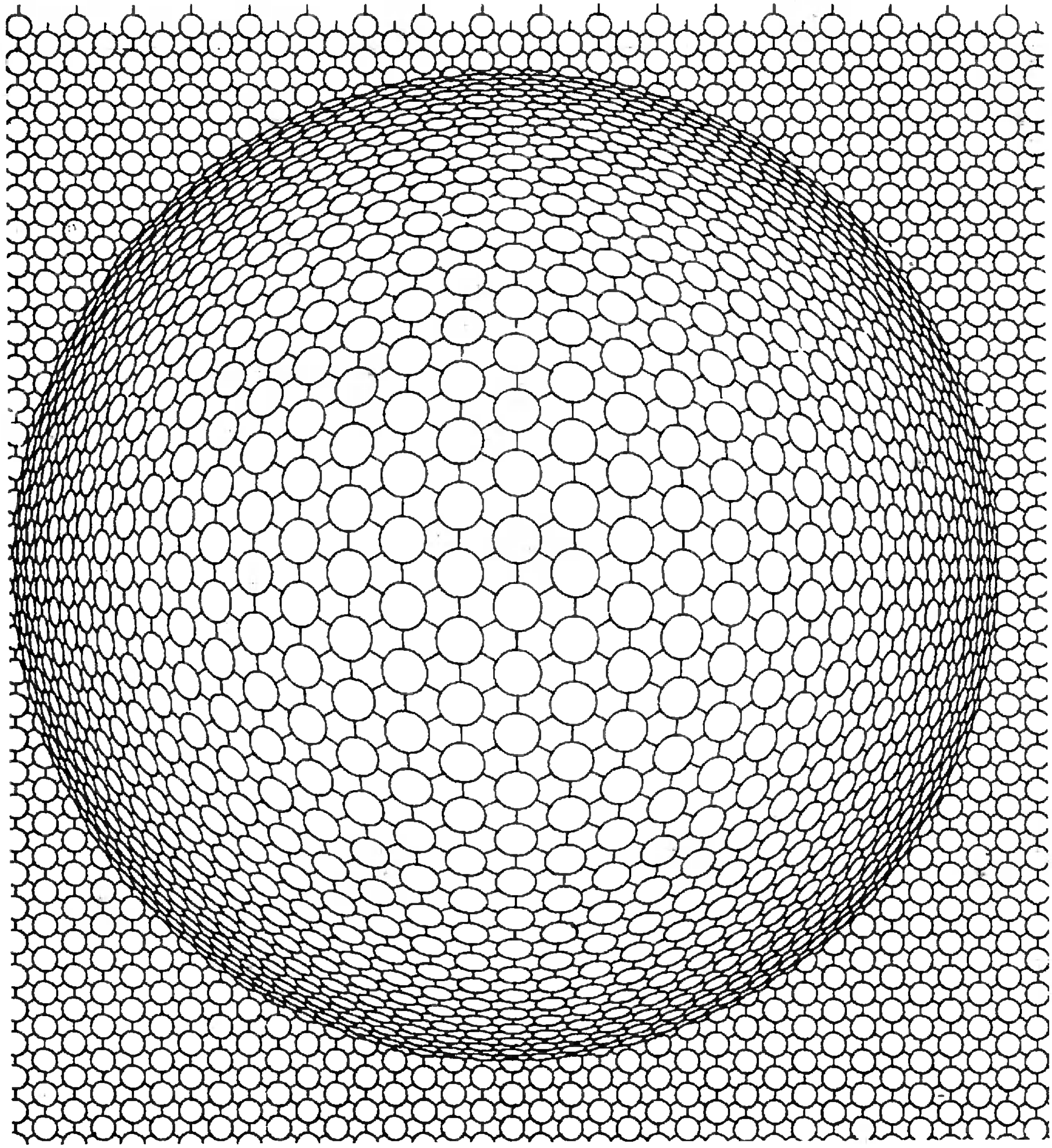
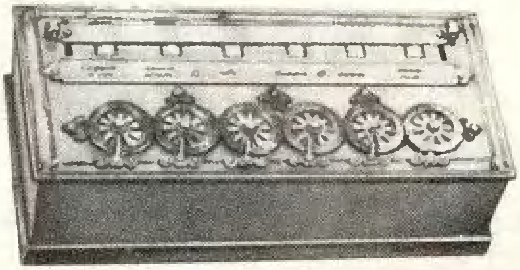
Квант

1976

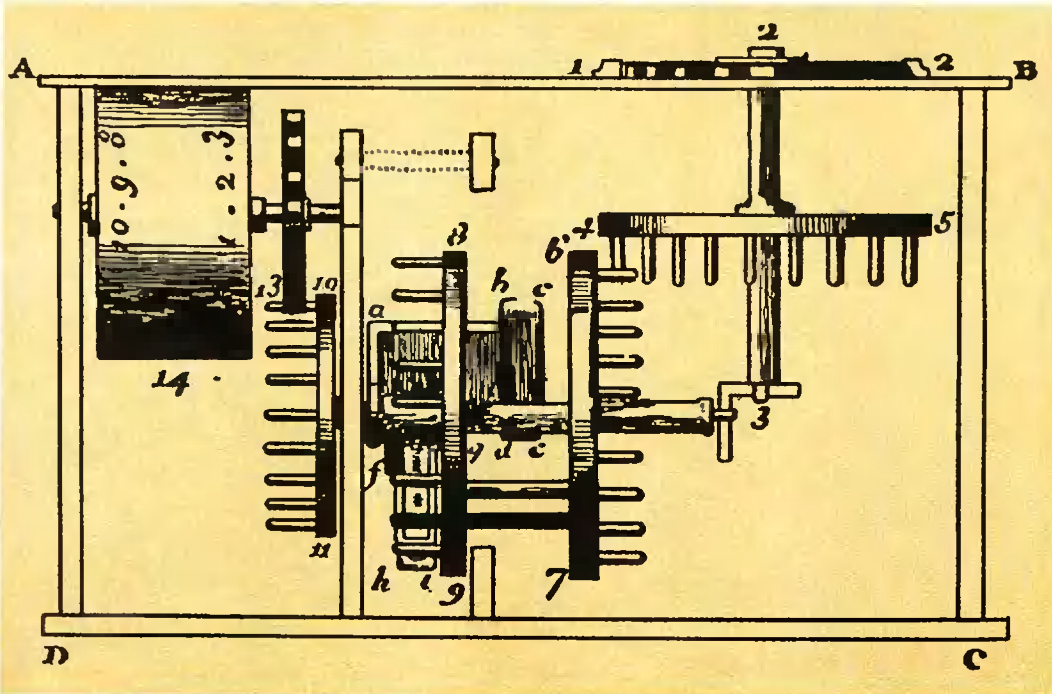
7

Научно-популярный
физико-математический
журнал





На этой странице изображены общий вид и схема суммирующей машины, сконструированной и изготовленной одним из самых знаменитых людей в истории человечества — Блезом Паскалем (1623—1662). Его портрет помещен слева. О Паскале, о его жизни, многочисленных научных достижениях, открытиях, идеях и изобретениях уже рассказывалось в «Кванте» (1973, № 8, с. 4). Там же рассказывалось и о построенной им машине (с. 10—11). Современники Паскаля называли ее «паскалевым колесом». О вычислительных машинах, об истории их изобретения, об устройстве (логическом и физическом) современных вычислительных машин и об их применениях подробно рассказано в интересной книге Р. С. Гутера и Ю. Л. Полунова «Математические машины», выпущенной издательством «Просвещение» в 1975 году. Советуем вам ее прочесть. С рецензией на эту книгу вы можете познакомиться на с. 50 этого номера журнала.



Основан в 1970 году

Квант

1976
7

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство „Наука" Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

Б. Алейников
П. Бузыцкий,
М. Дубсон

СИМПЛЕКС-МЕТОД

Что такое линейное программирование?

Каждый человек ежедневно, не всегда осознавая это, решает проблему: как получить наибольший эффект, обладая ограниченными средствами?

Как потратить деньги, сэкономленные на школьных завтраках, чтобы получить наибольшее удовольствие: купить ли 2 билета в кино, порцию мороженого и пластинку или купить 2 пластинки, но обойтись без кино и мороженого? Как употребить вечерние часы: тщательно выполнить домашнее задание, немного посмотреть телевизор и дочитать интересную книгу или рискнуть сделать уроки наскоро, но зато посмотреть по телевизору кинофильм и хоккейный матч и самому поиграть в хоккей во дворе?

Наши средства и ресурсы всегда ограничены. Жизнь была бы менее интересной, если бы это было не так. Нетрудно выиграть сражение, имея армию в 10 раз большую, чем у противника; Ганнибалу, чтобы разбить римлян при Каннах, командуя вдвое меньшей армией, нужно было действовать очень обдуманно.

Чтобы достичь наибольшего эффекта, имея ограниченные средства, надо составить план, или программу, действий. Раньше план в таких случаях составлялся «на глазок» (теперь, впрочем, зачастую тоже). В середине XX века был создан специальный математический аппарат, помогающий делать это «по науке». Соответствующий раздел математики называется *математическим программированием*. Слово «программирование» здесь и в аналогичных терминах («линейное программирование», «динамическое программирование» и т. п.) обязано отчасти историческому недоразумению, отчасти неточному переводу с английского. По-русски лучше было бы вместо него употребить слово «планирование». С программированием для ЭВМ математическое программирование имеет лишь то общее, что большинство возникающих на практике задач математического программирования слишком громоздки для ручного счета: решить их можно лишь при помощи ЭВМ, предварительно составив программу.

Чтобы сравнивать между собой по эффективности различные решения, различные программы действий, прежде всего надо ввести какой-то количественный критерий. Такой количественный критерий называется *целевой функцией* (или *показателем эффективности*). В задачах математического программирования обычно разыскивается экстремум (максимум или минимум) целевой функции при некоторых ограничениях на значения ее аргументов (это и есть математический аналог того, что мы выше называли «наибольшим эффектом при ограниченных средствах»).

Раздел математического программирования, в котором целевая функция L является линейной функцией от искомых величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,$$

а ограничения, наложенные на них, имеют вид линейных уравнений:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

или линейных неравенств:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \vee b$$

($\vee$ — любой из знаков $\leqslant$, $\geqslant$), называется *линейным программированием*.

Временем рождения линейного программирования принято считать 1939 год, когда была напечатана брошюра Леонида Витальевича Канторовича «Математические методы организации и планирования производства». Поскольку методы, предложенные Л. В. Канторовичем, были малопригодны для ручного счета, а быстродействующих вычислительных машин в то время не существовало, работа Л. В. Канторовича осталась почти не замеченной. Свое второе рождение линейное программирование пережило в начале пятидесятых годов с появлением ЭВМ. Тогда началось всеобщее увлечение линейным программированием, вызвавшее в свою очередь развитие других разделов математического программирования. В 1975 году академик Л. В. Канторович и американец профессор Т. Купманс получили Нобелевскую премию по экономическим наукам за «вклад в разработку теории оптимального использования ресурсов в экономике».

Каноническая форма задачи

Каждую задачу линейного программирования можно свести к следующей стандартной форме: найти неотрицательные значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые удовлетворяли бы системе уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

и обращали в минимум функцию L:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n. \quad (2)$$

Так сформулированную задачу специалисты называют *общей задачей линейного программирования в канонической форме* (ОЗЛП).

Покажем на примере, как ограничения-неравенства превращаются в уравнения. Пусть требуется найти неотрицательные значения переменных x_1, x_2, x_3, которые удовлетворяли бы системе неравенств

$$\begin{cases} \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 \leqslant a, \\ \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3 \geqslant b. \end{cases} \quad (3)$$

Прежде всего перейдем от системы (3) к равносильной системе

$$\begin{cases} -\alpha_1x_1 - \alpha_2x_2 - \alpha_3x_3 + a \geqslant 0, \\ \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3 - b \geqslant 0. \end{cases} \quad (4)$$

Обозначим $-\alpha_1x_1 - \alpha_2x_2 - \alpha_3x_3 + a$ через x_4. Тогда $x_4 \geqslant 0$ и $-\alpha_1x_1 - \alpha_2x_2 - \alpha_3x_3 + a = x_4$. Аналогично расправимся со вторым неравенством системы (4). Таким образом, добавив новые («дополнительные») переменные x_4, x_5, мы свели первоначальную задачу к виду: найти неотрицательные значения переменных x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, которые удовлетворяли бы системе уравнений

$$\begin{cases} -\alpha_1x_1 - \alpha_2x_2 - \alpha_3x_3 - x_4 = -a, \\ \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3 - x_5 = b. \end{cases}$$

Задача отыскания максимума линейной функции L:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = = d_1x_1 + d_2x_2 + \ldots + d_nx_n,$$

эквивалентна задаче отыскания минимума линейной функции L':

$$L'(x_1, x_2, \ldots, x_n) = = -d_1x_1 - d_2x_2 - \ldots - d_nx_n.$$

Решение $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ системы (1) назовем *допустимым решением* ОЗЛП, если числа $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ неотрицательны. *Оптимальным* будем называть то из допустимых решений, которое обращает целевую функцию (2) в минимум.

Конкретная ОЗЛП может и не иметь решения: система (1) может быть несовместной, т. е. вообще не иметь решений; она может быть совместной, но не иметь допустимых решений; наконец, она может даже иметь допустимые решения, но среди них может не быть оптимального: функция (2) может быть не ограничена снизу на множестве допустимых решений. Однако все эти опасности подстерегают нас только в специально придуманных задачах; в естественно возникающих практических задачах решение, как правило, существует.

Предположим, что система (1) совместна и ее уравнения *линейно независимы*, т. е. никакое из них не может быть выведено из других. Можно доказать, что тогда $m \leqslant n$.

Рассмотрим вначале случай, когда число уравнений m равно числу переменных n. В линейной алгебре доказывается, что в этом случае система (1) имеет единственное решение. Если это решение допустимое, оно автоматически будет оптимальным.

Интерес представляет случай, когда $m < n$ (на практике это соответствует возможности выбора различных планов действия). Обозначим $n - m$ через k. В линейной алгебре доказывается, что можно какие-то m переменных (они называются *базисными*) выразить через остальные k переменных (их называют *свободными*). Система (1) имеет в рассматриваемом случае бесконечное множество решений: придавая свободным переменным п р о и з в о л ь н ы е значения и вычисляя соответствующие значения базисных переменных, мы будем каждый раз получать новое решение системы (1). Некоторое решение системы (1) называется *опорным*, если значения по крайней мере k переменных равны нулю. В теории линейного программирования доказывается, что оптимальное решение является опорным.

Из этой последней теоремы вытекает следующий план решения ОЗЛП: как-нибудь выбираем k свободных переменных; разрешаем систему относительно m оставшихся базисных переменных; полагая свободные переменные равными нулю, находим опорное решение; вычисляем соответствующее значение целевой функции. Перебрав все возможности выбора свободных переменных, увидим, на каком из опорных решений целевая функция примет наименьшее значение, — это и будет искомое оптимальное решение.

Для простых задач, в которых число переменных n невелико, такой метод решения — «слепым» перебором — в принципе годится. Однако в задачах, возникающих на практике, число переменных и число наложенных ограничений m обычно очень велики — порядка сотен и даже тысяч. Для таких задач простой перебор практически невозможен: число возможных способов выбора свободных переменных становится огромным! Поэтому в теории линейного программирования были разработаны различные методы, позволяющие находить оптимальное решение не «слепым» перебором, а так, чтобы каждый следующий выбор свободных переменных приближал нас к решению.

Старейшим и наиболее известным из них является *симплекс-метод*, созданный в конце сороковых годов американским математиком Дж. Данцигом.

Симплекс-метод

Пусть, например, в качестве свободных переменных выбраны первые k переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$, а остальные m переменных выражены через них:

$$\begin{cases} x_{k+1}=\alpha_{k+1,1}x_1+\alpha_{k+1,2}x_2+ \\ \quad+\ldots+\alpha_{k+1,k}x_k+\beta_{k+1}, \\ x_{k+2}=\alpha_{k+2,1}x_1+\alpha_{k+2,2}x_2+ \\ \quad+\ldots+\alpha_{k+2,k}x_k+\beta_{k+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n=\alpha_{n,1}x_1+\alpha_{n,2}x_2+ \\ \qquad+\ldots+\alpha_{n,k}x_k+\beta_n. \end{cases} \quad (5)$$

Положив все свободные переменные равными нулю, получим следующее решение системы (1):

$$x_1^0=x_2^0=\ldots=x_k^0=0,$$
$$x_{k+1}^0=\beta_{k+1},\ x_{k+2}^0=\beta_{k+2},\ \ldots$$
$$\ldots,\ x_n^0=\beta_n. \quad (6)$$

Если все свободные члены β_{k+1}, $\beta_{k+2}, \ldots, \beta_n$ неотрицательны, решение (6) является допустимым.

Чтобы проверить, является ли оно оптимальным, выразим целевую функцию L через свободные переменные $x_1, x_2, \ldots, x_k$, подставив выражения для $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ из (5) в (2):

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n)= \\ =d_0+d_1x_1+d_2x_2+\ldots+d_kx_k. \quad (7)$$

Из (6) вытекает, что $L(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)=d_0$. Посмотрим, не можем ли мы уменьшить значение целевой функции L, увеличивая значения свободных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$ (уменьшать мы их не можем, так как в решении (6) они равны нулю, а мы ищем допустимое решение).

Если все коэффициенты d_1, d_2, $\ldots, d_k$ в равенстве (7) неотрицательны, то, увеличивая значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$, мы не можем уменьшить значение функции L. В этом случае найденное нами решение является оптимальным.

Если же среди коэффициентов $d_1, d_2, \ldots, d_k$ в равенстве (7) есть отрицательные, то, увеличивая значения соответствующих свободных переменных, мы будем уменьшать значение функции L, т. е. будем улучшать решение. В этом случае найденное нами решение не является оптимальным.

Пусть, например, в равенстве (7) отрицателен коэффициент d_1. Если в системе (5) все коэффициенты при x_1 неотрицательны, то любое увеличение значения переменной x_1 оставит значения переменных $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ неотрицательными и мы не выйдем из области допустимых решений. Значение же функции L будет при этом неограниченно уменьшаться. Таким образом, в этом случае целевая функция L не ограничена снизу на множестве допустимых решений и оптимального решения ОЗЛП не существует.

Допустим, наконец, что среди уравнений системы (5) есть такие, в которых коэффициент при x_1 отрицателен. Для переменных, стоящих в левых частях этих уравнений, увеличение значения переменной x_1 опасно: оно может сделать их отрицательными.

Если, например, $\alpha_{k+1,1}<0$, то, очевидно, значение переменной x_1 можно увеличивать только до $-\frac{\beta_{k+1}}{\alpha_{k+1,1}}$. (При $x_1^0=-\frac{\beta_{k+1}}{\alpha_{k+1,1}}$, $x_2^0=\ldots=x_k^0=0$ получим $x_{k+1}^0=0$.) Среди переменных, для которых увеличение значения переменной x_1 опасно, выберем ту, которая раньше всех обратится в нуль, т. е. ту, для которой величина $-\frac{\beta_l}{\alpha_{l,1}}$ меньше всего. Пусть такая «наиболее угрожаемая» переменная будет x_r.

Выведем теперь из числа свободных переменных x_1 и переведем вместо нее в группу свободных переменных x_r, т. е. разрешим систему (1) относительно базисных переменных

$$x_1, x_{k+1}, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_n.$$

Дальше все повторяется: положив все свободные переменные $x_2, \ldots, x_k$, x_r равными нулю, найдем соответствующее решение; выразим целевую функцию L через новые свободные переменные; если все коэффициенты при переменных в полученном выражении для L неотрицательны, найденное решение — оптимальное; в противном случае процесс выбора базисных переменных и улучшения решения продолжается.

Описанный алгоритм и называется *симплекс-методом*. (Обратили ли Вы, читатель, внимание, что в нашем изложении алгоритма оставлена одна «дырка»: одна возможность не рассмотрена?)

Два примера

Рассмотрим сначала обычную школьную задачу.

Задача 1. *Три школьника хотят добраться до лесного озера, расположенного в 20 км от дома. У них есть один двухместный мопед, на котором можно ехать со скоростью 36 км/час. Пешком каждый школьник может идти со скоростью 4 км/час. Как организовать движение, чтобы всем троим быстрее добраться до озера? Каково наименьшее время, за которое это можно сделать?*

Очевидно, что многократная смена пассажиров на мопеде не сможет дать никакой выгоды во времени по сравнению с однократной. Поэтому составим такой план организации движения: в начальный момент времени из дома $Д$ одновременно выезжают на мопеде два школьника и выходит пешком третий школьник. В промежуточной точке T водитель мопеда высаживает своего спутника, который до озера O идет дальше пешком; мопед же возвращается за третьим школьником, встречает его в точке K и отвозит к озеру (на рисунке 1 красным цветом обозначено движение мопеда, синим — движение пешеходов). Наш план организации движения становится конкретным при фиксировании расстояния $|ДT| = x$. Нам надо найти x, при котором время t прибытия в точку O последнего из школьников будет минимальным.

Обозначим через t_1 время, затраченное на «переход» из $Д$ в O «высаженным» школьником, через t_2 —

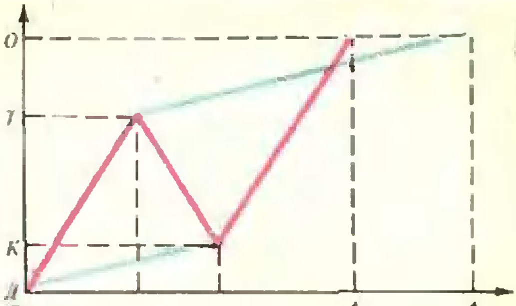


Рис. 1.

время, затраченное водителем мопеда. Очевидно, $t_1 = \frac{x}{36} + \frac{20-x}{4}$.

Положим $|KT| = y$. Тогда $\frac{x-y}{4} = \frac{x+y}{36}$, откуда $y = \frac{4}{5}x$. Очевидно, $t_2 = \frac{20+2y}{36}$. Значит, $t_2 = \frac{5}{9} + \frac{2}{45}x$.

По смыслу наших обозначений

$$t = \max(t_1, t_2).$$

Таким образом, $t \geqslant t_1$ и $t \geqslant t_2$. Если «высаженный» школьник прибыл в O раньше, чем мопед, то $t_1 < t_2$ и $t = t_2$. В противном случае $t_1 \geqslant t_2$ и $t = t_1$. Отметим еще, что $t \geqslant 0$.

Нам надо найти такое x, при котором функция $t = \max(t_1, t_2)$ принимает наименьшее значение. Кроме того, нам надо найти значение функции $\max(t_1, t_2)$ при этом x, т. е. число $\min(\max(t_1, t_2))$. Из рисунка 2 (на нем красным цветом нарисован график функции $t_1(x)$, черным — функции $t_2(x)$, синим — функции $\max(t_1, t_2)$) сразу видно, что искомое x определяется из уравнения $t_1 = t_2$.

Тем не менее, чтобы проиллюстрировать общий метод, поставим и решим данную задачу как задачу линейного программирования. Переформулируем ее так: найти наименьшее t, для которого одновременно $t \geqslant t_1$ и $t \geqslant t_2$. Итак, нам надо найти неотрицательные значения переменных x и t, которые удовлетворяли бы системе неравенств

$$\begin{cases} t \geqslant \frac{x}{36} + \frac{20-x}{4}, \\ t \geqslant \frac{5}{9} + \frac{2}{45}x \end{cases} \qquad (8)$$

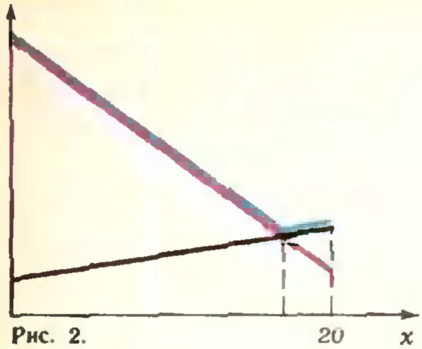


Рис. 2.

и обращали в минимум функцию L:

$$L(x, t) = 0 \cdot x + 1 \cdot t = t. \qquad (9)$$

Мы получили задачу линейного программирования. Сведем ее к ОЗЛП.

Система (8) равносильна системе

$$\begin{cases} 2x + 9t - 45 \geqslant 0, \\ -2x + 45t - 25 \geqslant 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Обозначим $2x + 9t - 45$ через y_1, $-2x + 45t - 25$ через y_2. Тогда $2x + 9t - 45 = y_1$, $-2x + 45t - 25 = y_2$ и $y_1 \geqslant 0$, $y_2 \geqslant 0$. Нашу задачу мы можем теперь сформулировать так: найти неотрицательные значения переменных x, t, y_1, y_2, которые удовлетворяли бы системе уравнений

$$\begin{cases} 2x + 9t - y_1 = 45, \\ -2x + 45t - y_2 = 25 \end{cases} \qquad (11)$$

и обращали в минимум целевую функцию $L(x, t, y_1, y_2) = t$. А это уже ОЗЛП. Решим ее симплекс-методом.

Выберем в качестве базисных переменных y_1 и y_2 (систему (11) легче всего решить относительно них) и выразим их через свободные переменные x, t:

$$\begin{cases} y_1 = 2x + 9t - 45, \\ y_2 = -2x + 45t - 25. \end{cases} \qquad (12)$$

Полагая свободные переменные равными нулю, получим решение систем (12) и (11):

$$x^{(1)} = t^{(1)} = 0, \quad y_1^{(1)} = -45, \quad y_2^{(1)} = -25.$$

Это решение не является допустимым.

Выберем теперь в качестве базисных переменных две другие переменные, например t и y_2. (В теории линейного программирования существует метод, указывающий, каким образом выбирать новые свободные переменные так, чтобы приближаться к области допустимых решений. Здесь мы этот метод не излагаем.) Разрешим систему (11) относительно них:

$$\begin{cases} t = -\frac{2}{9}x + \frac{1}{9}y_1 + 5, \\ y_2 = -12x + 5y_1 + 200. \end{cases} \qquad (13)$$

Полагая свободные переменные равными нулю, получим решение систем (13) и (11):

$$x^{(2)} = y_1^{(2)} = 0, \quad t^{(2)} = 5, \quad y_2^{(2)} = 200. \qquad (14)$$

Решение (14) уже является допустимым. Чтобы проверить, является ли оно оптимальным, выразим целевую функцию L через свободные переменные x и y_1. Из (9) и (13)

$$L(x, t, y_1, y_2) = -\frac{2}{9}x + \frac{1}{9}y_1 + 5. \qquad (15)$$

Значение целевой функции L на решении (14) равно 5.

Поскольку коэффициент при x в (15) отрицателен, решение (14) не является оптимальным: увеличивая значение переменной x, мы будем уменьшать значение целевой функции L.

В обоих уравнениях системы (13) коэффициенты при x отрицательны. Поэтому увеличение значения переменной x опасно как для t, так и для y_2: это увеличение может сделать их отрицательными. Из первого уравнения системы (13) следует, что значение переменной x можно увеличивать до $-5 \Big/ \left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{45}{2} = 22\frac{1}{2}$ (при таком значении x и при $y_1 = 0$ получим $t = 0$; при дальнейшем увеличении x значение переменной t станет отрицательным); из второго — до $-\frac{200}{-12} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$. Таким образом, при увеличении значения переменной x раньше обратится в нуль переменная y_2: она находится в «более угрожаемом» положении, чем t.

Выведем теперь из числа свободных переменных x и переведем вместо нее в группу свободных переменных y_2, т. е. разрешим систему (11) относительно базисных переменных x и t:

$$\begin{cases} x = \frac{5}{12} y_1 - \frac{1}{12} y_2 + \frac{50}{3}, \\ t = \frac{1}{54} y_1 + \frac{1}{54} y_2 + \frac{35}{27}. \end{cases} \quad (16)$$

Полагая свободные переменные равными нулю, получим решение систем (16) и (11):

$$y_1^{(3)} = y_2^{(3)} = 0, \quad x^{(3)} = \frac{50}{3},$$
$$t^{(3)} = \frac{35}{27}. \quad (17)$$

Выразим целевую функцию L через y_1 и y_2. Из (9) и (16)

$$L(x, t, y_1, y_2) = \frac{1}{54} y_1 + \frac{1}{54} y_2 + \frac{35}{27}. \quad (18)$$

Значение целевой функции L на решении (17) равно $\frac{35}{27}$.

Поскольку все коэффициенты при переменных в (18) неотрицательны, решение (17) является оптимальным. Итак, задача решена: мопеду надо ссадить пассажира на расстоянии $x^{(3)} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$ (*км*); наименьшее время, за которое можно добраться до озера, равно $t^{(3)} = \frac{35}{27} = 1\frac{8}{27}$ (*час*).

Приведем теперь типичную практическую задачу, естественно ставящуюся как задача линейного программирования. Это так называемая «задача о диете», или «задача о пищевом рационе».

З а д а ч а 2. *Директору столовой нужно составить меню. В его распоряжении имеется 5 видов продуктов: хлеб, овощи, фрукты, мясо, рыба.*

			1	2	3
			Белки	Жиры	Углеводы
1	c_1	Хлеб	a_{11}	a_{12}	a_{13}
2	c_2	Овощи	a_{21}	a_{22}	a_{23}
3	c_3	Фрукты	a_{31}	a_{32}	a_{33}
4	c_4	Мясо	a_{41}	a_{42}	a_{43}
5	c_5	Рыба	a_{51}	a_{52}	a_{53}
			b_1	b_2	b_3

Рис. 3.

Известно, что килограмм хлеба стоит c_1 рублей, килограмм овощей — c_2 рублей и т. д. Известно также, что килограмм хлеба содержит a_{11} кг белков, a_{12} кг жиров и a_{13} кг углеводов и т. д. (содержание белков, жиров и углеводов в килограмме каждого вида продуктов указано в таблице на рисунке 3). *Требуется так составить меню, чтобы в нем содержалось не менее b_1 кг белков, не менее b_2 кг жиров и не менее b_3 кг углеводов, причем стоимость его была минимальной.*

Обозначим через x_1 количество хлеба, которое войдет в меню, через x_2 — количество овощей и т. д. Общая стоимость меню L, очевидно, выразится равенством

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum_{i=1}^{5} c_i x_i. \quad (19)$$

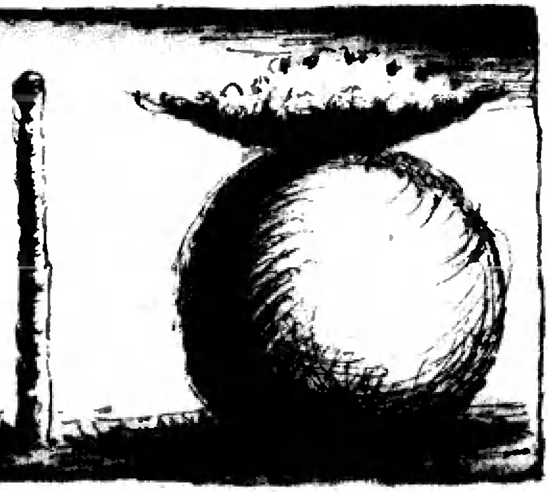
Ограничения на питательность меню выражаются системой неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + a_{41}x_4 + \\ \qquad + a_{51}x_5 \geqslant b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + a_{42}x_4 + \\ \qquad + a_{52}x_5 \geqslant b_2, \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{43}x_4 + \\ \qquad + a_{53}x_5 \geqslant b_3. \end{cases} \quad (20)$$

Наша задача приняла вид: найти неотрицательные значения переменных x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, которые удовлетворяли бы системе неравенств (20) и обращали в минимум функцию L из (19). Это — задача линейного программирования.

