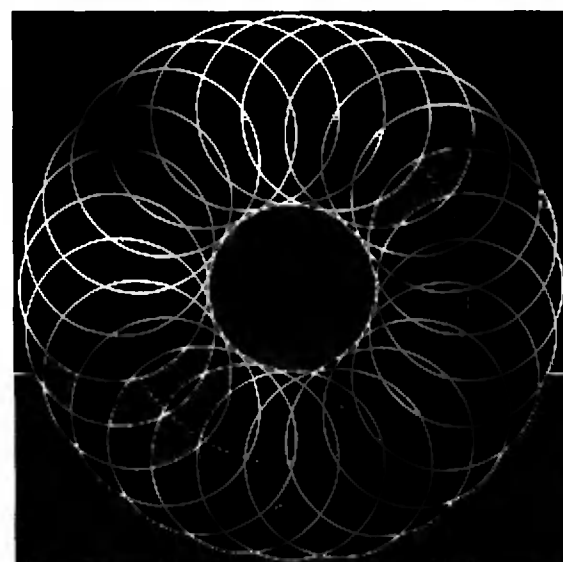
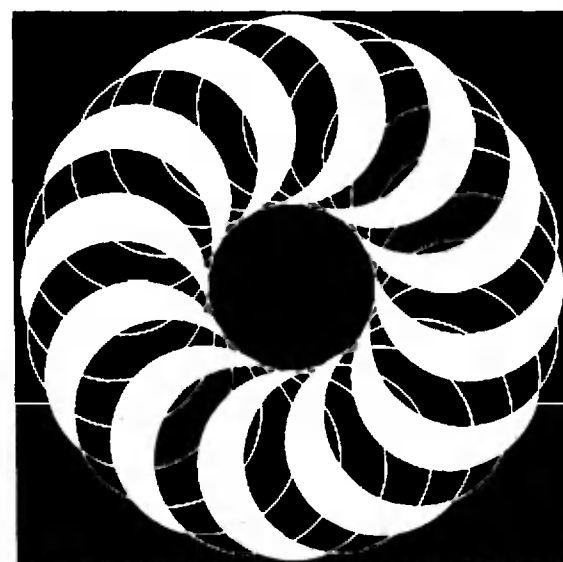
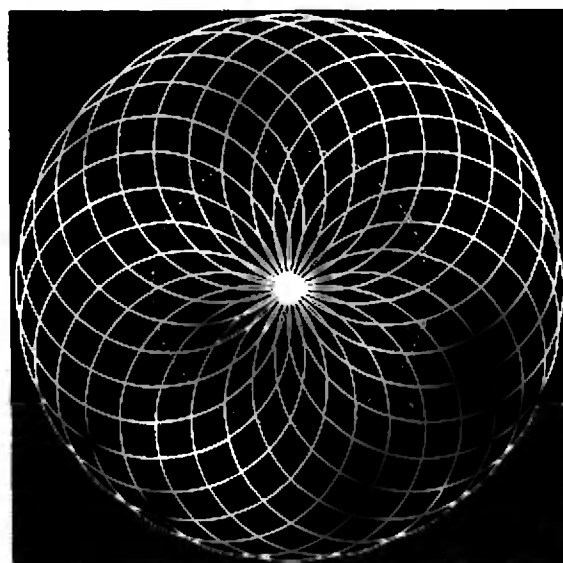
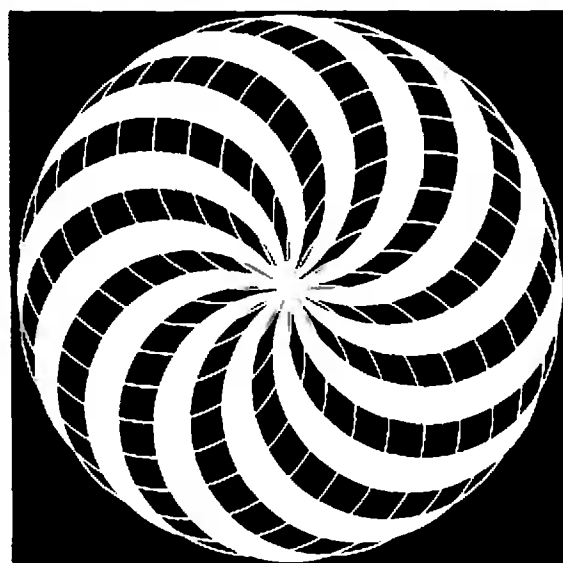
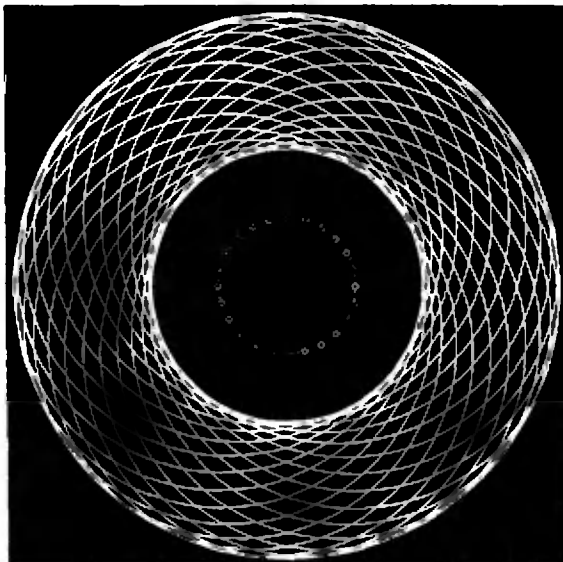
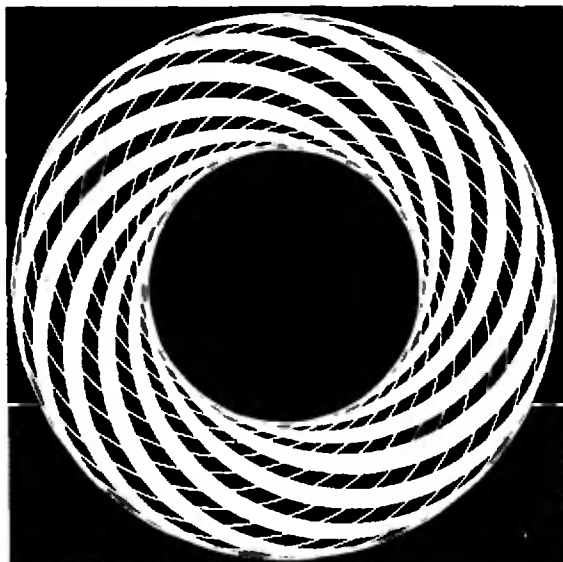


Квант

6
1980

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





Эти фигуры, напоминающие вращения окружности около ее касательной или около не пересекающей ее прямой (10р), все получены оди-

наковым приемом: из семейства окружностей одинакового радиуса с центрами, лежащими на одной окружности.

Основан в 1970 году

Квант

6

1980

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР



Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

В НОМЕРЕ:

Главный редактор
академик И. К. Кнкоин
Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Белыев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козёл
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободещкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбург
А. И. Ширшов

- 2 А. Михайлов. Когда день равен ночи?
5 Б. Вертгейм. Метод неподвижных точек
10 В. Можжев. Тепловое расширение твердых тел
14 И. Быстрый. Площадь сегмента параболы Нейля

Математический кружок

- 16 И. Михайлов. О диофантовом анализе

Задачки «Кванта»

- 18 Задачи М626—М630; Ф638—Ф642
20 Решения задач М568, М570—М572, М574; Ф579, Ф586, Ф587

«Квант» для младших школьников

- 29 Задачи
30 С. Белый. Разноцветная математика

Практикум абитуриента

- 33 Г. Перевалов. Что значит «знать»?
36 Л. Асламазов. Электромагнитная индукция
Варианты вступительных экзаменов
в вузы в 1979 году
42 А. Пономаренко. Ленинградский государственный универ-
ситет им. А. А. Жданова
43 Н. Перестюк, М. Ядренко. Киевский государственный
университет им. Т. Г. Шевченко
44 Я. Ерусалимский, Т. Коршикова, А. Хейфиц. Ростовский
государственный университет (механико-математический
факультет)
44 А. Березман, К. Дуничев, О. Овчинников. Московский
государственный педагогический институт им. В. И. Ленина
45 М. Калкина, О. Оноприенко. Ленинградский государст-
венный педагогический институт им. А. И. Герцена

Искусство программирования

- 48 А. Салтовский. Организация ввода и вывода в ЭВМ
57 Шахматная страничка
58 Ответы, указания, решения
Наша обложка (15)
Смесь (13, 28, 41, 47, 56)

О том как самому нарисовать
такую картину,
как на первой странице обложки,
вы можете прочитать в заметке
«Картины на воде» (с 15)

© Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической
литературы, «Квант», 1980

А. Михайлов

Когда день равен ночи?

Казалось бы, ответ очевиден: продолжительности дня и ночи одинаковы во время равноденствий, то есть 21 марта и 23 сентября ежегодно. (Интересно отметить, что в латыни, а оттуда и в ряде европейских языков, вместо слова «равноденствие» употребляется слово «равноночье» — *equinoctium*, что, конечно, обозначает то же самое.) Именно в эти дни Солнце в своем годичном движении по эклиптике проходит через небесный экватор, который пересекается с горизонтом по диаметру небесной сферы, так что всегда половина экватора находится выше и половина — ниже горизонта (рис. 1). Следовательно, во время равноденствий половина суточного пути Солнца проходит над горизонтом и половина — под ним; другими словами, продолжительность дня равна продолжительности ночи.

Проверим это, выписав из календаря времена восхода и захода Солнца в ближайшие к равноденствиям дни. При этом лучше выбрать год, наиболее удаленный от високосного, чтобы уменьшить влияние неравномерности течения календарных лет, вызванной включением в каждый четвертый год добавочного дня — 29 февраля. (Эта добавка необходима для того, чтобы со временем не разойтись с годом природы — так называемым тропическим годом, содержащим 365, 2422 суток.)

В таблице приведены данные о восходе и заходе Солнца (а также продолжительности дня и ночи и разность между ними), взятые из астрономического календаря на 1978 год, для Москвы (точнее — для пункта с географической широтой +56 градусов, что на 1/4 градуса севернее Москвы). В отличие от календаря время указано не местное, а московское декретное, что, конечно же, не изменяет продолжительности дня и ночи.

Из таблицы видно, что равенство дня и ночи наступает почти на три дня раньше астрономического весеннего равноденствия и на столько же позже осеннего. В чем причина такого странного явления?

Прежде всего заметим, что моментом восхода (захода) Солнца считается момент, когда верхний край солнечного диска появляется (исчезает) на линии идеального горизонта, как, например, на море. При этом центр Солнца находится ниже линии горизонта на видимый угловой радиус солнечного диска, равный $16'$, что удлиняет день на удвоенное время, нужное на поднятие (или опускание) Солнца на такой угол.

Существует еще другое явление, оказывающее более значительное влияние на увеличение продолжительности дня. Это — *астрономическая рефракция*. Поясним ее суть.

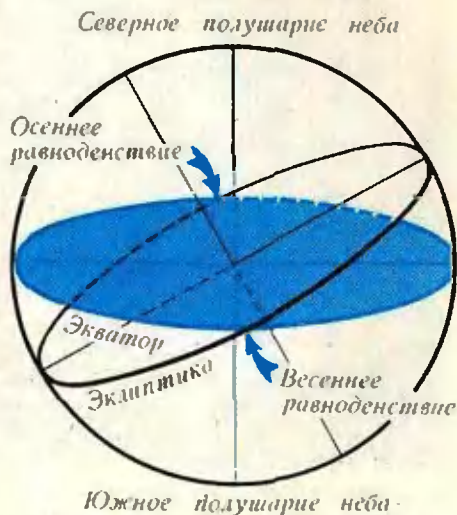


Рис. 1.

Таблица

	Восход		Заход		Продолжительность				Разность мин	
	ч	мин	ч	мин	дня		ночи			
Март	17	6	41	18	37	11	56	12	04	-08
	18	6	38	18	39	12	01	11	59	+02
	19	6	36	18	41	12	05	11	55	+10
	20	6	34	18	43	12	09	11	51	+18
	21	6	31	18	45	12	14	11	46	+28
Сентябрь	23	6	16	18	28	12	12	11	48	+24
	24	6	18	18	25	12	07	11	53	+14
	25	6	20	18	22	12	02	11	58	+04
	26	6	22	18	20	11	58	12	02	-04
	27	6	24	18	17	11	53	12	07	-14

Лучи света от небесного тела, прежде чем попасть в глаз наблюдателя, проходят сквозь земную атмосферу, преломляясь в ней, как в призме. Так как плотность атмосферы увеличивается к поверхности Земли, лучи преломляются все сильнее и сильнее по мере приближения к Земле.

Пусть наблюдатель находится в точке O (рис. 2). Свет от удаленного объекта, например Солнца, приходит на Землю практически параллельным пучком. Если бы преломления света не было, наблюдатель увидел бы Солнце по направлению OS . Но, войдя в атмосферу, лучи преломляются, приближаясь к перпендикуляру к плоскопараллельным слоям, и наблюдатель увидит Солнце по направлению касательной OR к последнему элементу луча. При этом действительное положение Солнца — точка S' (BS' параллельно OS).

Таким образом, Солнце кажется наблюдателю приподнятым над горизонтом выше своего действительного положения на *угол рефракции* ROS . Если светило находится в зените, преломления света не происходит и угол рефракции (или просто рефракция) равен нулю. Наибольшей величины — $35'$ — рефракция достигает тогда, когда Солнце появляется над горизонтом или заходит за горизонт. Рефракция поднимает Солнце над горизонтом на $35'$, в то время как диаметр солнечного диска виден с Земли под углом всего лишь $32'$.

Быстрое изменение рефракции у самого горизонта приводит еще к одному любопытному явлению, которое, вероятно, замечали многие читатели — у горизонта Солнце кажется нам заметно сплюснутым по вертикали (рис. 3). Действительно, рассмотрим момент, когда нижний край солнечного диска виден касаясь горизонта, а на самом деле находится на $35'$ ниже. Верхний край диска приподнимается рефракцией слабее, всего на $29'$. Это различие и приводит к искажению формы сол-

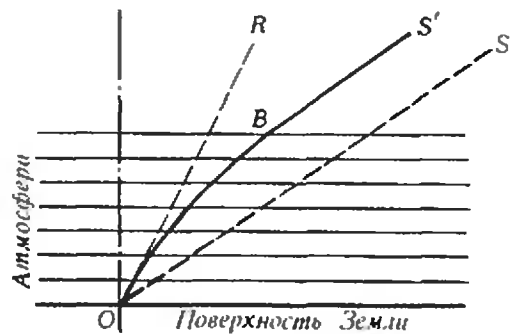


Рис. 2.

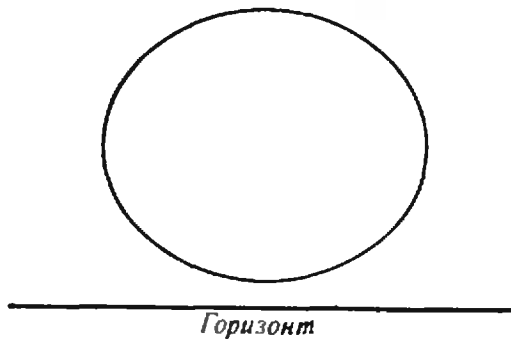


Рис. 3.

нечного диска. Когда Солнце поднимается выше над горизонтом, разность между рефракцией нижнего и верхнего краев быстро уменьшается и Солнце приобретает свой обычный вид.

Вернемся к вопросу о продолжительности дня и ночи. Оба упомянутых явления удлиняют день и укорачивают ночь: Солнце утром восходит раньше и вечером заходит позже «геометрических» восхода и захода, определяемых моментами, когда центр Солнца пересекает горизонт. Упреждение восхода и запаздывание захода определяются временем, которое требуется на изменение высоты Солнца у горизонта на $16' + 35' = 51'$. Это время, в свою очередь, зависит от географической широты φ места.

Небесный экватор пересекает горизонт под углом $90^\circ - \varphi$. При $\varphi = 0$, то есть на земном экваторе, небесный экватор расположен вертикально. Там Солнце в своем видимом суточном движении, вызванном вращением Земли, поднимается утром и опускается вечером перпендикулярно к горизонту, проходя $51'$ за время 3, 4 минуты (из расчета, что полный оборот Земли на 360° происходит за 24 часа).

В Москве, широта которой близка к 56° , небесный экватор наклонен к горизонту на угол $90^\circ - 56^\circ = 34^\circ$. Здесь Солнце при восходе поднимается и при заходе опускается наклонно, поэтому его высота меняется мед-

леннее. В прямоугольном треугольнике SOA (рис. 4) гипотенуза SA равна катету OS , деленному на синус противолежащего угла:

$$|SA| = 51' / \sin 34^\circ = 91,2'.$$

Это соответствует времени 6,08 минуты. Из таблицы следует, что время восхода и захода Солнца вблизи равноденствий изменяется в среднем на 2,4 минуты в сутки, поэтому для изменения высоты Солнца на $51'$ в 6,08 мин требуется около 2,5 суток. На столько действительное равноденствие бывает раньше весной и позже осенью. Другими словами, равенство дня и ночи фактически бывает 18—19 марта и 25—26 сентября (а не 21 марта и 23 сентября).

Отрадно отметить, что у нас светлое время года, когда день бывает длиннее ночи, продолжительнее темного. Если взять невисокосный год в 365 суток и принять, что день равен ночи 18 марта и 25 сентября, то промежуток между этими датами составит 191 сутки, а с 25 сентября до 18 марта следующего года — 174, то есть светлое время года на 17 суток больше темного. Эта разность складывается из десяти суток, связанных с описанными выше явлениями, и из семи суток, которые вызваны неравномерностью движения Земли по своей орбите. Земля движется быстрее близ перигелия, который она проходит ежегодно в первых числах января, и медленнее близ афелия, наступающего в начале июля. Если сосчитать число суток между астрономическими равноденствиями, то с 21 марта по 23 сентября их будет 186, а с 23 сентября до 21 марта следующего года — всего 179. Но первый промежуток приходится на весну и лето в северном полушарии и на осень и зиму в южном полушарии. Поэтому мы, жители севера, находимся в более благоприятном положении, так как у нас теплое и светлое время года продолжительнее холодного и темного, в отличие от жителей южного полушария, где осень и зима продолжительнее и в среднем холоднее.

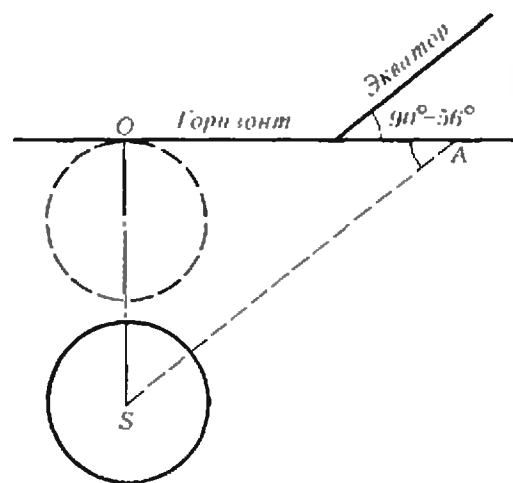


Рис. 4.



Б. Вертгейм

Метод неподвижных точек

Когда мы ищем решение какого-нибудь уравнения, хорошо знать заранее, что у него есть решение — ведь если нет, то зачем время зря тратить? Это соображение становится весьма серьезным, когда речь идет о решении сложных уравнений и систем на мощных ЭВМ с дорогостоящим машинным временем. Поэтому очень важную роль играют так называемые теоремы существования, которые заранее гарантируют наличие решения. Об одной из них — теореме Брауэра о неподвижной точке, интересной и полезной уже на школьном уровне, — и рассказано в этой статье.

Прогулка

Начнем с прогулки, помня о пользе и вечности движения; в пути будут и неподвижные точки, и уравнения.

Путников двое: один направляется из пункта a в пункт b , другой все время гуляет на дороге ab . Очевидно, их встреча неизбежна: путники хотя бы раз поравняются (окажутся одновременно в одной точке). Опишем это подробнее (рис. 1).

Пусть x — координата первого ($a < x < b$) путника и скорость его постоянна; y — координата второго ($a < y < b$). Каждому значению x (положению первого путника) соответствует единственное значение y (положение второго путника в тот же момент времени); итак, имеем функцию $y = f(x)$. Уравнение

$$f(x) = x$$

определяет место встречи.

Пример 1. Пусть $a = 0$, $b = 1000$ м, $y = 100 + 0,7x$. Если $x = 0$, то $y = 100$; если $x = 1000$, то $y = 800$ — первый обошел! Уравнение $100 +$



Рис. 1

$+0,7x = x$ даст координату $x = 333\frac{1}{3}$ м — здесь первый догонит второго.

Если движение второго сложнее, то и функция f , и уравнение встречи будут потруднее, но все равно очевидно, что хотя бы одна встреча произойдет.

Однако это «очевидно» нас как математиков не устраивает; прежде чем пойти дальше, мы уточним математическую постановку задачи и докажем существование встречи.

Предположим (как в примере 1), что функция f отображает отрезок $[a; b]$ в себя, т. е. для всех $x \in [a; b]$ имеем $a \leq f(x) \leq b$. Тогда всякое решение уравнения $f(x) = x$ называется неподвижной точкой отображения f . (В нашем примере неподвижная точка — это как раз точка встречи.) Когда же она есть?

Теорема. У всякой непрерывной функции f , отображающей отрезок $[a; b]$ в себя, существует неподвижная точка.

В теореме существенны как непрерывность функции f , так и то, что речь идет об отрезке.

Упражнение 1. Укажите пример разрывной функции f , отображающей $[a; b]$ в себя, без неподвижной точки.

Упражнение 2. Укажите примеры непрерывных функций, отображающих в себя, без неподвижных точек: а) объединение двух отрезков $[a; b] \cup [c; d]$; б)* интервал $[a; b]$.

Для доказательства теоремы вооружимся красным и синим карандашами. Прежде чем их пустить в ход, обозначим

$$\varphi(x) = f(x) - x.$$

Ясно, что $c \in [a; b]$ будет неподвижной точкой для f тогда и только тогда, когда c — корень уравнения $\varphi(x) = f(x) - x = 0$. Поэтому мы будем искать корень этого уравнения. Заметим, что из условий $a \leq x \leq b$, $a \leq f(x) \leq b$ сразу следует $\varphi(a) \geq 0$ и $\varphi(b) \leq 0$. Мы будем считать оба неравенства строгими (в противном случае задача решена). Разделим теперь отрезок $[a; b]$ на 10 равных частей и раскрасим в красный цвет все отрезки, для которых значение

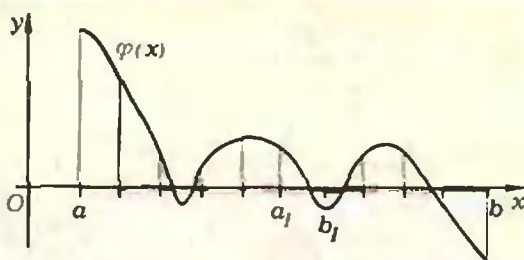


Рис. 2.

функции φ положительно на левом конце (рис. 2). Крайний слева отрезок, конечно, красный; будем двигаться слева направо пока не наткнемся на первый синий отрезок (рис. 2) или не дойдем до конца $[a; b]$ (рис. 3). Обозначим через $[a_1; b_1]$ последний красный отрезок, пройденный при таком движении. Тогда $\varphi(a_1) > 0$ и $\varphi(b_1) < 0$ и можно начать все сначала: поделить $[a_1; b_1]$ на 10 равных частей, раскрасить их в красный и синий цвета по тому же принципу и найти отрезок $[a_2; b_2]$, для которого $\varphi(a_2) > 0$ и $\varphi(b_2) < 0$. И так далее. Получим возрастающую ограниченную последовательность точек

$$a < a_1 < a_2 < \dots < a_k < \dots < b.$$

У такой последовательности (см. «Алгебра и начала анализа 9», п. 32) существует предел $c = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$. Пока-

жем, что $\varphi(c) = 0$. Если бы это было не так, то, взяв $\varepsilon = \frac{1}{2}|\varphi(c)|$, мы легко придем к противоречию с определением непрерывности функции φ . Действительно, при $\varphi(c) < 0$ для любого δ найдется N такое, что $|c - a_N| < \delta$; но $\varphi(a_N) > 0$, значит, $|\varphi(c) - \varphi(a_N)| > |\varphi(c)| > \varepsilon$, что невозможно, ибо φ — непрерывна. При $\varphi(c) > 0$ получается аналогичное противоречие из неравенства $|\varphi(c) - \varphi(b_N)| > |\varphi(c)|$.

Чтобы понять, как применяется доказанная теорема, рассмотрим

Пример 2. Есть ли корни уравнения

$$\cos x^3 - x = 0?$$

Функция $\cos x^3$ непрерывна; она отображает отрезок $[-\pi/2, \pi/2]$ в себя (даже в отрезок $[-1, 1]$); значит, по теореме существует решение $c \in [-\pi/2, \pi/2]$.

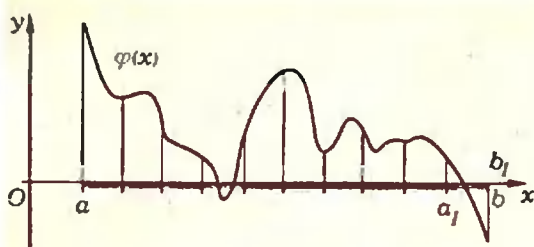


Рис. 3

Заметим, что числа a_n, b_n — это приближения к корню, и что делить отрезок можно не на 10, а скажем, на 2 части; такой прием (способ Больцано — по имени чешского математика) фактически применяется наряду с другими алгоритмами приближенного решения уравнений.

Кроме того, наша теорема ничего не говорит о числе неподвижных точек: ясно, что их может быть много.

Чашка кофе

А теперь — чашка кофе! Размещивая его плавными круговыми движениями, увидим в центре неподвижную точку. При некруговых движениях картина сложнее, но если рассмотреть положения частиц в два разных момента времени, можно найти частицу, неподвижную в том смысле, что она оба раза — и то, быть может, не все время! — находится в одном и том же месте. Это очевидно, если принять физическое условие неподвижности частицы у стенок из-за трения, и не очевидно — но верно! — и без такого условия, лишь бы имела место непрерывность соответствующего отображения (то есть «близкие» частицы не расхотелись бы слишком далеко).

Чтобы «математизировать» рассмотренную ситуацию, нам будут нужны некоторые определения.

Пусть M — множество точек (например, часть прямой, плоскости или пространства); f — отображение множества M в себя: оно каждой точке $x \in M$ ставит в соответствие ее образ $y = f(x) \in M$. Такое отображение называется *непрерывным*, если для любой точки $x_0 \in M$ и любого

$\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех точек $x \in M$, удаленных от x_0 на расстояние, меньшее δ , расстояние между их образами $f(x_0)$ и $f(x)$ оказывается меньше ε .

Для случая, когда M лежит на числовой прямой, расстояния между точками равно $|x_0 - x|$, между их образами — $|f(x_0) - f(x)|$, так что наше определение в сущности совпадает с определением непрерывной функции («Алгебра и начала анализа 9», п. 38).

Наглядный смысл определения в том, что непрерывное отображение f не должно иметь разрывов — очень близкие точки не могут слишком далеко оторваться друг от друга.

Как и раньше, мы назовем точку $x \in M$ *неподвижной точкой* отображения f множества M в себя, если $f(x) = x$.

Когда у отображения f обязательно есть неподвижная точка? Ответ на этот вопрос дает

Теорема Брауэра о неподвижной точке

Эта знаменитая теорема строго доказана не так уж давно — в 1911 году*). Вместе с многочисленными обобщениями она играет выдающуюся роль в ряде областей современной математики. Теоремы о неподвижных точках важны и в теории, и для приложений: их применяют и для расчета крыльев самолетов, и для анализа оптимальных стратегий и состояний равновесия в играх, и в математико-экономических моделях.

Теорема Брауэра. *У всякого непрерывного отображения f круга M (вместе с его границей) в себя существует неподвижная точка.*

Эта теорема верна не только для круга M , а для любого выпуклого ограниченного множества, содержащего свою границу, например для прямоугольника, треугольника или вообще выпуклого многоугольника на плоскости, для куба или шара в пространстве.

*) Л. Э. Я. Брауэр — голландский математик; до него теорему применял латышский математик П. Боль, и ее называют еще теоремой Боля — Брауэра.

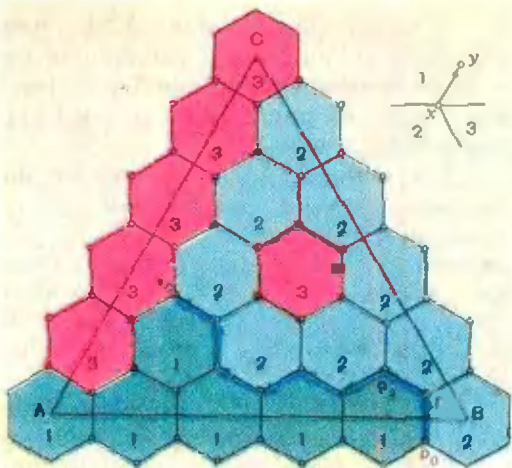


Рис. 4.

Однако она справедлива не для всякого M :

Упражнение 3. Укажите пример ограниченного множества M на плоскости и его непрерывного отображения в себя без неподвижной точки.

Упражнение 4*. Постройте непрерывное отображение круга без границы в себя, не имеющее неподвижной точки.

Упражнение 5. Постройте разрывное отображение круга (с границей) M в себя без неподвижной точки.

Мы не будем доказывать теорему Брауэра в наиболее общей ситуации, а рассмотрим случай, когда M — равносторонний треугольник. Для доказательства нам вновь потребуются цветные карандаши, но теперь уже три: красный, синий и зеленый. (В пространстве потребовалось бы четыре!) Они будут нужны для доказательства одного вспомогательного утверждения, известного под названием

Лемма Шпернера

На рисунке 4 показана «сеть» для лова точек в правильном треугольнике ABC со стороной a . Узлы отмечены кружками, из каждого узла исходит 3 линии (ребра), соединяя его с соседними узлами. Ячейки сети — правильные шестиугольники со стороной b . Стороны треугольника разделены на n равных частей, точки деления — центры граничных

ячеек. Очевидно, $nb\sqrt{3} = a$ и $(n+1)(n+2)/2$ — общее число ячеек.

Каждая внутренняя вершина принадлежит трем, а граничная — двум ячейкам.

Пометим теперь числом 1 все ячейки, кроме последней одной стороны, числом 2 — ячейки второй, числом 3 — ячейки третьей (рис. 4). Оставшиеся (внутренние) ячейки пометим числами 1, 2, 3 совершенно произвольно. Раскрасим ячейки типа 1, 2 и 3 в зеленый, синий и красный цвет соответственно. Назовем вершину *полной*, если она содержится в ячейках всех трех цветов.

Лемма. *Существует полная вершина**.

Доказательство. Строим шаг за шагом ломаную, составляя ее из ребер «типа 1—2», примыкающих к ячейкам с числами 1 и 2. Начнем с края, где по условию есть лишь одно такое «двухцветное» ребро p_0p_1 , и за конечное число шагов приходим к полной вершине: если ребро типа 1—2 $p_{k-1}p_k$, $k=1, 2, \dots$ привело нас к неполной вершине p_k , то найдется еще одно ребро типа 1—2, исходящее из узла p_k (рис. 5), оно дает вершину $p_{k+1} \neq p_k$. Этот путь, очевидно, не возвращается ни на край, ни к пройденным вершинам (почему?). Так как множество вершин конечно, то ломаная обязательно закончится в полной вершине.

Лебедь, рак да щука

Докажем теперь теорему Брауэра для случая, когда M — правильный

* Эта лемма лишь частный случай знаменитой леммы, принадлежащей немецкому математику Шпернеру.

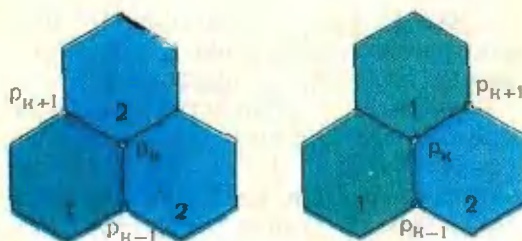


Рис. 5.

треугольник ABC (рис. 4). Пометим точку A числом 1, B — числом 2, C — 3 и запишем эти числа в соответствующих трех ячейках. Далее, в ячейках с центрами на стороне AB пишем 1, на BC — 2, на CA — 3. Каждой внутренней точке x ставим в соответствие метку — одно из чисел 1, 2, 3 — по следующему правилу: число 1, если расстояние от точки x до стороны AB не больше, чем расстояние от точки $y=f(x)$ до AB (точка x не «снижается» при отображении f); если этого нет, то берем число 2, когда точка x не приближается к BC (расстояние от x до BC не больше расстояния от y до BC); в остальных случаях берем 3 — при этом точка x удаляется от стороны CA (см. на рисунке 4 области для \vec{x}_y , которым отвечают метки 1, 2, 3). Запишем в каждую внутреннюю ячейку метку ее центра. По лемме Шпернера найдем полную вершину x_0 и вспомним знаменитую басню Крылова:

...Лебедь рвется в облака,

Рак пятится назад,

а щука тянет в воду —

Да только воз и ныне там!

Мы как раз ищем неподвижную точку: подобие этого вола из басни составляя из ячеек с числами 1, 2, 3, связанные с полной вершиной x_0 . (Эта вершина «почти неподвижна» — при достаточно малом b она мало приближается к AB , к BC и к CA , т. е. мало двигается.)

Возьмем теперь последовательность чисел $b_1, b_2, \dots, b_k, \dots$, стремящихся к нулю, и для каждого k найдем свою полную вершину x_k . Получим последовательность точек

$$x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$$

Первый случай. Если эта последовательность сходится* к точке $\bar{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$, то \bar{x} — неподвижная точка данного отображения. (Ее неподвижность следует из того, что \bar{x} не приближается ни к одной из трех сторон треугольника.)

Упражнение 6. Докажите неподвижность точки \bar{x} .

