) точки. Решив это, Маскерони сформулировал свою теорему:

Т е о р е м а М а с к е р о н и. *Всякая задача, решаемая циркулем и линейкой, может быть решена и одним циркулем.*

В том, что мы назвали наше предположение теоремой, нет ничего плохого. Математик нередко так поступает, чтобы четко понять, что он хочет доказать (если предположение окажется верным) или опровергнуть (если оно неверно).

§ 4. Поиск путей доказательства

Как можно доказать теорему Маскерони? Задач, которые решаются циркулем и линейкой, бесконечно много. Нельзя же все их фактически перерешать (одним циркулем). Впрочем, мы постоянно встречаемся с теоремами, где нужно рассмотреть бесконечное множество объектов. Например, «сумма углов треугольника равна 180°». Здесь тоже речь идет о бесконечном множестве треугольников. И все же положение с этими теоремами разное. При доказательстве теоремы о треугольниках мы говорим: «Возьмем треугольник ABC». И уже самим *умолчанием* о размерах сторон и углов взятого треугольника делаем треугольник «общим»: что будет доказано для $\triangle ABC$, то окажется верным и для любого треугольника. А как взять «по умолчанию» общую задачу на построение циркулем и линейкой? Этого сделать мы не умеем.

И снова Маскерони должен был не столько «решать задачу», сколько *делать что-то иное*. Ему пришлось понять, что значит «решить задачу циркулем и линейкой». Вот результат его размышлений:

> *Решение задачи на построение циркулем и линейкой складывается из многократного применения нескольких (аксиомных) задач; отыскание решений этих аксиомных задач не выполняют фактически, а принимают как аксиомы.*

Рассмотрим, для примера, такую задачу: даны окружность и прямая, проходящая через ее центр. Найти точки пересечения прямой и окружности. Решая эту задачу циркулем и линейкой, мы ничего не станем строить (прямая и окружность уже проведены), а скажем, что точки пересечения «и так уже видны», то есть будем считать, что они «определены аксиомами». Внимательным размышлением Маскерони получил

С п и с о к

всех аксиомных задач, употребляемых при построениях циркулем и линейкой:

(α) *Найти точки пересечения двух прямых.*

(β) *То же для прямой и окружности.*

(γ) *То же для двух окружностей.*

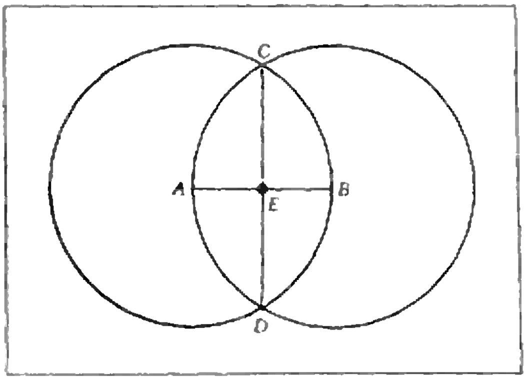


Рис 1.

(δ) *Даны три точки A, B и C. Провести из центра A окружность радиуса BC.*

В частности, в пунктах (α), (β) и (γ) определяется, имеются ли искомые точки пересечения.

Посмотрим, как используются аксиомные задачи. Предложим себе (для примера) разделить пополам заданный отрезок AB циркулем и линейкой (рис. 1). Пользуясь задачей (δ), проведем из точек A и B окружности радиуса AB. Пользуясь (γ), найдем их точки пересечения C и D. Пользуясь (α), найдем точку E пересечения прямых AB и CD. Точка E — искомая.

Подведем итог. Решение задачи циркулем и линейкой состоит в применении задач (α) — (δ). Значит, если некоторым способом решаются задачи (α) — (δ), то этим способом решается и любая задача, решаемая циркулем и линейкой.

При построениях одним циркулем могут быть использованы лишь две аксиомные задачи — именно задачи (γ) и (δ). Значит, для доказательства теоремы Маскерони достаточно доказать, что *с помощью задач* (γ) *и* (δ) *можно решить задачи* (α) *и* (β). Установив это, Маскерони понял, что именно нужно доказывать.

§ 5. Как решается трудная задача

Пусть нам надо открыть дверь. Убедившись, что дверь заперта, мы попытаемся выбить ее, навалившись с разбегу всем корпусом. Если это не поможет, мы испробуем имеющиеся в наличии ключи. Что будет испробовано раньше: подбор ключей или грубая сила, зависит от характера, но именно эти два средства пойдут в ход первыми. Допустим, однако, что они не помогли.

Тогда мы поучимся открывать двери. Мы возьмем тонкую дверь и какое-нибудь орудие, скажем кувалду. Кувалду возьмем легкую, чтобы удобно было работать. И выбьем нашу учебную дверь.

При этом мы выясним, как нужно бить по двери, чтобы она открылась, а главное — потренируемся обращаться с кувалдой, разовьем мускулатуру. На второй раз учебную дверь можно будет взять покрепче, а кувалду — потяжелей. И так будем продолжать, переходя к более крепким дверям и работая более тяжелыми орудиями. Время от времени мы будем ударять и по первоначальной «заданной» двери, отбивая от нее щепки, а главное, чтобы подбирать учебные двери похожими на заданную.

И вот однажды (если нам повезет), кувалда станет достаточно тяжелой, удар выйдет сильным, а нужная дверь ослабится трещинами и будет выбита.

По этому же пути пойдет и доказательство теоремы Маскерони.

Сначала мы пытаемся непосредственно решить одним циркулем задачи (α) и (β). Пытаемся свести их решение к известным нам теоремам.

Затем (когда этого не удалось) мы учимся обращаться с циркулем, смотрим, что можно построить им. Потом тренируемся в решении циркулем более трудных задач и задач, составляющих частные случаи нужных задач (α) и (β). И, наконец, решаем сами задачи (α) и (β), точнее, то, что в них осталось доделать.

Именно так поступил Маскерони. Прежде чем решить задачи (α) и (β), он приобрел высокую технику изящного решения задач одним циркулем. Двинемся следом за ним.

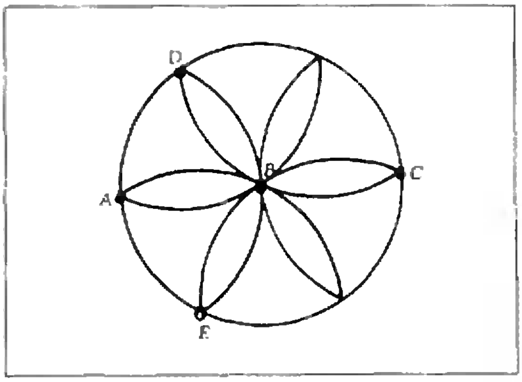


Рис. 2.

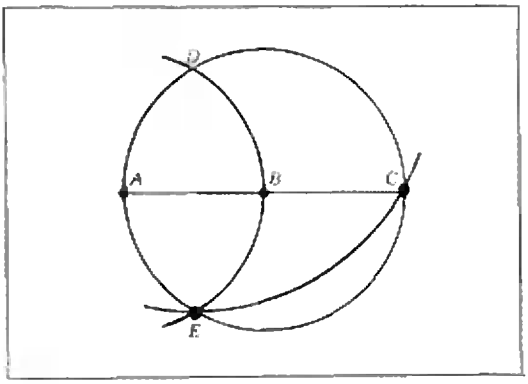


Рис. 3.

§ 6. Доказательство теоремы Маскерони

Договоримся о некоторых выражениях. Если мы говорим, что *дан отрезок AB*, то это значит, что *даны его концы A и B*; если *дана прямая AB*, то на ней *даны лишь две точки A и B*. Если нужно *построить отрезок AB*, то *нужно* лишь *построить его концы A и B*; если нужно *найти прямую AB*, то достаточно *указать на ней две точки A и B*, и т. д.

При построениях циркулем мы не можем проводить прямых, но это не мешает нам проводить их при доказательствах, на иллюстративных чертежах.

Первые попытки (надеюсь, вы их сделаете) решить задачи (α) и (β) одним циркулем, то есть с помощью задач (γ), (δ), большей частью не удаются. Поэтому мы перейдем к систематическому выполнению намеченной программы.

Поиграем с циркулем. Посмотрим, что мы умеем легко им построить.

Пусть имеются две точки A и B. Мы умеем нарисовать на них «розочку» (см. рис. 2). Треугольник CDE — равносторонний и $AC = 2\cdot(AB)$ — диаметр круга. Это наводит на мысль сформулировать следующую задачу.

З а д а ч а № 1. *Удвоение отрезка. Дан отрезок AB. Построить отрезок AC с серединой в точке B.*

Р е ш е н и е (рис. 3). Из центров A и B проведем окружности O_A и O_B радиуса AB. Найдем (с помощью задачи (γ)) точки E и D пересечения окружностей. Из центра D радиусом DE проведем окружность O_D. Новая (кроме E) точка C пересечения O_B и O_D будет искомой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Треугольники ABD и ABE — равносторонние. Значит, в круге O_B

дуга AD = дуга $AE = 60°$,

дуга CD = дуга $DE = 120°$,

дуга $ADC = 60° + 120° = 180°$,

то есть ABC — прямая.

З а д а ч а № 2. *Дан отрезок AB и целое число n. Построить отрезок AC, который в n раз длиннее AB и содержит точку B.*

Последняя задача решается n-кратным применением предыдущей задачи.

Решим еще одну задачу.

З а д а ч а № 3. *Дана прямая AB и точка C. Построить точку C′, симметричную C относительно AB.*

Р е ш е н и е (рис. 4). Из центров A и B проведем через точку C окруж-

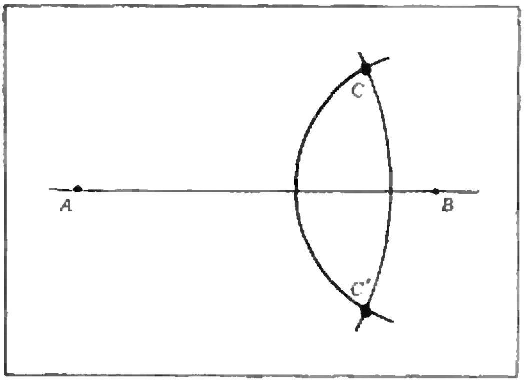


Рис. 4.

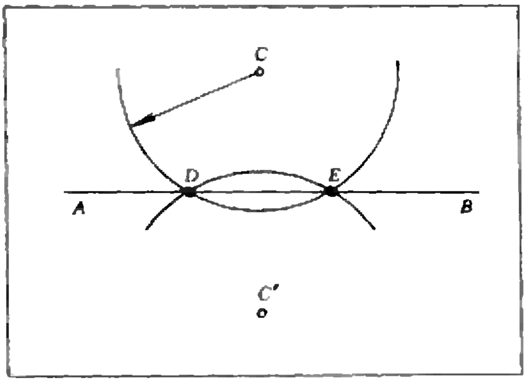


Рис. 5.

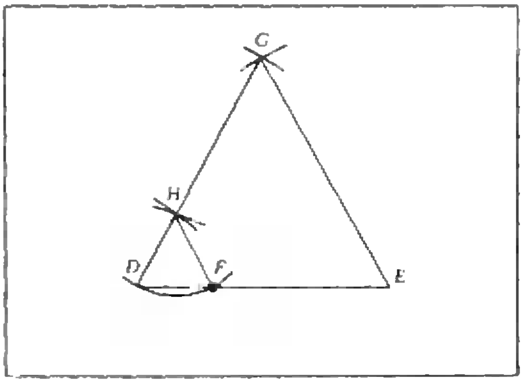


Рис. 6.

ности O_A и O_B. Их вторая (кроме C) точка пересечения и будет C'. Если же O_A и O_B будут иметь лишь одну точку пересечения, то C лежит на AB.

Доказательство. Треугольники ACC' и BCC' — равнобедренные по построению. Основание CC' у них общее. Значит, их высоты (перпендикулярные CC') проходят через середину отрезка CC' и лежат на одной прямой AB.

Таким образом, решена и

Задача № 4. *Определить, лежит ли точка C на прямой AB.*

Вернемся к аксиомным задачам (α) и (β). Попытаемся решить задачу (β) следующим образом. Пусть даны (рис. 5) прямая AB и окружность O с центром C. Найдем точку C', симметричную с C относительно AB (см. № 3). Радиусом окружности O проведем из центра C' окружность O'. Точки D и E пересечения окружностей O и O' принадлежат AB и являются искомыми. Действительно, точки A и B (как и D и E) равноудалены от точек C и C'. Поэтому все четыре точки A, B, D, E лежат на одной прямой — перпендикуляре к отрезку CC', проходящем через его середину.

К сожалению, это решение становится неверным, когда центр C окружности O лежит на AB. Тогда O и O' совпадают и не дают найти точки D и E. Поэтому нами решен лишь частный случай задачи (β) — именно

Задача № 5. *Дана прямая AB и окружность O с заданным центром, не лежащим на AB. Определить, пересекается ли O с AB, и найти точки пересечения.*

Продолжим упражнения по решению задач циркулем.

Задача № 6. *Пропорциональное деление. Даны два отрезка AB и DE. На AB находится точка C. Найти на DE такую точку F, чтобы*

$$AC : AB = DF : DE.$$

Решение. Увеличив отрезки AB и AC в нужное число раз (см. № 2), мы получим отрезок $A'B'$ с точкой C', достаточно длинный (для построения, к которому мы, сейчас подойдем), и тем же отношением $A'C' : A'B' = AC : AB$. Поэтому можно с самого начала считать, что AB достаточно длинен.

Теперь (рис. 6) из центров D и E проведем засечки радиусом AB. Эти засечки (при достаточной длине AB) пересекутся в некоторой точке G. Из точек D и G засечками радиусами AC и BC находим точку H. Она лежит на DG, и для нее

$$DH = AC \text{ и } GH = BC.$$

Из центра H проведем окружность радиусом HD и определим искомую точку F, где эта окружность пересекает прямую DE (см. № 5).

Доказательство. Треугольники DFH и DEG — равнобедренные, с общим углом при основании. Значит, они подобны. Поэтому

$$DF : DE = DH : DG = AC : AB.$$

Задача № 7. *Деление отрезка пополам.*

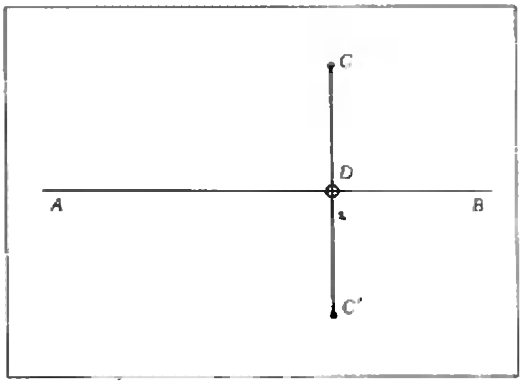


Рис. 7.

Решение. Пусть задан отрезок DE. Возьмем какой-нибудь отрезок AB с серединой в известной нам точке C. Для получения такого отрезка AB достаточно удвоить (см. № 1) отрезок DE. Применив к AB и DE предыдущую задачу, получаем точку F на середине DE.

Теперь легко решается

Задача № 8. *Из точки вне прямой опустить перпендикуляр на прямую.*

Решение (рис. 7). Дана прямая AB и точка C. Построим точку C', симметричную C относительно прямой AB (см. № 3), и найдем середину D отрезка CC' (см. № 7).

Любопытно, что восставить перпендикуляр из точки, лежащей на прямой, мы еще, кажется, не умеем.

Легка, но важна

Задача № 9. *Определить, лежат ли точки A и B по разные стороны прямой CD.*

Решение. Сначала проверим, что A или B не лежат на CD (см. № 4). Если не лежат, то (рис. 8) опустим перпендикуляр AE из A на CD и перпендикуляр BF из B на прямую AE. Если (на прямой AE) точка E не лежит между A и F, то (в этом и только этом случае) A и B лежат по одну сторону от CD.

Эта задача требует пояснения. Мы воспользовались аксиомой порядка: из трех точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими. В школьной геометрии эта аксиома не отмечается специально ввиду очевидности. Столь же очевидной принимается и сама задача № 8. Однако отказавшись от линейки и не имея возможности провести прямую CD, мы усомнились в очевидности задачи № 9 и предпочли получить ее строгое решение (одним циркулем).

Применением задачи № 9 являются следующие две задачи:

Задача № 10. *Построить параллелограмм $ABCD$ на трех точках A, B, C, не лежащих на одной прямой.*

Решение (рис. 9). Из центров A и C проводим окружности радиусов BC и AB соответственно. В качестве D берем ту точку пересечения окружностей, которая вместе с C лежит по одну сторону AB (см. № 9).

Замечание. Без решения задачи № 9 нам могла бы попасться другая точка D' пересечения окружностей и вместо параллелограмма получился бы звездчатый четырехугольник с

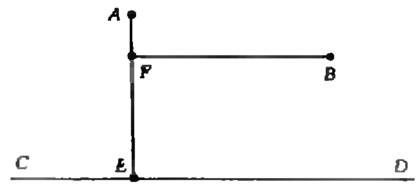


Рис. 8.

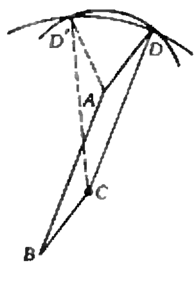


Рис. 9.

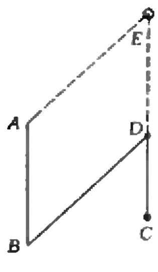


Рис. 10.

попарно равными противоположными сторонами. На рисунке 9 он показан пунктиром.

Задача № 11. *Сложение параллельных отрезков.*

Решение (рис. 10). Пусть AB и CD параллельны и нужно образовать отрезок CE, содержащий точку D, так, чтобы $AB = DE$. Для отыскания E надо построить параллелограмм $BAED$ или $BADE$ (см. № 10). Первый — когда A и C лежат по разные стороны прямой BD (рис. 10), второй — когда по одну. Случай, когда прямые AB и CD совпадают, нас не интересует (хоть он и не сложен).

В качестве частного случая задачи (α) решим следующую задачу:

Задача № 12. *Определить, параллельны ли две прямые: AB и CD.*

Решение. Если обе точки A и B лежат на CD (см. № 4), то прямые совпадают и ответ положителен. Если же хоть одна из них (скажем, A) не лежит на CD, то (рис. 8) опустим из A на CD перпендикуляр AE и из B на прямую AE перпендикуляр BF. Если F совпадает с A, то AB параллельна CD, иначе — не параллельна.

Теперь мы в силах решить задачу (α).

Задача № 13. *Найти пересечение прямых AB и CD.*

Решение. Отбросим известные случаи, когда точки A или B лежат на CD, или когда AB параллельна CD (см. № 4 и № 12), или когда $AB \perp CD$ (см. № 8). Теперь, отложив отрезок AB на прямой AB нужное число раз (см. № 2) в ту и другую сторону, мы заведомо получим на прямой AB две точки, лежащие по разные стороны от CD, и узнаем об этом с помощью № 9. Поэтому можно считать, что сразу же точки A и B лежали по разные стороны от CD (рис. 11). Из A и B опустим на CD перпендикуляры AA' и BB'. Сложим параллельные отрезки AA' и BB' (см. № 10). Получим отрезок $A'E$, содержащий точку A, причем $AE = BB'$. Разделим $A'B'$ точкой F

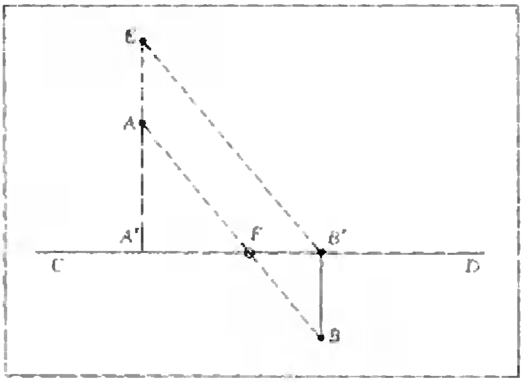


Рис. 11.

в отношении

$$\frac{A'F}{A'B'} = \frac{AA'}{A'E}$$

(см. № 6). Точка F лежит на пересечении AB и CD.

Доказательство. Обозначим (временно) через F' точку пересечения AB и CD и вычислим $A'F'$. Из подобия треугольников $A'F'A$ и $A'B'E$ имеем $A'F' : A'B' = A'A : A'E$. Значит, $A'F = A'F'$ и точка $F = F'$ — искомая.

Итак, для завершения доказательства теоремы Маскерони осталось найти лишь пересечение окружности и прямой, проходящей через ее центр. И эта мелкая задачка оказалась самой трудной. Много еще решил задач Маскерони, пока ему не пришло в голову воспользоваться преобразованием инверсии. Но мы пойдем по пути, указанному другим геометром.

Новое доказательство теоремы Маскерони представил Наполеон Бонапарт (тот самый). Суть доказательства заключалась в новом решении оставшейся части задачи (β).

Но и Наполеон не стал решать задачу в лоб, а выяснил сначала, какой длины отрезки мы можем построить циркулем, отправляясь от двух заданных, длиною a и $b > a$. Вот что он научился строить:

№ 14. $\sqrt{b^2 - a^2}$. № 16. $a\sqrt{2}$.

№ 15. $a\sqrt{3}$. № 17. $\sqrt{b^2 + a^2}$.

Научимся и мы.

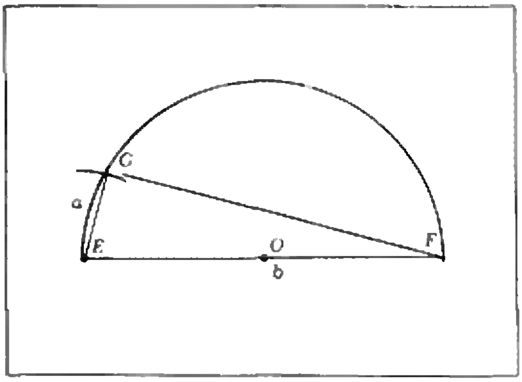


Рис. 12.

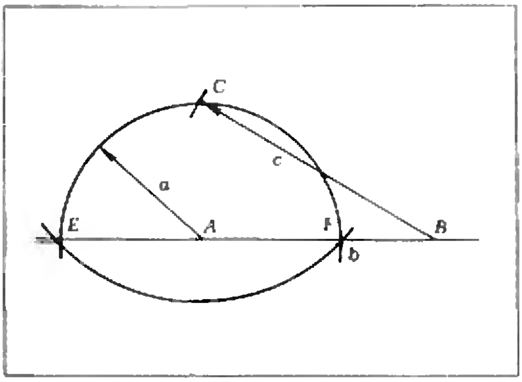


Рис 13.

№ 14. *Построение* $\sqrt{b^2-a^2}$.

Разделим отрезок $b = EF$ пополам (см. № 7). Из центра O проведем окружность O_b радиуса $b/2$ (рис. 12). Из точки E проведем засечку радиуса a, пересекающую O_b в некоторой точке G. Отрезок FG будет иметь нужную длину. Действительно, угол EGF прямой, так как опирается на диаметр. Поэтому $(GF)^2 = b^2 - a^2$.

№ 15. Для построения отрезка $a\sqrt{3}$ напишем

$$a\sqrt{3} = \sqrt{(2a)^2-a^2}.$$

С помощью № 1 построим отрезок $b = 2a$ и применим № 14 к отрезкам $b = 2a$ и a.

№ 16. Запишем тождество

$$a\sqrt{2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2-a^2}.$$

Мы умеем строить $a\sqrt{3}$ и, значит, умеем строить $a\sqrt{2}$, применив № 14 к $b = a\sqrt{3}$ и a.

№ 17. Запишем тождество

$$\sqrt{b^2+a^2} = \sqrt{(b\sqrt{2})^2-(\sqrt{b^2-a^2})^2}.$$

Мы умеем строить $b\sqrt{2}$ (см. № 16) и $\sqrt{b^2-a^2}$ (см. № 14). Значит, умеем строить и $\sqrt{b^2+a^2}$.

Теперь мы можем решить нужную задачу.

Задача № 18. *Найти пересечение окружности с прямой, проходящей через ее центр.*

Решение. Пусть дана окружность O_A с центром A и точка $B \neq A$. Нужно найти пересечения O_A с прямой AB. Обозначим радиус O_A через a, длину AB через b и построим $c = \sqrt{a^2+b^2}$ и $a\sqrt{2}$ (см. № 16 и 17).

Теперь (рис. 13) из центра B проведем засечку радиуса c до пересечения с O_A в некоторой точке C. Из точки C проведем окружность O_C радиуса $a\sqrt{2}$. Пересечения O_C и O_A дадут искомые точки E и F.

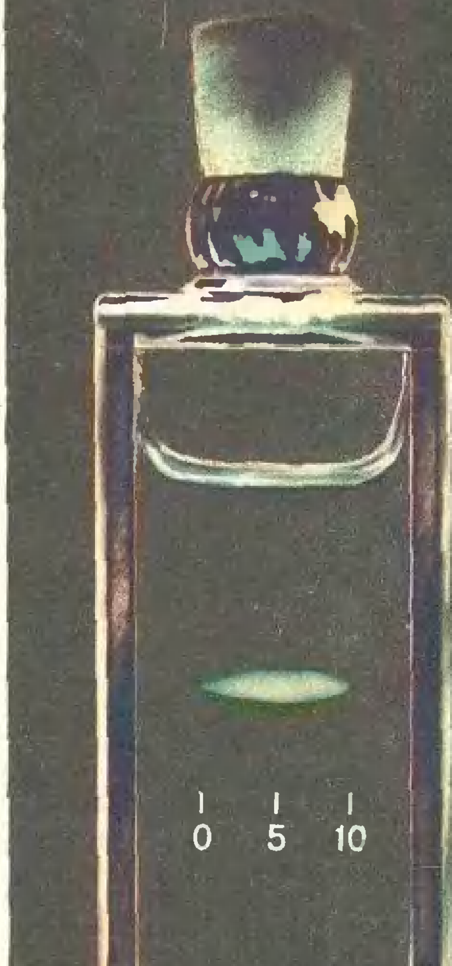
Действительно, ΔBAC — прямоугольный, ибо $c^2 = a^2 + b^2$. Если E и F — точки пересечения прямой AB с окружностью O_A, то $(CE)^2 = (CF)^2 = 2a^2$, как и было сделано.

Теорема Маскерони доказана полностью.

§ 7. Зачем нужны построения циркулем без линейки

Хорошо известно, что математика не исчерпывается решением готовых задач, что она включает поиск проблем и постановку задач, формулировку теорем. Эта часть математики остается скрытой, хоть мы и знаем, что направляет работу именно она. А на проблеме построения циркулем хорошо видны задачи и решения именно «второй» части математики.

Когда мы смотрим кино, то видим актеров, а о том, что есть режиссер, только догадываемся. Должен ли режиссер оставаться за кадром? Мы решили однажды вывести его на сцену.



Н. Н. МАЛОВ

КАК СФОТОГРАФИРОВАЛИ СВЕТ

При обычных способах фотографирования свет используется для получения изображения светящихся или отражающих свет предметов. Но недавно физики ухитрились сфотографировать распространяющийся свет, так сказать, «на лету».

Некоторые современные мощные источники света — лазеры — излучают свет не непрерывно, а отдельными периодически повторяющимися импульсами. Мощность импульса, длящегося всего 10 пикосекунд (1 *пс* = 10^{-12} *с*), может достигать громадной величины — нескольких гигаватт (1 *Гвт* = 10^9 *вт*) — примерно мощности Красноярской ГЭС. Но импульсы следуют сравнительно редко — около тысячи раз в секунду, так что средняя мощность излучения — несколько киловатт.

Для фотографирования света применялась установка, схема которой показана на рисунке 1.

Источником света служит мощный импульсный лазер Л, излучающий свет с длиной волны 1 *мкм*, что соответствует инфракрасной области спектра. Время излучения импульса 10 *пс*, значит, его протяженность в пространстве равна

$$3 \cdot 10^8\ м/с \cdot 10^{-11}\ с = 3 \cdot 10^{-3}\ м = 3\ мм.$$

«Световую» полоску такой длины вполне можно сфотографировать. Но при этом необходимо, чтобы затвор фотоаппарата срабатывал очень быстро, так как иначе изображение будет сильно смазано. Импульс движется с громадной скоростью, и если затвор

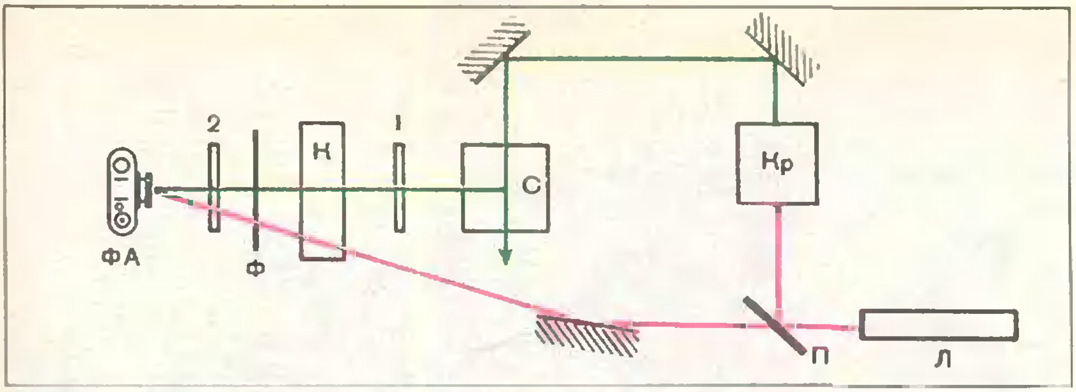


Рис. 1. Схема установки для фотографирования светового импульса.