Э. Казарян,
Р. Саакян

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ЭЛЕКТРОСТАТИКЕ



Изучая постоянные (не изменяющиеся со временем) электрические поля, создаваемые заряженными проводниками, прежде всего следует иметь в виду, что напряженность электростатического поля внутри проводников равна нулю. Отсюда непосредственно следует, что заряды в проводниках распределяются по их поверхности. Таким образом, задачи электростатики обычно сводятся к нахождению электрического поля вне проводников и к определению распределения зарядов на поверхности проводников.

Сформулируем несколько типичных электростатических задач.

З а д а ч а 1. *Точечный заряд q находится на расстоянии d от поверхности заземленного сферического проводника радиуса r (рис. 1). Определить заряд q', индуцированный на этой поверхности.*

З а д а ч а 2. *Между двумя заземленными концентрическими сферическими поверхностями, радиусы которых r_1 и r_2, помещен точечный заряд q (рис. 2). Расстояния от заряда до сферических поверхностей равны соответственно d_1 и d_2. Найти индуцированные на сферах заряды q'_1 и q'_2.*

З а д а ч а 3. *Точечный заряд q находится на расстояниях d_1 и d_2 от проводящих заземленных бесконечных плоскостей (рис. 3). Найти заряды q'_1 и q'_2, наведенные на этих плоскостях.*

Общие методы решения подобных задач изучаются в соответствующем разделе математической физики, не входящей в школьную программу. Однако существует ряд сравнительно простых частных методов, которые позволяют решать задачи по электростатике, не выходя за пределы элементарной математики (например, метод изображений, о котором упоминалось в статье Г. Мякишева «Электростатическое поле»; см. «Квант», 1975, № 4). Здесь мы рассмотрим один из

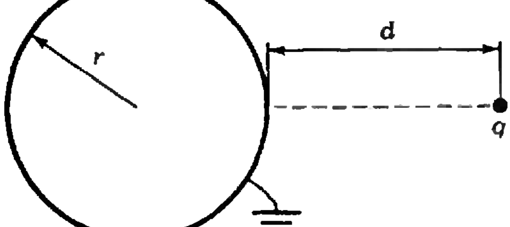


Рис. 1.

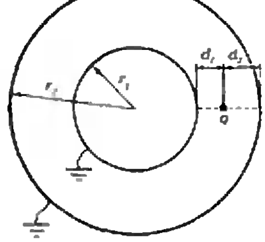


Рис. 2.

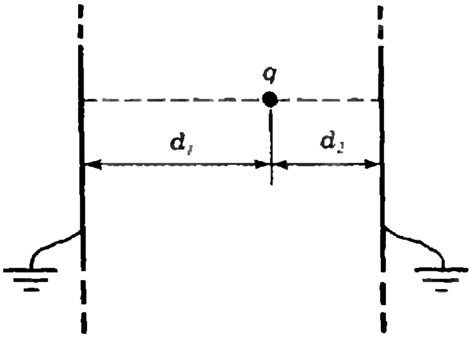


Рис. 3.

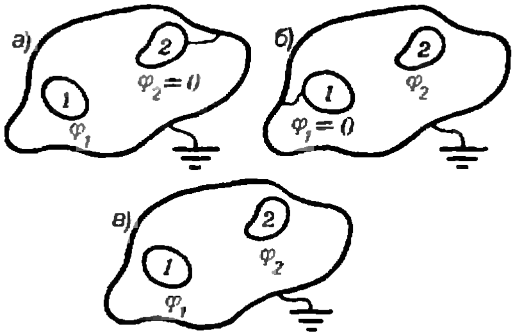


Рис. 4.

таких методов, основанный на теореме (или принципе) взаимности.

В чем заключается сущность этой теоремы? Ее можно сформулировать так: *если в системе из n проводников проводники, несущие заряды $q_1, q_2, \ldots, q_n$, имеют потенциалы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ соответственно, а при зарядах $q_1', q_2', \ldots, q_n'$ потенциалы проводников равны $\varphi_1', \varphi_2', \ldots, \varphi_n'$, то справедливо равенство*

$$\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i' = \sum_{i=1}^{n} q_i'\varphi_i. \qquad (1)$$

Покажем, что это действительно так.

Согласно принципу суперпозиции потенциалы проводников находятся в линейной зависимости от зарядов. Или, наоборот, заряды на проводниках линейно зависят от потенциалов. Рассмотрим сначала частный случай — внутри заземленной проводящей поверхности находятся два заряженных проводника *1* и *2* (рис. 4). Соединим второй проводник с заземленной поверхностью, тогда потенциал этого проводника обратится в нуль (см. рис. 4, *а*). Потенциал первого проводника обозначим через φ_1. Заряды на каждом из проводников должны быть пропорциональны φ_1, т. е.

$$\Delta q_1 = C_{11}\varphi_1 \text{ и } \Delta q_2 = C_{21}\varphi_1. \qquad (2)$$

Здесь Δq_1 и Δq_2 — заряды на первом и втором проводниках соответственно, а C_{11} и C_{21} — постоянные величины, называемые коэффициентами емкости и зависящие от формы и взаимного расположения проводников. C_{11} и C_{21} характеризуют заряды первого и второго проводников в случае, когда потенциал первого проводника равен единице, а второй проводник заземлен.

Теперь заземлим первый проводник, а потенциал второго проводника обозначим через φ_2 (см. рис. 4, *б*). Тогда

$$\Delta q_1' = C_{12}\varphi_2 \text{ и } \Delta q_2' = C_{22}\varphi_2, \qquad (3)$$

где $\Delta q_1'$ и $\Delta q_2'$ — новые заряды на проводниках, а C_{12} и C_{22} — соответствующие коэффициенты емкости. C_{12} и C_{22} показывают, каковы заряды первого и второго проводников, если потенциал второго проводника равен единице, а первый проводник заземлен.

Очевидно, что если ни один из проводников не заземлен и их потенциалы равны φ_1 и φ_2 (см. рис. 4, *в*), то заряды q_1 и q_2 на проводниках равны соответственно

$$q_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2,$$
$$q_2 = C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2.$$

Эти соотношения получены путем сложения выражений (2) и (3).

Аналогичные рассуждения можно провести и для общего случая, когда система состоит из n проводников. Для заряда q_i i-го проводника получим

$$q_i = C_{i1}\varphi_1 + C_{i2}\varphi_2 + \ldots + C_{in}\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} C_{ik}\varphi_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (4)$$

Здесь коэффициент емкости C_{ik} характеризует заряд i-го проводника, когда все проводники, кроме k-го, за-

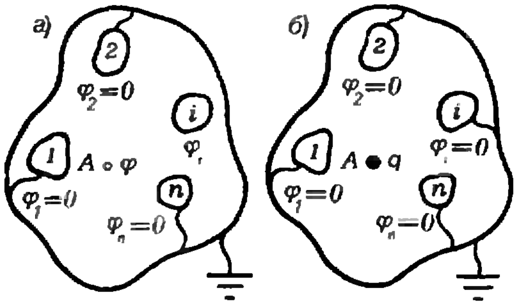


Рис. 5.

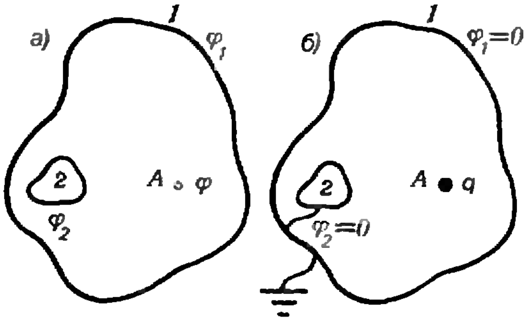


Рис. 6.

землены, а потенциал k-го проводника равен единице. Пусть теперь заряд i-го проводника равен q_i', а его потенциал φ_i'. Умножим равенство (4) почленно на φ_i':

$$q_i\varphi_i' = \sum_{k=1}^{n} C_{ik}\varphi_k\varphi_i' ,$$

а затем просуммируем обе части полученного равенства по всем значениям i от 1 до n:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i' = \sum_{i,\,k=1}^{n} C_{ik}\varphi_k\varphi_i' .$$

Но

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} C_{ik}\varphi_k\varphi_i' = \sum_{i,\,k=1}^{n} C_{ik}\varphi_i'\varphi_k = \sum_{i=1}^{n} q_i'\varphi_i$$

(так как и i, и k принимают все значения от 1 до n), поэтому окончательно получаем

$$\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i' = \sum_{i=1}^{n} q_i'\varphi_i. \qquad (5)$$

Таким образом, теорема взаимности доказана, поскольку равенства (1) и (5) идентичны.

Прежде чем применить теорему взаимности для решения сформулированных выше задач, рассмотрим две дополнительные задачи.

Дополнительная задача 1. *Имеется система проводников, которые все, кроме i-го, заземлены, а i-й проводник имеет потенциал φ_i (рис. 5). В некоторой точке A системы потенциал равен φ. Определить заряд q_i', индуцируемый на i-м проводнике, если все проводники заземлить, а в точку A поместить заряд q.*

Представим себе, что в точке A находится проводник, причем его линейные размеры малы по сравнению с расстояниями до других проводников (тогда его присутствие не изменит распределения зарядов и потенциалов в системе). Будем называть его проводником A. Рассмотрим два состояния системы:

а) заряд проводника A равен нулю, его потенциал φ, потенциал i-го проводника φ_i, а потенциалы всех остальных проводников равны нулю (см. рис. 5, *а*);

б) заряд проводника A равен q, потенциалы всех остальных проводников равны нулю, а заряд, индуцируемый на i-м проводнике, равен q_i' (см. рис. 5, *б*).

Согласно теореме взаимности

$$q\varphi + q_i'\varphi_i = 0,$$

откуда

$$q_i' = -q\frac{\varphi}{\varphi_i}.$$

Дополнительная задача 2. *В замкнутой проводящей поверхности 1, потенциал которой φ_1, находится проводник 2 (рис. 6). Его потенциал равен φ_2, а потенциал точки A, находящейся между проводниками, равен φ. Найти заряды q_1' и q_2', индуцируемые на проводниках, если проводники заземлить, а в точку A поместить заряд q.*

Имеем два состояния системы:

а) заряд в точке A равен нулю, ее потенциал φ, а потенциалы проводников равны φ_1 и φ_2 (см. рис. 6, *а*);

б) заряд в точке A равен q, потенциалы проводников равны нулю, а индуцированные на них заряды равны q_1' и q_2' (см. рис. 6, *б*).

Для простоты здесь и дальше мы будем говорить о заряде и о потенциале *точки* A, подразумевая, что в этой точке находится проводник (как это было сделано в задаче 1).

По теореме взаимности

$$q_1'\varphi_1+q_2'\varphi_2+q\varphi=0. \qquad (6)$$

Из одного этого равенства нельзя, конечно, найти оба индуцированных заряда. Однако можно воспользоваться еще тем условием, что проводящая поверхность *1* во втором случае заземлена. Это означает, что электрическое поле снаружи отсутствует, а значит, алгебраическая сумма всех зарядов, находящихся внутри заземленной поверхности, равна нулю, т. е.

$$q_1'+q_2'+q=0. \qquad (7)$$

Решая совместно уравнения (6) и (7), получим

$$q_1'=q\,\frac{\varphi_2-\varphi}{\varphi_1-\varphi_2}$$

и

$$q_2'=-q\,\frac{\varphi_1-\varphi}{\varphi_1-\varphi_2}.$$

Теперь уже можно вернуться к основным трем задачам. Для их решения будем пользоваться теоремой взаимности. Метод, основанный на применении этой теоремы, несколько формальный, но очень простой и удобный. Вся сложность состоит только в том, чтобы разумно выбрать рассматриваемые два состояния системы и записать для них равенство (1).

Решение задачи 1. По условию задачи точечный заряд q находится на определенном расстоянии от заземленной проводящей сферы, на которой наводится заряд q' (состояние 1).

Предположим, что сферическая поверхность не заземлена и имеет потенциал φ_0, а заряда q нет. Тогда на его месте потенциал поля равен $\varphi=\varphi_0\,\frac{r}{r+d}$ (r — радиус сферической поверхности, d — расстояние от заряда q до этой поверхности). Это — второе состояние системы.

Запишем для этих двух состояний системы теорему взаимности:

$$q\varphi+q'\varphi_0=0,$$

или

$$q'=-q\,\frac{\varphi}{\varphi_0}=-q\,\frac{r}{r+d}.$$

Полученный результат можно применить к случаю, когда заряд q' наводится на бесконечной проводящей плоскости. Действительно, бесконечную плоскость можно рассматривать как сферическую поверхность с бесконечно большим радиусом, т. е. $r\to\infty$. Следовательно, в пределе при $r\to\infty$ имеем

$$q'=-q\,\frac{r}{r+d}=-q\,\frac{1}{1+d/r}=-q,$$

т. е. индуцированный на бесконечной плоскости заряд равен по величине, но противоположен по знаку поднесенному к плоскости точечному заряду, где бы этот заряд ни находился.

Решение задачи 2. Согласно условию задачи первое состояние системы таково: заряд q находится в заданной точке между заземленными сферическими поверхностями, на которых наводятся заряды q_1' и q_2'.

В качестве второго состояния рассмотрим случай, когда внешняя сфера заземлена, внутренняя сфера имеет потенциал φ_1, заряд q отсутствует, но на его месте потенциал поля равен φ.

Исходя из решения дополнительной задачи 1, получим

$$q_1'=-q\,\frac{\varphi}{\varphi_1}. \qquad (8)$$

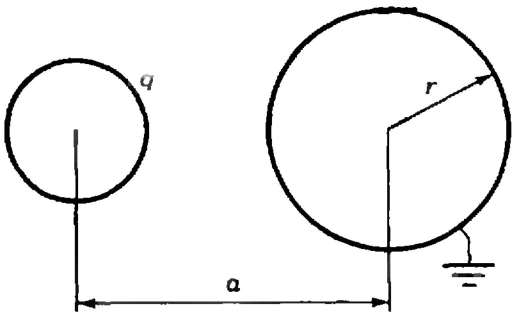


Рис. 7.

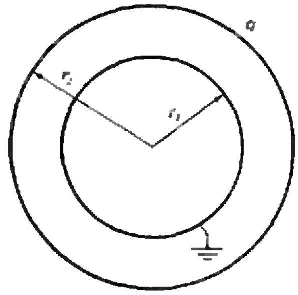


Рис. 8.

Заряд q_2', индуцированный на внешней сфере, найдем из условия, что алгебраическая сумма зарядов, находящихся внутри заземленной поверхности, равна нулю:

$$q_1'+q_2'+q=0. \qquad (9)$$

Таким образом, нам остается найти отношение φ/φ_1. Предположим, что, когда внешняя сфера заземлена, а внутренняя имеет потенциал φ_1, заряд внутренней сферы равен q_0. Очевидно, что при этом на внешней сфере наведется заряд $-q_0$. Выразим потенциалы φ и φ_1 через заряды q_0 и $-q_0$:

$$\varphi=\frac{q_0}{r_1+d_1}+\frac{-q_0}{r_2},$$

$$\varphi_1=\frac{q_0}{r_1}+\frac{-q_0}{r_2}.$$

Отсюда

$$\frac{\varphi}{\varphi_1}=\frac{\dfrac{1}{r_1+d_1}-\dfrac{1}{r_2}}{\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}}. \qquad (10)$$

Тогда окончательно из равенств (8) — (10) получим

$$q_1'=-q\frac{r_1d_2}{(r_1+d_1)(d_1+d_2)},$$

$$q_2'=-q\frac{r_2d_1}{(r_1+d_1)(d_1+d_2)}.$$

Решение задачи 3. Оно непосредственно следует из решения задачи 2, поскольку две параллельные бесконечные плоскости можно рассматривать как две концентрические сферы с бесконечно большими радиусами.

Запишем результат решения задачи 2 в виде

$$q_1'=-q\frac{r_1d_2}{(r_1+d_1)(d_1+d_2)}=$$

$$=-q\frac{d_2}{(1+d_1/r_1)(d_1+d_2)},$$

$$q_2'=-q\frac{r_2d_1}{(r_1+d_1)(d_1+d_2)}=$$

$$=-q\frac{r_2d_1}{(r_2-d_2)(d_1+d_2)}=$$

$$=-q\frac{d_1}{(1-d_2/r_2)(d_1+d_2)}.$$

Если $r_1\to\infty$ и $r_2\to\infty$, то

$$q_1'=-q\frac{d_2}{d_1+d_2},$$

$$q_2'=-q\frac{d_1}{d_1+d_2}.$$

Упражнения

1. Центр шара, несущего заряд q, находится на расстоянии a от центра заземленного шарового проводника радиуса r (рис. 7). Определить заряд q', индуцированный на заземленном шаре.

2. Из двух концентрических сферических проводников, радиусы которых r_1 и r_2 ($r_1 < r_2$), внутренний заземлен, а внешний имеет заряд q (рис. 8). Найти заряд q', наведенный на внутренней сфере.

А. Дозоров

ЗАЧЕМ ТРАНСФОРМАТОРУ СЕРДЕЧНИК?

Вспомним, как устроен трансформатор и по какому принципу работает.

Простейший трансформатор (см. рисунок) представляет собой две катушки (обмотки), намотанные на общий стальной сердечник. Одна обмотка (первичная) подключается к источнику переменного тока. Устройство, потребляющее электроэнергию (так называемая нагрузка), подключается ко второй обмотке (вторичной). И первичную, и вторичную обмотки пронизывает один и тот же переменный магнитный поток, созданный переменным током источника. В первичной обмотке с числом витков n_1 возникает э. д. с. индукции $e_1 = -n_1 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ ($\Delta\Phi$ — изменение магнитного потока через один виток за время Δt), а во вторичной — э. д. с. индукции $e_2 = -n_2 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$.

Предположим, что вторичная обмотка разомкнута, т. е. рассмотрим режим холостого хода трансформатора. Будем также считать, что активное сопротивление первичной катушки очень мало по сравнению с ее индуктивным сопротивлением. По закону Ома сумма всех э. д. с. в замкнутом контуре равна сумме падений напряжения в этом контуре (часто закон Ома, записанный в таком виде, называют правилом Кирхгофа):

$$u_1 + e_1 = i_1 R_1.$$

Здесь u_1 — напряжение источника тока, i_1 — ток и R_1 — активное сопротивление первичной обмотки. Поскольку R_1 очень мало ($R_1 \to 0$), $u_1 + e_1 = 0$, или

$$u_1 = -e_1.$$

При разомкнутой вторичной обмотке ($i_2 = 0$) напряжение на ее концах

$$u_2 = -e_2.$$

Таким образом, отношение напряжений $\frac{u_2}{u_1} = \frac{e_2}{e_1}$, или для действующих значений

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\mathscr{E}_2}{\mathscr{E}_1} = \frac{n_2}{n_1}. \qquad (1)$$

Это соотношение и порождает вопрос, сформулированный в заголовке. Действительно, отношение напряжений зависит только от отношения числа витков в обмотках, а параметры сердечника в соотношении (1) отсутствуют. Могут ли эти параметры быть произвольными? Может ли трансформатор работать вообще без сердечника? Если да, то при каких условиях?

При выводе соотношения (1) подразумевалось, что магнитные потоки через первичную и вторичную катушки равны. Однако это условие может и не выполняться: часть магнитного потока, создаваемого первичной катушкой, может рассеиваться и не пронизывать вторичную обмотку трансформатора, что с неизбежностью должно ухудшать техническую ценность трансформатора. Так, может быть, основное назначение сердечника — уменьшать рассеяние магнитного потока? Но рассеяния можно избежать и другими способами! Например, намотав вторичную обмотку прямо на первичную или намотав обе обмотки на тор (баранку). И снова возникает вопрос, сформулированный в заголовке: зачем трансформатору нужен тяжелый сердечник, в котором, кроме всего прочего, возникают энергетические потери — токи Фуко, гистерезис? В общем, у сердечника масса недостатков. Так зачем же он нужен?

Итак, вопрос сформулирован и обсужден; пора переходить к ответу на него.

Реальные устройства, как правило, обладают худшими свойствами по сравнению с теми идеальными моделями, которые описывает теория, особенно простейшая. Это относится и к трансформатору. Какой же трансформатор разумно называть идеальным? Попробуем качественно разобраться в этом. В трансформаторе электромагнитная энергия передается из первичной катушки во вторичную. В лучшем случае энергия, выделяемая в цепи вторичной обмотки, будет равна энергии, потребляемой первичной обмоткой от источника. Можно говорить не об энергии, а о мощности. Желательно, кроме того, чтобы мощность была максимальной, т. е. коэффициент мощности $\cos\varphi \approx 1$. Математически эти требования записываются таким соотношением:

$$U_{0_1}I_{0_1}=U_{0_2}I_{0_2},$$

где индекс «0» соответствует амплитудным значениям токов и напряжений. С учетом этого требования и выражения (1) условие идеальности трансформатора принимает вид

$$\frac{U_{0_2}}{U_{0_1}}=\frac{I_{0_1}}{I_{0_2}}=\frac{n_2}{n_1}. \qquad (2)$$

В выражении (2), в отличие от (1), содержатся токи обмоток трансформатора. Перейдем к расчету токов I_{0_1} и I_{0_2}, когда трансформатор работает уже в рабочем режиме (вторичная обмотка замкнута на нагрузку). Для этого нам понадобятся понятия индуктивности и взаимной индуктивности.

Магнитный поток Φ, пронизывающий контур площади S перпендикулярно к плоскости контура, равен

$$\Phi=BS, \qquad (3)$$

где B — индукция магнитного поля. Если магнитный поток создается током, то величина потока Φ пропорциональна величине тока I:

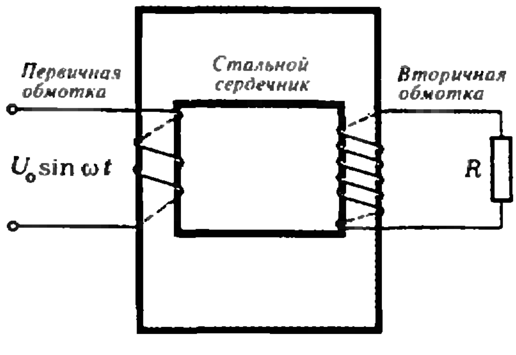
$$\Phi\sim B\sim I, \quad \text{или } \Phi=LI. \qquad (4)$$

Коэффициент пропорциональности L называется коэффициентом самоиндукции или индуктивностью контура. Чем определяется эта величина?

Рассмотрим длинную катушку с большим числом витков (соленоид). Индукция магнитного поля, созданного проводником с током, всегда пропорциональна силе тока и зависит также от конфигурации проводника, от местоположения точки, магнитное поле в которой нас интересует, от магнитных свойств среды. Внутри соленоида магнитное поле однородно. Можно показать, что индукция этого поля равна $B=\mu_0\mu In/l$. Здесь μ_0 — магнитная постоянная, μ — относительная магнитная проницаемость среды, n — число витков соленоида, l — его длина. Тогда из равенства (3)

$$\Phi=BSn=\mu_0\mu In^2S/l.$$

Сравнивая это выражение с (4), най-



дем индуктивность соленоида:

$$L = \mu_0 \mu n^2 S/l. \qquad (5)$$

Аналогичным образом вводится понятие коэффициента взаимной индукции (взаимной индуктивности) M двух контуров. В нашем случае — понятие взаимной индуктивности первичной и вторичной обмоток трансформатора. При замыкании вторичной обмотки на нагрузку во вторичной цепи появляется ток. Обозначим его действующее значение через I_2. Одновременно с этим изменяется ток в первичной обмотке. Теперь его действующее значение I_1 уже не такое, как в режиме холостого хода трансформатора. Магнитный поток Φ_2 через вторичную обмотку, создаваемый током I_1 первичной обмотки, пропорционален этому току:

$$\Phi_2 \sim I_1, \text{ или } \Phi_2 = MI_1.$$

Аналогично магнитный поток Φ_1 через первичную обмотку, вызванный током I_2 вторичной обмотки,

$$\Phi_1 \sim I_2, \text{ или } \Phi_1 = MI_2.$$

Коэффициент пропорциональности M — коэффициент взаимной индукции, или взаимная индуктивность обмоток трансформатора. Аналогично выводу величины индуктивности соленоида можно получить выражение для M:

$$M = \mu_0 \mu n_1 n_2 S/l. \qquad (6)$$

Из выражений (5) и (6)

$$M = \frac{n_2}{n_1} L_1 = \frac{n_1}{n_2} L_2. \qquad (7)$$

Заметим, что на самом деле магнитный поток в сердечнике трансформатора, конечно, один. Практически он целиком определяется напряжением источника тока, включенного в цепь первичной обмотки. Однако для наглядности можно рассматривать по отдельности магнитные потоки, созданные токами I_1 и I_2.

Вернемся теперь снова к трансформатору и продолжим обсуждение его работы в рабочем режиме. Запишем закон Ома (правило Кирхгофа) сначала для замкнутой цепи первичной обмотки, а затем — вторичной. В первичной цепи (см. рисунок) активное сопротивление чрезвычайно мало ($R_1 \to 0$), поэтому сумма э. д. с. равна нулю. Пусть к первичной обмотке приложена переменная разность потенциалов $u_1 = U_0 \sin \omega t$ (это — первая э. д. с. в первичной цепи). Кроме того, в первичной цепи возникают две э. д. с. индукции. Одна из них — э. д. с. самоиндукции e_1', обусловленная переменным током i_1. Вторая — э. д. с. взаимной индукции e_1'' (ток вторичной обмотки i_2 создает переменный магнитный поток в первичной обмотке). С учетом (4)

$$e_1' = -L_1 \frac{\Delta i_1}{\Delta t} = -pM \frac{\Delta i_1}{\Delta t},$$

где $p = \frac{n_1}{n_2}$; $\quad e_1'' = -M \frac{\Delta i_2}{\Delta t}$.

Итак, для первичной цепи

$$U_0 \sin \omega t - pM \frac{\Delta i_1}{\Delta t} - M \frac{\Delta i_2}{\Delta t} = 0. \qquad (8)$$

Во вторичной обмотке две электродвижущие силы: э. д. с. самоиндукции $e_2' = -L_2 \frac{\Delta i_2}{\Delta t} = -\frac{1}{p} M \frac{\Delta i_2}{\Delta t}$ и э. д. с. взаимной индукции $e_2'' = -M \frac{\Delta i_1}{\Delta t}$. Будем считать для простоты рассуждений, что во вторичную цепь включено в качестве нагрузки активное сопротивление R. Тогда

$$-\frac{1}{p} M \frac{\Delta i_2}{\Delta t} - M \frac{\Delta i_1}{\Delta t} = Ri_2. \qquad (9)$$

Решив систему уравнений (8) и (9), мы полностью рассчитаем трансформаторную цепь. Однако уравнения имеют несколько непривычный вид (в математике они называются дифференциальными): в уравнения входят скорости изменения неизвестных величин ($\Delta i_1/\Delta t$ и $\Delta i_2/\Delta t$). Тем не менее решить их несложно.

Поскольку внешнее напряжение меняется по синусоидальному закону, то естественно допустить, что и токи меняются по тому же самому закону, только они могут быть сдвинуты по фазе относительно напряжения. Поэтому будем искать токи в виде $i_1 = A \sin(\omega t - \alpha)$ и $i_2 = B \sin(\omega t - \beta)$.

Здесь A, B, α и β — постоянные величины. Скорость изменения первого тока

$$\frac{\Delta i_1}{\Delta t}=\frac{i_1(t+\Delta t)-i_1(t)}{\Delta t}=$$

$$=A\frac{\sin[\omega(t+\Delta t)-\alpha]-\sin(\omega t-\alpha)}{\Delta t}=$$

$$=2\frac{A}{\Delta t}\sin\frac{\omega\Delta t}{2}\cos\left(\omega t-\alpha+\frac{\Delta t}{2}\right).$$

Устремляя Δt к нулю $\left(\sin\frac{\omega\Delta t}{2}\approx\frac{\omega\Delta t}{2},\ \cos\left(\omega t-\alpha+\frac{\Delta t}{2}\right)\approx\cos(\omega t-\alpha)\right)$, получим

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta i_1}{\Delta t}=A\omega\cos(\omega t-\alpha).$$

Аналогично

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta i_2}{\Delta t}=B\omega\cos(\omega t-\beta).$$

После чего уравнения (8) и (9) превращаются в тригонометрические:

$$U_0\sin\omega t-pMA\omega\cos(\omega t-\alpha)-MB\omega\cos(\omega t-\beta)=0, \qquad (8а)$$

$$-\frac{1}{p}MB\omega\cos(\omega t-\beta)-MA\omega\cos(\omega t-\alpha)=RB\sin(\omega t-\beta). \qquad (9а)$$

Каждое из этих уравнений после элементарных преобразований (раскрытия скобок) можно записать в виде

$$a\sin\omega t+b\cos\omega t=0, \qquad (10)$$

где коэффициенты a и b не зависят от времени. Уравнение (10) справедливо в любой момент времени t только в том случае, если $a=0$ и $b=0$ одновременно. Таким образом, два уравнения преобразуются в четыре:

$$\begin{cases} U_0-pMA\omega\sin\alpha-MB\omega\sin\beta=0,\\ pA\cos\alpha+B\cos\beta=0,\\ -\frac{1}{p}MB\omega\sin\beta-MA\omega\sin\alpha=RB\cos\beta,\\ \frac{1}{p}MB\omega\cos\beta+MA\omega\cos\alpha=RB\sin\beta.\end{cases}$$

Решив эту систему, найдем амплитуды токов в первичной и вторичной цепях и сдвиги токов по фазе относительно внешнего напряжения.

