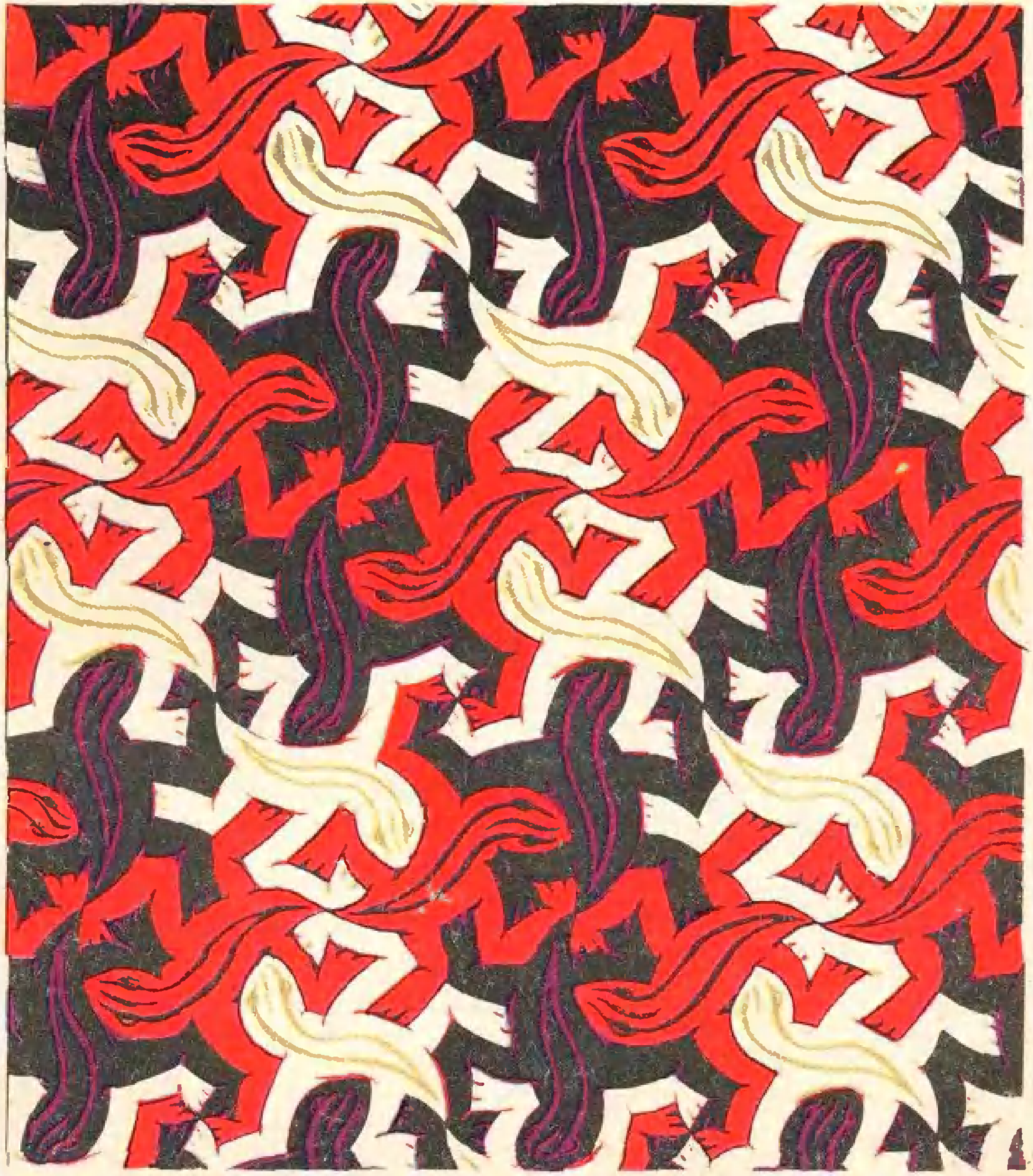
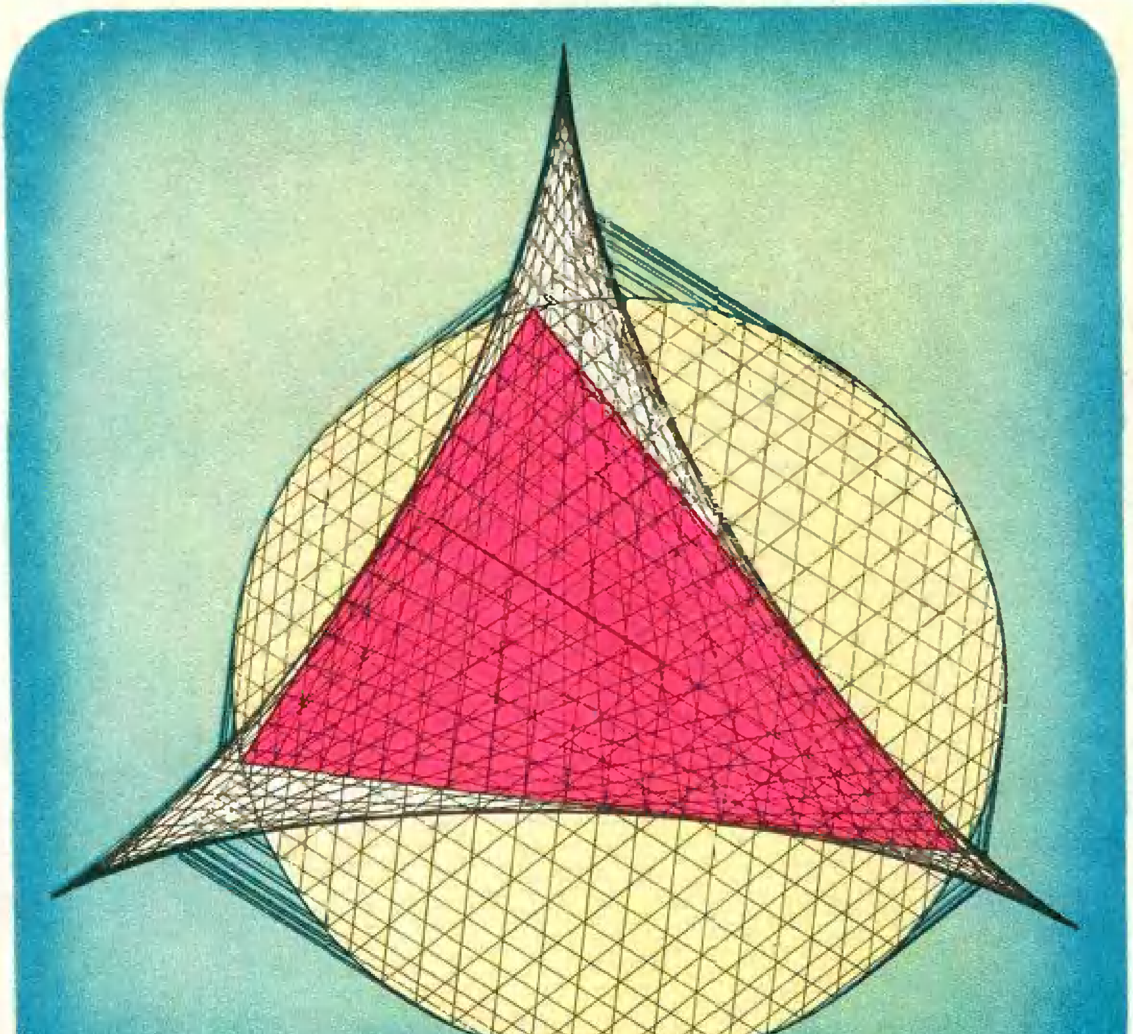
Квант

3
1977

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





Здесь вы видите один из способов построения замечательной кривой — дельтоиды. Иногда ее называют кривой Штейнера по имени выдающегося немецкого геометра девятнадцатого века Якоба Штейнера. Подробнее о дельтоиде читайте в заметке В. Березина на с. 19.

Основан в 1970 году

Квант

3
1977

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

А. Лопшиц

Задача Мёбиуса и ее продолжение

Полтора века назад (в 1823 г.) молодой тридцатилетний астроном обсерватории в Лейпциге Август Мёбиус обратил внимание математиков на то, что хотя уже Эйлер рассматривал не только простейшие геометрические преобразования (движения и подобия), но и более общие, которые он назвал аффинными*), они все же недостаточно применяются геометрами.

Мёбиус указывает при этом, что многие геометрические задачи, содержание которых не использует ни понятия длины, ни измерения углов, решались и после Эйлера чуждыми их содержанию средствами, и высказывает свое убеждение **), что следовало бы такие задачи по возможности полно представить, систематически их расположить и развить самостоятельное геометрическое направление, которое не использовало бы ни тригонометрии, ни Magister Matheseos (так называли в XVII веке теорему Пифагора). Далее он продолжает: «В первые годы моего пребывания здесь*), когда мои обязанности оставляли мне больший досуг, я сделал попытку в этом направлении. Я был к этому подготовлен благодаря ранее изобретенному мною особого рода геометрико-аналитическому исчислению, с помощью которого я сразу обнаружил, что именно эти общие свойства фигур**) и составляют, собственно, область его применения; благодаря этому исчислению я получил возможность обнаружить геометрические результаты, к которым другие методы меня привели бы на более трудном пути».

Полное изложение этого «исчисления» Мёбиус дал в 1827 году в своем обширном труде «Барицентрическое исчисление». Эту книгу Феликс Клейн назвал «подлинным кладом идей, изложенных с изумительной ясностью»; самого же Мёбиуса Клейн считал предшественником своей Эрлангенской программы, сделавшейся впоследствии программой многих основных направлений в области геометрии XIX и XX столетий (см. статью С. Гиндикина «Феликс Клейн», «Квант», 1975, № 12).

Мы не можем здесь подробно останавливаться на этой замечательной книге Мёбиуса; скажем только, что в ней отчетливо выявляются основы векторной алгебры и ее приложений к геометрии (все это теперь изучается в школе).

В этой небольшой заметке мы познакомим читателя с задачей Мёбиуса, которую он счел достойной того, чтобы привлечь внимание математиков своего времени к новому кругу геометрических проблем.

В своей первой работе (1823 г.) он пишет: «Из многочисленных, относящихся к этой области задач я разрешаю себе предложить читателю для самостоятельного решения следующую:

Каждые две из пяти произвольно заданных в плоскости точек A, B, C, D, E соединены прямой. Площади

*) Так называют геометрические преобразования, которые прямые переводят в прямые, причем параллельные прямые переходят в параллельные прямые.

**) Эти и последующие высказывания Мёбиуса содержатся в его первой математической работе «Две геометрические задачи», напечатанной в качестве приложения в астрономическом издании: «Наблюдения Королевской Университетской Обсерватории» в Лейпциге в 1823 году.

*) В Лейпцигской обсерватории.

**) То есть свойства, сохраняющиеся при аффинных преобразованиях и поэтому не зависящие от измерения длин и углов.

возникающих при этом пяти треугольников EAB, ABC, BCD, CDE, DEA заданы; требуется выразить через них площадь пятиугольника $ABCDE$. Вместо площадей этих пяти треугольников можно также считать заданными площади пяти четырехугольников: $BCDE$, $CDEA$, $DEAB$, $EABC$, $ABCD$, — и искать выражение через них площади пятиугольника $ABCDE$.

Обращение Мёбиуса к читателям сразу вызвало отклики: во втором томе журнала «Астрономические известия» (1825 год; редактор журнала — известный математик и астроном Шумахер) было опубликовано два решения этой задачи. Однако оба решения были «классическими», полученными методами элементарной геометрии — средствами, которые Мёбиус считал чуждыми содержанию своей задачи; и только в своей книге Мёбиус дал полное ее решение средствами «барицентрического исчисления»; мы бы теперь сказали — средствами векторной алгебры.

Читатель этой статьи с особым интересом займется решением задачи Мёбиуса, если мы сообщим ему окончательный результат:

Площадь x пятиугольника $ABCDE$, у которого площади треугольников EAB, ABC, BCD, CDE, DEA равны соответственно a, b, c, d, e, есть корень квадратного уравнения

$$x^2 - x(a + b + c + d + e) + (ab + bc + cd + de + ea) = 0.$$

Не менее интересно и то, что площадь x пятиугольника $ABCDE$, у которого площади четырехугольников $BCDE$, $CDEA$, $DEAB$, $EABC$, $ABCD$ равны соответственно α, β, γ, δ, ε, есть корень «такого же» квадратного уравнения

$$x^2 - x(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\varepsilon + \varepsilon\alpha) = 0.$$

Обратим внимание читателя на то, что Мёбиус рассматривает не только выпуклые многоугольники и что, например, в многоугольнике $ABCDE$, изображенном на рисунке 1, площади треугольников ABC и BCD Мёбиус измеряет положительными числами, а площадь треугольника CDE — отрицательным числом; он учитывает, что порядок, в котором следуют точки A, B, C и точки B, C, D, соответствует обходу по сторонам этих треугольников по часовой стрелке, а порядок, в котором следуют точки C, D, E — обходу по сторонам треугольника CDE п р о т и в часовой стрелки.

Более того, Мёбиус рассматривает не только «обычные» многоугольники, но и такие, у которых стороны могут пересекаться не только в вершинах многоугольника (см. рис. 2). Площадь такого многоугольника (да и всякого другого) Мёбиус считает равной сумме площадей «ориентированных» треугольников PAB, PBC, PCD, PDE, PEA. Он доказывает (сумеет ли это сделать читатель самостоятельно?), что эта сумма не зависит от выбора точки P (в плоскости многоугольника).

Перечисляя новые геометрические идеи Мёбиуса, Ф. Клейн указывает, что Мёбиус первый совершенно последовательно пользуется принципом знаков в геометрии, притом не только для измерения отрезков, но и для измерения площадей и объемов,

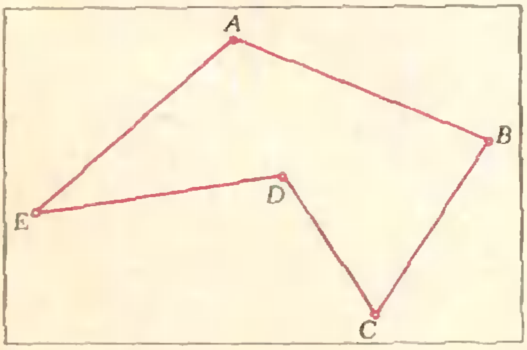


Рис. 1.

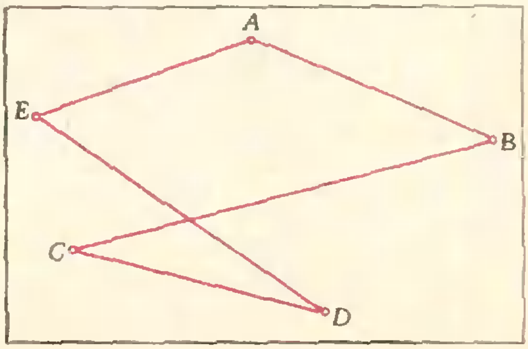


Рис. 2.

при котором он различает направление обхода *).

В конце своей небольшой статьи «Письмо профессора Мёбиуса к издателю журнала» («Астрономические известия», 1825, т. 3) Мёбиус по поводу предложенной им задачи пишет:

«Но довольно говорить о столь легкой задаче, которая, рассмотренная сама по себе, есть просто курьез; она заслуживает некоторого внимания лишь постольку, поскольку представляет пример следующей теоремы, которая мне кажется новой: *если каждые две точки какой-либо системы n точек, расположенных в плоскости, соединить прямой линией, и если считать заданными площади (независимые между собой) каких-либо $2n-5$ многоугольников, возникающих от пересечения этих прямых, то через них можно выразить площадь каждого из остальных многоугольников*».

Доказательство этой теоремы может быть предметом самостоятельного исследования читателя (Мёбиус также опубликовал его в своей книге «Барицентрическое исчисление»).

Предложим еще одну задачу — она является своеобразным продолжением первой (и также, как она, представляет пример теоремы типа теоремы Мёбиуса).

В пятиугольнике $ABCDE$ заданы площади p, q, r, s, t треугольников ACD, BDE, CEA, DAB и EBC. Нужно через них выразить площадь пятиугольника $ABCDE$.

А вот и ответ:

$$x^2 = (p+q+r+s+t)^2 - 4(pr + rt + tq + qs + sp).$$

Заметим еще, что и первая задача Мёбиуса, и ее «продолжение» являются частными случаями следующей задачи:

На сторонах AB, BC, CD, DE и EA пятиугольника $ABCDE$ взяты точки A', B', C', D' и E' так, что $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB}\cdot\lambda$; $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC}\cdot\lambda$; $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CD}\cdot\lambda$; $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{DE}\cdot\lambda$; $\overrightarrow{EE'} = \overrightarrow{EA}\cdot\lambda$ (рис. 3; многоугольник $A'B'C'D'E'$ называют *λ-сопряженным* с многоугольником $ABCDE$). Требуется выразить площадь пятиугольника $ABCDE$, если заданы площади треугольников ABC', BCD', CDE', DEA', EAB'. Легко видеть, что в случае, когда $\lambda = 0$, ответ следует из теоремы Мёбиуса, а в случае $\lambda = 1$ — из ее «продолжения»: ведь если $\lambda = 0$, то $A' = A$, $B' = B$, ...; если же $\lambda = 1$, то $A' = B$; $B' = C$; $C' = D$; $D' = E$; $E' = A$.

Последнее замечание: о многоугольнике, λ-сопряженном заданному многоугольнику, можно высказать много интересных предложений — вот одно из них (оно не связано с теоремой Мёбиуса):

Площадь n-угольника, λ-сопряженного с заданным многоугольником $A_1A_2 \ldots A_n$, равна $P\lambda^2 + Q\lambda + R$, где числа P, Q, R определяются площадью многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ и площадью многоугольника $S_1S_2 \ldots S_n$, $^1/_2$-сопряженного с многоугольником $A_1A_2 \ldots A_n$ (его вершины являются серединами последовательных сторон многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$: S_1 — середина A_1A_2, S_2 — середина A_2A_3 и т. д.).

Мы надеемся, что эти задачи заинтересуют наших читателей. Их решения мы предполагаем опубликовать позже. А пока — ждем ваших писем.

*) Подробное изложение теории измерения «площадей ориентированных фигур» вместе с приложениями этой теории (в геометрии и геодезии) читатель найдет в брошюре А. М. Лопшица — выпуск 20 серии «Популярные лекции по математике», М., 1956 год.

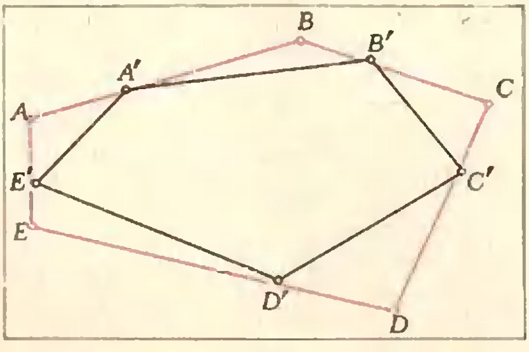


Рис. 3.

Александр Григорьевич Столетов (1839—1896)

В. Лишевский

Александр Григорьевич Столетов

Выдающийся русский физик А. Г. Столетов родился 29 июля (10 августа) 1839 г. в семье небогатого владимирского купца. Его отец — Григорий Михайлович — владел небольшой бакалейной лавочкой и мастерской по выделке кож. Мать — Александра Васильевна — была тоже купеческого звания, но семья Столетовых совершенно не походила на типичные купеческие семьи, мрачный мир которых так мастерски изобразил в своих пьесах А. Н. Островский. Александра Васильевна была образованной женщиной и сама преподавала своим детям (до их поступления в гимназию) русский язык и арифметику.

В доме была неплохая библиотека, и Саша, научившись читать в четырехлетнем возрасте, стал рано ею пользоваться. В пять лет он уже читал совершенно свободно.

В 1849 г. Александр Столетов поступил во Владимирскую гимназию, которую окончил в 1856 г. В свидетельстве об окончании сказано, что он «... признан окончившим Гимназический курс с предоставлением права на поступление в Университет без вторичного экзамена и с награждением за отличные успехи в науках ... золотой медалью».

В последние годы учебы в гимназии четко определились наклонности Александра. Его любимые предметы — математика и физика. Он с удовольствием занимается ими в классе, а дома мастерит самодельные физические приборы и ставит различные опыты. Решено. Он будет физиком!

Осенью того же 1856 г. А. Г. Столетова зачисляют на физико-математический факультет Московского университета «казеннокоштным» студентом (то есть получающим государственную стипендию). В то время в университете было много бездарных профессоров, но Александру повезло с учителями. Прикладную математику он слушал у Николая Дмитриевича Брашмана, воспитавшего великого П. Л. Чебышева, астрономию ему преподавал Федор Александрович Бредихин, а лекции по аналитической геометрии, дифференциальному и интегральному исчислению, высшей алгебре и вариационному исчислению читал замечательный педагог Николай Ефимович Зернов. Но любимый предмет Александра по-прежнему физика. Его преподает большой ученый и прекрасный человек — Михаил Федорович Спасский.

Столетов живет бедно, денег мало, но несмотря на это он весьма неохотно соглашается на частные уроки и переводы, справедливо полагая, что эти дополнительные занятия отвлекают его от науки. Все время принадлежит и отдано только ей!

Выдающиеся научные способности Александра, его большая любовь к знаниям были замечены и оценены преподавателями. В 1860 г. А. Г. Столетов с отличием заканчивает университет, и сразу же руководство факультета начинает хлопотать об оставлении молодого кандидата (так назывались тогда окончившие полный курс) при университете. Но на просьбу приходит отказ. Столетов как казеннокоштный студент должен после университета отработать 6 лет «по учебной части Министерства Народного Просвещения».

Факультетское начальство повторяет свою попытку оставить А. Г. Столетова при университете. Переписка продолжается. А сам кандидат не теряет времени даром и целые дни проводит в библиотеке.

Только 5 сентября 1861 г. наконец приходит долгожданное разрешение. За истекшее время А. Г. Столетов успел подготовиться к магистерскому экзамену и 16 октября подает прошение ректору: «Желая получить степень магистра физики, покорнейше прошу ... допустить меня к устраиваемому испытанию».

Экзамен сдан успешно, но защита диссертации неожиданно откладывается. Профессора К. А. и С. А. Рачинские пожертвовали университету стипендию для посылки в заграничную командировку на два года достойного кандидата. Выбор пал на А. Г. Столетова, и летом 1862 г. он покидает Москву.

За границей Столетов пробыл три года. Он учился в Гейдельберге, Геттингене и Берлине у Г. Кирхгофа, Г. Гельмгольца, В.-Э. Вебера, Г.-Г. Магнуса и других известных ученых. Учился, как всегда, самозабвенно. К. А. Тимирязев позже вспоминал: «... когда через несколько уже лет, я в свою очередь провел в Гейдельберге несколько семестров, посещая, между прочим, и практические занятия у Кирхгофа, мне довелось слышать еще свежее предание об одном молодом русском, с виду почти мальчике, изумлявшем всех своими блестящими способностями». Кирхгоф называл Столетова самым талантливым своим учеником.

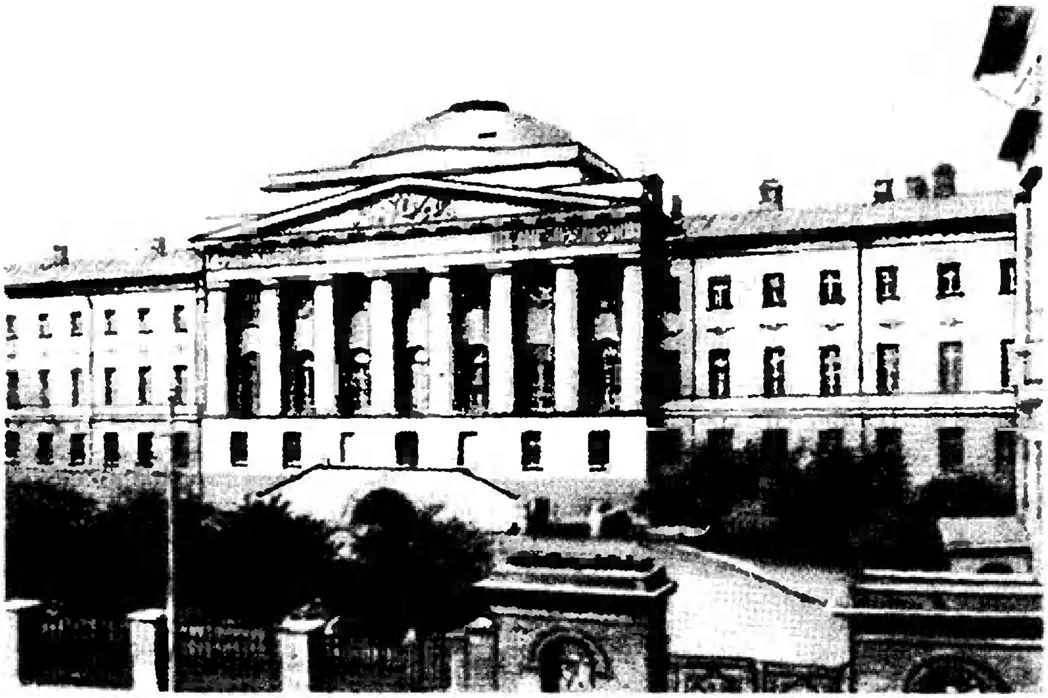
В декабре 1865 г. А. Г. Столетов возвращается на родину, а в следующем году получает место преподавателя математической физики и физической географии в Московском университете.

Студентам нравится новый молодой педагог. Его лекции так познавательны и интересны. А как увлекательно он говорит, какой он блестящий оратор. «Если бы застенографировать его лекцию, — вспоминал впоследствии учившийся у Александра Григорьевича профессор Б. М. Житков, — она, с первого до последнего слова, не нуждалась бы в редакционных поправках. Слушателям казалось, что Столетов читает им лекцию по очень хорошему учебнику».

Студенты не знали, чего стоила А. Г. Столетову эта отработанность, эта безукоризненность его лекций. До поздней ночи горит свет в кабинете. Александр Григорьевич просматривает последние научные журналы, книги, делает выписки, продумывает план будущей лекции. Слушателям должны быть сообщены самые свежие сведения, это должен быть рассказ о самых последних достижениях науки.

После подготовки к лекции Столетов берется за свою магистерскую диссертацию. Она посвящена «общей задаче электростатики». Смысл задачи в следующем.

Представьте себе незаряженный проводник, к которому подносят другой проводник, заряженный, например, отрицательно. Тогда на первоначально незаряженном проводнике появятся заряды: на ближайшей к заряженному телу стороне — положительные, на противоположной — отрицательные. Эти индуцированные заряды в свою очередь подействуют на



Старое здание Московского университета.

заряженный проводник, и заряды на нем перераспределятся. Это перераспределение зарядов вызовет в свою очередь изменение распределения зарядов на другом проводнике и т. д. Так будет продолжаться до тех пор, пока между двумя проводниками не установится электростатическое равновесие. Как при этом будут распределены заряды на проводниках? Для случая двух тел эта задача была решена Морфи и Дж. Томсоном. Столетов сумел решить задачу в самом общем виде: в случае взаимодействия между собой любого произвольного числа проводников.

В мае 1869 г. А. Г. Столетов блестяще защитил магистерскую диссертацию и был утвержден в звании доцента.

Бессонные ночи, чрезмерный труд и нервное напряжение сказываются на здоровье молодого ученого. Он заболевает и около года проводит в различных лечебницах. Ему запрещают читать, писать, заниматься какой бы то ни было умственной деятельностью. Это был самый тягостный период в жизни А. Г. Столетова. Наконец, консилиум профессоров разрешает ему приступить к занятиям со студентами. И сразу же забываются все наставления врачей щадить свое здоровье, Александр Григорьевич вновь полностью отдается педагогической и научной деятельности.

В то время Московский университет, как и другие высшие учебные заведения России, не имел физической лаборатории. Чтобы вести научные исследования, русские ученые были вынуждены уезжать за границу. А. Г. Столетов поставил перед собой цель создать такую лабораторию. Он пишет письма, прошения, обивает пороги чиновничьих кабинетов, доказывая, что университет не может не иметь своей лаборатории. Ведь физика — наука экспериментальная. Физик — не математик, он не может творить науку только за письменным столом.

Весь 1870 г. проходит в хлопотах по устройству первой в России физической лаборатории. В этом же году на квартире у Столетова для обсуждения различных физических проблем начинают собираться студенты Александра Григорьевича и его товарищи по работе. Возникает физический кружок, положивший начало физической школе Столетова, которая, в свою очередь, дала основание школе русских физиков.

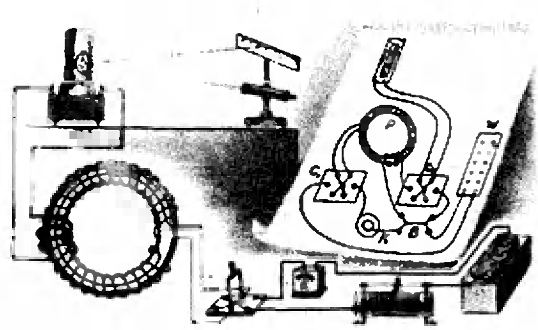


Схема установки, разработанная А. Г. Столетовым для постановки эксперимента по изучению магнитных свойств железа.

На железное кольцо намотаны две обмотки. Первая обмотка через переключатель соединена с батареей. В цепь второй включен баллистический гальванометр. В моменты включения (или выключения) тока, подаваемого в первичную обмотку, намагниченность железного кольца быстро растет (или убывает) до определенного значения, соответствующего данной силе тока и числу витков в первичной обмотке. Меняющееся в эти моменты магнитное поле индуцирует ток во вторичной обмотке. Измерив с помощью гальванометра количество электричества, протекающего за это время по вторичной обмотке, можно теоретически рассчитать величину магнитного поля, вызвавшего ток. А узнать магнитное поле, создаваемое кольцом, — это значит узнать степень намагничивания железного образца.

В 1871 г. А. Г. Столетов приступает к работе над докторской диссертацией. Теперь его интересуют магнитные свойства железа. Знать их очень важно для практики. Электротехника в то время не была еще наукой. Созданию хорошей электрической машины предшествовали бесчисленные опыты по подбору оптимальных конструктивных размеров. И одной из важнейших задач электротехники было узнать, как намагничивается железо.

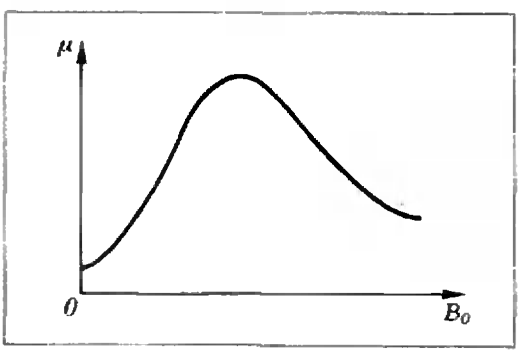


Рис. 1.

Физической лаборатории в университете по-прежнему нет, и для проведения необходимых экспериментов Столетов уезжает за границу. Всего четыре месяца проводит он в лаборатории Кирхгофа в Гейдельберге, но сколько сделано за эти четыре летних месяца! Продумана и сконструирована установка для исследования магнитных свойств железа, проведены все задуманные опыты.

Петля гистерезиса при намагничивании железа теперь знакома каждому ученику 9 класса. Но когда Столетов начинал свои опыты, о магнитных свойствах железа было известно немного. В частности, считалось, что намагниченность железа $I = (\mu - 1) B_0$ прямо пропорциональна индукции B_0 намагничивающего внешнего поля. Это означает, что магнитная проницаемость μ не зависит от намагниченности и постоянна. Эта теория, разработанная Пуассоном, не согласовывалась, однако, с последними опытами различных исследователей. Поэтому учителем Столетова Кирхгофом была разработана новая теория, в которую вместо постоянной величины μ входила функция, зависящая от B_0 и формы железного тела. Изучением того, как зависит μ от B_0, и занялся Столетов*). До работы Столетова было известно, что при больших индукциях намагничивающего поля магнитная проницаемость падает с ростом B_0. В слабых полях ее поведение не изучалось. Начав опыты, Столетов обнаружил поразительный факт: при слабых полях с ростом B_0 величина μ не постоянна, а быстро возрастает; достигает максимума при некотором значении B_0 и медленно убывает (рис. 1). Причем максимальное значение μ было в несколько раз выше, чем известное из опытов других исследователей.

Полученные Столетовым важные результаты давали в руки создателей электромашин ключ к решению многих стоящих перед ними задач. Сам Столетов так характеризовал практи-

*) В опытах Столетова изучалась зависимость не самого μ, а так называемой магнитной восприимчивости $\varkappa = \frac{1}{4\pi}(\mu - 1)$.

ческую сторону своего исследования: «Изучение функции намагничивания железа может иметь практическую важность при устройстве и употреблении как электромагнитных двигателей, так и тех магнитно-электрических машин нового рода, в которых временное намагничивание железа играет главную роль. Знание свойств железа ... также необходимо здесь, как необходимо знакомство со свойствами пара для теории паровых машин. Только при таком знании мы получим возможность обсудить a priori [заранее] наивыгоднейшую конструкцию подобного снаряда и наперед рассчитать его полезное действие».

В 1872 г. Столетов успешно защищает докторскую диссертацию «Исследование о функции намагничивания мягкого железа» и в следующем году утверждается в должности ординарного профессора Московского университета.

Осенью 1872 г. происходит другое знаменательное событие — наконец-то при университете открывается физическая лаборатория, на устройство которой Столетов потратил столько сил и средств.

Начинает свою первую экспериментальную работу на родине Столетов. Он ставит давно задуманный опыт по определению соотношения между электростатическими и электромагнитными единицами. Коэффициент пропорциональности оказывается близким к скорости света c. Это говорит не только о том, что свет — тоже электромагнитное явление, но и служит косвенным подтверждением справедливости теории Максвелла, которую многие ученые в то время не признавали.

Столетов широко открывает двери своей лаборатории для физиков, работающих в других высших учебных заведениях России. Из Киева, Одессы, других городов страны приезжают преподаватели учиться у него искусству эксперимента.

Ширится физический кружок Столетова. Вокруг него группируется талантливая молодежь, берущая со своего учителя пример бескорыстного служения науке. Десятки блестящих ученых воспитал А. Г. Столетов, ученых, составивших гордость нашей науки. Наиболее выдающиеся из них — Н. А. Умов, И. Ф. Усагин, А. П. Соколов, П. Н. Лебедев, Н. Е. Жуковский.