*) Говорят, что последовательность точек сходится, если сходятся обе последовательности координат точек

Второй случай. Если последовательность $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ не сходится, то можно подобрать последовательность номеров $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ так, чтобы последовательность точек

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$$

сходилась к некоторой точке $\bar{x}' = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$.

Упражнение 7. Докажите существование такой последовательности номеров $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ и неподвижность точки \bar{x}' .

Развитие метода неподвижных точек

Теорема Брауэра, которую мы доказали для отрезка и для треугольника, обобщается не только на трехмерное пространство (как было указано выше), но и на «пространство любого числа измерений». Более того, польский математик Ю. Шаудер обобщил ее на случай «бесконечномерных» пространств. Дальнейшее развитие это направление получило в работах академика А. Н. Тихонова. Польский математик С. Банах доказал важную теорему о сжатии пространств, обогатившую метод неподвижных точек. В последнее время построения, подобные рисунку 4, применяются для счета на ЭВМ приближений к неподвижным точкам и для решения многих близких задач.

Упражнения

8. Применяя теорему Брауэра (для отрезка) показать, что следующие уравнения имеют решение: а) $x - \cos x = 0$; б) $\cos(\sin x) - x = 0$.

9. Отображение $f: (x, y) \rightarrow (x', y')$, где $x' = x^2 + 1,5xy$, $y' = 0,5xy + y^2$, на отрезке $S = \{(x, y) | x > 0, y > 0, x + y = 1\}$ имеет неподвижную точку. Доказать это по теореме Брауэра, а также решая систему $x = x^2 + 1,5xy$; $y = 0,5xy + y^2$.

10. Показать, что система

$$\begin{cases} x = \sin(x+y), \\ y = 0,5(x^2 + xy^2) \end{cases}$$

имеет решение.

11. Исследовать систему

$$\begin{cases} x_1 = x_2^2 + 2x_2x_3 + x_1x_2, \\ x_2 = x_3^2 + x_3x_1, \\ x_3 = x_1^2 + x_1(x_2 + x_3) \end{cases}$$

на существование ненулевого решения (по теореме Брауэра). Решить ее элементарными средствами.

В. Можжев

Тепловое расширение твердых тел

Хорошо известно, что практически все твердые тела при нагревании расширяются. Это — универсальное свойство твердых тел. Относительное удлинение большинства твердых тел при нагревании на 1°C составляет $\sim 10^{-6}$. Чтобы понять природу этого, на первый взгляд, очевидного явления, необходимо разобраться в характере взаимодействия между атомами в твердом теле.

Любое твердое тело состоит из устойчивой системы частиц — атомов, ионов или молекул, — взаимодействующих друг с другом. Мы не будем подробно останавливаться на природе этих взаимодействий, а рассмотрим их общий характер.

Для устойчивости ансамбля частиц, образующих твердое тело, необходимо наличие двух типов сил: сил притяжения, которые не дают рас-

пасться такой системе, и сил отталкивания, не позволяющих частицам слиться друг с другом. Эти силы зависят от расстояния между частицами. И силы притяжения, и силы отталкивания тем больше, чем меньше это расстояние. Однако по мере уменьшения расстояния абсолютная величина силы отталкивания возрастает гораздо быстрее, чем абсолютная величина силы притяжения.

На рисунке 1 приведен общий вид зависимостей силы притяжения (a) и силы отталкивания (b) от расстояния между частицами твердого тела. Кривая c — это результирующая этих сил, которая и описывает характер силы взаимодействия. На расстоянии $r=r_0$ силы отталкивания уравновешивают силы притяжения, и результирующая сила взаимодействия обращается в нуль. Расстояние r_0 между частицами соответствует устойчивому состоянию равновесия. Действительно, смещение частиц из положения равновесия приводит к появлению результирующей силы, которая стремится вернуть их в положение равновесия.

Для описания взаимодействия между частицами обычно используют понятие энергии взаимодействия. На рисунке 2 приведен график зависимости энергии взаимодействия от расстояния между частицами. Численное значение энергии при расстоянии r между частицами 1 и 2 равно работе, которую необходимо совершить, чтобы переместить частицу 2 из бесконечности, где энергия взаимодействия равна нулю, в точку, на-

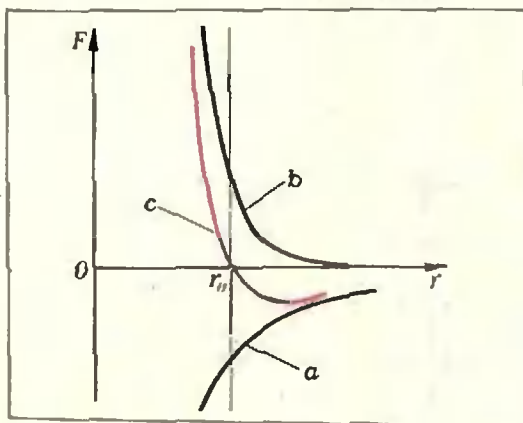


Рис. 1.

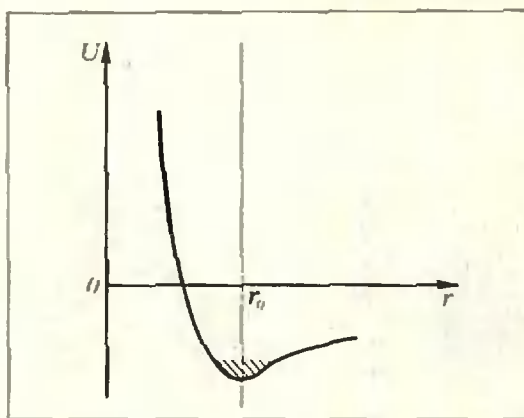


Рис. 2.

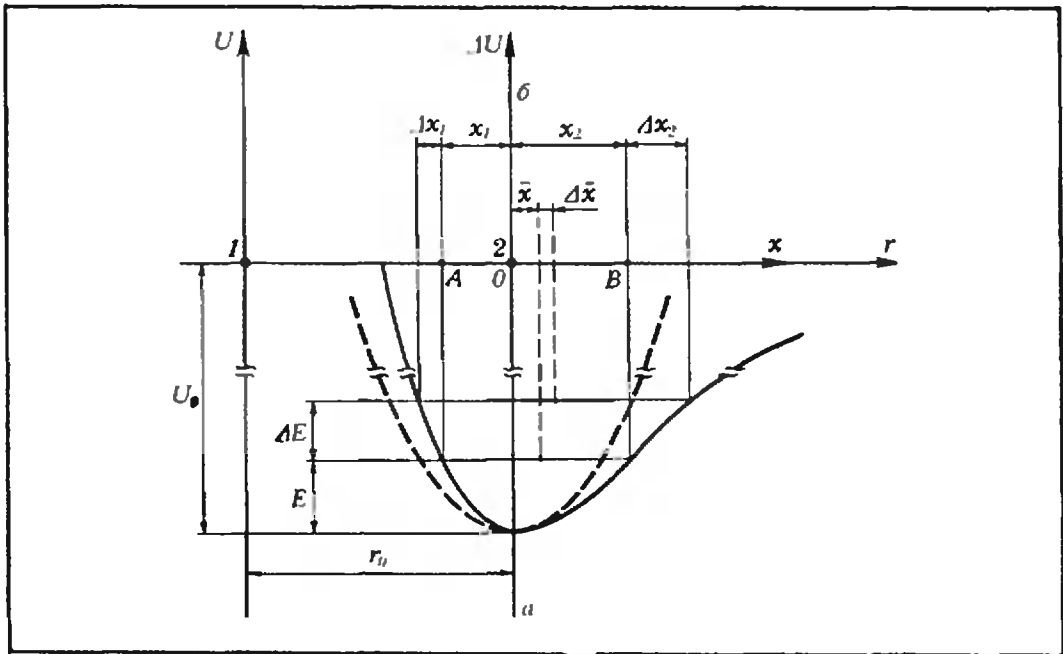


Рис. 3.

ходящуюся на расстоянии r от частицы 1 . При сближении частиц до расстояния r_0 работа совершается силами притяжения — энергия взаимодействия в этой области отрицательна. При сближении от расстояния r_0 до расстояния $r < r_0$ необходимо совершать работу против сил отталкивания — в этой области энергия взаимодействия положительна. В положении устойчивого равновесия (при $r = r_0$) полная энергия взаимодействия достигает минимального значения.

Вблизи абсолютного нуля частицы в твердом теле располагаются на расстояниях r_0 друг от друга, находясь на дне потенциальной ямы (в энергетическом смысле этого слова). При нагревании твердого тела происходит увеличение полной энергии E частиц. Эта энергия, отсчитываемая от дна потенциальной ямы, включает в себя кинетическую и потенциальную энергии частиц. Единственной доступной формой движения частиц в этом случае является колебательное движение около положений равновесия. Полная энергия E колеблющейся частицы в твердом теле, так же как и энергия молекул газа, пропорциональна температуре T .

Рассмотрим колебания частицы, находящейся в потенциальной яме (на участке, заштрихованном на рисунке 2) и обладающей полной энергией E . Для простоты пусть частица 1 неподвижна, а колеблется частица 2 . В момент прохождения положения равновесия (точка O на рисунке 3) частица 2 обладает максимальной кинетической энергией, равной E . При движении частицы влево от положения равновесия кинетическая энергия расходуется на преодоление сил отталкивания ее от частицы 1 и переходит в потенциальную энергию взаимодействия. Отклонение влево происходит до тех пор, пока вся кинетическая энергия частицы не перейдет в потенциальную энергию. Это происходит в точке A на расстоянии x_1 от положения равновесия. В этой точке частица останавливается и начинает двигаться в обратном направлении. При движении вправо от положения равновесия кинетическая энергия частицы 2 расходуется на преодоление сил притяжения к частице 1 и также переходит в потенциальную энергию взаимодействия. В точке B , находящейся на расстоянии x_2 от положения равновесия, вся кинетическая энергия переходит в потенциальную,

частица останавливается и начинает двигаться влево.

Общий характер поведения частицы 2 мы описали. Теперь рассмотрим его более детально.

Обратимся снова к рисунку 1. В окрестности точки r_0 зависимость $F(r)$ можно приближенно, с определенной степенью точности, считать линейной. В этом случае сила $F(x)$, возникающая при отклонении частицы от положения равновесия на расстояние x , пропорциональна этому отклонению и направлена к положению равновесия. (Мы полагаем, что такие силы возникают при упругих деформациях твердых тел. Именно из этого предположения и следует закон Гука.) В таком приближении изменение потенциальной энергии частицы в окрестности точки r_0 описывается зависимостью

$$U(x) = \frac{Kx^2}{2}, \quad (1)$$

где K — некоторый постоянный коэффициент, и частица совершает гармонические колебания с частотой $\omega = \sqrt{K/m}$. Поэтому такое приближение называют гармоническим.

Можно ли, остановившись на гармоническом приближении, объяснить тепловое расширение тел? Нет. И вот почему. Потенциальная кривая $U(x)$ в гармоническом приближении — это парабола, симметричная относительно вертикали $x=0$ (см. рисунок 3). Значит, с повышением температуры, то есть с увеличением полной энергии частицы, может происходить только увеличение амплитуды колебаний частицы 2, а среднее расстояние между частицами 1 и 2 остается неизменным. Значит, и размер тела остается при нагревании неизменным.

Итак, нам нужно более точно, чем гармоническим приближением описать характер изменения потенциальной энергии частицы 2 в окрестности точки O .

В действительности потенциальная кривая несимметрична — ее левая ветвь «растет» значительно быстрее, чем правая. Для учета асимметрии потенциальной кривой в окрестности точки O представим по-

тенциальную энергию частицы в таком виде:

$$U(x) = K \frac{x^2}{2} - \beta \frac{x^3}{3}, \quad (2)$$

где x , по-прежнему, — отклонение от положения равновесия. Добавляя член $\beta x^3/3$, мы приближаем нашу модельную потенциальную кривую к реальной кривой. (В первом приближении мы заменили действительную кривую потенциальной энергии взаимодействия параболой (1), теперь мы делаем следующее приближение.)

Несимметричный характер потенциальной кривой (2) приводит к тому, что максимальные отклонения частицы 2 вправо (x_2) и влево (x_1) оказываются неодинаковыми: $|x_2| > |x_1|$. Поэтому среднее положение частицы уже не совпадает с положением равновесия — оно смещается вправо от точки O на расстояние $\bar{x} = \frac{|x_2| - |x_1|}{2}$. Иными сло-

вами, среднее расстояние между частицами 1 и 2 увеличивается на \bar{x} , а это означает, что нагревание тела, то есть увеличение энергии его частиц, приводит к увеличению линейных размеров тела.

Проведем теперь оценку линейного коэффициента теплового расширения α . Пусть тело нагрето до некоторой температуры T , при которой средняя тепловая энергия его атомов равна E . Тогда для левого крайнего положения частицы 2 (точка A на рисунке 3) можно записать:

$$E = \frac{Kx_1^2}{2} + \beta \frac{|x_1|^3}{3}. \quad (3)$$

(Мы приравняли полную энергию частицы ее потенциальной энергии в левом крайнем положении.) Аналогично для правого крайнего положения (точка B)

$$E = \frac{Kx_2^2}{2} - \beta \frac{|x_2|^3}{3}. \quad (4)$$

Пусть теперь температура тела увеличилась на величину ΔT . Взяв приращения от обеих частей уравнений (3) и (4), получим

$$\Delta E = K|x_1| \cdot \Delta|x_1| + \beta x_1^2 \cdot \Delta|x_1|, \quad (5)$$

$$\Delta E = K|x_2| \cdot \Delta|x_2| - \beta x_2^2 \cdot \Delta|x_2|. \quad (6)$$

Из уравнений (5) и (6) найдем из-

менения $\Delta|x_1|$ и $\Delta|x_2|$ максимальных отклонений частицы 2 от положения равновесия при увеличении температуры тела на ΔT :

$$\Delta|x_1| = \frac{\Delta E}{K|x_1| + \beta x_1^2}, \quad (7)$$

$$\Delta|x_2| = \frac{\Delta E}{K|x_2| - \beta x_2^2}. \quad (8)$$

Изменение среднего расстояния между частицами 1 и 2 при нагревании тела от нуля до температуры T , как мы уже видели, равно

$$\bar{x} = \frac{|x_2| - |x_1|}{2}.$$

При нагревании тела от температуры T до температуры $T + \Delta T$ эта величина меняется на

$$\Delta\bar{x} = \frac{\Delta|x_2| - \Delta|x_1|}{2}. \quad (9)$$

Подставляя (7) и (8) в (9), находим

$$\Delta\bar{x} = \frac{\Delta E [K(|x_1| - |x_2|) + \beta(x_1^2 + x_2^2)]}{2(K|x_2| - \beta|x_2^2|)(K|x_1| + \beta|x_1^2|)}. \quad (10)$$

Запишем условие равенства потенциальной энергии частицы 2 в точках A и B :

$$\frac{Kx_1^2}{2} + \beta \frac{|x_1|^3}{3} = \frac{Kx_2^2}{2} - \beta \frac{|x_2|^3}{3}. \quad (11)$$

Перепишем равенство (11) в следующем виде:

$$\frac{K(x_2^2 - x_1^2)}{2} = \beta \frac{(|x_2|^3 + |x_1|^3)}{3}. \quad (12)$$

Разложив на множители выражения в скобках и сделав преобразования, из уравнения (12) найдем

$$\begin{aligned} |x_2| - |x_1| &= \\ &= \frac{2}{3} \frac{\beta}{K} (x_2^2 - |x_2| \cdot |x_1| + \\ &+ x_1^2) \approx \frac{2}{3} \frac{\beta}{K} x_2^2 = \frac{2}{3} \frac{\beta}{K} x_1^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Последние приближенные равенства справедливы, поскольку действительно $|x_1| \approx |x_2| = x$. Подставляя (13) в (10), учитывая, что $K|x_2| \gg \beta x_2^2$, $K|x_1| \gg \beta x_1^2$, находим приближенное выражение для $\Delta\bar{x}$:

$$\Delta\bar{x} \approx \frac{\Delta E (-\frac{2}{3}\beta x^2 + 2\beta x^2)}{2K^2 x^2} = \frac{2}{3} \frac{\Delta E \beta}{K^2} \approx \frac{\Delta E \beta}{K^2}.$$

(Проведенная грубая оценка с точностью до коэффициента $2/3$ совпадает с результатом, который получается при более строгом расчете.)

Теперь найдем коэффициент линейного расширения α . По определению $\alpha = \frac{1}{l} \frac{\Delta l}{\Delta T}$. В нашем случае $l = r_0$, $\Delta l = \Delta\bar{x}$, так что

$$\alpha = \frac{1}{r_0} \frac{\beta}{K^2} \frac{\Delta E}{\Delta T} = \frac{\beta}{r_0 K^2} c_V,$$

где c_V — теплоемкость, отнесенная к одной частице. Мы нашли, что коэффициент линейного расширения α пропорционален теплоемкости тела. Экспериментальные результаты хорошо подтверждают эту связь.

В области высоких температур $\Delta E = k\Delta T$. Следовательно,

$$\alpha = \frac{k\beta}{r_0 K^2}.$$

Опыт подтверждает, что в области высоких температур α действительно практически не зависит от температуры.

Задачи

наших читателей

Докажите неравенства:

1. $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$;

2. $1 + \sqrt[2]{2!} + \sqrt[3]{3!} + \dots$ где $n \geq 2$.

$\dots + \sqrt[n]{n!} < n(n+3)/4$;

3. $a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n} >$

$> \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} (a_1 a_2 \dots a_n)$
где $a_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

4. $x^{2n} + x^{2n-1} + x^{2n-2} + \dots$
 $\dots + x + \frac{n}{2(n+1)} > 0$,

Д. Федоров

5. Пусть p — простое число и $p > 11$. Докажите, что разность $p^{60} - 1$ делится на 1980.

С. Манукян

6. Докажите, что выражение

$$1^{100} - 2^{100} + 3^{100} - \dots - 4^{100} + \dots + 1975^{100} - \dots - 1978^{100} + 1979^{100}$$

делится на 199 879.

Д. Нямсүрэн

И. Быстрый

Площадь сегмента параболы Нейля

В 1657 году двадцатилетний студент Оксфордского университета Уильям Нейль (1637—1670) нашел длину дуги «полукубической параболы» $y = a^3\sqrt{x^2}$. Это открытие поразило современников, и в память о рано умершем талантливом математике полукубическая парабола называется *параболой Нейля*.

В наше время параболу Нейля можно встретить не только в вузовском курсе анализа, но и в школьном учебнике*). А недавно на лекции для абитуриентов я получил такую записку:

Как найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = 3\sqrt[3]{x^2}$ и касательной к ней в точке $x = -8$?

Вот что я тогда ответил.

Эта задача, несмотря на кажущуюся простоту, связана с определенными трудностями.

Первая трудность возникает при нахождении касательной к параболе Нейля

$$f_1(x) = 3\sqrt[3]{x^2} \quad (1)$$

в точке $x = -8$. Как известно, уравнение касательной определяется по формуле

$$y - f_1(-8) = f_1'(-8)(x + 8). \quad (2)$$

Здесь

$$f_1(-8) = 12.$$

$$\begin{aligned} f_1'(-8) &= 3(x^{\frac{2}{3}})'|_{x=-8} = \\ &= 3 \cdot \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}|_{x=-8} = 2 \cdot (-8)^{-\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Значит, производная не существует (поскольку выражение $(-8)^{-\frac{1}{3}}$ не имеет смысла), следовательно, не существует и касательной к кривой (1).

Между тем, из чертежа ясно, что вывод неверен: прямая (AB) — касательная! В чем дело? Как же найти угловой коэффициент касательной? Дело в том, что формула

$$(\sqrt[n]{x^m})' = (x^{\frac{m}{n}})' = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1},$$

верная при $x \geq 0$, здесь неприменима. Для вычисления производной (при $x < 0$) следует пользоваться формулой

$$(\sqrt[n]{x^m})' = \frac{m}{n} \frac{\sqrt[n]{x^m}}{x}, \quad (*)$$

$$x \neq 0, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}.$$

(которая, разумеется, применима и для положительных x). В соответствии с ней имеем

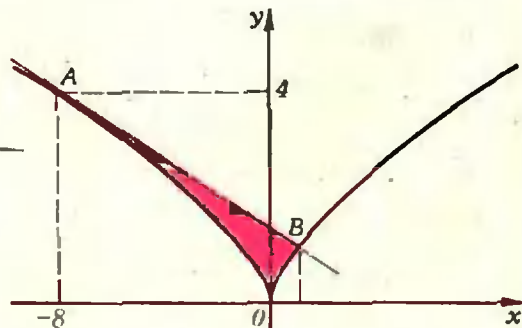
$$\begin{aligned} f_1'(-8) &= (3\sqrt[3]{x^2})'|_{x=-8} = \\ &= 3 \cdot \frac{2}{3} \frac{\sqrt[3]{(-8)^2}}{(-8)} = -1. \end{aligned}$$

Подставив $f_1(-8) = 12$ и $f_1'(-8) = -1$ в равенство (2), получим искомое уравнение касательной:

$$y = 4 - x.$$

Упражнение 1. Найдите точки пересечения линий $f_1(x) = 3\sqrt[3]{x^2}$ и $f_2(x) = 4 - x$.

Теперь, когда известна абсцисса точки B , легко найти площадь криволинейного треугольника AOB . Как



*) «Алгебра и начала анализа 9», задачи 438, 4746, «Алгебра и начала анализа 10», задача 393а.

известно, это можно сделать по формуле

$$S = \int_{x_A}^{x_B} [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

Имеем

$$\begin{aligned} S &= \int_{-8}^1 (4-x-3\sqrt[3]{x^2}) dx = \\ &= \int_{-8}^1 (4-x) dx - 3 \int_{-8}^1 \sqrt[3]{x^2} dx. \quad (3) \end{aligned}$$

Вычисление первого интеграла никаких трудностей не вызывает:

$$\begin{aligned} \int_{-8}^1 (4-x) dx &= \\ &= 4x - \frac{x^2}{2} \Big|_{-8}^1 = 67,5 \text{ (ед)}^2. \quad (4) \end{aligned}$$

А вот вычисление второго интеграла неожиданно приводит к выводу:

$$\begin{aligned} 3 \int_{-8}^1 \sqrt[3]{x^2} dx &= 3 \int_{-8}^1 x^{\frac{2}{3}} dx = \\ &= \frac{9}{5} x^{\frac{2}{3}+1} \Big|_{-8}^1 = \frac{9}{5} (1 - (-8)^{\frac{5}{3}}) \end{aligned}$$

— интеграл не существует, поскольку выражение $(-8)^{\frac{5}{3}}$ не имеет смысла!

Дело в том, что формула интегрирования, которая здесь была применена, справедлива лишь для $x \geq 0$. Для более широкой области изменения переменной следует воспользоваться формулой

$$\int \sqrt[n]{x^m} dx = \frac{n}{n+m} x^{\frac{n+m}{n}} + C (**)$$

$$x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}^*.$$

В соответствии с ней имеем

$$\begin{aligned} 3 \int_{-8}^1 \sqrt[3]{x^2} dx &= \\ &= \frac{9}{5} x^{\frac{5}{3}} \Big|_{-8}^1 = 59,4 \text{ (ед)}^2. \quad (5) \end{aligned}$$

Подставив результаты (4) и (5) в равенстве (3), получим

$$S = 67,5 - 59,4 = 8,1.$$

У п р а ж н е н и я

2. Запишите формулу (*) в терминах степенной функции.

3. Запишите формулу (**) в терминах степенной функции.

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 2\sqrt[4]{x^2}, y = 0,4x + 2,4.$$

*) Если $m < 0$, то нужно дополнительно потребовать, чтобы $x \neq 0$.

Наша обложка

Картины на воде

Картину, которую мы воспроизвели на первой странице обложки, вы можете «нарисовать» сами за несколько минут.*

В фотографическую кювету или какой-нибудь другой сосуд налейте воды; в отдельных маленьких посудинках разведите в бензине или скипидаре небольшие количества художественной масляной краски нескольких цветов (делайте это подальше от огня и электроприборов). Затем эту краску осторожно

капайте на поверхность воды. Капли начинают расплзаться, образуя на поверхности причудливый плавающий рисунок. Этот рисунок можно изменить, осторожно помешав его палочкой, подув на него.

Плотный лист бумаги (чертежной) осторожно возьмите за уголки и положите его на секунду плашмя на поверхность воды. Красочный слой впитается в бумагу. Теперь снимите лист, переверните его и оставьте сохнуть. Картина готова.

Поведение капель на поверхности воды зависит от концентрации краски в раст-

ворителе, от того, в какой последовательности и с каким интервалом падают капли на воду, от сорта краски. Первые капли, как правило, быстро растекаются по всей поверхности воды. Если подождать минуту, пока растворитель с поверхности испарится, и после этого на образовавшуюся пленку капать новой краской, то новые капли могут разломать пленку на отдельные «лядинки», разбегающиеся в разные стороны.

Основную роль во всех этих явлениях играет, очевидно, поверхностное натяжение.

Ю. Котов



И. Михайлов

О диофантовом анализе

Область теории чисел, в которой исследуются целочисленные решения уравнений вида $P(x, y, \dots, z) = 0$, где $P(x, y, \dots, z)$ — многочлен от нескольких переменных с целыми коэффициентами, называется *диофантовым анализом*, а сами эти уравнения — *диофантовыми*. О некоторых диофантовых уравнениях и способах их решения мы уже писали*).

Напомним, что *решить диофантово уравнение* — это значит выяснить следующее:

1. имеет ли оно хотя бы одно целочисленное решение;
2. конечно или бесконечно число его целочисленных решений;
3. найти все его целочисленные решения.

Например, для уравнения $x^3 + y^3 + z^3 = 30$ пока неизвестно ни одного целочисленного решения. Однако, возможно, решение будет найдено позднее. А может быть, будет доказано, что их не существует.

А вот для уравнения $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ известны четыре решения: $(1; 1; 1)$, $(4; 4; -5)$, $(4; -5; 4)$, $(-5; 4; 4)$. Но пока остается открытым вопрос: а есть ли другие решения?

Другой пример. Доказано, что уравнение $x^3 + y^3 + z^3 = 2$ имеет бесконечное множество решений в целых числах $(x; y; z) = (1 + 6a^3; 1 - 6a^3; -6a^3)$, где a — целое число. Но до

сих пор не выяснено, все ли его решения задаются этими формулами.

Мощным средством доказательства бесконечности множества целых решений диофантовых уравнений является *метод параметризации*. Суть этого метода состоит в представлении переменных x, y, \dots, z в виде функций, зависящих от целочисленных параметров $\alpha, \beta, \dots, \gamma$: $x = A(\alpha, \beta, \dots, \gamma)$, $y = B(\alpha, \beta, \dots, \gamma)$, \dots , $z = C(\alpha, \beta, \dots, \gamma)$, где A, B, \dots, C — многочлены с целыми коэффициентами. Методы параметризации, порою весьма искусственные, но исключительно оригинальные, требуют, как правило, большой изобретательности, а потому способствуют приобретению и развитию навыков самостоятельной творческой деятельности в математике.

Вернемся к уравнению $x^3 + y^3 + z^3 = 2$ и попытаемся его параметризовать. Для этого положим $x = a + b$, $y = a - b$, где a и b — целые числа; получим $2a^3 + 6ab^2 + z^3 = 2$. Пусть $a = 1$, тогда $6b^2 = -z^3$, откуда $z = 6c$ (c — целое), то есть $b^2 = -36c^3$. В таком случае $c = -a^2$ (a — целое), но тогда $b = 6a^3$. Окончательно имеем

$$(1 + 6a^3)^3 + (1 - 6a^3)^3 + (-6a^2)^3 = 2.$$

То есть $x = A(a) = 1 + 6a^3$, $y = B(a) = 1 - 6a^3$, $z = C(a) = -6a^2$. Подставляя вместо a целые числа, получим различные решения.

Задача 1. Параметризовав уравнение $x^3 + y^3 + z^3 = 2t^3$, докажите бесконечность множества его целочисленных решений.

Математиков, занимающихся теорией чисел, вот уже много лет привлекает нерешенная до сих пор задача: разрешимо ли в целых числах уравнение $x^4 + y^4 + z^4 = t^4$?

В 1914 году А. Веребрюсов предложил доказательство его неразрешимости. Однако, как выяснилось позже, его доказательство было ошибочным. (Кстати, предположение о неразрешимости этого уравнения в целых числах высказал еще Эйлер.) В 1945 году было доказано, что уравнение $x^4 + y^4 + z^4 = t^4$ не имеет решений в целых числах для $|t| < 10^8$. Но, разумеется, это — еще не полное решение.

* См «Квант», 1971, № 3, с 15, 1978, № 1, с 25, № 12, с 2

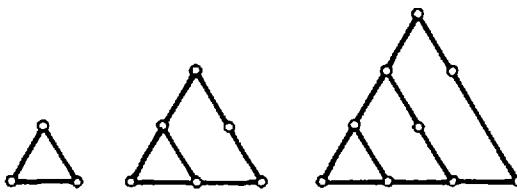


Рис. 1.

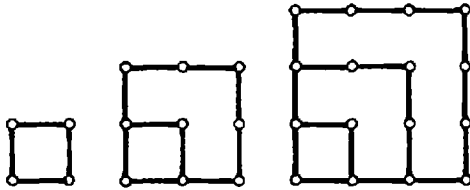


Рис. 2.

Попробуем решить задачу более простую, хотя и «более сложную» с виду: докажем бесконечность множества целочисленных решений уравнения $x^4 + y^6 + z^{12} = t^4$.

Пусть $x = a - b$, $t = a + b$, где a и b — целые числа. Тогда $y^6 + z^{12} = 8a^3b + 8ab^3$. Положим $y^6 = 8a^3b$, $z^{12} = 8ab^3$; тогда $a = c^3$, $b = d^3$ (c и d — целые числа) и $y^2 = 2c^3d$, $z^4 = 2cd^3$. Отсюда следует, что $2cd$ — квадрат целого числа. Полагая $c = \alpha^4$, $d = 2\beta^4$ (α, β — целые числа), получаем тождество

$$(\alpha^{12} - 8\beta^{12})^4 + (2\alpha^6\beta^2)^6 + (2\alpha\beta^3)^{12} = (\alpha^{12} + 8\beta^{12})^4,$$

доказывающее требуемое.

Задача 2. Найдите еще одно тождество, описывающее решения уравнения $x^4 + y^6 + z^{12} = t^4$.

А вот для доказательства неразрешимости некоторого диофантова уравнения очень полезно бывает рассмотреть это уравнение «по некоторому модулю»^{*}). Поясним, что мы имеем в виду.

Два целых числа a и b называются *сравнимыми по модулю k* , если разность $a - b$ делится на k . Легко видеть, что два числа a и b сравнимы по модулю k тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые остатки при делении на k . То, что a и b сравнимы по модулю k , записывают так: $a \equiv b \pmod{k}$.

^{*} См. статьи М. Башмакова («Квант», 1971, № 3) и А. Геронимуса («Квант», 1978, № 12).

Пусть нам надо решить диофантова уравнение

$$x^3 + 117y^3 = 5.$$

Рассмотрим это уравнение «по модулю 9», то есть с точностью до слагаемых, кратных девяти. Нетрудно показать, что любое число в кубе или делится на 9, или дает при делении на 9 в остатке 1 или 8, то есть $x^3 \equiv 0 \pmod{9}$ или $x^3 \equiv 1 \pmod{9}$ или $x^3 \equiv 8 \pmod{9}$.

Поскольку 117 делится на 9, $117y^3 \equiv 0 \pmod{9}$. Таким образом,

$$x^3 + 117y^3 \equiv 0 \pmod{9}$$

или

$$x^3 + 117y^3 \equiv 1 \pmod{9}$$

или

$$x^3 + 117y^3 \equiv 8 \pmod{9}.$$

Поэтому уравнение $x^3 + 117y^3 = 5$ не имеет целочисленных решений.

Задача 3. Докажите, что уравнения

а) $x^3 + y^3 = 9t \pm 4$;

б) $x^3 + y^3 = 9t \pm 3$;

в) $x^3 + y^3 + z^3 = 9t \pm 4$

не имеют целочисленных решений.

Треугольные и квадратные числа*) связаны соответственно с правильным треугольником и квадратом (см. рисунки 1, 2).

Обозначим n -е треугольное число через T_n , n -е квадратное число через K_n .

Задача 4. Докажите следующие формулы: $T_n = \frac{1}{2}n(n+1)$; $K_n = n^2$.

Задача найти все треугольные числа, являющиеся квадратными, сводится к решению уравнения $T_n = K_m$, то есть уравнения $n(n+1) = 2m^2$.

Решить это уравнение нам поможет уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$. Оно имеет бесконечное множество решений (в натуральных числах), задаваемых рекуррентно: $x_{k+1} = 3x_k + 4y_k$ и $y_{k+1} = 2x_k + 3y_k$, $x_1 = 3$, $y_1 = 2$ (докажите это самостоятельно или посмотрите доказательство в «Кванте», 1978, № 1, с. 26).

(Окончание см. на с. 35)

^{*)} См. также «Квант», 1974, № 6, с. 53.

задачник «Кванта»

Задачи

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 августа 1980 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 6 — 80» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М626, М627» или «Ф638». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М626—М630; Ф638—Ф642

М626. Каждая сторона выпуклого четырехугольника разделена на 8 равных частей. Соответствующие точки деления на противоположных сторонах соединены друг с другом, и полученные клетки раскрашены в шахматном порядке. Докажите, что сумма площадей черных клеток равна сумме площадей белых клеток.

В. Произволов

М627. В каждой клетке бесконечного листа клетчатой бумаги записано натуральное число.

а) Пусть каждое из этих чисел встречается ровно один раз. (Приведите примеры такой расстановки чисел!) Докажите, что для любого заданного m найдутся две соседние (имеющие общую сторону) клетки, разность чисел в которых не меньше m .

б)* Пусть каждое число $n \in \mathbb{N}$ встречается ровно n раз (то есть 1 — один раз, 2 — два раза и т. д.). Укажите наибольшее число k такое, что обязательно найдутся две соседние клетки, разность чисел в которых не меньше k . (Приведите пример такой расстановки, в которой разность чисел в любой паре соседних клеток не больше $k+1$.)

