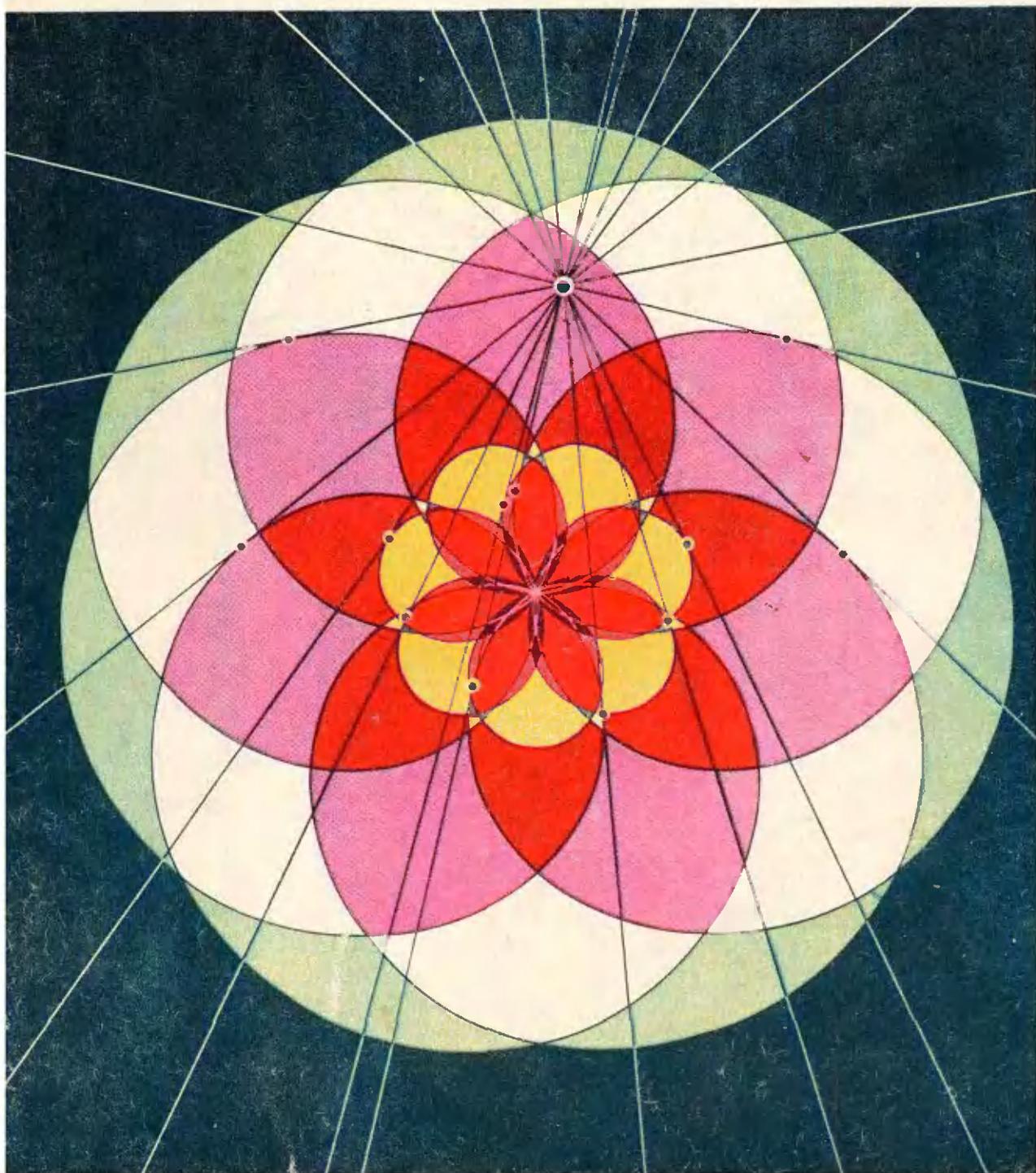
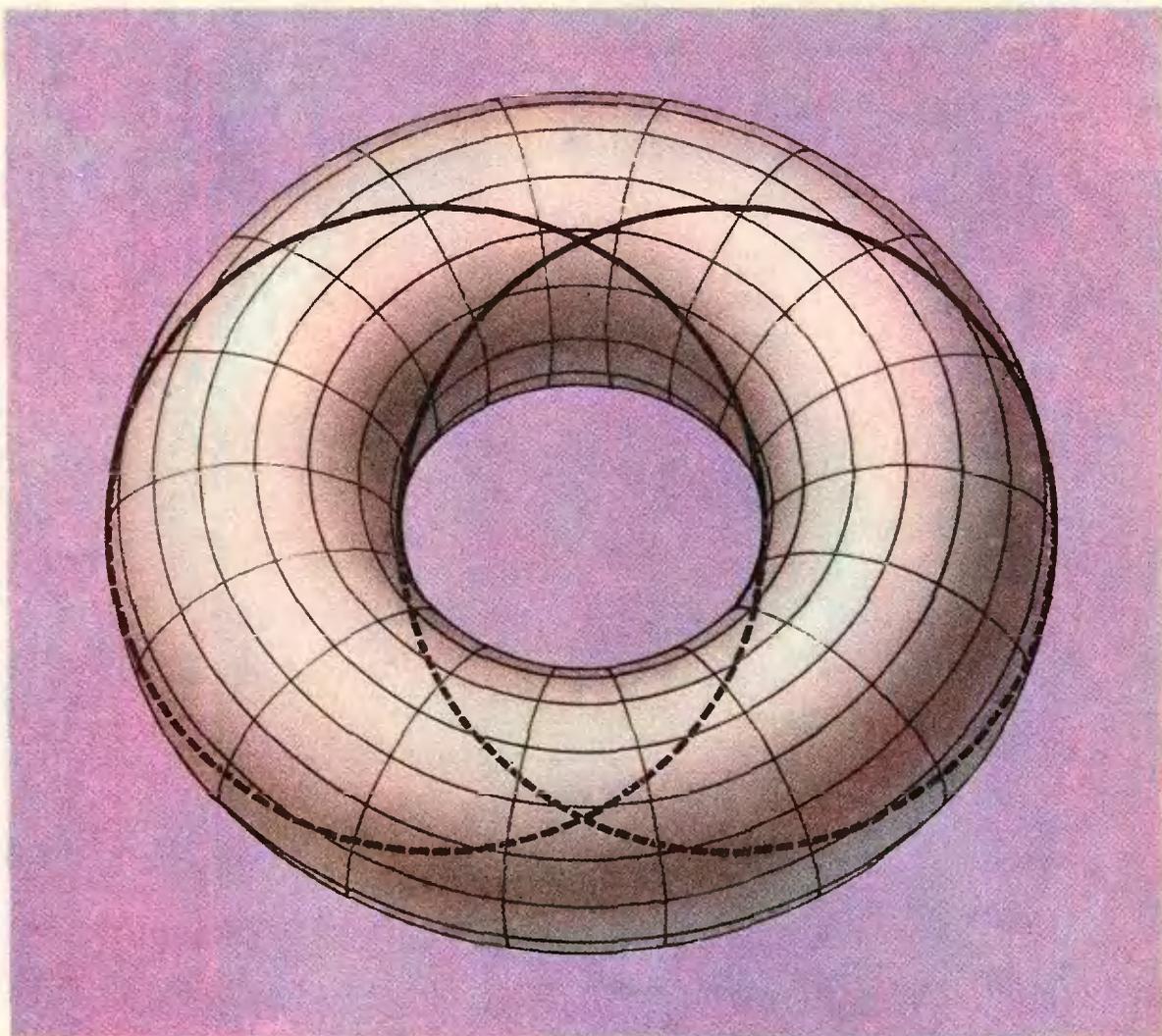


# Квант

**5**  
1978

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ  
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





На этом рисунке изображен тор — поверхность, напоминающая бублик, — и две окружности. Поверхность покрыта сетью «параллелей» и «меридианов». Обе выделенные окружности лежат, как это ни кажется странным на первый взгляд, в одной секущей плоскости (которая совпадает с плоскостью чертежа).

Эти окружности интересны не только тем, как они получены: они являются «линиями постоянного курса» на торе, т. е. пересекают все его меридианы под одним и тем же углом. Такие линии называются локсодромами; подробнее об этом математико-географическом термине вы можете прочитать на с. 17. Там же доказывается, что при рассмотренном плоском сечении тора действительно получаются две окружности, а не только похожие на них замкнутые линии.

Взгляните внимательней на чертеж — на сколько частей наши две окружности разделяют тор?

# Квант

Основа в 1970 году

**5**  
1978

Научно-популярный  
физико-математический  
журнал  
Академии наук СССР  
и Академии педагогических  
наук СССР



Издательство «Наука»  
Главная редакция  
физико-математической  
литературы

Главный редактор  
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель  
главного редактора  
академик А. Н. Колмогоров

**Редакционная коллегия:**

М. И. Башмаков  
С. Т. Беляев  
В. Г. Болтянский  
Н. Б. Васильев  
Ю. Н. Ефремов  
В. Г. Зубов  
П. Л. Капица  
В. А. Кириллин  
А. И. Климанов  
С. М. Козел  
В. А. Лешковцев  
(зам. главного редактора)  
Л. Г. Макар-Линанов  
А. И. Маркушевич  
Н. А. Патрикеева  
Н. С. Петраков  
Н. Х. Розов  
А. П. Савин  
И. Ш. Слободецкий  
М. Л. Смолянский  
(зам. главного редактора)  
Я. А. Смородинский  
В. А. Фабрикант  
А. Т. Цветков  
М. П. Шаскольская  
С. И. Шварцбург  
А. И. Ширшов

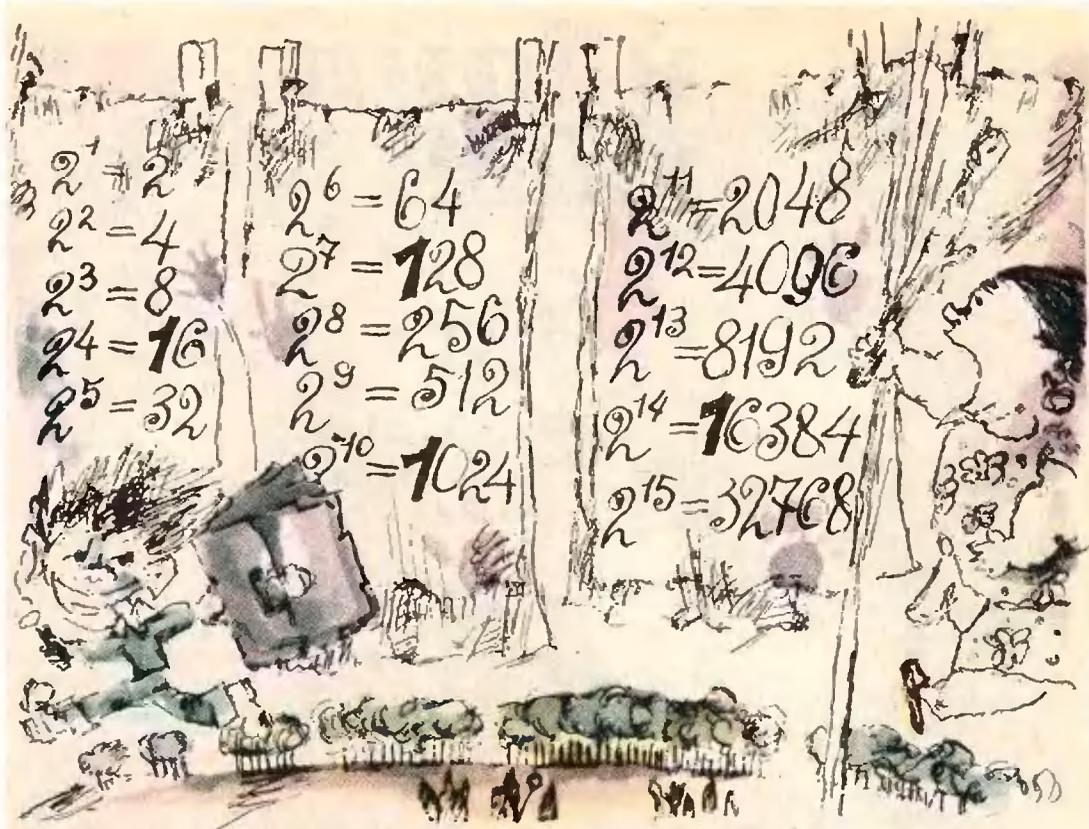
На первой странице обложки  
изображена диаграмма  
касательных кривой  
(см. статью «Касательная» на  
с. 18), имеющей в полярных  
координатах  
уравнение  $r = 1 + 2 \cos \frac{7}{8} \varphi$ .

Эскиз рисунка выполнил  
А. Дорошенко  
— ученик девятого класса ФМШ  
при МГУ им. М. В. Ломоносова

**В НОМЕРЕ:**

- 2 *В. Болтянский.* Часто ли степени двойки начинаются с единицы?
- 8 *А. Паташинский, С. Попов.* Ускорители ИЯФ — метод встречных пучков
- 13 *З. Литовченко.* Лучший вариант  
**Лаборатория «Кванта»**
- 16 *М. Гравовский.* Плавание воскового шарика  
◆
- 17 *В. Березин.* Локсодромия  
**Математический кружок**
- 18 *В. Вавилов, И. Мельников.* Касательная  
**Задачник «Кванта»**
- 22 Задачи М501—М505: Ф513—Ф517
- 24 Решения задач М450—М454; Ф467—Ф471  
**По страницам школьных учебников**
- 31 *В. Дубровский.* В поисках определения площади поверхности  
**«Квант» для младших школьников**
- 35 Задачи
- 36 *А. Дозоров.* Куда направлена сила трения?  
**Практикум абитуриента**
- 38 *Л. Асламазов.* Напряженность, напряжение, потенциал
- 44 *А. Виленкин.* Производная и касательные
- 48 *П. Зубков, Л. Лукьянчиков, Г. Меледин, В. Харченко.* Новосибирский государственный университет
- 51 *В. Осипов, В. Матвеев.* Ленинградский университет им. А. А. Жданова
- 53 *В. Гутенмахер, П. Медведев.* Отделение планирования и экономической кибернетики экономического факультета МГУ
- 56 **Рецензии, библиография**  
Новая книга по истории астрономии
- 57 **Ответы, указания, решения**  
**Смесь (с. 34, 47)**

© Главная редакция физико-математической литературы  
издательства «Наука», «Квант», 1978.



В. Болтянский

## Часто ли степени двойки начинаются с единицы?

### Постановка задачи

Среди степеней двойки вновь и вновь встречаются числа, начинающиеся с единицы. Как часто они встречаются? Иными словами, какова вероятность того, что произвольно взятая степень двойки начинается цифрой 1?

Уточним постановку задачи. Среди выписанных (см. заставку) пятнадцати чисел четыре начинаются с единицы. Напишем эти числа на пятнадцати карточках, перетасуем их и выберем наудачу одну карточку. Вероятность того, что на ней будет

число, начинающееся цифрой 1, равна  $4/15$  (рис. 1).

Возьмем теперь  $n$  первых степеней двойки, т. е. числа  $2^1, 2^2, \dots, 2^n$ ; пусть среди них  $a_n$  чисел начинаются (в десятичной записи) с единицы. Тогда вероятность того, что число, наудачу выбранное из чисел  $2^1, 2^2, \dots, 2^n$ , начинается цифрой 1, равна  $a_n/n$ . Эта вероятность зависит от  $n$ , т. е. от того, сколько первых степеней двойки было взято. Предел

$$p_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}, \quad (1)$$

(если он существует) и называется вероятностью того, что произвольно взятая степень двойки начинается цифрой 1.

### Задачи

1. Какова вероятность того, что произвольно взятое натуральное число делится на 3?

2. Какова вероятность того, что произвольно взятая цифра десятичного разложения числа  $\frac{161}{222}$  является пятеркой? Двойкой?

3. Какова вероятность того, что произвольно взятое натуральное число является точным квадратом?

**Вычисление предела (1)**

Среди двузначных чисел, являющихся степенями двойки, ровно одно (а именно, 16) начинается с единицы. Среди трехзначных степеней двойки тоже ровно одно число (а именно, 128) начинается с единицы. То же верно для четырехзначных степеней двойки.

Вообще, при  $k > 1$  среди  $k$ -значных чисел, являющихся степенями двойки, имеется ровно одно, начинающееся цифрой 1. В самом деле, и а и м е н ь ш е е  $k$ -значное число, являющееся степенью двойки, обязательно начинается с единицы (иначе, разделив на 2, мы получили бы, что и предыдущая степень двойки является  $k$ -значным числом). Другого же числа, начинающегося цифрой 1, среди  $k$ -значных степеней двойки нет: следующая степень двойки будет иметь на первом месте цифру 2 или 3, следующая — еще большую цифру, пока мы не получим  $(k+1)$ -значное число.

Из сказанного следует, что если число  $2^n$  является  $m$ -значным, то среди чисел  $2^1, 2^2, \dots, 2^n$  имеется ровно  $m-1$  чисел, начинающихся с единицы, т. е.  $a_n = m-1$ . Но утверждение «число  $2^n$  является  $m$ -значным» означает, что

$$10^{m-1} \leq 2^n < 10^m,$$

то есть

$$m-1 \leq n \lg 2 < m.$$

Вспоминая, что  $a_n = m-1$ , получаем



Рис. 1.

$$\lg 2 - \frac{1}{n} < \frac{a_n}{n} \leq \lg 2,$$

и, следовательно,

$$p_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lg 2 = 0,30103\dots$$

Итак, чуть больше 30% степеней двойки начинаются с единицы.

**Задачи**

4. Обозначим через  $p_q$  вероятность того, что произвольно взятая степень двойки начинается цифрой  $q$  \*). Докажите равенства

$$p_2 + p_3 = p_1, \quad p_4 + p_5 = p_2, \quad p_6 + p_7 = p_3, \\ p_8 + p_9 = p_4.$$

5. Докажите, что  $p_3 = 1 - 3 \lg 2 = 0,096\dots$

Как видите, степени двойки начинают цифрой 4 в три с лишним раза реже, чем цифрой 1 (рис. 2).



Рис. 2.

**Общая задача**

А какова вероятность того, что произвольно взятая степень данного натурального числа  $l$  начинается (в десятичной записи) цифрой  $q$ ?

Пусть число  $l^n$  начинается в десятичной записи цифрой  $q$ , т. е.

$$q \cdot 10^m \leq l^n < (q+1) \cdot 10^m,$$

где  $m$  — некоторое натуральное число. Разделив эти неравенства на  $q \cdot 10^m$  и прологарифмировав по основанию 10, получим:

$$0 \leq (n \lg l - \lg q) - m < \lg \frac{q+1}{q}. \quad (2)$$

Так как число, стоящее справа, меньше единицы ( $\frac{q+1}{q} = 1 + \frac{1}{q} \leq 2 < 10$ ), то неравенства (2) означают, что дробная часть числа  $n \lg l - \lg q$  меньше  $\lg \frac{q+1}{q}$  (напомним, что дробной частью

\* ) Существование чисел  $p_q$  вытекает из дальнейшего.

числа  $x$  называется разность между числом  $x$  и его целой частью:  $\{x\} = x - [x]$ , а *целая часть*  $x$  — это наибольшее целое число, которое не превосходит  $x$ . Обратио, если дробная часть числа  $n \lg l - \lg q$  меньше  $\lg \frac{q+1}{q}$ , т. е. если при некотором натуральном  $m$  выполнены неравенства (2), то  $l^m$  начинается в десятичной записи цифрой  $q$ . Таким образом, поставленная задача эквивалентна следующей: *какова вероятность того, что для произвольно взятого натурального числа  $n$*

$$\{n \lg l - \lg q\} < \lg \frac{q+1}{q} ?$$

Решить эту последнюю задачу нам поможет

**Теорема о дробных частях  $x$ .** Пусть  $\alpha, \beta$  — действительные числа, причем число  $\alpha$  — иррациональное, и  $l$  — некоторый промежуток длины  $h$ , содержащийся в отрезке  $[0, 1]$ . Рассмотрим бесконечную последовательность  $\alpha + \beta, 2\alpha + \beta, \dots, n\alpha + \beta, \dots$ . Вероятность того, что произвольно взятое число этой последовательности имеет дробную часть, принадлежащую промежутку  $l$ , равна  $h$ .

Доказательство этой теоремы мы приведем в конце статьи, а сейчас покажем, как она применяется к решению нашей задачи.

Прежде всего заметим, что если  $l$  является степенью десяти, то все степени числа  $l$  начинаются цифрой 1, т. е. в этом случае задача тривиальна.

Если же  $l$  не является степенью десяти, то число  $\alpha = \lg l$  иррационально. По теореме о дробных частях вероятность того, что произвольно взятое число из последовательности  $n \lg l - \lg q$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) имеет дробную часть, принадлежащую промежутку  $\left[0, \lg \frac{q+1}{q}\right]$ , равна

$\lg \frac{q+1}{q}$ . Это и дает решение рассмотренной выше задачи: *вероятность того, что произвольно взятая степень натурального числа  $l$  (не являющегося степенью десяти) начинается цифрой  $q$ , равна  $\lg \frac{q+1}{q}$ .*

Обратите внимание на то, что эта вероятность не зависит от  $l$ ! Например, степени двойки и степени тройки одинаково часто (а именно, с вероятностью  $\lg 2$ ) начинаются цифрой 1.

**Задачи**

6. Докажите, что если натуральное число  $l$  не является степенью десяти, то число  $\lg l$  иррационально.
7. Вычислите вероятности  $p_2, \dots, p_9$ , указанные в задаче 4. Дайте новое доказательство содержащихся там равенств.
8. Какова вероятность того, что произвольно взятая степень двойки начинается комбинацией цифр 1000 (рис. 3)?



Рис. 3.

9. Какова вероятность того, что произвольно взятая степень числа  $l$  (не являющегося степенью десяти) начинается комбинацией цифр  $q_1 q_2 \dots q_r$  (где  $q_1 \neq 0$ )? Выведите отсюда, что степени числа  $l$  могут начинаться любой комбинацией цифр  $q_1 q_2 \dots q_r$  ( $q_1 \neq 0$ ).

10. Докажите следующие утверждения:

- а) Вероятность того, что у произвольной взятой степени числа  $l$ , не являющегося степенью десяти, вторая слева цифра есть 0, равна

$$p_0^{(2)} = \lg(11 \cdot 21 \cdot 31 \cdot \dots \cdot 91) - \lg(9!) - 9.$$

Указание:  $p_0^{(2)}$  есть сумма вероятностей того, что произвольная степень числа  $l$  начинается комбинациями 10, 20, ..., 90.

- б) Вероятность того, что у произвольной взятой степени числа  $l$ , не являющегося степенью десяти,  $k$ -я (слева) цифра есть  $q$  (где  $k > 1, q = 0, 1, \dots, 9$ ), равна:

$$p_q^{(k)} = \sum_{i=10^{k-2}}^{10^{k-1}-1} \lg \left( 1 + \frac{1}{q + 10^i} \right).$$

11\*. Используя результат задачи 10, б), докажите, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} p_q^{(k)} = 1/10$ . Таким образом, при достаточно большом  $k$  каждая из вероятностей  $p_0^{(k)}, p_1^{(k)}, \dots, p_9^{(k)}$  как угодно мало отличается от  $1/10$ .

**У к а з а н и е:** докажите, что  $\ln(1+x) < x$  при  $x > 0^*$ ; затем воспользуйтесь соотношениями:

$$\begin{aligned} \lg\left(1 + \frac{1}{10i}\right) - \lg\left(1 + \frac{1}{10i+q}\right) &< \\ &< \lg\left(1 + \frac{q}{100i(i-1)}\right) = \\ &= \frac{1}{\ln 10} \ln\left(1 + \frac{q}{100i(i-1)}\right) < \\ &< \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{q}{100i(i-1)} = \\ &= \frac{q}{100 \ln 10} \left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}\right). \end{aligned}$$

12. Обобщите результаты задач 9 и 10 б) на случай, когда степени числа  $l$  записываются в системе счисления с основанием  $b \geq 1$ . В частности, для двоичной системы счисления формулы задачи 10, б) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} p_0^{(k)} &= \log_2 \left[ \frac{2^{k-1} + 1}{2^{k-1}} \cdot \frac{2^{k-1} + 3}{2^{k-1} + 2} \times \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \times \frac{2^k - 1}{2^k - 2} \right]. \\ p_1^{(k)} &= \log_2 \left[ \frac{2^{k-1} + 2}{2^{k-1} + 1} \cdot \frac{2^{k-1} + 4}{2^{k-1} + 3} \times \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \times \frac{2^k}{2^k - 1} \right]. \end{aligned}$$

**Еще одна задача**

В качестве еще одного примера применения теоремы о дробных частях рассмотрим следующую задачу: *число  $\alpha$  иррационально; нужно доказать, что существует натуральное  $n$ , для которого  $\cos n\alpha > 0,999$ .*

Заметим, что неравенство  $\cos n\alpha > 0,999$  равносильно следующим:

$$2m\pi - \arccos 0,999 < n\alpha < 2m\pi + \arccos 0,999$$

(при некотором целом  $m$ ), т. е.

$$\begin{aligned} m < \frac{\alpha}{2} n + \frac{1}{2\pi} \arccos 0,999 < \\ < m + \frac{1}{\pi} \arccos 0,999. \end{aligned}$$

Иными словами, неравенство  $\cos n\alpha > 0,999$  выполняется в том



Рис. 4.

и только в том случае, если число  $\left\{ \frac{\alpha}{2} n + \frac{1}{2\pi} \arccos 0,999 \right\}$  принадлежит промежутку  $\left[0, \frac{1}{\pi} \arccos 0,999\right]$ . По теореме о дробных частях произвольно выбранное натуральное  $n$  удовлетворяет этому условию с вероятностью  $\frac{1}{\pi} \arccos 0,999 \approx 0,014$ . Таким образом, если  $N$  достаточно велико, то примерно 1,4% чисел  $1, 2, \dots, N$  удовлетворяют поставленному требованию.

**Задачи**

13. От произвольной точки окружности радиуса 1 откладываются друг за другом дуги длины 1. Обозначим через  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  последовательные концы откладываемых дуг. Докажите, что, какова бы ни была дуга  $Q$  этой окружности, найдется точка  $A_i \in Q$  (рис. 4).

14. Докажите, что если  $\alpha$  иррационально, то функция  $\cos x + \cos \alpha x$  не является периодической.

15. Даны две бесконечные арифметические прогрессии:

$$\begin{aligned} a_1 + d_1, a_1 + 2d_1, a_1 + 3d_1, \dots; \\ a_2 + d_2, a_2 + 2d_2, a_2 + 3d_2, \dots \end{aligned}$$

причем числа  $d_1$  и  $d_2$  положительны, и отношение  $d_1/d_2$  иррационально. Найдется ли такой член первой прогрессии и такой

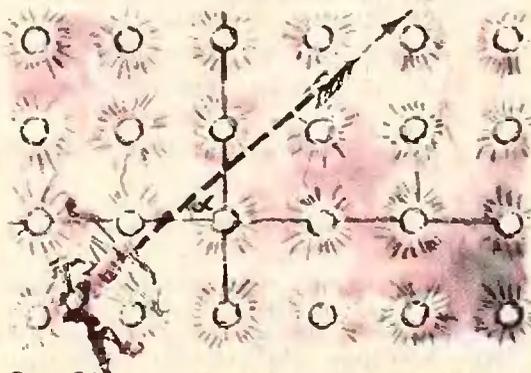


Рис. 5.

\*  $\ln x$  — это логарифм числа  $x$  при некотором специальном основании  $e = 2,71828\dots$  («Алгебра и начала анализа 10», п. 109).

член второй прогрессии, что модуль их разности меньше 0.000001?

16. Лесом радиуса  $\epsilon$  назовем объединение всех кругов радиуса  $\epsilon$ , центрами которых служат точки с целочисленными координатами. Докажите, что если прямая образует с осью абсцисс угол  $\psi$ , тангенс которого иррационален, то она обязательно пересекает лес (как бы ни было мало  $\epsilon$ ; рис. 5).

**Доказательство теоремы**

Перейдем теперь к доказательству теоремы о дробных частях.

Возьмем произвольное натуральное число  $r$ . Точки  $\frac{1}{r}, \frac{2}{r}, \dots, \frac{r-1}{r}$

разбивают отрезок  $[0, 1]$  на  $r$  отрезков длины  $\frac{1}{r}$ . Назовем эти отрезки

«клетками», а дробные части чисел  $\alpha, 2\alpha, \dots, (r+1)\alpha$  назовем «зайцами»<sup>\*</sup>. Так как «клеток»  $r$ , а «зайцев»  $r+1$ , то найдутся два «зайца», попавшие в одну клетку, т. е. найдутся такие натуральные  $p'$  и  $p''$  ( $p' > p''$ ), что дробные части чисел  $p'\alpha$  и  $p''\alpha$  отличаются менее чем на  $\frac{1}{r}$ . Значит,

$$|(p'\alpha - p''\alpha) - m| < \frac{1}{r} \text{ при некотором целом } m.$$

Положив  $p = p' - p''$ , мы можем написать:  $|p\alpha - m| = \epsilon$ , где  $\epsilon < \frac{1}{r}$ . Заметим, что  $\epsilon \neq 0$ , так как  $\alpha$  иррационально. Обозначим через  $s$  наименьшее натуральное число, превосходящее  $\frac{1}{\epsilon}$ , т. е.  $s - 1 \leq \frac{1}{\epsilon} < s$ .

Рассмотрим  $s$  последовательных членов арифметической прогрессии с разностью  $p\alpha$ :

$$\gamma + p\alpha, \gamma + 2p\alpha, \dots, \gamma + sp\alpha, \quad (3)$$

где  $\gamma$  — некоторое действительное число. Обозначим дробные части чисел (3) через  $x_1, x_2, \dots, x_s$ . В силу равенства  $|p\alpha - m| = \epsilon$  числа  $x_1, x_2, \dots, x_s$  отстоят друг от друга на  $\epsilon$  (рис. 6). В силу неравенств  $\frac{1}{s} < \epsilon \leq$

$\frac{1}{s-1}$  расстояние между точками  $x_1$

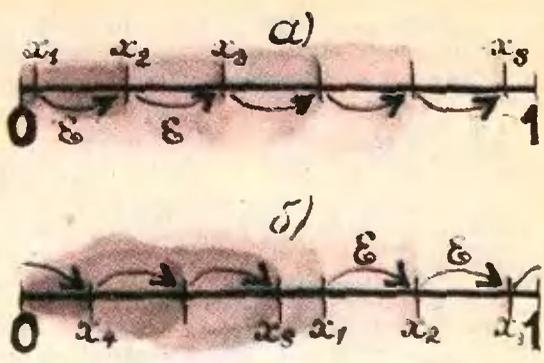


Рис. 6.

и  $x_s$  на рисунке 6,  $\epsilon$  меньше  $\frac{1}{s}$ . Из сказанного вытекает, что число точек  $x_1, x_2, \dots, x_s$ , попадающих на отрезок  $I$  длины  $h$ , заключено между числами  $\frac{h}{\epsilon} - 1$  и  $\frac{h}{\epsilon} + 2$ , т. е. между  $sh - 2$  и  $sh + 2$  (заметим, что  $h < 1$ ).

Возьмем теперь  $ps$  последовательных членов  $b_1, b_2, \dots, b_{ps}$  какой-либо арифметической прогрессии с разностью  $\alpha$  (т. е.  $b_{i+1} = b_i + \alpha$ ). Расположим их в виде таблицы, изображенной на рисунке 7. Очевидно, что каждая строка этой таблицы представляет собой прогрессию вида (3). Так как число строк равно  $p$ , то количество тех членов рассматриваемой прогрессии  $b_1, b_2, \dots, b_{ps}$ , дробные части которых попадают в промежуток  $I$ , заключено между числами  $p(sh - 2)$  и  $p(sh + 2)$ .

Пусть, наконец,  $n$  — произвольное натуральное число, большее  $rps$ . Разделив  $n$  на  $ps$  с остатком, получим  $n = lps + q$ , где  $l \geq r, 0 \leq q < ps$ . Следовательно, из чисел  $\alpha + \beta, 2\alpha + \beta, \dots, n\alpha + \beta$  можно взять  $l$  раз по  $ps$  последовательных членов арифметической прогрессии с разностью  $\alpha$ ,

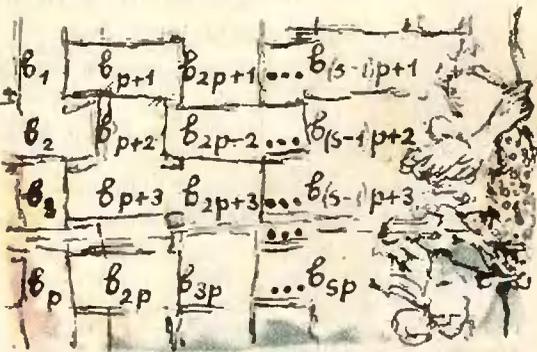


Рис. 7.

<sup>\*</sup> Эта терминология связана с принципом Дирихле («Квант», 1977, № 2, с. 17). Теорему о дробных частях можно назвать «принципом Дирихле для бесконечного числа зайцев».

и еще останется  $q$  чисел. Поэтому

$$lp(sh-2) \leq a_n \leq lp(sh+2)+q,$$

где  $a_n$  — количество тех чисел  $\alpha+\beta, 2\alpha+\beta, \dots, n\alpha+\beta$ , дробные части которых попадают в промежуток  $I$ . Это неравенство можно переписать в виде

$$(n-q)h - 2lp \leq a_n \leq (n-q)h + 2lp + q,$$

откуда (в силу соотношений  $0 \leq h < 1, q < ps$ ) получаем

$$nh - 2lp - ps \leq a_n \leq nh + 2lp + ps,$$

т. е.

$$\left| \frac{a_n}{n} - h \right| \leq \frac{2lp + ps}{n} \leq \frac{2lp + ps}{lps} = \frac{2}{s} + \frac{1}{l} < \frac{3}{r}$$

(поскольку  $l \geq r$  и  $\frac{1}{s} < \varepsilon < \frac{1}{r}$ ). Итак, существует такое натуральное  $N$  (а именно,  $N = rps$ ), что при  $n > N$  выполнено неравенство  $\left| \frac{a_n}{n} - h \right| < \frac{3}{r}$ .