Столетов ведет большую популяризаторскую работу в Обществе любителей естествознания, непременным членом которого он является, читает публичные лекции в Политехническом музее, публикует научно-популярные статьи в общедоступных журналах. Он хочет приобщить к науке как можно большее количество людей.

После работы о намагничивании железа имя А. Г. Столетова становится широко известно за границей. В 1874 г. его приглашают на торжества по случаю открытия при Кембриджском университете физической лаборатории. В 1881 г. Столетов достойно представляет русскую науку на I Всемирном конгрессе электриков в Париже. Он первый русский физик, участвующий в международном съезде.

На конгрессе Столетов делает доклад о своих исследованиях по определению коэффициента пропорциональности между электростатическими и электромагнитными единицами, активно участвует в работе по выбору электротехнических единиц измерения. (По предложению Столетова была утверждена единица электрического сопротивления «ом» и эталон сопротивления.)

В 1888 г. Александр Григорьевич Столетов начинает исследование фотоэффекта, открытого за год до этого Г. Герцем. Эти исследования принесли Столетову мировую известность. Они продолжались два года: с февраля 1888 г. по июль 1890 г., и можно только удивляться, как много было сделано за этот срок человеком, занятым в основном преподавательской деятельностью.

Что было известно до работ Столетова? В 1887 году Герц обнаружил, что проскакивание искры между электродами облегчается (происходит при большем расстоянии между электродами) при освещении электродов ультрафиолетовыми лучами. В том же году Видеман и Эберт показали, что эффект вызывает освещение не любого электрода, а только катода.

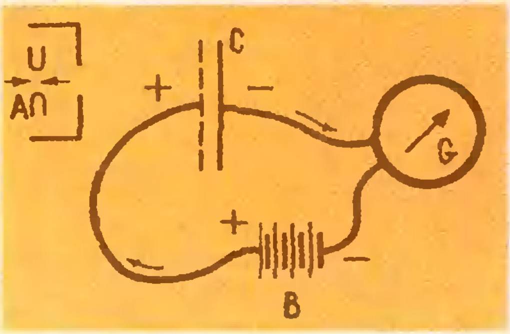


Рис. 2.

Вслед за ними Гальвакс упростил опыт, используя вместо искры «тихий разряд» предварительно заряженного электрода. Подсоединяя к этому электроду электроскоп, Гальвакс обнаружил, что освещение ультрафиолетовым светом приводит к разрядке электрода.

С помощью электроскопа, соединенного с незаряженным телом, Гальвакс показал, что в результате разрядки отрицательного электрода при освещении его ультрафиолетовым светом заряд переходит на окружающие тела.

Начав исследование явления, открытого Герцем (это явление получило название фотоэффекта), Столетов, повторив опыты Герца, Видемана, Эберта и Гальвакса, в дальнейшем разработал новую методику, позволившую построить количественную теорию фотоэффекта.

На рисунке 2 приведена схема установки, с помощью которой Столетов проводил свои опыты (этот рисунок Столетов приводил в своих рукописях). Основная часть установки — прибор, который Столетов называл сетчатым конденсатором. Он состоит из металлической сетки — анода и плоского металлического диска — катода (сетчатый конденсатор явился прообразом фотоэлемента). Этот прибор (C) включался последовательно с гальванометром (G) в цепь с батареей (B). При освещении катода сильным светом вольтовой дуги (A) гальванометр регистрировал наличие тока в цепи.

С помощью такой установки Столетов изучает различные стороны фотоэффекта. На основании результатов своих экспериментов он делает вывод, что необходимым условием фотоэффекта является поглощение света материалом катода; что каждый элемент поверхности катода участвует в явлении независимо от других; что явление фотоэффекта практически безынерционно («... ток проявляется и исчезает одновременно с освещением, и следовательно, при прерывистом освещении ток — также прерывистый с тем же периодом»). Меняя напряжение на электродах, Столетов получает вольт-амперную характеристику фотоэлемента (сетчатого конденсатора): фототок возрастает с увеличением напряжения между электродами, а малые токи пропорциональны напряжению; начиная с некоторого значения напряжения, фототок практически не меняется при увеличении напряжения, то есть фототок стремится к насыщению.

Поместив прибор в стеклянный цилиндр, из которого можно было откачивать воздух, Столетов обнаружил, что по мере уменьшения давления воздуха фототок возрастает, достигает максимума и затем убывает.

Будучи уверенным в том, что величина фототока определенно связана с освещением, Столетов проводит целую серию опытов с целью установить эту зависимость. Меняя силу света источника, он нашел, что величина фототока насыщения пропорциональна световому потоку, падающему на катод.

Исследования Столетова позволили выявить основные закономерности фотоэффекта и показали огром-

Этот прибор Столетов использовал для исследования фотоэффекта в разреженных газах.

ные возможности технического применения фотоэлементов.

Столетов — признанный первый физик России. В 1889 г. на II Международном конгрессе электриков в Париже ученые всех стран чествовали его как одного из самых выдающихся физиков современности.

В начале 1893 г. академики Чебышев, Бредихин и Бекетов предлагают избрать Столетова в члены Российской Академии Наук. Но президент Академии великий князь Константин не допускает кандидатуру Столетова до баллотировки.

В эти дни Александр Григорьевич получает много писем, в которых передовые ученые России высказывают ему свое сочувствие в связи с проявленной по отношению к нему несправедливостью. «Очень и очень возмущен я поступком Академии, — пишет профессор Петербургского университета И. Н. Боргман. — ... Впрочем, так поступает наша Академия уже не в первый раз. Теперь почетнее быть забаллотированным, чем попасть в число членов ее».

«То, что Вы сообщаете мне в последнем письме, — пишет Столетову из Одессы профессор Ф. Н. Шведов, — меня нисколько не поразило... Ведь забаллотировали же некогда Менделеева... Я бы утешался тем, что лучшие современные русские ученые — Менделеев, Мечников — не в богадельне. Быть в их компании совсем не стыдно».

Много писем приходит из-за рубежа. Столетову пишут Кельвин, Гельмгольц, Больцман.

Несмотря на сочувствие друзей, Столетов тяжело переживает нанесенное ему оскорбление. Да и университетское начальство все больше и больше начинает выказывать ему свою немилость. Все это сильно отражается на здоровье Александра Григорьевича.

Умер А. Г. Столетов в ночь с 14 на 15 мая 1896 года.

Значение Столетова как ученого для русской и мировой науки огромно. Он создал первую в России учебно-исследовательскую физическую лабораторию, основал школу русских физиков.

Работы Столетова по намагничиванию железа превратили электротехнику из науки эмпирической в теоретическую. Большой вклад в электротехнику внесли также его труды, посвященные разработке системы единиц для электрических измерений.

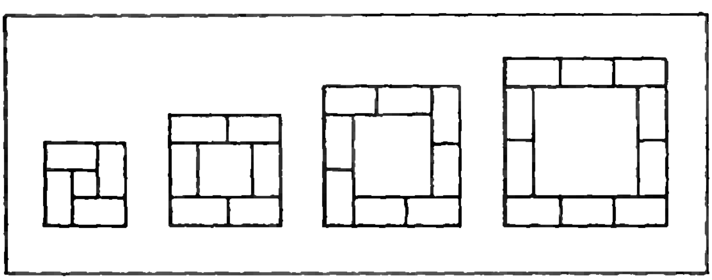
На основе изученного Столетовым явления фотоэффекта были созданы фотоэлементы, которые несут службу на заводах и фабриках, сортируя и считая продукцию, управляя прокатными станами и плавкой металла, читая чертежи и изготовляя по ним детали. Фотоэлементы превратили немое кино в звуковое, сделали возможным фототелеграф, работают в различных автоматических устройствах.

Вакуумная установка Столетова для изучения электрических явлений в разреженных газах явилась прообразом электронной лампы, которая совершила подлинную революцию в электротехнике. Радиоприемники и радиопередатчики, рентгеновские аппараты и газоразрядные трубки, радиолокаторы и электронные микроскопы, телевизоры и электронно-вычислительные машины — это далеко не полный перечень того, что стало возможным благодаря пионерским трудам Александра Григорьевича Столетова.

Рамки из домино

Из 28 косточек домино выложите четыре «рамки» (см. рисунок) так, чтобы сумма очков вдоль каждой стороны каждой рамки равнялась 13. (Прикладывать косточки друг к другу одинаковыми значениями очков не обязательно).

Л. Мочалов



С. Артемов,
Ю. Гиматов,
В. Федоров

Много битов из ничего

Он думал, что уснула я
И все во сне стерплю,
Иль думал, что я думала,
Что думал он «я сплю».
С. Маршак. Из Ковентри Патмора.

Предлагаем вниманию читателей задачу, требующую для решения весьма изощренной логики:

Математик R сказал математикам P и S: «Я задумал два натуральных числа. Каждое из них больше единицы, а сумма их меньше ста. Математику P я сейчас сообщу — по секрету от S — произведение этих чисел, а математику S я сообщу — по секрету от P — их сумму». Он выполнил обещанное и предложил отгадать задуманные числа. Между P и S произошел следующий диалог (высказывания P мы обозначаем буквой π с индексами, высказывания S — буквой σ):

— Я, пожалуй, не могу сказать, чему равны задуманные числа. (π_1)

— Я заранее знал, что Вы этого не сможете. (σ_1)

— А ведь тогда я их знаю. (π_2)

— А тогда и я их знаю. (σ_2)

Попробуйте теперь и вы отгадать задуманные числа.

1. Неужели их можно отгадать?

При первом взгляде на задачу она представляется неразрешимой: как можно отгадать числа, когда про них ничего не сказано?

Попробуем на примере. Пусть R задумал 7 и 42. Тогда он сообщил P число 294, S — 49. Ну, а что дальше? P сказал, что он не может отгадать задуманные числа. Ну, конечно же не может — он знает только их произведение. Хотя, впрочем, он знает еще, что они натуральные, больше единицы и их сумма меньше ста. А что это дает?

Обозначим задуманные числа через k_0 и l_0, причем пусть — для определенности — $k_0 \leqslant l_0$. Обозначим еще произведение $k_0 \cdot l_0$ через p_0, сумму $k_0 + l_0$ — через s_0.

Итак, P сообщили, что $p_0 = 294$. Тогда k_0 может равняться 2, 3, 6, 7 и 14, а l_0 будет при этом равно, соответственно, 147, 98, 49, 42 и 21. Первые два значения для k_0 нам не подходят — при них $s_0 > 100$. Все равно остаются еще три возможности. Значит, P действительно не может отгадать задуманные числа.

Идем дальше. S утверждает, что он заранее знал, что P не сможет отгадать k_0 и l_0. Как S пришел к такому выводу? Наверняка он попробовал всеми возможными способами представить известное ему s_0 в виде суммы двух допустимых слагаемых:

$$49 = 2 + 47 = 3 + 46 = \ldots$$
$$\ldots = 24 + 25.$$

R мог задумать любую из этих пар чисел. Он сообщил P какое-то из произведений $i \cdot (49 - i)$, и S утверждает, что ни по одному из них P не может отгадать задуманные числа.

А если при некотором i оба числа i, $49 - i$ — простые? Например, если R задумал 2 и 47, то P он сообщил 94, и P прекрасно может отгадать задуманные числа.

Следовательно, если R задумал 7 и 42, то S, получив $s_0 = 49$, не имел бы права произнести (σ_1). Значит, R не мог задумать 7 и 42.

Таким образом, кое-что о задуманных числах сказать все-таки можно.

Преодолев первоначальные сомнения, подумаем, в каком направлении двигаться. Один способ отгадывания уже виден: брать всевозможные пары чисел k_0, l_0, удовлетворяющие

Бит — двоичная единица измерения информации (БСЭ, 3 изд., 2 т.).

неравенствам

$$2 \leqslant k_0 \leqslant l_0 \leqslant 97, \qquad (1)$$
$$4 \leqslant k_0 + l_0 \leqslant 99, \qquad (2)$$

и проверять, «выдерживают» ли они диалог (π_1) — (σ_2).

Поскольку перебор во всех случаях конечен, в принципе можно было бы действовать и так. Однако решать задачу таким образом скучно. Попробуем сократить перебор.

Прежде всего давайте сначала искать не k_0 и l_0, а их сумму s_0: для пары $\langle k_0, l_0 \rangle$ возможных вариантов больше двух тысяч, а для s_0 — меньше ста. Впрочем, и на этом пути лобовой перебор длинен и скучен.

2. Около гипотезы Гольдбаха—Эйлера

Какую информацию можно извлечь из (π_1) и (σ_1)? Что они означают? (π_1), очевидно, означает, что

p_0 не однозначно разлагается в произведение двух множителей, удовлетворяющих неравенствам (1), (2); (π_1')

(σ_1) означает, что

При любом разложении числа s_0 в сумму двух слагаемых, удовлетворяющих неравенствам (1), *их произведение обладает свойством* (π_1'). (σ_1')

Высказывание (π_1') позволяет отбросить некоторые произведения, (σ_1') — некоторые суммы.

Из (σ_1') вытекает, что s_0 н е п р е д с т а в и м о в в и д е с у м м ы д в у х п р о с т ы х ч и с е л: если $s_0' = q_1 + q_2$, где q_1, q_2 — простые, то число $q_1 \cdot q_2$ единственным образом разлагается в произведение двух множителей, удовлетворяющих неравенствам (1), (2), и, следовательно, не обладает свойством (π_1').

Но любое четное число, удовлетворяющее неравенствам (2), представимо в виде суммы двух простых (это доказывается последовательной проверкой чисел 4, 6, 8, ..., 98).

Следовательно, s_0 — н е ч е т н о е. Кроме того, $s_0 - 2$ — с о с т а в н о е: иначе $s_0 = 2 + (s_0 - 2)$ представлялось бы в виде суммы двух простых. После отбрасывания чисел, не удовлетворяющих этим двум условиям, для s_0 остается 24 возможности.

Выше мы воспользовались тем, что все четные числа от 4 до 98 представимы в виде суммы двух простых.

В 1742 г. член Петербургской Академии наук Христиан Гольдбах в письме к Леонарду Эйлеру высказал предположение, что любое н е ч е т н о е число, большее пяти, может быть представлено в виде суммы т р е х простых чисел. В ответном письме Эйлер выдвинул гипотезу, что каждое ч е т н о е число, большее двух, представимо в виде суммы д в у х простых чисел. (Из гипотезы Эйлера гипотезу Гольдбаха вывести очень легко — сделайте это!)

В течение почти двухсот лет гипотезы Гольдбаха и Эйлера казались совершенно недоступными для доказательства, хотя непосредственным перебором математик Миле проверил их до 9 000 000.

В 1930 г. замечательный советский математик Л. Г. Шнирельман доказал существование такого k, что каждое натуральное число $n > 1$ может быть представлено в виде суммы не более k простых чисел. Число k у Шнирельмана было довольно велико. В настоящее время доказано, что теорема Шнирельмана верна при $k = 20$.

В 1934 г. академик И. М. Виноградов доказал существование такого n_0, что любое нечетное число $n > n_0$ представимо в виде суммы трех простых чисел. Казалось бы, в век ЭВМ можно было бы поручить машине проверить «остальные» числа (от 7 до n_0), но «постоянная Виноградова» n_0 так велика (по последним оценкам $n_0 > 2^{2^{16}}$), что эта проверка превосходит возможности современных ЭВМ.

В доказательстве же гипотезы Эйлера до сих пор не достигнуто никакого существенного успеха.

3. Дальше в лес

Оказывается, из (σ_1') можно вывести

$$s_0 < 55. \qquad (3)$$

В самом деле, предположим, что $s_0 \geqslant 55$. Тогда s_0 не обладает свойством (σ_1'): можно так разложить его в сумму двух слагаемых, удовлетворяющих неравенствам (1), что для их произведения не будет выполнено условие (π_1'). Это разложение: $s_0 = (s_0 - 53) + 53$. Из $s_0 \geqslant 55$ вытекает $s_0 - 53 \geqslant 2$. Произведение $(s_0 - 53) \cdot 53$ единственным образом разлагается на два множителя, с у м м а к о т о р ы х м е н ь ш е с т а: поскольку 53 — простое число, один из множителей обязательно имеет вид $53d$; так как $53 \cdot 2 > 100$, $d = 1$. Но по условию s_0 обладает свойством (σ_1'). Противоречие!

После (3) для s_0 остается уже 11 возможностей:

$$11, 17, 23, 27, 29, 35, \quad 37, 41, 47, 51, 53. \qquad (4)$$

Попробуем теперь без перебора установить, какие из чисел (4) удовлетворяют условию (σ'_1). Пусть s — произвольное из чисел (4). Поскольку s нечетно, всякое его разложение в сумму имеет вид $s = 2a + m$. Допустим, s не обладает свойством (σ'_1). Тогда найдется такое a, что произведение $2a \cdot m$ «расшифровывается» однозначно.

Это a не может равняться единице, так как в этом случае $s = 2 + m$, а произведение $2m$ двояко разлагается в произведение. В самом деле, поскольку $m = s - 2$ — составное нечетное число, $m = pq$, где $p > 2$ и $q > 2$. Оба разложения

$$2m = 2 \cdot pq = 2p \cdot q$$

годятся: $2 + pq = 2 + m = s < 100$ и $2p + q = 2 + pq - (p - 1)(q - 2) < < 2 + pq < 100$.

Значит, $a \geqslant 2$.

Если $a \neq m$, то $s = 2a \cdot m$ и $s = = 2m \cdot a$ — два различных разложения. Поскольку $2a + m = s < 100$ и s не обладает свойством (σ'_1), должно быть $2m + a \geqslant 100$. Так как $s = 2a + m \leqslant 53$, имеем $m \leqslant 53 - - 2a$, $2m + a \leqslant 106 - 3a$. Из $2m + + a \geqslant 100$ и $2m + a \leqslant 106 - 3a$ вытекает $a \leqslant 2$. Следовательно, $a = = 2$. Из $2m + a \geqslant 100$ и $m \leqslant 53 - 2a$ получаем теперь $m = 49$. Итак, в этом случае $s = 53$, причем «подозрительным» является разложение $53 = 4 + 49$

Если же $a = m$, то $s = 3a$ делится на 3. В (4) таких чисел два: 27 и 51. «Подозрительными» являются разложения $27 = 9 + 18$ и $51 = 17 + 34$.

Число 51 действительно не обладает свойством (σ'_1): $51 = 17 + 34$, и произведение $17 \cdot 34$ при разложении на два множителя дает только одну сумму, меньшую ста. Таким образом, его можно выбросить из списка «кандидатов в s_0».

Числа 27 и 53 удовлетворяют условию (σ'_1): $9 \cdot 18 = 2 \cdot 81$ и $2 + 81 < < 100$; $4 \cdot 49 = 7 \cdot 28$ и $7 + 28 < 100$.

Итак, для дальнейшего исследования осталось 10 кандидатов: 11, 17, 23, 27, 29, 35, 37, 41, 47, 53, причем все они обладают свойством (σ'_1).

4. «Тогда и я их знаю»

Используем, наконец, (π_2) и (σ_2).

Можно было бы истолковать (π_2) и (σ_2) подобно тому, как мы это сделали с (π_1) и (σ_1). Мы попробуем обойтись без этого.

Из (σ_2) и (3) можно вывести

$$s_0 < 33. \qquad (5)$$

Допустим противное: $s_0 \geqslant 33$. Тогда S, разлагая всеми возможными способами s_0 в сумму двух слагаемых, имел бы среди этих разложений $s_0 = (s_0 - 31) + 31 = (s_0 - 29) + 29$.

Если бы P было сообщено произведение $(s_0 - 31) \cdot 31$, то он мог бы, сообразив (3) и учтя, что 31 — простое число, понять, что $(s_0 - 31) \cdot 31$ единственным образом разлагается в произведение двух множителей, *сумма которых удовлетворяет* (3). В этом случае P отгадал бы k_0 и l_0.

Аналогичная возможность была у P, если ему было сообщено произведение $(s_0 - 29) \cdot 29$.

Значит, в случае $s_0 \geqslant 33$, S и после (π_2) не смог бы точно назвать k_0, l_0, т. е. не смог бы произнести (σ_2).

После (5) остается 5 кандидатов: 11, 17, 23, 27, 29.

Если p_0 имеет вид $2^n \cdot p$, где p — нечетное простое число, то P однозначно определяет k_0 и l_0, потому что из всех сумм $2^{n-t} + 2^t p$ нечетна только одна: $2^n + p$. Поэтому, если s_0 двумя способами представимо в виде $2^n + p$, то S опять-таки не может произнести (σ_2).

Это соображение позволяет отсеять еще 3 кандидата: $11 = 4 + 7 = = 8 + 3$, 23 и 27.

Остались 2 кандидата: 17 и 29.

5. Тогда и мы их знаем

29 тоже не годится, поскольку $29 = = 4 + 25 = 16 + 13$: если бы P имел $p_0 = 16 \cdot 13$, он бы отгадал k_0 и l_0, так как среди сумм $2^{4-t} + 2^t \cdot 13$ нечетна только одна; если бы P имел $p_0 = 4 \cdot 25$, он бы тоже отгадал k_0 и l_0: среди соответствующих сумм не-

четна, кроме 29, еще только 25 ($4\cdot25=5\cdot20$), но 25—2 — простое число.

Итак, либо $s_0=17$, либо задача не имеет решений.

Какое же p_0 могло быть у P при $s_0=17$? Переберем все разложения числа 17 в сумму двух слагаемых:

$$17=2+15=3+14=\ldots=8+9.$$

При любом из произведений, кроме $4\cdot13$, P не смог бы произнести (π_2). Например, если бы P имел $p_0=30$, он среди разложений числа 30 в произведение двух множителей увидел бы и $30=2\cdot15$, и $30=5\cdot6$, но как 17, так и 11 обладают свойством (σ_1').

Остается единственный кандидат для p_0: 52. Этот кандидат дает возможность P произнести (π_2): среди всех разложений числа 52 в произведение двух множителей существует ровно одно: $52=4\cdot13$, дающее нечетную сумму.

Итак, $s_0=17$, $p_0=52$, $k_0=4$, $l_0=13$.

Задачи

1. Всякое ли нечетное число, большее трех, представимо в виде 2^n+p, где p — простое число? В отрицательном случае укажите наименьшее непредставимое.

2. (Б. Кукушкин) Начало условия задачи — вплоть до (σ_1) — то же, что и на стр. 12. Дальше диалог меняется:

— *А я заранее знал, что Вы это будете знать заранее.* (π_2)

— *Я не знаю, чему равны задуманные числа.* (σ_2)

— *А я тогда их знаю.* (π_3)

Найти задуманные числа.

Мартовская капель

Поистине неизгладимое впечатление оставляет у каждого посещение подземных пещер-залов, украшенных сталагмитами и сталактитами! Поднимающиеся со дна или свешивающиеся с потолка кристаллические сосульки, возраст которых исчисляется сотнями тысяч и миллионов лет, играют всеми цветами радуги и создают сказочную картину волшебного царства.

Не менее красочными, хотя и созданными в течение всего лишь нескольких суток, являются ледяные сосульки. Посмотрите на фотографию. Не правда ли, знакомая картина, часто встречающаяся ранней весной, — свисающий с края крыши частокол ледяных сталактитов. Если придется, понаблюдайте за их образованием и постарайтесь ответить на такие вопросы: 1) Как происходит процесс образования ледяных сосулек? 2) Почему ледяная сосулька имеет вид заостренного книзу конуса? 3) Почему конусы бывают различной длины? 4) Почему некоторые из них изогнуты? 5) Почему ледяная сосулька прозрачна, а снег не прозрачен, хотя он тоже состоит из отдельных прозрачных кристалликов?

М. Т.

С. Козел

Модель опыта Резерфорда

Знаменитые опыты Резерфорда по рассеянию α-частиц на тяжелых ядрах (1906—1911 гг.) сыграли исключительную роль в развитии представлений о строении атома. В этих опытах α-частицы, испускаемые радиоактивным источником, пропускались через тонкие пленки золота и других металлов. При прохождении через пленки α-частицы отклонялись от первоначального направления на различные углы. Рассеянные α-частицы попадали на экран, покрытый сернистым цинком, и вызывали вспышки (сцинтилляции). Наблюдая за этими сцинтилляциями в микроскоп, можно было определить, насколько изменяется траектория движения частиц при прохождении слоя металла.

Большинство α-частиц отклонялось от первоначального направления движения на очень незначительные углы. Но некоторые частицы отклонялись довольно значительно. И, что было совершенно поразительно, некоторые α-частицы (примерно 1 на 20 000) меняли направление движения почти на противоположное. (Регистрировались эти частицы по вспышкам на экране, расположенном так, что на него могли попадать «отраженные» от металла частицы.)

Было совершенно очевидно, что рассеяние α-частиц происходит в результате взаимодействия их с положительным зарядом атома (масса электрона примерно в 8000 раз меньше массы α-частицы, так что электроны не могли заметно влиять на характер движения α-частицы). Существовавшая в те годы модель атома, согласно которой положительный заряд был распределен равномерно по всему объему атома (эту модель предложил Дж. Томсон), была не в состоянии объяснить результаты экспериментов по рассеянию α-частиц. Размеры атомов к тому времени были уже оценены ($\sim 10^{-8}$ *см*). А основанный на модели Томсона расчет, проведенный для α-частиц, рассеивающихся на углы $\sim 180^\circ$, приводил либо к невероятно большим значениям радиуса атома, либо к невозможно большим величинам положительных зарядов в атоме *).

Чтобы объяснить рассеяние на большие углы, необходимо было предположить, что положительный заряд сосредоточен в очень небольшой (по сравнению с размером атома) области внутри атома. Этот положительный заряд — ядро атома — создает сильное электростатическое поле, и на α-частицу, попадающую в поле ядра, действует кулоновская сила отталкивания.

Основываясь на таком представлении о строении атома, Резерфорд сделал теоретический расчет количественного распределения числа частиц по разным углам рассеяния. Его расчеты дали прекрасное согласие с результатами эксперимента.

Итак, мы кратко напомнили историю создания ядерной модели атома.

Перейдем теперь к моделированию опыта Резерфорда. Речь будет идти о механической модели, в которой α-частицы заменены небольшими стальными шариками. Шарики, которым сообщают скорость в горизонтальном направлении, катятся по горизонтальной плоскости, «взбираются» на горку определенного профиля, а затем скатываются с нее вновь на горизонтальную плоскость. Профиль горки должен быть таким, чтобы потенциальная энергия шариков изменялась по тому же закону, что и по-

*) Проведите сами расчет величины положительного заряда, сосредоточенного в сфере радиуса $\sim 10^{-8}$ *см*, способного отклонить α-частицу с энергией 5 *Мэв* на 180°.

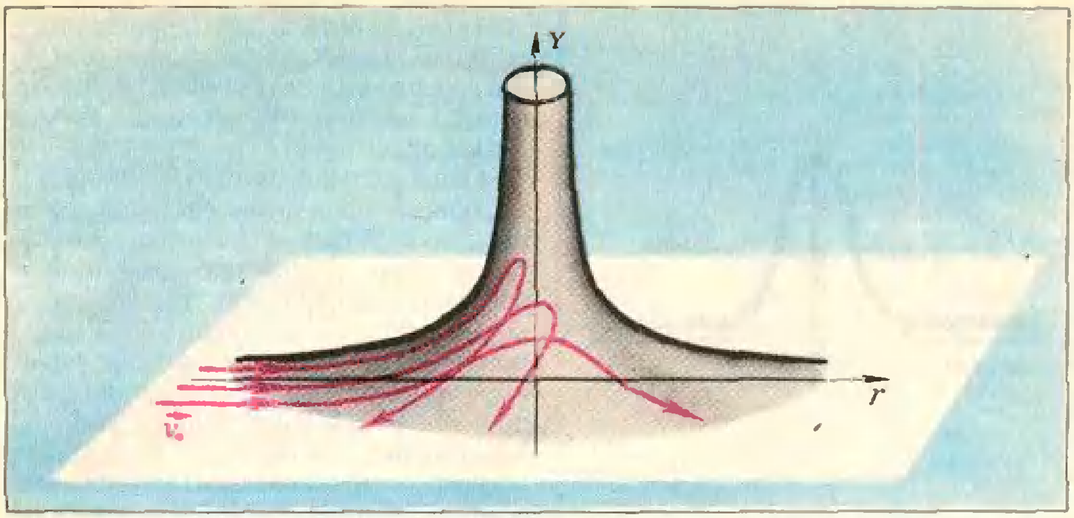


Рис. 1.

тенциальная энергия α-частиц в поле положительно заряженного атомного ядра. Так как для кулоновского поля $П \sim \frac{1}{r}$, пик должен представлять собой гиперболоид вращения $y = \frac{A}{r}$, где A — некоторая постоянная (рис. 1).

Движение шариков в этой механической модели во многом аналогично движению α-частиц в кулоновском поле атомного ядра. По одинаковому закону будет изменяться потенциальная энергия в зависимости от расстояния до рассеивающего центра (в механической модели — до оси гиперболоида). Можно показать на основании законов механики, что одинаковой будет и зависимость минимального расстояния между частицей и рассеивающим центром от так называемого прицельного расстояния. Прицельным расстоянием называют расстояние от рассеивающего центра до первоначального направления движения частицы (рис. 2).

Но есть и отличие. Движение α-частицы в поле ядра является плоским — всегда можно указать плоскость, в которой лежит траектория α-частицы (в этой плоскости обязательно находятся ядро и начальная скорость частицы). В механической модели движение шариков более сложно: оно не является плоским. Если спроектировать траекторию шарика на горизонтальную плоскость, то получится кривая, очень похожая на траекторию α-частицы, но все же несколько от нее отличающаяся. При малых начальных скоростях, когда шарик не очень высоко «взбирается» на пик, эти траектории практически совпадают.

Имея «потенциальный пик» такой формы, можно на опыте изучить зависимость угла рассеяния θ от прицельного расстояния d при некоторой определенной начальной скорости (энергии) шариков. Зависимость θ от d определяется законом взаимодействия частицы с рассеивающим центром и в нашем случае определяется профилем пика.

При рассеянии α-частиц на ядрах атомов данного элемента угол рас-

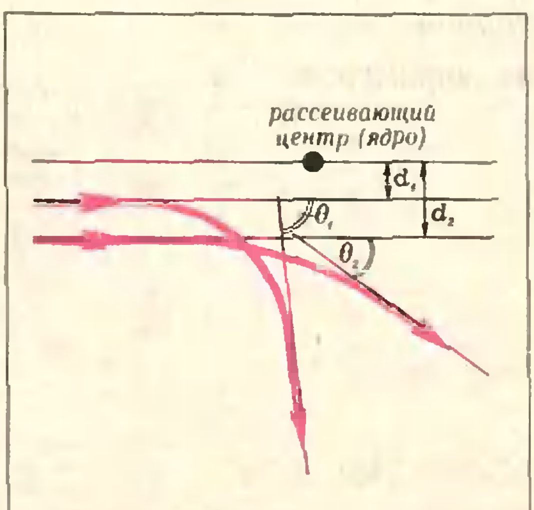


Рис. 2.

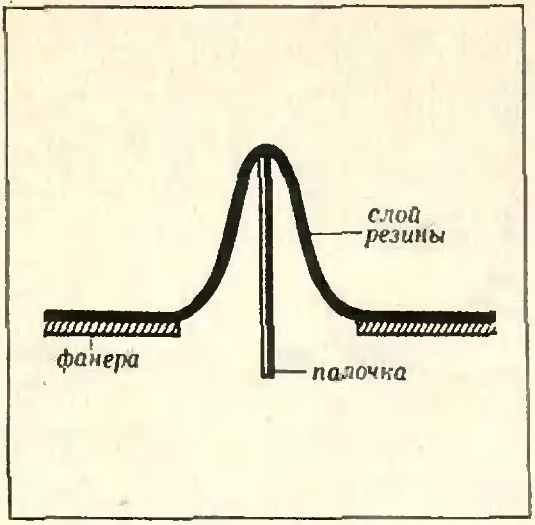


Рис. 3.

сеяния зависит от скорости частицы (ее энергии) и от прицельного расстояния:

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}=Cv^2d \qquad (*)$$

(C — константа, зависящая от «сорта» атомов). Проверить эту формулу непосредственно в экспериментах по рассеянию α-частиц невозможно — прицельное расстояние d недоступно измерению. Но на нашей механической модели можно получить зависимость угла рассеяния от прицельного расстояния. И если экспериментальные данные будут хорошо описываться формулой, аналогичной (*), это еще раз подтвердит правомерность нашего механического аналога опыта Резерфорда.

Один из технически несложных и доступных вариантов создания пика проиллюстрирован на рисунке 3. Здесь для устройства потенциального пика использован тонкий резиновый лист (толщиной 2—3 *мм*), прикрепленный к фанере, в которой вырезано круглое отверстие диаметром 20—25 *см* (чем больше модель, тем удобнее с ней работать). Следует помнить, что зависимость угла рассеяния от прицельного расстояния должна сниматься при фиксированном значении скорости шариков. Так что следует продумать и устройство для «запуска» шариков (наклонная плоскость, пружинный пистолет и т. п.).

С помощью несложного приспособления, фиксирующего прицельное расстояние (например, направляющий желоб в горизонтальной плоскости), можно поставить на этой модели опыт, позволяющий получить зависимость угла рассеяния от скорости частицы.

Редакция «Кванта» ждет от вас описаний придуманных и реализованных вами конструкций и результаты ваших экспериментов.

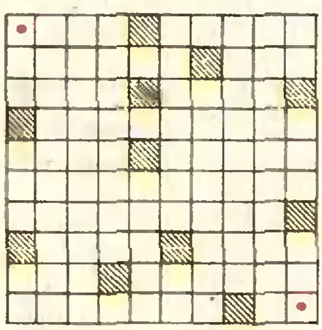
Задача из «примера»

```
П Р И М Е Р
  Р И М Е Р
    И М Е Р
      М Е Р
        Е Р
          Р
-----------
З А Д А Ч А
```

Каков «пример»? А?

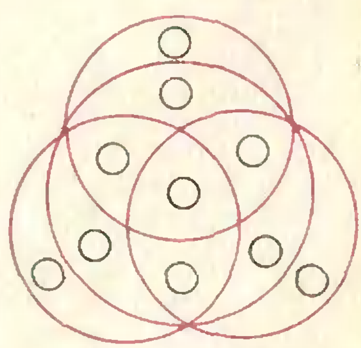
Извилистый путь

Начав с квадрата в верхнем левом углу, пройдите в нижний правый угол, переступая только через стороны квадратов (не через вершины!) и побывав в каждом белом квадрате ровно один раз (в цветные заходить нельзя).



