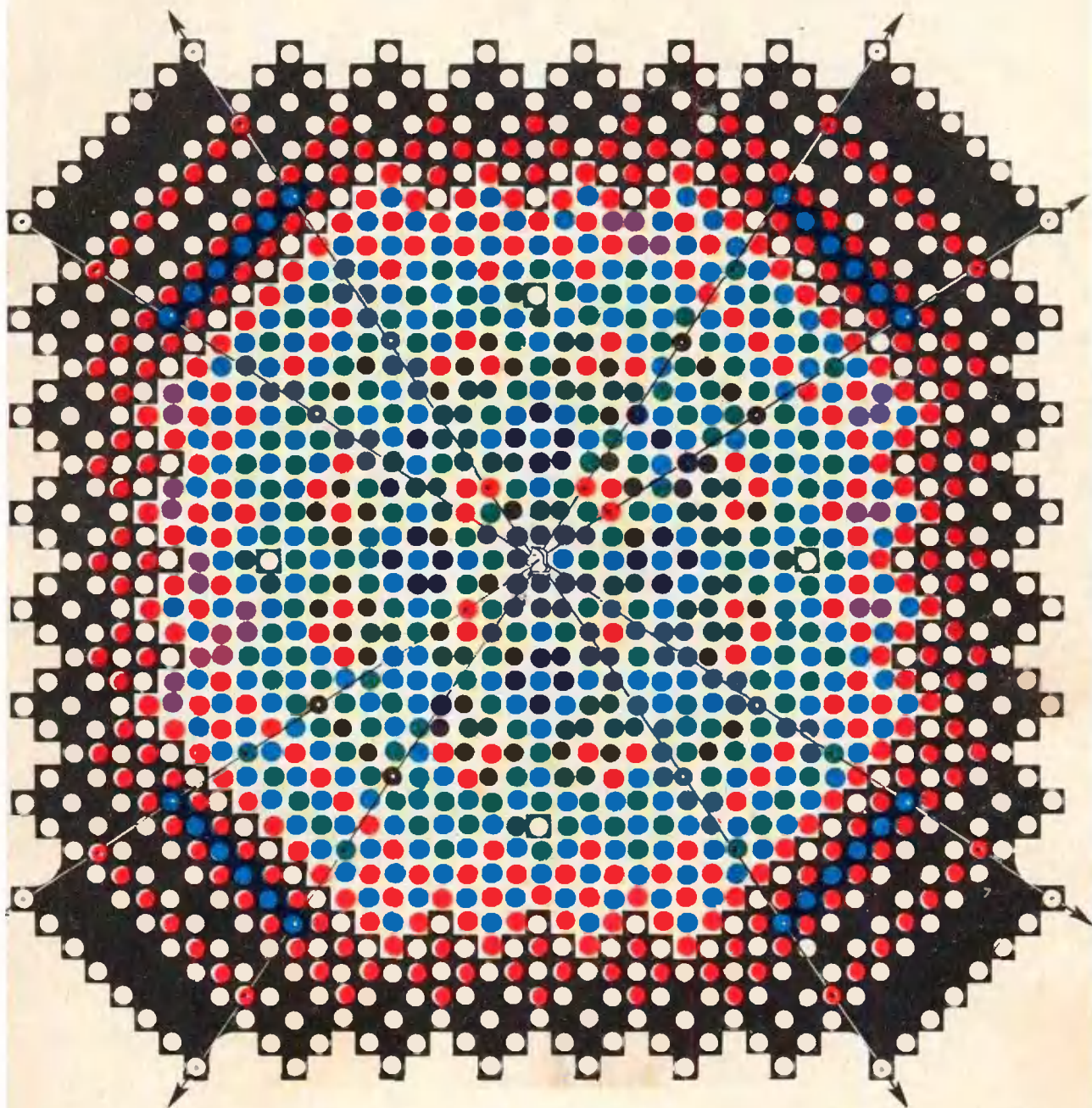
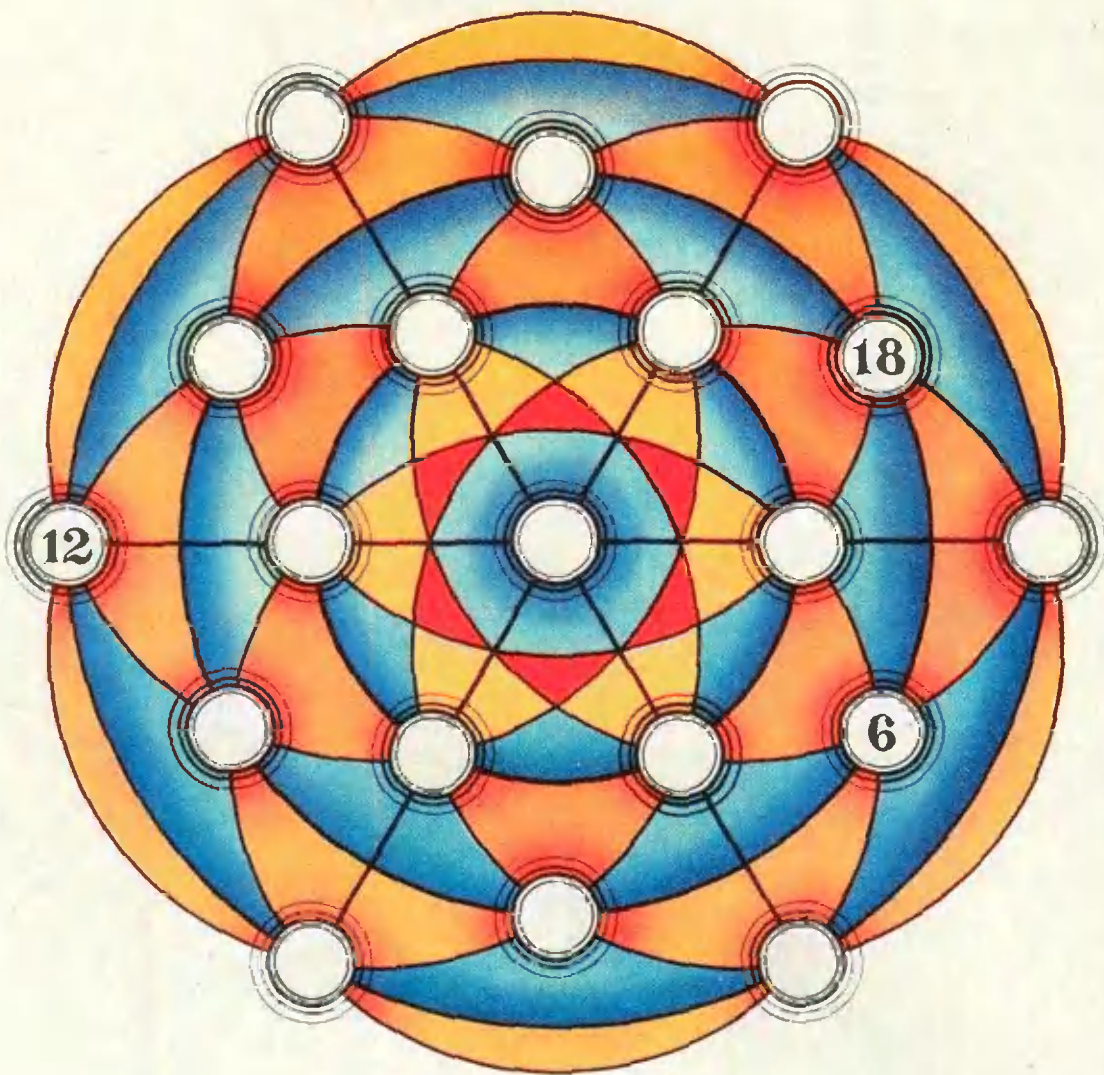


Квант

10
1981

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





ДВАДЦАТОЕ — ЛИШНЕЕ

В шестнадцати свободных кружках расставьте числа от 1 до 20, за исключением 6, 12, 18 и еще одного числа, так чтобы суммы чисел, располо-

женных на каждой из девяти указанных окружностей и каждом из трех указанных диаметров, были одинаковыми.

А. Медяник

Основан в 1970 году

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ:

Ученые обращаются к молодежи

2 *Н. Эмануэль.* Думать и искать

• • •

5 *Л. Асламазов.* Что такое СКВИД?

13 *Д. Коэн.* Метрика коня

17 *С. Филонович.* Генри Кавендиш

22 *Генри Кавендиш.* Экспериментальное определение закона электрической силы

Математический кружок

27 *В. Переяславский.* Игра «Определитель»

Задачник «Кванта»

32 Задачи М706 — М710? Ф718 — Ф722

34 Решения задач М666 — М670; Ф678 — Ф682

«Квант» для младших школьников

41 Задачи

42 *Н. Юфанова.* Интервью с бароном Мюнхаузенем

По страницам школьных учебников

44 *В. Кучеров.* Геометрические аналогии

Практикум абитуриента

47 *А. Шеронов.* Криволинейное движение

Искусство программирования

51 Заочная школа программирования. Урок 15

Информация

58 Всероссийская олимпиада школьников

62 Шахматная страничка

63 Ответы, указания, решения

Новости науки (31)

Наша обложка (57)

Смесь (50)

Шахматный конкурс (3-я с. обложки)

Главный редактор
академик Н. К. Киконин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков

С. Т. Беляев

В. Г. Болтянский

Н. Б. Васильев

Ю. Н. Ефремов

В. Г. Зубов

П. Л. Капица

В. А. Кириллин

А. И. Климанов

С. М. Козел

В. А. Лешковцев

(*зам. главного редактора*)

Н. А. Патрикеева

И. С. Петраков

Н. Х. Розов

А. П. Саввин

Я. А. Смородинский

В. А. Фабрикант

А. Т. Цветков

М. П. Шаскольская

С. И. Шварцбург

Сколько ходов
должен сделать
«кноп 2-3»,
чтобы
попасть из центра
на синюю поле
шахматной доски?
На этот вопрос
отвечает
пестрая раскраска
на первой странице
обложки
(подробнее см. с. 57).



Н. Эмануэль

Думать и искать

Я буду говорить о наиболее актуальных проблемах, которые придется решать сегодняшним школьникам и студентам, о проблемах, которые «перейдут» в XXI век, о том, какие качества должны будут выковать в себе специалисты нового тысячелетия.

В многомиллионной армии Науки сегодня много специализированных отрядов, но мне хотелось бы сказать несколько слов об основных, фундаментальных науках — математике, физике, химии и биологии.

Абстрактная по форме наука — математика — все больше становится инструментом изумительно стройного и строгого описания явлений, с которыми имеют дело естественные, общественные и технические науки. Развитие науки показывает, что в ближайшем будущем роль математики возрастет настолько, что, какой бы специальностью человек ни овладел, ему понадобится для работы отличное знание современного математического аппарата.

В уходящем XX веке человечество обогатилось в области физики такими революционными открытиями, как расщепление ядер урана (в результате чего возникли атомная техника и энергетика), открытие термоядерного синтеза (связанного с огромным выделением энергии), квантовых генераторов — лазеров (нашедших широчайшие области применения), создание транзисторов (которые позволили развить современную радиозлектронику, электронно-вычислительную технику). В XXI веке

Академик Николай Маркович Эмануэль — лауреат Ленинской премии, заместитель директора Института химической физики АН СССР, профессор Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Статья с небольшими сокращениями перепечатывается из сборника «Ленин. Наука. Молодежь», выпущенного в 1980 году издательством «Наука».

физикам предстоит решать грандиозные задачи, которые должны обеспечить будущее процветание человечества.

Современная химия развивается в неразрывной связи с физикой, математикой и биологией. К числу новых областей ее относится химия высоких энергий, которая изучает химические превращения под влиянием радиации, света, лазерного излучения, действия ударных волн, плазменные процессы. Развивается электрохимия, создаются новые электрохимические источники тока. Исключительно важное народнохозяйственное значение имеют работы в области коррозии и защиты металлов от коррозии. Создаются новые полимерные материалы — термостойкие, высокопрочные, устойчивые к воздействию химически агрессивных сред, материалы для медицинских целей. В связи с проблемой рационального использования ресурсов природного органического сырья расширяются нефтехимия, углехимия, сланцевхимия, химия торфа, древесины. Особое место занимает органическая химия с ее миллионами индивидуальных химических веществ, уже нашедших применение или могущих стать нужными в дальнейшем. Химики-органики синтезируют лекарственные препараты против наиболее опасных болезней человека и животных. Реальное значение приобретают работы по синтезу искусственной пищи.

Биология длительное время считалась наукой чисто описательной. Однако глубокое проникновение в сущность биологических явлений привело к интенсивному развитию биологии живой клетки, биохимии и физиологии животных, человека и растений, генетики, биофизики, исследований процесса фотосинтеза. Исключительную привлекательность и перспективы не только для познания механизма жизненных явлений, но и для управления жизненными процессами имеет молекулярная биология. Здесь эффективно переплетаются интересы многих естественных наук.

Сейчас у нас около тысячи вузов, в которых обучаются почти 5 млн. студентов. Грандиозные цифры, которых не знает ни одна страна в мире!

Сейчас в Советском Союзе самое большое в мире число научных работников — почти 1,3 млн. человек. Промышленность нуждается в сырье, и в поисках новых источников сырья неутомимо ищут недра земли геологи. Стране нужны специалисты сельского хозяйства, лесного дела, технологии производства продовольственных товаров и товаров широкого потребления. Нужны экономисты, работники здравоохранения, педагоги, работники искусства и культуры и многие, многие другие специалисты. Когда перечисляешь эти специальности, на ум приходит еще одна мысль: как это замечательно, что нашей стране всегда будет нужно все больше и больше специалистов, что никогда выпускники наших вузов не узнают, что такое безработица.

Склонность к той или иной профессии у молодых людей выявляется, по моему мнению, обычно очень рано, примерно в пятом-шестом классе школы. Поэтому подчас еще в довузовский период молодой человек приобретает некоторый профессиональный кругозор, получает общее представление о будущем, о работе, успевает даже собрать библиотечку из более или менее серьезных и научно-популярных книг, собирает вырезки о любимой профессии из газет... В этом случае у него, совсем еще молодого по возрасту, появляется весьма импонирующая нам, окружающим, деловая зрелость. Особенно хорошо, когда вы уже попробовали что-то сделать своими руками — увлекались ли моделями самолетов, роботов, собирали ли радиоприемники, не боитесь электричества, знаете, как обращаться с химическими веществами... Инфантильность в возрасте, близком к совершеннолетию, — большой недостаток. То, что я назвал деловой зрелостью, — залог успешного и глубокого освоения профессии. Ведь избранной специальностью надо владеть в совершенстве, знать ее до тонкостей, уметь все делать своими руками. Когда механик на слух безошибочно определяет характер и место неисправности в машине и уве-

ренно устраняет неполадки, это столь же красиво, изящно и эстетично, как и виртуозная игра на музыкальном инструменте.

Профессионализм — хорошее качество, которое надо всемерно в себе развивать. И еще есть одна черта, которую следует пытаться выработать в себе к уровню развития своей науки. Познавая то, что уже сформулировано, решено, легло в основу того или иного производства, конструкции, привыкайте думать о том, нельзя ли решить проблему по-другому. Пытайтесь сами находить новые решения, более эффективные, оригинальные. Изобретайте, придумывайте!

Я глубоко уверен, что можно — и должно! — развить в себе подобные черты. Оригинальное творчество должно становиться массовым. Творчески критический подход помогает также и воспитанию инициативы, что абсолютно необходимо специалисту.

В знаменитом письме к молодежи, опубликованном еще в 1935 г., великий физиолог И. П. Павлов писал о скромности. Писал очень строго, требовательно, настаивая на упорном накоплении знаний, говорил о том, что, сколько бы высоко ни оценивали ваши знания другие, всегда надо иметь мужество сказать себе: «Я невежда». Написано сурово и резко. Кстати говоря, пока человек еще молод, деловая нескромность, отсутствие самокритичности и самодовольство порой еще и не так приметны, но если он, взрослея, и дальше будет таким, вред, приносимый им обществу, может стать весьма ощутимым. Особенно, если такой человек окажется на посту руководителя.

Есть старая и общеизвестная истина — «ученик должен превзойти своего учителя». Понятие «учитель» не следует понимать в буквальном смысле слова. Учитель может и не возиться с учеником, вбивая ему в голову различные истины. Но ученик должен взять у учителя все хорошее и ценное, что у него есть, и пойти дальше, создать и развить то новое, прогрессивное, что заложено в нем самом. Тот, кого называют учителем, как правило, испытывает чувство глубокого удовлетворения, когда ученики идут дальше его самого. Только в немногих печальных случаях учитель боится роста своих учеников. И это скорее редкое исключение. Поэтому смотрите внимательно на своих преподавателей. Получайте удовольствие от того, что вы научитесь излагать мысли в их стиле, а затем, может быть, вам удастся выработать свой собственный, который, возможно, окажется более оригинальным, доходчивым, интересным. Если учитель пишет научные работы, монографии, учебники — читайте их, поймите логику его рассуждений, научитесь писать так, как он, а затем выработайте свой почерк, свой стиль изложения.

Как ни очевидны эти советы, они могут оказаться полезными, могут способствовать профессиональному росту.

В заключение хочу пожелать вам следующее: вы вступили в такой возраст, когда ценность каждого прожитого дня настолько велика, что вы не имеете права перед самим собой и перед обществом устраивать перерывы на ничегонеделание. Думайте, ищите, учитесь, творите себя и мир — ежедневно!

Л. Асламазов

Что такое СКВИД?

О сверхпроводимости в наше время знают, наверное, все. Это явление состоит в том, что при низких температурах электрическое сопротивление ряда чистых металлов и сплавов становится равным нулю и электрический ток течет без всяких потерь.

Температуры, при которых исчезает сопротивление, очень низкие — они близки к абсолютному нулю (-273°C). Для охлаждения вещества до такой температуры его помещают в особую среду — жидкий гелий. При нормальном давлении гелий становится жидким при температуре 4,2 К и не замерзает при самых низких температурах — вплоть до абсолютного нуля.

Охлаждение до температур жидкого гелия — довольно сложная задача. Вот почему столь перспективное для использования в технике явление, как сверхпроводимость, пока еще не нашло широкого практического применения. А, казалось бы, как заманчиво, например, передавать электрическую энергию на далекие расстояния по сверхпроводящим проводам — никаких потерь! Однако охлаждать провода сейчас еще довольно дорого. И хотя уже созданы сверхпроводящие линии передач длиной в несколько километров, а также сверхпроводящие моторы и генераторы и даже сверхскоростные поезда на так называемой магнитной подушке (где тоже используется сверхпро-

водимость) — такие установки в серийное производство все еще не запущены.

В лабораториях всего мира физики и химики ищут вещества, которые будут сверхпроводящими при не слишком низких температурах (например, чтобы для их охлаждения можно было использовать сравнительно дешевый и доступный жидкий воздух). В этом направлении уже достигнут значительный прогресс — с каждым годом открывают все более и более «высокотемпературные» сверхпроводники. Но даже сегодняшний рекордсмен — сплав ниобия с германием Nb_3Ge — становится сверхпроводником лишь при температуре 22,4 К.

И тем не менее уже сейчас сверхпроводимость «работает». В ряде случаев возможности сверхпроводимости столь уникальны, что приходится мириться с затратами на охлаждение. Так, сверхпроводящие магниты широко используются для создания сильных магнитных полей (в несколько десятков тесла); сверхпроводимость же применяют для измерения очень слабых магнитных полей (с точностью до 10^{-18} Тл). На основе сверхпроводимости действуют чувствительнейшие вольтметры, детекторы и усилители электромагнитного излучения. Существует целая область электроники — криоэлектроника (от греческого слова «криос» — холод), основанная на использовании явления сверхпроводимости.

О некоторых практических применениях сверхпроводимости будет рассказано в этой статье. Однако рассказ придется начать издалека. Давайте прежде познакомимся с одним красивым физическим явлением, лежащим в основе устройства многих сверхпроводящих приборов.

Квантование магнитного потока

Как известно, в микромире — мире молекул, атомов, элементарных частиц — существуют свои особые законы. Например, там многие физические величины могут принимать только определенные дискретные значения — как говорят физики, величины

квантуются. (Для описания микромира создана специальная наука — квантовая механика.) В больших коллективах частиц — макроскопических телах — квантовые эффекты обычно перестают быть заметными, поскольку из-за хаотического теплового движения происходит усреднение величины по большому числу ее различных значений и квантовые скачки «замазываются».

А что будет, если тело охладить до очень низких температур? Окажется, в таком случае квантование может проявляться и в макроскопических масштабах. Пример тому дает замечательное явление — квантование магнитного потока в сверхпроводнике.

Что такое магнитный поток Φ , знают все, кто изучал явление электромагнитной индукции:

$$\Phi = BS,$$

где B — модуль вектора магнитной индукции, а S — площадь поверхности, охватываемой контуром (для простоты будем считать, что индукция направлена по нормали к поверхности). Однако для многих будет открытием, что магнитный поток, создаваемый сверхпроводящим током, текущим, например, по кольцу, может принимать только определенные дискретные значения. Попробуем хотя бы упрощенно понять это явление.

Движение сверхпроводящих электронов в кольце (рис. 1) похоже на движение электронов в атоме: электроны в кольце как бы движутся по гигантским орбитам радиуса R без всяких столкновений. Поэтому естественно предположить, что их движение подчиняется тем же правилам квантования, что и движение электронов в атоме. Согласно постулату Бора, в атоме только определенные орбиты электронов являются стационарными, устойчивыми. Они отбираются с помощью следующего правила квантования: произведение модуля импульса электрона mv на радиус орбиты R (величина mvR называется моментом импульса электрона) может принимать только дискретные значения, то есть

$$mvR = n\hbar.$$

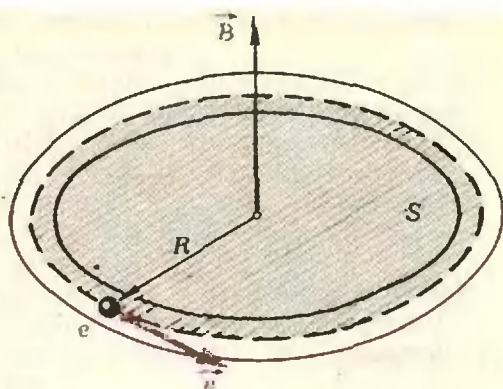


Рис. 1.

Здесь n — целое положительное число, а величина \hbar , определяющая наименьшее возможное изменение (квант) момента импульса, — постоянная Планка^{*}). Оказывается, квантование всех физических величин определяется именно этой универсальной постоянной. Она очень мала:

$$\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с},$$

поэтому квантовые эффекты проявляются, либо когда значения физических величин сами малы (в микромире), либо когда имеется много микрочастиц, движущихся совершенно одинаково. В последнем случае говорят о макроскопических квантовых явлениях, к которым и относится квантование магнитного потока в кольце со сверхпроводящим током.

Найдем величину кванта магнитного потока. Магнитный поток Φ через кольцо связан с током I соотношением

$$\Phi = LI,$$

где L — индуктивность кольца. Ток I можно выразить через скорость электронов v и их число N . Действительно, за время $t = 2\pi R/v$ электроны совершают полный оборот; следовательно, за это время через любое поперечное сечение кольца пройдут все электроны, переносящие заряд $q = eN$ (где e — заряд одного электрона). Поэтому ток в кольце

$$I = \frac{q}{t} = \frac{eNv}{2\pi R}.$$

Еще одно соотношение, связывающее

^{*}) Постоянной Планка называют также константу $\hbar = 2\pi\hbar = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

величины v , N и I , можно получить, приравняв кинетическую энергию сверхпроводящих электронов к энергии кольца с током (см. «Приложение» на с. 12):

$$N \frac{mv^2}{2} = \frac{I}{2} LI^2.$$

Теперь выражение для магнитного потока можно представить в виде

$$\Phi = LI = \frac{LI^2}{I} = N \frac{mv^2}{2} \frac{4\pi R}{eNv} = \frac{2\pi}{e} mvR,$$

откуда следует, что магнитный поток пропорционален моменту импульса электронов. Но, согласно правилу квантования Бора, момент импульса может принимать только дискретные значения, поэтому и магнитный поток через кольцо, по которому течет сверхпроводящий ток, тоже квантуется:

$$mvR = n\hbar \text{ и } \Phi = \frac{2\pi}{e} n\hbar.$$

Квант магнитного потока, который можно найти из предыдущей формулы, конечно, очень малая величина ($\sim 10^{-15}$ Вб), но тем не менее современные приборы позволяют наблюдать квантование магнитного потока. Такой опыт был проделан американскими учеными Дивером и Фейрбенком в 1961 году, только вместо кольца они использовали полую сверхпроводящую трубку, по которой циркулировали круговые сверхпроводящие токи. В опыте было обнаружено, что магнитный поток через площадь поперечного сечения трубки менялся действительно скачкообразно, однако величина кванта потока оказалась вдвое меньше приведенной выше. Объяснение этому дает современная теория сверхпроводимости. Дело в том, что в сверхпроводящем состоянии электроны объединяются в пары и именно движением пар, имеющих заряд $2e$, создается сверхпроводящий ток. Поэтому правильное значение Φ_0 кванта магнитного потока получается, если в формулу квантования потока подставить удвоенный заряд электрона:

$$\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar}{2e} = 2,07 \cdot 10^{-15} \text{ Вб}.$$

Вот так нашлась двойка, потерянная не только нами, но и англий-

ским ученым Лондоном, который теоретически предсказал квантование магнитного потока еще в 1950 году — задолго до того, как была понята природа сверхпроводящего состояния.

Хочется подчеркнуть, что приведенный здесь вывод квантования магнитного потока, хотя и отражает правильно физическую сущность этого явления, слишком упрощенный. Даже удивительно, что таким образом можно получить правильное значение кванта магнитного потока. В действительности сверхпроводимость — сложное квантовое явление. Тем, кто хочет в нем разобраться по-настоящему, предстоит долгий путь от школьной физики до современной теории твердого тела — путь, на который потребуются много лет упорного, но увлекательного труда.

Эффект Джозефсона

Разберем еще одно сверхпроводящее квантовое явление, которое послужило основой для создания целого ряда уникальных измерительных приборов. Речь пойдет об эффекте Джозефсона, открытом сравнительно недавно — в 1962 году, но за который Джозефсону, английскому ученому, теоретически предсказавшему этот эффект, уже присуждена Нобелевская премия.

Представьте себе, что на стеклянную пластинку (как говорят, на подложку) нанесли пленку сверхпроводника (обычно ее получают, напыляя металл в вакууме). Затем ее окислили, создав на поверхности слой диэлектрика (окисла) толщиной всего в несколько ангстрем*). И снова покрыли пленкой сверхпроводника. В результате получился так называемый сэндвич (в буквальном смысле этим английским словом называют два куска хлеба с сыром или другим чем-нибудь вкусным между ними). В сэндвичах и наблюдается эффект Джозефсона (для удобства измерений обычно сэндвич делают в виде креста, как показано на рисунке 2).

*) 1 ангстрем = $1\text{ \AA} = 10^{-10}$ м.

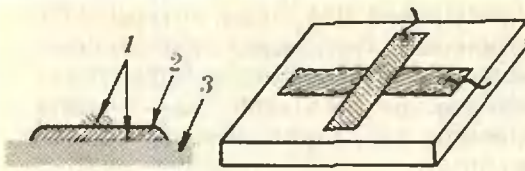


Рис. 2. 1 — металлические пленки; 2 — слой диэлектрика; 3 — подложка.

Давайте вначале обсудим случай, когда металлические пленки находятся в нормальном (не сверхпроводящем) состоянии. Могут ли электроны из одной металлической пленки (рис. 3,а) переходить в другую? Кажется бы, нет — им мешает слой диэлектрика. Для того чтобы выйти из металла, электрон должен обладать энергией, большей чем работа выхода, а при низких температурах электронов с такой энергией практически нет. На рисунке 3,б приведен график зависимости потенциальной энергии электрона W от координаты x (ось X перпендикулярна к плоскости сэндвича). В металле электрон движется свободно, и его потенциальная энергия равна нулю. Для выхода в диэлектрик надо совершить работу выхода W_0 , которая больше, чем кинетическая, а значит и полная, энергия электрона W_0^* . Поэтому говорят, что электроны в металлических пленках разделяет потенциальный барьер, высота которого равна $W_0 - W_0^*$.

Если бы электроны подчинялись законам классической механики, то такой барьер для них был бы непреодолим. Но электроны — микрочастицы, а в микромире действуют особые законы, которые позволяют многое, недоступное большим телам. Человеку, например, с такой энергией на горку не взобраться, а вот электрон может пройти сквозь нее! Он как бы роет под горкой туннель и проникает, даже если его энергии не хватает, чтобы взобраться на горку. Конечно, не следует все это понимать буквально. Туннельный эффект (так называют это явление) объясняется волновыми свойствами микрочастиц, и по-настоящему в нем

* Аналогично, для того чтобы вырвать молекулу из жидкости, надо, как известно, совершить работу испарения.

можно разобраться, только изучив квантовую механику. Но факт остается фактом: с некоторой вероятностью электроны могут проникать через диэлектрик из одной металлической пленки в другую. Эта вероятность тем больше, чем меньше высота $W_0 - W_0^*$ барьера и чем меньше его ширина a .

Итак, тонкая пленка диэлектрика оказывается проницаемой для электронов — через нее может течь так называемый туннельный ток. Однако суммарный туннельный ток равен нулю: сколько электронов переходит из нижней металлической пленки в верхнюю, столько же в среднем переходит, наоборот, из верхней пленки в нижнюю.

Как же сделать туннельный ток отличным от нуля? Для этого надо нарушить симметрию, например — присоединить металлические пленки к источнику тока с напряжением U (рис. 4,а). Тогда пленки будут играть роль обкладок конденсатора, а в слое диэлектрика возникнет электрическое поле с напряженностью $E = U/a$. Работа по перемещению заряда e на расстояние x вдоль направления поля равна $A = Fx = eEx = eUx/a$, и поэтому график потенциальной энергии электрона приобретает вид, показанный на рисунке 4,б. Как видно, электронам из верхней пленки ($x > a$) преодолеть барьер

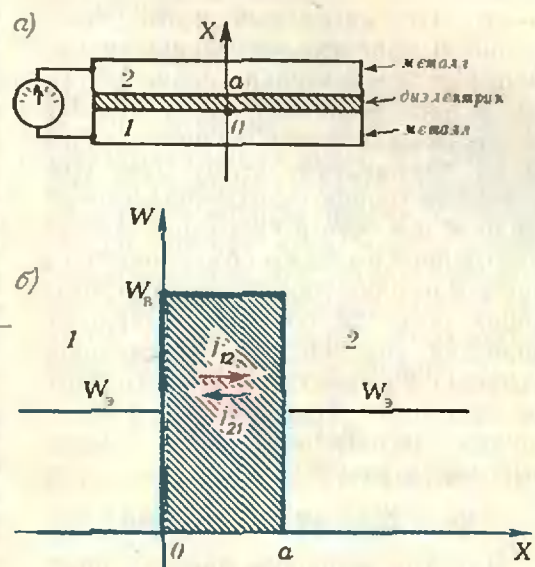


Рис. 3.

легче, чем электронам из нижней пленки ($x < 0$), которым надо подскочить на более высокий уровень. В результате даже при малых напряжениях источника возникнет туннельный ток.

Туннельные контакты из нормальных металлов используются в некоторых приборах, но в этой статье речь идет о практическом применении сверхпроводимости. Поэтому сделаем следующий шаг и представим себе, что металлические пленки, разделенные тонким слоем диэлектрика, находятся в сверхпроводящем состоянии. Как будет вести себя туннельный сверхпроводящий контакт? Оказывается, сверхпроводимость приводит к совсем неожиданным результатам.

