

# Квант

2  
1978

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ  
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР







«...нмєю удонольствие сообщить Вам о некоторых поразительных результатах, полученных мною... Главный из этих результатов... это создание прибора, который по своим действиям... сходен с лейденской банкой, ... но который, однако, действует непрерывно, то есть его заряд после каждого разряда восстанавливается сам собой; одним словом, этот прибор создает неуничтожаемый заряд...» Так писал Алессандро Вольта президенту Королевского общества (Академия наук Великобритании) об изобретённом им приборе, который он сам на-



звал «электродвижущим аппаратом». Позже французы стали называть его «гальваническим столбом» или «вольтовым столбом».

В Милане (Италия) в Музее истории науки и техники хранятся вольтовые столбы, сделанные самим Алессандро Вольта. (Вы видите их на фото.)

В истории изобретения этого прибора большую роль сыграл Луиджи Гальвани и его знаменитые «гальванические опыты». Об этой истории вы можете прочитать в статье «Спор о лягушке» в этом номере журнала.

Научно-популярный  
физико-математический  
журнал  
Академии наук СССР  
и Академии педагогических  
наук СССР



Издательство «Наука»  
Главная редакция  
физико-математической  
литературы

### В НОМЕРЕ:

Главный редактор  
академик И. К. Киконин

Первый заместитель  
главного редактора  
академик А. Н. Колмогоров

#### Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков  
С. Т. Беляев  
В. Г. Болтянский  
Н. Б. Васильев  
Ю. Н. Ефремов  
В. Г. Зубов  
П. Л. Капица  
В. А. Кириллин  
А. И. Климанов  
С. М. Козел  
В. А. Лешковцев  
(зам. главного редактора)  
Л. Г. Макара-Лимапов  
А. И. Маркушевич  
Н. А. Патрикеева  
И. С. Петраков  
Н. Х. Розов  
А. П. Савин  
И. Ш. Слободецкий  
М. Л. Смолянский  
(зам. главного редактора)  
Я. А. Смородинский  
В. А. Фабрикант  
А. Т. Цветков  
М. П. Шаскольская  
С. И. Шварцбург  
А. И. Ширшов

На первой странице  
обложки  
изображено семейство  
сферических эллипсов.  
Эти же кривые  
окаймляют «полоски»  
и «шапочки»,  
на которые «разрезан»  
другой экземпляр  
сферы.  
Подробнее  
о сферическом эллипсе  
читайте на с. 25.

2 А. Китайгородский. Как измеряются расстояния между атомами в кристаллах

10 С. Семенов. Рукопись, найденная в Сарагосе

14 А. Дозоров. Что это значит — «навести на резкость»?

#### Лаборатория «Кванта»

18 А. Николаев. Прибор для изучения преломления света

#### Математический кружок

20 Э. Скопец, Л. Кузнецова. Седлообразная поверхность



25 В. Березин. Сферический эллипс

#### Задачник «Кванта»

26 Задачи М486—М490; Ф498—Ф502

28 Решения задач М441—М443; Ф453—Ф457

#### По страницам школьных учебников

34 А. Земляков, Б. Ивлев. Вопросы по алгебре и анализу

36 Б. Гейдман. Композиция двух осевых симметрий

#### «Квант» для младших школьников

39 Задачи

40 И. Белкин. Спор о лягушке

#### Практикум абитуриента

46 С. Алешин, М. Потапов, В. Слудский. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

49 А. Зазело. Множества значений числовых функций

#### Международные олимпиады школьников

51 А. Савин. XIX Международная олимпиада по математике

54 Спрашивайте — отвечаем

#### Информация

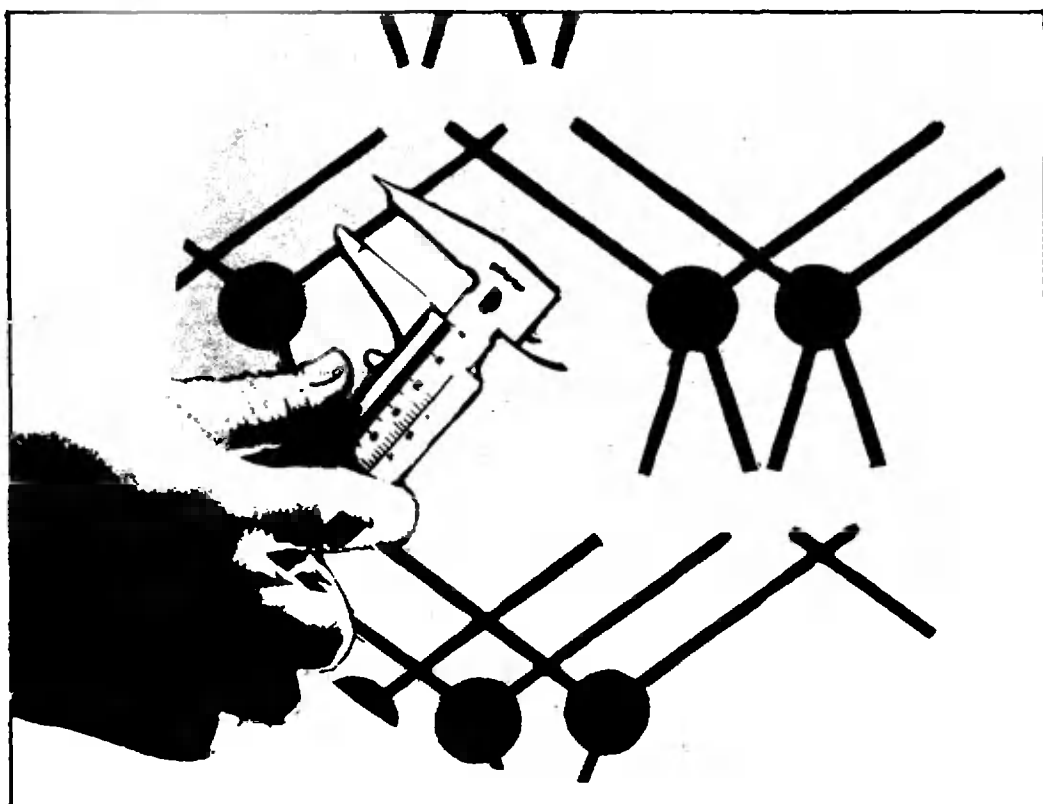
55 Г. Гальперин. Задачи XI Московской математической олимпиады школьников

#### Рецензии, библиография

56 И. Кламова. Памяти Отто Данкела

58 Ответы, указания, решения

Смесь (9, 17, 35, 38, 48, 53)



*А. Китайгородский*

## Как измеряются расстояния между атомами в кристаллах

Слова «структура», «строение» — очень емкие по смыслу. Разные исследователи понимают под этими словами разные вещи. Биолог может вести речь о структуре мышечной ткани, имея в виду расположение волокон друг относительно друга; металлограф, говоря о строении сплава, обычно подразумевает форму и размеры зерен. Эти структуры наблюдаются с помощью обычного микроскопа при увеличении всего лишь в несколько сотен раз. Но те же самые слова используются и тогда,

когда речь идет о частицах, входящих в состав атомного ядра, размеры которых измеряются триллионными долями сантиметра. Тут слово «структура» имеет уже условный смысл, и физики пользуются им с осторожностью, помня, что наглядные зрительные представления не годятся для столь малых кирпичиков мироздания.

В физике твердого тела слова «строение» и «структура» также могут употребляться в разных смыслах. Так, например, обсуждая электронное строение металла, имеют в виду вовсе не размещение электронов в пространстве, а характер распределения их по энергиям; говоря о структуре ферромагнитных материалов, описывают размеры, форму и расположение доменов. Есть и другие ситуации, где слово «структура» оказывается достаточно уместным.

В этой статье речь пойдет об атомной структуре кристаллов, под которой понимается узор, создаваемый центрами атомов. Атомная струк-

тура определяется рентгеноструктурным анализом, в основе которого лежит явление дифракции рентгеновских лучей. С помощью этого замечательного явления, открытого в 1912 году Максом Лауэ, удается измерить расстояния между центрами атомов твердого тела и определить их взаимное пространственное расположение. За 65 лет, которые прошли со времени открытия Лауэ, с помощью рентгеноструктурного анализа удалось установить геометрию расположения атомов примерно в десятке тысяч кристаллов.

Задача этой статьи заключается в том, чтобы познакомить читателя с основными идеями рентгеноструктурного анализа и дать представление о дороге, следуя которой, можно определить структуру кристалла: измерить расстояния между атомами, дать картину пространственного расположения атомов в молекуле и упаковку молекул в кристалле и т. п. Решая эту задачу, мы, естественно, предельно упростим ее. Наша цель — повторим еще раз — сделать ясными принципы, лежащие в основе метода.

На рисунке 1 изображена атомная структура кристалла йодистой ртути. Молекула этого вещества состоит из одного атома ртути и двух атомов йода. Атомы, образующие кристалл, расположены так, как детали рисунка обоев. Если раскрасить фигурки, соответствующие атомам

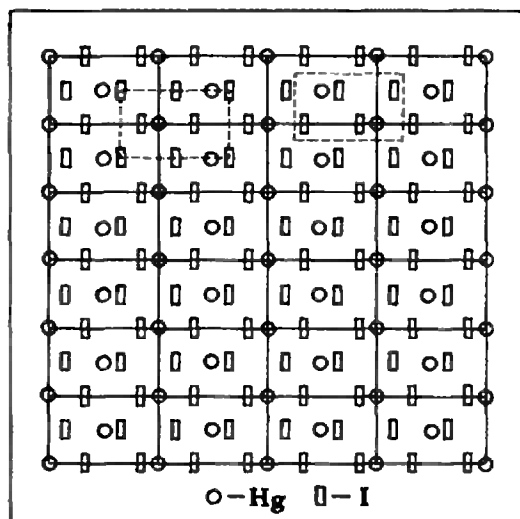


Рис. 1.

разных сортов, в разные цвета, то получатся обои. Может быть, с эстетической точки зрения они оставят желать лучшего, но принцип обоев будет налицо: можно выделить элементарную ячейку, периодическим смещением которой в двух направлениях «строятся» обои. Про обои можно сказать, что они представляют двумерную решетку. Удалите мысленно все детали рисунка, кроме линий, и справедливость предыдущей фразы станет очевидной. Точки пересечения линий называются узлами.

Выбор узлов и, соответственно, линий решетки, произволен. Тем не менее существуют некоторые правила выбора узлов. Дело в том, что от узла решетки отсчитываются координаты атомов, а поэтому естественно выбрать узел в симметричной точке. Из трех, указанных на рисунке 1 вариантов (из бесчисленного множества возможных), мы предпочли наиболее целесообразный.

Мы погрешили против истины, сказав, что на рисунке 1 изображена структура кристалла. На самом деле показана проекция структуры на плоскость. Кристалл — трехмерные обои. Решетка кристалла не двумерная, а трехмерная. Ячейка — не параллелограмм или прямоугольник, а параллелепипед. Он может быть прямоугольным, а в некоторых случаях — выродиться в куб. Ячейка может содержать один, два атома, а в сложных случаях — сотни и тысячи. Понятно, что исследователь, желающий познакомить читателя своей статьи со структурой изученного кристалла, ограничится тем, что изобразит вид в перспективе одной ячейки. На рисунке 2 показана структура очень простого кристалла (оксида цинка), а на рисунке 3 — сложного органического соединения.

Вы познакомились с минимальными сведениями, необходимыми для того, чтобы разобраться в сущности рентгеноструктурного анализа. Принцип этого мощнейшего способа изучения вещества состоит в регистрации вторичного рентгеновского излучения, которое исходит от всех атомов кристалла, когда на него

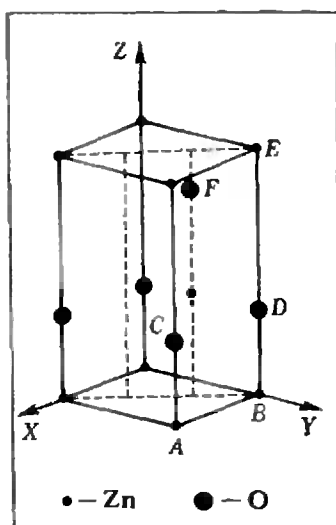


Рис. 2.

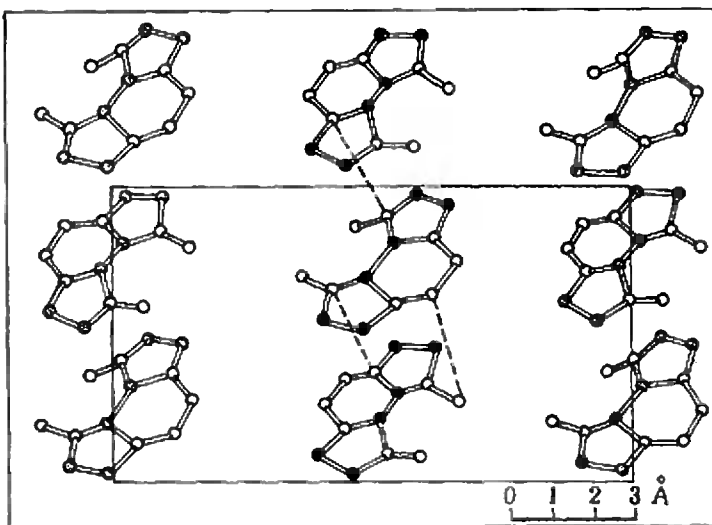


Рис. 3.

падает первичный узкий пучок рентгеновских лучей. Стараются подобрать условия опыта такими, чтобы кристалл был прозрачен для лучей. Тогда в создании рассеянного излучения (вторичного, дифрагированного — это все синонимы) будут участвовать все атомы кристалла.

Явление, о котором идет речь, далеко не простое. Но нам нет нужды входить в детали. Поэтому все проблемы будут рассмотрены на предельно простом примере. Первое упрощение — ограничимся изучением проекции структуры кристалла, второе — будем рассматривать прямоугольную решетку, третье — положим, что на ячейку приходится одна двухатомная молекула.

Сначала займемся описанием «пустой» решетки, из которой атомы «удалены». Остались одни узлы. Отец и сын Брэгги показали, что дифракцию рентгеновских лучей можно рассматривать как своеобразное избирательное (то есть происходящее лишь при некоторых дискретных значениях угла) отражение лучей от систем узловых плоскостей, на которые может быть разбита решетка.

Ясно, что пространственная решетка кристалла может быть разбита на семейства узловых плоскостей самыми разными путями. На картинке проекции «освобожденной» от атомов решетки легко показать следы узловых плоскостей, перпендикулярных к плоскости чертежа (рис. 4). Мы изобразили всего лишь пять се-

мейств плоскостей. Однако эффективными для избирательного отражения, сущность которого будет описана ниже, являются несколько десятков, а то и сотен плоскостей.

Каждая система плоскостей характеризуется индексами  $h$  и  $k$ . Их смысл иллюстрируется на примере семейства с индексами  $h=10$  и  $k=3$  (см. рис. 4). Чтобы не загромождать чертеж, мы построили шесть ближайших к узлу  $O$  плоскостей и провели еще одну, обозначенную  $L$ . Плоскость  $L$  является ближайшей к узлу  $O$ , отсекающей целое число периодов  $a$  и  $b$  по обеим осям решетки. Эти целые числа равны 3 по одной оси и 10 по другой. Проходя через ячейку  $O'$ , плоскость  $L$  отсекает  $1/10$  долю периода  $a$  и  $1/3$  периода  $b$ . Смысл индексов  $h$  и  $k$  становится очевидным. Предоставляем вам самим составить фразу такого типа, как любят математики: «Индексами  $h$  и  $k$  называются...».

Системы плоскостей характеризуются также межплоскостным расстоянием  $d$ . Плоскость  $L$  — ближайшая к узлу  $O'$ , поэтому  $|O'B| = d$ . Отрезки  $|O'A|$  и  $|O'C|$  можно записать, как  $b/k$  и  $a/h$ . Поскольку

$$\sin^2 \widehat{O'AB} + \cos^2 \widehat{BO'C} = 1,$$

получим

$$\frac{1}{d^2} = \frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}. \quad (1)$$

(Предлагаем вам решить превосходную задачу, которая займет у вас не один час времени — выведите ана-



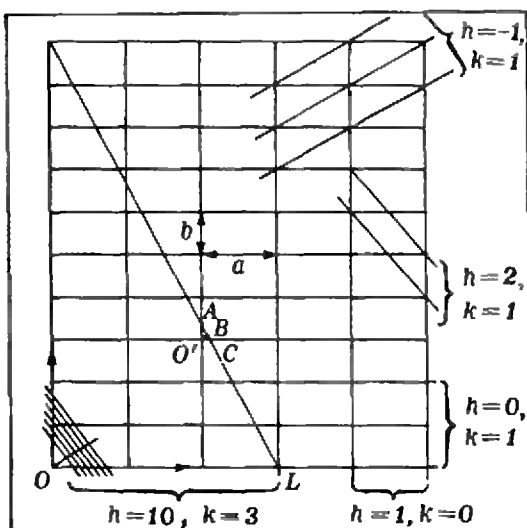


Рис. 4.

логичную формулу для трехмерной решетки, ячейка которой является косоугольным параллелепипедом.)

Переходим к выводу основного закона селективного (избирательного) отражения рентгеновских лучей кристаллом. Пусть падающий луч, представляющий собой электромагнитную волну определенной длины  $\lambda$ , падает на кристалл под каким-то углом. Мы вправе полагать, что отражение рентгеновской волны будет происходить по закону: угол падения равен углу отражения, то есть по такому же закону, как и для оптического луча. Но имеется существенное различие с оптическим лучом. Луч света не проникает в глубь кристалла, а рентгеновский луч способен пройти сквозь кристалл. Это означает, что отражение рентгеновского луча будет происходить не только от внешней поверхности кристалла, а от всех его атомных плоскостей.

Рассмотрим одну из систем, характеризующуюся межплоскостным расстоянием  $d$  (рис. 5). Каждая из плоскостей будет отражать падающий луч под одним и тем же углом  $\theta$  (так называемый угол дифракции). Эти отраженные лучи когерентны, а потому должны интерферировать между собой. Причем вторичные (отраженные) лучи будут усиливать друг друга в том случае, если после отражения от всех плоскостей семейства они будут распространяться в

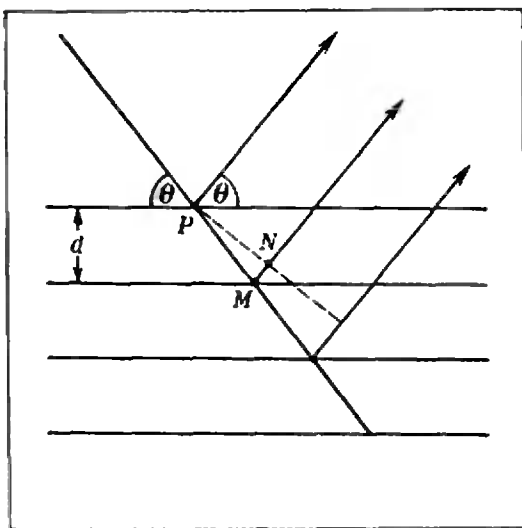


Рис. 5.

одной фазе. Иными словами, если разность хода между лучами равняется целому числу  $n$  длин волн. Разность хода  $|PM| + |MN|$  (см. рис. 5) между соседними отраженными лучами равна  $2d \sin \theta$  (докажите!). Следовательно, условие дифракции — условие усиления отраженных лучей — будет иметь вид

$$2d \sin \theta = n\lambda. \quad (2)$$

Оно носит название уравнения Брэгга.

Кристалл, как мы уже сказали, можно разбить на системы плоскостей бесконечным числом способов. Но эффективной для отражения (теперь вам понятен смысл этих слов, не правда ли?) окажется лишь система плоскостей с таким межплоскостным расстоянием и ориентированная так по отношению к падающему лучу, чтобы выполнялось уравнение Брэгга.

Если падающий луч монохроматический (то есть электромагнитная волна имеет одну определенную длину), то при произвольном положении кристалла по отношению к лучу отражение может и не произойти (вернее, суммарный эффект множества отражений может оказаться нулевым). Однако, поворачивая кристалл, мы можем по очереди привести в отражающее положение различные системы плоскостей. Именно такой способ работы и оказался на практике наиболее подходящим.

Из уравнения Брэгга (уравнение (2)) следует, что для заданной длины волны существует минимальное значение расстояния  $d$  между плоскостями, при котором возможно селективное отражение. Это расстояние равно  $\lambda/2$  (поскольку синус не может быть больше единицы). С другой стороны, из приведенной выше формулы межплоскостных расстояний (формула (1)) ясно, что наибольшим значениям  $d$  соответствуют самые малые значения  $h$  и  $k$ .

Большей частью при рентгеноструктурном анализе используется одна из длин волн характеристического излучения меди, а именно 1,54 ангстрема\*). Тогда наименьшие межплоскостные расстояния, способные принять участие в создании дифракционной картины, равны 0,77 ангстрема. Располагая этими сведениями, можно оценить, сколько систем плоскостей дадут отражения, если известны периоды решетки  $a$  и  $b$ . Попробуйте решить эту задачу геометрически для  $a=10$  и  $b=20$  ангстрем.

Для этой цели надо провести окружность радиуса  $1/\lambda$  в пространстве (в нашем двумерном случае — в плоскости) «обратной» решетки. И далее подсчитать число... (чего, догадаетесь). Но что такое «обратная» решетка и зачем нам понадобилось это новое понятие?

В нашем случае обратной решеткой называется решетка, ячейка которой есть прямоугольник со сторонами  $1/a$  и  $1/b$ . Как видите, прилагательное «обратная» вполне уместно. На рисунке 6 построена такая решетка. Выберем начало координат в каком-либо узле и проведем оси координат — одну перпендикулярно к оси кристалла, по которой период равен  $a$ , вторую перпендикулярно к оси с периодом  $b$ . Проведем теперь в этой решетке вектор (он так и называется: вектор обратной решетки), соединяющий начало отсчета с узлом обратной решетки, номер которого 10-й по одной оси, и 3-й по другой. Чему равна длина

этого вектора? Возвратимся к уравнению (1) для межплоскостного расстояния и без труда и с интересом заметим, что длина вектора равна  $1/d$  для системы плоскостей с  $h=10$  и  $k=3$ .

Но этого мало. Легко доказать (докажите), что проведенный вектор обратной решетки перпендикулярен к системе плоскостей, для которых  $h=10$ ,  $k=3$ . И, конечно, это справедливо для любого узла номера  $h$ ,  $k$ . А как будет обстоять дело, если номер узла содержит кратный множитель  $n$ ? Ответ очевиден — в этом случае длина вектора обратной решетки будет равняться  $n/d$ .

Вот теперь мы располагаем всеми необходимыми сведениями для того, чтобы вернуться к опыту. В чем же состоит эксперимент? Кристалл устанавливается на специальный держатель так, чтобы одна из его осей (одно из ребер его элементарной ячейки) была вертикальной, и поворачивается около этой оси. Таким способом мы по очереди подставляем в «отражающее» положение все системы узловых плоскостей кристалла. Для того чтобы «поймать» отраженный луч, можно прибегнуть ли-

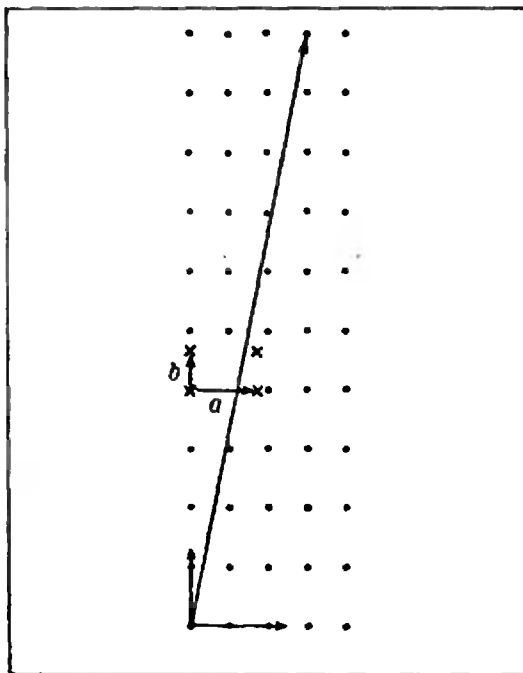


Рис. 6.

\* 1 ангстрем =  $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$ .



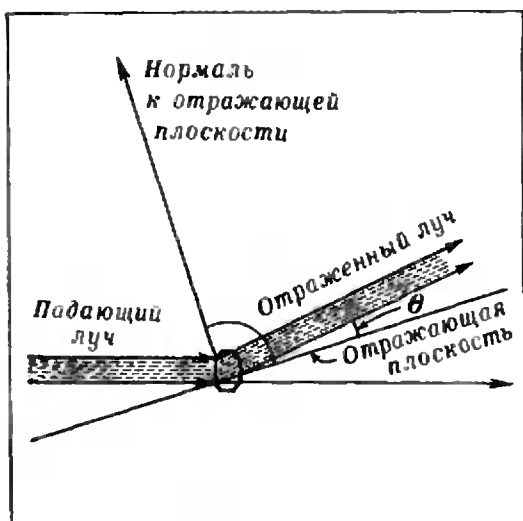


Рис. 7.

бо к фотографическому методу, либо использовать ионизационную камеру, счетчик Гейгера или иной прибор, регистрирующий ионизирующее излучение.

Сейчас, разумеется, все это делается автоматически, а в то время, когда пишущий эти строки начинал работать, процедура была такой. Устанавливался кристалл, затем приемник вторичного луча проворачивался во всем диапазоне углов. Глаз следил при этом за показывающим ток прибором. Потом кристалл поворачивался, скажем, на один градус, и далее эти действия повторялись до тех пор, пока мы не «наткались» на отраженный луч. При этом, как ясно из рисунка 7, фиксировались два угла — значение брэгговского угла  $\theta$  и положение нормали к отражающей плоскости (по отношению к какому-либо произвольному началу отсчета).

Перед исследователем лежал лист бумаги, и он начинал строить обратную решетку. Откладывал положение нормали к отражающей плоскости и наносил на линию этой нормали значение  $n/d$ , которое однозначно определялось из уравнения Брэгга. Когда эта работа заканчивалась (в старое доброе время она занимала месяцы, а сейчас автоматический дифрактометр выполняет ее в сотни раз быстрее), физик обретал картину обратной решетки. Из ее ячейки он немедленно выяснял раз-

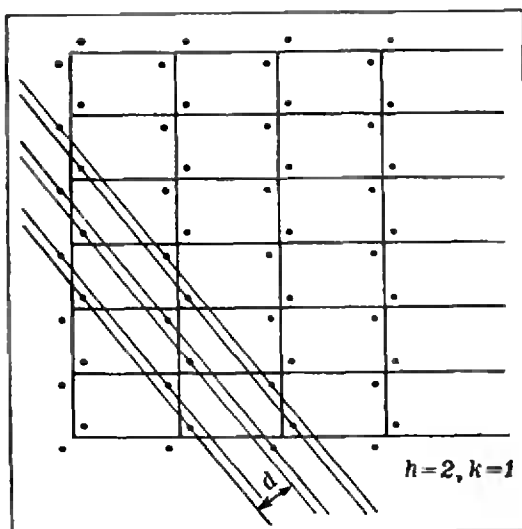


Рис. 8.

меры ячейки кристалла, а каждому отражению мог приписать номер узла обратной решетки, а значит, индексы  $h$  и  $k$  и порядок отражения  $n$ .

Кроме того, исследователю известны интенсивности всех отражений. Таким образом, в его распоряжении имеются практически все сведения о структуре кристалла, все, что касается характера строения молекулы из атомов и кристалла из молекул.

Теперь нам надо перейти от «пустой» решетки, состоящей из одних узлов, к решетке, начиненной атомами. На каких деталях дифракционной картины сказывается структура ячейки? Ответ окажется следующим: структура ячейки влияет на интенсивность отраженных лучей. Что же касается геометрии дифракционной картины, то она определяется только видом решетки. Атомы внутри ячейки не добавляют «лишних» отраженных лучей. В то же время вполне возможно, что структура ячейки заставит пропасть некоторые отражения — доведет их интенсивность до нуля.

Откуда следует такое заключение? Дело в том, что атомы внутри ячейки не создадут новых систем плоскостей. Узор атомов приведет лишь к возникновению «вставных» плоскостей. Взгляните, на рисунке 8 изображена та же решетка, что и на рисунке 4. Но теперь она не «пустая». Выберем опять предельно

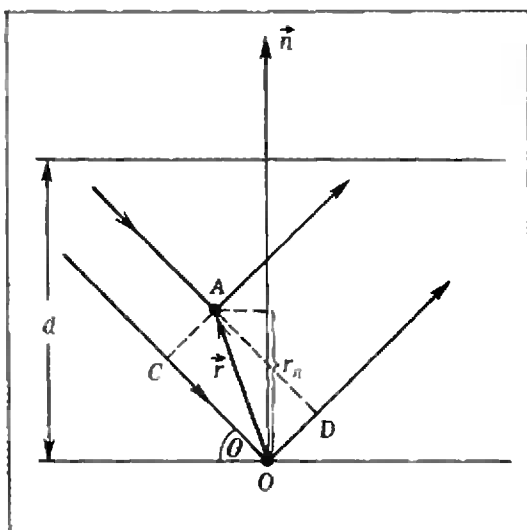


Рис. 9.

простой случай. Предположим, что реальная решетка построена из двухатомных молекул, а узел решетки был взят в центре такой молекулы. Реальная система плоскостей (для примера взят случай  $h=2$  и  $k=1$ ) будет выглядеть теперь, как показано на рисунке 8. Отраженный луч пойдет в ту же сторону, брэгговский угол не изменится.

Покажем, что интенсивность отраженного луча будет зависеть от структуры ячейки — в данном случае от межатомного расстояния в молекуле и от угла, который образует ось молекулы с осью ячейки.

Интенсивность излучения пропорциональна квадрату амплитуды волны. Действительно, пусть в точке наблюдения поле, создаваемое решеткой атомов, записывается как  $A \cos \omega t$ . Интенсивность равна  $A^2 \cos^2 \omega t$ . Черточка сверху означает усреднение по времени (колебания происходят быстро, и опыт фиксирует средние значения). Но  $\overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{2}$  (это несложно доказать). Поэтому интенсивность оказывается пропорциональной  $A^2$  — квадрату амплитуды волны.

В случае решетки двухатомных молекул результирующее поле электромагнитной волны можно рассматривать как сумму полей двух простых решеток. Эти два поля придут в точку наблюдения со сдвигом фаз, который мы обозначим  $2\alpha$ . Сохраняя

выражение  $A \cos \omega t$  для решетки узлов, мы запишем теперь сумму полей двух решеток в виде

$$A \cos (\omega t + \alpha) + A \cos (\omega t - \alpha).$$

Каждый узел «расщепился» на две частицы, создающие одно поле с опережением по фазе, а другое с отставанием. Складывая, возводя в квадрат и усредняя по времени, мы получим, что интенсивность отраженного луча будет пропорциональна  $\cos^2 \alpha$ .

По определению,  $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta$ , где  $\lambda$  — длина волны, а  $\Delta$  — разность хода. Хотя вывод выражения для разности хода  $\Delta$  ничуть не отличается от вывода формулы Брэгга, мы все же для этого случая провели аккуратное построение на рисунке 9, из которого читатель, слегка помучившись, найдет нужное выражение:

$$\Delta = |OC| + |OD| = 2r_n \sin \theta,$$

где  $r_n$  — проекция радиуса-вектора  $r$  (соединяющего атомы молекулы) на направление распространения отраженной волны (на направление нормали  $n$ ),  $\theta$  — брэгговский угол рассеяния. Используем уравнение Брэгга и определение обратного вектора:

$$\Delta = 2r_n \sin \theta = \lambda r_n \frac{n}{d},$$

откуда разность фаз

$$\alpha = \frac{2\pi\Delta}{\lambda} = 2\pi r_n \frac{n}{d}.$$

Итак, интенсивность отраженной волны, пропорциональная  $\cos^2 \alpha$ , действительно определяется структурой элементарной ячейки кристалла. Очевидно, что если атомов в ячейке не два, а много, то все рассуждения будут аналогичными.

Что же... задача решена? Интенсивности дифрагированных лучей связаны со структурой в общем-то простой формулой; расчет интенсивностей отраженных лучей по заданной структуре не сложен. Дело сводится к тому, чтобы определить разности хода между волнами, отраженными всеми «вставными» решетками. Вы можете справиться с этой задачей и для кристалла, состоящего

из сотни атомов. Вопрос лишь во времени.