фотоаппарата открыт в течение 1 *пс*, смещение импульса в пространстве составит

$$3\cdot 10^8\cdot 10^{-12}=3\cdot 10^{-4}\ (\text{м})=0{,}3\ (\text{мм}).$$

Изображение такого объекта будет смазано незначительно, но осуществить столь малое время экспозиции довольно сложно. Другая трудность состоит в том, чтобы затвор фотоаппарата срабатывал именно в тот момент, когда импульс «проносится» мимо объектива.

Итак, инфракрасный импульс излучается лазером и попадает на полупрозрачную пластинку П, поставленную под углом 45° к направлению движения импульса. Здесь свет частично отражается, частично проходит сквозь пластинку. Проследим сначала за отраженным лучом. Отражен-

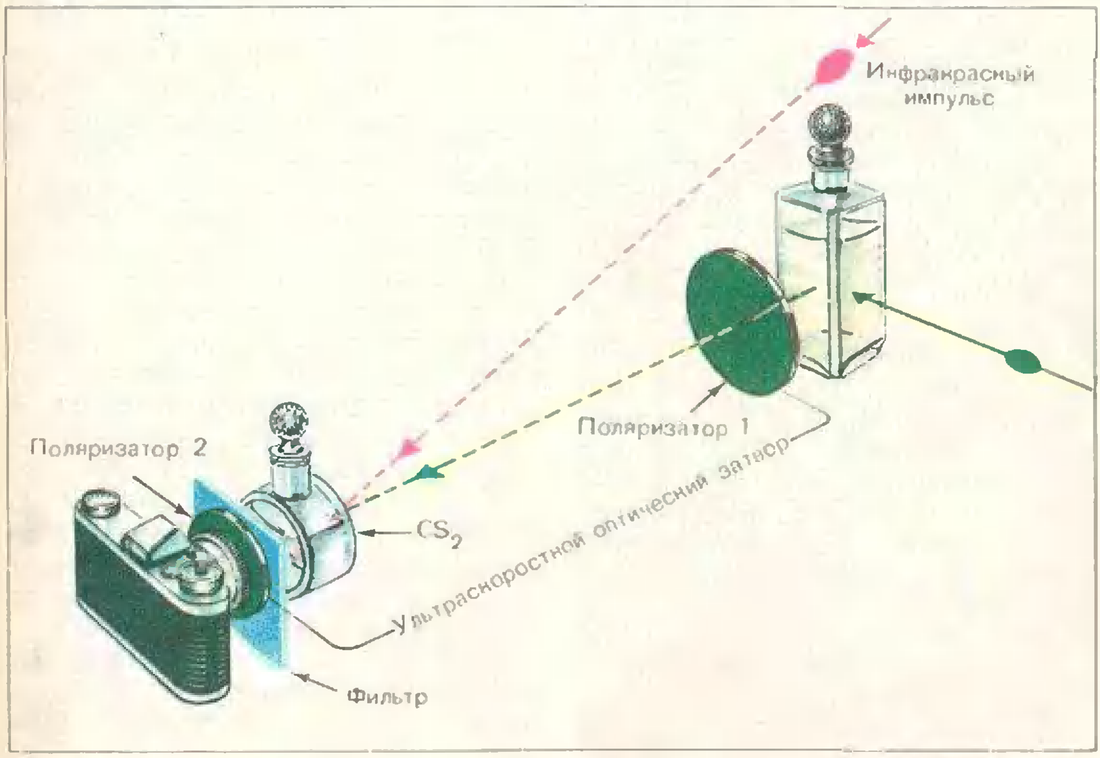


Рис. 2. Устройство для фотографирования света.

ный импульс попадает в кристалл Кр и возбуждает его молекулы. Кристалл выбирается так, чтобы его возбужденные молекулы излучали свет с частотой вдвое большей, чем частота падающего света. Эта новая частота соответствует зеленому свету. Такой эффект возможен только при очень большой мощности падающего импульса. Отразившись от двух вспомогательных плоских зеркал, поставленных под углом 45°, зеленый импульс проходит через сосуд с водой С. В воду подмешивают немного молока, чтобы усилить рассеяние зеленого света во все стороны, в частности, в направлении фотоаппарата с открытым затвором. Далее располагается поляроид 1, пропускающий световые колебания с электрическим вектором, расположенным во вполне определенной плоскости, проходящей через луч. Затем свет идет через кювету К с сероуглеродом и через поляроид 2. Причем этот поляроид ориентируется так, чтобы пропускаемые им колебания были перпендикулярны колебаниям, пропущенным первым поляроидом. Таким образом, через оба поляроида свет вообще не проходит. Но сероуглерод обладает замечательной способностью, открытой в конце прошлого века физиком Керром: если в нем создать сильное электрическое поле, перпендикулярное направлению распространяющегося света, то поляризация света изменяется. Обычно это вспомогательное поле создают между пластинами плоского конденсатора, помещенного в сероуглерод и соединенного с источником высокого напряжения. Но в опыте по фотографированию света поле создавалось мощным инфракрасным лучом, прошедшим через пластинку П и также попадавшим в кювету Керра. Свет с измененной поляризацией может пройти через второй поляроид и попасть в фотоаппарат ФА. Между кюветой и фотоаппаратом помещают светофильтр Ф, пропускающий только зеленый свет (через кювету проходит и инфракрасный свет — его частично поглощает фильтр Ф). Расположить приборы так, чтобы зеленый и инфракрасный импульсы приходили к кювете Керра одновременно, не представляет труда. Таким образом, инфракрасный импульс «открывает» оптический затвор (при помощи комбинации двух поляроидов и кюветы Керра) на ничтожно малое время 10^{-11} с (время существования инфракрасного импульса).

Благодаря этому удалось сфотографировать зеленый импульс, который получился на фотографии в виде слегка смазанного пятна внутри сосуда с водой. Эта замечательная фотография представлена на рисунке на с. 10. Для ее получения была использована установка, показанная на рисунке 2.

Размеры изображения зеленого импульса вполне соответствуют предварительно рассчитанным размерам. Получившийся на фотографии красный блик — след инфракрасного импульса, также попавшего в фотоаппарат.

Литература

В. А. Угаров, Оригинальный эксперимент — фотографирование света, «Наука и жизнь», 1973, № 6.

М. Дюге, Свет, сфотографированный на лету, «Успехи физических наук», 1973, т. 109, № 1.

Гейзеры *), горячие ключи, минеральные источники — все это отголоски вулканической деятельности.

Гейзеры — это горячие источники, в которых через определенные промежутки времени происходят извержения кипятка. Извержение большого гейзера — очень красивое зрелище. Со взрывом и грохотом столб кипящей воды, окутанный паром, взлетает фонтаном вверх, рассыпаясь на большой высоте. Фонтан бьет некоторое время, затем вода исчезает, пар рассеивается, и все успокаивается. Обычно вокруг гейзера есть бассейн, диаметром иногда в несколько метров. Земля около гейзеров бывает теплая или даже горячая.

Гейзеры и горячие источники расположены в местах активной вулканической деятельности, современной или сравнительно недавно прекратившейся. Они встречаются на Камчатке (около 100 гейзеров), в Исландии, в Новой Зеландии, в Северной Америке (Йеллоустонский национальный парк), в Японии, в Китае. В Исландии в долинах почти всех рек виден пар, поднимающийся от кипящих ключей и гейзеров. Тепло горячих источников используется там для обогрева жилищ и теплиц. На Камчатке есть даже река, получившая название Гейзерной. В долине этой реки находится около 20 крупных и множество мелких гейзеров. Самый большой гейзер Камчатки Великан выбрасывает струю воды высотой до 40 *м*, а пара — до нескольких сот метров. Мелкие гейзеры поднимают воду всего на несколько сантиметров над землей.

Деятельность гейзеров, как правило, периодична, но промежутки времени между извержениями у разных гейзеров различны. Извержения одних гейзеров происходят каждые

*) Гейзер — производное слово от geyza (исл.) — хлынуть.

несколько минут, извержения других — 1—2 раза в месяц. Интервал между извержениями может быть постоянным, а может и изменяться. Довольно строгой периодичностью отличается гейзер Старый Служака (Йеллоустонский национальный парк), период его извержений — от 53 до 70 минут. Струя воды Старого Служаки поднимается на высоту до 40 *м*. Извержения знаменитого Большого гейзера в Исландии повторяются через 20—30 часов и продолжаются по 2,5—3 часа. Но это не непрерывно бьющий фонтан. Мощная струя кипятка взлетает на большую высоту, бьет некоторое время и исчезает. Не успевает еще рассеяться пар, как вылетает новый столб кипятка, за ним еще и еще. Фонтан Большого гейзера достигает высоты 60 *м*.

Если взглянуть в бассейн гейзера после извержения, можно увидеть, что воды в нем нет, а в дне имеется отверстие — канал, уходящий в глубину. Перед началом извержения вода поднимается по каналу, заполняет бассейн, бурлит, выплескивается, а затем взлетает фонтан кипятка. Когда извержение прекращается, вода снова уходит в трубку гейзера. Например, у Большого гейзера диаметр трубки 3 *м*, глубина 23 *м*. На поверхности земли трубка заканчивается бассейном шириной 16 *м* и длиной 18 *м*.

Внутренняя поверхность трубки и бассейна выстлана очень ровным слоем кремнезема, такого твердого, что ударами молотка его не разбить. Отложения кремнезема называют гейзеритом. Около некоторых гейзеров образуются конусы из гейзерита высотой от нескольких сантиметров до нескольких метров.

Как же образовалась эта удивительная трубка? Как появилась облицовка трубки и бассейна?

Можно предположить, что это связано с отложениями веществ, содержащихся в воде. Однако вода гейзера не дает осадка; налитая в бутылку, она годами остается чистой.

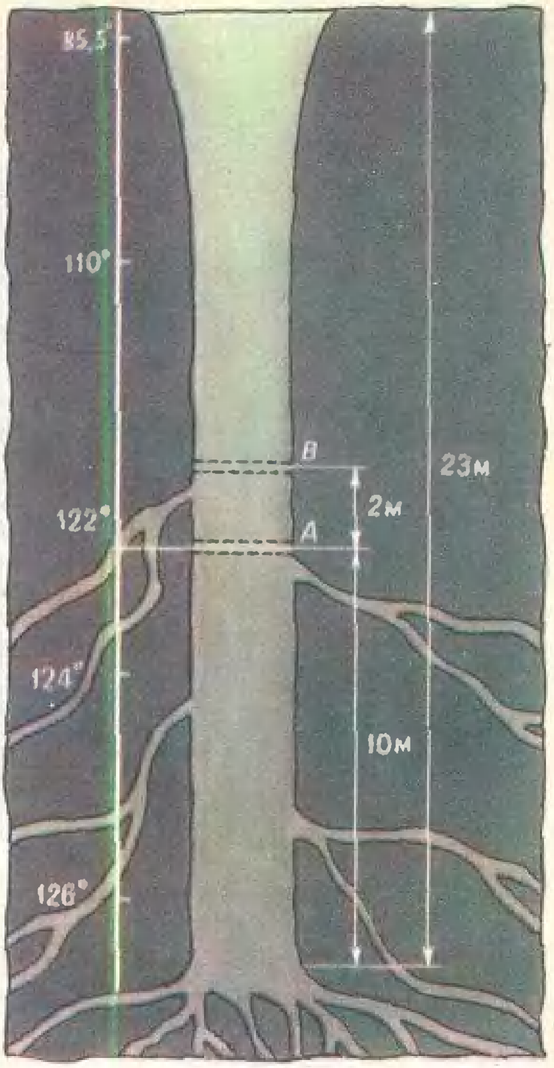


Рис. 1.

И только если выпаривать воду в испарительной чашке, то по краям, там, где испарение идет быстрее, будет отлагаться кремнезем, образуется кремнистое кольцо. В середине даже после продолжительного кипячения вода может только помутнеть.

Теперь представьте себе теплый источник, вода которого стекает по небольшому склону. Растекаясь, вода быстро испаряется, и кремнезем оседает. Этот осадок постепенно возвышает ложе, по которому течет вода. Таким образом увеличивается глубина колодца источника, пока, наконец, не образуется трубка и бассейн.

Но какие силы заставляют горячую воду бить фонтаном?

Первые объяснения работы гейзера были основаны на гипотезе существования большого подземного бассейна, лишь отчасти заполненного водой. Вода в подземном бассейне разогревается за счет внутреннего тепла Земли и кипит. Образующиеся пары поступают в трубку, которая заполнена водой из подземных каналов. Пар из бассейна поднимается по трубке, увлекает за собой воду, находящуюся в трубке, и заставляет ее выплескиваться вверх фонтаном. Однако экспериментальные исследования это не подтвердили.

Механизм действия гейзера впервые был объяснен в XIX веке Г. Бунзеном, который исследовал гейзеры в Исландии. Оказывается, подземный бассейн совсем не нужен. Трубки, созданной источником, вполне достаточно для того, чтобы произошло извержение гейзера.

Бунзен измерял температуру воды в гейзере, опуская в трубку термометр и отмечая каждый раз глубину погружения термометра. На рисунке 1 приведены полученные им результаты. Видно, что по мере продвижения в глубь трубки гейзера температура повышается. У вершины гейзера температура была 85,5° С, у основания она возросла до 126° С.

Отчего же вода в гейзере не кипит, несмотря на то, что ее температура превышает 100 градусов?

Известно, что температура кипения воды зависит от давления. При понижении давления температура кипения уменьшается, а при повышении давления — увеличивается. На вершине высокой горы вода кипит примерно при 80° С. В трубке гейзера, наоборот, температура кипения выше 100° С, потому что там давление больше атмосферного на величину давления столба воды в трубке. Этот излишек давления и не позволяет воде кипеть. Ни в одном месте трубки температура воды не достигает температуры кипения, соответствующей давлению в этом месте.

Перед извержением временами слышатся взрывы, и каждый взрыв сопровождается сильным волнением в бассейне. По-видимому, это происходит оттого, что по боковым протокам (см. рис. 1) в трубку гейзера поступает горячая вода и перегретый пар. Пар, смешиваясь с более холодной водой в трубке, отдает воде свое тепло. Может произойти испарение какого-то количества воды, тогда из-за резкого расширения пара возникает взрыв. Часть воды, перетекая из трубки в бассейн, вызывает в нем волнение.

В промежутках между извержениями температура воды в трубке постепенно повышается, но даже перед самым извержением она нигде не достигает температуры кипения.

Как же происходит извержение?

Ключ к разгадке этого явления дают наблюдения Бунзена. Ему удалось измерить температуру воды за несколько минут до извержения.

Оказалось, что температура воды несколько ниже середины трубки лишь двумя градусами ниже температуры кипения в этом месте трубки. Так, действительная температура воды в 10 метрах от дна гейзера была 122° С, а температура точки кипения с учетом давления воды в этом месте — 124° С.

Мы уже говорили, что перед извержением наблюдаются взрывы, обусловленные притоком пара из подземных каналов в трубку гейзера и сопровождающиеся поднятием водяного столба. Пусть пар вошел в трубку на высоте 10 *м* над дном и поднял воду, находившуюся на уровне A, до уровня B, расположенного двумя метрами выше (см. рис. 1). Давление в этом месте трубки уменьшается на величину давления двух метров воды, вытекшей в бассейн *). Температура

*) Весом пара можно пренебречь, так как его плотность намного меньше плотности воды.

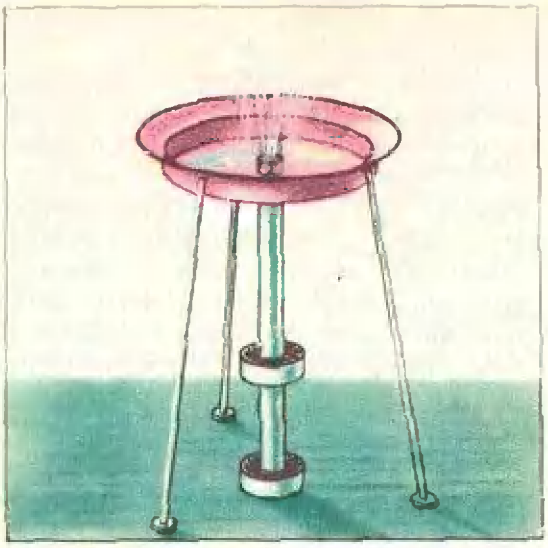


Рис. 2.

кипения при уменьшенном давлении будет 121° C. Следовательно, настоящая температура воды на уровне *А* (122° С) уже превышает температуру точки кипения на один градус. Вода в трубке сразу начинает кипеть, образуется пар, который еще выше поднимает воду и заставляет ее выливаться в наружный бассейн. Давление на нижние слои воды еще заметнее уменьшается, кипение идет все более бурно, паров образуется все больше и больше. Внезапно начинает кипеть вся масса воды, находящаяся в самой нижней части трубки; тогда верхние слои воды выбрасываются вверх с громадной скоростью, и происходит извержение гейзера.

Выброшенная вода снова падает в бассейн, охлаждается и через некоторое время начинает вливаться обратно в трубку, постепенно заполняя ее. Извержение кончилось. Время от времени слышатся взрывы, видны волнения воды, но следующий выброс начнется только тогда, когда вода в трубке достигнет температуры, близкой к температуре кипения.

Извержения природного гейзера не могут продолжаться бесконечно. Когда трубка достигнет такой длины, что температура воды в нижних слоях из-за слишком большого давления уже не сможет дойти до точки кипения, извержения должны прекратиться. Источник тем не менее продолжает откладывать кремнезем, и образуется красивый водоем. Глубина некоторых таких водоемов от 10 до 12 *м*.

Мы уже говорили, что температура воды в трубке гейзера во время «отдыха» нигде не достигает точки кипения. Следовательно, пар, производящий взрывы и поднимающий водяной столб, должен образовываться в боковых каналах, питающих трубку. Но гейзер может «работать» и без этих каналов, если несколько ниже середины его трубки есть дополнительный приток тепла. Это можно показать на действующей модели гейзера, которую нетрудно сделать самим. Общий вид установки такого искусственного гейзера показан на рисунке 2.

Нужно взять двухметровую металлическую трубку и установить ее вертикально. В верхней части трубки следует укрепить сосуд, достаточно большой, чтобы горячая вода не разбрызгивалась, а собиралась в сосуде и могла стекать обратно в трубку. Вся конструкция должна быть надежно закреплена. Поскольку придется иметь дело с горячей водой и паром, обращаться с искусственным гейзером нужно очень осторожно. Для работы такого гейзера нужно два источника тепла: один внизу, а второй немного ниже середины трубки. В качестве источников тепла можно взять большие консервные банки, наполненные горящими угольками. В дне банки надо вырезать дыру, немного меньшего диаметра, чем диаметр трубки, и, нагрев банку без углей, плотно насадить ее на трубку. Если отверстие не слишком велико, а банка хорошо разогрета, то при одновременном нагревании банки и трубки банка будет прочно держаться на том месте трубки, куда ее насадили. Извержение такого «гейзера» происходит каждые 5—6 минут.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Применение теоремы Эйлера к некоторым задачам

Б. В. Бекламов

В этой статье мы предлагаем читателям несколько задач, в решении которых центральную роль играет теорема Эйлера. Уделяя основное внимание задачам, мы не доказываем здесь эту теорему, а приводим лишь ее формулировку. Доказательство теоремы Эйлера, как и более общие формулировки этой теоремы, можно найти в книгах «Что такое математика?» Куранта и Роббинса и «Наглядная геометрия» Гильберта и Кон-Фоссена.

Прежде чем формулировать теорему Эйлера, договоримся, что линию с концами в двух данных точках мы будем называть *дугой, соединяющей эти точки*, в том случае, если эту линию можно пройти, не побывав ни в одной из ее точек дважды.

Теорема Эйлера. *Пусть на плоскости задано m точек и n попарно непересекающихся дуг, каждая из которых соединяет какие-либо две данные точки и не проходит через остальные $m-2$ точки, и пусть эти дуги делят плоскость на l областей. Если из каждой данной точки в любую из остальных можно попасть, двигаясь по этим дугам, то*

$$m-n+l=2.$$

В случае, изображенном на рисунке 1, все условия теоремы Эйлера выполнены, $m=12$, $n=18$, $l=8$ и $m-n+l=2$. На рисунках 2 и 3 изображены случаи, когда условия этой теоремы не выполняются. Так, на рисунке 2 из точки A_1 нельзя попасть в точку A_5 и $m-n+l=3\neq 2$, а на рисунке 3 линия, соединяющая точки A_1 и A_2, является самопересекающейся и опять $m-n+l=3\neq 2$.

В некоторых задачах совокупность, состоящую из нескольких точек и соединяющих их попарно непересекающихся дуг, мы называем *картой*; при этом точки из этой совокупности мы называем *вершинами*, а области, на которые дуги делят плоскость, — *странами*.

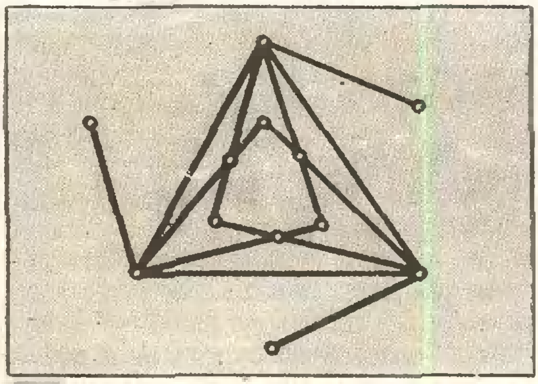


Рис. 1.

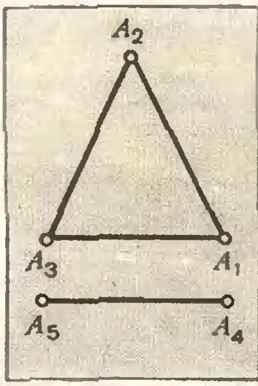


Рис. 2.

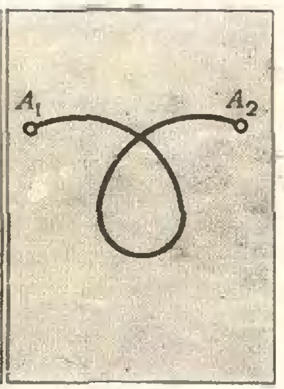


Рис. 3.

Теперь мы можем перейти к решению задач.

Задача 1. *Можно ли десять городов соединить между собой непересекающимися дорогами так, чтобы из каждого города выходило пять дорог, ведущих в пять других городов?*

Решение. Предположим, что города можно соединить между собой дорогами так, как указано в задаче. В таком случае, если какие-то два города окажутся не соединенными дорогой непосредственно, то найдется третий город, который уже будет непосредственно соединен с каждым из них. Изобразив на плоскости города точками, а дороги — дугами, получим, что любые две точки соединены цепочкой дуг. Так как в каждой точке сходятся пять дуг, то общее число дуг равно $\frac{5 \cdot 10}{2} = 25$. Согласно теореме Эйлера эти дуги делят плоскость на $2 + 25 - 10 = 17$ областей. Каждая из этих семнадцати областей ограничена по крайней мере тремя дугами, так как в противном случае нашлись бы два города, непосредственно соединенные по крайней мере двумя дорогами, а это противоречит условию задачи. Следовательно, число дуг не меньше $\frac{3 \cdot 17}{2} = 25{,}5$. Таким образом, исходное предположение приводит нас к противоречию, и города нельзя соединить между собой так, как это требуется в задаче.

Задача 2. *Три поссорившихся соседа имеют три общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?*

Решение. Предположим, что это сделать можно.

Изобразим дома синими, а колодцы — черными точками и каждую синюю точку соединим дугой с каждой черной точкой так, чтобы девять полученных дуг попарно не пересекались. Тогда всякие две точки, изображающие дома или колодцы, будут соединены цепочкой дуг, и в силу теоремы Эйлера эти девять дуг разделят плоскость на $9 - 6 + 2 = 5$ областей. Каждая из пяти областей ограничена по крайней мере четырьмя дугами, так как по условию задачи ни одна из дорожек не должна непосредственно соединять два дома или два колодца. Поэтому число дуг должно быть не меньше $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$, и, следовательно, наше предположение неверно.

Задача 3. *Докажите, что на всякой карте найдется страна, граничащая не более чем с пятью странами.*

Решение. Если число стран на карте не превосходит шести, то утверждение задачи очевидно. Мы докажем, что на карте, имеющей более шести стран, найдутся даже четыре страны, каждая из которых граничит не более чем с пятью странами. Окрасим вершины и дуги исходной карты в черный цвет, а красной краской отметим в каждой стране по одной точке. Всякие две отмеченные точки, лежащие в соседних странах (то есть странах, имеющих общую граничную дугу), соединим внутри этих стран красной дугой так, чтобы красные дуги попарно не пересекались. Тогда всякие две красные точки будут соединены цепочкой дуг, и так как никакие две построенные дуги не будут соединять одни и те же точки, то каждая страна на карте, состоящей из точек и дуг красного цвета, будет ограничена не менее чем тремя дугами. Если какая-то страна на этой карте ограничена более чем тремя дугами, то на ее границе можно выбрать две вершины, не соединенные дугой, и соединить их красной дугой внутри этой страны. Повторяя несколько раз эту операцию, мы получим красную карту, на которой каждая страна ограничена ровно тремя дугами. Так как, кроме того, на этой карте никакие две дуги не соединяют одни и те же вершины и так как число вершин больше трех, то из каждой вершины выходят не менее чем три дуги. Обозначим через n число дуг, через l — число стран, через m — число всех вершин красной карты и через a — число вершин, из которых выходят менее чем шесть дуг. Тогда получим

$$3l = 2n, \qquad (1)$$

$$3a + 6(m - a) \leqslant 2n. \qquad (2)$$

Из формулы (1) и теоремы Эйлера, примененной к системе точек и дуг красного цвета, следует, что

$$2n = 6m - 12,$$

$$3a + 6(m - a) \leqslant 6m - 12,$$

которое показывает, что $a \geqslant 4$. Остается заметить, что если некоторая страна на черной карте имеет больше пяти соседей, то из отмеченной в этой стране красной точки выходит больше пяти дуг, и потому, в силу неравенства $a \geqslant 4$, на черной карте найдутся четыре страны, каждая из которых имеет не больше пяти соседей.

Задача 4. *Можно ли семиугольник разрезать на выпуклые шестиугольники?*

Решение. Предположим, что какой-то семиугольник удалось разрезать на выпуклые шестиугольники. Обозначим число тех вершин шестиугольников, которые лежат внутри исходного семиугольника, через m, а число оставшихся вершин (то есть лежащих на границе семиугольника) — через m'. В качестве дуг, соединяющих вершины, выберем прямолинейные отрезки сторон многоугольников, удовлетворяющие следующему условию: отрезок должен соединять две вершины и не проходить через остальные вершины. Обозначим через n число таких дуг и через l — число областей, на которые эти дуги делят плоскость (число l на единицу больше числа шестиугольников). Ясно, что любые две вершины окажутся соединенными цепочкой дуг. В силу теоремы Эйлера

$$m + m' - n + l = 2. \qquad (3)$$

Так как внешняя область ограничена m' дугами, а каждая из остальных — не менее чем шестью дугами, то

$$2n \geqslant 6(l - 1) + m'. \qquad (4)$$

Из некоторых вершин на границе семиугольника выходят только две дуги. Обозначим число таких вершин через a. Из всякой другой вершины выходят по крайней мере три дуги, так что

$$3m + 3(m' - a) + 2a \leqslant 2n.$$

Отсюда в силу равенства (3)

$$n \leqslant 3l + a - 6.$$

Сравнивая это неравенство и неравенство (4), мы получаем

$$2a - m' \geqslant 6. \qquad (5)$$

Так как на границе семиугольника найдутся по крайней мере две вершины, из которых выходят дуги, ведущие внутрь семиугольника, то $m' - a \geqslant 2$. Из этого неравенства и неравенства (5) следует, что $a \geqslant 8$.

С другой стороны, так как семиугольник разрезан на выпуклые многоугольники, то всякая вершина, из которой выходят две дуги, является вершиной семиугольника, и потому $a \leqslant 7$. Таким образом, семиугольник нельзя разрезать на выпуклые шестиугольники.

Следующие задачи мы предлагаем читателю решить самостоятельно.

Упражнения

1. Можно ли пять городов соединить между собой непересекающимися дорогами так, чтобы из каждого города в любой другой город вела дорога, не проходящая через остальные города?