Ввиду произвольности натурального числа  $r$ , отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = h.$$

**Задачи**

17. Докажите следующее «двумерное» обобщение теоремы о дробных частях. Пусть на плоскости фиксирована система координат. Дробной частью вектора  $\vec{a}$  с координатами  $x, y$  будем называть вектор, координатами которого являются дробные части чисел  $x$  и  $y$  (рис. 8). Пусть  $M$  — некоторый

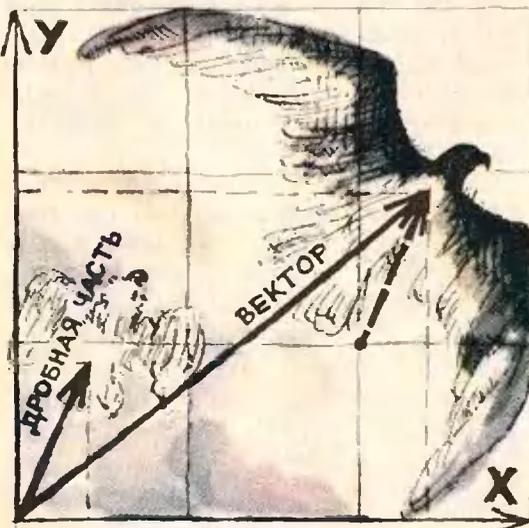


Рис. 8.



Рис. 9.

многоугольник, содержащийся в квадрате с вершинами  $(0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 1)$ . Будем говорить, что некоторый вектор  $\vec{b}$  попадает в  $M$ , если  $\vec{b} = \vec{OB}$ , где  $O$  — начало координат, а  $B \in M$ . Пусть  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  — произвольные векторы на плоскости, причем координаты  $x_0, y_0$  вектора  $\vec{\alpha}$  и число  $\frac{x_0}{y_0}$  иррациональны.

Рассмотрим бесконечную последовательность векторов  $\vec{\alpha} + \beta, 2\alpha + \beta, \dots, n\alpha + \beta$ . Вероятность того, что произвольно взятый вектор этой последовательности имеет дробную часть, попадающую в многоугольник  $M$ , равна площади  $S(M)$  этого многоугольника\*).

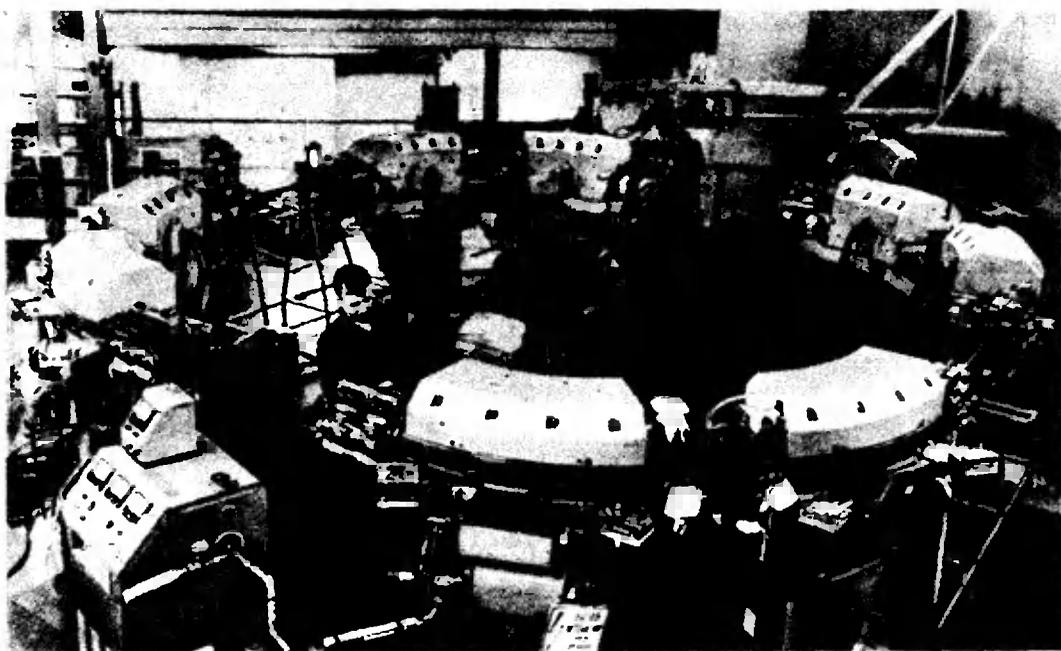
18. По бесконечной шахматной доске с полями в виде квадратов со стороной 1 прыгает блоха, перемещаясь за каждый прыжок на  $x_0$  влево и на  $y_0$  вверх (рис. 9). Докажите, что если числа  $x_0, y_0$  и  $\frac{x_0}{y_0}$  иррациональны, то блоха обязательно попадет когда-нибудь на черное поле.

19. Числа  $\frac{\lambda_1}{\pi}, \frac{\lambda_2}{\pi}$  и  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  иррациональны. Докажите, что система неравенств

$$\begin{cases} |\sin n\lambda_1| > 0,999999, \\ |\sin n\lambda_2| > 0,999999 \end{cases}$$

имеет натуральное решение  $n$ .

\* Аналогичное обобщение справедливо также для  $n$ -мерного пространства (вектор  $\vec{\alpha}$  должен обладать тем свойством, что все его координаты иррациональны и ни одна из них не представляется в виде линейной комбинации остальных координат с рациональными коэффициентами).



А. Паташинский, С. Попов

## Ускорители ИЯФ — метод встречных пучков

В 1967 г. академику Г. И. Будкеру и его ближайшим сотрудникам была присуждена Ленинская премия за развитие метода встречных пучков. Этим признанием был подведен итог первому этапу работ, положивших начало использованию в физике высоких энергий этого очень перспективного метода. О преимуществах метода встречных пучков, об истории его создания в Институте ядерной физики Сибирского Отделения АН СССР, основателем и директором которого был выдающийся советский физик и организатор науки академик Г. И. Будкер, рассказывается в этой статье.

О том, зачем нужны ускорители, и об устройстве обычных ускорителей «Квант» уже рассказывал (см. № 4 за 1977 г.). Основным способом исследования микромира в настоящее время является столкновение элементарных частиц. Чем глубже мы хотим проникнуть в микромир, тем больше должна быть энергия соударения. В

эксперименте элементарная частица сталкивается с другой элементарной частицей. Регистрируется результат столкновения — скорости отклонившихся или родившихся при соударении частиц, их сорт. Глубина, на которую мы таким образом проникаем в микромир, определяется энергией ускоряемых частиц. Но на пути развития ускорительной техники возникают две существенные трудности. Первая заключается в том, что для сообщения ускоряемым частицам все больших энергий необходимы ускорители огромных размеров, которые стоят очень дорого. Вторая же трудность носит принципиальный характер.

Для того чтобы понять, в чем она заключена, обратимся к хорошо знакомому нам процессу соударения шаров.

Рассмотрим «лобовое» соударение двух шаров одинаковых масс. При столкновении шары начинают деформироваться, и часть первоначальной кинетической энергии системы переходит в потенциальную энергию деформации шаров. Представим себе, что мы изучаем прочность наших шаров, нас интересует, при каких условиях они разбиваются. Ясно, что эти условия определяются именно величиной потенциальной энергии деформации шаров. Какую часть состав-

ляет эта энергия от первоначальной кинетической энергии системы?

Рассмотрим сначала случай, когда один из шаров первоначально покоится. Пусть на покоящийся шар налетает шар, кинетическая энергия которого  $E = \frac{mv^2}{2}$ . Сразу после столкновения шары начинают деформироваться. Очевидно, что деформация шаров растет до тех пор, пока относительная скорость шаров не станет равной нулю. В этот момент шары движутся как одно целое (шар с массой  $2m$ ) с некоторой скоростью  $\vec{u}$ , и энергия деформации шаров максимальна. Из закона сохранения импульса —  $m\vec{v} = 2m\vec{u}$  — следует, что  $|\vec{u}| = |\vec{v}|/2$ . Согласно закону сохранения энергии  $E = \frac{2mu^2}{2} + E_0$ , где  $E_0$  — максимальная энергия деформации шаров. Следовательно,

$$E_0 = E - \frac{2m(v/2)^2}{2} = \frac{1}{2}E.$$

Таким образом, максимальная энергия деформации шаров в случае, когда один из них первоначально покоился, равна половине начальной кинетической энергии системы.

Иное дело, когда два шара движутся навстречу друг другу с одинаковыми по абсолютному значению скоростями  $|\vec{v}|$ . В этом случае энергия деформации  $E_0'$  в процессе соударения максимальна в тот момент, когда скорости шаров равны нулю. Из закона сохранения энергии следует, что

$$E_0' = E',$$

где  $E' = 2\frac{mv^2}{2}$  — начальная энергия системы. Итак, при соударении движущихся навстречу друг другу шаров вся первоначальная кинетическая энергия системы переходит в энергию деформации.

Рассмотренный нами случай соударения двух шаров, из которых один первоначально покоился, представляет собой модель ситуации, происходящей в обычном ускорителе, — ускоренная частица налетает на не-

подвижную мишень. Энергия деформации шаров — это аналог той энергии, которая при соударении ускоренных частиц с атомами мишени определяет происходящие в атомах процессы, возможность рождения новых частиц, их энергию. Именно эта «полезная» энергия и интересует исследователей.

Теперь нам становится ясна та принципиальная трудность, которая возникла перед создателями ускорителей. Когда ускоренная частица сталкивается с атомами неподвижной мишени, часть ее энергии расходуется на сообщение скорости системе «частица+атом» (вернее, «частица+рожденные в соударении частицы») как целому. И эта часть энергии «тратится» без пользы — ведь исследователя интересует энергия рожденных в процессе соударения частиц, а энергия движения системы как целого — это своего рода «энергетические издержки» в процессе. В случае, когда скорость частиц мала по сравнению со скоростью света, эти «издержки» составляют половину первоначальной энергии ускоренных частиц. В релятивистском же случае доля «полезной» энергии сильно уменьшается с ростом энергии частиц. Так, при энергиях ускоряемых частиц порядка 10 ГэВ (1 ГэВ =  $10^9$  эВ) эта доля меньше процента — порядка 100 МэВ (1 МэВ =  $10^6$  эВ). Для того чтобы получить в процессе соударения «полезную» энергию 2 ГэВ, потребовалось бы ускорять электроны до энергии 4 ТэВ (1 ТэВ =  $10^{12}$  эВ). Ускоритель электронов на такие энергии имел бы длину, сравнимую с окружностью Земли по экватору!

А если вместо неподвижной мишени использовать встречный пучок ускоренных частиц? Моделью процессов, происходящих в таком ускорителе, является рассмотренный нами случай соударения двух шаров, движущихся навстречу друг другу. И тогда «полезную» энергию в 2 ГэВ, почти недостижимую для обычного электронного ускорителя, можно получить при соударении частиц встречных пучков, ускоренных до энергии 1 ГэВ на частицу.

На рисунке 1 приведен график, который позволяет наглядно оценить

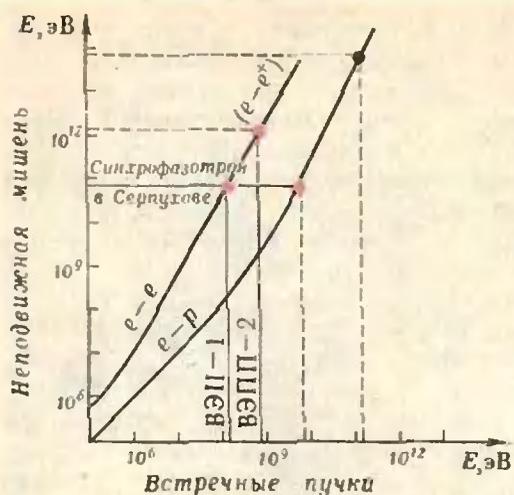


Рис. 1. Соотношение между энергией частиц в установках со встречными пучками и в ускорителях с неподвижной мишенью при одинаковых энергиях соударения.

энергетические преимущества метода встречных пучков. Каждая точка кривой соответствует некоторому значению «полезной» энергии — энергии соударения. Абсцисса точки — это значение энергии ускоряемых частиц в установках со встречными пучками, необходимая для получения данной «полезной» энергии, а ордината точки — значение энергии, до которой нужно ускорять частицы в ускорителях с неподвижной мишенью, чтобы получить эту же «полезную» энергию. Как видно из рисунка, для получения одной и той же энергии соударения в ускорителях с неподвижной мишенью электронам нужно сообщить энергию порядка  $10^{11}$  эВ, а ускоритель на встречных пучках дает тот же «эффект» при энергии электронов порядка  $10^8$  эВ.

Идея встречных пучков проста, и преимущества этого метода очень наглядны и неоспоримы. Однако многим физикам казалось, что техническое осуществление ускорителей на встречных пучках невозможно. И главная трудность, как представлялось, заключена в том, что пучки ускоренных частиц, встречаясь, будут проходить друг сквозь друга практически без соударений. Ведь число соударений пропорционально плотности частиц в сталкивающихся пучках и обратно пропорционально площади

их поперечного сечения. А именно эти параметры определяют величину тока в ускорителе — заряд, переносимый за единицу времени ускоренными частицами через поперечное сечение пучка. Величина тока в наиболее современных ускорителях достигает 100 мкА. Но даже при таком токе плотность частиц в пучке в  $10^{17}$  раз меньше, чем плотность атомов в мишени. И если сталкивать два подобных пучка, сжав в месте встречи их поперечные сечения до долей миллиметра, то количество соударений будет равно... нескольким единицам в сутки! И создание очень узких направленных пучков — тоже проблема. Для этого, прежде всего, необходим очень высокий вакуум.

Все эти проблемы заставляли очень скептически относиться к идее ускорителя на встречных пучках. И все же...

В 1956 году в Москве в Институте атомной энергии, которым руководил Игорь Васильевич Курчатов, в лаборатории новых методов ускорения начинаются работы по встречным электронным пучкам. Руководит лабораторией молодой физик Герш Ицкович Будкер. Первая задача — получение больших токов ускоряемых частиц. В разрабатываемых лабораторией установках со встречными пучками выбирают метод «накопления» токов. Основной элемент такой установки — накопительные кольца. В накопительное кольцо порциями вырывают (как говорят, инжектируют) частицы до тех пор, пока не будет достигнута нужная плотность пучка. Движущиеся в кольце частицы ускоряются до энергии, при которой проводится эксперимент. Если сталкивающиеся частицы несут заряды одного знака, то каждый из пучков накапливается в своем собственном кольце; если же частицы имеют разноименные заряды, то оба пучка могут накапливаться в одном кольце, — ведь магнитное поле «закручивает» частицы с зарядами противоположных знаков в противоположные стороны, так что пучки движутся навстречу друг другу. Столкновения пучков происходят в одном и том же месте через определенные периоды времени.

Чтобы за часы вращения по круговой орбите пучок не был рассеян частицами газа в накопительном кольце, необходим высочайший вакуум — не больше  $10^7$  частиц газа в  $1 \text{ см}^3$ . Необходимо, чтобы впуск каждой новой порции частиц не «портит» уже накопленный пучок. Необходимо устранить («подавить») неустойчивости пучка — при отклонении частиц от направления движения пучка возникают силы, выбрасывающие частицы на стенки кольца. Эти и многие другие проблемы требуют сложнейших конструкторских и инженерных работ.

В 1958 году по предложению И. В. Курчатова лаборатория новых методов ускорения переезжает в Сибирь. Здесь под Новосибирском началось строительство Академгородка Сибирского отделения АН СССР. Лаборатория превращается в Институт ядерной физики (ИЯФ) СО АН СССР. Директором института стал Г. И. Будкер.

Институт возникал со скоростью взрыва. Директор его молод, большинство сотрудников — вчерашние студенты и аспиранты. Будкер предлагает предельно напряженный ритм работ, и коллектив принимает этот ритм. «Средний уровень в науке неустойчив. Если мы не пойдем вперед на пределе возможностей — мы отстанем и скатимся на уровень низкий, — говорил Будкер. — Если мы не сделаем все, чтобы быть первыми, мы станем плохим институтом». Поставленная перед институтом задача была необычайно трудна. Начинается строительство ускорителя и накопительных колец первой установки на встречных электронных пучках — ВЭП-1. Элементы нового уско-

рителя должны работать в режимах значительно более сложных, чем элементы обычного ускорителя. Каждый узел — новая проблема. Известны многие открытия Г. И. Будкера в физике, но когда говорят о «методе Будкера» — это о работе института. Метод Будкера — это поиск новых, более совершенных решений поставленных задач. И поиск людей, способных находить такие решения. «Каждый талантливый человек должен работать творчески и самостоятельно», — утверждал директор и доверял своим ученикам все более сложные участки работы. Многие элементы установки ВЭП-1 были по существу открытиями в технике создания ускорителей на встречных пучках.

В 1963 году в накопителе ВЭП-1 столкнулись пучки электронов. Есть  $e^-$ -столкновения на встречных пучках! Кроме подтверждения возможности реализации ускорителя на встречных пучках, эксперимент на ВЭП-1 дал новую физическую информацию — была доказана выполнимость закона Кулона на расстояниях порядка  $10^{-11}$  см. (Напомним, что «классический» радиус электрона  $2,7 \cdot 10^{-13}$  см.)

Параллельно с экспериментами на ВЭП-1 была смонтирована установка для осуществления столкновения пучков электронов и позитронов ВЭП-2. В 1965 году на этой установке впервые в мире был осуществлен эксперимент по столкновению электронного и позитронного пучков.

Первые же опыты со встречными пучками принесли интереснейшие результаты, дали в руки физикам-теоретикам огромный фактический материал. Но главную заслугу этих экспериментов Г. И. Будкер видел в том,

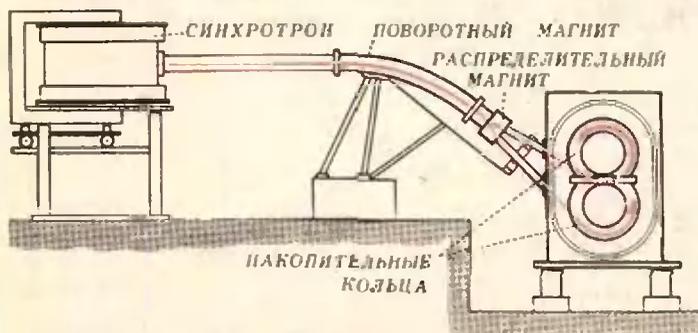


Рис. 2. Общая схема установки ВЭП-1.



Академик Г. И. Будкер беседует с учащимися физико-математической школы-интерната при Новосибирском государственном университете.

что «в результате этих исследований рассеяна атмосфера скрытого, а еще чаще открытого недоверия и скептицизма к методу встречных пучков, применение которого открывает новую область энергий в физике элементарных частиц... Сегодня физикам, как теоретикам, так и экспериментаторам, надо готовиться к освоению этой новой области».

За прошедшие с тех пор 10 лет метод встречных пучков получил всемирное признание. В разных странах построено около 10 и строятся новые

накопительные кольца. Растут энергии и токи в пучках. Эксперименты на встречных пучках приводят к потоку новых открытий в области физики высоких энергий, физики элементарных частиц.

История создания и развития этого метода у нас в стране неразрывно связана с Институтом ядерной физики СО АН СССР, с именем его первого директора академика Г. И. Будкера. Институт и сам похож на ускоритель, построенный по методу Будкера. ИЯФ — это тоже своего рода эксперимент. Сейчас этот эксперимент продолжают ученики Будкера. Впереди — труднейшие проблемы, новые поиски, новые результаты. Работа продолжается.

З. Литовченко

## Лучший вариант

Представьте себе, что вы — директор школы-интерната, и вам нужно составить меню для столовой на неделю. Детальное составление меню, конечно, дело повара, но вот проследить за тем, что денег будет истрачено не слишком много, нужно вам.

Вам известно, какие продукты можно купить, и их цены. Но, кроме цен, у них есть еще множество качеств, например, калорийность, содержание тех или иных витаминов и т. п. Поэтому, кроме цен, при покупке продуктов вам нужно учитывать довольно много условий. Если к тому же на складе много продуктов, то задача становится весьма запутанной и без вычислительной машины решить ее трудно. Однако, если продуктов и условий мало, справиться с ней несложно.

Рассмотрим такой пример. Пусть меню уже почти полностью составлено, и вам нужно проследить только за тем, чтобы в нем оказалось достаточно витаминов А и С, причем на складе есть вишни и абрикосы. Один

Таблица 1

Фрукты \ Витамины	А (г в 1 кг)	С (г в 1 кг)
	Вишни	3
Абрикосы	24	75

килограмм вишен стоит 25 коп., один килограмм абрикосов — 30 коп., а содержание витаминов приведено в таблице 1. Вам нужно, чтобы недельный рацион содержал не меньше 6 кг витамина А и не меньше 75 кг витамина С. Сколько нужно купить вишен и абрикосов, чтобы выполнялись эти условия и затраты были минимальны?

Прежде всего задачу нужно сформулировать математически. Итак, пусть в рацион войдут  $x$  кг вишен и  $y$  кг абрикосов. Их стоимость составит  $0,25x + 0,3y$  рублей, содержание витамина А —  $0,003x + 0,024y$  кг, а витамина С —  $0,15x + 0,075y$  кг. Нам нужно найти такие  $x$  и  $y$ , для которых выполняется система неравенств

$$\begin{cases} 0,003x + 0,024y \geq 6, \\ 0,15x + 0,075y \geq 75, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0, \end{cases} \quad (1)$$

и  $z = 0,25x + 0,3y$  было бы минимальным. На плоскости  $xOy$  легко указать множество точек  $M$ , удовлетворяющих системе (рис. 1). Его называют *многоугольником решений* системы. Ясно, что прямые  $z = 0,25x + 0,3y$  при различных  $z$  параллельны одному и тому же направлению, причем при росте  $z$  они удаляются от начала координат. Поэтому нам нужно найти ту из прямых этого направления, которая имеет с многоугольником  $M$  общую точку и ближе всего к началу координат. Легко сообразить, что такая прямая не должна пересекать  $M$  по внутренним точкам — тогда бы она не была самой «низкой» (рис. 2). Следовательно, она должна проходить через одну из вершин многоугольника. Но тогда эта точка — вершина  $S$ . Итак, нужно купить 400 кг вишен и 200 кг абрикосов — лучший вариант найден!

Задачи, подобные разобранной, называются *задачами линейного программирования*. В них требуется найти прямую (в трехмерном пространстве — плоскость, в многомерном — так называемую *гиперплоскость*), принадлежащую пучку параллельных прямых (плоскостей, гиперплоскостей), которая пересекается с некоторым многоугольником (многогранником) и находится ближе всего (или дальше всего) от начала координат. Можно дать и чисто алгебраическую фор-

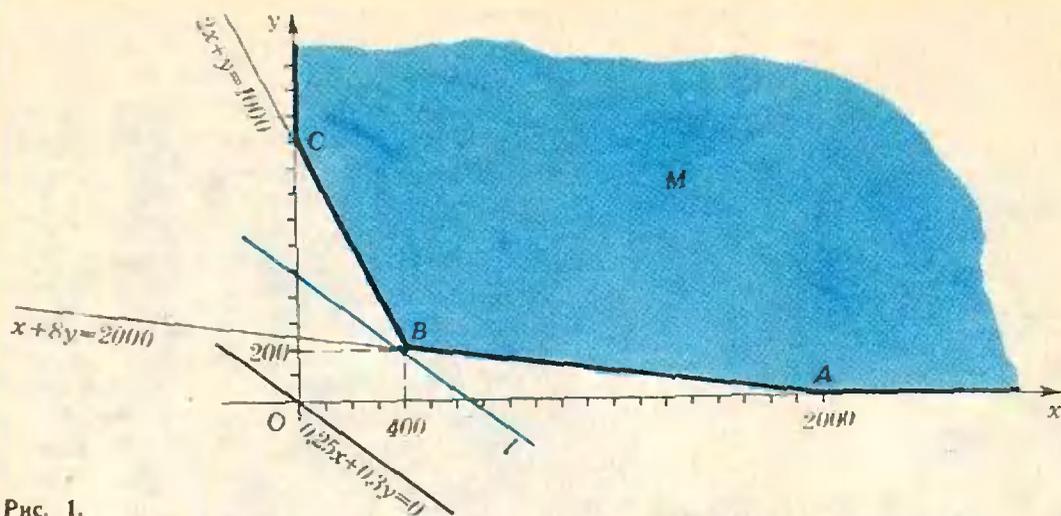


Рис. 1.

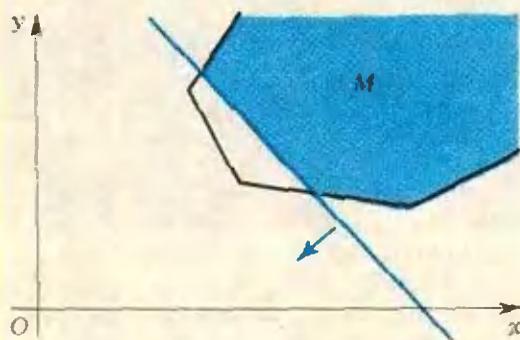


Рис. 2.

мулировку: имеется система линейных неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \geq b_k \end{cases}$$

и линейная функция  $z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ . Нужно найти такое решение этой системы, для которого значение функции  $z$  минимально. О линейном программировании в «Кванте» было уже много статей (1971 — № 3, с. 1 и № 4, с. 1, 1974 — № 7, с. 13, 1975 — № 10, с. 17, 1976 — № 7, с. 2, 1977 — № 8, с. 29).

Решим еще одну задачу: зверосовхоз выращивает песцов и лисиц; он имеет 10 000 клеток, причем в одной клетке могут жить две лисицы или один песец; по плану нужно вырастить не менее 3000 лисиц и не менее 6000 песцов; за сутки одной лисице скармливают 4 кормовых единицы, а песцу — 5 единиц; всего за сутки разрешается истратить не больше 80 000 кормовых единиц; сколько

нужно вырастить песцов и лисиц, чтобы средняя стоимость одной шкурки была минимальна, если стоимость выращивания одной лисицы — 45 руб., а одного песца — 25 руб.?

Решение. Пусть  $x$  — число выращиваемых лисиц, а  $y$  — песцов. Тогда

$$\begin{cases} 4x + 5y \leq 80\,000 \\ \frac{1}{2}x + y \leq 10\,000 \\ x \geq 3000 \\ y \geq 6000. \end{cases} \quad (2)$$

Средняя стоимость одной шкурки

$$z = \frac{45x + 25y}{x + y}$$

Как вы видите, здесь функция, значение которой нам нужно сделать минимальным, не является линейной. Она задается отношением двух линейных функций. Такие функции называются *дробно-линейными*.

Задачи, в которых система ограничений задается линейными неравенствами, а функция, минимум которой мы ищем, является дробно-линейной, называются задачами *дробно-линейного программирования*. Как вы увидите из решения нашей задачи, они довольно похожи на задачи линейного программирования.

На рисунке 3 приведен многоугольник  $F$  решений системы (2). Из него видно, что в системе (2) первое неравенство можно отбросить — получится равносильная система. Функция  $z = \frac{45x + 25y}{x + y}$  принимает по-

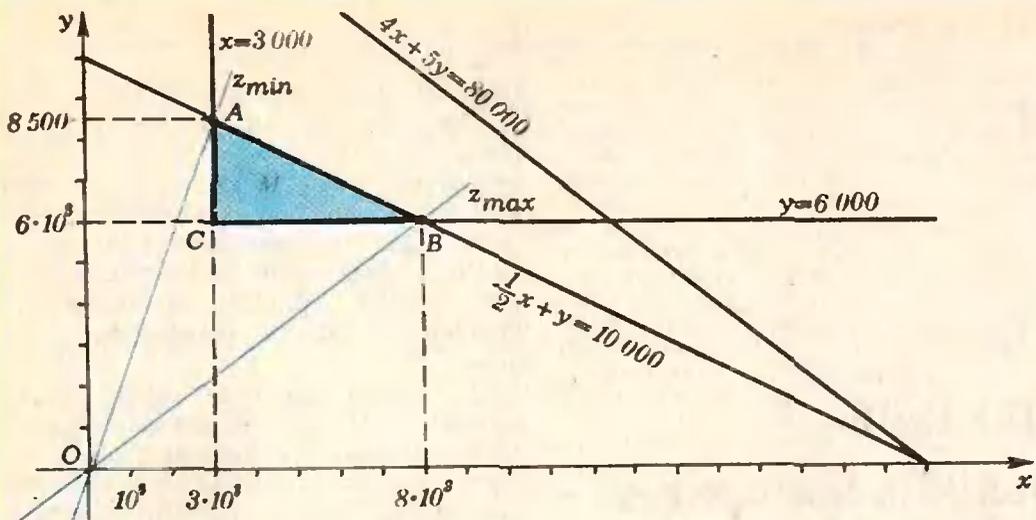


Рис. 3.

стоянные значения на прямых, проходящих через начало координат. Нам нужно найти ту из этих прямых, которая пересекает многоугольник  $F$  и на которой значение функции  $z$  минимально. Так же, как и выше, ясно, что эта прямая не должна содержать внутренних точек многоугольника  $F$ . Поэтому достаточно сравнить между собой прямые  $OA$  и  $OB$ . Ответ:  $x=3000$ , а  $y=8500$ .

Заметим, что при решении этой задачи нам повезло — мы получили целый ответ. Ведь если бы число лисц или песцов не оказалось целым, мы не смогли бы ответить воспользоваться. Более того, если бы мы получили нецелый ответ, мы ничего не могли бы сказать о правильном ответе. Оказывается, можно так подобрать условия задачи, что эти ответы будут отличаться сколь угодно сильно.

В тех случаях, когда ответ должен даваться целыми числами, мы имеем дело с задачами целочисленного программирования. Решение таких задач значительно сложнее решения задач без этого ограничения.

В заключение — упражнение для читателей:

Два судна должны перевезти грузы в соответствии с таблицей 2.

Таблица 2

Груз	Перевезти не менее (тонн)	Количество груза, перевозимое за один рейс (тонн)	
		1-м судном	2-м судном
А	21000	3000	3000
Б	10000	1000	2000
В	4000	—	4000
Г	4000	2000	—
Эксплуатационные издержки за один рейс в рублях		12000	16000
Прибыль от одного рейса в рублях		7000	9000

Известно, что первое судно может сделать не больше 5 рейсов, а второе — не больше 9. Составить план перевозок, который обеспечивал бы

а) максимальную прибыль;  
б) наименьшие затраты на перевозку одной тонны груза.

#### Поправки

В № 3 «Кванта» за 1978 г. на с. 11 в восьмой строке сверху в левой колонке следует читать «М. П. Бронштейном».

В № 11 «Кванта» за 1977 г. на с. 27 во второй строке снизу в правой колонке следует читать «В 1928 году».



М. Грабовский

## Плавание воскового шарика

Слепите из воска шарик и опустите его в воду. Поскольку плотность воска меньше плотности воды, шарик будет плавать на поверхности воды. Теперь вдавите внутрь шарика небольшой кусочек металла так, чтобы средняя плотность получившегося шарика чуть-чуть превышала плотность воды. Если шарик резко опустить или бросить в воду, он утонет. Если же его очень осторожно положить на поверхность воды — он может там удержаться и не опуститься на дно.

Это своеобразное плавание можно объяснить так. Вода не смачивает воск, поэтому свободная поверхность воды искривляется (рис. 1), появляются силы, действующие на шарик со стороны искривленной поверхности воды. Эти силы обусловлены поверхностным натяжением и направлены в нашем случае вертикально вверх (можно считать, что вода абсолютно не смачивает воск). Вместе с силой

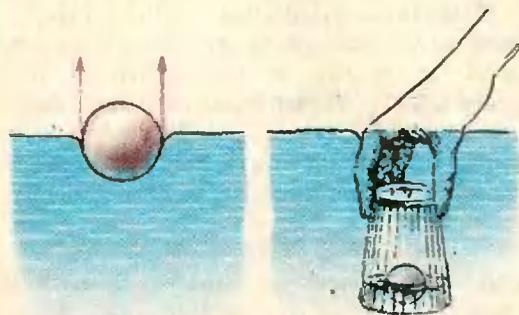


Рис. 1.

Рис. 2.

Архимеда они уравнивают силу тяжести шарика, не давая ему опуститься на дно.

Можно дать несколько другое объяснение. Искривление поверхности воды обуславливает дополнительный объем вытесненной шариком воды — сила Архимеда возрастает и уравнивает силу тяжести шарика.

Этот опыт допускает интересный вариант. Опустите утяжеленный металлом восковой шарик на дно большого стеклянного сосуда, наполненного водой. Затем погрузите в сосуд стакан, перевернутый вверх дном, и накройте стаканом шарик так, чтобы он плавал на поверхности воды внутри стакана (рис. 2). Теперь медленно поднимайте стакан — вместе с ним поднимется и плавающий шарик. (Таким образом можно поднять шарик со дна сосуда, не прикасаясь непосредственно к самому шарiku.) Когда шарик поднимется до уровня воды в сосуде, осторожно уберите стакан. Для этого медленно приподнимите край стакана с одной стороны, стараясь не вызвать появления пузырей и не взболтать поверхностный слой воды в сосуде.

В заключение несколько конкретных указаний к проведению опыта. Рекомендуемый диаметр воскового шарика — 2—3 см, а диаметр стакана — примерно в два раза больше. Для устойчивости плавания шарика кусочек металла лучше вдавить не в центр шарика, а сместить в сторону. Перед опытом шарик нужно высушить.

Вместо шарика можно использовать кусочек парафиновой свечи диаметром приблизительно 2 см и длиной 4—5 см. Для утяжеления свечи можно воткнуть в нее несколько мелких железных гвоздиков или привязать кусочек медной проволоки. Дальше опыт проводится так же, как с шариком.

## Локсодромия

**Локсодромия** (по-гречески  $\lambda\omicron\zeta\omicron\zeta$  — «косой»,  $\delta\rho\mu\omicron\zeta$  — «бег») определяется на глобусе (или сфере) как кривая, пересекающая меридианы под постоянным углом (рис. 1). Если этот угол равен  $0^\circ$ , локсодромия вырождается в меридиан, а если он равен  $90^\circ$  — в параллель. Как видно из рисунка 1, локсодромия общего вида представляет собой кривую, бесконечно приближающуюся по спирали к полюсам и никогда их не достигающую. Локсодромию иногда называют *линией постоянного курса*, поскольку именно по такой траектории движется корабль в океане, когда его скорость составляет постоянный угол со стрелкой компаса.