Окончательно получим

$$I_{0_1}=A=\frac{U_0}{p^2R}\sqrt{1+\left(\frac{pR}{M\omega}\right)^2},$$

$$I_{0_2}=B=\frac{U_0}{pR},$$

$$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{pR}{M\omega},\quad \beta=\pi.$$

Удовлетворяет ли найденное нами решение требованиям идеальности трансформатора (соотношению (2))? Проверим. Найдем отношение амплитудных значений токов:

$$\frac{I_{0_1}}{I_{0_2}}=\frac{A}{B}=\frac{1}{p}\sqrt{1+\left(\frac{pR}{M\omega}\right)^2}.$$

Последнее выражение совпадает с соотношением (2), если под корнем второе слагаемое стремится к нулю:

$$\frac{R}{M\omega}=\frac{Rl}{\mu_0\mu S n_1 n_2\omega}\to 0$$

(отношение числа витков p должно оставаться постоянным). Таким образом, трансформатор можно считать идеальным, если

а) магнитная проницаемость среды μ достаточно велика,

б) частота переменного напряжения ω достаточно велика,

в) число витков в первичной и вторичной обмотках велико,

г) активное сопротивление вторичной обмотки мало,

д) длина катушек минимальна, т. е. обмотки намотаны плотно.

Для создания трансформатора, близкого к идеальному, нужно выбрать наиболее удобное в практическом смысле требование. Таковым является, прежде всего, требование большой магнитной проницаемости среды. Для вакуума $\mu=1$, а для ферромагнетиков $\mu\approx 10\,000$. Увеличение числа витков практически невыгодно (резко возрастают размеры и стоимость трансформатора), а увеличение частоты тока в несколько тысяч раз связано со значительными техническими проблемами. Существующие же высокочастотные трансформаторы действительно применяются без сердечника, а их свойства близки к свойствам идеального трансформатора.

Лаборатория «Кванта»

М. Головей

ФИГУРА ГАЙДИНГЕРА

Посмотрите внимательно на фотографии прозрачных кристаллов на рисунке 1. Это кристаллы углекислого кальция (кальцита) или, как его иногда называют, исландского шпата. Ребра кристаллов, которые мы видим через их толщу, кажутся двойными. Свойство кристаллов кальцита «раздваивать» изображение было обнаружено еще в XVII веке. Но объяснение этого явления, которое называют двойным лучепреломлением, было дано лишь после признания электромагнитной теории света.

В испускаемой обычным источником световой волне векторы напряженности **E** электрического поля и индукции **B** магнитного поля колеблются во всевозможных направлениях, перпендикулярных направлению распространения волны. Такой свет называется естественным. Если же в световой волне направление колебаний вектора **E** (а следовательно, и вектора **B**) все время постоянно, то такой свет называют плоско- или линейнополяризованным. Направление, перпендикулярное направлению колебаний вектора **E**, называют направлением поляризации. Естественный свет можно представить как сумму волн с всевозможными направлениями поляризации. Во многих веществах скорость распространения световых колебаний (а следовательно, показатель преломления) постоянна и не зависит от направления колебаний вектора **E** *). Такие вещества называют оптически изотропными. В кристалле же исландского шпата дело обстоит иначе. Оказывается, его показатель преломления зависит от ориентации колебаний вектора **E** световой волны. Для двух взаимно перпендикулярных направлений вектора **E** существуют два значения показателя преломления. Этим и объясняется явление двойного лучепреломления. Световой луч, попадающий в кристалл, разделяется на два луча, в которых колебания вектора **E** взаимно перпендикулярны. В силу поперечности световых волн направление колебаний вектора **E** в каждом луче лежит в плоскости, содержащей луч, и перпендикулярно лучу. Так что, попадая в кристалл исландского шпата, луч естественного света разделяется на два луча плоскополяризованного света с взаимно перпендикулярными плоскостями (направлениями) поляризации. Убедиться в этом можно с помощью любого поляризатора. (О том, как изготовить самодельный поляризатор, мы рассказывали в 11-м номере журнала за 1975 год.)

---

*) Разумеется, для данной длины волны.

Рис. 1.

В настоящее время для анализа поляризационных характеристик света пользуются специальными оптическими приборами. Однако еще в середине XIX века было неопровержимо установлено, что некоторые люди способны невооруженным глазом отличать плоскополяризованный свет от естественного.

В XXXII главе повести Л. Н. Толстого «Юность» можно прочесть такие строки: «...я невольно оставляю книгу и, вглядываясь в растворенную дверь балкона в кудрявые висячие ветви высоких берез, на которых уже заходит вечерняя тень, и в чистое небо, на котором, как смотришь пристально, вдруг показывается как будто пыльное, желтоватое пятнышко и снова исчезает, ...»

Обратите внимание на последние слова этого отрывка. О каком желтом пятнышке идет речь у Л. Н. Толстого? Что это: загрязнение атмосферы или иллюзия зрения, связанная с переутомлением от чтения книги? И не то, и не другое! Оказывается, совершенно не подозревая физической сущности наблюдаемой картины, Л. Н. Толстой обратил внимание на явление, которое в то время было известно лишь очень узкому кругу ученых. В чем же сущность описываемого явления, и как его можно наблюдать?

В 1844 году немецким ученым Гайдингером впервые было обнаружено удивительное свойство человеческого глаза. Им было установлено, что глаза некоторых людей способны отличать поляризованный свет от неполяризованного. Поляризационная чувствительность глаза не идет ни в какое сравнение с его цветовой или контрастной чувствительностью. Экспериментальная проверка показала, что этим свойством обладают глаза только 25—30% людей. Хотя и эта оценка не считается достаточно надежной.

Некоторые читатели, без сомнения, обладают способностью обнаруживать поляризованный свет, но, повидимому, совсем не подозревают об этом. Так же как Толстой не подозревал о том, что он описывает наблюдение поляризации солнечного света в атмосфере.

Известно, что цвет неба связан с рассеянием солнечных лучей в атмосфере. Чистый воздух сам по себе прозрачен. Однако плотность его в пространстве не постоянна. Из-за теплового движения молекул в атмосфере постоянно существуют малые области *), в которых плотности воздуха различны. Иначе говорят, что существуют флуктуации плотности в атмосфере. На этих флуктуациях и происходит рассеяние света. Интенсивность рассеянного света тем больше, чем меньше длина волны. Этим и объясняется голубой цвет неба.

Рассеянный атмосферой свет оказывается поляризованным. Рисунок 2 помогает понять, как происходит поляризация рассеянного света.

Пусть в точке S находится Солнце, в точке O — рассеивающая частица (флуктуация). Напомним, что свет — это поперечные электромагнитные волны, т. е. колебания вектора $\mathbf{E}$ (и $\mathbf{B}$) в световой волне происходят в плоскости, перпендикулярной направлению

*) Размеры этих областей сравнимы с длинами волн видимого света.

распространения света. Поэтому в световой волне, идущей от источника S к точке O, колебания вектора $\mathbf{E}$ лежат в плоскости YOZ. Если наблюдать свет, рассеянный частицей в точке O, в направлении YO, то ясно, что в этом направлении распространяются лишь волны, в которых колебания вектора $\mathbf{E}$ направлены вдоль OZ. А это значит, что свет, рассеянный под прямым углом к падающему, полностью поляризован.

Наблюдения показывают, что поляризация света в атмосфере не бывает полной. Кроме того, степень поляризации зависит от времени дня.

Убедиться в том, что свет неба поляризован, можно с помощью любого поляризатора. Но, как мы уже говорили, некоторые люди могут наблюдать поляризацию света и невооруженным глазом. Так как попадающий к наблюдателю свет оказывается поляризованным не полностью, видимая им картина не очень четкая. Эту картину и описал Л. Н. Толстой. Гораздо заметнее она будет, если увеличить степень поляризации света с помощью поляризационных светофильтров.

Какой же вид должно иметь поле зрения в идеальном случае? Гайдингер установил, что наблюдатель, глядя в течение нескольких секунд на однородное поле, освещенное линейнополяризованным светом, или на экран, освещенный естественным светом, но наблюдаемый через поляризационный светофильтр, должен видеть слабо выраженную бледно-желтую фигуру на голубоватом фоне. По своим очертаниям фигура напоминает сноп с расширяющимися концами (приблизительно такой, как на рисунке 3). Ее принято называть фигурой Гайдингера. Если направление колебаний электрического вектора (стрелка на рис. 3) изменить на 90°, т. е. повернуть поляризатор на 90°, наблюдатель вновь увидит фигуру, но она окажется повернутой на тот же угол. Четкость картины можно увеличить, если освещение производить синим светом. Угловые размеры фигуры составляют приблизительно 3°.

Экспериментально определенный диапазон длин волн, в которых видна фигура Гайдингера, лежит в фиолетово-голубой области (от 400 до 510 *нм*); наиболее отчетливо ее наблюдали в свете с длиной волны 490 *нм*. Происхождение голубого фона, на котором виден сноп, объясняют световым контрастом, сама же природа этого явления до сих пор еще не выяснена.

Известно, что чувствительностью к поляризованному свету обладают не только глаза человека. В настоящее время можно указать десятки видов живых существ, у которых обнаружена эта способность. С неопровержимостью установлено, что поляризационная чувствительность играет первостепенную роль в зрительной ориентации мух, пчел, пауков.

Попробуйте проверить свое зрение. Может быть, и вы обладаете уникальной способностью распознавать поляризованный свет!

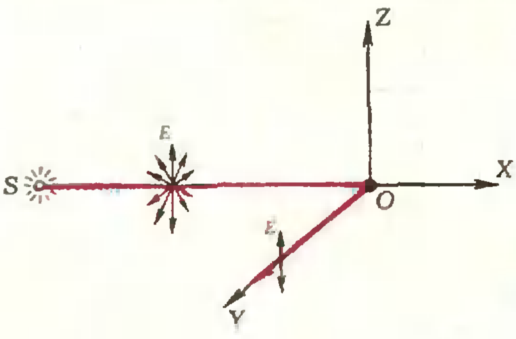


Рис. 2.

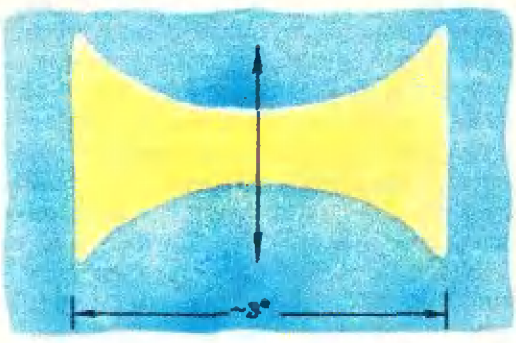


Рис. 3.

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

В новую программу по геометрии (для девятого класса) входит понятие скалярного произведения векторов. Скалярное произведение векторов широко применяется при решении различных геометрических задач и доказательстве теорем. Ниже мы помещаем две заметки — Э. Готмана и Я. Понарина, в которых на нескольких примерах демонстрируются преимущества векторного метода. От читателя требуется знакомство с простейшими операциями — сложением векторов и умножением вектора на число, а также с понятием скалярного произведения векторов. Напомним определение и некоторые свойства скалярного умножения векторов.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению числовых значений длин этих векторов на косинус угла между векторами.

Обозначается скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ через $\vec{a}\cdot\vec{b}$; согласно определению $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\widehat{\vec{a},\vec{b}}$. Свойства, которыми обладает скалярное умножение векторов, аналогичны законам операций над числами:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

2) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\,\vec{b})$, где λ — некоторое число;

3) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

(их доказательства см. в учебном пособии по геометрии для 9-го класса, с. 59).

Э. Готман

Задачи на доказательство

Из полученного результата следует выжать все, что он может дать.
Д. Пойа. Как решать задачу.

Плоский четырехугольник

Легко видеть, что если диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны (рис. 1), то длины его сторон удовлетворяют соотношению

$$|AB|^2+|CD|^2=|BC|^2+|AD|^2. \qquad (1)$$

А верно ли обратное: можно ли утверждать, что диагонали четырех-

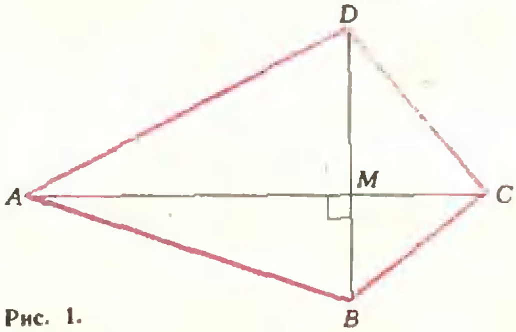


Рис. 1.

угольника взаимно перпендикулярны, если известно, что равны суммы квадратов длин его противоположных сторон?

Обозначим точку пересечения диагоналей через M и применим теорему косинусов. Мы получим

$$|AB|^2=|AM|^2+|BM|^2-2|AM|\cdot|BM|\cdot\cos(\widehat{AMB}),$$

$$|CD|^2=|CM|^2+|DM|^2-2|CM|\cdot|DM|\cdot\cos(\widehat{AMB})$$

$$|BC|^2=|BM|^2+|CM|^2+2|BM|\cdot|CM|\cdot\cos(\widehat{AMB}),$$

$$|AD|^2=|AM|^2+|DM|^2+2|AM|\cdot|DM|\cdot\cos(\widehat{AMB}).$$

Из этих равенств находим

$$|AB|^2+|CD|^2-|BC|^2-|AD|^2=-2(|AM|\cdot|BM|+|CM|\cdot|DM|+|BM|\cdot|CM|+|AM|\cdot|DM|)\cdot\cos(\widehat{AMB}).$$

Но $|AM|\cdot|BM|+|CM|\cdot|DM|+|BM||CM|+|AM|\cdot|DM|=(|AM|+|CM|)(|BM|+|DM|)=|AC|\cdot|BD|$, поэтому

$$|AB|^2+|CD|^2-|BC|^2-|AD|^2=-2|AC|\cdot|BD|\cdot\cos(\widehat{AMB}). \qquad (2)$$

Если $\widehat{AMB}=90^\circ$, то $\cos(\widehat{AMB})=0$, и тогда $|AB|^2+|CD|^2=|BC|^2+|AD|^2$.

И наоборот, если верно (1), то $\cos(\widehat{AMB})=0$, т. е. $\widehat{AMB}=90^\circ$. Итак, мы доказали теорему: *диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов длин его противоположных сторон равны.*

Заметим теперь, что число, стоящее в правой части соотношения (2), равно удвоенному скалярному произведению векторов AC и DB. И значит, мы можем переписать (2) в виде

$$|AB|^2+|CD|^2-|BC|^2-|AD|^2=2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}. \qquad (3)$$

Попробуем теперь, оперируя только лишь с векторами, получить соотношение (3) для случая произвольного расположения четырех точек.

Четыре точки в пространстве

Пусть A, B, C и D — произвольные четыре точки в пространстве, для которых мы хотим доказать соотношение (3). С чего же начать доказательство?

Зафиксируем некоторую точку O пространства (точка O выбирается произвольно; иногда ее называют полюсом) и рассмотрим векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$. Обозначим для краткости эти векторы так: $\overrightarrow{OA}=\vec{A}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{B}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{C}$, $\overrightarrow{OD}=\vec{D}$. *По формуле вычитания векторов* имеем $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$, т. е. $\overrightarrow{AB}=\vec{B}-\vec{A}$. Аналогично, $\overrightarrow{CD}=\vec{D}-\vec{C}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{C}-\vec{B}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{D}-\vec{A}$.

Вспомним, что скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины: $(\overrightarrow{AB})^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|^2=|AB|^2$. Следовательно, левую часть соотношения (3) мы можем переписать так:

$$|AB|^2+|CD|^2-|BC|^2-|AD|^2=(\overrightarrow{AB})^2+(\overrightarrow{CD})^2-(\overrightarrow{BC})^2-(\overrightarrow{AD})^2=$$

$$=(\vec{B}-\vec{A})^2+(\vec{D}-\vec{C})^2-(\vec{C}-\vec{B})^2-(\vec{D}-\vec{A})^2=2(\vec{A}\cdot\vec{D}+\vec{B}\cdot\vec{C}-\vec{A}\cdot\vec{B}-\vec{C}\cdot\vec{D})=2(\vec{C}-\vec{A})\cdot(\vec{B}-\vec{D})=2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}.$$

Соотношение (3) доказано (подумайте, кстати, почему для доказательства (3) несущественно, где выбирается точка O). Это доказательство не слож-

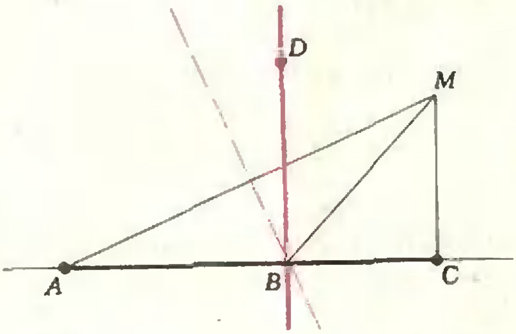


Рис. 2.

нее изложенного в предыдущем пункте (с применением теоремы косинусов), а преимущества его очевидны: ведь теперь мы знаем, что равенство (2) справедливо для *любого* расположения четырех точек A, B, C и D, а не только тогда, когда эти точки являются вершинами плоского четырехугольника.

Применяя равенство (3), мы сейчас получим много новых интересных результатов.

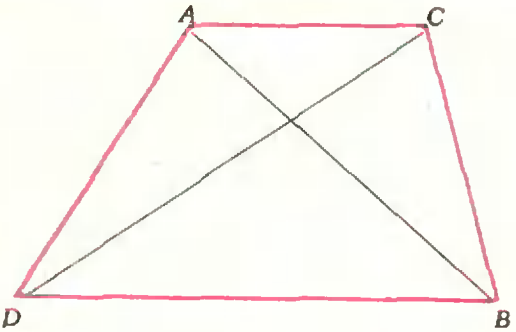


Рис. 4.

Следствия

1. *Противоположные ребра AC и BD тетраэдра $ABCD$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов длин других противоположных ребер: AB и CD, BC и AD — равны между собой.*

В самом деле, угол между ребрами AC и BD может быть найден по формуле

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}}) = \frac{|AB|^2+|CD|^2-|BC|^2-|AD|^2}{2\,|AC|\cdot|BD|};$$

но $\cos(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}})=0$ тогда и только тогда, когда

$$|AB|^2+|CD|^2=|BC|^2+|AD|^2.$$

2. *Множество точек D плоскости, разность квадратов расстояний от каждой из которых до двух данных точек A и C — величина постоянная, есть прямая, перпендикулярная прямой AC.*

Доказательство. Пусть эта разность равна k^2. Построим на прямой AC точку B так, чтобы $|AB|^2-|BC|^2=k^2$. Для этого через точку C проведем перпендикуляр к прямой AC и отложим на нем отрезок CM длины k (рис. 2). Серединный перпендикуляр отрезка AM пересечет прямую AC в искомой точке B.

Действительно, из прямоугольного треугольника BCM, $|BM|^2-|BC|^2=|CM|^2$. Но $|BM|=|AB|$ согласно свойству серединного перпендикуляра, а $|CM|=k$. Следовательно, $|AB|^2-|BC|^2=k^2$.

Очевидно, точка B всегда существует, притом единственная. Пусть теперь D — точка искомого множества. Применив к точкам A, B, C и D плоскости формулу (3), получим, что $|AD|^2-|CD|^2=|AB|^2-|BC|^2$ тогда и только тогда, когда прямая BD перпендикулярна прямой AC.

Замечание. Множество точек пространства, обладающих указанным свойством, есть плоскость, перпендикулярная к прямой AC.

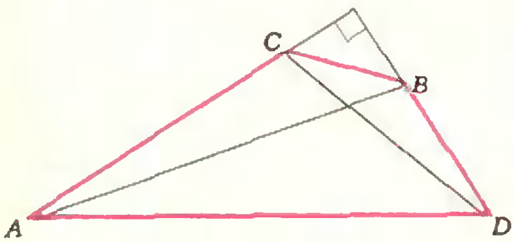


Рис. 3.

3. *Если $ACBD$ — выпуклый четырехугольник, противоположные стороны AC и BD которого перпендикулярны* (рис. 3), *то сумма квадратов длин его диагоналей равна сумме квадратов длин двух других его противоположных сторон.*

Доказательство. Поскольку $(AC)\perp(DB)$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=0$, т. е. правая часть равенства (3) обращается в нуль. Следовательно,

$$|AB|^2+|CD|^2=|BC|^2+|AD|^2.$$

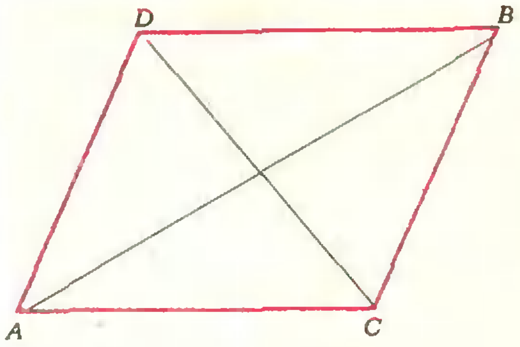


Рис. 5.

4. *Сумма квадратов длин диагоналей трапеции равна сумме квадратов длин ее боковых сторон плюс удвоенное произведение длин оснований.*

Доказательство. Пусть AC и DB — основания трапеции $ACBD$ (рис. 4). Поскольку векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB}$ сонаправлены, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=|AC|\cdot|DB|$, и равенство (3) принимает вид $|AB|^2+|CD|^2-|BC|^2-|AD|^2=2|AC|\cdot|BD|$, т. е.

$$|AB|^2+|CD|^2=|BC|^2+|AD|^2+2|AC|\cdot|DB|,$$

что и требовалось доказать.

5. (Известная теорема.) *Сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон.*

Доказательство. Векторы AC и DB сонаправлены (рис. 5), следовательно, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=|AC|\cdot|DB|=|AC|^2$, поскольку $|AC|=|DB|$.

Подставляя найденное значение $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$ в (3), получим

$$|AB|^2+|CD|^2=|BC|^2+|AD|^2+2|AC|^2=|BC|^2+|AD|^2+|AC|^2+|BD|^2,$$

и теорема доказана.

Напомним, что квадрат расстояния между двумя точками равен скалярному квадрату вектора, определяемого этими точками. Решив задачу, не спешите: подумайте, нельзя ли результат использовать для решения какой-нибудь другой задачи.

Задачи

1. а) Около треугольника ABC описана окружность и построена точка D, симметричная центру O относительно стороны AB. Выразите вектор $\overrightarrow{CD}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$. Докажите, что

$$|CD|^2=R^2+a^2+b^2-c^2,$$

где $a=|BC|$, $b=|AC|$, $c=|AB|$, $R=|OA|$.

б) Докажите, что для всякого треугольника ABC справедливо неравенство

$$\cos 2\hat{A}+\cos 2\hat{B}-\cos 2\hat{C}\leqslant\frac{3}{2}.$$

Выясните, когда имеет место равенство.

2. а) Докажите, что расстояние от центра O окружности, описанной около треугольника ABC, до его *центроида* G (точки пересечения медиан) определяется по формуле

$$|OG|^2=R^2-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2).$$

б) Докажите, что для всякого треугольника ABC

$$\sin^2\hat{A}+\sin^2\hat{B}+\sin^2\hat{C}\leqslant\frac{9}{4}.$$

При каком условии имеет место равенство?

3. а) Пусть O — центр сферы, описанной около тетраэдра $ABCD$, G — центроид грани ABC, M — точка, удовлетворяющая условию $|OM|=3|OG|$. Выразите расстояние от вершины D до точки M через длины ребер тетраэдра и радиус описанной около тетраэдра сферы.

б) Докажите, что если a, b, c — длины ребер тетраэдра, имеющих общую вершину, a_1, b_1, c_1 — длины трех остальных ребер и R — радиус описанной около него сферы, то

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2\leqslant 4R^2+a^2+b^2+c^2.$$

4. Докажите, что расстояние от центра O сферы, описанной около тетраэдра $ABCD$, до его *центроида* *) G определяется по формуле

$$|OG|^2=R^2-\frac{1}{16}(a^2+b^2+c^2+a_1^2+b_1^2+c_1^2),$$

где a, b, c, a_1, b_1, c_1 — длины ребер тетраэдра, R — радиус описанной сферы.

5. Докажите, что если A, B, C, D — четыре произвольные точки пространства, M и N — середины отрезков AC и BD соответственно, то имеет место равенство

$$|AC|^2+|BD|^2=|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DA|^2-4|MN|^2.$$

Какие следствия можно вывести из этой теоремы?

*) См. статью Э. Готмана «Прямая Эйлера» («Квант», 1975, № 2, с. 32).

Я. Понарин

Вычисление площадей

Площадь треугольника

Известно, что площадь треугольника ABC можно вычислить по формуле

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\hat{C}, \qquad (1)$$

где a, b и c — длины сторон треугольника, лежащих соответственно против углов $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\hat{C}$.

Обозначим векторы $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CA}$ сторон треугольника через $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Из определения скалярного произведения векторов следует, что $\cos\hat{C}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$, откуда

$$\sin^2\hat{C}=\frac{a^2b^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}{a^2b^2}$$

(скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины).

Возведем обе части формулы (1) в квадрат и подставим найденное выражение для $\sin^2\hat{C}$; получим

$$4S^2=a^2b^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2. \qquad (2)$$

Формула (2) пригодится нам в дальнейшем (в частности, из нее легко получить формулу Герона для площади треугольника).

Площадь четырехугольника

Если p и q — длины диагоналей произвольного плоского четырехугольника (противоположные стороны которого не пересекаются во внутренних точках), то его площадь можно найти по формуле

$$S=\frac{1}{2}pq\sin(\widehat{\vec{p},\vec{q}}). \qquad (3)$$

Как и в случае треугольника, перепишем эту формулу в виде, аналогичном (2):

$$4S^2=p^2q^2-(\vec{p}\cdot\vec{q})^2. \qquad (4)$$

Чтобы оценить полученные формулы (2) и (4), решим несколько задач (если вы попытаетесь решить их иначе, без использования скалярного произведения, вы увидите, насколько усложнятся решения).

З а д а ч а 1. *Вычислить площадь грани ABC тетраэдра $ABCD$, если a, b, c — длины его ребер DA, DB и DC, а α, β, γ — плоские углы при вершине D, соответственно противолежащие ребрам BC, AC и AB.*

Р е ш е н и е. Введем такие обозначения: $\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$. Тогда для площади S грани ABC имеем

$$4S^2=|\overrightarrow{CA}|^2\cdot|\overrightarrow{CB}|^2-(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB})^2=$$
$$=(\vec{a}-\vec{c})^2\cdot(\vec{b}-\vec{c})^2-((\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c}))^2=$$
$$=(a^2+c^2-2ac\cos\beta)(b^2+c^2-2bc\cos\alpha)-$$
$$-(ab\cos\gamma-ac\cos\beta-bc\cos\alpha+c^2)^2.$$

Фактически задача уже решена, но в полученное выражение длины a, b, c и углы α, β, γ входят несимметрично, хотя по условию задачи значения a, b, c, а также α, β, γ должны

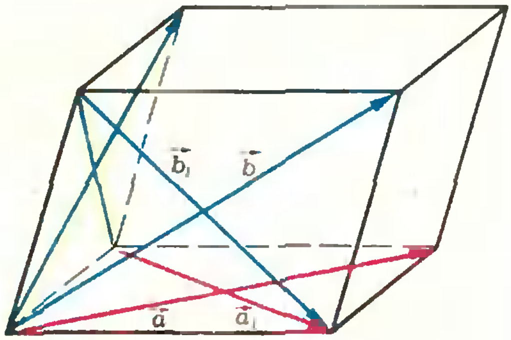


Рис. 1.

быть равноправны. Поэтому желательно полученный ответ привести к симметричному виду. Имеем

$$4S^2=a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2-2a^2bc\cos\alpha-$$
$$-2b^2ac\cos\beta-2c^2ab\cos\gamma-$$
$$-a^2b^2\cos^2\gamma-b^2c^2\cos^2\alpha-$$
$$-a^2c^2\cos^2\beta+2a^2bc\cos\beta\cos\gamma+$$
$$+2b^2ac\cos\gamma\cos\alpha+2c^2ab\cos\alpha\cos\beta=$$
$$=(bc\sin\alpha)^2+(ac\sin\beta)^2+(ab\sin\gamma)^2+$$
$$+2abc\,(a\,(\cos\beta\cos\gamma-$$
$$-\cos\alpha)+b\,(\cos\gamma\cos\alpha-$$
$$-\cos\beta)+c\,(\cos\alpha\cos\beta-\cos\gamma)).$$

Это и есть нужный нам симметричный ответ.

В частности, если $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{2}$,

$$4S^2=(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2.$$

Но произведения ab, ac и bc равны соответственно удвоенным площадям S_1, S_2 и S_3 граней DAB, DCA и DBC тетраэдра $ABCD$, у которого плоские углы при вершине D — прямые. Сокращая на 4, получим

$$S^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2,$$

т. е. *в тетраэдре с прямым трехгранным углом квадрат площади грани, лежащей против прямого трехгранного угла, равен сумме квадратов площадей остальных граней.* Это — аналог теоремы Пифагора.

З а д а ч а 2. *В параллелепипеде длины диагоналей одной грани равны a и a_1, другой — b и b_1, третьей — c и c_1. Найти площадь грани с диагоналями a и a_1* (рис. 1).

Р е ш е н и е. По формуле (4) $4S^2=a^2a_1^2-(\vec{a}\cdot\vec{a}_1)^2$, где S — нужная площадь.

Так как $\vec{a}_1=\vec{b}-\vec{c}$, то $2\vec{a}\cdot\vec{a}_1=2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{c}$. По теореме косинусов (с учетом определения скалярного произведения) $2\vec{a}\cdot\vec{b}=a^2+b^2-c_1^2$ и $2\vec{a}\cdot\vec{c}=a^2+c^2-b_1^2$. Поэтому $2\vec{a}\cdot\vec{a}_1=b^2+b_1^2-c^2-c_1^2$ и $S^2=$

$$=\frac{1}{4}a^2a_1^2-\frac{1}{16}(b^2+b_1^2-c^2-c_1^2)^2.$$

З а д а ч а 3. *Найти площадь S вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$* (рис. 2), *если известны длины a, b, c и d его сторон.*

Р е ш е н и е. Введем такие обозначения для векторов сторон и диагоналей четырехугольника $ABCD$: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$, $\overrightarrow{DA}=\vec{d}$ и $\overrightarrow{AC}=\vec{e}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{f}$. Тогда $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=0$, $\vec{e}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{f}=\vec{b}+\vec{c}$. Согласно формуле (4) $4S^2=(ef)^2-(\vec{e}\cdot\vec{f})^2$. Известно, что стороны и диагонали вписанного четырехугольника связаны таким соотношением (теорема Птолемея) *):

$$ef=ac+bd.$$

Найдем скалярное произведение $\vec{e}\cdot\vec{f}$:

$$\vec{e}\cdot\vec{f}=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}+\vec{c})=$$
$$=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}+b^2.$$

Так как $\vec{c}=-\vec{a}-\vec{b}-\vec{d}$, то $\vec{a}\cdot\vec{c}=-a^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{d}$. Поэтому $\vec{e}\cdot\vec{f}=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{d}-a^2+b^2$. По теореме косинусов (с учетом направления векторов) имеем

$$2\vec{b}\cdot\vec{c}=-b^2-c^2+f^2,$$
$$-2\vec{a}\cdot\vec{d}=a^2+d^2-f^2.$$

Следовательно,

$$\vec{e}\cdot\vec{f}=\frac{1}{2}(b^2+d^2-a^2-c^2).$$

Подставляя найденные выражения для ef и $\vec{e}\cdot\vec{f}$ в формулу для площади S, получим

$$4S^2=(ac+bd)^2-\frac{1}{4}(b^2+d^2-a^2-c^2)^2,$$

откуда $16S^2=(-a+b+c+d)\times(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)$. Если обозначить полупериметр нашего четырехугольника через p, то полученный ответ можно переписать в виде

$$S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d).$$

Это — аналог формулы Герона для вписанного четырехугольника.

