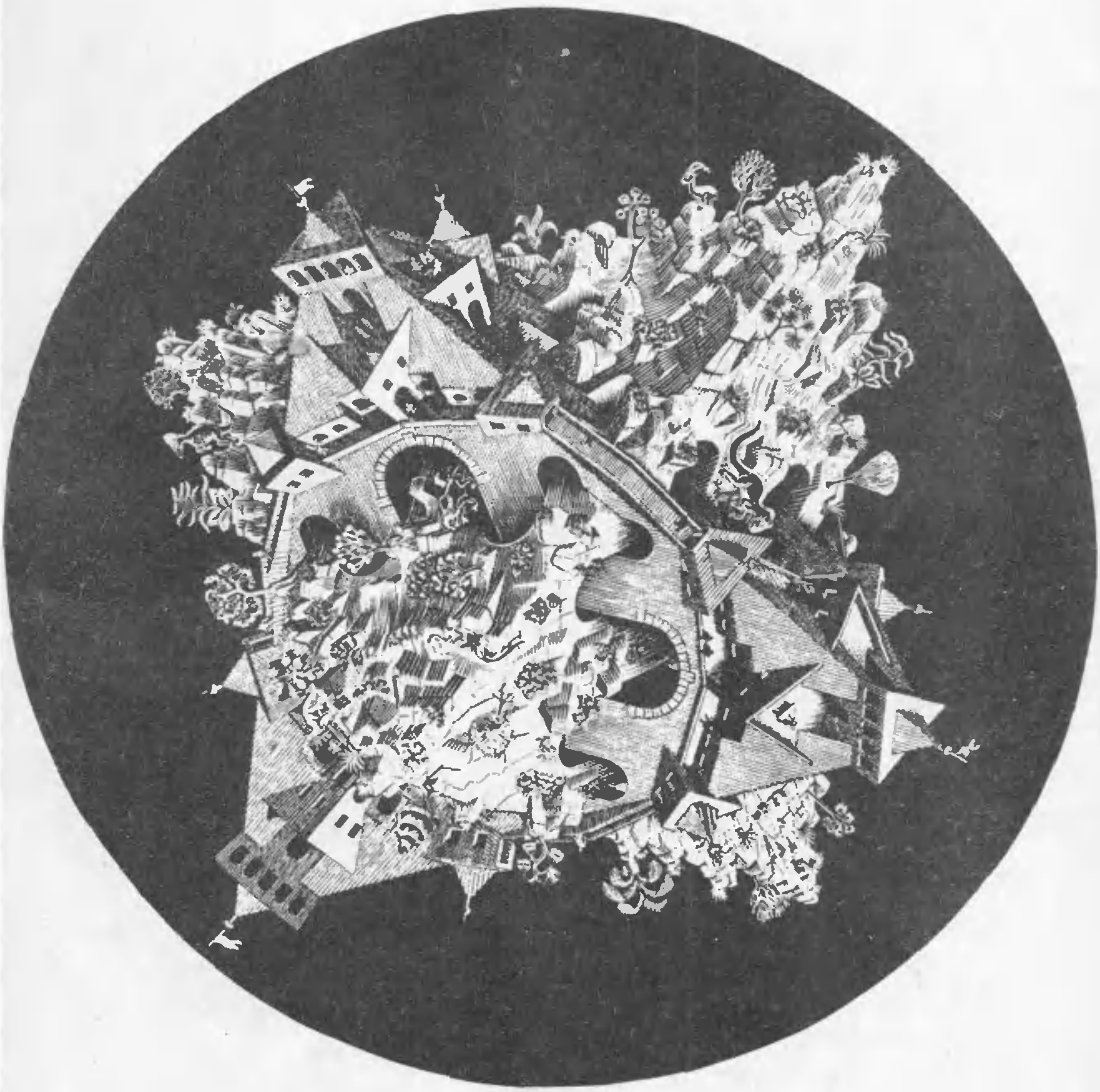
ISSN 0130-2221

Квант

11

1981

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



XV Всесоюзная олимпиада школьников по физике
(Ташкент, апрель 1981 г.).
Идет эксперимент.

КВАНТ

11
1981

Основан в 1970 году

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ:

На первой странице обложки воспроизведена гравюра голландского художника М. Эшера: причудливые замки, башни и скалы, вырастая друг из друга, образуют два пересекающихся тетраэдра, по-видимому символизирующих единство природы и архитектуры.

П. Капица

Профессор и студент

Наш традиционный вечер, где собираются окончившие Московский физико-технический институт и те, кто предполагает его окончить, разделяется на две части. Первая часть называется торжественной и посвящена жизни и деятельности нашего института. Во втором отделении мы смотрим нашу замечательную самодеятельность, встречаемся со старыми друзьями и веселимся. Мне приходится принимать участие в первой части этой программы, которая менее привлекательна, чем вторая, но следует помнить, товарищи, что хороший обед всегда состоит из сытного жаркого и только после него сладкое блюдо доставляет нам удовольствие, и вот этим жарким нельзя пренебрегать, надо относиться к нему со всей серьезностью. Конечно, для меня как повара не такая это легкая задача — сделать вам вкусное жаркое за 15—20 минут, которые даются на выступление, и поговорить о наших делах так, чтобы это было серьезно и чтобы вы не заснули. У нас есть, однако, целый ряд вопросов, связанных с работой нашего института, которые должны заинтересовать всех нас. Вот об этих вопросах мне и хотелось бы с вами поговорить.

Всем вам хорошо известно, что физтех был создан около двадцати лет назад. Основная идея создания этого института была проста и очевидна. Наука развивалась чрезвычайно быстро как у нас в Советском Союзе, так и в других странах; создавалось много научных институтов, эти институты притягивали к себе лучших научных работников, и вся «большая наука» сосредоточивалась в этих институтах. Вузы были обескровлены: они теряли преподавательский состав, профессуру, а также оборудование, на котором обучались студенты. Поэтому студенты не имели возможности еще в вузе приступить к научной работе, и они должны были переучиваться в других институтах перед тем, как подойти к научной работе.

Академик Петр Леонидович Капица — дважды Герой Социалистического Труда, лауреат Нобелевской и Государственных премий, директор Института физических проблем им. С. И. Вавилова Академии наук СССР.

Статья, представляющая собой выступление П. Л. Капицы на вечере выпускников Московского физико-технического института в 1963 году, перепечатывается с небольшими сокращениями из сборника «Ленин. Наука. Молодежь», выпущенного в 1980 году издательством «Наука».

Такой разрыв между вузами и научными институтами оказался чрезвычайно вредным для подготовки кадров, поэтому надо было этот разрыв ликвидировать. Для этого и был создан Московский физико-технический институт, в котором обучение студентов тесно связано с научной работой; они учатся на самом совершенном оборудовании, их обучают молодые ученые, которые активно работают в науке, и, наконец, физтеховцы имеют возможность приступить к научной деятельности со второго-третьего курса. Таким образом, все те недостатки в организации нашей науки, которые связаны с ее быстрым ростом, были в значительной мере ликвидированы.

Успех этой системы несомненный. Учебных заведений, работающих по тому же принципу, как и МФТИ, который готовит молодых ученых, становится все больше и больше в Советском Союзе. Однако как ни успешно работает такая система в продолжение этих лет, в ней есть еще существенные недостатки, с которыми надо бороться и которые надо выправлять, и наша задача — поставить диагноз этих недостатков, искать способы их ликвидировать.

Первый выпуск МФТИ настолько сейчас подрос, что ректором нашего института стал товарищ Белоцерковский, старый наш физтеховец. Благодаря тому, что он успешно проходил свой курс у нас и хорошо понимает дух и значение системы преподавания и обучения в физтехе, с ним чрезвычайно приятно и легко работать, и мы с ним часто обсуждаем те мероприятия, которые необходимы для улучшения нашей работы.

Мы замечаем, что у нас еще есть все-таки большие пробелы в нашей профессуре, нам не всегда удается привлекать к обучению молодежи лучших профессоров. И есть еще один недостаток, о котором я скажу. Институт не выполняет еще все те функции, которые он мог бы выполнять. Вот об этих функциях я тоже хочу поговорить. Что касается подбора профессуры, то, как вы знаете, у нас есть и хорошие профессора, есть и средние и даже встречаются ниже среднего. Тут ничего не поделаешь. Так всегда будет.

Самое, пожалуй, тяжелое то, что у нас недостаточно хорошо обеспечено преподавание основных дисциплин. В прежние времена чтение курсов основных предметов в высших учебных заведениях — общая физика, химия, математика, механика — возлагалось на самых крупных ученых, и считалось исключительно почетным делом вести такие курсы. Теперь это изменилось, трудно сказать, почему. Потому что с точки зрения воспитания молодежи очень важно, конечно, чтобы основа знаний давалась крупными учеными, которые закладывали бы фундамент, сообщали молодежи то, что нужно для построения здания. Если фундамент будет недостаточно надежным, то и все здание будет некрепко стоять на ногах.

Как поправить дело, как обеспечить, чтобы в вузе читали курс лучшие профессора, лучшие преподаватели, лучшие ученые? Казалось бы, можно было бы использовать современную технику, скажем, сделать кинофильм, в котором лектор, самый крупный ученый в данной области (или даже группа ученых), будет рассказывать студентам физику, или химию, или математику.

Конечно, это привлечет лучших профессоров к преподаванию студентам. Но посмотрим, что из этого получится на самом деле. Может быть, администрация института и будет приветствовать такое начинание: сократится число штатных единиц и не будет необходимости привлекать и подыскивать преподавательские кадры. С точки зрения министерства — те же самые удобства. Сделав один фильм, они смогут сократить штаты и снизить расходы по вузам. Некоторые студенты были бы рады, поскольку все-таки в темных киноаудиториях комфортабельнее спать, чем в светлых.

И все же такая система, конечно, нелепа. Вы представьте себе, что в институте вместо профессуры стоят одни киноаппараты и ходят только студенты и киномеханики. Это будет исключительно скучное и темное заведение, к которому вы не будете относиться, как к своей альма матер. Не в этом, однако, дело. Говорят, студенты рано или поздно как-нибудь к этому приспособятся, как-нибудь это переживут. Гораздо хуже отнесутся к этому изменению сами преподаватели. Дело в том, что совершенно забывают о другой функции высшего учебного заведения — учить не только студентов, но учить и самих профессоров и преподавателей.

Хороший ученый, когда преподает, всегда учится сам. Во-первых, он проверяет свои знания, потому что, только ясно объяснив другому человеку, можешь быть уверен, что сам понимаешь вопрос. Во-вторых, когда ищешь форму ясного описания того или иного вопроса, часто приходят новые идеи. В-третьих, те, часто нелепые, вопросы, которые задают студенты после лекций, исключительно стимулируют мысль и заставляют с совершенно новой точки зрения взглянуть на то явление, к которому подходили стандартно, и это тоже помогает творчески мыслить.

И наконец, студенты лучше знают, шире знают вопросы физики, чем преподаватель. Преподаватель, как специалист, подходит узко, у него нет широкого подхода. У студентов гораздо шире подход. И когда студент беседует с преподавателем, преподаватель очень много узнает от студента.

Вот почему молодым ученым необходимо заниматься преподавательской деятельностью. Хороший вуз — это тот вуз, который дает возможность развиваться талантам преподавателей так же просто, как и талантам их учеников.

Чтобы показать, что это не общие фразы, я вам приведу целый ряд примеров того, как преподавательская деятельность приводила к большим открытиям. Примеры эти настолько разительны, что они, мне кажется, вполне подтверждают эту идею.

Один из самых классических примеров хорошо известен — это Д. И. Менделеев и его периодическая система. Менделеев искал, каким способом легче объяснить студентам свойства элементов, чтобы эти свойства могли восприниматься по определенной системе. Он распределял элементы по карточкам, складывал эти карточки в разном порядке и, наконец, нашел, что карточки, разложенные в виде периодической таблицы, представляют собой закономерную систему. 1 марта 1869 г. таблица была напечатана отдельным изданием и немногим позже вошла как приложение во второй выпуск «Основ химии». Таким образом, периодическая система элементов в основе своей возникла из педагогической деятельности Менделеева как профессора Петербургского университета.

Второй случай, немного более ранний, относится к математике. В начале XIX в. русское правительство решило, что все чиновники должны иметь среднее образование. Те чиновники, которые не имели аттестата зрелости, должны были его получить. Чтобы облегчить им это, были созданы курсы, которые готовили к экзаменам на аттестат зрелости. Одним из преподавателей геометрии таких курсов был Н. И. Лобачевский. Ему было тогда 24—25 лет. Он был очень молод, и он объяснял престарелым чиновникам принципы евклидовой геометрии. И они никак не могли понять, откуда берется аксиома о непересекаемости двух параллельных линий.

Лобачевский долго бился над тем, чтобы дать подходящее объяснение, но убедился, что такого объяснения не существует. Он понял, что можно построить такую геометрию, при которой линии всегда пересекаются. Так была создана его неевклидова геометрия. Таким образом, он нашел новую область математики, которой, как вы знаете, суждено было сыграть фундаментальную роль в современной физике.

Могу привести еще пример, о котором мне рассказал известный физик Дебай. Дебай был преподавателем, профессором в Цюрихе. У него был ученик, тоже преподаватель, Шредингер, тогда еще совсем неизвестный молодой человек. Дебай познакомился с работой де Бройля, в которой де Бройль, выдвинувший, как вы знаете, гипотезу о существовании волновой структуры электрона, показал, что при известных условиях интерференции можно заменить движение электрона волновым движением. Идея эквивалентности волнового движения и квантовых процессов, волнового движения и корпускулярного была воспринята целым рядом физиков весьма отрицательно. Отрицательно отнесся к ней и Шредингер. Когда Дебай попросил его рассказать молодежи о работах де Бройля, Шредингер сначала отказался. Потом, когда Дебай, пользуясь своим положением профессора, снова предложил ему это сделать, Шредингер согласился и начал искать, как можно было бы объяснить идеи де Бройля в наиболее полной и точной математической форме. И когда он рассказал о работах де Бройля в том представлении, какое он считал наиболее точным, Дебай ему сказал: «Послушайте, ведь вы же нашли новый замечательный вид уравнения, который является фундаментальным в современной физике!». Таким образом, в результате педагогической деятельности было найдено и волновое уравнение — основное уравнение современной физики.

Подобных примеров можно было бы привести еще много, но мне кажется совершенно очевидным, что если учебная деятельность плодотворна в таких серьезных фундаментальных вопросах, то она, несомненно, плодотворна и в более простых вещах, она часто оказывает плодотворное влияние на современную науку и на современных ученых. Поэтому высшие учебные заведения нужно рассматривать не только как заведения, в которых готовят молодых ученых, но и как место, где развиваются научные таланты и уже сформировавшиеся ученые. Учебные заведения должны быть так организованы, чтобы эта возможность была широко предоставлена преподавательскому персоналу.

У нас это не всегда признается. До сих пор, например, в университетах и других высших учебных заведениях считается разумным, чтобы часть персонала занималась научной деятельностью, а часть персонала — педагогической. Как раз в высших учебных заведениях должна быть такая система, чтобы она основывалась на ученых, которые небольшую часть своего времени занимаются педагогической деятельностью. Только тогда учебное заведение будет выполнять все свои функции — учить студентов и учить преподавательский персонал.

Поэтому замена профессоров киноаппаратами совершенно нелепа, она бы сделала невозможной вторую часть деятельности высшего учебного заведения, которая, несомненно, в ближайшем будущем будет развиваться и на которую мы обратим внимание. Должны обращать большое внимание.

Я вам рассказал об этом потому, что всем вам, молодым ученым, в ближайшее время предстоит покинуть физтех и в том или ином качестве работать в научно-исследовательских институтах. Если вы хотите продолжать расти как ученые, не стареть и совершенствовать свои знания, вам необходимо не терять контакта со следующим подрастающим поколением, учить это подрастающее поколение и учиться у него, развивать свои знания. Если вы оторветесь от обучения молодежи, вы сразу начнете стареть и сразу начнете отставать от науки.

Вот этот маленький завет я вам хочу передать от себя, так как считаю его очень важным.

Б. Вертгейм

Игры с квадратичными функциями

Можно ли изучать математику играя? Оказывается, можно, так как в математике есть много задач, описывающих «игровые ситуации».

Мы займемся играми, связанными с поиском наибольших и наименьших значений функций. Искусство такого поиска важно во многих задачах экономики, военного дела, биологии, спорта,..

Решающие десять одиннадцатиметровых

Мы — на футбольном поле. Игрок A и вратарь B готовятся к серии из 10 одиннадцатиметровых ударов. Игрок бьет вправо или влево; вратарь, пытаясь угадать направление удара, готовится к прыжку влево или вправо от себя. Их мастерство отражено в таблице *): если игрок

A \ B	1	2
1	7	10
2	9	6

бьет вправо (это его стратегия № 1), а вратарь готовится к прыжку влево от себя (это стратегия № 1 для B), то в среднем в воротах будет 7 мячей из 10; если же B готовился к прыжку вправо, то влетают все 10 мячей и т. д.

Оба игрока будут чередовать свой выбор случайным образом. Если каждый из них выбирает каждую из своих стратегий примерно в половине случаев (как говорят, с вероятностью 1/2), то в среднем будет забито $(7+10+9+6):4=8$ мячей.

Если же A будет применять свою первую стратегию с вероятностью 0,6 (в 60% случаев), а вторую — с вероятностью 0,4 (в 40% случаев),

*) В теории игр и в экономике подобные таблицы называются *платежными матрицами*.

а вратарь — свою первую стратегию с вероятностью 0,8, а вторую — с вероятностью 0,2, то в среднем будет забито $(7\cdot 0{,}6+9\cdot 0{,}4)\times$ $\times 0{,}8+(10\cdot 0{,}6+6\cdot 0{,}4)\cdot 0{,}2=7{,}92$ мяча, что меньше 8. Конечно, говорить о том, что в данной конкретной серии будет забито 7,92 мяча бессмысленно. Здесь имеется в виду, что при многократном повторении серий, удовлетворяющих поставленным условиям, среднее количество забитых мячей (отношение общего количества мячей к числу серий) будет близко к числу 7,92.

Пусть вообще A выбирает свои первую и вторую стратегии с вероятностями x и $1-x$ $(0<x<1)$, а B — с вероятностями y и $1-y$ $(0<y<1)$. В этом случае говорят, что числа x и y определяют *смешанные стратегии* игроков. Тогда среднее число забитых мячей равно

$$m=(7x+9(1-x))\,y+(10x+6(1-x))\times(1-y)=-6xy+4x+3y+6. \quad (*)$$

Естественно возникает вопрос: каковы наилучшие значения x для A, y — для B? Наилучшее значение x^* для A, разумеется, должно гарантировать минимальное число нереализованных пенальти (в среднем), независимо от тактики вратаря. Наилучшее же значение y^* для B должно гарантировать минимальное количество забитых мячей (в среднем), независимо от стратегии игрока, бьющего пенальти.

Оказывается (вы в этом убедитесь, решив упражнение 1), $x^*=1/2$, $y^*=2/3$; в этом случае будет забито (в среднем) $m^*=8$ мячей. Легко проверить (обязательно сделайте это!), что если хотя бы один из играющих будет придерживаться указанной «наилучшей» стратегии, то независимо от стратегии другого будет забито именно $m^*=8$ мячей (в среднем). Если же один из игроков отклонится от указанной стратегии, то он уже не может ничего гарантировать — результат будет зависеть от действий противника.

Так, если вратарь будет одинаково часто прыгать вправо и влево (то есть $y=1/2$), а игрок все время бить в правый угол ($x=0$), то будет забито в среднем меньше мячей ($m=7{,}5$). Но если игрок A похитрее, он будет всегда бить в левый угол ($x=1$) и тогда станет забивать чаще ($m=8{,}5$).

А теперь отдохнем от футбола, от вероятностей и займемся «просто» функциями, причем без ограничений на x и y — это облегчит первые шаги.

Выигрыш, проигрыш, ничья

Пусть двое игроков играют в такую игру: A выбирает действительное число x, B — число y, причем каждый делает свой выбор, не зная выбора противника. Оба числа сообщаются судье, после чего по заранее известному игрокам правилу подсчитывается выигрыш первого $v=f(x,y)$, равный проигрышу второго; точнее говоря, при $v>0$ A выигрывает у B величину v, при $v<0$ A проигрывает B величину $|v|$; если же $v=0$, то в игре — ничья; символ $f(x,y)$ означает, что v — это заданная функция двух переменных (x, y).

Пусть, например, правило подсчета выигрыша в игре таково:

$$v=y^2-x^2. \quad (1)$$

Попробуйте сыграть несколько раз по правилу (1). После нескольких «партий» игроки заметят, что каждому из них лучше выбирать нулевые значения: при $x=y=0$ получается ничья, причем ни одному из игроков невыгодно отклоняться от этого выбора, даже зная выбор противника.

Действительно, поскольку при $x=0$ $v=y^2$, наилучший ответ игрока B — это выбор $y=0$. Аналогично, при $y=0$ $v=-x^2$ и наилучший ход A — это $x=0$.

Теперь уже ясно, что играть с *платежной функцией* $v=y^2-x^2$ не интересно: ничья обеспечена как тому, так и другому игроку. Труднее и интереснее играть со следующей платежной функцией:

$$v=y^2-x^2+8x-10y+9. \quad (2)$$

Существуют ли в этом случае такие числа x и y, которые можно рекомендовать игрокам и от которых им будет «накладно» отклоняться?

Простой ключ к игре (2) дает разложение

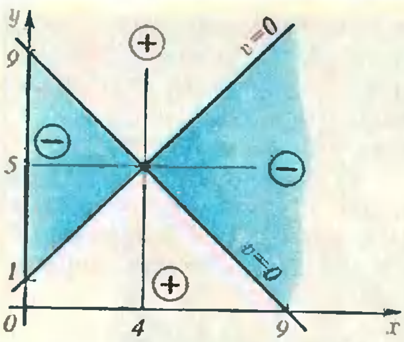


Рис. 1.

$$v=(9-x-y)(x-y+1).$$

Составив систему уравнений

$$\begin{cases} 9-x-y=0, \\ x-y+1=0, \end{cases}$$

имеющую единственное решение $x^*=4$, $y^*=5$, заключаем, что игра (2) имеет ничейный исход $v^*=v(x^*, y^*)=0$ при $x=x^*=4$, $y=y^*=5$.

Геометрическое объяснение здесь таково (рис. 1): пара чисел $(x^*; y^*) \in R^2$ определяется точкой пересечения прямых, соответствующих уравнениям системы; если точка с координатами $(x; y)$ лежит на одной из них, то $v=0$; для точек, лежащих внутри углов, образованных нашими прямыми, величина v имеет знак, указанный на рисунке. Этот рисунок дополняют следующие вычисления и рассуждения; если $x=4$, то $v=(5-y)^2 \geqslant 0$; $v_{\min}=0$ при $y=5$ (в точках вертикали $x=4$ всегда $v \geqslant 0$); если $y=5$, то $v=-(x-4)^2 \leqslant 0$; $v_{\max}=0$ при $x=4$ (вдоль горизонтали $y=5$ имеем $v \leqslant 0$).

Таким образом, если A выберет $x=4$, то игрок B при любом выборе, кроме $y=5$, проигрывает. Аналогично, если A выбирает $x \neq 4$, игрок B выигрывает взяв $y=5$.

Итак, у первого игрока есть ход, сделав который он заведомо не проиграет. Такой же ход есть и у второго игрока. Поэтому в этой игре тот, кто рискнет сыграть не «по теории», тот и проигрывает (если, конечно, и его противник не идет на риск отказа от теории).

Приведем для примера результаты пяти партий нашей игры (в каждой тройке первое число — это x, второе — y, третье — v): (0,0,9), (0,7,—12), (4,7,4), (4,5,0), (5,5,—1).

Изучение этих партий подсказывает еще один путь решения (к сожалению, не всегда пригодный). Попробуем рассуждать за первого игрока: «Если B выберет $y=y_0$, то тогда получается квадратный трехчлен

$$v(x, y_0)=(9-y_0-x)(x-y_0+1)$$

относительно x, который я должен сделать как можно большим, выбрав подходящее x; но у этого трехчлена максимум при $x=4$, поэтому я хожу $x=4$!». Рассуждая аналогично, второй игрок обеспечит себе минимальный проигрыш при $y=5$ (при любом ходе $x=x_0$ первого).

Седловая точка и решение игры

Мы видели, что в игре с функцией (2) каждый игрок может гарантировать себя от проигрыша, так как удалось найти такую пару чисел (4;5), что $f(4,5)=0$ и для всех остальных x и y значения функции f удовлетворяют неравенствам

$$f(x, 5) \leqslant f(4, 5) \leqslant f(4, y).$$

Отсюда видно, что первый игрок выбирая $x=4$, во всяком случае, не проигрывает (это вытекает из последнего неравенства), как не проигрывает и второй, выбирая $y=5$.

Дадим общие определения.

Определение седловой точки. Пусть задана функция f, определенная на некотором множестве G точек плоскости. Точка $(x^*; y^*) \in G$ называется *седловой точкой* функции f или *точкой равновесия*, если при $(x, y^*) \in G$, $(x^*, y) \in G$,

$$f(x, y^*) \leqslant f(x^*, y^*) \leqslant f(x^*, y)$$

Из этих неравенств следует, что

$$\max_x f(x, y^*) = f(x^*, y^*) = \min_y f(x^*, y)$$

(в левой части берется максимум по переменной x при фиксированном $y=y^*$, в правой части — минимум по y при фиксированном $x=x^*$).

В теории игр седловую точку $(x^*; y^*)$ часто называют *решением* игры (*с платежной функцией* $v=f(x, y)$), число $v^*=f(x^*, y^*)$ называют *ценой* игры, а числа x^*, y^* — *оптимальными стратегиями* первого и второго игроков соответственно.

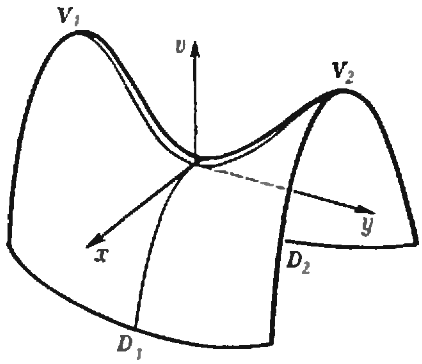


Рис. 2.

Туристы и альпинисты

Туристы, желая пройти из долины D_1 в долину D_2, идут через перевал (седловину) — при этом максимальная высота на пути из D_1 в D_2 (рис. 2) оказывается минимальной по сравнению со всеми близкими маршрутами, не проходящими через седло. Альпинисты, желая совершить траверс от вершины V_1 к вершине V_2, проходят то же седло по другой причине — чтобы не «терять высоту», то есть чтобы была максимально возможной минимальная высота на пути от V_1 к V_2.

Рисунок 1 похож на карту, где высота перевала принята за нуль, а x и y — это долгота и широта. Будем рассматривать прямые, параллельные осям, как возможные пути для туристов и альпинистов. Подобно маршрутам в горах, основные прямые рисунка 1 ($y=5$ и $x=4$) выделены тем, что

$$f(x^*, y^*) = \min_y \max_x f(x, y) = \max_x \min_y f(x, y),$$

и это очень полезно при анализе игр. Здесь $\max\limits_x f(x, y)$ — наибольшее значение f при заданном y и переменном x, то есть это наихудший исход для B при выбраном значении y; очевидно, это величина минимальна при $y=5$. Истолкуйте аналогично выбор $x=4$ для игрока A.

Рассмотрим теперь игру с платежной функцией $v=x^2-y^2$, у которой нет седловой точки (убедитесь в этом). Анализ игры с подобной функцией сильно осложняется. В данном примере противники будут заинтересованы выбирать самые большие числа, какие им доступны. Если ввести ограничения на переменные x и y вида $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$, что нередко встречается на практике, появятся 4 седловые точки: $x^* = \pm a$, $y^* = \pm b$, $(v^* = a^2 - b^2)$.

Однако при такого рода ограничениях седловая точка может и не появиться (см. упр. 3).

Решение игр с квадратичной платежной функцией

Итог нашим теоретическим рассмотрениям подводит следующая

Теорема. *Пусть дана игра с платежной функцией*

$$v = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2px + 2qy + r.$$

Эта функция имеет седловую точку, а игра — решение в следующих семи случаях и только в них:

1) $a<0$, $c>0$;
2) $a<0$, $c=0\neq b$;
3) $a<0$, $c=b=q=0$;
4) $a=0\neq b$, $c>0$;
5) $a=b=p=0$, $c>0$;
6) $a=c=0$, $b\neq 0$;
7) $a=b=c=p=q=0$.

Седловая точка является решением системы уравнений

$$\begin{cases} ax+by+p=0, \\ bx+cy+q=0. \end{cases} \qquad (3)$$

Это решение (x^*, y^*) во всех этих случаях, кроме 3), 5), 7), *единственно.*

Мы оставляем доказательство теоремы, сводящееся к перебору случаев, читателю: разбор предыдущих конкретных примеров поможет ему.

Упражнения

1. а) Рассмотрите игру с платежной функцией $m=6+4x+3y(1-2x)$ и найдите значение x, при котором m не зависит от y, а также значение y, при котором m не зависит от x. Дает ли эта пара значений решение игры?

б) Решите игру, заменив число 9 на 8 в платежной матрице одиннадцатиметровых ударов.

2. Найдите решения и цены игр со следующими платежными функциями:

а) $v=-x^2+6xy+y^2-10x-10y+15$;

б) $v=(x+y-a)(y-x-b)$;

в) $v=10\ln x-x^2+2xy+y^2+10x-8y-40$, $x>0$;

г) $v=k(\sqrt{x}-\sqrt{y})+\sqrt{a-x}-\sqrt{b-y}$;

д) $v=k(-x^2+2pxy+y^2)-x_0^2-2px_0y+y_0^2$, где $x_0=a-x$, $y_0=b-x$;

е) $v=-x^2-xy+6y^2+\frac{y^4}{8}$.

3. Есть ли точки равновесия в следующих играх «с ограничениями»: а) $v=x^2+y^2$; б) $v=(x-y)^2$; в) $v=x^2+xy+y^2$, причем во всех трех случаях $|x|\leqslant a$, $|y|\leqslant b$.

4. Как изменяются утверждения теоремы при дополнительном условии $x\geqslant a$?

5. Рассмотрите следующие игры с платежной матрицей 2×2 вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *). Игрок A выбирает строки, а B — столбцы — а решение надо найти для смешанных стратегий (x, y) и функции типа (1) при $0\leqslant x$, $y\leqslant 1$ в следующих случаях:

а) «Прятки» или «поиск»: $a=d=-1$, $b=c=1$. Игрок A прячется в одном из двух мест, а B ищет его там же. Тот, кто достигает своей цели, получает, а другой — теряет очко (монету).