Как уже говорилось, электроны из верхней пленки имеют избыточную энергию eU по сравнению с электронами нижней пленки. Эту энергию они приобретают, ускоряясь электрическим полем в слое диэлектрика, через который туннелируют. Оказавшись в нижней пленке, они должны сбросить лишнюю энергию и перейти в равновесное состояние. Если бы пленка находилась в нормальном состоянии, то осуществить это было бы легко — достаточно нескольких столкновений с кристаллической решеткой металла и лишняя энергия электронов в конечном счете пере-

ходит в тепло. Но пленка находится в сверхпроводящем состоянии, и передать энергию решетке электроны не в состоянии! Вот и остается только электронам излучить эту энергию в виде кванта электромагнитного излучения с энергией $h\omega$. Поэтому частота излучения ω связана с приложенным напряжением U простым соотношением

$$h\omega = 2eU.$$

Вы заметили, что справа написан удвоенный заряд электрона — надо помнить, что туннелируют не отдельные электроны, а сверхпроводящие пары.

Вот какой удивительный эффект был предсказан Джозефсоном: постоянное напряжение, приложенное к сверхпроводящему туннельному контакту (его называют также джозефсоновским элементом), приводит к генерации электромагнитного излучения. Экспериментально этот эффект впервые был обнаружен в Харьковском физико-техническом институте низких температур учеными И. М. Дмитриенко, В. М. Свистуновым и И. К. Янсоном в 1965 году.

Первое, что приходит в голову, если говорить о практическом использовании эффекта Джозефсона, — это создание генератора электромагнитного излучения. Но в действительности все не так просто: излучение довольно трудно вывести из узкой щели между сверхпроводящими пленками, где оно генерируется (именно поэтому экспериментальное обнаружение эффекта Джозефсона было непростой задачей), да и мощность излучения очень мала. Поэтому сейчас джозефсоновские элементы используются в основном в качестве детекторов электромагнитного излучения, но зато самых чувствительных в некоторых диапазонах частот.

Такое применение основано на явлении резонанса между внешними электромагнитными колебаниями (в регистрируемой волне) и собственными колебаниями, возникающими в джозефсоновском элементе при приложении к нему постоянного напряжения. Собственно говоря, резонанс лежит в основе работы многих приемников: волну удается «поймать», когда ее частота совпадает с частотой

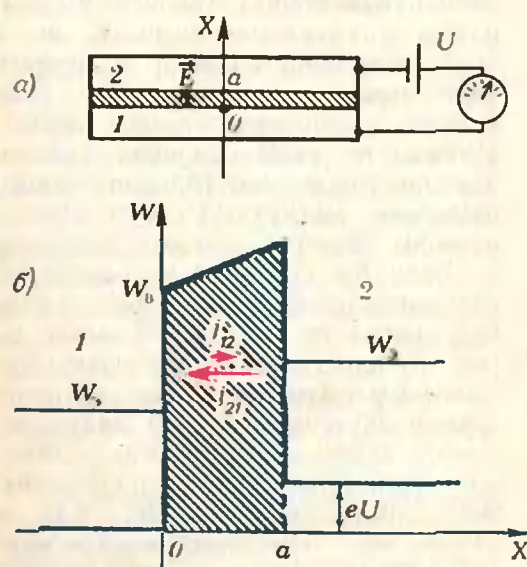


Рис. 4.

той приемного колебательного контура. В качестве приемного контура удобно использовать джозефсоновский элемент: частоту его собственных колебаний легко подстраивать (изменяя напряжение), а острота резонанса, определяющая чувствительность приемника, оказывается очень высокой. По такому принципу уже созданы самые чувствительные приемники электромагнитного излучения, которые используются для исследования излучения Вселенной.

Квантовый магнитометр

Эффект Джозефсона в сочетании с явлением квантования магнитного потока послужили основой для создания целого семейства сверхчувствительных измерительных приборов. Они называются «сверхпроводящие квантовые интерференционные приборы» или «СКВИДы» (по сочетанию первых букв соответствующих английских слов **S**uperconducting **Q**uantum **I**nterference **D**eVICES*). Об одном из них — квантовом магнитометре (приборе для измерения слабых магнитных полей) — будет рассказано в этой главе.

Простейший квантовый магнитометр состоит из сверхпроводящего кольца, в цепь которого включен джозефсоновский элемент (рис. 5). Как вы уже знаете, для того чтобы возник ток в нормальном туннельном контакте, к нему надо приложить хотя бы небольшое напряжение. А вот в сверхпроводящем туннельном контакте это не обязательно. Если в кольце создать сверхпроводящий ток, то он сможет течь и через джозефсоновский элемент: сверхпроводящие пары будут туннелировать через тонкий слой диэлектрика. Такое явление называют стационарным (постоянным во времени) эффектом Джозефсона, в отличие от нестационарного эффекта, сопровождаемого излучением (о нем было рассказано в предыдущей главе). Существует,

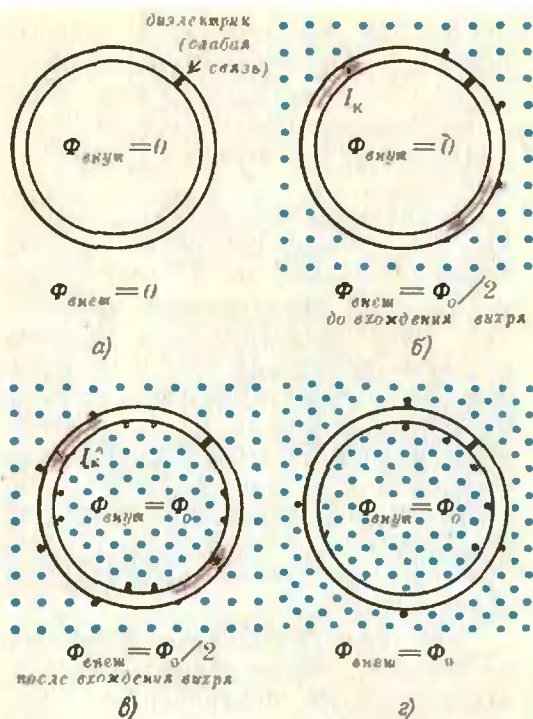


Рис. 5.

однако, максимально допустимое для контакта значение сверхпроводящего тока (его называют критическим током контакта I_k). При токе, большем критического, сверхпроводимость в контакте разрушается и на нем обязательно появляется напряжение (эффект Джозефсона становится нестационарным).

Итак, при включении в сверхпроводящий контур джозефсоновского элемента не происходит полного разрушения сверхпроводимости, но в контуре появляется место, в котором сверхпроводимость ослаблена (как говорят, возникает слабая связь). Именно на этом основано использование такого контура для точного измерения магнитных полей. Постараемся понять, как это делается.

Если бы контур был полностью сверхпроводящим (не содержал слабой связи), то магнитный поток через его площадь был бы строго постоянным. Действительно, согласно закону электромагнитной индукции, всякое изменение внешнего магнитного поля приводит к возникновению ЭДС индукции $\mathcal{E}_i = -\Delta\Phi_{\text{внеш}}/\Delta t$, а значит — к изменению тока в контуре. Но изменяющийся ток в свою очередь порождает ЭДС самоиндук-

* Любопытно, что если в полном русском названии заменить слово «приборы» на слово «детекторы» (а это только уточнит название, укажет на использование этих приборов как регистраторов), то сокращенное название будет звучать и по-русски и по-английски одинаково.

ции $\mathcal{E}_i = -L\Delta I/\Delta t$. Поскольку падение напряжения в сверхпроводящем контуре равно нулю (сопротивление равно нулю), алгебраическая сумма этих ЭДС тоже равна нулю:

$$\mathcal{E}_i + \mathcal{E}_s = 0,$$

или

$$\frac{\Delta\Phi_{\text{внеш}}}{\Delta t} + L\frac{\Delta I}{\Delta t} = 0.$$

Отсюда следует, что при изменении внешнего магнитного потока сверхпроводящий ток в контуре меняется так, чтобы изменение магнитного потока, создаваемого током, компенсировало изменение внешнего потока (правило Ленца). При этом полный магнитный поток через контур остается постоянным: $\Phi = \text{const}$. Изменить его, не переводя контур в нормальное состояние, нельзя (говорят, что в сверхпроводящем контуре магнитный поток «заморожен»).

А что произойдет, если сверхпроводящий контур содержит слабую связь? Оказывается, что магнитный поток через такой контур может меняться — через слабую связь в контур проникают кванты потока (как вы уже знаете, магнитный поток сверхпроводящего тока квантуется — он равен целому числу квантов потока Φ_0).

Давайте проследим, как меняются магнитный поток внутри сверхпроводящего кольца со слабой связью и величина тока в кольце при изменении внешнего магнитного поля. Пусть вначале внешнее поле и ток в контуре равны нулю (рис. 5, а). Тогда поток внутри контура тоже равен нулю. Будем увеличивать внешнее поле — в контуре появится сверхпроводящий ток, магнитный поток которого в точности компенсирует внешний поток. Так будет продолжаться до тех пор, пока ток в контуре не достигнет критического значения I_k (рис. 5, б). Предположим для определенности, что в этот момент внешнее поле создает поток, равный половине кванта: $\Phi_0/2^*$.

Как только ток станет равным I_k , сверхпроводимость в месте слабой связи разрушится, и в контур войдет квант потока Φ_0 (рис. 5, в). При этом отношении $\Phi_{\text{внут}}/\Phi_0$ скачком увеличится на единицу (как говорят, сверхпроводящий контур перейдет в новое квантовое состояние). А что произойдет с током? Его величина останется прежней, но направление изменится на противоположное. Действительно, если до вхождения кванта потока Φ_0 ток I_k полностью экранировал внешний поток $\Phi_0/2$, то после вхождения он должен усиливать внешний поток $\Phi_0/2$ до значения Φ_0 . Поэтому в момент вхождения кванта потока направление тока скачком меняется на противоположное.

При дальнейшем увеличении внешнего поля ток в кольце начнет уменьшаться, сверхпроводимость в кольце восстановится и поток внутри кольца будет оставаться равным Φ_0 . Ток в контуре обратится в нуль, когда внешний поток также станет равным Φ_0 (рис. 5, г), а затем он начнет течь в обратном направлении (опять экранировка!). Наконец, при значении внешнего потока $3\Phi_0/2$ ток опять станет равным I_k , сверхпроводимость разрушится, войдет следующий квант потока и т. д.

Графики зависимости магнитного потока $\Phi_{\text{внут}}$ внутри кольца и тока I в нем от величин внешнего потока $\Phi_{\text{внеш}}$ показаны на рисунке 6 (оба потока измеряются в естественных единицах — квантах потока Φ_0). Ступенчатый характер зависимости позволяет «чувствовать» отдельные кванты потока, хотя величина их очень мала (порядка 10^{-15} Вб). Нетрудно понять почему. Магнитный поток внутри сверхпроводящего контура изменяется хотя и на малую величину $\Delta\Phi = \Phi_0$, но скачком, то есть за очень короткий промежуток времени Δt . Так что скорость изменения магнитного потока $\Delta\Phi/\Delta t$ при таком скачкообразном характере изменения потока оказывается очень большой. Ее можно измерить, например, по величине ЭДС индукции, наводимой в специальной измерительной катушке прибора. В этом и состоит принцип работы квантового магнитометра.

*) Критический ток зависит от многих причин, в частности — от толщины слоя диэлектрика. Меняя ее, всегда можно добиться того, чтобы создаваемый этим током магнитный поток, а значит и внешний магнитный поток, был равен $\Phi_0/2$. Это упрощает рассмотрение, но не меняет существа дела.

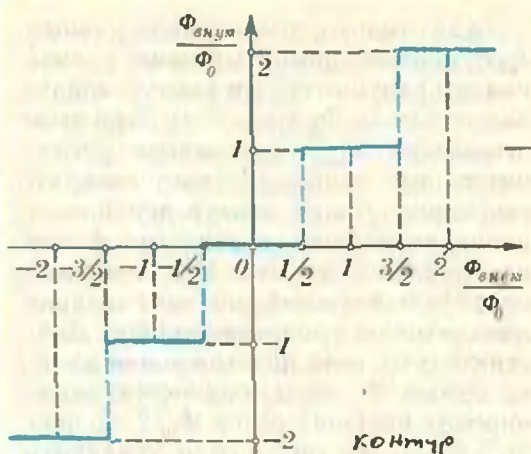


Рис. 6.

Устройство реального квантового магнитометра в действительности много сложнее. Так, обычно используют не одну, а несколько слабых связей, включенных параллельно, — своеобразная интерференция сверхпроводящих токов приводит к повышению точности измерений (поэтому такие приборы и называются интерференционными). Чувствительный элемент прибора индуктивно связывают с катушкой колебательного контура, где скачки потока преобразуются в импульсы напряжения, которые затем усиливаются. Но рассказ обо всех этих тонкостях выходит за рамки данной статьи.

Заметим, что в наши дни сверхчувствительные магнитометры, измеряющие магнитные поля с точностью до 10^{-15} Тл, — это уже промышленная продукция, находящая широкое применение в измерительной технике. Недалек, например, тот день

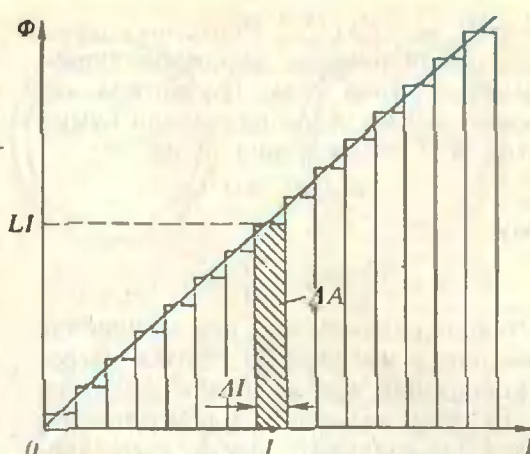


Рис. 7.

когда магнитокардиограммы*), снимаемые с помощью СКВИДов, принципиально изменяют существующие возможности для диагностики сердечных заболеваний.

Приложение

Формулу для энергии кольца с током можно получить, например, так. Представим себе, что сверхпроводящее кольцо подключается к источнику тока с ЭДС \mathcal{E} . В кольце появится ток, который будет все время нарастать. При этом скорость изменения тока $\Delta I/\Delta t$ должна быть такой, чтобы ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{is} = -L\Delta I/\Delta t$ компенсировала внешнюю ЭДС \mathcal{E} (сопротивление сверхпроводника, а следовательно, и падение напряжения на нем равны нулю):

$$\mathcal{E}_{is} = -\mathcal{E}.$$

При прохождении по цепи заряда $\Delta Q = I\Delta t$ источник совершает работу

$$\Delta A = \mathcal{E}\Delta Q = L \frac{\Delta I}{\Delta t} I\Delta t = LI\Delta I.$$

Произведение LI — это магнитный поток Φ через площадь кольца. Для того чтобы нагляднее представить полученный результат, нарисуем график зависимости Φ от I (рис. 7). Как видно из рисунка, элементарная работа ΔA равна площади заштрихованного прямоугольника. Полная работа A при изменении тока от 0 до I_0 равна сумме площадей прямоугольников с высотами, равными соответствующим значениям магнитного потока, то есть площади треугольника со сторонами I_0 и LI_0 :

$$A = \frac{1}{2} (LI_0)I_0 = \frac{1}{2} LI_0^2.$$

Эта работа как раз и равна энергии тока в кольце. Разумеется, полученное выражение не зависит от того, какой ток течет в кольце — сверхпроводящий или нормальный.

*) Оказывается, при работе сердца возникают очень слабые магнитные поля — порядка 10^{-11} Тл. Их регистрацию и называют в медицине снятием магнитокардиограммы.

Д. Козн

Метрика коня

Нас здесь будут интересовать ходы коня на шахматной доске, которую мы вначале будем предполагать бесконечной. Обозначим клетки доски парами целых чисел (координатами центра клетки — см. рис. 1). Ход коня, находящегося в начале координат $(0;0)$, — это переход в одну из 8 клеток с координатами $(\pm 1; \pm 2)$, $(\pm 2; \pm 1)$. Если же конь находится в клетке $(x; y)$, то один ход переводит его в одну из клеток $(x \pm 1; y \pm 2)$, $(x \pm 2; y \pm 1)$.

Определим расстояние от клетки P до клетки Q как минимальное число ходов коня, необходимое для того, чтобы перейти из P в Q . Обозначим это число через $\varrho(P, Q)$. Напри-

Автор — американский математик — написал эту статью для «Кванта» по-английски. Перевод под редакцией А. Сосинского.

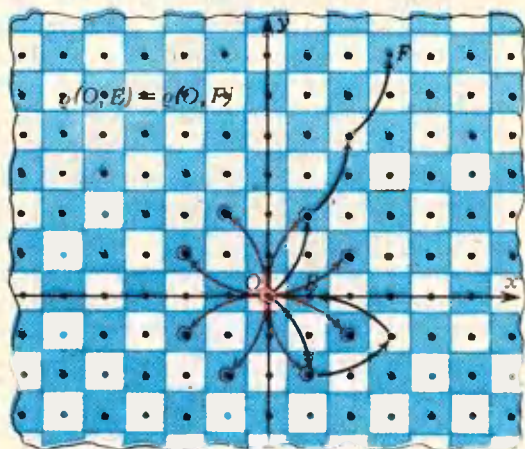


Рис. 1.

мер, расстояние от начала $O(0;0)$ до клетки $E(1;0)$ равно расстоянию от начала до клетки $F(3;6)$ — оба они равны 3. Функция ϱ , определенная на множестве пар (P, Q) клеток, обладает тремя основными свойствами расстояния*):

$$\varrho(P, Q) > 0, \text{ при } P \neq Q; \varrho(P, P) = 0;$$

$$\varrho(P, Q) = \varrho(Q, P); \quad (\text{II})$$

$$\varrho(P, R) \leq \varrho(P, Q) + \varrho(Q, R). (\text{III})$$

Первые два свойства очевидны, а третье — его называют *неравенством треугольника* — следует из того, что может найтись путь из P в R , не проходящий через Q и более короткий, чем любой путь из P в R , проходящий через Q .

Это расстояние — метрика коня — порождает весьма необычную «геометрию». В ней можно определить понятие отрезка $[AB]$ ***) как множество клеток M таких, что $\varrho(A, M) + \lambda(M, B) = \varrho(A, B)$, но отрезки получаются весьма уродливыми (два отрезка могут пересекаться в нескольких клетках). Можно определить и окружности радиуса r , которые выглядят несколько более прилично (по крайней мере, при $r \geq 5$).

А пока отметим следующее очевидное свойство функции ϱ :

$$\begin{aligned} \varrho((x; y), (x'; y')) &= \\ &= \varrho((0; 0), (x' - x; y' - y)). \quad (*) \end{aligned}$$

оно позволяет вместо функции ϱ от пар клеток изучать функцию от одной клетки — расстояние от начала:

$$d(P) = \varrho(O, P).$$

Проставим в каждой клетке P значение функции $d(P)$. Вообразим, что мы это сделали на листке кальки. Тогда свойство (*) означает, что, если мы параллельно сдвинем кальку, совместив начало O с точкой P , на кальке над точкой Q будет написано $\varrho(P, Q)$.

На рисунке 2 проставлены все значения $d(P)$, меньшие или равные 4. Рисунок подсказывает следую-

*) См. «Геометрия 6–8», п. 4 — прим. ред.

**) См. «Геометрия 6–8», пп. 5–6 — прим. ред.

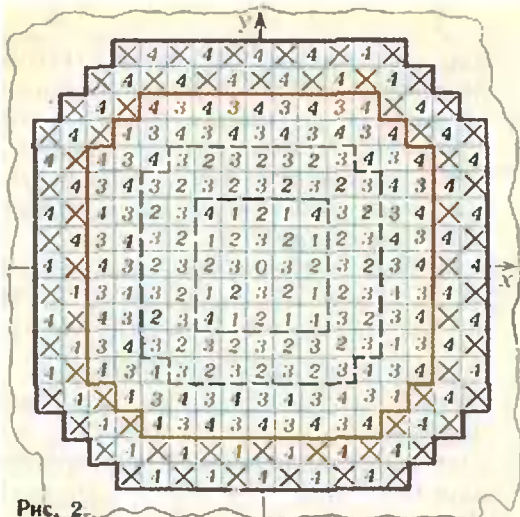


Рис. 2.

щие свойства функции d :

$$d((a; b)) = d((b; a)), \quad (1)$$

$$d((a; b)) = d((|a| |b|)), \quad (2)$$

числа $d((a; b))$ и $a+b$

имеют одинаковую четность, (3) которые, очевидно, следуют из определения.

Заметим далее, что на рисунке 2 внутри красной линии стоят числа 0, 1, 2, 3, 4, изрядно перепутанные, хотя и симметрично расположенные (из-за свойств (1) и (2)). В поясе между красной и синей линиями стоят только четверки и значок \times (на самом деле $\times = 5$). В следующем таком поясе будут стоять только 5 и 6, в следующем — 6 и 7 и т. д. (рис. 3). На рисунке 4 изображена только первая четверть ($x, y \geq 0$). На этом рисунке также показан участок n -го пояса, в котором стоят только числа n и $n+1$.

Грубо говоря, n -й пояс имеет форму границы квадрата (со стороной длины $4n+1$) со срезанными углами (отрезаны равнобедренные прямоугольные треугольники с боковой стороной длины $n-1$). Пояс составлен из горизонтальных и вертикальных полос толщины 2 и четырех диагональных участков в виде лесенки; один из них выделен на рисунке цветом.

Таким образом, если отвлечься от путаницы, существующей вблизи начала отсчета, геометрическая картина метрики коня проявилась. Однако этого нам мало: мы хотим научиться находить $d((a; b))$ чисто аналитически — по числам a и b . Короче, нам нужна

Формула расстояния $d((a; b))$

В силу свойств (1) и (2) достаточно вычислить $d((a; b))$ в случае, когда $0 \leq a \leq b$. Кроме того, чтобы избежать путаницы, существующей около начала отсчета, мы будем предполагать, что $a+b \geq 6$. Рассмотрим два случая в зависимости от того, лежит ли клетка $P(a; b)$ в горизонтальной полосе или на диагональном участке.*

Первый случай: клетка $P(a; b)$ лежит в горизонтальной полосе n -го пояса, то есть $2a \leq b$. При фиксированном $d = d((a; b))$ у точки P имеются 4 разные возмож-

* Мы предлагаем доказательство, несколько отличающееся от авторского (прим. ред.)

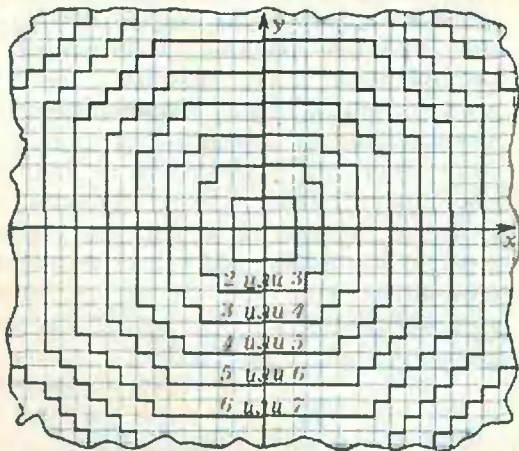


Рис. 3.

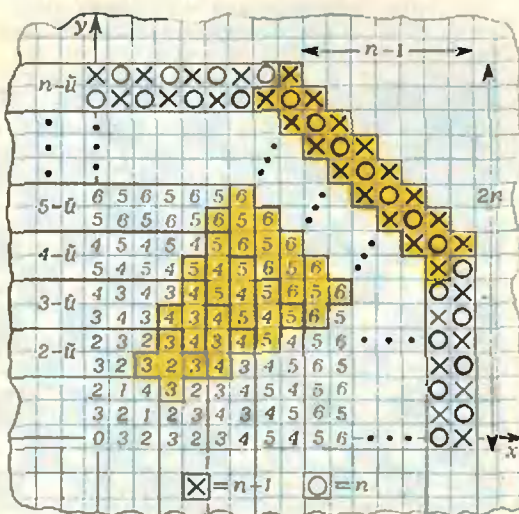


Рис. 4.

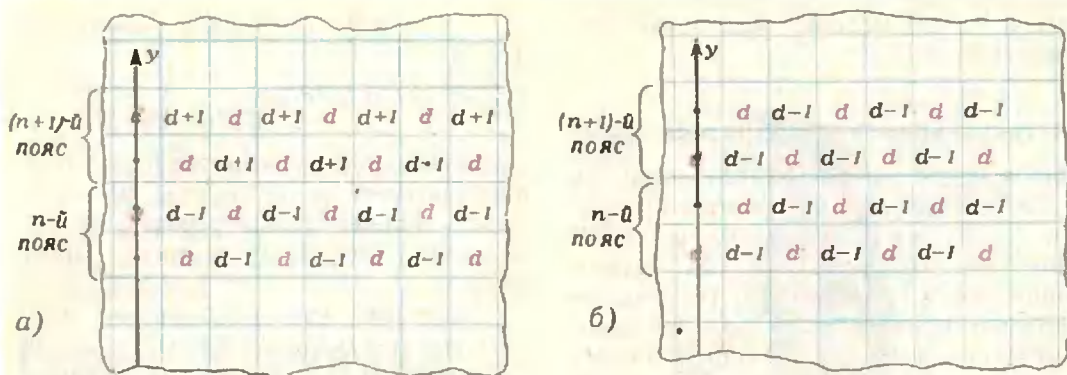


Рис. 5. На рисунке а) изображен случай, когда d нечетно, а на рисунке б) число d четно.

ности в зависимости от ее уровня по вертикали (рис. 5). На самом верхнем уровне точка P достигается минимальной цепочкой из d ходов, увеличивающих вторую координату на 2; на следующем уровне — цепочкой из $d-1$ ходов этого типа и одним ходом, увеличивающим вторую координату на 1; на следующем уровне требуется $d-2$ и 2 хода этих типов; на нижнем уровне — соответственно $d-3$ и 3. В этих случаях высота b равняется $2d$, $2(d-1)+1=2d-1$, $2(d-2)+2=2d-2$, $2(d-3)+3=2d-3$ соответственно. Отсюда можно было бы выразить d через b , но b — целое, и мы не можем записать ответ, не зная четности b ! Как быть?

Оказывается, правильный ответ дает одно из чисел $\lfloor (b+1)/2 \rfloor$ или $\lfloor (b+1)/2 \rfloor + 1$ (здесь квадратные скобки обозначают целую часть), а именно то, чья четность совпадает с четностью числа $a+b$ (см. свойство (3)). Читатель легко проверит это, воспользовавшись рисунком б) и подписью к нему.

Второй случай: клетка $P(a; b)$ лежит на диагональном участке n -го пояса, то есть $2a > b$. Легко видеть, что в любую точку диагонального участка первой четверти n -го пояса можно добраться минимальной последовательностью ходов коня так, чтобы на каждом ходе сумма координат увеличивалась ровно на 3 (то есть ходами $(a; b) \rightarrow (a+1; b+2)$ и $(a; b) \rightarrow (a+2; b+1)$). Поэтому $a+b=3n$ или $a+b=3(n+1)$, откуда $d((a; b)) = \lfloor (a+b+1)/3 \rfloor$ или $d((a; b)) = \lfloor (a+b+1)/3 \rfloor + 1$. Какое именно

из этих двух чисел можно взять, ясно из соображений четности (см. (3)).

Подведем итог нашего исследования функции $d((a; b))$. При условиях $0 < a \leq b$ и $a+b \geq 6$ число $d((a; b))$ имеет ту же четность, что $a+b$, равняется $\lfloor (b+1)/2 \rfloor$ или $\lfloor (b+1)/2 \rfloor + 1$ в случае $2a \leq b$, $\lfloor (a+b+1)/3 \rfloor$ или $\lfloor (a+b+1)/3 \rfloor + 1$ в случае $2a > b$.

На самом деле эти формулы дают верный ответ и при $a+b < 6$ всюду, кроме клеток $(0; 1)$ и $(2; 2)$, где они дают 1 и 2 соответственно, вместо правильных 3 и 4 (см. рис. 2).

Метрика коня на прямоугольной доске

Ограничим теперь нашу бесконечную шахматную доску: будем рассматривать ходы коня на прямоугольной доске $a \times b$ ($a \leq b$). При $a=1$ рассматривать нечего («Товарищ гроссмейстер, так конь не ходит!»), при $a=2$ все очень просто. Более содержательные случаи $a=3$ и $a=4$ мы оставим читателю, а сами перейдем к случаю $5 \leq a \leq b$. Оказывается,

При $5 \leq a \leq b$ существует последовательность ходов коня длины $d((a; b))$ внутри прямоугольника со сторонами $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$, соединяющая точки $(0; 0)$ и $(a; b)$, и этот путь самый короткий.

Действительно, начнем с точки в n -м поясе и сделаем один ход в сторону начала. Тогда мы останемся внутри прямоугольника и попадем в $(n-1)$ -ый пояс. Продолжая этот процесс, мы доберемся до четвертого пояса. Далее остается проверить справедливость нашего утверждения для клеток четвертого

пояса. Этот перебор мы оставляем читателю.

Метрика коня на квадратной доске

Рассмотрим теперь квадратную доску $n \times n$, скажем, ограниченную прямыми $x=0$, $x=n-1$, $y=0$, $y=n-1$. Назовем *диаметром* этой доски наибольшее расстояние (в смысле метрики коня) между ее клетками. Вновь оставляя случай малых размеров читателю, мы рассмотрим случай $n \geq 5$. Из предыдущего легко видеть, что диаметром будет расстояние от клетки $(0; 0)$ до одной из клеток $(n-1; n-1)$ или $(n-1; n-2)$. Пользуясь этим замечанием и ранее полученной формулой расстояния, покажем, что

Диаметр шахматной доски $n \times n$ равен числу $2n/3$, округленному до ближайшего целого.

Действительно, по формуле расстояния $d((n-1; n-1))$ равняется $\lfloor (2n-1)/3 \rfloor$ или $\lfloor (2n-1)/3 \rfloor + 1$ (именно, тому из этих чисел, которое четно); а $d((n-1; n-2))$ равняется $\lfloor (2n-2)/3 \rfloor$ или $\lfloor (2n-2)/3 \rfloor + 1$ (нечетному). Рассмотрим три случая в зависимости от остатка от деления числа n на 3.

Первый случай: $n=3k$. Тогда

$\lfloor (2n-1)/3 \rfloor = \lfloor (2n-2)/3 \rfloor = 2k-1$, так что расстояние до $(n-1; n-1)$ равно $2k$, а до $(n-1; n-2)$ равно $2k-1$. Диаметр равен $2a$, что есть $2n/3$ без всякого округления.

Второй случай: $n=3k+1$. Тогда

$$\lfloor (2n-1)/3 \rfloor = \lfloor (2n-2)/3 \rfloor = 2k,$$

так что расстояния до $(n-1; n-1)$ и $(n-1; n-2)$ соответственно равны $2k$ и $2k+1$. Диаметр равен $2k+1$, то есть округленному числу $2n/3$.

Третий случай: $n=3k+2$. Тогда

$$\lfloor (2n-1)/3 \rfloor = 2k+1, \quad \lfloor (2n-2)/3 \rfloor = 2k,$$

так что интересующие нас расстояния соответственно равны $2k+2$ и $2k+1$. Значит, диаметр равен $2k+2$, то есть снова округленному числу $2n/3$.

Заметьте, что наименьшее расстояние реализуется в этом случае клетками, не лежащими на главной диагонали.