Но читатель, несомненно, заметил, что расчет, о котором идет речь, не тот, который нам нужен. Задача состоит в нахождении атомного строения из данных опыта, а не в том, чтобы рассчитать дифракционную картину, исходя из сведений о структуре. Прямая задача намного сложнее обратной. Интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды результирующей волны, которая есть сумма тригонометрических функций. Не только технически сложно, но и просто невозможно определить аргументы косинусов, зная лишь квадрат их сумм. Вот если бы опыт давал значения амплитуд рассеяния, тогда дело обстояло бы совсем просто.

На первый взгляд ситуация кажется безнадежной. Долгое время исследователи действовали так называемым методом проб и ошибок. Это значит: придумывали структуру и смотрели, сочетается ли она с опытом. Но так далеко не уедешь.

Были придуманы способы обойти эту трудность. Решающую роль при этом сыграли электронно-вычислительные машины. Хотелось бы дать читателю идею о том, как эта трудность обходится, но разговор наш о рентгеноструктурном анализе зятя-

нулся. «Маленькие хитрости», к которым прибегают исследователи, это, во-первых, введение в структуру тяжелого атома (тогда в первом приближении можно считать, что кристалл состоит из одних этих атомов) и, во-вторых, очень изящная теория, которая показывает, что между разными структурными амплитудами имеются связи.

Да, хорошо было бы рассказать об этом читателю, но для «Кванта» беседа была бы слишком длинной. Посему ничего не остается, как посоветовать интересующемуся читателю обратиться к специальной литературе.

Об успехах метода судят по его результатам. То обстоятельство, что на сегодня определены структуры более 15 тысяч кристаллов, в том числе несколько десятков структур белков, молекулы которых состоят из многих тысяч атомов, говорит само за себя. Определение структуры сложных молекул закладывает фундамент биологической химии и биологической физики. Эти науки находятся сейчас в бурном периоде развития. От них ждут открытия секретов жизни, болезней и смерти. Рентгеноструктурный анализ, несмотря на свой солидный шестидесятилетний возраст, остается на передней линии фронта науки.

**$a = a + 1!$**

Докажем, что любое число равно числу, на единицу большему:

$$a = a + 1.$$

Возьмем тождество

$$a^2 - (2a + 1)a = (a + 1)^2 - (a + 1)(2a + 1).$$

Прибавляя к обеим частям квадрат числа  $\frac{2a + 1}{2}$ ,

получим:

$$\left(a - \frac{2a + 1}{2}\right)^2 = \left(a + 1 - \frac{2a + 1}{2}\right)^2.$$

Извлекая квадратные корни из обеих частей равенства, получим:

$$a - \frac{2a + 1}{2} =$$

$$= a + 1 - \frac{2a + 1}{2},$$

откуда

$$a = a + 1.$$

что и требовалось доказать. Где ошибка? (Этот софизм прислал в редакцию наш постоянный читатель С. Сефибеков).

С. Семенов

## Рукопись, найденная в Сарагосе

Совсем недавно при раскопках в испанском городе Сарагоса археологи обнаружили старинную библиотеку, принадлежавшую некогда известной торговой фамилии Суаресов. Среди прочих книг там оказалась история семьи. Мы сейчас познакомим читателя с одним из фрагментов этой рукописи, поскольку он содержит постановку интересной и современной математической задачи. Итак...

«Вступив в тот возраст, когда рассудительный человек должен позаботиться о преемнике и продолжателе дела, Суарес решил призвать к себе сыновей, Алонсо и Лопеса, чтобы выяснить, насколько они способны заменить его. Сыновья не замедлили явиться, и Суарес обратился к ним с такими словами: «Дети! Я намерен внести от имени каждого из вас сроком на десять лет в некоторое надежное предприятие по 100 000 реалов. Это дело будет приносить ежегодно каждому 20% прибыли, причем распоряжаться вы сможете только этой суммой, но отнюдь не самим капиталом. Часть этих денег вы можете прибавлять в конце года к капиталу, а остальное тратить, как вам вздумается. Ваша цель будет состоять в том, чтобы за 10 лет как можно больше денег потратить на свои нужды, ибо наживать деньги стоит только для того, чтобы их потом тратить. Ответьте мне, как вы будете распоряжаться своими доходами?»

Первым отвечал старший сын Алонсо, известный далеко за пределами города своим легкомыслием и расточительностью: «Отец! Я бы тратил весь доход сразу, поскольку не





вижу смысла заботиться об увеличении капитала, мне не принадлежащего!»

Лопес был, напротив, юношей скромным и добродетельным. Он так отвечал отцу: «Я бы в течение 9 лет обходился лишь тем, что и сейчас имею в твоём доме, отец, а свой доход прибавлял к капиталу. На десятый год я потрачу причитающиеся мне 20%. Надеюсь, что это будет значительная сумма, поскольку капитал, благодаря моим вложениям, значительно увеличится».

Услышав ответы сыновей, почтенный купец нахмурился, и было видно, что ответами он остался недоволен. Когда же сыновья стали просить у него совета, он сказал: «Крайняя расточительность, дети мои, также неразумна, как и крайняя бережливость, а правильное решение находится между этими крайностями. Учитывая это, я стал бы половину дохода прибавлять к капиталу, заботясь о его увеличении, а половину тратил на свои нужды. Вы же, как я выяснил, еще недостаточно разумны и, увы, не способны заменить меня в делах». На другой же день Суарес приказал сыновьям собираться в путь через Пиреней, в далекий Париж, и обучаться у известных парижских ученых математике и прочим наукам...

Здесь мы прервем цитату из «исторического документа», поскольку интересующая нас задача уже сформулирована и даже предложены три различных варианта её решения. Для начала сравним эффективность этих решений. Легко подсчитать (желающие могут проделать это самостоятельно, а остальные — воспользоваться формулами (2) и (3) настоящей статьи) суммы денег, истраченные отцом ( $S$ ), Алонсо ( $A$ ) и Лопесом ( $L$ ) за 10 лет. А именно,

$$S = \left( \left( 1 + \frac{1}{10} \right)^{10} - 1 \right) 10^5 \approx 159374 \text{ реала,}$$

$$A = 2 \cdot 10^5 = 200\,000 \text{ реалов}$$

$$L = \frac{1}{6} \left( \left( 1 + \frac{1}{5} \right)^5 - 1 \right)^2 10^5 \approx 103169 \text{ реалов.}$$

Результаты сравнения парадоксальны. Бережливый Лопес, оказывается, предложил наихудшее реше-

ние, а легкомысленный Алонсо распорядился своими доходами лучше своего рассудительного и многоопытного родителя! Убедительность внешне правдоподобных доводов оказалась обманчивой. Быть может, наилучшее решение отлично от всех трех предложенных? Попробуем в этом разобраться.

Итак, обозначим величину капитала (после отчисления процентов и, возможно, дополнительного вклада) в конце  $k$ -го (считая с момента первоначального вклада) года через  $x_k$ ,  $k=0, \dots, N$ . В нашей задаче  $N=10$ , а величина начального вклада  $x_0=10^5$ . За  $(k+1)$ -й год прибыль составит величину  $ax_k$  (у нас  $a=\frac{1}{5}$ ), и если доля  $\lambda_k$  этой величины была прибавлена к капиталу в конце  $(k+1)$ -го года, то его прирост за год составит  $x_{k+1} - x_k = \lambda_k ax_k$  ( $k=0, \dots, N$ ). (1) Остальная часть прибыли  $(1 - \lambda_k)ax_k$  будет потрачена.

Наши возможности влияния на процесс роста капитала или, другими словами, управления этим процессом, сводятся к выбору вектора — упорядоченного набора чисел  $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1})$ ,  $0 \leq \lambda_i \leq 1$ . Такие векторы мы будем далее называть *управлениями*. Выбор некоторого управления  $\bar{\lambda}$  полностью определяет значение целевой функции  $F$  — общей суммы денег, потраченных за  $N$  лет:

$$F(\bar{\lambda}) = (1 - \lambda_0)ax_0 + (1 - \lambda_1)ax_1 + \dots + (1 - \lambda_{N-1})ax_{N-1}. \quad (2)$$

Задача состоит в нахождении наилучшего, оптимального управления  $\bar{\lambda}^{\text{opt}}$ , т. е. такого управления  $\bar{\lambda}^{\text{opt}}$ , что для любого другого управления  $\bar{\lambda}$

$$F(\bar{\lambda}) \leq F(\bar{\lambda}^{\text{opt}}).$$

Вспомним, что в качестве оптимального Алонсо предлагал управление  $(0, \dots, 0)$ , Лопес —  $(1, \dots, 1, 0)$ , а почтенный купец —  $\left( \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right)$ .

Может быть, у читателя создается впечатление, что такие «задачи управления» нужны лишь тем, кто получает богатое наследство? Разумеется, нет! Вот еще пример. На ферме разводят чересбурых лисиц. Количество лисиц обозначим через  $x_k$ , где  $k=0, 1, \dots, N$  — номер года (нас интересует судьба фермы на ближайше

$N$  лет). Приплод в начале  $(k+1)$ -го года составляет  $ax_k$  (где  $a > 0$  — известное число), причем доля  $\lambda_k$  этого приплода остается на ферме, а остальная часть отправляется на заготовки пушнины. Таким образом, справедливо соотношение (1), а количество шкурок, полученных за  $N$  лет, выражается формулой (2). Как видите, и здесь мы имеем управляемый процесс, состояние которого в каждый «момент»  $k = 0, 1, \dots, N$  характеризуется величиной  $x_k$ , причем на течение этого процесса мы можем воздействовать, выбирая управляющее воздействие  $\lambda_k$  из «области управления», которой в данном случае является отрезок  $[0, 1]$ . Задача состоит в нахождении такого управления, при котором поставленная цель осуществлялась бы наилучшим образом — целевая функция  $F$  достигала бы максимума. Подобные задачи «оптимального управления» процессами, протекающими в «дискретном времени», возникают при исследовании производственных задач на заводах (в этом случае  $k$  — номер завершеного производственного цикла или плановый месяц и т. п.), при описании работы несколько последовательно соединенных химических реакторов ( $k$  — номер реактора) и т. д.

Область математики, в которой разрабатываются методы решения подобных задач, называется *теорией оптимального управления*. Эта теория за последние два десятка лет превратилась в мощную современную математическую науку, впечатляющую как глубокими теоретическими результатами, так и эффективностью в решении прикладных задач управления процессами. Развитие этого направления математической мысли связано с именами таких известных математиков, как Л. С. Понтрягин, Р. Беллман, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелдзе, Е. Ф. Мищенко, Н. Н. Красовский. Мы не будем, однако, излагать общую теорию оптимального управления, созданию этими авторами, а исследуем нашу задачу средствами элементарной математики.

Преобразуем формулу (1) к виду  $x_{k+1} = (1 + a\lambda_k)x_k$ , ( $k = 0, \dots, N-1$ ). (3)

Перемножив равенства (3) почленно при  $k = 0, \dots, n-1$ , мы получим в явном виде зависимость  $x_n$  от управления  $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1})$

$$x_n = (1 + a\lambda_0)(1 + a\lambda_1) \dots (1 + a\lambda_{n-1})x_0. \quad (4)$$

**Предложение I.** Пусть  $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \dots, \lambda_i, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_{N-1})$  — некоторое управление,  $0 \leq i \leq N-2$ ,  $\lambda_i < \lambda_{i+1}$ , а управление  $\bar{\lambda}$  отличается от  $\bar{\lambda}$  только перестановкой чисел  $\lambda_i$  и  $\lambda_{i+1}$ . Тогда  $F(\bar{\lambda}) > F(\bar{\lambda})$ .

Для доказательства достаточно проследить, как преобразуются слагаемые суммы (2) при перестановке чисел  $\lambda_i$  и  $\lambda_{i+1}$ . В силу формулы (4) слагаемые  $(1 - \lambda_k)ax_k$  при  $k \leq i-1$

вообще не зависят от  $\lambda_i$  и  $\lambda_{i+1}$  и, очевидно, не меняются при такой перестановке. Слагаемые  $(1 - \lambda_k)ax_k$  при  $k > i+1$  в силу формулы (4) имеют вид

$$(1 - \lambda_k)ax_n(1 + a\lambda_0) \dots (1 + a\lambda_i) \times \\ \times (1 + a\lambda_{i+1}) \dots (1 + a\lambda_{k-1}),$$

и, следовательно, также не меняются при перестановке чисел  $\lambda_i$  и  $\lambda_{i+1}$ . Таким образом, нам остается рассмотреть лишь сумму остальных двух слагаемых:

$$(1 - \lambda_i)ax_i + (1 - \lambda_{i+1})ax_{i+1} = \\ = (1 - \lambda_i)ax_i + (1 - \lambda_{i+1})(1 + \\ + a\lambda_i)ax_i = ax_i[1(2 - \lambda_i - \lambda_{i+1} - \\ - a\lambda_i\lambda_{i+1}) + a\lambda_i].$$

Величина  $x_i > 0$  и не зависит от  $\lambda_i$  и  $\lambda_{i+1}$ , выражение в круглых скобках при перестановке не меняется, а второе слагаемое в квадратных скобках возрастает. Следовательно,  $F(\bar{\lambda}) > F(\bar{\lambda})$ .

**Предложение II.** Пусть  $\bar{\mu}$  — некоторое управление. Тогда для любого  $n = 0, \dots, N$  существует такое управление  $\bar{\mu}^{(n)} = (\mu_0^{(n)}, \dots, \mu_{N-1}^{(n)})$ , что 1°  $\mu_i^{(n)}$  есть 0 или 1 при любом  $i < n$ , 2°  $F(\bar{\mu}^{(n)}) \geq F(\bar{\mu})$ .

Докажем это утверждение методом математической индукции. При  $n = 0$  это утверждение очевидно, поскольку можно положить  $\bar{\mu}^{(0)} = \bar{\mu}$  и утверждения 1° и 2° будут выполнены автоматически.

Предположим, что для  $n = k$  некоторое управление существует —  $\bar{\mu}^{(k)} = (\mu_0^{(k)}, \dots, \mu_{N-1}^{(k)})$ . Рассмотрим функцию  $y(t)$  одного переменного  $t$ , областью определения которой является отрезок  $[0, 1]$ , заданную формулой

$$y(t) = \\ = F(\mu_0^{(k)}, \dots, \mu_{k-1}^{(k)}, t, \mu_{k+1}^{(k)}, \dots, \mu_{N-1}^{(k)}).$$

Из формул (2) и (4) сразу видно, что  $y(t)$  есть линейная функция  $t$ , т. е.

$$y(t) = At + B$$

при некоторых  $A$  и  $B$ . Заметим, что линейная функция на отрезке  $[0, 1]$  достигает максимума в нуле, если  $A < 0$ , в единице, если  $A > 0$ , а при  $A = 0$  — постоянная функция. По-

ложим теперь

$$\mu_k^{(k+1)} = \begin{cases} 0, & A \leq 0, \\ 1, & A > 0, \end{cases}$$

и  $\mu_i^{(k+1)} = \mu_i^{(k)}$  при  $i \neq k$ ,  $0 \leq i \leq (N-1)$ .

Управление  $\bar{\mu}^{(k+1)}$  удовлетворяет условиям 1° и 2° при  $n = k + 1$ . Действительно, числа  $\mu_i^{(k+1)}$  при  $i < k$  суть нули или единицы по предположению индукции, а  $\mu_k^{(k+1)}$  есть нуль или единица по определению. Далее, поскольку по определению числа  $\mu_i^{(k+1)}$  для любого  $t$ ,  $0 \leq t \leq 1$

$$y(t) \leq y(\mu^{(k+1)}),$$

то  $F(\bar{\mu}^{(k+1)}) \geq F(\bar{\mu}^{(k)})$ . По предположению индукции  $F(\bar{\mu}^{(k)}) \geq F(\bar{\mu})$ , и, следовательно,  $F(\bar{\mu}^{(k+1)}) \geq F(\bar{\mu})$ . Доказательство закончено.

Выделим теперь среди всех управлений управления некоторого специального, простейшего вида. А именно, рассмотрим такое управление  $\bar{\theta}^{(m)}$ , что

$$\theta_i^{(m)} = \begin{cases} 1 & \text{при } i < m, \\ 0 & \text{при } i \geq m, \end{cases}$$

для некоторого  $m$ ,  $0 \leq m \leq N$ . Множество управлений такого вида — мы их в дальнейшем будем называть *ступенчатыми* — содержит  $(N+1)$  элемент. Оказывается, что в нашей задаче оптимальное управление достаточно искать среди ступенчатых.

**Теорема.** Для любого управления  $\bar{\lambda}$  существует такое ступенчатое управление  $\bar{\omega}$ , что  $F(\bar{\omega}) \geq F(\bar{\lambda})$ .

Действительно, в силу предложения II существует такое управление  $\bar{\mu} = (\mu_0, \dots, \mu_{N-1})$ , что  $\mu_i$  есть нуль или единица при любом  $i = 0, \dots, N-1$  и  $F(\bar{\mu}) \geq F(\bar{\lambda})$ . Далее, заметим, что если среди чисел  $\mu_0, \dots, \mu_{N-1}$  есть 0, то, переставляя его местами со следующим за ним числом, мы не уменьшим значения целевой функции  $F$  в силу предложения I. Такими перестановками все нули можно переместить в конец набора, определяющего управление, т. е. перейти к некоторому ступенчатому управлению  $\bar{\omega}$ , причём будут выполнены неравенства  $F(\bar{\omega}) \geq F(\bar{\mu}) \geq F(\bar{\lambda})$ . Теорема доказана.

Выберем теперь среди ступенчатых управлений оптимальное. В силу

формул (2) и (4)

$$F(\bar{\theta}^{(m)}) = (N - m)a(1 + a)^m x_0.$$

Величина

$$C_m = \frac{F(\bar{\theta}^{(m+1)})}{F(\bar{\theta}^{(m)})} = (1 + a) \left( 1 - \frac{1}{N - m} \right)$$

убывает при возрастании  $m$ . Обозначим через  $M$  первое целое число, большее либо равное нулю и  $N - 1 - \frac{1}{a}$ .

Тогда в силу определения чисел  $C_m$  и выбора числа  $M$ , справедливы неравенства

$$C_0 > C_1 > \dots > C_{M-1} > 1 \geq C_M > C_{M+1} > \dots > C_{N-1}.$$

Следовательно,

$$F(\bar{\theta}^{(0)}) < \dots < F(\bar{\theta}^{(M)}) \geq F(\bar{\theta}^{(M+1)}) > F(\bar{\theta}^{(M+2)}) > \dots > F(\bar{\theta}^{(N)}).$$

Таким образом, в качестве оптимального можно выбрать управление  $\bar{\theta}^{(M)}$ .

Вернемся к нашей задаче из «древней рукописи». Для нее  $N = 10$ ,  $a = \frac{1}{5}$

и  $M = 4$ . Таким образом, управление  $\bar{\theta}^{(4)} = (1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0)$  будет оптимальным, а значение целевой функции — общей суммы потраченных за десять лет денег — при выбранном таким образом управлении есть

$$F(\bar{\theta}^{(4)}) = \left( 1 + \frac{1}{5} \right)^4 \times 10^5 \frac{6}{5} \approx 248832 \text{ реала.}$$

Таким образом, решения задачи, предложенные нашими тремя героями, действительно не являлись оптимальными. Заметим, что управление  $\bar{\theta}^{(5)}$  также оптимально, поскольку  $C_4 = 1$  и  $F(\bar{\theta}^{(4)}) = F(\bar{\theta}^{(5)})$ . Следовательно, оптимальное управление может быть выбрано среди ступенчатых, вообще говоря, не единственным образом.

**Задача 1.** Какие условия на  $a$  и  $N$  обеспечивают единственность оптимального управления среди ступенчатых?

**Задача 2.** Верно ли, что для нашей задачи оптимальное управление обязательно должно быть ступенчатым?

**Задача 3.** Найти такое наименьшее число лет  $N > 10$ , что управление бережливого Лопеса  $(1, \dots, 1, 0)$  все же окажется выгодней, чем управление  $(0, 0, \dots, 0)$ , предложенное расточительным Алонсо.



*А. Дозоров*

## Что это значит — «навести на резкость»?

Наводить на резкость, то есть добиваться резкого изображения, — приходилось всем. Во многих случаях смысл этого действия прост и понятен. Например, при фотографировании навести на резкость означает, что изображение, создаваемое объективом фотоаппарата, нужно поместить точно на эмульсионный слой пленки. В кинозале требование публики добиться резкости изображения на экране сводится к требованию совместить изображение кадра фильма с плоскостью экрана.

Смысл наводки на резкость несколько затушевывается, если при

наблюдении не требуется экран, например, если предмет рассматривается невооруженным глазом. Давайте проведем небольшой эксперимент. Посмотрите в окно. Удаленные предметы видны достаточно резко. Теперь посмотрите на предметы, находящиеся на расстоянии нескольких метров. Они тоже видны резко. Наконец, читая эту страницу, вы видите резкое изображение текста. Все это происходит потому, что глаз «автоматически» наводит на резкость. Управляет этой процедурой аккомодационный мускул глаза, который соответствующим образом деформирует хрусталик глаза. В результате изображение предмета попадает точно на сетчатку глаза (так сказать, на экран) — изображение получается резким (рис. 1).

Другими словами, при изменении расстояния  $d$  от предмета до наблюдателя (точнее, до глаза наблюдателя) расстояние  $f$  от хрусталика глаза (линзы) до сетчатки (экрана) остается неизменным. Это возможно лишь в том случае, если фокусное расстоя-



ние  $F$  хрусталика изменяется в соответствии с формулой линзы:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{d} + \frac{1}{f} = D,$$

где  $D = \frac{1}{F}$  — оптическая сила линзы.

Если глаз рассматривает удаленный предмет ( $\frac{1}{d} \rightarrow 0$ ), мышцы, управляющие хрусталиком, наиболее расслаблены. В этом случае  $F = f$  и  $D = \frac{1}{f}$ . Обычно расстояние  $f$  между хрусталиком глаза и сетчаткой порядка 3 см, поэтому  $F = 33$  дптр и  $D = 33$  дптр. При приближении предмета к глазу начинает работать аккомодационная мышца: ее задача — уменьшить фокусное расстояние хрусталика (в соответствии с формулой линзы). Хрусталик становится более выпуклым, радиус кривизны его поверхности уменьшается. Когда предмет находится от глаза на расстоянии наилучшего зрения — для нормального глаза это 25 см, — оптическая сила хрусталика становится равной 37 дптр.

Дальнейшее уменьшение расстояния между предметом и глазом вызывает состояние перенапряженности аккомодационной мышцы. Она перестает справляться со своей задачей: изображение уже не проецируется на сетчатку, оно нерезко. Если мышцы глаза достаточно сильны, то оптическую силу хрусталика удается довести до 43 дптр — предмет удается четко видеть с расстояния 10 см, детали его видны отчетливее всего. Однако в таком состоянии глаз быстро устает. Таким образом, расстояние наилучшего зрения соответствует оптимальному варианту: хорошо различимы мелкие детали предмета, а мышца еще не перенапряжена.

Теперь рассмотрим случай, когда глазу в наблюдении за предметом помогает система линз, например, микроскоп. Оптическая система микроскопа создает увеличенное мнимое изображение  $A'B'$  предмета  $AB$  (рис. 2). Это изображение затем рассматривается непосредственно глазом. Наблюдая таким образом за предметом, мы

почему-то не всегда видим его резко. Почему же глаз в этом случае автоматически «не добивается» резкого изображения? В чем смысл наводки на резкость при рассматривании предмета с помощью микроскопа? Что мы делаем, перемещая окуляр микроскопа?

Дело в том, что изображение предмета, полученное с помощью системы линз, может оказаться слишком близко к глазу. Тогда нужно переместить либо глаз, либо это изображение так, чтобы новое положение соответствовало возможностям аккомодационной мышцы. Лучше всего, если изображение предмета будет находиться от глаза на расстоянии наилучшего зре-

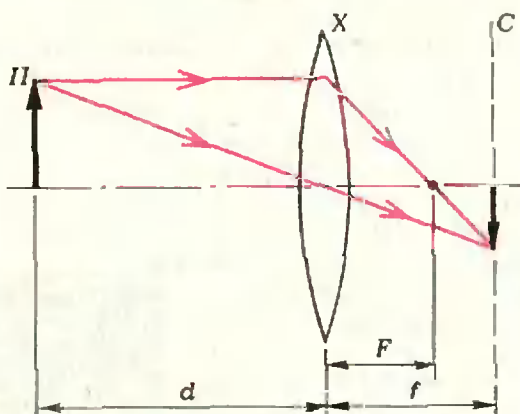


Рис. 1. Получение изображения на сетчатке глаза наблюдателя. Здесь П — предмет, X — хрусталик глаза, С — сетчатка.

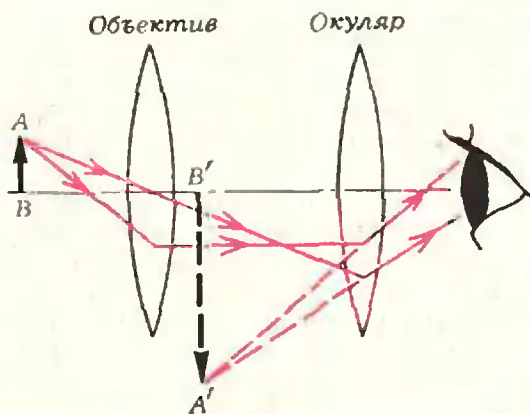


Рис. 2. Оптическая система микроскопа. Увеличенное мнимое и перевернутое изображение  $A'B'$  предмета  $AB$  затем рассматривается глазом наблюдателя.

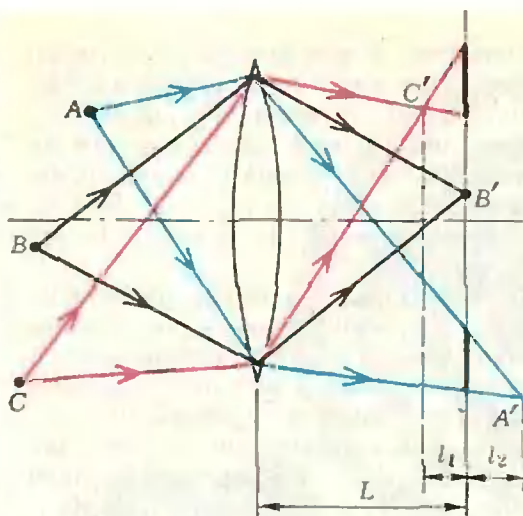


Рис. 3. Влияние ширины светового пучка на глубину резкости изображения. Чем уже пучки, тем меньше размытость изображений точек  $A$  и  $C$  на экране.

ния. При этом, если удалить глаз от окуляра, не все лучи, выходящие из окуляра, попадут в глаз наблюдателя и окончательное изображение предмета на сетчатке будет менее ярким. Поэтому лучше «отодвинуть» изображение. А это легко сделать, перемещая окуляр, то есть меняя расстояние между объективом и окуляром. Именно в этом и заключается смысл наводки на резкость при рассмотрении предмета с помощью системы линз.

До сих пор мы молчаливо предполагали, что рассматриваемый объект — плоский. На самом деле объекты в большинстве случаев трехмерны, а изображение их в любой оптической системе получается на плоскости.

Например, построим изображения точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ , принадлежащих объекту, но находящихся на разных расстояниях от линзы (рис. 3). Все три изображения лежат в разных плоскостях. Если экран поместить в плоскость, где находится резкое изображение точки  $B$ , то точки  $A$  и  $C$  изобразятся на экране не точками, а светлыми кружками, так называемыми кружками рассеяния. Нетрудно видеть, что размеры кружков рассеяния тесно связаны с размерами линзы: чем меньше диаметр линзы, тем меньше размытость изображений точек  $A$  и  $C$ . Следовательно, чем уже световые пучки, тем более резко можно

отобразить на плоскость различно удаленные точки предмета. Другими словами, ограничивая световые пучки, можно улучшить *глубину резкости изображения*. Что это значит?

Когда человек рассматривает изображение невооруженным глазом, то кружок рассеяния воспринимается практически точкой (видно резкое изображение), если угол зрения  $\alpha$ , под которым виден кружок, порядка  $1' \approx 3 \cdot 10^{-4}$  рад. Обычно мы рассматриваем изображение с расстояния наилучшего зрения  $l_0 = 25$  см. Тогда допустимый диаметр кружка

$$2r = l_0 \operatorname{tg} \alpha \approx l_0 \alpha \approx 75 \cdot 10^{-4} \text{ см} = 0,075 \text{ мм}.$$

Пусть точки  $A$  и  $C$  (см. рис. 3) в плоскости экрана изображаются кружками рассеяния одного и того же радиуса  $r$ . В этом случае геометрическая глубина резкого изображения (расстояние между плоскостями, в которых получают резкие изображения точек  $A$  и  $C$ ) равна

$$l_1 + l_2 \approx \frac{2rL}{D} \approx \frac{4l_0\alpha}{D},$$

где  $L$  — расстояние от линзы до экрана,  $D$  — диаметр линзы. Отсюда непосредственно видно, что глубина резкости действительно связана с шириной световых пучков.

Поскольку различные точки предмета изображаются не точками, а кружками рассеяния, важно, чтобы эти кружки не накладывались друг на друга. Если два соседних кружка рассеяния не перекрываются, они воспринимаются глазом отдельно. В таком случае говорят, что оптическая система *разрешает* эти две точки. Если же кружки накладываются друг на друга, в изображении получается одно светлое пятно, то есть две точки предмета системой не разрешаются. С уменьшением размеров линзы уменьшаются размеры кружков рассеяния и, следовательно, увеличивается разрешающая способность. Если диаметр линзы велик, то разрешающая способность становится низкой и вместо четкого изображения получается размазанное пятно. Таким образом, ограничение пучка света, идущего от предмета, является принципиальным.



В любой оптической системе световые лучи действительно оказываются ограниченными. В роли ограничителей выступают либо оправы линз, либо специальные диафрагмы, диаметр которых может изменяться. Для глаза такой диафрагмой является радужная оболочка, имеющая отверстие переменной величины — зрачок.

Но сужение световых пучков уменьшает световой поток, поступающий в оптическую систему, и тем самым уменьшает освещенность изображения. Для примера рассмотрим фотоаппарат. Чаще всего фотографируются достаточно удаленные предметы, так что их изображения получаются практически в фокальной плоскости объектива фотоаппарата. Тогда освещенность, равная отношению светового потока к площади изображения, оказывается пропор-

циональной отношению квадрата диаметра объектива к квадрату его фокусного расстояния (покажите это самостоятельно). Это последнее отношение называют *светосилой объектива*.

Таким образом, желание улучшить глубину резкости приводит к уменьшению освещенности изображения. Хорошие объективы должны обеспечивать хорошее качество изображения с возможно большей его освещенностью.

В заключение отметим, что в этой статье мы говорили о глубине резкости и разрешающей способности только на языке геометрической оптики. Однако на самом деле такие явления, как дифракция света, недостатки оптической системы, свойства используемого фотоматериала, тоже играют немаловажную роль.

## Загадочная дифракционная картина



Однажды вечером я ехал в автобусе. На улице было около двадцати градусов мороза. Пока пассажиров было мало, окна автобуса были чистыми. Но вот люди заподняли салон, и через некоторое время оконные стекла покрылись тонким слоем льда. Лед был настолько тонким, что сквозь него было хорошо виден вечерний город.

Очень красиво выглядели уличные фонари. Каждый фонарь окаймляла цветная звездочка, такая, как показано на рисунке. Нежные цвета ее лучей, от фиолетового в центре до красного на концах, красиво переливались на матовой поверхности стекла. Несомненно, это была дифракционная картина! Как она возникла?

Только по виду, без дополнительного исследования объяснить происхождение этой картины очень трудно. По-видимому, одно из объяснений может быть таким.

Кристаллики льда, осевшие на стекле, образуют дифракционную решетку. Она-то и создает дифракционную картину. Белое изображение фонаря в центре — нулевой максимум, а вдоль лучей звездочки располагаются максимумы первого порядка для всех цветов (спектр первого порядка). Шестиугольная форма картины связана, скорее всего, с аналогичной формой кристалликов льда (снежинок, осевших на стекле).

По результатам наблюдений можно даже оценить величину периода решетки. Запишем условие главных максимумов для решетки:

$$d \sin \varphi = k \lambda.$$

Здесь  $d$  — период решетки,  $\varphi$  — угол, определяющий направление на максимум  $k$ -го порядка,  $\lambda$  — длина волны. При рассмотрении с расстояния около двух метров радиус звездочки для красного цвета составляет приблизительно два сантиметра. Это означает, что первый максимум ( $k=1$ ) для красного света ( $\lambda_{кр} = 7 \times 10^{-7}$  м) виден под углом  $\varphi$  таким, что

$$\sin \varphi_{кр} \approx \frac{2 \text{ см}}{200 \text{ см}} = 0,01.$$

Тогда

$$d = \frac{\lambda_{кр}}{\sin \varphi_{кр}} \approx 0,07 \text{ мм.}$$

А как вы объясните возникновение этой красивой картины?

