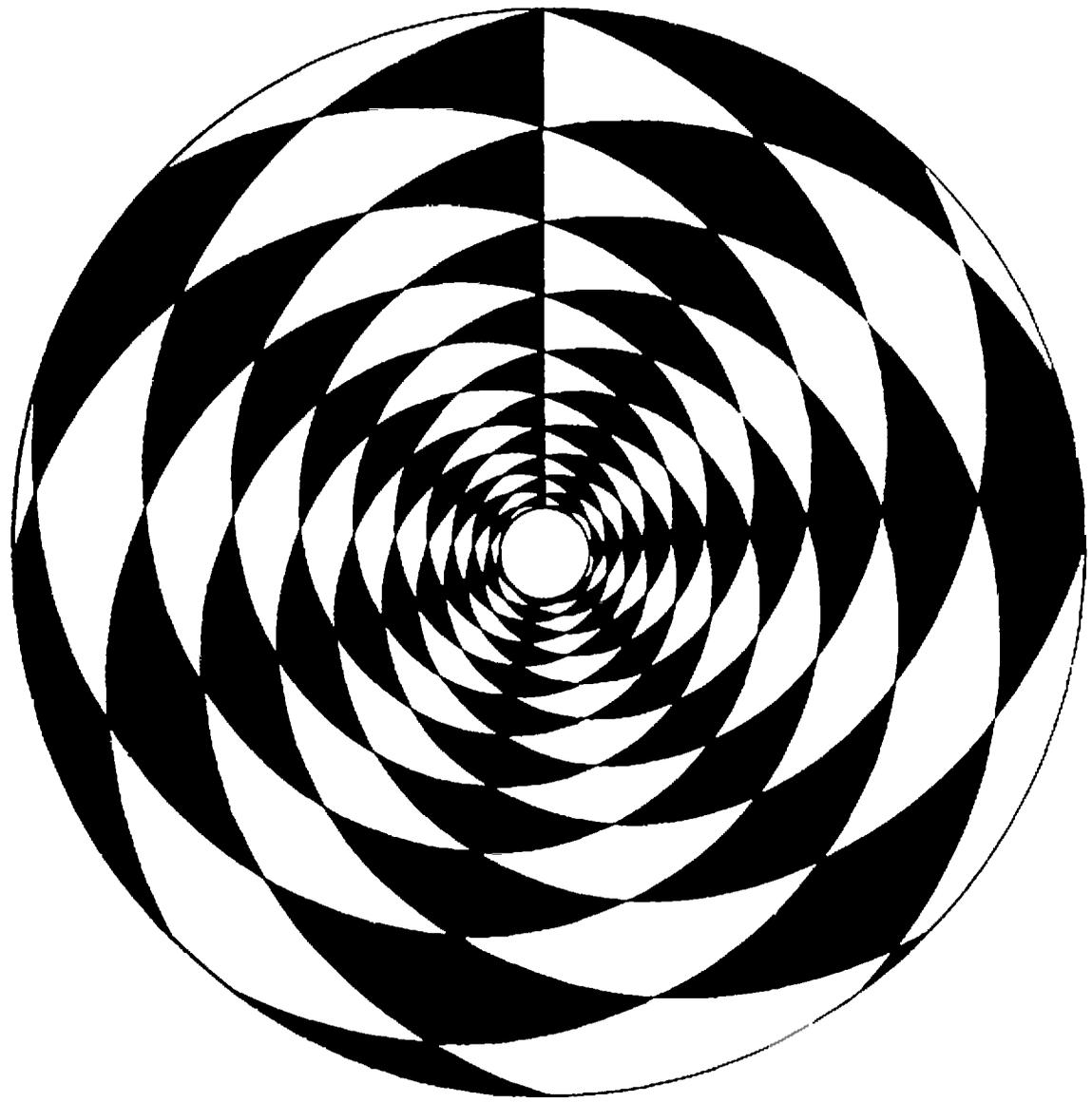
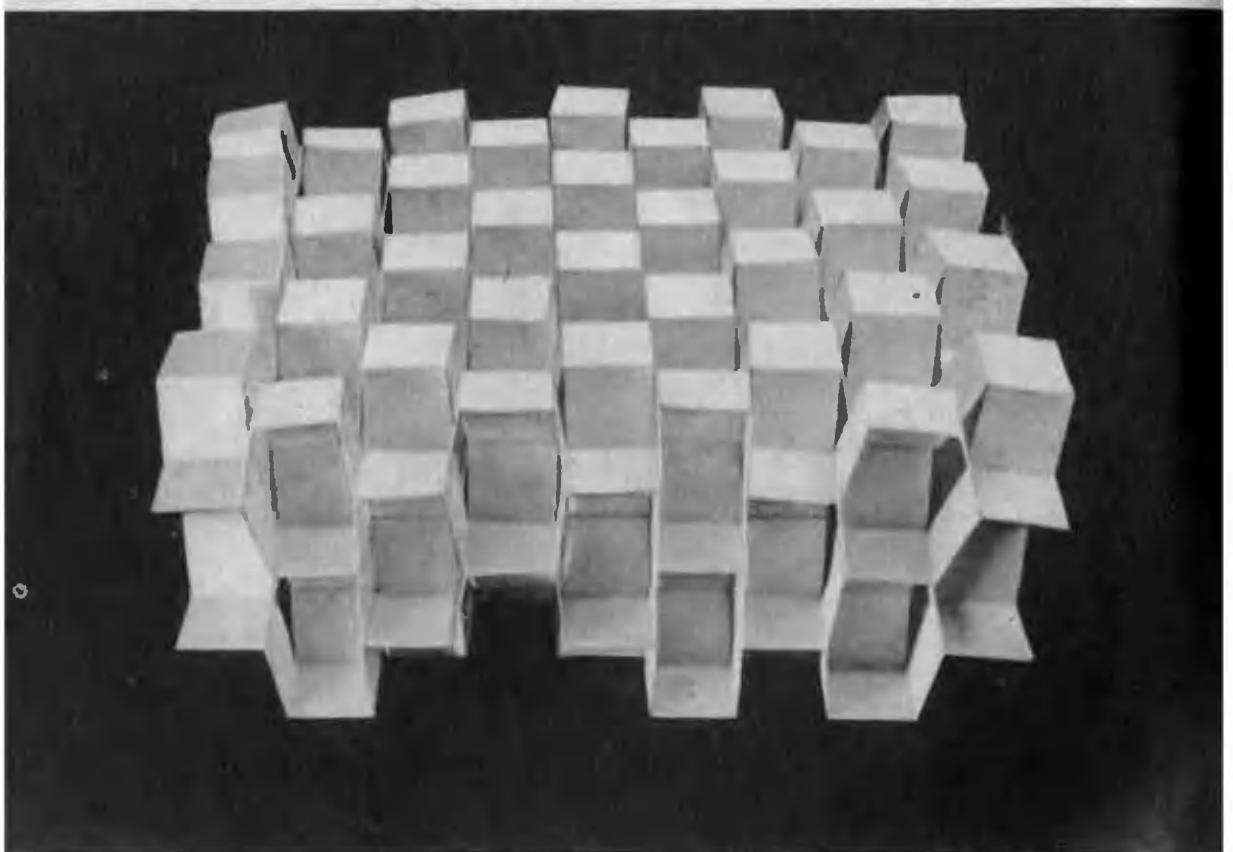
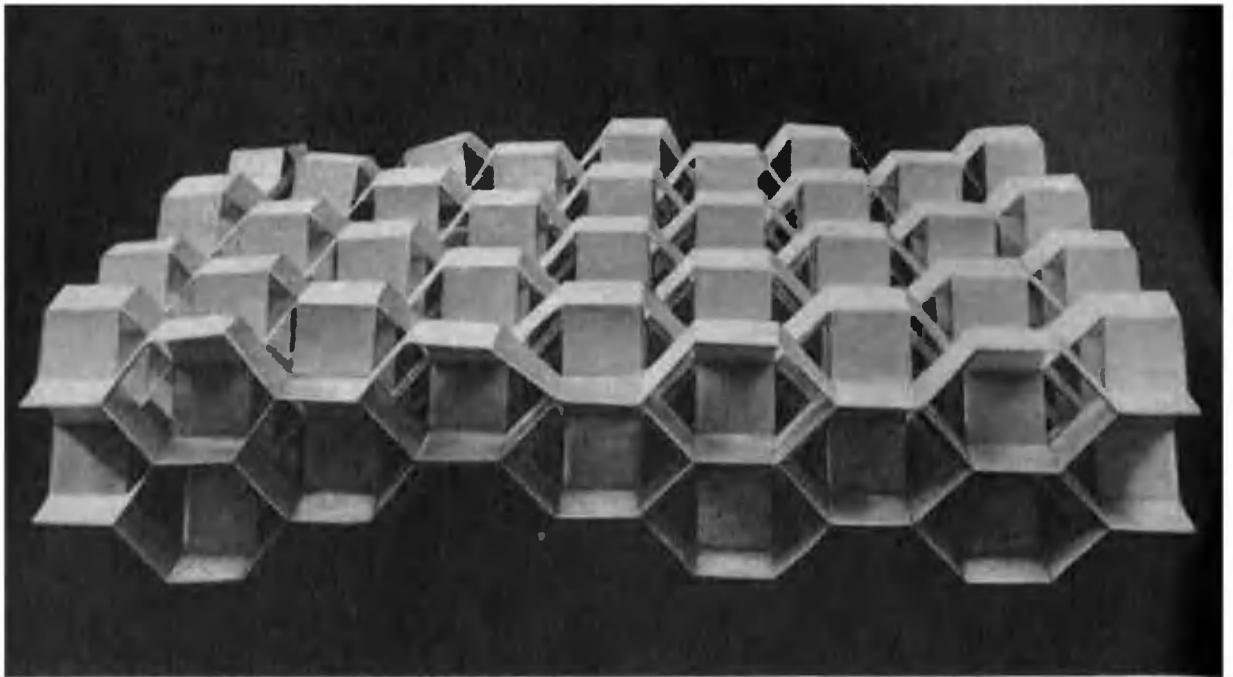


Квант

5
1979

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





На этих фотографиях вы видите бумажные модели «самовозводящегося домика» в разных стадиях готовности. Подробнее об этой конструкции вы можете прочитать на странице 54.

Основан в 1970 году

Квант

5
1979

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР



Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

- М. И. Башмаков
- С. Т. Беляев
- В. Г. Болтянский
- Н. Б. Васильев
- Ю. Н. Ефремов
- В. Г. Зубов
- П. Л. Капица
- В. А. Кириллин
- А. И. Климанов
- С. М. Козел
- В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
- Л. Г. Макара-Лиманов
- А. И. Маркушевич
- Н. А. Патрикеева
- И. С. Петраков
- Н. Х. Розов
- А. П. Савин
- И. Ш. Слободецкий
- М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
- Я. А. Смородинский
- В. А. Фабрикант
- А. Т. Цветков
- М. П. Шаскольская
- С. И. Шварцбурд
- А. И. Ширшов

В НОМЕРЕ:

- 2 Б. Голубов. Что такое ряд Тейлора?
- 8 Л. Тарасов. Открытие нейтрона
- 15 Т. Черногор. После захода Солнца

Математический кружок

- 18 М. Севрюк. Варнации на тему классических неравенств

Задачник «Кванта»

- 22 Задачи М561—М565; Ф573—Ф577
- 24 Решения задач М513, М514; Ф514, Ф521—Ф525

«Квант» для младших школьников

- 31 Задачи
- 32 В. Тихонов. Опыты с воздушными шариками
- 33 А. Дозоров. Шарик, который не сдувается

Практикум абитуриента

- 34 М. Крайзман. Заменим фигуру
- 39 Н. Берюлева. Построение изображений в линзах и сферических зеркалах
- 44 С. Алешин и др. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
- 47 В. Ильин и др. Новосибирский государственный университет
- 49 Л. Асламазов. Московский институт стали и сплавов

51 Спрашивайте — отвечаем

Рецензии, библиография

- 55 Г. Луканкин, М. Смолянский. Подарок учителю и школьнику
- 56 Ответы, указания, решения

Наша обложка (с. 53, 54)

Смесь (с. 21, 38, 43)

На первой
странице обложки
8 спиралей
закручиваются
к центру
по ходу
часовой стрелки.
а 5 спиралей — против.
5 и 8 —
соседние члены
последовательности
Фибоначчи.
Подробности на с. 53.



значит; проверьте, что такими будут соответственно функции

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6},$$

$$y = 1 - x + x^2 - x^3 \text{ и } y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Обратимся теперь к рисунку 4. На нем изображены график функции $y = \sin x$ и графики многочленов, имеющие с графиком синуса в точке $x=0$ касание первого, третьего и пятого порядков (проверьте, что это — соответственно, многочлены

$$y = x, \quad y = x - \frac{x^3}{6} \text{ и } y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Как видно из этих рисунков, чем выше порядок касания, тем теснее график многочлена примыкает вблизи точки $x=0$ к графику соответствующей функции.

Основная идея Тейлора состояла в том, чтобы для «произвольной» функции (будем для простоты считать ее заданной в окрестности точки $x=0$) подобрать такой «многочлен бесконечного порядка» $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$, который имел бы с данной функцией в точке $x=0$ касание «бесконечного порядка».

Оказалось, что для очень широкого класса функций это возможно и, что еще более важно, очень часто этот «многочлен» — его называют *рядом Тейлора* функции — совпадает с выбранной функцией на некотором промежутке, содержащем точку $x=0$.

Знание ряда Тейлора функции очень полезно, если нужно вычислить ее значение: с его помощью функцию, как правило, можно вычислить с любой наперед заданной точностью.

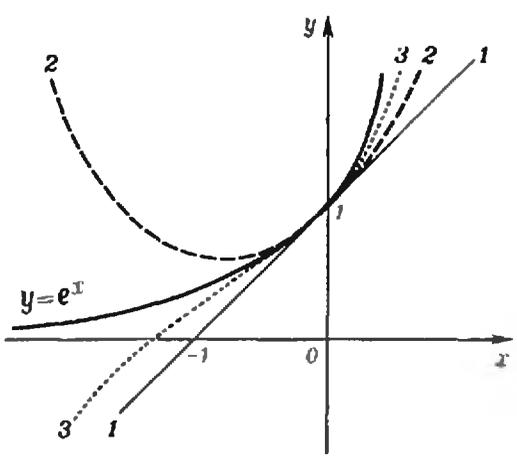


Рис. 1.

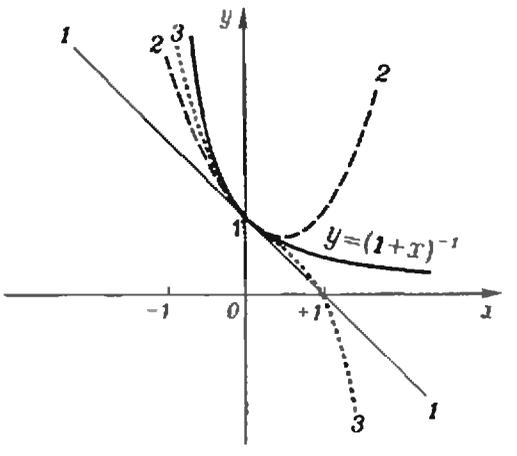


Рис. 2.

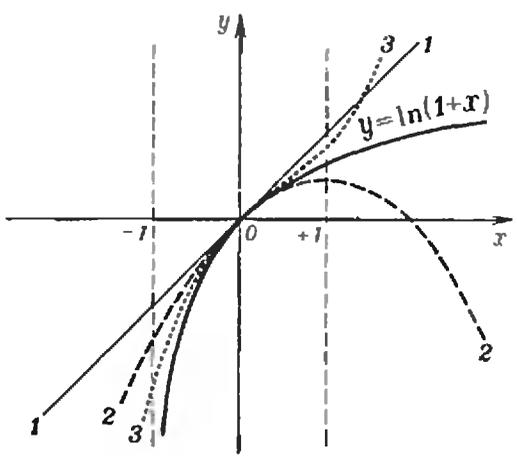


Рис. 3.

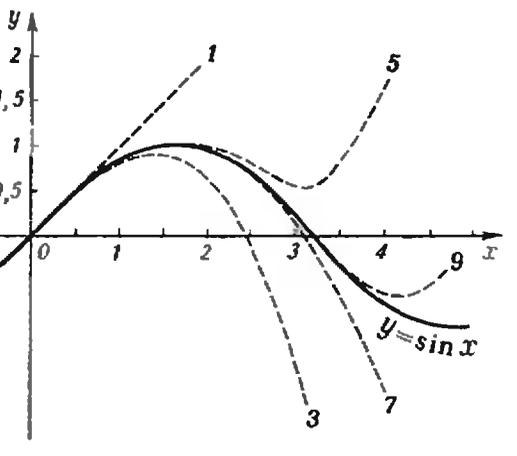


Рис. 4.

В этой статье мы получим ряды Тейлора для функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = e^x$ и $y = \ln(1+x)$.

Необходимые сведения из анализа

Прежде всего нам понадобится формула Ньютона — Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

где функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, а функция F является для нее первообразной на этом отрезке.

Далее, из геометрического смысла интеграла вытекает, что $\int_a^b f(x) dx \geq 0$,

если $f(x) \geq 0$ на $[a; b]$ (рис. 5). Отсюда легко следует, что если две непрерывные функции на отрезке $[a; b]$ удовлетворяют неравенству $f(x) \leq g(x)$, то $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$, то

есть неравенства, связывающие непрерывные функции, можно интегрировать, получая неравенства того же знака.

Наконец, нам понадобится равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0, \tag{1}$$

где x — любое действительное число.

Докажем его. Найдем по данному x такое натуральное число N , что $\frac{|x|}{N+1} \leq$

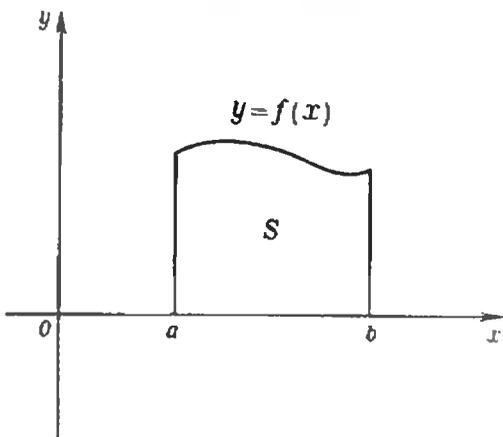


Рис. 5. $S = \int_a^b f(x) dx$.

$\leq \frac{1}{2}$. Тогда для всех $n > N$ будут выполнены неравенства

$$0 \leq \frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|}{1} \cdot \frac{|x|}{2} \cdot \dots \cdot \frac{|x|}{N} \times \\ \times \frac{|x|}{N+1} \cdot \dots \cdot \frac{|x|}{n} \leq \frac{|x|^N}{N!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} = \\ = \frac{|x|^N \cdot 2^N}{N!} \cdot 2^{-n}.$$

Поскольку N фиксировано, то при $n \rightarrow \infty$ предел последовательности, стоящей в правой части этих неравенств, равен нулю. Отсюда и следует равенство (1).

Представление функций $\sin x$ и $\cos x$ рядами Тейлора

Пусть фиксировано $x > 0$. Тогда, интегрируя неравенство $\cos t \leq 1$ по отрезку $[0; x]$, получим, что

$$\int_0^x \cos t dt \leq \int_0^x 1 dt.$$

Но так как $\sin t$ является первообразной для $\cos t$, а t — первообразной для 1, предыдущее неравенство на основании формулы Ньютона — Лейбница можно записать в виде $\sin x \leq x$. Это неравенство можно было бы написать сразу, но мы хотели объяснить принцип получения дальнейших неравенств и потому привели его доказательство.

Интегрируя неравенство $\sin t \leq t$ по отрезку $[0; x]$, получим, что

$$\int_0^x \sin t dt \leq \int_0^x t dt.$$

Поскольку функция $-\cos t$ является первообразной для $\sin t$, а $\frac{t^2}{2}$ — первообразной для t , предыдущее неравенство на основании формулы Ньютона — Лейбница примет вид

$$1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2} \text{ или } \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Интегрируя это неравенство по отрезку $[0; x]$ и снова пользуясь формулой Ньютона — Лейбница, приходим к неравенству $\sin x \geq x - \frac{x^3}{3!}$.

Продолжая процесс послеловательного интегрирования (и пользуясь методом математической индукции), легко доказать неравенства

$$\begin{aligned} \cos x &\leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{4n}}{(4n)!}, \\ \sin x &\leq x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}, \\ \cos x &\geq 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots - \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}, \\ \sin x &\geq x - \frac{x^3}{3!} + \dots - \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $n = 0, 1, \dots, x > 0$.

Объединяя первое и третье из неравенств (2), получим

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \dots - \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{4n}}{(4n)!} \quad (3)$$

Левый многочлен можно рассматривать как приближенное значение $\cos x$ с недостатком, а правый — как приближенное значение $\cos x$ с избытком (рис. 6). Но разность между правым и левым многочленами из неравенств (3) равна $\frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}$, и при $n \rightarrow \infty$ она стремится к нулю на основании (1). Поэтому

$$\begin{aligned} \cos x &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \dots - \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{4n}}{(4n)!} \right). \end{aligned}$$

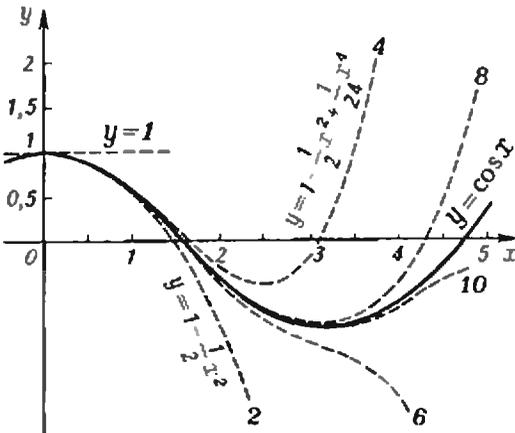


Рис. 6.

Этот результат кратко записывают в виде

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \dots \quad (4)$$

Правая часть этого равенства и называется *рядом Тейлора функции $\cos x$* .

При доказательстве неравенств (3), а значит, и равенства (4), предполагалось, что $x > 0$. Но они справедливы и для $x < 0$ в силу четности всех входящих в них функций. Наконец, они легко проверяются и для $x = 0$ и, таким образом, справедливы при всех действительных x .

Аналогично, для $x > 0$ из (2) имеем

$$\begin{aligned} \sin x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots - \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} \right). \end{aligned}$$

Этот результат записывают в виде

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \dots, \quad (5)$$

а выражение в правой части этого равенства называют *рядом Тейлора функции $\sin x$* .

Заметим, наконец, что равенство (5) остается справедливым и для $x \leq 0$ в силу нечетности всех входящих в него функций.

Разложение функции e^x в ряд Тейлора

Известно, что $(e^x)' = e^x$, откуда следует, что при любой постоянной C функция $e^x + C$ является первообразной для e^x . Кроме того, нам важно знать, что $e > 1$ ($e = 2,718\dots$).

Поскольку $e > 1$, то $1 \leq e^t \leq e^a$ для всех $t \in [0; a]$. Интегрируя это неравенство по отрезку $[0; x]$, где $0 \leq x \leq a$, получим $x \leq e^x - 1 \leq e^a x$ или $1 + x \leq e^x \leq 1 + e^a x$. Эти неравенства также можно проинтегрировать по отрезку $[0; x]$, заменив в них предварительно x на t . В результате получим

$$x + \frac{x^2}{2!} \leq e^x - 1 \leq x + e^a \frac{x^2}{2!},$$

или

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} \leq e^x \leq 1 + x + e^a \frac{x^2}{2!} \quad (0 \leq x \leq a).$$

Продолжая процесс последовательного интегрирования, получим неравенства

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} e^a, \quad (6)$$

где $n=0, 1, \dots, 0 \leq x \leq a$.

Таким образом, для каждого значения x из отрезка $[0; a]$ получено приближенное значение для функции e^x с недостатком и с избытком в виде многочленов степени n . Разность между правым и левым многочленами в неравенствах (6) равна $(e^a - 1) \frac{x^n}{n!}$; при $n \rightarrow \infty$ она стремится к нулю на основании (1). Поскольку a — произвольное положительное число, из неравенств (6) следует, что при любом $x \geq 0$

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right).$$

Запишем это в виде равенства

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (7)$$

Выражение в правой части (7) называется *рядом Тейлора функции e^x* .

У п р а ж н е н и е 1. Обоснуйте равенство (7) при $x < 0$. (У к а з а н и е. Воспользуйтесь тем, что $e^x < 1$ при $x < 0$.)

Разложение функции $\ln(1+x)$ в ряд Тейлора

Функция $\ln(1+x)$ определяется как $\log_e(1+x)$, то есть основание логарифма равно e . Поскольку

$$[\ln(1+x)]' = \frac{1}{1+x} \quad \text{при всех } x >$$

> -1 , то для $\frac{1}{1+x}$ функция $\ln(1+x) + C$ является первообразной на интервале $] -1; +\infty [$ при любой постоянной C . Этим мы воспользуем-

ся ниже. Заметим, что при $t \geq 0$ справедливы неравенства

$$1 - t + \dots + t^{2n-2} - t^{2n-1} \leq \frac{1}{1+t} \leq \leq 1 - t + \dots - t^{2n-1} + t^{2n}. \quad (8)$$

(Обоснуйте их самостоятельно.)

Интегрируя неравенства (8) по отрезку $[0; x]$, где $x \geq 0$, и пользуясь формулой Ньютона—Лейбница, получим неравенства

$$x - \frac{x^2}{2} + \dots - \frac{x^{2n}}{2n} \leq \ln(1+x) \leq x - - \frac{x^2}{2} + \dots - \frac{x^{2n}}{2n} + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad (9)$$

в которых $x \geq 0$. Разность между правым и левым многочленами равна $\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Если $0 \leq x \leq 1$, то она стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + \dots \quad (10)$$

для $0 \leq x \leq 1$.

У п р а ж н е н и е 2. Убедитесь, что это равенство справедливо и для $-1 < x < 0$. (У к а з а н и е. Воспользуйтесь тем, что при $t > -1$ $1 - t + \dots + t^{2n-2} - t^{2n-1} \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 - t + \dots - t^{2n-1} + \lambda t^{2n}$, если $\lambda > \frac{1}{1+t}$.)

Выражение в правой части равенства (10) и называется *рядом Тейлора функции $\ln(1+x)$* .

При нахождении рядов Тейлора функций $\sin x$, $\cos x$, e^x и $\ln(1+x)$ мы использовали различные искусственные приемы. На самом деле существует единый метод нахождения ряда Тейлора функции — он основан на ее последовательном дифференцировании. С ним вы можете познакомиться по замечательной книге А. Я. Хинчина «Восемь лекций по математическому анализу» (М., «Наука», 1977).

Что дают полученные оценки?

Полученные выше оценки функций $\sin x$, $\cos x$, e^x и $\ln(1+x)$ позволяют вычислять их в произвольной точке с любой требуемой точностью.

Например, если требуется узнать значение функции $\sin x$ в точке $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ с погрешностью, не превосходящей числа $\varepsilon > 0$, то найдем сначала такое целое $n \geq 0$, что $x^{4n+1}/(4n+1)! < \varepsilon$. Тогда значения многочленов из неравенств (2) в точке x дадут нам значение $\sin x$ с точностью до ε , одно с недостатком, другое — с избытком. Вычисление же ее значений в других точках с помощью формул приведения сводится к вычислениям в точках отрезка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Немного истории

Сочинение Б. Тейлора «Methodus incrementorum directa et inversa» вышло в свет в 1715 г. в Лондоне на латинском языке. Тейлор был современником Ньютона и Лейбница — основателей дифференциального и интегрального исчисления. Его метод был основан на формуле Ньютона, которая дает приближенное представление функции на заданном отрезке в виде многочлена степени n , совпадающего с данной функцией в $n+1$ равноотстоящих точках отрезка (в том числе и в его конечных точках). Тейлор совершил переход к пределу в формуле Ньютона при $n \rightarrow \infty$ совершенно формально, не заботясь об обосновании предельного перехода.

По этому поводу видный немецкий ученый и историк математики Ф. Клейн писал: «В сущности, Тейлор здесь оперирует с бесконечно малыми (дифференциалами) гораздо, если можно так выразиться, легкомысленнее, чем это когда-либо делали последователи Лейбница; интересно отметить, что он еще... на глазах Ньютона так уклонился от метода пределов, которым пользовался последний» *).

Впоследствии многие математики из разных стран занимались обоснованием метода Тейлора: Лагранж, Коши, Шлёмилх, Рош, Пеано и другие. Благодаря их усилиям метод

представления функций рядами Тейлора и метод приближенного изображения функций многочленами получили полное обоснование.

В настоящее время понятие ряда Тейлора является одним из основных в высшей математике. Ряды Тейлора или их конечные суммы находят применение почти всюду, где имеется необходимость точного или приближенного изображения плавно меняющихся функций.

Задачи

1. Пользуясь равенством

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \quad (-\infty < x < \infty),$$

доказать, что при $x \geq 0$ и $n = 0, 1, \dots$ справедливы неравенства

$$x - \frac{x^3}{3} + \dots - \frac{x^{4n+3}}{4n+3} \leq \operatorname{arctg} x \leq x - \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{4n+1}}{4n+1}.$$

Если же $x < 0$, то в этих неравенствах знак « \leq » следует заменить на « \geq ».

2. Доказать, что для $-1 < x \leq 1$ справедливо равенство

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

3. Доказать равенство $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} +$

$$+ \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

4. Доказать равенство $\ln 2 = 1 -$

$$- \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

5. Доказать равенство

$$e^{-1} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots$$

6. Доказать равенство

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots,$$

где $-1 < x \leq 1$, $-\infty < \alpha < +\infty$.

*) Ф е л и к с К л е й н. Элементарная математика с точки зрения высшей, том. I. Арифметика, алгебра, анализ (М.—Л., ГТТИ, 1933), с. 347—348.



Л. ТАРАСОВ

ОТКРЫТИЕ НЕЙТРОНА

Всех нас весьма интересует вопрос о строении ядра и возможный ключ для его решения, появившийся благодаря открытию нейтрона.

Нильс Бор (1932 год).

Мысль о возможном существовании нейтрона была впервые высказана в 1920 году великим английским физиком Ретерфордом. Нейтрон представлялся Ретерфорду в виде «нейтрального дублета» — тесного соединения протона и электрона.

Нейтронная гипотеза Резерфорда

Резерфорд пришел к нейтронной гипотезе, размышляя над проблемой структуры атомных ядер. Например, было известно, что атом гелия имеет 2 электрона и, следовательно, ядро этого атома должно содержать 2 протона (ведь атом нейтрален). Однако масса атома гелия не в два, а в четыре раза больше массы атома водорода. В связи с этим возникла мысль, что ядро гелия составляют 2 электрона и соответственно 4 протона. С точки зрения Резерфорда, ядро гелия состояло из 2 протонов и 2 нейтральных дублетов. Атом кислорода, например, имеет 8 электронов, а его масса в 16 раз больше массы атома водорода; поэтому можно было предположить, что ядро кислорода содержит 16 протонов и 8 электронов (по Резерфорду — 8 протонов и 8 нейтральных дублетов).

Почему Резерфорд представлял нейтрон в виде «дублета» из протона и электрона, а не в виде самостоятельной нейтральной частицы? Это можно понять, если вспомнить, что в 20-е годы нашего столетия были известны только три элементарные частицы — электрон, протон, фотон; в то время было принято считать, что эти три частицы полностью исчерпывают весь набор «элементарных кирпичиков», из которых построена материя. Рассматривая гипотетический нейтрон как «объединение» протона с электроном, Резерфорд тем самым следовал общепринятой концепции. Кроме того, открытая еще в 1898 г. β -радиоактивность ядер, как казалось, вполне определенно указывала на наличие электронов внутри атомных ядер β -излучение ядер — поток электронов).

Ограниченность нейтронной гипотезы Резерфорда не умаляет ее исторической ценности. Резерфорд сумел заразить идеей «нейтрона» (пусть даже представляемого в виде миниатюрного атома водорода) многих своих учеников. И вполне закономерно, что именно одному из них, Д. Чедвику, удалось действительно открыть нейтрон — не некий «нейтральный дублет» из протона и электрона, а новую элементарную частицу.

Это произошло в 1932 г. Открытию предшествовал ряд интереснейших событий в мире физики.

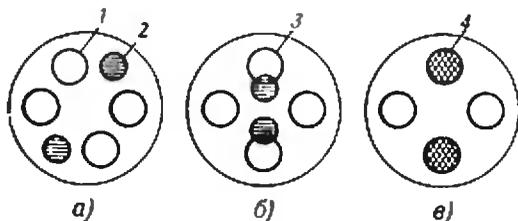
«Изгнание» электрона из атомного ядра

Одно из таких событий произошло в 1924 г., когда французский физик Луи де Бройль предложил сопоставлять с электроном некую *волну*. Длина этой волны λ выражалась через импульс электрона p следующим образом:

$$\lambda = h/p, \quad (1)$$

где $h=6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — универсальная физическая постоянная — постоянная Планка. В 1927 г. гипотеза де Бройля (и в частности, формула (1)) получила экспериментальное подтверждение в опытах, обнаруживших дифракцию электронов при прохождении сквозь тонкие металлические пластинки.

