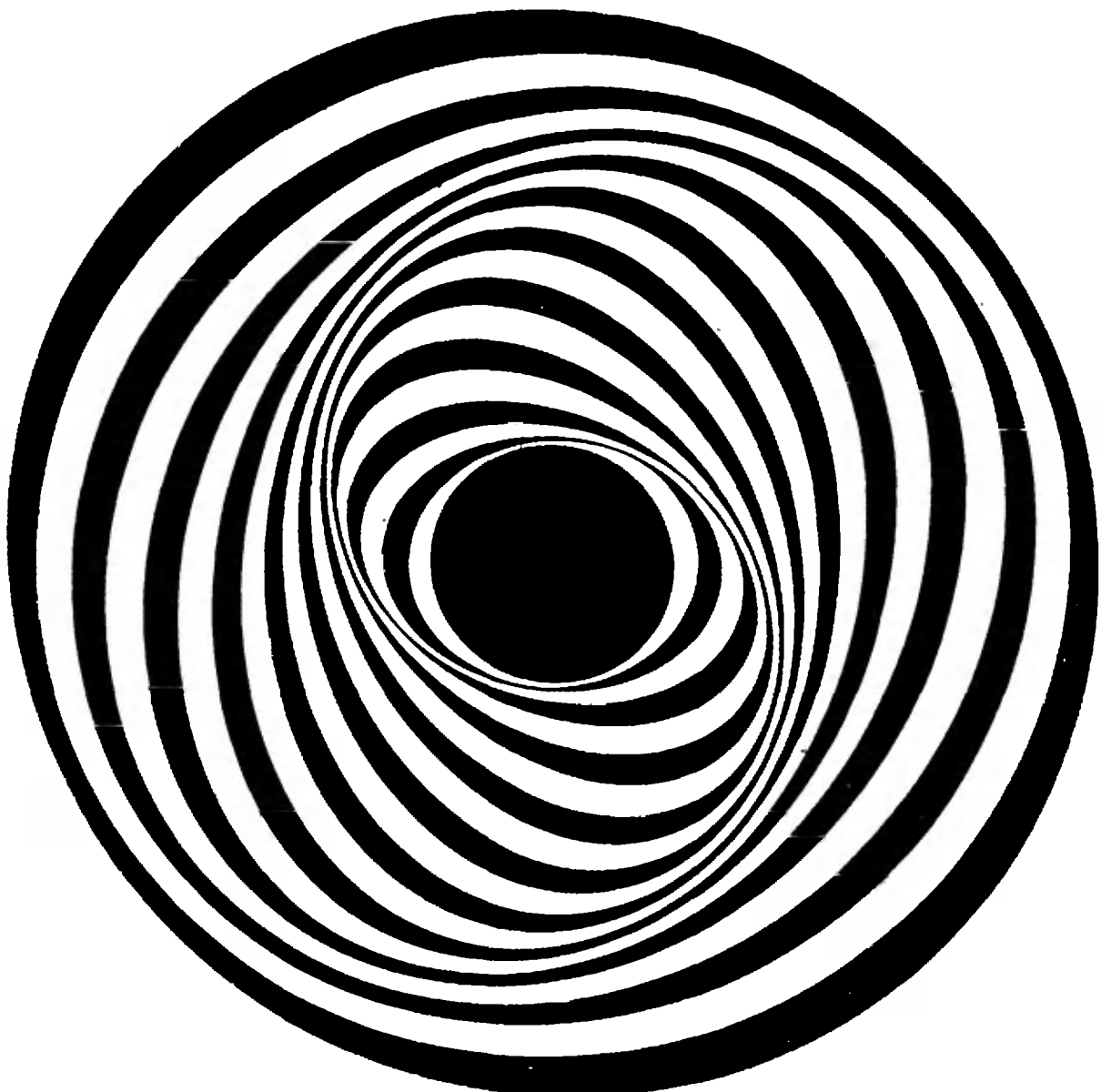
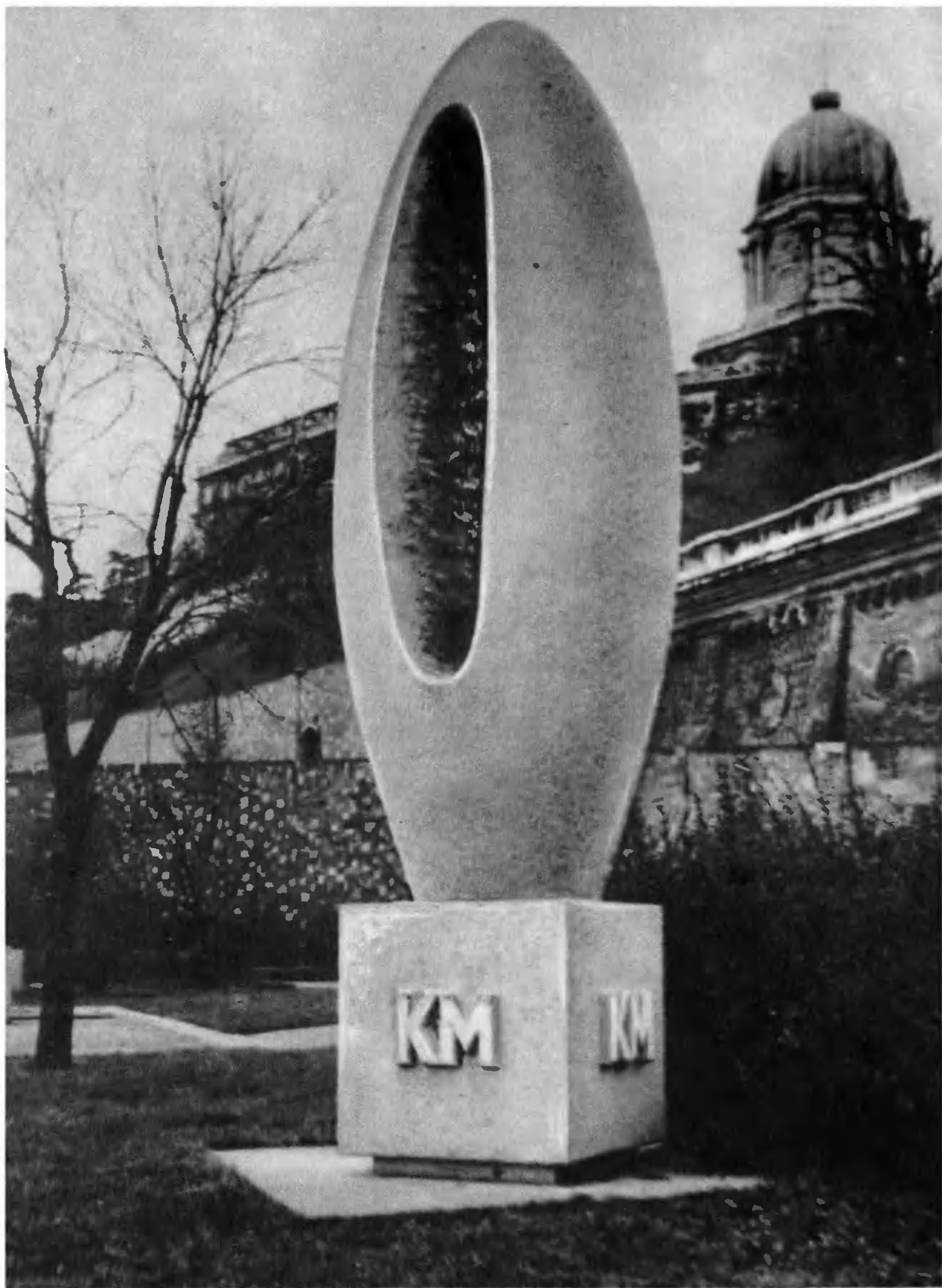


Квант

8
1979

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





Как мерить расстояния между географическими пунктами? Ведь некоторые из этих пунктов весьма велики и, скажем, совсем не безразлично, от какой точки Москвы мерить

расстояние до Мытищ: результат может измениться почти вдвое. О том, как связаны рисунок на этой странице обложки и упомянутая проблема, можно прочесть на с. 37

Основан в 1970 году

Квант

8

1979

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР



Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

В номере:

- | | | |
|---|----|---|
| Главный редактор
академик И. К. Кикоин | 3 | <i>Е. Кузьмин, А. Ширшов.</i> О числе e |
| Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров | 9 | <i>А. Мигдал.</i> Вычисления без вычислений |
| Редакционная коллегия: | 18 | <i>Р. Винокур.</i> Домовой, колдун и ... резонатор Гельмгольца |
| М. И. Башмаков | 21 | <i>А. Вирский, А. Звонкин.</i> Овал, восьмерка, два овала... |
| С. Т. Беляев | 26 | <i>С. Берколайко.</i> Интеграл помогает доказать неравенство Коши |
| В. Г. Болтянский | | Лаборатория «Кванта» |
| Н. Б. Васильев | 27 | <i>В. Майер.</i> Опыты с ложкой бульона |
| Ю. Н. Ефремов | | Математический кружок |
| В. Г. Зубов | 30 | <i>А. Лопшиц.</i> Векторное решение аффинных задач |
| П. Л. Капица | | Задания «Кванта» |
| В. А. Кириллин | 38 | Задачи М576—М580; Ф588—Ф592 |
| А. И. Климанов | 40 | Решения задач М521—М527; Ф533—Ф536 |
| С. М. Козел | | «Квант» для младших школьников |
| В. А. Лешковцев | 49 | Задачи |
| (зам. главного редактора) | | 50 <i>А. Савин.</i> Веселая викторина |
| Л. Г. Макара-Лиманов | 52 | Новые картинки к калейдоскопу |
| А. И. Маркушевич | | Рецензии, библиография |
| Н. А. Патрикеева | 53 | <i>Н. Розов.</i> С учетом специальности |
| И. С. Петраков | 54 | <i>В. Болтянский, М. Смолянский.</i> По страницам новой книги |
| Н. Х. Розов | 58 | <i>Е. Левитан.</i> Путеводитель по звездным лабиринтам |
| А. П. Савин | | Информация |
| И. Ш. Слободецкий | 59 | <i>В. Большаков.</i> Старейший технический вуз страны |
| М. Л. Смолянский | 62 | <i>Э. Марченко.</i> Заочная школа при НГУ |
| (зам. главного редактора) | 62 | <i>А. Васильев.</i> Вечерняя физическая школа |
| Я. А. Смородинский | 63 | Ответы, указания, решения |
| В. А. Фабрикант | | Наша обложка (с. 36, 37) |
| А. Т. Цветков | | Смесь (с. 8, 17, 25, 35, 37) |
| М. П. Шаскольская | | |
| С. И. Шварцбург | | |
| А. И. Ширшов | | |

ЭВМ не только научились рисовать сами, но и научили людей рисовать в своей манере. С этим, видимо, согласится каждый, увидевший на первой странице обложки этого номера рисунок художника Френсиса Селентано, который он назвал «кинетическим»



Алексей Иванович Маркушевич

4 июня 1979 года на 72-м году жизни скончался член редакционной коллегии журнала «Квант», известный советский ученый-математик и педагог, видный организатор народного образования в нашей стране, член КПСС, академик Академии педагогических наук СССР, профессор Московского университета Алексей Иванович Маркушевич.

А. И. Маркушевичу принадлежит большое число статей, монографий и учебников по теории функций комплексного переменного, по истории и методике математики. Много внимания А. И. Маркушевич уделял популяризации науки. Он является автором ряда книг, адресованных школьникам: «Площади и логарифмы», «Комплексные числа и конформные отображения», «Возвратные последовательности», «Ряды» и др. При его активном участии были подготовлены и вышли в свет такие хорошо знакомые многим издания, как «Детская энциклопедия», «Энциклопедия элементарной математики», «История отечественной математики». Алексей Иванович сыграл большую роль в организации научно-популярного физико-математического журнала «Квант» и, как член редколлегии с момента основания журнала, постоянно оказывал существенную помощь в его издании. Заметный вклад А. И. Маркушевич внес в развитие советской школы и педагогической науки, работая на протяжении многих лет первым заместителем министра просвещения РСФСР, вице-президентом АПН РСФСР и АПН СССР.

Е. Кузьмин, А. Ширшов

О числе e

1. Что такое e ?

В школе вы еще в пятом классе знакомитесь с числом π , имеющим очень длинную историю, начало которой теряется в глубине веков, в античном мире *). Затем вы встречаетесь с ним в восьмом, девятом, десятом классах. С числом e вы сталкиваетесь только в конце десятого класса. Однако это замечательное число, вошедшее в обиход в XVIII веке вместе с развитием математического анализа, играет в современной математике едва ли не более важную роль.

В школьном учебнике для числа e даются два определения. Во втором (первое нам не понадобится) числом e называется предел последовательности $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Докажем, что этот предел существует.

Лемма 1. Для любых m, n

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}. \quad (1)$$

неравенство (1) очень легко доказывается при помощи знаменитого *неравенства Коши*:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} < \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \quad (2)$$

где a_1, a_2, \dots, a_n — положительные числа, среди которых есть различные**). Из (2)

$$\sqrt[m+n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{m+1}\right)^{m+1}} < \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + (m+1)\left(1 - \frac{1}{m+1}\right)}{m+n+1} = 1,$$

откуда $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{m+1}\right)^{m+1} < 1$ и $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}$.

Лемма 2. Последовательность (x_n) — возрастающая.

Доказательство. Обозначим $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ через y_n . Согласно лемме 1, $x_{n(n+2)} < y_{n+1}$, то есть

$$\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n(n+2)} < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

*) Много интересных подробностей о числе π можно найти в книге Ф. Купман «История числа π » (М., «Наука», 1971). См. также статью А. Звонкина «Что такое π ?» («Квант», 1978, № 11).

**) Постарайтесь доказать его самостоятельно. Можете также прочитать его доказательство на с. 26.

Значит,

$$\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^n < 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Следовательно, $\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^n = \frac{(n+1)^{2n}}{n^n(n+2)^n} < \frac{n+2}{n+1}$. Поэтому $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$ или $x_n < x_{n+1}$.

Из лемм 1, 2 и теоремы Вейерштрасса вытекает, что последовательность (x_n) имеет предел. Обозначение e для этого предела было введено Л. Эйлером (1707—1783).

Упражнение. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = e$ и что для любых m, n

$$x_n < e < y_m.$$

Число e можно определить еще и как предел последовательности

$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$. Докажем это. По формуле Ньютона

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} + \\ &+ \dots + \frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \\ &\times \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \\ &\times \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned} \quad (3)$$

(Из (3) тоже видно, что последовательность (x_n) — возрастающая.) Отбрасывая множители в круглых скобках, мы увеличим каждое слагаемое в правой части равенства (4). Следовательно, $x_n < s_n$ (при $n > 1$).

Фиксируем теперь произвольное $k > 1$. Считая, что $n > k$, отбросим в правой части равенства (3) все слагаемые, начиная с $(k+2)$ -го. Получим

$$x_n > 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right). \quad (4)$$

При $n \rightarrow \infty$ (и фиксированном k) правая часть неравенства (4) стремится к s_k . Переходя в неравенстве (4) к пределу, получим $e \geq s_k$. Итак, $x_n < s_n \leq e$. Из $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e$ получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = e$. Таким образом,

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \quad (5)$$

Последовательностью (s_n) гораздо удобнее пользоваться для вычисления приближенных значений числа e , чем последовательностью (x_n) . Оценим разность $e - s_n$. Из (5)

$$\begin{aligned} e - s_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \right] < \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{(n+1)^2 \cdot n!} < \frac{1}{n \cdot n!}. \end{aligned}$$

Полученный результат можно записать в виде равенства

$$e = s_n + \frac{\theta_n}{n \cdot n!} \quad (0 < \theta_n < 1). \tag{6}$$

Из (6) легко получить иррациональность числа e . Действительно, предположим, что $e = \frac{p}{q}$. Тогда $q!e$ — целое число. Из (6) при $n=q$

$$q!e = q! + q! + \frac{q!}{2!} + \dots + \frac{q!}{q!} + \frac{\theta_q}{q}.$$

Получается, что и $\frac{\theta_q}{q}$ — целое число, что, очевидно, неверно. Вот первые десятичные знаки числа e .

$$e = 2,718281828459045\dots$$

2. Задача о разбиениях

Число e , баловень математического анализа и теории функций, довольно неожиданно возникает в некоторых комбинаторных задачах. Рассмотрим одну такую задачу.

Начнем с примера. Двухэлементное множество $\{a_1, a_2\}$ можно разбить на непересекающиеся подмножества (говоря о разбиениях, их называют *классами*) двумя способами: это — «поэлементное» разбиение $\{a_1\}, \{a_2\}$ и вырожденное «целое» разбиение $\{a_1, a_2\}$. Аналогичные разбиения имеются (при $n > 2$) у любого n -элементного множества. При $n=3$ к ним добавляются еще три разбиения (рис. 1).

Очевидно, $\tau(0) = \tau(1) = 1$. Как мы только что отметили, $\tau(2) = 2$, $\tau(3) = 5$. А чему равно $\tau(n)$ для произвольного n ? Нельзя ли для $\tau(n)$ указать какую-нибудь простую формулу?

Как это часто бывает в комбинаторных задачах, легко найти рекуррентное соотношение, связывающее $\tau(n)$ со значениями $\tau(k)$ для $k < n$.

Рис. 1.

Пусть $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Рассортируем все разбиения множества M в зависимости от того, чему равно число k элементов класса, в который попадает при данном разбиении элемент a_1 . Число k может быть равно $1, 2, \dots, n$. При фиксированном k число таких разбиений равно, очевидно, $C_{n-1}^{k-1} \tau(n-k)$.

Таким образом, $\tau(n) = \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} \tau(n-k)$. Легко проверить, что

$$\sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} \tau(n-k) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \tau(k). \text{ Окончательно,}$$

$$\tau(n) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \tau(k). \tag{7}$$

При помощи формулы (7) нетрудно подсчитать, что $\tau(4) = 15$, $\tau(5) = 52$, $\tau(6) = 203$, $\tau(7) = 877$, $\tau(8) = 4140$ — с ростом n числа $\tau(n)$ быстро возрастают.

*) Числа $\tau(n)$ называются *числами Белла* («Квант», 1978, № 7).

Рекуррентной формулой (7) мы воспользуемся для доказательства любопытного утверждения, в котором неожиданно появляется число e :

$$e \cdot \tau(n) = \frac{1^n}{1!} + \frac{2^n}{2!} + \dots + \frac{k^n}{k!} + \dots \quad (n \geq 1) \quad (8)$$

Доказательство. Применим метод математической индукции. При $n=1$ (8) верно в силу (5). Предположим теперь, что (8) верно для всех чисел, меньших некоторого n ; докажем, что тогда оно верно и для n . По (5) и по предположению индукции справедливы равенства

$$e \cdot \tau(0) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots$$

$$e \cdot \tau(1) = \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!} + \dots + \frac{k}{k!} + \dots$$

$$e \cdot \tau(2) = \frac{1^2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{k^2}{k!} + \dots$$

$$e \cdot \tau(n-1) = \frac{1^{n-1}}{1!} + \frac{2^{n-1}}{2!} + \dots + \frac{k^{n-1}}{k!} + \dots$$

(Бесконечные суммы в правых частях надо, естественно, понимать как пределы частичных сумм.) Сложим почленно эти равенства с коэффициентами, соответственно, C_{n-1}^0 , C_{n-1}^1 , C_{n-1}^2 , ..., C_{n-1}^{n-1} . В левой части, согласно (7), мы получим $e \cdot \tau(n)$, в правой

$$1 + \frac{\varphi(1)}{1!} + \frac{\varphi(2)}{2!} + \dots + \frac{\varphi(k)}{k!} + \dots$$

где $\varphi(t) = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 t + C_{n-1}^2 t^2 + \dots + C_{n-1}^{n-1} t^{n-1} = (1+t)^{n-1}$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} e \cdot \tau(n) &= 1 + \frac{2^{n-1}}{1!} + \frac{3^{n-1}}{2!} + \dots + \frac{(k+1)^{n-1}}{k!} + \dots = \\ &= \frac{1^n}{1!} + \frac{2^n}{2!} + \frac{3^n}{3!} + \dots + \frac{(k+1)^n}{(k+1)!} + \dots \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Из (8) получается красивая формула

$$\tau(n) = \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$$

неудобная, однако, для вычисления $\tau(n)$. Ниже мы получим прямые (в смысле «не рекуррентные») конечные (не через ряд) формулы для вычисления $\tau(n)$.

Назовем *рангом* данного разбиения число классов, из которых оно состоит. Обозначим через $c_{n,k}$ число разбиений ранга k n -элементного множества *). Очевидно, ранг может принимать только значения $1, 2, \dots, n$; поэтому

$$\tau(n) = \sum_{k=1}^n c_{n,k}. \quad (9)$$

При $k > n$ положим $c_{n,k} = 0$.

Для чисел $c_{n,k}$ легко получить рекуррентное соотношение. Пусть $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $M' = \{a_2, \dots, a_n\}$. Разделим разбиения множе-

*) Числа $c_{n,k}$ называются *числами Стирлинга*.

ства M ранга k на две группы — на разбиения, содержащие одноэлементное множество $\{a_1\}$ в качестве класса разбиения, и не содержащие. Разбиений первого вида, очевидно, существует столько же, сколько разбиений множества M' ранга $k-1$, то есть $c_{n-1, k-1}$; разбиений второго вида — в k раз больше, чем разбиений множества M' ранга k (элемент a_1 можно поместить в любой из k классов разбиения множества M'), то есть $k \cdot c_{n-1, k}$. Итак, при $n > 1, k > 1$

$$c_{n, k} = c_{n-1, k-1} + k \cdot c_{n-1, k}. \quad (10)$$

Докажем, что при $n \geq 1, k \geq 1$

$$c_{n, k} = \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^s (k-s)^{n-1}}{s! (k-s-1)!}. \quad (11)$$

Обозначим правую часть равенства (11) через $b_{n, k}$. Если $k=1$, то $b_{n, 1} = 1 = c_{n, 1}$. Если $k > 1$ и $n=1$, то

$$\begin{aligned} b_{1, k} &= \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^s}{s! (k-s-1)!} = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s C_{k-1}^s = \\ &= \frac{1}{(k-1)!} (1-1)^{k-1} = 0 = c_{1, k}. \end{aligned}$$

Если, наконец, $k > 1$ и $n > 1$, то

$$\begin{aligned} b_{n, k} &= \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^s (k-s)^{n-1}}{s! (k-s-1)!} = \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^s (k-s)^{n-2} \cdot (k-s)}{s! (k-s-1)!} = \\ &= k \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^s (k-s)^{n-2}}{s! (k-s-1)!} + \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^{s+1} (k-s)^{n-2} \cdot s}{s! (k-s-1)!} = \\ &= k \cdot b_{n-1, k} + \sum_{s=1}^{k-1} \frac{(-1)^{s+1} (k-s)^{n-2} \cdot s}{s! (k-s-1)!} = \\ &= k \cdot b_{n-1, k} + \sum_{s=1}^{k-1} \frac{(-1)^{s+1} (k-s)^{n-2}}{(s-1)! (k-s-1)!} = k \cdot b_{n-1, k} + \sum_{s=0}^{k-2} \frac{(-1)^{s+2} (k-s-1)^{n-2}}{s! (k-s-2)!} = \\ &= k \cdot b_{n-1, k} + \sum_{s=0}^{k-2} \frac{(-1)^s (k-s-1)^{n-2}}{s! (k-s-2)!} = k \cdot b_{n-1, k} + b_{n-1, k-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, числа $c_{n, k}$ и $b_{n, k}$ удовлетворяют одному и тому же рекуррентному соотношению вида (10); кроме того, их «начальные значения»: при $k=1$ (и любом $n \geq 1$) и при $n=1$ (и любом $k \geq 1$) совпадают. Следовательно (рис. 2), $c_{n, k} = b_{n, k}$ для любых $n \geq 1$ и $k \geq 1$.

Из (9) и (11)

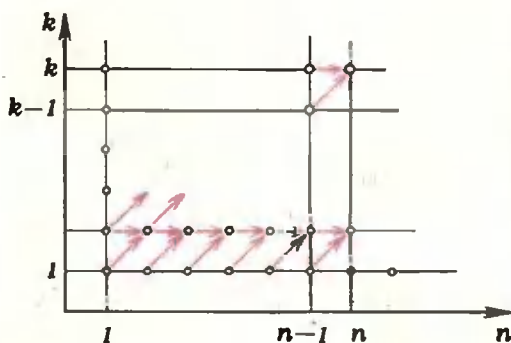


Рис. 2.

$$\tau(n) = \sum_{k=1}^n \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-1)^s (k-s)^{n-1}}{s! (k-s-1)!}. \quad (12)$$

Обозначим $k-s$ через t ; тогда $1 \leq t \leq n$. При фиксированном t в двойной сумме (12) s может изменяться от 0 до $n-t$. Собирая коэффициенты при t^{n-1} , можно формулу (12) преобразовать к виду

$$\tau(n) = \sum_{t=1}^n \left(\sum_{s=0}^{n-t} \frac{(-1)^s}{s!} \right) \frac{t^{n-1}}{(t-1)!}.$$

Числа $c_{n,k}$, имеющие ясный комбинаторный смысл, неожиданно возникают в одной алгебраической задаче, связанной с многочленами.

Положим $x^{(1)}=x$, $x^{(2)}=x(x-1)$, $x^{(3)}=x(x-1)(x-2)$ и т. д. Многочлены $1, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ имеют, соответственно, степени $0, 1, 2, \dots, n$. Поэтому любой многочлен от x степени не выше n единственным образом представляется в виде суммы этих многочленов (с некоторыми коэффициентами). В частности,

$$x^n = a_{n,1}x^{(1)} + a_{n,2}x^{(2)} + \dots + a_{n,n}x^{(n)} \tag{13}$$

для некоторых чисел $a_{n,k}$, ($n \geq 1, 1 \leq k \leq n$). Для $k > n$ положим $a_{n,k} = 0$. Оказывается, $a_{n,k} = c_{n,k}$. Докажем это.

Пологая в (13) $x=1$, получаем $a_{n,1} = 1 = c_{n,1}$. Если $k > 1$ и $n=1$, то $a_{1,k} = 0 = c_{1,k}$. Пусть теперь $k > 1$ и $n > 1$.

$$\begin{aligned} x^n &= \sum_{k=1}^n a_{n,k}x^{(k)} = x \cdot x^{n-1} = x \cdot \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-1,i}x^{(i)} = \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-1,i}x^{(i)}[(x-i) + i] = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-1,i} [x^{(i)}(x-i) + ix^{(i)}] = \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-1,i} [x^{(i+1)} + ix^{(i)}] = \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-1,i} x^{(i+1)} + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-1,i} ix^{(i)}. \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при $x^{(k)}$, получаем $a_{n,k} = a_{n-1,k-1} + k \cdot a_{n-1,k}$. Как и выше, из этого вытекает, что $a_{n,k} = c_{n,k}$ при всех n, k .

У п р а ж н е н и е. Докажите равенство:

$$\tau(n-1) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i \tau(n-i).$$

Вычислим число e

На с. 4 было доказано, что число $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

равно сумме ряда $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots$. Однако можно указать ряд, частичные суммы которого сходятся к e намного быстрее частичных сумм ряда

$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots$. Ниже предлагается несколько задач, решив которые, вы с помощью несложных выкладок научитесь точно вычислять много знаков числа e .

1. Докажите, что при $n \geq 2$ справедливо равенство:

$$\begin{aligned} 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \\ + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \\ + \frac{1}{n \cdot n!} = 3 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2!} - \\ - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3!} - \dots - \frac{1}{(n-1) \cdot n \cdot n!}. \end{aligned}$$

У к а з а н и е. Примените метод математической индукции.

2. Докажите, что

$$e = 3 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+2)!}.$$

3. Докажите, что

$$e = \frac{87}{32} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+4) \cdot (n+5) \cdot (n+5)!}. \tag{1}$$

$$4. e = \frac{87}{32} - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{(n+4) \cdot (n+5) \cdot (n+5)!} - R_k.$$

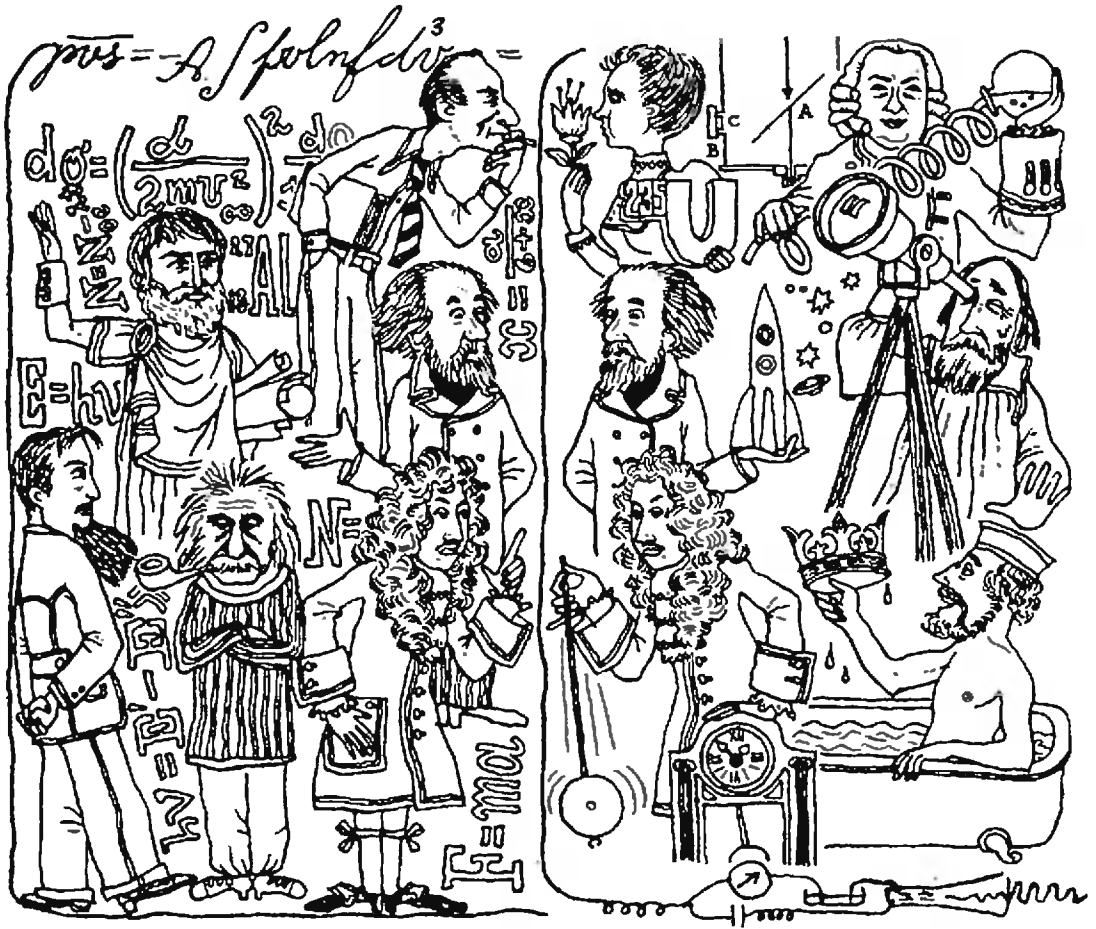
Оцените остаток R_k .