2. Докажите, что если на карте число стран больше девятнадцати, то на этой карте найдутся три страны с одинаковым числом соседей.

3. Пятиугольник разрезан на несколько многоугольников так, что все стороны исходного пятиугольника остались неразрезанными. Докажите, что если число получившихся многоугольников не менее пяти, то в одном из них найдется угол, который больше либо равен 72°.

4. Треугольник, все углы которого не больше 120°, разрезан на несколько треугольников. Докажите, что в одном из получившихся треугольников все углы не больше 120°.

5. В игре принимают участие два игрока. Перед началом игры на плоскости отмечается m точек. Игроки поочередно разыскивают две точки, еще не соединенные дугой, и соединяют эти точки дугой, которая не пересекает ранее построенные дуги. Выигрывает тот, кто делает последний ход. При каких m выигрывает игрок, сделавший первый ход, а при каких — его противник?

задачник Кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 декабря 1974 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М286, М287» или «...Ф303». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

Задачи

М286—М290; Ф298—Ф302

М286. На плоскости расположено N точек. Отметим все середины отрезков с концами в этих точках. Какое наименьшее количество точек плоскости может оказаться отмеченным?

А. Печковский

М287. Существует ли такая последовательность натуральных чисел, что любое натуральное число 1, 2, 3, ... можно представить в виде разности двух чисел этой последовательности единственным способом?

А. Лифшиц

М288. На конгрессе собрались ученые, среди которых есть друзья. Оказалось, что никакие двое ученых, имеющие на конгрессе равное число друзей, не имеют общих друзей. Докажите, что найдется ученый, у которого ровно один друг.

С. Конягин

М289. N гирь, каждая из которых весит целое число граммов, разложены на K равных по весу куч. Докажите, что можно не менее чем K разными способами убрать одну из гирь так, что оставшиеся $(N-1)$ гири уже нельзя разложить на K равных по весу куч.

С. Конягин

М290. Для каких n существует такая замкнутая несамопересекающаяся ломаная из n звеньев, что любая прямая, содержащая одно из звеньев этой ломаной, содержит еще хотя бы одно ее звено?

С. Конягин

Ф298. Внутри фотоаппарата перпендикулярно фотопластинке расположено плоское зеркало, длина которого DB равна половине фокусного расстояния объектива (рис. 1). Изобра-

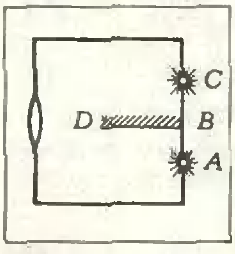


Рис. 1.

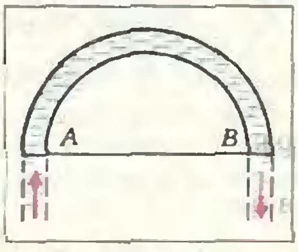


Рис. 2.

жение A звезды Вега находится от центра фотопластинки на расстоянии, вдвое меньшем радиуса объектива. Во сколько раз освещенность «отраженного изображения» C звезды Вега меньше освещенности ее изображения A в присутствии зеркала?

Г. Л. Коткин

Ф299. По гибкому шлангу сечением S течет жидкость плотности ρ со скоростью v. Найти натяжение нити AB, соединяющей концы A и B шланга, если известно, что она является диаметром полуокружности, которую образует шланг (рис. 2).

С. А. Беляев

Ф300. Найти, на какую высоту поднимается жидкость в расширяющемся и суживающемся конических капиллярах. Смачивание полное. Угол при вершине конуса, который образует капилляр, равен α. Этот угол считать малым. Коэффициент поверхностного натяжения жидкости σ.

Ф301. Круглая линза диаметра D состоит из двух соединенных по диаметру половинок. Фокусное расстояние одной из них F, другой $2F$. На расстоянии a от линзы находится источник света, на расстоянии $2a$ по другую сторону линзы — экран. Нарисуйте график зависимости освещенности изображения источника на экране от расстояния точки экрана до оптической оси линзы. Источник находится на оптической оси линзы, экран перпендикулярен этой оси.

Ф302. За лисой, бегущей прямолинейно и равномерно со скоростью $\mathbf{v}_1$, гонится собака, скорость которой $\mathbf{v}_2$ постоянна по величине и направлена все время на лису. В момент, когда скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ оказались взаимно перпендикулярными, расстояние между лисой и собакой было равно l.

Каково было ускорение собаки в этот момент?

Б. Б. Буховцев

Решения задач

М246—М250; Ф253—Ф259

М246. *На плоскости даны две прямые m и n и точка O. Постройте треугольник, две высоты которого лежат на данных прямых m и n, а центр описанной окружности находится в точке O.*

Чтобы не рассматривать различных случаев взаимного расположения прямых m, n и точки O, будем решать задачу без чертежа.

Предположим вначале, что точка O не совпадает с точкой пересечения прямых m и n. Заметим следующее:

1) Если через точку O провести прямые m' и n', параллельные прямым m и n соответственно, то мы должны получить перпендикуляры, проходящие через середины сторон искомого треугольника (это сразу следует из того, что O — центр описанной окружности).

2) Прямая m'', симметричная прямой m относительно прямой n', должна проходить через вершину искомого треугольника (скажем, через точку C). Аналогично, прямая n'', симметричная прямой n относительно прямой m', также должна проходить через точку C. (Оба эти утверждения вытекают из первого замечания.)

3) Если прямые m'' и n'' пересекаются (а они могут и не пересечься; потому-то мы всюду в 1) и 2) и писали слово должна), то точка их пересечения — это вершина C нужного треугольника.

После того, как вершина C найдена, вершины A и B находятся без труда: нам известны направления сторон CA и CB и то, что они пересекаются с прямыми m и n в точках A и B соответственно.

Итак, мы описали процесс построения. Однако осталось невыясненным, всегда ли это построение приводит к цели; иначе говоря, произвольно ли можно задавать прямые m, n и точку O? Из нашего построения следует, что это не так: если прямые m'' и n'' параллельны, то вершину C найти нельзя. Проверьте, что прямая m'' будет параллельна n'' в том и только том случае, когда либо острый угол между прямыми m и n равен 60°, либо когда $m \parallel n$.

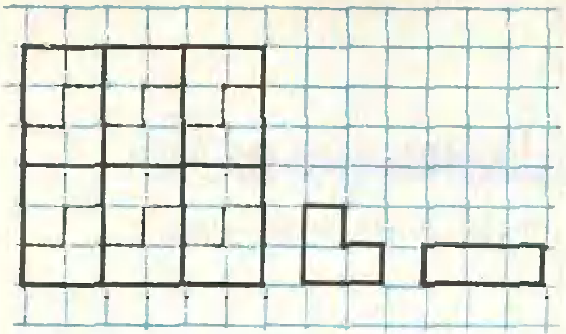


Рис. 1. Рис. 2.

Если $m \parallel n$, то решений нет. Если же угол между прямыми m и n равен 60°, то прямые m'' и n'' могут совпадать, и в этом случае получается целое семейство решений. Происходит это лишь тогда, когда параллелограмм, образованный прямыми m, n, m' и n', является ромбом с углом 60° при вершине O.

Наконец, если точка O совпадает с точкой пересечения прямых m и n, то треугольник либо вырождается в точку, либо же решением является целое семейство правильных треугольников, — в этом случае угол между прямыми m и n равен 60°.

Отметим в заключение, что если немного изменить формулировку задачи, — считать, что на прямых m и n лежат не высоты, а биссектрисы треугольника, — то получится задача, в некотором смысле *двойственная* к решенной. (Впрочем, она легко решается и без использования этой двойственности.) Постарайтесь решить и эту задачу и понять, в чем состоит двойственность.

М247. *Квадрат* 6×6 *нужно заполнить* 12 *плитками, из которых* k *имеют форму уголка, а остальные* $12-k$ *прямоугольника (рис. 1). При каких* k *это возможно?*

Если k — четное, то квадрат можно заполнить уголками и прямоугольниками (рис. 2). При k, равном 5, 7, 9 и 11, заполнение также возможно (рис. 3).

Остается разобрать случаи $k=1$ и $k=3$. Оказывается, что в этих случаях укладка невозможна.

1) Пусть $k=1$. Занумеруем строки квадрата (рис. 4) и сопоставим каждой клеточке прямоугольника (или уголка) номер строки, в которой она находится. Нетрудно заметить, что сумма номеров строк (по клеточкам) для любого прямоугольника делится на 3, а для любого уголка — не делится. Сумма номеров строк квадрата (по клеточкам) делится на 3, значит, при $k=1$ укладка невозможна.

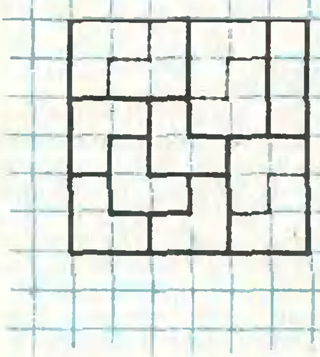
2) Пусть $k=3$. Занумеруем строки и столбцы квадрата (рис. 5).

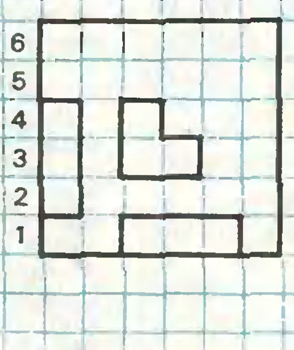
Сопоставим каждой из фигур два числа: сумму номеров строк и сумму номеров столбцов, в которых находятся клеточки этой фигуры. Для прямоугольников оба эти числа делятся на 3, а для уголков — не делятся. Остатки, получающиеся при делении на 3 чисел, соответствующих уголкам, определяются лишь видом уголка и не меняются, если передвигать уголок по квадрату не переворачивая (см. рисунки 5 и 6; на рисунке 6 изображен пример такого перемещения; в клеточках поставлены номера строк и столбцов, в которых лежат клеточки).

Сумма номеров строк и сумма номеров столбцов (по клеткам) для всего квадрата делятся на 3; следовательно, укладка квадрата тремя уголками и девятью прямоугольниками возможна только тогда, когда все три уголка одного вида. В силу симметрии квадрата будем считать, что все уголки такие, как на рисунке 6.

Покажем теперь, что полосу ширины 6 и высоты n невозможно уложить, если использовать прямоугольники и уголки только такого вида (при условии, что хоть один уголок должен быть использован).

Предположим противное. Покажем тогда, что если возможна укладка полосы $6\times n$, то возможна укладка полосы $6\times m$, где m — некоторое число, меньшее n.





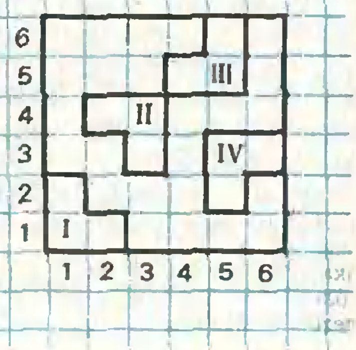


Рис. 3. Рис. 4. Рис. 5.

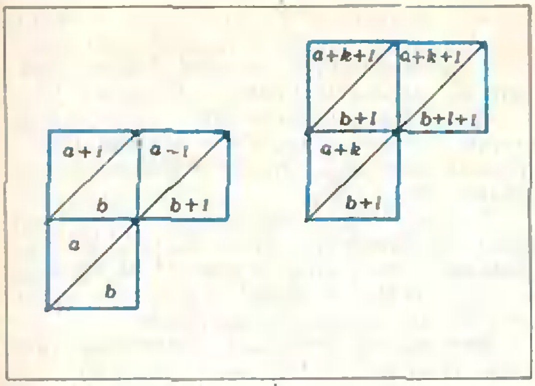


Рис. 6.

второй строк покрыты только прямоугольниками. Из рисунков 8 *а* — *в* следует, что во всех случаях, кроме изображенных на рисунках 11 *а*, *б*, индуктивный переход возможен. Рассмотрим эти два случая. Красная клетка не может быть покрыта уголком — иначе нижнюю клетку вообще нельзя будет *покрыть. Если красная клетка покрыта* горизонтальным прямоугольником, то индуктивный шаг можно сделать. Поэтому будем считать, что она покрыта вертикальным прямоугольником. Но тогда и черная клетка тоже покрыта вертикальным прямоугольником. Если и синяя клетка покрыта вертикальным прямоугольником, то полосу

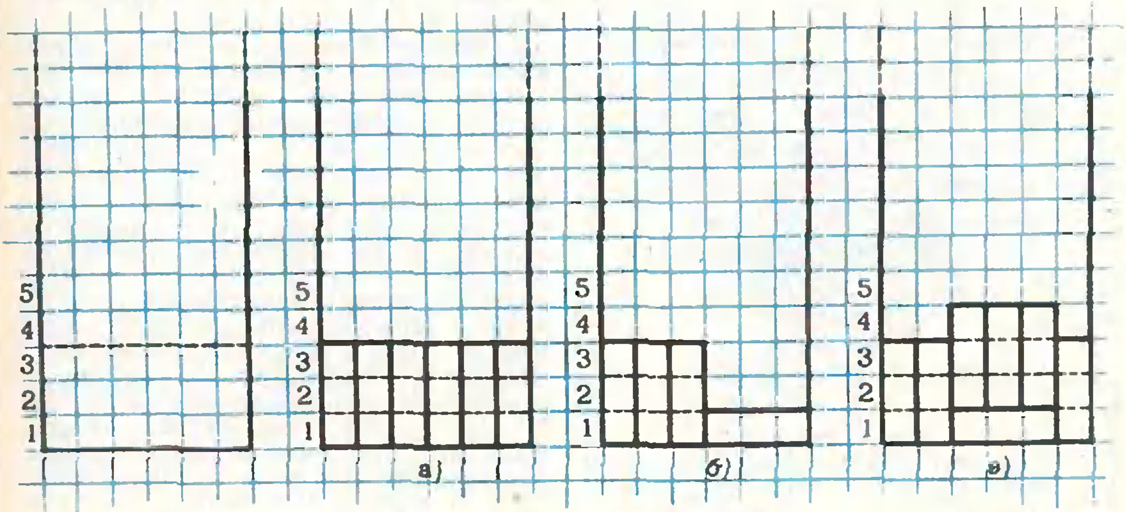


Рис. 7. Рис. 8.

Занумеруем строки полосы снизу вверх (рис. 7). Из рисунков 8 *а*, *б*, *в* следует, что если в первых трех строках полосы нет клетки, принадлежащей уголку, то у полосы *можно отрезать первую строку, то есть* можно сделать индуктивный шаг.

Пусть есть уголок, содержащий клетку первой или второй строки. Возьмем самый правый из таких уголков. Ясно, что красная клетка на рисунке 9 (уголок, изображенный на нем, — самый правый) покрыта горизонтальным прямоугольником, иначе укладка вылезет за пределы полосы. Синяя клетка либо лежит за пределами полосы, либо покрыта вертикальным прямоугольником — случаи *а*) и *б*). В случае *б*) укладка невозможна — это видно из рисунка. В случае *а*) раз синяя клетка покрыта вертикальным прямоугольником, то черная и зеленая клетки тоже покрыты вертикальными прямоугольниками. Перестроив конфигурацию рисунка 9, *а*, как показано на рисунке 10, мы «поднимем» уголок так, что он уже не будет содержать клеток первых двух строк.

Итак, нам осталось рассмотреть, что будет в том случае, когда клетки первой и

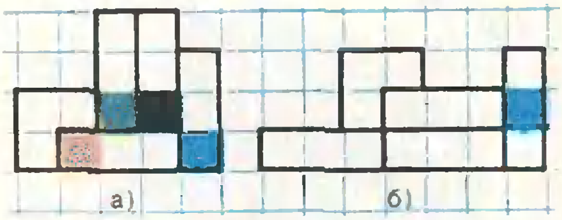


Рис. 9.

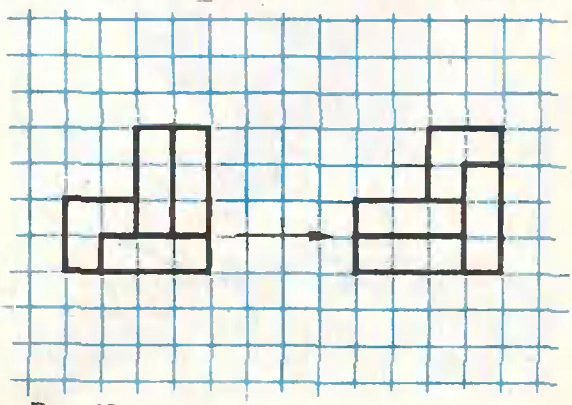


Рис. 10.

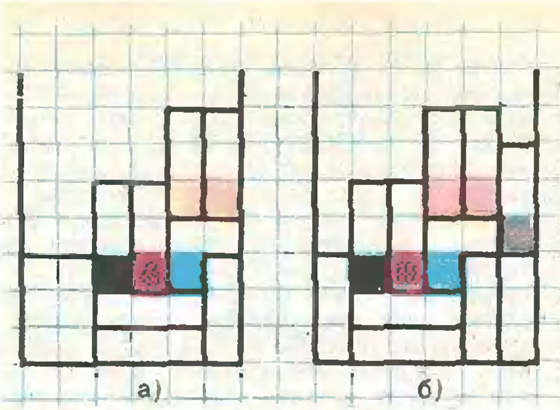


Рис. 11.

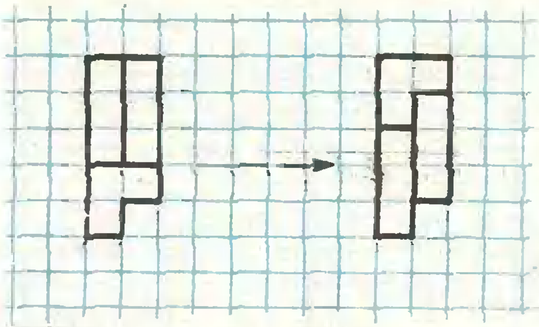


Рис. 12.

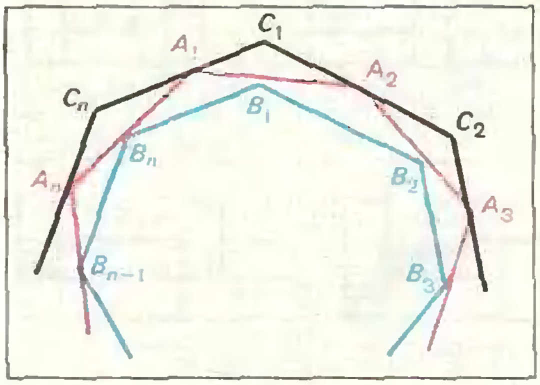


Рис. 13

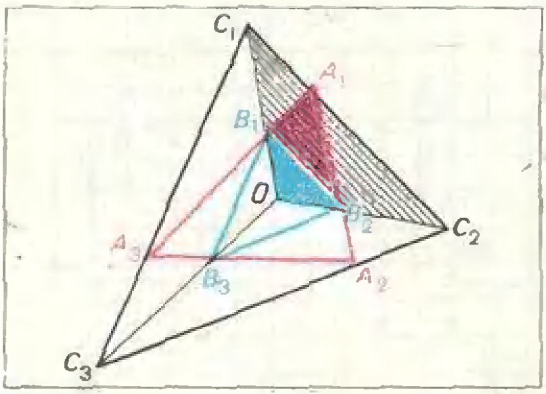


Рис. 14.

можно обрезать (см. рис. 8,*в*). Поэтому рассмотрим случай, когда синяя клетка покрыта уголком. Тогда зеленая клетка покрыта вертикальным прямоугольником. После этого легко сообразить, что желтые клетки также покрыты вертикальными прямоугольниками. Значит, уголок можно поднять (рис. 12).

Таким образом, нам удалось убрать все уголки из первых трех строк полосы. Мы уже убедились, что в этом случае от полосы $6\times n$ можно перейти к полосе $6\times m$, где $m<n$. То есть, мы доказали следующее:

Если полосу $6\times n$ можно покрыть прямоугольниками и уголками (такими, как на рисунке 6), то тогда можно заполнить и полосу $6\times m$, где m — некоторое число, меньшее n.

Остается убедиться, что при достаточно малых m такое покрытие невозможно. Это очевидно, если $m<3$.

Итак, задача полностью решена.

Л. Г. Лиманов

М248. *В выпуклый n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$ вписан n-угольник $B_1B_2\ldots B_n$, площадь которого равна P (вершина B_i лежит на стороне A_iA_{i+1} для $i=1, 2, \ldots, n-1$, а вершина B_n — на A_nA_1). Около того же n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ описан n-угольник $C_1C_2\ldots C_n$, площадь которого равна Q, так, что $C_1C_2 \parallel B_1B_2$, $C_2C_3 \parallel B_2B_3$, $\ldots$, $C_nC_1 \parallel B_nB_1$ (вершина A_i лежит на стороне $C_{i-1}C_i$ для $i=2, \ldots, n$, а вершина A_1 — на стороне C_nC_1; см. рис. 13). Найдите площадь n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$.*

Решим сначала задачу для $n=3$. Докажем, что в этом случае площадь S треугольника $A_1A_2A_3$ равна среднему геометрическому площадей вписанного и описанного треугольников:

$$S^2=QP. \tag{1}$$

Поскольку треугольники $B_1B_2B_3$ и $C_1C_2C_3$ подобны, то прямые B_1C_1, B_2C_2 и B_3C_3 пересекаются в одной точке O (докажите это!), при этом $\Delta B_1B_2B_3$ можно получить из $\Delta C_1C_2C_3$ подобным сжатием (гомотетией) с центром в точке O и коэффициентом

$$k=\frac{B_1B_2}{C_1C_2}=\frac{B_2B_3}{C_2C_3}=\frac{B_3B_1}{C_3C_1}=\frac{OB_i}{OC_i} \tag{2}$$

$(i=1, 2, 3)$.

Обозначим через q_i, s_i и p_i части площадей Q, S и P соответственно, лежащие внутри треугольников C_1OC_2 (при $i=1$), C_2OC_3 ($i=2$) и C_3OC_1 ($i=3$); например, q_1 — площадь голубого треугольника на рисунке 14, s_1 — сумма площадей голубого и розового треугольников (с общим основанием), p_1 — сумма площадей голубого треугольника и заштрихованной трапеции (то есть площадь треугольника C_1OC_2). Тогда для каждого $i = 1, 2, 3$

$$\frac{q_i}{s_i} = k, \qquad \frac{q_i}{p_i} = k^2$$

и значит, $\dfrac{s_i}{p_i} = k$. Поэтому

$$\frac{Q}{S} = \frac{\Sigma q_i}{\Sigma s_i} = k$$

и

$$\frac{S}{P} = \frac{\Sigma s_i}{\Sigma p_i} = k,$$

откуда следует (1).

Этот же ответ получается и для произвольного n, если n-угольники $B_1B_2 \ldots B_n$ и $C_1C_2 \ldots C_n$ подобны. В условии задачи содержится искусная ловушка (в нее попалось большинство читателей, приславших нам письма по поводу этой задачи): там сказано лишь, что стороны многоугольников параллельны; из этого, конечно, следует равенство углов, но не следует подобие многоугольников — пропорциональность соответствующих сторон. Уже для $n = 4$ нетрудно построить примеры (рис. 15 и 16), показывающие, что равенство (1) не обязательно выполняется (четверо наших читателей: *В. Тарасов* (Ленинград), *С. Финашин* (Ленинград), *А. Вятчин* (Павлово) и *А. Гончаров* (Никополь) заметили это), то есть S не определяется однозначно по заданным P и Q. В этом случае вопрос задачи естественно понимать так: *какие значения может принимать S при заданных P и Q?*

Сравнительно нетрудно придумать примеры, в которых S, Q и P связаны неравенством

$$S^2 \geqslant QP. \qquad (3)$$

Проверьте, что уже рисунок 16 (где $B_1B_2B_3B_4$ и $C_1C_2C_3C_4$ — равнобочные трапеции) позволяет реализовать любую тройку значений S, Q и P, связанных неравенством (3). Значительно более трудной и интересной задачей является такая: *обязательно ли выполняется неравенство* (3)?

Мы предоставляем читателям возможность подумать над этим вопросом; ему мы посвятим заметку в одном из следующих номеров «Кванта».

М249. *На ребрах $A'D'$ и $C'D'$ куба $ABCDA'B'C'D'$ выбирают две точки K и M так, что плоскость KDM касается шара, вписанного в куб (рис. 17). Докажите, что величина φ двугранного угла при ребре $B'D$ тетраэдра $B'DKM$ не зависит от выбора точек K и M. Найдите эту величину φ.*

Приведем наиболее короткое решение этой задачи, использующее лишь соображения симметрии.

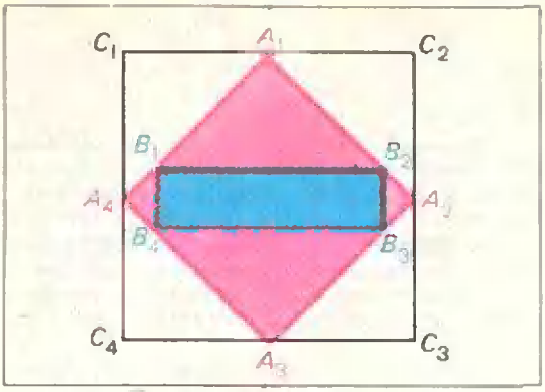


Рис. 15.

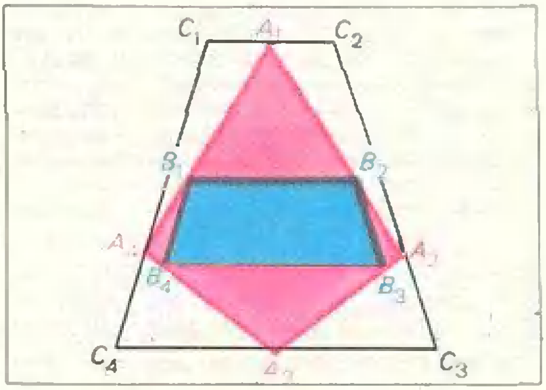


Рис. 16.

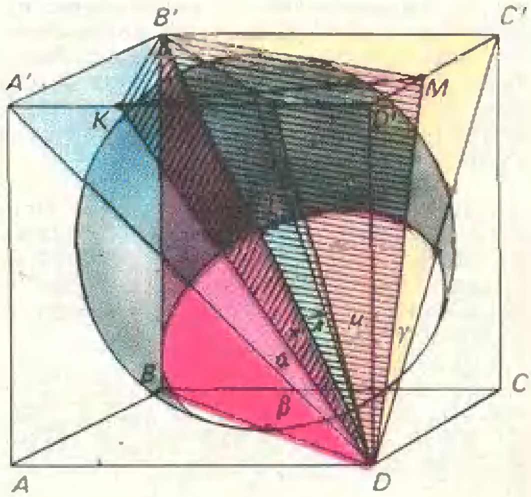


Рис. 17.

Обозначим точку касания шара с плоскостью KDM через L, диагональ куба $B'D$ — через d. Проведем через d шесть плоскостей α, $\varkappa$, λ, μ, γ и β, проходящих соответственно через точки A', K, L, M, C' и B.

Двугранный угол $\sphericalangle \alpha d\gamma$ (угол между плоскостями α и γ) равен 120°, поскольку при поворотах куба на 120° вокруг диагонали d углы $\sphericalangle \alpha d\gamma$, $\sphericalangle \gamma d\beta$ и $\sphericalangle \beta d\alpha$ совмещаются друг с другом.

Но $\sphericalangle \alpha d\varkappa = \sphericalangle \varkappa d\lambda$: точки, в которых две плоскости — KDM и KDA', — проходящие через прямую KD, касаются шара, разумеется, симметричны друг другу относительно плоскости $KB'D$, проходящей через центр шара, а следовательно, плоскости α и λ тоже симметричны друг другу относительно плоскости $\varkappa$. Аналогично, $\sphericalangle \lambda d\mu = \sphericalangle \mu d\gamma$.

Поскольку сумма углов $\sphericalangle \alpha d\lambda + \sphericalangle \lambda d\gamma = \sphericalangle \alpha d\gamma$ равна 120°, сумма их половин $\varphi = \sphericalangle \varkappa d\lambda + \sphericalangle \lambda d\mu = \sphericalangle \varkappa d\mu$ равна 60°.

Большинство читателей, так же как и автор *И. Ф. Шарыгин*, решили эту задачу с помощью вычислений и получили следующий интересный промежуточный результат: сумма длин $|KD'| + |D'M|$ всегда равна длине ребра куба (то есть так же, как величина угла φ, не зависит от положения точки L).

Н. Б. Васильев

М250. а) *При дворе короля Артура *) собрались n рыцарей. Некоторые из них враждуют друг с другом, но у каждого рыцаря не менее $\frac{n}{2}$ друзей среди собравшихся. Докажите, что Мерлин — советник короля Артура — может усадить рыцарей за круглым столом так, чтобы рядом с каждым сидели его друзья.*

б) *Докажите, что если у каждого рыцаря одинаковое четное (и, конечно, положительное) число друзей, то Мерлин может рассадить рыцарей за несколько круглых столов так, чтобы никто не сидел рядом со своим врагом (у Артура есть столики на двоих, на троих и т. д.).*

Задача М250 б) приведена здесь в уточненной формулировке. Это очень трудная задача. Ее решению будет посвящена заметка «Задачи о графах и сказка «Иван-царевич и серый волк», которую можно будет прочесть в следующем номере нашего журнала.