Другие формулы

Функция $d((a; b))$ уже исследовалась раньше, и для нее были получены другие (более сложные) аналитические выражения (при $a+b \geq 8$, $0 \leq a \leq b$). М. Голдберг (США) нашел

$$d((a; b)) = \begin{cases} b-a-2 \lfloor (b-2a)/4 \rfloor & \text{при } 2a \leq b, \\ b-a + \lfloor (8a-4b+2)/3 \rfloor - & \\ - \lfloor (4a-2b)/3 \rfloor & \text{при } 2a > b. \end{cases}$$

а Д. Цветкович и С. Симич (Югославия) нашли

$$d((a; b)) = \begin{cases} a+b-2 \lfloor \frac{b}{2} \rfloor - \lfloor \frac{a-\lfloor b/2 \rfloor}{2} \rfloor & \text{при } 2a \leq b, \\ a+b-2 \lfloor \frac{a+b}{3} \rfloor & \text{при } 2a > b. \end{cases}$$

Можно показать, что эти формулы эквивалентны нашим, но интереснее попытаться угадать, какими рассуждениями пришли к ним их авторы.

В заключение предлагаем читателю такую задачу: *найти площадь круга радиуса r , то есть число клеток $(a; b)$, для которых $d((a; b)) \leq r$.*

Турнир имени М. В. Ломоносова

По уточненным данным в этом году турнир (см. «Квант», 1981, № 8, с. 51) состоится в Москве 25 октября в 10.00 в помещении следующих вузов: МАИ, МАТИ, МГПИ, МИИГАиК, МИНХиПИ, МИСИ, МИСиС; приглашаются школьники 6–9 классов.

С. Филонович

Генри Кавендиш

В этом году исполняется 250 лет со дня рождения Генри Кавендиша. С именем Кавендиша в истории науки связано множество открытий, о которых человечество узнало много лет спустя после того, как они были сделаны. Личность этого человека, посвятившего всю жизнь естествознанию, многие годы привлекает внимание физиков, историков науки, психологов.

Генри Кавендиш, принадлежавший к знатному роду герцогов Девонширских, родился 10 октября 1731 года в Ницце, где по совету врачей в то время жила его мать. Она вообще не отличалась крепким здоровьем, а рождение детей окончательно расшатало его, и леди Кавендиш умерла вскоре после рождения второго сына, когда ее первенцу Генри было около двух лет. В 11 лет мальчика отправили в одну из лучших частных школ в Лондоне, а в 1749 году он поступил в Кембриджский университет, который оставил в 1753 году, так и не получив ученой степени. Высказывалось предположение, что это обстоятельство было связано с болезненной застенчивостью Кавендиша и его страхом перед экзаменом.

После ухода из университета Генри некоторое время путешествовал вместе с младшим братом по Европе, а затем поселился в доме отца в Лондоне. Об отце Кавендиша, сэре Чарльзе, следует сказать особо. Знатный, хотя и не очень богатый человек, он более всего на свете интересовался естествознанием. Сэр Чарльз в течение многих лет был членом Лондонского Королевского общества, а некоторое время даже его вице-президентом. Научные интересы его относились к модной в то



время области электричества. Известный американский естествоиспытатель Б. Франклин писал о Кавендише-отце: «Хотелось бы, чтобы такой уважаемый ученый больше общал миру о множестве проводимых им с большой тщательностью экспериментов». Не исключено, что отец и сын Кавендиши некоторые опыты ставили совместно.

Итак, интерес Генри к естественным наукам родился под влиянием занятий отца. Однако, судя по сохранившимся записям, большинство важнейших опытов Генри провел самостоятельно.

Каково же место Кавендиша в науке второй половины XVIII века? Какие проблемы его интересовали?

Круг научных интересов Кавендиша столь широк, что больше всего к нему подходит определение «естествоиспытатель». При жизни он прославился как химик. За пионерские исследования газов Кавендиша иногда называют «отцом пневматической химии». Он впервые определил природу водорода как особого газа, подтвердил, что воздух есть смесь кислорода и азота, что вода образуется из воздуха и водорода. Его интерес к химии и электрическим явлениям привел к открытию того

факта, что при действии электрической искры на влажный воздух образуется азотная кислота. При проведении одного из своих электрохимических опытов Кавендиш, пропуская электрическую искру через смесь воздуха с кислородом в присутствии едкого кали, заметил, что после образования азотной кислоты, взаимодействующей с едким кали, и удаления избытка кислорода получается незначительный остаток ($1/120$ начального объема газа), на который не действуют никакие средства. Это открытие было надолго забыто, о нем вспомнили лишь в конце XIX века, после открытия инертных газов.

Исследования Кавендиша по химии тематически совпадали с работами многих других ученых того времени: Лавуазье, Уатта, Пристли. Однако исследовательский метод Кавендиша был оригинальным: он характеризуется явно выраженным стремлением к точному количественному эксперименту. Кавендиш, например, не только доказал существование водорода, но и провел расчеты, найдя, что этот газ в 11 раз легче воздуха*). Применяя специально усовершенствованный им прибор — эвдиометр, ученый исследовал объемные соотношения между воздухом, водородом и водой, образованной при взрыве смеси.

Бытует мнение, что ученый провел всю жизнь за опытами, совершенно не публикуя их результаты. Это несколько преувеличенное представление. Действительно, Кавендиш, по не очень ясным причинам, редко публиковал свои научные результаты. Зачастую публикации делались значительно позднее проведения опытов, и это приводило к острым приоритетным спорам. Тем не менее можно насчитать более десятка его работ по физике и химии, опубликованных в журнале «Philosophical Transactions», издававшемся Лондонским Королевским обществом. Кавендиш был членом общества с 1760 года и играл активную роль в работе ряда его комиссий. Он принимал участие в заседаниях и традиционных обе-

дах членов общества, помогал Дж. Бэнксу в его деятельности на посту президента. Правда, современники утверждают, что Кавендиш неохотно вступал в разговоры и тем более в споры, стесняясь, по-видимому, своего высокого и резкого голоса. Выдающийся английский физик и химик Дэви писал о Кавендише, что его основной страстью было бескорыстное служение истине и что известность и слава отпугивали ученого.

Кроме химии Кавендиш интересовался геологией. Он совершил несколько поездок по Англии с целью изучения геологических и минералогических особенностей разных районов. Во время этих путешествий ученый знакомился с некоторыми производственными процессами, усовершенствование которых требовало знания физики и химии.

Кавендиш общался с крупнейшими английскими учеными своего времени: Пристли, Дэви, Уаттом, Юнгом. Активная исследовательская работа ученого продолжалась практически до самой смерти, последовавшей после непродолжительной болезни 24 февраля 1810 года. Последняя работа Кавендиша (1809 г.) была посвящена исследованию астрономических инструментов.

Широкую известность при жизни Кавендиша приобрела его работа по определению средней плотности Земли, опубликованная в 1798 году. В наши дни эксперимент, описанный в ней, известен как «опыт Кавендиша». Вопрос об определении плотности Земли возник в связи с тем, что расчет сжатия Земли, обусловленного вращением, выполненный в предположении о ее постоянной плотности, не согласовывался с данными геофизических наблюдений. Интересно, что еще Ньютон высказал предположение, что плотность внутренних слоев Земли может в шесть раз превышать плотность воды. Попытки привести расчет в согласие с опытом не удавались. Требовалось провести точный эксперимент. До Кавендиша плотность Земли пытались определить путем наблюдения отклонения

*В действительности водород в 14,3 раза легче воздуха.

свинцового бруска от вертикали под действием притяжения горы. Однако этот метод таил в себе так много источников ошибок, что Кавендиш решил от него отказаться. Для измерений ученый использовал прибор, доставшийся ему от английского физика Джона Митчелла. Справедливости ради нужно сказать, что Кавендиш значительно усовершенствовал устройство прибора.

Цель опыта состояла в определении периода крутильных колебаний посеребренной медной нити, к которой прикреплен стержень с двумя легкими шарами на концах (см. рисунок). Период колебаний зависит от взаимодействия этих шаров с большими шарами, которое определяется законом всемирного тяготения. Точные измерения периода колебаний дают возможность вычислить гравитационную постоянную G . После этого, зная величины среднего радиуса R_3 Земли и ускорения свободного падения g (эти данные получают из геофизических измерений), можно рассчитать среднюю плотность Земли D . (Действительно, $g = GM/R_3^2$, где $M = \frac{4}{3}\pi R_3^3 D$ — масса Земли; отсюда $D = 3g/4\pi GR_3$.)

Для истории науки наибольшую ценность представляло, конечно, не определение геофизической постоянной D , а возможность вычисления по данным «земных» измерений фундаментальной константы G . Поэтому в литературе часто пишут об опытах Кавендиша как об экспериментах по определению G .

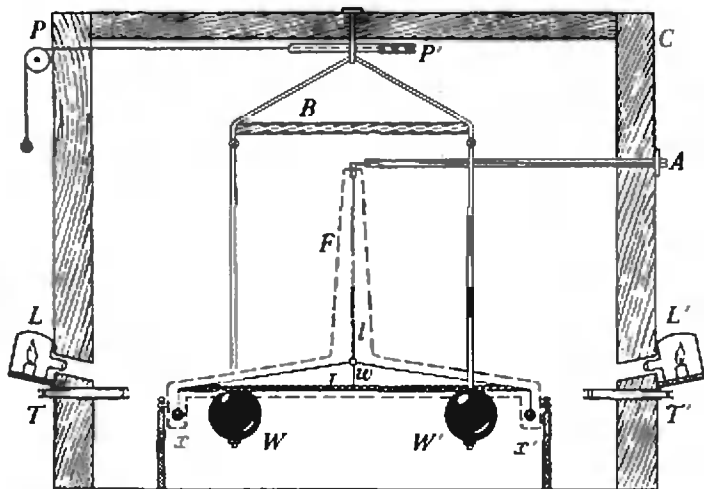
Кавендиш проявил большое экспериментальное искусство, сконструировав установку так, что расстояние между большими и малыми шарами могло регулироваться удаленным наблюдателем; это уменьшало влияние побочных факторов на результаты опытов. Применение зрительной трубы позволило проводить очень точные (до $1/20$ дюйма*) отсчеты смещений шаров. Для исключения случайных погрешностей ученый разработал специальную процедуру измерений, которая многократно повторялась. Вот что пишет об этом сам Кавендиш:

«Я определял последовательно проходимые три крайние точки колебания, брал среднее между первой

*) 1 дюйм = 2,54 см.

Схема установки Кавендиша для определения средней плотности Земли.

Крутильные весы помещены во внешний кожух C , предохраняющий их от потоков воздуха, создаваемых движениями экспериментатора; PP' — тяга, с помощью которой вращается стержень B и перемещаются массивные свинцовые шары W и W' ; пунктиром показан кожух F , защищающий крутильный подвес от воздушных потоков, вызываемых колебаниями температуры; A — передача для установки крутильного подвеса; l — закручивающаяся нить; r — стержень, стабилизируемый двумя нитями w , на концах которых закреплены малые свинцовые шары x и x' ; L , L' — лампы; T , T' — зрительные трубы. Диаметры больших шаров 12 дюймов, малых — 2 дюйма. Расстояние между центрами больших шаров — 73,3 дюйма, длина нити l — 39,25 дюйма.



Вид на систему шаров сверху. Стрелками показано направление движения малых шаров x и x' .



Здание Кавендишской лаборатории (фотография конца 90-х годов прошлого века). В разные годы в лаборатории работали многие выдающиеся физики, внесшие большой вклад в развитие современной науки. Среди них — лауреаты Нобелевской премии Дж. Рэлей, Дж. Дж. Томсон, Э. Резерфорд, Г. и Л. Брэгги, Ч. Вильсон, Дж. Чедвик, Дж. П. Томсон, Н. Ф. Мотт, П. Л. Капица.

и третьей точкам, считая его крайней точкой отклонения в одном направлении, а затем определял точку покоя [точку равновесия стержня — С. Ф.] как среднее между найденной путем расчета и второй крайней точками». И далее: «Я определял две крайние точки колебания, а также моменты времени, в которые конец стержня проходил через две заданные точки, находящиеся между крайними, стараясь, чтобы эти две точки находились по разные стороны от точки покоя и не слишком далеко от нее. Затем я определял точку покоя n , составляя пропорцию, находил моменты времени, в которые стержень проходил через нее. После нескольких колебаний я повторял эту процедуру и, деля промежутки времени между прохождением весов через точку покоя на число колебаний, находил время одного колебания».

Для определения средней плотности Земли Кавендиш провел семнадцать серий измерений. Рассчитанное по данным этих измерений среднее значение отношения плотности

Земли (средней плотности Земли) к плотности воды оказалось равным 5,48.

Эксперименты ученого были высоко оценены современниками. В 1820 году выдающийся французский механик и математик Лаплас писал: «Скрупулезно изучив прибор Кавендиша и все эксперименты, выполненные с точностью и проницательностью, которые характерны для этого выдающегося физика, я не смог выдвинуть ни одного возражения против данной им величины средней плотности Земли 5,48».

В наши дни среднее значение плотности Земли принимается равным $5,517 \text{ г/см}^3$. Отметим, что модернизированные крутильные весы Кавендиша используются для физических измерений и в наши дни.

Перечисленными экспериментами и открытиями наследие Кавендиша не исчерпывается. Значительные результаты получил Кавендиш при исследовании тепловых явлений. Он составил таблицу значений теплоемкостей различных веществ, исследовал процессы плавления и обна-

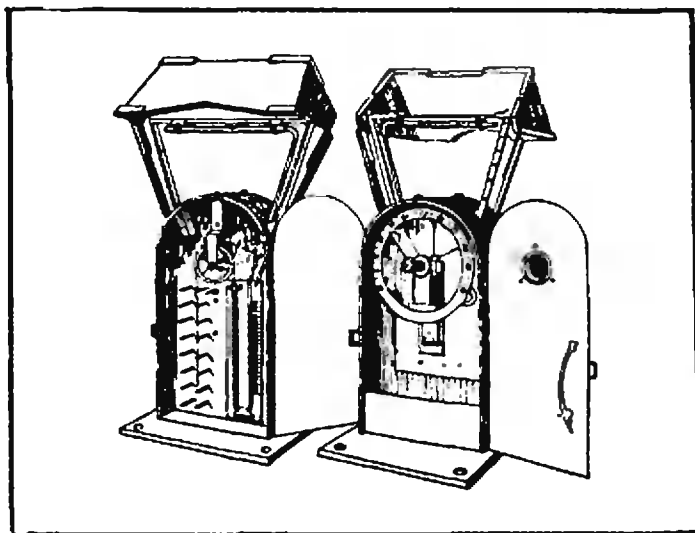
ружил существование скрытой теплоты плавления. Очень интересны опыты Кавендиша, поставленные для исследования электрических и магнитных явлений. Часть из них стала известна лишь после публикации трудов Кавендиша по электричеству, осуществленной выдающимся английским физиком Максвеллом. Интересна история этой публикации. В 1861 году канцлером Кембриджского университета был избран Уильям Кавендиш, герцог Девонширский, когда-то сам закончивший этот университет и проявлявший способности к математике. В 1870 году он выразил желание, чтобы при университете была построена физическая лаборатория, и создан денежный фонд для финансирования строительства. В 1871 году была учреждена Кавендишская кафедра, на которую по рекомендации таких видных английских физиков, как Стокс, Рэлей, У. Томсон, пригласили Максвелла. Он принял это предложение и активно занялся строительством лаборатории. Через три года строительство было завершено. На церемонии открытия Кавендишской лаборатории, сыгравшей выдающуюся роль в становлении и развитии современной физики, герцог вручил Максвеллу рукописи Кавендиша, хранящиеся в архиве семьи. Максвелл согласился их просмотреть. Уже первое знакомство с наследием Кавендиша поразило его. Он писал одному из друзей: «В своих рукописях он [Кавендиш — С. Ф.] обнару-

живает знакомство с законами параллельного и последовательного соединения проводников... Он провел весьма обширные исследования в области проводимости соляных растворов в трубах, которые можно уподобить проволокам из разных металлов. Создается впечатление, что он достоин еще больших почестей, так как превзошел Ома задолго до того, как были открыты постоянные токи. Его измерения емкости заставят нас попотеть в Кавендишской лаборатории, прежде чем мы достигнем точки, где он остановился...».

В течение последних пяти лет жизни Максвелл с исключительным вниманием занимался подготовкой к изданию рукописей Кавендиша с описанием исследований по электричеству. Труды Кавендиша увидели свет в 1879 году, за несколько месяцев до смерти Максвелла.

Что же нового узнал научный мир о работах Кавендиша? Простое перечисление результатов говорит о многом: он впервые четко определил понятие емкости и использовал емкость шара заданных размеров как эталонную; исследовал зависимость проводимости водных растворов соли от ее концентрации и температуры раствора; за 14 лет до работ Кулона установил зависимость силы электрического отталкивания и притяжения от расстояния; задолго до Ома предсказал законы постоянного тока.

И все эти результаты оставались неопубликованными!



Почти для каждого своего эксперимента Кавендиш конструировал специальный измерительный прибор. И при этом его интересовали не только точность измерений, но и удобства пользования прибором.

Для опытов по исследованию тепловых свойств веществ он создал весьма точный термометр. Внешне этот прибор Кавендиша почти не отличается от современных очень точных (прецизионных) термометров.

После издания трудов ученого некоторые его опыты были поставлены заново. Оказалось, что в подавляющем большинстве случаев результаты Кавендиша весьма точны.

Интерес к научному наследию ученого не ослабевал. В 1927 году по инициативе Кембриджского университета было предпринято новое издание работ Кавендиша, в которое были включены и ранее неопубликованные работы. И вновь ученый мир пришел в восхищение: многолетние (1782—1809 гг.) измерения характеристик магнитного поля Земли дали в руки геофизиков неоценимый материал о «магнитной истории» Земли. Оказалось, что Кавендиш высказывал идею о сохранении энергии, рассматривал величину, соответствующую потенциальной энергии. И вновь, в который раз, были высказаны сожаления о том, что научные результаты Кавендиша оставались неизвестными более ста лет. Сожалеть приходится не только о забвении результатов, но и о том, что современникам не были известны проблемы, интересовавшие Кавендиша. Зачастую они составляли целую научную программу, разрабатывавшуюся в течение XIX столетия. Примером может служить перечень проблем из области магнетизма: изучение постоянных и «меняющихся» магнитов; влияние тепла на магнитные свойства тел; зависимость «силы» магнитов от сечения; упругий изгиб намагниченных игл в магнитном поле Земли; ошибки при изучении земного магнетизма, обусловленные этим изгибом.

Итак, восхищение и недоумение — чувства, возникающие при знакомстве с научным творчеством Генри Кавендиша. И, несмотря на то, что многие его результаты были получены заново другими учеными, по праву считающимися авторами открытий, ценность трудов Кавендиша непреходяща. И, прежде всего, она в научной глубине, с которой Кавендиш продумывал свои опыты, и в той скрупулезной тщательности, с которой он их выполнял. Именно эти требования являются основными в современной экспериментальной физике.

Генри Кавендиш

Экспериментальное определение закона электрической силы

С творчеством выдающегося ученого лучше всего знакомиться, читая его труды. Отмечая юбилей Кавендиша, мы публикуем сокращенный перевод его работы, посвященной установлению зависимости сил электрического притяжения и отталкивания от расстояния. Начало работы Кавендиша над проблемами электричества относится, по-видимому, к 1771 году. Полученные им результаты представляют собой весьма полное и, главное, точное решение поставленной задачи. В своих исследованиях ученый более чем на десятилетие опередил Кулона, опубликовавшего результаты своих опытов в 1785 году. Интересно, что Кавендиш сумел ответить на поставленный вопрос, несмотря на то, что придерживался неправильных представлений о природе электричества. Он полагал, что существует некая электрическая жидкость, избыток которой проявляется в положительной электризации тела, а недостаток — в отрицательной. Для облегчения понимания физического смысла опытов Кавендиша в переводе некоторые устаревшие термины заменены соответствующими современными выражениями; там, где это необходимо, дан подстрочный комментарий.

Предлагаемая вниманию читателей работа Кавендиша написана, по-видимому, между 1771 и 1775 годами. Однако она впервые была опубликована (на английском языке) лишь в 1879 году, в подготовленном Максвеллом собрании трудов Кавендиша.

Целью следующего эксперимента был ответ на вопрос: когда полый шар электризуется, заряжается ли малый шар, вложенный в первый и соединенный с ним каким-либо проводником? Таким образом можно найти закон электрического притяжения и отталкивания.

Я взял шар диаметром 12,1 дюйма, укрепил его на твердом стеклянном стержне, проходившем через центр шара как ось, и покрыл стержень сургучом, чтобы сделать его менее проводящим электричество. Затем я вложил этот шар между двумя полыми картонными подусферами

Перевод и подготовка публикации выполнены С. Филоновичем.

диаметром 13,3 дюйма и толщиной около 1/20 дюйма так, что вряд ли в каком-нибудь месте между шаром и внутренней поверхностью полусфер расстояние было меньше, чем 4/10 дюйма. Полусферы были сложены друг с другом так, что образовывали полую сферу, а их края соприкасались возможно теснее. В каждой из них были сделаны вырезы, чтобы получились отверстия для выхода наружу стеклянного стержня.

Таким образом, я получил внутренний шар, окруженный полым шаром. Между ними не было связи, по которой электричество могло бы переходить от одного к другому.

Затем с помощью провода, проходившего через одну из полусфер и касавшегося внутреннего шара, я создал связь между ними. К концу провода был прикреплен кусок шелковой нити, посредством которой я при желании мог вытаскивать провод наружу.

Вслед за этим я наэлектризовал полусферы с помощью провода, соединенного с положительной обкладкой лейденской банки, затем отдернул его и мгновенно вытащил наружу провод, соединявший внутренний и внешний шары. Провод, вынутый при помощи шелковой нити, не мог разрядить ни шар, ни полусферу. Затем я разделил полусферы, следя за тем, чтобы они не коснулись внутреннего шара, и приложил к шару пару маленьких пробковых шариков, подвешенных на тонких льняных нитях, чтобы увидеть, наэлектризовался ли внутренний шар.

Для большей уверенности в результатах опыта я использовал еще другую аппаратуру. В принципе она была сложнее, чем нужно, однако эксперимент этот был для меня настолько важен, что я хотел провести его предельно аккуратно.

$ABCD$ и $abcd$ — две деревянные рамки одинаковых размеров и форм, связанные петлями в точках A и D так, что каждая рамка может двигаться вокруг горизонтальной оси AD ; H — одна из полусфер, прикрепленная к рамке $ABCD$ с помощью четырех стеклянных стержней Mm , Nn , Pp и Rr , покрытых сургучом; h — другая полусфера, при-

крепленная таким же образом к рамке $abcd$; G — внутренний шар, закрепленный на горизонтальном стержне Ss (деревянная рамка, с помощью которой удерживается стержень Ss , и петли в точках A и D на рисунке не показаны, дабы избежать его усложнения); Tt — обернутая станиодем*) (в точке x) стеклянная палочка, которой касаются шара; со станиоля свешиваются пробковые шарики.

Благодаря действию различных пружин одно движение руки приводило к следующим последовательным действиям: удалялся провод, с помощью которого наэлектризовывались полусферы, вытаскивался провод, соединявший полусферы и внутренний шар, полусферы разъединялись и к внутреннему шару подносились палочка Tt . Кроме того, было предусмотрено, что электричество, находившееся на полусферах и проводе, посредством которого они заряжались, удалялось немедленно после разъединения полусфер; в противном случае действие этого электричества могло заставить пробковые шарики разойтись, даже если бы внутренний шар не был наэлектризован.

*) Станиоль — оловянная фольга.

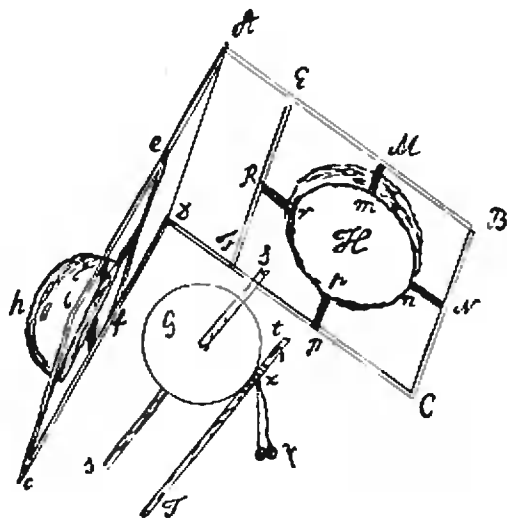


Рисунок из рукописи Кавендиша со схемой опыта по определению закона электрического притяжения и отталкивания.

Внутренний шар и полусферы я покрыл станиолом, чтобы сделать их хорошими проводниками электричества.

При проведении экспериментов лейденская банка, покрытая станиолом, соединялась с проводом, через который наэлектризовывались полусферы; этот провод располагался так, чтобы не касаться полусфер до тех пор, пока банка не зарядится в должной степени. Затем провод приводился в соприкосновение с полусферами в течение двух-трех секунд, отдергивался и полусферы разводились, как было описано выше.

К первичному проводнику, через который заряжалась лейденская банка, присоединялся электрометр и полусферы всегда заряжались одинаково.

Соображения, по которым я использовал банку, состоят в следующем. Без нее было бы трудно как установить, до какой степени наэлектризовались полусферы, так и удерживать электричество одинаковой силы*) в течение секунды или двух; я опасался, что если провод будет лежать на полусферах во время электризации банки, то электричество сможет постепенно растекаться само по себе по стеклянным стержням, которые удерживают шар и полусферы, а это вносило бы некоторые ошибки в результаты опыта.

Результат экспериментов, которые я повторял несколько раз, был всегда один и тот же: я не заметил расхождения шариков или каких-либо признаков электричества.

Чтобы иметь возможность чувствовать меньшее количество электричества, я проводил опыт и другим способом. Перед тем как полусферы наэлектризовались, я электризовал пробковые шарики положительно, заставляя их расходиться примерно на дюйм. Тогда вслед за разведением полусфер и приведением станиоля в контакт с шаром электричество пробковых шариков, естественно, передавалось шару; однако они продолжали расходиться, хотя и едва заметно. Затем я практически так же

*) То есть одинаковые заряды.

повторял опыт, но предварительно электризовал шарики отрицательно, причем в той же самой степени, что и в первом случае. После приведения в контакт с шаром они расходились так же, как и при положительной электризации.

Необходимо отметить, что, если бы шар имел дополнительный положительный заряд, пробковые шарики должны были бы расходиться сильнее при их предварительной положительной электризации, чем при сообщении им отрицательного заряда.

С помощью этого приема может быть замечена малая электризация шара. Когда шарики уже получили достаточное для их расхождения количество электричества, дальнейшее увеличение их расхождения будет вызвано количеством электрической жидкости*), в несколько раз меньшим чем то, которым первоначально обладали шарики. Ясно, что этот способ проведения опыта неверен, если полусферы не электризуются примерно одинаково при положительной и отрицательной электризации шариков. Это условие проверялось с помощью электрометра.

Для того чтобы определить, сколько малое количество электричества на внутреннем шаре может быть обнаружено в этом опыте, я удалил полусферы с их рамками, а шар и пробковые шарики оставил на месте. Затем взял кусок стекла, покрытый станиолом, как лейденская банка; об этом куске стекла я знал, что на нем находится не более $1/59$ части электричества, сосредоточенного на положительной обкладке лейденской банки**), с помощью которой электризовались полусферы.

Вслед за этим я наэлектризовал эту стеклянную пластинку до той же

*) Выражение «количество электрической жидкости» эквивалентно современному термину «величина заряда».

**) Отметим, что Кавендиш независимо от других ученых ввел понятие электрической емкости. В качестве эталонной емкости он использовал шар определенных размеров; единицей емкости, использованной Кавендишем, был «дюйм электричества», то есть емкость имела, как и в современной системе единиц CGSE, размерность длины. В данном случае Кавендиш имеет в виду, что конденсатор из куска стекла, обклеенного станиолом, имеет емкость, составляющую $1/59$ часть емкости лейденской банки.

степени (это показал электромметр), до какой была заряжена банка в первом опыте, отделил ее от первичного проводника и сообщил ее электричество лейденской банке, которая до этого момента не была наэлектризована вовсе. Таким образом, в этом опыте банка получала только $1/60$ часть электрической жидкости, сообщавшейся ей в первом опыте.

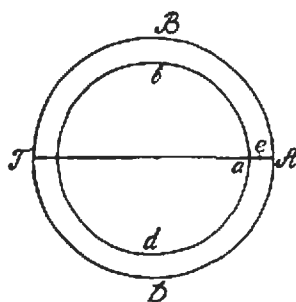
Потом с помощью банки я наэлектризовал шар тем же способом, каким ранее заряжал полусферы, и сразу же, после того как был убран соединительный проводник, приблизил к шару пробковые шарики. Оказалось, что при использовании предварительно наэлектризованных пробковых шариков заряд шара проявлялся очень отчетливо, поскольку шарики раздвигались значительно сильнее, когда они были заранее наэлектризованы положительно, чем при предварительной отрицательной электризации. Однако, если шарики заранее не заряжать, электричества на шаре оказывается недостаточно для их раздвижения.

Ясно, что количество электрической жидкости, сообщенной шару в этом опыте, было менее $1/60$ части жидкости, которая передавалась полусферам в предшествующих экспериментах.

Таким образом, оказывается, что если шар диаметром 12,1 дюйма вложен в полый шар диаметром 13,3 дюйма, соединен с ним каким-либо проводником и вся система наэлектризована положительно, то количество электрической жидкости, скапливающееся на внутреннем шаре, во всяком случае меньше $1/60$ части жидкости, находящейся на внешней сфере, и никакие детали эксперимента не дают оснований думать, что внутренний шар вообще наэлектризован.

Отсюда следует, что электрическое отталкивание (и притяжение) должно быть обратно пропорционально квадрату расстояния, и когда шар наэлектризован положительно, электрическая жидкость сосредоточена целиком на его поверхности.

Оценим, насколько зависимость электрического притяжения и отталкивания от расстояния может отли-



читься от обратной пропорциональности квадрату расстояния, чтобы это отличие еще не проявлялось в экспериментах. Пусть AT проходит через диаметры двух concentрических сфер ABD и abd и Aa делится пополам точкой e . Ae в эксперименте приблизительно равнялось 0,35 дюйма, Te — 13,1 дюйма. Если электрическое отталкивание (и притяжение) обратно пропорционально расстоянию в степени $2 + 1/50$, то можно показать, что сила, с которой электрическая жидкость на ABD отталкивает частицу [заряженную — $C. \Phi.$], находящуюся в точке e , по направлению к центру, относится к силе, с которой то же количество жидкости, собранное в центре, будет отталкивать частицу в противоположном направлении, как $1:57^*$.

Однако, поскольку закон отталкивания только слегка отличается от обратной пропорциональности квадрату расстояния, жидкость на внутреннем шаре будет отталкивать частицу в точке e примерно с той же силой, как если бы вся жидкость находилась в центре. Поэтому, если бы жидкость на внутреннем шаре составляла $1/57$ часть жидкости на ABD , частица находилась бы в равновесии. Поскольку e находится посередине между A и a , имеются веские основания думать, что все сказанное относится к жидкости всего проводника Aa .

Таким образом, мы можем заключить, что электрическое притяжение (и отталкивание) должно быть обратно пропорционально расстоянию в степени, лежащей между $2 - 1/50$ и

*Это утверждение доказывается Кавендишем в специальном математическом приложении, опущенном при переводе.

$2 + 1/50$, и нет оснований полагать, что закон отличается от закона обратных квадратов.

Примечание переводчика

В 1878 году по инициативе Максвелла опыт Кавендиша был повторен в слегка измененном виде в Кавендишской лаборатории. Результат опыта состоял в том, что поправка α в законе взаимодействия $F \sim r^{-(2+\alpha)}$, где F — сила взаимодействия, а r — расстояние, не может превышать $1/21600$.