5. Вычислите приближенное значение e , взяв три члена ряда (1), и оцените погрешность приближения.

6. Докажите, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+4) \cdot (n+5) \cdot (n+5)!} < 0,00047.$$

Г. Сорокин



А. Мигдал

Вычисления без вычислений

Если математика — это искусство избегать вычислений, то теоретическая физика — это искусство вычислять без математики.

Высказывание, приведенное в качестве эпиграфа, возникло в результате споров физиков и математиков и нуждается в разъяснении. Даже самые простые вычисления в физике не обходятся без математики. Однако, на первой, самой важной стадии работы физика-теоретика, когда устанавливается физическая картина явления, математика отстает на

задний план и играет только подсобную роль. Но прежде чем говорить о связи физики и математики, следует пояснить, что такое теоретическая физика.

1. КАК РАБОТАЮТ ФИЗИКИ?

Экспериментаторы и теоретики

Существует два типа физиков — экспериментаторы и теоретики, причем эти две профессии почти никогда не совмещаются в одном лице. Физики-экспериментаторы исследуют соотношения между физическими величинами или, говоря более торжественно, открывают законы природы, пользуясь экспериментальными установками, то есть производя измерения физических величин с помощью приборов. Для этого надо глубоко понять изучаемые явления, чтобы знать, что и как измерять. Физики-теоретики

изучают природу, пользуясь только бумагой и карандашом, то есть выводя новые соотношения между наблюдаемыми величинами, опираясь на найденные ранее экспериментально и теоретически законы природы. Причина разделения этих двух профессий не только в том, что каждая из них требует своих специальных знаний: знания методов измерения — в одном случае и владения математическим аппаратом — в другом. Главная причина в том, что эти профессии соответствуют различным характерам мышления и различным формам интуиции. Интуиция, то есть способность подсознательно находить правильный путь, играет важнейшую роль, особенно на первых стадиях работы. К сожалению, дар интуиции возникает не сразу, а в результате упорной работы, как награда за решение многих научных задач.

Поскольку теоретическая физика имеет дело с более отвлеченными понятиями, чем физика экспериментальная, физику-теоретика требуется более абстрактная форма интуиции, близкая иногда к интуиции математика. В прошлом веке, когда физика еще не была так специализирована, многие физики совмещали обе профессии. Так, Максвелл, который получил теоретически уравнения, описывающие все электромагнитные явления, занимался и экспериментами. Герц, который обнаружил экспериментально электромагнитные волны, был одновременно и хорошим теоретиком. И все-таки в каждом случае можно указать, какая из профессий главная: для Максвелла это — теоретическая физика, а для Герца — физика экспериментальная.

В XX веке одним из самых замечательных примеров «универсального» физика — и теоретика, и экспериментатора — был Энрико Ферми. Наряду со многими другими работами Ферми создал теорию радиоактивного распада и вместе с физиками своей группы открыл экспериментально искусственную радиоактивность элементов, возникающую при бомбардировке нейтронами.

Еще одним примером выдающегося теоретика, тесно связанного с экспериментом, был академик Г. И. Буд-

кер, у которого теоретическая физика совмещалась с замечательными инженерными идеями. Он руководил теоретической разработкой и практическим осуществлением ускорителя на встречных пучках заряженных частиц в Новосибирском Академгородке.

Однако это — редкие исключения, и молодой человек, интересующийся физикой, должен решить для себя, какую из двух профессий он выбирает.

В дальнейшем речь пойдет о работе физиков-теоретиков.

Физика и математика

Итак, задача физика-теоретика — получать соотношения между наблюдаемыми величинами с помощью математических выкладок. Не означает ли это, что теоретическая физика представляет собой нечто вроде прикладной математики? Такая точка зрения совершенно неверна. И по характеру задач, и по методам подхода к задачам математика и теоретическая физика категорически отличаются.

В математике важнейшую роль играют математическая строгость, то есть логическая безупречность всех выводов, вытекающих из принятых аксиом, и исследование всех логически возможных соотношений. Задача физики — воссоздать по возможности точную картину мира без строгих «правил игры», используя все известные экспериментальные и теоретические факты, используя основанные на интуиции догадки, которые в дальнейшем будут проверены на опыте. Так, математик исследует все логически возможные типы геометрий, физик же выясняет, какие геометрические соотношения осуществляются в нашем мире.

Математик, даже если он занимается прикладными задачами, то есть задачами, пришедшими не из математики, берется за решение только тех задач, которые не требуют дополнительных недоказанных предположений. Физик же, как правило, имеет дело с задачами, в которых имеющихся исходных данных недоста-

точно для решения, и искусство состоит в том, чтобы угадать, какие недостающие соотношения реализуются в природе. Именно для этих догадок требуется не математическая, а физическая интуиция.

Убедительность в физике достигается получением одного и того же результата из разных исходных предпосылок. При этом приходится вводить лишние, логически не необходимые аксиомы, каждая из которых сама по себе не абсолютно достоверна. Единственное условие состоит в том, чтобы уметь оценивать степень убедительности того или иного предположения и ясно понимать, какие предположения требуют дальнейшей проверки.

Если какая-либо область физики достигнет такого развития, что все ее результаты можно будет вывести из нескольких строго установленных экспериментально аксиом, то эта область перестанет быть частью развивающейся физической науки и перейдет в раздел прикладной математики или техники. Так произошло с классической механикой.

Разумеется, очень полезно анализировать структуру физической теории, то есть выяснять, из каких исходных предпосылок получаются те или иные результаты. Однако, центр тяжести в таком аксиоматическом подходе — не в общности и математической строгости выводов, а в правильном выборе исходных предположений и в оценке того, какие из них наиболее достоверно подтверждены опытом. А для этого требуется интуиция физика. В тех случаях, когда эту работу проделывает математик, он обязательно, хотя бы на время, делается физиком-теоретиком. Иначе он рискует оказаться, по выражению польского сатирика Леца, в положении эскимоса, который вырабатывает для жителей Конго правила поведения во время жары.

Итак, математика и физика — науки с разными задачами и с разными методами подхода к задачам.

В математике достоверность результатов достигается логической строгостью и анализом всех логически возможных решений. В физике рассматриваются только те решения, ко-

торые могут осуществляться в природе, и достоверность достигается многократной проверкой сделанных предположений. Математическая строгость в физике представляет собой невозможную и ненужную роскошь. Добиваться в физике математической строгости так же не нужно, как требовать от бригадиров лесоповала, чтобы они на работе разговаривали стихами. Но вместе с тем физик-теоретик должен свободно владеть математическим аппаратом, то есть знать и уметь использовать все те математические методы, которые могут оказаться полезными при решении физических задач.

II. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ

Попробуем показать на простых примерах, как работают физики-теоретики на первой, самой важной стадии работы, когда делается качественный анализ поставленной задачи. Как мы увидим, на этой стадии работы почти без всяких вычислений получаются грубые соотношения между входящими в задачу величинами. Следующая стадия работы — получение точных количественных соотношений с помощью математического аппарата теории — целиком опирается на первую стадию, во время которой проясняется физическая картина явления и возникает проект ожидаемого решения. Не имея такого предположительного проекта, нельзя приступать к поискам точного решения. Действительно, доказать удастся только те утверждения, которые были заранее угаданы. Из этого правила почти не бывает исключений.

Одним из главных элементов качественного анализа является решение задачи на упрощенных моделях, в которых отброшено все несущественное. Усложнять решенную задачу несравненно проще, чем заново решать сложную.

В некоторых простых случаях многое проясняет простой размерный анализ входящих в задачу величин и возможных соотношений между ними.

Размерные оценки

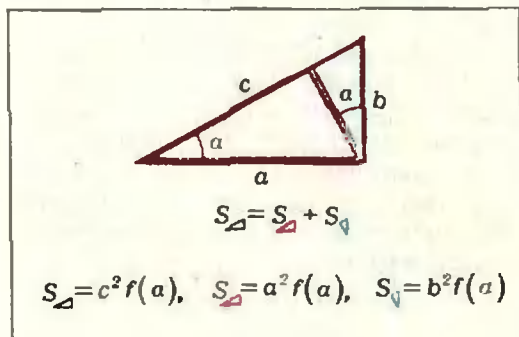
Для иллюстрации докажем теорему Пифагора, пользуясь соображениями размерности. Из размерности следует, что площадь S прямоугольного треугольника можно записать как произведение квадрата гипотенузы на некоторую функцию одного из острых углов: $S = c^2 f(\alpha)$. Аналогичным образом можно представить площади двух подобных прямоугольных треугольников, которые получатся, если опустить высоту из прямого угла. Для этих треугольников роль гипотенузы играют катеты исходного треугольника. Поэтому

$$c^2 f(\alpha) = a^2 f(\alpha) + b^2 f(\alpha).$$

Сократив на $f(\alpha)$, получим теорему Пифагора.

В качестве другого примера рассмотрим задачу о нахождении периода колебаний грузика на пружине. Прежде всего выясним, какие величины могут входить в выражение для периода. Поскольку силы, действующие на грузик, — это сила тяжести и сила упругости, естественно предположить, что период колебаний зависит от ускорения свободного падения g и массы m грузика и от жесткости пружины k . Разумеется, такие величины, как температура и вязкость воздуха, не войдут в задачу, если мы пренебрегаем затуханием колебаний. (Чтобы упростить задачу, надо знать, чем можно пренебречь!) Из величин g , m и k можно составить только одну комбинацию, имеющую размерность времени, — $\sqrt{m/k}$. Следовательно, период T равен

$$T = C \sqrt{m/k}.$$



Ускорение g не вошло в ответ. Безразмерная константа C не может быть найдена из размерных соображений; можно только сказать, что она не очень велика и не очень мала, — она порядка единицы. Действительно, значение C должно быть найдено из решения ненаписанного нами уравнения движения грузика. А безразмерные коэффициенты, возникающие из решений уравнений, встречающихся в физике, как правило, оказываются порядка единицы*). Точное вычисление дает для C значение 2π .

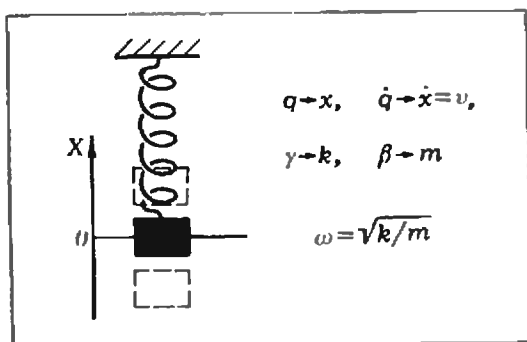
Таким образом, мы без вычислений, пользуясь только размерным анализом, нашли примерную величину периода колебаний грузика на пружине.

Пример обобщения — осциллятор

Во всех областях физики встречаются задачи, связанные с колебаниями систем около положения равновесия. Для понимания многих явлений, а следовательно, для качественного анализа этих явлений нужно знать общие свойства таких систем. Системы, совершающие колебания около положения равновесия, независимо от их устройства называются осцилляторами. Простейшие примеры осцилляторов — грузик на пружине, математический маятник. Более сложный пример — натянутая струна; у нее может быть много типов колебаний: колебания с пучностью посередине (основной тон), с одним узлом, двумя узлами и т. д. (обертоны). Таким образом, струна — это набор осцилляторов разных частот. Аналогичный пример — столб воздуха в органной трубе; его можно заставить колебаться с наименьшей частотой (основной тон) или с более высокой частотой, когда в некоторых точках воздушного столба частицы воздуха будут неподвижны (аналог узлов в колебаниях струны).

Общее свойство всех осцилляторов состоит в следующем: независимо от конкретного устройства осциллирую-

*) Это утверждение нельзя доказать в общем виде, но оно практически всегда справедливо, и этим фактом широко пользуются при всех оценках.



щей (то есть колеблющейся около положения равновесия) системы, энергия системы в любой момент времени может быть записана в виде

$$E = \gamma q^2/2 + \beta \dot{q}^2/2, \quad (*)$$

где q — величина, характеризующая отклонение от положения равновесия, а \dot{q} — скорость изменения величины q во времени (то есть $\dot{q} = \Delta q / \Delta t$, где Δt — малый промежуток времени). Слагаемое $\Pi = \gamma q^2/2$ — это потенциальная энергия осциллятора; коэффициент γ называют жесткостью осциллятора. Слагаемое $K = \beta \dot{q}^2/2$ — это кинетическая энергия осциллятора; коэффициент β называют массой осциллятора. (Вспомните, как записывается энергия простейшего осциллятора — грузика на пружине, — и вам станет понятно, почему γ называют жесткостью, а β — массой осциллятора.)

Как бы ни был конкретно устроен осциллятор, его угловая частота колебаний $\omega = 2\pi/T$ выражается следующим образом через жесткость γ и массу β :

$$\omega = \sqrt{\gamma/\beta}.$$

Введение «обобщенного» осциллятора, координата которого — не обязательно расстояние от положения равновесия, а может иметь любой смысл, лишь бы энергия имела такую же структуру, как E в выражении (*), позволяет делать выводы о поведении колеблющейся системы без рассмотрения физической природы происходящих в ней процессов.

Для пояснения приведем еще один

пример осциллятора, не похожий на все приведенные выше примеры. Допустим, имеется катушка индуктивности L из хорошо проводящей проволоки, концы которой присоединяют к конденсатору емкости C , имеющему заряд Q_0 . В цепи возникают электромагнитные колебания. Если катушка сделана из сверхпроводника (для этого нужна низкая температура), колебания практически не будут затухать.

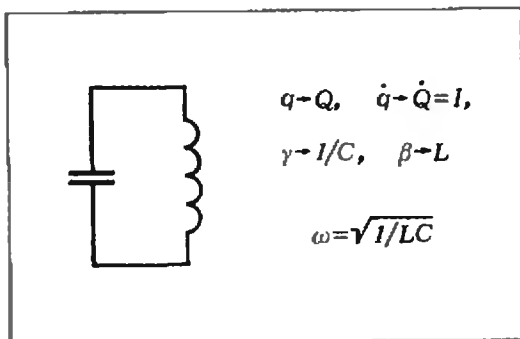
Энергия такой системы состоит из двух слагаемых: энергии магнитного поля в катушке и энергии электрического поля в конденсаторе. Энергия электрического поля конденсатора пропорциональна квадрату заряда Q , который в данный момент находится на обкладке конденсатора: $\Pi = \frac{1}{C} Q^2/2$.

Энергия магнитного поля катушки пропорциональна квадрату силы тока I , текущего в данный момент по катушке: $K = LI^2/2$. Но сила тока равна скорости изменения заряда конденсатора со временем: $I = \dot{Q}$. Таким образом, энергия магнитного поля катушки $K = L\dot{Q}^2/2$.

Следовательно, энергия системы в любой момент времени равна

$$E = \frac{1}{C} Q^2/2 + L\dot{Q}^2/2.$$

Наша система — осциллятор; роль координаты осциллятора играет заряд Q , потенциальная энергия осциллятора — энергия конденсатора, кинетическая — энергия магнитного поля катушки. Из записи энергии видно, что жесткость этого осциллятора — величина $1/C$, а роль массы играет индуктивность L . Сразу можем записать частоту колебаний: $\omega = \sqrt{1/LC}$.



Такой осциллятор называется электрическим колебательным контуром.

Как угадать решение?

Приведем пример того, как проясняются некоторые черты решения, прежде чем будет построен аппарат для точного решения задачи, до того как найдены уравнения, на основе которых задача будет решаться. Это заодно и пример более сложного анализа размерностей, чем в случае осциллятора.

Одна из труднейших и неразрешенных задач теоретической физики — связь гравитационных и электромагнитных явлений.

Если такая связь существует, то в результате решения каких-то еще не найденных уравнений будет получено безразмерное число*), дающее соотношение между гравитационной постоянной γ и величинами, характеризующими электромагнитные явления, такими как скорость света c , заряд электрона e и его масса m . Если существенны квантовые явления, то в задачу может войти еще постоянная Планка h . Зная размерности величин γ , c , e , m , h , нетрудно убедиться, что из этих величин можно составить только две независимые безразмерные комбинации:

$$\alpha = e^2 / \hbar c; \quad \xi = \hbar c / \gamma m^2$$

(напомним, что $\hbar = h / 2\pi$).

Первая из этих комбинаций характеризует взаимодействие электрона с электромагнитным полем (безразмерный «заряд» электрона) и называется постоянной тонкой структуры. Подстановка численных значений дает $\alpha = 1/137$, $\xi = 5 \cdot 10^{44}$. Может ли такое большое число как ξ возникнуть в результате решения каких-либо разумных уравнений? Безразмерные числа, возникающие в результате решения физических задач, как мы уже говорили, имеют порядок нескольких единиц или долей единицы.

*) Для того чтобы соотношение между различными физическими величинами не зависело от выбора единиц, оно должно быть записано в виде безразмерной комбинации.

Поэтому мы вправе ожидать, что величина ξ войдет в задачу в такой форме, чтобы в результате получилось число порядка 1. Пока мы применяли здравый смысл. Теперь должен быть сделан небольшой интуитивный логический скачок. Правдоподобно, что в теорию войдет комбинация

$$\alpha / \pi \xi \sim 1.$$

Ясно, что знание такого соотношения облегчает поиски решения. Именно в такой форме входит величина ξ в существующие сейчас теоретические попытки решения задачи о связи электродинамики с гравитацией.

III. ПРЕДЕЛЬНОЕ УПРОЩЕНИЕ

Основная идея квантовой механики

Попробуем показать на другом примере, как, предельно упрощая задачу, можно определить главные черты явления. Этот пример пояснит, что такое качественный подход к задаче.

Согласно квантовой механике энергия электрона в атоме может принимать только дискретные значения.

Возможные значения энергий электрона в атоме водорода даются выражением

$$E_n = - \frac{me^4}{\hbar^2} \frac{1}{2n^2}. \quad (**)$$

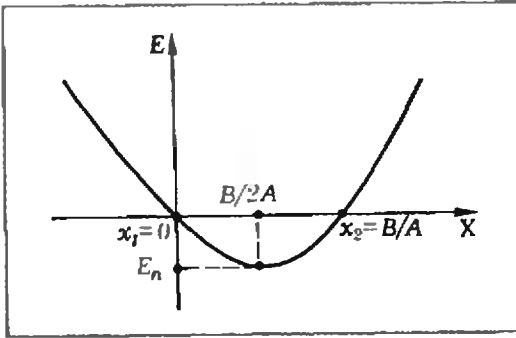
Разности значений E_n для двух разных n ($n=1,2,3, \dots$) определяют с большой точностью частоты наблюдаемых на опыте спектральных линий.

Основная идея квантовой механики состоит в том, что каждая частица (в данном случае — электрон) характеризуется неким волновым процессом с длиной волны

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{mv},$$

где m — масса частицы, v — ее скорость. Дискретные значения энергии электрона получаются из того условия, что на длине орбиты, по которой движется электрон, должно укладываться

*) Физики, как правило, не пользуются системой СИ. (Примечание автора.)



ваться целое число волн. Если радиус орбиты r , то n -ному состоянию электрона соответствует условие $2\pi r = \lambda n$ ($n=1, 2, \dots$), или $mv_n = \hbar n/r$. Отсюда нетрудно найти кинетическую энергию в n -ном состоянии:

$$W_n = mv_n^2/2 = \hbar^2 n^2 / 2mr^2.$$

Полная энергия электрона складывается из кинетической энергии и потенциальной энергии в поле ядра, которая отрицательна и равна $U = -Ze^2/r$. Полная энергия электрона в атоме водорода равна

$$E_n(r) = \hbar^2 n^2 / 2mr^2 - e^2/r.$$

В нашем выводе мы предполагаем, что радиус орбиты r имеет фиксированное значение. Согласно квантовой механике радиусы орбит «разбросаны» в окрестности классически устойчивой орбиты. В качестве оценки радиуса можно взять значение r , которое соответствует минимуму энергии $E(r)$.

Чтобы найти минимум $E(r)$, поступим следующим образом. Перепишем выражение для $E(r)$ в таком виде:

$$E = Ax^2 - Bx.$$

Мы ввели такие обозначения: $x=1/r$, $A=\hbar^2 n^2 / 2m$, $B=e^2$. Видно, что при $x_1=0$ и $x_2=B/A$ значение E равно нулю. Внутри интервала $|x_1, x_2|$ E отрицательно. Где-то внутри этого интервала лежит минимум E . Будем для оценки считать, что E_{\min} соответствует значению x в середине интервала, то есть $x=B/2A$. Соответственно, $r=1/x=2A/B$, то есть

$$r_n = \frac{\hbar^2 n^2}{me^2}.$$

(Отметим, что при $n=1$ это выраже-

ние дает верную оценку для радиуса атома в наименьшем состоянии.) Подставив это значение r_n в выражение для $E_n(r)$, получим

$$E_n = -\frac{me^4}{\hbar^2} \frac{1}{2n^2},$$

то есть выражение, совпадающее с (***)!

В действительности электрон может с разной вероятностью находиться на любом расстоянии от ядра. Наше упрощение состояло в предположении, что это расстояние определенное, равное r , и находится из условия минимальности энергии. Разумеется, мы действовали грубо. Поэтому нельзя доверять числовому множителю впереди этой формулы, хотя он случайно получился правильным. Но всему остальному можно доверять! И множителю me^4/\hbar^2 , и, что особенно важно, зависимости от «квантового числа» n .

Точное решение потребовало бы знания основного уравнения квантовой механики (уравнение Шредингера) и очень сложной (по школьным понятиям) математики. То, что мы получили, и есть качественное решение, когда результат получается с точностью до неизвестного числового множителя, но характер зависимости от параметров задачи передается точно. Качественное решение чрезвычайно облегчает получение точного решения, поскольку выясняются главные черты явления. Более того, если есть качественное решение, а точного не удастся получить аналитически, можно без особых потерь в понимании задачи найти его с помощью вычислительных машин.

Еще одно обобщение — квантовые осцилляторы

Не сложнее решается задача о квантовании осциллятора. При этом нам не существенно, как реализован осциллятор — представляет ли он груз, колеблющийся на пружине, или электрический колебательный контур.

Обозначим через q обобщенную координату осциллятора. Запишем энергию осциллятора:

$$E = \gamma q^2/2 + \beta \dot{q}^2/2.$$

Можно себе представить, что осциллятор — это некая «частица» с массой β , колеблющаяся на пружине с жесткостью γ . Для того чтобы сформулировать для этого объекта основную идею квантовой механики, введем длину волны λ волнового процесса, связанного с нашей «частицей»:

$$\lambda = 2\pi \hbar / \beta \dot{q}.$$

В знаменателе стоит произведение «массы» на ее скорость. Так как скорость изменяется при движении частицы, то и длина волны тоже меняется — она минимальна вблизи положения равновесия и растет в тех областях, где скорость «частицы» мала.

Пусть «частица» движется в области от $-q_0$ до q_0 . (Подчеркнем, что $2q_0$ — не размах колебаний осциллятора, а та область, в которой «дрожит» его координата.) Для того чтобы образовалась стоячая волна, на «длине» $2q_0$ должно укладываться целое число полуволин: $2q_0 = (n+1)\lambda/2$ ($n=0, 1, 2, \dots$). В качестве оценки скорости возьмем значение скорости при $q=q_0$,

то есть $(\dot{q})_0 = 2\pi \hbar / \beta \lambda = \pi \hbar (n+1) / 2\beta q_0$. Подставляя это значение в выражение для кинетической энергии, находим:

$$W_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8\beta} \frac{(n+1)^2}{q_0^2}.$$

Для полной энергии получаем:

$$E_n(q_0) = \frac{(\pi \hbar)^2}{8\beta} \frac{(n+1)^2}{q_0^2} + \frac{\gamma q_0^2}{2}.$$

При малых значениях q_0 энергия велика из-за первого слагаемого, а при больших q_0 — из-за второго. Примерное значение q_0 , дающее наименьшую энергию, получится, если приравнять оба слагаемых. Из этого условия находим:

$$q_0^2 = \frac{\pi \hbar (n+1)}{2\sqrt{\gamma\beta}}.$$

Подставляя в выражение для энергии, получаем:

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{\pi}{2} \hbar \sqrt{\gamma\beta} (n+1) = \\ &= \frac{\pi}{2} \hbar \omega (n+1) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Величина $\omega = \sqrt{\gamma\beta}$ представ-

ляет собой частоту колебаний классического осциллятора.

При точном расчете для энергии получается выражение

$$E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Таким образом, мы ошиблись в числовом множителе ($\pi/2$ вместо 1), а также в численном значении энергии в самом низшем состоянии, то есть при $n=0$ ($\frac{\pi}{2} \hbar \omega$ вместо $\frac{1}{2} \hbar \omega$). Но все остальное по-

лучилось точно! Теперь, когда результат получен, следует задуматься над тем, что мы использовали для его получения и что вытекает из полученных нами выражений для энергии осциллятора и для величины q_0^2 .

Прежде всего, мы применили к нашему осциллятору, не интересуясь тем, как он устроен, принципы квантовой механики, установленные первоначально применительно к электронам. Конечно, естественно ожидать, что общие принципы должны быть такими же и для других частиц, массы которых отличаются от массы электрона. Действительно, такое обобщение с большой точностью подтвердилось опытом. Но почему эти же принципы можно применять и к такому объекту, как колебательный контур, где роль «координаты» играет заряд на обкладках конденсатора? Здесь мы подошли к важному предположению, которое широко использовалось и используется в теоретической физике XX века. Если две системы имеют энергию, одинаково зависящую от координат и скоростей, то такие системы обладают одинаковыми свойствами, несмотря на то, что «координаты» и «скорости» могут иметь совершенно разный смысл в этих системах.

Не было ни одного примера, где бы это предположение противоречило опыту. Поэтому мы вправе считать, что решили задачу о применении квантовой механики сразу для всех возможных осцилляторов.

Теперь подумаем, что означают полученные нами результаты. Как они переходят в формулы классической механики? Прежде всего, мы

получили, что энергия изменяется не непрерывно, а порциями величины $\hbar\omega$. Правда, величина \hbar очень мала, и для обычных макроскопических осцилляторов эта скачкообразность изменения энергии практически не наблюдается. Впрочем, есть такие особые макроскопические системы, где скачкообразность играет определяющую роль (например, лазеры). Правильность полученного нами выражения для энергии осциллятора проверена с большой точностью для многих видов осцилляторов.

Есть еще одно важное свойство квантового осциллятора, которое тоже нами получено. Когда энергия минимальна, классический осциллятор находится в покое в положении равновесия; между тем квантовый осциллятор в наинизшем энергетическом состоянии совершает колебания (их называют «нулевые колебания»). Кинетическая и потенциальная энергия этих колебаний порядка $\hbar\omega$. При этом среднее значение координаты осциллятора равно нулю, а среднее значение квадрата координаты дается приведенной выше формулой для q_0^2 . Это замечательное свойство квантовых осцилляторов хорошо проверено на опыте и играет важную роль в современной физике.

Если рассмотреть звуковые колебания в твердом теле как набор квантовых осцилляторов, то мы получим, что при абсолютном нуле температуры атомы твердого тела не неподвижны, а совершают нулевые колебания. И этот факт был подтвержден опытами по рассеянию света при низких температурах! Если мы будем рассматривать электромагнитные волны, которые могут распространяться в пустом пространстве, как набор осцил-

ляторов, то мы придем к заключению, что в пустоте, даже когда в ней нет ни частиц, ни квантов, должны происходить нулевые колебания электромагнитного поля. И эти колебания также были обнаружены на опыте! Но это уже более сложный вопрос, который требует подробного обсуждения.

Понимание возникает в процессе работы

Мы ввели без объяснения несколько непонятных слов: квантование, волновой процесс, связанный с частицей, квантовый осциллятор и т. д. И начали действовать, не очень их понимая. Тем не менее мы нашли, как зависит энергия атома водорода от квантового числа n ; узнали, что квантовый осциллятор в наинизшем энергетическом состоянии колеблется, и даже стали применять результаты квантования осциллятора к такому объекту, как колебания электромагнитного поля в пустоте. И в результате этих действий возникло хотя бы частичное понимание.

Итак, понимание возникает в процессе работы. Ведь если бы мы попытались добиться полного понимания до того, как начали наши простые вычисления, ничего бы не получилось. Понимание возникает не скачком, а по мере продвижения в работе. И наоборот, работа продвигается по мере углубления понимания.

Для того чтобы достичь более глубокого понимания, надо самому решать задачи в данной области физики. Пассивное изучение дает только слабое представление о тех красотах, которые открываются при самостоятельной работе.

Задачи наших читателей

1. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается его сторон BC , CA и AB в точках G_a , G_b и G_c соответственно. Вневписанные окружности касаются сторон BC , CA и AB в точках N_a , N_b и N_c . Пусть r , r_a , r_b и r_c — радиусы вписанной и вневписанных окружностей соответственно. Докажите следующие равенства:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{1}{|AG_c| \cdot |G_c B|} + \frac{1}{|BG_a| \cdot |G_a C|} + \frac{1}{|CG_b| \cdot |G_b A|} = \frac{1}{|AN_c| \cdot |N_c B|} + \\ & + \frac{1}{|BN_a| \cdot |N_a C|} + \frac{1}{|CN_b| \cdot |N_b A|} = \frac{1}{r^2}; \quad \text{б) } \frac{|BN_a|^2}{r_a r_b} + \frac{|CN_b|^2}{r_b r_c} + \frac{|AN_c|^2}{r_c r_a} = \\ & = \frac{|AN_b|^2}{r_a r_b} + \frac{|BN_c|^2}{r_b r_c} + \frac{|CN_a|^2}{r_c r_a} = 1; \end{aligned}$$

(Окончание см. с. 25)



Р. Винокур

Домовой, колдун и... резонатор Гельмгольца

В рассказе А. Вьюркова «Пустырь» *) можно прочитать о том, как некий Иван Павлович, желающий разбогатеть, нанял артель каменщиков для постройки «доходного» дома и жестоко обманул их, выплатив лишь часть заработанных денег. Однако «доходный» дом не принес мошеннику желанных прибылей — постепенно его покинули все квартиросъемщики. Их напугал таинственный домовой, поселившийся в доме. Не помогла Ивану Павловичу избавиться от «нечистой силы» и полиция.

