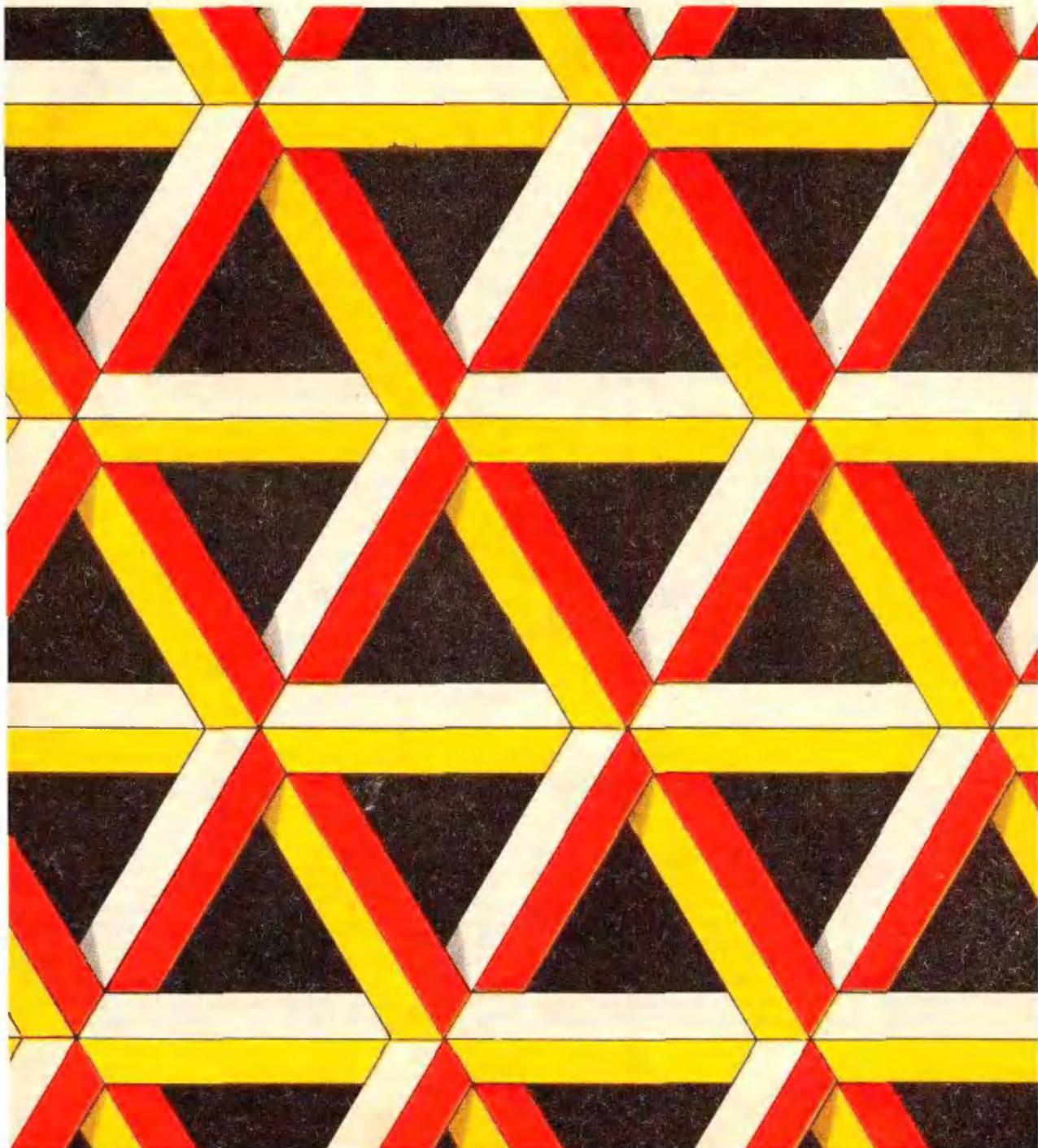
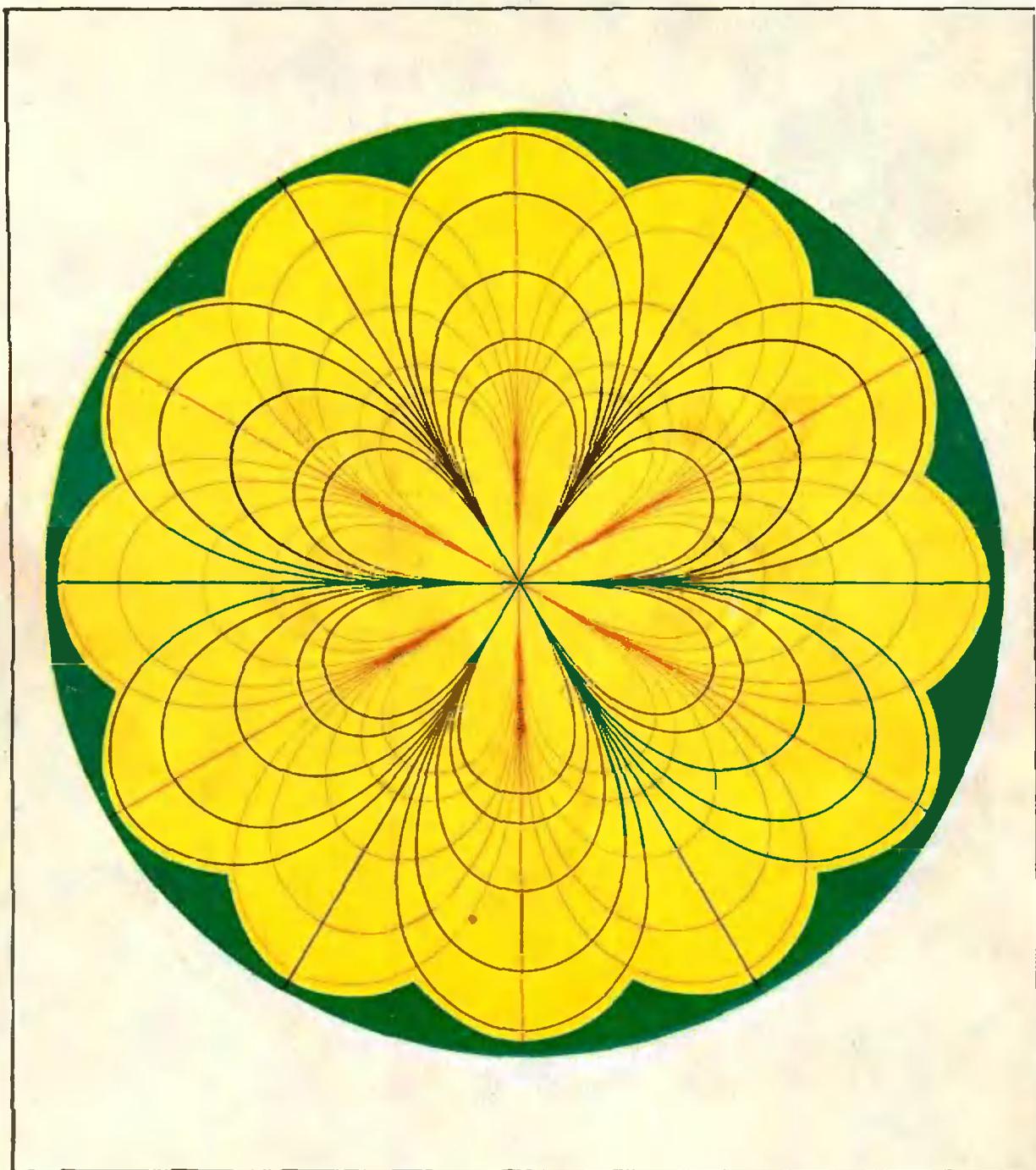


# Квант

**8**  
1980

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ  
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





На этом рисунке, эскиз которого был выполнен учащимися школы-интерната при МГУ Васильевым, Кормильченко и Романовым, изображены линии уровня двух функций. Для функции  $f$ , принимающей действительные значения на точках  $(x; y)$  плоскости, линия уровня  $k$  — это множество  $\{(x, y) | f(x, y) = k\}$ . Если число  $f(x; y)$  воспринимать как высоту над уровнем моря (плоскостью

$Oxy$ ) в точке  $(x, y)$ , эти линии можно понимать как обычные географические линии уровня. Однако выписать «действительные» выражения для использованных «комплексных» функций  $\arg e^{z-3}$  (зеленые линии уровня) и  $|e^{z-3}|$  (красные) мы здесь не решились — их запись в «действительных» обозначениях столь громоздка, что только испортит впечатление от красивого геометрического узора.

Основан в 1970 году

# Квант

**8**  
1980

Научно-популярный  
физико-математический  
журнал  
Академии наук СССР  
и Академии педагогических  
наук СССР



Издательство «Наука»  
Главная редакция  
физико-математической  
литературы

## В НОМЕРЕ:

Главный редактор  
академик Н. К. Кикоин

Первый заместитель  
главного редактора  
академик А. Н. Колмогоров

### Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков  
С. Т. Белыев  
В. Г. Болтянский  
Н. Б. Васильев  
Ю. Н. Ефремов  
В. Г. Зубов  
П. Л. Капица  
В. А. Кириллин  
А. Н. Климанов  
С. М. Козел  
В. А. Лешковцев  
(зам главного редактора)  
Н. А. Патрикеева  
И. С. Петраков  
Н. Х. Розов  
А. П. Савин  
И. Ш. Слободецкий  
М. Л. Смолянский  
(зам главного редактора)  
Я. А. Смородинский  
В. А. Фабрикант  
А. Т. Цветков  
М. П. Шаскольская  
С. И. Шварцбург  
А. И. Ширшов

На первой  
странице обложки  
изображена  
«нейлунговая решетка»  
основанная  
на знаменитом  
треугольнике Пифагора  
(«Квант» 1979 № 2 и 8).  
«Квант» — журнал  
приходит к вам в печать по  
адресу: Ленинград, Ю. Космодемьян

- 2 А. Сосинский. Перемещения пространства  
8 В. Болтянский. Оптика черных дыр  
12 Я. Смородинский, А. Урнов. Эффект Доплера  
18 Г. Тарзиманова. Стихотворение Лобачевского

### Лаборатория «Кванта»

- 20 А. Дозоров. Физика без приборов

### Математический кружок

- 23 А. Вайнтроп. Лучше — поровну

### Задачник «Кванта»

- 26 Задачи М636—М640; Ф648—Ф652  
28 Решения задач М579—М582, М584, М586—М594, М597;  
Ф589—Ф598  
45 Письмо в редакцию  
46 Спрашивайте — отвечаем

### «Квант» для младших школьников

- 47 Задачи  
48 Д. Алексеев. Физика в каникулы

### Рецензии, библиография

- 51 Е. Ленинган. Школьникам об астрономической картине мира  
51 И. Бровиков. Задачи комбинаторики  
52 Е. Гук. Серии — 14 лет

### Информация

- 53 В. Каслин, А. Стародуб. Праздник юных физиков  
57 Е. Юносов. Турнир юных физиков  
58 А. Криворучко, А. Фильков. Олимпиада ОмПИ+МФТИ  
60 Заочная физическая школа  
61 Дополнительный прием в заочные математические школы  
61 Вечерняя физическая школа  
62 Шахматная страничка  
63 Ответы, указания, решения  
Шахматный конкурс (3-я с. обложки)  
Смесь (7, 11, 45)

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1980

А. Сосинский

## Перемещения пространства

В этой статье я хочу рассказать вам, какие бывают перемещения пространства. Сперва напомним: *перемещением* пространства называется отображение  $f$  пространства на себя, сохраняющее расстояния между точками. Это значит, что для любых точек  $A, B$

$$|AB| = |A'B'|, \quad (1)$$

где  $A' = f(A)$ ,  $B' = f(B)$ .

Примеры вы, конечно, знаете — это симметрии (центральная, осевая, относительно плоскости) и параллельный перенос  $\vec{a}$ : легко сообразить, что перемещением будет и по-

ворот  $R_l^\varphi$  вокруг прямой  $l$  на данный угол  $\varphi$  (рис. 1). Наша задача состоит в том, чтобы перечислить все перемещения пространства, подобно тому как это было сделано для плоскости в статье В. Болтянского «Перемещения плоскости» («Квант», 1980, № 3).

Из определения легко вывести, что *перемещение переводит прямую в прямую, плоскость в плоскость, окружность в конгруэнтную окружность, угол в конгруэнтный угол и т. д.*

### Перемещения и ориентации

На плоскости ориентация задается указанием одного из двух возможных направлений вращения — «по часовой стрелке» или «против часовой стрелки». Обычно направление «против часовой стрелки» называется *положительным*, «по часовой стрелке» — *отрицательным*.

В пространстве тоже есть две ориентации: одна задается правым буравчиком (таков, например, обычный штопор), другая — левым (рис. 2).

Математики не очень любят говорить про буравчики — ориентацию пространства они предпочитают задавать указанием некопланарной тройки векторов  $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ .

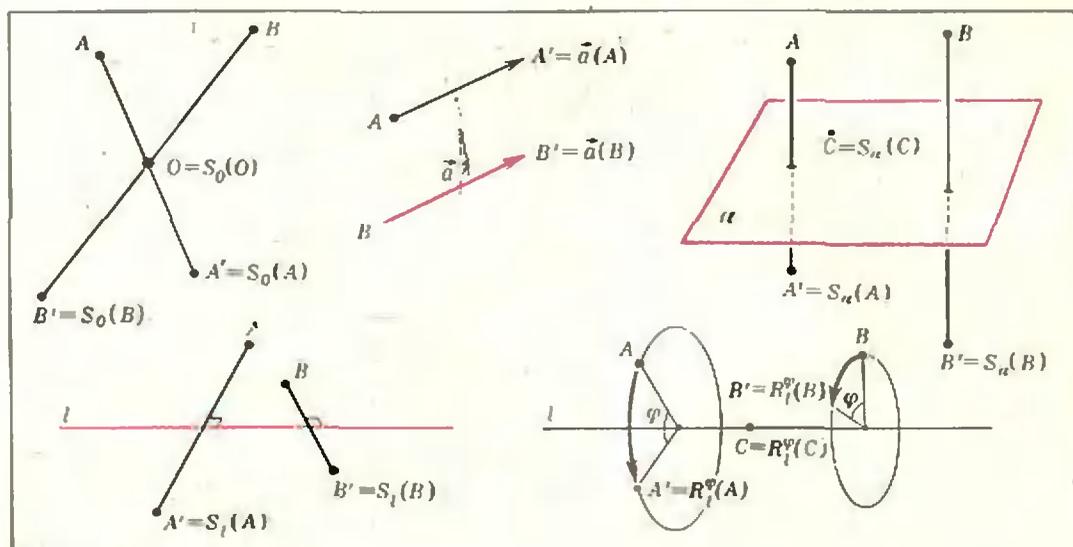


Рис. 1.

Дело в том, что все такие тройки естественно делятся на два класса — на тройки, в которых кратчайшее вращение от первого вектора ко второму для наблюдателя, находящегося на конце третьего вектора, является положительным (см. рис. 3; назовем такие тройки *положительными*), и на тройки, в которых оно является отрицательным (*отрицательные тройки*).

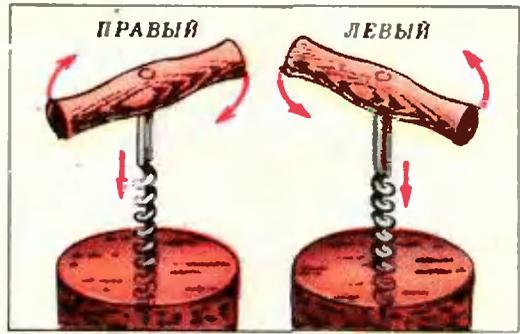


Рис. 2.

Проконтролируйте себя: видите ли вы, что

- а) тройки  $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$  и  $(\vec{c}; \vec{a}; \vec{b})$  имеют одинаковый знак?
- б) тройки  $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$  и  $(\vec{a}; \vec{c}; \vec{b})$  имеют разный знак?
- в) тройки  $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$  и  $(\vec{a}; \vec{b}; -\vec{c})$  имеют разный знак?

\*  
\*  
\*

Физики тройкам векторов предпочитают руки: правая рука задает положительную ориентацию, левая — отрицательную (рис. 4); вспомните правило левой руки в электромагнетизме.

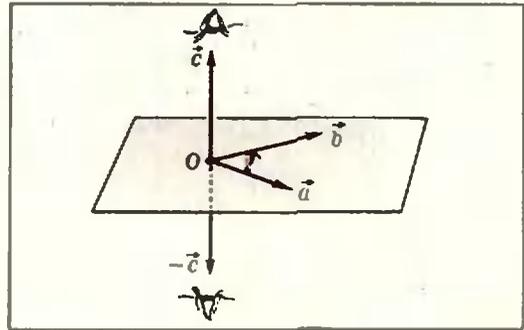


Рис. 3.

Итак, указание некопланарной тройки векторов задает одну из двух возможных ориентаций пространства.

Если перемещение  $f$  переводит выделенную тройку векторов в тройку того же знака (можно доказать, что тогда оно сохраняет знак любой тройки!), мы будем говорить, что оно *сохраняет ориентацию*; в противном случае мы будем, естественно,

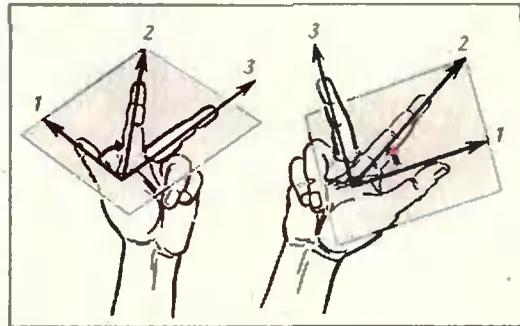


Рис. 4.

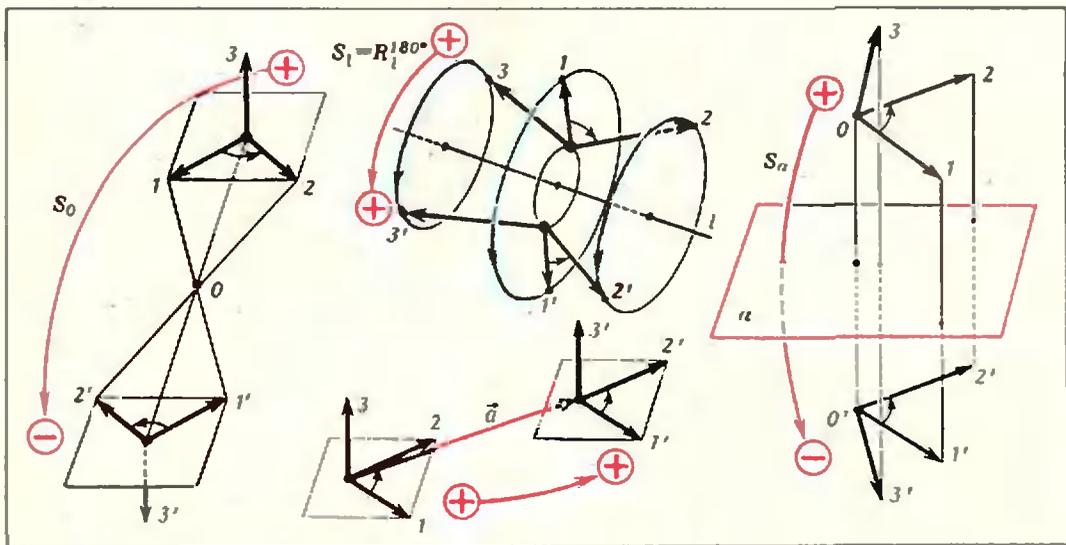


Рис. 5.

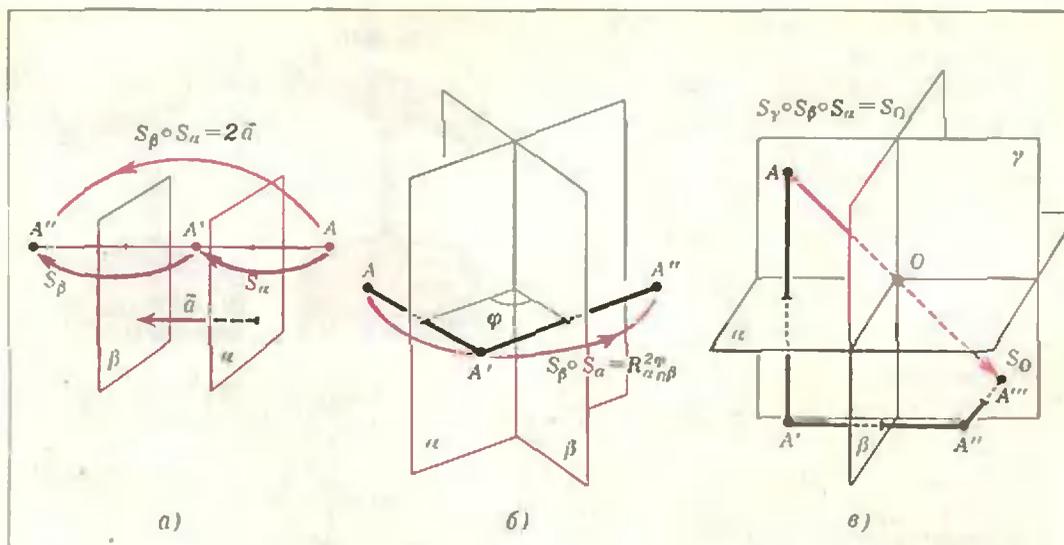


Рис. 6.

говорить, что перемещение  $f$  меняет ориентацию.

Например, параллельный перенос и поворот вокруг прямой (в частности, осевая симметрия) сохраняют ориентацию, а центральная симметрия и симметрия относительно плоскости меняют ее (рис. 5).

Не хочу вводить вас в заблуждение: здесь все совсем не так просто. Например, словосочетания «против часовой стрелки» и «кратчайшее вращение ... для наблюдателя, находящегося ...» (см. выше) не имеют, строго говоря, никакой математического смысла — они не могут быть определены в рамках школьной аксиоматики геометрии (и в других известных автору аксиоматиках).

На самом деле, можно строго определить одинаково и противоположно ориентированные «круги со стрелкой» или тройки векторов, но формально нельзя отдать одному из типов кругов или троек предпочтение. Далее, мы без доказательства припиали один нетривиальный факт: перемещение, сохраняющее ориентацию одной тройки, не может поменять ориентацию другой. Подробное обсуждение этих вопросов увело бы нас слишком далеко: для дальнейшего нам достаточно наглядной ясности.

### Композиции перемещений

Композицией отображений  $f$ ,  $g$  (в частности, перемещений) называется отображение  $h = g \circ f$ , получающееся, если последовательно выполнить сначала  $f$ , а затем  $g$ ; это значит, что для любой точки  $A$

$$h(A) = g(f(A)). \quad (2)$$

Обратите внимание на порядок в записи  $g \circ f$ : сначала выполняется  $f$ , затем  $g$ . Запись эта вполне естественна, так как по формуле (2)

$$(g \circ f)(A) = g(f(A)).$$

Легко видеть, что композиция перемещений — перемещение (это мгновенно получается, если дважды применить (1)). Посмотрим, какие получаются перемещения, если брать композиции известных нам перемещений. Я начну с совсем простых примеров, которые вы легко разберете, глядя на соответствующие чертежи. Но здесь мало наглядного понимания — нужно провести доказательства (впрочем, весьма простые).

1°. Композиция двух симметрий относительно параллельных плоскостей — параллельный перенос (рис. 6 а).

2°. Композиция двух симметрий относительно пересекающихся плоскостей — поворот вокруг их линии пересечения (рис. 6 б).

3°. Композиция трех симметрий относительно трех взаимно перпендикулярных плоскостей — симметрия относительно их общей точки (рис. 6 в).

4°. Композиция симметрии относительно плоскости и переноса на перпендикулярный к ней вектор — симметрия относительно (другой) плоскости.

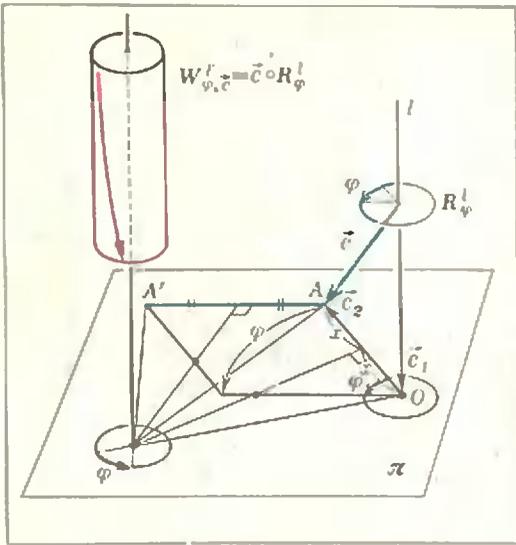


Рис. 7.

В этих примерах в результате композиции получались ранее известные нам перемещения. Но это, конечно, не всегда так — например, перемещение

$$W_{l, \vec{a}}^{\varphi} = \vec{a} \circ R_{\varphi}^l,$$

где вектор  $\vec{a}$  параллелен прямой  $l$ , нам до сих пор не встречалось;  $W_{l, \vec{a}}^{\varphi}$  называется *винтовым перемещением* (с осью  $l$ , на угол  $\varphi$  и на вектор  $\vec{a}$ ); оно будет играть основную роль в дальнейшем рассказе (рис. 7).

Ясно, что при  $\vec{a} \parallel l$

$$\vec{a} \circ R_{\varphi}^l = R_{\varphi}^l \circ \vec{a}. \quad (3)$$

Очевидно также, что композиция винтового перемещения и переноса на вектор, параллельный оси вращения, будет снова винтовым перемещением с той же осью вращения, но с другим вектором переноса (равным сумме старого переноса и нового). А вот следующий факт совсем не очевиден:

5°. *Композиция поворота  $R_{\varphi}^l$  и произвольного переноса  $\vec{c}$  является винтовым перемещением с осью  $l' \parallel l$  на угол  $\varphi$ .*

Нам это утверждение скоро потребуется; докажем его. С этой целью разложим вектор  $\vec{c}$  в сумму  $\vec{c} = \vec{c}_1 + \vec{c}_2$ , где вектор  $\vec{c}_1$  направлен вдоль оси  $l$ , а  $\vec{c}_2$  перпендикулярен этой оси. Композиция параллельных переносов соответствует сумме векторов, поэтому  $\vec{c} = \vec{c}_2 \circ \vec{c}_1$ , отсюда в силу

$$(3)$$

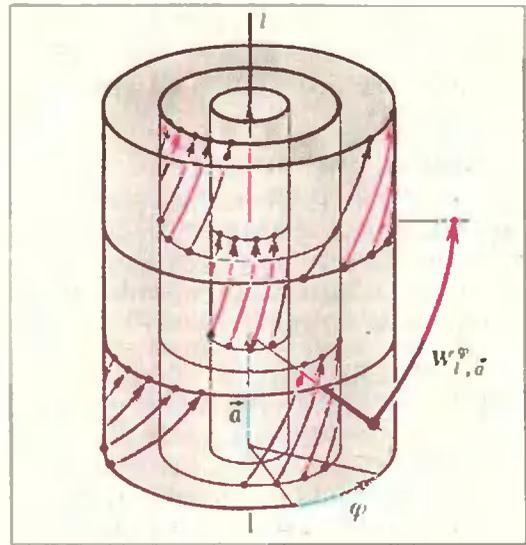


Рис. 8.

$$\begin{aligned} \vec{c} \circ R_{\varphi}^l &= (\vec{c}_2 \circ \vec{c}_1) \circ R_{\varphi}^l = \vec{c}_2 \circ (\vec{c}_1 \circ R_{\varphi}^l) = \\ &= \vec{c}_2 \circ (R_{\varphi}^l \circ \vec{c}_1) = (\vec{c}_2 \circ R_{\varphi}^l) \circ \vec{c}_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Займемся перемещением  $\vec{c}_2 \circ R_{\varphi}^l$ , помня, что  $\vec{c}_2 \perp l$ . Рассмотрим произвольную плоскость  $\lambda$ , перпендикулярную оси  $l$  (рис. 8). На этой плоскости перемещение  $\vec{c}_2 \circ R_{\varphi}^l$  является композицией поворота плоскости  $R_{\varphi}^l$  (где  $O = l \cap \lambda$ ) и переноса плоскости на вектор  $\vec{c}_2$  (ведь  $\vec{c}_2 \perp l \Rightarrow \vec{c}_2 \parallel \lambda$ ). Такая композиция будет («Квант», 1980, № 3, с. 6) поворотом на тот же угол  $\varphi$  вокруг нового центра  $O'$ , который легко построить (см. рис. 8, где  $[OA] \rightarrow [AA']$ ). Такая же картина наблюдается во всех плоскостях, перпендикулярных  $l$ , так что

$$\vec{c}_2 \circ R_{\varphi}^l = R_{\varphi}^{l'},$$

где  $l'$  — прямая, проходящая через  $O'$  параллельно  $l$ . Из (4), учитывая  $\vec{c}_1 \parallel l$ , получаем

$$\begin{aligned} \vec{c} \circ R_{\varphi}^l &= (\vec{c}_2 \circ R_{\varphi}^l) \circ \vec{c}_1 = \\ &= R_{\varphi}^{l'} \circ \vec{c}_1 = \vec{c}_1 \circ R_{\varphi}^l = W_{l, \vec{c}}^{\varphi}. \end{aligned}$$

Геометрически еще менее очевидно такое утверждение:

6°. *Композиция винтового перемещения  $W_{l, \vec{a}}^{\varphi}$  и произвольного переноса  $\vec{c}$  является винтовым перемещением с осью, параллельной прямой  $l$ , на угол  $\varphi$ .*

Однако этот факт можно доказать в два счета:

$$\vec{c} \circ W_{l, \vec{a}}^{\varphi} = \vec{c} \circ (\vec{a} \circ R_{\varphi}^l) = (\vec{c} \circ \vec{a}) \circ R_{\varphi}^l = W_{l, \vec{c} \circ \vec{a}}^{\varphi}$$

где последнее равенство получено из 5°, а вектор  $\vec{e}$  является суммой вектора  $\vec{a}$  и проекции  $\vec{c}$  на прямую  $l$ .

### Основные теоремы

**Теорема 1.** *Всякое перемещение пространства, сохраняющее ориентацию, является винтовым перемещением, параллельным переносом или поворотом вокруг прямой.*

Если перенос и поворот считать частными случаями винтовых перемещений (перенос  $\vec{a}$  — это  $W_{l, \vec{a}}^0$  где  $l$  — любая прямая, параллельная  $\vec{a}$ , а поворот  $R_l^\varphi$  — это  $W_{l, \vec{a}}^\varphi$ ), теореме 1 можно сформулировать так: всякое перемещение пространства, сохраняющее ориентацию, является винтовым перемещением. Еще вариант формулировки: всякое перемещение пространства, сохраняющее ориентацию, является либо поворотом вокруг прямой, либо параллельным переносом, либо их (однократной) композицией.

**Доказательство.** Пусть  $f$  — данное перемещение пространства. Рассмотрим две возможности:

1)  $\exists f$  есть неподвижная точка — такая точка  $O$ , что  $f(O) = O$ . Возьмем любую точку  $A \neq O$  и положим  $f(A) = A'$ ,  $f(A') = A''$ . Здесь нам придется выделить два случая:

1а) Точки  $A, A', A''$  не лежат на одной прямой. Тогда они определяют некоторую плоскость  $\pi$  (рис. 9). Отрезок  $AA'$  переходит в отрезок  $A'A''$  — значит, его середина  $K$  переходит в середину  $K'$  отрезка  $A'A''$ . Прямая  $OK$  переходит в прямую  $OK'$  — значит, плоскость  $\alpha$ , проходящая через  $(OK)$  перпендикулярно  $(AA')$ , переходит в плоскость  $\alpha'$ , проходящую через  $(OK')$  перпендикулярно  $(A'A'')$ . Пусть  $l$  — пересечение этих плоскостей и  $H$  — точка пересечения  $l$  и  $\pi$ . Прямоугольный треугольник  $ОНК$ , лежащий в  $\alpha$ , должен перейти в прямоугольный треугольник, лежащий в  $\alpha'$  (ибо  $\alpha \rightarrow \alpha'$ ), притом его гипотенуза  $OK$  переходит в  $OK'$ . Следовательно, имеются две возможности:  $\triangle ONK$  переходит либо в  $\triangle ONK'$ , либо в  $\triangle ON, K'$ . Но вторая возможность отпадает, так как в этом случае трой-

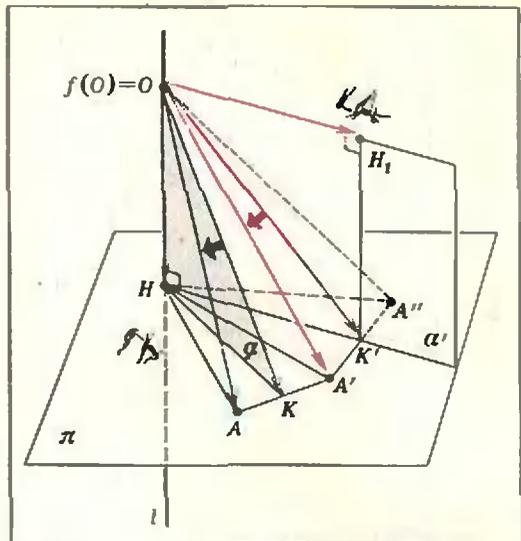


Рис. 9.