А. Толпыго

М628. На сфере построен треугольник, одна «сторона» которого имеет величину 120° . Докажите, что «медiana», опущенная на эту «сторону» делится каждой из двух других «медиа» на две равные части. («Медiana» и «сторона» — дуги больших окружностей.)

А. Ягубьянц

М629. а) Докажите, что число $2^{2n-1} - 9n^2 + 21n - 14$ делится на 27 при любом натуральном n .

б) Докажите, что если числа $a+b$ и a^2+b делятся на m , то a^n+b делится на m при любом n (a, b и m — некоторые натуральные числа).

в)* Докажите, что если $f(n) = a^n + b_0 + b_1n + \dots + b_k n^k$ делится на m при $n=1, n=2, \dots, n=k+1, n=k+2$, то $f(n)$ делится на m при любом n ($a, b_0, b_1, \dots, b_k, m$ — некоторые натуральные числа).

Т. Маликов

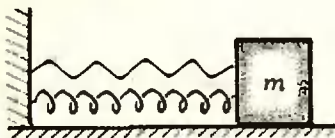


Рис. 1.

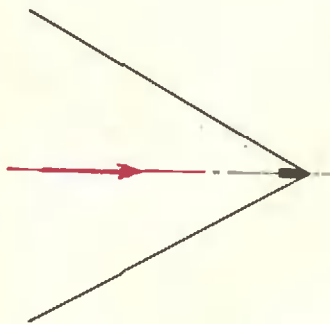


Рис. 2.

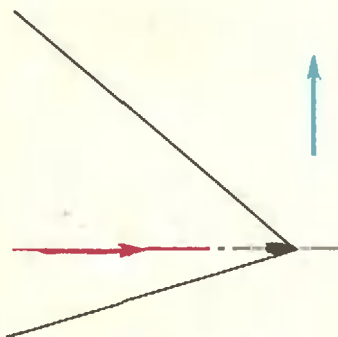


Рис.

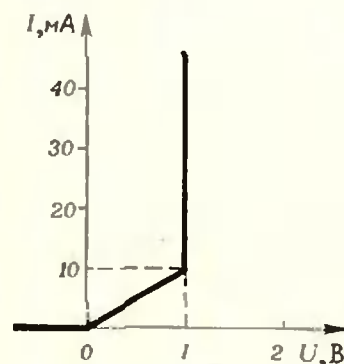


Рис. 4.

М630. На плоскости даны окружность и точки P, Q на ней. Проведем через точки P, Q и произвольную точку K плоскости окружность. Пусть M — точка пересечения касательной к этой окружности в точке K с прямой PQ . Какое множество заполняют точки M ?

И. Шарыгин

Ф638. Читая в 1908 году лекции в Страсбурге, академик Л. И. Мандельштам поражая слушателей следующим красивым опытом. Два камертона на резонаторных ящиках, имеющих резонансные частоты 500 Гц и 505 Гц, ставили рядом и один из камертонов возбуждали. Второй камертон при этом практически не откликнулся на колебания первого. Но стоило экспериментатору начать периодически закрывать и открывать рукой ящик звучащего камертона, как тут же начинал звучать второй камертон. Объясните результат этого опыта.

Ф639. Две пружинки с жесткостями k_1 и k_2 присоединены каждой одним концом в вертикальной стене, другим — к грузу массы m , лежащему на горизонтальном столе (рис. 1). В начальный момент пружина с жесткостью k_1 растянута на величину l_1 , а пружина с жесткостью k_2 сжата на величину l_2 . Груз отпускают. Найти амплитуду и период колебаний груза. Трением пренебречь.

А. Бергман

Ф640. На рисунках 2 и 3 показаны границы областей волнений, возбуждаемых кораблем на двух участках в пути. Красными стрелками указаны направления скорости корабля. На первом участке (рис. 2) течение отсутствует. Направление течения на втором участке (рис. 3) показано синей стрелкой. Определите скорость течения, если скорость корабля относительно берегов в обоих случаях одна и та же и равна 18 км/ч.

В. Белонучкин

Ф641. Настенные часы с маятником имеют массу $M=5$ кг. Масса груза на конце легкого маятника $m=150$ г. Какая ошибка в показаниях часов накопится за сутки, если часы повесить к потолку на двух длинных параллельных шнурах? Считать, что часы, прикрепленные к стене, идут точно.

Е. Бутиков

Ф642. На рисунке 4 приведена идеализированная вольтамперная характеристика диода. Конденсатор емкости $C=100$ мкф, заряженный до напряжения $U=5$ В, подключается через диод к резистору с сопротивлением $R=100$ Ом. Какое количество тепла выделится на резисторе при разрядке конденсатора?

Е. Сурков

Решения задач

M568, M570—M572, M574; Φ 579, Φ 586, Φ 587

M568. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Докажите, что

а) если радиусы окружностей, вписанных в треугольники AOB , BOC , COD и DOA , равны между собой, то $ABCD$ — ромб;

б) если радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC , BCD , CDA и DAB , равны между собой, то $ABCD$ — прямоугольник.

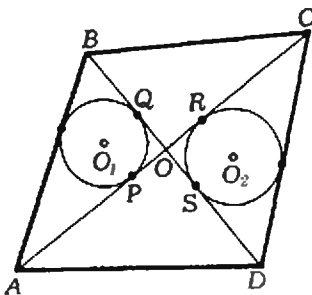


Рис. 1.

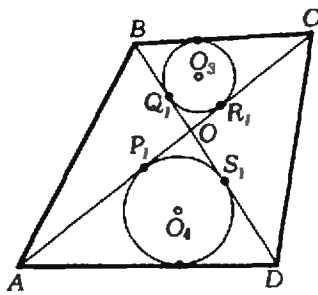


Рис. 2.

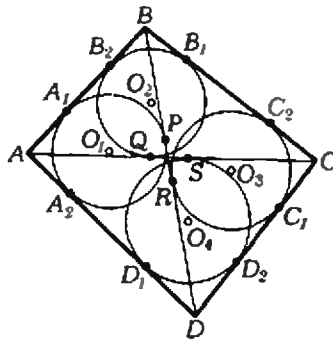


Рис. 3.

а) Пусть r — радиус, O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники AOB и COD ; P , Q , R , S — точки касания этих окружностей со сторонами AO , BO , CO , DO этих треугольников (рис. 1).

Докажем сначала, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Для этого достаточно установить, что его диагонали AC и BD делятся точкой O пополам.

Предположим, что это не так. Пусть, например, $|AO| > |OC|$. Мы докажем, что из этого неравенства следуют неравенства $|BO| < |OD|$ и $|BO| > |OD|$, что невозможно.

Из неравенства $|AO| > |OC|$ следует, что $|AP| > |CR|$, поскольку $|OP| = |OR|$; из $|O_1P| = |O_2R|$ вытекает $\widehat{O_1AP} < \widehat{O_2CR}$, и поэтому $\widehat{BAO} < \widehat{DCO}$. Следовательно, $\widehat{ABO} > \widehat{CDO}$ и $|BQ| < |DS|$, но это значит, что $|BO| < |OD|$.

Повторяя проведенные рассуждения для треугольников BOC и AOD (рис. 2; проделайте это самостоятельно), получим, что $\widehat{DAO} < \widehat{BCO}$, откуда $\widehat{ODA} > \widehat{CDB}$, и, следовательно, $|DS_1| < |BQ_1|$, то есть $|BO| > |OD|$.

Полученное противоречие доказывает, что $|AO| = |OC|$. Так же доказывается, что $|BO| = |OD|$. Итак, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Из равенства площадей треугольников AOB и BOC (мы пользуемся известной формулой $S = pr$) получаем

$$\frac{1}{2} r (|AO| + |OB| + |AB|) = \frac{1}{2} r (|OC| + |OB| + |BC|),$$

откуда $|BC| = |AB|$, то есть четырехугольник $ABCD$ — ромб.

б) Первое решение. Пусть (рис. 3) A_1 и A_2 , B_1 и B_2 , C_1 и C_2 , D_1 и D_2 — точки касания окружностей, вписанных в треугольники ABD , ABC , BCD , CDA , со сторонами четырехугольника $ABCD$; O_1, O_2, O_3, O_4 — центры этих окружностей; P, Q, R, S — точки касания окружностей с диагоналями AC и BD ; r — радиус окружностей.

Сначала мы докажем интересный и сам по себе факт: для произвольного выпуклого четырехугольника $ABCD$ длины отрезков между точками касания, лежащими на противоположных сторонах четырехугольника, равны, то есть $|A_1B_2| = |C_1D_2|$ и $|B_1C_2| = |A_2D_1|$.

Убедимся сначала, что рисунок 3 «правильный», то есть что расположение точек касания на сторонах четырехугольника именно такое, как это показано на рисунке 3.

Рассмотрим, например, треугольники ABD и ACD и докажем, что точка A_2 лежит ближе к точке A , чем точка D_1 .

Для этого достаточно доказать, что $|AA_2| + |DD_1| < |AD|$.

Легко видеть, что

$$|AA_2| = \frac{|AB| + |AD| - |BD|}{2}$$

и

$$|DD_1| = \frac{|AD| + |CD| - |AC|}{2}.$$

Сложив эти равенства, получим

$$|AA_2| + |DD_1| = |AD| + \frac{|AB| + |CD| - |BD| - |AC|}{2}.$$

Но $|AB| + |CD| < |BD| + |AC|$ (докажите это!) и, следовательно,

$$|AA_2| + |DD_1| < |AD|.$$

Теперь докажем, что $|A_2D_1| = |B_1C_2|$ и $|D_2C_1| = |A_1B_2|$.

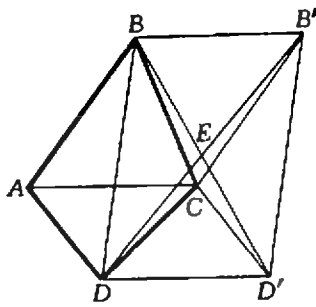


Рис. 4.

Пользуясь свойством отрезков касательных (рис. 3), получаем

$$|BD| = |BP| + |PD| = |BA_1| + |DA_2| = |BB_2| + |A_1B_2| + |DD_1| + |A_2D_1|. \quad (1)$$

С другой стороны,

$$|BD| = |BR| + |RD| = |BB_1| + |B_1C_2| + |DD_2| + |D_2C_1| = |BB_2| + |B_1C_2| + |DD_1| + |D_2C_1|. \quad (2)$$

Приравняв выражения (1) и (2), получаем

$$|A_1B_2| + |A_2D_1| = |B_1C_2| + |D_2C_1|. \quad (3)$$

Проведя точно такие же вычисления для диагонали AC, получим

$$|A_2D_1| + |D_2C_1| = |A_1B_2| + |B_1C_2|. \quad (4)$$

Сложив теперь равенства (3) и (4), получим

$$|A_2D_1| = |B_1C_2|.$$

Следовательно, и $|D_2C_1| = |A_1B_2|$.

До сих пор мы не пользовались равенством радиусов вписанных окружностей, так что полученный нами результат справедлив для произвольного выпуклого четырехугольника.

Теперь завершим решение задачи.

Так как центры окружностей одинаково удалены от соответствующих сторон, получаем $(O_1O_2) \parallel (AB)$ и $(O_3O_4) \parallel (CD)$; а так как $|O_1O_2| = |A_1B_2|$ и $|O_3O_4| = |C_1D_2|$, получаем $|O_1O_2| = |O_3O_4|$.

Аналогично, $|O_2O_3| = |O_1O_4|$ и, значит, четырехугольник $O_1O_2O_3O_4$ — параллелограмм, а так как стороны четырехугольника ABCD параллельны сторонам этого параллелограмма, четырехугольник ABCD — тоже параллелограмм.

Приравняв выражения для площадей треугольников ABD и ABC, получим

$$\frac{1}{2} r (|AB| + |BD| + |AD|) = \frac{1}{2} r (|CD| + |AD| + |AC|),$$

откуда $|BD| = |AC|$.

Таким образом, диагонали параллелограмма ABCD равны по длине, а это и значит, что ABCD — прямоугольник.

Второе решение. Как и в первом решении, мы докажем сначала, что четырехугольник ABCD — параллелограмм.

Для этого проведем через точки B и D прямые, параллельные стороне AC (рис. 4), и отложим на них по одну сторону от прямой BD отрезки BB' и DD' длины |AC|.

Четырехугольник BB'DD', очевидно, — параллелограмм. Легко видеть, что треугольники BCB', B'CD', CD'D конгруэнтны треугольникам ABC, ABD и ACD соответственно, так что радиусы окружностей, вписанных во все четыре треугольника, на которые параллелограмм разбит отрезками CB, CB', CD и CD', равны.

Докажем, что точка C совпадает с точкой E пересечения диагоналей параллелограмма BB'D'D.

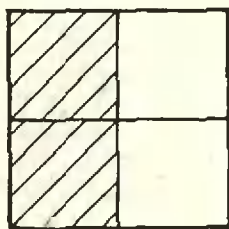
В самом деле, если это не так, то точка C принадлежит одному из треугольников, на которые параллелограмм разбивается своими диагоналями (на рисунке 4 это треугольник DED'). В этом случае радиус окружности, вписанной в треугольник DED', будет больше r, а радиус окружности, вписанной в треугольник BEB', — меньше r, что противоречит конгруэнтности треугольников DED' и BEB'.

Таким образом, точка C совпадает с точкой E пересечения диагоналей параллелограмма BB'D'D и, следовательно, $|DC| \parallel |AB|$ и $|AD| \parallel |BC|$, то есть четырехугольник ABCD — параллелограмм.

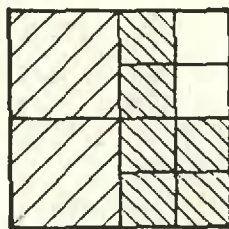
Для завершения этого решения достаточно провести рассуждения, уже проведенные в конце первого решения.

А. Егоров

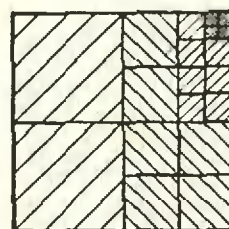
M570. *Задан набор квадратов, сумма площадей которых равна 4. Докажите, что квадратами этого набора всегда можно покрыть квадрат площади 1.*



а



б



в

Рис. 1.

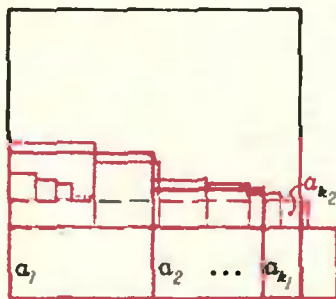


Рис. 2.

«Вырежем» сначала из каждого квадрата нашего набора максимальный из возможных квадратиков со стороной длины $\frac{1}{2^n}$ (если длина стороны квадрата из данного набора равна a , то n определяется из условия $\frac{1}{2^n} < a < \frac{1}{2^{n-1}}$). Так как

сторона каждого квадрата уменьшается меньше чем в два раза, общая площадь полученных квадратиков больше 1.

Покажем, что новым набором квадратиков можно покрыть квадрат единичной площади (отсюда, очевидно, следует, что и исходным набором квадратов его покрыть можно).

Если в наборе есть квадратик со стороной длины 1 или больше, то он один уже все покроем. Пусть таких квадратиков нет. Разобьем единичный квадрат на четыре одинаковых квадрата $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ и уложим на них все квадратик со стороной длины $\frac{1}{2}$ из нашего нового набора, если они есть

(рис. 1, а). Затем каждый из непокрытых квадратов снова разобьем на четыре части и уложим на них квадратик со стороной длины $\frac{1}{4}$ из нашего набора, если они есть (рис. 1, б).

Оставшиеся непокрытыми квадраты снова разобьем на четыре части, и так до тех пор, пока весь квадрат площади 1 не окажется покрытым (рис. 1, в). Такой момент обязательно наступит, поскольку мы укладываем квадратик без пересечений (точнее, никак не точки, кроме точек границ квадратиков, не покрываются более одного раза), а общая их площадь больше 1.

Число 4 в условии задачи можно уменьшить. Докажем, что единичный квадрат можно покрыть любым набором квадратов, сумма площадей которых равна 3.

Будем укладывать квадраты в порядке убывания длин их сторон. Первый (самый большой) поставим в левый нижний угол единичного квадрата (рис. 2), рядом с ним — второй, и так до тех пор, пока очередной квадрат (пусть его номер равен k_i) не покроет правую нижнюю вершину единичного квадрата. Проведем прямую, на которой лежит верхняя сторона квадрата номер k_i (на рисунке 2 эта прямая проведена пунктиром). Следующие квадраты будем ставить на отрезок этой прямой, заключенный между вертикальными сторонами единичного квадрата: на левый конец этого отрезка ставим квадрат с номером $k_i + 1$ и так далее. Когда мы дойдем до правого конца отрезка, проведем новую прямую и начнем снова укладывать квадраты.

Предположим, что мы уже уложили последний квадрат (пусть его номер N), а большой квадрат все еще полностью не покрыт.

Рассмотрим квадраты выходящие на правую сторону единичного квадрата. Пусть $k_1, k_2, k_3, \dots, k_m$ — их номера. Обозначим через a_i длину стороны квадрата номер i . Если $k_m \neq N$ (то есть последний квадрат не «дошел» до конца «своего» отрезка), положим для удобства $a_{k_m+1} = 0$.

Из способа укладки квадратов следует, что

$$a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \dots + a_{k_1-1} < 1 + a_{k_1-1}$$

Кроме того, тот факт, что единичный квадрат не покрыт полностью, означает, что

$$a_{k_1} + a_{k_2} + a_{k_3} + \dots + a_{k_m} < 1$$

(не покрыта правая верхняя вершина).

Оценим общую площадь квадратов, помня о том, что последовательность $\{a_i\}$ — невозрастающая.

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{k_1}^2) + (a_{k_1+1}^2 + a_{k_1+2}^2 + \dots + a_{k_1}^2) + \dots$$

$$+ \dots + (a_{k_{m-1}+1}^2 + \dots + a_{k_m}^2) <$$

$$< a_1(a_1 + a_2 + \dots + a_{k_1}) + a_{k_1+1}(a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \dots + a_{k_1}) + \dots$$

$$\begin{aligned}
& \dots + a_{k_{m-1}+1} (a_{k_{m-1}+1} + a_{k_{m-1}+2} + \dots + a_{k_m}) \leq \\
& \leq a_1(1+a_{k_1}) + a_{k_1+1}(1+a_{k_2}) + \dots + a_{k_{m-1}+1}(1+a_{k_m}) = \\
& = a_1 + (a_{k_1+1} + a_{k_2+1} + \dots + a_{k_{m-1}+1}) + \\
& + a_1 a_{k_1} + a_{k_1+1} a_{k_2} + \dots + a_{k_{m-1}+1} a_{k_m} \leq \\
& \leq a_1 + (a_{k_1} + a_{k_2} + \dots + a_{k_{m-1}}) + a_1(a_{k_1} + a_{k_2} + \dots + a_{k_m}) < \\
& < 2a_1 + 1 < 3.
\end{aligned}$$

Итак, наше предположение оказалось неверным, и, значит, единичный квадрат покрыт полностью.

Если потребовать, чтобы стороны укладываемых квадратов были параллельны сторонам покрываемого квадрата, то число 3 уменьшить нельзя. Действительно, для произвольного $S < 3$ возьмем набор из трех одинаковых квадратов площади $S/3$. Каждый из них сможет покрыть не более одной вершины единичного квадрата, поэтому весь квадрат покрыт не будет.

Точная оценка в случае, когда стороны укладываемых квадратов не параллельны сторонам единичного квадрата, автору неизвестна.

Некоторые читатели в своих решениях пытались обобщать утверждение задачи, заменяя единичный квадрат прямоугольником единичной площади. Но, очевидно, каким бы большим числом K мы ни заменили число 4 в условии, верного утверждения не получится (контрпример: прямоугольник со сторонами длины $2k$ и $1/2k$ нельзя покрыть набором из k единичных квадратов).

А. Вайнроб

M571. Убывающая последовательность (x_n) положительных чисел такова, что при любом натуральном n

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \dots + \frac{x_n}{n} < 1.$$

Докажите, что при любом натуральном n

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \dots + \frac{x_n}{n} < 3.$$

Мы докажем более сильное утверждение: для нашей последовательности при любом натуральном n

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \dots + \frac{x_n}{n} < 2.$$

Действительно, поскольку $x_k > 0$

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{k} < \frac{(n+1)^2 - 1}{2} \frac{x_n}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{(k+1)^2 - 1}{m} \frac{x_m}{m}.$$

Поскольку последовательность (x_n) — убывающая,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{k} & < \sum_{k=1}^n x_{k^2} \left(\sum_{m=k^2}^{k^2+k-1} \frac{1}{m} + \sum_{m=k^2-k}^{k^2+2k} \frac{1}{m} \right) < \\
& < \sum_{k=1}^n x_{k^2} \left(\frac{k}{k^2} + \frac{k+1}{k^2+k} \right) = 2 \sum_{k=1}^n \frac{x_{k^2}}{k} < 2,
\end{aligned}$$

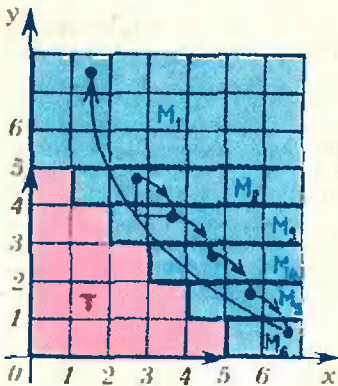
что и требовалось доказать.

Оценка 2 уже неулучшаема: мы предлагаем читателям доказать самостоятельно, что для любого $c < 2$ можно найти убывающую последовательность из положительных чисел такую, что при любом натуральном n

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_{k^2}}{k} < 1 \text{ и } \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{k} > c.$$

З. Чантурия

M572. Кенгуру прыгает по углу $x \geq 0, y \geq 0$ координатной плоскости Oxy следующим образом: из точки $(x; y)$ кенгуру может прыгнуть в точку $(x+1; y-1)$ или в точку $(x-5; y+7)$, причем прыгать в точки, у которых одна из координат отрицательна, не разрешается. Из каких начальных точек $(x; y)$ кенгуру не может попасть в точку, находящуюся на расстоянии больше 1000 от начала координат? Нарисуйте множество всех таких точек $(x; y)$ и найдите его площадь.



Ответом является «ступенчатый треугольник» T (см. рис.): он содержит два граничных полуоткрытых промежутка $[0; A]$, $[0; B]$ (где A и B — точки с координатами $(5; 0)$ и $(0; 5)$ соответственно), но не содержит никаких других граничных точек (точек десяти отрезков, ограничивающих «ступеньки»). Площадь его, очевидно, равна 15.

Достаточно доказать, во-первых, что из «треугольника» T кенгуру выйти не может, и, во-вторых, что из остальных точек угла $x \geq 0, y \geq 0$ может удалиться сколь угодно далеко от начала координат. Первое очевидно: находясь в T , кенгуру может совершать только прыжки типа $(1; -1)$, и поэтому неизбежно окажется на оси Ox . Для доказательства второго утверждения заметим, что комбинация пяти прыжков $(1; -1)$ и одного прыжка $(-5; 7)$ дает «прыжок» $(0; 2)$; поэтому кенгуру, находящийся в области $M_1 = \{(x; y) | x \geq 0, y > 5\}$, легко убежит вертикально вверх, многократно повторяя эту комбинацию из шести прыжков. Если кенгуру находится в области $M_2 = \{(x; y) | x > 1, 5 > y > 4\}$, то сделав четыре прыжка $(1; -1)$ и один прыжок $(-5; 7)$, кенгуру попадет в область M_1 , откуда он уже умеет убежать. Аналогично находятся еще четыре «области убежания» M_3, M_4, M_5, M_6 .

$$(M_k = \{(x; y) | x > 5 - k, k + 1 > y > k\}, k = 3, 2, 1, 0).$$

А. Сосинский

M574. Конечная последовательность a_1, a_2, \dots, a_n из чисел 0 и 1 должны удовлетворять следующему условию: для любого целого k от 0 до $n-1$ сумма

$$a_1 a_{k+1} + a_2 a_{k+2} + \dots + a_{n-k} a_n$$

является нечетным числом.

- а) Придумайте такую последовательность для $n=25$.
- б) Докажите, что такая последовательность существует для некоторого $n > 1000$.

Еще одна формулировка задачи **M574**:

Найдите последовательность $e_1 < e_2 < \dots < e_n$ натуральных чисел такую, что каждое число от 1 до $e_n - e_1$ представляется в виде разности $e_j - e_i$ некоторых из этих чисел нечетным числом способов.

Первое решение. Легко придумать такую последовательность из четырех чисел: $A_1 = 1101$. Чтобы построить нужную последовательность из двадцати пяти чисел, мы трижды используем A_1 , причем разделяем A_1 нулями так:

$$A_2 = 1101\ 000\ 1101\ 0000000000\ 1101.$$

Такое построение можно продолжить и далее: если последовательность $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ удовлетворяет условию задачи, то и последовательность

$$B = (\underbrace{A}_{n} \underbrace{00\dots 0}_{n-1} \underbrace{A}_{n} \underbrace{00\dots 0}_{3n-2} \underbrace{A}_{n}) = (b_1, b_2, \dots, b_{7n-3}),$$

состоящая из трех наборов A и двух наборов нулей между ними, также ему удовлетворяет.

Докажем более общий факт: вместе с последовательностями $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $C = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ удовлетворяет условию задачи и последовательность B длины $(2n-1)(m-1) + n$ из m «блоков»:

$$B = (a_1 c_1, a_2 c_1, \dots, a_n c_1, \overbrace{0, 0, \dots, 0}^{n-1}, a_1 c_2, a_2 c_2, \dots, a_n c_2, 0, 0, \dots, 0, \dots, a_1 c_{m-1}, a_2 c_{m-1}, \dots, a_n c_{m-1}, 0, 0, \dots, 0, a_1 c_m, a_2 c_m, \dots, a_n c_m);$$

здесь j -й блок повторяет последовательность A , если $c_j = 1$, и нулевой, если $c_j = 0$.

Пусть целое $k = (2n-1)q + r$, где $q=0; r=0, 1, \dots, n-1$ или $-n < r < n, 0 < q < m$ (q и r — целые). Тогда при сдвиге последовательности B на k мест j -й блок $(a_1 c_j, a_2 c_j, \dots, a_n c_j)$ будет пересекаться только с $(j+q)$ -м блоком исходной последовательности, причем со сдвигом на r единицы в индекс

Выпишем подряд l -значные числа семиричной системы от $11 \dots 1$ до $44 \dots 4$ (их будет $(7^l + 1)/2$). Против тех чисел, в записи которых встречаются только цифры 1, 2 и 4, поставим 1, а против остальных — 0. Получим последовательность A_l , удовлетворяющую условию. Например, при $l=2$ получится A_2 :

11	1	26	0
12	1	30	0
13	0	31	0
14	1	32	0
15	0	33	0
16	0	34	0
20	0	35	0
21	1	36	0
22	1	40	0
23	0	41	1
24	1	42	1
25	0	43	0
	44		1

n	$2n-1$
4	7
12	23
16	31
24	47
25	49
36	71
37	73
40	79
45	89

Последовательности для $n=12$ и $n=24$ (соответственно, черные и красные столбики):

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	0
0	0	0	0
1	1	1	0
0	0	1	1
1	1	1	1
0	0	0	0
1	1	1	0
1	1	1	0
0	0	1	0

сах a_i ; поэтому сумма $S_k(B) = b_1 b_{k+1} + b_2 b_{k+2} + b_3 b_{k+3} + \dots$ представляется в виде произведения $(c_1 c_{r+1} + c_2 c_{r+2} + \dots)(a_1 a_{1+r} + a_2 a_{2+r} + \dots) = S_r(C) S_{|r|}(A)$ и, следовательно, является нечетным числом для любого целого k от 0 до $(2n-1)(m-1) + (n-1)$. При $C = (1, 1, 0, 1)$ получаем нужный нам частный случай.

Таким образом, по набору длины n , удовлетворяющему условию задачи, можно построить набор длины $7n-3$, также удовлетворяющий этому условию. Начиная с набора длины 1, состоящего из одной единицы, мы получим бесконечную серию таких наборов: $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots, A_l, \dots$. Их длины будут равны 4, 25, 172, 1201, ..., $(7^l + 1)/2$.

На полях показано, как, используя семиричную систему счисления, можно сразу выписать последовательность A_l для любого $l=0, 1, 2, \dots$

Второе решение задачи б). Определим семейство последовательностей $\{D_n\}$ по индукции следующим образом: $D_0 = (1)$ и если $D_n = (d_1, d_2, d_3, \dots, d_r)$, то

$$D_{n+1} = (1, 0, 1, d_1, 1, 0, 1, d_2, 1, 0, 1, d_3, \dots, 1, 0, 1, d_{r-1}, 1, 0, 1, d_r).$$

(Например, $D_1 = (1, 0, 1, 1)$, $D_2 = (1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1)$.)

Доказать, что D_n удовлетворяет условию задачи, можно по индукции. При этом нужно рассмотреть отдельно четыре случая: $k=4l$, $k=4l+1$, $k=4l+2$, $k=4l+3$, причем для разбора случаев $k=4l+1$ и $k=4l+3$ нужно предварительно доказать (тоже индукцией) следующую лемму:

Каждая последовательность $D_n = (d_1, d_2, d_3, \dots, d_r)$ симметрична: $d_j = d_{r-j}$ для всех $1 \leq j \leq r-1$, а $d_r = 1$.

Рассмотрим, например, случай $k=4l+1$. Написав под D_{n+1} эту же последовательность, сдвинутую на $4l+1$ членов, легко найти

$$S_k(D_{n+1}) = (d_{1+4l+1} + d_{1+4l+2} + d_2 + \dots + d_{r-1} + d_{r-(4l+1)}) + d_r = (d_1 + d_2 + \dots + d_{r-(4l+1)}) + (d_{1+4l+1} + d_{1+4l+2} + \dots + d_{r-1}) + d_r,$$

а это число нечетное по лемме о симметрии D_n . Для $k=4l+3$ доказательство аналогично предыдущему, а случаи $k=4l$ и $k=4l+2$ более просты.

К сожалению, этот метод не позволяет получить из любой последовательности длины n последовательности длины $4n$. Для его применения необходимо соблюдение условий леммы о симметрии, что бывает, конечно, далеко не всегда.

При первом из описанных способов построения бесконечной серии последовательностей A_0, A_1, A_2, \dots , удовлетворяющих условию задачи, их длины равны $(7^l + 1)/2$ ($l=0, 1, 2, \dots$). Второй способ дает последовательности с длинами 4^l ($l=0, 1, 2, \dots$). Какие же значения может принимать длина последовательности, удовлетворяющей условию задачи? Оказывается, те значения n , для которых $2n-1$ является делителем числа 2^{2^k-1} при некотором нечетном k . Это показали в 1976 году Ф. Дж. Мак Вильямс и А. И. Олдрико. Такие $2n-1$ в пределах сотни и соответствующие последовательности для $n=12$ и $n=24$ указаны на полях. Легко проверить, что длины построенных нами последовательностей удовлетворяют этому критерию: если $n = (7^l + 1)/2$, $l > 1$, то $2n-1$ делит $2^3 \cdot 7^{l-1} - 1$ (докажите!), а если $n=4^l$, то $2n-1$ делит $2^{2^l} - 1$. Примеры последовательностей достаточно строить для тех n , удовлетворяющих критерию, у которых $2n-1$ — простое (подумайте, как получить из них остальные). Но для более глубокого анализа задачи и доказательства общего результата нужно перейти на новый, неэлементарный язык, типичный для алгебраической теории кодирования: последовательность a_1, a_2, \dots, a_n нулей и единиц рассматривать как многочлен $A(x) = a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1}$ с коэффициентами из поля $F_2 = \{0, 1\}$ (в этом поле $1+1=0$)*, удов-

* См. статью С. Ашманова в «Кванте», 1980, № 2.

Новый вариант задачи М574 получится, если располагать последовательность из 0 и 1 на окружности и требовать, чтобы при любом k суммы попарных произведений членов, отстоящих на k , были нечетной. Если Вам удастся получить результаты по этой задаче, напишите нам об этом.

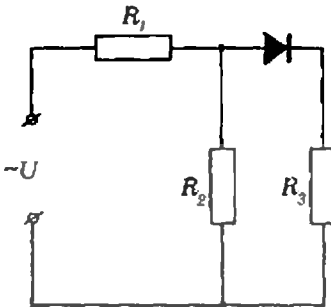
летворяющую такому условию (*): в разложении выражения $A(x)A(x^{-1})$ по степеням x все коэффициенты при $x^{-1(n-1)}$, $x^{-1(n-2)}$, ..., x^n , x^{n-1} нечетны.

Наши два решения на этом языке коротко формулируются так:

- 1) вместе с многочленами $A(x)$ степени $(p-1)/2$ и $C(x)$ степени $(q-1)/2$ условию (*) удовлетворяет также многочлен $A(x) \cdot C(x^p) = B(x)$ степени $(pq-1)/2$;
- 2) в последовательности $D_1(x) = 1 + x^2 + x^3$, $D_{n+1}(x) = (1-x^{1^n})/(1-x^2) + D_n(x^4)$ все многочлены удовлетворяют условию (*).

Н. Васильев, С. Конягин, А. Разборов

Ф579. В схеме, показанной на рисунке, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 15$ Ом, напряжение в сети переменного тока $U = 10$ В. Определить мощность, которая выделяется на резисторах с сопротивлением R_2 и R_3 .



Половину периода T переменного тока диод закрыт, и через резистор R_2 течет переменный ток $I = \frac{U}{R_1 + R_2}$. За время $T/2$ на резисторе R_2 выделяется энергия

$$W'' = I^2 R_2 \frac{T}{2} = \frac{U^2 R_2 T}{2(R_1 + R_2)^2}$$

Вторую половину периода диод открыт. Общее сопротивление резисторов R_2 и R_3 , соединенных параллельно, равно

$$R_0 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

Напряжение на этих резисторах равно $U_0 = \frac{U}{R_1 + R_0} R_0$.