*) А. Вьюрков. Рассказы о старой Москве. (М., «Московский рабочий», 1958.)

«... В квартиру выехавшего купца посадили на ночь двух городских. Они уселись в кухне на пустые ящики, достали «для храбрости» бутылку водки, колбасу и стали ждать «домового». — В случае, ежели что... — наставлял старший чин младшего. — ты его хватай, а я руки крутить буду.

«Засада» выпивала и прислушивалась. В квартире было тихо. На улице гудел ветер, выла собака, хлопала каюта у ворот, и вдруг... в пустых комнатах кто-то вздохнул и завыл. Городовые переглянулись и, не прожевав колбасы, вскочили и вылетели на улицу легче пуха.

— Так точно... — дрожа от страха, доложил дежурному старшой.

— Своими глазами видел, ваше благородие!... Голова у него — во! Хвост и рога — во!

После этого происшествя из дома выехало еще несколько жильцов...».

Наступил срок уплаты процентов, денег не было. Ивана Павловича арестовали. И только много лет спустя строительный подрядчик, также когда-то обманутый Иваном Павловичем, раскрыл ему секрет:

«Это тебя, брат, Иван Павлович, каменщики подвели. Они тебе в стену бутылки пустые заложили, ветерок то в них и гудел. Поди их теперь ищи. Не придумаешь, где и стену ломать...»

Звучащие свойства пустых сосудов известны давно. Так, еще в античном театре большие глиняные либо бронзовые сосуды использовались для усиления голоса актера. Большое практическое применение в акустике получили так называемые *резонаторы Гельмгольца* — полости шарообразной или бутылочной формы с узким длинным горлом.

С помощью набора резонаторов Гельмгольца (названных так в честь немецкого физика Гельмгольца, создателя физической теории слуха) можно производить анализ сложных звуков. Действие резонатора основано на резонансе колебаний воздуха, заключенного внутри резонатора. Из всех колебаний, входящих в состав сложной звуковой волны, каждый резонатор сильнее всего откликается на частоту, равную собственной частоте колебаний воздуха в нем.

От чего и как зависит собственная частота колебаний резонатора Гельмгольца? Если размеры резонатора малы по сравнению с длиной звуковой волны, его можно рассматривать как колебательную систему, аналогичную *п р у ж и н н о м у м а я т н и к у*. Поскольку горло узкое, при колебаниях скорость движения воздуха в горле гораздо больше скорости воздуха внутри полости, так что роль колеблющейся массы играет, главным образом, воздух в горле. Другими словами, кинетическая энергия колебательной системы сосредоточена, в основном, в горле. Упругой же энергией обладает воздух, находящийся внутри полости. Действительно, так как объем воздуха в горле намного меньше, чем в полости, изменением объема воздуха в горле при колебаниях можно пренебречь и считать, что весь этот воздух смещается как единое целое — своеобразная «воздушная пробка», а объем воздуха в полости изменяется заметно. Таким образом, воздух внутри полости играет роль пружины в нашей колебательной системе.

Как известно, собственная частота колебаний пружинного маятника равна

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Найдем соответствующие параметры нашей колебательной системы — массу m и коэффициент упругости k .

Массу «воздушной пробки» определить легко. Она равна

$$m = \rho S l,$$

где ρ — плотность воздуха, S — площадь поперечного сечения горла резонатора и l — его длина.

Для определения коэффициента упругости проведем такие рассуждения. Пусть «воздушная пробка» сместилась на некоторое расстояние внутрь полости. Это вызовет сжатие воздуха (увеличение плотности) в прилегающем слое воздуха в полости и, как следствие, — повышение давления, что вызовет движение следующего слоя воздуха, и так далее. Сжатие будет передаваться от слоя к слою — в воздухе будет распространяться импульс сжатия, возникнет звуковая волна.

Обозначим смещение «воздушной пробки» через x . Тогда объем воздуха V внутри полости уменьшится на величину

$$\Delta V = Sx,$$

а плотность ρ увеличится на

$$\begin{aligned} \Delta \rho &= \frac{M}{V - \Delta V} - \frac{M}{V} \approx \frac{M}{V} \frac{\Delta V}{V} = \\ &= \rho \frac{\Delta V}{V} = \frac{\rho S}{V} x \end{aligned}$$

(здесь M — масса воздуха в полости).

Как при этом изменится давление p внутри резонатора?

Выделим внутри полости площадку ΔS , перпендикулярную к направлению распространения волны сжатия. Пусть скорость волны (скорость звука) равна c . За время Δt импульс сжатия распространится на расстояние $c\Delta t$, так что за выделенной площадкой масса воздуха увеличится на

$$\Delta m = \Delta \rho \Delta S c \Delta t,$$

а количество движения — на

$$\Delta mc = \Delta \rho \Delta S c^2 \Delta t.$$

Согласно второму закону Ньютона, изменение количества движения равно импульсу действующей силы:

$$\Delta mc = |\vec{F}| \Delta t.$$

Следовательно, изменение давления

воздуха в полости равно

$$\Delta p = \frac{|\vec{F}|}{\Delta S} = \Delta \rho c^2$$

— изменение давления пропорционально изменению плотности воздуха.

Теперь можно найти силу, действующую на «воздушную пробку» со стороны воздуха в полости. При перемещении «пробки» на расстояние x плотность воздуха внутри резонатора увеличивается на $\Delta \rho = \frac{\rho S}{V} x$,

а давление — на

$$\Delta p = \Delta \rho c^2 = \frac{\rho S c^2}{V} x.$$

Значит, на «пробку» площадью S будет действовать сила упругости

$$|\vec{F}_{\text{упр}}| = \Delta p S = \frac{\rho S^2 c^2}{V} x.$$

Это означает, что поведение воздуха в полости аналогично поведению пружины с коэффициентом упругости

$$k = \frac{|\vec{F}_{\text{упр}}|}{x} = \frac{\rho S^2 c^2}{V}.$$

Следовательно,

$$v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{V}}.$$

Оценим теперь резонансную частоту колебаний воздуха в бутылке, рассматривая ее как резонатор Гельмгольца. К сожалению, нам не известны точные размеры бутылок, выпускаемых во времена «деятельности» Ивана Павловича. Поэтому для оценки предположим, что $S = 1 \text{ см}^2$, $l = 5 \text{ см}$, $V = 500 \text{ см}^3$, скорость звука в воздухе $c = 340 \text{ м/с}$. Подставляя эти значения в формулу для частоты, получим $v \approx 108 \text{ Гц}$. Проверим, кстати, справедливость исходного предположения: длина звуковой волны в воздухе, соответствующая этой частоте, равна $\lambda = c/v \approx 3,2 \text{ м}$ и, следовательно, действительно много больше размеров бутылки.

Так почему же в пустых комнатах «доходного» дома возникали пугающие всех звуки? Завывание ветра, лай собаки и другие внешние шумы с физической точки зрения представляют собой неупорядоченные наборы гармонических колебаний различных частот (так называемых чис-

тых тонов). Проходя через стены здания, существенно ослаблялись звуковые колебания всех частот, за исключением резонансных, совпадающих с собственными частотами колебаний воздуха в пустых бутылках. Эти последние колебания могли даже усилиться. Обычно звуковые колебания, характерные для человеческой речи, лежат значительно выше 100 Гц. Поэтому можно понять причину паники, охватившей городских: в пустых комнатах внезапно раздавался громкий нечеловеческий голос — в «доходном» доме выль домовый!

После ознакомления со свойствами резонатора Гельмгольца вы легко разоблачите и колдуна, героя такой занимательной задачи:

Колдун на острове Чунга-Чанга ошибочно предсказывает приближение цунами к острову, творя заклинания над пустым сосудом из-под бананового сока емкостью 1000 л, имеющим горлышко длиной 20 см и площадью поперечного сечения 0,5 см². Какова частота инфразвукowego излучения, обычно предшествующего приближению цунами к острову Чунга-Чанга?

Напомним, что инфразвуковыми называются колебания с частотой ниже 20 Гц. Звуки с такой частотой обычно не воспринимаются человеческим слухом, однако вибрации твердых тел с частотой меньше 20 Гц могут быть обнаружены на ощупь. В настоящее время специальные инфразвуковые приемники широко используются в так называемой службе цунами для предупреждения о возможном появлении этих гигантских морских волн.

А. Вирский, А. Звонкин

Овал, восьмерка, два овала...

В этой статье рассматриваются примеры алгебраических кривых четвертого порядка. Напомним, что алгебраической кривой n -го порядка называется график уравнения $p_n(x, y) = 0$, где $p_n(x, y)$ — многочлен n -ой степени от переменных x, y (*). Например, алгебраическая кривая первого порядка — это прямая линия; алгебраическими кривыми второго порядка являются, в частности, эллипс, гипербола, парабола — известные вам кривые, обладающие рядом замечательных свойств (**).

Более интересны, да к тому же не полностью изучены, кривые более высоких порядков. Достаточно сказать, что знаменитая «шестнадцатая проблема Гильберта» для случая кривых шестого порядка была решена лишь совсем недавно, а для больших порядков осталось много просто формулируемых, но нерешенных проблем. Об этом, однако, мы скажем подробнее в Послесловии, а сейчас перейдем к обещанным примерам.

*) Напомним, что такое степень многочлена от двух переменных. Степенью одночлена $a \cdot x^k y^l$ называется число $k+l$ (например, xy — одночлен степени 2). Степенью многочлена называется максимальная степень входящих в него одночленов (например, многочлен $p(x, y) = x^3 + 2xy^4 + 11y^2 - xy$ имеет степень 5).

**) См. «Квант», 1975, №№ 1, 3, 4.

Изменим одно слово

Хорошо известно геометрическое определение эллипса: эллипс — это множество точек (на плоскости), сума расстояний от которых до точек F_1 и F_2 постоянна: $|MF_1| + |MF_2| = 2a$. Заменяем в этом определении одно слово.

О п р е д е л е н и е. Овалом Кассини называется множество точек (на плоскости), произведение расстояний от которых до точек F_1 и F_2 постоянно:

$$|MF_1| \cdot |MF_2| = a^2. \quad (1)$$

Точки F_1 и F_2 , как и у эллипса, называются *фокусами*. «Овал Кассини» появился на свет благодаря ошибке. Его «изобрел» знаменитый французский астроном (итальянец по происхождению) Жан Доминик Кассини (1625—1712). Этот выдающийся ученый, член Парижской академии наук, директор Парижской обсерватории, открывший вращение Юпитера и Марса, а также четыре новых спутника Сатурна, почему-то считал, что именно такую форму имеет орбита Земли. Дальнейшее развитие науки показало, что более верным ответом будет обычный эллипс. Но овал Кассини остался жить. Дело в том, что он обладает одним замечательным свойством.

Обозначим расстояние между фокусами через $2c$ и составим уравнение овала Кассини в системе координат, в которой $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$. Подставляя

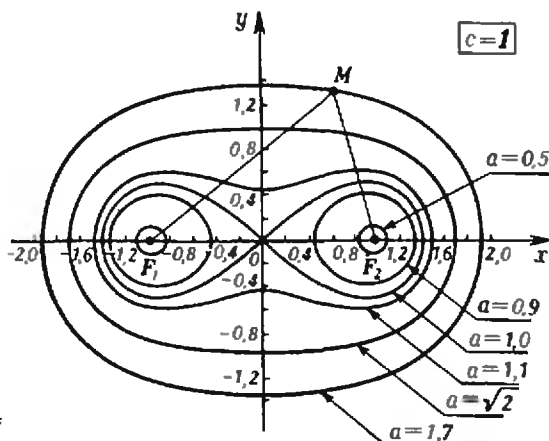


Рис. 1.

$|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $|MF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ в равенство (1) и возводя в квадрат, после преобразований получим

$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = a^4.$$

Получилось уравнение четвертой степени. Конкретный вид кривой зависит, разумеется, от того, какие мы выберем значения параметров a и c . Давайте, для примера, зафиксируем a и будем увеличивать c (можно поступить и наоборот: зафиксировать c и уменьшать a — результат будет тот же; см. рис. 1). Тут-то и произойдет самое интересное: подобно куску теста, который растягивают в разные стороны, овал сначала удлинится, потом у него появится «талиа», она будет становиться все тоньше, пока, наконец, наша фигура не разорвется на две части, на два меньших овала. Более точно картина будет такой (рис. 2):

- 1) при $c=0$ — окружность;
- 2) при $0 < c \leq \frac{a}{\sqrt{2}}$ — выпуклый овал, похожий на эллипс;
- 3) при $\frac{a}{\sqrt{2}} < c < a$ — овал с «талией»;
- 4) при $c=a$ — «лежащая восьмерка» (она имеет отдельное название — *лемниската Бернулли*);
- 5) при $c > a$ — два овала; один из них содержит внутри точку F_1 , другой — точку F_2 .

Указанное свойство «делимости» овалов Кассини впервые обнаружил и детально изучил другой французский ученый — Жан Поль де Гюа де Мальв (1712—1785). Его работа была одной из первых работ, посвященных исследованию особых точек алгебраических кривых (особой точкой в данном случае является точка самопересечения при $c=a$). Впоследствии из таких работ родилась обширная ветвь современной математики — алгебраическая геометрия.

Второй пример

Рассмотрим теперь множество точек M , для которых сумма величин, обратных квадратам расстояний от

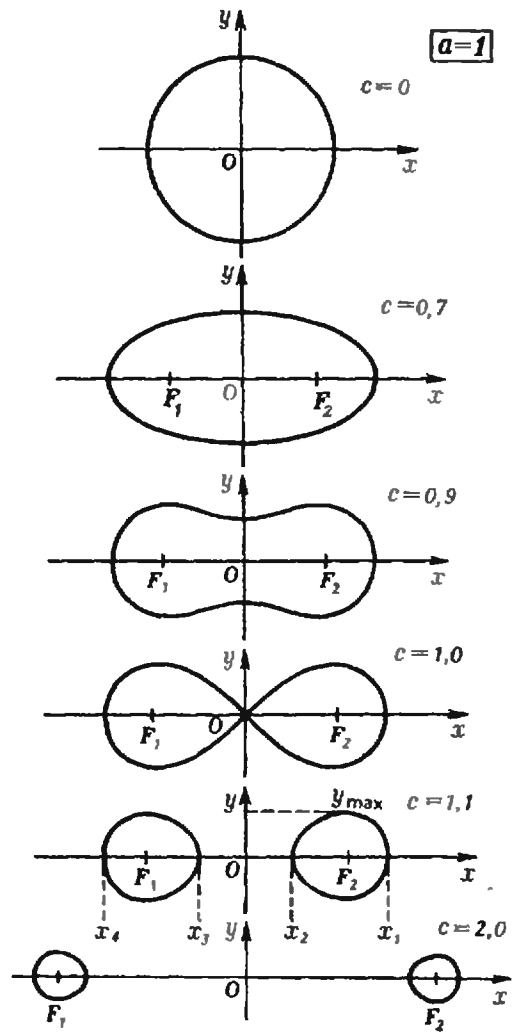


Рис. 2.

M до двух заданных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная:

$$\frac{1}{|MF_1|^2} + \frac{1}{|MF_2|^2} = \frac{1}{b^2}. \quad (2)$$

Как и прежде, положим $|F_1F_2| = 2c$. Подставляя в (2) формулы для $|MF_1|$ и $|MF_2|$, получаем уравнение

$$\frac{1}{(x+c)^2 + y^2} + \frac{1}{(x-c)^2 + y^2} = \frac{1}{b^2}. \quad (3)$$

Контрольный вопрос. Почему уравнение (3) является уравнением четвертой степени?

Полученная кривая своим поведением очень напоминает овалы Кассини. На рисунке 3 изображены последовательные «фазы деления», которые проходит кривая при увеличении параметра c (параметр b остается постоянным). Рассмотрим этот процесс чуть подробнее.

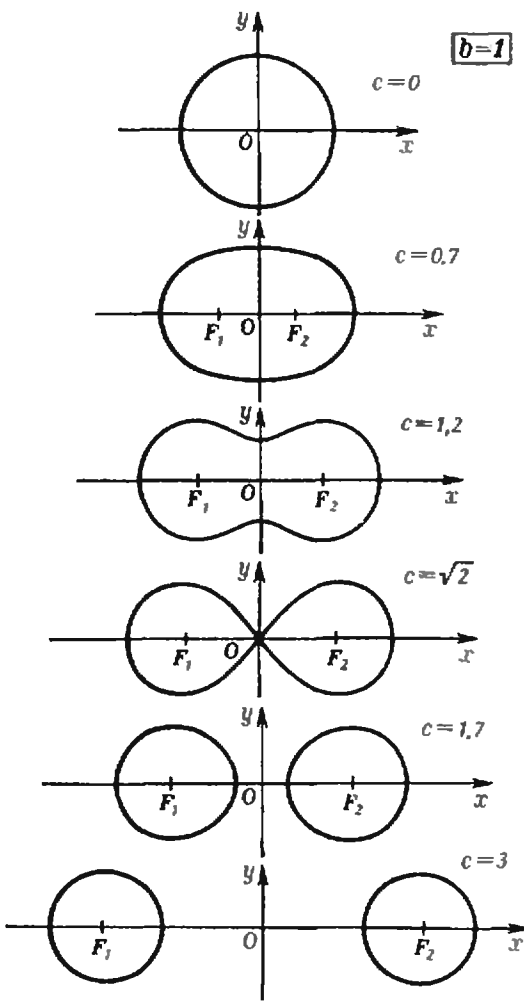


Рис. 3.

Задача 1. При каком соотношении между параметрами b и c уравнение (3) задает «лежашую восьмерку»?

Несколько труднее уловить момент, в который выпуклые, «эллипсообразные», овалы переходят в овалы «с талией».

Задача 2. При каких соотношениях между параметрами b и c получается
 а) выпуклый овал?
 б) овал с талией?

Одна особенность отличает кривую (3) от овалов Кассини: по мере роста c «разделившиеся» овалы Кассини все более и более уменьшаются в размерах (см. рисунок 2), а овалы, описываемые уравнением (3), — нет. Они становятся все более и более похожими на две окружности радиуса b . Это можно легко вывести из уравнения (3). Сделайте это самостоятельно.

Режем бублик

Одна простая геометрическая идея позволяет построить еще один пример, аналогичный предыдущим. Возьмем *тор* — поверхность, напоминающую бублик; эта поверхность получается *вращением окружности вокруг прямой, не пересекающей ее* (и лежащей в той же плоскости, что и окружность). Будем пересекать тор плоскостями, параллельными друг другу и параллельными оси вращения (рис. 4). Если поднимать секущую плоскость снизу вверх, мы увидим знакомую картину: сначала сечением будет выпуклый овал, постепенно увеличивающийся в размерах; потом овал приобретет талию, она будет становиться все тоньше, овал превратится в восьмерку, а восьмерка распадется на два овала. В верхней части тора весь процесс повторится в обратном порядке: два овала «срастутся» в восьмерку, восьмерка превратится в овал с талией и т. д.

А теперь переведем наши геометрические рассуждения на язык алгебры.

Выведем для этого уравнение тора. Пусть оси координат направлены так, как на рисунке 4; в частности, ось вращения тора совпадает с осью Oy . Пересечем тор произвольной плоскостью, проходящей через ось Oy , и рассмотрим одну из получившихся в сечении окружностей (рис. 5). Ее уравнение

$$(t-R)^2 + y^2 = r^2.$$

Здесь через r мы обозначили радиус окружности, а через R расстояние от ее центра до оси Oy . Если теперь вспом-

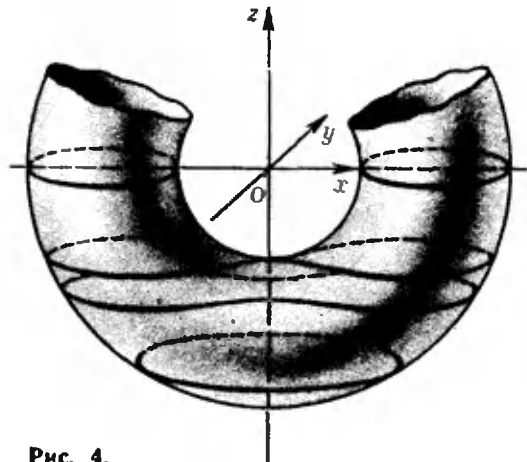


Рис. 4.

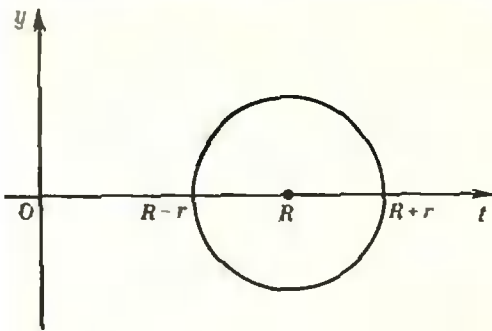


Рис. 5.

нить, что t — это расстояние от точки (x, y, z) до оси Oy , то есть $t = \sqrt{x^2 + z^2}$, мы получим уравнение тора:

$$(\sqrt{x^2 + z^2} - R)^2 + y^2 = r^2. \quad (4)$$

Если в (4) освободиться от радикалов, получится уравнение четвертой степени. Теперь, чтобы «алгебраически» пересечь тор (плоскостью $z=c$, следует в уравнение 4) вместо z подставить c .

Задача 3. Исследуйте (с помощью рисунка 4) внешний вид кривой, задаваемой уравнением

$$(\sqrt{x^2 + c^2} - R)^2 + y^2 = r^2,$$

при различных c .

Задача 4*. Рассмотрим «овал с талией»

$$\frac{1}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{1}{(x+1)^2 + y^2} = 1.$$

Сдвинем его на 3 единицы вправо (заменяя x на $x-3$):

$$\frac{1}{(x-4)^2 + y^2} + \frac{1}{(x-2)^2 + y^2} = 1;$$

теперь он не пересекает ось Oy . образуем поверхность вращения, вращая этот овал вокруг оси Oy ; уравнение этой поверхности получится, если вместо x подставить $\sqrt{x^2 + z^2}$; если освободиться от радикалов (что делать не обязательно), получится уравнение восьмой степени. Исследуйте (геометрически) внешний вид сечений этой поверхности плоскостями $z=c$ при различных c .

Послесловие

А сейчас — самое интересное. В рассмотренных нами примерах кривая четвертого порядка, если она не имеет самопересечений, состоит из одного или из двух овалов (овал с талией мы теперь тоже будем считать овалом). Вам, возможно, захочется узнать, каково *максимальное число овалов* для кривой указанного порядка, и как они могут располагаться друг относительно друга. Это мы сейчас и выясним, но прежде заметим, что эти два вопроса имеет смысл формулировать для кривой любого четного порядка; собственно говоря, математики уже давным давно задавали себе эти вопросы.

Еще в 1876 году А. Гарнак доказал, что максимальное число овалов, из которых может состоять кривая n -го порядка, равно $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$.

В частности, для $n=4$ получается 4 овала, для $n=6$ — 11 овалов, для $n=8$ — 22 овала, и т. д. Задача об их взаимном расположении оказалась значительно сложнее. На рубеже нашего столетия, в 1900 году, на Втором всемирном математическом конгрессе великий немецкий математик Д. Гильберт сформулировал знаменитые 23 проблемы, которые он считал наиболее важными для развития математики XX века. Интересующий нас вопрос вошел в список Гильберта под номером 16. С тех пор шестнадцатая проблема Гильберта не перестает занимать математиков. Но полное решение пока получено лишь для $n=6$ — это сделал советский математик Д. А. Гудков немногим более 10 лет назад. Для 11 овалов возможны лишь три типа взаимного распо-

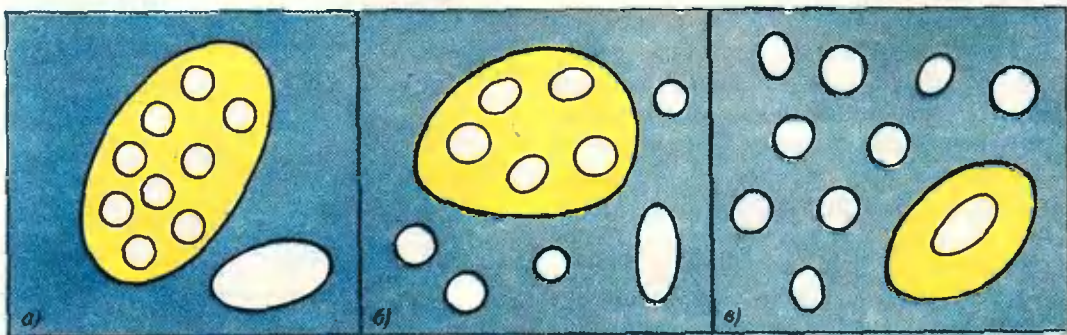


Рис. 6.

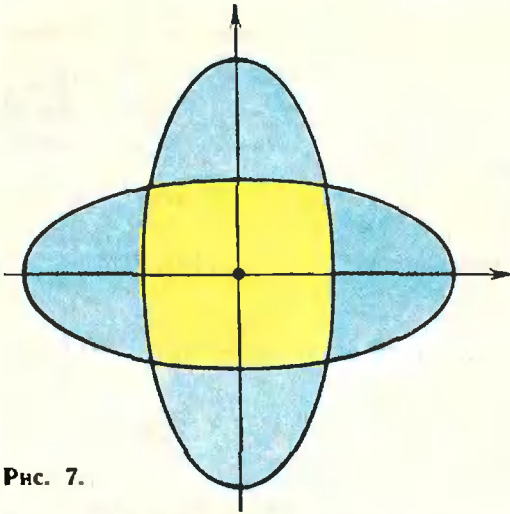


Рис. 7.

ложения; они схематически изображены на рисунке 6 (конфигурации с меньшим числом овалов не приведены, т. к. их слишком много; всего, вместе с указанными тремя, возможны 56 разных конфигураций). Вряд ли вам удастся найти доказательство; но зато аналогичное исследование для кривых четвертого порядка мы проведем полностью. Для этого вам предлагается решить приведенные ниже задачи.

Задача 5 (легкая). Постройте пример кривой четвертого порядка, состоящей

из двух вложенных друг в друга овалов.

Задача 6 (трудная). Постройте пример кривой четвертого порядка с четырьмя овалами. (Указание. Начните с пары пересекающихся эллипсов и подпортите уравнение так, чтобы «цветок», изображенный на рисунке 7, распался на четыре голубых лепестка.)

Задача 7 (на уровне предыдущей). Постройте пример кривой четвертого порядка с тремя овалами.

Если вы решили задачи 6, 7 (или подглядели ответ), вы, наверное, обратили внимание на то, что ни один овал не содержится в другом. Это неспроста:

Задача 8. Докажите, что кривая четвертого порядка, содержащая два вложенных друг в друга овала, больше не содержит никаких других точек. (Указание. Покажите, что любая прямая пересекает кривую четвертого порядка не более чем в четырех точках.)

Интересующий нас вопрос будет исследован полностью, если будет решена заключительная

Задача 9 (очень трудная). Докажите, что кривая четвертого порядка не может содержать более четырех овалов. (Указание. Воспользуйтесь тем, что через любые пять точек проходит ровно одна кривая второго порядка.)

Задачи наших читателей

(Начало см. с. 17)

$$\begin{aligned} \text{в) } |AG_c|^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\hat{A}}{2} + |BG_a|^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\hat{B}}{2} + |CG_b|^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\hat{C}}{2} &= |AN_c|^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\hat{B}}{2} + |BN_a|^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\hat{C}}{2} + \\ &+ |CN_b|^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\hat{A}}{2} = |AN_b|^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\hat{C}}{2} + |BN_c|^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\hat{A}}{2} + |CN_a|^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\hat{B}}{2} = S, \end{aligned}$$

где S — площадь треугольника ABC .

2. Из вершин B и C (C и A , A и B) треугольника ABC восстановлены перпендикуляры к сторонам AB и CA (BC и AB , CA и BC соответственно) до пересечения с биссектрисой угла \hat{A} (\hat{B} , \hat{C} соответственно) в точках B_a и C_a (C_b и A_b , A_c и B_c). Пусть h_a , h_b , h_c — длины высот, опущенных, соответственно, из вершин A , B и C ; a , b , c — длины сторон BC , CA и AB , r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC , p — его полупериметр. Докажите, что:

$$\text{а) } \frac{1}{h_a |CC_b|} + \frac{1}{h_b |AA_c|} + \frac{1}{h_c |BB_a|} = \frac{1}{h_a |BB_c|} + \frac{1}{h_b |CC_a|} + \frac{1}{h_c |AA_b|} = \frac{1}{2r^2};$$

$$\text{б) } \frac{ab^3}{|CA_c|^2} + \frac{bc^3}{|AB_a|^2} + \frac{ca^3}{|BC_b|^2} = \frac{a^3b}{|CB_c|^2} + \frac{b^3c}{|AC_a|^2} + \frac{c^3a}{|BA_b|^2} = p^2.$$

3. A_0 , B_0 и C_0 — основания высот остроугольного треугольника ABC , опущенных, соответственно, из вершин A , B и C . Прямые, соединяющие вершины A , B и C с центром описанной около треугольника ABC окружности, пересекают прямые B_0C_0 , C_0A_0 и A_0B_0 в точках M_a , M_b и M_c соответственно. Докажите равенства:

$$\text{а) } |M_aB_0| = |M_bA_0|, \quad |M_bC_0| = |M_cB_0|, \quad |M_cA_0| = |M_aC_0|;$$

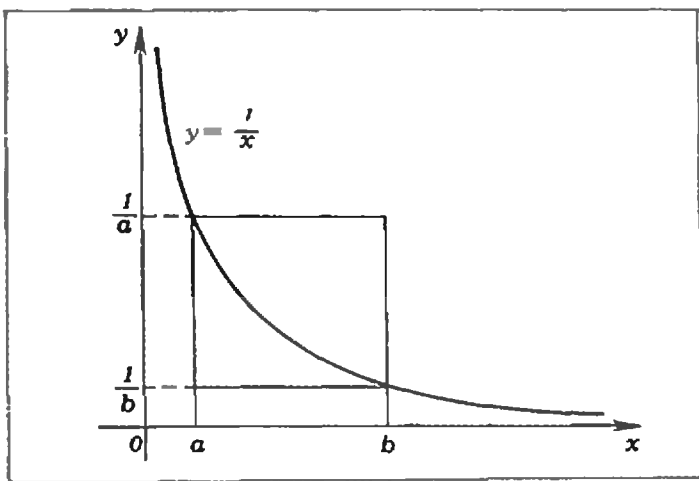
$$\text{б) } |M_aB_0| + |M_bC_0| + |M_cA_0| = d,$$

где d — длина отрезка, соединяющего проекции основания любой высоты треугольника ABC на две другие его стороны.