ка векторов  $(\vec{OK}, \vec{OA}, \vec{OH})$  меняет знак.

Итак,  $O \rightarrow O, H \rightarrow H$ ; поэтому  $\pi$  и  $\pi'$  на плоскости  $\pi$  отображение  $f$  является перемещением плоскости, сохраняющим ориентацию (почему?) и оставляющим на месте точку  $H$ . Такое перемещение будет («Квант», 1980, № 3, с. 3—5) поворотом плоскости  $\pi$  на угол  $\varphi = \angle(HA, HA')$ . Если  $\pi'$  — любая другая плоскость, перпендикулярная  $l$ , то точка  $H' = \pi' \cap l$  останется на месте,  $\pi'$  перейдет в себя и на этой плоскости будет наблюдаться та же картина, что и на  $\pi$  (поясните!). Таким образом,  $f = R_l^\varphi$ . (Мы выше предполагали, что  $H \neq O$ ; случай  $H = O$  мы оставляем читателю; вывод получится тот же.)

1б) Точки  $A, A', A''$  лежат на одной прямой. Так как  $|OA| = |OA'| = |OA''|$ , сразу ясно, что  $A'' = A$  и середина  $H$  отрезка  $AA'$  остается на месте. Поэтому плоскость  $\pi$ , проходящая через  $H$  перпендикулярно  $OH$ , остается на месте. Рассуждая теперь как в предыдущем абзаце, мы приходим к выводу, что  $f$  является поворотом около  $(OH)$  или тождественным преобразованием.

(Выше мы предполагали, что  $A \neq A'$ ; случай  $A = A' = A''$  мы оставляем читателю; он без труда покажет, что тогда  $f$  — либо тождественное преобразование, либо поворот.)

2) У  $f$  нет неподвижных точек. Возьмем любую точку  $A$ ; пусть  $A' = f(A)$ ; положим  $\vec{a} = \vec{A'A}$ . Тогда точка  $A$  будет неподвижной точкой отображения  $\vec{a} \circ f$  и можно сослаться на уже разобранный первый случай. Получим (для некоторой прямой  $l$  и угла  $\varphi$ )

$$\vec{a} \circ f = R_l^\varphi.$$

Применяя перемещение  $(-\vec{a})$  к обеим частям этого равенства и пользуясь утверждением 5°, получим

$$\begin{aligned} (-\vec{a}) \circ (\vec{a} \circ f) &= (-\vec{a}) \circ R_l^\varphi, \\ ((-\vec{a}) \circ \vec{a}) \circ f &= f = W_{l, \varphi} \end{aligned}$$

для некоторых  $l'$  и  $\varphi'$  ( $l' \parallel l$ ). Теорема доказана.

Чтобы сформулировать аналогичную теорему о перемещениях, меняющих ориентацию, нам потребуется еще одно определение. Скользящей симметрией относительно плоскости  $\pi$  на вектор  $\vec{a}$ , где  $\vec{a} \parallel \pi$ , называется композиция  $\vec{a} \circ S_\pi$  ( $S_\pi$  — симметрия относительно  $\pi$ ).

**Теорема 2.** *Всякое перемещение  $f$  пространства, меняющее ориентацию, является либо центральной симметрией, либо симметрией относительно плоскости, либо скользящей симметрией.*

Я не буду доказывать эту теорему — ограничусь подсказкой. Есть

два способа: 1) взять произвольную плоскость  $\pi$ , рассмотреть перемещение  $S_\pi \circ f$  и применить теорему 1; 2) рассуждать в духе доказательства теоремы 1 (те же два случая, та же идея  $A \rightarrow A' \rightarrow A''$ ).

Мы пришли к концу нашего рассказа: теперь, наконец, я могу вам сказать, какие бывают перемещения. Перемещения пространства бывают шести типов: параллельный перенос, поворот вокруг прямой, винтовое перемещение, центральная симметрия, симметрия относительно плоскости и скользящая симметрия.

Упражнения

1. Доказать, что любое перемещение пространства, сохраняющее ориентацию, является композицией двух поворотов около прямых.

2. Доказать, что любое перемещение пространства, сохраняющее ориентацию, является композицией четырех симметрий относительно плоскостей, но не является композицией никаких трех (и никаких пяти) симметрий относительно плоскостей.

3. Даны пять биссектрис пяти граней выпуклого пятигранного угла. Построить его ребра.

4. Даны: точка  $A$ , плоскость  $\pi$ , не содержащая  $A$ , и точка  $O \in \pi$ . Найти множество точек  $A'$ , симметричных всевозможным прямым  $l$ , проходящим через  $O$  и лежащим в  $\pi$ .

5. Может ли ограниченная фигура иметь два центра симметрии?

6.\* Для данного четырехгранного выпуклого угла найти вписанный четырехгранный угол (то есть четырехгранный угол, все ребра которого лежат на гранях данного) с наименьшей суммой плоских углов.

## Ребусы

В этих ребусах буквами зашифрованы некоторые цифры. В каждом примере одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные (ни одно «слово» не начинается с нуля). Расшифруйте эти ребусы.

$$\begin{array}{r} 1. \quad + \text{коран} \\ \quad \text{кора} \\ \quad \text{краи} \\ \quad \text{нора} \\ \hline \text{оонни} \end{array}$$

$$2. \quad \begin{array}{r} + \text{смех} \\ \quad \text{мин} \\ \quad \text{еее} \end{array}$$

$$3. \quad \sqrt{\text{корень}} = \text{тсс}$$

$$4. \quad \sqrt{\text{двойка}} = \text{ад}$$

$$5. \quad \begin{array}{r} \times \text{фа} \\ \quad \text{ми} \\ \quad \text{аза} \\ \quad \text{ини} \\ \hline \text{фуга} \end{array}$$

$$6. \quad \begin{array}{r} + \text{маска} \\ \quad \text{рампа} \\ \quad \text{актер} \\ \hline \text{театр} \end{array}$$

$$7. \quad \begin{array}{r} + \text{вопрос} \\ \quad \text{вопрос} \\ \hline \text{тройка} \end{array}$$

$$8. \quad (\text{от})^n \cdot (\text{ос}) = \text{куст}$$

$$9. \quad (\text{вар})^n = \text{сталевар}$$

А. Лебедев

В. Болтинский

## Оптика черных дыр

От редакции

В настоящее время проводится интенсивная работа по изучению удаленных космических объектов. Развитие современных методов астрофизических исследований дает возможность накапливать огромный экспериментальный материал, расширять область астрономических наблюдений.

Наряду с экспериментальными исследованиями ведется большая работа по созданию различных теоретических моделей, объясняющих возникновение и развитие таких, во многом еще загадочных, астрономических объектов, как сверхновые звезды, туманности, квазары, пульсары и т. д.

Особое внимание привлекают к себе черные дыры. По современным представлениям черные дыры — это огромные сгустки материи, находящейся в состоянии чудовищного сжатия. Все частицы, попадающие в некоторую окрестность черной дыры, безвозвратно затягиваются ею, «исчезают». Никакая информация не поступает к наблюдателю из окрестностей черной дыры.

В этом номере журнала мы публикуем статью члена-корреспондента АН СССР профессора В. Г. Болтянского, в которой популярно описывается одна из возможных моделей этого явления. Предлагаемая модель была математически строго рассчитана автором; выводы, следующие из этой математической модели, во многом совпадают с известными экспериментальными данными.

Согласно общей теории относительности Эйнштейна наличие масс изменяет свойства окружающего пространства, как бы искривляет пространство. Свет, проходящий вблизи

массивного тела, например Солнца, движется не по прямой, а по искривленной траектории.

Этот теоретический вывод подтвержден экспериментами.

Например, во время полного солнечного затмения можно наблюдать звезды, которые, согласно точным расчетам, в это время находятся за краем Солнца и должны быть недоступными для наблюдения с Земли. Видимыми они оказываются потому, что световые лучи, идущие от звезд, проходя вблизи Солнца, искривляются (сплошные голубые линии на рисунке 1). В результате звезды кажутся находящимися друг от друга на большем угловом расстоянии, чем в отсутствие Солнца (пунктирные линии). Искривление светового луча при его прохождении близко к поверхности Солнца составляет примерно 1,75 угловой секунды.

Если бы вся масса Солнца была локализована в очень небольшом объеме (скажем, в шаре радиусом 1 км), то при таком сильно сжатом (коллапсировавшем) «Солнце» искривление световых лучей, проходящих мимо него, было бы все более ощутимым по мере уменьшения расстояния от «Солнца» до ближайшей точки световой траектории. На ри-

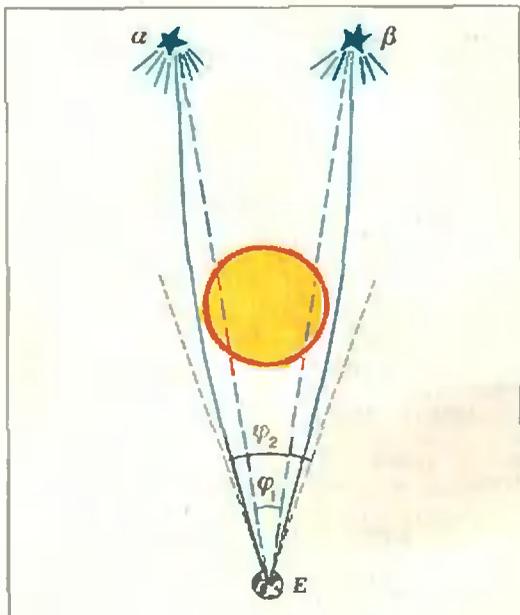


Рис. 1.

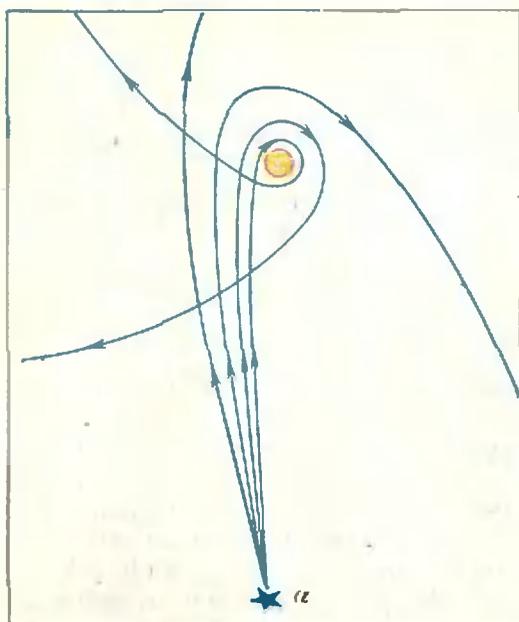


Рис. 2.

сунке 2 схематично показаны эти искривленные траектории: те из них, которые проходят наиболее близко к «Солнцу», могут даже совершить вокруг него один или несколько витков, прежде чем отправиться в дальнейший путь.

Конечно, — может сказать читатель, — все это «если бы...». Ведь на самом деле Солнце не сжато до размеров, чуть больших Московского Кремля. Однако это «если бы...» не так уж нереально. Теоретические выводы, сделанные на основе общей теории относительности, показывают, что существование сгустка материи в таком коллапсировавшем состоянии возможно. Такой сильно сжатый сгусток материи — его называют коллапсом — ведет себя весьма своеобразно: он притягивает к себе все близлежащие частицы (если они «имели легкомыслие» пролетать достаточно близко и с не очень большой скоростью), не отпуская от себя ничего, даже излучения. Все близлежащее безвозвратно «проваливается» внутрь области коллапса, которая благодаря этому получила название «черная дыра». Горизонт событий — поверхность, ограничивающая область «невозвратности», — представляет собой сферу. Эту сферу называют сферой Шварцшильда — ее радиус был теоретически расчи-

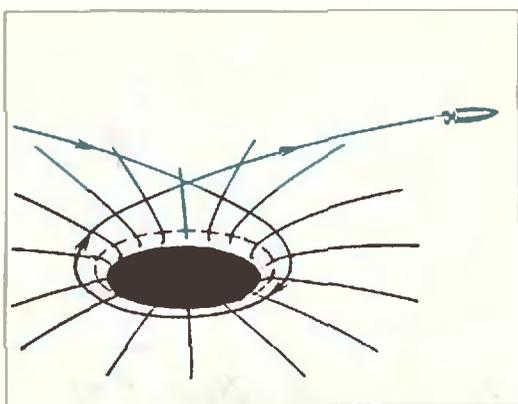


Рис. 3.

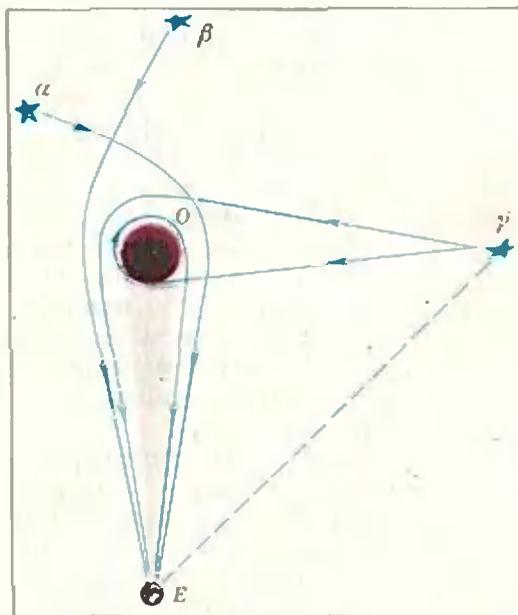


Рис. 4.

тан немецким астрономом Шварцшильдом; он зависит от массы, локализованной внутри черной дыры. За горизонтом событий вблизи сферы Шварцшильда световые лучи ведут себя так, как было описано выше (рисунок 3).

Искривление световых траекторий вблизи черной дыры приводит к явлению, которое можно назвать фокусировкой света черной дырой. Рисунок 4 иллюстрирует это явление. К наблюдателю, находящемуся в точке  $E$ , приходят не только прямые лучи от звезды  $\gamma$ , но и те лучи, которые, проходя вблизи черной дыры  $O$ , были «повернуты» ею. Таким образом, хотя из самой черной дыры никакие сигналы не поступают, сфокусированный черной дырой свет всех звезд

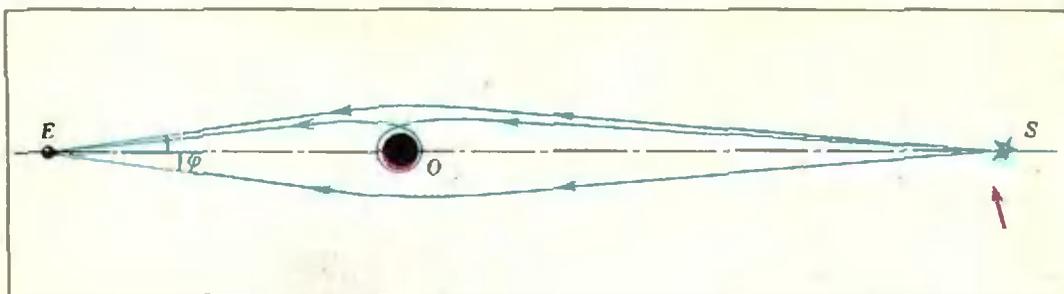


Рис. 5.

приходит к наблюдателю  $E$  как бы из окрестности черной дыры. Благодаря этому черная дыра будет восприниматься как объект чрезвычайной яркости. В центре такого объекта должно наблюдаться маленькое черное пятнышко, угловой размер которого равен  $\varphi = 2r/d$ , где  $r$  — радиус сферы Шварцшильда, а  $d$  — расстояние от наблюдателя  $E$  до черной дыры  $O$ . Разумеется, это черное пятнышко может быть зафиксировано в том случае, если разрешающая способность приборов у наблюдателя  $E$  больше  $\varphi$  (то есть приборы позволяют наблюдать раздельными две точки, угловое расстояние между которыми равно  $\varphi$ ).

Не эффектом ли фокусировки объясняется кажущаяся огромная энергия гигантских квазаров, наблюдаемых астрофизиками? Не являются ли эти квазары огромными черными дырами, которые сами ничего не излучают, а светят лишь чужим светом?

Еще одно оптическое явление, связанное с черной дырой, имеет место, если черная дыра находится строго между наблюдателем  $E$  и звездой  $S$ . В этом случае в каждой плоскости, содержащей прямую  $ES$ , существует (теоретически) бесконечно много траекторий, по которым свет от звезды  $S$  приходит к наблюдателю  $E$ . Две крайние из этих траекторий — это лучи, идущие от звезды, которые лишь слегка искривляются, проходя около черной дыры  $O$ ; остальные лучи на пути от  $S$  к  $E$  совершают различное количество витков вокруг черной дыры (рисунок 5).

Такая картина световых траекторий будет наблюдаться в любой плоскости, содержащей прямую  $ES$ . Поэтому наблюдатель  $E$  будет видеть

звезду  $S$  в виде системы концентрических колец, наибольшее из которых имеет видимый угловой диаметр  $2\varphi$ , где  $\varphi$  — угол, который образует с прямой  $ES$  каждый крайний луч, приходящий от звезды к наблюдателю. Если расстояние  $ES$  настолько велико, что наблюдатель не разрешает (не видит раздельными) точки, угловое расстояние между которыми равно  $2\varphi$ , а лишь фиксирует яркость, то он, не подозревая о существовании черной дыры, как бы видит звезду  $S$  сквозь нее. При этом наблюдатель видит звезду гораздо более яркой, чем если бы он наблюдал ее непосредственно (в отсутствие черной дыры).

Если движущаяся звезда при своем движении пересекает прямую  $EO$ , соединяющую наблюдателя и черную дыру (на рисунке 5 красной стрелкой указано направление, по которому движется звезда), то в течение некоторого времени наблюдатель будет видеть эту звезду как сверхяркий объект. Этот объект появится внезапно, когда звезда будет подходить к прямой  $EO$ , и через некоторое время погаснет. Может быть, именно этим объясняется редко наблюдаемое грандиозное астрономическое явление — вспышка сверхновой звезды?

\* \* \*

Мы рассмотрели математическую модель, которая описывает сверхяркие астрономические объекты не как необъяснимые источники сверхвысокой энергии, а как оптические явления. Как относиться к этой модели? Что это — научная фантастика или действительность?

(Окончание см. на с. 17)

## Задачи наших читателей

1. Докажите, что для  $0 < a < b$  выполняется неравенство

$$\ln \frac{b}{a} < \frac{b^2 - a^2}{2ab}$$

В. Яснжский

2. Докажите, что если некоторый член последовательности 1, 3!, 33!, 333!, ... делится на 54!, то он также делится и на 19.

И. Суев

3. Докажите, что если

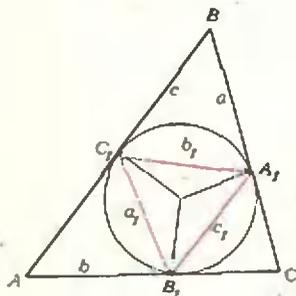
$$x = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_n - y}}}}$$

то

$$y = a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-2} + \dots + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_1 - x}}}}$$

М. Герард

4. Пусть  $a, b, c$  — длины сторон треугольника  $ABC$ ,  $a_1, b_1, c_1$  — соответствующие длины сторон треугольника



$A_1B_1C_1$  с вершинами в точках касания вписанной в треугольник  $ABC$  окружности (см. рисунок). Докажите, что

$$\frac{a^2}{a_1^2} + \frac{b^2}{b_1^2} + \frac{c^2}{c_1^2} > 12.$$

В. Мельник

5. На основании прямого кругового конуса построен цилиндр. Докажите, что при пересечении этого цилиндра плоскостью, касающейся конуса, получается эллипс, площадь которого равна боковой поверхности конуса.

Б. Алейников

6. В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при основании вдвое длиннее биссектрисы угла при вершине. Найдите углы этого треугольника.

С. Сефибеков

7. Докажите, что центр вписанной в треугольник  $ABC$  окружности, точка пересечения его медиан и точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника  $ABC$  с точками касания его сторон с вневписанными окружностями (вневписанная окружность — это окружность, касающаяся стороны треугольника и продолжений двух других его сторон), находятся на одной прямой.

У. Алла

8. Докажите, что во всяком треугольнике

$$m_a^2 = \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 - bc \left(\sin \frac{\hat{A}}{2}\right)^2,$$

где  $m_a$  — длина медианы, проведенной к стороне, лежащей против угла  $A$ ,  $b$  и  $c$  — длины двух других сторон треугольника,  $\hat{A}$  — величина угла  $A$ .

Ф. Кадиров

9. Множество  $M$  содержит конечное число  $n > 2$  точек плоскости, которые не лежат на одной прямой, причем, если некоторые три точки этого множества образуют треугольник, то точка пересечения высот этого треугольника также принадлежит мно-

жеству  $M$ . Какие значения может принимать  $n$ ?

Р. Ушаков

10. Функцию  $F$ , определенную на множестве всех целых чисел и принимающую неотрицательные целые значения, мы будем называть *современной*, если для любых целых  $m, n$  выполняются соотношения

$$F(mn) = F(m)F(n), \\ F(m+n) < 1980[F(m) + F(n)]$$

и, кроме того,  $F(1980) = 0$ . Найдите все современные функции.

Б. Кац

11. Найдите наибольшее число способов, которыми один треугольник можно вписать в другой (вершины вписанного треугольника находятся на различных сторонах описанного).

А. Сердюк

12. Без помощи таблицы докажите неравенства

а)  $\cos 42^\circ < \frac{3}{4}$ ;

б)  $\operatorname{tg} 70^\circ > \frac{19}{7}$ .

С. Майзус

13. В выражениях вида

$\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$  часто можно избавиться от двойного корня, воспользовавшись формулой

$$\sqrt{1 \pm 2 \cos \alpha \sin \alpha} = |\cos \alpha \pm \sin \alpha|.$$

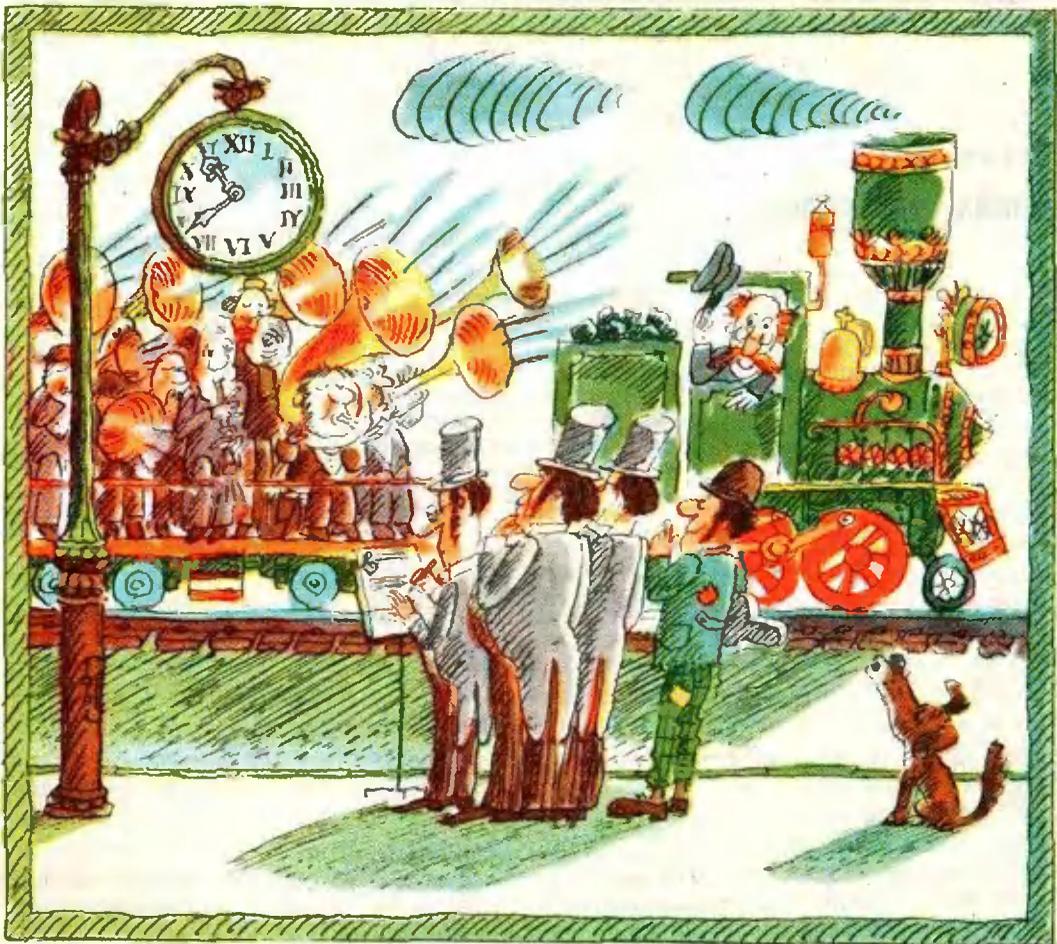
Например:

$$\begin{aligned} \sqrt{13 \pm \sqrt{48}} &= \\ &= \sqrt{13} \sqrt{1 \pm 2 \sqrt{\frac{12}{13}} \sqrt{\frac{1}{13}}} = \\ &= \sqrt{13} \left( \sqrt{\frac{12}{13}} \pm \frac{1}{\sqrt{13}} \right) = \\ &= \sqrt{12} \pm 1. \end{aligned}$$

Вот несколько примеров для самостоятельного решения:

1)  $\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$ ;  
2)  $\sqrt{11 \pm \sqrt{21}}$ ; 3)  $\sqrt{9 \pm 4\sqrt{2}}$ .

В. Ольхов



*И. Смородинский, А. Урнов*

## Эффект Доплера

В 1842 году в журнале Пражского научного общества появилась статья под названием «О цветном свете двойных звезд и некоторых других созвездий неба». Автор статьи, австрийский профессор математики Христиан Доплер, предложил новое и неожиданное объяснение окраски небесных объектов. Свою теорию Доплер строил на утверждении о том, что частота волновых колебаний должна зависеть от скорости движения источников относительно наблюдателя (то есть прибора, воспринимающего эти волны). Иными словами, один и тот же звук будет иметь

различную высоту, а свет — различную окраску (цвет) для покоящегося и движущегося источника.

Доплер представлял себе причину окраски звезд следующим образом. Свет сам по себе белого цвета, поскольку является смесью различных цветов в равной пропорции. При движении источника цвета смещаются; например, желтый цвет по мере приближения звезды к Земле должен переходить в зеленый и далее в голубой и фиолетовый; при удалении же звезды желтый цвет переходит в оранжевый и красный. Поскольку глаз способен воспринимать только определенные цвета (от фиолетового до красного), а некоторые цветовые компоненты при смещении «выходят» за пределы чувствительности глаза, в видимом наборе цветов некоторые из них оказываются в преимуществе, что и объясняет окраску звезды.

Для Доплера, как и почти для всех естествоиспытателей прошлого века, свет был волной в некой «светоносной» среде — эфире, заполняющем все пространство и все «поры» в телах. Распространение света в эфире было подобно распространению звука в воздухе (или в другой среде), поэтому световые явления должны были иметь аналогию в явлениях звуковых<sup>\*1</sup>. Так и эффект, предсказанный Доплером, должен был наблюдаться как для света, так и для звука.

Для проверки принципа Доплера были осуществлены довольно необычные эксперименты. В поезде, идущем с большой скоростью, находились музыканты, которые издавали звук определенного тона. На нескольких железнодорожных станциях по пути следования поезда располагались музыканты-«наблюдатели», которые могли определять высоту тона на слух. В результате этих экспериментов было обнаружено, что высота звука, воспринимаемого наблюдателем, действительно изменяется при движении источника в соответствии с предсказаниями Доплера.

Тем не менее статья Доплера «О цветном свете...» подверглась резкой критике, и, несмотря на попытки Доплера отстоять свою точку зрения, его теория была отвергнута большинством известных физиков того времени.

Объяснение Доплера цвета звезд действительно было неверным. Однако в его основе содержалась плодотворная идея об изменении цвета (длины волны) излучения при движении источника относительно наблюдателя. Такой эффект был впоследствии обнаружен и его назвали эффектом Доплера. Правильное объяснение этого эффекта было дано лишь после того, как была понята природа излучения. Во времена же Доплера никто по существу не осознал значе-

ния идеи Доплера — ни противники его теории, ни он сам. Только Больцано, математик из Праги, в своей статье, посвященной работе Доплера, писал, что эта работа даст гораздо больше, чем обещает ее заглавие, как для акустики, так и для оптики и всего учения о волнообразном движении. Не веря в вычисления Доплера, Больцано тем не менее заключил свою статью словами: «Я ожидаю с уверенностью, что со временем ею (теорией Доплера) будут пользоваться для разрешения на основании изменения цвета небесных тел вопросов, движутся ли эти последние, куда и с какой скоростью они движутся, какие расстояния отделяют их от нас и друг от друга, равно как для разрешения многих других вопросов».

Возможности использования в физике и практического применения эффекта Доплера были оценены значительно позднее, после открытия спектрального анализа. Его глубокую связь с такими фундаментальными понятиями физики, как пространство и время, установил Альберт Эйнштейн. В своей работе 1905 года, посвященной теории относительности, Эйнштейн впервые получил правильную формулу для изменения частоты света при относительном движении источника и наблюдателя.

С тех пор как проявление доплер-эффекта в оптике стали устойчиво связывать со смещением спектральных линий, было накоплено множество экспериментальных свидетельств в его пользу. Любопытно, что первые доказательства были получены при исследовании спектров звезд. В лабораторных условиях впервые это явление наблюдал русский физик А. Белопольский, поставивший довольно хитроумные опыты с вращающимися зеркалами (1900 г.). Существование так называемого поперечного доплер-эффекта (о котором речь еще впереди) удалось надежно установить только полвека спустя (1948 г.).

После открытия квантовых свойств света возникла необходимость «примирить» ставшее уже привычным явление с новыми необыч-

\*1 Подобие света и звука все же не полное. Звук представляет собой продольные колебания плотности — скалярной величины, а свет — поперечные колебания электрического и магнитного векторов.

ными воззрениями. Эту задачу успешно решил один из создателей современной (квантовой) механики Эрвин Шредингер, показавший возможность истолкования доплер-эффекта с точки зрения световых квантов.

\*  
\* \*

И звук, и свет — волновые явления. Волны — это колебания, распространяющиеся в пространстве с течением времени. Звуковые (акустические) волны в среде (веществе) — это распространение колебаний плотности среды. Световые оптические волны — это распространение в пространстве электромагнитных колебаний.

Для описания любого процесса движения необходимо прежде всего выбрать систему отсчета — систему координат вместе с часами, покоящимися в этой системе. Физическое содержание эффекта Доплера заключается в том, что частота колебаний зависит от системы отсчета, в которой производится наблюдение. Формулы преобразования частоты при переходе от одной системы отсчета к другой, движущейся относительно первой, дают математическое описание этого явления. Чрезвычайно важным, однако, является то обстоятельство, что эти формулы различны для акустических и оптических волн.

### Эффект Доплера для звука

Для того чтобы понять, как изменяется частота света при движении источника или наблюдателя, разберем следующую задачу. На озере плавают две лодки. С одной из них в воду опущен прибор, который может излучать звуковые колебания частоты  $\nu_0$ . С другой лодки в воду опущен приемник, который может регистрировать частоту доходящего звука.

Какую частоту звука будет регистрировать приемник в следующих случаях:

1. обе лодки покоятся на воде;
2. лодка с источником покоится, лодка с приемником движется;

3. лодка с источником движется, лодка с приемником покоится?

Рассмотрим каждый случай в отдельности.

1. Ответ на этот вопрос очевиден: приемник регистрирует звук частоты  $\nu_0$ . Действительно, если скорость звука в воде равна  $c_0$ , то длина звуковой волны, излучаемой источником, равна  $\lambda_0 = c_0/\nu_0$ . Наблюдатель во второй лодке, измеряющий скорость звука и длину волны, зафиксирует именно эти величины —  $c_1 = c_0$  и  $\lambda_1 = \lambda_0$ . Так что частота звука, регистрируемая наблюдателем, будет равна

$$\nu_1 = \frac{c_1}{\lambda_1} = \frac{c_0}{\lambda_0} = \nu_0. \quad (1)$$

2. Пусть теперь лодка с наблюдателем начала двигаться вдоль прямой, соединяющей обе лодки. Обозначим скорость лодки с наблюдателем через  $v_n$  и будем считать, что она положительна, если расстояние между лодками сокращается. Скорость звука, измеряемая наблюдателем, будет теперь равна не  $c_0$ , а

$$c_2 = c_0 + v_n = c_0 \left( 1 + \frac{v_n}{c_0} \right).$$

Длина волны звука в воде не зависит, конечно, от того, движется наблюдатель или нет. Поэтому  $\lambda_2 = \lambda_0 = c_0/\nu_0$ . С другой стороны,  $\lambda_2 = c_2/\nu_2$ ; значит,  $c_0/\nu_0 = c_2/\nu_2$ , то есть

$$\nu_2 = \frac{c_2}{c_0} \nu_0 = \left( 1 + \frac{v_n}{c_0} \right) \nu_0. \quad (2)$$

Итак, если расстояние между лодками сокращается, то приемник регистрирует более высокую частоту, чем частота источника звука. Наоборот, если лодка с наблюдателем удаляется от лодки с источником, то частота принимаемого звука уменьшается:

$$\nu_2 = \left( 1 - \frac{v_n}{c_0} \right) \nu_0. \quad (2')$$

3. Рассмотрим случай, когда лодка с источником движется по направлению к наблюдателю со скоростью  $v_n$ . Скорость звука в воде по-прежнему равна  $c_0$ . Длина волны, которую будет измерять наблюдатель, теперь будет меньше, чем в том случае, когда лодки покоились. Действительно, длина волны — это рас-

стояние между двумя соседними точками, колеблющимися в фазе, например между соседними гребнями волны. За время  $T = \lambda_0/c_0$ , пока один гребень волны удалится от точки, в которой он был «испущен», на расстояние  $\lambda_0$ , источник переместится в том же направлении на расстояние  $v_n \lambda_0/c_0$ . Поэтому расстояние между «первым» гребнем и следующим будет равно не  $\lambda_0$ , а

$$\lambda_3 = \lambda_0 - v_n \frac{\lambda_0}{c_0} = \lambda_0 \left(1 - \frac{v_n}{c_0}\right).$$

Значит, частота звука, которую регистрирует наблюдатель, будет равна

$$v_3 = \frac{c_0}{\lambda_3} = \frac{c_0}{\lambda_0(1 - v_n/c_0)},$$

или

$$v_3 = \frac{v_0}{1 - v_n/c_0}. \quad (3)$$

В том случае, когда лодка с источником удаляется от лодки с приемником, частота звука, которую будет регистрировать приемник, равна

$$v_3' = \frac{v_0}{1 + v_n/c_0}. \quad (3')$$

Мы видим, что формулы (3) отличаются от формулы (2), хотя основные закономерности сохраняются: звук повышается, когда лодки сближаются, и понижается, когда лодки расходятся.