Обнаружение у электронов волновых свойств существенно меняло представления физиков о структуре атомного ядра. Теперь стало ясно: электроны в состав атомного ядра не входят — по той причине, что электрон просто не может «поместиться» внутри ядра.



Условные схемы, иллюстрирующие структуру ядра гелия: а) — протонно-электронная модель; б) — модель с нейтральными дублетами Резерфорда; в) — протонно-нейтронная модель. Обозначения: 1 — протон, 2 — электрон, 3 — нейтральный дублет, 4 — нейтрон.

В самом деле, чтобы поместиться в ядре, электрон должен иметь длину волны λ , не превышающую диаметра d ядра: $\lambda < d$. Используя (1), получаем отсюда неравенство

$$p > h/d. \quad (2)$$

Минимальное значение импульса электрона, определяемое этим нера-

венством, очень велико. Действительно, подставив $d \sim 10^{-14}$ м (характерные размеры атомного ядра были оценены в опытах по рассеянию α -частиц, выполненных Резерфордом еще в 1910 г.), получим

$$p \approx 6,6 \cdot 10^{-20} \text{ Дж.}$$

Для частицы, масса которой $m \approx 9,1 \times 10^{-31}$ кг, это — огромный импульс. Поэтому для оценки энергии E электрона надо воспользоваться соотношением релятивистской динамики

$$E = pc^2/v, \quad (3)$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме, v — скорость электрона. (Это соотношение следует из известных релятивистских формул

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где m_0 — масса покоя электрона.)

Полагая в рассматриваемом нами случае $v \approx c$, получаем из (3):

$$E \approx pc.$$

Теперь неравенство (2) может быть переписано в виде

$$E > hc/d.$$

Подставив сюда значения h , c и d , получим: $E > 2 \cdot 10^{-11}$ Дж, или $E > 10^8$ эВ (напомним, что $1 \text{ эВ} = 1,6 \times 10^{-19}$ Дж).

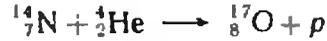
Итак, чтобы поместиться внутри атомного ядра, электрон должен иметь энергию не менее 10^8 эВ. При β -распаде ядра эта энергия должна была бы освобождаться. Однако, как показывает опыт, энергия, выделяющаяся при β -распаде ядер, существенно меньше — она не превосходит 10^6 — 10^8 эВ (в расчете на одно ядро).

Следовательно, приходится признать, что, во-первых, электроны в состав ядер не входят и, во-вторых, электрон при β -распаде ядра рождается в момент акта распада (подобно тому как рождаются фотоны при испускании света атомами).

Впрочем, надо заметить, что несмотря на обнаружение у электрона волновых свойств, вопрос о наличии электронов в ядрах некоторое время продолжал оставаться открытым. Может быть, по той причине, что волновые свойства электрона казались весьма непонятными?

Загадочное излучение

В 1919 г. Резерфорд впервые осуществил искусственное расщепление ядра азота α -частицей. Эта ядерная реакция в современной записи выглядит так:



(${}^1_7\text{N}$ — ядро азота, состоящее из 7 протонов и 7 нейтронов; ${}^4_2\text{He}$ — ядро гелия, или α -частица (2 протона, 2 нейтрона); ${}^1_8\text{O}$ — ядро одного из изотопов кислорода (8 протонов, 9 нейтронов); p — протон).

В последующие годы началось интенсивное изучение ядерных реакций, происходящих под действием α -частиц. Было установлено, что многие легкие элементы при обстреле α -частицами испускают протоны. Многие, но не все!

В мае 1930 г. немецкие физики Боте и Бекер обнаружили, что бериллий при обстреле α -частицами испускает не протоны, а какое-то другое излучение, до тех пор не известное. Излучение это не оставляло треков в камере Вильсона; через довольно толстые свинцовые плиты (толщиной 10 см) это излучение проходило, почти не ослабевая. Поэтому было высказано предположение, что это очень жесткое γ -излучение — электромагнитное излучение, кванты которого (γ -кванты) несут огромную энергию.

Загадочным излучением Боте — Бекера заинтересовались французские физики Ирен и Фредерик Жолио-Кюри. Они поставили на пути излучения заслонку из водородсодержащего вещества — парафина — и немедленно получили интереснейший результат: парафиновая заслонка, в отличие от свинцовой, надежно перекрывала излучение Боте — Бекера; при этом из парафина летело в направлении излучения весьма большое число быстрых протонов.

Жолио-Кюри предположили, что протоны — ядра отдачи, появляющиеся в результате столкновения с атомами водорода, имеющимися в парафине, фотонов с очень большой энергией. Протоны «выбиваются» из атомов водорода. Зная энергию протона,

можно оценить энергию фотона, «выбывшего» этот протон. Жюлио-Кюри сделали эту оценку. Энергия протонов была определена по максимальным расстояниям, проходимым ими в воздухе. Затем, на основании законов сохранения импульса и энергии, была дана оценка соответствующей энергии фотона. Значение этой величины оказалось очень большим: $\sim 5 \times 10^7$ эВ.

Хотя в общих чертах объяснение явления было дано, признать его удовлетворительным и окончательным было нельзя. Многие оставались неясным. Откуда берется столь большая энергия фотонов? Почему, отдавая свою энергию протонам, фотоны в то же время не желают взаимодействовать с атомами свинца? И тем не менее в своей работе, опубликованной 18 января 1932 г., Ирен и Фредерик Жюлио-Кюри продолжали считать, что излучение Боте — Бекера — жесткое электромагнитное излучение. В заключительных строках работы говорилось: *«Итак, настоящими опытами, по-видимому, установлено, что электромагнитное излучение высокой частоты способно освобождать в водородсодержащих веществах протоны и придавать им высокие скорости».*

Открытие нейтрона Чедвиком

Познакомившись с работой Жюлио-Кюри, английский физик Д. Чедвик из лаборатории Резерфорда в Кембридже догадался, что французские физики (равно как и немецкие физики Боте и Бекер) имели дело не с жестким электромагнитным излучением, а с нейтронами. Чедвик был учеником Резерфорда; под влиянием учителя он давно и основательно проникся идеей «нейтрона», искал нейтроны, ожидал встретить их в любом новом излучении. Впоследствии он признавался: «Мои мысли, естественно, вертелись вокруг нейтронов».

Чедвик повторил опыты Жюлио-Кюри, внося в них существенное дополнение с целью проверки нейтронной гипотезы: он использовал разные заслонки, содержащие легкие элементы (водород, литий, углерод, азот и другие). Чедвик обнаружил, что



Джеймс Чедвик (1891—1974).

загадочное излучение, возникающее при бомбардировке бериллия α -частицами, способно создавать не только протоны, но и другие ядра отдачи — ядра лития, углерода, азота и т. д.

Для измерения энергии ядер отдачи Чедвик воспользовался импульсной ионизационной камерой с усилителем и осциллографом. Ионизационная камера имеет два электрода, между которыми подана разность потенциалов (10^2 — 10^3 В). Ядро отдачи, пролетая вблизи этих электродов, производит ионизацию атомов газа, наполняющего камеру. Возникающие на пути ядра отдачи ионы и электроны движутся под действием электрического поля к соответствующим собирающим электродам; в результате в цепи ионизационной камеры появляется импульс тока, который может быть усилен и подан на осциллограф. Измеряя величину наблюдаемого на осциллографе импульса, Чедвик определил энергию различных ядер отдачи (протонов, ядер азота и др.). Сравнив затем эти энергии, он пришел к выводу: излучение, возникающее при бомбардировке бериллия α -частицами, есть не что иное, как поток нейтральных частиц с массой, практически равной массе протона.

И вот 27 февраля 1932 г. (то есть спустя всего лишь месяц после опубликования работы Жюлио-Кюри) появляется краткое сообщение Чедвика «Возможность существования нейтрона». В сообщении, в частности, говорилось:

«... Результаты, полученные мною, очень трудно объяснить, исходя из предположения об электромагнитном излучении, если при столкновении должны сохраняться энергия и количество движения. Однако трудности исчезают, если предположить, что излучение состоит из частиц с массой 1 и зарядом 0, то есть из нейтронов. Можно предположить, что в результате захвата α -частицы ядром Ве образуется ядро ^{12}C и испускается нейтрон ... Столкновения этих нейтронов с атомами, через которые они проходят, создают атомы отдачи; наблюдаемая энергия атомов отдачи находится в полном соответствии с такой точкой зрения».

Рассуждения и довольно простые расчеты Чедвика, основанные на законах сохранения энергии и импульса, весьма поучительны. Попробуем повторить их.

Предположим, что ядро массы m (предполагаемый нейтрон), имеющее скорость \vec{v} , испытывает лобовое упругое столкновение с покоящимся ядром массы m' . Законы сохранения

энергии и импульса для данного столкновения имеют вид

$$mv^2/2 = mv_1^2/2 + m'v_2^2/2, \quad (4)$$

$$\vec{mv} = m\vec{v}_1 + m'\vec{v}_2,$$

где \vec{v}_1 и \vec{v}_2 — скорости ядер m и m' после столкновения. Заметим, что векторы \vec{v} , \vec{v}_1 и \vec{v}_2 направлены вдоль одной прямой. Из этих уравнений найдем скорость ядра отдачи (ядра m'):

$$v_2 = 2vm/(m + m') \quad (5)$$

(v_2 , v — абсолютные значения скоростей). Далее предположим, что в одном случае ядро-мишень имеет массу m' (обозначим его скорость после столкновения как v_2'), а в другом случае — массу m'' (скорость v_2''). Из (5) следует, что

$$v_2''/v_2' = (m + m'')/(m + m'). \quad (6)$$

В случае водородсодержащей и азотсодержащей мишеней значения масс ядер отдачи равны соответственно $m' = 1$ и $m'' = 14$. Измерив для этих мишеней энергии ядер отдачи, Чедвик нашел, что $v_2''/v_2' \approx 7$. В этом случае соотношение (6) приобретает вид

$$(m + 14)/(m + 1) \approx 7,$$

откуда немедленно следует, что $m \approx 1$.

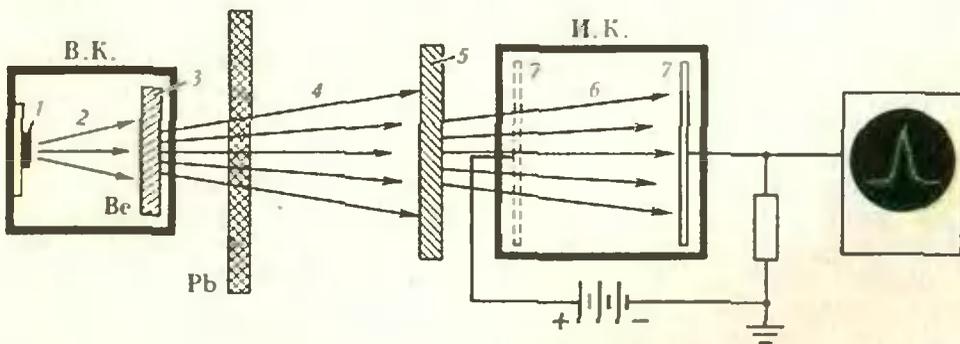


Схема экспериментальной установки Чедвика: В. К. — вакуумная камера; 1 — полоний, являющийся источником α -частиц; 2 — α -частицы; 3 — бериллиевая мишень; 4 — проникающее излучение (нейтроны); 5 — заслонка, из которой выбиваются ядра отдачи (опыты проводились с разными заслонками из легких элементов); 6 — вылетающие из заслонки ядра отдачи; И. К. — ионизационная камера для измерения энергии ядер отдачи; 7 — электроды для собирания ионов, образующихся внутри камеры при прохождении через нее ядер отдачи.

С принятием нейтронной точки зрения становилось понятно, почему излучение из бериллия легко проходило через свинец, и, наоборот, хорошо задерживалось заслонками из легких элементов. Из (4) легко найти отношение энергии E_1 палетающей частицы, которую она имеет после столкновения, к ее энергии E до столкновения (для случая лобового столкновения):

$$\eta = \frac{E_1}{E} = \frac{v_1^2}{v^2} = \left(\frac{m' - m}{m' + m} \right)^2.$$

Отсюда видно, что если $m' \gg m$ (случай свинцовой заслонки), то $\eta \approx 1$, то есть энергия палетающей частицы (нейтрона) уменьшается в каждом столкновении очень мало. Наоборот, если значение m' близко к значению m , то отношение η мало, то есть потери энергии нейтрона в каждом столкновении относительно велики. При лобовом столкновении с протоном нейтрон должен остановиться, передав всю свою энергию протону. Теперь понятно, почему нейтроны относительно легко проходят через свинец, но застревают в парафине, выбивая в направлении своего движения протоны.

Открытие нейтрона — выдающееся событие в современной физике

Исследования, выполненные Боте — Бекером и Жолио-Кюри, сыграли большую роль в открытии нейтрона. Однако решающего шага эти исследователи все же не сделали. Как образно сказал академик Б. М. Кедров, «они подошли вплотную к двери, ведущей к разгадке новой тайны природы, они ощупали эту дверь и даже постучались в нее, но открыть ее не смогли, так как эта дверь открывается не «к себе» (то есть в сторону электромагнитной концепции), а «от себя» (то есть в сторону коренного отказа от этой концепции)».

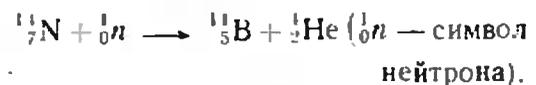
Решающий шаг был сделан Чедвиком, который догадался проделать эксперимент с разными заслонками (водородсодержащей, азотсодержащей и др.) и предпринял измерения энергии ядер отдачи. Выполнив эти измерения и сопоставив полученные ко-

личественные результаты, Чедвик сделал правильный вывод о существовании нейтрона. На примере этого открытия хорошо видно, какое важное значение имеют в физике количественные измерения.

Соткрытием нейтрона в физику не просто вошла еще одна элементарная частица. Нейтрон привел к открытию совершенно нового типа взаимодействий — ядерного взаимодействия. Революционное значение открытия нейтрона состояло прежде всего в крушении электромагнитной концепции в физике; оказалось, что природа материи и ее превращения значительно богаче, чем это представлялось ранее, что они не сводятся только к электромагнитным явлениям.

Сразу же после открытия нейтрона советский физик Д. Д. Иваненко и немецкий физик В. Гейзенберг предложили новую модель ядра. Согласно этой модели ядро состоит из протонов и нейтронов, между которыми на весьма малых расстояниях действуют мощные силы притяжения не электромагнитного характера — ядерные силы. Протонно-нейтронная модель была свободна от всех неувязок и «натяжек» прежних моделей ядра, объясняла известные к тому времени данные о ядерных превращениях. Дальнейшие исследования подтвердили несомненную справедливость этой модели и сделали ее общепринятой и бесспорной.

Другое направление исследований, обусловленных открытием нейтрона, связано с проблемой ядерных реакций. Ядерную реакцию под действием нейтронов впервые наблюдал английский физик Н. Фезер в мае 1932 г. В современной записи эта реакция выглядит так:



Работа Фезера была первой ласточкой. Вслед за ней последовало огромное число исследований по ядерным реакциям, вызванным, или, как говорят, инициированным нейтронами. Как отмечал Чедвик в своей лекции при получении Нобелевской премии за открытие нейтрона, «большую эффективность нейтронов в получе-

нии ядерных реакций легко объяснить. При столкновении заряженной частицы с ядром вероятность ее проникновения в ядро ограничена кулоновской силой расталкивания. В случае же соударения нейтрона с ядром ограничения такого типа не существует. Сила взаимодействия нейтрона с ядром вначале весьма мала; лишь на очень малых расстояниях она начинает быстро расти и носит характер притяжения... Поэтому даже нейтроны очень малой энергии могут проникнуть в ядро.»

В 1934 г. итальянским физиком Э. Ферми была открыта искусственная радиоактивность атомных ядер под действием нейтронного облучения.

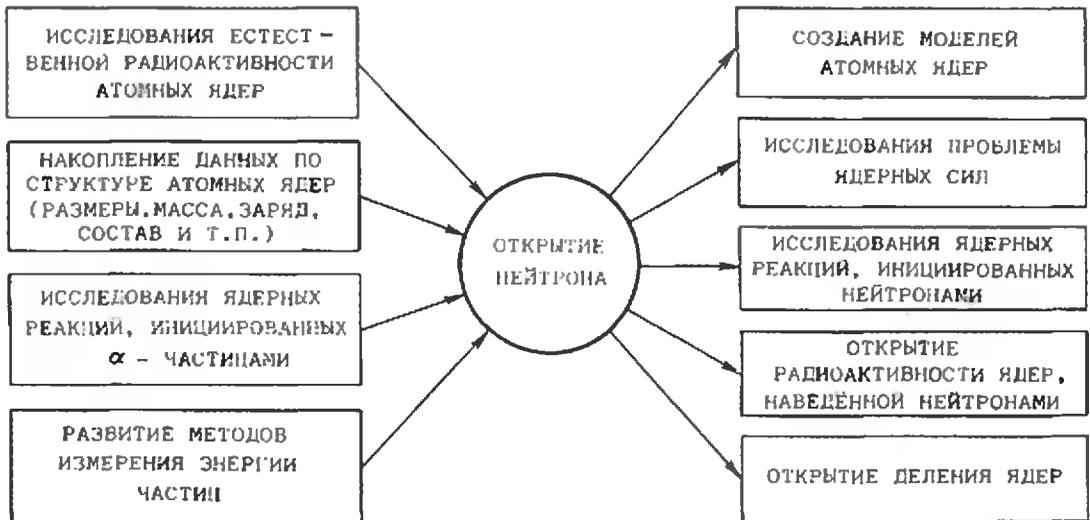
В том же 1934 г. Ферми с сотрудниками наблюдали деление ядер тяжелых элементов под действием мед-

ленных нейтронов. (Правда, верную интерпретацию наблюдаемого явления Ферми не дал. Только в 1939 г. немецкие физики О. Хан и Ф. Штрассман сделали правильный теоретический вывод: под действием медленных нейтронов происходит деление тяжелых ядер с образованием радиоактивных осколков.)

С открытием нейтрона началась эра ядерной физики, ознаменовавшаяся в середине XX столетия развитием физики элементарных частиц и рождением ядерной техники.

В истории физики 1932 г. обычно называют «годом чудес», отдавая должное обилию замечательных открытий, выпавших на долю этого года. С этим названием можно согласиться даже в том случае, если учитывать только открытие нейтрона.

**Открытие нейтрона —
своеобразный узел в сети направлений научных исследований**





Т. Черногор

После захода Солнца

Можно ли невооруженным глазом увидеть искусственный спутник Земли? Ответ на этот вопрос представляется очевидным: конечно, нет. Ведь для того чтобы глаз видел удаленный предмет, необходимо, чтобы угловой размер φ этого предмета (рис. 1) был не меньше $\varphi_{\min} \approx 1' \approx 10^{-4}$ рад. Значит, спутник, находящийся, например, на расстоянии $R \approx 500$ км от поверхности Земли, может быть виден невооруженным глазом, если его линейный размер d не меньше чем $R\varphi_{\min} \approx 50$ м! Так что наблюдать с Земли невооруженным глазом искусственный спутник нельзя. Однако...

Попробуем оценить угловые размеры звезд. Будем считать, что расстояние до звезды $R \approx 10^{16}$ м (на

таком расстоянии от Солнечной системы находится ближайшая звезда α Центавра), линейный размер звезды $d \approx 10^{10}$ м. Тогда угловой размер звезды $\varphi \approx 10^{-6}$ рад, что меньше φ_{\min} . Но ведь звезды мы видим. Почему? Да потому, что звезды светятся...

Теперь вернемся к спутнику. Нельзя ли «заставить» его светиться? Конечно, можно. Ведь Луна «светится» — отражает солнечный свет. И спутник может светиться отраженным солнечным светом. Наблюдать такой светящийся спутник можно вскоре после

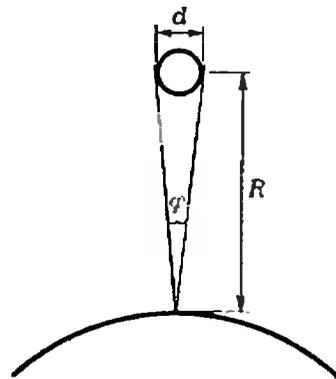


Рис. 1.



Рис. 2.

захода Солнца (или перед его восходом). Дело в том, что между моментом захода Солнца на уровне горизонта и на некоторой высоте над горизонтом существует временной интервал. И если на той высоте, где находится спутник, Солнце еще не зашло, а для наблюдателя H — уже зашло (рис. 2), то на участке CC' орбиты спутник для такого наблюдателя светится. Ясно, что чем меньше времени прошло после захода Солнца на уровне горизонта, тем больше участок орбиты, на котором можно наблюдать светящийся спутник.

Мы сказали «наблюдать». Но как? Можно ли видеть светящийся спутник невооруженным глазом? Посмотрим.

Для глаза существует энергетический порог видимости: глаз реагирует на световое излучение, если мощность этого излучения, попадающая в глаз, не менее $P_{\min} \approx 3 \cdot 10^{-17}$ Вт. Оценим попадающую в глаз мощность излучения спутника. Точнее, ту мощность солнечного излучения, которая, отражаясь от спутника, попадает в глаз наблюдателя.

Будем называть интенсивностью энергию излучения, проходящую за единицу времени через единичную площадку.

В околоземном пространстве интенсивность солнечного излучения равна $I_0 \approx 1,4 \cdot 10^3$ Вт/м². Если площадь поверхности спутника $s \approx 10$ м², то мощность солнечного излучения, попадающая на спутник,

$P_c = I_0 s \approx 1,4 \cdot 10^4$ Вт. Часть этой энергии, — приблизительно 0,1, — отражается от поверхности спутника (*). Так что мы можем рассматривать спутник как источник излучения мощностью $P_n = kP_c \approx 1,4 \cdot 10^3$ Вт ($k=0,1$ — коэффициент отражения). Интенсивность этого излучения на расстоянии R от спутника равна $I_R = P_n/4\pi R^2$ ($4\pi R^2$ — это площадь сферы, «окружающей» спутник; через эту площадь проходит мощность P_n излучения спутника; так что $P_n/4\pi R^2$ — это как раз мощность излучения, попадающая на единицу площади, то есть интенсивность). Если спутник находится на расстоянии $R \approx 500$ км от поверхности Земли, то интенсивность излучения, попадающего в глаз наблюдателя, $I_R \approx 0,4 \cdot 10^{-9}$ Вт/м². Считая, что площадь зрачка наблюдателя приблизительно 0,3 см², находим мощность излучения, попадающую в глаз наблюдателя: $P \approx 10^{-14}$ Вт.

Таким образом, $P \gg P_{\min}$. Значит, наблюдатель с Земли может видеть

*) То, какая часть солнечной энергии отражается от поверхности спутника (иными словами, коэффициент отражения), зависит от состояния этой поверхности, от ее обработки. А это определяется целевым назначением спутника. Так что величина коэффициента отражения колеблется в широких пределах. Мы же для наших оценок возьмем значение 0,1.

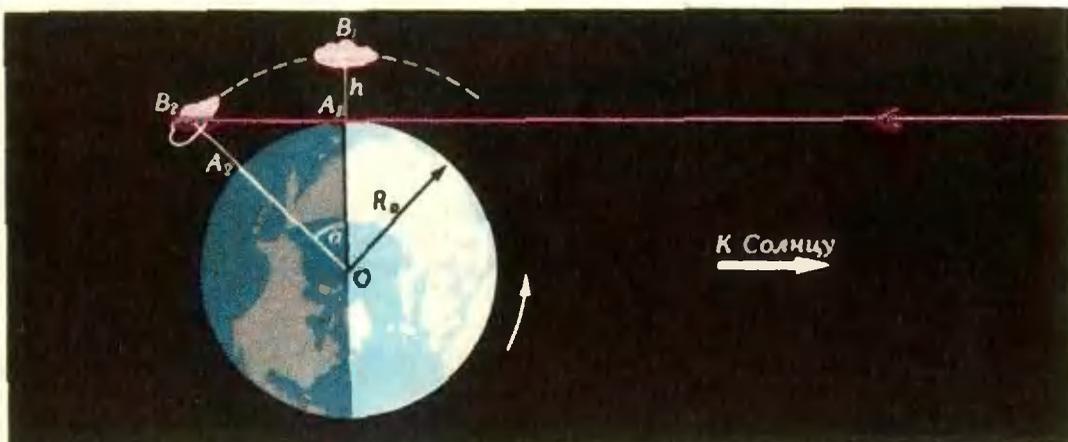


Рис. 3.

искусственный спутник Земли невооруженным глазом.

Разумеется, расчет, который мы провели, приближительный. Но в том, что результат, полученный нами, соответствует действительности, вы можете убедиться сами.

И еще одно наблюдение мы предлагаем вам провести на заходе Солнца. Попробуем определить высоту облаков над Землей. Единственный измерительный прибор, который нам для этого понадобится, — это часы.

Зафиксируем два момента времени: t_1 — время захода Солнца в пункте наблюдения и t_2 — время захода Солнца на высоте облака. После этого только останется рассчитать высоту облака над Землей. Рассчитаем.

Сначала проведем расчет для наблюдателя, находящегося на экваторе. На рисунке 3 A_1 — точка, в которой находится наблюдатель в момент времени t_1 , B_1 — точка, в которой находится облако в этот момент. Момент времени t_2 наступает, когда облако попадает в точку B_2 ; наблюдатель при этом окажется в точке A_2 . Угол α , на который за время $\Delta t = t_2 - t_1$ повернется Земля вокруг своей оси, равен $\alpha = \Delta t 2\pi / T$ ($T = 24$ ч — период суточного обращения Земли).

Итак, в ΔA_1OB_2 на рисунке 3 $\widehat{A_1OB_2} = \alpha$, $|OA_1| = R_0$ (R_0 — радиус Земли; мы для простоты считаем, что ось вращения Земли перпендикулярна к плоскости ее орбиты),

$|OB_2| = R_0 + h$. Так как $|OA_1| \parallel |OB_2| = \cos \alpha$,

$$h = \frac{R_0(1 - \cos \alpha)}{\cos \alpha} = \frac{2R_0 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}.$$

Обычно $\alpha \ll 1$, поэтому можно считать, что $\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$, $\cos \alpha \approx 1$ и

$$h = 2R_0 \left(\frac{\Delta t \pi}{T} \right)^2.$$

Если наблюдатель находится на широте φ , то расстояние $|OA_1|$ равно не R_0 , а $R_0 \cos \varphi$ (расстояние от точки наблюдения до оси вращения Земли). Такой наблюдатель может рассчитать высоту облаков по формуле

$$h = 2R_0 \cos \varphi \left(\frac{\Delta t \pi}{T} \right)^2.$$

Приступая к расчетам, мы не оговорили «начальных условий». А теперь они, наверное, очевидны: облако должно быть над головой наблюдателя, погода должна быть безветренной и, конечно, должен быть ясный закат. (Разумеется, и при этих условиях расчет, проведенный нами, дает лишь оценку высоты облаков).

И в заключение мы предлагаем вам подумать над следующим вопросом. Определяя высоту облаков, мы основывались на суточном вращении Земли. А в наших расчетах со спутником мы это вращение вообще не учитывали. Не привело ли это к серьезной ошибке? В какой мере можно доверять этим расчетам? Проверьте.



М. Севрюк

Вариации на тему классических неравенств

Эта заметка написана десятиклассником Мишей Севрюком на основе его доклада на конференции НОУ московской школы № 2. В ней доказываются неравенства, найденные автором, видоизменяющие и обобщающие неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Они, конечно же, не новы: в классических областях математики практически нет «белых пятен», достижимых без серьезной подготовки. Доказательства упомянутых неравенств содержатся, например, в замечательной, но трудно доступной книге Харди, Литлвуда и Полна^{*}; однако чисто комбинаторные доказательства М. Севрюка оригинальны и заметно проще.

Неравенства указанного типа интересуют и многих других наших читателей. Кроме заметки М. Севрюка мы в этом номере публикуем в виде задачи (М565) неравенства Маклорена, интересные доказательства которых прислал М. Розенберг, а также задачу Р. Винокура, показывающую применимость неравенств указанного типа в самых разнообразных ситуациях.

В наш век электронных компьютеров приятно сознавать, что живое искусство алгебраических преобразований не утратило свою привлекательность и не перестало быть полезным...

Еще древние греки знали, что среднее геометрическое \sqrt{ab} двух неотрицательных чисел не превосходит их среднего арифметического $\frac{a+b}{2}$. Эта теорема справедлива для любого числа неотрицательных

чисел a_1, a_2, \dots, a_n :

$$\frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n) \geq (a_1 \dots a_n)^{1/n} \quad (I)$$

(равенство наступает только тогда, когда все a_i совпадают); она будет служить основой всего дальнейшего.

Первая серия неравенств

Здесь по-прежнему a_1, a_2, \dots, a_n — произвольные неотрицательные числа. Кроме суммы S_1 всех a_i по отдельности, как в неравенстве (I), нас будут интересовать сумма их всевозможных попарных произведений

$$S_2 = a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n,$$

сумма их всевозможных произведений по три

$$S_3 = a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + \dots + a_{n-2} a_{n-1} a_n,$$

и вообще сумма S_k их произведений по k сомножителей ($k \leq n$). Аналогично, кроме произведения P_1 всех a_i по отдельности, нас будут интересовать произведение всевозможных попарных сумм

$$P_2 = (a_1 + a_2)(a_1 + a_3) \dots \dots (a_{n-1} + a_n),$$

произведение сумм по три

$$P_3 = (a_1 + a_2 + a_3)(a_1 + a_2 + a_4) \dots \dots (a_{n-2} + a_{n-1} + a_n),$$

и вообще произведение P_k их сумм по k слагаемым ($k \leq n$).

Оказывается, величинам S_k и P_k при $k=1, 2, \dots, n$ можно дать следующие оценки сверху и снизу (через $S_1 = a_1 + \dots + a_n$ и $P_1 = a_1 \dots a_n$):

$$C_n^k \left(\frac{S_1}{n}\right)^k \geq S_k \geq C_n^k P_1^{\frac{k}{n}} \quad (I_{1,2})$$

$$\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k S_1^k \geq P_k \geq k C_n^k \frac{C_n^k}{n} P_1. \quad (II_{1,2})$$

Развернутая запись этих формул выглядит очень внушительно. Не пугайтесь! Расшифруйте лучше одну из этих формул (при конкретных, не слишком больших значениях k, n) и вы увидите — все это не так страшно. Например, при $k=3, n=4$, фор-

^{*} Г. Г. Харди, Дж. Е. Литлвуд, Г. Полна «Неравенства» (М., «Мир», 1948), в дальнейшем — ХЛП.

мула (I₂) выглядит так:

$$4 \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \right)^3 \geq a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4 \geq 4 (a_1 a_2 a_3 a_4)^{3/4}.$$

При $k=1$ неравенства (I₂), (II₁) превращаются в (I); (I₁) и (II₂) превращаются в (I) при $k=n$ (проверьте!). Таким образом, все четыре неравенства (I), (II) можно рассматривать как обобщения неравенства (I).

Доказательство неравенства (I₂). Положим для краткости $C = C_n^k$, а через $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_{C_n^k}$ обозначим слагаемые суммы S_k (их, очевидно, $C = C_n^k$ штук). Так как $\frac{S_k}{C}$ — среднее арифметическое чисел $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_C$, согласно (1)

$$\frac{S_k}{C} \geq (\tilde{p}_1 \tilde{p}_2 \dots \tilde{p}_C)^{1/C}.$$

Каждое a_i входит множителем ровно в C_{n-1}^{k-1} из чисел $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_C$. Значит, $(\tilde{p}_1 \tilde{p}_2 \dots \tilde{p}_C)^{1/C} = P_1^{\nu}$, где $\nu = \frac{C_{n-1}^{k-1}}{C} = \frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_n^k} = \frac{k}{n}$. Поэтому

$\frac{S_k}{C} \geq P_1^{\frac{k}{n}}$, то есть $S_k \geq C P_1^{\frac{k}{n}}$, что и требовалось.

Равенство в (I₂) имеет место при $k=n$, при $a_1 = \dots = a_n$, или при равенстве нулю не менее $n-k+1$ чисел из множества $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Доказательство неравенства (II₂). Обозначим через $\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_C$ множители произведения P_k (по-прежнему $C = C_n^k$). Положим для краткости $q = k^C$. В левой части нашего неравенства, т. е. в выражении P_k , раскроем скобки. Получим сумму из q слагаемых, каждое из которых есть произведение C чисел из множества $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, взятых по одному из каждого \tilde{s}_i . В произведении этих слагаемых каждое a_i входит множителем, в силу симметрии, одинаковое число раз (обозначим это число через μ). Поэтому это произведение равно P_1^μ , откуда со-

гласно (1)

$$\frac{P_k}{q} = (P_1^\mu)^{1/q}, \quad (2)$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда все наши q слагаемых равны, что, в частности, имеет место при $a_1 = \dots = a_n$; пользуясь этим, найдем μ .

Пусть $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 2$. Тогда в (2) имеет место равенство $\tilde{s}_1 = \tilde{s}_2 = \dots = \tilde{s}_C = 2k$, $P_1 = 2^n$, откуда $\frac{(2k)^C}{q} = (2^n)^\mu$, $2^C = 2^{\frac{n\mu}{q}}$, $\mu = \frac{Cq}{n}$.