*В. Булат*



А. Николаев .

## Прибор для изучения преломления света

Явление преломления света на границе двух сред подробно изучается только в 10-м классе. Однако это явление столь распространено в природе, что все наши читатели, безусловно, неоднократно встречались с ним. В данной статье рассказывается, как можно самостоятельно изготовить прибор для проведения опытов по преломлению света.

Если луч света падает на границу раздела двух сред, то луч падающий, луч преломленный и перпендикуляр к поверхности раздела, проведенный через точку падения луча, лежат в одной плоскости; при этом отношение синуса угла падения  $\alpha$  к синусу угла преломления  $\beta$  постоянно для данных двух сред:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n.$$

Это — закон преломления света; постоянную величину  $n$  называют относительным показателем преломления или показателем преломления второй среды относительно первой:

$$n = \frac{n_2}{n_1}.$$

С помощью прибора, показанного на рисунке 1, можно проделать несколько опытов, подтверждающих закон преломления света.

Но прежде о самом приборе. Основная его часть — это прозрачная кювета. Ее можно, например, склеить из плексигласа или обыкновенного стекла или воспользоваться готовой коробочкой из какого-нибудь про-

зрачного материала. В наших опытах использовалась кювета длиной 12 см, шириной 5 см и высотой 6 см (в принципе, эти размеры могут быть и больше).

Вторым, не менее важным, элементом прибора является прицельная рамка. С помощью свободных горизонтальных осей она крепится изнутри к передней и задней стенкам кюветы на расстоянии 4 см от ее правого торца. Длина рамки 11 см, на ее свободном конце имеется смотровое окошко.

Посередине окошка параллельно оси вращения рамки натянут волосок из тонкой медной проволоки. Второй такой же волосок натянут вблизи оси вращения, на расстоянии около 1 см от нее. Эти два волоска и ось вращения рамки лежат в одной плоскости.

К передней стенке кюветы снаружи неподвижно прикрепляется транспортир так, что его осевая линия  $0-180^\circ$  расположена вертикально, а ось вращения рамки проходит через середину осевой линии. На дно кюветы наклеивается миллиметровая шкала, начало которой совпадает по вертикали с осью вращения рамки. В нашем приборе ось вращения находилась на высоте  $h = 52$  мм.

Изготовив таким образом прибор, можно приступить к опытам. Расскажем о некоторых из них.

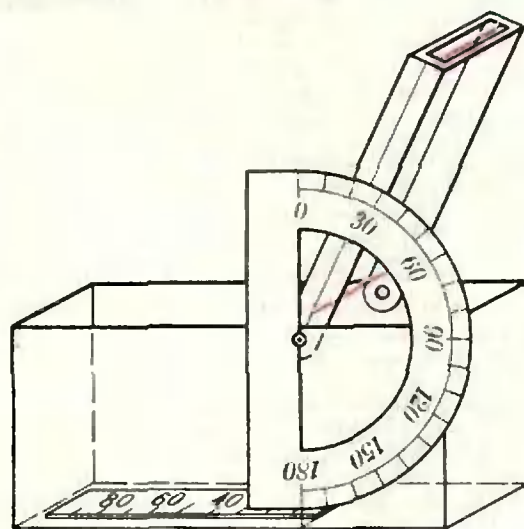


Рис. 1.



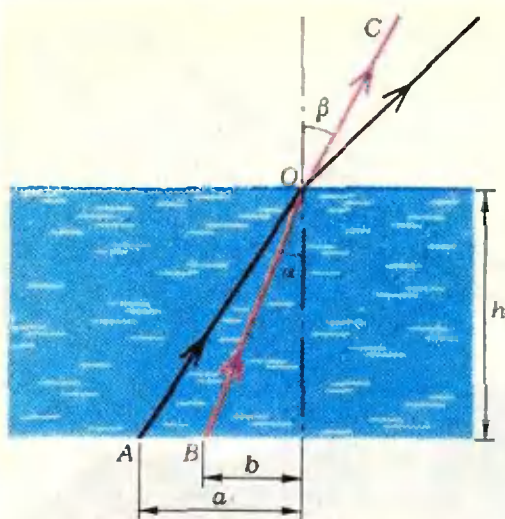


Рис. 2.

**Опыт 1.** Если рамку установить под углом  $45^\circ$  к вертикали, то в прицел (по двум волоскам) видна точка  $A$  (рис. 2), совпадающая с 52-м делением миллиметровой шкалы, то есть  $a = 52$  мм. Высота  $h$  оси вращения рамки тоже равна 52 мм. Следовательно, опыт подтверждает, что в однородной среде свет распространяется прямолинейно.

**Опыт 2.** Нальем в кювету воды до уровня оси вращения рамки. Теперь при том же положении рамки, что и в первом опыте, в прицел будет видна не точка  $A$ , а точка  $B$ , находящаяся на расстоянии  $b < a$  (см. рис. 2). Это означает, что луч света, имеющий в воде направление  $BO$ , пересекая границу вода — воздух, преломляется и в воздухе идет по направлению  $OC$ . Другими словами, угол  $\alpha$ , который составляет падающий луч с нормалью к границе раздела, не совпадает с углом  $\beta$  преломленного луча.

**Опыт 3.** Установим прицельную рамку строго вертикально. При этом в прицел под водой видно начало шкалы — ее нулевое деление. Значит, если угол падения  $\alpha = 0$ , то и угол преломления  $\beta = 0$ . Или, иначе, если луч падает перпендикулярно к границе двух сред, то он не преломляется. Это — важный частный случай закона преломления, о котором не следует забывать.

**Опыт 4.** Определим показатель преломления воды относительно воздуха. Для этого установим рамку под некоторым углом, например, под углом  $30^\circ$ . Это будет и углом преломления  $\beta$  для луча света, переходящего из воды в воздух. В прицел будет видно 21-е деление шкалы, то есть  $b = 21$  мм (см. рис. 2).

Найдем синус угла падения  $\alpha$ :

$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2 + h^2}} = 0,37.$$

Синус угла преломления

$$\sin \beta = \sin 30^\circ = 0,5.$$

Согласно закону преломления света

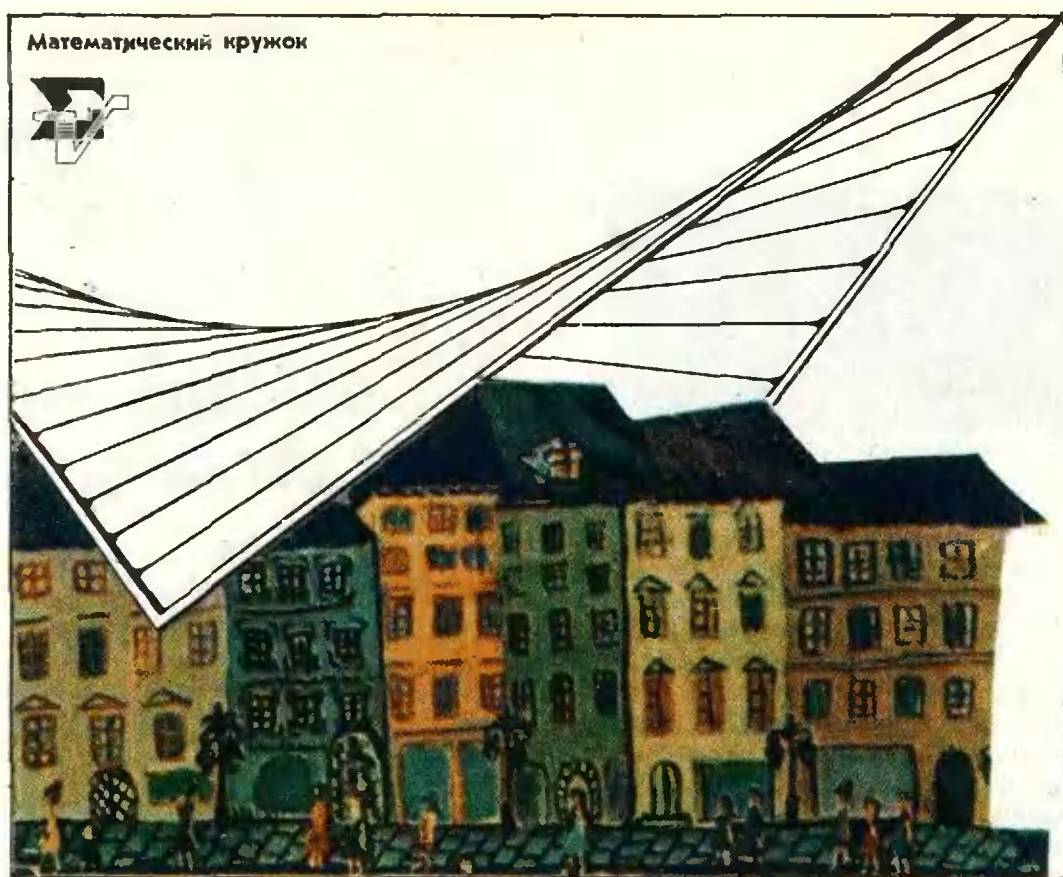
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1},$$

где  $n_2/n_1$  — показатель преломления воздуха (второй среды) относительно воды (первой среды). Отсюда показатель преломления воды относительно воздуха

$$n = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = 1,33.$$

С помощью предлагаемого прибора можно определить и предельный угол полного внутреннего отражения для воды. На этот раз прицельную рамку придется установить под углом, близким к  $90^\circ$ . Для отчетливой видимости шкалы на дне сосуда размеры прибора лучше увеличить в 2—3 раза.

Можно также проводить опыты не с чистой водой, а с растворами сахара или соли и исследовать зависимость показателя преломления от концентрации раствора.



Л. Кузнецова, З. Скопец

## Седлообразная поверхность

Каждый из вас, несомненно, знает, что множеством точек плоскости, равноудаленных от двух данных точек, является серединный перпендикуляр соединяющего их отрезка. Так же просто устроены множества точек, равноудаленных от двух параллельных или пересекающихся прямых. На рисунке 1 изображены два из этих множеств, правда, уже не для плоскости, а для пространства.

А как выглядит множество точек, равноудаленных от двух скре-

щих и в а ю щ и х с я прямых? Об этом вы и узнаете, прочитав статью.

Прежде чем перейти к основному изложению, дадим определение *поворота пространства вокруг оси*.

*Поворотом пространства* называется такое перемещение пространства, при котором множество неподвижных точек образует прямую (она называется *осью поворота*). При повороте пространства вокруг оси каждая плоскость, перпендикулярная к оси поворота, переходит в себя. Получающиеся перемещения этих плоскостей являются поворотами вокруг точек их пересечения с осью на один и тот же угол в одном и том же направлении \*) (рис. 2).

Обозначать поворот с осью  $l$  мы будем через  $R_l$ , поворот, обратный повороту  $R_l$ , — через  $R_l^{-1}$ .

\*) Тожественное перемещение тоже можно считать поворотом пространства вокруг оси (на нулевой угол), но в этой статье такие повороты встречаться не будут.

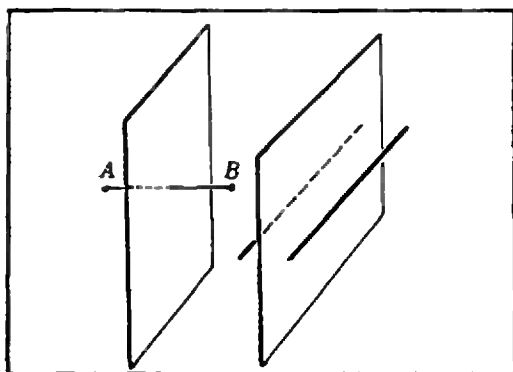


Рис. 1.

Для описания нашего множества точек, (обозначим его через  $F$ ) нам понадобится несколько утверждений о поворотах. Мы будем их формулировать по мере надобности в виде лемм, а доказательства всех лемм соберем в конце статьи. Для читателя будет очень полезно доказать эти леммы самостоятельно.

1. Первым делом покажем, что через каждую точку нашего множества проходят две принадлежащие ему прямые.

Пусть  $m$  и  $n$  — данные скрещивающиеся прямые и точка  $A$  равноудалена от них. Обозначим через  $A_1$  и  $A_2$  ортогональные проекции этой точки на прямые  $m$  и  $n$  соответственно (рис. 3). Пусть  $l$  — перпендикуляр к плоскости  $A_1AA_2$ , проходящий через точку  $A$ . Повернем пространство вокруг оси  $l$  так, чтобы точка  $A_1$  перешла в точку  $A_2$ . Прямая  $m$  перейдет при этом в прямую  $m_1$ , проходящую через точку  $A_2$  и перпендикулярную к прямой  $AA_2$ . Далее можно сделать два различных поворота с осью  $AA_2$  — таких, что прямая  $m_1$  перейдет в прямую  $n$ :  $R_{AA_2}$  и  $R_{AA_2}$ . В результате композиции поворотов  $R_l$  и  $R_{AA_2}$  ( $R_l$  и  $R_{AA_2}$ ) прямая  $m$  перейдет в прямую  $n$ . Оказывается, справедлива такая лемма: композиция двух поворотов вокруг пересекающихся осей является поворотом вокруг оси, проходящей через точку их пересечения. Поэтому существует такая прямая  $u$ , проходящая через точку  $A$ , что  $R_{AA_2} \circ R_l = R_u$ . Аналогично, существует такая прямая  $v$ , проходящая через  $A$ , что  $R_{AA_2} \circ R_l = R_v$ .

Упражнение 1. Проверьте, что оси  $u$  и  $v$  не совпадают.

Итак, если точка  $A \in F$ , то через нее проходят оси двух поворотов, отображающих прямую  $m$  на прямую  $n$ . С другой стороны, любая точка  $A$ , лежащая на оси поворота, отображающего прямую  $m$  на прямую  $n$ , принадлежит нашему множеству: так как поворот — перемещение, расстояние от точки  $A$  до прямой  $m$  равно расстоянию от образа точки  $A$  до образа прямой  $m$ , то есть расстоянию

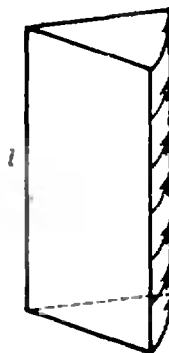


Рис. 2.

от точки  $A$  до прямой  $n$ .

2. А существует ли хотя бы одна точка, принадлежащая нашему множеству?

Проведем через прямую  $m$  плоскость, параллельную прямой  $n$ , а через прямую  $n$  плоскость, параллельную прямой  $m$ . Эти плоскости параллельны. Обозначим через  $\alpha$  плоскость, равноудаленную от них. Ортогональные проекции  $m'$  и  $n'$  прямых  $m$  и  $n$  на плоскость  $\alpha$  пересекутся в некоторой точке  $O$  (рис. 4). Очевидно,

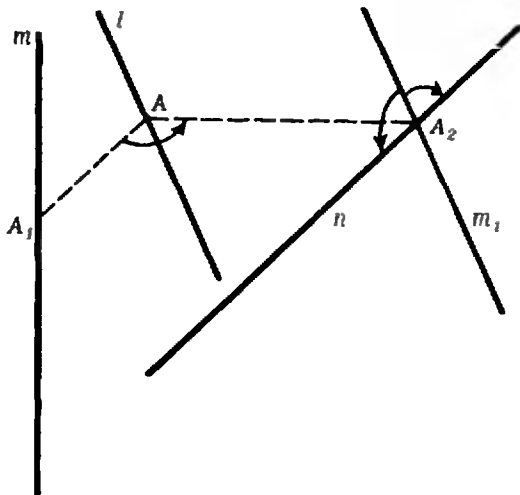


Рис. 3.



точка  $O$  принадлежит множеству  $F$ . А тогда, как мы уже выяснили, через нее проходят по крайней мере две прямые, состоящие из точек нашего множества.

**У п р а ж н е н и е 2.** Докажите, что через точку  $O$  проходят ровно две такие прямые (обозначим их через  $x$  и  $y$ ). Покажите, что этими прямыми являются оси симметрии прямых  $m'$  и  $n'$ .

Итак, наше множество содержит перпендикулярные прямые  $x$  и  $y$ , причем через каждую точку этих прямых проходит еще одна прямая, принадлежащая нашему множеству.

3. Убедимся теперь, что объединение точек этих прямых образует все наше множество. Докажем для этого, что если точка  $A \in F$  не лежит ни на прямой  $x$ , ни на прямой  $y$ , то одна из проходящих через нее прямых, принадлежащих множеству, пересекает  $x$ , а другая  $y$ , и что через каждую его точку проходит только две такие прямые.

а) На каждой из прямых  $m$  и  $n$  отметим стрелкой некоторое направление, например, как на рисунке 4. Тогда любая ось поворота, переводящего направленную прямую  $m$  в направленную прямую  $n$  (с направлениями, указанными на рисунке 4!), параллельна плоскости, проходящей через прямую  $x$  и перпендикулярную к плоскости  $\alpha$ .

В самом деле, ось  $u$  образует с прямыми  $m$  и  $n$  равные углы. Перенесем параллельно прямые  $m$ ,  $n$  и

ось  $u$  так, чтобы они проходили через точку  $O$  (см. рис. 4). Получим прямые  $m'$ ,  $n'$  и  $u'$ . Поскольку при параллельных переносах углы между прямыми не меняются, прямая  $u'$  образует с прямыми  $m'$  и  $n'$  равные углы. Значит, она лежит в плоскости  $xOz$ , где  $z \perp \alpha$  (см. упражнение 2 и рис. 4). Следовательно, прямая  $u$  параллельна этой плоскости.

Возьмем теперь две оси  $u$  и  $v$  поворотов, переводящих прямую  $m$  в прямую  $n$  с сохранением направления. Покажем, что прямые  $u$  и  $v$  скрещиваются.

Предположим сначала, что они пересекаются в точке  $B$ . Выполним поворот вокруг оси  $u$ , переводящий  $m$  в  $n$  с сохранением направления, затем — поворот вокруг оси  $v$ , переводящий  $n$  в  $m$  — также с сохранением направления. Поскольку  $u$  и  $v$ , по предположению, пересекаются, композиция указанных поворотов — поворот (лемма из п. 1). Этот поворот отображает прямую  $m$  на себя с сохранением направления. Но это невозможно, как показывает такая лемма: *при повороте пространства вокруг оси только одна прямая отображается на себя с сохранением направления — ось поворота.*

Предположим теперь, что  $u \parallel v$ . Как и выше, при перемещении  $R_v^{-1} \circ R_u$  прямая  $m$  переходит в себя с сохранением направления. С другой стороны, композиция двух поворотов с параллельными осями является либо поворотом относительно третьей параллельной им оси, либо переносом в направлении, перпендикулярном к этим осям. В первом случае  $m \parallel u$ , а тогда и  $n \parallel m$ . Во втором —  $m \perp u$ , и получающаяся из  $m$  поворотом вокруг  $u$  прямая  $n$  лежит в одной плоскости с  $m$ .

Таким образом, прямые  $u$  и  $v$  не параллельны и не пересекаются. Значит, они скрещиваются. Объединим эти оси в один класс.

б) Сменим направление на одной из данных прямых, например, на  $n$ . Тогда оси поворотов, отображающих прямую  $m$  на  $n$  (с заданными на них новыми направлениями), также попарно скрещиваются и параллельны плоскости  $yOz$  (см. рис. 4). Полученные оси отнесем к другому классу.

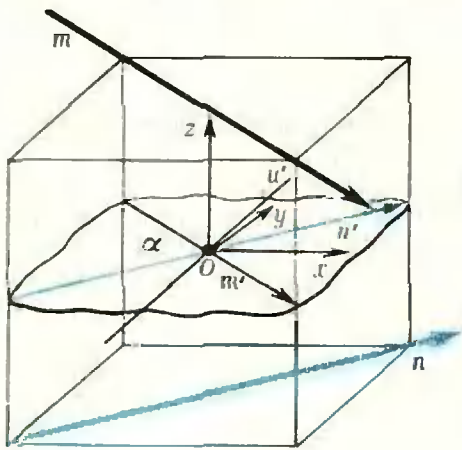


Рис. 4.

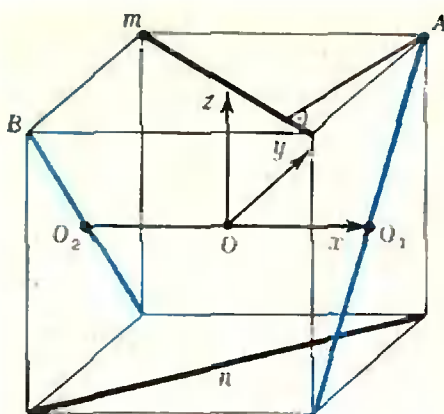


Рис. 5.

в) Пусть ось  $u$  принадлежит первому классу, а ось  $v$  — второму. Покажем, что прямые  $u$  и  $v$  пересекаются. Действительно, при перемещении  $R_v^{-1} \circ R_u$  прямая  $m$  перейдет в себя с изменением направления. Поэтому получающееся преобразование прямой  $m$  — симметрия относительно некоторой точки  $C \in m$  (докажите!). Следовательно,  $R_v^{-1} \circ R_u(C) = C$  и  $R_v(C) = R_u(C) = D$ . Из  $R_u(C) = D$ ,  $R_v(C) = D$  следует, что все точки прямых  $u$  и  $v$  равноудалены от точек  $C$  и  $D$ . Но тогда  $u$  и  $v$  лежат в одной плоскости (см. рис. 1). Поэтому если  $u$  и  $v$  не пересекаются, то они параллельны. Поскольку  $u \parallel xOz$  и  $v \parallel yOz$ , из  $u \parallel v$  следует, что  $u \parallel z$ . Но это невозможно, так как  $z \perp m$ . Следовательно,  $u$  и  $v$  пересекаются.

г) Оси  $x$  и  $y$ , очевидно, разных классов. Поэтому каждая ось пересекает либо прямую  $x$ , либо прямую  $y$ . Поскольку через точку множества  $F$  не могут проходить три оси (так как тогда две из них принадлежали бы к одному классу), «посторонних» точек в фигуре нет.

4. Остается построить наше множество. Построим для этого параллелепипед с осями, параллельными прямым  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и центром в точке  $O$  (см. рис. 5), такой, что диагонали верхнего и нижнего оснований лежат на прямых  $m$  и  $n$  соответственно и расстояние от вершины  $A$  до прямой  $m$  равно его боковому ребру. Через точки  $O_1$  и  $O_2$  должны проходить оси,

параллельные плоскости  $yOz$ . Ясно, что это прямые  $O_1A$  и  $O_2B$ . Каждая ось, параллельная плоскости  $xOz$ , должна пересекать прямые  $O_1A$  и  $O_2B$ , а это однозначно определяет ее положение. Заметим, что если некоторая плоскость параллельна плоскости  $xOz$  и  $A_1, B_1$  — точки ее пересечения с  $(O_1A)$  и  $(O_2B)$ , то  $|O_1A_1| = |O_2B_1|$ . Соответствующее построение приведено на 20 странице журнала. (Можно было, конечно, воспользоваться прямыми  $y$  и  $OA$ , но тогда построение будет не таким симметричным.) Как вы видите, получается поверхность, похожая на седло.

5. Примем за оси координат прямые  $x$ ,  $y$  и  $z$  и выведем уравнение этой поверхности. Условимся задавать прямую уравнениями двух пересекающихся по ней плоскостей. Тогда уравнения прямых  $m$  и  $n$  запишутся в виде

$$\begin{cases} y = kx \\ z = c, \end{cases} \quad \begin{cases} y = -kx \\ z = -c. \end{cases}$$

Направляющие векторы этих прямых имеют координаты:

$$\vec{m} = \{1; k; 0\}, \quad \vec{n} = \{1; -k; 0\}.$$

Пусть точка  $P(x, y, z)$  равноудалена от прямых  $m$  и  $n$ . Если  $M$  и  $N$  — ортогональные проекции точки  $P$  на прямые  $m$  и  $n$  соответственно, то  $|MP| = |NP|$ . Выразим координаты точек  $M$  и  $N$  через координаты точки  $P$ .

Так как  $M \in m$ , то координаты точки  $M$  равны  $\alpha, k\alpha, c$ . Выразим  $\alpha$  через  $k, y$  и  $z$ . Учитывая, что  $\vec{MP} \cdot \vec{m} = 0$ ,  $\vec{MP} = (x - \alpha, y - k\alpha, z - c)$ ,  $\vec{m} = \{1, k, 0\}$ , получим  $x - \alpha + yk - k^2\alpha = 0$ , откуда следует, что  $\alpha = \frac{x + ky}{1 + k^2}$ , то есть точка  $M$  имеет координаты

$$\frac{x + ky}{1 + k^2}, \quad k \frac{x + ky}{1 + k^2}, \quad c.$$

Рассуждая аналогично, найдем координаты точки  $N$ :

$$\frac{x - ky}{1 + k^2}, \quad -k \frac{x - ky}{1 + k^2}, \quad -c.$$

Записывая равенство  $|MP| = |NP|$  после упрощений, получим выражение

$$xy = 2pz, \quad (1)$$

где  $p = -c \frac{1 + k^2}{2k}$ .

Следовательно, множество точек, равноудаленных от прямых  $m$  и  $n$ , — это поверхность, уравнение которой имеет вид (1). (Впервые уравнение (1) было получено Л. Эйлером в 1748 году.)



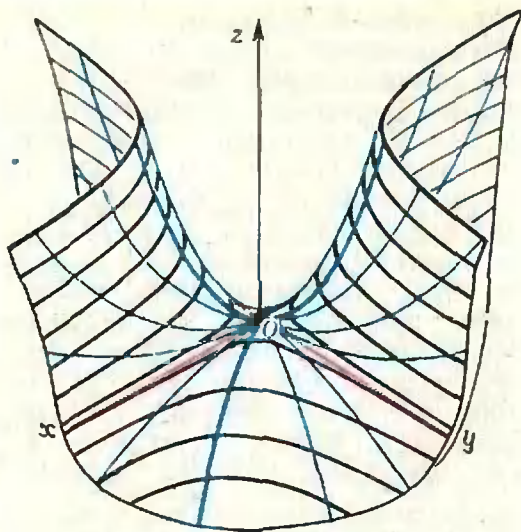


Рис. 6.

Сечение поверхности (1) плоскостью  $z = b$  — гипербола, а плоскостью  $x = ly$  — парабола ( $b \neq 0, l \neq 0$  рис. 6).

«Математическое» название нашей поверхности — *гиперболический параболоид*.

Пользуясь уравнением (1), нетрудно показать, что один и тот же гиперболический параболоид соответствует не одной паре скрещивающихся прямых!

Для любых прямых  $\begin{cases} y = kx \\ z = c \end{cases}$  и  $\begin{cases} y = -kx \\ z = -c \end{cases}$ , у которых  $k$  и  $c$  находятся в зависимости

$$p = -\frac{c(1+k^2)}{2k}, \quad (2)$$

где  $p$  — заданная константа, имеем один и тот же гиперболический параболоид  $xy = 2pz$ . Поэтому в параллельных плоскостях  $z = c, z = -c$  лежат две пары таких прямых. Если учесть, что  $k = y/x$  и  $c = z$ , то подставляя их в (2), получим, что все прямые  $m$  и  $l$  образуют поверхность с уравнением  $z(x^2 + y^2) = -2pxy$ .

Плоскости  $xOz$  и  $yOz$  называются *направляющими плоскостями* поверхности  $F$ : «половина» прямолинейных образующих параллельна плоскости  $xOz$ , а другая «половина» — плоскости  $yOz$ . В нашем случае

эти плоскости взаимно перпендикулярны и гиперболический параболоид называется равнобочным. В общем же случае эти плоскости образуют произвольный угол. Правда, в общем случае гиперболический параболоид не получить объединением осей поворотов, однако конструкция, приведенная в п. 4, к ней применима. Только на прямых  $O_1A$  и  $O_2B$  нужно соединить такие точки  $A_1$  и  $B_1$ , что  $|O_1A_1| = \lambda|O_2B_1|$ , где  $\lambda \neq 1$ .

Упражнение 3. Оси  $x$  и  $y$  перпендикулярны. Есть ли еще пары взаимно перпендикулярных осей?

Упражнение 4. Докажите, что прямая, не принадлежащая нашему множеству, имеет с ним не более двух общих точек.

#### Приложение. Доказательство леммы

Заметим, что поворот с осью  $l$  можно получить композицией двух симметрий относительно плоскостей, проходящих через прямую  $l$ . Действительно, пусть  $R_l(A) = A_1$ . Возьмем произвольную плоскость  $\sigma \ni l$ . Тогда  $S_\sigma(A) = A'$ . Проведем теперь плоскость  $\pi$  через прямую  $l$  и середину отрезка  $[A'A_1]$ . Легко сообразить, что  $(A'A_1) \perp \pi$ . Поэтому  $S_\pi \circ S_\sigma(A) = A_1$ . С другой стороны,  $S_\pi \circ S_\sigma$  — поворот, так как это преобразование оставляет на месте только точки прямой  $l$ . Но поворот однозначно задается осью и образом произвольной, не лежащей на оси точки. Следовательно,  $R_l = S_\pi \circ S_\sigma$ .

1. Пусть оси  $u$  и  $v$  пересекаются в точке  $O$ . Рассмотрим плоскость  $\pi$ , содержащую эти прямые. Тогда  $R_u$  и  $R_v$  можно представить так:  $R_u = S_{\sigma_1} \circ S_\pi$ ,  $R_v = S_{\sigma_2} \circ S_\pi$ . Отсюда  $R_v \circ R_u = (S_{\sigma_2} \circ S_\pi \circ S_\pi \circ S_{\sigma_1}) = S_{\sigma_2} \circ S_{\sigma_1}$ , поскольку  $S_\pi \circ S_\pi$  — тождественное преобразование. Но  $\sigma_2 \ni O$  и  $\sigma_1 \ni O$ , поэтому прямая  $\sigma_1 \cap \sigma_2$  проходит через точку  $O$ .

2. Пусть  $m$  — прямая и  $R_l(m) = m$ . Если точка  $A \in m$  и  $A \notin l$ , то  $m$  проходит через  $A$  и  $R_l(A)$ . Значит,  $m$  принадлежит некоторой плоскости, перпендикулярной к  $l$ , и мы пришли к повороту плоскости, для которого утверждение очевидно.

3. Доказывается так же, как лемма 1, поскольку через  $u$  и  $v$  можно провести плоскость. Параллельные переносы получатся, если  $\sigma_1 \parallel \sigma_2$ .

## Рассудите их

Выполняя лабораторную работу, ученики получили на экране цветной спектр белого света, прошедшего через призму.

— Красота-то какая! — воскликнула Ира. — А если на месте экрана окажется сетчатка глаза, то что тогда мы

увидим? — спросила она. — Как что? — ответила Маша. — То же, что и на экране. Отраженные цветные лучи от спектра на экране, так же как и световые лучи от различных объектов, пройдя через хрусталик глаза, дают на сетчатке перевернутое изображение. А мозг человека «научился» переворачивать изображения, возникшие

на сетчатке. Поэтому мы видим все в реальном виде. Так что глаз будет видеть обычное расположение цветных лучей в спектре белого света. — А я думаю, что мы увидим спектр, «обратный» видимому на экране, — сказала Ира.

Как по-вашему, читатель, — кто из них прав?

В. Партон

## Сферический

### ЭЛЛИПС

**Эллипс** («Геометрия 10», § 59; см. также «Алгебра 8», п. 2) можно определить как множество точек на плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек плоскости (называемых *фокусами*) есть величина постоянная. Если в этом определении «сумму» заменить на «модуль разности», получим *гиперболу*. *Парабола* — это множество точек на плоскости, расстояния от которых до данной точки плоскости (*фокуса*) и данной прямой (*директрисы*) одинаковы.

**Сферический эллипс** — это множество точек на сфере, сумма расстояний от которых по дугам больших окружностей до двух данных точек сферы (их тоже называют *фокусами*) есть величина постоянная. Аналогично определяется *сферическая гипербола*. Чтобы получить определение *сферической параболы*, надо еще в определении «плоской параболы» прямую заменить на «сферическую прямую» — большую окружность сферы. (Сообразите, как выглядит сферическая парабола, директрисой которой является большая окружность сферы, если расстояние от фокуса до директрисы равно четверти длины большой окружности.)

Плоский эллипс превращается в окружность только в том случае, когда его фокусы сливаются. Как показал Н. И. Фусс, сферический эллипс превращается в окружность (а именно — большую окружность сферы), если постоянная сумма расстояний, о которой говорится в определении, равна половине длины большой ок-

ружности. Конгруэнтные сферические треугольники, выделенные на рисунке 1 около фокусов  $F_1, F_2$ , помогут вам доказать утверждение Фусса.