Однако, если скорость лодки мала по сравнению со скоростью звука в воде, то мы можем воспользоваться приближенными равенствами

$$\frac{1}{1-\alpha} \approx 1+\alpha, \quad \frac{1}{1+\alpha} \approx 1-\alpha,$$

если  $\alpha \ll 1$ .

В этом случае формулы (3) приближенно совпадают с формулами (2):

$$v_3 \approx v_2 = \left(1 \pm \frac{v_n}{c_0}\right) v_0.$$

Можно написать и общую формулу для случая, когда движутся обе лодки — и источник, и приемник. Такая формула получится последовательным применением двух формул, полученных выше:

$$v = \frac{1 \pm v_n/c_0}{1 \mp v_n/c_0} v_0,$$

или приближенно, учитывая, что  $(1+\alpha)(1+\beta) \approx 1+\alpha+\beta$  при  $\alpha, \beta \ll 1$ ,

$$v \approx \left(1 \pm \frac{v_n \pm v_n}{c_0}\right) v_0.$$

Нетрудно видеть, что  $v_n \pm v_n$  есть относительная скорость источника и приемника. Знаки «+» соответствуют их движению в противоположных направлениях, знаки «-» — в одном направлении. Поэтому формулу для эффекта Доплера в приближении малых скоростей можно записать так:

$$v \approx \left(1 + \frac{v}{c_0}\right) v_0,$$

где  $v$  — относительная скорость источника и приемника.

Полученную нами общую формулу можно еще раз обобщить — на тот случай, когда и среда движется. (Это обобщение означает, что в рассмотренном нами примере лодки находятся не на озере, а на реке.) В этом случае общий вид формулы не меняется, но под величинами  $v_n$  и  $v_n$  теперь следует понимать скорости движения наблюдателя и источника относительно реки; в соответствии с этим следует подставлять и значение  $v$  в общую формулу.

И еще одно замечание. Мы рассматривали случаи, когда источник и приемник движутся вдоль одной прямой и вдоль этой же прямой распространяется фронт звуковой волны. Если же направление распространения звука составляет угол  $\theta$  с направлением относительной скорости  $v$ , то частота, регистрируемая приемником, равна

$$v \approx \left(1 + \frac{v}{c_0} \cos \theta\right) v_0.$$

Изменение частоты  $v_0$  определяется проекцией  $v \cos \theta$  относительной скорости на направление распространения звука. Если  $\theta = 90^\circ$ , то  $v = v_0$  — так называемый поперечный эффект Доплера в обычной акустике отсутствует.

Итак, подведем итог. Частота звука, регистрируемая приемником, зависит от относительного движения источника и приемника и определя-

ется следующими соотношениями:

- 1)  $v = v_0$  — наблюдатель и источник покоятся относительно среды;
- 2)  $v = \left(1 \pm \frac{v_n}{c_0}\right) v_0$  — наблюдатель движется, источник покоится;
- 3)  $v = \frac{1}{1 \pm v_n/c_0} v_0$  — наблюдатель покоится, источник движется.

### Эффект Доплера для света

В прошлом веке считали, что изменение частоты света при движении источника или наблюдателя описывается такими же формулами, как и изменение частоты звука. В то время считали, что свет распространяется в эфире — гипотетической среде, которая заполняет все пространство, но не оказывает сопротивления движению тел. Для такой среды формулы, выведенные для звука, должны оставаться неизменными, если только понимать в них под  $c_0$  скорость распространения света в эфире. В теории относительности эфир исчез, а вместе с ним исчезло понятие абсолютного движения (движения по отношению к эфиру, как считали раньше).

Одним из главных выводов теории относительности был вывод о том, что никакое явление не может зависеть от абсолютной скорости; в формулы может входить только скорость относительная. Формулы для акустического эффекта Доплера, как мы видели, содержат такую «абсолютную» скорость — скорость звука по отношению к среде. Уже из этого следует, что эти формулы не могут быть справедливыми для света.

Действительно, в теории относительности выводится другая формула эффекта Доплера:

$$v = \frac{1 + \frac{v}{c} \cos \theta}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} v_0.$$

В этой формуле  $c$  — скорость света

в пустоте,  $v$  — относительная скорость источника и приемника, а  $\theta$  — угол между скоростью  $v$  и направлением распространения света, измеренный в системе отсчета, связанной с источником излучения.

Если скорость  $v$  очень мала, так что ее квадратом можно пренебречь по сравнению с квадратом скорости света (то есть если  $v^2/c^2 \ll 1$ ), то эта формула не отличается от формулы для изменения частоты звука. Различие в этих двух формулах проявляется только в том случае, если нельзя пренебречь величиной  $v^2/c^2$ .

Почти во все формулы теории относительности входит множитель

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad (\gamma \geq 1).$$

Этот множитель — его называют Лоренцевым множителем — определяет изменение времени в движущейся системе отсчета, сокращение длины движущегося стержня, увеличение массы движущегося тела. Не удивительно, что этот множитель входит и в формулу Доплера. Это станет совсем естественно, если вспомнить, что энергия кванта связана с частотой соотношением  $E = h\nu$ , а потому в движущейся системе координат частота должна изменяться так же, как энергия.

Это объяснение, конечно, не заменяет вывода формулы Доплера, но делает ее понятнее.

Существенное различие акустической и оптической формул эффекта Доплера проявляется в том случае, когда  $\cos \theta = 0$ , то есть когда источник испускает волны в направлении, перпендикулярном своему движению. Для такого случая классическая (акустическая) формула предсказывает отсутствие эффекта ( $v = v_0$ ).

Релятивистская же (оптическая) формула предсказывает наличие поперечного эффекта. Наблюдения над двойной звездой PSR 1913—16<sup>\*</sup> подтвердили существование этого эффекта.

\* Число, которым обозначают звезду, — это ее небесные координаты: 19 ч 13 мин — прямое восхождение, 16° — склонение. PSR — шифр по каталогу

## Применение эффекта Доплера

Если спросить школьника, который изучает механику, как измерить скорость тела, то он ответит, что для этого надо измерить время, которое затрачивает тело на прохождение заданного пути. Так, во всяком случае, мы поступаем, если хотим измерить скорость поезда, смотря из окна вагона. Можно поступить и иначе — измерить путь (число километровых указателей), проходимый за заданное время. Вообще, надо «поделить путь на время».

Формула Доплера дает возможность измерить скорость совсем другим способом. Если с железнодорожной станции направить в поезд луч лазера, а в поезде взять с собой установку для измерения частоты излучения, то, сравнивая измеренную частоту с той частотой, на которую был настроен лазер на станции, можно найти скорость поезда относительно станции; точнее говоря, найти отношение скорости поезда к скорости света.

Такой способ измерения скорости отличается от стандартного, «школьного» удивительной особенностью. Нам не нужно ни масштабов длины (километровых столбов), ни масштабов времени (секундомеров).

Эффект Доплера позволил открыть один из самых поразительных законов Вселенной — закон Хаббла.

Американский астроном Хаббл обнаружил, что в спектрах далеких небесных объектов — спиральных

галактик — известные спектральные линии оказались сдвинутыми относительно линий тех же элементов на Земле к красному концу спектра: длина волны излучения, испущенного на далеком объекте, оказалась больше, чем длина волны того же излучения на Земле. Это можно было объяснить, только предположив, что объекты удаляются от нас с огромной скоростью. Хаббл обнаружил, что чем дальше от нас находится галактика, тем больше в ее спектре красное смещение. Это можно записать так:

$$V = HR,$$

где  $V$  — скорость (лучевая) галактики,  $R$  — расстояние до галактики, величину  $H$  называют постоянной Хаббла; она равна (как это считают

сейчас) примерно  $\frac{20 \text{ км/с}}{10^6 \text{ свет. лет}}$ . Это значит, что при увеличении расстояния до галактики на миллион световых лет скорость ее удаления от нас увеличивается на 20 км/с.

Граница нашей Галактики находится от нас на расстоянии около 2 миллионов световых лет, скопление в созвездии Девы — на расстоянии 35 млн световых лет, скопление в созвездии Гидры — 200 млн световых лет. Оценка расстояний до наиболее далеких радиогалактик и квазаров показывает, что они удалены от нас на миллиарды световых лет (это соответствует скоростям удаления от нас, близким к скорости света — около 90% от скорости света).

## Оптика

### черных дыр

(Начало см. на с. 8)

Прежде всего подчеркнем, что сравнение эффектов, рассматриваемых в рамках этой модели, со сверхновыми и квазарами — всего лишь математическая иллюстрация, а не обоснованная или общепринятая физическая гипотеза. Хорошо известно,

например, что после вспышки сверхновой на ее месте наблюдается расширяющаяся туманность, в центре которой иногда имеется пульсар — источник, излучающий строго следующие друг за другом четкие радиопульсы. Однако рассмотренная нами модель правдоподобна как возможный подход к объяснению астрономических явлений.



*Г. Тарзимова*

## Стихотворение Лобачевского

В письме, посланном из Стокгольма осенью 1890 года, Софья Ковалевская пишет: «...нельзя быть математиком, не будучи в то же время и поэтом в душе». И действительно, как показывает история науки, еще со времен пифагорейцев выдающиеся математики увлекались поэзией и даже пробовали писать.

Интерес С. Ковалевской к литературе хорошо известен. Но разве писал стихи великий русский геометр Н. И. Лобачевский?

Ссылаясь на стихотворное послание Лобачевскому, сочиненное братом его жены Н. Е. Великопольским, Л. Б. Модзалевский пишет<sup>\*)</sup>: «Из этого послания видно, что Н. И. Лобачевский в молодые годы сам занимался версификацией. Но

его стихотворные опыты до нас не дошли.»

«Но может быть, их можно найти?» — подумала я, и начались длительные поиски. И вот передо мной тоненькая книжечка, 17-й номер литературного журнала «Заволжский муравей», вышедший в 1834 году. Читаю:

### Разлив Волги при Казани

Царица рек в торжественном теченье  
К далеким Каспия обширным водам,  
Ты уклоняешься к Казани на свиданье  
С ней древней матерью Татарским городам!...  
Ее со всех сторон, как друга, обнимаешь,  
И трепетной струей приветствуешь луга  
И тихо с голубых рамен дары слагаешь  
На оживленные Булака берега.

Такими душевными строками начинается это стихотворение о нашей Волге. Смотрю на подпись: «Пр. Л...ский».

Если в этом таинственном сокращении «Л...ский» действительно скрыта фамилия великого геометра, то почему же «Пр.», а не «Н.» или «Н. И.»?

Известно, что Лобачевский подписывал свои публикации по-разному. В частности, два его сочинения: «Понижение степени в двучленном уравнении, когда показатель без единицы делится на 8» и «Об исчезновении тригонометрических строк» — выпущенные отдельными оттисками типографией Казанского университета в 1834 году, то есть как раз тогда, когда выходил семнадцатый номер «Заволжского муравья», подписаны «Пр. Лобачевский». Значит, автор стихотворения «Разлив Волги при Казани» хотел быть узнаваемым. Сам Николай Иванович, можно сказать, велит нам узнать зашифрованное имя «Пр. Л...ский» — профессор Лобачевский? Но почему он, ректор Казанского университета и известный математик, вдруг — именно в 1834 году — «рискнул» опубликовать свое стихотворение?

Не связано ли это с приездом Пушкина в Казань в сентябре 1833 года? Пушкина, который сказал: «Вдохновение нужно в поэзии, как в геометрии»?

<sup>\*)</sup> «Материалы для биографии Н. И. Лобачевского» (М., АН, 1948), с. 165.

Представляется мало вероятным, чтобы во время пребывания великого поэта в Казани, где он собирал материалы о восстании Пугачева, не произошла его встреча с великим геометром. Это могло произойти в библиотеке, или в хлебосольном доме Лобачевских (вспомним: жена Н. И. Лобачевского — единоутробная сестра И. Е. Великопольского, давнишнего друга Пушкина), или же, наконец, на квартире профессора Фукса, где был в гостях Пушкин и бывал Лобачевский. О его участии в литературных вечерах у коллеги по университету можно прочитать в письме, отправленном из Казани 21 января 1832 года И. Е. Великопольскому: в нем сообщается: «Мы были на литературном вечере у Фуксов... Н. И. Лобачевский читал стихи сочинения М-ме Фукс и несколько раз чуть не захохотал... Баратынский все время сидел с потупленными глазами»<sup>1</sup>.

Таким образом, встреча двух гениев так или иначе должна была произойти в сентябре 1833 года. Откликом на приезд Пушкина явилось, по-видимому, появление в печати стихотворения Лобачевского «Разлив Волги при Казани», полный текст которого мы приводим ниже. Как хорошо звучит его заключительный аккорд:

Вот образ мирного могущества  
России!  
Ее разлив не страшен никому.  
Великодушие обуздывает силы,  
Всегда, везде покорные ему.

### Разлив Волги при Казани

Царица рек в торжественном теченье  
К далеким Каспия обширного водам,  
Ты уклоняешься к Казани на свиданье  
С ней древней матерью Татарским городам!..  
Ее со всех сторон, как друга, обнимаешь,  
И трепетной струей приветствуешь луга  
И тихо с голубых рамен дары слагаешь  
На оживленные Булака берега...

<sup>1</sup> И. Андронников. *Я хочу рассказать вам...* (М., «Советский писатель», 1971), с. 186.

Вот шумный мир!.. Но что таинственным  
и важным  
Вешаешь ей глаголом воли твоих?  
Свои ли радости, ее ли войн отважных  
И славы древние напоминаешь дни?  
Ах! прежде и Казань надменная гуляла  
При полноводии раздольная весны  
И ратью бурною широко заливала  
Покорные поля окрестные страны.  
Пронгла ее пора: воителей потомки,  
Как грязный ил изсохших реки,  
Как славного меча ничтожные обломки,  
Теперь умолкшею лишь славою громки.

\* \* \*

Так исчезает все!.. Но Ангел запустенья  
Ужели некогда вспарит и над тобой?  
Ужели и твоих изсякнет воли стремленья —  
И Волга зарастет болотною травой?  
И где суда твои крылатые скользили,  
Увязнет странника усталая нога?  
Куда они с собой веселье привозили —  
Осиротелые умолкнув берега!..  
Нет!.. бытие твое до вечности продлится  
Как память некая великих дел,  
Великое в веках бессмертием хранится  
И не ему ничтожество — удел.

\* \* \*

Ты поражаешь ли поля опустошеньем?  
Ты пожинаешь ли надежды поселян?  
Нет! на водах твоих всегда благословенье  
Почнет благодарных стран,  
Тобой питаемых, тобой обогащенных!  
Ты и земли безвредная краса,  
И светлые в струях твоих невозмущенных,  
Как в чистой совести, сияют небеса.

\* \* \*

Вот образ мирного могущества России!  
Ее разлив не страшен никому.  
Великодушие обуздывает силы,  
Всегда, везде покорные ему.  
Стремится ль смелая на гордые Балканы,  
Иль с Араратских гор прольется на Иран?  
Ломаются один несчастных цепи льдяны, —  
И усмиряется неистовый тиран.  
За то, когда и прах коварных истребится,  
России не придет конец:  
Могущества не скоро сокрушится  
Увековеченный добротой венец.

Пр. Л...ский



А. Дозоров

## Физика без приборов



Сейчас лето, пора веселых школьных каникул. Отложены в сторону учебники, не надо корпеть над домашними заданиями. Как хорошо прыгнуть с разбега в речку, или побродить по лесу, или просто лечь в траву и смотреть на небо, ни о чем не думая. Но посмотрите внимательно вокруг себя, и вы увидите много интересного в самых, казалось бы, привычных и примелькавшихся вещах.

Вот вы стоите у пруда или большой лесной лужи. Почти наверняка по водной глади бегают туда-сюда жуки-водомеры. Не спешите, остановитесь и посмотрите, как жучок проминает под собой поверхностный слой жидкости, опираясь на него. Он, видимо, «знает» физику.

Летним вечером в густой траве или в лесу на полях нередко можно увидеть светлячков. Эти живые фонарики вырабатывают в своем организме химические вещества, которые, окисляясь на воздухе, излучают свет. Светлячок «создал» в своем организме источник света.

Каракатица выталкивает из своего организма жидкость и движется при этом по законам реактивного движения. Тоже молодец.

И в неживой природе есть много любопытного. Предлагаем вам несколько опытов, которые вы сможете провести самостоятельно или со своими товарищами. Не расстраивайтесь, если не сумеете их все объяснить. Наступит новый учебный год, и многое увиденное летом найдет свое объяснение.

Итак, за дело.

1. Согласитесь, не многие из жителей средней полосы, где летом не так уж жарко, видели мираж. Если у вас есть желание его увидеть, наберитесь терпения и сделайте следующее. Сначала подберите подходящую ровную стенку, обращенную днем к Солнцу. Дождитесь безветренной солнечной погоды. Встаньте с товарищем на противоположных концах стенки, рядом с ней. Смотрите внимательно вдоль нее, и вы вдруг увидите... отражение вашего товарища.

Предупреждаем еще раз, что опыт требует большого терпения. Всякий хороший эксперимент, как правило, получается не сразу.

2. Если вы будете регулярно поглядывать на Луну, однажды обязательно увидите вокруг нее одно, а если повезет, то и два радужных кольца.

Они видны особенно четко, когда между Луной и глазом находится легкое полупрозрачное облако. Лунный свет рассеивается на случайно расположенных неоднородностях облака и дает дифракционную картину в форме радужных окружностей.

Если вам не терпится увидеть радужные линии, а Луны на небе по каким-то причинам нет, дифракционную картину можно создать искусственно. Для этого потребуются кусочки засвеченной фотопленки и обыкновенная иголка.

Проведите острием иголки по фотозмульсии — вы получите так называемую дифракционную щель. Поднесите щель близко к глазу и посмотрите через нее на какой-нибудь яркий источник света (например, на Солнце или лампу). Вы увидите яркую радужную полоску. Вращайте фотопленку — разноцветная полоска тоже будет поворачиваться, всякий раз оставаясь перпендикулярной к щели. Теперь процарапайте на эмульсии небольшой кружок — дифракционная картина примет вид радужных колец. Прочертите другой набор линий и посмотрите, что получится.

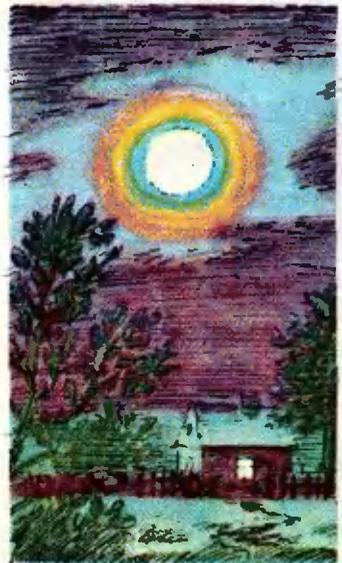
3. Радугу можно наблюдать и с помощью водяной капли. Посадите каплю на палочку или травинку. Встаньте спиной к Солнцу и осторожно поднимайте каплю. Когда лучи Солнца образуют с направлением глаз — капля угол около  $42^\circ$ , прозрачная капля вдруг вспыхнет чрезвычайно чистым по тону цветом. Каким? Любим! Если каплю осторожно перемещать по дуге окружности, можно увидеть все цвета радуги.

Однажды, собирая в лесу грибы, я был свидетелем забавной сцены. Мой сын внимательно рассматривал капельки росы на траве и на хвойных иглах. Со стороны его действия казались несколько странными: мальчик медленно приседал, устремив взгляд в казалось бы пустое пространство. В это время на полянку вышел еще один грибник, вполне солидный мужчина. Он долго с недоумением наблюдал за медленными и скованными движениями моего сына, в конце концов не выдержал и обратился к нему за разъяснениями. Теперь я с удовольствием смотрел на них обоих, застывших у елки в неуклюжих позах.

4. Оказывается, из капельки воды вы можете сделать маленький микроскоп. Для этого нужно взять плотную бумагу, проколоть в ней толстой иглой дырочку и на нее аккуратно посадить каплю воды. Микроскоп готов.

Поднесите капельку как можно ближе к газетному тексту. Вы увидите сильно увеличенную букву. Чем меньше капелька, тем больше увеличение. Теперь, после такой «настройки прибора», можно рассматривать любые мелкие предметы.

Кстати заметим, что в первом микроскопе, изобретенном Левенгуком, все было сделано именно так, только капелька была стеклянная.





5. Мы только что говорили о маленьких каплях. Возможно, у вас дома есть огромная капля — сферический аквариум. В этом случае можно увидеть совершенно необычные явления.

Во-первых, кажущиеся размеры рыбок сильно зависят от их положения в аквариуме. Как и почему?

Во-вторых, сферический аквариум превращает изображение удаленных предметов. Понаблюдайте через аквариум за улицей. Обратите внимание, куда перемещается изображение автомобиля, если сам автомобиль движется, например, слева направо.

В-третьих, когда рыбки подплывают к боковым, по отношению к нашему взгляду, стенкам аквариума, у них вдруг пропадают головы, видны лишь одни хвостики. А потом и вся рыбка может исчезнуть из поля зрения. Куда же она прячется? Зная закон полного внутреннего отражения света, вы без труда разберетесь в этом явлении, а приложив некоторые усилия, быть может, рассчитаете и зону аквариума, в которой спрячутся ваши любимые подопечные.

В-четвертых, посмотрите вечером на уличные фонари, один раз через аквариум, а второй — непосредственно через окно. Меняется ли при этом яркость фонаря?

6. В художественной литературе можно встретить описания наблюдений так называемого зеленого луча во время захода Солнца. Как правило, это бывает на море, при очень чистом воздухе. Солнце садится за четкий горизонт, и в какой-то момент появляется изумрудный луч. Причиной тому — дисперсия света, то есть разложение белого света на составные части (цвета радуги) при прохождении светом толстого слоя неоднородной по плотности атмосферы Земли. В принципе, должны были бы наблюдаться все цвета, но на фоне еще достаточно яркого желтоватого Солнца наш глаз обращает основное внимание на зеленый цвет.

Вы можете попытаться в течение лета увидеть это редкое явление. Если рядом с вашим домом нет моря, подберите себе свой собственный четкий горизонт. Им может оказаться, например, четкая граница крыши соседнего дома или склона ближайшего холма.

Если в течение лета Солнце так и не покажется вам в неестественном для себя цвете, не отчаивайтесь. Во-первых, потому что опыт можно продолжать круглый год. Во-вторых, потому что зеленое Солнце вы, в принципе, можете увидеть и зимой.

Посмотрите через замерзшее стекло на садящееся (или восходящее) Солнце. Если вы найдете подходящее место на оконном стекле, кристаллики льда сделают свое дело. Они разложат белый свет на все цвета радуги, и вы сможете увидеть Солнце разных цветов.



А. Вайнтроб

## Лучше — поровну

В различных задачах анализа и прикладной математики возникают вопросы такого типа:

Пусть даны два числа  $v$  и  $p$ :  $0 < v < p$ . Рассматриваются всевозможные (конечные) наборы чисел  $x_1, x_2, \dots, x_k$  такие, что  $0 < x_i \leq v$  для любого  $i = 1, 2, \dots, k$  и суммы  $\sum_{i=1}^k x_i$  всех чисел набора больше  $p$ .

Для каждого такого набора существует такое число  $D$ , что 1) сумма  $S$  некоторых чисел набора (может быть, в частности, всех) отличается от  $p$  на  $D$ :  $|S - p| = D$  и 2) любая другая сумма некоторых чисел набора отличается от  $p$  больше, чем на  $D$ .

Для какого набора это число  $D$  («погрешность приближения») будет наибольшим?

Как мы увидим, искомым будет набор из одинаковых чисел: «лучше — поровну».

Здесь мы рассмотрим несколько конкретных задач (в том числе — трудную задачу М583 из Задачника «Кванта») указанного типа.

1. Рассматриваются наборы камней, масса каждого из которых не больше 2 кг, а общая масса набора — больше 10 кг. Из такого набора выбирается несколько камней, суммарная масса которых отличается от 10 кг на наименьшее возможное для данного набора число  $D$ . Какое наибольшее значение может принимать число  $D$  для всевозможных наборов камней?

(Эта задача предлагалась на Московской городской математической олимпиаде в 1979 году.)

Понятно, что число  $D$  для любого такого набора камней не превосходит 2 кг, так как масса любого камня не больше 2 кг. Кроме того, очевидно, что  $D$  не может быть равным 2 кг. Поэкспериментировав с наборами, все камни в которых одинаковы, замечаем, что наибольшее  $D$  получается в том случае, когда камни все же достаточно тяжелы, а до 10 кг недостает ровно полкамня. Четыре камня отличаются от 10 кг больше, чем на 2 кг, а для пяти камней из уравнения  $5x = 10 - x/2$  находим  $x = 20/11$ , то есть  $D = 10/11$ .

Докажем теперь, что для любого набора  $D$  не превышает  $10/11$ , то есть покажем, что из произвольного набора камней можно выбрать несколько, суммарная масса которых отличается от 10 кг не больше, чем на  $10/11$ .

Будем отбирать камни по очереди: сначала возьмем самый тяжелый, затем самый тяжелый из оставшихся, и так до тех пор, пока масса выбранных камней не превзойдет 10 кг. Если среди выбранных есть камень, весящий меньше  $20/11$  кг, то либо их общая масса меньше  $(10 + 10/11)$  кг, либо на предыдущем шаге (перед тем, как был взят последний камень) мы имели набор с массой, большей  $(10 - 10/11)$  кг  $(= 10 + 10/11 - 20/11)$ , но меньше или равной 10 кг.

Итак, наибольшее значение  $D$  равно  $10/11$ , причем это значение достигается на наборе из одинаковых камней.

Упражнение 1. Покажите, что и в общем случае наибольшее значение  $D$  достигается на наборе из одинаковых камней, причем это значение равно  $p / (1 - 2 \cdot \lfloor 1/2 - p/v \rfloor) \cdot (x) - \text{это целая часть числа } x$ .

2. Решим теперь задачу М583 из Задачника «Кванта». Она отличается от задачи 1 одним дополнительным ограничением, значительно усложняющим решение: известно, что общая масса набора — 50 кг.

Мы уже знаем, что  $D$  не превосходит  $10/11$ . Однако в данном случае

эта оценка не является точной, так как число 50 не делится нацело на 20/11 (если бы суммарная масса набора равнялась не 50, а, скажем, 100 кг, то ответ остался бы прежним).

Рассматривая всевозможные разбиения 50 кг на камни с равными массами, убеждаемся в том, что наибольшее значение  $D$  для таких наборов равно  $D_0 = 20/27$  кг. (Оно достигается на наборе из 27 камней массы  $50/27$ .) Наша цель — доказать, что  $D_0$  — это и есть некое наибольшее значение  $D$ . Для этого достаточно показать, что произвольный набор можно заменить набором из камней одинаковой массы, не уменьшив при этом  $D$  (ведь  $D$  для наборов одинаковых камней не превосходит  $D_0$ ).

Рассмотрим произвольный набор. Выберем из него те камни, суммарная масса которых отличается от 10 кг на наименьшее возможное число (то есть на  $D$ ). Разобьем камни с массой, большей  $2D_0$ , на две группы. К первой группе отнесем те из них, которые входят в число выбранных (пусть  $a_1, a_2, \dots, a_m$  — их массы). Ко второй группе отнесем камни с массами  $b_1, b_2, \dots, b_n$  (большими  $2D_0$ ), не входящие в число выбранных. Для краткости мы будем иногда писать «камень  $a_i$ » (соответственно  $b_j$ ), имея в виду «камень, масса которого равна  $a_i$ » (соответственно  $b_j$ ). Пусть  $A$  — это сумма масс камней  $a_i$  (иногда  $A$  будет обозначать множество, состоящее из камней  $a_1, a_2, \dots, a_m$ : определяемые далее суммы масс  $B$  и  $C$  тоже могут быть использованы для обозначения соответствующих множеств),  $B$  — сумма масс камней  $b_i$ , а  $C$  — сумма масс оставшихся камней (то есть тех, масса которых не превосходит  $2D_0$ ).

Покажем теперь, что существует набор, для которого  $a_1 = a_2 = \dots = a_m = b_1 = \dots = b_n$ ,  $C = 0$ , а значение  $D$  не меньше, чем у исходного. Это и будет означать, что  $D \leq D_0$ , так как для наборов, состоящих из одинаковых камней,  $D$  не превосходит  $D_0$ . При этом возможны два случая:

1. Суммарная масса выбранных камней равна  $10 - D$ .

Для построения нужного набора нам придется доказать несколько вспомогательных утверждений.

**Лемма 1.** Все камни, входящие в  $C$ , принадлежат к числу выбранных (то есть  $10 - D = A + C$ ).

Действительно, если хотя бы один из камней, входящих в  $C$ , не выбран, то, добавив его к выбранным, мы получим несколько камней, масса которых отличается от 10 кг не более чем на  $2D_0 - D < D$ . А это противоречит выбору рассматриваемого набора.

**Лемма 2.**  $a_i > b_j$  при любых  $i$  и  $j$  ( $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ ).

Действительно, если бы для каких-то  $i$  и  $j$  выполнялось неравенство  $a_i < b_j$ , то, добавив к выбранным камням камень  $b_j$  и выбросив оттуда камень  $a_i$ , мы получили бы набор, суммарная масса которого лучше приближается к 10, чем для выбранного (так как из неравенств  $b_j \leq 2D_0$ ,  $a_i > 2D_0$ ,  $4D_0 \geq 2$  следует, что  $b_j - a_i < 2D_0$ ), что противоречит оптимальности выбранного набора.

**Лемма 3.**  $b_j > C + 2D_0$  при любом  $j$  ( $1 \leq j \leq n$ ).

Удалим из выбранного набора все камни, входящие в  $C$ , и добавим туда камень  $b_j$ . Если  $A + b_j \leq 10 - D$ , то, добавляя по одному камню из  $C$ , мы в какой-то момент получим набор, масса которого больше  $10 - D$  (так как  $A + b_j + C > A + C = 10 - D$ ), но меньше  $10 + D$  (так как каждый раз добавляется камень с массой, не превосходящей  $2D_0 < 2D$ ). Значит,  $A + b_j > 10 - D$ , а потому (в силу минимальности  $D$ )  $A + b_j > 10 + D = A + C + 2D > A + C + 2D_0$ , откуда  $b_j > C + 2D_0$ .

Из леммы 2 следует, что и  $a_i > C + 2D_0$  при всех  $i$ .

**Лемма 4.** Если сумма масс  $k$  камней из  $A$  и  $l$  камней из  $B$  меньше  $10 + D$ , то  $k + l \leq m$ .

Если эта сумма меньше  $10 + D$ , то она в силу минимальности  $D$  меньше или равна  $10 - D$ . Пусть  $k + l > m$ . Заменяя по очереди камни  $b_i$  в этой сумме не входящими в нее камнями  $a_i$ , мы в конце концов положим последний из камней  $a_i$  и доведем таким образом сумму до величины  $A + b_i + \dots > A + C + 2D_0 > 10 + D_0$  (см. леммы 1 и 3). Поскольку каждый

раз мы добавляли камень с массой не больше чем  $2D_0$  ( $a_i - b_j < 2D_0$ ), в какой-то момент эта сумма будет находиться строго между  $10 - D$  и  $10 + D$ . Противоречие.

Докажем, наконец, что можно построить набор, состоящий из камней одинаковой массы, не уменьшив  $D$ .

Заменим каждый из камней  $a_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) камнем с массой  $a = A/m$ , каждый из камней  $b_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) — камнем с массой  $b = B/n$ , а камни из  $C$  оставим без изменения. Покажем, что для такого набора число  $D$  не уменьшилось.