б) «Защита и нападение»: $a=d=c+1$, $b=1$, где $c>1$ задано, например, $c=3$. Отряд во главе с A отвечает за 2 склада с горючим (во втором его в c раз больше, чем в первом). Сил у A хватит лишь для защиты одного склада. Отряд B может атаковать лишь один из этих складов. Если их выборы совпадут, то все остается целым, если нет — незащищенный склад горит. Найти решение и цену игры и истолковать результаты.

в) «Случай на пляже»: $a=d=-\frac{b+c}{2}$, $b>c>0$. Например, $b=30$, $c=10$. К туристу A подходит незнакомец B и предлагает такую игру: оба разом показывают одну из сторон — монеты. Если у A «орел», у B — «решка», то A выигрывает 30 монет; если у A — «решка», у B — «орел», то выигрыш A равен 10; если же выборы совпадут, то «для справедливости», как говорит B, турист заплатит ему 20 монет. Действительно ли, эта игра справедливая и честная и в среднем никто не будет в проигрыше?

г) $a=7$, $b=2$, $c=1$, $d=2$.

6. Для игр с платежной матрицей 2×2 доказать существование седловой точки у платежной функции вида (1).

Указание. Система (3) применима не всегда из-за ограничений на x и y, поэтому удобней построить графики прямых линий $v=\varphi_1(x)=ax+c(1-x)$, $v=\varphi_2(x)=bx+d(1-x)$ и найти x, исследуя задачу на «максимин» определить

$$\max_{x\in[0,1]}\ \min_{i=1,2}\{\varphi_i(x)\}.$$

Применить этот способ в играх упражнения 5.

7. (Задача для юных программистов.) Для проведения серии из N игр с заданной функцией составить программу на языке Рапира или на другом алгоритмическом языке ($N=5$ или 10); в очередной партии судья вводит в ЭВМ выбранные значения x и y, и, после подсчета, на печать выводится выигрыш игрока в этой партии и накопленный его выигрыш за все партии игры с начала данной серии.

8. Доказать, что если цена игры с квадратичной функцией существует, то она единственна, хотя седловых точек может быть более одной.

9. Число — элемент матрицы — на пересечении i-й строки и j-го столбца часто обозначают a_{ij} — это краткая запись для $a(i, j)$, функции двух целочисленных аргументов. Элемент матрицы называется *седловым*, если он наименьший в своей строке и наибольший в столбце. Если такой элемент существует, то он равен цене игры, а номера его строк и столбцов дают решение игры «в чистых стратегиях». Верно и обратное (докажите). У каких матриц из упражнений 1 и 5 есть седловые элементы?

*) Число a — это выигрыш игрока A (проигрыш B), если оба применяют свои первые стратегии, и т. д. (сравните с таблицей для игры с вратарем): здесь также игры повторяются много раз.

Задачи наших читателей

1. Так называемый ударный трансформатор Гюйгенса представляет собой желоб, в котором лежат n тел. Их массы $m_1, m_2, \ldots, m_n$ связаны условием $m_i/m_{i+1}=k>1$. Если первое тело начинает двигаться со скоростью v_1, то после всех соударений (соударения абсолютно упругие) последнее тело покидает желоб со скоростью $v_n\gg v_1$ (исторически это один из первых способов получения больших скоростей). Найдите выражения для отношения v_n/v_1 и для коэффициента полезного действия КПД$=(m_n/m_1)(v_n/v_1)^2$ как функции k и n. Покажите, что при заданном v_n/v_1 существует такое k, при котором КПД максимален.

Л. Ашкинази

2. Широко распространенные спиртовые термометры обладают весьма существенным недостатком: если их использовать для измерения температуры воздуха на улице, где они освещаются солнечными лучами, термометры довольно быстро (в течение одного-двух лет) начинают давать заниженные показания. Причиной тому является уменьшение количества спирта, связанное с испарением спирта с поверхности окрашенного столбика и конденсацией паров в верхней части трубки термометра. Можно ли восстановить такой термометр и тем самым увеличить срок его службы?

Г. Гальперин

3. Две комнаты разделены звуконепроницаемой перегородкой, в которой имеется дырка в виде квадрата со стороной 2 см. Ширина перегородки 2м, высота комнат тоже 2 м. Оцените, во сколько раз ухудшились бы звукоизоляционные параметры, если бы обивка перегородки была вдобавок не идеальной, а пропускала бы одну сотую часть звуковой мощности.

М.討Ваксман

Я. Смородинский

Джеймс Клерк Максвелл

(к 150-летию со дня рождения)

Жизнь Максвелла, наверное самого крупного физика прошлого века, представляется как переплетение занимательных историй. Каждая из историй оказала глубокое влияние на наши представления о природе.

Если мы сейчас говорим о физическом поле (электромагнитном, гравитационном или еще каком-нибудь), то смысл в это понятие вложил Максвелл. Молекулярная (или статистическая) физика приобрела четкий смысл после работ Максвелла. Первая теоретическая работа по кибернетике «О губернаторе» (так Максвелл называет регулятор машины) принадлежит Максвеллу. Теория цвета существенным образом связана с его работами. Одна из очень старых задач о природе колец Сатурна была решена Максвеллом.

История о кольцах Сатурна — самая простая. С нее мы и начнем.

В 1609 году Галилей сделал первый телескоп, усовершенствовав голландскую зрительную трубу, которую он увидел в Венеции. Построив трубу (он назвал ее «перспективой»), Галилей посмотрел в нее на небо. То, что он там увидел, его потрясло. У Юпитера оказались четыре Луны, на Луне открылись горы, а на Солнце нашлись пятна. Но самым удивительным был вид Сатурна — с обоих боков планеты были видны отростки. Через некоторое время отростки исчезли, и их природу Галилей не смог разгадать. Лишь в 1659 году Гюйгенс понял, что Сатурн окружен кольцами.

Прошло еще 100 лет. Астрономы стали думать: почему кольца не падают на Сатурн, почему они не разрушаются под действием собственной тяжести?

В конце XVIII века этой задачей занялся Лаплас. Вывод, к которому он пришел, был малоутешителен: для того чтобы кольца вращались вокруг Сатурна как твердые сплошные конструкции и при этом не разрушались, плотность материала колец должна быть очень большой.

Теоретические представления оказывались недостаточными для описания новых наблюдений. В 1855 году в Кембридже был объявлен конкурс (премия Адамса*)) решений загадки колец Сатурна. Максвелл, который в это время занимал кафедру в Абердине (на севере Шотландии), занялся систематическим изучением этой проблемы. Он последовательно исследовал три случая: 1) — кольца жидкие; 2) — кольца твердые; 3) — кольца состоят из отдельных кусков.

Выводы, к которым пришел Максвелл, следующие. Плотные кольца, даже если они удовлетворяют условию Лапласа, будут разрушаться из-за волн, распространяющихся вдоль окружности кольца. Никакая жесткая или деформирующаяся структура (жидкие кольца) не может стабильно вращаться вокруг Сатурна.

Единственной возможностью остается кольцо, состоящее из отдельных сравнительно небольших кусков, каждый из которых обращается с первой космической (сатурнианской) скоростью — по орбите спутника, как бы мы сейчас сказали.

Это и было решением задачи. Премия Адамса была присуждена Максвеллу.

«Work, finish, publish» (работай, закончи, публикуй) — таков был девиз Максвелла. В 1855 году он приступил к работе над проблемой колец Сатурна, а в 1859 году полное исследование задачи было опубликовано в Кембридже.

Как было сказано, разные истории из жизни Максвелла переплетаются между собой. Размышляя над поведением колец Сатурна, Максвелл понял, что необходимо развить теорию систем, сотоящих из большого числа взаимодействующих частиц. Описывать такие системы, решая уравнения Ньютона,— задача безнадежная. Надо уметь вычислять средние, статистические свойства такого рода систем. С этой задачей он справился не сразу. Но он очень скоро понял и то, что она связана не только с кольцами Сатурна (к которым он после опубликования в 1859 году своей работы больше не возвращался), но и с кинематической теорией газа, которой тогда занимались самые крупные физики. К этим работам Максвелла мы еще вернемся, а сейчас посмотрим, что делал он в начале своей жизни.

Максвелл родился 13 июня 1831 года в главном городе Шотландии Эдинбурге. В Эдинбурге он кончил гимназию и здесь же сделал свою первую работу об овалах, которая была напечатана в трудах Эдинбургской академии*). Закончив Университет в Эдинбурге, Максвелл переехал в 1850 году в Кембридж. Здесь он заканчивает Тринити-Колледж и преподает в этом же колледже. Затем он принимает предложение занять кафедру в Абердине (Шотландия) в Маришал-Колледже.

В это время Максвелл был увлечен задачей о цвете. И эта история началась с великого открытия, сделанного Ньютоном. Ньютон обнаружил, что белый свет от Солнца разлагается призмой в цветной спектр и что полученный спектр можно собрать в белый свет.

Долгое время после Ньютона природа цвета оставалась непонятной. Вопрос состоял в том, надо ли искать объяснение цвета в свойствах излучения, или цвет есть физическое свойство самого предмета, такое же как, скажем, масса тела, или цвет связан лишь с ощущением.

Свои опыты со светом и выводы, к которым он пришел, Максвелл изложил в популярной статье «О цветовом зрении». Был один неожиданный «выход» из опытов Максвелла. В этих опытах ему помогала его жена — дочь принципала колледжа в Абердине Катерина Мария Дьюар. Обнаружилось, что помощница не-

*) Д. К. Адамс (1819—1892) — астрономом из Кембриджа, доказавший существование планеты за Ураном (Нептуна) на основании математического анализа движения Урана.

*) Перевод этой первой работы Максвелла был напечатан в «Кванте» № 12 за 1979 г.

правильно регистрирует цвета. Это дало повод к новым опытам и к созданию первой теории цветной слепоты.

В истории с цветовым зрением ярко прослеживаются характерные черты научного метода Максвелла. Почти все его исследования содержали обязательные этапы: создание наглядной геометрической модели и привлечение простых аналогий.

Стоит привести слова Максвелла о том, что значит физическая аналогия, что значит построить модель: задача состоит в том, чтобы «найти физическую аналогию, которая помогла бы мышлению охватить результаты прежних исследований, однако без подчинения какой-либо теории, основанной на физических принципах той науки, откуда была заимствована аналогия, чтобы не отвлечься от самого предмета исследования, разбирая аналитические тонкости, и не очутиться за границей истины из-за понравившейся гипотезы».

Такая формула, полная одних предостережений, сработала полностью в поисках решения главной проблемы Максвелла — теории электромагнитного поля. Именно Максвеллу удалось увидеть в работах Фарадея то, что никто кроме него увидеть не смог. В силовых линиях Фарадея он увидел новый физический объект — поле. Но для этого надо было пройти через тяжелый этап исследований — этап примитивной модели.

Опять история начинается с работ великого физика. Фарадей предположил, что действие на расстоянии между зарядами и токами передается с помощью силовых линий, связывающих между собой разноименные заряды (электрические линии) или кольцами окружающих токи (магнитные линии). Эти линии стремятся сжаться вдоль своей длины (притяжение) и оттолкнуться от своих соседей. Движением таких линий Фарадею удавалось объяснить результаты огромного количества своих и чужих опытов.

Максвеллу очень нравилась идея Фарадея: наглядная картинка упругих нитей оказывалась удачной аналогией. Необходимо было найти математический аппарат для описания такой механической модели. Максвелл вспоминает работу Томсона (в будущем лорда Кельвина) о том, как похожи между собой уравнение для потенциала силы тяжести и уравнение распределения тепла. И то, и другое явления можно описывать с помощью системы поверхностей, на которых постоянны потенциал или температура. Так, температура в пространстве вокруг нагретого шарика падает по тому же закону, что и потенциал поля тяжести массивного шарика.

Исходя из подобной аналогии, Максвелл начинает с описания электрического и магнитного полей с помощью систем линий, пронизывающих каждую точку пространства и указывающих направления действия сил. Для того чтобы описать и величину сил, Максвелл делает еще один шаг, который надо, как в шахматной партии, обозначить знаком «!!». Он заменяет силовые линии трубками, а чтобы сделать трубки упругими, предполагает, что по ним течет жидкость.

Представление об электрических и магнитных жидкостях было не новым. Так, еще до Фарадея пытались описывать явления, происходящие с зарядами и магнитами. Но никто не пытался относиться к ним как к объектам, достойным математического описания, и никто не сочетал их с силовыми линиями Фарадея. Фарадей понял, что в присутствии полей тело переходит в некое «электрическое состояние» (так он представлял себе действие поля). Максвелл попытался найти математические законы, описывающие это состояние. В первой своей работе по электромагнетизму «О фарадеевых силовых линиях» (сделана она была в 1855—1856 годах, а опубликована в 1861 году) он еще с грустью пишет: «...я сохраняю надежду при внимательном изучении свойств упругих тел и движения вязких жидкостей найти такой метод, который позволил бы дать и для электрического состояния некоторый механический образ, способный вести к общим заключениям». Следующую работу «О физических линиях сил» он публикует в 1861—1862 годах. В этой работе механическая модель электромагнитного поля доведена почти до абсурда (с сегодняшней точки зрения) — здесь и вращающиеся частицы, выстроенные в ряды, и вихри в среде, и многое другое. С непостижимым искусством Максвелл извлекает из модели лишь то, что нужно для будущей теории, никак не используя конкретные свойства механизмов, которыми он наполнил пространство (в этом и заключается смысл предостережений, о которых он писал). В следующей работе, в 1864 году, все вспомогательные предметы исчезают, как по мановению волшебной палочки, исчезают бесследно. Работа называется «Динамическая теория электрического поля», и в ней есть такие слова.

«Та теория, которую я предлагаю, может быть названа теорией электромагнитного поля, потому что она имеет дело с пространством, окружающим электрические и магнитные тела, и она может быть названа также динамической теорией, поскольку она допускает, что в этом пространстве имеется материя, находящаяся в движении, посредством которой и производятся наблюдаемые электромагнитные явления. Электромагнитное поле — это та часть пространства, которая содержит в себе и окружает тела, находящиеся в электрическом или магнитном состоянии».

Электродинамика практически была построена. Окончательно она была оформлена в знаменитом двухтомном «Трактате об электричестве и магнетизме», вышедшем в 1873 году.

Только первая из работ по электродинамике была сделана в Абердине. В 1860 году из-за реорганизации Университета (два колледжа были слиты в один) Максвелл был вынужден покинуть Абердин. Он принял приглашение и занял кафедру в Королевском Колледже в Лондоне, где оставался пять лет, после чего до 1871 года не занимался педагогической деятельностью.

Принимая кафедру в Лондоне, Максвелл обратился к студентам со вступительной лекцией, в которой он рассказал о том, как переплетаются между собой отдельные области физики и как важно, чтобы учения о теплоте и об электричестве достигли той же степени завершенности, какой достигла механика.

«В нашей стране, — говорил Максвелл, — натуральной философией называют собрание наук, состоящих из двух основных групп (классический труд Ньютона назывался «Математические начала натуральной философии» — *Я. С.*). Первая группа включает механику и охватывает общую теорию движения и равновесия, а также приложения принципов механики к исследованию явлений природы.

Вторую группу принято называть физикой. Сейчас в нее включают изучение света, теплоты, электричества и магнетизма и всех таких явлений, которые мы связываем с более общими принципами, хотя и не можем пока свести их к простому результату известных механических действий.»

Глубина проникновения в законы природы у Максвелла была поразительна. В 1868 году он публикует работу «О методе прямого сравнения электростатической и электромагнитной сил; с замечанием об электромагнитной теории света».

Рассуждения в этой работе воспринимаются сейчас как вполне современные. Если не стремиться к тому, чтобы передать их совсем точно, то идею Максвелла можно изложить просто.

Взаимодействие электрических зарядов проявляет себя двумя разными способами. Два неподвижных заряда действуют друг на друга по закону Кулона. С другой стороны, ток в проводнике, который есть не что иное, как поток зарядов, создает магнитное поле. Это магнитное поле может действовать на другой проводник с током. В результате, как хорошо известно, два прямолинейных проводника с токами, текущими параллельно друг другу, притягиваются. Так как проводники не заряжены, электрических сил между ними нет.

Максвелл со своей женой Кэтрин Дьюар (Шотландия, около 1875 года).

Формулы, описывающие взаимодействие зарядов и токов, были известны давно. Два заряда q_1 и q_2 на расстоянии r друг от друга взаимодействуют по закону Кулона:

$$F_q = k\frac{q_1 q_2}{r^2},$$

где k — постоянный коэффициент (равный в СИ $9 \cdot 10^9\ \frac{\text{Нм}^2}{\text{Кл}}$). Сила, с которой, действует прямолинейный ток I_1, на параллельный ему ток I_2, текущий по отрезку проводника длины l, находящемуся на расстоянии r, равна

$$F_I = a\frac{2I_1 I_2}{r}l,$$

где a — постоянный коэффициент (равный в СИ $10^{-7}\ \frac{\text{Нс}^2}{\text{Кл}^2}$).

Во времена Максвелла физики пользовались двумя системами единиц для измерения электрических величин. Единицу для заряда выбирали так, чтобы два заряда $q_1 = q_2 = 1$ отталкивались на расстоянии $r = 1$ (1 см) с силой $F_q = 1$ (1 дина $= 10^{-5}$ Н). Такая система называлась электрической (будем обозначать ее Е). В другой системе единица тока выбиралась так, чтобы два тока $I_1 = I_2 = 1$ притягивались на расстоянии $r = 1$ (1см) с силой (на единицу длины проводника) $F_I = 2$ (2 дины). Эта система называлась электромагнитной (будем обозначать ее М). В системе Е $k = 1$, в системе М $a = 1$. Нетрудно понять, что нельзя придумать такую систему единиц, в которой одновременно выполнялись бы оба условия ($k = 1$, $a = 1$). Законы взаимодействия токов и неподвижных зарядов разные, и их нельзя изменить выбором системы единиц.

Но ток I и заряд q могут быть связаны друг с другом. Ток равен заряду, проходящему через сечение проводника за единицу времени. В системе Е величина q^2 имеет размерность $[F][L^2]$ ($[L]$ — размерность расстояния). Квадрат тока I^2 в этой системе будет иметь размерность $[F][L^2][T^{-2}]$ $[T]$ — размерность времени). В системе же М размерность I^2 — $[F][\frac{1}{a}]$. Из последних двух соотношений ясно, что коэффициент a в формуле для $F_м$ — размерный и размерность его — $[L^{-2}T^2]$. Иными словами, величина $\frac{1}{a}$ имеет размерность квадрата скорости (с этих замечаний и начал свою работу Максвелл).

Для того чтобы соразмерить численные значения единиц заряда в системах Е и М, можно, например, зарядить два конденсатора зарядами $q_1 = q_2 = 1$ ($q = 1$ — в системе Е; на опыте можно взять любой известный заряд) и разрядить эти конденсаторы через два параллельных прямолинейных проводника, измерив время разряда (это дает возможность определить ток). Величина силы взаимодействия между проводниками, очевидно, определяет, во сколько раз заряд $q_Е = 1$ в системе Е меньше заряда $q_М = 1$ в системе М.

Отношение $q_Е : q_М$ измерили еще в 1856 году Вебер и Кольрауш, получив $(3{,}107 \cdot 10^8\ \text{м/с})^2$ — величину, близкую к квадрату скорости света. Случайно ли это совпадение? Если нет, то какова связь между соотношением единиц $q_Е$ и $q_М$ и скоростью света? На эти вопросы до Максвелла ответа не было.

Для Максвелла это совпадение не могло быть случайным: он увидел в нем подтверждение электромагнитной природы света. Еще в 1862 году в работе «О физических линиях сил» он написал: «...мы едва ли можем отказаться от вывода, что свет состоит из поперечных колебаний той же самой среды, которая является причиной электрических и магнитных явлений». Это замечание оказалось необычайно глубоким.

В СИ в формуле для F_1

$$a=\frac{k}{c^2}=\frac{9\cdot10^9}{9\cdot10^{16}}\,\frac{\text{Нм}^2/\text{Кл}^2}{\text{м}^2/\text{с}^2}=10^{-7}\ \frac{\text{Нс}^2}{\text{Кл}^2},$$

как и было написано выше.

Теория электричества и магнетизма Максвелла долго считалась одной из самых трудных физических теорий. Его современникам она казалась не менее трудной, чем квантовая механика — физикам нашего века. Главная трудность состояла в том, что Максвеллу нужен был носитель поля — эфир.

Следуя Фарадею, Максвелл считал, что пространство, окружающее заряд или ток, обладает свойствами, отличными от свойств пустого пространства, пространства без вещества. Но, как и всем физикам прошлого века, ему было очевидно, что у пустого пространства нет свойств, тем более пустое пространство не может изменять свои свойства. Поэтому физики считали, что пространство заполнено некой субстанцией — эфиром, свойства которого отличаются от свойств известных веществ*). Эфир изменялся под действием тока, колебания эфира лежали в основе распространения света. Размышляя над свойствами эфира, Максвелл обсуждал возможность измерения влияния движения Земли на скорость света (в 1881 году опыт был поставлен Майкельсоном). Эфир долго держался в физике. Только Эйнштейн понял окончательно, что электромагнитное поле не нуждается ни в каком особом материальном носителе, что оно само обладает свойствами, характерными для материи, — у него есть энергия, импульс.

Так закончилась еще одна история. Теория Максвелла до сих пор не обнаружила никаких пределов применимости. Когда Эйнштейн построил теорию относительности, уравнения Максвелла вошли в нее в почти неизмененном виде, в то время как уравнения механики Ньютона оказались лишь приближенными. Уравнения Максвелла вобрали в себя поправки, происходящие от квантовой механики. Они описывают явления, происходящие и в масштабах Вселенной (расстояния $\sim10^{28}$ см), и в микромире (расстояния $\sim10^{-16}$ см).

Нам осталось рассказать еще о кинетической теории. Остальные истории мы оставим в стороне. Мы не будем рассказывать о математических работах Максвелла, о работах по механике и оптике. Существуют еще и стихи Максвелла, серьезные и смешные — он любил шутить. Мы оставим без внимания работу о движении оси вращения Земли и разные другие «мелочи», которые могли бы сами по себе обеспечить известность.

Итак, об истории с кинетической теорией. Физики давно пытались вывести формулы, описывающие давление газа на стенки сосуда. Оказалось, что это сделать не так просто. Со времени Бернулли для описания давления газа на стенки сосуда использовали модель, в которой частицы газа не сталкивались между собой, а летели от стенки к стенке с одной и той же (по величине) скоростью, не изменяя ее даже при ударе о стенку. Это, конечно, не отвечало реальному положению вещей. В середине XIX века Клаузиус стал рассматривать взаимные столкновения молекул. Он ввел понятие длины пробега λ — расстояния, пролетаемого молекулами между двумя столкновениями. Эту величину Клаузиус считал некоторой постоянной характеристикой газа. Столкновения молекул происходят часто, и молекула не может летать по всему сосуду, а остается как бы запертой в небольшом объеме, размер которого примерно λ^3. При таком

* Об эфире говорили как о пятой субстанции, «квинтэссенции», в дополнение к четырем субстанциям, известным древним,— воздуху, воде, земле, огню.

Фамильный дом Максвеллов в юго-западной Шотландии.

описании газа становилось не очень ясным, каким образом «запертые» вдалеке от стенки молекулы могут оказывать давление на стенку — передавать стенке свое количество движения.

Максвелл постарался исправить столь несовершенную модель газа. Прежде всего он рассмотрел задачу о распределении молекул по скоростям. После этого он показал, что в газе при столкновениях происходит передача количества движения от молекулы к молекуле, совсем так, как передается жезл в эстафете. Хотя сами молкулы и не уходят, как правило, далеко от своего местопребывания (как не уходит бегун со своего этапа), при столкновениях возникает поток количества движения, который и достигает стенок. Так же происходит и перенос тепла в неравномерно нагретом газе или выравнивание концентрации смеси — процесс диффузии. Теория процессов переноса — очень важная работа Максвелла, оказавшая большое влияние на развитие кинетической теории газа.

Для подробных расчетов свойств газа Максвелл предположил, что между молекулами действуют силы, которые убывают как пятая степень расстояния между молекулами. Такая сравнительно простая модель позволила Максвеллу рассчитать (конечно, не очень точно) многие характеристики газа.

Максвелл довел умение пользоваться моделями до совершенства. И он всегда говорил, что «аналогия должна помогать воображению, но не заменять физическое явление».

В 1860 году Максвелл публикует работу «Иллюстрации к динамической теории газов», в которой дает формулу для распределения скоростей молекул. Это — знаменитая формула «распределения Максвелла, занимающая центральное место в молекулярной физике. Главное, что понял Максвелл, состояло в том, что в таких системах, как газ, распределение частиц по скоростям (или, точнее, по величине кинетической энергии) зависит только от температуры. Разбирая вопрос о столкновениях молекул, Максвелл показал, что трение в газах не зависит от давления. Этот вывод был воспринят с большим недоверием, и Максвелл вместе со своей женой проверил его на опыте.

Кинетической теорией Максвелл занимался до конца своих дней. Он умер 5 ноября 1879 года в возрасте 48 лет. Последние годы он провел в Кембридже, был первым руководителем знаменитой Кавендишской лаборатории, названной так в честь английского физика XVIII века Кавендиша, которого Максвелл высоко ценил и собрание трудов которого он подготовил к изданию.

Жизнь Максвелла — пример устремленного движения к победе, жизнь, прожитая под девизом «Work, finish, publish».

А. Боровой, Ю. Климов

Маятник Максвелла

«Важным разделом наших обязанностей является постановка иллюстративных опытов, поощрение других к постановке их и развитие всевозможными способами освещаемых ими идей. Чем проще материалы иллюстративного опыта и чем более они привычны учащемуся, тем глубже он поймет идею, которую должен иллюстрировать этот опыт. Воспитательная ценность таких опытов часто обратно пропорциональна сложности приборов.»

Эти слова Джеймса Клерка Максвелла — великого английского физика, стопятидесятилетие со дня рождения которого отмечается в этом году, как бы специально предназначены для Лаборатории «Кванта». В данной статье мы хотим обратиться к прибору, носящему его имя, — к так называемому маятнику Максвелла. Несложный в изготовлении, он часто демонстрируется на лекциях по механике и позволяет выявить ряд интересных закономерностей движения твердого тела.

Посмотрите на фотографию такого маятника (рис. 1). Это диск, насаженный на ось, к которой привязаны две нити (их верхние концы закреплены). Закрутите нити вокруг оси — диск поднимется. Теперь отпустите маятник — и он начинает совершать периодическое движение: сначала диск опускается, нити раскручиваются, диск вращается все быстрее и быстрее; дойдя до нижней точки и продолжая по инерции вращаться, диск меняет направление своего движения и поднимается вверх, нити накручиваются на ось, движение диска замедляется; в самой верхней точке маятник на мгновение останавливается и снова начинает свое движение вниз и т. д.

Сразу хотим предупредить читателей, что маятник будет колебаться устойчиво и достаточно долго, если соблюсти несколько условий. Сам диск должен быть относительно тяжелым ($m>100$ г) и большим (диаметром 5—8 см), ось — тонкой (диаметром 4—5 мм) и «невесомой», а нити — прочными и достаточно длинными ($\sim 0{,}5$ м). Обратите внимание на то, чтобы диск находился строго посередине оси и был перпендикулярен к ней, а нити имели одинаковые длины.

Для изучения закономерностей движения маятника нам понадобят-

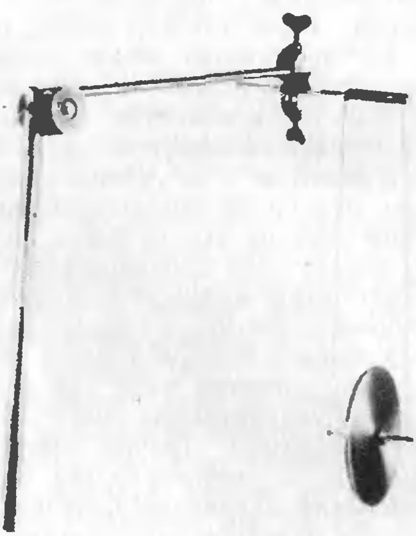


Рис. 1.

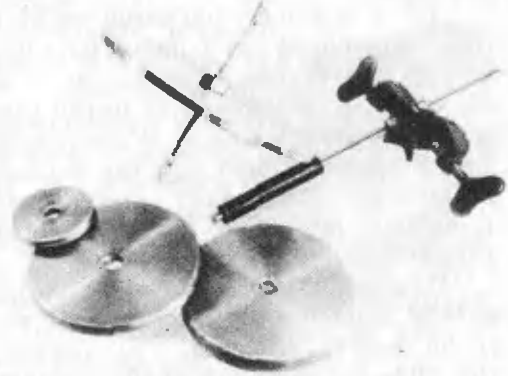


Рис. 2.

ся часы с секундной стрелкой (конечно, лучше — секундомер) и набор дисков — одного и того же радиуса, но разной толщины (массы), а также различных радиусов, но одной толщины. Диски удобно сделать съемными; один из способов их закрепления на оси показан на фотографии на рисунке 2.

Итак, начнем наши эксперименты. Наблюдения за колебаниями различных маятников дают первый результат — период колебаний, то есть полное время спуска и подъема маятника, не зависит от массы диска, а зависит от его радиуса, причем зависимость эта — почти прямая пропорциональная.

Далее, легко видеть, что с течением времени колебания довольно заметно затухают, причем чем меньше становится их амплитуда (максимальная высота подъема) и чем меньше скорость вращения диска, тем менее устойчиво ведет себя маятник. Интересно также проделать такой эксперимент: задавая некоторые возмущения (то есть выводя маятник из устойчивого состояния), проследить за их затуханием при движении маятника. Если, например, в момент запуска слегка повернуть диск в горизонтальной плоскости, то при своем падении он довольно быстро вернется к относительно устойчивому положению. Но если же отклонить маятник в плоскости его вращения, то практически до самого конца движения сохраняются оба колебания: вверх-вниз и в плоскости вращения.

Постараемся теперь объяснить часть наших экспериментальных результатов. Для простоты рассуждений предположим, что вся масса рассматриваемого диска сосредоточена на его поверхности, то есть что маятник — не диск, а обруч.

Обозначим радиус обруча через R, а радиус оси — через r (рис. 3). Рассмотрим маятник в тот момент, когда он опустился на расстояние h от верхнего положения. Каждая точка обруча, например точка A, одновременно участвует в двух движениях: в поступательном движении вместе с осью O вниз со скоростью $\vec{v}_0 = \vec{v}_{\text{пост}}$ и вращательном со ско-

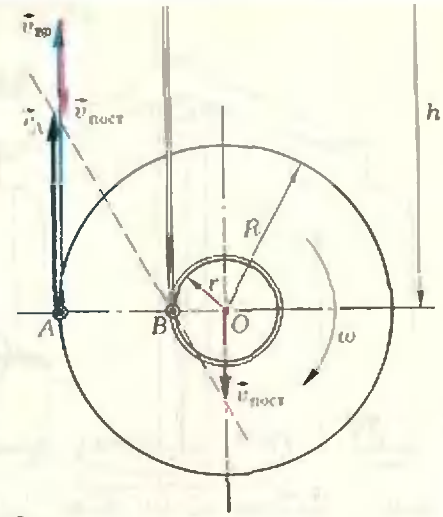


Рис. 3.