*) См., например, «Квант», 1973, № 3, с. 26.

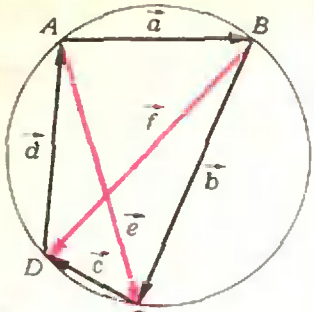


Рис. 2.

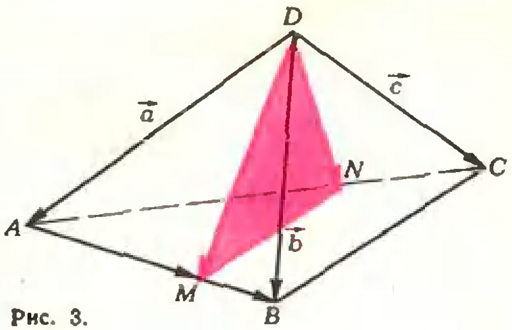


Рис. 3.

Задача 4. *Через вершину правильного тетраэдра с ребром a проведен а плоскость так, что линия ее пересечения с плоскостью основания параллельна стороне и делит основание на две равновеликие части. Найти площадь сечения тетраэдра указанной плоскостью* (рис. 3).

Решение. Обозначим в данном правильном тетраэдре $ABCD$ $\vec{DA}=\vec{a}$, $\vec{DB}=\vec{b}$, $\vec{DC}=\vec{c}$, причем $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=a$. Пусть плоскость сечения пересекает плоскость ABC по прямой MN, $M\in(AB)$, $N\in(AC)$ и $(MN)\|(BC)$. Нужную площадь сечения можно посчитать по формуле

$$4S^2=|\vec{DM}|^2\cdot|\vec{DN}|^2-(\vec{DM}\cdot\vec{DN})^2.$$

Эта формула подсказывает, как решать задачу.

Имеем $\vec{DM}=\vec{DA}+\vec{AM}$, где $\vec{AM}=k\cdot\vec{AB}$.

Число k находится из того условия, что прямая MN делит основание ABC на две равновеликие части, причем так, что треугольники AMN и ABC подобны; поэтому

$$S_{AMN}:S_{ABC}=|\vec{AM}|^2:|\vec{AB}|^2=k^2=\frac{1}{2},$$

откуда $k=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Поэтому

$$\vec{DM}=\vec{DA}+k\cdot\vec{AB}=$$

$$=\vec{a}+\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{(\sqrt{2}-1)\vec{a}+\vec{b}}{\sqrt{2}}.$$

Аналогично $\vec{DN}=\frac{(\sqrt{2}-1)\vec{a}+\vec{c}}{\sqrt{2}}$.

Подставляя выражения для $\vec{DM}$ и $\vec{DN}$ в формулу для S, получаем

$$16S^2=((\sqrt{2}-1)\vec{a}+\vec{b})^2\cdot((\sqrt{2}-1)\vec{a}+\vec{c})^2-(((\sqrt{2}-1)\vec{a}+\vec{b})\times((\sqrt{2}-1)\vec{a}+\vec{c}))^2.$$

Так как для правильного тетраэдра с ребром длины a

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}a^2,$$

то после всех упрощений получаем

$$S=\frac{1}{8}a^2\sqrt{11-4\sqrt{2}}.$$

Решите самостоятельно следующие задачи:

1. Дан произвольный четырехугольник $ABCD$. Точки A_1 и C_1 являются образами вершин A и C при некотором параллельном переносе. Докажите, что четырехугольник A_1BC_1D равновелик данному четырехугольнику $ABCD$.

2. В тетраэдре $ABCD$ известны длины всех шести ребер: $|DA|=a$, $|DB|=b$, $|DC|=c$, $|BC|=a_1$, $|AC|=b_1$, $|AB|=c_1$. Через середину ребра DB проведена плоскость параллельно ребрам AD и BC. Найдите площадь сечения тетраэдра этой плоскостью.

3. В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α, а длина бокового ребра равна a. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания и середину противоположного бокового ребра.

задачник Кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 октября 1976 г. по адресу: 113035, Москва, Ж-35, Б. Ордынка, 21/16, журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта» М391 М392» или «...Ф403». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

В этом и следующих номерах «Задачник «Кванта»» составлен в основном из задач, предлагавшихся на последней Всесоюзной олимпиаде. После задач заключительного тура олимпиады в скобках указан класс, для учеников которого предлагалась задача.

Задачи

М391—М395; Ф403—Ф407

М391. а) В последовательности $x_0, x_1, x_2, \ldots$ числа x_0 и x_1 — натуральные и меньше 1000, а каждое из остальных чисел равно модулю разности двух предыдущих. Докажите, что одно из чисел $x_1, x_2, \ldots x_{1500}$ равно 0. (10 кл.)

б) В последовательности $x_0, x_1, x_2, \ldots$ числа x_0 и x_1 — натуральные и меньше 10000, а каждое из чисел $x_2, x_3, \ldots$ равно наименьшей из разностей двух каких-то предыдущих чисел. Докажите, что $x_{20}=0$. (8 кл., 9 кл.)

С. Фомин

М392. По трем прямолинейным дорогам с постоянными скоростями идут три пешехода. В начальный момент они не находились на одной прямой. Докажите, что они могут оказаться на одной прямой не более двух раз. (10 кл.)

Н. Васильев

М393. Найти сумму

$$\varphi(0)+\varphi\left(\frac{1}{n}\right)+\varphi\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots+\varphi(1),$$

если $\varphi(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$.

М. Левин

М394. а) На плоскости даны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$, сумма которых равна $\vec{0}$. Докажите неравенство

$$|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{d}| \geqslant |\vec{a}+\vec{d}|+|\vec{b}+\vec{d}|+|\vec{c}+\vec{d}|.$$

Докажите аналогичное неравенство:

б) для четырех чисел и

в)* четырех векторов в трехмерном пространстве, сумма которых равна $\vec{0}$. (9 кл., 10 кл.)

Ю. Ионин

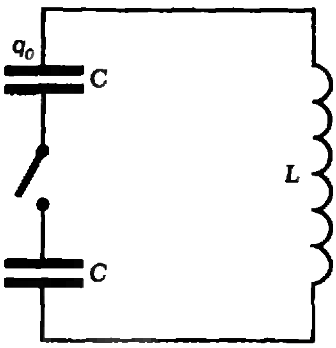


Рис. 1.

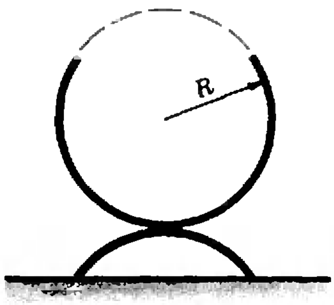


Рис. 2.

М395*. В вершинах правильного n-угольника с центром в точке O расставлены числа $(+1)$ и (-1). За один шаг разрешается изменить знак у всех чисел, стоящих в вершинах какого-либо правильного k-угольника с центром O (при этом мы допускаем и 2-угольники, понимая под 2-угольником отрезок с серединой в точке O). Докажите, что в случаях а), б), в) существует такое первоначальное расположение $(+1)$ и (-1), что из него ни за какое число шагов нельзя получить набор из одних $(+1)$:

а) $n=15$,

б) $n=30$,

в)* n — любое целое число, большее 2.

г)* Попробуйте выяснить для произвольного n, сколько существует различных расстановок $(+1)$ и (-1) таких, что никакую из них нельзя получить ни из какой другой за несколько шагов. Докажите, например, что для $n=2100$ существует 2^{480} таких расстановок. (10 кл.)

С. Фомин

Ф403. В электрической цепи из двух одинаковых конденсаторов емкости C и катушки индуктивности L, соединенных последовательно (рис. 1), в начальный момент один из конденсаторов имеет заряд q_0, второй не заряжен.

Как будут изменяться со временем заряды конденсаторов и ток в контуре после замыкания ключа? Предложите механическую колебательную систему, аналогичную данной электрической. (10 кл.)

Ф404. Определить к. п. д. ракетного двигателя как тепловой машины и его силу тяги. Ракетный двигатель использует в качестве горючего водород, в качестве окислителя — жидкий кислород. Секундный расход водорода 24 *кг/сек*. Скорость истечения газов из сопла ракеты $4{,}2\cdot10^3$ *м/сек*. Теплотворная способность водорода $1{,}1\cdot10^8$ *дж/кг*. (9 кл.)

Ф405. Однородную тонкостенную сферу радиуса R разрезали на две части и скрепили, как показано на рисунке 2. На какой высоте находится центр тяжести получившегося бокала, если высота его ножки h? (8 кл.)

Ф406. Спутник движется по круговой орбите на расстоянии от поверхности Земли, равном ее радиусу R. В некоторый момент со спутника запускается станция на другую планету, после чего оставшаяся часть спутника движется по эллиптической орбите, касающейся поверхности Земли в точке, противоположной точке старта станции.

Какую максимальную часть массы спутника может составлять масса межпланетной станции? (Потенциальная энергия тела массы m в поле тяготения тела массы M равна $U=-\gamma\frac{mM}{r}$). (10 кл.)

Ф407. Машинист пассажирского поезда, двигавшегося со скоростью $v_1=108$ *км/час*, заметил на расстоянии $s_0=180$ *м* впереди движущийся в ту же сторону со скоростью $v_2=32{,}4$ *км/час* товарный поезд. Машинист сразу включил тормоз, благодаря чему пассажирский поезд начал двигаться с ускорением $a=-1{,}2$ *м/сек*^{2}. Достаточно ли этого ускорения для того, чтобы поезда не столкнулись? (8 кл.)

Решения задач

М351—М353, Ф358—Ф361

М351. *Восстановите треугольник, если на плоскости отмечены три точки: O — центр описанной окружности, P — центр тяжести и H — основание одной из высот этого треугольника.*

Пусть ABC — искомый треугольник. Рассмотрим конгруэнтный ему треугольник AB_1C (рис. 1). Заметим, что:

1) Прямая BB_1 параллельна прямой AC.

2) Точка B_1 лежит на окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

3) Точка B лежит на окружности с диаметром B_1H.

4) Точка пересечения медианы BM треугольника ABC с отрезком B_1H совпадает с точкой P и делит отрезок B_1H в отношении $2:1$.

Первые три свойства очевидны. Докажем четвертое свойство. Пусть отрезки BM и B_1H пересекаются в некоторой точке N. Треугольники BB_1N и MHN, очевидно, подобны. Кроме того, нетрудно установить, что $|BB_1|=2|MH|$. Отсюда следует, что $|BN|=2|NM|$ и $|B_1N|=2|NH|$. А поскольку BM — медиана треугольника ABC и точка N делит ее в отношении $2:1$, то эта точка является центром тяжести треугольника ABC, что и требовалось доказать.

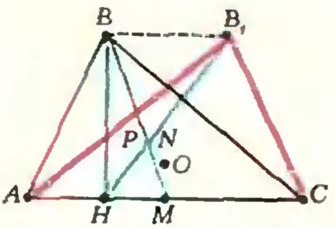


Рис. 1.

Перейдем теперь к построению треугольника ABC. Пользуясь свойством 4), построим точку B_1. Для этого проведем прямую PH и отложим от точки P отрезок PB_1, равный по длине $2|PH|$.

Проведем окружность с центром в точке O радиусом $|OB_1|$. На основании свойства 2) эта окружность будет описанной вокруг искомого треугольника ABC. В частности, на ней лежит точка B. На основании свойства 3) точка B лежит и на окружности с диаметром $|B_1H|$. Проведем эту окружность. Точками пересечения построенных окружностей будут точки B и B_1 (рис. 2).

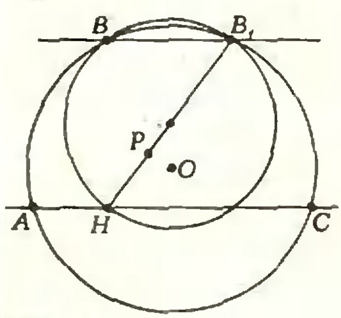


Рис. 2.

Соединим точки B и B_1 и проведем через точку H прямую, параллельную отрезку BB_1. На основании свойства 1) на этой прямой лежат точки A и C, которые являются точками ее пересечения с уже построенной окружностью, описанной вокруг треугольника ABC. Таким образом, треугольник ABC построен. Покажите самостоятельно, что по заданным трем точкам O, P и H треугольник ABC восстанавливается однозначно.

А. Савин

М352. *Пусть n — целое число, для которого*
$$n < (45+\sqrt{1975})^{30} < n+1.$$
Докажите, что n нечетно.

Заметим предварительно, что
$$45-\sqrt{1975} = \frac{45^2-1975}{45+\sqrt{1975}} = \frac{2025-1975}{45+\sqrt{1975}} = \frac{50}{45+44} = \frac{50}{89} < 1.$$

Сложим два числа:
$$\alpha = (45+\sqrt{1975})^{30} = 45^{30} + C_{30}^{1}45^{29}\sqrt{1975} + C_{30}^{2}45^{28}(\sqrt{1975})^2 + \ldots + C_{30}^{29}45(\sqrt{1975})^{29} + (\sqrt{1975})^{30}$$
и
$$\beta = (45-\sqrt{1975})^{30} = 45^{30} - C_{30}^{1}45^{29}\sqrt{1975} + C_{30}^{2}45^{28}(\sqrt{1975})^2 - \ldots - C_{30}^{29}45(\sqrt{1975})^{29} + (\sqrt{1975})^{30}.$$

Ясно, что число $\alpha+\beta$ целое и четное, а $\beta < 1$. Поэтому $n < \alpha < n+1 = \alpha+\beta$, где n нечетно. Точно так же можно доказать, что для натуральных a, b, n и m, где $a-1 < \sqrt{b} < a$, $n < (a+\sqrt{b})^m < n+1$, число n нечетно.

Н. Васильев

◆

М353. *Пусть $ABCD$ — произвольный тетраэдр. Докажите, что:*

а) сумма всех двугранных углов тетраэдра, ребрами которых являются AB, BC, CD и DA, меньше 2π;

б) сумма всех двугранных углов тетраэдра больше 2π, но меньше 3π;

в) сумма косинусов всех двугранных углов тетраэдра положительна и не превосходит 2, причем эта сумма равна 2 в том и только том случае, когда все грани тетраэдра — равные треугольники;

г) если $|AB|+|CD| = |BC|+|DA|$, то сумма двух двугранных углов, ребрами которых являются AB и CD, равна сумме двух других двугранных углов тетраэдра, ребрами которых являются BC и DA.

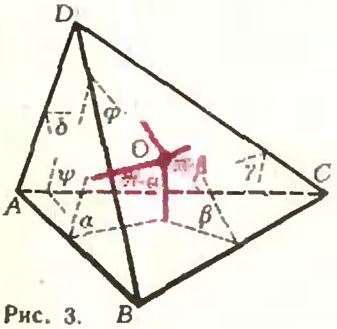


Рис. 3.

Возьмем произвольную точку внутри тетраэдра и опустим из нее перпендикуляры на грани тетраэдра (рис. 3). Тогда величина каждого двугранного угла тетраэдра дополняет до π величину угла между соответствующими перпендикулярами. Обозначим величины двугранных углов с ребрами AB, BC, CD, AD, BD и AC через α, β, γ, δ, φ и ψ; через **a**, **b**, **c** и **d** обозначим векторы, направления которых соответственно перпендикулярны граням BCD, ACD, ABD и ABC, а длины численно равны их площадям. Имеем $\widehat{(\mathbf{b},\mathbf{c})} = \pi-\delta$, $\widehat{(\mathbf{c},\mathbf{d})} = \pi-\alpha$, $\widehat{(\mathbf{a},\mathbf{d})} = \pi-\beta$, $\widehat{(\mathbf{a},\mathbf{b})} = \pi-\gamma$.

Заметим теперь, что сумма векторов **a**, **b**, **c** и **d** равна нулю. (Попытайтесь доказать это утверждение самостоятельно; мы же ограничимся лишь «физическим» объяснением этого факта. Наполним сосуд, имеющий вид нашего тетраэдра, газом; тогда направление силы давления газа на каждую грань перпендикулярно плоскости грани, а величина силы пропорциональна площади этой грани. Отсюда и следует равенство нулю суммы соответствующих векторов.) Это означает, что из векторов **a**, **b**, **c** и **d** можно составить замкнутую пространственную ломаную (рис. 4). Сумма углов получающегося пространственного четырехугольника равна как раз $\alpha+\beta+\gamma+\delta$. С другой стороны, *сумма углов пространственного четырехугольника всегда меньше 2π*. В самом деле, разобьем этот четырехугольник «диагональю» MN на два треугольника. Сумма углов этих треугольников равна 2π, а плоские углы α и γ каждого из двух трехгранных углов с вершинами M и N соответственно меньше суммы двух других их плоских углов. Отсюда и следует, что $\alpha+\beta+\gamma+\delta < 2\pi$. Аналогично доказывается, что $\alpha+\varphi+\gamma+\psi < 2\pi$ и $\beta+\varphi+\delta+\psi < 2\pi$.

Сложив эти три неравенства, получим, что $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varphi+\psi < 3\pi$. А поскольку сумма двугранных углов любого трехгранного угла больше π (возьмем, например, трехгранный угол A с углами α, δ и ψ; тогда трехгранный угол, образованный векторами **b**, **c** и **d**, имеет плоские углы $\pi-\alpha$, $\pi-\delta$, $\pi-\psi$; но $(\pi-\alpha)+(\pi-\delta)+(\pi-\psi) < 2\pi$, откуда $\alpha+\delta+\psi > \pi$), сумма всех двугранных углов тетраэдра больше 2π, чем завершено доказательство пункта *б*).

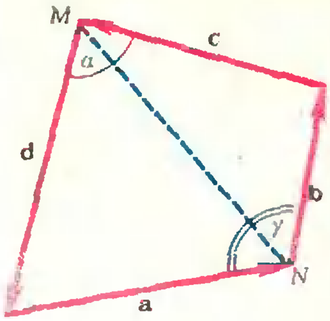


Рис. 4.

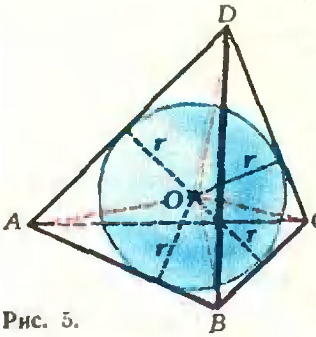


Рис. 5.

Для доказательства пункта в) воспользуемся понятием *скалярного произведения векторов*: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})$ (его свойства см. на с. 21). Из определения следует, что произведение единичных векторов равно косинусу угла между ними. Обозначим через $\mathbf{e_a}$, $\mathbf{e_b}$, $\mathbf{e_c}$ и $\mathbf{e_d}$ единичные векторы, имеющие те же направления, что и векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ соответственно. Легко видеть, что

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta + \cos\varphi + \cos\psi =$$
$$= -\frac{1}{2}\left((\mathbf{e_a}+\mathbf{e_b}+\mathbf{e_c}+\mathbf{e_d})\cdot(\mathbf{e_a}+\mathbf{e_b}+\mathbf{e_c}+\mathbf{e_d})\right) + 2 =$$
$$= -\frac{1}{2}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} + 2 = -\frac{|\mathbf{k}|^2}{2} + 2, \qquad (1)$$

где $\mathbf{k} = \mathbf{e_a} + \mathbf{e_b} + \mathbf{e_c} + \mathbf{e_d}$.

Из равенства (1) следует, что сумма косинусов двугранных углов тетраэдра не превосходит 2 и равна 2 тогда и только тогда, когда $\mathbf{k} = \mathbf{e_a} + \mathbf{e_b} + \mathbf{e_c} + \mathbf{e_d} = 0$. Но поскольку всегда $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = 0$, в случае $\mathbf{k} = 0$ мы получаем, что длины векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ равны, т. е. что все грани равновелики. Из равновеликости граней тетраэдра следует их конгруэнтность (см. решение задачи М319, «Квант», 1975, № 12). Поэтому для завершения доказательства утверждений пункта в) осталось показать, что написанная в левой части равенства (1) сумма косинусов положительна, или что $|\mathbf{k}| < 2$.

Для удобства будем считать, что $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| \leqslant 1$, $|\mathbf{c}| \leqslant 1$ и $|\mathbf{d}| \leqslant 1$. Тогда $\mathbf{e_a} = \mathbf{a}$, $|\mathbf{k}| = |\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d} + (\mathbf{e_b}-\mathbf{b}) + (\mathbf{e_c}-\mathbf{c}) + (\mathbf{e_d}-\mathbf{d})| \leqslant |\mathbf{e_b}-\mathbf{b}| + |\mathbf{e_c}-\mathbf{c}| + |\mathbf{e_d}-\mathbf{d}| = 3 - |\mathbf{b}| - |\mathbf{c}| - |\mathbf{d}| \leqslant 3 - |\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}| = 3 - |\mathbf{a}| = 2$. Равенство может иметь место лишь в том случае, когда все векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ коллинеарны; поскольку это не так, $|\mathbf{k}| < 2$, и все утверждения пункта в) доказаны.

Для доказательства пункта г) заметим, что условие $|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$ является необходимым и достаточным для существования шара, касающегося ребер AB, BC, CD и DA (доказательство этого факта совершенно аналогично доказательству необходимости и достаточности условия $|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$ для того, чтобы вокруг плоского четырехугольника $ABCD$ можно было бы описать окружность). Пусть O — центр этого шара (предположим, что точка O в н у т р и тетраэдра). Имеем (рис. 5):

$$(\widehat{пл.\ OAB,\ пл.\ ABC}) = (\widehat{пл.\ OBC,\ пл.\ ABC}),$$
$$(\widehat{пл.\ OAB,\ пл.\ ABD}) = (\widehat{пл.\ OAD,\ пл.\ ABD}),$$
$$(\widehat{пл.\ ODC,\ пл.\ BCD}) = (\widehat{пл.\ OBC,\ пл.\ BCD}),$$
$$(\widehat{пл.\ ODC,\ пл.\ ACD}) = (\widehat{пл.\ OAD,\ пл.\ ACD}).$$

Сложив эти равенства, получаем утверждение г).

Случай, когда точка O вне тетраэдра, рассматривается аналогично.

И. Шарыгин

◆

Ф358. *Неоднородный стержень длины l может стоять у вертикальной стены, образуя угол не менее 45° с полом. Коэффициент трения*

Силы, действующие на неоднородный стержень, опирающийся на пол и вертикальную стену, изображены на рисунке 6. Здесь $\mathbf{N_1}$ и $\mathbf{N_2}$ — силы нормальной реакции пола и стены, $\mathbf{F_1}$ и $\mathbf{F_2}$ — силы сухого трения о пол и стену, mg — сила тяжести стержня. Направления сил $\mathbf{F_1}$ и $\mathbf{F_2}$ очевидны —

стержня о пол и о стену равен $1/\sqrt{3}$. На какой высоте находится центр тяжести стержня?

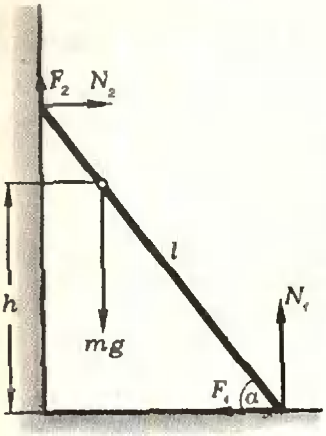


Рис. 6.

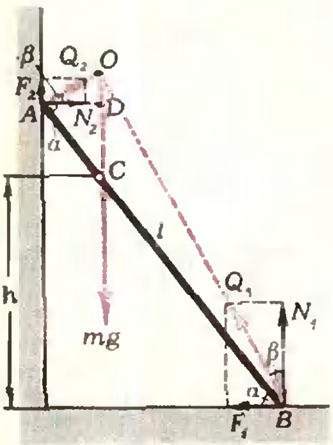


Рис. 7.

они должны препятствовать вращению стержня против часовой стрелки. Поэтому эти силы направлены так, как показано на рисунке 6. Будем считать, что сила тяжести стержня mg приложена в точке, находящейся на искомой высоте h.

Для того чтобы тело находилось в равновесии, необходимо, чтобы сумма проекций всех приложенных к телу сил на любое направление и сумма моментов этих сил относительно любой неподвижной оси были равны нулю. Запишем условия равновесия для проекций сил на горизонтальное и вертикальное направления и для моментов сил относительно оси, проходящей через нижнюю точку стержня перпендикулярно к плоскости рисунка:

$$N_2 - F_1 = 0, \tag{1}$$

$$F_2 + N_1 - mg = 0, \tag{2}$$

$$mgh \operatorname{ctg}\alpha - F_2 l \cos\alpha - N_2 l \sin\alpha = 0. \tag{3}$$

В случае покоя абсолютные величины сил сухого трения связаны с абсолютными величинами сил нормального давления следующими неравенствами:

$$F_1 \leqslant \mu N_1, \; F_2 \leqslant \mu N_2,$$

где $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ — коэффициент трения стержня о пол и о стену. Для предельного случая, когда $\alpha = 45°$,

$$F_1 = \mu N_1 \text{ и } F_2 = \mu N_2. \tag{4}$$

Из равенств (1)—(4) получаем

$$h = l\,\frac{\mu(\mu + \operatorname{tg}\alpha)\sin\alpha}{\mu^2+1} = \frac{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})}{8}\,l \approx 0{,}48\,l.$$

(Если же $\mu = \sqrt{3}$, как было ошибочно указано в условии задачи, то $h = (3+\sqrt{3})\sqrt{2}\dfrac{l}{8} \approx 0{,}84\,l$, между тем как верхний конец стержня расположен на высоте $H = l\dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71\,l$.)

Данную задачу можно решить проще, если воспользоваться «правилом трех сил». Это правило заключается в том, что при равновесии тела, к которому приложены три силы, лежащие в одной плоскости, линии действия этих сил должны пересекаться в одной точке. В противном случае суммарный момент этих сил относительно любой оси, перпендикулярной к упомянутой плоскости, будет отличен от нуля, и тело не будет в равновесии.

Тремя силами, действующими на стержень, являются силы $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{N}_1$, $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{F}_2 + \mathbf{N}_2$ и сила тяжести mg. Вектор $\mathbf{Q}_1$ направлен под углом $\beta \leqslant \operatorname{arctg}\mu$ к вектору $\mathbf{N}_1$ (рис. 7). Вектор $\mathbf{Q}_2$ составляет такой же угол с вектором $\mathbf{N}_2$, т. е. векторы $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ перпендикулярны друг другу. В предельном случае $\beta = \operatorname{arctg}\mu$. Из рисунка 7 видно, что $h = (AB - AC)\sin\alpha$. Но $AC = AD/\cos\alpha = AO\cos\beta/\cos\alpha = AB\cos(\alpha+\beta)\cos\beta/\cos\alpha$. Тогда

$$h = AB\sin\alpha - AB\cos(\alpha+\beta)\cos\beta\operatorname{tg}\alpha = l\sin\alpha\sin\beta(\sin\beta + \operatorname{tg}\alpha\cos\beta).$$

Подставляя $\alpha = 45°$ и $\beta = \operatorname{arctg}\mu = 30°$, получаем тот же ответ: $h = \dfrac{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})}{8}\,l \approx 0{,}48\,l$.

Ф359. *В цилиндрическом сосуде под поршнем находится насыщенный водяной пар при температуре $t = 20$ °C. При изотермическом медленном вдвигании поршня в цилиндр было отведено количество тепла $Q = 20$ ккал. Какая работа была совершена при этом внешними силами, действующими на поршень?*

При медленном вдвигании поршня в цилиндрический сосуд насыщенный пар конденсируется. Чтобы процесс был изотермическим, выделяющееся при конденсации количество теплоты необходимо отводить. Если первоначально масса водяного пара в сосуде была m_1, а затем m_2, то количество выделившейся теплоты

$$Q = L(m_1 - m_2),$$

где $L = 539$ *ккал/кг* — удельная теплота парообразования воды.

Известная из таблиц величина L получена опытным путем, при этом испарение воды производится в условиях постоянного давления. Следовательно, потребленное количество теплоты равно сумме приращения внутренней (потенциальной) энергии воды и работы расширения водяного пара. При конденсации пара такое же количество теплоты выделится.

Массу пара в сосуде можно выразить через его объем с помощью уравнения Менделеева — Клапейрона:

$$m_1 = \frac{p\mu}{RT}V_1, \quad m_2 = \frac{p\mu}{RT}V_2.$$

Здесь p — давление насыщенного пара при температуре $T = 293$ °K ($t = 20$ °C), V_1 и V_2 — соответственно первоначальный и последующий объемы сосуда, $\mu = 0{,}018$ *кг/моль* — молярная масса водяного пара. Таким образом,

$$Q = \frac{p\mu L}{RT}(V_1 - V_2). \qquad (1)$$

Работа, совершенная над паром внешними силами,

$$A = p(V_1 - V_2). \qquad (2)$$

Решая систему уравнений (1) и (2), получаем

$$A = \frac{QRT}{L\mu} \approx 5020 \text{ дж}.$$

◆

Ф360. *Для измерения ускорения используется изогнутая трубка, заполненная водой, в которой имеется пузырек воздуха (рис. 8). Трубка изогнута по дуге окружности. Как связано положение пузырька с ускорением трубки?*

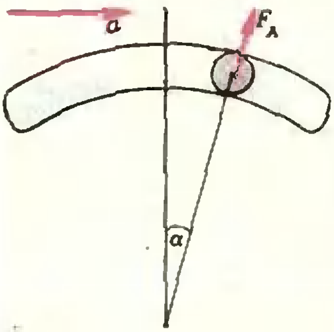


Рис. 8.