Допустим, что  $D$  уменьшилось. Тогда при некоторых  $k, l$  и  $C' < C$  сумма  $ka + lb + C'$  лежит строго между  $10 - D$  и  $10 + D$ . Возьмем  $k$  самых легких камней из  $A$ . Сумма их масс не превосходит  $ka$  (почему?). Аналогично сумма масс  $l$  самых легких камней из  $B$  не превосходит  $lb$ . Но  $ka + lb < 10 + D$ , поэтому  $k + l < m$  (см. лемму 4). В таком случае  $10 - D = A + C = ma + C' > ka + la + C' > ka + lb + C' > 10 - D$ . Противоречие.

Если  $a > b$ , то  $b$  не может входить ни в одну сумму, дающую  $10 - D$  (заменяя  $b$  на  $a$ , получим противоречие). Поэтому мы можем чуть-чуть (придайте точный смысл этим словам!) уменьшить все камни массы  $a$ , чуть-чуть увеличив при этом камни массы  $b$ , так чтобы  $C$  осталось неизменным. В результате этого у нас получится набор, имеющий большее значение  $D$ , чем исходный. Проведя так несколько раз, мы получим набор, у которого  $a = b$ .

Если в этом наборе  $C > 0$ , увеличим  $a$  (число камней с массой  $a$  равно  $m + n$ ) на  $\epsilon$ , где  $\epsilon < C/(m + n)$ ; при этом  $C$  уменьшится на  $(m + n)\epsilon$ . Но тогда  $D$  увеличится на  $n \cdot \epsilon$ , что и требуется. После нескольких шагов мы получим набор, у которого  $a = b$  и  $C = 0$ .

Случай I разобран полностью.

II. Суммарная масса выбранных камней равна  $10 + D$ .

Этот случай можно рассматривать примерно так же. Но проще заметить, что если выбранные камни дают наилучшее приближение (для данного набора) к  $10$  с избыт-

ком, то остальные камни набора дают наилучшее приближение с недостатком к  $50 - 10$  (то есть к  $40$  кг в нашей задаче). Так как  $D_0$  по-прежнему не меньше  $2/4$  кг (это единственное дополнительное условие, которое было использовано при рассмотрении случая I), все доказанные утверждения останутся в силе после замены  $10$  на  $40$ .

Итак, задача решена. Наибольшее возможное значение  $D$  оказалось равным  $D_0 = 20/27$  кг.

Заметим, что наши рассуждения позволяют решить следующую общую задачу: найти максимум наименьших отклонений от  $p$  по всевозможным наборам камней с массой, не превосходящей  $v$ , и суммарной массой  $P$ . Мы доказали, что если существует набор, для которого  $D > v/4$ , то максимальное значение  $D$  надо искать среди наборов одинаковых камней.

Упражнения

2. Докажите, что при  $v = 2$  кг,  $p = 10$  кг,  $P > 24$  кг существует набор, для которого  $D > v/4$ .

3. Доведите до конца решение задачи в общем случае.

Вот еще одна задача на эту тему: *имеется несколько ящиков, масса каждого из которых не больше  $1$  т, а их общая масса равна  $10$  т; на каком наименьшем количестве трехтонок наверняка можно увезти эти ящики?*

Решить эту задачу (и ее обобщение) вам помогут следующие упражнения (первые два из них напоминают уже рассмотренные задачи):

4. Пусть единственным ограничением на суммарную массу ящиков является условие  $P > 3$  т. Какой наибольший груз  $\Gamma$  можно наверняка увезти на одной трехтонке?

5. Каким будет ответ в предыдущей задаче, если известно, что  $P = 10$  т?

6. Пусть теперь масса каждого ящика не превосходит  $v$ , суммарная масса равна  $P$  и в нашем распоряжении есть машина грузоподъемностью  $p$ . Пусть  $\Gamma$  — масса максимального груза, который нам удастся погрузить на машину. Докажите, что наименьшее значение  $\Gamma$  достигается в случае, когда все ящики имеют одинаковую массу.

7. Каким наименьшим запасом  $p$ -тонок надо располагать, чтобы наверняка перевезти все ящики из упражнения 6?

Попытайтесь найти возможно более общие формулировки теорем, подтверждающих принцип «лучше — поровну».

# Задачник Кванта

## Задачи

М636—М640; Ф648—Ф652

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 октября 1980 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите «Задачник «Кванта» № 8 — 80» и номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М636, М637» или «Ф648». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации (или цикла задач), присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах.

Задачи этого номера предлагались на заключительном туре XIV Всесоюзной олимпиады школьников. Число в скобках обозначает класс, в котором предлагалась задача.

**М636.** Множество  $A$  состоит из целых чисел, его наименьший элемент равен 1, а наибольший элемент равен 100. Каждый элемент  $A$ , кроме 1, равен сумме двух (возможно, равных) чисел, принадлежащих  $A$ . Укажите среди всех множеств  $A$ , удовлетворяющих этим условиям, множество с минимальным числом элементов. (10)

*Ю. Нестеренко*

**М637.** Дан правильный треугольник  $ABC$ . Некоторая прямая, параллельная прямой  $AC$ , пересекает прямые  $AB$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $P$  соответственно. Точка  $D$  — центр треугольника  $PMB$ , точка  $E$  — середина отрезка  $AP$ . Определите углы треугольника  $DEC$ . (9)

*А. Куцков*

**М638.** Некоторые клетки бесконечного листа клетчатой бумаги окрашены в красный цвет, остальные в синий, причем так, что каждый прямоугольник из 6 клеток размером  $2 \times 3$  содержит в точности две красные клетки. Сколько красных клеток может содержать прямоугольник из 99 клеток размером  $9 \times 11$ ? (8)

*И. Карташов*

**М639.** В тетраэдре  $ABCD$   $(AC) \perp (BC)$  и  $(AD) \perp (BD)$ . Докажите, что косинус угла между прямыми  $AC$  и  $BD$  меньше, чем  $|CD|/|AB|$ . (10)

*Ю. Нестеренко*

**М640.** Число  $x \in [0; 1]$  записано в виде бесконечной десятичной дроби. Переставив ее первые 5 цифр после запятой в произвольном порядке, получим новую бесконечную десятичную дробь, отвечающую некоторому числу  $x_1$ . Переставив в десятичной записи числа  $x_1$  цифры со 2-й по 6-ю после запятой, получим десятичную запись числа  $x_2$ . Вообще, десятичная запись числа  $x_{k+1}$  получается перестановкой цифр в записи  $x_k$  с  $(k+1)$ -й по  $(k+5)$ -ю после запятой.

а) Докажите, что как бы ни переставлять цифры на каждом шаге, получающаяся последовательность чисел  $x_k$  всегда имеет некоторый предел. Обозначим этот предел через  $y$ .

б) Выясните, можно ли с помощью такого процесса из

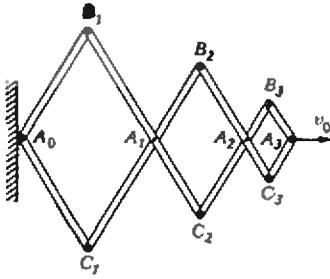


Рис. 1.

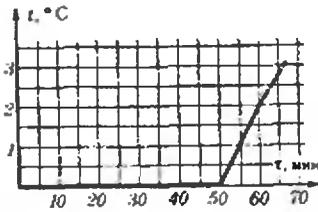


Рис. 2.

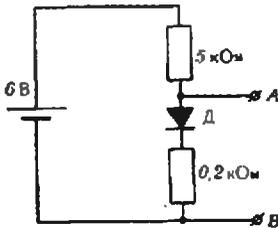


Рис. 3.

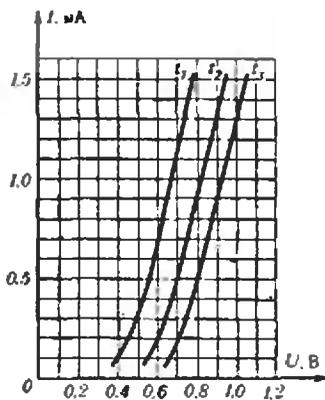


Рис. 4.

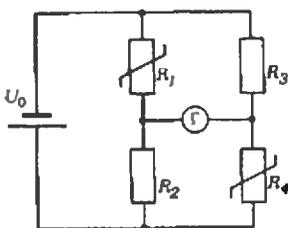


Рис. 5.

рационального числа  $x$  получить иррациональное число  $y$ .  
 в) Придумайте такую дробь  $x$ , для которой описанный процесс всегда приводит к иррациональным числам  $y$ , каковы бы ни были перестановки пятерок цифр на каждом шаге. (10)

*И. Карташин*

**Ф648.** Шарнирная конструкция состоит из трех ромбов, стороны которых относятся как 3:2:1 (рис. 1). Вершина  $A_3$  перемещается в горизонтальном направлении со скоростью  $v_0$ . Определить скорости вершин  $A_1, A_2, B_1$  в тот момент, когда все углы конструкции прямые. (8)

*С. Кротов*

**Ф649.** В ведре находится смесь воды со льдом. Масса смеси 10 кг. Ведро внесли в комнату и сразу же начали измерять температуру смеси. Получившийся график зависимости  $t$  ( $\tau$ ) изображен на рисунке 2. Известны удельная теплоемкость воды  $c_w = 4200$  Дж/(кг · К) и теплота плавления льда  $\lambda = 3,4 \cdot 10^5$  Дж/кг. Определите, сколько льда было в ведре, когда его внесли в комнату. Теплоемкостью ведра пренебречь. (8)

*А. Буздин*

**Ф650.** Для получения напряжения, величина которого мало зависит от температуры, собрана схема по рисунку 3. Вольтамперные характеристики диода  $D$  при трех различных температурах окружающей среды  $t_1 = 125^\circ\text{C}$ ,  $t_2 = 25^\circ\text{C}$ ,  $t_3 = -60^\circ\text{C}$  приведены на рисунке 4. Напряжение источника  $U = 6$  В при температуре  $25^\circ\text{C}$  и с увеличением температуры возрастает на  $25 \cdot 10^{-3}$  В/град. Найти напряжение между зажимами  $A$  и  $B$  при  $t = 25^\circ\text{C}$  и зависимость этого напряжения от температуры. (9).

*А. Зильберман*

**Ф651.** В научно-фантастической повести описывается аварийная ситуация, в которой астронавт массы  $M = 100$  кг оказался на расстоянии  $l = 100$  м от корабля со стаканом замерзшей воды. Обеспечивая сублимацию (испарение) льда, астронавт возвращается на корабль. Реален ли такой способ возвращения? Оцените, за какое время астронавт возвращается на корабль. Считайте, что сублимация льда происходит при постоянной температуре  $T = 272$  К. Давление насыщающих паров при этой температуре  $p_{\text{н}} = 550$  Па. Универсальная газовая постоянная  $R = 8,3 \cdot 10^3$  Дж/(кмоль · К). Размеры стакана и массу льда задайте самостоятельно. (9)

*А. Стасенко*

**Ф652.** Схема, изображенная на рисунке 5, состоит из двух одинаковых резисторов  $R_2 = R_3 = R$  и двух одинаковых нелинейных резисторов  $R_1$  и  $R_4$ , вольтамперная характеристика которых имеет вид  $U = \alpha I^2$ , где  $\alpha$  — некоторый известный постоянный коэффициент. При каком напряжении источника питания  $U_0$  сила тока через гальванометр  $\Gamma$  равна нулю? (10)

*В. Скороваров*

## Решения задач

M579—M582, M584, M586—M594, M597;  
Ф589—Ф598

**M579.** Докажите, что для любых чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , принадлежащих отрезку  $[0; 1]$ , выполнено неравенство

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n + 1)^2 \geq 4(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2).$$

Первое решение. Относительно  $x_n$  это неравенство — квадратичное.  $P_2(x) = 3x_n^2 + Ax_n + B \leq 0$ , и оно выполняется на отрезке  $[0; 1]$ , если  $P_2(0) \leq 0$  и  $P_2(1) \leq 0$ . Эти два неравенства относительно  $x_{n-1}$  — тоже квадратичные, такого же вида, и выполняются на всем отрезке  $[0; 1]$ , если справедливы при  $x_{n-1} = 0$  и  $x_{n-1} = 1$ . Рассуждая так далее, получаем, что достаточно проверить исходное неравенство для наборов  $x_1, \dots, x_n$  из 0 и 1. Если число  $x_k$ , равных единице, равно  $k$ , то получаем очевидное неравенство  $(k+1)^2 \geq 4k$  (то есть  $(k-1)^2 \geq 0$ ).

Второе решение. Поскольку числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  принадлежат отрезку  $[0; 1]$ ,

$$4(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \leq 4(x_1 + \dots + x_n),$$

и наше неравенство снова сводится к очевидному

$$4S \leq (S+1)^2.$$

А. Плоткин,  
С. Фомин

**M580.** В парламенте у каждого его члена не более трех врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария в одной с ним палате будет не более одного врага. (Считается, что если  $A$  — враг  $B$ , то  $B$  — враг  $A$ .)

Проведем разбиение произвольным образом. Если в какой-нибудь из палат у некоторого парламентария  $A$  будет  $\geq 2$  врагов, то число его врагов в другой палате  $\leq 1$ . Поэтому после перемещения  $A$  в другую палату суммарное число пар врагов внутри палат уменьшится. Такие перемещения продолжим до тех пор, пока требуемое условие не будет выполнено.

О. Бордин

**M581.** а) Существует ли трехзначное число, куб которого оканчивается на три семерки?  
б) Для любого ли набора цифр, последняя из которых — не 0, существует куб, оканчивающийся этим набором цифр?

а) Чтобы число  $n^3$  оканчивалось на 7, само число  $n$  должно оканчиваться на 3, так что если искомого трехзначного числа  $n$  существует, то  $n = ab3 = 100a + 10b + 3 = 10(10a + b) + 3$ . Тогда  $n^3 = 10^3 \cdot A + 10^2(7a + 2b + 9b^2) + 10(7b + 2) + 7$ .

Число  $7b + 2$  оканчивается на 7 в том и только в том случае, когда  $7b$  оканчивается на 5, то есть когда  $b = 5$ . Тогда

$$n^3 = 10^3 \cdot A + 10^2(7a + 8) + 77.$$

Число  $7a + 8$  оканчивается на 7 в том и только в том случае, когда  $a = 7$ .

Таким образом,  $753^3$  оканчивается (по крайней мере) на три семерки.

б) Нет, не для любого. Если число  $n^3$  оканчивается на 5, то и само число  $n$  оканчивается на 5. Но число  $(10a + 5)^3$  оканчивается на 25, если  $a$  — четное, и на 75, если  $a$  — нечетное. Поэтому ни для какого  $n$  число  $n^3$  не оканчивается на 05, 15, 35, 45, 55, 65, 85, 95.

Кроме того, если число  $n^3$  оканчивается четной цифрой, то  $n^3$  делится на 2; тогда  $n$  делится на 2 и, следовательно,  $n^3$  делится на 8. Но число  $a$  делится на 8 тогда и только тогда, когда число, образованное тремя его последними цифрами, делится на 8. Значит, ни для какого  $n$  число  $n^3$  не оканчивается на четное трехзначное число, не делящееся на 8.

А какой будет ответ в задаче б), если потребовать, чтобы последняя цифра данного набора была нечетной и отличной от 5?

**М582.** В окружность с центром  $O$  вписан четырехугольник со взаимно перпендикулярными диагоналями. Докажите, что расстояние от точки  $O$  до каждой его стороны равно половине длины противоположной стороны.

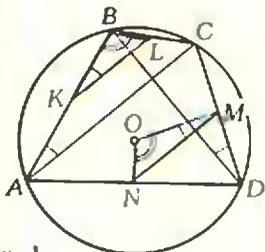


Рис. 1.

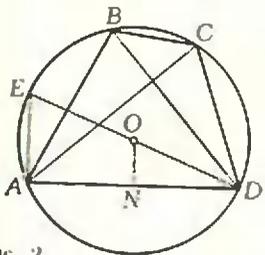


Рис. 2.

**М584.** Можно ли представить все пространство в виде объединения прямых, каждые две из которых — скрещиваются (то есть не лежат в одной плоскости)?

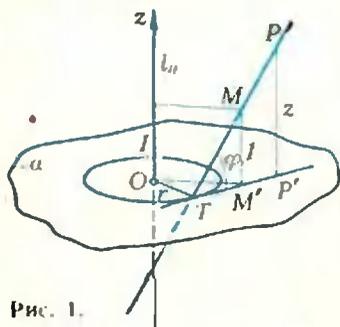


Рис. 1.

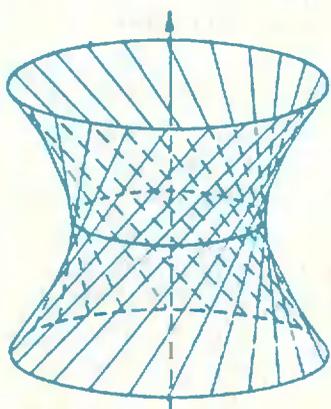


Рис. 2.

Первое решение. Пусть  $K, L, M, N$  — середины сторон  $AB, BC, CD$  и  $AD$  вписанного четырехугольника  $ABCD$  (рис. 1),  $[AC] \perp [BD]$ . Докажем, что  $|ON| = |BL|$  и  $|OM| = |BK|$ .

Действительно,  $|KL| = |MN|$  и  $[KL] \parallel [MN]$  как средние линии в треугольниках  $ABC$  и  $ACD$  с общим основанием  $AC$ . Поэтому  $\widehat{BKL} = \widehat{BAC} = \widehat{BDC}$  (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу). Далее,  $[OM] \perp [CD]$ , а  $[MN] \perp [BD]$  (поскольку  $[MN] \parallel [AC]$ ), так что  $\widehat{BDC} = \widehat{OMN}$ . Значит,  $\widehat{BKL} = \widehat{OMN}$ . Кроме того,  $\widehat{KBL} = 180^\circ - \widehat{MDN} = \widehat{MON}$ . Таким образом, треугольники  $BKL$  и  $MON$  конгруэнтны (по стороне и двум углам), откуда  $|ON| = |BL|$ ,  $|OM| = |BK|$ .

Равенства  $|OK| = |DM|$  и  $|OL| = |DN|$  следует из конгруэнтности треугольников  $OKL$  и  $DMN$ .

Второе решение. Проведем хорду  $AE$ , перпендикулярную  $AD$  (рис. 2). Дуга  $AE$  конгруэнтна дуге  $BC$  (поскольку  $\widehat{ADE} = \widehat{BAC}$ ), так что  $|AE| = |BC|$ . Так как  $\widehat{EAD} = 90^\circ$ ,  $ED$  — диаметр и  $O \in [ED]$ . Поскольку  $[ON]$  — средняя линия в прямоугольном треугольнике  $ADE$ ,  $|ON| = \frac{|AE|}{2} = \frac{|BC|}{2}$ , что и утверждалось.

И. Клунова



Приведем пример разбиения пространства на попарно скрещивающиеся прямые.

Пусть прямая  $l_0$  вертикальна (ось  $Oz$  на рисунке 1). Через каждую точку  $T$  горизонтальной плоскости  $\alpha$  ( $Oxy$ ), отличную от  $O$ , проведем прямую  $TM$ , которая перпендикулярна отрезку  $OT$  и наклонена к плоскости  $\alpha$  под углом  $\arctg \frac{1}{|OT|}$ .

Таким образом, при возрастании  $r = |OT|$  от 0 до  $+\infty$  прямая  $TM$  постепенно наклоняется от вертикального положения  $l_0$  к горизонтальному. При фиксированном же  $r$  прямые  $TM$  вращаются вокруг оси  $l_0$ , образуя *однополостный гиперболоид*  $\Gamma_r$  (рис. 2). Для каждого  $r > 0$  получается гиперболоид с «горловиной» радиуса  $r$ , все более широкий.

Прямые  $TM$ , построенные для всех точек  $T \in \alpha$ , отличных от  $O$ , и прямая  $l_0$  образуют искомое разбиение. Докажем это.

Во-первых, докажем, что никакие две из проведенных прямых не параллельны. Действительно, если две прямые принадлежат разным семействам  $\Gamma_{r_1}$  и  $\Gamma_{r_2}$ ,  $r_1 \neq r_2$ , то углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  их наклона к горизонтальной плоскости  $\alpha$  различны. Если же две прямые принадлежат одному семейству  $\Gamma_r$ , то их проекции либо на плоскость  $\alpha$ , либо на вертикальную плоскость будут, очевидно, не параллельны.

(Заметим, что на каждом гиперболоиде  $\Gamma_r$  можно выбрать одно из двух семейств прямолинейных образующих: мы можем направить вектор  $\overrightarrow{TM}$  от точки  $T$  (рис. 1) по или против часовой стрелки. Мы каждый раз направляем его одинаково.)

Во-вторых, нужно доказать, что через каждую точку пространства проходит ровно одна из прямых. Это почти очевидно «из соображений непрерывности», но для строгого доказательства лучше использовать метод координат.

Пусть  $P(x, y, z)$  — точка прямой  $TM$  на рисунке 1;  $P'(x, y)$  — ее проекция на плоскость  $\alpha$ . Тогда  $|TP| = r|z|$ , поэтому  $|OP'|^2 = r^2(1 + z^2)$ , то есть

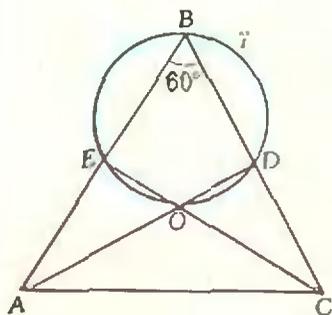
$$x^2 + y^2 = r^2(1 + z^2).$$

(Это уравнение гиперboloида  $\Gamma_r$ !) Отсюда для любой точки  $P(x; y; z)$ ,  $x^2 + y^2 \neq 0$ , можно найти единственное  $r > 0$  и, проведя из точки  $P'$  касательную  $P'T$  к окружности радиуса  $r$  с центром  $O$  (причем ту касательную, которая соответствует выбранному нами направлению  $\vec{T}\vec{M}'$  — по или против часовой стрелки), получить точку  $T$  и построить прямую  $\vec{T}\vec{M}$ , проходящую через нашу точку  $P$ .

Во всех присланных читателями решениях по существу описывался (разными способами) один и тот же пример. Это не удивительно; можно доказать, что (при соблюдении некоторых естественных условий алгебраической зависимости от параметров) существует, с точностью до линейного преобразования, единственное требуемое разбиение пространства.

И. Васильев

**M586.** В треугольнике  $ABC$ , у которого  $\angle B = 60^\circ$ , провели биссектрисы  $AD$  и  $CE$ , пересекающиеся в точке  $O$ . Докажите, что  $|OD| = |OE|$ .



**M587.** Дана тройка чисел  $2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Разрешается любые два из них заменить двумя такими: их суммой, деленной на  $\sqrt{2}$ , и их разностью, также деленной на  $\sqrt{2}$ . Можно ли, проделав эту процедуру несколько раз, получить тройку чисел  $1, \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}$ ?

Наше доказательство будет опираться на следующие теоремы:

1. Если в окружности две дуги имеют одинаковую меру, то длины хорд, стягивающих эти дуги, равны.

2. Биссектриса вписанного в окружность угла делит дугу, стягивающую этот угол, пополам.

3. Три биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке.

4. Если сумма величин двух противоположных углов четырехугольника равна  $180^\circ$ , то вокруг него можно описать окружность.

5. Если в треугольнике  $ABC$  величина угла  $B$  равна  $\varphi$ , то величина угла  $AOC$ , где  $O$  — точка пересечения биссектрис, равна  $90^\circ + \frac{\varphi}{2}$ .

Приступим к доказательству утверждения, сформулированного в задаче M586.

По теореме 5 величина угла  $EOD$  (см. рисунок) равна  $120^\circ$ . Поскольку в четырехугольнике  $BEOD$  сумма величин двух противоположных углов равна  $180^\circ$ , вокруг него по теореме 4 можно описать окружность. Согласно теореме 3 отрезок  $BO$  является биссектрисой угла  $B$ . По теореме 2 точка  $O$  делит дугу  $ED$  пополам. Используя теорему 1, заключаем, что  $|OD| = |OE|$ .

В. Гутенмахер

Преобразование

$$(x; y) \rightarrow \left( \frac{x+y}{\sqrt{2}}; \frac{x-y}{\sqrt{2}} \right) \quad (1)$$

сохраняет сумму квадратов пары чисел:

$$x^2 + y^2 = \left( \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left( \frac{x-y}{\sqrt{2}} \right)^2$$

Поэтому процедура, указанная в условии, сохраняет сумму квадратов тройки чисел. Но

$$2^2 + (\sqrt{2})^2 + \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = 6 \frac{1}{2} \neq 1 + (\sqrt{2})^2 + (1 + \sqrt{2})^2 = 6 + 2\sqrt{2}.$$

Поэтому перевести одну тройку в другую нельзя.

Заметим, что преобразование (1) — это поворот плоскости вокруг точки  $(0; 0)$  на  $45^\circ$ .

Поэтому преобразования точек  $(x; y; z) \in \mathbb{R}^{3*}$  в нашей задаче — повороты на угол  $45^\circ$  вокруг любой из трех координатных осей и их всевозможные композиции. Ясно, что эти преобразования переводят любую сферу с центром в начале координат  $O$  в себя — на этом основано решение задачи.

\*  $\mathbb{R}^3$  — обозначение трехмерного пространства.

Можно доказать (попробуйте это сделать!), что орбита любой начальной точки  $(x_0; y_0; z_0)$  — множество точек, которые получаются из нее действием группы всех наших преобразований, — будет *всюду плотна* на сфере радиуса  $\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$  с центром  $O$ , то есть содержит точки в любом сколь угодно маленьком кружочке сферы.

Более трудные задачи — описать точно орбиту какой-либо точки, скажем точки  $(1; 0; 0)$  или одной из точек, данных в условии, или указать алгоритм, позволяющий по двум точкам сферы узнать, можно ли одну из них перевести в другую. Нам решение этих задач неизвестно.

Н. Васильев

**М588.** а) Через точку, взятую внутри произвольного тетраэдра, параллельно его ребрам проведены отрезки с концами на гранях тетраэдра. Докажите, что сумма всех шести отношений длин этих отрезков к длинам параллельных им ребер всегда равна трем.  
б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для треугольника (на плоскости).

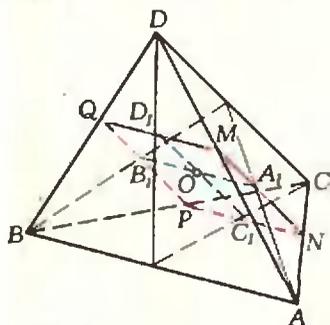


Рис. 1.

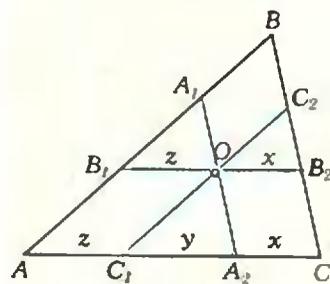


Рис. 2.

**М589.** На плоскости дан набор из  $n$  векторов, длины каждого из которых не превосходит 1. Докажите, что, заменив некоторые векторы этого набора на противоположные, можно получить такой набор

а) Проведем через точку  $O$  внутри тетраэдра  $ABCD$  отрезки  $[A_1B_1] \parallel [AB]$  и  $[C_1D_1] \parallel [CD]$ , где  $A_1 \in (ACD)$ ,  $B_1 \in (BCD)$ ,  $C_1 \in (ABC)$ ,  $D_1 \in (ABD)$  (рис. 1). Эти отрезки определяют плоскость, пересекающую грани  $ABC$  и  $ABD$  по прямым  $PN$  и  $MQ$ , параллельным  $(AB)$ , а грани  $ACD$  и  $BCD$  — по прямым  $MN$  и  $PQ$ , параллельным  $(CD)$ . Значит, четырехугольник  $MNPQ$  — параллелограмм. Имеем

$$\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|MQ|}{|AB|} = \frac{|DM|}{|AD|},$$

$$\frac{|C_1D_1|}{|CD|} = \frac{|MN|}{|CD|} = \frac{|AM|}{|AD|}.$$

Отсюда

$$\frac{|A_1B_1|}{|AB|} + \frac{|C_1D_1|}{|CD|} = \frac{|DM|}{|AD|} + \frac{|AM|}{|AD|} = \frac{|DM| + |AM|}{|AD|} = 1.$$

Итак, сумма отношений длин двух проведенных отрезков к длинам параллельных им скрещивающихся ребер тетраэдра равна единице. Следовательно, сумма всех шести отношений равна трем.

б) Докажем, что если через точку, взятую внутри произвольного треугольника, параллельно его сторонам проведены отрезки с концами на сторонах треугольника, то сумма трех отношений длин этих отрезков к длинам параллельных им сторон равна двум.

Пусть  $O$  — точка внутри  $\triangle ABC$ ,  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$ ,  $C_1C_2$  — отрезки, параллельные сторонам треугольника (рис. 2). Из подобия треугольников  $ABC$ ,  $C_1CC_2$  и  $A_1AA_2$  получаем (обозначения см. на рисунке 2)

$$\frac{|C_1C_2|}{|AB|} = \frac{|CC_1|}{|AC|} = \frac{x+y}{|AC|},$$

$$\frac{|A_1A_2|}{|BC|} = \frac{|AA_2|}{|AC|} = \frac{z+y}{|AC|}.$$

Кроме того,  $\frac{|B_1B_2|}{|AC|} = \frac{x+z}{|AC|}$  (см. рис. 2). Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{|A_1A_2|}{|BC|} + \frac{|B_1B_2|}{|AC|} + \frac{|C_1C_2|}{|AB|} &= \\ &= \frac{z+y}{|AC|} + \frac{x+z}{|AC|} + \frac{x+y}{|AC|} = \frac{2(x+y+z)}{|AC|} = 2, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Э. Ясиновский

Приведем решение задачи б). Оно основано на следующем простом утверждении:

Лемма. Если  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  — векторы на плоскости, по длине не превосходящие 1, то длина суммы или разности некоторых двух из них также не превосходит 1.

Действительно, среди шести векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $-\vec{a}$ ,  $-\vec{b}$ ,  $-\vec{c}$  найдутся два, величина угла между которыми не превосходит

$n$  векторов, сумма которых имеет длину

- а) не превосходящую  $\sqrt{n}$ ;
- б) не превосходящую  $\sqrt{2}$ .

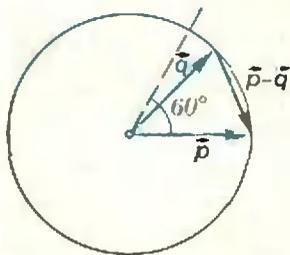


Рис. 1.

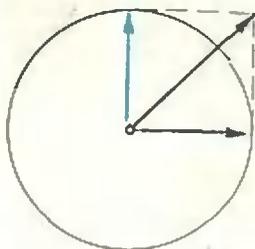


Рис. 2.

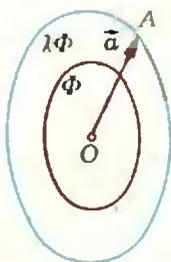


Рис. 3.

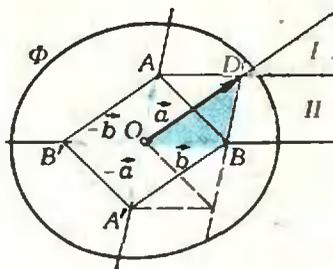


Рис. 4.

$60^\circ$ . Но тогда, очевидно, длина разности этих двух векторов не превосходит 1 (рис. 1).

Утверждение задачи доказывается теперь так. Пусть  $n > 1$  и  $\alpha_n$  — наименьшее число, обладающее таким свойством: для любых векторов  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  на плоскости, таких, что  $|\vec{a}_1| < 1, \dots, |\vec{a}_n| < 1$ , в сумме  $x = \pm \vec{a}_1 \pm \dots \pm \vec{a}_n$  можно так выбрать знаки, что  $|x| < \alpha_n$ . Нам надо проверить, что  $\alpha_n < \sqrt{2}$ . Лемма показывает, что если  $n > 3$ , то  $\alpha_n = \alpha_{n-1}$ . Поэтому  $\alpha_n = \alpha_2$ . Но, очевидно,  $\alpha_2 = \sqrt{2}$  (рис. 2), что и завершает доказательство.

Любопытно, что доказанный результат (с несколько худшей константой) справедлив и для «неевклидова» способа измерения длин векторов, при котором роль единичного круга играет произвольная выпуклая ограниченная центрально-симметричная фигура  $\Phi$  на плоскости. Этот способ очень популярен в современной математике и состоит в следующем.

Чтобы измерить длину  $\vec{a}$ , отложим этот вектор от центра симметрии  $O$  фигуры  $\Phi$  — пусть  $\vec{a} = \vec{OA}$  — и найдем наименьшее число  $\lambda > 0$ , такое, что  $A \in \lambda\Phi$  ( $\lambda\Phi$  — образ фигуры  $\Phi$  при гомотетии с центром  $O$  и коэффициентом  $\lambda$  — см. рисунок 3; мы предполагаем, что  $\Phi$  содержит свою границу и что точка  $O$  лежит внутри  $\Phi$ ). Это число  $\lambda$  и принимается за «обобщенную длину»  $|\vec{a}|_\Phi$  вектора  $\vec{a}$ . Ясно, что если  $\Phi$  — круг радиуса 1, то  $|\vec{a}|_\Phi = |\vec{a}|$  и что  $|\vec{OA}|_\Phi < 1 \Leftrightarrow A \in \Phi$ . Выражаясь вольно, мы измеряем длины векторов, выбирая различные масштабы по разным направлениям. Легко убедиться в том, что введенное число  $|\vec{a}|_\Phi$  обладает обычными свойствами длины; в частности, справедливо неравенство  $|\vec{a} + \vec{b}|_\Phi \leq |\vec{a}|_\Phi + |\vec{b}|_\Phi$  (Проверьте! Здесь вам понадобится выпуклость фигуры  $\Phi$ .)