За эту половину периода на резисторах R_2 и R_3 выделяются соответственно энергии

$$W''' = U_0^2 R_2 \frac{T}{2} = \frac{U^2 R_0 T}{2R_2 (R_1 + R_0)^2}$$

$$W_3 = U_0^2 R_3 \frac{T}{2} = \frac{U^2 R_0 T}{2R_3 (R_1 + R_0)^2}$$

Средние мощности, выделяющиеся на резисторах R_2 и R_3 за полный период, равны соответственно

$$N_2 = \frac{W'' + W'''}{T} = \frac{U^2 R_2}{2(R_1 + R_2)^2} + \frac{U^2 R_0}{2R_2 (R_1 + R_0)^2}$$

$$N_3 = \frac{W_3}{T} = \frac{U^2 R_0}{2R_3 (R_1 + R_0)^2}$$

Подставив численные значения величин U , R_1 , R_2 , R_3 , найдем

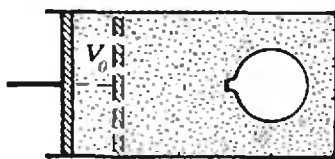
$$N_2 \approx 1,6 \text{ Вт}, \quad N_3 \approx 0,7 \text{ Вт}.$$

Г. Коткин

Ф586. Теплоизолированный сосуд откачан до глубокого вакуума. Окружающий сосуд одноатомный идеальный газ имеет температуру T_0 . В некоторый момент открывают кран, и происходит заполнение сосуда газом. Какую температуру T будет иметь газ в сосуде сразу после его заполнения?

Чтобы понять, как при заполнении сосуда газом изменяется температура, нужно рассмотреть происходящие при этом энергетические превращения. При открывании крана какая-то порция газа заталкивается в сосуд силами давления окружающего газа. Благодаря работе этих сил врывающийся в сосуд газ приобретает кинетическую энергию направленного макроскопического движения — он входит в сосуд струей. При встрече со стенками сосуда и с уже попавшим в сосуд газом струя меняет направление, ослабевает и в конце концов рассеивается. При этом кинетическая энергия упорядоченного движения газа в струе превращается во внутреннюю энергию, то есть энергию хаотического теплового движения его молекул.

Все это происходит настолько быстро, что теплообменом входящего в сосуд газа с окружающим газом и стенками можно пренебречь. Поэтому для всего рассматриваемого процесса



первый закон термодинамики имеет вид: работа A сил давления окружающего сосуда газа над вошедшим в сосуд газом равна изменению внутренней энергии ΔU вошедшего газа:

$$A = \Delta U. \quad (1)$$

При заполнении небольшого откачанного сосуда давлением и температура в атмосфере окружающего газа остаются неизменными. Поэтому для нахождения работы A представим себе, что наш откачаный сосуд находится внутри большого цилиндра с подвижным поршнем (см. рис.). Цилиндр заполнен газом, температура которого T_0 ; давление газа в цилиндре p_0 . Процессу заполнения сосуда соответствует перемещение поршня вправо при постоянном давлении p_0 . Действующая слева на поршень сила совершает работу $p_0 V_0$, где V_0 — объем, «вытесняемый» при перемещении поршня. Эта работа и будет равна интересующей нас работе внешних сил над заталкиваемым в сосуд газом, так как энергия не вошедшего в сосуд газа внутри цилиндра остается неизменной. Обратим внимание на то, что объем V_0 не совпадает с внутренним объемом заполняемого сосуда, так как температура T газа в сосуде отличается от T_0 .

С помощью уравнения состояния идеального газа работу A можно выразить через температуру T_0 и количество газа ν , вошедшего в сосуд:

$$A = p_0 V_0 = \nu R T_0. \quad (2)$$

Изменение внутренней энергии ΔU газа, вошедшего в сосуд, равно

$$\Delta U = \nu \times \frac{3}{2} R (T - T_0). \quad (3)$$

Подставляя выражения (2) и (3) в уравнение первого закона термодинамики (1), получаем

$$T = \frac{5}{3} T_0.$$

Таким образом, температура заполнившего откачаный сосуд газа оказывается выше температуры окружающего сосуда газа. Отметим, что полученный результат не зависит ни от объема сосуда, ни от давления p_0 . Температура газа в сосуде не зависит также и от того, будет ли заполнение сосуда происходить до конца, пока давление в нем не сравняется с давлением газа в окружающей среде, или край будет перекрыт раньше.

Е. Бутиков, А. Быков, А. Кондратьев

Ф587. Проводник массы M и длины l подвешен к диэлектрику за концы с помощью двух одинаковых проводящих невесомых пружин с общим коэффициентом жесткости k . К верхним концам пружин подсоединен конденсатор емкости C . Вся конструкция висит в однородном магнитном поле с индукцией B , перпендикулярной плоскости конструкции.

Проводник смещают в вертикальной плоскости из положения равновесия и отпускают. Определить дальнейшее движение проводника в вертикальной плоскости. Сопротивлением, собственной индуктивностью и емкостью проводников пренебречь.

Направим координатную ось X вертикально вниз; за начало отсчета координат примем положение равновесия стержня (см. рисунок).

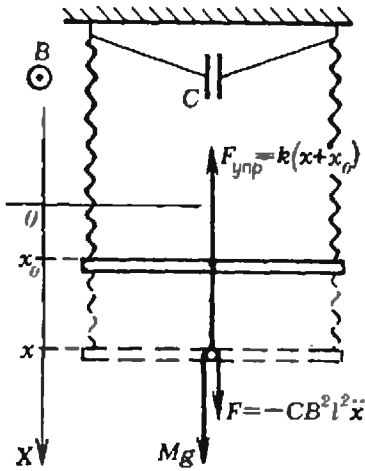
Пусть x_0 — удлинение каждой пружины в этом положении. Согласно II закону Ньютона:

$$Mg - kx_0 = 0. \quad (*)$$

При смещении стержня из положения равновесия сила тяжести остается неизменной, а сила упругости меняется. Следовательно, после того как стержень отпускают, он начинает двигаться с ускорением по направлению к положению равновесия. Так как это движение происходит в магнитном поле, в стержне возникает ЭДС индукции $\mathcal{E} = Bvl$, где $v = \dot{x}$ — меняющаяся со временем скорость стержня. В цепи появляется ток, и конденсатор заряжается. Поскольку сопротивление проводящих пружин равно нулю, напряжение на конденсаторе равно \mathcal{E} и заряд q конденсатора равен $C\mathcal{E} = CBvl$. Следовательно, ток в цепи в любой момент времени равен

$$i = \dot{q} = C\dot{\mathcal{E}} = CB\dot{v}l = CB\dot{x}l.$$

На стержень с током в магнитном поле действует сила \vec{F}



такая, что

$$|\vec{F}| = |\vec{B}|il = CB^2 l^2 |\ddot{x}|.$$

Как направлена эта сила? Примем для определенности, что магнитное поле направлено к нам. При движении стержня вверх ЭДС, возникающая благодаря действию на свободные электроны силы Лоренца, направлена слева направо. Пока стержень находится ниже положения равновесия (ускорение направлено вверх), направление тока в стержне совпадает с направлением ЭДС, а конденсатор заряжается. При этом сила \vec{F} направлена вниз, то есть противоположно ускорению \ddot{x} стержня. Когда стержень оказывается выше положения равновесия, направление ЭДС остается прежним, но скорость стержня, а следовательно, и ЭДС уменьшаются. При этом конденсатор разряжается, ток в стержне меняет направление, и следовательно, сила \vec{F} тоже меняет направление — теперь она направлена вверх, то есть опять противоположно ускорению. Рассмотрев движение стержня вниз, мы убедимся, что и в этом случае направление силы \vec{F} противоположно направлению ускорения стержня. Таким образом,

$$F = -CB^2 l^2 \ddot{x}.$$

Запишем теперь уравнение движения стержня:

$$M\ddot{x} = Mg - k(x + x_0) - CB^2 l^2 \ddot{x}.$$

Учитывая, что $Mg = kx_0$ (см. (*)), окончательно имеем

$$M\ddot{x} + CB^2 l^2 \ddot{x} = -kx.$$

Такое уравнение, как известно, описывает гармонические колебания с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M + CB^2 l^2}}.$$

Амплитуда A колебаний равна первоначальному отклонению стержня, и в любой момент времени

$$x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M + CB^2 l^2}} t\right).$$

(Роль конденсатора, как мы видим, сводится к увеличению инертности стержня.)

Д. Футорский

Список читателей, приславших правильные решения задач из задачника «Кванта»

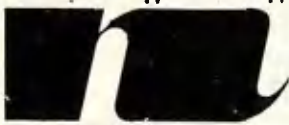
В этом номере мы публикуем фамилии читателей, приславших правильные решения задач $\Phi 573$ — $\Phi 587$.

Почти все читатели, приславшие решения задач $\Phi 573$ — $\Phi 587$, справились с задачами $\Phi 573$, $\Phi 577$, $\Phi 581$ и $\Phi 585$. Остальные задачи правильно решили: В. Абаджаев (Львов) 75, 76, 79, 82; А. Абрамочкин (Киев) 74—76, 80, 82; В. Аветисов (Баку) 83, 84; М. Алексеев (Обнинск) 75; Э. Алискиндеров (с. Даш АзССР) 74; И. Аполонский (Жуковский) 74—76, 78—80, 83, 84; З. Априамашвили (с. Аралы ГрССР) 74, 75, 78; Л. Арушанов (Баку) 74, 76, 82; Р. Бабаев (Баку) 76, 78, 79, 82—84; Л. Балюк (с. Журавки Крымской обл.) 74—76, 78; Д. Барадулин (Киев) 82; А. Барышников (Москва) 78; В. Белоус (Днепропетровск) 76, 78—80, 82; И. Бельчинский (Москва) 74, 75, 82; А. Белчев

(Витебск) 74; А. Белнский (Семипалатинск) 76; О. Березовский (Днепропетровск) 74; В. Беренцов (Челябинск) 79; А. Бессарабский (п. Запрудня Московской обл.) 74—76, 78—80, 82—84, 86, 87; И. Бессонов (Рсутов) 74—76, 78—80, 82—84; А. Божко (Алма-Ата) 74, 76; И. Боколишвили (Тбилиси) 82; А. Боричев (Ленинград) 74, 76; И. Боровиков (Красноярск) 82; С. Боханов (Новополюк) 84; Л. Брагинский (Волгодонск) 74, 80, 82, 84, 87; Л. Брагинский (Киев) 78, 82; В. Бридан (Николаев) 84; В. Булгаков (Узловья) 80; С. Вагнер (Джезказган) 74, 76, 78—80, 82—84; В. Васильев (Великие Луки) 74, 76, 78—80, 82; О. Васильев (Казань) 83; Б. Вейцман (Одесса) 74, 80, 82—84, 87; А. Велько (п. Сахарный завод Минской обл.) 80; П. Ветрук (Тернополь) 75, 76; Е. Войтенко (Киев) 74, 76, 79, 80, 82; А. Вольнов (Киев) 84; В. Ворона (Славянск) 74, 75, 79, 80, 82—84; Ф. Выродов (Подольск) 74, 78—80, 82—84; Р. Габдуллин (д. Старобаишево БашАССР) 82, 86; М. Гауризов (п. Черноголовка Московской обл.) 74, 76; В. Глебкин (п. Красково Московской обл.) 74, 80.

(Продолжение см. на с. 41)

«Квант» для младших школьников



Задачи

1. У школьника было несколько монет достоинством в 15 коп. и 20 коп., причем двадцатикопеечных монет было больше, чем пятнадцатикопеечных. Пятую часть всех денег школьник истратил, заплатив две монеты за билет в кино. Половину оставшихся у него денег он отдал за обед, оплатив его тремя монетами. Сколько монет каждого достоинства было у школьника вначале?

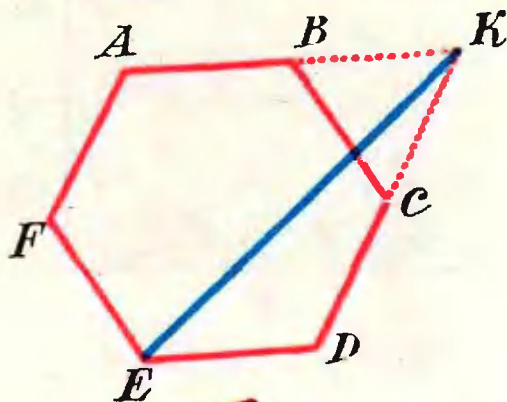
2. Разрежьте квадрат на три части так, чтобы из них можно было сложить тупоугольный треугольник.

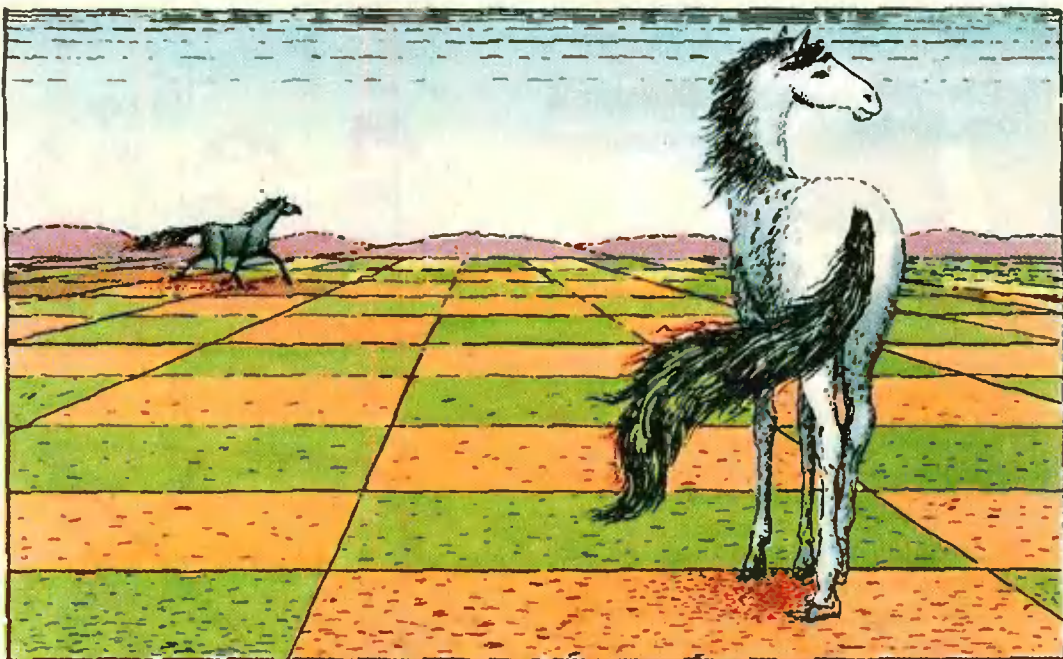
3. Стороны AB и CD ($|AB| = |CD| = 1$) правильного шестиугольника $ABCDEF$ продолжены до пересечения в точке K (см. рисунок). Докажите, что $|EK| = \sqrt{7}$.

4. На карточках, изображенных на рисунке, написаны цифры. Сложите с их помощью четырехзначное число, являющееся полным квадратом.

5. На стороне квадрата взято несколько точек так, что сумма длин первого, третьего и т. д. отрезков (см. рисунок) совпадает с суммой длин второго, четвертого и т. д. отрезков. Через взятые точки проведены прямые, параллельные другой стороне квадрата. Докажите, что суммарная площадь синих «полосок» и суммарная площадь красных «полосок» одинаковы.

Эти задачи нам предложили
М. Комушенко, А. Швецов,
А. Эйвазов и В. Произволов





С. Белый

Разноцветная математика

«Творчество математика в такой же степени есть создание прекрасного, как творчество живописца или поэта, — совокупность идей, подобно совокупности красок или слов, должна обладать внутренней гармонией. Красота есть первый пробный камень для математической идеи; в мире нет места уродливой математике», — говорил известный английский математик Годфри Гарольд Харди.

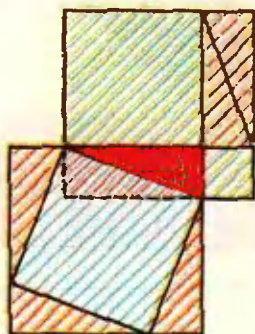


Рис. 1.

Однако есть и более явные связи математики с живописью: математикам очень часто помогает... цвет. Да, да — цвет! Наверняка не раз на уроках геометрии ваш учитель математики использовал цветные мелки, отмечая ими конгруэнтные отрезки, равновеликие фигуры, одинаковые углы... Взгляните, например, на рисунок 1. Там красным цветом выделен центральный прямоугольный треугольник, а красной штриховкой — еще шесть ему конгруэнтных. Теперь нетрудно увидеть, что сумма площадей двух заштрихованных зеленым квадратов равна площади квадрата, заштрихованного синим. Доказана теорема Пифагора!

Но, оказывается, раскраска может стать даже методом решения задач.

Начнем с задачи-головоломки: найдем проход к центру лабиринта, изображенного на рисунке 2. Для этого закрасим все «тупики» лабиринта, то есть те его участки, из которых нет хода (см. рис. 3). Тогда то, что останется незакрашенным, и будет искомым путем. Попробуйте испытать этот метод на лабиринте, изображенном на рисунке 4. Укажите все пути, ведущие к центру; подсчитайте, сколько их и найдите самый короткий.

Следующий пример навеян известной шахматной задачей: *обойти конем всю шахматную доску и вернуться на исходное поле*. У нее много различных решений. А вот можно ли обойти доску другой формы? Например, прямоугольную доску размером 7×9 полей? Оказывается, нельзя. И доказать это нам опять поможет «раскраска».

Раскрасим доску размером 7×9 полей «в шахматном порядке», начиная с углового поля: черное поле, белое поле, черное поле, белое поле, ... Тогда все угловые поля доски будут черными; более того, черных полей будет 32, а белых — 31 (почему?). Но после каждого хода конь меняет цвет поля, на котором он стоял. Поэтому если бы конь обошел все поля доски и вернулся на исходное поле, то он побывал бы на одинаковом количестве черных и белых полей. Поскольку на нашей доске черных полей больше, чем белых, хотя бы одно черное поле останется непосещенным нашим конем-путешественником.

Ну, а можно ли обойти конем доску размером 4×8 полей? Оказывается, тоже нельзя. Красивое доказательство этого факта получается, если раскрасить эту доску уже не в два, а в четыре цвета — как на рисунке 5.

Заметим, что с полей синего цвета конь может попасть только на поля желтого цвета и наоборот — на поля синего цвета он может попасть только с полей желтого цвета. Поэтому на пути коня синее поле должно предшествовать желтому полю и непосредственно следовать за желтым: ...ж — с — ж — с — ж... (см. рис. 6).

С полей же желтого цвета конь может перейти еще на поля зеленого цвета. С другой стороны, если конь перейдет с желтого поля на зеленое, то для того чтобы перейти на поле синего цвета, ему предварительно придется побывать на поле желтого цвета. Отсюда следует, что в замкнутом маршруте число желтых полей превосходит число синих (понять это вам поможет рисунок 6!). Но поскольку в действительности число желтых и синих полей одинаково,

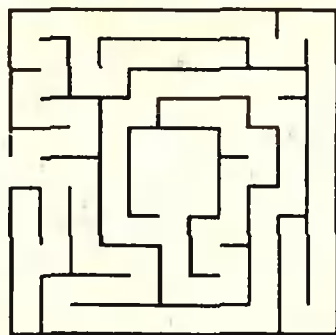


Рис. 2.

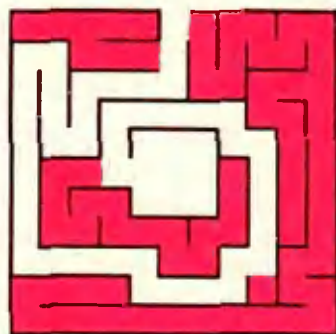


Рис. 3.

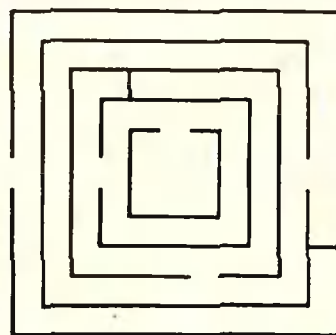


Рис. 4.

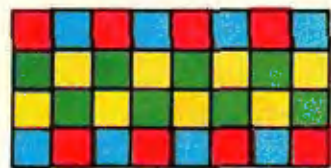


Рис. 5.

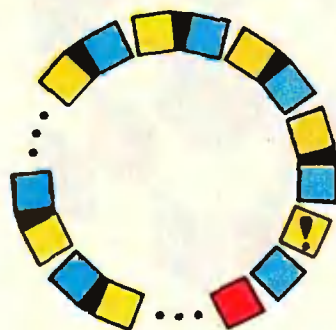


Рис. 6.

полученное противоречие доказывает, что обойти конем доску размером 4×8 полей невозможно.

Еще один пример: *можно ли куб размером $6 \times 6 \times 6$ сложить из 27 «кирпичей» размером $1 \times 2 \times 4$?*

Будем считать, что куб $6 \times 6 \times 6$ составлен из 27 «блоков» размером $2 \times 2 \times 2$, раскрашенных в синий и белый цвета и расположенных в «шахматном порядке» (рис. 7); пусть при этом будет 14 синих «блоков» и 13 белых «блоков». Теперь заметим, что как бы мы ни располагали «кирпич» $1 \times 2 \times 4$ внутри большого куба, половина составляющих его единичных кубиков ($1 \times 1 \times 1$) окажутся синими и половина — белыми. Поэтому если бы куб размером $6 \times 6 \times 6$ можно было сложить из 27 кирпичей $1 \times 2 \times 4$, то при «шахматной укладке» этого куба «блоками» $2 \times 2 \times 2$ в нем белых единичных кубиков было бы столько же, сколько синих. На самом же деле у нас 108 белых единичных кубиков и 112 — синих. Поэтому куб $6 \times 6 \times 6$ из 27 кирпичей $1 \times 2 \times 4$ сложить нельзя.

После всего рассказанного вы уже не удивитесь, узнав, что в математике существует много задач и теорем о различных раскрасках. Наиболее знаменитая из них — *проблема четырех красок**, состоявшая в том, чтобы доказать или опровергнуть следующую гипотезу:

*) О проблеме четырех красок см. «Квант»: 1972, № 4, с. 33; 1974, № 2, с. 58; 1974, № 4, с. 23 и 1977, № 1, с. 60.

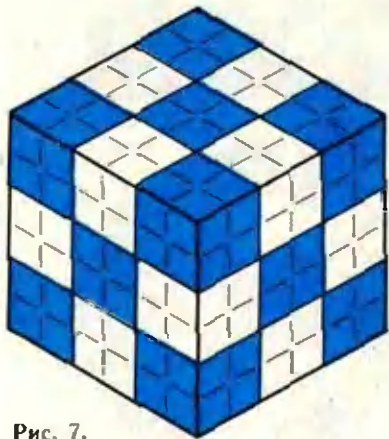


Рис. 7.

«Любую карту на плоскости можно раскрасить не более чем в четыре цвета так, чтобы любые две соседние страны были раскрашены в разные цвета» (страны считаются соседними, если они имеют общий участок границы; страны, имеющие лишь отдельные общие точки, соседними не считаются). Впервые об этой задаче упомянул в письме к Гамильтону английский математик Де Морган (1852 г.). Затем ее сформулировал с трибуны Британского географического общества выдающийся английский математик Артур Кэли (1878 г.). С тех пор проблема четырех красок «переболела» тысячи любителей и математиков. Почти сто лет она казалась неприступной. В результате многолетней кропотливой работы было доказано, что любая карта, содержащая не более 41 страны, может быть раскрашена в четыре цвета требуемым образом; но это, конечно, далеко не решало всей проблемы. Лишь совсем недавно, в сентябре 1976 года, в журнале Американского математического общества «Bulletin of American Mathematical Society» появилось сообщение американских математиков Апделя и Хакена, доказавших знаменитую гипотезу (замечательно, что в доказательстве «принимала участие», и весьма существенное, ЭВМ).

Вместе с тем еще в конце XIX века было установлено, что *любую карту на плоскости можно правильно раскрасить пятью красками* («правильно» означает — так, чтобы никакие две соседние страны не были окрашены в один цвет). Попробуйте найти самостоятельно доказательство этого факта. Но вначале — поэкспериментируйте.

1. Нарисуйте карту из четырех стран, которую нельзя было бы правильно раскрасить двумя или тремя красками.

2. Проведите несколько прямых; докажете, что образуемую ими карту можно правильно раскрасить двумя красками.



Г. Перевалов

Что значит «знать»?

Вероятно, многие из читателей «Кванта» собираются после окончания школы поступать в вуз. Конечно, всех волнует вопрос, какие требования предъявляются к знаниям. Что и как нужно знать? Попробуем объяснить это на нескольких примерах.

Математика состоит из аксиом, теорем и доказательств. Наряду с этим в математике фундаментальную роль играют определения. Знать математику — это значит знать все ее части. Причем к каждой части нужен свой особый подход.

Например, что значит знать определение предела функции? Вот что мы услышали на уроке математики в одной из московских школ.

...

Учитель. Что означает равенство

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b? \quad (1)$$

Ученик. Равенство (1) означает, что число b является пределом функции f при x , стремящемся к a .

Учитель. Это еще не ответ. В чем смысл равенства (1)?

Ученик. Равенство (1) означает, что для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ , что при всех $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, будет выполняться неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Учитель. Верно. Теперь найди предел функции $f(x) = 2x + 3$ при x , стремящемся к 1.

Ученик (пишет).

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 3) = 5. \quad (2)$$

Учитель. Каков же точный смысл равенства (2)?

Ученик. Для любого положительного числа ε найдется такое положительное δ , что при всех $x \neq 1$, удовлетворяющих неравенству

$$|x - 1| < \delta, \quad (3)$$

будет выполняться неравенство

$$|(2x + 3) - 5| < \varepsilon. \quad (4)$$

Учитель. Совершенно верно. А теперь «поработай» с определением: докажи с его помощью равенство (2).

Ученик. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Чтобы найти δ , перепишем (4) так:

$$2|x - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 1| < \varepsilon/2.$$

Положим $\delta = \varepsilon/2$. Тогда $\delta > 0$ и для всех $x \neq 1$ таких, что $|x - 1| < \delta$, выполняется неравенство (4). Значит, число 5 действительно является пределом функции $f(x) = 2x + 3$ при x , стремящемся к 1.

Учитель. Очень хорошо. А не мог бы ты дать геометрическую иллюстрацию определения предела функции?

Ученик. Равенство (1) означает, что какую бы ε -окрестность $[b - \varepsilon; b + \varepsilon]$ точки b мы ни взяли,

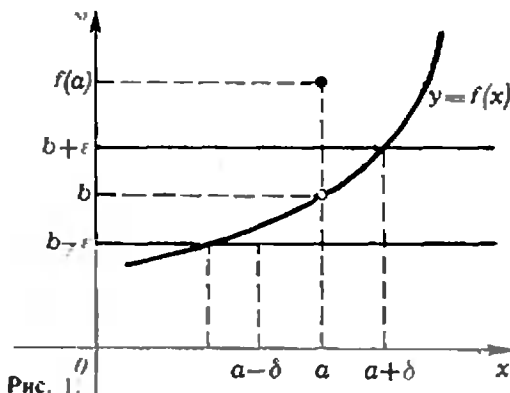


Рис. 1.

найдется такая δ -окрестность $]a-\delta; a+\delta[$ точки a , для любой точки $x_0 \in]a-\delta; a+\delta[$ которой, кроме, быть может, точки a (см. рис. 1), значение функции $f(x_0)$ принадлежит взятой ε -окрестности, то есть

$$\begin{aligned} f(x_0) &\in]b-\varepsilon; b+\varepsilon[, \\ b-\varepsilon &< f(x_0) < b+\varepsilon, \\ -\varepsilon &< f(x_0) - b < \varepsilon, \\ |f(x_0) - b| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Когда b действительно является пределом функции f при x , стремящемся к a , то по заданному $\varepsilon > 0$ нужное δ можно найти при помощи чертежа: через точки $b+\varepsilon$ и $b-\varepsilon$ на оси ординат проведем прямые, параллельные оси абсцисс, точки пересечения этих прямых с графиком функции f спроектируем на ось абсцисс; расстояние от точки $x=a$ до ближайшей проекции и будет искомым δ .

Учитель. Ты не вполне прав. Этот способ годится не всегда. Во-первых, точек пересечения может вообще не быть; так будет, например, если график функции f расположен внутри некоторой полосы (рис. 2). Во-вторых, среди проекций точек пересечения может не быть ближайшей. Например, для функции

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x > 0, \\ x, & \text{если } x \leq 0 \end{cases}$$

(см. рис. 3; поскольку график функции f на отрезке $[0; \frac{2}{\pi}]$ имеет бесконечное число колебаний, нарисовать его на этом отрезке точно и полностью, конечно, невозможно)

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) = -\frac{1}{2}.$$

Но при $\varepsilon = \frac{1}{2}$ прямая $y = -\frac{1}{2} + \varepsilon = 0$ пересекается с графиком функции f в точках $x = 1/\pi k$ ($k=1, 2, 3, \dots$), а прямая $y = -\frac{1}{2} - \varepsilon$ — в точках $x = 1/(3/2\pi + 2\pi k)$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots$).

Не правда ли, ученика «допращивали» довольно пристрастно? Но

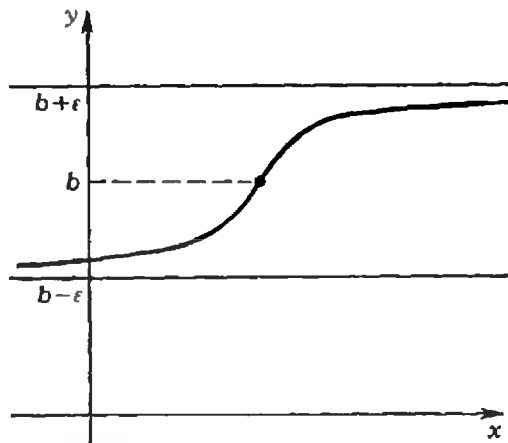


Рис. 2.

все ли это, что нужно знать про предел функции? Нет, еще не все. Например, надо уметь по графику функции находить ее предел при x , стремящемся к данной точке. Так, функция f , график которой изображен на рисунке 4, при x , стремящемся к a_1 , предела не имеет, поскольку не существует окрестности этой точки, для всех точек $x \neq a_1$ которой выполнялось бы неравенство $|f(x) - b_1| < \varepsilon$ (функция определена только справа от a_1). При x , стремящемся к a_2 , у функции f также нет предела, так как никакое число b не удовлетворяет определению предела*).

При x , стремящемся к a_3 , функция f имеет предела b_3 : $\lim_{x \rightarrow a_3} f(x) = b_3$, но $b_3 \neq f(a_3)$. Говорят, что в точке

*) В этом легко убедиться, если взять $\varepsilon = \min(|b - b'_2|, |b - b''_1|)$ (в частности, $c = \frac{b'_2 - b''_1}{2}$).

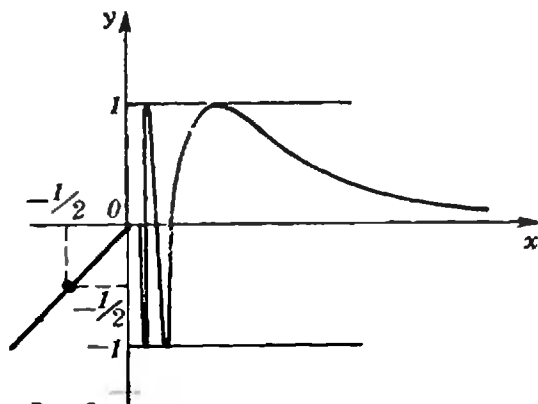


Рис. 3.

$x = a_3$ функция f имеет разрыв. При x , стремящемся к a_4 , функция f также имеет предел: $\lim_{x \rightarrow a_4} f(x) = b_4$.

причем $b_4 = f(a_4)$. Говорят, что в точке a_4 функция f непрерывна. Существует предел функции f и при x , стремящемся к a_5 : $\lim_{x \rightarrow a_5} f(x) = b_5$, хо-

тя функция f в этой точке не определена, $a_5 \notin D(f)$.

Вот примерно все, что нужно знать об определении предела функции.

Теперь уже можно ответить на вопрос — что значит *знать определение*. Знать определение — это не только уметь правильно его сформулировать, но и уметь проиллюстрировать его на рисунке или на примере, показать в работе, применить на практике. Вот с такой «меркой» к знанию определения и подходят экзаменаторы на вступительных экзаменах.

А что значит — *знать теорему*? Прежде всего, надо правильно ее сформулировать. Далее: надо знать смысл всех терминов, встречающихся в формулировке теоремы, уметь разъяснить и определить их. Ведь прежде чем доказывать теорему о свойствах некоторого математического объекта, надо, конечно, понимать, что это за объект. Например, невозможно доказать теорему о производной суммы двух функций, не зная определения производной.

Очень полезно также уметь привести пример, опровергающий утверждение, полученное из теоремы от-

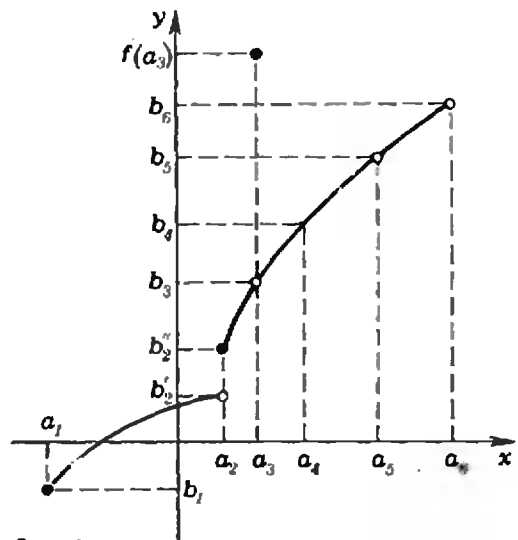


Рис. 4.

брасыванием какого-нибудь из ее условий.

Упражнение 1. Проверните теоремы:

- если последовательность монотонна, то она имеет предел;
- если последовательность ограничена, то она имеет предел*).

Теоремы, содержащие необходимые и достаточные условия, надо уметь расчленять на две: чтобы одна выражала необходимость условия, а другая — его достаточность.

Упражнение 2. Прделайте такую операцию со следующей теоремой**): *функция является обратной тогда и только тогда, когда каждое свое значение она принимает только один раз.*

*) См. теорему Вейерштрасса («Алгебра и начала анализа 9», п. 31).