Внутри трубки, изогнутой по дуге окружности и заполненной водой, пузырек воздуха будет перемещаться до тех пор, пока касательная к трубке составляющая силы Архимеда не станет равной нулю (силой тяжести воздушного пузырька мы пренебрегаем).

Сила Архимеда представляет собой результирующую сил давления, приложенных к телу, находящемуся в жидкости. Следовательно, эта сила всегда направлена перпендикулярно к поверхностям равного давления, в сторону уменьшения давления. Чтобы найти поверхности равного давления, рассмотрим несколько иную задачу. Пусть сосуд прямоугольного сечения движется с постоянным ускорением a (рис. 9). Покажем, что в этом случае поверхности равного давления, а значит и поверхность жидкости в сосуде, представляют собой плоскости, составляющие угол $\alpha = \operatorname{arctg}(a/g)$ с горизонтом.

Выделим в жидкости два очень тонких столбика жидкости AC и CB таких, что точки A и B лежат на линии, наклоненной к горизонту под углом α. Сравним давления в точках A и B. Для этого запишем второй закон Ньютона для столбика AC в проекции на вертикальную ось, а для столбика CB — в проекции на горизонтальную ось:

$$p_C S - \rho g h S - p_A S = 0,$$
$$p_C S - p_B S = \rho l S a.$$

Здесь p_A, p_B, p_C — давления в соответствующих точках, S — площадь поперечного сечения каждого из столбиков, h — высота столбика AC, l — длина столбика CB. С учетом того, что $\operatorname{tg}\alpha = h/l = a/g$, получаем

$$p_A = p_B.$$

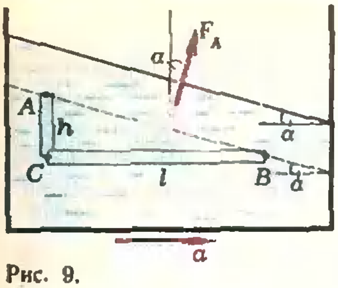


Рис. 9.

Таким образом, сила Архимеда, перпендикулярная к поверхностям равного давления, составляет с вертикалью угол $\alpha = \operatorname{arctg}(a/g)$ (см. рис. 9).

В изогнутой трубке поверхности равного давления расположены так же. Поэтому пузырек будет покоиться относительно трубки, когда касательная к ней составляющая силы Архимеда станет равной нулю. Окончательное положение пузырька показано на рисунке 8, где

$$\alpha = \operatorname{arctg}(a/g).$$

♦

Ф361. Прямолинейный проводник длины l и массы m подвешен на двух пружинах жесткости k в горизонтальном однородном магнитном поле с индукцией B (рис. 10). При замыкании ключа K конденсатор емкости C, заряженный до разности потенциалов U, замыкается на проводник и разряжается. При этом возникают колебания проводника. Определить амплитуду этих колебаний, если время разряда конденсатора много меньше периода колебаний проводника.

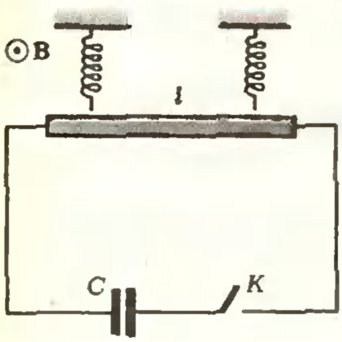


Рис. 10.

При протекании тока I по проводнику длины l, находящемуся в магнитном поле с индукцией B, на проводник действует сила $F = IBl$, направленная в нашем случае вверх или вниз. За малый промежуток времени Δt, в течение которого ток можно считать приблизительно постоянным, на проводник действует импульс силы

$$F\,\Delta t = IBl\,\Delta t = Bl\,\Delta q,$$

где $\Delta q = I\Delta t$ — заряд, протекший по проводнику за тот же малый промежуток времени. Импульс силы изменяет количество движения (импульс) проводника на величину

$$\Delta p = m\,\Delta v = F\,\Delta t = Bl\,\Delta q.$$

За все время протекания тока, т. е. за время разрядки конденсатора, проводник приобретает импульс

$$p = mv = \Sigma\, m\,\Delta v = \Sigma\, Bl\,\Delta q = Blq.$$

Здесь $q = CU$ — общий заряд, прошедший через поперечное сечение проводника (заряд конденсатора).

По условию задачи импульс p проводник получает за такое короткое время, что его смещением за это время можно пренебречь. Силы натяжения пружин также остаются неизменными и уравновешивают силу тяжести проводника. Следовательно, за время начального толчка работой всех сил, кроме электрической силы F, можно пренебречь. Все последующее движение определяется состоянием системы в конце толчка. Такой режим движения обычно называют баллистическим (известны, например, баллистический маятник, баллистический гальванометр и т. п.).

Проводник на пружинах представляет собой пружинный маятник. Считая его исходное положение за положение равновесия с нулевой потенциальной энергией, запишем закон сохранения энергии для начального состояния и состояния наибольшего отклонения при колебаниях с амплитудой A:

$$\frac{mv^2}{2} = 2\,\frac{kA^2}{2}.$$

Это уравнение совместно с уравнением

$$mv = BlCU$$

определяет амплитуду колебаний:

$$A = \frac{BlCU}{\sqrt{2km}}.$$

Б. Буховцев

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М346—М355, Ф353—Ф362. Жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач.

Математика

Мы не включали в список фамилии читателей, правильно решивших задачи **М346**, **М348**, **М351**, **М355** а), б), в), г). Остальные задачи правильно решили: *А. Алексеев* (Пермь) **9а), б), 0а), 2, 4**; *О. Аполонский* (Жуковский) **9а)**; *Б. Аронов* (Саратов) **4**; *Ю. Атласкин* (д. Хорной Чув. АССР) **4**; *Г. Атоян* (Чаренцаван) **2, 4**; *О. Бабаев* (Нахичевань) **4**; *М. Берелович* (Одесса) **4**; *П. Билер* (ПНР) **2, 4, 5д)**; *О. Болтенков* (Днепропетровск) **9а)**; *В. Бондаренко* (Тростянец) **4**; *В. Бугаенко* (Киев) **7**; *Ю. Булавский* (Новосибирск) **9а), б)**; *И. Вайсбурд* (Томск) **7**; *В. Варин* (Воронеж) **9а), б), 4**; *А. Варламов* (Ленинград) **9а), б)**; *А. Ворович* (Москва) **9а)**; *А. Гадельшин* (д. Байряки Тат. АССР) **4**; *К. Гаджиев* (с. Ганшима Даг. АССР) **4**; *А. Гарнаев* (Таллин) **4**; *М. Гедалин* (Тбилиси) **0а),б)**; *Р. Геворкян* (Ереван) **9а)**; *В. Гензер* (Киев) **4**; *Гибадуллин* (Бугульма) **9а), б)**; *Р. Гиязов* (Навои) **9а), б), 4**; *И. Гладков* (Баку) **9а), б)**; *О. Годин* (Симферополь) **9а), б)**; *А. Гончаров* (Никополь) **9а), б), в), 0а), б)**; *М. Григорьев* (Новосибирск) **2, 4**; *С. Гришин* (Рыбное) **9а), б)**; *В. Гроссман* (Одесса) **0а), б), 2**; *В. Гусейнов* (Нахичевань) **7, 9а), б), 0а), б), 4**; *А. Данилов* (Шумерля) **9а), б), 4**; *В. Деркачев* (Усть-Каменогорск) **9а), б)**; *В. Ерпылев* (Ашхабад) **7, 9а), б)**; *Р. Измайлов* (Баку) **4**; *Ю. Исат* (Даугавпилс) **4**; *И. Калика* (Киев) **9а), б), 0а), 2, 4, 5д)**; *А. Камалян* (Иджеван) **7, 4**; *Ю. и Я. Камень* (Днепропетровск) **9а)**; *Б. Каплан* (Киев) **9а), б), 2, 3б), 4**; *В. Карташев* (Елец) **4**; *В. Качалов* (Харцызск) **9а), б)**; *В. Ким* (Фрунзе) **9а), б)**; *А. Князюк* (Киев) **2, 3б), г), 4, 5д)**; *С. Козявкин* (Киев) **2, 4, 5д)**; *Д. Копелиович* (Челябинск) **9а**; *Н. Крайнюков* (Куйбышев) **2**; *К. Купалов-Ярополк* (Москва) **7, 9а)**; *В. Купцов* (Аша) **0а), 2**; *Ш. Кухалейшвили* (Тбилиси) **4, 5д)**; *А. Лалаян* (Красноводск) **4**; *Я. Ланцман* (Ташкент) **2**; *Р. Леманн* (ГДР) **2**; *В. Липкин* (Москва) **7, 9а), б), 0а), 2, 4, 5д)**; *Л. Лисничук* (Васильков) **7, 9а), б)**; *С. Лифиц* (Харьков) **7, 9а), б)**; *К. Лукаш* (Свердловск) **9а)**; *И. Малинин* (Киев) **9а), б), 4**; *А. Малышев* (пос. Курагино Красноярского края) **9а), б), 0а), б), 4**; *Г. Мамедов* (Баку) **2, 4**; *В. Медведь* (Молодечно) **9а), б), 4**; *М. Меладзе* (Тбилиси) **9а)**; *М. Морайнэ* (ПНР) **7, 9а), б), 2, 4**; *И. Морозов* (Горький) **9а), б), 4**; *Ф. Мурсакулиев* (Сиазань) **9а), б), в)**; *В. Нейман* (Ленинград) **7, 0а), б)**; *А. Ненашев* (Ленинград) **4**; *О. Окунев* (Казань) **7, 9а), б)**; *А. Османов* (с. Демурло ГрССР) **2**; *В. Палей* (Харьков) **7**; *Н. Панкратьев* (Москва) **0а)**; *Д. Папуш* (Харьков) **7, 9а), б), 4**; *М. Пекарь* (Одесса) **4**; *А. Перфилов* (Воронеж) **9а)**; *А. Петухов* (Новокузнецк) **9а), 4**; *С. Пискун* (Киев) **9а), б)**; *М. Питателев* (Москва) **9а), б)**; *П. Побылица* (Ленинград) **4**; *С. Попов* (Москва) **9а), 0а), 2**; *С. Пославский* (Харьков) **7, 0а), б), 4**; *Ю. Пошехонов* (Энгельс) **7, 0а), б), 4**; *А. Радул* (Кишинев) **4, 5д)**; *В. Решетов* (Троицк) **2**; *А. Родников* (Москва) **4**; *В. Розенбаум* (Курган) **7**; *А. Романов* (Ташкент) **9а), б), 2, 4**; *Р. Романов* (Москва) **9а)**; *С. Самилянов* (Бар) **9б)**; *С. Сергеев* (Минск) **9а), б)**; *Е. Синельщикова* (Ленинград) **2, 5д)**; *М. Ситников* (Москва) **9а), 0а)**; *А. Смирнов* (Москва) **0а), б)**; *В. Смирнов* (Уфа) **9а), б)**; *М. Стойков* (Москва) **9а)**; *А. Таекин* (Волгоград) **7**; *Д. Татария* (Тбилиси) **4**; *С. Трегуб* (Ташкент) **0а), б), 2, 4, 5д)**; *Н. Тренев* (Москва) **7**; *В. Трофимов* (Москва) **4**; *В. Угриновский* (Хмельник) **2**; *В. Фальков* (Харьков) **7, 9а), б)**; *Ю. Философов* (Саратов) **9а), б)**; *Д. Флаасс* (Новосибирск) **9а), 0а)**; *С. Флоря* (Сату-Ноу) **2**; *Д. Чирадзе* (Тбилиси) **2, 4, 5д)**; *А. Шенкерь* (Киев) **3б)**; *В. Шпильрайн* (Москва) **4, 5д)**; *С. Шполянский* (Воронеж) **4**; *В. Штепин* (Москва) **7, 4**; *В. Шубин* (Пермь) **9а), б), в), 0а), б), 4**; *С. Эминов* (с. Джиниси ГрССР) **2**; *Б. Яцало* (с. Морочно Ровенской обл.) **2**.

Физика

Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф353 — Ф362**, справились с задачами **Ф354**, **Ф355** и **Ф357**. Остальные задачи правильно решили: *Х. Абдуллин* (Алма-Ата) **3, 9, 0, 2**; *С. Аванесян* (Степанакерт) **9**; *А. Алмазов* (Пушкин) **3, 6, 8—0**; *А. Алексеев* (Днепропетровск) **3**; *В. Адоменас* (Москва) **8**; *Г. Айзин* (Брест) **9—2**; *С. Антонюк* (Киев) **8, 9**; *М. Аронов* (Володарск) **3, 6, 8—2**; *И. Астров* (Таллин) **8, 1, 2**; *Р. Ахметзянов* (Николаев) **8**; *М. Бабаев* (Баку) **8**; *Ф. Багдасарян* (Баку) **8, 9**; *В. Бакиров* (Куйбышев) **8—2**; *С. Балашов* (Москва) **8**; *Ю. Балашов* (Москва) **8**; *М. Барташевич* (Свердловск) **9**; *О. Баркалов* (п. Черноголовка Московской обл.) **6**; *Т. Бейко* (Киев) **8—1**; *Г. Бетин* (Генический р-н Херсонской обл.) **6, 0**; *О. Болтенков* (Днепропетровск) **8, 9**; *В. Бурсиан* (Ленинград) **3, 6**; *В. Буртовой* (Килия) **6, 9, 0, 2**; *В. Вайчайтис* (Куршенай) **0—2**; *Б. Васиев* (Самарканд) **6, 9—1**; *А. Вечер* (Минск) **3**; *Б. Виноградова* (Великие Луки) **8—0, 2**; *Н. Высекарко* (п/о Лешия Минской обл.) **2**; *В. Гаркавый* (Лида) **6**; *В. Гармаш* (Запорожье) **1**; *М. Гедалин* (Тбилиси) **3, 6, 8—2**; *А. Гейм* (Нальчик) **3**; *А. Гетман* (Моздок) **3**; *И. Гиззатуллин* (д. Старый Ашит ТАССР) **8**; *О. Годин* (Симферополь) **6, 8—2**; *Ю. Гоник* (Брянск) **6, 8—2**; *Г. Горлачев* (Белорецк) **2**; *Б. Грибов* (Воронеж) **8**; *А. Грищук* (Дрогичин) **9**; *А. Давыденко* (Таллин) **6, 0**; *Д. Данильчин* (Рязань) **3, 6**;

(Окончание см. на с. 64)

Варианты вступительных экзаменов

Донецкий государственный университет

В 1965 году в столице индустриального Донбасса был основан научный центр АН УССР, в состав которого вошли ряд научно-исследовательских институтов и университет. За 10 лет существования Донецкий государственный университет (ДонГУ) стал одним из крупнейших вузов Украины. В настоящее время на девяти факультетах ДонГУ готовятся специалисты высшей квалификации для народного хозяйства, научных учреждений, высшей и средней школы по специальностям: математика, прикладная математика, физика, техническая кибернетика, химия, биология, экономическая кибернетика, биология, физиология растений и животных, планирование народного хозяйства и др.

Самым крупным факультетом ДонГУ является математический. В его составе 7 кафедр, которые готовят специалистов по теории вероятностей и математической статистике, теории функций и функциональному анализу, дифференциальным уравнениям, вычислительной математике, теории упругости, теоретической и прикладной механике, математическому обеспечению АСУ.

Важное место в подготовке математиков занимает приобретение навыков работы с вычислительной техникой. Все выпускники факультета подготовлены к работе на современных ЭВМ. Этому способствует хорошая математическая база университета: вычислительный центр ДонГУ является крупнейшим на Украине.

Около 75% выпускников факультета направляются на работу в научные учреждения, вычислительные центры, на предприятия, остальные — преподавателями средних школ, профтехучилищ, техникумов, вузов. В июле при ДонГУ работают месячные подготовительные курсы для рабочей и сельской молодежи, читаются обзорные лекции по математике для всех абитуриентов.

В университете работает также подготовительное отделение для рабочей и сельской молодежи.

Ниже приводятся варианты письменного вступительного экзамена по математике на ряд специальностей в 1975 году.

Вариант 1
(специальность — прикладная математика)

1. В шар радиуса R вписана правильная треугольная пирамида с двугранным углом при боковом ребре 2α. Найти объем пирамиды.

2. Решить уравнение

$$\sqrt[n]{(x+1)^2}+4\sqrt[n]{(x-1)^2}=4\sqrt[n]{x^2-1}.$$

3. Решить уравнение

$$\cos^4 x+\sin^4 x-2\sin 2x+\frac{3}{4}\sin^2 2x=0.$$

4. Решить неравенство

$$\log_{x-2}(x^2-8x+15)>0.$$

5 Сосуд в 20 *л* наполнен спиртом. Из него выливают некоторое количество спирта в другой, равный ему, и, дополнив остальную часть водой, дополняют этой смесью первый сосуд. Затем из первого отливают $6\frac{2}{3}$ *л* во второй, после чего в обоих сосудах содержится одинаковое количество спирта. Сколько отлито первоначально спирта из первого сосуда во второй?

Вариант 2
(специальность — математика)

1. Велосипедист отправляется с некоторой скоростью из пункта A в B, отстоящий от A на расстоянии 60 *км*. Затем он выезжает обратно с той же скоростью, но через один час после выезда он делает остановку на 20 *мин*. После этого он продолжает путь, увеличив скорость на 4 *км/час*. В каких границах заключена скорость велосипедиста, если известно, что на обратный путь от B до A он потратил времени не более, чем от A до B?

2. В правильной треугольной пирамиде угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен α. Определить двугранный угол при боковом ребре.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy(x+y)=30, \\ x^3+y^3=35. \end{cases}$$

4. Решить уравнение

$$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=2.$$

5. Решить уравнение

$$\lg\sqrt{1+x}+3\lg\sqrt{1-x}=\lg\sqrt{1-x^2}+2.$$

Вариант 3
(специальность — биохимия)

1. Из точки A плоскости M проведена наклонная AD под углом α к плоскости; через AD проведена плоскость P под углом β к плоскости M. Определить угол между AD и линией пересечения плоскостей M и P.

2. Турист отправляется в поход из A в B и обратно и проходит весь путь за 3 *час* 41 *мин*. Дорога из A в B идет сначала в гору, потом по ровному месту, а затем под гору. На каком протяжении дорога тянется по ровному месту, если скорость ходьбы туриста составляет: в гору 4 *км/час*, по ровному месту 5 *км/час* и под гору 6 *км/час*, а расстояние AB равно 9 *км*?

3. При каких значениях x функция

$$y=\sin x-\cos x$$

принимает наибольшее значение? Найти это наибольшее значение.

4. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$. Не решая уравнения, выразить через его коэффициенты величину

$$\frac{1}{x_1^4}+\frac{1}{x_2^4}.$$

5. Решить уравнение

$$\lg 8+4\lg 2=\lg 3-\lg 12+\lg 2^{3x^2-20x+2}.$$

Вариант 4
(специальность — экономическая кибернетика)

1. Прямой круговой конус рассечен на две части, равные по объему, плоскостью, проходящей через центр вписанного шара перпендикулярно оси. Вычислить угол между образующей и плоскостью основания.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{6x}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{6x}}=\dfrac{5}{2},\\ xy-x-y=0.\end{cases}$$

3. При каких значениях x верно равенство

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1},$$

где $0<\varphi<45°$?

4. Решить уравнение

$$\lg(x-9)+2\lg\sqrt{2x-1}=2.$$

5. Решить уравнение

$$\sqrt{2}\cos 13x=\cos 5x+\sin 5x.$$

Я. Бродский, А. Слипенко

Московский институт управления им. С. Орджоникидзе

В практической деятельности человеку постоянно приходится решать разнообразные задачи, связанные с принятием решений, и каждый раз человек старается из всех возможных решений выбрать оптимальное, наиболее выгодное, часто опираясь на здравый смысл и имеющийся у него опыт. Анализ хозяйственных ситуаций и принятие решений составляет основное содержание труда руководителей производства всех рангов, и увеличение масштабов производства, его усложнение приводит к повышению ответственности за принимаемые решения. Этим объясняется необходимость создания научных методов оценки принимаемых решений и подготовки кадров организаторов производства на всех уровнях.

В последние десятилетия бурно развивается новая область прикладной математики — математическая экономика. Потребность в специалистах по применению ЭВМ и экономико-математических методов в управлении социалистической экономикой растет из года в год. Первым в нашей стране высшим учебным заведением, специализированным на подготовке управленческих кадров для различных отраслей народного хозяйства, является Московский институт управления им. С. Орджоникидзе. Мы расскажем об одном из факультетов этого института — факультете экономической кибернетики (ФЭК).

Формирование кибернетики относят к сороковым годам нашего столетия. Молод и факультет экономической кибернетики МИУ, он организован в 1969 году. В настоящее время ФЭК является ведущим факультетом института, на нем обучается 600 студентов. Будущие специалисты изучают экономическую кибернетику, научные основы управления производством, автоматизированные системы управления, теорию систем, теорию информации, математическое программирование и теорию игр, исследование операций, традиционные экономические дисциплины, основы программирования на ЭВМ. Вычислительный центр института оснащен современными ЭВМ второго и третьего поколения.

На факультете активно функционирует студенческое научное общество, научные кружки, студенческие технико-экономические бюро, работая в которых, студенты совместно с преподавателями участвуют в создании более совершенных систем управления предприятиями и отраслями народного хозяйства, разрабатывают математические модели производства, потребления и экологии. Регулярно проводятся студенческие научные конференции.

Ниже приводятся варианты вступительного письменного экзамена по математике в МИУ в 1975 году.

Вариант 1

1. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза $AB = a, \sphericalangle A = \alpha$. Найти радиус окружности, касающейся катета AC, гипотенузы AB и окружности, описанной около треугольника ABC.

2. Решить уравнение

$$4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6.$$

3. Решить неравенство ($a > 1$)

$$\log_a^2 (x^{\sqrt{x}}) > \log_a (a^{4x}\cdot x^{3x}).$$

4. Решить уравнение

$$(\sin 2x+3)\sin^4 x-(\sin 2x+3)\sin^2 x+1=0.$$

5. Найти отношение двух чисел, если отношение их среднего геометрического к среднему арифметическому равно $^3/_5$.

Вариант 2

1. Внутри угла α взята точка M. Ее проекции P и Q на стороны угла удалены от вершины на расстояния $OP = p$ и $OQ = q$. Найти MP и MQ.

2. Решить уравнение

$$\log_x (125x)\cdot \log_{25}^2 x = 1.$$

3. Решить неравенство

$$|x^2 - |x| + 3| < 5.$$

4. Решить уравнение

$$\sec x = 4 \sin x + 6 \cos x.$$

5. Доказать, что если $a > 0$, $b > 0$, то

$$\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \leqslant \sqrt[4]{ab}.$$

В. Машурцев, И. Шарыгин

Московский институт электронного машиностроения

Подробно о Московском институте электронного машиностроения мы рассказывали в «Кванте» № 7 за 1973 год. В этом номере мы приводим варианты вступительного письменного экзамена по математике в МИЭМ в 1975 году.

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$3^{x \lg 5-1} - \frac{2}{3} = |5^{x \lg 3+1} - 24|.$$

2. Произведение третьего и шестого членов арифметической прогрессии с положительными членами равно 13,5, а сумма четвертого и пятого членов равна 7,5. Найти эту прогрессию. Определить также наименьшее возможное значение указанной суммы для всех арифметических прогрессий с положительными членами, у которых произведение третьего и шестого членов равно 13,5.

3. В правильной четырехугольной пирамиде, у которой высота H составляет с боковым ребром угол α, через диагональ основания проведена плоскость под углом β к плоскости основания. Определить площадь сечения.

4. Решить уравнение

$$\frac{a \sin x - 2}{a - 2\cos x} = \frac{a\cos x - 2}{a - 2\sin x}$$

и определить число его корней на отрезке $[20\pi,\ 29\pi]$.

5. Решить систему

$$\begin{cases} x - y = 10a, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{a^2-25} \end{cases}$$

и доказать, что при любом целом $a \neq \pm 5$, $a \neq 0$ система имеет два решения (x_1, y_1) и (x_2, y_2) таких, что произведение $x_1x_2y_1y_2$ является целым кратным 900.

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$\log_3 (1 - x) < \log_{\frac{1}{3}} (x + 2).$$

2. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 2α. В каком отношении делится объем конуса плоскостью, проведенной через окружность касания вписанного в этот конус шара с боковой поверхностью конуса?

3. Число 150 разделили с остатком на некоторое целое положительное число. Затем к делителю прибавили 2 и разделили 151 с остатком на новый делитель. Оказалось, что второе частное на 5 меньше первого. Чему равен первоначальный делитель?

4. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{2\sin x + 1}{-\cos x - 2}} = \sqrt{\frac{2\cos x + 1}{-\sin x - 2}}.$$

5. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a+3} - \dfrac{y}{a+2} + 1 = 0, \\ \dfrac{y}{x} - \dfrac{2}{y-2} = 1 \end{cases}$$

($a > 0$) и доказать, что если a — целое число, то для каждого из решений (x, y) данной системы число $1 + xy$ является квадратом целого числа. Верно ли обратное утверждение?

В. Тонян

Белорусский институт инженеров железнодорожного транспорта

Белорусский институт инженеров железнодорожного транспорта располагает всеми условиями для подготовки высококвалифицированных инженеров путей сообщения и строительства. В институте 97 лабораторий и кабинетов, оснащенных современным оборудованием, вычислительный центр с современными электронными вычислительными машинами, учебная и научно-техническая библиотека с фондом около 500 тыс. книг. Институт находится в Гомеле — одном из красивейших городов Белоруссии.

В институте имеется пять факультетов дневного обучения: механический факультет со специальностями «тепловозы и тепловозное хозяйство» (проектирование, эксплуатация и ремонт тепловозов и сооружений локомотивного хозяйства), «вагоностроение и вагонное хозяйство» (проектирование, постройка и эксплуатация вагонов и сооружений вагонного хозяйства); электротехнический факультет со специальностями «автоматика, телемеханика и связь на железнодорожном транспорте» (проектирование, сооружение и эксплуатация устройств автоматики и телемеханики), «системы передачи информации» (проектирование, сооружение и эксплуатация устройств связи и систем передачи информации на железнодорожном транспорте); эксплуатационный факультет со специальностью «эксплуатация железных дорог» (организация движения поездов, проектирование станций и узлов, коммерческая и грузовая работа); строительный факультет со специальностью «строительство железных дорог, путь и путевое хозяйство» (изыскания, проектирование, постройка и содержание железнодорожного пути и сооружений), факультет промышленного и гражданского строительства со специальностью «проектирование и строительство промышленных и гражданских зданий и сооружений».

Вечерний факультет готовит инженеров по специальностям: «тепловозы и тепловозное хозяйство», «вагоностроение и вагонное хозяйство», «автоматика и телемеханика на железнодорожном транспорте», «промышленное и гражданское строительство»

Заочный факультет готовит инженеров по специальностям: «тепловозы и тепловозное хозяйство», «автоматика, телемеханика и связь на железнодорожном транспорте», «вагоностроение и вагонное хозяйство», «эксплуатация железных дорог», «строительство железных дорог, путь и путевое хозяйство», «экономика и организация железнодорожного транспорта», «промышленное и гражданское строительство».

Срок обучения в институте: на дневных факультетах — 5 лет, на вечернем и заочном — 6 лет.

Окончившие институт получают квалификацию инженеров соответствующей специальности и работают на предприятиях железнодорожного транспорта, строительства, в проектных и научно-исследовательских организациях.

При институте работает подготовительное отделение. С 1 июля функционируют 4-недельные подготовительные курсы.

Ниже приведены варианты письменного экзамена по математике и задачи устного экзамена по физике в БелИИЖТе в 1975 году.

Математика

Вариант 1

1. Основанием пирамиды служит прямоугольник. Две смежные боковые грани перпендикулярны к основанию, а две другие образуют углы α и β. Высота пирамиды h. Определить площадь боковой поверхности.

2. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=3\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right).$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4^{x+y}=2^{y-x}, \\ 4^{\log_{\sqrt{2}} x}=y^4-5. \end{cases}$$

4. Упростить выражение

$$\frac{4x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^4-1}.$$

Вариант 2

1. В прямоугольном параллелепипеде диагональ основания d, угол между диагоналями основания α, а угол, образуемый диагональной плоскостью, проведенной через большую сторону основания, с плоскостью основания, β. Определить объем параллелепипеда.

2. Решить уравнение

$$\log_2\left(9^{x-1}+7\right)=2+\log_2\left(3^{x-1}+1\right).$$

3. Решить уравнение

$$\sin 2x\sin 3x+\cos 5x=0.$$

4. Упростить выражение $(a>0)$

$$\frac{a^3-a-2b-\dfrac{b^2}{a}}{\left(1-\sqrt{\dfrac{1}{a}+\dfrac{b}{a^2}}\right)\cdot\left(a+\sqrt{a+b}\right)}:\left(\frac{a^3+a^2+ab+a^2b}{a^2-b^2}+\frac{b}{a-b}\right).$$

Вариант 3

1. В шар, объем которого равен V, вписан конус. Угол, составленный двумя образующими конуса, проведенными к концам одного и того же диаметра основания конуса, равен α. Определить объем конуса.

2. Решить уравнение

$$\sin 2x + 3\cos 2x = 1.$$

3. Упростить выражение

$$\left\{\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}} + (a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1} + \left[(a+b)^{-\frac{1}{2}} - (a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}\right\} : \left\{\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}} + (a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1} - \left[(a+b)^{-\frac{1}{2}} - (a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}\right\}.$$

4. Решить уравнение

$$\log_2^2 (x-1)^2 - \log_{0,5} (x-1) = 5.$$

Вариант 4

1. В цилиндре параллельно его оси на расстоянии a от нее проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу α. Площадь сечения равна S. Определить объем цилиндра.

2. Решить уравнение

$$\sin x + \sin 2x = \sin 3x.$$

3. Решить уравнение

$$2 \log_x 3 \cdot \log_{3x} 3 = \log_{9\sqrt{x}} 3.$$

4. Упростить выражение

$$\left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right) : (a-b) + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Физика

В каждый экзаменационный билет по физике, кроме задачи, входило два вопроса по теории. Задача подбиралась так, чтобы для ее решения необходимо было применить знания из разделов, не охваченных этими двумя вопросами.

1. Небольшой шарик массой m брошен вертикально вниз с высоты H. При падении он уходит в песок на глубину h. Определить среднюю силу сопротивления грунта, если скорость бросания v. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Грузик, подвешенный на невесомой и нерастяжимой нити, вращается в горизонтальной плоскости так, что расстояние от точки подвеса до плоскости, в которой происходит вращение, равно h. Найти частоту вращения грузика.

3. Какую работу необходимо произвести, чтобы телеграфный столб массой 200 *кг*, к вершине которого прикреплена крестовина массой 30 *кг*, перевести из горизонтального положения в вертикальное? Длина столба 10 *м*.