Аналог доказанного выше утверждения выглядит так. Если  $|\vec{a}_1|_\Phi < 1, \dots, |\vec{a}_n|_\Phi \leq 1$ , то в сумме  $x = \pm \vec{a}_1 \pm \vec{a}_2 \pm \dots \pm \vec{a}_n$  можно так выбрать знаки, что  $|x|_\Phi < 2$ .

Доказательство ведется по той же схеме; нового рассуждения требует лишь доказательство леммы, поскольку мы не можем теперь утверждать, что если  $|\vec{a}|_\Phi, |\vec{b}|_\Phi < 1$  и  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) < 60^\circ$ , то  $|\vec{a} - \vec{b}|_\Phi < 1$ .

Итак, пусть  $|\vec{a}|_\Phi, |\vec{b}|_\Phi, |\vec{c}|_\Phi < 1$ . Это означает, что точки  $A, B, C$ , такие, что  $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$ , принадлежат  $\Phi$ .

Пусть  $\vec{OD} = \vec{a} + \vec{b}$ . Ясно, что, рассматривая возможные положения точки  $C$ , мы можем ограничиться случаем, когда  $C$  принадлежит углу  $BOD$ . Если при этом  $C$  находится в треугольнике  $OB'D$ , то  $P_{-\vec{b}}$  ( $C$ ) лежит в треугольнике  $AOB'$  (здесь  $P_{-\vec{b}}$  — параллельный перенос на вектор  $-\vec{b}$ ). Следовательно,  $P_{-\vec{b}}$  ( $C$ )  $\in \Phi$ , так что в этом случае  $|\vec{c} - \vec{b}|_\Phi < 1$ . Оставшуюся часть угла  $BOD$  разделим на зоны I и II, как показано на рисунке 4. Если точка  $C$  лежит в зоне I, то точка  $D$  принадлежит треугольнику  $ABC$ , лежащему в  $\Phi$ , и потому  $|\vec{a} + \vec{b}|_\Phi < 1$ , а если  $C$  — в зоне II, то, очевидно, точка  $P_{-\vec{b}}$  ( $C$ ) принадлежит выпуклому четырехугольнику  $OACB$ , лежащему в фигуре  $\Phi$ , и мы снова получаем, что  $|\vec{c} - \vec{b}|_\Phi < 1$ .

Вводя теперь числа  $\alpha_n = \alpha_n(\Phi)$  как и выше, мы опять видим, что  $\alpha_n(\Phi) = \alpha_2(\Phi)$  при  $n > 2$ . Но  $\alpha_2(\Phi) < 2$ , ибо  $|\vec{a}_1 + \vec{a}_2|_\Phi \leq |\vec{a}_1|_\Phi + |\vec{a}_2|_\Phi < 2$ , и потому  $\alpha_n(\Phi) < 2$ , что и требовалось. Заметим еще, что для произвольной фигуры  $\Phi$  константу 2 уменьшить нельзя: рассмотрим в качестве  $\Phi$  параллелограмм  $ABCD$ , а в качестве  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  — векторы  $\vec{OA}$  и  $\vec{OB}$ .

А. Плоткин

а) Положим  $t = |\cos x| \in [0; 1]$  и рассмотрим функцию  $y(t) = -t + |2t^2 - 1|$  на отрезке  $[0; 1]$ .

Если  $0 < t < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , то

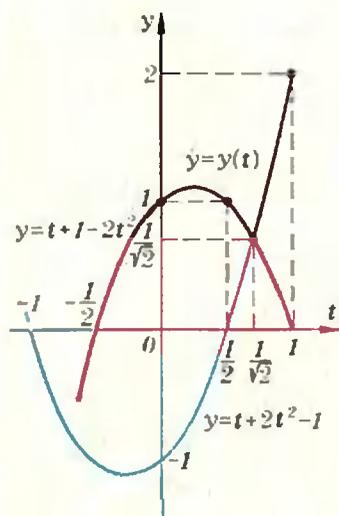
**M590.** а) Найдите наименьшее значение выражения  $|\cos x| + |\cos 2x|$ . Докажите, что для любого числа  $x$  и

любого натурального числа  $n$   
сумма

$$|\cos x| + |\cos 2x| + \dots + |\cos 2^n x|$$

б) не меньше  $\frac{n}{4}$ ;

в) не меньше  $\frac{n}{2}$ .



$$y(t) = t + (1 - \sqrt{2}t)(1 + \sqrt{2}t) > t + (1 - \sqrt{2}t) = \\ = 1 - t(\sqrt{2} - 1) > 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2} - 1) = \frac{1}{2}$$

Если же  $\frac{1}{\sqrt{2}} < t < 1$ , то  $y(t) > t > \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Таким образом,  $y(t) > \frac{1}{\sqrt{2}}$  для всех  $t \in [0; 1]$ . Но при  $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$  (то есть  $x = \frac{\pi}{4}$ )  $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Значит, наименьшее значение выражения  $|\cos x| + |\cos 2x|$  равно  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

К тому же результату можно было придти, заметив, что график функции  $y(t)$  на отрезке  $[0; 1]$  состоит из двух кусков парабол:

$$y(t) = \begin{cases} -2t^2 + t + 1 & \text{при } t \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right], \\ 2t^2 + t - 1 & \text{при } t \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right]. \end{cases}$$

а затем аккуратно исследовав на минимум каждый из кусков (см. рисунок).

Аналогично можно доказать и более простое неравенство

$$2|\cos x| + |\cos 2x| > 1$$

и даже объединить его с неравенством

$$|\cos x| + |\cos 2x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

в одно:

$$a|\cos x| + |\cos 2x| > \min\left\{1, \frac{a}{\sqrt{2}}\right\},$$

справедливое для всех действительных чисел  $a > 0$  и  $x$  (убедитесь в этом самостоятельно).

б) Обозначим сумму

$$|\cos x| + |\cos 2x| + |\cos 4x| + \dots + |\cos 2^n x|$$

через  $\sigma_n(x)$ . Положим  $f(x) = |\cos x| + |\cos 2x|$ . По доказанному в пункте а)  $f(x) > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , так что

$$\sigma_n(x) = f(x) + f(4x) + f(16x) + \dots + f(2^{2^{n-1}}x) > \\ > \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\left[\frac{n-1}{2}\right] + 1\right) \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{n}{2\sqrt{2}} > \frac{n}{4}$$

в) Докажем вначале, что если  $|\cos x| < \frac{1}{2}$ , то  $|\cos x| + |\cos 2x| > 1$ . В самом деле, если  $t = |\cos x| < \frac{1}{2}$ , то  $\cos 2x = -2t^2 - 1 < 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 < 0$ . Следовательно,

$$|\cos x| + |\cos 2x| = t + 1 - 2t^2 = 1 + 2t\left(\frac{1}{2} - t\right) > 1.$$

Приступим к задаче в). Зафиксируем  $x$  и  $n$  и назовем число  $k \in [0; n]$  «плохим», если  $|\cos 2^k x| < \frac{1}{2}$ , и «хорошим», если  $|\cos 2^k x| > \frac{1}{2}$ . Из доказанного выше следует, что за каждым «плохим» числом  $k$  (кроме  $k = n$ ) следует «хорошее» число  $k + 1$ , причем  $|\cos 2^k x| + |\cos 2^{k+1} x| > 1$ . Занумеруем теперь все «плохие» числа в порядке возрастания:  $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_r < n$  ( $r$  — количество «плохих» чисел). В силу сказанного выше  $k_{j+1} > k_j + 2$  ( $j = 1, \dots, r-1$ ). При этом

$$\sum_{j=1}^r (|\cos 2^j x| + |\cos 2^{j+k} x|) > r, \text{ если } k < n, \text{ и}$$

$$|\cos 2^n x| + \sum_{j=1}^{r-1} (|\cos 2^j x| + |\cos 2^{j+k} x|) \geq r-1, \text{ если } k_r = n.$$

Каждое из остальных (не вошедших в написанные суммы) слагаемых суммы  $\sigma_n(x)$  (а их  $n+1-2r$  штук при  $k_r < n$  и  $n-2r+2$  штук при  $k_r = n$ ) больше или равно  $\frac{1}{2}$ . Таким образом, вся сумма  $\sigma_n(x)$  больше или равна

$$r + \frac{1}{2}(n+1-2r) = \frac{n+1}{2} > \frac{n}{2}, \text{ если } k_r < n,$$

и больше или равна

$$r-1 + \frac{1}{2}(n-2r+2) = \frac{n}{2}, \text{ если } k_r = n.$$

Следовательно,  $\sigma_n(x) \geq \frac{n}{2}$ .

Заметим, что существенно улучшить эту оценку уже нельзя: в самом деле,

$$\min_x \sigma_n(x) < \sigma_n\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{n+1}{2}.$$

В заключение предлагаем читателю подумать над доказательством следующих неравенств:

а)  $|\cos x| + |\cos 2x| + |\cos 4x| > \sin \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{4}$ ;

б)  $|\cos x| + |\cos 2x| + |\cos 3x| + |\cos 4x| > 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;

в)  $|\cos x| + |\cos 2x| + |\cos 3x| + \dots + |\cos (n+1)x| > \frac{n}{4}$ .

П. Гусятников



**M591.** Пусть  $p$  и  $q$  — натуральные числа такие, что

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Докажите, что число  $p$  делится на 1979.

Ключом к доказательству утверждения задачи является равенство  $1979 = 1319 + 660$ , подсказывающее следующее преобразование знакопеременной суммы:

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319} = \\ & = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319} - \\ & - 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1318} \right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \\ & \dots + \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319} - \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{659} \right) = \\ & = \frac{1}{660} + \frac{1}{661} + \dots + \frac{1}{1319}. \end{aligned}$$

Теперь уже нетрудно заметить, что, сложив равноотстоящие от концов слагаемые:

$$\frac{1}{660+k} + \frac{1}{1319-k} = \frac{1979}{(660+k)(1319-k)},$$

получим дроби, числители которых равны 1979 ( $k=0, 1, \dots, 329$ ).

Сложив все эти дроби, получим число  $\frac{330 \cdot 1979}{660 \cdot 661 \cdot \dots \cdot 1319} =$

$$= \frac{1979}{2 \cdot 661 \cdot \dots \cdot 1319}.$$

Осталось заметить, что число 1979 является простым, а каждый сомножитель в знаменателе меньше, чем 1979.

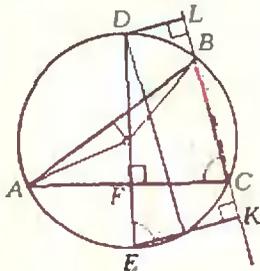
Задачу M591 можно сформулировать в более общем виде: Пусть  $p$  и  $q$  — натуральные числа такие, что

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k-1}.$$

Тогда, если число  $6k-1$  — простое, то число  $p$  делится на  $6k-1$ .

А. Савин

**М592.** Докажите, что для любого треугольника проекция диаметра описанной окружности, перпендикулярного одной стороне треугольника, на прямую, содержащую вторую сторону, равна по длине третьей стороне.



**М593.** Внутри окружности  $\Gamma$  расположено  $n$  кругов. Докажите, что длина границы объединения этих кругов не превосходит длину окружности  $\Gamma$ , если  
 а)  $n = 2$ ;  
 б) центры всех  $n$  кругов лежат на одном диаметре окружности  $\Gamma$ ;  
 в) все  $n$  кругов содержат центр окружности  $\Gamma$ .

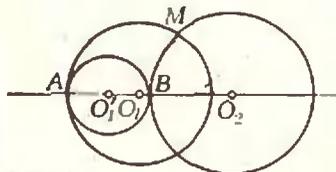


Рис. 1.

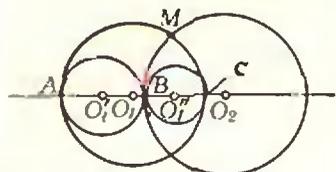


Рис. 2.

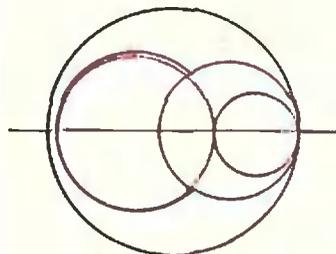


Рис. 3.

Пусть  $[LK]$  — проекция диаметра  $DE$  окружности, описанной около треугольника  $ABC$  ( $[DE] \perp [AC]$ ), на прямую, содержащую сторону  $BC$  (см. рисунок). Очевидно,  $\widehat{DEK} = \widehat{ACB}$  (рассмотрите четырехугольники  $DEKL$  и  $DFCL$ ). Отсюда  $|LK| = |DE| \cdot \sin \widehat{DEK} = |DE| \cdot \sin \widehat{ACB} = |AB|$ , что и требовалось доказать.

И. Каузова

б) Пусть центры  $O_1, O_2, \dots, O_n$  всех  $n$  кругов лежат на одном диаметре внешней окружности  $\Gamma$ . Обозначим через  $R$  радиус окружности  $\Gamma$ , через  $r_i$  — радиус круга с центром  $O_i$ .

Если «внутренние» круги не пересекаются (касание допускается), то длина границы их объединения равна  $\sum_{i=1}^n 2\pi r_i = \pi \sum_{i=1}^n 2r_i \leq 2\pi R$ , что и требовалось доказать.

Для общего случая докажем следующую лемму:  
 Пусть окружности с центрами  $O_1, O_2, O'_i$  расположены так, как показано на рисунке 1. Тогда

$$\widehat{AB} + \widehat{BM} > \widehat{AM}$$

(через  $\widehat{AB}$  мы обозначили длину дуги  $AB$ ).  
 Доказательство леммы. Построим вспомогательную окружность с центром  $O'_i$  так, как показано на рисунке 2. Нетрудно доказать, что  $\widehat{BM} + \widehat{MC} > \widehat{BC}$ . Далее,  $\widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{AC}$ . Складывая эти два соотношения, получаем  $\widehat{AB} + \widehat{BM} > \widehat{AM}$ , что и требовалось.

Применяя лемму, сразу получаем доказательство утверждения для случая двух кругов (см. рис. 3).

Пусть теперь у нас есть  $n$  кругов с центрами  $O_1, O_2, \dots, O_n$  на одном диаметре окружности  $\Gamma$ .

Обозначим через  $\Gamma_1$  границу их объединения (в дальнейшем мы будем называть  $\Gamma_1$  контуром). Рассмотрим последовательность контуров  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_n$ , где контур  $\Gamma_{i+1}$  получается из контура  $\Gamma_i$  заменой круга с центром  $O_i$  на круг с центром  $O'_i$  на том же диаметре окружности  $\Gamma$ , касающийся границы круга с центром  $O_i$  изнутри, а круга с центром  $O_{i+1}$  — извне (на рисунке 4 показано, как из исходного черного контура  $\Gamma_1$  получается синий контур  $\Gamma_2$ ; на рисунке 5 показан красный контур  $\Gamma_3$ , а исходные окружности отмечены черным пунктиром).

Пусть  $L_i$  — длина контура  $\Gamma_i$ . На основании леммы  $L_i \leq L_{i+1}$ , причем равенство достигается тогда и только тогда, когда круг с центром  $O'_i$  совпадает с кругом с центром  $O_i$ . Последний контур  $\Gamma_n$  будет границей объединения уже касающихся кругов, а потому согласно замечанию, сделанному в начале решения, его длина  $L_n \leq 2\pi R$ . Следовательно,  $L_1 \leq L_2 \leq \dots \leq L_n \leq 2\pi R$ , что и требовалось.

в) Перейдем теперь к случаю, когда все круги содержат центр  $O$  внешней окружности  $\Gamma$ .

Очевидно, контур можно разбить на дуги внутренних окружностей, обладающие следующим свойством: при движении по дуге  $AB$  от  $A$  к  $B$  расстояние до центра  $O$  окружности  $\Gamma$  уменьшается. Поскольку все круги содержат центр окружности  $\Gamma$ , любой ее радиус пересекает контур ровно один раз. Поэтому для решения задачи достаточно доказать, что  $\widehat{AB} \leq R\alpha$ , где  $\alpha$  — радианная мера угла  $AOB$ ; тогда длина контура, являющаяся суммой длин таких дуг, будет не больше  $2\pi R$ .

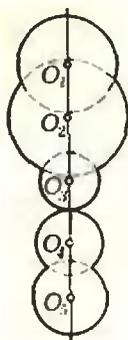


Рис. 4.

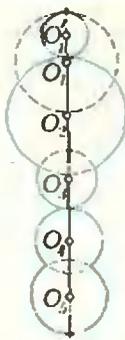


Рис. 5.

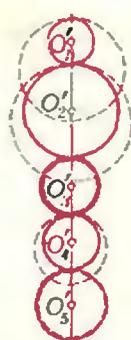


Рис. 6.

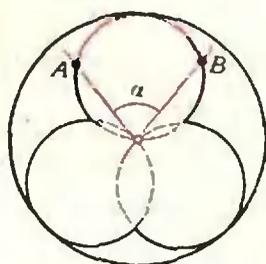
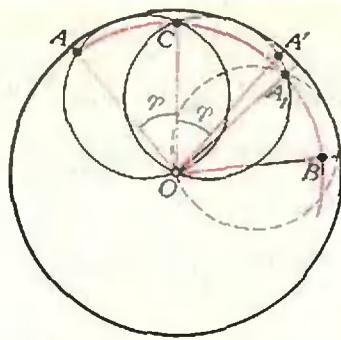


Рис. 7.

Рассмотрим сначала основной случай, когда дуга  $AB$  окружности с центром  $O_1$  не касается окружности  $\Gamma$ . Проведем через точки  $O$  и  $A$  окружность  $K$  радиуса  $R/2$  (рис. 6); она пересекает окружность с центром  $O_1$  в точках  $A$  и  $C$ . Обозначим через  $l$  длину дуги окружности  $K$ , заключенной между точками  $A$  и  $C$  и касающейся окружности  $\Gamma$ . Нетрудно доказать, что  $\widehat{AC} < l$ . С другой стороны,  $l = R \cdot \varphi$ , где  $\varphi$  — радианная мера угла  $AOC$ ; следовательно,  $\widehat{AC} < R\varphi$ . Таким образом, если нам удастся разбить дугу  $AB$  на более мелкие дуги, через концы которых и точку  $O$  можно провести окружность радиуса не больше чем  $R/2$ , то тем самым мы докажем неравенство  $\widehat{AB} < Ra$ . Опишем способ такого разбиения.

Рассмотрим окружность  $K'$ , симметричную окружности  $K$  относительно прямой  $OC$ ; пусть она пересекает дугу  $AB$  в точке  $A_1$ , а точку  $A'$  симметрична точке  $A$ . Вспомним, что дуга  $AB$  выбиралась так, что  $|AO| > |A_1O|$ ; следовательно, и  $|A'O| > |A_1O|$ , откуда  $\widehat{COA_1} > \widehat{COA'}$ . Далее, симметрично отразим окружность  $K'$  относительно прямой  $OA_1$  и т. д. Так как при таком разбиении дуги  $AB$  мелкие дуги  $\widehat{AC}$ ,  $\widehat{CA_1}$ , ... видны из точки  $O$  под углом, не меньшим  $\varphi$ , через конечное число отражений точка  $B$  попадает внутрь отражаемой окружности (на рисунке 6 эта окружность изображена пунктиром).

Тогда в качестве последней окружности нужно взять окружность радиуса, меньшего чем  $R/2$ , проходящую через точки  $O$ ,  $B$  и последнюю получившуюся точку разбиения.

Нужное разбиение построено.

Осталось рассмотреть случай, когда дуга  $AB$  внутренней окружности касается окружности  $\Gamma$ . Наша цель — доказать неравенство  $\widehat{AB} < Ra$ . Предположим противное: пусть  $\widehat{AB} > Ra$ . Тогда найдется такое  $\varepsilon > 0$ , что  $\widehat{AB} > \varepsilon + Ra = \left(R + \frac{\varepsilon}{a}\right)a$ . Но если радиус внешней окружности

немного увеличить, например на  $\frac{\varepsilon}{a}$ , то касания с дугой  $AB$

уже не будет, и поэтому  $\widehat{AB} < \left(R + \frac{\varepsilon}{a}\right)a$ . Мы пришли к противоречию. Следовательно,  $\widehat{AB} < Ra$  и в этом случае.

Заметим, что длина границы объединения наших кругов совпадает с длиной окружности  $\Gamma$  лишь в том случае, когда все внутренние окружности проходят через центр  $O$  окружности  $\Gamma$  и касаются ее (рис. 7).

С. Казаков

**M594.** Найдите все действительные числа  $a$ , для которых существуют действительные неотрицательные числа  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ , удовлетворяю-

Проведем следующую операцию: умножим первое соотношение на  $a^2$ , второе на  $(-2a)$  и сложим с третьим соотношением. Получим

$$\sum_{k=1}^5 (a^2 k x_k - 2ak^3 x_k + k^5 x_k) = 0$$

щие соотношениям

$$\sum_{k=1}^5 kx_k = a, \quad \sum_{k=1}^5 k^3x_k = a^2, \\ \sum_{k=1}^5 k^5x_k = a^3.$$

или

$$\sum_{k=1}^5 kx_k(a-k^2)^2 = 0. \tag{1}$$

Поскольку числа  $x_1, \dots, x_5$  неотрицательны, отличны от нуля может быть не более чем одно из них; при этом коэффициент при нем должен обращаться в нуль. Если все  $x_k$  равны нулю, соотношение  $\sum_{k=1}^5 kx_k = a$  дает  $a=0$ . Если же одно из  $x_k$  отлично от нуля, из (1) получаем еще пять значений для  $a$ : 1, 4, 9, 16, 25. Все эти значения действительно годятся: для каждого из них соотношение  $\sum_{k=1}^5 kx_k = a$  позволяет найти соответствующее решение: (1; 0; 0; 0; 0), (0; 2; 0; 0; 0), (0; 0; 3; 0; 0), (0; 0; 0; 4; 0), (0; 0; 0; 0; 5); тривиальная проверка показывает, что эти решения удовлетворяют и остальным соотношениям.

*А. Савин*

**М597.** Положим

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

а) Докажите существование предела

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - \ln n).$$

б) Докажите, что для любых  $n, m \in \mathbb{N}$

$$\gamma < x_n + x_m - x_{nm} < 1.$$

в) Найдите  $\gamma$  с точностью до 0,1.

а) Из теоремы Вейерштрасса («Алгебра и начала анализа 9», п. 32) легко выводится лемма: если  $(a_n)$  и  $(\beta_n)$  — возрастающая и убывающая последовательности,  $a_n < \beta_n$  для всех  $n$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\beta_n - a_n) = 0$ , то последовательности  $(a_n)$  и  $(\beta_n)$  имеют общий предел  $c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$  и  $a_n < c < \beta_n$  при всех  $n$ .

Рассмотрим для данной последовательности  $(x_n)$  две последовательности:

$$\gamma_n = x_n - \ln(n+1), \\ \Gamma_n = x_n - \ln n.$$

Легко видеть, что они удовлетворяют условиям леммы

$$(\gamma_n < \Gamma_n; \lim_{n \rightarrow \infty} (\Gamma_n - \gamma_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = 0;$$

$$|\gamma_n - \gamma_{n-1}| = \int_{n-1}^n \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{x+1} \right) dx > 0, \text{ поскольку } \frac{1}{n} - \frac{1}{x+1} > 0$$

при  $x \in [n-1; n]$ ; аналогично  $\Gamma_n - \Gamma_{n-1} < 0$ ). Поэтому последовательности  $(\gamma_n)$  и  $(\Gamma_n)$  имеют общий предел  $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n$  и  $\gamma_n < \gamma < \Gamma_n$  при всех  $n$ .

Итак, предел  $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n$  существует. (Впервые это было указано Л. Эйлером. Число  $\gamma$  называется *постоянной Эйлера*.)

$$\text{б) Легко видеть, что } x_n + x_m - x_{nm} = (x_n + x_m - x_n) - (x_{2n} - x_n) - (x_{3n} - x_{2n}) - \dots - (x_{nm} - x_{n(m-1)}) < x_m - n \cdot \frac{1}{2n} - n \cdot \frac{1}{3n} - \dots - n \cdot \frac{1}{mn} = 1.$$

С другой стороны,  $\Gamma_{nm} < \Gamma_m$ , то есть

$$x_{nm} - \ln(nm) < x_m - \ln m, \\ x_n - x_{nm} - \ln n + \ln(nm) > 0. \tag{*}$$

Но  $\Gamma_m > \gamma$ , то есть

$$x_m - \ln m > \gamma. \tag{**}$$

Складывая неравенства (\*) и (\*\*), получаем

$$x_n - x_{nm} + x_m > \gamma,$$

что и требовалось доказать.

в) Чтобы вычислить  $\gamma$  с точностью до 0,1, воспользуемся результатами решения задачи.

Так как  $\gamma_n < \gamma < \Gamma_n$ , то, взяв  $n = 100$  членов последовательности, получим  $0,57 < \gamma < 0,58$ , поэтому  $\gamma \approx 0,5$ .

Приближенное значение числа  $\gamma$  известно:  $\gamma = 0,577\dots$

*В. Ясикский*

Ф589. В цилиндре объемом 10 л. закрытом поршнем и помещенном в термостате с температурой  $40^\circ\text{C}$ , находится по 0,05 моля двух веществ. Определить массу жидкости в цилиндре после изотермического сжатия, вследствие которого объем под поршнем уменьшается в 3 раза. Давление насыщенных паров первой жидкости при температуре  $40^\circ\text{C}$  равно  $0,7 \cdot 10^4$  Па, второй —  $1,7 \cdot 10^4$  Па. Начертить изотерму сжатия. Молярная масса первой жидкости —  $1,8 \cdot 10^{-2}$  кг/моль, второй —  $4,6 \cdot 10^{-2}$  кг/моль.

Если вначале оба вещества в сосуде находятся в газообразном состоянии, то давление в сосуде равно сумме парциальных давлений газов:  $p = p_1 + p_2$ , где  $p_1 = \nu_1 RT/V$ ,  $p_2 = \nu_2 RT/V$  ( $\nu_1 = \nu_2 = 0,05$  моля,  $V = 10$  л,  $T = 313$  К). Подставив числовые данные, найдем

$$p_1 - p_2 \approx 1,3 \cdot 10^4 \text{ Па.}$$

Мы видим, что  $p_1$  больше, чем давление  $p_{н.1}$  насыщенных паров первой жидкости ( $p_{н.1} = 0,7 \cdot 10^4$  Па). Следовательно, вначале часть первого газа сконденсирована, и парциальное давление этого газа равно  $p_{н.1}$ . Так как  $p_2 < p_{н.2} = 1,7 \cdot 10^4$  Па, второе вещество действительно находится в газообразном состоянии и его парциальное давление равно  $p_2$ .

Таким образом, вначале давление в сосуде равно

$$p_0 = p_{н.1} + p_2 \approx 2 \cdot 10^4 \text{ Па.}$$

При сжатии газов давление первого газа будет оставаться неизменным и равным  $p_{н.1}$ . Давление второго газа при изотермическом сжатии будет увеличиваться до тех пор, пока не станет равным  $p_{н.2}$ . Посмотрим, при каком объеме  $V'$  давление второго газа станет равным  $p_{н.2}$ :

$$p_{н.2} V' = \nu_2 RT \Rightarrow V' = \frac{\nu_2 RT}{p_{н.2}} \approx 7,6 \text{ л.}$$

Следовательно, давление в сосуде изотермически увеличивается при уменьшении объема до 7,6 л. Дальнейшее уменьшение объема до  $V'' = 3 \frac{1}{3}$  л происходит при постоянном давлении

$$p' = p_{н.1} + p_{н.2} = 2,4 \cdot 10^4 \text{ Па.}$$

График зависимости  $p(V)$  приведен на рисунке.

Найдем массу жидкости в объеме  $V''$ . Числа молей первого и второго газов в объеме  $V''$  равны, соответственно,

$$\nu'_1 = \frac{p_{н.1} V''}{RT} \approx 9 \cdot 10^{-3} \text{ моль,}$$

$$\nu'_2 = \frac{p_{н.2} V''}{RT} \approx 2,2 \cdot 10^{-2} \text{ моль.}$$

Следовательно, в жидком состоянии находятся  $\nu''_1 = \nu_1 - \nu'_1 \approx 4,1 \cdot 10^{-2}$  молей первого вещества и  $\nu''_2 = \nu_2 - \nu'_2 \approx 2,8 \cdot 10^{-2}$  молей второго вещества.

Масса жидкости в сосуде равна  $m = \nu''_1 M_1 + \nu''_2 M_2$ . Подставляя числовые данные ( $M_1 = 1,8 \cdot 10^{-2}$  кг/моль,  $M_2 = 4,6 \cdot 10^{-2}$  кг/моль), получаем

$$m \approx 2,03 \text{ г.}$$

И. Слободецкий

Ф590. При движении трамвая по горизонтальному участку пути с некоторой скоростью его двигатель потребляет ток  $I_0 = 100$  А, при этом КПД двигателя равен  $\eta = 0,9$ . При движении трамвая по наклонному участку пути вниз с той же скоростью ток в двигателе равен нулю (двигатель выключен). Какой ток будет потреблять двигатель при движении трамвая по тому же участку пути вверх с той же скоростью?

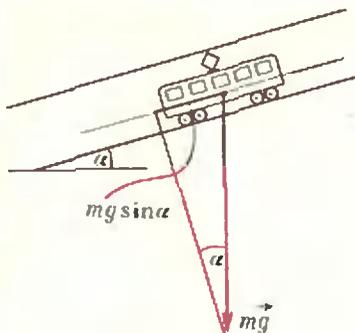
Обозначим  $U_0$  напряжение в контактной сети. При движении трамвая по горизонтальному участку пути его двигатель потребляет от сети мощность  $N = U_0 I_0$ . Часть мощности, равная  $I_0^2 R$ , теряется в виде тепла в обмотке двигателя и подводящих проводах ( $R$  — сопротивление всей цепи); полезная мощность двигателя равна

$$N' = U_0 I_0 - I_0^2 R = \eta U_0 I_0. \quad (*)$$

Так как трамвай движется равномерно, эта мощность теряется в виде тепла из-за наличия трения, сопротивления воздуха и т. п. Иными словами, мощность  $N'$  равна мощности сил сопротивления.

При движении вниз по уклону работу совершает сила тяжести, проекция которой на ось, параллельную дороге, равна  $mg \sin \alpha$  (см. рис.). Мощность этой силы равна  $mgv \sin \alpha$ , где  $v$  — скорость трамвая. Так как трамвай движется равномерно, эта мощность равна мощности сил сопротивления, то есть равна  $N'$ :

$$mgv \sin \alpha = N' = \eta U_0 I_0.$$



Пусть  $I_1$  — ток, потребляемый двигателем при движении трамвая вверх по уклону с постоянной скоростью. Мощность  $N_1 = U_0 I_1$ , потребляемая двигателем, расходуется на нагревание обмотки двигателя и подводных проводов ( $I_1^2 R$ ), на преодоление сил сопротивления ( $N' = \eta U_0 I_0$ ) и на работу против силы тяжести ( $\eta U_0 I_0$ ), то есть

$$U_0 I_1 = I_1^2 R + 2\eta U_0 I_0.$$

Отсюда

$$I_1 = \frac{U_0 \pm \sqrt{U_0^2 - 8R\eta U_0 I_0}}{2R}.$$

Подставив сюда  $R$ , найденное из (\*),

$$R = \frac{U_0}{I_0} (1 - \eta),$$

получим

$$I_1 = I_0 \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8\eta(1 - \eta)}}{2(1 - \eta)}.$$

Подставляя численные значения  $I_0 = 100$  А и  $\eta = 0.9$ , находим

$$I_1 \approx 235 \text{ А или } I_1 \approx 765 \text{ А.}$$

Ответ зависит от конструктивных особенностей двигателя. Очевидно, двигатель делает так, чтобы он потреблял наименьший возможный ток, то есть  $I_1 \approx 235$  А.

В. Скороваров

**Ф591.** Два цилиндра различных радиусов вращаются в противоположные стороны вокруг горизонтальных параллельных осей с угловой скоростью  $\omega_1 = \omega_2 = \omega = 2$  рад/с. Расстояние по горизонтали между осями  $L = 4$  м. В момент времени  $t = 0$  на цилиндры перпендикулярно осям кладут балку так, что она находится в горизонтальном положении и одновременно касается обеих поверхностей вращения, а ее центр масс расположен точно над осью цилиндра меньшего радиуса ( $r = 0.25$  м), как указано на рисунке 1. Рассчитать и проиллюстрировать графически зависимость горизонтального смещения балки от времени, начиная с момента  $t = 0$ . Коэффициент трения  $\mu = 0.05$ , ускорение свободного падения принять равным  $g = 10.0$  м/с<sup>2</sup>.

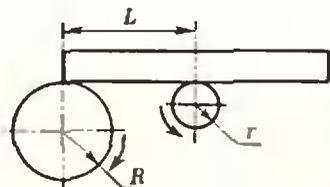


Рис. 1.