Комментарий к работе Г. Кавендиша

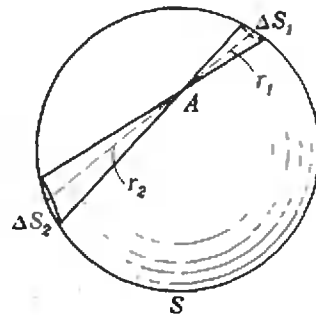
Метод, примененный Кавендишем для определения зависимости силы взаимодействия между электрическими зарядами от расстояния, основывается на том факте, что если электрическое поле внутри равномерно заряженной сферы равно нулю, то сила взаимодействия обратно пропорциональна квадрату расстояния между зарядами. Докажем это.

Рассмотрим произвольную точку A внутри равномерно заряженной сферы S (см. рисунок). Образует мысленно узкий конус с вершиной в точке A . Конус вырежет на поверхности сферы небольшой участок площадью ΔS_1 . Другой конус, симметричный первому относительно точки A , вырежет на поверхности сферы площадку площадью ΔS_2 . Пусть расстояния от A до соответствующих площадок равны r_1 и r_2 . Поскольку углы между осью конусов и нормальными к площадкам равны,

$$\frac{\Delta S_1}{\Delta S_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

Предположим теперь, что силы взаимодействия между зарядами центральной и напряженности поля, создаваемого зарядом q в некоторой точке пространства, обратно пропорциональна n -й степени расстояния от точки до заряда, то есть

$$E = k \frac{q}{r^n}, \text{ где } k = \text{const.}$$



Поскольку сфера заряжена равномерно, заряд, сосредоточенный на площадке площадью ΔS , пропорционален этой площади. Следовательно, отношение модулей напряженности поля, создаваемых в точке A зарядами, находящимися на площадках ΔS_1 и ΔS_2 , равно

$$\frac{\Delta E_1}{\Delta E_2} = \frac{\Delta S_1 r_2^n}{\Delta S_2 r_1^n}.$$

Векторы $\Delta \vec{E}_1$ и $\Delta \vec{E}_2$ направлены в противоположные стороны и могут либо полностью, либо частично компенсировать друг друга. Чтобы определить напряженность в точке A , создаваемую всеми зарядами на сфере, необходимо рассмотреть все возможные ориентации конуса. Ясно, что результирующая напряженность может быть равной нулю лишь при условии $\Delta \vec{E}_1 = -\Delta \vec{E}_2$. Последнее возможно только в том случае, когда $n=2$, что и требовалось доказать.

Следует подчеркнуть, что идея опыта, поставленного Кавендишем, принадлежит не ему, а другому английскому ученому XVIII века Джозефу Пристли, который, однако, сам опыта не поставил.

Несмотря на блестящее экспериментальное искусство Кавендиша, его опыты имели все же один существенный недостаток: из них нельзя было получить зависимость силы взаимодействия от величины зарядов или, на языке Кавендиша, «от количества электрической жидкости». В законченном виде закон взаимодействия неподвижных электрических зарядов установил в 1785 году французский физик Шарль Огюстен Кулон, использовавший для этого крутильные весы и методику, сходную с той, которую применил Кавендиш для определения средней плотности Земли. Поэтому основной закон электростатики справедливо называют законом Кулона.

С. Филонович



В. Переяславский

Игра «Определитель»

Два варианта одной игры

В 1978 году «Квант», рассказывая о IX празднике юных математиков в Батуми (см. № 10), предложил своим читателям придумать выигрышную стратегию для следующей игры:

Играют двое. Они по очереди вписывают в таблицу 3×3 числа от 1 до 9 (каждое число должно быть использовано). Когда таблица заполнена, подсчитывают две суммы: сумму S_1 произведений по столбцам и сумму S_2 произведений по строкам. Если $S_1 > S_2$, выигрывает начинавший игру; если $S_1 < S_2$ — выигрывает второй игрок.

В 1971 году эта игра в несколько другой форме была популярна среди студентов механико-математического факультета МГУ (а узнали они о ней от студентов Пермского университета). Называлась эта игра «Определитель» и выглядела так:

Играют двое. Они по очереди вписывают в таблицу 3×3 числа от 1 до 9 (каждое число должно быть использовано). Когда таблица заполнена, подсчитывают ее определитель d . Если $d > 0$, выигрывает начинавший игру; если $d < 0$ — выигрывает второй игрок.

Тут, конечно, мы должны объяснить вам, что определителем таблицы T (рис. 1) называется число

$$d = x_1x_5x_9 + x_2x_6x_7 + x_3x_4x_8 - x_3x_5x_7 - x_1x_6x_8 - x_2x_4x_9$$

В том, что эти две игры по существу совпадают, мы предлагаем вам убедиться самостоятельно. Далее мы будем рассматривать вариант, предложенный в «Кванте».

Полезное соображение

Все игры условно можно разделить на простые и сложные. Простые игры — это те, которые имеют

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_7 & x_8 & x_9 \\ \hline \end{array}$$

Рис. 1.

несложные выигрывающие стратегии, *сложные* — все остальные. По-видимому, игра «Определитель» является сложной. Сложность — непременное условие популярности игры. Например, в шахматы и в крестики-нолики на бесконечном листе клетчатой бумаги все играют с увлечением, а в крестики-нолики на доске «3×3» — разве что младшие школьники.

Решим задачу, которая поможет нам играть в «Определитель»: *найдем наименьшее и наибольшее значения суммы* $S = x_1x_2x_3 + x_4x_5x_6 + x_7x_8x_9$ (x_1, x_2, \dots, x_9 — числа от 1 до 9).

Для нахождения наименьшего значения применим к трем ее слагаемым неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом («Квант», 1980, № 3, с. 23):

$$\frac{x_1x_2x_3 + x_4x_5x_6 + x_7x_8x_9}{3} \geq \sqrt[3]{x_1x_2 \cdot \dots \cdot x_9} = \\ = \sqrt[3]{9!} = \sqrt[3]{70 \cdot 72^2} > 71.$$

Отсюда $S > 213$ и, поскольку S — целое число, $S \geq 214$. Но $2 \cdot 5 \cdot 7 + 1 \cdot 8 \cdot 9 + 3 \cdot 4 \cdot 6 = 70 + 72 + 72 = 214$; значит, искомое наименьшее значение равно 214.

Для нахождения наибольшего значения нашей суммы воспользуемся следующей леммой (докажите ее!): *если числа a, b, c, d положительны, $ab = cd$ и $|a - b| > |c - d|$, то $a + b > c + d$.*

Образует новую сумму S' так: последнее слагаемое $x_7x_8x_9$ оставим без изменения, первое слагаемое $x'_1x'_2x'_3$ составим из трех самых маленьких чисел множества $\{x_1, x_2, \dots, x_6\}$, а второе слагаемое $x'_4x'_5x'_6$ — из остальных чисел этого множества. Тогда по лемме $S \leq S'$, причем знак равенства будет лишь в том случае, когда каждое из чисел x_1, x_2, x_3 больше (или меньше) каждого из чисел x_4, x_5, x_6 . Отсюда получаем, что значение суммы S будет наибольшим, если все множители первого слагаемого меньше всех множителей второго слагаемого, а те в свою очередь меньше всех множителей третьего слагаемого. Таким образом, искомое наибольшее значение равно $1 \cdot 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \cdot 6 + 7 \cdot 8 \cdot 9 = 6 + 120 + 504 = 630$.

Подведем итог: сумма S принимает наименьшее значение, когда ее слагаемые максимально близки (и равны, следовательно, примерно 71), наибольшее значение — когда они максимально различны. Отсюда практический совет играющему: стремись к тому, чтобы слагаемые противника были примерно одинаковы (и равны 71), а собственные слагаемые — максимально различны!

Стратегия «71» для первого игрока

Допустим, что после вашего первого хода противник написал свое число в одном столбце или в одной строке с вашим числом. Тогда мы предлагаем вам следующую стратегию «71»:

Определим для каждой заполненной строки и каждого заполненного столбца таблицы число

$$m = \begin{cases} \Pi/71, & \text{если } \Pi \geq 72, \\ 71/\Pi, & \text{если } \Pi < 71, \end{cases}$$

где Π — произведение чисел, написанных в данной строке или данном столбце.

Очередным ходом начинающий игрок должен дополнять строку или столбец по следующему правилу: если он дополняет строку, то — числом, дающим минимально возможное значение m для этой строки (чтобы произведение было как можно ближе к 71), а если — столбец, то — числом, дающим максимальное возможное значение m для этого столбца (чтобы произведение как можно больше отличалось от 71).

Поясним сказанное примером. Для удобства изложения занумеруем клетки нашей таблицы (рис. 2) и будем записывать партию строчкой из девяти чисел с индексами, где индекс обозначает номер клетки,

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Рис. 2.

	3	
	5	

Рис. 3, а.

	1	
	3	4
	5	

Рис. 3, б.

1	x_2	x_3
2	x_5	x_6
4	x_8	x_9

Рис. 4.

3	6	5
4		
7		

Рис. 5.

в которую на соответствующем ходе вписано данное число. Убедимся, что в партии $3_5 5_8 1_2 4_6 6_4 7_2 9_8 1_3$ начинавший игру пользовался стратегией «71» (на первый ход стратегия ограничений не накладывает).

После первых двух ходов (рис. 3, а) первый игрок по стратегии должен поставить в клетку № 2 число, дающее максимально возможное m . В данном случае максимум m может дать либо ход 1_2 , при котором произведение чисел второго столбца равно 15, либо ход 9_2 , дающий произведение 135. Так как $71/15 > 135/71$, в клетку № 2 нужно поставить 1, что и было сделано.

После хода 4_6 (рис. 3, б) в клетку № 4 нужно поставить число, дающее минимум m , а именно 6_4 и т. д.

Два частных случая

1. Если у играющего есть произведение $1 \times 2 \times 3$, или $1 \times 2 \times 4$, или $6 \times 8 \times 9$, или $7 \times 8 \times 9$, то он выигрывает независимо от того, как в таблице расположены остальные числа.

Докажем, например, что, когда в таблице есть столбец из чисел 1, 2, 4, начинающий выигрывает. Если, скажем, таблица выглядит так, как на рисунке 4, то

$$\frac{x_2 x_5 x_8 + x_3 x_6 x_9}{2} > \sqrt{x_2 x_5 x_8 x_3 x_6 x_9} = \\ = \sqrt{3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} > 212.$$

Значит, $S_1 > 1 \cdot 2 \cdot 4 + 425 = 433$.

С другой стороны, значение суммы S_2 максимально, когда числа x_2 и x_3 меньше, чем x_5 и x_6 , а x_5 и x_6 меньше, чем x_8 и x_9 . Таким образом, $S_2 < 1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \cdot 9 = 387$, то есть $S_1 > S_2$, что и утверждалось.

2. Иногда при игре удается использовать идею «цугцванга» — отсутствия разумных ходов у противника. Например, в ситуации, изображенной на рисунке 5, начинающий при любом ходе второго игрока может (и должен) поставить числа 1, 2 в один столбец, а 8, 9 — в другой. Просчитав разные варианты, легко проверить, что это обеспечит начинающему выигрыш.

Попытка перебора

На первый взгляд игра «Определитель» кажется не очень сложной: соперники делают всего девять ходов и для каждого хода есть не более девяти вариантов — просчитаем все варианты и выберем нужный. Беда в том, что различных партий чересчур много.

В самом деле, для первого хода есть 81 вариант (одно из девяти чисел в одну из девяти клеток); для второго хода — 64 варианта и т. д. (рис. 6) — всего $9^2 \cdot 8^2 \cdot 7^2 \cdot \dots \cdot 2^2 \cdot 1^2 = (9!)^2 \approx 1,3 \cdot 10^{11}$ различных партий. Разумеется, определить результат игры таким перебором невозможно даже с помощью ЭВМ.

Правда, этот перебор слишком «груб», а оценка слишком завышена: ведь наша игра имеет симметрию. Например, все первые ходы в разные клетки одним и тем же числом равноправны; поэтому нужно рассматривать не 81, а только 9 вариантов первого хода. Восемь остающихся для второго хода клеток можно разделить на три класса так, что ходы одним и тем же числом в клетки одного класса будут равноправны (на рисунке 7 клетки разных классов закрашены в разные цвета); поэтому нужно рассматривать не 64, а $8 \cdot 3 = 24$ варианта второго хода. Так нам удастся снизить верхнюю оценку числа партий до числа $9 \cdot 24 \cdot 7^2 \cdot 6^2 \cdot \dots \cdot 2^2 \cdot 1^2 \approx$

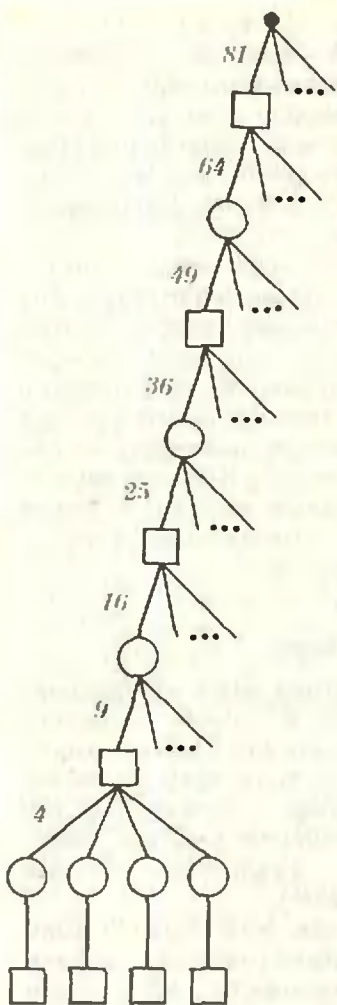


Рис. 6.

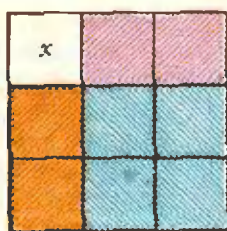


Рис. 7.

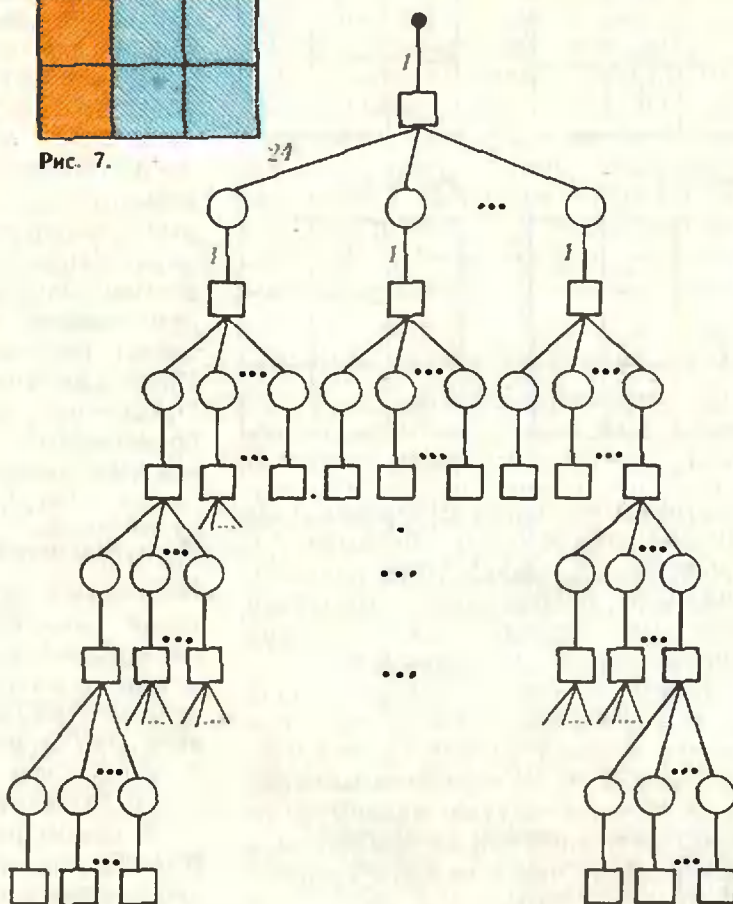


Рис. 8.

$\approx 5 \cdot 10^9$, которое, однако, по-прежнему очень велико. Нужна новая идея, сокращающая перебор вариантов. Такая идея нашлась.

Чем может помочь мудрец?

Предположим, что появился мудрец, утверждающий, что, начиная игру, он добьется победы, и пусть этот мудрец настолько добр, что в одинаковых позициях делает одинаковые ходы. Сколько партий нужно сыграть с мудрецом, чтобы проверить, что он на самом деле умеет выигрывать?

Мудрец все партии начинает одинаково; мы же должны попробовать играть с ним все 24 варианта второго хода. В каждой позиции второго хода мудрец однозначно делает третий ход; мы же перебираем все 36 вариантов четвертого хода

и т. д. (рис. 8). Всего нужно сыграть $24 \cdot 6^2 \cdot 4^2 \cdot 2^2 = 55296$ партий, проверяющих мудреца.

Поиграв с мудрецом в течение месяца, можно убедиться в его беспробитности или доказать обратное. Можно составить и отладить программу на ЭВМ, проверяющую мудреца, что, правда, займет по времени тот же самый месяц, зато этой же программой можно проверять теперь на «выигрышность» любую стратегию.

Итак, проверяющая программа есть, но где же мудрец? Пришлось автору научиться играть и, используя уже высказанные соображения и стратегии, постепенно исправляя ходы, не обеспечивающие выигрыша для начинающего (они обнаружались с помощью проверяющей программы), «превратиться» в та-

кого мудреца. Удалось доказать, что если играют два мудреца, то выигрывает начинающий; точнее, было доказано, что начинающий началом 7_1 имеет возможность выиграть при любых ответах противника. Был составлен своеобразный «справочник», в котором на все вторые и четвертые ходы противника указаны выигрывающие третьи и пятые ходы.

Заключение

Проверка стратегии «71» на «выигрышность» показала, что, при первом ходе 7_1 , на все вторые ходы, при которых стратегия действует, за исключением трех, она дает такой третий ход, что при любом четвертом ходе, за исключением девяти, стратегия «71» приводит к выигрышу. Исключительные случаи перечислены в таблице. Выигрывающий ход в таких случаях все-таки существует (см. таблицу), но он расходится с рекомендацией стратегии «71».

Позиция	Выигрывающий пятый ход
$7_1 3_4 1_7 2_8$	4_2
$7_1 3_4 1_7 4_8$	8_9
$7_1 3_4 1_7 2_5$	9_6
$7_1 3_4 1_7 4_5$	2_3
$7_1 3_4 1_7 5_5$	6_9
$7_1 3_4 1_7 8_9$	9_6
$7_1 6_2 2_3 9_6$	8_9
$7_1 8_2 1_3 2_5$	3_9
$7_1 8_2 1_3 2_4$	3_9

Укажем, кроме того, выигрывающие третьи ходы для тех случаев, когда стратегия «71» не действует:

$$7_1 1_5 2_2; 7_1 2_5 1_2; 7_1 3_5 1_2; 7_1 4_5 1_2; \\ 7_1 5_5 6_9; 7_1 6_5 5_9; 7_1 8_5 9_9; 7_1 9_5 8_9.$$

Что будет в случае, когда первый ход — не семерка, пока не выяснено. Неясно также, каков максимальный выигрыш $\Delta = S_1 - S_2$ начинающего (при точной игре двух партнеров) и существует ли вообще простая выигрывающая стратегия.

Новости науки

Органический сверхпроводник

Как известно, явление сверхпроводимости заключается в полном исчезновении электрического сопротивления при температуре ниже некоторой критической T_K , называемой температурой сверхпроводящего перехода. Практически все существующие сейчас сверхпроводники являются металлами или их сплавами с T_K не превышающими 25 К. Иными словами, сейчас нет материалов, которые были бы сверхпроводниками при температуре выше 25 К.

Необходимость работать при очень низких температурах сильно ограничивает применение сверхпроводников. В связи с этим большой интерес как с экспериментальной, так и с теоретической точки зрения вызы-

вает изучение возможности создания сверхпроводника с высоким значением T_K . Около двадцати лет назад были высказаны соображения о возможности существенного повышения T_K для некоторого типа органических соединений, в которых электроны движутся вдоль отдельных стопок органических молекул, а переходы электронов на соседние стопки затруднены. Однако до сих пор все попытки получить органический сверхпроводник не приводили к успеху, и лишь недавно группе датских исследователей удалось впервые синтезировать органический сверхпроводник. Полученное ими соединение носит довольно сложное название — ди-(тетраметил-тетраселенфтор)тетраоксихлорат и обозначается по первым буквам входящих в него атомов и радикалов — $(TMTSF)_2ClO_4$. Переход в сверхпроводящее состояние происходит при

нормальном давлении и температуре $T_K = 1,2 \div 1,4$ К. Температура сверхпроводящего перехода первого органического сверхпроводника, как видно, довольно низкая. Важность этого открытия — в указании на принципиальную возможность создания органического сверхпроводника (не содержащего ни одного атома металла!). В органических соединениях замена того или иного радикала или ввод в них других молекул приводит к созданию большого числа новых соединений с самыми разнообразными свойствами. Именно это обстоятельство и обуславливает практическую важность получения органических сверхпроводников. Можно поэтому надеяться, что целенаправленные исследования в данной области приведут к синтезу органических сверхпроводников с высокими T_K . Важность такого открытия просто трудно переоценить.

А. Бuzдин

Задачник Кванта

Задачи

М706 — М710; Ф718 — Ф722

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 декабря 1981 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 10—81» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М706, М707» или «Ф718». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

М706. Из центра каждой из двух данных окружностей проведены касательные к другой окружности. Докажите, что хорды, соединяющие точки пересечения касательных с окружностями (на рисунке 1 эти хорды показаны красным цветом), имеют одинаковые длины.

А. Савин

М707. Каждый из учеников класса занимается не более чем в двух кружках, причем для любой пары учеников существует кружок, в котором они занимаются вместе. Докажите, что найдется кружок, где занимаются не менее $2/3$ учеников этого класса.

А. Сидоренко

М708. На сторонах выпуклого четырехугольника площади S вне его построены квадраты, центры которых служат вершинами нового четырехугольника площади S_1 . Докажите, что

- а) $S_1 > 2S$;
б) $S_1 = 2S$ в том и только в том случае, когда диагонали исходного четырехугольника равны по длине и взаимно перпендикулярны.

П. Гусятников

М709. Пол комнаты, имеющий форму правильного шестиугольника со стороной 10, заполнен плитками, имеющими форму ромба со стороной 1 и острым углом 60° . Разрешается вынуть три плитки, составляющие правильный шестиугольник со стороной 1, и заменить их расположением другим (рис. 2). Докажите, что

- а) из любого расположения плиток такими операциями можно получить любое другое;
б) это можно сделать не более чем за 1000 операций;
в) из расположения плиток рисунка 3,а нельзя получить расположение рисунка 3,б менее чем за 1000 операций.

А. Смирнов

М710. Существует ли последовательность различных натуральных чисел a_1, a_2, a_3, \dots , ни один из членов которой не равен сумме нескольких других, такая что (при всех $n=1,2,\dots$)

- а) $a_n < 2(\sqrt{3})^n$; б) $a_n < 10(1,5)^n$; в) $a_n < n^{10}$;

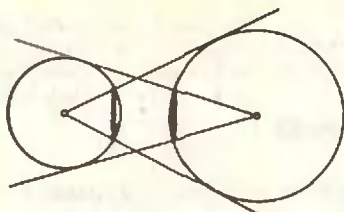
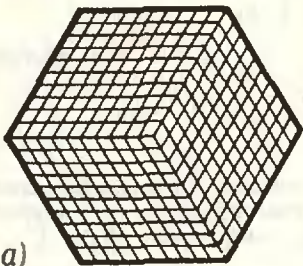


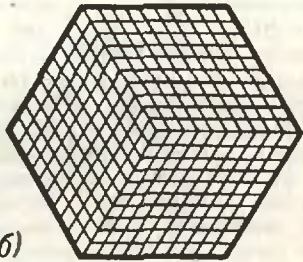
Рис. 1.



Рис. 2.



а)



б)

Рис. 3.

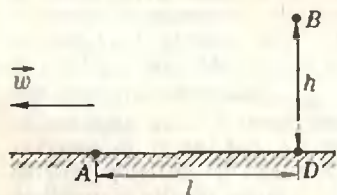


Рис. 4.

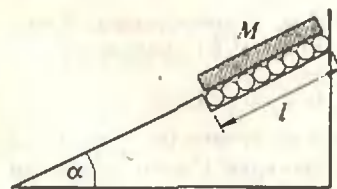


Рис. 5.

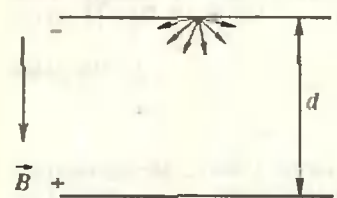


Рис. 6.

г) $a_n \leq 1000n^{7/2}$; д) $a_n \leq 1000n^{3/2}$?

С. Конягин

Ф718. На берегу реки, скорость течения которой равна ω , в точке A находится мальчик. Он может бежать по берегу со скоростью v и плыть по реке со скоростью u (относительно воды), причем $u < \omega$. Определить, на каком расстоянии x от точки A находится та точка C берега, откуда мальчик должен начать плыть, чтобы добраться до бакена B за наименьшее время. Расстояние BD от бакена до берега равно h , расстояние AD равно l (рис. 4).

С. Кротов

Ф719. Маленькому тяжелому шарiku массы m , имеющему заряд q , сообщают начальную скорость v_0 , направленную вертикально вверх. Шарик находится в однородном горизонтальном электростатическом поле, напряженность которого равна E . Пренебрегая сопротивлением воздуха и зависимостью ускорения свободного падения g от высоты, определить минимальную скорость шарика в процессе его движения.

Б. Буховцев

Ф720. Однородный брус массы M длины l начинает двигаться вниз по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Начальный участок длины l наклонной плоскости занят близко расположенными катками в виде трубок массы m и радиуса $r \ll l$ (рис. 5), которые вращаются без трения в подшипниках. Остальной участок наклонной плоскости гладкий. Найти зависимость ускорения груза от перемещения вдоль плоскости.

А. Стасенко

Ф721. Равномерно заряженный по поверхности лист из диэлектрика, имеющий форму равнобедренного прямоугольного треугольника, сложили пополам. При этом была совершена работа A против сил электростатического поля. Какую работу надо совершить, чтобы сложить пополам полученный треугольник?

О. Савченко

Ф722. Плоский конденсатор находится в магнитном поле, которое перпендикулярно плоскости пластин (рис. 6). Расстояние между пластинами d , вектор магнитной индукции \vec{B} . Внутри конденсатора около отрицательно заряженной пластины расположен источник медленных электронов, выпускающий электроны в разных направлениях. При каком напряжении между пластинами электроны будут фокусироваться на положительно заряженной пластине? От чего зависит размер «пятна»?

А. Трубаев

Решения задач

M666 — M670; Ф678 — Ф682

M666. Докажите, что наименьшее общее кратное n натуральных чисел $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ не меньше na_1 .

Пусть наименьшее общее кратное чисел $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ равно A . Тогда, очевидно, $\frac{A}{a_1} > \frac{A}{a_2} > \dots > \frac{A}{a_n}$ — натуральные числа. По этому $\frac{A}{a_1} > n$, откуда $A > na_1$.

Эта оценка является точной. В самом деле, если $a_1 = \frac{n!}{n}$, $a_2 = \frac{n!}{n-1}, \dots, a_n = n!$, то $A = n! = n \cdot a_1$.

А. Разборов

M667. Постройте треугольник ABC , если заданы его наименьший угол A и отрезки длины $d = |AB| - |BC|$ и $e = |AC| - |BC|$.

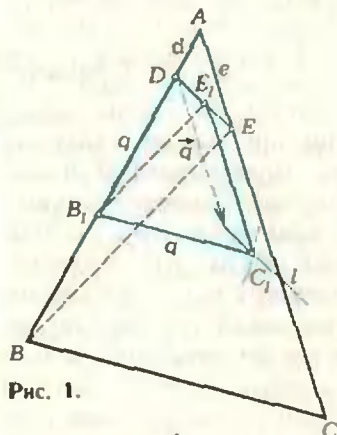


Рис. 1.

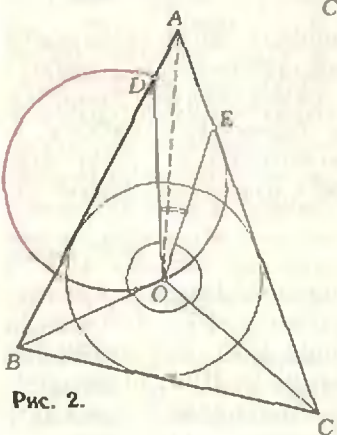


Рис. 2.

M668. Последовательность (x_i) определяется условиями

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 2,$$

$$x_{n+1} = x_{n-2} + 2x_{n-1}.$$

Докажите, что для любого

На сторонах данного угла A отложим данные нам отрезки AD длины d и AE длины e . Теперь нужно на этих сторонах (за точками D и E) найти такие точки B и C , что $|BD| = |BC| = |CE|$.

Чтобы это сделать, построим вначале фигуру, гомотетичную искомому четырехугольнику $BCED$. Для этого (рис. 1) отложим на прямой AD (на луче, не содержащем A) отрезок DB_1 любой длины q , затем параллельно перенесем луч $[DE]$ на вектор \vec{q} той же длины q , направленный параллельно $[AE]$, после чего на полученном луче l отметим точку C_1 , для которой $|B_1C_1| = q$. Очевидно, четырехугольник $B_1C_1E_1D$ подобен искомому четырехугольнику $BCED$. Проведя теперь через точку E прямую, параллельную B_1E_1 , найдем точку B ; проведя затем через точку B прямую, параллельную B_1C_1 , найдем точку C . (Легко видеть, что все построения всегда выполнимы, причем единственным образом.)

Вот еще одно решение — не использующее метод подобия. Если O — центр окружности, вписанной в искомый треугольник ABC , то треугольники BOD , BOC и COE конгруэнтны (рис. 2). Все углы, отмеченные при вершине O , равны $90^\circ + A/2$. Поэтому $\widehat{DOE} = 90^\circ - 3\widehat{A}/2$ (эта величина положительна при $\widehat{A} < 60^\circ$). Теперь можно построить точку O как пересечение биссектрисы угла A и дуги сегмента с концами D , E , вмещающего вписанный угол величины $90^\circ - 3\widehat{A}/2$ (красная дуга на рисунке 2). Затем, проведя под нужными углами к отрезкам DO и EO лучи OB и OC , находим две вершины треугольника ABC .

Наконец, задачу можно решить и вычислением: длина искомого отрезка $x = |BD| = |BC| = |CE|$ находится из квадратного уравнения

$$x^2 = (x+d)^2 + (x+e)^2 - 2(x+d)(x+e)\cos A,$$

после чего искомый отрезок можно построить (исходя из d , e и A) циркулем и линейкой, комбинируя известные методы построения по данным отрезкам длины p и q и углу α отрезков длины $p \cos \alpha$, $p \pm q$, \sqrt{pq} , $\sqrt{p^2 \pm q^2}$. Интересно, что отрицательный корень этого уравнения также имеет геометрический смысл: он определяет положение еще одной пары точек $B_2 \in [DA]$, $C_2 \in [EA]$, для которых $|B_2D| = |B_2C_2| = |C_2E|$.

Н. Васильев

Пусть m — любое натуральное число. Вместо последовательности (x_i) рассмотрим последовательность (\bar{x}_i) остатков от деления x_i на m .

Из определения последовательности (x_i) следует, что по любым трем числами \bar{x}_i , \bar{x}_{i+1} и \bar{x}_{i+2} можно однозначно

натурального m найдутся два соседних члена этой последовательности, каждый из которых делится на m .

определить не только \bar{x}_{i+2} , но и \bar{x}_{i-1} , поскольку $\bar{x}_{i-1} = \bar{x}_{i-2} - 2\bar{x}_i$. Мы можем поэтому продолжить последовательность (\bar{x}_i) влево, то есть определить $\bar{x}_0, \bar{x}_{-1}, \bar{x}_{-2}, \dots$.
Заметим теперь, что бесконечная в обе стороны последовательность (\bar{x}_i) периодична.