ростью $\vec{v}_{\text{вр}}$:

$$|\vec{v}_A| = |\vec{v}_{\text{вр}} + \vec{v}_{\text{пост}}|.$$

Нить разматывается без проскальзывания, и это означает, что мгновенная скорость точки B равна нулю. Поэтому движение маятника можно представить и как ряд последовательных поворотов вокруг мгновенного центра вращения B. Тогда справедливо равенство

$$\frac{v_0}{v_A} = \frac{r}{R-r}, \text{ или } \frac{v_{\text{пост}}}{v_{\text{вр}} - v_{\text{пост}}} = \frac{r}{R-r} \qquad (1)$$

(буквой v мы обозначили модуль той или иной скорости). Отсюда

$$\frac{v_{\text{пост}}}{v_{\text{вр}}} = \frac{r}{R}.$$

Теперь воспользуемся законом сохранения энергии:

$$mgh = \frac{mv_{\text{пост}}^2}{2} + \frac{mv_{\text{вр}}^2}{2}. \qquad (2)$$

Мы представили кинетическую энергию (правую часть равенства (2)) в виде двух слагаемых — энергии поступательного движения и энергии вращательного движения вокруг центра тяжести*).

Из кинематики известно, что

$$v_{\text{пост}}^2 = 2ah, \qquad (3)$$

где a — модуль ускорения поступательного движения маятника.

*) Возможность такого разбиения можно доказать и строго, но интуитивно это ясно и так.

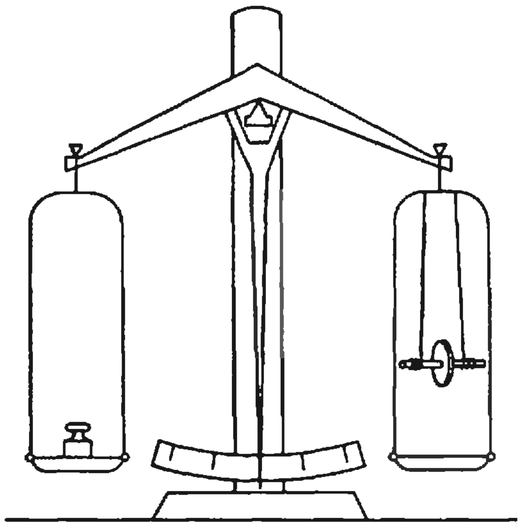


Рис. 4.

Таким образом, из уравнений (1)—(3) найдем:

$$a=\frac{g}{1+(R/r)^2}.$$

В нашем случае $R/r \gg 1$ (при этом условии выполняется требование «невесомости» оси), поэтому можно считать, что

$$a \approx g\left(\frac{r}{R}\right)^2. \qquad (4)$$

Если длина разматывающейся нити l, то $l=at^2/2$ и период колебаний маятника равен

$$T=2t=2\sqrt{\frac{2l}{a}}=2\frac{R}{r}\sqrt{\frac{2l}{g}}. \qquad (5)$$

Для диска формулы (4) и (5) соответственно преобразуются (см. «Дополнение»):

$$a=2g\left(\frac{r}{R}\right)^2, \qquad (4')$$

$$T=2\frac{R}{r}\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (5')$$

Теперь мы можем сравнить результаты расчетов и экспериментов. Из (4′) и (5′) видно, что и ускорение a, и период T не зависят от массы диска, но зависят от отношения радиусов R/r: чем больше R (по сравнению с r), тем меньше ускорение и, соответственно, больше период колебаний. Это действительно согласуется с экспериментом. Но если вы опыты проводили аккуратно, то заметили, что расчетный период (5′) меньше экспериментального. Это, как уже говорилось, связано с затуханием. А как вы думаете — где именно происходит наибольшая потеря энергии?

Наконец, можно проделать еще один очень эффектный опыт с маятником Максвелла, но для этого необходимы весы (рис. 4). Сначала при неподвижном маятнике приведите весы в равновесие, а затем отпустите маятник. Равновесие нарушится: маятник как бы станет легче. Почему? Объясните это самостоятельно.

Дополнение

Для тех, кто знаком с интегральным исчислением, приведем вывод формулы кинетической энергии вращающегося диска, откуда будет легко получить формулы (4′) и (5′).

Разобьем диск радиусом R на n тонких колец шириной Δx каждое (рис. 5). Кинетическая энергия одного кольца радиусом x и шириной Δx равна

$$\Delta E_к=(\rho 2\pi x b \Delta x)\frac{\omega^2 x^2}{2},$$

где ρ — плотность материала диска, b — его толщина, ω — угловая скорость вращения, а выражение в скобках — масса выбранного кольца.

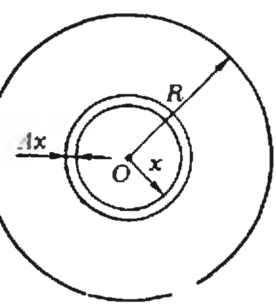


Рис. 5.

Кинетическая энергия всего диска приближенно равна сумме кинетических энергий отдельных колец:

$$E_к \approx \Sigma \Delta E_к.$$

Если перейти к пределу при n, стремящемся к бесконечности, приближенное равенство становится точным:

$$E_к=\lim_{n\to\infty}\Sigma\Delta E_к=\int_0^R \rho 2\pi x b\frac{\omega^2x^2}{2}dx=\frac{\rho\pi b\omega^2R^4}{4}=\frac{(\rho\pi R^2 b)\omega^2R^2}{4}=\frac{m\omega^2R^2}{4}.$$

Кинетическая энергия вращающегося обруча той же массы равна $mv^2/2=m\omega^2R^2/2$. Следовательно, кинетическая энергия диска в два раза меньше.

Формулы (4′) и (5′) выведите самостоятельно.

задачник Кванта

Задачи

М711 — М715; Ф723 — Ф727

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 января 1982 года по адресу: 113035, Москва, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 11—81» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М711, М712» или «Ф723». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи.

М711. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность с центром O, взаимно перпендикулярны. Докажите, что ломаная AOC делит четырехугольник на две части равной площади.

В. Варваркин

М712. Докажите, что любое положительное число можно представить в виде суммы девяти чисел, десятичные записи которых содержат только цифры 0 и 7.

Э. Туркевич

М713. M — множество точек на плоскости. Точка O плоскости называется «почти центром симметрии» множества M, если из M можно выбросить одну точку такую, что для оставшегося множества O является центром симметрии в обычном смысле. Сколько «почти центров симметрии» может иметь конечное множество?

В. Прасолов

М714*. N друзей одновременно узнали N новостей, причем каждый узнал одну новость. Они стали звонить друг другу и обмениваться новостями. За один разговор можно передать сколько угодно новостей. Какое минимальное количество звонков необходимо, чтобы все узнали все новости? Рассмотрите три случая: а) $N=64$, б) $N=55$, в) $N=100$.

А. Анджан

М715*. Прямой угол разбит на клетки (рис. 1). На некоторых клетках стоят фишки, причем расположение фишек можно преобразовывать так: если для некоторой фишки соседняя сверху и соседняя справа клетки свободны, то в эти клетки ставится по фишке, а старая фишка убирается. Вначале в угловую клетку ставится одна фишка. Можно ли указанными операциями освободить от фишек уголки из а) трех, б) шести, в) десяти клеток, показанные на рисунках 2, *а*, *б*, *в*?

М. Концевич

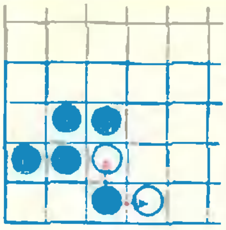


Рис. 1.

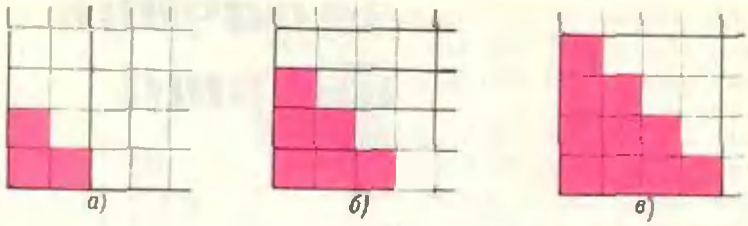


Рис. 2.

Ф723. Спортсмены бегут с одинаковыми скоростями v колонной длины l_0. Навстречу бежит тренер со скоростью u ($u<v$). Спортсмен, поровнявшийся с тренером, бежит назад с той же скоростью v. Какова будет длина колонны, когда все спортсмены развернутся?

И. Воробьев

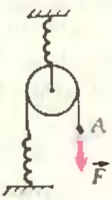


Рис. 3.

Ф724. Насколько переместится конец перекинутой через подвижный блок нити (точка A на рисунке 3), если к нему приложить силу $\vec{F}$? Жесткости пружин одинаковы и равны k. Пружины, нить и блок считать невесомыми.

Г. Меледин

Ф725. Из взрывчатого вещества нужно изготовить тонкостенную коническую оболочку так, чтобы при взрыве, начинающемся с вершины конуса и «сползающем» вниз, продукты взрыва ударялись о горизонтальную плиту, на которой стоит конус, одновременно. Скорость детонации (скорость вовлечения во взрыв новых участков взрывчатого вещества) равна v, а скорость разлета продуктов взрыва u. Каким должен быть угол φ между осью конуса и его образующей?

И. Воробьев

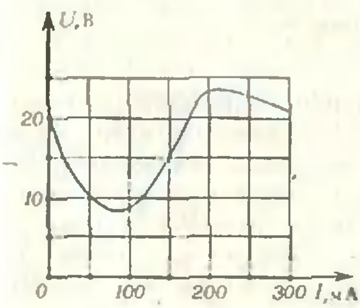


Рис. 4.

Ф726. В длинной горизонтально расположенной теплоизолированной трубе между двумя поршнями массы m каждый находится 1 моль идеального одноатомного газа при температуре T_0. Вне поршней — вакуум. В начальный момент скорости поршней направлены в одну сторону и равны v и $3v$. До какой максимальной температуры нагреется газ? Поршни тепло не проводят. Универсальная газовая постоянная равна R.

В. Бородин

Ф727. Зависимость напряжения от тока для некоторого источника электрической энергии показана на рисунке 4. Постройте график зависимости напряжения на нагрузке, на которую замкнут источник, от сопротивления нагрузки.

Problems M711 — M715; P723 — P727

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The

M711. The diagonals of a convex quadrilateral $ABCD$ inscribed in a circle of centre O are perpendicular to each other. Prove that the broken line AOC splits the quadrilateral into two parts of equal area.

V. Varvarkin

problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications.

The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than January 15th to the following adress: USSR, Moscow, 113035 МОСКВА, Б. ОРДЫНКА 21/16, «КВАНТ». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as solutions of problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-adressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year, we sum up the results of the Kvant problem contest. The list of prizewinners is published in the September issue.

If you have an original problem to propose for publication, please send it to us in two copies (including the solution) in an envelope inscribed "NEW PROBLEM IN PHYSICS (MATHEMATICS)".

M712. Prove that any positive real number can be presented as the sum of nine numbers whose decimal representations contain the digits 0 and 7 only. *E. Turkevich*

M713. A point in the plane is said to be an "almost centre of symmetry" of the plane set M, if it becomes a centre of symmetry in the usual sense after one (appropriately chosen) point is removed from M. How many almost centres of symmetry can a finite set have? *V. Prasolov*

M714*. N friends simultaneously learn N news items (one each) and start telephoning each other to exchange news. Each phone call lasts exactly one hour, during which any number of news items may be communicated. What is the minimal number of hours needed for all the friends to learn all the news? Consider three cases: a) $N=64$, b) $N=55$, c) $N=100$. *A. Andjan*

M715*. A right angle is split up into little square cases (see Рис. 1). The disposition of pawns placed in the cases may be altered according to the following rule: if both the case directly above and the next case to the right of some pawn are empty, the pawn may be removed, two pawns being placed in the empty cases instead. At the start, one pawn is placed in the case at the vertex. Using the rule above, is it possible to chase out all pawns from the "corners" of the angle on figure Рис. 2, *а*, *б*, *в* and consisting of a) three, b) six, c) ten cases? *M. Kontsevich*

P723. A group of athletes is running with velocity v, forming a column of length l_0. Their coach runs in the opposite direction with velocity u ($u < v$). When each athlete encounters the coach, he turns around and runs back at the same speed v. How long will the column be when all the athletes will have turned around? *I. Vorobiev*

P724. How far will the extremity (the point A on figure Рис. 3) of a spring thrown over a pulley be displaced, if a force $\vec{F}$ is applied to it? The rigidities of the springs both equal k. The string, the pulley and the springs are assumed to have no mass. *G. Meledin*

P725. A thin cone-shaped envelope must be made from explosive material, so that during the explosion, which begins at the vertex of the cone, the products of explosion reach the horizontal plate (on which the cone is placed) simultaneously. The detonation velocity (i. e. the velocity with which the explosion propagates in the explosive material) is v, while the velocity of motion of the explosion products is u. What angle φ between the axis and the generator of the cone must be chosen? *I. Vorobiev*

P726. One mole of monoatomic gas at temperature T_0 is contained in a long horizontal thermoisolated pipe, between two identical pistons of mass m. The pistons are surrounded by vacuum. At the initial moment of time the two pistons move in the same direction with velocities v and $3v$. To what maximal temperature will the gas be heated? The pistons don't conduct heat. The universal gas constant is R.

P727. The dependence of tension on current of a certain source of electric energy is shown on figure Рис. 4. Plot the graph of the tension obtained from this source on a resistor, as a function of the resistance. *V. Borodin*

Решения задач

M671 — M674; Ф683 — Ф687

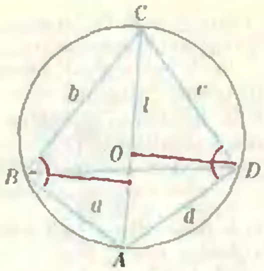
M671. *Во вписанном четырехугольнике одна диагональ делит вторую пополам. Докажите, что квадрат длины первой диагонали равен половине суммы квадратов длин всех сторон четырехугольника.*

Пусть a, b, c, d — длины сторон четырехугольника $ABCD$, $|BO|=|OD|$, $|AC|=l$ (см. рисунок). По теореме косинусов

$$l^2=a^2+b^2-2ab\cos\widehat{B}, \qquad (1)$$

$$l_2=c^2+d^2+2cd\cos\widehat{B} \qquad (2)$$

($\widehat{D}=180°-\widehat{B}$, поскольку четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность).



Легко заметить, что треугольники ABC и ADC равновелики: $S_{ABC}=S_{ADC}$ — они имеют общее основание AC и равные по длине высоты, опущенные на это основание. Поэтому $\frac{1}{2}ab\sin\hat{B}=\frac{1}{2}cd\sin(180^\circ-\hat{B})$, то есть $ab=cd$. Складывая (1) и (2), получаем требуемое.

Р. Мазов

M672. *Пусть a — натуральное число такое, что 2^a-2 делится на a (например, $a=3$). Определим последовательность (x_k) условиями*

$$x_1=a,\quad x_{k+1}=2^{x_k}-1.$$

Докажите, что $2^{x_k}-2$ делится на x_k при любом k.

◆

Докажем это утверждение методом математической индукции.

При $k=1$ оно справедливо по условию. Предположим, что $2^{x_k}-2$ делится на x_k, и докажем, что $2^{x_{k+1}}-2$ делится x_{k+1}.

Пусть $x_{k+1}-1=2^{x_k}-2=mx_k$, где $m>1$ — натуральное число. Тогда

$$2^{x_{k+1}}-2=2(2^{x_{k+1}-1}-1)=2(2^{mx_k}-1)=$$
$$=2(2^{x_k}-1)(2^{(m-1)x_k}+2^{(m-2)x_k}+\ldots+1)=Mx_{k+1}$$

где M — натуральное число, что и требовалось доказать.

В. Яноус

От редакции. Задача **M672** по существу совпадает с леммой 2 из статьи И. Яглома «Почти простые числа» («Квант», 1981, № 9).

M673. *На плоскости в вершинах треугольника лежат три шайбы A, B, C. Хоккеист выбирает одну из них и бьет по ней так, что она проходит между двумя другими и останавливается в какой-то точке.*
а) Покажите, как после пяти ударов шайба C может вернуться на свое место, а шайбы A и B поменяться местами.
б) Могут ли все три шайбы A, B, C вернуться на свои прежние места после 25 ударов?

◆

а) Нетрудно сообразить, что если по шайбе C наносится хотя бы один удар, то за пять ударов вернуть назад шайбу C и поменять местами шайбы A и B не удастся.

Однако, если шайба C стоит на месте, а перемещаются только шайбы A и B, задача легко решается (см. рис. 1: индекс i означает положение шайбы после i-го удара).

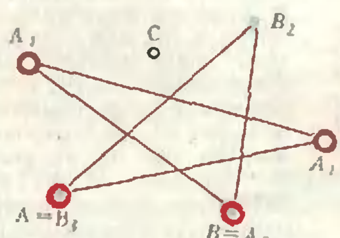


Рис. 1.

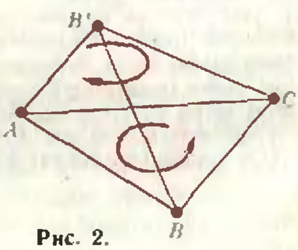


Рис. 2.

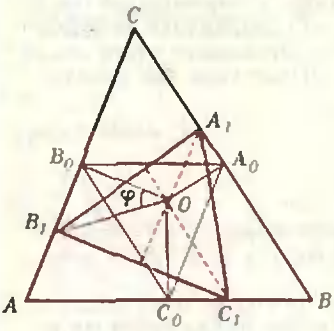
б) Ответ: не могут. Для доказательства проследим за *ориентацией* треугольника ABC — направлением обхода его контура. Легко видеть, что после каждого удара направление обхода меняется на противоположное (на рисунке 2 обход вершин $A\to B\to C\to A$ осуществляется против часовой стрелки, а обход вершин $A\to B'\to C\to A$ — по часовой стрелке). Поэтому после нечетного числа ударов направление обхода будет противоположным заданному вначале.

А. Егоров

M674. *На сторонах BC, AC и AB остроугольного треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 соответственно. Известно, что центр описанной около треугольника ABC окружности совпадает с точкой пере-*

◆

Пусть A_0, B_0, C_0 — середины сторон треугольника ABC, O — центр описанной около него окружности (см. рисунок). Треугольник $A_0B_0C_0$ подобен треугольнику ABC, а точка O является точкой пересечения его высот. Рассмотрим преобразование подобия $F=H_O^k\cdot R_O^\varphi$ (композицию гомотетии H_O^k с центром O и коэффициентом k и поворота R_O^φ на угол φ вокруг O), *сечения высот треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.*



где $k=\frac{1}{\cos\varphi}$. При этом точки $F(A_0)$, $F(B_0)$ и $F(C_0)$ будут принадлежать прямым BC, AC и AB соответственно. Таким образом, при изменении φ мы получаем целое семейство треугольников с общим *ортоцентром* (точкой пересечения высот), вписанных в треугольник ABC и ему подобных. Осталось показать, что треугольник $A_1B_1C_1$ принадлежит этому семейству.

Выберем $\varphi=\widehat{B_0OB_1}$ так, что $F(B_0)=B_1$; пусть $F(A_0)=A_2$, $F(C_0)=C_2$. Точка O служит точкой пересечения высот треугольников $A_1B_1C_1$ и $F(\triangle A_0B_0C_0)=\triangle A_2B_1C_2$; значит, сторона A_2C_2 должна быть параллельна стороне A_1C_1 или совпадать с ней. Но ясно, что высоты треугольника $A_2B_1C_2$, опущенные из вершин A_2 и C_2, не могут пройти через O, за исключением того случая, когда $A_2=A_1$ и $C_2=C_1$, так что на самом деле треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_1C_2$ совпадают.

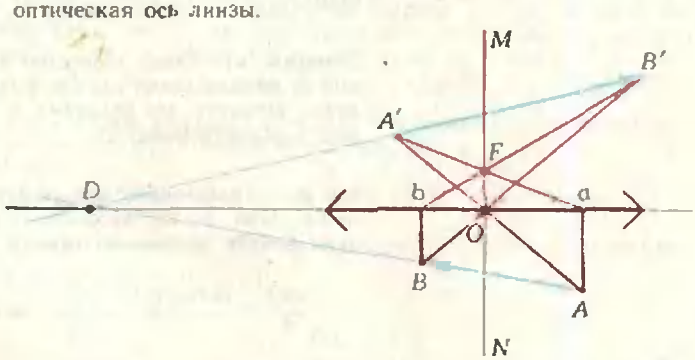
В заключение заметим, что в нашем решении остроугольность треугольника ABC не использовалась: утверждение задачи верно для любого треугольника ABC (и любых точек A_1, B_1, C_1 на прямых BC, AC, AB).

Д. Изаак

◆

Ф683. *На рисунке показаны источник AB и его изображение $A'B'$, полученное в линзе. Определить построением расположение линзы и ее фокусное расстояние.*

Оптический центр линзы лежит в точке O пересечения прямых BB' и AA'. Точка D, являющаяся пересечением прямых AB и $A'B'$, лежит в плоскости линзы. Следовательно, линза расположена вдоль прямой OD; MN ($MN\perp OD$) — главная оптическая ось линзы.



Лучи Aa и Bb после преломления пересекутся в фокусе линзы ($Aa\|Bb\|MN$). Следовательно, F — фокус линзы.

С. Кротов

◆

Ф684. *Схема имеет N входных зажимов, один выходной и один общий («земля»). На каждом из входных зажимов потенциал относительно «земли» составляет от $+50$ до $+200$ В.*

1) Нарисуйте вариант схемы, который обеспечит на выходном зажиме максимальный из приложенных ко входам потенциалов.

2) Нарисуйте другой вариант — обеспечивающий на выходном зажиме минимальный из приложенных потенциалов.

Постарайтесь обойтись без применения дополнительных источников питания.

Первый вариант приведен на рисунке 1. В схеме закрыты все диоды, кроме одного — того, который подключен ко входу с максимальным потенциалом φ_{max}. Этот потенциал и окажется на выходе; разность между ним и другими (меньшими) потенциалами обеспечит запирание остальных диодов.

Второй вариант может быть таким, как на рисунке 2. Если потенциал пластины источника ($\mathcal{E}$) больше или равен φ_{max}, то открытым окажется диод, подключенный ко входу с минимальным потенциалом; то же будет и на выходе; остальные диоды будут заперты.

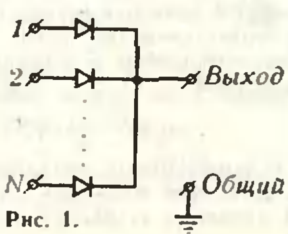


Рис. 1.

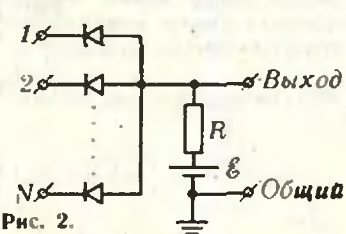


Рис. 2.

Для того чтобы обойтись без дополнительного источника, можно воспользоваться схемой первого варианта — ее выходное напряжение вполне заменяет источник.

Строго говоря, потенциалы на выходных зажимах схем не равны в точности входным, а отличаются на величину падения напряжения на открытом диоде — оно составляет доли вольта. Этот недостаток можно в значительной мере уменьшить, воспользовавшись тем, что напряжение на открытом диоде мало зависит от тока, протекающего через диод. Подумайте сами, как это сделать. (Подсказка: без дополнительного источника не обойтись.)

А. Зильберман

◆

Ф685. *Между стенкой и кубом массы $M=10$ кг летает на гладком столе упругий шарик массы $m=0{,}1$ г. Его скорость вначале, когда куб покоился, составляла $v_0=100$ м/с. Найти скорость куба в тот момент, когда он будет в 2 раза дальше от стенки, чем вначале.*

Будем считать, что при каждом ударе шарика о куб скорость куба меняется на очень малую величину и остается во много раз меньше, чем скорость шарика.

Пусть x — расстояние от куба до стенки, u — скорость куба, v — скорость шарика. Тогда время между двумя последовательными соударениями равно $\tau=2x/v$. При каждом соударении куб получает импульс $\Delta p=2mv$ (мы учли, что $u\ll v$). Скорость шарика за один удар изменяется на $\Delta v=-2u$ (это очевидно, если рассматривать движение в системе отсчета, связанной с кубом). Для упрощения расчетов примем, что в результате соударений скорости u и v меняются не скачками, а плавно. Тогда «среднее» ускорение шарика $v'=\dfrac{\Delta v}{\tau}=-\dfrac{uv}{x}$. Учитывая, что $u=x'$, перепишем это равенство:

$$v'x+x'v=0.$$

Заметим, что слева написано выражение, равное производной от произведения vx; тот факт, что эта производная равна нулю, означает, что величина vx остается в процессе постоянной. Следовательно,

$$vx=v_0x_0,$$

где x_0 — расстояние между кубом и стенкой в начале процесса. При $x=2x_0$ скорость шарика равна $v_0/2$. Скорость куба в этот момент найдем из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{m(v_0/2)^2}{2}+\frac{Mu^2}{2}\Rightarrow u=\frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{3m}{M}}\approx 0{,}27\text{ м/с}.$$

З. Рафаилов

◆

Ф686. *Тонкий обруч массы M и радиуса R поставлен на горизонтальную плоскость. По гладкому каналу, проходящему внутри обруча, соскальзывает из верхней точки без начальной скорости небольшая шайба массы m. Определить скорость центра обруча в тот момент, когда шайба находится в точке обруча A, радиус-вектор которой образует угол φ с вертикалью. В начальный момент обруч покоится. Трение между обручем и плоскостью отсутствует.*

Силы, действующие на систему обруч — шайба, — это сила тяжести и сила нормальной реакции со стороны плоскости. Обе эти силы направлены вдоль вертикали. Следовательно, центр масс системы в горизонтальном направлении не перемещается.

Поскольку трение между обручем и плоскостью отсутствует, обруч движется поступательно. Согласно закону сохранения импульса, в любой момент времени

$$M|u|=m|v_x|. \qquad (1)$$

где u и v_x — горизонтальные проекции скоростей обруча и шайбы (причем $u=|\vec{u}|$). Так как v_x периодически меняет знак, то и u «синхронно» меняет знак. Общий характер движения обруча таков: шайба на участках BC и BE (рис. 1) — центр обруча движется вправо; шайба на участках CD и DE — центр обруча движется влево.

Скорости шайбы $\vec{v}$ и обруча $\vec{u}$ связаны законом сохранения энергии:

$$mgR(1+\cos\varphi)=\frac{mv^2}{2}+\frac{Mu^2}{2}, \qquad (2)$$

где φ — угол, который составляет с вертикалью радиус-вектор точки, в которой в данный момент (при данных значениях $\vec{v}$ и $\vec{u}$) находится шайба.

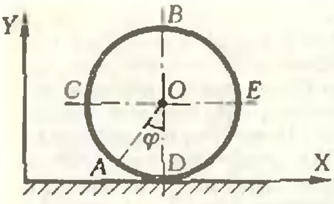


Рис. 1.

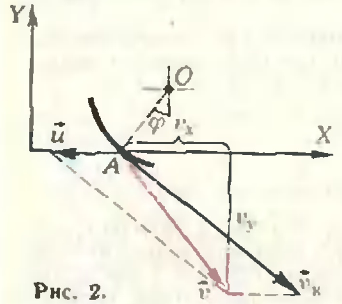


Рис. 2.

Движение шайбы относительно неподвижного наблюдателя можно представить в любой момент времени как суперпозицию двух движений: движения относительно центра обруча со скоростью $v_к$, направленной по касательной к обручу, и движения вместе с обручем со скоростью u, направленной горизонтально (рис. 2). Как видно из рисунка 2,

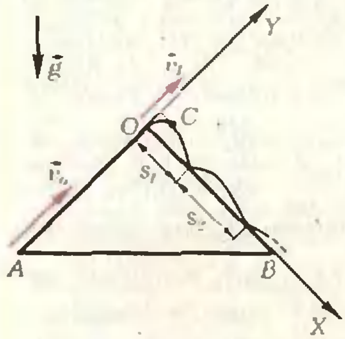
$$\frac{|v_y|}{|v_x|+|u|}=\operatorname{tg}\varphi. \qquad (3)$$

Решая совместно уравнения (1) — (3), найдем значение скорости центра обруча в тот момент, когда радиус-вектор точки, в которой находится шайба, составляет угол φ с вертикалью:

$$|\vec{u}|=m\cos\varphi\sqrt{\frac{2Rg(1+\cos\varphi)}{(M+m)(M+m\sin^2\varphi)}}.$$

С. Кротов

Ф687. *Стальному шарику, находящемуся в точке A основания AB равнобедренного прямоугольного клина, сообщают скорость v_0 в направлении стороны AO (см. рисунок). При каких значениях v_0 шарик из точки A попадает в точку B? Длина ребра клина l.*



◆

В общем случае траектория шарика после отрыва от клина в точке O будет такой, как показано на рисунке, — она будет состоять из участков парабол. Проекции на ось OX перемещений шарика за последовательные равные промежутки времени $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ относятся как

$$s_1 : s_2 : s_3 : \ldots : s_n = 1 : 3 : 5 : \ldots : (2n-1)$$

(поскольку в момент «отрыва» шарика в точке O проекция его скорости $\vec{v}_1$ на ось OX равна нулю). Если при n-м соударении с ребром OB шарик попадает в точку B, то

$$s_1+s_2+s_3+\ldots+s_n=s_1(1+3+5+\ldots+(2n-1))=s_1n^2=l.$$

Найдем, как связаны s_1 и v_1. Проекции ускорения шарика на оси OX и OY равны $a_x=a_y=g\sqrt{2}/2$, и

$$s_1=a_x\frac{t_1^2}{2}=g\frac{\sqrt{2}}{4}t_1^2.$$

Время t_1 движения шарика до первого удара о клин найдем из условия $v_1-a_y\dfrac{t_1}{2}=0$:

$$t_1=\frac{2v_1}{a_y}=\frac{4v_1}{g\sqrt{2}}.$$

Таким образом,

$$s_1=\frac{2v_1^2\sqrt{2}}{g}, \text{ или } v_1^2=\frac{gl\sqrt{2}}{4n^2}.$$

Связь между v_1 и v_0 найдем из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}+mgl\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_0=\sqrt{v_1^2+gl\sqrt{2}}=\frac{1}{2n}\sqrt{gl\sqrt{2}\,(4n^2+1)}.$$

Итак, шарик попадает в точку B, если в точке A ему сообщают скорость $|\vec{v}_0|=\dfrac{1}{2n}\sqrt{lg\sqrt{2}\,(4n^2+1)}$, где n — натуральное число. Отметим, что

$$\lim_{n\to\infty} v_0=\sqrt{gl\sqrt{2}}.$$

Этот же результат следует из закона сохранения энергии: при $n\to\infty$ $v_1\to 0$, и

$$\frac{mv_0^2}{2}=mgl\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow v_0=\sqrt{gl\sqrt{2}}.$$

Е. Рабкин

В. Гальперин, Г. Гальперин

Освещение плоскости прожекторами

Интересная и трудная задача **М545**, решению которой посвящена эта заметка, по постановке вопроса и методам решения типична для комбинаторной геометрии — раздела геометрии, занимающегося задачами о разбиениях, покрытиях, упаковках фигур.