Впервые локсодромию исследовал португальский математик, географ и изобретатель П. Нуец (1492—1577). Его имя увековечено в латинизированном названии «нониус» для приспособления в измерительных приборах, широко используемого и поныне. Но с локсодромией ему повезло меньше. Он ошибся, полагая, что кратчайшим путем между двумя точками на глобусе является путь по этой кривой. Да и само название «локсодромия» предложил ввести (в 1624 г.) не он, а голландский ученый В. Снеллиус (1581—1626). Снеллиус первым заметил, что ортогональная проекция локсодромии на экваториальную плоскость глобуса представляет собой равноугольную спираль («Квант», 1977, № 4, с. 42). В 1569 г. известный голландский картограф Г. Меркатор (1512—1594) изобрел очень удобный для мореплавателей способ рисования географических карт; при

его способе локсодромии на карте изображаются прямыми («Квант», 1970, № 7, с. 17)

Локсодромии можно рассматривать не только на глобусе, но и на любой другой поверхности вращения. Для этого следует провести через ее ось вращения всевозможные плоскости, которые в пересечении с поверхностью образуют «меридианы». «Параллелями» поверхности вращения являются линии ее пересечения с плоскостями, перпендикулярными оси вращения.

Локсодромии на такой поверхности определяются, как и выше, — это кривые,

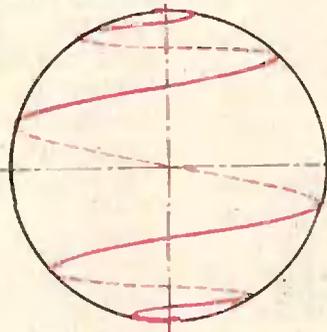


Рис. 1.

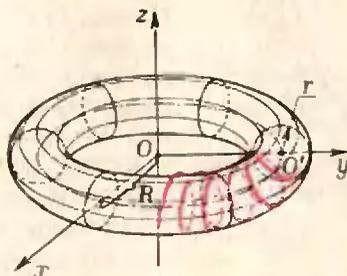


Рис. 2.

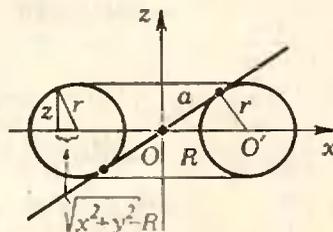


Рис. 3.

пересекающие меридианы под постоянным углом.

На цилиндре локсодромия — винтовая линия, на конусе — спиралеобразная кривая (одна из так называемых клелей, рассмотренных итальянским математиком Г. Гранди в 1701 г.).

Рассмотрим в плоскости прямую  $z$  и не пересекающую ее окружность  $(O', r)$ . При вращении окружности вокруг  $z$  получаем поверхность, называемую тором (рис. 2). Среди локсодромий тора — его параллели и меридианы. В общем случае его локсодромия — сложная пространственная кривая, похожая на винтовую линию, обвивающуюся вокруг тора. У тора есть еще одно семейство локсодромий. Это пары окружностей, получающихся в пересечении тора с плоскостью, перпендикулярной одной из его меридиональных плоскостей и касающейся в ней двух его меридианов (рис. 3).

Покажем аналитически, что при косом сечении тора плоскостью действительно можно получить окружность. Уравнение тора имеет вид  $(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2$ , где  $R$  — расстояние от  $O'$  до  $z$  (докажите это). Обозначив  $a = \sqrt{R^2 - r^2}$ , это уравнение можно переписать в виде  $(x^2 + y^2 + z^2 + a^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2)$ , или  $(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 + 2ry) \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - 2ry) = 4(rx - az) \cdot (rx + az)$ .

Отсюда видно, что плоскость (касающаяся двух меридианов — рис. 3)

$$rx - az = 0$$

пересекает тор по той кривой, по которой она пересекает пару сфер

$$x^2 + (y \pm r)^2 + z^2 = R^2,$$

т. е. по паре окружностей. Описанное сечение тора плоскостью показано на второй странице обложки. То, что каждая из полученных окружностей действительно является локсодромией, здесь доказывать не будем.

В. Березин



В. Вавилов, И. Мельников

## Касательная

*«Я не знаю, кем я представляюсь миру, но самому себе я представляюсь мальчиком, который играет на берегу моря и время от времени находит камень, более гладкий, или раковину, более красивую, чем обычно, в то время как огромный океан истины лежит передо мною непознанный».*

Исаак Ньютон

В «Геометрии 7» касательная к окружности определяется как прямая, имеющая с кривой лишь одну общую точку. Это определение имеет частный характер и не вскрывает существа

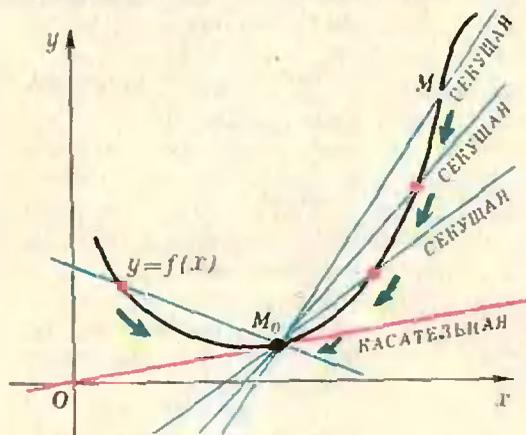


Рис. 1.

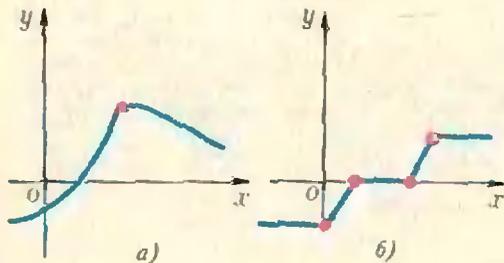


Рис. 2.

дела. Если попытаться применить его к параболе  $y=x^2$ , то в начале координат обе координатные оси подошли бы под это определение; между тем интуитивно ясно, что на самом деле касательной должна быть названа лишь ось абсцисс.

Мы дадим сейчас определение касательной к графику функции. Координаты точки касания  $M_0=(x_0; y_0)$  считаются заданными:  $x=x_0$ ,  $y=y_0=f(x_0)$ . Рассмотрим, кроме точки  $M_0$ , еще одну точку  $M=(x; y)$  на нашей кривой и проведем прямую  $(M_0M)$  — секущую. Когда точка  $M$  будет перемещаться по кривой, секущая, естественно, будет менять свое положение. Если точка  $M$  стремится к точке  $M_0$ , может случиться так, что секущая будет стремиться занять некоторое предельное положение, не зависящее от того, как точка  $M$  приближается к точке  $M_0$  (рис. 1). Это предельное положение секущей (если, конечно, оно существует) и есть касательная. Итак, касательной к кривой  $y=f(x)$  в точке  $M_0=(x_0; f(x_0))$  называется предельное положение\* секущей  $(M_0M)$ , когда точка  $M$  стремится по кривой к  $M_0$ .

Подчеркнем еще раз: в нашем определении касательной содержится допущение о том, что предельное положение секущей существует; не каждая функция  $y=f(x)$  обладает касательной в любой точке своего графика. На рисунке 2, а, б показаны графики функций, которые не имеют касательной в отмеченных точках, так как, если уж предельное положение секущей существует, оно должно не зависеть от того, «слева» или «справа» точка  $M$  стремится к точке  $M_0$ . Отметим, что данное нами определение касательной не требует того, чтобы касательная и кривая имели только одну общую точку.

\* Под предельным положением секущей (ее уравнение будет  $y-f(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}(x-x_0)$ ) следует понимать прямую  $y-f(x_0) = \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \right) (x-x_0)$ .

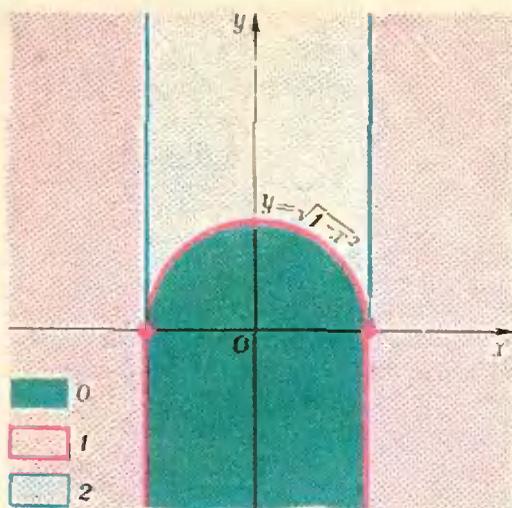


Рис. 3.

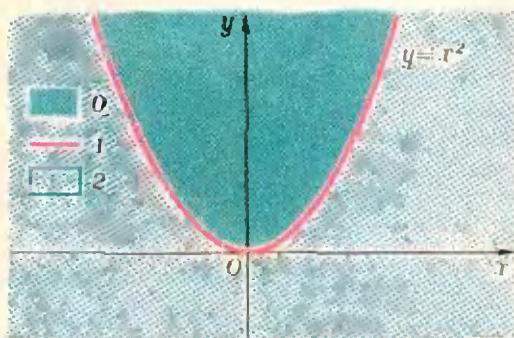


Рис. 4.

Диаграмма касательных заданной кривой строится по следующему правилу: точки плоскости (с нарисованной на ней кривой) закрашиваются одним цветом, если из них можно провести одинаковое число касательных к данной кривой. На рисунках 3 и 4 построены диаграммы касательных, соответствующие графикам функций  $y = \sqrt{1-x^2}$  и  $y = x^2$ . (Докажите это!)

Существует достаточно общий прием для построения диаграмм касательных. Состоит он в следующем. Рассмотрим выпуклую дугу \*)  $AB$  и представим себе, что к ней в точке  $A$  прикреплена гибкая нера-

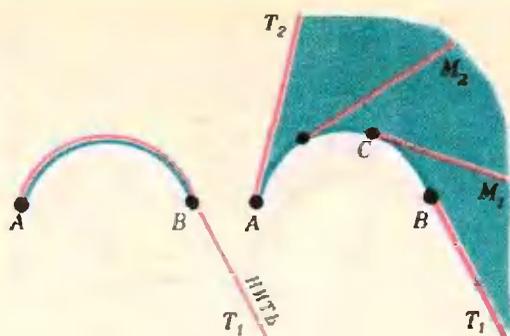


Рис. 5.

Рис. 6.

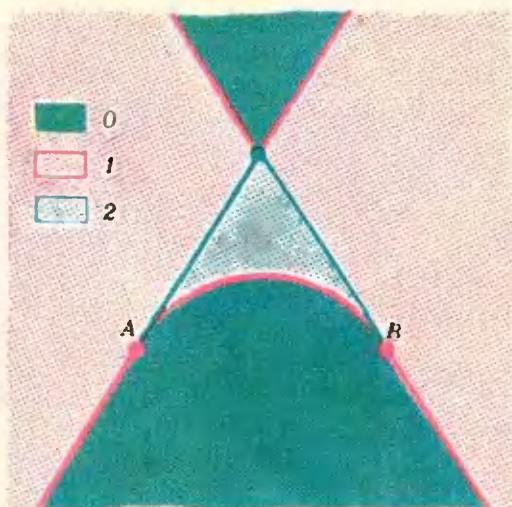


Рис. 7.

стяжимая «бесконечная» нить; пусть эта нить «навернута» на нашу кривую и плотно к ней прилегает так, что ее конец натянут по касательной, проведенной к дуге  $AB$  в точке  $B$  (рис. 5)\*\*). Будем «развертывать» — распрямлять нить (рис. 6), — держа ее натянутой, так что свободная часть нити  $CM_1$  будет все время направлена по касательной к дуге  $AB$  в соответствующей точке. При этом касательная  $CM_1$  «заметет» некоторую область (она закрашена на рисунке 6 зеленым цветом), каждая точка которой обладает тем свойством, что из нее можно провести касательную к заданной дуге  $AB$ . Проведя аналогич-

\*) Дуга  $AB$  называется выпуклой, если в каждой ее внутренней точке существует касательная, а сама дуга всегда лежит по одну сторону от нее.

\*\*\*) Под касательной в концевой точке  $B$  дуги мы понимаем предельное положение секущей ( $BM$ ), когда точка  $M$  стремится к точке  $B$  с одной стороны — по дуге  $AB$ .

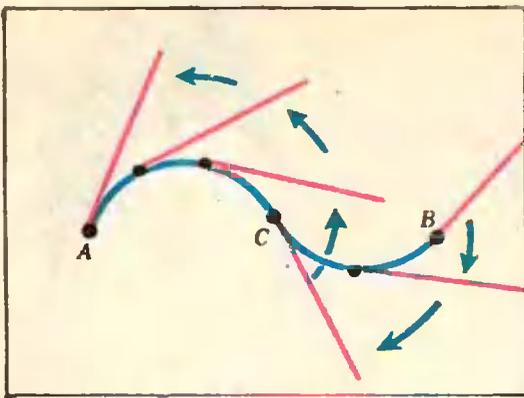


Рис. 8.

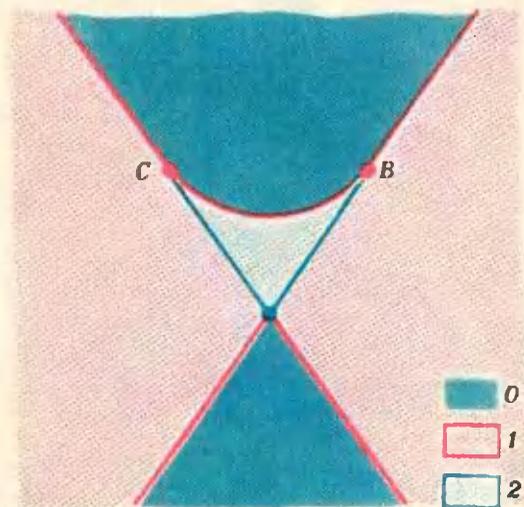


Рис. 9.

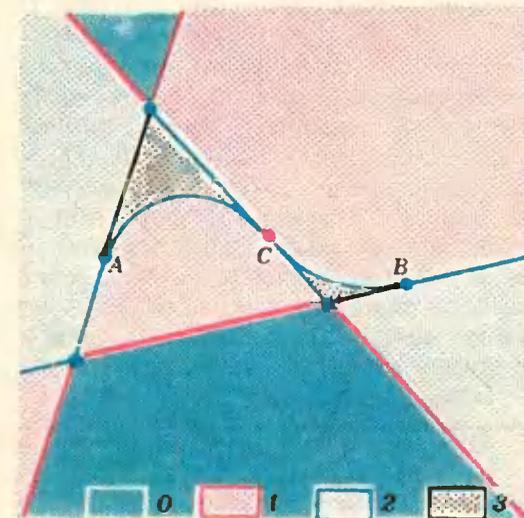


Рис. 10.

N	1	2	3	4	5
$f(x)$	$\frac{1}{x-1}$	$\frac{1}{(x-1)^2}$	$\frac{x}{x-1}$	$x + \frac{1}{x}$	$x - \frac{1}{x}$

ное рассуждение с нитью для левого конца дуги  $AB$  и объединяя вместе полученные результаты, мы построим диаграмму касательных, соответствующую дуге  $AB$  (рис. 7).

Если дуга кривой не всюду выпукла в одну сторону, если она, подобно кривой  $AB$  на рисунке 8, имеет точку, в которой касательная к кривой переходит с одной ее стороны на другую (такая точка называется *точкой перегиба*), то в этом случае ее можно разбить этой точкой на две выпуклые дуги. Если теперь для каждой из этих дуг построить соответствующие им диаграммы касательных, а затем «наложить» одну картинку на другую (см. рисунки 7, 9 и итоговый рисунок 10), то мы получим диаграмму касательных для всей дуги.

**З а д а н и е:**

Для функции  $y=f(x)$  построите диаграмму касательных ее графика.

Функцию  $f$  для выполнения данного задания математического практикума можно взять из приведенной таблицы.

Построив диаграммы для всех функций этой таблицы (всем классом или силами участников кружка), вы получите полный атлас диаграмм касательных для функций

$$y = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2}.$$

Образец выполнения работы дан на рисунке 11. Для обоснования построенной на рисунке 11 диаграммы касательных нам, конечно, нужно доказать, что касательная к графику функции  $f$  в точке  $A$  (точке перегиба) не пересекает участок графика функции  $f$  при  $x \in ]1,3[$ .

\*) Пример диаграммы касательных для функции другого типа изображен на первой странице обложки и на рисунке 12, эскиз которого предложила ученица 9 класса ФМШ при МГУ Конченко Лариса.

6	7	8	9	10	11	12	13
$\frac{1}{x^2-1}$	$\frac{1}{x^2+1}$	$\frac{3x-2}{5x^2}$	$\frac{x-2,5}{(x-2)(x-3)}$	$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2$	$\frac{x^2-4}{(x+1)(x-3)}$	$\frac{x^2-5x+6}{x^2+1}$	$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-3)}$

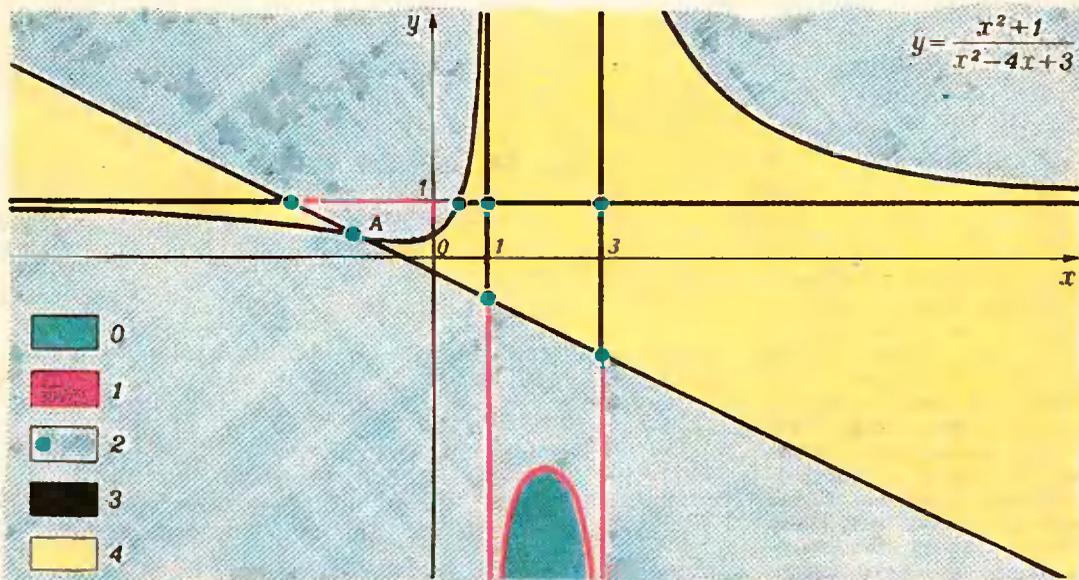


Рис. 11.

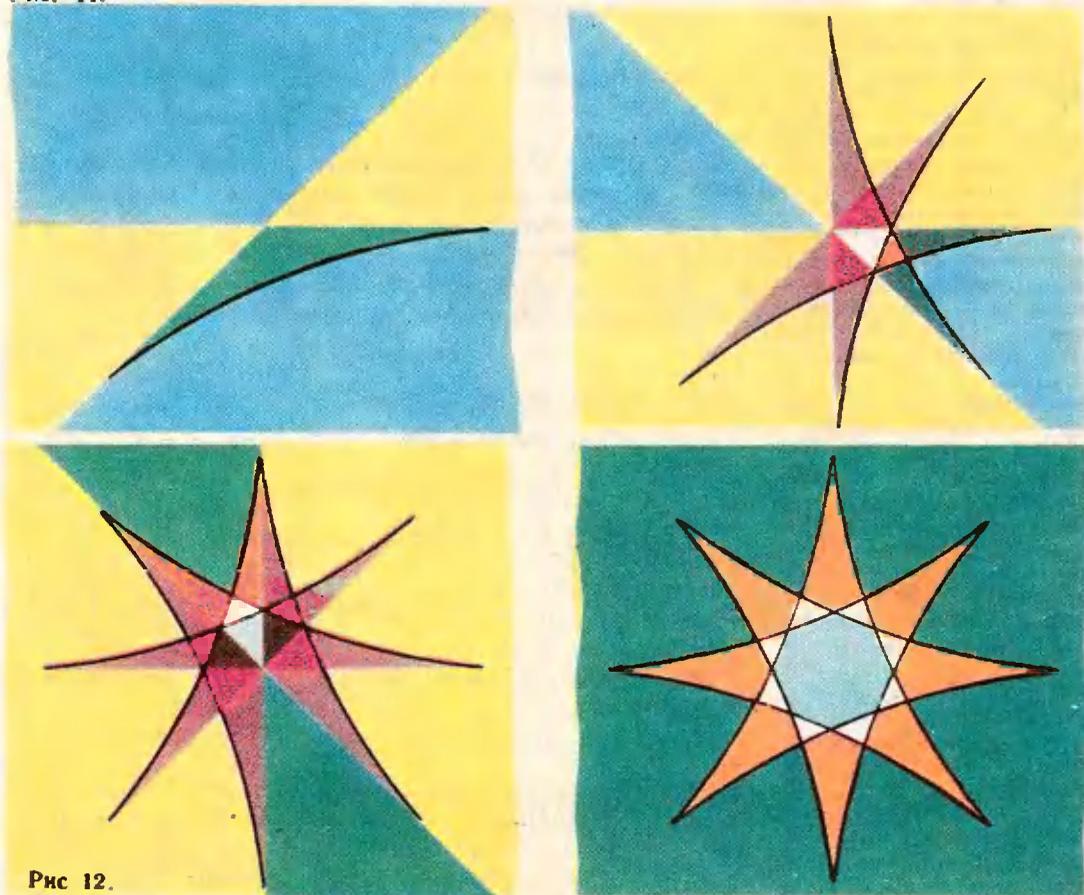


Рис. 12.

# Задачник «Кванта»

## Задачи

M501—M505; Ф513—Ф517

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 июля 1978 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант», «Задачник «Кванта»». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например: «M501, M502» или «Ф513». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике «или»... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

M501. Выберем из последовательности степеней тройки:

3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, ...

все числа, начинающиеся с цифры 9; пусть эти числа (по порядку)  $3^{f(1)}$ ,  $3^{f(2)}$ ,  $3^{f(3)}$ , ... (в частности,  $f(1)=2$ , так как первое из таких чисел  $3^2=9$ ).

а) Найдите  $f(2)$  и  $f(3)$  — номера второго и третьего такого числа.

б) Докажите, что таких чисел бесконечно много.

в) \* Докажите, что  $f(n)$  при  $n > 1$  удовлетворяет условиям: (1)  $f(n) - n$  нечетно,

$$(2) \left| f(n) - \frac{n - \lg 9}{1 - \lg 9} \right| < 1.$$

и определяется этими условиями однозначно.

Э. Туркевич

M502. Даны три параллельных отрезка  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ , не лежащих в одной плоскости. Пусть  $M$  — точка пересечения плоскостей  $ABC_1$ ,  $BCA_1$  и  $CAB_1$ , а  $M_1$  — точка пересечения плоскостей  $A_1B_1C$ ,  $B_1C_1A$  и  $C_1A_1B$ . Докажите, что отрезок  $MM_1$  параллелен трем первоначальным.

З. Скопец

M503. Набор из  $2n+1$  чисел  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2n}$

таков, что  $a_k \geq \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$  для всех  $k=1, 2, \dots$

...,  $2n-1$ . Докажите неравенство

$$\frac{a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1}}{n} \geq \frac{a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}}{n+1}$$

и выясните, для каких наборов оно превращается в равенство.

В. Липкин

M504\*. На шахматную доску  $n \times n$  клеток уложено  $k$  плиток размером  $2 \times 1$ , причем так, что положить  $(k+1)$ -ю плитку, не перемещая уже имеющихся плиток, нельзя. Докажите, что свободных плиток

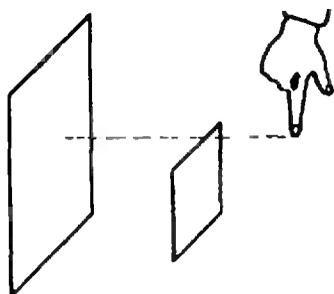


Рис. 1.

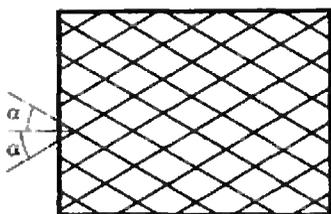


Рис. 2.

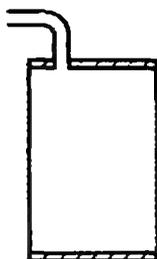


Рис. 3.

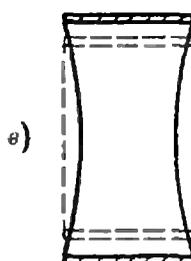
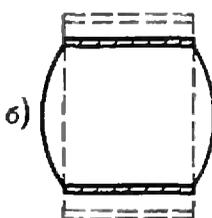
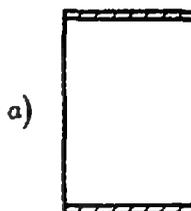


Рис. 4.

осталось не более чем

а)  $(n^2+n+1)/3$ ;

б)  $(n^2+2)/3$ ;

в)  $n^2/3$ .

Можно ли получить для некоторых  $n$  еще более точную оценку?

*В Гроссман*

**M505\***. а) Пусть на прямой помещены  $n$  материальных точек одинаковой массы. Рассмотрим произвольный отрезок длины  $2r$ , содержащий хотя бы одну из этих точек, и найдем центр тяжести  $O_1$  всех попавших в него точек. Рассмотрим отрезок длины  $2r$  с серединой  $O_1$ , и найдем центр тяжести  $O_2$  всех тех точек, которые попали в этот отрезок. Затем найдем центр тяжести  $O_3$  всех точек, попавших в отрезок длины  $2r$  с серединой  $O_2$ , и т. д. Докажите, что, начиная с некоторого номера, все точки последовательности  $O_1, O_2, O_3, \dots$  совпадают.

б) Пусть на плоскости помещены  $n$  материальных точек. Рассмотрим произвольный круг радиуса  $r$ , содержащий хотя бы одну из этих точек; обозначим через  $O_1$  центр тяжести попавших в него точек и построим последовательность  $O_1, O_2, O_3, \dots$ , где  $O_{n+1}$  — центр тяжести точек, попавших в круг радиуса  $r$  с центром  $O_n$ . Верно ли, что, начиная с некоторого номера, все точки этой последовательности совпадают?

*П. Блехер, Г. Гальперин, М. Кельберт*

**Ф513.** В ясный солнечный день, когда Солнце находится высоко над горизонтом, получите на гладком экране, например, на белой стене, тень от ровного края куска картона. Если теперь поднести к листу картона палец так, как это показано на рисунке 1, то на экране навстречу тени пальца из тени, отбрасываемой листом картона, высунется тень второго пальца. Проведите такой опыт и объясните его результат.

*Г. Соловьянюк*

**Ф514.** Резино-кордное полотно изготовлено из прочных упругих нитей (корда), залитых мягкой эластичной резиной. Нити корда образуют угол  $2\alpha$  друг с другом (рис. 2). Из такого полотна сделан круговой цилиндр, к торцам которого прикреплены металлические крышки (рис. 3). Внутри цилиндра нагнетается воздух. В опытах было замечено, что при нагнетании воздуха цилиндр принимает одну из трех форм, показанных на рисунке 4. Форма зависит от величины угла  $2\alpha$  между нитями. Каким значениям угла соответствует каждая из форм?

**Ф515.** Легкий стержень длины  $l$  закреплен в вертикальной плоскости на оси, проходящей через точку  $O$ , которая делит стержень в отношении 1:3.

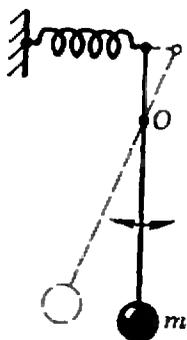


Рис. 5.

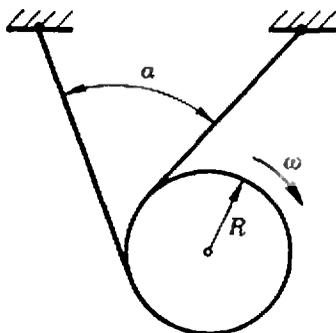


Рис. 6.

К одному из концов стержня прикреплен тяжелый шарик массы  $m$ , другой конец стержня прикреплен к горизонтальной пружине жесткости  $k$  (рис. 5). Пружина не растянута, когда стержень вертикален. Определить период малых колебаний стержня.

Ю. Левчук

**Ф516.** Тяжелый диск радиуса  $R$  скатывается на двух нерастяжимых нитях, намотанных на него. Свободные концы нитей закреплены (рис. 6). Нити при движении диска постоянно натянуты. В некоторый момент угловая скорость диска равна  $\omega$ , а угол между нитями  $\alpha$ . Какова в этот момент скорость центра диска?

А. Матвеев

**Ф517.** Пучок электронов с энергией  $E=1,0$  кэВ проходит через два небольших конденсатора, отстоящих друг от друга на расстоянии  $l=20$  см. Оба конденсатора подключены параллельно к одному генератору. Изменением частоты генератора добиваются того, что пучок электронов проходит эту систему без отклонения. Определить отношение  $e/m$  для электрона, если два последовательных значения частоты, при которых выполняется это условие, равны 141 МГц и 188 МГц.

## Решения задач

М450—М454; Ф467—Ф471

**М450.** Система прямоугольников из  $n$  этажей (рис. 1) построена следующим образом. Начиная с нижнего прямоугольника, образующего первый этаж, верхняя сторона каждого прямоугольника делится в отношении 1:2:3; на трех полученных отрезках как на основаниях строятся прямоугольники той же высоты, что и первоначальный, и так — до самого верхнего этажа. Из полученного множества прямоугольников выбрано некоторое подмножество, состоящее из попарно неконгруэнтных прямоугольников (одно такое подмножество на рисунке — красное). Докажите, что найдется вертикальная прямая, пересекающая не более двух из выбранных прямоугольников.

Оценим общую площадь системы попарно неконгруэнтных прямоугольников. Площадь каждого из них равна  $S/3^{k+2m}$ , где  $S$  — площадь нижнего прямоугольника,  $k$  и  $m$  — целые,  $k \geq 0$ ,  $m \geq 0$ ,  $k + m \leq n$ . Сумма различных чисел вида  $1/3^{k+2m}$  не превосходит

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \\ & + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 3^n} + \\ & + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{1}{2^2 \cdot 3^n} + \dots \\ & \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n \cdot 3} + \frac{1}{2^n \cdot 3^2} + \dots + \frac{1}{2^n \cdot 3^n}. \end{aligned}$$

Сумма чисел в столбцах меньше соответственно  $2, 2 \cdot \frac{1}{3}, 2 \cdot \frac{1}{3^2}, \dots$

$$\dots, 2 \cdot \frac{1}{3^n}, \text{ а } 2 \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} \right) < 2 \cdot \frac{3}{2} = 3.$$

Но если бы каждая вертикальная прямая пересекала три

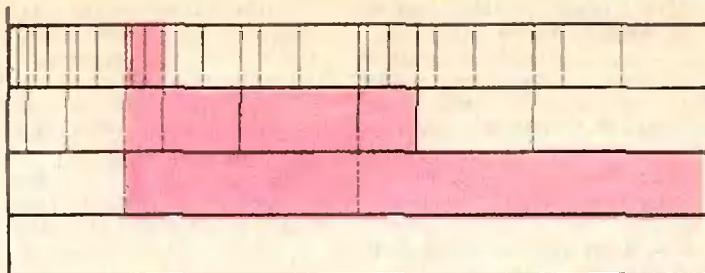


Рис. 1

или больше красных прямоугольников, то сумма их площадей была бы не меньше  $3S$ . Следовательно, найдется прямая, которая пересекает не больше двух прямоугольников.

А. Клепцын

**М451.** На плоскости отмечено несколько точек, не лежащих на одной прямой, и около каждой написано число. Известно, что если прямая проходит через две или более отмеченных точек, то сумма всех чисел, написанных около этих точек, равна нулю. Докажите, что все числа равны нулю.

Обозначим для отмеченной точки  $x$  через  $a_x$  написанное около нее число, а через  $n_x$  — количество попарно различных прямых, соединяющих точку  $x$  со всеми другими отмеченными точками. Пусть  $S$  — сумма чисел, написанных около всех отмеченных точек. По условию, сумма чисел в отмеченных точках каждой из  $n_x$  прямых, проходящих через  $x$ , равна нулю. Поэтому и сумма чисел по всем этим  $n_x$  прямым равна нулю. С другой стороны, эта сумма равна  $(n_x - 1)a_x + S$ , так что

$$(n_x - 1)a_x + S = 0. \tag{1}$$

Предположим, что для некоторой точки  $x$  число  $a_x > 0$ . Тогда найдется отмеченная точка  $y$ , около которой написано число  $a_y < 0$  (докажите!). Воспользовавшись (1), получим равенство

$$(n_y - 1)a_y = (n_x - 1)a_x. \tag{2}$$

По условию все отмеченные точки не лежат на одной прямой. Поэтому  $n_x > 1$  и  $n_y > 1$ . Мы пришли к противоречию, так как в равенстве (2) справа и слева стоят числа разных знаков.

Ф. Вайнштейн

**М452.** В окружность вписаны треугольники  $T_1$  и  $T_2$ , причем вершины треугольника  $T_2$  являются серединами дуг, на которые окружность разбивается вершинами треугольника  $T_1$ . Докажите, что в шестиугольнике  $T_1 \cap T_2$  диагонали, соединяющие противоположные вершины, параллельны сторонам треугольника  $T_1$  и пересекаются в одной точке.

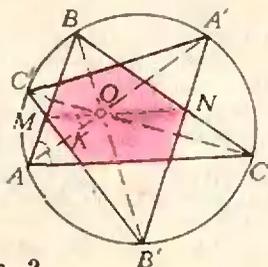


Рис. 2.