Рассмотрим сферу  $\Delta$  и плоскость  $\alpha$ , касающуюся ее в фокусе некоторого сферического эллипса  $l$  на ней. Проведем всевозможные прямые через центр сферы  $O$  и точки сферического эллипса  $l$ . Оказывается, полученная таким образом коническая поверхность  $\Gamma$  пересечет плоскость  $\alpha$  по некоторому эллипсу  $\lambda$ . Исходную сферу поверхность  $\Gamma$  пересечет еще по одному сферическому эллипсу  $l'$ , симметричному с  $l$  относительно  $O$  (рис. 2).

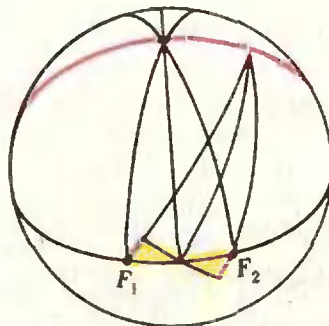


Рис. 1.

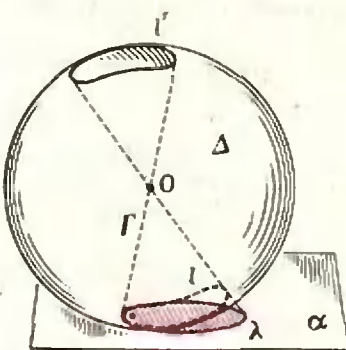


Рис. 2.

Интересно, что по отношению к фокусам эллипса  $l'$  эллипс  $l$  будет сферической гиперболой.

Эллипс (плоский) можно определить также, как множество точек (на плоскости), отношение расстояний от которых до данной точки (*фокуса*) и данной прямой (*директрисы*) постоянно и меньше 1. Аналогичным об-

разом можно определить и сферический эллипс. Можно доказать, что центральная проекция директрисы эллипса  $\lambda$  относительно  $O$  на сферу  $\Delta$  является директрисой сферического эллипса  $l$ : отношение расстояний от любой точки эллипса  $l$  до фокуса и до полученной при описанном проектировании большой окружности постоянно и меньше 1.

Углы между отрезками, соединяющими произвольную точку плоского эллипса с фокусами, и касательной к эллипсу в этой точке равны. В этом состоит так называемое *оптическое свойство* эллипса. Аналогичным свойством обладает сферический эллипс: если в любой его точке  $M$  провести касательную большую окружность и соединить точку  $M$  по большим окружностям с фокусами эллипса, то углы между этими последними окружностями и касательной окружностью окажутся равными.

Многие свойства сферического эллипса были обнаружены впервые русским математиком, швейцарцем по происхождению, Н. И. Фуссом (1755—1825). Н. И. Фусс был учеником и помощником великого Л. Эйлера и большую часть своих первых исследований в области математики и механики провел под его руководством. Впоследствии Н. И. Фусс стал действительным членом Петербургской академии наук и ее непререкаемым секретарем. Интересные результаты, касающиеся сферического эллипса, были получены также прусским математиком Л. И. Магнусом (1790—1861).

В. Березин



деляемых тем же соотношением (1), но начинающейся с  $P_0(x) = 2$ ,  $P_1(x) = x$ .

*А. Зелевинский*

**M489.** Даны три числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Построим три последовательности  $(a_n)$ ,  $(b_n)$ ,  $(c_n)$ , у которых  $a_1 = a$ ,  $b_1 = b$ ,  $c_1 = c$  и

$$a_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{c_n + a_n}{2}, \quad c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

для любого  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Докажите, что все эти три последовательности имеют общий предел, и найдите его.

*И. Бурмистрович*

**M490.**  $p$  — простое нечетное число. Дано  $p-1$  целых чисел, не делящихся на  $p$ . Докажите, что, заменив некоторые из этих чисел на противоположные, можно получить  $p-1$  чисел, сумма которых делится на  $p$ .

*С. Фомин*

**Ф498.** Диаметр тонкостенного цилиндрического стакана равен  $d$ , высота —  $h$ . Стенки и дно стакана одинаковой толщины. В стакан наливают воду. При каком уровне воды центр тяжести стакана с водой занимает наинизшее положение?

**Ф499.** Два стеклянных шара радиусов  $r$  и  $R$  соединены тонкой длинной стеклянной трубкой и наполнены воздухом. Посередине трубки находится капля ртути. Можно ли с помощью этого прибора измерять температуру окружающего воздуха?

**Ф500.** На столбе на высоте  $h$  над землей висит звонок. На каком расстоянии от столба звук слышен громче всего, если скорость звука равна  $c$ , а скорость ветра, дующего горизонтально, равна  $v$ ?

**Ф501.** На краю стола высоты  $H$  стоит шар радиуса  $R$ , причем,  $R \ll H$ . Шар начинает соскальзывать со стола без трения. На каком расстоянии от стола упадет шар?

**Ф502.** В крышке закрытого ящика высоты  $h = 1$  м имеется круглое отверстие. Как изменится освещенность дна под отверстием, если в отверстие вставить линзу с оптической силой  $D = 1$  дптр? Ящик стоит под открытым небом, затянутым равномерно пеленой облаков.

#### Поправка

В формулировку задачи **M480**, опубликованной в № 12 за 1977 г., вкралась ошибка. Задачу **M480** в) следует читать так: последовательность  $C_n$  определяется условиями  $C_1 = 2$ ,  $C_{n+1} = \lfloor 3C_n/2 \rfloor$  для  $n \geq 1$ ; докажите, что существует число  $\gamma$  такое, что  $C_n = \lfloor (3/2)^n \gamma \rfloor + 1$  (здесь  $\lfloor x \rfloor$  — целая часть  $x$ ). (В № 12 в формуле для  $C_n$  была опущена единица.) Срок присылки решений этой задачи продлевается до 1 июня 1978 г.



## Решения задач

M441 — M443; Ф453 — Ф457

**M441.** Внутри выпуклого  $2n$ -угольника взята точка  $P$ . Через каждую вершину и точку  $P$  проведена прямая. Докажите, что найдется сторона многоугольника, с которой ни одна из проведенных прямых не имеет общих точек (кроме, быть может, концов стороны).

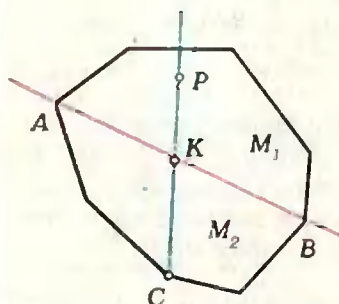


Рис. 1.

Будем говорить, что прямая пересекает сторону многоугольника  $M$ , если их точка пересечения не совпадает с вершиной многоугольника.

Возможны два случая: 1) точка  $P$  принадлежит какой-нибудь диагонали  $AB$  многоугольника  $M$ ; 2) точка  $P$  не принадлежит ни одной из диагоналей многоугольника  $M$ .

В первом случае прямые  $PA$  и  $PB$  совпадают с  $(AB)$  и не пересекают никаких сторон  $M$ , а прямые, проходящие через точку  $P$  и оставшиеся  $2n-2$  вершины  $M$  пересекают не более  $2n-2$  сторон. Поэтому по крайней мере две стороны многоугольника  $M$  не пересекает ни одна из проведенных прямых.

Пусть теперь  $P$  не лежит ни на одной из диагоналей  $M$ . Возьмем такую диагональ  $AB$  многоугольника  $M$ , которая делит его границу на две  $n$ -звенные ломаные  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , а  $2n$ -угольник  $M$  — на два выпуклых  $(n+1)$ -угольника  $M_1$  и  $M_2$  (рис. 1). Допустим, что  $P$  находится внутри  $M_1$ ; и пусть  $C$  — произвольная вершина многоугольника  $M_2$  (отличная от  $A$  и  $B$ ). Поскольку  $M_1$  и  $M_2$  находятся по разные стороны от  $(AB)$ ,  $P \in M_1$ ,  $C \in M_2$  и многоугольник  $M$  — выпуклый, прямые  $PC$  и  $AB$  пересекаются в некоторой точке  $K \in [AB]$  (см. рис. 1). Прямая  $PC$ , проходящая через внутреннюю точку многоугольника  $M_1$  и пересекающая его границу в точке  $K$  на стороне  $AB$ , пересекает границу  $M_1$  еще в одной точке, не лежащей на  $AB$ , т. е., пересекает  $\Gamma_1$ . Итак, любая прямая, проходящая через вершины  $\Gamma_2$  (отличные от  $A$  и  $B$ ), пересекает границу выпуклого многоугольника  $M$  в двух точках: вершине  $\Gamma_2$  и точке, лежащей на  $\Gamma_1$  (возможно, совпадающей с вершиной  $\Gamma_1$ ). Следовательно, любая такая прямая не пересекает звеньев ломаной  $\Gamma_2$ .

Аналогично доказывается, что прямые  $AP$  и  $BP$  также не пересекают звеньев ломаной  $\Gamma_2$ .

Итак,  $n+1$  прямых пересекают не более чем  $n$  сторон многоугольника  $M$  (звеньев ломаной  $\Gamma_1$ ). Оставшиеся  $n-1$  прямых не могут пересечь более чем  $n-1$  сторон многоугольника  $M$  (звеньев ломаной  $\Gamma_2$ ). Следовательно, хотя бы одна сторона (звено ломаной  $\Gamma_2$ ) не пересекается ни одной из проведенных через точку  $P$  и вершины многоугольника  $M$  прямых.

Г. Гуревич



**M442.** Дано простое число  $p > 2$ . Для каждого  $k$  от 1 до  $p-1$  обозначим через  $a_k$  остаток от деления числа  $k^p$  на  $p^2$ . Докажите, что

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{p-1} = (p^3 - p^2)/2.$$

Перепишем сумму  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{p-1}$  так:

$$(a_1 + a_{p-1}) + (a_2 + a_{p-2}) + \dots + (a_{\frac{p-1}{2}} + a_{\frac{p+1}{2}})$$

( $p-1$  — четное число; в последней сумме  $\frac{p-1}{2}$  выражений

в скобках). Рассмотрим одно из выражений  $a_i + a_{p-i}$ , заключенных в скобки. Легко заметить, что

$$i^p + (p-i)^p = p^p - C_p^1 \cdot i \cdot p^{p-1} + \dots + C_p^{p-1} \cdot i^{p-1} \cdot p = p^2 l$$

— делится на  $p^2$  (поскольку  $C_p^{p-1} = p$ ;  $p > 2$ ,  $1 \leq i \leq p-1$ ).

Поэтому  $a_i + a_{p-i}$  делится на  $p^2$ ; и так как  $a_i < p^2$ ,  $a_{p-i} < p^2$ , то  $a_i + a_{p-i} = p^2$  для всех  $i = 1, \dots, p-1$ . Итак,

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1} = (a_1 + a_{p-1}) + \dots + (a_{\frac{p-1}{2}} + a_{\frac{p+1}{2}}) = p^2 \cdot \frac{p-1}{2} = (p^3 - p^2)/2,$$

что и утверждалось.

С. Охитин



**М443.** Имеется таблица  $n \times n$  клеток, в каждой клетке которой вначале стоит 0. Разрешается произвольно выбрать  $n$  чисел, стоящих в разных строках и разных столбцах, и увеличить каждое из них на 1.

а) Можно ли за несколько шагов получить таблицы, изображенные на рисунках 2 и 3?

б) Можно ли получить таблицы с попарно различными числами?

в) Какие вообще таблицы можно получить через  $T$  шагов?

1	2	3	...	$n$
2	3	4	...	1
3	4	5	...	2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n$	1	2	...	$n-1$

Рис. 2.

1	2	3	...	$n$
2	3	4	...	$n+1$
3	4	5	...	$n+2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n$	$n+1$	$n+2$	...	$2n-1$

Рис. 3.

Таблицу на рисунке 2 получить легко, складывая таблицы, у которых единицы стоят параллельно диагонали (рис. 4).

Перейдем теперь сразу к задаче в). Прежде всего заметим, что в таблице  $n \times n$ , получающейся из нулевой через  $T$  шагов, суммы чисел в каждой строке и каждом столбце одинаковы и равны  $T$ : вначале все эти суммы были равны нулю, а прибавляя по единице к  $n$  числам, стоящим в разных строках и разных столбцах таблицы, мы изменяем все суммы одинаково — ровно на единицу каждую. Так что условие равенства сумм чисел по каждой строке и каждому столбцу таблицы является **необходимым**. Из этого сразу следует, что таблицу, изображенную на рисунке 3, указанными преобразованиями получить нельзя.

Докажем, что условие равенства сумм по строкам и столбцам также **достаточно**. При этом мы будем опираться на такую важную **лемму**. Пусть дана таблица  $n \times n$ , заполненная целыми неотрицательными числами, у которой сумма чисел по строкам и столбцам одна и та же (такие таблицы мы будем называть **магическими**). Тогда, если эта таблица не нулевая, то в ней можно указать набор из  $n$  чисел, находящихся в разных строках и разных столбцах таблицы, каждое из которых было бы отличным от нуля.

Из леммы сразу следует, что любую магическую таблицу можно получить из нулевой. В самом деле, пусть суммы по строкам и столбцам некоторой таблицы  $M$  равны  $T$ . Если бы в этой таблице нашелся набор из ненулевых чисел, то, вычтя из всех чисел этого набора по единице, мы перешли бы к магической таблице, у которой сумма по строкам и столбцам равна  $T-1$ ; в этой таблице мы опять бы выделили набор из  $n$  ненулевых чисел (из разных строк и разных столбцов), снова вычли бы по единице из каждого из этих чисел, и перешли бы к магической таблице с суммой  $T-2$  по каждой строке и каждому столбцу, и т. д.; — через  $T$  шагов мы получили бы таблицу с нулевыми суммами, т. е. нулевую таблицу. Двигаясь в обратном направлении, можно получить из нулевой таблицы исходную таблицу  $M$ .

Итак, осталось доказать **лемму**. Сформулируем ее так: *если среди  $n$  произвольных чисел магической таблицы  $n \times n$ , находящихся в разных строках и разных столбцах, есть хотя бы один нуль, то эта таблица — вся нулевая.*

Будем доказывать лемму индукцией по количеству ненулевых чисел в таблице; допустим, что она уже доказана для всех таблиц с указанным свойством, у которых **более  $N$  нулей**. Возьмем таблицу, у которой **ровно  $N$  нулей** ( $N < n^2$ ). Пусть  $a_1$  — наименьшее положительное число в таблице. Если все остальные числа, стоящие в одной строке с  $a_1$ , — нули, то тогда в каждой строке и каждом столбце таблицы стоит одно число, равное  $a_1$ , а все остальные числа равны нулю. Взяв эти  $n$  равных  $a_1$  чисел, мы получим ненулевой набор, вопреки условию. Если же в одной строке с  $a_1$  найдется отличное от нуля число  $b_1$ , то отметим эту строку и от числа  $b_1$  перейдем по столбцу к числу  $a_2 \neq 0$  (такое число найдется из-за условия равенства сумм по строкам и столбцам). Отметив этот столбец, от числа  $a_2$  перейдем по строке к числу  $b_2 \neq 0$ , и т. д., — до тех пор, пока впервые не попадем либо

1	0	0	...	0	0	0
0	0	0	...	0	0	1
0	0	0	...	0	1	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	0	0	...	0	0	0
0	0	1	...	0	0	0
0	1	⋮	...	0	0	0

0	0	0	...	⋮	1	0
0	0	0	...	1	0	⋮
0	0	0	...	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	1	0	...	0	0	0
1	0	0	...	0	0	0
0	0	0	...	0	0	1

0	0	0	...	0	0	1
0	0	0	...	0	1	0
0	0	0	...	1	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	0	1	...	0	0	0
0	1	0	...	0	0	0
1	0	0	...	0	0	0

Рис. 4.



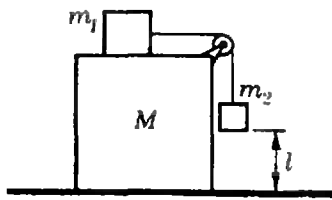


Рис. 7.

Ф454. Если на первичную обмотку ненагруженного трансформатора подать напряжение  $U_0 = 220$  В, то напряжение на вторичной обмотке будет  $U_1 = 127$  В. Какое напряжение  $U$  будет при  $U_0 = 220$  В на нагрузке  $R = 10$  Ом, подключенной ко вторичной обмотке этого трансформатора? Активное сопротивление первичной обмотки трансформатора  $r_1 = 2$  Ом, а вторичной  $r_2 = 1$  Ом. Внутреннее сопротивление генератора тока принять равным нулю.

где  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  — начальные координаты кубиков массами  $m_1$ ,  $m_2$  и  $M$  относительно произвольного начала отсчета. Отсюда

$$l_0 = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + M} l.$$

И. Слободецкий

Обозначим действующее значение э. д. с. индукции, возникающей в первичной обмотке ненагруженного трансформатора, через  $\mathcal{E}_1$ , а во вторичной обмотке — через  $\mathcal{E}_2$ . Очевидно, что

$$\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{n_1}{n_2} = k,$$

где  $n_1$  — число витков в первичной обмотке,  $n_2$  — во вторичной обмотке и  $k = n_1/n_2$  — коэффициент трансформации. Поскольку в ненагруженном трансформаторе

$$\mathcal{E}_1 = U_0 \text{ и } \mathcal{E}_2 = U_1,$$

то

$$k = \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{U_0}{U_1} = \sqrt{3}.$$

Когда трансформатор нагружен, то есть ко вторичной обмотке подключено сопротивление  $R$ , по первичной обмотке идет ток

$$I_1 = \frac{U_0 - \mathcal{E}'_1}{r_1}, \quad (1)$$

а по вторичной обмотке—

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}'_2}{R + r_2}. \quad (2)$$

Здесь  $\mathcal{E}'_1$  и  $\mathcal{E}'_2$  — действующие значения э. д. с. индукции в первичной и вторичной обмотках нагруженного трансформатора.

Коэффициент полезного действия трансформатора практически равен единице. Это означает, что мощность в первичной обмотке трансформатора равна мощности, передаваемой во вторичную цепь:

$$I_1 \mathcal{E}'_1 = I_2 \mathcal{E}'_2.$$

Тогда

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\mathcal{E}'_1}{\mathcal{E}'_2} = k. \quad (3)$$

Объединим уравнения (1), (2) и (3) в систему:

$$\begin{cases} I_1 = \frac{U_0 - \mathcal{E}'_1}{r_1} \\ I_2 = \frac{\mathcal{E}'_2}{R + r_2} \\ \frac{I_2}{I_1} = k, \end{cases}$$

откуда

$$I_2 = \frac{kU_0}{r_1 + k^2(R + r_2)},$$

и

$$U_2 = I_2 R = \frac{kU_0 R}{r_1 + k^2(R + r_2)} \approx 110 \text{ В.}$$

В. Скороваров

Ф455. Потери мощности в линии электропередачи составляют 5% от мощности, получаемой потребителем. Как нужно изменить напряжение на входе линии и сопротивление потребителя для того, чтобы при той же мощности, получаемой потребителем, потери в линии снизить до 1%?

Мощность, получаемая потребителем, равна

$$P = I_0^2 R = \frac{U_0^2}{(R+r)^2} R,$$

где  $I_0$  — ток в линии электропередачи,  $r$  — сопротивление линии,  $R$  — сопротивление потребителя и  $U_0$  — напряжение на входе линии. Эта мощность по условию должна остаться неизменной. Следовательно,

$$\frac{U_0^2}{(R+r)^2} R = \frac{U_1^2}{(R_1+r)^2} R_1,$$

где  $U_1$  — новое напряжение на входе линии и  $R_1$  — новое сопротивление потребителя. Обозначим через  $\alpha$  отношение мощности, теряемой в проводах, к мощности, получаемой потребителем. Тогда

$$\alpha_1 = \frac{I_0^2 r}{I_0^2 R} = \frac{r}{R} = 0,05, \quad \alpha_2 = \frac{r}{R_1} = 0,01.$$

Отсюда  $R = \frac{r}{\alpha_1}$  и  $R_1 = \frac{r}{\alpha_2}$ .

Следовательно,

$$\frac{R_1}{R} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 5.$$

$$\begin{aligned} \frac{U_1}{U_0} &= \frac{R_1+r}{R+r} \sqrt{\frac{R}{R_1}} = \\ &= \frac{r \left(1 + \frac{1}{\alpha_1}\right)}{r \left(1 + \frac{1}{\alpha_2}\right)} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} = \frac{1 + \alpha_2}{1 + \alpha_1} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \approx \sqrt{5}. \end{aligned}$$

И. Слободецкий

Ф456. Какую минимальную скорость нужно сообщить на Земле космическому кораблю для того, чтобы он попал на Солнце? Каким будет время полета корабля к Солнцу?

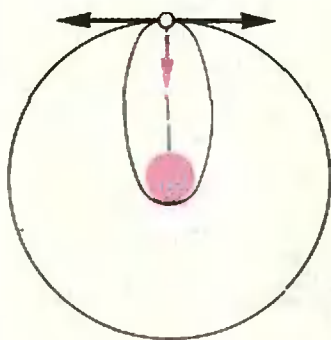


Рис. 8.

Представим себе, что с Земли запущен космический корабль, скорость которого немного меньше скорости орбитального движения Земли. Траекторией движения корабля будет эллипс, в одном из фокусов которого — Солнце. Чем меньше начальная скорость корабля относительно Солнца, тем более вытянута его орбита. При некотором значении этой скорости корабль в своем движении коснется поверхности Солнца. Иными словами, высота перигелия орбиты корабля будет равна радиусу Солнца. Радиус Солнца примерно в 200 раз меньше радиуса орбиты Земли, так что малая полуось эллиптической орбиты корабля, касающейся Солнца, много меньше большой полуоси. Для оценки можно считать, что малая полуось просто равна нулю. При таком предположении траектория движения корабля превращается в прямую, соединяющую точку запуска корабля с Солнцем, то есть корабль попадает на Солнце, свободно падая на него. Следовательно, в начальный момент скорость корабля относительно Солнца должна быть равна нулю. Для того чтобы выполнялось это условие, кораблю необходимо на Земле сообщить скорость, равную по абсолютной величине орбитальной скорости Земли, но направленную в противоположную сторону.

Радиус орбиты Земли равен примерно  $1,5 \cdot 10^{11}$  м, период обращения Земли вокруг Солнца  $\sim 3,15 \cdot 10^7$  с. Следовательно, орбитальная скорость Земли равна

$$v = \frac{2\pi \cdot 1,5 \cdot 10^{11}}{3,15 \cdot 10^7} \approx 3 \cdot 10^4 \text{ м/с.}$$

Такую скорость нужно сообщить кораблю на Земле (рис. 8).

Для того чтобы найти время полета корабля к Солнцу, воспользуемся третьим законом Кеплера. Согласно этому за-



кону квадраты периодов обращения корабля и Земли вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей орбит корабля и Земли:

$$\frac{T_k^2}{T_3^2} = \frac{(R/2)^3}{R^3}$$

( $R$  — радиус орбиты Земли). Время полета корабля к Солнцу составляет половину периода его обращения по эллиптической орбите, то есть

$$t = \frac{T_k}{2} = \frac{1}{4\sqrt{2}} T_3 \approx 5,6 \cdot 10^6 \text{ с.}$$

А. Дозоров



Ф457. Два плоских воздушных конденсатора с одинаковыми обкладками имеют одинаковые заряды. Расстояние между обкладками у первого конденсатора вдвое больше, чем у второго. Как изменится энергия электрического поля системы, если второй конденсатор вставить между обкладками первого так, как показано на рисунке 9, а и б?

Энергия электрического поля заряженного конденсатора равна

$$W = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} V,$$

где  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная,  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды,  $\vec{E}$  — напряженность поля и  $V$  — объем, занимаемый электрическим полем.

Найдем начальную энергию  $W_0$  электрического поля системы двух воздушных конденсаторов ( $\epsilon=1$ ). Поскольку заряды на конденсаторах одинаковы, напряженность поля в первом конденсаторе такая же, как и во втором. Обозначим ее абсолютное значение через  $E_0$ . Пусть объем первого конденсатора равен  $V_0$ , а второго, соответственно,  $V_0/2$ . Тогда

$$W_0 = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} V_0 + \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \frac{V_0}{2} = \frac{3}{4} \epsilon_0 E_0^2 V_0.$$

После того как конденсаторы будут вставлены один в другой, абсолютные значения напряженностей электрических полей между пластинами станут другими. Для случая а)

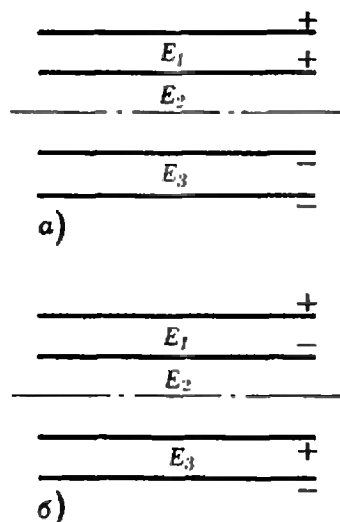


Рис. 9.

$$E_1 = E_3 = E_0, \quad E_2 = 2E_0.$$

Соответственно изменятся и энергия системы:

$$W = \frac{\epsilon_0 E_1^2}{2} (V_1 + V_2) + \frac{\epsilon_0 E_2^2}{2} V_2 = \frac{5}{4} \epsilon_0 E_0^2 V_0.$$

Отсюда

$$\frac{W}{W_0} = \frac{5}{3}.$$

В случае б) (рис. 9, б)

$$E_1 = E_3 = E_0, \quad E_2 = 0.$$

Тогда

$$W = \frac{\epsilon_0 E_1^2}{2} (V_1 + V_2) = \frac{1}{4} \epsilon_0 E_0^2 V_0,$$

и

$$\frac{W}{W_0} = \frac{1}{3}.$$

С. Казел

А. Земляков, Б. Ивлев

## Вопросы по алгебре и анализу

Мы продолжаем публикацию вопросов по математике (см. «Квант», 1978, № 1, с. 36). На каждый из перечисленных ниже вопросов дано пять вариантов ответа (а, б, в, г, д), из которых ровно один — верный. Требуется указать верные ответы. Постарайтесь уложиться в полчаса. Сверьте свои ответы с приведенными в конце номера. (После номера каждого вопроса в скобках указан класс, на который этот вопрос рассчитан.)

### А. Функции, графики, уравнения

1 (VIII). Какие из функций, заданных на рисунке 1 с помощью стрелок, являются обратимыми?

а) Только  $f_1$ ; б)  $f_1$  и  $f_2$ ; в)  $f_1$  и  $f_3$ ; г)  $f_3$  и  $f_4$ ; д) все обратимые.

2 (VIII). График какой функции выглядит так, как показано на рисунке 2?

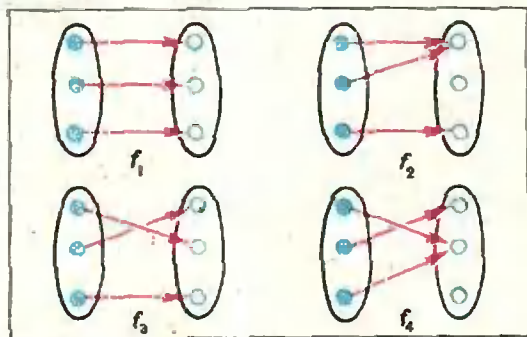


Рис. 1.

а)  $y = x^2 + 2x - 3$ ; б)  $y = x^2 - 2x + 3$ ; в)  $y = -x^2 - 2x + 1$ ; г)  $y = -x^2 + 2x + 1$ ; д)  $y = -x^2 + 2x - 1$ .

3 (VIII). Сколько существует геометрических прогрессий с четвертым членом  $a_4 = -2$  и десятым членом  $a_{10} = -1$ ?

а) Ни одной; б) одна; в) две; г) три; д) бесконечно много.

4 (VIII). Сколько решений имеет уравнение

$$\frac{25(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(x-5)(x-3)(x-1)} = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(x-5)(x-3)(x-1)}?$$

а) Ни одного; б) бесконечно много; в) пять; г) три; д) одно.

5 (VIII). На сколько процентов увеличится покупательная способность населения (т. е. количество товаров, которое можно приобрести на данную сумму денег), если цены на все товары снизить на 20%?

а) На 20%; б) на 25%; в) на 40%; г) на 10%; д) на 12%.

### Б. Анализ и комбинаторика

6 (X). Расположите числа  $\sin 1$ ,  $\cos 2$ ,  $\operatorname{ctg} 3$  в порядке возрастания (аргументы даны в радианах).

а)  $\operatorname{ctg} 3 < \cos 2 < \sin 1$ ; б)  $\sin 1 < \cos 2 < \operatorname{ctg} 3$ ; в)  $\cos 2 < \sin 1 < \operatorname{ctg} 3$ ; г)  $\operatorname{ctg} 3 < \sin 1 < \cos 2$ ; д)  $\cos 2 < \operatorname{ctg} 3 < \sin 1$ .

7 (IX). Известно, что последовательности  $(a_n)$  и  $(a_n b_n)$  — сходящиеся, а последовательность  $(b_n)$  — расходящаяся. Чему может быть равен предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ?

а) Такого не бывает; б)  $a$  может быть любым; в)  $a$  может быть любым, кроме 0; г)  $a = 0$ ; д)  $a = 1$ .

8 (IX). Чему равен предел

$$A = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{4 - x}?$$

а)  $A = 0$ ; б)  $A = -\frac{1}{2}$ ;

в)  $A = -\frac{1}{4}$ ; г)  $A = \frac{1}{4}$ ;

д) этот предел не существует.

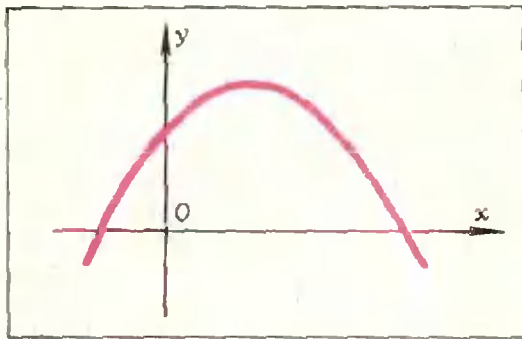


Рис. 2.

9 (IX). По какой формуле вычисляется производная функции  $h(x) = f(x^2)$ ?

а)  $h'(x) = f(2x)$ ; б)  $h'(x) = 2f(x)$ ;  
в)  $h'(x) = f'(2x)$ ; г)  $h'(x) = 2x \times f(x^2)$ , д)  $h'(x) = 2x \cdot f'(x^2)$ .

10 (IX). Сколькими способами группу из 12 человек можно разбить на три подгруппы — из 3, 4 и 5 человек?

а)  $C_{12}^3 + C_{12}^4$ ; б)  $C_{12}^3 \cdot C_9^4$ ; в)  $C_{12}^3 + C_{12}^4$ ; г)  $C_{12}^3 \cdot C_{12}^4$ ; д)  $C_{12}^3 \cdot C_{12}^4 \cdot C_{12}^5$ .

## Кто меньше?

На третьей странице обложки рассказано о некоторой игре. Разумеется, изложенные там правила дают возможность сесть и начать играть. Однако, как показывает опыт, освоить игру «с ходу» довольно сложно. Чтобы облегчить нашим читателям этот подготовительный период, мы разбираем приведенную на обложке партию. Если вы внимательно проследите за разбором, то, конечно, полностью освоите правила игры.

Итак, первый ход. Что означают три белых булавки? Во-первых, у загадчика есть фишка одного из невыставленных в вопросе цветов — белая или красная. Действительно, если бы весь набор загаданных цветов был представлен в нашем вопросе, то загадчик должен был бы выставить четыре булавки. (Заметьте, что в этом рассуждении нам не существует цвет выставленных булавок.) Более того, красно-белая фишка должна быть только одна — иначе булавок было бы выставлено еще меньше. Итак, у загадчика одна красно-белая фишка и три желто-черно-сине-зеленые фишки. Во-вторых, все желто-черно-сине-зеленые фишки стоят на «чужих» местах: против желтой — не желтая, против черной — не черная

и т. д. (здесь мы, наконец, учли, что все булавки в ответе — белые).

Второй ход. Мы убрали желтую фишку и добавили белую — количество булавок в ответе не изменилось. Следовательно, в загаданном наборе желтых и белых фишек одинаковое число. Но как мы выяснили при анализе первого хода, белых фишек не больше одной. Поэтому в отгадываемом наборе либо вообще нет ни желтой, ни белой фишек, либо их — по одной штуке. Далее, у противника есть ровно одна желто-красная фишка (см. разбор первого хода), а из первого ответа нам известно, что у него ровно одна бело-красная фишка. Таким образом, имеются следующие две возможности:

а) у противника есть одна красная фишка и нет ни желтых, ни белых, а три оставшихся фишки — черно-сине-зеленые.