Подставляя это значение в (2), получаем II₂.

Ясно, что равенство имеет место либо при $k=1$, либо при $a_1 = \dots = a_n$, либо при равенстве нулю не менее k чисел из множества $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Для доказательства неравенства (I₁) нам будет нужно *неравенство Маклорена*. Положим $S_k = \frac{S_k}{C_n^k}$. Тогда

$$\bar{S}_1 \geq \bar{S}_2^{\frac{1}{2}} \geq \bar{S}_3^{\frac{1}{3}} \geq \dots \geq \bar{S}_n^{\frac{1}{n}} \quad (3)$$

(если все a_i положительны и не все a_i одинаковы, то везде стоит знак $>$).

Доказательство этого неравенства можно найти в ХЛП, стр. 69 *).

Доказательство неравенства (I₁) сразу получается из (3). Действительно $S_k C^{-1} = \bar{S}_k$, $S_1 n^{-1} = \bar{S}_1$, так как $C_n^1 = n$. Значит, (I₁)

принимает вид $\bar{S}_1 \geq \bar{S}_k^{\frac{1}{k}}$, а это содержится в (3).

Докажите самостоятельно с помощью неравенства Маклорена также и (I₂).

Неравенство (II₁) доказывается аналогично (I₂); это доказательство мы оставляем читателю.

Условие равенства в (I₁): $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ или $k=1$, в (II₁): $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ или $k=n$.

*) Другое доказательство, присланное М. Розенбергом, будет опубликовано как решение задачи М565.

Вторая серия неравенств

Здесь a_1, a_2, \dots, a_n — n положительных чисел. Введем следующие обозначения (мы предполагаем, что $k \leq n-1$):

$$\Sigma_i = \frac{\tilde{s}_i}{S_1 - \tilde{s}_i},$$

$$P_i = \frac{\tilde{p}_i}{P_1 - \tilde{p}_i} \quad (i=1, 2, \dots, C = C_n^k).$$

Нас интересуют границы изменения величин*) $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots + \Sigma_C, P_1 + P_2 + \dots + P_C, \Sigma_1 \Sigma_2 \dots \Sigma_C, P_1 P_2 \dots P_C$. Оказывается, эти границы для выражения $\Sigma_1 \Sigma_2 \dots \Sigma_C$ зависят от k ; именно:

при $k \in \left[1, \frac{n}{2} \right]$ имеем

$$\Sigma_1 \dots \Sigma_C \in \left[0, \left(\frac{k}{n-k} \right)^C \right], \quad (III_1)$$

при $k = \frac{n}{2}$ (если n четно)

$$\Sigma_1 \dots \Sigma_C = 1, \quad (III_2)$$

при $k \in \left[\frac{n}{2}, n-1 \right]$ имеем

$$\Sigma_1 \dots \Sigma_C \in \left[\left(\frac{k}{n-k} \right)^C, +\infty \right]. \quad (III_3)$$

Доказательство утверждения (III₁). Назовем сочетаниями I рода сочетания из n чисел a_1, a_2, \dots, a_n по k , сочетаниями II рода — сочетания из этих же чисел по $n-k$. Их тоже будет C , так как $C_n^k = C_n^{n-k}$. Заномеруем сочетания II рода в произвольном порядке, причем сумму чисел в i -м сочетании II рода обозначим через \tilde{s}_i . Ясно, что $\tilde{s}_1 \cdot \tilde{s}_2 \cdot \dots \cdot \tilde{s}_C = (S_1 - \tilde{s}_1) \times$

$\times (S_1 - \tilde{s}_2) \dots (S_1 - \tilde{s}_C)$. Рассмотрим произвольное сочетание I рода с номером $i = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$. Из $k > \frac{n}{2}$ следует, что $k > n-k$ и из чисел, входящих в это сочетание, можно составить C_{k-1}^{n-k} сочетаний II рода (с какими-то номерами $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_R$, где $R = C_{k-1}^{n-k}$), причем каждое число из множества $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}$ будет входить ровно в C_{k-1}^{n-k-1} таких сочетаний II рода. Значит,

$$C_{k-1}^{n-k-1} \tilde{s}_i = \tilde{s}_{\gamma_1} + \tilde{s}_{\gamma_2} + \dots + \tilde{s}_{\gamma_R}. \quad (4)$$

Из (1) и (4) следует, что

$$C_{k-1}^{n-k-1} \tilde{s}_i \geq R \left(\tilde{s}_{\gamma_1} \tilde{s}_{\gamma_2} \dots \tilde{s}_{\gamma_R} \right)^{1/R}. \quad (5)$$

*) Эти величины интересны для некоторых вопросов теории вероятности (прим. ред.).

Очевидно, любое сочетание II рода можно получить из $C_{n-(n-k)}^{k-(n-k)} = C_k^{2k-n} = C_k^{k-(2k-n)} = C_k^{n-k} = R$ сочетаний I рода. Поэтому, записав неравенства, подобные (5), для всех сочетаний I рода и перемножив эти неравенства, получим

$$\begin{aligned} & \left(C_{k-1}^{n-k-1} \right)^C \tilde{s}_1 \tilde{s}_2 \dots \tilde{s}_C \geq R^C \times \\ & \times \left[\left(\tilde{s}_1 \tilde{s}_2 \dots \tilde{s}_C \right)^R \right]^{1/R}, \\ & \frac{\tilde{s}_1 \tilde{s}_2 \dots \tilde{s}_C}{\tilde{s}_1 \tilde{s}_2 \dots \tilde{s}_C} \geq \left(\frac{R}{C_{k-1}^{n-k-1}} \right)^C \text{ и окон-} \\ & \text{чательно } \frac{\tilde{s}_1}{S_1 - \tilde{s}_1} \cdot \frac{\tilde{s}_2}{S_1 - \tilde{s}_2} \cdot \dots \cdot \frac{\tilde{s}_C}{S_1 - \tilde{s}_C} \geq \left(\frac{k}{n-k} \right)^C, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Можно показать, что равенство имеет место лишь при $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. С другой стороны, так как $k > n-k$, мы можем $\Sigma_1 \Sigma_2 \dots \Sigma_C$ сделать как угодно большим, например, зафиксировав $a_{n-k+1}, a_{n-k+2}, \dots, a_n$ и неограниченно уменьшая a_1, a_2, \dots, a_{n-k} .

Доказательство утверждения (III₂) аналогично предыдущему; равенство возможно лишь при $a_1 = \dots = a_n$. Мы оставляем его читателю, как и (очевидное) доказательство (III₃).

Далее, при всех $k (= 1, \dots, n-1)$

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots + \Sigma_C \in \left[\frac{kC}{n-k}, \infty \right]. \quad (IV)$$

Доказательство IV. Согласно (1)

$$(S_1 - \tilde{s}_1) + (S_1 - \tilde{s}_2) + \dots + (S_1 - \tilde{s}_C) \geq C [(S_1 - \tilde{s}_1)(S_1 - \tilde{s}_2) \dots (S_1 - \tilde{s}_n)]^{1/C}. \quad (6)$$

В дальнейшем выражение в квадратных скобках будем обозначать через H . Так как каждое a_i встречается ровно в C_{n-1}^{k-1} сочетаниях из n наших чисел $a_1, a_2, a_1, \dots, a_n$ по k .

$$\tilde{s}_1 + \tilde{s}_2 + \dots + \tilde{s}_C = (C_{n-1}^{k-1}) S_1,$$

и из (6)

$$(C - C_{n-1}^{k-1}) S_1 \geq CH^{\frac{1}{C}},$$

то есть

$$S_1 \geq \frac{CH^{\frac{1}{C}}}{C - C_{n-1}^{k-1}}. \quad (7)$$

Из (1) также следует

$$\frac{1}{S_1 - \tilde{s}_1} + \dots + \frac{1}{S_1 - \tilde{s}_C} \geq \frac{C}{H^{1/C}}. \quad (8)$$

Из (7) и (8)

$$\begin{aligned} \Sigma_1 + \dots + \Sigma_c &= \left(\frac{S_1}{S_1 - \tilde{s}_1} - 1 \right) + \\ &+ \dots + \left(\frac{S_1}{S_1 - \tilde{s}_c} - 1 \right) = S_1 \left[\frac{1}{S_1 - \tilde{s}_1} + \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{1}{S_1 - \tilde{s}_c} \right] - C \geq \\ \frac{C\sqrt{H}}{C - C_{n-1}^{k-1}} \cdot \frac{C}{\sqrt{H}} - C &= \frac{C^2}{C - C_{n-1}^{k-1}} - \\ - C &= \frac{kC}{n-k}, \text{ что и требовалось доказать.} \end{aligned}$$

Равенство в (IV) имеет место только при $a_1 = \dots = a_n$. Если это не так, то не

все \tilde{s}_i равны и уже в (6) и (7) имеет место знак $>$.

С другой стороны, $\Sigma_1 + \dots + \Sigma_c$ можно сделать как угодно большим, например, неограниченно увеличивая a_1 при фиксированных значениях чисел a_2, a_3, \dots, a_n .

Приведем теперь для полноты оценки изменения величины $\Pi_1 + \dots + \Pi_c$ и $\Pi_1 \cdot \dots \cdot \Pi_c$. Первая величина при $k \neq n/2$ принимает любые положительные значения. При $k = n/2$ (n — четно) она имеет минимум, равный $C = C_n^k$, который достигается при $a_1 = \dots = a_n$, а сверху по-прежнему не ограничена. Вторая величина при $k \neq n/2$ также может принимать любые положительные значения, а при $k = n/2$ (n — четно) эта величина всегда равна 1.

Дешевый ящик

Две стенки ящика, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда и объем 1 м^3 , изготавливаются из одного материала, а четыре другие — из материала, который стоит в 8 раз меньше. При каких размерах x, y, z ящика стоимость материалов, нужных для его изготовления, минимальна?

Решение. Пусть стоимость 1 м^2 второго материала равна p рублей. По условию, $xyz = 1$.

Возможны два случая: либо стенки, изготовленные из первого материала, — смежные, либо — нет. В первом случае стоимость материалов равна

$$\begin{aligned} S_1 &= 8p(xy + yz) + \\ &+ p(xy + yz + 2xz) = \\ &= p \cdot xyz \left(\frac{9}{z} + \frac{9}{x} + \frac{2}{y} \right) = \\ &= p \left(\frac{9}{z} + \frac{9}{x} + \frac{2}{y} \right), \end{aligned}$$

во втором — $S_2 = 8p2xy + p(2xz + 2yz) =$

$$\begin{aligned} &= 2pxyz \left(\frac{8}{z} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right) = \\ &= 2p \left(\frac{8}{z} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

Применим неравенство $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$

между средним арифметическим и средним геометрическим (см. с. 18) к этим выражениям. Получим

$$S_1 \geq 9\sqrt[3]{6p} \text{ и } S_2 \geq 12p.$$

Легко видеть, что $9\sqrt[3]{6p} > 12p$. Стоимость S_2 будет минимальна тогда и только тогда, когда минимальной будет сумма $\frac{8}{z} +$

$$+ \frac{1}{y} + \frac{1}{x}, \text{ а это последнее}$$

условие будет выполнено в том и только в том слу-

$$\text{чае, когда } \frac{8}{z} + \frac{1}{y} +$$

$$+ \frac{1}{x} \text{ примет значение}$$

$$3\sqrt[3]{\frac{8}{z} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x}}.$$

Для этого, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{8}{z} = \frac{1}{y} = \frac{1}{x}.$$

Поскольку $xyz = 1$, отсюда следует, что $x = y = 0,5$; $z = 4$.

Таким образом, стенки из первого материала должны быть несмежными и иметь форму квадрата со стороной $0,5 \text{ м}$, а расстояние между ними равно 4 м .

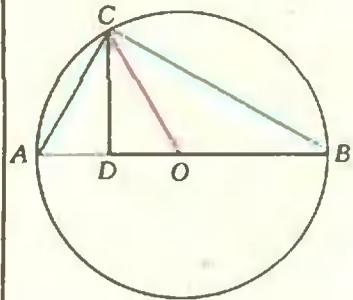
Р. Винокур

Еще одно

доказательство

теоремы о средних

Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел является очень важным математическим соотношением. В нашем журнале не раз уже публиковались материалы на эту тему. На рисунке, идею которого предложил наш читатель Ш. Касимов, приводится еще одно красивое геометрическое доказательство этого неравенства.



$$|CD| = \sqrt{|AD| \cdot |DB|},$$

$$|OC| = \frac{|AD| + |DB|}{2}.$$

Задачник Кванта

Задачи

М561—М565; Ф573—Ф577

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 июля 1979 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 5—79» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М561, М562» или «Ф573». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации (или цикла задач), присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М561. Два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, площади которых равны S_1 и S_2 , расположены так, что лучи A_1B_1 и A_2B_2 , B_1C_1 и B_2C_2 , C_1A_1 и C_2A_2 параллельны, но противоположно направлены. Найдите площадь треугольника с вершинами в серединах отрезков A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 .

Л. Купцов

М562. На отрезке $[0; 1]$ задано множество M , являющееся объединением нескольких отрезков, такое, что расстояние между любыми двумя точками из M не равно 0,1. Докажите, что сумма длин отрезков, составляющих M , меньше
а) 0,55; б) 0,5.

А. Кац, ученик 10 класса

М563. Функция f определена на отрезке $[a; b]$ длины 4 и имеет на нем непрерывную производную f' . Докажите, что внутри отрезка $[a; b]$ найдется точка x , для которой

$$f'(x) - (f(x))^2 < 1.$$

С. Фомин

М564. Для каких точек M стороны BC треугольника ABC верно утверждение: $\triangle MPQ \cong \triangle ABC$, если точки P и Q являются:

- центрами окружностей, описанных соответственно около треугольников ABM и ACM (рис. 1);
- точками пересечения их медиан;
- точками пересечения их высот?

Э. Туркевич

М565. Пусть a_1, a_2, \dots, a_n — различные положительные числа. Обозначим через b_k среднее арифметическое всевозможных произведений по k данных чисел ($k = 1, 2, \dots, n$):

$$b_1 = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

$$b_2 = \frac{a_1a_2 + a_1a_3 + \dots + a_{n-1}a_n}{\frac{n(n-1)}{2}},$$

$$b_n = a_1a_2 \dots a_n.$$

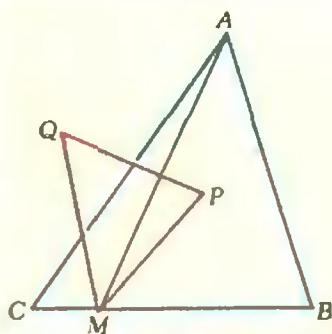


Рис. 1.

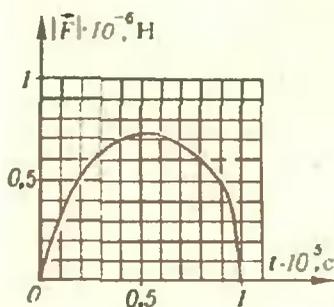


Рис. 2.

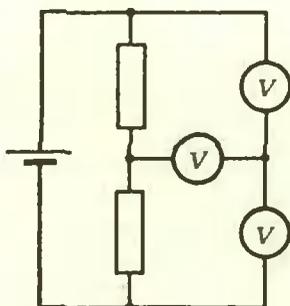


Рис. 3.

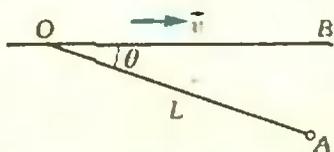


Рис. 4.

Докажите неравенства:

а) $b_1 \geq \sqrt{b_2}$;

б)* $b_k^2 \geq b_{k-1}b_{k+1}$ ($k = 2, \dots, n-1$);

в)* $\sqrt[k]{b_k} \geq \sqrt[k+1]{b_{k+1}}$ ($k = 2, \dots, n-1$).

М. Розенберг

Ф573. Оцените, какое количество воды можно унести в решете с квадратными ячейками размером 2×2 мм. Диаметр решета равен 20 см. Нити решета не смачиваются водой.

Ф574. Два шара с массами $m_1 = 0,2$ кг и $m_2 = 0,3$ кг летят навстречу друг другу со скоростью $v = 20$ м/с каждый. График зависимости от времени силы взаимодействия шаров при столкновении показан на рисунке 2. Какое количество тепла выделилось при столкновении шаров?

И. Слободецкий

Ф575. В схеме, приведенной на рисунке 3, все вольтметры и резисторы одинаковые. ЭДС батареи $\mathcal{E} = 5$ В, ее внутреннее сопротивление малое. Верхний вольтметр показывает $U = 2$ В. Что показывают остальные вольтметры?

А. Зильберман

Ф576. По прямой OB равномерно движется самолет со скоростью $v > c$ (c — скорость звука). Наблюдатель следит за полетом из точки A (рис. 4). В тот момент, когда самолет находится в точке O , специальное устройство, установленное на самолете, испускает два коротких звуковых импульса: сначала импульс с малой амплитудой, затем — с большой. Временной интервал между импульсами равен τ . При каких условиях наблюдатель сможет зарегистрировать сначала импульс с большой амплитудой, а потом с малой? Расстояние OA равно L , угол AOB равен θ .

Б. Болотовский

Ф577. При температуре на улице $t_0 = -20^\circ\text{C}$ работающая батарея поддерживает в комнате температуру $t_1 = 16^\circ\text{C}$. Когда кроме батареи включили электроплитку мощностью $P_1 = 1$ кВт, в комнате установилась температура, равная $t_2 = 22^\circ\text{C}$. Определите тепловую мощность батареи.

Примечание. Теплопередача от одного тела к другому пропорциональна разности температур этих тел ($\Delta P = k\Delta t$, $k = \text{const}$).

Решения задач

M513, M514; Ф514, Ф521—Ф525

M513. Докажите, что существует число A такое, что в график функции $y = A \sin x$ можно вписать не менее 1978 попарно неконгруэнтных квадратов. (Квадрат называется вписанным, если все его вершины принадлежат графику.)

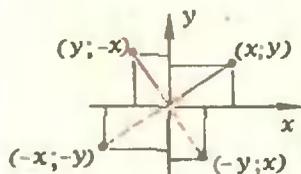


Рис. 1.

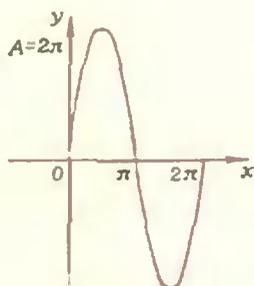


Рис. 2.

Для того чтобы точка $(x; y)$ была вершиной вписанного в график Γ квадрата с центром $O = (0; 0)$, достаточны условия $(x; y) \in \Gamma$ и $(-y; x) \in \Gamma$, то есть условия

$$y = A \sin x, \quad -x = A \sin y;$$

при этом $(-x; -y) \in \Gamma$ и $(y; -x) \in \Gamma$, так как O — центр симметрии графика Γ (рис. 1; функция $y = A \sin x$ нечетна). Тем самым каждому корню уравнения

$$\sin(A \sin x) = -\frac{x}{A}, \quad x > 0, \quad y = A \sin x > 0 \quad (1)$$

соответствует вписанный квадрат с центром O . Покажем, что при большом A это уравнение имеет много корней.

На каждом из отрезков $x \in [2\pi k; 2\pi k + \pi/2]$ величина $y = A \sin x$ увеличивается от 0 до A ; на каждом из отрезков $x \in [2\pi k + \pi/2; 2\pi k + \pi]$ — уменьшается от A до 0 (рис. 2; $k = 1, 2, \dots$). Возьмем $A = 2\pi$. Тогда величина $z = \sin y$ при y , меняющемся от 0 до A , пробегает отрезок $[-1; 1]$ 2π раз (начинается и заканчивается этот «пробег» при $z = 0$). Пусть $k < n$. Тогда на каждом отрезке $[2\pi k; 2\pi k + \pi/2]$ и $[2\pi k + \pi/2; 2\pi k + \pi]$ уравнение (1) будет иметь $2n$ корней — при каждом переходе z от 0 к (-1) и обратно график $z = \sin(A \sin x)$

пересекает прямую $z = -\frac{x}{A}$ $2n$ раз, поскольку $|x/A| < 1$

при $0 \leq x \leq 2\pi k + \pi < A$, — а всего уравнение (1) будет иметь $4n^2$ корней ($k = 0, 1, \dots, n-1$).

Чтобы быть уверенными в том, что квадраты попарно неконгруэнтны, возьмем лишь $x \in [0; \pi/2]$. При $A > 1978\pi$ уравнение (1) будет иметь на этом отрезке не менее 1978 корней, причем чем больше x , тем больше $y = A \sin x$ и $\sqrt{x^2 + y^2}$; значит, все соответствующие 1978 квадратов неконгруэнтны.

Другое, более геометрическое решение задачи M513 можно получить, основываясь на таком соображении: повернем график Γ функции $y = A \sin x$ на 90° вокруг точки O . Тогда любая точка пересечения графика Γ и повернутого графика Γ' (кроме O) служит вершиной квадрата с центром O , вписанного в Γ .

Заметим, что все квадраты, о которых шла речь в наших решениях, имеют центры симметрии в точке O . Повидному, любой квадрат, вписанный в Γ , имеет центр симметрии в одной из точек $(2\pi l; 0)$ (т. е. в одном из центров симметрии графика Γ); попробуйте это доказать.

Н. Васильев

M514. Докажите, что существует такая бесконечная ограниченная последовательность (x_n) , что для любых различных m и k выполнено неравенство

$$|x_m - x_k| \geq |m - k|^{-1}.$$

Мы приведем два решения задачи, предоставив читателю судить о достоинствах и недостатках каждого из них.

Заметим, что достаточно построить ограниченную последовательность (x_n) , удовлетворяющую неравенству

$$|x_m - x_k| \cdot |m - k| \geq \varepsilon \quad \text{при } m \neq k \quad (1)$$

для некоторого положительного ε . Разделив все члены такой последовательности на ε , мы получим искомую последовательность.

Первое решение. Попробуем построить на отрезке $[0; 1]$ последовательность, удовлетворяющую неравенству (1) для $\varepsilon = 1/10$. В этом случае необходимо, чтобы члены последовательности, номера которых отличаются на 1, отличались бы не менее чем на $1/10$. члены по-

Внимание! Как указали некоторые читатели (первым — С. И. Шварцбург), формулировка задачи М545 г) («Квант», № 1, 1979 г.) нуждается в уточнении. Приводим несколько измененную формулировку этой задачи.

На плоскости задано n точек. Кроме того, в некоторой точке O плоскости расположены n «прожекторов», которые освещают углы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (с вершиной в точке O), причем $0 < \alpha_k < \pi$ для каждого $k=1, 2, \dots, n$, и все прожекторы вместе целиком освещают плоскость. (Условие, выделенное курсивом, было пропущено. Подумайте, существенно ли оно? А если прожекторы разрешается вращать?) Докажите, что можно перенести в каждую из данных n точек по одному из прожекторов так, что вся плоскость будет по-прежнему освещена.

(В предыдущих пунктах задачи М545 рассматривается случай $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 2\pi/n$ при $n=3, n=4$ и произвольном n , причем прожекторы разрешается вращать.)

Это — очень трудная задача, решению которой предполагается посвятить отдельную заметку в конце года. Срок присылки решений задачи продлевается до 1 октября 1979 г. Мы будем рады, если кому-либо из читателей удастся найти интересные обобщения этой задачи — например, рассмотреть ее пространственный аналог.

следовательности, номера которых отличаются на 10, отличались бы не менее чем на $1/100$ и т. д. Учитывая это замечание, возьмем $x_0=0, x_1=0,1, x_2=0,2, \dots, x_9=0,9$ (рис. 3). Поместим x_{10} правее x_0 на расстоянии 0,01 (это — минимальное расстояние, если мы хотим, чтобы выполнялось неравенство (1) для $\epsilon=1/10$), x_{11} поместим правее x_1 на том же расстоянии и т. д.; наконец, x_{19} поместим правее x_9 на том же расстоянии (рис. 4). Поместим, далее, x_{20} на расстоянии 0,01 правее x_{10}, x_{21} на расстоянии 0,01 правее x_{11} и т. д. (рис. 5). Мы видим, что десятичное раз-

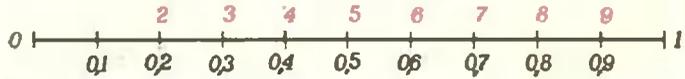


Рис. 3.

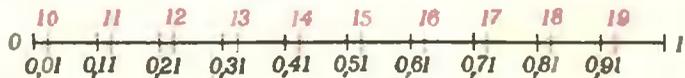


Рис. 4.

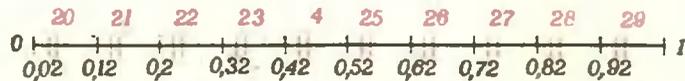


Рис. 5.

ложение числа x_n получается из десятичного разложения числа n «переворачиванием» и приписыванием слева «нуля целых и запятой»:

$$x_{a_1 a_2 \dots a_{l-1} a_l} = 0, a_1 a_2 \dots a_{l-1} a_l.$$

Возьмем эту формулу в качестве определения последовательности (x_n) . Например $x_{129} = 0,921, x_{100} = 0,001$.

Будет ли построенная последовательность (x_n) удовлетворять неравенству (1) для $\epsilon=1/10$ или вообще для какого-нибудь положительного ϵ ? Ответ на этот вопрос отрицателен. Возьмем, например, $m=1001$ и $k=990$. Тогда $m-k=11$, и $x_m - x_k = 0,1001 - 0,990 = 0,0011$, откуда $|x_m - x_k| \cdot |m - k| = 0,0121 < 0,1$. Аналогично можно взять

$$m = \underbrace{10 \dots 01}_{s \text{ цифр}}, \quad k = \underbrace{99 \dots 90}_{s-1 \text{ цифр}}$$

$$|x_m - x_k| \cdot |m - k| = 11 \cdot 11 \cdot 10^{-s}.$$

Подобные явления возникают из-за того, что числа m и k , хотя и записываются совершенно разными цифрами, тем не менее оказываются мало отличающимися друг от друга как до «переворачивания», так и после него.

Чтобы избежать этого, подвергнем последовательность (x_n) «шифровке». Каждую цифру каждого члена последовательности (x_n) заменим ее «шифром» по следующему правилу:

цифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
шифр	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7

(этот шифр описывается простым правилом; угадайте, каким). Для нас будут существенны три свойства шифра:

n	x_n	y_n
1	0,1	0,3
2	0,2	0,6
3	0,3	0,9
4	0,4	0,2
...
9	0,9	0,7
10	0,01	0,03
11	0,11	0,33
12	0,21	0,63
...
19	0,91	0,73
20	0,02	0,06
21	0,12	0,36
...

- 1) шифр цифры 0 есть цифра 0;
 - 2) любая цифра однозначно восстанавливается («дешифруется») по ее шифру;
 - 3) если шифры двух цифр соседние, т. е. отличаются на 1 или на 9, то сами цифры не являются соседними.
- Обозначим шифрованную последовательность через (y_n) . Докажем, что последовательность (y_n) такова, что для любых различных m и k выполнено неравенство

$$|y_m - y_k| \cdot |m - k| \geq 1/100.$$

Пусть $m > k$, $m = \overline{a_1 \dots a_s}$, $k = \overline{b_1 \dots b_t}$ (мы всегда можем считать, что в k столько же цифр, сколько в m , дополнив в случае необходимости число k слева некоторым количеством нулей; при этом согласно 1) число y_k пополнится нулями справа).

Пусть $y_m = 0, \overline{\alpha_1 \dots \alpha_{s-1} \alpha_s \dots \alpha_t}$.

$y_k = 0, \overline{\beta_1 \dots \beta_{s-1} \beta_s \dots \beta_t}$,

и $y_m - y_k = 0, 0 \dots 0s? \dots ?$

(Мы считаем, что $y_m > y_k$; звездочка * указывает первую значащую цифру, знаки? — какие угодно цифры.) Тогда $|y_m - y_k| \geq 10^{-s}$. Сравним теперь числа m и s . Для этого сравним числа $\overline{\alpha_1 \dots \alpha_{s-1}}$ и $\overline{\beta_1 \dots \beta_{s-1}}$. Поскольку в разложении числа $y_m - y_k$ после запятой стоит $s-1$ нуль, эти два числа либо совпадают, либо отличаются на 1.

С л у ч а й 1. Если $\overline{\alpha_1 \dots \alpha_{s-1}} = \overline{\beta_1 \dots \beta_{s-1}}$, то $\alpha_s \neq \beta_s$; значит, $a_s \neq \beta_s$, откуда $|m - k| \geq 10^{s-1}$, так как при вычитании k из m мы получим ненулевое число, кончающееся на $s-1$ нуль.

С л у ч а й 2. Если $\overline{\alpha_1 \dots \alpha_{s-1}} = \overline{\beta_1 \dots \beta_{s-1}} + 1$, то цифры α_{s-1} и β_{s-1} являются соседними. Тогда по свойству 3) цифры a_{s-1} и b_{s-1} не являются соседними, а значит, в десятичном разложении числа $m - k$ цифра, стоящая в разряде 10^{s-2} , не равна нулю, откуда $|m - k| \geq 10^{s-2}$.

В обоих случаях $|y_m - y_k| \cdot |m - k| \geq 10^{-2}$, что и требовалось доказать.

В т о р о е р е ш е н и е. Положим $x_n = n\sqrt{2} - a_n$, где a_n — наибольшее целое число, не превосходящее $n\sqrt{2}$. Ясно, что $0 < x_n < 1$. Покажем, что для любых $m > k > 1$

$$|x_m - x_k| \cdot (m - k) > 1/4,$$

то есть что последовательность $(4x_n)$ — искомая.

Оценим снизу величину

$$\begin{aligned} |x_m - x_k| &= |(m - k)\sqrt{2} - a_m + a_k| = \\ &= \frac{|2(m - k)^2 - (a_m - a_k)|}{|(m - k)\sqrt{2} + (a_m - a_k)|}. \end{aligned}$$

Числитель — целое число, отличное от нуля (число $\sqrt{2}$ иррационально), поэтому он не меньше 1. Знаменатель легко оценить, пользуясь тем, что $a_m < m\sqrt{2}$ и $a_k > k\sqrt{2} - 1$:

$$\begin{aligned} (m - k)\sqrt{2} + (a_m - a_k) &< 2(m - k)\sqrt{2} + 1 < \\ &< (m - k)(2\sqrt{2} + 1) < 4(m - k). \end{aligned}$$

Отсюда получаем $|x_m - x_k| > \frac{1}{4(m - k)}$.

С. Конягин, А. Куширенко

Ф514. Резино-кордное полотно изготовлено из прочных упругих нитей (корда), залитых мягкой эластичной резиной. Нити корда образуют угол 2α друг с другом (рис. 6). Из такого полотна сделан круговой цилиндр, к торцам которого прикреплены металлические крышки (рис. 7). Внутри цилиндра нагнетается воздух. В опытах было замечено, что при нагнетании воздуха цилиндр принимает одну из трех форм, показанных на рис. 8. Форма зависит от угла 2α между нитями. Каким значениям угла соответствует каждая из форм?

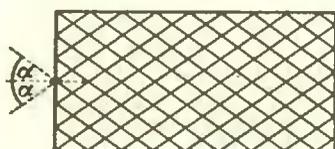


Рис. 6.

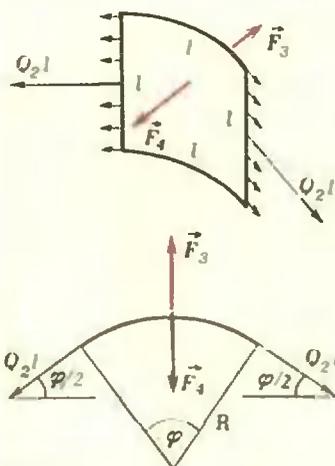


Рис. 9.

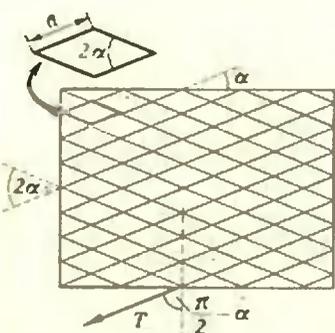


Рис. 10.

Обозначим Q_1 абсолютное значение силы натяжения, проходящейся на единицу длины ткани в вертикальном направлении (вдоль оси цилиндра) и Q_2 — абсолютное значение силы натяжения, проходящейся на единицу длины в горизонтальном направлении. Q_1 и Q_2 — это модули сил, действующих на квадратик полотна со стороны, равной единице длины. Изменение формы цилиндра связано с изменением угла между нитями при деформации полотна. Если бы полотно было плоским, то для того чтобы любой квадратик не менял своей формы, Q_1 должно было бы быть равным Q_2 . В случае цилиндрической поверхности Q_2 для этого должно быть равно $2Q_1$. Докажем это. Рассмотрим равновесие нижней части цилиндра. На его дно действует сила давления

$$F_1 = pS = \pi R^2 p,$$

где p — давление в цилиндре и R — его радиус. Эта сила уравнивается силой $F_2 = 2\pi R Q_1$, действующей на полотно (F_1, F_2 — абсолютные значения сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2): $\pi R^2 p = 2\pi R Q_1$. Отсюда $Q_1 = \frac{1}{2} pR$.