У. Алла (г. Выру)

Интеграл помогает доказать неравенство Коши

Пусть a_1, a_2, \dots, a_n — положительные числа, среди которых есть различные. Тогда выполняется неравенство Коши:



$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} > \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \quad (1)$$

Обозначим левую часть неравенства Коши через S_n и докажем его в такой форме:

$$(S_n)^n > a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \quad (2)$$

Очевидно, не ограничивая общности, можно считать, что для некоторого k так-го, что $1 \leq k \leq n-1$,

$$\begin{matrix} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq \\ \leq S_n \leq a_{k+1} \leq \dots \leq \\ \leq a_{n-1} \leq a_n. \end{matrix} \quad (3)$$

Основой доказательства неравенства (2) будет неравенство

$$\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}, \quad (4)$$

где $0 < a < b$. Неравенство (4) вытекает из равенства

$$\int_a^b \frac{1}{t} dt = \ln \frac{b}{a} \text{ и неравенств}$$

$$\frac{b-a}{b} < \int_a^b \frac{1}{t} dt < \frac{b-a}{a}$$

(см. рисунок и пп. 113, 101 пособия «Алгебра и начала анализа 10»). Заметим, что при $a = b$ вместо (4) имеем $\frac{b-a}{b} = \ln \frac{b}{a} = \frac{b-a}{a}$.

Из (3) и (4)

$$\frac{S_n - a_1}{S_n} + \frac{S_n - a_2}{S_n} + \dots + \frac{S_n - a_k}{S_n} \leq$$

$$\leq \ln \frac{S_n}{a_1} + \ln \frac{S_n}{a_2} + \dots + \ln \frac{S_n}{a_k}, \quad (5)$$

или

$$\frac{kS_n - (a_1 + a_2 + \dots + a_k)}{S_n} \leq \leq \ln \frac{(S_n)^k}{a_1 a_2 \dots a_k} \quad (6)$$

Опять-таки из (3) и (4)

$$\begin{aligned} & \ln \frac{a_{k+1}}{S_n} + \ln \frac{a_{k+2}}{S_n} + \dots \\ & \dots + \ln \frac{a_n}{S_n} \leq \\ & \leq \frac{a_{k+1} - S_n}{S_n} + \\ & + \frac{a_{k+2} - S_n}{S_n} + \dots \\ & \dots + \frac{a_n - S_n}{S_n}. \end{aligned} \quad (7)$$

или

$$\begin{aligned} & \ln \frac{a_{k+1} \cdot a_{k+2} \cdot \dots \cdot a_n}{(S_n)^{n-k}} \leq \\ & \leq \frac{(a_{k+1} + \dots + a_n) - (n-k)S_n}{S_n}. \end{aligned} \quad (8)$$

Легко проверить, что левая часть неравенства (6) равна правой части неравенства (8). Значит, из (6) и (8)

$$\begin{aligned} & \ln \frac{a_{k+1} \cdot a_{k+2} \cdot \dots \cdot a_n}{(S_n)^{n-k}} \leq \\ & \leq \ln \frac{(S_n)^k}{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k}. \end{aligned} \quad (9)$$

Поскольку среди чисел a_1, a_2, \dots, a_n есть различные, в цепочке неравенств (3) какие-то неравенства выполняются «строго». Тогда эти «строгие» неравенства перейдут в (5) или (7). Значит, по крайней мере, одно из неравенств (6), (8) тоже будет «строгим». Поэтому вместо (9) мы можем утверждать

$$\begin{aligned} & \ln \frac{a_{k+1} \cdot a_{k+2} \cdot \dots \cdot a_n}{(S_n)^{n-k}} < \\ & < \ln \frac{(S_n)^k}{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{a_{k+1} \cdot a_{k+2} \cdot \dots \cdot a_n}{(S_n)^{n-k}} < \\ & < \frac{(S_n)^k}{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k}, \end{aligned}$$

откуда вытекает (2).

Если же $a_1 = a_2 = \dots = a_n$, то, очевидно,

$$\begin{aligned} & \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \\ & = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}. \end{aligned}$$

С. Берколайко



В. Майер

Опыты с ложкой бульона

Пожалуй, самые интересные явления в жидкости происходят на ее поверхности, там, где она граничит со своим паром, с другой какой-нибудь жидкостью или с твердым телом.

Поверхностный слой жидкости находится в особых условиях по сравнению с остальной массой жидкости и потому отличается особыми свойствами. Прежде всего, это — поверхностное натяжение. С ним связаны такие явления, как, например, смачивание или несмачивание.

Предлагаем вам провести несколько очень простых опытов и понаблюдать за поведением одной жидкости на поверхности другой.

Набрав ложку хорошего мясного бульона, не спешите отправить ее в рот. Посмотрите внимательно на бульон — на его поверхности плавают крупные капельки жира. Заметьте размер этих капелек. Отлейте немного бульона из ложки обратно в тарелку и опять посмотрите на его поверхность — капельки жира расплзлись, став больше в диаметре и меньше по толщине. Чем объясняется это интересное явление?

Прежде всего давайте выясним, при каких условиях капелька жира может находиться на поверхности бульона, не растекаясь. Посмотрите на рисунок 1 — капля жидкости 2 (жира) лежит на поверхности жидкости 1 (бульона). Форма капли напоминает чечевицу. Сверху находится среда 3 — смесь воздуха с парами жидкостей 1 и 2. Три среды (1, 2 и 3) соприкасаются по окружности, ограничивающей каплю. Выделим малый эле-

мент этой окружности (вблизи точки O на рисунке 1) длиной Δl . На него действуют три силы поверхностного натяжения. На границе раздела жидкостей 1 и 2 действует сила \vec{F}_{12} , направленная по касательной к границе раздела и равная по модулю

$$|\vec{F}_{12}| = \sigma_{12} \Delta l,$$

где σ_{12} — коэффициент поверхностного натяжения на границе сред 1 и 2.

Аналогичные силы \vec{F}_{13} и \vec{F}_{23} действуют на границах раздела сред 1, 3 и 2, 3:

$$|\vec{F}_{13}| = \sigma_{13} \Delta l$$

и

$$|\vec{F}_{23}| = \sigma_{23} \Delta l.$$

Здесь σ_{13} и σ_{23} — соответствующие коэффициенты поверхностного натяжения.

Очевидно, что капля будет находиться в равновесии, если сумма всех трех сил равна нулю:

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = 0,$$

или — в проекциях на оси координат X и Y (после подстановки соответствующих абсолютных значений и сокращения на Δl) —

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= \sigma_{12} \cos \theta_1 + \sigma_{23} \cos \theta_2, \\ \sigma_{12} \sin \theta_1 &= \sigma_{23} \sin \theta_2. \end{aligned} \quad (*)$$

Здесь θ_1 и θ_2 — углы между касательными к поверхности капли жидкости 2 и поверхностью жидкости 1, их называют *краевыми углами*.

Из равенства (*) видно, что равновесие капли возможно в том случае, если коэффициенты поверхностного натяжения связаны определенным соотношением:

$$\sigma_{13} < \sigma_{12} + \sigma_{23}.$$

Поскольку поверхностные явления в жидкости мало зависят от присутствия над жидкостью газообразной среды, практически можно считать, что

$$\sigma_{13} = \sigma_1 \quad \text{и} \quad \sigma_{23} = \sigma_2.$$

Величины σ_1 и σ_2 называют коэффициентами поверхностного натяжения

жидкостей 1 и 2 соответственно; в нашем случае — это коэффициенты поверхностного натяжения бульона и жира.

Таким образом, капля жира будет плавать на поверхности бульона, не растекаясь, если коэффициент поверхностного натяжения бульона меньше суммы коэффициентов поверхностного натяжения жира и границы раздела бульон — жир:

$$\sigma_1 < \sigma_2 + \sigma_{12}. \quad (**)$$

В частном случае, когда капля очень тонкая (почти плоская), углы θ_1 и θ_2 малы ($\theta_1 = \theta_2 = 0$) и условие равновесия капли имеет вид:

$$\sigma_1 = \sigma_2 + \sigma_{12}.$$

При

$$\sigma_1 > \sigma_2 + \sigma_{12}$$

не существует значений углов θ_1 и θ_2 , для которых выполнялось бы равенство (*). Это означает, что в этом случае жидкость 2 не собирается в каплю на поверхности жидкости 1, а растекается по ней тонким слоем.

Теперь постараемся объяснить результаты опытов с ложкой бульона. Капли жира плавают на поверхности бульона, значит, выполняется соотношение (**). Почему же при уменьшении бульона в ложке капли расплываются по его поверхности, увеличиваясь в размерах? Что при этом изменяется?

Предлагаем такое объяснение. Коэффициенты поверхностного натяжения жира σ_2 и границы раздела бульон — жир σ_{12} остаются неизменными. Остается допустить, что при вылинии части бульона из ложки изменяется коэффициент поверхностного натяжения бульона σ_1 . Но бульон (в первом приближении) — это вода. Разве может измениться коэффициент поверхностного натяжения воды, если уменьшить количество воды в сосуде? По-видимому, нет. Правда, бульон — это не просто вода, а вода, покрытая тонким слоем жира. Выливая из ложки бульон, мы выливаем и часть жира, так что толщина слоя жира, покрывающего бульон, уменьшается. Это, очевидно, и приводит к увеличению коэффициента поверхностного натяжения бульона. В ре-

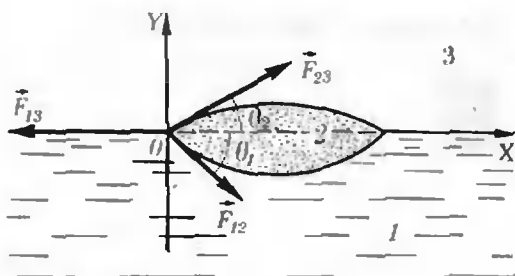


Рис. 1.

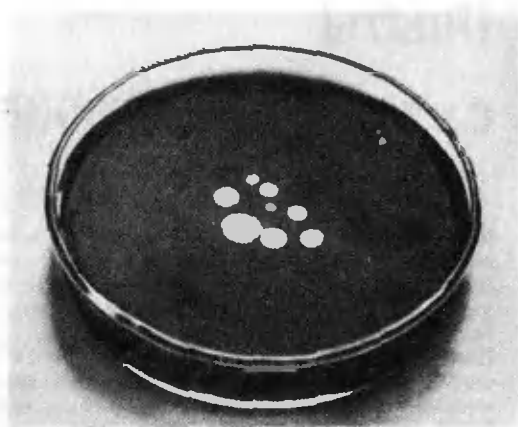


Рис. 2.

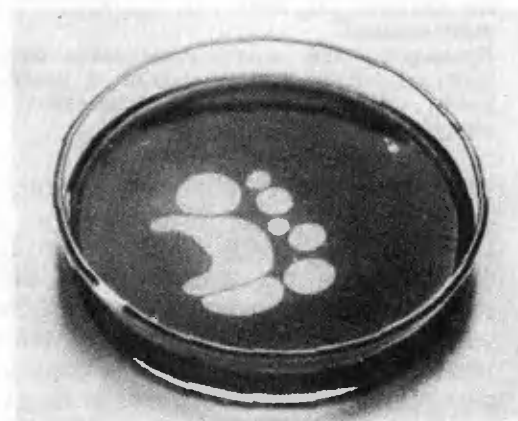


Рис. 3.

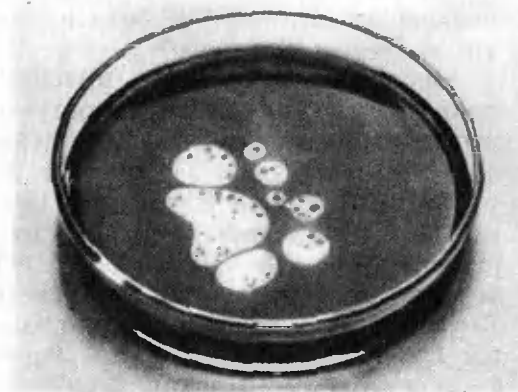


Рис. 4.

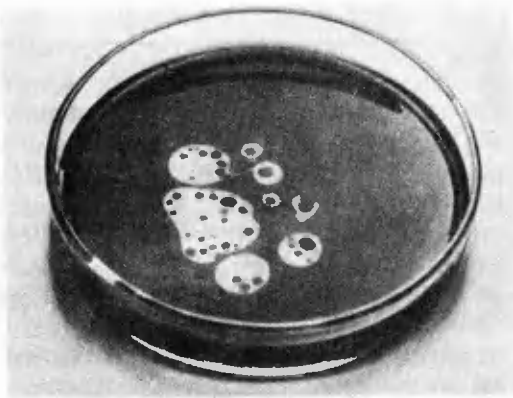


Рис. 5.

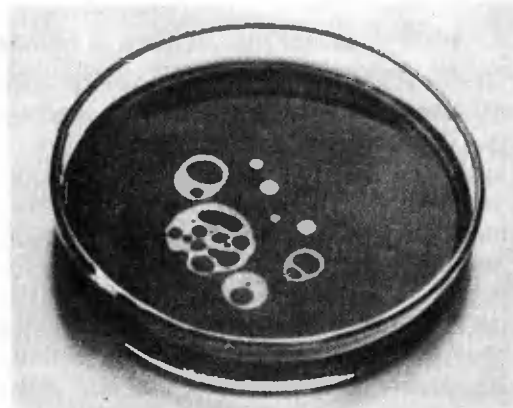


Рис. 6.

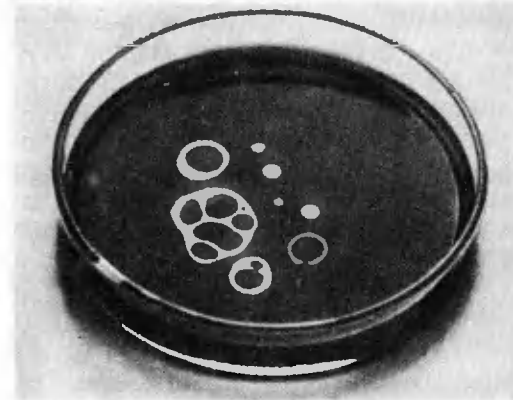


Рис. 7.

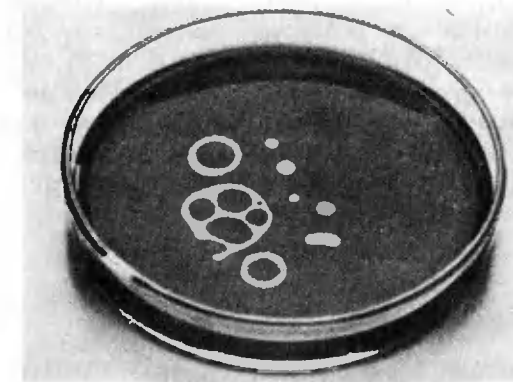


Рис. 8.

зультате капли жира расплзаются по поверхности бульона.

Для проверки предлагаем вам самостоятельно провести такой опыт. В чистое блюдце (без следов жира) наберите чистой водопроводной воды. Тонкой пипеткой или трубочкой (можно использовать чистый стержень от шариковой авторучки) капните на поверхность воды чуть-чуть подсолнечного масла. Вы увидите, что первая капля полностью растечется по поверхности воды. Следующие капли уже не растекутся, а образуют чечевицы. Аккуратно выльете часть воды — капли расплзутся по ее поверхности.

В заключение вернемся еще раз к опытам с ложкой бульона. Внимательно наблюдая за поведением капелек жира, вы сможете заметить очень любопытные явления разрывов и восстановления капель.

На рисунках 2—8 представлены фотографии результатов одного из таких экспериментов. В чистую стеклянную чашку мы налили водопроводной воды, подкрашенной синей тушью (не содержащей спирта). Слегка смоченной подсолнечным маслом стеклянной трубкой осторожно коснулись поверхности воды и получили восемь очень маленьких капелек (см. рис. 2). Затем резиновой грушей отобрали немного воды из чашки — все капли увеличились в размерах. После следующей такой операции капли увеличились еще заметнее, при этом они несколько исказились по форме (из-за течения воды) и на них появились зародыши разрывов (см. рис. 3).

Все дальнейшие изменения происходили самопроизвольно, без постороннего вмешательства. Вначале разрывы в каплях росли, затем сливались в один большой разрыв — капля превращалась в кольцо. Наконец, это кольцо разрывалось и вновь стягивалось в каплю (см. рис. 4—8).

Не правда ли — действительно стоит понаблюдать за ложкой бульона, прежде чем отправить ее в рот!



А. Лопишиц

Векторное решение аффинных задач

На этом занятии математического кружка мы научимся решать геометрические задачи определенного типа — так называемые *аффинные задачи*. Мы не будем предварительно объяснять, что это за задачи. Надеемся, что, прочитав статью, вы поймете это.

1. Аффинная версия теоремы Морлея

В «Кванте» № 8 за 1978 год (с. 28) рассматривалась следующая замечательная теорема: *если в треугольнике ABC провести трисектрисы углов A, B и C, то точки их пересечения, ближайшие к сторонам, являются вершинами равностороннего треугольника*. А что получится, если трисектрисы заменить *тридианами*, т. е. прямыми, проходящими через вершины треугольника и делящими противоположные его стороны на три равные части? Оказывается... Впрочем, настойчивый читатель сам закончит формулировку теоремы, выяснит свойства треугольника $P_{14}P_{36}P_{25}$ (обозначения легко сообразить, гля-

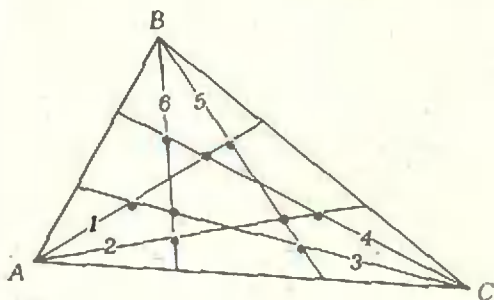


Рис. 1

дя на рисунок 1), убедится в том, что стороны шестиугольника $P_{13}P_{46}P_{15}P_{24}P_{35}P_{26}$ параллельны сторонам исходного треугольника ABC, и, наконец, докажет, что середины сторон этого шестиугольника и точки P_{36} , P_{23} , P_{25} , P_{45} , P_{14} , P_{61} лежат на трех прямых. Если вам пока не понятно, как решать эту задачу, — не расстраивайтесь. Прочитав статью, вы несомненно сможете это сделать. Начнем с более простой задачи.

2. Аффинная задача Льюиса Кэррола

Предпоследняя задача сборника «Полуночные задачи, придуманные в часы бессонницы» *) требует вписать в данный треугольник такой шестиугольник, чтобы его противоположные стороны были равны и параллельны, три из них лежали на сторонах треугольника, а диагонали пересекались в заданной точке внутри треугольника. Решение, приведенное Кэрролом, использует средства, привычные для школьника тех давних времен (восьмидесятые годы прошлого столетия). Мы рассмотрим более общую формулировку задачи Кэррола и решим ее, используя средство, знакомое современному школьнику уже с седьмого класса, — векторы. Конечно, задачу Кэррола совсем несложно решить и без их помощи. Но именно потому, что она несложная, на ней хорошо учиться!

Мы решим задачу Кэррола в следующей формулировке: *на прямых, содержащих стороны BC, CA и AB треугольника ABC, расположить, соответственно, точки A_1 и A_2 , B_1 и B_2 , C_1 и C_2 так, чтобы противоположные вершины шестиугольника $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ (т. е. точки A_1 и B_2 , A_2 и C_1 , B_1 и C_2) были симметричны относительно точки P, произвольно заданной в плоскости треугольника ABC (рис. 2) **). (Такой шестиугольник называют *центральным*.)*

*) Льюис Кэррол. *История с узелками* (М., «Мир», 1973).

**) В этом и состоит большая общность нашей формулировки — Кэррол считает, что точка P лежит внутри треугольника ABC.

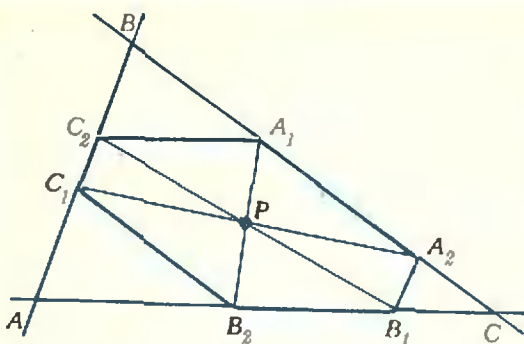


Рис. 2.

3. Разложение по векторам

Нам понадобится такой факт: если векторы \vec{a} и \vec{b} не коллинеарны, то любой вектор \vec{c} , лежащий в той же плоскости, что и векторы \vec{a} , \vec{b} , можно представить в виде

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$

(здесь α и β — действительные числа), причем такое представление единственно (ср. с теоремой из § 23 «Геометрии 9»).

Мы будем называть это представление разложением вектора \vec{c} по векторам \vec{a} и \vec{b} (рис. 3).

Заметим, что если O — фиксированная точка плоскости, то любой точке M плоскости можно сопоставить вектор \vec{OM} . Точку O называют *полюсом*, вектор \vec{OM} — радиус-вектором точки M . Радиус-вектор \vec{OM} однозначно определяет «свою» точку M ; мы будем для краткости обозначать его через \vec{M} .

4. Решение задачи Кэррола

Выберем в качестве полюса вершину C данного треугольника.

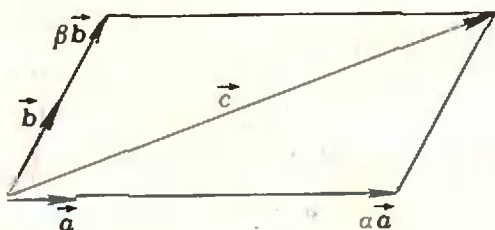


Рис. 3.

Радиус-вектор данной точки P разложим по векторам \vec{A} и \vec{B} :

$$\vec{P} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B}.$$

Поскольку искомая точка A_1 лежит на прямой CB (рис. 2).

$$\vec{A}_1 = x\vec{B},$$

где x — та доля, которую точка A_1 «отсекает» от направленного отрезка \vec{CB} . Слово «отсекает» мы взяли в кавычки потому, что точка A_1 не обязательно лежит внутри отрезка CB ; она может «отсекать» даже отрицательную «долю» (в этом случае $x < 0$). Аналогичным образом для искомой точки B_2 получаем

$$\vec{B}_2 = y\vec{A}$$

(здесь y — доля, которую «отсекает» искомая точка от направленного отрезка \vec{CA}). Из того, что точка P является серединой отрезка A_1B_2 , вытекает (§ 22 «Геометрии 9»)

$$\vec{P} = \frac{1}{2}(\vec{A}_1 + \vec{B}_2),$$

то есть

$$\alpha\vec{A} + \beta\vec{B} = \frac{1}{2}(x\vec{B} + y\vec{A}),$$

откуда

$$x = 2\beta, \quad y = 2\alpha$$

и, следовательно,

$$\vec{A}_1 = 2\beta\vec{B}, \quad \vec{B}_2 = 2\alpha\vec{A}.$$

Эти равенства позволяют построить точки A_1 и B_2 .

Найти точки B_1 и C_2 немного труднее. Если точка B_1 отсекает долю z от направленного отрезка \vec{CA} , то

$$\vec{B}_1 = z\vec{A}.$$

Составим теперь выражение для радиус-вектора точки C_2 , отсекающей долю u от направленного отрезка \vec{AB} :

$$\vec{AC}_2 = u\vec{AB}.$$

Воспользуемся тем, что $\vec{AC}_2 = \vec{C}_2 - \vec{A}$; $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A}$. Поэтому $u(\vec{B} - \vec{A}) = \vec{C}_2 - \vec{A}$ и, следовательно, $\vec{C}_2 = \vec{A} + u(\vec{B} - \vec{A}) = (1 - u)\vec{A} +$

+ $u\vec{B}$. По условию

$$P = \frac{1}{2}(\vec{B}_1 + \vec{C}_2),$$

то есть

$$\alpha\vec{A} + \beta\vec{B} = \frac{1}{2}[z\vec{A} + (1-u)\vec{A} + u\vec{B}]$$

и, таким образом,

$$u = 2\beta, \quad z = 2\alpha + 2\beta - 1$$

$$\vec{B}_1 = (2\alpha + 2\beta - 1)\vec{A},$$

$$\vec{C}_2 = (1 - 2\beta)\vec{A} + 2\beta\vec{B}.$$

Выполнив заключительный этап самостоятельно, читатель убедится, что

$$\vec{A}_2 = (2\alpha + 2\beta - 1)\vec{B},$$

$$\vec{C}_1 = 2\alpha\vec{A} + (1 - 2\alpha)\vec{B}.$$

Мы обнаружили, таким образом, что задача Кэрролла имеет решение (как бы ни была задана точка P !) и это решение единственное:

$$\begin{cases} \vec{A}_1 = 2\beta\vec{B}, \quad \vec{A}_2 = (2\alpha + 2\beta - 1)\vec{B} \\ \vec{B}_1 = (2\alpha + 2\beta - 1)\vec{A}, \quad \vec{B}_2 = 2\alpha\vec{A} \\ \vec{C}_1 = 2\alpha\vec{A} + (1 - 2\alpha)\vec{B}, \quad \vec{C}_2 = \\ = (1 - 2\beta)\vec{A} + 2\beta\vec{B} \end{cases} \quad (1)$$

5. Отступление от задачи Кэрролла.

Вывод формулы для \vec{C}_2 фактически доказывает следующий общий результат: если \vec{A} и \vec{B} — радиус-векторы произвольных точек A и B (относительно произвольно выбранного полюса C !), то радиус-вектор \vec{M} точки, принадлежащей прямой AB и отсекающей «долю» λ от направленного отрезка \vec{AB} , то есть точки M , для которой $\vec{AM} = \lambda\vec{AB}$ (рис. 4), определяется по простой и красивой формуле:

$$\vec{M} = (1 - \lambda)\vec{A} + \lambda\vec{B}. \quad (II)$$

Эту формулу следует запомнить — она с большой пользой применяется при решении многих геометрических задач *).

* См. статью В. Болтянского «Три точки на одной прямой» («Квант», 1978, № 10) и статью Н. Габовича «Векторы помогают на экзамене» («Квант», 1979, № 1).

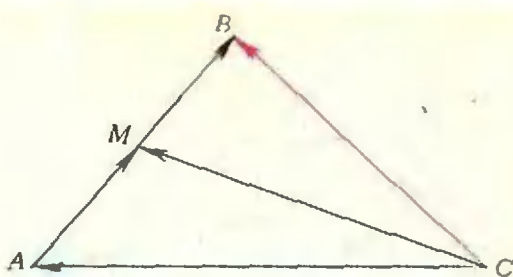


Рис. 4.

Число λ называют *аффинной координатой* точки M (относительно координатной системы, заданной началом A и масштабным вектором \vec{AB}). Такое название вполне оправдано: ведь если заданы координатная система и произвольное число λ , то точка M на прямой AB определена однозначно:

$$\vec{AM} = \lambda\vec{AB}.$$

Вернемся к формуле

$$\vec{P} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B},$$

с помощью которой мы записали радиус-вектор точки P , расположенной в плоскости треугольника ABC . Она показывает, что задание произвольной упорядоченной пары чисел α, β определяет точку P в плоскости ABC , если задана точка C и векторы \vec{CA} и \vec{CB} (рис. 5).

Эти числа называются *аффинными координатами* точки P (в координатной системе, начало которой — точка C , а масштабные векторы — \vec{CA} и \vec{CB}). Легко видеть, что точки плоскости ABC , у которых вторая координата равна нулю, лежат на прямой CA ; поэтому ее называют *первой координатной осью*. Аналогично, точки, у которых первая координата равна нулю, лежат на

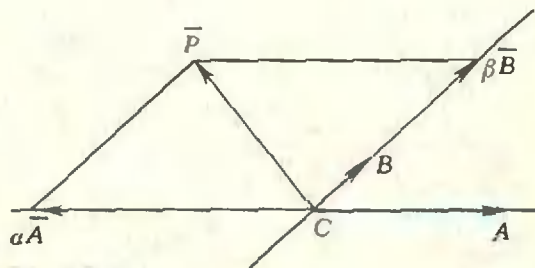


Рис. 5.

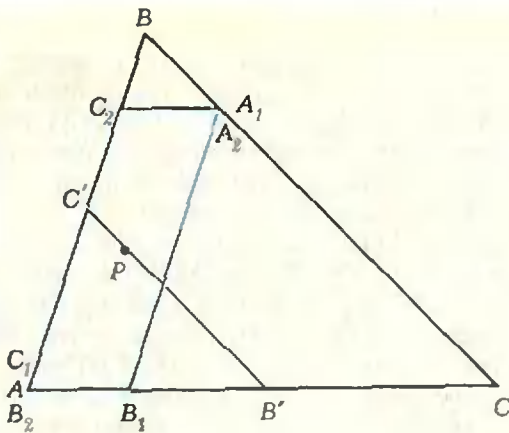


Рис. 6.

прямой CB ; поэтому ее называют *второй координатной осью*.

6. Частные случаи задачи Кэррола

1) Если точка P есть *центроид* треугольника ABC (т. е. пересечение его медиан), то (§ 22 «Геометрии 9»)

$$\vec{OP} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

и, следовательно,

$$\vec{P} = \frac{1}{3}\vec{A} + \frac{1}{3}\vec{B},$$

то есть

$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{1}{3}.$$

Подставив эти значения в формулы

$$(I), \text{ получим } \vec{A}_1 = \frac{2}{3}\vec{B},$$

$$\vec{A}_2 = \frac{1}{3}\vec{B}, \quad \vec{B}_1 = \frac{1}{3}\vec{A}, \quad \vec{B}_2 = \frac{2}{3}\vec{A},$$

$$\vec{C}_1 = \frac{2}{3}\vec{A} + \frac{1}{3}\vec{B}, \quad \vec{C}_2 = \frac{1}{3}\vec{A} + \frac{2}{3}\vec{B}$$

и, следовательно (в силу сказанного в предыдущем пункте), вершины найденного шестиугольника отсекают от сторон треугольника $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$.