**) «Алгебра и начала анализа 10», с. 170.

О диофантовом анализе

(Начало см. на с. 16)

Легко сообразить, что в уравнении $x^2 - 2y^2 = 1$ число x — нечетное, $x \geq 3$. Пусть $x = 2n + 1$ ($n \geq 1$). Тогда $2n(n+1) = y^2$, откуда следует, что y — число четное. Положим $y = 2m$ ($m \geq 1$, поскольку $y \geq 2$). Получим $n(n+1) = 2m^2$, то есть уравнение вида $T_n = K_m$. Это означает, что уравнение $T_n = K_m$ имеет бесконечное множество решений, так как каждое

решение $(x; y)$ уравнения $x^2 - 2y^2 = 1$ (а их бесконечное множество) порождает решение уравнения $T_n = K_m$, получаемое по формулам $n = \frac{x-1}{2}$, $m = \frac{y}{2}$.

Задача 5. Докажите, что решения (в натуральных числах) уравнения $T_n = K_m$ могут быть описаны следующими двумя способами:

- $$n_{k+1} = 3n_k + 4m_k + 1,$$

$$m_{k+1} = 2n_k + 3m_k + 1,$$

$$n_1 = 1, m_1 = 1;$$
- $$n_{k+2} = 6n_{k+1} - n_k,$$

$$m_{k+2} = 6m_{k+1} - m_k,$$

$$n_1 = 1, n_2 = 8, m_1 = 1, m_2 = 6.$$

Л. Асламазов

Электромагнитная индукция

ЭДС индукции в движущихся проводниках

При движении проводника в магнитном поле в нем возникает электродвижущая сила индукции

$$\mathcal{E}_i = |\vec{B}| l |\vec{v}| \sin \alpha, \quad (1)$$

где \vec{B} — индукция магнитного поля, l — длина проводника, \vec{v} — его скорость, α — угол между направлением движения проводника и индукцией магнитного поля*). В случае разомкнутого проводника на его концах появляется разность потенциалов, равная ЭДС индукции. При замыкании проводника на внешнюю цепь возникает индукционный ток.

Задача 1. *Металлический стержень скользит с постоянной скоростью \vec{v} по проводящим рельсам в магнитном поле с индукцией \vec{B} , перпендикулярной плоскости рельсов (рис. 1). Концы рельсов замкнуты на проводник сопротивлением R и конденсатор емкостью C . Считая сопротивление рельсов и стержня пренебрежимо малым, найти ток в проводнике и заряд на конденсаторе. Расстояние между рельсами l .*

Так как движущийся стержень, проводник и конденсатор соединены параллельно, величина ЭДС ин-

дукции равна напряжению на концах проводника:

$$\mathcal{E}_i = |\vec{B}| l |\vec{v}| = IR$$

и напряжению на конденсаторе:

$$\mathcal{E}_i = |\vec{B}| l |\vec{v}| = Q/C.$$

Поэтому ток в проводнике

$$I = |\vec{B}| l |\vec{v}| / R,$$

а заряд на конденсаторе

$$Q = |\vec{B}| l |\vec{v}| C.$$

Задача 2. *Два одинаковых стержня длиной l каждый вращаются, не мешая друг другу, на одной проводящей оси с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 . Концы стержней скользят по металлическому кольцу, которое находится в магнитном поле с индукцией \vec{B} , перпендикулярной плоскости кольца (рис. 2). Сопротивление каждого стержня R , сопротивление кольца пренебрежимо мало. Найти токи в стержнях и разности потенциалов на их концах.*

Стержень, вращающийся в магнитном поле, можно представить состоящим из отдельных маленьких участков, каждый из которых движется поступательно со скоростью \vec{v}_r (рис. 3). Модуль этой скорости $|\vec{v}_r| = \omega r$, где r — расстояние от выделенного участка до оси вращения. В каждом участке возникает ЭДС индукции

$$\Delta \mathcal{E}_i = |\vec{B}| \Delta r |\vec{v}_r| = |\vec{B}| \Delta r \omega r.$$

Полная ЭДС индукции, наводимая в стержне,

$$\mathcal{E}_i = \int_0^l |\vec{B}| \omega r dr = \frac{|\vec{B}| \omega l^2}{2}.$$

Так как сопротивление кольца можно не учитывать, электрическая

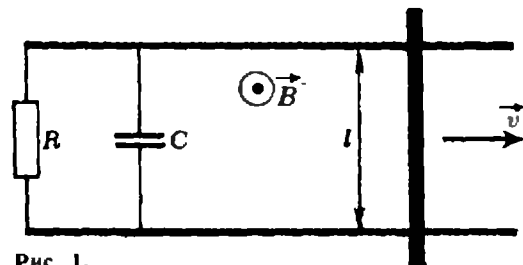


Рис. 1.

*) Подробнее о причинах возникновения ЭДС индукции в движущемся проводнике можно прочитать, например, в статье Ю. Зайчикова «Сила Лоренца и ее работа», «Квант», 1979, № 2. (Прим. ред.)

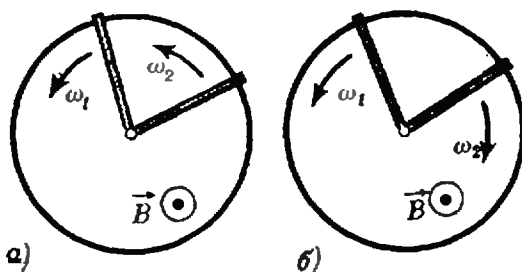


Рис. 2.

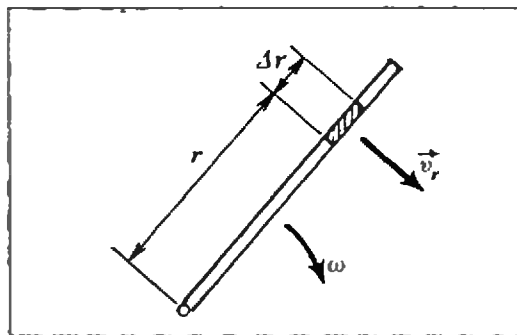


Рис. 3.

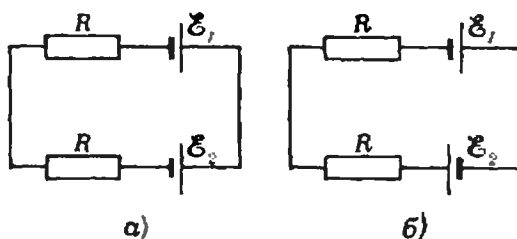


Рис. 4.

схема рассматриваемой задачи сводится к двум источникам с электродвижущими силами $\mathcal{E}_1 = |\vec{B}| \omega_1 l^2 / 2$ и $\mathcal{E}_2 = |\vec{B}| \omega_2 l^2 / 2$ и одинаковыми внутренними сопротивлениями R . Источники соединены параллельно в случае вращения стержней в одну сторону (рис. 4,а) и последовательно — при вращении в разные стороны (рис. 4,б). Следовательно, в первом случае ток в стержнях равен

$$I_a = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{2R} = \frac{|\vec{B}| l^2}{4R} (\omega_1 - \omega_2),$$

а во втором —

$$I_b = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{2R} = \frac{|\vec{B}| l^2}{4R} (\omega_1 + \omega_2).$$

Разности потенциалов на концах обеих стержней одинаковы. Для первого стержня, например, разность потенциалов на его концах равна разности ЭДС индукции и падения напряжения на сопротивлении R :

$$U_a = \mathcal{E}_1 - I_a R = |\vec{B}| l^2 (\omega_1 + \omega_2) / 4,$$

$$U_b = \mathcal{E}_1 - I_b R = |\vec{B}| l^2 (\omega_1 - \omega_2) / 4.$$

Заметим, что при вращении стержней с одинаковыми угловыми скоростями в одну сторону ток в стержнях равен нулю (как при параллельном соединении одинаковых источников), а при вращении в разные стороны равна нулю разность потенциалов на концах стержней (как при последовательном соединении одинаковых источников).

Изменение магнитного потока и ЭДС индукции

ЭДС индукции возникает не только при движении проводника в магнитном поле, но и при изменении величины магнитного потока через поверхность, ограниченную проводящим контуром. В таком случае, согласно закону Фарадея, в контуре наводится ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (2)$$

Здесь $\Phi = |\vec{B}| S \cos \alpha$ — магнитный поток (\vec{B} — индукция магнитного поля, S — площадь поверхности, охватываемой контуром, α — угол между индукцией и нормалью к поверхности), $\frac{d\Phi}{dt}$ — скорость изменения магнитного потока. Знак «минус» указывает, что возникающий в контуре индукционный ток препятствует изменению магнитного потока.

Физические причины возникновения ЭДС индукции при движении проводника и при изменении магнитного потока различны. Однако формулой (2) можно пользоваться и для нахождения ЭДС, возникающей в контуре вследствие движения проводника в магнитном поле. (В этом можно убедиться, например, вернувшись к задаче 1. Сделайте это самостоятельно.)

Задача 3. Проволочная катушка находится в магнитном поле, параллельном оси катушки. При включении магнитного поля за время Δt_1 в катушке возникает ЭДС индук-

ции \mathcal{E}_1 . Какая ЭДС индукции наведется в катушке при повороте ее оси на угол α за время Δt_2 ?

При выключении магнитного поля изменение магнитного потока через каждый виток катушки, взятое с обратным знаком, равно

$$-\Delta\Phi_1 = |\vec{B}|S,$$

где $|\vec{B}|$ — абсолютная величина начальной индукции магнитного поля, а S — площадь поперечного сечения катушки (конечное значение индукции равно нулю). В соответствии с законом Фарадея (2) в катушке возникает ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_1 = n \frac{|\vec{B}|S}{\Delta t_1},$$

где n — число витков в катушке. Отсюда

$$n|\vec{B}|S = \mathcal{E}_1 \Delta t_1.$$

При повороте катушки магнитный поток меняется вследствие изменения угла между нормалью к плоскостям витков, направленной по оси катушки, и вектором индукции магнитного поля (рис. 5). Начальный поток $\Phi_{\text{нач}} = |\vec{B}|S$, а после поворота на угол α $\Phi_{\text{кон}} = |\vec{B}|S \cos \alpha$. Поэтому

$$-\Delta\Phi_2 = |\vec{B}|S (1 - \cos \alpha)$$

и возникающая в катушке ЭДС индукции равна

$$\mathcal{E}_2 = \frac{n|\vec{B}|S (1 - \cos \alpha)}{\Delta t_2}.$$

Подставляя в последнюю формулу значение величины $n|\vec{B}|S$, получаем

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} (1 - \cos \alpha).$$

Задача 4. Плоская проводочная рамка находится в магнитном поле с индукцией \vec{B} , перпендикулярной ее плоскости. Рамка представляет собой квадрат со стороной a . Затем ее: а) изгибают в прямоугольник с отношением сторон 1:2; б) вытягивают в одну линию; в) изгибают в два квадрата с отношением площадей 1:4 (рис. 6). Найти заряды, протекающие по рамке при каждом изменении ее формы. Сопротивление рамки R .

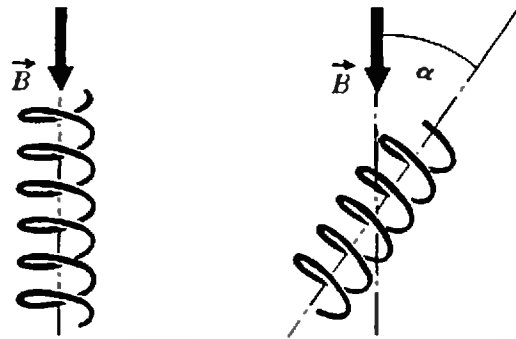


Рис. 5.

Заряд, протекающий по контуру, определяется по формуле

$$Q = I \Delta t = \frac{|\mathcal{E}_1|}{R} \Delta t = \frac{|\Delta\Phi|}{R},$$

где $\Delta\Phi$ — изменение магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром, а R — сопротивление контура (заряд зависит не от скорости изменения магнитного потока, а от самого изменения!).

Таким образом, для решения задачи необходимо вычислить соответствующие изменения магнитного потока. В случаях а) и б) эти изменения происходят только вследствие изменения площади поверхности, охватываемой контуром (индукция магнитного поля и направление нормали к плоскости рамки не меняются):

$$\Delta\Phi = |\vec{B}| \Delta S.$$

Так как периметр рамки постоянен, изменение площади в случае а) равно

$$\Delta S_a = \left(\frac{2}{3} a\right) \left(\frac{4}{3} a\right) - a^2 = -\frac{1}{9} a^2$$

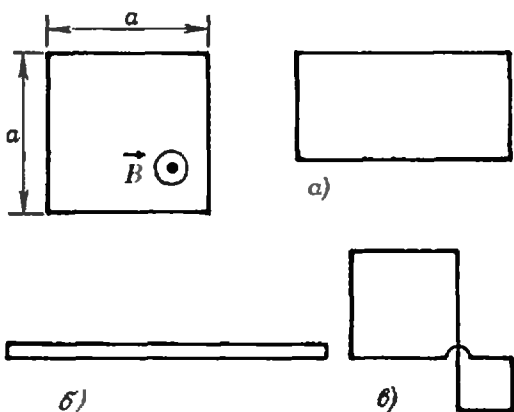


Рис. 6.

и по рамке протекает заряд

$$Q_5 = \frac{|\vec{B}| |\Delta S_5|}{R} = \frac{|\vec{B}| a^2}{9R}.$$

В случае б) конечная площадь равна нулю, поэтому

$$\Delta S_6 = -a^2$$

и

$$Q_6 = \frac{|\vec{B}| |\Delta S_6|}{R} = \frac{|\vec{B}| a^2}{R}.$$

В случае в) рамку перегибают так, что направление нормали у одного из квадратов оказывается противоположным начальному направлению. Следовательно, полный поток магнитной индукции в этом случае равен разности магнитных потоков через отдельные квадраты:

$$\Phi_{\text{кон}} = |\vec{B}| (S_1 - S_2),$$

где $S_1 = (2/3a)^2 = 4/9a^2$ и $S_2 = S_1/4 = a^2/9$ — площади большего и меньшего квадратов. Тогда

$$\Delta S_7 = \left(\frac{4}{9} a^2 - \frac{a^2}{9} \right) - a^2 = -\frac{2}{3} a^2$$

и по рамке протекает заряд

$$Q_7 = \frac{|\vec{B}| |\Delta S_7|}{R} = \frac{2|\vec{B}| a^2}{3R}.$$

Вихревое электрическое поле и его работа

Причиной появления индукционного тока в контуре, помещенном в переменное магнитное поле, является вихревое электрическое поле, которое возникает в пространстве при изменении магнитного поля. Это поле приводит в движение электроны в проводящем контуре. В отличие от электростатического поля работа при перемещении заряда по замкнутому контуру здесь не равна нулю: она равна \mathcal{E} , умноженной на величину перемещаемого заряда.

Задача 5. В камере ускорителя по окружности постоянного радиуса R движется тонкий пучок из n электронов, равномерно распределенных по орбите. Магнитный поток через площадь, охватываемую пучком, линейно растет со временем: $\Phi = at$. В некоторый момент времени величина тока в камере уско-

рителя равна I_0 . Каким станет ток I после того, как частицы сделают один оборот?

Величина тока I в камере определяется зарядом, проходящим через поперечное сечение за единицу времени. Если линейная скорость электронов v , то за время $t = 2\pi R/v$ через выделенное сечение проходят все n электронов. Поэтому ток

$$I = \frac{ne}{t} = \frac{nev}{2\pi R}.$$

Начальное значение тока позволяет найти начальную скорость электронов:

$$v_0 = \frac{2\pi R I_0}{ne}.$$

Переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле, которое и ускоряет электроны. За время одного оборота электрона электрическое поле совершает работу

$$A = e|\mathcal{E}| = e \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = ea.$$

Эта работа идет на изменение кинетической энергии электрона:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = ea.$$

Отсюда находим конечную скорость электронов:

$$v = \sqrt{\frac{2ea}{m} + v_0^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{2ea}{m} + \frac{4\pi^2 R^2 I_0^2}{n^2 e^2}}$$

и ток в камере:

$$I = \frac{ne}{2\pi R} v = \frac{ne}{2\pi R} \sqrt{\frac{2ea}{m} + \frac{4\pi^2 R^2 I_0^2}{n^2 e^2}}.$$

ЭДС самоиндукции

Изменение магнитного потока через площадь, охватываемую контуром, может происходить вследствие изменения тока в самом контуре. В таком случае в контуре также возникает электродвижущая сила, которую называют ЭДС самоиндукции, а само явление называют самоиндукцией. Связь магнитного потока Φ с величиной тока I определяется формулой

$$\Phi = LI,$$

где L — индуктивность контура. Тог-

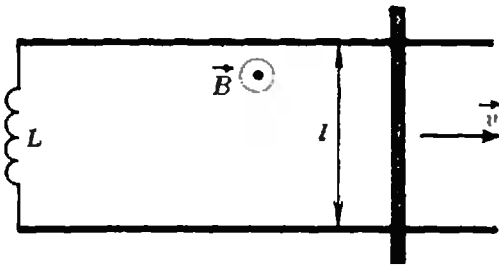


Рис. 7.

да, в соответствии с законом Фарадея (2), ЭДС самоиндукции равна

$$\mathcal{E}_{is} = -L \frac{dI}{dt}.$$

Задача 6. Стержень скользит с постоянной скоростью \$\vec{v}\$ по рельсам, находящимся в магнитном поле с индукцией \$\vec{B}\$, перпендикулярной плоскости рельсов (рис. 7). Концы рельсов замкнуты на соленоид с индуктивностью \$L\$. Какой ток течет через соленоид? Сопротивление соленоида, рельсов и стержня пренебрежимо мало. Расстояние между рельсами \$l\$.

Поскольку на соленоиде, рельсах и стержне падения напряжения нет, сумма ЭДС индукции, наводимой в движущемся стержне, и ЭДС самоиндукции, возникающей в соленоиде вследствие изменения тока в нем, равна нулю:

$$\mathcal{E}_i + \mathcal{E}_{is} = 0.$$

Здесь \$\mathcal{E}_i = |\vec{B}| l |\vec{v}|\$ и \$\mathcal{E}_{is} = -L \frac{dI}{dt}\$.

Так как ЭДС индукции не зависит от времени (стержень движется равномерно), должна быть постоянной и ЭДС самоиндукции. Следовательно, скорость изменения тока в соленоиде постоянна и равна

$$\frac{dI}{dt} = \frac{|\vec{B}| l |\vec{v}|}{L},$$

а ток в соленоиде меняется со временем по линейному закону

$$I = \frac{|\vec{B}| l |\vec{v}|}{L} t.$$

Задача 7. Соленоид с индуктивностью \$L\$ подводится через ключ \$K\$ к источнику с постоянной ЭДС \$\mathcal{E}\$ (рис. 8). Какую мощность

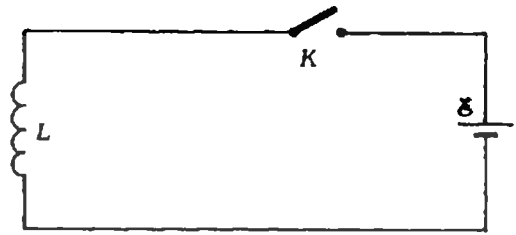


Рис. 8.

потребляет соленоид от источника при частоте переключения ключа \$\nu\$? Сопротивлением соленоида, источника и подводящих проводов пренебречь. Считать, что ключ отключают на очень короткое время.

При замыкании ключа в соленоиде возникает ток, который линейно растет со временем: \$I = \mathcal{E} t / L\$ (см. решение предыдущей задачи). За время \$T = 1/\nu\$ ток увеличивается до \$I_{max} = \mathcal{E} T / L\$. При размыкании ключа ток уменьшается до нуля за очень короткое время (много меньшее \$T\$). График зависимости тока от времени имеет вид, показанный на рисунке 9.

При увеличении тока \$I\$ за время \$\Delta t\$ по цепи проходит заряд \$\Delta Q = I \Delta t\$, а за период \$T\$ переместится заряд

$$Q = \int_0^T I dt = \int_0^T \frac{\mathcal{E} t}{L} dt = \frac{\mathcal{E} T^2}{2L} = \frac{\mathcal{E}}{2L\nu^2}$$

(этот заряд численно равен площади фигуры, заштрихованной на рисунке 9). При этом источник совершает работу

$$A = Q \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}^2}{2L\nu^2}.$$

Следовательно, потребляемая мощность

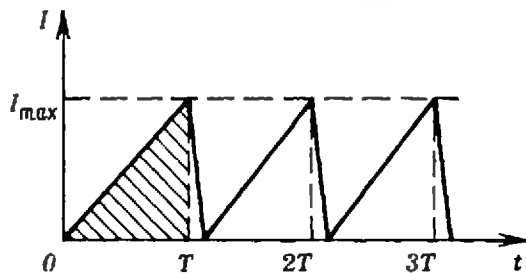


Рис. 9.

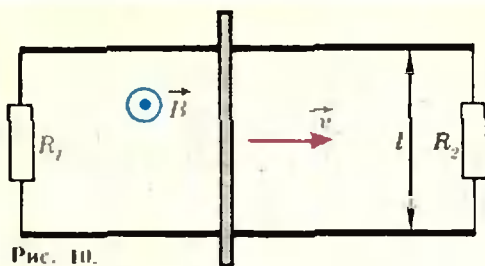


Рис. 10.

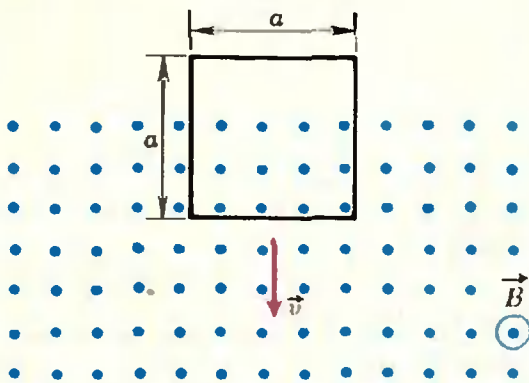


Рис. 11.

ность равна

$$P = \frac{A}{T} = Av = \frac{\mathcal{E}^2}{2Lv}.$$

Упражнения

1. Металлический стержень движется с постоянной скоростью \vec{v} по рельсам, концы которых замкнуты на проводники сопротивлением R_1 и R_2 (рис. 10). Рельсы находятся

в магнитном поле с индукцией B , перпендикулярной плоскости рельсов. Расстояние между рельсами l . Какой ток течет через стержень, если его сопротивление и сопротивление рельсов пренебрежимо малы? Какую мощность необходимо развивать, чтобы перемещать стержень с постоянной скоростью?

2. Как изменится ток в металлической рамке, вращающейся в постоянном магнитном поле с индукцией, направленной перпендикулярно оси вращения, при увеличении частоты вращения вдвое?

3. Проволочный квадрат со стороной a вдвигается со скоростью \vec{v} в поле постоянного магнита с индукцией B , перпендикулярной плоскости квадрата (рис. 11). Какой ток течет по проволоке, если сопротивление квадрата R ? По какому закону будет меняться ток со временем, если вдвигать квадрат с постоянным ускорением? Индуктивностью проволочного квадрата пренебречь.

4. Кольцо из сверхпроводника, по которому течет ток, изгибается в виде восьмерки, а затем перегибается вдвое. Как изменится при этом ток в кольце?

5. В короткозамкнутую катушку вдвигают постоянный магнит: один раз быстро, а другой — медленно. Одинаковый ли заряд протечет по катушке в обоих случаях? Будут ли одинаковы количества теплоты, выделяющиеся в катушке?

6. Покажите, что индуктивность однослойной катушки пропорциональна квадрату числа витков n .

7. Ток в катушке нарастает пропорционально времени. Каков характер зависимости тока от времени в другой катушке, индуктивно связанной с первой и замкнутой на постоянное сопротивление?

8. С какой минимальной частотой можно переключать ключ в задаче 7 в статье, если известно, что соленоид выдерживает максимальный ток I_0 ?

(Начало см. на с. 28)

82; Б. Гольдфарб (Москва) 74; В. Горбунов (Коммунарск) 79, 80, 82–84, 86, 87; С. Горюшко (Днепропетровск) 74, 76, 78, 79; А. Григоренко (Макеевка Донецкой обл.) 79, 80, 82–84, 87; И. Грузберг (Пермь) 74, 76, 78–80, 84; И. Губин (Ереван) 75, 76, 80, 82; А. Гуляев (Москва) 78, 80, 82, 84; М. Гундилович (Городеня) 82; Л. Гуральник (Житомир) 76, 82; А. Давоян (Ленинакан) 78, 82; М. Данилин (Новозининский) 75, 76, 78; И. Даниловский (Горький) 78–80, 82, 84; В. Дворцовой (Липецк) 84; И. Дерebas (Магнитогорск) 74; С. Довбыш (Москва) 74, 76; А. Долинин (Владимир) 76; А. Дремин (п. Черноголовка Московской обл.) 78, 80, 82; Ю. Елисеев (Великие Луки) 80, 82; И. Елишевич (Чернигов) 75, 76, 79, 80, 82, 84; Е. Желиговская (Москва) 74–76, 83, 84, 87; Н. Житенев (п. Черноголовка Московской обл.) 74, 76, 78–80, 82–84; В. Жордочкин (Орск) 80, 82, 84; А. Заневский (Леннин-

град) 78–80, 82; А. Захарьян (Чернигов) 75, 76; М. Зейфман (Вологда) 74, 76, 78–80, 82–84; И. Зильберберг (Алма-Ата) 80, 82–84; С. Зиневский (с. Хорошее Озеро Черниговской обл.) 84; А. Золотых (Курск) 82; В. Зубко (Ивано-Франковск) 79, 80, 82; И. Иванов (Саратов) 75, 76, 78–80, 82–84, 87; В. Иващенко (Киев) 83; В. Изергин (Новосибирск) 78, 84; В. Израилит (Днепропетровск) 75, 80, 82, 84; А. Израэли (Тбилиси) 75; О. Исупова (Оренбург) 76; А. Канель (Москва) 74–76; В. Катин (Житомир) 75, 76, 78, 79, 82–84, 86, 87; Э. Кафаров (Баку) 80; А. Клинк (Ковров) 76, 82; Е. Когин (Днепропетровск) 75, 76, 78–80, 82–84, 86; А. Кожевников (Днепропетровск) 76, 78–80, 82; Г. Кожоридзе (Телави) 82–84, 86; В. Козловский (Новолукомль) 75, 76, 78–80, 82, 84, 86, 87; А. Колдоркин (Куйбышев) 74–76; Г. Коломойцев (Сумгаит) 74–76, 78–80, 82–84, 87; В. Комов (Алексаидров) 74–76, 78–80, 82–84, 87; В. Коньшин (Ростов-на-Дону) 84; В. Коробов (Кировград) 74, 76, 80, 83, 84; Г. Коротков

(Окончание см. на с. 56)

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1979 году

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(математико-механический факультет)

1. Сколько корней имеет уравнение

$$f(x) - af'(x) = 0,$$

если $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$, α , x_1, x_2, x_3, x_4 — действительные числа ($x_1 < x_2 < x_3 < x_4$)?

2. Решить неравенство (при $a \in \mathbb{R}$)

$$\log_a(1 - 8a^{-x}) \geq 2(1 - x).$$

3. Решить уравнение (при $a \in \mathbb{R}$)

$$a \cdot \sin x + \operatorname{tg} x + 1 = \frac{1}{\cos x}.$$

4. В равнобедренную трапецию $ABCD$ вписана окружность радиуса R ; K — точка пересечения диагоналей трапеции. $[AB]$ — ее большее основание, $\widehat{KBA} = \alpha$. Найти радиус окружности, касающейся данной окружности и отрезков $[KB]$, $[KC]$ диагоналей.

5. Точки M, N, P, Q расположены в пространстве так, что $(MN) \perp (PQ)$, $(MP) \perp (NQ)$. Доказать, что и $(MQ) \perp (NP)$.

Вариант 2

(факультет прикладной математики — процессов управления)

1. Для каких a ($a \in [0; 1]$) площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ и прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = f(a)$, имеет наибольшее и наименьшее значения, если $f(x) = x^2 + 3x^3$, α, β — действительные числа, причем $\alpha > 1, \beta > 1$?

2. При каких a ($a \in \mathbb{R}$) любое решение неравенства

$$\frac{\log_3(x^2 - 3x + 7)}{\log_3(3x + 2)} < 1$$

будет также решением неравенства $x^2 + (5 - 2a)x < 10a$?

3. Решить уравнение (при $a \in \mathbb{R}$)

$$(8a^2 + 1) \sin^3 x - (4a^2 + 1) \sin x + 2a \cdot \cos^3 x = 0.$$

4. Длины катетов прямоугольного треугольника равны a и b , длина биссектрисы прямого угла равна l . Верно ли, что

$$l < \sqrt{\frac{ab}{2}}?$$

5. Сфера проходит через центр шара, вписанного в правильный тетраэдр, и касается трех ребер тетраэдра, исходящих из одной вершины. Найти радиус сферы, если длина ребра тетраэдра равна a .

Вариант 3

(физический факультет)

1. Ширина реки равна a м, скорость ее течения — ω м/сек, скорость плывца в стоячей воде — v м/сек ($v < \omega$), а скорость его движения на суше — u м/сек. За какое наименьшее время плывец может попасть в точку, расположенную на противоположном берегу напротив того места, с которого он начинает переправу? Считать, что в воде плывец не изменяет выбранного им в начале переправы движения и что вектор скорости течения реки параллелен ее берегам, которые предполагаются прямолинейными.

2. При каких a ($a \in \mathbb{R}$) точка $(a; a^2)$ расположена внутри треугольника, ограниченного прямыми $y = x + 1$, $y = 3 - x$, $y = -2x$?

3. Решить уравнение

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 + \sin 4x.$$

4. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, если

$$x_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

5. Три большие окружности одинакового радиуса R касаются попарно друг друга. Три маленькие окружности имеют одинаковый радиус и касаются попарно друг друга. Найти радиус маленькой окружности, если каждая из маленьких окружностей касается также двух больших.

А. Пономаренко

Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко

Математика

Письменный экзамен

В а р и а н т 1

(механико-математический факультет)

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9, \\ x + y = 20. \end{cases}$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{9^x + 3^{x-2}} > 9 - 3^x.$$

3. Вокруг шара объемом V описан конус таким образом, что его объем — наименьший из всех возможных. Найти объем конуса.

4. При каком значении a прямая $y = a$ делит площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 0$ и $y = 2 + x - x^2$, пополам?

5. Решить уравнение

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = y^2 - 4y + 5.$$

В а р и а н т 2

(факультет кибернетики)

1. Пусть

$$\max(A, B) = \begin{cases} A, & \text{если } A > B \\ B, & \text{если } B > A. \end{cases}$$

Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной частями линий $\max(x, y) = 1$ и $x^2 + y^2 = 1$, лежащих в первом квадранте.

2. Зная радиус r основания конуса, определить радиус сечения, которое параллельно основанию и делит объем конуса пополам.

3. Решить уравнение

$$2 \sin^2 x - 5 \sin x \cdot \cos x - 8 \cos^2 x = -2.$$

4. При каких значениях a уравнение $ax^2 = \ln x$ имеет один корень?

В а р и а н т 3

(Физический и радиофизический факультеты)

1. Точка движется прямолинейно по закону

$$s(t) = -\frac{1}{6}t^3 + 3t^2 - 5$$

(время измеряется в секундах, пройденный путь в метрах). Определить:

1) момент времени, когда ускорение точки равно нулю;

2) с какой скоростью движется в этот момент точка?

2. В конус, высота которого равна радиусу основания, вписан шар. Найти отношение объема шара к объему конуса.

3. Решить неравенство

$$x + 2 < \sqrt{x + 14}.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_3 (\log_2 x) + \log_{\frac{1}{3}} (\log_{\frac{1}{2}} y) = 1, \\ xy^2 = 4. \end{cases}$$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \sin \left(x + \frac{\pi}{8} \right) \cdot \cos \left(x - \frac{\pi}{24} \right).$$

Задачи устного экзамена

1. Решить уравнения

а) $\log_3 (\cos x) + \log_{\frac{1}{3}} (-\sin x) = 0;$

б) $\operatorname{tg} |x| = |\operatorname{tg} x|;$

в) $\pi \sin x = \left| x - \frac{\pi}{4} \right| - \left| x - \frac{3\pi}{4} \right|.$

2. Решить неравенство

$$|x + 2|^{\frac{1}{x^2 - x - 6}} > |x + 2|^{\frac{2}{x}}.$$

3. Найти промежутки монотонности и точки экстремумов функции

$$y = ||x^2 - 1| - 2|.$$

Построить график этой функции.

4. Построить график функции

$$y = \begin{cases} \frac{t^x - 1}{\sqrt{4x - x^2}}, & \text{если } x < 0, \\ \sqrt{4x - x^2}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

5. При каких a функция

$$f(x) = x^3 + 3(a-7)x^2 + 3(a^2-9)x + 1$$

имеет положительную точку максимума?

6. При каких m функция

$$f(x) = 2e^x - me^{-x} + (1+2m)x - 3$$

монотонно возрастает на всей оси?

7. При каких a уравнение

$$3x \lg x = 1 + a \lg x$$

имеет: а) одно решение; б) два решения?

8. Сколько корней в зависимости от параметра a имеет уравнение

$$x^2 \cdot e^{2-|x|} = 4a.$$

9. Сколько корней, принадлежащих промежутку $[-\pi; \pi]$, имеет уравнение

$$3 \sin x + \sin 3x = 2a$$

в зависимости от параметра a ?

10. При каком a сумма кубов корней уравнения

$$6x^2 + 6(a-1)x - 5a + 2a^2 = 0$$

наибольшая?

11. На плоскости изобразить множество точек

$$\{(x; y) | x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0\}.$$

Написать уравнение образа этого множества при параллельном переносе $\vec{p} = (0; -1)$.

12. Найти все значения a , при которых множество

$$\{(x; y) | x^2 + y^2 + 2x < 1\} \cap \{(x; y) | x - y + a > 0\}$$

содержит только одну точку. Найти эту точку.

13. Фигура ограничена графиком функции $y = \sqrt{x}$, прямой $y = 2$ и осью ординат. В какой точке графика данной функции необходимо провести к ней касательную, чтобы она отсекала от указанной фигуры треугольник наибольшей площади?