б) у противника нет красной фишки и есть одна белая и одна желтая, а две оставшиеся фишки — черно-сине-зеленые.

Ну и наконец, в первом столбце стоит не черная и не зеленая фишка, во втором — не синяя и не зеленая и т. д.

Третий ход. Решено проверить первую возможность: красная фишка есть. Попытка оказалась удачной — все цвета противника угаданы.

Теперь, учитывая, что

мы знаем про набор противника довольно много, можно попытаться описать все возможные наборы, на которые первые три ответа совпадают с выставленными.

Во втором столбце должна стоять черно-красная фишка.

Предположим, что она черная. Тогда красная фишка должна стоять в первом столбце — так как там не могут стоять ни зеленая, ни синяя фишки (если бы в первом стояла синяя фишка, в ответе было бы как минимум, две черные булавки). Аналогично, сине-зеленые фишки могут стоять только в третьем столбце, а в четвертом столбце может оказаться только еще одна черная фишка.

Итак, если во втором столбце стоит черная фишка, то в первом столбце стоит красная фишка, в третьем — сине-зеленая, в четвертом — черная. Если же во втором столбце стоит красная фишка, то в первом столбце стоит синяя фишка, в четвертом — черная, в третьем — сине-зеленая. Таким образом, есть всего четыре возможных варианта. Какой бы из этих вариантов ни был выставлен, наш четвертый вопрос все их «различит»: ответы в этих четырех случаях будут различными, и на пятом шаге мы наверняка выставим набор загадчика. Однако, нам повезло и мы сэкономили один ход.

Л. Лиманов

Б. Гейдман\*

## Композиция двух осевых симметрий

Поводом для заметки послужила задача 56 из числа задач на повторение по курсу VI—VIII классов учебного пособия «Геометрия 8». Докажите, что композиция двух симметрий, осей которых пересекаются под углом  $\alpha$ , есть поворот, причем центром поворота является точка пересечения осей, а угол поворота равен  $2\alpha$ .

Что понимать здесь под углом  $\alpha$ ? Если  $\alpha$  — величина угла между осями симметрии, то  $\alpha$  принимает значения от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ . В то же время угол поворота характеризуется направленной величиной и  $2\alpha$  может принимать значения от  $-180^\circ$  до  $180^\circ$  \*). Может быть, нам «повезло» и углу  $\alpha$  между осями симметрии соответствует угол поворота  $2\alpha$  в пределах от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ ? На самом деле — нет. Мы уточним это позже, а пока займемся решением задачи.

Композиция двух симметрий относительно осей  $l$  и  $m$ , пересекающихся в точке  $O$ , очевидно, оставляет неподвижной единственную точку  $O$  плоскости. Известно, что перемеще-

\* Напомин различие случаи употребления угловых величин в курсе геометрии VI—VIII классов:

- 1) величина  $\alpha$  угла (геометрической фигуры) лежит в пределах:  $0^\circ < \alpha < 360^\circ$ ;
- 2) угол между двумя лучами лежит в пределах:  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ;
- 3) угол между двумя прямыми лежит в пределах:  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ ;
- 4) любой поворот характеризуется углом, лежащим в пределах:  $-180^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ .

ние с единственной неподвижной точкой  $O$  является поворотом плоскости с центром в точке  $O$  \*).

Найдем угол поворота. Возьмем точку  $M$  на оси  $l$ . При симметрии  $S_l$  относительно оси  $l$  она остается неподвижной, а при симметрии  $S_m$  относительно оси  $m$  она перейдет в точку  $M_1$ , причем величина угла  $MOM_1$  равна  $2\alpha$ , т. е. композиции симметрий  $S_m \circ S_l$  соответствует поворот плоскости вокруг точки  $O$  на угол  $2\alpha$  (рис. 1).

Теперь рассмотрим композицию симметрий  $S_l \circ S_m$  — сначала относительно оси  $m$ , а затем относительно оси  $l$ .

Пусть  $N \in m$  (рис. 2); тогда  $S_m(N) = N$ , а  $S_l(N) = N_1$ , величина угла  $NON_1$ , по-прежнему равна  $2\alpha$ , а угол поворота равен  $(-2\alpha)$ , так как направление поворота совпадает с вращением по часовой стрелке. Композиция симметрий  $S_l \circ S_m$  есть поворот плоскости вокруг точки  $O$  на угол  $(-2\alpha)$  (см. рис. 2).

Итак, одному и тому же углу между осями соответствуют два различных поворота плоскости. Дело в том, что композиция осевых симметрий не коммутативна и для того, чтобы поворот определялся однозначно, необходимо фиксировать порядок этих симметрий.

В свою очередь величина угла между осями симметрий должна отражать этот порядок, т. е. быть направ-

\* Рекомендуем прочитать статью В. М. Фишмана «Решение задач с помощью геометрических преобразований» («Квант», 1975, № 7), где это доказано, или доказать это самостоятельно.

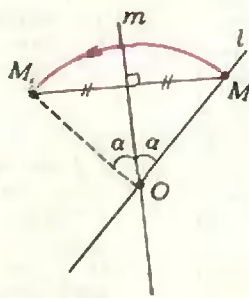


Рис. 1.

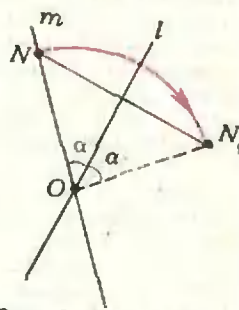


Рис. 2.



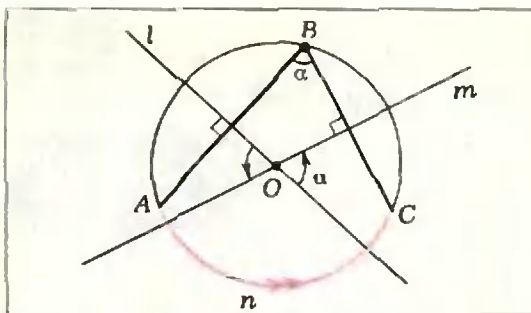


Рис. 3.

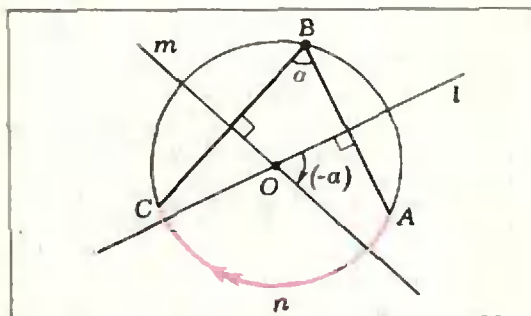


Рис. 4.

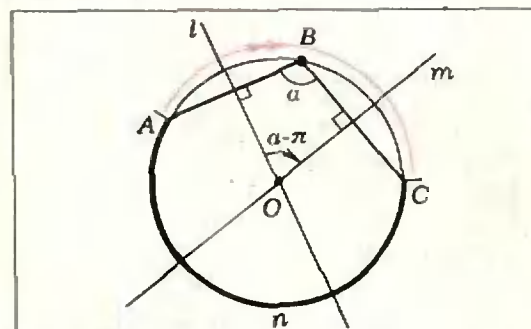


Рис. 5.

ленной. Будем считать, что направленный угол от прямой  $l$  до прямой  $m$  по модулю равен обычному углу между ними, а его знак положительный; если при достаточно малом повороте вокруг их точки пересечения  $O$  против часовой стрелки прямая  $l$  попадает внутрь острого (или прямого) угла, образованного этими прямыми. Если же прямая  $l$  попадает внутрь острого (или прямого) угла при малом повороте по часовой стрелке вокруг точки  $O$ , то угол от прямой  $l$  до прямой  $m$  — отрицательный, а модуль его равен обычному углу между прямыми. Угол от данной прямой до нее самой считается равным  $0^\circ$ . Таким образом, величина направленного угла  $\alpha$  от прямой  $l$  до прямой  $m$  принимает значения:  $-90^\circ < \alpha \leq 90^\circ$ ; каждая па-

ра пересекающихся прямых  $l$  и  $m$  задает два направленных угла — угол от прямой  $l$  до  $m$ , равный  $\alpha$ , и угол от прямой  $m$  до  $l$ , равный  $(-\alpha)$ .

При таком подходе к величине угла между прямыми удается привести в соответствие композицию двух симметрий и поворот вокруг точки пересечения их осей: Нашу задачу можно теперь сформулировать более точно следующим образом:

Пусть угол от прямой  $l$  до  $m$  равен  $\alpha$ ; тогда композиция симметрий  $S_m \circ S_l$  есть поворот вокруг точки пересечения этих осей  $O$  на угол  $2\alpha$ .

Проиллюстрируем этот же подход на доказательстве хорошо известной теоремы о вписанном угле.

**Теорема.** Величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги <sup>\*</sup>), на которую он опирается.

**Доказательство.** Угол  $ABC$  вписан в окружность с центром  $O$ . Проведем через  $O$  прямые  $l$  и  $m$ , перпендикулярные к его сторонам. Эти прямые пройдут через середины хорд  $AB$  и  $BC$  соответственно.

Пусть  $\widehat{ABC} = \alpha$ , где  $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$ . В этом случае угол от прямой  $l$  до  $m$  может быть равным  $\alpha$  (рис. 3) или  $(-\alpha)$  (рис. 4). Композиция симметрий  $S_m \circ S_l$  переведет точку  $A$  в точку  $C$ , так как при  $S_l$   $A$  переходит в  $B$ , а при  $S_m$  —  $B$  в  $C$ . С другой стороны эта композиция может быть заменена поворотом  $R_0^{2\alpha}$  или  $R_0^{-2\alpha}$  вокруг центра  $O$  на угол  $2\alpha$  или  $(-2\alpha)$ , притом  $C = R_0^{2\alpha}(A)$  или  $C = R_0^{-2\alpha}(A)$ . И в том, и в другом случае угловая величина дуги  $AnC$ , на которую опирается вписанный угол  $ABC$ , равна  $2\alpha$  (так как точка  $A$  переходит в  $C$ , пройдя дугу  $AnC$ ).

Пусть  $\widehat{ABC} = \alpha$ , где  $\alpha > 90^\circ$ . Тогда угол между прямыми  $l$  и  $m$  может быть равным  $(\alpha - \pi)$  (рис. 5) или  $(\pi - \alpha)$  (рис. 6).

Композиция симметрий  $S_m \circ S_l$ , переводящая точку  $A$  в точку  $C$ ,

<sup>\*</sup>) Угловая величина дуги равна, по определению, величине соответствующего ей центрального угла  $\alpha$ , т. е. принимает значения в пределах:  $0^\circ < \alpha < 360^\circ$ .

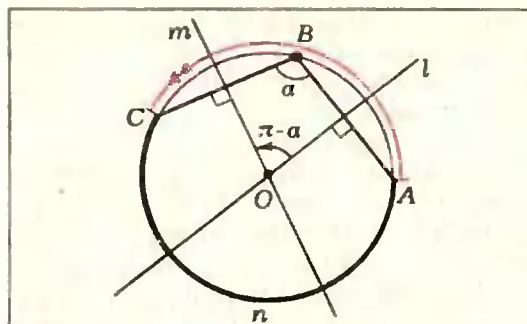


Рис. 6.

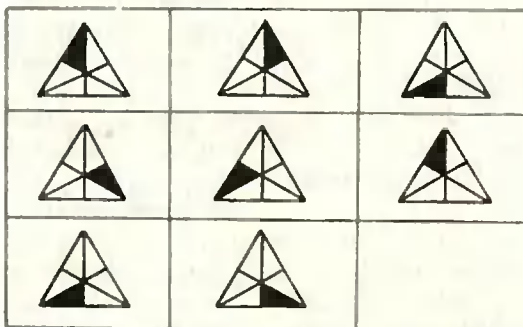


Рис. 7.

в этом случае есть поворот  $R_0^{2(\alpha-\pi)}$  или  $R_0^{2(\pi-\alpha)}$ . Точка  $C = R_0^{2(\alpha-\pi)}(A)$  или  $C = R_0^{2(\pi-\alpha)}(A)$ . Угловая величина дуги  $ABC$  равна  $2(\pi-\alpha)$  (точка  $A$  переходит в точку  $C$ , двигаясь по дуге  $ABC$ ), а дуга  $AlC$ , на которую опирается вписанный угол  $ABC$ , имеет угловую величину  $2\pi - 2(\pi - \alpha) = 2\alpha$ . Теорема доказана.

В заключение два несложных упражнения.

1°. На рисунке 7 изображен «магический квадрат», в котором осталась незаполненной одна клетка. Какой из восьми треугольников, заполнивших восемь клеток «магического квадрата», должен стоять в пустой клетке? Ответ постарайтесь обосновать.

2°. Треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$  симметричны относительно двух различных прямых  $l$  и  $m$ . Докажите, что эти треугольники — правильные.

## Задачи наших читателей

1. Докажите, что если  $0 < a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n$ ;  $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n > 0$ , то выполняется неравенство

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \geq \frac{n(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n}.$$

2. Найдите наименьшее значение суммы

$$\operatorname{tg}^2 \alpha_1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2 + \operatorname{tg}^2 \alpha_3 + \dots + \operatorname{tg}^2 \alpha_n.$$

если

$$\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2 + \dots + \sin^2 \alpha_n = \frac{1}{2} n$$

( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ).

*С. Берколайко*

3. Докажите, что а) если  $a, b$  и  $c$  — длины сторон треугольника, то

$$a^2 + b^2 > \frac{1}{2} c^2;$$

б)  $a, b, c$  и  $d$  — длины сторон параллелепипеда и одной из его диагоналей, то

$$a^2 + b^2 + c^2 > \frac{1}{3} d^2.$$

*В. Малинин*

4. Докажите, что в произвольном треугольнике

$$S^3 \leq \frac{P^2}{216 \cdot R},$$

где  $S$  — его площадь,  $P$  — периметр, а  $R$  — радиус описанной около него окружности.

*А. Агаев*  
(ученик 9 класса)

«Квант» для младших школьников



## Задачи

1. Найдите два таких двузначных числа БА и ЭТ, что  $БА^2 = БЭТА$ , а  $ЭТ^2 = БЭАТ$ .

2. Попробуйте расшифровать отрывок из книги «Алиса в Зазеркалье» английского математика и писателя Льюиса Кэррола. Эта книга — продолжение всем известной «Алисы в стране чудес». Отрывок имеет прямое отношение к математике (см. рис.).

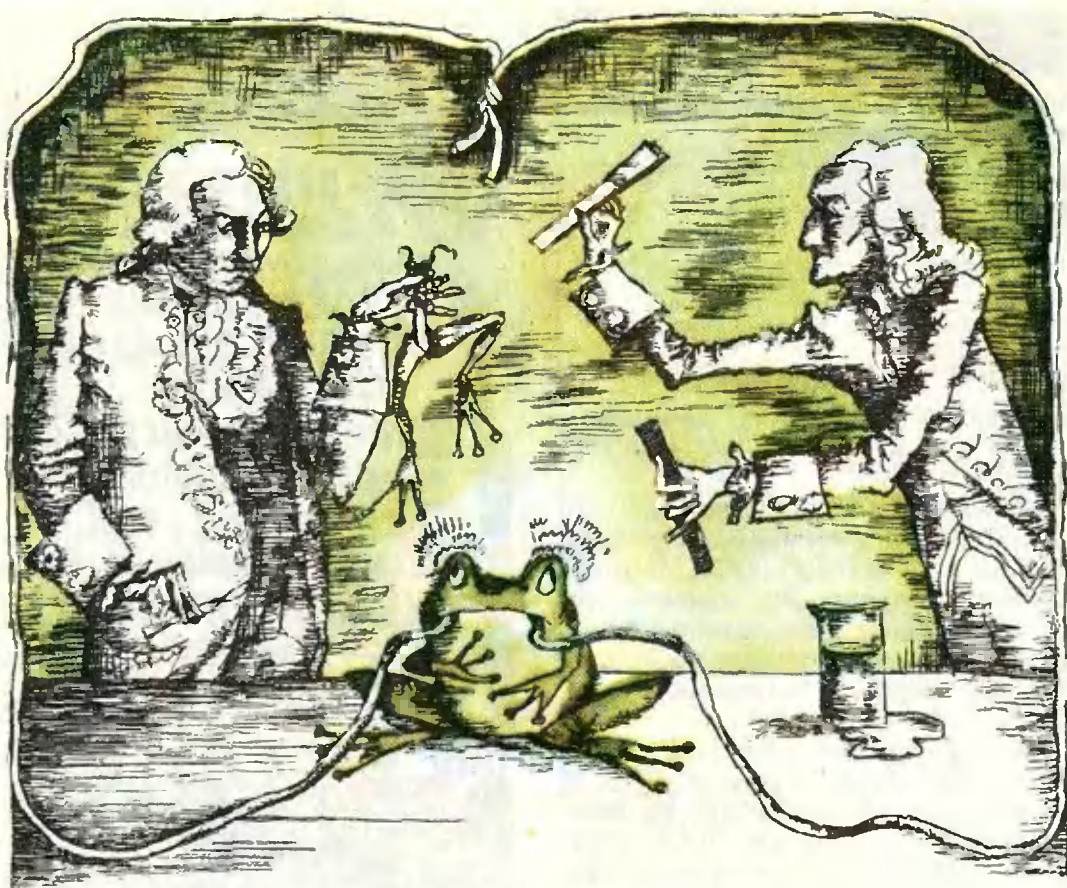
Текст зашифрован следующим образом: десять букв — а, е, и, й, о, у, ы, э, ю, я — как-то разбиты на пары, остальные двадцать две буквы (буква «ё» у нас не встречается) тоже как-то разбиты на пары, и каждая буква в тексте заменена на другую из той же пары. Отрывок записан по всем правилам русского языка.

3. Николай с сыном и Петр с сыном были на рыбалке. Николай поймал столько же рыб, сколько его сын, а Петр — втрое больше, чем его сын. Всего было поймано 35 рыб. Сына Николая зовут Григорий. Как зовут сына Петра?

4. Какое наибольшее количество месяцев одного года может иметь по 5 пятниц?







И. Белкин

## Спор о лягушке

Действующие лица в этом рассказе — итальянские ученые Луиджи Гальвани и Алессандро Вольта. Время действия — последнее десятилетие XVIII века. Тема рассказа — одно из важнейших открытий в физике за всю историю ее развития. Оно прямо привело к тому, что следующее, XIX столетие стало не только веком пара, но и веком электричества.

Началась эта история с того, что в 1791 году профессор анатомии и медицины университета в Болонье Луиджи Гальвани (1737—1798) опубликовал свой «Трактат о силах электричества при мышечном движении». Вместе со многими другими читателями с трактатом познакомился другой профессор — профессор физики

университета в Павии Алессандро Вольта (1745—1827). Между двумя профессорами возник научный спор, который длился несколько лет, результатом которого и стало упомянутое важное открытие. Даже не одно, а по крайней мере три. Важную роль и в этом споре, и в сделанных открытиях сыграли ... лягушки.

### Наука об электричестве в конце XVIII века

О природе электричества к рассматриваемому времени у исследователей были довольно туманные представления, и ни одно из них не было общепринятым и убедительно обоснованным. Более других последователей имели воззрения американского ученого и государственного деятеля Бенджамина Франклина. Он полагал, что «электричество» — это особая жидкость (флюид), содержащаяся в каждом теле в определенном, «нормальном» для этого тела количестве. Процесс электризации тел состоит



в том, что часть этого флюида из одного тела передается другому. То тело, которому электрическая жидкость передана и у которого, таким образом, оказался избыток этой жидкости. Франклин предложил считать положительно заряженным, а другое тело, потерявшее часть электрической жидкости, — отрицательно заряженным. Франклин приписывал электрическому флюиду ряд свойств, которые, по его мнению, объясняли электрические явления. В частности, он отмечал, что отдельные части электрического флюида отталкиваются друг от друга, а в целом электрическая материя очень сильно притягивается к обычной материи.

К рассматриваемому времени были изобретены и широко использовались исследователями устройства, позволяющие накапливать электричество, — электростатические машины и конденсаторы в виде так называемых лейденских банок. Было установлено, что одни тела совершенно не пропускают через себя электрический флюид, а другие пропускают его с разной степенью «податливости» (то есть сопротивления).

Наконец, были известны характерные явления, сопровождающие электрический разряд, то есть переход электрической жидкости от одного тела к другому или к Земле. Это, во-первых, свечение в виде электрической искры, которую можно извлечь из заряженного тела, причем было убедительно доказано, что молния — это тоже электрическая искра грандиозных размеров. Во-вторых, при прохождении разряда через тела животных или человека происходит резкое сокращение мышц, вызывающее ощущение удара, иногда очень сильного и опасного для жизни. Оба эти явления считались надежными признаками электрического характера процессов, при которых они наблюдаются.

Добавим, что к этому времени были изучены и описаны особые органы некоторых рыб (скаты, угри, сомы), способных создавать электрические разряды, вызывающие у жертв нападения совершенно такие же удары, как и разряды лейденских банок и электрических машин.

### На сцене появляется лягушка

В таком положении находилась наука об электричестве, когда в 1791 году вышел в свет упомянутый выше трактат Луиджи Гальвани, в котором были описаны опыты, проведенные им в 1780—1790 годы.

Наблюдения, сделанные Гальвани, были необычайно трудны для понимания. Первое из них заключалось в следующем.

Работая с препарированной конечностью лягушки, Гальвани и его помощники (одним из них, как утверждают некоторые историки, была его жена, и именно она сделала решающее наблюдение) заметили, что если прикоснуться скальпелем к бедренному нерву лягушки (тем самым заземлив его) в тот момент, когда из стоящей в комнате электростатической машины извлекается искра, то мышцы лягушки начинают резко сокращаться. Явление очень странное, если учесть, что разряд проходил не через тело лягушки и что лягушка была мертвой.

Специальный опыт был поставлен Гальвани во дворе во время грозы и дал те же результаты: на каждый грозовой разряд мышцы лягушки исправно реагировали сокращениями, если нерв был заземлен.

Этому явлению Гальвани никакого объяснения не дает, да он и не мог его дать\*).

\*) Дело в том, что в электрической искре и в молнии происходят электрические колебания, которые в виде радиоволн распространяются по всем направлениям. Мышцы лягушки служили, по-видимому, «приемником» таких волн и реагировали на них сокращениями. Однако о существовании этих колебаний стало известно лишь через много десятилетий — в 1859 году. О том, что они распространяются в виде радиоволн, узнали почти через 30 лет после этого — в 1888 году. А еще через 7 лет А. С. Попов использовал радиоволны для целей связи. Кстати, и А. С. Попов своим приемником «ловил» радиоволны от грозových разрядов (он даже и назывался грозоотметчиком). Препарированные лягушки Гальвани, по-видимому, тоже реагировали на радиоволны от электрических искр и грозových разрядов.

Но разве можно было догадаться об этом в 1791 году?!

Продолжая свои исследования, Гальвани сделал еще одно, не менее странное, наблюдение. Пытаясь обнаружить влияние на препарированную лягушку атмосферного электричества в тихую погоду, Гальвани подвесил на железную ограду балкона с помощью латунных крючков конечности лягушек. Но теперь сокращения мышц наблюдались только тогда, когда мышцы лягушки специально прижимались к железной ограде, так что создавалась замкнутая цепь: железо — мышца — нерв — латунный крючок — железо. Удивленный этим странным обстоятельством, Гальвани перенес опыты в комнату, где о влиянии атмосферного электричества не могло быть и речи. Здесь, положив препарированную лягушку на серебряную пластинку и прикасаясь к нерву лягушки стальным скальпелем, Гальвани снова обнаружил резкие сокращения мышцы всякий раз, когда нерв (или спинной мозг, откуда он выходит) и мышца соединялись металлическим проводником. Гальвани был достаточно наблюдательным экспериментатором, чтобы заметить и отметить одно обстоятельство: сокращения мышц лягушки особенно сильны тогда, когда нерв и мышца замыкаются парой *разнородных* металлов.

Один из опытов Гальвани был особенно эффектен. Он держал в руках препарированную лягушку за одну лапку так, что другая касалась серебряной пластинки. Той же пластинки касался латунный крючок, проходивший через спинной мозг лягушки, так что мышца и нерв замыкались через латунь и серебро. При этом мышца лапки, касавшейся пластинки, сокращалась, лапка приподнималась, разрывая цепь, снова падала на пластинку, и все начиналось сначала. Вид «пляшущей» мертвой лягушки вызвал немалое удивление исследователя. От объяснения этого явления Гальвани не отказался, и состояло оно вот в чем.

Сокращения лягушачьей мышцы указывали на то, что процесс имеет электрическую природу. Но откуда взялось электричество? Ведь лягушка не похожа на электрических сомов или угрей, и электрического органа



Луиджи Гальвани (1737—1798).

у нее нет. К тому же лягушка мертва. Тем не менее Гальвани высказывает утверждение о существовании особого *животного электричества*. По мнению Гальвани внешняя поверхность и внутренняя часть мышцы лягушки (как, впрочем, и всякого другого животного) образуют нечто вроде конденсатора (лейденской банки), который возбуждается (заряжается) действием спинного мозга, передаваемым через нерв. При замыкании через металла «конденсатор» разряжается, по цепи протекает электрическая жидкость (возникает электрический ток, как сказали бы мы теперь), на что мышца и реагирует сокращением. Понятно, что при таком взгляде на вещи совершенно безразлично, замыкается ли цепь одним и тем же металлом или двумя различными металлами. Несколько позже Гальвани дал такое «объяснение» роли разнородности металлов. По мнению Гальвани животное электричество отличается от обычного. И главное его отличие именно тем, что оно... «более эффективно действует через разнородные проводники».

Ниже мы увидим, что действительно открыл Гальвани, что он не открыл (хотя и мог открыть), в чем он ошибался и в чем он был прав.



Алессандро Вольта (1745—1827).

### За дело берется Алессандро Вольта. Спор о лягушке

Трактат Гальвани вызвал большой интерес. Привлек он внимание и профессора физики университета в Павии Алессандро Вольта, уже известного своими работами по исследованию электрических явлений и своими изобретениями в области электричества. Узнав об опытах Гальвани и несколько не веря в существование животного электричества, Вольта тем не менее повторил эти опыты. Физик-экспериментатор, он сумел не хуже анатома Гальвани препарировать лягушек, повторить опыты и получить те же результаты, заставившие его сначала даже поверить в животное электричество.

В лекции, прочитанной 5 мая 1792 года, он всячески превозносит Гальвани, восхваляет сделанное им открытие, говорит о его необычайной важности и т. д. Однако чуть позже, 14 мая, в другой лекции Вольта уже спорит с Гальвани, доказывая, что обнаруженное Гальвани явление — чисто физическое, а не физиологическое, что животного электричества не существует и что дело совсем не в лягушке, а именно в двух разнородных металлах, соприкасающихся с

ней и замыкающих цепь. В доказательство Вольта описывает свой знаменитый опыт, состоявший в следующем. Два конца двух разных металлических пластин он прикладывал к собственному языку, и когда другие концы пластин соединялись, то ощущался кислостый вкус, причем, действие было не мгновенное, а длительное. (Этим способом и теперь пользуются для проверки годности сухих батареек.) Язык с успехом заменил лягушку!

С этого и начался длительный спор между Гальвани и Вольта о роли лягушки в сделанных ими обоими наблюдениях. Вольта старался доказать, что лягушка, так же как и язык экспериментатора, — это только своеобразный индикатор течения электричества, а главную роль играет пара разнородных металлов. С этой целью он старался исключить из «гальванических» опытов лягушек и вообще любой биологический объект, включая и собственный язык. Гальвани же, пытаясь доказать, что в основе явления лежит животное электричество, а металлы лишь наиболее эффективно проводят его, стремился устранить металлы из своих опытов и получить прежние результаты с помощью одних только биологических средств. Коротко говоря, Вольта хотел получить электрический ток без лягушек, а Гальвани хотел добиться сокращения мышц без металлов.

Как это ни странно, успехом увенчались усилия обоих участников спора. В 1894 году Гальвани описал опыт, состоящий в том, что нерв и мышца лягушки соединялись не металлом, а лягушачьей же мышцей. Каждый раз замыкание такой цепи вызывало вздрагивание лягушки. Гальвани счел свою задачу выполненной и исследований не продолжал. Вскоре Северная Италия была завоевана Наполеоном Бонапартом. Гальвани выступил противником французского владычества на его родине, лишился в 1797 году должности профессора, а в 1798 году скончался.

Вольта еще ранее с помощью изобретенного им электрометра (усовершенствованного электроскопа) показал, что два различных металла

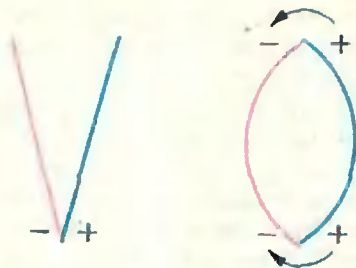


Рис. 1.

при контакте электризуются. (Теперь это явление называют контактной разностью потенциалов.) Но если такую пару соприкасающихся металлов замкнуть, то течения электричества в цепи не будет, так как токи через спай имеют противоположные направления (рисунок 1). В «гальванических» же опытах электричество течет по замкнутой цепи. И Вольта решил, что причина этого в том, что и в опытах Гальвани, и в его собственных фигурировал третий проводник — жидкий (жидкость в мышцах лягушки или жидкость на языке). Он заменяет «влажные» участки «гальванической» цепи просто смоченным картоном и показывает, что такая система образует источник непрерывающегося движения электричества. Об этих опытах Вольта сообщил в 1796 году. Тем самым, как казалось Вольта, было покончено с животным электричеством Гальвани. Но Вольта по-прежнему говорит о «гальванизме», воздавая должное тому, кто дал толчок его собственным исследованиям. И до сих пор явления, связанные с прохождением постоянного электрического тока, называют гальваническими.

Так появился на свет «гальванический» элемент, изобретенный Вольта. После 1796 года автор этого изобретения молчал долгие четыре года. Все эти годы он искал способ получения более мощных источников, чем его первый элемент, состоявший из пары разнородных металлических электродов (так мы их теперь называем), соприкасающихся с жидким проводником. В конце концов Вольта нашел такой способ. Он расположил друг за другом ряд своих эле-

ментов в виде чаш с жидкостью, в которую погружены серебряные и цинковые электроды: серебро — жидкость — цинк — серебро — жидкость — цинк и т. д. (рисунок 2). Соединив попарно цинковые и серебряные электроды из соседних чаш, он получил источник напряжения (как мы теперь говорим) на концах которого пропорционально числу элементов (у



Рис. 2.

Вольта их было до 60). В 1800 году Вольта сообщил о еще более простом и компактном устройстве, которое он сам назвал сначала «искусственным электрическим органом» (он вызывал удар, напоминающий удар электрического органа рыб), а затем «электродвижущим аппаратом». Устройство это состояло из поставленных друг на друга пар цинковых и медных кружков, разделенных смоченными в растворе серной кислоты картонными кружками (рисунок 3). Сов-

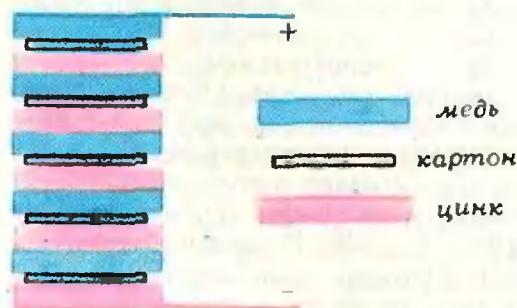


Рис. 3.

ременники назвали это устройство «вольтовым столбом». Ввиду простоты их изготовления вольтовые столбы вскоре появились во всех физических лабораториях, и ими пользовались вплоть до начала XX века.

Значение этого открытия было очень велико. Можно сказать, что с изобретением Вольта источника постоянного тока началась новая эра в исследовании электричества. Многочисленные опыты, целью которых



было изучение «взаимодействия» электрического тока с веществом, дали науке много важных открытий. В 1800 году с помощью вольтова столба было открыто разложение воды электрическим током. Исследования химического действия электрического тока, самыми результативными и важными из которых б и работы английского ученого Дэви, привели к появлению новой ветви науки — электрохимии. В первом десятилетии XIX века академик Петров в России и Дэви в Англии открыли электрическую дугу (есть справедливость в том, что ее часто называют вольтовой дугой!). Еще через десятилетие было открыто магнитное действие электрического тока, и это открытие привело в конце века к технической революции, связанной с появлением электротехники.

Вот к чему привел долгий спор о лягушке!

Во всех этих исследованиях, имевших столь важное значение для физики и техники, сам Вольта никакого участия не принимал. Как и Гальвани, Вольта, добившись успеха, практически прекратил научную деятельность. Его открытие получило всеобщее признание и произвело огромное впечатление. Дважды, в 1800 и в 1801 годах, он докладывал о своем открытии в Парижской Академии наук. На последнем докладе присутствовал Наполеон Бонапарт, вполне оценивший важность открытия Вольта. Вольта был осыпан наградами. Он получил медаль Академии, большую денежную награду, титул графа и звание сенатора, высшие французские ордена. Но в науке его роль была закончена. В 1819 году он покинул профессорскую кафедру, а в 1827 году скончался.