Приведем решение М250 а).

Рассаживая рыцарей за круглым столом или на одну скамью (то есть в ряд), мы всегда будем подразумевать, что соседи являются друзьями. Нам понадобится такой факт.

Лемма. *Пусть на одной скамье сидят k рыцарей, и пусть у каждого из двух крайних среди сидящих рыцарей более половины друзей. Тогда этих k рыцарей можно усадить за круглым столом.*

Доказательство. Обозначим рыцарей слева направо в том порядке, как они сидят, через

$$B_1, B_2, \ldots, B_k.$$

Если B_1 и B_k — друзья, то утверждение леммы очевидно. Рассмотрим всех тех рыцарей, слева от которых сидит друг рыцаря B_k. Их не менее $k/2$. Поэтому среди них найдется друг рыцаря B_1. Обозначим его B_s (тогда B_{s-1} — друг B_k). Теперь пересадим рыцарей в таком порядке:

$$B_1, B_2, \ldots, B_{s-1}, B_k, B_{k-1}, \ldots, B_s.$$

Поскольку B_1 и B_s — друзья, то рыцарей уже можно усадить за стол.

Утверждение леммы доказано. Теперь докажем, что n рыцарей всегда можно усадить на одной скамье. Пусть на скамью уже удалось усадить r рыцарей ($r < n$); покажем, что тогда на скамью можно поместить еще одного рыцаря.

Возможны два случая: 1) у крайних рыцарей все друзья уже сидят на скамье; 2) у крайних рыцарей есть друзья среди не сидящих на скамье. Во втором случае очевидно, что с краю можно посадить еще одного рыцаря.

Если имеет место первый случай, то r рыцарей, сидящих на скамье, согласно лемме, можно посадить и за круглым столом. Обозначим рыцарей, уже сидящих за столом, по порядку через $B_1, B_2, \ldots, B_r$. Возьмем рыцаря A из числа $n - r$ нерассаженных рыцарей, знакомого с каким-нибудь сидящим за столом рыцарем, например с B_m ($m < r$) (такой найдется, поскольку либо $r \leqslant \frac{n}{2}$, либо $n - r \leqslant \frac{n}{2}$). Теперь $r + 1$ рыцаря можно усадить на скамью так:

$A, B_m, B_{m+1}, \ldots, B_r, B_1, B_2, \ldots, B_{m-1}$.

Рассуждая аналогично, получим, что постепенно можно усадить на одной скамье всех n рыцарей. Применяя лемму к n рыцарям, сидящим на скамье, усаживаем их за круглый стол.

В. Л. Гутенмахер

Ф253. *Шар, изготовленный из твердого диэлектрика, поместили в однородное электрическое поле с напряженностью E. При этом диэлектрик оказался полностью поляризованным. Воспользовавшись принципом суперпозиции, найти напряженность электрического поля в центре шара и в точках на расстоянии r от центра шара (r меньше радиуса шара).*

Молекулы диэлектрика можно представить как гантельки длины l с зарядами $+q$ и $-q$ на концах. Число молекул в единице объема равно n.

---

*) См. Марк Твен, Янки при дворе короля Артура.

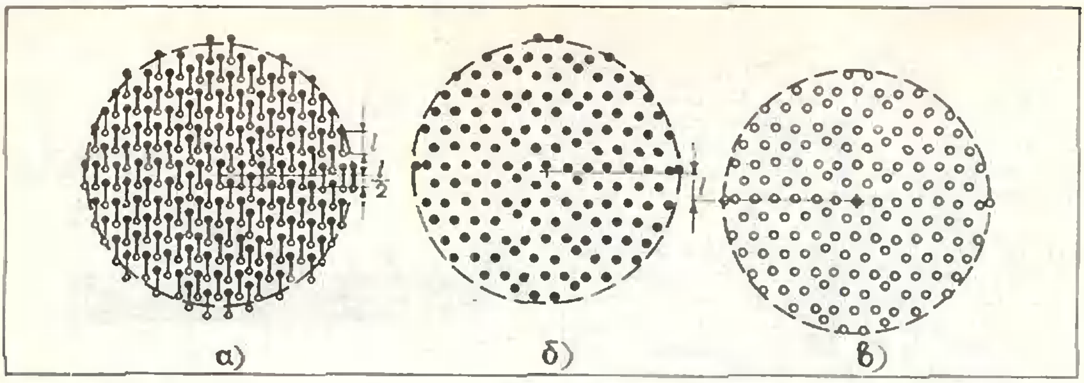


Рис. 18.

Во внешнем электрическом поле все гантельки ориентируются вдоль поля (рис. 18, *а*), при этом на шаре возникают заряды, распределенные определенным образом по его поверхности. Внутри шара, где плотности положительных и отрицательных зарядов одинаковы, заряды уничтожают друг друга.

Если внимательно посмотреть на приведенный рисунок, то можно представить себе, что шар из полностью поляризованного диэлектрика эквивалентен двум как бы вложенным друг в друга шарам. Один шар заряжен только отрицательно, другой — только положительно (рис. 18, *б*, и *в*). Центры этих шаров смещены друг относительно друга на расстояние l (длина гантельки), а относительно центра реального шара они смещены на расстояние $\frac{l}{2}$ (рис. 19).

Таким образом, поле в любой точке складывается из внешнего поля и полей, созданных положительно и отрицательно заряженными шарами. Поэтому вначале решим

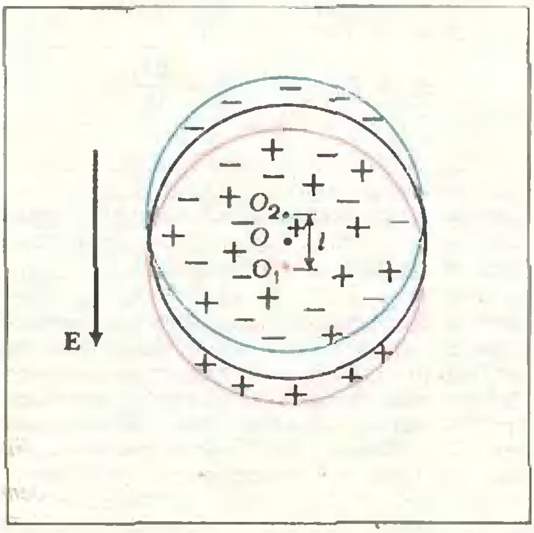


Рис. 19.

вспомогательную задачу: найдем напряженность поля внутри равномерно заряженного шара на расстоянии r от его центра.

Как известно*), напряженность поля внутри равномерно заряженной сферы равна нулю, а вне сферы поле такое же, как если бы оно создавалось точечным зарядом, находящимся в центре сферы. Разобьем равномерно заряженный шар на тонкие сферические слои, толщина которых много меньше радиуса шара. Согласно принципу суперпозиции напряженность поля на расстоянии r от центра шара равна сумме напряженностей полей зарядов таких сферических слоев. Но напряженность поля, созданного зарядами тех слоев, радиусы которых больше r, равна нулю, а слоев, радиусы которых меньше r, — такая, как если бы заряды этих слоев находились в центре шара. Следовательно, напряженность поля на расстоянии r от центра шара равна $E_r = \frac{Q_r}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$, где Q_r — заряд шара радиуса r. Если число зарядов q в единице объема шара равно n, то

$$Q_r = qn\frac{4}{3}\pi r^3 \text{ и } E_r = \frac{qnr}{3\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Воспользовавшись полученными результатами, нетрудно найти напряженность поля в любой точке шара из диэлектрика.

Рассмотрим центр шара. Напряженность в этой точке равна сумме трех векторов (рис. 20): вектора **E** напряженности внешнего поля, вектора $\mathbf{E}_1$ напряженности поля, созданного в этой точке положительно заряженным шаром, и вектора $\mathbf{E}_2$ напряженности поля, созданного отрицательно заряженным шаром. Так как центр шара находится на расстоянии $\frac{l}{2}$ от центров положительно и от-

*) См., например, статью Л. П. Баканиной и С. М. Козела «Принцип суперпозиции в электростатике», «Квант», 1973, № 3.

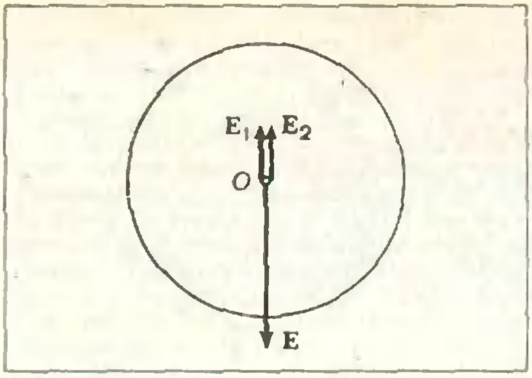


Рис. 20.

рицательно заряженных шаров, то

$$E_1 = E_2 = \frac{qn}{3\varepsilon\varepsilon_0}\,\frac{l}{2} = \frac{qnl}{6\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Поэтому (см. рис. 20)

$$E_0 = E - E_1 - E_2 = E - \frac{qnl}{3\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Теперь найдем напряженность поля в некоторой точке A внутри шара. Обозначим расстояние от этой точки до центра положительно заряженного шара r_1, а до центра отрицательно заряженного шара r_2. Вектор напряженности поля в точке A складывается из трех векторов (рис. 21): $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}_1'$ и $\mathbf{E}_2'$, где $E_1' = \frac{qnr_1}{3\varepsilon\varepsilon_0}$ — поле положительно заряженного шара, $E_2' = \frac{qnr_2}{3\varepsilon\varepsilon_0}$ — поле отрицательно заряженного шара.

Найдем сначала сумму $\mathbf{E}'$ векторов $\mathbf{E}_1'$ и $\mathbf{E}_2'$. Рассмотрим треугольники AO_1O_2 и

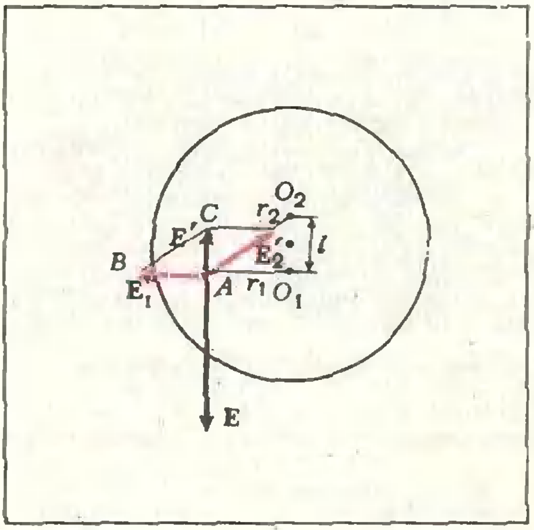


Рис. 21.

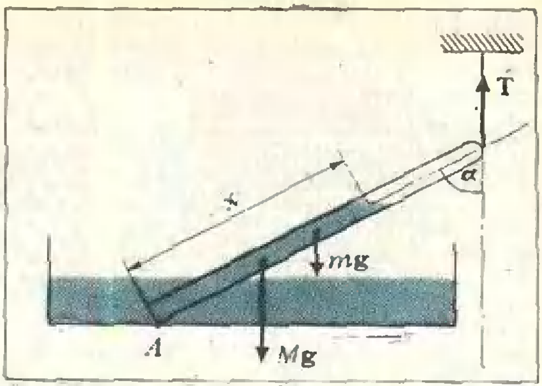


Рис. 22.

ABC. Углы $\angle ABC$ и $\angle O_1AO_2$ равны, и выполняется следующее соотношение:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{O_1A}{O_2A},$$

так как

$$\frac{AB}{BC} = \frac{E_1'}{E_2'} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{O_1A}{O_2A}.$$

Из подобия треугольников следует, что вектор $\mathbf{E}'$ параллелен линии O_1O_2.

Величину вектора $\mathbf{E}'$ можно найти из соотношения

$$\frac{E'}{E_1'} = \frac{O_1O_2}{O_1A},$$

откуда

$$E' = E_1'\,\frac{O_1O_2}{O_1A} = \frac{qnl}{3\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Тогда окончательно напряженность поля в точке A равна

$$E_A = E - E' = E - \frac{qnl}{3\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Как видно, напряженность поля в точке A не зависит ни от r_1, ни от r_2, то есть не зависит от положения точки A внутри шара. Это означает, что поле внутри полностью поляризованного шара однородно.

Ф254. *Тонкостенная трубка ртутного барометра открытым концом опирается на дно чашки со ртутью. Закрытый конец удерживается вертикальной нитью, так что трубка составляет угол α с вертикалью (рис. 22). Длина трубки l, масса m, плотность ртути ρ, атмосферное давление h мм рт. ст. Найти силу натяжения нити. Размером погруженной в ртуть части трубки пренебречь. Площадь сечения трубки S.*

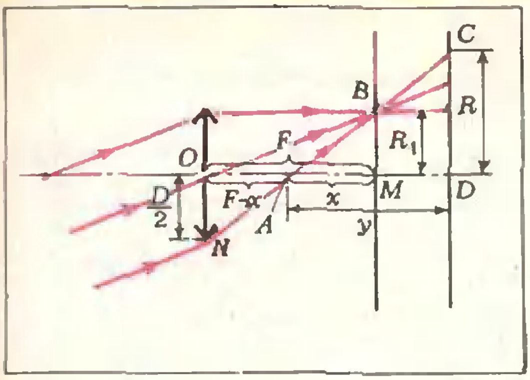


Рис. 23.

Так как трубка барометра находится в равновесии, то сумма моментов всех сил, действующих на трубку со ртутью, относительно любой оси должна быть равна нулю. Запишем условие равновесия для оси, перпендикулярной плоскости чертежа и проходящей через точку A, в которой трубка опирается на дно сосуда:

$$Tl\sin\alpha - mg\frac{l}{2}\sin\alpha - Mg\frac{x}{2}\sin\alpha = 0. \qquad (1)$$

Здесь T — сила натяжения нити, mg — сила тяжести трубки, $Mg = \rho xSg$ — вес ртути, находящейся в трубке, x — длина столбика ртути.

Давление столбика ртути в трубке равно атмосферному давлению, поэтому

$$x = \frac{h}{\cos\alpha}. \qquad (2)$$

Следовательно, из (1) и (2)

$$T = \frac{mg\frac{l}{2} + \frac{\rho Sx^2g}{2}}{l} = \frac{1}{2}g\left(m + \frac{\rho Sh^2}{l\cos^2\alpha}\right).$$

Ф255. *При фотографировании Луны с Земли фотоаппаратом, объектив у которого имеет фокусное расстояние F, на фотопластинке получено размытое изображение Луны в виде диска радиуса R. Затем с помощью того же аппарата получают резкое изображение Луны. Оно имеет радиус R_1. На какое расстояние сместили при втором фотографировании Луны объектив фотоаппарата относительно фотопластинки?*

Диаметр объектива D. Дифракцию не учитывать.

Так как Луна находится очень далеко от Земли и размеры объектива малы по сравнению с расстоянием до Луны, то можно считать, что из каждой точки Луны в объектив попадает параллельный пучок лучей, который собирается в точку в фокальной плоскости объектива. В этой плоскости и образуется резкое изображение Луны. Если фотопластинка расположена не в фокальной плоскости, а ближе к объективу или дальше от него, то изображение Луны оказывается размытым.

Будем для определенности считать, что экран расположен за фокальной плоскостью, и рассмотрим ход лучей, идущих от края Луны (рис. 23). Эти лучи и определяют размер изображения Луны на фотопластинке. Треугольники ABM и ACD подобны, поэтому можно записать следующее соотношение:

$$\frac{R}{R_1} = \frac{y}{x},$$

или

$$\frac{R - R_1}{R_1} = \frac{y - x}{x}. \qquad (1)$$

Из подобия треугольников OAN и ABM получим

$$\frac{R_1}{D/2} = \frac{x}{F - x}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) найдем расстояние $\delta = y - x$, на которое сместили объектив относительно фотопластинки:

$$\delta = \frac{R - R_1}{R_1 + D/2}F.$$

Ф256. *В центр квадратной свободно подвешенной доски попадает пуля. Если скорость пули $v > v_0$, то она пробивает доску насквозь. С какой скоростью будет двигаться доска, если скорость пули будет равна $2v_0$, nv_0? При какой скорости пули скорость доски будет максимальной?*

Масса пули m, масса доски M, сопротивление считать не зависящим от скорости.

В горизонтальном направлении на систему пуля — доска не действуют никакие внешние силы, то есть система изолирована. Запишем законы сохранения импульса и энергии ($v > v_0$):

$$mv = mv_1 + MV, \qquad (1)$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{MV^2}{2} + Q. \qquad (2)$$

Здесь v_1 — скорость пули по выходе из доски, V — скорость доски, Q — количество выделившегося тепла. Причем это тепло равно работе силы сопротивления, действующей на пулю при ее движении внутри доски:

$$Q = A = F_c\, d,$$

где d — толщина доски.

Так как по условию задачи сила сопротивления не зависит от скорости, а d — величина постоянная, то и количество выделившегося тепла Q одинаково при всех значениях начальной скорости пули v.

Рассмотрим случай, когда начальная скорость пули равна v_0. Очевидно, что это минимальная скорость, с которой должна лететь пуля, чтобы насквозь пробить доску. При этом пуля, пробив доску, будет иметь скорость такую же, как и доска. Обозначим эту скорость u и запишем законы сохранения импульса и энергии для этого случая:

$$mv_0 = (m+M)u,$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{(m+M)u^2}{2} + Q.$$

Отсюда

$$Q = \frac{mMv_0^2}{2(m+M)}. \qquad (3)$$

Теперь равенства (1) — (3) можно объединить в систему и, решив эту систему, найти величину V. Исключив из (1) и (2) скорость v_1, получим квадратное уравнение относительно V:

$$V^2 - 2\frac{mv}{m+M}V + \frac{2mQ}{M(m+M)} = 0,$$

откуда

$$V = \frac{m}{m+M}v \pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{m^2}{(m+M)^2}v^2 - \frac{2mQ}{M(m+M)}}.$$

Подставим сюда значение Q из (3) и получим

$$V = \frac{m}{m+M}\left(v \pm \sqrt{v^2 - v_0^2}\right).$$

Теперь проанализируем, оба ли корня уравнения соответствуют условию данной задачи. Импульс доски численно равен импульсу силы сопротивления, то есть произведению величины F_c на время ее действия t. Очевидно, что чем больше начальная скорость пули, тем быстрее пуля проходит сквозь доску, то есть тем меньше время t. Следовательно, скорость доски максимальна при скорости пули, равной v_0. С увеличением начальной скорости пули скорость доски уменьшается. Этому соответствует такое выражение для V:

$$V = \frac{m}{m+M}\left(v - \sqrt{v^2 - v_0^2}\right).$$

При $v = 2v_0$

$$V = \frac{m}{m+M}(2-\sqrt{3})\,v_0,$$

а при $v = nv_0$

$$V = \frac{m}{m+M}(n - \sqrt{n^2-1})v_0.$$

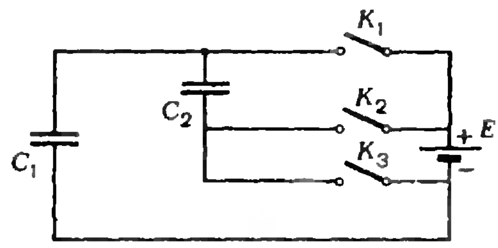


Рис. 24.

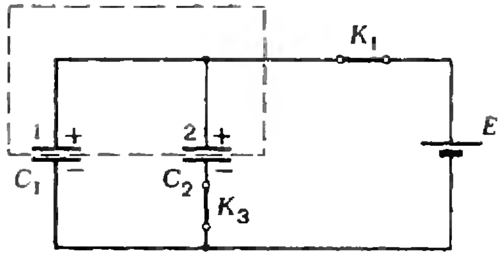


Рис. 25.

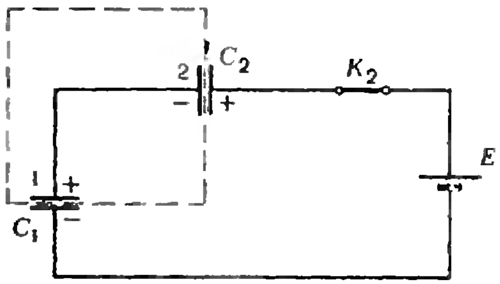


Рис. 26.

Ф257. *В схеме, изображенной на рисунке 24, вначале все ключи разомкнуты. Конденсаторы C_1 и C_2 разряжены. Э. д. с. батареи E. Затем ключи K_1 и K_3 замыкают и через некоторое время их размыкают. После этого замыкают ключ K_2. Какая разность потенциалов установится на конденсаторе C_1 после замыкания ключа K_2?*

При замыкании ключей K_1 и K_3 конденсаторы C_1 и C_2 оказываются подключенными к источнику параллельно (рис. 25), поэтому напряжение на каждом из них равно E, а заряды равны соответственно $Q_1 = C_1E$ и $Q_2 = C_2E$. После размыкания ключей K_1 и K_3 и замыкания ключа K_2 конденсаторы подключаются к источнику последовательно (рис. 26).

Однако, в отличие от обычного последовательного соединения конденсаторов, в данном случае суммарный заряд пластин 1 и 2 равен не нулю, а $Q = Q_1 + Q_2$. Такой заряд был сообщен этим пластинам в первом случае (при замыкании ключей K_1 и K_3). Во втором случае суммарный заряд пластин

1 и 2 равен $Q_1' - Q_2'$. Поскольку рассматриваемый участок цепи изолирован, можно воспользоваться законом сохранения заряда:

$$Q_1' - Q_2' = Q,$$

или

$$C_1U_1' - C_2U_2' = (C_1 + C_2)\,E. \qquad (1)$$

Согласно закону сохранения энергии

$$U_1' + U_2' = E. \qquad (2)$$

Решая совместно (1) и (2), найдем

$$U_1' = E\left(1 + \frac{C_2}{C_1 + C_2}\right).$$

Ф258. *Кольцо из тонкой проволоки разрывается, если его зарядить зарядом Q. Диаметр кольца и диаметр проволоки увеличили в 3 раза. При каком заряде будет разрываться это новое кольцо?*

Под действием сил электрического отталкивания кольцо деформируется, и в любом месте кольца результирующая сила упругости равна силе электрического взаимодействия выбранного элементарного участка со всем остальным кольцом: $F_{эл} = F_{упр}$.

Сила взаимодействия между двумя точечными зарядами Q_1 и Q_2 находящимися на расстоянии r друг от друга, согласно закону Кулона равна $\dfrac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Это, очевидно, единственная комбинация из Q_1, Q_2 и r, имеющая размерность силы. Поэтому электрическая сила в кольце должна быть пропорциональна $\dfrac{Q^2}{R^2}$ (R — радиус кольца):

$$F_{эл} = \alpha\,\frac{Q^2}{R^2},$$

где α — коэффициент пропорциональности.

В момент разрыва сила упругости, приходящаяся на единицу площади поперечного сечения проволоки, равна пределу прочности σ, который зависит только от материала проволоки, поэтому

$$F_{упр} = \sigma S$$

(S — площадь сечения проволоки).

Таким образом,

$$\alpha\,\frac{Q^2}{R^2} = \sigma S. \qquad (1)$$

Если кольцо, имеющее втрое больший радиус и втрое больший диаметр проволоки, разрывается при заряде Q_1, то в этом случае

$$\alpha\,\frac{Q_1^2}{(3R)^2} = \sigma S_1.$$

Так как $S \sim d^2$ и $S_1 \sim d_1^2$ (d и d_1 — диаметры проволоки), то $S_1 = 9S$, и поэтому

$$\alpha\,\frac{Q_1^2}{9R^2} = 9\sigma S. \qquad (2)$$

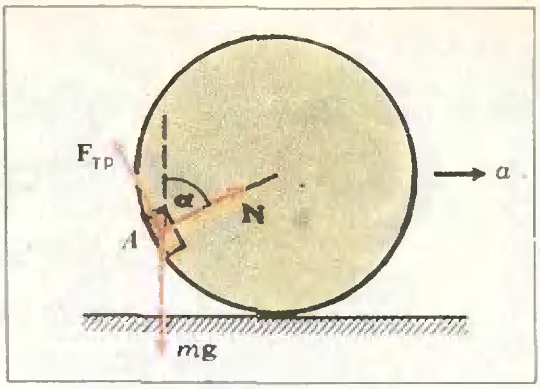


Рис. 27.

Тогда из равенств (1) и (2) получаем

$$Q_1 = 9Q.$$

Ф259. *Тонкостенный цилиндр катится по горизонтальной плоскости с ускорением a. Брусок A, размеры которого малы по сравнению с радиусом цилиндра, скользит по внутренней поверхности цилиндра так, что угол между радиусом-вектором точки A и вертикалью остается постоянным. Найти этот угол, если коэффициент трения бруска о поверхность цилиндра равен k.*

В системе координат, связанной с горизонтальной плоскостью, на брусок действуют три силы: сила тяжести mg, сила нормальной реакции $\mathbf{N}$ со стороны цилиндра и сила трения $\mathbf{F}_{тр}$ (рис. 27). Равнодействующая этих трех сил направлена горизонтально и сообщает бруску ускорение $\mathbf{a}$. Поэтому, спроектировав все силы на вертикальную и горизонтальную оси, можно записать:

$$-mg + N\cos\alpha + F_{тр}\sin\alpha = 0,$$

$$N\sin\alpha - F_{тр}\cos\alpha = ma,$$

где $F_{тр} = kN$. Исключая из этих уравнений N, получим

$$\cos\alpha + k\sin\alpha = \frac{g}{a}(\sin\alpha - k\cos\alpha).$$

Разделим обе части уравнения на $\cos\alpha$:

$$1 + k\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{g}{a}(\mathrm{tg}\,\alpha - k).$$

Отсюда

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a + gk}{g - ak},$$

$$\alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{a + gk}{g - ak}.$$

И. Ш. Слободецкий

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Чертеж в стереометрических задачах

И. Ф. Шарыгин

При проверке письменных работ поступающих в высшие учебные заведения часто обнаруживается следующее: в чистовике геометрическая задача сопровождается достаточно хорошим чертежом, а то, что изображено в черновике, чертежом можно назвать лишь условно. И приходится только удивляться, как с помощью такого «чертежа» абитуриенты умудрились все-таки решить задачу. Ведь не секрет, что хороший чертеж может оказать существенную помощь в решении геометрических задач, особенно задач по стереометрии. Конечно, научиться делать такие чертежи, какие делают художники «Кванта», вряд ли возможно для рядового школьника. Однако если при решении каждой геометрической задачи обращать внимание на качество чертежа, то в конце концов вы научитесь делать его вполне прилично. Возьмите себе за правило не приступать к решению задачи до тех пор, пока вы не сделаете хорошего чертежа. Не жалейте бумаги, делайте свой чертеж крупным, невидимые линии изображайте пунктиром, не проводите вспомогательных линий, пока не убедитесь в их необходимости. Очень часто стереометрические задачи сводятся к одной или нескольким задачам по планиметрии. Сделайте для каждой такой задачи отдельный чертеж. Шары, как правило, изображать не следует; достаточно бывает указать их центр, точки касания с прямой, плоскостью или другими шарами. Факт касания двух шаров означает, что расстояние между их центрами равно сумме радиусов, если касание внешнее, и это же расстояние равно разности радиусов, если касание внутреннее.

Перейдем к примерам.

З а д а ч а 1 (МГУ, химический факультет, 1968 г.). *Внутри сферы расположены четыре шара радиуса r. Каждый из этих шаров касается трех других и поверхности сферы. Определить радиус сферы.*

Р е ш е н и е. Пусть A, B, C и D — центры шаров радиуса r, а O — центр сферы (рис. 1). Из того, что шары касаются попарно друг друга внешним образом, следует, что $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребром $2r$. Все шары касаются внутренним образом сферы с центром O, поэтому расстояния AO, BO, CO, DO равны между собой и равны $R - r$, где R — искомый радиус сферы. С другой стороны, все эти расстояния

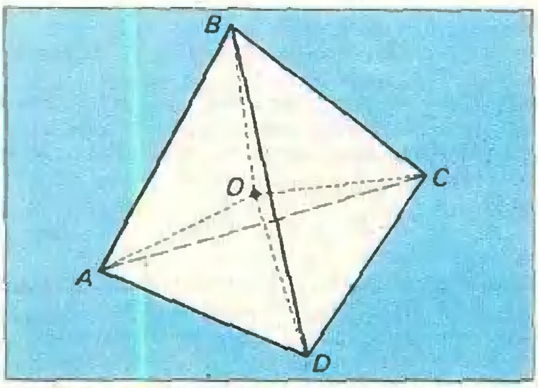


Рис. 1.