Пусть  $A, B$  и  $C$  — вершины треугольника  $T_1$ , а  $A', B'$  и  $C'$  — вершины треугольника  $T_2$  (причем  $A'$  — середина дуги  $BC$ ,  $B'$  — середина дуги  $AC$  и  $C'$  — середина дуги  $AB$ , рис. 2). Прямые  $AA', BB'$  и  $CC'$ , являющиеся биссектрисами углов треугольника  $T_1$ , пересекаются в центре  $O$  вписанной в треугольник  $T_1$  окружности. Пусть  $MN$  — диагональ, соединяющая противоположные вершины  $M$  и  $N$  шестиугольника  $T_1 \cap T_2$  ( $M = [AB] \cap [B'C']$ ,  $N = [BC] \cap [A'B']$ ). Докажем, что  $(MN)$  параллельна  $(AC)$  и проходит через точку  $O$  (из этого будет следовать утверждение задачи). Для этого мы докажем, что отрезки  $OM$  и  $ON$  параллельны  $AC$ . Тогда  $[OM] \parallel [ON] \parallel (AC)$ , откуда следует, что точки  $M, O$  и  $N$  лежат на одной прямой, параллельной  $(AC)$ . Итак, нужно доказать, что  $[OM] \parallel (AC)$  (доказательство параллельности  $[ON]$  и  $(AC)$  аналогично). Пусть  $K = [OA] \cap [B'C']$ . Заметим, что угол  $C'KA'$  опирается на дуги, величины которых в сумме составляют  $180^\circ$  (почему?), и, следовательно, прямой. Таким образом,  $[B'K]$  в треугольнике  $OB'A$  является одновременно биссектрисой и высотой. Следовательно,  $[B'C']$  — серединный перпендикуляр к отрезку  $AO$ ; поэтому  $[AM] = [OM]$  и  $\widehat{OAM} = \widehat{AOM}$ . Но  $\widehat{OAM} = \widehat{OAC}$  и, значит,  $\widehat{AOM} = \widehat{OAC}$ . А это и означает, что отрезок  $OM$  параллелен стороне  $AC$ , что и требовалось доказать.

Н. Нецветаев

**M453.** Дано множество положительных чисел  $\{a_1; a_2; \dots, \dots, a_n\}$ . Для каждого его подмножества выпишем сумму входящих в него чисел (рассматриваются суммы из одного, двух, ...,  $n$  слагаемых). Докажите, что все выписанные числа можно так разбить на  $n$  групп, чтобы в каждой группе отношение наибольшего числа к наименьшему не превосходило 2.

Достаточно указать  $n$  отрезков вида  $[b_i, 2b_i]$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), объединение которых содержит все суммы некоторых из данных  $n$  чисел: тогда суммы, принадлежащие каждому отрезку, образуют группу чисел, удовлетворяющих нужному условию.

Эти отрезки можно строить по-разному. Приведем самый красивый способ (его указал Д. Бернштейн).

Запишем данные числа в порядке возрастания:  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ , положим  $b_i = (a_1 + a_2 + \dots + a_i)/2$  и докажем, что каждая сумма некоторых из чисел  $a_i$  попадает в один из отрезков  $[b_i, 2b_i]$ .

Ясно, что наименьшая «сумма»  $a_1 \in [b_1, 2b_1]$ , так как  $2b_1 = a_1$ , а наибольшая —  $(a_1 + \dots + a_n) \in [b_n, 2b_n]$ , так как  $2b_n = a_1 + \dots + a_n$ . Осталось доказать, что невозможен случай, когда некоторая сумма  $s$  лежит между  $2b_k$  и  $b_{k+1}$ . Пусть

$$s > 2b_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k. \tag{1}$$

Тогда  $s$  содержит некоторое  $a_i \geq a_{k+1}$ , то есть

$$s \geq a_{k+1}. \tag{2}$$

Сложив (1) и (2), получим  $2s \geq a_1 + \dots + a_k + a_{k+1}$ , то есть  $s \geq b_{k+1}$ . Значит,  $s$  не может лежать между  $2b_k$  и  $b_{k+1}$ .

**M454.** За круглым столом сидят 7 гномов. Перед каждым стоит кружка. В некоторые из этих кружек налито молоко. Один из гномов разливает все свое молоко в кружки остальных гномов. Затем его сосед справа делает то же самое. Затем то же самое делает следующий сосед справа и так далее. После того как последний, седьмой, гном разлил всем остальным свое молоко, в каждой кружке оказалось столько же молока, сколько было в ней вначале. Во всех кружках вместе молока 3 литра. Сколько молока было первоначально в каждой кружке?

Ответ изображен на рисунке 3. Проверим его. После того как гном, помеченный красной точкой, разольет свое молоко поровну остальным (по  $1/7$  л), вновь получится (со сдвигом на одного гнома) точно такое же распределение молока; при этом  $6/7$  л молока будет у того гнома, чья очередь разливать молоко. Ясно, что после семи переливаний мы вернемся к первоначальному распределению.

Покажем теперь, как можно было догадаться я до ответа, и докажем его единственность. Заметим, что в условиях задачи процесс переливаний по кругу можно считать периодически продолженным; поэтому все гномы совершенно равноправны.

Естественно сначала искать такое распределение молока, которое повторится (со сдвигом на одного гнома) уже после одного переливания. При этом каждый следующий гном будет разливать то же самое количество молока, что и предыдущий, — скажем,  $bx$  литров (каждому гному наливается по  $x$  литров). Тогда после очередного переливания у разливавшего будет 0 литров молока, у его соседа (разливавшего перед ним) —  $x$ , у следующего (у него до этого было  $x$ ) —  $2x$ , ..., у последнего, седьмого, гнома —  $6x$  литров. Из уравнения  $x + 2x + \dots + 6x = 3$  найдем  $x = 1/7$  и получим указанный выше ответ.

Нужно, однако, еще выяснить, не может ли быть так, что гномы разливают разное количество молока (и исходное распределение восстанавливается лишь через семь переливаний). Пусть  $k$ -й гном разливает  $bx_k$  литров молока (каждому по  $x_k$  литров). Поскольку гномы равноправны, можно считать, что  $x_1 \geq x_k$  для всех  $k = 1, 2, \dots, 7$ . После семи переливаний у 1-го гнома, разливавшего  $bx_1$  литров молока, снова должно набраться  $bx_1$  литров, поэтому  $bx_1 = x_2 + x_3 + \dots + x_7 + x_1$ . Это возможно лишь тогда, когда  $x_1 = x_2 = \dots = x_7$ . Таким образом, мы приходим к уже разобранному случаю, когда все гномы разливают одинаковое количество молока. Значит, других ответов нет.

Заметим, что из общих теорем линейной алгебры, которые лежат в основе теории марковских цепей, следует не только единственность ответа в этой задаче, но и такой любопытный факт: как бы не были первоначально налиты 3 литра молока, его распределение будет стремиться (с ростом количества переливаний) к указанному в ответе распределению (0,  $1/7$ ,  $2/7$ , ...,  $5/7$ , у разливавшего —  $6/7$  литра). Об этих теоремах мы постараемся рассказать в одном из следующих номеров «Кванта».

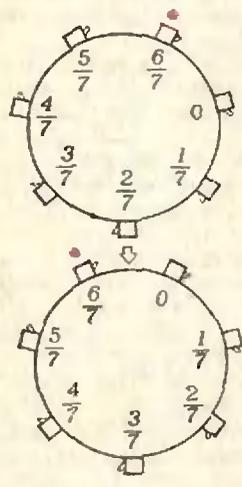


Рис. 3.

Н. Васильев

**Ф467.** Луна одновременно фотографируется с одной и той же стороны с Земли и со спутника Луны. Орбита спутника круговая. Диаметр изображения Луны на фотографии, полученной на Земле, равен 4 мм, а на спутнике Луны — 250 мм. Найти период обращения спутника Луны по его орбите, если оба снимка сделаны с помощью одинаковых объективов с фокусным расстоянием 500 мм. Принять, что ускорение свободного падения на Луне в 6 раз меньше, чем на Земле, и расстояние от Земли до Луны равно 380 000 км.

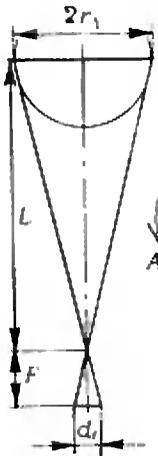


Рис. 4.

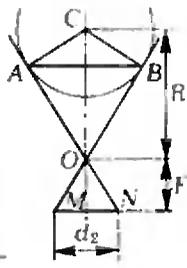


Рис. 5.

На спутник Луны, движущийся по круговой орбите радиуса  $R$ , действует со стороны Луны сила притяжения, равная

$$F = \gamma \frac{M_{\text{Л}} m}{R^2} \quad (m \text{ — масса спутника, } M_{\text{Л}} \text{ — масса Луны)}$$

Учитывая, что ускорение свободного падения на Луне  $g_{\text{Л}} = \gamma \frac{M_{\text{Л}}}{r_{\text{Л}}^2}$  ( $r_{\text{Л}}$  — радиус Луны), можем записать

$$F = m g_{\text{Л}} \left( \frac{r_{\text{Л}}}{R} \right)^2.$$

Эта сила сообщает спутнику центростремительное ускорение

$$|\vec{a}| = \omega^2 R = \frac{4\pi^2 R}{T^2}, \quad \text{где } \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ — угловая скорость вращения спутника, } T \text{ — период обращения его по орбите.}$$

Итак,  $|\vec{F}| = m|\vec{a}|$ , то есть

$$m g_{\text{Л}} \left( \frac{r_{\text{Л}}}{R} \right)^2 = m \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

Отсюда

$$T = 2\pi \frac{R}{r_{\text{Л}}} \sqrt{\frac{R}{g_{\text{Л}}}}. \quad (*)$$

В эту формулу входят две неизвестные величины —  $R$  и  $r_{\text{Л}}$ . Найдем их, «воспользовавшись» фотографиями Луны, полученными с Земли и со спутника. Изображение Луны получается в фокальной плоскости объектива. Луна находится от Земли на расстоянии, много большем ее диаметра. Поэтому можно считать, что при фотографировании с Земли (рис. 4)

$$\frac{d_1}{2r_{\text{Л}}} = \frac{F}{L}, \quad r_{\text{Л}} = \frac{d_1 L}{2F}$$

( $d_1$  — диаметр изображения,  $L$  — расстояние Земля — Луна,  $F$  — фокусное расстояние линзы).

При фотографировании со спутника (рис. 5) на пленке получается изображение части поверхности Луны, ограниченной касательными  $OA$  и  $OB$ . Из подобия треугольников  $OMN$  и  $OCB$  имеем

$$\frac{BC}{MN} = \frac{R}{ON} \Rightarrow \frac{2r_{\text{Л}}}{d_2} = \frac{R}{a},$$

где  $a = \sqrt{F^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}$ . Отсюда

$$R = \frac{2r_{\text{Л}}}{d_2} a = \frac{d_1 L}{d_2 F} a.$$

Подставив найденные выражения для  $r_{\text{Л}}$  и  $R$  в (\*), получим

$$T = 4\pi \frac{a}{d_2} \sqrt{\frac{d_1 L}{g_{\text{Л}} d_2 F} a} \approx 6,23 \cdot 10^4 \text{ с}$$

И. Слободецкий

**Ф468.** Действующая модель подъемного крана способна поднять 10 бетонных плит без обрыва троса. Сколько плит поднимает реальный кран, изготовленный из тех

Максимальная нагрузка, которую выдерживает трос крана, определяется пределом прочности материала троса — максимальным напряжением, при котором материал еще не разрушается

Предположим, что вес модельной плиты —  $q$ , площадь поперечного сечения троса —  $s$ . Напряжение, возникающее

же материалов, если линейные размеры крана, троса и плит в 12 раз больше, чем в модели?

при нагрузке в одну плиту, равно  $\sigma = \frac{q}{s}$ . Согласно данным задачи предел прочности материала троса определяется условием

$$\frac{10q}{s} < \sigma_0 < \frac{11q}{s} \quad (1)$$

(условие того, что край-модель поднимает 10 плит, а нагрузку в 11 плит трос не выдерживает).

При переходе к реальным крану и плитам все линейные размеры увеличиваются в  $n = 12$  раз. Значит, вес плиты увеличивается в  $n^3$  раз, поперечное сечение троса увеличивается в  $n^2$  раз:

$$Q = n^3 q, \quad S = n^2 s \quad (2)$$

(так как плотность соответствующих материалов не меняется). Максимальное число плит, которые может поднять реальный кран, определяется условием

$$\sigma_0 > N \frac{Q}{S} = N \frac{n^3 q}{n^2 s} = N n \frac{q}{s}, \quad (3)$$

откуда

$$N < \frac{\sigma_0}{12 \frac{q}{s}}.$$

Но из соотношения (1) следует, что

$$\frac{\sigma_0}{11 \frac{q}{s}} < 1.$$

Следовательно,

$$N < \frac{\sigma_0}{12 \frac{q}{s}} < \frac{\sigma_0}{11 \frac{q}{s}} < 1,$$

то есть реальный кран не сможет поднять ни одной плиты.

С. Кротов



**Ф469.** Рисунок 6 сделан со стробоскопической фотографии кубика, движущегося вдоль наклонной плоскости. Промежутки времени между последовательными вспышками лампы равны 0,1 с. Определить коэффициент трения кубика о плоскость.

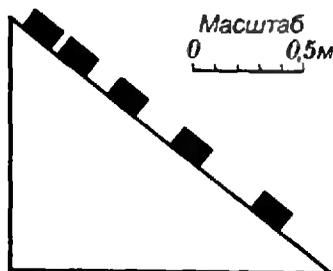


Рис. 6.

Прежде всего определим значение ускорения, с которым движется кубик. Как известно, разность расстояний  $l_1$  и  $l_2$ , проходимых телом за последовательные равные промежутки времени  $\tau$ , равна  $l_2 - l_1 = |a| \tau^2$ , где  $\vec{a}$  — ускорение, с которым движется тело. Определив по рисунку с помощью мерной линейки и заданного масштаба  $l_2 - l_1$ , найдем

$$|\vec{a}| = \frac{l_2 - l_1}{\tau^2} \approx \frac{0,07}{(0,1)^2} \text{ м/с}^2 = 7 \text{ м/с}^2.$$

Определим теперь, в каком направлении (вверх или вниз по наклонной плоскости) движется кубик. Максимальное ускорение, с которым может свободно соскальзывать кубик, — это ускорение, сообщаемое ему силой тяжести в направлении оси  $X$  (рис. 7) в отсутствие силы трения:  $|\vec{a}_{\max}| = |g| \sin \alpha$ . Из рисунка находим  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ , так что

$$|\vec{a}_{\max}| = |g| \frac{3}{5} \approx 6 \text{ м/с}^2.$$

Мы же нашли, что  $|\vec{a}| = 7 \text{ м/с}^2$ . Значит, кубик движется вверх по наклонной плоскости, а ускорение вдоль оси  $X$  ему сообщают сила тяжести (ее проекция на ось  $X$ ) и сила трения, направленная вниз вдоль наклонной плоскости.

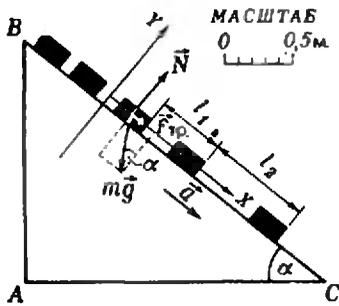


Рис. 7.

Запишем уравнение движения кубика в проекции на ось X

$$ma_x = m|\vec{a}| = m|\vec{g}| \sin \alpha + f_x.$$

Здесь  $f_x = |\vec{F}_{тр}| = k|\vec{N}| = km|\vec{g}| \cos \alpha$  — сила трения. Так что

$$|\vec{a}| = |\vec{g}| \sin \alpha + k|\vec{g}| \cos \alpha,$$

откуда

$$k = \frac{|\vec{a}| - |\vec{g}| \sin \alpha}{|\vec{g}| \cos \alpha}.$$

Воспользовавшись рисунком, найдем  $\sin \alpha = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{3}{5}$ .

$$\cos \alpha = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{4}{5}; \text{ так что}$$

$$k = \frac{7-6}{9,8 \cdot \frac{4}{5}} \approx 0,13.$$

И. Слободецкий



**Ф470.** При подключении гальванического элемента напряжением 1,5 В к зажимам А и В амперметр показал ток 1 А (рис. 8). Когда полярность элемента изменили на противоположную, ток упал в два раза. Какая электрическая цепь находится внутри коробки?

Рассмотрим два возможных случая: первый — ток упал в два раза, направление тока осталось прежним; второй — ток упал в два раза, и направление тока изменилось на противоположное.

В первом случае ясно, что в коробке должна быть батарейка (без этого направление тока при переключении должно стать противоположным). Простейшая возможная схема в этом случае — батарейка с э. д. с.  $\mathcal{E}_x$  и последовательно с ней сопротивление  $R_x$  (рис. 9). Тогда имеем:

$$\frac{\mathcal{E}_x + 1,5}{R_x} = 1 \text{ (А)}; \quad \frac{\mathcal{E}_x - 1,5}{R_x} = 0,5 \text{ (А)}.$$

Отсюда

$$\mathcal{E}_x = 4,5 \text{ В}, \quad R_x = 6 \text{ Ом}.$$

В  $R_x$  может входить и внутреннее сопротивление батарейки.

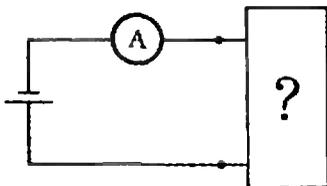


Рис. 8.

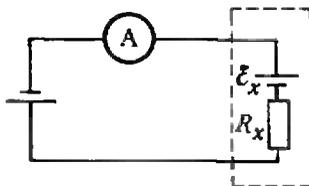


Рис. 9.

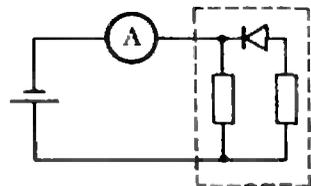


Рис. 10.

Второй случай существенно «богаче» возможными схемами. Кроме батарейки с резистором (в этом случае  $\mathcal{E}_x = 0,5 \text{ В}$ ,  $R_x = 2 \text{ Ом}$ ), возможны схемы с нелинейными устройствами — диодами, транзисторами, реле и т. д.

Одна из простейших схем приведена на рисунке 10. При одной полярности приложенного ко входу напряжения диод открыт; сопротивление коробки составляет 1,5 Ом. При изменении полярности диод закрыт, и сопротивление коробки равно 3 Ом.

А. Зильберман

**Ф471.** Теплоизолированная полость небольшими одинаковыми отверстиями соединена с двумя объемами, содержащими газообразный гелий (рис. 11). Давление гелия в этих объемах поддерживается постоянным и равным  $p$ , а температуры поддерживаются равными  $T$  в одном из объемов и  $2T$  в другом. Найти установившееся давление и температуру внутри полости.

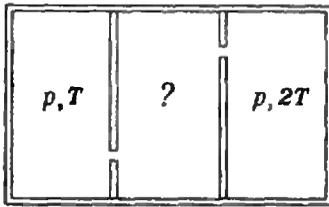


Рис. 11.

В состоянии равновесия число частиц, находящихся в полости, должно, очевидно, оставаться постоянным. Это означает, что число частиц, попадающих в полость из объемов I и II, должно быть равно числу частиц, выходящих из полости.

Число частиц, попадающих в полость из объема I за единицу времени, прямо пропорционально плотности  $n_I$  частиц в объеме I и средней квадратичной скорости  $\bar{v}_{квI}$  частиц в этом объеме (поскольку проекция скорости на любое заданное направление пропорциональна средней квадратичной скорости):  $N_I \sim n_I \bar{v}_{квI}$ . Величина  $n_I$  прямо пропорциональна давлению  $p$  в объеме I и обратно пропорциональна значению  $\bar{v}^2$ :  $n_I \sim \frac{p}{\bar{v}_I^2}$ . В свою очередь  $\bar{v}_I^2 \sim T$ ,

$\bar{v}_{квI} \sim T^{1/2}$ . Таким образом,

$$N_I = \alpha p T^{-1/2},$$

где  $\alpha$  — коэффициент пропорциональности. Аналогично для числа частиц, попадающих в полость за единицу времени из объема II, можем записать

$$N_{II} = \alpha p (2T)^{-1/2}.$$

Число частиц, покидающих полость за единицу времени через два отверстия, равно

$$N = 2\alpha p_{II} T_{II}^{-1/2},$$

где  $p_{II}$ ,  $T_{II}$  — соответственно давление и температура в полости. В состоянии равновесия выполняется условие  $N_I + N_{II} = N$ , то есть

$$\alpha p T^{-1/2} + \alpha p (2T)^{-1/2} = 2\alpha p_{II} T_{II}^{-1/2},$$

или

$$p T^{-1/2} + p (2T)^{-1/2} = 2p_{II} T_{II}^{-1/2}. \tag{1}$$

В состоянии равновесия не меняется со временем и полная энергия частиц в полости. Это означает, что энергия, приносимая в полость за единицу времени  $N_I$  и  $N_{II}$  частицами, равна энергии, уносимой  $N$  частицами, покидающими полость:  $E_I + E_{II} = E$ . Поскольку средняя энергия  $E_{ср}$ , приходящаяся на одну частицу, прямо пропорциональна температуре, то  $E_I = N E_{срI} \sim p T^{-1/2}$ ,  $T = \beta p T^{1/2}$ ,  $E_{II} = \beta p (2T)^{1/2}$ ,  $E = 2\beta p_{II} T_{II}^{1/2}$ , где  $\beta$  — коэффициент пропорциональности. Таким образом,

$$\beta p T^{1/2} + \beta p (2T)^{1/2} = 2\beta p_{II} T_{II}^{1/2},$$

или

$$p T^{1/2} + p (2T)^{1/2} = 2p_{II} T_{II}^{1/2}. \tag{2}$$

Решив совместно уравнения (1) и (2), найдем

$$T_{II} = T\sqrt{2}, \quad p_{II} = p \frac{\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2}}.$$

И. Слободецкий

В. Дубровский

## В поисках определения площади поверхности

Определение площади поверхности является одной из традиционно сложных тем школьной геометрии. Связано это с отсутствием достаточно простого общего определения, которое охватывало бы по крайней мере все поверхности, изучаемые в школе: цилиндр, конус и сферу. В заметке рассматриваются два подхода к такому определению и обсуждаются трудности, возникающие при этих подходах.

### Все ли можно развернуть?

Проще всего определить и вычислить площади поверхностей цилиндра и конуса — достаточно рассмотреть развертки этих поверхностей (см. «Геометрию 8», п. 127, 128). Однако определение площади поверхности как площади ее развертки не годится в качестве общего определения просто потому, что поверхностей, которые можно было бы «развернуть», слишком мало. Мы объясним, почему нель-

зя «развернуть» сферу; аналогичные рассуждения применимы и ко многим другим поверхностям вращения.

Давать точное определение развертки — дело довольно хлопотливое. Ясно, однако, что если бы удалось «развернуть» сферу, то, в частности, мы получили бы отображение  $f$  какой-то достаточно маленькой «сферической шапочки» на часть плоскости (рис. 1), при котором длина любой кривой  $L$ , лежащей на этой «шапочке», равнялась бы длине соответствующей ей кривой  $f(L)$  на плоскости. В частности, длина  $d(A, B)$  кратчайшей кривой, соединяющей точки  $A$  и  $B$  на сфере, должна равняться длине кратчайшей кривой, соединяющей точки  $A' = f(A)$  и  $B' = f(B)$  на плоскости, то есть длине отрезка  $A'B'$ :

$$d(A, B) = |A'B'|.$$

Можно доказать, что  $d(A, B)$  есть длина меньшей из двух дуг большой окружности, проходящей через точки  $A$  и  $B$ , определяемых этими точками, однако нам это не потребуется.

Рассмотрим множество  $S$  точек  $M$  сферы, для которых «сферическое расстояние»  $d(M, P)$  от некоторой фиксированной точки  $P$  равно фиксированному числу  $R > 0$ . Очевидно, что если точка  $M_1$  получается из точки  $M$  поворотом около диаметра сферы, проходящего через  $P$ , то  $d(M_1, P) = d(M, P)$ . Отсюда легко вывести (выведите!), что множество  $S$  есть окружность. Ее центр  $O$  совпадает с основанием перпендикуляра, опу-

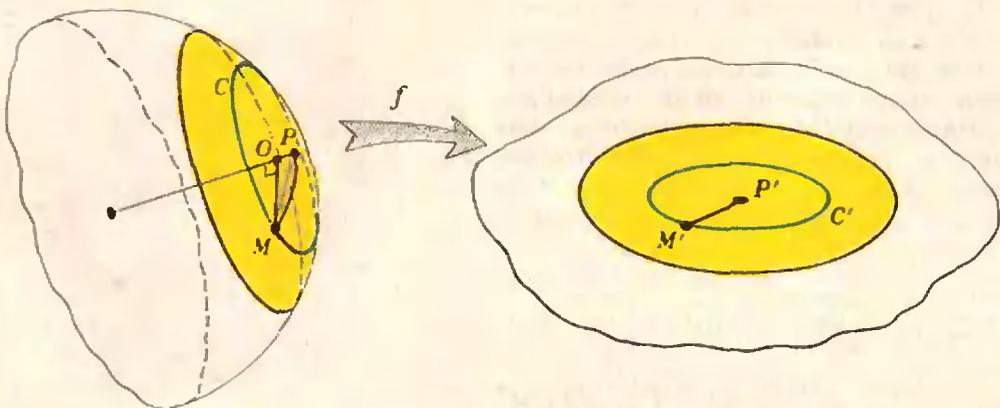


Рис. 1. Невозможность развертки сферы.

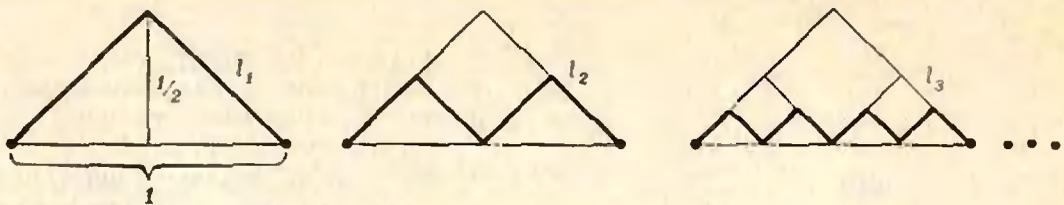


Рис. 2. Последовательность ломаных  $l_n$  сходящихся к отрезку единичной длины (но не вписанных в него), длина каждой из которых равна  $\sqrt{2}$ .

щенного из любой точки  $M \in C$  на радиус сферы, проходящей через точку  $P$  (рис. 1); поэтому радиус этой окружности  $r = |OM| < |MP|$ . С другой стороны,  $d(M, P)$  есть длина некоторой кривой, соединяющей  $M$  и  $P$ , а отрезок  $MP$  является кратчайшей из таких кривых; поэтому  $|MP| \leq d(M, P) = R$ . Следовательно,  $r < R$ . При развертке окружность  $C$  перейдет в множество  $C' = f(C)$  точек, удаленных от точки  $f(P)$  на расстояние  $R$ , то есть в окружность радиуса  $R$ . Длина окружности  $C$  равна  $2\pi r$ , а окружности  $C' = 2\pi R > 2\pi r$ . Это противоречит сформулированному выше свойству сохранения длин, и, таким образом, развертка сферы невозможна.

### Сапог Шварца

Итак, развернуть поверхность, вообще говоря, невозможно; попытаемся поступить по-другому. Рассмотрим последовательность многогранных поверхностей  $\Pi_n$ , «сходящуюся» к данной поверхности  $\Pi$ . Допустим, что последовательность их площадей  $S_n$  имеет предел  $S$ ; тогда кажется естественным принять число  $S$  за площадь поверхности  $\Pi$  (\*). Конечно, при этом нужно проявить осторожность, — ведь даже при определении длины кривой рассматривают не произволь-

ные, а *вписанные* ломаные (они соответствуют многогранным поверхностям), сходящиеся к кривой, иначе предел их длин будет зависеть от выбора последовательности ломаных (см. рисунок 2 и задачу 3). Попробуем найти площадь поверхности цилиндра как предел площадей вписанных в него многогранных поверхностей. Поверхности эти определим следующим образом.

Впишем в основание цилиндра правильный  $n$ -угольник; рассмотрим далее такой же  $n$ -угольник, расположенный над основанием на высоте  $\frac{H}{k}$ , где  $H$  — высота цилиндра,  $k$  — фиксированное натуральное число, и повернутый относительно первого  $n$ -угольника на угол  $\frac{\pi}{n}$ .

Продолжая такое построение, получим  $(k+1) \cdot n$  точек — вершин  $n$ -угольников: соединим эти вершины ребрами, как показано на рисунке 3. В итоге образуется вписанная в цилиндр многогранная поверхность  $\Pi(n, k)$ , имеющая  $nk$  конгруэнтных треугольных граней. Задавая различные по-



Рис. 3. «Сапог Шварца» ( $\Pi(6, 4)$ ).

\* Именно такой подход применялся в старом учебнике геометрии А. П. Киселева при определении площади поверхности цилиндра и конуса.

следовательности  $\{k_n\}$ , например.

$$k_n \equiv 1, k_n = n, k_n = n^{10}$$

и т. д., мы будем получать различные последовательности поверхностей  $\Pi(n, k_n)$ , причем все они «сходятся» к поверхности цилиндра (очевидно, что зазор между исходным цилиндром и цилиндром, касающимся «горизонтальных» ребер поверхности  $\Pi(n, k_n)$ , с ростом  $n$  делается сколь угодно малым; в то же время  $\Pi(n, k_n)$  находится в этом зазоре). Найдём предел площадей  $S(n, k_n)$  поверхностей  $\Pi(n, k_n)$ . Пусть  $s(n, k)$  — площадь одной грани поверхности  $\Pi(n, k)$ , тогда (см. рис. 4)  $s(n, k) = |AH| \cdot |CH|$ . Если радиус основания цилиндра  $R$ , то  $|AH| = |OA| \sin \frac{\pi}{n} = R \sin \frac{\pi}{n}$ ; далее,  $|CH| =$

$$= \sqrt{|HD|^2 + |CD|^2},$$

$$|HD| = R \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right), |CD| = \frac{H}{k}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} s(n, k) &= \\ &= R \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{H^2}{k^2} + R^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2} = \\ &= RH \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{1}{k^2} + 4 \frac{R^2}{H^2} \left(\sin \frac{\pi}{2n}\right)^4}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} S(n, k) &= 2\pi RH \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \times \\ &\times \sqrt{1 + \frac{R^2 \pi^4}{4H^2} \frac{k^2}{n^4} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^4}. \end{aligned}$$

Пользуясь тем, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , можно легко найти  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S(n, k_n)$  для различных последовательностей  $k_n$ . В частности, при  $k_n \equiv 1$  (и вообще, при  $k_n = \text{const}$ )  $S = 2\pi RH$  (правильный ответ!). Такой же ответ получается и при  $k_n = n$ . Но дальше нас ждет разочарование: при  $k_n = n^2$  предел будет уже другим, а при  $k_n = n^3$  последовательность  $S(n, k_n)$  и вовсе неограничена (см. также задачу 4).

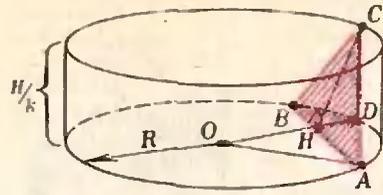


Рис. 4. Одна грань «сапога Шварца».

Причина в том, что при слишком быстром росте  $k_n$  грани поверхностей  $\Pi(n, k_n)$  располагаются под большим углом к поверхности цилиндра,  $\Pi(n, k_n)$  «собирается в гармошку»: ясно, что за счет таких складок площадь поверхности сильно увеличивается.

Описанная конструкция была предложена в 1890 году известным немецким математиком Г. А. Шварцем; ее называют «сапогом Шварца». Из этой конструкции видно, что понятие «сходимости» последовательности  $\Pi_n$  к  $\Pi$  в нашем определении площади поверхности следует уточнить — так, чтобы учитывались не только расстояния между точками поверхностей  $\Pi_n$  и  $\Pi$ , но и углы между гранями поверхностей  $\Pi_n$  и поверхностью  $\Pi$ . С этими уточнениями определение становится сложным, громоздким и, конечно, неуместным в школьном курсе.

### Как же быть?

И все-таки можно дать общее определение площади поверхности, гораздо более простое, чем определение через вписанные многогранники. С его вариантами (для сферы, цилиндра, конуса) можно познакомиться в «Геометрии 10» (с. 63, 127). Подробнее об этом определении (его предложил один из крупнейших немецких математиков Г. Минковский) мы расскажем в другой раз.

### Задачи

1. Докажите, что, хотя и не существует развертки сферы, можно построить а) отображение полусферы на плоскость, переводящее кратчайшие линии на сфере в кратчайшие линии на плоскости; б) отображение сферы на плоскость, сохраняющее площадь.
2. Объясните, почему приведенное в тексте доказательство невозможности разверт-

ки сферы не проходит для конуса. Докажите, что нельзя развернуть параболоид — поверхность, полученную при вращении параболы около ее оси. (Обратите внимание: прежде, чем поверхность разворачивать, ее можно разрезать.)

3. Приведите примеры последовательностей функций  $f_n(x)$  ( $x \in [0, 1]$ ), графиками которых являлись бы ломаные длины  $l_n$ , причем  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$  для всех  $x \in [0, 1]$ .

и в то же время  
а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = c$ , где  $c$  — любое заданное

число, не меньшее 1;  
б) последовательность  $\{l_n\}$  неограничена;  
в) последовательность  $\{l_n\}$  ограничена, но не имеет предела.

4. Докажите, что в примере Шварца можно так подобрать последовательность  $\{k_n\}$ , что последовательность площадей  $\{S(n, k_n)\}$   
а) сходится к любому заданному числу из промежутка  $[2\pi RH, \infty[$ ;  
б) ограничена, но не имеет предела.

5. Предлагается следующий способ вычисления площади поверхности сферы. Разобьем сферу «экватором» на две полушеры и рассмотрим одну из них. Поделим экватор на  $n$  конгруэнтных частей точками  $A_1, A_2, \dots, A_n$  и соединим их с «полюсом»  $P$  «меридианами». Теперь представим себе, что правильный  $n$ -угольник  $A_1 \dots A_n$  поднимается над экваторальной плоскостью, оставаясь ей параллельным и сжимаясь к точке  $P$  так, что его вершины все время лежат на дугах  $A_iP$ . Его контур при этом

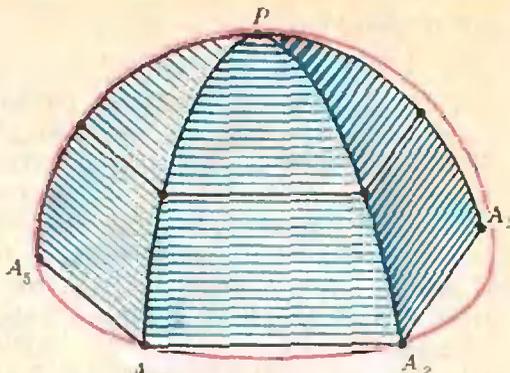


Рис. 5. Поверхность  $P_n$ .