### Итоги спора о лягушке

Спор между Гальвани и Вольта привел не только к появлению первого в истории источника постоянного электрического тока. Это не был спор, закончившийся победой одного из его участников и поражением другого. История не обидела и Гальвани. И дело не только в том, что его имя присвоено источнику тока, который

он не открыл, хотя и мог открыть (ведь в опыте с двумя металлами и мышцей лягушки Гальвани имел дело именно с гальваническим элементом). Но в своем знаменитом опыте, в котором мышца лягушки вздрагивала, замкнутая мышцей же, он в самом деле открыл «животное электричество». Много позже (в 1837 году) это было доказано итальянским физиком Маттеуччи и (в 1848 году) немецким физиологом Дюбуа-Реймоном. Правда, теперь это называется не животным электричеством, а биоэлектрическими потенциалами или биотоками.

Открытие Вольта имело не только важное практическое значение. Оно также поставило перед учеными задачу объяснить такие явления, открытые Вольта, как контактная разность потенциалов и гальванический ток.

Сам Вольта полагал, что в основе действия гальванического элемента лежит именно контактная разность потенциалов. Однако, он считал, что для возникновения постоянного электрического тока просто требуется не два контакта на концах двух различных металлов, а три, как это показано на рисунке 4: два контакта двух металлов с проводящей жид-

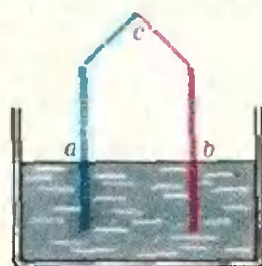


Рис. 4.

костью в точках *a* и *b* и контакт двух металлов в точке *c*. Это объяснение ошибочное. Но только через много десятилетий было показано, что причиной возникновения электродвижущей силы в химическом элементе является химическое взаимодействие металлов с электролитом (так теперь называют проводящую жидкость в элементе). И лишь в 1888 году Нернстом была дана полная теория гальванических элементов.



# Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

Ниже публикуются образцы вариантов письменного экзамена по математике, предлагавшихся тем поступающим на механико-математический, химический, географический, биологический факультеты и факультет почвоведения, которые окончили среднюю школу в 1977 году, и примеры задач устного экзамена по физике.

## Математика

### Механико-математический факультет

1. Найти все числа  $a > 0$ , для которых

$$\int_0^a (2 - 4x + 3x^2) dx \leq a.$$

2. Длины боковых сторон трапеции равны 3 и 5. Известно, что в трапецию можно вписать окружность, касающуюся всех ее сторон. Средняя линия трапеции делит трапецию на две части, отношение площадей которых равно  $\frac{5}{11}$ . Найти длины оснований трапеции.

3. Доказать, что для функции  $f(x) = (\cos x)(\sin 2x)$

$$\min_{x \in [-\pi, \pi]} f(x) > -\frac{7}{9}.$$

4. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0, \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0, \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0. \end{cases}$$

5. Основанием пирамиды  $SABC$  является равносторонний треугольник  $ABC$ , длина стороны которого равна  $4\sqrt{2}$ . Боковое ребро  $SC$  перпендикулярно к плоскости основания и имеет длину 2. Найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку  $S$  и середину ребра  $BC$ , а другая проходит через точку  $C$  и середину  $AB$ .

## Химический факультет

1. Из пункта  $A$  в пункт  $B$  доставлена почта. Сначала ее вез мотоциклист: проехав  $\frac{2}{3}$  расстояния от пункта  $A$  до пункта  $B$ , он передал почту ожидавшему его велосипедисту, который и доставил ее в пункт  $B$  (время, потребовавшееся на передачу почты, считать равным нулю). При этом почта была доставлена из пункта  $A$  в пункт  $B$  за промежуток времени, необходимый, чтобы проехать от пункта  $A$  до пункта  $B$  со скоростью 40 км/час.

Известно, что если бы мотоциклист и велосипедист выехали из пунктов  $A$  и  $B$  одновременно навстречу друг другу, то они встретились бы через промежуток времени, необходимый для проезда от пункта  $A$  до пункта  $B$  со скоростью 100 км/час.

Найти скорость мотоциклиста, считая, что она больше скорости велосипедиста.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 - 2x + 2, y = x^2 + 4x + 5, y = 1.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} (6^{x+1} - 36^x) \geq -2.$$

4. В выпуклом четырехугольнике длины диагоналей равны одному и двум метрам. Найти площадь четырехугольника, зная, что длины отрезков, соединяющих середины его противоположных сторон, равны.

5. Найти все решения уравнения

$$2 - \sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x = 4 \cos^2 3x,$$

удовлетворяющие неравенству

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) > 0.$$

## Географический факультет

1. Решить неравенство

$$2|x + 1| > x + 4.$$

2. В треугольнике  $ABC$  сторона  $AB$  имеет длину 3 м, высота  $CD$ , опущенная на сторону  $AB$ , имеет длину  $\sqrt{3}$  м. Основание  $D$  высоты  $CD$  лежит на стороне  $AB$ , длина отрезка  $AD$  равна длине стороны  $BC$ . Найти длину стороны  $AC$ .

3. Найти промежутки возрастания и убывания, а также точки максимума и минимума функции  $y = \frac{x}{\ln x}$ .

4. Грузовик и гоночный автомобиль выехали одновременно из пункта  $A$  и должны прибыть в пункт  $C$ . Грузовик, двигаясь с постоянной скоростью, доехал до пункта  $C$ , проделав путь, равный 360 км. Гоночный автомобиль поехал по окружной дороге и сначала доехал до пункта  $B$ , расположенного в 120 км от пункта  $A$ , двигаясь со скоростью, вдвое большей скорости грузовика. После пункта  $B$  он увеличил свою скорость на 40 км/час и проехал путь от пункта  $B$  до пункта  $C$ , равный 1000 км. Он прибыл в пункт  $C$  на 1 час 15 мин позднее грузовика. Если бы гоночный автомобиль весь свой

путь от пункта  $A$  до пункта  $C$  ехал с той же скоростью, что и от пункта  $B$  до пункта  $C$ , то в пункт  $C$  он прибыл бы на 1 час позднее грузовика. Найти скорость грузовика.

5. Решить уравнение

$$2 \sin \left( 3x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{1 + 8 \sin 2x \cdot \cos^2 2x}.$$

**Биологический факультет**

1. Решить уравнение

$$\sqrt{4 + 2x - x^2} = x - 2.$$

2. В выуклом четырехугольнике  $ABCD$  углы при вершинах  $A$  и  $B$  — прямые, величина угла при вершине  $D$  равна  $45^\circ$ , длина стороны  $BC$  равна 1 м, длина диагонали  $BD$  равна 5 м. Найти площадь этого четырехугольника.

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линией  $y = 0,5x^2 - 3x + 4,5$  и касательными к ней в точке  $(1; 2)$ :  $y = 4 - 2x$  и в точке  $(4; \frac{1}{2})$ :  $y = x - 3,5$ .

4. Решить уравнение

$$2 \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) + 2 \cos \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = 3 \sin \left( \frac{x}{4} + \frac{\pi}{8} \right) + \sqrt{3} \cos \left( \frac{x}{4} + \frac{\pi}{8} \right).$$

5. Найти все те значения параметра  $s$ , при каждом из которых все корни уравнений  $x^2 + 3x + 2s = 0$  и  $x^2 + 6x + 5s = 0$  различны и пересекаются, т. е. оба уравнения имеют два корня и между двумя корнями одного уравнения находится ровно один корень другого уравнения.

**Факультет почвоведения**

1. Решить уравнение  $2\sqrt{x+5} = x + 2$ .

2. Указать промежутки возрастания и убывания, а также точки максимума и минимума функции  $f(x) = xe^{-3x}$ .

3. Решить уравнение

$$|\sin x| = \sin x + 2 \cos x.$$

4. Основание  $AB$  трапеции  $ABCD$  вдвое длиннее основания  $CD$  и вдвое длиннее боковой стороны  $AD$ . Длина диагонали  $AC$  равна  $a$ , а длина боковой стороны  $BC$  равна  $b$ . Найти площадь трапеции.

5. Рота солдат прибыла на парад в полном составе прямоугольным строем по 24 человека в ряд. По прибытии оказалось, что не все солдаты могут участвовать в параде. Оставшийся для парада состав роты перестроили так, что число рядов стало на 2 меньше прежнего, а число солдат в каждом ряду стало на 26 больше числа новых рядов. Известно, что если бы все солдаты участвовали в параде, то роту можно было бы выстроить так, чтобы число солдат в каждом ряду равнялось числу рядов. Сколько солдат было в роте?

*С. Алешин,  
М. Потанов*

**Физика**

**Механико-математический факультет и факультет вычислительной математики и кибернетики**

1. С вышки высотой  $h=10$  м в горизонтальном направлении слева направо бросают камень со скоростью  $|v_{01}|=23$  м/с. Одновременно с поверхности земли под углом  $\alpha=30^\circ$  к горизонту справа налево бросают

второй камень со скоростью  $|v_{02}|=20$  м/с. На каком расстоянии  $l$  от основания вышки бросили второй камень, если камни столкнулись в воздухе?

2. Конструкция из пяти одинаковых стержней закреплена в точке  $A$  (рис. 1). К точке  $D$  подвешен груз массы  $m=1,7$  кг. Определить, с какой силой растянуты (или сжаты) все стержни. Массой стержней пренебречь. Ускорение свободного падения  $|g|$  считать равным  $10$  м/с<sup>2</sup>.

3. Два одинаковых маленьких сосуда, объем каждого из которых равен  $V=0,03$  м<sup>3</sup>, соединены горизонтальной цилиндрической трубой, объем которой равен  $2V$ , а сечение  $S=0,1$  м<sup>2</sup>. В середине трубы находится тонкий поршень, способный перемещаться без трения. Давление газа в сосудах равно  $p$ . К одному из сосудов, посредством трубки пренебрежимо малого объема, присоединяют третий такой же сосуд, давление газа в котором равно  $2p$ . Определить перемещение поршня  $x$  после установления равновесия. Температуру газа считать постоянной.

4. Четыре одинаковых гальванических элемента с э. д. с.  $\mathcal{E}=2$  В и внутренним сопротивлением  $r=0,5$  Ом соединены попарно параллельно, а эти две группы соединены между собой последовательно. Какую мощность  $P$  такая батарея отдает во внешнюю цепь с сопротивлением  $R=2$  Ом?

5. Электрическая лампа с вольфрамовой нитью в момент включения потребляет мощность  $P_1=500$  Вт. Какую мощность  $P$  она будет потреблять после того, как ее нить нагреется до температуры  $t=2500^\circ\text{C}$ ? Комнатная температура  $t_1=20^\circ\text{C}$ . Температурный коэффициент сопротивления вольфрама  $\alpha=4,5 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ .

6. Два неподвижных параллельных горизонтальных проводящих стержня, находящихся на расстоянии  $L=1$  м друг от друга, помещены в однородное магнитное поле, ин-

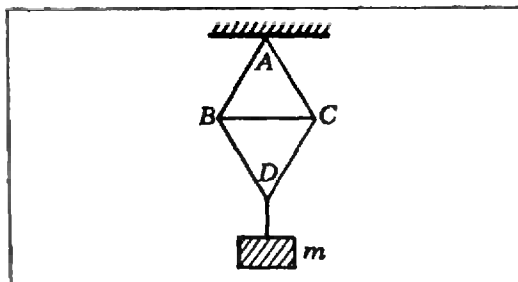


Рис. 1.

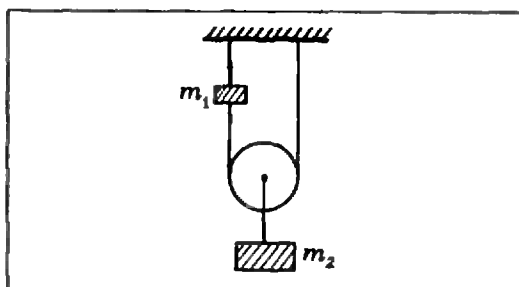


Рис. 2.

дукция которого равна  $|\vec{B}|=0,1$  Т и направлена вертикально. На стержнях, перпендикулярно к ним, лежит металлический стержень массы  $m=0,5$  кг. Определить ускорение  $|\vec{a}|$  этого стержня, если по нему пропустить ток  $I=50$  А. Коэффициент трения между стержнями равен  $k=0,2$ . Ускорение свободного падения  $|\vec{g}|$  считать равным  $10$  м/с<sup>2</sup>.

7. Собирающая линза с фокусным расстоянием  $F_2=10$  см и рассеивающая линза с фокусным расстоянием  $F_1=20$  см, имеющие общую главную оптическую ось, находятся на расстоянии  $a=30$  см друг от друга. На расстоянии  $d_1=10$  см от рассеивающей линзы со стороны, противоположной собирающей линзе, находится предмет. Определить расстояние  $f_2$  между изображением предмета, созданным обеими линзами, и собирающей линзой.

#### Географический, геологический, химический факультеты и факультет почвоведения

1. Двигаясь равноускоренно, тело проходит за промежуток времени  $t_1=4$  с путь  $s_1=2$  м, а за следующий промежуток  $t_2=5$  с — путь  $s_2=4$  м. Определить ускорение  $|\vec{a}|$  тела.

2. Два тела одновременно начинают двигаться из одной точки в поле силы тяжести с одинаковыми по абсолютным значениям

скоростями, равными  $v_0=2$  м/с. Одна из скоростей направлена под углом  $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$ ,

а другая — под углом  $\alpha_2 = -\frac{\pi}{4}$  к горизонту.

Определить относительную скорость этих тел через время  $t=2$  с после начала движения.

3. Два тела с массами  $m_1=2$  кг и  $m_2=1$  кг подвешены с помощью невесомых и нерастяжимых нитей и невесомого блока, как показано на рисунке 2. Нить перерезают в месте, отмеченном косым крестом. Через сколько времени после этого скорость

тела  $m_1$  станет равной  $|\vec{v}|=4,9$  м/с? Трением пренебречь. Считать, что блок движению тел не мешает. Ускорение свободного падения  $|\vec{g}|=9,8$  м/с<sup>2</sup>.

4. В калориметр, содержащий воду при температуре  $t=5^\circ\text{C}$ , опустили  $m=40$  г льда при температуре  $t_1=-10^\circ\text{C}$ . После выравнивания температур в калориметре осталось  $m_1=19$  г льда. Сколько воды было в калориметре до начала опыта? Удельная теплоемкость воды  $c_v=4,2$  кДж/(кг·К), удельная теплоемкость льда  $c_l=2,1$  кДж/(кг·К), удельная теплота плавления льда  $\lambda=3,4 \cdot 10^5$  Дж/кг.

5. Два конденсатора с емкостями  $C_1=2 \cdot 10^{-10}$  Ф и  $C_2=10^{-10}$  Ф заряжены до напряжений  $U_1=200$  В и  $U_2=100$  В соответственно. Затем положительная обкладка первого конденсатора соединена с отрицательной обкладкой второго, а отрицательная первого — с положительной второго. Определить заряды на пластинах конденсаторов после соединения.

6. Генератор постоянного тока имеет э. д. с.  $\mathcal{E}=200$  В и внутреннее сопротивление  $r=4$  Ом. Чему должно быть равно сопротивление внешней цепи  $R$ , для того чтобы в ней расходовалась мощность  $P=2,5$  кВт?

7. Точечный источник света находится на расстоянии  $d=50$  см от тонкой собирающей линзы и на расстоянии  $l=5$  см от ее оптической оси. Действительное изображение источника находится на расстоянии  $L=10$  см от оптической оси. Определить фокусное расстояние  $F$  линзы.

В. Слудский

## Вниманию старшеклассников

Издательство «Наука» Академии Наук СССР предлагает Вам следующие книги:

### Математика

1. Вилекин Н. Я. *Популярная комбинаторика*. ц. 35.

2. Володарский А. И. *Очерки истории сред-*

*невековой индийской математики*. ц. 67 к.

3. Гик Е. Я. *Математика на шахматной доске*. ц. 31 к.

4. *Упрощенный алгол*. ц. 9 к.

### Физика

5. Барабой В. А. *Солнечный луч*. ц. 47 к.

6. Куликов К. А., Гуревич В. Б. *Новый облик старой Луны*. ц. 25 к.

7. Черкасов И. И., Шварев В. В. *Грунт Луны*. ц. 57 к.

8. Франкфурт У. И., Френк А. М. *У истоков квантовой теории*. ц. 64 к.

9. *Оптика и атомная физика*. ц. 2 р. 10 к.

10. *Физическая электроника*. ц. 1 р. 30 к.

11. *Воспоминания о Я. И. Френкеле*. ц. 1 р. 42 к.

12. *Воспоминания об академике Д. С. Рождественском*. ц. 80 к.

Заказы на книги просим направлять по адресу: 117192, Москва В-192, Мичуринский пр., 12, магазин № 3 «Книга-почтой».



А. Зазело

## Множества значений числовых функций

Напомним, что множеством значений  $E(f)$  числовой функции  $f$  называется множество всех  $a \in \mathbb{R}$ , для которых существует хотя бы одно  $x \in D(f)$  такое, что  $f(x) = a$ . Можно сказать по-другому:  $E(f)$  состоит из тех  $a$ , при которых уравнение  $f(x) = a$  имеет хотя бы одно решение. В простых случаях это уравнение можно исследовать и тем самым отыскать  $E(f)$ .

**Пример 1.** Найдем множество значений функции

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Уравнение  $f(x) = a$  переписывается в виде  $ax^2 - 2x + a = 0$ ; при  $a = 0$  ему удовлетворяет  $x = 0$ , а в случае  $a \neq 0$  мы имеем квадратное уравнение, которое имеет решения лишь при таких  $a$ , при которых его дискриминант неотрицателен:  $D = 4 - 4a^2 \geq 0$ , т. е.  $a^2 \leq 1$ , или  $a \in [-1; 1]$  (и  $a \neq 0$ ). Итак, уравнение  $f(x) = a$  имеет решения тогда и только тогда, когда  $a \in [-1; 1]$ , поэтому  $E(f) = [-1; 1]$ . Заметим, что одновременно мы нашли наименьшее и наибольшее значения функции  $f$  —  $\min f = -1$ ,  $\max f = 1$ .

**Задачи 1–3.** Найти множества значений указанных функций, а также их наибольшие и наименьшие значения (в тех случаях, когда они существуют).

1. а)  $\frac{2x}{1+x}$ ; б)  $\frac{1}{1+x^2}$ ; в)  $\frac{1}{1-x^2}$ .

2. а)  $\pi^x - 3$ ; б)  $\log_2 x + \log_x 2$ ;

в)  $\lg x + \operatorname{ctg} x$ .

3. а)  $\cos^2 x + \cos 2x$ ; б)  $\sin x \cdot \cos x$ ;

в)  $\sin^4 x + \cos^4 x$ .

В ряде случаев отыскание множества значений данной функции сво-

дится к исследованию квадратичной функции на том или ином промежутке. Чтобы не ошибиться, полезно нарисовать график этой квадратичной функции.

**Пример 2.** Найдем множество значений функции

$$f(x) = 2 \cos x + \cos 2x.$$

Перепишем  $f(x)$  в виде  $f(x) = 2 \cos x + 2 \cos^2 x - 1 = 2z^2 + 2z - 1$ , где через  $z$  обозначена функция  $\cos x$ . Поскольку  $z = \cos x$  принимает значения  $z \in [-1; 1]$ , остается выяснить, каково множество значений квадратичной функции  $g(z) = 2z^2 + 2z - 1$  на отрезке  $[-1; 1]$ . Графиком функции  $g(z)$  является парабола с вершиной в точке с абсциссой  $z_0 = -\frac{1}{2}$  (поясните), направленная ветвями вверх. Мы имеем:  $g(z_0) = -\frac{3}{2}$ ,  $g(-1) = -1$ ,  $g(1) = 3$ . Если построить график квадратного трехчлена, то ясно, что множество значений  $g$  на отрезке  $[-1; 1]$  (или множество тех  $a$ , при которых уравнение  $g(z) = a$  имеет хотя бы один корень  $z \in [-1; 1]$ ), есть отрезок  $[-\frac{3}{2}; 3]$ . Следовательно, множество значений исходной функции  $f(x) = 2 \cos x + \cos 2x$  есть отрезок  $[-\frac{3}{2}; 3]$ . Заодно мы нашли  $\min f = -\frac{3}{2}$  и  $\max f = 3$ .

**Задачи 4–5.** Исследуя подходящие квадратичные функции на соответствующих промежутках, найдите множества значений следующих функций, а также их наименьшие и наибольшие значения.

4. а)  $6 \cos x + \cos 2x$ ; б)  $\sin x + \cos 2x$ .

5. а)  $4^x - 2^{x+2} + 3$ ; б)  $4^{\sin x} - 2^{\sin x + 2}$ .

При отыскании множества значений функции вида

$$f(x) = A \cos x + B \sin x$$

можно выразить  $\cos x$  и  $\sin x$  через  $t = \operatorname{tg}(x/2)$  (см. «Алгебра и начала анализа 10», п. 91) и затем исследовать получающееся уравнение (относительно  $t$  оно будет квадратным). Однако быстрее и проще это делается так:

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \times \left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin x \right);$$

поскольку

$$\left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 + \left( \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 = 1,$$

существует такое значение  $\alpha$ , что

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

(объясните), и поэтому

$$\begin{aligned} A \cos x + B \sin x &= \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} (\cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha) = \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x - \alpha). \end{aligned}$$

Поэтому множество значений функции  $f(x) = A \cos x + B \sin x$  есть отрезок  $[-\sqrt{A^2 + B^2}; \sqrt{A^2 + B^2}]$ , то же относится и к функциям вида  $A \cos \omega x + B \sin \omega x$ , где  $\omega \neq 0$ .

**З а д а ч а 6.** Укажите множества значений следующих функций:

- а)  $\cos x - \sin x + 1$ ; б)  $3 \cos \frac{x}{2} + 4 \sin \frac{x}{2}$ ;  
 в)  $\cos^2 x - \sin x \cos x$ .

По сути, во всех разобранных примерах и приведенных задачах решения уравнения  $f(x) = a$  можно выписать в явном виде, т. е. уравнение  $f(x) = a$  с параметром  $a$  «решается» (сводится к линейным, квадратным или простейшим показательным, логарифмическим и тригонометрическим уравнениям). Благодаря этому наименьшие и наибольшие значения рассматриваемых функций отыскиваются без использования производной (более того, исследование с помощью производной здесь зачастую было бы более громоздким, чем алгебраическое исследование). В случае же, когда уравнение  $f(x) = a$  не поддается непосредственному решению («не решается»), разумно пойти обратным путем, который мы сейчас и опишем.

**Пример 3.** (Эта задача взята из «Примерных вариантов вступительных экзаменов по математике в вузы в 1977 г.», «Квант», 1977, № 6, с. 89). Найдём множество значений функции

$$f(x) = \sin x \cdot \cos 2x.$$

Обозначив  $\sin x = z$ , мы можем записать:  $f(x) = g(z) = z(1 - 2z^2) = z - 2z^3$ . Как и в примере 2, задача сводится к отысканию множества значений функции  $g$  на отрезке  $[-1; 1]$ . Заметим, что уравнение  $g(z) = a$  — кубическое, и решить его мы не можем. Найдём наименьшее и наибольшее значения функции  $g$  на отрезке  $[-1; 1]$ . Действуя по

общей схеме исследования функций на отрезке (см. «Алгебра и начала анализа 9», п. 59), находим критические точки функции:  $g'(z) = 1 - 6z^2 = 0$  при  $z^2 = 1/6$ , т. е.  $z = \pm \sqrt{1/6}$ ; обе критические точки принадлежат отрезку  $[-1; 1]$ , а значения функции в них следующие:

$$g(\sqrt{1/6}) = \sqrt{6}/9, \quad g(-\sqrt{1/6}) = -\sqrt{6}/9.$$

Сравнивая эти значения со значениями в концах отрезка, — с  $g(-1) = 1$  и  $g(1) = 1$ , — получаем:  $\min_{[-1; 1]} (z - 2z^3) = -1$ ,  $\max_{[-1; 1]} (z - 2z^3) = 1$ .

Поскольку функция  $g$  всюду непрерывна, естественно заключить, что  $g$  принимает любые значения между наименьшим и наибольшим, т. е.  $E(g) = E(f) = [-1; 1]$ . Чтобы это доказать, мы воспользуемся важной теоремой о множестве значений непрерывной монотонной функции:

*если функция  $F$  непрерывна и возрастает (или убывает) на отрезке  $[a; b]$ , то множество значений, принимаемых функцией  $F$  на этом отрезке, также является отрезком:  $[F(a); F(b)]$  (или  $[F(b); F(a)]$ , если  $F$  убывает).*

Эта теорема в более общей и полной формулировке приведена в п. 84 учебника «Алгебра и начала анализа 10» (без доказательства). Возвращаясь к нашей функции, получаем, что  $g$  возрастает на отрезке  $[-\sqrt{1/6}; \sqrt{1/6}]$  и убывает на отрезках  $[-1; -\sqrt{1/6}]$ ,  $[\sqrt{1/6}; 1]$ .

Согласно последней теореме множествами значений  $g$  на этих отрезках будут, соответственно, отрезки

$$[-\sqrt{6}/9; \sqrt{6}/9], \quad [-\sqrt{6}/9; 1]$$

и  $[-1; \sqrt{6}/9]$ ;

их объединение даст множество значений функции  $g$  на всем отрезке  $[-1; 1]$  —  $E(g) = [-1; 1]$ .

**Задачи 7–8.** Найдите множества значений указанных функций.

7.  $x^3 - 6x^2 + 9x$ , если: а)  $x \in [2; 4]$ ;

б)  $x \in [-2; 2]$ .

8. а)  $\cos x \cdot \sin 2x$ ; б)  $\sin x + \sin 3x$ .

**Задача 9.** В каких пределах может изменяться объем конуса с образующей длины 1 дм?

**Задача 10.** В каких пределах может быть заключена площадь полной поверхности цилиндра объемом 1 дм<sup>3</sup>?



А. Савин

## XIX Международная олимпиада по математике

XIX Международная математическая олимпиада, проходившая в июле 1977 года в столице Югославии Белграде, была рекордной по числу участников — для участия в соревнованиях прибыли команды из 21 страны: Австрии, Алжира, Англии, Бельгии, Болгарии, Венгрии, ГДР, Италии, Кубы, Монголии, Нидерландов, Польши, Румынии, СССР, США, Финляндии, Франции, ФРГ, Чехословакии, Швеции и Югославии.

В команду Советского Союза вошли: *Амиран Амброладзе* из Тбилиси, *Андрей Аузиньш* из Риги, *Ярослав Виннишин* из школы-интерната при КГУ, москвич *Виктор Гальперин*, *Александр Кодрян* из города Рыбница Молдавской ССР, *Григорий Рыбников* из Москвы, *Дмитрий Флаас* из школы-интерната при НГУ и *Андрей Чурбанов* из школы-интерната при МГУ. Команду сопровождал В. Орлов (Академия педагогических наук СССР) и автор этих строк (руководитель команды).

Все школьники — участники соревнований — были размещены в Пионерском городке на окраине Белграда, расположенном в тенистом парке, что было особенно приятно: стояла жаркая погода.

Торжественное открытие олимпиады состоялось 6 июля 1977 года в Пионерском городке. Там же 6 и 7 июля были проведены оба тура олимпиады; в каждом туре предлагалось по три задачи.

10 июля прошел симпозиум участников олимпиады. От советской команды с докладами выступили:

*Амброладзе Амиран* — «О представлении натуральных чисел в виде разности двух простых»,

*Аузиньш Андрей* — «Оптимизация работы двух носильщиков»,

*Гальперин Виктор* — «Коммутирующие многочлены»,

*Флаас Дмитрий* — «Об одной комбинаторной задаче теории групп».

В этот же день ученики, отмеченные специальными призами за оригинальное решение задачи, рассказывали участникам олимпиады свои решения. От советской команды выступил *Виктор Гальперин*, получивший специальный приз за решение третьей задачи. Координаторами жюри были отмечены также оригинальные решения 6-й задачи *Григория Рыбникова* и *Андрея Чурбанова* и 2-й задачи *Виктора Гальперина*. Решения указанных задач, данные нашими участниками, будут опубликованы в специальном сборнике, изданном на сербско-хорватском и английском языках.

11 июля все участники олимпиады совершили экскурсию по Дунаю до одной из крупнейших в Европе ГЭС, построенной совместно Югославией и Румынией. Интересно отметить, что корабли на подводных крыльях, на которых совершалась экскурсия, и все 12 гидравлических турбин, установленных на ГЭС, имеют марку «Сделано в СССР».

2 июля состоялся симпозиум научных руководителей команд под названием «Молодежь и математические олимпиады», на котором выступил руководитель советской команды А. Савин.

Ниже публикуем текст задач, предлагавшихся на олимпиаде.

### Первый день

1. Внутри данного квадрата  $ABCD$  построены равносторонние треугольники  $ABK$ ,  $BCL$ ,  $CDM$ ,  $DAN$ . Доказать, что середины четырех отрезков  $KL$ ,  $LM$ ,  $MN$ ,  $NK$  вместе с серединами восьми отрезков  $AK$ ,  $BK$ ,  $BL$ ,  $CL$ ,  $CM$ ,  $DM$ ,  $DN$ ,  $AN$



Д. Флаас.



Г. Рыбников.



В. Гальперин.

являются вершинами правильного двенадцатиугольника (6 очков).

2. В конечной последовательности действительных чисел сумма любых семи последовательных членов отрицательна, а сумма любых одиннадцати последовательных членов положительна. Найти наибольшее число членов такой последовательности (6 очков).

3. Пусть  $n$  — заданное натуральное число, большее 2, и пусть  $V_n$  — множество чисел вида  $1 + kn$ , где  $k = 1, 2, \dots$ . Число  $m \in V_n$  будем называть неприводимым в  $V_n$ , если не существует чисел  $p, q \in V_n$  таких, что  $pq = m$ . Доказать, что существует число  $r \in V_n$ , которое можно разложить на неприводимые в  $V_n$  множители более, чем одним способом (7 очков).

### Второй день

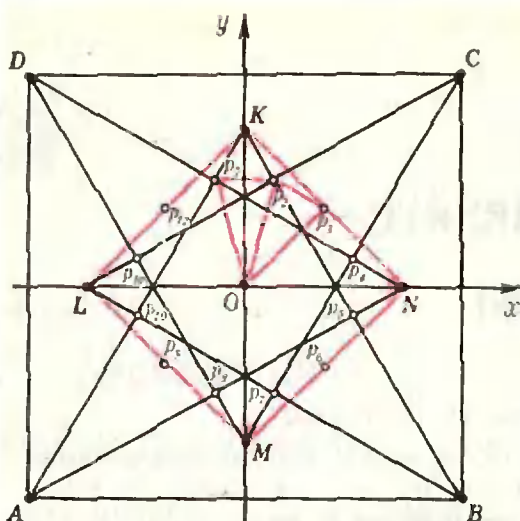
4. Пусть  $a, b, A, B$  — данные действительные числа. Рассмотрим  $f(x) = 1 - a \cos x - b \sin x - A \cos 2x - B \sin 2x$ . Доказать, что если  $f(x) \geq 0$  для любого действительного  $x$ , то  $a^2 + b^2 \leq 2$ , а  $A^2 + B^2 \leq 1$  (6 очков).

5. Пусть  $a$  и  $b$  — натуральные числа. При делении  $a^2 + b^2$  на  $a + b$  получается частное  $q$  и остаток  $r$ . Найти все пары  $(a, b)$ , для которых  $q^2 + r = 1977$  (7 очков)

6. Пусть  $f(n)$  — функция, определенная на множестве натуральных чисел и принимающая значения в том же множестве. Доказать, что если для каждого  $n$  выполняется неравенство  $f(n+1) > f(f(n))$ , то для каждого  $n$  имеет место равенство  $f(n) = n$  (8 очков).

12 июля состоялось торжественное закрытие олимпиады, на котором были оглашены имена победителей. Первыми премиями награждено 13 школьников, набравших от 40 до 34 очков: Г. Рыбников (СССР, 40 очков), К. Гриль (Австрия, 40), Р. Догерти (США, 40), М. Ларсен (США, 40) Д. Риккард (Англия, 40), Г. Мольдер (Нидерланды, 39), И.-Ж. Балаш (Венгрия, 36), Ю. Рахман (ФРГ, 36), Р. Дуади (Франция, 35), З. Магяр





(Венгрия, 34), И. Хастад (Швеция, 34), Л. Гартнер (ГДР, 34), М. Марцичек (ГДР, 34). Вторую премию получили 26 участников, набравших от 33 до 34 очков. Среди них Амирам Амброладзе (24) и Виктор Гальперин (31).