14. Точка $(x; y; z)$ лежит на плоскости $x + y + z = 6$. Доказать, что $x^2 + y^2 + z^2 > 12$.

15. Доказать, что для произвольного натурального числа n выполняется равенство

$$\left(1 - \frac{4}{1}\right) \left(1 - \frac{4}{9}\right) \left(1 - \frac{4}{25}\right) \dots \left(1 - \frac{4}{(2n-1)^2}\right) = \frac{1+2n}{1-2n}.$$

16. В треугольнике ABC проведена медиана CM . Прямая l , параллельная (CM) , пересекает (BC) , (CA) и (AB) соответственно в точках A_1 , B_1 и C_1 . Доказать, что $\vec{A_1C_1} + \vec{B_1C_1} = \vec{CA} + \vec{CB}$.

17. Окружность K_1 касается внутренним образом окружности K_2 в точке A , $[BC]$ — хорда окружности K_2 , касающаяся окружности K_1 в точке D . Доказать, что $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$.

18. В прямоугольном треугольнике ABC $[BD]$ — высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу AC . Доказать, что

$$\frac{1}{[BD]^2} = \frac{1}{[AB]^2} + \frac{1}{[BC]^2}.$$

19. Доказать, что в произвольном треугольнике

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c},$$

где h_a , h_b , h_c — длины высот треугольника, r — радиус вписанной окружности.

Н. Перестюк, М. Ядренко

Ростовский государственный университет

(механико-математический факультет)

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(отделение математики)

1. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, вписанного в данный конус с высотой H и радиусом основания R .

2. Решить уравнение

$$\log_{\frac{1}{3}} \left(2 \left(\frac{1}{2} \right)^x - 1 \right) = \log_{\frac{1}{3}} \left(\left(\frac{1}{4} \right)^x - 4 \right).$$

3. Решить уравнение

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}.$$

Вариант 2

(отделение механики)

1. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, вписанного в шар радиуса R .

2. Известно, что прямая $y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{32}$ является касательной к графику функции $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x$. Найти координаты точки касания.

3. Решить неравенство

$$\log_2 (4^x - 5 \cdot 2^x + 2) > 2.$$

4. На $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ найти решения уравнения

$$\sin 7x + \cos^2 2x = \sin^2 2x + \sin x.$$

Вариант 3

(отделение прикладной математики)

1. Боковая грань правильной четырехугольной пирамиды имеет заданную площадь S и наклонена к плоскости основания под углом, величина которого равна α . При каком значении α объем пирамиды будет наибольшим?

2. Даны три некопланарных вектора \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} . Найти числа p и q , при которых векторы $p\vec{a} + q\vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{a} + p\vec{b} + q\vec{c}$ коллинеарны.

3. Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\lg(x^2)} + 2 > 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\lg(-x)}$$

4. Решить уравнение

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$$

*Я. Ерусалимский, Т. Коршикова,
А. Хейфиц*

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(математический факультет)

Решите любые пять из следующих задач:

1. Найти площадь фигуры, заключенной между линиями $y = -x^2 + 6x - 2$ и $y = x^2 - 2x + 4$.

2. Решить уравнение

$$\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = 0.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{0,1}(x^2 + x - 2) > \log_{0,1}(x + 3).$$

4. В параллелограмме $ABCD$ известны координаты вершины $A(3; 1; 2)$, $B(0; -1; -1)$, $C(-1; -1; 0)$. Найти длину диагонали BD .

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ длина стороны основания равна a , длина высоты равна h , M — точка пересечения медиан грани BSC . Найти угол наклона прямой AM к плоскости основания пирамиды.

6. Назовем матрицей таблицу вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где a, b, c, d — действительные числа. Если $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} l & m \\ n & p \end{pmatrix}$, то $A \cdot B$ означает, что $a=l$, $b=m$, $c=n$, $d=p$. Произведением $A \cdot B$ матриц A и B назовем матрицу

$$\begin{pmatrix} al+bn & am+bp \\ cl+dn & cm+dp \end{pmatrix}.$$

а) Найти произведение матриц $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

б) Найти матрицу X такую, что $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$.

В а р и а н т 2

(Физический факультет)

1. Приобретено некоторое число билетов в театр и некоторое число билетов в кино. За билеты в театр заплатили 24 руб., за билеты в кино — 14 руб. Каждый билет в кино на 1 руб. дешевле, чем билет в театр. Сколько куплено билетов в театр, если их на 2 меньше, чем билетов в кино?

2. Построить график функции

$$y = \frac{x^4}{4} - 2x^2.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x$, $y=-x^2+4x$.

4. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a . Плоский угол при вершине равен α . Найти объем пирамиды и площадь ее боковой поверхности.

5. Решить уравнение

$$\sin x = 1 + \cos x.$$

Физика

Задачи устного экзамена

(Физический факультет)

1. В последнюю секунду своего свободного падения тело прошло половину всего пути. С какой высоты и сколько времени падало тело?

2. Человек находится на краю круглой горизонтальной платформы радиусом $R=4$ м, которая вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы. С какой угловой скоростью должна вращаться платформа, чтобы человек не смог удержаться на ней? Коэффициент трения $\mu=0,2$.

3. Поезд массой $m=1000$ т при торможении с ускорением $|\vec{a}|=0,2$ м/с² остановился

через $t=100$ с. Какое количество теплоты выделилось при торможении?

4. В теплоизолированном сосуде содержится смесь воды массой $m_1=200$ г и льда массой $m_2=40$ г при температуре $t_1=t_2=0^\circ\text{C}$. В сосуд вводится водяной пар массой $m_3=10$ г при температуре $t_3=100^\circ\text{C}$. Определить температуру после установления теплового равновесия. Удельная теплота парообразования воды $r=2,3 \cdot 10^6$ Дж/кг, удельная теплота плавления льда $\lambda=3,3 \cdot 10^6$ Дж/кг, удельная теплоемкость воды $c=4200$ Дж/(кг · К).

5. При выстреле вертикально вверх свинцовая пуля ударила о неупругое тело и расплавилась. На какой высоте произошло это столкновение, если начальная скорость пули $|\vec{v}_0|=400$ м/с? Считать, что 50% выделившегося количества теплоты пошло на плавление. Удельная теплота плавления свинца $\lambda=2,5 \cdot 10^4$ Дж/кг.

6. До какой температуры следует изобарически нагреть газ, чтобы его плотность уменьшилась вдвое по сравнению с плотностью при начальной температуре $t_0=0^\circ\text{C}$?

7. Два точечных заряда $q_1=6,6 \cdot 10^{-9}$ Кл и $q_2=1,32 \cdot 10^{-8}$ Кл находятся на расстоянии $r=40$ см друг от друга. Какую надо совершить работу, чтобы сблизить их до расстояния $r_1=25$ см?

8. Некоторая цепь, имеющая сопротивление $R=200$ Ом, питается от источника постоянного напряжения. Для измерения силы тока в цепь включили амперметр с внутренним сопротивлением $r=1$ Ом. Какова была сила тока в цепи до включения амперметра, если амперметр показал ток $I=5$ А?

9. В сеть напряжением $U=220$ В включены три одинаковых лампочки: две параллельно, а третья последовательно. Начертить схему и определить напряжение на каждой из ламп. В какой из них выделяется наибольшая мощность?

10. Какой силы ток течет в цепи электрического кипятильника, если $V=10$ л воды нагревается от $t_1=20^\circ\text{C}$ до $t_2=100^\circ\text{C}$ в течение $\tau=30$ мин? КПД кипятильника $\eta=75\%$, напряжение в сети $U=220$ В. Удельная теплоемкость воды $c=4200$ Дж/(кг · К).

А. Березман, К. Дуничев,
О. Овчинников

Ленинградский

государственный

педагогический

институт им. А. И. Герцена

Математика

Письменный экзамен

(математический факультет)

В а р и а н т 1

1. Найти значение выражения

$$\left(\frac{(x^2+a^2)^{-1/2} + (x^2-a^2)^{-1/2}}{(x^2-a^2)^{-1/2} - (x^2+a^2)^{-1/2}} \right)^{-2}$$

при $x = a \left(\frac{m^2 + n^2}{2mn} \right)^{1/2}$. $a > 0$, $m > 0$, $n > 0$, $m > n$.

2. Решить уравнение

$$\log_5 \sqrt{x-2} + \frac{1}{2} \log_5 (x-11) = 1.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 2^x; y = 2; x = -1.$$

4. Найти экстремумы функции

$$y = x + \sin 2x.$$

5. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник с углом α при вершине, все боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом φ . Объем шара, вписанного в пирамиду, равен V . Найти объем пирамиды.

Вариант 2.

1. Упростить

$$\begin{aligned} \cos 0 + \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} + \\ + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}. \end{aligned}$$

2. Решить систему

$$\begin{cases} 2(\log_y x + \log_x y) = 5, \\ xy = 8. \end{cases}$$

3. Решить уравнение

$$2^{2x-3} = 4^{x^2-3x-1}$$

4. Написать уравнение горизонтальной касательной к графику функции $y = e^x + e^{-x}$.

5. Основание прямого параллелепипеда — ромб, у которого меньшая диагональ равна d и острый угол равен α . Площадь боковой поверхности равна S . Найти объем параллелепипеда.

Физика

Задачи устного экзамена

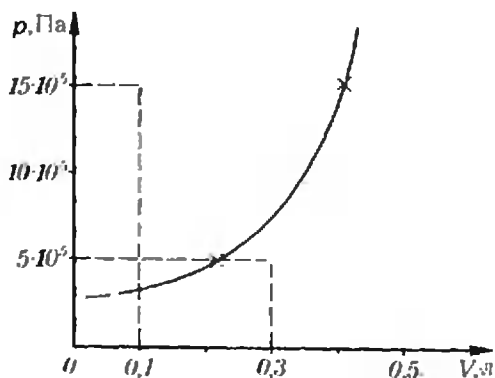
(физический факультет)

1. Расстояние между двумя станциями, равное $s = 18$ км, поезд проходит со средней скоростью $v_{\text{ср}} = 54$ км/ч, причем на разгон он тратит $t_1 = 2$ мин, затем идет с постоянной скоростью и на замедление до полной остановки тратит $t_2 = 1$ мин. Определить наибольшую скорость движения поезда.

2. Волны распространяются вдоль резинового шнура со скоростью $v = 3$ м/с при частоте $\nu = 2$ Гц. Какова разность фаз между точками, отстоящими друг от друга на $l = 75$ см?

3. Определите, для какой массы водорода при температуре $t = 0^\circ\text{C}$ начерчен график, изображенный на рисунке.

4. Над поверхностью $S = 5$ км² слой воздуха толщиной $h = 1000$ м имеет температуру $t_1 = 20^\circ\text{C}$ при относительной влажности $r = 73\%$. Воздух охладился до $t_2 = 10^\circ\text{C}$. Найти массу выпавшего дождя. Плотность насыщенного водяного пара при температурах t_1 и t_2 равна $\rho_{\text{н}1} = 17,3$ г/м³ и $\rho_{\text{н}2} = 9,4$ г/м³ соответственно.



5. Пылинка массой $m = 10^{-8}$ г находится в однородном электрическом поле между пластинками с разностью потенциалов $U = 6000$ В. Расстояние между пластинками $d = 5$ см. Каким зарядом обладает пылинка, если сила тяжести, действующая на нее, уравновешивается электрической силой?

6. Батарея из $n = 50$ последовательно соединенных элементов с ЭДС $\mathcal{E} = 1,4$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,4$ Ом у каждого элемента питает телеграфный аппарат с сопротивлением $R = 90$ Ом. Ток подводится по железному проводу сечением $S = 3$ мм² и длиной $l = 20$ км. Найти силу тока в цепи и напряжение на зажимах аппарата. Удельное сопротивление железа $\rho = 0,98 \cdot 10^{-7}$ Ом · м.

7. Лифт массой $m = 1,2$ т поднимается на $h = 15$ м за $t = 0,5$ мин. Напряжение на зажимах мотора $U = 220$ В, его КПД $\eta = 90\%$. Найти силу тока в моторе.

8. Деталь машины надо покрыть слоем меди толщиной $d = 0,5$ мм. Сколько времени потребуется для этого, если электролиз производится током, плотность которого $j = 1,5$ А/дм²? Электрохимический эквивалент меди $k = 0,33$ мг/Кл; плотность меди $\rho = 8,9$ г/см³.

9. Дуга Петрова питается переменным током ($\mathcal{E}_{\text{max}} = 110$ В, $T = 0,02$ с). Сопротивление горячей дуги $R = 1,5$ Ом. Какой индуктивностью должна обладать катушка, включенная в цепь последовательно с дугой, если $I_{\text{max}} = 30$ А?

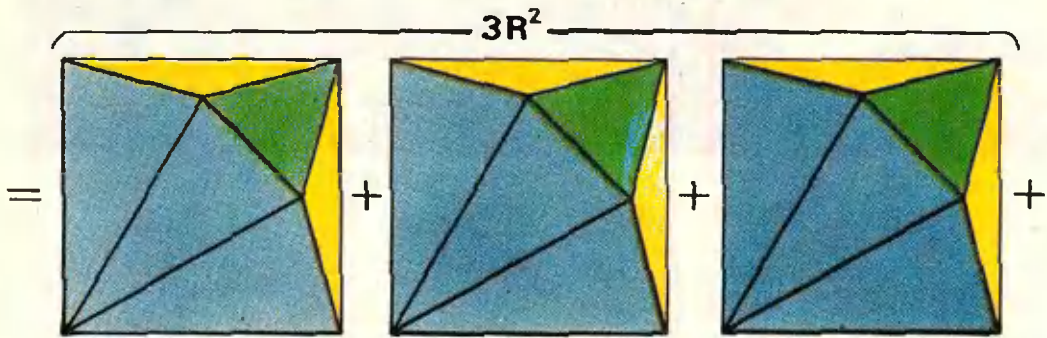
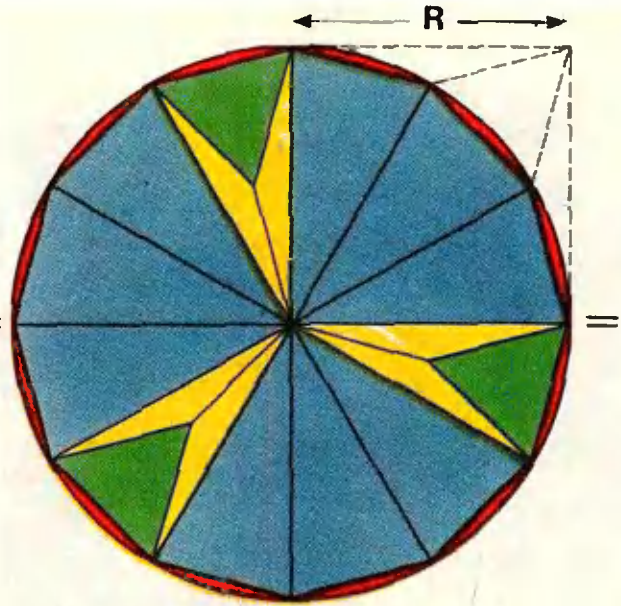
10. Оптическая сила собирающей линзы $D = 5$ дптр. Светящаяся точка находится на расстоянии $d = 30$ см от линзы на ее оптической оси. Где и каким будет изображение этой точки? Построить изображение.

М. Калинина, О. Оноприенко

О числе π

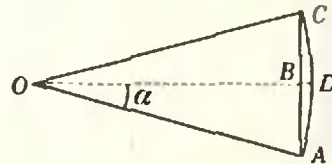
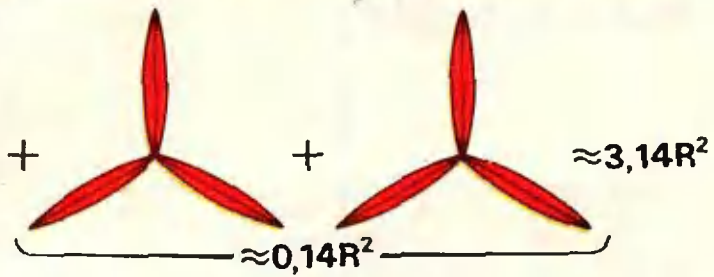
Что легче, что предпочтительнее — угадать верный ответ математической задачи, потом строго доказать его или искать его в полном неведении? Предпочтительнее, разумеется, первое. Догадку облегчают удачные преобразования. Забавный пример

таких преобразований демонстрирует помещенный здесь рисунок. Представьте себе, читатель, что вы еще не знаете, как выражается площадь круга через его радиус. Попробуем угадать соответствующую формулу. Разрежем круг на двенадцать равных секторов и каждый сектор обрежем до треугольника, от-



брасывая сегменты, как обозначено на рисунке красным. Каждый четвертый из получившихся треугольников разрежем на один равносторонний и два равнобедренных треугольника, как показано на рисунке. Из получившихся треугольников сложим три квадрата со стороной, равной радиусу круга R . Итак, приблизительно, с точностью до отброшенных сегментов, площадь круга равна $3R^2$. Учет отброшенных сегментов заставляет взять в этой формуле чуть больший коэффициент перед R^2 . Какое же число, чуть большее трех и относящееся к кругу, могло бы здесь пригодиться? Конечно, $\pi = 3,14\dots$ Вот мы и угадали формулу для площади круга с радиусом R — вот она: $S = \pi R^2$.

Строгости ради стоило бы оценить суммарную пло-

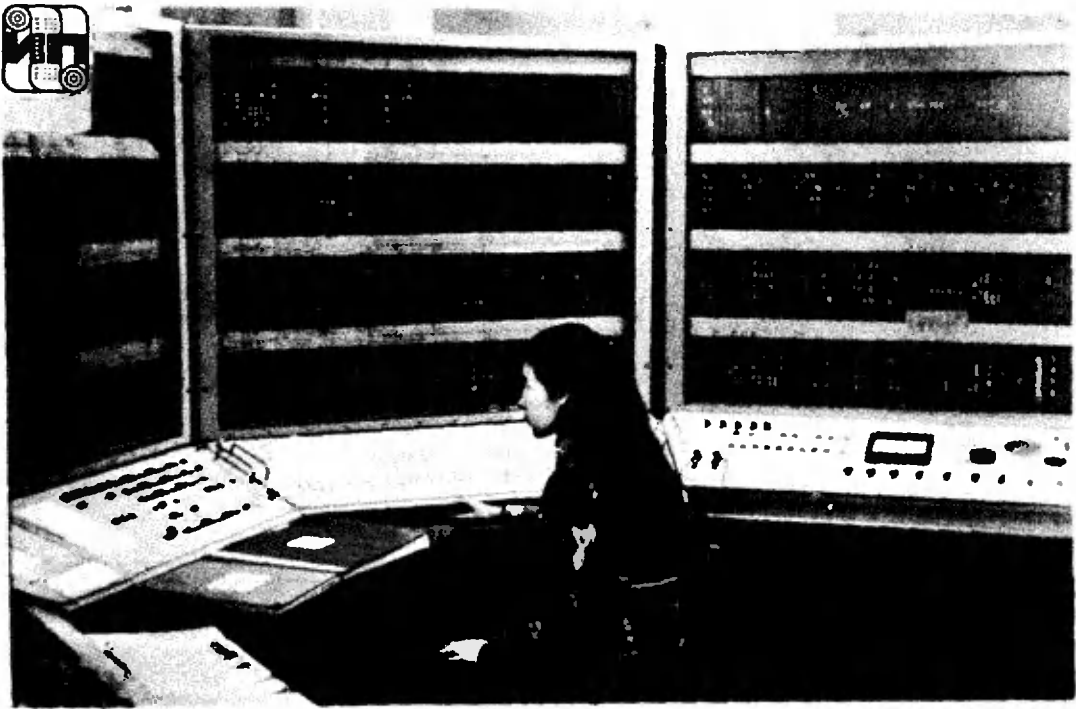


щадь сегментов, приближенно равную, согласно нашей догадке, $0,14 R^2$. Как показано на рисунке, заменим сегмент треугольником ACD . Площадь такого треугольника равна произведению $2AB \cdot BD$, сомножители легко выражаются через тригоно-

метрические функции угла α , а их в свою очередь можно оценить, учтя, что синус малого угла приближенно равен самому углу, выраженному в радианной мере. Выкладки, приведенные рядом с рисунком, дают с точностью до двух знаков после запятой величину $0,11 R^2$, весьма близкую к ожидаемой. После этого у нас есть все основания полагать, что площадь круга с радиусом R действительно равна πR^2 .

Ю. Побожий

$\pi = 3,1415926535897932384626433832$



А. Салтовский

Организация ввода и вывода в ЭВМ

Эта статья продолжает серию публикаций об устройстве ЭВМ («Память ЭВМ» в «Кванте» № 4 и «Как работает процессор» в «Кванте» № 5).

Пакетный и диалоговый режимы

Скорость работы процессоров современных ЭВМ достигает сотен тысяч и миллионов операций в секунду. С помощью различных технических решений в таком же темпе удается осуществить обмен информацией между процессором и памятью.

Сложнее обстоит дело с доставкой информации в ЭВМ и с выдачей из машины результатов вычислений. Эти очень разные функции выполняют *устройства ввода-вывода* (УВВ).

Непосредственное общение человека с ЭВМ в процессе так называемого «ручного» ввода программы и данных с пульта, когда каждое отдельное машинное слово вводится в машину человеком-оператором, весьма трудоемко даже при небольших программах. При таком режиме работы не может быть и речи об эффективном использовании ЭВМ. Противоречие между высоким быстродействием процессора и памяти, с одной стороны, и человеческим несовершенством с другой, разрешают следующими двумя основными способами.

При первом способе информацию, предназначенную для ввода в ЭВМ, заранее подготавливают на каком-нибудь промежуточном информационном носителе, например на *перфокартах*, *перфолентах* или *магнитных лентах*. Устройства, помогающие выполнить подготовительную работу, предшествующую вводу в ЭВМ программы и данных, называют *устройствами подготовки*, добавляя при этом наименование информации-

Фотографии В. Полякова и И. Федорченко

онного носителя — на перфокартах, на перфоленте или на магнитной ленте (фото 1). Подготовка информации на промежуточном носителе может производиться без лишней спешки, поскольку устройства подготовки данных работают независимо от ЭВМ и необходимость состязаться в скорости с машиной отпадает. В то же время подготовленную (отперфорированную на картах или перфоленте, или записанную на магнитную ленту) программу можно ввести в ЭВМ с очень высокой скоростью благодаря специальным считывающим устройствам ввода: для каждого типа носителя существует свое специфическое устройство ввода. По сравнению с «ручным» вводом информации с пульта управления ЭВМ, способ предварительной подготовки информации позволяет сократить простой дорогостоящего скоростного оборудования ЭВМ. Такой режим ввода информации в машину называется *пакетным*.

Второй способ ввода-вывода информации сравнительно молод: фактом своего существования он обязан появлению мощных ЭВМ последних поколений — машин, более быстродействующих, с большим объемом оперативной памяти, чем машины 50-х и начала 60-х годов. Внешне этот способ мало отличается от существовавшего на заре появления ЭВМ «ручного» ввода: средством общения человека с машиной служит пульт управления ЭВМ, а также подсоединенные к ЭВМ *выносные пульта — терминалы*. Правда, пульт несколько усовершенствовался: сообщения машины высвечиваются на телевизионном экране в виде легко читаемых текстов. «Отвечающая» часть современных пультов очень напоминает клавиатуру пишущей машинки. Человек, немного «побеседовавший» с машиной с помощью подобного пульта или терминала, очень быстро привыкает к такой форме общения с ЭВМ. Такой пульт — терминал может быть удален от машины на большое расстояние. В качестве терминалов сейчас наиболее распространены пульта с телевизионным экраном и клавиатурой — *дисплеи* (фото 2). В этой же роли

могут выступать и подсоединенные к ЭВМ *электрические пишущие машинки и телетайпы*.

Самым важным, пожалуй, является то обстоятельство, что в современных вычислительных системах вместо единственного нуля (как у машин первых поколений) число термinals выросло до нескольких десятков. При этом у каждого из работающих за терминалами пользователей создается иллюзия индивидуальной работы с ЭВМ: та информация, которую запрашивает каждый из программистов, сразу высвечивается на экране, а та информация, которую программисты вводят в ЭВМ, немедленно размещается в нужном месте памяти. Такой режим общения с машиной называют *диалоговым*.

Квант времени для «беседы» с ЭВМ

Возможность оперативного диалогового общения человека с ЭВМ основана на том, что практически «мгновенная» (с точки зрения человека) реакция машины фактически протекает за сравнительно большие интер-



Фото 1.

валы времени (с точки зрения высокоскоростных ЭВМ): 40–100 миллисекунд ($(40–100) \cdot 10^{-3}$ с). Если ЭВМ способна, например, выполнять 10^6 операций в секунду, то за каждое «сразу» и «мгновенно» ЭВМ сможет выполнить от 40 до 100 тысяч операций. Если каждому из пользователей — программистов — выделить, например, порцию времени в 5 миллисекунд, то ЭВМ за такое время сможет «продвинуть» ход диалога с каждым из них на 5000 команд. Вот почему каждый пользователь уверен, что он один работает с ЭВМ. Правда, часть времени работы ЭВМ «забирает» программа обслуживания и управления — *операционная система*. Если в нашем примере предположить, что человеческое «сразу» — это 100 миллисекунд, то примерно половина этого времени — 50 миллисекунд — будет затрачена на работу программы операционной системы. Тогда из расчета, что каждому из пользователей выделяется для работы с ЭВМ порция времени прямого доступа в 5 миллисекунд, можно сказать, что ЭВМ сумеет «одновременно», сохраняя иллюзию мгновенных ответов, общаться с десятком программистами. Описанная здесь система работы чисто иллюстративна. Важно лишь отметить, что в ней машинное время распределяется между пользователями строго регламентировано. В этом операционной системе помогают электронные часы машины (так называемый «таймер») и система прерываний (см. «Как работает процессор», «Квант», № 5). Подобные системы называют *системами разделения времени*.

Операции элементарного обмена УВВ — Память

УВВ помогают организовывать связь ЭВМ с внешним миром. Помощь состоит в том, что УВВ обеспечивают преобразование информации, получаемой извне, к виду, удобному для обработки в ЭВМ. УВВ обрабатывает и обратное преобразование: полученные машиной решения задач выводятся из машины на печатающее устройство. Обычное его назва-



Фото 2.

ние — *АЦПУ, алфавитно-цифровое печатающее устройство* (фото 3). Современные ЭВМ в числе средств вывода могут иметь и более «экзотические» устройства — *графопостроитель*, изображающий на бумаге рисунки, хранящиеся в закодированном виде в памяти ЭВМ; *фотоввод* — устройство, которое световым лучом строит изображение (слайд) на фотопленке; *кинопостроитель*, обеспечивающий вывод серии рисунков на пленку кадров, то есть мультфильмов, и т. п.

Работой УВВ управляют *команды ввода-вывода*. Они составляют часть системы команд машины. Команда ввода-вывода обычно содержит следующую информацию:

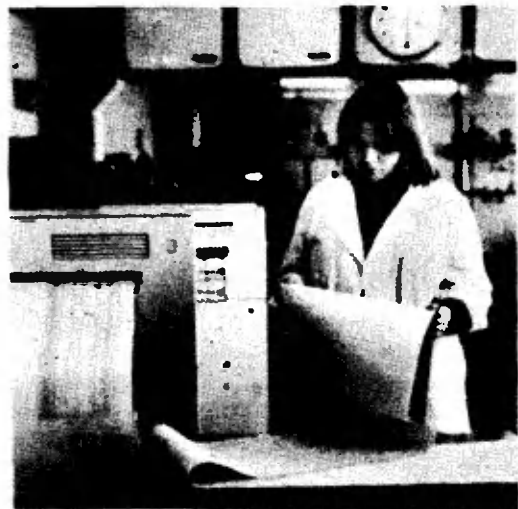


Фото 3.

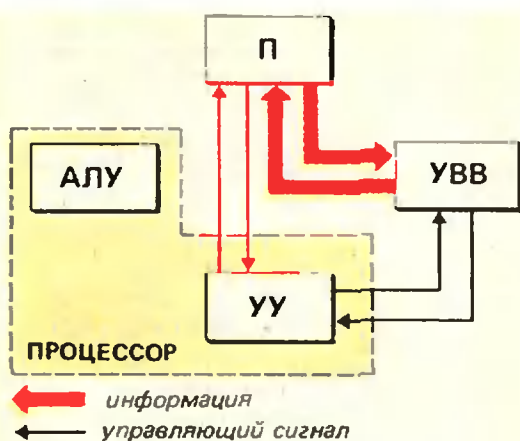


Рис. 1.

— тип (чаще, номер) УВВ, с которым планирует работать программист;

— характер работы — УВВ, как правило, могут работать в разных режимах;

— количество информации, которую надо передать в том или ином направлении.

Кроме того, команда ввода-вывода содержит управляющую информацию о том, по какому адресу (по каким адресам) в памяти находится информация, предназначенная для вывода из ЭВМ, или адрес (адреса), по которому необходимо разместить информацию, поступающую в ЭВМ от устройства ввода.

Обычно общение программиста с ЭВМ начинается и заканчивается командами ввода-вывода. В самом начале в память вводят программу и данные, предварительно подготовленные, например, на перфокартах. В конце сеанса общения результат выдается, например, на АЦПУ. Из этой упрощенной схемы видно, что на время отработки команды ввода-вывода устройство управления (УУ) соединяет память информационным трактом с выбранным УВВ (рис. 1). Информационный тракт — это оперативное кратковременное хранилище передаваемой от устройства к устройству информации. Одна из его характеристик — *ширина*: количество одновременно передаваемой информации. Поскольку ширина информационного тракта от УВВ к П

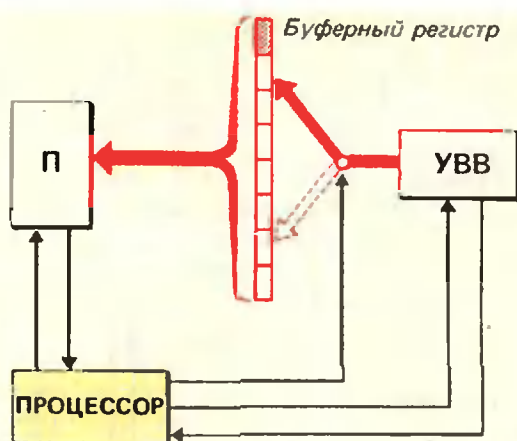


Рис. 2.

зачастую меньше, чем машинное слово, то подготавливаемую к передаче информацию стали предварительно накапливать в специальных *буферных регистрах* (рис. 2). Так, например, современные ЭВМ серии ЕС допускают обмен информацией с памятью двойными словами (64 бита), а основной обменной порцией в передачах УВВ — память является байт (8 битов). Восемь байтов собирают на буферном 64-битовом регистре, и, после того как буферный регистр окажется заполненным, запрашивается связь с памятью.

В ранних моделях машин в моменты связи УВВ — память арифметико-логическое устройство (АЛУ) простаивало. В лучшем случае АЛУ занималось подсчетом количества передаваемой информации в байтах или машинных словах. С появлением скоростной памяти паузы, в течение которых происходит сборка или разборка информации, стали использовать для информационного обмена между П и АЛУ. Это значительно повысило эффективность работы ЭВМ, особенно машин, работающих в многопрограммном режиме.

Канал — это специализированный процессор

Системы ввода-вывода современных ЭВМ должны

— преобразовывать информацию к виду, удобному для переработки в ЭВМ, и производить, когда это необходимо, обратное преобразование;

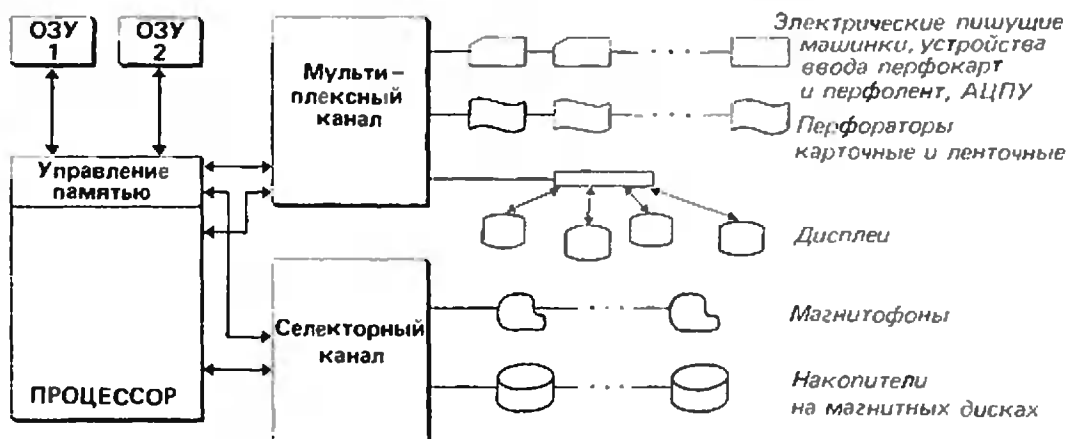


Рис. 3.

— подключаться к памяти для обмена информацией с УВВ, притом только тогда, когда это действительно необходимо, и выполнять во время пауз сборку или разборку информации;

— обеспечивать возможность распараллеливания работы с другими устройствами ЭВМ, в частности с АЛУ;

— пользоваться средствами процессора только тогда, когда в этом есть необходимость: например, для анализа ошибочной ситуации или для включения операций ввода-вывода.

При этом способ подключения УВВ к системе ввода-вывода должен быть, по возможности, универсальным для различных УВВ.

В современных ЭВМ перечисленные требования к системам ввода-вывода реализуются устройствами, которые называют *процессорами ввода-вывода*. В машинах серии ЕС их называют *каналами*.

На рисунке 3 представлена структурная схема ЕС-1060. По современным представлениям это достаточно мощная ЭВМ, обладающая двумя каналами — селекторным и мультиплексным, — отличающимися друг от друга, прежде всего, скоростными характеристиками: для селекторного канала пропускная способность достигает до 1,25 Мбайт ($1,25 \times 2^{20}$ байт) в секунду; к селекторному каналу присоединяются скоростные УВВ — накопители на магнитных дисках (фото 4), ленточные магнитофоны. Максимальная пропускная способность для информационных потоков,

проходящих через мультиплексный канал, составляет 600 Кбайт (600×2^{10} байт) в секунду. К мультиплексному каналу подсоединяются «тихоходные» устройства — это перфораторы, считыватели перфокарт и перфолент, дисплеи, электрические пишущие машинки, АЦПУ.