равны радиусу шара, описанного около правильного тетраэдра с ребром $2r$. Теперь уже легко найти искомый радиус R. Сделайте это сами.

О т в е т: $R = r\left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

З а д а ч а 2 (МФТИ, 1966 г.). *Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. На ребре AB, как на диаметре, построена сфера. Найти радиус шара, вписанного в трехгранный угол тетраэдра с вершиной в точке A и касающегося построенной сферы.*

Р е ш е н и е. Пусть O — середина AB — центр данной сферы, O_1 — центр искомого шара. Легко сообразить, что O_1 лежит на высоте AM тетраэдра $ABCD$ (рис. 2).

Обозначим через x радиус шара с центром в точке O_1. Из того, что этот шар вписан в трехгранный угол A, следует, что $AO_1 = 3x$. В самом деле, для любого шара, вписанного в трехгранный угол A, отношение расстояния от его центра до вершины A к радиусу есть величина постоянная. Рассмотрим шар, вписанный в правильный тетраэдр $ABCD$; центр его, как известно, совпадает с центром описанного шара; отношение же радиусов описанного и вписанного шаров для правильного тетраэдра легко вычисляется и равно 3.

Изобразим $\triangle AMB$ на отдельном чертеже ($\sphericalangle M$ — прямой) (рис. 3). Рассмотрим $\triangle AOO_1$.

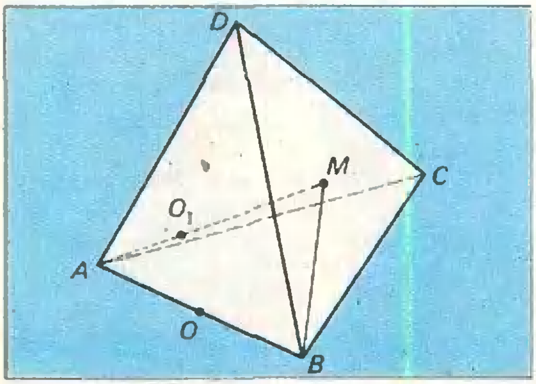


Рис. 2.

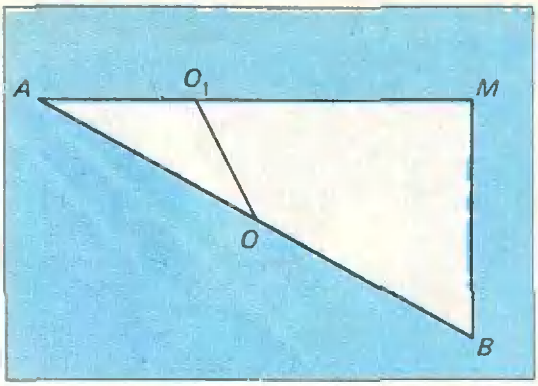


Рис. 3.

Имеем

$$AO_1 = 3x, \qquad AO = \frac{a}{2},$$

$$O_1O = \frac{a}{2} \pm x.$$

Знак «+» соответствует случаю внешнего касания шаров с центрами в точках O и O_1, знак «—» — случаю касания внутреннего. (На рисунке 3 изображен случай внутреннего касания. В случае внешнего касания точка O_1 должна находиться на продолжении AM за точку M.)

Из прямоугольного треугольника AMB находим $\cos \sphericalangle O_1AO$, а затем, написав теорему косинусов для $\triangle OAO_1$, находим x.

О т в е т: $\frac{a}{8}(\sqrt{6} \pm 1)$.

З а д а ч а 3. (МГУ, химический факультет, 1971 г.). *Три одинаковых прямых круговых конуса, радиусы оснований которых равны r и составляют $^3/_4$ их высоты, расположены по одну сторону от плоскости P, а их основания лежат в этой плоскости. Окружности оснований каждых двух из этих конусов касаются. Найти радиус шара, лежащего между конусами и касающегося как плоскости P, так и всех трех конусов.*

Для решения задачи нам понадобятся следующие две л е м м ы (докажите их самостоятельно):

Л е м м а 1. *Если шар внешним образом касается поверхности конуса и плоскости, в которой лежит основа-*

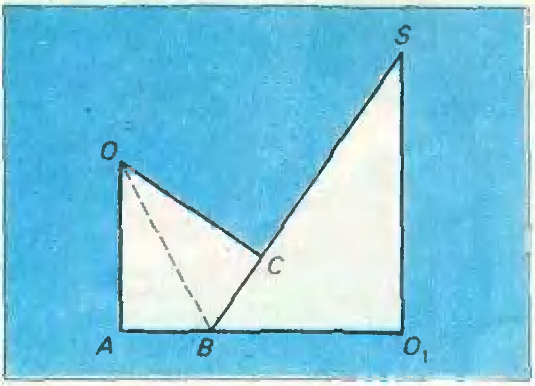


Рис. 4.

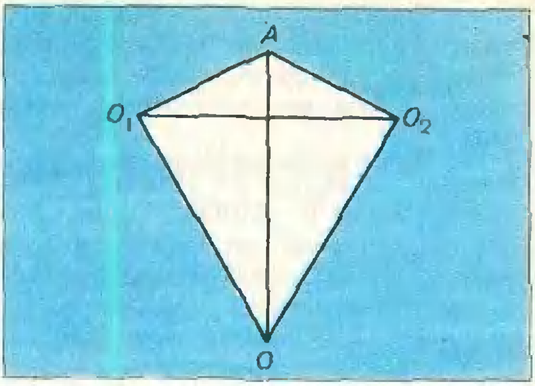


Рис. 5.

ние конуса, то ось конуса, образующая конуса, на которой расположена точка касания конуса с шаром, центр шара и точка касания шара с плоскостью, в которой лежит основание конуса, находятся в плоскости, перпендикулярной к плоскости основания конуса (рис. 4). (На рисунке 4 SO_1 — ось конуса, SB — его образующая, O — центр шара, A — точка касания шара с плоскостью, в которой лежит основание конуса, C — точка касания шара с конусом.)

Лемма 2. *Точка касания шара с плоскостью P находится в центре правильного треугольника, образованного центрами окружностей оснований конусов (шар, конусы и плоскость P — из условия задачи).*

Теперь рисунок 4 поможет нам решить задачу. Имеем

$$AO_1 = \frac{2r\sqrt{3}}{3}, \quad BO_1 = r, \quad SO_1 = \frac{4}{3}r.$$

Искомый радиус OA легко найти из прямоугольного треугольника AOB, в котором известен катет AB и $\sphericalangle OBA = \frac{1}{2}(\sphericalangle ABS)$, а все тригонометрические функции $\sphericalangle ABS$ легко вычисляются.

Ответ: $2r\cdot\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$.

Задача 4 (МГУ, физический факультет, 1972 г.). *На сфере, радиус которой равен 2, расположены три окружности радиусом 1, каждая из которых касается двух других. Найти радиус окружности меньшей, чем данные, которая также расположена на данной сфере и касается каждой из данных окружностей.*

Перечислим следующие факты, на которые мы будем опираться при решении задачи; вам следует доказать их самостоятельно:

1) если две окружности, расположенные на сфере, касаются друг друга, то центр сферы, центры этих окружностей и точка касания расположены в одной плоскости;

2) центры O_1, O_2, O_3 данных окружностей радиуса 1 образуют правильный треугольник;

3) центр искомой окружности находится на радиусе сферы, перпендикулярном плоскости $O_1O_2O_3$.

Для решения задачи нам понадобятся рисунки 5 и 6.

На рисунке 5 O — центр сферы, O_1 и O_2 — центры двух окружностей радиусов 1, A — точка их касания, $\sphericalangle AO_1O = \sphericalangle AO_2O = 90°$, $OA = 2$.

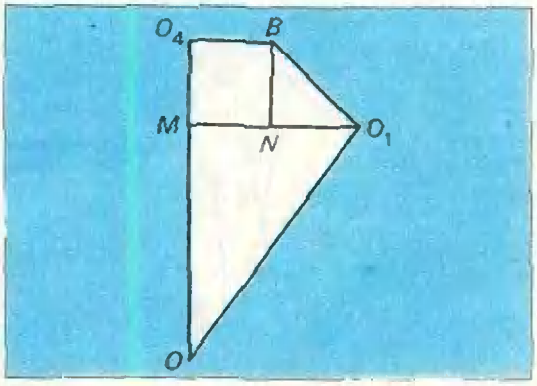


Рис. 6.

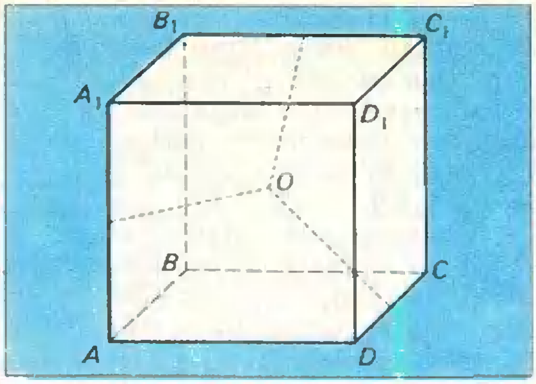


Рис. 7.

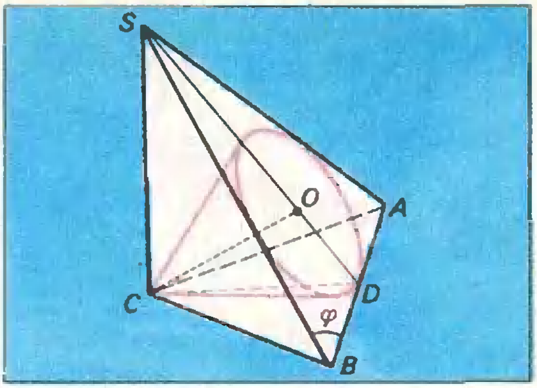


Рис. 8.

Теперь легко найдем

$$OO_1 = OO_2 = O_1O_2 = \sqrt{3}.$$

На рисунке 6 M — центр правильного $\triangle O_1O_2O_3$ со стороной $\sqrt{3}$ и, значит, $O_1M = 1$, O_4 — центр искомой окружности, B — точка ее касания с первой окружностью, $BN \perp MO_1$. Отрезок NO_1 легко найти из подобия $\triangle O_1BN$ и $\triangle O_1MO$, а искомый радиус $O_4B = MN = MO_1 - NO_1$.

Ответ: $1 - \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Иногда бывает полезно рассмотреть какое-нибудь геометрическое тело — пирамиду, параллелепипед, призму и т. д., не фигурирующее в условии задачи.

Задача 5 (формулировка этой задачи является перефразировкой задачи, дававшейся в 1973 году на олимпиаде в МФТИ). *Оси трех равных, попарно касающихся цилиндрических поверхностей взаимно перпендикулярны. Найти радиус наименьшего шара, касающегося всех трех поверхностей, если радиус каждой из них равен r.*

Решение. Рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром $2r$. Мы можем считать, что ребро AA_1 лежит на оси одного цилиндра, ребро DC — на оси другого и, наконец, ребро B_1C_1 — на оси третьего (рис. 7).

Докажем, что центр искомого шара совпадает с центром O куба. В самом деле, рассмотрим три цилиндра, концентрических данным и проходящих через точку O. Тогда O — единственная точка, лежащая внутри или на поверхности всех этих трех цилиндров, и, значит, для любой точки, отличной от O, расстояние до одной из трех прямых AA_1, DC и B_1C_1 больше, чем расстояния от O до этих прямых.

Ответ: $r(\sqrt{2} - 1)$.

Задача 6. *n равных конусов ($n \geqslant 3$) имеют общую вершину, каждый касается двух других, а все касаются одной плоскости. Найти угол при вершине осевого сечения этих конусов.*

Решение. Рассмотрим треугольную пирамиду $SABC$ (рис. 8), у которой в основании лежит равнобедренный $\triangle ABC$ ($AC = CB$) с углом ACB, равным $\frac{2\pi}{n}$, SC перпендикулярна плоскости ABC и проекция C на плоскость SAB совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABS. Рассмотрим теперь конус, вершина которого находится в точке C, а окружностью основания является окружность, вписанная в $\triangle SAB$. Легко убедиться, что этот конус *можно* рассматривать в качестве искомого. В самом деле, если поставить рядом друг с другом n пирамид, равных пирамиде $SABC$, так, чтобы у них совпадали вершины S, то конусы, вписанные в эти пирамиды, будут образовывать систему, удовлетворяющую условиям задачи.

Обозначим через l образующую конуса, а через r — радиус окружности его основания. Из подобия пря-

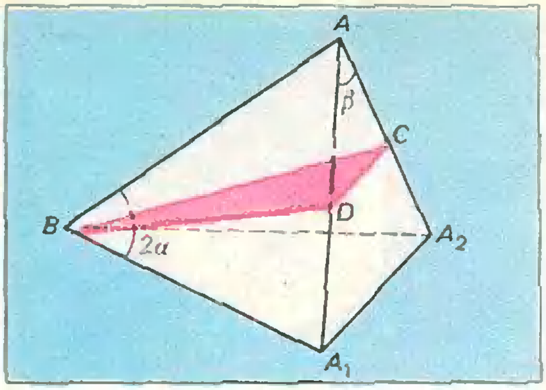


Рис. 9.

моугольных треугольников SCD и OCD найдем $SD=\frac{l^2}{r}$, из $\triangle CDB$ — $DB=l\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}$. С другой стороны, из $\triangle SDB$ находим

$$SD=DB\cdot\mathrm{tg}\,\varphi=DB\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}},$$

где φ — угол SBD, то есть

$$\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{OD}{DB}=\frac{r}{l\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}}.$$

Синус половины искомого угла равен отношению r/l, которое легко определяется из получившегося уравнения:

$$\frac{l^2}{r}=l\,\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{n}\frac{2\frac{r}{l\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}}}{1-\frac{r^2}{l^2\,\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{n}}}.$$

Ответ: $2\arcsin\frac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}}{\sqrt{1+2\,\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{n}}}$.

Задача 7. *На плоское зеркало под углом α падает луч света. Зеркало поворачивается на угол β вокруг проекции луча на зеркало. На какой угол отклонится отраженный луч?*

Пусть A — некоторая точка на луче, B — точка падения луча на зеркало, A_1 — точка, симметричная A относительно данного зеркала, а A_2 — точка, симметричная A относительно повернутого зеркала, D и C — проекции точки A на эти зеркала (рис. 9). Тогда BA_1 и BA_2 суть продолжения отраженных лучей и, следовательно, искомый угол равен $\angle A_1BA_2$.

В тетраэдре AA_1A_2B (см. рис. 9) D и C — середины ребер AA_1 и AA_2 соответственно; плоскость BDC (плоскость повернутого зеркала) перпендикулярна ребру AA_2, $AB=A_1B=A_2B$, $\angle ABA_1=2\alpha$, $\angle A_1AA_2=\beta$. Отсюда легко находим:

$A_1A_2=2DC=2AD\sin\beta=2AB\sin\alpha\sin\beta$.

Теперь из $\triangle A_1BA_2$ находим нужный угол.

Ответ: $2\arcsin(\sin\alpha\sin\beta)$.

Переходя к самостоятельному решению задач, список которых приводится в конце этой заметки, просмотрите внимательно еще раз решения задач 1—7. На первый взгляд кажется, что во всех этих задачах необходим весьма сложный чертеж. Однако мы сумели обойтись простыми, в некоторых случаях даже чисто планиметрическими чертежами. Чтобы проиллюстрировать достаточно трудную стереометрическую задачу простым чертежом, необходимо обладать хорошо развитым пространственным воображением. Достигается это практикой и только практикой.

Упражнения

1 (МГУ, физ. фак., 1963 г.). В конус помещены пять равных шаров. Четыре из них лежат на основании конуса, причем каждый из этих четырех шаров касается двух других, лежащих на основании, и боковой поверхности конуса. Пятый шар касается боковой поверхности и остальных четырех шаров. Определить объем конуса, если радиус каждого шара равен R.

2 (МГУ, хим. фак., 1968 г.). Три шара радиуса r лежат на нижнем основании правильной треугольной призмы, причем каждый из них касается двух других шаров и двух боковых граней призмы. На этих шарах лежит четвертый шар, который касается всех боковых граней и верхнего основания призмы. Определить высоту призмы.

3 (МФТИ, 1966 г.). В правильной четырехугольной пирамиде апофема равна сто-

роне основания. Внутри пирамиды расположены два шара: шар радиуса r касается всех боковых граней; шар радиуса $2r$ касается основания и двух смежных боковых граней; оба шара касаются друг друга внешним образом. Найти апофему этой пирамиды.

4 (МФТИ, 1973 г.). Два равных шара касаются друг друга и граней двугранного угла 2α. Пусть A — точка касания одного шара с одной гранью угла, а B — точка касания другого шара с другой гранью угла. В каком отношении отрезок AB делится сферами?

5 (МГУ, механико-математический факультет, 1968 г.). Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ (S — вершина) со стороной основания a и боковым ребром a. Сфера с центром в точке O проходит через точку A и касается ребер SB и SD в их серединах. Найти объем пирамиды $OSCD$.

6 (МГУ, химический факультет, 1971 г.). Правильный треугольник со стороной a лежит в плоскости P. Средними линиями он разделен на четыре треугольника, и на трех из них, примыкающих к вершинам, построены, как на основаниях, три правильные треугольные пирамиды высотой a. (Все три — *по одну сторону от плоскости* P). Найти радиус шара, лежащего между пирамидами и касающегося как плоскости P, так и всех трех пирамид.

7. (факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ, 1972 г.). Боковые ребра правильной треугольной пирамиды $SABC$ наклонены к плоскости основания под углом 45°. Шар касается плоскости основания ABC в точке A и, кроме того, касается вписанного в пирамиду шара. Через центр первого шара и высоту BD основания проведена плоскость. Найти угол наклона этой плоскости к плоскости основания.

8. Оси трех равных, попарно касающихся цилиндрических поверхностей взаимно перпендикулярны. Найти радиус наибольшей цилиндрической поверхности, которая может пройти между данными цилиндрами, если радиусы данных равны r.

Представления числа 1974

1. $(1+9+7+4)\times[(19+74)-(1+9-7-4)]=1974.$

2. $1![9^3+7^3+(4!)^2]+(1+9)^2\cdot(7-4)+(1+9+7-4)\cdot[1974^0+(\sqrt{1}+\sqrt{9}+7^0-4)]=1974.$

3. $(1+9)^3+(7+4)^3-(1+9+7^3+4)=1974.$

4. $(1\cdot 9+7\cdot 4)^2+1\cdot 9\times 7\cdot 4+1^0\cdot 9^0\cdot 7^3\cdot 4^0+(1+9)\cdot 7^0\cdot 4^0=1974.$

5. $(1+9\cdot 7\cdot 4)\times(1+9-7+4)+(1^0+9\cdot 7+4^0)\times(1-9+7+4)+\sqrt[3]{(1+9\cdot 7)}\cdot\sqrt{4}=1974.$

6. $[(1+9+7+4)^2+(1+9+\sqrt{7}+4)\times(1+9-\sqrt{7}+4)]\cdot 1^0\times\sqrt{9}\cdot 7^0\cdot 4^0+(1^0+9^2+7^0+4^0)=1974.$

7. $(1\cdot 9+7)^2\cdot 4+(1+9)^3-7^2-4^0=1974.$

8. $(1+9^2+7\cdot 4)\cdot 1!\times\sqrt{9}\cdot(7-4)!-\sqrt{1}\cdot\sqrt{9}\times 7^0\cdot\sqrt{4}=1974.$

А. Ф. Гулиев

Завод-втуз при Московском автомобильном заводе им. И. А. Лихачева

Наш завод — втуз является одним из самых молодых институтов Москвы.

Всего восемь лет назад — в 1966 году первым его выпускникам была присвоена квалификация инженера-механика.

Втуз имеет три факультета: автомобильный, механико-технологический и вечерний.

Специалисты, окончившие автомобильный или механико-технологический факультеты, работают в областях конструирования, расчета и исследования автомобилей, двигателей и кузовов, технологии машиностроения, инструментального производства, ремонта и модернизации металлорежущего оборудования, электрофизических и электрохимических методов обработки металлов, проектирования изготовления и ремонта технологической оснастки и оборудования механических и сборочных цехов, технологии литейного производства, обработки металлов давлением, металловедения, оборудования и технологии термической обработки. На вечернем факультете, кроме перечисленных, ведется также подготовка по специальности «экономика и организация машиностроительной промышленности».

Главной особенностью подготовки специалистов на автомобильном и механико-технологическом факультетах является органическое сочетание теоретического и производственного обучения. Студентами этих факультетов зачисляются в случае сдачи вступительных экзаменов работники ЗИЛ, АЗЛК, 1 ГПЗ и их филиалов, а также выпускники средних школ, направленные на обучение указанными заводами.

Система обучения предусматривает чередование теоретического обучения («учебная неделя») с работой на производстве («рабочая неделя»).

На «учебной неделе» студенты учатся, как и в других институтах, а на «рабочей неделе» работают на одном из базовых заводов, выполняя производственную программу. На «рабочей неделе» теоретические занятия проводятся четыре раза в неделю по четыре часа утром или вечером в зависимости от смены на заводе.

В течение всего периода обучения (6 лет) студенты ежемесячно получают половину месячной зарплаты и половину стипендии.

Стипендию, повышенную на 15% по сравнению с обычной, получают все успевающие студенты завода-втуза.

Студенты первых трех курсов работают рабочими, а на четвертом курсе их переводят на инженерно-технические должности.

Инженерам — выпускникам завода-втуза, хорошо знающим производство, где они работали шесть лет, значительно легче сразу же войти в ритм работы завода и активно участвовать в решении поставленных перед ними задач, чем выпускникам обычных дневных вузов.

В институте ведется большая работа по внедрению современых методов обучения и контроля знаний студентов. На кафедрах математики, физики, графики, автоматики процесс обучения ведется с широким использованием таких обучающих комплексов и электронной техники как «Огонек», «КИСИ», «Напри» и т. д.

В течение последних двух лет разрабатывается программа и проводится эксперимент, позволяющий организовать приемные экзамены в наш институт с широким использованием электронно-счетной машины «Минск-32». Уже в будущем году машина не только составит разнообразные варианты билетов для абитуриентов, но и поможет оценить степень их подготовленности.

Ниже приведены типичные варианты, предлагавшиеся на вступительных экзаменах по математике и задачи, предлагавшиеся на экзамене по физике в 1974 году.

Математика

Вариант 1

1. В основании пирамиды лежит ромб, один из углов которого равен α. Боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания. Через середины двух смежных сторон основания и вершину пирамиды проведена плоскость. Эта плоскость составляет с плоскостью основания угол, равный β. Площадь сечения, образованного этой плоскостью, равна S. Найти сторону ромба.

2. Найти все решения уравнения

$$(2\sin x-\cos x)(1+\cos x)=\sin^2 x.$$

3. Решить уравнение

$$5^{2(\log_5 2+x)}-2=5^{x+\log_5 2}.$$

Вариант 2

1. Треугольник ABC вращается вокруг прямой, лежащей в плоскости этого треугольника, проходящей вне его через вершину A и одинаково наклоненной к сторонам AB и AC. Найти объем тела вращения, если $AB=a$, $AC=b$ и $\sphericalangle BAC=\alpha$.

2. Решить уравнение

$$2\sin z-\cos z=\frac{2}{5}.$$

3. Решить уравнение:

$$\lg(\lg x)+\lg(\lg x^3-2)=0.$$

Вариант 3

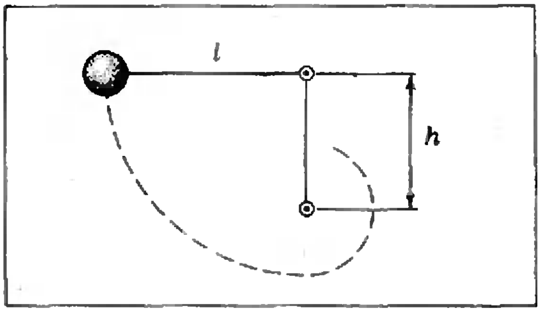
1. Высота конуса равна H, угол между образующей и высотой равен α. В этот конус вписан другой конус так, что вершина второго конуса совпадает с центром основания первого конуса, а соответствующие образующие обоих конусов взаимно перпендикулярны. Найти объем вписанного конуса.

2. Решить уравнение

$$3(1-\sin t)+\sin^4 t=1+\cos^4 t.$$

3. Решить уравнение

$$x^{\lg^4 x-5\lg x}=0{,}0001.$$



Физика

Билет 1

Через двояковыпуклую тонкую линзу проходит луч и пересекает фокальную плоскость на расстоянии 5 *мм* от главного фокуса. Фокусное расстояние линзы $F=1000$ *мм*. Найти угол между падающим лучом и главной оптической осью линзы.

Билет 2

Математический маятник, длина которого $l=1000$ *мм*, отклонен до горизонтального положения и затем отпущен. Под горизонтальной осью, вокруг которой начинает двигаться маятник, параллельно ей на расстоянии $h=700$ *мм* находится тонкий стержень (см. рисунок), вокруг которого происходит дальнейшее вращение маятника. Найти скорость грузика в верхней точке траектории после того, как нить коснется стержня.

Билет 3

К источнику с э. д. с. E и внутренним сопротивлением r подключена плитка с двумя нагревательными элементами сопротивления R каждый ($r \ll R$). На плитке подогревают чайник с водой. Параллельно или последовательно нужно соединить сопротивления R, чтобы вода в чайнике закипела скорее?

Билет 4

Электрон, пролетая между обкладками конденсатора, длина которых $l=300$ *мм*, отклоняется на $d=8$ *мм* от первоначального направления, параллельного обкладкам конденсатора. Определить начальную скорость v электрона, если напряженность электрического поля между обкладками конденсатора $E=1$ *кв/м*. Считать поле внутри конденсатора всюду однородным.

Л. Н. Воронин, В. П. Ионов, И. Б. Лившиц, В. А. Ляховский

VIII Всесоюзная олимпиада школьников

Л. Г. Лиманов,
М. Л. Смолянский

Олимпиада по математике

С 11 по 17 апреля 1974 года в столице Армянской республики Ереване проходил заключительный этап VIII Всесоюзной олимпиады школьников по математике.

Взяв старт в декабре 1973 года, олимпиада успешно пришла к своему финишу. Много работы пришлось проделать школьникам за это время. Они участвовали в соревнованиях в школах, районах, областях или республиках. И вот школьники, с успехом прошедшие три этапа, снова сели за парты, чтобы принять участие в четвертом, наиболее ответственном этапе Всесоюзной олимпиады.

Кроме победителей областных и республиканских олимпиад к участию в заключительном туре были допущены также призеры VII Всесоюзной олимпиады. Всего в заключительном туре приняло участие: по 8 классам — 169 человек, по 9 классам — 212 человек и по 10 классам — 220 человек.

11 апреля в здании Ереванского университета состоялось торжественное открытие заключительного тура VIII Всесоюзной олимпиады. С приветствием к школьникам обратились министр просвещения Армении С. Т. Ахумян, председатель жюри олимпиады член-корреспондент АН СССР С. Мергелян и другие. Было также зачитано приветствие министра просвещения СССР М. А. Прокофьева:

«Дорогие ребята! Сегодня в городах Донецке, Горьком и Ереване встречаются лучшие представители областей, союзных и автономных республик нашей страны — юные физики, химики и математики, проявившие интерес к науке, умение упорно трудиться, оригинально мыслить и самостоятельно работать с книгой.

Эти качества помогут вам справиться с поставленными вопросами. Известно, что выигрывают сильнейшие. Но ваше участие в этой олимпиаде позволяет надеяться, что она обогатит вас и приведет к осуществлению той цели, которую вы ставите перед собой.

Желаю вам больших успехов в овладении знаниями! Пусть никогда не ослабевает ваша увлеченность наукой, творческое отношение к делу!»

12 и 14 апреля состоялись I и II туры заключительного этапа олимпиады. Всего школьникам каждого класса было предложено по 7 задач. На решение задач каждого тура отводилось по 4 часа.

В этом году наряду с типичными «олимпиадными» задачами, одинаково доступными школьникам 8, 9 и 10 классов, для решения которых требуется только остроумие, умение логически рассуждать, давались также задачи, при решении которых нужно было преодолеть некоторые технические трудности.

8 класс											
№№ задач	1а	1б	1в	2	3а	3б	4	5	6а	6б	7
число решивших	96	11	7	32	3	1	23	70	45	10	15

9 класс							
№№ задач	1	2	3	4	5	6	7
число решивших	49	41	2	1	92	23	24

10 класс								
№№ задач	1	2	3	4	5а	5б	6	7
число решивших	40	135	35	2	92	46	7	38

В целом участники олимпиады справились с предложенными задачами успешно. «Непосильных» задач не оказалось: каждую задачу решил хотя бы один школьник. Некоторые же школьники решили все предложенные задачи. Статистику решения каждой задачи по классам вы видите в таблице.

Приведем теперь тексты предлагавшихся задач и решения некоторых из них*).