Магические круги

Расставьте в черные кружочки на рисунке числа от 1 до 10 так, чтобы суммы чисел в четырех красных кругах были одинаковыми.



Л. Мочалов

Дельтоида

Кривую, изображенную на второй странице обложки, часто называют дельтоидой из-за ее сходства с буквой Δ греческого алфавита. Ее свойства впервые изучались Леонардом Эйлером в XVIII веке и Якобом Штейнером в XIX веке. Дельтоида здесь задана как кривая, касающаяся каждой из прямых семейства, которое строится так. Проекции любой точки окружности, описанной около произвольного треугольника, на его стороны (или их продолжения) лежат на одной прямой (докажите). Это прямая Симсона*). Семейство состоит из прямых Симсона, построенных для «красного» треугольника.

Рассмотрим еще одно определение дельтоиды. Если окружность катится без скольжения внутри другой окружности, то кривая, описанная фиксированной точкой подвижной окружности, называется гипоциклоидой. Дельтоида — гипоциклоида, для которой отношение радиусов этих окружностей равно 1:3.

Пусть сначала точка M меньшей окружности, за траекторией которой мы будем следить, находится в точке V большей (рис. 1). Затем подвижная окружность прокатилась по дуге VU неподвижной; положим $\widehat{VOU}=\varphi$. Покажем, что касательная к дельтоиде в точке M проходит через точку P пересечения OU с подвижной окружностью, и посмотрим, на какой угол повернулась касательная из начального положения OV.

Скорость $\vec{v}$ точки M равна $\vec{v}_1+\vec{v}_2$, где $\vec{v}_1 \perp OU$, $\vec{v}_2 \perp MO'$ и $|\vec{v}_1|=|\vec{v}_2|$. Параллелограм скоростей — ромб, и $\vec{v}$ — его диагональ, $\widehat{MO'U}=3\varphi$ и $\widehat{MPU}=3\varphi/2$. Пусть P' — точка пересечения касательной к дельтоиде с прямой OU. Нетрудно сосчитать: $\widehat{MP'U}=3\varphi/2=\widehat{MPU}$. Точки P и P' совпадают, касательная проходит через P и угол $OWP=3\varphi/2$.

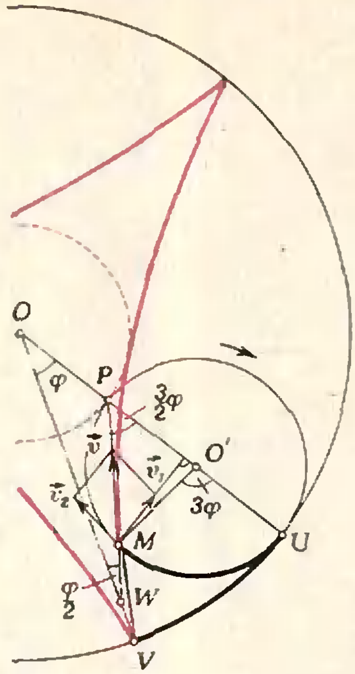


Рис. 1.

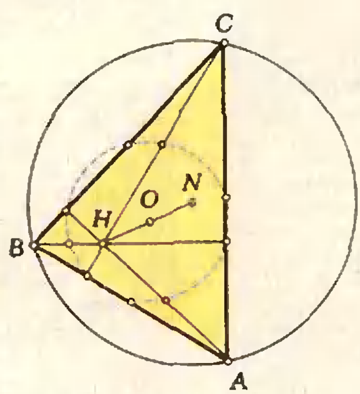


Рис. 2.

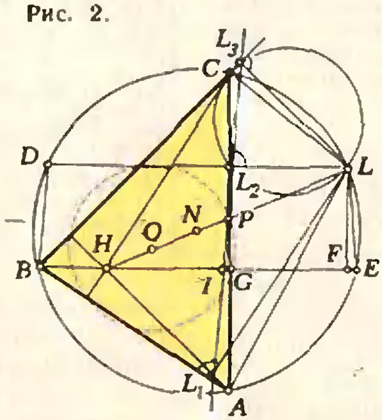


Рис. 3.

Наметим путь доказательства эквивалентности приведенных определений. Эйлер установил, что девять точек произвольного треугольника: основания его высот, медиан и середины отрезков от вершин до пересечения высот (рис. 2) лежат на одной окружности (докажите). Ее центром является середина O отрезка HN, где H — точка пересечения высот, N — центр описанной окружности, а радиус — вдвое меньше радиуса описанной окружности (докажите и это). Поэтому описанная окружность и окружность Эйлера гомотетичны с центром H и коэффициентом гомотетии 2.

Пусть L — точка описанной окружности (рис. 3). Покажем, что ее прямая Симсона проходит через середину отрезка HL, принадлежащую окружности Эйлера. Для этого опустим из точки L перпендикуляр на ближайшую сторону треугольника и продолжим его до встречи с окружностью в точке D. Прямая Симсона параллельна BD (с одной стороны, $\widehat{LCL_3}=\widehat{LL_2L_3}$, с другой, $\widehat{LCL_3}=\widehat{BAL}=\widehat{BEL}=\widehat{DBE}$). По построению, отрезок LL_2 конгруэнтен и параллелен FG и IH (точка пересечения высот и точка E симметричны относительно AC). Следовательно, точка P лежит на пересечении диагоналей HL и IL_2 параллелограмма LL_2HI, и $|HP|=|PL|$.

Поскольку описанная окружность и окружность Эйлера гомотетичны относительно точки H с коэффициентом гомотетии, равным 2, точка P лежит на окружности Эйлера.

Если на рисунке 3 построить окружность Эйлера, то в ней можно узнать окружность (O, OP) с рисунка 1, а в прямой Симсона — касательную WP. То, как поворачивается прямая Симсона, когда точка L перемещается по описанной окружности, предоставляется разобрать читателю.

В. Березин

*) Р. Симсон (1687—1768) — английский математик.

А. Земляков

Орнаменты

«Математик, так же как художник или поэт, создает узоры».
Г. Х. Харди

Эта статья касается одного из самых интересных вопросов геометрии — классификации орнаментов. Орнаменты с давних времен применяются в декоративном искусстве. Так, на рисунке 1 воспроизведены древнеегипетский орнамент (а), два мавританских орнамента (б и в), китайская оконная решетка (г), а также орнамент, украшающий окно мечети в Каире (д). С другой стороны, при исследовании геометрического строения кристаллов выяснилось, что их атомы расположены очень правильным образом, образуя как бы пространственный орнамент. На рисунке 2 изображены проекции пространственных решеток граната, кварца и каменной соли (химические формулы — $Ca_3Al_2(SiO_4)_3$, SiO_2, $NaCl$).

По сути, именно это открытие побудило в конце XIX века физиков и математиков подробнее изучить орнаменты (тогда и было дано точное математическое определение орнамента).

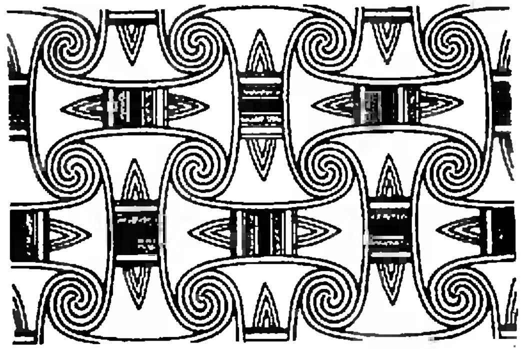


Рис. 1, а.

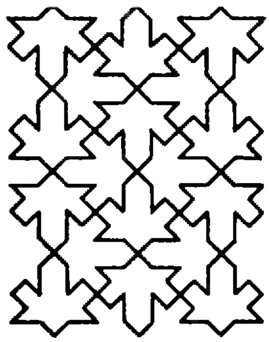


Рис. 1, б.

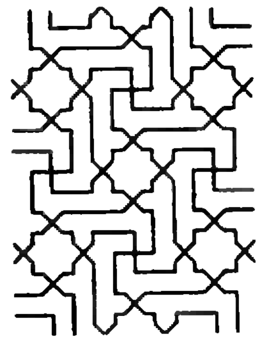


Рис. 1, в.

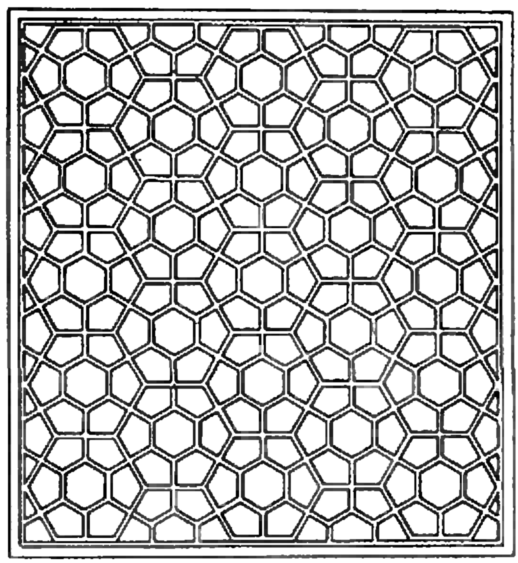


Рис. 1, г.

1. Как можно построить орнамент

Рассмотрим на плоскости фигуру Φ — квадрат с заштрихованной половинкой, как на рисунке 3, *а*, — а также два перемещения плоскости: $f_1 = R_A^{90^\circ}$ — поворот вокруг вершины квадрата A на 90°, и $f_2 = S_a$ — симметрию относительно прямой a — продолжения стороны квадрата (рис. 3, *а*). Применим к фигуре Φ всевозможные композиции перемещений f_1 и f_2 — в произвольном порядке и в любом числе. В результате мы получим совокупность плоских фигур, конгруэнтных Φ — так называемый *плоский орнамент* (*с фундаментальной областью* Φ *и порождающими перемещениями* f_1 *и* f_2): он изображен на рисунке 3, *б*.

Порядок построения этого орнамента показан на рисунке 4. Сначала мы забываем о заштрихованном треугольнике и применяем наши композиции только к квадрату. Повороты

$$f_1 = R_A^{90^\circ},\quad f_1 \circ f_1 = R_A^{180^\circ},\quad f_1 \circ f_1 \circ f_1 = R_A^{270^\circ}$$

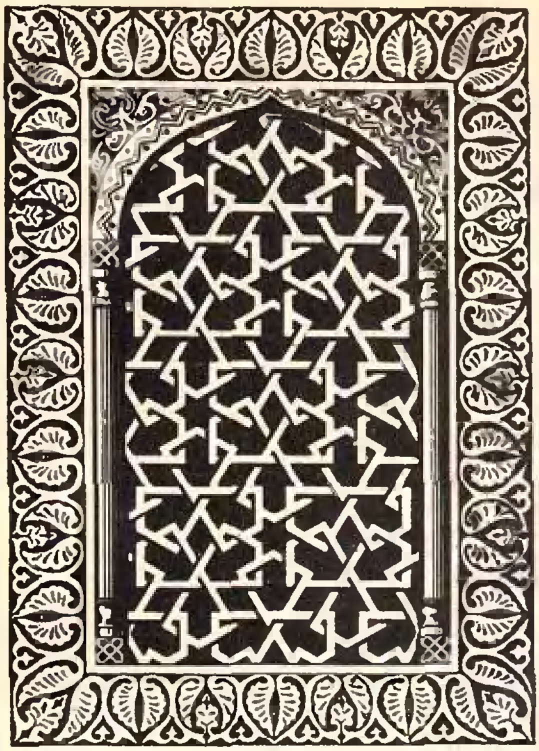


Рис. 1, д.

(рис. 4a) добавляют к исходному три квадрата. Применив к этим квадратам симметрию $f_2 = S_a$, получим уже 8 квадратов — см. рисунок 4, *б*. Повторив проделанную процедуру (последовательные повороты с последующей симметрией), получим картинку, изображенную на рисунке 4, *в*. Ясно, что применение к исходному квадрату в с е х возможных композиций перемещений f_1 и f_2 дает

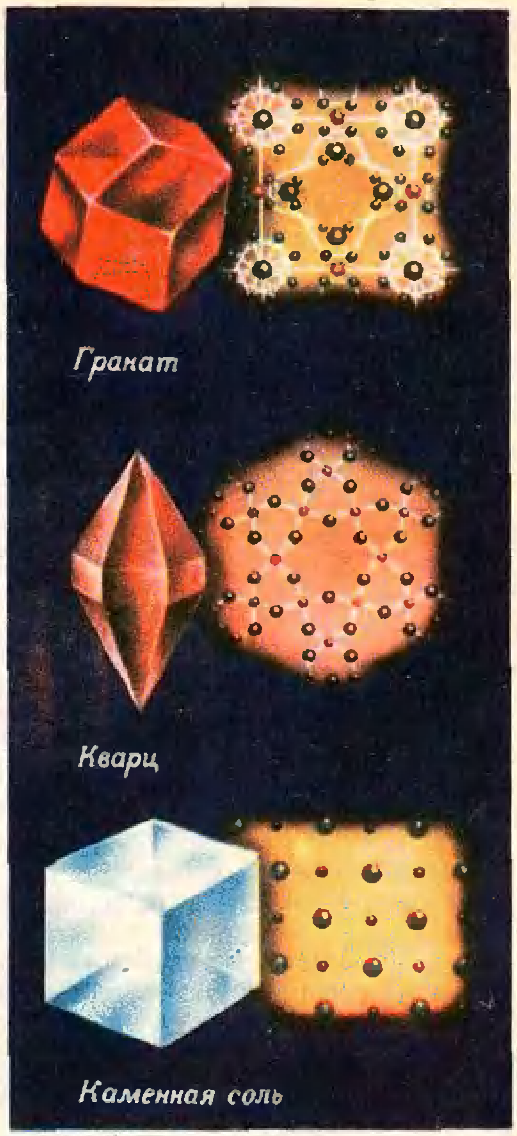


Рис. 2.

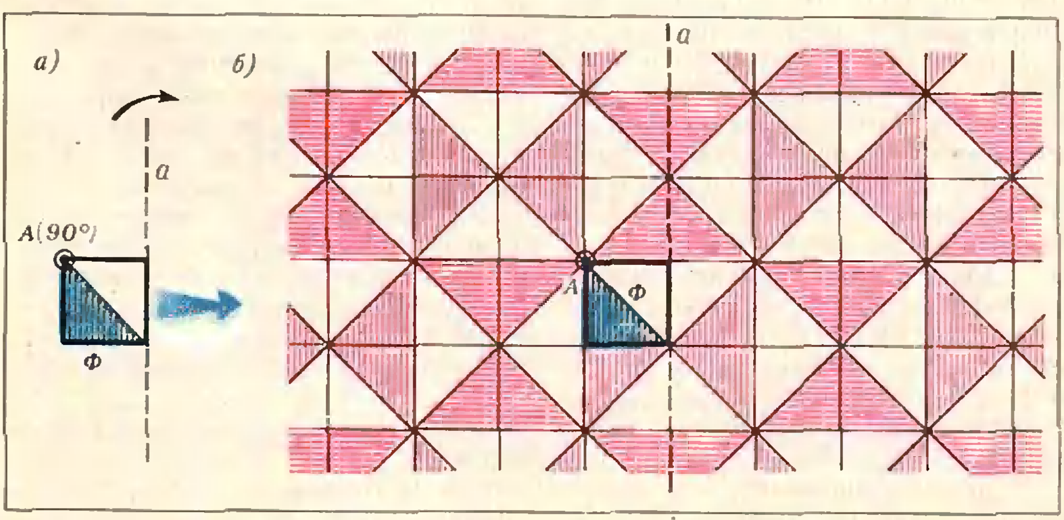


Рис. 3.

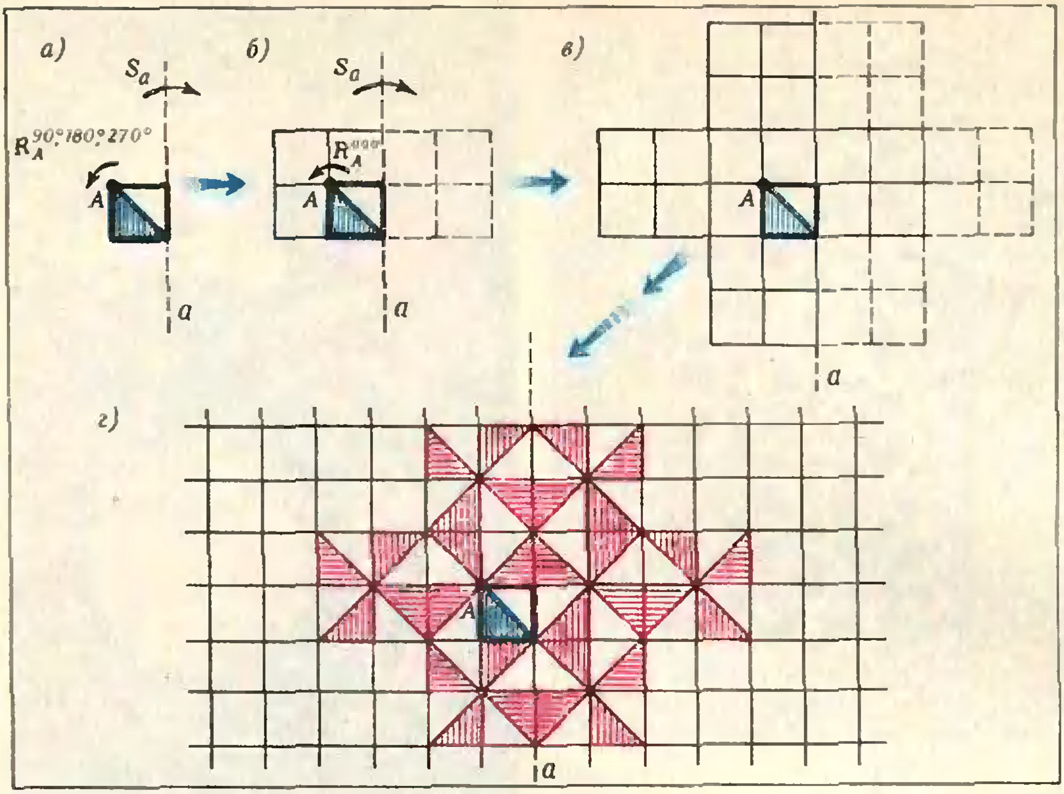


Рис. 4.

сетку квадратов на плоскости — см. рисунок 4, *г*. Теперь мы «вспоминаем» о заштрихованном треугольнике и перемещаем его по уже готовой сетке с помощью отображений f_1, f_2 и их композиций (рис. 4, *г*): получится как раз орнамент, изображенный на рисунке 3,*б*.

Кроме прямой *a*, этот орнамент имеет много других осей симметрии — на рисунке 5,*a* они выделены пунктиром. Очевидно, при поворотах вокруг точки *A* на углы, кратные 90° (т. е. на углы 90°, 180°, 270° и 360° или 0°), весь орнамент отображается на себя, поэтому говорят, что *A* — *центр симметрии порядка* 4 (здесь $4 = 360° : 90°$). Наш орнамент имеет бесконечно много центров порядка 4 — на рисунке 5 это синие точки. Около каждой из них можно выделить состоящую из четырех треугольников фигуру «порядка 4» — две из них изображены на рисунке 5, *a*; весь орнамент можно представить в виде объединения таких фигур.

У данного орнамента есть еще и центры симметрии *порядка* 2, т. е. такие точки, при повороте вокруг которых только на угол $360° : 2 = 180°$ орнамент отображается сам на себя — на рисунке 5, *a* они отмечены кружочками. Около этих точек, можно выделить фигуры «порядка 2» — три из них изображены на рисунке. Наконец, рассматриваемый орнамент отображается сам на себя и при бесконечном числе параллельных переносов, три из которых показаны на рисунке 5, *б* стрелками. На рисунке 5, *б* изображен как бы «скелет» нашего орнамента — оставлены только сетка осей симметрии и две «решетки» центров симметрии, порядков 4 и 2 (заметим, что центры симметрии порядка 2 — это то же самое, что и обычные центры симметрии).

Множество всех перемещений плоскости, при которых орнамент отображается сам на себя, называется *группой симметрий орнамента* — в нее входят и осевые симметрии, и повороты, и параллельные переносы.

Такое название согласуется с определением группы, принятым в математике (о группах см. цикл статей в «Кванте», 1976, № 10) — множество перемещений плоскости, отображаю-

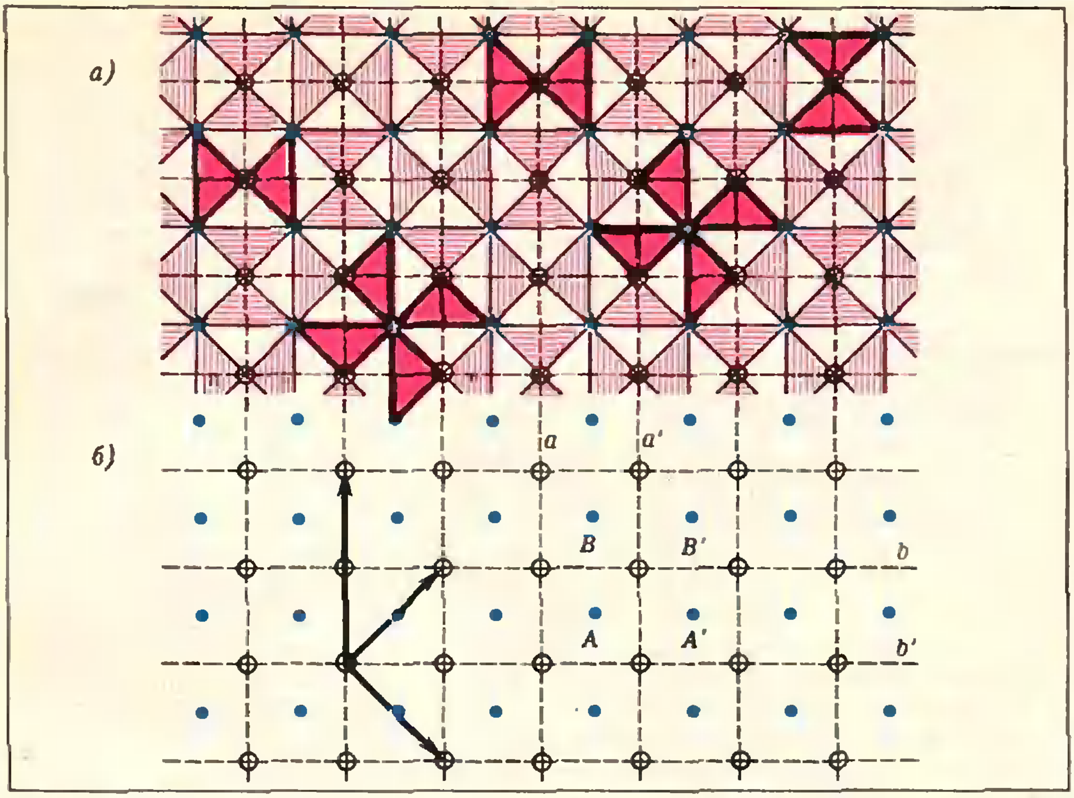


Рис. 5.

щих орнамент на себя, является группой относительно операции *композиции* перемещений. «Скелет» орнамента можно понимать как схему его группы симметрий (только на скелете не изображены переносы).

Заметим, что любую «симметричную» фигуру данного «порядка» (см. выше и рисунок 5, *а*) можно некоторым перемещением из группы симметрий отобразить на любую другую фигуру того же «порядка».

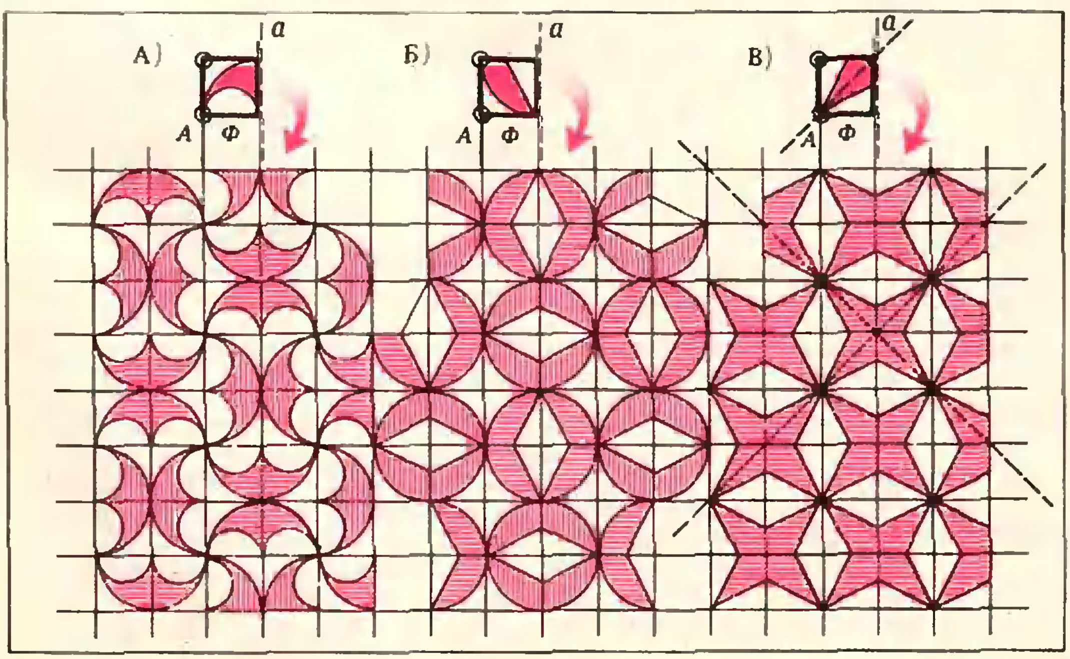


Рис. 6.

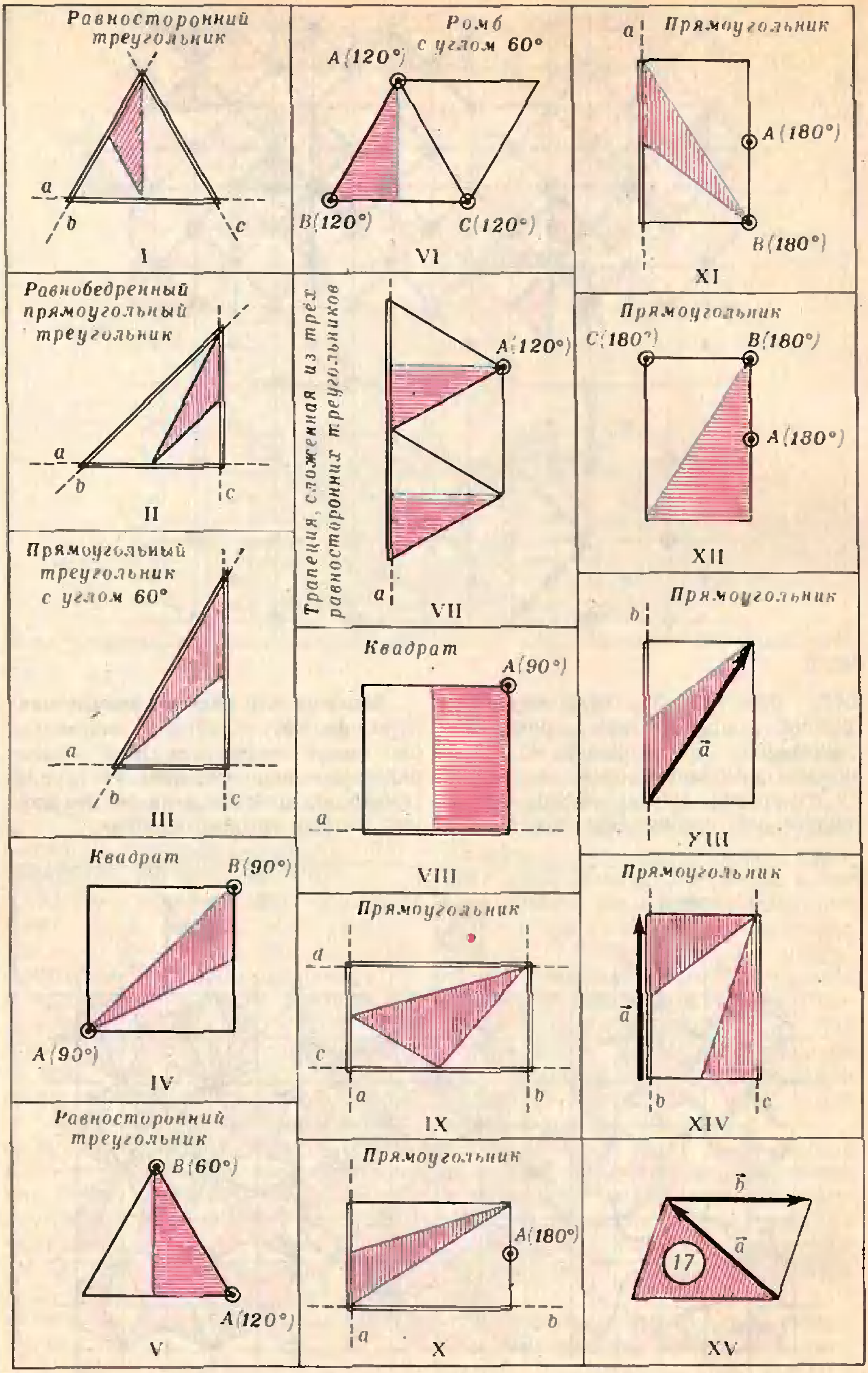

Равносторонний треугольник
a
b
c
I
Равнобедренный прямоугольный треугольник
a
b
c
II
Прямоугольный треугольник с углом 60°
a
b
c
III
Квадрат
B(90°)
A(90°)
IV
Равносторонний треугольник
B(60°)
A(120°)
V
Ромб с углом 60°
A(120°)
B(120°)
C(120°)
VI
Трапеция, сложенная из трёх равносторонних треугольников
A(120°)
a
VII
Квадрат
A(90°)
a
VIII
Прямоугольник
d
c
a
b
IX
Прямоугольник
A(180°)
a
b
X
Прямоугольник
a
A(180°)
B(180°)
XI
Прямоугольник
C(180°)
B(180°)
A(180°)
XII
Прямоугольник
b
$\vec{a}$
XIII
Прямоугольник
$\vec{a}$
b
c
XIV
$\vec{b}$
$\vec{a}$
17
XV

Рис. 7.

Упражнение 1. Укажите перемещения, отображающие одну из выделенных на рисунке 5, *а* фигур на другую. Попробуйте для каждой пары фигур одного порядка найти все такие перемещения.

Упражнение 2. Найдите следующие композиции перемещений из группы симметрий рассматриваемого орнамента (см. рис. 5,*а*; на рисунке 5, *б* указаны оси симметрий центры поворотов):

а) $S_{a'}\circ S_a$; б) $S_b\circ S_a$; в) $S_{b'}\circ S_b\circ S_{a'}\circ S_a$;

г) $S_{b'}\circ S_{a'}\circ S_b\circ S_a$; д) $R^{180°}_B\circ R^{180°}_A$;

е) $R^{90°}_B\circ R^{90°}_A$; ж) $R^{90°}_B\circ R^{-90°}_A$;

з) $R^{90°}_{A'}\circ R^{90°}_{B'}\circ R^{90°}_B\circ R^{90°}_A$.

Указание. Проследите за перемещениями какой-нибудь фигуры орнамента (или просто пары точек) при последовательном применении отображений, входящих в композицию, — тогда будет понятно, как представить композицию одним перемещением. (Ответы к упражнениям см. в конце номера.)

Если вместо треугольника в фундаментальной области — в квадрате Φ — заштриховать какую-нибудь другую «подфигуру», то наши построения дадут геометрически новый орнамент; например, так получены орнаменты на рисунке 6. Однако орнаменты А) и Б) имеют ровно ту же группу симметрий, что и предыдущий, — все эти орнаменты относятся к одному типу. Орнамент В) уже не относится к этому типу: за счет добавочной симметрии заштрихованной подфигуры у этого орнамента появились наклонные оси симметрии, а «половина» центров симметрии порядка 2 превратилась в дополнительную решетку центров симметрии порядка 4 (нарисуйте «скелет»!).

2. Атлас орнаментов

На рисунке 7 изображены 15 фигур Φ и для каждой из них указаны некоторые перемещения f_1, f_2, ...; оси симметрии отмечены пунктиром, центры поворотов обведены кружком, а в скобках указаны углы поворотов; стрелками показаны параллельные переносы. Если в каждом случае применить к фигуре Φ всевозможные композиции перемещений f_1, f_2, ... (в любом порядке и количестве), то получится 15 орнаментов. Это будут орнаменты разных типов: их группы симметрий устроены по-разному (имеют разные сетки осей симметрий или разные наборы порядков центров симметрии — разные «скелеты», — или же разные множества переносов). Начертив эти 15 орнаментов и их скелеты, вы наверняка подметите много интересных закономерностей.

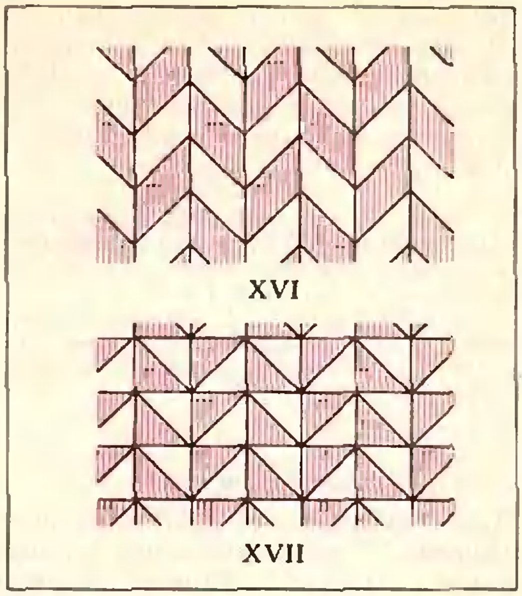


Рис. 8.

Самое замечательное, однако, в том, что если добавить к этим орнаментам еще два, изображенные на рисунке 8, то получится полный «атлас» плоских орнаментов! Оказывается, существует только 17 различных типов орнаментов, или ровно 17 различно устроенных групп симметрий плоских орнаментов. К этому факту мы еще вернемся (см. п. 3).