Формат канальной команды

Подобно тому как действия ЭВМ определяются управляющей ею программой, работой специализированного процессора — канала — управляет *канальная программа*, предварительно записанная в память. Канальная программа состоит из последовательности *канальных команд*, каждая из которых заставляет канал



Фото 4.

выполнять определенную работу. В некотором смысле канал — это мини-ЭВМ, занимающаяся не обработкой, а транспортировкой информации. Типовой формат канальной команды представлен на рисунке 4. Основными полями в этом формате являются:

— *поле команды (код операции)*: поскольку устройство ввода-вывода может работать в разных режимах, в поле команды кодируют характер работы, которую должны выполнить выбранный канал и соответствующее УВВ; самыми характерными операциями являются «Чтение» и «Запись»;

— *поле адреса данных*, то есть поле, в которое записывают начальный адрес массива информации, предназначенной к транспортировке через канал от УВВ (или к УВВ);

— *поле признаков*, в котором уточняются некоторые детали информационного обмена;

— *поле счетчика*, которое указывает количество байтов информации, участвующих в обмене.

Обработка команды в канале

Система команд ЕС ЭВМ также содержит команды ввода-вывода, но в отличие от команд ввода-вывода предшествовавших моделей ЭВМ они лишь начинают выполнение операции ввода-вывода. Так, например,

команда ввода-вывода в ЕС ЭВМ, которая называется *Начать ввод-вывод*, обрабатывается в ЭВМ следующим образом:

— сначала команда извлекается из памяти на регистр команд; УУ процессора «узнает» ее, то есть определяет, что речь идет именно о команде начать ввод-вывод; затем с помощью информации, содержащейся в адресном поле команды, определяются номера канала и устройства ввода-вывода, с которым предстоит начать обмен (рис. 5а);

— у каждого из УВВ, присоединенного к каналу, есть собственный номер; когда какое-либо из устройств ввода-вывода признало выставленный номер своим, то оно «подтверждает» получение приглашения на связь; информация «подтверждения» содержит сведения о том, что УВВ с таким номером действительно готово к работе (в частности, не выключено из сети); выполняя процедуру начальной выборки УВВ, канал одновременно обращается в одну из фиксированно распределенных ячеек памяти — там хранится *адресное слово канала (АСК)*; АСК пересылается в канал; в АСК, в частности, содержится начальный адрес канальной программы (рис. 5б), по которой предстоит работать в процессе информационного обмена;

— канал обращается к памяти по адресу, указанному в АСК, и из-

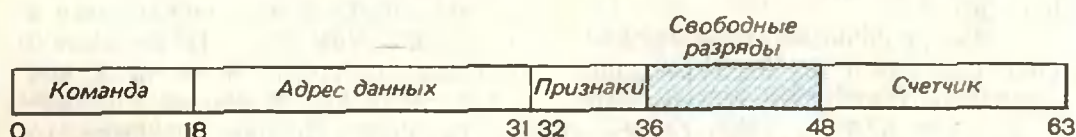


Рис. 4.

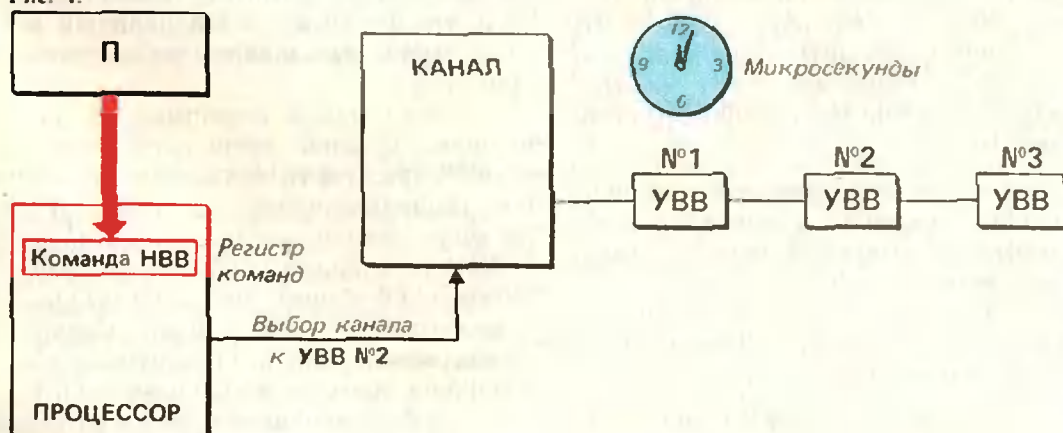


Рис. 5а.

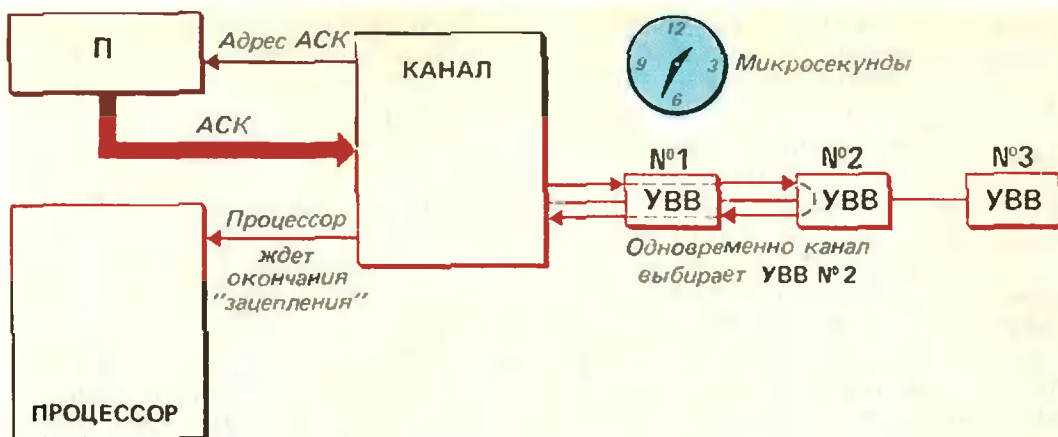


Рис. 5б.

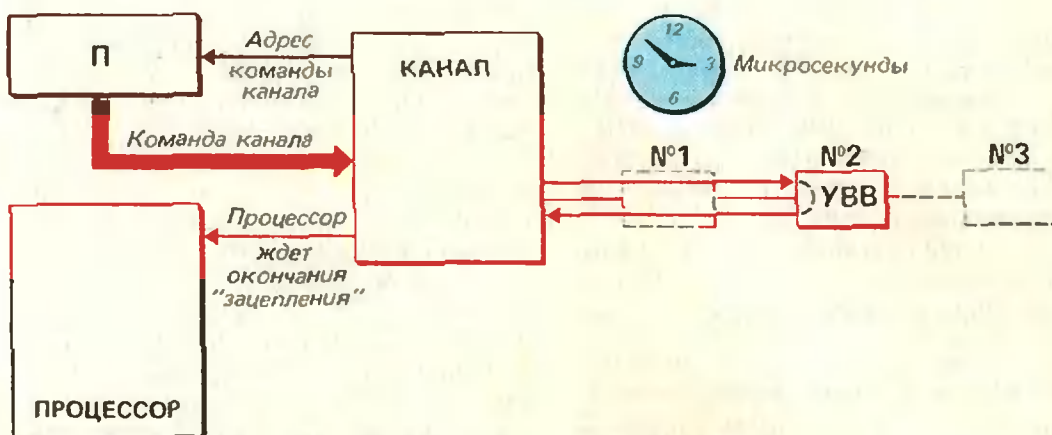


Рис. 5в.

влекает первую канальную команду из канальной программы; впрочем, эта программа может состоять из единственной канальной команды (рис. 5в);

— канал начинает расшифровку канальной команды; он пересылает команду (разряды 0—7 канальной команды) в УВВ, «узнавшее» свой номер в самом начале «зацепления» процессора с каналом; если УВВ способно выполнить предложенную команду, то оно «ответит» каналу, разрешая «перекачку» информации (рис. 5г);

— после этого процессор «отцепляется» от канала и занимается обработкой другой информации; канал, «заряженный» управляющей информацией, работает с памятью, предоставляя время от времени память в распоряжение процессора;

— когда канал нормально отрабатывает первую канальную команду

(не зафиксировав никаких поломок оборудования, никаких замятых перфокарт и т. д.), ход дальнейшей работы канала будет определен с помощью управляющей информации в поле признаков (рис. 4) канальной команды; в частности, если в нем указан признак «Цепочка команд» или признак «Цепочка данных», то связь канала с памятью может продолжаться дальше; их отношения в этом случае не касаются процессора (рис. 5д);

— если обмен информацией завершен, то канал прерывает работу процессора; перед прерыванием канал подготавливает на буферном регистре слово состояния канала (ССК), в котором сообщает в закодированной форме все обстоятельства окончания сеанса связи, запрос на прерывание поступает в процессор и одновременно ССК записывается в одну из фиксированных ячеек памяти; операционная система расшифро-

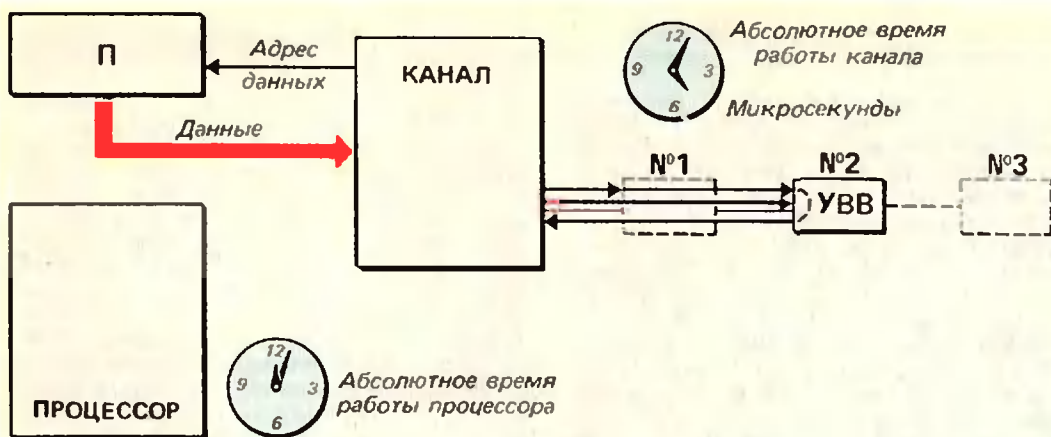


Рис. 5г.



Рис. 5д.

вызывает обстоятельства окончания обмена и, в зависимости от них, принимает решение: например, продолжить работу или отпечатать оператору просьбу сменить катушку магнитной ленты на магнитофоне и т. п.

Несмотря на то что извлечение канальной команды напоминает сюжет знаменитой сказки: иголка — в яйце, яйцо — в утке, утка — в зайце..., эффективность подобной организации ввода-вывода чрезвычайно высока.

Контроль информационного обмена

Все процессы передачи информации в ЭВМ контролируются. Для контроля всякий информационный тракт сопровождается дополнительными разрядами, которые называются *контрольными*. Их назначение — дополнить сумму передаваемых в данный отрезок времени (такт) разрядов до нечетного числа. Например,

нулевой байт сопровождается единицей в контрольном разряде. Таким образом, для передачи байта используют 9 проводов (по девятому идет контрольный бит). Контрольный разряд формируется в источнике информации с помощью специальной логической схемы; приемник информации, получив байт, также генерирует контрольный бит. Передача информации считается успешно завершённой, если контрольные биты источника и приемника совпали. Этот способ контроля называют *«сверткой по модулю 2»*. Легко видеть, что такой способ не обнаруживает ошибки в четном числе разрядов. Существуют методы аппаратного контроля, позволяющие «отловить» и двойные ошибки.

Что читать дальше:

1. Флорес А. Организация вычислительных машин. (М., «Мир», 1972).
2. Флорес А. Внешние устройства ЭВМ (М., «Мир», 1977).

(Окончание Начало см на с 28, 41)

(с Трянино БашАССР) 74; К Крапивной (Запорожье) 75, 76, 78—80, 82; И Красилов (Киев) 78—80, 82—84, 86; А Крейнс (Кольчугино) 75, 80, 82; Р Крис (Киев) 75, 76, 78—80, 82; И Кроливец (Краматорск) 76; Е Кузнецов (Кишинев) 76; П Кузнецов (Киев) 75, 82, 83, 84, 87; А Кузьмин (Алма-Ата) 74, 76, 80, 83, 84, 86, 87; С Курчатов (Саратов) 74—76, 78—80, 82—84, 87; Л Кустов (Киев) 74, 76; Э Кучинский (Нижний Тагил) 78, 80, 82; А Кушнеров (Москва) 82; Б Лепидус (Москва) 75, 80; А Латыкин (Авдеевка) 74; В Леонов (Воронеж) 76, 79, 80, 82, 84; Е Лисянская (Харьков) 74—76, 78, 83, 84; И Лукьянчук (Киев) 75, 76, 82; Ф Лю (Чимкент) 78; В Любовицкий (Кострома) 74, 75, 79; Л Лякин (Гомель) 74—76, 79, 82; А Мазуркевич (Лыткарино) 74—76, 78, 82; Д Майоров (Кирово-Чепецк) 75; З Мардарашвили (Кутаиси) 82; Г Марус (Арсеньев) 80, 84; В Матчишин (Целиноград) 74, 76; С Махортых (Лисичанск) 84; Е Меденников (Ульяновск) 79, 80, 82; М Межуева (Челябинск) 76; И Миклашевич (Минск) 76; А Микула (Жидачов) 79, 83, 84, 86, 87; А Минаев (Саратов) 74—76, 80, 82, 84; А Мингалеев (Уфа) 84; А Михайлов (Москва) 74—76, 78, 79, 82; И Михайлов (Кемерово) 79, 80; С Михайловский (Виноградский р-н Архангельской обл.) 74, 76, 83; Г Молчанов (Саратов) 74—76, 78—80, 82—84; Р Набоков (Москва) 78—80, 82; С Надточий (Москва) 83, 84; А Назаренко (Киев) 76, 80, 82—84, 86, 87; И Насалик (Рогатин) 82; Г Нецаева (Курск) 82; Е Николайов (Ульяновск) 80, 82; Д Нишвианидзе (Кутаиси) 78, 80, 82; Д Овсянников (Ленинград) 74, 76, 79, 80, 82—84, 86; В Оглоблин (Иркутск) 78—80; В Ориельский (Ямполь Винницкой обл.) 76; А Орлов (п. Черноголовка Московской обл.) 74, 82; А Осипов (Сосновий Бор Ленинградской обл.) 83, 84; Я Оскотский (Ленинград) 74—76; А Павлычев (Рига) 75, 82, 84; О Пащенко (Киев) 74, 76, 78—80, 82—84, 86; М Пактаев (Москва) 82; В Пентегов (Киев) 75, 76, 82, 83; Г Перельман (Ленинград) 75, 76, 79, 83, 84; К Пивницкая (Москва) 82; С Пишекин (Череповец) 78, 80, 84; А Подвязников (Мосальск) 80; Ф Полекшинов (д. Ново-Дедовск Гомельской обл.) 76, 82; А Полицкий (Киев) 79, 82, 83; Е Поляков (Калининград Московской обл.) 84; А Пономарев (Николаев) 82; Н Пояркова (Днепродзержинск) 84; Ю Прохоров (Орехово-Зуево) 75, 76, 78; Г Прякин (Москва) 78, 82; Е Рабкин (Гомель) 74, 82—84; С Равняго (Золочев Львовской обл.) 76; В Рожков

(Кривое Озеро) 82; С Рулев (Краматорск) 74—76, 82; А Русецкий (Тбилиси) 78, 80; Г Рыбкин (Смоленск) 74, 75, 78—80, 82; М Рюхтин (Алма-Ата) 76; С Рязанцева (Борисоглебск) 80, 82; А Сагура (Запорожье) 75, 76, 78, 80, 82; В Саракули (Ижевск) 84; С Сафонов (Киев) 75, 76; Б Сафронов (Донецк) 78, 79, 82; С Селифонова (с Попелсво Калужской обл.) 76, 78, 82; А Семенов (Стерлитамак) 83; В Семенов (Киев) 76, 84, 87; М Семенченко (Ленинград) 78—80, 82; Т Сергейцев (Челябинск) 74—76, 78—80, 82—84; В Середа (Львов) 74—76, 78—80, 84, 87; А Сивенцев (Свердловск) 78, 82—84, 87; В Сидорин (Реутов) 79, 84; А Симолян (Ереван) 75; Н Сирых (Ярославль) 79, 84; И Скавронский (Андижан) 80; А Скок (Талгар) 74—76, 78, 82; О Скопцов (Ангарск) 74, 78—80; О Славин (Москва) 74, 76; П Смирнов (Тула) 78, 80; С Смирнов (Ташкент) 79, 80, 82; Г Солдак (Минск) 75, 76, 78—80, 82—84, 87; С Солядухин (Шуя) 82; Д Сорока (Запорожье) 74—76, 79—84, 87; А Сромик (Ленинград) 74, 76; И Ставицкий (Фрунзе) 75, 76; О Стаховская (Капустин Яр) 80, 82; С Стещенко (с Мало-даниловское Харьковской обл.) 74; П Страдынь (Рига) 74, 76; А Стрешинский (Донецк) 74, 76, 83, 84; П Струбицкий (Тернополь) 76, 78, 80; Д Стыркас (п. Черноголовка Московской обл.) 76; И Тавин (Ковров) 83; А Тагаев (Новосибирск) 83; А Тарасов (Москва) 82; К Тарисов (Львов) 83; А Телиженко (Одесса) 82; Р Угриновский (Хмельник) 78; А Урникис (п. Куайя ЛитССР) 80, 84; В Усачев (Ромны Сумской обл.) 82; В Усов (Томск) 80, 82, 84, 86; Л Уткин (Вологда) 78, 80, 83, 84, 86; А Фарбер (Баку) 79, 80, 82, 84; П Фастовец (п. Старокопстантинов Хмельницкой обл.) 80, 82; И Федин (Омск) 78—80, 82—84, 87; А Федюкович (Пинск) 80; В Федюкович (Киев) 74, 76, 78; Д Филиппов (Москва) 78, 80; В Фисенко (Джамбул) 80; А Флеров (Рига) 80, 82, 84, 86; И Фоменко (Днепропетровск) 78, 80, 82—84, 87; М Фурман (Мозырь) 80, 82; С Хосид (Алма-Ата) 83, 84, 86, 87; Л Хризмак (Киев) 78, 80, 82, 84, 87; Ю Цыганков (Дрожжановский р-н ТАССР) 78—80, 82, 84, 86; В Чалий (Рогатин) 75, 76; Е Чулкин (с Рябово УдАССР) 80, 82, 84; А Чумадин (Баку) 82, 83; В Шаблинский (Киев) 80, 82, 83, 86, 87; С Шарый (Семипалатинск) 78, 80, 82—84, 86, 87; И Швец (Желтые Воды) 78, 82—84, 86, 87; В Шершнев (Москва) 78, 80; В Шик (Сумгаит) 84; А Шимановский (Гомель) 74, 75, 78—80, 82, 84; С Шишков (Москва) 78, 80, 82; И Шкридюк (Ногинск) 79, 80, 82—84, 87; М Эренбург (Днепропетровск) 78—80, 82; В Юсупов (Баку) 83; И Ячиков (Магнитогорск) 79, 80.

Поправка

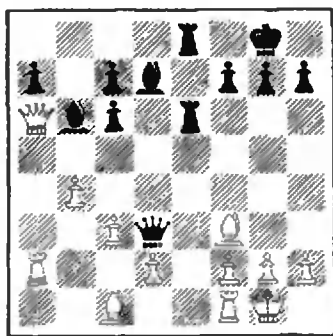
В «Кванте» № 3 в статье «Московский государственный университет им М. В. Ломоносова» по вине типографии и редактора допущены следующие опечатки: на с 45 в уравнении задачи 5 правая часть должна быть 4 (а не 0), в решении этой задачи пропущен знак минус перед корнем x_1 (ответ, однако, указан правильно), на с 46 в неравенстве в условии задачи 5 под знаком \log_2 перед числом 11 должен стоять минус (а не плюс). В ответах на с 62 в левом столбце (Отделение планирования и экономической кибернетики экономического факультета) в задаче 1 вместо $\pi/3$ должно быть $\pi/6$, а в задаче 5 (с учетом поправки условия) ответ должен быть $-\infty - 2|U| - 2, 2 - \sqrt{15}|U|6, +\infty$

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов.

Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

В предыдущем номере нашей «Шахматной странички» мы познакомили вас со знаменитой дебютной комбинацией, в которой белые уже на шестом ходу жертвуют ферзя и объявляют неприятельскому королю мат в два хода («мат Легалья»). Эффектные жертвы ферзя всегда производят сильное впечатление и надолго остаются в памяти шахматистов. Сегодня мы покажем вам еще несколько комбинаций, в которых в жертву приносится ферзь. Все они по праву относятся к жемчужинам шахматного творчества.

Первая комбинация принадлежит гениальному американскому шахматисту прошлого века, неофициальному чемпиону мира Паулю Морфи.

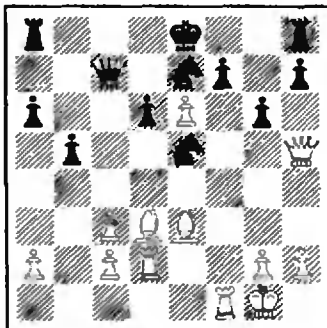


Л. Паульсен — П. Морфи.

Эта позиция встретилась в его партии с Л. Паульсеном из турнира в Нью-Йорке 1857 года — первом турнире, в котором играл П. Морфи. Здесь последовало: 1...Ф:f3!! 2. g1 Лg6+ 3. Крh1 Ch3 4. Лd1 (на 4. Лg1 следует мат в три хода, беззащитны черные и после 4 Фd3 f5 5. Фe4+ Крf8!) 4...Сg2+ 5. Крg1 С:f3+ 6. Крf1 Сg2+

7. Крg1 Ch3+ (Морфи избирает самый простой путь к победе, однако черные могли обвинить форсированный мат в четыре хода: 7...Се4+ 8. Крf1 Cf5! 9. Фе2 Ch3+ 10. Крe1 Лg1x) 8. Крh1 С:f2 9. Фf1 С:f1 10. Л:l1 Ле2 11. Лa1 Лh6 12. d4 Се3. Белые сдались.

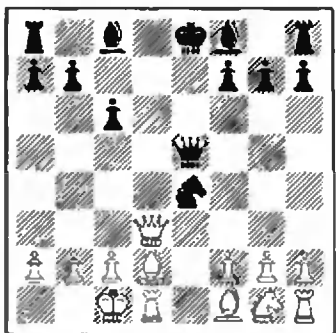
Следующая жертва ферзя принадлежит другому великому мастеру комбинации М. Талю. Эти две партии разделяют более чем 110 лет!



М. Таль — А. Суэтин.

1. Ф:e5! de 2. ef+, и черные сдались. На 2...Крf8 следует 3. Ch6x, а на 2...Крd7 решает 3. Cf5++ Крc6 4. Се4+ Кd5 5. С:d5+Крd7 6. С:a8+ Крe7 7. Сg5+ Крf8 8. Ch6+ Крe7 9. f8Ф+.

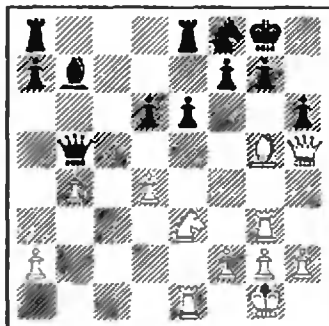
Интереснейшая комбинация на следующей диаграмме встретила ровно 70 лет назад в партии двух выдающихся гроссмейстеров Рети и Тартаковера.



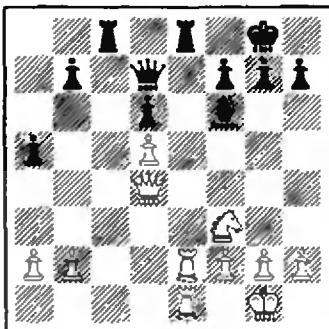
Р. Рети — С. Тартаковер.

Белые уже отдали фигуру, а теперь расстаются и с ферзем: 1. Фd8+!! Кр:d8 2. Сg5+ Крc7 (2...Крe8 3. Лd8x) 3. Cd8x.

Предлагаем вам самим найти две комбинации с жертвой ферзя, давно ставшие классическими (задачи 1, 2), первая из них называется «мельницей», вторая иллюстрирует тему «отвлечение»



1. К. Торре — Эм. Ласкер. Белые начинают и выигрывают.



2. Адамс — К. Торре. Белые начинают и выигрывают.

Обе они содержат геометрические мотивы. Партии сыграны талантливым мексиканским мастером начала века К. Торре, причем в одном случае он является автором комбинации, а в другом — соавтором.

* * *

Напомним читателям «Шахматной странички», что в следующем номере «Кванта» открывается наш «Шахматный конкурс», победители которого будут награждены шахматно-математической литературой с автографом чемпиона мира А. Карпова.



Метод неподвижных точек

1. Например,

$$f(x) = \begin{cases} b & \text{при } x \in [a; (a+b)/2] \\ a & \text{при } x \in ((a+b)/2; b] \end{cases}$$

2. Например, годятся функции, изображенные на рисунках 1а и 1б.

3. Например, круговое кольцо и его поворот вокруг центра на угол, не кратный 2π .

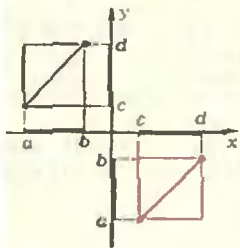


Рис. 1а.

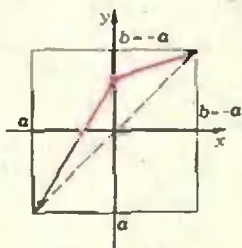


Рис. 1б.

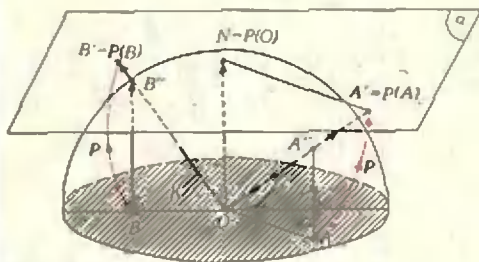


Рис. 2.

4. Например, $P \rightarrow T_\nu P$, где T_ν — параллельный перенос плоскости α на ненулевой вектор $\vec{\nu}$, а P — взаимно однозначное отображение круга K на плоскость α , показанное на рисунке 2.

5. Указание: воспользуйтесь идеей решения упражнения 1.

6. Указание: доказательство аналогично доказательству того, что точка c (в первой теореме) неподвижна.

Электромагнитная индукция

1. $I = \frac{|\vec{B}|l|\vec{v}|(R_1+R_2)}{R_1R_2}$;

$$\dot{P} = \frac{|\vec{B}|^2 l^2 |\vec{v}|^2 (R_1+R_2)}{R_1R_2}$$

2. Амплитуда тока и его частота увеличатся вдвое.

3. $I = |\vec{B}|a|\vec{v}|/R$: если квадрат двигать с постоянным ускорением, ток будет изменяться по линейному закону.

4. Ток в кольце увеличится вдвое.

5. Протекающие по катушке заряды одинаковы, а количество теплоты, выделяющееся в катушке, в первом случае больше.

6. Указание. Во-первых, полная индукция магнитного поля пропорциональна числу витков катушки. Во-вторых, полная площадь поверхности, охватываемой витками катушки, тоже пропорциональна числу витков.

7. Во второй катушке течет постоянный ток.

8. $v_{\min} = \frac{\mathcal{E}}{LI_0}$.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Математика

Вариант 1

1. 4 (при любом $a \in \mathbb{R}$). Указание. При $a \neq 0$ разделите обе части уравнения на $af(x)$ и сделайте набросок графика функции

$y = \frac{f'(x)}{f(x)}$. 2. $[\log_a(4 + \sqrt{16+a^2})$; $3 \log_a 2]$

при $a \in]0; 1[$, $[\log_a(4 + \sqrt{16+a^2})$; $+\infty[$ при $a \in]1; +\infty[$. При $a \in]-\infty; 0[\cup \{1\}$ левая часть неравенства не имеет смысла. 3. $x = 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) при всех $a \in \mathbb{R}$, $x = \frac{\pi}{4} \pm$

$\pm (\pi - \arccos \frac{a+2}{a\sqrt{2}}) + 2\pi l$ ($l \in \mathbb{Z}$) при $a \in]-\infty; -1[\cup]-1; -2(\sqrt{2}-1)[\cup]2(\sqrt{2}+1); +\infty[$. Указание. Данное уравнение равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} a \cdot \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{2} + (\sin x + \cos x) = 1, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$

4. $R(\sqrt{2}-1) \operatorname{tg}^2 \alpha$. 5. Указание. $\vec{MQ} = -\vec{MP} + \vec{PQ}$, $\vec{NP} = \vec{NQ} + \vec{QP}$.

Вариант 2

1. Наибольшее — при $a=1$, наименьшее — при $a = \frac{1}{2}$. Указание. Фигура, о которой говорится в задаче, заштрихована на рисунке 3.

2. $\left\{ \frac{5}{2}; +\infty \right\}$. 3. $x = \frac{\pi}{2} k$ ($k \in \mathbb{Z}$) при

$a=0$; $x_1 = \operatorname{arccotg}(2a) = \pi k$, $x_2 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(4a) + \frac{\pi}{2} l$ ($k, l \in \mathbb{Z}$) при $a \neq 0$. Указание.

Представьте левую часть уравнения в виде квадратного трехчлена относительно a .

4. Да. Указание. Выразите l через a и b . 5. $\frac{1}{8} \sqrt{2}(3-\sqrt{3})a$. Указание.

Пусть $SABC$ — данный правильный тетраэдр, M — середина стороны BC , H — основание высоты тетраэдра, проведенной из S , K — середина ребра SA , $O_1 = (MK) \cap (SH)$ (рис. 4). Тогда O_1 — центр шара, вписанного в тетраэдр, $|O_1H|$ — его радиус. Центр O_2 сферы, о которой говорится в условии, лежит на $[SO_1]$, причем если $(O_2D) \perp (AS)$ ($D \in AS$), то $|O_2O_1| = |O_2D|$ — искомый радиус.

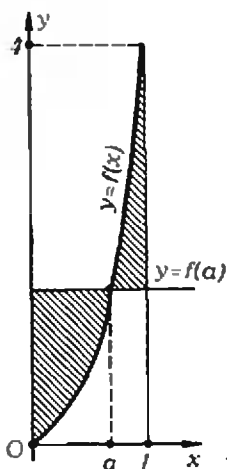


Рис. 3.

Вариант 3

1. $\frac{a}{uv} \sqrt{(u+w)^2 - v^2} c$ Указание Очевидно, всякая стратегия переправы равносильна некоторой стратегии, при которой пловец сначала плывет, потом идет по противоположному берегу. Плыть ему, очевидно, надо против течения. Если вектор \vec{v} представить в виде $\vec{v} = x\vec{b} + y\vec{w}$, где \vec{b} — единичный вектор, перпендикулярный вектору \vec{w} и направленный в сторону противоположного берега, то время движения пловца в воде равно $\frac{a}{v}$, на суше $\frac{a}{xu} (w - \sqrt{v^2 - x^2})$
2. $-\frac{1+x\sqrt{13}}{2}$, -2 3. $x_1 = \frac{\pi}{2} k$, $x_2 = -\frac{1}{2} \arctg \frac{8}{3} + \frac{\pi}{2} l$ ($k, l \in \mathbb{Z}$) 4. $\frac{4}{3}$

Указание $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.
 $\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}$ 5. $(5 - 2\sqrt{6})R$

Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко

Математика

Вариант 1

1. $\{(2, 18), (18, 2)\}$ 2. $\left[\log_3 \frac{83}{19}, +\infty \right)$
3. $2\sqrt{4}$ 4. $\frac{9}{4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{4}} \right)$ 5. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$), $y = 2$ Указание Поскольку при всех $x \neq \pi + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} < 1,$$

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$$

и при всех y

$$y^2 - 4y + 5 \geq 1,$$

данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1 \\ y^2 - 4y + 5 = 1 \end{cases}$$

Вариант 2

1. $1 - \frac{\pi}{4}$ 2. $\frac{r}{\sqrt{2}}$ 3. $x_1 = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $x_2 = -\operatorname{arctg} \frac{3}{4} + \pi l$ ($k, l \in \mathbb{Z}$) 4. $]-\infty, 0[\cup \left\{ \frac{1}{2e} \right\}$

Вариант 3

1. 1) $6c$, 2) $18 \frac{M}{c}$ 2. $20\sqrt{2} - 28$ 3. $[-14, 2]$
4. $\left\{ \left(64, \frac{1}{4} \right) \right\}$ 5. $\max_R y = \frac{3}{4}$, $\min_R y = -\frac{1}{4}$

Задачи устного экзамена

1. а) $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$), б) $x \in \left[\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k \right]$ ($k=0, 1, 2, \dots$) и $x \in \left] -\frac{\pi}{2} + \pi l, \pi l \right]$ ($l=0, -1, -2, \dots$), в) $x_1 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$ ($k=1, 2, \dots$), $x_2 = (-1)^{l-1} \frac{\pi}{6} + \pi l$ ($l=0, -1, -2, \dots$) 2. $]-\infty, -3[\cup]-2, -\frac{3}{2}[\cup]-1, 3[$ 3. На промежутках $]-\infty, -\sqrt{3}[$, $[-1, 0]$ и $[1, \sqrt{3}[$ функция убывает, на промежутках $[-\sqrt{3}, -1]$, $[0, 1]$ и $[\sqrt{3}, +\infty[$ — возрастает, точки $x = -\sqrt{3}$, $x=0$, $x=\sqrt{3}$ — точки ее минимума, точки $x = -1$, $x=1$ — точки максимума

5. $]-\infty, -3[\cup]3, \frac{29}{7}[$ Указание Точка минимума данной функции лежит правее ее точки максимума. Трехчлен $x^2 + 2ax + \beta$ тогда и только тогда имеет два положительных корня, когда

$$\begin{cases} a^2 - \beta > 0 \\ a < 0 \\ \beta > 0 \end{cases}$$

6. $m \geq 0$ Указание $f'(x) = e^{-x} [2e^{2x} + (2m+1)e^x + m]$
7. а) $]-\infty, 0[$, б) $]0, +\infty[$ Указание Данное уравнение равносильно уравнению

$$\operatorname{lg} x = \frac{\frac{1}{3}}{x - \frac{a}{3}}$$

8. Один корень при $a=0$, два — при $a=1$, четыре — при $0 < a < 1$, при $a < 0$ и при $a > 1$ корней нет. Указание. Постройте график функции $y = \frac{1}{4} x^2 e^{2-x}$ (для поведения при $x \rightarrow +\infty$ см. п. 117 пособия «Алгебра и начала анализа 10»).