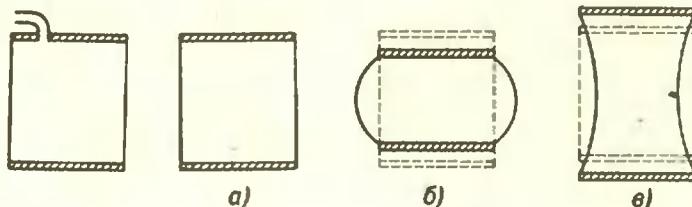


Рис. 7. Рис. 8.

Теперь рассмотрим равновесие квадратика полотна со стороной l , который «виден» под углом φ от оси цилиндра, причем $\varphi \ll 1$. На этот квадратик действует горизонтальная сила давления $F_3 \approx p l^2$, а со стороны остальной части полотна — горизонтальная сила $F_4 = 2Q_1 l \sin \frac{\varphi}{2} \approx Q_2 l \varphi$ (рис. 9). Так как $\varphi = \frac{l}{R}$, то $F_4 = \frac{Q_2 l^2}{R}$.

При равновесии $F_3 = F_4$, то есть $p l^2 = \frac{Q_2 l^2}{R}$, откуда $Q_2 = pR = 2Q_1$.

Силы Q_1 и Q_2 представляют собой равнодействующие сил натяжения нитей. Найдем их, полагая, что натяжение нитей равно T , а сторона ячейки, образуемой нитями, равна a . Нетрудно увидеть, что горизонтальное расстояние между точками пересечения нитей в этом случае равно $2a \cos \alpha$, а вертикальное — $2a \sin \alpha$. Это означает, что на горизонтальной стороне квадратика со стороной l оказывается $n_1 = 2 \frac{l}{2a \cos \alpha} = \frac{l}{a \cos \alpha}$ нитей, а на вертикальной — $n_2 = \frac{l}{a \sin \alpha}$ нитей. Вертикальная равнодействующая $Q_1 l$ сил натяжения нитей, очевидно, равна $n_1 T \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = n_1 T \sin \alpha = \frac{T l \operatorname{tg} \alpha}{a}$, горизонтальная — $Q_2 l = n_2 T \cos \alpha = \frac{T l}{a \operatorname{tg} \alpha}$ (рис. 10).

В случае цилиндрической поверхности $Q_2 = 2Q_1$, так что $\frac{T}{a \operatorname{tg} \alpha} = 2 \frac{T \operatorname{tg} \alpha}{a}$, откуда $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha \approx 35^\circ 16'$. При $\alpha > 35^\circ 16'$ поверхность принимает такую форму, как на рисунке 8, б, а при $\alpha < 35^\circ 16'$ — как на рисунке 8, в.

◆521. На рисунке 11 показана часть траектории движения хорошо обтекаемого тела, брошенного под углом к горизонту. В точке A тело имело скорость, равную по абсолютной величине 20 м/с. Сколько времени тело летело от точки A к точке B?

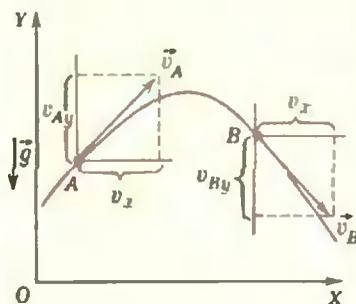


Рис. 11.

Тело, брошенное под углом к горизонту, движется равноускоренно с ускорением свободного падения \vec{g} ; проекция его скорости на ось OX остается неизменной, а проекция скорости на вертикальную ось OY меняется со временем по закону

$$v_y = v_0 + gt,$$

где $g = -9,8 \text{ м/с}^2$ — проекция вектора \vec{g} на ось OY . Если t_0 — время движения тела от точки A к точке B, то $v_{By} = v_{Ay} + gt_0$, откуда

$$t_0 = \frac{v_{By} - v_{Ay}}{g} = \frac{\Delta v_y}{g}.$$

Следовательно, чтобы найти t_0 , нужно найти изменение проекции скорости тела на ось OY .

Векторы \vec{v}_A и \vec{v}_B скорости тела в точках A и B направлены по касательным к траектории тела в этих точках. Нарисуем вектор \vec{v}_A в произвольно выбранном масштабе и проведем касательную к траектории в точке B. Найдем проекцию v_x скорости тела на ось OX в точке A и отложим отрезок такой же длины на горизонтальной прямой, проведенной через точку B. Проведя теперь через конец отложенного отрезка вертикаль, найдем вектор \vec{v}_B и его проекцию v_{By} на ось OY . Измерив с помощью линейки v_{Ay} и v_{By} , найдем значение Δv_y (оно не зависит от выбранного масштаба) и затем время t_0 движения тела от точки A до точки B.

В нашем случае $\Delta v_y = |v_{By}| + |v_{Ay}| = 33 \text{ (м/с)}$, $t_0 \approx 3,3 \text{ с}$.

И. Слободецкий

◆522. Цепь, показанная на рисунке 12, подключена к сети переменного тока с напряжением $U_0 = 220 \text{ В}$. Каково напряжение между точками A и B?

Построим векторную диаграмму напряжений для цепи. Вектор напряжения между точками a и b равен сумме векторов напряжения на конденсаторе и резисторе, то есть изображается диагональю прямоугольника, построенного на векторах \vec{U}_C и \vec{U}_R (рис. 13):

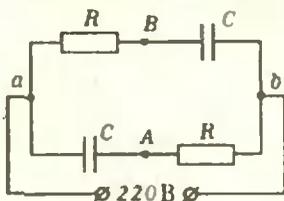


Рис. 12.

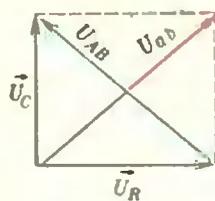


Рис. 13.

$$\vec{U}_{ab} = \vec{U}_C + \vec{U}_R; U_{ab} = |\vec{U}_C + \vec{U}_R| = U_0 = 220 \text{ В}.$$

Вектор напряжения между точками A и B равен разности U_C и U_R и, следовательно, изображается другой диагональю того же прямоугольника. Так как диагонали прямоугольника равны, то

$$U_{AB} = U_{ab} = 220 \text{ В}.$$

А. Зильберман

◆523. Снаряд разрывается в некоторой точке траектории на два осколка. На рисунке 14, сделанном в определенном масштабе, крестиками отмечены поло-

Если массы осколков равны m_A и m_B , то расстояния r_A и r_B от осколков до центра масс в любые моменты времени должны быть такими, чтобы

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{m_1}{m_2} = \text{const.}$$

жения снаряда и одного из осколков через последовательно равные промежутки времени. Найдите положения второго осколка в соответствующие моменты времени, если известно, что он находился в точке B в тот момент, когда первый осколок находился в точке A . Стрелкой на рисунке показано направление ускорения свободного падения. Опишите способ построения.

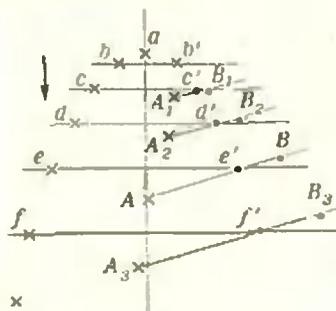


Рис. 14.

Центр же масс системы движется так, как движется частица с массой $M = m_1 + m_2$, когда на нее действуют силы, действующие на систему. В нашем случае на систему действует только сила тяжести. Поэтому центр масс системы продолжает двигаться по той же параболе, по которой он двигался до разрыва снаряда.

Нетрудно найти последовательные положения центра масс. Из рисунка видно, что точка a — вершина параболы. Это следует из того, что предыдущая и последующая точки, в которых находился снаряд (b и b'), лежат на одной горизонтали. Следовательно, после разрыва снаряда центр масс системы через последовательно равные промежутки времени оказывается на тех же горизонтальных прямых, что и точки c, d, e, f и т. д. Точки c', d', e', f' и т. д., в которых находится центр масс, симметричны точкам c, d, e, f и т. д. относительно вертикали, проходящей через точку a .

В тот момент, когда осколки находятся в точках A и B , центр масс их находится в точке e' . По рисунку находим, что точка e' делит отрезок AB на части, длины которых относятся как $r_A : r_B = 2 : 1$ (следовательно, $m_A : m_B = 1 : 2$).

Чтобы найти положение второго осколка через последовательно равные промежутки времени, проведем прямые через точки A_1 и c', A_2 и d', A_3 и f' и т. д. На этих прямых от точек c', d', e', f' и т. д. отложим отрезки, длины которых равны соответственно $\frac{1}{2}|A_1c'|$, $\frac{1}{2}|A_2d'|$, $\frac{1}{2}|A_3f'|$ и т. д. Концы этих отрезков — точки B_1, B_2, B_3 и т. д. — и указывают положения второго осколка в соответствующие моменты времени.

Ф524. Модель вертолета, изготовленная в $1/10$ натуральной величины, удерживается в воздухе при мощности мотора 30 Вт. Какой должна быть минимальная мощность двигателя вертолета, изготовленного из тех же материалов, что и модель?

Вертолет (или модель) удерживается в воздухе благодаря реактивной силе, возникающей, когда винт «отбрасывает» вниз воздушную струю. Согласно III закону Ньютона действующая на вертолет (на винт) реактивная сила равна по абсолютному значению силе, действующей на струю.

Обозначим ρ плотность воздуха, S — площадь струи и v — абсолютное значение скорости струи. Тогда за время Δt винтом отбрасывается вниз объем воздуха $Sv\Delta t$ с массой $m = \rho Sv\Delta t$, и импульс воздуха изменяется на величину

$$\Delta p = mv = \rho Sv^2 \Delta t.$$

Согласно II закону Ньютона на воздух действует сила \vec{F} такая, что абсолютное значение ее равно

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \rho Sv^2.$$

Такая же по абсолютному значению сила действует на вертолет. Чтобы вертолет удерживался в воздухе, F должно быть равно абсолютному значению Mg силы тяжести, действующей на вертолет:

$$\rho Sv^2 = Mg. \quad (*)$$

Мощность N двигателя равна энергии, сообщаемой воздуху за 1 секунду:

$$N = \frac{mv^2}{2\Delta t} = \frac{\rho Sv^3}{2}.$$

Подставляя сюда из (*) $v = \sqrt{\frac{Mg}{\rho S}}$, получим

$$N = \frac{1}{2} Mg \sqrt{\frac{Mg}{\rho S}}. \quad (**)$$

Так как масса M вертолета пропорциональна его объему, то есть кубу линейных размеров — $M \sim L^3$, а $S \sim L^2$, то

из (**) имеем:

$$N \sim L^{2/3}$$

Это означает, что отношение мощностей двигателей вертолета и модели должно быть равно отношению их линейных размеров в степени $7/2$, то есть

$$\frac{N}{N_{\text{мод}}} = \left(\frac{L}{L_{\text{мод}}} \right)^{7/2}$$

Отсюда

$$N = N_{\text{мод}} \cdot 10^{7/2} \approx 95 \text{ кВт.}$$



Ф525. При увеличении тока напряжение на разрядном промежутке дугового разряда уменьшается, стремясь при больших токах к некоторому постоянному значению. Дугу включили в сеть последовательно с некоторым балластным резистором. Вольтамперная характеристика для такой цепи показана на рисунке 15. 1) Постройте вольтамперную характеристику дуги без балластного резистора. 2) Используя полученный график, определите максимальное сопротивление балластного резистора, при котором дуга может гореть при напряжении источника $U=85 \text{ В}$.

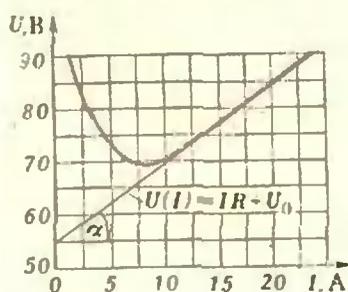


Рис. 15.

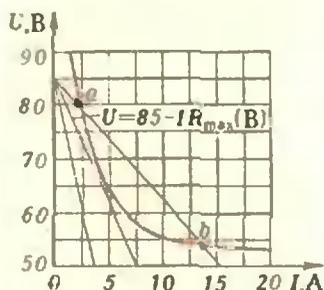


Рис. 16.

1) Напряжение U на входе системы равно сумме напряжения $U_{\text{д}}$ на разрядном промежутке дуги и напряжения U_{R} на резисторе. Так как $U_{\text{R}} = IR$, где I — ток в цепи, то

$$U(I) = U_{\text{д}}(I) + IR.$$

Значение $U_{\text{д}}(I)$ убывает при увеличении I и при больших значениях тока стремится к некоторому постоянному значению U_0 . Это означает, что при больших токах зависимость $U(I)$ становится линейной —

$$U(I) = IR + U_0.$$

причем тангенс угла α наклона графика к оси токов равен R :

$$\text{tg } \alpha = \frac{\Delta U}{\Delta I} = R.$$

Из рисунка 15 видно, что при $I > 10 \text{ А}$ график $U(I)$ — практически прямая линия. По рисунку находим

$$R = \frac{80 - 55}{17,5} \approx 1,4 \text{ (Ом)}.$$

Чтобы построить вольтамперную характеристику дуги, надо для каждого значения тока I_i найти значение $U_{\text{д}}(I_i) = U_i - I_i R$ (значения U_i , берем из графика, $I_i R = 1,4 I_i$). Вольтамперная характеристика дуги приведена на рисунке 16. 2) Определим максимальное сопротивление балластного резистора, при котором дуга может гореть при напряжении источника $U = 85 \text{ В}$.

На график $U_{\text{д}}(I)$ нанесем нагрузочные прямые $U - IR$ ($U = 85 \text{ В}$), отвечающие разным значениям R . Очевидно, что чем больше значение R , тем меньший угол α составляет нагрузочная прямая с осью токов. Если нагрузочная прямая не имеет общих точек с графиком $U_{\text{д}}(I)$ — горение дуги невозможно. Поэтому ясно, что максимальному значению сопротивления R_{max} резистора, при котором дуга горит, соответствует нагрузочная прямая, касающаяся графика $U_{\text{д}}(I)$. Из рисунка 16 находим, что

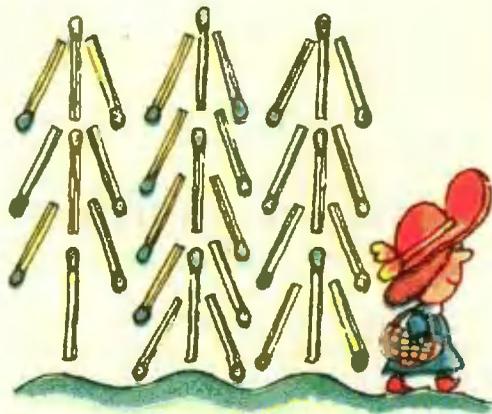
$$R_{\text{max}} = \frac{\Delta U}{\Delta I} \approx \frac{35}{7} = 5 \text{ (Ом)}.$$

(Точки пересечения нагрузочной прямой с графиком $U_{\text{д}}(I)$ (например, точки a и b) определяют возможные значения тока и напряжения на дуге при данном значении сопротивления балластного резистора. Точка a соответствует неустойчивому горению дуги, а точка b — устойчивому.)

И. Слободецкий

Задачи

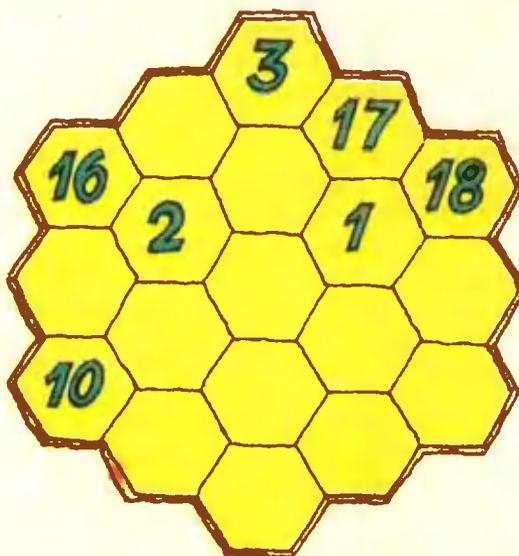
1. На рисунке изображен лес (из спичек) и Красная Шапочка, идущая к Бабушке. Переложите две спички так, чтобы Красная Шапочка возвращалась обратно.



2. Дано трехзначное число. Найдем произведение его цифр. Затем найдем произведение цифр результата. Исходное число и два полученных произведения можно изобразить соответствующим образом, как показано на рисунке (одинаковые фигурки заменяют одинаковые цифры). Каким было исходное число? Сколько решений имеет задача?



3. Заполните свободные клетки шестиугольника натуральными числами так, чтобы в них оказались все числа от 1 до 19, и во всех пяти рядах каждого из трех направлений (вертикального и двух наклонных) сумма чисел, стоящих в одном ряду, была бы одна и та же.



4. Студенты Вадим и Коля играют в шахматы. Мимо проходит Надя — младшая сестра Коли. На вопрос, сколько лет Наде, Коля ответил так: «Если умножить номер сегодняшнего дня недели на число Надиного дня рождения и на номер месяца, в котором она родилась, то получится год рождения Нади». В какой день недели Вадим и Коля играли в шахматы?

5. Профессор Тестер проводит серию тестов, на основании которых он выставляет испытуемому средний балл. Ответив на последний тест, Джон понял, что если бы за этот последний тест он получил 97 очков, то его средний балл равнялся бы 90. С другой стороны, если бы он получил за последний тест всего 73 очка, то его средний балл составил бы 87. Сколько тестов в серии профессора Тестера?



Обычно для исследования различных физических явлений используются разные приборы. Существуют, однако, и универсальные приборы, позволяющие разобраться во многих физических явлениях. Одним из таких приборов является... хорошо вам знакомый воздушный шарик.

В. Тихонов

Опыты с воздушными шариками

1. Хорошенько надуйте шарик и завяжите его. Перевяжите шарик по диаметру ниткой (рис. 1), поместите его часа на 3—4 в холодильник и затем выньте оттуда.

Изменились ли размеры шарика? Стал ли он холоднее на ощупь? Изменилась ли температура воздуха внутри шарика?

Вынув воздушный шарик из холодильника, вы, конечно, заметите, что он как-то сжался, сморщился. Нитка, повязанная по диаметру шарика, будет на нем болтаться и легко снимется с него. Значит, объем шарика уменьшился.

Резина, из которой сделана оболочка шарика,— неплохой теплоизоляционный материал, поэтому вы вряд ли ощутите изменение температуры шарика.

А вот воздух внутри шарика стал холоднее. Попробуйте объяснить, почему.

2. Возьмите в каждую руку по сухому туго надутому шарик, привязанному к нитке. Попросите вашего товарища натереть шарик (рис. 2): один раз оба шарика — шерстяной тряпочкой, а другой раз один шарик — шерстяной тряпочкой, другой — шелковой. Теперь сближайте руки.

Что произойдет с шариками — будут они притягиваться или отталкиваться?

Как известно, при трении тела электризуются. Если натереть оба шарика шерстяной (или шелковой) тряпочкой, они приобретут одноименные заряды и будут отталкиваться друг от друга. Если же один шарик натереть шерстяной тряпочкой, а другой — шелковой, заряды на шариках окажутся разноименными, и шарики будут притягиваться друг к другу.

3. Надуйте шарик. Затем, не завязывая его, вытяните в виде сигары (рис. 3) и отпустите.

Что случится с шариком?

Ответ на этот вопрос очень простой — сокращаясь, растянутая резиновая оболочка как бы выбрасывает воздух из шарика, в результате шарик приходит в движение подобно ракете.

4. Возьмите открытую жестяную банку и сделайте в ее дне небольшое отверстие. Прислоните к банке надутый воздушный шарик и сквозь отверстие втягивайте в себя воздух (рис. 4).

Как поведет себя шарик?



Рис. 1.

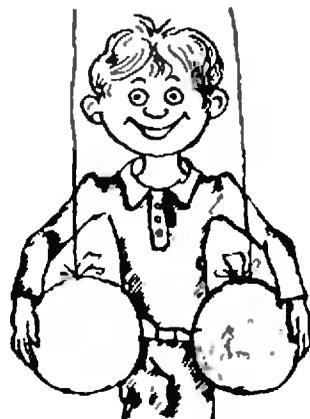


Рис. 2.

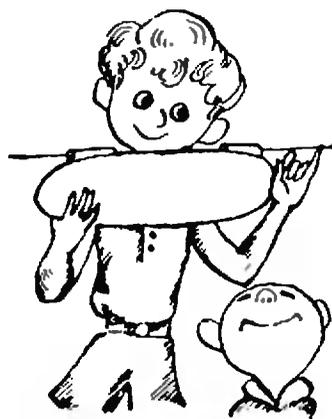


Рис. 3.

Давление внутри банки станет меньше, чем снаружи, поэтому сила давления наружного воздуха будет прижимать шарик к банке. Кроме того, шарик мешае соскользнуть с банки сила трения.

5. Натяните резиновую оболочку воздушного шарика на пустую банку, прикрепите к оболочке указатель, а рядом поставьте измерительную шкалу (рис. 5). Вы получите некий измерительный прибор. Проследите, какое положение на шкале занимает стрелка, когда прибор находится в комнате, в ванне, на улице.

Как вы думаете, что именно измеряет этот прибор?

Конечно, вы догадались, что изготовленный вами прибор — это барометр. С помощью такого барометра легко следить за изменениями давления воздуха. Если давление наружного воздуха увеличивается (становится больше давления внутри банки), оболочка вдавливается внутрь банки, и стрелка поднимается по шкале. Если же давление снаружи уменьшается (и оказывается меньше внутреннего), оболочка выгибается наружу, а стрелка опускается.

А. Дозоров

Шарик, который не сдувается

Возьмите большую стеклянную банку и плотно закройте ее пробкой, в которую вставлены две стеклянные трубочки (рис. 6). На верхние концы трубочек предварительно наденьте резиновые шланги, а к нижнему концу одной из трубочек привяжите резиновую оболочку воздушного шарика. (Роль трубки T_1 может играть кран K , показанный на рисунке 6 пунктиром.)

Оставьте шланг трубки T_1 свободным, а через трубку T_2 надуйте шарик. Если затем освободить T_2 , шарик, естественно, будет сдуваться.

Теперь сделайте следующее. При открытой трубке T_1 надуйте шарик и сразу же пережмите шланги обеих трубок. Если после этого открыть трубку T_2 , шарик практически не сдуется. Почему?

Объяснить это довольно легко. Как только мы освободим трубку T_2 , под действием растянутой резиновой оболочки шарик начнет сдуваться. При этом его объем будет уменьшаться, а объем воздуха в банке (при закрытой трубке T_1) — увеличиваться. В результате давление воздуха в банке будет уменьшаться. В какой-то момент оно окажется меньше давления воздуха внутри шарика. Этот перепад давлений компенсирует действие растянутой оболочки — шарик сдуваться перестанет. Очевидно, что чем сильнее был надут шарик, тем меньше он сдуется.



Рис. 4.



Рис. 5.

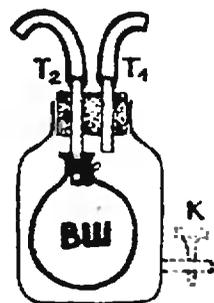


Рис. 6.



М. Крайзман

Заменяем фигуру

Общезвестно, что метод замены переменной широко применяется в алгебре. Не менее эффективно «замена» может быть применена в геометрии. Сущность этого приема решения геометрических задач состоит в следующем: фигура, о которой идет речь в условиях задачи, так заменяется фигурой с той же искомой величиной, чтобы найти эту величину было легче.

В первых двух задачах речь пойдет о простейшей замене — замене одного отрезка другим.

Задача 1. Из точки C , взятой вне угла AOB , равного 60° , опущены перпендикуляры CD , CM и CN соответственно на стороны OA , OB и на биссектрису ON данного угла. Определите $|ON|$, если $|CM| = d_1$ и $|CD| = d_2$.

Решение. Пусть E и P — точки пересечения (CN) с (OB) и (OA) (рис. 1). Образовавшийся треугольник OEP , очевидно, равносто-

ронный. Анализ рисунка приводит к идее замены отрезка ON конгруэнтным отрезком EF , где $(EF) \perp (OP)$: длину отрезка EF легче увязать с данными длинами отрезков CD и CM .

Проведем $[EK] \perp [CD]$ (см. рис. 1); тогда

$$|EF| = |KD| = |CD| - |CK| = |CD| - |CM| = d_2 - d_1.$$

Мы предполагали здесь, что $d_2 > d_1$. Случай $d_1 > d_2$ показан на рисунке 2 и аналогичен случаю $d_2 > d_1$. Окончательный ответ: $|ON| = |d_1 - d_2|$.

Задача 2. В равнобедренном треугольнике ABC ($|AB| = |BC|$) из вершины A проведен перпендикуляр AD к стороне BC . В треугольники ABD и ACD вписаны полукруги так, что их диаметры лежат соответственно на $[BD]$ и $[AD]$. Найти отношение площадей этих полукругов, если величина угла B равна $\frac{\pi}{4}$.

Решение. Если учесть, что $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$, то искомая величина будет найдена, если удастся найти отношение радиусов полукругов; для этого заменим радиус O_1M (рис. 3) на конгруэнтный ему отрезок, являющийся гипотенузой прямоугольного треугольника с известным острым углом. Из того, что $\widehat{B} = \frac{\pi}{4}$, следует $|AD| = |BD|$, $|MB| = |MO_1| = r_1$. Учитывая, что $|AD| = |AM|$ и $|BA| = |BC|$, получаем $|MB| = |CD|$ — отрезок MB можно заменить отрезком CD . В прямоугольном треугольнике O_2CD

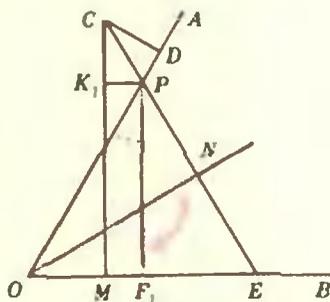


Рис. 1.

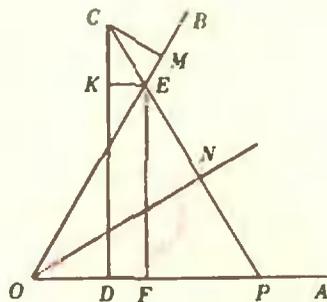


Рис. 2.

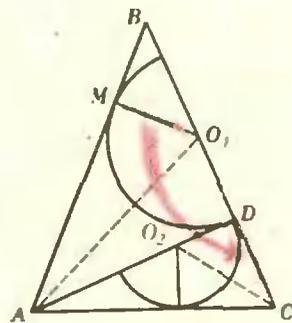


Рис. 3.

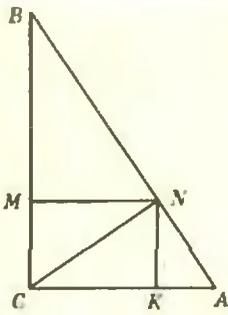


Рис. 4.

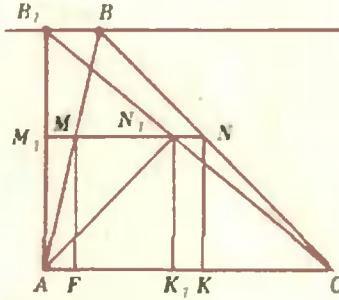


Рис. 5.

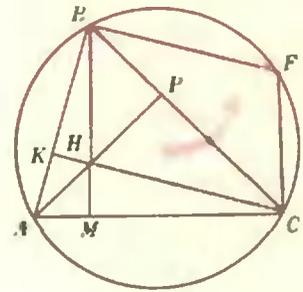


Рис. 6.

$\widehat{O_2CD} = \frac{1}{2} \widehat{ACD} = \frac{3\pi}{16}$; следовательно,
но, $\frac{S_1}{S_2} = \operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{16}$.

В следующих трех задачах мы будем заменять более сложную фигуру (треугольник, пирамиду).

Задача 3. В данный треугольник вписать прямоугольник с диагональю наименьшей длины так, чтобы одна сторона треугольника (или ее продолжение) содержала две вершины, а две другие стороны — по одной вершине этого прямоугольника.

Решение. Если бы в этой задаче шла речь не о произвольном треугольнике, а о прямоугольном, имеющем с данным прямоугольником общий прямой угол, то решение не вызвало бы никаких затруднений: искомым прямоугольником был бы тот, в котором диагональ перпендикулярна к гипотенузе треугольника (рис. 4). Попробуем заменить данный треугольник прямоугольным треугольником с вписанным прямоугольником конгруэнтным искомому.

Пусть B_1AC — прямоугольный ($\widehat{A} = 90^\circ$) треугольник с тем же основанием AC , причем $(B_1B) \parallel (AC)$ (рис. 5). Тогда $|M_1N_1| = |MN|$ (докажите самостоятельно). В треугольник B_1AC впишем прямоугольник $AM_1N_1K_1$ с наименьшей диагональю (рис. 5). Прямая M_1N_1 пересечет стороны BA и BC соответственно в точках M и N . Проведем $[MF] \perp [AC]$ и $[NK] \perp [AC]$. Прямоугольник $FMNK$ — искомый.

Задача 4. Доказать, что радиусы окружностей, описанных около треугольников $АНВ$, $ВНС$ и $АНС$,

где H — точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC , равны между собой.

Решение. Заменяем один из этих треугольников (например, $\triangle BHC$) конгруэнтным ему треугольником и найдем радиус окружности, описанной вокруг замененного треугольника.

1 способ. Через вершину B проведем прямую, параллельную высоте CK , а через C — прямую, параллельную высоте BM ; пусть F — точка пересечения этих прямых (рис. 6).

Четырехугольник $BHCF$ — параллелограмм, поэтому $\triangle BFC \cong \triangle BHC$. Рассмотрим четырехугольник $ABFC$:

$$\left(\begin{array}{l} [FB] \parallel [CK] \\ [FC] \parallel [BM] \end{array} \right) \Rightarrow \left(\widehat{ABF} = \widehat{ACF} = 90^\circ \right).$$

Следовательно, точки A, B, F и C лежат на одной окружности, поэтому $R_{\triangle ABC} = R_{\triangle BFC}$ ($R_{\triangle ABC}$ обозначает радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$).

$$(\triangle BFC \cong \triangle BHC) \Rightarrow (R_{\triangle BFC} = R_{\triangle BHC}).$$

$$\text{Далее, } \left(\begin{array}{l} R_{\triangle ABC} = R_{\triangle BFC} \\ R_{\triangle BFC} = R_{\triangle BHC} \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (R_{\triangle ABC} = R_{\triangle BHC}).$$

Аналогично доказывается, что $R_{\triangle ANB} = R_{\triangle ANC} = R_{\triangle ABC}$.

2 способ. Опишем около данного треугольника ABC окружность и продолжим его высоту AP до пересечения с проведенной окружностью

в точке E (рис. 7). Заметим, что $\widehat{CBM} =$

$$= \widehat{PAC} \text{ (каждый из этих углов дополняет угол } \widehat{ACB} \text{ до } 90^\circ \text{) и } \widehat{PAC} = \widehat{CBE}$$

(каждый из них измеряется половиной угловой величины дуги EC , на которую они опираются); следовательно, $\angle CBE \cong \angle CBH$. Аналогично доказываем, что $\angle BCE \cong \angle BCH$. Таким образом, $\triangle BEC \cong \triangle BHC$, следовательно, $R_{BEC} = R_{BHC}$.

Точки A, B, C и E лежат на одной окружности, поэтому $R_{BEC} = R_{ABC}$. Окончательно получаем $R_{BHC} = R_{ABC}$.

Аналогично доказываем, что радиусы окружностей, описанных около треугольников AHB и AHC , равны радиусу окружности, описанной около треугольника ABC .

Задача 5*). Дан куб с основаниями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Найдите объем тетраэдра AD_1EF , где E — середина ребра DC и F — середина ребра BB_1 , если ребро куба равно 1.

Решение. Проведем через точку D_1 прямую l параллельно $[AF]$ (рис. 8).

$$\left(\begin{array}{l} l \parallel [AF] \\ [AF] \subset (AA_1B_1) \end{array} \right) \Rightarrow (l \parallel (AA_1B_1)).$$

Так как $D_1 \in (DD_1C_1)$ и $(DD_1C_1) \parallel (AA_1B_1)$, любая прямая (в частности, прямая l), проведенная через точку D_1 параллельно (AA_1B_1) , будет лежать в плоскости грани DD_1C_1C . Пусть $l \cap (DC) = K$. Из того, что $(D_1K) \parallel [AF]$ и $[AF] \subset (AFE)$, получаем $(D_1K) \parallel (AFE)$, и потому пирамида D_1AFE равновелика пирамиде $KAFE$ (у них общее основание —

$\triangle AFE$, а вершины D_1 и K лежат на прямой, параллельной (AFE)). Заменяем теперь пирамиду D_1AFE пирамидой $KAFE$.

Примем за основание пирамиды $KAFE$ треугольник AKE ; тогда высотой пирамиды будет $[FB]$, поэтому

$$V_{FAKE} = \frac{1}{3} S_{\triangle AKE} \cdot |FB|.$$

Из подобия треугольников AFB и KD_1D следует $|DK| = 2$. Далее находим: $|KE| = 2 \cdot \frac{1}{2}$, $S_{AKE} =$

$$= \frac{1}{2} |KE| \cdot |AD| = \frac{5}{4}. \text{ Окончательно получаем } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{24}.$$

В следующих трех задачах мы будем заменять параллелепипед тетраэдром.