Фундаментальные области орнаментов I — XV (т. е. внешние контуры фигур Φ на рисунке 7) выбраны специальным образом, и в большинстве случаев изменять их нельзя (иначе при применении наших композиций образы фигур Φ могут оказаться перекрывающимися, и орнамент может не получиться). Поэтому мы указали на рисунке 7, какие именно многоугольники на нем изображены. Заштрихованные подфигуры можно изменять, но так, чтобы не получить добавочных симметрий — как в случае орнамента В) с рисунка 6.

Примечание. Орнаменты XVI и XVII изображены отдельно потому, что у них нет осей симметрии, однако есть оси так называемой *скользящей симметрии* — композиции $f=\vec{a}\circ S_a$ осевой симметрии с параллельным переносом по направлению этой оси. Укажите такие оси на рисунке 8.

Практическое задание. *Начертите орнаменты* I—XV.

Для каждого из орнаментов опишите его группу симметрий и начертите соответствующий скелет. Убедитесь, что группы симметрий построенных орнаментов устроены по-разному.

Упражнение 3. Выясните, к какому из типов I — XVII относятся орнаменты и проекции кристаллических решеток, изображенные на рисунках 1 и 2.

Упражнение 4. Какие из орнаментов I — XV имеют оси скользящей симметрии? Изобразите такие оси на скелетах этих орнаментов.

3. Что такое орнаменты?

Хотя орнаменты всех 17 типов применялись в украшениях еще художниками Древнего Египта, полную их классификацию дал лишь в 1891 году крупнейший русский ученый Е. С. Федоров (в частности, он доказал, что число различно устроенных групп симметрий плоских орнаментов в точности равно 17). Задача перечисления орнаментов возникла у Федорова в связи с потребностями кристаллографии — науки о геометрическом строении кристаллов. Как уже упоминалось, атомы и молекулы веществ, находящихся в кристаллическом состоянии, образуют так называемую кристаллическую структуру — пространственный аналог орнаментов. Сечения подобных структур различными плоскостями представляют собой в точности плоские орнаменты, и группы симметрий плоских орнаментов принято называть *плоскими кристаллографическими группами*. Федоровым была получена и полная классификация пространственных кристаллографических групп — оказывается, их существует ровно 230!

Подробнее об этом написано в книгах, указанных в конце статьи. Мы же пока ограничимся формулировкой одной замечательной задачи, решение которой является основным шагом в доказательстве теоремы Федорова о классификации орнаментов. Но прежде точно определим, что такое *плоский орнамент*.

Определение. *Бесконечная плоская фигура $\tilde{\Phi}$ называется плоским орнаментом, если выполнены следующие условия:*

(1) *среди перемещений, отображающих $\tilde{\Phi}$ на себя, существуют неколлинеарные параллельные переносы;*

(2) *среди всех векторов (параллельных переносов), отображающих $\tilde{\Phi}$ на себя, существует вектор наименьшей длины.*

Если плоский орнамент $\tilde{\Phi}$ отображается сам на себя при поворотах вокруг точки A на углы, только кратные $360°/n$, где n — натуральное число, большее 1, то точка A называется *центром симметрии порядка n* этого орнамента $\tilde{\Phi}$.

Задача 1. *Докажите, что произвольный плоский орнамент может иметь центры симметрии только порядков $n=2$, 3, 4 и 6.*

Дадим указание на два подхода к решению этой задачи.

Путь 1. Рассмотрите два центра симметрии орнамента одного и того же порядка n на наименьшем возможном расстоянии друг от друга (существование наименьшего расстояния между центрами нужно доказывать!). Предположив, что n отлично от 2, 3, 4, 6, покажите, что существуют два центра того же порядка n на еще меньшем расстоянии друг от друга!

Путь 2. Сначала докажите, что для произвольного орнамента центры фиксированного порядка $n \geqslant 3$ образуют *решетку из параллелограммов* — о таких решетках подробно рассказано в статье А. А. Егорова, «Решетки и правильные многоугольники», «Квант», 1974, № 12. Затем, используя свойства группы симметрий орнамента, постройте правильный n-угольник с вершинами в узлах решетки центров. В статье Егорова доказано, что это можно сделать лишь для $n = 3$, 4 и 6

4. Линейные орнаменты и паркеты

В заключение мы предложим еще две задачи, близкие к задаче о классификации плоских орнаментов, но более простые. Однако, тем не менее, решение каждой из них — это настоящее математическое исследование!

(A) Классификация линейных орнаментов.

Если плоская фигура отображается сама на себя при параллельных переносах только одного направления (и противоположного ему), причем среди этих переносов существует перенос наименьшей длины, то такая фигура называется *линейным*

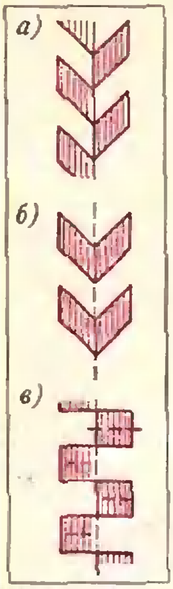


Рис. 9.

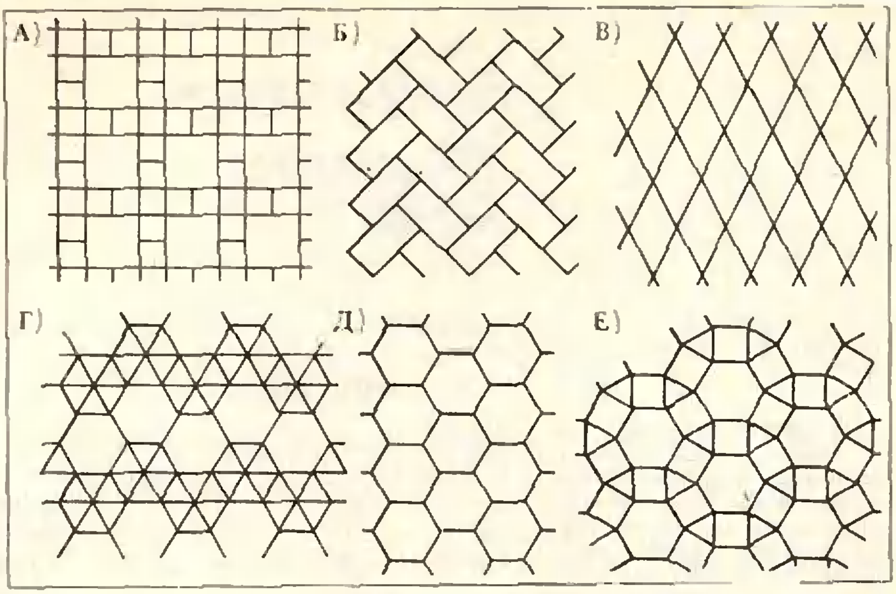


Рис 10

орнаментом. На рисунке 9 изображены три линейных орнамента, причем разного типа — с различно устроенными группами симметрий (объясните, в чем разница).

Задача 2. *Перечислите все возможные типы линейных орнаментов (и докажите, что других возможностей нет!).*

Сообщаем ответ: число различных линейных кристаллографических групп равно 7.

Б) Перечисление правильных паркетов.

Паркетом называется разбиение плоскости на многоугольники, при котором каждые два многоугольника либо не пересекаются, либо имеют ровно одну общую вершину, либо имеют общую сторону, причем объединение сторон всех многоугольников является плоским орнаментом. Паркет называется *правильным*, если все многоугольники разбиения правильные (возможно, с различным числом сторон) и любую вершину паркета можно перевести в любую другую его вершину некоторым перемещением, отображающим весь паркет на себя. Изображенные на рисунке 10 разбиения А) и Б) вообще не являются паркетами в определенном выше смысле; разбиения В) и Г) — паркеты, но не правильные, и, наконец, разбиения Д) и Е) являются правильными паркетами (объясните).

Задача 3. *Найдите все возможные правильные паркеты.*

Эта задача уже была сформулирована в «Кванте»: в статье А. Н. Колмогорова «Паркеты из правильных многоугольников» («Квант», 1970, № 3). В этой статье изложен и возможный подход к перечислению всех правильных паркетов. Сообщаем ответ: число различных, с точностью до подобия, правильных паркетов равно 11.

Литература

Г. С. М. Коксте р, *Введение в геометрию*, главы 3, 4 и 15 (М., «Наука», 1966).

Г. Вейль, *Симметрия*, третья лекция (М., «Наука», 1968).

Д. Гильберт и С. Кон-Фоссен, *Наглядная геометрия*, глава II (М. — Л., ГТТИ, 1951).

Задачи наших читателей

Докажите следующее соотношение между элементами остроугольного треугольника ABC:

$$\frac{|C_0A_0|\cdot|A_0B_0|}{h_a^2}+\frac{|A_0B_0|\cdot|B_0C_0|}{h_b^2}+\frac{|B_0C_0|\cdot|A_0C_0|}{h_c^2}=1,$$

где A_0, B_0 и C_0 — основания высот, опущенных из вершин A, B, C соответственно; h_a, h_b, h_c — длины соответствующих высот.

У. Алла

(г. Выру Эстонской ССР)

задачник кванта

Задачи

М431—М435; Ф443—Ф447

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 мая 1977 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант», «Задачник «Кванта». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М431, М434» или «Ф447». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

В этом номере мы публикуем фамилии читателей, приславших правильные решения задач М376—М384, М386—М390, Ф383—Ф402 (см. с. 60).

М431. В лесу растут деревья цилиндрической формы. Связисту нужно протянуть по лесу провод из точки A в точку B, расстояние между которыми равно l. Докажите, что для этой цели связисту достаточно иметь кусок провода длиной $1{,}6\,l$.

А. Альтшулер

М432. Существует ли полный квадрат, сумма цифр которого равна

а) 1977;

б) 1978?

в) * Выясните, какие натуральные числа могут быть суммами цифр квадрата целого числа.

А. Гришков

М433. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ сторона BC параллельна диагонали AD, сторона CD — диагонали BE, сторона DE — диагонали AC и сторона AE — диагонали BD (рис. 1). Докажите, что сторона AB параллельна диагонали CE.

Э. Туркевич

М434. Число $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\ldots+\frac{2^n}{n}$ представляется в виде несократимой дроби $\frac{p_n}{q_n}$.

а) Докажите, что p_n — четное число.

б) Докажите, что если $n\geqslant 3$, то p_n делится на 8.

в) * Докажите, что для любого натурального k можно указать такое n, что числа p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, … делятся на 2^k.

Д. Фаддеев

М435 *. В таблице размерами $m\times n$ записаны действительные числа, в каждой клетке по числу. В каждом столбце подчеркнуто k наибольших чисел ($k\leqslant m$), в каждой строке — l наибольших чисел ($l\leqslant n$). Докажите, что по крайней мере kl чисел подчеркнуты дважды. Разберите вначале случаи а) $k=l=2$; б) $k=l=3$.

С. Конягин

Ф443. Как известно, земной шар делает полный оборот вокруг своей оси за 23 *час* 56 *мин* 04 *сек*. Следовательно, за сутки все часы, циферблат которых раз-

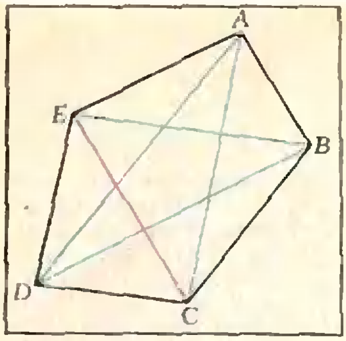


Рис. 1.

делен на 24 часа, должны отставать почти на 4 *мин*. Это составляет почти полчаса в неделю. Почему же мы не замечаем этого отставания и не подводим все часы непрерывно?

Б. Буховцев

Ф444. Тяжелый ящик массы M скатывается по роликам, образующим наклонную плоскость (рис. 2). Расстояние между роликами l, их радиусы r и массы m. Угол наклона плоскости к горизонту равен α. Найти скорость движения ящика, если известно, что она постоянная. Считать, что ролики полые и толщина их стенок $d \ll r$.

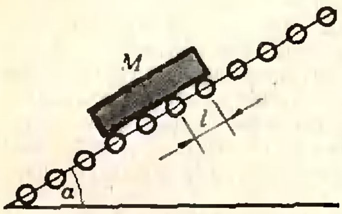


Рис. 2.

Ф445. Конденсатор емкости $C=0{,}04$ *мкф* с помощью ключа K периодически с частотой $\nu=50$ раз в секунду заряжается от источника с э. д. с. $\mathscr{E}=100$ *в* и внутренним сопротивлением $r=5$ *ом* и разряжается через сопротивление $R=1$ *ком* (рис. 3). Определить мощность, выделяемую в нагрузке R, и к. п. д. такого устройства. Считать, что время замыкания контактов ключа достаточно, чтобы конденсатор успел полностью зарядиться (положение I) и полностью разрядиться (положение II).

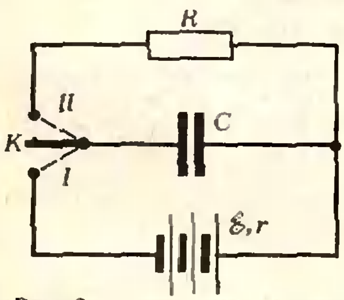


Рис. 3.

Ф446. На шероховатой ленте транспортера лежит тело массой M, прикрепленное к стене пружиной жесткостью k (рис. 4). Ленту приводят в движение с постоянной скоростью v, и через некоторое время устанавливается периодическое движение тела. Нарисуйте график зависимости смещения тела, его скорости и ускорения от времени при этом движении.

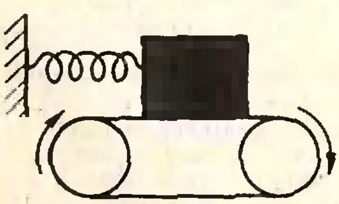


Рис. 4.

Ф447. Вдоль оси, проходящей через центр двух жестко связанных концентрических цилиндров, натянута платиновая проволочка, покрытая слоем серебра (рис. 5). При прохождении тока по проволоке она нагревается, и слой серебра испаряется. Через узкую прорезь во внутреннем цилиндре часть атомов серебра пролетает во внешний цилиндр и осаждается на его внутренней поверхности.

Радиус внешнего цилиндра $R=30$ *см*, радиус внутреннего цилиндра пренебрежимо мал по сравнению с R; ширина щели в маленьком цилиндре $\delta=1$ *мм*. Температура паров серебра $T=1000^\circ$K, плотность паров $\rho=10^{-5}$ *г/см*^{3}.

Цилиндры вращаются, делая $n=10$ оборотов в секунду. Найти распределение поверхностной плотности серебра в слое, осаждающемся на внутренней поверхности большого цилиндра за время $t=1$ *сек*.

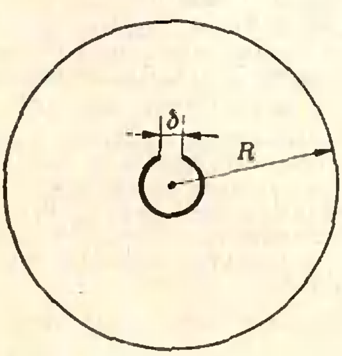


Рис. 5.

Решения задач

М391—М394; Ф397—Ф402

М391. *а) В последовательности $x_0, x_1, x_2, \ldots$ числа x_0 и x_1 — натуральные и меньше 1000, а каждое из остальных чисел равно модулю разности двух предыдущих. Докажите, что одно из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{1500}$ равно 0.*

б) В последовательности $x_0, x_1, x_2, \ldots$ числа x_0 и x_1 — натуральные и меньше 10 000, а каждое из чисел $x_2, x_3, \ldots$ равно наименьшей из абсолютных величин разностей двух каких-то предыдущих чисел. Докажите, что $x_{20}=0$.

а) Докажем индукцией по всем натуральным n, что если в такой последовательности x_0 и x_1 меньше $2n$, то одно из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{3n}$ равно 0 (в условии задачи $n = 500$).

Случай $n=1$ легко проверяется. Пусть для всех n, меньших данного, утверждение доказано. Поскольку $x_0 \leqslant 2n-1$, $x_1 \leqslant 2n-1$, $x_2 \geqslant 1$, то $x_3 \leqslant 2n-2$ и $x_4 \leqslant 2n-3$. Если $x_3 < 2n-2$ и $x_4 < 2n-2$, то из индуктивного предположения все следует. Если же $x_3 = 2n-2$, то $x_2 = 1$, $x_1 = 2n-1$, $x_0 = 2n-2$. Осталось доказать утверждение в этом случае. Имеем:
$x_3 = 2n-2$, $x_4 = 2n-3$, $x_5 = 1$, $x_6 = 2n-4$, $x_7 = 2n-5$, $x_8 = 1, \ldots, x_{3k} = 2n-2k, \ldots, x_{3n} = 0$.

б) Сначала переставим члены x_0, x_1 и x_2 в порядке убывания. Получившаяся последовательность, возможно, будет отличаться от исходной лишь порядком первых трех членов (убедитесь в этом самостоятельно). Кроме того, она, очевидно, убывает: определяя член x_k, мы имеем все те разности, которыми пользовались для определения члена x_{k-1}, плюс еще разности между x_{k-1} и остальными членами последовательности (с меньшими номерами).

Заметим теперь, что для всякого целого $k>0$

$$x_k \geqslant x_{k+1} + x_{k+2}. \qquad (*)$$

В противном случае мы имели бы

$$x_{k+2} > x_k - x_{k+1} = |x_k - x_{k+1}|,$$

что невозможно.

Предположим, что $x_{20} \geqslant 1$. Тогда, разумеется, $x_{19} \geqslant 1$, и в силу $(*)$ имеем: $x_{18} \geqslant x_{19} + x_{20} \geqslant 2$, $x_{17} \geqslant x_{18} + x_{19} \geqslant 2+1 = 3$, $x_{16} \geqslant x_{17} + x_{18} \geqslant 3+2 = 5$, $\ldots$, $x_0 \geqslant x_1 + x_2 \geqslant 4181 + 6765 = 10\,946 > 10\,000$, что противоречит условию задачи.

С. Фомин

◆

М392. *По трем прямолинейным дорогам с постоянными скоростями идут три пешехода. В начальный момент они не находились на одной прямой. Докажите, что они могут оказаться на одной прямой не более двух раз.*

Приведем два решения этой задачи. Первое (геометрическое) использует типичный для физики прием: переход в движущуюся систему отсчета; второе (аналитическое) удается коротко записать с помощью «псевдоскалярного произведения» векторов.

1. Условие, что точки P, Q, R находятся на одной прямой, будем записывать так: $R \in (PQ)$ (при $P \neq Q$).

Перейдем в систему координат, связанную с одним из пешеходов. Тогда задача сведется к следующей: на плоскости дана неподвижная точка A; доказать, что если точки P и Q движутся прямолинейно и равномерно, то событие $A \in (PQ)$ может произойти не более двух раз (если известно, что в начальный момент времени $t=0$ оно не произошло).

Пусть в какой-то момент времени t_1 пешеходы P и Q находились в точках B и C таких, что $A \in (BC)$. Введем еще одного «фиктивного» пешехода Q': Q' находится в точке B при $t=t_1$ и движется параллельно пути пешехода Q так, что всегда $A \in (QQ')$ (рис. 1, *а*). Ясно, что условия $A \in (PQ)$, $A \in (PQ')$ и $Q' \in (AP)$ эквивалентны *). Очевидно, Q' движется равномерно. Поэтому прямая PQ' сохраняет одно и то же направление — перемещается параллельно самой себе — и может лишь в один момент времени t_2 (отличный от t_1) пройти через точку A (рис. 1, *б*). (Возможности, что точки P и Q' все время совпадают или что они движутся по прямой AB, исключены начальным условием.)

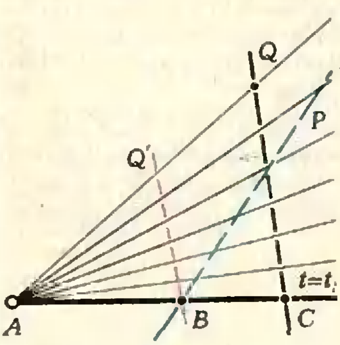


рис. 1, а

*) При $P \neq Q'$.

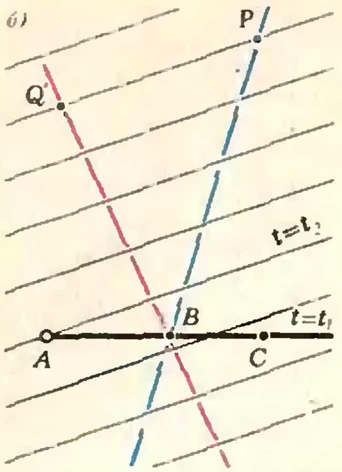


Рис. 1, б.

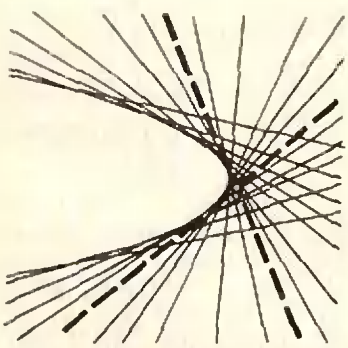


Рис. 2.

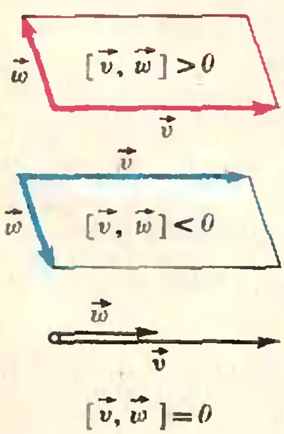


Рис. 3.

Нетрудно привести примеры, показывающие, что три пешехода действительно могут оказаться на одной прямой два раза, один раз или ни одного. Прежде чем перейти к решению II, отметим без доказательства один факт, из которого легко вытекает наша задача. Если две точки P и Q движутся равномерно по двум прямым, то все прямые PQ либо проходят через одну точку, либо параллельны одному направлению, либо (и это общий случай) — касаются одной параболы — «огибающей» этого семейства прямых (рис. 2). Ясно, что через каждую точку A плоскости проходит не более двух прямых этого семейства.

II. Введем систему координат Oxy. Условие, что два вектора $\vec v$ и $\vec w$ с координатами $(v_x; v_y)$ и $(w_x; w_y)$ коллинеарны (параллельны одному направлению), можно, очевидно, записать так: $v_x w_y = v_y w_x$. Введем обозначение

$$[\vec v, \vec w] = v_x w_y - v_y w_x. \qquad (1)$$

Числовая функция от пары векторов $(v, w) \to [\vec v, \vec w]$ обладает, как нетрудно проверить, такими свойствами:

$$[\lambda \vec v, \vec w] = [\vec v, \lambda \vec w] = \lambda [\vec v, \vec w];$$
$$[\vec v + \vec w, \vec u] = [\vec v, \vec u] + [\vec w, \vec u],$$
$$[\vec u, \vec v + \vec w] = [\vec u, \vec v] + [\vec u, \vec w] \qquad (2)$$

для любых векторов $\vec u$, $\vec v$, $\vec w$ и любого числа λ. Как уже говорилось, $[\vec v, \vec w] = 0$ тогда и только тогда, когда $\vec v$ и $\vec w$ коллинеарны. (Величина $[\vec v, \vec w]$ имеет простой геометрический смысл: ее модуль равен площади параллелограмма, стороны которого изображают векторы $\vec v$ и $\vec w$, а знак зависит от «ориентации» пары $(\vec v, \vec w)$, причем $[\vec v, \vec w] = -[\vec w, \vec v]$ (рис. 3); но эти свойства нам не понадобятся.)

Перейдем теперь непосредственно к решению задачи. Пусть P, Q и R движутся прямолинейно и равномерно. Тогда

$$\vec{RP} = \vec a + t\vec v, \quad \vec{RQ} = \vec b + t\vec w, \qquad (3)$$

где t — время, $\vec a$, $\vec b$, $\vec v$, $\vec w$ — векторы, не зависящие от t. Получить формулы вида (3) нетрудно, пользуясь тем, что если какая-то точка M движется со скоростью $\vec u$, то $\vec{OM} = \vec{OM_0} + t\vec u$, где M_0 — положение M при $t=0$, O — фиксированная точка плоскости. С учетом (1)—(3) условие $R \in (PQ)$ можно записать так:

$$[\vec v, \vec w]\, t^2 + ([\vec a, \vec w] + [\vec b, \vec v])\, t + [\vec a, \vec b] = 0. \qquad (4)$$

Мы получили квадратное уравнение относительно t. Хотя некоторые его коэффициенты и могут обращаться в 0, но при $t=0$, как сказано в условии задачи, (4) не выполняется, так что (4) — не тождество. Следовательно, $R \in (PQ)$ не более чем при двух значениях t.

Н. Васильев

◆

М393. *Найти сумму*

$$\varphi(0) + \varphi\left(\frac{1}{n}\right) + \varphi\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + \varphi(1),$$

если $\varphi(x) = \dfrac{4^x}{4^x+2}$.

Мы решим более общую задачу, именно, когда $\varphi(x) = \dfrac{a^{2x+k}}{a^{2x}+a}$, где k — любое действительное число, и $a>0$ (положив $k=0$, $a=2$, получим ответ задачи М393).

Найдем выражение для $\varphi(1-x)$:

$$\varphi(1-x) = \frac{a^{-2x+k+2}}{a^{-2x+2}+a} = \frac{a^{k+1}}{a^{2x}+a}.$$

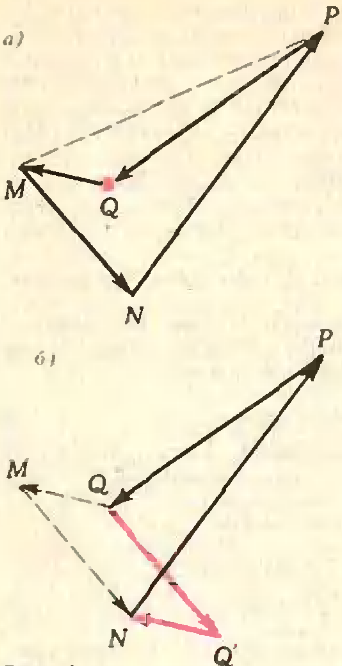


Рис. 4.

Сложив $\varphi(1-x)$ и $\varphi(x)$, получим:

$$\varphi(x)+\varphi(1-x)=\frac{a^{2x+k}+a^{k+1}}{a^{2x}+a}=a^k.$$

Пусть искомая сумма равна S. Тогда

$$S=\varphi(0)+\varphi\left(\frac{1}{n}\right)+\ldots+\varphi\left(\frac{n-1}{n}\right)+\varphi(1),$$

$$S=\varphi(1)+\varphi\left(\frac{n-1}{n}\right)+\ldots+\varphi\left(\frac{1}{n}\right)+\varphi(0).$$

Складывая эти два равенства и принимая во внимание, что

$$\varphi(0)+\varphi(1)=\varphi\left(\frac{1}{n}\right)+\varphi\left(\frac{n-1}{n}\right)=\ldots=$$
$$=\varphi(x)+\varphi(1-x)=a^k,$$

получаем

$$2S=(n+1)\,a^k,$$

то есть $S=\frac{1}{2}(n+1)\,a^k$.

Итак, ответ в задаче М393 следующий:

$$S=\frac{1}{2}(n+1).$$

С. Берколайко

◆

М394. *а) На плоскости даны векторы* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, *сумма которых равна* 0. *Докажите неравенство* $|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{d}|\geqslant|\vec{a}+\vec{d}|+|\vec{b}+\vec{d}|+|\vec{c}+\vec{d}|$.

Докажите аналогичное неравенство:

б) для четырех чисел и

в) четырех векторов в трехмерном пространстве, сумма которых равна 0.

Мы сейчас решим только задачу а) (на олимпиаде школьникам 9—10 классов предлагалась именно она); решению же задач б) и в) будет посвящена заметка, которую мы опубликуем в одном из ближайших номеров журнала.

Откладывая последовательно векторы $\vec{MN}=\vec{a}$, $\vec{NP}=\vec{b}$, $\vec{PQ}=\vec{c}$, $\vec{QM}=\vec{d}$, мы получим замкнутую ломаную (так как $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=0$). Меняя порядок следования векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, можно получить несколько таких ломаных. Покажем, что среди этих ломаных есть самопересекающиеся. Для этого возьмем какую-нибудь из наших ломаных. Если одна из ее вершин, например Q, лежит внутри треугольника MNP, образованного тремя другими вершинами (рис. 4, а), то отложим вектор $\vec{QQ'}=\vec{MN}$. Так как при этом $\vec{Q'N}=\vec{QM}$, то ломаную $MNPQ$ можно заменить самопересекающейся ломаной $NPQQ'$ (рис. 4, б). Если же $MNPQ$ — выпуклая ломаная, то сначала проделаем построение, изображенное на рисунке 5.

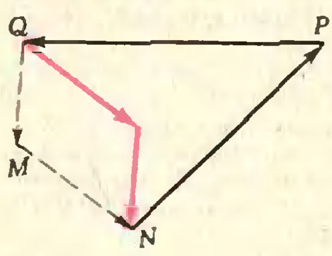


Рис. 5.

Итак, пусть $\vec{MN}=\vec{a}$, $\vec{NP}=\vec{b}$, $\vec{PQ}=\vec{c}$, $\vec{QM}=\vec{d}$, причем отрезки NP и QM имеют общую точку R (рис. 6). Тогда $|MR|+|PR|\geqslant|PM|$, $|NR|+|QR|\geqslant|QN|$, откуда $|MR|+|PR|+|NR|+|QR|\geqslant|PM|+|QN|$. Но

$$|PM|=|\vec{PQ}+\vec{QM}|=|\vec{c}+\vec{d}|,$$
$$|QN|=|\vec{QM}+\vec{MN}|=|\vec{a}+\vec{d}|,$$

а $|MR|+|PR|+|NR|+|QR|=|QM|+|NP|=|\vec{b}+\vec{d}|$. Следовательно,

$$|\vec{b}|+|\vec{d}|\geqslant|\vec{a}+\vec{d}|+|\vec{c}+\vec{d}|. \qquad (1)$$

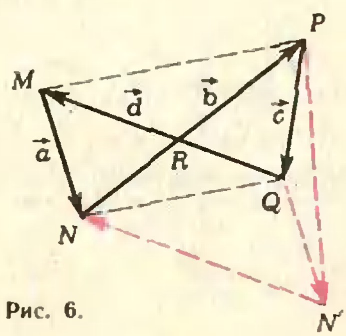


Рис. 6.

Кроме того, очевидно, что $|\vec{a}|+|\vec{c}|\geqslant|\vec{a}+\vec{c}|$ и что $|\vec{a}+\vec{c}|=|\vec{b}+\vec{d}|$ (см. рис. 6); поэтому

$$|\vec{a}|+|\vec{c}|\geqslant|\vec{b}+\vec{d}|. \qquad (2)$$

Складывая неравенства (1) и (2), получим то, что требовалось.

Ю. Ионин

Ф397. *Имеется следующий проект летательного аппарата. Верхняя поверхность большой плоской пластинки поддерживается при постоянной температуре* 0°С, *а нижняя — при температуре* 100°С. *Изобретатель утверждает, что такая пластинка будет висеть в воздухе подобно дирижаблю. Объясните, почему. Оцените по порядку величины подъемную силу такой пластинки с площадью* 1 $м^2$ *при температуре воздуха* 20°С.

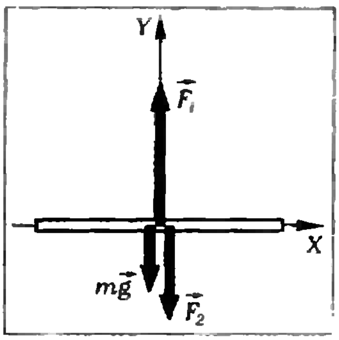


Рис. 7.

Налетающие на пластину молекулы воздуха имеют среднеквадратичную скорость, равную $\bar v_{ср.кв.} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$, где T — температура воздуха, m — масса молекулы. Среднее значение абсолютных величин проекций скоростей молекул на ось OY, перпендикулярную к поверхности пластины, равно

$$\bar v_y \approx \frac{v_{ср.кв.}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{kT}{m}}.$$

При столкновении с пластиной «температура» молекул становится равной температуре пластины. Это означает, что после отражения от нижней поверхности пластины

$$\bar v_y' = \sqrt{\frac{kT_1}{m}},$$

а после отражения от верхней поверхности

$$\bar v_y'' = \sqrt{\frac{kT_2}{m}}.$$

В результате проекция p_y импульса молекулы, попадающей на нижнюю поверхность пластины, меняется при соударении на величину

$$\Delta p_y' = m\left(\sqrt{\frac{kT}{m}} + \sqrt{\frac{kT_1}{m}}\right),$$

а молекулы, попадающей на верхнюю поверхность, — на величину

$$\Delta p_y'' = m\left(\sqrt{\frac{kT}{m}} + \sqrt{\frac{kT_2}{m}}\right).$$

За время Δt на каждую из поверхностей попадают молекулы, находящиеся от пластины на расстоянии, равном $\bar v_y \Delta t$. Число этих молекул равно $N = n\bar v_y s\Delta t$, где n — число молекул в единице объема, s — площадь пластины.