На балку в горизонтальном направлении действуют две силы трения  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , направленные навстречу друг другу (рис. 2). Вначале при проскальзывании балки относительно цилиндров  $F_1 = \mu N_1$  и  $F_2 = \mu N_2$ , где  $N_1$  и  $N_2$  — силы реакции цилиндров ( $F_1, F_2, N_1, N_2$  — модули соответствующих векторов). Обозначим  $x$  координату центра масс балки — точки  $c$  (ось  $X$  горизонтальна, начало координат находится посередине между осями цилиндров (см. рис. 2)). Так как балка не поворачивается относительно точки  $A$ ,

$$mg \left( \frac{L}{2} + x \right) - N_2 L = 0,$$

откуда

$$N_2 = mg \left( \frac{1}{2} + \frac{x}{L} \right).$$

Так как

$$N_1 + N_2 = mg,$$

$$N_1 = mg - N_2 = mg \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{L} \right).$$

Таким образом,

$$F_1 = \mu mg \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{L} \right), \quad F_2 = \mu mg \left( \frac{1}{2} + \frac{x}{L} \right).$$

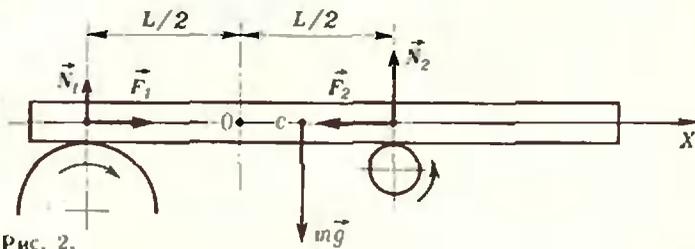


Рис. 2.

Запишем уравнение движения балки в проекциях на ось  $X$ :

$$ma = F_1 - F_2 = -\frac{2\mu mg}{L}x.$$

Из этого уравнения следует, что в начальный момент движение балки происходит по гармоническому закону

$$x(t) = \frac{L}{2} \cos 2\nu t,$$

где

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\mu g}{L}}.$$

(Амплитуда колебаний балки равна первоначальной координате ее центра масс.)

Модуль скорости  $\vec{v}$  балки увеличивается со временем по закону

$$v(t) = \nu L \sin 2\nu t$$

и в некоторый момент времени  $t_1$  становится равным линейной скорости  $v$  правого цилиндра. Так как  $v = \omega r$ ,

$$\omega r = \nu L \sin 2\nu t_1.$$

Отсюда найдем  $t_1$ :

$$t_1 = \frac{1}{2\nu} \arcsin \frac{\omega r}{\nu L}.$$

Так как в момент времени  $t = t_1$  исчезнет проскальзывание между правым цилиндром и балкой, сила трения  $\vec{F}_2$  с этого момента будет силой трения покоя.

Сила трения покоя компенсирует силы, направленные параллельно плоскости возможного скольжения. Следовательно, начиная с момента времени  $t_1$ , балка будет двигаться с постоянной скоростью  $v = \omega r$ . Такое движение будет продолжаться до тех пор, пока сила трения покоя не достигнет максимального возможного значения, равного силе трения скольжения. Это произойдет в момент времени  $t_2$ , когда координата центра масс балки будет равна нулю и сила трения  $\vec{F}_1(t_2)$  станет равной максимальной возможной силе трения покоя  $\vec{F}_2(t_2)$  между балкой и маленьким цилиндром. Время  $t_2$  можно определить из соотношения

$$\omega r(t_2 - t_1) = x(t_1) \equiv \frac{L}{2} \cos 2\nu t_1;$$

отсюда

$$t_2 = t_1 + \frac{1}{2\omega r} \cos 2\nu t_1.$$

Начиная с момента времени  $t_2$ , проекция на ось  $X$  смещения центра масс балки изменяется во времени по закону

$$x(t) = -\frac{\omega r}{2\nu} \sin(2\nu(t - t_2));$$

проекция скорости балки изменяется во времени как

$$\dot{x}(t) = -\omega r \cos(2\nu(t - t_2))$$

(движение с ненулевой начальной скоростью и нулевым начальным смещением).

Поскольку  $r < R$ , максимальная скорость балки в установившемся колебательном процессе меньше линейной скорости вращения поверхности большего цилиндра и не превышает линейной скорости вращения поверхности меньшего цилиндра ( $u_{\max} = \omega r$ ). Поэтому, начиная с момента времени  $t_2$ , равномерное движение балки невозможно. Балка будет совершать гармонические колебания с амплитудой  $A = \frac{\omega r}{2\nu}$  и периодом  $T = \frac{1}{\nu}$ .

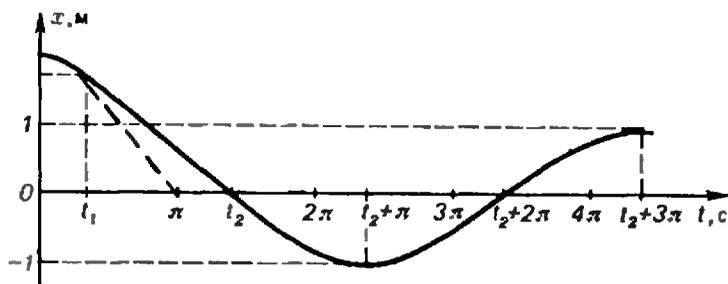


Рис. 3.

Используя числовые данные задачи, находим:

$$v = 0,08 \text{ с}^{-1}, \quad t_1 = \frac{\pi}{3} \text{ с}; \quad x(t_1) = \sqrt{3} \text{ м};$$

$$t_2 = \left( \frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3} \right) \text{ с}; \quad T = 4\pi \text{ с}; \quad A = 1 \text{ м}.$$

График движения центра масс доски приведен на рисунке 3.

Д. Фурторский

**Ф592.** Имеются два теплоизолированных сосуда. В первом из них находится 5 л воды при температуре  $t_1 = 60^\circ\text{C}$ . во втором — 1 л воды при температуре  $t_2 = 20^\circ\text{C}$ . Вначале часть воды перелили из первого сосуда во второй. Затем, когда во втором сосуде установилось тепловое равновесие, из него в первый сосуд отлили столько воды, чтобы ее объема в сосудах стали равны первоначальным. После этих операций температура воды в первом сосуде стала равной  $t = 59^\circ\text{C}$ . Сколько воды переливали из первого сосуда во второй и обратно?

В результате двух переливаний масса воды в первом сосуде осталась прежней, а ее температура уменьшилась на  $\Delta t_1 = 1^\circ\text{C}$ . Следовательно, энергия воды в первом сосуде уменьшилась на

$$\Delta Q = c_w m_1 \Delta t_1,$$

где  $c_w$  — теплоемкость воды,  $m_1$  — масса воды в первом сосуде.

На величину  $\Delta Q$  увеличилась энергия воды во втором сосуде. Поэтому

$$\Delta Q = c_w m_2 \Delta t_2$$

( $m_2$  — первоначальная масса воды во втором сосуде). Следовательно,

$$c_w m_1 \Delta t_1 = c_w m_2 \Delta t_2,$$

откуда

$$\Delta t_2 = \frac{m_1}{m_2} \Delta t_1 = 5^\circ\text{C}.$$

Температура воды во втором сосуде равна  $t'_2 = t_2 + \Delta t_2 = 25^\circ\text{C}$ . Такой она стала после переливания из первого сосуда во второй некоторой массы воды  $\Delta m$ , имеющей температуру  $t_1$ . Запишем уравнение теплового баланса:

$$c_w \Delta m (t_1 - t'_2) = c_w m_2 (t'_2 - t_2).$$

Отсюда находим  $\Delta m$ :

$$\Delta m = m_2 \frac{t'_2 - t_2}{t_1 - t'_2} = \frac{1}{7} \text{ кг}.$$

А. Зильберман

**Ф593.** Обруч радиуса  $r$  скатывается с высоты  $H$  ( $r \ll H$ ) без проскальзывания по наклонной плоскости с углом  $\alpha$  при основании и абсолютно упруго ударяется о гладкую стенку, перпендикулярную наклонной плоскости (рис. 1). На какую высоту поднимается обруч после удара, если коэффициент трения скольжения равен  $\mu$ ?

Обруч скатывается с наклонной плоскости без проскальзывания. Определим скорость  $v$  его поступательного движения в момент удара о стенку. В этот момент модуль линейной скорости точек обруча также равен  $v$ , и полная кинетическая энергия обруча есть сумма энергии вращательного и поступательного движений, то есть

$$K = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = mv^2$$

( $m$  — масса обруча). Из закона сохранения энергии, учитывая, что  $r \ll H$ , имеем

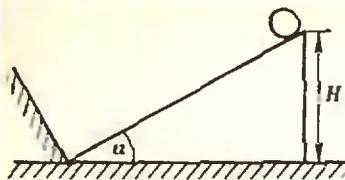


Рис. 1.

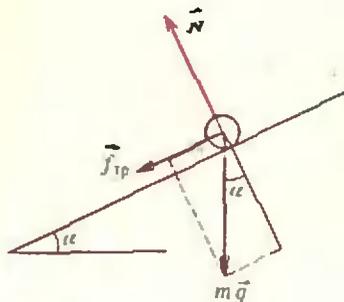


Рис. 2.

$$mgH = mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{gH}.$$

Так как удар обруча о стенку абсолютно упругий, направление поступательного движения обруча изменится на противоположное. Поскольку стенка гладкая, после удара обруч по-прежнему будет вращаться против часовой стрелки (см. рис. 1). Следовательно, после удара обруч будет скользить вверх по наклонной плоскости, вращаясь против часовой стрелки.

Когда обруч достигнет максимальной высоты подъема, направление вращения его не изменится. Действительно, время  $\tau_1$ , за которое прекратится вращение обруча против часовой стрелки, согласно второму закону Ньютона определяется условием

$$f_{тр}\tau_1 = \tau_{II}mg \cos \alpha = mv,$$

где  $f_{тр}$  — сила трения (рис. 2). Отсюда

$$\tau_1 = \frac{v}{\mu g \cos \alpha}.$$

Время  $\tau_2$ , за которое обруч поднимется на максимальную высоту, при неизменном направлении вращения определяется условием

$$(mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha)\tau_2 = mv,$$

откуда

$$\tau_2 = \frac{v}{g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}.$$

Таким образом,  $\tau_2 < \tau_1$ , и в момент максимального подъема обруч будет вращаться по-прежнему против часовой стрелки.

Движение обруча вверх по наклонной плоскости равнозамедленное. Путь, проходимый им до полной остановки, равен

$$l = v_{ср}\tau_2 = \frac{v}{2}\tau_2 = \frac{H}{2(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}.$$

Максимальная высота подъема обруча после удара равна

$$h = l \sin \alpha = \frac{H \sin \alpha}{2(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}.$$

М. Бородавский

Ф594. Представьте себе, что вы находитесь в жарко натопленной бане, а за окном — мороз. Куда пойдет пар, если вы откроете форточку?

Пар пойдет и на улицу, и внутрь бани. Действительно, в бане содержание паров воды в воздухе можно считать насыщенным. Точка росы при высокой температуре выше чем при низкой. Если открыть форточку, теплый воздух пойдет на улицу, и пары воды, которые он вынесет за окно, на морозе сконденсируются. Наблюдатель с улицы увидит выходящие через форточку клубы пара, поднимающиеся вверх. Через форточку внутрь бани будет проникать холодный воздух. Попадающие в его струи пары воды из соседних теплых слоев воздуха будут конденсироваться. Этот холодный воздух тяжелее окружающих слоев горячего воздуха, и наблюдатель внутри бани увидит, что клубы пара из форточки «падают» на пол.

А. Варламов

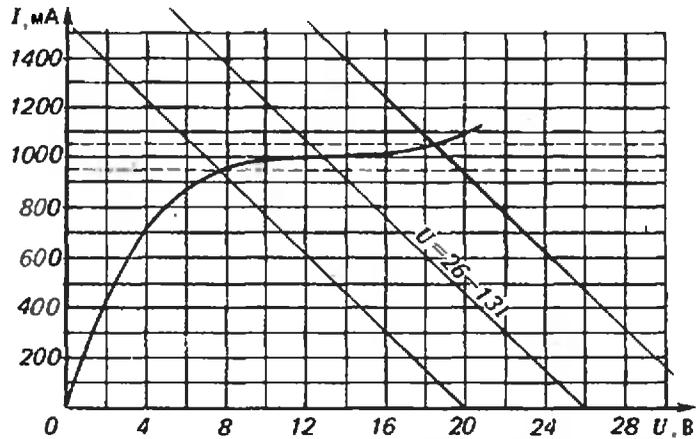
Ф595. На рисунке изображена зависимость тока от напряжения для стабилизатора постоянного тока — барретора. Барретор подключен последовательно с нагрузочным сопротивлением  $R = 13 \text{ Ом}$  к батарее с ЭДС  $\mathcal{E} = 26 \text{ В}$ . В каких пределах может измениться

Так как барретор подключен к батарее последовательно с нагрузочным сопротивлением, напряжение на барреторе определяется соотношением

$$U = \mathcal{E} - IR, \quad (**)$$

где  $I$  — ток, текущий через барретор. Соотношение (\*\*\*) — уравнение прямой линии  $U(I)$ , которая называется нагрузочной прямой. Построим на рисунке нагрузочную прямую

ЭДС батареи, если ток нагрузки не должен изменяться более чем на 50 мА?



$U = 26 - 13I$ . Точка пересечения нагрузочной прямой с вольт-амперной характеристикой барретора определяет ток, текущий по цепи:  $I_0 = 1000$  мА. Согласно условию задачи допустимые предельные значения тока равны 950 мА и 1050 мА. Построим на графике прямые  $I_1 = 950$  мА и  $I_2 = 1050$  мА. Они пересекают вольт-амперную характеристику барретора. Проведем через точки пересечения нагрузочные прямые. (Поскольку наклон нагрузочной прямой зависит только от сопротивления  $R$ , которое по условию задачи остается неизменным, все нагрузочные прямые параллельны.) Эти нагрузочные прямые пересекают ось  $U$  в точках  $U_1 = \mathcal{E}_1 = 20$  В и  $U_2 = \mathcal{E}_2 = 32$  В. Таким образом, при изменении ЭДС батареи в интервале от  $\mathcal{E}_1 = 20$  В до  $\mathcal{E}_2 = 32$  В ток в цепи будет изменяться в интервале от  $I_1 = 950$  мА до  $I_2 = 1050$  мА, то есть будет оставаться неизменным с точностью  $\pm 5\%$ .

С. Козел

**Ф596.** Промежуток времени между двумя последовательными затмениями спутника Юпитера Ио в течение года изменяется от минимального значения, равного 42 ч 28 мин 21 с, до максимального, равного 42 ч 28 мин 51 с. Пользуясь этими данными, определить скорость света, считая, что Земля движется вокруг Солнца по круговой орбите с радиусом 150 млн. км. Радиус орбиты Юпитера гораздо больше радиуса орбиты Земли, а скорость движения Юпитера гораздо меньше скорости движения Земли.

Так как радиус орбиты Юпитера гораздо больше радиуса земной орбиты, а скорость Юпитера намного меньше скорости Земли, можно считать, что в течение года взаимное расположение Земли и Юпитера практически не меняется и изменения в кажущейся продолжительности периода обращения Ио связаны только с изменением направления скорости Земли. Наблюдения отклонения кажущегося периода от истинного будут наблюдаться, когда скорость Земли направлена по прямой, соединяющей Землю и Юпитер.

Минимальный промежуток времени  $t_1 = 42$  ч 28 мин 21 с между двумя последовательными затмениями Ио наблюдается в то время, когда Земля движется к Юпитеру, а максимальный  $t_2 = 42$  ч 28 мин 51 с — когда Земля движется от Юпитера. В первом случае за время  $l$ , соответствующее истинному периоду обращения Ио, Земля приблизится к Юпитеру на расстояние  $l = v_3 t$  ( $v_3$  — скорость Земли), и наблюдаемый период затмения Ио будет меньше истинного на время

$$l - t_1 = v_3 t / c,$$

где  $c$  — скорость света. Учитывая, что  $l = (t_1 + t_2)/2$ ,  $l - t_1 = (t_2 - t_1)/2$  и  $v_3 = 2\pi R / T$  ( $R = 150$  млн. км — радиус орбиты Земли,  $T = 365$  суток — период обращения Земли), из последнего равенства получаем

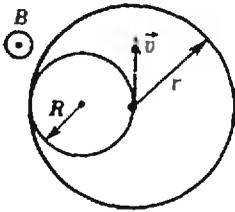
$$t_2 - t_1 = \frac{2\pi R}{T} (t_2 + t_1) / c,$$

откуда

$$c = \frac{2\pi R}{T} \frac{t_2 + t_1}{t_2 - t_1} \approx 3,03 \cdot 10^8 \text{ км/с.}$$

В. Белонучкин

Φ597. Магнетрон представляет собой двухэлектродную электронную лампу с цилиндрическим анодом радиуса  $r$ , вдоль оси которого расположена тонкая проволока — катод. При нагревании катода он испускает электроны с энергией  $E$ . Магнетрон помещают в однородное магнитное поле, параллельное его оси. При каком значении индукции магнитного поля ток в анодной цепи станет равным нулю?



Φ598. Сосуд глубины  $H$  заполнен жидкостью, плотность которой линейно меняется от  $\rho_0$  на поверхности до  $\rho$  на дне сосуда. В сосуд погружают два маленьких шарика одинакового объема  $V$ , связанных тонкой невесомой нерастяжимой нитью длины  $l$ . Плотность одного шарика  $\rho_1$ , плотность другого —  $\rho_2$ . Через некоторое время шарики устанавливаются так, как показано на рисунке. Найти силу натяжения нити.

Скорость электрона, вылетающего из катода с энергией  $E$ , равна  $|\vec{v}| = \sqrt{2E/m}$ , где  $m$  — масса электрона. В однородном магнитном поле с индукцией  $\vec{B} \perp \vec{v}$  электрон движется по окружности радиуса  $R$  (см. рис.). Центробежное ускорение  $|\vec{a}| = v^2/R$  электрону сообщает сила Лоренца  $|\vec{F}| = e|\vec{B}||\vec{v}|$  ( $e$  — заряд электрона), то есть

$$\frac{mv^2}{R} = e|\vec{B}||\vec{v}|, \quad \text{или} \quad \frac{2E}{R} = e|\vec{B}|\sqrt{\frac{2E}{m}}$$

Отсюда

$$R = \frac{\sqrt{2Em}}{e|\vec{B}|}$$

Ток в анодной цепи отсутствует, когда электроны не попадают на анод, то есть при  $R < r/2$  (см. рис.), или

$$\frac{r}{2} > \frac{\sqrt{2Em}}{e|\vec{B}|}$$

Это условие выполняется при

$$|\vec{B}| > \frac{2\sqrt{2Em}}{re}$$

При  $|\vec{B}| = 2\sqrt{2Em}/re$  ток в цепи прекращается

И. Слободецкий

Силы, действующие на каждый шарик, это сила тяжести  $m\vec{g}$ , сила натяжения нити  $\vec{T}$  и сила Архимеда  $|\vec{F}| = \rho_x gV$ , где  $\rho_x$  — плотность жидкости на глубине  $x$ , на которой находится шарик (см. рис.). Поскольку плотность меняется линейно по мере увеличения глубины сосуда, на любой глубине  $x$  плотность жидкости равна  $\rho_x = \rho_0 + \frac{\rho - \rho_0}{H}x$ .

Запишем условия равновесия для каждого шарика (в проекциях на ось  $X$ ):

$$\begin{aligned} m_1 g + T - F_1 &= \rho_1 gV + T - \left( \rho_0 + \frac{\rho - \rho_0}{H}x_1 \right) gV = 0, \\ m_2 g - T - F_2 &= \rho_2 gV - T - \left( \rho_0 + \frac{\rho - \rho_0}{H}x_2 \right) gV = 0. \end{aligned}$$

где  $x_1, x_2$  — глубины погружения шариков. Решая эти уравнения совместно, находим

$$T = \frac{Vg}{2} \left( \rho_2 - \rho_1 - \frac{\rho - \rho_0}{H}l \right)$$

Конфигурация, указанная на рисунке, возможна при  $T > 0$ ,  $x_1 > 0$ ,  $x_2 < H$ . Если представить себе, что шарики не связаны между собой, а  $\rho_0 < \rho_1 < \rho$  и  $\rho_0 < \rho_2 < \rho$ , то первый шарик установится на глубине, где плотность жидкости равна плотности шарика:

$$\rho_1 = \rho_0 + \frac{\rho - \rho_0}{H}x_1;$$

аналогично будет вести себя и второй шарик:

$$\rho_2 = \rho_0 + \frac{\rho - \rho_0}{H}x_2.$$

Расстояние между шариками в этом случае будет равно

$$x_2 - x_1 = \frac{(\rho_2 - \rho_1)H}{\rho - \rho_0}.$$

Если длина нити  $l$  больше  $x_2 - x_1$ , то нить не будет натянута.

О. Овчинников

## Письмо в редакцию

В «Кванте» № 10 за 1978 год было напечатано решение задачи М478. Вот ее условие:

*В волейбольном турнире каждые две команды сыграли по одному матчу.*

а) *Докажите, что если для любых двух команд найдется третья, которая выиграла у этих двух, то число команд не меньше семи.*

б) *Постройте пример такого турнира из семи команд.*

в) *Докажите, что если для любых трех команд найдется такая, которая выиграла у этих трех, то число команд не меньше 15.*

В решении указывалось, что если (при данном  $m$ ) для любых  $m$  команд найдется команда, победившая их, то число команд не меньше  $2^{m+1}-1$  (это доказывается индукцией по  $m$ ), и ставился вопрос, для каких  $m$  эта оценка не улучшаема, то есть для каких  $m$  такой турнир из  $2^{m+1}-1$  команд существует.

После публикации решения задачи М478 в редакцию «Кванта» пришло письмо из Венгрии от профессора Л. Цирмаша. Он сообщил, что аналогичные задачи о турнирах рассматривались венгерскими математиками Г. и Е. Секерешами еще в 1965 году. Они доказали, что если для любых  $m$  команд найдется выигравшая у них команда, то число ко-

манд не меньше  $(m+2)2^{m-1}$ .

Мы попросили автора задачи М478 С. Конягина прокомментировать этот результат. Вот что он нам ответил.

Суть рассуждений Г. и Е. Секерешей заключалась в следующем. Рассмотрим произвольную группу  $A$  из  $m-1$  команд. Пусть  $B$  — множество тех команд, которые победили все команды из группы  $A$ . Если число команд в группе  $B$  не больше  $m$ , то найдется команда  $c$ , выигравшая у команд из  $B$ . Присоединяя к командам группы  $A$  команду  $c$ , мы видим, что для полученной группы из  $m$  команд не существует команды, одержавшей победу над всеми командами этой группы, что противоречит условию. Следовательно, для любой группы из  $m-1$  команд число команд, выигравших у них, не меньше  $m+1$ . Теперь заметим, что, повторяя рассуждение, приведенное в решении задачи М478, индукцией по  $n$  можно доказать справедливость более общего утверждения:

*Если для любых  $n$  команд найдется по крайней мере  $k$  команд, выигравших у этих  $n$  команд, то число команд в турнире не меньше  $2^n(k+1)-1$ .*

Применяя последнее утверждение к  $n=m-1$ ,  $k=m+1$ , мы получаем, что число команд, участвующих в турнире, не меньше  $2^m(m+2)-1$ .

В частности, при  $m>2$  в таком турнире не может быть  $2^{m+1}-1$  команд, что дает отрицательный ответ на вопрос, поставленный в решении задачи М478.

В 1963 году известный венгерский математик Пауль Эрдеш доказал теорему, из которой следует, что турнир из  $2^m m^2$  команд, в котором для любых  $m$  команд найдется команда, выигравшая у них, существует при  $m>2$ . Таким образом, для минимального числа  $f(m)$  команд в таком турнире при  $m>2$  справедлива оценка  $2^{m-1}(m+2)-1 < f(m) < 2^m m^2$ .

Существенно улучшить ее очень трудно, но может быть, кому-либо из читателей «Кванта» удастся это сделать?

В заключение мне хотелось бы предложить читателям «Кванта» еще одну задачу:

*Пусть  $k$  — натуральное число,  $4k+3$  — простое число. Присвоим  $4k+3$  командам номера от 1 до  $4k+3$ .*

а) *Покажите, что существует турнир этих команд, в котором команда с номером  $m$  тогда и только тогда выиграла у команды с номером  $n$ ,  $m \neq n$ , когда уравнение*

$$m - n = p - r(4k+3)$$

*имеет решение в целых числах  $p$  и  $r$ .*

б) *Покажите, что в этом турнире для любых двух команд найдется по крайней мере  $k$  команд, выигравших у этих двух.*

в) *Проверьте, что при  $k=4$  в соответствующем турнире 19 команд для любых трех найдется четвертая, выигравшая у этих трех.*

Этот пример, построенный Г. и Е. Секерешами, показывает неулучшаемость их оценки при  $m=3$ .

### Внимание, читатели!

В условии задачи М630, опубликованной в «Кванте» (1980, № 6, с. 19), допущена неточность. Первые два предложения должны быть таковы:

*На плоскости даны окружность  $\gamma$  и точка  $K$ . Проведем через произвольные точки  $P, Q$  окружности  $\gamma$  и точку  $K$  окружность.*

Срок присылки решения этой задачи продлевается до 15 сентября 1980 года.

## Спрашивайте — отвечаем

*«Недавно я совершенно случайно увидел колебания струны на фоне телевизионного экрана. Когда струна была расположена перпендикулярно линиям образующим изображение экрана (то есть вертикально), участок струны попадающий на изображение экрана, имел форму четкой синусоиды, которая двигалась сверху вниз. Держая струну с разной силой, я получал разные «графики», и не только синусоиды, но и кривые сложной формы скорее всего и являющиеся графиками данного колебания струны. Прошу вас объяснить это явление.»*

(из письма читателя  
А. Перевезенцева)

**Мы думаем, что ответ на этот вопрос будет интересен читателям «Кванта». Отвечает консультант отдела физики нашего журнала А. Володин.**

Глаз человека обладает свойством «запоминать» изображение на короткое время — порядка 0,1 с. При освещении какого-либо объекта вспышкой света, длящейся меньше 0,05 с, у человека создается зрительный образ как бы в виде мгновенной фотографии объекта. Такое «фотографирование» вы могли наблюдать во время вечерней или ночной грозы. Каждая вспышка молнии впечатляет застывшую картину местности.

При освещении звучащей, а следовательно, колеблющейся струны вспышкой света короче 0,01 с струна будет представляться изогнутой в форме синусоиды. (Освещение обычным непрерывным светом создает нечеткую, размазанную картину колеблющейся струны.) Теперь представим себе, что короткие вспышки света следуют одна за другой, повторяясь периодически через 0,02—0,1 с. В этом случае в зрительном аппарате человека получается серия «мгновенных фотографий», сливающихся одна с другой. В результате создается впечатление медленного колебания струны. Если частота следования вспышек совпадает с частотой колебания струны или кратна ей, то струна освещается каждый раз в одном и том же положении и выглядит неподвижной синусоидой.

При небольшом отличии частот за промежуток времени между вспышками струна займет положение, близкое к первоначальному, но не совпадающее с ним. В этом случае создается впечатление медленного колебания струны.

Освещение в виде серии коротких периодически повторяющихся вспышек называется стробоскопическим. Такое освещение применяется для изучения периодических процессов.

В опыте, описанном А. Перевезенцевым, источником стробоскопического освещения служил экран телевизора. Изображение на экране «рисует» электронным лучом строка за строкой (всего 625 строк), и когда прочерчен весь экран, луч гасится, возвращается на прежнее место и начинает рисовать следующий кадр изображения. Кадры меняются каждые 0,04 с. Таким образом, экран телевизора можно считать источником стробоскопического освещения с частотой следования «вспышек» 25 Гц.

То, что при горизонтальном и вертикальном расположении струны наблюдаемые картины различаются, — следствие неоднородности источника освещения. В самом деле, горизонтальная струна рассматривается на фоне отдельной строки. Вертикальная — на фоне всех строк. В первом случае вся струна освещается «вспышкой» длительностью  $\sim 6 \cdot 10^{-4}$  с (это время яркого свечения строки). На фоне одной строки наблюдается определенная фаза колебания струны. Заметим, что картина будет четкой лишь в случае строгой параллельности строки и струны. Во втором случае участки струны освещаются последовательными вспышками-строками, и наблюдаются разные фазы колебания струны.

Свойством стробоскопического источника света обладают также киноэкран и лампы «дневного» света.

### Задачи

1. а) Найдите трехзначное число, равное кубу суммы его цифр.  
 б) Найдите четырехзначное число, равное четвертой степени суммы его цифр.

в) Существует ли пятизначное число, равное пятой степени суммы его цифр?

2. Однажды я возвращался из воскресной поездки за город. В вагоне поезда было очень душно. Я вышел в тамбур, но и там было не лучше. Но вот поезд замедлил ход, и из щелей вентиляции подул свежий ветерок. Поезд остановился, ветерок затих, вновь возник во время следующего торможения, и так на всех станциях. Откуда он брался? В каком тамбуре вагона я находился — переднем или заднем? Замечу еще, что дверь из тамбура в вагон и все окна в вагоне были открыты.

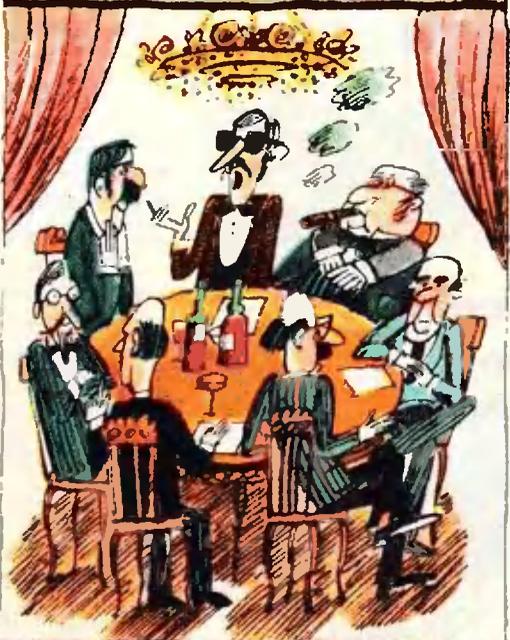
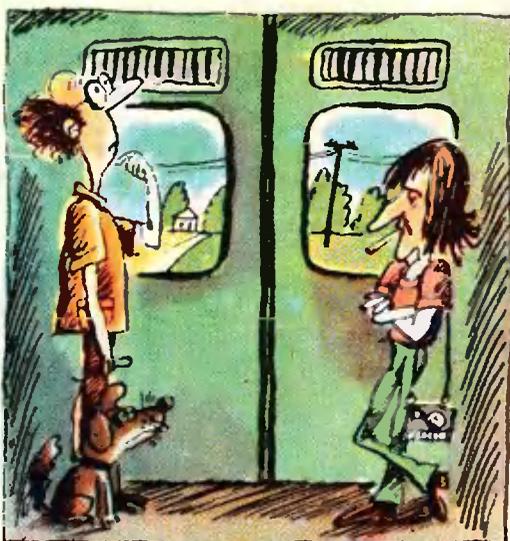
3. Можно ли из двадцати монет достоинством в 5, 20 и 50 копеек составить 5 рублей?

4. За круглым столом сидят семь дипломатов. Они должны провести по одной беседе друг с другом. Два дипломата будут беседовать только в том случае, если окажутся рядом. После того как каждый из дипломатов закончит переговоры со своими соседями, дипломаты встанут и занимают новые положения для продолжения бесед.

Можно ли организовать встречу дипломатов так, чтобы при каждом новом размещении за столом у каждого из них были бы новые соседи?

5. Разделите круглый циферблат часов на три части так, чтобы сумма чисел в каждой части была равна 17.

Эти задачи нам предложили Ф. Баргенов, Г. Кареев, А. Савин, Я. Темралиев, Ю. Чернышев



Д. Алексеев

## ФИЗИКА В КАНИКУЛЫ



Близится к концу летние школьные каникулы. Безусловно, каждому из вас знакомо ощущение волнения перед началом нового учебного года: что-то ждет нас впереди?

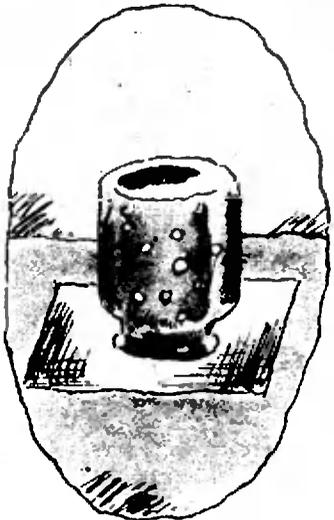
Может быть, вы уже «устали» отдыхать и вам хочется поскорее начать заниматься? Не торопитесь открывать учебники. Понаблюдайте за вещами и явлениями, вас окружающими. Вы увидите много интересного и полезного. Наверное, не все вы сможете объяснить сейчас. Не расстраивайтесь. Постарайтесь хорошенько запомнить непонятное, чтобы затем, в новом учебном году, все выяснить.

### Как возникают капельки росы?

Как вы, конечно, знаете, воздух представляет собой смесь различных газов. Прежде всего это азот и кислород. Есть в воздухе и водяные пары. Правда, их вклад невелик: плотность паров воды в сотни раз меньше плотности воздуха. Но их присутствие определяет так называемую влажность воздуха. Самочувствие человека, рост и развитие растений, работа многих точных приборов и тому подобное сильно зависят от влажности воздуха.