Задача 6. Из одной из вершин прямоугольного параллелепипеда проведены диагонали всех граней, проходящих через эту вершину. Доказать, что сумма углов, попарно образованных этими диагоналями, равна 180° .

Решение. Соединим между собой точки A, D_1 и C — концы диагоналей, проведенных из вершины B_1 (рис. 9). Заменяем прямоугольный параллелепипед $AB_1C_1D_1$ образовавшимся тетраэдром B_1AD_1C и докажем, что сумма плоских углов при вершине этого тетраэдра равна 180° .

Заметим, что $\triangle AB_1C \cong \triangle AD_1C$, $\triangle CB_1D_1 \cong \triangle CAD_1$ и $\triangle AB_1D_1 \cong \triangle ACD_1$; следовательно, $\angle AB_1C \cong \angle AD_1C$, $\angle CB_1D_1 \cong \angle CAD_1$ и $\angle AB_1D_1 \cong \angle ACD_1$.

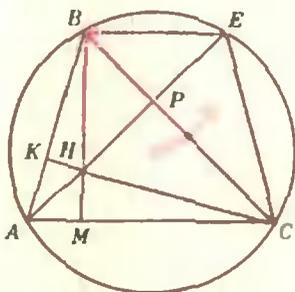


Рис. 7.

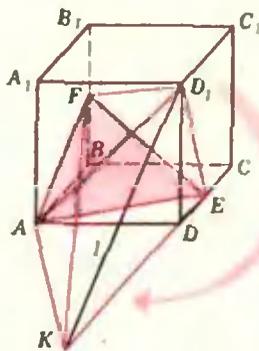


Рис. 8.

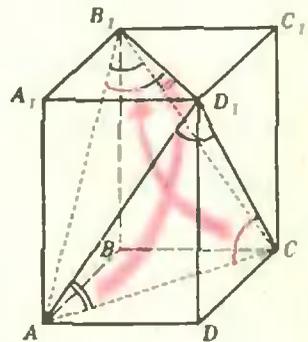


Рис. 9.

* Эта задача предлагалась в 1969 г. на вступительных экзаменах на физический факультет МГУ.

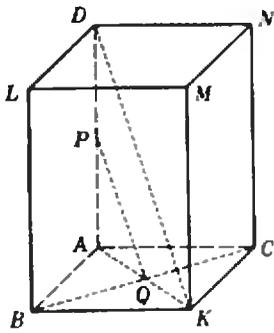


Рис. 10.

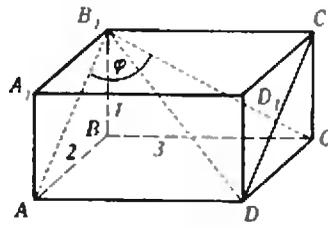


Рис. 11.

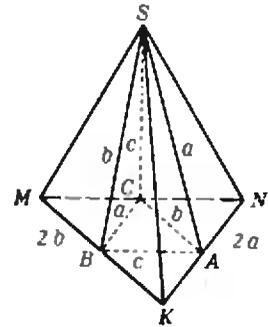


Рис. 12.

Учитывая $\widehat{AD_1C} + \widehat{CAD_1} + \widehat{ACD_1} = 180^\circ$ (сумма углов треугольника), получим $\widehat{AB_1D_1} + \widehat{AB_1C} + \widehat{CB_1D_1} = 180^\circ$.

Задача 7. Доказать, что длина отрезка, соединяющего середины скрещивающихся ребер тетраэдра с прямым трехгранным углом при вершине, равна радиусу сферы, описанной около данного тетраэдра.

Решение. Дополним тетраэдр ABCD с прямыми плоскими углами при вершине A до прямоугольного параллелепипеда $ABKCDLMN$ (рис. 10). Сфера, описанная около данного параллелепипеда, будет также описанной около тетраэдра ABCD. Из треугольника AKD следует, что $|PQ| = \frac{1}{2} |DK|$. Так как диагональ DK параллелепипеда является диаметром описанной сферы, длина отрезка PQ равна радиусу этой сферы.

Задача 8. Длина ребер прямоугольного параллелепипеда равны 1, 2 и 3. Определить расстояние между скрещивающимися диагоналями смежных боковых граней этого параллелепипеда.

Решение. Вместо параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ рассмотрим тетраэдр $DB_1 C_1 C$ (рис. 11). Объем этого тетраэдра равен

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle B_1 C_1 C} \cdot |DC| = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \right) \cdot 2 = 1. \quad (1)$$

Найдем теперь его объем, восполь-

зовавшись соотношением $V = \frac{1}{6} \times l_1 \cdot l_2 \cdot d \cdot \sin \varphi^*$, где l_1 и l_2 — длины скрещивающихся ребер этого тетраэдра, d и φ — расстояние и угол между ними. Получим

$$V = \frac{1}{6} |B_1 C| \cdot |DC_1| \cdot d \cdot \sin \widehat{AB_1 C} = \frac{1}{6} \sqrt{50} \cdot d \cdot \sin \varphi.$$

В трехгранном угле $BACB_1$ косинус плоского угла φ , лежащего против ребра $B_1 B$ прямого двугранного угла, равен произведению косинусов плоских углов, ограничивающих этот прямой двугранный угол, т. е.

$$\cos \widehat{AB_1 C} = \cos \widehat{AB_1 B} \cdot \cos \widehat{BB_1 C};$$

из этого равенства получаем

$$\cos \widehat{AB_1 C} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{50}};$$

$$\sin \widehat{AB_1 C} = \sin \varphi = \frac{7}{\sqrt{50}}.$$

Следовательно,

$$V = \frac{1}{6} \sqrt{50} \cdot d \cdot \frac{7}{\sqrt{50}} = \frac{7}{6} d. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует $1 = \frac{6}{7} d$.

Отсюда $d = \frac{6}{7}$.

Приведем замену, при которой три боковых ребра заменяемого тетраэдра являются медианами боковых граней заменяющего тетраэдра.

*) Эту формулу тоже можно доказать методом замены!

Задача 9. Длины ребер SA и BC тетраэдра $SABC$ равны a , ребер SB и AC — b , ребер SC и AB — c . Определить его объем.

Решение. Пусть вершины A, B, C тетраэдра $SABC$ являются серединами ребер NK, MK и MN тетраэдра $SMNK$ (рис. 12). Тогда $|KN| = 2|BC| = 2a$, $|MN| = 2|AB| = 2c$, $|KM| = 2|AC| = 2b$. По условию задачи $|AS| = a$, $|BS| = b$, $|CS| = c$. Следовательно, в треугольнике KSN длина медианы AS равна половине длины стороны KN и, следовательно, $\triangle KSN$ — прямоугольный ($KSN = 90^\circ$). Аналогично доказываем, что $NSM = MSK = 90^\circ$. Если тетраэдр $SMNK$ поставить на боковую грань, например, SKM , то ребро SN будет его высотой и, следовательно, $V_{SKNM} = \frac{1}{6} |SK| \times |SN| \cdot |SM|$.

Объем искомой пирамиды составляет $\frac{1}{4}$ часть объема пирамиды $SKNM$ (тетраэдры $SKAB, SANC, SMCB$ и $SABC$ равновелики), поэтому $V_{SABC} = \frac{1}{24} |SK| \cdot |SN| \cdot |SM|$.

Положим $|SM| = x$, $|SN| = y$, $|SK| = z$; тогда

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4c^2, \\ x^2 + z^2 = 4b^2, \\ y^2 + z^2 = 4a^2. \end{cases} \quad (3)$$

Отсюда

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2). \quad (4)$$

Вычтя из уравнения (4) каждое из уравнений системы (3), получим

$$\begin{cases} z^2 = 2(a^2 + b^2 - c^2), \\ y^2 = 2(a^2 + c^2 - b^2), \\ x^2 = 2(b^2 + c^2 - a^2). \end{cases} \quad (5)$$

Отсюда

$$x^2 y^2 z^2 = 8(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2).$$

Искомый объем равен:

$$V = \frac{1}{12} \sqrt{2(a^2 + b^2 - c^2) \times \times (a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2)}.$$

Упражнения

1. Для данного треугольника построить прямоугольник с данной диагональю так, чтобы на прямой, содержащей одну сторону треугольника, лежали две вершины прямоугольника, а на двух других сторонах треугольника — по одной вершине этого прямоугольника.

2. Построить квадрат так, чтобы на прямой, содержащей одну сторону данного треугольника, лежали две вершины квадрата, а две другие стороны треугольника содержали по одной вершине квадрата.

3. Большее основание правильной четырехугольной усеченной пирамиды образует с боковой гранью угол α , а с плоскостью, проходящей через противоположные стороны верхнего и нижнего оснований, угол β . Найти отношение площадей оснований.

4. Длины оснований равнобедренной трапеции равны a и b ($a > b$), величина угла при большем основании равна α . Найти длину радиуса окружности, описанной около трапеции.

5. Определить длину радиуса сферы, касающейся всех ребер правильного тетраэдра с боковым ребром a .

Где ошибка?

Не вызывает сомнения следующее логическое правило: если из высказывания A следует высказывание B и из B следует высказывание C , то из A следует C .

Применим это правило к предложениям:

Я утверждаю, что Сократ — буйный человек (А)

Я утверждаю, что Сократ — человек (В)

Я говорю правду (С)

Очевидно, если я утверждаю, что Сократ — буйный человек, то тем самым я утверждаю, что Сократ — человек. Но если я утверждаю, что Сократ — человек, то я,

разумеется, говорю правду. Получается, что если я утверждаю, что Сократ — буйный человек, то я говорю правду.

Где ошибка?

Н Михайленко

Н. Берюлева

Построение изображений в линзах и сферических зеркалах

Определить положение изображения, полученного с помощью линзы или зеркала, можно двумя способами — алгебраическим расчетом с помощью формулы линзы (зеркала) и геометрическим построением.

Первый способ, пожалуй, более универсален; во многих случаях, особенно в сложных оптических системах, без него не обойтись. Зато второй способ обладает важным достоинством — наглядностью. Поэтому, даже решая задачу алгебраически, мы обычно делаем чертеж, который помогает составить необходимую систему уравнений. Если же задача не слишком громоздкая, геометрическое решение — решение построением — является и более простым.

При построении изображений в тонких линзах обычно используют три характерных луча (рис. 1):

1) луч AA_1 , проходящий через оптический центр O линзы (побочная оптическая ось), идет не преломляясь;

2) луч VB_1 , падающий на линзу параллельно главной оптической оси MN , преломившись, проходит *) через задний фокус F' линзы;

3) луч CC_1 , проходящий через передний фокус F , после прелом-

ления идет параллельно главной оптической оси линзы.

Обратите внимание, что задним фокусом F' называется точка, в которой после преломления сходятся лучи, падающие на линзу параллельно главной оптической оси. Передний F и задний F' фокусы расположены симметрично относительно плоскости тонкой линзы. Через F проходит передняя фокальная плоскость, через F' — задняя.

Иногда удобно пользоваться такими правилами:

1) лучи, падающие на линзу параллельным пучком, после преломления в линзе сходятся в задней фокальной плоскости (рис. 2);

2) лучи, выходящие из линзы параллельным пучком, до встречи с линзой пересекались в передней фокальной плоскости (рис. 3).

Строго говоря, все сказанное справедливо только для *параксиальных* (то есть очень близких к главной оптической оси) лучей. Подробнее об этом можно прочитать в статье Е. Кузнецова «Линзы и системы линз» («Квант», 1977, № 4).

Среди оптических задач больше всего затруднений у абитуриентов вызывают задачи на построение изображений в рассеивающих линзах. По-видимому, трудности возникают у тех, кто не уяснил себе достаточно четко, что линза имеет два фокуса и что роли этих фокусов различны.

Напомним еще раз, что задний фокус — это точка на главной оптической оси линзы, где сойдутся после преломления лучи, падающие на линзу параллельно главной оптической оси. У собирающей (положительной) линзы задний фокус F' расположен за линзой (по ходу лучей), у рассеивающей (отрицательной) — перед линзой (см. рис. 1, 2, 3). Если лучи вышли из линзы параллельно главной оптической оси, значит, перед тем как встретиться с линзой, они пересекались в переднем фокусе F . У собирающей линзы передний фо-

*) Уточним, что для отрицательной линзы через F' проходит не сам преломленный луч, а его продолжение. В дальнейшем уточнения такого рода мы будем для краткости опускать.

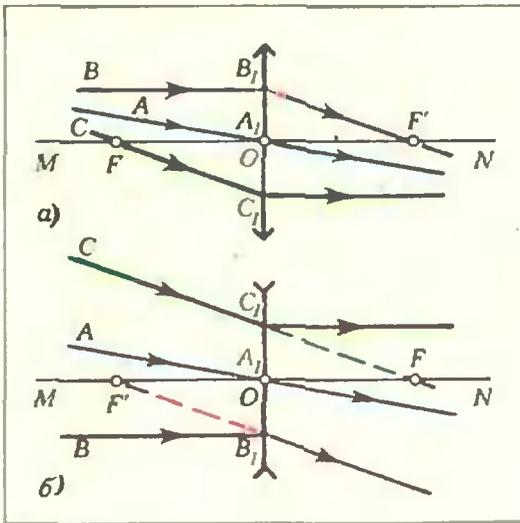


Рис. 1.

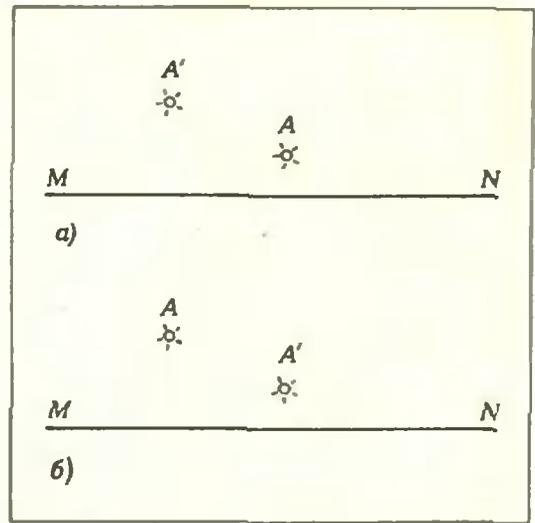


Рис. 4.

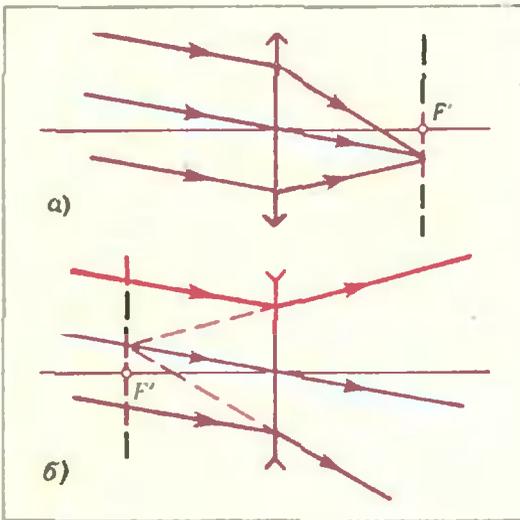


Рис. 2.

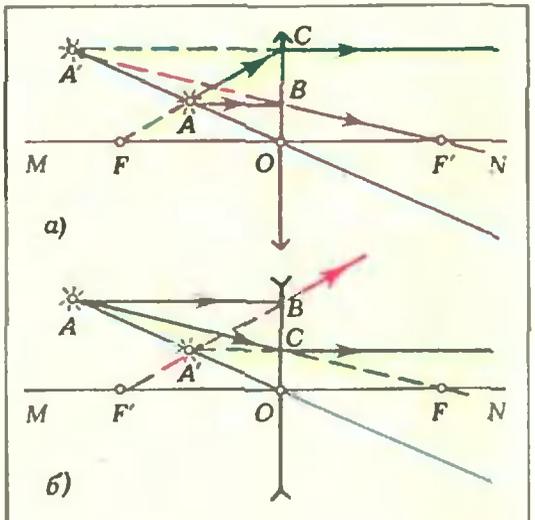


Рис. 5.

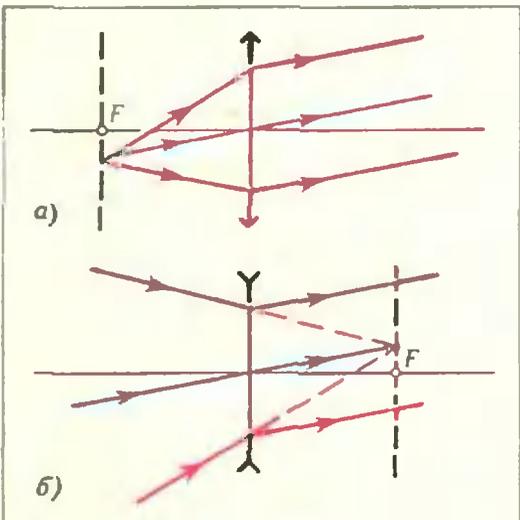


Рис. 3.

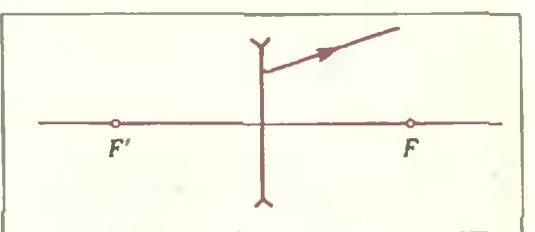


Рис. 6.

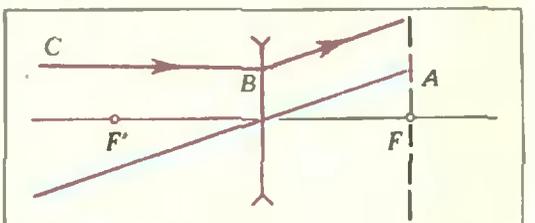


Рис. 7.

кус F лежит перед линзой (по ходу лучей), у рассеивающей — за линзой.

Термины «передний фокус» и «задний фокус» помогают в лаконичной форме сформулировать правила построения изображений, единые для положительной и отрицательной линз.

Рассмотрим несколько конкретных задач. Все они предлагались на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт.

Задача 1. Зная расположение предмета A и изображения A' относительно главной оптической оси MN линзы (рис. 4), найти построением положение фокусов линз.

Прямая, проходящая через точки A и A' , при пересечении с осью MN дает центр линзы O (рис. 5). Перпендикуляр к оси MN , восстановленный из точки O , определяет положение плоскости линзы.

Луч AB , параллельный оси MN , преломившись в линзе, проходит через точку A' и задний фокус F' линзы. Если F' лежит за линзой (рис. 5, а) — линза собирающая, если перед линзой (рис. 5, б) — рассеивающая. Симметрично относительно линзы расположен передний фокус F .

Построив луч AC , проходящий через передний фокус, убедимся, что он после преломления в линзе попадает в точку A' .

Задача 2. На рисунке 6 изображен луч, вышедший из рассеивающей линзы. Построить ход луча до линзы.

Проведем побочную оптическую ось параллельно лучу, вышедшему из линзы (рис. 7). Лучи, идущие после линзы параллельным пучком, до встречи с линзой пересекались в ее передней фокальной плоскости. Соединив точку A , в которой побочная ось пересекается с передней фокальной плоскостью, и точку B , в которой вышедший луч пересекается с плоскостью линзы, определим направление падающего луча CB .

Задача 3. С помощью собирающей линзы получен сходящийся пучок лучей. Как пойдут лучи, если на пути пучка поставить рассеивающую линзу (рис. 8)?

Проведем побочную оптическую ось, параллельную верхнему лучу пучка (рис. 9). Параллельные лучи после линзы пересекаются в ее задней фокальной плоскости (точка A). Продолжив прямую AB , найдем ход верхнего луча за линзой. Симметрично построим нижний луч пучка.

Задача 4. Рассеивающую линзу с известным расположением фокальных плоскостей распилили по диаметру. Половинки раздвинули по вертикали на расстояние h друг от друга (рис. 10). Построить изображения точки A , лежащей на оси симметрии системы.

Каждая половина линзы дает свое изображение точки A . Сначала построим изображение в верхней половине линзы. Главная оптическая ось M_1N_1 верхней половины проходит через срез линзы параллельно оси симметрии системы, O_1 — оптический центр верхней части, AO_1 — ее побочная оптическая ось (рис. 11).

Проведем произвольный луч AB , падающий из точки A на верхнюю часть линзы, и параллельную ему побочную оптическую ось CD . После встречи с линзой параллельные лучи пересекаются в задней фокальной плоскости в точке E . Точка пересечения прямых BE и AO_1 определяет положение изображения A' .

Нижняя часть линзы дает симметрично расположенное изображение A'' .

* * *

В сферических зеркалах изображения строятся по тем же правилам, что и в линзах (рис. 12):

1) луч AO , проходящий через центр зеркала O , при отражении от зеркала не меняет своего направления;

2) луч BB_1 , падающий на зеркало параллельно главной оптической оси, отразившись, идет через фокус F зеркала (напомним, что фокус сферического зеркала расположен посередине между полюсом зеркала P и его центром O);

3) луч DF , проходящий через фокус, отразившись, идет параллельно главной оптической оси.

Удобно использовать еще один луч:

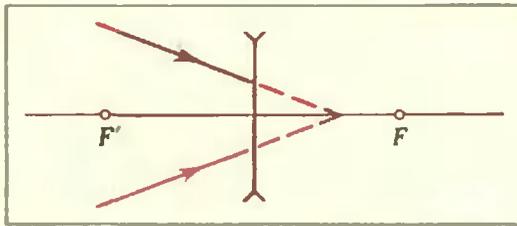


Рис. 8.

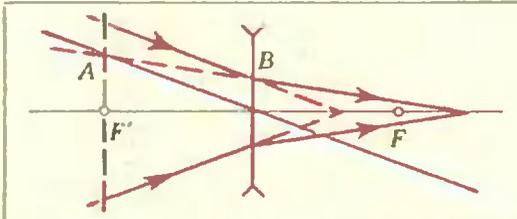
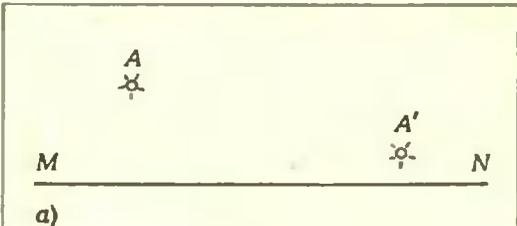
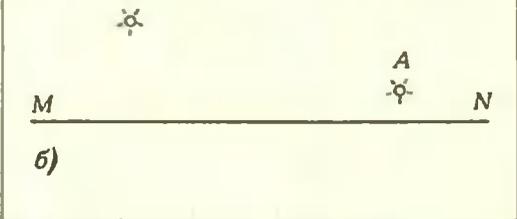


Рис. 9.



а)



б)

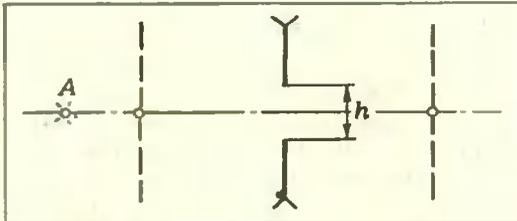


Рис. 10.

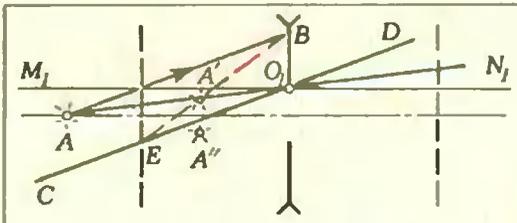
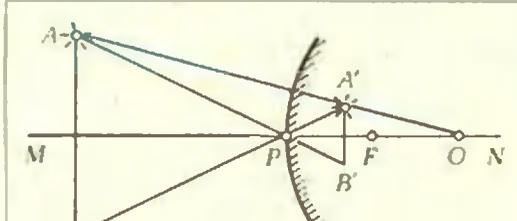
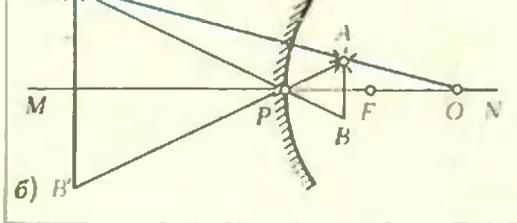


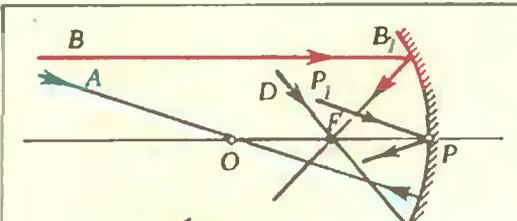
Рис. 11.



а)



б)



а)

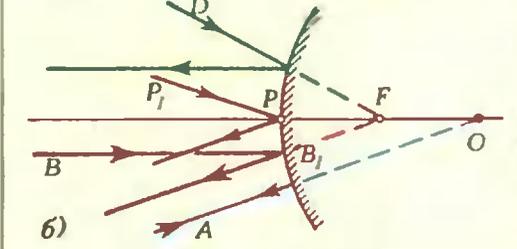


Рис. 12.

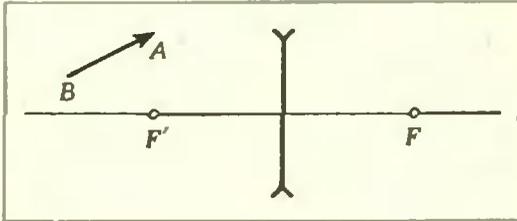


Рис. 15.

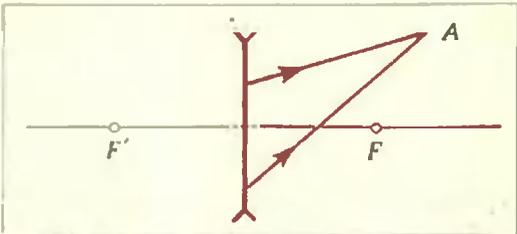


Рис. 16.

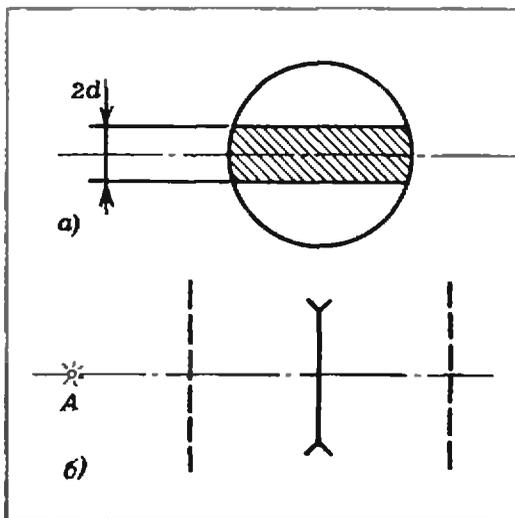


Рис. 17.

4) луч P_1P , падающий на полюс зеркала P , отражается симметрично относительно главной оптической оси OP .

Разберем такую задачу:

Задача 5. Известно расположение предмета A и его изображения A' относительно главной оптической оси MN сферического зеркала (рис. 13). Найдите построением фокус зеркала.

Пересечение прямой, проходящей через точки A и A' , с осью MN дает центр сферического зеркала (рис. 14).



Рис. 18.

Проведем отрезки AB и $A'B'$, перпендикулярные к оси MN (точки B и B' симметричны точкам A и A' соответственно). Прямые AB' и BA' , пересекаясь с осью MN , определяют полюс зеркала P .

Окружность радиуса $|OP|$ с центром в точке O определяет положение зеркала. Отражающая поверхность зеркала обращена к предмету.

Фокус зеркала F делит отрезок OP пополам.

Упражнения

1. Построить изображение предмета AB в рассеивающей линзе. Положения фокусов указаны на рисунке 15.

2. После рассеивающей линзы лучок лучей сошелся в точке A (рис. 16). Начертить ход лучей до линзы.

3. Рассеивающую линзу распилили, как показано на рисунке 17, а, середину удалили, а оставшиеся части сдвинули вплотную. Построить изображение предмета A , лежащего на оси симметрии оптической системы (рис. 17, б).

4. Известно расположение предмета A и изображения A' относительно полюса P сферического зеркала (рис. 18). Найдите положение зеркала и его фокус.

Знаю ли я неравенства?

С помощью несложного задания вы можете проверить, хорошо ли вы усвоили раздел «Неравенства». Для этого вам нужно решить восемь предлагаемых задач не более чем за 25 минут. Сверив получившиеся ответы с ответами на с. 62, вы сможете тут же сами себе поставить оценку (по пятибалльной системе), вычислив ее по формуле

$$k = \left[\frac{n}{2} + 1 \right],$$

где n — количество правильно решенных задач.

Вы готовы? Засекайте время... Начали!

Задание

Решить неравенства:

1. $x^{-2} < x^{-3}$.

2. $\frac{(x+3)(x+4)}{x+3} > 0$.

3. $\log_{\sqrt{x}} x > 1$.

4. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x < 3$.

5. $\sin x > \cos x$.

6. $\sin x \leq \log_2 3$.

7. Что больше: $\log_6 \cos 6$

или $\sqrt{\cos 6}$?

8. Упростить выражение

$|-a| + \sqrt{a^2}$ при $a < 0$.

Если вы (не превысив лимит времени) заработали «пятерку», можете перейти к следующему, более трудному заданию. Впрочем, если ваша оценка «четыре» и вы осознали свои ошибки, попробуйте реабилитировать себя. Не торопитесь: время теперь не ограничено.

Решить неравенства:

1. $\log_{\sqrt{2}} -0.5(x^2(x - 3\sqrt{2}) + 2(3x - \sqrt{2})) < 6$.

2. $\frac{\arcsin(x^2 - 3x + 3)}{x^3 - x^2 + x + \log_x x^2} > 0$.

Л. Слукин

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Ниже публикуются материалы вступительных экзаменов 1978 года.

Математика

Механико-математический факультет

В а р и а н т 1

1. Разность

$$\sqrt{|40\sqrt{2}-57|} - \sqrt{40\sqrt{2}+57}$$

является целым числом. Найдите это целое число.

2. Найти все решения уравнения

$$\int_0^{\alpha} \cos(x + \alpha^2) dx = \sin \alpha,$$

принадлежащие отрезку $[2; 3]$.

3. В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB . Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а длина отрезка PQ равна $2\sqrt{2}$. Вычислить радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

4. Найти все значения параметра a , при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \geq \frac{1-a}{a+1}, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2. \end{cases}$$

имеет решение.

5. Объем тетраэдра $ABCD$ равен 5. Через середины ребер AD и BC проведена плоскость, пересекающая ребро CD в точке M . При этом отношение длины отрезка DM к длине отрезка MC равно $\frac{2}{3}$. Вычислить площадь сечения тетраэдра указанной плоскостью, если расстояние от нее до вершины A равно 1.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

В а р и а н т 2

1. Решить неравенство

$$(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0.$$

2. Найти точки минимума функции

$$\sqrt{3} \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} - \frac{x-3}{2}.$$

3. Найти уравнение прямой, проходящей через точку с координатами $(\frac{1}{2}; 2)$, касающейся графика функции $y = -\frac{x^2}{2} + 2$ и пересекающей в двух различных точках график функции $y = \sqrt{4-x^2}$.

4. Совокупность A состоит из различных натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 210. Для любых двух чисел из A их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит A .

5. Основанием пирамиды $ABCEH$ служит выпуклый четырехугольник $ABCE$, который диагональю BE делится на два равновеликих треугольника. Длина ребра AB равна единице, длины ребер BC и CE равны. Сумма длин ребер AH и EH равна $\sqrt{2}$. Объем пирамиды равен $\frac{1}{6}$.

Найти радиус шара, имеющего наибольший объем среди всех шаров, помещающихся в пирамиде $ABCEH$.

Задачи устного экзамена

1. Найти \min и \max функции $f(x) = a \sin x + b \cos x$.

2. Решить в натуральных числах уравнение

$$A_{x+3}^2 = C_{x+2}^3 + 20.$$

3. Доказать, что площадь треугольника меньше единицы, если длины всех биссектрис меньше единицы.

4. Доказать неравенства $3 < \pi < 4$.

5. Построить график функций

$$y = \log_{|\sin x|} \frac{1}{2}.$$

6. Вычислить $\log_9 40$, если известно, что $\lg 15 = a$, $\log_{20} 50 = b$.

Физика

(задачи устного экзамена)

Физический факультет

1. Зенитное орудие может производить выстрелы во всевозможных направлениях. Определить границу области, которая простреливается из этого орудия,

если модуль начальной скорости снаряда равен v_0 .

2. Определить ускорения грузов массой m_1 и m_2 в системе, изображенной на рисунке 1. (Массам блоков и нитей, растяжением нитей и трением в блоках пренебречь.)

3. Влажный воздух при температуре T и давлении p занимает объем V . Относительная влажность воздуха $\epsilon\%$, давление насыщенных паров при этой температуре p_n . Найти плотность влажного воздуха и массу содержащихся в нем паров воды.