В соответствии со вторым и третьим законами Ньютона на пластину в вертикальном направлении действуют силы, равные по абсолютным величинам изменениям проекций импульсов молекул в единицу времени. На нижнюю поверхность пластины действует направленная вверх сила (рис. 7)

$$|\vec F_1| = \frac{N\Delta p_y'}{\Delta t} = mn\bar v_y s\left(\sqrt{\frac{kT_1}{m}} + \sqrt{\frac{kT}{m}}\right),$$

а на верхнюю — направленная вниз сила

$$|\vec F_2| = \frac{N\Delta p_y''}{\Delta t} = mn\bar v_y s\left(\sqrt{\frac{kT_2}{m}} + \sqrt{\frac{kT}{m}}\right).$$

Так как $T_1 > T_2$, то равнодействующая $\vec R$ сил $\vec F_1$ и $\vec F_2$ направлена вверх и равна по абсолютной величине

$$|\vec R| = |\vec F_1| - |\vec F_2| = mn\bar v_y s\left(\sqrt{\frac{kT_1}{m}} - \sqrt{\frac{kT_2}{m}}\right) = nsk\sqrt{T}\left(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}\right).$$

Число молекул, содержащихся в объеме V воздуха при давлении p и температуре T, равно $N_V = \nu \cdot N_A$, где ν — число молей воздуха в объеме V, N_A — число Авогадро. Но $\nu = \frac{M}{\mu} = \frac{pV}{RT}$. Так что число молекул в единице объема

$$n = \frac{p}{RT} N_A.$$

Таким образом,

$$|\vec{R}| = \frac{pN_A sk}{RT}\sqrt{T}\left(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}\right) = \frac{ps}{\sqrt{T}}\left(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}\right).$$

Подставив в это выражение данные в условии величины (считая $p = 10^5 н/м^2$), получим

$$|\vec{R}| \approx 1{,}5\cdot 10^4 \quad н.$$

◆

Ф398. *При подключении в сеть трехламповой люстры с двумя выключателями была допущена ошибка. В результате этого при замыкании одного из выключателей все три лампы горели неполным накалом. При замыкании другого выключателя горела нормально только одна из ламп (две другие не горели), и тот же эффект давало замыкание обоих выключателей одновременно. При разомкнутых выключателях все три лампы не горели. Нарисуйте возможную схему выполненного монтажа, объясните наблюдаемые эффекты.*

Схема включения ламп показана на рисунке 8. При замкнутом ключе K_1 и разомкнутом ключе K_2 все три лампы оказываются включенными последовательно, и поэтому они горят неполным накалом. При одновременном замыкании обоих ключей лампа $Л_1$ оказывается включенной в сеть, а лампы $Л_2$ и $Л_3$ соединены параллельно участку цепи с очень маленьким сопротивлением. Напряжение на них мало, и лампы не горят. При замыкании одного ключа K_2 в сеть включается только лампа $Л_1$.

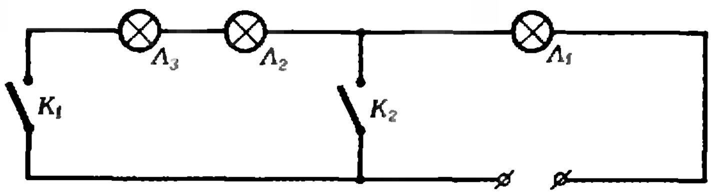


Рис. 8.

◆

Ф399. *Три небольших одинаковых металлических шарика, находящихся в вакууме, помещены в вершинах равностороннего треугольника. Шарики поочередно по одному разу соединяют с удаленным проводником, потенциал которого поддерживается постоянным. В результате на первом шарике оказывается заряд Q_1, а на втором — Q_2. Определить заряд третьего шарика.*

При соединении каждого из шариков с удаленным проводником, потенциал φ которого поддерживается постоянным, потенциал шарика становится равным φ.

Заряд Q_1, появляющийся на первом шарике, равен

$$Q_1 = C\varphi, \tag{1}$$

где C — емкость шарика

Потенциал φ второго шарика складывается из потенциала поля, создаваемого зарядом Q_1 на расстоянии l от первого шарика $\left(\varphi_1 = \frac{Q_1}{l}\right)$, и потенциала «собственного» поля заряда Q_2 $\left(\varphi_2 = \frac{Q_2}{C}\right)$:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{Q_1}{l} + \frac{Q_2}{C}. \tag{2}$$

Потенциал φ третьего шарика равен

$$\varphi = \frac{Q_1}{l} + \frac{Q_2}{l} + \frac{Q_3}{C}, \tag{3}$$

где $\frac{Q_1}{l}$, $\frac{Q_2}{l}$ — соответственно потенциалы полей зарядов Q_1 и Q_2 на расстоянии l от них, $\frac{Q_3}{C}$ — потенциал «собственного» поля заряда Q_3.

Из равенства (2), воспользовавшись равенством (1), найдем l:

$$l = \frac{Q_1 C}{Q_1 - Q_2}.$$

Подставив это выражение для l в равенство (3), найдем Q_3:

$$Q_3 = C\left[\varphi - \frac{Q_1 + Q_2}{l}\right] = \frac{Q_2^2}{Q_1}.$$

Ф400. *Две заряженные частицы имели первоначально одинаковые по величине и направлению скорости. После того как на некоторое время было включено однородное электростатическое поле, вектор скорости одной из частиц повернулся на 60°, а численное значение скорости уменьшилось вдвое. Вектор скорости другой частицы повернулся на 90°. Во сколько раз изменилось численное значение скорости второй частицы? Определите отношение заряда к массе для второй частицы, если для первой частицы оно равно* k_1.

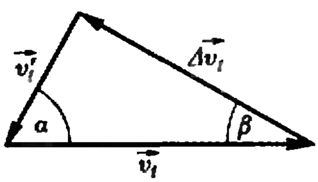


Рис. 9.

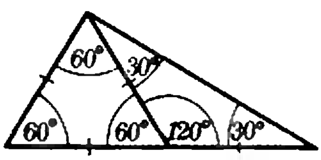


Рис. 10.

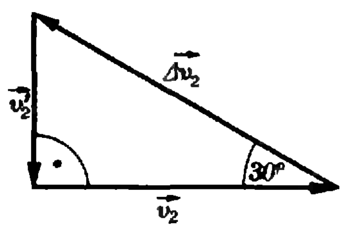


Рис. 11.

На рисунке 9 изображен треугольник скоростей частицы 1: $\vec v_1$ — первоначальная скорость частицы, $\vec v_1'$ — ее скорость после выключения поля, $\Delta\vec v_1$ — изменение скорости $\vec v_1$ за время действия поля. Так как $\alpha=60°$, а $|\vec v_1'| = \frac{1}{2}|\vec v_1|$, то треугольник скоростей — прямоугольный и $\beta=30°$ (рис. 10). Следовательно, $|\Delta\vec v_1| = |\vec v_1|\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}|\vec v_1|$.

Импульс частицы 1 за время t, в течение которого было включено поле напряженности $\vec E$, изменился на величину $|\Delta m_1\vec v_1| = m_1\frac{\sqrt{3}}{2}|\vec v_1|$ (m — масса частицы 1). Согласно второму закону Ньютона

$$|\Delta m_1\vec v_1| = |\vec E|q_1 t, \qquad (1)$$

где $|\vec F|q_1 t = |\vec F_1|$ — абсолютное значение силы, действующей со стороны поля на частицу 1, заряд которой равен q_1. Направление силы $\vec F_1$ совпадает с направлением вектора $\Delta m_1\vec v_1$.

Следовательно, вектор изменения импульса частицы 2 составляет угол 30° с вектором первоначального импульса частицы 2.

На рисунке 11 изображен треугольник скоростей частицы 2, подобный треугольнику импульсов. Из этого треугольника находим:

$$\frac{|\vec v_2'|}{|\vec v_2|} = \mathrm{tg}\,30° = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Сила $\vec F_2$, с которой поле действует на частицу 2, равна по абсолютной величине $|\vec E|q_2$, где q_2 — заряд частицы 2. Согласно второму закону Ньютона

$$|\Delta m_2\vec v_2| = |\vec E|q_2 t$$

(m_2 — масса частицы 2). Отсюда

$$\frac{q_2}{m_2} = \frac{|\Delta\vec v_2|}{|\vec E|t} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{|\vec v_2|}{|\vec E|t} \qquad (2)$$

(см. рисунок 11). Из равенства (1) находим:

$$|\vec E|t = \frac{|\Delta m_1\vec v_1|}{q_1} = \frac{1}{k_1}\frac{\sqrt{3}}{2}|\vec v_1|.$$

Подставив это выражение в (2), получим:

$$\frac{q_2}{m_2} = \frac{4}{3}\frac{|\vec v_2|k_1}{|\vec v_1|} = \frac{4}{3}k_1.$$

◆

Ф401. *Схему, изображенную на рисунке 12 (мостик Уитстона), применяют обычно для измерения неизвестного сопротивления x. Как, используя подобную схему, измерить сопротивление* R_G *самого гальванометра G, если второго гальванометра нет?*

Включим гальванометр в цепь вместо неизвестного сопротивления (рис. 13), а точки A и B соединим через ключ K_1. Подбором переменного сопротивления R добьемся такого положения, что показания гальванометра не будут изменяться при замыкании и размыкании ключа K_1. В такой ситуации потенциалы точек A и B равны и сбалансированы: $\varphi_A=\varphi_B$.

Но $\varphi_A = \varphi_D - I_1R$ (I_1 — ток, текущий по участку DA), а $\varphi_B = \varphi_D - I_2r_2$ (I_2 — ток, текущий по участку DB). Так что

$$\varphi_D - I_1R = \varphi_D - I_2r_2,$$

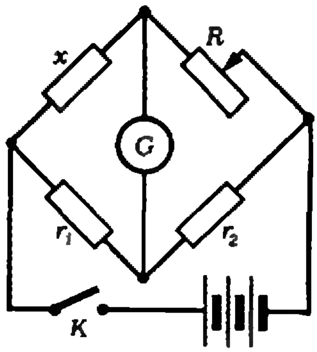


Рис. 12.

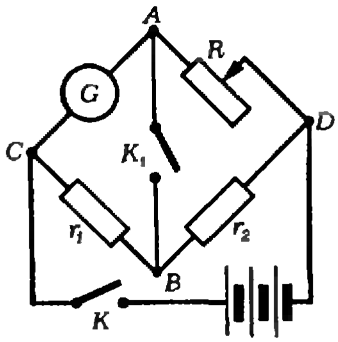


Рис. 13.

откуда

$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{R}{r_2}. \qquad (1)$$

С другой стороны, $\varphi_A=\varphi_C+I_1r_G$ (r_G — сопротивление гальванометра), а $\varphi_B=\varphi_C+I_2r_1$. Так что

$$\varphi_C+I_1r_G=\varphi_C+I_2r_1,$$

откуда

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{r_G}{r_1}. \qquad (2)$$

Сравнивая выражения (1) и (2), получаем:

$$\frac{R}{r_2}=\frac{r_G}{r_1},$$

или

$$r_G=\frac{r_1}{r_2}R.$$

Зная сопротивления r_1, r_2, R, можно найти сопротивление гальванометра r_G.

◆

Ф402. *Рассеивающая линза с фокусным расстоянием $F=-0{,}6$ м расположена так, что один из ее фокусов совпадает с полюсом вогнутого зеркала. Каково фокусное расстояние F' зеркала, если известно, что система дает действительное изображение предмета, помещенного на любом расстоянии перед линзой? Изображение создается лучами, вторично прошедшими через линзу после отражения от зеркала.*

Рассеивающая линза всегда дает мнимое изображение действительного источника. Следовательно, для того чтобы система давала действительное изображение, промежуточное изображение, которое получается после отражения лучей от зеркала, должно быть мнимым источником для линзы, то есть должно находиться справа от линзы.

В самом деле, из формулы рассеивающей линзы в случае мнимого источника

$$-\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=-\frac{1}{F}$$

следует, что

$$f=\frac{dF}{F-d}. \qquad (1)$$

(Напомним, что d — расстояние от линзы до источника, f — расстояние от линзы до изображения, F — фокусное расстояние линзы.) Из (1) видно, что $f\geqslant 0$, если d положительно и не превышает F.

Таким образом, промежуточное изображение S_2 источника после зеркала (рис. 14) должно находиться справа от зеркала на расстоянии f_2 таком, что

$$F\leqslant f_2\leqslant 2F. \qquad (2)$$

Источником для зеркала служит промежуточное изображение S_1 — мнимое изображение источника S, даваемое линзой после первого преломления лучей (см. рис. 14). Из формулы линзы для этого случая —

$$\frac{1}{d_1}-\frac{1}{f_1}=-\frac{1}{F}$$

— находим

$$f_1=\frac{d_1F}{d_1+F}. \qquad (3)$$

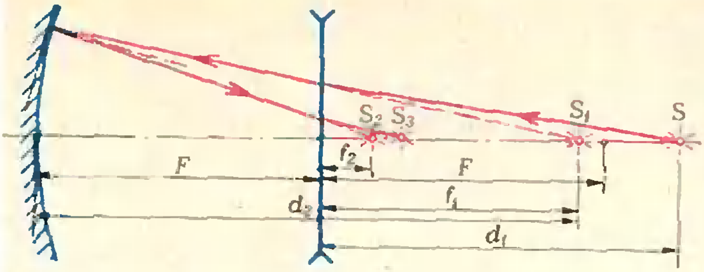


Рис. 14.

Расстояние d_1 от источника до линзы может меняться в пределах от 0 до ∞. При этом, как следует из формулы (3), f_1 меняется от 0 до F. Расстояние же $d_2 = F + f_1$ от изображения S_1 до зеркала меняется при этом от F до $2F$. Напомним, что это изображение служит источником для зеркала. Таким образом, нам нужно найти, при каком фокусном расстоянии F' зеркала изображение источника, находящегося от зеркала на расстоянии d_2 таком, что

$$F \leqslant d_2 \leqslant 2F, \qquad (4a)$$

получается на расстоянии f_2 от зеркала таком, что

$$F \leqslant f_2 \leqslant 2F. \qquad (4б)$$

Из формулы зеркала —

$$\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F'}$$

— следует, что

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{F'} - \frac{1}{d_2}. \qquad (5)$$

Согласно условию (4б)

$$\frac{1}{2F} \leqslant \frac{1}{f_2} \leqslant \frac{1}{F},$$

так что правая часть равенства (5) лежит в пределах

$$\frac{1}{2F} \leqslant \frac{1}{F'} - \frac{1}{d_2} \leqslant \frac{1}{F}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2F} + \frac{1}{d_2} \leqslant \frac{1}{F'} \leqslant \frac{1}{F} + \frac{1}{d_2}.$$

Полученное неравенство должно выполняться при всех произвольных d_2, удовлетворяющих условию (4а). Согласно этому условию

$$\frac{1}{2F} \leqslant \frac{1}{d_2} \leqslant \frac{1}{F},$$

так что фокусное расстояние F' зеркала должно быть таким, чтобы выполнялось условие

$$\frac{1}{2F} + \frac{1}{F} \leqslant \frac{1}{F'} \leqslant \frac{1}{F} + \frac{1}{2F}.$$

Следовательно, $\frac{1}{F'} = \frac{3}{2F}$, или

$$F' = \frac{2}{3}F = 0{,}4 \text{ м}.$$

И. Слободецкий

В. Гутенмахер

Расстояние от точки до плоскости

В учебнике «Геометрия 10» есть несколько задач, в которых требуется найти расстояние от заданной точки до заданной плоскости. Как ни странно, эти задачи вызывают некоторые затруднения у школьников (несмотря на то, что одна из таких задач — № 28, с. 10 — решена в тексте). Поэтому мы остановимся на этом вопросе немного подробнее.

Новая формула

Пусть $A\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ — точка в координатном пространстве $Oxyz$ и α — плоскость, заданная уравнением $ax+by+cz+d=0$. Расстояние $\rho\,(A, \alpha)$ от точки A до плоскости α находится по формуле

$$\rho\,(A, \alpha) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \quad (*)$$

Эту формулу можно описать словами так:

Надо в выражение $ax+by+cz+d$ вместо переменных x, y, z подставить координаты точки A. Взять модуль полученного числа и разделить его на число $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Вывод формулы

Вывод формулы (*) по существу повторяет решение задачи № 28, приведенной на с. 10—11 учебника «Геометрия 10».

Опустим из точки $A\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ перпендикуляр на плоскость α, заданную уравнением $ax+by+cz+d=0$; пусть B — точка пересечения этого перпендикуляра с плоскостью α; тогда $|AB|$ — расстояние от A до α (см. рисунок). Обозначим через $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ координаты точки B; тогда

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_1-x_0;\ y_1-y_0;\ z_1-z_0),$$

откуда

$$|AB| = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}.$$

Поскольку вектор $\vec{AB}$ перпендикулярен плоскости α, он коллинеарен вектору $\vec{n}$ с координатами $(a;\ b;\ c)$.

Это означает, что найдется такое число p, что

$$\vec{AB} = p\cdot\vec{n}. \quad (1)$$

Из этого равенства следует, что

$$x_1-x_0 = p\cdot a, \quad y_1-y_0 = p\cdot b, \quad z_1-z_0 = p\cdot c. \quad (2)$$

Таким образом,

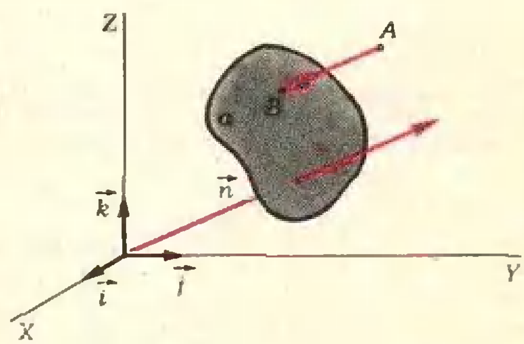
$$|AB| = \sqrt{p^2a^2+p^2b^2+p^2c^2} = |p|\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}. \quad (3)$$

Осталось найти число $|p|$. Так как точка B принадлежит плоскости α, то $ax_1+by_1+cz_1+d=0$. Поскольку $x_1 = x_0+pa$, $y_1 = y_0+pb$, $z_1 = z_0+pc$ (см. соотношение (2)), для p получаем уравнение

$$a\,(x_0+pa)+b\,(y_0+pb)+c\,(z_0+pc)+d=0,$$

из которого находим $|p|$:

$$|p| = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{a^2+b^2+c^2}.$$



Подставляя найденное значение $|p|$ в соотношение (3), получаем нужную формулу:

$$\rho(A,\alpha)=|AB|=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Формула (*) позволяет уже легко решить любую задачу на вычисление расстояния от точки до плоскости. Приведем несколько примеров.

Задачи

Задача 1 *). *Найти расстояние от точки A $(-1;\ 3;\ 0)$ до плоскости α, заданной уравнением $x-3y-2z+5=0$.*

Решение. По формуле (*) получаем:

$$\rho(A,\alpha)=\frac{|-1-3\cdot3-2\cdot0+5|}{\sqrt{1+3^2+2^2}}=\frac{|-5|}{\sqrt{14}}=\frac{5}{\sqrt{14}}.$$

Задача 2**). *Вычислить расстояние от начала координат до плоскости* $2x+3y-6z+14=0$.

Решение. Нам надо найти расстояние от точки A $(0;\ 0;\ 0)$. По формуле (*) получаем:

$$\rho(A,\alpha)=\frac{|2\cdot0+3\cdot0-6\cdot0+14|}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}=\frac{14}{7}=2.$$

Задача 3. *Вычислить расстояние между плоскостями α и β, заданными соответственно уравнениями:*

$$3x+2y+4z+11=0$$

и

$$9x+6y+12z-5=0.$$

Разделив обе части второго уравнения на 3, видим, что плоскости α и β: $3x+2y+4z+11=0$ и $3x+2y+4z-\frac{5}{3}=0$ параллельны.

Возьмем любую точку A $(x_0;\ y_0;\ z_0)$, принадлежащую плоскости β: положим, например, $x_0=y_0=0$, тогда $z_0=\frac{5}{12}$.

Легко понять, что расстояние между плоскостями α и β равно числу $\rho(A,\alpha)$, где $A=\left(0;\ 0;\ \frac{5}{12}\right)$. Применив формулу (*), получим

$$\rho(\alpha,\beta)=\rho(A,\alpha)=\frac{\left|3\cdot0+2\cdot0+4\cdot\frac{5}{12}+11\right|}{\sqrt{3^2+2^2+4^2}}=\frac{38}{3\sqrt{29}}.$$

Замечание. В общем случае расстояние между параллельными плоскостями α и β:

$$ax+by+cz+d_1=0$$

и

$$ax+by+cz+d_2=0$$

находится по формуле

$$\rho(\alpha,\beta)=\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \qquad (**)$$

Выведите формулу (**), повторив решение задачи 3.

В заключение предлагаем вам несколько задач для самостоятельного решения.

Задачи

1. Вычислить расстояние от точки A $(1;1;1)$ до плоскости $x+y+z=0$.
2. Вычислить расстояние от точки A $(1;\ 2;\ 3)$ до плоскости $x+y+z-6=0$.
3. Найти расстояние от точки A $(x_0;\ y_0;\ 0)$ до плоскости $ax+by+d=0$.
4. Найти уравнения плоскостей, находящихся на расстоянии 1 от плоскости $x+y+z=0$.
5. Известно, что в треугольной пирамиде все плоские углы при вершине — прямые. Найти длину ее высоты, если длины ее боковых ребер равны a, b и c.

*) Это задача № 298,1) из учебника «Геометрия 10». В учебнике опечатка — приведен неверный ответ.

**) Это задача № 29,2) из того же учебника.

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. Однажды в минуту отдыха друзья-мушкетеры Атос, Портос, Арамис и д'Артаньян решили немного поразвлечься в перетягивании каната. Портос с д'Артаньяном легко перетянули Атоса с Арамисом. Но когда Портос стал в паре с Атосом, то победа против Арамиса с д'Артаньяном досталась им уже не так легко. А когда Портос с Арамисом оказались против Атоса с д'Артаньяном, то никакая из этих пар не смогла одолеть другую.

Определите, как мушкетеры распределяются по своей силе.

2. Будем подставлять в формулу

$$\frac{2n^2-1}{2n+1}$$

вместо n различные натуральные числа. При $n=1, 2, 3, 4, 5$ получим дроби $^1/_3$, $^7/_5$, $^{17}/_7$, $^{31}/_9$, $^{49}/_{11}$. Все эти дроби несократимы. А существует ли такое натуральное число n, при котором дробь будет сократимой?

3. Пете в домашнем задании надо было возвести некоторое целое число в квадрат. Петя по ошибке удвоил заданное число и получил двузначное число, записанное теми же цифрами, что и квадрат исходного числа, только в обратном порядке. Каков был верный ответ?

4. Найти наименьшее число, которое при последовательном делении на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, дает соответственно остатки 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

5. Можно ли раскрасить волейбольный мяч, состоящий из 18 частей (см. рисунок), в три разных цвета так, чтобы соседние части не были раскрашены в один цвет? Если можно, то как?

А в т о р: Давайте поиграем...

В о з м у щ е н н ы й ч и т а т е л ь: Как? Я хочу заниматься математикой, а вы...

А в т о р: Но играть-то вы любите?

Н е д о у м е в а ю щ и й ч и т а т е л ь: Кто же не любит!? Но при чем здесь математика?

А в т о р: Вы увидите, как математика поможет вам найти беспроигрышную стратегию игры.

«Цзяньшицзы»

В двух кучках лежат камни, в первой — 7, во второй — 5. Играют двое, ходят по очереди. Каждый из игроков при своем ходе может взять либо любое число камней из первой кучки, либо любое число камней из второй кучки, либо поровну камней из обеих кучек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Как играть, чтобы выиграть? Можно ли заранее предсказать, кто победит в этой игре — начинающий или его противник (если оба играют идеально)?

Как ответить на эти вопросы? Можно поставить эксперимент, то есть просто поиграть. Тогда вы быстро обнаружите, что начинающий всегда может выиграть, если он первым ходом возьмет 4 камня из большой кучки. А как вы думаете, какой будет ответ, если сначала в первой кучке было 7 камней, а во второй — 4? А если в первой было 9, а во второй — 6?

«Ферзя — в угол!»

На поле f8 *шахматной доски стоит ферзь* (рис. 1). *Играют двое, ходят по очереди. Каждый за один ход может передвинуть ферзя либо на несколько клеток вниз по вертикали, либо на несколько клеток влево по горизонтали, либо на несколько клеток влево-вниз по диагонали* (на рисунке 1 отмечены клетки, на которые можно попасть с поля f8 за один ход).

Проигрывает тот, кому некуда ходить (*а выигрывает, следовательно, тот, кто загонит ферзя в левый нижний угол — на поле* a1). *Как играть, чтобы выиграть? Кто победит — начинающий или его партнер? И «кто — кого», если ферзь сначала стоял на поле* e8?

Можно опять попробовать поиграть. А можно поразмышлять.

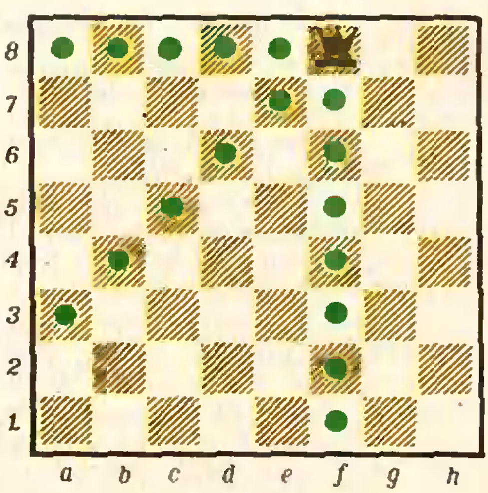


Рис. 1.

Строим теорию

Начнем со второй игры, причем с конца. Если ферзь стоит на поле a1, то тот, чья очередь ходить, уже проиграл. Поэтому отметим это поле знаком «минус» (рис. 2).

Если ферзь стоит на поле, с которого одним ходом можно попасть на a1, то начинающий пойдет на a1 и выиграет. Поэтому отметим поля, с которых можно за один ход попасть на a1, знаком «плюс».

Пусть теперь ферзь стоит на поле c2. Проиграет начинающий или выиграет? Конечно, проиграет: при любом своем ходе он попадает на «плюс», после чего противник ставит ферзя на a1. Поэтому c2 отметим «минусом» (рис. 2).

А как поступать, если ферзь стоит на одной вертикали с c2, но выше? Конечно, идти на c2, на «минус»! Тогда, как мы уже выяснили, противник обязательно проиграет. Поля c3, c4, ..., c8 отметим плюсами, потому что игрок, который начинает с одного из этих полей, при правильной игре обязательно победит. По той же причине поставим плюсы на поля d2, e2, ..., h2 и d3, e4, ..., h7.

Можно ли более просто описать правила, по которым мы расставляем плюсы и минусы, не повторяя каждый раз рассуждений о том, какой из игроков выиграет? Конечно, можно! Вот они.

«Золотые правила»

(1) Если с поля некуда пойти — ставим минус.

(2) Если с рассматриваемого поля можно попасть на поле, отмеченное минусом,— ставим плюс.

(3) Если все ходы ведут на поля, отмеченные плюсами, — ставим минус.

Расстановка плюсов и минусов в соответствии с «золотыми правилами» для игры «ферзя — в угол!» приведена на рисунке 3.

Мы сформулировали правила, в соответствии с которыми начали расставлять плюсы и минусы, а затем уже по этим правилам закончили расстановку. Докажем теперь, что мы не ошиблись: *если ферзь стоит на поле, отмеченном плюсом, то начинающий выиграет, а в противном случае—проиграет.*

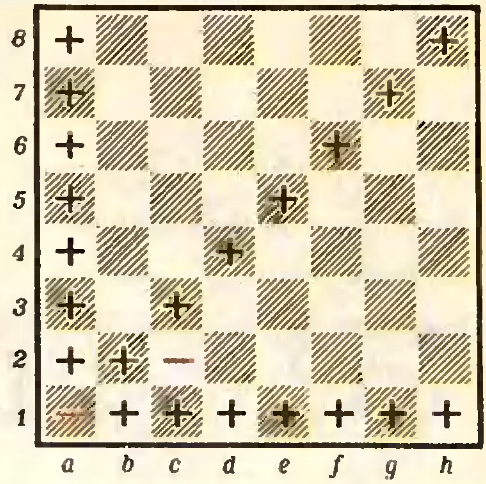


Рис. 2.

Доказать это очень легко, надо просто играть по правилу: «Ставь на минус!». По «золотому правилу» (2) первый ход можно сделать на минус. Тогда по «золотому правилу» (3) противник вынужден будет пойти на плюс. А начинающий — снова на минус, противник — опять на плюс. . . Так будет продолжаться, пока ферзь не попадет на поле, с которого никуда нельзя пойти — на a1. Попадет он туда как раз после хода начинающего, который тем самым выиграет.

Если же начальное поле отмечено минусом, то придется пойти на плюс. Тогда второй игрок применит правило «ставь на минус!» и выиграет.

Следовательно, если ферзь сначала стоял на f8, то начинающий при правильной игре победит, как бы хорошо ни играл его противник, а если на

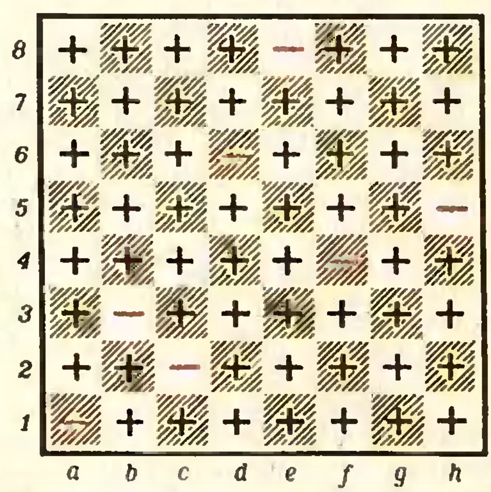


Рис. 3.

e8, то начинающий проиграет, если партнер достаточно умен.

Вернемся к «цзяньшицзы»

Автор: А зачем возвращаться? Мы уже знаем, как играть. Ведь игры «ферзя — в угол!» и «цзяньшицзы» одинаковы!
Читатель:???
Автор: Сейчас убедитесь.

На рисунке 1, относящемся к игре «ферзя — в угол!», под ферзем стоят 7 точек, а слева от ферзя — 5, как раз числа из игры «цзяньшицзы». Попробуем установить связь между этими двумя играми. Только камни расположим не как точки на рисунке 1, а так, как показано на рисунке 4, — за пределами доски.

Соответствие между позициями. Каждому положению ферзя на доске сопоставим две кучки камней: в первой — столько камней, сколько горизонталей находится под ферзем, а во второй — сколько вертикалей слева от ферзя. Тогда, обратно, каждый набор камней в двух кучках (но не более 7 в каждой) определяет положение ферзя на доске.

Контрольные вопросы

1. Каким полям доски соответствуют такие распределения камней по кучкам:
а) I — 5, II — 3;
б) I — 2, II — 7;
в) I — 6, II — 0;
г) I — 7, II — 7?

2. Какие распределения камней по кучкам соответствуют следующим полям доски:
а) e6;
б) c2;
в) a5?

Мы установили соответствие между позициями в двух играх: каждому распределению камней по кучкам соответствует поле шахматной доски и, наоборот, каждому полю доски соответствует пара кучек камней. Теперь легко установить соответствие и между возможными ходами. Если берется несколько камней из первой кучки, то ферзь сдвигается на столько же полей вниз, если из второй — ферзь сдвигается на столько же полей влево, а если камни взяты из обеих кучек сразу, то ферзь сдвигается влево-вниз по диагонали. Например, если первым ходом из каждой кучки берется по 2 камня, то ферзь ходит с f8 на d6.

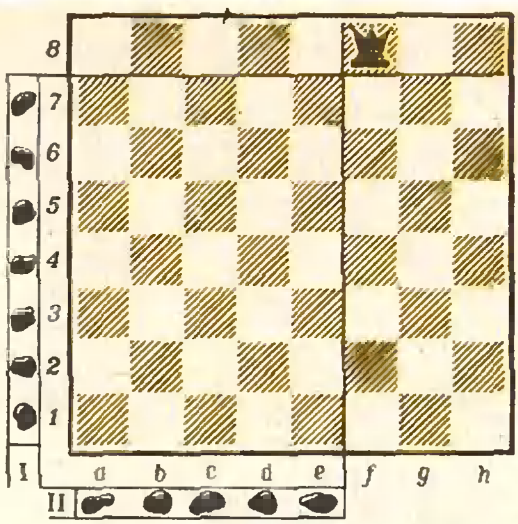


Рис. 4.

Изоморфизм игр

Вы видите, что совсем не нужно разрабатывать новую теорию для «цзяньшицзы», можно воспользоваться теорией для «ферзя — в угол!». Надо просто «перевести» позиции на шахматную доску и посмотреть, какие из них — выигрышные, а какие — проигрышные *).

Начальная позиция (7 камней в первой кучке, 5 — во второй) соответствует положению ферзя на f8. Начинающий выиграет, если он первым ходом пойдет на f4, или на e8, или на d6. На языке камней: если он возьмет четыре камня из первой кучки, или один — из второй, или по два из каждой. Теория помогла нам найти еще два способа выигрыша, которые не были обнаружены при эксперименте!

Если сначала в первой кучке было 7 камней, а во второй — 4, то начинающий при разумной игре противника проиграет (почему?).

Пусть теперь в первой кучке — 9 камней, во второй — 6... Что делать? На шахматной доске эта позиция не умещается! Ну и что? Продолжим расстановку плюсов и минусов вправо и вверх, не ограничиваясь размерами доски (сделайте это сами на

---

*) Честно говоря, игра «ферзя — в угол!» была придумана для того, чтобы придать наглядность разбору «цзяньшицзы» — легче смотреть на шахматную доску, чем на список позиций в «цзяньшицзы».

листе клетчатой бумаги). Начинающий выиграет, взяв по два камня из каждой кучки.

Итак, различие между играми «ферзя — в угол!» и «цзяньшицзы» — чисто внешнее: позиции и ходы одной игры соответствуют позициям и ходам другой. Такие игры называют «изоморфными».

Слово «изоморфизм» произошло от греческих слов «изос» (постоянный, неизменный) и «морфэ» (форма). В математике слово «изоморфизм» встречается очень часто — его употребляют, когда нужно отметить, что различие между объектами чисто внешнее, как между нашими двумя играми.

Одномерная теория

Мы научились расставлять плюсы и минусы на шахматной доске, но делаем это последовательно: начинаем с a1, потом отмечаем клетки, с которых можно попасть на a1, затем — те, с которых можно попасть только на уже отмеченные, и так далее. А нельзя ли указать правило, по которому можно сразу узнать, является поле выигрышным или проигрышным, не расставляя при этом плюсы и минусы на все предыдущие поля? Иногда можно. Мы разберем одну одномерную игру, то есть игру с одной кучкой камней (или, что то же самое, игру на полоске клетчатой бумаги).

Имеется полоска клетчатой бумаги длины n (клеток). На одной из клеток стоит фишка. Играют двое, ходят по очереди. Ход состоит в передвижении фишки на 1, 2 или 3 клетки влево. Проигрывает тот, кому некуда ходить. Как играть, чтобы выиграть? При каких положениях фишки побеждает начинающий, а при каких — его партнер?