В самом деле, поскольку число членов последовательности бесконечно, а количество троек из набора чисел $\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ не больше m^3 , найдутся две совпадающие тройки $\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}, \bar{x}_{i+2}$ и $\bar{x}_{i+T}, \bar{x}_{i+T+1}, \bar{x}_{i+T+2}$. Но так как числа первой тройки однозначно определяются по числам второй тройки, то вообще при любом k будут верны равенства $\bar{x}_{k+T} = \bar{x}_k, \bar{x}_{k+T+1} = \bar{x}_{k+1}, \bar{x}_{k+T+2} = \bar{x}_{k+2}$ (T — период последовательности).

Поскольку $\bar{x}_0 = \bar{x}_3 - 2\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_{-1} = \bar{x}_2 - 2\bar{x}_0 = 0, \bar{x}_{i-1} = 0$ и $\bar{x}_{i+T} = 0$ при любом i . Мы доказали тем самым, что существует бесконечно много пар соседних членов последовательности (x_i) , каждый из которых делится на m .

Интересно отметить связь последовательности (x_i) с последовательностью Фибоначчи $(f_i): f_1 = 1, f_2 = 2, \dots, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ при $n \geq 1$. Последовательность Фибоначчи также может быть продолжена влево: $f_{n-1} = f_{n+1} - f_n$, так что $f_0 = 1, f_{-1} = 0$ и т. д. Нетрудно проверить, что $x_i = f_{i-2} + (-1)^{i-1}$. Таким образом, для любого натурального m в последовательности $(f_i + (-1)^{i-1})$ существует бесконечно много пар соседних членов, делимых на m . В то же время любые два соседних числа Фибоначчи взаимно просты*.

Г. Козлов

М669. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажите, что
а) отрезок, соединяющий середины дуг AB и CD , перпендикулярен отрезку, соединяющему середины дуг BC и AD ;
б) центры окружностей, вписанных в треугольники ABC, BCD, CDA и DAB , являются вершинами прямоугольника.

а) Поскольку $\widehat{NMP} = \frac{1}{4}(\widehat{BC} + \widehat{CD}) = \frac{1}{2}\widehat{A}, \widehat{MNQ} = \frac{1}{4}(\widehat{AB} + \widehat{AD}) = \frac{1}{2}\widehat{C}$ (рис. 1), $\widehat{NMP} + \widehat{MNQ} = \frac{1}{2}(\widehat{A} + \widehat{C}) = 90^\circ$, откуда следует утверждение а).
б) Очевидно, $O_1 = [AN] \cap [CM], O_2 = [BP] \cap [DN], O_3 = [AP] \cap [CQ], O_4 = [BQ] \cap [DM]$ — центры окружностей, вписанных соответственно в треугольники ABC, BCD, CDA и DAB (рис. 2).

Треугольники BMN и MO_1N конгруэнтны, так что $|BN| = |NO_1|$. Аналогично, $|CN| = |NO_2|$. Но $|BN| = |CN|$; следовательно, треугольник O_1NO_2 — равнобедренный, в котором $[NQ]$ является биссектрисой. Поэтому $[NQ] \perp [O_1O_2]$; значит, $[O_1O_2] \parallel [MP]$.

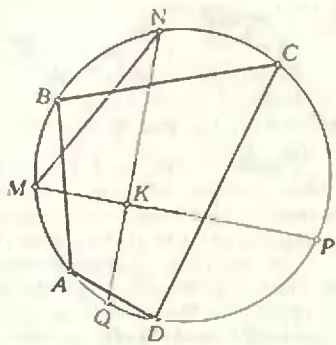


Рис. 1.

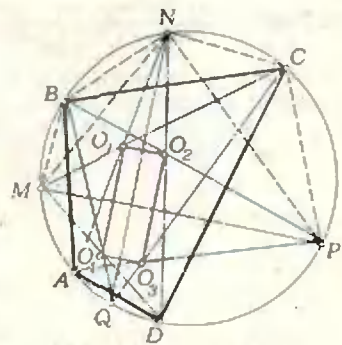


Рис. 2.

Аналогично доказывается, что $[O_3O_4] \parallel [MP]$ и $[O_1O_4] \parallel [NQ] \parallel [O_2O_3]$. Таким образом, четырехугольник $O_1O_2O_3O_4$ — прямоугольник.

И. Герман,
К. Малхасян

* (Об интересных свойствах делимости чисел Фибоначчи см. в книге П. Н. Воробьева «Числа Фибоначчи» (Серия «Популярные лекции по математике», М., «Наука», 1978).

M670. а) Дано несколько точек, некоторые пары которых соединены линиями (точки таких пар называются *соседами*). Число соседей у каждой точки нечетно. В начальный момент все точки раскрашены в два цвета — красный и синий. Затем каждую минуту происходит одно-временное перекрашивание точек по следующему правилу: каждая точка, у которой большинство соседей имеет отличный от нее цвет, меняет свой цвет; в противном случае ее цвет сохраняется. Докажите, что наступит момент, начиная с которого у некоторых точек цвет не будет меняться, а у некоторых будет меняться каждую минуту. б) Останется ли это утверждение верным, если не предполагать, что у каждой точки число соседей нечетно?

Представим себе, что данная система точек X_1, X_2, \dots, X_n (рис. 1, а) «удвоилась»: каждая точка X_i превратилась в две точки: X'_i и X''_i . Расположим эти два комплекта точек так, как показано на рисунке 2, а: один под другим. При этом каждая линия, соединяющая пару соседей X_i и X_j в исходной системе, превращается в два наклонных отрезка, соединяющих точки X'_i с X''_j и X'_j с X''_i .

Будем считать, что в четные моменты времени перекрашиваются (по прежнему правилу) лишь точки верхнего ряда, в нечетные моменты времени — лишь точки нижнего ряда.

Легко видеть, что если на исходных точках возникает последовательность раскрасок $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots$ (рис. 1, а — г), то на «удвоенной» системе возникает последовательность раскрасок $\begin{pmatrix} P_0 \\ P_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_1 \\ P_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_4 \\ P_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_4 \\ P_5 \end{pmatrix}$ и т. д.

Докажем, что с некоторого момента t перекрашивания в «удвоенной» системе прекратятся, то есть во все моменты времени, начиная с t , раскраска «удвоенной» системы приобретет вид $\begin{pmatrix} P_t \\ P_{t-1} \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} P_{t-1} \\ P_t \end{pmatrix}$. Для исходной системы это будет означать, что ее последовательность раскрасок, начиная с некоторого момента, примет вид $\dots, P_{t-1}, P_t, P_{t-1}, P_t, \dots$ (рис. 3), а именно это и требуется доказать в задаче.

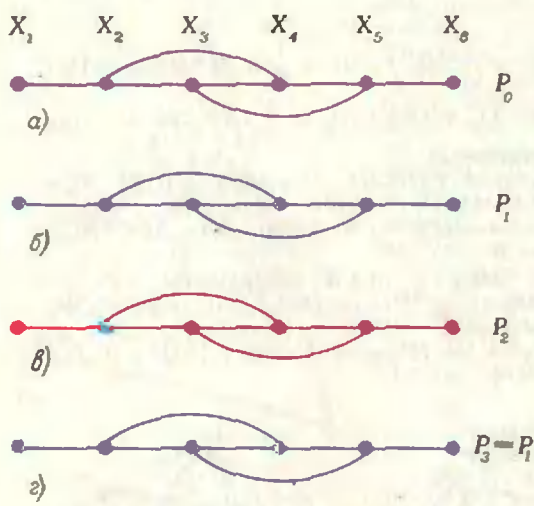


Рис. 1.

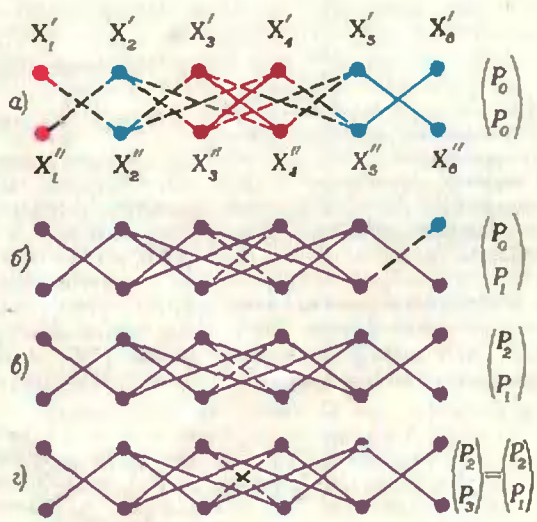


Рис. 2.

Назовем отрезок $X'_i X''_j$, соединяющий точки удвоенной системы, *пестрым ребром*, если его концы X'_i и X''_j разного цвета. Покажем, что если в очередной момент хотя бы одна точка перекрашивается, то число пестрых ребер уменьшается.

Рассмотрим, для определенности, ч е т н ы й момент времени (точки нижнего ряда не перекрашиваются). Посмотрим на группу ребер с концом X'_i . Если в данный момент точка X'_i не перекрашивается, то число пестрых ребер в этой группе остается прежним; если же X'_i меняет цвет, то, поскольку она приобретает цвет б о л ь ш и с т в я своих соседей, число пестрых ребер в этой группе, а следовательно, и их общее число уменьшаются.

Поскольку количество пестрых ребер не может уменьшаться бесконечно, с некоторого момента перекрашивания в удвоенной системе прекратятся. Если при этом оба ряда удвоенной системы точек окажутся раскрашенными одинаково, то точки исходной системы перекрашиваться перестанут; если же верхний и нижний ряды удвоенной системы окажутся раскрашенными по-разному, то в исходной системе будут чередоваться две раскраски.

б) Утверждение задачи останется верным. Для доказатель-

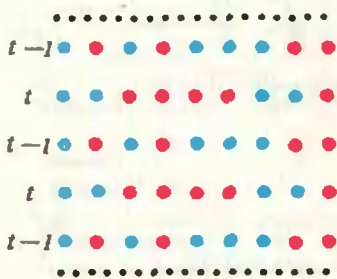


Рис. 3.

ства достаточно присоединить к ребрам удвоенной системы вертикальные отрезки $X_i X_i'$, причем только для таких номеров i , что точки исходной системы имеют четное число соседей, после чего дословно повторить проведенные рассуждения.

О. Козлов

Ф678. Артиллерийское орудие стреляет из-под укрытия, наклоненного под углом α к горизонту (рис. 1). Орудие находится в точке A на расстоянии l от основания укрытия (точка B). Начальная скорость снаряда равна $|\vec{v}_0|$. Считая, что траектория снаряда лежит в плоскости рисунка, определить максимальную дальность полета.

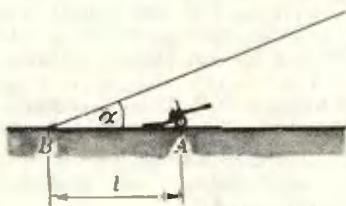


Рис. 1.

Из всех возможных траекторий снаряда выберем ту, которая касается укрытия. Рассмотрим движение снаряда в системе координат, оси которой направлены так, как показано на рисунке 2. В этой системе «горизонтальная» (вдоль оси OX) проекция начальной скорости снаряда равна $v_{0x} = v_0 \cos(\varphi - \alpha)$, а «вертикальная» (вдоль оси OY) проекция равна $v_{0y} = v_0 \sin(\varphi - \alpha)$, где φ — угол, который составляет с горизонтом вектор начальной скорости снаряда.

Точка C , в которой траектория снаряда касается укрытия, определяет максимальную высоту h' поднятия снаряда над «горизонтом», равную, как видно из рисунка 2, $l \sin \alpha$. В этой точке проекция полной скорости \vec{v} снаряда на ось

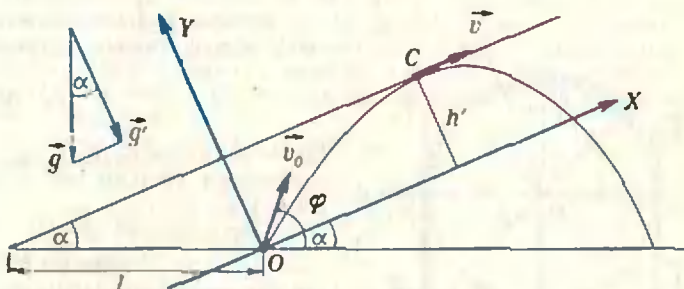


Рис. 2.

OY равна нулю и

$$h' = v_{0y}^2 / 2g',$$

где $g' = g \cos \alpha$ — «ускорение свободного падения» в системе XOY (проекция вектора \vec{g} на «вертикаль» OY). Таким образом,

$$v_{0y}^2 = 2g'h' \Rightarrow v_0^2 \sin^2(\varphi - \alpha) = 2(g \cos \alpha)(l \sin \alpha).$$

Отсюда, в частности, вытекает, что если по условию задачи $2gl \sin \alpha \cdot \cos \alpha = gl \sin 2\alpha > v_0^2$,

то ни одна из траекторий снаряда не коснется укрытия и максимальная дальность полета L_{\max} будет у снаряда, пущенного под углом $\varphi = \pi/4$ к горизонту; при этом $l_{\max} = v_0^2/g$.

Если по условию задачи выполняется соотношение

$$v_0^2 > gl \sin 2\alpha,$$

то для того, чтобы траектория касалась укрытия, снаряд должен быть пущен под углом

$$\varphi_{\text{кас}} = \alpha + \arcsin \frac{\sqrt{gl \sin 2\alpha}}{v_0}.$$

Если при этом по условию задачи выполняется неравенство

$$\frac{v_0^2}{v_0^2 + 2gl} < \sin 2\alpha,$$

что в свою очередь означает, что $\varphi_{\text{кас}} > \pi/4$ (покажите!), то угол вылета снаряда с максимальной дальностью полета $\varphi_{\text{пт}} = \pi/4$ и $L_{\max} = v_0^2/g$. Если же по условию задачи выполняется обратное неравенство

$$\frac{v_0^2}{v_0^2 + 2gl} > \sin 2\alpha,$$

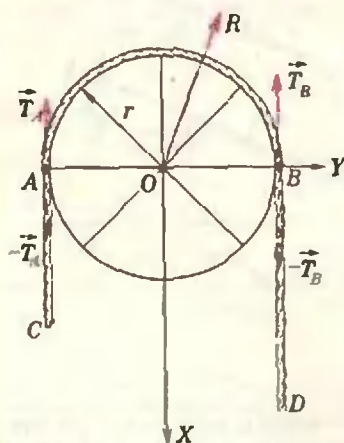
что в свою очередь означает, что $\varphi_{\text{кас}} < \pi/4$, то

$$\varphi_{\text{пт}} = \varphi_{\text{кас}} = \alpha + \arcsin \frac{\sqrt{gl \sin 2\alpha}}{v_0}.$$

$$L_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\varphi_0 = \frac{v_0^2}{g} \sin 2 \left(\alpha + \arcsin \frac{\sqrt{gl \sin 2\alpha}}{v_0} \right).$$

С. Кротов

Ф679. Нерастяжимая шероховатая веревка линейной плотности ρ и длины l перекинута через блок так, что длина одного из свисающих концов равна l ($l < L/2$). Блок, надетый на горизонтальную ось, представляет собой тонкий обруч массы m и радиуса r на легких спицах (см. рисунок). Систему удерживают в состоянии покоя и затем отпускают. Найти силу давления на ось в первый момент времени. Трение между осью и блоком мало.



На систему блок + веревка действуют три силы: сила \vec{R} реакции в оси блока и силы тяжести $m\vec{g}$ и $M\vec{g}$ ($M = \rho l$ — масса веревки). Согласно третьему закону Ньютона, сила \vec{N} давления на ось блока равна по абсолютной величине $|\vec{R}|$. Найдем $|\vec{R}|$.

Запишем уравнение движения центра масс системы в проекциях на оси OX и OY (см. рисунок):

$$\begin{aligned} (M+m)g - R_x &= (M+m)A_x, \\ R_y &= (M+m)A_y \end{aligned} \quad (*)$$

(A_x и A_y — проекции ускорения центра масс). Так как веревка нерастяжима и не проскальзывает по блоку, ускорения всех точек веревки и блока в первый момент времени будут равны по абсолютной величине (начальная скорость системы равна нулю, и точки веревки, лежащие на обруче, еще не приобрели центростремительной составляющей ускорения).

Ускорение \vec{A} центра масс системы связано с ускорениями \vec{a}_i всех ее i точек соотношением

$$M\vec{A} = \sum_i m_i \vec{a}_i,$$

где M — масса системы, m_i — масса ее i -й точки. Зависим для нашей системы это соотношение в проекциях на оси OX и OY .

В проекции на ось OX

$$-M_{AC}a + M_{BD}a = (M+m)A_x,$$

так как суммарный вклад всех произведений $M_{i(AB)}\vec{a}_i$ (от точек веревки, лежащих на участке AB) и $m_i\vec{a}_i$ (от точек обруча) в проекциях на ось OX равен нулю: это ясно из соображений симметрии. В проекцию же на ось OY вносят вклад только произведения $M_{i(AB)}\vec{a}_i$. Чтобы найти проекцию на ось OY вектора $\sum_i M_{i(AB)}\vec{a}_i$, мы должны просуммировать

векторы $M_{i(AB)}\vec{a}_i$ с учетом того, что в каждой точке ускорение направлено по касательной к обручу (напомним, что начальная скорость равна нулю). Такое суммирование (проведите его самостоятельно) приведет нас к следующему результату:

$$\frac{2}{\pi} M_{AB}a = (M+m)A_y.$$

Подставим полученные выражения для $(M+m)A_x$ и $(M+m)A_y$ в (*) и найдем R_x и R_y :

$$R_x = (M+m)(g - A_x) = (M+m) \left(g - \frac{M_{BD} - M_{AC}}{M+m} a \right),$$

$$R_y = \frac{2}{\pi} M_{AB}a.$$

Для определения ускорения a запишем уравнения движения отдельных частей системы:

$$\begin{aligned} M_{BD}g - T_B &= M_{BD}a, \\ T_A - M_{AC}g &= M_{AC}a, \\ T_B - T_A &= (M_{AB} + m)a. \end{aligned}$$

где \vec{T}_A и \vec{T}_B — силы натяжения веревки в точках A и B (см. рисунок). (Чтобы получить последнее уравнение, рассмотрите движение отдельных маленьких частей веревки на участке AB и обруча.) Из этих уравнений находим

$$a = \frac{M_{BD} - M_{AC}}{M+m} g.$$

Таким образом,

$$R_x = (M+m) \left(g - \frac{(M_{BD} - M_{AC})^2}{(M+m)^2} g \right).$$

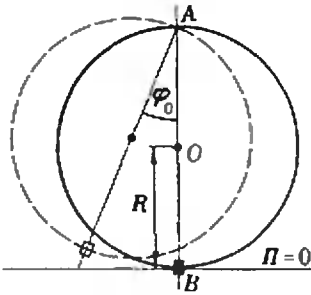
$$R_y = \frac{2}{\pi} M_{AB} \frac{M_{BD} - M_{AC}}{M + m} g.$$

Следовательно, проекции силы \vec{N} давления на ось в первый момент времени равны

$$\begin{aligned} -N_x &= (qL + m) \left(1 - \frac{(L - \pi r - 2l)^2 q^2}{(Lq + m)^2} \right) g, \\ -N_y &= 2rq \frac{(L - \pi r - 2l)q}{Lq + m} g. \end{aligned}$$

М. Эфроимский

Ф680. Тонкий обруч радиуса R может вращаться вокруг горизонтального стержня A , параллельного оси обруча (см. рисунок). На обруч надета небольшая шайба B массы m , которая может перемещаться по обручу без трения. Обруч вместе с шайбой как целое отклоняют от положения равновесия на угол φ_0 и отпускают. Определить зависимость силы взаимодействия шайбы и обруча от угла φ , образуемого радиус-вектором OA с вертикалью.



Рассмотрим движение двух систем:

система I — шайба, подвешенная на нити длины $2R$ (математический маятник); масса шайбы m ;

система II — обруч радиуса R с закрепленной на нем в нижней точке шайбой массы m .

Отклоним обе системы от положения равновесия на один и тот же угол φ_0 и отпустим. В силу закона сохранения энергии системы будут совершать колебания с одинаковыми амплитудами. Сравним скорости, которыми будут обладать шайбы (на нити и на обруче) при угле отклонения от вертикали, равном φ .

Из закона сохранения энергии для системы I —

$$mg \cdot 2R(1 - \cos \varphi_0) = mg \cdot 2R(1 - \cos \varphi) + \frac{mv^2}{2},$$

для системы II —

$$\begin{aligned} mg \cdot 2R(1 - \cos \varphi_0) + Mg(R + R(1 - \cos \varphi_0)) = \\ = mg \cdot 2R(1 - \cos \varphi) + Mg(R + R(1 - \cos \varphi)) + \\ + \frac{m(v')^2}{2} + 2 \frac{M \left(\frac{v'}{2} \right)^2}{2} \end{aligned}$$

(M — масса обруча, v' — скорость шайбы, $v'/2$ — скорость центра обруча, $2M \left(\frac{v'}{2} \right)^2 / 2$ — кинетическая энергия обруча) находим

$$\begin{aligned} v^2 &= 4Rg(\cos \varphi - \cos \varphi_0), \\ (v')^2 &= 4Rg(\cos \varphi - \cos \varphi_0). \end{aligned}$$

Мы видим, что $v = v'$. Следовательно, в рассматриваемых системах совпадают траектории движения шайб, и мгновенные скорости шайб (отсюда, кстати, вытекает синхронность колебаний систем I и II). Таким образом, и мгновенные ускорения шайб одинаковы. Поэтому по абсолютной величине мгновенное значение силы взаимодействия обруча и закрепленной на нем шайбы будет в точности равно соответствующему мгновенному значению силы натяжения нити $T(\varphi)$ математического маятника длины $2R$. Найдем $T(\varphi)$.

Запишем уравнение движения шайбы на нити:

$$T(\varphi) - mg \cos \varphi = \frac{mv^2}{2R}.$$

Подставив полученное ранее значение v^2 , найдем $T(\varphi)$:

$$T(\varphi) = mg(3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0).$$

Таким образом, сила, действующая со стороны обруча на закрепленную на нем шайбу, в любой момент времени направлена к центру обруча. А это означает, что если мы выведем данную в задаче систему из положения равновесия, то при дальнейшем движении шайба будет все время покоиться относительно обруча независимо от того, закреплена она на нем или нет. Поэтому сила взаимодействия шайбы и обруча равна

$$N(\varphi) = mg(3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0).$$

Д. Белов

Ф681. Омметр состоит из миллиамперметра, рассчитанного на максимальный ток $I_0 = 1$ мА, источника тока и добавочного резистора, регулирующей сопротивлением которого омметр устанавливается на нулевую отметку при замкнутых накоротко выводах (нуль омметра находится в правом конце шкалы). Схему собирают из батареи для карманного фонарика с ЭДС $\mathcal{E} = 4,5$ В, резистора с неизвестным сопротивлением и омметра. Когда омметр включают последовательно, он показывает 0 Ом. Когда его включают параллельно батарее, он показывает бесконечно большое сопротивление.

Определите величину неизвестного сопротивления резистора и напряжения на батарее и на омметре.

Ф682. Зеркало антенны радиолокатора, работающего на волне $\lambda = 0,3$ м, представляет собой параболоид вращения с «выходным» диаметром $d = 6$ м, в фокусе которого (глубоко внутри параболоида) расположен точечный излучатель энергии. Эта же антенна используется для приема отраженного от самолета сигнала. Мощность излучателя $P_{\text{и}} = 2 \cdot 10^5$ Вт. Минимальная мощность сигнала на входе антенны, необходимая для нормальной работы, $P_{\text{мин}} = 1 \cdot 10^{-13}$ Вт. Оцените максимальную дальность обнаружения локатором самолета, площадь отражающей поверхности которого $S = 5$ м². Считать, что мощность отраженного сигнала в $n = 10$ раз меньше мощности падающего сигнала и отражение происходит равномерно во все стороны.

Для того чтобы найти неизвестное сопротивление R_x , достаточно знать результат первого измерения (при последовательно включенном омметре). Если омметр показывает нуль, то напряжение на его зажимах равно нулю, а ток в цепи равен $I = I_0 = 1$ мА. Следовательно, неизвестное сопротивление резистора равно

$$R_x = U/I_0 = 4,5 \text{ кОм.}$$

(Батарейка для карманного фонарика рассчитана на ток $\sim 200 \div 300$ мА; значит, при токе 1 мА падением напряжения на ее внутреннем сопротивлении можно пренебречь.)

По результатам второго измерения (бесконечно большое сопротивление) видно, что ток через омметр не течет и суммарное напряжение в цепи батарейка — омметр равно нулю. Значит, напряжение на источнике тока в омметре равно напряжению на зажимах батарейки и равно $\mathcal{E} = 4,5$ В.

З. Рафаилов

Для увеличения предельной дальности работы радиолокатора увеличивают мощность передатчика, разрабатывают приемные устройства высокой чувствительности, применяют антенны с очень высокой направленностью.

Чем определяется направленность антенны?

Согласно законам геометрической оптики, точечный источник, помещенный в фокусе параболоида, дает после отражения параллельный пучок лучей (угол расходимости пучка равен нулю). В этом случае освещенность объекта, попавшего в луч, не зависит от расстояния до отражателя.

На самом деле угол расходимости пучка не равен нулю и определяется дифракцией.

Для приближенного расчета угла расходимости пучка удобно воспользоваться такой моделью: плоская электромагнитная волна (какая получилась бы при отражателе очень больших размеров) падает на непрозрачный экран, в котором проделано круглое отверстие диаметра d — диаметр зеркала). Будем приближенно считать, что направление на первый минимум в этом случае соответствует углу

$$\alpha = \lambda/d.$$

В нашем случае угол α довольно мал, что позволяет упростить дальнейший расчет. На очень большом расстоянии L от зеркала радиус «освещенного» пятна $r = \alpha L$, и на самолет с площадью поверхности S попадает мощность $P_{\text{с}} = P_{\text{и}} \cdot S/\pi r^2$ (мы приближенно принимаем, что освещенность в пределах всего пятна одна и та же). По условию задачи отраженный от самолета сигнал равномерно распределяется во все стороны. Мощность сигнала $P_{\text{пр}}$, падающего обратно на антенну, равна

$$P_{\text{пр}} = P_{\text{с}} \cdot n \frac{\pi d^2/4}{4\pi L^2} = P_{\text{и}} \frac{n S d^4}{16\pi \lambda^2 L^4}.$$

Максимальная дальность L_{max} соответствует пороговой чувствительности приемника. Из условия $P_{\text{пр}} = P_{\text{мин}}$ находим

$$L_{\text{max}} = \sqrt{\frac{P_{\text{и}}}{P_{\text{мин}}} \cdot \frac{n S d^4}{16\pi \lambda^2}} \approx 1,3 \cdot 10^5 \text{ м} = 130 \text{ км.}$$

А. Зильберман

Задачи

1. В кружочках с номерами 1, 2, ..., 5 (см. рисунок) находятся камушки (по одному в каждом кружочке); в кружочках с номерами 7, 8, ..., 11 — ракушки (также по одной в каждом кружочке). Камушкам и ракушкам разрешается перемещаться вдоль линий на соседний свободный кружочек и перепрыгивать (вдоль линий) через любого соседа на свободный кружочек (вначале свободен кружочек с номером 6). Можно ли добиться того, чтобы камушки и ракушки поменялись местами?

2. Докажите неравенство
 $ДВА \times ШЕШТЬ < ДВАДЦАТЬ$.

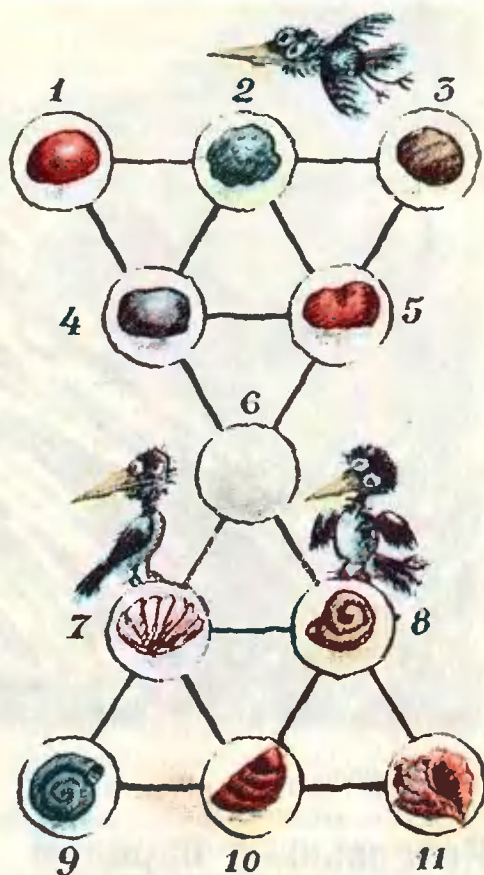
(Здесь каждая буква обозначает цифру, причем разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым — одинаковые.)

3. 15 монет расположены в узлах клетчатой бумаги так, как показано на рисунке (в узле № 2 монеты нет!). Монета может переместиться в свободный узел, перепрыгнув вдоль линий сетки через свою соседку, которая при этом удаляется. Можно ли, сделав 14 ходов, добиться того, чтобы осталась одна монета?

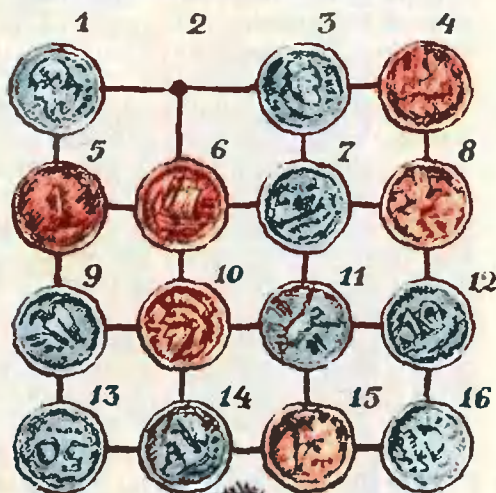
4. Можно ли все десять цифр расставить по окружности так, чтобы сумма любых трех из них, идущих подряд, не превышала а) 13; б) 14; в) 15?

5. Существует ли целое число, произведение цифр которого равно 528?

Эти задачи нам предложили
 Ф. Бартекев и А. Савик



$ДВА \times ШЕШТЬ < ДВАДЦАТЬ$





И. Юфанова

Интервью с бароном Мюнхаузенем

— Уважаемый барон! Наш первый вопрос касается Вашего рассказа «За волосы». Действительно ли утверждение о том, что человек способен сам себя поднять за волосы, следует считать Вашим главным физическим открытием?

Барон: — Полагаю, что нет. Умение поднимать себя за волосы — это не самое главное, совсем не физическое и, собственно, не открытие.

— Вы, по своему обыкновению, шутите?

Барон: — Нисколько.

— Чтобы ввести в курс дела наших читателей, не расскажете ли Вы еще раз, как это случилось?

Барон: — С превеликим удовольствием.

Это было во время войны с турками. Вообще во время этой войны со мною было много приключений.

Однажды, спасаясь от турок, попробовал я перепрыгнуть болото верхом на коне. Но конь

не допрыгнул до берега, и мы с разбегу шлепнулись в жидкую грязь.

Шлепнулись — и стали тонуть. Спасенья не было.

Болото с ужасной быстротой засасывало нас глубже и глубже. Вот уже все туловище моего коня скрылось в зловонной грязи, и вот уже и моя голова стала погружаться в болото, и оттуда торчит лишь косичка моего парика.