замечает некоторую куполообразную поверхность  $P_n$  (рис. 5). Ясно, что поверхность  $P_n$  при больших  $n$  очень близка к полусфере; более того, нетрудно доказать (попробуйте), что ее площадь при  $n \rightarrow \infty$  стремится к площади полусферы. Разогнув дольки  $A_i A_{i+1} P$ , мы получим  $n$  треугольников с одинаковыми основаниями, сумма длин которых равна периметру  $p_n$   $n$ -угольника  $A_1 \dots A_n$ , и высотами  $h_n$ . Поскольку, очевидно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 2\pi R$ , где  $R$  — радиус сферы, а

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \frac{1}{2} \pi R,$$

то предел площадей поверхностей  $P_n$  равен  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} p_n h_n = \frac{1}{2} \pi^2 R^2$ . Следовательно, площадь сферы равна  $2\pi^2 R^2$ . Где ошибка?

### Задачи наших читателей

1. Куб с ребром 1 м разбит на конечное число (больше трех) выпуклых многогранников. Каждый многогранник отмечен одной из цифр: 1, 2, 3. Докажите, что найдутся две точки различных многогранников, помеченных одной цифрой, расстояние между которыми не

менее  $\sqrt{2 \frac{1}{64}}$  м. Можно

ли усилить эту оценку?  
В. Макеев (ученик 10 кл.)

2. Докажите, что уравнение  $x^2 - 2xy = 1978$  не имеет решений в целых числах.

С. Майзус

3. Из картона вырезали равнобедренную трапецию, у которой угол между диагоналями равен  $\varphi$ . К каким вершинам ближе ее центр тяжести — к вершинам меньшего основания или большего?  
С. Берколайко

4. Король находится на нижнем крайнем левом черном поле шахматной доски. Он может перемещаться только по диагонали. Какое наибольшее число черных полей он может обойти, если на каждом поле он может бывать не более одного раза? Рассмотрите случаи, когда размеры шахматного поля 1)  $9 \times 9$ ; 2)  $(2n-1) \times (2n-1)$ ; 3)  $8 \times 8$ ; 4)  $2n \times 2n$ .  
Ф. Бартеков

5. Вычислите

$$\sum_{n=1}^k \frac{2^n}{a^{2^n} - 1}$$

С. Манукян

6. Две точки  $A$  и  $B$  движутся так, что их скорости все время сонаправлены и скорость точки  $B$  меньше скорости точки  $A$ . Может ли расстояние  $AB$  между точками оставаться постоянным?

7. Когда два разных аккумулятора соединили параллельно и замкнули на лампочку, лампочка горела слабо. Когда в ту же цепь последовательно с каждым аккумулятором включили некоторое сопротивление, лампочка стала гореть ярче. Почему?  
Б. Коган

8. Бревно длиной 1 и массой  $m$  поднимают из горизонтального положения в вертикальное один раз за толстый конец, а другой раз — за тонкий. Разница в совершаемых работах составляет  $A$ . Определите положение центра тяжести бревна.  
В. Никитин

«Квант» для младших школьников

## Задачи

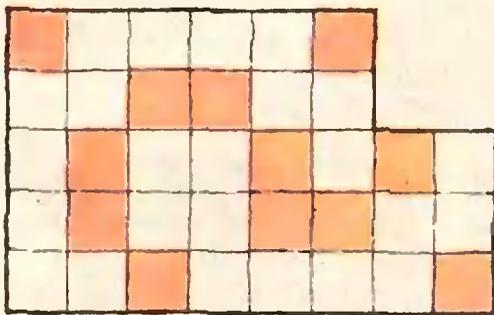
1. Десять человек пришли в гости в галошах. Уходили они по одному, и каждый надевал произвольную пару галош, в которую он мог влезть (то есть не меньшего размера, чем его собственная). Какое наибольшее число людей не смогло надеть галоши?

2. Разрезав фигуру, изображенную на рисунке, на две части, сложите из них квадрат так, чтобы цветные квадратики были симметричны относительно всех осей симметрии квадрата.

3. У четырех людей, родившихся в разные годы XX века, суммы цифр возрастов одинаковы, а сумма всех четырех возрастов — точный куб. Сколько лет старшему из этих людей?

4. Докажите, что если в параллелограмме  $ABCD$  сумма углов  $ABD$  и  $BCA$  равна  $90^\circ$ , то этот параллелограмм — либо ромб, либо прямоугольник.

5. Какое трехзначное число равно кубу числа, записываемого последней цифрой, и одновременно квадрату числа, записываемого второй и первой цифрой?



3





Если вы утверждаете, что сила трения направлена против движения, то в этом утверждении все правильно. Например, на соскальзывающие с горы санки действует сила трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$ , направленная в сторону, противоположную скорости санок (рис. 1). Но очень часто сила трения преподносит неожиданные сюрпризы. Вот несколько примеров.

Человек идет по ровному месту, скорость человека направлена вправо. Куда направлена сила трения? Правильный ответ — тоже вправо, то есть в сторону движения человека, а не в противоположную (рис. 2). Впрочем, разберем подробнее этот случай. Когда человек, делая шаг, отталкивается ногой от земли, подошва ботинка «стремится» двигаться назад, в сторо-

ну, противоположную движению человека. А сила трения, действующая со стороны земли на подошву, направлена против движения подошвы, то есть вправо, как и показано на рисунке 2. Движение подошвы относительно земли играет главную роль — против него и действует сила трения.

Если трение достаточно для того, чтобы человек шел без проскальзывания, то во время толчка нога перемещаться не будет. В этом случае сила трения — это сила трения покоя. Если же человек толкается достаточно сильно или трение мало, начнется проскальзывание: подошва движется назад, голова остается на месте, равновесие нарушается, человек падает. Попробуйте быстро идти по гладкому льду!



Рис. 1.



Рис. 2.

Однако процесс ходьбы состоит не только из одних толчков. Толчок — это первый этап, кроме него есть и другое характерное движение: «отставшая» нога выносится вперед и становится на землю. В этом случае сила трения направлена уже против движения человека.

Таким образом, при ходьбе направление силы трения все время изменяется.

То же самое бывает и при беге на лыжах: когда лыжник толкается палками и лыжами (рис. 3, а), направление силы трения одно, а при дальнейшем движении по инерции (рис. 3, б) — другое. Очевидно, для бега на лыжах выгодно, чтобы при свободном скольжении сила трения была минимальна, а при толчке не должно быть проскальзывания, то есть сила трения должна быть как можно большей.

Этого можно достигнуть, например, приклеив на лыжи мех таким образом, чтобы ворс был направлен от носка лыжи к ее концу. Такими лыжами действительно пользуются на Севере.

Посмотрим теперь, как направлена сила трения, когда человек ходит по горам. Если спуск достаточно крутой, то человек «тормозит» ногами, пытаясь предотвратить скатывание (рис. 4, а): сила трения направлена против скорости человека.

При пологом спуске и при подъеме на гору (рис. 4, б) тормозить не требуется, все происходит аналогично случаю ходьбы по ровной поверхности.

Еще больше неожиданностей таит в себе сила трения при рассмотрении



Рис. 3.

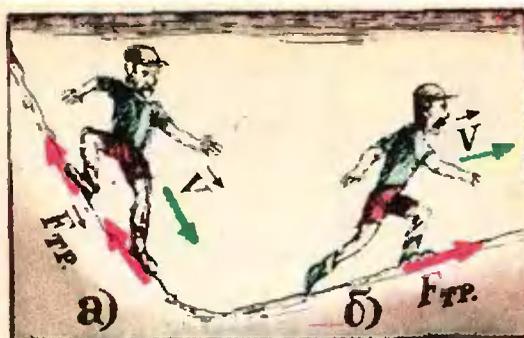


Рис. 4.

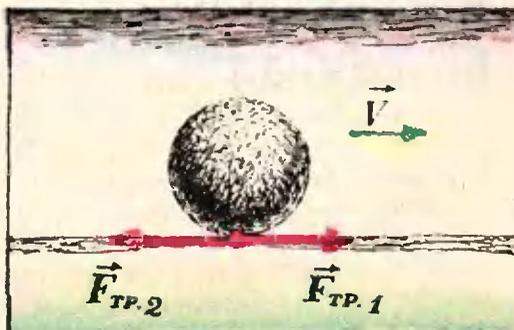


Рис. 5.

катящегося шара (рис. 5). С одной стороны, если проскальзывания нет, то это означает, что трение достаточно, чтобы шар мог «отталкиваться» от земли (на шар действует сила трения  $\vec{F}_{тр1}$ ), причем для шара это «отталкивание» происходит непрерывно.

С другой стороны, катящийся шар замедляет свое движение и в конце концов останавливается. Значит, на шар действует — и тоже непрерывно — еще и сила трения  $\vec{F}_{тр2}$ . Для шара два этапа движения, изображенные на рисунке 3, сливаются в один.

То же самое можно сказать и о колесах движущегося автомобиля, поезда и т. п.

Подумайте, о каких еще неожиданностях в поведении силы трения можно было бы рассказать?



Л. Асламазов

## Напряженность, напряжение, потенциал

Каждая точка электрического поля характеризуется векторной величиной — напряженностью поля. *Напряженность*  $\vec{E}$  поля в данной точке равна силе, действующей на положительный пробный заряд, помещенный в эту точку, и отнесенной к единице заряда. Это — силовая характеристика электрического поля.

При перемещении электрического заряда в поле совершается работа. Электростатическое поле обладает очень важным свойством — потенциалностью: работа по перемещению заряда из одной точки поля в другую не зависит от формы траектории. Это позволяет ввести понятие напряжения (или разности потенциалов). *Напряжение*  $U$  между двумя точками поля\*) равно работе, совершаемой электрическим полем по перемещению единицы положительного заряда из одной точки в другую.

В отличие от напряженности, определенной в отдельно взятой точке, напряжение характеризует две точки поля. Если зафиксировать одну точку, выбрав ее за начало отсчета, то любая точка поля будет иметь определенное напряжение по отношению к выбранной точке. Это на-

пряжение называют *потенциалом*  $\varphi$ . Очевидно, что началу отсчета соответствует нулевой потенциал. Чаще всего нулевой потенциал приписывается точке, бесконечно удаленной от заряда, создающего поле. В этом случае потенциал  $\varphi$  некоторой точки поля равен работе, совершаемой электрическим полем по перемещению единицы положительного заряда из этой точки в бесконечность. Это — энергетическая характеристика электрического поля.

Иногда задавать в каждой точке скалярную величину — потенциал  $\varphi$  — удобнее, чем векторную величину — напряженность  $\vec{E}$ . Естественно, что эти две величины должны быть связаны друг с другом.

Рассмотрим вначале однородное электрическое поле. Его напряженность  $\vec{E}$  одинакова во всех точках; силовые линии такого поля — параллельные прямые (рис. 1). Найдем разность потенциалов между точками  $B$  и  $D$ . Потенциал  $\varphi_B$  точки  $B$  равен работе по перемещению единицы заряда из этой точки в бесконечность. Форма траектории при подсчете работы не имеет значения, поэтому будем перемещать заряд сначала по отрезку  $BC$ , потом по отрезку  $CD$ , а затем из точки  $D$  в бесконечность. Сила, действующая на единицу заряда со стороны электрического поля, равна напряженности. На отрезке  $BC$  работа этой силы равна  $El$ , где  $E$  — проекция вектора напряженности на силовую линию, а  $l$  — длина отрезка  $BC$ . На отрезке  $CD$  сила работы не совершает, так как она перпендикулярна перемещению. Наконец, работа по перемещению единицы заряда из точки  $D$  в бесконечность равна потенциалу  $\varphi_D$ . Поэтому:  $\varphi_B = El + \varphi_D$ , или для разности потенциалов:

$$\varphi_B - \varphi_D = El. \quad (1)$$

Для того чтобы формула (1) дала правильный знак разности потенциалов, величине  $l$  надо приписывать определенный знак в зависимости от расположения точек  $B$  и  $C$  на силовой линии. Будем считать, что  $l$  — это проекция вектора  $\vec{BD}$  на направление силовой линии. Тогда

\*) Под словами «поле», «электрическое поле» здесь и в дальнейшем мы будем понимать электростатическое поле, то есть поле, созданное неподвижными зарядами.

знак положителен, если точка  $C$  лежит «ниже» по силовой линии, чем точка  $B$ , и отрицателен в противоположном случае. Для случая, изображенного на рисунке 1,  $l > 0$ , и разность потенциалов  $\varphi_B - \varphi_D > 0$ , что соответствует убыванию потенциала вдоль силовой линии ( $\varphi_D < \varphi_B$ ).

Итак, в однородном электрическом поле между напряженностью и разностью потенциалов имеется простая связь, даваемая формулой (1).

Какова связь между потенциалом и напряженностью в случае неоднородного электрического поля? В таком поле напряженность  $\vec{E}$  меняется от точки к точке. Пусть, для простоты рассуждений, изменение напряженности происходит только в одном направлении, которое примем за ось  $OX$  (рис. 2). Тогда напряженность поля  $\vec{E}$  зависит только от координаты  $x$ :  $\vec{E} = \vec{E}(x)$ . Ясно, что в небольших участках пространства напряженность меняется мало, и электрическое поле там можно приближенно считать однородным. Возьмем близкие точки  $B$  и  $D$  и найдем разность потенциалов между ними. Воспользуемся формулой (1). Потенциал так же, как и напряженность, зависит только от координаты  $x^*$ ):  $\varphi_B - \varphi_D =$

\* ) Плоскость  $x = \text{const}$  эквипотенциальна, так как при перемещении единицы заряда в этой плоскости электрическое поле работы не совершает.

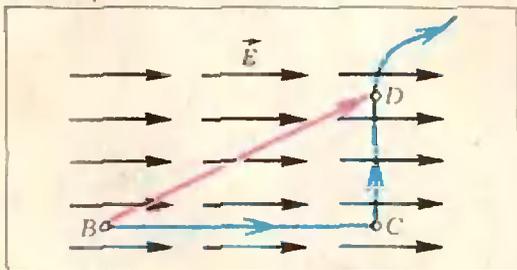


Рис. 1.

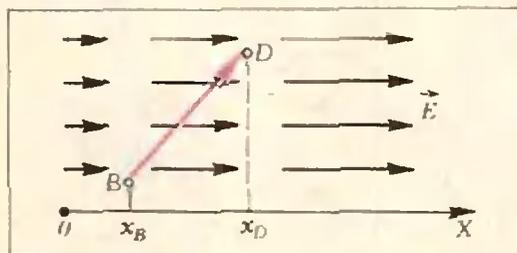


Рис. 2.

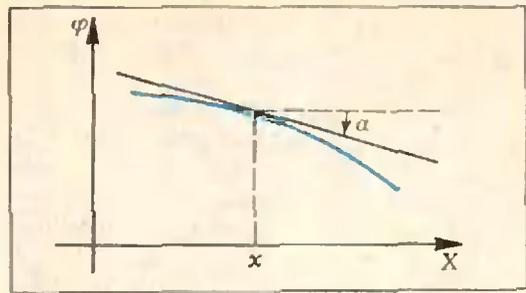


Рис. 3.

$= \varphi(x_B) - \varphi(x_D)$ . Проекция вектора  $\vec{BD}$  на ось  $OX$  равна разности координат точек  $D$  и  $B$ :  $l = x_D - x_B$ . Таким образом, для близких точек  $B$  и  $D$  получаем:

$$\varphi(x_B) - \varphi(x_D) \approx E(x_B) \times (x_D - x_B),$$

или

$$E(x_B) \approx - \frac{\varphi(x_D) - \varphi(x_B)}{x_D - x_B}. \quad (2)$$

Чтобы формула (2) стала точной, надо устремить точку  $B$  к точке  $D$  и найти предел, к которому стремится правая часть при неограниченном сближении точек:

$$E(x_B) = - \lim_{x_D \rightarrow x_B} \frac{\varphi(x_D) - \varphi(x_B)}{x_D - x_B}. \quad (3)$$

Легко увидеть, что правая часть формулы (3) — это производная потенциала, взятая с обратным знаком. Таким образом, в неоднородном электрическом поле связь между потенциалом и напряженностью в каждой точке следующая:

$$E(x) = -\varphi'(x). \quad (4)$$

Знак минус в формуле (4) означает, что потенциал убывает вдоль силовой линии: поскольку проекция напряженности на силовую линию  $E(x) > 0$ ,  $\varphi'(x) < 0$ , что и означает убывание потенциала.

Если нарисовать график зависимости  $\varphi$  от  $x$ , то тангенс угла наклона  $\alpha$  касательной к графику в каждой его точке равен производной  $\varphi'(x)$  в этой точке (рис. 3). Поэтому можно сказать, что напряженность электрического поля определяет наклон касательной к графику потенциала.

Рассмотрим теперь несколько конкретных задач.

**Задача 1.** Сфера радиуса  $R$  имеет заряд  $Q$ . Найти зависимость

напряженности и потенциала от расстояния  $r$  от центра сферы. Нарисовать графики.

Найдем вначале напряженность поля. Внутри сферы электрического поля нет: при  $r < R$   $E = 0$ . Вне сферы напряженность поля такая же, как у точечного заряда  $Q$ , помещенного в центр сферы: при  $r > R$  проекция напряженности на выбранное направление от центра  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$ ,

где  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная. На поверхности сферы, при  $r = R$ , электрическое поле испытывает скачок  $\Delta E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}$ . Зависимость  $E$  от  $r$  графически показана на рисунке 4, а.

Величину скачка  $\Delta E$  можно выразить через поверхностную плотность заряда  $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$  (равную заряду, приходящемуся на единицу площади поверхности сферы):

$$\Delta E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Заметим, что это общее свойство электростатического поля: на заряженной поверхности его проекция на направление нормали всегда испытывает скачок  $\Delta E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ , независимо от формы поверхности.

Выясним теперь, как меняется потенциал  $\varphi$  в зависимости от  $r$ . Мы уже знаем, что в любой точке тангенс угла наклона касательной к графику потенциала должен совпадать со значением проекции напряженности (взятой с противоположным знаком). При  $0 < r < R$   $E = 0$ , и, следовательно, во всех этих точках касательная к графику потенциала должна быть горизонтальной. Это означает, что на участке  $0 < r < R$  потенциал не меняется:  $\varphi = \text{const}$ .

Вне сферы, при  $r > R$ , производная  $\varphi'(r) = -E(r)$  отрицательна и величина ее убывает с расстоянием  $r$ . Поэтому и потенциал должен убывать с расстоянием, стремясь к нулю при  $r \rightarrow \infty$ . Действительно, чем дальше расположена точка, в которой мы ищем потенциал, тем меньшую работу надо совершать при перемещении единицы заряда из этой точки в бесконечность. Величина потенциала  $\varphi$  при

$r > R$  такая же, как у точечного заряда, помещенного в центр сферы:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}.$$

Может ли потенциал испытать скачок на поверхности сферы, то есть при  $r = R$ ? Очевидно, что нет. Скачок потенциала означал бы, что при перемещении единичного заряда между двумя очень близкими точками 1 и 2 электрическое поле совершало бы конечную работу:  $\varphi_1 - \varphi_2 = E(R) \times (r_2 - r_1)$  должно оставаться конечным при  $(r_2 - r_1) \rightarrow 0$ , что невозможно. Таким образом, потенциал не испытывает скачков.

График зависимости  $\varphi$  от  $r$  изображен на рисунке 4, б.

**Задача 2.** Шар радиуса  $R$  равномерно заряжен по всему объему. Полный заряд шара  $Q$ . Нарисуйте графики зависимости напряженности и потенциала от расстояния  $r$  от центра шара.

Такой шар можно представить себе состоящим из большого числа тонких заряженных сфер, вложенных одна в другую. Каждая сфера внутри себя поля не создает, а вне создает поле такое же, как точечный заряд, помещенный в ее центр. Поэтому вне шара, при  $r > R$ , напряженность такая же, как напряженность поля точечного заряда  $Q$ , помещенного в центр шара:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}.$$

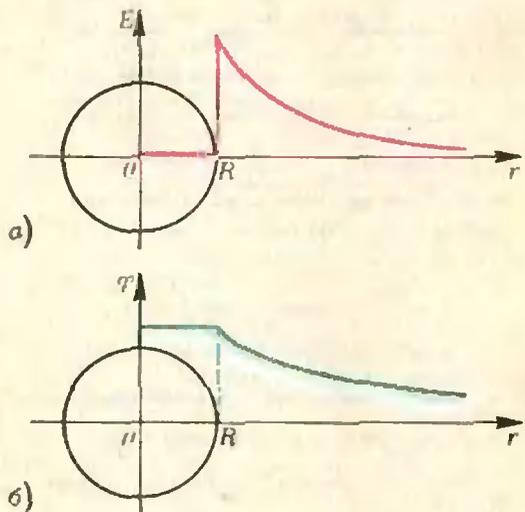


Рис. 4.

Внутри шара, на расстоянии  $r < R$ , поле создают только сферы с радиусами от 0 до  $r$  (для сфер большего радиуса рассматриваемая точка находится внутри них). Следовательно, напряженность на расстоянии  $r$  от центра шара такая же, как напряженность поля точечного заряда  $Q_r$ , помещенного в центр шара, где  $Q_r$  — суммарный заряд всех сфер с радиусами от 0 до  $r$ , то есть заряд шара радиуса  $r$ . Если на шар радиуса  $R$  приходится заряд  $Q$ , то на шар радиуса  $r$  будет приходится заряд

$$Q_r = Q \frac{r^3}{R^3}. \text{ Таким образом, внутри}$$

шара напряженность поля  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r$  — она линейно растет с расстоянием.

На поверхности шара, в точке  $r = R$ , напряженность скачка не испытывает. Это находится в соответствии с общим правилом, так как поверхностная плотность заряда в данном случае равна нулю: шар заряжен однородно, и на бесконечно тонкий поверхностный слой приходится бесконечно малый заряд.

График зависимости  $E$  от  $r$  показан на рисунке 5, а.

Нарисуем теперь график потенциала. Производная от потенциала  $\varphi'(r) = -E(r)$  всегда отрицательна ( $E \geq 0$ ). Поэтому с увеличением  $r$  потенциал должен монотонно убывать. В точке  $r = 0$  производная потенциала равна нулю. Следова-

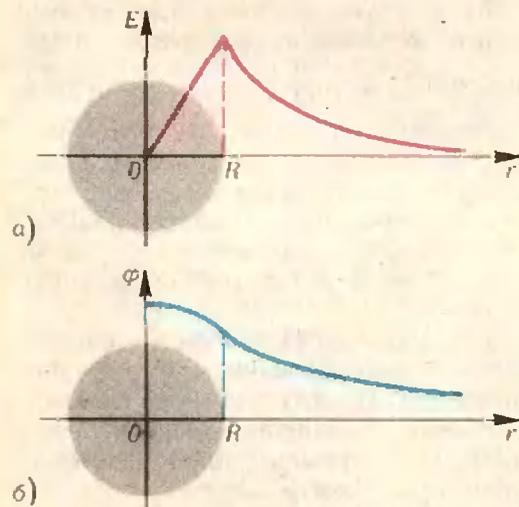


Рис. 5.

но, касательная к графику в этой точке горизонтальна: в точке  $r = 0$  потенциал имеет максимум. В точке  $r = R$  ни потенциал, ни его производная скачков не испытывают. Первое следует из общего правила для потенциала, о втором мы уже говорили выше. Поэтому кривые, изображающие зависимость потенциала от расстояния при  $r < R$  и  $r > R$ , в точке  $r = R$  должны сопрягаться — гладко без излома переходить одна в другую. При  $r \rightarrow \infty$  потенциал  $\varphi \rightarrow 0$ . График зависимости  $\varphi$  от  $r$  представлен на рисунке 5, б.

**Задача 3.** Две плоскости расположены параллельно друг другу на расстоянии  $d$  и заряжены с поверхностной плотностью заряда  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  соответственно. Нарисовать графики зависимости напряженности поля и потенциала от координаты  $x$  (ось  $Ox$  перпендикулярна пластинам). Рассмотреть случаи одноименных (рис. 6, а) и разноименных (рис. 7, а) зарядов на пластинах.

Каждая плоскость создает по обе стороны от себя однородное электрическое поле, напряженность которого

$$|\vec{E}| \propto \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Воспользовавшись принципом суперпозиции, для случая одноименных зарядов приходим к графику, показанному на рисунке 6, б, а для разноименных — к графику на рисунке 7, б. Скачки напряженности опять соответствуют общему правилу:

$$\Delta E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Соответствующие графики для потенциалов показаны на рисунках 6, в и 7, в. На отдельных участках зависимость потенциала от координаты — линейная, так как напряженность поля постоянна. Изломы происходят в тех местах, где напряженность поля испытывает скачок.

Заметим, что в данной задаче потенциал не стремится к нулю при  $x \rightarrow \infty$ . Это, очевидно, связано с тем, что плоскость бесконечна. В действительности размеры реальных пластин всегда ограничены; это приводит к тому, что потенциал падает с увеличением расстояния от пластин.

**Задача 4.** Две одинаковые параллельные пластины имеют заряды  $+q$  и  $-q$ . Как меняется разность

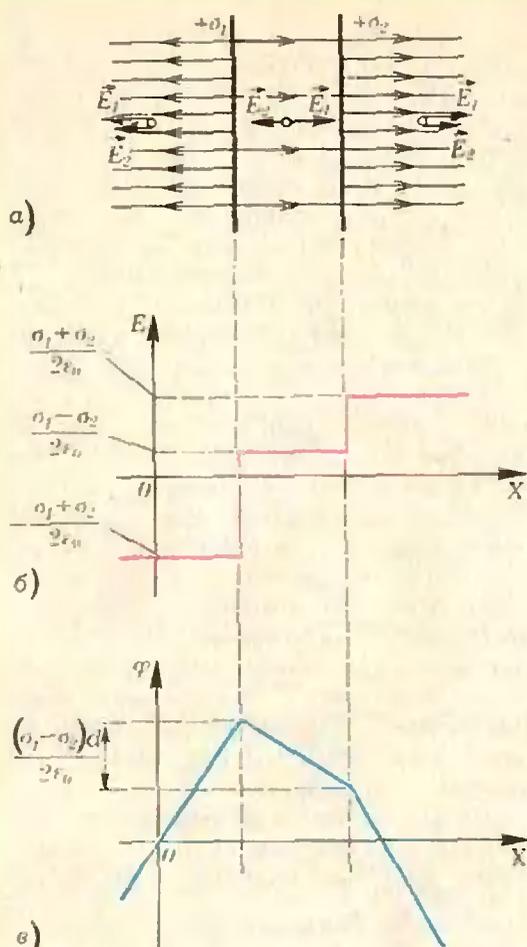


Рис. 6.

потенциалов  $U$  между пластинами при увеличении расстояния  $d$  между ними? Нарисуйте график зависимости  $U$  от  $d$ .

Пока расстояние между пластинами значительно меньше их размеров, такую систему можно считать плоским конденсатором. Тогда  $U = \frac{q}{C} = \frac{q}{\epsilon_0 S} d$  — напряжение линейно растет с расстоянием (начальный участок на рисунке 8). Это соответствует тому, что напряженность поля  $E = \frac{U}{a} = \text{const}$ .

Как только расстояние между пластинами становится сравнимым с размерами пластин, электрическое поле появляется и вне пространства между пластинами. Тогда становятся существенными так называемые краевые эффекты, и зависимость потенциала от расстояния — довольно сложная. Однако качественно ясно, что, вследствие ослабления поля в

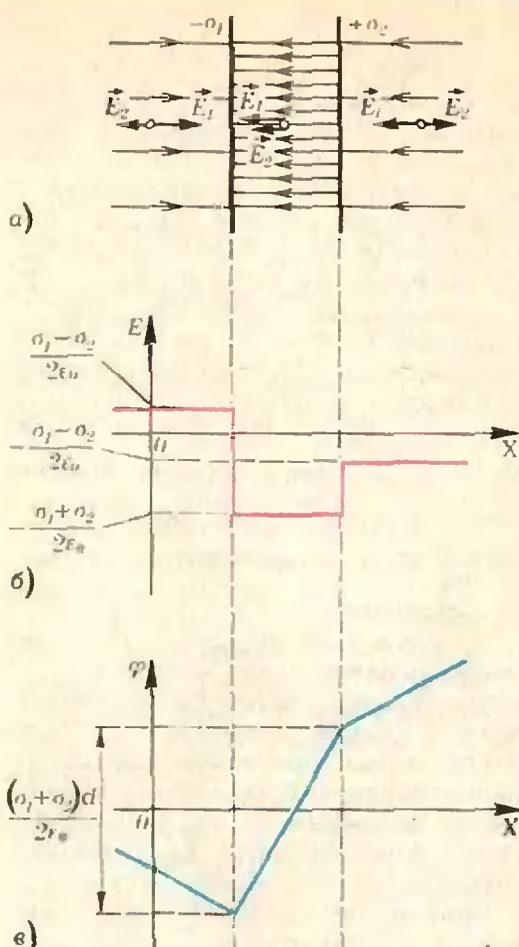


Рис. 7.

области между пластинами, напряженность будет расти медленнее, чем по линейному закону (средний участок на рисунке 8). При дальнейшем увеличении расстояния между пластинами оно станет много больше их размеров. Тогда каждую пластину уже можно считать изолированным телом, и ее потенциал  $\varphi = \frac{q}{C_0}$ , где  $C_0$  — емкость уединенной пластины. Таким образом, при очень больших расстояниях разность потенциалов перестает зависеть от расстояния между пластинами (график зависимости  $U$  от  $d$  на рисунке 8 имеет горизонтальную асимптоту).

Краевые эффекты часто оказываются существенными при решении электростатических задач, связанных с законом сохранения энергии. Рассмотрим, например, такой вариант ускорителя электронов:

**Задача 5.** В пластинах плоского конденсатора, заряженного до

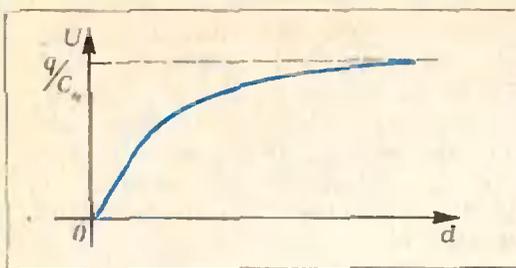


Рис. 8.

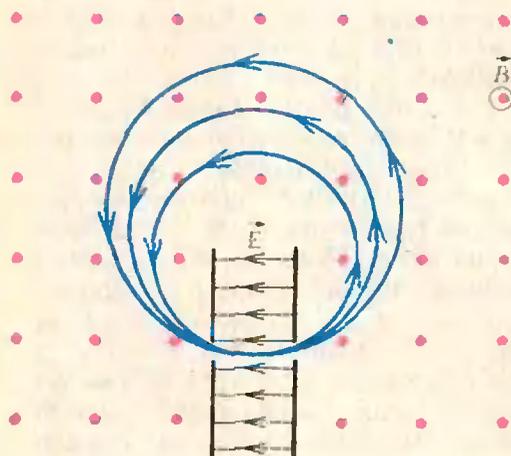


Рис. 9.

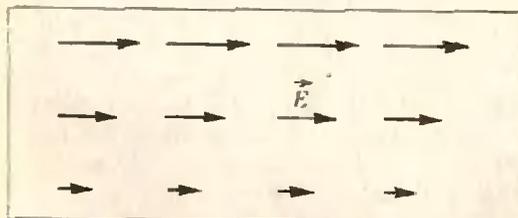


Рис. 10.

разности потенциалов  $U$ , сделано сквозное отверстие. Конденсатор помещен в постоянное магнитное поле, направленное перпендикулярно электрическому полю в конденсаторе (рис. 9). Электрон влетает в пространство между пластинами конденсатора, ускоряется, приобретая энергию  $eU$ , вылетает через отверстие и, двигаясь в магнитном поле по окружности, возвращается в конденсатор. Затем он снова ускоряется, движется по окружности большего радиуса, опять входит в конденсатор и т. д. На первый взгляд кажется, что таким образом можно разогнать электрон до больших энергий, то есть создать ускоритель. Так ли это?

Оказывается, такой ускоритель работать не будет — не учтен краевой эффект. Вне конденсатора всегда существует слабое электрическое поле, которое тормозит электрон при его движении по окружности. Отрицательная работа поля при этом в точности равна положительной работе при разгоне электрона в конденсаторе: работа в электростатическом поле не зависит от формы траектории. Магнитное поле работы не совершает (сила Лоренца перпендикулярна скорости движения электрона). Поэтому полная работа всех сил, действующих на электрон, при его возвращении в начальную точку будет равна нулю, и кинетическая энергия электрона не изменится. Ускоритель работать не будет.

#### Упражнения

1. Может ли существовать электростатическое поле, у которого силовые линии — параллельные прямые, а абсолютная величина напряженности меняется только в направлении, перпендикулярном силовым линиям (рис. 10)?

2. Две concentricкие металлические сферы радиусов  $R_1$  и  $R_2$  имеют заряды  $Q_1$  и  $Q_2$  соответственно. Найдите напряженность и потенциал электрического поля на произвольном расстоянии  $r$  от центра сфер. Нарисуйте графики зависимости  $E$  от  $r$  и  $\varphi$  от  $r$ . Рассмотрите случаи одноименных и разноименных зарядов. Как выглядят графики для случая  $Q_1 = -Q_2$  (сферический конденсатор)?

3. Точечный заряд  $q$  окружен металлической сферой радиуса  $R$  с зарядом  $Q$ . Найдите напряженность поля и потенциал на произвольном расстоянии  $r$  от заряда  $q$ , если он находится в центре сферы; нарисуйте графики зависимости  $E$  от  $r$  и  $\varphi$  от  $r$ . Как изменятся графики, если заряд сместить из центра сферы? Решите ту же задачу для случая, когда металлическая сфера заземлена.

4. Электрон влетает в пространство между пластинами плоского конденсатора так, что его скорость составляет острый угол с направлением силовых линий. Тогда при движении в конденсаторе он будет тормозиться и вылетит с меньшей скоростью; его кинетическая энергия уменьшится. Увеличится ли при этом энергия конденсатора?