Расстановка плюсов и минусов в этой игре проводится, конечно, по тем же «золотым правилам». Поле 1 — проигрышное, ставим на него минус (рис. 5); поля 2, 3, 4 — выигрышные (с них за один ход можно попасть на поле 1), ставим на них плюсы; поле 5 — проигрышное, ставим минус и так далее. Вы видите, что плюсы и минусы образуют периодическую последовательность с периодом из четырех знаков: — + + +, то есть на полях вида $4n+1$ стоят минусы, на остальных — плюсы.

А будет ли периодичной последовательность плюсов и минусов в такой игре, если фишку можно передвигать лишь на 1 или 3 клетки влево? Этот и другие вопросы мы предоставим решить вам.

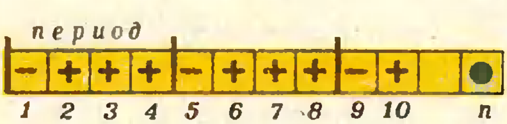


Рис. 5.

Задачи

Читатель: А они трудные?

Автор: Сначала идут легкие, потом — трудные, а последняя — проблема, ее я решать не умею.

Читатель: А если я не смогу решить трудные задачи?

Автор: Тогда подождите следующего номера журнала, там будут указания к задачам.

Игры на шахматной доске

1 («Короля — в угол!»). *Король стоит на некотором поле шахматной доски. Играют двое, ходят королем по очереди (на 1 поле вниз, влево или влево-вниз по диагонали). Проигрывает тот, кому некуда ходить.*

Расставьте на доске «плюсы» и «минусы» по «золотым правилам» и тем самым выясните, когда выигрывает начинающий, а когда — его партнер. Можно ли узнать, плюс или минус стоит на данном поле, не нанося знаки на все предыдущие поля, то есть сразу по номеру вертикали и горизонтали данного поля?

2. Те же вопросы, если ходить можно на 1 или 2 клетки влево или на 1 или 2 клетки вниз (а по диагонали ходить нельзя).

3. Те же вопросы, если ходить можно на 1 или 2 клетки влево или вниз или на 1 клетку влево-вниз по диагонали.

4 («Короля — в угол дырявой доски!»). Из шахматной доски вырезали несколько полей (см. рис. 6). Условия игры — как в задаче 1, но ставить короля в «дырки» запрещается. Вопросы — те же.

5 («Коня — в угол!»). Заменим в условии задачи 1 короля конем, которому разрешено ходить на 2 клетки вниз и затем на 1 влево или вправо или на 2 влево и затем на 1 вверх или вниз (но в пределах доски). Вопросы — те же.

6 («Ладью — в угол!»). Заменим в условии задачи 1 короля ладьей, которая может ходить на любое число полей, но только либо вниз, либо влево (но не по диагонали). Вопросы — те же.

Одномерные игры

7. *На одном из полей полоски клетчатой бумаги длины n* (см. рис. 5) *стоит фишка. Играют двое, ходят по очереди. Проигрывает тот, кому некуда ходить.*

Расставьте на полях «плюсы» и «минусы» (по «золотым правилам») и попробуйте найти период расстановки (если он есть), если ход

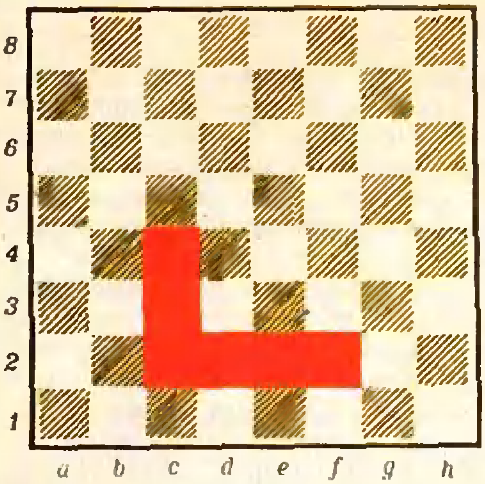


Рис. 6.

Рис. 7.

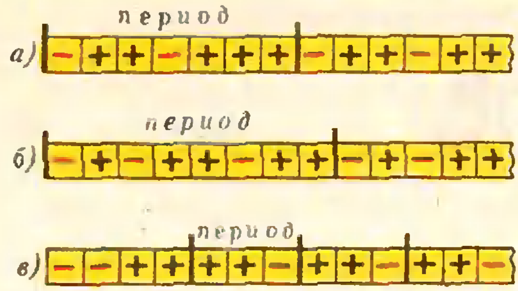


Рис. 8.

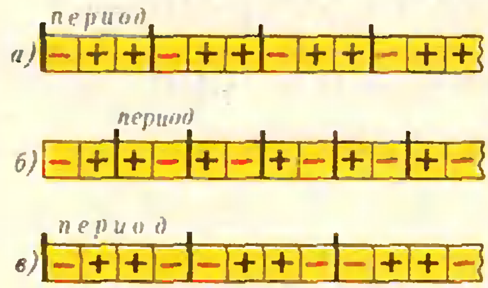


Рис. 9.

состоит в перемещении фишки влево на

а) 1 или 3 клетки;
б) 2 или 5 клеток;
в) 2 или 4 клетки;
г) 2, 4 или 7 клеток;
д) 2, 3 или 5 клеток;
е) 2, 3, 5 или 7 клеток.

8. Пусть в условиях задачи 7 ходить можно лишь на a или b клеток влево.

а) Докажите, что расстановка «плюсов» и «минусов» периодична и повторяется, во всяком случае, через $a+b$ клеток.

б) Найдите формулу, выражающую длину наименьшего периода через a и b. Опишите строение этого периода.

9 (обратная задача). Для некоторых a и b нарисована полоска и на ней расставлены «плюсы» и «минусы». Можно ли по этой полоске определить a и b (например, для полоски на рисунке 7)?

10. Докажите, что, каков бы ни был набор возможных ходов, расстановка «плюсов» и «минусов» на полоске имеет период (который начинается, быть может, не с самой первой слева клетки, а с некоторой другой).

11. Для некоторого набора возможных ходов на полоске расставлены «плюсы» и «минусы» (рис. 8). Можно ли по этой полоске восстановить набор возможных ходов? Однозначно ли он восстанавливается, то есть может ли разным наборам ходов соответствовать одна и та же расстановка «плюсов» и «минусов» на полоске?

12. На полоске расставлены «плюсы» и «минусы», причем с некоторого места расстановка периодична (рис. 9). Всегда ли можно придумать набор возможных ходов, для которого расстановка «плюсов» и «минусов» на полоске будет иметь именно такой вид?

13* (проблема). Попробуйте

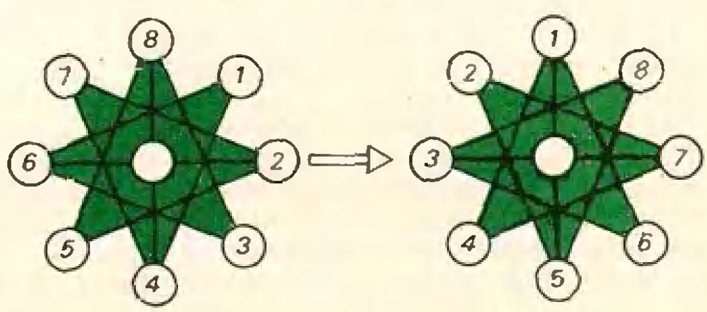
а) найти формулу, выражающую длину периода, если перемещать фишку можно влево на $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ или a_k клеток;

б) описать все игры, в которых период начинается с первой клетки.

Восемь фишек

На концах восьмиконечной звезды расположены фишки с номерами от 1 до 8 (см. рисунок). Передвигая фишки только по прямым линиям, расположите фишки в обратном порядке. Сколько ходов вам для этого потребуется?

Л. Мочалов



Л. Баканина

Закон сохранения импульса при соударениях

Закон сохранения импульса (количества движения) выполняется для замкнутых систем, то есть таких, которые включают в себя все взаимодействующие тела, так что ни на одно из тел системы не действуют внешние силы. Однако при решении многих физических задач оказывается, что импульс может оставаться постоянным и для незамкнутых систем. Правда, в этом случае количество движения сохраняется лишь приближенно. Попытаемся разобраться, в чем тут дело.

Изменение импульса $\Delta\vec{p}$ незамкнутой системы равно суммарному импульсу внешних сил. Обозначим через $\vec{F}_{\text{ср}}$ среднее значение результирующей внешней силы, действующей на систему в течение промежутка времени Δt. Тогда

$$\Delta\vec{p}=\vec{F}_{\text{ср}}\Delta t.$$

Если абсолютная величина этой силы не слишком велика и время, в течение которого действует сила, мало, то произведение $|\vec{F}_{\text{ср}}|\,\Delta t$ тоже будет малым. В таком случае возникает необходимость оценки, с какой точностью можно считать импульс системы неизменным.

Кроме того, не следует забывать, что импульс — вектор, и, следовательно, можно говорить о сохранении проекции этого вектора на какое-либо направление. Действительно, если система не замкнута, но внешние силы таковы, что сумма проекций всех сил на некоторое направление равна нулю, то проекция импульса системы на это направление остается величиной постоянной. Незамкнутая система в этом направлении аналогична замкнутой.

Кратковременные взаимодействия возникают, например, при взрывах, выстрелах, соударениях. Такого типа задачи мы и обсудим. Постараемся в каждом конкретном случае выяснить, выполняется или не выполняется закон сохранения импульса и от чего это зависит.

З а д а ч а 1. *Из пушки, соскальзывающей без трения по наклонной плоскости и прошедшей уже путь l, производится выстрел в горизонтальном направлении* (рис. 1). *При какой скорости снаряда пушка остановится после выстрела? Масса снаряда m много меньше массы пушки M, угол наклона плоскости α.*

Перед выстрелом пушка (вместе со снарядом), прошедшая путь l, имеет импульс $(M+m)\vec{v}_0$, направленный вдоль наклонной плоскости. Модуль этого импульса можно найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{(M+m)|\vec{v}_0|^2}{2}=(M+m)|\vec{g}|\,l\sin\alpha,$$

и

$$(M+m)|\vec{v}_0|=(M+m)\sqrt{2|\vec{g}|\,l\sin\alpha}.$$

Сразу после выстрела пушка остановилась, а снаряд полетел в горизонтальном направлении. Таким образом, несмотря на кратковременность взаимодействия пушки и снаряда, им-

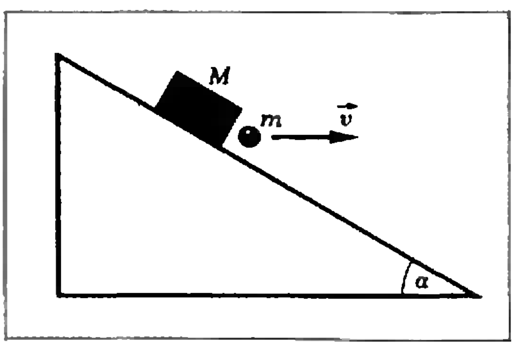


Рис. 1.

пульс этой системы не сохраняется. Почему же?

Во время выстрела резко возрастает сила давления пушки на наклонную плоскость, а значит, возрастает и сила реакции со стороны плоскости, так что импульс этой силы оказывается достаточно большим. Он-то и изменяет суммарный импульс пушки и снаряда.

Однако в направлении вдоль наклонной плоскости проекция силы реакции равна нулю, а проекция импульса силы тяжести ($(M+m)|\vec{g}|\times\times\sin\alpha\cdot\Delta t$) за малое время выстрела Δt мала и при выстреле не увеличивается. Поэтому можно, с некоторой степенью точности, считать, что в направлении вдоль наклонной плоскости проекция количества движения системы пушка — снаряд сохраняется. Следовательно, проекция суммарного импульса пушки и снаряда до выстрела равна проекции снаряда после выстрела (пушка покоится):

$$(M+m)\sqrt{2|\vec{g}|l\sin\alpha}=m|\vec{v}|\cos\alpha.$$

Отсюда модуль скорости снаряда непосредственно после выстрела

$$|\vec{v}|=\frac{(M+m)\sqrt{2|\vec{g}|l\sin\alpha}}{m\cos\alpha}\approx$$

$$\approx\frac{M\sqrt{2|\vec{g}|l\sin\alpha}}{m\cos\alpha}.$$

При решении этой задачи мы полагали, что в направлении вдоль наклонной плоскости система пушка — снаряд ведет себя как замкнутая система. Однако оценить, с какой степенью точности это справедливо, мы не можем, так как система взаимодействующих тел сложная и нет необходимых данных для такой оценки.

Разберем теперь две задачи с более простым взаимодействием, где такую оценку можно сделать.

Задача 2. *В деревянный шар массы $M=1$ кг, падающий вниз со скоростью $|\vec{V}_0|=1$ м/сек, стреляют снизу из ружья и пробивают его насквозь. Какую скорость будет иметь шар сразу после этого? Скорость пули при подлете к шару $|\vec{v}_0|=300$ м/сек, после вылета из шара $|\vec{v}|=100$ м/сек, масса пули $m=10$ г.*

Оценим, с какой точностью можно считать систему шар — пуля замкнутой во время их взаимодействия. Другими словами, выясним, можно ли пренебречь импульсом силы тяжести за это время.

Время взаимодействия $\Delta t\approx\dfrac{d}{|\vec{v}_{ср}|}$,

где d — диаметр шара, а $\vec{v}_{ср}$ — средняя скорость пули внутри шара. Диаметр шара можно оценить, зная, что плотность дерева ρ приблизительно равна плотности воды $\rho_в=10^3$ кг/м³:

$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3\rho=M,\ и$$

а

$$d=\sqrt[3]{\frac{6M}{\pi\rho}}\approx 0{,}1\ м,$$

$$|\vec{v}_{ср}|\approx\frac{|\vec{v}_0|+|\vec{v}|}{2}=200\ м/сек.$$

Таким образом, $\Delta t\approx5\cdot10^{-4}$ сек. Импульс силы тяжести системы за это время (а значит, и изменение суммарного импульса шара и пули)

$|\vec{p}|=(M+m)|\vec{g}|\Delta t\approx5\cdot10^{-3}$ н·сек.

Количество движения системы перед взаимодействием

$|\vec{p}_0|=m|\vec{v}_0|-M|\vec{V}_0|=2$ н·сек.

Тогда отношение

$$\frac{|\vec{p}|}{|\vec{p}_0|}=\frac{|\Delta\vec{p}_0|}{|\vec{p}_0|}\approx2\cdot10^{-3}=0{,}2\%,$$

и, следовательно, с точностью до 0,2% можно считать, что во время взаимодействия импульс системы не изменяется.

Запишем закон сохранения для проекции импульса на ось, направленную вертикально вверх:

$$mv_0+MV_0=mv+MV,$$

или

$$m|\vec{v}_0|-M|\vec{V}_0|=m|\vec{v}|+MV.$$

Отсюда проекция скорости шара после взаимодействия

$$V=\frac{m|\vec{v}_0|-M|\vec{V}_0|-m|\vec{v}|}{M}=1\ м/сек,$$

то есть шар начнет двигаться вверх со скоростью 1 м/сек.

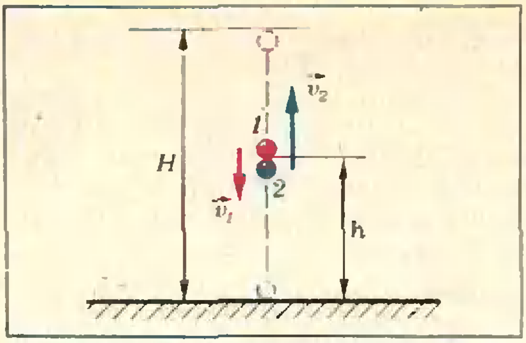


Рис. 2.

Задача 3. *Шарик бросают вертикально вверх со скоростью $|\vec{v}_0| = 1$ м/сек. Когда он достиг верхней точки своего подъема, бросают еще такой же шарик с начальной скоростью $2|\vec{v}_0|$. Определить скорости шариков после столкновения, если столкновение можно считать абсолютно упругим.*

Аналогично предыдущей задаче прежде всего оценим, с какой степенью точности систему двух шариков во время соударения можно считать замкнутой. Для этого найдем импульс системы до удара, импульс силы тяжести за время удара и сравним их между собой.

Пусть шарики столкнулись на высоте h через время t после начала движения второго шарика (рис. 2). Тогда для первого шарика

$$h = H - \frac{|\vec{g}|t^2}{2} = \frac{|\vec{v}_0|^2}{2|\vec{g}|} - \frac{|\vec{g}|t^2}{2},$$

где $H = \frac{|\vec{v}_0|^2}{2|\vec{g}|}$ — максимальная высота подъема. Для второго шарика

$$h = 2|\vec{v}_0|t - \frac{|\vec{g}|t^2}{2}.$$

Отсюда $t = \frac{|\vec{v}_0|}{4|\vec{g}|}$, и скорости обоих шариков непосредственно перед столкновением равны

$$|\vec{v}_1| = |\vec{g}|t = \frac{|\vec{v}_0|}{4},$$

$$|\vec{v}_2| = 2|\vec{v}_0| - |\vec{g}|t = \frac{7|\vec{v}_0|}{4},$$

причем первый шарик движется вниз, а второй — вверх.

Итак, количество движения системы до взаимодействия

$$|\vec{p}_0| = m|\vec{v}_2| - m|\vec{v}_1| = 1{,}5\, m|\vec{v}_0|.$$

Теперь попытаемся оценить время взаимодействия и импульс силы тяжести за это время. Для этого мы должны представить себе, как происходит процесс соударения. Рассмотрим вначале соударение торцами двух одинаковых стержней. При ударе в торце возникает упругая деформация, которая распространяется вдоль стержня, то есть в стержне возникает звуковая волна. Дойдя до противоположного конца стержня, волна отражается и возвращается обратно. Можно сказать, что на этом процесс соударения заканчивается, и время взаимодействия стержней равно времени прохождения звуковой волны вдоль стержня и обратно. На самом деле картина взаимодействия гораздо сложнее, а в случае шариков, где возникающая упругая волна не плоская, — тем более. Однако для оценки и здесь будем считать, что с точностью до порядка величины время соударения равно времени распространения звуковой волны внутри шарика: $\Delta t \sim \frac{d}{v_{зв}}$. Скорость звука в твердых телах порядка нескольких километров в секунду. Если диаметр шарика порядка сантиметра, то $\Delta t \sim 10^{-5}$ *сек*, и импульс силы тяжести $\vec{p}$ по абсолютной величине во много раз меньше импульса шариков до взаимодействия:

$$\frac{|\vec{p}|}{|\vec{p}_0|} = \frac{2m|\vec{g}|\Delta t}{1{,}5m|\vec{v}_0|} \sim 10^{-4}.$$

Таким образом, и в этом случае мы можем считать систему соударяющихся шариков замкнутой. (Конечно, дальнейшее движение шариков существенно зависит от силы тяжести.)

Так как удар шариков абсолютно упругий, воспользуемся законами сохранения механической энергии и проекции импульса на ось, направленную вертикально вверх:

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = \frac{m(v_1')^2}{2} + \frac{m(v_2')^2}{2},$$

$$mv_1 + mv_2 = mv_1' + mv_2'.$$

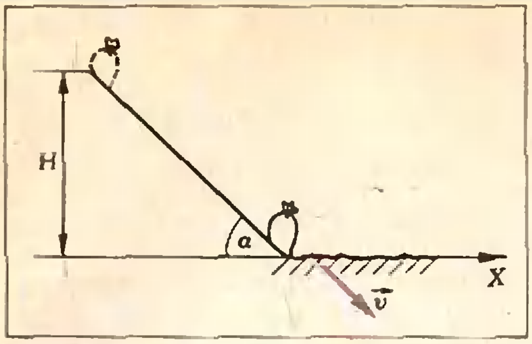


Рис. 3.

Подставив сюда соответствующие значения для v_1 и v_2:

$$v_1 = -|\vec{v}_1| = -\frac{|\vec{v}_0|}{4},$$

$$v_2 = |\vec{v}_2| = \frac{7|\vec{v}_0|}{4},$$

найдем

$$v_1' = v_2 = \frac{7|\vec{v}_0|}{4} \text{ и } v_2' = v_1 = -\frac{|\vec{v}_0|}{4}$$

— при упругом ударе шарики равных масс обмениваются скоростями.

Не следует, однако, думать, что всегда при соударениях можно пренебречь действием внешних сил и считать систему замкнутой. Для примера рассмотрим такую задачу.

Задача 4. *Мешок с мукой сползает без начальной скорости с высоты H по гладкой доске, наклоненной под углом $\alpha=60°$ к горизонту. После спуска мешок попадает на горизонтальный шероховатый пол. Коэффициент трения мешка о пол $\mu=0{,}7$. Где остановится мешок?*

После спуска с доски мешок имеет скорость $\vec{v}$, направленную вдоль доски (рис. 3). Ее абсолютную величину можно найти из закона сохранения механической энергии, так как доска гладкая и потерь энергии нет:

$$|\vec{v}| = \sqrt{2|\vec{g}|H}.$$

Посмотрим, как меняются при соударении с полом проекции импульса мешка на горизонтальную и вертикальную оси. Вертикальная проекция после удара обращается в нуль — мешок неупругий и не подпрыгивает после удара. Это означает, что во время соударения на него действует направленная вертикально вверх сила, импульс которой как раз равен вертикальной проекции импульса мешка непосредственно перед соударением. Этой силой может быть только сила реакции $\vec{N}_{ср}$ со стороны пола, следовательно,

$$|\vec{N}_{ср}|\Delta t = m|\vec{v}|\sin\alpha.$$

В горизонтальном направлении на мешок действует сила трения скольжения, модуль которой $|\vec{F}_{тр}| = \mu|\vec{N}_{ср}|$. Импульс этой силы за время удара равен

$$|\vec{F}_{тр}|\Delta t = \mu m|\vec{v}|\sin\alpha,$$

то есть не зависит ни от того, по какому закону изменяется сила реакции опоры (а значит, и сила давления мешка на пол), ни от времени соударения. Найдем изменение горизонтальной проекции импульса мешка. Направим ось X по горизонтали вправо, тогда, согласно второму закону Ньютона,

$$mv_x' - mv_x = -|\vec{F}_{тр}|\Delta t,$$

или

$$v_x' - |\vec{v}|\cos\alpha = -\mu|\vec{v}|\sin\alpha.$$

Отсюда проекция скорости, с которой мешок начнет двигаться по полу,

$$v_x' = |\vec{v}|(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) = -0{,}1|\vec{v}|.$$

Что означает знак «минус»? Формально знак «минус» говорит о том, что после удара мешок должен двигаться влево, или, другими словами, что импульс силы трения оказался больше первоначальной горизонтальной проекции импульса мешка. Значит, в какой-то момент в процессе соударения проекция скорости мешка на ось X обратилась в нуль. Начиная с этого момента, наше решение становится неверным. Действительно, модуль силы трения равен $\mu|\vec{N}_{ср}|$ только при скольжении, а в состоянии покоя сила трения может принимать любые значения от 0 до $\mu|\vec{N}_{ср}|$ в зависимости от того, какие силы (кроме силы трения) действуют на тело. В нашем случае никакие другие силы не имеют проекций в горизонтальном направлении, следовательно, в тот момент, когда горизонтальная проекция скорости мешка обратилась в нуль, сила

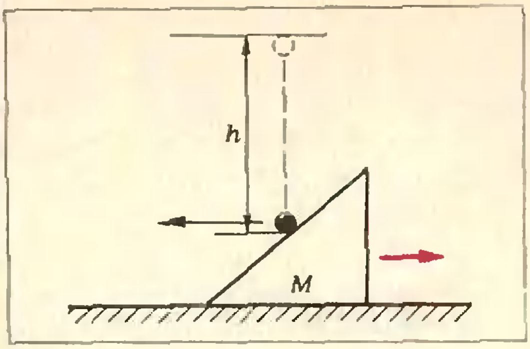


Рис. 4.

трения тоже обращается в нуль. Таким образом, мешок по полу вообще двигаться не будет!

Наконец, обсудим еще одну достаточно известную задачу на соударение тел. При решении этой задачи обычно используют довольно грубые приближения, никак не оговаривая при этом ни то, что это приближение, ни при каких условиях им можно пользоваться.

Задача 5. *На стоящий на гладкой горизонтальной поверхности клин массы M с высоты h падает шар массы m и отскакивает в горизонтальном направлении (рис. 4). Найти горизонтальную проекцию скорости клина $\vec{V}$ после удара. Трением пренебречь, удар считать абсолютно упругим.*

В отличие от всех предыдущих задач здесь нужно рассматривать соударение не двух, а трех тел — шарика, клина и горизонтальной плоскости. В общем случае, не делая никаких дополнительных предположений о механизме удара, решить эту задачу нельзя. В наиболее распространенном решении этой задачи неявно (без всяких оговорок) предполагается, что соударения шарика с клином и клина с горизонтальной плоскостью происходят одновременно, а клин после соударения имеет только горизонтальную проекцию скорости. Затем записываются уравнения законов сохранения механической энергии и импульса:

$$m|\vec{g}|h=\frac{MV_x^2}{2}+\frac{mv_x^2}{2},$$

$$MV_x+mv_x=0,$$

где V_x и v_x — соответственно проекции скоростей клина и шарика на горизонтальную ось, направленную вправо. Отсюда

$$V_x=\sqrt{2|\vec{g}|h\frac{m^2}{M(M+m)}}.$$

Однако в таком решении совершенно не ясно, куда делась вертикальная проекция импульса шарика. Ведь если соударение абсолютно упругое, вертикальная проекция импульса системы не исчезает, а лишь меняет знак! Шарик после удара отскакивает в горизонтальном направлении, плоскость вообще неподвижна. Значит, клин после удара обязательно должен подпрыгнуть. А энергия, связанная с этим движением, в приведенном решении не учитывается.

Физической картине удара больше соответствует предположение о том, что вначале шарик соударяется только с клином, а потом клин, получивший некоторую скорость в результате этого соударения, взаимодействует с горизонтальной плоскостью. После первого соударения вертикальная проекция скорости клина

$$V_y=\frac{m}{M}\sqrt{2|\vec{g}|h},$$

а горизонтальные проекции скоростей клина и шарика, как и в первом решении, связаны соотношением

$$MV_x+mv_x=0,\ \text{или}\ v_x=-\frac{M}{m}V_x.$$

Тогда закон сохранения энергии можно записать в виде

$$m|\vec{g}|h=\frac{mv_x^2}{2}+\frac{MV_x^2}{2}+\frac{MV_y^2}{2}.$$

Подставив сюда соответствующие выражения для v_x и V_y, найдем горизонтальную проекцию скорости клина:

$$V_x=\sqrt{2|\vec{g}|h\frac{m^2(M-m)}{M^2(M+m)}}.$$

Таким образом, задачу о соударении трех тел мы свели к задаче двух последовательных попарных соударений (второе соударение для решения задачи нам не понадобилось). При этом мы считали, что клин после соударения с шариком движется чисто поступательно. Это может быть только в том случае, если сила давления шарика $\vec{N}$ во время удара проходит

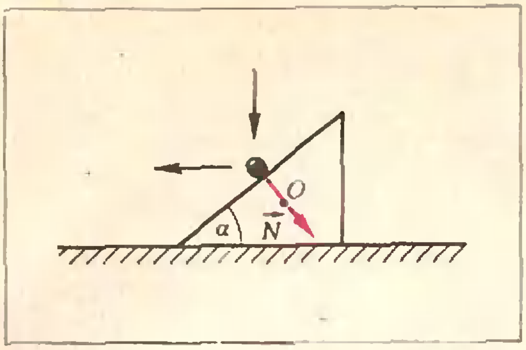


Рис. 5.

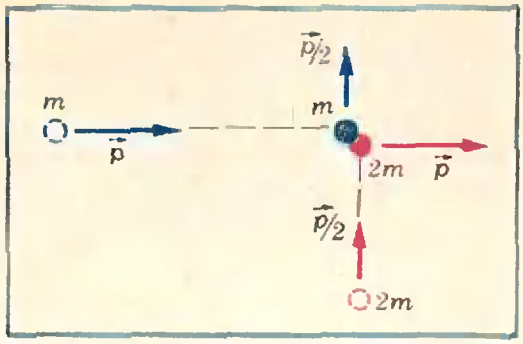


Рис. 6.

через центр тяжести O клина (рис. 5). Кроме того, заметим, что для того чтобы шарик после соударения отскочил горизонтально, угол клина α должен иметь вполне определенную величину, зависящую от масс шарика и клина.

В заключение предлагаем несколько задач для самостоятельного решения.

Упражнения

1. В центр шара массы $m_1 = 300$ *г*, лежащего на краю стола, попадает горизонтально летящая пуля массы $m_2 = 10$ *г* и пробивает его насквозь. Шар падает на пол на расстоянии $s_1 = 6$ *м* от стола, а пуля — на расстоянии $s_2 = 15$ *м*. Высота стола $H = 1$ *м*. Определить первоначальную скорость пули.

2. Две частицы с массами m и $2m$, имеющие импульсы $\vec{p}$ и $\vec{p}/2$, движутся по взаимно перпендикулярным направлениям. После соударения частицы обмениваются импульсами (рис. 6). Определить выделившееся при ударе количество теплоты.

3. Мешок с мукой сползает без начальной скорости с высоты $H = 2$ *м* по доске, наклоненной под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. После спуска мешок попадает на горизонтальную поверхность. Коэффициент трения мешка о доску и горизонтальную поверхность $\mu = 0{,}5$. На каком расстоянии от конца доски остановится мешок?

Примерные варианты вступительных экзаменов по математике в вузы в 1977 году

Во втором номере нашего журнала была опубликована новая программа вступительных экзаменов в вузы по математике. Ниже мы приводим примерные варианты и задачи вступительных экзаменов по математике, проводимых по новой программе.

I. Для факультетов с повышенной математической подготовкой (факультеты прикладной математики втузов).

Вариант 1

1. По двум улицам движутся к перекрестку две автомашины с постоянными скоростями 40 *км/час* и 50 *км/час*. Улицы пересекаются под углом в 60°. В начальный момент времени машины находятся на расстоянии 5 *км* и 4 *км* от перекрестка соответственно. Через какое время расстояние между ними станет наименьшим? Рассмотрите два возможных случая.

2. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4?.

3. Найти все значения x, лежащие в интервале $]-\pi, \pi[$ и удовлетворяющие уравнению $4-10\cos^2 x=\sin 2x$.

4. В конус вписан цилиндр, у которого диагонали осевого сечения соответственно параллельны двум образующим конуса. Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол α, ее длина равна l. Найти объем фигуры, ограниченной основанием конуса и боковыми поверхностями цилиндра и конуса.

5. В треугольнике ABC $\widehat{BAC}=60°$. Найти величину угла между медианами BD и CF, если $|AB|=6$ и $|AC|=4$.

Вариант 2

1. Каким должен быть угол при вершине равнобедренного треугольника заданной площади, чтобы радиус вписанного в этот треугольник круга был наибольшим?

2. Указать на координатной плоскости множество точек, координаты которых являются решением системы неравенств

$$\begin{cases} y > x^2 - x, \\ 2x + y < 2. \end{cases}$$

3. Найти x, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{1}{C_4^x} = \frac{1}{C_5^x} + \frac{1}{C_6^x},$$

где C_n^x — число сочетаний.

4. Правильный тетраэдр содержится в шаре радиуса R так, что три его вершины принадлежат сфере, а четвертая вершина отстоит от центра сферы на расстояние d. Найти ребро тетраэдра.

5. Докажите, что композиция двух осевых симметрий с параллельными осями есть параллельный перенос.

Л. Садовский, Э. Шувалова

II. **Для остальных факультетов втузов**

1. Найти область определения функций:

а) $y=\lg(x-1)-\arcsin\dfrac{x}{3}$;

б) $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$;

в) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-10x+9}}{\log_2(x+1)}$;

г) $y=\lg(1-\lg(x^2-5x+14))$.

2. Дана функция $f(x)=x^4+5x^2+1$. Показать, что $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{f(x)}{x^4}$.

3. $f(x)=x^2$. Найти:

а) $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$;

б) $\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$.

4. Дана функция $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$. Показать, что $f(a)+f(b)=f\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$.

5. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^4-4x^2+1}{x^3-x^2-x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

6. Найти экстремальные значения следующих функций и указать, при каком значении x они достигаются:

а) $y=2x^2+4x+7$;

б) $y=|8x^2-8x-6|$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\sin 2x-x$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=2\sin x+\sin 2x$ на отрезке $\left[0,\ \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

9. Из всех цилиндров, у которых площадь полной поверхности равна 48π $см^2$, найти тот, который имеет наибольший объем.

10. Требуется сделать из жести коробку без крышки с квадратным основанием наибольшего объема, площадь поверхности которой была бы равна 12 $см^2$. Определить размеры коробки.

11. В разложении бинома

$$\left(\frac{1}{2}a^2b-2ab^3\right)^n$$

вычислить четвертый член, если отношение биномиального коэффициента третьего члена разложения к биномиальному коэффициенту пятого члена равно 2.

12. Доказать методом математической индукции формулы:

а) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5+\ldots+n(n+1)=$
$=\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$;

б) $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{(n+1}$.

13. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составляются всевозможные числа, не содержащие одинаковых цифр. Сколько среди них чисел, содержащих цифры 2, 4 и 5 одновременно?

14. Двенадцати ученикам выданы два варианта контрольной работы. Сколькими способами их можно посадить в два ряда, чтобы у сидящих рядом не было одинаковых вариантов, а у сидящих друг за другом был один и тот же вариант?

15. В треугольнике ABC точка O есть точка пересечения трех медиан. Показать, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

16. Цилиндр, радиус основания которого равен 1 $см$ и высота 3 $см$, вписан в шар так, что его основания являются сечениями шара. Найти отношение площади поверхности шара к площади поверхности цилиндра.

17. Полукруг разделен на три конгруэнтных сектора двумя радиусами. Найти отношение объемов фигур, полученных при вращении этих секторов вокруг диаметра полукруга.

18. Дана трапеция $ABCD$, в которой $\widehat{BAD}=60°$. Через большее основание AD проведена плоскость под углом 45° к боковой стороне AB. Найдите отношение площади данной трапеции к площади ее проекции на проведенную плоскость.

19. В трехгранном угле два плоских угла равны по 60°, третий равен 90°. Найдите угол наклона ребра, противолежащего прямому плоскому углу, к плоскости этого угла.

20. Треугольник ABC, у которого $\hat{A}=45°$, $\hat{B}=60°$, вписан в единичную окружность с центром в точке O. Вычислите скалярные произведения:

1) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$; 2) $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$; 3) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$.