Третьей премией было награждено 36 человек, в том числе советские школьники Андрей Аузиньш (23), Ярослав Виннишин (21), Дмитрий Флаас (21) и Андрей Чурбанов [22].

В неофициальном командном зачете на первое место вышла команда США (202 очка), команда СССР заняла второе место (192 очка), далее идут команды Венгрии, Великобритании и Нидерландов.

Олимпиада была прекрасно организована, между ее участниками царил дух дружбы и взаимопонимания. Участники команды Советского Союза долго будут помнить тепло встреч с югославами — хозяевами олимпиады и с участниками команд других стран.

Югославская центральная газета «Политика» посвятила статью рассказу о члене советской команды, четырнадцатилетнем Диме Флаасе — самом молодом участнике этой олимпиады.

## Задачи наших читателей

1. Докажите, что

$$а) \frac{2 \cdot 1 + 1}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{2 \cdot 2 + 1}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{2 \cdot 3 + 1}{3^2 \cdot 4^2} + \dots \\ \dots + \frac{2 \cdot 1977 + 1}{1977^2 \cdot 1978^2} = \frac{1977 \cdot 1979}{1978^2};$$

$$б) \arctg \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1 \cdot 2} + \arctg \frac{\alpha}{\alpha^2 + 2 \cdot 3} + \dots \\ \dots + \arctg \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1977 \cdot 1978} = \\ = \arctg \frac{1977\alpha}{\alpha^2 + 1978}.$$

Н. Адигезалов

2. Докажите, что если  $k$ ,  $l$ ,  $p$  и  $q$  — натуральные числа, то

а) из  $k + l \geq p + q$  следует, что

$$\left(\frac{p}{k}\right)^k \cdot \left(\frac{q}{l}\right)^l \leq 1;$$

б) из  $k + l + n \geq p + q$  следует, что

$$\left(\frac{p}{k}\right)^k \cdot \left(\frac{q}{l}\right)^l \leq e^n.$$

Я. Сукоцкий

3. Найдите сумму

$$а) C_0^0 + \frac{1}{4} C_2^1 + \frac{1}{16} C_4^2 + \dots + \frac{1}{4^k} C_{2k}^k;$$

$$б) C_{2n+1}^0 + \frac{1}{3} C_{2n+1}^2 + \frac{1}{5} C_{2n+1}^4 + \dots \\ \dots + \frac{1}{2n+1} C_{2n+1}^{2n}.$$

А. Резников

4. Докажите, что

$$C_0^0 C_{2n}^n + C_2^2 C_{2(n-1)}^{n-1} + C_4^4 C_{2(n-2)}^{n-2} + \dots \\ \dots + C_{2n}^{2n} C_0^0 = 4^n.$$

С. Колягин

## Спрашивайте — отвечаем

Уважаемая редакция  
«Кванта»

В «Кванте» № 6 за 1977 г. в статье И. Башмаковой «Исаак Ньютон» имеется эпиграф — двустишие:

«Был этот мир глубокой тьмой окутан.

Да будет свет! И вот явился Ньютон».

Помнится мне, что в какой-то старой книге я читал, что на могиле Ньютона, на надгробной плите, имеется подобная надпись, но в той книге она была дана в оригинале — по-английски. Является ли перевод Маршака переводом этой надписи? Идентична ли эпиграмма А. Попа и надпись на могиле Ньютона?

Если сможете, то сообщите мне, прошу вас, эпитафию на могиле Ньютона.

*И. И. Корнис,  
учитель, г. Джамбул*

Уважаемый тов. И. И. Корнис!

Вас интересует вопрос о надписи на могиле И. Ньютона и о ее связи с двустишием А. Попа.

Ньютон похоронен в Вестминстерском аббатстве в Лондоне и эпитафия на могильном памятнике гласит:

«Здесь покоится сэр Исаак Ньютон, дворянин, который почти божественным разумом первый доказал с факелом математики движение планет, пути комет и приливы океанов.

Он исследовал различие световых лучей и появляющиеся при этом различные свойства цветов, чего ранее никто не подозревал. Прилежный, мудрый и верный истолкователь природы, древности и св. писания, он утверждал своей философией величие всемогущего Бога, а нравом выражал евангельскую простоту. Пусть смертные радуются, что существовало такое украшение рода человеческого. Родился 25 декабря 1642 г., скончался 20 марта 1727 г.» (См. С. И. Вавилов, Исаак Ньютон, Изд-во АН СССР, М.—Л., 1945 г., с. 216).

На статуе Ньютона, воздвигнутой в Тринити колледже в 1755 г., помещена надпись из Лукреция Кара: «Qui genus humanum ingenio superavit» (т. е. «Он превосходил разумом род человеческий»).

Как Вы видите, ни та, ни другая надпись не имеют связи с двустишием Попа, которое в подлиннике звучит так:

Nature and nature's laws lay hid in night.  
God said: «Let Newton be!» And all was light.

Эти строки быстро получили широкую известность. В своей книге «Исаак Ньютон» С. И. Вавилов приводит их перифразировку, сделанную М. В. Ломоносовым:

Россия тьмой была покрыта много лет.

Бог рек: «Да будет Петр!» И бысть в России свет.

*С уважением, профессор И. Башмакова*



## Задачи

# ХI Московской математической олимпиады школьников

С 27 февраля по 27 марта 1977 года проходила традиционная Московская математическая олимпиада. Первый тур проводился только для десятиклассников, остальные классы (7—9-е) сразу участвовали во втором, заключительном туре, вместе с десятиклассниками, успешно прошедшими первый тур. Ниже мы публикуем предложенные на олимпиаде задачи.

### Первый тур (десятый класс)

1. Последовательность натуральных чисел  $\{x_n\}$  строится по следующему правилу:  $x_1=2$ ,  $x_{n+1}=[1,5 x_n]$  ( $[\cdot]$  — целая часть числа).

а) Доказать, что в последовательности  $\{x_n\}$  бесконечно много нечетных чисел.

б) Доказать, что в последовательности  $\{x_n\}$  бесконечно много четных чисел.

(С. Конягин)

2. На столе расположено  $n$  картонных квадратов и  $n$  пластмассовых квадратов. Никакие два картонных квадрата не имеют общих точек, в том числе и точек границы. То же самое имеет место и для пластмассовых квадратов. Оказалось, что множество вершин картонных квадратов совпадает с множеством вершин пластмассовых квадратов. Обязательно ли каждый картонный квадрат совпадает с некоторым пластмассовым?

(В. Прасолов)

3. а) Двенадцать тонких твердых стержней длины 1 скрепили так, чтобы получился каркас куба. Можно ли сделать в плоскости отверстие площади меньше  $1/100$ , не разбивающее плоскость на куски, чтобы через него можно было бы протолкнуть этот каркас?

б) Тот же вопрос для каркаса тетраэдра с ребром длины 1.

(В. Прасолов)

4. Каждая точка числовой оси, координата которой — целое число, покрашена либо в красный, либо в синий цвет. Доказать, что найдется цвет со следующим свойством: для каждого натурального числа  $k$  имеется бесконечно много точек этого цвета, координаты которых делятся на  $k$ . (С. Конягин)

### Заключительный тур

5. (7—8 кл.) В каждой вершине выпуклого  $k$ -угольника находится охотник, вооруженный лазерным ружьем. Все охотники одновременно выстрелили в зайца, сидящего в точке  $O$  внутри этого  $k$ -угольника. В момент выстрела заяц пригибается, и все охотники погибают. Доказать, что нет другой точки, кроме  $O$ , обладающей указанным свойством. (С. Елисеев)

6. (7—8 кл.) Куб  $3 \times 3 \times 3$  составлен из 14 белых и 13 черных кубиков со стороной 1. Столбик — это три кубика, стоящих рядом вдоль одного направления: ширины, длины или высоты. Может ли быть так, что в каждом столбике а) нечетное количество белых кубиков? б) нечетное количество черных кубиков? (В. Авилов)

7. (7—8 кл.) Докажите, что можно найти более тысячи троек натуральных чисел  $a, b, c$ , для которых выполняется равенство  $a^{15} + b^{15} = c^{15}$ . (Д. Берштейн)

8. (7 кл.) В доске торчит 1977 гвоздей. Играют двое, ходят по очереди. Ход состоит в том, что играющий соединяет проводом два гвоздя. Если в результате хода оказалась замкнутая цепь, то сделавший этот ход считается выигравшим. Кто выигрывает при правильной игре: первый или второй? (Не разрешается соединять проводом два ранее уже соединенных гвоздя.) (Н. Агаханов)

9. (7—8 кл.) Найти наименьшее  $n$  такое, что любой выпуклый 100-угольник можно получить в виде пересечения  $n$  треугольников. Докажите, что для меньших  $n$  это можно сделать не с любым выпуклым 100-угольником. (С. Ландо)

10. (9 кл.) В пространстве расположено  $n$  отрезков, никакие три из которых не параллельны одной плоскости. Для любых двух отрезков прямая, соединяющая их середины, перпендикулярна обоим отрезкам. При каком наибольшем  $n$  это возможно? (Г. Гальперин)

11. (9—10 кл.) См. задачу М 479.\*

12. (8—10 кл.) См. задачу М 478.

13. (9 кл.) В пространстве расположено выпуклый многогранник, все вершины которого находятся в целых точках. Других целых точек внутри, на гранях и на ребрах нет. (Целой называется точка, все три координаты которой — целые числа.) Доказать, что число вершин многогранника не превосходит восьми. (С. Миронов)

14. (9—10 кл.) См. задачу М 477.

15. (10 кл.) Можно ли на плоскости расположить бесконечное множество одинаковых кругов так, чтобы любая прямая пересекала не более двух кругов?

(Н. Константинов)

16. (10 кл.) Последовательность натуральных чисел  $\{x_n\}$  строится по следующему правилу:  $x_1=2, \dots, x_n=[1,5 x_{n-1}]$  ( $[\cdot]$  — целая часть числа). Доказать, что последовательность  $y_n = (-1)^{x_n}$  непериодическая. (С. Конягин)

Г. Гальперин

\* «Задачник «Кванта», «Квант», 1977, № 12.



## Памяти Отто Данкела

В 1957 году редакция журнала «Американский математический ежемесячник» («The American Mathematical Monthly») выпустила в свет специальный (дополнительный) номер: «The Otto Dunkel Memorial Problem Book». Этот номер был посвящен памяти профессора Отто Данкела (1869—1951), свыше тридцати лет руководившего «Отделом задач» этого журнала.

Номер, посвященный Данкелу, содержал «400 лучших» задач, отобранных из 2704, которые читатели журнала прислали за период с 1918 по 1950 год. Среди корреспондентов были студенты, преподаватели средней и высшей школы, а также известные в Америке и за ее пределами ученые (Г. Дьюдени, Г. С. М. Кокстер, О. Оре, Г. Пойа, Ч. Тригг; много задач самого О. Данкела).

Отбор «лучших» задач был поручен двадцати членам математикам, на протяжении многих лет активно сотрудничавшим в «Отделе задач» «Ежемесячника». Каждый из них представил свой список «лучших» задач. По этим спискам и был сделан окончательный отбор, в котором основную роль играло «количество голосов», полученных той или иной задачей.

В этом году в издательстве «Мир» в серии «Задачи и олимпиады» \*) вышла кни-

\*) В серии «Задачи и олимпиады» уже вышли две книги: Ч. Тригг, *Задачи с изюминкой*, М., «Мир», 1975, и Й. Кюрша и др., *Венгерские математические олимпиады*, М., «Мир», 1976 (об этой книге см., «Квант», 1977, № 1).

га «Избранные задачи», созданная на основе упомянутого мемориального сборника. Эта книга довольно существенно отличается от американского оригинала — в лучшую сторону (условия задач, а особенно их решения достаточно свободно переложены переводчиком книги Ю. А. Даниловым и редактором книги профессором МГУ В. М. Алексеевым).

Книга «Избранные задачи» состоит из трех частей, как и две ее предшественницы (см. сноску). Первая часть — это условия задач; вторая — их решения, собранные Ю. А. Даниловым из различных выпусков журнала «American Mathematical Monthly». Третья же часть книги полностью написана В. М. Алексеевым. В этой части приводятся необходимые сведения из теории и комментируются отдельные решения.

По сравнению с уже вышедшими в той же серии книгами сборник «Избранные задачи» более труден. Большая часть задач рассчитана не на школьников, а на студентов первых двух курсов вузов. Эти задачи могут быть использованы для студенческих олимпиад, которые в последние годы, наконец, начали завоевывать популярность, но пока еще очень плохо обеспечены литературой.

Почти про все задачи сборника можно сказать, что они *увлекательны*. Но увлекательность отнюдь не единственное качество отобранных задач. Подавляющее большинство задач затрагивает вопросы современной и классической математики, решение которых требует вместе с остроумием и изобретательностью также и умения свободно пользоваться разнообразными средствами математического арсенала. Сборник, конечно же, не может служить пособием для овладения каким-либо разделом математики, хотя в нем очень много задач по элементарной геометрии, по теории чисел (делимость, диофантовы уравнения), большой выбор задач по алгебре и анализу (определители, вычисление ин-

тегралов, дифференциальные уравнения, ряды), богато представлена ныне почти вышедшая из моды проективная геометрия. Все эти задачи могут быть использованы как для повышения интереса школьников и студентов к изучаемому материалу, так и для тренировки будущих «олимпийцев» и для деятельности оргкомитетов.

Более элементарные задачи в сборнике — это последние сто задач (задачи 301—400). Среди них много интересного найдут для себя любители «развлекательной» математики (задача 277 про кругосветный полет, задача 303 о «черной» пятнице, задача 312 о служащих банка). Вообще же этот во многих отношениях уникальный сборник, несомненно, будет способствовать развитию творческих способностей — ведь решение нестандартной задачи обязательно приводит к открытию новых связей в рассматриваемом вопросе и в конце концов — не только к доказательству «чуждой» теоремы, но и к обнаружению своей собственной.

Мы надеемся, что новый сборник заинтересует широкий круг читателей, получающих удовольствие от размышления над трудной задачей.

Чтобы читатель мог составить собственное мнение о новом сборнике задач, мы публикуем условия некоторых из них.

**1. Кругосветный полет (№ 277).** Каждый самолет, входящий в некоторую группу, может служить запасником для любого другого самолета той же группы. Емкость топливных баков каждого самолета позволяет ему пролететь без дозаправки горючим одну пятую окружности Земли. Предполагается, что все самолеты летят с одинаковой постоянной скоростью относительно Земли и одинаково расходуют горючее; имеется лишь одна посадочная площадка; весь запас горючего хранится на базе и время заправки пре-небрежимо мало.

Определить наименьшее число самолетов, необходимых для обеспечения круго-



светного полета одного самолета и его благополучного возвращения на базу.

**2. Вероятность «черной» пятницы** (№ 303). Доказать, что тринадцатое число месяца с большей вероятностью приходится на пятницу, чем на другие дни недели.

**3. Еще одно свойство гармонического ряда** (№ 304). Доказать, что частная сумма

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \\ \dots + \frac{1}{N}$$

гармонического ряда не бывает целым числом ни при каком  $N$ .

**4. Простые числа в арифметической прогрессии** (№ 305). Доказать, что, за единственным исключением, в любой арифметической прогрессии, члены которой — положительные целые числа, а разность меньше 2000, простыми числами могут быть не более 10 последовательных членов.

**5. Нули и точки экстремума кубического многочлена** (№ 318). Дан кубический многочлен  $y = x^3 + px^2 + qx$ . Определить все целочисленные пары коэффициентов  $p$  и  $q$ , при которых уравнение  $y = 0$  имеет различные целочисленные корни и целочисленные координаты двух точек экстремума.

**6. Задача на разрезание** (№ 326). Как разрезать правильный шестиугольник на наименьшее число частей, из которых можно составить равносторонний треугольник той же площади? Каждый разрез производится вдоль прямой.

**7. Гамильтонов цикл на многограннике** (№ 358). Предположим, что мы хотим побывать в вершинах многогранника, а достичь их можно, лишь двигаясь вдоль его ребер. Гамильтон рассмотрел задачу об обходе всех вершин многогранника по маршруту, который не проходит через одну и ту же вершину дважды. (В теории графов такой маршрут принято называть гамильтоновым циклом.) Нетрудно до-

казать, что задача Гамильтона для додекаэдра имеет решение. Доказать, что для ромбододекаэдра задача Гамильтона решения не имеет.

**8. Определение фальшивой монеты при помощи взвешивания** (№ 359). У одного человека было 12 монет, неотличимых по внешнему виду. Одна монета была фальшивая и отличалась по весу от настоящей. У человека под рукой были также очень чувствительные равноплечные весы, но без гирь. Может ли он при помощи не более трех взвешиваний обнаружить фальшивую монету и определить, тяжелее она или легче, чем настоящая?

**9. «Равнобедренные n-точечники»** (№ 360). Назовем множество, состоящее из  $n$  точек на плоскости, равнобедренным  $n$ -точечником, если любые три из них расположены в вершинах равнобедренного треугольника. Шесть точек на плоскости можно расположить так, чтобы они образовывали равнобедренный 6-точечник.

Доказать, что на плоскости нельзя выбрать семь точек, образующих равнобедренный 7-точечник. Чему равно наименьшее число  $k$  такое, что из любых  $k$  точек в пространстве можно выбрать три, не расположенные в вершинах равнобедренного треугольника?

**10. Дети в саду** (№ 370). Из сада доносятся детские голоса.

— Должно быть, там играют Ваши дети? — спросил гость.

— Не только мои, — ответил хозяин, там резвятся сорванцы из четырех семейств: мои дети, дети брата и сестры, а также двоюродного брата. Правда, моя семья самая многочисленная, у брата детей меньше, у сестры еще меньше, а самая маленькая семья у двоюродного брата. Ребята играют в салочки, — продолжал хозяин. — Им бы хотелось сыграть в бейсбол, но их слишком мало, чтобы составить две команды\*). Интересно

заметить, — добавил он, — что произведение числа детей во всех четырех семействах совпадает с номером моего дома, который вы, конечно, заметили на воротах.

— Я немного разбираюсь в математике, — сказал гость. — Попробую установить, сколько детей в каждом из четырех семейств. Прощая какие-то выкладки, гость спросил:

— В семье Вашего двоюродного брата один ребенок? — После того, как хозяин ответил на этот вопрос, гость заявил:

— Теперь я знаю, сколько детей в каждом из четырех семейств.

Сколько детей было в семьях хозяина дома, его брата, сестры и двоюродного брата?

**11. Придворный математик и шут** (№ 374). Однажды придворный математик получил сразу все свое жалование за год серебряными талерами и, сложив из монет 9 неравных столбиков, расположил их в виде магического квадрата. Королю затем придворного математика пришлось по вкусу, но он посоветовал на то, что ни в одном столбике число талеров не было простым.

— Если бы Ваше величество добавило еще 9 талеров к моему жалованию, — заметил придворный математик, — я смог бы увеличить число монет в каждом столбике на 1, и тогда все 9 чисел стали бы простыми.

Проверили. Все оказалось именно так, как сказал придворный математик. Король уже собрался было увеличить жалование математику на 9 талеров в год, как в дело вмешался шут. Он взял по одной монете из каждого столбика, и число оставшихся талеров в каждом из 9 столбиков также оказалось простым. Более того, 9 новых чисел по-прежнему составляли магический квадрат. Девять «лишних» талеров шут оставил себе.

Сколько талеров получал в год придворный математик?

*И. Клумова*

\*) Бейсбольная команда состоит из 9 человек.



**Вопросы по алгебре и анализу**

Ответы. 1. в. 2. г. 3. в. 4. г. 5. б. 6. а. 7. г. 8. в. 9. д. 10. б.

Приведем пояснения к некоторым вопросам.

2. Ветви нарисованной параболы  $y = ax^2 + bx + c$  направлены вниз, поэтому  $a < 0$ . Абсцисса вершины параболы  $x_0 = -\frac{b}{2a}$

положительна, поэтому  $b > 0$ . Наконец, при  $x = 0$  значение  $y = c$  положительно, т. е.  $c > 0$ . По знакам  $a, b$  и  $c$  можно выбрать верный ответ.

3. Если  $(a_n)$  — наша геометрическая прогрессия, то  $a_{10} = a_4 \cdot q^6$ ; поэтому в данном случае  $q^6 = \frac{1}{2}$ , откуда  $q = \pm \sqrt[6]{\frac{1}{2}}$  — две возможности.

6. Число 1 находится в I четверти, числа 2 и 3 — во II четверти, поэтому  $\sin 1 > 0$ ,  $\cos 2 < 0$ ,  $\operatorname{ctg} 3 < 0$ . Кроме того,  $\cos 2 > -1$ , а  $\operatorname{ctg} 3 < -1$ , ибо  $3 > \frac{3\pi}{4}$ .

7. Допустим, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0$ . Тогда по теореме о пределе частного последовательность  $(b_n)$  имеет предел при  $n \rightarrow \infty$  ( $b_n = \frac{a_n b_n}{a_n}$ ), что противоречит условию. Следовательно,  $a = 0$ .

10. Из 12 человек группу в 3 человека можно выделить  $C_{12}^3$  способами. Каждому из этих способов отвечает  $C_9^4$  способов выбрать группу в 4 человека из 9 пока не выбранных. Оставшиеся после второго выбора 5 человек образуют третью группу.

**Композиция двух осевых симметрий**

1°. Зафиксируем две оси симметрии  $l$  и  $m$  правильного треугольника (см. рисунок).

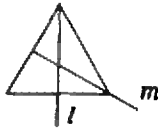


Рис. 1.

Тогда в первом столбце квадрата нижний треугольник получается из верхнего композицией симметрий  $S_m \circ S_l$ . Треугольники второго столбца получаются из соответствующих треугольников первого столбца симметрией  $S_l$ , а треугольники третьего столбца — образы соответствующих треугольников второго в симметрии  $S_m$ .

Ответ. В пустой клетке должен стоять треугольник 

2°. Композиция  $S_m \circ S_l$  переводит треугольник  $ABC$  в себя. С другой стороны, композиция двух осевых симметрий есть поворот

на ненулевой угол, если оси пересекаются, или перенос, если они параллельны (докажите!). При параллельном переносе треугольник не может перейти в себя. Остается новорот. Пусть  $\alpha$  один из углов треугольника; при повороте он переходит в другой угол  $\beta$ , откуда  $\alpha = \beta$ , а третий угол  $\gamma$  переходит в один из углов  $\alpha, \beta$ , откуда  $\gamma = \beta = \alpha$ .

**Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
М а т е м а т и к а**

**Механико-математический факультет**

1. По формуле Ньютона — Лейбница

$$\int_0^a (2 - 4x + 3x^2) dx = (2x - 2x^2 + x^3) \Big|_0^a = 2a - 2a^2 + a^3.$$

Задача свелась к решению системы неравенств

$$\begin{cases} 2a - 2a^2 + a^3 \leq a \\ a > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Система (1) равносильна системе

$$\begin{cases} a(a-1)^2 \leq 0 \\ a > 0. \end{cases}$$

Множество решений первого неравенства этой системы  $] -\infty; 0] \cup \{1\}$ . Ответ:  $a = 1$ .

2. Пусть в трапеции  $ABCD$   $|AB| < |CD|$ ,  $BC \parallel AD$  и  $|BC| < |AD|$ . Обозначим центр вписанной окружности через  $O$ . Проведем через точку  $O$  высоту трапеции  $EF$  ( $E \in BC$ ,  $F \in AD$ ).  $|EO| = |OF|$ , поскольку перпендикуляры из центра окружности к касательным являются радиусами. Проведем через  $O$  прямую  $MK$ , параллельную основаниям трапеции ( $M \in AB$ ,  $K \in CD$ ). По теореме Фалеса  $|CK| = |KD|$  и  $|BM| = |MA|$ , т. е.  $|MK|$  является средней линией трапеции. Положим  $|BC| = a$ ,  $|AD| = b$ ,  $|EF| = h$ .

По условию

$$\frac{a + \frac{a+b}{2}}{\frac{2}{2}} \cdot \frac{h}{2} = \frac{5}{11},$$

$$\frac{\frac{a+b}{2} + b}{2} \cdot \frac{h}{2}$$

откуда  $\frac{3a+b}{a+3b} = \frac{5}{11}$ . С другой стороны, по-

скольку четырехугольник  $ABCD$  описан около окружности,  $|BC| + |AD| = |AB| + |CD|$ , т. е.  $a + b = 8$ . Ответ: длины оснований трапеции равны 1 и 7.

3. Функция  $f$  дифференцируема на промежутке  $[-\pi; \pi]$ . Поэтому она принимает наименьшее значение в одной из точек  $-\pi$ ,  $\pi$  или в одной из своих критических точек, лежащих на интервале  $]-\pi; \pi[$  («Алгебра и начала анализа 9», п. 59). С одной стороны,  $f(-\pi) = f(\pi) = 0 > -\frac{7}{9}$ . С другой

стороны, в критических точках либо  $\cos x_0 = 0$ , либо  $\cos^2 x_0 = \frac{2}{3}$ .

Если  $\cos x_0 = 0$ , то  $f(x_0) = 0 > -\frac{7}{9}$ . Если же  $\cos^2 x_0 = \frac{2}{3}$ , то  $|\sin x_0| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Поскольку  $f(x) = 2 \sin x \cdot \cos^2 x$ , имеем  $|f(x_0)| = \frac{4}{3\sqrt{3}}$ . Легко проверить неравенство  $-\frac{4}{3\sqrt{3}} > -\frac{7}{9}$ . Значит,  $f(x_0) > -\frac{7}{9}$ .

Задачу можно решить также при помощи равенства

$$\min_{[-\pi; \pi]} f(x) = \min_{[-1; 1]} (2t - 2t^3)$$

вытекающего из того, что  $f(x) = 2 \sin x - 2 \sin^3 x$  и для любого  $t \in [-1; 1]$  найдется такое  $x \in [-\pi; \pi]$ , для которого  $\sin x = t$ .

Вычислив производную от функции  $y = 2t - 2t^3$ , легко убедиться, что наименьшее значение на отрезке  $[-1; 1]$  эта функция принимает в точке  $t_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ . Поэтому

$$\min_{[-1; 1]} (2t - 2t^3) = -\frac{4\sqrt{3}}{9} > -\frac{7}{9}.$$

Значит,  $\min_{[-\pi; \pi]} f(x) > -\frac{7}{9}$ .

4. Сложив уравнения системы, получим

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 0. \quad (1)$$

Тройка  $(3; 3; 3)$  является решением уравнения (1). Проверка показывает, что она также является решением системы. (Заметьте: без проверки этого утверждать нельзя!) Покажем, что других решений система не имеет.

Из первого уравнения системы  $y^2 = 9x^2 - 27x + 27$ . Дискриминант квадратного трехчлена  $9x^2 - 27x + 27$  отрицателен. Поэтому, если  $(x_0; y_0; z_0)$  — решение системы, то  $y_0^2 > 0$ . Следовательно,  $y_0 > 0$ . Аналогично, из второго и третьего уравнений получаем  $z_0 > 0$  и  $x_0 > 0$ .

Из первого уравнения системы

$$(y_0 - 3)(y_0^2 + 3y_0 + 9) = 9x_0(x_0 - 3). \quad (2)$$

Так как  $x_0 > 0$  и  $y_0^2 + 3y_0 + 9 > 0$ , из (2) вытекает, что числа  $y_0 - 3$  и  $x_0 - 3$  не могут иметь разных знаков. Аналогично, из второго уравнения следует, что числа  $z_0 - 3$  и  $y_0 - 3$  тоже не могут иметь разных знаков.

Таким образом, если  $x_0 > 3$ , то  $y_0 > 3$  и  $z_0 > 3$ ; если же  $x_0 < 3$ , то  $y_0 < 3$  и  $z_0 < 3$ . Решение  $(x_0; y_0; z_0)$  системы является также решением уравнения (1), а для (1) ни  $x_0 > 3, y_0 > 3, z_0 > 3$ , ни  $x_0 < 3, y_0 < 3, z_0 < 3$  не годятся.

Значит,  $x_0 = 3, y_0 = 3, z_0 = 3$ . Ответ:  $(3; 3; 3)$ .

5. Обозначим середину ребра  $BC$  через  $E$ , середину стороны  $AB$  — через  $D$ . Через точку  $E$  проведем прямую  $l$ , параллельную  $CD$  (рис. 2). Прямая  $l$  лежит в

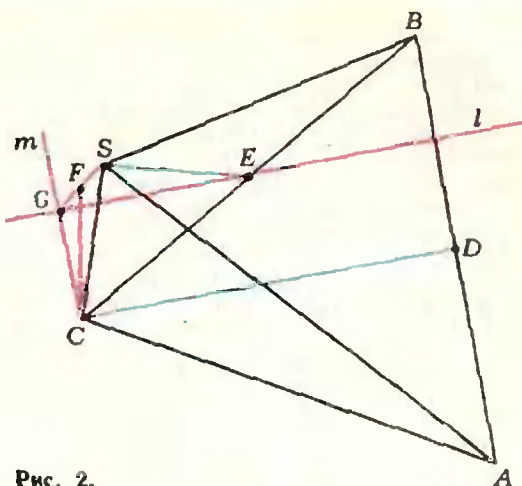


Рис. 2.

плоскости основания  $ABC$ . Прямая  $CD$  параллельна плоскости  $\alpha$ , определяемой точкой  $S$  и прямой  $l$  (поскольку  $CD \parallel l$ ), а прямая  $SE$  лежит в этой плоскости. Значит, искомого расстояния между прямыми  $CD$  и  $SE$  равно длине перпендикуляра, опущенного из любой точки прямой  $CD$  на плоскость  $\alpha$ . Ввиду  $CD \parallel l$  искомого расстояния угла есть величина угла между прямыми  $SE$  и  $l$ .

Поскольку  $|CB| = |CA|$ ,  $CD \perp AB$ . Из  $l \parallel CD$  следует  $l \perp AB$ . Через точку  $C$  проведем прямую  $m$ , параллельную  $AB$ . Прямая  $m$  также лежит в плоскости  $ABC$ . Из  $l \perp AB$  получаем  $m \perp l$ . Обозначим пересечение прямых  $l$  и  $m$  через  $G \in \alpha$ . Опустим, наконец, из точки  $C$  перпендикуляр на прямую  $SG$ . Обозначим его пересечение с  $SG$  через  $F$ .

По условию  $SC \perp CD$ . Из  $m \perp l$  и  $l \parallel CD$  вытекает  $m \perp CD$ . Из  $CD \perp SC$  и  $CD \perp m$  следует, что прямая  $CD$  перпендикулярна плоскости  $SCG$ . Значит,  $CD \perp CF$ . Но  $l \parallel CD$ . Следовательно,  $CF \perp l$ . Кроме того, по построению  $CF \perp SG$ . Значит,  $CF \perp \alpha$ . Итак, искомого расстояния равно  $|CF|$ .

$$|CG| = \frac{|AB|}{4} = \sqrt{2}.$$

$$|GS| = \sqrt{|CG|^2 + |CS|^2} = \sqrt{6}.$$

$$|CF| \cdot |GS| = |CS| \cdot |CG|.$$

Следовательно,

$$|CE| = \frac{|CS| \cdot |CG|}{|SG|} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Величину угла  $SEG$  мы найдем из треугольника  $SEG$ . Поскольку

$$|CE| = \frac{|CB|}{2} = 2\sqrt{2},$$

$$|GE| = \sqrt{|CE|^2 - |CG|^2} = \sqrt{6}$$

$$\text{и } |SE| = \sqrt{|CS|^2 + |CE|^2} = 2\sqrt{3},$$

по теореме косинусов получаем

$$\cos \widehat{SEG} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \widehat{SEG} = 45^\circ.$$

Задачу можно решить и по-другому — при помощи векторов. В плоскости  $ABC$  через точку  $C$  проведем прямую  $m$ , перпендикулярную  $CD$ . Введем прямоугольную систему координат: за начало координат примем точку  $C$ , за ось абсцисс — прямую  $CD$ , за ось ординат — прямую  $m$ , за ось аппликат — прямую  $CS$  (см. рис. 3; в нем указаны положительные направления осей). Пусть  $P$  и  $Q$  — такие точки, соответственно, на прямых  $SE$  и  $CD$ , что  $PQ \perp SE$  и  $PQ \perp CD$ . Тогда искомое расстояние равно  $|PQ|$ . Обозначим через  $\alpha$  и  $\beta$  числа, определяющие положение точек  $P$  и  $Q$ :  $\vec{SP} = \alpha \vec{SE}$ ,  $\vec{CQ} = \beta \vec{CD}$ .

$$\vec{PQ} = \vec{PS} + \vec{SC} + \vec{CQ}.$$

Найдем координаты векторов  $\vec{PS}$ ,  $\vec{SC}$  и  $\vec{CQ}$  в выбранной системе координат.  $\vec{PS} = -\vec{SP} = (-\alpha) \vec{SE}$ . Поскольку  $|CE| = |EB|$  и  $|BD| = |DA|$ ,  $\vec{SE} = \left( \frac{|CD|}{2}; \frac{|AB|}{4}; -|SC| \right)$ .  $|CD| = \sqrt{|AC|^2 - |AD|^2} = 2\sqrt{6}$ . Значит,  $\vec{SE} = (\sqrt{6}; \sqrt{2}; -2)$ .