2) Пусть P — какая-либо точка отрезка $B'C'$, соединяющего середины B' и C' сторон CA и AB . Так как эта точка расположена внутри отрезка $B'C'$, она отсекает от него долю $0 < \lambda < 1$ и, в силу формулы (II),

$$\vec{P} = (1 - \lambda)\vec{B}' + \lambda\vec{C}'$$

$$\vec{P} = \frac{1 - \lambda}{2}\vec{A} + \frac{\lambda}{2}(\vec{A} + \vec{B})$$

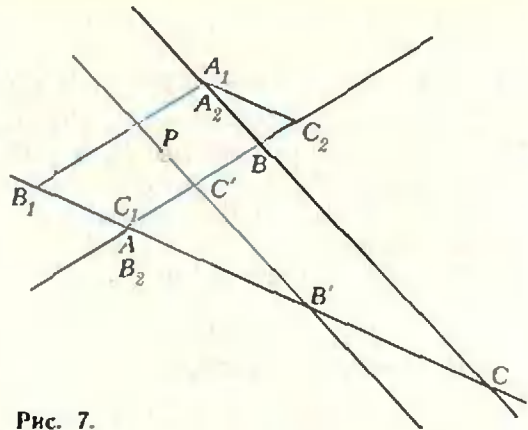


Рис. 7.

$$\vec{P} = \frac{1}{2}\vec{A} + \frac{\lambda}{2}\vec{B},$$

то есть

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{\lambda}{2}.$$

Подставив эти значения в формулы (I), получим

$$\vec{A}_1 = \lambda\vec{B}, \quad \vec{A}_2 = \lambda\vec{B}, \quad \vec{B}_1 = \lambda\vec{A}, \quad \vec{B}_2 = \vec{A},$$

$$\vec{C}_1 = \vec{A}, \quad \vec{C}_2 = (1 - \lambda)\vec{A} + \lambda\vec{B}.$$

Таким образом, в этом случае шестиугольник $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ вырождается в параллелограмм $A_1A_1B_1A_1C_2 = A_1B_1A_1C_2$ (рисунок 6 сделан для случая, когда $\lambda = \frac{4}{5}$).

3) Если точка P расположена произвольным образом на прямой $B'C'$ вне отрезка $B'C'$, то ее аффинная координата λ (в координатной системе, имеющей начало в точке C' и масштабный вектор $\vec{B'C'}$) есть либо положительное число, большее единицы, либо отрицательное число. Радиус-векторы вершин построенного шестиугольника определяются, конечно, теми же формулами, что и в общем случае, однако эти вершины — в этом самостоятельно убедится читатель — хотя и расположатся на прямых AB , BC и CA , будут вне отрезков AB , BC , CA (на рисунке 7 $\lambda = \frac{5}{4}$).

4) Если точка P выбрана в середине A' отрезка BC , то есть если

$$\vec{P} = \frac{1}{2}\vec{B} \quad \text{и, следовательно,}$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \text{то, в силу формул}$$

(1) $\overline{A_1} = \overline{B}$, $\overline{A_2} = \overline{C}$, $\overline{B_1} = \overline{C}$, $\overline{B_2} = \overline{C}$,
 $\overline{C_1} = \overline{B}$, $\overline{C_2} = \overline{B}$. Таким образом, в этом случае шестиугольник $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ вырождается в отрезок $BCCCBV = BC$.

Пусть читатель самостоятельно построит чертеж, соответствующий случаю, когда $P=C$, $P=A'$ или P делит пополам отрезок AC' .

7. Не ошибся ли Кэррол?

Последняя строка в решении, которое приводит Кэррол, гласит: «Если точка P лежит вне треугольника $A'B'C'$, то задача неразрешима*». Но мы ведь видели, что задача имеет решение (и притом единственное) для любого расположения точки P в плоскости ABC !

Объяснение этого расхождения заключается вот в чем:

Кэррол считает (хотя явно этого не говорит), что шестиугольник $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ только тогда вписан в треугольник ABC , когда его стороны A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 расположены внутри сторон BC , CA , AB соответственно. Но если включить в условие нашей задачи это дополнительное ограничение, то, в частности, точка A_1 должна лежать внутри отрезка CB и, в силу первой формулы системы

$$(1), \quad 2\beta < 1, \quad \text{то есть} \quad \beta < \frac{1}{2},$$

а это означает, что точка P должна лежать по другую сторону от прямой $A'C'$, чем вершина B .

Аналогичным образом, она должна лежать по другую сторону от прямой $A'B'$, чем точка C , и по другую сторону от прямой $B'C'$, чем точка A . Отсюда и следует, что точка P должна лежать внутри треугольника $A'B'C'$!

Приведем две задачи, связанные с задачей Кэррола; их векторное решение очень просто, а геометрическое...

* «История с узелками», с. 186. Однако доказательства этой неразрешимости Кэррол не приводит! Отметим тут же, что, хотя разрешимость своей задачи для случая, когда точка P лежит внутри треугольника $A'B'C'$, Кэррол и доказывает, но вопрос о единственности решения он не рассматривает!

1) Легко проверить, что в случае 1 пункта 6 центроиды треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ совпадают. Существуют ли другие вписанные центральные шестиугольники, обладающие этим свойством?

2) Легко проверить, что в случае 1 пункта 6 площади треугольников PA_1A_2 , PA_2B_1 и PB_1B_2 равны между собой; в этом случае центральный шестиугольник $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ называют *аффинно-правильным*. Существуют ли другие аффинно-правильные шестиугольники, вписанные в заданный треугольник?

Решение использует следующую красивую формулу* для вычисления площади треугольника $P_1P_2P_3$, вершины которого заданы равенствами $\overrightarrow{P_i} = \alpha_i \overrightarrow{A} + \beta_i \overrightarrow{B}$ ($i = 1, 2, 3$) (\overrightarrow{CA} и \overrightarrow{CB} — заданные векторы):

$$S_{P_1P_2P_3} = \left| \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} + \left| \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} + \right. \\ \left. + \left| \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} \right| \right| S_{CAB}.$$

8. И все же — что означает слово «аффинный»?

Заметил ли читатель, что в нашей статье мы ни разу не употребили слово «длина»? Мы не воспользовались и понятием «угол».

Например, складывая векторы \overrightarrow{CM} и \overrightarrow{CN} , не лежащие на одной прямой, мы пользуемся только понятием параллельности: через конец

M первого слагаемого \overrightarrow{CM} мы проводим прямую, параллельную прямой CN ; через конец N второго слагаемого \overrightarrow{CN} мы проводим прямую, параллельную прямой CM ; точка D пересечения этих прямых есть конец вектора \overrightarrow{CD} , который мы и называем *суммой* векторов \overrightarrow{CM} и \overrightarrow{CN} .

А как же складывать — не используя понятия длины! — векторы \overrightarrow{CT} и \overrightarrow{CU} , расположенные на одной прямой? Как умножить век-

* См. статью «Площади ориентированных фигур» («Квант», 1978, № 3).

тор \vec{CM} на произвольное действительное число λ ? Как доказать при «аффинном» определении (т. е. определении, не использующем понятий длины и угла, а опирающемся только на понятие параллельности) правила векторной алгебры, которыми мы щедро пользовались во всем нашем изложении? Мы не будем отвечать на эти вопросы, а ограничимся тем, что предложим читателю решить, пользуясь только простейшими, «аффинными», операциями (сложение векторов и умножение вектора на число), несколько «аффинных» задач.

Задачи

1. Докажите, что, как бы ни были расположены точки A, B, C и D , три отрезка, соединяющие середины отрезков AB и CD , AC и BD , AD и BC , имеют общую точку.

2. На прямых AB и CD , произвольно расположенных в пространстве, лежат точки A' и C' , отсекающие, соответственно, от отрезков \vec{AB} и \vec{CD} одну и ту же долю. На прямых BC и DA лежат точки B' и D' , отсекающие от отрезков \vec{BC} и \vec{DA} одну и ту же долю. Докажите, что прямые $A'C'$ и $B'D'$ пересекутся.

3. Семь точек A_i ($i=1, 2, \dots, 7$) произвольно расположены в пространстве, P — произвольная точка. Пусть B_{ijk} — центроид системы точек A_i, A_j, A_k , B_{lmnp} — центроид системы остальных точек (индексы i, j, k, l, m, n, p все различны), Φ_{ijk} — прямая, проходящая через точку B_{ijk} параллельно прямой PB_{lmnp} , Ψ_{lmnp} — прямая, проходящая через точку B_{lmnp} параллельно прямой PB_{ijk} . Докажите, что 1) все прямые Φ_{ijk} пересекаются в одной точке; 2) все прямые Ψ_{lmnp} пересекаются в одной точке.

4. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC расположите, соответственно, точки C', A', B' так, чтобы центроиды треугольников $A'B'C'$ и ABC совпали.

5. Докажите, что из всех треугольников $A'B'C'$, вписанных в треугольник ABC так, что центроиды треугольников ABC и $A'B'C'$ совпадают, наименьшая площадь будет у того, вершины которого делят стороны треугольника ABC пополам.

6. Каждая сторона четырехугольника $ABCD$ разделена на три равные части. Через те две точки деления сторон AB и AD , которые ближе других расположены к вершине A , проведена прямая. Аналогичным образом, через точки деления, ближайšie к вершинам B, C, D , проведены еще три прямые. Докажите, что центр тяжести четырехугольника, образованного этими четырьмя прямыми, совпадает с центром тяжести четырехугольника $ABCD$.

Полное лунное затмение 6 сентября 1979 года

Все фазы этого затмения будут видны в крайних восточных и северо-восточных районах Советского Союза, расположенных к востоку от линии, проходящей примерно от Хабаровска и Николаевска-на-Амуре к Охотску и Восточнo-Сибирскому морю. К западу от этой линии Луна взойдет в частичном затмении, а западнее линии, идущей от Ерофея Павловича через Алдан, Якутск, Сангар и Верхоянск к Новосибирским островам —

уже в полной фазе затмения. Западнее Улаи-Удэ, Баргузина, Витима и Суханы полного затмения видеть нельзя, так как Луна там взойдет после его окончания.

Во время затмения Луна будет находиться в созвездии Водолея и пройдет сквозь южную зону земной тени (см. рисунок; буквой N обозначено на-

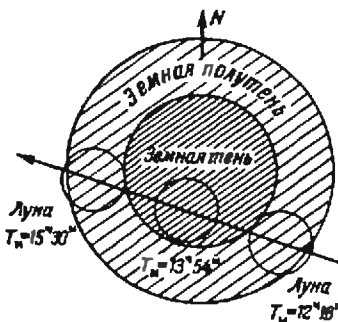
правление к северному полюсу мира, то есть примерно к Полярной звезде). Наибольшая фаза полного затмения $\Phi_m=1.10$.

Ниже приведены моменты затмения по московскому времени (T_M):

начало
частного затмения 12^ч 18^м
начало
полного затмения 13^ч 31^м
наибольшая фаза 13^ч 54^м
окончание
полного затмения 14^ч 17^м
окончание
частного затмения 15^ч 30^м

Чтобы получить те же моменты по местному времени, нужно к указанным значениям T_M прибавить разность в целых часах между местным и московским временем.

М. Дагаев



Окружность девяти точек

(см. 4 с. обложки)

Построим произвольный треугольник ABC и проведем в нем высоты и медианы. На рисунке 1 осно-

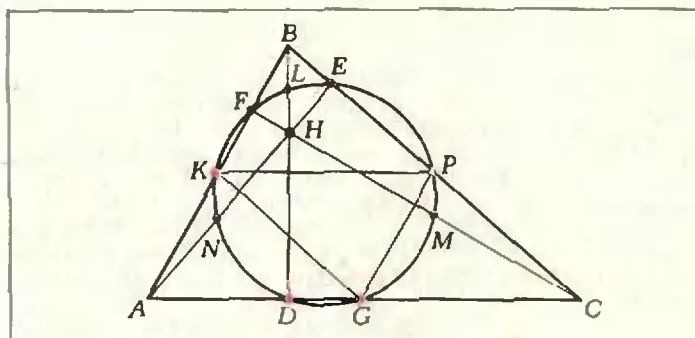


Рис. 1.

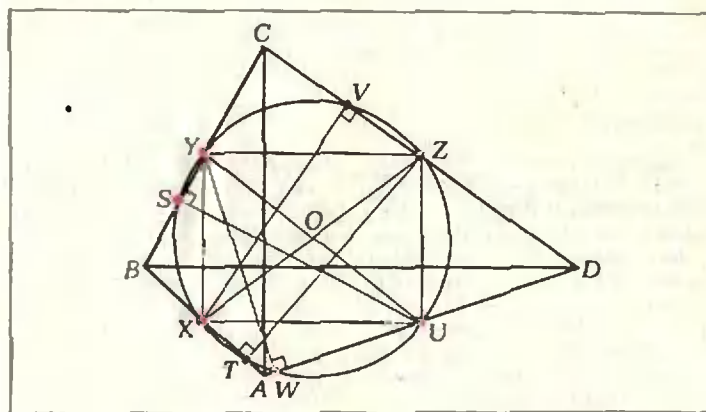


Рис. 2.

вания высот (точки D, E, F) и основания медиан (точки K, P, G) выделены красным цветом. Оказывается, все эти точки лежат на одной окружности. Впервые это заметил великий Эйлер. Поэтому ее часто называют *окружностью Эйлера*. Кроме указанных шести точек на этой же окружности лежат сере-

дины L, M, N отрезков, соединяющих ортоцентр (точку пересечения высот) треугольника с его вершинами. Поэтому иногда ее называют *окружностью девяти точек*.

Чтобы все это доказать, рассмотрим произвольный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями. На рисунке 2 вы видите выпуклый четырехугольник $ABCD$, но, вообще говоря, он может быть невыпуклым и даже самопересекающимся. Рассмотрим середины

его сторон X, Y, Z, U . Легко видеть, что они являются вершинами прямоугольника (докажите это). Следовательно, они лежат на одной окружности, а XZ и YU — ее диаметры. Опустим из этих точек перпендикуляры XV, YW, ZT и US на противоположные стороны четырехугольника или их

продолжения. Ясно, что точки V, T, W и S лежат на той же окружности: действительно, например, углы XVZ и XTZ — прямые.

Теперь мы можем доказать, что на рисунке 1 точки D, E, F, K, P и G лежат на одной окружности. На нем, при пристальном рассмотрении, можно обнаружить три невыпуклых четырехугольника $AHBC, ABHC, ABCH$ с перпендикулярными диагоналями. Например, в четырехугольнике $AHBC$ такими диагоналями служат отрезки HC и AB . Покажем с помощью этого четырехугольника, что точки E, P, D и G действительно принадлежат одной окружности. Точка P — середина стороны BC , а точка E — основание перпендикуляра, проведенного из нее к противоположной стороне AH . Аналогично, точка D — основание перпендикуляра, проведенного из точки G , середины стороны AC , к противоположной стороне BH того же четырехугольника. Точно так же, рассматривая четырехугольник $ABCH$, убеждаемся, что и точка F лежит на той же окружности, и т. д.

Легко сообразить, что радиус окружности Эйлера равен половине радиуса окружности, описанной около треугольника ABC . Попробуйте доказать, что центр окружности Эйлера делит пополам отрезок, соединяющий центр описанной окружности и ортоцентр H .

В. Березин

Памятник нулю

«Из пунктов *A* и *B*, расстояние между которыми 120 км, одновременно навстречу друг другу выезжают два велосипедиста». Кому не знакомы традиционные школьные задачи «на составление уравнений», начинающиеся подобной фразой? Здесь все понятно: два пункта — это две точки на изображающей шоссе линии, и длина участка линии между точками является расстоянием между пунктами.

Однако давайте задумаемся: что на самом деле означают слова «расстояние по шоссе между двумя городами»? Ведь реальный город — это далеко не точка... Чтобы измерить расстояние от города, очевидно, надо не только иметь единицу длины, но еще установить «начало отсчета», условиться, от какого места будет мериться расстояние. В СССР в крупных городах за точку, от которой (или до которой) измеряется расстояние, принимается здание почтамта. Например, все расстояния от Москвы по шоссейным дорогам исчисляются от здания Московского почтамта (ул. Кирова, д. 26). Поэтому «расстояние от Москвы до Ленинграда» есть расстояние между Московским и Ленинградским почтамтами.

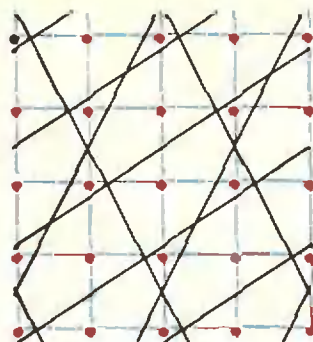
А вот в Венгерской народной республике все расстояния отмеряются от специального каменного изваяния, установленного в центре Будапешта, недалеко от красивейшего Цепного моста. Цифра «0» и буквы «км» на пьедестале означают начало всех дорог по Венгрии. Этот «Нуль», как называют его будапештцы, — одна из достопримечательностей столицы ВНР; вы видите его на снимке, на второй странице обложки.

Н. Х.

Многоугольники и точки

На рисунке изображена плоскость с единичной решеткой. На плоскости проведены прямые, не проходящие через узлы единичной решетки, разбивающие всю плоскость на треугольники и пятиугольники, причем каждый треугольник и каждый пятиугольник содержит один узел единичной решетки.

Несложно разбить плоскость прямыми на параллелограммы, каждый из которых содержит один узел единичной решетки. Каким образом еще мож-



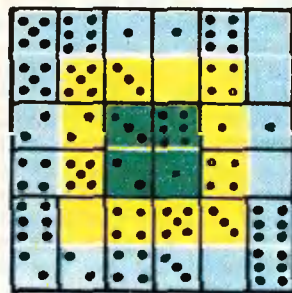
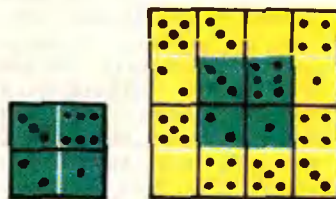
но разбить плоскость прямыми на фигуры, каждая из которых содержит один узел единичной решетки?

А. Епифанов

Домино-пасьянс

Полный комплект косточек домино уложен в три квадрата: 2×2 ; 4×4 и 6×6 (см. рисунок). При этом маленький квадрат содержит в среднем и большом, а средний — в большом квадрате. Средний квадрат — магический (магическая сумма равна 12). Можно ли аналогичным образом разложить косточки домино так, чтобы магическим оказался большой квадрат? Или большой и средний?

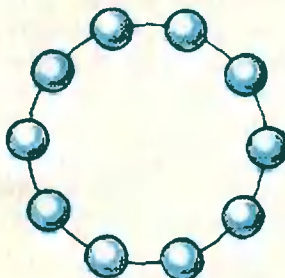
Л. Мочалов



Ожерелье из шариков

Напишите на шариках числа от 1 до 10 так, чтобы никакая сумма двух соседних чисел не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7.

Л. Мочалов



Где ошибка?

Теорема. Если две плоскости симметричны относительно начала координат O , то они обе проходят через точку O .

«Доказательство». Пусть плоскости α , β симметричны относительно начала координат O . Если уравнение плоскости α

$$ax + by + cz + d = 0, \quad (1)$$

то уравнение плоскости β

$$-ax - by - cz + d = 0. \quad (2)$$

Сложив (1), (2), получаем $d = 0$. Значит, $(0; 0; 0)$ является решением обоих уравнений, то есть точка O принадлежит обеим плоскостям. Где ошибка?

В. Колмыков

задачник Кванта

Задачи

M576—M580; Ф588—Ф592

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 октября 1979 года. В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 8—79» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M576, M577 или «Ф588». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом.

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации (или цикла задач), присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

В этом номере Задачник составлен из задач, представленных на XIII Всесоюзной олимпиаде школьников. Число в скобках обозначает класс, в котором предлагалась соответствующая задача.

M576. На плоскости дано несколько точек. Для некоторых пар $(A; B)$ этих точек взяты векторы \vec{AB} , причем так, что в каждой точке начинается столько же векторов, сколько в ней заканчивается. Докажите, что сумма всех выбранных векторов равна $\vec{0}$. (8)

В. Произволов

M577. Какое наименьшее число фишек нужно поставить на поля шахматной доски размерами а) 8×8 клеток, б) $n \times n$ клеток для того, чтобы на каждой прямой, проходящей через центр произвольного поля и параллельной какой-либо стороне или диагонали доски, стояла хотя бы одна фишка? (Фишки ставятся в центры полей.) (8; 10)

Н. Васильев

M578. Найти x и y из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{x-y\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}} = a, \\ \frac{y-x\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}} = b \end{cases}$$

(a и b — данные числа). (8; 10)

В. Гутенмахер

M579. Докажите, что для любых чисел x_1, x_2, \dots, x_n , принадлежащих отрезку $[0; 1]$, выполнено неравенство

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n + 1)^2 \geq 4(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2). \quad (9)$$

А. Плоткин, С. Фомин

M580. В парламенте у каждого его члена не более трех врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария в одной с ним палате будет не более одного врага. (Считается, что если A — враг B , то B — враг A .) (8—10)

О. Бородин

Ф588. Рисунок 1 (вид сверху) сделан с фотографии шлейфов дыма, тянущихся от трех паровозов, которые движутся по прямолинейному участку железнодорожного пути. Скорость первого паровоза $|\vec{v}_1| = 50$ км/ч, а второго — $|\vec{v}_2| = 70$ км/ч,

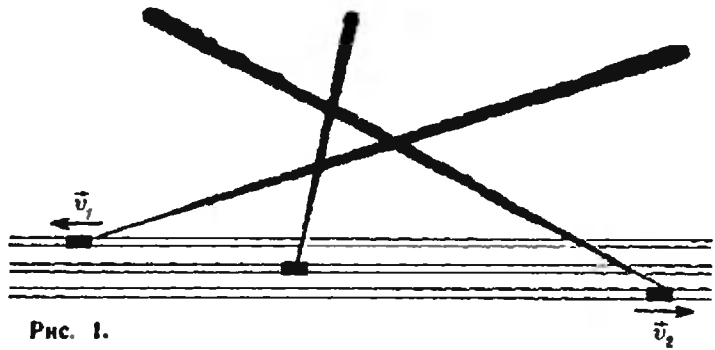


Рис. 1.

направления их движения указаны на рисунке стрелками. Какова скорость третьего паровоза? (9)

И. Слободецкий

Ф589. В цилиндре объемом 10 л, закрытом поршнем и помещенном в термостате с температурой 40°C , находится по 0,05 моля двух веществ. Определить массу жидкости в цилиндре после изотермического сжатия, вследствие которого объем под поршнем уменьшается в 3 раза. Давление насыщенных паров первой жидкости при температуре 40°C равно $0,7 \cdot 10^4$ Па, второй — $1,7 \cdot 10^4$ Па. Начертить изотерму сжатия. Молярная масса первой жидкости составляет $1,8 \cdot 10^{-2}$ кг/моль, второй — $4,6 \cdot 10^{-2}$ кг/моль. (10)

М. Ваврух

Ф590. При движении трамвая по горизонтальному участку пути с некоторой скоростью его двигатель потребляет ток $I_0 = 100$ А, при этом КПД двигателя равен $\eta = 0,9$ (*). При движении трамвая по наклонному участку пути вниз с той же скоростью ток в двигателе равен нулю (двигатель выключен). Какой ток будет потреблять двигатель при движении трамвая по тому же участку пути вверх с той же скоростью? (10)

В. Скороваров

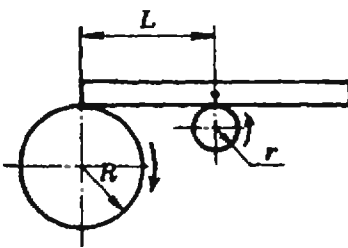


Рис. 2

Ф591. Два цилиндра различных радиусов вращаются в противоположные стороны вокруг горизонтальных параллельных осей с угловой скоростью $\omega_1 = \omega_2 = \omega = 2$ рад/с. Расстояние по горизонтали между осями $L = 4$ м. В момент времени $t = 0$ на цилиндры перпендикулярно осям кладут балку так, что она находится в горизонтальном положении и одновременно касается обеих поверхностей вращения, а ее центр масс расположен точно над осью цилиндра меньшего радиуса ($r = 0,25$ м), как указано на рисунке 2. Рассчитать и проиллюстрировать графически зависимость горизонтального смещения балки от времени, начиная с момента $t = 0$. Коэффициент трения $\mu_s = 0,05$, ускорение свободного падения принять равным $g = 10,0$ м/с². (10)

Д. Фурорский

Ф592. Имеются два теплоизолированных сосуда. В первом из них находится 5 л воды при темпера-

*) КПД трамвайного двигателя зависит от силы тока.

туре $t_1=60^\circ\text{C}$, во втором — 1 л воды при температуре $t_2=20^\circ\text{C}$. Вначале часть воды перелили из первого сосуда во второй. Затем, когда во втором сосуде установилось тепловое равновесие, из него в первый сосуд отлили столько воды чтобы ее объемы в сосудах стали равны первоначальным. После этих операций температура воды в первом сосуде стала равной $t=59^\circ\text{C}$. Сколько воды переливали из первого сосуда во второй и обратно? (8)

А. Зильберман

Решения задач

М521—М527; Ф533—Ф536

М521. Обозначим через a_n целое число, ближайшее к \sqrt{n} . Найдите сумму $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{1980}}$.

По аналогии с целой частью числа обозначим через $\lfloor a \rfloor$ целое число, ближайшее к a . Например, $\lfloor \frac{5}{4} \rfloor = 1$, $\lfloor \frac{7}{4} \rfloor = 2$, $\lfloor \sqrt{3} \rfloor = 2$ и так далее.

Пока все ясно. А как быть с числом $\frac{3}{2}$? Чему равно $\lfloor \frac{3}{2} \rfloor$: 1 или 2?

Мы видим, что понятие «ближайшее целое» для чисел вида $\frac{m}{2}$, где m — нечетное число — нуждается в уточнении.

Однако для решения задачи это уточнение не требуется, поскольку при любом натуральном n число \sqrt{n} — либо натуральное, либо иррациональное (докажите!).

Вычислим первые члены последовательности $a_1 = \lfloor \sqrt{1} \rfloor$, $a_2 = \lfloor \sqrt{2} \rfloor$, ...: 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, ... Мы замечаем, что в этой последовательности 1 встречается 2 раза, 2 встречается 4 раза, 3 — 6 раз. Поэтому естественно предположить, что в нашей последовательности каждое натуральное число k встречается $2k$ раз. Для доказательства этого предположения нам достаточно показать, что при любом натуральном k неравенство $k - \frac{1}{2} < \sqrt{x} < k + \frac{1}{2}$ имеет ровно $2k$ решений в натуральных числах.

Возведя каждую из частей этого неравенства в квадрат, получим равносильное неравенство

$$k^2 - k + \frac{1}{4} < x < k^2 + k + \frac{1}{4}.$$

Это неравенство имеет ровно $2k$ решений: $k^2 - k + 1$, $k^2 - k + 2$, ..., $k^2 + k$, что и требовалось доказать.

Теперь мы легко можем вычислить сумму $S = \frac{1}{\lfloor \sqrt{1} \rfloor} + \frac{1}{\lfloor \sqrt{2} \rfloor} + \dots + \frac{1}{\lfloor \sqrt{1980} \rfloor} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{44} + \dots + \frac{1}{44} \right)}_{88 \text{ раз}}$.

Так как сумма чисел в каждой круглой скобке равна 2, $S = 88$.

Г. Гуревич

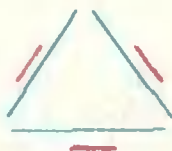


Рис. 1.

M522. На плоскости задано несколько непересекающихся отрезков, никакие два из которых не лежат на одной прямой. Мы хотим провести еще несколько отрезков, соединяющих концы данных отрезков так, чтобы все отрезки вместе образовали одну несамопересекающуюся ломаную. Всегда ли это можно сделать?

Ответ: не всегда. На рисунке 1 изображены шесть отрезков, концы которых нельзя соединить требуемым образом. В самом деле, каждый из шести концов коротких отрезков может быть соединен лишь с концом «своего» длинного отрезка, а поскольку свободных концов должно остаться два, то у одного из коротких отрезков оба его конца должны быть соединены отрезками с концами длинного. В результате получится замкнутая ломаная из четырех звеньев — противоречие.

В. Произволов



M523. Фишка стоит в углу шахматной доски размером $n \times n$ клеток. Каждый из двух играющих по очереди передвигает ее на соседнее поле (имеющее общую сторону с тем, на котором стоит фишка). Вторым раз ходить на поле, где фишка уже побывала, нельзя. Проигрывает тот, кому некуда ходить.

а) Докажите, что если n четно, то начинающий игру может добиться выигрыша, а если n нечетно, то выигрывает второй.

б) Кто выигрывает, если первоначально фишка стоит не на угловом поле, а на соседнем с ним?

а) Пусть n нечетно. В этом случае доску размером $n \times n$, кроме углового поля, можно покрыть костями домино 2×1 (рис. 2, а). Пусть тот, кто ходит вторым, следует такой стратегии: ставит фишку на второе поле того домино, на первое поле которого поставил фишку начинающий игру. Ясно, что, поступая таким образом, второй игрок выигрывает.

Пусть n четно. Тогда доску размером $n \times n$ можно покрыть костями домино целиком (рис. 2, б). В этом случае начинающий игрок, считая, что «нулевым» ходом его партнер поставил фишку на угловое поле доски, должен следовать описанной выше стратегии второго игрока. Ясно, что теперь победит начинающий игру.

б) Если первоначально фишка стоит не на угловом поле, а на соседнем с ним, то выигрывает всегда начинающий. Для четного n это доказывается как выше (доска сразу разбивается на «домношки», и первый игрок должен поступать как и раньше). Пусть n нечетно. Тогда начинающий может «отрезать» угловое поле доски (второй игрок туда все равно не попадет, так как оно неподходящего цвета — см. рис. 2, в), после чего раз-

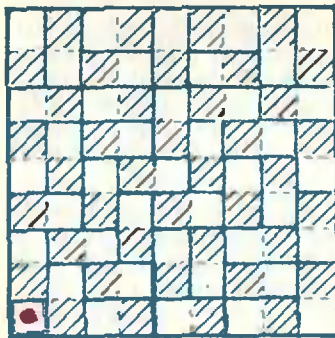


Рис. 2а.