Напомним ее формулировку:

На плоскости задано n точек. Нужно разместить в этих точках n прожекторов, каждый из которых освещает угол величины $\frac{360°}{n}$ так, чтобы осветить всю плоскость. Докажите, что это возможно при любом расположении данных точек, если а) $n=3$; б) $n=4$; в) n *— любое натуральное число* (в случаях а) — в) прожекторы можно поворачивать); г) *Пусть теперь прожекторы освещают углы α_1, α_2, ..., α_n ($\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=360°$) и составлены в одну точку так, что они освещают всю плоскость. Докажите, что можно перенести*) в каждую из данных точек по одному из n прожекторов так, что вся плоскость будет по-прежнему освещена.*

История этой задачи достаточно интересна. Самый простой ее частный случай б) предлагался на первой Всесоюзной математической олимпиаде в 1967 году. Именно там с ней познакомился второй из авторов этой заметки (тогда он еще был школьником). Несколько лет спустя он нашел доказательство более общего факта (пункт в)) и предложил его оргкомитету Московской математической олимпиады для отборочных соревнований московских школьников — кандидатов в команду Москвы на Всесоюзную олимпиаду 1978 года. На этих соревнованиях первый из авторов (однофамилец второго), бывший тогда десятиклассником, придумал новый, допускающий дальнейшие обобщения подход к задаче.

В том же «историческом» порядке мы расскажем о разных способах решения задачи и ее обобщениях.

Разбиение на части

Начнем с пункта *б*). Проведем прямую *e* так, чтобы две из данных точек находились в одной из получившихся полуплоскостей, а две оставшиеся — в другой. Два прожектора, находящиеся в одной полуплоскости, всегда можно направить так, чтобы они осветили всю другую полуплоскость (рис. 1).

В случае а) разобьем плоскость на три угла по 120° с общей вершиной O так, чтобы каждый угол содержал ровно одну из данных точек M_1, M_2, M_3 (в качестве точки O можно, например, взять основание высоты треугольника $M_1M_2M_3$, опущенной на его самую длинную сторону; см. рис. 2).

Рассмотрим теперь углы, симметричные этим углам относительно точки O. На рисунке 2 показано, как направить прожектор, помещенный в точку M_1 так, чтобы он освещал закрашенный красным цветом угол. Аналогично, прожекторы в точках M_2 и M_3 можно направить так, чтобы они освещали «свои» углы.

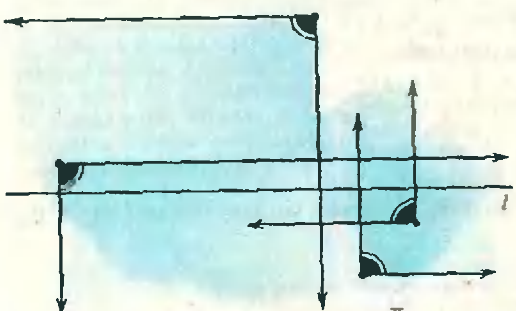
Ту же идею — разделить плоскость на части так, чтобы каждую из них удалось осветить своей группой прожекторов, — можно применить и в случае в).

Для этого достаточно доказать следующие два утверждения.

Утверждение 1. *Пусть внутри данного угла величины $\alpha=k\frac{2\pi}{n}$, где $k<\frac{n}{2}$ расположено k прожекторов. Тогда их можно повернуть так, чтобы они вместе осветили целиком угол, симметричный данному относительно его вершины (рис. 3).*

Для доказательства этого утверждения индукцией по k удобно использовать такую арифметическую лемму. *Если s_1, s_2, ..., s_k — целые неотрицательные числа, причем $s_1\geq 1$,*

*) Имеется в виду, что прожекторы можно параллельно переносить, но не поворачивать!



$n=4,\ \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\frac{\pi}{2}$

Рис. 1.

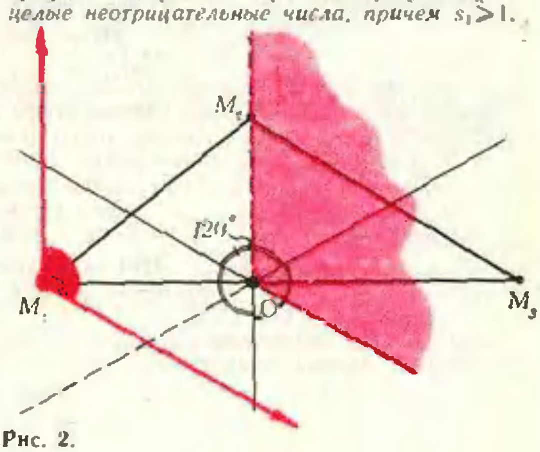


Рис. 2.

$s_k \geq 1$ и $s_1+s_2+\ldots+s_k=k$, то существует $m<k$, для которого $s_1+\ldots+s_m=m$ (тогда $s_{m+1}+\ldots+s_k=k-m$).

Наконец, остается доказать еще такой довольно очевидный факт — легче сделать это отдельно для четного и для нечетного n.

Утверждение 2. *Если в плоскости задано n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то ее можно разбить на две полуплоскости, содержащие по $n/2$ точек, если n четно, или на три угла с общей вершиной и величинами $k_1\frac{2\pi}{n}$, $k_2\frac{2\pi}{n}$, $k_3\frac{2\pi}{n}$, где $k_1+k_2+k_3=n$ и $k_i<n/2$ $(i=1, 2, 3)$, каждый из которых содержит по k_i точек, если n нечетно.*

Упражнение 1. Докажите утверждение 1, лемму и утверждение 2.

После этого, согласно утверждению 1, освещаем соответствующими прожекторами углы, симметричные относительно их общей вершины тем углам, в которых они расположены, и вся плоскость оказывается освещенной.

Алгоритм улучшения

Наметим идею решения пункта г). Расставим прожекторы по данным точкам $M_1, M_2, \ldots M_n$ произвольным образом. Если при этом не вся плоскость освещена, мы предъявим другой, «улучшенный» способ расстановки прожекторов (при этом «качество» расстановки будет оцениваться некоторой числовой функцией f). Поскольку всего расстановок прожекторов по точкам $M_1, M_2, \ldots, M_n$ лишь конечное число (равное $n!$), взяв расстановку, для которой значение функции f максимально, мы автоматически осветим полностью всю плоскость: действительно, если бы при этом не вся плоскость освещалась, мы смогли бы еще «улучшить» расстановку, получив тем самым противоречие.

Начнем реализовывать этот план. Теперь прожекторы — любые углы α_i с общей вершиной O, $0<\alpha_i<\pi$, $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=2\pi$, причем каждый из них освещает изнутри сторону некоторого выпуклого n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ (рис. 4), $\widehat{A_iOA_{i+1}}=\alpha_i$. Опустим из точки O перпендикуляры OH_i на стороны многоугольника (или их продолжения); пусть $|OH_i|=h_i$. Рассмотрим векторы $\vec{e}_i=\frac{1}{h_i^2}\overrightarrow{OH_i}$. Ясно, что $|\vec{e}_i|=\frac{1}{h_i}$ (рис. 5).

Расстановке прожекторов по точкам $M_1, M_2, \ldots, M_n$ отвечает расстановка векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ по этим точкам (мы как бы прикрепляем вектор $\vec{e}_i$ к прожектору α_i и переставляем их вместе как единое целое).

Единственный геометрический факт, нужный нам в дальнейшем и «оправдывающий» странный, на первый взгляд, выбор векторов $\vec{e}_i$, состоит в следующем:

Лемма. *Пусть прожектор α_p, помещенный в точку M, освещает точку N, а прожектор α_q — нет. Тогда $\overrightarrow{MN}\cdot\vec{e}_p>\overrightarrow{MN}\cdot\vec{e}_q$.*

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{MN}=\vec{v}$. Отложим от точки O вектор $\overrightarrow{OP}=\vec{v}$ (рис. 6). Луч $[OP)$ пересекает p-ю сторону многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ в некоторой точке K, а q-ю сторону не пересекает, поскольку прожектор α_p освещает точку N, а прожектор α_q ее не освещает.

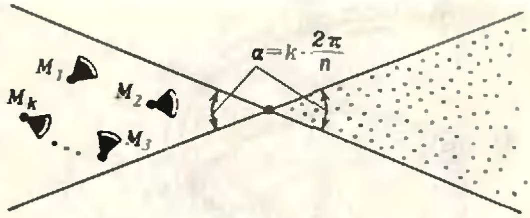


Рис. 3.

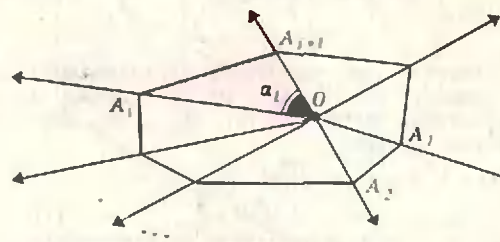


Рис. 4.

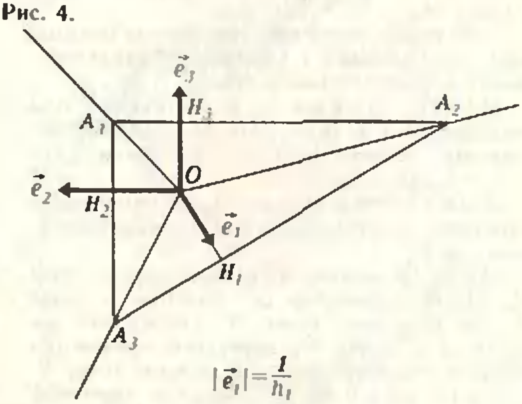


Рис. 5.

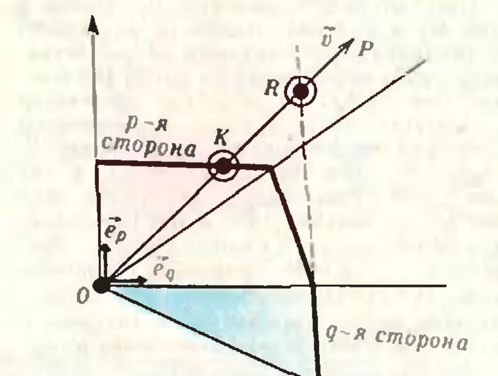


Рис. 6.

Есть две возможности: 1) луч $[OP)$ не пересекается с прямой, на которой лежит q-я сторона, и 2) луч $[OP)$ пересекает эту прямую в некоторой точке R.

В первом случае утверждение леммы очевидно, так как $\vec{v}\cdot\vec{e}_p>0$, а $\vec{v}\cdot\vec{e}_q\leq 0$.

Во втором случае очевидно неравенство $|OK|<|OR|$, и поэтому $\vec{v}\cdot\vec{e}_p=$
$=|OP|\cdot|e_p|\cdot\cos(\widehat{\vec{v},\vec{e}_p})=\frac{|OP|}{|OK|}>\frac{|OP|}{|OR|}=$
$=|OP|\cdot\frac{1}{h_q}\cos(\widehat{\vec{v},\vec{e}_q})$. Лемма доказана.

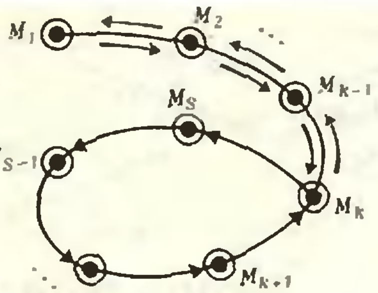


Рис. 7.

Введем теперь величину $f_\sigma(N)$, зависящую от точки N плоскости и от расстановки σ прожекторов по точкам $M_1, M_2, ..., M_n$, следующим образом:

$$f_\sigma(N) = \overrightarrow{M_1N} \cdot \vec{e}_{\sigma(1)} + \overrightarrow{M_2N} \cdot \vec{e}_{\sigma(2)} + ... + \overrightarrow{M_nN} \cdot \vec{e}_{\sigma(n)} \qquad (1)$$

($\sigma(i)$ — номер прожектора, поставленного, в точку M_i).

Следующее основное утверждение показывает, что функция $f_\sigma(N)$ может характеризовать «качество» расстановки.

Утверждение 3. *Если точка N при расстановке σ не освещена, то найдется расстановка прожекторов τ такая, что $f_\tau(N) > f_\sigma(N)$.*

Доказательство. Приведем сначала алгоритм, позволяющий «улучшить» расстановку σ.

Пусть прожектор α_i расположен в точке M_i. Пусть прожектор α_1, стоящий в точке M_1, не освещает точку N. Уберем его на время, а в точку M_1 перенесем прожектор, который после переноса уже осветит точку N.

Упражнение 2. Докажите, что такой прожектор найдется.

Пусть это будет прожектор α_2. Теперь в точке M_2, где стоял прожектор α_2, ничего нет. Поставим в эту точку один из $n-1$ оставшихся прожекторов, который после этого осветит точку N. Пусть это будет прожектор α_3. Поместим теперь в точку M_3 прожектор α_4, который после этого станет освещать N, в точку M_4 поместим прожектор α_5 и так далее, до тех пор, пока не образуется цикл (рис. 7): это означает, что в точку M_k перенесен прожектор α_{k+1}, в точку M_{k+1} — прожектор α_{k+2}, ..., в точку с номером s — прожектор α_k $(s>k)$. Прожекторы $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1}$ возвратим на свои старые места (в точки с теми же номерами). В результате точка N оказывается освещенной каждым прожектором $\alpha_k, \alpha_{k+1}, ..., \alpha_s$ (так как раньше точка N не освещалась, $s \geqslant k+1$).

Посмотрим, как изменилось число $f(N)$. Слагаемые с номерами, отличными от $k, k+1, ..., s$, в сумме (1) не изменились. А из леммы следует, что все слагаемые с номерами $k, k+1, ..., s$ после указанной перестановки увеличились.

Итак, утверждение 3 доказано. Правда, величину f_σ еще нельзя непосредственно использовать для оценки «качества» расстановки σ — ведь она зависит от точки N. Здесь дело спасает замечательное

Утверждение 4. *Для любых двух точек N_1 и N_2 разность $f_\sigma(N_1) - f_\sigma(N_2)$ не зависит от расстановки прожекторов.*

Доказательство. $f_\sigma(N_1) - f_\sigma(N_2) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M_{\sigma(i)}N_1} \cdot \vec{e}_{\sigma(i)} - \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M_{\sigma(i)}N_2} \cdot \vec{e}_{\sigma(i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{M_{\sigma(i)}N_1} - \overrightarrow{M_{\sigma(i)}N_2}) \cdot \vec{e}_{\sigma(i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{N_2N_1} \cdot \vec{e}_{\sigma(i)} = \overrightarrow{N_2N_1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \vec{e}_{\sigma(i)} = c.$$

Сумма $\sum_{i=1}^{n} \vec{e}_{\sigma(i)}$ есть постоянный вектор (не зависящий от расстановки). $\overrightarrow{N_2N_1}$ — также фиксированный вектор, и поэтому число c не зависит от расстановки прожекторов, что и требовалось доказать.

Это означает, что функцию $f_\sigma(N)$ можно заменить функцией $f_\sigma = f_\sigma(N) + \overrightarrow{NN_0} \cdot \sum_{i=1}^{n} \vec{e}_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M_{\sigma(i)}N_0} \cdot \vec{e}_{\sigma(i)}$, где N_0 — произвольная фиксированная точка плоскости

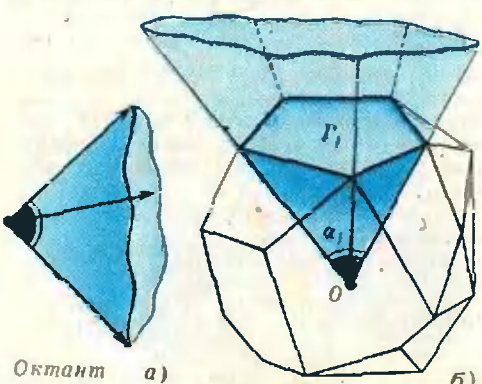
Число f_σ уже не зависит от точки N и при каждой описанной нами перестановке будет возрастать.

Идея, таким образом, полностью осуществлена: найдена «функция качества», зависящая только от расстановки прожекторов, и показано, как увеличить ее значение, если какая-нибудь точка не освещена. Так как для некоторой расстановки ω число f_ω максимально, при расстановке ω освещена вся плоскость.

Упражнение 3. Проведите доказательство пространственных вариантов задачи о прожекторах.

а) В 8 любых точках пространства можно расположить октанты (трехгранные углы с прямыми плоскими углами (см. рис. 8, а)) так, чтобы они покрыли все пространство.

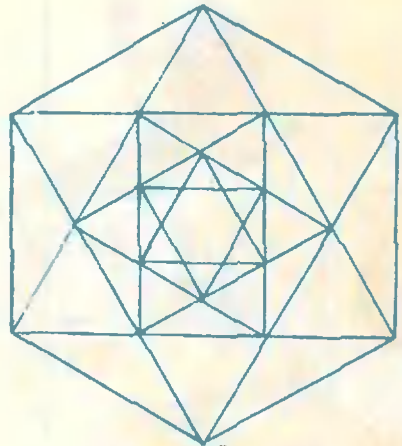
б) Пусть в пространстве заданы выпуклый многогранник с гранями $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$ и точка O внутри него, а также n точек $M_1, M_2, ..., M_n$. Каждая грань Γ_i определяет многогранный угол α_i с вершиной в O. В точке O расположено n прожекторов, причем i-й прожектор, $1 \leqslant i \leqslant n$, освещает многогранный угол α_i (тем самым все пространство полностью освещено (рис. 8, б). Докажите, что прожекторы можно перенести в точки $M_1, M_2, ..., M_n$ так, что все пространство по-прежнему будет освещено.



Октант а) б)

Рис. 8.

Квант для младших школьников



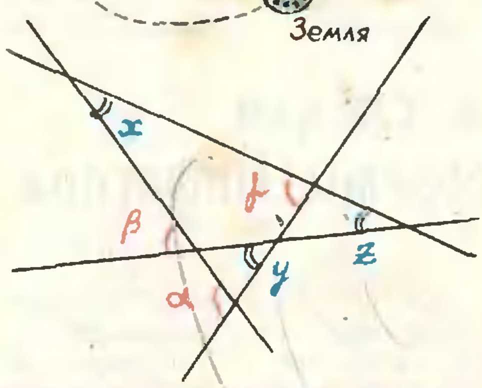
Задачи

1. В клетке таблицы $n \times n$ записаны числа -1, 0 и 1. Может ли быть так, чтобы суммы чисел по строкам, столбцам и большим диагоналям были все различны?

2. Сколько треугольников содержит фигура, изображенная на верхнем рисунке?

3. Сколько оборотов совершает Земля вокруг своей оси за один год? (Продолжительность года считать равной 365 дням.)

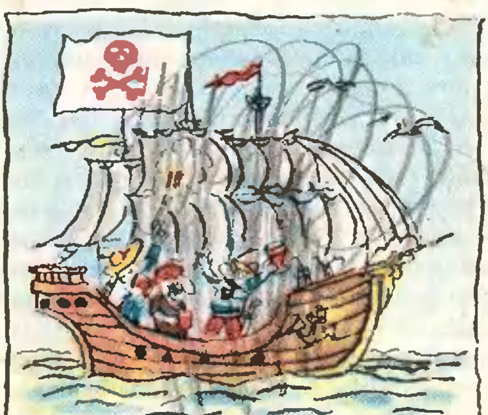
4. На плоскости расположены четыре прямые (см. рисунок). Известны углы между некоторыми из них: $\alpha = 110°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 80°$. Найдите углы между остальными парами прямых.

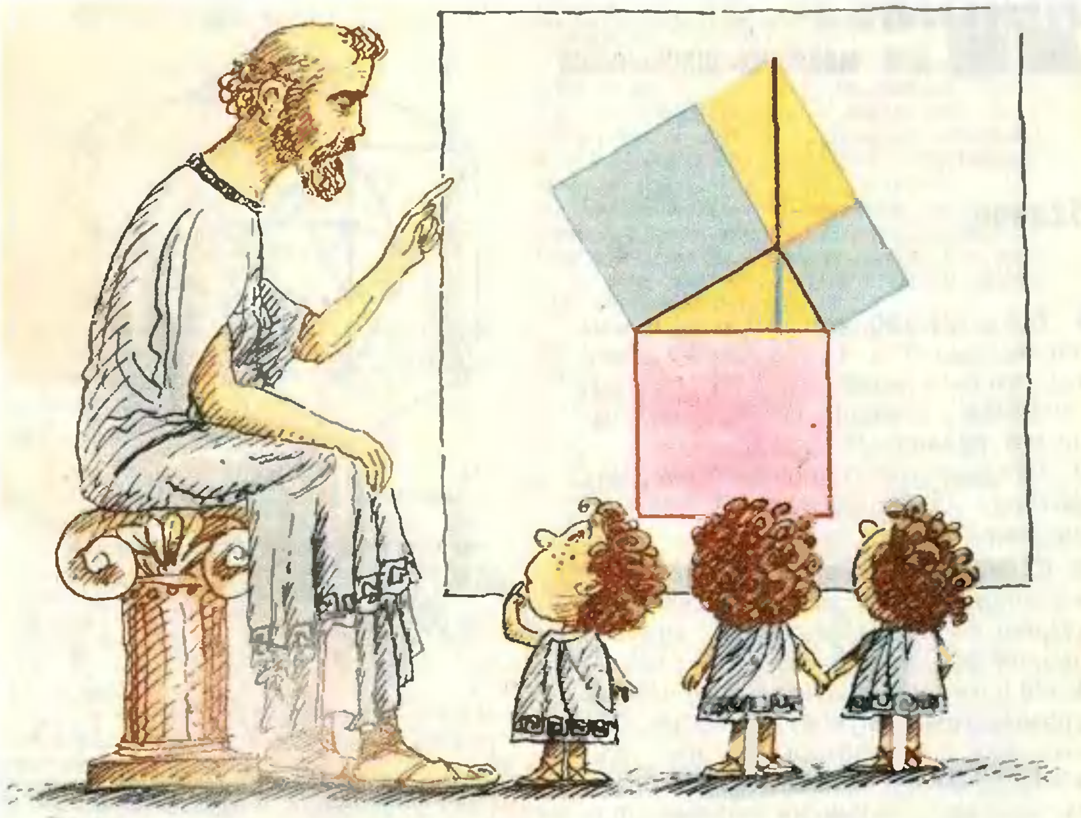


5. Найдите все такие двузначные числа, которые делятся на произведение своих цифр.

6. На пакете с фотопленкой написано: «Обрабатывать при красном свете». Получится ли на этой пленке пиратский флаг, изображенный на рисунке слева? А флаг, изображенный справа?

Эти задачи нам предложили
Т. Волошик, ученица
7 класса школы № 3
г. Белоозерска,
Ф. Бартенев, Г. Коткин,
Б. Мукушев, А. Савин





Р. Рубинов

По следам теоремы Пифагора

В нынешнем учебнике геометрии теорема Пифагора «Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов» доказывается «алгебраически», выкладкой («Геометрия 6—8», п. 67).

Евклид доказывал ее «геометрически». Он строил на сторонах прямоугольного треугольника квадраты и доказывал, что сумма площадей квадратов на катетах равна площади квадрата на гипотенузе. Сейчас мы приведем два доказательства теоремы Пифагора, использующие эту идею, а затем предъявим много других фигур, для которых выполнено то же «пифагорово соотношение», что и для квадратов.

Строим квадраты

На рисунке 1, *а* на катетах выделенного прямоугольного треугольника внутрь построены квадраты; квадрат на гипотенузе построен наружу. Везде, где один квадрат налегает на другой, стороны квадратов продолжены. Равновеликие фигуры*) окрашены в одинаковый цвет. Из рисунка видно, что треугольник, образованный из красной трапеции и желтого треугольника («красно-желтый» треугольник), равновелик треугольнику, образованному из зеленой трапеции и серого треугольника («серо-зеленый» треугольник). На рисунке 1, *б* на катетах исходного треугольника (теперь белого) квадраты построены внешним образом, причем в одном из них серо-зеленый треугольник заменен на равновеликий ему красно-желтый. Заменив еще раз зеленую трапецию с серым треугольником на красную трапецию с жел-

*) То есть фигуры, имеющие одинаковую площадь.

тым треугольником, получим нужное равенство площадей.

Еще одно доказательство получается из рисунков 2, *а* — *е*; оно использует тот факт, что синяя высота в нашем прямоугольном треугольнике (см. заставку) и красная диагональ прямоугольника, образованного продолжениями сторон квадратов, лежат на одной прямой (докажите это!).

Обобщаем теорему Пифагора

Итак, в прямоугольном треугольнике

$$a^2+b^2=c^2,$$

где a, b, c — его катеты и гипотенуза. Заметим теперь, что если у нас есть фигуры A, B и C, площади S_A, S_B и S_C которых равны, соответственно, ka^2, kb^2 и kc^2, то $S_A+S_B=S_C$. В частности, «пифагорово соотношение» выполняется для площадей подобных фигур, построенных на сторонах прямоугольного треугольника*). (Это замечание может пригодиться для вычисления площадей фигур, которые мы будем рисовать ниже.)

На сторонах прямоугольного треугольника мы будем теперь строить секторы (рис. 3), полукруги (рис. 4), луночки (рис. 5), дуговые треугольники (рис. 6).

Комбинируя секторы и круги, луночки и дуговые треугольники, мы получим рисунки 7 и 8: на них

*) Мы говорим, что подобные фигуры F_a, F_b, F_c построены на сторонах a, b, c треугольника ABC, если при подобии $F_x \to F_y$ сторона x переходит в сторону y ($x, y \in \{a, b, c\}$).

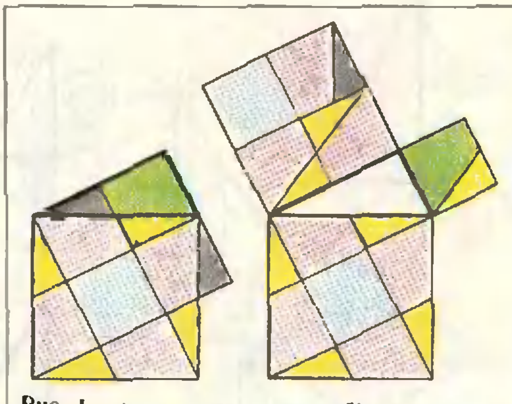
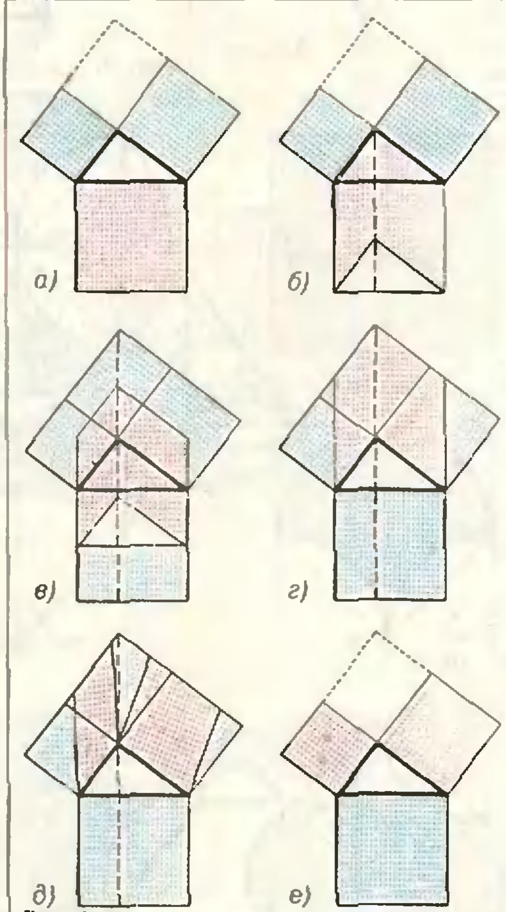


Рис. 1. а) б)



а) б) в) г) д) е)

Рис. 2.

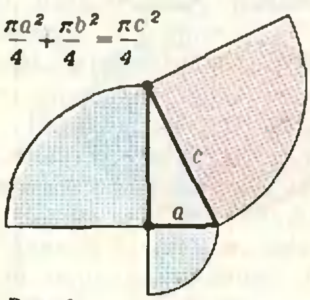


Рис. 3.

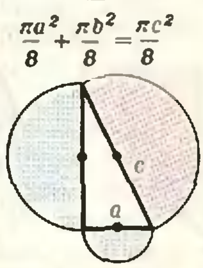


Рис. 4

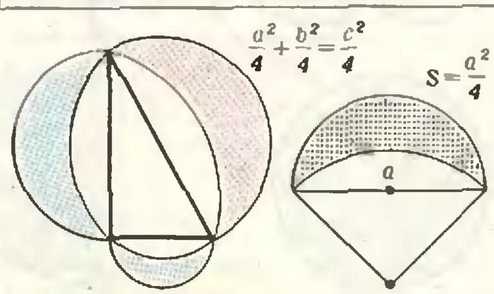


Рис. 5. а) б)

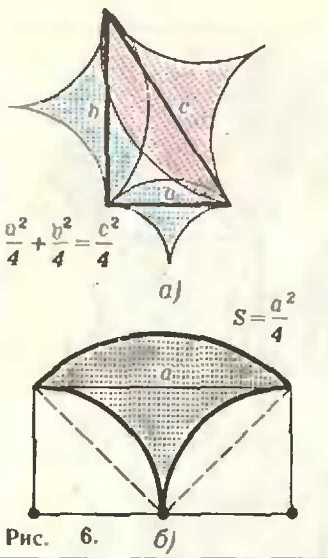


Рис. 6.

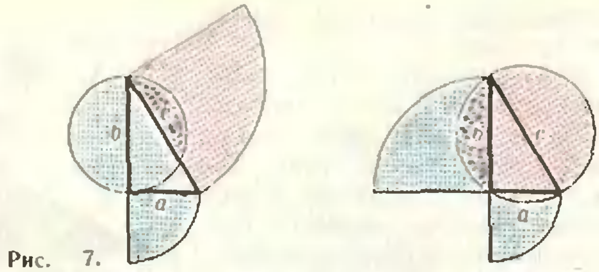


Рис. 7.

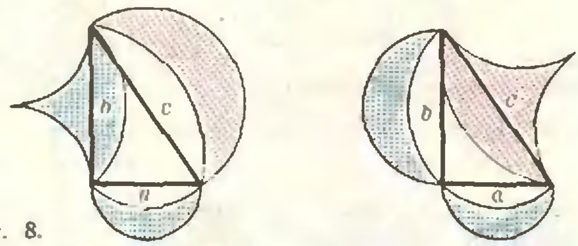


Рис. 8.