Следовательно,  $\vec{PS} = (-\sqrt{6}\alpha; -\sqrt{2}\alpha; 2\alpha)$ . Очевидно,  $\vec{SC} = (0; 0; -2)$ . Поскольку  $\vec{CD} = (2\sqrt{6}; 0; 0)$ ,  $\vec{CQ} = (2\sqrt{6}\beta; 0; 0)$ . Итак,

$\vec{PQ} = (-\sqrt{6}\alpha + 2\sqrt{6}\beta; -\sqrt{2}\alpha; 2\alpha - 2)$ . Неизвестные  $\alpha$  и  $\beta$  мы найдем из условий

$\vec{PQ} \cdot \vec{SE} = 0$  и  $\vec{PQ} \cdot \vec{CD} = 0$ .

$$\begin{cases} (-\sqrt{6}\alpha + 2\sqrt{6}\beta)\sqrt{6} + (-\sqrt{2}\alpha)\sqrt{2} + (2\alpha - 2)(-2) = 0 \\ (-\sqrt{6}\alpha + 2\sqrt{6}\beta)2\sqrt{6} + (-\sqrt{2}\alpha) \cdot 0 + (2\alpha - 2) \cdot 0 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы  $-\sqrt{6}\alpha + 2\sqrt{6}\beta = 0$  (это можно было предвидеть: поскольку  $\vec{PQ} \perp \vec{CD}$ , первая координата вектора  $\vec{PQ}$  равна 0). Тогда из первого уравнения  $\alpha = \frac{2}{3}$ . Значит,  $\beta = \frac{1}{3}$ . Итак,

$$\vec{PQ} = \left( 0; -\frac{2\sqrt{2}}{3}; -\frac{2}{3} \right).$$

Значит,  $|PQ| =$

$$= \sqrt{0^2 + \left( -\frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^2 + \left( -\frac{2}{3} \right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Из  $\vec{SE} = (\sqrt{6}; \sqrt{2}; -2)$  получаем  $|\vec{SE}| =$

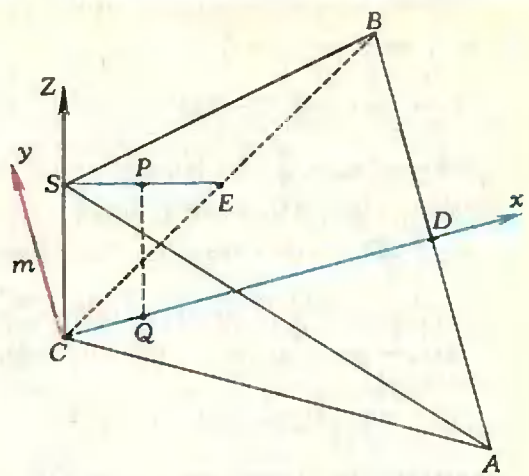


Рис. 3.

$= 2\sqrt{3}$ . Обозначим угол между векторами  $\vec{SE}$  и  $\vec{CD}$  через  $\varphi$ .

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\vec{SE} \cdot \vec{CD}}{|\vec{SE}| \cdot |\vec{CD}|} = \\ &= \frac{\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6} + \sqrt{2} \cdot 0 + (-2) \cdot 0}{2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно, угол между прямыми  $SE$  и  $CD$  равен  $45^\circ$ . Ответ: величина угла равна  $45^\circ$ , расстояние  $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ .

#### Химический факультет

- 80 км/час.
- $2\frac{1}{4}$ .
- $]-\infty; 0] \cup [0; \log_5 5; 1[$ .
- $1 \text{ м}^2$ .
- $x = \frac{5\pi}{48} + \pi k$ ,  
 $x = \frac{7\pi}{24} + \pi l$ ;  $x = \frac{17\pi}{48} + \pi m$  ( $k, l, m \in \mathbb{Z}$ ).

#### Географический факультет

- $]-\infty; -2[ \cup ]2; +\infty[$ .
- $\sqrt{7} \text{ м}$ .
- Точка минимума  $e$ ; промежутки убывания  $]0; 1[$  и  $]1; e[$ ; промежуток возрастания  $[e; +\infty[$ .
- 60 км/час.
- $x = \frac{\pi}{12} + 2\pi k$ ,  
 $x = -\frac{7\pi}{12} + 2\pi l$  ( $k, l \in \mathbb{Z}$ ).

#### Биологический факультет

- 3.
- $\frac{15}{2} \text{ м}^2$ .
- $\frac{9}{8}$ .
- $x = -\frac{7\pi}{6} + 4\pi k$ ,  $x = -\frac{5\pi}{18} + \frac{8\pi}{3} l$ ,  $x = \frac{\pi}{6} + \frac{8\pi}{3} m$  ( $k, l, m \in \mathbb{Z}$ ).
- $]0; 1[$ . Указание. Корни  $x_1, x_2$  квадратного трехчлена  $f$  тогда и только тогда перемешаются с корнями



ми квадратного трехчлена  $g$ , когда  $g(x_1) \times g(x_2) < 0$ .

Факультет почвоведения

1. 4. 2. Точка максимума  $-\frac{1}{3}$ , промежуток возрастания  $\left[-\infty; \frac{1}{3}\right]$ , промежутков убывания  $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right]$ . 3.  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ,  $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi l$  ( $k, l \in \mathbb{Z}$ ). 4.  $\frac{3}{4} ab$ . 5. 144.

Физика

Механико-математический факультет и факультет вычислительной математики и кибернетики

$$1. l = \frac{h \left( \left| \vec{v}_{01} \right| + \left| \vec{v}_{02} \right| \cos \alpha \right)}{\left| \vec{v}_{02} \right| \sin \alpha} \approx 40 \text{ м.}$$

2. Стержни  $AB$ ,  $AC$ ,  $BD$  и  $CD$  растянуты, а стержень  $BC$  сжат; модули сил упругости во всех стержнях одни и те же и равны 10 Н.

$$3. x = V/(3S) = 0,1 \text{ м.}$$

$$4. P = 4 \vartheta^2 R/(R+r)^2 = 5,12 \text{ Вт.}$$

$$5. P = P_1 \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t} \approx 45 \text{ Вт.}$$

$$6. |\vec{a}| = lL |\vec{B}|/m - k |\vec{g}| = 8 \text{ м/с}^2.$$

$$7. f_2 = F_2 \times$$

$$\times \frac{a(d_1 + F_1) + d_1 F_1}{a(d_1 + F_1) + F_1 d_1 - F_2(d_1 + F_1)} = 13,75 \text{ см.}$$

Географический, геологический, химический факультеты и факультет почвоведения

$$1. |\vec{a}| = \frac{2(s_2/t_2 - s_1/t_1)}{t_1 + t_2} \approx 0,07 \text{ м/с}^2.$$

2. Скорость второго тела относительно первого не зависит от времени, направлена вертикально вниз и равна по модулю  $2v_0 \sin \alpha_1 \approx 2,8 \text{ м/с}$ .

$$3. t = \frac{|\vec{v}|(4m_1 + m_2)}{2|\vec{g}|(2m_1 + m_2)} = 0,45 \text{ с.}$$

$$4. m_B = \frac{(m - m_1)\lambda - \epsilon_{\text{л}} m l_1}{c_{\text{в}} l} = 360 \text{ г.}$$

$$5. q_1 = C_1 \frac{C_1 U_1 - C_2 U_2}{C_1 + C_2} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ Кл;}$$

$$q_2 = C_2 \frac{C_1 U_1 - C_2 U_2}{C_1 + C_2} = 10^{-8} \text{ Кл.}$$

$$6. R = \frac{\vartheta^2}{2P} - r \pm \frac{\vartheta}{2P} \sqrt{\vartheta^2 - 4Pr} = 4 \text{ Ом.}$$

$$7. F = \frac{dL}{l+L} \approx 33,3 \text{ см.}$$

Множества значений числовых функций

$$1. \text{ а) } ]-\infty; 2[ \cup ]2; +\infty[;$$

$$\text{ б) } ]0; 1], \max f = 1;$$

$$\text{ в) } ]-\infty; 0[ \cup ]1; +\infty[.$$

(Если  $\min f$  или  $\max f$  не указан, то это означает, что функция  $f$  не принимает наименьшего, соответственно, наибольшего значения.)

$$2. \text{ а) } ]-3; +\infty[;$$

$$\text{ б) } ]-\infty; -2] \cup ]2; +\infty[;$$

$$\text{ в) } ]-\infty; -2] \cup ]2; +\infty[.$$

$$3. \text{ а) } f(x) = 3 \cos^2 x - 1, \quad E(f) = ]-1; 2], \min f = -1, \max f = 2;$$

$$\text{ б) } f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad E(f) = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right], \min f = -\frac{1}{2}, \max f = \frac{1}{2};$$

в) Из тождества  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$  вытекает, что

$$f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x;$$

$$E(f) = \left[\frac{1}{2}; 2\right].$$

$$\min f = \frac{1}{2}, \quad \max f = 2.$$

4. а)  $[-5; 7]$ ,  $\min f = -5$ ,  $\max f = 7$  (замена  $\cos x = z \in [-1; 1]$ );

б)  $[-2; 1]$ ,  $\min f = -2$ ,  $\max f = 1$  (замена  $\sin x = z \in [-1; 1]$ ).

5. а)  $[-1; +\infty[$ ,  $\min f = -1$  (замена  $2^x = z \in ]0; +\infty[$ );

б) Обозначим  $2^{\sin x} = z$ ; тогда  $f(x) = g(z) = z^2 - 4z$ .

Так как  $-1 \leq \sin x \leq 1$ , то  $z \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$ , и, исследовав функцию  $g$  на отрезке  $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ ,

получим:  $E(g) = E(f) = \left[-4; -\frac{7}{4}\right]$ .  $\min f = -4$ ,  $\max f = -\frac{7}{4}$ .

$$6. \text{ а) } [1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}]; \quad \text{ б) } [-5; 5];$$

$$\text{ в) } f(x) = \cos^2 x - \sin x \cos x = \frac{1 + \cos 2x}{2} - \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x -$$

$$-\sin 2x = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{2} \cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \right), \text{ по-} \\ \text{этому } E(f) = \left[ \frac{1 - \sqrt{2}}{2}, \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \right].$$

7. а)  $[0; 4];$

б)  $[-50; 4].$

8. а)  $\left[ -\frac{4\sqrt{3}}{9}, \frac{4\sqrt{3}}{9} \right]$  (замена  $\sin x =$

$z \in [-1; 1];$

б)  $\left[ -\frac{8\sqrt{3}}{9}, \frac{8\sqrt{3}}{9} \right]$  ( $\sin 3x =$

$= 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ , замена  $\sin x = z$ ).

9. Пусть  $x$  — высота конуса; тогда радиус его основания равен  $r = \sqrt{1 - x^2}$ , а объем конуса —  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 x = \frac{1}{3} \pi (1 - x^2)x = V(x)$ . Задача сводится к отысканию множества значений функции  $V(x)$  на интервале  $]0; 1[$ . Ответ: объем конуса может принимать любое значение, большее

0 и не превосходящее  $V_{\max} = V\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$

$$= \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} \text{ дм}^3 \approx 0,4 \text{ дм}^3.$$

10. Пусть  $x$  — радиус основания цилиндра,  $h$  — его высота. Поскольку  $V = \pi x^2 h = 1$ ,  $h = \frac{1}{\pi x^2}$ , поэтому площадь цилиндра равна  $S = 2\pi x^2 + 2\pi x h = 2\pi x^2 + 2\pi x \frac{1}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{2}{x} = S(x)$ . Требуется найти множество значений функции  $S(x)$  на промежутке  $]0; +\infty[$ . Имеем:  $S'(x) = 4\pi x - \frac{2}{x^2} = 0$ , если  $x^3 = \frac{1}{2\pi}$ , т. е.  $x =$

$x_0 = \left(\frac{2\pi}{1}\right)^{\frac{1}{3}}$ , причем на промежутке  $]0; x_0[$  функция  $S(x)$  убывает, а на промежутке  $[x_0; +\infty[$  — возрастает. Следовательно, на любом отрезке  $[e; x_0]$ , где  $0 < e < x_0$ , множество значений  $S(x)$  есть отрезок  $[S(x_0); S(e)]$ . Из формулы для  $S(x)$  видно, что при достаточно малом  $e > 0$  значение  $S(e)$  становится сколь угодно большим, поэтому множество значений  $S(x)$  на полуинтервале  $]0; x_0[$  есть промежуток  $[S(x_0); +\infty[$ . Поскольку при  $x \geq x_0$  функция  $S(x)$  возрастает, этот промежуток будет множеством значений  $S(x)$  и на всей области определения  $]0; +\infty[$ . Итак, ответ: площадь поверхности цилиндра объема  $1 \text{ дм}^3$  может принимать любое значение, большее или равное

$$S_{\min} = S(x_0) = 2\pi \cdot \left(\frac{2\pi}{1}\right)^{-\frac{2}{3}} + 2 \cdot \left(\frac{2\pi}{1}\right)^{\frac{1}{3}} = \\ = 3 \cdot \left(\frac{2\pi}{1}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ дм}^2 \approx 5,5 \text{ дм}^2.$$

### XIX Международная олимпиада по математике

1. Пусть  $O$  — центр квадрата (см. рис. на с. 53). Из симметрии очевидно, что достаточно показать два факта: 1)  $|OP_1| = |OP_2| = |OP_3|$ , 2)  $|P_1P_2| = |P_2P_3|$ .

Введем систему координат так, как это изображено на рисунке, взяв за единицу половину стороны квадрата. Тогда, как не трудно посчитать, координаты точки  $P_1$

будут  $\left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ , координаты точки  $P_2$

будут  $\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ , а координаты точки

$P_3 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$ . Теперь

уже нетрудно убедиться, что

$$|OP_1| = |OP_2| = |OP_3| = \sqrt{2 - \sqrt{3}},$$

$$\text{а } |P_1P_2|^2 = |P_2P_3|^2 = 7 - 4\sqrt{3}.$$

2. Покажем, что число членов такой последовательности не больше 16. Действительно, пусть их больше; тогда для последовательности  $a_1, a_2, \dots, a_{17}, \dots$  выполнено следующее условие:  $0 < (a_1 + a_2 + \dots + a_{11}) + (a_2 + a_3 + \dots + a_{12}) + \dots + (a_7 + a_8 + \dots + a_{17}) = (a_1 + a_2 + \dots + a_7) + (a_2 + a_3 + \dots + a_8) + \dots + (a_{11} + a_{12} + \dots + a_{17}) < 0$ , что невозможно. Последовательность из 16 членов существует, например,  $5, 5, -13, 5, 5, 5, -13, 5, 5, -13, 5, 5, -13, 5, 5$ .

3. Наиболее простое доказательство связано с использованием теоремы Дирихле: «Во всякой арифметической прогрессии, у которой разность, и первый член взаимно просты, содержится бесконечное число простых чисел». Выберем из арифметической прогрессии  $n-1, 2n-1, \dots, kn-1, \dots$  четыре простых числа. Пусть это будут  $k_1n-1, k_2n-1, k_3n-1, k_4n-1$ . Очевидно, что произведение любых двух из них принадлежит  $V_n$  и является числом, неприводимым в  $V_n$  в силу простоты сомножителей каждый из которых не принадлежит  $V_n$ . Отсюда имеем три способа разложения числа  $r = (k_1n-1)(k_2n-1)(k_3n-1) \times (k_4n-1)$  на неприводимые множители из  $V_n$ . А именно,  $r = [(k_1n-1) \times (k_2n-1)] [(k_3n-1)(k_4n-1)] = [(k_1n-1)(k_3n-1)] [(k_2n-1) \times (k_4n-1)] = [(k_1n-1)(k_4n-1)] \times [(k_2n-1)(k_3n-1)]$ .

4. Выбрав числа  $x_1$  и  $x_2$  так, чтобы

$$\cos x_1 = a/\sqrt{a^2 + b^2}, \quad \sin x_1 = b/\sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\cos 2x_2 = A/\sqrt{A^2 + B^2}, \quad \sin 2x_2 = B/\sqrt{A^2 + B^2},$$

мы можем переписать  $f(x)$  в виде

$$f(x) = 1 - \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - x_1) -$$

$$- \sqrt{A^2 + B^2} \cos 2(x - x_2).$$

В точках  $x = x_1$  и  $x = x_2 + \pi$   $\cos 2(x - x_2)$  обращается в 1, а  $\cos(x - x_1)$  либо равняется нулю, либо имеет разные знаки. Отсюда следует, что  $\sqrt{A^2 + B^2} \leq 1$ .

В точках  $x_1 - \frac{\pi}{4}$  и  $x_1 + \frac{\pi}{4} \cos(x - x_2)$

равняется  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , а  $\cos 2(x - x_2)$  либо равняется нулю, либо имеет разные знаки. Отсюда следует, что  $\sqrt{a^2 + b^2} \leq \sqrt{2}$ .

5. Так как  $r^2 + q = 1977$ , то  $r \leq 44$ . Если  $r = 44$ , то  $q = 41$  и условие  $a^2 + b^2 = r(a + b) + q$  переписывается так:  $(a - 22)^2 + (b - 22)^2 = 1009$ . Обозначив  $a - 22 = x$  и  $b - 22 = y$ , получаем  $x^2 + y^2 = 1009$ . Но квадраты целых чисел оканчиваются лишь на 0, 1, 4, 5, 6, 9. Отсюда легко видеть, что либо  $x$ , либо  $y$  оканчивается или на 0 или на 5. Перебирая все такие числа, квадрат которых меньше 1009; 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, находим единственное решение  $15^2 + 28^2 = 1009$ . Отсюда получаем четыре решения для  $(a, b)$ : (7, 50), (37, 50), (50, 7) и (50, 37).

Если  $q \leq 43$ , то  $r \geq 128$ , но из известного неравенства  $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$  при делении его на  $a + b$  следует, что  $2q + \frac{2r}{a + b} \geq a + b$  и так как  $q < 44$ , то  $a + b < 88$ ; но  $r < a + b$ , следовательно и  $r < 88$ . Получено противоречие.

6. Покажем, что для любого натурального  $k$  выполнено следующее утверждение: если  $n \geq k$ , то  $f(n) \geq k$ . Для  $k = 1$  утверждение тривиально. Пусть оно верно для  $k$  и пусть  $n \geq k + 1$ . Тогда  $n - 1 \geq k$  и на основании индуктивного предположения  $f(n - 1) \geq k$  и  $f(f(n - 1)) \geq k$ . А так как  $f(n) > f(f(n - 1))$ , то  $f(n) > k$  или  $f(n) \geq k + 1$ . Отсюда вытекает, что  $f(k) \geq k$  для всех натуральных  $k$ . Допустим, что для некоторого  $k$  имеет место  $f(k) > k$ . Обозначим через  $A$  множество всех  $f(n)$  для  $n > k$ . Пусть  $l = f(n)$  — наименьший элемент множества  $A$ . Так как  $n - 1 \geq k$ , то  $f(n - 1) > k$ . Действительно, если  $n - 1 > k$ , то это следует из неравенства  $f(n - 1) \geq n - 1$ , а если  $n - 1 = k$ , то из неравенства  $f(k) > k$ . Пусть  $m = f(f(n - 1))$ . Из сказанного вытекает, что  $m$  принадлежит  $A$ . Но верно неравенство  $f(n) > f(f(n - 1))$ , значит,  $l > m$ , что противоречит тому, что  $l$  есть наименьший элемент множества  $A$ .

Значит, предположение  $f(k) > k$  неверно, и для всех  $n$  имеет место  $f(n) = n$ .

**«Задачи XI Московской математической олимпиады школьников»**

Мы приводим указания только к тем задачам, которые не вошли в «Задачник «Кванта»» (см. «Квант», 1977, № 12).

2. Обязательно. Рассмотрим выпуклую оболочку вершин всех квадратов. Это — выпуклый многоугольник. Выделим у него одну вершину. Она является общей вершиной каких-то картонного и пластмассового квадратов,  $K$  и  $\Pi$ . Если эти квадраты  $K$  и  $\Pi$  пересекаются, то вершина одного из них лежит внутри другого (рис. 4); и тогда некоторые два квадрата из одинакового материала (на рисунке 4 это пластмассовые квадраты) обязательно имеют общую точку: противоречие с условием. Стало быть,  $K$  и  $\Pi$  совпадают. Выкинув их, к оставшей-

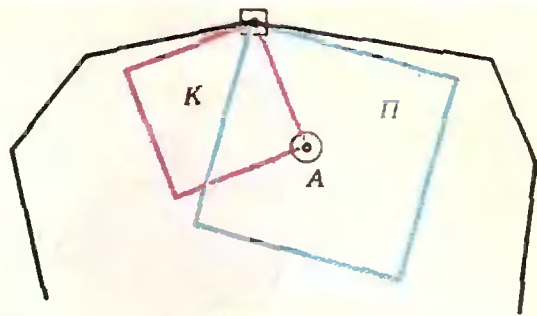


Рис. 4.



Рис. 5.

Рис. 6.



Рис. 7.

ся системе квадратов применим то же рассуждение (индукция).

3. Можно в обоих случаях. Для протаскивания проволочного куба годится щель в форме буквы П с единичной длиной перекладины и достаточно длинными вертикальными частями (см. рис. 5). Для протаскивания тетраэдра годится щель в виде буквы Т с длинными прямолинейными частями, или же щель, изображенная на рисунке 6.

4. Пусть  $A$  и  $B$  — множества соответственно синих и красных точек. Если бы  $A$  содержало лишь конечное число точек с координатами, кратными  $a$ , а  $B$  содержало бы лишь конечное число точек с координатами, кратными  $b$ , то оказалось бы, что в ряду натуральных чисел лишь конечное число чисел, кратных  $ab$ .

6. а) Не может быть. Иначе в вертикальных столбиках было бы нечетное число белых кубиков, а их должно быть 14 — четное число.

б) Да, может. Кубики надо расположить так, как показано на рисунке 7 (на этом рисунке изображены три сечения большого куба). Тогда в каждом столбике будет или один, или три черных кубика (один кубик — в «центральной» столбике).

7. Перепишем равенство  $a^{15} + b^{15} = c^{15}$  так:  $\left(\frac{a}{c}\right)^{15} + \left(\frac{b}{c}\right)^{15} = 1$ . Выбрав произволь-

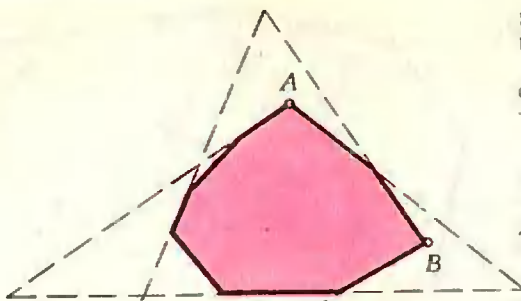


Рис. 8, а.



Рис. 8, б.

ные натуральные числа  $m$  и  $n$ , положим  $\frac{a}{c} = m$  и  $\frac{b}{c} = n$ . Теперь в качестве  $c$  возьмем число  $c = m^{15} + n^{15}$ ; числа  $a$  и  $b$  определяются после этого однозначно.

8. Ответ: второй.

9. Наименьшее  $n$  равно 50. Любой выпуклый 100-угольник можно получить в виде пересечения 50 треугольников, беря вершины 100-угольника через одну, как это показано на рисунке 8,а.

100-угольник, изображенный на рисунке 8,б (с очень длинной одной стороной) не представляется в виде пересечения меньшего числа треугольников.

10. Ответ:  $n=2$ . Предположим, что  $n \geq 3$ . Возьмем три отрезка  $a$ ,  $b$  и  $c$ , и проведем три прямые, соединяющие попарно их середины. Каждый из отрезков  $a$ ,  $b$ ,  $c$  перпендикулярен двум прямым, выходящим из его середины, поэтому он перпендикулярен и плоскости, проходящей через все три проведенные прямые. Тем самым три отрезка  $a$ ,  $b$ ,  $c$  параллельны между собой, что противоречит условию.

15. Можно. Круги достаточно расположить далеко друг от друга так, чтобы их центры лежали на параболе  $y=x^2$ .

#### «Квант» для младших школьников

(См. «Квант» № 1, с. 37)

1. XVI — II = XIV.

2. Обратимся к рисунку. Клетки его заполняем следующим образом: сперва в каждую из клеток  $M$  записали единицы. Это соответствует тому, что каждую из букв  $M$  мы можем выбрать единственным образом.

Клетки последующих столбцов заполнялись последовательно, столбец за столбцом, слева направо. В каждую клетку мы записывали сумму чисел, представленных в соседних левых клетках. Это соответствует

количеству путей, которые ведут к данной клетке от начала чтения.

Остается просуммировать числа, вписанные в клетки правого столбца:  $90 + 95 + 90 + 95 = 370$ .

$$\begin{array}{r} 3. \quad 342457 \quad 364768 \\ \quad + 342457 \quad + 364768 \\ \hline \quad 684914 \quad 729536 \end{array}$$

$$4. \quad 44 \cdot 77 = 3388, \quad 55 \cdot 99 = 5445, \\ 77 \cdot 88 = 6776, \quad 88 \cdot 88 = 7744.$$

#### Ребусы

(см. «Квант» № 1, с. 61)

1. сорок=87172.

2.  $5291 \times 189 = 999\,999$ .

3. а)  $\sqrt{385297641} = 19629$ ;

б)  $\sqrt{9814072356} = 99066$ .

4.  $\sqrt{141376} = 376$ .

5.  $\sqrt{87909376} = 9376$ .

6. а)  $4^4 = 256$ ; б)  $23^2 = 529$ ; в)  $192^2 = 36\,864$ .

7.  $18\,072 \times 18\,072 = 326\,579\,184$ .

#### Номер готовили

А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

#### Номер оформили:

М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, А. Пономерева, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Л. Боровина

113035, Москва, М-35, В. Ордынка, 21/16, «Квант», тел. 231-83-62

Сдано в набор 26/XI 1977 г.

Подписано в печать 11/1 1978 г.

Бумага 70×108<sup>1/4</sup>. Физ. печ. л. 4

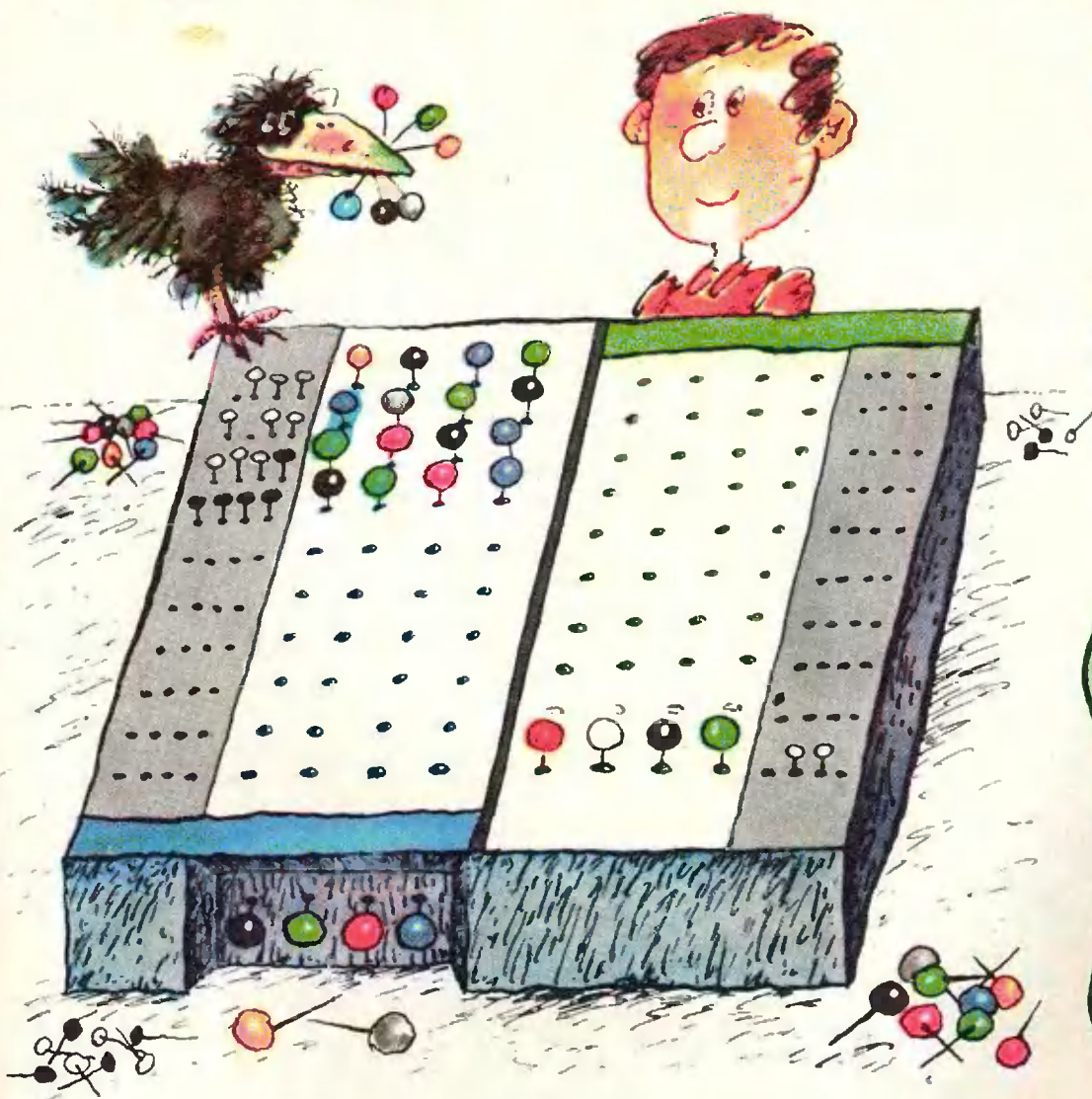
Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 6,70. Т-00513

Цена 30 коп. Заказ 2710 Тираж 308910

Чеховский полиграфический комбинат  
Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете Совета  
Министров СССР по делам издательства,  
полиграфии и книжной торговли  
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются





## Кто меньше?

В этой игре двое играющих: «загадчик» и «отгадчик» — обмениваются вопросами и ответами. Правда, делают они это безмолвно. Игра начинается так. Загадчик (на картинке его нет — он отошел) выбирает из фишек шести цветов четыре фишки и выставляет их в нишу так, чтобы отгадчик их не видел. Затем отгадчик начинает задавать вопросы, выставляя наборы из четырех фишек напротив спрятанных фишек загадчика. Ответы загадчик дает следующим образом: если точно напротив его фишки оказалась фишка того же цвета, он ставит на боковом поле черную «булавку»; если же напротив его фишки оказалась фишка другого цвета, то среди остальных трех фишек, поставленных отгадчиком, есть фишка того же цвета — белую «булавку». (Рекомендуем загадчику сначала сообразить в уме, сколько бе-

лых и черных «булавок» он должен поставить, а затем сразу выставить их рядом с «вопросом» отгадчика в любом порядке.) Цель отгадчика — угадать загаданный набор с помощью возможно меньшего числа вопросов.

Поскольку отгадывать интереснее, чем отвечать, игроки на второй половине доски меняются ролями: на ней отгадчик загадывает, загадчик — отгадывает. При «двухсторонней» игре выигравшим считается тот, кто отгадал фишки партнера за меньшее число вопросов.

Доску легко изготовить из картона или пенопласта, а цветные фишки — из спичек (раскрасив их в шесть различных цветов). Играть можно и без доски — с наборами из четырех цифр, выбираемых из множества {1, 2, 3, 4, 5, 6} (см. с. 35).

Постарайтесь выяснить, какого наименьшего числа ходов в этой игре заведомо достаточно, чтобы угадать любой набор. Мы этого не знаем.



Цена 30 коп.

Индекс 70465

У этого замысловатого лепестка довольно простое математическое описание: он задается уравнением  $z(x^2+y^2)=2xy$  (на рисунке, разумеется, приведена только часть соответствующей поверхности). Почему этот лепесток попал на обложку журнала, вы узнаете, прочитав статью Л. Кузнецовой и З. Скопца «Седлообразная поверхность». (см. с. 20).