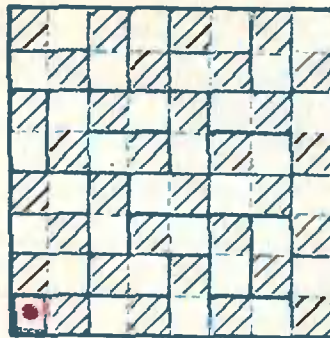


Рис. 2б.

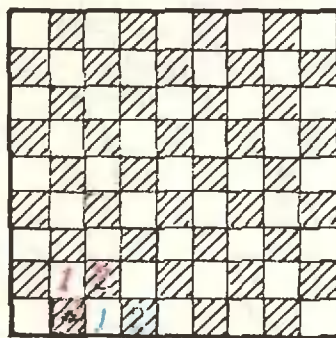


Рис. 2в.

бить оставшуюся часть доски на «домношки» и снова поступать согласно описанной стратегии.

Предлагаем читателю разобраться в том, кто выигрывает, если первоначально фишка стоит на каком-то ином поле.

Н. Нецветаев



M524. Докажите, что ни при каком натуральном m число $1978^m - 1$ не делится на $1000^m - 1$.

Если $1978^m - 1$ при некотором натуральном m делится на $1000^m - 1$, то при этом m разность $(1978^m - 1) - (1000^m - 1) = 1978^m - 1000^m$ также делится на $1000^m - 1$.

$$1978^m - 1000^m = 2^m(989^m - 500^m).$$

Поскольку $1000^m - 1$ — число нечетное, на $1000^m - 1$ должна делиться разность $989^m - 500^m$. Но это невоз-

можно, так как для любого натурального m
 $989^m - 500^m < 1000^m - 1$.

Полученное противоречие решает задачу.

Некоторые наши читатели получали утверждение задачи, доказывая, что максимальная степень тройки, на которую делится число $1000^m - 1$, больше, чем максимальная степень тройки, на которую делится число $1978^m - 1$.

С. Конягин

M525. Докажите, что для любого тетраэдра существуют такие две плоскости, что отношение площадей проекций тетраэдра на эти плоскости не меньше $\sqrt{2}$.

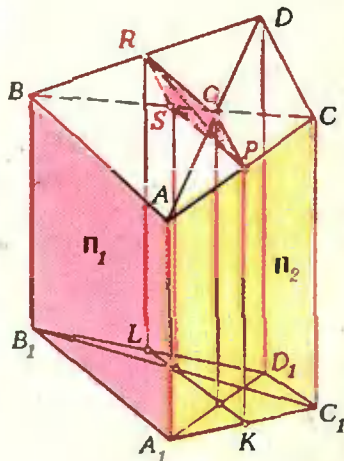


Рис. 3.

Проведем через два противоположных ребра AB и CD тетраэдра $ABCD$ параллельные плоскости Π_1 и Π_2 (рис. 3). Пусть h — расстояние между ними. Будем рассматривать лишь проекции тетраэдра на плоскости, перпендикулярные Π_1 , и уже среди них найдем такие, отношение площадей проекций тетраэдра на которые не меньше $\sqrt{2}$.

Пусть $A_1B_1C_1D_1$ — проекция тетраэдра $ABCD$ на такую плоскость α . Тогда $[A_1B_1] \subset \Pi_1 \cap \alpha$, $[C_1D_1] \subset \Pi_2 \cap \alpha$, и, следовательно, $[A_1B_1] \parallel [C_1D_1]$. Таким образом, проекция $A_1B_1C_1D_1$ тетраэдра $ABCD$ на плоскость α — это трапеция с высотой длины h (в некоторых случаях вырождающаяся в треугольник). Средняя линия KL трапеции $A_1B_1C_1D_1$ — это проекция параллелограмма $PQRS$, где P, Q, R, S — середины ребер AC, AD, BD и BC тетраэдра $ABCD$ соответственно (см. рис. 3). (Действительно, все точки K, L, P, Q, R, S лежат в плоскости, параллельной плоскостям Π_1 и Π_2 и равноудаленной от них.) Вершины параллелограмма P, Q, R, S проектируются в точки пересечения средней линии KL с отрезками A_1C_1, A_1D_1, B_1D_1 и B_1C_1 соответственно. Для определенности будем считать, что $[PQ]$ — меньшая сторона параллелограмма, а $[PR]$ — большая из его диагоналей. Очевидно,

$$|PR|/|PQ| \geq \sqrt{2}.$$

Возьмем теперь плоскость α_1 , параллельную диагонали PR (и, конечно, перпендикулярную плоскости Π_1), и плоскость α_2 , перпендикулярную $[PS]$ ($\alpha_2 \perp \Pi_1$). Длина средней линии трапеции (проекция тетраэдра) в первом случае равна $|PR|$, а во втором — не больше $|PQ|$. В первом случае площадь проекции тетраэдра равна $h \cdot |PR|$, во втором — не более $h \cdot |PQ|$. Отношение этих площадей не меньше $\sqrt{2}$.

Для правильного тетраэдра оценка $\sqrt{2}$ — наилучшая: площади проекций правильного тетраэдра на плоскости α_1 и α_2 будут равны $a^2/2$ и $a^2/2\sqrt{2}$, где a — длина ребра тетраэдра. Но это также требует доказательства.

А. Берзиньш

M526. а) Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника равна

$$S = \frac{\operatorname{tg} \varphi |a^2 - b^2 + c^2 - d^2|}{4},$$

где a, b, c, d — длины последовательных сторон четырехугольника. φ — величина угла между его диагоналями. $\varphi \neq 90^\circ$.

б) Можно ли найти площадь S , зная a, b, c и d , если $\varphi = 90^\circ$?

а) Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник. $|AB|=a$, $|BC|=b$, $|CD|=c$, $|DA|=d$ (рис. 4). Тогда

$$S = \frac{1}{2} |AC| \cdot |BD| \cdot \sin \varphi.$$

Попробуем выразить площадь S четырехугольника $ABCD$ через скалярное произведение векторов \vec{AC} и \vec{BD} . Ясно, что выполняется одно из следующих равенств:

$$\widehat{\vec{AC}; \vec{BD}} = \varphi \text{ или } \widehat{\vec{AC}; \vec{BD}} = \pi - \varphi.$$

Поэтому $|\cos \widehat{\vec{AC}; \vec{BD}}| = \cos \varphi$. Если $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, то

$$S = \frac{1}{2} |AC| \cdot |BD| \cdot \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2} |AC| \cdot |BD| \times$$

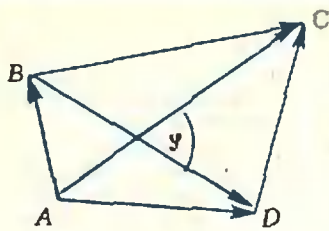


Рис. 4.

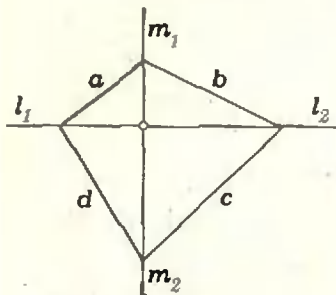


Рис. 5.

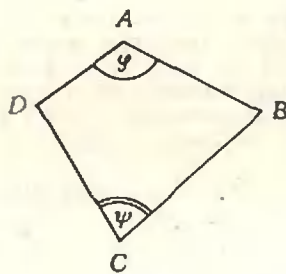


Рис. 6.

$$\begin{aligned} \times |\cos(\widehat{AC; BD})| \operatorname{tg} \varphi &= \frac{1}{2} \|\vec{AC}\| \cdot \|\vec{BD}\| \cos(\widehat{AC; BD}) \cdot \operatorname{tg} \varphi = \\ &= \frac{1}{2} \|\vec{AC} \cdot \vec{BD}\| \cdot \operatorname{tg} \varphi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Однако } \vec{AC} \cdot \vec{BD} &= \vec{AC} (\vec{AD} - \vec{AB}) = \vec{AC} \cdot \vec{AD} - \vec{AC} \cdot \vec{AB} = \\ &= \frac{1}{2} (2\vec{AC} \cdot \vec{AD} - 2\vec{AC} \cdot \vec{AB}) = \frac{1}{2} [(\vec{AC})^2 + (\vec{AD})^2 - (\vec{AC} - \vec{AD})^2 - \\ &- ((\vec{AC})^2 + (\vec{AB})^2 - (\vec{AC} - \vec{AB})^2)] = \frac{1}{2} [(\vec{AC})^2 + (\vec{AD})^2 - \\ &- (\vec{DC})^2 - (\vec{AC})^2 - (\vec{AB})^2 + (\vec{BC})^2] = \frac{1}{2} [(\vec{BC})^2 - (\vec{CD})^2 + \\ &+ (\vec{DA})^2 - (\vec{AB})^2]; \end{aligned}$$

поэтому

$$S = \frac{1}{2} \|\vec{AC} \cdot \vec{BD}\| \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{4} |a^2 - b^2 + c^2 - d^2| \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

В. Губа

б) При $\varphi = 90^\circ$ выразить площадь S выпуклого четырехугольника через длины a, b, c, d его сторон нельзя. Заметим, что в этом случае $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 0$. Пусть a — наименьшее из чисел a, b, c, d . Отрезок длины a с концами на лучах l_1 и m_1 (рис. 5) можно допустить до четырехугольника с заданными сторонами; меняя положения отрезка, мы получим целое семейство таких четырехугольников (с разными углами при вершинах). Докажем, что площади всех этих четырехугольников не равны одному и тому же числу. Для этого, воспользуемся равенством (рис. 6)

$$S = \frac{1}{2} (ab \sin \varphi + cd \sin \psi),$$

где φ и ψ — углы при вершинах A и C четырехугольника, найдем, какие значения может принимать величина S .

Углы φ и ψ связаны соотношением

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi = c^2 + d^2 - 2cd \cos \psi \quad (*)$$

(теорема косинусов).

Будем считать, что угол ψ есть функция от φ . Из соотношения (*)

$$\psi' = \frac{ab \sin \varphi}{cd \sin \psi} \quad (**)$$

так что для производной S' (по φ) получаем:

$$\begin{aligned} S' &= \frac{1}{2} (ab \cos \varphi + \psi' cd \cos \psi) = \\ &= \frac{ab}{2} \left(\cos \varphi + \frac{\cos \psi}{\sin \psi} \sin \varphi \right) = \frac{ab}{2 \sin \psi} \sin(\varphi + \psi). \end{aligned}$$

Мы видим, что $S' = 0$, когда $\sin(\varphi + \psi) = 0$, то есть когда $\varphi + \psi = 180^\circ$. Это значит, что около соответствующего четырехугольника можно описать окружность.

Мы почти доказали знаменитую теорему Штейнера о том, что из всех четырехугольников с заданными длинами сторон наибольшую площадь имеет тот, вокруг которого можно описать окружность. Почти — потому, что нужно еще проверить, что в указанном нуле производной S' функция $S = S(\varphi)$ действительно имеет максимум. Мы ограничимся проверкой этого утверждения только для рассматриваемого нами случая, когда диагонали четырехугольника перпендикулярны (пока мы этим обстоятельством не пользовались).

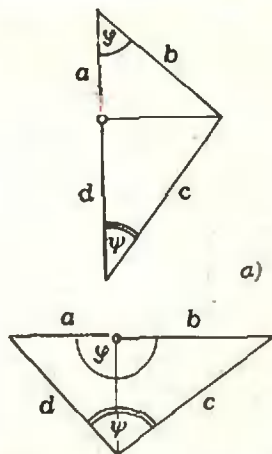


Рис. 7.

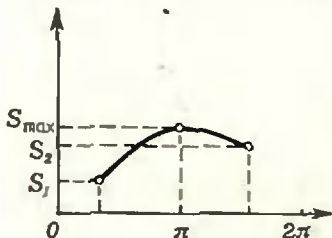


Рис. 8.

М527. Пусть x_1, x_2, \dots, x_n — действительные числа, $0 \leq x_i \leq 1$. Докажите, что величина $x_1 + x_2 + \dots + x_n - x_1x_2 - x_2x_3 - \dots - x_{n-1}x_n - x_nx_1$ не превосходит
 а) 1 при $n=3$;
 б) 2 при $n=4$;
 в) $\lfloor n/2 \rfloor$ при $n \geq 3$.

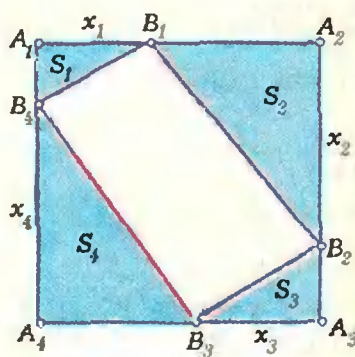


Рис. 9.

Заметим, что производная ψ' неотрицательна (это видно из формулы (*)), так что при росте угла ϕ угол ψ также растет. Минимальное значение угол ϕ принимает в четырехугольнике на рисунке 7, а, а максимальное — на рисунке 7, б (напомним, что a — минимально). Поэтому сумма $\phi + \psi$ меняется от некоторого значения, меньшего 180° , до некоторого значения, большего 180° и меньшего 360° . Производная S' положительна при $\phi + \psi < 180^\circ$, равна нулю при $\phi + \psi = 180^\circ$ и меньше нуля при $180^\circ < \phi + \psi < 360^\circ$. Следовательно, сама функция S возрастает при $\phi + \psi < 180^\circ$ и достигает максимума при $\phi + \psi = 180^\circ$, после чего убывает; так что минимум S достигается в одной из крайних точек (соответствующих рисункам 7, а, б). Несложно вычислить (сделайте это самостоятельно), что максимальная площадь S_{\max} равна $\frac{ac + bd}{2}$,

а в крайних точках $S_1 = \frac{1}{2}(a+d)\sqrt{b^2 - a^2}$ и $S_2 = \frac{1}{2}(a+b)\sqrt{d^2 - a^2}$ соответственно ($S_1 < S_2$, если $b < d$; $S_1 = S_2$, если $b = d$; $S_1 > S_2$, если $b > d$). График функции S изображен на рисунке 8, площадь S (четырёхугольника с заданными длинами сторон и взаимно перпендикулярными диагоналями) может принимать любые значения в пределах $S_1 \leq S \leq S_{\max}$, $S_{\max} \leq S \leq S_2$.

Л. Лиманов



Мы приведем два решения пункта в) задачи. Первое из них использует метод математической индукции, причем индукционный шаг осуществляется от $n=k$ к $n=k+2$. При этом необходимо проверить выполнение соответствующих неравенств для двух начальных значений n : $n=3$ и $n=4$. Эта проверка, собственно, и составляет содержание пунктов а) и б) задачи.

а) Итак, пусть $n=3$. Из условий $0 \leq x_i \leq 1$ ($i=1, 2, 3$) следует, что $(x_1 - 1)(1 - x_2)(1 - x_3) \leq 0$,

то есть

$$x_1x_2x_3 + x_1 + x_2 + x_3 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1 \leq 1.$$

Поскольку $x_1x_2x_3 \geq 0$, получаем требуемое неравенство $x_1 + x_2 + x_3 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1 \leq 1$.

б) Пусть $n=4$. Докажем, что

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_4 - x_4x_1 \leq 2.$$

используя геометрию.

Возьмем квадрат $A_1A_2A_3A_4$ со стороной длины 1. На его сторонах $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$ отметим, соответственно, точки B_1, B_2, B_3, B_4 так, чтобы $|A_iB_i| = x_i$ ($i=1, 2, 3, 4$; — см. рис. 9). Пусть S_1, S_2, S_3, S_4 — площади треугольников $A_1B_1B_2, A_2B_2B_3, A_3B_3B_4, A_4B_4B_1$. Очевидно, $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \leq 1$

(треугольники лежат внутри квадрата площади 1 и не пересекаются); поэтому

$$\frac{x_1(1-x_4)}{2} + \frac{x_2(1-x_1)}{2} + \frac{x_3(1-x_2)}{2} + \frac{x_4(1-x_3)}{2} \leq 1,$$

откуда получается нужное неравенство для $n=4$.

в) Предположим, что неравенство

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n - x_1x_2 - x_2x_3 - \dots - x_{n-1}x_n - x_nx_1 \leq \lfloor n/2 \rfloor \quad (1)$$

верно для $n=k$; докажем, что оно верно для $n=k+2$.

Прежде всего заметим, что

$$x_{k+1} + x_{k+2} + x_kx_1 - x_kx_{k+1} - x_{k+1}x_{k+2} - x_{k+2}x_1 \leq 1. \quad (2)$$

(Действительно, это следует из неравенства

$$(x_1 - 1)(1 - x_{k+1})(1 - x_{k+2}) \leq 0$$

при $x_k \geq x_1$ и из неравенства

$$(x_k - 1)(1 - x_{k+1})(1 - x_{k+2}) \leq 0$$

при $x_1 \leq x_k$.

По предположению индукции

$$x_1 + \dots + x_k - x_1 x_2 - \dots - x_{k-1} x_k - x_k x_1 \leq [k/2]. \quad (3)$$

Складывая неравенства (2) и (3), получаем

$$x_1 + \dots + x_k + x_{k+1} + x_{k+2} - x_1 x_2 - \dots - x_k x_{k+1} - x_{k+1} x_{k+2} - x_{k+2} x_1 \leq [k/2] + 1 = [k/2 + 1] = \left[\frac{k+2}{2} \right],$$

так что неравенство (1) справедливо и для $n = k+2$. Задача в) решена.

Другое, быть может, более «естественное», решение задачи в) — следующее:

Зафиксируем переменные $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$, а переменную $x_i = x$ будем изменять (на отрезке $[0; 1]$). Тогда

$x_1 + x_2 + \dots + x_n - x_1 x_2 - x_2 x_3 - \dots - x_{n-1} x_n - x_n x_1 = kx + b$, где k и b — постоянные числа. Очевидно, k и b не являются функциями от x , определенной на отрезке $[0; 1]$, принимает наибольшее значение на одном из концов отрезка. Поскольку это рассуждение можно применить последовательно к x_1 , затем к x_2, \dots, x_n , наибольшее значение выражения $\Sigma = x_1 + x_2 + \dots + x_n - x_1 x_2 - \dots - x_{n-1} x_n - x_n x_1$ достигается, когда некоторые из чисел x_i равны единице, а остальные — нулю. Заметим теперь, что если два соседних «икса» оба равны единице (например, x_i и x_{i+1}), то один из них можно превратить в нуль, не уменьшив при этом значения Σ . Таким образом, Σ принимает наибольшее значение, когда несколько (скажем, m) не соседних «иксов» равны единице. Поскольку $m \leq [n/2]$, («иксы» — не соседние!), мы получаем, что $\Sigma_{\max} \leq [n/2]$. Но легко проверить, что при $x_1 = x_3 = x_5 = \dots = 1, x_2 = x_4 = \dots = 0$ значение Σ как раз равно $[n/2]$, откуда следует, что $\Sigma_{\max} = [n/2]$.

В. Батырев, И. Клузова



Ф533. Гантелька длины l стоит в углу, образованном гладкими плоскостями (рис. 10). Нижний шарик гантельки смещают горизонтально на очень маленькое расстояние, и гантелька начинает двигаться. Найти скорость нижнего шарика в тот момент, когда верхний шарик оторвется от вертикальной плоскости.

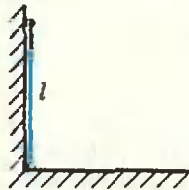


Рис. 10.

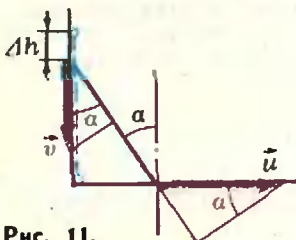


Рис. 11.

Пусть в момент отрыва верхнего шарика от вертикальной плоскости гантелька составляет угол α с вертикалью (рис. 11), скорость верхнего шарика равна v , скорость нижнего — u .

Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{mu^2}{2} = mg\Delta h = mgl(1 - \cos \alpha),$$

или

$$v^2 + u^2 = 2gl(1 - \cos \alpha) \quad (1)$$

(m — масса каждого шарика; v, u, g — модули соответствующих векторов).

Поскольку стержень жесткий,

$$v \cos \alpha = u \sin \alpha. \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) находим:

$$u^2 = 2gl(\cos^2 \alpha - \cos^3 \alpha). \quad (3)$$

До момента отрыва центр масс гантельки двигался с горизонтальным ускорением (это ускорение сообщалось силой реакции вертикальной стенки). Поэтому к моменту отрыва верхнего шарика от вертикальной стенки скорость

\vec{v} максимальна. Найдем значение $\cos \alpha$, при котором выражение $\cos^2 \alpha - \cos^3 \alpha$ (см. (3)) максимально: $(x^2 - x^3)' = 2x - 3x^2 = 0$ ($x = \cos \alpha$) при $x = 2/3$, то есть $\cos \alpha = 2/3$.

Подставив это значение $\cos \alpha$ в (3), найдем:

$$u = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3} gl}.$$

А. Зильберман

Ф534. Астронавты «Скай-лэба» с помощью специального радиолокационного высотомера обнаружили, что поверхность океана в районе «Бермудского треугольника» ниже нормального уровня на 25 метров (см., например, журнал «Наука и жизнь», 1976, № 9). Предполагая, что этот «прогиб» можно объяснить наличием под дном океана шаровой полости, заполненной водой, оценить радиус этой полости. Глубина океана $h=6$ км, средняя плотность земных пород $\rho_n = 3 \cdot 10^4$ кг/м³.

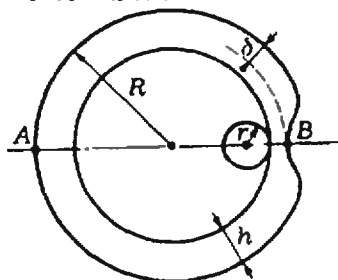


Рис. 12.

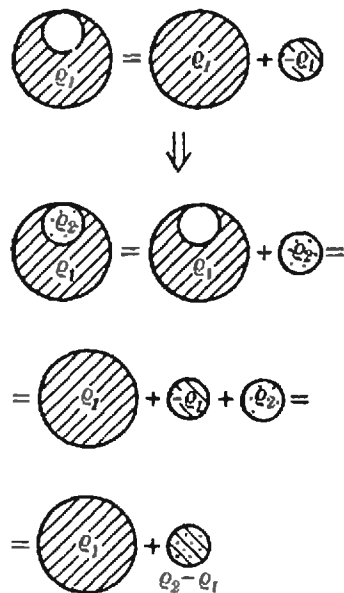


Рис. 13.

Свободная поверхность воды в поле тяготения Земли всегда устанавливается так, что в любой точке поверхности сила тяготения перпендикулярна к ней, то есть направлена к центру Земли по радиусу. Из-за наличия полости поверхность океана искривлена — суммарная сила тяготения (со стороны Земли и со стороны «полости») направлена, вообще говоря, не по радиусу Земли.

В дальнейших рассуждениях мы будем пользоваться аналогией между электростатическим полем точечного заряда Q и полем тяготения точечной массы M . (Напомним, что поле тяготения шара массы M эквивалентно полю тяготения точечной массы M , помещенной в центр шара.)

Сила, действующая на пробный заряд q со стороны заряда Q , и сила, действующая на пробную массу m со стороны массы M , равны, соответственно,

$$F_{эл} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2}, \quad F_T = \gamma \frac{Mm}{r^2},$$

где r — расстояние между Q и q , M и m . Эти формулы похожи: $F_{эл} \sim 1/r^2$ и $F_T \sim 1/r^2$, $F_{эл} \sim q$, а $F_T \sim m$, то есть зависимость этих сил от расстояния одна и та же и зависимости от величины пробного заряда и величины пробной массы одинаковы. Пользуясь этой аналогией, введем потенциал Φ_T поля тяготения точечной массы M (равный потенциальной энергии единичной массы в поле массы M). Выражение для Φ_T аналогично выражению для потенциала $\Phi_{эл} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$ электростатического поля точечного заряда Q :

$$\Phi_T = -\gamma \frac{M}{r}.$$

(Знак «минус» отражает основное различие между $F_{эл}$ и F_T : под действием гравитационных сил тела всегда притягиваются. Поскольку потенциальная энергия при бесконечно большом r полагается равной нулю, в случае сил притяжения потенциальная энергия в поле тяготения оказывается отрицательной.)

Потенциальная энергия частицы массы m на поверхности воды должна быть всюду одинаковой. (Поскольку сила тяготения всюду перпендикулярна поверхности, работа силы тяготения по перемещению частицы по поверхности равна нулю.) Следовательно, поверхность океана (поверхность Земли) — эквипотенциальная поверхность в электростатическом поле.

Запишем потенциал поля тяготения Земли в точке A , находящейся далеко от полости, и в точке B , находящейся непосредственно над полостью (рис. 12). В точке A наличием полости можно пренебречь и считать потенциал равным

$$\Phi_A = -\gamma \frac{M}{R},$$

где R — радиус Земли, $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_n$ — ее масса. Чтобы найти потенциал в точке B , воспользуемся принципом суперпозиции. Рисунок 13 иллюстрирует суперпозицию полей тяготения Земли и полости. Из рисунка понятно, что потенциал в точке B складывается из потенциала поля тяготения Земли (без полости) и поля тяготения шаровой массы с плотностью $\rho_n - \rho_n$, то есть точечной массы $\mu = \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_n - \rho_n)$, где r — радиус полости, ρ_n — плотность воды. Итак (см. рис. 13).

$$\Phi_B = -\gamma \frac{M}{R - \delta} + \left(-\gamma \frac{\mu}{r + h - \delta} \right).$$

Поскольку поверхность океана — эквипотенциальная, $\Phi_A = \Phi_B$, то есть

$$\frac{M}{R} = \frac{M}{R - \delta} + \frac{\mu}{r + h - \delta}.$$

Преобразуем это выражение:

$$-M \frac{\delta}{R(R - \delta)} = \frac{\mu}{(r + h) - \delta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{M}{\mu} [(r + h)\delta - \delta^2] = R(R - \delta).$$

Пренебрегая δ^2 в левой части и δ — в правой, получаем

$$-\frac{M}{\mu} (r + h)\delta \approx R^2,$$

или, подставляя $-\frac{M}{\mu} = -\frac{R^3}{r^3} \frac{\rho_{\text{п}}}{(\rho_{\text{п}} - \rho_{\text{в}})}$,

$$\frac{(r + h)}{r^3} \frac{R\delta\rho_{\text{п}}}{(\rho_{\text{п}} - \rho_{\text{в}})} \approx 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{r^3}{(r + h)} \approx \frac{\rho_{\text{п}}}{(\rho_{\text{п}} - \rho_{\text{в}})} R\delta = \frac{3}{2} \cdot 6,4 \cdot 10^6 \cdot 25 \text{ (м}^2\text{)}$$

(здесь подставлены численные значения $R = 6,4 \cdot 10^6$ м, $\rho_{\text{п}} = 3 \cdot 10^3$ кг/м³, $\rho_{\text{в}} = 1 \cdot 10^3$ кг/м³, $\delta = 25$ м). Мы не будем решать это кубическое уравнение относительно r , а лишь оценим значение r . Для оценки воспользуемся тем, что функция $r^3/(r + h)$ монотонно возрастает при $r > 0$.

Непосредственными вычислениями легко убедиться, что r заключено в интервале между 18 км и 20 км.

А. Стасенко



Ф535. Потенциальная энергия взаимодействия двух одинаковых заряженных маленьких шариков с зарядами

$$q_1 \text{ и } q_2 \text{ равна } W_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 l},$$

где l — расстояние между центрами шариков. Если шарики соединить проволокой, заряды шариков станут одинаковыми, и потенциальная энергия взаимодействия шариков станет равной

$$W_2 = \frac{(q_1 + q_2)^2}{16\pi\epsilon_0 l}. \quad \text{Так}$$

как $(q_1 + q_2)^2 > 4q_1 q_2$ (при $q_1 \neq q_2$), то $W_2 > W_1$, то есть потенциальная энергия взаимодействия зарядов возрастает! Откуда берется дополнительная энергия?

Рассуждения, приведенные в условии задачи, не верны: в них учтена только потенциальная энергия взаимодействия шариков и не учтена энергия электростатического поля отдельных зарядов.

Энергия электростатического поля отдельного (изолированного) шарика с зарядом q равна работе, которая совершается при зарядке шарика. Ее можно рассматривать как энергию сферического конденсатора, внешняя обкладка которого находится бесконечно далеко от внутренней (от шарика). Эту энергию можно вычислить по формуле $W = \frac{1}{2} qU$, где q — заряд конденсатора (заряд шарика), U — разность потенциалов его пластин. В нашем случае U равно потенциалу φ шарика по отношению к бесконечности (где потенциал принят равным нулю):

$$U = \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, \quad \text{где } r \text{ — радиус шарика.}$$

Таким образом, $W = \frac{1}{2} q\varphi = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r}$. Энергия системы до соединения шариков проволокой равна

$$W_1 = \frac{q_1^2}{8\pi\epsilon_0 r} + \frac{q_2^2}{8\pi\epsilon_0 r} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 l},$$

а после соединения —

$$W_2 = 2 \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l} = \frac{(q_1 + q_2)^2}{16\pi\epsilon_0 r} + \frac{(q_1 + q_2)^2}{16\pi\epsilon_0 l},$$

где $q = (q_1 + q_2)/2$.

Так что

$$W_1 - W_2 = \frac{(q_1 - q_2)^2}{16\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{l} \right) > 0,$$

то есть $W_1 > W_2$. Это и естественно, так как при соединении шариков проволокой часть энергии выделилась в виде джоулева тепла.

И. Слободецкий

Ф536. Жесткая прямо-угольная конструкция AOB

($\angle AOB = 90^\circ$) вращается вокруг вертикальной оси OO' ,

так что $\angle AOO' = \alpha$ (рис. 14). С помощью колец, которые могут свободно скользить по сторонам AO и OB , на конструкцию надет легкий стержень KE длины $2a$. К середине стержня прикреплен небольшой массивный шарик. При какой угловой скорости вращения конструкции стержень займет горизонтальное положение?