4. Кусок стекла падает в воде с ускорением 5,8 *м/сек*^{2}. Найти плотность стекла, если вода пресная. Сопротивлением воды пренебречь.

5. В ампуле при 0 °С находится азот под давлением 10^{-6} *мм рт. ст.* Сколько молекул газа содержится в 1 *см*^{3} при таком давлении?

6. Электровоз движется со скоростью 54 *км/час* и развивает среднюю силу тяги 68 600 *н*. Определить величину потребляемого тока, если напряжение в линии 1500 *в*, а к. п. д. двигателя 92%.

7. Имеется 6 элементов с э. д. с. по 2 *в* и внутренним сопротивлением по 3 *ом* каждый. Внешнее сопротивление цепи 6 *ом*. Определить мощность, которая выделяется во внешней цепи, при последовательном и при параллельном соединениях элементов.

8. Определить среднее значение э. д. с. индукции, индуцируемой в кольце, если кольцо, помещенное перпендикулярно к магнитному полю, повернуть на угол 90° за 10^{-1} *сек*. Радиус кольца 5 *см*, индукция магнитного поля 1 *тл*.

9. Изображение предмета, удаленного от тонкой собирающей линзы на расстояние 0,4 *м*, больше предмета в 5 раз. Определить возможные значения оптической силы линзы, если предмет плоский и установлен перпендикулярно к главной оптической оси линзы.

10. Красная граница фотоэффекта для цинка составляет 0,37 *мкм*. Какова длина волны света, облучающего цинк, если фотоэффект был прекращен при задерживающем потенциале 0,2 *в*?

Н. Савченко, Л. Савченко

Донецкий политехнический институт

Донецкий ордена Трудового Красного Знамени политехнический институт — старейшее высшее учебное заведение Донбасса. Организованный как горный техникум в 1921 году при поддержке Артема (Сергеева), в 1926 году он был преобразован в горный, а в 1935 году — в индустриальный институт. С 1959 года институт становится политехническим.

Сейчас в институте имеются следующие стационарные факультеты: горный, горно-электромеханический, геолого-маркшейдерский, металлургический, механический, химико-технологический, экономический, энергетический, вычислительной техники и автоматизированных систем управления. В Горловском филиале находятся автомобильный и автодорожный факультеты.

Институт имеет вечерние и заочные факультеты, а также филиалы в Горловке, Красноармейске и Торезе.

На всех факультетах студенты получают физико-математическую подготовку в объеме программ инженерно-технических и инженерно-экономических вузов.

На факультете вычислительной техники и АСУ ведется подготовка и специалистов по прикладной математике с присвоением квалификации «инженер-математик». Большая часть изучаемых студентами этой специальности дисциплин — математические и «околомашинные»: математический анализ, общая и линейная алгебра, численные методы, программирование на ЭВМ и алгоритмические языки, дифференциальные уравнения и математическая физика, теория графов и комбинаторика, функциональный анализ, теория вероятностей и математическая статистика, теория случайных процессов и др.

Выпускники этой специальности направляются на работу в вычислительные центры, научно-исследовательские институты, проектно-конструкторские бюро.

Ниже помещены примеры вариантов письменного экзамена по математике, билеты устного экзамена по математике и задачи устного экзамена по физике в Донецком политехническом институте в 1975 году. Звездочкой отмечены более трудные варианты.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1*

1. Два пешехода одновременно вышли навстречу друг другу и встретились через $2^2/_9$ *час*. За какое время пройдет все расстояние каждый из них, если первый из них придет на то место, из которого вышел второй, на 1 *час* позже, чем второй придет на то место, из которого вышел первый?

2. Угол при вершине осевого сечения конуса равен φ, а сумма длин его высоты и образующей равна a. Найти объем конуса.

3. Решить уравнение

$$\frac{1}{5-\lg x}+\frac{2}{1+\lg x}=1.$$

4. Решить уравнение

$$\sin^2 x+\sin^2 2x=1.$$

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2x-1}{y+2}}+\sqrt{\dfrac{y+2}{2x-1}}=2,\\ x+y=12.\end{cases}$$

Вариант 2*

1. Поезд за некоторое время должен был пройти расстояние 250 *км*. Но через 3 *час* после начала движения его задержали на 20 *мин*, и для того чтобы прибыть вовремя к месту назначения, он увеличил скорость на 2 *км/час*. Найти скорость поезда по расписанию.

2. В конус, образующая которого составляет с плоскостью основания угол α, вписан шар. Найти отношение объема шара к объему конуса.

3. Решить уравнение

$$\lg (x-5)^2+\lg (x+6)^2=2.$$

4. Доказать тождество

$$\frac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}^3\dfrac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}^3\dfrac{\alpha}{2}}=-\frac{1}{4}\sin^2\alpha.$$

5. Решить неравенство

$$\frac{5-2x}{7x-22}>1.$$

Вариант 3

1. При совместной работе двух подъемных кранов разной мощности самоходная баржа была загружена за 4 *час* 12 *мин*. Сколько требуется времени, чтобы ту же баржу загрузить каждым краном в отдельности, если более мощным краном ее можно загрузить на 8 *час* быстрее, чем менее мощным?

2. В правильной треугольной усеченной пирамиде стороны нижнего и верхнего оснований соответственно равны a и b, двугранный угол при нижнем основании α. Определить объем пирамиды.

3. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}=2\operatorname{tg}x.$$

4. Решить неравенство

$$\frac{10}{x+3}<4-x.$$

5. Решить уравнение

$$8\sqrt{(0{,}125)^{4-\frac{x}{3}}}=2^{\sqrt{x-6}}.$$

Устный экзамен

Билет 1

1. Докажите теорему о трех перпендикулярах.

2. Выведите формулу общего члена геометрической прогрессии и суммы ее членов.

3. Докажите, что $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geqslant 2$, если a и b имеют одинаковые знаки.

4. Постройте график функции

$$y=|\operatorname{ctg}x|.$$

Билет 2

1. Параллелепипед; свойства его граней и диагоналей, соотношение между диагональю прямоугольного параллелепипеда и тремя измерениями.

2. Перечислите и укажите свойства десятичных логарифмов.

3. При каких значениях x трехчлен $y = 3x + 5 - 2x^2$

а) принимает наибольшее значение;

б) обращается в нуль;

в) положителен?

4. Решить уравнение

$$\cos x = \cos 2x \cdot \cos 3x.$$

Билет 3

1. Докажите теорему о свойствах средней линии треугольника.

2. Выведите формулу для $\sin(\alpha \pm \beta)$.

3. Решить неравенство

$$\frac{x}{3} - \frac{4}{x} > \frac{4}{3}.$$

4. Вычислить

$$\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x},$$

если $\sin x \cdot \cos x = 0{,}4$.

Физика

1. Освещенную щель высотой $h = 5$ *см* проектируют с помощью собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 10$ *см* на экран, находящийся от линзы на расстоянии $f = 12$ *см*. Найти размер изображения щели на экране.

2. Какой наибольшей мощности электропечь можно установить в конце двухпроводной линии, имеющей сопротивление $R = 10$ *ом*, если источник тока развивает мощность не более $P = 6$ *квт* при напряжении $U = 1000$ *в*?

3. В электрическом чайнике мощностью 800 *вт* можно вскипятить $V = 1{,}5$ *л* воды, имеющей температуру $t_1 = 20°C$, за время $t = 20$ *мин*. Найти к. п. д. чайника.

С. Жедонов, З. Филер

Марийский политехнический институт им. М. Горького

Письменный экзамен по математике, 1975 год

Вариант 1

1. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом α. Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом φ. Определить объем пирамиды, если радиус круга, вписанного в ромб, равен r.

2. Решить уравнение

$$\lg 2 + \lg(4^{x-2} + 9) = 1 + \lg(2^{x-2} + 1).$$

3. Решить уравнение

$$\sin 3x + \sin 2x = \sin x.$$

4. Решить неравенство

$$\frac{x^2 - 5x + 4}{x + 1} > 0.$$

5. Упростить выражение

$$2\left(x^2 + \sqrt{x^4 - 1}\right) \times \left[\sqrt[3]{(x^2+1)\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} + \sqrt[3]{(x^2-1)\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}\right]^{-2}.$$

Вариант 2

1. Образующие конуса касаются шара, вписанного в конус, по параллели в 60°. Найти объем конуса, если радиус шара равен 2.

2. Решить уравнение

$$4^{x-2} - 17 \cdot 2^{x-4} = 0.$$

3. Решить уравнение

$$\cos 4x = -2\cos^2 x.$$

4. Решить неравенство

$$\frac{\lg(35 - x^3)}{\lg(5 - x)} > 0.$$

5. Упростить выражение

$$\left[(a-b)\cdot\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + a - b\right] \times \left[(a-b)\cdot\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} - 1\right)\right].$$

Г. Мелетьева

Ярославский политехнический институт

Подробно о Ярославском политехническом институте рассказывалось в «Кванте» № 7 за 1974 г. В 1975 году на инженерно-строительном факультете впервые проводился прием по новой специальности «гидромелиорация». Приводим варианты вступительного экзамена по математике и задачи из билетов экзамена по физике в ЯПИ в 1975 году.

Математика

Вариант 1

1. В цилиндр вписана правильная четырехугольная призма. Диагональ призмы образует с боковой гранью угол α, высота призмы равна h. Найти боковую поверхность цилиндра.

2. Решить уравнение

$$|1+\log_{\frac{1}{3}} x| = 3 + |2 - \log_{\frac{1}{3}} x|.$$

3. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-3x} - 2{,}5} + \frac{1}{\sqrt{\log_3 x - \log_2 x}}.$$

4. Решить уравнение

$$\sin^2 2x - 4\cos^4 x = \sin 4x.$$

Вариант 2

1. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с радиусом описанной окружности, равным R. Определить площадь сечения, образованного диагоналями наибольшей и наименьшей боковых граней и стороной основания, если диагонали наклонены к основанию под углами α и 3α.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{7}{\sqrt{xy}} + 1, \\ x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy} = 78. \end{cases}$$

3. Решить неравенство

$$\log_4 (2x^2 + x + 1) - \log_2 (2x - 1) \leqslant -\operatorname{tg} \frac{7}{4}\pi.$$

4. Решить уравнение

$$\sqrt{1+\sin 2x} = \sqrt{2}\cos 3x,$$

если $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$.

Физика

1. С поверхности длинной ровной горы, наклоненной под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, брошен камень в горизонтальном направлении со скоростью $v_0 = 20$ *м/сек*. Определить время t полета камня. Сопротивление воздуха не учитывать.

2. Поверхностная плотность заряда равномерно заряженной бесконечной плоскости, расположенной вертикально, $\sigma = 1{,}73 \cdot 10^{-4}$ *к/м²*. На невесомой нити в поле этой плоскости висит шарик массой $m = 1$ *г*. Заряд шарика $q = 3$ ед. заряда СГСЭ. Какой угол α образует нить с плоскостью? Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ *ф/м*.

3. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}02$ *тл* находится проводник длиной $l = 10$ *см*, расположенный перпендикулярно к линиям магнитной индукции. По проводнику течет ток $I = 2$ *а*, величина которого поддерживается постоянной. Под действием сил поля проводник переместился на расстояние $s = 5$ *см*. Найти работу A сил поля.

4. На главной оптической оси выпуклого зеркала с радиусом кривизны $R = 72$ *см* расположена светящаяся точка. Расстояние от точки до зеркала $d = 150$ *см*. Найти расстояние f от изображения этой точки до зеркала. Построить изображение.

В. Колпаков, Н. Рахманова

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

О Московском ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени государственном педагогическом институте им. В. И. Ленина подробно рассказывалось в «Кванте» № 7 за 1973 и 1974 годы.

Здесь мы публикуем образцы вариантов письменного экзамена по математике и задач устного экзамена по физике в 1975 году на физическом факультете МГПИ им. В. И. Ленина.

Математика

Вариант 1

1. В усеченном конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны, а образующая составляет с плоскостью нижнего основания угол α и равна 1. Определить объем усеченного конуса.

2. Решить уравнение

$$\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2 \frac{x}{2}.$$

3. Решить систему уравнений ($a>0$, $b>0$)

$$\begin{cases} \log_a x + \log_a y = 2, \\ \log_b x - \log_b y = 4. \end{cases}$$

4. Решить неравенство

$$0 < \frac{x}{3-x} < 1.$$

Вариант 2

1. В основании прямой четырехугольной призмы лежит равнобочная трапеция,

у которой боковая сторона a равна меньшей стороне основания, а острый угол равен α. Найти объем призмы, если высота ее равна диагонали основания

2. Решить уравнение

$$\log_2(5\cdot 2^{x+1}-1)=2x+4.$$

3. Решить уравнение

$$1+\operatorname{tg} 2x=\frac{1-\sin 2x}{\cos^2 2x}.$$

4. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{1+4x}{x}}<1.$$

физика.

Устный экзамен по физике для поступающих на физический факультет МГПИ им. В. И. Ленина проводится в точном соответствии с программой по физике.

Экзаменационный билет состоит из двух вопросов и одной задачи. Каждый из билетов составлен так, чтобы охватить проверкой возможно большее число разделов физики. Для примера приводим текст одного из билетов:

1. Понятие об абсолютном нуле. Абсолютная температурная шкала. Объединенный закон Бойля — Мариотта — Гей-Люссака.

2. Световой поток. Сила света. Освещенность.

3. З а д а ч а. Медный шар с внутренней полостью весит в воздухе 2,64 *н*, в воде — 2,21 *н*. Определить объем внутренней полости шара. Плотность меди принять равной 8,8 *г/см*^{3}.

Предлагаем вашему вниманию еще десять задач, взятых из экзаменационных билетов.

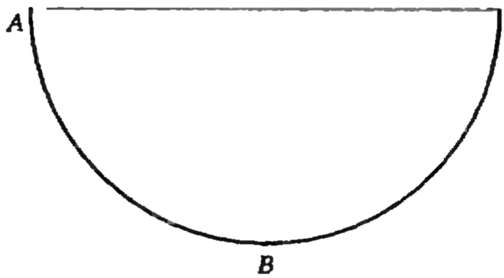
1. На сколько секунд в сутки будут отставать маятниковые часы, поднятые зондом на высоту 400 *км*, если на Земле они ходили правильно ($T_0=1$ *сек*)? Принять радиус Земли равным 6 400 *км*.

2. Медный шар с внутренней полостью весит в воздухе 2,64 *н*, в воде — 2,21 *н*. Определить объем внутренней полости шара. Плотность меди принять равной 8,8 *г/см*^{3}.

3. Плоское тело массой 4 *кг* движется по круговому желобу, расположенному в вертикальной плоскости (см. рисунок). Определить силу давления тела на желоб в точке B, если оно отпущено с нулевой скоростью из точки A.

4. По наклонной плоскости длиной 18 *м*, образующей с горизонтом угол 30°, скользит тело массой 2 *кг*. Какое количество тепла выделяется при трении тела о плоскость, если начальная скорость тела была равна нулю, а у основания — 6 *м/сек*?

5. В баллоне емкостью 36 *л* находится кислород под давлением 20 *атм* при температуре 20 °С. Какой объем занимал этот газ при нормальных условиях?



6. Найти э. д. с. и внутреннее сопротивление батареи аккумуляторов, если при силе тока 5 *а* потребляемая во внешней цепи мощность равна 12,5 *вт*, а при силе тока 8 *а* она равна 16,8 *вт*.

7. Какой силы ток потребляет электрический кипятильник емкостью 8 *л*, если при к. п. д., равном 80%, вода в нем нагревается от 20 °С до 100 °С за 25 *мин*? Напряжение в сети 220 *в*.

8. Какое количество алюминия выделится на катоде за 6 *час* при электролизе $Al_2(SO_4)_3$ при пропускании через электролит тока силой 1,5 *а*? Атомный вес алюминия 27.

9. Приемный контур состоит из катушки с индуктивностью $2\cdot 10^{-6}$ *гн* и из конденсатора с емкостью 1800 *пф*. На какую длину волны рассчитан контур?

10. Экран находится от собирающей линзы на расстоянии 2,45 *м*. Фокусное расстояние линзы 25 *см*. На каком расстоянии от линзы следует расположить предмет, чтобы на экране получить отчетливое изображение?

Г. Шадрин, Д. Мур

Московский областной педагогический институт им. Н. К. Крупской

Московский областной педагогический институт был основан в 1931 году по инициативе Н. К. Крупской, и в 1958 году ему было присвоено ее имя.

В составе института много факультетов, мы расскажем о математическом и физическом. Оба факультета готовят в основном учителей для работы в средней школе.

Современный учитель должен иметь очень высокий уровень подготовки, и новые учебные программы предусматривают подготовку специалистов весьма высокой квалификации. Значительное место в программах занимают курсы педагогики, психологии, эстетики, а также методики преподавания математики и физики. На всех курсах студенты работают с учениками (в пионерлагерях, кружках). На двух последних курсах в рамках педагогической практики студенты самостоятельно проводят уроки в школах.

На математическом факультете студенты изучают математический анализ, теорию функций действительного переменного, комплексного переменного, высшую алгебру, аналитическую геометрию, другие разделы геометрии, теорию вероятностей, программирование для электронно-вычислительных машин, курс физики, астрономию.

Будущие физики изучают теоретическую механику, другие разделы теоретической физики, электротехнику, акустику, астрономию, а также специальные разделы математики: математический анализ, аналитическую геометрию. На физическом факультете есть отделение физики на иностранном языке; окончившие это отделение могут преподавать физику не только на своем родном, но также и на иностранном языке (английском).

В институте много лабораторий с современным оборудованием электротехники, радиотехники, молекулярной акустики и др. Имеется лаборатория, в которой студенты занимаются программированием и работой на ЭВМ «БЭСМ-4». В рамках студенческого научного общества (НСО) студенты ведут научные исследования, в той или иной мере самостоятельные. Для тех, кто хорошо проявил себя в этом отношении, имеется аспирантура.

Выпускники института работают учителями средних школ, окончившие аспирантуру преподают также в высшей школе. Выпускники отделения физики на иностранном языке работают за рубежом, в школах развивающихся стран, а также в советских школах с увеличенным объемом преподавания иностранного языка.

При МОПИ имеется подготовительное отделение со сроком обучения 1 год.

Ниже приведены варианты письменного экзамена по математике и задачи из билетов устного экзамена по физике в МОПИ в 1975 году (задачи по математике составил М. Д. Бронфман, по физике — В. В. Никитин).

Математика

Математический факультет

Вариант 1

1. В основании параллелепипеда — ромб $ABCD$ с углом 60° при вершине A. Перпендикуляр к плоскости основания, восставленный в вершине A, проходит через точку пересечения диагоналей другого основания. Боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α. Сторона основания равна a. Определить объем параллелепипеда.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-12xy+13y^2+18x-2y-18=0, \\ x+4\sqrt{xy}+3y=0. \end{cases}$$

3. У подножья горы, по разные стороны от перевала C, расположены пункты A и B, расстояние между которыми по соединяющей их дороге равно 8 *км*. Перевал считается точкой. Скорость трактора на спуске на 1 *км/час* превосходит скорость его на подъеме. Время, затрачиваемое трактором на переход от A к B, равно t_1, а время, затрачиваемое на обратный переход от B к A, равно t_2.

а) Определить скорость трактора на спуске, если известно, что $t_1=5$ *час* 3 *мин* 17 *сек*, а $t_2=6$ *час* 56 *мин* 43 *сек*.

б) Полагая, что на переход туда и обратно трактор затрачивает в общей сложности 12 *час*, указать пределы, в которых можно задавать параметр t_1 для того, чтобы задача имела решение.

Вариант 2

1. В основании пирамиды лежит правильный треугольник со стороной a. Высота пирамиды проходит через середину высоты треугольника, лежащего в основании. Наибольшая по площади боковая грань наклонена к плоскости основания под углом α. Определить объем пирамиды.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x+\sqrt{xy}-14y=21, \\ x+12\sqrt{xy}-28y=56. \end{cases}$$

3. Огибая остров, река у пункта A разделяется на два рукава ACB и ADB, а у пункта B снова сходится. Скорость течения в обоих рукавах одинакова и равна 3 *км/час*. На обход острова в направлении $ACBDA$ моторная лодка затрачивает время t_1, а на обход его в направлении $ADBCA$ — время t_2. Один из рукавов на 6 *км* длиннее другого.

а) Определить скорость лодки в стоячей воде, полагая $t_1=7$ *час*, $t_2=7$ *час* 10 *мин*.

б) Считая $t_2-t_1=10$ *мин*, указать область возможных значений параметра t_1, при которых задача может иметь решение.

Физический факультет

Вариант 3

1. Наибольший угол между двумя боковыми ребрами правильной шестиугольной пирамиды равен α, а сторона основания равна a. Определить объем пирамиды.

2. Дано уравнение

$$x^4-31x^2+184=0.$$

а) Решить это уравнение.

б) Вычислить с точностью 0,01 с недостатком и с избытком значение выражения $\alpha_1-14\alpha_2$, где α_1 — наименьший, а α_2 — наибольший из положительных корней уравнения.

3. Путь, по которому проехал мотоциклист, состоит из трех последовательных участков. При этом средняя скорость на всем пути равна скорости на втором участке, скорость на первом участке на 2 *км/час*

меньше средней скорости, а скорость на третьем участке на 15 *км/час* меньше удвоенной средней скорости. Протяженность первого участка в шесть раз больше третьего. Определить среднюю скорость мотоциклиста.

Вариант 4

1. Угол между боковым ребром и стороной основания правильной четырехугольной пирамиды равен α, а боковое ребро равно a. Определить объем пирамиды.

2. Дано уравнение

$$x^4 - 60x^2 + 899 = 0.$$

а) Решить это уравнение.

б) Вычислить с точностью до 0,01 с недостатком и с избытком значение выражения $\alpha_1 + 8\alpha_2$, где α_1 — наименьший положительный, α_2 — наибольший по абсолютной величине отрицательный корень этого уравнения.

3. Путь экспресса состоит из трех последовательных участков. Весь начальный участок и часть среднего экспресс прошел со скоростью, которая оказалась на 30 *км/час* больше средней скорости на всем пути. Затем, уменьшив скорость на 54 *км/час*, экспресс прошел, не меняя скорости, до конца пути. Средняя скорость на среднем участке равна средней скорости на всем пути. Точка изменения скорости делит средний участок в отношении 5:4. Определить скорость на начальном участке.

Физика

1. Найти начальную и конечную скорости камня, брошенного горизонтально с высоты 20 *м*, если по горизонтали он пролетел 15 *м*. Ускорение свободного падения принять равным 10 *м/сек²*.

2. На каком расстоянии от центра диска, вращающегося с частотой 120 *об/мин*, нужно поместить тело, чтобы оно не соскальзывало с него? Коэффициент трения между диском и телом равен 0,2.

3. Водяной пар при температуре 100 °С впускают в калориметр, содержащий 200 *г* воды и 50 *г* льда при 0 °С. Сколько воды будет в калориметре, когда температура станет равной 50 °С? Удельная теплоемкость воды 1 *кал/(г·град)*; удельная теплота плавления льда 80 *кал/г*; удельная теплота парообразования воды 539 *кал/г*.

4. Какая температура установится в калориметре, содержащем 200 *г* воды при температуре 20 °С, если в него положить 5 *г* льда при температуре —20 °С? Теплоемкость калориметра 20 *кал/град*; удельная теплоемкость льда 0,5 *кал/(г·град)*, воды 1 *кал/(г·град)*; удельная теплота плавления льда 80 *кал/г*.

5. Газ находится в цилиндре под невесомым поршнем, площадь которого равна 100 *см²*. При температуре 7 °С на поршень положили гирю массой 10 *кг*. При этом поршень несколько опустился. До какой температуры нужно нагреть газ в цилиндре, чтобы поршень оказался на прежней высоте? Атмосферное давление нормальное.

6. Во сколько раз увеличится объем пузырька воздуха при его подъеме со дна водоема к поверхности? Глубина водоема 50 *м*, температура на дне 4° С, у поверхности 18 °С, атмосферное давление нормальное.

7. При подключении к источнику амперметра с сопротивлением 3 *ом* амперметр показывает 3 *а*, а при подключении амперметра с сопротивлением 1 *ом* амперметр показывает 6 *а*. Каковы э. д. с. и внутреннее сопротивление источника тока?

8. Два сопротивления при последовательном включении в сеть с напряжением 100 *в* потребляют из сети мощность 40 *вт*. При параллельном включении в ту же сеть они потребляют суммарную мощность 250 *вт*. Найти величины этих сопротивлений.

9. Расстояние между светящимся предметом и экраном равно 90 *см*. На каком расстоянии от предмета нужно поместить линзу с фокусным расстоянием 15 *см*, чтобы получить на экране четкое изображение предмета?

10. Собирающая линза дает действительное изображение с увеличением в 2 раза. Определить фокусное расстояние линзы, если расстояние между линзой и изображением равно 24 *см*.

О. Романов

Задачи наших читателей

1. Дано уравнение

$$x(x+1) + (x+1)(x+2) + (x+2)(x+3) + \ldots + (x+n)(x+n+1) = 1000x + 13.$$

Имеет ли это уравнение целочисленный корень хотя бы при одном натуральном n?

2. Что больше: 5^{16} или 3^{23}?

3. Какое двузначное число равно квадрату суммы его цифр?

Н. Антонович
(г. Новосибирск)

4. Два игрока играют в крестики-нолики в кубе 3×3×3 (состоящем из 27 кубиков 1×1×1). Одним ходом каждый «зачеркивает» один кубик. Цель игры — первым поставить 3 своих значка на одной прямой. Кто выигрывает при правильной игре — начинающий или его партнер?

А. Клепицын
(г. Ульяновск)

5. В множестве треугольников с заданным периметром p найти треугольник, произведение длин биссектрис которого максимально.

А. Аляев
(Пензенская обл.)

Московская городская олимпиада школьников

«Поздравляя вас с победой, хочу предупредить, что никто так не сможет определить, насколько вы заслужили награду, как вы сами. Главное, из чего должна исходить оценка, — это не азарт, не удовлетворенное тщеславие, а то, успели ли вы полюбить математику. Успехи придут. Если уж вы взялись всерьез за математику, то у вас не раз еще будут возможности для творческого труда и раскрытия своих способностей. Но никогда не забывайте, что прежде всего должны быть вы для математики, а не она для вас...»

Из выступления председателя жюри олимпиады по математике доктора физико-математических наук профессора А. В. Архангельского.

Мартовским воскресным утром к зданиям Московского университета, Педагогического института им. В. И. Ленина, Института инженеров железнодорожного транспорта и Физико-технического института спешили ребята. Это — участники Московской городской олимпиады, третьего этапа Всесоюзной олимпиады школьников по математике и физике.

В предыдущем, районном этапе участвовало свыше 9 000 юных математиков и более 3 500 юных физиков. В городской олимпиаде по математике приняли участие почти 2 000 школьников, а по физике — около 1 400. Теперь немного о победителях среди них.

Около 150 математиков и почти 80 физиков были награждены различными дипломами и премиями, а некоторые из них получили право дальнейшего участия во Всесоюзной физико-математической олимпиаде.

Юрий Буров

Петр Чистяков

Илья Гаврилов

Наталья Рунова

Сергей Яковенко

В состав команды города Москвы для выступления на заключительном (пятом) этапе Всесоюзной физико-математической олимпиады вошли

по математике:

Степан Оревков (с. ш. 57, 8 кл.), *Марк Спиваковский* (с. ш. 57, 9 кл.), *Юрий Буров* (с. ш. 2, 10 кл.);

по физике:

Сергей Рылов (с. ш. 2, 8 кл.), *Петр Чистяков* (с. ш. 2, 9 кл.), *Сергей Яковенко* (с. ш. 179, 10 кл.).

В состав команды города Москвы для участия в республиканском (четвертом) этапе олимпиады вошли

по математике:

Виктор Гальперин (с. ш. 57, 8 кл.), *Юрий Барышников* (с. ш. 91, 9 кл.), *Юрий Буров* (с. ш. 2, 10 кл.);

по физике:

Илья Гаврилов (с. ш. 19, 8 кл.), *Наталья Рунова* (с. ш. 179, 9 кл.), *Александр Семенов* (с. ш. 179, 10 кл.).

О том, какие задачи были на Московской физико-математической олимпиаде, вы можете судить по «Задачнику «Кванта», опубликованному в предыдущем номере нашего журнала.

В. Березин, В. Тихомирова

Фото Д. Германа

В этом номере мы помещаем рецензии на две книги, вышедшие в издательстве «Просвещение» в 1975 году, посвященные программированию на ЭВМ.

«Математические машины»

Историю технических изобретений каждый из нас знает неплохо: паровую машину изобрел Уатт, первый паровоз был построен Ползуновым, идея телефона принадлежит Беллу, первый фонограф (прообраз современного электрофона) построил Эдисон и т. д. и т. п. Но славе изобретателей всех времен не уступит фантастическое изобретение нашего века — электронная вычислительная машина (ЭВМ). А вот о ней мы подчас знаем прискорбно мало.

Любая машина призвана расширять границы возможностей отдельного человека, коллектива, иногда — страны или даже группы стран (если речь идет о крупной электростанции или ретрансляционном спутнике.

Вычислительные машины расширили наиболее деликатную и важную сферу человеческой деятельности — интеллектуальную. Сейчас вычислительные машины умеют решать уравнения и системы уравнений, проводить бухгалтерские и экономические расчеты в масштабе семьи (есть и такие мини-ЭВМ), завода, страны и сообщества стран, обрабатывать результаты переписей в отдельных странах и во всем мире, рассчитывать химическую формулу и пространственную структуру молекулы нового химического соединения, из миллионов фотографий процессов, происходящих в пузырьковой камере, выбирать тот снимок, на котором запечатлен след нейтрино, расшифровывать письмена давно исчезнувших народов, по текстам «Илиады» и «Одиссеи» устанавливать подлинность авторства Гомера, рассчитывать траектории искусственных космических объектов на много месяцев вперед, помогать космонавту производить маневры вблизи поверхности Луны перед посадкой, играть в шахматы и шашки, обыгрывать профессионалов-картежников в игорных домах США, помогать футурологам строить модели будущего для отдельных стран и всего человечества, рисовать чертежи и разрабатывать проектные сметы по наметкам архитекторов, составлять расписание занятий в институтах и университетах, вести индивидуальные практические занятия с каждым студентом университета по нескольким предметам, находя ошибки в решении заданий, задавая наводящие вопросы и, в зависимости от результатов, выбирая индивидуальную программу обучения, составлять набор для печати книг в типографиях по собственному макету, руководить плавкой стали в современных электропечах.

Список этот, разумеется, далеко не полон, но и из этого беглого и поверхностного перечня видно, какой универсальностью и «понятливостью» обладает ЭВМ.

Жаль, что наши школьники, студенты (прямо не специализирующиеся в этой области) и преподаватели так мало пока знают о том, как работает ЭВМ, как она устроена, как работает с ней человек.