9. Два корня при $a \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \cup]-1, 0[\cup]0, 1[$, три корня при $a \in \{-1, 0, 1\}$, четыре корня при $a \in]-\sqrt{2}, -1[\cup]1, \sqrt{2}[$, при $|a| > \sqrt{2}$ корней нет.

10. $-\frac{1}{2}$.

12. $a = -1$, искомая точка $(0, -1)$.

13. В точке $(\frac{16}{9}, \frac{4}{3})$.

14. Указание. См. задачу № 28 в § 45 пособия «Геометрия 9—10».

15. Указание. Примените метод математической индукции.

16. Указание. См. § 22 пособия «Геометрия 9—10». Проведите через B прямую, параллельную (AB) , и через B прямую, параллельную (CM) .

17. Указание. При гомотетии с центром A и коэффициентом $\frac{|AK_2|}{|AK_1|}$ точка D переходит в точку $D_1 \in K_2$, а касательная (BC) к окружности K_1 в параллельную ей касательную к окружности K_2 .

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

(см. «Квант» № 5)

Математика

В а р и а н т 1

1. а) $] -\infty, -1[\cup] \frac{5}{4}, +\infty [$, б) $\{-1\}$,
 в) $] -1, 1[\cup \{ \frac{5}{4} \}$, г) $\{1, 2\} \cup] 0, \frac{1}{6} [\cup] \frac{3}{2}, +\infty [$.
3. $[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0[\cup] \frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty [$.
4. -1 .
5. $\frac{1}{3} \sqrt{15\pi R^3}$.

В а р и а н т 2

1. $\frac{1}{4}$.
2. $x = a^2 - 4a$ при $a > 2$.
3. 6.
4. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$), при $a = -\frac{3}{2}$,
 $x = (-1)^k \frac{\arcsin(1 - \sqrt{2a+3})}{2} + \frac{\pi}{2} k$ ($k \in \mathbb{Z}$)
 при $a \in] -\frac{3}{2}, \frac{1}{2} [$ (впрочем, случай $a = -\frac{3}{2}$ можно не писать отдельно).
5. $\frac{3a^3}{8 \sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt{2 \cos \alpha + 1}$.

В а р и а н т 3

1. $] 0, 1[$.
2. $S_1 = \frac{x^{2n-2}-1}{x^2-1}$ при $|x| \neq 1$,
 $S_1 = n+1$ при $|x| = 1$,
 $S_2 = \frac{2x[nx^{2n-2} - (n+1)x^{2n} + 1]}{(x^2-1)^2}$ при $|x| \neq 1$.

$S_2 = n(n+1)$ при $x=1$, $S_2 = -n(n+1)$ при $x=-1$.

4. $\{-1\}$.

5. $\frac{2}{3} h^3 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin \beta$.

Физика

Физический факультет и факультет радиофизики и электроники

1. Цилиндр опрокинется при угле $\alpha = \operatorname{arctg} D/h \approx 22^\circ$.
2. $\frac{V_n}{V_c} = \frac{\rho_n - (1-n)\rho_0}{(1-n)\rho_n - \rho_n} = 260$ (здесь $\rho_0 = 10^3 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды).
3. $T = (1+n)\Delta T$.
4. $q = \frac{n-1}{n} \mathcal{E} C$.
5. $l = \sqrt{\frac{|F||v|}{R}} \approx 0,3 \text{ А}$.
6. Угол падения света подобрать нельзя.
7. $\Gamma_2 = \frac{\Gamma_1}{2\Gamma_1-1} = \frac{2}{3}$.

Механико-математический факультет и факультет прикладной математики

1. $x_{\max} = \Delta l + \sqrt{(\Delta l)^2 + 2h\Delta l} = 20 \text{ см}$.
2. $l = \frac{N_2^2}{N_2^2 - N_1^2} \Delta l = 64 \text{ см}$.
3. $l = h + \rho g h^2 / \rho$ (здесь ρ — плотность ртути).
4. Напряжение будет достаточным.
5. $q = \pi D^2 |B| / 4R$.
6. $\beta \approx (n_\phi - n_n) \alpha = 0,12^\circ$.
7. $d = F/n$.

Химический факультет

1. $\frac{N_1}{N_2} = \frac{3}{\cos \alpha} - 2 = 4$.
2. $T = \frac{1-n}{n} \Delta T = 297 \text{ К}$ (здесь $n = 0,01$).
3. $R_1 = U/I - (n-1)R_2$.
4. $R_1 = 0,96R_2$.
5. $U_s = \frac{hc}{e} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right)$ (здесь h — постоянная Планка, c — скорость света, e — заряд электрона).

Вильнюсский государственный университет им. В. Капсукаса

(см. «Квант» № 5)

Математика

В а р и а н т 1

1. $\frac{1}{12}$. Решение. Обозначим точку пересечения медиан треугольника ABC через O . Площади треугольников $PQR, POQ, QOR, ROP, AOB, BOC, COA$ обозначим соответственно через $q, q_1, q_2, q_3, Q_1, Q_2, Q_3$. Тогда $\frac{|OP|}{|OA|} = \frac{1}{3}$ (так как $|OA| = \frac{2}{3}|AK|$ и $\frac{|AP|}{|PK|} = 1$), $\frac{|OQ|}{|OB|} = \frac{1}{2}, \frac{|OR|}{|OC|} = \frac{1}{6}$. Из $S_{ABL} = S_{CBL}$ и $S_{ADL} = S_{COL}$ следует $S_{ABO} = S_{CBO} = S_{CBO} = S_{ACO}$. Значит, $Q_1 = Q_2 = Q_3 = \frac{1}{3}$. Поэтому $\frac{q_1}{Q_1} = \frac{|OP| \cdot |OQ|}{|OA| \cdot |OB|} = \frac{1}{8}$.

Аналогично $\frac{q_2}{Q_2} = \frac{1}{12}$, $\frac{q_3}{Q_3} = \frac{1}{24}$ Тогда

$$q = q_1 + q_2 + q_3 = \frac{1}{12}$$

2. $\left] \frac{2}{3} \sqrt{21}; +\infty \right[$ 3. $x = \pm \frac{5}{6} \pi + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

4. $\left] \frac{5}{3}; +\infty \right[$.

Вариант 2

1. $\frac{11}{12}$ 2. $\left] \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}; 1 \right]$ 3. $x = \pm \frac{\pi}{8} + \pi k$

($k \in \mathbb{Z}$). 4. $\left[-1; \frac{7}{3} \right]$.

Физика

Вариант 1

3. В калориметре будет смесь из $m'_1 \approx 0,3$ кг воды и $m'_2 \approx 0,7$ кг льда; температура смеси $t = 0^\circ\text{C}$.

4. $F = \frac{l^2 - a^2}{4l} = 0,12$ м.

Вариант 2*

3. Турист находится в точке с координатами $x = x_0 + s \cos \alpha \approx -1,5$ км и $y = y_0 + s \sin \alpha \approx 4,5$ км.

4. $R = U/I - r \approx 0,34$ Ом (здесь $I = -S \sqrt{\frac{D[c(T-T_0) + z]}{\rho T}}$ — ток при коротком замыкании, $r = \rho l/S$ — сопротивление предохранителя).

Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

(сл. «Квант» № 5)

Математика

Вариант 1

1. 10 км/ч. Решение. Если положить $|AC| = x$ (км), то

$$\frac{x}{v_0} + \frac{120-x}{v_1} = \frac{x}{v_1} + \frac{120-x}{v_0}$$

откуда $x = 60$. Если t — время (в часах), необходимое мотоциклисту, движущемуся со скоростью v_0 км/ч, для преодоления расстояния от A до C , то

$$\begin{cases} v_0 t = 60, \\ v_0(8-t) + \frac{a(8-t)^2}{2} = 60. \end{cases}$$

Отсюда, учитывая условие $a = 2v_0$, получаем $v_0^2 - 15v_0 + 50 = 0$

или $v_0 \in \{5, 10\}$. Значение $v_0 = 5$ не удовлетворяет условию, так как тогда даже на преодоление расстояния от A до C уйдет уже 12 часов. Второе значение удовлетворяет всем условиям задачи.

2. $\left] -1 - \sqrt{5}; -3|U| - 1 + \sqrt{5}; 5 \right|$.

3. $x = \frac{13}{6} \pi + 4\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$). Указание.

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x - 2 = 2 \left[\cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) - 1 \right]$$

4. $\frac{|CE|}{|DE|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Указание. Продолжим сторону DC и проведем прямую $BK \parallel (AC)$ (рис. 5); тогда середина O отрезка CK — центр окружности, о которой говорится в условии.

5. $3 + 2\sqrt{3}$. Указание. Шар касается плоскостей SAC и SAB ; значит, его центр O принадлежит биссектору двугранного угла $SABC$ с ребром SA (здесь D — середина стороны BC). Шар касается также плоскостей SBC и ABC ; значит, O принадлежит биссектору двугранного угла с ребром BC и линейным углом ADS . Таким образом, O лежит на продолжении биссектрисы KD угла ADS (рис. 6). В плоскости ADS проведем прямую $OE \perp (AD)$ и прямую $OF \perp (AS)$. Тогда $(OE) \perp (ABC)$ и $|OE| = R$. Опустим из точки E перпендикуляр EP на плоскость ASC . Поскольку $(OE) \parallel (ASC)$, $|EP| = R$. Так как $(EAC) \perp (ASC)$, $PE \perp (AC)$. Из $\triangle AEP$ найдем R .

Вариант 2

1. Первый — 200 км, второй — 100 км.

2. $\left\{ (2; 1), (-2; -1), (\sqrt{6}; \frac{1}{3}\sqrt{6}), (-\sqrt{6}; -\frac{1}{3}\sqrt{6}) \right\}$.

3. $x = \frac{\pi}{3} + (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{13} - \sqrt{3}}{4} + \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Указание. Данное уравнение равносильно уравнению

$$4 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) + 4\sqrt{3} \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - 1 = 0;$$

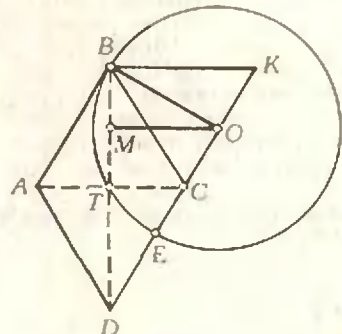


Рис. 5.

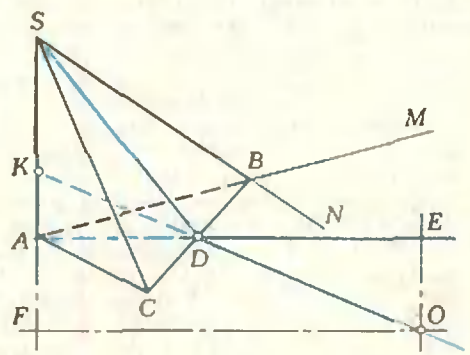


Рис. 6.

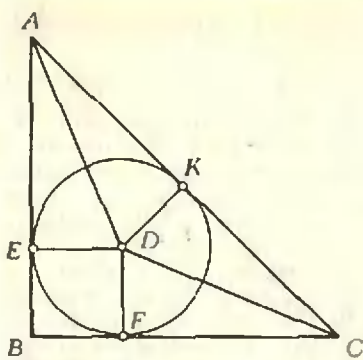


Рис. 7.

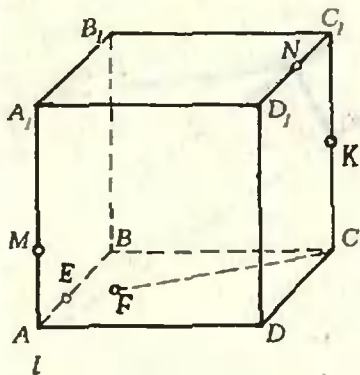


Рис. 8.

$$2x + \frac{\pi}{3} = 2 \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + d.$$

4. $\frac{5}{16}\pi(3-2\sqrt{2})a^2$. У к а з а н и е. Пересечение есть сектор круга, окружность которого вписана в $\triangle ABC$ (рис. 7).

5. 1. У к а з а н и е. Проведем плоскость через l и (MN) . Пусть $\{ME\}$ — пересечение этой плоскости с гранью ABB_1A_1 (рис. 8). Тогда $(ME) \parallel (NK)$ — прямые NK, MN, ME и l образуют параллелограмм. Из подобия треугольников MAE и C_1NK легко вывести $\{ME\} \parallel \{NK\}$. Значит, этот параллелограмм пересекается с гранью $ABCD$ и прямая l пересекается с ней (в точке F), а не с ее продолжением. Из подобия треугольников A_1MN и CKF легко найти $\{KF\}$.

Физика

В а р и а н т 1

1. В горизонтальном направлении на тело массой m действует только сила трения: $ma_{гор} = |F_{тр}|$. Отсюда

$$|F_{тр}| = m|a| \cos \alpha = mg \sin \alpha \cos \alpha.$$

2. Запишем начальные и конечные значения давлений в различных участках трубки. Начальные давления: $p_{AB} = 2\varrho gh = p, p_{CD} = \varrho gh = p/2, p_{EF} = 0$. Конечные давления: $p'_F = \varrho gh + p'_{CD} = p/2 + p'_{CD}, p'_{CD} = \varrho gh + p'_{AB} = p/2 + p'_{AB}$. По закону Бойля — Мариотта $p_{AB}h = p'_{AB}x$ и $p_{CD}h = p'_{CD}(3h-x)$, где x и $3h-x$ — конечные длины участков AB и CD соответственно. В итоге получаем уравнение $6p^2 - 12pp'_F + 5p'^2 = 0$, откуда $p'_F = p(1 + 1/\sqrt{6})$ (второй ко-

рень — со знаком «минус» в скобке — отброшен, так как по смыслу задачи давление должно увеличиться).

3. По закону Фарадея напряжение на катушке $U_L = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = L \frac{\Delta I}{\Delta t}$. Так как ток в цепи растет прямо пропорционально времени, U_L со временем не изменяется и в любой момент $U_L = L \frac{I}{t}$. Следовательно, и напряжение на конденсаторе, равное напряжению на катушке, тоже остается постоянным: $\frac{Q_0}{C_0} = \frac{Q_0 - q}{C}$, где Q_0 — начальный заряд на конденсаторе, q — заряд, ушедший с пластин конденсатора за время t , C — емкость конденсатора в момент t . Из равенства $L \frac{I}{t} = \frac{Q_0}{C_0}$ найдем $I:t = \frac{Q_0}{LC_0} t$. Тогда ушедший с конденсатора заряд $q = I_{cp} t = \frac{I}{2} t = \frac{Q_0}{2LC_0} t^2$. Из постоянства напряжения на конденсаторе найдем C :

$$C = C_0 \frac{Q_0 - q}{Q_0} = C_0 \left(1 - \frac{t^2}{2LC_0} \right).$$

4. При минимальной частоте вращения для ведра с водой в верхнем положении можно записать: $m\omega^2 l = mg$. Отсюда $v = \frac{\omega}{2\pi} =$

$$= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Выбирая $l \sim 1$ м, $g = 10$ м/с², получаем $v \sim 0,5$ Гц.

5. Сразу же заметим, что никакой интерференции света в этом опыте наблюдаться не может, так как электрическая лампочка — источник некогерентного излучения. На рисунке 9 изображена схема эксперимента. Здесь S — лампочка, S_1 и S_2 — ее первые изображения в зеркалах (в действительности изображений бесконечно много, но для качественного объяснения явления достаточно рассмотреть лишь два изображения). На участок CD экрана падает лишь прямой свет от лампочки, а на участки BC и DE падает как прямой свет, так и отраженный свет от зеркал. Вот почему участки BC и DE выглядят светлее участка CD . Далее картина повторяется по обе стороны от центральной полосы.

В а р и а н т 2

1. Искомое расстояние l найдем из закона сохранения энергии, перейдя в систему отсчета, где заряженная плоскость покоится:

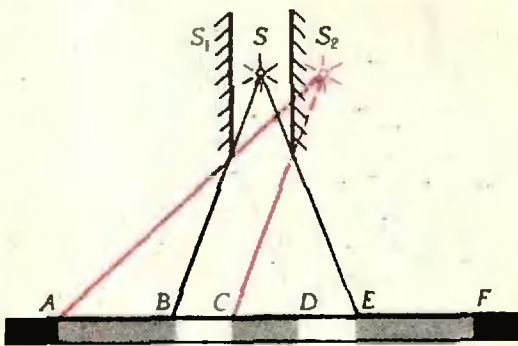


Рис. 9.

$$l = l_0 - \frac{m(|\vec{v}| \sin \alpha - |\vec{u}|)^2 \epsilon_0}{\sigma q}$$

2. Запишем равенство моментов сил относительно точки подвеса: $mg(R-x) = Mgx$. Отсюда найдем плечо x силы $\vec{M}g$: $x = \frac{mR}{m+M}$.

Из рисунка к условию задачи следует, что

$$\sin \alpha = \frac{x}{R+l}. \quad \text{Тогда окончательно}$$

$$\alpha = \arcsin \frac{l}{(l+R)(1+M/m)}$$

3. Запишем условия равновесия поршня до проникновения гелия: $p_0 + mg/S = p_0$, и после выравнивания концентрации гелия по всему сосуду: $mg/S = p_0$. По закону Бойля — Мариотта $p_0 S = p_0' (l+x) S$. Окончательно для величины x смещения поршня получим

$$x = \frac{p_0 S l}{mg}$$

4. Как известно, $p = |F|/S$. Выбираем $|F| \sim 1$ Н, толщина лини $d \sim 0,2$ мм = $2 \cdot 10^{-4}$ м. Тогда

$$p = \frac{|F|}{S} = \frac{|F|}{\pi d^2/4} \sim 3 \cdot 10^7 \text{ Па.}$$

5. Очевидно, один из источников дает постоянное напряжение, а второй — переменное. При переменном токе дуга существенно слабее, чем при постоянном (проявляется большое реактивное сопротивление катушки индуктивности)

В а р и а н т 3

1. При температуре $t_1 = 100^\circ\text{C}$ давление паров воды равно 10^5 Па, то есть $p/3$. Следовательно, парциальное давление воздуха под поршнем станет равным $2/3 p$. Из объединенного газового закона найдем новое расстояние x от поршня до поверхности воды:

$$\frac{ph}{T} = \frac{2/3 px}{T_1}, \text{ и } x = \frac{3}{2} \frac{T_1}{T} h \approx 2h.$$

2. Разность потенциалов между точками $AA'U_{AA'} = U$, а между точками $BB'U_{BB'} = \frac{U}{3} = U \frac{|r-R|}{r+R}$. Знак модуля присутствует

потому, что вольтметр указывает абсолютное значение напряжения. Учитывая оба знака разности $r-R$, получим

$$R = \begin{cases} r/2 & \text{при } R < r \\ 2r & \text{при } R > r. \end{cases}$$

3. Минимальная скорость достигается, когда центр тяжести части каната массой $m_1 = m \frac{2\pi R}{l}$, образовавшей круговую петлю,

оказывается поднятым на высоту R : $\frac{m_1 |\vec{v}_{\min}|^2}{2} = m_1 g R$. Отсюда $|\vec{v}_{\min}| = 2R \sqrt{\frac{g}{l}}$.

4. Выталкивающая сила, действующая на тело человека со стороны воздуха, равна по модулю $F_{\text{выт}} = \rho_{\text{возд}} V g$. Объем V выразим через массу человека m , учитывая, что плотность тела практически равна плотности воды:

$$V = \frac{m}{\rho_{\text{чел}}}.$$

Таким образом, $F_{\text{выт}} \sim \frac{\rho_{\text{возд}}}{\rho_{\text{чел}}} m g$. Плотность воздуха $\rho_{\text{возд}}$ оценим

по закону Менделеева — Клапейрона и закону

Авогадро: $\rho_{\text{возд}} \sim \frac{p\mu}{RT} = \frac{p\mu T_0}{p_0 V_0 T}$. Здесь

$$p_0 = 10^5 \text{ Па, } T_0 = 273 \text{ К, } V_0 = 2,24 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3.$$

Взяв $\rho \sim \rho_0 = 10^3$ Па, $T \sim 300$ К и зная $\rho_{\text{возд}} = 10^3$ кг/м³, получаем, что $\rho_{\text{возд}}/\rho_{\text{чел}} \sim 760$.

Следовательно, выталкивающая сила меньше

силы тяжести приблизительно в 760 раз. Окончательно для массы $m \sim 70$ кг, $F_{\text{выт}} \sim 1$ Н.

5. В начальный момент манометр показывает

резкое падение давления. Оно обусловлено,

в основном, увеличением объема воздуха под

поршнем. Затем давление увеличивается, пре-

вышая первоначальное значение. Это связано

с тем, что аэстон интенсивно испаряется, при

этом давление его паров, а значит, и суммар-

ное давление паров и воздуха, увеличивается.

Росту давления способствует и рост температу-

ры смеси до температуры окружающей

среды.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 4)

1. Решение:

$$\begin{array}{r} 7 = 9 - 2 \\ \quad \quad \quad \times \\ 3 = 1 + 2 \\ \quad \quad \quad = \\ 4 = 8 - 4 \end{array}$$

При этих значения букв можно составить очень много тождеств. Вот некоторые из них:

$$\begin{aligned} \text{ОЛ} - \text{ИМ} + \text{ПИ} + \text{АД} : \text{А} &= 80, \\ (\text{О} + \text{Л} - \text{И} - \text{М} - \text{П}) \cdot (\text{ИА} + \text{Д}) : \text{А} &= 80, \\ (\text{О} : (\text{Л} - \text{И}) + \text{МП}) \cdot \text{И} + \text{А} + \text{Д} + \text{А} &= 80, \\ (\text{О} \cdot \text{Л} - \text{ИМ}) + \text{ПИА} - \text{ДА} &= 80, \\ \text{О} : (\text{Л} - \text{И}) \cdot \text{МПИ} : \text{А} + \text{Д} : \text{А} &= 80, \\ (\text{ОЛ} - \text{И} + \text{М}) \cdot (\text{ПИ} : \text{А} - \text{Д} : \text{А}) &= 80. \end{aligned}$$

2. $(63! - 61!) = 61! (62 \cdot 63 - 1) = 61! (71 - 9)$
 $(71 - 8) - 1 = 61! (71^2 - 17 \cdot 71 + 71) = 61! \cdot 71 \cdot 55.$

3. См. рисунок 10.

4. Так как Саша может стоять рядом только с Мишей, он — либо первый, либо последний. Но впереди Миши стоит Юра, следовательно, Миша не может быть вторым, а поэтому Миша — предпоследний, а Саша — последний.

Очевидно, Олег стоит впереди Юры, а так как Володя не стоит рядом с Олегом, он может находиться только между Юрой и Мишей, то есть в середине. Друзья стоят в очередн в следующем порядке: Олег, Юра, Володя, Миша и Саша.

5. В двоичной системе счисления.

6. На рисунке 11 указан способ разрезания данного треугольника на 8 равносторонних треугольников. Чтобы получить 11 треугольников, достаточно один из полученных треугольников разрезать на четыре.

(см. «Квант» № 5)

1. Можно: на рисунке 12 показан один квадрат. Такие квадраты образуются при каждом из 12 ребер куба.

2. 1 — Тикон Педот, 2 — Тикон Вась, 3 — Педот Вась, 4 — Педот Тикон, 5 — Тикон Падей, 6 — Падей Остап, 7 — Падей Илья, 8 — Остап Тикон.

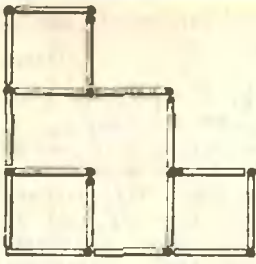


Рис. 10.

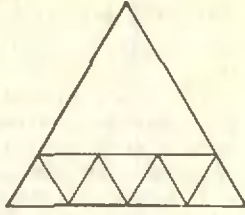


Рис. 11.

3. $\frac{25}{4}$ и $\frac{5}{4}$.

4. Могут: в бочке 4 насадки. Действительно, из первого условия следует, что две бочки уравнины с 20 ведрами кваса. Поэтому одна бочка содержит 10 ведер кваса. Так как 19 бочек + 1 насадка + 15,5 ведер уравниваются с 20 бочками + 8 ведрами, то 1 насадка + 15,5 ведер — 8 ведер = 20 бочек — 19 бочек;

- 1 насадка + 7,5 ведер = 1 бочка;
- 1 насадка + 7,5 ведер = 10 ведер;
- 1 насадка = 2,5 ведер.

Следовательно, в бочке 4 насадки.
5. См. рисунок 13: $A \cong A_1$, $B \cong B_1$ и так далее.
6. $\overline{aba} = 100a + 10b + a = 101a + 10b = 14 \cdot 7a + 3a + 7b + 3b = 7(14a + b) + 3(a + b)$. Если $a + b = 7k$, то $\overline{abd} = 7(14a + b + 3k)$ делится на 7.

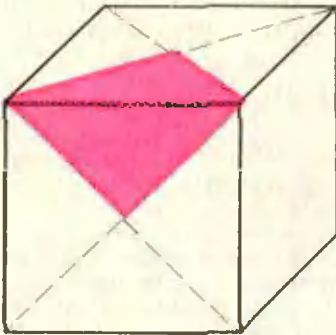


Рис. 12.

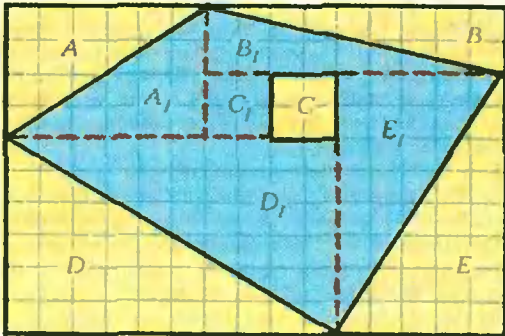


Рис. 13.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 5)

1. 1. f4 Фa1 2. f5 a2 (черные пытаются освободиться, иначе после превращения белой пешки в ферзя следует Фf3 и Фh1×) 3. f6

Ka3 4. f7 Cb1 (4...Kc4 5. f8Ф Ke5 6. Фa8 Kg4+ 7. Kр:h3 и 8. Фg2×) 5. f8Ф Лc2 6. Фf3 Лed2 (черных губит избыток фигур, мешающих друг другу; успеи они сыграть Лc1 и Лec2, белым бы не сдобровать) 7. Ф:h3+ Kpe2 8. Фh5+ Kpf1 9. Kpg3! Kc4 (9...Лc1 10. Kpf3 Kpg1 11. Фg4+ и 12. Фg2×) 10. Фh1+ Kpe2 11. Kpg2 и 12. Фf1×.

2. 1. Kр:e1 Фa1 2. h3! (пешка не торонится, тонкость выяснится позднее) 2...Фa2 (фигур-то у черных много, но двигаться в состоянии один ферзь) 3. h4 Фa1 4. h5 Фa2 5. h6 Фa1 6. h7 Фa2 7. h8K! (неожиданное решение, для победы белым нужен конь) 7...Фa1 8. Kf7 Фa2 9. Kg5 Фa1 10. Ke6 Фa2 11. K:c5 Фa1 12. Kb7 Фa2 13. Kd6 Фa1 14. K:c4 Фa2 15. Ka5 Фa1 16. K:b3×! (если бы белые на втором ходу двинули свою пешку сразу на два поля, то у них бы ничего не вышло — всякий раз, когда новоявленный конь падал на поле b3, черный ферзь защищал его, и дело кончилось бы миром).

3. 1. Лg4+! (белые ставят под бой третью фигуру) 1...Kph5 2. Kf7 Kр:g4 3. Kh6+ Kph5 4. K:g8 Kpg6 5. Cf8!! (после 5. Ch6? Kpf7 белые в пугиванге) 5...Kpf7 6. Ch6! (взаимный пугиванг) 6...Kр:g8 7. Kр:e6 (слон взаимный пугиванг) 7...Kph8 8. Kpf7 e5 9. Cg7×. Этот ход содержит интересный ложный след: 6. Ch8? Kpf7! (5...h5? 6. Kc7+ Kph7 7. Cf6 с выигрышем) 6. Kh6+ Kpg6 7. Kg8 Kpf7 8. Kh6+ Kpg6 9. Kg4 h5!! 10. Kf2 Kph7, и слон пойман.

4. 0...C:c7 (черные начали войну, их ход не засчитывается) 1. Л:a7+ Kрb8 2. Л:c7 Кра8 3. Kb6+ Kрb8 4. Лb7×!

Номер готовили:
А. Вилекин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубал, Г. Красиков, Э. Назаров, А. Пономарева, М. Сидоров, И. Смирнов

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректоры Е. Сидоркина, В. Сорокина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 28/11-80
Подписано в печать 20/V-80
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч. изд. л. 6,95 Т-09581
Цена 30 коп. Заказ 835
Гараж 268 075

Чеховский полиграфический комбинат
Совхозполиграфома
Государственного комитета
СССР по делам издательства, полиграфии
и книжной торговли,
г. Чехов, Московской области



1. **ДВУХКОПЕЕЧНАЯ МОНЕТА.** У моей дочери есть копилка, но я разрешаю ей собирать только медные монеты (дабы не разориться). Однажды мне срочно понадобилась двухкопеечная монета, чтобы позвонить, и я захотел разбить копилку.

«Не делай этого, если не уверен, что в копилке наверняка есть двухкопеечная, — заявила дочь. На копилке указаны количество монет M и сумма N , которую они составляют. В каждом конкретном случае значений M и N легко можно решить, наверняка ли в копилке есть двухкопеечная монета, или она может как быть, так и не быть».

«Ты права», — согласился я и, едва взглянув на записку на копилке, разбил ее.

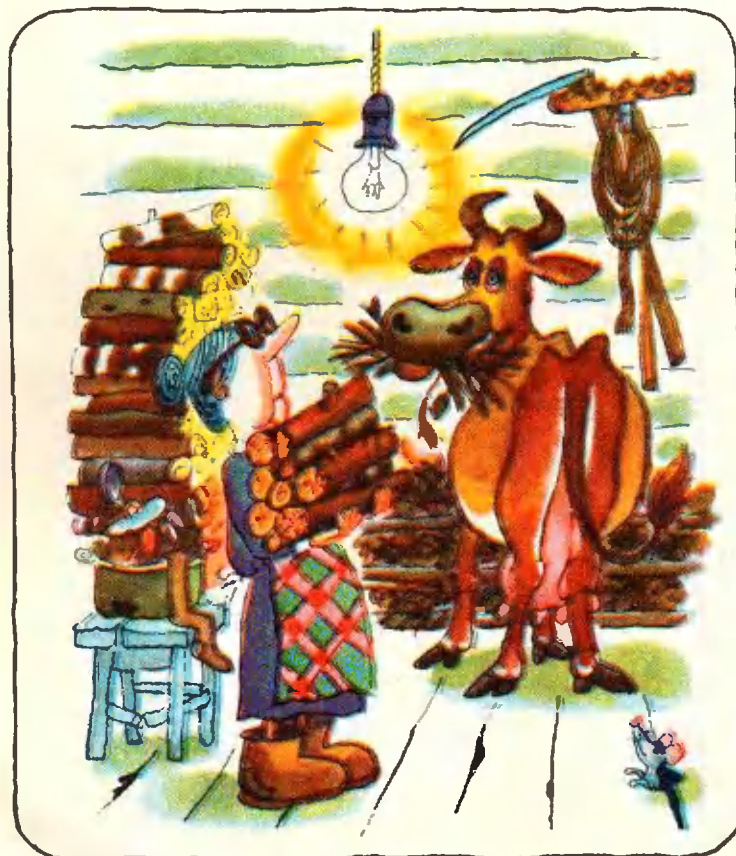
Как я догадался, что в копилке наверняка найдется хотя бы одна двухкопеечная монета?

2. **ЛАМПОЧКИ.** Ежедневно, каждый вечер, из сарая забираются дрова. Для освещения сарая нужно на короткое время включить свет. При включении света в сети возникают экстратоки замыкания, в результате чего лампочка может перегореть. При каждодневном включении и выключении света средний срок службы лампочки составляет месяц.

Электроэнергия в сарае бесплатная, поэтому, с целью экономии лампочек, свет в сарае можно вообще не включать. Однако и тогда, из-за случайных флуктуаций тока в сети, лампочка перегорает в среднем опять же за месяц.

Таким образом, в обоих режимах пользования светом в сарае лампочка в среднем за месяц выходит из строя. Каким образом можно продлить средний срок службы лампочки и чему равен максимальный срок?

М. Мамикон



Как вы думаете: сколько правильных многоугольников, вписанных в окружность единичного радиуса, имеют площадь, величина которой выражается рациональным числом? Оказывается, всего два — квадрат и двенадцатиугольник; их площади равны, соответственно, двум и трем. Очень красивое доказательство того, что площадь правильного двенадцатиугольника, вписанного в единичную окружность, равна трем, принадлежит венгерскому математику, активному организатору венгерских математических олимпиад для школьников Й. Кюршаку (1864—1933). Доказательство следует из приводимого рисунка, где квадрат со стороной 2 так разбит на правильные треугольники и равнобедренные треугольники с углами 15° , 15° и 150° , что часть из них замещает площадь правильного двенадцатиугольника, а с другой стороны, тот же набор треугольников замещает три квадрата единичной площади. Это доказательство также является красивой демонстрацией теоремы Боляя — Гервина о том, что *любые два равновеликих многоугольника можно разбить на попарно конгруэнтные части*.

А. П.