5. Два одинаковых конденсатора емкостью  $C$  каждый, один из которых заряжен до напряжения  $U$ , а второй — не заряжен, соединяют параллельно. Найти энергию системы до и после соединения конденсаторов. Почему эти энергии не равны?

6. Точечный заряд  $q$  находится вне заряженной металлической сферы радиуса  $R$  на расстоянии  $d$  от ее центра. Найти потенциал сферы.

А. Виленкин

## Производная и касательные

Хотя в школьном курсе математики касательной к графику функции посвящен только один пункт (см. «Алгебра и начала анализа», 9 класс, п. 52), в 1977 году на вступительных экзаменах в вузы (по программе «А») предлагалось много задач, связанных с этой темой. Решение большинства из них основано на прямом использовании уравнения

$y = f'(x_0) \cdot x + (f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0)$  касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$  (рис. 1). Более интересные задачи основаны на том, что угловым коэффициентом  $k$  касательной равен, с одной стороны, тангенсу угла  $\varphi$  между касательной и осью абсцисс, а с другой — значению производной  $f'(x_0)$ . Рассмотрим некоторые типы таких задач\*).

### Нахождение уравнения касательной

**Пример 1** (МЭИС, 1977). *Напишите уравнения касательных к графику функции  $f(x) = 4 - x^2$  в точках пересечения этого графика с осью абсцисс.*

Здесь нам дана функция  $f$ , а  $x_0$  не дано. Но точки пересечения графика функции  $f$  с осью абсцисс — это точки, в которых  $f = 0$ , поэтому для нахождения  $x_0$  надо решить уравнение  $4 - x_0^2 = 0$ . Затем для каждого значения  $x_0$  можно стандартным об-

разом написать уравнение касательной. Сделаем это, учитывая, что  $f'(x) = -2x$ .

а)  $x_0 = 2$ ;  $f(2) = 0$ ,  $f'(2) = -4$ , уравнение касательной  $y = -4x + 8$ ;

б)  $x_0 = -2$ ;  $f(-2) = 0$ ;  $f'(-2) = 4$ , уравнение касательной  $y = 4x + 8$ .

### Нахождение $k$ и углов

**Пример 2** (МИСИ, 1977). *Какой угол образует с осью абсцисс касательная к параболе  $y = x^2 - 4x - 17$ , проведенная в точке с абсциссой  $x_0 = 2,5$ ?*

Здесь под *углом* прямой с осью  $Ox$  подразумевается величина названного угла, отсчитываемая от оси  $Ox$  к данной прямой против часовой стрелки (см. «Алгебра 6», п. 52, «Геометрия 8», п. 98 и «Алгебра и начала анализа», 10 класс, материал для повторения, п. 8). Поскольку нам заданы  $f$  и  $x_0$ , можно найти  $k = f'(x_0)$ , а по нему и искомый угол  $\varphi$ , так как тангенс угла, образуемого прямой с осью  $Ox$ , равен угловому коэффициенту этой прямой:  $\operatorname{tg} \varphi = k$ , причем  $\varphi = \operatorname{arctg} k$  при  $k \geq 0$  и  $\varphi = \pi + \operatorname{arctg} k$  при  $k < 0$  (рис. 2).

В данном примере  $f'(x) = 2x - 4$ ,  $k = f'(2,5) = 1$ ,  $\operatorname{tg} \varphi = 1$ ,  $\varphi = \pi/4$ .

**Пример 3.** *Найти угол между касательными к графику функции  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$ , проведенными в точках с абсциссами 0 и 1.*

Здесь речь идет не об угле прямой с осью  $Ox$ , а об угле между двумя прямыми. Поэтому напомним, что *углом между двумя пересекающимися прямыми называют величину меньшего из углов, определяемых этими прямыми* (см. «Геометрия 9», § 24), то есть угол  $\alpha$  между двумя прямыми всегда лежит в пределах  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ .

В данном примере  $f'(x) = 3x^2 - 8x + 3$  и для первой касательной имеем  $x_0 = 0$ ,  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 3$ ,  $k_1 = \operatorname{tg} \varphi_1 = 3$ ,  $\varphi_1 = \operatorname{arctg} 3$ , уравнение касательной  $y = 3x + 1$ , а для второй  $x_0 = 1$ ,  $f(1) = 1$ ,  $f'(1) = -2$ ,  $k_2 = \operatorname{tg} \varphi_2 = -2$ ,  $\varphi_2 = \pi - \operatorname{arctg} 2$ , уравнение касательной  $y = -2x + 3$ . Затем, сделав примерный рисунок (рис. 3), легко найти угол  $\alpha$ :

$$\alpha = \pi - \operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 3.$$

\* О геометрическом смысле производной см. также «Квант», 1977, № 2, с. 35.

Но является ли этот угол искомым, то есть верно ли, что  $\alpha \leq \pi/2$ , или надо брать угол  $\pi - \alpha$ ? Можно показать, что угол  $\alpha$  — искомый (так как  $\operatorname{arctg} 2 > \pi/4$  и  $\operatorname{arctg} 3 > \pi/4$ ), но мы сейчас поступим иначе.

Выведем общую формулу для угла между прямыми  $y = k_1x + b_1$  и  $y = k_2x + b_2$ . Прежде всего заметим, что при параллельных переносах углы не меняются, поэтому искомый угол  $\alpha$  равен углу между прямыми  $y = k_1x$  и  $y = k_2x$  (они получаются из данных переносом  $\vec{CO}$ ). Пусть углы между этими прямыми и осью  $Ox$  равны  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  (рис. 4). Тогда легко найти величину одного из углов со сторонами на данных прямых:  $|\varphi_2 - \varphi_1|$  (знаки модуля пришлось поставить, так как мы не знаем, какой из углов  $\varphi_2, \varphi_1$  больше). Искомым является тот из углов  $|\varphi_2 - \varphi_1|, \pi - |\varphi_2 - \varphi_1|$ , который не превосходит  $\pi/2$ .

Оказывается, удобно взять тангенсы этих углов, потому что по формулам приведения

$$\operatorname{tg}(\pi - |\varphi_2 - \varphi_1|) = -\operatorname{tg}|\varphi_2 - \varphi_1|$$

(если  $|\varphi_2 - \varphi_1| \neq \pi/2$ ) и  
если  $|\varphi_2 - \varphi_1| > \pi/2$ , то

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\pi - |\varphi_2 - \varphi_1|) =$$

$$= -\operatorname{tg}|\varphi_2 - \varphi_1| = |\operatorname{tg} \varphi_2 - \varphi_1| =$$

$$= |\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1)|$$

(так как  $\operatorname{tg}$  — нечетная функция);  
если  $|\varphi_2 - \varphi_1| < \pi/2$ , то

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}|\varphi_2 - \varphi_1|,$$

что также равно  $|\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1)|$ .

Таким образом, формула  $\operatorname{tg} \alpha = |\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1)|$  верна во всех случаях. Вспомнив формулу тангенса разности двух углов, мы получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \right|.$$

Заметим, что перпендикулярность двух прямых также легко обнаружить по их угловым коэффициентам: если  $|\varphi_2 - \varphi_1| = \pi/2$ , то  $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2$  или  $\varphi_2 = \varphi_1 - \pi/2$ , и в обоих случаях  $\operatorname{tg} \varphi_2 = -\operatorname{ctg} \varphi_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_1}$

(если эти выражения определены), то есть  $\operatorname{tg} \varphi_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 = -1$ , а в угловых коэффициентах

$$k_2 k_1 = -1.$$

Это согласуется с тем, что в формуле для

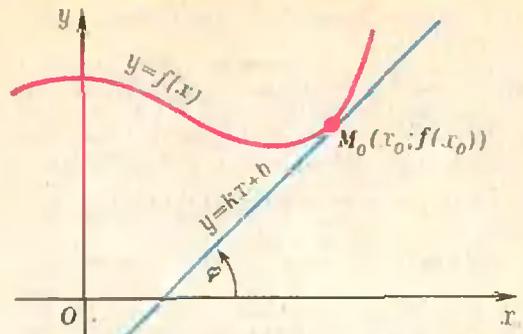


Рис. 1.

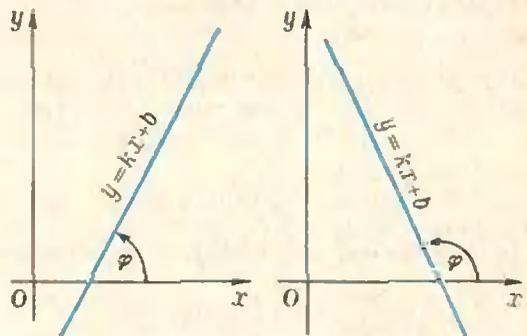
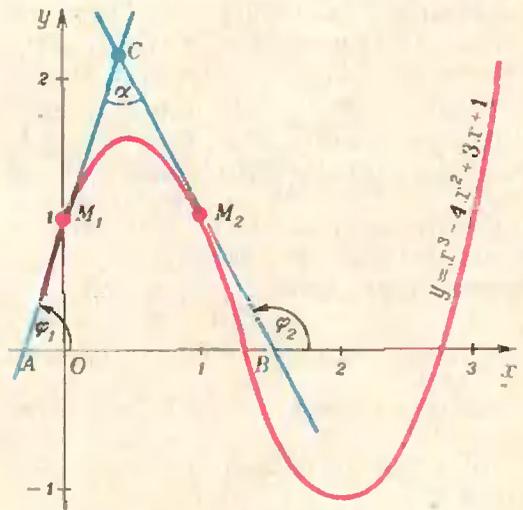
Рис. 2.  $k > 0, \varphi = \operatorname{arctg} k$ ;  $k < 0, \varphi = \pi + \operatorname{arctg} k$ .

Рис. 3.

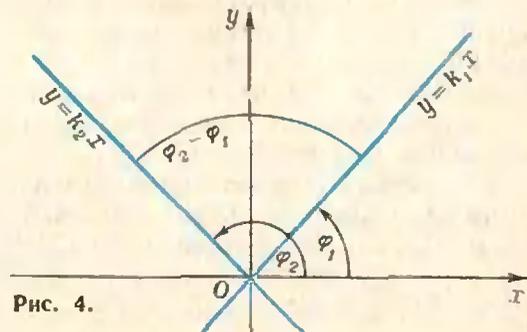


Рис. 4.

$\operatorname{tg} \alpha$  правая часть не определена, если  $k_1 k_2 + 1 = 0$ .

Есть еще один случай, когда две прямые перпендикулярны — если уравнения этих прямых имеют вид  $y = b$ ,  $x = a$ . В этом случае  $k_1 = 0$ , а  $k_2$  не существует, так как прямая  $x = a$  параллельна оси ординат.

В примере 3 мы получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{-2-3}{1-6} \right| = 1, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Сравните этот ответ с приведенным выше!

### Определение точки графика по касательной

В некоторых задачах в той или иной форме даются какие-либо условия на касательную, и предлагается найти точки касания.

**Пример 4.** Найти на графике функции  $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 1$  точку, касательная в которой образует с осью  $Ox$  угол  $\pi/4$ .

Чтобы угол касательной с осью  $Ox$  был равен  $\pi/4$ , необходимо и достаточно, чтобы угловой коэффициент касательной был равен 1. Но  $k = f'(x_0)$ , значит, нам надо решить уравнение  $f'(x_0) = 1$ , то есть  $9x_0^2 - 8x_0 = 1$ . Из него по формуле корней квадратного уравнения  $x_0 = 1$  или  $x_0 = -1/9$ . В этих точках  $f(1) = 0$ ,  $f(-1/9) = 230/243$ . Значит, искомым точек две:  $M_1(-1/9; 230/243)$  и  $M_2(1; 0)$ , что хорошо видно на графике данной функции (рис. 5).

**Пример 5.** В какой точке касательная к графику функции  $f(x) = x^2$

а) параллельна прямой  $2x - y + 1 = 0$ ;

б) перпендикулярна этой же прямой?

а) Как известно (см. «Алгебра 6», п. 52), две прямые параллельны, если их угловые коэффициенты равны. Уравнение данной прямой можно записать в виде  $y = 2x + 1$ , откуда видно, что  $k = 2$ . Для касательной  $k = f'(x_0)$ , поэтому нам надо решить уравнение  $f'(x_0) = 2$ , то есть  $2x_0 = 2$ , откуда  $x_0 = 1$ . Значит, касательную надо проводить в точке  $M_1(1; 1)$  (рис. 6). Проверка показывает, что уравнение этой касательной имеет вид  $y = 2x - 1$ .

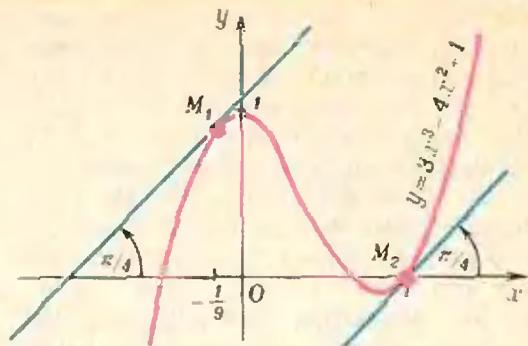


Рис. 5.

б) Воспользуемся тем, что прямые  $y = k_1x + b_1$  и  $y = k_2x + b_2$  перпендикулярны, если  $k_1 k_2 = -1$ . В данном примере  $k_1 = 2$ , поэтому  $k_2 = -1/k_1 = -1/2$ , и из уравнения  $2x_0 = -1/2$  находим  $x_0 = -1/4$ . Это соответствует точке  $M_2(-1/4; 1/16)$ , и уравнение касательной имеет вид  $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{16}$ . «Геометрия» этого примера хорошо видна на рисунке 6.

**Пример 6** (МГУ, ф-т психологии, 1977). На графике функции  $\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 22x - 28$  найти все точки такие, что касательные к графику в этих точках пересекают положительные полуоси, отсекая от них отрезки равной длины.

Пусть касательная проводится в точке  $M_0(x_0; f(x_0))$ . Тогда ее уравнение имеет вид

$$y = (x_0^2 - 4x_0 - 22) \cdot x - \frac{2}{3}x_0^3 + 2x_0^2 - 28.$$

Но прямая  $y = kx + b$  пересекает положительные полуоси, отсекая отрезки равной длины, лишь при  $k = -1$  и  $b > 0$  ( $b \neq 0$ , поскольку

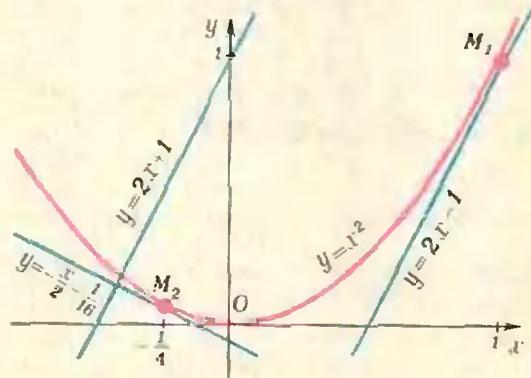


Рис. 6.

точка — не отрезок). Отсюда получаем систему

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}x_0^3 + 2x_0^2 - 28 > 0, \\ x_0^2 - 4x_0 - 22 = -1. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим, что  $x_0 = 7$  или  $x_0 = -3$ . Неравенство выполняется лишь при  $x_0 = -3$ , что соответствует точке  $M_0(-3; 11)$ .

### Нахождение функции

В некоторых задачах предлагается найти даже не точку графика, а саму функцию. Вот типичная такая задача.

**Пример 7** (МЭИС, 1977). *Найти уравнение параболы  $y = x^2 + bx + c$ , касающейся прямой  $y = x$  в точке  $M(1; 1)$ .*

Задачу полезно переформулировать так: *уравнение касательной к графику функции  $f(x) = x^2 + bx + c$  в точке  $M(1; 1)$  имеет вид  $y = x$ ; найти  $b$  и  $c$ .* Такая формулировка уже более явно содержит два условия:

1) точка  $M(1; 1)$  лежит на графике функции  $f(x) = x^2 + bx + c$ ;

2)  $f'(1) = 1$  (поскольку для прямой  $y = x$  будет  $k = 1$ ).

Отсюда с учетом формулы  $f'(x) = 2x + b$  получаем систему

$$\begin{cases} 1 + b + c = 1, \\ 2 + b = 1, \end{cases}$$

из которой  $b = -1$ ,  $c = 1$ . (Решив подобную задачу, полезно проверить, что уравнение касательной к графику функции  $f(x) = x^2 - x + 1$  в точке  $M(1; 1)$ , лежащей на графике этой функции, имеет вид  $y = x$ .)

### Упражнения

**1** (МИИГАиК, 1977). Написать уравнения касательных к графику функции

а)  $f(x) = \cos x$  в точках с абсциссами  $x_1 = \pi/2$  и  $x_2 = \pi$ ;

б)  $f(x) = \sin x$  в точке с абсциссой  $x_0 = 0$ .

**2** (МЭИС, 1977). Под каким углом касательная к графику функции  $\operatorname{tg} x$ , проведенная в начале координат, пересекает ось абсцисс?

**3** Под каким углом пересекаются касательные к кривым  $y = \sqrt{2x}$  и  $y = x^{3/2}$ , проведенные в точке пересечения этих кривых?

**4** (МИНХ, 1977). В какой точке касательная к графику функции  $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$  образует угол  $135^\circ$  с осью  $Ox$ ?

**5** (МИСИ, 1977). Напишите уравнение касательной к линии  $y = x^2 - 4x + 5$  в точке пересечения этой линии с осью ординат.

**6** В каких точках касательная к кривой  $y = x^2 - 4x + 3$

а) параллельна оси  $Ox$ ;

б) образует с осью  $Ox$  угол  $45^\circ$ ?

**7** (МЭИС, 1977). В какой точке касательная к параболе  $y = x^2 - 7x + 3$  параллельна прямой  $5x + y - 3 = 0$ ?

**8** (МЭИС, 1977). В какой точке кривой  $y^2 = 2x^3$  касательная перпендикулярна прямой  $4x - 3y - 2 = 0$ ?

**9** (МИСиС, 1977). Найти площадь фигуры, ограниченной

а) кривой  $y = -x^2 + 1$  и касательной к кривой  $y = 2 - \ln x$  в точке с абсциссой  $x = 1$ ;

б) кривой  $y = x^2 - x + 2$  и касательной к кривой  $y = \ln x + 3$  в точке с абсциссой  $x = 1$ .

**10** (МИСИ, 1977). Определить  $b$  и  $c$  в уравнении параболы  $y = x^2 + bx + c$ , если прямая  $y = 2x + 2b$  касается параболы в точке  $M(2; 0)$ .

**11** (МИСИ, 1977). В какой точке касательная к графику функции  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 9x + 8$  будет параллельна биссектрисе I и III координатных углов?

**12** (МИСиС, 1977). Написать уравнение касательной к графику функции  $f(x) = \frac{1}{x^4} + 2$  в точке с абсциссой  $x = 1$ .

## Задача

### для исследования

Ниже приводится задача известных ленинградских геометров В. Залгаллера и А. Иванова. Авторы, так же как и редакция журнала

«Квант», знают только аналитическое решение, использующее производную. Должно же существовать элементарно-геометрическое решение, ... но оно нам неизвестно.

**Задача.** Два треугольника на плоскости имеют общее основание, а их вершины  $A, A'$  различны и лежат по

одну сторону от основания.

Пусть  $S$  и  $S'$  — центры кругов, вписанных в эти треугольники. Докажите, что расстояние между вершинами больше, чем расстояние между центрами вписанных кругов:  $|AA'| > |CC'|$ .

## Новосибирский государственный университет

Главной задачей НГУ является подготовка высококвалифицированных специалистов — исследователей в области математики, механики, физики, химии, биологии, геологии, экономической кибернетики, истории и языкознания, в основном — для Сибири и Дальнего Востока.

В университете обучается около четырех тысяч студентов, аспирантов и стажеров. В его составе факультеты: механико-математический, физический, естественных наук, геолого-геофизический, экономический и гуманитарный.

Приемные экзамены проходят с 11 по 25 июля (прием документов с 20 июня по 10 июля), зачисление в университет производится до 28 июля.

Все студенты (кроме живущих в Академгородке) обеспечиваются общежитием.

Выпускники НГУ направляются на работу в академические и отраслевые научно-исследовательские институты, вычислительные центры, исследовательские лаборатории, а также на преподавательскую работу в вузы.

Подготовка специалистов в НГУ основана на использовании научного и педагогического потенциала Новосибирского научного центра Сибирского отделения АН СССР. Этот центр имеет в своем составе 22 научных института. Поблизости от него строятся научные центры Сибирского отделения ВАСХНИЛ и Сибирского отделения Академии медицинских наук.

Новосибирский научный центр и университет представляют собой, по существу, единый научно-учебный комплекс. Основную часть педагогической работы в университете выполняют ученые из институтов СО АН СССР — академики, члены-корреспонденты АН СССР, доктора и кандидаты наук. Это обеспечивает высокий теоретический уровень преподавания и постоянное совершенствование учебных программ в соответствии с новейшими достижениями науки.

Другой принципиальной особенностью обучения в НГУ является обязательная длительная исследовательская практика сту-

дентов в институтах СО АН СССР. Благодаря территориальной близости НГУ к научно-исследовательским институтам СО АН СССР студенты имеют возможность участвовать в проводимых там семинарах, научных совещаниях и конференциях, знакомиться с последними научными достижениями и нерешенными проблемами науки, встречаться с крупными учеными, приезжающими из других городов страны и из-за рубежа, непосредственно участвовать в научном поиске. К научному руководству студентами привлекаются только сотрудники, имеющие ученые степени и звания. Курсовые и дипломные работы проводятся по актуальной тематике, разрабатываемой в СО АН СССР, они органически вливаются в научную продукцию его институтов. Студенты НГУ выезжают на практику в социалистические страны.

Навыки самостоятельной исследовательской работы студенты получают также в научно-исследовательском секторе НГУ. Выработке полезных навыков способствует широкое участие студентов в ежегодной научной студенческой конференции, которая по охвату творческой студенческой молодежи вышла за рамки НГУ, став всесоюзной.

Университет расположен в 30 км от центра Новосибирска, на территории Академгородка, в живописном лесу на берегу Обского моря. Рядом с учебными корпусами — общежития, столовая, спортивный комплекс.

Богата и разнообразна жизнь студентов в университете. Активно работают клубы по интересам, широко развита художественная самодеятельность, весело проводятся Дни физиков, математиков, химиков, геологов, посвященные в студенты. Энергично работают строительные студенческие отряды. Много лет действует Интерклуб, проводится Неделя интернациональной дружбы, завершающаяся традиционной политической маевкой. В НГУ прекрасные возможности заниматься спортом, чему в немалой степени способствует и великолепная сибирская природа.

### М а т е м а т и к а

Ниже публикуются образцы вариантов вступительного экзамена, предлагавшихся тем, кто окончил среднюю школу в 1977 году.

#### В а р и а н т 1

(механико-математический, физический, экономический факультеты)

1. По дорожке, имеющей форму окружности, из двух диаметрально противоположных точек  $A$  и  $B$  выбегают одновременно два спортсмена и бегут с постоянными скоростями навстречу друг другу. Первая их встреча произошла через  $t$  секунд в  $a$  метрах от  $B$ , вторая встреча — в  $2a$  метрах от  $A$  ( $a > 0$ ). Найти скорости спортсменов, если под расстоянием понимается длина кратчайшего пути по дорожке.

2. Решить уравнение

$$\cos 6x + \operatorname{tg}^2 x + \cos 6x \cdot \operatorname{tg}^2 x = 1.$$

3. Окружности  $O_1$  и  $O_2$  касаются друг друга внешним образом в точке  $A$ , отрезок  $AB$  — диаметр  $O_1$ . Длины отрезков, отсекаемых окружностями на некоторой прямой, проходящей через точку  $B$ , равны 2 см, 3 см, 4 см, считая от точки  $B$ . Найти радиусы окружностей.

4. Определить, при каких значениях параметра  $a$  уравнение  $\log_{2x}(ax+1) = \frac{1}{2}$  имеет единственное решение.

5. В основании треугольной призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник  $ABC$ , длины катетов  $AB$  и  $AC$  которого равны  $a$ . Боковые ребра  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  образуют с плоскостью основания угол в  $60^\circ$ , а диагональ  $BC'$  боковой грани  $CBV'C'$  перпендикулярна ребру  $AC$ . Найти объем призмы, если длина диагонали  $BC'$  равна  $a\sqrt{6}$ .

#### В а р и а н т 2

(факультеты естественных наук и геолого-геофизической)

1. Из пункта  $A$  был отправлен вниз по реке плот. Одновременно из пункта  $B$ , расположенного в 100 км от  $A$  вниз по реке, вышел навстречу катер, который дошел до  $A$ , повернул вниз по течению и догнал плот в 80 км от  $A$  через 10 часов после отправки плота. Найти скорость катера в стоячей воде.

2. Решить уравнение

$$1 + \operatorname{tg} x = 2 \sqrt{2} \sin x.$$

3. Окружность радиуса  $R$  касается сторон  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  в точках  $K$  и  $M$  соответственно. Известно, что центр окружности лежит на стороне  $AC$ ,  $M$  — середина стороны  $BC$ , длина отрезка  $BK$  в два раза больше длины отрезка  $AK$ . Найти площадь треугольника.

4. Решить уравнение

$$3 \cdot 2^{\log_x(3x-2)} + 2 \cdot 3^{\log_x(3x-2)} - 5 \cdot 6^{\log_x(3x-2)} = 0.$$

5. Дан куб с основанием  $ABCD$  и боковыми ребрами  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  и  $DD'$ . Через вершину  $B$  и середины ребер  $CC'$  и  $A'D'$  проведена плоскость. Найти величину двугранного угла, образованного этой плоскостью с плоскостью основания.

#### Ф и з и к а

В 1977 году на физическом факультете НГУ на письменном экзамене по физике каждому абитуриенту предлагалось 6 задач. На решение всех задач отводилось 5 часов. В каждом варианте задачи были трех типов. Первые четыре — это общепринятые расчетные задачи различной трудности: от почти стандартных школьных до сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разбираться в непривычной или усложненной физической ситуации.

В последней — шестой — надо было объяснить физическое явление, показанное экзаменатором на демонстрационном столе. Здесь было важно понять суть эффекта и

среди различных возможных физических факторов выделить главный.

Наконец, пятая задача — это задача-оценка. В тексте варианта указывалось, что описываемое в этой задаче явление хорошо знакомо абитуриенту; он может сам выбрать необходимые для решения значения физических величин и получить численный ответ. Для решения этой задачи надо понять, уяснить физическое явление, сформулировать простую (так как нужна лишь оценка) физическую модель этого явления, взять разумные значения физических параметров и, наконец, правильно пользуясь системой единиц, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. Заметим, что грубая прикидка, оценка по порядку величины — почти обязательный начальный этап постановки эксперимента, проектирования установки, теоретической разработки.

Ниже приводятся два варианта письменного экзамена по физике 1977 года и задачи-оценки двух последних лет.

По поводу задач-оценок рекомендуется дополнительно прочитать статью Ю. Брука и А. Стаценко «Как физики делают оценки — метод размерностей и порядки физических величин» из сборника «О современной физике — учителю» (М., «Знание», 1975).

#### В а р и а н т 1

1. С наклонной плоскости (рис. 1) соскальзывают два кубика с массами  $m_1$  и  $m_2$ , связанные невесомой нерастяжимой нитью. Коэффициенты трения между кубиком и плоскостью равны соответственно  $k_1$  и  $k_2$ , причем  $k_2 > k_1$ . Плоскость наклонена к горизонту под углом  $\alpha$ . Найти натяжение нити.

2. В вертикально стоящем цилиндрическом сосуде, заполненном воздухом, находятся в равновесии два тонких тяжелых поршня массы  $m$  каждый. Расстояние между поршнями равно расстоянию от нижнего поршня до дна сосуда и равно  $l$ . Сечение со-

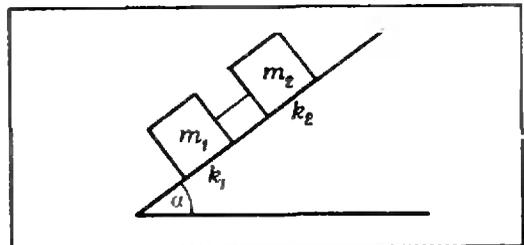


Рис. 1.

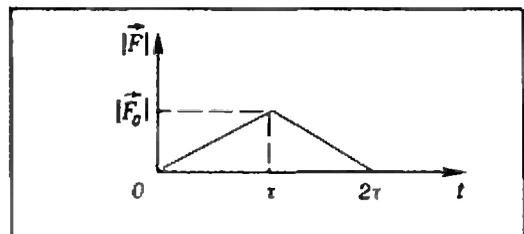


Рис. 2.

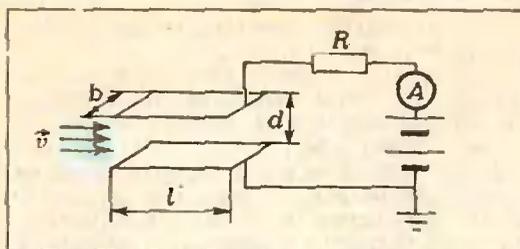


Рис. 3.

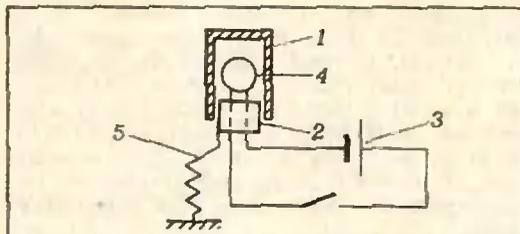


Рис. 4.

суда  $S$ , наружное давление  $p_0$ . На верхний поршень давят таким образом, что он перемещается на место нижнего. На каком расстоянии от дна будет находиться нижний поршень? Трения нет, температура постоянна.

3. На покоящееся тело массы  $M$  налетает со скоростью  $\vec{v}$ , направленной по линии центров, тело массы  $m$ . Сила, возникающая при взаимодействии тел, линейно растет в течение времени  $t$  от нуля до значения  $|\vec{F}_0|$ , а затем линейно убывает до нуля за то же время  $t$  (рис. 2). Определить скорости тел после взаимодействия и количество выделившегося тепла.

4. В плоский конденсатор направлен поток электронов, летящих со скоростью  $\vec{v}$  параллельно пластинкам (рис. 3). Концентрация электронов в потоке (число частиц в единице объема) равна  $n$ . Длина пластин  $l$ , ширина  $b$ , расстояние между ними  $d$ . К верхней пластине через сопротивление  $R$  и амперметр подключен положительный полюс батареи с э. д. с.  $\mathcal{E}$  (внутренним сопротивлением батареи можно пренебречь). Нижняя пластина и другой полюс батареи соединены. Найти показание амперметра. Масса электрона  $m$ , заряд  $e$ .

5. Пятью ударами молотка гвоздь забит в деревянную стенку. Оценить, какую силу нужно приложить к шляпке гвоздя, чтобы выдернуть его.

6. Пустотелая гильза 1 (рис. 4) надевается на пластмассовую затычку 2, сквозь которую проведены проволочки электрической цепи 3 для поджигания горючей смеси 4. Сначала затычка закрепляется на легкой проволочке-пружинке 5. Смесь поджигается, гильза взлетает. Во втором случае затычка прикрепляется не к пружинке, а к массивному штативу. После зажигания гильза взлетает значительно выше. Объяснить эффект увеличения высоты.

#### Вариант 2

1. Два одинаковых плоских конденсатора соединены параллельно и заряжены до

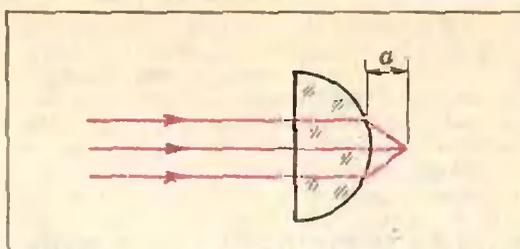


Рис. 5.

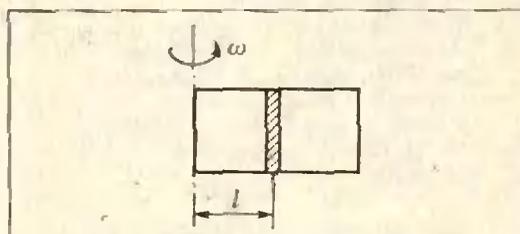


Рис. 6.

напряжения  $U$ . Пластины одного из конденсаторов разводятся на большое расстояние. Найти напряжение и энергию второго конденсатора. Емкость каждого конденсатора  $C$ .

2. С какой силой давит на стенку цилиндрического стакана палочка массы  $m$ , наполовину погруженная в воду? Угол наклона палочки к горизонту  $\alpha$ , трения нет.

3. Узкий пучок света, пройдя через полшарие из стекла с показателем преломления  $n$ , собирается на расстоянии  $a$  от выпуклой поверхности (рис. 5). На каком расстоянии  $b$  от плоской поверхности соберутся лучи, если пустить пучок с обратной стороны? Считать, что для малых углов  $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$ .

4. В запаянной с одного конца трубке сечения  $S$  находится поршень массы  $m$  на расстоянии  $l$  от запаянного конца (рис. 6). Другой конец трубки открыт, по обе стороны поршня — воздух с давлением  $p_0$ . Трубку начинают вращать с угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси, проходящей через запаянный конец трубки. На каком расстоянии от дна трубки будет находиться поршень? Температура постоянна, трения нет.

5. Оценить, какая часть атмосферного кислорода Земли израсходуется при сжигании двух миллиардов тонн угля. (Эта цифра близка к мировой добыче угля за год.)

6. Скатившись с горки, шарик 1 налетает на два рядом стоящих таких же шарика 2 и 3. Крайний справа шарик 3 после этого откатывается, а 2 стоит. Опыт видоизменяется так, что теперь шарик 1 бьет не прямо по шарнику 2, а через довольно толстую резиновую прокладку. При ударе через прокладку откатываются, причем вместе, оба шарика 2 и 3. Объяснить различие в поведении шариков при наличии прокладки и без нее.

#### Задачи-оценки

1976 год

1. Оценить минимальное давление газов в стволе, возникающее при выстреле

из ружья. Ружейная пуля при вылете из ствола имеет скорость около 800 м/с.

2. Осветительная лампочка, имеющая тонкостенный непрочный баллон, заполняется инертным газом. Из каких соображений выбирается давление газа? Оцените его величину.