8 класс

Первый день

1. На карточках написаны числа, каждое из которых равно $+1$ или -1. Разрешается, указав три карточки, спросить: «Чему равно произведение чисел на этих карточках?» (Сами числа нам не сообщают.) Какое наименьшее число таких вопросов надо задать, чтобы узнать произведение чисел на всех карточках, если число карточек равно: а) 30; б) 31; в) 32 ?

В каждом случае докажите, что меньшим числом вопросов обойтись нельзя.

2. Среди чисел вида $36^k - 5^l$, где k и l — натуральные числа, найдите наименьшее по абсолютной величине. Докажите, что найденное число действительно наименьшее.

3. а) Каждая из сторон выпуклого шестиугольника имеет длину больше 1. Всегда ли в нем найдется диагональ длины больше 2?

б) В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ длины диагоналей AD, BE и CF больше 2. Всегда ли у него найдется сторона длины больше 1?.

Второй день

4. Найдите все натуральные числа n и k такие, что n^n имеет k цифр, а k^k имеет n цифр.

5. На катетах CA и CB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC выбраны соответственно точки D и E так, что $CD = CE$. Продолжения перпендикуляров, опущенных из точек D и C на прямую AE, пересекают гипотенузу AB соответственно в точках K и L. Докажите, что $KL = LB$.

6. На шахматной доске 8×8 двое играют в игру «кошки — мышки». У первого одна фишка — мышка, у второго несколько фишек — кошек. Все фишки ходят одинаково: вправо, влево, вверх или вниз на одну клетку. Если мышка оказалась на краю доски, то очередным ходом она спрыгивает с доски; если кошка и мышка попадают на одну клетку, то кошка съедает мышку.

Играющие ходят по очереди, причем второй передвигает своим ходом всех своих кошек сразу (разных кошек можно при этом сдвигать в разных направлениях). Начинает мышка. Она старается спрыгнуть с доски, а кошки стараются до этого ее съесть.

а) Пусть кошек всего две. Мышка уже поставлена на какую-то клетку не на краю. Можно ли так поставить кошек на краю доски, чтобы они сумели съесть мышку?

б) Пусть кошек три, но зато мышка имеет лишний ход: в первый раз она делает два хода подряд. Докажите, что мышка сможет убежать от кошек, каково бы ни было начальное расположение фишек.

7. Докажите, что числа 1, 2, 3, . . ., 32 можно расставить в таком порядке, чтобы ни для каких двух чисел их полусумма не равня-

*) Мы даем полные тексты всех задач олимпиады. Часть из них была уже опубликована в «Задачнике «Кванта», см. «Квант», 1974, №№ 7, 8.

лась ни одному из чисел, поставленных между ними.

9 класс

Первый день

1. Найдите наименьшее число вида $|36^k - 5^l|$, где k и l — натуральные числа.

2. Даны две окружности радиусов R и r, касающиеся внешним образом. Строятся различные трапеции $ABCD$ так, чтобы каждая из окружностей касалась обеих боковых сторон и одного из оснований трапеции. Найдите наименьшую возможную длину боковой стороны AB.

3. По окружности написано 50 чисел, каждое из которых равно $+1$ или -1. Требуется узнать произведение всех этих чисел. За один вопрос можно узнать произведение трех стоящих подряд чисел. Какое наименьшее число вопросов необходимо задать?

4. На плоскости даны n векторов, длина каждого из которых равна 1. Сумма всех n векторов равна нулевому вектору. Докажите, что векторы можно занумеровать так, чтобы при всех $k = 1, 2, \ldots n$ выполнялось следующее условие: сумма первых векторов имеет длину не более 2.

Второй день

5. Найдите все трехзначные числа A, обладающие следующим свойством: среднее арифметическое всех чисел, получающихся из числа A различными перестановками его цифр, равно A.

6. Дан выпуклый многоугольник, в который нельзя поместить никакой треугольник площади 1. Докажите, что этот многоугольник можно поместить в треугольник площади 4.

7. Можно ли 1, 2, 3, ..., 100 расставить в таком порядке, чтобы ни для каких двух чисел их полусумма не равнялась ни одному из чисел, поставленных между ними?

10 класс

Первый день

1. При каких действительных a, b, c равенство

$$|ax + by + cz| + |bx + cy + az| + |cx + ay + bz| = |x| + |y| + |z|$$

верно для всех действительных x, y, z?

2. Дан квадрат $ABCD$. Точки P и Q лежат соответственно на сторонах AB и BC, причем $BP = BQ$. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на отрезок PC. Докажите, что угол DHQ — прямой.

3. Задано несколько красных и несколько синих точек. Некоторые из них соединены отрезками. Назовем точку «особой», если более половины из соединенных с ней точек имеют цвет, отличный от ее цвета. Если есть хотя бы одна особая точка, то выбирается любая особая точка и перекрашивается в другой цвет. Докажите, что через конечное число шагов не останется ни одной особой точки.

4. На плоскости даны n векторов, длина каждого из которых равна 1. Сумма всех векторов равна нулевому вектору. Докажите, что векторы можно занумеровать так, чтобы при всех $k = 1, 2, \ldots, n$ выполнялось следующее условие: сумма первых k векторов имеет длину не более 2.

Второй день

5. На отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ задана функция f. Известно, что эта функция неотрицательна и $f(1) = 1$. Кроме того, для любых двух чисел x_1 и x_2 таких, что $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$ и $x_1 + x_2 \leqslant 1$, выполнено неравенство

$$f(x_1 + x_2) \geqslant f(x_1) + f(x_2).$$

а) Докажите, что, какова бы ни была функция f, удовлетворяющая перечисленным условиям, для всех x будет выполнено неравенство $f(x) \leqslant 2x$.

б) Верно ли, что для всех x

$$f(x) \leqslant 1{,}9\,x?$$

6. Дан треугольник ABC площади 1. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно. Какую минимальную площадь может иметь общая часть треугольников $A_1B_1C_1$ и KLM, если точки K, L и M лежат соответственно на отрезках AB_1, CA_1 и BC_1?

7. Можно ли расставить числа 1, 2, 3, ..., 100 в таком порядке, чтобы ни для каких чисел их полусумма не равнялась ни одному из чисел, поставленных между ними?

Решения

8 класс, задача 1. В случае а) нужно задать 10 вопросов, в случае б) — 11, а в случае в) — 12.

Покажем сначала, что в каждом из случаев можно обойтись указанным числом вопросов.

а) Разложим наши тридцать карточек на десять стопок по три карточки в каждой. Задав десять вопросов, выясним произведения чисел в каждой из стопок. Перемножив ответы, получим произведение чисел на всех тридцати карточках.

б) Разложим карточки на восемь стопок по три карточки и составим еще одну стопку из оставшихся семи карточек. Задав восемь вопросов, узнаем произведение чисел в первых восьми стопках. Произведение же чисел на оставшихся семи карточках можно узнать, задав три вопроса так, как это изображено на рисунке 1. Итого — одиннадцать вопросов.

в) Разложим карточки в девять стопок по три карточки и одну стопку из пяти карточек. Чтобы за три вопроса узнать произведение чисел, стоящих на пяти карточках, нужно поступить так, как показано на рисунке 2.

Теперь нужно доказать, и это наиболее трудная часть задачи, что в случае а) нельзя

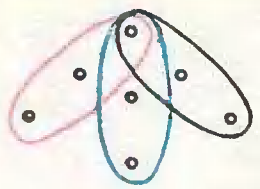


Рис. 1.

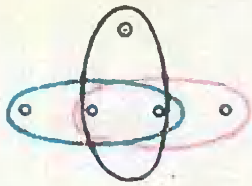


Рис. 2.

Рис. 3.

обойтись девятью вопросами, в случае б) — десятью, а в случае в) — одиннадцатью.

а) Если задать меньше десяти вопросов (например, девять), то наверняка найдется карточка, про которую мы не спросили ни разу. Поменяв знак написанного на ней числа, мы не изменим полученных ответов. Однако знак произведения при этом изменится. Значит, по полученным ответам произведение восстановить нельзя.

Случай б) аналогичен случаю а).

в) Соображений, приведенных выше, здесь уже недостаточно, поскольку можно задать одиннадцать вопросов так, чтобы каждая карточка вошла хотя бы в один вопрос. Однако сделать это можно единственным способом: про одну из карточек спросить два раза, а про каждую из оставшихся — ровно один. Два вопроса, в которые вошла одна общая карточка, показаны на рисунке 3. На нем же показаны замены знаков, не меняющие ни одного ответа, но меняющие знак всего произведения.

8 класс, задача 4. Докажем, что $n = k$.

Предположим, что $n > k$. Тогда

$$n^n > k^n > k^k;$$

но число n^n имеет k цифр, а потому должно быть меньше числа k^k, имеющего n цифр. Аналогично не может быть $n < k$, и поэтому $n = k$. Остается выяснить, когда у числа n^n будет n цифр. Заметим, что n не может быть больше десяти: если $n > 10$, то $n^n > 10^n$, а 10^n имеет $n + 1$ цифру; если же $n < 10$, то $n^n < 10^n$ и поэтому у n^n не больше чем n цифр. Убедимся в том, что подходят значения $n = 1$, $n = 8$ и $n = 9$.

$$9^9 > 8^4 \cdot 10^4 \cdot 9 > 6^2 \cdot 10^6 \cdot 9 >$$
$$> 3 \cdot 10^7 \cdot 9 = 27 \cdot 10^7 = 270\,000\,000.$$

Поэтому у 9^9 девять цифр.

$$8^8 > 6^4 \cdot 10^4 = 36^2 \cdot 10^4 >$$
$$> 108 \cdot 10^5 > 10^7.$$

Поэтому у числа 8^8 восемь цифр.

$$7^7 < 5^3 \cdot 7 \cdot 10^3 = 875 \cdot 10^3 < 10^6;$$
$$6^6 < 4^3 \cdot 10^3 = 64 \cdot 10^3 < 10^5;$$
$$5^5 = 3125;\ 4^4 = 256;\ 3^3 = 27; 2^2 = 4;\ 1^1 = 1.$$

8 класс, задача 5. Проведем через точку B прямую, параллельную CL (рис. 4). Обозначим через M точку пересечения этой прямой с продолжением катета AC. Прямоугольные треугольники ACE и BCM равны, поскольку $AC = CB$ и $\angle CAE = \angle CBM$. Следовательно, $CM = CE = CD$. Из равенства $CM = CD$ и параллельности прямых DK, CL и BM следует, что $KL = LB$.

8 класс, задача 6.

а) Проведем через клетку, на которой стоит мышка, диагональ и поставим кошек на концы этой диагонали. После хода мышки нужно пойти кошками так, чтобы все три фишки снова оказались на одной диагонали, причем выбрать такие ходы кошками, чтобы расстояние (по диагонали) между ними уменьшилось на единицу. Убедитесь самостоятельно, что такой ход у кошек всегда найдется, и докажите, что описанная стратегия позволит кошкам «съесть» мышку.

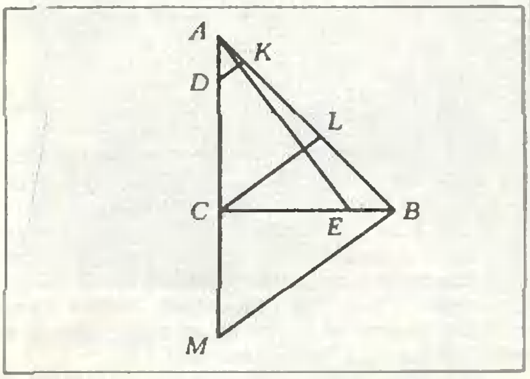


Рис. 4.

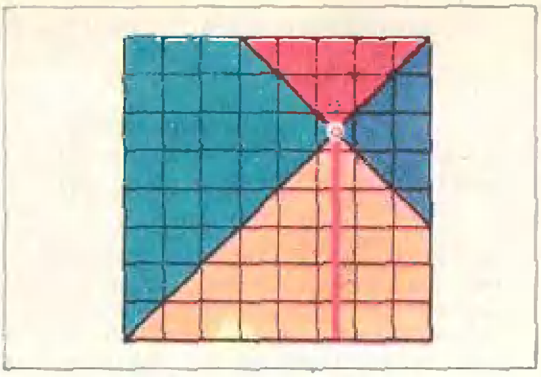


Рис. 5.

б) Проведем через клетку, на которой стоит мышка, обе диагонали. Эти диагонали разобьют доску на четыре сектора (рис. 5). Поскольку кошек три, внутри одного из этих четырех секторов кошек нет. Проведем (горизонтальный или вертикальный) отрезок, соединяющий мышку с краем доски внутри этого сектора (красный отрезок на рисунке 5). Докажите, что если мышка отправится по этому отрезку прямо к краю доски, то она убежит от кошек.

9 класс, задача 5.

$$A = 10^2\,a + 10\,b + c,$$

где a, b и c — цифры числа A. Нам нужно найти такие A, что
$3\,A = (10^2 + 10 + 1)(a + b + c)$.
Отсюда

$$37\,(a + b + c) = 10^2 a + 10b + c.$$

Следовательно,

$$63a = 27b + 36c,$$

или

$$7a = 3b + 4c.$$

Предположим, что $b \geqslant c$. Если $7a = 3b + 4c$, то $7\,(a - c) = 3\,(b - c)$. Отсюда

$$b - c = a - c = 0$$

или

$$b - c = 7,\ a - c = 3.$$

Если же $b < c$, то $7\,(a - b) = 4\,(c - b)$, откуда

$$c - b = 7,\quad a - b = 4.$$

(Напоминаем, что a, b и c — цифры). Окончательно получаем следующие решения: числа A, у которых все цифры одинаковы (таких чисел девять); числа 370, 481, 592 и числа 407, 518, 629 — всего пятнадцать чисел.

9 класс, задача 6. Среди треугольников с вершинами в вершинах данного многоугольника выберем треугольник t *максимальной* площади (поскольку таких треугольников конечное число, то треугольник t найти можно) и построим его.

Проведем через вершины треугольника t прямые, параллельные противолежащим сторонам (рис. 6). Получим треугольник T, площадь которого в четыре раза больше площади треугольника t. По условию задачи площадь треугольника T меньше четырех. Докажем теперь, что треугольник T содержит данный многоугольник. Действительно, внутри полуплоскостей I, II и III (рис. 7) не может быть вершин нашего многоугольника — иначе нашелся бы треугольник с площадью, большей площади треугольника t. Отсюда и из выпуклости данного многоугольника следует, что он лежит в треугольнике T.

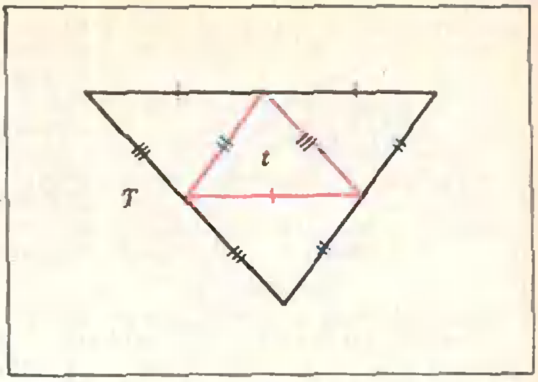


Рис. 6.

10 класс, задача 1. Подставим в данное равенство последовательно $x = 1$, $y = z = 0$, $x = y = z = 1$ и $x = 1$, $y = -1$, $z = 0$. Получим, что

$$|a| + |b| + |c| = 1, \qquad (1)$$

$$|a+b+c| = 1, \qquad (2)$$

$$|a-b| + |b-c| + |c-a| = 2. \qquad (3)$$

Из равенств (1) и (2) видно, что числа a, b и c либо все неотрицательны, либо все неположительны. Предположим, что $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 0$. Из (3) тогда следует, что $a - c = 1$. Из этого равенства и из (1) получаем, что $a = 1$, $b = c = 0$. Поскольку a, b и c входят в равенства (1), (2) и (3) симметрично, получаем окончательно следующий ответ:

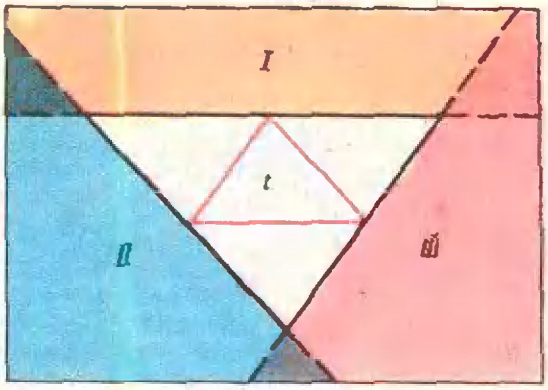
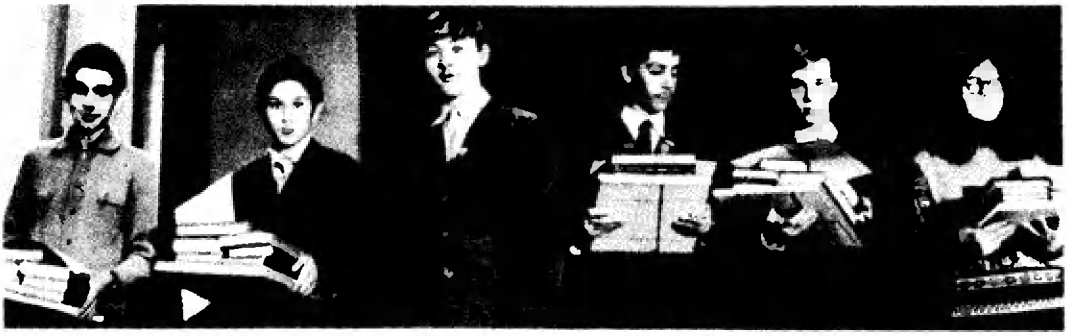


Рис. 7.



Восьмиклассники, награжденные дипломами I степени: А. Гончаров, Д. Литвиненко, О. Окунев, Б. Соломяк, С. Финашин, Т. Хованова

$a=\pm 1,\ b=c=0;\ b=\pm 1,\ a=c=0;$ $c=\pm 1,\ a=b=0.$

Дни олимпиады были чрезвычайно насыщенными. Школьники не только соревновались, но и слушали лекции ведущих ученых, участвовали в различных встречах и беседах, ездили на интересные экскурсии по Еревану и его окрестностям.

Редакция журнала «Квант» провела несколько, ставших уже традиционными, встреч со школьниками. Практически все «олимпийцы» являются активными читателями нашего журнала. На этих встречах, проходивших живо и интересно, школьники высказали пожелания, которые редакция постарается учесть.

К сожалению, приходится отметить, что проведение олимпиады было недостаточно четким. Участие местных математиков в работе олимпиады было незначительным. Не было налажено транспортное обслуживание участников олимпиады и членов жюри. Недостаточно хорошими были и бытовые условия участников олимпиады.

Закрытие олимпиады состоялось 16 апреля, где победителям вручались дипломы и специальные призы, учрежденные редакцией журнала «Квант», а также различными организациями Армении.

Дипломы I степени

получили следующие участники олимпиады:

по 8 классам — *Ю. Буров* (Москва, с. ш. № 2), *А. Гончаров* (Никополь Днепропетровской обл., с. ш. № 13), *Д. Литвиненко* (Севастополь, с. ш. № 1), *О. Окунев* (Казань, с. ш. № 122), *Б. Соломяк* (Ленинград, школа-интернат № 45), *С. Финашин* (Ленинград, школа-интернат № 45), *Т. Хованова* (Москва, с. ш. № 444);

по 10 классам — *И. Ананьевский* (Ленинград, школа-интернат № 45), *И. Сивицкий* (Ленинград, школа-интернат № 45), *Д. Тюкавкин* (Иркутск, с. ш. № 11), *Н. Чернов* (Кривой Рог, с. ш. № 95).

По 9 классам дипломы I степени никому присуждены не были.

Дипломы II степени

получили следующие участники олимпиады:

по 8 классам — *Е. Глейзер* (Львов, с. ш. № 14), *В. Гусейнов*

Р. Александрян член жюри олимпиады, вручает диплом I степени Ю. Бурову

Зам. главного редактора журнала «Квант» М. Л. Смолянский вручает премию журнала абсолютному победителю олимпиады Д. Тюкавкину

(Нахичевань, с. ш. № 3), *А. Дегтярев* (Камышин, с. ш. № 8), *А. Кленцын* (Ульяновск, с. ш. № 25), *И. Кормильченко* (Орджоникидзе, школа-интернат № 2), *С. Лукьяненко* (Москва, школа-интернат № 18), *А. Малышев* (Красноярский край, Курганский р-н, с. ш. № 1), *А. Мельник* (Новосибирск, с. ш. № 127), *И. Панин* (Ленинград, школа-интернат № 45), *Ю. Пасс* (Ленинград, с. ш. № 121), *В. Федоров* (Москва, школа-интернат № 18), *С. Хазанов* (Куйбышев, с. ш. № 41);

по 9 классам — *В. Гейзель* (Новороссийск, с. ш. № 40), *К. Гробдрук* (Ворошиловград, с. ш. № 26), *А. Карабеков* (Ереван, школа-интернат № 1), *А. Корнюшин* (Москва, школа-интернат № 18), *А. Музыкантов* (Новосибирск, с. ш. № 130), *А. Резников* (Киев, с. ш. № 145), *Б. Розенштейн* (Каменец-Подольский, с. ш. № 8), *К. Рыбасов* (Киев, школа-интернат при КГУ), *Б. Спокойный* (Новокузнецк, с. ш. № 11), *Г. Шмелев* (Ярославль, с. ш. № 20);

по 10 классам — *В. Бойко* (Киев, школа-интернат при КГУ), *А. Браилов* (Москва, с. ш. № 2), *А. Владиславский* (Красногорск Московской обл., с. ш. № 7), *А. Вятчин* (Павлово Горьковской обл., с. ш. № 1), *А. Григорян* (Баку, с. ш. № 211), *Гром-Мазничевский* (Киев, с. ш. № 145), *М. Гусаров* (Ленинград, с. ш. № 30), *Л. Данилов* (Москва, школа-интернат № 18), *В. Козырев* (Ленинград, школа-интернат № 45), *П. Корнилов* (Москва, школа-интернат № 18), *Н. Лукьянец* (Одесса, с. ш. № 116), *В. Перцель* (Москва, школа-интернат № 18), *А. Поносов* (Пермь, с. ш. № 9), *С. Фомин* (Ленинград, школа-интернат № 45), *Е. Шустин* (Ленинград, школа-интернат № 45).

Дипломы III степени

получили следующие участники олимпиады:

по 8 классам — *А. Белошапко* (пос. Вышков Новозыбковского района Брянской обл., Вышковская с. ш.), *Е. Белов* (Оренбург, с. ш. № 12), *З. Беркалиев* (Караганда, с. ш. № 1), *Р. Даян* (Ереван, с. ш. № 42), *Д. Иванов* (Калинин, с. ш. № 6), *А. Кашапова* (Уфа, с. ш. № 55), *Д. Кондаков* (Новосибирск, с. ш. № 22), *Е. Ландман* (Ленинград, с. ш. № 531), *В. Леднев* (Ижевск, с. ш. № 30), *А. Лейдерман* (Могилев-Подольский, с. ш. № 5), *И. Морозов* (Горький, с. ш. № 184), *М. Мухамеджанов* (Ташкент, с. ш. № 110), *С. Тимашин* (Кировабад, с. ш. № 13), *Ю. Щербич* (Могилев, с. ш. № 3), *Б. Яцало* (Морочное Ровенской обл., с. ш. № 1);

по 9 классам — *Е. Байсалов* (Алма-Ата, школа-интернат РФМШ), *И. Бахмутский* (Львов, с. ш. № 52), *С. Белоглазов* (Пермская обл., Усть-

Самый юный победитель олимпиады, лауреат премии «Кванта» Д. Литвиненко

Члены жюри олимпиады

Кишертская с. ш.), *А. Блох* (Харьков, с. ш. № 27), *Д. Ботвич* (Курская обл., с. ш. № 7), *Л. Генкин* (Горький, с. ш. № 40), *О. Ефремов* (Ангарск, с. ш. № 10), *М. Кац* (Москва, школа-интернат № 18), *Ф. Кремзер* (Новосибирск, с. ш. № 165), *А. Осипов* (Москва, с. ш. № 91), *В. Продниекс* (Латвийская ССР, Лиелвардская с. ш.), *Е. Романовский* (Киев, с. ш. № 145), *А. Черебатов* (Омск, с. ш. № 80), *А. Черкун* (Тула, с. ш. № 61);

по 10 классам — *М. Баум* (Москва, школа-интернат № 18), *И. Белоголов* (Канев Черкасской обл., с. ш. № 4), *А. Берлин* (Бобруйск, с. ш. № 3), *А. Буяновский* (Гомель, с. ш. № 28), *В. Данилов* (Петушки Владимирской обл., с. ш. № 3), *В. Дубицкий* (Ленинград, с. ш. № 239), *С. Елисеев* (Москва, с. ш. № 179), *А. Заславский* (Калинин, с. ш. № 20), *В. Карапетян* (Ереван, школа-интернат № 1), *А. Колдоба* (Ворошиловград, с. ш. № 2), *А. Кристаль* (Ленинград, с. ш. № 30), *А. Макаричев* (Львов, с. ш. № 14), *М. Панченко* (Бровары, с. ш. № 5), *В. Паньков* (Минск, с. ш. № 93), *А. Рейтсакас* (Таллин, с. ш. № 19), *Г. Скляр* (Харьков, с. ш. № 27), *И. Старобинец* (Горький, с. ш. № 82), *Н. Щербина* (Днепропетровск, с. ш. № 80).

Похвальные отзывы I степени получили 92 и II степени — 123 участника олимпиады.

Призами журнала «Квант» за абсолютно лучший результат были награждены: ученик 10 класса с. ш. № 11 г. Иркутска *Д. Тюкавкин* и самый юный победитель олимпиады, ученик 8 класса с. ш. № 1 г. Севастополя *Д. Литвиненко*.

Кроме того, годовой подпиской на журнал «Квант» на 1975 год награждены победители олимпиады — учащиеся сельских школ:

1) *А. Белошапко* — 8 кл., п. Вышков Брянской обл.;

2) *А. Криворущенко* — 8 кл., п. Ушаты Витебской обл.;

3) *Б. Яцало* — 8 кл., с. Морочное Ровенской обл.;

4) *Д. Ботвич* — 9 кл., с. Камышино Курской обл.;

5) *В. Печенков* — 9 кл., с. Красный Кут Приморского края.

В заключение нам хочется сказать несколько слов о работе жюри. В работе жюри приняли участие ученые Москвы, Ленинграда, Новосибирска, Киева, Тбилиси, Свердловска и других городов. В состав жюри входили не только ученые — доктора и кандидаты наук,— но и студенты, бывшие еще совсем недавно школьниками — участниками олимпиад, их победителями. Поэтому жюри в целом довольно «молодое», средний «возраст» членов жюри меньше 30 лет. Во время олимпиады жюри выполняет огромную работу. Начинается эта работа уже задолго до официального открытия олимпиады: ведь более чем из ста задач, подготовленных членами жюри, нужно отобрать двадцать одну наиболее интересную и оригинальную; каждая отобранная задача должна иметь привлекательную формулировку, выражать достаточно интересный математический факт, и если она предлагается для учащихся 8, 9 и 10 классов, то при ее решении дополнительные знания не должны сулить явных преимуществ. Того, чтобы каждая задача была сама по себе хорошей, мало. Важно, чтобы весь комплект задач, подобранных для каждого класса, был разумен.

Большая работа предстоит членам жюри и во время олимпиады. Они должны проверить тысячу работ участников олимпиады не менее двух-трех раз, а спорные работы просматриваются 10—12 членами жюри. Если добавить, что все члены жюри участвуют в разборах задач (как с руководителями команд, так и со школьниками), проводят собеседования и апелляции, читают лекции школьникам, то ясно, что рабочий день у членов жюри заполнен до предела. Не каждому под силу такая работа, — чтобы работать в жюри, нужно быть большим энтузиастом. Мы хотели бы отметить некоторых из таких энтузиастов, работающих в жюри, начиная с I Всесоюзной олимпиады:

кандидат физико-математических наук Н. Б. Васильев,— бессменный заместитель председателя жюри, начиная с I Всесоюзной олимпиады;

кандидат физико-математических наук Д. Б. Фукс и А. А. Егоров— одни из инициаторов проведения Всесоюзных олимпиад.

Постоянными членами жюри являются также: доктор физико-математических наук М. И. Башмаков, кандидат физико-математических наук А. Д. Бендукидзе, кандидат физико-математических наук И. Н. Бернштейн, В. Л. Гутенмахер, Ю. И. Ионин, кандидат физико-математических наук Н. Н. Константинов, Ю. П. Лысов, И.С. Петраков, кандидат физико-математических наук А. П. Савин, кандидат физико-математических наук М. И. Серов, кандидат физико-математических наук В. А. Скворцов.

Еще раз о часах-календаре

Лет 13 назад от учителя математики я узнал о часах-календаре, аналогичных тем, о которых рассказывалось в 12-м номере «Кванта» за 1973 год.