Когда стержень KE находится в горизонтальном положении, шарик вращается вокруг оси OO' по окружности радиуса $r = a \sin(\pi/2 - 2\alpha) = a \cos 2\alpha$ (см. рис. 14). Центробежное ускорение $\omega^2 r$ (ω — угловая скорость вращения конструкции) шариком сообщает сила \vec{R} реакции стержня (ее горизонтальная проекция). Запишем уравнение движения шарика в проекциях на оси X и Y (рис. 15):

$$\begin{aligned} R_x &= m\omega^2 r = m\omega^2 a \cos 2\alpha, \\ R_y &= mg \end{aligned} \quad (1)$$

(R_x, R_y, mg — модули проекций векторов \vec{R} и $m\vec{g}$). Теперь запишем уравнение движения невесомого стержня KE в проекциях на оси X и Y (см. рис. 15):

$$\begin{aligned} N_1 \cos \alpha - R'_x - N_2 \sin \alpha &= 0, \\ N_1 \sin \alpha - R'_y + N_2 \cos \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

($\vec{R}' = -\vec{R}$ — действующая на стержень сила реакции шарика; \vec{N}_1, \vec{N}_2 — действующие на стержень силы реакций «плеч» OA и OB конструкции; $R'_x, R'_y, N_1 \cos \alpha, N_2 \sin \alpha$ и т. п. — модули соответствующих проекций; $R'_x = R_x, R'_y = R_y$).

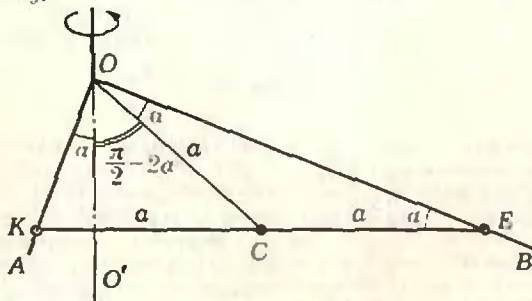


Рис. 14.

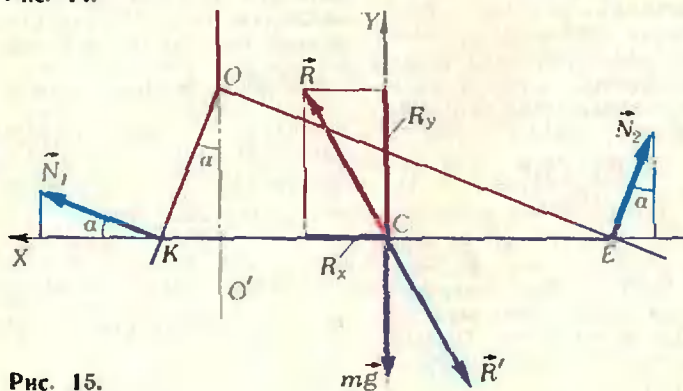


Рис. 15.

Условием того, что стержень занимает горизонтальное положение, является равенство нулю суммы моментов сил, действующих на стержень, относительно горизонтальной оси, перпендикулярной плоскости конструкции. Запишем уравнение моментов относительно точки C :

$$|\vec{N}_1| a \sin \alpha - |\vec{N}_2| a \cos \alpha = 0. \quad (3)$$

Из уравнений (1) — (3) находим:

$$\omega = \sqrt{g/(a \sin 2\alpha)}.$$

С. Кротов



Задачи

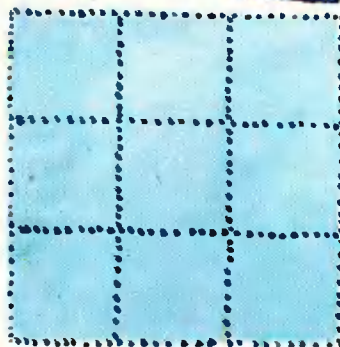
1. Разность двух целых чисел, являющихся полными квадратами, оканчивается на 2. На какие цифры оканчиваются уменьшаемое и вычитаемое, если последняя цифра уменьшаемого больше последней цифры вычитаемого?

2. Найдите все двухзначные числа \overline{ab} , обладающие тем свойством, что трехзначное число $\overline{a0b}$ кратно исходному.

3. В футбольном турнире каждая пара команд должна встретиться между собой один раз. В среду, после очередного тура, Боря подсчитал, что четное число встреч провели семь команд. После следующего тура Боря обнаружил, что четное число встреч по-прежнему имеют семь команд! Возможно ли такое? Если да, то можно ли определить, сколько команд участвовало в турнире? (Расписание турнира, разумеется, составлено так, что в каждом туре свободно не более одной команды.)

4. Коля отправился за грибами где-то между восемью и девятью часами утра, в момент, когда стрелки его часов были совмещены. Домой он вернулся между двумя и тремя часами дня; при этом стрелки его часов были направлены в прямо противоположные стороны. Сколько длилась прогулка Коли?

5. Сколькими способами девять конгруэнтных квадратиков: три красных, три белых и три синих, — можно расположить в виде квадрата 3×3 так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце встречались квадратик всех цветов?



Веселая викторина



В этом номере мы предлагаем шуточные и занимательные задачи, для решения которых не нужно ни карандаша, ни бумаги. Эти задачи можно использовать на викторинах, в математических боях и КВНах.



1. Десять монет расположены так, как показано на рисунке 1. Какое наименьшее число монет нужно убрать, чтобы центры любых трех из оставшихся монет не были расположены в вершинах правильного треугольника?

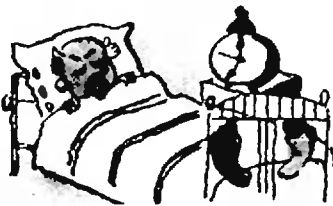
2. Придумайте четыре целых числа, сумма и произведение которых являются нечетными числами.



3. На часах 8 часов 20 минут. Чему равен угол между стрелками?

4. Может ли сумма трех последовательных натуральных чисел быть простым числом?

5. Начнем считать пальцы на правой руке. Первым будет большой, вторым — указательный, третьим — средний, четвертым — безымянный, пятым — мизинец, шестым — снова безымянный, седьмым — средний, восьмым — указательный, девятым — большой, десятым — указательный, и т. д. Какой палец будет 1979-м?



6. Существуют ли треугольники, у которых середины всех высот лежат на одной прямой?

7. Сильно устав, физик лег спать в семь часов вечера, поставив будильник на 9 часов следующего утра. Сколько часов ему удастся проспать до звонка будильника?



8. Горело 7 свечей, три из них потушили. Сколько осталось?

9. Стороны треугольника равны 17, 35 и 18. Чему равна его площадь?

10. Какую последнюю цифру имеет произведение всех нечетных чисел от 1 до 99?



11. Когда Коля вышел из леса со своей собакой Жучкой, из деревни в лес направился его брат Витя. Жучка сразу же побежала к дому, но встретив Витю, повернула и помчалась навстречу Коле. Добежав до Коли, она снова повернула и побежала к Вите. Так она бегала пока братья не встретились. Какое расстояние пробежала Жучка, если Коля шел со скоростью 3 км/час, Витя со скоро-

стью 5 км/час, а Жучка бегала со скоростью 8 км/час? Расстояние от леса до деревни равно 4 км.

12. Две ракеты летят навстречу друг другу со скоростями 15000 км/час и 21000 км/час. Их стартовые площадки находятся на расстоянии 1979 км одна от другой. Какое расстояние будет между ракетами за минуту до столкновения?

13. Какое число делится (без остатка) на все числа?

14. Названия каких литературных произведений начинается с чисел 3, 12, 20, 80000?

15. В равнобедренном треугольнике основание вдвое длиннее высоты. Чему равны его углы?

16. Угол в 1° рассматривают в лупу, дающую четырехкратное увеличение. Какой величины покажется угол?



Предлагаем также несколько игр. В каждой из них существует стратегия, позволяющая одному из игроков выиграть. Постарайтесь не просто играть, но и найти эту выигрышную стратегию.

Игра 1. Имеется две кучки камешков: в одной 13, а в другой 10 камешков. Двое по очереди берут камешки: либо любое количество из произвольной кучки, либо из обеих кучек поровну. Выигрывает тот, кто берет последние камни.

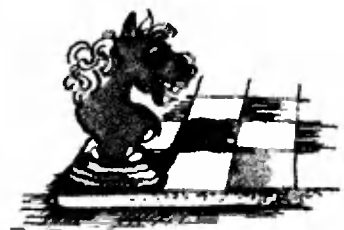
Игра 2. Из кучки в 25 камешков двое по очереди берут один, два или три камешка. Выигрывает тот, у кого в конце будет четное число камешков.

Игра 3. Есть две кучки конфет, по 9 в каждой. Двое играют в такую игру: за один ход нужно переложить из одной кучки в другую одну конфету и съесть две конфеты из одной какой-нибудь кучки. Ходы делаются по очереди. Тот, кто не сможет сделать ход, проиграл.

Игра 4. На шахматную доску двое ставят свои фишки: первый — белую, а второй — черную. Далее они по очереди передвигают свои фишки каждый раз на одно из соседних (по горизонтали или вертикали) полей. Выигрывает тот, кто ставит свою фишку на фишку противника.

Игра 5. В углу шахматной доски стоит фигура — конь. Двое по очереди отмечают на доске мелом по одной клетке так, чтобы конь мог пройти в любую неотмеченную клетку, не становясь в отмеченные клетки. Тот, кто не сможет сделать очередного хода, проигрывает.

А. Савин





Новые картинки к калейдоскопу

В «Кванте» № 11 за 1978 год была опубликована небольшая заметка о разбиении правильного шестиугольника на девять одинаковых частей. Несколько разбиений было помещено на обложке.

Присмотревшись к этим разбиениям, наш читатель *Е. Коган* из Москвы заметил, что во всех случаях диагонали шестиугольника, проходящие через его центр, делят каждую фигуру разбиения на две одинаковые части (см. рисунок). Таким образом, в каждом из шести правильных треуголь-

ников оказывается по три конгруэнтные части, причем при повороте любого из них около центра на 120° разбиение переходит в себя. Это замечание позволяет строить разбиения треугольника и получать новые разбиения шестиугольника на 18, а следовательно, и на 9 одинаковых частей. Некоторые из получающихся таким образом разбиений *Е. Коган* прислал в редакцию. А какие разбиения можете предложить вы?



С учетом специальности

Современный рабочий с его активным, творческим отношением к делу, заботящийся о повышении производительности труда и качества продукции, участвующий в рационализаторской и изобретательской деятельности, немалым без глубоких профессиональных знаний. Основой таких знаний является общее образование. Одним из элементов, обеспечивающих человеку современный научный и культурный кругозор, является знание математики. Математика — это одно из слагаемых культуры современного человека и один из главных инструментов, постоянно применяющихся при решении многих практических задач.

Неудивительно поэтому, что в профессионально-технических училищах (ПТУ), готовящих кадры для различных отраслей промышленности и сельского хозяйства, такое большое внимание при обучении уделяется математике. Преподавание математики в ПТУ не должно слепо копировать преподавание этого предмета в общеобразовательной школе. Здесь нужно не только изучить всю «школьную» математику, но и научить применять ее в специфических задачах, возникающих в конкретной профессиональной области. Вот почему появились учебники, предназначенные для системы профессионально-технического образования, и что, пожалуй, еще более ценно, — специальные сборники задач.

В качестве весьма удачного такого сборника можно отметить книгу Н. А. Терешина*). Эта книга содержит 425 задач, наглядно иллюстрирующих многообразные связи теоретического курса математики с конкретными проблемами, возникающими в различных областях сельскохозяйственного производства. Здесь можно найти чисто учебные упражнения, сформулированные как задачи практического содержания, довольно интересные задачи на исследование функций и вычисление площадей и объемов, которые имеют вполне конкретный реальный смысл и действительно возникают в процессе производства, задачи, требующие выявления количественных математических зависимостей при анализе технологических процессов. Автор успешно решает проблему межпредметных связей — широко используются сведения и факты из физики, химии, биологии, а также из специальных предметов, изучаемых учащимися средних сельских профтехучилищ. Особенно хочется отметить наличие задач, требующих расчетов по специальным эмпирическим формулам из смежных дисциплин, что позволяет учащимся осознать границы применимости строгих математических рассуждений при решении прикладных проблем.

Составление подобного сборника задач — дело довольно трудоемкое и сложное: найти одну доступную и в то же время содержательную задачу много труднее, чем выписать два десятка уравнений или «стандартных» упражнений на решение треугольников. Поэтому инициатива автора заслуживает

всяческой поддержки. Учащиеся ПТУ работают по этой книге вот уже пять лет. Этот срок вполне достаточен для ее апробации, и надо отметить, что это пособие с честью выдержало испытание временем. Конечно, за это время выявились и отдельные недочеты, которые, однако, не влияют на высокую оценку, которую получила эта книга у математической общественности.

Так как эта книга стала библиографической редкостью, мы надеемся, что ее переиздание не заставит себя долго ждать.

Хотелось бы, чтобы при подготовке нового издания автор устранил отдельные недостатки. Так, явно недостаточно представлены в книге задачи с экономическим содержанием (очень полезны были бы простейшие задачи с элементами линейного программирования и задачи на вычисление экстремумов функций с «ломаными» графиком), задачи, связанные с вопросами селекции и генетики, задачи, связанные с вопросами электротехники и электрорификации. Не уделяется внимания таким важным с прикладной точки зрения аспектам, как графическое изображение зависимостей в виде кривых, диаграмм, схем. Терминология автора и применяемая им символика сегодня уже не соответствуют принятым в школьном курсе математики. Устранение этих недостатков сделает задачник еще более полезным.

Было бы очень хорошо, чтобы это полезное начинание не ограничивалось только рамками математики, и на книжных прилавках появились подобные «специализированные» задачки для профессионально-технических учебных заведений и по другим дисциплинам (физика, химия и т. д.).

Н. Розов

*) Терешин Н. А. Сборник задач по математике для средних сельских профтехучилищ (М., «Высшая школа», 1974).

По страницам новой книги

Прямые и кривые

Математика — большой и очень своеобразный мир идей, удивляющий красотой покоренных и непокоренных вершин, ажурных мостов, переброшенных через пропасти и соединяющих одну горную страну фактов и методов с другой. Однако эти поражающие воображение горизонты открываются лишь тем, кто сумел проникнуть в мир математики, научился видеть скрытую от непосвященных красоту, постиг трудное умение видеть в окружающем мире чудесный калейдоскоп фигур, чисел и математическую логику. Но проникнуть в мир математических идей непросто: помимо способностей и интереса нужны еще настойчивость, воля, желание и умение много работать. Лишь большая систематическая работа и, в частности, решение задач могут принести школьнику успех в математике.

Но вот все есть: и интерес к математике, и страстное желание решать задачи (особенно «трудные»), и усидчивость, и трудолюбие. И тогда возникает основной вопрос: что читать и какие решать задачи? Ведь если прочитанная книга окажется устаревшей, не проникнутой современным «духом» математики и ее приложений, или если ре-

шаемые задачи окажутся не способствующими развитию хорошего вкуса и исследовательской жилки, не нацелены на овладение новыми методами и расширение кругозора, то что-то невосполнимо потеряно в воспитании и становлении будущего математика. Но если выбранная книга будет удачной, то она окажется добрым и опытным учителем и наставником, и это может служить гарантией того, что она поможет в воспитании хорошего вкуса, приобретению кругозора и исследовательских навыков.

Именно таким добрым и опытным наставником юного математика, по нашему мнению, является книга Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «Прямые и кривые»^{*}). Книга содержит интересный подбор задач, решая которые, читатель, — может быть, еще не осознавая этого — приобщается к духу и идеям современной математики. Здесь связаны (особенно в излагаемых решениях узловых задач, которые служат своеобразным маяком для читателя) язык теории множеств и метод координат, использование различных перемещений и комбинаторические соображения (которым авторы придают форму «теорем о колечках»), векторные методы решения задач и логические связи между элементами условия. При этом одна и та же задача часто рассматривается с различных точек зрения, решается разными методами, что позволяет, сравнивая эти методы, приобрести нужный кругозор.

Как вы увидите, эта книга не рассчитана на легкое чтение, наоборот, она учит трудолюбию,

усидчивости, умению упорно работать над решением задач, помогает сделать трудную работу по приобретению навыков решения задач увлекательной и интересной. При этом она одинаково удобна и для начинающего школьника, и для кружковца, уже умудренного опытом решения задач. Несомненно, решение этих задач и усвоение теоретического текста гарантирует воспитание у школьника математической культуры, умение самостоятельно мыслить, видеть взаимосвязь методов и математических идей на доступном читателю уровне.

Мы выбрали из этой книги цикл задач, связанных с одной темой — вписанные углы. Эта тема начинается в 7-м классе (п. 64, «Геометрия 7»), затем продолжается в 8-м классе (п. 111, «Геометрия 8»). Нам представляется, что школьникам 7-х классов будет интересно ознакомиться с этой темой в целом, а школьникам старших классов будет полезно повторить всю последовательность соответствующих теорем.

Вписанные углы

Задача 1. *Лестница, стоящая на гладком полу у стены, соскальзывает вниз. По какой линии движется котенок, сидящий на середине лестницы?*

Ответ (вероятно, неожиданный). Котенок движется по окружности.

Пояснение. Середина M данного отрезка KL ($|KL|=d$) всегда находится на расстоянии $d/2$ от точки O (рис. 1). Это следует из теоремы: *длина медианы OM прямоугольного треугольника KOL равна половине длины гипотенузы KL* . (В ее справедливости легко убедиться, построив треугольник KOL до прямоугольника $KOLT$ и вспомнив, что диагонали прямоугольника KL и OT равны по длине и точкой пересечения M делятся пополам: см. рис. 2, 3)

Посмотрим теперь на движение лестницы дру-

^{*}) Н. Б. Васильев и В. Л. Гутенмахер. «Прямые и кривые». М., «Наука», 1978, изд. 2-е, перераб.

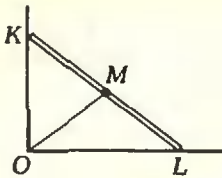


Рис. 1.

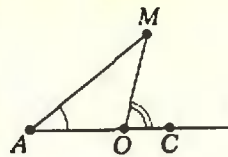


Рис. 4.

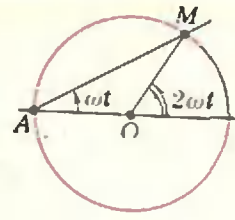


Рис. 7.

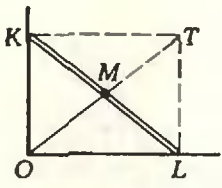


Рис. 2.

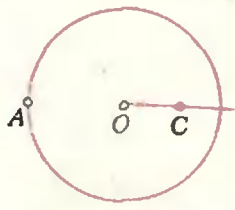


Рис. 5.

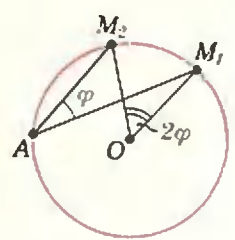


Рис. 8.

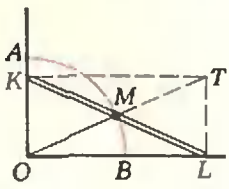


Рис. 3.

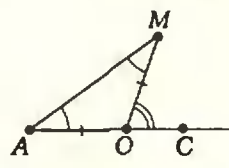


Рис. 6.

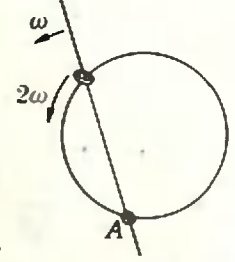


Рис. 9.

гим способом. Пусть отрезок KL («лестница») закреплён, а прямые KO и LO («стена» и «пол») вращаются соответственно вокруг точек K и L так, что угол между ними остаётся прямым. На этот раз тот факт, что расстояние от середины отрезка до вершины O прямого угла все время одно и то же, превращается в теорему А из п. 64 «Геометрии 7»: если на плоскости заданы две точки K и L , то точки O , для которых $\angle KOL = 90^\circ$, лежат на окружности с диаметром KL .

Задача 2. Точка O лежит на отрезке AC . Найдите множество точек M , для которых $MOC = 2MAO$ (рис. 4).

Ответ. Объединение окружности с центром O радиуса AO (без точки A) и луча OC (без точки O) — см. рисунок 5.

Пояснение. Пусть точка M искомого множества не принадлежит прямой AO . Докажем, что $|OM| = |AO|$. Построим треугольник OAM (рис. 6). По теореме о внешнем угле

треугольника $OAM + \angle AMO = \angle MOC$. По условию $MOC = 2MAO$.

Из условия задачи сразу получаем $\angle OAM = \angle AMO$; следовательно, треугольник AMO равнобедренный, то есть $|OM| = |AO|$.

На языке «движения» результат задачи 2 можно представить себе так: пусть прямая AM вращается вокруг точки A с постоянной угловой скоростью ω (то есть за единицу времени поворачивается на угол величины ω), а прямая OM вращается вокруг точки O с угловой скоростью 2ω , причем в начальный момент времени обе прямые совпали с прямой AO (рис. 7). Тогда точка M пересечения этих прямых движется по окружности с центром O .

Отсюда мы можем извлечь теорему о вписанном угле (теорема 62 из п. 111 «Геометрии 8»). Если прямая AM за время t поворачивается из положения AM_1 в положение AM_2 на угол ωt , то прямая OM поворачивается на

угол $2\omega t$, другими словами, величина вписанного угла M_1AM_2 равна половине угловой величины соответствующего центрального угла M_1OM_2 (рис. 8).

Можно сформулировать эту теорему более наглядно:

Теорема о колечке на окружности * На проволочную окружность надето маленькое колечко. Вокруг точки A окружности вращается стержень, который проходит через это колечко. Если стержень вращается равномерно с угловой скоростью ω , то колечко при этом бежит по окружности равномерно с угловой скоростью 2ω (рис. 9).

*) Заметим, что теорему о колечке не следует понимать в буквальном смысле: воображаемое «колечко» — просто точка пересечения прямой и окружности; если же сделать проволочную модель, то после одного оборота (в ту или другую сторону) колечко застрянет.

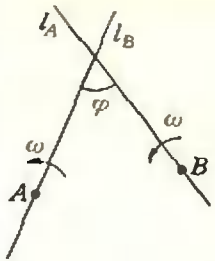


Рис. 10.

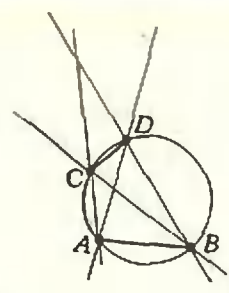


Рис. 13.

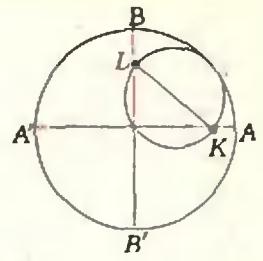


Рис. 16.

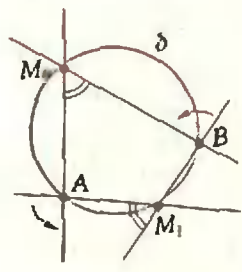


Рис. 11.

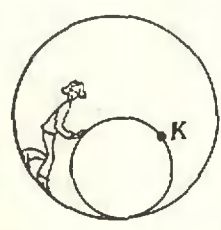


Рис. 14.

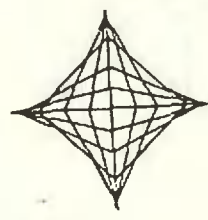


Рис. 17.

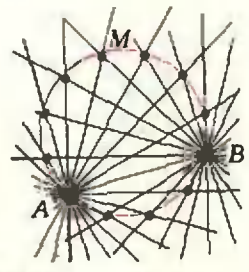


Рис. 12.

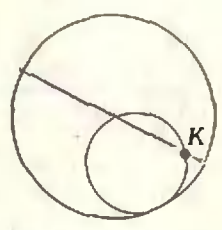


Рис. 15.

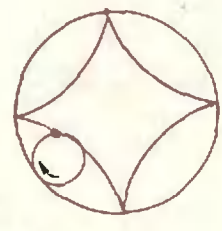


Рис. 18.

Еще один вариант теоремы о вписанном угле и о колечке на окружности:

Теорема о вращающихся прямых. Если две пересекающиеся прямые l_A и l_B вращаются в плоскости вокруг своих точек A и B с одинаковой угловой скоростью ω (рис. 10); при этом, конечно, величина угла между ними остается постоянной), то траектория точки пересечения этих прямых — окружность.

Пояснение. Построим окружность δ , проходящую через три точки: A , B и еще одно положение M_0 точки пересечения прямых l_A и l_B (рис. 11). По теореме «о колечке на окружности» точка пересечения прямой l_A и окружности δ движется по окружности δ равномерно с угловой скоростью 2ω . Точно так же движется и точка пересечения l_B с окружностью δ . Поскольку в один момент времени эти точки совпадают (положение M_0), то они совпа-

дают и в любой другой момент времени. Отсюда следует утверждение теоремы.

Задача 3. Сделайте самостоятельно рисунок, иллюстрирующий теорему о вращающихся прямых.

Пояснение. Начертите окружность, разбейте ее на 12 равных частей. Проведите через одну из точек деления A и остальные точки деления прямые, а также касательную к окружности в точке A (рис. 12; получится пучок из 12 прямых, разделяющих плоскость на 24 равных по величине углов). Двигая карандаш по окружности; можно убедиться, что при переходе от точки деления M к следующей точке деления прямая AM поворачивается на один и тот же угол. Выберите еще одну точку деления B (скажем, четвертую от A) и постройте для нее такой же пучок из 12 прямых, как для точки A . Отметьте для каждой точки деления M острый угол между пря-

мыми AM и BM (все эти углы одинаковы!).

Из теоремы о вращающихся прямых следует, что если продолжить все 23 построенные прямые до пересечения, то все 110 полученных точек пересечения (не считая A и B) лежат на одиннадцати окружностях — по десять на каждой.

Задача 4. Хорда AB окружности закреплена, а хорда CD перемещается, не меняя своей длины. По какой линии движется точка пересечения прямых: а) AD и BC ; б) AC и BD (рис. 13)?

Пояснение. Пусть точка D равномерно движется по данной окружности, тогда и точка C равномерно движется по ней, а следовательно, и прямые AD , BC , AC , BD равномерно вращаются вокруг точек A и B (с одной и той же угловой скоростью). Согласно теореме о вращающихся прямых точки пересечения соответствую-

щих прямых движутся по окружностям.

Эта задача тесно связана с задачами 12*, 13* из п. III «Геометрии 8».

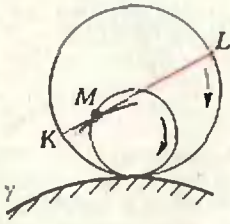


Рис. 19.

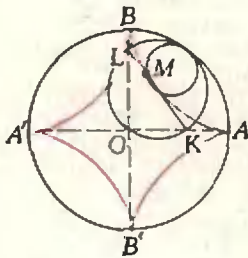


Рис. 20.

Задача 5. По неподвижной окружности, касаясь ее изнутри, катится без скольжения окружность вдвое меньшего радиуса. Какую линию описывает точка K подвижной окружности (рис. 14)?

Ответ в этой задаче до удивления простой: точка движется по прямой, точнее — по диаметру неподвижной окружности (рис. 15). Этот результат называется теоремой Коперника.

Попробуйте убедиться в справедливости теоремы Коперника на опыте. Ее нетрудно и доказать — нужно лишь вспомнить теорему о вписанном угле.

Сравним результаты задач 1 и 5. В обеих задачах речь идет о довольно сложном движении фигуры (в первой — отрезка, во второй — окружности), но траектории некоторых точек получаются неожиданно простыми. Оказывается, эти две задачи похожи не только внешне, но и сами движения, рассмотренные в них, совпадают!

Действительно, пусть по окружности радиуса d изнутри катится окружность радиуса $d/2$, и пусть KL — диаметр этой окружности, жестко связанный с ней. Согласно теореме Коперника точки K и L движутся по неподвижным прямым (диаметрам большой окружности — AA' и BB' соответственно; рис. 16). Итак, диаметр KL скользит своими концами по двум взаимно перпендикулярным прямым, то есть движется так, как отрезок в задаче 1.

Поставим еще вопрос, связанный с движением отрезка KL :

Задача 6. Какое множество точек замечает этот отрезок, то есть каково объединение всевозможных положений отрезка KL при его движении?

Ответ. Кривая, ограничивающая это множество, называется *астроидой* (рис. 17). Оказывается, ее можно получить так: заставить круг диаметра $d/2$ катиться изнутри по окружности диаметра $2d$ и нарисовать траекторию какой-то определенной точки окружности катящегося круга (рис. 18; эта траектория и есть астроида).

Прежде чем пояснять задачу 6, сформулируем любопытное правило, позволяющее наглядно описать семейство касательных к траектории точки M окружности радиуса r , катящейся без скольжения по некоторой линии γ (рис. 19). Покатим по той же линии γ окружность радиуса $2r$ вместе с ее диаметром KL (жестко с ней скрепленным), причем диаметр выберем так, что в некоторый момент времени его конец K и точка M попадают в одну и ту же точку A линии γ . Оказывается, что тогда в любой момент времени диаметр KL касается траектории точки M . Другими словами, *эта траектория служит огибающей всех положений диаметра KL* . Это удобное правило мы назовем *теоремой о двух кругах*. Эта теорема тесно связана с теоремой Коперника.

Если две окружности, о которых идет речь

в теореме, катить одновременно так, чтобы точки их соприкосновения с кривой γ все время совпадали, то меньшая окружность будет катиться по большей без скольжения. Тогда по теореме Коперника точка M будет двигаться по фиксированному диаметру KL большей окружности. А теорема о двух кругах утверждает, что прямая KL будет касательной, проведенной в точке M , к траектории этой точки.

Пояснение к задаче 6. Пусть окружность радиуса r с отмеченной точкой M катится изнутри по окружности радиуса $R=4r$. Покатим вместе с ней окружность радиуса $2r$ вместе с ее диаметром KL (рис. 20; в начальный момент точки K и M совпадают с точкой A неподвижной окружности). По теореме Коперника концы диаметра KL скользят по двум взаимно перпендикулярным диаметрам AA' и BB' неподвижной окружности. В то же время по теореме о двух кругах диаметр KL при своем движении касается траектории точки M , то есть огибающей прямых KL служит астроида с остриями в точках A, B, A', B' .

В. Болтянский,
М. Смолянский

Путеводитель по звездным лабиринтам

Говорят, что, когда у Анаксагора, греческого философа, жившего в V веке до н. э., спросили: «Ради чего лучше родиться, чем не родиться?», мудрец ответил: «Чтобы созерцать небо и устройство всего космоса!».

На протяжении веков люди расширяли свои знания об устройстве космоса. Из поколения в поколение передавались способы и приемы, воспользовавшись которыми можно сравнительно быстро освоиться с наиболее яркими звездами и наиболее приметными созвездиями.