Этот пробел в знаниях вызван, конечно, почти полным отсутствием достаточно популярной литературы на подобные темы, не говоря уже об учебных пособиях или (а почему бы и нет?) стабильных учебниках. Поэтому следует приветствовать инициативу издательства «Просвещение», выпустившего в свет в 1975 году книгу «Математические машины». Что же найдет читатель в этой интересной книге*)?

После краткого описания ЭВМ дискретного действия (цифровых ЭВМ) и ЭВМ непрерывного действия (аналоговых ЭВМ) читатель прочтет, пожалуй, наиболее удачную (и уже заведомо одну из самых интересных) главу книги, посвященную истории вычислительных инструментов и вычислительной техники — от абака, соробана и счетов через логарифмические таблицы Джона Непера, вычислительные машины Леонардо да Винчи, Блеза Паскаля и Готфрида Лейбница до суммирующей машины Уильяма С. Берроуза, аналитической машины Чарльза Бэббеджа и, наконец, современной ЭВМ.

Всего в книге восемь глав, три из которых посвящены устройству ЭВМ — ее «архитектуре», принципам физической реализации памяти (внутренней и внешней), устройствам ввода и вывода и, наконец, электронной технологии современных и будущих «поколений» ЭВМ («машины первого, второго, третьего поколения» — так принято называть основные этапы развития электронно-вычислительной техники; сейчас конструируются и

---

*) Р. С. Гутер, Ю. Л. Полунов. Математические машины. М., «Просвещение», 1975.

строятся первые представители четвертого поколения ЭВМ).

Еще две главы («Элементы программирования» и «Алгоритмические языки») могут служить неплохим введением в программирование. Разумеется, прочтя эти главы, читатель не научится программировать, но он сможет уверенно сказать, что первое знакомство состоялось и теперь можно приступить к более глубокому изучению предмета.

Наконец, последняя глава книги посвящена применениям ЭВМ (в экономике, инженерных расчетах, медицине). Там же рассказывается об «эвристическом программировании», когда выбор того или иного пути в вычислительном процессе определяется не строгими формульными указаниями, а интуитивными, «содержательными», наводящими соображениями (эти соображения должны быть, конечно, сформулированы и обоснованы).

Авторы в этой главе осветили обширный фактический материал, приведя десятки примеров применения ЭВМ не только в точных и инженерных науках, но и в литературоведении, медицине, музыке, археологии, истории, шахматах и ряде других областей.

Книга «Математические машины» принесет несомненную пользу широкому кругу читателей (вспомним известное высказывание Горация: «Самая лучшая книга — та, которая одновременно учит и развлекает»).

Э. Белага

«АЛГОЛ 60»

Одним из современных и широко известных средств общения человека с ЭВМ является алгоритмический язык АЛГОЛ 60, созданный специально для описания алгоритмов решения задач. На этом языке можно «разговаривать» со многими вычислительными машинами: программист составляет описание алгоритма на АЛГОЛе и передает его машине, она понимает текст, решает задачу и сообщает результат.

Учащимся старших классов, проявляющим интерес к математике и желающим изучить программирование на АЛГОЛе, мы советуем познакомиться с книгой «Алгоритмический язык АЛГОЛ 60»*), изданной в 1975 году. Достоинством книги является то, что читатель, прочитавший только первые четыре параграфа, уже сможет составлять простейшие программы на АЛГОЛе.

В книге подобрано большое число примеров, упражнений и задач. При подготовке задачи к решению на ЭВМ значительное внимание уделяется математической стороне дела. Детально обсуждаются вопросы разработки алгоритмов решения задач, возможности улучшения этих алгоритмов и построения хороших программ. Особенно ярко это показано на примерах обработки таблицы хоккейного чемпионата, упорядочивания массива, разложения числа на простые множители и др. Иногда доказательства тех или иных положений приводятся в тексте, иногда это предлагается сделать самостоятельно — в упражнениях.

Так, например, после разъяснения сути метода поиска элемента массива делением пополам дается следующее упражнение.

У п р а ж н е н и е 135. *Доказать, что если для некоторого целого S число n элементов массива удовлетворяет неравенствам $2^{S-1} < n \leq 2^S$, то при выполнении метода поиска элемента делением пополам будет осуществлено не более $s-1$ сравнений и, таким образом, можно сказать, что число осуществляемых сравнений не превосходит $\log_2 n$.*

Любознательный школьник сможет найти немало трудных, но интересных задач (упражнений), для решения которых необходима сообразительность и изобретательность. Некоторые задачи ценны не только в смысле содержания, но и с точки зрения оригинальности их программной реализации. Приведем еще некоторые примеры заданий для учащихся.

У п р а ж н е н и е 148. *Гольдбахом было высказано предположение, что каждое четное число, большее или равное 4, представимо в виде суммы двух простых. Это предположение до сих пор не доказано и не опровергнуто. Написать программу проверки этой гипотезы для данного четного числа.*

З а д а н и е 19. *Доказать, что любую целочисленную денежную сумму, большую семи рублей, можно выплатить без сдачи трешками и пятерками; написать программу выработки по данному целому числу $n>7$ пары целых неотрицательных чисел a и b таких, что $n = 3a + 5b$.*

В некоторых задачах сформулированы правила (или дано объяснение) какой-либо игры, например карточной игры «квартеты», «морского боя», «Ханойской башни», и предлагается написать программы разыгрывания партии соответствующей игры.

При вдумчивом чтении книги и выполнении большого числа упражнений школьник может достичь достаточно высокого уровня программирования.

Л. Кармазина, Н. Меллер

*) С. А. А б р а м о в, И. Н. А н т и п о в. Алгоритмический язык АЛГОЛ 60. М., «Просвещение», 1975.

Новые книги

В этом номере журнала мы помещаем краткие аннотации на книги по математике и по физике, вышедшие во II квартале 1976 года, которые представляют интерес для наших читателей.

Математика

Издательство «Наука»

1. Алексеев В. Б. *Теорема Абеля в задачах и решениях.* Объем 10 л., тираж 30 000 экз., цена 33 к.

Из этой книги вы узнаете, как решать алгебраические уравнения 3-й и 4-й степени с одним неизвестным, почему для решения уравнений более высокой степени не существует общих формул (в радикалах). Одна из основных целей этой книги — дать возможность читателю попробовать свои силы в математике. Для этого почти весь излагаемый материал представлен в виде определений, примеров и большого числа задач, снабженных указаниями и решениями.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся серьезной математикой (начиная со школьников старших классов), и не предполагает каких-либо специальных предварительных знаний. Она может быть использована и в работе математического кружка.

2. Любич Ю. И., Шор Л. А. *Кинематический метод в геометрических задачах.* Издание 2-е, исправленное. (Популярные лекции по математике). Объем 3 л., тираж 50 000 экз., цена 10 к.

Оказывается, для решения геометрических задач может быть полезной «теория скоростей» — кинематика. Иногда связи между величинами отрезков, углов и т. п. в геометрических фигурах являются более сложными, чем связи между скоростями изменения этих величин в процессах деформации фигур. Поэтому, решая геометрическую задачу, полезно представить себе, что будет происходить с элементами рассматриваемой фигуры, если некоторые ее точки начнут двигаться; зависимость одних элементов от других может стать наглядно очевидной, и решение задачи буквально бросится в глаза.

В брошюре Любича и Шора на нескольких примерах демонстрируется применение кинематики к задачам элементарной геометрии и приводятся задачи для самостоятельного решения. Предварительно излагаются необходимые сведения из кинематики и векторной алгебры.

Книга рассчитана на учащихся старших классов.

3. Зайцев В. В., Рыжков В. В., Сканави М. И. *Элементарная математика.* Издание 3-е. Объем 36 л., тираж 300 000 экз., цена 1 р. 11 к.

Книга содержит систематическое изложение курса элементарной математики и состоит из двух частей: 1) алгебра и элементарные функции и 2) геометрия. Она полностью соответствует программе вступительных экзаменов по математике в высшие учебные заведения. Помимо теоретического материала, в книге помещено большое число задач, из которых многие решены в тексте.

Эта книга может быть полезна учащимся старших классов, готовящимся к конкурсным экзаменам. В частности, ее можно рекомендовать в качестве учебного пособия на подготовительных отделениях вузов.

4. Никифоровский В. А., Фрейман Л. С. *Рождение новой математики.* Объем 12 л., тираж 25 000 экз., цена 80 к.

В книге рассказывается о творчестве четырех выдающихся ученых XVII века — Декарта, Ферма, Торричелли и Роберваля. Эти ученые разрабатывали основы новой математики, они участвовали в создании дифференциального и интегрального исчисления, окончательно оформленного и завершенного позднее Ньютоном и Лейбницем.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся историей математики.

Издательство «Просвещение»

5. Кордемский Б. А. *Математика изучает случайности.* Объем 7 л., тираж 120 000 экз., цена 27 к.

В школьных программах нет элементов теории вероятностей. Не очень обширен и выбор доступных школьных книг по этому предмету. Книга Кордемского, по-видимому, пока единственная книга, увлекательно вводящая читателей в теорию вероятностей, помогающая самостоятельно овладеть первоначальными понятиями и методами этой науки, а также простейшим аппаратом математической статистики.

В начальной части книги преобладает свободная форма изложения с привлечением игрового материала; постепенно книга «серьезнеет», но не теряет доступности для школьников.

Издательство «Вища школа» (Киев)

6. Яглом И. М. *Проблема тринадцати шаров.* Объем 3 л., тираж 40 000 экз., цена 12 к.

Эта книга состоит из двух глав. Первая глава посвящена задачам о кругах и шарах, в ней формулируется «проблема 13 шаров», с которой связаны имена таких выдающихся ученых, как Д. Грегори и И. Ньютон, и рассказывается об истории ее решения, а вторая глава — задачам о многоугольниках, многогранниках и произвольных фигурах. Задача, тесно связанная с «проблемой 13 шаров», открыла новый большой раздел геометрии, называемой *дискретной* или *комбинаторной* геометрией. Эта геометрия изучает экстремальные геометрические задачи, связанные с отысканием «достаточно хороших» расположений конечного числа точек или фигур.

Основную роль в книге Яглома играют 16 задач, связанных тематически, но математически почти независимых; так что задачи, которые покажутся читателю очень трудными или же малоинтересными, он может смело пропустить. В книге сформулировано также несколько не решенных до сих пор задач; некоторые из них вполне могут служить темой для самостоятельной работы в области комбинаторной геометрии.

Книга доступна школьникам старших классов и может быть полезной в работе математических кружков.

Физика

Издательство «Наука»

1. Селицер С. И. *Блиц-вопросы, сборник задач.* Объем 5 л., тираж 200 000 экз., цена 14 к.

Книга представляет собой сборник задач по физике и охватывает весь программный материал школьного курса. В основе задач, представленных в книге, лежат различные явления природы, на которые обычно не обращают внимания.

Книга предназначена для учащихся 8—10 классов средней школы. Она с успехом может быть использована для факультативных занятий, для занятий физических кружков, а также при самостоятельной подготовке к вступительным экзаменам в вузы.

2. Эскин В. Е. *Мир невидимых великанов.* Объем 8 л., тираж 25 000 экз., цена 27 к.

Производству синтетических полимеров принадлежит сейчас одно из ведущих мест в народном хозяйстве. Исключительно велика роль природных полимеров в функционировании живых организмов. Изучение сложной структуры полимеров составляет предмет физики макромолекул.

В книге понятно и живо рассказывается об особенностях строения и свойствах полимерных молекул, о физических явлениях и методах, используемых для их изучения.

Книга доступна для учащихся старших классов и представляет интерес для широкого круга читателей, впервые знакомящихся с полимерами.

3. Каганов М. И., Лифшиц И. М. *Квазичастицы (идея и принципы квантовой физики).* Объем 6 л., тираж 50 000 экз., цена 20 к.

Книга, написанная видными физиками-теоретиками, посвящена рассказу о мире разнообразных квазичастиц. Авторы популярно разъясняют читателю удивительные свойства фононов и магнонов, плазмонов и экситонов, электронов и «дырок». Объясняют, почему, исследуя свойства твердых тел, можно познать мир квазичастиц.

Книга доступна школьникам старших классов и может быть с успехом применена на факультативных занятиях.

Издательство «Мир»

4. Бова Б. *Новая астрономия.* Перевод с англ. Объем 10 л., тираж 50 000 экз., цена 52 к.

Эта книга посвящена изложению современных вопросов астрономии — радиоастрономии, инфракрасной, рентгеновской, гамма-астрономии и т. д.

В ней также отражены сенсационные открытия последних десятилетий — квазары, сверхзвезды, пульсары, «черные дыры», взрывающиеся галактики и пр. Живой и яркий язык, образное увлекательное повествование делают книгу интересной для самого широкого круга читателей.

Издательство «Знание»

5. Рыдник В. И. *Поле.* Объем 8 л., тираж 100 000 экз. цена 25 к.

В этой книге рассказывается о природе физических взаимодействий. Уже в далеком прошлом ученые и философы создавали различные гипотезы об «устройстве» реального мира, пытались объяснить все многообразие физических взаимодействий, в частности, с помощью представления об эфире, заполняющем все мировое пространство. Автор живо и увлекательно рассказывает о смене этих представлений понятием физического поля.

Книга вполне доступна школьникам старших классов и может быть использована на факультативных занятиях.

6. Левантовский В. И. *Транспортные космические системы.* Объем 3,5 л., тираж 50 000 экз., цена 11 к.

В брошюре рассказывается об одной актуальной проблеме современной космической техники — переходу от ракетоносителей одноразового использования к транспортным космическим аппаратам многократного использования.

Брошюра рассчитана на самый широкий круг читателей.

И. Клумова, М. Смолянский

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. В некотором царстве каждые двое — либо друзья, либо враги. Каждый человек может в некоторый момент поссориться со всеми друзьями и помириться со всеми врагами. Оказалось, что каждые три человека могут таким образом стать друзьями. Докажите, что тогда и все люди в государстве могут стать друзьями.

2. Для каких простых чисел p числа $2p+1$ и $4p+1$ тоже простые?

3. Найти множество центров тяжести треугольников OBA, у которых вершина O фиксирована, а вершины A и B лежат на двух окружностях одинакового радиуса. А что получится, если радиусы окружностей не равны?

4. Докажите, что плоскость можно раскрасить 9 красками так, что никакие две точки одного цвета не будут находиться на расстоянии 1 *м*.

5. Пароход плывет из города A в город B и обратно. Одинаковое ли время затратит пароход, если города находятся:

а) на берегу реки;

б) на берегу озера?

Скорость парохода относительно воды постоянна.

А. Орлов

Поиск предмета

Номер квартиры

Послушайте, какую историю рассказала мне моя соседка Люся *).

— В нашем новом восьмиэтажном доме два подъезда. На каждую лестничную клетку выходят двери четырех квартир. Вчера во дворе меня встретили ребята и спросили, в какой квартире я живу. Я ответила:

— А вы отгадайте. Можете задавать мне вопросы, только имейте в виду, что я буду отвечать лишь «да» или «нет».

Один мальчишка сразу сказал:

— Нет ничего проще. Я буду тебя спрашивать, верно ли, что ты живешь в квартире № 1, № 2, № 3, № 4, … …, № 63, пока ты не скажешь «да». А если ты все время будешь говорить «нет», то ты живешь в квартире № 64. Мне понадобится самое большее шестьдесят три вопроса.

Но тут его перебила девочка:

— Подумаешь, шестьдесят три! Мне хватит и тридцати двух вопросов! Сначала я узнаю, в каком подъезде ты живешь. Я спрошу: «Ты живешь в первом подъезде?» Ответишь «да» — значит, в первом; ответишь «нет» — во втором. А затем переберу по порядку все квартиры в подъезде.

— А мне хватит и четырнадцати! — радостно закричал самый маленький из всей компании. — Этаж я узнаю за семь вопросов, а квартиру на этаже — еще за семь!

— А как вы думаете, — спросила Люся меня, — сколько вопросов понадобится, чтобы узнать номер моей квартиры?

Я сразу ответил Люсе: «Пяти вопросов мало, а шести хватит». Сначала я спросил:

— Верно ли, что ты живешь в первом подъезде?

Люся ответила: «Нет», — и я понял, что ее квартира находится во втором подъезде. Второй вопрос был хитрее:

— Верно ли, что ты живешь ниже пятого этажа?

— Да.

— А верно ли, что ниже третьего?

— Нет.

— На третьем?

— Нет.

Значит, Люся живет во втором подъезде на четвертом этаже. У меня осталось два вопроса на четыре «подозрительные» квартиры — № 45, № 46, № 47 и № 48 (легко подсчитать, что на площадку четвертого этажа во втором подъезде выходят двери этих четырех квартир).

— Верно ли, что номер твоей квартиры больше 46?

— Нет.

— Ты живешь в квартире № 45?

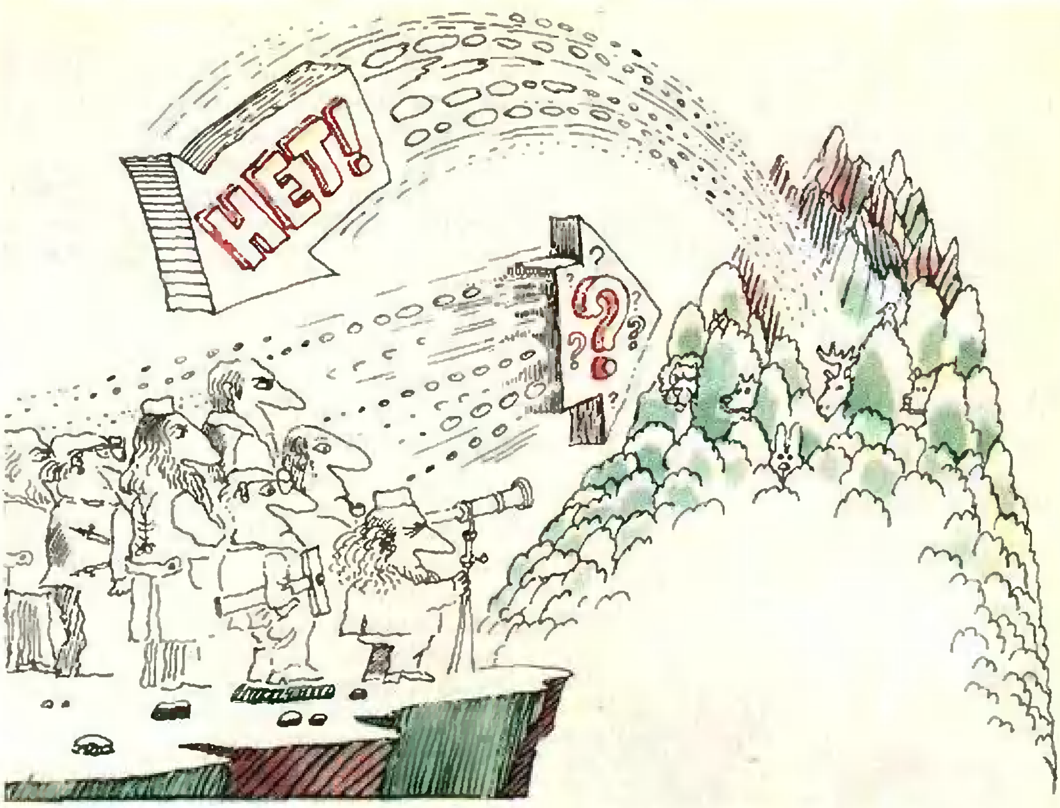
— Нет.

— Значит, ты живешь в квартире № 46, — сказал я с торжеством.

Поняли ли вы, почему понадобилось так мало вопросов? Каждый мой вопрос делил номера «подозрительных» квартир (тех, среди которых находится Люсина) на две равные части: номера, для которых ответ «да», и номера, для которых ответ «нет». В любом случае число «подозрительных» квартир уменьшалось ровно вдвое.

Можно доказать, что наверняка уложиться в пять вопросов нельзя.

*) См. также «Квант», 1976, № 2, с. 60.



Здесь нам поможет такая таблица:

0 0 0 0 0
0 0 0 0 1
0 0 0 1 0
0 0 0 1 1
0 0 1 0 0
. . . . .
1 1 1 1 0
1 1 1 1 1

Люсины ответы мы запишем с помощью цифр 1, 0. Если она отвечает «да», будем писать «1», а если нет», то «0». Первый ответ запишем в разделе единиц, второй — в разделе десятков и так далее. Тогда мы можем единицами и нулями записать любое сочетание из пяти ответов, оно будет пятизначным числом, каждая цифра которого — нуль или единица. Выпишем все такие числа в порядке возрастания — получится наша таблица. Всего в ней 32 числа.

Теперь допустим, что нам всегда удается угадать квартиру за пять вопросов. Это означает, что, зная, какое получилось пятизначное число из нулей и единиц, мы можем точно назвать номер квартиры. Но так как пятизначных чисел у нас 32, то и квартир мы можем назвать лишь 32, а не 64, как в условии.

Номер телефона

Вы хотите узнать семизначный номер моего телефона, задавая мне вопросы, на которые я буду отвечать только «да» или «нет». Придумайте способ, гарантирующий успех за наименьшее число вопросов.

Одна фальшивая монета

Имеются 26 одинаковых по виду монет. Среди них одна фальшивая, она легче остальных. Есть чашечные весы (без стрелки и гирь). За какое наименьшее число взвешиваний можно найти фальшивую монету?

Эту задачу можно решать точно так же, как и предыдущую. Только число «подозрительных» монет надо попытаться уменьшать не в два раза, а в три: ведь у каждого взвешивания три возможных результата — левая чашка перевесила, правая чашка перевесила, чашки уравновесились. Поэтому сначала положим на каждую чашку по 9 монет. Если левая чашка перевесила, то фальшивая монета на правой чашке; если правая чашка перевесила, то фальшивая монета на левой чашке; если же чашки уравновесились, то фальшивая монета — среди восьми монет, не положенных на весы. Значит, после первого взвешивания остается 9 или даже 8 «подозрительных» монет. Потом положим на чашки по три «подозрительные» монеты. После второго взвешивания останутся три или две «подозрительные» монеты. Положив по одной из них на чашки, выясним, какая монета фальшивая.

Способа наверняка обнаружить фальшивую монету за два взвешивания нет, потому что фальшивой может оказаться любая из 26 монет, а возможных исходов двух взвешиваний всего 9 (каждый из трех исходов первого взвешивания может комбинироваться с каждым из трех исходов второго), и 9 меньше, чем 26.

Обсуждение

Понимаете ли вы, что общего в рассмотренных нами задачах? Там — квартиры, здесь — монеты; там — вопросы, здесь — взвешивания. И все же в них много общего. И тут, и там мы задаем вопросы: в одном случае Люсе, в другом — весам, и получаем ответы: в одном случае от Люси, в другом — от весов.

То же самое делают ученые, когда ставят опыт, — они задают вопросы. Известно выражение: «Физический эксперимент — это вопрос, который мы задаем природе». Конечно, так могут сказать о своих опытах не только физики, но и химики, и биологи — все, кто изучает природу. И если вы хотите быть настоящими математиками, то вам надо уметь задавать вопросы.

Наши задачи связаны с одним из современных разделов математики — теорией информации. Скажем, как быстрее всего передать сообщение о номере телефона, если в нашем распоряжении есть сигналы только двух видов? Это — типичная задача теории информации. Подробно об этой теории можно прочитать в книге «Вероятность и информация» А. М. Яглома и И. М. Яглома (М., «Наука», 1973).

Еще две фальшивые монеты

а) Перед вами лежат шесть одинаковых по виду монет, две из которых фальшивые (каждая из них тяжелее настоящей на 1 *г*). Еще у вас есть чашечные весы без стрелки и гирь. Весы эти, правда, не очень чувствительны и реагируют на разность грузов не менее 2 *г*. Найдите способ за четыре взвешивания выявить обе фальшивые монеты.

б) Имеются шесть одинаковых по виду монет. Четыре из них настоящие, по 4 *г* каждая, а две — фальшивые, общей массой 8 *г*: одна чуть более тяжелая, другая более легкая. Какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без стрелки и гирь потребуется, чтобы выявить обе фальшивые монеты и установить, какая из них легче, а какая — тяжелее?

Универсальные гири

Подберите массы четырех гирь так, чтобы ими можно было отмерить на чашечных весах любое число граммов от 1 до 40. (Гири можно класть на обе чашки.)

Отгадки с препятствиями

Вы опять отгадываете семизначный номер телефона, но теперь на один из ваших вопросов я могу дать неправильный ответ. Какие тогда вопросы вы будете задавать и какое наименьшее число вопросов вам понадобится?

К статье «Об одном методе решения задач по электростатике»

1. $q' = -q\frac{r}{a}$.

2. $q' = -q\frac{r_1}{r_2}$.

К статье «Донецкий государственный университет»

Вариант 1

1. $\frac{8R^3 \sin(\alpha-30^\circ)\sin(\alpha+30^\circ)}{9\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^4\alpha\sin^2\alpha}$.

2. $x=\frac{2^n+1}{2^n-1}$. 3. $x=\frac{(-1)^k}{2}\arcsin(4-2\sqrt{3})+\frac{k\pi}{2}$ $(k=0,\ \pm1,\ \ldots)$. 4. $4-\sqrt{2}<x<3$, $x>4+\sqrt{2}$. 5. 10 л.

Вариант 2

1. 0 *км/час* $< x <$ 20 *км/час* (x — первоначальная скорость велосипедиста).

2. $2\,\mathrm{arcctg}(\sqrt{3}\sin\alpha)$. 3. $x_1=2$, $y_1=3$; $x_2=3$, $y_2=2$. 4. $x_1=\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}$, $x_2=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $x_3=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k=0,\pm1,\ldots)$

5. Уравнение не имеет решений.

Вариант 3

1. $\arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)$. 2. 4 *км*. 3. $y_{\max}=\sqrt{2}$ при $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n$ $(n=0,\ \pm1,\ \ldots)$.

4. $\frac{(b^2-2ac)^2-2a^2c^2}{c^4}$. 5. $x_1=7$, $x_2=-\frac{1}{3}$.

Вариант 4

1. $\arccos\left(\sqrt[3]{2}-1\right)$. 2. $x_1=3$, $y_1=1{,}5$; $x_2=\frac{24}{23}$, $y_2=24$. 3. $x>2$. 4. $x=13$. 5. $x_1=-\frac{\pi}{32}+\frac{k\pi}{4}$, $x_2=\frac{\pi}{72}+\frac{k\pi}{9}$ $(k=0,\ \pm1,\ \ldots)$.

К статье «Московский институт управления им. С. Орджоникидзе»

Вариант 1

1. $R=a\left(\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}-1\right)/\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$. 2. $x=3/2$. 3. $0<x<\frac{1}{a}$, $x>a^4$. 4. $x=\pi/4+k\pi$ (k — целое). 5. 1:9.

Вариант 2

1. $MP=(q-p\cos\alpha)/\sin\alpha$, $MQ=(p-q\cos\alpha)/\sin\alpha$. 2. $x_1=5$, $x_2=1/625$. 3. $-2<x<2$. 4. $x_1=\mathrm{arctg}\,5+k\pi$, $x_2=-\pi/4+k\pi$ (k — целое).

К статье «Московский институт электронного машиностроения»

Вариант 1

1. Обозначим $3^{x\lg 5}=5^{x\lg 3}$ через y. Тогда уравнение примет вид

$$\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}=|5y-24|,$$

откуда $y_1=5$, $y_2=\frac{37}{8}$ и

$$x_1=\frac{1}{\lg 3},\quad x_2=\frac{\lg\frac{37}{8}}{\lg 3\cdot\lg 5}.$$

2. Имеем

$$\begin{cases} a_3\cdot a_6=13{,}5,\\ a_4+a_5=7{,}5\end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (a+2d)(a+5d)=13{,}5,\\ 2a+7d=7{,}5.\end{cases}$$

Если положить $a+2d=x$, $a+5d=y$, то последняя система перепишется так:

$$\begin{cases} xy=13{,}5\\ x+y=7{,}5.\end{cases}$$

Отсюда, с учетом положительности членов, $x=3$, $y=4{,}5$ или $a=2$, $d=\frac{1}{2}$.

Тперь требуется найти наименьшее значение $z = x + y$ при $xy = 13,5$. Подставляя значение $y = \frac{13,5}{x}$ в исследуемую функцию z, найдем

$$z = x + \frac{13,5}{x} = \sqrt{13,5}\left(\frac{x}{\sqrt{13,5}} + \frac{\sqrt{13,5}}{x}\right) \geq 2\sqrt{13,5};$$

минимум достигается при $x = y = \sqrt{13,5}$.

3. Из $\triangle BOS$ (рис. 1) $a = BO = H\operatorname{tg}\alpha$. Из $\triangle EOC$ (рис. 2) по теореме синусов

$$\frac{OE}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{a}{\sin\left(\pi - \beta - \frac{\pi}{2} + \alpha\right)},$$

откуда $OE = a\frac{\cos\alpha}{\cos(\beta - \alpha)}$ и $S_{сеч} = BO \times OE = H^2\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha\cos(\beta - \alpha)}$.

4. В ОДЗ ($a - 2\cos x \neq 0$, $a - 2\sin x \neq 0$) исходное уравнение эквивалентно уравнению

$(\sin x - \cos x)[2a(\sin x + \cos x) - a^2 - 4] = 0$,

откуда

а) $\sin x - \cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$;

а) $\sin x + \cos x = \frac{a^2 + 4}{2a}$, корней нет, так как $\left|\frac{a^2 + 4}{2a}\right| \geq 2$.

Подставляя корни в неравенства, определяющие ОДЗ, получим: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, если $a \neq \pm\sqrt{2}$; $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, если $a = -\sqrt{2}$; $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, если $a = \sqrt{2}$.

Уравнение имеет 9 корней на $[20\pi, 29\pi]$ при $a \neq \pm\sqrt{2}$; 5 при $a = -\sqrt{2}$; 4 при $a = \sqrt{2}$.

5. ОДЗ: $a \neq 5$, $a \neq -5$, $x \neq 0$, $y \neq 0$. Подставляя выражение для x из первого уравнения во второе, после очевидных преобразований получим

$y^2 - y(a^2 - 25 - 10a) - 5a(a^2 - 25) = 0$,

откуда $y_1 = -5(a + 5)$, $y_2 = a(a - 5)$, $x_1 = 5(a - 5)$, $x_2 = a(a + 5)$ (при $a = 0$ есть только одно решение x_1, y_1).

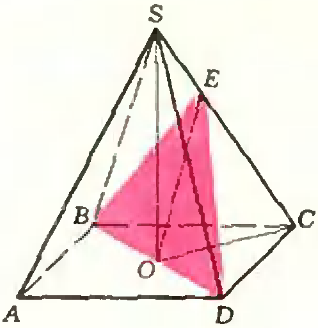


Рис. 1.