Что было делать? Мы непременно погибли бы, если бы не удивительная сила моих рук. Я страшный силач. Схватив себя за эту косичку, я изо всех сил дернул вверх и без большого труда вытащил из болота и себя, и своего коня, которого крепко сжал обеими ногами, как щипцами.

Но позвольте и мне у Вас спросить. Почему Вы называете это физическим открытием?

— Прежде всего потому, что это противоречит известным физическим законам. И потом — никто, кроме Вас, этого никогда не проделывал.

Барон: — Вы не правы. Разве примерно не так поступает велосипедист, въезжая на тротуар с проезжей части дороги? В тот момент, когда

переднее колесо подходит к кромке тротуара, он подтягивает руль к себе. При этом передняя часть велосипеда приподнимается, и велосипедист без толчка въезжает на тротуар.

— Просим читателей принять участие в нашей беседе и ответить на такой вопрос:

Почему барон не мог сам себя вытащить из болота, а каждый велосипедист, подтягивая к себе руль, приподнимает не только себя, но и свой велосипед?

— И еще один Ваш рассказ — «Меткий выстрел» — заинтересовал нас с точки зрения законов физики.

Барон: — Честно говоря, я не думал о физике и ее законах, когда развлекал друзей воспоминаниями о своих приключениях. Находчивость — вот главное в жизни. Впрочем, как Вам угодно.

Испанцы осаждали тогда английскую крепость Гибралтар. Я пробрался к осажденным. Стоя на стене Гибралтара, я увидел сквозь подзорную трубу, что испанцы направляют дуло своей пушки как раз в то место, где стояли мы.

Ни минуты не медля, я приказал, чтобы на это самое место была поставлена огромная пушка.

Чуть только пушку подкатили ко мне, я направил ее дуло прямо в дуло неприятельской пушки.

Обе пушки грянули в один и тот же миг.

Случилось то, что я ожидал: в намеченной мною точке два ядра — наше и неприятельское — столкнулись с ужасающей силой, и неприятельское ядро полетело назад.

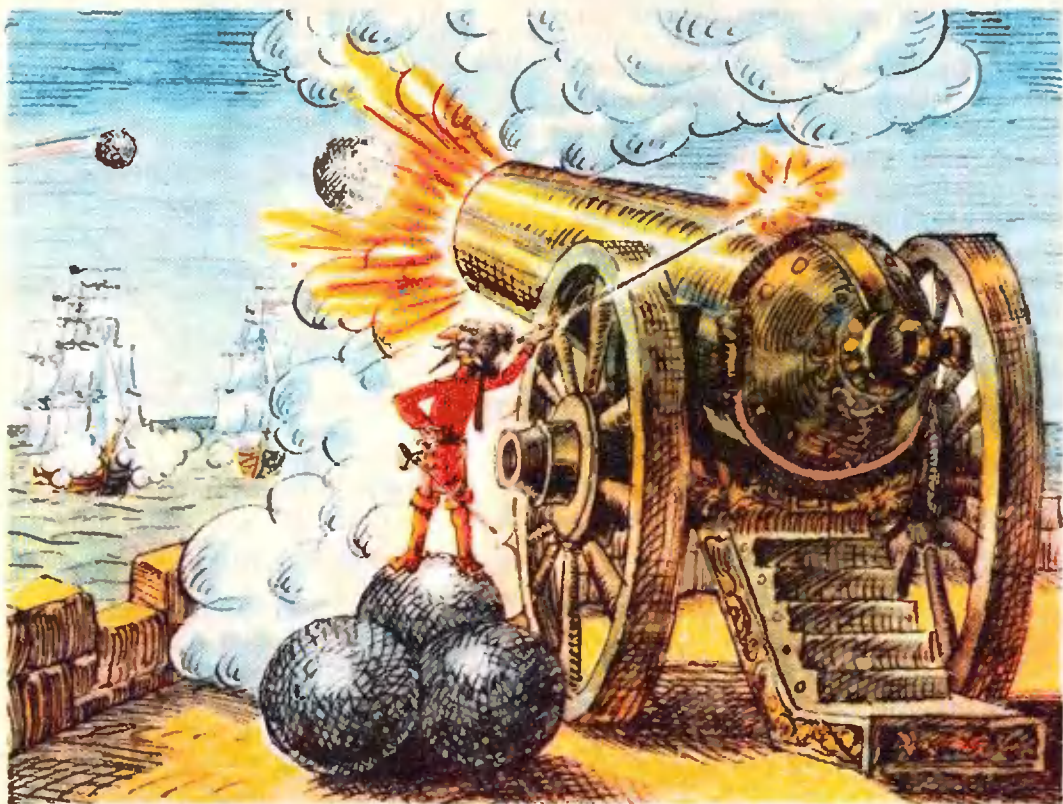
Вы понимаете: оно полетело назад к испанцам.

Наше ядро тоже не доставило им удовольствия: оно попало в их военный корабль и пустило его ко дну.

— Благодарю Вас, барон. Трудно поверить во что-нибудь подобное. Чтобы оба ядра после удара стали двигаться в одну сторону?

Придется вновь обратиться за помощью к нашим читателям:

Правдоподобен ли этот рассказ барона Мюнхаузена?



В. Кучеров

Геометрические аналогии

Изучая геометрию, вы, наверное, заметили, что некоторые свойства треугольника и тетраэдра похожи, а многие геометрические понятия, связанные с треугольником, имеют пространственные аналоги. Например: сторона треугольника — грань тетраэдра, длина стороны — площадь грани, вписанная окружность — вписанная сфера, описанная окружность — описанная сфера, площадь — объем, биссектриса угла — биссектор двугранного угла и т. п.

Эта аналогия — не только внешняя. Многие теоремы о треугольниках, если заменить в их формулировках планиметрические термины соответствующими стереометрическими и соответствующим образом «подправить» формулировки, превращаются в теоремы о тетраэдрах. Несколько таких теорем мы и рассмотрим.

Теорема 1. *Биссектриса CD внутреннего угла треугольника ABC делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные его сторонам AC и BC .*

Доказательство. Примем сначала за основание треугольников ADC и DBC (рис. 1) отрезки AC и BC соответственно. Точка D равноудалена от сторон угла ACB , поэтому

$$\frac{S_{ADC}}{S_{BDC}} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Теперь примем за основания этих же треугольников отрезки AD и DB . Ясно, что

$$\frac{S_{ADC}}{S_{BDC}} = \frac{|AD|}{|BD|}.$$

Следовательно,

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Напомним, что *биссектором* двугранного угла называется полуплоскость, делящая его на два равных по величине двугранных угла. Биссектор двугранного угла является множеством точек, равноудаленных от его граней («Геометрия 9—10», с. 100, задача 422). Докажем свойство биссектора двугранного угла тетраэдра, аналогичное свойству биссектрисы угла треугольника («Геометрия 9—10», с. 176, задача 310).

Теорема 2. *Биссектор двугранного угла тетраэдра делит противоположащее ребро в отношении, равном отношению площадей граней, образующих этот двугранный угол.*

Доказательство. Пусть ADM — сечение тетраэдра $ABCD$ биссектором двугранного угла с ребром AD (рис. 2). Объемы тетраэдров $ACMD$ и $ABMD$ обозначим через V_1 и V_2 соответственно.

Так как точка M одинаково удалена от граней ADC и ADB ,

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_{ADC}}{S_{ADB}}.$$

С другой стороны, легко видеть, что

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_{DMC}}{S_{DMB}} = \frac{|MC|}{|MB|}.$$

Поэтому $\frac{S_{ADC}}{S_{ADB}} = \frac{|MC|}{|MB|}$, что и требовалось доказать.

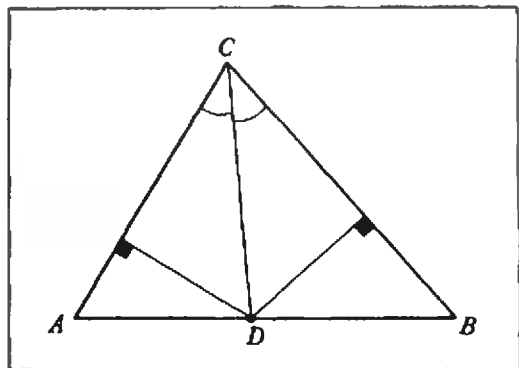


Рис. 1.

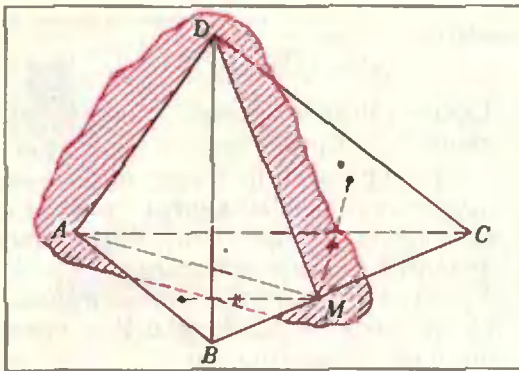


Рис. 2.

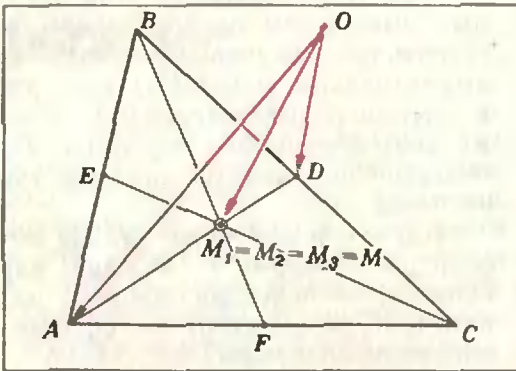


Рис. 3.

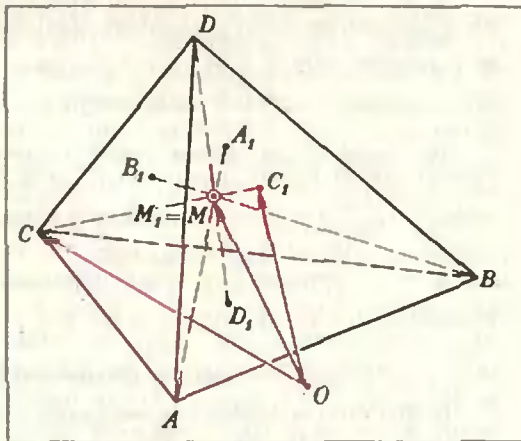


Рис. 4.

Попутно замечаем, что $\frac{S_{ADC}}{S_{ADB}} = \frac{S_{DMC}}{S_{DMB}}$, что еще раз подчеркивает аналогичность теорем 1 и 2.

Для дальнейшего нам требуется следующее утверждение: если $M \in [AB]$ и $|AM| : |MB| = m : n$, то для произвольной точки O пространства

$$\vec{OM} = \frac{n}{m+n} \cdot \vec{OA} + \frac{m}{m+n} \cdot \vec{OB} \quad (1)$$

(убедитесь в этом!).

Мы применим (1) к доказательству теоремы о точке пересечения медиан треугольника («Геометрия 6—8», задача 638) и аналогичной ей теореме для тетраэдра («Геометрия 9—10», с. 176, задача 314).

Теорема 3. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершины.

Доказательство. Пусть M_1 — точка медианы AD треугольника ABC такая, что $|AM_1| : |M_1D| = 2:1$, а O — произвольная точка пространства (рис. 3).

В силу (1) имеем $\vec{OM}_1 = \frac{1}{3} \vec{OA} + \frac{2}{3} \vec{OD}$ и $\vec{OD} = \frac{1}{2} (\vec{OB} + \vec{OC})$. Поэтому $\vec{OM}_1 = \frac{1}{3} \vec{OA} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} (\vec{OB} + \vec{OC}) = \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$.

Если M_2 и M_3 — точки, делящие медианы CE и BF в отношении 2:1, считая от вершины, то, аналогично, $\vec{OM}_2 = \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$, $\vec{OM}_3 = \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$. Таким образом, $\vec{OM}_1 = \vec{OM}_2 = \vec{OM}_3$, и, следовательно, точки M_1 , M_2 и M_3 совпадают. Теорема доказана.

Отметим, что попутно получено известное соотношение: $\vec{OM} = \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$, где M — центр тяжести (точка пересечения медиан) треугольника, а O — произвольная точка пространства.

Назовем *медианой тетраэдра* отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с центроидом противоположной грани. Оказывается, для медиан тетраэдра справедлива теорема, аналогичная теореме 3.

Теорема 4. Четыре медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 3:1, считая от вершины.

Доказательство. Пусть M_1 — точка медианы CC_1 тетраэдра $ABCD$ такая, что $|CM_1| : |M_1C_1| = 3:1$ (рис. 4). Пусть O — произвольная точка пространства. По формуле (1) $\vec{OM}_1 = \frac{1}{4} \vec{OC} + \frac{3}{4} \vec{OC}_1$. Кроме того, $\vec{OC}_1 = \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OD})$, так

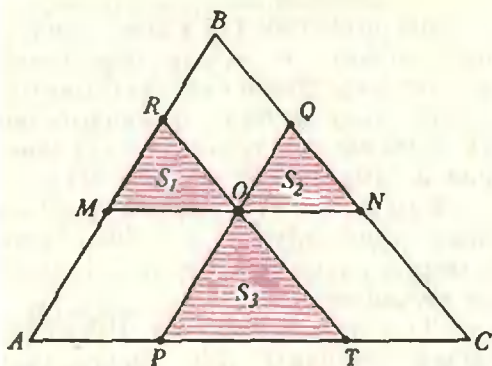


Рис. 5.

как S_1 — центроид треугольника ABD . Поэтому $\vec{OM}_1 = 1/4\vec{OC} + 3/4 \cdot 1/3(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OD}) = 1/4(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$. Точно такие же выражения получим для точек M_2 и M_3 и M_4 , делящих медианы тетраэдра AA_1 , BB_1 и DD_1 в отношении 3:1 соответственно. Следовательно, $\vec{OM}_2 = \vec{OM}_3 = \vec{OM}_4 = 1/4(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$, и поэтому точки M_1 , M_2 , M_3 и M_4 совпадают.

Точка M пересечения медиан тетраэдра называется его *центроидом*. Отметим, что для произвольной точки O пространства справедливо равенство $\vec{OM} = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$.

В заключение рассмотрим одну интересную теорему планиметрии и попытаемся найти аналогичную ей теорему стереометрии.

Теорема 5. *Через произвольную точку O , взятую внутри треугольника ABC , проведены прямые, параллельные его сторонам. Если S_1 , S_2 , S_3 — площади образовавшихся при этом треугольников (рис. 5), а S — площадь данного треугольника, то*

$$\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}.$$

Доказательство. Образовавшиеся треугольники подобны треугольнику ABC , поэтому

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{|MR|}{|AB|}, \quad \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{|OQ|}{|AB|}, \quad \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{|OP|}{|AB|}.$$

Складывая эти равенства, получим

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} &= \frac{|MR| + |OQ| + |OP|}{|AB|} = \\ &= \frac{|MR| + |BR| + |MA|}{|AB|} = 1, \end{aligned}$$

откуда

$$\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}.$$

Сформулируем теперь аналогичную теорему в пространстве.

Теорема 6. *Через произвольную точку, взятую внутри тетраэдра, проведены четыре плоскости, параллельные граням тетраэдра. Если V_1 , V_2 , V_3 , V_4 — объемы образовавшихся при этом тетраэдров, а V — объем данного тетраэдра, то*

$$\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{V_1} + \sqrt[3]{V_2} + \sqrt[3]{V_3} + \sqrt[3]{V_4}.$$

Для доказательства этой теоремы, которое мы предоставляем читателю, следует воспользоваться тем, что тетраэдры, о которых идет речь в условии, подобны исходному, а также тем, что объемы подобных многогранников относятся как кубы длин их ребер.

Предлагаемые ниже задачи объединены в пары. В каждой паре пункт а) — некоторая теорема планиметрии, а пункт б) — ее пространственный аналог.

У и р а ж н е н и я

1. а) Докажите, что площадь треугольника, описанного около окружности, вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2} P \cdot r$, где r — радиус этой окружности, P — периметр треугольника.

б) Докажите, что объем тетраэдра, описанного около сферы, вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3} S \cdot r$, где r — радиус этой сферы, S — полная поверхность тетраэдра.

2. а) В треугольник вписана окружность радиуса r . Докажите, что $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$, где h_1 , h_2 , h_3 — высоты треугольника.

б) В тетраэдр вписана сфера радиуса r . Докажите, что $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}$, где h_1 , h_2 , h_3 , h_4 — высоты тетраэдра.

3. а) Через центр правильного треугольника проведена прямая, параллельная основанию. На этой прямой внутри треугольника взята произвольная точка O . Докажите, что расстояние от точки O до основания треугольника равно среднему арифметическому расстояний от точки O до боковых сторон треугольника.

б) Через центр правильного тетраэдра проведена плоскость, параллельная основанию. На этой плоскости внутри тетраэдра взята произвольная точка O . Докажите, что расстояние от точки O до основания тетраэдра есть среднее арифметическое расстояний от точки O до боковых граней тетраэдра.



А. Шеронов

Криволинейное движение

Движение тел по криволинейным траекториям часто встречается в природе и технике. Это, например, движение спутников и метеоритов в поле тяжести Земли или планет и комет в поле тяжести Солнца, движение заряженных частиц в ускорителях или деталей различных механизмов.

Напомним основные закономерности, справедливые для криволинейного движения. Как известно, скорость тела всегда направлена по касательной к его траектории и при движении может изменяться и по модулю, и по направлению. Вектор ускорения тела не совпадает по направлению со скоростью, а составляет с ней некоторый угол. Часто бывает удобнее говорить не о самом ускорении, а о двух его проекциях. Одна из них, так называемая тангенциальная (или касательная) проекция a_t — это проекция на направление скорости (то есть на направление касательной к траектории). Эта проекция характеризует изменение модуля скорости. Другая, так называемая нормальная (или центростремительная) проекция a_n — это проекция на направление, перпендикулярное к вектору скорости. Она характеризует изменение направления скорости. В частности, при равномерном движении тела по окружности ускорение имеет лишь одну проекцию — нормальную к скорости и изменяющую лишь ее направление. Модуль этой проекции ра-

вен квадрату модуля скорости, деленному на радиус окружности: $a_n = v^2/R$.

Небольшой участок любой криволинейной траектории всегда можно представить как часть некоторой окружности; радиус соответствующей окружности называют радиусом кривизны траектории в данном месте. Поэтому выражение $a_n = v^2/R$ можно использовать для определения радиуса кривизны траектории R .

Наконец, для тела, движущегося по криволинейной траектории, так же как и для тела, движущегося прямолинейно, справедлив второй закон Ньютона: векторная сумма всех действующих на тело сил равна массе тела, умноженной на вектор его ускорения.

Рассмотрим несколько конкретных задач на криволинейное движение тел.

Задача 1. *С поверхности земли брошено тело с начальной скоростью \vec{v}_0 под углом α_0 к горизонту. Найдите зависимость тангенциальной и нормальной проекций ускорения тела от его высоты подъема. Сопротивление воздуха можно не учитывать.*

После броска на тело действует только одна сила — сила притяжения к Земле, поэтому в любой точке траектории ускорение \vec{a} тела равно ускорению свободного падения \vec{g} (рис. 1). Тангенциальная и нормальная проекции ускорения равны, соответственно,

$$a_t = g \sin \alpha \text{ и } a_n = g \cos \alpha.$$

Здесь α — угол, который состав-

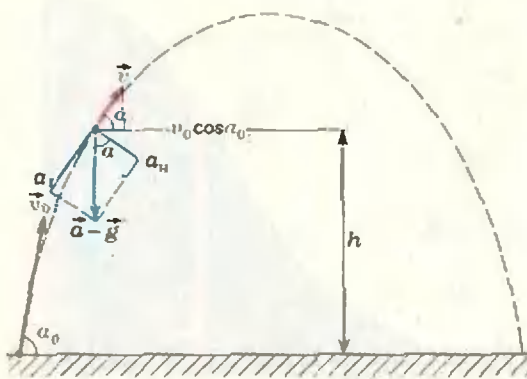


Рис. 1.

ляет с горизонтом скорость \vec{v} тела на высоте h .

Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgh$$

и найдем выражение для модуля v скорости тела:

$$v = (v_0^2 - 2gh)^{1/2}$$

Во время движения проекция скорости на горизонтальное направление остается постоянной и равной $v_0 \cos \alpha_0$. Тогда (см. рис. 1)

$$a_n = g \cos \alpha = gv_0 \cos \alpha_0 \cdot v^{-1} = \\ = gv_0 \cos \alpha_0 \cdot (v_0^2 - 2gh)^{-1/2}$$

и

$$a_\tau = g \sin \alpha = g(1 - \cos^2 \alpha)^{1/2} = \\ = g(v_0^2 \sin^2 \alpha_0 - 2gh)^{1/2} (v_0^2 - 2gh)^{-1/2}$$

В полученные формулы можно ввести максимальную высоту подъема тела $h_{\max} = v_0^2 \sin^2 \alpha_0 / 2g$:

$$a_n = g \cos \alpha_0 \cdot h_{\max}^{1/2} (h_{\max} - h \sin^2 \alpha_0)^{-1/2} \\ \text{и} \\ a_\tau = g \sin \alpha_0 \cdot (h_{\max} - h)^{1/2} (h_{\max} - \\ - h \sin^2 \alpha_0)^{-1/2}$$

Задача 2. Конечный участок ВС горы разгона на лыжном трамплине представляет собой дугу окружности радиусом $R = 15$ м (рис. 2). Полная высота горы $H = 50$ м. Найдите модуль ускорения лыжника в точке С, если угол $\alpha = 30^\circ$. Считайте, что лыжник спускается с горы без начальной скорости; трением пренебрегите.

При движении по горе разгона на лыжника действуют две силы. Это — сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз, и сила реак-

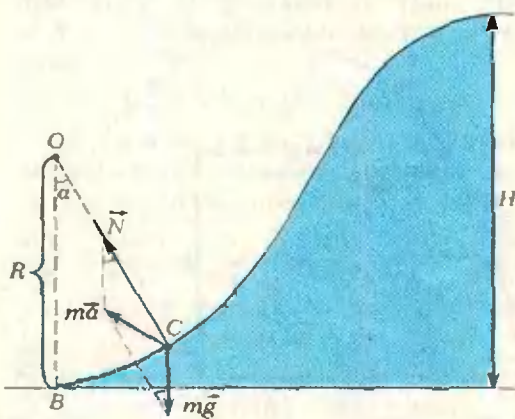


Рис. 2.

ции опоры \vec{N} , направленная, в отсутствие трения, по радиусу кривизны траектории, в нашем случае — по радиусу CO . Равнодействующая этих сил и сообщает лыжнику иско-мое ускорение \vec{a} :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$$

По теореме косинусов для треуголь-ника сил имеем (см. рис. 2)

$$(ma)^2 = (mg)^2 + N^2 - 2mgN \cos \alpha$$

Пусть \vec{v} — скорость лыжника в точке С. Нормальная проекция ускорения $a_n = v^2/R$ создается соот-ветствующими проекциями сил $m\vec{g}$ и \vec{N} :

$$mv^2/R = N - mg \cos \alpha$$

Исключая N из последних двух уравнений, получим

$$a^2 = g^2 \sin^2 \alpha + (v^2/R)^2$$

Подставим сюда значение модуля v скорости лыжника из закона сохра-нения энергии

$$mv^2/2 = mg(H - R(1 - \cos \alpha))$$

и найдем модуль ускорения лыжника:

$$a = (g^2 \sin^2 \alpha + (v^2/R)^2)^{1/2} = \\ = g(\sin^2 \alpha + 4(H/R - 1 + \cos \alpha)^2)^{1/2} \approx \\ \approx 65 \text{ м/с}^2$$

Это же значение можно получить из несколько других рассуждений. При движении по дуге окружности нормальная проекция ускорения рав-на $a_n = v^2/R$, а тангенциальная про-екция, создаваемая только соответ-ствующей проекцией силы тяжести, равна $a_\tau = g \sin \alpha$. Тогда модуль ускорения равен

$$a = (a_n^2 + a_\tau^2)^{1/2} = (g^2 \sin^2 \alpha + \\ + (v^2/R)^2)^{1/2}$$

Задача 3. Небольшое тело, находящееся на полусфере, начи-нает скользить по ней без трения (рис. 3). Определите координаты точки, в которой тело достигнет горизонтальной плоскости.

Некоторое время после начала движения тело будет скользить по полусфере, а потом, оторвавшись от нее, будет двигаться как тело, бро-шенное под углом к горизонту.

Введем систему координат XOY , как указано на рисунке 3. Сначала найдем координаты x_0 и y_0 точки от-рыва тела от полусферы, а также мо-дуль и направление скорости \vec{v}_0 в мо-

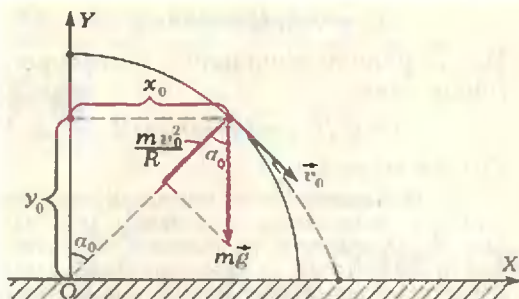


Рис. 3.

мент отрыва. Движение тела по полушфере происходит под действием двух сил — силы тяжести $m\vec{g}$ и силы нормальной (так как отсутствует трение) реакции \vec{N} . В момент отрыва сила реакции обращается в нуль, так что нормальное ускорение $a_n = -v_0^2/R$ телу сообщается только соответствующей проекцией силы тяжести:

$$mv_0^2/R = mg \cos \alpha_0.$$

Решая это уравнение совместно с уравнением, выражающим закон сохранения энергии:

$$mv_0^2/2 = mgR(1 - \cos \alpha_0),$$

найдем

$$\cos \alpha_0 = 2/3, \quad v_0 = (2gR/3)^{1/2}.$$

Координаты точки отрыва равны, соответственно,

$$y_0 = R \cos \alpha_0 = 2R/3, \\ x_0 = (R^2 - y_0^2)^{1/2} = R(1 - \cos^2 \alpha_0)^{1/2} = \sqrt{5}R/3.$$

Теперь запишем уравнения движения тела после отрыва от полушферы:

$$x = x_0 + v_0 \cos \alpha_0 \cdot t, \\ y = y_0 - v_0 \sin \alpha_0 \cdot t - gt^2/2.$$

Очевидно, что в момент достижения горизонтальной плоскости координата y становится равной нулю: $y=0$. Координату x найдем из соответствующего уравнения движения, подставив туда значения начальных условий (x_0 , v_0 и $\cos \alpha_0$), а также время полета до удара, полученное из условия $y=0$:

$$x \approx 1,12R.$$

Задача 4. По горизонтальной поверхности с постоянной скоростью \vec{v}_0 катится без проскальзывания колесо радиусом R . На ободу колеса

находится материальная точка массой m . Определите модуль и направление силы реакции, действующей на точку, а также радиус кривизны ее траектории в зависимости от положения точки на ободу.

Пусть мгновенное положение материальной точки на ободу колеса характеризуется углом α (рис. 4). С точки зрения наблюдателя в неподвижной системе координат (например, связанной с землей) точка участвует в двух движениях — в поступательном движении вместе с колесом с постоянной горизонтальной скоростью \vec{v}_0 и во вращательном движении вокруг центра колеса с угловой скоростью v_0/R .

Воспользуемся тем, что в различных инерциальных системах координат ускорения тела одинаковы. Рассмотрим систему координат, движущуюся вместе с центром колеса со скоростью \vec{v}_0 . В этой системе материальная точка равномерно движется по окружности. Нормальное ускорение \vec{a}_n ($a_n = v_0^2/R$) ей сообщают две силы — сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции \vec{N} . По теореме косинусов из треугольника сил имеем (см. рис. 4)

$$N^2 = (mg)^2 + (mv_0^2/R)^2 - 2(mg)(mv_0^2/R) \cos \alpha,$$

откуда

$$N = ((mg)^2 + (mv_0^2/R)^2 - 2(mg)(mv_0^2/R) \cos \alpha)^{1/2}.$$

Направление силы \vec{N} , определяемое углом φ , можно найти из того же треугольника по теореме синусов:

$$N/\sin \alpha = mg/\sin \varphi,$$

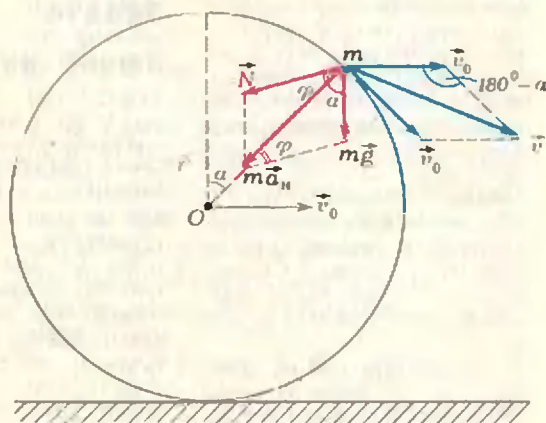


Рис. 4.

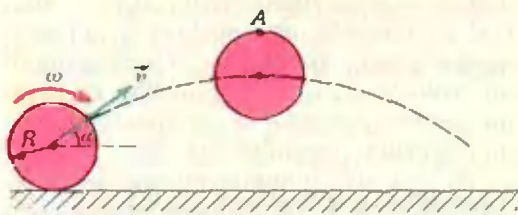


Рис. 5.

$$\varphi = \arcsin mg/N \sin \alpha.$$

Найдем теперь радиус кривизны траектории точки. Как мы уже говорили, в неподвижной системе координат скорость точки \vec{v} складывается из скоростей ее поступательного и вращательного движений (см. рис. 4). По теореме косинусов квадрат модуля скорости равен

$$v^2 = v_0^2 + v_0^2 - 2v_0^2 \cos (180^\circ - \alpha) = 2v_0^2 (1 + \cos \alpha).$$

Проекция ускорения точки на направление, перпендикулярное к скорости, равна

$$a_{\perp} = (v_0^2/R) \cos \alpha/2.$$

Тогда радиус кривизны траектории точки равен

$$\rho = v^2/a_{\perp} = 4R \cos \alpha/2.$$

Упражнения

1. Небольшое тело соскальзывает без трения с поверхности полусферы (см. задачу 3). Определите направление, под которым тело отскочит от горизонтальной плоскости, и максимальную высоту его подъема после отскока. Удар тела о плоскость считайте абсолютно упругим.

2. Диск радиусом R , закрученный около своей оси с угловой скоростью ω , бросают со скоростью \vec{v} под углом α к горизонту (рис. 5). Определите радиус кривизны траектории точки A диска в момент его максимального подъема. Плоскость диска все время остается вертикальной.

3. Автомобиль массой $m = 10^3$ кг начинает двигаться с постоянной тангенциальной проекцией ускорения $a_{\tau} = 1$ м/с² по шоссе в виде дуги окружности радиусом $R = 100$ м. Какую максимальную скорость он наберет до начала проскальзывания колес по асфальту, если коэффициент трения скольжения равен $\mu = 0,3$? Какую мощность должен развить к этому моменту двигатель автомобиля?

Задача для исследования

Рассмотрим такую задачу: Плоскость замощена конгруэнтными прямоугольниками, не имеющими общих внутренних точек, причем любой из них можно совместить с любым другим таким перемещением плоскости, что все соответственные прямоугольники совмещаются. Чему может равняться число k соседей каждого прямоугольника (то есть число прямоугольников, имеющих с данным хотя бы одну общую точку)? Сколько различных типов таких замощений существует для каждого k ?

Подумайте над ее решением и... ее формулировкой (второй вопрос сформулирован несколько нечетко; прежде чем на него отвечать,

нужно уточнить смысл выражения «различных типов») и напишите нам. Наиболее интересные ответы будут опубликованы.