4. Относительная влажность водяных паров, находящихся в объеме $V = 20$ л при температуре $t = 100^\circ\text{C}$, равна $\epsilon = 90\%$. Пары изотермически сжимают, уменьшая объем в два раза. Найти массу сконденсировавшейся воды, если давление насыщенных паров при этой температуре равно $p_n = 1$ атм. Универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(К·моль). Объемом воды пренебречь.

5. Идеальный газ массой m , находящийся при температуре T , охлаждается изохорически так, что его давление падает в k раз. Затем газ расширяется изобарически, пока его температура не станет равной первоначальной. Определить произведенную газом работу. Молярная масса газа равна μ .

6. Какое количество теплоты выделится в цепи при переключении ключа K из положения 1 в положение 2 (рис. 2)?

7. Определить разность потенциалов на конденсаторе емкостью C_0 в схеме, изображенной на рисунке 3. Величины сопротивлений, ЭДС батарей и их полярность указаны на рисунке. Внутренним сопротивлением источников пренебречь. Какой знак будет иметь заряд на верхней пластине конденсатора?

8. Контур AOB , имеющий вид сектора, образован дугой AB радиусом $L = 10$ см из оголенного проводника и двумя радиальными проводниками OA и OB с сопротивлениями $R_1 = 1$ Ом и $R_2 = 2$ Ом (рис. 4). В центре O дуги шарнирно закреплена перемычка OC , другой конец которой может двигаться вдоль дуги, сохраняя с ней контакт. Сопротивление перемычки $R_3 = 3$ Ом. Контур находится в магнитном поле с индукцией

\vec{B} ($|\vec{B}| = 0,2$ Т), направленной перпендикулярно к плоскости контура. Найти силу тока I в перемычке при ее вращении с постоянной угловой скоростью $\omega = 11$ рад/с. Сопротивлением дуги пренебречь.

9. В сферическую чашу с зеркальной внутренней поверхностью налито немного воды. Сверху на чашу падает пучок параллельных лучей света. В результате отражения от сферического зеркала чаши и преломления на поверхности воды пучок фокусируется в точку. Радиус кривизны зеркала равен R , показатель преломления воды равен n . Диаметр пучка много меньше радиуса кривизны зеркала, поэтому синусы углов падения можно заменить углами. На каком расстоянии от поверхности воды лучи соберутся в фокус?

10. Точечный источник света помещен в фокусе рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F = 4$ см. На экране, расположенном за линзой на расстоянии $l = 3$ см, получено светлое пятно. На какое расстояние по оптической оси надо переместить источник, чтобы диаметр пятна уменьшился на 20%?

Механико-математической факультет и факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Шарик подвешен на нити длиной $l = 32$ см так, что точка подвеса находится на высоте $H = 50$ см над гладким столом. Шарик вывели из положения равновесия, отклонив нить в натянутом состоянии на угол 90° , и отпустили без толчка. Нить оборвалась в тот момент, когда ее угол отклонения от вертикали был $\alpha = 60^\circ$. Найти высоту h , на которую шарик подпрыгнет после удара о стол, если этот удар абсолютно упругий. Нить нерастяжима.

2. На горизонтальной вращающейся платформе на расстоянии $l = 1$ м от оси вращения лежит груз. Коэффициент трения между грузом и платформой $\mu = 0,1$. Через какое время после начала вращения платформы груз соскользнет с нее, если платформа начинает вращаться равноускоренно и через $t = 2$ мин приобретает угловую скорость $\omega = 1,2$ рад/с? Ус-

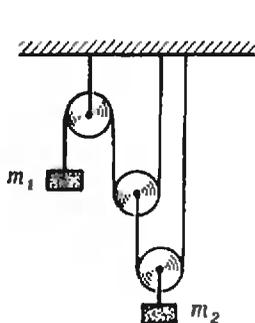


Рис. 1.

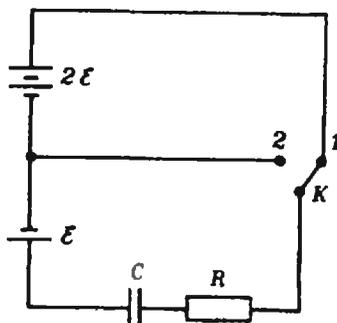


Рис. 2.

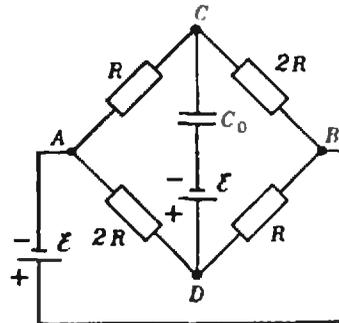


Рис. 3.

корение свободного падения принять равным $g = 9,8 \text{ м/с}^2$.

3. Спутник, масса которого $m = 2 \cdot 10^3 \text{ кг}$, из-за торможения о верхние слои атмосферы переходит с орбиты, расположенной на высоте $h_1 = 210 \text{ км}$ над поверхностью Земли, на орбиту с высотой $h_2 = 200 \text{ км}$. Какую энергию теряет при этом спутник? В обоих случаях орбиту спутника считать круговой. Ускорение свободного падения можно считать постоянным и равным $g = 10 \text{ м/с}^2$.

4. В запаянной с левого конца U-образной трубке высота столбика воздуха $l_0 = 300 \text{ мм}$, а избыточная высота столба ртути в правом колене $h_0 = 110 \text{ мм}$. В правое колено долили столько ртути, что ее уровень в левом колене поднялся на $l = 10 \text{ мм}$. На сколько поднялся уровень ртути в правом колене? Атмосферное давление $p = 760 \text{ мм рт. ст.}$ Температура постоянна.

5. Два сосуда соединены тонкой трубкой, содержащей капельку ртути, которая исключает перемешивание газов, находящихся в сосудах (рис. 5). В первом сосуде заключено $m_1 = 2 \text{ г}$ гелия (молярная масса $\mu_1 = 4 \text{ кг/кмоль}$), во втором — $m_2 = 4 \text{ г}$ неона (молярная масса $\mu_2 = 20 \text{ кг/кмоль}$). Температура в обоих сосудах одинакова и равна T_1 . Во сколько раз увеличится давление в системе, если гелий нагреть до температуры $T_2 = 2T_1$, не меняя температуры неона? Расширения сосудов не учитывать.

6. Найти разность потенциалов между точками A и B в схеме, изображенной на рисунке 6. Емкости конденсаторов: $C_1 = 1 \text{ мкФ}$, $C_2 = 2 \text{ мкФ}$. Электродвижущие силы источников: $\mathcal{E}_1 = 4 \text{ В}$, $\mathcal{E}_2 = 6 \text{ В}$.

7. Найти величину сопротивления R_1 , при которой разность потенциалов между точками A и B в схеме, изображенной на рисунке 7, равна нулю ($R_2 = 60 \text{ Ом}$, $R_3 = 10 \text{ Ом}$, $R_4 = 80 \text{ Ом}$, $R_5 = 20 \text{ Ом}$).

8. В однородном магнитном поле с индукцией $|\vec{B}| = 2 \text{ Т}$ находится прямоугольная рамка. Плоскость рамки перпендикулярна к магнитным линиям. Сопротивление рамки $R = 0,25 \text{ Ом}$. Какая мощность затрачивается, если рамка выдвигается из магнитного поля с по-

стоянной скоростью $|\vec{v}| = 6,2 \text{ м/с}$ перпендикулярно к направлению магнитных линий? Поле имеет резко очерченную границу, и сторона рамки длиной $l = 20 \text{ см}$ параллельна этой границе.

9. Съемка чертежа размером $30 \text{ см} \times 40 \text{ см}$ ведется фотоаппаратом, объектив которого имеет фокусное расстояние $F = 20 \text{ см}$. Расстояние от объектива до чертежа $d = 1,6 \text{ м}$. Каким должно быть фокусное расстояние насадочной линзы (т. е. линзы, приставляемой вплотную к объективу), чтобы изображение чертежа точно уложилось на фотопластинку размером $9 \text{ см} \times 12 \text{ см}$?

10. Точечный источник света находится на расстоянии $d = 10 \text{ см}$ от собирающей линзы, имеющей фокусное расстояние $F = 12 \text{ см}$, на ее главной оптической оси. Лучи света, преломившись в линзе, падают на выпуклое зеркало, отражаются от него и вновь проходят через линзу, в результате чего получается пучок лучей, параллельный главной оптической оси линзы. Определить радиус кривизны зеркала, если оно находится на расстоянии $l = 3 \text{ см}$ от линзы.

Химический факультет

1. Шарик массы m_1 движется без трения по горизонтальной поверхности и сталкивается с покоящимся шариком массы m_2 . Удар считать центральным и абсолютно упругим. При каком соотношении масс шариков они разлетятся в противоположные стороны с равными по абсолютной величине скоростями?

2. В теплоизолированном сосуде содержится смесь воды массы $m_1 = 500 \text{ г}$ и льда $m_2 = 55 \text{ г}$ при температуре $t_1 = 0^\circ \text{C}$. В сосуд вводится сухой насыщенный пар массой $m_3 = 6,6 \text{ г}$ при температуре $t_2 = 100^\circ \text{C}$. Какой будет температура t содержимого сосуда после установления теплового равновесия? Удельная теплота парообразования воды $\lambda = 2,3 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$, удельная теплота плавления льда $r = 0,33 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$, удельная теплоемкость воды $c = 4,2 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$.

3. Расстояние между пластинами плоского воздушного конденсатора $d = 5 \text{ см}$. Конденсатор заряжен при помощи бата-

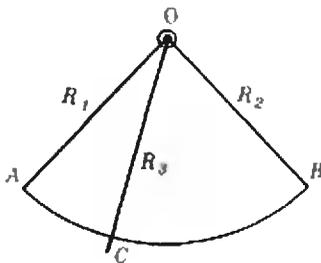


Рис. 4.



Рис. 5.

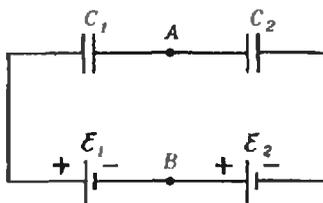


Рис. 6.

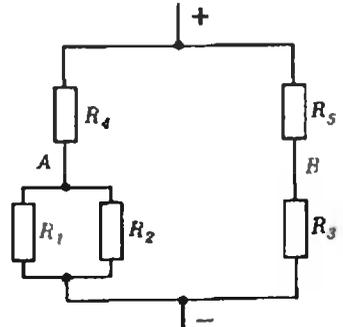


Рис. 7.

реи до напряжения $U_1 = 150$ В, а затем отключен от нее. Внутри конденсатора параллельно его пластинам ввели незаряженную металлическую пластину толщиной $l = 1$ см, длина и ширина которой такие же, как и у конденсатора. Определить разность потенциалов U_2 между пластинами конденсатора после введения в него металлической пластины.

4. В однородном магнитном поле, магнитная индукция которого $|\vec{B}| = 5 \cdot 10^{-2}$ Т, на двух легких нитях AB и CD подвешен горизонтальный проводник BD длиной $l = 40$ см и массой $m = 5,1$ г. Каждая нить разрывается при нагрузке, превышающей $T_0 = 4 \cdot 10^{-2}$ Н. Какой величины ток I надо пропустить через проводник в направлении от B к D , чтобы одна из нитей разорвалась? Индукция магнитного поля направлена горизонтально, перпендикулярно к проводнику, к наблюдателю.

5. Глаз человека может быть сфокусирован на объект, находящийся на расстоянии от $a_1 = 25$ см до $a_2 \rightarrow \infty$ от глаза. Между какими двумя предельными расстояниями s_1 и s_2 от глаза должен быть расположен предмет, чтобы его было ясно видно через линзу с фокусным расстоянием $F = 10$ см, расположенную непосредственно перед глазом?

Географический и геологический факультеты и факультет почвоведения

1. Тело массой $m = 1$ кг вращается на веревке длиной $l = 1$ м в вертикальной плоскости с постоянной скоростью $v = 4$ м/с. Определить натяжение веревки в момент, когда веревка составляет с вертикалью угол $\alpha = 60^\circ$.

2. Кастрюле с водой сообщили количество теплоты $Q = 1,82 \cdot 10^6$ Дж; при этом часть воды выкипела. Определить долю выкипевшей воды. Масса и удельная теплоемкость кастрюли равны $m_1 = 1$ кг и $c_1 = 400$ Дж/(кг·К), воды — $m_2 = 5$ кг и $c_2 = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К). Начальная температура воды $t = 20^\circ$ С. Удельная теплота парообразования воды $\lambda = 2,3 \cdot 10^6$ Дж/кг. Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

3. Два одинаковых проводящих шарика, расположенных в вакууме, с зарядами $q_1 = +3,8 \cdot 10^{-8}$ Кл и $q_2 = -1,8 \cdot 10^{-8}$ Кл, вследствие притяжения соприкоснулись и вновь разошлись на расстояние $r = 0,1$ м. Определить силу взаимодействия между ними после соприкосновения. Электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

4. Две лампочки, рассчитанные на одно и то же напряжение и имеющие номинальные мощности $P_1 = 100$ Вт и $P_2 = 200$ Вт, включены последовательно в сеть с тем же напряжением. Какие мощности P'_1 и P'_2 будут потреблять лампочки?

С. Алшин, В. Круглов, Л. Михеева,
А. Сапоженко, А. Склянкин

Новосибирский государственный университет

Ниже публикуются материалы вступительных экзаменов 1978 года.

Математика

(письменный экзамен)

Механико-математический, физический, экономический факультеты

1. Автомобиль двигался с постоянной скоростью, а затем стал тормозить с постоянным ускорением -2 м/сек² и остановился. Известно, что за последние 5 сек перед остановкой он прошел $\frac{1}{7}$ часть расстояния, пройденного за предыдущие 10 сек. Определить начальную скорость автомобиля.

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin x + \sin 3x}{\sqrt{2} |\cos x|} = \sin 2x + \cos 2x.$$

3. На плоскости заданы две окружности радиусов 3 и 1, расстояние между центрами которых равно $2\sqrt{2}$. Прямая l — общая касательная этих двух окружностей. Найти площадь треугольника, вершинами которого являются точки касания и ближайшая к l точка пересечения окружностей.

4. Определить, для каких действительных значений параметра a все решения неравенства $\log_x(5x^2 - 8x + 3) > 2$ являются одновременно решениями неравенства $x^2 - 2x - a^4 + 1 \geq 0$.

5. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде $ABCD A' B' C' D'$ нижнее основание $ABCD$ — квадрат со стороной 3, верхнее основание $A' B' C' D'$ — квадрат со стороной 1, боковые ребра AA' , BB' , CC' , DD' имеют длину 3. Точка M — середина ребра $C'D'$. Через точку M проходит прямая, пересекающая прямые AA' и BC в точках P и Q . Найти длину отрезка PQ .

**Факультет естественных наук,
геолого-геофизический факультет**

1. Решить систему

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 3xy = 12, \\ (x + y)^2 - \frac{1}{2}y^2 = 7. \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$1 - \cos 3x \cdot \operatorname{ctg} x = \sin 3x.$$

3. В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка D таким образом, что длина отрезка BD в 4 раза больше длины отрезка AD . Точки O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных около треугольников ACD и BCD . Известно, что прямая O_1O_2 параллельна прямой BC . Определить, в каком отношении прямая O_1O_2 делит площадь треугольника ABC .

4. Решить неравенство

$$\log_2\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{x}{4}\right) \geq 1.$$

5. Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC', DD' . Точка N — середина ребра AB , точка M — середина ребра BB' , O — точка пересечения диагоналей грани $BCC'B'$. Через точку O проведена прямая, пересекающая прямые AM и CN в точках P и Q соответственно. Определить длину отрезка PQ , если известно, что длина ребра куба 1.

Физика

В 1978 году на физическом факультете НГУ каждый вариант письменного экзамена по физике состоял из пяти задач трех типов.

Первые три задачи — расчетные задачи различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной физической ситуации.

Четвертая задача — это задача-оценка. Для решения этой задачи надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные значения физических параметров и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент, хорошо представляя явление или задачу, может сам задать необходимые величины и получить численный ответ. Опыт вступительных экзаменов показывает, что с задачами-оценками справляется значительная часть абитуриентов, зачисленных на физический факультет.

Пятая задача — это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое на экзамене. Здесь важно понять сущность явления и среди различных физических факторов выделить главный.

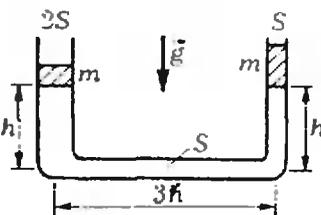


Рис. 1.

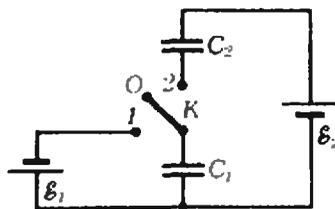


Рис. 2.

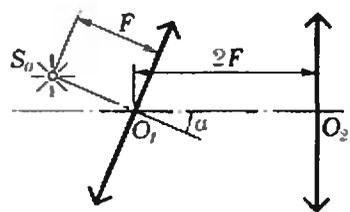


Рис. 3.

Ниже приводятся первые три задачи трех вариантов, а также некоторые задачи-оценки и задачи-демонстрации.

В а р и а н т 1

1. В U-образной трубке с воздухом на одинаковой высоте h удерживают два поршня массой m каждый (рис. 1). Сечение левого колена $2S$, правого и нижнего S . Длина нижнего колена $3h$. Давление воздуха внутри трубки равно атмосферному давлению p_0 . В некоторый момент поршни отпускают. Найти установившиеся высоты поршней. (Температура газа в начале и в конце одна и та же, поршни могут перемещаться только по вертикальным участкам.)

2. В схеме, изображенной на рисунке 2, ключ K вначале находится в положении 0. Конденсатор емкостью C_1 и C_2 разряжены. ЭДС батарей равны \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 . Затем ключ K замыкается на клемму 1 и через некоторое время переключается на клемму 2. Какая разность потенциалов установится на конденсаторе емкостью C_1 ?

3. Две одинаковые собирающие линзы с фокусным расстоянием F расположены так, что их главные оптические оси образуют угол α и ось второй линзы проходит через центр O_1 первой (рис. 3). В фокусе первой линзы расположен точечный источник света S_0 . Найти расстояние $|S_0S|$ между источником S_0 и его изображением S в системе линз, если расстояние между центрами линз $|O_1O_2| = 2F$.

В а р и а н т 2

1. Динамометр D поставили между двумя отрезками троса ABC и AEC так, что он находится на диагонали BE ромба ($EAB = BCE = \alpha$) (рис. 4). Точка C закреплена. Найти силу, которая приложена к точке A , если динамометр показывает абсолютную величину силы F_0 .

2. Цилиндрический сосуд высотой l наполнен сжимаемой жидкостью, плотность которой ρ меняется с глубиной h по закону $\rho = \rho_0(1 + \alpha h)$. Каким должен быть коэффициент α , чтобы этой жидкостью можно было наполнить три одинаковых сосуда высотой $l/2$ с сечением, равным сечению исходного сосуда?

3. Автомобиль движется со скоростью v мимо длинной стены под углом α к ней (рис. 5). В момент, когда расстояние до стены равно l , автомобиль подает звуковой сигнал. Какое расстояние проедет

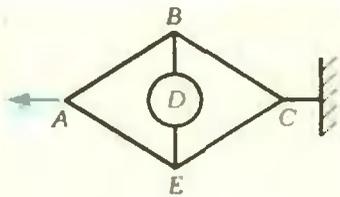


Рис. 4.

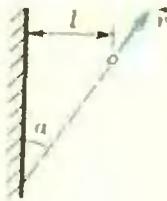


Рис. 5.

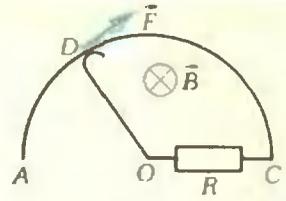


Рис. 6.

он до момента, когда шофер услышит эхо? Скорость звука c .

В а р и а н т 3

1. Вдоль трубы радиусом R распространяется свет. Трубу замыкает стеклянный (с показателем преломления n) шар радиусом R , внутренняя область которого от центра вплоть до расстояния r ($r < R$) заполнена поглощающим свет веществом. Какая доля энергии света проходит сквозь шар? (Отражением света пренебречь.)

2. Цепь образована незамкнутой проводящей дугой ADC радиуса a и сопротивлением R , включенном на участке OC (рис. 6). Перпендикулярно к плоскости цепи включено постоянное однородное магнитное поле с индукцией \vec{B} . Какую силу \vec{F} надо приложить к концу проводника OD , скользящего по дуге ADC , чтобы вращать проводник OD с постоянной угловой скоростью ω ? Сопротивлением всех проводников по сравнению с R можно пренебречь.

3. К концам двух нерастянутых пружинок жесткостью k_1 и k_2 прикреплено тело массой m так, что оно может без трения двигаться вдоль прямой AB (рис. 7). Конец A левой пружинки закреплен. Удерживая тело на месте, конец B правой пружинки отводят на расстоянии $|BB_1| = a$ и закрепляют в точке B_1 , после чего тело отпускают. Найти наибольшую скорость тела.

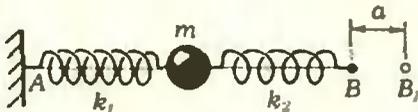


Рис. 7.

З а д а ч и - о ц е н к и

1. Оценить среднее усилие, развиваемое ногами человека при приземлении после прыжка из окна второго этажа.

2. Оценить, во сколько раз собирающая линза от очков увеличивает световую мощность (на единицу площади), приходящую от Солнца.

3. Оценить давление в центре Земли.

З а д а ч и - д е м о н с т р а ц и и

Объясните следующие явления:

1. Между пластинами плоского конденсатора подвешен легкий металлический шарик. При подаче на конденсатор

постоянного напряжения шарик притягивается к одной из пластин, касается ее и отскакивает к другой пластине. Такие перескоки повторяются многократно.

2. Электрическая цепь, состоящая из двух катушек индуктивности и лампочки, подключена к генератору переменного напряжения. Если в одну из катушек вдвинуть железный сердечник, свечение лампочки усиливается. Если же сердечник вдвинуть во вторую катушку, свечение лампочки ослабевает. Составить схему электрической цепи.

3. Железный стержень вставлен в катушку. На стержень надевают кольцо. В первом случае это кольцо — алюминиевое сплошное, а во втором — алюминиевое с разрезом. При пропускании переменного тока через катушку кольца ведут себя существенно по-разному.

*В. Ильин, Г. Меледин,
А. Слинько, М. Фокин*

Московский институт стали и сплавов

В Московском институте стали и сплавов пять факультетов: факультет металлургии черных металлов и сплавов, технологический факультет, физико-химический факультет, факультет полупроводниковых материалов и приборов и факультет металлургии цветных и редких металлов и сплавов. На этих факультетах готовят специалистов в области металлургии черных, цветных, редких и радиоактивных металлов, высокотемпературных материалов, алмазов и сверхтвердых сплавов, физики металлов, физико-химических методов исследований, полупроводниковой техники, экономики и кибернетики металлургических процессов.

Расскажем подробно о физико-химическом факультете МИСиС.

Среди многих разделов современной физики особое место занимает физика твердого тела. Можно смело утверждать, что в этой области работает больше всего исследователей, печатается больше всего научных статей, получают самые важные результаты. Такой особый интерес к изучению

вещества в твердом состоянии, очевидно, связан с огромной практической важностью твердых тел. Однако реальные твердые тела устроены столь сложно, что даже при современном уровне развития науки чисто физический подход, основанный на фундаментальных законах, при объяснении разнообразных свойств конкретных материалов не эффективен, не в состоянии указать, как именно получать материалы с нужными свойствами.

А современная техника требует все новых и новых материалов — материалов, работающих при сверхвысоких и сверхнизких температурах, в сильных магнитных и электрических полях, в космосе и т. п. Исследование материалов, разработка новых веществ и, в особенности, металлов с новыми свойствами становятся возможными лишь при умелом сочетании фундаментальных знаний о веществе с эмпирическими законами, найденными в результате обобщения огромного опыта по изучению материалов. Необходимо также знать методы и технологию изготовления новых веществ, владеть различными экспериментальными методиками их исследования.

Такое уникальное сочетание знаний и навыков дает студентам физико-химический факультет Московского института стали и сплавов. Этот факультет готовит инженеров-исследователей по целому ряду специальностей, связанных с изучением материалов, разработкой новых методов их получения и исследования. Студентам читаются обширные курсы математики, общей и теоретической физики, специальных дисциплин, а главное, — даже на младших курсах студенты приобщаются к научной работе на кафедрах, а в конце обучения уже обязательно выполняют самостоятельное исследование. Такой подход позволяет развить у студентов творческие способности, умение думать самостоятельно, отыскивать новые пути решения задач — качества, совершенно необходимые исследователю.

В этой заметке невозможно рассказать о всех специализациях на факультете, и мы остановимся лишь на тех, которые могут представлять особый интерес для читателей «Кванта».

Специалистов по изучению физических свойств металлов готовит кафедра теоретической физики, которую возглавляет член-корреспондент АН СССР А. А. Абрикосов. Студентов обучают теоретическим расчетам свойств реальных веществ и различными экспериментальными методами их изучения. Для того чтобы использовать физические законы для описания свойств металлов, необходимо делать различные приближения, предвидеть, какой именно метод окажется наиболее эффективным. Тут имеется своя особая «кухня», секретами которой охотно делятся со студентами преподаватели кафедры. Студенты, специализирующиеся на кафедре, в курсовых и дипломных работах используют большие электронно-вычислительные машины вычислительного центра института.

Другая специализация — «сверхпроводящие материалы». Известные сейчас материалы становятся сверхпроводящими (не оказывают сопротивления электрическому току) только при очень низких температурах (меньших чем -250°C). Понятно, что это ограничивает возможности использования сверхпроводников в технике. Как найти материалы, остающиеся сверхпроводящими и не при столь низких температурах? Чтобы работать в этом направлении, нужно не только хорошо понимать физику сверхпроводимости, но и знать свойства веществ, уметь синтезировать нужные соединения и предугадывать их свойства. Именно такой комплекс знаний дают студентам, обучающимся по этой специализации, причем обучение студентов ведется не только в стенах института, но в крупнейшем научном центре — Институте физики твердого тела АН СССР.

Новая специализация «получение алмазов и других высокотвердых материалов» создана на кафедре высокотемпературных материалов, которую возглавляет член-корреспондент АН СССР В. П. Елютин. Студенты этой специализации наряду с изучением свойств природных алмазов получают глубокие знания в области теоретических основ процессов получения искусственных алмазов, нитрида бора и других важнейших материалов современной техники. Искусственные алмазы рождаются буквально на глазах студентов в лабораториях, оборудованных самыми современными приборами.

Об экспериментах по изучению материалов в космосе в наше время знают все; понятно, что для подготовки и проведения таких экспериментов нужны особые специалисты, которых готовит кафедра металлографии по специализации «космическая технология и материаловедение». Студентам читаются специальные курсы по подготовке и проведению эксперимента и технологических процессов в специфических условиях космоса и космического корабля, по космическому материаловедению, теории тепломассопереноса, по конструированию аппаратуры для экспериментов в космосе.

Специализацию «кибернетика металлургических процессов» можно посоветовать тем выпускникам, которые особенно увлекаются математикой, но в то же время интересуются и ее практическими приложениями. Подготовку таких специалистов осуществляет кафедра инженерной кибернетики, которой руководит член-корреспондент АН СССР С. В. Емельянов. Студенты изучают различные математические дисциплины, получают глубокие знания по системам управления и методам использования современных вычислительных средств, учатся творчески использовать полученные знания в работе по синтезу и исследованию математических моделей металлургических процессов.

Много и других специализаций имеется на факультете. Это — коррозия и защита металлов, металлургия черных металлов, высокотемпературные материалы,

высокопрочные сплавы, термическая обработка металлов и др. О них вы сможете прочесть в проспекте института.

Ниже приводятся образцы устного экзамена по физике на физико-химическом факультете в 1978 году (материалы письменного экзамена по математике на всех факультетах МИСиСа будут опубликованы в следующем номере журнала).

1. Невесомый блок укреплен на вершине двух наклонных плоскостей, составляющих с горизонтом углы $\alpha = 30^\circ$ и $\beta = 45^\circ$. Гири A и B равной массы $m_1 = m_2 = 1$ кг соединены нитью и перекинута через блок. Найти: 1) ускорение, с которым движутся гири, 2) натяжение нити. Трением гири A и B о наклонные плоскости, а также трением в блоке пренебречь.

2. В сосуд, содержащий $m_1 = 10$ кг воды при температуре $t_1 = 10^\circ\text{C}$, положили кусок льда, охлажденный до $t_2 = -50^\circ\text{C}$, после чего температура образовавшейся массы оказалась равной $\theta = +4^\circ\text{C}$. Какое количество льда было положено в сосуд? Удельные теплоемкости льда $c_2 = 2100$ Дж/(кг·К) и воды $c_1 = 4200$ Дж/(кг·К), теплота плавления льда $\lambda = 3,3 \cdot 10^5$ Дж/кг.

3. Цилиндрический сосуд делится на две части подвижным поршнем. Каково будет равновесное положение поршня, когда в одну часть сосуда помещено некоторое весовое количество кислорода, в дру-

гую — такое же количество водорода, если общая длина сосуда равна $L = 85$ см?

4. Электрон движется в плоском горизонтальном конденсаторе параллельно

его пластинам со скоростью $|\vec{v}| = 3,6 \times 10^4$ км/с. Напряженность поля внутри

конденсатора $|\vec{E}| = 37$ В/см. Длина пластин конденсатора $L = 20$ см. На сколько сместится электрон в вертикальном направлении под действием электрического поля за время его движения в конденсаторе? Заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, его масса $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.

5. Два одинаковых сопротивления $r = 100$ Ом, соединенных параллельно, и последовательно соединенное с ними сопротивление $R = 200$ Ом подключены к источнику постоянного тока. К концам параллельно соединенных сопротивлений подключен конденсатор емкостью $C = 10$ мкФ. Определить ЭДС источника тока, если заряд на конденсаторе $q = 2,2 \cdot 10^{-4}$ Кл. Внутренним сопротивлением источника и сопротивлением проводов можно пренебречь.

6. Преломляющий угол равнобедренной призмы равен $\gamma = 10^\circ$. Монохроматический луч падает на боковую грань под углом $\alpha = 10^\circ$. Найти угол δ отклонения луча от первоначального направления, если показатель преломления материала призмы $n = 1,6$.

Л. Асламазов

Спрашивают — отвечаем

Сообщите, пожалуйста, адреса магазинов, высылающих наложенным платежом литературу по математике.

Л. Старшов (Владимирская обл.) и др.

Заказы на книги по математике, физике и астрономии можно направлять (на почтовых открытках) в специализированные магазины и отделы «Книга — почтой». При наличии книг на складе они будут высланы наложенным платежом без задатка. Вот адреса некоторых магазинов.

1. 103050, Москва, К-50, ул. Медведева 1, маг. № 8;

2. 117192, Москва, Мичуринский просп. 12, маг. «Книга — почтой»;

3. 191049, Ленинград, Пушкинская ул. 2, маг. № 5 «Техническая книга»;

4. 197110, Ленинград, Петрозаводская ул. 7, маг. «Книга — почтой»;

5. 193168, Ленинград, просп. Большевиков 19, маг. № 103 «Техническая книга»;

6. 220005, Минск, Ленинский просп. 48, маг. № 13 «Научно-техническая книга»;

7. 458000, Кустанай, ул. Баймагамбетова 69;

8. 630091, Новосибирск, Красный просп. 60, маг. № 7;

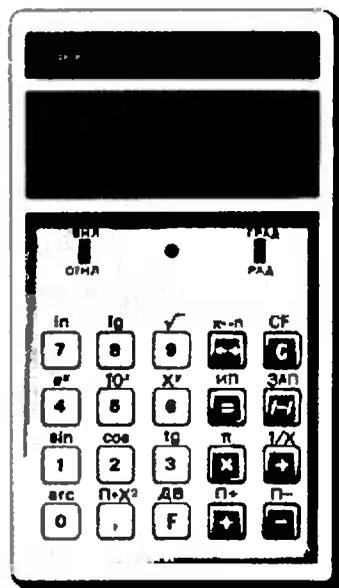
9. 226047, Рига, ул. Ленина 17, маг. «Гайсма»;

10. 200001, Таллин, бульвар Ленина 7, маг. «Техническая и медицинская книга»;

11. 480003, Алма-Ата, ул. Гоголя 109, маг. «Прогресс».

Можно ли школьникам пользоваться на уроках микрокалькуляторами? Разрешается ли применение микрокалькуляторов на экзаменах?

В. Аманьев (Волгоградская обл.) и др.



Появление малой электронно-счетной техники — это реальность. Микрокомпьютеры получают все большее и большее распространение в народном хозяйстве. Внедрение их в школу — дело завтрашнего дня.

Известно, что в настоящее время учащиеся тратят массу времени на отработку различного рода вычислительных навыков. Внедрение в школу микро-ЭВМ высвобождает часть этого времени. Естественно, возникает необходимость определения круга вопросов, которые можно изучить с учащимися в связи с этим дополнительно. В первую очередь важно определить содержание образования в младших классах. Сейчас уже ведутся эксперименты по использованию микрокомпьютеров в школе. В частности, с будущего года в нескольких классах г. Еревана начинается проверка возможностей внедрения в учебный процесс малых ЭВМ, начиная с 1 класса.