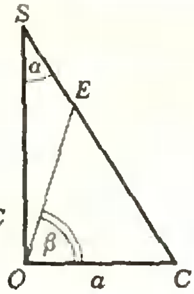


Рис. 2.

Имеем $x_1x_2y_1y_2 = -25a^2(a + 5)^2(a - 5)^2$. Требуется показать, что $a(a + 5)(a - 5)$ кратно 6. Но $a(a^2 - 5) = a^3 - a - 24a$, $a^3 - a = (a - 1)a(a + 1)$, как произведение трех последовательных целых чисел делится на 6 и $24a$ делится на 6.

Вариант 2

1. ОДЗ: $-2 < x < 1$. При этих x исходное неравенство эквивалентно неравенству $(1 - x)(x + 2) < 1$, т. е. $x^2 + x - 1 > 0$, откуда с учетом ОДЗ $-2 < x < \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < x < 1$.

2. $[1 - (1 - \sin\alpha)^3] : (1 - \sin\alpha)^3$.

3. Пусть первоначальный делитель равен x, а частное y. Тогда

$$\begin{cases} \frac{150}{x} - 1 < y \leq \frac{150}{x}, \\ \frac{151}{x+2} - 1 < y - 5 \leq \frac{151}{x+2}. \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{cases} \frac{151}{x+2} + 4 < \frac{150}{x}, \\ \frac{150}{x} < \frac{151}{x+2} + 6, \end{cases}$$

или $4 < \frac{150}{x} - \frac{151}{x+2} < 6$, откуда

$$\begin{cases} 4x^2 + 9x - 300 < 0, \\ 6x^2 + 13x - 300 > 0, \end{cases}$$

$6 < x < 8$, т. е. $x = 7$.

4. ОДЗ определяется системой

$$\begin{cases} 2\sin x + 1 \leq 0, \\ 2\cos x + 1 \leq 0. \end{cases}$$

Возведение в квадрат после простых преобразований дает

а) $\sin x - \cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$;

б) $2(\sin x+\cos x)+5=0$,

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{5}{2\sqrt{2}}$ (нет решений).

Подставив найденные корни в неравенства, определяющие ОДЗ, находим ответ: $x=\frac{5}{4}\pi+2\pi k$ (k—целое).

5. Из второго уравнения системы мы имеем

$$y(y-x-2)=0,$$

откуда $y=0$ или $y=x+2$. Подставляя каждое из этих значений в первое уравнение, получим следующие решения системы: $x_1=-a-3$, $y_1=0$ и $x_2=a(a+3)$, $y_2=(a+1)(a+2)$.

Переходя ко второй части задачи, заметим, что $1+x_1y_1=1^2$, $1+x_2y_2=1+a(a+1)(a+2)(a+3)=[a(a+3)+1]^2$.

Обратное утверждение неверно, что видно из примера: $a=-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}+1}$ — иррациональное число, но $1+xy=2^2$.

К статье «Белорусский институт инженеров железнодорожного транспорта»

Математика

Вариант 1

1. $S_{\text{бок}}=2h^2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right):(\sin\alpha\sin\beta)$.

2. $x_1=\frac{\pi}{12}+k\pi$, $x_2=\frac{5\pi}{12}+k\pi$ ($k=0, \pm1, \pm2, \ldots$). 3. $x=0,5$; $y=-1,5$. 4. $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Вариант 2

1. $V=\frac{1}{2}d^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$ (где α — меньший из углов, образуемых диагоналями). 2. $x_1=1$, $x_2=2$. 3. $x_1=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $x_2=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$ ($k=0, \pm1, \pm2, \ldots$). 4. $a-b$.

Вариант 3

1. $V_{\text{конуса}}=\frac{V}{2}\sin^2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$. 2. $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_2=-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k$ ($k=0, \pm1, \pm2, \ldots$). 3. $-\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$. 4. $x_1=3$, $x_2=1+\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}$.

Вариант 4

1. $V=\frac{\pi aS}{\sin\alpha}$. 2. $x_1=\pi k$, $x_2=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$ ($k=0, \pm1, \pm2, \ldots$). 3. $x_1=9$, $x_2=\frac{1}{9}$. 4. 1.

Физика

1. $F_c=m\left(g+\frac{Hg}{h}+\frac{v^2}{2h}\right)$.

2. $\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{h}}$.

3. $A=gl(M/2+m)=12,7$ *кдж*.

4. $\rho=\rho_в\frac{g}{g-a}=2,45\cdot10^3$ *кг/м³*.

5. $n=\frac{p}{kT}\approx3,5\cdot10^{10}$ *см⁻³*.

6. $I=\frac{Fv}{\eta U}\approx746$ *а*.

7. $P_1=\frac{36\mathscr{E}^2R}{(6r+R)^2}=1,5$ *вт*, $P_2=\frac{\mathscr{E}^2R}{(r/6+R)^2}\approx0,57$ *вт*.

8. $\mathscr{E}_{\text{ср}}=\frac{BS}{t}=78,5\cdot10^{-3}$ *в*.

9. $D_1=3$ *дптр* при $d>F$ (изображение действительное); $D_2=2$ *дптр* при $d<F$ (изображение мнимое).

10. $\lambda=\frac{1}{eU/hc+1/\lambda_0}\approx0,35$ *мкм*.

К статье «Донецкий политехнический институт»

Математика

Вариант 1

1. $t_1=5$ *час*, $t_2=4$ *час*. 2. $\pi a^3\cos\frac{\varphi}{2}\times\sin^2\frac{\varphi}{2}\Big/24\cos^6\frac{\varphi}{4}$. 3. $x_1=100$, $x_2=$

$= 1000$. 4. $x_1 = \frac{\pi}{6} + \pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x_3 = \frac{5\pi}{6} + \pi k$ (k = целое). 5. $x = 5$, $y = 7$.

Вариант 2

1. 30 *км/час*. 2. $4\,\mathrm{tg}^3\frac{\alpha}{2} \Big/ \mathrm{tg}\,\alpha$. 3. $x_1 = 4$, $x_2 = -5$, $x_{3,4} = \frac{-1\pm\sqrt{161}}{2}$. 5. $3 < x < \frac{22}{7}$.

Вариант 3

1. 6 *час*, 14 *час*. 2. $(a^3 - b^3)\,\mathrm{tg}\,\alpha/24$. 3. $x = \pm\pi/4 + \pi k$ (k — целое). 4. $x < -3$, $-1 < x < 2$. 5. $x_1 = 6$, $x_2 = 10$.

Физика

1. $H = h\frac{f-F}{F} = 1$ *см*.

2. $P_э = P\left(1 - \frac{PR}{U^2}\right) = 5640$ *вт*.

3. $\eta = \frac{\rho_в V}{Pt}\,[c_в(t_к - t_1)]\cdot 100\% = 52\%$.

К статье «Марийский политехнический институт им. М. Горького»

Вариант 1

1. $V = \frac{4r^3\,\mathrm{tg}\,\varphi}{3\sin\alpha}$. 2. $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

3. $x_1 = \pi k$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ (k — целое).

4. $-1 < x < 1$, $x > 4$. 5. $\sqrt[3]{x^2}$.

Вариант 2

1. $V = \frac{8\pi(2+\sqrt{3})^3}{3\sqrt{3}}$. 2. $x = \log_2 17$.

3. $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$ (k — целое). 4. $x < \sqrt[3]{34}$. 5. $2b(a-b)$.

К статье «Ярославский политехнический институт»

Математика

Вариант 1

1. $\frac{\pi\sqrt{2}\,h^2\sin\alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}$. 2. $0 < x \leqslant \frac{1}{9}$.

3. $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leqslant x < 1$. 4. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ (k — целое).

Вариант 2

1. $\frac{4\sqrt{2}\,R^3\sin\alpha\sqrt{\cos 2\alpha}\cdot\mathrm{tg}\,\alpha}{\sin^2 3\alpha}$.

2. $x_1 = 9$, $y_1 = 4$; $x_2 = 4$, $y_2 = 9$.

3. $x \geqslant 1$. 4. $x_1 = 21\pi/16$, $x_2 = 11\pi/8$.

Физика

1. $t = 2v_0\,\mathrm{tg}\,\alpha/g \approx 2{,}3$ *сек*.

2. $\alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{\sigma q}{2\varepsilon\varepsilon_0 mg} = 45°$.

3. $A = IBls = 2\cdot 10^{-4}$ *дж*.

4. $f = -dR/(2d+R) = -29$ *см* (знак «минус» указывает на то, что изображение точки мнимое).

К статье «Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина»

Математика

Вариант 1

1. $V = \pi l^3\sin\alpha\,(2 - \cos\alpha)/12$.

2. $x = \pm 2\pi/3 + 2k\pi$ (k — целое). 3. $x = ab^2$, $y = a/b^2$ ($a \neq 1$, $b \neq 1$).

4. $0 < x < 3/2$.

Вариант 2

1. $V = 4a^3\sin\alpha\cos^3(\alpha/2)$. 2. $x_1 = -1$, $x_2 = -3$. 3. $x = k\pi/2$ (k — целое).

4. $-1/3 < x \leqslant -1/4$.

Физика

1. $\Delta t = 86\,400\,T_0 h/R = 5400$ *сек* $= 1{,}5$ *час*.

2. $V_п = \frac{1}{g}\left(\frac{P_1 - P_2}{\rho_в} - \frac{P_1}{\rho_м}\right) \approx 13$ *см*^{3}.

3. $F_B = 3mg \approx 118$ *н*.

4. $Q = m(gl\sin\alpha - v^2/2) \approx 140$ *дж*.

5. $V_0 = \frac{pVT_0}{p_0 T} \approx 670$ *л*.

6. $\mathscr{E} = \frac{P_1 I_2^2 - P_2 I_1^2}{I_1 I_2 (I_2 - I_1)} \approx 3{,}15$ *в*;

$r = \frac{P_1 I_2 - P_2 I_1}{I_1 I_2 (I_2 - I_1)} \approx 0{,}13$ *ом*.

7. $I = \frac{cm\,\Delta t}{\eta U t} \approx 10$ *а*.

8. $m = \frac{1}{F}\,\frac{A}{n}\,It \approx 3$ *г*.

9. $\lambda = 2\pi v\sqrt{LC} \approx 113$ *м* ($v = 3\cdot10^8$ *м/сек* — скорость света).

10. $d = \dfrac{Ff}{f-F} \approx 28$ *см*.

К статье «Московский областной педагогический институт им. Н. К. Крупской»

Математика

Вариант 1

1. $3a^3 \operatorname{tg} \alpha/4$.

2. $x = y = -9$. Указание. Из второго уравнения системы получаем уравнения: $\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}\right)^2 + 4\sqrt{\dfrac{x}{y}} + 3 = 0$ при $y > 0$ (это уравнение не имеет решений) и $\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}\right)^2 - 4\sqrt{\dfrac{x}{y}} + 3 = 0$ при $y < 0$, откуда $x = 9y$ или $x = y$. Остается подставить эти выражения в первое уравнение системы и рассмотреть еще случай $y = 0$.

3. а) 2 *км/час*; б) 4 *час* $< t <$ 8 *час*. Указание. Положим $AC = s$, скорость трактора на спуске обозначим через v; тогда скорость на подъеме равна $v - 1$. По условию

$$\begin{cases} \dfrac{s}{v-1} + \dfrac{8-s}{v} = t_1, \\ \dfrac{8-s}{v-1} + \dfrac{s}{v} = t_2, \end{cases}$$

откуда

$$(t_1 + t_2)v^2 - (t_1 + t_2 + 16)v + 8 = 0,$$

$v = 2$ (*км/час*). Теперь $t_1 = 4 + \dfrac{s}{2}$ и $4 < t_1 < 8$, поскольку $0 < s < 8$.

Вариант 2

1. $a^3 \operatorname{tg} \alpha/16$.

2. $x = -7/10$, $y = -63/40$. Указание. Умножив первое уравнение системы на 8, второе на -3 и сложив их, получим

$$3x - 4\sqrt{xy} - 4y = 0,$$

откуда $x = 4y > 0$ или $x = \dfrac{4}{9}y < 0$.

3. а) 15 *км/час*; б) $t_1 > 1/3$ (*час*). Указание. Поскольку $t_2 > t_1$, рукав ADB должен быть короче, чем рукав ACB; обозначим его длину через s, а скорость лодки в стоячей воде через v. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{s+6}{v+3} + \dfrac{s}{v-3} = t_1, \\ \dfrac{s}{v+3} + \dfrac{s+6}{v-3} = t_2. \end{cases}$$

Отсюда $(t_2 - t_1)(v^2 - 9) = 36$, $v = 15$ (*км/час*), $t_1 = \dfrac{5s}{36} + \dfrac{1}{3}$, $s > 0$.

Вариант 3

1. $a^3\sqrt{3}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} \Big/ 2$.

2. а) $\pm\sqrt{8}$, $\pm\sqrt{23}$; б) $-64{,}32 < \alpha_1 - 14\alpha_2 < -64{,}31$.

3. 35 *км/час*. Указание. Если средняя скорость на части пути равна средней скорости на всем пути, то и на остальной части пути средняя скорость та же. Пусть s — длина третьего участка, v — средняя скорость; тогда

$$v = \frac{7s}{\dfrac{6s}{v-2} + \dfrac{s}{2v-15}},$$

откуда $v_1 = 35$, $v_2 = 6$ (*км/час*).

Вариант 4

1. $4a^3\cos^2\alpha\sqrt{-\cos 2\alpha}/3$.

2. а) $\pm\sqrt{31}$, $\pm\sqrt{29}$; б) $-39{,}16 < \alpha_1 + 8\alpha_2 < -39{,}15$.

3. 150 *км/час*. Указание. Пусть v — средняя скорость экспресса, s — длина второго участка. Тогда

$$\frac{s}{\dfrac{\frac{5}{9}s}{v+30} + \dfrac{\frac{4}{9}s}{v-24}} = v,$$

откуда $v = 120$ (*км/час*).

Физика

1. $v_н = s\sqrt{\dfrac{g}{2h}} = 7{,}5$ *м/сек*, $v_к = \sqrt{v_н^2 + 2gh} \approx 21{,}4$ *м/сек*.

2. $r = \dfrac{kg}{4\pi^2 n^2} \approx 1{,}3$ *см*.

3. $m = m_в + m_л + \dfrac{m_л\lambda + (m_в + m_л)c_в\Delta t_в}{L + c_в\Delta t_в} = 278$ *г*.

$$\theta = \frac{(c_в m_в + C_к)t_в}{C_к + c_в(m_в + m_л)} - \frac{c_л m_л(0^\circ - t_л) + m_л\lambda}{C_к + c_в(m_в + m_л)} \approx 17{,}5\ ^\circ C.$$

5. $T = T_0\left(1 + \frac{mg}{p_0 S}\right) = 308\,^\circ K$; $t = 35\,^\circ C$.

6. $\frac{V_2}{V_1} = \frac{(p_0 + \rho g h)\,T_2}{p_0 T_1} = 6{,}3$.

7. $r = \frac{I_1R_1 - I_2R_2}{I_2 - I_1} = 1$ *ом*; $\mathscr{E} = I_1 \times (R_1 + r) = 12$ *в*.

8. $R_1 = 200$ *ом*; $R_2 = 50$ *ом*.

9. $d_1 \approx 71$ *см*; $d_2 \approx 19$ *см*.

10. $F = f/3 = 8$ *см*.

К статье «Беспокойная дуга»
(см. «Квант» № 6)

1. Нет, не является. Опыт с дугой указанных в статье размеров получится столь же хорошо, если вместо алюминиевой пластинки использовать стеклянную. А. С. Попов, который ставил опыт в большем масштабе, нашел, что нагретая дуга на стеклянной пластинке качается меньшее время, чем на металлической.

2. При прочих равных условиях широкая дуга предпочтительнее, поскольку она имеет бо́льшую линию соприкосновения со слюдой. В этом нетрудно убедиться на опыте. Экспериментально ответить на вторую часть вопроса довольно сложно, потому что для постановки опыта придется использовать одинаковые дуги разной толщины.

3. Нет. Слюдяной листок, лежащий на алюминиевой пластинке, имеет такую же температуру, как и сама пластина. Если до этой же температуры нагреть дугу, то при соприкосновении ее со слюдой не будет происходить передачи тепла.

4. Очевидно, что время качаний дуги тем больше, чем дольше дуга остается горячей. Для продления этого времени можно предложить следующий «рецепт». Концы дуги загните кверху так, чтобы они оказались в пламени помещенной на внутреннюю поверхность дуги таблетки сухого горючего (таблетку при этом следует каким-либо образом закрепить). В этом случае дуга будет качаться в течение всего времени горения таблетки.

5. Вместо дуги в опыте можно использовать тонкостенную металлическую трубочку. Если слюдяной листочек положить на слегка изогнутую пластинку, нагретая трубка будет кататься взад и вперед.

К статье «Московский технологический институт»
(см. «Квант» № 6)

Математика

Инженерно-экономический факультет

1. $2/3$ при $a > 1$; 2 при $0 < a < 1$. 2. $x_1 = \pi + 2\pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). 3. x — любое действительное число. 4. $\arccos \frac{2n - 1 \pm 2\sqrt{n^2 - 2n}}{4n + 1}$.

Механико-технологический факультет

1. -1 (в ОДЗ). 2. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). 3. $-4 < x < -3$, $x > 8$. 4. $\sqrt{2}a^3/2$.

Химико-технологический факультет

1. $\operatorname{ctg}\alpha$ (при $\operatorname{ctg}\alpha \neq -1$). 2. $5 \leqslant x \leqslant 10$. Указание. Представить уравнение в виде $\left|\sqrt{x-1} - 2\right| + \left|\sqrt{x-1} - 3\right| = 1$.

3. $x = 1/25$. 4. $\frac{\pi p^2 \sin\beta}{1 + \sin\beta}$.

Физика

1. $H = \frac{2p_0}{\rho g} \approx 20$ *м*.

2. $v = \sqrt{R\,(N/m - g)} \approx 140$ *м/сек*.

3. $\varphi = ER = 8{,}3 \cdot 10^8$ *в*.

4. $\eta = \left(1 - \frac{2\rho l P}{U^2 S}\right)100\% \approx 97\%$.

5. $\eta = \frac{ES}{kP} = 15$ *лм/вт*.

К задачам «Квант» для младших школьников»
(см. «Квант» № 6)

1. Надо вынуть шарик из коробки, на которой изображены белый и черный шарики — в ней не может быть разноцветных шаров.

2. Сила давления воды во всех трех случаях одинакова.

а)

б)

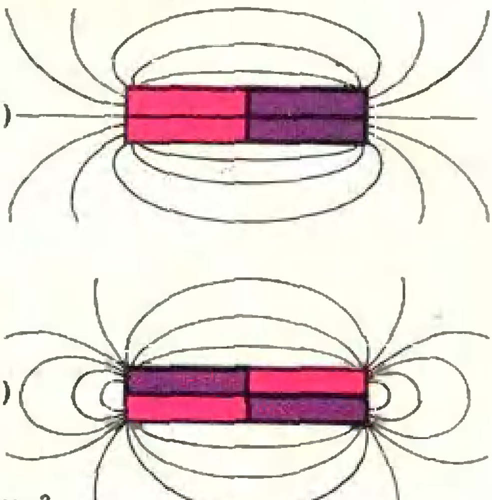


Рис. 3.

3. XII — IX = III,
X — VII = III,
VI + V = XI.
4. См. рис. 3.
5. 19275 : 75 = 257.

К задачам

(см. с. 47)

1. Нет, не имеет: левая часть четна, а правая нечетна при целых n и x.

2. $3^{23} > 5^{15}$. Указание. $5^{15} = 5 \cdot (5^2)^7$; $3^{23} = 9 \cdot (3^3)^7$.

3. $81 = 9^2$. Указание. Рассмотреть уравнение $10a + b = (a + b)^2$, из которого следует, что $a = 5 - b + \sqrt{25 - 9b}$.

4. Начинающий, если первым ходом он зачеркнет центральный куб.

5. Равносторонний треугольник.

Список читателей, приславших правильные решения задач Ф353—Ф362

(Окончание. Начало см. на с. 36)

С. Дваренас (Клайпеда) 6; *М. Дворцов* (Фрунзе) 8, 1; *П. Демкин* (Донецк) 9; *А. Дзагоев* (Тбилиси) 8; *А. Дзюбенко* (Москва) 8, 9; *А. Добрынин* (Коркино) 9; *А. Дубровин* (д. Березовка Кировской обл.) 8, 9; *С. Ефимов* (Ленинград) 8; *Е. Загуляев* (Уфа) 8; *Н. Заламетдинова* (Альметьевск) 9; *Г. Залескис* (Вильнюс) 8—2; *А. Захаров* (Брест) 8—0; *Т. Заяц* (с. Т. Пасека Закарпатской обл.) 8, 9, 2; *А. Зубков* (Рустави) 8; *А. Измайлов* (Зеленодольск ТАССР) 6, 0, 2; *В. Кабанов* (Шахунья) 0; *А. Казачков* (Харьков) 8; *А. Калинин* (Великие Луки) 3, 8—0, 2; *А. Калустов* (Баку) 8, 9, 2; *В. Канотоп* (Харьков) 3, 8, 9, 2; *С. Копыловский* (п. Знобь-Новогородское Сумской обл.) 3, 8—2; *О. Костенко* (Кировск) 1, 2; *В. Котик* (Харьков) 8, 9; *М. Краснов* (п. Кизнер УдмАССР) 8; *А. Криканов* (Лыткарино) 6; *П. Крупкин* (Димитровград) 3, 8—2; *В. Купцов* (Аша) 6, 8, 9, 0; *М. Курносов* (Лысьва) 3; *А. Лебедь* (Днепропетровск) 3, 6, 8—2; *П. Лещенко* (с. Юца Ставропольского кр.) 3, 8—2; *А. Листовничий* (Киев) 3, 6, 9—2; *Ю. Литвинович* (п/о Ситница Брестской обл.) 8—2; *О. Лищенко* (Киев) 3, 6, 8—2; *С. Люксютов* (Киев) 8—0; *М. Магид* (Даугавпилс) 3, 6, 8—2; *В. Маргвелишвили* (Кутаиси) 8; *Е. Мартынова* (Нежин) 8, 9, 1, 2; *Е. Машеров* (Ананьев) 8—2; *А. Медведков* (Бобруйск) 1, 2; *М. Меладзе* (Тбилиси) 6; *А. Минин* (Чебоксары) 2; *О. Мирзабасов* (Черновцы) 0, 1; *А. Михайлов* (Ногинск) 8, 1; *И. Морозов* (Горький) 3, 6, 8, 0—2; *Л. Морозовский* (Киев) 6, 8, 9, 2; *А. Мохов* (Бобруйск) 3; *Ю. Мухарский* (Киев) 8—2; *С. Назаренко* (п. Старая Купавна Московской обл.) 9; *Н. Никифоров* (Великие Луки) 8, 9; *В. Николайчик* (Старые Дороги) 8, 0; *И. Овсянников* (Саратов) 8, 9; *П. Оксузян* (Орджоникидзе) 8; *А. Охримчук* (Выкса) 3, 8—2; *В. Пилей* (Харьков) 3, 6, 2; *А. Перфилов* (Воронеж) 9, 1; *А. Петухов* (Новокузнецк) 9; *П. Побылица* (Ленинград) 9, 2; *А. Подолек* (Пологи) 8, *В. Позняк* (Барановичи) 8—2; *Е. Пономарев* (п. Черноголовка Московской обл.) 6, 8, 9, 1; *В. Попов* (Ясногорск) 3; *В. Потемкин* (Великие Луки) 8—0; *М. Райхман* (Винница) 8, 9; *Л. Расин* (Даугавпилс) 3, 6, 8, 9, 1, 2; *С. Распономарев* (Оренбург) 3, 8, 9, 1, 2; *В. Реммель* (п/о Вайда ЭстССР) 3, 6; *В. Розовский* (Минск) 3, 5; *Б. Ротань* (Жданов) 8; *В. Рубель* (Ставрополь) 6, 8—2; *А. Рудерман* (Ленинград) 3, 8, 0—2; *И. Рудой* (Харьков) 9, 2; *Д. Русов* (Рига) 3, 1; *А. Рябов* (Майкоп) 8; *А. Савельев* (с. Колосково Белгородской обл.) 6; *С. Самиляк* (Бар) 1, 2; *Т. Саргазаков* (Новосибирск) 8; *И. Сатаев* (Саратов) 3, 8, 9, 1; *И. Светловский* (Волковыск) 6; *П. Свистун* (Магнитогорск) 6; *А. Святченко* (Кишинев) 8—1; *С. Секацкий* (п. Кант КирССР) 9; *В. Серебрянный* (Харьков) 3; *Л. Скатков* (Харьков) 3; *В. Склярчук* (Борщев) 1, 2; *Ю. Скопинцев* (Львов) 8, 9; *Ю. Скрынников* (Рустави) 3, 6, 8, 9, 2; *А. Смоляков* (Кадиевка) 3; *А. Смулько* (Пинск) 8, 2; *Ю. Солозобов* (Тамбов) 3; *В. Сорокин* (Москва) 6; *В. Старшенко* (Запорожье) 8—2; *М. Суслов* (Москва) 3, 6, 8, 9, 1, 2; *Е. Тетельман* (Тирасполь) 9; *О. Токарь* (Харьков) 3, 8, 2; *К. Третьяченко* (Киев) 3, 8, 0—2; *Г. Турабелидзе* (Кутаиси) 9; *Е. Усина* (Великие Луки) 8, 9; *М. Файнберг* (Великие Луки) 8; *А. Фарбер* (Тамбов) 8, 9; *Н. Федин* (Омск) 3, 6, 8—2; *А. Фрумкин* (Курск) 3, 6, 8—2; *Ю. Хабаров* (Павловский Посад) 8, 9, 2; *М. Хазан* (Киев) 6, 1; *И. Цацкис* (Кременчуг) 2; *М. Цодыкс* (Новокузнецк) 9; *И. Цуркис* (Калининград) 9; *В. Черченко* (Киев) 6; *Г. Шарипов* (с. Угали БАССР) 1; *Р. Шарипов* (Каракуль Бухарской обл.) 3, 1; *К. Шахназарян* (Баку) 6; *Е. Шержухов* (Курганск) 9; *Э. Шифрин* (Днепропетровск) 8; *Н. Щукин* (Кулебаки) 8; *В. Юровский* (Ташкент) 8, 9, 0, 2; *Е. Яненко* (Киев) 3, 8, 1.

Обложка этого номера (1 и 4 страницы) подготовлена по материалам Ю. Котова.

Номер оформили: Ю. Ващенко, Е. Верентинова, С. Верховский, В. Карцев, Э. Назаров

Корректор Т. С. Вайсберг

113035, Москва, Ж-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62. Сдано в набор 22/IV 1976 г.
Подписано в печать 9/VI 1976 г.
Бумага 70×100 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 6,11. Уч.-изд. л. 5,2 Т-12218.
Цена 30 коп. Заказ 807. Тираж 312 960 экз.

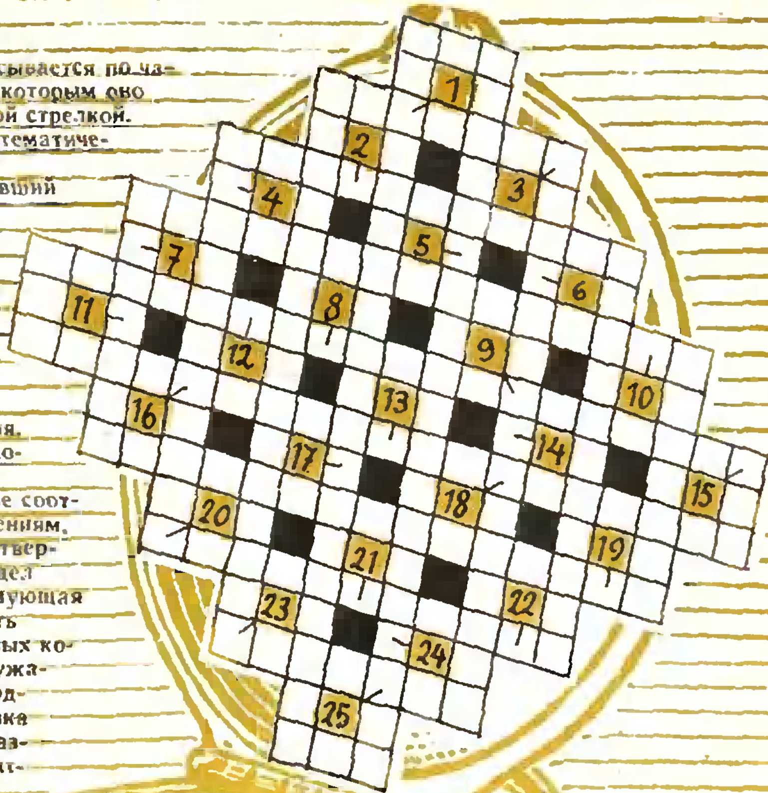
Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

КРОССВОРД

Каждое слово из восьми букв вписывается по часовой стрелке вокруг номера, под которым оно стоит, начиная с клетки, отмеченной стрелкой.

1. Результат измерения. 2. Вид математического вычисления. 3. Часть круга. 4. Советский астроном, разработавший теорию поглощения света в межзвездной среде. 5. Сумма длин сторон многоугольника. 6. Сила, действующая на единицу поверхности. 7. Электронная лампа. 8. Раздел физики. 9. Древнегреческий астроном, географ и картограф, автор «Альмагеста». 10. Советская научная космическая станция. 11. Прибор, преобразующий звуковые колебания в электрические. 12. Шестигранник. 13. Явление, не соответствующее обычным представлениям, противоречие. 14. Действующее отверстие оптической системы. 15. Раздел физики. 16. Величина, характеризующая тепловое состояние тела. 17. Часть логарифма. 18. Одна из декартовых координат точки. 19. Механизм, служащий для передачи вращения от одного вала к другому. 20. Установка для ускорения электронов. 21. Раздел механики. 22. Единица магнитного потока. 23. Сомножитель. 24. Постоянная величина в данной задаче. 25. Прибор для охлаждения двигателя внутреннего сгорания.



Цена 30 коп.
Индекс 70465

В этом номере мы продолжаем выставку машинного творчества. На этот раз на обложке — геометрические орнаменты, полученные с помощью программ «Алграф» в институте, занимающемся экспериментальным проектированием жилых зданий. Подобные программы помогают архитекторам в их работе.

На рисунке на первой странице обложки вы видите проекцию на полусферу ячеистой сетки, лежащей в экваториальной плоскости полусферы. (Попробуйте определить центр проецирования.) Рисунок этот машина выполнила с помощью программы, осуществляющей криволинейное преобразование координат. Принцип построения рисунка на четвертой странице обложки мы предлагаем вам определить самостоятельно.