В. Сапич,
В. Чванов

Задачи наших читателей

1. Из точек A и B прямой дорожки одновременно трогаются с места два автомобиля и движутся с одним и тем же постоянным ускорением \vec{a} . В некоторой точке C дорожки начинается участок, покрытый ледяной коркой (где трение отсутствует). Каково расстояние от точки B до точки C , если известно, что первый автомобиль, стартовавший из точки A , догнал второй автомобиль через промежуток вре-

мени t после прохождения первым точки C ?

Г. Левин

2. Как вы думаете, в каком случае вода закипит быстрее: если стакан с опущенным в него электрокипятильником поставить на батарею или на подоконник? Казалось бы — в первом, поскольку воздух над батареей теплее, чем над подоконником. Однако опыт дает противоположный результат. Эффект невелик (около 10%), но достоверен. Чем он может быть вызван?

Л. Ашкинази

3. Замечательный русский физик П. Н. Лебедев доказал, что свет при взаимодействии с веществом оказывает на него давление. Какую массу может уравновесить луч лазера мощностью N ?

А. Королевский



Заочная школа программирования

В этом номере мы начинаем третий, последний учебный год в Заочной школе программирования. Уроки этого года посвящаются главным образом языку программирования Паскаль.

Все работы должны быть оформлены в соответствии с правилами, указанными в журнале «Квант» № 9 за 1980 год.

Школьники, проживающие в прибалтийских республиках, в Архангельской, Вологодской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской и Псковской областях, в Карельской и Коми АССР, направляют свои работы по адресу: 190000, Ленинград, ул. Герцена, 67, ЛИАП, кафедра ЭВМ, Северо-западный филиал Заочной школы программирования.

Школьники, проживающие в Кировской, Оренбургской, Пермской, Свердловской и Челябинской областях, в Башкирской и Удмуртской АССР, пишут по адресу: 620219, Свердловск, ул. К. Либкнехта, 9, Пединститут, кафедра вычислительной математики и программирования, Уральский филиал Заочной школы программирования.

Школьники из Астраханской, Волгоградской, Горьковской, Куйбышевской, Саратовской и Ульяновской областей, Марийской, Мордов-

ской, Татарской и Чувашской АССР направляют свои работы по адресу: 420008, Казань, ул. Ленина, 18, Университет, факультет вычислительной математики и кибернетики, Поволжский филиал Заочной школы программирования.

Школьники, проживающие в Белгородской, Брянской, Владимирской, Воронежской, Ивановской, Калининской, Костромской, Курской, Липецкой, Орловской, Пензенской, Рязанской, Смоленской, Тамбовской, Тульской и Ярославской областях, пишут по адресу: 241036, Брянск, Бежицкая ул., 14, Пединститут, кафедра математического анализа, Центральный филиал Заочной школы программирования.

Школьники, проживающие в Казахской ССР и республиках Средней Азии, направляют свои работы по адресу: 642000, Северо-Казахстанская область, г. Петропавловск, ул. Пушкина, 86, Пединститут, кафедра алгебры и геометрии, Казахстанский филиал Заочной школы программирования.

Жители остальной территории СССР и зарубежные читатели направляют работы по прежнему адресу: 630090, Новосибирск, пр. Науки, 6, ВЦ СОАН СССР, отдел информатики, Заочная школа программирования.

Урок 15: Основные понятия языка Паскаль

В этом учебном году на уроках Заочной школы мы будем изучать новый язык программирования — Паскаль. Язык назван в честь французского математика и физика XVII века Блеза Паскаля, сконструировавшего в 1642 году первую счетную машину. Автор этого языка — профессор Высшей технической школы в Цюрихе Никлаус Вирт. Он поставил перед собой задачу создать язык, содержащий небольшое число основных понятий и удобный для обучения программированию на ЭВМ и

решения практических производственных задач. Сейчас Паскаль — один из распространенных языков программирования. Во многих вычислительных центрах действуют трансляторы с Паскаля. В частности, существует транслятор с этого языка и на самой распространенной в нашей стране серии машин — ЕС ЭВМ.

Прежде чем читать дальше, советуем вам повторить основные понятия программирования, с которыми вы познакомились при изучении языка Рапира («Квант», 1980, №№ 1—3).

Языки Робик и Рапира, с которыми вы знакомы, — диалоговые языки, в которых каждое предписание набирается на терминале от-

дельно и может быть исполнено медленно. Программа на Паскале записывается в память ЭВМ полностью и только после этого может быть исполнена. Каждая программа на Паскале представляет собой процедуру, которую называют *основной процедурой*. Как и всякая процедура, программа на Паскале имеет имя, а ее предписания называют *операторами*.

Текст любой программы на Паскале состоит из нескольких разделов:

1. **Заголовок программы**
2. Раздел описания меток
3. Раздел описания констант
4. Раздел описания типов данных
5. **Раздел описания переменных**
6. Раздел описания функций и процедур
7. **Раздел операторов**

Три раздела, выделенные жирным шрифтом, являются обязательными для любой программы. Наличие остальных разделов в программе необязательно. О назначении и правилах записи каждого раздела мы расскажем по мере изучения языка. Каждый раздел программы начинается со своего ключевого слова. Разделы отделяются друг от друга точкой с запятой (;). Ключевые слова — английские. В конце каждого урока мы будем приводить словарь — список ключевых слов, впервые встретившихся в данном уроке. Советуем вам выписывать все ключевые слова (вместе с переводом) в отдельную тетрадь. Мы будем выделять ключевые слова жирным шрифтом*); при оформлении ваших работ их следует подчеркивать прямой чертой. Для удобства чтения имена в программах мы будем выделять курсивом, а вы должны их подчеркивать волнистой линией.

Заголовок программы

Его синтаксическая диаграмма имеет вид:



Именем программы *n*, вообще, именем в Паскале может быть лю-

*) Иногда в печатных изданиях их выделяют курсивом.

бая последовательность букв и цифр, начинающаяся с буквы. Имена различаются по первым восьми символам. Слово *output*, указанное в заголовке программы, сообщает машине о том, что в программе предусмотрена печать результатов, а слово *input* — о том, что некоторым величинам будут присвоены значения во время использования программы (об этой возможности будет сказано ниже).

Раздел операторов

Раздел операторов — основной раздел программы. Его синтаксическая диаграмма имеет вид:



Раздел состоит из последовательности операторов, заключенных между ключевыми словами **begin** и **end**, называемыми в дальнейшем *операторными скобками*. Друг от друга операторы отделяются точкой с запятой (;). В конце программы ставится точка (.). В одной строке можно записать любое количество операторов.

Выражения

В языке Паскаль используются следующие знаки арифметических операций (такие же, как в Ранире):

- + сложение,
- вычитание,
- * умножение,
- / деление.

Операция «возведение в степень» в языке не предусмотрена. Зато в Паскале есть еще две арифметические операции, применимые к целым числам:

div — целочисленное деление (вычисляется частное от деления двух натуральных чисел),

mod — вычисление остатка от целочисленного деления*)

При этом, как обычно, учитывается наличие скобок. Напомним, что при

*) Например, $25 \text{ div } 6 = 4$, а $25 \text{ mod } 6 = 1$.

записи выражения в языках программирования для указания порядка действий можно использовать только круглые скобки.

Оператор присваивания

Оператор присваивания описывается следующей диаграммой:



Например, $x:=3$; читается так: «имени x присвоить значение 3» (обратите внимание, что, по сравнению с Рапирой, имя и выражение поменялись местами!).

Вычисление значения выражения $z = \frac{x^2 + y^2}{xy}$ при $x=3$, $y=5$ может быть выполнено с помощью следующей последовательности операторов:

```

x:=3; y:=5;
z:=(x*x+y*y)/(x*y);
  
```

Процедуры печати

Для печати в Паскале есть две процедуры *writeln* *) и *write*. Каждая из них может иметь любое количество параметров. В результате исполнения этих процедур значения всех параметров будут отпечатаны на одной строке. Разница между этими процедурами состоит в следующем: после выполнения процедуры *writeln* происходит переход на новую строку (как в процедуре ПЕЧАТЬ в языке Рапира), а после выполнения процедуры *write* переход на новую строку не происходит и печать по последующим процедурам печати *writeln* или *write* будет происходить на той же строчке. При вызове процедуры *writeln* без параметров происходит переход на новую строку, то есть теперь вызов любой из процедур печати обеспечит печать с новой строчки.

Например, результатом выполнения последовательности операторов

```

a:=3; b:=6;
write ('A=', a, '      B=', b);
write (' BCE'); writeln;
  
```

*) *writeln* — «слияние» двух английских слов *write* и *line*.

будет строка $A=3$ $B=6$ BCE ,
а результатом последовательности операторов

```

a:=3; b:=6;
writeln ('A=', a, '      B=', b);
write ('BCE'); writeln;
  
```

будет печать двух строк

```

A=3 B=6
BCE
  
```

Обратите внимание на то, что в обоих примерах в конце последовательности процедур печати стоит *writeln*. Это не случайно: процедура *writeln* всегда завершает формирование печатаемой строки и выводит ее на печатающее устройство. Без этой процедуры в нашем примере последнее BCE может оказаться непечатанным.

Данные. Процедуры ввода

Как уже отмечалось, программа на Паскале начинает исполняться только после того, как будет целиком введена в память ЭВМ. А как быть, если некоторым именам нужно присвоить значения во время исполнения программы? В Рапире для этого была предусмотрена процедура ВВОД (см. «Квант», 1980, № 7), с помощью которой необходимые значения можно было задать во время диалога. В Паскале возможность такого диалога отсутствует. Поэтому нужно заранее, до начала исполнения программы, «заготовить» все данные (числа, тексты,...), которые необходимы для ее работы. Но где записать эти данные и как машина узнает, каким именам нужно присвоить те или иные значения? В большинстве языков программирования, в том числе и в Паскале, данные записывают, как правило, после программы в так называемом *списке данных*, а в самой программе используют специальный оператор, с помощью которого необходимые данные будут прочитаны и присвоены нужным именам.

В Паскале вместо процедуры ВВОД применяют процедуры *read* и *readln**)). Каждая из них может иметь любое число параметров, которые обязательно должны быть именами. Механизм работы обеих

*) *readln* — «слияние» двух английских слов *read* и *line*.

процедур следующий: первое значение, указанное в списках данных, «считывается» и присваивается первому имени, записанному в списке параметров процедуры, затем будет «прочитано» и присвоено второму имени следующее значение и т. д., пока всем именам не будут присвоены значения. Понятно, что количество данных должно соответствовать числу имен, указанных при вызове процедур ввода (или, по крайней мере, не быть меньше). В одной программе может быть записано несколько вызовов процедур *read* и *readln*. В этом случае список данных должен содержать данные, необходимые для успешной работы всех процедур ввода.

Разница между работой процедур *read* и *readln* состоит в следующем: после выполнения процедуры *read* значение следующего данного считывается с этой же строчки, а после выполнения процедуры *readln* — с новой строки. (Сравните с работой процедур *write* и *writeln*!) Например, если в программе записано *read (a, b, c)*, а список данных состоит из чисел 5, 7 и 13, то при исполнении программы будут выполнены присваивания: $a:=5$; $b:=7$; $c:=13$. Числовые данные в списке данных отделяются друг от друга только пробелами. При подготовке программ к вводу в память машины список данных отделяют от основного текста программы записью специальной строки. Мы условимся отделять список данных от текста программы горизонтальной чертой.

Рассмотрим пример. Пусть в память машины нужно ввести три цифры a_1 , a_2 , a_3 , являющиеся последовательными цифрами десятичной записи некоторого числа, и записать последовательность операторов для нахождения и печати этого числа.

```
begin
  read (a1, a2, a3);
  x:=100*a1+10*a2+a3;
  writeln ('X=', x)
end.
```

507

В результате исполнения этой по-

следовательности операторов будет отпечатано $X=507$.

Описания

При изучении языка Робик мы говорили о том, что каждому имени, используемому в программе, отводится блок памяти ЭВМ. При этом возникают вопросы: когда происходит это распределение памяти? Сколько места нужно отвести для хранения значений различных имен? Как ЭВМ узнает, какие значения (например, числа или тексты) может принимать то или иное имя?

При написании программ на некоторых языках программирования (например, на Робоке или на Рапире) ЭВМ сама «отвечает» на эти вопросы. Для этого ей нужно, например, просмотреть весь текст программы и проследить, какие значения может принимать каждое из имен и изменяются ли эти значения во время выполнения программы. При таком анализе программы требуются дополнительное время и место в памяти.

В большинстве языков программирования, в том числе и в Паскале, информация об этих и некоторых других свойствах величин задается в специальных разделах программы, в ее *описаниях*. Все имена, используемые в программе, обязательно должны быть перечислены в одном из разделов описаний (см. структуру программы на стр. 52).

Используемые в программе величины разделяются на *переменные* и *константы*. Переменная величина может в ходе выполнения программы принимать любое из допустимого множества значений. Употреблять значение переменной величины в текущий момент времени можно, обратившись к ней по имени.

Константы — это неизменяемые величины. Различают две категории констант. Одна из них не предусматривает никакого дополнительного описания: константа определяется своим изображением. Например, 5 — это числовая константа, которая, будучи употребленной в любом месте программы, представ-

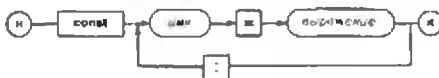
ляет число пять; 'голубой' — это текстовая константа; далее мы еще познакомимся с константами иной природы.

Другая категория констант — это так называемые *именованные константы*. Любой константе можно дать имя, и тогда в программе употребление этого имени будет обозначать обращение к константе. Если, например, величина 3.1415926 названа именем *pi*, то программист имеет право писать

$$l := 2 * pi * r$$

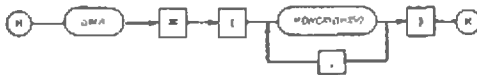
где *l* и *r* — переменные, а *pi* — именованная константа. Соответствие между именованными константами и их именами устанавливается в разделе описания констант.

Раздел описания констант может быть описан диаграммой:



Важнейшим свойством имени в Паскале является понятие типа. *Тип* задает некоторое упорядоченное множество значений и набор допустимых операций над этими значениями.

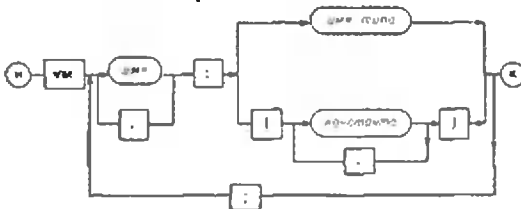
Описание скалярного типа задается диаграммой:



Сам же раздел описания типов данных можно задать диаграммой:



Диаграмма, описывающая раздел описания переменных, имеет вид:



Здесь **const**, **type**, **var** — ключевые слова разделов описания констант, типов и переменных соответственно.

Теперь возникают два вопроса: как правильно задать типы данных в программе и каким удобным образом можно представить данные каждого типа в памяти машины?

Все типы данных можно разбить на два больших класса — *скалярные* и *структурные*. Если значения переменных данного типа состоят из отдельных компонент (как, например, множества и кортежи в Рапире), то такой тип называется структурным, в противном случае — скалярным.

На этом уроке мы будем рассматривать только скалярные типы данных. Описанию структурных типов данных будут посвящены следующие уроки.

Например, раздел описания типов данных в программе может быть таким:

цвет = (красный, желтый, зеленый, голубой);

фигура = (треугольник, прямоугольник, круг);

Здесь *красный*, *круг*,... — константы, определяемые своим представлением.

Опишем теперь переменную *x* типа *цвет* и переменную *a* типа *фигура*.

x: *цвет*; *a*: *фигура*;

Это означает, что переменная *x* может принимать одно из значений *красный*, *желтый*, *зеленый*, *голубой*, а переменная *a* — одно из значений *треугольник*, *прямоугольник*, *круг*. Заметим, что имя типа можно не указывать, если объединить описание переменных и определение типа, то есть мы могли переменные *x* и *a* описать так:

x: (красный, желтый, зеленый, голубой);

a: (треугольник, прямоугольник, круг);

Однако, если таких описаний несколько (например, в разных процедурах), то лучше все-таки описать тип и дать ему имя.

Описанные таким образом типы не должны содержать одинаковых констант.

Кроме типов, описываемых в программе, существуют *стандартные ти-*

лы, которые считаются заданными для каждой программы.

В Паскале существует четыре стандартных скалярных типа: **boolean** (логический), **integer** (целый), **char** (литерный), **real** (действительный).

Тип **boolean**

Тип **boolean** содержит две константы *true* и *false* и может быть определен так:

boolean = (*true*, *false*);

Для этого типа определены логические операции AND (И), OR (ИЛИ) и NOT (НЕ). Используя их, можно записывать логические выражения. Значением логического выражения может быть одна из двух констант *true* или *false*.

Пусть $a=3$, $b=2$, тогда значением арифметического выражения $5*(a*2-b)/4$ будет число 5, а значением логического выражения $b+a>2$ будет *true*.

В одном выражении могут использоваться различные арифметические и логические операции. В этом случае нужно договориться о порядке выполнения операций. В Паскале установлен следующий приоритет выполнения операций: наивысший приоритет имеет операция NOT; затем выполняются операции типа умножения (*, /, AND, div, mod), а низший приоритет имеют операции типа сложения (+, -, OR).

Тип **integer**

Этот тип представляет упорядоченное множество целых чисел. К переменным этого типа применимы операции +, -, *, div и mod.

Тип **char**

Этот тип обозначает конечное упорядоченное множество литер (символов). Набор литер, которые разрешено использовать в языке Паскаль, содержит все буквы латинского и русского алфавитов, 10 десятичных арабских цифр, и некоторое количество специальных литер (например, знаки операций).

При записи константы типа **char** литеру заключают в апострофы. Например, если переменной *s* типа **char** нужно присвоить знак

вопроса, то это присваивание записывается так: $s := '?'$;

Тип **real**

Этот тип представляет множество действительных чисел*). К элементам этого типа применимы все рассмотренные выше арифметические операции, кроме операций **div** и **mod**.

(Хотя в математическом смысле целые числа являются подмножеством действительных чисел, типы **real** и **integer** в языке Паскаль рассматриваются как непересекающиеся типы. Число 2 принадлежит типу **integer**, а число 2.0 — типу **real**. Но это не означает, что если *b* — переменная типа **real**, то недопустимо присваивание $b := 2$; в этом случае будет выполнено так называемое преобразование типов и переменной *b* будет присвоено значение 2.0. Наоборот поступать нельзя!)

Отрезок типа

Если заранее известно, что значения некоторых переменных изменяются в пределах некоторого отрезка типа *a*, то при определении типа этих переменных можно явно указать границы этого отрезка. Такой тип называют отрезком типа *a* и определяют так: $b = \text{мин}.. \text{макс}$; *мин* и *макс* — константы типа *a*, задающие границы *b*.

Например, последовательность описаний

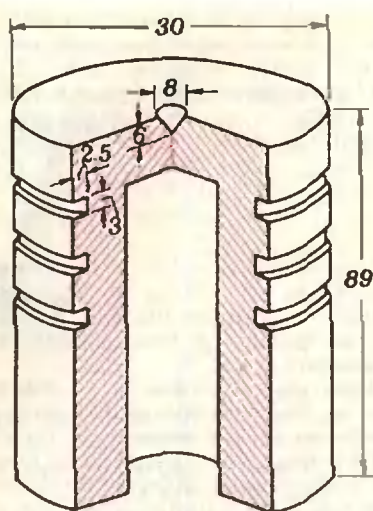
класс = 1..10;

ном: **класс**;

означает, что **класс** — отрезок типа **integer**, состоящий из конечного множества целых чисел, то есть **класс** = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10), а **ном** — переменная, принимающая одно из этих значений.

Отрезок можно «вырезать» из любого скалярного типа, кроме **real**. Рассмотрим упражнение. Дано натуральное число *n*. Составить программу для нахождения суммы остатков, которые получаются при делении числа *n* на 2, 3 и 5. Ре-

*) В машине действительные числа представляются в виде конечных десятичных дробей.



зультат напечатать. Число n вводится.

```
program остатки (output, in put);
var n, сумма: integer;
begin
  read(n);
  сумма := n mod 2 + n mod 3 +
    + n mod 5;
  writeln ('СУММА=', сумма)
```

Задание 15.1. Натуральные числа удовлетворяющие рекуррентному соотношению $\varphi_{n+1} = \varphi_n + \varphi_{n-1}$ с $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_1 = 1$, называются числами Фибоначчи^{*)}: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

^{*)} Подробнее смотри, например, Н. Н. Воробьев «Числа Фибоначчи» (Серия «Популярные лекции по математике», М., «Наука», 1978) или «Квант», 1979, № 5, с. 53.

Наша обложка

Как расположены на бесконечной шахматной доске поля, в которые «конь 2-3» может попасть из данного «центрального» поля O за n ходов ($n = 1, 2, 3, \dots$)? («Конь 2-3» делает ход буквой Г на 2 поля в одном направлении и на 3 — в перпендикулярном.) Назовем минимальное число ходов, за которое может попасть этот конь из O на поле X , расстоянием от O до X . На первой странице обложки поля, находящиеся на

расстоянии n от центра O , раскрашены в разные цвета (см. рисунок).

Вы можете проверить рисунок на обложке, последовательно отметив на большом листе клетчатой бумаги клетки, в которые «конь 2-3» может попасть из центральной клетки за 1 ход, затем — за 2 хода, за 3 хода и т. д. Вы убедитесь, что для «коня 2-3» картина получается значительно более сложной, чем для обычного «коня 1-2» (о «расстоянии» для такого коня рассказано в статье Д. Ковина, опубликованной

в этом номере): лишь к седьмому ходу заполняются «внутренние дыры», и становится возможным проследить общую закономерность, которая будет сохраняться при следующих ходах. Попробуйте ответить на такие вопросы. Сколько клеток находится на расстоянии n от O для $n > 8$ (для $n < 7$ вы можете составить табличку, пользуясь обложкой, а для $n > 8$ — написать общую формулу)? Каково расстояние (в метрике «коня 2-3») между клетками $(0;0)$ и $(x; y)$ (при $x < 12$ и $y < 12$ это можно выяснить по обложке)?



Написать программу, которая получает по значениям двух соседних чисел φ_1 и φ_2 следующие три числа — φ_3 , φ_4 , φ_5 . Отпечатать все пять чисел — два исходных и три результата. Числа φ_1 и φ_2 вводятся.

Что отпечатает программа, если исходные числа — 8 и 13?

Задание 15.2. На рисунке 8 показан в разрезе поршень — полый цилиндр с тремя кольцевыми канавками и коническим углублением на торцевой поверхности. Размеры показаны на рисунке. Составить программу для вычисления объема этой детали. Объем цилиндра может быть найден по формуле $v_{\text{ц}} = \pi R^2 h$, а объем конуса — $v_{\text{к}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h$, где R — радиус основания, а h — высота цилиндра и конуса. Предусмотреть ввод значений R и h .

Словарик

program	— программа
begin	— начало
end	— конец
const	— константа
var	— переменная
type	— тип
boolean	— логический
integer	— целый
char	— литера (знак)
real	— действительный
false	— ложь
true	— истина
AND	— и
OR	— или
NOT	— не

Н. Юнерман



Всероссийская олимпиада школьников

По сложившейся традиции Всероссийская олимпиада школьников по математике и физике проводится в четыре этапа: первый этап — школьные олимпиады; второй — районные, городские; третий — республиканские (АССР), краевые, областные; четвертый — зональные олимпиады.

В этом году заключительный, четвертый этап олимпиады проходил в дни весенних школьных каникул в четырех городах РСФСР: в Куйбышеве, Рязани, Новосибирске и Орджоникидзе.

Школьники, занявшие I—III места, награждались дипломами и памятными призами, а занявшие IV место — грамотами. Оригинальные решения отдельных задач отмечались специальными призами. Министерство просвещения РСФСР наградило также грамотами учителей, подготовивших победителей и призёров олимпиады.

Ниже приводятся задачи по математике и физике заключительного этапа и фамилии призёров Всероссийской олимпиады.

Математика

8 класс

1. Докажите, что число $(1 + \sqrt{2})^{1981}$ представляется в виде $a + b\sqrt{2}$, где a и b — взаимно простые целые числа.

2. Дан треугольник ABC . На продолжениях сторон AB , CB и медианы MB за точку B взяты соответственно точки K , L , N так, что $|BK| = 3|AB|$, $|BL| = 5|CB|$, $|BN| = 4|MB|$.

Найдите отношение площадей треугольников ABC и KLN .

3. Последовательность (a_n) задана рекуррентным способом: $a_1 = m$, $a_{n+1} = a_n + 2^n$, $n \geq 1$, m — данное натуральное число. Докажите, что среди членов этой последовательности найдется бесконечно много чисел, делящихся на 3.

4. Коэффициенты a , b , c уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ по модулю не превосходят числа 1980. Может ли это уравнение иметь корень, больший 1981?

5. Два правильных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ (вершины указаны против часовой

стрелки) расположены на плоскости так, что $\vec{AB}_1 = 2\vec{BA}_1$. Точка D — середина отрезка AB_1 . Найдите углы треугольника CDC_1 .

9 класс

1. Можно ли в таблицу $n \times n$ клеток записать числа 1, -1 и 0 так, чтобы все суммы — в каждом столбце, в каждой строке и на каждой из двух диагоналей — были различны?

2. Два квадрата $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ (вершины перечислены против часовой стрелки) расположены на плоскости так, что $\vec{AA}_1 = 2\vec{BD}_1$. Точка E — середина отрезка AA_1 . Найдите углы треугольника CEC_1 .

3. В девятиугольной пирамиде боковые ребра и диагонали основания окрашены: некоторые — в красный цвет, остальные — в синий. Докажите, что среди этих отрезков можно указать три, которые образуют треугольник и окрашены в один цвет*.

4. Две последовательности (a_n) и (b_n) заданы рекуррентным способом: $a_1 = a > 0$, $b_1 = b > 0$, $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n^2 + b_n^2}{2}}$.

$n \geq 1$. Докажите, что при любом n справедливо неравенство

$$|b_{n+1} - a_{n+1}| < \frac{|b - a|}{2^n}.$$

5. Найдите все 200-значные числа, начинающиеся с 99 девяток и являющиеся полиноми квадратами.

10 класс

1. Можно ли по кругу расставить цифры от 0 до 9 так, чтобы сумма любых трех рядом стоящих цифр не превосходила: а) 14, б) 15?

2. Последовательность (a_n) задана рекуррентным способом: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = -a_{n-1} + \frac{a_n}{2^n}$, $n \geq 1$. Докажите, что при всех n выполнено неравенство $a_n < 3$.

3. Найдите все решения $(x; y; z)$ системы уравнений:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y + \cos z = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \\ \sin x + \sin y + \sin z = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

4. На прямой даны точки A , B и C , причём точка B лежит между A и C . На отрезках AB , BC и AC , как на диаметрах, построены полуокружности, лежащие по одну сторону от этой прямой. Перпендикуляр к (AC) , проведённый через точку B , пересекает большую полуокружность в точке D . Докажите, что общая касательная двух меньших полуокружностей, отличная от (BD) , параллельна ка-

*) Эта задача опубликована в Задачнике «Кванта» под номером М687 а).

сательной к большей полуокружности, проведенной через точку D .

5. Дан тетраэдр $ABCD$ объема V . Точка K — центр тяжести грани ABC . На продолжениях отрезков AD , BD , CD и KD за точку D взяты соответственно точки L , M , N и P так, что $|DL| = 2|AD|$, $|DM| = 2|BD|$, $|DN| = 3|CD|$, $|DP| = |KD|$. Вычислите объем тетраэдра $LMNP$.

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. Пункты A и B находятся на одной горизонтали на склоне горы с уклоном α на расстоянии l друг от друга (рис. 1). Автомобиль, стартующий из A , должен достичь пункта B , двигаясь по прямой AB . Найдите минимальное время, за которое это можно сделать. Коэффициент трения между колесами и грунтом $\mu > \operatorname{tg} \alpha$. Считайте, что тяжесть автомобиля равномерно распределена между колесами и все колеса — ведущие.

2. На клине, образующем угол α с горизонтальной плоскостью, лежит грузик A , связанный нерастяжимой нитью с точкой B на вертикальной плоскости (рис. 2). Клин начинает двигаться вправо с постоянным ускорением \vec{a} . Какова траектория грузика? Как он движется по этой траектории?

3. Из трех резисторов с сопротивлениями R_1 , R_2 и R_3 собрали схему, изображенную на рисунке 3. Если на вход $1-1'$ подать напряжение $U_0 = 1,5$ В, а к клеммам $2-2'$ подключить амперметр, он покажет силу тока $I = 60$ мА. Если же вместо амперметра к клеммам $2-2'$ подключить вольтметр, он покажет напряжение $U = 1$ В. Если напряжение U_0 подать на клеммы $2-2'$, а вольтметр подключить к клеммам $1-1'$, он снова покажет $U = 1$ В. Определите величины сопротивлений резисторов. Сопротивление амперметра считайте очень малым, а вольтметра — очень большим по сравнению с сопротивлениями резисторов.

4. См. задачу $\Phi 718$ в Задачнике «Кванта».

9 класс

1. Транспортёр (рис. 4) поднимает песок, который равномерно высыпается на ленту из бункера со скоростью подачи μ (кг/с). Длина транспортёра l , угол наклона α , радиус ведущего колеса R . При каком минимальном вращающем моменте двигателя транспортёр еще сможет равномерно подавать песок вверх? Какова при этом скорость движения ленты? Считайте, что начальная скорость песчинок равна нулю, а длина их проскальзывания по ленте достаточно мала, так что у верхнего края транспортёра песчинки неподвижны относительно ленты.

2. См. задачу $\Phi 719$ в Задачнике «Кванта».

3. Ящик, в котором находится идеальный одноатомный газ, мгновенно приводят в движение со скоростью \vec{v} . Найдите изменение температуры газа. Масса атома газа m_0 . Теплоемкостью и теплопроводностью ящика можно пренебречь.

4. На горизонтальной поверхности покоится мильничная шайба массой M (рис. 5).

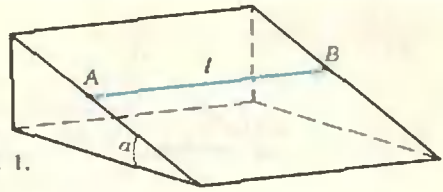


Рис. 1.

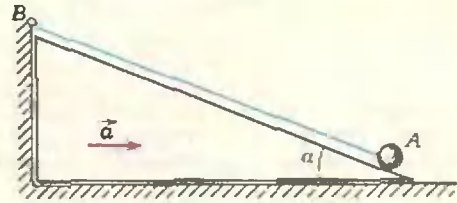


Рис. 2.

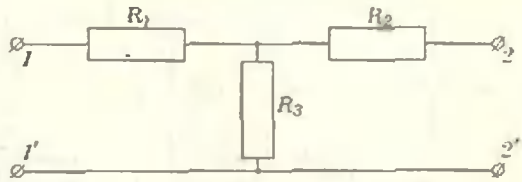


Рис. 3.

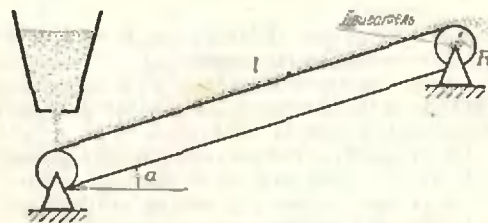


Рис. 4.



Рис. 5.

На нее со скоростью \vec{v}_0 налетает другая шайба массой m . В результате удара шайба m останавливается, а шайба M достигает высоты h_1 наклонной плоскости. Во втором опыте шайбы поменяли местами: на покоящуюся шайбу m со скоростью \vec{v}_0 налетает шайба M . Найдите отношение высот h_2/h_1 , где h_2 — высота, на которую поднимается шайба m во втором опыте. Удар центральный; трение на горизонтальном участке и на наклонной плоскости отсутствует; отношение масс шайб $M/m = 3$.