Очевидно, что через 10 лет люди уже не будут считать «в столбик» и даже логарифмическая линейка уйдет в прошлое. Но массовое внедрение микрокомпьютера в школу без предварительной продуманной методики работы с ними, разработки определенной системы упражнений может привести к потере «чувства числа» у учащихся. Освобождение их от необходимости считать устно приводит к тому, что ученики забывают таблицу умножения и сложения чисел и разучиваются производить даже простейшие устные вычисления, не могут оценить полученный результат вычислений, хотя бы его порядок. Опыт зарубежной школы предостерегает нас от подобной ошибки.

Однако, если ученик умело и разумно применяет микрокомпьютер, умеет оценить порядок результата, то запрещать ему пользоваться достижениями техники было бы нецелесообразно. Особенно полезно использование малых ЭВМ на уроках геометрии, при решении, например, треугольников, возможно их применение на уроках физики, химии, при решении задач, во время проведения лабораторных и практических работ, особенно различного рода расчетных работ.

Естественно, если ученик в течение года пользовался при расчетах малой электронной счетной техникой, то было бы не логично лишать его этой возможности на экзаменах.

З. Моисеева.

Инспектор Главного управления школ
Министерства просвещения СССР

Филлотаксис и последовательность Фибоначчи

Рисунок на первой странице обложки можно рассматривать как упрощенное изображение соцветия подсолнуха, семечки в котором вылущены через одно, в шахматном порядке. Реальные соцветия подсолнуха (см. рисунок на этой странице) также содержат два семейства логарифмических спиралей (об этих спиралах читайте «Квант», 1977, № 4, с. 42). Спирали одного семейства закручиваются к центру против хода часовой стрелки, другого — по ходу. В ботанике такое сочетание двух семейств спиралей называют филлотаксисом (в переводе с греческого слово это означает «устройство листа»).

Оказывается, числа спиралей в соцветиях подсолнечника приближенно равны двум соседним членам так называемой последовательности Фибоначчи: 34 и 55 или 89 и 144.

Филлотаксис подсолнечника — одна из многих неожиданных встреч с последовательностью Фибоначчи. Впервые с ней столкнулся в прошлом столетии французский математик Эдуард Люка. Читая книгу «Искусство абака» знаменитого итальянского математика эпохи Возрождения Леонардо Пизанского, известного больше по прозвищу Фибоначчи, и решая одну из задач Леонардо, Люка составил последовательность 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., в которой

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Неожиданная встреча с этой последовательностью состоится сейчас и у нас. Предположим, что $\alpha^2 = 1 - \alpha$.

Выразим значения степеней $\alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \dots$ через $1 = \alpha^0$ и α :

$$\alpha^3 = \alpha \cdot \alpha^2 = 2\alpha - 1,$$

$$\alpha^4 = 2 - 3\alpha,$$

$$\alpha^5 = 5\alpha - 3, \dots$$

Вы узнали в коэффициентах последовательность Фибоначчи, начиная с члена a_1 ? По-видимому, и для любого n можно записать формулу $\alpha^n = (-1)^n (a_{n-1} - a_n \alpha)$,

где a_{n-1} и a_n — члены последовательности Фибоначчи. Докажем это методом математической индукции:

$$\begin{aligned} \alpha^{n+1} &= (-1)^n (a_{n-1} \alpha - a_n \alpha^2) = (-1)^n (-a_n + (a_{n-1} + a_n) \alpha) = \\ &= (-1)^{n+1} (a_n - a_{n+1} \alpha). \end{aligned}$$

У уравнения $\alpha^2 = 1 - \alpha$ два корня — положительный $\alpha_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ и отрицательный $\alpha_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$. Как мы убедились,

$$\begin{cases} (-1)^n \alpha_1^n = a_{n-1} - a_n \alpha_1 \\ (-1)^n \alpha_2^n = a_{n-1} - a_n \alpha_2. \end{cases}$$

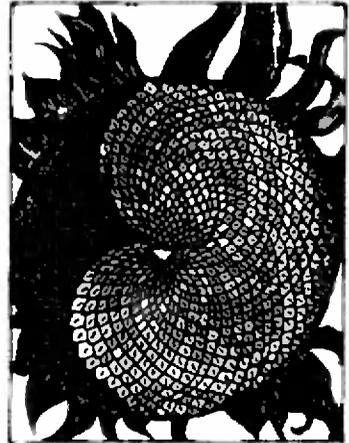
Решая эту систему относительно a_n , получаем, что

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \times \\ &\times \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]. \end{aligned}$$

И этот результат довольно неожидан — последовательность целочисленная, а общий ее член выражается через квадратные радикалы.

Следующую неожиданность получим, если

$$\begin{aligned} \text{вычислим } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \\ &= \frac{\sqrt{5} - 1}{2}. \end{aligned} \text{ Это знаме-}$$



нитое «золотое сечение» (о нем см., например, «Квант», 1973, № 8, с. 22 и далее). Прямоугольный предмет с таким отношением сторон наиболее приятен для глаза.

Существует много формул, связывающих между собой члены последовательности Фибоначчи. Вот некоторые из них:

$$a_{n+2} = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + 1$$

$$a_{2n+2} = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1}$$

$$a_{2n+1} = 1 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}$$

$$a_{2n-2} + 1 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2n-1}$$

$$a_{2n}^2 = a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{2n-1} a_{2n}$$

$$a_{2n-1} = a_n^2 + a_{n-1}^2.$$

Попытайтесь их доказать.

О последовательности Фибоначчи вы можете прочесть в популярной и интересной книге Н. Н. Воробьева «Числа Фибоначчи» (М., «Наука», 1978). О филлотаксисе — в другой интересной книге: Г. С. М. Кокстер «Введение в геометрию» (М., «Наука», 1966).

В. Березин

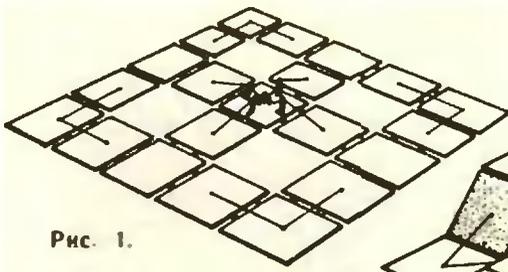


Рис. 1.

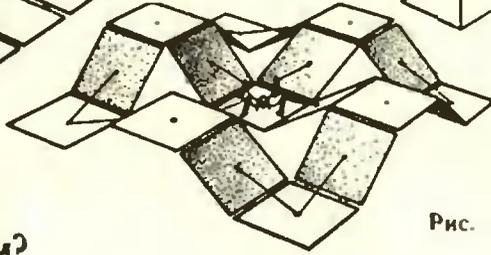


Рис. 2.

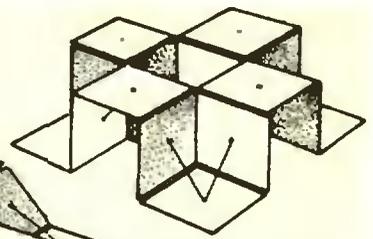


Рис. 3.

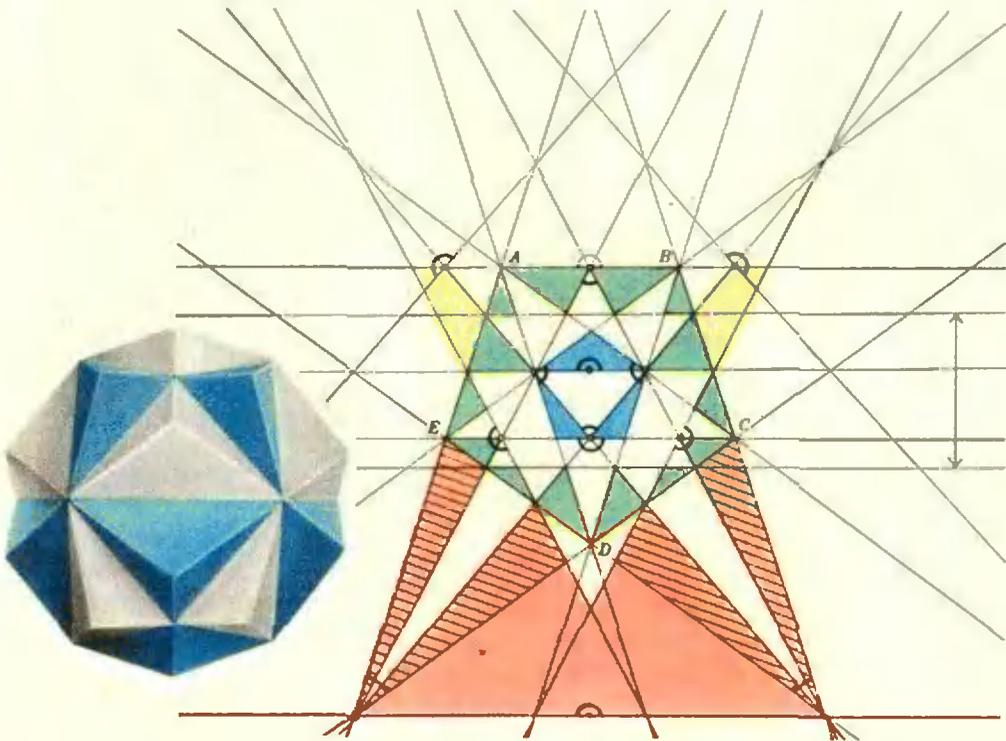
Как построить дом?

(к второй странице обложки)

Представьте себе строительную площадку в горах или в космосе, на которую затруднительно доставить высокий подъемный кран. Как в такой ситуации построить дом? На рисунке 1 приведен один из спо-

собов. Квадратные панели соединены между собой шарнирно. Кроме того, они соединены тросами. Если начать «выбирать» тросы с помощью лебедки, установленной в центре набора (рис. 2), то возникает дом (рис. 3).

В. Колейчук



Пересекающиеся додекаэдр

(к четвертой странице обложки)

В «Кванте» № 1 на с. 27 была приведена фотография многогранника, являющегося объединением пяти кубов, вписанных в додекаэдр. А сколько разных додекаэдров можно описать около одного куба? Нетрудно догадаться, что два. На этой фотографии вы видите многогранник, являющийся объединением двух таких додекаэдров. Понятно, что этот многогранник равно-

гранно полуправильный: для любой пары его граней можно указать такое перемещение, при котором сам многогранник займет прежнее положение, а первая грань перейдет во вторую. На рисунке приведена полученная из этого многогранника эюра. (О том, что это такое и как пользоваться эюрами, рассказывалось в «Кванте» № 3 на с. 50, 53.) При копировании эюры следует учесть, что пятиугольник $ABCDE$ — правильный.)

В. Гамаюнов



Подарок учителю и школьнику

Новая программа по математике требует от школьника твердых знаний по таким фундаментальным понятиям «высшей математики», как предел функции, непрерывность, производная, интеграл. Естественно, что в школе все эти понятия в первую очередь изучаются на элементарных функциях: степенных, показательных, логарифмических, тригонометрических и обратных тригонометрических функциях.

Однако из-за недостатка времени и перегруженности школьной программы в логическом обосновании этих понятий существует значительный пробел — практически полностью отсутствует теория действительных чисел. А между тем теория действительного числа не только лежит в основе теории пределов, непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости функций, но и в основе построения теории элементарных функций, на базе которых происходит изучение анализа в средней школе. Из учебников школьники узнают только, что существует некое множество, элементы которого называются действительными числами. Эти числа можно складывать, вычитать, умножать и делить по определенным правилам. Утверждается, что все элементы этого мно-

жества могут быть разбиты на два непересекающихся подмножества, каждое из которых содержит только рациональные или иррациональные числа, и что каждое из этих чисел может быть изображено в виде бесконечной периодической (рациональное число) или непериодической (иррациональное число) десятичной дроби. Однако, повторяем, стройной теории действительного числа в школьном курсе математики не излагается.

Рецензируемое пособие*) ставит своей основной целью содействовать углубленному пониманию тех начальных глав математического анализа, которые ближе всего лежат к кругу математических занятий преподавателя средней школы. Основное содержание книги — изложить теорию действительных чисел, а затем уже на этой базе строится теория пределов последовательностей, определяются основные элементарные функции и изучаются свойства непрерывных функций. Несомненно, такое изложение является естественным дополнением школьного курса математики и логически оформляет те интуитивные представления, которые уже имеются у учащихся.

Пособие состоит из введения и четырех глав. Во введении излагаются основные понятия теории множеств, даются определения соответствия, функции и последовательности, вводятся некоторые обозначения из математической логики.

В первой главе изложена теория пределов последовательностей рациональных чисел.

Во второй, центральной главе пособия излагается теория действительных чисел и теория числовых последовательностей. В

основу изложения положена теория действительных чисел, развитая Г. Кантором и Ш. Мере. Мы считаем, что такое изложение теории действительных чисел соответствует духу школьной математики. Автор определяет понятия равенства и неравенства действительных чисел и подробно излагает арифметику действительных чисел.

В третьей главе рассказывается об основных элементарных функциях и даются определения предела и непрерывности функции и доказываются основные теоремы, связанные с этими понятиями.

В четвертой главе вводится производная и доказываются основные свойства дифференцируемых функций.

Значительное место в пособии занимают удачно подобранные упражнения. Они помогают читателям разобраться в трудных вопросах курса и прививают хорошие навыки в решении задач. Наряду с обычными задачами в пособие включено значительное число задач повышенной трудности. Темп возрастания трудности задач достаточно высок. Он значительно быстрее приводит читателя к трудным упражнениям, чем это делается в учебнике.

Многие вопросы излагаются в книге свежо и оригинально. Автор умело использует символику и язык математической логики.

Некоторые недоумения вызывает малый тираж книги, а ведь эта книга представляет большой интерес как для учителей средней школы, так и для учащихся старших классов и, несомненно, вызовет большой спрос. Надо надеяться, что второе издание этой весьма полезной книги не заставит себя долго ждать.

Г. Луканкин,
М. Смолянский

*) Г. Н. Яковлев. «Числовые последовательности и непрерывные функции» (М., «Просвещение», 1978)

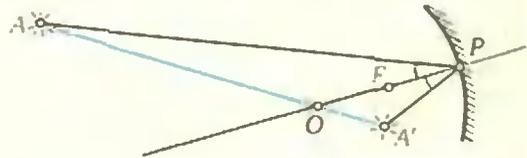


Рис. 4.

Заменим фигуру

$$3. \frac{Q}{q} = \frac{\sin^2(\alpha + \beta)}{\sin^2(\alpha - \beta)}$$

$$4. R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos 2\alpha}}{2 \sin 2\alpha}$$

$$5. R = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

Построение изображений в линзах и сферических зеркалах

1. Проведем побочную оптическую ось AO (рис. 1). Луч AC , параллельный главной оптической оси, после встречи с линзой проходит через задний фокус F' . Пересечение прямых AO и CF' дает точку A' — изображение точки A . Аналогично находим точку B' — изображение точки B . Соединив точки A' и B' , получим изображение предмета.

2. Побочная оптическая ось OD , параллельная верхнему лучу пучка, пересекает переднюю фокальную плоскость в точке D (рис. 2). Лучи BA и OD , вышед-

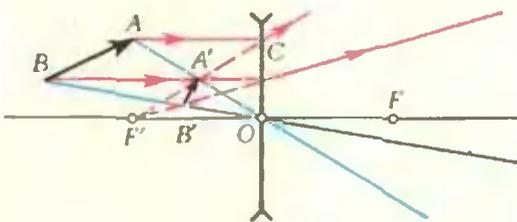


Рис. 1.

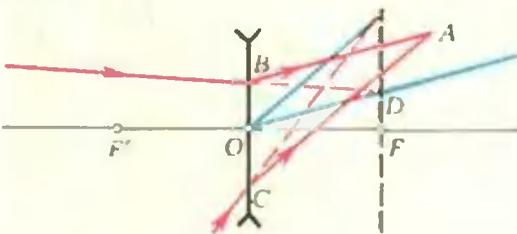


Рис. 2.

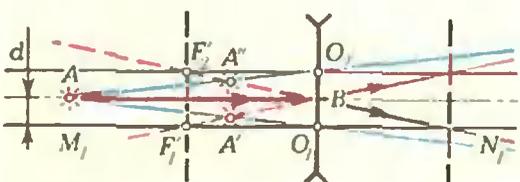


Рис. 3.

шие из линзы параллельно друг другу, до встречи с ней пересекались в передней фокальной плоскости линзы; следовательно, продолжение прямой BD определяет ход луча BA до линзы. Аналогично найдем входящий луч, соответствующий выходящему лучу CA .

3. Части линзы работают так же, как целая линза. Главная оптическая ось M_1N_1 верхней части сложной линзы смещена вниз на расстояние d относительно оси симметрии системы (рис. 3); O_1 — оптический центр, AO_1 — побочная оптическая ось верхней части линзы. Луч AB , параллельный оси M_1N_1 , после встречи с линзой идет через задний фокус F_1 верхней части линзы. Пересечение прямых BF_1 и AO_1 дает положение изображения A' , образованного верхней частью сложной линзы. Нижняя часть линзы дает симметрично расположенное изображение A'' .

4. Соединим полюс P с точками A и A' (рис. 4). Ось зеркала проходит через точку P и делит угол APA' пополам. Центр зеркала O лежит в точке пересечения оси с прямой AA' . Окружность радиуса $|OP|$ определяет положение зеркала. Зеркало своей отражающей поверхностью обращено к предмету; следовательно, оно вогнутое. Фокус F делит отрезок $|OP|$ пополам.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Механико-математический факультет

Вариант 1

1. — 10. Указание. $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^2 \in \mathbb{Z}$

$$2. \left\{ \sqrt{2\pi}, \frac{-1 + \sqrt{1 + 8\pi}}{2} \right\}$$

3. $\frac{9}{2}$. Решение. Поскольку $\widehat{AQC} =$

$\widehat{APC} = 90^\circ$, около четырехугольника $AQPC$ можно описать окружность. Поэтому $\widehat{BAC} + \widehat{QPC} = 180^\circ$. Из $\widehat{BPQ} + \widehat{QPC} = 180^\circ$ следует $\widehat{BAC} = \widehat{BPQ}$. Значит, $\triangle ABC \sim \triangle QBP$. Коэффициент подобия $k = \sqrt{\frac{S_{QBP}}{S_{ABC}}} = \frac{1}{3}$. Следовательно,

$$\frac{|BP|}{|AP|} = \frac{1}{3}. \text{ Обозначим } \widehat{ABC} \text{ через } \beta, \text{ ис-}$$

комый радиус через R . Из $\triangle ABP$ $\cos \beta = \frac{1}{3}$.

Поскольку $0^\circ < \beta < 90^\circ$, $\sin \beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Далее $|AC| = \frac{|QP|}{k} = 6\sqrt{2}$. Из равенст-

ва $\frac{|AC|}{\sin \beta} = 2R$ («Геометрия 8», п. 112) на-
ходим R .

4. $a < -1$. Решение. Предположим
сначала, что данная система имеет решения.
Тогда имеет решения и неравенство, полу-
ченное сложением первого неравенства дан-
ной системы, умноженного на -2 , и вто-
рого ее неравенства: $(x + 3y)^2 \leq -\frac{4}{a+1}$.

Значит, $a+1 < 0$, $a < -1$. Пусть теперь $a_0 < -1$.

Тогда $\frac{1-a_0}{a_0+1} < -1$. Поэтому, если имеет
решения система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 = -1, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 = -2, \end{cases} \quad (1)$$

то имеет решения и данная система нера-
венств. Но система (1) имеет решения — на-
пример, $(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$. (Найти указанное ре-
шение можно, умножив первое уравнение
на -2 и сложив со вторым.)

5. 3. Решение. Пусть K — середина
[AD], N — середина [BC], $O = (AC) \cap (KM)$
(рис. 5). Из $O \in (KMN) \cap (ABC)$ и $N \in$
 $\in (KMN) \cap (ABC)$ вытекает, что плоскости
 KMN и ABC пересекаются по прямой ON .
Следовательно, [AB] пересекает (KMN) в
точке $L = (AB) \cap (ON)$. Таким образом,
искомое сечение есть четырехугольник
 $KLNM$.

В дальнейшем нам будет полезна простая
Лемма. Если отрезок FG пересекается
с плоскостью α в точке H и h_F, h_G — рас-
стояния, соответственно, от точек F и G
до α , то

$$\frac{|FH|}{|HG|} = \frac{h_F}{h_G}.$$

Обозначим через β плоскость, парал-
лельную скрещивающимся прямым AB и
 DC и равноудаленную от них. Поскольку
расстояния от точек A и D до плоскости β
одинаковы, по лемме плоскость β делит от-
резок AD пополам. Значит, $K \in \beta$. Анало-
гично, $N \in \beta$. Следовательно, $[KN] \subset \beta$. По-

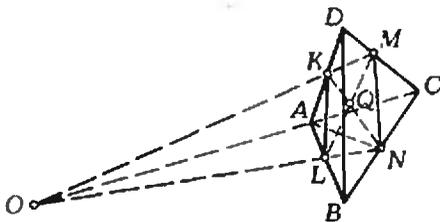


Рис. 5.

этому прямая LM пересечет плоскость β в
точке $Q = [KN] \cap [LM]$. Поскольку расстоя-
ния от M и L до β одинаковы, по лемме
 $|MQ| = |LQ|$. Значит, по «плоскому» ана-
логу леммы, одинаковы расстояния от M и L
до прямой KN . Следовательно, $S_{\triangle KLN} =$
 $= S_{\triangle KMN}$.

Пусть h_A, h_B, h_C, h_D — расстояния,
соответственно, от точек A, B, C, D до
плоскости $KLNM$. Применяя несколько раз
лемму, последовательно получаем $h_A = h_D$,

$$h_B = h_C, \frac{h_D}{h_C} = \frac{2}{3} \cdot \frac{|AL|}{|LB|} = \frac{h_A}{h_B} = \frac{h_D}{h_C} = \frac{2}{3}.$$

Так как $|AL| = \frac{2}{5}|AB|$ и расстояние
от N до (AB) равно половине расстояния
от C до (AB) , $S_{\triangle ANL} = \frac{1}{5}S_{\triangle ABC}$. Так
как расстояние от K до (ABC) равно поло-
вине расстояния от D до (ABC) , $V_{KANL} =$
 $= \frac{1}{10}V_{DAVC} = \frac{1}{2}$. С другой стороны,

$$V_{KANL} = V_{AKLN} = \frac{1}{3}h_A \cdot S_{\triangle KLN} =$$

$$= \frac{1}{3}S_{\triangle KLN}. \text{ Поэтому } S_{\triangle KLN} = \frac{3}{2},$$

$$S_{KLNM} = 3.$$

Факультет вычислительной математики
и кибернетики

Вариант 2

1. $\{-1\} \cup \{2; +\infty\}$.

2. $x = -\frac{4}{3}\pi + 4k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

3. $y = -x + \frac{5}{2}$.

4. $A = \{6, 10, 14, 30, 42, 70, 105, 210\}$.

Решение. Поскольку наименьшее общее
кратное всех чисел из A равно $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$,
множество A является подмножеством мно-
жества $B = \{2, 3, 5, 7, 2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, 3 \cdot 5, 3 \cdot 7,$
 $5 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 7, 2 \cdot 5 \cdot 7, 3 \cdot 5 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7\}$.
Поскольку произведение всех чисел из A
делится на $1920 = 2^7 \cdot 15$, в A входят 7 или
8 чисел из восьмизлементного множества
 $C = \{2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 7,$
 $2 \cdot 5 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7\}$. Во втором слу-
чае $A = C$, потому что остальные числа
из B взаимно просты с числом 2; так как
произведение всех чисел из C есть квадрат
некоторого целого числа, это невозможно.
Итак, в A входит ровно 7 чисел из C .
Если $2 \in A$, то в A не может войти ни
одно число из B , не входящее в C (см. вы-
ше). Поскольку количество чисел в A
больше семи, мы получаем, что $A = C$,
т. е. в A снова входит 8 чисел из C — про-
тиворечие. Значит, $2 \notin A$. Следовательно,
каждое число из $D = \{2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7,$
 $2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 7, 2 \cdot 5 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7\}$ входит в A .
В A должно входить еще, по крайней
мере, одно число. Перебором убеждаемся,
что из оставшихся семи чисел только чис-
ло $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ не взаимно просто со всеми чис-
лами из D . Следовательно, $A = D \cup$
 $\{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7\}$.

5. $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$. Решение. Пусть V — объем пирамиды $HABCE$, h — длина высоты пирамиды, $h_1 = |HO|$ — высота треугольника AHE (рис. 6). Положим $|AE| = x$. Тогда $S_{ABE} = \frac{1}{2} x \cdot \sin \widehat{BAE} \leq \leq \frac{x}{2}$. Положим $|AH| = y$; тогда $|EH| =$

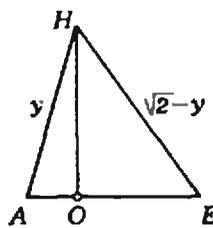


Рис. 6.

$= \sqrt{2}-y$. Из равенства $S_{\triangle AHE} = \frac{1}{2} x h_1$, применяя формулу Герона, находим

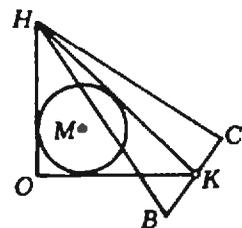


Рис. 7.

$$h_1 = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}} \cdot \sqrt{1 - \frac{2(1-\sqrt{2}y)^2}{x^2}}$$

следовательно, $h_1 \leq \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}}$. (З а м е ч а н и е. Высота равнобедренного треугольника с основанием длины x и боковой стороной длины $\frac{\sqrt{2}}{2}$ равна

$\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}}$. Таким образом, мы доказали, что из треугольников с основанием фиксированной длины и фиксированной суммой длин боковых сторон наибольшую высоту имеет равнобедренный треугольник. Докажите это непосредственно геометрически!)

Поскольку $S_{\triangle BAE} = S_{\triangle BCE}$, пирамиды $HBAE$ и $HBC E$ имеют одинаковый объем $\frac{1}{12}$. Значит,

$$\frac{1}{12} = V_{HBAE} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABE} \cdot h \leq \leq \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABE} \cdot h_1 \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}} \quad (1)$$

Решив неравенство $\frac{1}{12} \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}}$, получаем $x = 1$. Тогда $\frac{1}{3} \cdot \frac{x}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}} = 1$ и во всех нестрогих неравенствах (1) выполняется равенство. Значит, $h = h_1 = \frac{1}{2}$

и $S_{ABE} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $|AB| = = |AE|$ и $\widehat{BAE} = \frac{\pi}{2}$. Учитывая условие $S_{\triangle BAE} = S_{\triangle BCE}$, заключаем, что основание $ABCE$ — квадрат. Кроме того, $|AH| = = |EH| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, плоскость AHE перпендикулярна к плоскости $ABCE$ и $[HO]$ — высота пирамиды.

Радиус r_1 окружности, вписанной в треугольник AHE , равен (задача 10 к п. 112 «Геометрии 8») $\frac{S_{\triangle AHE}}{P_{\triangle AHE}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$. Опус-

тим из точки H перпендикуляр NK на BC (рис. 7). По теореме о трех перпендикулярах $OK \perp BC$. Значит, $|OK| = 1$. Радиус r_2 окружности, вписанной в треугольник HOK , равен $\frac{S_{\triangle HOK}}{P_{\triangle HOK}} = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$. Легко проверить, что $r_2 < r_1$.

Рассмотрим шар радиуса r_2 с центром в точке M (см. рис. 7). Он касается грани AHE , $ABCE$ и BHC . Поскольку его ортогональная проекция на плоскость AHE есть круг радиуса r_2 с центром на HO , касающийся $[AE]$, и $r_2 < r_1$, мы заключаем, что этот круг лежит внутри треугольника AHE . Поскольку пирамида $HABCE$ проектируется при этом на $\triangle HNC$, сам шар лежит внутри пирамиды.

Ортогональная проекция произвольного шара, помещающегося в пирамиде $HABCE$, на плоскость HOK есть круг того же радиуса, лежащий внутри треугольника HOK . Следовательно, радиус этого шара не превосходит r_2 .

Итак, некоторый шар радиуса r_2 помещается в данной пирамиде и радиус любого шара, помещающегося в ней, не превосходит r_2 .

Задачи устного экзамена

1. Если $a \neq 0$ или $b \neq 0$, $\min_{\mathbb{R}} f(x) = -\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\max_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Если $a=b=0$, $\min_{\mathbb{R}} f(x) = \max_{\mathbb{R}} f(x) = 0$.
2. {3}.
3. Указание. Длина любой стороны треугольника меньше суммы длин прилегающих к ней биссектрис.
4. Указание. Длина окружности радиуса 1 — 2π , площадь соответствующего круга — π .
6. $\frac{5-b_0}{2(ab+a-2b+1)}$.

Физика
Физический факультет

1. Границей простреливаемой области является парабола, уравнение которой таково:

$$y_{гр} = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x_{гр}^2$$

2. Проекции ускорений грузов на ось, направленную вертикально вниз, равны,

соответственно,

$$a_1 = 4 \frac{4m_1 - m_2}{16m_1 + m_2} g$$

и

$$a_2 = \frac{m_2 - 4m_1}{16m_1 + m_2} g.$$

$$3. \rho = \rho_{\text{в}} + \rho_{\text{п}} = \frac{1}{RT} \left(\mu_{\text{в}} \left(\rho - \frac{e}{100} \rho_{\text{н}} \right) + \mu_{\text{п}} \frac{e}{100} \rho_{\text{н}} \right); m_{\text{п}} = \frac{\mu_{\text{п}} V}{RT} \cdot \frac{e}{100} \rho_{\text{н}}.$$

$$4. \Delta m = \frac{\rho_{\text{н}} V \mu}{RT} \left(\frac{e}{100} - \frac{1}{2} \right) = 0,0047 \text{ кг.}$$

$$5. A = \frac{k-1}{k} \frac{m}{\mu} RT, \text{ где } R - \text{ универсальная газовая постоянная.}$$

$$6. Q = 2 C \mathcal{E}^2.$$

7. $U = 2/3 \mathcal{E}$; верхняя пластина конденсатора заряжена положительно.

$$8. I = \frac{|\vec{B}| \omega L^2}{2 \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 \right)} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ А.}$$

$$9. x \approx R / (2n).$$

10. Источник надо сместить влево на 8 см.

Механико-математический факультет и факультет вычислительной математики и кибернетики

$$1. h = H - l \cos^3 \alpha = 46 \text{ см.}$$

$$2. t_1 = \frac{t}{\omega} \sqrt{\frac{\mu g}{l}} = 100 \text{ с} = 1 \text{ мин } 40 \text{ с.}$$

$$3. \Delta E = \frac{3}{2} mg (h_1 - h_2) = 3 \cdot 10^8 \text{ Дж.}$$

$$4. h = l_0 \frac{H + h_0}{l_0 - l} + l - H - h_0 = 40 \text{ мм}$$

(здесь $H = 760 \text{ мм}$).

$$5. \frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{m_1 T_2}{\mu_1 T_1} + \frac{m_2}{\mu_2}}{\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}} = \frac{12}{7} \approx 1,7.$$

$$6. U_{\text{ВА}} = \frac{\mathcal{E}_2 C_2 - \mathcal{E}_1 C_1}{C_1 + C_2} \approx 2,7 \text{ В.}$$

$$7. R_1 = \frac{R_2 R_3 R_4}{R_2 R_5 - R_3 R_4} = 120 \text{ Ом.}$$

$$8. P = \frac{(|\vec{B}| |\vec{l}| |\vec{v}|)^2}{R} \approx 24,6 \text{ Вт.}$$

$$9. F_x = \frac{\Gamma d F}{\Gamma(F-d) + F} \approx -43,6 \text{ см}$$

(здесь $\Gamma = \frac{9 \text{ см}}{30 \text{ см}} = \frac{12 \text{ см}}{40 \text{ см}} = 0,3$).

10. $R = 21 \text{ см}$ (вычисления удобно проводить по этапам).