В. Треногин, Н. Квачёва

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Ниже приводятся образцы вариантов вступительного письменного экзамена по математике и примеры задач устного экзамена по физике для поступавших на некоторые факультеты МГУ в 1976 году.

Математика

Отделение политэкономии экономического факультета

1. Через 8 дней после того, как бригада лесорубов начала прокладывать просеку в тайге, к ней присоединилась вторая бригада, и они вместе выполнили оставшуюся часть работы. Если бы бригады поменялись ролями, то просека была бы прорублена на 2 дня быстрее. Сколько дней бригады работали вместе, если известно, что первая может выполнить 10% всей работы на 4 дня быстрее, чем вторая — треть работы.

2. Решить уравнение

$$5\,\mathrm{tg}\,x = 2\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}.$$

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD угла ABC. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник BDC, если

$$|AB| = 42, \quad |BC| = 30, \quad \cos\widehat{BAC} = \frac{5}{7}.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2-1)^{3/4}(\mathrm{tg}\,y+3)^3 = 32, \\ 2\log_{(\mathrm{tg}\,y+3)}(x^2-1) - \log_{(\mathrm{tg}\,y+3)}2 = 5. \end{cases}$$

5. Решить уравнение

$$\frac{7}{2}x^2 - \frac{7x}{\sqrt{3-x}} - 22x + 3|2-7x| + \frac{|2-7x|}{\sqrt{3-x}} = \frac{1}{2}x|2-7x| - \frac{2}{\sqrt{3-x}} - 6.$$

Отделение планирования и экономической кибернетики экономического факультета

1. Решить неравенство

$$[\lg(x+1)]^4 - 4[\lg(x+1)]^2 + 3 \leqslant 0.$$

2. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \mathrm{ctg}^2(x-y) - (1+\sqrt{3})\,\mathrm{ctg}(x-y) + \sqrt{3} = 0, \\ \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям $0 < x < \pi$, $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$.

3. В треугольнике ABC точка M, лежащая на стороне AB, соединена с вершиной C отрезком MC. Известно, что $|AM| = 1$, $|MB| = 3$, $\widehat{ACM} = 30^\circ$, $\widehat{MCB} = 60^\circ$. Найти периметр треугольника ABC.

4. Основание ABC треугольной пирамиды $KABC$ является прямоугольным треугольником ($\widehat{ACB} = 90^\circ$). Ребро KC перпендикулярно основанию ABC, а его длина равна $\frac{4}{3}\sqrt{3}$; площадь грани AKB равна 5. Какова наибольшая возможная в этих условиях площадь основания ABC?

Факультет психологии

1. Поезд, двигаясь сначала один час в гору, а потом 10 часов по ровному месту, проходит 840 *км*. Если бы подъем был длиной 10 *км*, то за два часа поезд прошел бы 153 *км*. Найти скорости поезда при движении в гору и по ровному месту, если известно, что скорость по ровному месту больше, чем 110% скорости поезда в гору.

2. В треугольнике ABC проведены медианы AD и CE. Известно, что $|AD| = 5$, $\widehat{DAC} = \frac{\pi}{8}$, $\widehat{ECA} = \frac{\pi}{4}$. Определить площадь треугольника ABC.

3. Решить уравнение

$$5\cdot x^{\log_{16}x} - 3\cdot 5^{\log_{16}x^2} = 0$$

Доказать, что все корни этого уравнения являются рациональными числами.

4. Найти все корни уравнения

$$\mathrm{tg}\,x + \sqrt{\mathrm{tg}^2 x + 4\,\mathrm{ctg}^2 x + 4} = 4.$$

5. Из всех решений (x, y) уравнения

$$x^2y - x^2 + 2xy - x + 2y = 1$$

найти те решения, для которых y принимает наибольшее значение.

Отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета

1. Автоматическая линия выпускает за 600 операций три партии шин для легковых автомобилей и 11 партий шин для грузовых автомобилей. Если бы эта автоматическая линия изготовляла только шины для грузовых автомобилей и изготовила столько партий таких шин, сколько операций она тратит на изготовление партии шин для легковых автомобилей, то этой автоматической линии потребовалось бы не менее 2727 опе-

раций. Сколько операций требуется автоматической линии для изготовления одной партии шин для грузовых автомобилей?

2. Найти все целые числа z, удовлетворяющие неравенству $\sqrt[6]{z+1} < \sqrt[8]{6-z}$.

3. Решить уравнение

$$\log_2\left(5+3\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sin^2\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right).$$

4. Решить уравнение

$$\log_2(2\sin^2 2x+1) - 2\log_2\cos x = 1+\log_2 5.$$

5. В шар вписана прямая призма, в основании которой — правильный треугольник, а длина высоты призмы равна длине стороны основания. Найти отношение объема этой призмы к объему вписанной в тот же шар правильной шестиугольной пирамиды, длина бокового ребра которой равна удвоенной длине стороны основания.

Физика

Географический факультет и факультет почвоведения

1. В вертикальном цилиндре, закрытом сверху поршнем, находится газ при температуре $t_1 = 20$°C. Площадь поршня $S = 20$ *см*^{2}, его масса $m = 2$ *кг*. На поршень положили груз массой $M = 5$ *кг*. До какой температуры t_2 нужно нагреть газ, чтобы объем газа составил долю $k = 0{,}9$ первоначальной величины? Трение между стенками цилиндра и поршнем отсутствует. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ *н/м*^{2}.

2. Со дна водоема глубиной $H = 80$ *м* начал подниматься вверх шарообразный пузырек воздуха. На какой глубине h радиус этого пузырька увеличится в $k = 2$ раз? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ *н/м*^{2}. Температуру считать постоянной.

3. Шарик массы $m = 10$ *г*, имеющий электрический заряд $q = 10^{-4}$ *к*, брошен вертикально вверх с некоторой начальной скоростью. Чему должна быть равна напряженность $\vec{E}$ горизонтально направленного электростатического поля, чтобы в высшей точке траектории кинетическая энергия шарика была равна начальной? Сопротивление движению отсутствует.

4. Тело имеет форму конуса, у которого угол между осью и образующей $\alpha = 60°$. Его погрузили целиком в прозрачную жидкость вершиной вниз. При этом оказалось, что боковую поверхность тела нельзя видеть ни из одной точки пространства над поверхностью жидкости. Каково должно быть минимальное значение показателя преломления жидкости n, чтобы выполнялось это условие?

5. Предмет находится на расстоянии $d = 6$ *см* от собирающей линзы, фокусное расстояние которой $F = 4$ *см*. В фокальной плоскости линзы по другую сторону от нее находится плоское зеркало. Определить расстояние l между предметом и его изображением.

Геологический и химический факультеты

1. На обруче прикреплен маленький груз массы $m = 50$ *г*. Обруч может быть установлен неподвижно на наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30°$ так, что груз находится на одной горизонтальной линии с центром обруча O (рис. 1). Определить массу обруча M (без груза).

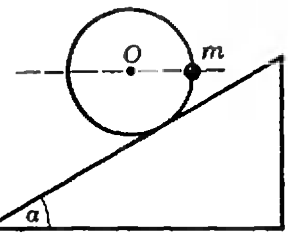


Рис. 1.

2. В лежащее на гладкой горизонтальной поверхности тело массы $M = 1$ *кг* попадает пуля, летящая горизонтально со скоростью $|\vec{v}_1| = 200$ *м/сек*, и пробивает его насквозь. Скорость пули после вылета из тела стала $|\vec{v}_2| = 100$ *м/сек*. Масса пули $m = 20$ *г*. Определить количество теплоты Q, полученное телом.

3. Конденсатор включен в схему, показанную на рисунке 2. Э. д. с. элементов равны $\mathscr{E}_1 = 2$ *в* и $\mathscr{E}_2 = 6$ *в*, а их внутренние сопротивления одинаковы. На пластинах конденсатора находятся заряды величиной $|q| = 10^{-8}$ *к*. Найти емкость C конденсатора. Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

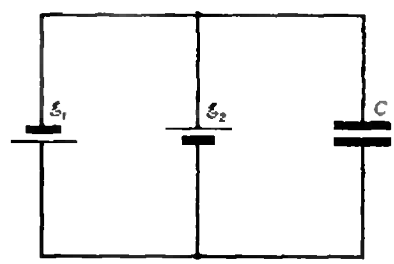
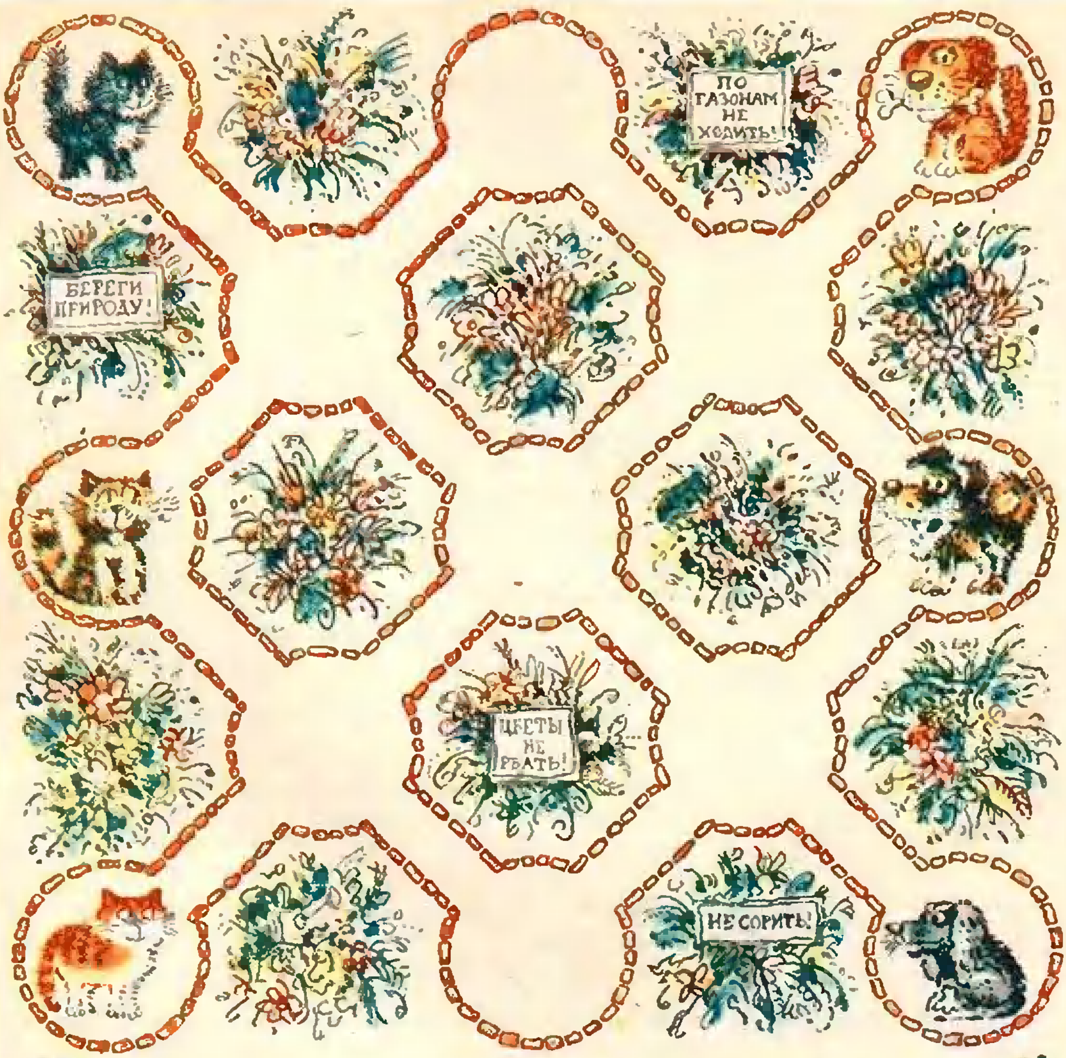


Рис. 2.

4. Колебательный контур генератора, состоящий из катушки индуктивности и конденсатора емкости C_1, излучает электромагнитную волну длиной $\lambda_1 = 30$ *м*. Если параллельно конденсатору емкости C_1 подключить конденсатор емкости $C_2 = 3 \cdot 10^3$ *пкф*, то длина волны, излучаемой контуром, становится $\lambda_2 = 60$ *м*. Найти значение емкости C_1 колебательного контура.

5. Точка движется со скоростью $|\vec{v}_1| = 1$ *м/сек* перпендикулярно к оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 20$ *см*. При этом она пересекает оптическую ось на расстоянии $a = 60$ *см* от линзы. С какой скоростью $|\vec{v}_2|$ движется изображение точки?

И. Горев,
С. Кротов



Кошки и собаки

Три умные собаки и три хитрые кошки после обоюдоострых контактов оказались на противоположных площадках сквера (см. рисунок) и занялись решением очень важной для обеих сторон задачи: *как им поменяться друг с другом местами, но при этом, чтобы не возникло новых потасовок, не только не встречаться друг с другом, но даже не оказываться на соседних площадках.*

В результате была избрана следующая стратегия: собаки и кошки сидят на площадках, но время от времени либо кошка, либо собака бежит по аллее на соседнюю площадку.

Кошки считают, что совместными усилиями за 32 перебежки (их и собачьих вместе) они смогут поменяться с собаками местами. Собаки с ними не согласны.

Кто прав?

Л. Мочалов

Спрашивайте — отвечаем

В редакцию пришло письмо из города Харькова от Степана Киржалова, ученика 9 класса. Вот что он пишет.

«В «Справочнике по элементарной математике» (Киев, 1973 год) я встретил любопытный способ решения иррационального уравнения

$$\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}=2. \quad (*)$$

Возведя обе части этого уравнения в куб, получим

$$(8x+4)-3\sqrt[3]{8x+4}\,\sqrt[3]{8x-4}\times\left(\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}\right)-(8x-4)=8.$$

Учитывая, что по условию выражение в квадратных скобках должно быть равно 2, можем записать

$$-6\sqrt[3]{64x^2-16}=0,$$

откуда $x_1=1/2$, $x_2=-1/2$. *Я таким же способом попробовал решить другое уравнение*

$$\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1, \quad (**)$$

но оказалось, что из двух получившихся значений $x_1=1$, $x_2=0$ только первое удовлетворяет уравнению. В чем же дело?»

Поскольку ответ на письмо Степана Киржалова может представить интерес и для многих других читателей «Кванта», публикуем этот ответ на страницах журнала.

Прежде всего напомним читателям, что в математической литературе запись $\sqrt[3]{a}$ используется в двух смыслах (см. «Алгебра 8», М., «Просвещение», 1975, стр. 95).

Во-первых, символом $\sqrt[3]{a}$ обозначают неотрицательное число, куб которого равен a; тогда этот символ определен только для $a\geqslant 0$. В новых школьных учебниках знак $\sqrt[3]{a}$ имеет именно такой смысл, так что, например, выражение $\sqrt[3]{8x-4}$ при $x=-1/2$ не определено.

Во-вторых, символом $\sqrt[3]{a}$ обозначают число, куб которого равен a; тогда этот символ определен при любом a. В упомянутой в письме С. Киржалова книге Г. П. Бевза, П. Ф. Фильчакова, К. И. Швецова, Ф. П. Яремчука «Справочник по элементарной математике для поступающих в вузы» (Киев, «Наукова думка», 1973, стр. 152—153) знак $\sqrt[3]{a}$ применяется в этом смысле, так что, например, выражение $\sqrt[3]{8x-4}$ при $x=-1/2$ существует и равно -2.

Способ решения иррациональных уравнений с радикалами третьей степени, о котором пишет автор письма, применяется довольно часто. О нем упоминается и в названном «Справочнике», однако, к сожалению, там не указано, что, *решая уравнения таким способом, мы можем приобрести посторонние корни, и потому всегда нужно делать проверку.*

Убедиться в этом нетрудно. Мы сейчас проведем соответствующие рассуждения, тем более, что они весьма поучительны и показывают, как конкретно исследуется вопрос о равносильности уравнений и выясняются причины ее нарушения. Предварительно приведем одно алгебраическое тождество:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]; \quad (1)$$

для его доказательства достаточно раскрыть скобки в правой части.

Рассмотрим уравнение

$$\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}=\varphi(x) \quad (2)$$

и допустим, что x_0 — его корень, так что

$$\sqrt[3]{f(x_0)}+\sqrt[3]{g(x_0)}=\varphi(x_0) \qquad (3)$$

Возводя обе части верного числового равенства (3) в куб и проделав очевидные преобразования, получим:

$$f(x_0)+3\sqrt[3]{f(x_0)}\cdot\sqrt[3]{g(x_0)}\left[\sqrt[3]{f(x_0)}+\sqrt[3]{g(x_0)}\right]+$$
$$+g(x_0)=\varphi^3(x_0).$$

Если снова воспользоваться верным числовым равенством (3), то получим равенство

$$f(x_0)+3\sqrt[3]{f(x_0)}\cdot\sqrt[3]{g(x_0)}\,\varphi(x_0)+g(x_0)=\varphi^3(x_0), \qquad (4)$$

которое показывает, что x_0 — корень уравнения

$$f(x)+3\sqrt[3]{f(x)}\cdot\sqrt[3]{g(x)}\,\varphi(x)+g(x)=\varphi^3(x) \qquad (5)$$

Таким образом, всякий корень уравнения (2) является корнем уравнения (5).

Рассмотрим теперь уравнение (5) и допустим, что x_0 — его корень, так что выполнено числовое равенство (4). Применяя тождество (1) при

$$a=\sqrt[3]{f(x_0)},\ b=\sqrt[3]{g(x_0)},\ c=-\varphi(x_0),$$

перепишем равенство (4) в виде

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{f(x_0)}+\sqrt[3]{g(x_0)}-\varphi(x_0)\right)\times$$
$$\times\left[\left(\sqrt[3]{f(x_0)}-\sqrt[3]{g(x_0)}\right)^2+\left(\sqrt[3]{f(x_0)}+\varphi(x_0)\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\sqrt[3]{g(x_0)}+\varphi(x_0)\right)^2\right]=0. \qquad (6)$$

Из равенства (6) видно, что число x_0 либо удовлетворяет равенству (3), то есть является корнем уравнения (2), либо удовлетворяет равенствам

$$\sqrt[3]{f(x_0)}=\sqrt[3]{g(x_0)}=-\varphi(x_0), \qquad (7)$$

то есть является решением системы уравнений

$$\begin{cases} f(x)=-\varphi^3(x), \\ g(x)=-\varphi^3(x). \end{cases} \qquad (8)$$

Таким образом, уравнение (5) может иметь корни, не являющиеся корнями уравнения (2). Нетрудно убедиться, что корень x_0 уравнения (5) является посторонним для уравнения (2) тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\begin{cases} \varphi(x_0)\neq 0, \\ f(x_0)=g(x_0)=-\varphi^3(x_0) \end{cases}$$

Найденное автором письма значение $x=0$ удовлетворяет этим условиям и потому будет посторонним корнем для уравнения (**)

В заключение еще раз отметим, что с точки зрения новой школьной программы значение $x=-{}^1/_2$ не является корнем уравнения (*), поскольку при этом значении левая часть уравнения (*) не определена

Н Розов

Новые книги

Мы продолжаем публиковать аннотации на книги по математике и физике, доступные и интересные нашим читателям, которые будут издаваться в этом году. Учитывая многочисленные просьбы, мы будем помещать также аннотации на некоторые книги, выходящие в издательствах «Молодая Гвардия» и «Детская литература». В этом номере мы расскажем о книгах, выходящих в первом квартале 1977 года. Большинство из них можно приобрести через специализированные магазины «Книга — почтой».

Математика

Издательство «Наука»

1. М. Гарднер. *Математические чудеса и тайны*, пер. с англ. Издание 3-е, стереотип. Объем 6 л., тираж 200 000 экз., цена 30 к.

Имя Гарднера, ведущего автора американского научно-популярного журнала «Scientific American», по-видимому, известно большинству наших читателей. Эта книга — первая из его книг, переведенных на русский язык. Она представляет собой попытку обзора всей области современного математического фокуса. Большая часть материала книги взята из специальной литературы, посвященной фокусам, а не из развлекательной математической литературы.

По большей части сам автор не формулирует на языке математики закономерностей, лежащих в основе его экспериментов. Он лишь описывает действия «фокусника» — явные и тайные. Но читателю, несомненно, доставит удовольствие самому восстановить по объяснениям автора соответствующую алгебраическую или геометрическую идею. В наиболее же интересных случаях изложение автора сопровождается небольшими примечаниями редактора, выявляющими математическую суть построений. Эти примечания помещены в конце книги.

Книга М. Гарднера будет интересна и участникам школьных математических кружков, и их руководителям, и взрослым любителям математики.

Издательство «Мир»

2. Г. Фрейденталь. *Математика в науке и вокруг нас* (В мире науки и техники). Объем 14 л., тираж 50 000 экз., цена 95 к.

Ганс Фрейденталь — член Королевской Нидерландской академии, автор более чем 200 работ по топологии, теории групп, анализу, геометрии, математической логике, философии и истории наук. Он — блестящий популяризатор математики.

Настоящая его книга состоит из семи замкнутых глав.

В первой главе (*«Человек измеряет Вселенную»*) рассказывается об измерении мира. Сначала — маленького мира, в котором мы живем, нашей Земли; затем бо́льшего мира, вмещающего Солнце и Луну, и наконец, — всей огромной Вселенной.

Вторая глава (*«До бесконечности»*) начинается историей о гостинице с бесконечным числом комнат (которую любил рассказывать знаменитый математик Давид Гильберт). Затем говорится о счетных и несчетных множествах, о мощности множеств, о сравнении бесконечных множеств, о числах; обсуждается вопрос, правильно ли мы обращаемся с натуральными числами.

Третья глава начинается с рассказа о системах счисления, о том, как записывали числа древние египтяне, жители Вавилона, греки, европейцы эпохи Карла Великого и наши современники. Рассказывается об играх, допускающих строгую законченную теорию (в частности, описывается игра «Ним»), об азартных играх, создании автоматических вычислительных машин, о «думающих» машинах, играющих в различные игры (в частности, и в шахматы), о машинах, занимающихся переводом с одного языка на другой. Обсуждается вопрос, могут ли машины *мыслить*.

Четвертая глава — *«Азбука жизни»* — открывает перед читателем совершенно особый мир — мир биологической клетки.

Пятая глава (*«Искусство рисовать плохо»*) посвящена топологии. Здесь определяется, что такое *поверхность*, *род поверхности*, *многообразие*, *проективная плоскость*; что такое взаимно-однозначные и непрерывные отображения, *степень* отображения. Рассматриваются отображения окружности и сферы на себя. В заключение строится замечательная кривая, покрывающая весь квадрат (кривая Пеано).

В шестой главе автор от конкретных гирь и весов переходит к абстрактным грузам, рассматривая самые знаменитые задачи линейного программирования: транспортную задачу, задачу о коммивояжере и задачу о составлении наилучшего расписания стирки скатертей и салфеток в ресторане.

Последняя глава называется *«Мир в зеркале»*. Здесь рассказывается о симметрии и симметричных фигурах, об отражениях, переносах и поворотах на плоскости и в пространстве. Вводится понятие группы; определяется, что такое *автоморфизм* и что такое движение и какие есть движения в пространстве; определяется, что такое *ориентация*.

Несомненным достоинством книги является отсутствие того, что в математике принято называть «техникой»: автору удалось подобрать темы математически содержательные и в то же время достаточно доступные.

Эта книга рассчитана на самые широкие читательские круги. Но особый интерес представляет она для школьников - старшеклассников.

Издательство «Вища школа»

3. Г. И. Гринфельд. *Квадратура круга и трансцендентность числа π*. Объем 3 л., тираж 13 000 экз., цена 10 к.

Эта книга вышла в конце 1976 года в серии «Библиотечка физико-математической школы». В ней рассказывается об известной задаче «квадратуры круга», которой на протяжении многих столетий интересовались еще с древних времен. Вывод, что эта задача неразрешима, принадлежит знаменитому Леонарду Эйлеру; он же предположил, что число π не может быть корнем ни одного алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами, допустив тем самым существование трансцендентных чисел и трансцендентность числа π. Доказательства всех этих фактов и приводятся в книге.

Книга рассчитана на школьников старших классов, увлекающихся математикой. Помимо изложения теории, в ней содержится много интересных упражнений и задач.

4. А. А. Бельский, Л. А. Калужнин. *Деление с остатком*. Объем 5 л., тираж 25 000 экз., цена 15 к.

Эта книга также из серии «Библиотечка физико-математической школы». В ней разбираются некоторые важные вопросы теории чисел. Приводится доказательство теоремы о единственности разложения на простые множители, рассказывается об алгоритме Евклида, диофантовых уравнениях, вычетах. Рассматриваются представления чисел в различных позиционных системах счисления.

Книга, безусловно, будет интересна школьникам-старшеклассникам и учителям математики.

Физика

Издательство «Наука»

1. Григорьев В. И., Мякишев Г. Я. *Силы в природе*. Издание 5-е. Объем 20 л., тираж 100 000 экз., цена 83 к.

Эта книга, написанная легким и доступным для школьников языком, вводит читателя в мир физических представлений. Рассматривая различные типы взаимодействий в природе, авторы показывают единство и разнообразие мира физических явлений.

Эту книгу с интересом прочтут школьники старших классов, интересующиеся физикой.

2. Сибрук В. *Роберт Вуд — современный чародей физической лаборатории*. Издание 3-е, испр. Объем 16 л., тираж 100 000 экз., цена 1 р. 04 к.

Книга посвящена жизни выдающегося американского физика Роберта Вуда, которого часто называют «отцом современной физической оптики». В книге рассказывается не только о чисто научных исследованиях Вуда, но и о его путешествиях, о разгадке тайны пурпурного золота царя Тутанхамона, об участии Вуда в раскрытии преступлений и разоблачении «изобретателей» «*N*-лучей» и «лучей смерти» и о других не менее интересных вещах.

Книга предназначена для самого широкого круга читателей.

3. Компанеец А. С. *Что такое квантовая механика?* Издание 2-е, испр. Объем 10 л., тираж 30 000 экз., цена 33 к.

Эта книга представляет собой сборник научно-популярных статей, посвященных квантовой механике. О квантовой механике рассказать так, чтобы ее удивительные законы были понятны широкому кругу читателей, очень трудно: положения квантовой механики противоречат непосредственному человеческому опыту. Автору книги «Что такое квантовая механика?» удается, не прибегая к вульгаризации и не пользуясь математическим аппаратом, ответить на вопрос, вынесенный в заглавие книги. Важная черта статей, вошедших в сборник, состоит в том, что автор не ограничивает изложение «классическими» положениями квантовой механики. В книге рассказано о симметрии в микромире, о слабых взаимодействиях, о ядерных силах.

Книга написана простым и доступным языком. Основные положения книги вполне доступны школьникам старших классов.

Издательство «Просвещение»

4. Лукашик В. И. *Физическая олимпиада*. Пособие для учащихся. Объем 10 л., тираж 100 000 экз., цена 28 к.

Книга предназначена для учащихся 6—7 классов, интересующихся физикой и желающих участвовать в физических олимпиадах. Содержащийся в книге материал поможет школьникам расширить свои знания по физике и проверить их на задачах, требующих сообразительности и большого внимания.

5. Зигель Ф. Ю. *Лунные горизонты*. Пособие для учащихся. Объем 8 л., тираж 100 000 экз., цена 30 к.

Эта книга выходит в серии «Мир знаний», она рассчитана на школьников 8—10 классов. В ней увлекательно рассказывается о движении Луны, ее происхождении и природе, а также о перспективах ее освоения средствами космонавтики. Автор обобщает все новейшие данные о Луне, полученные, в частности, советскими луноходами и американскими космонавтами.

6. Темко С. В., Соловьев Г. А., Милантьев В. П. *Физика раскрывает тайны Земли*. Объем 7 л., тираж 100 000 экз., цена 25 к.

Авторы в интересной и доступной для учащихся средней школы форме рассказывают о современных физических методах исследования Земли и разведки залежей полезных ископаемых. Читатели найдут в книге сведения о применении в геофизике физических явлений и закономерностей, известных из школьного курса физики.

И. Клумова, М. Смолянский

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М376—М384, М386—М390, Ф383—Ф402. Жирные цифры после фамилий — две последние цифры номеров решенных задач.

Математика

Почти все читатели, приславшие нам решения задач **М376**, **М377**, успешно справились с этими задачами. Остальные задачи решили: *С. Абаджян* (с. Дарков ГССР) **81—83, 86**; *З. Абдукадыров* (Нефтекамск) **83—84**; *В. Ажоткин* (Ленинград) **80а), 81—84**; *А. Алексеев* (Пермь) **81, 83**; *А. Амелин* (Москва) **86**; *В. Ансоткин* (Ленинград) **86, 87, 89**; *С. Антонов* (Киев) **80а), 83**; *Б. Аронов* (Саратов) **82—84, 86, 87, 89, 90**; *А. Арсютин* (В. Валда) **83**; *В. Атамась* (с. Худяки Черкасской обл.) **83, 86—88, 90**; *О. Бабаев* (Нахичевань) **86**; *П. Бийорский* (Польша) **86, 87**; *Е. Балакина* (Москва) **84**; *П. Баньковский* (Уральск) **83, 84, 86**; *А. Бер* (Ташкент) **82—84, 86, 89**; *П. Бизер* (Польша) **80а), 82—84, 86, 87, 90**; *И. Билецкий* (Рогатин) **83**; *И. Блиадзе* (Тбилиси) **83, 84, 86, 87**; *Б. Блок* (Москва) **81—84, 86—89**; *А. Бобылев* (Днепропетровск) **83**; *О. Болтенков* (Днепропетровск) **82—84, 86**; *В. Бондаренко* (Тростянец) **84**; *Н. Бондаренко* (Ленинград) **81, 83, 84, 86, 89**; *Т. Боровина* (Сочи) **86**; *А. Бочкарев* (Оренбург) **84**; *В. Бугаенко* (Киев) **79, 81—84, 86—90**; *Е. Бурлакова* (Асбест) **83, 86**; *А. Вахтеров* (Орджоникидзе) **86**; *В. Вирясов* (Павлоград) **83**; *А. Власов* (Камышин) **86**; *В. Воеводов* (Березники) **86**; *И. Воронович* (г. п. Сопоцкино Гродненской обл.) **79, 82—84, 86**; *Л. Гандельсман* (Ленинград) **80а), 81—84, 87—89**; *М. Гандельсман* (Ленинград) **80а), 81—84, 86, 88, 89**; *А. Гарнаев* (Таллин) **82—84, 86, 89**; *Р. Гасиев* (с. Сунжа СОАССР) **83, 86**; *А. Гатилов* (Воронеж) **82, 83, 86, 87**; *А. Георгиев* (Болгария) **84**; *Б. Гисин* (Ленинград) **80а), 81—84, 86—89**; *Г. Гительсон* (Ленинград) **80а)**; *Е. Глемин* (Ленинград) **79, 80а), 81—84, 86, 87, 89**; *Ю. Голембиовский* (Ворошиловград) **86**; *Л. Гольденберг* (Ленинград) **80а), 84**; *И. Гонин* (Новосибирск) **83**; *Е. Гордиенко* (Кишинев) **82, 83**; *А. Грицук* (Дрогичин) **82—84**; *С. Гришечкин* (Москва) **80а), 82—84, 86, 89**; *Е. Гришин* (Пермь) **86—90**; *Н. Грицук* (Дрогичин) **86**; *В. Гроссман* (Одесса) **80а), 81—83, 86, 89**; *М. Грунтович* (Н. Двор Гродненской обл.) **83, 84, 86, 89**; *С. Губанов* (Ворошиловград) **81—84, 86, 87, 89, 90**; *А. Даниелян* (Ленинакан) **83, 86**; *М. Двойненко* (с. Нетечинцы Хмельницкой обл.) **82—84**; *Б. Дворкина* (Ленинград) **83**; *А. Делофф* (Польша) **82, 83**; *А. Диденко* (Краснодар) **83, 84, 86, 87, 89**; *В. Дмитриев* (Брест) **82, 83, 86**; *А. Дубровин* (д. Березовка Кировской обл.) **89**; *И. Ермаков* (Киев) **80а)**; *В. Ерофеев* (Новосибирск) **82—84**; *А. Ефошкин* (Оренбург) **81—84, 86—90**; *А. Заен* (Одесса) **86**; *Л. Зильберман* (Москва) **90**; *О. Зиневич* (Хотин) **83**; *Э. Зубов* (Красногоровка) **86**; *Б. Иванов* (Челябинск) **87, 89**; *Р. Измайлов* (Баку) **86, 87, 89**; *В. Изюсимов* (Кириши) **83, 86**; *М. Израилевич* (Тбилиси) **86, 87**; *И. Калика* (Киев) **80а), 82—84, 86, 87, 89, 90**; *А. Каплин* (Сумгаит) **83**; *Б. Каплан* (Киев) **78б), 80а), 81—84, 88, 89**; *А. Карнаухов* (Ижевск) **83, 84**; *А. Карпов* (Ленинград) **82—84, 86, 89**; *В. Карташев* (Елец) **89**; *В. Каскевич* (Н. Двор Гродненской обл.) **83, 84, 86, 89**; *А. Касянчук* (Николаев) **79, 80а), 81—84, 86, 87, 89, 90**; *А. Качуровский* (п. Средний Иркутской обл.) **86, 87**; *В. Ким* (Фрунзе) **86**; *Ф. Киньябулатов* (Азнаево БАССР) **83**; *А. Кирилов* (Мичуринск) **81—83**; *А. Кирилов* (с. Козловка Воронежской обл.) **86—90**; *И. Кисель* (Кролевец) **84, 86**; *А. Князюк* (Киев) **78б), 80а), 82, 83, 87, 89**; *В. Кобельков* (Мстера) **83, 86**; *В. Кованов* (Горький) **81, 83, 86**; *С. Козявкин* (Киев) **87, 89**; *И. Кондрашкин* (Ленинград) **80а), 82—84, 86, 87, 89, 90**; *Л. Корельштейн* (Москва) **79, 80а), 81—84, 86—89**; *В. Костусяк* (Запорожье) **86, 89**; *В. Коц* (Тбилиси) **83**; *В. Кривец* (Новогрудок) **81, 83**; *В. Кузьменко* (Чернигов) **83**; *А. Кулеско* (Донецк) **81—83, 86, 87, 89**; *В. Куликов* (Калинин) **83**; *Е. Куперштидт* (Черновцы) **82—84**; *М. Кутеркин* (Алма-Ата) **82, 83**; *С. Лабутин* (Калинин) **84, 86, 87**; *С. Лавренченко* (Москва) **80а), 81—84, 86—89**; *Е. Лаврова* (Ленинград) **81—84, 86, 87, 89**; *А. Лалаян* (Красноводск) **83, 84**; *Г. Левко* (с. Верхняя Стинева Львовской обл.) **84, 86, 89**; *Р. Леманн* (ГДР) **86—90**; *И. Лесюк* (д. Юховичи Брестской обл.) **82—84**; *И. Ложицкий* (Ганцевичи) **83, 84, 86**; *В. Локоть* (Череповец) **83**; *В. Любимов* (Харьков) **83**; *С. Майский* (Москва) **83, 84, 86, 87**; *В. Малинин* (Н. Тагил) **78б), 86, 87**; *В. Мальцева* (Пермь) **84, 86**; *Г. Мамедов* (Баку) **81—84**; *Г. Манвелявн* (Гори) **82, 83**; *М. Манелис* (Киев) **86, 87, 89**; *Л. Медведев* (Москва) **86**; *В. Медведь* (Молодечно) **79, 80а), 81—84**; *С. Мелихов* (Донецк) **82—84, 86, 87, 89, 90**; *И. Молчанов* (Киев) **83**; *И. Морозова* (Ульяновск) **86**; *А. Мошонкин* (Кирово-Чепецк) **81—84, 86, 87, 89, 90**; *В. Мысик* (Донецк) **80а)**; *А. Набутовский* (Новосибирск) **86, 89**; *Н. Наймарк* (Николаев) **80а)**; *В. Наконецкий* (Нижнекамск) **86**; *М. Народицкий* (Куйбышев) **80а), 82—84, 86—90**; *В. Нейман* (Ленинград) **82, 83, 86, 87, 89, 90**; *А. Ненашев* (Ленинград) **79, 80а), 81, 83, 84**; *А. Неугодников* (Каменец-Уральский) **86**; *Ю. Николаевский* (Харьков) **83**; *А. Оганесян* (Ереван) **83, 84, 86**; *Е. Огиевецкий* (Днепропетровск) **82—84**; *О. Огилько* (с. Михайловка Целиноградской обл.) **83**; *А. Палев* (Н. Тагил) **86**; *А. Панченко* (Поворино) **83, 86**; *Д. Папуш* (Харьков) **82, 83**; *Т. Пастухова* (Опалиха Московской обл.) **86**; *Ю. Петров* (Воронеж) **83, 84**; *А. Петухов* (Новокузнецк) **82, 86, 88**; *С. Письменная* (Куйбышев) **83, 84**; *П. Побылица* (Ленинград) **79, 83, 86, 89**; *А. Полев* (Н. Тагил) **82—84**; *С. Полыгилов* (Пермь) **82—84, 86, 89**; *Р. Портной* (Черновцы) **79, 80а)**; *В. Поспелов* (Очер) **84**; *С. Путинцев* (Краснодар) **86—89**; *А. Рабинович* (Харьков) **83, 86**; *А. Радул* (Кишинев) **80а)**; *А. Разборов* (Москва) **81, 83, 84, 86—90**; *И. Райзман* (с. Калинов Винницкой обл.) **86, 89**; *В. Резцов* (Астрахань) **86**; *П. Ровках* (Москва) **80а), 81—84**; *В. Рогава* (Тбилиси) **83, 84**; *А. Роднонов* (Москва) **81—84**; *А. Родников* (Москва) **86, 87, 89**; *С. Розенштейн* (Киев) **86**; *И. Ройзман* (Калиновка Винницкой обл.) **84**; *А. Романов* (Ташкент) **83**;