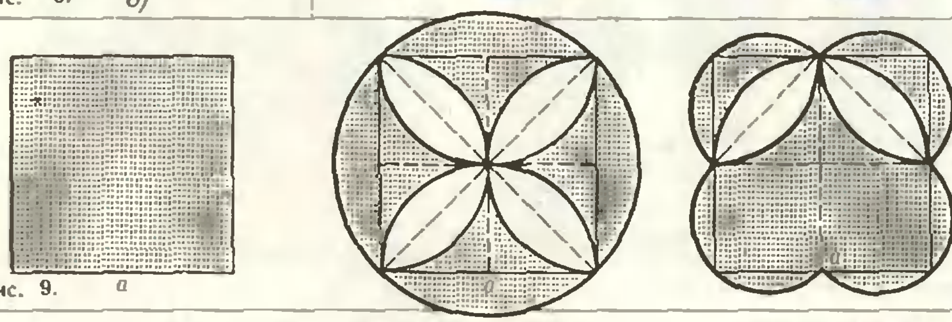


Рис. 9.

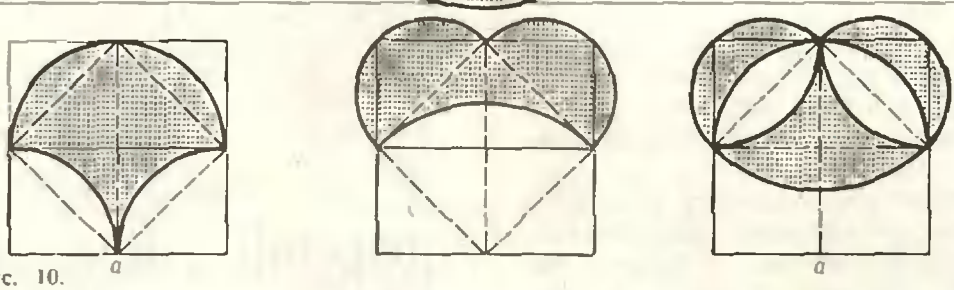


Рис. 10.

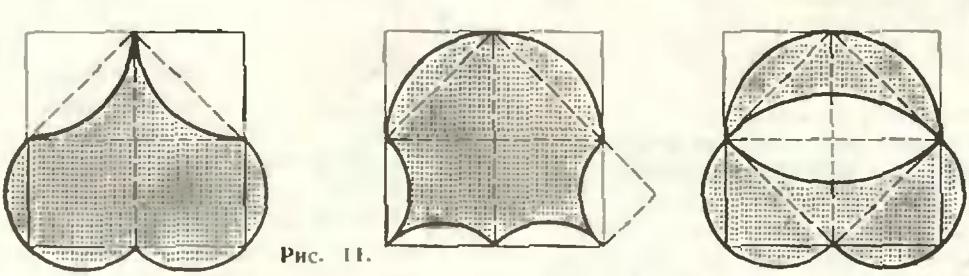


Рис. 11.

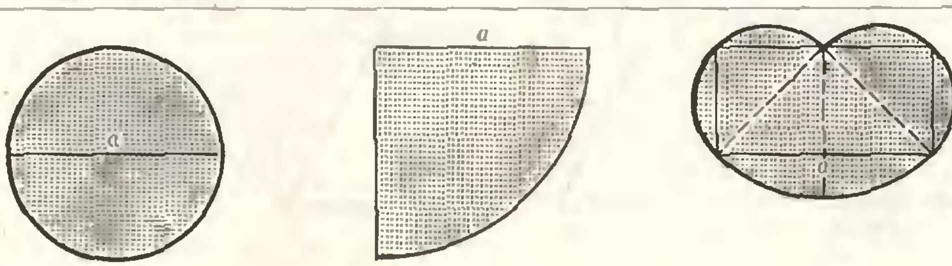


Рис. 12.

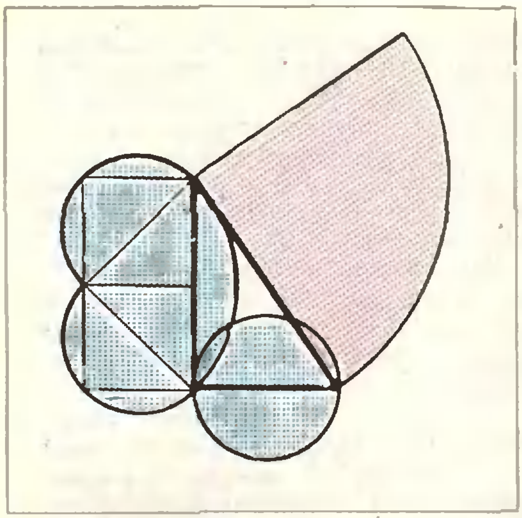


Рис. 13.

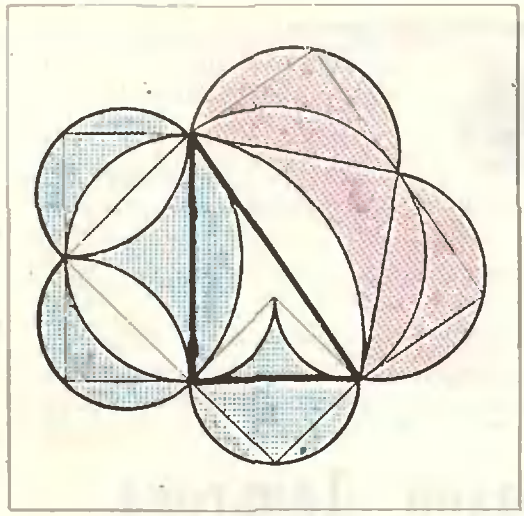


Рис. 15.

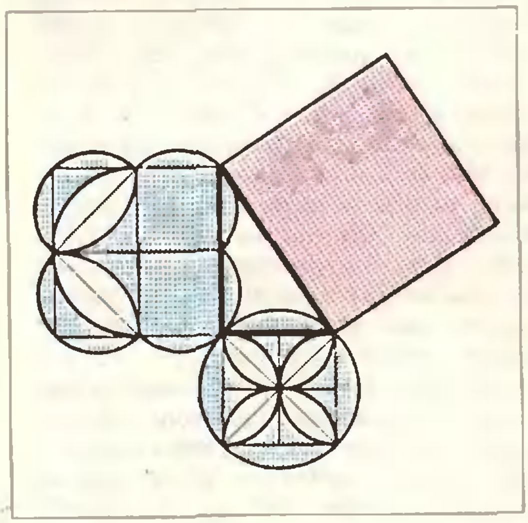


Рис. 14.

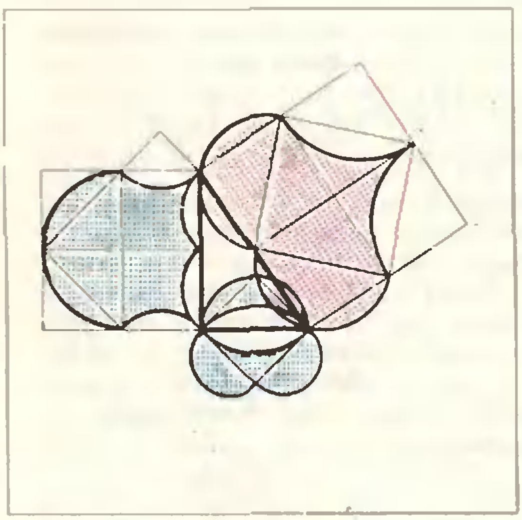


Рис. 16.

снова сумма площадей синих фигур равна площади красной фигуры.

На рисунках 9—12 изображено по три равновеликие фигуры: на рисунке 9 — площади a^2 (a — сторона квадрата), на рисунке 10 — площади $a^2/2$, на рисунке 11 — площади $3a^2/4$, на рисунке 12 — площади $\pi a^2/4$ (проверьте это!). Комбинируя их на катетах и гипотенузе прямоугольного треугольника, получим серию рисунков 13—16.

В заключение мы предлагаем вам доказать, что сумма площадей трех синих криволинейных треугольников, построенных на сторонах прямоугольной трапеции, диагональ которой перпендикулярна боковой стороне (рис. 17), равна площади такого же треугольника, построенного на большем основании. Теперь вам понадобится для этого не более двух минут!

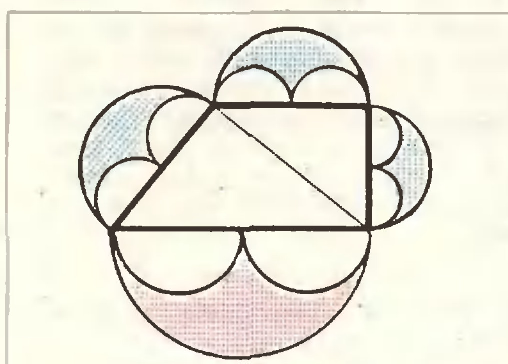


Рис. 17.

С. Коршунов

Закон Дальтона

Среди задач на законы идеальных газов часто встречаются задачи, в которых речь идет о смеси нескольких газов. Уравнение газового состояния $pV = \frac{m}{\mu} RT$ в таких случаях неприменимо, так как неизвестно, что понимать под молярной массой смеси μ. Как же быть?

Очевидно, что каждый из газов в смеси вносит свой вклад в общее давление. При этом каждый газ ведет себя независимо от других и подчиняется уравнению Менделеева — Клапейрона

$$p_i V = \frac{m_i}{\mu_i} RT.$$

Давление p_i, создаваемое в сосуде каким-либо компонентом, когда остальные компоненты удалены из сосуда, называют парциальным давлением. Английский ученый Дальтон экспериментально установил, что для достаточно разреженных газов давление газовой смеси равно сумме парциальных давлений компонентов смеси:

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n.$$

Этот закон в дальнейшем назвали законом Дальтона.

Теперь легко найти уравнение, описывающее состояние газовой смеси. Для этого нужно в равенство, выражающее закон Дальтона, подставить значения парциальных давлений, полученные из уравнений Менделеева — Клапейрона:

$$pV = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \ldots + \frac{m_n}{\mu_n}\right) RT,$$

или

$$pV = (\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n) RT,$$

где ν_i — число молей соответствующего компонента.

Рассмотрим несколько конкретных задач. Все они предлагались в свое время на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт.

Задача 1. *Закрытый сосуд разделен на две равные части твердой неподвижной полупроницаемой перегородкой. В первую половину сосуда вводится смесь аргона и водорода при давлении $p = 1{,}5 \cdot 10^5$ Па, во второй половине — вакуум. Через перегородку может диффундировать только водород. После окончания процесса диффузии давление в первой половине оказалось равным $p' = 10^5$ Па. Определите отношение масс аргона и водорода в сосуде. Молярная масса аргона $\mu_{\text{а}} = 40$ г/моль, водорода — $\mu_{\text{в}} = 2$ г/моль. Считайте, что температура во время процесса поддерживается постоянной.*

Процесс диффузии протекает довольно медленно, поэтому сразу после введения смеси в первую половину сосуда давление p создается смесью газов:

$$p = p_{\text{а}} + p_{\text{в}}.$$

Здесь $p_{\text{а}}$ — парциальное давление аргона и $p_{\text{в}}$ — парциальное давление водорода. Их можно найти из уравнений состояния

$$p_{\text{а}} V = \frac{m_{\text{а}}}{\mu_{\text{а}}} RT \text{ и } p_{\text{в}} V = \frac{m_{\text{в}}}{\mu_{\text{в}}} RT,$$

где V — объем половины сосуда, $m_{\text{а}}$ и $m_{\text{в}}$ — массы аргона и водорода соответственно, а T — температура сосуда. Подставляя давления $p_{\text{а}}$ и $p_{\text{в}}$ в выражение для давления смеси p, получим

$$pV = \left(\frac{m_{\text{а}}}{\mu_{\text{а}}} + \frac{m_{\text{в}}}{\mu_{\text{в}}}\right) RT = \left(\frac{m_{\text{а}}}{m_{\text{в}}} + \frac{\mu_{\text{а}}}{\mu_{\text{в}}}\right) \frac{m_{\text{в}}}{\mu_{\text{а}}} RT. \quad (1)$$

Так как перегородка для водорода проницаема, после окончания процесса диффузии водород займет весь объем сосуда, причем плотность водорода везде будет одной и той же. Следовательно, в первой половине останется ровно половина всего водорода, и его парциальное давление $p'_в$ уменьшится в 2 раза: $p'_в = p_в/2$. Давление же аргона $p_а$ не изменится. Тогда

$$p' = p_а + p'_в,$$

или

$$p'V = \left(\frac{m_а}{\mu_а} + \frac{1}{2}\frac{m_в}{\mu_в}\right)RT =$$
$$= \left(\frac{m_а}{m_в} + \frac{1}{2}\frac{\mu_а}{\mu_в}\right)\frac{m_в}{\mu_а}RT. \quad (2)$$

Разделив уравнение (2) на уравнение (1), после несложных преобразований найдем искомое отношение:

$$\frac{m_а}{m_в} = \frac{\mu_а}{\mu_в}\,\frac{2p' - p}{2(p - p')} = 10.$$

З а д а ч а 2. *Цилиндрический сосуд разделен подвижным, хорошо проводящим тепло поршнем на две части. В начальный момент справа от поршня находится кислород, а слева — смесь гелия и водорода; масса кислорода $m_к = 32$ г. Поршень при этом располагается посередине сосуда. Материал поршня, непроницаемый для водорода и кислорода, оказался проницаемым для гелия, в результате чего поршень начал перемещаться и окончательно расположился на расстоянии четверти длины цилиндра от левой стенки. Определите массы гелия и водорода в смеси.*

В первый момент кислород и смесь водорода с гелием занимают одинаковые объемы; температуры в обеих частях сосуда одинаковы (так как поршень хорошо проводит тепло); давления слева и справа от поршня также одинаковы (потому что поршень находится в равновесии, а процесс диффузии происходит гораздо медленнее, чем процесс выравнивания давлений). Это позволяет сделать вывод о том, что в начальный момент число молей газа в обеих частях сосуда одно и то же, то есть слева от поршня находится 1 моль смеси гелия и водорода.

В конечном состоянии давления кислорода $p_к$ и водорода $p_в$ оказываются одинаковыми (так как давление гелия в обеих частях сосуда одно и то же, а поршень находится в равновесии):

$$p_к = p_в.$$

Из уравнения Менделеева — Клапейрона для кислорода и водорода имеем

$$\frac{3}{4}p_к V = \frac{m_к}{\mu_к}RT \text{ и } \frac{1}{4}p_в V = \frac{m_в}{\mu_в}RT,$$

где $m_к$ и $m_в$ — массы кислорода и водорода, а $\mu_к$ и $\mu_в$ — их молярные массы. Отсюда находим массу водорода:

$$m_в = m_к\frac{\mu_в}{3\mu_к} = \frac{2}{3}\text{ г},$$

что соответствует числу молей $\nu_в = 1/3$. Следовательно, число молей гелия $\nu_г = 2/3$, а масса гелия в смеси

$$m_г = \mu_г\nu_г = 8/3\text{ г}.$$

З а д а ч а 3. *В сосуде находится смесь азота и водорода. При температуре T, когда азот полностью распался на атомы, а водород находится еще в молекулярном состоянии, давление смеси равно p. При температуре $2T$, когда оба газа полностью диссоциировали, давление в сосуде стало $3p$. Каково отношение числа молей азота и водорода?*

Обозначим через $\nu_а$ число молей азота в смеси, а через $\nu_в$ — число молей водорода. При температуре T, когда водород находится еще в молекулярном состоянии, уравнение состояния газовой смеси имеет вид

$$pV = (2\nu_а + \nu_в)RT$$

(здесь учтено, что азот полностью распался, и его число молей удвоилось), а при температуре $2T$, когда оба газа полностью продиссоциировали, —

$$3pV = 2(2\nu_а + 2\nu_в)RT.$$

Разделив одно уравнение на другое, получим

$$\frac{\nu_а}{\nu_в} = \frac{1}{2}.$$

* * *

Уравнение состояния газовой смеси

$$pV = (\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n)RT$$

можно представить в другом виде. Действительно, количество молей ν_i каждого газа равно отношению числа молекул N_i этого газа к числу Авогадро N_A, поэтому

$$pV=(N_1+N_2+...+N_n)\frac{R}{N_A}T.$$

Если обозначить общее число молекул в смеси через N и учесть, что отношение R/N_A — это постоянная Больцмана k, то уравнение состояния можно записать так:

$$pV=NkT.$$

Заметим, что точно так же выглядит уравнение Менделеева — Клапейрона для однокомпонентного газа. Значит, пользоваться такой записью уравнения состояния можно как для одного газа, так и для газовой смеси.

Задача 4. *В сосуде объемом $V=1$ л хранится тритий (изотоп водорода с атомной массой $A=3$). Масса трития $m=1$ г. За 12 лет половина ядер трития превращается в ядра гелия. Найдите давление в сосуде в конце этого срока хранения. Температура газа поддерживается равной $t=27°$C. Образовавшийся гелий имеет атомную массу $A=3$.*

Давление трития в начале срока хранения равно

$$p_1=\frac{N}{V}kT=\frac{m}{\mu}R\frac{T}{V}$$

(здесь N — число молекул трития, $\mu=6$ г/моль — молярная масса трития).

Через 12 лет $N/2$ молекул трития превращается в N молекул гелия (каждая молекула трития, подобно обычному водороду, содержит 2 атома). Давление p_2 в сосуде создается смесью трития и гелия, общее число молекул которых равно $N/2+N=3/2N$:

$$p_2=\frac{3}{2}NkT=\frac{3}{2}p_1=\frac{3}{2}\frac{m}{\mu}R\frac{T}{V}\approx 6{,}3\cdot 10^5\ \text{Па}.$$

Задача 5. *Имеется 1 м^3 сухого воздуха и 1 м^3 влажного воздуха при одних и тех же давлении и температуре. Масса какого воздуха больше: сухого или влажного?*

Из уравнения состояния газовой смеси $pV=NkT$ следует, что число молекул N влажного и сухого воздуха одно и то же, так как обе смеси имеют одинаковые объемы, давления и температуры. Сухой воздух состоит, в основном, из азота, молекулы которого имеют относительную молекулярную массу $M_а=28$, и из кислорода с относительной молекулярной массой $M_к=32$. У влажного воздуха часть этих молекул заменена более легкими молекулами воды с $M_{воды}=18$. Следовательно, масса влажного воздуха меньше, чем сухого.

* * *

В заключение заметим, что довольно часто уравнение состояния газовой смеси записывают в виде

$$pV=\frac{m}{\mu}RT,$$

как и для однокомпонентного газа. При этом молярная масса смеси μ подбирается такой, чтобы выполнялось равенство $\frac{m}{\mu}R=Nk$, где m — масса, а N — полное число молекул смеси. Например, для воздуха $\mu=29$ г/моль.

Упражнения

1. В сосуде объемом $V=0{,}5$ л находится $m=1$ г парообразного йода. При температуре $t=1000°$C давление в сосуде оказалось равным $p=93$ кПа. Найдите степень диссоциации молекул йода I_2 на атомы при этих условиях. Молярная масса йода равна $\mu=254$ г/моль. Примечание. Степенью диссоциации α называют отношение числа диссоциированных молекул к общему числу молекул.

2. Под тяжелый поршень, скользящий без трения внутри вертикально расположенного откачанного цилиндра, вводится некоторое количество смеси водорода и гелия, в результате чего поршень располагается посередине цилиндра. С течением времени поршень смещается вниз, так как материал, из которого он изготовлен, оказался проницаемым для гелия (для водорода он непроницаем). Окончательное положение равновесия поршня находится на одной трети высоты цилиндра. Каково отношение масс гелия и водорода в смеси? Температуру можно считать неизменной.

3. Определите отношение массы 1 м^3 сухого воздуха к массе 1 м^3 воздуха с относительной влажностью $\varphi=50\%$. Обе порции воздуха взяты при давлении $p=0{,}1$ МПа и температуре $t=20°$C. Давление насыщенных водяных паров при температуре 20°C равно $p_0=2{,}3$ кПа.

Говорят студенты

В газете Московского физико-технического института «За науку» от 23 января 1981 года были опубликованы ответы студентов на вопросы анкеты МФТИ. Мы думаем, что этот материал будет интересен и нашим читателям — будущим студентам.

Они разные по возрасту и характеру, в отношении к учебе и к трудностям. Некоторые их ответы серьезные, другие — полушутливые. Разговор шел в сессию: это уж у кого какое было настроение.

Итак, на вопросы анкеты отвечают физтехи:

Почему вы пошли на физтех?

— Хотелось проверить свои силы — способность заниматься серьезным делом.

— Из принципа. Надо было кому-то что-то доказать.

— В школе очень нравилась физика. Ну, и мальчишеское тщеславие подталкивало туда, где труднее.

— Учился в ЗФТШ и увлекался математикой. Физтех выбрал еще в 8 классе.

Трудными ли были вступительные экзамены?

— Нет. И это было первое, что потрясло на физтехе.

— Тогда они мне показались трудными.

— Сданный хорошо экзамен не труден.

— По физике — нет, по математике — да.

— Вступительные экзамены — ерунда по сравнению с первой сессией.

Что помогло вам поступить?

— Уверенность в себе и знания.

— ЗФТШ и интерес к физике.

— Прежде всего — удача; ну и... готовился.

— Мне отчаянно повезло!

Первые впечатления (самое яркое событие)?

— Значок мастера спорта СССР на груди экзаменатора-физика.

— Сама атмосфера физтеха.

— В первый день занятий, потратив 5 часов, получил пропуск в зал мини-ЭВМ.

— Первая в жизни тройка.

Трудно ли учиться на физтехе?

— Труднее, чем не учиться.

— Да. Приходится разбираться в таких науках, которые в будущем пригодятся лишь отчасти. А то, что тебя реально интересует, изучаешь сам, в свободное время.

— Если учиться, то не очень.

— Очень. Из-за сессий.

— Трудно. Пятерки в школе не стоили никакого труда. Все познается в сравнении.

— Наверно, трудно. Но когда нравится, этого не видишь.

Что вы делаете в свободное время?

— Занимаюсь литературной деятельностью.

— Пытаюсь вырасти над собой.

— Люблю читать. Но главное — это танцевальные занятия. Считаю танцы и отдыхом, и работой одновременно. Они помогают проникнуть мне в мир искусства.

— Странный вопрос! Изучаю квантовую механику.

— Ничего. На то оно и свободное.

Что наиболее характерно для МФТИ, для его студентов?

— Работа в импульсном режиме; умение «взяться», «напрячься» и форсировать какой угодно материал.

— Скромность для них точно не характерна.

— Нет априорного преклонения ни перед чем.

Существует ли, по-вашему, «дух физтеха»?

— Существует. Это стремление быть первым в любом деле, за которое берешься.

— Физтехи не боятся трудных задачек.

— Несомненно. Например, он в манере решать задачи «из соображений симметрии», т. е. из самых туманных и сомнительных первоначальных предположений.

— Говорят, что существует. В науке этот дух, может, и хорош, а вообще я его не люблю.

Анкета

Уважаемый читатель!

Для улучшения работы журнала и более полного удовлетворения ваших интересов редакция просит вас ответить на следующие вопросы (ответы присылайте на отдельном листке бумаги, сохранив нумерацию вопросов). В части вопросов достаточно перечислить рубрики или написать «да» или «нет», в других — желательно дать подробный ответ. Редакция будет вам очень признательна, если дополнительно вы напишете свое общее мнение о журнале, приведете примеры, когда он вам помог (и чем), укажете, что вас наиболее интересует в журнале, чем он еще мог бы вам помочь.

Анкету просим высылать до 1 февраля 1982 г. по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, Анкета «Кванта».

1. Ваши фамилия, имя, отчество, возраст, место учебы (город, школа, класс) или работы (профессия, специальность), круг интересов (математика, физика).

2. С какого года вы читаете «Квант»?

3. Сколько человек читают ваши номера «Кванта»?

4. Материалы каких рубрик журнала вас больше всего интересуют и доступны для вас? Какие не интересуют или не нравятся?

5. Назовите 2—3 лучшие статьи (за 1979—1981 годы) из разных рубрик журнала.

6. Решаете ли вы задачи из Задачника «Кванта»? Назовите номера 10 лучших задач, условия или решения которых опубликованы в 1980—1981 годы.

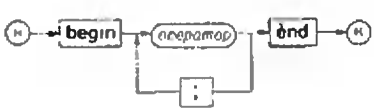
7. Статьи на какие темы вы хотели бы видеть в журнале в 1982 году?

Заочная школа программирования

Урок 16: Условный оператор и оператор выбора. Операторы цикла. Процедуры и функции в Паскале.

При изучении языка Рапира вы привыкли к тому, что в условном и циклическом предписаниях после слов ТО и ИНАЧЕ и после знака :: можно записывать сколько угодно предписаний (до слова ВСЕ). В языке Паскаль эти операторы имеют другую структуру: в них разрешается использовать только один оператор, как и в Робике. Если по смыслу задачи нужно использовать несколько операторов, приходится использовать специальную конструкцию — составной оператор.

Составной оператор — это последовательность операторов, заключенная в операторные скобки **begin-end** Синтаксическая диаграмма для описания составного оператора имеет вид:



Из диаграммы видно, что операторы, входящие в составной оператор, должны быть разделены точкой с запятой.

Условный оператор описывается диаграммой:

Здесь и во всех следующих диаграммах оператор может быть составным. Условие может быть простым или сложным. Сложное условие образуется с помощью логических операций AND, OR и NOT. При записи условий используются следующие знаки сравнения: = равно

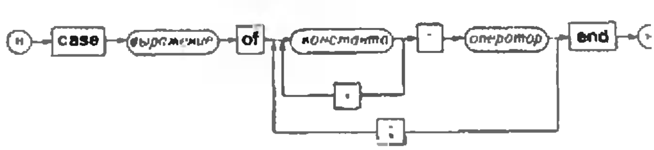
= равно
<> не равно
> больше
< меньше
<= меньше или равно
>= больше или равно

Например, после выполнения последовательности операторов

$x := k$ **mod** 5;
$a := k$ **mod** 4;
if $(x=0)$ AND $(a=1)$
then *writeln*('ДА')
else *writeln*('НЕТ');

будет отпечатано ДА, если число k кратно 5 и дает при делении на 4 в остатке 1, и НЕТ — в противном случае.

При помощи условного оператора можно выбрать одну из двух возможностей для дальнейшего выполнения программы. На практике часто бывает нужно выбрать одну возможность не из двух, а из большего числа вариантов. В этом случае используют *оператор выбора — оператор* **case**, который может быть описан диаграммой:



Оператор выбора работает так. Сначала вычисляется значение выражения, затем отыскивается константа, равная вычисленному значению выражения, и выполняется оператор, записанный после этой константы. Если такой константы нет, то будет выполняться оператор, следующий за оператором выбора. Нужно заметить, что выражение и константа должны быть одного и того же типа.

Рассмотрим пример. Каждая школьная отметка обозначается цифрой и имеет название. Например, 3 — удовлетворительно. По следующей программе вводится значение оценки, записанное цифрой, а печатается ее название.

```
program оценки (output, input);
var отм:1..5;
begin
  read(отм);
  case отм of
    5: writeln('ОТЛИЧНО');
    4: writeln('ХОРОШО');
    3: writeln('УДОВЛ.');
    2: writeln('ПЛОХО');
    1: writeln('ОЧЕНЬ ПЛОХО')
  end
end.
```

4

Программа этого примера напечатает слово ХОРОШО.

Задание **16.1.** *Дана система команд самоходного аппарата Кибик:*

команда	действие
1	проехать 100 м на север
2	проехать 100 м на юг
3	проехать 100 м на запад
4	проехать 100 м на восток

Составьте программу, осуществляющую ввод координат начального положения Кибика и одну команду, а затем печатающую координаты точки, в которой будет находиться Кибик после исполнения этой команды.

Комментарий

Если вы попробуете разобраться в чужой, достаточно сложной программе, вы встретитесь с различными трудностями: вам будут понятны не все обозначения, назначение тех или иных переменных, использованные алгоритмы и т. д. Для того чтобы в вашей программе легче было разобраться другому человеку, она может быть дополнена словесными пояснениями, называемыми *комментариями.*

Комментарии не влияют на выполнение программы, их назначение состоит в том, чтобы помочь человеку, читающему программу, лучше и быстрее разобраться в структуре программы, пояснить смысл и назначение выбранного алгоритма, отметить те или иные особенности программы. Комментарии нужно включать в программу в процессе ее написания.

В Паскале любой текст, заключенный в фигурные скобки, рассматривается как комментарий. Комментарий может быть вставлен в любом месте программы. Далее, при выдаче текста программы на печать, комментарий печатается вместе с программой.

Операторы цикла

В Паскале различают три вида оператора цикла: цикл с условием продолжения, цикл с условием окончания и цикл с параметром.

Цикл с условием продолжения описывается диаграммой:

Работа этого оператора аналогична работе оператора цикла ПОКА в Рапире: тело цикла выполняется до тех пор, пока истинно условие. Тело цикла — это единственный (быть может, составной) оператор.

Рассмотрим программу для вычисления значений функции $F(n) = n! = 1*2*...*n$.

Напомним, что $0! = 1$ и имеет место рекуррентное соотношение $F(k) = k*F(k-1)$.

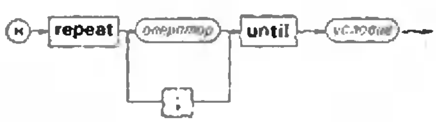
```
program факт1 (output, input);
var f,k,n; integer;
begin
  read(n); {n>=0}
  f:=1; k:=0;
  while k<>n do
    begin {f=k!}
      k:=k+1; f:=f*k
    end;
    {f=n!}
    writeln('n-',n,' n!=',f)
end.
```

5

После исполнения этой программы будет напечатано: $n=5$ $n!=120$.

Задание **16.2.** *Система команд Кибика дополнена командой 0 — закончить работу. Используя задание* 16.1, *составьте программу, которая вводит координаты начального положения Кибика и программу его движения (одну команду за другой), а также печатает координаты конечной точки маршрута и чертит путь движения Кибика (с помощью процедур системы ШПАГА).*

Цикл с условием окончания описывается диаграммой:



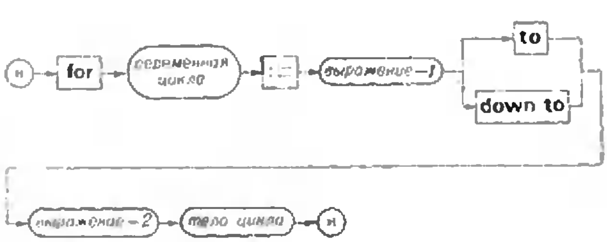
В этом случае сначала выполняется тело цикла, а потом проверяется условие. Выход из цикла происходит в случае, когда условие истинно. Особенность этого цикла состоит в том, что тело цикла всегда выполняется хотя бы один раз, даже если условие сразу истинно.