Эти способы и приемы в известной степени нашли свое отражение в школьной программе по астрономии и в общеобразовательных программах для СПТУ. Но курс астрономии в школе и ПТУ изучается на пороге выпуска из этих учебных заведений. Поэтому, не дожидаясь, пока вы станете десятиклассником или учащимся III курса ПТУ, займитесь уже сейчас изучением звездного неба с помощью научно-популярных книг и журналов. Мы уверены, что знание звездного неба пригодится каждому из вас. Вашими помощниками могут стать книги Ф. Ю. Зигеля «Сокровища звездного неба» (М., «Наука», 1976), М. М. Дагаева «Наблюдения звездного неба» (М., «Наука», 1978), серии статей, публикуемые в научно-популярных журналах «Земля и Вселенная» и «Наука и жизнь». В 1978 году издательство «Наука» выпустило путеводитель по звездному небу — книгу Б. А. Максначева и В. Н. Комарова «В звездных лабиринтах. Ориентирование по небу». Чем она

интересна? Прекрасно сказал об этом в предисловии к книге Герой Советского Союза, летчик-космонавт СССР В. В. Лебедев: «Предлагаемая читателю книга поможет ему не только познакомиться со звездным небом, но и научит его приемам быстрого и уверенного отыскания созвездий и навигационных звезд, окажет практическую помощь не только любителям астрономии, но и всем тем, кто по роду своей деятельности встречается с задачей ориентирования по звездам, — геодезистам, картографам, штурманам, летчикам-космонавтам».

Начало книги знакомит читателя с «небесной геометрией» (так называют авторы книги основы сферической астрономии), дает представление о небесной сфере, угловых измерениях на ней, системах небесных координат, особенностях суточного движения небесных светил на разных географических широтах. Авторы рассказывают об основных методах определения географической широты и долготы, о принципах астрономической навигации.

Теперь, когда читатель подготовлен к «самому главному», авторы начинают вести его по «пути к созвездиям». Процесс изучения звездного неба авторы делят на два этапа: сначала знакомят с основными созвездиями и (что очень важно!) с входящими в них объектами. Потом переходят к распознаванию фигур созвездий, правилам их отыскания на небе и перехода от одного созвездия к другому. «Мы будем знакомиться с созвездиями и звездами так, как знакомимся с новыми для нас людьми: сначала это просто люди с различными именами, принадлежащие к тем или иным группам, потом в каждом из них открывается что-то свое, особенное, присущее только данному индивидууму...»

Созвездиями, «озаренными Солнцем», называют авторы зодиакальные созвездия, в которых по месяцу успевает «погостить» дневное светило. Конечно, созвездие, в котором Солн-

це находится сейчас, увидеть можно либо на электрическом небе планетария, либо на настоящем небе в редкие минуты полных солнечных затмений. Но эта трудность не лишает нас возможности изучать зодиакальные созвездия. Не нужно только торопиться: давайте сегодня поздно вечером познакомимся с зодиакальным созвездием, кульминирующим в полночь. В нем Солнце было полгода назад, а тем созвездием, в котором Солнце «находится» сегодня, мы будем любоваться через полгода (по-скольку кажущееся годовичное движение Солнца есть отражение действительного движения Земли вокруг Солнца).

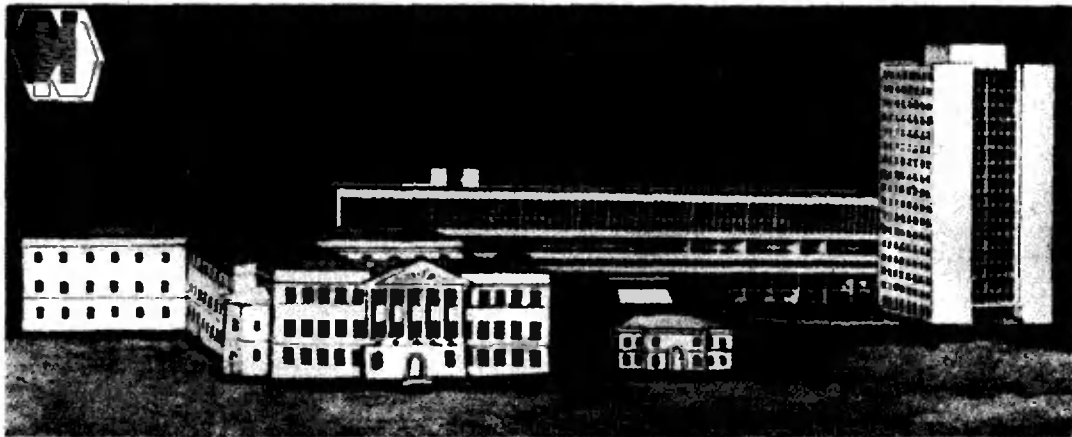
На наш взгляд, книга интересна. Тем более досадно, что в ней встречаются некоторые неточности. Так, не следует писать, что «Капелла бледнее [курсив Е. Л.] многих других звезд...» (с. 89). «В созвездии Змеи лишь одна звезда... а ярче третьей величины (все остальные — четвертой величины)» (с. 156) и т. п.

Изучать звездное небо вы обязательно будете с помощью звездных карт и астрономических календарей. О них подробно рассказывается в книге, а небольшой комплект звездных карт вложен в книгу. Важным дополнением к этим пособиям явятся многочисленные схематические изображения отдельных созвездий и групп созвездий, которыми хорошо иллюстрирована книга.

Заключительная глава книги посвящена Луне и планетам Солнечной системы. В параграфе «Чтобы не заблудиться на Луне» довольно подробно объясняется необходимость астроориентировки на Луне и сообщается немало интересных сведений из области «лунной астрономии».

Мы желаем успеха тем, кто отправится в увлекательное путешествие по звездным лабиринтам!

Е. Левитан



Наш журнал уже неоднократно рассказывал о ведущих вузах страны. В этом номере мы расскажем об одном из старейших вузов — Московском ордена Ленина институте инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии.

Указом Президиума Верховного Совета СССР 11 апреля 1979 года Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии «за заслуги в подготовке высококвалифицированных специалистов для народного хозяйства, значительный вклад в развитие науки и в связи с 200-летием со дня основания» награжден орденом Ленина.

Старейший технический вуз страны

Московский ордена Ленина институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии ведет свою историю от Константиновского землемерного училища, открытого 14 (27) мая 1779 г. Одним из оснований для создания такого учебного заведения послужило подписание Екатериной II в 1765 году Манифеста о Генеральном межевании земель Российской империи. В 1766 г. была издана «Инструкция землемерам к Генеральному всей Империи земель размежеванию». В указанной инструкции в части, касающейся съемок, говорилось: «Снятие производить через вернейший инструмент — астролябию

с принадлежностями, которые, приняв, осмотреть с прилежанием в ее исправности и содержать в крайнем бережении, чтобы оный не испортился».

Для организации и производства работ по Генеральному межеванию в составе Правительствующего Сената была на правах департамента образована Межевая экспедиция, в Москве — Межевая канцелярия, в губерниях — Межевые конторы; было учреждено звание землемеров.

Естественно, встал вопрос о подготовке лиц, владеющих искусством измерений на Земле, — землемеров (по современной терминологии — геодезистов).

Указом Правительствующего Сената от 23 апреля 1779 г. было предписано начать при Межевой канцелярии обучение землемерному делу помощников и учеников. Рапортом в Сенат по Межевой экспедиции 16 мая 1779 г. Межевая канцеля-

рия доносила: «...училище... открыто сего мая 14 дня..., сие землемерное училище наименовано Константиновским».

Основателем училища и его как бы директором был первый член (директор) Межевой канцелярии, обер-прокурор Сената тайный советник Сергей Рожнов.

В первый год в училище обучалось 75 человек.

Если учесть, что первый состав учеников КЗУ более чем на половину состоял из землемерных помощников, т. е. людей взрослых и образованных, то уровень подготовки в Землемерном училище по тем временам надо признать самым высоким в области геодезии для нужд Генерального межевания.

Первая, наиболее существенная, реформа КЗУ после его основания была проведена в 1819 г., когда были утверждены устав училища и новый штат. Вместо 100 учеников по новому уставу полагалось 200. Срок обу-

чения составлял 4 года; перевод из нижних классов в высшие производился только по экзаменам. Училище было открытым, с лекционной системой, а все ученики — приходящими.

Главным поводом для очередной реорганизации КЗУ была нехватка землемеров, что привело к преобразованию в 1835 г. училища в Константиновский межевой институт.

Первым директором КМИ был назначен известный русский писатель С. Т. Аксаков.

При приеме детям землемеров и чиновников Межевого ведомства отдавалось предпочтение.

Срок обучения был сохранен прежний — 4 года; особое внимание обращалось на необходимость практической выучки по геодезии в полевых условиях, на что отводилось в два последние года обучения время с 15 июня по 1 августа. Добавлены были предметы: алгебра, физика, геодезия, агрономия. Большим достижением являлось введение предмета «геодезия» как самостоятельного, хотя и в училище геодезия изучалась довольно основательно. Наряду со специальными и физико-математическими дисциплинами большое внимание уделялось изу-



В. Г. Белинский читает лекцию в КМИ

чению географии, истории, русского языка. Для преподавания русского языка тогдашний директор КМИ С. Т. Аксаков пригласил знаменитого Виссариона Григорьевича Белинского. Правда, В. Г. Белинский пробыл в институте недолго — с 10 марта по 22 октября 1838 г.

В 1844 г. в институте было введено семилетнее обучение. Институт был официально признан «Главным межевым учебным заведением» для подготовки землемеров по Государственному межеванию земель.

Геодезия всегда оставалась основной, ведущей дисциплиной института. Большое внимание уделялось также преподаванию высшей математики, механики и других фундаментальных наук. К преподаванию математики в институте привлекались такие выдающиеся ученые, как С. А. Чаплыгин и Н. Н. Лузин. О том, как преподавалась математика в Межевом институте, можно судить по отзыву известного военного геодезиста А. П. Болотова, который, побывав в институте на занятиях по геометрии, сказал: «У нас геометрия проходит так основательно, как нигде».

Исключительно большое значение в КМИ придавалось дополнительному

обучению астрономии и геодезии в Пулковской обсерватории, куда направлялись лица, оставленные для подготовки к профессорской деятельности. Пулковская обсерватория непосредственно участвовала в подготовке астрономо-геодезистов Межевого, а затем Московского геодезического института до 1932 г.

Константиновский межевой институт всегда проводил большую научную работу. Постоянные наблюдения велись на астро-



Н. Н. Лузин

МОЛОДОЙ ГЕОДЕТЪ ИЛИ ПЕРВЫЯ ОСНОВАНИЯ ГЕОДЕЗИИ,

содержаща все геодезское искусство,
предложенное въращѣн, объяснен-
ное правилами и приборами,

.....
ПРОФЕССОРОМЪ МАТЕМАТИКИ
ОРИНАРИИМЪ

ИМПЕРАТОРСКОЙ
АКАДЕМИИ НАУКЪ

ЧЛЕНОМЪ
СВЯЩЕННЪ КОЛЛЕЖИИКОМЪ,

.....
ВЪ САНКТЪ ПЕТЕРБУРГѢ
въ Императорской Академіи наукъ
1766 года.

Титульный лист первого учебника по геодезии

номической, магнитной и метеорологической обсерваторных института. На астрономической обсерватории профессором Б. Я. Швейцером в 1853 г. была открыта новая комета.

Начиная с 40-ых годов прошлого века преподаватели и воспитанники КМИ участвовали во многих научных экспедициях — в Астраханской, Восточно-Сибирской, Алтайской, экспедиции на Шпицберген, в Русской полярной экспедиции Толля, а также в съемках многих городов России. Для участия в полярной экспедиции адмирала С. О. Макарова был командирован по окончании института в 1896 г. К. А. Цветков. Директор института получил от адмирала С. О. Макарова отзыв: «От души благодаря за содействие по назначению на «Ермак» межowego инженера К. А. Цветкова. В обстановке, для него совершенно чуждой, он скоро освоился и был энергичным сотрудником по съемке льдов, гидрологии и метеорологии. У меня остались о нем лучшие воспоминания».

Студенчество КМИ весьма чувствительно реагировало на деспотизм, насилие и произвол, имевшие место в стране при царском строе: время от времени в институте вспыхивали «беспорядки». В 1891 г. из института за призыв «оказать администрации прямое сопротивление действием» были изгнаны студенты-старшекурсники В. Бонч-Бруевич, Н. Хавский и В. Ярмоленко.

В период первой русской революции в Межевом институте революционное настроение студентов было особенно резко выражено; в силу этого распоряжением реакционного-столыпинского правительства институт в течение двух учебных годов был закрыт.

Подлинного расцвета высшее геодезическое образование достигло после Великой Октябрьской социалистической револю-

ции. Выдающуюся роль сыграл Декрет о создании Высшего Геодезического Управления, который был подписан Владимиром Ильичом Лениным 15 марта 1919 г.

В 1930 г. Геодезический факультет был развернут в Московский геодезический институт с пятью отделениями, а землеустроительный факультет был выведен из состава института с передачей Наркомзему. В 1936 г. Геодезический институт переименовали в Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии. В нем были созданы три факультета: геодезический, картографический и геодезического инструментостроения.

В настоящее время институт готовит инженеров по следующим специальностям и специализациям: астрономо-геодезия, морская геодезия (с 1974 г.), прикладная геодезия, космическая геодезия (с 1968 г.), аэрофотогеодезия, издание карт, проектирование и составление карт, оптическое и оптико-электронное приборостроение, исследование природных ресурсов (с 1976 г.).

В МИИГАиК, как и прежде, математика остается одним из основных предметов и изучается в большом объеме.

Учебный процесс по математике непрерывно совершенствуется. На основании новых программ составляются рабочие программы для всех специальностей МИИГАиК с учетом запросов специальных кафедр. Например, на геодезическом факультете, кроме основных разделов математики, изучаются некоторые разделы дифференциальной геометрии и уравнение Лапласа; на оптико-механическом факультете — преобразование Фурье и операционное исчисление; на аэрофото-геодезическом факультете — преобразование Фурье и теория случайных функций; на картографическом факультете даются сведения о конформном отображении. Созданный в институте вы-

числительный центр успешно используется в учебном процессе и является технической базой для научных исследований преподавателей, аспирантов и студентов. Для студентов младших курсов проводятся занятия в классе программированного обучения. Студенты института выступают с докладами на ежегодных научных студенческих конференциях и на занятиях студенческих научных кружков.

Большую работу проводят кафедры института в подготовке и проведении вступительных экзаменов в институт. В течение учебного года проводится кружковая работа со школьниками, организуется очный зачет для слушателей московских телевизионных курсов по физике и математике. В апреле и мае читаются воскресные лекции для школьников, а в июне и июле организуются ежедневные занятия со школьниками.

Институт богат революционными традициями. Многие выпускники и преподаватели были активными участниками Великой Октябрьской социалистической революции и гражданской войны, среди них В. Д. Бонч-Бруевич — управляющий делами Совета Народных Комиссаров, М. Д. Бонч-Бруевич — первый начальник полевого штаба Реввоенсовета республики, П. А. Кобозев — председатель Совета Министров Дальневосточной республики.

В настоящее время коллектив института вдохновенно трудится над выполнением задач, поставленных XXV съездом КПСС по дальнейшему повышению качества подготовки специалистов для народного хозяйства страны и, в первую очередь, по новым направлениям науки и техники.

В. Большаков

Заочная школа при НГУ

При Новосибирском государственном университете с 1968 года работает Заочная школа для учащихся 8—10 классов школ Сибири, Дальнего Востока, Казахстана и Средней Азии. В настоящее время в Заочной школе три отделения: математическое, физическое и химическое, на которых учатся более 2000 школьников. Обучение в Заочной школе углубляет знания учащихся, способствует развитию самостоятельного логического мышления, расширяет кругозор.

Учащиеся Заочной школы в течение учебного года должны выполнить 5—6 заданий, тематика которых совпадает с недавно пройденным или изучаемым в данный момент материалом школьной программы. Особое внимание уделяется тем разделам программы, которые в средней школе усваиваются недостаточно глубоко.

Каждое задание начинается с краткой подборки теоретического материала, вполне достаточного, чтобы после внимательного его изучения и творческого использования можно было решить все предложенные 15 задач. При этом в качестве примера подробно рассматриваются 1—2 задачи, аналогичные тем, что приведены в задании. Задания содержат задачи двух типов: несколько простых задач, обязательных для решения, и 3—4 сложных, которые весьма желательно решить полностью или частично.

Лучшие учащиеся Заочной школы ежегодно, в период с 1 по 22 августа, приглашаются в Летнюю школу при НГУ, где они вместе с победителями Сибирской олимпиады слушают лекции крупных ученых, встречаются со своими преподавателями,

решают интересные задачи по физике, математике, химии, знакомятся с университетом и институтами Сибирского отделения АН СССР. Около 60—70 ребят Заочной школы, успешно пройдя собеседования, становятся учениками очной физико-математической школы-интерната при НГУ. В период зимних каникул 200 учащихся Заочной школы из близлежащих областей приглашаются в Зимнюю школу при НГУ.

Учащиеся Заочной школы, успешно выполнившие все задания, по окончании 10 класса получают удостоверение; при поступлении в НГУ при прочих равных условиях они имеют приоритет на зачисление. Статистика показывает, что выпускники Заочной школы поступают в НГУ вдвое успешнее, чем остальные учащиеся.

Чтобы стать учащимся Заочной школы, необходимо в период с 1 по 30 сентября прислать на имя директора Заочной школы заявление с просьбой выслать 1-е задание. В заявлении нужно указать свою фамилию, имя, отчество, класс, в котором Вы учитесь, отделение Заочной школы, на котором Вы желаете учиться (математическое, физическое, химическое), и подробный домашний адрес (с индексом почтового отделения).

При положительной оценке за первое задание ученик зачисляется в Заочную школу, ему высылается работа с рецензией и очередное задание.

Учиться в Заочной школе можно начать не только в 8, но и в 9 и 10 классах.

Напомним, что в Заочной школе рассматриваются заявления только от учащихся школ Сибири, Дальнего Востока, Казахстана и Средней Азии.

Дорогие ребята! Ждем Ваших заявлений о приеме в Заочную школу при НГУ.

Наш адрес: 630090, г. Новосибирск, 90, ул. Пирогова 11, Заочная школа при НГУ

Э. Марченко

Вечерняя физическая школа

Вечерняя физическая школа (ВФШ) на физическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова объявляет набор учащихся 8—10 классов на 1979/80 учебный год. Систематические занятия в ВФШ способствуют развитию навыков самостоятельного решения физических задач, вводят учащихся в курс проблем современной физики. Семинарские занятия проводят студенты старших курсов и аспиранты. Наиболее сложные вопросы школьной программы подробно разбираются на лекциях преподавателями и научными сотрудниками физического факультета. Экскурсии в лаборатории физического факультета, в Научно-исследовательский институт ядерной физики и Государственный астрономический институт позволяют учащимся ВФШ позна-

комиться с методикой научного эксперимента.

Конкурсный набор в Вечернюю физическую школу состоится в сентябре. Принять участие в конкурсе могут школьники 8—10 классов (в 9 и 10 классы проводится дополнительный набор). Для участия в конкурсе нужно до 20 сентября подать заявление на имя директора ВФШ, заполнить анкету в Комитете ВЛКСМ физического факультета, а также сдать 2 фотокарточки размером 3×4 см.

Принем заявлений будет проходить со 2 по 20 сентября с 16.00 до 18.00 (кроме воскресенья) в Комитете ВЛКСМ физического факультета МГУ (здание физического факультета, комната 2—47).

Зачисление в школу проводится по результатам собеседования. Требования по собеседованию не выходят за рамки школьной программы.

Наш адрес: Москва, Ленинские Горы, МГУ, Физический факультет. Телефон для справок: 139-26-56.

А. Васильев

Ответы, указания, решения



Овал, восьмерка, два овала ...

1. «Восьмерка» содержит точку (0; 0); подставив $x=0, y=0$ в уравнение (5), получим $\frac{2}{c^2} = \frac{1}{b^2}$, т. е. $c = b\sqrt{2}$.

2. У к а з а н и е. Найдите точки пересечения нашей кривой с осью Oy ; подставьте одно из полученных значений y в уравнение (5) (геометрический смысл этой операции изображен на рисунке 1). Если полученное уравнение (относительно x) будет иметь одно решение, то овал выпуклый, а если три — то овал с талией.

Ответ. а) $0 \leq c \leq b\sqrt{2}$; б) $b/\sqrt{2} < c < b\sqrt{2}$.

3. Ответ. $|c| < R-r$ — два овала; $|c| = R-r$ — восьмерка; $R-r < |c| < R+r$ — овал с талией; $R \leq |c| < R+r$ — выпуклый овал; $|c| = R+r$ — точка, $|c| > R+r$ — \emptyset .

5. Уравнение $x^2+y^2-1=0$ задает окружность радиуса 1 с центром в начале координат; уравнение $x^2+y^2-4=0$ — окружность радиуса 2 с тем же центром. Поэтому уравнение $(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)=0$ задает объединение этих окружностей.

6. Уравнение $P(x, y) = \frac{x^2}{10^2} + y^2 - 1 = 0$ задает «лежащий» эллипс, у которого горизонтальная полуось равна 10, а вертикальная 1. При этом, как легко убедиться, для точек (x, y) внутри эллипса $P(x, y) < 0$,

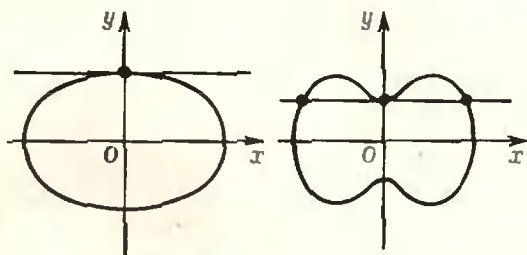


Рис. 1.

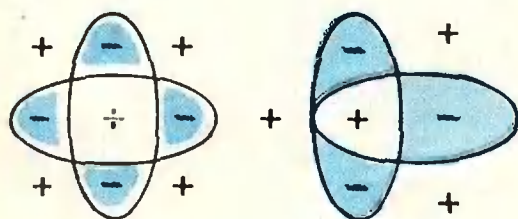


Рис. 2.

Рис. 3.

а для точек вне эллипса $P(x, y) > 0$. Аналогично, уравнение $Q(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{10^2} - 1 = 0$ задает «вертикальный» эллипс, внутри которого $Q(x, y) > 0$, а снаружи $Q(x, y) < 0$. Ясно, что уравнение $P(x, y) \cdot Q(x, y) = 0$ задает объединение этих двух эллипсов, причем знаки функции $F(x, y) = P(x, y) \cdot Q(x, y)$ будут такими, какие изображены на рисунке 2. Поэтому, если взять очень маленькое число $\epsilon > 0$, то кривая, являющаяся графиком уравнения $F(x, y) = -\epsilon$, пройдет целиком по «отрицательной области» (на рисунке 2 она ограничивает голубые области).

7. Можно проделать то же самое, что и в предыдущей задаче, с двумя эллипсами, расположенными, как показано на рисунке 3.

8. Пусть кривая четвертого порядка $P(x, y) = 0$ содержит, кроме двух овалов (один из которых вложен в другой), еще хотя бы одну точку. Проведем через эту точку прямую, пересекающую оба овала; полученная прямая имеет с нашей кривой 5 или более общих точек. Пусть уравнение этой прямой $Ax + By + C = 0$. Запишем систему:

$$\begin{cases} P(x, y) = 0 & (1) \\ Ax + By + C = 0 & (2) \end{cases}$$

С помощью уравнения (2) выразим одну из переменных через другую и подставим ее в уравнение (1). Мы получим уравнение четвертой степени. Как известно, оно не может иметь более четырех решений, что противоречит наличию пяти общих точек у прямой и кривой.

9. Пусть кривая $P(x, y)$ состоит из 5 или более овалов. Возьмем на каждом из овалов по точке и через полученные 5 точек проведем кривую второго порядка (ее уравнение $Q(x, y) = 0$). Ясно, что точки можно выбрать так, чтобы эта кривая пересекала все овалы, а не касалась их. Тогда у кривых $P(x, y) = 0$ и $Q(x, y) = 0$ будет 10 (или более) точек пересечения. Мы получим противоречие, если докажем, что система

$$\begin{cases} P(x, y) = 0 \\ Q(x, y) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

имеет не более 8 решений (напомним, что $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — многочлены, соответственно, четвертой и второй степени); верен и более общий факт: если $P(x, y)$ имеет степень m , а $Q(x, y)$ — степень n , то система (3) имеет не более $m \cdot n$ решений^{*)}. Для того, чтобы это доказать, све-

^{*)} Следует сделать одну оговорку: число решений системы (3) может быть бесконечным. (Например, кривая $P(x, y)$ состоит из двух окружностей, а $Q(x, y) = 0$ — одна из этих окружностей.) Этот случай, однако, нам неинтересен (почему?). Если же число решений конечно, то оно не превосходит $m \cdot n$.

дем систему (3) к одному алгебраическому уравнению 8-й степени следующим образом:

1) С помощью замены переменных $z = ax + by + c$, $t = dx + ey + f$, подобрав подходящие числа a, b, c, d, e, f , сведем уравнение $Q(x, y) = 0$ к одному из следующих видов:

- (а) $z + At^2 = B$
- (б) $z^2 + At^2 = B$.

Далее уравнение $P(x, y) = 0$ тоже можно переписать через новые неизвестные: $R(z, t) = 0$; при этом (что очень важно!) оно останется уравнением четвертой степени (объясните!).

2) В случае (а), выразив $z = -At^2 + B$, подставим это выражение для z в уравнение $R(z, t) = 0$ и получим уравнение 8-й степени относительно t .

3) В случае (б) возьмем уравнение $R(z, t) = 0$ и оставим в нем слева те слагаемые, в которые z входит в четной степени, а остальные перенесем в правую часть и возведем обе части полученного уравнения в квадрат. Мы получили уравнение восьмой степени, которое содержит *только четные степени* z . Подставив в него выражение $z^2 = -At^2 + B$ (см. (б)), получим уравнение восьмой степени относительно t .

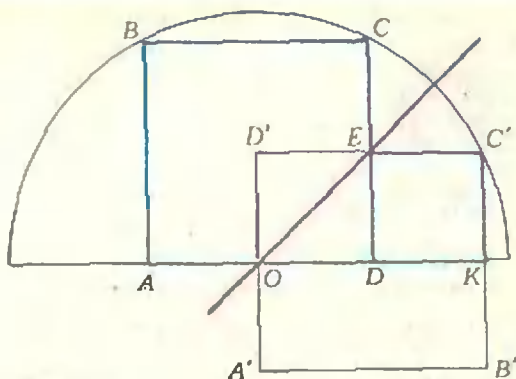


Рис. 4.

5. Пусть одна книга стоит x коп. Тогда $9x < 1000$, т. е. $x \leq 111$. В то же время $10x > 1100$, т. е. $x > 110$. Следовательно, $x = 111$ — книга стоит 1 р. 11 коп.

Где ошибка?

Сложив уравнения (1), (2), мы получаем уравнение

$$0x + 0y + 0z + 2d = 0. \quad (3)$$

Отсюда числовое равенство $d = 0$ получается только при условии, что уравнение (3) имеет хотя бы одно решение. Таким образом, наше «доказательство» доказывает только следующее утверждение: если две плоскости симметричны относительно начала координат O и пересекаются, то они обе проходят через точку O .

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 7)

1. Заполним две первые пустые клетки буквами x и y . Заметим, что $x + y = 9$, тогда в следующей клетке должно стоять число 6, в следующей x , в следующей y и т. д., пока не дойдем до клетки, где стоит число 4, но там должно стоять число y , отсюда $y = 4$, а $x = 5$, и в последней пустой клетке стоит число 5.

2. Ответ:



3. VI + III = IX.

4. Рассмотрите осевую симметрию с осью OE , где O — центр полуокружности (см. рис. 4), и докажите, что стороны большего квадрата в два раза длиннее стороны меньшего квадрата.

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумов, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова,
Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Э. Назаров, А. Пономарева,
И. Смирнова, В. Чернов

Загл. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректоры Л. Н. Боровина, В. П. Сорокина

113035, Москва М-35, Б. Ордынка, 21/16.
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 1/VI-79
Подписано в печать 12/VII-79
Бумага 70x108^{1/2}. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 6,76 Т-11249
Цена 30 коп. Заказ 1209 Тираж 279 035 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета
СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области



Кроссворд «Космос»

По горизонтали: 5. Крупнейшая планета Солнечной системы. 6. Замкнутая кривая, являющаяся одной из возможных форм орбиты. 10. Экваториальное созвездие, три звезды которого образуют «пояс». 11. Часть суток. 12. Одна из основных частей камеры ракетного двигателя. 13. Вторая по порядку от Солнца планета. 15. Серия советских спутников связи. 16. Прохождение светила через меридиан небесной сферы. 19. Вселенная. 20. Яркая звезда в созвездии Орiona. 21. Оптический прибор, с помощью которого космонавт контролирует угловое положение корабля при выполнении ручной ориентации. 23. Взлет ракеты. 25. Советский ученый в области механики, академик, президент Международной астрономической федерации в 1959—1963 гг. 26. Созвездие Северного полушария неба. 27. Летчик-космонавт СССР, осуществивший переход из одного космического корабля в другой через открытый космос.

По вертикали: 1. Спутник Saturna. 2. Созвездие Южного полушария неба. 3. Со-

ветский ученый, академик, конструктор ракетных двигателей. 4. Летчик-космонавт СССР, совершивший полет на корабле «Восток-2». 7. Созвездие Северного полушария неба. 8. Наиболее удаленная от центра Солнца точка орбиты небесного тела, движение которого рассматривается относительно Солнца. 9. Недостаточная мышечная деятельность, обусловленная пребыванием космонавта в кабине малого объема и невесомостью. 14. Американская ракета-носитель, применявшаяся для запуска ряда спутников и космических кораблей. 15. Двойная звезда в созвездии Большой Медведицы. 17. Серия советских одноступенчатых космических кораблей. 18. Звезда в созвездии Персея. 21. Летчик-космонавт СССР (1935—1971). 22. Полная продолжительность работы двигателя на ракете. 24. Созвездие Южного полушария неба. 25. Стационарное сложное комплексное сооружение, на котором производится огневое испытание ракетного двигателя.

В. Грязев

Индекс 70465

Цена 30 коп.

Если треугольник разбить его средними линиями на четыре треугольника и около каждого из них описать окружность, то получится фигура, изображенная на этом рисунке. Средняя окружность — описанная около внутреннего треугольника — это знаменитая окружность Эйлера. Иногда ее на-

зывают окружностью девяти точек: оказывается, она проходит не только через основания медиан основного треугольника, но и через основания его высот и середины отрезков, соединяющих вершины и ортоцентр треугольника. Подробнее об этой окружности рассказано на с. 36