Л. Рубинштейн (Калининград) **83, 84**; *А. Саблин* (р. п. Хольский Воронежской обл.) **83**; *Я. Савчук* (Березовка Ивано-Франковской обл.) **83**; *Д. Самощенко* (Свердловск) **86**; *В. Свинцов* (Москва) **82—84**; *В. Свиридов* (Воронеж) **84, 86**; *Р. Севдималыев* (Шаифлин АзССР) **83, 84**; *М. Селектор* (Ленинград) **81—84, 86, 87, 89, 90**; *С. Сергеев* (Минск) **83**; *А. Сердюк* (Херсон) **83, 86, 89**; *А. Сесса* (Днепропетровск) **84**; *М. Симунин* (Уфа) **84**; *В. Смирнов* (Уфа) **84**; *М. Соколовский* (Москва) **79, 80а), 81—84, 86, 87, 89**; *А. Соловьев* (Ульяновск) **84**, *А. Старк* (Сумгаит) **86**; *В. Стовба* (Москва) **81—83, 86—89**; *И. Стойменович* (Югославия) **82—84**; *А. Сьятов* (Черногорск) **83**; *А. Тачников* (пос. Полярные Зори Мурманской обл.) **87**; *Ю. Тикунов* (Новосибирск) **88**; *Н. Тренев* (Москва) **81—84, 86, 87, 89**; *Н. Трифонов* (Канск) **84, 87**; *В. Трофимов* (Москва) **80а), 81—84; 86, 87, 89**; *Э. Туркевич* (Черновцы) **86—90**; *О. Тюрпенко* (Фрунзе) **83, 86**; *И. Тютюнник* (Киев) **86**; *В. Угриновский* (Хмельник) **82—84, 86, 87**; *У. Умирбаев* (с. Туркуль Чимкентской обл.) **86**; *С. Уразов* (Куйбышев) **84**; *Н. Файзуллин* (с. Чекмагуш БАССР) **82**; *В. Фалько* (Харьков) **82—84, 86, 90**; *А. Хайкин* (Тула) **82, 83, 86, 89**; *С. Харенко* (Ангарск) **86**; *С. Хаскель* (Павлово-Посад) **86**; *И. Хаучл* (ЧССР) **82—84**; *С. Хосид* (Алма-Ата) **83**; *С. Хрулев* (Калинин) **86**; *И. Царьков* (Москва) **80а), 82, 83, 86—89**; *М. Цевелев* (Челябинск) **89**; *В. Чесноков* (Победное Рязанской обл.) **84**; *А. Чигинин* (Новосибирск) **84**; *Б. Шаборяс* (Рига) **86, 88, 89**; *С. Шапиро* (Курск) **86**; *А. Шафир* (Челябинск) **83**; *Ю. Шафир* (Челябинск) **86, 89**; *Л. Шерстенева* (Нововолынск) **84**; *А. Шкуропатов* (Яншабад Ташкентской обл.) **83, 84**; *В. Шпильрайн* (Москва) **83, 87, 89**; *Ю. Штейншрайбер* (Баку) **79, 80а), 82—84, 86, 87, 89**; *В. Штепин* (Челябинск) **86, 88, 89**; *С. Штерник* (Ленинград) **86**; *В. Шумилов* (Череповец) **83, 86, 89**; *В. Щукин* (Ленинград) **81, 83, 84, 86—89**; *Л. Энтин* (Москва) **79, 80а), 81—84, 86—90**; *В. Эткин* (Москва) **84**; *Н. Ясинская* (с. Мазуровка Винницкой об.) **84**.

Физика

Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф383—Ф402**, справились с решениями задач **Ф383, Ф388** и **Ф398**. Остальные задачи правильно решили: *Ш. Абдуллаев* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) **91**; *А. Абрамян* (Ереван) **84, 85, 95, 99—01**; *М. Акопян* (Ереван) **85**; *Р. Акопян* (Ереван) **92**; *Д. Алиев* (Орджоникидзевский р-н Ташкентской обл.) **00**; *Н. Алтухов* (Калинин) **91, 92, 99, 00**; *М. Альперович* (Ивано-Франковск) **85**; *Б. Амосов* (Мытищи) **91**; *А. Андриевский* (Минск) **84, 90, 91**; *Ю. Антонов* (Чебоксары) **91, 96**; *С. Антонюк* (Киев) **84, 85, 91**; *О. Аныщкова* (Винница) **95**; *Т. Аскарян* (п. Нор-Аджи АрмССР) **85**; *А. Атамуратов* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) **84, 91**; *М. Бабаев* (Баку) **84, 85**; *Б. Багаутдинов* (с. Мугерган ДАССР) **95, 01**; *М. Багаутдинов* (Магнитогорск) **84—86, 90, 91, 94—97, 99, 00**; *Ф. Багдасарян* (Баку) **86, 91, 92, 94, 95, 97, 99, 00**; *А. Багиров* (с. Кировка АзССР) **90**; *К. Балашов* (д. Клишева Московской обл.) **92, 93, 95—97, 99—01**; *Ю. Балашов* (Москва) **00**; *О. Баркалов* (п. Черноголовка Московской обл.) **84, 91, 92**; *С. Баркуев* (Иркутск) **84, 85**; *А. Барташ* (Симферополь) **91**; *М. Барташевич* (Свердловск) **99—01**; *О. Батищев* (Череповец) **84, 85, 92—97, 99—01**; *С. Батуев* (Ангарск) **85**; *Т. Бейко* (Киев) **93, 96, 97, 99**; *А. Беликов* (Москва) **85—87, 89, 91**; *В. Белоцерковский* (Харьков) **94, 95**; *В. Бессонов* (Москва) **91, 92**; *Г. Бетин* (с. Счастливцево Херсонской обл.) **90, 92, 94, 95**; *П. Билер* (Вроцлав, ПНР) **84, 85, 91, 94, 99, 00**; *А. Бобров* (Пермь) **90, 91, 92—97, 01**; *А. Бобылев* (Днепропетровск) **96**; *О. Болтенков* (Днепропетровск) **84—87, 00**; *И. Болтунов* (Ленинград) **85, 99, 00**; *А. Бондарев* (Львов) **91, 92, 00**; *В. Бондарев* (Курск) **84—87, 91, 92—94, 96, 97, 99, 01**; *В. Бондаренко* (Тростянец Сумской обл.) **94, 96, 00, 01**; *В. Боднарюк* (с. Стрелецкий Кут Череповецкой обл.) **84, 97, 99**; *Л. Бордюгов* (Кишинев) **00**; *А. Бочек* (Шостка) **92, 95**; *А. Бочкарев* (Оренбург) **84, 99, 00**; *Л. Браверман* (Пермь) **99—01**; *О. Будиловский* (Киев) **91**; *Л. Булатова* (Казань) **90, 91, 96**; *В. Буртовой* (Килия) **84—86**; *В. Варлыгин* (Москва) **95**; *Б. Васиев* (Самарканд) **85, 87, 90—92**; *В. Ващенко* (Туапсе) **99,00**; *В. Вирясов* (Павлоград) **86, 87, 95, 96**; *Н. Волохин* (Лисаковск) **99, 00**; *П. Воронин* (Рига) **85, 99**; *И. Газизов* (Москва) **84—86, 92, 99, 00**; *А. Ганопольский* (Минск) **94—97**; *И. Гарибашвили* (Тбилиси) **84, 85, 93, 96, 99—01**; *В. Гаркавый* (Лида) **84, 91, 92, 94—97, 00, 01**; *В. Гармаш* (Запорожье) **84—86, 90—97, 99, 00**; *И. Гиззатуллин* (д. Старый Ашит ТАССР) **85, 91, 92**; *М. Глазунов* (Старый Оскол) **85**; *Е. Глуз* (Черкесск) **95**; *Ю. Глумов* (Талды-Курган) **90, 95, 99,00**; *О. Глушко* (Москва) **84, 85, 90—92, 96, 97, 99, 00**; *В. Головлев* (Самарканд) **92**; *Э. Гологорский* (Кишинев) **96**; *О. Голощапов* (с. Архангельское Тульской обл.) **95—97, 99, 01**; *В. Гончаров* (Андижан) **90**; *Ю. Гончаров* (Ставрополь) **85, 86**; *Е. Горбатый* (Одесса) **84, 99, 00**; *Е. Гордиенко* (Кишинев) **85, 90, 95, 99—01**; *А. Грайфер* (Запорожье) **84, 85, 99, 00**; *Б. Грибов* (Воронеж) **84—86, 90—92**; *А. Григорьев* (Дзержинск Горьковской обл.) **84, 00**; *А. Грищук* (Дрогичин) **97, 00**; *С. Гузовский* (Рига) **95**; *И. Давлетшин* (с. Апастово ТАССР) **84**; *О. Дадьсян* (Ереван) **84, 85**; *М. Двойненко* (с. Нетеченцы Винницкой обл.) **94, 96**; *В. Демидович* (Гадяч) **92, 99**; *П. Демкин* (Донецк) **84, 85, 87, 91, 92, 95, 96, 01**; *О. Денисов* (Баку) **85, 90, 96, 00**; *А. Деражне* (Киев) **00—02**; *В. Дмитриев* (Брест) **91, 92, 95, 99,00**; *С. Дохоян* (Ереван) **91**; *А. Дубровин* (д. Березовка Кировской обл.) **91, 95**; *М. Ерихов* (Курган) **86**; *В. Ерофеев* (Новосибирск) **84—87, 90, 92—96, 99—01**; *В. Житарь* (Кишинев) **84, 00**; *В. Жураковский* (Стрый) **92**; *А. Забродин* (п. Черноголовка Московской обл.) **84, 91, 92—96, 99—01**; *В. Запевский* (Новогрудок) **99—01**; *Г. Засеев* (с. Заманкул СОАССР) **93, 00**; *В. Засимчук* (Киев) **84**; *А. Захаров* (Брест) **96—01**; *В. Здоренко* (Капустин Яр) **01**; *И. Зеленин* (Ленинград) **84**; *В. Зильберг* (Новгород) **96, 00**; *Т. Ибраев* (Шахтинск) **85**; *И. Иванов*

(Ростов-на-Дону) 93; *С. Иванов* (Харьков) 84,85; *А. Иоаннисян* (Ереван) 91, 92; *А. Ишхамян* (Джермук) 95, 96; *Е. Казарова* (Ереван) 94—96, 01; *А. Каланович* (Пермь) 84, 85, 89—97, 99, 01; *Н. Капзитдинов* (с. Карабугазкент ДАССР) 92, 95; *А. Карнаухов* (Ижевск) 93, 94, 96; *В. Кастусян* (Запорожье) 84; *В. Катин* (Даугавпилс) 85, 86; *В. Киреев* (Саратов) 91, 92; *В. Кириаков* (Тбилиси) 85, 99; *М. Кирсанов* (Тула) 86, 90; *Ю. Киселев* (Ленинград) 84; *А. Клековкин* (с. Селты УдмАССР) 99, 01; *Ю. Кобылинский* (Севастополь) 91; *В. Кованов* (Горький) 93, 96—00; *С. Козявкин* (Киев) 00; *А. Колесников* (Ташкент) 84, 91, 92; *А. Комаров* (Наволоки Ивановской обл.) 95; *В. Комов* (Александров) 91, 92; *В. Кондратьев* (п. Малышев Калининской обл.) 91, 92; *И. Кондрашкин* (Ленинград) 99, 00; *В. Конотоп* (Харьков) 84, 96, 99—01; *В. Коробов* (Саратов) 95, 01; *С. Корчачов* (Ангарск) 91; *Г. Корчанский* (Кишинев) 84, 91, 92; *А. Косолапов* (Курск) 96; *В. Коток* (Харьков) 84, 89, 91, 92, 94—97, 99, 00; *И. Кочкарев* (Рига) 91, 92; *А. Кречетников* (Сумы) 93, 95; *С. Кулагин* (Москва) 85, 86, 91, 92; *Г. Куликова* (Егорьевск) 90; *А. Кумахов* (с. II Лескен КБАССР) 84, 91; *Е. Куперштидт* (Черновцы) 91, 95, 96; *Л. Куравский* (Калуга) 86, 95, 96, 99—01; *М. Курбатов* (Москва) 93, 94, 96, 99—02; *С. Курдюков* (Москва) 84, 85, 87; *Е. Курмангалиев* (Уральск) 94, 99—01; *С. Лавреченко* (Москва) 84, 90—97, 99—01; *А. Ладоненко* (п. Агаповка Челябинской обл.) 91; *В. Лахин* (Черкесск) 85, 99; *Ю. Лебединский* (Могилев) 84, 85; *Я. Лернер* (Кишинев) 84; *А. Листовничий* (Киев) 84, 90—97; *О. Лищенко* (Киев) 84—86, 89, 91, 92, 99—01; *В. Лобзин* (Свердловск) 84, 86, 87, 91—97, 99—02; *Л. Лознер* (Минск) 84, 85, 90—92, 99, 00; *А. Лопатин* (Химки) 91, 92; *В. Лубневский* (Москва) 93—96, 99—01; *А. Лунинский* (Харьков) 99—01; *С. Ляхимец* (Киев) 84, 85, 94, 99, 00; *А. Магадеев* (д. Карачаево БашАССР) 84; *С. Майский* (Москва) 91, 93, 96, 99—01; *Т. Макиенко* (Днепропетровск) 84; *В. Малинин* (Нижний Тагил) 84—86; 92, 99,00; *А. Мальцев* (Запорожье) 00; *Е. Мартынова* (Курск) 86; *А. Масягин* (Смоленск) 85, 86, 94—97, 99—01; *М. Матвеев* (Канаш) 90—92, 95, 01; *Ю. Матрухович* (Минск) 84, 91, 93, 95, 96, 99, 01; *Е. Матусов* (Москва) 91, 92; *А. Мацкевич* (Димитровград) 00; *Г. Метревели* (Цхинвали) 85, 91, 92, 99, 00; *П. Мидодашвили* (Цхинвали) 84, 85, 87, 91, 94—97; *Ю. Минаев* (Киев) 84—86, 91, 92, 99,00; *О. Мирзеабасов* (Черновцы) 84, 85, 89, 92, 00; *М. Мирзоев* (Нахичевань) 94, 95; *Н. Михайлов* (Караганда) 84; *М. Молдовский* (Тбилиси) 84, 94—96; *В. Молофеев* (Ивацевичи) 91; *А. Морозов* (Москва) 91, 92; *И. Морозов* (Горький) 91, 92; *К. Морозов* (Пермь) 93—97, 99—01; *А. Морозовский* (Киев) 85, 87, 91, 92—95; *А. Мосичев* (Пучеж) 91, 94—96; *М. Муллаяров* (с. Малый Ашап Пермской обл.) 84, 99—01; *Г. Муравлева* (Москва) 99, 00; *Г. Мурашов* (Свердловск) 84—86; *О. Мусаев* (Баку) 84—86, 91, 92—94, 96, 97, 99—02; *Ю. Мухарский* (Киев) 84—86, 90—95, 97, 99—02; *А. Наговицын* (Ижевск) 85; *Д. Надежин* (Курган) 00; *С. Назаренко* (п. Старая Купавна Московской обл.) 85; *С. Назин* (Красногорск) 84, 91—95, 97, 99, 00; *Ю. Наумов* (Новосибирск) 93; *И. Нескоромный* (Симферополь) 91; *А. Никандров* (Ленинград) 93, 94; *А. Никитенков* (Великие Луки) 84, 85, 91—96, 99—02; *Н. Никифоров* (Великие Луки) 99; *В. Николаев* (Тула) 95; *В. Николайчик* (Старые Дороги) 85, 91, 93, 94, 96, 97, 99, 00; *Б. Нимбуев* (Улан-Удэ) 84, 85, 87; *Е. Огиевецкий* (Днепропетровск) 84, 85, 92—94, 96, 97; *М. Орджалиев* (Баку) 92, 00; *Л. Ореховская* (Волгоград) 91; *М. Ортемберг* (Караганда) 84, 85; *М. Османов* (ст. Акстафа АзССР) 95, 01; *Т. Павеликина* (Киев) 92; *В. Палей* (Харьков) 84, 85, 89, 91, 92, 95, 96, 00—02; *С. Панин* (Тула) 99, 00; *Д. Папуш* (Харьков) 95; *Д. Патарая* (Тбилиси) 92; *О. Певзнер* (Днепропетровск) 84, 85, 91, 92, 95, 97, 00; *И. Пелецкий* (Москва) 84, 85; *С. Перфилов* (Сердобск) 91, 92; *М. Петухов* (Магнитогорск) 01; *В. Писецкий* (Запорожье) 91, 92, 96, 97, 00; *А. Платонова* (Тула) 91; *Д. Плахта* (Яремча) 95, 96, 01; *П. Побылица* (Ленинград) 84, 85, 97, 00; *Е. Пономарев* (п. Черноголовка Московской обл.) 84, 89, 92—96, 99—01; *С. Попов* (Москва) 84, 85, 89, 92, 94, 95, 99; *В. Потемкин* (Великие Луки) 84—86, 95, 99—02; *П. Приймак* (Курск) 99; *А. Проценко* (Спасск-Дальний) 92; *А. Романов* (Киев) 84, 85, 99; *Ю. Ростовцев* (Горький) 84, 85, 91, 92, 99; *А. Рудерман* (Ленинград) 84—86, 91—93, 96, 97, 99, 00, 02; *А. Рябов* (Майкоп) 90, 93, 99,00; *Н. Савченко* (п. Н. Водолага Харьковской обл.) 85, 91, 99—01; *А. Саргазаков* (Новосибирск) 96, 97; *А. Сахарук* (Брест) 84, 85, 91, 92, 95, 99, 00; *А. Святченко* (Кишинев) 84, 85, 91, 92, 99, 00; *В. Семак* (Кишинев) 91; *Ю. Семенов* (Одесса) 84, 91; *Г. Сербачинов* (Ленинград) 01; *В. Серебрянный* (Харьков) 85, 92, 97; *М. Симушин* (Пермь) 96; *Л. Скатков* (Харьков) 84—86, 91, 92, 95, 96, 99—01; *А. Смирнов* (Москва) 00; *В. Смирнов* (Уфа) 89, 91, 92, 96, 97, 01; *Т. Смирнова* (Губаха Пермской обл). 99, 00; *Г. Смыков* (Тольятти) 00, 01; *А. Соловьев* (Ульяновск) 93; *В. Сорокин* (Днепропетровск) 90—92, 97, 01; *С. Соскин* (Киев) 84, 85, 92, 99, 00; *О. Спицын* (с. Нов. Усмань Воронежской обл.) 99, 00; *И. Степанов* (Рига) 85; *В. Степович* (с. Васильевское Ивановской обл.) 95; *В. Стовба* (Москва) 90—95; *М. Стойнов* (Москва) 84—86, 91, 94, 95, 00; *С. Субботин* (Алма-Ата) 84; *А. Суханов* (с. Бутырки Воронежской обл.) 91, 95, 97, 99, 00; *М. Сухарь* (Москва) 91, 95, 96, 00; *А. Тикиляйнен* (Курск) 99, *Ю. Тикунов* (Новосибирск) 91, 99; *А. Тимофеев* (Москва) 90—92; *О. Токарь* (Харьков) 85; *И. Толох* (Жидачов) 91, 92, 96; *К. Третьяченко* (Киев) 84, 85, 90, 92—97, 99, 00; *К. Трутнев* (Казань) 84, 85, 90—92, 94—97, 99—02; *В. Тужилкин* (Зеленодольск ТАССР) 92; *Е. Тузбекова* (Кумертау) 85, 94; *И. Усатов* (Ахалцихе) 99,00; *А. Фальковский* (Алма-Ата) 99, 00; *А. Фарбер* (Тамбов) 84, 85, 96, 99,00, *Н. Федин* (Омск) 84, 85, 89—92; *А. Фомин* (Новосибирск) 96; *И. Фонарев* (Сумгаит) 96; *М. Ханагян* (Ереван) 85; *А. Хапиков* (Ижевск) 00, 01; *А. Хачатуров* (Баку) 90; *А. Худошин*

(Харьков) **94, 96, 00**; *В. Цветков* (п. Комсомольск Кустанайской обл.) **01**; *М. Цодыкс* (Новокузнецк) **84, 85, 99**; *И. Цуркис* (Калининград) **93, 96, 99, 00**; *В. Чеканов* (Быхов) **85, 96, 00**; *Е. Червоненко* (Днепропетровск) **84, 85**; *В. Черненко* (Ленинград) **84—86**; *Г. Черников* (Калуга) **92—94, 97, 99, 00**; *Л. Черных* (Лида) **84, 85, 95, 99, 01**; *Н. Черняк* (Конотоп) **92**; *А. Чурилов* (Харьков) **84—86, 90, 95**; *Р. Шарипов* (Каракуль Бухарской обл.) **91—93, 97, 99, 00, 02**; *А. Шафаренко* (Караганда) **84, 85, 91—96, 00**; *А. Шафир* (Челябинск) **00**; *К. Шахназарян* (Баку) **91, 01**; *А. Шведов* (Запорожье) **84, 85**; *А. Швейдель* (Великие Луки) **95, 96**; *А. Шептовецкий* (Москва) **90—94, 96, 99—02**; *И. Шибут* (Барановичи) **84, 87**; *Э. Шифрин* (Днепропетровск) **84, 85, 92, 94, 95, 97, 99—01**; *И. Шиян* (Киев) **84, 85, 92, 96—02**; *В. Шлегель* (Ашхабад) **99,00**; *О. Шлыгин* (Новосибирск) **92, 97, 99**; *С. Штейнер* (Гомель) **00**; *Ю. Штейншрайбер* (Баку) **84, 90—97, 99, 00**; *Р. Шувар* (п. Рогатин Ивано-Франковской обл.) **84, 85, 87, 90, 91, 94—97, 99—01**; *В. Щукин* (Ленинград) **94, 96, 99—02**; *С. Элмурадов* (Шаартузский р-н ТаджССР) **95**; *Л. Юферева* (Советский р-н Марийск. АССР) **00, 01**.

Ответы, указания, решения

К статье «Орнаменты»

(*к упражнениям*)

1. Для фигур «порядка 4» существует четыре перемещения: параллельный перенос и три поворота. Для фигур «порядка 2» — тоже четыре; два из них — повороты или переносы, а два другие — скользящие симметрии (см. п р и м е ч а н и е на с. 25).

2. а), в), г), д), ж), з) — параллельные переносы; б) и е) — повороты на 180°.

3. Рисунки 1,*а* и 1,*в* — орнаменты типа VIII, рисунок 1, *б* — типа IV, 1,*г* — типа III, 1,*д* — типа V.

Рисунки 2, *а* и 2, *в* — орнаменты типа II, рисунок 2, *б* — орнамент типа III.

4. Оси скользящей симметрии есть у всех орнаментов, у которых среди порождающих перемещений встречается и осевая симметрия (для некоторых орнаментов оси скользящей симметрии — это в точности оси обычной симметрии).

К статье «Закон сохранения импульса при соударениях»

$$1.\ |\vec{v}_0| = \sqrt{\frac{|\vec{g}|}{2H}}\left(s_2 + s_1\frac{m_1}{m_2}\right) \approx$$

≈ 435 *м/сек*.

$$2.\ Q = \frac{3}{16}\,\frac{|\vec{p}|^2}{m}.$$

$$3.\ s = \frac{H(1-\mu)^3}{2\mu} = 0{,}25\ м.$$

К статье «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»

М а т е м а т и к а

Отделение политэкономии

1. Вместе бригады работали 12 дней. 2. $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = \pm 2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right) + 4n\pi$, где k и n — целые числа. 3. $r_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}(15 - \sqrt{105})$, $r_2 = \sqrt{6}(10 - \sqrt{70})$.

4. $x_1 = 3$, $y_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi$; $x_2 = -3$, $y_2 = -\frac{\pi}{4} + n\pi$, где k и n — целые числа.

5. $\frac{2}{7} \leqslant x < 3$.

Отделение планирования и экономической кибернетики

1. $-1 + 10^{-\sqrt{3}} \leqslant x \leqslant -9/10$, $9 \leqslant x \leqslant 10^{\sqrt{3}} - 1$. 2. $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $y_1 = \frac{\pi}{6}$; $x_2 = \frac{5\pi}{12}$, $y_2 = \frac{\pi}{6}$; $x_3 = \frac{\pi}{12}$, $y_3 = \frac{11\pi}{6}$.

3. $2(3 + \sqrt{3})$. У к а з а н и е. Воспользоваться теоремой Пифагора для прямоугольного треугольника ACB и теоремой синусов для треугольника AMC. 4. 3.

Факультет психологии

1. Скорость поезда при движении в гору 60 *км/час*, скорость поезда при движении по ровному месту 78 *км/час*. 2. $S_{ABC} = 25/3$. У к а з а н и е. Доказать, что $S_{ABC} = 3 \cdot S_{AOC}$, где O — точка пересечения медиан. 3. $x_1 = 5/3$, $x_2 = 15$. 4. $x_1 = -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + n\pi$, где k и n — целые числа. У к а з а н и е. Заметить, что $\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{ctg}^2 x + 4} = |\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x|$.

5. $x = -2$, $y = 3/2$. У к а з а н и е. Рассматривая при $y \neq 1$ данное уравнение как квадратное относительно x (с коэффициентами, зависящими от y), выписать условие существования его решений.

Отделение структурной и прикладной лингвистики

1. 27 операций. 2. $z_1 = -1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$. У к а з а н и е. Вычислить О. Д. З. данного неравенства. 3. $x = \frac{\pi}{12} + (2n+1)\pi$, где n — целое число. У к а з а н и е. Заметить, что $5 + 3\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 2$, а

$\sin^2\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)\leqslant 1$. 4. $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, где k — целое 5. $32\sqrt{21}:147$. Указание. Выразить объемы призмы и пирамиды через радиус R шара. Доказать, что центр шара лежит внутри шестиугольной пирамиды.

Физика

Географический факультет и факультет почвоведения

1. $T_2=kT_1\left(1+\frac{M|\vec{g}|}{p_0S+m|\vec{g}|}\right)=324°$ К; $t_2=51°$ С.

2. $h=\frac{H}{k^3}-\frac{(k^3-1)\,p_0}{k^3\rho|\vec{g}|}=1,25$ *м*.

3. $|\vec{E}|=\frac{m|\vec{g}|}{q}=10^3$ *в/м*.

4. $n_{\min}=\frac{1}{\sin\alpha}=1,16$.

5. $l=4$ *см*.

Геологический и химический факультеты

1. $M=m\frac{1-\sin\alpha}{\sin\alpha}=50$ *г*.

2. $Q=\frac{m(|\vec{v}_1|-|\vec{v}_2|)}{2M}[(M-m)|\vec{v}_1|+(M+m)|\vec{v}_2|]=298$ *дж*.

3. $C=\frac{2|q|}{\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1}=5\cdot10^{-3}$ *мкф*.

4. $C_1=C_2\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2-\lambda_1^2}=10^3$ *пкф*.

5. $|\vec{v}_2|=|\vec{v}_1|\frac{F}{a-F}=0,5$ *м/сек*.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см «Квант» № 2

1. а) Первый чудак не проиграет, если будет «тянуть» ломаную все время вниз. Далее, если очередной ход невозможен, то ломаная замкнулась (докажите это), а замкнуться она может лишь после четного числа ходов, поэтому второй чудак проиграть не может.

б) Выиграет первый чудак при нечетных n и второй при четных n. Указание. Поставим в каждом узле сетки число, равное количеству целых ниток, исходящих из этого узла. Сумма всех чисел в узлах для целой сетки равна $3\cdot4\cdot(n-1)+4(n-1)^2$, что делится на 4. Для «максимально порезанной», но не распавшейся сетки (она имеет вид «дерева» с ветками) эта сумма равна $2n^2+4n-8$, что не делится на 4 при нечетных n и делится на 4 при четных n. Но каждый разрез нитки уменьшает сумму чисел в узлах на 2.

2. Решение. Если $x=1976k+76=1977p+76$, то $x+2=13(152k+6)=3(659p+26)$, поэтому $x+2$ делится нацело на 39, а x — дает остаток 37.

3. Нет, не может. Указание. Предположим, что кентавр может обойти доску. Тогда в какой-то момент он окажется на поле h8. Попасть туда он мог только с поля f7. Но и выйти из этого угла он может только на поле f7. Значит, попав в угол, кентавр там останется.

4. Первым ходом Люся переносит одну из пуговиц на крайнее справа поле. Затем она «дублирует» ходы Саши, так что после ее хода две оставшиеся пуговицы оказываются на одном поле.

5. Спроектируем деревья на одну из сторон квадрата. Каждому дереву будет соответствовать отрезок длины 50 *см* — его проекция. По условию объединение этих отрезков совпадает со стороной квадрата. Значит, сумма их длин не менее 1 *км*. Но 1 км : :50 *см* = 2000.

Над номером работали:
В. Березин, А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили художники:
М. Дубах, Г. Красников, Э. Назаров, И. Смирнова

(зав. редакцией) Л. Чернова

(художественный редактор) Т. Макарова

Корректор Т. Вайсберг

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, «Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 24/XII 1976 г.
Подписано в печать 31/I 1977 г.
Бумага 70×108¹/₁₆. Физ. печ. л. 4
Усл. печ л. 5,20 Уч.-изд. л. 6,63 Т-03441
Цена 30 коп. Заказ 2910 Тираж 296 295 экз.

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли г. Чехов Московской области

«Квантово-волновые» ребусы

В каждом из этих ребусов буквами зашифрованы некоторые цифры, вместо звездочек могут стоять любые цифры. Расшифруйте примеры.

В. Радунский

1

```
    ×КВАНТ
     КВАНТ
    ------
    В****Т
   О****Н
  Л****А
 Н****Ю
А****Н
----------
**********
```

2

```
     ****А
   *****Н
  *****Л
 *****О
****В
---------
*********
```

3

```
     ****Т
   *****Н
  ****А
*****В
*****К
----------
**********
```

4

```
    ×ВОЛНА
     ВОЛНА
    ------
     ****Т
   *****Н
  ****А
 ****В
****К
---------
*********
```

5

```
    ×ВОЛНА
     ВОЛНА
    ------
     Ы****
   *Т****
  Н****
*А****
В****
---------
К********
```

6

```
    ×ВОЛНА
     КВАНТ
    ------
     ****А
   *****Н
  *****Л
 *****О
****В
----------
**********
```

7

```
    ×КВАНТ
     КВАНТ
    ------
    ******
   ******
  ******
******
----------
*****ВОЛНА
```

8

```
    ×ВОЛНА
     ВОЛНА
    ------
    ******
    *****
  ******
******
----------
*****КВАНТ
```

9

КВ × А = НТ

ВО × Л = НА

10

КВ + А = НТ

ВО : Л = НА

Индекс 70465
Цена 30 коп.

На первой и четвертой страницах обложки вы видите орнаменты, придуманные голландским художником М. Эшером. Об орнаментах вы можете прочесть в статье А. Землякова на с. 20.