Но, оказывается, совсем не обязательно делать календарь, где указаны поправки каждого месяца. Поправки легко запоминаются по количеству букв каждого слова в следующем предложении, где надо учесть, что числа 7 и 0 равнозначны:

Скажите (7)	январь
мне (3)	февраль
дни (3)	март
месяцы (6)	апрель
и (1)	май
годы (4)	июнь
каждые (6)	июль
из (2)	август
чисел (5)	сентябрь
назвать (7)	октябрь
вам (3)	ноябрь
смогу (5)	декабрь

Следует помнить, что каждый год тоже имеет свою поправку. Например, 1973 год — 0, 1974 — 0, ..., впрочем, найдите закономерность сами. Особое внимание обратите на поправку високосного года.

Для нахождения порядкового номера дня недели также следует к дате прибавить поправку месяца и года. Если полученная сумма не больше 7, то она и будет порядковым номером дня недели. Если больше 7, то необходимо взять остаток от деления ее на 7, который и будет ответом.

В. В. Сластухин

Т. С. Петрова,
Л. В. Чернова

Олимпиада по физике

Заключительный тур VIII Всесоюзной олимпиады школьников по физике проходил с 10 по 16 апреля в старинном русском городе Горьком, возникшем семь с половиной веков назад у слияния рек Оки и Волги.

На олимпиаду приехали школьники всех республик, в ней приняли участие 579 человек: 234 ученика 10 класса, 191 ученик 9 класса, 151 ученик 8 класса и 3 ученика 7 класса, выполнявшие работу, предложенную ученикам 8 класса. Участники VIII Всесоюзной олимпиады — это победители республиканских и областных олимпиад 1974 года, победители VII Всесоюзной олимпиады, проходившей в 1973 году в Ленинграде; были здесь и победители конкурса, который проводил журнал «Квант» *).

10 апреля во Дворце культуры Автозавода состоялось торжественное открытие олимпиады. Со словами приветствия и добрыми пожеланиями к участникам обратился председатель жюри олимпиады академик А. В. Гапонов-Грехов.

В тот же день представители делегаций союзных республик возложили венки к памятникам В. И. Ленину и А. М. Горькому.

Заключительный этап олимпиады, как и в прежние годы, состоял из

*) Условия конкурса опубликованы в первом номере «Кванта» за 1974 год. Победители этого конкурса допускаются на областные олимпиады.

двух туров: теоретического и экспериментального.

11 апреля был проведен теоретический тур.

Восьмиклассникам было предложено по 4 задачи, девятиклассникам и десятиклассникам — по 5 задач.

Вечером того же дня были проведены вечера отдыха, на которых участники олимпиады посмотрели концерты художественной самодеятельности.

12 и 13 апреля участники олимпиады отдыхали. Для них были организованы экскурсии на предприятия и по историческим местам города Горького.

А для членов жюри эти дни были, пожалуй, самыми напряженными. Им нужно было проверить 579 работ.

К участию в экспериментальном туре были допущены 157 школьников.

14 апреля в 10 часов утра в лабораториях Горьковского университета состоялся экспериментальный тур.

На выполнение работ отводилось 4 часа.

Ребята, не прошедшие на экспериментальный тур, могли в это время прослушать лекцию, посмотреть научно-популярные кинофильмы или принять участие в физической викторине.

Ниже приводятся условия задач теоретического тура, решения некоторых задач и задания экспериментального тура*).

Теоретический тур

8 класс

1. По сторонам прямого угла скользит жесткая палочка длины $2l$, в центре которой закреплена бусинка массы m. Скорость точки B постоянна и равна v (рис. 1).

Определить, с какой силой действует бусинка на палочку в тот момент, когда $\alpha = 45°$.

2. В неотапливаемом помещении работает холодильник с терморегулятором. В момент подключения холодильника к сети

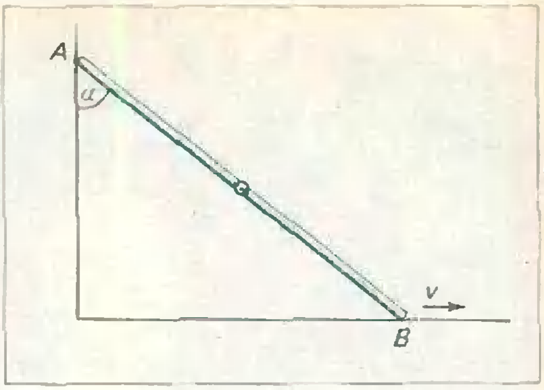


Рис. 1.

температура на улице, в помещении и в холодильнике была одинакова. Считая температуру на улице постоянной, изобразите приближенно на графиках, как менялась температура в помещении после подключения холодильника. Рассмотрите три случая: а) холодильник пустой; б) заполнен продуктами; в) дверца холодильника открыта. Все три графика зависимости температуры от времени начертите на одном рисунке.

3. Канал проходит по мосту над шоссе. Изменяется ли давление на мост, если по каналу движется один раз пустая, а другой — нагруженная баржа?

4. Трубка, в которой находится пружинка с прикрепленным к ней шариком, может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через конец трубки. Свободный конец пружинки прикреплен к трубке (рис. 2, *а*). Нарисуйте примерный график зависимости смещения шарика вдоль трубки от угловой скорости при увеличении ее от

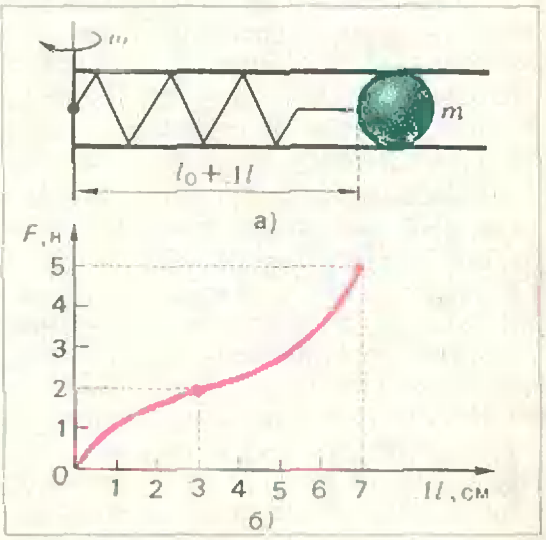


Рис 2.

*) Большая часть задач вошла в «Задачник «Кванта» (см. «Квант», 1974, №№ 7, 8).

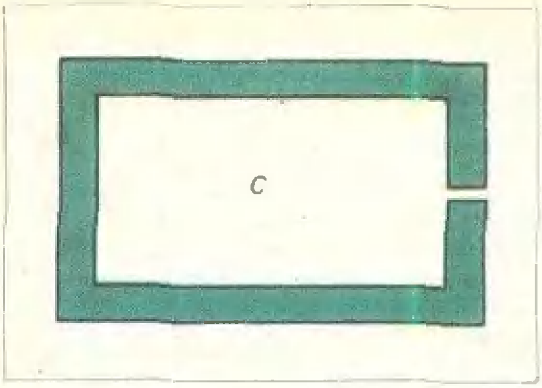


Рис. 3.

нуля до такой величины, когда $F = 5$ *н*. Как изменится эта зависимость при уменьшении угловой скорости? График зависимости силы упругости F от деформации представлен на рисунке 2, *б*. $l_0 = 2$ *см*.

9 класс

1. Сосуд C сообщается с окружающим пространством через малое отверстие (рис. 3). Температура газа в пространстве T, давление p. Газ настолько разрежен, что молекулы при пролете в сосуд и из сосуда на протяжении размеров отверстия не сталкиваются друг с другом. В сосуде поддерживается температура $4T$.

Каким будет давление в сосуде?

2. См. задачу 2 для 8 кл.

3. См. задачу 4 для 8 кл.

4. Заряженные шарики с одинаковой массой, расположенные на расстоянии l друг от друга, отпустили (без начальной скорости). Через t *с* расстояние между ними удвоилось. Через какое время удвоится расстояние между этими шариками, если их отпустить с начального расстояния $3l$?

5. При исследовании упругих свойств стальной проволоки длиной l установили, что если один конец ее закрепить, а другой

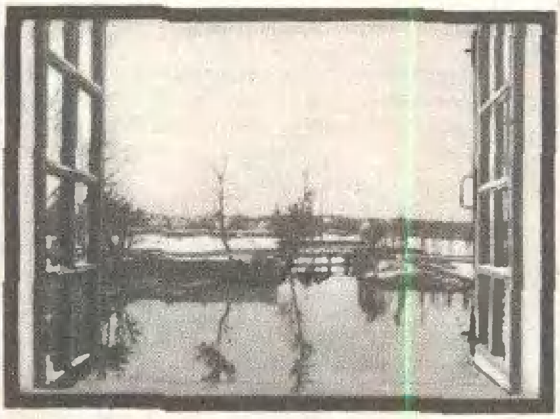


Рис. 4.

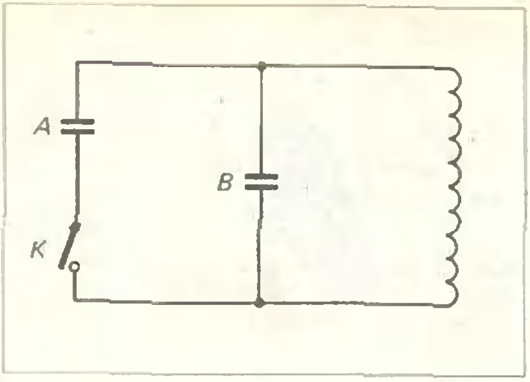


Рис. 5.

повернуть на угол α вокруг оси, то возникает момент упругих сил $M = k\alpha$. После этого из проволоки навили пружину радиуса R с шагом много меньше R. Рассчитать коэффициент упругости пружины (считать, что упругие свойства стали после навивки пружины полностью восстанавливаются).

10 класс

1. Снимок сделан однолинзовым объективом с фокусным расстоянием $f = 4$ *см*. Фотография (рис. 4) увеличена в $n = 10$ раз. Определите приблизительно расстояния между предметами в натуре, например, расстояние от объектива до окна L_0, расстояние от окна до мостика $L_м$, высоту объектива над подоконником H.

2. Две машины A и B едут рядом по шоссе со скоростью v. Затем A увеличивает свою скорость до $2v$. Относительно наблюдателя, стоящего на шоссе, кинетическая энергия машины выросла на

$$\Delta E_1 = {}^3/_2\, mv^2,$$

а относительно шофера в машине B энергия увеличилась на

$$\Delta E_2 = {}^1/_2\, mv^2.$$

Объясните парадокс: количество сгоревшего топлива для обоих наблюдателей одно и то же, а изменение энергии разное.

Одинакова ли теплота сгорания топлива с точки зрения каждого наблюдателя?

3. Два одинаковых конденсатора A и B, каждый емкостью C, и катушка с индуктивностью L соединены, как показано на рисунке 5. В начальный момент ключ K разомкнут, конденсатор A заряжен до разности потенциалов U. Заряд конденсатора B и ток в катушке равны нулю.

Определить максимальное значение тока в катушке после замыкания ключа.

4. Найти ускорение a, с которым падает круглая металлическая пластинка в однородном магнитном поле, параллельном по-

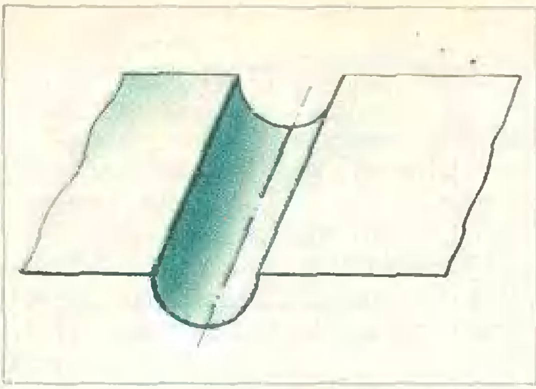


Рис. 6.

верхности Земли. Пластинка падает вертикально вниз и ориентирована своей плоскостью параллельно магнитному полю и перпендикулярно поверхности Земли. Толщина пластинки d много меньше ее радиуса r, масса m, индукция магнитного поля B, ускорение свободного падения g.

5. Из одной точки на дне горизонтального кругового желоба (рис. 6) разлетаются шарики под небольшими углами к образующей желоба с одинаковыми проекциями скорости вдоль этой образующей. Встретятся ли эти шарики?

В этой статье мы приведем решения только двух задач. Решения остальных задач будут опубликованы в «Задачнике «Кванта».

З а д а ч а 1 (10 кл)

Изображения предметов, удаленных от окна (а значит, и от объектива), на фотографии достаточно резкие. Следовательно, объектив был наведен на бесконечность и изображение получено в фокальной плоскости объектива.

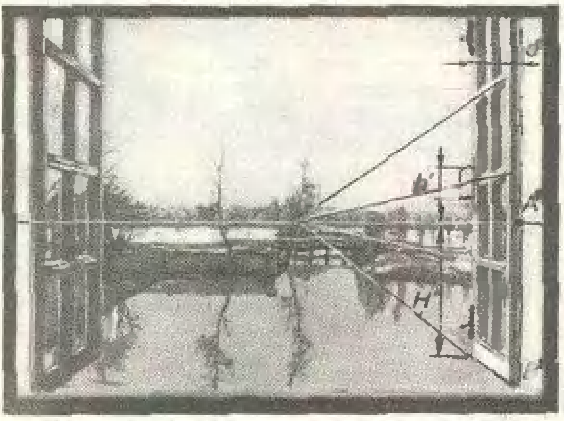


Рис. 7.

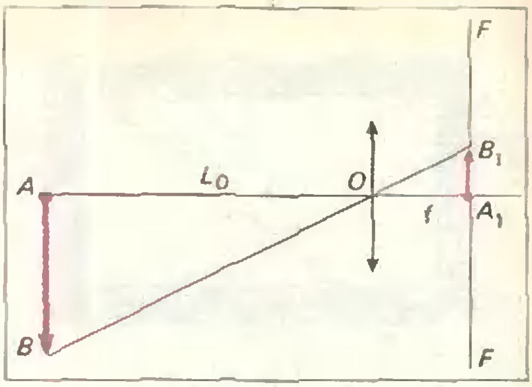


Рис. 8.

Судя по фотографии, главная оптическая ось объектива была горизонтальна. Если бы это было не так, ширина d оконной рамы на фото была бы различна в верхней и нижней частях окна (рис. 7). Определим, на какой высоте над подоконником был установлен объектив *).

Все линии, которые лежат в горизонтальной плоскости, проходящей через главную оптическую ось объектива, на фото должны быть горизонтальными. Продолжим линии горизонтальных переплетов оконной рамы до пересечения. (Поскольку в натуре эти линии параллельны, в плоскости изображения они пересекутся в одной точке.) Проведем через эту точку горизонтальную плоскость. Уровень, на котором эта плоскость пересечет раму окна, и указывает высоту H объектива над подоконником. Чтобы определить численное значение величины H, необходимо на фотографии иметь какой-нибудь «масштабный» размер. Выберем в качестве «мерной единицы» ручку оконной рамы. Будем считать, что в натуре ее размер $h \approx 10$ *см*. На фотографии размер ручки $h' \approx \approx 1$ *см*. На фото высота $H' \approx 4{,}5$ *см* $= 4{,}5\,h'$. Следовательно, в натуре высота объектива над подоконником

$$H = 4{,}5h \approx 45 \text{ см}.$$

Определим теперь расстояние от окна до объектива. Из подобия треугольников AOB и A_1OB_1 (рис. 8) следует:

$$\frac{AB}{L_0} = \frac{A_1B_1}{f}.$$

Здесь $AB = H = 45$ *см*, $f = 4$ *см*, $A_1B_1 =$

---

*) Фотография в журнале уменьшена в 2,7 раза по сравнению с той, которая давалась участникам олимпиады. Мы будем приводить размеры по исходной фотографии, так как при измерении величин на уменьшенном снимке погрешность увеличивается.

$=\frac{1}{n}A'B'$ $(n=10)$. На фото $A'B'\approx 5{,}5$ *см*; значит, $A_1B_1\approx 0{,}55$ *см*.

Таким образом, расстояние от окна до объектива

$$L_0=\frac{AB\cdot f}{A_1B_1}\approx 3{,}27\ \text{м}.$$

Чтобы определить расстояние от окна до мостика, нужно иметь мерную единицу. (Пользоваться в качестве масштабного размера оконной ручкой уже нельзя. Новый размер надо выбирать в плоскости, «проходящей» через мостик и перпендикулярной главной оптической оси объектива.) Обычно высота перил мостика $r\approx 80$ *см*. На фото высота перил $r'\approx 0{,}3$ *см*.

Следовательно, на изображении $r_1\approx\approx 0{,}03$ *см*. Пользуясь приведенными выше рассуждениями и аналогичными вычислениями (из подобия треугольников), найдем расстояние от мостика до объектива:

$$L_{\text{м. о}}=\frac{r\cdot f}{r_1}\approx 107\ \text{м}.$$

Вычтем из этой величины расстояние от окна до объектива и найдем расстояние от окна до мостика:

$$L_{\text{м}}\approx 104\ \text{м}.$$

Задача 2 (10 кл)

Рассмотрим событие в двух системах отсчета — неподвижной и подвижной, которую свяжем с автомобилем B. Будем считать, что движение происходит без скольжения и силы трения отсутствуют.

В начальный период ($v_A=v_B=v$) суммарный импульс системы Земля — машины в неподвижной системе отсчета равен

$$P_1=2mv$$

(будем для удобства считать, что массы машин одинаковы). В течение этого периода суммарная механическая энергия системы равна

$$E_1=2m\frac{v^2}{2}=mv^2.$$

Полная энергия системы складывается из кинетической энергии машин A и B и внутренней энергии топлива:

$$W_1=E_1+U_1.$$

Поскольку энергия, «относящаяся» к машине B, с течением времени не изменяется, обозначим ее W_B ($W_B=\text{const}$), а энергию, «относящуюся» к машине A, представим в виде $W_{1A}=E_{1A}+U_{1A}$. Таким образом, на первом этапе движения ($v_A=v_B=v$) энергия системы равна

$$W_1=W_B+E_{1A}+U_{1A}.$$

Будем считать, что вся энергия, выделившаяся при сгорании топлива, пошла на увеличение скорости автомобиля A.

Так как наша система замкнута, суммарный импульс должен сохраняться. Импульс машины B $P_{1B}=\text{const}$, а импульс машины A изменился на величину $m\,\Delta v_A=mv$ (мы пренебрегаем изменением массы машины в результате сгорания части топлива). Следовательно, на такую же величину изменился импульс Земли, то есть Земля приобрела скорость, которую можно определить из соотношения $|M\mathbf{v}_3|=|m\mathbf{v}|$:

$$|\mathbf{v}_3|=\frac{m}{M}|\mathbf{v}|.$$

(При этом $\mathbf{v}_3=-\frac{m}{M}\mathbf{v}$; мы считаем, что колеса вращаются без проскальзывания.)

Механическая энергия системы стала равной

$$E_2=\frac{mv^2}{2}+\frac{m(2v)^2}{2}+\frac{M\left(\frac{m}{M}v\right)^2}{2}.$$

Увеличение механической энергии произошло за счет изменения внутренней энергии (в результате сгорания топлива). Запишем теперь суммарную энергию системы:

$$W_2=W_B+E_{2A}+E_3+(U_{1A}-\Delta U).$$

По закону сохранения энергии $W_2=W_1$, то есть $E_{2A}-E_{1A}+E_3-\Delta U=0$, или

$$\frac{3}{2}mv^2+\frac{m^2}{2M}v^2-\Delta U=0.$$

Таким образом,

$$\Delta U=\Delta E=\frac{3}{2}mv^2+\frac{m^2}{2M}v^2.$$

Рассмотрим теперь событие в подвижной системе, связанной с машиной B. Проведем все изложенные выше рассуждения, сохраняя принятые допущения. Начальный импульс системы

$$\mathbf{P}_1'=-M\mathbf{v}$$

(так как Земля относительно машины B движется со скоростью $-\mathbf{v}$). Механическая энергия в начальный период равна кинетической энергии движения Земли относительно машины B *):

$$E_1'=\frac{Mv^2}{2}.$$

---

*) Будем считать, что движение Земли поступательное.

Суммарную энергию системы в этот период запишем в виде

$$W_1' = W_B' + E_{1A}' + U_{1A}' + E_{13}'$$

(для аналогии мы записали слагаемое E_{1A}', хотя $E_{1A}' = 0$). Машина A изменила свою скорость в этой системе на величину v. При этом скорость Земли стала v_3'. Из закона сохранения импульса

$$Mv_3' + mv = -Mv$$

найдем

$$|v_3'| = \left(1 + \frac{m}{M}\right)|v|.$$

Полная энергия системы в этот период равна

$$W_2' = W_B' + E_{2A}' + (U_{1A}' - \Delta U') + E_{23}'.$$

Запишем закон сохранения энергии:

$$W_2' - W_1' = E_{2A}' - E_{1A}' - \Delta U' + E_{23}' - E_{13}' = 0,$$

или

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{M}{2}\left[\left(1 + \frac{m}{M}\right)v\right]^2 - \frac{Mv^2}{2} - \Delta U' = 0.$$

Таким образом,

$$\Delta U' = \Delta E' = \frac{3m}{2}v^2 + \frac{m^2}{2M}v^2 = \Delta U.$$

Масса сгоревшего топлива в обеих системах одна и та же, изменение внутренней энергии, а следовательно, и количество теплоты, выделившейся при сгорании, тоже одно и то же. Значит, удельная теплота сгорания топлива одна и та же для наблюдателей, находящихся в двух рассмотренных нами системах.

Итак, никакого парадокса нет. Работа, совершаемая за счет энергии, выделяющейся при сгорании топлива, идет на увеличение механической энергии системы в целом. Таким образом, сделанный в условии задачи вывод об изменении энергии неверен.

Ошибка заключается в том, что в условии системы не замкнуты, а вывод сделан на основании закона сохранения энергии в той форме, в какой он применим для замкнутых систем.

Говоря об изменении скорости Земли, мы подходим к решению задачи «математически». Разумеется, изменение импульса Земли пренебрежимо мало. Часть энергии «уносится» в результате нагрева Земли под колесами, вылетающими из-под колес камешками, песком и т. п.

При проверке задач теоретического тура был проведен своеобразный «эксперимент». Прежде чем приступить к проверке, члены жюри по своему усмотрению «расценили» задачи, поставив каждой балл «за трудность». Оценки были расставлены следующим образом:

№№ задач	8 кл.	9 кл.	10 кл
1	8,5	5,5	6,3
2	7,1	4,5	6
3	2,9	7,7	5,6
4	11,1	6,3	7,2
5	—	7	4,8

Это «усредненные» баллы; мнения членов жюри не всегда совпадали.

После того, как все работы были проверены, по результатам проверки, по тому, сколько участников справилось с той или иной задачей, была проведена новая «расценка». И оказалось, что мнения жюри и ребят о трудности задач не совсем совпадают. Новая «таблица» выглядела следующим образом:

№№ задач	8 кл.	9 кл	10 кл.
1	10	4	6
2	8	4	8
3	4	6	5
4	8	8	7
5	—	10	4

(Разумеется, имеет смысл сравнивать не «абсолютные» баллы, а распределение их по задачам внутри каждого класса.) Члены жюри были удивлены тем, что с задачей № 1 для 8 класса и с задачей № 5 для 9 класса не справился ни один участник.

Мы думаем, что тем нашим читателям, которые самостоятельно решали задачи олимпиады, опубликованные в «Задачнике «Кванта», будет интересно сравнить свои заключения об их сложности с мнением жюри и «олимпийцев».

Экспериментальный тур

На экспериментальном туре все участники по классам выполняли одинаковые работы.

8 класс

Колебания грузов на пружине

1. Период колебаний T груза на пружине зависит от массы m груза (рис. 9). Изучите эту зависимость, используя пружину, секундомер и набор грузов с известными массами. По результатам опыта постройте график. Постарайтесь подобрать формулу, описывающую полученную зависимость T от m.

2. При некоторых массах груза легко заметить, что колебания вдоль пружин сопровождаются маятникообразными колебаниями. Изучите это явление и опишите его закономерности.

9 класс

«Черный ящик»

Изучите «черный ящик» (электрический четырехполюсник), о котором известно только то, что он состоит из четырех двухполюсников, соединенных звездой (рис. 10). Для экспериментов можно использовать батарейку, вольтметр и миллиамперметр.

На листке с заданием, который получил каждый экспериментатор, было сделано следующее предупреждение: «Внимание! Не закорачивайте батарейку через миллиамперметр! Прибор Вам этого не простит и лишит Вас всяких шансов на призовое место в олимпиаде!»

10 класс

Линза с заслонкой

Что произойдет с изображением предмета, полученным при помощи собирающей линзы, если закрыть половину линзы непрозрачным экраном?

Ответьте на этот вопрос, а затем проверьте свой ответ экспериментально, получив с помощью линзы изображение стрелки-предмета на белом экране при двух разных увеличениях u: 1) $u > 3$; 2) $u < 1/3$.

Опишите и объясните свои экспериментальные результаты. Для проверки этих объяснений придумайте и осуществите качественные и количественные контрольные опыты, используя по своему усмотрению любые детали установки: линзу, стрелку-предмет, фонарь, белый экран, черную бумагу, линейки, ножницы.

Проведите аналогичные исследования для действительного изображения, наблюдаемого без экрана, и для мнимого изображения. В качестве предмета в этих опытах удобно использовать нить лампочки.

При наблюдениях без экрана между источником света и глазом обязательно помещайте пленку — ослабитель света!

Рис. 9.

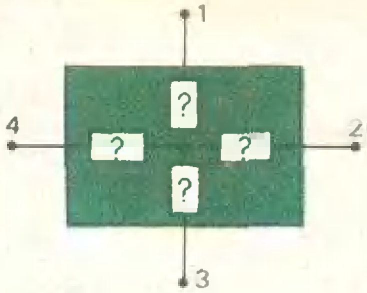


Рис. 10.

При оценке работ экспериментального тура учитывалось умение обращаться с приборами, четкое и последовательное выполнение этапов эксперимента, правильная теоретическая интерпретация полученных результатов, оценка их точности, четкость построения графиков, чертежей, форма и стиль отчета.

15 апреля в 16 часов все участники олимпиады вновь собрались во Дворце культуры Автозавода на торжественное закрытие олимпиады. Победителям были вручены дипломы, грамоты и награды.

Дипломы I степени

получили следующие участники олимпиады:

по 8 классам — *С. Костин* (Сумы, с. ш. № 3), *А. Половинкин* (Горький, с. ш. № 1), *Ю. Тетерин* (Ленинград, с. ш. № 239);

по 9 классам — *В. Каплуновский* (Ленинград, школа-интернат № 45), *С. Коршунов* (п. Монино Московской обл., с. ш. № 1);

по 10 классам*) — *А. Кур-*

*) Десятиклассникам, получившим дипломы I, II и III степени, были вручены рекомендации в высшие учебные заведения физико-математического профиля.

чанов (Житомир, с. ш. № 21), *Д. Топтыгин* (Москва, с. ш. № 2), *А. Шень* (Москва, с. ш. № 2).

Дипломы II степени

получили следующие участники олимпиады:

по 8 классам — *Е. Губанов* (п. Востряково Московской обл., с. ш. № 3), *А. Калинин* (Великие Луки, с. ш. № 3), *В. Тарасов* (Ленинград, школа-интернат № 45); *И. Хамитов* (Ухта Коми АССР, с. ш. № 3), *А. Шведов* (Киев, школа-интернат при КГУ);

по 9 классам — *Л. Авдеев* (Новосибирск, школа-интернат № 165), *Ю. Македонов* (Калинин, с. ш. № 37), *А. Поблагуев* (Винница, с. ш. № 17), *В. Тимофеев* (Москва, с. ш. № 144);

по 10 классам — *С. Бурков* (Москва, с. ш. № 2), *Л. Глазман* (Харьков, с. ш. № 27), *И. Гринштейн* (Одесса, с. ш. № 116), *О. Наний* (Кишинев, с. ш. № 37), *А. Руднев* (Москва, с. ш. № 762).

Ученики 8 класса Е. Губанов и И. Хамитов были награждены также специальными призами Министерства просвещения СССР за успешное выступление в экспериментальном туре, а ученик 9 класса Ю. Македонов — специальным призом Научно-исследовательского радиофизического института за лучшую экспериментальную работу по электричеству.