Запишем теперь программу, вычисляющую значения функции $F(n)=n!$, используя оператор цикла с условием окончания.

```
program факт2(output, input);
var f,k,n:integer;
begin
  read(n); f:=1; k:=1;
  repeat
    f:=f*k; k:=k+1
  until k>n;
  writeln('n=',n,' n!=',f)
end.
```

Сравните условия в этих двух программах! В первом случае тело цикла повторяется при истинном значении условия, а во втором истинное условие — признак окончания работы цикла.

Цикл с параметром описывается диаграммой:



Значение выражения—1 — начальное значение переменной цикла, а значение выражения—2 — ее конечное значение. Тип переменной цикла должен быть скалярным (кроме *real*). Работа этого оператора цикла состоит в следующем. Сначала переменная цикла получает начальное значение, и если оно не превосходит конечного значения, выполняется тело цикла. Затем переменная цикла принимает следующее значение, полученное при помощи функций *succ**) (в случае **to**) или *pred* (в случае **downto**), и опять выполняется тело цикла. В наиболее распространенном случае, когда переменная цикла принимает значения типа *integer*, ее значение изменяется на $+1$ (в случае **to**) и на -1 (в случае **downto**). Так происходит до тех пор, пока значение переменной цикла не превзойдет ее конечного значения.

Обратите внимание, что в первых двух типах циклов тело цикла обязательно должно содержать оператор, изменяющий значение переменной цикла (иначе произойдет зацикливание!), а в цикле с параметром наличие такого оператора приведет к ошибке.

Следующая программа отпечатает все пары целых чисел $(x; y)$, являющиеся решениями уравнения $2y-x^2=4$, если $x\in[-50; 25]$, $y\in[100; 300]$.

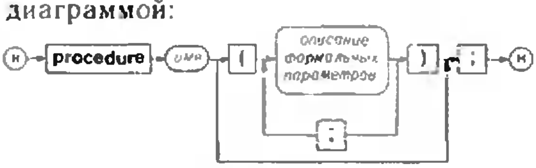
```
program корни (output);
var счкор,x,y,i,j:integer;
begin
  счкор:=0; {число корней}
  for i:=-50 to 25 do
    for j:=100 to 300 do
      if 2*y-x*x=4 then
      begin
        счкор:=счкор+1;
        writeln('x=',x,' y=',y)
      end;
  if счкор=0
    then writeln('корней нет')
end.
```

Задание **16.3.** *Составьте программу для нахождения суммы* $s=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$. *Предусмотрите ввод числа n.*

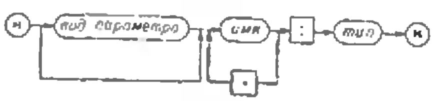
*) О функциях *succ* и *pred* рассказано ниже.

Процедуры и функции

Описания процедуры и функции в Паскале имеют такую же структуру, как и вся программа. Отличие состоит только в форме заголовка. *Заголовок процедуры* описывается диаграммой:

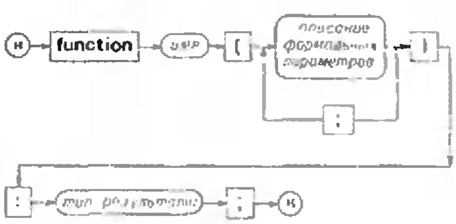


Формальные параметры описываются диаграммой:



Подробно о видах параметров и способах их передачи при вызове процедур будет рассказано в одном из следующих уроков.

Заголовок функции описывается диаграммой*):



Тип результата функции должен быть скалярным. Опишем в виде процедуры, а затем в виде функции, программу, вычисляющую значения функции $F(n)=n!$.

```
procedure факт1 (n:integer);
var k,f:integer;
begin
  f:=1; k:=0;
  while k<>n do
    begin
      k:=k+1; f:=f*k
    end;
  writeln('n=',n,'n!=',f)
end;
function  факт2 (n:integer) :integer;
var k,f:integer;
begin
  f:=1; k:=1;
  repeat
    f:=f*k; k:=k+1
  until k>n;
  факт2:=f
end;
```

Пусть теперь нужно найти значение $C=\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Используя функцию *факт 2*, легко записать соответствующий оператор присваивания:

c:=*факт2*(*n*)/(*факт2*(*k*)**факт2*(*n*—*k*))

Стандартные функции

В Паскале можно использовать все стандартные функции Рапиры: *sin, cos, exp, ln, arctan* и функции *abs, sqr, sqrt, arcsin, odd, round, trunc, succ, pred*.

$abs(x)=|x|$, $sqr(x)=x^2$, $sqrt(x)=\sqrt{x}$.

Результат функции *odd*(*x*) есть **true**, если *x* — нечетное число, и **false** при *x* четном.

Функция *round* округляет значение действительного числа, а функция *trunc* отбрасывает его дробную часть. Например, *round* (5.7)=6, *trunc* (5.7)=5.

Функции *succ* и *pred* применимы к любому скалярному типу (кроме *real*). Результат функции *succ*(*x*) есть следующее за *x* значение в описании типа, а функция *pred*(*x*) — предшествующее *x* значение.

Опишем тип *неделя* — (*пн, вт, ср, чт, пт, сб, вск*). Тогда *succ*(*ср*)=*чт*, *pred*(*ср*)=*вт*.

Результатом выполнения цикла

for *день*:=*пн* **to** *вск* **do**
writeln(*день*);

будет печать всех значений данного типа:

*пн вт ср чт пт сб вск**).

Задание 16.4. *Опишите функцию степ для вычисления x^n с параметрами x:real, n:integer.*

Задание 16.5. *Опишите процедуру с параметром n:integer для вычисления суммы $S=1^3+2^3+\ldots+\ldots+n^3$.*

Указание. Используйте функцию *степ* из задания 16.4.

И. Юнерман

*) На диаграмме не показана обходная стрелка, начинающаяся после поля имя и кончающаяся перед полем с двоеточием.

*) Разумеется, машина напечатает эти значения в столбик.

XV Всесоюзная олимпиада школьников

В. Вавилов, А. Земляков

Олимпиада по математике

С 15 по 22 апреля в Алма-Ате состоялся заключительный этап XV Всесоюзной олимпиады школьников по математике. В нем приняло участие 148 школьников: 39 восьмиклассников, 47 девятиклассников и 62 десятиклассника. Все эти ребята — победители республиканских и зональных олимпиад, а также школьники, получившие дипломы I и II степени на заключительном этапе XIV Всесоюзной олимпиады.

В этом году олимпиада была посвящена XXVI съезду Коммунистической партии Советского Союза.

Заключительный этап олимпиады проходил в два тура, которые состоялись 17 и 19 апреля. В каждый из дней школьникам было предложено по четыре задачи, на решение которых отводилось по 5 часов. При отборе задач методическая комиссия придерживалась тех же принципов, что и в прошлом году («Квант», 1980, № 11, с. 45). Ниже мы приводим условия всех задач; в скобках рядом с условием каждой задачи указано, кто ее предложил. В конце статьи вы найдете решения всех задач, не вошедших в Задачник «Кванта» («Квант», 1981, № 7).

Задачи

Первый день

8 класс

1. Две одинаковые шахматные доски (8×8 клеток) имеют общий центр, причем одна из них повернута относительно другой на 45° около центра. Найдите суммарную площадь всех пересечений черных клеток этих двух досок, если площадь одной клетки равна 1. *(Н. Карташов)*

2. На окружности даны точки A, B, M и N. Из точки M проведены хорды MA_1 и MB_1, перпендикулярные прямым NB и NA соответственно. Докажите, что прямые AA_1 и BB_1 параллельны. (Если $A=A_1$, то прямая AA_1 является касательной к окружности в точке A; аналогично при $B=B_1$.) *(А. Слинько)*

3. Будем говорить, что число обладает свойством (K), если оно разлагается в произведение K последовательных натуральных чисел, больших 1.

а) Найдите K такое, для которого некоторое число обладает одновременно свойствами (K) и $(K+2)$.

б) Докажите, что чисел, обладающих одновременно свойствами (2) и (4), не существует. *(В. Федотов)*

4. В таблице 4 строки. В первой из них записаны произвольные натуральные числа, среди которых могут быть и одинаковые. Вторая строка заполняется так: слева направо просматриваются числа первой строки и под числом a записывается число k, если a встретилось в первой строке в k-й раз. Аналогично по второй строке записывается третья, а по третьей — четвертая. Докажите, что вторая и четвертая строки всегда получаются одинаковыми. *(А. Кузнецов)*

9 класс

1. Найдите наименьшее значение площади прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат Ox и Oy, содержащего фигуру, заданную системой неравенств ($a \in \mathbf{R}$)

$$\begin{cases} y \leqslant -x^2, \\ y \geqslant x^2-2x+a. \end{cases}$$

(А. Савин)

2. См. задачу № 4 для 8-го класса.

3. Правильные треугольники ABC, CDE и EHK (вершины указаны против часовой стрелки) с попарно общими вершинами C и E расположены на плоскости так, что $\vec{AD}=\vec{DK}$. Докажите, что треугольник BHD — тоже правильный. *(А. Купцов)*

4. В некотором поселке 1000 жителей. Ежедневно каждый из них делится узнанными вчера новостями со всеми своими знакомыми. Известно, что любая новость становится известной всем жителям поселка. Докажите, что можно выбрать 90 жителей так, что если одновременно всем им сообщить какую-то новость, то через 10 дней она станет известной всем жителям поселка. *(Н. Карташов, А. Савин)*

10 класс

1. Про числа a и b известно, что неравенство

$$a \cdot \cos x + b \cdot \cos 3x > 1$$

не имеет решений. Докажите, что $|b| \leqslant 1$. *(Ю. Нестеренко)*

2. Точки K и M — середины сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$, точки L и N расположены на двух других сторонах так, что четырехугольник $KLMN$ — прямоугольник. Докажите, что площадь четырехугольника $ABCD$ вдвое больше площади прямоугольника $KLMN$.

3. Найдите все последовательности натуральных чисел (x_n) такие, что выполнены следующие два условия:

а) $x_n \leqslant n\sqrt{n}$ при любом n;

б) разность $x_m - x_n$ делится на $m - n$ при любых различных m и n. *(Ю. Нестеренко)*

4. Можно ли все клетки какой-нибудь прямоугольной таблицы окрасить в белый и черный цвета так, чтобы белых и черных клеток было поровну, а в каждой строке и в каждом столбце было более 3/4 клеток одного цвета? *(С. Конягин)*

Второй день

8 класс

5. Докажите, что если четырехугольники $ACPH$, $AMBE$, $AHBT$, $BKXM$, $CKXP$ являются параллелограммами (вершины всех четырехугольников перечислены в одном направлении), то ломаная $ABTE$ не имеет самопересечений и ограничивает параллелограмм. *(В. Федотов)*

6. Решите уравнение

$$x^3 - y^3 = xy + 61$$

в натуральных числах x и y. *(С. Конягин, А. Слинько)*

7. В футбольном турнире 18 команд сыграли между собой 8 туров — каждая команда сыграла с восемью разными командами. Докажите, что найдутся три команды, не сыгравшие между собой пока ни одного матча. *(С. Конягин)*

8. Точки C_1, A_1, B_1 взяты на сторонах, соответственно, AB, BC и CA треугольника ABC так, что $|AC_1|:|C_1B| = |BA_1|:|A_1C| = |CB_1|:|B_1A| = 1:3$. Докажите, что периметр P треугольника ABC и периметр P_1 треугольника $A_1B_1C_1$ связаны неравенствами

$$\frac{1}{2} P < P_1 < \frac{3}{4} P.$$

(В. Турчанинов)

9 класс

5. Докажите, что если положительные числа x, y удовлетворяют уравнению $x^3 + y^3 = x - y$, то $x^2 + y^2 < 1$. *(Г. Гальперин)*

6. Ученику нужно скопировать выпуклый многоугольник, помещающийся в круге радиуса 1. Сначала ученик отложил первую сторону, из ее конца провел вторую, из конца второй — третью и т. д. Закончив построение, он обнаружил, что многоугольник не замкнулся, а первая и последняя нарисованные им вершины находятся на расстоянии d одна от другой. Известно, что углы ученик откладывал точно, а относительная погрешность при откладывании длины каждой стороны не превышала числа p. Докажите, что $d \leqslant 4p$. *(Н. Карташов)*

7. В каждой вершине куба записано число. За один шаг к двум числам, размещенным на одном (любом) ребре, прибавляется по единице. Можно ли за несколько таких шагов сделать все восемь чисел равными между собой, если вначале были поставлены числа, как на рисунке 1? Как на рисунке 2? Как на рисунке 3? *(Н. Васильев)*

8. Найдите хотя бы одно натуральное число n такое, что каждое из чисел n, $n+1$, $n+2$, ..., $n+20$ имеет с числом $30\,030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ общий делитель, больший единицы. *(Ю. Нестеренко)*

10 класс

5. Натуральные числа от 100 до 999 написаны каждое на своей карточке. Карточки положены на стол числами вниз, перемешаны и затем сложены в одну стопку. Будем, открывая последовательно карточки из этой стопки, сортировать их, раскладывая на кучки числами вверх в соответствии с младшей цифрой написанного числа. В первой кучке окажутся все числа, оканчивающиеся на 0, во второй — оканчивающиеся на 1, и так далее. Сложим все кучки в одну стопку, положив поверх первой кучки вторую, затем третью и в конце концов — десятую. Получившуюся стопку карточек рассортируем еще раз, но теперь, открывая карточки, будем раскладывать их на кучки в соответствии со второй цифрой. Сложим опять получившиеся кучки в одну стопку, как указано раньше, и рассортируем их в последний раз, раскладывая на кучки в соответствии со старшей цифрой. В каком порядке будут расположены карточки в стопке, собранной, как указано ранее, после этой сортировки? *(Ю. Нестеренко)*

6. В прямоугольнике 3×4 расположено 6 точек. Докажите, что найдется пара точек,

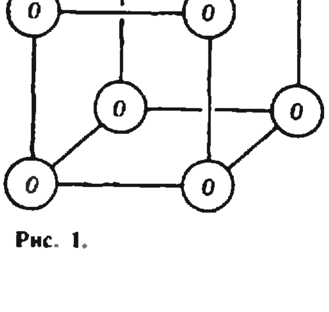


Рис. 1.

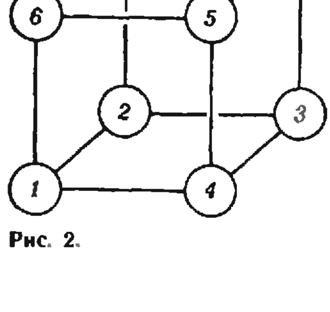


Рис. 2.

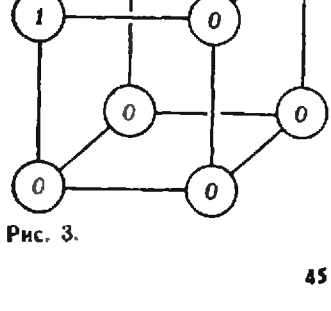


Рис. 3.

Участники олимпиады по математике, получившие дипломы I степени. В первом ряду (слева направо): А. Николаев, К. Черанс, Я. Бриталс, И. Жуков; во втором ряду: В. Шевчишин, Н. Гринберг, Ю. Екишев, В. Алексеев, Г. Перельман; в верхнем ряду: Т. Маланюк, Л. Лапшин.

удаленных одна от другой не более чем на $\sqrt{5}$. *(Г. Мустафин, Ю. Нестеренко)*

7. а) Найдите наименьшее возможное значение многочлена

$$P(x, y) = 4 + x^2y^4 + x^4y^2 - 3x^2y^2.$$

б) Докажите, что этот многочлен нельзя представить в виде суммы квадратов многочленов от переменных x, y. *(Г. Мустафин, Ю. Нестеренко)*

8. Отрезки AD, BE, CF служат боковыми ребрами правильной треугольной призмы. На ее основании ABC найдите все точки, равноудаленные от прямых AE, BF, CD. *(Ю. Нестеренко)*

В восьмом классе самой трудной оказалась задача № 5, в девятом — задача № 4, в десятом — задачи № 4 и № 8. Все остальные задачи решило примерно от четверти до половины участников.

Распределение призеров по классам дано в таблице. Их имена вы найдете на с. 54. Кроме 84 призеров еще 23 участника получили похвальные грамоты.

Награждены	Дипломы первой степени	Дипломы второй степени	Дипломы третьей степени	Всего	В %
8 класс (из 39)	4	15	7	26	66
9 класс (из 47)	2	12	11	25	53
10 класс (из 62)	6	10	15	31	50

Специальный приз, учрежденный редколлегией и редакцией журнала «Квант», — подшивка журнала «Квант» за 1980 год с автографом академика И. К. Кикоина — был вручен *Янису Бриталсу* (Рига). Подпиской на журнал «Квант» на 1982 год награждены девятиклассница *Надя Абдрафикова* (Белорецк) и восьмиклассники *Витя Викторов* (Рязань), *Олег Кудинов* (Заринск), *Виталий Стаховский* (Капустин Яр) и *Женя Шмелев* (п. Надежный Якутской АССР).

Несколько слов о составе и работе жюри. Возглавил работу жюри академик-секретарь АН Казах. ССР О. А. Жаутыков, ему помогали два заместителя — доцент Казахского политехнического института С. К. Канеев и старший научный сотрудник Московского государственного университета В. В. Вавилов. В каждом классе было по два куратора: в 8 классе — А. М. Слинько и Л. П. Фалалеев, в 9 классе — А. П. Савин и К. К. Кабдыкаиров, в 10 классе — Ю. В. Нестеренко и К. Ж. Наурызбаев. Всего в составе жюри насчитывалось 53 человека. Почетным гостем олимпиады был академик АН УССР Б. В. Гнеденко. Члены жюри провели, как обычно, разбор задач для руководителей команд и, отдельно, для школьников. Перед разбором задач и руководители, и школьники получили решения всех задач, подготовленные методической комиссией.

В день закрытия олимпиады жюри организовало «математический бой» между командой ФМШ № 18 при МГУ и командой ФМШ № 45 при ЛГУ. Победили москвичи со счетом 42:38. На бое были предложены некоторые задачи Московской студенческой олимпиады этого года.

Хозяева олимпиады отнеслись к юным математикам с большой теплотой и заботой. В программе олимпиады — встречи с учеными и студентами, посещения театров и музеев, экскурсии по городу, посещение спортивного комплекса «Медео», вечера отдыха и многое-многое другое. Юные математики возложили цветы к памятнику В. И. Ленину и Мемориалу Славы, приняли участие во Всесоюзном ленинском коммунистическом субботнике. Хочется сердечно поблагодарить Академию наук, Министерство просвещения, Центральный комитет комсомола Казахстана, администрацию, сотрудников и учащихся республиканской физико-математической школы, сделавших все, чтобы превратить олимпиаду в настоящий праздник юных математиков.

Я. Бриталс, получивший специальный приз журнала «Квант».

Решения и указания

8 класс

1. Искомая площадь равна $32(\sqrt{2}-1)$.

Обозначим через $S_{чч}$ площадь пересечений черных клеток верхней доски с черными клетками нижней, через $S_{чб}$ — площадь пересечений черных клеток верхней доски с белыми клетками нижней. Аналогично введем обозначения $S_{бч}$ и $S_{бб}$. Тогда $S_{чч}+S_{чб}+S_{бч}+S_{бб}=S$, где S — площадь голубого восьмиугольника на рисунке 4.

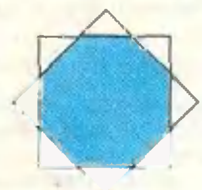


Рис. 4.

Если мы из исходного положения повернем верхнюю доску вокруг центра на 90°, то ее черные клетки перейдут в белые, а белые — в черные. Значит, $S_{чч}=S_{бч}$ и $S_{чб}=S_{бб}$. Если же мы из исходного положения повернем на 90° обе доски, то черные клетки перейдут в белые на обеих досках, так что $S_{чб}=S_{бч}$ и $S_{чч}=S_{бб}$. Поэтому $S_{чч}=S_{бч}=S_{чб}=S_{бб}$, то есть $S_{чч}=\frac{1}{4}S$. Остается найти S.

2. При фиксированных точках A, B и N задание точки A_1 определяет положение точки M и, следовательно, положение точки B_1. Таким образом, при фиксированных A, B, N мы получаем некоторое отображение $A_1 \xrightarrow{\varphi} B_1$ точек окружности в себя (рис. 5).

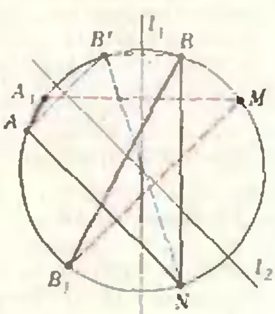


Рис. 5.

Нетрудно видеть, что отображение φ представляет собой композицию двух осевых симметрий относительно прямых $l_1 \parallel (BN)$ и $l_2 \parallel (AN)$, проходящих через центр окружности (см. рис. 5), так что на самом деле φ есть поворот вокруг центра (см. «Квант», 1980, № 3, с. 5).

Чтобы определить угол поворота, найдем образ $\varphi(B)$ точки B. Отразив точку B относительно прямой l_1, получим точку B', являющуюся противоположным концом диаметра, проходящего через N. Отразив B' относительно l_2, получим A. Итак, $\varphi(B)=A$. Если на-

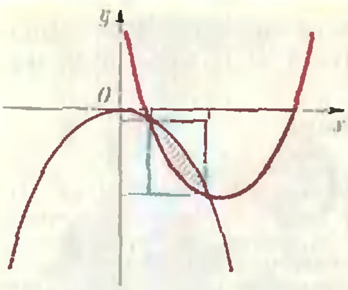


Рис. 6.

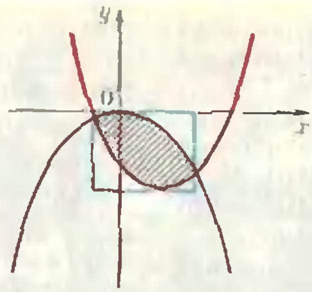


Рис. 7.

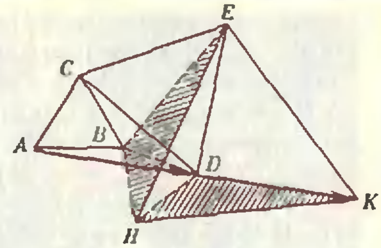


Рис. 8.

правление от точки A к точке B считать положительным, то φ — поворот на угол, дополняющий центральный угол, опирающийся на дугу AB, до 2π.

Поэтому всегда $\overset{\smile}{AB}+\overset{\smile}{A_1B_1}=2\pi$.

Доказательство того, что при этом условии прямые AA_1 и BB_1 параллельны, мы оставляем читателям.

4. Выберем в нашей таблице какой-нибудь столбец. Пусть в первой строке этого столбца стоит число a, во второй — m, в третьей — n. Докажем, что в четвертой строке снова стоит число m. Для простоты изложения отбросим все столбцы, стоящие правее выбранного. Докажем, что в третьей строке («урезанной» таблицы) число n встретится ровно m раз.

То, что во второй строке число m встречается ровно n раз, означает, что в первой строке какие-то n различных чисел a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a встречаются не менее, чем по m раз каждое, причем a — ровно m раз. Каждое из чисел a_i и число a встречаются когда-то в первый, во второй, ..., в m-й раз; поэтому числа 1, 2, ..., $m-1$, m появляются во второй строке по крайней мере n раз (m — ровно n раз). Число $m+1$ во второй строке появляется менее чем n раз, ибо в первой строке в $(m+1)$-й раз могут появляться лишь числа a_1, a_2, ..., a_{n-1}. Числа $m+2$, $m+3$, ... тем более не могут встречаться во второй строке n и более раз. Итак, во второй строке в n-й раз появляются числа 1, 2, ..., m и только они. Поэтому в третьей строке число n появляется ровно m раз, что и требовалось доказать.

5. Из того, что пять перечисленных четырехугольников являются параллелограммами, следуют равенства векторов: $\vec{PC}=\vec{HA}$, $\vec{AE}=\vec{MB}$, $\vec{HA}=\vec{BT}$, $\vec{MB}=\vec{XK}$, $\vec{XK}=\vec{PC}$. Из них получаем $\vec{AE}=\vec{BT}$, что и требовалось.

6. Очевидно, $x>y$. Пусть $x=y+d$, где $d\geqslant1$ (d — натуральное число). Тогда

$$(3d-1)y^2+(3d-1)yd+d^3=61,$$

откуда $d^3<61$, то есть $d=1$, 2 или 3. Эти три возможных значения d дают нам три квадратных уравнения, из которых лишь у одного (при $d=1$) есть натуральный корень $y=5$. При этом $x=6$.

7. Рассмотрим одну из команд. Она сыграла с восемью командами и с девятью не сыграла. Если среди этих девяти последних есть две, не сыгравшие между собой, то все доказано. Предположим, что это не так. Тогда все эти девять команд сыграли между собой, для чего им потребовалось сыграть 36 матчей. Однако за один тур эти девять команд могут провести только 4 матча, а за 8 туров — 32 матча. Противоречие!

9 класс

1. Возможны два случая расположения парабол $y=-x^2$ и $y=x^2-2x+a$ — они изображены на рисунках 6 и 7. На этих же рисунках показаны нужные прямоугольники. Разобравшись с координатами точек пересечения парабол, получим ответ: искомая площадь равна $(1-a)\sqrt{1-a}$, если $a\leqslant0$, и $1-2a$, если $0<a<\frac{1}{2}$; если же $a\geqslant\frac{1}{2}$, множество решений системы либо пусто, либо состоит из одной точки — площадь прямоугольника может быть сколь угодно малой.

3. Утверждение задачи следует из того, что треугольник CAD при повороте на угол 60° против часовой стрелки около вершины C переходит в треугольник CBE (рис. 8), а треугольник HBE при повороте на угол 60° по часовой стрелке около H — в треугольник HDK.

5. Ясно, что $x>y>0$. Из $\frac{x^3+y^3}{x-y}=1$ следует $\frac{x^3-y^3}{x-y}<1$, $x^2+xy+y^2<1$. Но $x^2+y^2<$ $<x^2+xy+y^2$.

6. Припишем каждой стороне направление, в котором она откладывалась. Спроектируем наши построения на прямую, соединяющую начальную и конечную точки (находящиеся на расстоянии d). Относительная погрешность при этом проектировании не меняется. Сумма длин проекций сторон многоугольника, направленных в одну сторону, не превосходит 2 (диаметра круга), в другую — тоже, и, если даже все проекции векторов погрешностей направлены одинаково, их сумма не больше $2p+2p=4p$, то есть $d\leqslant4p$.

8. Пусть $m=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot k$, где k — натуральное число. Подобрав k так, чтобы число $m-1$ делилось на 11, а число $m+1$ делилось на 13, получим, что число $n=m-10$ удовлетворяет всем условиям задачи. Таково, например, $k=45$; тогда $n=9440$.

10 класс

1. Положим $f(x)=a\cdot\cos x+b\cdot\cos 3x$. Утверждение задачи следует из того, что при всех целых n выполняются неравенства $f(\pi n)\leqslant1$ и $f\left(\frac{\pi}{3}+\pi n\right)\leqslant1$, то есть

$$\begin{cases} -1\leqslant a+b\leqslant1, \\ -1\leqslant\frac{a}{2}-b\leqslant1 \end{cases}$$

(см. рис. 9).

2. Утверждение задачи остается справедливым, если в условии слово «прямоугольник» заменить словом «параллелограмм».

Нарисуем параллелограмм $KL'MN'$, где L' и N' — середины сторон BC и AD (рис. 10). Для этого параллелограмма утверждение очевидно. Может ли наш параллелограмм $KLMN$ с ним не совпадать? Поскольку центр симметрии у них общий (середина отрезка KM), это возможно лишь в том случае, когда $(NN')\|(LL')$, то есть четырехугольник $ABCD$ — трапеция $((AD)\|(BC))$ со средней линией KM. Площадь этой трапеции $h\cdot|KM|$ (h — расстояние между прямыми AD и BC), очевидно, вдвое больше площади параллелограмма $KLMN$.

3. Ответ: $x_n=1$ $(n\in\mathbb{N})$, $x_n=n$ $(n\in\mathbb{N})$.

Решение. Из $x_1\leqslant 1$ следует $x_1=1$; $x_2\leqslant 2\sqrt{2}<3$, так что x_2 равно либо 1, либо 2.

1) Если $x_2=1$, то разности x_n-1 для каждого n делятся на $(n-1)(n-2)$. Если $x_n\neq 1$, то

$$(n-1)(n-2)\leqslant|x_n-1|\leqslant n\sqrt{n}+1.$$

Эти неравенства не могут выполняться при достаточно больших n. Поэтому $x_n=1$ для достаточно больших n. Пусть m — произвольное натуральное число. Разность $x_{n+m}-x_m$ делится на n. Если n достаточно велико, то на n делится разность $1-x_m$ (для любого достаточно большого n). Отсюда следует, что $x_m=1$, то есть все члены последовательности равны 1.

2) Если $x_2=2$, то при любом k разности $x_k-x_1=x_k-1$ и $x_k-x_2=x_k-2$ делятся, соответственно, на $k-1$ и $k-2$. Это равносильно тому, что на $(k-1)(k-2)$ делятся разности x_k-k. Если $x_k\neq k$, то

$$(k-1)(k-2)\leqslant|x_k-k|\leqslant k\sqrt{k}+k,$$

что невозможно при достаточно больших k, и, следовательно, $x_k=k$ для $k\geqslant K_0$. При фиксированном m и достаточно большом k разность $x_{k+m}-x_m=k+m-x_m$ делится на k. Тогда разность x_m-m делится на любое достаточно большое k. Это возможно лишь в том случае, когда $x_n=n$ при всех n.

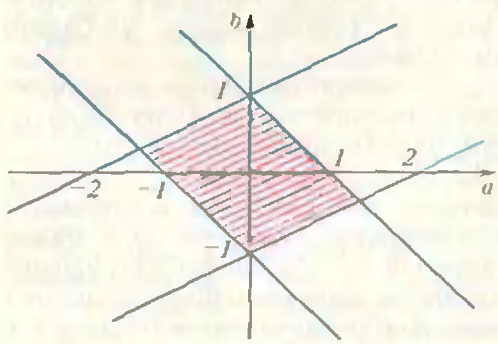


Рис. 9.

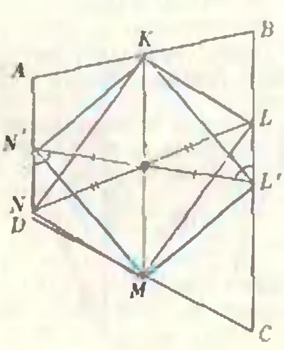


Рис. 10.

5. После первой сортировки младшие цифры у написанных на карточках чисел не убывают. Этот порядок младших цифр сохраняется в каждой кучке после второй сортировки; поэтому в стопке, собранной после второй сортировки, двузначные числа, образованные двумя младшими разрядами написанных на карточках чисел, не убывают. Этот порядок сохранится в каждой кучке после третьей сортировки и т. д. Поэтому в последней стопке карточки будут лежать по возрастанию номеров (или по «неубыванию», если числа на карточках могут повториться).