10 класс

1. Идеальный газ, взятый в количестве ν молей, является рабочим веществом тепловой машины. При работе машины газ меняет свое состояние, совершая круговой процесс (цикл) $1-2-3-1$, представленный на $T\nu$ -диаграмме (рис. 6). Процессы $1-2$ и $2-3$ изображены на графике отрезками прямых ($2-3$ — изохора), а процесс $3-1$ — выра-

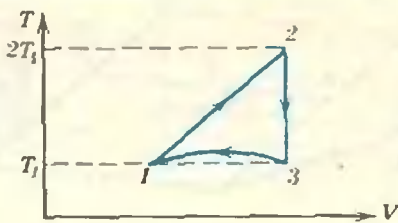


Рис. 6.

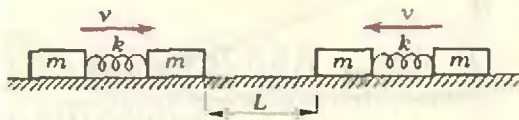


Рис. 7.

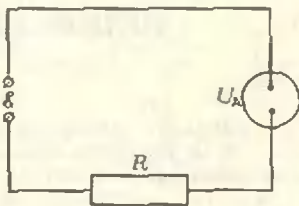


Рис. 8.

жением $I = 0,5T_1(3 - BV)BV$, где B — неизвестная постоянная величина, а T_1 — заданная и отмеченная на одной из осей диаграммы абсолютная температура. Найдите работу, совершенную газом за один цикл.

2. См. задачу Ф720 в Задачнике «Кванта».

3. Две системы, каждая из которых состоит из двух одинаковых тел массой m , связанных пружинкой жесткостью k , движутся навстречу друг другу с одинаковыми по модулю и постоянными скоростями v (рис. 7). В некоторый момент расстояние между сталкивающимися телами равно L . Определите время, через которое расстояние между теми же телами снова будет равно L . Удар абсолютно упругий.

4. Известно, что один из видов самостоятельного разряда в газах — электрическая дуга — имеет падающую вольт-амперную характеристику. Иными словами, напряжение между электродами горячей дуги тем меньше, чем больше сила тока: $U_d = a + b/i$. Последовательно с дуговой лампой в цепь источника тока с ЭДС $\mathcal{E} = 200$ В включили «балластный» резистор сопротивлением R , назначение которого — стабилизировать горение лампы (рис. 8). Пренебрегнув внутренним сопротивлением источника и сопротивлением проводов, найдите все значения R , при которых дуговая лампа устойчиво горит, выделяя не менее половины всей мощности, затрачиваемой источником. Считайте заданными постоянные значения $a = 55$ В и $b = 50$ В·А.

Экспериментальный тур

8 класс

1. Определите плотность стекла, из которого изготовлена банка из-под майонеза.

Оборудование: майонезная банка, мензурка объемом $V \approx 250$ мм³, стеклянный

сосуд, полоска из мягкого металла размером 2×20 см, сосуд с водой (водопроводный кран).

2. Определите удельную теплоту парообразования воды. Удельную теплоемкость воды считайте известной.

Оборудование: тонкостенный металлический сосуд, электронитка (горелка), кусочек льда неизвестной массы, часы.

9 класс

1. Определите коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора. Оцените погрешности измерений при различных способах выполнения работы.

Оборудование: капиллярная трубка, сосуд с водой, сосуд с мыльным раствором, манометр в виде U-образной трубки, груша для накачивания воздуха, стеклянный тройник, штатив с муфтой и лапкой, линейка.

2. Определите работу, которую необходимо совершить, чтобы оттянуть тетиву лука на 5 см. Сделайте из линейки и ниток лук с тетивой, имеющей длину 40 см. Определите работу, необходимую для оттягивания тетивы этого лука на 5 см. Измеряйте те же измерения при длине тетивы 37 см. Объясните полученные результаты.

Оборудование: две ученические деревянные линейки длиной 40 см, на концах одной из них просверлены отверстия, суровая нить длиной 0,5 м, два динамометра Бакушинского, штатив лабораторный с лапкой, миллиметровая бумага размером 20×25 см.

10 класс

1. Определите плотность стеклянной палочки.

Оборудование: стеклянная палочка, сосуд большого диаметра с водой, линейка.

2. Постройте график зависимости мощности, выделяемой на внешнем сопротивлении, от величины этого сопротивления. Объясните полученные результаты.

Оборудование: источник постоянного тока, два амперметра, вольтметр, реостат, набор проводов, ключ.

Результаты решения задач по физике приведены в следующей таблице:

Класс	Общее кол-во участников	Число участников, успешно справившихся с задачей					
		Теоретический тур				Экспериментальный тур	
		1	2	3	4	1	2
8	72	7	8	18	0	43	49
9	82	15	33	49	12	28	25
10	94	53	56	40	28	50	52

О. Овчинников,
С. Резниченко

Призеры Всероссийской олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили:

Кудинов О. (Зарниск, с. ш. № 2),
Николаев А. (Уфа, с. ш. № 114),
Орлов Д. (Владимир, с. ш. № 8),
Стаховский В. (п. Капустин Яр Астраханской обл., с. ш. № 231);

по 9 классам —

Забегаява У. (Тула, с. ш. № 36),
Мазуров О. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Матвеев К. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Матюшов С. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Никонов А. (Кировград, с. ш. № 2),
Спивак А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ);

по 10 классам —

Алексеев В. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Анкудинов А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Екишев Ю. (Сыктывкар, с. ш. № 1),
Кагарманов А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Матвеев А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Мухамедшин А. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ).

Дипломы II степени

по 8 классам получили:

Аверин А. (Челябинск, с. ш. № 127),
Буриченко В. (Новокузнецк, с. ш. № 49),
Романов В. (Тула, с. ш. № 36),
Семенов А. (Саратов, с. ш. № 13);

по 9 классам —

Галкин И. (Горький, с. ш. № 36),
Закиров А. (Бийск, с. ш. № 25),
Короткин Д. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Самборский С. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ);

по 10 классам —

Гапокова М. (Горький, с. ш. № 40),
Колпаков И. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Овчинников П. (Вязники, с. ш. № 11),
Фомин Д. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Хомич С. (Ангарск, с. ш. № 10),
Чанышев А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ).

Дипломы III степени

по 8 классам получили:

Викторов В. (Рязань, с. ш. № 45),
Шебзухов З. (Нальчик, с. ш. № 2),
Шляхтов А. (Ульяновск, с. ш. № 51),
Шмелев Е. (п. Надежный Якутской АССР, с. ш. № 19)

по 9 классам —

Белостоцкий В. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Бравый Е. (Пермь, с. ш. № 102),
Зубова М. (Томск, с. ш. № 55),
Савкин А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Ходоровский В. (п. Нововоронежский Воронежской обл., с. ш. № 1);

по 10 классам —

Аралкин А. (Новокузнецк, с. ш. № 11),
Горшкова Е. (Пермь, с. ш. № 25),
Гринчук М. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Прохоров Ю. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Рабинович Б. (Тула, с. ш. № 36),
Фролов А. (Ярославль, с. ш. № 33).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили:

Кудя А. (п. Таловая Воронежской обл., с. ш. № 51),
Малышев В. (Иркутск, с. ш. № 21),
Хромушин С. (Арзамас, с. ш. № 2),
Шмаков М. (п. Менделеево Московской обл., с. ш. № 2);

по 9 классам —

Баталов С. (Арзамас, с. ш. № 2),
Качаев И. (Красноярск, с. ш. № 10),
Малышев В. (Волгоград, с. ш. № 131),
Позняков П. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Ухов В. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ);

по 10 классам —

Габдуллин Р. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Смирнов А. (Курган, с. ш. № 28),
Темиргалиев Т. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Фролов А. (Тула, с. ш. № 36).

Дипломы II степени

по 8 классам получили:

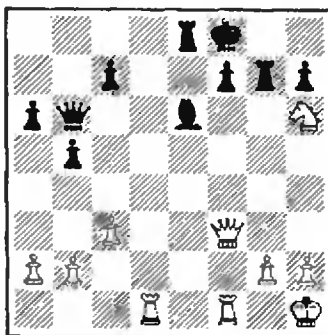
Гребнев И. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Ивойлов И. (Казань, с. ш. № 131),
Макеев И. (Ангарск, с. ш. № 10),
Чеканов С. (Саратов, с. ш. № 13);

по 9 классам —

Ивлев В. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Пронин Д. (Горький, с. ш. № 36),
Султанов А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Цветков П. (Подольск, с. ш. № 6);

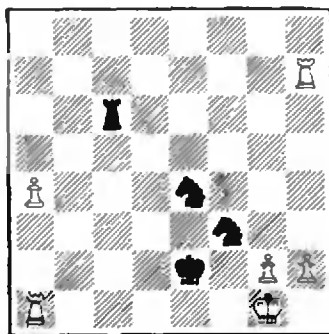
по 10 классам —

Козелов А. (Апатиты, с. ш. № 2),
Осодоев А. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Путин А. (Клинцы, с. ш. № 2),
Седышкин В. (Свердловск, с. ш. № 9).



Это позиция из восьмой партии, в которой Карпов играл белыми. Чемпиону мира удается изящно завершить атаку на неприятельского короля. 26. Лd7! Лb8 (после 26...С: d7 следовало «задачный» мат: 27. Ф: f7+! Л: f7 28. Л: f7×) 27. К: f7 С: d7 (промежуточное 27...Сg4 парировалось «тихим» ходом 28. Фf4) 28. Кd8+! Черные сдались, так как на любое отступление их короля следует 29. Фf8×.

Второй раз претендент признал свое поражение за ход до мата в 17-й партии.

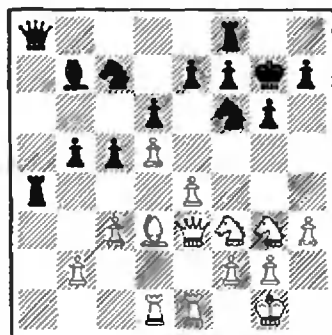


Последний ход Карпова 39...Кf3+ доставил чемпиону мира немало радостей. Впервые, Корчной немедленно сдался ввиду неизбежного мата: 40. Kph1 Kf2×; 40 g1 Lg6+ 41. Kph1 Kf2×. А, во-вторых, администрация отеля, где жил победитель, преподнесла ему шахматный торт с изображением этой позиции!

Всего в матчах за мировую корону было сыграно более 600 партий, но, пожалуй, самая ответственная из них — последняя... Приводим 32-й поединок матча в Багио, решивший исход сражения.

Карпов — Корчной Защита Уфимцева

1. e4 d6 2. d4 Kf6
3. Kc3 g6 4. Kf3 Cg7
5. Ce2 0—0 6. 0—0 c5
7. d5 Ka6 8. Cf4 Kc7
9. a4 b6 10. Le1 Cb7
11. Cc4 Kh5? (следовало играть 11...Фd7, черные теряют время, и это приводит их к серьезным затруднениям)
12. Cg5 Kf6 13. Фd3 a6 14. Lad1 Лb8 15. h3 Kd7 16. Фе3 Ca8 17. Ch6 b5 18. C:g7 Kp:g7 19. Cf1 Kf6 20. ab ab 21. Ke2 Cb7 22. Kg3 La8 23. c3 La4 24. Cd3 Фа8 (позиция была еще достаточно острой, отступление ферзя в угол доски ставит Корчного в критическое положение).



25. e5! Кинжальный удар, подкрепленный соответствующими аргументами: 25...Kf:d5 26. Kh5+! gh (26...Kph8 27. Фh6 Lg8 28. Kg5) 27. Фg5+ Kph8 28. Фf5 с матом. 25...de 26. Ф:e5 Kc:d5 27. C:b5 La7 28. Kh4 Cc8 29. Ce2 Ce6 30. c4 Kb4 31. Ф:c5 Фb8 32. Cf1 Lc8 33. Фg5 Kph8 34. Ld2 Kc6 35. Фh6 Lg8 36. Kf3 Фf8 37. Фе3 Kpg7 (теперь сопротивление черных становится бесполезным, затянуть борьбу могло 37...Лb7) 38. Kg5 Cd7 39. b4 Фа8 40. b5 Ka5 41. b6.

Поговорка «Все пути ведут в Рим» как нельзя лучше подходит к этой позиции. Корчной записал ход 41...Лb7, но на следующий день его секундант известил о сдаче партии и матча.

Тринадцатый матч за шахматную корону должен пройти по той же системе, что и предыдущий, — чемпионом мира будет объявлен тот из партнеров, кто первым одержит шесть побед.

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

Это было в Багио

Любители шахмат, наверное, хорошо помнят перипетии этого напряженного марафона, длившегося около трех месяцев. Двадцать девятый матч на первенство мира Карпов—Корчной проходил без ограничения числа партий до шести побед. После 27-й партии счет результативных встреч стал 5:2 в пользу чемпиона мира, и, казалось, дело подошло к концу. Однако мысль о близком финише расслабила А. Карпова, к тому же начало сказываться огромное чисто физическое утомление. И вот, когда до окончательной победы оставался всего один шаг, случилось непредвиденное. Корчной заиграл раскованно и отчаянными усилиями сравнял счет — 5:5! За четыре партии Карпов потерял то, что завоевал в двадцати семи! Было от чего сокрушаться. Но все же чемпион мира сумел сбросить с себя груз обидных промахов и в 32-й партии дал решительный бой сопернику. Получив подавляющую позицию, он не торопился, помня, что желание побыстрее реализовать перевес не раз подводило его в этом матче. Победа в решающей встрече позволила Анатолию Карпову сохранить звание чемпиона мира. Вот несколько наиболее ярких эпизодов матча в Багио.

Ответы, указания, решения



Криволинейное движение

1. $\beta = \arccos(v_0 \cos \alpha_0 / (2gR)^{1/2}) = 2/9$; $h_{\max} = 23R/27$.

2. $Q = (v \cos \alpha \pm \omega R)^2 / (g + \omega^2 R)$ (знак «+» в числителе соответствует закручиванию диска по часовой стрелке, а знак «-» — против часовой стрелки).

3. $v_{\max} \approx 17$ м/с; $P \approx 17$ кВт.

Всероссийская олимпиада школьников

Математика

8 класс

2. Отношение площадей равно 1.

3. На три делятся все члены последовательности с номерами $3k-m+1$ ($k \in \mathbb{N}$, $k > \frac{m}{3}$), если m — четное число,

и с номерами $\frac{3k-m+2}{2}$ ($k \in \mathbb{N}$, k нечетно, $k > \frac{m}{3}$) в противном случае.

4. Не может.

5. 30° , 30° , 120° .

9 класс

1. Нельзя.

2. 45° , 45° , 90° .

5. Существуют пять таких чисел: $(10^{100}-1)^2$, $(10^{100}-2)^2$, $(10^{100}-3)^2$, $(10^{100}-4)^2$, $(10^{100}-5)^2$.

10 класс

1. а) Нельзя; б) можно, например 0, 9, 5, 1, 8, 3, 4, 2, 7, 6.

3. $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $y = \frac{\pi}{6} + 2\pi l$, $z = \frac{\pi}{6} + 2\pi m$ ($k, l, m \in \mathbb{Z}$).

5. $\frac{20}{3} V$.

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. $t_{\min} = \sqrt{\frac{2l}{g \cos \alpha \sqrt{\mu^2 - \tan^2 \alpha}}}$.

2. См. решение задачи Ф693 из Задачника «Кванта», которое будет опубликовано позже.

3. $R_1 = R_2 = 10$ Ом; $R_3 = 2R_1 = 20$ Ом.

9 класс

1. $M_{\min} = 2\mu R \sqrt{gl \sin \alpha}$; $v = \sqrt{gl \sin \alpha}$.

3. $\Delta T = \frac{m_0 v^2}{3k}$, где k — постоянная Больцмана.

4. $h_2/h_1 = (M/m)^2 = 9$.

10 класс

1. $A = 0,25vRT_1$. Указание. См. рис. 1, на котором заданный цикл изображен в координатах p, V .

3. См. решение задачи Ф702 из Задачника «Кванта», которое будет опубликовано позже.

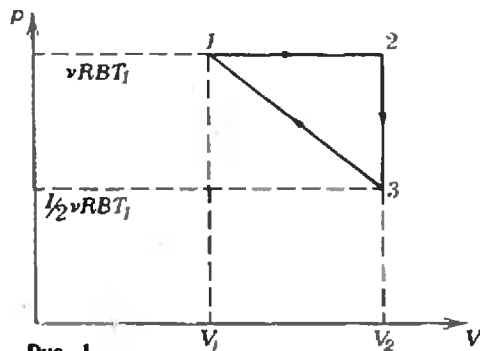


Рис. 1.

4. $\frac{6(6-2a)}{4b} < R < \frac{(6-a)^2}{4b}$, или $90 \text{ Ом} < R < 105,1 \text{ Ом}$.

Вспомогательные отрезки и углы (см. «Квант» № 9)

1. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

2. $\frac{\pi}{4\pi} \cdot \frac{(1+2 \cos \alpha) \sin \frac{\pi}{n}}{\cos^2 \frac{\pi}{4}}$. Указание.

Плоский угол при вершине пирамиды равен $\frac{\pi}{n}$. Приняв апофему пирамиды равной x , находим $V_{\text{пир}}$ и $V_{\text{ш}}$ и составляем их отношение.

3. $\arccotg \sqrt{2 \sqrt{1 + \frac{64\pi^2 a^2}{27}}} - 2$.

4. $\frac{7}{25}$.

5. $\frac{a^3}{3} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2}}{3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}$.

6. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{6} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{-\cos \alpha}}$.

7. $\frac{Q\sqrt{Q \sin 2\alpha}}{3 \operatorname{ctg} \beta (1 + \sin \alpha)}$.

8. $S \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin \alpha \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}$.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 9)

1. ДВА = 426.

2. Пусть в первом мешке a , во втором — b , в третьем — c и в четвертом — d кг муки. Тогда

$$\begin{cases} a+b+c > 60, \\ a+b+d < 50, \\ a+c+d < 40, \\ b+c+d < 30. \end{cases}$$

Вычитая из первого неравенства поочередно второе, третье и четвертое, получаем $c-d > 10$, $b-d > 20$, $a-d > 30$, откуда $c > 10$, $b > 20$, $a > 30$, $a+b > 50$ и, значит, $d=0$. Следовательно, $c > 10$, $b > 20$, $a > 30$ и $a+b <$

192	18	240
198	150	102
60	282	108

Рис. 2.

< 50 , $a+c < 40$, $b+c < 30$. Отсюда $a=30$, $b=20$, $c=10$.
3. См. рис. 2.

Задачи наших читателей
(см. «Квант» № 9, с. 62)

2. 16, 1156, 111556, ...;
49, 4489, 444889, ...
3. а) 59375; б) 703125; в) 0859375.
Указание.
а) $15^{1981} = 15^{247 \cdot 8 + 5} = 15^5 ((15^{247} - 1)(15^{247} + 1)(15^{247 \cdot 2} + 1)(15^{247 \cdot 3} + 1) + 1) = 10^5 \times \dots$
б) $5^{1981} = 5^{123 \cdot 16 + 13} = 5^{13} ((5^{123} - 1)(5^{123} + 1)(5^{123 \cdot 2} + 1)(5^{123 \cdot 3} + 1) + 1) = 10^6 \cdot B + 5^{13}$
в) $15^{1983} = 15^{247 \cdot 8 + 7} = 10^7 \cdot C + 15^7$

4. Доказательство — индукцией по k . При $k=1$ утверждение тривиально. Пусть оно верно для всех показателей степени, меньших k . Пусть $n = 11^{k-1} \cdot m$, тогда

$$A = \underbrace{11 \dots 1}_{2 \cdot 11^{k-1} \cdot m} = \underbrace{11 \dots 1}_{2 \cdot 11^{k-2} \cdot m} \cdot B, \text{ где}$$

$$B = \underbrace{100 \dots 0}_{2 \cdot 11^{k-2} \cdot m - 1} 10 \dots 01 \dots 1 - \text{число, со-}$$

стоящее из одиннадцати единиц, стоящих на нечетных местах, и нулей между ними (в количестве $2 \cdot 11^{k-2} \cdot m - 1$ штук). Число B делится на 11 (докажите это!), а число $11 \dots 1$ делится на 11^{k-1} по предположению

индукции. Значит, A делится на 11^k .

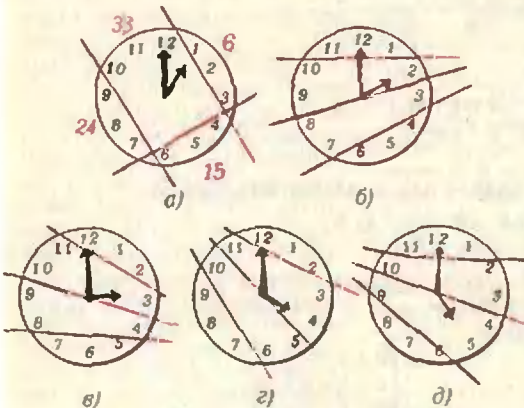


Рис. 3.

5. См. рис. 3. Получаются прогрессии 6, 15, 24, 33 и 15, 18, 21, 24 (четыре случая).

Шахматный конкурс

(см. «Квант» № 8)

1. 1. Са3! (отвлечение ферзи) 1...Ф:a3 (1...Фe8 2.Фe7+Kpg8 3. Ce7 Kq4 4.Фd7 Фa8 5. Cd8) 2. Kh5+! (теперь отвлекается пешка «g») 2...gh (после 2...Kph6 3. K:f6 вечного шаха у черных нет) 3. Фg5+ Kpf8 4. Ф:f6+ Kpg8 5. e7! Фc1+ 6. Kpf2 Фc2+ 7. Kpg3 Фd3+ 8. Kph4 Фe4+ 9. Kp:h5 Фe2+ 10. Kph4 Фe4+ 11. g4! Фe1+ 12. Kph5. Черные сдались.
2. 1. Cf6+! ef 2. f4 Jlh8+ 3. Kpg7 Jh5 4. a4 Jlg5+ 5. Kph8! (5. Kph7? Kph5 с выигрышем) 5...Jlg6 6. Kph7 Kph5 7. Kph8 Jh6+ 8. Kpg7 Jlg6+ 9. Kph8 Kph6 пат.
3. Вместо того чтобы взять ладью на h1, Таль сыграл 1. gf!! J:d1+ 2. K:d1!! Ф:d2 3. fg!! Эти три блестящих хода белых и являются разгадкой позиции. Черные сдались, так как, несмотря на большой материальный перевес, они беспомощны против прорвавшейся в их лагерь пешки g7.
4. 1. Фa8+ (1. K:f7 позволяет черным объявить вечный шах ферзем по полям d1, f3, h5) 1...Kpg7 (1...Kpe7 2.Ф:a7+ и т. д.) 2. Ce5+! (тема завлечения, ничего не даст немедленная жертва ферзя 2. Фh8+ из-за 2...Kpg6!) 2...Ф:e5 3. Фh8+ Kp:h8 4. K:f7+ и 5. K:e5, оставаясь с лишним конем.
5. После напрашивающегося 1...Ф:c5 2. Cg2 положение белых безавасно. Решает промежуточное 1...Jld2! Партия закончилась следующим образом 2. Kd3 (2. Фe3 Kc4! 3. Фf4 Ф:e5 проигрывает фигуру) 2...J:e2 3. C:e2 Kc4 4. Cf1 Фc6 5. Cc1 C:e4 6. Kc5 Cd5 и белые сдались.
6. 1. Ch6! gh (1...Kpg8 2. C:g7! C:g7 3. f6) 2. Фe3 Cg7 3. f6! Jh8 4. Jf1! (4. Jg Kp:g7 не так ясно) 4...Фb5 (4...Cf8 5. Фe4+ Kpg8 6. Jlg3+; 4...Kpg8 5. Фg3 Jh7 6. J:h6!) 5. Фf3! Jc4 6. Фf5+. Черные сдались.

Номер подготовили:
А. Виленкин, А. Егоров, И. Кламова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шаханович

Номер оформили:
А. Ким, Т. Кольченко, Н. Кузьмин, Э. Назаров, А. Прокофьев, М. Сидоров, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

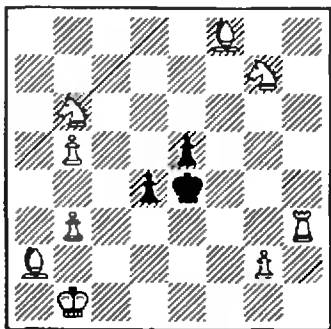
Корректор О. Кривенко

113035, Москва, Б. Ордынка 21/16.
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 22.8.81
Подписано в печать 2.9.81
Печать офсетная
Бумага 70x108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 6,83 Т-27701
Цена 30 коп. Заказ 2016
Тираж 232 684 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

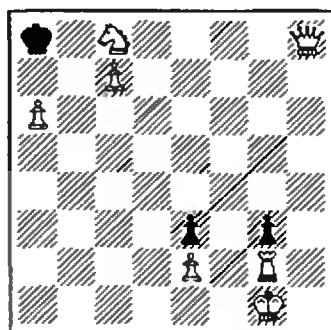
ШАХМАТНЫЙ КОНКУРС

До сих пор в шахматном конкурсе «Кванта» предлагались комбинации выдающихся гроссмейстеров. На этот раз авторами задач являются читатели журнала — в основном, конечно, школьники.



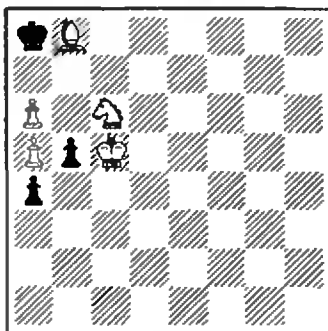
Г. Жуков. Мат в 3 хода.

Автор задачи в этом году закончил школу, но свою задачу он прислал еще в прошлом году, будучи девятиклассником (Гена живет в г. Шумерле). Позиция несколько грубовата (слишком много фигур обрушилось на бедного черного короля), но зато вступление в трехходовке весьма эффектно: 1.Кd5! (мешая неприятельскому королю улизнуть через поле f4) 1...Кр:d5 2.Лh4! d3 (2...e4, 3.Лh5×) 3.b4× — вот и пригодился слон на a2, притаившийся в засаде. Не меняет дела и 1...d3 2.Лh4+ Кр:d5 3.b4×.



А. Бекорюков. Мат в 3 хода.

Москвичу Алеше Бекорюкову, самому юному автору предлагаемых позиций, всего 10 лет. Решает 1.Лh2!! gh+2Крf1! (сначала белые избавились от своей ладьи, а теперь приглашают пешку пройти в ферзи) 2...h1Ф+ 3.Ф:h1×, 1...g2 2.Лh1! ghФ+ 3.Ф:h1×.

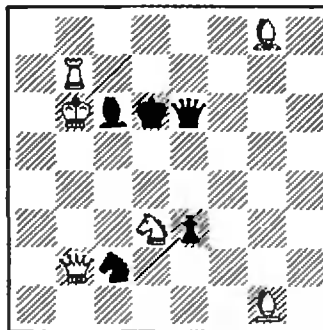


В. Леонов. Мат в 2 хода.

Нетрудно доказать, что последний ход черных может быть только b7—b5, поэтому решает 1.a5:b6 (на проходе) a3 2.b7×.

Эта задача ученика 7-го класса 370-й московской школы является, как вы видите, ретроаналитической (требуется изучение предшествующей игры). Сказывается, что он воспитанник международного мастера по шахматной композиции Э. Погосянца.

Олег Моложавцев в 14 лет придумал целую серию красивых задач, из которой мы выбрали две. Секрет одной раскрывается, а другую вам предлагается решить самим.

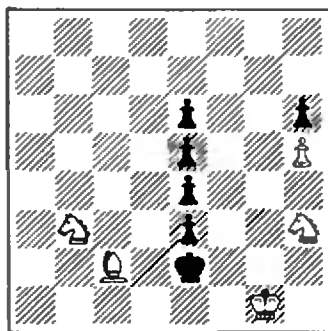


О. Моложавцев. Мат в 3 хода.

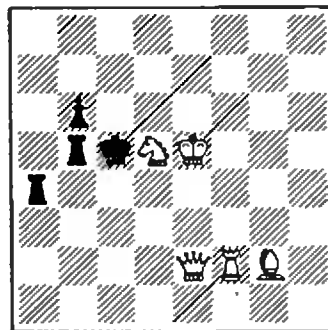
1.Фf6! Ф:f6 2.Сh2+ Фe5 3.С:e5×; 1...Кd4 2.Ф:d4+ Фd5 3.Сh2×; 1...Крd5 2.С:e6+! Крe4 3.Кc5×.

Осталось сделать замечание по поводу еще двух конкурсных задач. Трехходовка принадлежит студенту московского техникума электронных приборов С. Пелагиму, а задача на кооперативный мат — учителю математику С. Абрамяну.

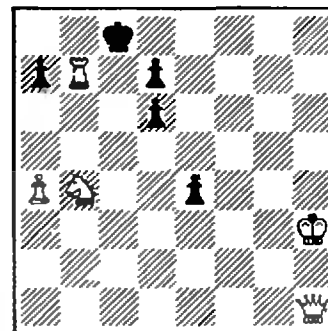
Срок отправки решений — 30 ноября 1981 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс № 10 — 81»).



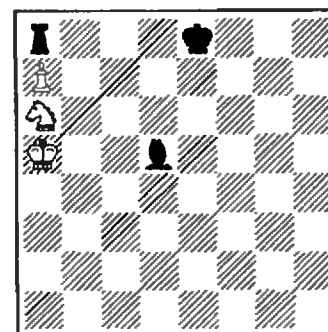
1. В. Леонов. Белые начинают и дают мат в 6 ходов.



2. О. Моложавцев. Белые начинают и дают мат в 4 хода.



3. С. Пелагимов. Белые начинают и дают мат в 3 хода.



4. С. Абрамян. Черные начинают и получают кооперативный мат в 2 хода.

К НАШИМ ЧИТАТЕЛЯМ

**Продолжается подписка на 1982 год
на научно-популярный
физико-математический журнал
«Квант».**

«Квант» адресован всем школьникам 6—10 классов, которые любят математику и физику, любят решать задачи и хотят в будущем серьезно заниматься точными науками. Наш журнал полезен и тем школьникам, интерес которых к точным наукам еще дремлет.

На страницах нашего журнала публикуются статьи обзорного характера, рассказывающие о достижениях науки и о проблемах, еще ожидающих своего решения; рассказы об ученых, о том, как рождаются научные открытия.

В журнале читатель найдет много задач. Среди них — задачи различных олимпиад и просто интересные задачи, а также головоломки, кроссворды, чайнворды, ребусы.

Раздел «Лаборатория «Кванта» рассказывает о поучительных экспериментах, которые можно осуществить в домашних условиях.

Какие вопросы и задачи могут ожидать абитуриента на вступительных экзаменах? Ответы на эти и многие другие вопросы, с которыми

приходится сталкиваться при поступлении в вузы, читатель найдет в разделе «Практикум абитуриента».

В статьях раздела «По страницам школьных учебников» разбираются наиболее сложные и важные вопросы математики, представленные в школьных программах.

Значительное место в журнале занимает информация о работе научных обществ учащихся, летних школах, конкурсах и смотрах научного творчества школьников.

В каждом номере имеется раздел «Квант» для младших школьников», в котором наряду с занимательными задачами публикуются и статьи, доступные учащимся 6—7 классов.

Журнал постоянно помещает рецензии на научно-популярные книги по физике, математике, астрономии и космонавтике.

●
«Квант» распространяется только по подписке и не поступает в розничную продажу. Подписка на наш журнал принимается в течение всего года.

●
Наш индекс в каталоге «Союзпечати» 70465 Цена отдельного номера 40 копеек.