Дипломы III степени

получили следующие участники олимпиады:

по 8 классам — *В. Булатов* (Вологда, с. ш. № 11), *В. Вичирко* (Ленинград, с. ш. № 239), *А. Голубенцев* (Саратов, с. ш. № 19), *В. Князик* (Одесса, с. ш. № 116), *В. Кривцун* (Харьков, с. ш. № 27), *Ю. Маляр* (Казань, с. ш. № 122), *С. Семиляк* (Бар Винницкой обл., с. ш. № 1), *В. Старшенко* (Запорожье, с. ш. № 28), *Н. Ткач* (Червоноград Львовской обл., с. ш. № 7), *А. Шемякин* (Караганда, с. ш. № 88);

по 9 классам — *В. Борю* (Запорожье, с. ш. № 28), *А. Железняк* (Житомир, с. ш. № 24), *И. Золотухин* (Ленинград, школа-интернат № 45), *А. Куцериб* (Ровно, с. ш. № 3), *А. Кязилюнис* (Вильнюс, с. ш. № 31), *Я. Сеглиньш* (Рига, с. ш. № 1), *Д. Усков* (Воронеж, с. ш. № 58), *Л. Цимринг* (Горький, с. ш. № 40);

по 10 классам — *В. Баженов* (Киев, с. ш. № 84), *В. Гаврилюк* (Минск, с. ш. № 5), *А. Гоэр* (Берегово Закарпатской обл., с. ш. № 2), *Г. Гурия* (Кировабад, с. ш. № 29), *В. Дмитриев* (Казань, с. ш. № 50), *Л. Егошин* (Усть-Каменогорск, с. ш. № 35), *А. Иванов* (Жуковский Московской обл., с. ш. № 1), *А. Кузнецов* (Саратов, с. ш. № 13), *С. Масич* (Новосибирск, школа-интернат № 165), *С. Мачерет* (Киев, с. ш. № 145), *А. Рожков* (Усолье-Сибирское Иркутской обл., с. ш. № 5), *В. Сомило* (Ленинград, школа-интернат № 45), *Е. Фалькин* (Новосибирск, школа-интернат № 165), *М. Черников* (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82), *С. Черемшанцев* (Ленинград, с. ш. № 239), *В. Шендрик* (Алма-Ата, РФМШ).

Ученик 8 класса В. Вичирко награжден также специальным призом Министерства просвещения СССР за успешное участие в экспериментальном туре, ученик 9 класса А. Кязилюнис и ученик 10 класса Л. Егошин — специальными призами Министерства просвещения СССР за лучшую экспериментальную работу, а ученик 10 класса А. Гоэр — специальным призом Министерства просвещения СССР за высокую культуру проведения эксперимента.

105 участников были награждены похвальными грамотами и призами, учрежденными различными организациями. Вот некоторые из участников, награжденных специальными призами:

Х. Абдуллин (Алма-Ата, с. ш. № 28, 8 кл.) награжден подшивкой журнала «Квант» за 1973 год за успешное выступление в экспериментальном и теоретическом турах; *В. Сергин* (п. Хасын Магаданской обл., с. ш., 8 кл.) награжден призом завода «Красное Сормово», установленным для участника олимпиады, приехавшего из «самой далекой точки» Советского Союза; *И. Синсер* (Лисаковск Кустанайской обл., с. ш. № 1, 8 кл.) награждена призом фабрики «Хохлома», установленным для девочки — победителя олимпиады; *А. Слюсарь* (Ижевск Удмуртской АССР, с. ш. № 30, 8 кл.) награжден призом Горьковского обкома ВЛКСМ как самый юный победитель олимпиады; *Г. Беспалова* (Горький, с. ш. № 40, 9 кл.) награждена призом Министерства просвещения СССР, установленным для девочки — победителя олимпиады; *В. Добрынин* (Хмельницкий с. ш. № 17, 9 кл.) награжден призом газеты «Ленинская смена» за оригинальное решение задач; *С. Качур* (с. Ивановцы Мукачевского района, с. ш., 9 кл.) награжден призом завода «Красное Сормово», установленным для победителя олимпиады из сельской местности; *А. Безлегкий* (Донецк, с. ш. № 10, 10 кл.) награжден подшивкой журнала «Квант» за 1973 год за успешное участие в теоретическом и экспериментальном турах.

На закрытии олимпиады выступил академик А. В. Гапонов-Грехов. Он поздравил победителей и пожелал им дальнейших успехов. Затем участники олимпиады посмотрели большой концерт коллективов детской художественной самодеятельности Дворца культуры Автозавода.

В заключение мы хотим пожелать больших успехов будущим «олимпийцам».

Читатели предлагают задачи

1. Доказать, что $(1+6\cdot 0)+[1+6(0+1)]+[1+6(0+1+2)]+\ldots+\{1+6[0+1+2+\ldots+(n-1)]\}=n^3$.

Л. А. Максимова

2. Доказать, что уравнение

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=1$$

имеет только три целочисленных решения относительно неизвестных x, y, z.

Н. Ф. Максимов

3. Доказать неравенства:

а) $(1+x)^n+(1-x)^n\leqslant 2^n$ при $n>1$, $|x|\leqslant 1$;

б) $(1+x)^n+(1-x)^n\geqslant 2^n$ при $0<n<1$, $|x|\leqslant 1$.

4. A, B, C — углы остроугольного треугольника ABC. Что больше:

$$\sin A+\sin B+\sin C$$

или

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C?$$

С. Т. Берколайко

5. Доказать, что

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

А. С. Савин

6. Решить уравнение

$$\frac{x+y+z}{4}=\overline{x,yz}.$$

А. А. Безносюк

7. Решить уравнение

$$\overline{abcd}+\overline{bcd}+\overline{cd}+d=3022.$$

Е. Ю. Гугель

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

Новый учебник по геометрии

В 1973 году появилось седьмое (исправленное и дополненное) издание известного учебника по геометрии П. П. Андреева и Э. З. Шуваловой *). В действительности это — новый учебник. Он адресован учащимся техникумов, но будет полезен и всем читателям «Кванта», изучающим геометрию в школе и готовящимся к школьным выпускным и вступительным экзаменам в вузы.

В новом издании вы не найдете теории геометрических преобразований, исключенной ныне из программы. Но зато в учебнике представлен в доступном и строгом изложении курс геометрии во всей его полноте. В разделе, посвященном планиметрии, есть обзор всех начальных сведений, теория подобия многоугольников, метрические соотношения в треугольнике и круге, методы решения треугольников Изложение планиметрии в основном традиционное, однако оно иллюстрируется большим количеством разнообразных и интересных задач. А вот раздел об измерении площадей плоских фигур написан, вероятно, в новой для вас тональности. Отправляясь от аксиоматического определения площади плоской фигуры, авторы переходят к (эквивалентному ему) конструктивному определению, а затем —к формулам для определения площадей конкретных фигур.

Наиболее интересным представляется раздел стереометрии, посвященный рассмотрению многогранников, цилиндрических тел и конусов. Призма здесь рассматривается как частный случай цилиндра, а пирамида — как частный случай конуса. Такой подход ранее не встречался в популярной учебной литературе по геометрии. Как вы сами убедитесь, этот подход оказывается весьма выигрышным при изучении объемов и площадей поверхностей призм и пирамид вывод всех необходимых формул приобретает общность, удобную для понимания и запоминания. Сами формулы для объемов естественным образом объединяются в две группы, из которых каждая представляется одной универсальной формулой. Так, например, вы сумеете доказать, что объем любого цилиндрического тела равен произведению площади основания на высоту, а объем конического тела — трети указанного произведения. При этом основанием цилиндра может служить любая фигура с известной площадью. Тем самым класс тел, объемы которых могут вычисляться средствами элементарной математики, существенно расширяется. Опираясь на такую точку зрения, вы непосредственно подойдете к выводу формул для объемов методами интегрального исчисления, и этот вывод вы найдете в соответствующих дополнениях. Эти дополнения вполне естественны в учебнике для техникумов, где изучаются начала дифференциального и интегрального исчисления. Впрочем, и для учащихся школ с математической специализацией, а также вечерних и сменных школ, для участников школьных математических кружков эти дополнения весьма естественны.

В таком же четком стиле изложены главы о шаре и его частях, о приложениях тригонометрии к решению стереометрических задач и многое другое.

В новом учебнике по геометрии вы найдете ряд методических новшеств, разнообразный иллюстративный материал и с успехом используете его для совершенствования знаний по геометрии.

Л. Е. Садовский

*) П. П. Андреев, Э. З. Шувалова, Геометрия, изд. 7-е, исправленное и дополненное. Допущено МВ и ССО СССР в качестве учебника для средних специальных учебных заведений, М., «Наука», 1973, 304 с., цена 44 коп.

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. У школьника была некоторая сумма денег монетами достоинством в 15 коп. и 20 коп., причем двадцатикопеечных монет было больше, чем пятнадцатикопеечных. Пятую часть всех денег школьник истратил, отдав две монеты за билет в кино. Половину оставшихся денег он отдал за обед, оплатив его тремя монетами.

Сколько монет каждого достоинства было у школьника вначале?

2. Расстояние Земля — Солнце приблизительно в 387 раз больше расстояния Земля — Луна. Можно ли, пользуясь этими данными, оценить, во сколько раз объем Солнца больше объема Луны?

3. В ветреный день нам становится теплее, если мы «спрячемся» от ветра. А одинаковы ли показания термометра на ветру и «за углом»?

4. «Московское время — 19 часов», — услышали мы, сидя за ужином в один из последних дней пребывания в доме отдыха. А на моих часах было без пяти семь. Но часы бегут вперед, рассчитал я, и к моменту моего отъезда покажут точное время отхода поезда.

Часы моей соседки Тамары показывали без четырех минут семь. Но ее часы убегали вперед на 3 мин. в сутки больше, чем мои. Тамара должна была уехать тем же поездом, но ровно на сутки раньше меня. И ее часы к моменту отъезда тоже показали точное время.

На сколько минут в сутки спешат наши часы?

Рисунки Э. Назарова

МЕТОД БЕСКОНЕЧНОГО СПУСКА

В. В. УШАКОВ

Я нашел поистине удивительное доказательство...

Пьер Ферма

Доказательства бывают аналитические, синтетические, индуктивные, дедуктивные, доказательства от противного, доказательства приведением к абсурду (к нелепости, к противоречию). Цель настоящей статьи — познакомить вас с одной разновидностью метода доказательства приведением к абсурду — методом бесконечного (или безграничного) спуска. Этот термин был предложен Пьером Ферма (1601—1655). Впервые этот метод был применен математиком XIII века Кампано при доказательстве иррациональности «золотого сечения».

Метод бесконечного спуска заключается в построении процесса, доставляющего бесконечную последовательность убывающих целых положительных чисел. Поскольку убывающая последовательность целых положительных чисел имеет лишь конечное число членов, мы получаем противоречие. Разъясним этот метод, проведя им доказательство иррациональности числа $\sqrt{2}$.

Пример 1. *Доказать, что число $\sqrt{2}$ иррационально.*

Пусть $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$, где r и s — натуральные числа. Тогда

$$2s^2 = r^2. \qquad (1)$$

Левая часть уравнения (1) — число четное, следовательно, r^2 четно. Это означает, что r четно (если бы r было нечетным, то и r^2 было бы нечетным). Подставив $r = 2r_1$ в уравнение (1), получим $2s^2 = 4r_1^2$, или

$$s^2 = 2r_1^2. \qquad (2)$$

Рассуждая аналогично, из уравнения (2) найдем, что $s = 2s_1$, после чего уравнение (2) дает

$$2s_1^2 = r_1^2. \qquad (1a)$$

Условия $r = 2r_1$, $s = 2s_1$ приводят к неравенству $r > r_1$. Уравнение (1a) аналогично уравнению (1); применяя к (1a) те же рассуждения, мы получаем бесконечную последовательность

$$r > r_1 > r_2 > \ldots > r_n > \ldots > 0. \qquad (3)$$

Условие (3) противоречиво: множество натуральных чисел, меньших r, конечно! Полученное противоречие показывает, что уравнение (1) в натуральных числах неразрешимо, и $\sqrt{2}$ — иррациональное число.

Вы, наверное, заметили, что термин «спуск» означает переход от большего натурального числа к меньшему и что в этой последовательности обязательно найдется последнее (наименьшее) число.

Упражнение 1 (обобщение примера 1). Доказать, что если натуральное число p не является точной n-й степенью натурального числа, то $\sqrt[n]{p}$ — число иррациональное.

Отметим, что метод бесконечного спуска позволяет лишь дать отрицательный ответ. Покажем это на примерах.

Пример 2. *Доказать, что уравнение*

$$6(x^2+y^2)=z^2+t^2 \qquad (4)$$

неразрешимо в натуральных числах.

Пусть уравнение (4) разрешимо в натуральных числах. Правая часть уравнения (4) делится на 3. Легко доказать, что это возможно лишь тогда, когда числа z и t делятся на 3:

$$z=3z_1, \qquad t=3t_1,$$

при этом $z>z_1$, $t>t_1$, и потому $z^2+t^2>z_1^2+t_1^2$. Подставляя найденные значения z и t в уравнение (4), получим

$$6(x^2+y^2)=9(z_1^2+t_1^2).$$

Правая часть этого уравнения делится на 9, следовательно, на 9 делится и его левая часть. Это возможно лишь тогда, когда x^2+y^2 делится на 3. Отсюда и из предыдущего немедленно вытекает, что

$$x=3x_1, \quad y=3y_1.$$

Теперь получим

$$6(9x_1^2+9y_1^2)=9(z_1^2+t_1^2)$$

и, сокращая на 9,

$$6(x_1^2+y_1^2)=z_1^2+t_1^2.$$

Последнее уравнение только индексами отличается от уравнения (4). Итак, построен процесс, который для каждого решения уравнения (4) дает еще одно решение с меньшими корнями: $x_1=x/3$, $y_1=y/3$, $z_1=z/3$, $t_1=t/3$. А это невозможно, поскольку последовательность, например $t_1>t_2>\ldots>0$, конечна.

Упражнение 2. Доказать, что уравнение

$$7(x^2+y^2)=z^2+t^2$$

не имеет решений в натуральных числах.

Упражнение 3. Можно ли методом решения примера 2 доказать неразрешимость в натуральных числах уравнения $5(x^2+y^2)=z^2+t^2$?

Пример 3. *Доказать, что уравнение*

$$x^2+y^2+z^2=2xyz \qquad (5)$$

неразрешимо в натуральных числах.

Пусть уравнение (5) разрешимо в натуральных числах. Правая часть уравнения (5) делится на 2, следовательно, и его левая часть делится на 2. Это возможно лишь тогда, когда либо x, y, z — четные числа, либо одно из них — четное, а два других — нечетные. В последнем случае правая часть уравнения (5) делится на 4, а левая — только на 2. Итак, числа x, y, z — четные:

$$x=2x_1, \quad y=2y_1, \quad z=2z_1. \qquad (6)$$

Подставляя найденные значения x, y, z в уравнение (5), получим

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=4x_1y_1z_1. \qquad (7)$$

Применив к уравнению (7) те же рассуждения, что и для уравнения (5), найдем, что

$$x_1=2x_2, \quad y_1=2y_2, \quad z_1=2z_2,$$
$$x_2^2+y_2^2+z_2^2=8x_2y_2z_2.$$

Соотношения $x_k=2x_{k+1}$ приводят к бесконечной последовательности

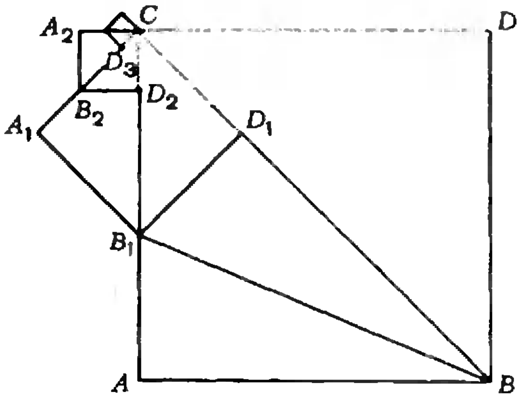
$$x>x_1>x_2>\ldots>x_k>x_{k+1}>\ldots>0.$$

Но эта последовательность натуральных чисел обязана быть конечной. Следовательно, уравнение (5) в натуральных числах неразрешимо.

Пример 4. *Доказать, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной.*

Отложим на диагонали квадрата от точки B его сторону $AB=BD_1$ (см. рисунок), это удастся сделать только один раз. Из полученной точки D_1 восставим к диагонали квадрата перпендикуляр, который пересечет сторону квадрата в точке B_1, и соединим B_1 с B; треугольники AB_1B и BB_1D_1 равны, так как они прямоугольные, сторона BB_1 — общая и $BD_1=BA$ по построению. Следовательно, $AB_1=D_1B_1$.

В прямоугольном треугольнике B_1CD_1 имеем $\angle B_1CD_1=45°$ (BC — диагональ квадрата), следовательно, и $\angle CB_1D_1=45°$, и потому $B_1D_1=D_1C$. Мы доказали, что $AB_1=B_1D_1=D_1C$, откуда $D_1C<CD$. Восставим теперь перпендикуляр к диагонали CB в точке C, отложим на



нем отрезок $CA_1 = D_1B_1$ и соединим точку A_1 с точкой B_1. Четырехугольник $A_1B_1D_1C$ — квадрат с диагональю B_1C.

Процесс построения квадратов можно продолжить. При этом мы получим бесконечную последовательность отрезков

$$CD_1 > CD_2 > CD_3 > CD_4 > \ldots > 0;$$

каждый из них есть разность между диагональю и стороной одного и того же квадрата; легко найти выражения для их длин:

$$CD_1 = CB - AB,\ CD_2 = CB_1 - A_1B_1,\ \ldots$$

Пусть теперь диагональ и сторона исходного квадрата соизмеримы, то есть существует такой отрезок e — единица длины, — который укладывается целое число раз и в диагонали BC, и в стороне AB квадрата, то есть длины отрезков BC и AB выражаются целыми числами. В таком случае и длина отрезка $CD_1 = CB - AB$ выражается целым числом, и длина диагонали B_1C квадрата $A_1CD_1B_1$, равная разности $AC - AB_1 = AB - CD_1$, — целое число.

Итак, мы построили бесконечную последовательность убывающих целых положительных чисел

$$CD > CD_1 > CD_2 > \ldots > CD_k > \ldots > 0$$

(здесь CD_i — это длина отрезка CD_i), хотя бесконечной она быть не может. Полученное противоречие доказывает несоизмеримость диагонали квадрата и его стороны.

Домино-пасьянс

28 косточек домино уложены в прямоугольник 7×8. Границы косточек не изображены. Требуется восстановить их.

3	2	6	5	1	2	0
2	1	5	4	5	4	5
0	0	1	3	6	4	6
0	5	5	3	4	4	0
5	3	0	0	2	5	6
4	0	3	2	6	6	6
2	4	6	4	1	3	3
2	2	1	1	1	1	3

а)

4	3	1	3	5	5	5
3	0	6	1	5	0	4
0	0	4	2	0	1	5
5	3	2	2	1	6	2
0	4	4	4	2	5	4
1	6	5	6	4	1	1
0	3	6	6	3	1	2
0	3	6	6	3	2	2

б)

Л. П. Мочалов

Признак делимости на 29

Пусть M — целое положительное число. Отбросим в числе M последнюю цифру и прибавим утроенную отброшенную цифру. Доказать, что полученное число делится на 29 тогда и только тогда, когда на 29 делится число M.

М. Левин, ученик 5 класса

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Чертеж в стереометрических задачах»

1. Ответ: $\frac{1}{3}(1+2\sqrt{2})^3\pi R^3$.

Указание. Нарисуйте сечение конуса плоскостью, проходящей через высоту конуса и центр одного из шаров, лежащих на основании.

2. Ответ:

$$\frac{1}{3}r\left(6+\sqrt{3}+\sqrt{27+12\sqrt{3}}\right).$$

Указание. Выразите через r сторону основания призмы и найдите радиус 4-го шара. Высота призмы есть сумма r, радиуса 4-го шара и высоты тетраэдра, вершинами которого являются центры шаров.

3. Ответ: $\frac{2}{5}r(8\sqrt{3}+\sqrt{37})$.

Указание. Нарисуйте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через высоту и центры обоих шаров.

4. Ответ: $1:\operatorname{tg}^2\alpha:1$.

Указание. Пусть A_1 и B_1 — вторые точки касания шаров с гранями угла, M и N — основания перпендикуляров, опущенных из точек касания на ребро. Все элементы призмы AA_1MBB_1N определяются из условий. Для получения ответа воспользуйтесь теоремой о произведении отрезков секущей к шару.

5. Ответ: $\frac{5\sqrt{2}}{96}a^3$.

Указание. Докажите, что точка O лежит на AC.

6. Ответ: $\frac{a}{6}$.

Указание. Рассмотрите сечение плоскостью, проходящей через центр шара, вершину одной из пирамид и перпендикулярной плоскости данного треугольника.

7. Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{6}$.

Указание. Если a — сторона основания пирамиды, R — радиус данного шара, φ—искомый угол, то $\operatorname{tg}\varphi=\frac{2R}{a}$. Задача сводится к определению R, если известно a, для чего следует рассмотреть сечение пирамиды плоскостью, перпендикулярной ее основанию и проходящей через центры данного и вписанного шаров.

8. Ответ: $r(\sqrt{2}-1)$.

Указание. Воспользуйтесь чертежом к задаче 5 (см. текст статьи). Решение аналогично решению задачи 5.

К статье «Метод бесконечного спуска»

1. Пусть $p=p_1^{r_1}p_2^{r_2}\ \ldots\ p_m^{r_m}$ — разложение p на степени различных простых сомножителей. Найдется такое p_i, что r_i не кратно n, обозначим именно его через p_1. Тогда из равенства

$$\sqrt[n]{p}=k/l,\ l^np=k^n,$$

следует, что k, а затем и l, делится на p_1.

2. Квадрат целого числа, не делящегося на 7, дает при делении на 7 остаток 1, 2 или 4, поэтому z^2+t^2 делится на 7, лишь если и z, и t делятся на 7.

3. Нет, нельзя, поскольку, например, $1^2+2^2=5$. Данное уравнение разрешимо в натуральных числах, например: $5(1^2+2^2)=3^2+4^2$.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант», 1974, № 9)

1. Одна.
2. Надо уравновесить тело гирей, объем которой равен объему тела.
3. 5.
4. Восход Солнца наблюдался бы в то же время.
5. 7 *ч.* 54 *мин.*

К задачам

(см. с. 57)

2. Воспользоваться равенствами $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$, $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=(x+y+z)^2-3(xy+xz+yz)$.

5. Воспользоваться методом математической индукции.

6. Автор приводит 4 решения: $x_1=y_1=z_1=0$; $x_2=y_2=2$, $z_2=5$; $x_3=1$, $y_3=5$, $z_3=0$; $x_4=3$, $y_4=7$, $z_4=5$.

7. Автор нашел 2 решения: $\overline{abcd}=1973$ и $\overline{abcd}=2473$.

К задачам

(см. «Квант», 1974, № 9, с. 57)

1. Воспользоваться сравнениями по модулю 3.
2. 1974.
3. $263\times263=69169$.
5. $17^3=4913$, $18^3=5832$, $26^3=17576$,— всего автор указывает 13 чисел, наибольшее из них 64^6.

К статье «Завод-втуз при Московском автомобильном заводе им. И.А. Лихачева»

Математика

Вариант 1

1. $\sqrt{\dfrac{8S\cos\beta}{\sin\alpha}}$. Указание. Обозначить сторону ромба через x и выразить через нее площадь сечения S.

2. $x_1=\pi+2k\pi$, $x_2=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+k\pi$. Указание. Преобразовать уравнение к виду $2\cos^2\dfrac{x}{2}(2\sin x-1)=0$.

3. $x=0$. Указание. Обозначить 5^x через y и привести уравнение к виду $2y^2-y-1=0$.

Вариант 2

1. $\dfrac{1}{3}\pi\cos\dfrac{\alpha}{2}\sin\alpha\, ab\,(a+b)$. Указание. Тело вращения представляет собой усеченный конус с двумя вырезанными конусами; рассмотреть осевое сечение этих конусов.

2. $z=\arccos\dfrac{2}{\sqrt{5}}+(-1)^k\arcsin\dfrac{2}{5\sqrt{5}}+k\pi$. Указание. Разделить обе части уравнения на $\sqrt{5}$, после этого слева получится $\sin(z-t)$, где $\cos t=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin t=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

3. $x=10$. Указание. Обозначить $\lg x$ через y и привести уравнение к виду $\lg(3y^2-2y)=0$; не забудьте проверить ответы.

Вариант 3

1. $\dfrac{\pi}{3}H^3\sin^4\alpha\cos^2\alpha$. Указание. Рассмотрев осевое сечение конусов, найти высоту и радиус основания вписанного конуса.

2. $t_1=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, $t_2=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+k\pi$. Указание. Привести уравнение к виду $2\sin^2 t-3\sin t+1=0$.

3. $x_1=0{,}01$; $x_2=0{,}1$; $x_3=10$; $x_4=100$. Указание. Представить x в виде $10^{\lg x}$ и привести уравнение к виду $\lg^4 x-5\lg^2 x+4=0$.

Физика

1. $\alpha=0{,}005$ *рад*.

Указание. В силу малости угла α считать $\operatorname{tg}\alpha=\alpha$.

2. $v=2{,}8$ *м/с*.

Указание. Шарик вращается вокруг новой оси по окружности радиуса $R=l-h$. Воспользоваться законом сохранения энергии.

3. $P=\dfrac{E^2R'}{(R'+r)^2}\approx\dfrac{E^2}{R'}$, где R' — сопротивление нагрузки, разное при различных способах соединения. При параллельном подключении количество выделившейся за единицу времени энергии в 4 раза больше.

4. $v=\sqrt{10}\cdot10^2$ *м/с*.

Корректор *Л. С. Сомова*

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Квант», тел. 234-08-11 Сдано в набор 16/VII 1974 г.
Подписано в печать 30/VIII 1974 г.
Бумага 70×100 1/16. Физ. печ. л. 4.
Усл. печ. л. 5,2 Уч.-изд. л. 5,60
Тир. 361 090 экз. Т-14591 Цена 30 коп. Заказ 1439

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

VIII Всесоюзная олимпиада школьников по физике

Цена 30 коп.
ИНДЕКС 70465

10

К нашим читателям

Продолжается подписка на 1975 год на научно-популярный физико-математический журнал «Квант».

«Квант» адресован всем школьникам 6—10 классов, которые любят математику и физику, любят решать задачи и хотят принимать участие в олимпиадах.

Наш журнал полезен и тем школьникам, которые еще «не зажглись» физикой или математикой, интерес которых к точным наукам еще дремлет.

Наш журнал полезен и учителям. Сейчас происходит коренная переработка школьных программ по математике и физике. «Квант» активно участвует в этой работе. Он систематически печатает статьи по новым программам, разъясняет материал, еще не вошедший в учебник.

Большое внимание «Квант» уделяет десятиклассникам. Мы постоянно публикуем статьи для поступающих в вузы с разбором задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах в ведущие вузы страны и варианты вступительных экзаменов.

«Квант» публикует заметки для младших школьников. В 1975 году этот раздел будет существенно расширен.

Расскажем о статьях, которые будут опубликованы «Квантом» в 1975 г.

В статье У. Рамсея «Как делаются открытия» на многих интересных примерах показан ход развития науки от первоначальных простых идей и гипотез до открытия важнейших закономерностей.

А. Г. Мордкович в цикле статей доступно и интересно рассказывает о производной — одном из основных понятий математического анализа.

Серия статей С. Г. Гиндикина посвящена теме, пограничной между математикой и механикой. Читатель узнает, как с помощью аппарата механики можно решать математические задачи.

В статье Г. В. Строцкого «Камера-обскура» будет рассказано о построении изображения в камере-обскуре и об условии получения наилучшего изображения.

Еще две статьи будут посвящены оптике. Это статья известного зарубежного ученого В. Вайскопфа «Как свет взаимодействует с веществом» и статья — о голографии

В статье Э. Г. Белаги «Узлы на столе математика» будет рассказано и что такое узел (разумеется, с точки зрения математика), и какие операции можно осуществлять над узлами.

В статье М. Б. Балка и Н. А. Григорьева будет рассказано о необычных — барицентрических координатах, оказывающихся весьма полезными при решении многих практических задач.

В статье И. Ф. Шарыгина в популярной форме рассказывается о мире геометрии с числом измерений, большем трех.

В серии статей В. Нильме рассказывается о том, какие задачи разрешимы «циркулем и линейкой» и приводятся задачи, которые с помощью этих инструментов не решаются.

Так, в статье О. Н. Карпухина «Физика химического взаимодействия» рассказывается о сложном процессе химического взаимодействия.

А. Хацет расскажет о моделировании с помощью электрических цепей так называемых «транспортных задач».

В 1975 году в разделе «Практикум абитуриента» будет опубликован ряд статей по математике и физике, помогающие школьникам готовиться в институт и приведены варианты вступительных экзаменов в вузы.

Вот уже пятый год раздел журнала «Задачник «Кванта» учит школьников решать трудные задачи по математике и физике. В конкурсе «Задачника «Кванта» участвуют школьники из городов, из деревень и сел. Победители конкурса получают право участия в областных олимпиадах.

Журнал постоянно помещает рецензии на книги — уже вышедшие и еще только готовящиеся к изданию.

Новости о работе физико-математических школ, о физико-математических соревнованиях школьников, о проведении олимпиад и о работе вузов со школьниками читатели смогут прочесть в разделе «Информация».

Журнал «Квант» выходит ежемесячно. Он распространяется только по подписке. Подписная цена на год 3 руб. 60 коп.

Подписка не ограничена. Наш индекс 70465.