6. На рисунке 11 прямоугольник 3×4 разбит на пять цветных многоугольников, в каждом из которых максимальное расстояние между двумя точками равно $\sqrt{5}$. При любом расположении шести точек по крайней мере две из них попадут в один из этих многоугольников, и расстояние между ними будет не более $\sqrt{5}$.

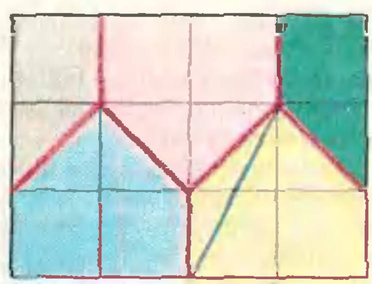


Рис. 11.

7. а) Наименьшее значение многочлена равно 3. Докажем это. Имеем

$$4+x^2y^4+x^4y^2-3x^2y^2=4+x^2y^2(x^2+y^2)-3x^2y^2\geqslant 4+x^2y^2\cdot 2|xy|-3x^2y^2$$

(мы воспользовались неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим для чисел x^2, y^2).

Введем обозначения: $t=|xy|$, $f(t)=4+2t^3-3t^2$. Легко показать, что в точке $t=1$ многочлен $f(t)$ принимает наименьшее значение на множестве $t\geqslant 0$. Поэтому $P(x,y)\geqslant f(1)=3$.

Число 3 является значением многочлена $P(x,y)$ при $x=y=1$.

б) Пусть

$$4+x^2y^2+x^4y^2-3x^2y^2=g_1^2+g_2^2+\ldots, \qquad (1)$$

где $g_1, g_2, \ldots$ — некоторые многочлены, степени которых, очевидно, не превосходят трех. Представим g_i в виде суммы $g_i=a_i+b_i+c_i+d_i$, где a_i, b_i, c_i, d_i — однородные многочлены степеней, соответственно, 3, 2, 1, 0 (разумеется, некоторые из них могут быть тождественными нулями) *). Сравнивая в (1)

*) Многочлен $g(x,y)$ называется *однородным степени k*, если все его одночлены имеют степень k, то есть $g(tx,ty)=t^k\cdot g(x,y)$.

члены степеней 6, 4 и 2, мы последовательно получим, что все a_i, b_i и c_i делятся на xy. Поскольку c_i — многочлены первой степени, все $c_i=0$. Но тогда сравнение членов степени 4 приводит к невозможному равенству $3x^2y^2+b_1^2+b_2^2+...=0$ — противоречие.

Замечание. Можно доказать, что многочлен $P(x, y)$ представим в виде суммы квадратов рациональных дробей от x и y. Для этого, как легко видеть, достаточно представить в виде суммы квадратов многочленов выражение $(4+x^2+y^2)P(x, y)$. Справедливо и общее утверждение: *многочлен от любого числа переменных, не принимающий отрицательных значений, можно представить в виде суммы квадратов нескольких рациональных дробей; многочлен от одной переменной, не принимающий отрицательных значений, можно представить в виде суммы квадратов двух многочленов.*

8. Искомое множество состоит из одной точки — центра O треугольника ABC.

Предположив, что A — ближайшая к одной из искомых точек O вершина треугольника ABC, то есть $|OA|<|OB|$, $|OA|<|OC|$, воспользуйтесь тем, что в треугольниках AOE, BOF, COD конгруэнтны основания AE, BF, CD и высоты, опущенные на эти основания. После этого докажите, что $|OA|=|OB|=|OC|$.

Т. Петрова, Л. Чернова

Олимпиада по физике

С 15 до 22 апреля в Ташкенте состоялся заключительный этап XV Всесоюзной олимпиады школьников по физике, которая была посвящена XXVI съезду КПСС.

140 учащихся из сборных команд всех союзных республик, городов Москвы и Ленинграда, сборных команд Министерства путей сообщения и Главного политического управления Министерства обороны СССР соревновались в решении задач, составленных специально для олимпиады известными учеными-физиками и педагогами из ведущих вузов и научных учреждений страны. Все участники заключительного этапа — победители республиканских олимпиад этого года или призеры предыдущей Всесоюзной олимпиады, завоевавшие дипломы I и II степени.

Торжественное открытие олимпиады состоялось 16 апреля в актовом зале Ташкентского государственного педагогического института им. Низами. Министр просвещения Узбекской ССР С. Ш. Шермухамедов пожелал всем участникам честной и упорной борьбы и выразил надежду, что члены команды Узбекистана выступят «дома» успешнее, чем на предыдущих олимпиадах. Со словами напутствия к ребятам обратились председатель жюри XV Всесоюзной олимпиады по физике, заслуженный деятель науки Уз. ССР, лауреат Государственной премии им. Беруни, член-корреспондент АН Уз. ССР Р. Б. Бегжанов, секретарь ЦК комсомола республики Ш. Н. Махмудова и начальник Главного управления народного образования Ташкентского горисполкома Х. К. Юлдашев. Участников олимпиады приветствовали также член команды Уз. ССР, ученик школы № 17 Ташкента Анвар Исмаилов и четырехкратный призер Всесоюзных олимпиад, студент Московского физико-технического института Евгений Пономарев.

В этот же день юные физики возложили цветы к памятнику В. И. Ленину и на Могилу неизвестного солдата, совершили экскурсию по Ташкенту, а вечером побывали на спектакле в Театре оперы и балета им. Навои.

17 апреля состоялся первый — теоретический — тур олимпиады. Восьмиклассникам нужно было решить 4 задачи (времени на работу давалось 4 часа), девятиклассникам и десятиклассникам — по 5 задач (времени — 5 часов). Приводим условия задач (большинство из них помещено в Задачнике «Кванта» в 7 и 8 номерах журнала за этот год).

Теоретический тур

8 класс

1. По двум гладким наклонным плоскостям, образующим одинаковые углы α с го-

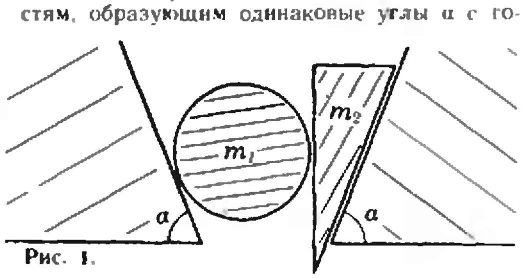


Рис. 1.

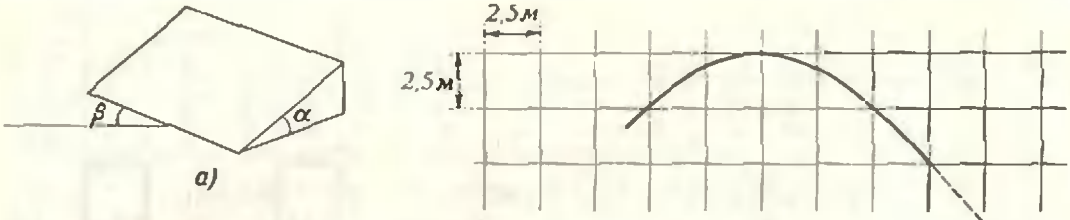


Рис. 2.

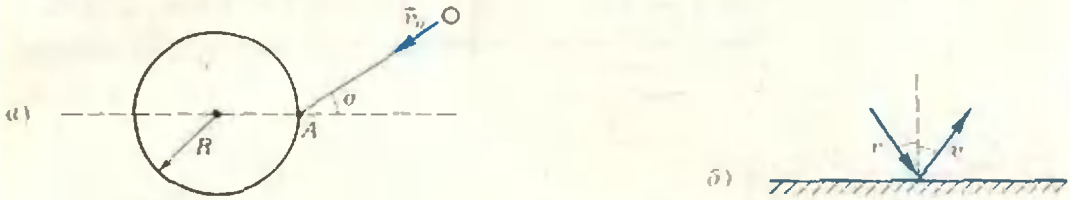


Рис. 3.

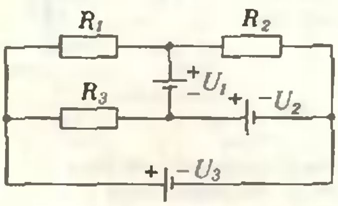


Рис. 4.

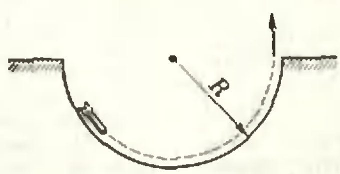


Рис. 5.

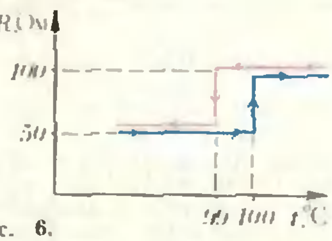


Рис. 6.

ризонтом, движутся, касаясь друг друга, цилиндр и клин (рис. 1). Найдите, с какой силой клин давит на цилиндр. Масса цилиндра m_1, масса клина m_2.

2. Шайба наезжает на ледяную горку под углом $\beta=60°$ к ее основанию (рис. 2, *а*); скорость шайбы при этом была $v_0=10$ м/с. След шайбы на ледяной горке частично стерся, а то, что от него осталось, изображено на рисунке 2, *б*. Каков угол наклона α ледяной горки к горизонту? Трение шайбы об лед пренебрежимо мало, въезд на горку — плавный.

3. Небольшой шарик движется с постоянной скоростью v_0 по гладкой горизонтальной поверхности и попадает в точке A в цилиндрический вертикальный колодец глубиной H и радиусом R (рис. 3, *а*). Вектор скорости шарика составляет угол α с диаметром колодца, проведенным в точку A. При каком соотношении между R, H, v_0 и α шарик после упругих соударений со стенками и дном сможет «выбраться» из колодца? Примечание. При упругом ударе шарика модуль скорости остается постоянным, а угол падения равен углу отражения (рис. 3, *б*).

4. На схеме, показанной на рисунке 4, сопротивления всех резисторов одинаковы: $R_1=R_2=R_3=R$. Напряжения на клеммах батарей равны $U_1=U$, $U_2=2U$, $U_3=4U$. Найдите: 1) направление и величину токов, протекающих по каждому из резисторов; 2) направление и величину токов, протекающих через батареи.

9 класс

1. Игрушечная ракета наполняется сжатым воздухом, который при запуске выбрасывает из нее массивную пробку. При вертикальном старте ракета поднимается на высоту $h=16$ м. Предлагается производить запуск ракеты другим способом. Сначала ракета скользит без начальной скорости по направляющим рельсам в виде полуокружности (рис. 5) радиусом $R=4$ м. В нижней точке, когда ракета приобретает максимальную скорость, срабатывает двигатель ракеты. На какую высоту поднимется ракета при таком способе запуска? Трением и сопротивлением воздуха можно пренебречь. Объясните результат с точки зрения закона сохранения энергии.

2. Горизонтально расположенный цилиндрический теплоизолированный сосуд объемом $V_0=100$ л, заполненный гелием, разделен на две части теплонепроницаемым поршнем, который может перемещаться без трения. Газу, находящемуся в левой части сосуда, сообщают количество теплоты $\Delta Q=100$ Дж. Найдите изменение давления в сосуде к тому моменту, когда поршень перестанет двигаться.

3. В таблице приведены экспериментальные данные о теплоемкостях и атомных массах некоторых твердых тел. На основании этих данных установите некоторую физическую закономерность и заполните три пустые клеточки таблицы. Какова предполагаемая точность ваших предсказаний (в процентах)? Универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль · К).

4. Для исследования свойств нелинейного резистора был произведен ряд экспериментов. Вначале была исследована зависимость сопротивления резистора от температуры. При повышении температуры до значения $t_1=100$ °C мгновенно происходил скачок сопротивления от величины $R_1=50$ Ом до величины $R_2=100$ Ом, при охлаждении обратный

Вещество	Серебро	Алюминий	Золото	Висмут	Кобальт	Медь	Железо	Литий	Магний	Никель	Платина	Титан	Ванадий
$c\left(\frac{Дж}{г \cdot K}\right)$	0,238	0,90	0,128	0,132	0,417	0,383	0,447	3,52		0,43	0,131		0,484
A (г)	107	27	197	209	59	64		7	24	60	196	48	51

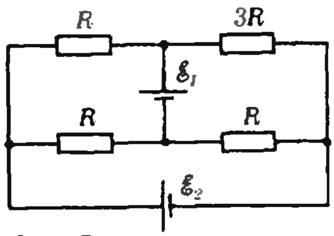


Рис. 7.

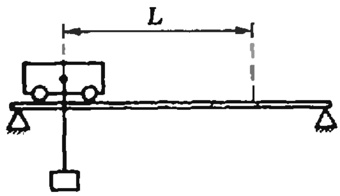


Рис. 8.

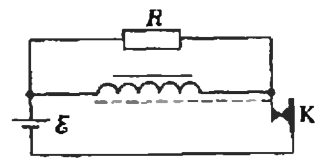


Рис. 9.

скачок происходил при температуре $t_2=99°C$ (рис. 6). Во втором опыте к резистору приложили постоянное напряжение $U_1=60$ В, при этом температура резистора оказалась равной $t_3=80°C$. Наконец, когда к резистору приложили постоянное напряжение $U_2=80$ В, в цепи возникли самопроизвольные колебания тока. Определите период этих колебаний T, **а также** максимальное и минимальное значения тока. Температура воздуха в лаборатории постоянна и равна $t_0=20°C$. Теплоотдача от резистора пропорциональна разности температур резистора и окружающего воздуха. Теплоемкость резистора $C=3$ Дж/К.

5. Собрана схема, показанная на рисунке 7. ЭДС батареи $\mathcal{E}_1$ уменьшили на 1,5 В, после чего токи на различных участках цепи изменились. Как нужно изменить ЭДС батареи $\mathcal{E}_2$, чтобы 1) ток через батарею $\mathcal{E}_1$ стал прежним, 2) ток через батарею $\mathcal{E}_2$ стал прежним? Внутренними сопротивлениями батарей пренебречь.

10 класс

1. Ракета запущена с поверхности Земли вертикально вверх с первой космической скоростью и возвращается на Землю недалеко от места старта. Сколько времени она находилась в полете? Радиус Земли $R_3=6400$ км. Примечание. Площадь эллипса с полуосями a и b вычисляется по формуле $S=\pi ab$.

2. Для горизонтального перемещения грузов на расстояние $L=20$ м используется самоходная тележка, перемещающаяся по горизонтальным рельсам. На тросе длиной $l=5$ м к тележке подвешивают перемещаемый груз (рис. 8). Тележка половину времени движется равноускоренно, а половину — равнозамедленно. Определите возможные значения ускорения тележки, при которых груз в момент остановки тележки в конце пути окажется неподвижным. В начальный момент времени вся система была неподвижна.

3. См. задачу № 2 для 9-го класса.

4. На рисунке 9 изображена схема электрического звонка. В отсутствие тока в катушке ключ K замкнут. При возрастании тока в катушке ключ размыкается при токе $I_1=1$ А, а при уменьшении тока — вновь замыкается при токе $I_2=0,9$ А. Найдите частоту колебаний подвижного контакта ключа K, если ЭДС батареи $\mathcal{E}=10$ В, индуктивность катушки с железным сердечником $L=1$ Гн, сопротивление $R=10$ Ом. Активное сопротивление катушки считать равным нулю. Какую среднюю мощность потребляет звонок от батареи при работе?

5. Объектив телескопа Гейла имеет диаметр $D=250$ см и фокусное расстояние $F=160$ м. Телескоп используется для фотографирования искусственного спутника Земли, имеющего диаметр $d=200$ см и находящегося на расстоянии $L=320$ км. 1) На каком расстоянии от фокуса должна быть расположена фотопластинка? 2) Каким будет размер изображения искусственного спутника? 3) Каков будет диаметр размытых (несфокусированных) изображений звезд на фотографии?

18 апреля жюри закончило проверку работ теоретического тура. Сведения, полученные в результате проверки, приведены в следующей таблице:

		Номер задачи				
		1	2	3	4	5
Число работ с полным решением задачи	8 кл.	12	15	7	16	
	9 кл.	20	21	32	26	20
	10 кл.	18	25	31	20	37
Число учащихся, не решивших задачу	8 кл.	18	8	17	15	
	9 кл.	10	10	4	9	11
	10 кл.	9	5	7	7	3

Из таблицы видно, что в среднем участники олимпиады успешно справились с заданием теоретического тура.

19 апреля проходил экспериментальный тур. Каждый участник выполнял две экспериментальные задачи. Вот их условия:

Экспериментальный тур

8 класс

1. Соберите простейший электромотор и испытайте его в действии.

Необходимые материалы и принадлежности: ось с коллектором, две железные пластинки 1,5×6 см для якоря, две скобки из жести для крепления якоря, моток проволоки, полоска папиросной бумаги для изоляции, подставка, источник питания, соединительные провода, подковообразный магнит, инструменты.

2. Определите мощность нагревателя.

Необходимые материалы и принадлежности: источник постоянного тока (до 32 В), мензурка на 250 мл с водой, спираль, термометр (0°C — 100°C), соединительные провода, ключ, секундомер, миллиметровая бумага для построения графиков.

Примечание. Теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг • К).

9 класс

1. Определите заряд на обкладках конденсатора при напряжении 40 В.

Необходимые материалы и принадлежности: конденсатор, микроамперметр, резистор, секундомер, переключатель.

2. Определите теплоемкость неизвестной жидкости по известной теплоемкости воды (жидкости не смешивать!).

Необходимые материалы и принадлежности: вода, неизвестная жидкость, калориметр, весы, разновесы, электроплитка, фильтровальная бумага, тела с неизвестной теплоемкостью.

10 класс

1. Определите индуктивность и активное сопротивление дросселя с железным сердечником на частоте 50 Гц.

Необходимые материалы и принадлежности: дроссель с железным сердечником, активное сопротивление, конденсатор, вольтметр переменного тока, источник переменного напряжения.

2. а) Определите чувствительность фотоэлемента: 1) в режиме короткого замыкания; 2) в режиме с активной нагрузкой.

б) Постройте график зависимости КПД фотоэлемента от освещенности при одном значении нагрузочного сопротивления.

в) С помощью фотоэлемента проверьте закон освещенности.

Необходимые материалы и принадлежности: фотоэлемент, переменное активное сопротивление, вольтметр постоянного тока, амперметр постоянного тока, лампа накаливания, источник питания для лампы накаливания.

За работой каждого экспериментатора наблюдали члены жюри. По ходу работы они оценивали экспериментаторские навыки школьника, его

Участники олимпиады по физике, получившие дипломы I степени. Сидят (слева направо): А. Гниловской, В. Ухов, А. Гутин, П. Цветков, М. Шмаков; стоят: В. Баиков, В. Деревянко, Р. Сулейманов, С. Ким, И. Солодовников, С. Козлов, Б. Макеев.

Фото В. Саломова

умение обращаться с приборами и выбирать оптимальные варианты решения. Письменный отчет о проделанной работе был не менее важным критерием оценки. Проверка письменных отчетов показала, что многие участники не имеют навыков критического анализа полученных из эксперимента данных, мало знакомы с методами оценки точности результатов.

21 апреля состоялось торжественное закрытие XV Всесоюзной олимпиады школьников по физике. Жюри объявило итоги олимпиады. Председатель жюри Р. Б. Бегжанов и заместитель председателя жюри профессор Московского физико-технического института С. М. Козел вручили награды победителям. Имена призеров, получивших дипломы I, II и III степени, приведены на странице 55. Многие участники олимпиады были награждены также специальными призами и грамотами.

Специальный приз, учрежденный редколлегией и редакцией журнала «Квант», был вручен семикласснику (выступавшему за 8 класс) *Александру Дешковскому* (Барановичи, с. ш. № 6). 21 участник олимпиады награжден подпиской на журнал «Квант» на 1982 год. Подпиской на «Квант» награждена также республиканская физико-математическая школа-интернат, сотрудники которой сделали очень много для того, чтобы участники олимпиады, приехавшие из разных концов страны, чувствовали себя в Ташкенте как дома.

XV Всесоюзная олимпиада школьников по физике закончилась. Она была настоящим праздником юных физиков. И в этом большая заслуга Министерства просвещения Уз. ССР, Центрального комитета комсомола республики, ученых Ташкентского государственного университета, политехнического и педагогического институтов.

Призеры XV Всесоюзной олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили

Бриталс Я. (Рига, ФМШ № 1),
Жуков И. (Ленинград, с. ш. № 227),
Николаев А. (Уфа, с. ш. № 114),
Черанс К. (Рига, ФМШ № 1);

по 9 классам —

Перельман Г. (Ленинград, с. ш. № 239),
Шевчишин В. (Львов, с. ш. № 11);

по 10 классам —

Алексеев В. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Аралкин А. (Новокузнецк, с. ш. № 11),
Гринберг Н. (Киев, с. ш. № 145),
Екишев Ю. (Сыктывкар, с. ш. № 1),
Лапшин Л. (Ленинград, с. ш. № 239),
Маланюк Т. (Киев, ФМШ при КГУ).

Дипломы II степени

по 8 классам получили

Абраменко С. (Караганда, с. ш. № 63),
Айнсаар Т. (Нью),
Байбородин О. (Сыктывкар, с. ш. № 1),
Булавас В. (Паневежис, с. ш. им. Бальчикониса),
Буриченко В. (Новокузнецк, с. ш. № 49),
Головин Г. (Славянск, с. ш. № 10),
Ерошкин О. (Днепропетровск, с. ш. № 15),
Зыков К. (Москва, с. ш. № 57),
Наурызбаев А. (Алма-Ата, РФМШ),
Орлов Д. (Владимир, с. ш. № 8),
Парновский Л. (Львов, с. ш. № 52),
Семенов А. (Саратов, с. ш. № 13),
Устеменко А. (Павлодар, с. ш. № 3),
Харитонов Ф. (Николаев, с. ш. № 38),
Шляхтов А. (Ульяновск, с. ш. № 51);

по 9 классам —

Белостоцкий В. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Закиров А. (Бийск, с. ш. № 25),
Короткин Д. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Кушнир А. (Киев, ФМШ при КГУ),
Левин А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Матвеев К. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Савкин А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Самборский С. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Спивак А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Титенко В. (Пуховичи),
Фульман И. (Гомель, с. ш. № 2),
Янгель А. (Нью);

по 10 классам —

Анкудинов А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Грасманис М. (Рига, ФМШ № 1),
Гринчук М. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),

Крижановский О. (Харьков, с. ш. № 27),
Липаев А. (Москва, с. ш. № 2),
Меркявичюс Л. (Лентварис, с. ш. № 2),
Рабинович Б. (Тула, с. ш. № 36),
Сегалович И. (Алма-Ата, РФМШ),
Чеканов Ю. (Москва, с. ш. № 91),
Эпиктетов М. (Алма-Ата, РФМШ).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Аверин А. (Челябинск, с. ш. № 127),
Викторов В. (Рязань, с. ш. № 45),
Кудинов О. (Заринск, с. ш. № 2),
Мамедов А. (Баку, с. ш. № 160),
Романов В. (Тула, с. ш. № 36),
Стаховский В. (п. Капустин Яр Астраханской обл., с. ш. № 231),
Юдаев А. (Новочеркасск, с. ш. № 5);

по 9 классам —
Белокопытов А. (Киев, ФМШ при КГУ),
Дранко О. (Киев, ФМШ при КГУ),
Зубова М. (Томск, с. ш. № 55),
Зусманович П. (Алма-Ата, РФМШ),
Казмирчук А. (Киев, ФМШ при КГУ),
Камунтавичюс Д. (Вильнюс, с. ш. им. Венуолиса),
Кордзая К. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Мазуров О. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Матюшов С. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Тупайло С. (Киев, ФМШ при КГУ),
Фрегер В. (Вольск, с. ш. № 12);

по 10 классам —
Белоцерковский Ю. (Минск, с. ш. № 64),
Бураго Д. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Гайсинский М. (Ташкент, с. ш. № 103),
Гионашвили З. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Дерягин Д. (Москва, с. ш. № 2),
Кивимаш А. (Таллин, с. ш. № 1),
Колпаков И. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Кругляк А. (Донецк, с. ш. № 26),
Матвеев А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Минарский А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Орел М. (Ленинград, с. ш. № 239),
Пятов П. (Дубна, с. ш. № 9),
Фролов А. (Ярославль, с. ш. № 33),
Чанышев А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Черкасенко В. (Киев, ФМШ при КГУ).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Банков В. (Алексин, с. ш. № 1),
Гниловской А. (Ленинград, с. ш. № 80),
Сулейманов Р. (Янгиабад, с. ш. № 10),
Шмаков М. (Солнечногорск, с. ш. № 2);

по 9 классам —
Ким С. (Алмалык, с. ш. № 15),
Макеев Б. (Москва, с. ш. № 361),
Ухов В. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Цветков П. (Подольск, с. ш. № 6);

по 10 классам —
Гутин А. (Клинцы, с. ш. № 2),
Деревянко В. (Киев, ФМШ при КГУ),
Козлов С. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Солодовников И. (Москва, с. ш. № 179).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Алексеев А. (Ленинград, с. ш. № 202),
Бирзвалкс В. (Рига, с. ш. № 1),
Бруенков Е. (Коммунарск, с. ш. № 22),
Ивайлов И. (Казань, с. ш. № 131),
Кононов Р. (Петропавловск, с. ш. № 5),
Мокеев И. (Ангарск, с. ш. № 10),
Тетерина И. (Ангрен, с. ш. № 33),
Хазарадзе Т. (Тбилиси, ФМШ № 42 при ТГУ);

по 9 классам —
Альдфедер И. (Нальчик, с. ш. № 9),
Баталов С. (Арзамас, с. ш. № 2),
Бергельсон А. (Москва, с. ш. № 2),
Зандаров Ю. (Курган-тепа, с. ш. № 1),
Калда Я. (Таллин, с. ш. № 1),
Качаев И. (Красноярск, с. ш. № 10);

по 10 классам —
Бабий О. (Киев, ФМШ при КГУ),
Игамкулов З. (Ташкент, РФМШ),
Кадиров Т. (Ташкент, РФМШ),
Кудрявцев С. (Магадан, с. ш. № 1),
Ляпин А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Мушинский А. (Минск, с. ш. № 23),
Шубенин И. (Рига, с. ш. № 52).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Гребнев И. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Жемайтис Р. (Вильнюс, с. ш. № 9),
Житомирский М. (Харьков, с. ш. № 27),
Стефанов М. (Москва, с. ш. № 1),
Чеканов С. (Саратов, с. ш. № 13),
Эхатамм М. (Таллин, с. ш. № 1),
Якунин А. (Грозный, с. ш. № 2);

по 9 классам —
Малышев В. (Волгоград, с. ш. № 131),
Панасюк А. (Одесса, с. ш. № 117),
Пентегов В. (Киев, с. ш. № 145),
Пироженко А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Погорелов В. (Узловая, с. ш. № 61),
Рахманов М. (Алма-Ата, РФМШ),
Чичкань С. (Киев, с. ш. № 145);

по 10 классам —
Байков П. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Григорьев Д. (Москва, с. ш. № 57),
Кадиров А. (Ташкент, РФМШ),
Мусиенко П. (Барнаул, с. ш. № 3),
Осодоев А. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Сапонов П. (Усть-Каменогорск, с. ш. № 3),
Семенченко М. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Фролов А. (Тула, с. ш. № 36).

Новые книги

В этом номере мы продолжаем публиковать краткие аннотации на книги по математике и физике, доступные и интересные нашим читателям, выпускаемые в 1982 году издательством «Наука». Большинство книжных магазинов, распространяющих литературу данной тематики, а также отделы «Книга — почтой» до конца 1981 года без ограничений принимают предварительные заказы (открытки) на эти книги. Мы просим всех заинтересованных читателей оформить такие заказы. Это поможет издательству точнее планировать и распределять тиражи издаваемых книг (особенно переводных, тиражи которых оговариваются соглашениями с иностранными издательствами). В скобках мы указываем квартал, в котором предполагается выход книги в свет.

Математика

1. М. Гарднер *Математические чудеса и тайны* (перевод с англ.). Издание 4-е, стереотип. (I кв.) Цена 30 к.

М. Гарднер — видный американский популяризатор науки. Эта его книга рассказывает о современных математических фокусах. По большей части автор не формулирует закономерностей, лежащих в их основе. Он лишь описывает действия «фокусника» — явные и тайные. Читателю несомненно доставит удовольствие восстановить соответствующую алгебраическую или геометрическую идею.

2. Б. В. Гнеденко, А. Я. Хинчин. *Элементарное введение в теорию вероятностей.* Издание 9-е, стереотип. (I кв.) Цена 30 к.

Эта книга выдержала восемь изданий в нашей стране и переведена во многих странах мира. Отличается она от других книг по теории вероятностей прежде всего тем, что предъявляет минимальные требования к математическим знаниям читателей — для понимания всех ее разделов вполне достаточно школьного курса. Все вводимые теоретические понятия и выводимые правила возникают на базе практических примеров.

3. Е. И. Игнатьев. *В царстве смекалки.* Издание 4-е, исправл. (I кв.) Цена 40 к.

Эта книга впервые увидела свет в 1908 году и в свое время имела огромный успех. С 1908 г. по 1926 г. она несколько раз переиздавалась. Затем о ней незаслуженно забыли и вновь «вернули к жизни» лишь в 1977 году. Весь тираж разошелся немедленно. Задачи, собранные Е. И. Игнатьевым,— занимательного характера: их можно отнести к разделу «математических игр и развлечений». Здесь есть арифметические, геометрические, комбинаторные задачи; задачи, связанные с играми, задачи на графы и задачи-шутки. Эта книга доступна и школьникам младших классов.

4. М. М. Постников. *Введение в теорию алгебраических чисел.* (II кв.) Цена 40 к.

Эта книга — переработанное и дополненное издание брошюры того же автора «Теорема Ферма», вышедшей в 1978 году. В ней идеи и понятия теории алгебраических чисел изложены в связи с Великой теоремой Ферма: читателю разъясняется, что их появление не случайно и диктуется логикой решения конкретной задачи. Изложение ведется концентрически с тем, чтобы даже минимально подготовленный читатель мог усвоить основные идеи.

5. *Старинные занимательные задачи по математике* (пересказ и обработка Ю. В. Нестеренко, С. Н. Олехника, М. К. Потапова) (IV кв.) Цена 40 к.

В книге собраны задачи из старинных русских рукописей, а также книг, изданных до 1800 г., интересные как содержанием, так и способом решения. Задачи сопровождаются замечаниями исторического характера.

6. Г. Штейнгауз. *Сто задач* (перевод с польск.). Издание 3-е, стереотип. (II кв.) Цена 50 к.

В предисловии к своей книге Г. Штейнгауз написал, что он «старался составлять задачи, которые возникают самым естественным образом из геометрических явлений или же из реальных обстоятельств» и что его цель «ввести читателей в практику того универсального метода трактовки явлений, которому греки дали название математика, облегчить им переход от практики средней школы к настоящей математике и показать им эту науку на доступном материале».