3. Оценить заряд, протекающий при ударе молнии в землю, если разряд начинается при напряженности поля на границе облака  $|\vec{E}| = 30$  кВ/см.

4. Оценить, с какой наименьшей скоростью можно ехать на водных лыжах.

5. За сколько ходов велосипедного насоса можно накачать футбольный мяч?

6. Оценить размеры (диаметр и длину) плавкого предохранителя, установленного в штепсельной розетке, обеспечивающего отключение электроустройства за время не более 0,1 с при десятикратной перегрузке по току. (Для расплавления 1 см<sup>3</sup> металла проволоки необходима энергия 6000 Дж. Удель-

ное сопротивление проволоки равно  $1,7 \times 10^{-6}$  Ом.м.)

7. Оценить скорость пара на выходе из носика чайника, кипящего на плитке мощностью 1 кВт.

1977 год

1. Оценить скорость пуль, вылетающих из патронов, брошенных в костер. При стрельбе из ружья скорость пули около 800 м/с.

2. Оценить, каким станет давление атмосферы, если вся жидкость в океанах испарится.

3. Оценить, на сколько и в какую сторону отклонится в высшей точке полета артиллерийский снаряд, запущенный на экваторе в вертикальном направлении.

4. Оценить давление воздуха в шахте глубиной 10 км.

*П. Зубков,  
Л. Лукьянчиков,  
Г. Меледин,  
В. Харченко*

## Ленинградский государственный университет им А. А. Жданова

Ниже приводятся образцы вариантов экзамена по математике, предлагавшихся тем, кто окончил среднюю школу в 1977 году. На факультетах математико-механическом, прикладной математики — процессов управления и физическом экзамены проходили в июле.

### Математико-механический факультет

1. В зависимости от  $p$  указать те  $a$ , для которых уравнение

$$x^3 + 2px^2 + p = a$$

имеет три различных корня.

2. Найти все решения уравнения

$$8\cos 6x \cdot \cos^3 x - \cos 9x - \cos 3x = 0,$$

лежащие в интервале  $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ .

3. Сколькими способами можно 10 одинаковых подарков распределить между 6 детьми так, чтобы каждый ребенок получил хотя бы один подарок?

4. Определить высоту конуса, вписанного в шар радиуса  $R$  и имеющего наибольшую площадь полной поверхности.

5. Вектор  $\vec{c}$ , перпендикулярный векторам  $\vec{a} = (1; 1; 1)$  и  $\vec{b} = (1; -1; 3)$ , образует с осью  $Oz$  тупой угол. Найти его координаты, если известно, что  $|\vec{c}| = 3$ .

### Факультет прикладной математики — процессов управления

1. Для каких значений параметра  $p$  наименьшее на промежутке  $[0; 1]$  значение кубического трехчлена  $x^3 - 2px^2 + 1$  достигается на правом конце промежутка?

2. Найти все решения уравнения

$$5 \left( \sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2 \sin 2x} \right) = \cos 2x + 3,$$

лежащие в интервале  $]0; 2\pi[$ .

3. В 10 урнах распределены 6 белых и 6 черных одинаковых по размеру шаров, причем в каждой урне имеется хотя бы один шар.

Сколько существует различных вариантов распределения шаров?

4. При каком значении  $k$  касательная к графику функции  $y = kx^2$  образует с осью  $Ox$  угол, равный  $\frac{\pi}{3}$ , и отсекает от 4-й четвер-

ти треугольник с площадью, равной  $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ ?

5. Вектор  $\vec{a}$ , у которого первая координата больше второй, перпендикулярен вектору  $\vec{b} = (1; -3; -1)$  и образует с осью  $Oz$  угол, равный  $135^\circ$ . Найти его координаты, если известно, что  $|\vec{a}| = 5\sqrt{2}$ .

### Физический факультет

1. К обкладкам плоского конденсатора, расположенным вертикально, прикладывается переменное напряжение, создающее электрическое поле напряженностью  $E = A \cos \omega t$ . Найти закон движения и построить график кривой, по которой будет двигаться электрон, находящийся между обкладками конденсатора, с учетом силы тяжести. В начальный момент электрон покоится и находится на расстоянии  $l$  от ближайшей обкладки. Масса электрона равна  $m$ , заряд равен  $e$ , а  $l$  настолько большое, что в любой момент времени электрон не достигает обкладок конденсатора.

2. Найти три положительных числа, таких, чтобы их произведение было наибольшим, при условии, что сумма первого и второго чисел равна  $a$ , а сумма первого и третьего чисел равна  $2a$ .

3. Найти те решения уравнения

$$6 \operatorname{tg} x + \frac{5}{\operatorname{tg} 3x} = \operatorname{tg} 2x,$$

которые принадлежат интервалу

$$\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[.$$

4. Сколькими способами можно разместить  $n$  одинаковых шаров по  $k$  ящикам?

5. Три шара касаются плоскости треугольника со сторонами  $a$ ,  $b$  и  $c$  в его вершинах и попарно касаются друг друга. Найти радиусы шаров.

Отделение экономической кибернетики и отделение планирования народного хозяйства экономического факультета, химический факультет и факультет психологии

1. В интервале  $]0; 1[$  найти подмножество тех  $x$ , для которых справедливо неравенство

$$\left(\frac{1}{81}\right)^{8 + \log_a x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_a^2 x}.$$

2. Найти все решения уравнения

$$8 \cos x + 6 \sin x - \cos 2x - 7 = 0,$$

лежащие в промежутке  $[0; 2\pi]$ .

3. Сколько существует целых положительных чисел, меньших чем  $10^4$ , в записи которых в десятичной системе все цифры различные?

4. Дана криволинейная трапеция, ограниченная линиями  $y = 0$ ,  $x = a$  ( $a > 0$ ) и  $y = x^3$ . Какую часть площади трапеции составляет площадь треугольника, отсекаемого от данной трапеции касательной к линии  $y = x^3$  в точке  $x = \frac{2a}{3}$ ?

5. Определить высоту конуса, вписанного в шар радиуса  $R$  и имеющего наибольшую площадь боковой поверхности. Чему равна наибольшая площадь боковой поверхности?

### Биолого-почвенный и географический факультеты

1. Решить неравенство

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-1}.$$

2. Найти все решения уравнения

$$\frac{3(1 - \sin 3x)}{\sin x - \cos 2x} = 2 \cos 2x - 7,$$

лежащие в интервале  $] -\pi; \pi ]$ .

3. Сколько существует целых положительных чисел, меньших чем  $10^6$  и делящихся на 4, в десятичной записи которых встречаются только цифры 0, 1, 2, 3, 5, причем так, чтобы одна и та же цифра не повторялась?

4. К графику функции  $y = (x+1)\sqrt{x}$  проведена касательная в той точке, где угловой коэффициент равен 2, причем касательная не проходит через начало координат. Найти точки пересечения этой касательной с координатными осями.

5. Каков должен быть радиус основания конуса с заданной площадью боковой поверхности  $S$ , чтобы объем конуса был наибольшим?

### Геологический факультет и отделение политэкономии экономического факультета

1. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 + x} > 1 - 2x.$$

2. Найти все решения уравнения

$$\sin 7x + \cos^2 2x = \sin^2 2x + \sin x,$$

лежащие в интервале  $\left] -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right[$ .

3. Решить уравнение

$$\sqrt{2 - \log_x 9} = -\frac{\sqrt{12}}{\log_3 x}.$$

4. Вычислить площадь криволинейного треугольника, лежащего в 1-й четверти и ограниченного линиями  $xy = 4$ ,  $x = y$ ,  $y = 2x$ .

5. Вектор  $\vec{a}$ , коллинеарный вектору  $\vec{b} = (12; -16; -15)$ , образует с осью  $Oz$  острый угол. Зная, что  $|\vec{a}| = 100$ , найти его координаты.

*В. Осипов, В. Матвеев*

В. Гутенмахер, П. Медведев

## Отделение планирования и экономической кибернетики экономического факультета МГУ

*У меня есть немало знакомых школьников, которые одновременно интересуются и социальными проблемами, и точными науками, прежде всего математикой. Они жалуются, что им трудно сделать выбор жизненного пути и отказаться от одной возможности в пользу своих сил в пользу другой. Я думаю, что, поступив на отделение планирования и экономической кибернетики экономического факультета МГУ, они снимают проблему «отказа» от одного из интересующих их предметов.*

*Математические методы в экономической науке — одна из тех удивительно увлекательных областей, работая в которой, человек удовлетворяет и стремление активно участвовать в жизни общества, и потребность в познании глубинных законов природы.*

Декан экономического факультета МГУ  
профессор Г. Х. Попов

Экономико-математическая наука — быстро развивающаяся молодая дисциплина. Наверное, большинство читателей «Кванта» имеет о ней лишь смутное представление. Поэтому мы начнем не с перечисления сведений об отделении планирования и экономической кибернетики, а с более общего рассказа.

### Об экономике и математике

В экономической жизни страны, тем более такой большой, как СССР, протекают весьма сложные процессы. Для того чтобы лучше в них разобраться и решать практические задачи, делаются попытки найти более или менее адекватные математические схемы этих процессов. Такие схемы называются *математическими моделями*.

Приведем пример сложного экономического процесса и соответствующую модель — модель *межпродуктового баланса* (в сильно упрощенном виде). Рассмотрим страну, хозяйство которой производит большой набор различных продуктов: сталь, газ, картофель, кинотеатры, костюмы, журнал «Кварк» и др.

Хозяйство в рассматриваемой стране плановое. Значит, нужно заранее понять, чего и сколько должно быть произведено, скажем, в течение предстоящего года. Планирование производства естественно начать с определения количества всевозможных продуктов, которые должны пойти на так называемое «конечное потребление» в течение года. Конечно потребленной считается та продукция (называемая *конечным продуктом*), которая приносит непосредственную пользу гражданину страны или коллективу граждан. Например, на конечное потребление каждый год идет определенное количество газа\*), картофеля, костюмов, экземпляров журнала «Кварк», кинотеатров\*\*).

Пусть нам известно, сколько каждого продукта должно пойти на конечное потребление (это отдельная трудная задача, здесь не обсуждаемая). Тогда нужно высчитать, какое количество разных продуктов необходимо произвести, чтобы получить конечный продукт в заданном объеме.

Сначала для простоты рассмотрим такую нелепую экономику, в которой производится и потребляется только газ\*\*\*). Попробуем составить для нее

\*) На конечное потребление идет, например, газ, сожженный в плите школьной столовой при варке супа.

\*\*\*) Понять, как «потребляются» кинотеатры, можно так. Каждый кинотеатр рассчитан на определенный срок существования в  $k$  лет. Значит, каждый год он разрушается на  $\frac{1}{k}$ .

«Просуммировав» разрушения, получим количество условных кинотеатров, «потребленных» за год.

\*\*\*\*) Интересно, что по существу такую модель изучал министр финансов Людовика XVI А.-Н. Тюрго (1727—1781), правда, его интересовал не газ, а деньги, данные займы.

план производства, если известно, что на конечное потребление в плановый период должно пойти  $y$  единиц газа. На производство  $y$  ед. газа идет  $ay$  ед. газа \*).

Естественно, нужно произвести по крайней мере  $y + ay$  ед. газа. Но чтобы получить  $ay$  ед. газа, нужно еще  $a \cdot ay$  ед. газа и т. д. Окончательно, чтобы потратить  $y$  ед. газа, нужно произвести

$$y + ay + a^2y + a^3y + \dots + a^ny + \dots (*)$$

ед. газа. Если  $a < 1$ , то сумма (\*) равна  $y(1 - a)^{-1}$  (сумма бесконечной геометрической прогрессии). При  $a \geq 1$  выражение (\*) не имеет смысла; не может существовать и соответствующая экономика: на производство единицы продукта в ней идет не менее единицы этого же продукта.

В реальной экономике положение, естественно, значительно сложнее. Очевидно, для того чтобы иметь заданный конечный продукт, нужно произвести не только его, но и целый ряд других продуктов. Для того чтобы произвести газ, нужно иметь не только газ; нужно, например, иметь еще бурильную установку. В свою очередь, для производства бурильной установки требуются станки, сталь и т. п. Многое необходимо и для производства станков, стали и т. д. Некоторые из этих продуктов могут частично идти на конечное потребление, а некоторые совсем нет; например, бурильная установка не приносит непосредственной пользы при потреблении. Для исследования модели такой многопродуктовой экономики средств школьной математики уже недостаточно, однако такие задачи все же решаются (методами линейной алгебры). Необходимые при этом громоздкие вычисления производятся на ЭВМ.

Мы описали только одну экономическую проблему, в изучении которой существенно помогает математика. Таких проблем очень много. Например, задача рационального распределения ограниченных ресурсов, создание экономной схемы перевозок массовых

\*) В  $ay$  входит, например, газ, сжигаемый в турбинах компрессорных станций при перекачке газа по газопроводам.

грузов и т. д. \*). Методы решения этих задач возникли очень недавно. Первая фундаментальная работа в этой области появилась менее 40 лет назад \*\*) и принадлежит выдающемуся советскому математику, лауреату Ленинской и Нобелевской премий академику Л. В. Канторовичу.

Синтез экономики и математики создал новое направление в науке. Цель этого направления — с помощью математических методов и вычислительной техники глубже проникнуть в сущность сложных экономических явлений, научиться лучше видеть их причины, точнее предсказывать последствия, усовершенствовать методы планирования и управления народным хозяйством.

Экономико-математическая наука уже добилась немалых успехов, но решение самых интересных, самых трудных, самых важных задач еще впереди. Участие в их решении — задача студентов и выпускников нашего отделения.

#### Сведения об отделении планирования и экономической кибернетики

Студенты отделения могут выбрать одну из двух специальностей: «планирование народного хозяйства» или «экономическая кибернетика». В первом случае по окончании университета им присваивается квалификация «экономист, плановик-синтетик», во втором «экономист-математик». И те, и другие в процессе обучения могут на соответствующей кафедре отделения более углубленно заниматься вопросами управления народным хозяйством.

Студенты получают хорошую математическую подготовку. Они прослушивают основательные курсы ма-

\*) Прочсть об этих и других смежных проблемах можно в «Кванте» № 2 за этот год в статье С. Семенова «Рукопись, найденная в Сарагосе», а также в старых номерах: 1970 г., № 4, с. 14; 1971 г., № 3, с. 1, № 4, с. 1; 1972 г., № 3, с. 6; 1973 г., № 6, с. 20; 1974 г., № 7, с. 13; 1975 г., № 7, с. 17; 1976 г., № 1, с. 28, № 7, с. 2.

\*\*) Для сравнения напомним, что важнейшим достижениям высшей математики — интегральному и дифференциальному исчислениям — триста лет.

тематического анализа, линейной алгебры, теории вероятностей, математической статистики, математического программирования. Наряду с этим студенты получают глубокие знания по экономике.

Традиции отделения таковы, что студенты, иногда даже младших курсов, могут принять участие в решении настоящих экономических проблем, работая вместе со своими преподавателями в специально созданных для этого группах. Многие из этих проблем решаются по заказам народнохозяйственных предприятий и учреждений, управляющих экономикой (например, вычислительного центра Госплана СССР, Госснаба СССР); это дает возможность исследователям непосредственно видеть свой успех или (к сожалению, в серьезной работе это бывает нередко) неудачу.

Обучение и научная работа студентов отделения происходят под руководством ведущих специалистов страны, таких как декан экономического факультета профессор Г. Х. Попов, заведующий кафедрой планирования народного хозяйства, член-корреспондент АН СССР А. И. Анчишкин, заведующий кафедрой математических методов анализа экономики, член-корреспондент АН СССР, лауреат Государственной премии С. С. Шаталин и др.

В распоряжении студентов — вычислительный центр с машиной ЕС-1020. Скоро вступит в строй машина ЕС-1022 и вычислительный кабинет, оборудованный новейшей техникой, предназначенной для удобного и быстрого общения с компьютером.

Студенты отделения проходят практику в научно-исследовательских институтах Госплана СССР, Госснаба СССР, в Центральном экономико-математическом институте, Всесоюзном научно-исследовательском институте системных исследований, в экономических учреждениях стран народной демократии, в Институте системного анализа в Вене и во многих других интересных для экономиста местах.

Лучшие выпускники направляются для дальнейшего повышения квалификации в аспирантуру. Остальные выпускники работают, как пра-

вило, в плановых и статистических органах, научно-исследовательских институтах, преподают в вузах.

Чтобы читатель мог составить себе представление о требованиях вступительного экзамена по математике, ниже публикуется экзаменационный вариант, предлагавшийся тем, кто окончил среднюю школу в 1977 году.

1. Решить уравнение

$$\frac{\cos x}{(x + 3/2)^2} = |\cos x|.$$

2. Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выехал велосипедист. В тот момент, когда он проехал  $1/4$  пути между  $A$  и  $B$ , из  $B$  в  $A$  выехал мотоциклист, который, прибыв в  $A$ , не задерживаясь, повернул обратно и одновременно с велосипедистом прибыл в  $B$ . Время движения мотоциклиста до первой встречи с велосипедистом равно времени движения мотоциклиста из  $A$  в  $B$ . Считая скорости мотоциклиста при движении из  $A$  в  $B$  и из  $B$  в  $A$  различными, найти, во сколько раз скорость мотоциклиста при движении из  $A$  в  $B$  больше скорости велосипедиста.

3. Определить, при каких  $a$  система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1 + a), \\ (x + y)^2 = 14 \end{cases}$$

имеет в точности два решения.

4. В круг радиуса  $R$  вписана трапеция так, что центр круга лежит внутри трапеции. Одно из оснований трапеции равно  $R\sqrt{3}$ . Найти боковую сторону трапеции так, чтобы площадь трапеции была наибольшей.

5. В треугольной пирамиде  $SA_1A_2A_3$  на сторонах основания  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$ ,  $A_3A_1$  выбраны, соответственно, точки  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  так, что

$$|A_1K_1| : |K_1A_2| = |A_2K_2| : |K_2A_3| = |A_3K_3| : |K_3A_1| = 2.$$

Через середину ребра  $SA_1$  параллельно основанию пирамиды проведена плоскость  $\pi$ , которая пересекает отрезки  $SK_1$ ,  $SK_2$ ,  $SK_3$  в точках  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  соответственно. Треугольник  $L_1L_2L_3$  принят за верхнее основание призмы, нижнее основание которой лежит в плоскости основания пирамиды. Найти объем призмы, если объем пирамиды  $SA_1A_2A_3$  равен  $V$ .



## Новая книга по истории астрономии

«Астрономия вчера и сегодня» — так называется книга И. А. Климишина, вышедшая в свет в 1977 году\*). Как видно из названия, книга посвящена истории астрономии. И хотя ограниченный объем книги не позволил автору рассказать о развитии всех отделов астрономии, но перед читателем отчетливо предстает история формирования современных представлений о строении окружающего нас мира.

Книга состоит из трех частей. Первая из них — «Рассвет науки» — посвящена зарождению астрономии, астрономическим представлениям народов Вавилона, Древнего Египта и Древнего Китая. В ней рассказывается о космологии античного мира, астрономии у арабов и народов Средней Азии; подробно рассказывается об идеях Аристотеля и Аристарха Самосского, работах Гиппарха и Птолемея. Описываются и некоторые астрономические инструменты древности. Эта часть книги прослеживает развитие астрономической науки в Европе вплоть до XV века.

Вторая часть — «Эпоха титанов» — охватывает период с XVI по XIX век, когда трудами Коперника, Бру-

но, Галлея, Тихо Браге, Кеплера, Ньютона, Ломоносова, Вильяма и Джона Гершелей, Струве и многих других ученых закладывались основы современной астрономии, обрисовывалась структура Солнечной системы, а затем и мира звезд. Попутно рассказывается о новых инструментах, об изобретении телескопов.

Часть третья — «Горизонты XX века» — начинается с описания методов и инструментов астрономии нашего времени. В этой части читатель найдет увлекательный рассказ о гигантских оптических и радиотелескопах, о том, что удалось узнать с помощью этих инструментов о многообразном мире звезд, туманностей, галактик, о недавно открытых чрезвычайно интересных объектах — пульсарах и квазарах. В разделах, посвященных космологии и космогонии, излагаются представления о структуре и эволюции Вселенной и отдельных ее объектов. Эти разделы написаны весьма сжато и, наверное, они представят определенную трудность для читателя.

Завершается книга кратким изложением современных представлений о возможности существования жизни (в том числе и разумной) за пределами Земли и о проблеме связи с внеземными цивилизациями.

Приложенный к книге небольшой, но хорошо подобранный список литературы поможет читателю наметить дальнейший круг чтения для расширения знаний в области астрономии.

За последние годы вышло несколько научно-популярных книг по астрономии, написанных И. А. Климишиным. Все эти книги отличает тщательный подбор материала, продуманное изложение и стремление как можно глубже проникнуть в физическую сущность описываемых явлений. И в этом смысле книгу «Астрономия вчера и сегодня» с полным правом можно отнести к числу лучших научно-популярных изданий по истории науки. Она дает достаточно полное и



глубокое представление об астрономических картинах мира, соответствующих различным этапам развития астрономии, о трудах выдающихся деятелей науки о Вселенной. Автор приводит отрывки из их работ, что, несомненно, является еще одним достоинством книги. И дело не только в том, что цитируемые источники в большинстве своем труднодоступны даже для тех любителей астрономии, которые имеют возможность в любое время посетить большую городскую библиотеку, как пишет автор в предисловии. Главное, эти отрывки позволяют читателю проникнуть в ход рассуждений ученого и, таким образом, глубже понять существо описываемой проблемы.

Читателям «Кванта», несомненно, эта книга принесет много пользы и доставит истинное удовольствие.

Книга привлечет внимание всех интересующихся историей астрономии и вообще историей науки. Она, несомненно, заслуживает переиздания. При этом представляется целесообразным расширить третью часть книги — рассказа о современной астрономии.

И. Р.

\* ) И. А. К л и м и ш и н .  
Астрономия вчера и сегодня.  
«Наукова думка», 1977,  
255 с., ц. 62 к.

Ответы, указания, решения



Напряженность, напряжение, потенциал

1. Не может, иначе работа по перемещению заряда по замкнутому контуру была бы отлична от нуля.

2. При  $R_1 > r > 0$   $E = 0$  и  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2} \right)$ ; при  $R_2 > r > R_1$   $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2}$  и  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{r} + \frac{Q_2}{R_2} \right)$ ;

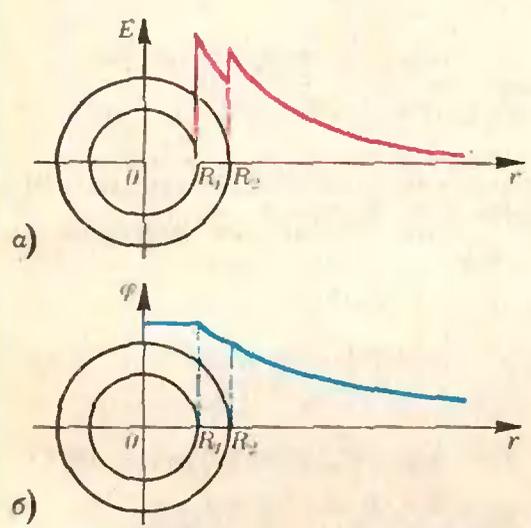


Рис. 1.

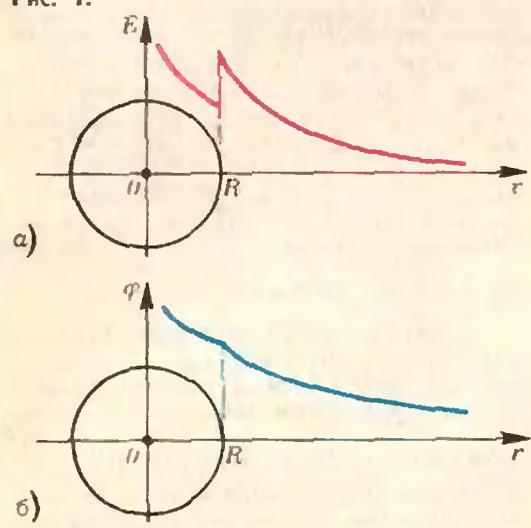


Рис. 2.

при  $r > R_2$   $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 + Q_2}{r^2}$  и  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 + Q_2}{r}$  (рис. 1).

3. При  $R > r > 0$   $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$  и  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r} + \frac{Q}{R} \right)$ ; при  $r > R$   $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q + Q}{r^2}$  и  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q + Q}{r}$  (рис. 2).

4. Энергия конденсатора не изменяется; изменяется энергия взаимодействия электрона и конденсатора (работа по перемещению электрона в бесконечность из начальной и конечной точек не одна и та же).

5.  $W_1 = CU^2/2$ ,  $W_2 = CU^2/4$ ; ровно половина энергии перешла в тепло (независимо от сопротивления подводящих проводов).

6.  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{d}$  (потенциал сферы такой же, как в ее центре, а там суммарный потенциал поля индуцированных на сфере зарядов равен нулю).

Производная и касательные

1. а)  $y = -x + \pi/2$ ,  $y = -1$ ; б)  $y = x$ .

2.  $\pi/4$ . 3.  $\beta = \arctg \frac{3}{4}$ . Указание. Кривые пересекаются в точках  $M_0(2; 2)$  и  $M_1(0; 0)$ , но во втором случае идет касательной к первой кривой, так как функция  $\sqrt{2x}$  не определена при  $x < 0$ .

4.  $M_0(0; -1)$  и  $M_1(4; 3)$ . 5.  $y = -4x + 5$ . 6. а)  $M_0(2; -1)$ ; б)  $M_1(2.5; -0.75)$ . 7.  $M_0(1; -3)$ . 8.  $M_0(1/8; -1/16)$ . Указание. Для прямой  $k = 4/3$ , для касательной должно быть  $k_1 = -3/4$ . Кривая является объединением графиков функций  $\sqrt{2x^{3/2}}$  и  $-\sqrt{2x^{3/2}}$ .

9. а) 4,5. Указание. Уравнение касательной имеет вид  $y = -x + 3$ , она пересекает данную кривую в точках с абсциссами  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 1$ . б)  $4/3$ . Указание. Здесь касательная  $y = x + 2$ , она пересекает параболу в точках с абсциссами  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$ . 10.  $b = -2$ ,  $c = 0$ . Указание.  $y = 0$  при  $x = 2$ , откуда из уравнения прямой  $b = -2$ ; из уравнения параболы получаем  $c = 0$ . Заметим, что касательная здесь ни при чем (хотя задачу можно решать и используя уравнение касательной, ответ будет тот же, прямая  $y = 2x - 4$  «случайно» оказывается касательной к параболе  $y = x^2 - 2x$ ). 11.  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 5$ . 12.  $y = -4x + 7$ .

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Математико-механический факультет

1. Если  $p > 0$ , то  $a \in \left[ p; \frac{32}{27} p^3 + p \right]$ .

Если  $p = 0$ , таких  $a$  нет. Если  $p < 0$ , то

$$a \in \left[ \frac{32}{27} \rho^3 + \rho; \rho \right]. 2. \left\{ -\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12} \right\}. 3. C_9^5 = 126$$

способов. 4.  $\frac{23 - \sqrt{17}}{16} R$ .

$$5. \left( \sqrt{6}; -\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{2} \right).$$

**Факультет прикладной математики — процессов управления**

$$1. \left[ \frac{3}{4}; +\infty \right]. 2. \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\}.$$

3. Указание. Либо в какой-то урне 3 шара и в 9 урнах — по 1 шару, либо в каких-то двух урнах — по 2 шара и в 8 урнах — по 1 шару. Ответ. 26 250 вариантов.

$$4. \frac{3}{16}. 5. (4; 3; -5).$$

**Физический факультет**

1. Если за начало координат принять начальное положение электрона, ось абсцисс направить перпендикулярно обкладкам конденсатора в сторону начального смещения электрона и ось ординат направить перпендикулярно вниз, то

$$\begin{cases} x = \frac{Ae}{m\omega^2} - \frac{Ae}{m\omega^2} \cos \omega t, \\ y = \frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

$$2. \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)a, \frac{\sqrt{3}}{3}a, \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)a.$$

$$3. \left\{ \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3}, -\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3}, \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} \arccos \left(-\frac{1}{4}\right), \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2} \arccos \left(-\frac{1}{4}\right) \right\}.$$

4. Легко установить взаимно однозначное соответствие между способами размещения  $n$  одинаковых шаров по  $k$  (различным) ящикам и способами размещения  $n+k$  одинаковых шаров по  $k$  ящикам, при которых в каждом ящике лежит хотя бы по одному шару. Число этих последних способов равно числу способов размещения  $k-1$  перегородок между положенными в ряд  $n+k$  шарами. Между  $n+k$  шарами  $n+k-1$  мест. Ответ.  $C_{n+k-1}^{k-1}$ .

$$5. \frac{bc}{2a} \cdot \frac{ac}{2b} \cdot \frac{ab}{2c}.$$

**Отделение экономической кибернетики и отделение планирования народного хозяйства экономического факультета, химический факультет и факультет психологии**

1. Если  $0 < a < 1$ , то  $x \in ]0; a^8[$ . Если  $a > 1$ , то  $x \in ]0; \frac{1}{a^8}[$ . 2.  $\left\{ 0, \frac{\pi}{2}, 2\pi \right\}$ .

3. Указание. Такие числа могут быть однозначными, двузначными, трехзначными и четырехзначными. Ответ. 5274 числа.

$$4. \frac{200}{243}. 5. \frac{4}{3} R, \frac{8\sqrt{3}}{9} \pi R^2.$$

**Биолого-почвенный и географический факультеты**

$$1. \left[ 1; \frac{3}{2} \right]. 2. \left\{ -\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6} \right\}.$$

$$3. 31. 4. \left( 0; \frac{4}{27} \right) \text{ и } \left( -\frac{2}{27}; 0 \right).$$

$$5. \sqrt{\frac{S}{\pi\sqrt{3}}}.$$

**Геологический факультет и отделение полнэкономии экономического факультета**

$$1. \left] \frac{5 - \sqrt{13}}{6}; +\infty \right[. 2. \left\{ -\frac{\pi}{8}, -\frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{8} \right\}. 3. \frac{1}{9}. 4. 2 \ln 2.$$

$$5. (-48; 64; 60).$$

**Отделение планирования и экономической кибернетики экономического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова**

1. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos x \geq 0, \\ \cos x \cdot \left[ \frac{1}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2} - 1 \right] = 0. \end{cases}$$

При  $x_0 = -\frac{5}{2}$  имеем  $\cos x_0 < 0$ . Ответ.

$$x = \frac{1}{2}, x = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

2. В 4 раза.

3. Первое уравнение данной системы — это уравнение окружности с центром в начале координат и длиной радиуса  $\sqrt{2(1+a)}$ . Второе уравнение можно преобразовать так:  $(x+y-\sqrt{14})(x+y+\sqrt{14})=0$ , откуда видно, что оно задает на координатной плоскости пару параллельных прямых:  $y = -x + \sqrt{14}$  и  $y = -x - \sqrt{14}$ . Условие задачи выполняется тогда и только тогда, когда указанная окружность касается этих прямых (рис. 3). Ответ.  $\frac{5}{2}$ .

4. Пусть  $ABCD$  — данная трапеция  $(AB) \parallel (CD)$ ,  $|AB| = R\sqrt{3}$ ,  $O$  — центр данного круга (нам не важно, является отрезок  $AB$  большим или меньшим основанием трапеции). Легко видеть, что  $\widehat{AOB} = \frac{2\pi}{3}$  и площадь треугольника  $AOB$  не меняется при изменении боковых сторон трапеции, поэтому будем искать боковую сторону

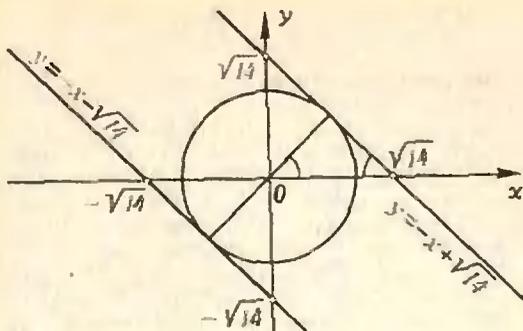


Рис. 3.

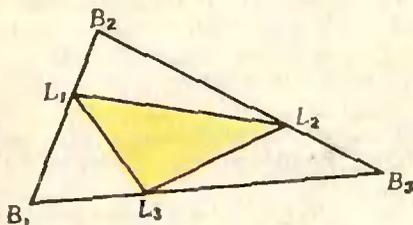


Рис. 4.

треугольнику так, чтобы сумма площадей треугольников  $BOC$ ,  $DOC$  и  $AOD$  была наибольшей. Пусть  $\widehat{BOC} = \widehat{DOA} = \alpha$ . Очевидно,  $0 < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ . Указанная сумма площадей равна  $R^2 \left[ \sin \alpha + \frac{1}{2} \sin \left( \frac{4\pi}{3} - 2\alpha \right) \right]$ . При помощи производной находим, что она будет наибольшей при  $\alpha = \frac{4\pi}{9}$ . Поскольку

$|BC| = 2R \cdot \sin \widehat{BAC}$  («Геометрия 8», п. 112) и  $\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \widehat{BOC}$ , получаем ответ:

$$|AD| = |BC| = 2R \cdot \sin \frac{2\pi}{9}.$$

5. Рассмотрим сечение  $B_1B_2B_3$  пирамиды плоскостью  $\pi$  (рис. 4). Выразим площадь  $S_{L_1L_2L_3}$  основания призмы через площадь  $S$  основания пирамиды. Поскольку треугольник  $B_1B_2B_3$  гомотетичен треугольнику  $A_1A_2A_3$  с коэффициентом гомотетии  $\frac{1}{2}$ , получаем  $S_{B_1B_2B_3} = \frac{1}{4} S$ . Из

$$\begin{aligned} \frac{S_{L_1B_2L_2}}{S_{B_1B_2B_3}} &= \\ &= \frac{\frac{1}{2} |L_1B_2| \cdot |B_2L_2| \cdot \sin \widehat{L_1B_2L_2}}{\frac{1}{2} |B_1B_2| \cdot |B_2B_3| \cdot \sin \widehat{B_1B_2B_3}} = \\ &= \frac{|L_1B_2|}{|B_1B_2|} \cdot \frac{|B_2L_2|}{|B_2B_3|} \end{aligned}$$

получаем  $S_{L_1B_2L_2} = \frac{2}{9} S_{B_1B_2B_3} = \frac{1}{18} S$ .