Оказывается, количество водяных паров в воздухе не может быть произвольным. Существует предельная масса воды, которую при данной температуре можно испарить внутрь  $1 \text{ м}^3$  воздуха. При дальнейшем добавлении происходит конденсация водяных паров, образуются водяные капельки. Чем выше температура, тем больше влаги может содержаться в воздухе.

Представьте себе, что днем количество воды в воздухе достигло предельного значения. Наступила ночь. Температура воздуха понизилась,



максимальная масса воды в воздухе уменьшилась. Очевидно, избыточное количество водяных паров образует водяные капельки — росу или туман.

Теперь проведите несколько самостоятельных наблюдений.

Сначала сделайте опыт, не требующий много времени.

Возьмите стеклянную банку и поднесите ее горлышко к носику кипящего чайника. Поставьте банку на стол вверх дном. Через некоторое время воздух в ней охладится, и выпадет обильная роса.

Пока воздух в банке охлаждается, посмотрите на носик кипящего чайника. Непосредственно у его края нет никакого видимого «пара». Почему? Пар, в правильном значении этого слова, увидеть вообще нельзя, потому что это прозрачная среда, как и большинство других газов. То, что обычно называют «паром», это туман. На некотором расстоянии от носика кипящего чайника его действительно можно увидеть.

Несколько более длительный опыт можно выполнить на улице. Днем поставьте банку на землю вверх дном и слегка присыпьте горлышко землей. Ночью воздух станет более холодным, на стенках банки появится роса, в чем вы можете убедиться рано утром.

### «Кубарь» и «Ио-ио»

Очень интересные опыты можно провести с вращающимися телами.

Из древних времен пришли к нам игрушечные водяные и ветряные мельницы. Много столетий не стареет и волчок.

На старинных картинах можно увидеть мальчика с кнутом и волчком, имеющим форму свекла. Кнутик несколько раз обогнул вокруг волчка. Очевидно, таким образом волчок закручивался.

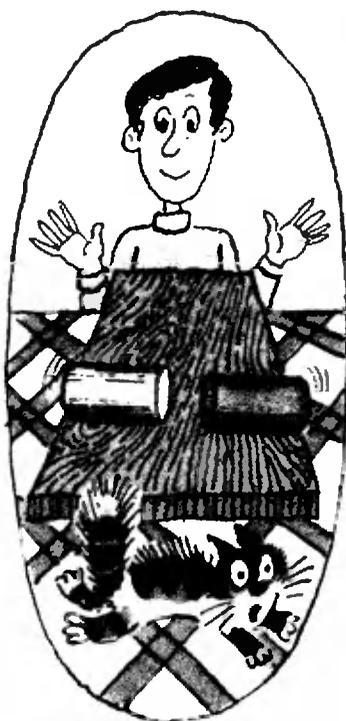
Впрочем, волчок можно запустить и обычным способом, то есть рукой, а потом кнутиком подхлестывать волчок так, чтобы его вращение длилось как можно дольше. Говорят, в нашей стране эту игру кое-где можно встретить и сейчас. И называют ее «Кубарь».

Родиной игры «Ио-ио» обычно считают Древний Китай. Попробуйте сделать ее.

Возьмите металлическую катушку, например из детского конструктора. Диаметр должен быть около 5 см, диаметр оси — около 0,5 см, длина оси — 1—2 см. К оси крепко привяжите прочную нить длиной с вашу ногу.

Игра состоит в следующем. Намотайте нить на ось, возьмите конец нити в руку и отпустите катушку. Когда нить полностью разматается, слегка дерните ее — катушка снова начнет вращаться. Задача состоит в том, чтобы все время поддерживать вращение катушки. Научившись этому, вы





сами догадаетесь, какие трюки можно проделывать с этой игрушкой.

### Вращающаяся цепочка

Неожиданный эффект при вращении вам поможет увидеть обыкновенная цепочка.

Возьмите цепочку длиной около 20 см. Аккуратно соедините ее крайние звенья. К одному из звеньев привяжите нить длиной 30 см. Другой конец нити возьмите в руку.

Совершая рукой кругообразные движения малого радиуса в горизонтальной плоскости, заставьте цепочку крутиться. Через некоторое время она поднимется, расправится и примет форму окружности, лежащей в горизонтальной плоскости. Неожиданный результат, не правда ли?

### Кто быстрее?

Положите на стол не очень гладкую доску и один ее конец немного поднимите. Положите на доску рядом два внешне одинаковых цилиндра, но один сплошной, а другой полый. Как вы думаете, какой из них быстрее скатится с доски? Теперь отпустите цилиндры и проверьте себя.

Поменяйте цилиндры, возьмите сплошные большой и маленький, большой сплошной и маленький полый, цилиндры из разных материалов и так далее.



### Почему поднимается вращающийся цилиндр?

Из плотной бумаги сделайте цилиндр диаметром около 4 см и длиной 10 см. Обмотайте его несколько раз капроновой лентой, положите на край стола и дерните за свободный конец ленты. Лента останется у вас в руках, а цилиндр, вращаясь, полетит вперед по направлению рывка. Что с ним будет дальше?

Возможны два варианта: цилиндр либо взойдет вверх, либо полетит под стол. Проверьте, как конечный результат зависит от положения свободного конца ленты во время рывка (свободный конец может быть выше или ниже оси цилиндра).

Заметим, что этот опыт демонстрирует возникновение так называемой подъемной силы, необходимой для воздухоплавания.



## Школьникам об астрономической картине мира

За годы школьной жизни учащиеся изучают много различных учебных предметов, каждый из которых вооружает их основами той или иной науки. Но, кроме того, все они решают общую и очень важную задачу: формируют научное мировоззрение. Его составной частью является научный атеизм, представляющий собой целостную, последовательную систему диалектико-материалистических представлений. В основе мировоззрения и атеизма лежит естественная картина мира, складывающаяся из совокупности философски обобщенных данных физики, астрономии, химии и других естественных наук.

Недавно (в конце 1979 года) издательство «Просвещение» выпустило книгу «Атеизм и научная картина мира». Ее автор — известный популяризатор астрономической науки В. Н. Комаров — поставил перед собой задачу доказать ложность различных религиозных представлений. Это доказательство не формулируется одной фразой, оно не заключено в одном логическом выводе или каком-нибудь факте (как это обычно бывает в точных науках). В нем, как в фокусе, собраны вся сумма наших знаний, вся совокупность научных данных об окружающем мире, весь опыт развития естествознания и преобразования окружающего мира, все достижения передовой человеческой мысли, вся практическая деятельность человека.

Не стремясь «объять необъятное», автор книги обращает внимание читателя лишь на наиболее важные в мировоззренческом отношении

факты из разных областей науки о Вселенной. Например, философское положение о том, что процесс познания — это диалектический процесс движения к абсолютной истине через промежуточные относительные истины, наглядно иллюстрируется сменой астрономических картин мира. От наивных древних картин мира к геоцентрической системе Аристотеля — Птолемея, от геоцентризма к гелиоцентризму (великая коперниканская революция) и, наконец, от него к современной картине нестационарной, расширяющейся и даже «взрывающейся» Вселенной — таков процесс познания Вселенной.

Астрономия доказала, что Вселенная развивается, изменяется во времени. Значит, прошлое Вселенной не тождественно настоящему, а настоящее — будущему. Однако человек сумел проникнуть в тайны прошлых эпох и стоит на пути научно-предвидения будущего. Главный «ключ» к познанию прошлого космических объектов, как справедливо подчеркивает автор рецензируемой книги, прежде всего в изучении их современных состояний. В. Н. Комаров сравнивает работу ученых, занимающихся проблемой происхождения и развития космических объектов, с работой детективов, восстанавливающих картину происшествия по неизбежным (иногда едва заметным) следам, оставленным на месте происшествия.

В последнее время у астрономов появился могущественный «союзник» — «ископаемое» (реликтовое) излучение, впервые обнаруженное около пятнадцати лет тому назад. Это излучение несет непосредственную информацию об эпохе, которую отделяло от начала расширения Метагалактики «все-го лишь» несколько сотен тысяч лет. И это не предел. Если будут обнаружены реликтовые нейтрино, мы приблизимся к началу расширения почти вплотную. Оказывается всего лишь (теперь уже без кавычек) 0,3 секунды отделяют момент рождения пока еще неуловимых реликтовых нейтрино от начала расшире-

ния, то есть от эпохи, отстоящей от нынешнего дня на 18—20 миллиардов лет.

Хотелось бы отметить еще одну особенность книги В. Н. Комарова — она приобщает читателя к «неизбежности странного мира», в котором явления становятся все менее и менее наглядными. Некоторые астрофизические и космологические явления практически невозможно себе представить, но их можно понять, дать им физическое истолкование, найти соответствующий математический аппарат. Известно, например, что мы живем в искривленном, неевклидовом пространстве. Правда, искривленность пространства ощутимо проявляется только в космических масштабах, в мире гигантских космических масс материи.

Пространство Вселенной не имеет границ, но оно может быть конечным или бесконечным. Каким именно, зависит от кривизны пространства, а кривизна определяется средней плотностью материи во Вселенной. Как считают ученые, если средняя плотность меньше некоторого конкретного значения, пространство незамкнуто и бесконечно, если же больше — пространство замкнуто и конечно. Выяснить, какая из этих двух возможностей реализуется, очень сложно. Совокупность имеющихся данных как будто бы свидетельствует о том, что мы живем в бесконечной незамкнутой Вселенной. Однако, даже если это будет доказано, успокаиваться не следует — пространство Вселенной, конечное и замкнутое в одной системе отсчета, может оказаться бесконечным и незамкнутым в другой.

*Е. Левитан*

## Задачи комбинаторики

В начале нашего столетия замечательный математик-методист С. И. Шохор-Троцкий разработал так называемый «метод целесообразных задач».

Изложение новой темы он предлагал начинать с целесообразно подобранной задачи. Обсуждая ее решение,

разбирая родственные задачи, он подводил учащихся к самостоятельному выводу нужного правила, формулы, теоремы.

К сожалению, этот метод почти не применяется в современном обучении. Поэтому интересно появление небольшого методического пособия А. Я. Халамайзера «Комбинаторика и бинном Ньютона» (М., «Просвещение», 1980), изложенного «методом целесообразных задач». Эта книжечка начинается с задачи о перестановке волейболистов на площадке.

*Тренер волейбольной команды решил изменить расположение игроков.*

— Следующую встречу будем начинать по-другому, — объявил он после очередного проигрыша. — Ты, Сергей, встанешь на подачу, Володя — на четвертый номер, в нападении, а ты, Николай...

— А если опять проигрываем? — спросил капитан.

— Тогда опять переставляю, — хладнокровно ответил тренер. — Пока не перепробуем всех возможных расположений...

Как же подсчитать, сколькими способами можно расставить 6 волейболистов на 6 возможных мест?

Комбинаторные задачи часто возникают в самых различных областях человеческой деятельности. Понимание этих задач, умение разбираться в них необходимы физикам и биологам, экономистам и инженерам, лингвистам и спортивным судьям.

Книжка содержит сведения о таких понятиях комбинаторики как перестановки, размещения, сочетания, сочетания и перестановки с повторениями.

Содержание этих понятий раскрывается посредством разбора занимательных задач, таких, например, как следующие:

*Точка в азбуке Морзе означает букву Е, тире — букву Т. Другие буквы и знаки передаются двумя, тремя..., а некоторые даже шестью различными сигналами — точками или тире. А сколькими сигналами можно передать любой из сотни символов (букв, цифр, знаков)?*

*В азбуке Брайля (для слепых) каждый символ —*

*буква или цифра — обозначается шестью точками; на некоторых из них имеются выпуклости. Ощупывая пальцами эти знаки, слепые могут «читать» текст. Сколько различных символов может быть в азбуке Брайля?*

В книжке нет традиционных теорем с доказательствами, формул с выводами. Разбирая практическую задачу, автор делает обобщения, пользуется аналогиями, а читатель самостоятельно приходит к нужному заключению.

Книжка сочетает в себе наличие важных математических сведений и доступность изложения. Ее легко сможет читать каждый любознательный старшеклассник. Учитель найдет в ней интересный материал для факультативных и кружковых занятий. Стиль изложения следует признать весьма удачным для пособий по математике.

Остается лишь пожалеть о малом объеме книжечки и выразить надежду, что «Присвещенные» продолжит выпуск подобной литературы, столь необходимой и учащимся, и учителям.

И. Бришков

## Серии — 14 лет

Интересные книги по математике не всегда легко приобрести. В то же время существует специальная серия брошюр «Математика, кибернетика», на которую можно подписаться по почте сразу на год вперед и, значит, в дальнейшем об их покупке не беспокоиться. Эту серию выпускает издательство «Знание» с 1967 года.

Авторами брошюр являются крупнейшие советские и зарубежные ученые, видные специалисты в своей области и зачастую талантливые популяризаторы.

Тематика серии весьма разнообразна. Большое внимание уделено биографиям знаменитых математиков настоящего и прошлого. Вот некоторые имена, которым посвящены уже вышедшие брошюры: замечательный американский математик Г. Вейль, математический гений Индии Раманинджан, классик математики француз Даламбер, знаменитые русские ученые А. Ляпунов, П. Чебышев, В. Стеклов.

Некоторые брошюры затрагивают вопросы развития математики и ее истории, рассказывают о процессе математического творчества, о математическом образовании и занятиях наукой, о преподавании математики в средней и высшей школах. В 1973 году была издана брошюра, полезная школьникам — Н. Розов, Е. Глаголева, Ж. Работот «Заочная математическая школа при МГУ».

Ряд работ связан с прикладными вопросами математики. Чтобы в этом убедиться, достаточно прочесть их названия: «Математика в биологии», «Кибернетика и медицинская диагностика», «Кибернетика и психиатрия», «Теория вероятностей в естествознании», «Экономика и математика», «Математика и искусство», «Математика и эпидемиология».

Разумеется, много брошюр посвящено самой математике, причем затрагиваются, как правило, наиболее актуальные проблемы и достижения науки. Так, уже в самой первой брошюре, вышедшей в январе 1967 года, рассказывалось о Всемирном математическом конгрессе математиков, состоявшемся осенью 1966 года в Москве.

Разумеется, в одной небольшой заметке невозможно остановиться на всех брошюрах серии — ведь их число уже давно перевалило за полторы сотни. Желаяшим подробнее ознакомиться с серией можно посоветовать брошюру № 10 за 1979 год — А. Я. Маргулис «Серия «Математика, кибернетика» за 12 лет».

Большинство брошюр серии «Математика, кибернетика» написаны увлекательно, живым языком, лучшим книжкам присуждены премии на всесоюзных конкурсах научно-популярной литературы. Нет сомнений, что многие из брошюр, как уже вышедших, так и издаваемых в будущем, будут прочитаны вами с большим интересом и пользой. На наш взгляд, серия книг «Математика, кибернетика» заслуживает того, чтобы один раз рискнуть и подписаться на нее.

Е. Гук

## Информация



С 24 по 28 марта 1980 года в Физическом институте Академии наук СССР проходил Праздник юных физиков. Помещая рассказ об этом празднике, редакция надеется, что подобные праздники будут организованы в различных районах нашей страны. Высокий научный уровень Московского Праздника юных физиков был обеспечен активным участием ученых ФИАН. Хотелось бы, чтобы ученые других институтов, и прежде всего комсомольцы, приняли активное участие в организации подобных праздников.

*В. Каслин, А. Стародуб*

## Праздник юных физиков

*Законы физики! О как они важны.  
На сложность их бессмысленно  
сердиться...*

Из приветствия команды  
школы № 2

Участники научных семинаров, работа которых проходила в колонном зале Физического института им. П. Н. Лебедева Академии наук СССР (ФИАН) во время весенних школьных каникул, с интересом рассматривали, казалось бы, странные картинки, развешанные по стенам и колоннам зала. Героем всех картинок был симпатичный львенок по имени Пюф. Мужественно выходил он из невероятных ситуаций, в которых оказывался, нарушая те или иные законы физики. Помогали ему чудесная изобретательность, находчивость, самообладание и, конечно же, чувство юмора.

В течение пяти дней, с 24 по 28 марта, в гости к неунывающему Пюфу приходили ребята из пяти московских школ (№№ 2, 18, 57, 91, 179) и из школы № 82 подмосковного поселка Черноголовка — участники Пра-

здника юных физиков, посвященного 110-й годовщине со дня рождения В. И. Ленина. Первые буквы названия этого праздника и дали имя забавному львенку.

Идея проведения Праздника юных физиков родилась в ФИАНе давно. В ее основе лежала многолетняя работа, проводимая сотрудниками института в подшефной школе № 2, а также первые опыты работы учащихся школы № 179 в Оптической лаборатории института. Цель праздника — приобщить школьников к научной деятельности, помочь им выбрать будущую профессию. В организации и проведении Праздника, помимо ФИАН, приняли участие Всесоюзное общество «Знание» и Комиссия Академии наук СССР по работе с молодежью.

Праздник начался в понедельник, 24 марта, встречей с ведущими учеными ФИАН.

История этого старейшего в нашей стране научно-исследовательского института, неразрывно связанная с историей становления русской, а потом и советской, школы физики, живо предстала перед ребятами во время выступления заместителя директора института доктора физико-математических наук А. В. Виноградова.

Одним из самых интересных для ребят событий первого дня Праздника было выступление лауреата Ленинской и Нобелевской премий академика А. М. Прохорова. О многих научных направлениях, в том числе проблемах связи и информации, говорил Александр Михайлович. Но центральным в его выступлении был особенно важный сегодня разговор о проблеме научной смены, о различных путях молодых людей в науку. Ребята буквально засыпали Александра Михайловича потоком вопросов о его личном пути в науку, о его точке зрения на проблему подготовки физика-теоретика и физика-экспериментатора.



Многообразные направления исследований, выполняемых в ФИАНе, открылось ребятам из выступлений сотрудников института. Лауреат Ленинской премии профессор О. Н. Крохин рассказал об использовании лазеров в медицине, о задачах инженерной технологии в связи с необходимостью широкого внедрения лазерной хирургии. О работе теоретического отдела института, о решаемых в нем проблемах теоретической физики рассказал ребятам доктор физико-математических наук И. М. Дремин.

Как в домашних условиях изготовить световод? Можно ли с помощью единой теории слабых электромагнитных взаимодействий получать электрическую энергию? Каковы преимущества лазерной хирургии? Какие мощности лазеров достигнуты сегодня? Эти и другие разнообразные и порою неожиданные вопросы задали ученым ребята.

Ученые ввели ребят в круг решаемых сегодня важных для нашей страны проблем физики, указали тот рубеж, где кончается известное сегодня и начинается то, что должно стать известным завтра. Из первых рук ребята получили ясное представление о том, что научные задачи — это всего лишь переходящий момент в трудной, временами тяжелой, мучительной, непрерывной цепи поисков физической истины.

Первый день Праздника завершился экскурсией по лабораториям ФИАНа. В некоторых из них ребятам предстояло поработать, испытать первое прикосновение к реальному физическому эксперименту.

На следующий день ребят ожидала встреча с редколлегией журнала «Квант», этого очень популярного среди ребят журнала. Во время встречи пронзился весьма полезный для обеих сторон обмен мнениями о том, каким быть «Кванту». С большим интересом прослушали участники Праздника рассказ главного редактора журнала академика И. К. Киконина о проблемах и задачах, решаемых «Квантом». Заместитель главного редактора В. А. Лешковцев обратил внимание будущих физиков на те загадки природы, которые можно неожиданно обнаружить совсем рядом, можно сказать, у себя под ногами.

О проблемах оптоэлектроники и термоядерной энергетики ребята узнали в среду от лауреата Ленинской и Государственной премий профессора Ю. М. Попова. О великой роли знакомства с трудами классиков в формировании будущего ученого рассказал ребятам академик Академии педагогических наук СССР В. А. Фабрикант.

В четверг ребят ждал: устный выпуск журнала «Природа». Заместитель главного редактора журнала В. А. Гончаров представил ребятам некоторых авторов этого журнала. Встреча прошла в очень теплой и непринужденной обстановке. Перед ребятами неожиданно открылся мир других наук: географии, биологии...

Последний день Праздника юных физиков совпал с заключительным этапом Турнира юных физиков. Три лучшие команды скрестили шпаги в финальном физбое. Знание физики, остроумие, находчивость продемонстрировали финалисты, которым нужно было в жесткие временные сроки решить довольно

сложные экспериментальные задачи с помощью подручных приборов и приспособлений.

Однако не только наука была постоянной спутницей ребят. Их ждали и «Огонек» с дискотеккой, и концерт камерной музыки из произведений Бетховена, Моцарта, Бартока, и встреча с исполнителем самодеятельных песен физиком Сергеем Никитиным.

Трехдневная конференция, на которую было представлено 17 докладов, наглядно показала разносторонность интересов ребят, их способность и стремление к серьезной научной работе. Удачному ходу конференции во многом способствовало жюри из ведущих ученых ФИАНа, возглавляемое лауреатом Государственной премии Украины кандидатом физико-математических наук Г. А. Аскарьяном.

«Общие принципы шумоподавления в системах звукозаписи и звуковоспроизведения», «Методы измерения удельного заряда электрона», «Исследование некоторых видов разрядов в газе», «Образование кристаллов. Их выращивание. Применение», «Некоторые наблюдения за высыханием капель», «Исследование физических эффектов, возникающих в обычной ванне, заполненной водой», «Наблюдение за полетом брызг», «Моделирование взаимодействия дефектов в кристаллах», «Изучение поглощения лазерного излучения парами молекул йода», «Парадокс магнитного экрана», «Необычные эффекты и парадоксы специальной теории относительности», «Эффекты «весселой» капельки» — уже простое перечисление тем самостоятельно выполненных исследований говорит само за себя. Но о некоторых докладах хотелось бы рассказать подробнее.

Ряд работ был посвящен физике кристаллов. Так, Я. Билялов и М. Шайхеев (шк. № 18) разработали и показали демонстрационный опыт, позволяющий с помощью пузырьковой модели понять и изучать законы поведения дефектов (дислокаций) в кристаллах. А. Демков, М. Людомирский, М. Макачук и А. Паифидов (шк. № 179) аналогичный опыт засняли, и довольно удачно, на кинолентку и показали этот фильм своим товарищам по конференции. Свое искусство по выращиванию кристаллов с двойными, четверными и шестерными осями симметрии продемонстрировал А. Кушнеров (шк. № 2). При этом в докладе он дал обстоятельный обзор по образованию кристаллов и их применению.

Группа учащихся школы № 18 поставила перед собой интересную физическую задачу — определить такую фундаментальную величину, как удельный заряд электрона ( $e/m$ ). Подошли они к решению этой задачи двумя способами — методом фокусировки и методом магнетрона. Первую серию экспериментов провел В. Иванов, а вторую провели С. Медведев; А. Павлов и А. Поваляев. При этом были получены практически совпадающие результаты, близкие к реальному значению. Отрадно, что ребята весьма грамотно подошли к экспериментам, сделали анализ возможных погрешностей, увидели пути улучшения точности эксперимента.

А. Ахметов, М. Матвеев и В. Покровский (шк. № 57) провели любопытные наблюде-



Участников Праздника приветствует академик А. М. Прохоров.



Встреча с главным редактором журнала «Квант» академиком И. К. Киконным.



В лабораториях ФИАН.

Кулуары.

ния над каплями раствора поваренной соли. Оказывается, при высыхании капли образуется выпуклое соляное кольцо, внутри которого ровным слоем распределены мелкие кристаллики соли. Поскольку ребятам не удалось найти в литературе объяснение этого эффекта, они высказали три гипотезы и поставили опыты, которые должны были либо подтвердить, либо опровергнуть выдвинутые гипотезы.

Некоторые доклады носили реферативный характер. В них ребята коснулись самых современных и интересных направлений физики, например — осуществление управляемого термоядерного синтеза, голография, эффекты наномально низкого трения.

Как и всякий праздник, Праздник юных физиков закончился вручением призов и подарков. Авторы докладов, признанных жюри лучшими, в награду получили отски работы ведущих ученых. Среди них — отски Нобелевских лекций академиков Н. Г. Басова и А. М. Прохорова с их автографами. Экземпляры журнала «Квант» с автографами членов редколлегии и сотрудников редакции получили А. Кушнеров, автор доклада «Образование кристаллов. Методы выращивания. Применение» и А. Ахметов, М. Матвеев и В. Покровский, авторы доклада «Некоторые наблюдения за высыханием капель раствора». (Тематика этих докладов очень близка к Лаборатории «Кванта».) Школы — участницы Праздника были награждены грамотами комитета ВЛКСМ ФИАН и подлинской журнала «Квант» на 1981 год. Всесоюзное общество «Знание» подарило учителям — руководителям школьных команд — сборники «Наука и человечество». Специальные переходящие призы — магазин сопротивлений, с которым работал известный русский физик Н. А. Умов, и стеклянный львеночек Пюф, произведение искусства фиановских стеклодувов, — были вручены командам школ № 2 и № 57, занявшим I и II места в Турнире юных физиков.

Рассказ о Празднике нам хочется закончить двумя приветствиями, присланными его участникам председателем оргкомитета Праздника юных физиков, директором ФИАН, лауреатом Ленинской и Нобелевской премий академиком Николаем Геннадиевичем Басовым и вице-президентом АН СССР, Председателем Комиссии АН СССР по работе с молодежью, академиком Евгением Павловичем Велиховым:

*Дорогие ребята!*

Пять дней вы провели в стенах старейшего в нашей стране научно-исследовательского учреждения — в Физическом институте им. П. Н. Лебедева АН СССР, ученые которого обогатили мировую науку крупнейшими открытиями. Ломоносов, Эйлер, Якоби, Вавилов, Ландсберг, Мандельштам, Папи-лекси, Скобелевы, Черенков — эти имена составляют гордость русской и советской физики.

За прошедшую неделю вы встретились с ведущими учеными нашего института, крупными физиками, доложили результаты своих первых исследований, среди которых было много интересных и достойных серьезного

обсуждения сообщений, посетили лаборатории ФИАН и поработали в них.

Решая научные проблемы в такой важной области знаний как физика, вы приобретаете к нелегкому, но увлекательному, благородному труду людей науки. Надеюсь, что этот труд пришелся вам по душе и дни, проведенные в лабораториях института, были для вас праздником.

Дорогие ребята! В этом году наша страна отмечает 110-летие со дня рождения В. И. Ленина. Будьте достойны памяти этого великого человека, великого борца, отдавшего свои знания, всю свою жизнь во имя нашего светлого будущего. Гордо несите имя советского гражданина. Будьте трудолюбивыми и настойчиво стремитесь к победам.



*Дорогие друзья!*

Поздравляю вас — участников Праздника юных физиков — с его успешным завершением!

Этот праздник был организован для вас в одном из старейших и ведущих институтов страны — Физическом институте им. П. Н. Лебедева. Вам, сегодняшним школьникам, выпало счастье встретиться со многими ведущими учеными-физиками, участвовать в творческих состязаниях друг с другом, в увлекательной научной работе в лабораториях Института.

Современная наука непрерывно революционизирует нашу жизнь, наука является одним из важнейших факторов, определяющих настоящее и будущее человечества. Ваш Праздник — это одно из проявлений заботы старшего поколения советских ученых о юных талантах, о подготовке достойной молодой смены. Сегодня вы сделали очень важные и успешные первые шаги в науке, но вам предстоит еще многому научиться, чтобы стать настоящими учеными, будущими строителями нового общества. Успехов в науке можно добиться лишь в результате упорного творческого труда.

Желаю вам больших успехов, смелости и высокой ответственности в научном поиске.



Е. Юносов

## Турнир юных физиков

*Несмотря на то, что обычно турниры были опаснее одиночных состязаний, они всегда пользовались большим успехом среди рыцарей.*

В. Скотт. Айвенго

С 20 февраля по 28 марта в Москве проходил Турнир юных физиков. В нем участвовали старшеклассники одиннадцати московских школ — №№ 2, 7, 18, 47, 52, 57, 91, 179, 201, 444 — и школы № 82 подмосковного поселка Черноголовка.

Турнир проводился в три тура: заочный коллективный конкурс, полуфинальные физические бои и финальный физбой.

Первый тур начался 20 февраля и закончился 12 марта. Всем школам-участникам были разосланы списки из 17 задач. Решать эти задачи могли все желающие. После коллективного обсуждения решения были переданы жюри Турнира.

Большинство задач заочного конкурса можно охарактеризовать как проблемные задачи. Вот несколько примеров:

**Задача «Струйка».** *Из водопроводного крана вытекает тонкая струйка. Вода полностью заполняет трубку крана радиусом около 2 мм. Внизу струйка сужается, а потом распадается на отдельные капли. Почему сужается струйка? На каком расстоянии от крана она распадается на капли?*

Интересные решения прислали Н. Квасов (шк. № 52) и В. Шмидт (шк. № 179).

**Задача «Шар».** *На земле толстым слоем лежит песок. С высоты 1 м свободно падает стальной шар радиусом 5 см. На какую глубину шар погрузится в песок?*

Эта задача вызвала, пожалуй, самые большие затруднения.

**Задача «Карандаш».** *Остро отточенный карандаш поставили острием на стол, и он простоял так два месяца. Доказать, что карандаш воткнулся в стол.*

Что значит «остро отточенный карандаш»? Как он может стоять на поверхности стола? Что выведет его из этого положения? На эти и многие другие вопросы обстоятельно ответили Д. Гершунн (шк. № 57), К. Кошдратьев и А. Чамаев (шк. № 2).

**«Экспериментальная задача».** *Исследовать зависимость коэффициента крутильной жесткости тонкой капронной нити от длины и толщины нити в области длины порядка 10 см и толщину порядка 10 мкм.*

Очень интересные исследования провели И. Ныркова (шк. № 2), П. Квасов (шк. № 52), А. Кулагин и М. Новиков (шк. № 18).

Подобных задач пока нет в задачниках, и они являются проблемными даже для специалистов, но именно такие задачи ежедневно ставит перед физиками сама жизнь. Членам жюри было очень интересно посмотреть, как ребята подходили к решению задач, какое давали качественное объяснение, какую выбирали модель явления, какие делали допущения, какие и как проводили экспериментальные исследования.

Победителями в первом туре стали школы №№ 2 и 179, приславшие обоснованные решения наибольшего числа задач. Если говорить об отдельных авторских решениях, то их больше всего было у П. Калугина (шк. № 444).

Второй тур Турнира (полуфинальные физические бои) проходил 19 марта в трех группах школ одновременно. В группе А встречались команды школ №№ 2 и 52, в группе В — 18, 57 и 201 и в группе С — 91, 179 и 444.

Физический бой (физбой) — это коллективное состязание юных физиков в умении решать сложные задачи, убедительно излагать свои решения и полемизировать. В полуфинале физбой проводились по задачам заочного конкурса. Каждая команда состояла из десяти учащихся 8—10 классов, причем десятиклассников было не более шести.

Пожалуй, наиболее удачна схема физбоя, когда команды по очереди выступают в роли докладчика, оппонента и рецензента. Сначала представитель команды-докладчика рассказывает свое решение задачи. Затем оппонент задает докладчику вопросы и высказывает свои критические замечания. При этом, естественно, возникает полемика. Наконец, рецензент дает оценку выступлению и докладчика, и оппонента. Как оппонент, так и рецензент могут представить свои решения, если они им кажутся более удачными. Жюри оценивает выступления команд в баллах. В полуфинале, например, была принята такая система: максимальная оценка докладчику — 10 баллов, оппоненту — 5 баллов и рецензенту — 2 балла.

Победителями полуфинальных физбоев стали команды школ №№ 2, 18 и 91. По сумме баллов в двух турах в финал Турнира вышли команды школ №№ 2, 57 и 179.

Финальный физбой проходил в рамках Праздника юных физиков в день его закрытия, 28 марта, в помещении Физического института им. П. Н. Лебедева Академии наук СССР (ФИАН).

Участникам финального физбоя было предложено два типа задач. Условно назовем их «большими» и «маленькими» задачами. На решение «большой» задачи давался 1 час, а на решение «маленькой» — 10 минут. Все задачи носили исследовательский характер. Бой проводился по схеме: докладчик и два оппонента.

Вот условия задач первого типа:

**Задача «Супербол».** *Оценить время спударения супербола (прилетающего мячика) с полом при падении с высоты 1 м.*

**Задача «Линза».** *Измерить оптическую силу данной длиннофокусной линзы.*

**Задача «Спираль».** *Изучить и объяснить поведение спирали лампы накаливания при воздействии на нее наэлектризованных тел.*

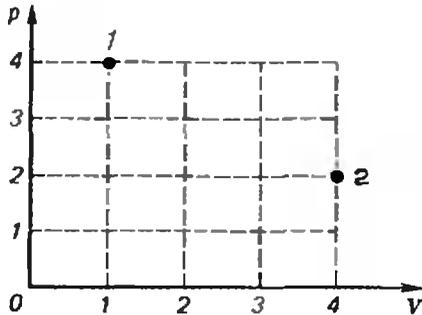
# Олимпиада ОмПИ+МФТИ

Среди задач второго типа были, например, такие:

**Задача «Фольга».** Если фольгу от обертки конфеты разглаживать ногтем на твердой поверхности, двигая ногтем все время в одном направлении, то она всегда закручивается вверх, навстречу этому направлению. Почему?