Химический факультет

$$1. m_2 = 3 m_1.$$

$$2. t = 0 \text{ } ^\circ\text{C.}$$

$$3. U_2 = U_1 \frac{d-l}{d} = 120 \text{ В.}$$

$$4. I \geq \frac{2 T_0 - mg}{|\vec{B}| l} = 1,5 \text{ А.}$$

$$5. s_1 = \frac{a_1 F}{a_1 + F} \approx 7 \text{ см; } s_2 = F = 10 \text{ см.}$$

Географический и геологический факультеты и факультет почвоведения

$$1. |\vec{T}| = m(v^2/l - g \cos \alpha) = 9 \text{ Н.}$$

$$2. k = \frac{Q - (c_1 m_1 + c_2 m_2)(t_{\text{к}} - t)}{m_2 \lambda} \approx$$

$\approx 0,01$ (здесь $t_{\text{к}} = 100 \text{ } ^\circ\text{C}$ — температура кипения воды).

$$3. |\vec{F}| = \frac{(q_1 + q_2)^2}{16 \pi \epsilon_0 r^2} = 9 \cdot 10^{-5} \text{ Н.}$$

$$4. P_1 = \frac{P_1 P_2^2}{(P_1 + P_2)^2} \approx 44,4 \text{ Вт;}$$

$$P_2 = \frac{P_1^2 P_2}{(P_1 + P_2)^2} \approx 22,2 \text{ Вт.}$$

Новосибирский государственный университет

Математика

Механико-математический, физический, экономический факультеты

1. 20 м/сек. Указание. Обозначим время от начала торможения до остановки через t . Рассмотрите три случая: $t \geq 15$, $5 < t < 15$, $t \leq 5$; покажите, что первый и третий случаи невозможны.

$$2. x_1 = -\frac{5}{16} \pi + 2 \pi k, x_2 = -\frac{\pi}{16} + 2 \pi l, x_3 = \frac{3}{16} \pi +$$

$$+ 2 \pi m, x_4 = \frac{7}{16} \pi + 2 \pi n \text{ (} k, l, m, n \in \mathbb{Z} \text{)}.$$

$$3. 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Указание. Если O_1 и O_2 — центры окружностей, A и B — точки их касания с прямой l , C — ближайшая к l точка их пересечения и $O_2K \perp O_1A$, то $\widehat{O_1O_2K} = 45^\circ$ (из $\triangle O_1O_2K$) и $\widehat{O_1O_2C} = 90^\circ$ (из $\triangle O_1O_2C$).

4. $\left[-\sqrt{\frac{2}{5}}; \sqrt{\frac{2}{5}}\right]$. Указание. Первое неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 5x^2 - 8x + 3 > x^2, \\ x > 1 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} 0 < 5x^2 - 8x + 3 < x^2, \\ 0 < x < 1. \end{cases}$$

5. $|PQ| = \frac{3\sqrt{101}}{5}$. Решение. Рассмотрим гомотегию с центром в точке P , которая переводит A' в A (рис. 8). Так как основания усеченной пирамиды параллельны, образ верхнего основания будет лежать в плоскости нижнего основания. Поэтому образом точки M будет точка Q , а образом D' — точка S на продолжении AD такая, что $(QS) \parallel (CD)$. Мы видим, что $\frac{|QS|}{|MD'|} =$

$= \frac{3}{1} = 6$, т. е. коэффициент гомотегии равен шести. Отсюда, в частности, следует, что $|AQ| = 6|A'M| = 3\sqrt{5}$. Из $\triangle QAB$ находим $|QB| = 6$, тогда $|QC| = 3$. Пусть P' — проекция точки P на плоскость основания (рис. 9). Из $\triangle AQC$ по теореме косинусов находим $\cos \widehat{QAP'} = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Из $\triangle PAP'$ вычисляем $|P'A| = \frac{6\sqrt{2}}{5}$. Тогда из $\triangle QAP'$ по теореме косинусов $|QP'| =$

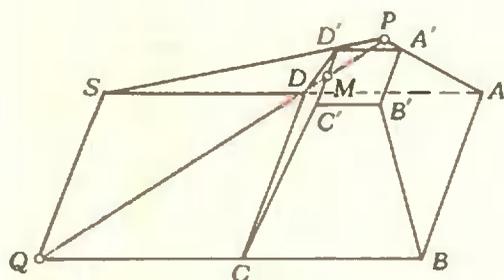


Рис. 8.

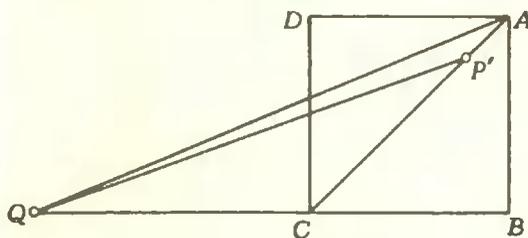


Рис. 9.

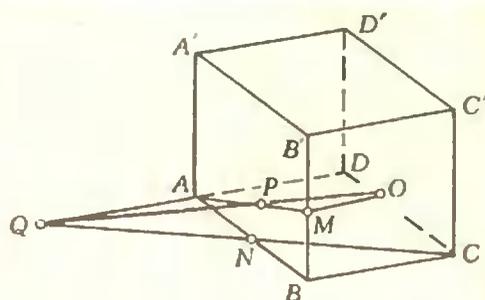


Рис. 10.

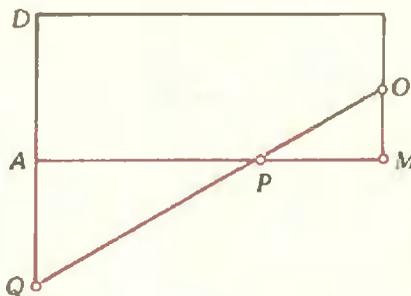


Рис. 11.

$= \frac{3\sqrt{73}}{5}$. Наконец, из $\triangle QPP'$ находим $|PQ|$.

Факультет естественных наук, геолого-геофизический факультет

- $\{(1; 2), (-1; -2), (\sqrt{2}; \sqrt{2}), (-\sqrt{2}; -\sqrt{2})\}$.
- $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x_2 = (-1)^l \frac{\pi}{6} + \pi l$ ($k, l \in \mathbb{Z}$).
- 9:16.

Указание. Точки O_1 и O_2 лежат на перпендикуляре к $[CD]$, проходящем через его середину. Отсюда и из условия вытекает, что $\widehat{DCB} = 90^\circ$ и, следовательно, $[DB]$ — диаметр одной из окружностей.

4. $]-4; -1 - \sqrt{3}] \cup]0; -1 + \sqrt{3}[$.

5. $|PQ| = \frac{\sqrt{14}}{3}$. Указание. Прямая

PQ лежит в плоскости OAM . Следовательно, точка пересечения этой плоскости с прямой CN есть Q . Кроме того, точка Q лежит на линии пересечения плоскости OAM и плоскости ABC , т. е. на прямой AD (рис. 10). Сечение куба плоскостью OAM изображено на рисунке 11.

Физика

Вариант 1

1. Правый поршень дойдет до горизонтального участка трубки. Высота x левого поршня будет равна

$$x = \begin{cases} \frac{3}{2} h \frac{p_0 - mg / (2S)}{p_0 + mg / (2S)} & \text{при } \frac{mg}{2S} < p_0 \\ 0 & \text{при } \frac{mg}{2S} \geq p_0. \end{cases}$$

$$2. U_1 = \frac{g_2 C_2 - g_1 C_1}{C_1 + C_2}.$$

$$3. |S_0 S| = F \sqrt{(3 + \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha (1 + 1/\cos \alpha)^2}.$$

Указание. Изображение S находится в фокальной плоскости второй линзы (рис. 12).

Вариант 2

$$1. F = F_0 \operatorname{ctg}(\alpha/2).$$

$$2. \alpha = 4/l.$$

$$3. x = \frac{2l}{(c^2/|\vec{v}|^2) - 1} \left(\sin \alpha \pm \sqrt{(c^2/|\vec{v}|^2) - \cos^2 \alpha} \right);$$

знак «минус» соответствует движению автомобиля в противоположную сторону.

Указание. При отражении звука угол падения равен углу отражения (рис. 13).

Вариант 3

$$1. \delta = \begin{cases} 1 - (nr/R)^2 & \text{при } nr < R, \\ 0 & \text{при } nr \geq R. \end{cases}$$

Указание. Ход граничного луча, еще не поглощенного внутренней частью шара, показан на рисунке 14.

$$2. |\vec{F}| = \frac{\omega a^3 |\vec{B}|^2}{4R}.$$

$$3. |\vec{v}_{\max}| = \frac{k_2 \alpha}{\sqrt{m(k_1 + k_2)}}.$$

Задачи-оценки

1. Накопленная при падении с высоты h энергия mgh расходуется на работу $A \sim |\vec{F}| l$ против средней силы \vec{F} , действующей на ноги (l — путь центра

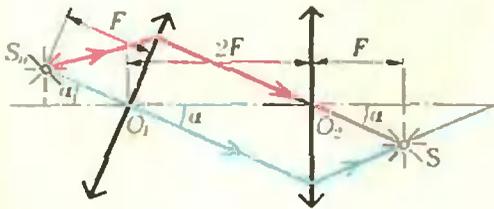


Рис. 12.

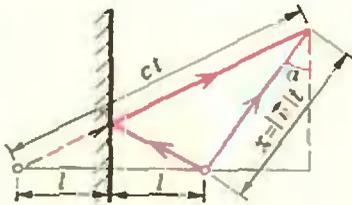


Рис. 13.

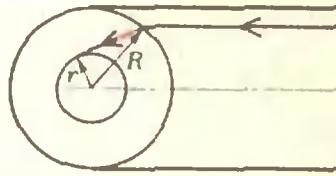


Рис. 14.

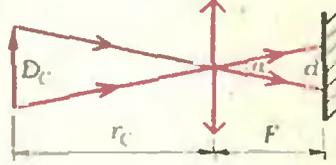


Рис. 15.

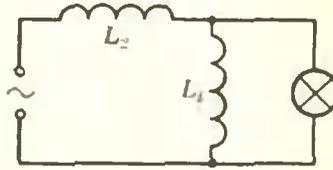


Рис. 16.

тяжести за время действия силы, примерно равный длине ног). Таким образом,

$$|\vec{F}| \sim mg \frac{h}{l}.$$

Взяв $m = 70$ кг, $h = 5$ м, $l = 1$ м, получим $|\vec{F}| \sim 3500$ Н.

2. Лучи, идущие от краев Солнца через центр линзы (угол между ними равен отношению диаметра Солнца к расстоянию до него: $\alpha = D_C/r_C$), не преломляются и создают в фокальной плоскости линзы изображение Солнца (рис. 15). Диаметр изображения

$$d = \alpha F = \frac{D_C}{r_C} F,$$

где F — фокусное расстояние линзы. Энергия, упавшая на площадь линзы $\pi D^2/4$, концентрируется на существенно меньшей площади изображения $\pi d^2/4$. Таким образом, происходит увеличение энергии на единицу площади в

$$\beta = \frac{D^2}{d^2} = \left(\frac{D r_C}{D_C F} \right)^2 \text{ раз.}$$

Выбирая, например, $D = 5$ см, $F = 25$ см и подставляя значение углового диаметра Солнца $\alpha = D_C/r_C$, получим $\beta \sim 400$.

3. Оценим давление, пользуясь гидростатической формулой

$$p = \rho_{\text{средн}} R \sim \rho \frac{g}{2} R,$$

($g_{\text{средн}} = \frac{g}{2}$, так как ускорение силы тяжести от центра Земли до ее поверхности растет по линейному закону). Оценим

плотность Земли:

$$\rho = \frac{M_3}{V_3} = \frac{RR^2/\gamma}{4/3\pi R^3} = \frac{3g}{4\pi R\gamma}$$

Таким образом,

$$\rho \sim \frac{3g^2}{8\pi\gamma} \sim 10^6 \text{ атм.}$$

Задачи - демонстрации

1. Под действием поля внутри конденсатора на шарике индуцируются заряды. Они распределяются так, чтобы одноименные к ближней пластине конденсатора заряды расположились подалеже от нее, а разноименные — поближе. Это приводит к возникновению силы, притягивающей шарик к одной из пластин. При соприкосновении шарика с пластиной на него переходит заряд, одноименный с зарядом пластины, возникает отталкивание от этой пластины и притяжение к другой. Далее все повторяется. Шарик на себе переносит заряды с одной обкладки конденсатора на другую.

2. При вдвигании железного сердечника индуктивность катушки и, следовательно, ее индуктивное сопротивление возрастают. Свечение лампочки при увеличении индуктивности первой катушки будет возрастать, если эта катушка включена в цепь параллельно лампочке. Аналогично, свечение лампочки при увеличении индуктивности второй катушки будет уменьшаться, если катушка включена в цепь последовательно с лампочкой. Таким образом, приходим к схеме, изображенной на рисунке 16.

3. В сплошном кольце индуцируется кольцевой вихревой ток такого направления, что его взаимодействие с магнитным полем катушки приводит к отталкиванию кольца (вдоль стержня) от катушки. Когда кольцо разрезано, такой кольцевой ток возникнуть не может, и выталкивание кольца не наблюдается.

Московский институт стали и сплавов

Физика

1. $|\vec{a}| = \frac{m_2 \sin \beta - m_1 \sin \alpha}{m_1 + m_2} g = 1 \text{ м/с}^2$;

$|\vec{T}| = \frac{m_1 m_2 g (\sin \alpha + \sin \beta)}{m_1 + m_2} = 6 \text{ Н.}$

2. $m_2 = m_1 \frac{c_1 (t_1 - \theta)}{c_1 \theta + r - c_2 t_2} \approx 0.56 \text{ кг.}$

3. $l_1 = \frac{L \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} = 5 \text{ см}$ и $l_2 = \frac{L \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} =$

$= 80 \text{ см}$ (здесь $\mu_1 = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ и $\mu_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ — молярные массы, соответственно, кислорода и водорода).

4. $h = \frac{e |\vec{E}| L^2}{2 m |\vec{v}|} \approx 10^{-2} \text{ м} = 1 \text{ см.}$

5. $g = \frac{(2R+r)q}{rC} = 110 \text{ В.}$

6. $\delta \approx 0,1 \text{ рад} \approx 6^\circ.$

Где ошибка?

(см. с. 38)

Логическое правило, сформулированное в задаче, относится к высказываниям. *Высказыванием* называют обычно такое предложение, про которое говорящие согласны, что оно истинно или ложно.

Если еще можно спорить о предложениях *A* и *B*, являются или не являются они высказываниями (в самом деле, как по-вашему: предложение *A* истинно? ложно?), то предложение *C* без дополнительных уточнений (очевидно, предложение *C* есть сокращение для «Говоря *X*, я говорю правду»; высказыванием оно становится только после конкретизации *X*, причем при одних *X* оно становится истинным высказыванием, при других — ложным) считать высказыванием явно неразумно.

Причину ошибки можно объяснить немного короче: в предложениях «Из *B* следует *C*» и «Из *A* следует *C*» *C* имеет различный смысл.

Знаю ли я неравенства?

(см. с. 43)

1. $]0; 1[\cup]2; 4[- 4; - 3[\cup] - 3; \infty [$
 3. $]0; 1[\cup]1; \infty [$ 4. $\log_{1/\sqrt{2}} 3; \infty [=] -$

$- 2 \log_2 3; \div \infty [$ 5. $\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} +$

$+ 2\pi k [(k \in \mathbb{Z})$ 6. $] - \infty; \div \infty [$.

7. $\sqrt{\cos 6}$ больше. 8. $- 2a$.

1. Ответ. $] 9/4; \infty [$. Решение. Обозначим $\sqrt{2} = a$; тогда $2 = a^2$ и исходное неравенство переищется в виде:

$\log_{a-0.5} (x^2 (x-3a) + a^2 (3x-a)) < 6$.

$\log_{a-0.5} (x^3 - 3ax^2 + 3a^2 x - a^3) < 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{a-0.5} (x-a)^3 < 6 \Leftrightarrow 3 \log_{a-0.5} (x-a) < 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{a-0.5} (x-a) < 2 \Leftrightarrow x-a > (a-0.5)^2$.

2. Легко видеть, что $x^2 - 3x + 3 > 0$ при любых x . Следовательно, $\arcsin (x^2 - 3x + 3)$ больше нуля при всех таких x , что $x^2 - 3x + 3 \leq 1$. Но очевидно, $x^2 - 3x + 3 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$.

При $x = 1$ теряет смысл $\log_x x^2$, поэтому для исходного неравенства допустимыми являются значения $1 < x \leq 2$. Знаменатель исходной дроби равен $x^3 - x^2 + x + 2$. Нетрудно проверить (хотя бы с помощью производной), что на $]1; 2[$ это выражение положительно. Ответ $]1; 2[$.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 4)

$$1. \begin{array}{r} 1311 - 952 = 359 \\ + 313 + 17 = 330 \\ \hline 1624 : 56 = 29 \end{array}$$

$$333^3 = 36926037;$$

$$477^3 = 108531333;$$

$$997^3 = 991026973;$$

2. а) $1233 = 12^2 + 33^2$; б) $8833 = 88^2 + 33^2$.

3. Заменяем все числа их остатками от деления на 5 (см. таблицу), а сверху

3	5	7	11	13	17	19	23	29
3	0	2	1	3	2	4	3	4

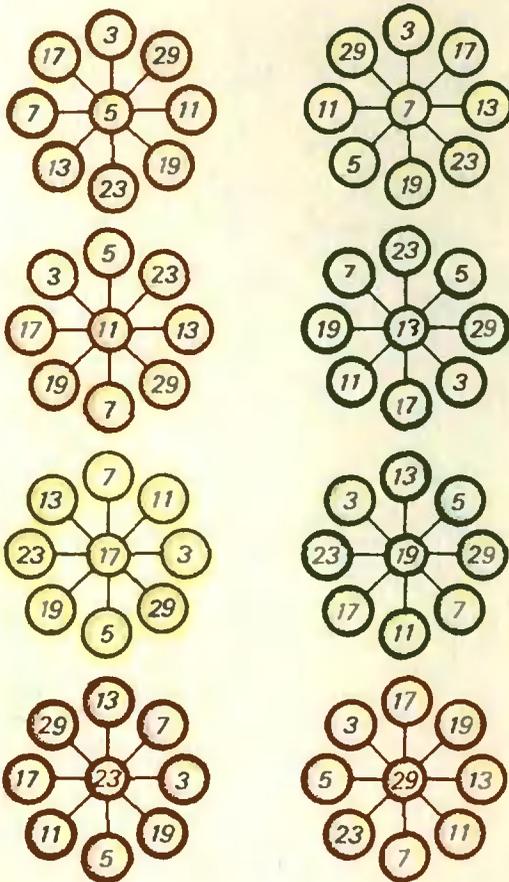


Рис. 17.

над остатками поставим точки в количестве, равном остаткам от деления первоначальных чисел на 3. Теперь нетрудно сообразить, почему в центре не может стоять число 3: чисел с одной точкой наверху — три, с двумя точками — пять, так что на концах одного из четырех диаметров придется поставить по числу с разным количеством точек наверху; но тогда соответствующая сумма первоначальных чисел на этом диаметре будет делиться на 3. Возможные способы расстановки данных чисел (когда в центре стоят числа 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 и 29 соответственно) приведены на рисунке 17.

4. Задача имеет два решения: параллелограмм с острым углом 72° и параллелограмм с острым углом $\frac{360^\circ}{7}$ (см. рисунки 18, а—б).

5. Второй мальчик выиграет, если он будет ставить свои ладьи симметрично ладьям первого мальчика относительно центра доски.

Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях

(см. «Квант» № 4)

$$1. |\vec{E}| = \frac{4|\vec{v}|^2 \sin^2 \alpha (h \operatorname{ctg} \alpha - d)}{h^2 e / m}$$

$$= 1,82 \cdot 10^4 \text{ В/м.}$$

$$2. R = \frac{e^2}{8\pi \epsilon_0 W} = 5,2 \cdot 10^{-11} \text{ м, где}$$

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ — электрическая постоянная.

$$3. \frac{\Delta U}{U_0} \leq \frac{A_2 - A_1}{A_1 + A_2} = \frac{1}{40} = 2,5\%.$$

Указание. Пучки изотопов калия не будут перекрываться, если $R_{\min} \geq R_{\max}$. Здесь

$$R_{\min} = \frac{1}{e|\vec{B}|} \sqrt{2em_2(U_0 - \Delta U)},$$

$$R_{\max} = \frac{1}{e|\vec{B}|} \sqrt{2em_1(U_0 + \Delta U)}$$

($m_1 \sim A_1$ и $m_2 \sim A_2$ — массы соответствующих ионов калия).

$$4. T_p = T_e \frac{m_p}{m_e}.$$

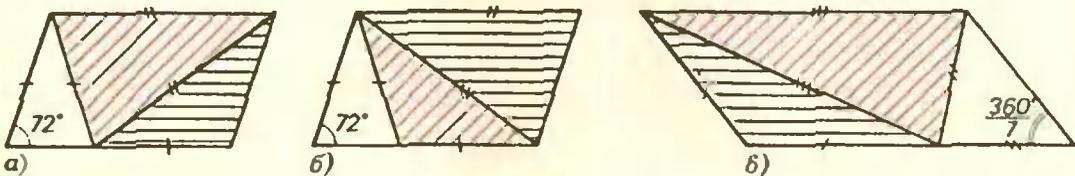


Рис. 18.

Московский архитектурный институт
(см. «Квант» № 4)

Математика

Билет 1

2. 1) $m^2 - 2$; 2) $m(m^2 - 3)$;

3) $\sqrt{m^2 - 4}$ или $-\sqrt{m^2 - 4}$. 3. $a^2 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{4 \sin^2 75^\circ} - 1 \right) = a^2 \left(\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3} \right)$.

Указание: Фигура, площадь которой требуется найти, является объединением квадрата и четырех сегментов.

Билет 2

2. 8. 3. $\sqrt{41,36} \approx 6,4$ (м). Указание. Пусть $\alpha(x)$ — угол, под которым человек, стоящий на расстоянии x , видит статую. Тогда функции $x \rightarrow \alpha(x)$ и $x \rightarrow \lg \alpha(x)$ принимают наибольшее значение в одной и той же точке.

Физика

1. $\alpha = \arccos \left(1 - \frac{m^2 |v|^2}{2(m+M)^2 gl} \right)$.

2. $|\vec{F}_1| = Mg \cos \alpha$; $|\vec{F}_2| = Mg \sin \alpha$.

3. $|\vec{F}_{ср}| = \frac{m}{s} \left(g(H+s) + \frac{|v_0|^2}{2} \right) = 761 \text{ Н.}$

4. $q = 2l \sin \alpha \sqrt{2\epsilon_0 mg \sin \alpha} \approx 3,3 \cdot 10^{-8} \text{ Кл.}$

5. $t_3 = t_1 + t_2 = 45$ мин; при увеличении продолжительности нагревания увеличиваются потери тепла в окружающую среду, следовательно, в каждом последующем случае КПД меньше, чем в предыдущем.

6. $I_{кз} = \frac{I_2^2 P_1 - I_1^2 P_2}{P_1 I_2 - P_2 I_1} = 112 \text{ А.}$

Домно-пасьянс

(см. «Квант» №4, с. 56)
См. рисунки 19, 20, 21.

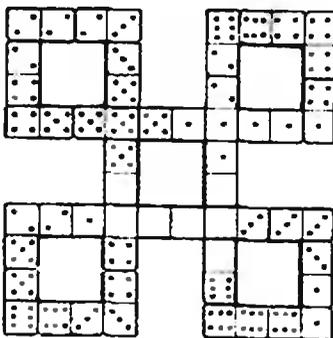


Рис. 19.

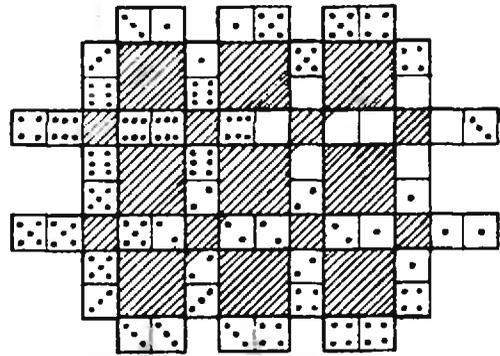


Рис. 20.

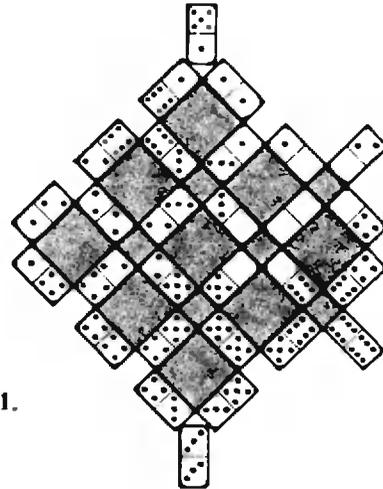


Рис. 21.

Номер готовила:
А. Виленкин, И. Кламова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова,
Ю. Шиханович

Номер оформила:
М. Дубак, Г. Краснов, С. Лухин,
Э. Назаров, И. Смирнова, В. Чернов,
В. Шептовицкий

Зав. редакцией Л. Чернова

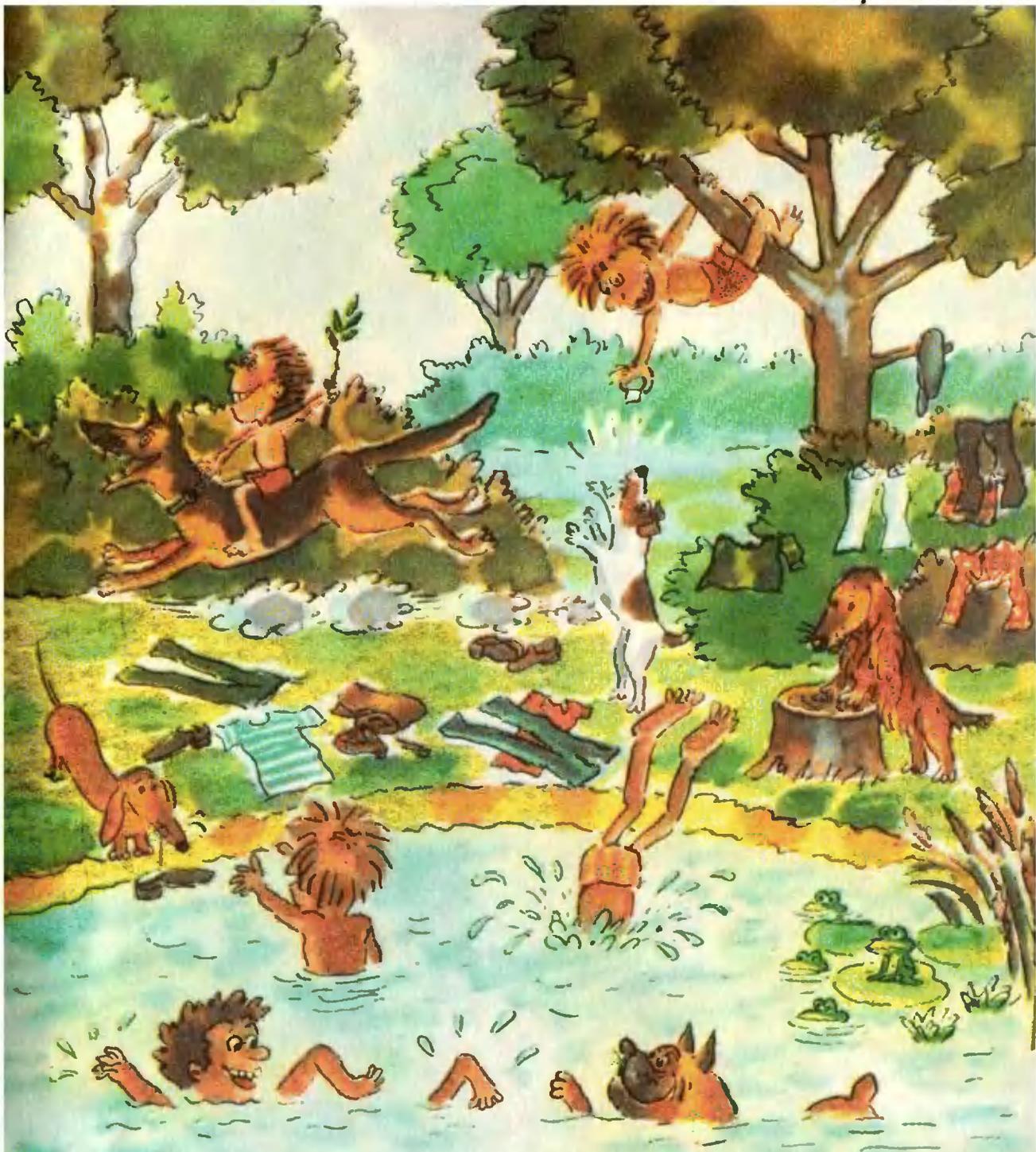
Художественный редактор Н. Вершинина

Корректор А. Ипатова

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 29/1-79
Подписано в печать 13/IV-79
Бумага 70 × 108/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 3,60 Уч.-изд. л. 6,77 Т-08943
Цена 30 коп. Заказ 423
Тираж 287 200 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются



Петя, Вася, Коля, Саша и Дима — друзья. У каждого из них есть собака — боксер, овчарка, фокстерьер, такса и спаниель, с которыми они гуляют всегда вместе.

Как-то раз, усевшись на свою любимую скамейку, ребята размышляли, чем бы им заняться. Все они были одеты по-разному: в черные, синие, белые, коричневые и зеленые брюки; в красную, серую, клетчатую, полосатую и цветастую рубашки; и у всех были разные головные уборы — бескозырка, берет, кепка, тубетейка и пилотка.

Синие брюки сидели рядом с красной рубашкой, а коричневые — рядом с серой.

Хозяин спаниеля сидел справа от хозяина фокстерьера, а Коля — рядом с хозяином боксера.

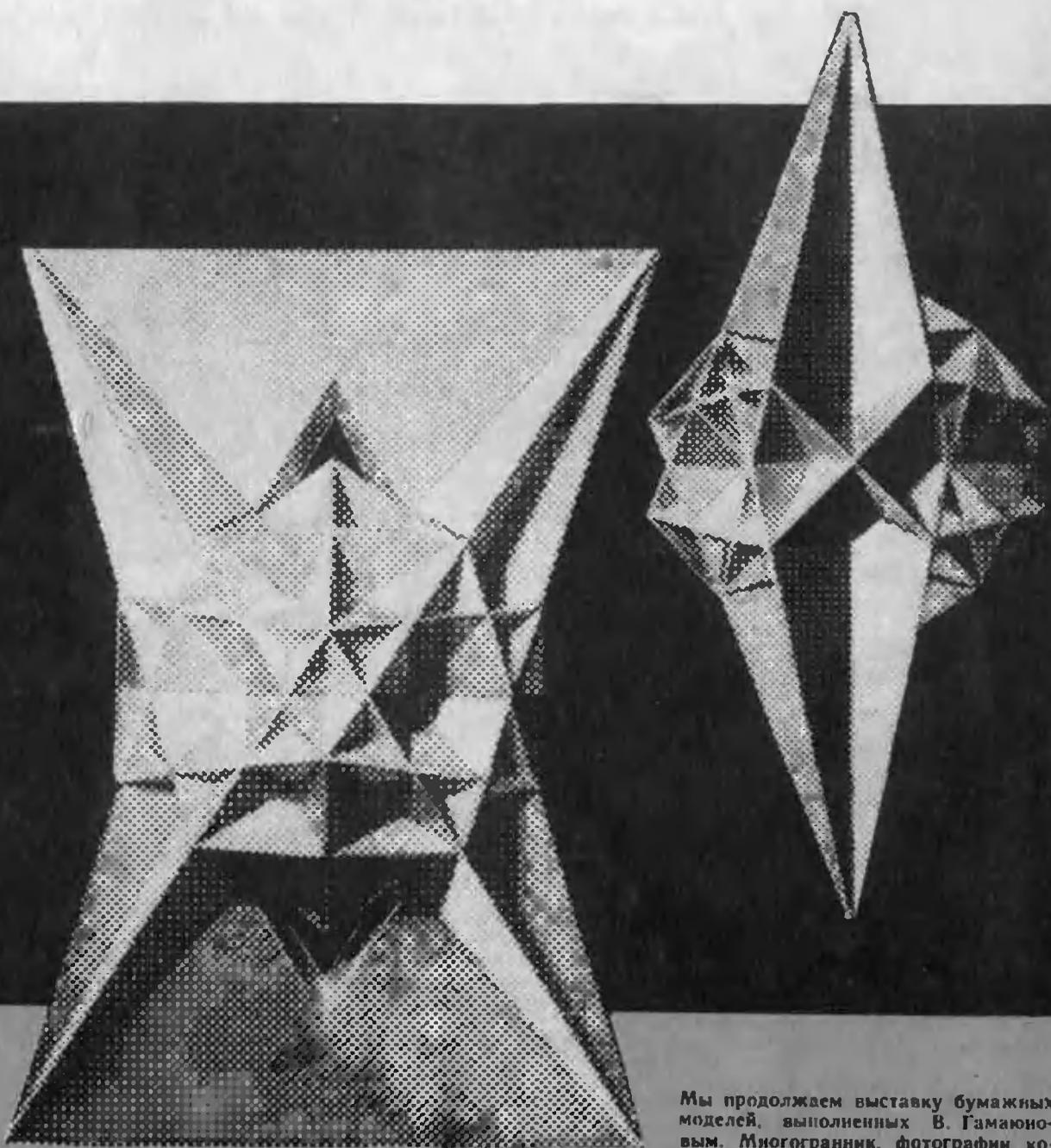
Коля сидел с краю, а Петя — в зеленых брюках.

Кепка сидела в середине, а черные брюки — в бескозырке.

День был жаркий, и приятели решили пойти купаться.

Определите, у кого была полосатая рубашка и на ком была пилотка, если известно, что у Димы — овчарка, а у Васи — клетчатая рубашка, у хозяина спаниеля — тубетейка, а у Саши — берет, у хозяина таксы — коричневые брюки, а белые брюки — в цветастой рубашке.

Цена 30 коп.
Индекс 70465



Мы продолжаем выставку бумажных моделей, выполненных В. Гамаюновым. Многогранник, фотографии которого вы видите, получен продолжением некоторых граней равногранно полуправильного многогранника, являющегося объединением двух додекаэдров, описанных около одного куба (см. с. 54).