Аналогично,  $S_{L_2B_3L_3} = S_{L_3B_1L_1} = \frac{1}{18} S$ .

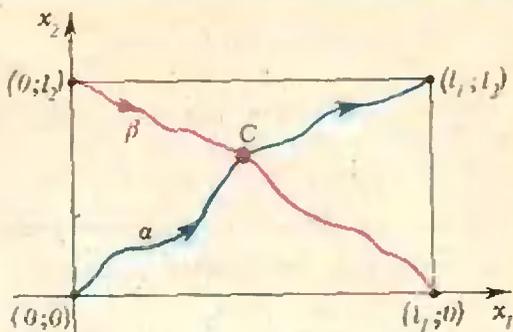


Рис. 5.

Следовательно,  $S_{L_1L_2L_3} = \frac{1}{12} S$ . Ответ:  $\frac{1}{8} V$ .

### Арифметика и геометрия столкновений

(см. «Квант» № 4)

1. Если  $x_1, x_2$  — координаты шаров, то конфигурационным пространством будет треугольник  $\{(x_1, x_2) | 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq a\}$  на плоскости  $Ox_1x_2$ . Чтобы точка  $M(x_1, x_2)$  отражалась от гипотенузы по закону «угол падения равен углу отражения», нужно вместо  $x_1, x_2$  ввести координаты  $\tilde{x}_1 = \sqrt{m_1} x_1$ ,  $\tilde{x}_2 = \sqrt{m_2} x_2$ ; тем самым система сведется к бильярду в прямоугольном треугольнике с отношением катетов  $\sqrt{m_1} : \sqrt{m_2}$ .

2. Введем вдоль обеих дорог координаты  $x_1$  и  $x_2$ , отсчитываемые от пункта  $A$ . Одновременное расположение двух движущихся по дорогам объектов в точках  $x_1$  и  $x_2$  будем обозначать точкой  $M = M(x_1, x_2)$  на плоскости  $Ox_1x_2$ . При одновременному движению объектов точка  $M$  будет перемещаться по конфигурационному пространству, которое представляет собой прямоугольник

$P = \{(x_1, x_2) | 0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2\}$  ( $l_1$  и  $l_2$  — длины дорог). Движению машин отвечает движение точки  $M$  по некоторой кривой  $\alpha$ , идущей из точки  $(0; 0)$ , соответствующей одновременному положению машин в пункте  $A$ , в точку  $(l_1, l_2)$ , соответствующую прибытию обеих машин в пункт  $B$  (см. рисунок). Встречному движению везов отвечает движение точки  $M$  по кривой  $\beta$ , соединяющей две другие вершины прямоугольника  $P$  (объясните). Кривые  $\alpha$  и  $\beta$  обязаны пересечься в некоторой точке  $C$ , и в соответствующий момент времени везы радиусов  $r$  окажутся ровно в тех же положениях, в каких были машины, связанные веревкой длины меньше  $2r$ . Следовательно, везы развехаться не смогут.

### Читатели советуют

(см. «Квант» № 4)

$$1. x_{1,2} = \arctg(2 - \sqrt{3}) + \pi n;$$

$$x_{3,4} = \arctg \frac{338 \pm \sqrt{113519}}{25} + \pi k \quad (n, k \in \mathbb{Z}).$$

Указание. Воспользоваться формулой

$$\frac{1}{|\cos x|} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

и после подстановки  $\operatorname{tg} x = y$  прийти к уравнению

$$\sqrt{1+y^2} + \sqrt{6(1+y)} = 8\sqrt{y}.$$

Для решения последнего уравнения удобно сделать замену неизвестного  $\frac{y+1}{\sqrt{y}} = z$ .

2.  $x_1 = -24, x_2 = 3$ . Указание. Ввести вспомогательные неизвестные  $u = \sqrt[3]{24+x}, v = \sqrt{12-x}$ , прийти к системе

$$u+v=6, u^3+v^2=36$$

и исключить из нее  $v$ .

3.  $x=y=z=2$ . Указание. Заметить, что второе уравнение системы можно переписать в виде

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2 = 0,$$

откуда следует, что  $x=y=z$ .

4.  $x=1$ .

$$5. x_1 = 1, x_{2,3} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5}).$$

Указание.

$$x^3 - 2x + 1 = (x^3 - x^2) + (x^2 - 2x + 1).$$

$$6. x_{1,2} = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{13}).$$

Указание.

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 =$$

$$= (x^4 + 4x^3 + 4x^2) - (x^2 - 2x + 1).$$

$$7. x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}. \text{ Указание.}$$

Левую часть данного уравнения приравнять произведению двух квадратных трехчленов

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

с неопределенными коэффициентами и подобрать эти коэффициенты.

8.  $m:n \cos \alpha$ . Указание. Пусть высота  $BE$ , проведенная к стороне  $AD$ , пересекает диагональ  $AC$  в точке  $K$ . Заметить, что  $\triangle AKE \sim \triangle CKB$ ; величину  $|AE|$  найти из треугольника  $AEB$ .

$$9. 2(2 - \sqrt{3})a. \text{ Указание.}$$

Пусть  $L$  — центр одного из полукругов, а  $O$  — центр искомого круга. Обозначим через  $T$  точку пересечения прямой, проходящей через точку  $O$  параллельно стороне квадрата, на которой лежит точка  $L$ , с радиусом полукруга, перпендикулярным упомянутой стороне квадрата. К треугольнику  $LTO$  применить теорему Пифагора.

$$10. \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \varphi). \text{ Указание.}$$

Пусть  $M$  — основание перпендикуляра, опущенного в плоскости  $P$  из точки  $B$  на ребро двугранного угла, а  $N$  — основание перпендикуляра, опущенного в плоскости  $Q$  из точки  $C$  на это ребро. Тогда

$$\vec{AB} = \vec{AM} + \vec{MB}, \vec{AC} = \vec{AN} + \vec{NC}.$$

Вычислить скалярное произведение  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  и воспользоваться тем, что  $[AB] \perp [AC]$ .

11.  $\frac{2}{3}R(1+2\cos \alpha)$ . Указание. Пусть  $SABC$  — данная пирамида;  $[SH]$  — ее высота, опущенная на грань  $ABC$ ; точка  $O$  — центр описанного шара; точка  $M$  — середина бокового ребра  $[SA]$ . Доказать, что точка  $O$  лежит на высоте  $[SH]$  и что  $[OM] \perp [SA]$ . Провести апофему  $[SD]$  грани  $SAB$  и построить прямоугольный треугольник  $HDA$ . Введем вспомогательный угол

$\widehat{ASH} = x$ ; тогда из треугольников  $SHA$ ,  $HDA$  и  $SDA$

$$\sin x = \frac{\sin \alpha/2}{\cos 30^\circ}.$$

Далее, из треугольника  $SMO$  выразить  $[SM]$ , а из треугольника  $SHA$  найти  $[SH]$ .

$$12. \frac{d^3}{3 \sin \frac{3\alpha}{2}}. \text{ Указание.}$$

Пусть  $SABC$  — данная пирамида, а  $[SH]$  — ее высота, опущенная на грань  $ABC$ . Провести апофему  $[SD]$  грани  $ASB$  и доказать, что длина перпендикуляра  $[DM]$ , опущенного из точки  $D$  на ребро  $[SC]$ , равна  $d$ . Введем

вспомогательный угол  $\widehat{SAH} = x$ ; тогда из треугольников  $SHA$ ,  $SDA$  и  $HDA$

$$\cos x = \frac{\sin \alpha/2}{\cos 30^\circ}.$$

Далее заметить, что  $\widehat{SCD} = x$ , и выразить  $|CD|$ ,  $|AD|$  и  $|SH|$  из треугольников  $CMD$ ,  $HDA$  и  $SHC$  соответственно, используя вспомогательный угол.

$$13. \operatorname{arcsin}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{\alpha}{2}\right). \text{ Указание.}$$

Пусть  $SABC$  — данная пирамида. Построим линейные углы  $\angle AMC$  и  $\angle SNC$  двугранных углов; доказать, что прямая  $(CD)$  пересечения плоскостей  $AMC$  и  $SNC$  перпендикулярна плоскости  $ASB$ . Показать,

что  $\widehat{DCA} = \alpha/2$ , и обозначить  $\widehat{SNC} = x$ . Тогда из треугольников  $ADC$ ,  $NDC$  и  $ANC$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{|CD|}{|CA|} = \frac{\frac{|CD|}{|CN|}}{\frac{|CA|}{|CN|}} = \frac{\sin x}{\cos 30^\circ}.$$

Московский физико-технический институт

(см. «Квант» № 4)

Математика

Вариант I

$$1. \operatorname{arctg} 2 + \pi k (k \in \mathbb{Z}). 2.] - \infty;$$

$$-\frac{\sqrt{7}}{2} [U] - 1; \frac{\sqrt{7}}{2} [U] \frac{4}{3}; + \infty [U].$$

3. Указание. Перенести все в левую часть и разложить на множители или разделить обе части на  $\lg^2(x + \frac{1}{2})$  и решить получившееся вспомогательное квадратное уравнение. Ответ.  $\{0, \frac{7}{4}, \frac{3+2\sqrt{6}}{2}\}$ .

4.  $\frac{b + \sqrt{b^2 + 4ab}}{2}$  км.

5. Пусть  $[KN] \parallel (SAD)$ ,  $K \in [BD]$ ,  $N \in [SC]$  (рис. 6). Обозначим  $|DK|:|DB|$  через  $x$ . Тогда  $0 \leq x \leq 1$ . Проведем отрезок  $[KP]$  параллельно  $[AD]$  ( $P \in [DC]$ ). Поскольку  $(KNP) \parallel (ASD)$ , имеем  $(PN) \parallel (SD)$ . Из подобия треугольников  $DKP$  и  $DBC$  получаем  $|PK| = xa$ ,  $|DP| = xa$ . Поскольку  $|PC| = (1-x)a$ , из подобия треугольников  $PCN$  и  $DCS$  находим  $|PN| = 2(1-x)a$ . Из  $\triangle ASD \cos \widehat{SDA} = \frac{1}{4}$ . Поскольку  $\widehat{NPK} = \widehat{SDA}$ , получаем  $\cos \widehat{NPK} = \frac{1}{4}$ . Из  $\triangle KNP$  по теореме косинусов находим

$$|KN|^2 = (6x^2 - 9x + 4)a^2. \quad (1)$$

Легко видеть, что верно и обратное: для любого  $x \in [0, 1]$  найдется такой отрезок  $[KN]$ , параллельный плоскости  $(SAD)$ , что  $K \in [BD]$ ,  $N \in [SC]$  и  $|DK|:|DB| = x$ . Таким образом, равенство (1) задает квадрат длины отрезка  $KN$  как функцию, определенную на  $[0; 1]$ . Найдя при помощи производной наименьшее значение этой функции на отрезке  $[0; 1]$ , получим  $\min |KN|^2 = \frac{5}{8}a^2$ . Впрочем, поскольку исследуемая функция является квадратичной, ее наименьшее значение можно найти и без производной, если воспользоваться тем, что функция  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ , у которой  $\alpha > 0$ , принимает наименьшее значение при

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha}. \quad \text{Ответ. 1) } |MN| = \sqrt{\frac{5}{3}}a; \quad 2) \min |KM| = \sqrt{\frac{5}{8}}a.$$

6. Пусть  $\triangle MNP$  удовлетворяет условиям задачи, и пусть  $Q(x_0; y_0)$  — середина гипотенузы  $MN$  (рис. 7.) Обозначим  $|MQ|$  через  $a$ . Координаты вершин треугольника  $MNP$  легко выражаются через  $x_0, y_0$  и  $a$ :  $M(x_0 - a; y_0)$ ,  $N(x_0 + a; y_0)$ ,  $P(x_0; y_0 - a)$ . Учитывая, что точки  $M$  и  $P$  лежат на графике функции  $y = \frac{1}{x}$ , а точка  $N$

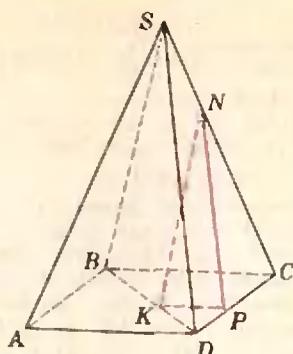


Рис. 6

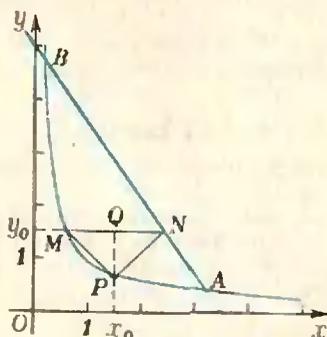


Рис. 7.

на графике функции  $y = 5 - \frac{3}{2}x$ , получаем систему 3 уравнений с 3 неизвестными. Ответ.  $\frac{5}{3}, \frac{5\sqrt{2}}{6}, \frac{5\sqrt{2}}{6}$ .

Вариант 2

1. -17. 2.  $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, x = (-1)^{l+1} \cdot \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}l (k, l \in \mathbb{Z})$ .
3.  $\frac{a \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$ . 4. 2, 4, 8, 12 и  $\frac{25}{2}, \frac{15}{2}$ .
- $\frac{9}{2}, \frac{3}{2}$ . 5. 1)  $\frac{a\sqrt{3} \sin \alpha}{4 \sin \beta}$ ;  
2)  $\frac{a\sqrt{3} \sin \alpha}{4(\sin \alpha + \sin \beta)}$ .

6. Заметим, что если точка  $M(x; y)$  удовлетворяет данной системе неравенств, то точка  $M'(-x; y)$ , симметричная  $M$  относительно оси  $Oy$ , также будет удовлетворять этой системе. Следовательно, фигура, задаваемая системой, симметрична относительно оси  $Oy$ , и ее площадь равна удвоенной площади части этой фигуры, выделяемой условием  $x \geq 0$ . Поэтому рассмотрим систему неравенств при дополнительном условии  $x \geq 0$ .

Второе неравенство системы при  $x \geq 0$  можно записать в виде  $y \geq 2\sqrt{3}x - 4$ . Обра-

тимся теперь к первому неравенству

$$\sqrt{3x^2 + 3y^2 - 3} \geq 2y + 1. \quad (2)$$

Областью определения левой части является множество точек на координатной плоскости, удовлетворяющих условию

$$x^2 + y^2 \geq 1. \quad (3)$$

Рассмотрим два случая: а)  $2y + 1 < 0$  и б)  $2y + 1 \geq 0$ . В случае а) неравенства (2) и (3) равносильны, поскольку при условии (3) очевидным образом выполняется и (2).

В случае б) обе части неравенства (2) неотрицательны, поэтому, возведя обе части в квадрат, получим неравенство

$$3x^2 + 3y^2 - 3 \geq (2y + 1)^2, \quad (4)$$

которое можно привести к виду

$$(y + 2 - \sqrt{3}x)(y + 2 + \sqrt{3}x) \leq 0.$$

Поскольку  $x \geq 0$  и  $2y + 1 \geq 0$ , выражение  $y + 2 + \sqrt{3}x$  всегда положительно; сокращая на него, получим

$$y + 2 - \sqrt{3}x \leq 0.$$

Заметим, что в случае б) из (4) вытекает неравенство (3).

Окончательно получаем, что исходная система при условии  $x \geq 0$  в соответствии с разобранными выше случаями а) и б) равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} \text{а) } \begin{cases} y < -\frac{1}{2}, \\ x^2 + y^2 \geq 1, \\ y \geq 2\sqrt{3}x - 4; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} y \geq -\frac{1}{2}, \\ y \leq \sqrt{3}x - 2, \\ y \geq 2\sqrt{3}x - 4. \end{cases} \end{cases}$$

Построим теперь на координатной плоскости фигуру, которая задается совокупностью систем а) и б) при условии  $x \geq 0$ . Для этого исследуем взаимное расположение

прямых с уравнениями  $y = -\frac{1}{2}$ ,  $y = \sqrt{3}x - 2$ ,  $y = 2\sqrt{3}x - 4$  и окружности  $x^2 + y^2 = 1$ . Прямые  $y = \sqrt{3}x - 2$  и  $y = 2\sqrt{3}x - 4$  пересекают ось  $Oy$  в точках  $A(0; -2)$  и  $E(0; -4)$  соответственно, а ось  $Ox$  в одной и той же точке  $B\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; 0\right)$  (рис. 8). Докажем, что прямая  $(AB)$  касается окружности  $x^2 + y^2 = 1$ . Из точки  $O$  опустим перпендикуляр  $[OC]$  на  $(AB)$ , а из точки  $C$  — перпендикуляр  $[CF]$  на  $(OA)$ . Заметим, что  $\widehat{OAB} = 30^\circ$ . Тогда из прямоугольных треугольников  $ACO$  и  $CFO$  получим  $|OC| = 1$ ,  $|OF| = \frac{1}{2}$ ,  $|CF| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Отсюда следует, что прямая  $(AB)$  касается окружности в точке  $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ , а прямая  $y = -\frac{1}{2}$  проходит через точку касания.

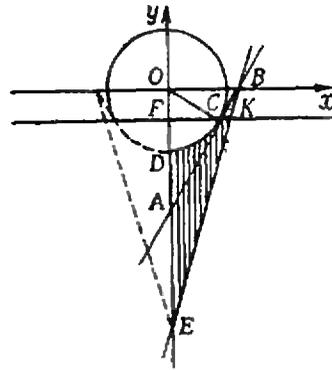


Рис. 8.

Система а) при условии  $x \geq 0$  задает пересечение четырех множеств: первое множество состоит из точек, расположенных ниже прямой  $(CF)$ , второе — из точек, расположенных вне окружности  $x^2 + y^2 = 1$  и на самой окружности, третье — из точек, расположенных выше прямой  $(BE)$  и на самой прямой, четвертое — из точек, расположенных правее оси  $Oy$  и на самой оси. Это пересечение дает фигуру  $DCKE$  (на рис. 3 она указана вертикальной штриховкой). Аналогично получаем, что система б) задает треугольник  $BCK$ , включая его стороны (на рис. 8 он указан горизонтальной штриховкой). Таким образом, исходная система неравенств при условии  $x \geq 0$  задает фигуру  $CBED$ , ограниченную отрезками  $[CB]$ ,  $[BE]$ ,  $[ED]$  и дугой окружности  $DC$ . Ее площадь можно вычислить по формуле

$$S = S_{\Delta ABE} + S_{\Delta AOC} - S_C,$$

где  $S_C$  — площадь сектора  $COD$  с центральным углом, равным по величине  $60^\circ$ . Таким образом,

$$S = \frac{1}{2} |AE| \cdot |OB| + \frac{1}{2} |AO| \cdot |CF| - \frac{\pi}{6} = \frac{7\sqrt{3} - \pi}{6}.$$

Пунктирная линия вместе с отрезком  $[DE]$  на рис. 8 ограничивает часть фигуры, задаваемой исходной системой при условии  $x < 0$ .

Ответ:  $\frac{7\sqrt{3} - \pi}{3}$ .

**Физика**

**Вариант 1**

1.  $|\vec{v}| = |\vec{F}_{\text{тяж}}| \Delta t / 2 m = 1 \text{ м/с.}$

2.  $\tau = 30 \text{ мин.}$

3.  $q_1 = \frac{C_1 C_2 (U_0 + |\vec{E}_0| d)}{C_1 + C_2};$

$q_2 = \frac{C_1 C_2 (U_0 C_2 / C_1 - |\vec{E}_0| d)}{C_1 + C_2}$ . Указа-

ние. Записать закон сохранения заряда:  $q_1 + q_2 = C_2 U_0$  и закон сохранения энергии (работа по перемещению заряда по замкнутому контуру в электростатическом поле

равна нулю):  $q_1/C_1 - |\vec{E}_0|d - q_2/C_2 = 0$ .

$$4. t = \frac{d_0}{2(1 - d_0 D)} = 6,25 \text{ см (здесь}$$

$d_0 = 25 \text{ см}$  — расстояние наилучшего зрения для нормального глаза).

Вариант 2

$$1. |\vec{F}| = \frac{m|g|}{2} \left( \frac{a}{b} \cos \alpha - \sin \alpha \right).$$

$$2. m_{\text{min}} = \rho_B h_1 S_2 = 3 \text{ кг (здесь } \rho_B = 10^3 \text{ кг/м}^3 \text{ — плотность воды).}$$

$$3. P = \frac{U^2}{2} \left( \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} \right) = 423,5 \text{ Вт}$$

(здесь  $R' = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$  — сопротивление цепи при протекании тока слева направо,

$$\text{а } R'' = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} \text{ — при протекании}$$

тока справа налево).

$$4. \text{Зеркало вогнутое (см. рис. 9).}$$

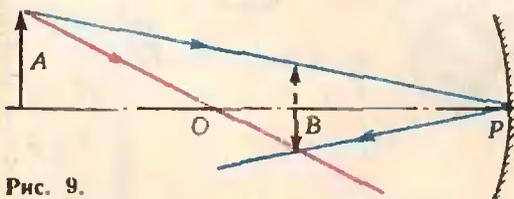


Рис. 9.

Вариант 3

$$1. |\vec{v}_{\text{max}}| = \sqrt{k|g|R} = 20 \text{ м/с} = 72 \text{ км/ч.}$$

$$2. N = N_0 \frac{\rho S v}{RT} \approx 6 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}. \text{ Приме-}$$

чание. При решении задачи предполагалось, что молекулы воздуха неподвижны. Это предположение справедливо, так как средняя квадратичная скорость молекул воздуха много меньше скорости спутника.

$$3. U \leq \frac{v^2 \cos^2 \alpha}{c/m} = 142 \text{ В.}$$

$$4. d = F(1 + h/p) = 225 \text{ см.}$$

Вариант 4

$$1. k \geq \frac{(|v| - 2\pi n R)^2}{R|g|} \approx 0,4.$$

$$2. T_1 = \frac{A}{R(k-1)}.$$

$$3. |\vec{v}_{\text{min}}| = \frac{\sqrt{2e/mU}}{\cos \alpha} \approx 9 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

$$4. \text{Изображение мнимое.}$$

Куйбышевский государственный университет (см. «Квант» № 3)

### Математика

Варианты письменного экзамена  
Механико-математический факультет

1. Пусть  $SABC$  — данная пирамида (см. рис. 10). Из точки  $A$  опустим перпендикуляр  $AH$  на  $SC$  ( $H \in \{SC\}$ ). Тогда

$SH \perp HB$ . Следовательно,  $\widehat{AHB} = \alpha$ . Из точки  $C$  опустим перпендикуляр  $CM$  на  $AB$  ( $M \in \{AB\}$ ). Из  $|AM| = |MB|$  и  $|AH| = |HB|$  вытекает  $HM \perp AB$ . Поскольку пирамида  $SABC$  правильная, основание  $L$  ее

высоты лежит на  $CM$ . Обозначим  $|MB|$  через  $a$ ,  $|SL|$  через  $h$ ,  $\widehat{LSC}$  через  $\beta$ . Из  $SH \perp HA$  и  $SH \perp HB$  следует  $SH \perp HM$ . Из  $SH \perp HM$  и  $SL \perp MC$  вытекает  $\widehat{HMC} = \widehat{LSC} = \beta$ . Учитывая  $|CM| = a\sqrt{3}$ , из  $\triangle SLC$  находим  $h = \frac{2a}{\sqrt{3} \operatorname{tg} \beta}$ . Из  $\triangle HMB$

получаем  $|MH| = \frac{a}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$ . Тогда из  $\triangle MHC$

$$\text{имеем } \cos \beta = \frac{|MH|}{|MC|} = \frac{1}{\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

Из  $\triangle MHC$

$$\text{находим } |HC| = a\sqrt{3} \sin \beta. \text{ Обозначим } \widehat{HBC} \text{ через } \gamma. \text{ Из } \triangle HBC \text{ получаем } \sin \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \beta. \text{ Из точки } S \text{ опустим перпендикуляр } SN \text{ на } BC \text{ (} N \in \{BC\}\text{). Из } SN \perp BC \text{ и } SC \perp BH \text{ следует } \widehat{CSN} = \widehat{HBC} = \gamma. \text{ Тогда } \widehat{BSC} = 2\gamma. \text{ Поскольку } |BC| = 2R \cdot \sin \widehat{BSC} \text{ («Геометрия 8», п. 112), } a = R \sin 2\gamma. \text{ Таким образом, мы выразили фактически } a \text{ и } h \text{ через } R \text{ и } \alpha. \text{ Теперь находим}$$

$$V = \frac{1}{3} (\sqrt{3}a^2) h = \frac{R^3}{12} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin^6 \frac{\alpha}{2}} \times$$

$$\left( 3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right).$$

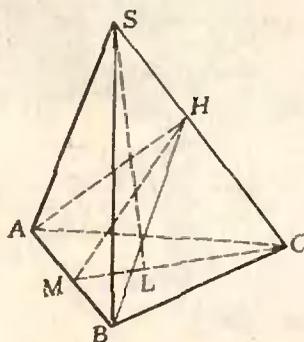


Рис. 10.

2. Уравнение  $\sin \alpha x \cdot \sin \beta x = 1$  равносильно уравнению  $\cos(\alpha + \beta)x - \cos(\alpha - \beta)x = 2$ ; это последнее, в свою очередь, равносильно системе

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta)x = 1, \\ \cos(\alpha - \beta)x = -1. \end{cases}$$

Следовательно,  $x = \frac{2\pi k}{\alpha + \beta} = \frac{\pi(2l + 1)}{\alpha - \beta}$ ,

где  $k, l \in \mathbb{Z}$ . Отсюда  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2k + 2l + 1}{2k - 2l - 1}$ , что противоречит иррациональности  $\frac{\alpha}{\beta}$ .

3. Чтобы исследовать знак производной в окрестности каждой критической точки, удобно первоначальное выражение для производной преобразовать:

$$\begin{aligned} y' &= -\sin x - \sin 2x + \sin 3x = \\ &= 4 \sin x (\cos x - 1) \left( \cos x + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Искомая разность равна  $2\frac{1}{4}$ .

$$\begin{aligned} 4. S &= \int_0^1 \sin \pi x \, dx + \int_0^1 [-4(x^2 - x)] \, dx = \\ &= \frac{2}{\pi} + \frac{2}{3}. \end{aligned} \quad 5. | -5; 8 \cup ] 8; 9 |.$$

#### Физический факультет

1. Введем систему координат с началом  $A$  и базисом  $(\vec{AD}, \vec{AB}, \vec{AA}_1)$ . В этом базисе  $\vec{A_1C} = (1; 1; -1)$ ,  $\vec{AB_1} = (0; 1; 1)$ ,  $\vec{B_1D_1} = (1; -1; 0)$ . Поскольку  $\vec{A_1C} \cdot \vec{AB_1} = 0$  и  $\vec{A_1C} \cdot \vec{B_1D_1} = 0$ ,  $\vec{A_1C} \perp \vec{AB_1}$  и  $\vec{A_1C} \perp \vec{B_1D_1}$ . Значит, прямая  $A_1C$  перпендикулярна к параллельным плоскостям  $AB_1D_1$  и  $BC_1D$ . Следовательно, длины трех отрезков, на которые диагональ  $A_1C$  делится этими плоскостями, равны, соответственно, расстояниям от точки  $A_1$  до плоскости  $AB_1D_1$ , между плоскостями  $AB_1D_1$  и  $BC_1D$  и от точки  $C$  до плоскости  $BC_1D$ . Расстояние от точки  $A_1(0; 0; 1)$  до плоскости  $AB_1D_1$ , уравнение которой  $x + y + z = 0$ , равно  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ . Расстояние от  $C$  до плоскости  $BC_1D$

тоже равно, очевидно,  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ . Но  $|A_1C| = \sqrt{3}$ . Следовательно, на долю расстояния между плоскостями остается  $\frac{1}{3}|A_1C|$ .

$$2. 8\sqrt{2}. \quad 3. \left[ \frac{-7 - 2\sqrt{11}}{5}; \frac{-7 + 2\sqrt{11}}{5} \right].$$

$$4. \left] -\frac{1}{6}; \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[ \frac{5\pi}{3}; 6 \right[.$$

#### Химико-биологический факультет

$$1. \frac{a^3}{12} \cdot \frac{\sin^3 \alpha}{(1 + \cos \alpha)^2}.$$

$$2. S = \int_{-\sqrt{3}}^0 (x^2 - 8x - \sqrt{3}x + 1) \, dx -$$

$$- \int_{-\sqrt{3}}^0 (2x^2 - 8x + 1) \, dx = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad 3. [1; 4].$$

4. Последовательность  $(x_n)$  убывает  $(x_{n+1} < x_n)$  и ограничена  $(x_n > 0)$ .

Из билетов устного экзамена

$$4. x = 5, y = 7. \quad 5. \arctg \frac{\sqrt{17} - 1}{20} +$$

$$+ 2\pi k (k \in \mathbb{Z}) \quad 6. x_1 = -2, x_2 = 3.$$

$$7. x \in \left] \frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{2} + 2\pi k \right[ (k \in \mathbb{Z}).$$

#### Физика

1. Нет. Когда величина угла падения стремится к  $\pi/2$ , величина смещения стремится к толщине пластины. 2.  $l = \frac{3\sqrt{r}}{R + 3r}$ .

$$Q = \frac{C\sqrt{R}}{R + 3r}. \quad 3. |\vec{v}_0| > s \sqrt{2|\vec{g}|/H}.$$

Номер готовили:

А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Соснинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:

М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, А. Пономарева, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор О. Бутусова

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,

«Квант», тел. 231-83-62

Сдано в набор 25/II-78

Подписано в печать 4/IV-78

Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4

Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 6,58 Т-08204

Цена 30 коп. Заказ 306 Тираж 310651

Чеховский полиграфический комбинат

Союзполиграфпрома

при Государственном комитете Совета

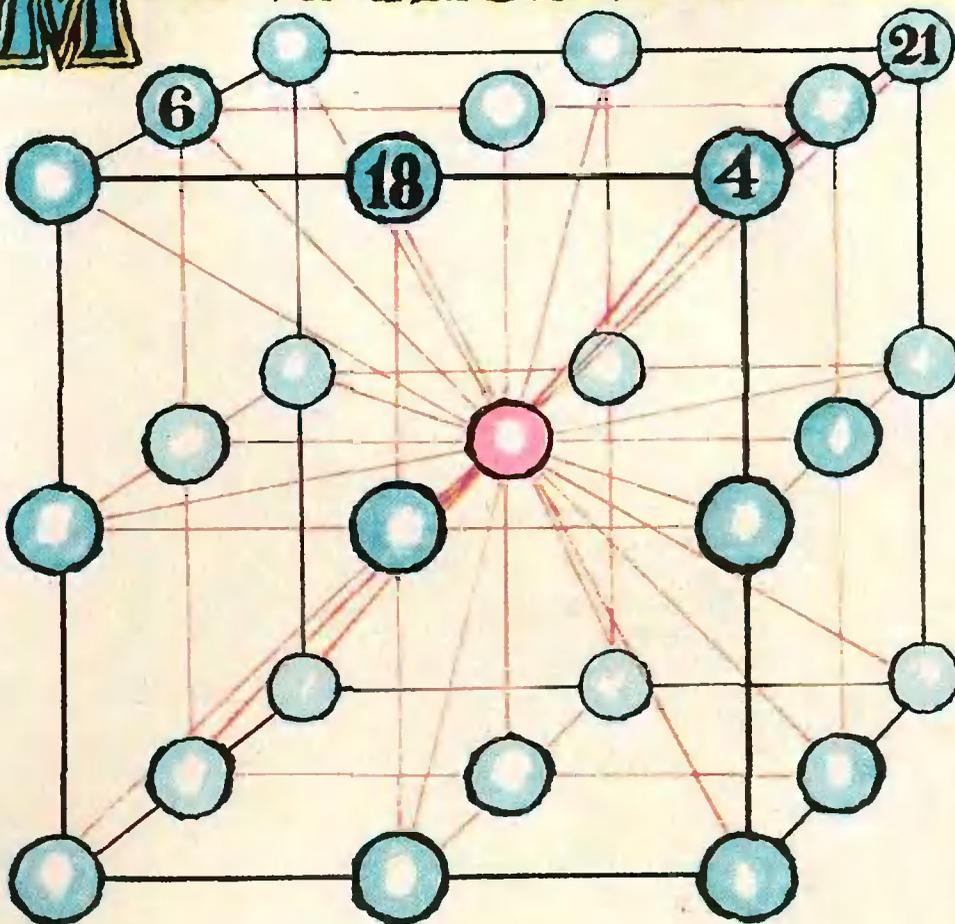
Министров СССР по делам издательства,

полиграфии и книжной торговли

г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

# МАГИЧЕСКИЙ КУБ



На рисунке изображен куб  $3 \times 3 \times 3$ . Числа от 1 до 27 нужно расставить в клетках так, чтобы сумма трех чисел по любому из указанных 37 направлений равнялась 42. После того, как вы это сделаете, попытайтесь решить задачу без подсказки — придумать другую расстановку чисел.

*П. Эрдниев*

## К НАШИМ ЧИТАТЕЛЯМ

В каждом номере нашего журнала в разделе «Задачник «Кванта»» публикуются задачи по физике и по математике. Ежегодно редакция получает несколько тысяч писем от читателей с решениями этих задач. Среди авторов этих писем редакция отбирает школьников, решивших наибольшее число задач и приславших наиболее оригинальные решения. Эти школьники награждаются специальной премией, учрежденной редколлекцией журнала «Квант», и получают право участвовать в Рес-

публиканских олимпиадах по математике и физике наравне с победителями районных и городских олимпиад.

Придумать интересную новую задачу обычно труднее, чем ее решить. Труднее, но интереснее. Попробуйте придумать задачи и пришлите их нам.

Авторы — школьники лучших задач будут награждены специальными премиями «Кванта», а сами задачи будут опубликованы в журнале. Ждем ваших писем.

## К НАШИМ АВТОРАМ

Если Вы решили прислать нам статью, то просим Вас:

1) Перепечатать ее на машинке в двух экземплярах через два интервала и вписать от руки формулы (рукописный текст мы рассматриваем только в том случае, если автор его — школьник).

2) Нарисовать также в двух экземплярах эскизы рисунков (каждый эскиз — на отдельном листе).

3) Если текст Вашей статьи занимает не больше 12 машинописных страниц, то положите его вместе с эскизами в конверт и пришлите нам.

4) Не забудьте сообщить нам полностью Ваши фамилию, имя и отчество, домашний адрес и телефон.

Имейте в виду, что рукописи мы не возвращаем.