**Задача «Спичка».** Как известно, на обычную спичку магнит не действует. Но если спичку зажечь и дать ей обуглиться, то сильный магнит ее притянет. Объясните это явление.

**Задача « $pV$ -диаграмма».** Некоторое количество кислорода переводят из состояния 1 в состояние 2, как показано на рисунке (давление и объем указаны в относительных единицах). Что определенного можно сказать об изменении параметров газа?



Все участники финала, в основном, успешно справились с предложенными задачами. Основные идеи решений были обсуждены в ходе физбоя и вызвали большой интерес не только участников, но и зрителей. Надеемся, что некоторые ребята продолжили работу над задачами и после окончания Турнира.

По окончательным итогам первое место в Турнире заняла команда школы № 2 (капитан — А. Одинцов). Ей был вручен переходящий приз Турнира — магазин сопротивлений из физической лаборатории известного русского физика Н. А. Умова с его автографом. Второе место заняла команда школы № 57 (капитан — Д. Филиппов). Она получила второй, тоже переходящий, приз — стеклянного львенка Пюфа, сделанного искусными флановскими стеклодувами. Третье место завоевала команда школы № 179 (капитан — С. Шишков).

Заметим, что впервые Турнир юных физиков проходил в прошлом, 1979 году. Тогда это был первый опыт. Нынешний Турнир отличался более широким составом его участников и значительно лучшей организацией. Это стало возможным благодаря помощи ФИАН, Всесоюзного общества «Знание», комиссии по работе с молодежью АН СССР, учителей физики, студентов физического факультета МГУ, студентов МФТИ и многих других.

В третий раз учащиеся Омска и Омской области принимали участие в олимпиаде по физике и математике, организованной совместными усилиями Московского физико-технического института (МФТИ) и Омского политехнического института (ОмПИ). Эта олимпиада родилась из общего для обоих институтов лозунга «Знакомство со студентом начинается в школе».

Соревнования школьников проходили по правилам студенческих олимпиад. Для решения предлагались тринадцать задач по математике и восемь задач по физике. Задачи нестандартные, различной степени трудности, рассчитанные на материал восьмого и девятого классов. Разумеется, решить за четыре часа все задачи невозможно, да это и не требовалось. Для победы достаточно было решить несколько задач, из них одну-две сложные. Ориентироваться в сложности помогало количество баллов, указанное для каждой задачи. Окончательный итог устанавливался с помощью специального коэффициента, учитывающего сложность задачи, законченность решения и число участников, решивших задачу. Благодаря этой системе можно было, решив до конца всего две задачи, опередить тех, кто, пытаясь объять необъятное, брался за все сразу, не все доводя до конца.

В результате первое место среди математиков заняли Евгений Бруснецов (шк. № 88, 10 кл.) и Игорь Титов (шк. № 109, 9 кл.).

Лучшими физиками оказались Олег Держко (шк. № 66, 10 кл.), Михаил Маркин (шк. № 88, 9 кл.) и Вадим Маслов (шк. № 11, 8 кл.).

После окончания олимпиады состоялся разбор задач, а еще позже — интересная беседа со студентами МФТИ и ОмПИ, где школьники получили ответы на многие интересующие их вопросы, познакомились с рекламными газетами «За науку» и «Политехник». Призеры олимпиады получили награды — грамоты и дипломы — и рекомендации для поступления в вуз.

Ниже приводятся предлагавшиеся на олимпиаде задачи по математике и физике.

## Математика

1. Найдите пятизначное число, которое при умножении на 9 образует пятизначное число, записанное теми же цифрами, что и исходное, но в обратном порядке. (2 очка)

2. Дан треугольник  $ABC$ ;  $l_A$ ,  $l_B$ ,  $l_C$  — длины его биссектрис, причем  $l_A < 1$ ,  $l_B < 1$ ,  $l_C < 1$ . Докажите, что площадь треугольника  $ABC$  меньше 1. (3 очка)

3. Два парохода плывут по морю по фиксированным направлениям с постоянными скоростями. В 12 ч 00 мин расстояние между пароходами было равно 5 милям, в 12 ч

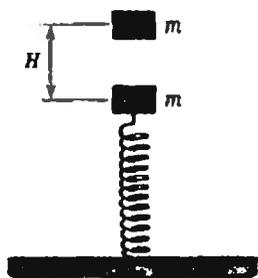


Рис. 1.

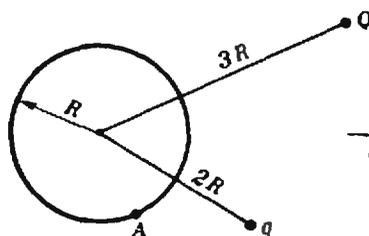


Рис. 2.

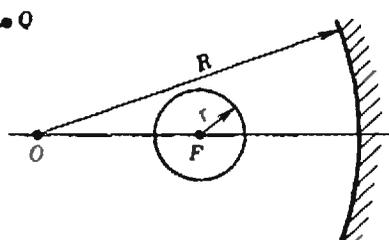


Рис. 3.

45 мин. —  $2\sqrt{5}$  милям, в 13 ч 03 мин —  $4\sqrt{2}$  милям. Найдите минимальное расстояние, которое было между пароходами. (5 очков)

4. На прямой даны три точки  $A, B, C$ , причем точка  $C$  лежит между точками  $A$  и  $B$ . Найдите множество точек  $O$  таких, что биссектриса угла  $AOB$  проходит через точку  $C$ . (4 очка)

5. Найдите сумму дробей вида  $\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$  для всех натуральных  $n$  и  $l$ . (5 очков)

6. Решите систему

$$\begin{cases} 2 \cos \frac{10\pi}{x} + 4 \cos \pi x + 1 = 0, \\ 2 \cos \frac{5\pi}{x} + 2 \sin \pi x - 2 \cos \pi x - 1 = 0. \end{cases}$$

(4 очка)

7. Решите уравнение

$$\lg^4 x + \lg^4 y + 2 \operatorname{ctg}^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 y = 3 + \sin(x+y). \quad (4 \text{ очка})$$

8. Докажите, что не существует натурального числа, которое после зачеркивания первой слева цифры уменьшается в 35 раз. (3 очка)

9. Можно ли семнадцатиугольник разрезать на четырнадцать треугольников? (2 очка)

10. Имеет ли уравнение  $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$ , где  $a, b, c$  — длины сторон некоторого треугольника, действительные корни? (2 очка)

11. Известно, что для любых действительных  $x_1$  и  $x_2$

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{2} |x_1 - x_2|.$$

Докажите, что уравнение  $f(x) = x$  имеет не более одного корня. (3 очка)

12. Для всех  $b > a > 0$  и любого  $x$  значение многочлена  $P(x) = a + b \cos x + \frac{b}{2\sqrt{2}} \cos 2x$  неотрицательно. Определите множество значений, которые может принимать дробь  $\frac{b+a}{b-a}$ . (4 очка)

13. Космонавты на чужой планете нашли такую надпись:  $\% ! \& + ! 0 + + !!!$ . Выяснилось, что так житель планеты выполнил некоторую операцию над натуральными числами (операциями могут быть «+», «-», « $\times$ », «:», «возвести в степень», «извлечь корень»). Известно также, что на планете употребляется некоторая позиционная система записи чисел, но неизвестны основание системы счисления и порядок пересчисления разрядов. Предпо-

ложим, что знак операции и знак равенства являются однозначными символами. Определите, какое вычисление могло быть выполнено. (5 очков)

### Физика

1. На полюсе некоторой планеты без атмосферы стартует ракета. За короткое время двигатели сообщают ракете скорость  $\vec{v}$ , направленную под углом  $45^\circ$  к горизонту. По модулю эта скорость больше первой космической, но меньше второй космической для этой планеты. В дальнейшем двигатели не работают. Возвратится ли ракета на планету? Объясните. (2 очка)

2. Тело скользит без трения вверх по уклону 1:50 с начальной скоростью 1 м/с. Найдите путь, пройденный телом за 7 с. Принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . (4 очка)

3. На реке построили гидроэлектростанцию. Оказалось, что за 100 км выше по течению ни скорость течения, ни уровень воды не изменились. Аналогичная ситуация за 100 км ниже по течению. Откуда же взялась энергия для работы гидроэлектростанции? (1 очко)

4. На невесомой, прикрепленной к столу пружине жесткостью  $k$  лежит груз массой  $m$  (рис. 1). На него с высоты  $H$  падает твкой же груз и прилипает к нему. Какова должна быть высота  $H$ , чтобы слитшиеся грузы подпрыгнули, оторвавшись от пружины? (4 очка)

5. В откачанном герметически закрытом сосуде объемом  $V = 10 \text{ дм}^3$  находится открытая колбочка, содержащая  $m = 10 \text{ г}$  воды. Сосуд нагревают при температуре  $t = 100^\circ\text{C}$ . Сколько воды испарится? (4 очка)

6. Два одинаковых металлических шара с положительными зарядами  $Q_1$  и  $Q_2$  отталкиваются с силой  $\vec{F}$ . Изменится ли сила взаимодействия (по модулю), если у одного из шаров изменить знак заряда, не меняя величины заряда и расстояния между шарами? Объясните. (2 очка)

7. Точечные заряды  $q$  и  $Q$  расположены на расстояниях  $2R$  и  $3R$  от центра незаряженной металлической сферы радиусом  $R$  (рис. 2). Потенциал некоторой точки  $A$  сферы оказался равным нулю. Считая  $q$  известным, найти  $Q$ . (5 очков)

8. Постройте в вогнутом зеркале изображение окружности с центром в фокусе зеркала (рис. 3). Считать, что радиус окружности  $r$  достаточно мал по сравнению с радиусом зеркала  $R$ . (4 очка)

А. Криворучко, А. Фильков

## Заочная физическая школа

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете МГУ объявляет набор учащихся в 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику в объеме школьной программы, а также лучше подготовиться к вступительным экзаменам по физике в высшие учебные заведения, в первую очередь — на физический факультет МГУ.

Прием в ЗФШ проводится на основании результатов решения вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать до 15 сентября по адресу: 117234, Москва, Ленинские горы, МГУ, Физический факультет, Заочная физическая школа. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим домашним адресом и два экземпляра анкеты, написанной на листах плотной бумаги размером  $7 \times 12$  см и заполненной по следующему образцу:

Фамилия, имя, отчество . . . . .	Сидоров Иван Петрович
Класс . . . . .	9-й
Профессия родителей и занимаемая должность . . . . .	отец — инженер мать — врач
Подробный домашний адрес . . . . .	248016, г. Калуга, ул. К. Либкнехта, д. 4, кв. 73
Номер и адрес школы . . . . .	школа № 10, ул. Пушкина, д. 3д.

Решение приемной комиссии ЗФШ о зачислении будет сообщено до 5 октября 1980 года. Проверенные вступительные задания обратно не высылаются.

### Вступительное задание

Поступающие в 9 класс должны решить задачи 1—5, поступающие в 10 класс — задачи 2, 3, 5—7.

1. Тело массой  $m$  соскальзывает без начальной скорости с горки высотой  $H$ , оканчивающейся горизонтальным трамплином, высота которого  $H/2$  (рис. 1). Горка может перемещаться по горизонтальной подставке, масса горки  $M$ . Трением между телом и горкой, горкой и горизонтальной подставкой пренебречь. Найти расстояние между телом и горкой в момент падения тела на горизонтальную подставку.

2. Оценить минимальную скорость катера, необходимую для того, чтобы воднолыжник, которого буксирует катер, не «провалился» в воду.

3. На конец транспортера длиной  $l$ , движущегося со скоростью  $\vec{v}$ , осторожно положили груз массой  $m$  (рис. 2). Коэффициент трения между грузом и транспортером равен  $\mu$ . Какую работу совершит сила тре-

ния, действующая на груз, при перемещении груза от одного конца транспортера к другому?

4. Человек перемещает куб с ребром  $a = 1,8$  м вверх по наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha = 45^\circ$  с горизонтом, прикладывая силу  $\vec{F}$ , перпендикулярную к грани куба (рис. 3). При этом куб движется поступательно и равномерно. На каком расстоянии от наклонной плоскости человек должен прикладывать силу, чтобы основание куба не отрывалось от наклонной плоскости? Коэффициент трения между кубом и наклонной плоскостью  $\mu = 0,2$ .

5. На краю стола лежит палочка массой  $M$ , выступая за край стола на треть своей длины. На выступающем конце палочки на невесомой нерастяжимой нити подвешен маленький шарик. Шарик отводят в положение, при котором нить направлена вдоль палочки, и отпускают без толчка. При каких значениях массы  $m$  шарика палочка не будет двигаться

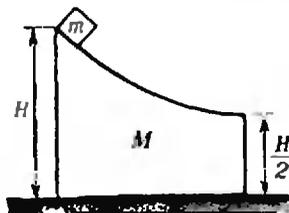


Рис. 1.

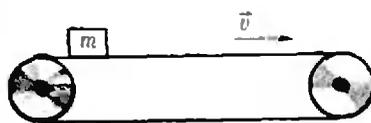


Рис. 2.

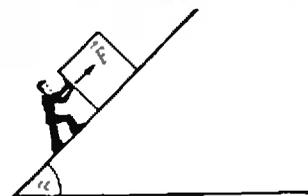


Рис. 3.

ся в процессе колебаний шарика? Коэффициент трения между палочкой и столом  $\mu$ .

6. В закрытом цилиндре под поршнем находится смесь воздуха и паров воды. Поршень медленно вдвигают в цилиндр. Нарисовать график зависимости давления смеси под поршнем от объема закрытой части цилиндра. Температуру считать постоянной.

7. Заряженный шарик, подвешенный на нерастяжимой нити, движется по окружности в однородном магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ , направленной вертикально вверх. Период обращения шарика  $T$ , масса шарика  $m$ , его заряд  $q$ , длина нити  $l$ . Найти радиус окружности, по которой движется шарик.

## Дополнительный прием в заочные математические школы

Северо-Западная заочная математическая школа при Ленинградском университете им. А. А. Жданова (СЗМШ) и некоторые филиалы Всесоюзной заочной математической школы АПН СССР при Московском университете им. М. В. Ломоносова (ВЗМШ) объявляют дополнительный прием учащихся 8 классов на I курсе индивидуального обучения, и прием школьных математических кружков 8 и 9 классов в группы «Коллективный ученик».

Основная цель заочных математических школ — помочь учащимся глубже изучить математику в объеме средней школы, научить их самостоятельно мыслить и преодолеть трудности в чтении книг по математике.

Учащиеся ЗМШ регулярно получают задания по математике, содержащие объяснение теоретического материала, изучение которого помогает решать предложенные задачи.

Те, кто изъявит желание заниматься в заочной математической школе, должны до 15 сентября 1980 г. направить свое заявление на имя директора этой школы. В заявлении надо указать фамилию, имя, класс, номер своей школы и свой полный почтовый адрес. В конверт вложите два листа бумаги размером 14 см  $\times$  6 см с написанным вашим почтовым адресом.

Всем приславшим заявления будет выдано первое задание. Зачисление будет производиться по результатам его выполнения.

В группах «Коллективный ученик» могут заниматься несколько учеников под руководством своего преподавателя математики.

Зачисление производится до 1 октября 1980 г. на основании заявления руководителя группы с указанием класса и фамилий учащихся, заверенного печатью школы и подписью директора.

СЗМШ принимает учащихся школ Белорусской (кроме Витебской и Гомельской обл.), Латвийской, Литовской и Эстонской ССР, Карельской АССР, Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской и Псковской областей.

ВЗМШ принимает учащихся школ Башкирской, Дагестанской, Мордовской, Удмуртской и Чувашской АССР, Красноярского края, Амурской, Вологодской, Гомельской, Джезказганской, Донецкой, Кокчетавской, Костромской, Куйбышевской, Орловской, Пензенской, Саратовской, Смоленской, Тургайской, Ульяновской, Уральской, Целиноградской, Черновичской и Ярославской областей.

Адрес СЗМШ: 228197, Ленинград, ул. Савушкина 61, ЗМШ, прием.

Адрес ВЗМШ: 117234, Москва, В-234, МГУ, ВЗМШ, прием.

## Вечерняя физическая школа

Вечерняя физическая школа (ВФШ) при физическом факультете МГУ объявляет набор учащихся в 8—10 классы на 1980/81 учебный год.

Основная задача ВФШ — помочь старшеклассникам глубже изучить физику в объеме школьной программы. Кроме того, учащиеся ВФШ смогут познакомиться с основными направлениями современной физики и посетить научные лаборатории физического факультета. Занятия проводятся в форме лекций и семинаров.

Зачисление в ВФШ проводится по результатам собеседования. Для участия в нем надо подать заявление и сдать две фотокарточки размером 3  $\times$  4 см.

Прием заявлений будет проходить с 5 по 27 сентября в комитете ВЛКСМ физфака МГУ ежедневно (кроме воскресенья) с 16.00 до 18.00.

Адрес ВФШ: 117234, Москва, Ленинские горы, МГУ, Физический факультет, ВФШ.

Телефон для справок: 139-26-56.



Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов.

Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

Три миниатюры чемпионов мира

До сих пор мы приводили лишь фрагменты из партий мастеров и гроссмейстеров. Сегодня мы рассмотрим целиком три встречи чемпионов мира прежних лет.

Партии, в которых игра заканчивается в районе двадцатого хода, шахматисты обычно называют «миниатюрами». Если игра была полноценной, то есть быстротечность событий связана не с грубым просмотром, а с эффективной комбинацией или неожиданным маневром, то такая миниатюра занимает достойное место в шахматном искусстве и постоянно кочует из одного издания в другое. Именно так сложилась судьба у трех следующих знаменитых миниатюр.

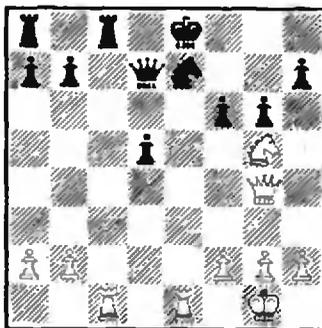
Начнем с маленького шедевра, созданного первым шахматным королем В. Стейнницем.

**Стейнниц — Барделебен**  
(Гастингс, 1895 г.)

Итальянская партия

1. e4 e5 2. Kf3 Kc6 3. Cc4 Cc5 4. e3 Kf6 5. d4 ed 6. cd Cb4+ 7. Kc3 d5 (теория рекомендует 7...K:e4) 8. ed K:d5 9. 0—0 Ce6 10. Cg5 Ce7 11. Cd5 C:d5 12. K:d5 Ф:d5 13. Ce7 K:e7 14. Le1 f6 (белые препятствуют рокировке черных, и их король стремится скрыться на f7) 15. Фе2 Фd7 16. Лас1 с6 (последовательнее 16...Kpf7) 17. d5! ed 18. Kd4 Kpf7 19. Ke6 Лhс8 20. Фg4 g6 21. Kg5+ Kpe8.

Сейчас на ваших глазах развернется одна из элегантнейших комбинаций в шахматной истории.



22. Л:e7+! Kpf8! Брать ладью нельзя ни ферзем из-за 23. Л:c8+, ни королем, ввиду 23. Le1+ Kpd6 (23... Kpd8 24. Kc6+) 24. Фb4+ Kpe7 (24... Kpe6 25. Лc1×) 25. Ke6+ Krb8 26. Фf4+. Однако после отступления короля новинка выглядит подозрительной для белых, все их четыре фигуры находятся под боем. Стейнниц рассчитал комбинацию до конца, его ладья хвояничает на седьмой горизонтали.

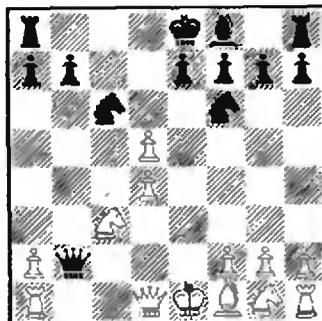
23. Лf7+! Kpg8 24. Лg7+!! Черные сдались. Ряд эффективных вариантов остался за кулисами. На 24... Kpf8 решает 25. K:h7+, а на 24... Kph8 — 25. Л:h7+! Kpg8 26. Лg7+! Kph8 27. Фh4+ Kp:g7 28. Фh7+ Kpf8 29. Фh8+ Kpe7 30. Фg7+ Kpe8 31. Фg8+ Kpe7 32. Фf7+ Kpd8 33. Фf8+ Фс8 34. Kf7+ Kpd7 35. Фd6×.

Следующая миниатюра принадлежит первому советскому чемпиону мира М. Ботвиннику.

**Ботвинник — Шпильман**  
(Москва, 1935 г.)

Защита Каро-Кани

1. e4 c6 2. c4 d5 3. ed cd 4. d4 Kf6 5. Kc3 Kc6 6. Cg5 Фb6 7. cd Ф:b2?



Берея «отравленную» пешку, австрийский гроссмейстер.

конечно, не предполагал, что партия продлится еще всего четыре хода. Необходимо было играть 7...K:d4.

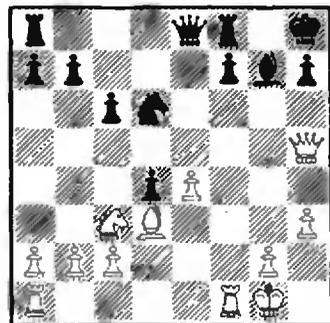
8. Лc1! Kb4 9. Ka4 Ф:a2 10. Cc4 Cg4 11. Kf3. Черные сдались. Их ферзь в ловушке, и после 11...Фa3 12. Лc3 сваста его можно только ценой фигуры. Самая короткая результативная партия, сыгранная двумя гроссмейстерами в турнире!

И, наконец, третья миниатюра создана одной из самых загадочных фигур в шахматной истории, одиннадцатым чемпионом мира Р. Фишером.

**Фишер — Бенко**  
(Нью-Йорк, 1964 г.)

Защита Уфимцева

1. e4 g6 2. d4 Cg7 3. Kc3 d6 4. f4 Kf6 5. Kf3 0—0 6. Cd3 Cg4 (лучше, например, 6...Kc6, размен слона целиком отдаст инициативу белым) 7. h3 C:f3 8. Ф:f3 Kc6 9. Ce3 e5 10. de de 11. f5 gf (напрасное ослабление королевского фланга, надежнее было сразу 11...Kd4) 12. Ф:f5 Kd4 13. Фf2 Ke8 14. 0—0 Kd6 15. Фg3 Kph8 16. Фg4 c6 17. Фh5! Фе8? (позволяет провести белым блестящую комбинацию, сопротивление оказывало 17...Ke6) 18. C:d4 ed.



19. Лf6! В отличие от победителей в двух предыдущих поединках, Фишер никогда не увлекался математикой, но это не мешало ему использовать в своих партиях геометрические мотивы. В ответ на 19. e5 с угрозой мата спасало 19... i5! Теперь линия f перекрыта и действие слона по диагонали b1—h7 решает судьбу партии.

19...Kpg8 (19...C:f6 20. e5! и мат неизбежен) 20. e5 h6 21. Ke2! Черные сдались. (После отступления коня на b5 или c8 следует 22. Фf5! и 23. Фh7×)

**Ответы, указания, решения**



**Ребусы**

(см. с. 7)

$$\begin{array}{r} 1. \quad + 91768 \\ \quad + 9176 \\ \quad \quad 9768 \\ \quad \quad \quad 8176 \\ \hline \quad \quad \quad 118888 \end{array}$$

2. Два решения:

$$\begin{array}{r} + 2637 \\ + \underline{696} \quad \text{и} \quad + 4758 \\ \quad \quad \quad \underline{3338} \quad \quad \quad \underline{5555} \end{array}$$

3.  $\sqrt[2]{458329} = 677.$

4.  $\sqrt[3]{389017} = 73.$

5.  $74 \cdot 96 = 7104.$

6. Два решения:

$$\begin{array}{r} + 25365 \\ + 15245 \\ \hline 56981 \quad \text{и} \quad 56941 \\ 97591 \quad \quad \quad 97591 \end{array}$$

7.  $\begin{array}{r} + 431635 \\ + 431635 \\ \hline 863270 \end{array}$

8. Два решения:  $(45)^1 \cdot 43 = 1935$   
и  $(13)^2 \cdot 17 = 2873.$

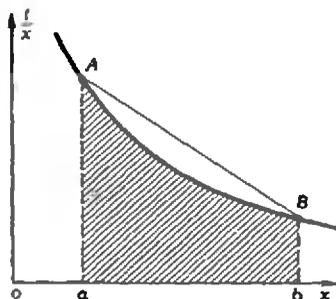
9.  $(249)^3 = 15\,438\,249.$

**Задачи наших читателей**

(см. с. 11)

1. Поскольку функция  $x \rightarrow \frac{1}{x}$  при  $x > 0$  выпукла вниз, площадь трапеции  $aABb$  (см. рисунок) больше площади заштрихованной трапеции, то есть

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) (b-a) > \int_a^b \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_a^b = \ln \frac{b}{a}.$$



2. Общий член последовательности 1, 31, 331, ...

имеет вид  $a_n = \frac{10^n - 7}{3}$ . Просмотрев остатки от деления чисел  $10^n$  на 19 ( $n = 1, 2, 3, \dots, 18$ ; дальше остатки повторяются), легко доказать, что  $a_n$  делится на 19 тогда и только тогда, когда  $n = 18m + 12$ . Аналогично можно доказать, что  $a_n$  делится на 541 тогда и только тогда, когда  $n = 540k + 534$ .

Если  $a_n$  делится на 541, то

$$n = 540k + 534 = 18(30k + 29) + 12,$$

и значит,  $a_n$  делится на 19.

3. Из условия имеем

$$\begin{aligned} a_1 - x &= \frac{1}{-a_2 - \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n - y}}} \\ \Downarrow \\ \frac{1}{a_1 - x} &= -a_2 - \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n - y}} \\ \Downarrow \\ a_2 + \frac{1}{a_1 - x} &= \frac{1}{-a_3 - \frac{1}{a_4 + \dots + \frac{1}{a_n - y}}} \\ \Downarrow \\ \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_1 - x}} &= -a_3 - \frac{1}{a_4 + \dots + \frac{1}{a_n - y}} \\ \Downarrow \dots \\ a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-2} + \dots + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_1 - x}}} &= \frac{1}{-a_n + y} \end{aligned}$$

откуда получаем результат.

6. Отразим  $\triangle ABC$  относительно основания  $AC$ , получим ромб  $ABCB_1$ . Поскольку  $[AB_1] \parallel [BC]$  и  $|AE| = |BB_1|$ , четырехугольник  $ABEB_1$  — равнобедренная трапеция. Отсюда следует, что  $\widehat{B_1BE} = \widehat{AEB} = \alpha$ . Обозначим  $\widehat{BAE}$  через  $\beta$ . Тогда из треугольников  $ABC$  и  $ABE$  получаем:

$$\begin{cases} 2\beta + 2\alpha + 2\beta = 180^\circ, \\ \beta + 2\alpha + \alpha = 180^\circ, \end{cases}$$

то есть  $\alpha = 3\beta$ . Подставляя это значение  $\alpha$  в первое уравнение, находим  $\beta = 18^\circ, \alpha = 54^\circ$ .

**Задачи наших читателей**

(см. «Квант» № 7, с. 9)

1. а) Одна из диагоналей четырехугольника делит другую пополам.

б) Это либо параллелограммы, либо трапеции, у которых длина большего основания составляет четверть периметра, либо дельтоиды (четырёхугольники, у которых длины сторон, примыкающие к диагоналям, попарно равны).

**Транзитивные множества  
и правильные многогранники**  
(см. «Квант» № 7)

**Параметры правильных многогранников**



	Тетраэдр	Куб	Октаэдр	Додекаэдр	Икосаэдр
Число граней	4	6	8	12	20
Число вершин	4	8	6	20	12
Число ребер	6	12	12	30	30
Косинус угла, под которым ребро видно из центра опис. сферы	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$
Косинус двугранного угла	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	$-\frac{\sqrt{5}}{3}$
Радиус опис. сферы	$\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a\sqrt{\frac{3}{5}}}{2}$
Радиус впис. сферы	$\frac{a}{2\sqrt{6}}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{\sqrt{6}}$	$\frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$	$\frac{a\sqrt{\frac{3}{5}}}{2\sqrt{3}}$
Площадь поверхности	$a^2\sqrt{3}$	$6a^2$	$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{15a^2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$	$5a^2\sqrt{3}$
Объем	$\frac{a^3}{6\sqrt{2}}$	$a^3$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$	$\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5a^3\sqrt{3}}{6}$

( $a$  — длина ребра; через  $\xi$  обозначено число  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618045$ )

**Несколько вопросов по астрономии**

(см. «Квант» № 5, с. 42)

1. В любой точке экватора продолжительность дня всегда равна продолжительности ночи.
2. Смена времен года на экваторе существует. Хотя Солнце находится над горизонтом всегда ровно 12 часов, его максимальная высота над горизонтом день ото дня изменяется.
3. На экваторе два раза в год — в дни весеннего (21 марта) и осеннего (23 сентября) равноденствий — Солнце в полдень бывает в зените. Таким образом, самые жаркие дни на экваторе приходятся на весну и на осень. В то время как в средних широтах за год происходит один цикл смены времен года, на экваторе происходят два таких цикла.
4. Нет, не промежуточная. На экваторе в день летнего солнцестояния (впрочем, как и в день зимнего солнцестояния) высота кульминации Солнца наименьшая по сравнению с другими днями в году.

*Номер готовила:*

А. Виленин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова,  
А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

*Номер оформила:*

К. Борисов, М. Дубах, Г. Красикоп, Э. Назаров,  
А. Пономарева

*Зав. редакцией:* Л. Чернова

*Художественный редактор:* Г. Макарова

*Корректор:* О. Крипичева

113035 Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/10.

«Квант», тел. 331-81-62

Сдано в набор 17.VI-80.

Подписано в печать 17.VII-80.

Печать офсетная.

Бумага 70x108 1/16. Физ. печ. л. 4.

Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,43

Цена 30 коп. Заказ 1400.

Тираж 260 311 экз.

Чеховский полиграфический комбинат  
Специализированного комитета  
Государственного комитета  
СССР по делам издательства, полиграфии  
и книжной торговли,  
г. Чехов, Московской области

# Шахматный конкурс «Кванта»



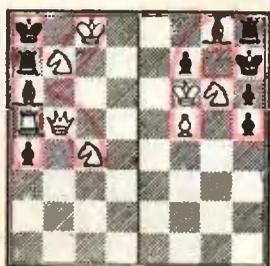
## Шесть Оскаров

В этом году А. Карпов в шестой раз завоевал приз Оскара, который вручается лучшему шахматисту года по результатам опроса шахматных журналистов разных стран. Этот «юбилей» отразил в своем венке задач, посвященном чемпиону мира, международный мастер по шахматной композиции Э. Погосянц. Перед вами шесть диаграмм, на которых изображено 12 задач (все они конкурсные). Пара задач на каждой диаграмме изображает две буквы, слева — К, а справа — А (Анатолий Карпов). Во всех изобразительных задачах участвует девять фигур. Это тоже некий символ — А. Карпов стал перворазрядником в 9 лет, гроссмейстером в 19, а шестого Оскара получил за турнирные успехи 1979 года.

Обращаем ваше внимание на то, что среди этих задач имеется много так называемых «ретроградных», то есть требующих выяснения, чей в них первый ход (хотя мат всюду дают белые). Одна важная деталь, которую вам обязательно надо иметь в виду при решении задач: если последний ход черных в исходной позиции задачи невозможен (конечно, это всякий раз надо доказать), то, значит, очередь хода сейчас за ними. В такой задаче сначала ходят черные (их ход является нулевым, в решении он не засчитывается), и уже после этого белые объявляют черному королю мат в заданное число ходов.



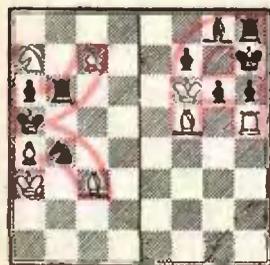
Решения этих задач следует отправлять в одном экземпляре в отдельном конверте по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант» — не позднее 30 сентября 1980 года. На конверте обязательно должна быть пометка «Шахматный конкурс, № 8-80».



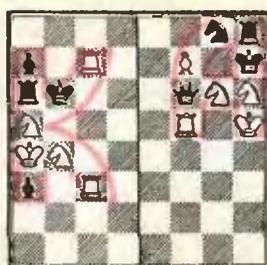
1. Мат в 1 ход.



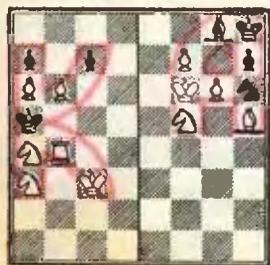
4. Мат в 4 хода.



2. Мат в 2 хода.



5. Мат в 5 ходов.



3. Мат в 3 хода.



6. Мат в 6 ходов.

На этом загадочном рисунке голландского художника М. Эшера левая и правая рука, помогая друг другу, выбрались из слишком тесного для них плоского мира листа бумаги на свободу, в третье измерение. Рисунок вызывает недоумение: нарушены привычные взаимоотношения между рисунком и рисующим, между плоскостью и пространством, между левым и правым. Он иллюстрирует,

в частности, сложное физико-математическое понятие ориентации, затронутое в одной из статей этого номера (с. 2). Действительно, попробуйте серьезно ответить на нелепый, на первый взгляд, вопрос — чем правая рука отличается от левой? Теперь вы, наверное, согласитесь — даже в самых простых явлениях природы часто скрывается много таинственного.