Все задачи, входящие в книгу, снабжены полными решениями.

7. С. А. Абрамов. *Элементы программирования.* (I кв.) («Популярные лекции по математике».) Цена 20 к.

Эта книга полезна при первом знакомстве с программированием. В ней рассказывается о том, что такое алгоритм, алгоритмический язык, трансляция, операционная система. Текст сопровождается задачами.

8. М. Н. Аршинов, Л. Е. Садовский. *Коды и математика.* (IV кв.) (Библиотечка «Квант».) Цена 35 к.

Теория кодирования, первоисточник которой — криптография (искусство засекречивания истинного содержания сообщения), в настоящее время выросла в обширную и разветвленную область со своим кругом объектов и задач. Главным образом она занимается решением проблем, возникающих при передаче информации по линиям связи. Авторы, говоря о ярко выраженной прикладной направленности теории кодирования, указывают и на ее связь с различными разделами математики: теорией чисел, алгеброй, комбинаторикой, теорией вероятностей.

9. М. И. Башмаков, Б. М. Беккер, В. М. Гольховой. *Задачи по математике. Алгебра и анализ.* (II кв.) (Библиотечка «Квант».) Цена 35 к.

Задачи, собранные в книге, представляют основной круг идей школьного курса алгебры и начал математического анализа. Все задачи, связанные общей идеей решения, сгруппированы в серии; в каждой серии они расположены в порядке возрастания трудности. Такое расположение материала, а также указания, составляющие вторую часть книги, и вводные замечания к отдельным главам помогут читателю в приобретении навыков математического мышления.

В книге имеются разделы, посвященные комбинаторике и комплексным числам.

Физика

1. Ю. А. Храмов. *Физики: Биографический справочник.* Издание 2-е, исправл. и дополн. (IV кв.) Цена 2 р. 40 к.

В книге представлены биографии более тысячи отечественных и зарубежных ученых-физиков. Почти все очерки сопровождаются фотографиями. Исторический диапазон книги — от Аристотеля до наших дней.

2. Л. Д. Ландау, А. И. Китайгородский. *Физика для всех. Физические тела.* Издание 5-е, исправл. (I кв.) Цена 40 к.

Л. Д. Ландау, А. И. Китайгородский. *Физика для всех. Молекулы.* Издание 5-е, исправл. (II кв.) Цена 40 к.

А. И. Китайгородский. *Физика для всех. Электроны.* Издание 2-е, перераб. (III кв.) Цена 40 к.

А. И. Китайгородский. *Физика для всех. Фотоны и ядра.* Издание 2-е, перераб. (IV кв.) Цена 40 к.

Основное внимание в книгах уделено фундаментальным законам и понятиям физики, а также новейшим достижениям современной физики. Книги написаны занимательно и живо, однако они требуют от читателя внимательного, вдумчивого подхода.

Первая из четырех книг («Физические тела») посвящена основным законам движения; детально изложены закон всемирного тяготения и его применение для расчетов космических скоростей и различных геофизических явлений.

Вторая книга («Молекулы») рассказывает о строении вещества и различных фазовых состояниях вещества, знакомит читателя с основными законами термодинамики.

В третьей книге («Электроны») излагаются законы квантовой физики. Большое внимание уделено современным представлениям о диэлектриках и магнетиках.

Содержание четвертой, заключительной, книги («Фотоны и ядра») составляют основные сведения об электромагнитных волнах, проблемы теплового излучения, учение о спектрах. Отдельные разделы посвящены специальной теории относительности и волновой механике.

3. Я. И. Перельман. *Занимательная физика.* В 2-х книгах.

Книга 1. Издание 21-е, исправл. (III кв.) Цена 40 к.

Книга 2. Издание 21-е, исправл. (IV кв.) Цена 45 к.

Написанная известным популяризатором и педагогом более полувека назад, книга с интересом читается современным читателем. Автор, обращаясь к кругу явлений повседневной жизни, к области техники, к страницам научно-фантастических романов, старается научить читателя видеть суть явления, мыслить физически. Книги содержат множество интересных задач, парадоксов, физических головоломок.

4. Л. М. Блинов, С. А. Пикин. *Жидкие кристаллы.* (III кв.) (Библиотечка «Квант») Цена 35 к.

В книге известных специалистов — экспериментатора и теоретика — рассказывается о мире жидких кристаллов.

Книга познакомит читателя с электрооптическим эффектом в нематиках. На этом эффекте основана работа электронных циферблатов. Холестерические жидкие кристаллы заинтересуют тех, кто хочет узнать о тонкопленочных тепловизорах. О лазерном пере и плоском телевизоре читатель прочтет в главе о смектиках. Структура жидких кристаллов — растворов имеет огромное значение для жизнедеятельности организма — для циркуляции крови, переноса ею кислорода, функционирования клеток мозга, для работы различных клеточных мембран.

5. А. А. Боровой. *Как регистрируют частицы.* (I кв.) (Библиотечка «Квант») Цена 30 к.

Эта книга — рассказ об интересных и порой драматических поисках элементарных частиц. Невозможно представить себе обнаружение и изучение элементарных частиц без специальных приборов — детекторов. Многообразие детекторов вызвано различием в свойствах частиц, в интенсивности их взаимодействия с веществом. Поэтому значительное внимание в книге уделено этим процессам, фундаментальным законам и понятиям физики.

В основу книги положены лекции, которые автор читал школьникам старших классов в Школе естественных наук при Институте атомной энергии им. И. В. Курчатова.

6. Л. В. Тарасов, А. Н. Тарасова. *Беседы о преломлении света.* (I кв.) (Библиотечка «Квант») Цена 30 к.

Интересно и увлекательно авторы рассказывают о хорошо всем знакомом явлении преломления света. Читатель узнает, чем объясняются миражи в пустыне и на море, радуги, гало, ложные солнца. В книге популярно излагаются элементы кристаллооптики и волоконной оптики. Авторы рассказывают о целенаправленном изменении показателя преломления, управлении им при помощи электрического поля, звуковых волн. Рассматриваемые в книге вопросы сопровождаются интересными задачами.

7. А. Л. Эфрос. *Геометрия беспорядка.* (III кв.) (Библиотечка «Квант») Цена 35 к.

Эта книга о новой математической дисциплине — теории протекания. Она объясняет проникновение жидкости на большие расстояния в пористые тела, разрушение горных пород (образование микротрещин), аномальные свойства переохлажденной воды, электропроводность сильно неоднородных систем; на основе теории протекания строятся различные модели перехода металл—диэлектрик и т. д.

А. Егоров, И. Клумова

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

ЭВМ анализирует эндшпиль

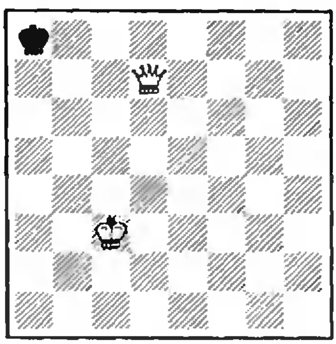
В статье «ЭВМ за шахматной доской» («Квант», 1981, № 1) рассказывалось о современных методах шахматного программирования, основанных на переборе вариантов. В эндшпиле человек может рассчитать очень длинные варианты, к тому же оценка многих получающихся позиций ему хорошо известна из опыта или теории. Поэтому в эндшпиле ЭВМ, работающая по обычной программе, уступает человеку в большей степени, чем в середине игры. Однако в отдельных классах малофигурных окончаний машина уже сейчас превосходит человека. Причина этого очень проста — при небольшом числе фигур на доске число возможных позиций хоть и велико, но обозримо. Мощности существующих ЭВМ хватает, чтобы реализовать на них специальные переборные программы анализа отдельных видов эндшпилей. Правда, оказалось, что анализ пятифигурного эндшпиля (считая королей) находится на пределе возможностей современной ЭВМ.

Впервые этим методом, по-видимому, была решена старая и довольно экзотическая «задача о неприкосновенном короле», о которой уже рассказывалось в «Кванте» десять лет назад («Квант», 1971, № 12, с. 50).

Белый король не имеет права двигаться. Может ли один белый ферзь с помощью своего «неприкосновенного» короля заматовать одинокого короля противника?

Многие шахматисты, в том числе гроссмейстеры, полагали, что заматовать короля нельзя. Математики А. Брудно и И. Ландау привлекли на помощь ЭВМ, которая установила, что мат дается не позднее 23-го хода при любом начальном положении белого ферзя и черного короля, но... только при неприкосновенном короле на поле c3 (ввиду симметрии годятся также поля c6, f3 и f6). Кажется, это первый случай в истории и шахмат, и ЭВМ, когда машина решила шахматную задачу раньше человека. Справедливости ради надо отметить, что если квалифицированному шахматисту сообщают, что мат есть, то он его находит сам.

Пусть белый король прикован к полю c3. Для решения, прежде всего, загоним черного короля на угловое поле a8. С этим заданием ферзь справляется легко, занимая при этом поле d7.

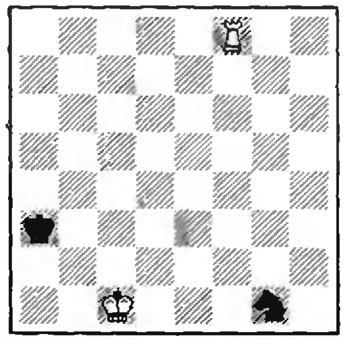


Если теперь ход черных, то после **1...Крb8 2. Фc6!** белые матуют в 10 ходов: **2...Крa7 3. Фc8! Крb6 4. Фd7! Крc5** (4...Крa5 5. Фb7 и 4...Крa6 5. Фc7 Крb5 6. Фd6 приводит к основному варианту) **5. Фe8 Крb5 6. Фd6 Крa5 7. Фb4+ Крa6 8. Фb8 Крa5 9. Фb7 Крa4 10. Фa6×**

Если же ход белых, то они должны передать очередь хода противнику. Это достигается «методом треугольника»: **1. Фd5+ Крa7** (1...Крb8 2. Фc6!) **2. Фb5 Крa8 3. Фd7** и цель достигнута.

Конечно, этот пример — скорее головоломка, чем настоящая шахматная задача. Но с помощью ЭВМ были получены и более серьезные результаты. О них речь пойдет в сегодняшнем шахматном конкурсе, а мы кончим одним шахматным примером, хорошо иллюстрирующим возможности ЭВМ.

Из четырехфигурных эндшпилей наиболее интересным является «ладья против коня».



Ход черных. Белые выигрывают.

Задача белых проста — поймать коня, а потом уже без помех матовать черного короля. ЭВМ обнаружила, что в этой позиции при лучшей игре белых и точной защите черных конь ловится только на 27-м ходу, причем ошибка белых может вообще упустить выигрыш.

Приведем основной вариант решения. **1...Кe2+ 2. Крd2** (2. Крc2 уже упускает выигрыш) **2...Кd4 3. Крc3** (ошибочно было бы 3. Крd3. Впрочем, белым придется сделать еще много единственных ходов. Трудно предположить, чтобы все их сумел бы найти шахматист во время партии!) **3...Кb5+ 4. Крc4 Кd6+ 5. Крc5 Кb7+ 6. Крb6 Кd6 7. Лf4!** (ладья ходит реже, чем король, но ее перемещения более тонкие) **7...Крb3 8. Крc5 Кb7+ 9. Крc6 Кd8+ 10. Крb5 Кe6 11. Лf3+ Крc2 12. Крc4 Крd2 13. Лf5 Крc2 14. Лf2+ Крd1 15. Крd3 Кc5+ 16. Крd4 Кb3+ 17. Крc3 Кре+ 18. Лb2! Кc5 19. Крd4 Кe6+ 20. Крe3 Крd1 21. Лb6 Кg5** (после 21...Кc5 22. Крd4 Кd7 23. Лd6 конь ловится быстрее) **22. Лc6! Кf7 23. Лc7 Кe5 24. Крe4! Кg4 25. Лg7! Кf6+ 26. Крe5 Кh5 27. Лg5** и конь пойман.

Игры с квадратичными функциями

1. а) Да, (0,5; 2/3), $m_1=8$; б) (0,4; 0,8), $m_2=7{,}6$.
2. а) (1; 2), $v^*=0$; б) $((a-b)/2; (a+b)/2)$, 0; в) (5; -1), 0,09; г) $(al; bl)$, $(\sqrt{a}-\sqrt{b})\times\times\sqrt{k^2+1}$, где $l=\dfrac{k^2}{1+k^2}$; е) (0; 0), 0.
3. а) Есть; б), в) нет.
5. $v=Rxy+Kx+Ly+d$, $R=a-b-c+d$, $K=b-d$, $L=c-d$; а) (0,5; 0,5), $v^*=0$; б) $x^*=\dfrac{1}{c+1}=1-y^*$, $v^*=c+x^*$; в) нет; $v^*=-\dfrac{(b-c)^2}{8(b+c)}<0$; $x^*=3/8=1-y^*$, $v^*=-1{,}25$ при $b=30=3c$; г) $x^*=1$, $y^*=0$, $v^*=b=4$.

Освещение плоскости прожекторами

1. Доказательство утверждения. 1. Без ограничения общности можно считать, что на каждой стороне данного угла A расположен хотя бы один прожектор.

Пусть $\alpha<\pi$. Доказательство проведем индукцией по k.

При $k=1$ утверждение очевидно, и пусть оно верно для любого $j<k$. Докажем его для $j=k$. Разобьем угол A и симметричный ему относительно вершины угол на k углов по $\dfrac{2\pi}{n}$ каждый — эти мелкие углы назовем для удобства «секторами». Обозначим число прожекторов в i-м секторе через $s_i (i=1, 2, ..., k)$. Все числа s_i — целые неотрицательные, $s_1\geqslant1$, $s_k\geqslant1$ и $s_1+s_2+...+s_k=k$.

Возьмем первые m секторов, где m выбрано согласно лемме. Их объединение — угол, внутри которого находятся m прожекторов. Они, по предположению индукции, могут осветить симметричный ему угол, а оставшиеся $k-m$ прожекторов могут осветить оставшийся угол. Следовательно, весь симметричный углу A угол будет полностью освещен.

Пусть теперь $\alpha=\pi$ и все прожекторы находятся в верхней полуплоскости. Без ограничения общности можно считать, что на границе полуплоскости расположен прожектор A (A — вершина угла в 180°). Если в первом секторе нет прожекторов, отнесем прожектор A ко второму сектору, сведя задачу к случаю $\alpha<\pi$. Если есть прожекторы, то прожектор A отнесем к сектору k. Тогда в первом и k-м секторах числа прожекторов $s_1\geqslant1$ и $s_k\geqslant1$, и выполнено равенство $s_1+s_2+...+s_k=k$, то есть выполнены условия упражнения 2. Дальше рассуждаем аналогично предыдущему.

Доказательство леммы. Если $s_1=1$, то $m=1$ — в противном случае $s_1>1$. Если, далее, $s_1+s_2=2$ и $s_1>1$, то $s_2=0$ и тогда $m=2$ — иначе $s_1+s_2>2$. И так далее: если на l-м шаге возникает равенство $s_1+...+s_m=l$, то $m=l$ и $s_m=0$, если же это равенство не возникло, то $s_l>0$. Однако, если равенство не возникло *ни при одном* $l<k$, то оно обязано возникнуть (по условию) на k-м шаге, то есть при $m=k$, и тогда $s_k=0$, что противоречит условию $s_k\geqslant1$. Значит, равенство возникло раньше, и $m<k$.

2. Если в точку M_1 перенести все прожекторы, то вся плоскость будет освещена. Поэтому какой-то прожектор осветит точку N.

Закон Дальтона

1. $\alpha=\dfrac{p\mu V}{mRT}-1\approx0{,}12=12\%$.

2. $\dfrac{m_т}{m_в}=\dfrac{\mu_т}{2\mu_в}=1$.

3. $\dfrac{m_{сух}}{m_{вл}}=\dfrac{1}{1-\left(1-\dfrac{\mu_{воды}}{\mu_{возд}}\right)\dfrac{p_0\varphi/100\%}{p}}\approx1{,}004$.

Задачи наших читателей
(см. с. 10)

1. Из законов сохранения импульса и энергии получаем

$$\frac{v_n}{v_1}=\left(\frac{2k}{k+1}\right)^{n-1} \text{ и } КПД=\left(\frac{4k}{(k+1)^2}\right)^{n-1}$$

Отсюда видно, что при фиксированном n отношение v_n/v_1 с ростом k растет сначала быстро, а потом достигает насыщения, КПД же уменьшается без насыщения. Поэтому существует оптимальное значение k для всякого n, а значит — и для всякого отношения v_n/v_1.

2. При освещении термометра солнечными лучами окрашенный столбик спирта заметно нагревается, тогда как прозрачная пустая часть трубки термометра остается относительно холодной. Это приводит к перегонке спирта из нагретого столбика в «охлажденную» верхнюю часть трубки. Для восстановления термометра нужно создать противоположные условия — верхнюю часть термометра поместить над нагревателем. Нагревшись, спиртовой конденсат испарится и затем сконденсируется на сравнительно холодном окрашенном столбике спирта — термометр полностью восстановится.

3. Пусть в одной из комнат находится источник звука. Ясно, что через дырку в перегородке в соседнюю комнату будет проникать часть звуковой мощности, падающей на перегородку, равная отношению площади дырки к площади перегородки, то есть $S_д/S_п$. Если же обивка не идеальная (пропускает сотую часть звуковой мощности), то в соседнюю комнату звук проходит не только через дырку, но и через саму перегородку тоже. Таким образом, отношение звуковых мощностей, проникающих в соседнюю комнату во втором и в первом случаях, равно

$$k=\frac{S_д/S_п+0{,}01}{S_д/S_п}=1+\frac{10^{-2}}{4\cdot10^{-4}/4}=101.$$

Итак, пусть лучше в перегородке будет дырка, чем если перегородка будет сплошной, но тонкой.

Веселая мозаика Сэма Лойда

(см. «Квант» № 9)

Какого числа мне дали книжку?

Головоломка основана на двух следующих свойствах календаря:

I. Ежегодно ровно три месяца начинаются с одного и того же дня недели: в високосном году — январь, апрель и июль, в невисокосном — февраль, март и ноябрь; в частности, 1/I, 1/IV и 1/VII—80 г. — вторники, 1/II, 1/III и 1/XI—81 г. — воскресенья, а остальные дни недели оказываются первыми числами не чаще двух раз в году.

II. Каждое число, кроме 31-го, бывает в течение года любым из семи дней недели; 31-е число ежегодно выпадает на шесть дней недели, а на какой-нибудь один из дней недели ни разу за весь год не выпадает (эта особенность 31-го числа связана с тем, что из семи месяцев года, насчитывающих 31 день, два месяца заканчиваются в один и тот же день недели: в високосном году на один день недели приходится 31/I и 31/VII, в невисокосном — 31/I и 31/X); в частности, в 1980 г. 31-е число ни в одном месяце не было вторником, а в 1981 г. не бывает средой (и — сравните с I, это важно для дальнейшего — бывает воскресеньем).

Чтобы убедиться в справедливости свойств I, II, очевидно, достаточно проверить их для одного високосного и одного невисокосного года (например, для 1980 г. и для 1981 г.).

Какого же числа мне дали книжку? По условию оно ни разу в году не выпадает на какой-то день недели. Значит, по свойству II, это — 31-е число.

Книжку мне дали наверняка после того, как она была напечатана, но заведомо до выхода в свет этого номера «Кванта», то есть либо в 1980 г., либо в 1981 г. В каком именно? По условию, три месяца в нем (включая тот, когда я стал писать заметку) начинаются с такого дня недели, на который не выпадает 31-е число. Согласно I и II, это — 1980 г. (а упомянутые три месяца — январь, апрель и июль).

Остается некоторая неопределенность (скажем, я мог получить книжку 31/III и приступить к сочинению заметки в апреле или взять книжку 31/V, а заметку начал писать в июле и т. п.). Устранить неопределенность помогают сведения про «завтра» и «позавчера».

Назовем *сегодняшним* день, когда я начал писать заметку, и будем двигаться от него назад — в прошлое: *вчера, позавчера, «позапозавчера»*. Это самое «позапозавчера» и есть тот день, для которого «позавчера было завтра». Это «позапозавчера» 31-е число; значит, позавчера — 1-е, вчера — 2-е, сегодня — 3-е. Итак, сегодня — либо 3/I, либо 3/IV, либо 3/VII—80 г. «Позапозавчера» для этих трех дней — 31/XII—79 г., 31/III—80 г. и 30/VI—80 г. соответственно. Первое из них относится не к 1980 г., третье — не 31-е число. Итак, друзья дали мне книжку Лойда 31/III—80 г. Стотысячный тираж «Математической мозаики» разошелся быстрее, чем за месяц.

Пони и белая лошадь

Пони нужно скопировать на черную бумагу, разрезать силуэт на 6 частей и эти 6 черных

Рис. 1

кусочков положить на лист белой бумаги, как показано на рисунке 1,— внутри получится маленькая белая лошадь. Именно этот трюк сделал популярным выражение: «О, но это же лошадь другой масти!».

Корова, коза и гусь

Через 45 дней после того, как корова и коза будут выпущены на пастбище, травы на нем не останется — ни той, что была до начала пиршества (обозначим ее количество через T), ни той, что вырастет за 45 дней:

$$45(x+y)=T+45t,$$
$$45(x+y-t)=T.$$

Аналогично,

$$60(x+z-t)=90(y+z-t)=T.$$

Итак,

$$3(x+y-t)=4(x+z-t)=6(y+z-t)=\frac{T}{15}.$$

Так как $x=y+z$,

$$3(2y+z-t)=4(y+2z-t)=6(y+z-t)=\frac{T}{15},$$

откуда $z=t$, $y=2t$, $x=3t$, $T=180t$.

Итак, один из вопросов выяснен: трава росла на пастбище до начала пиршества 180 дней. Если выпустить на пастбище всех троих — корову, козу и гуся, то корова и коза съедят первоначальный запас травы за 36 дней, а гусь позаботится об уничтожении ее прироста:

$$36(x+y+z-t)=36(x+y)=36\cdot 5t=180t.$$

Последний вопрос: как определить высоту посоха на рисунке 2?

Рис. 2

Обратимся вслед за Лойдом к следующему отрывку из «Белого отряда» Конан-Дойля («Математическая мозаика», с. 311):

«Седой лучник взял у своих товарищей несколько кусков веревки и, связав их вместе, вытянул вдоль длинной тени, которую в лучах восходящего солнца отбрасывала хмурая баш-

ия. Затем он поставил вертикально древко своего лука и измерил длинную темную линию, потянувшуюся от него по земле.
— Древко в 6 футов отбрасывает 12-футовую тень,— пробормотал он.— А башня отбрасывает тень в 60 футов; значит, веревки в 30 футов будет достаточно.»
В этом весь секрет: все тени на рисунке 2 находятся в одинаковом отношении к высоте предметов, которые их отбрасывают. Так как «Квант» по высоте равен примерно 25 см, посох был небольшим; его высота примерно равна 4×25 см = 1 м.

Задача Колумба

Первое яйцо нужно поместить точно в центр салфетки, а потом — после каждого хода партнера — делать «центральносимметричный» ход (цифры на рисунке 3, *а* обозначают

Рис. 3

номер хода, помогая понять начало партии). Просто п о л о ж и в первое яйцо в центр салфетки, вы рискуете проиграть, ибо противник может положить свое яйцо непосредственно рядом с вашим, и из-за неправильной формы яйца вы не сумеете точно «отсимметризовать» его ход. Чтобы выиграть наверняка, надо, подобно Колумбу, надбить яйцо и п о с т а в и т ь его вертикально.

Монастырская задача

Парадоксальные условия задачи на первый взгляд выполнить невозможно (особенно если решать ее подбором). Призовем однако на помощь элементарную алгебру. Изобразим схематически (табл. 1) жилые этажи: буквой A отметим угловые кельи, буквой B — средние кельи, выходящие на запад и на восток, буквой C — средние кельи с окнами на север и на юг. Пусть на верхнем этаже монахинь $2n$, на нижнем n, а всего $3n$. В 6 кельях на южной стороне живут 11 монахинь, в 6 кельях, выходящих на север,— тоже 11, вместе — 22. Значит, в 4 кельях B живут $3n$ — 22 монахини. Столько же их и в 4 кельях C. Значит, в 8 кельях A живут $3n-2(3n-22)=44-3n$ монахинь. Так как каждая келья занята, то

$$3n-22\geqslant 4,$$
$$44-3n\geqslant 8,$$

откуда $26\leqslant 3n\leqslant 36$ и, значит, поскольку n — целое,

$$9\leqslant n\leqslant 12,$$
$$27\leqslant 3n\leqslant 36.$$

Итак, вначале было не больше, чем 36, а в конце осталось не меньше, чем 27 монахинь. Если исчезли 9 монахинь, то было именно 36, а осталось ровно 27 монахинь.

A	C	A		A	C	A
B		B		B		B
A	C	A		A	C	A

Табл. 1

1	5	1		1	2	1
5		5		2		1
1	5	1		1	1	2

$n=12$

2	4	1		1	2	1
4		4		2		1
1	4	2		1	1	2

$n=11$

2	4	1		2	1	1
4		2		1		1
1	2	4		1	1	2

$n=10$

4	1	3		1	1	1
1		2		1		1
3	2	2		1	1	2

$n=9$

Табл. 2

1	4	1		1	3	1
4		6		3		1
1	6	1		1	1	1

$n=12$

4	2	2		1	1	1
1		1		1		2
3	1	4		1	1	1

$n=9$

Табл. 3

При этом для любого n от 9 до 12 действительно можно расселить на двух этажах $3n$ монахинь с соблюдением всех требований настоятельницы (табл. 2), так что задача разрешима даже при дополнительном условии, чтобы монахини исчезали по трое три раза. Расселиться по кельям и 36, и 27 монахинь могут и по-иному, чем в таблице 2,— например, так, как показано в таблице 3.
Таким образом, вопрос о числе монахинь решается однозначно, в то время как в их размещении по кельям имеется некоторая неопределенность, видимо не замеченная Лойдом.

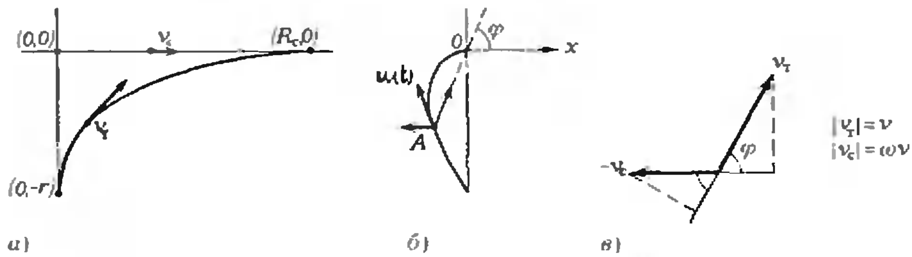


Рис. 4.

Том, сын трубача

Пусть (рис. 4, *а*) Том бежит со скоростью v_T по линии погони из точки $(0; -r)$, а свинья — со скоростью v_c по оси абсцисс из точки $(0; 0)$. Скорости постоянны по величине. Том бежит быстрее свиньи: $|v_T|=v$, $|v_c|=\omega v$, $\omega<1$.

Докажем, что за конечное время τ Том догонит свинью и что расстояние $R_T=v\tau$, которое он при этом пробежит, выражается через r и ω по формуле

$$R_T=\frac{r}{1-\omega^2}.$$

Чтобы найти скорость сближения Тома и свиньи, перейдем в систему отсчета, где свинья неподвижна и находится в начале координат O, новая ось абсцисс OX параллельна старой и направлена вправо (рис. 4, *б*). Пусть в момент t Том находится в точке $A=A(t)$. Найдем его скорость $u(t)$ в новой системе: отложим из точки A вектор длины v в направлении AO и вектор длины ωv влево; тогда $u(t)$ — сумма этих векторов (иначе говоря, $u(t)=v_T-v_c$; отметим, что и направления u и $|u|$ зависят от t). Найдем скорость $u_{AO}(t)$, с которой уменьшается расстояние AO (скорость сближения Тома и свиньи), и скорость $u_{OX}(t)$, с которой Том перемещается вдоль оси OX. Для этого спроектируем вектор $u(t)$ на направления AO и OX. Проекции вычисляются просто, так как $u(t)$ является разностью векторов v_T и v_c, имеющих именно эти направления. Обозначая через $\varphi(t)$ угол между AO и OX и проектируя v_T и v_c на OX и AO, получаем (рис. 4, *в*)

$$u_{OX}(t)=v\cdot\cos\varphi(t)-\omega v, \qquad (1)$$

$$u_{AO}(t)=v-\omega v\cdot\cos\varphi(t). \qquad (2)$$

Так как $u_{AO}(t)\geqslant v(1-\omega)$ и так как начальное расстояние между Томом и свиньей равно r, время погони

$$\tau<\frac{r}{v(1-\omega)}.$$

Поскольку Том начинает и заканчивает погоню в точках, где $X=0$, получаем

$$\int_0^\tau u_{OX}(t)\,dt=0,$$

то есть, согласно (1),

$$\int_0^\tau v\cdot\cos\varphi(t)\,dt=\omega v\tau=\omega R_T. \qquad (3)$$

Согласно (2),

$$r=\int_0^\tau u_{AO}(t)\,dt=v\tau-\omega\int_0^\tau v\cdot\cos\varphi(t)\,dt,$$

так что, с учетом (3),

$$r=R_T(1-\omega^2),$$

или

$$R_T=\frac{r}{1-\omega^2}\ ^{*)}.$$

Вспоминая соотношения $R_1=\dfrac{r}{1-\omega}$, $R_2=\dfrac{r}{1+\omega}$, $R_c=\omega R_T$ (здесь R_1 и R_2 — расстояния, которые пробежал бы Том, если бы гнался за свиньей не из точки $(0; -r)$, а из точек $(-r; 0)$ и $(r; 0)$ соответственно), находим

$$R_T=\frac{1}{2}(R_1+R_2),$$

$$R_c=\frac{1}{2}(R_1-R_2).$$

Тем же методом получается и более общая формула: если Том по-прежнему преследует свинью по линии погони и свинья снова бежит по оси абсцисс из точки $(0; 0)$, а Том в начальный момент находится в точке $(x_0; y_0)$, где $x_0=r\cdot\cos\Theta$, $y_0=r\cdot\sin\Theta$, то расстояние, которое пробежит Том, догоняя свинью, равно

$$R=\frac{1}{2}\left[R_1(1-\cos\Theta)+R_2(1+\cos\Theta)\right];$$

R_1, R_2 и R_T получаются по этой формуле при $\Theta=\pi$, $\Theta=0$ и $\Theta=-\dfrac{\pi}{2}$.

Сколько лет мисс Покахонт?

По условию, 15 детей Смита родились с интервалом в 1 год; значит мисс Покахонт, старший ребенок, на 14 лет старше Капитана Джона, самого младшего из детей. Дано, что Покахонт старше Джона в 8 раз, значит ей 16 лет.

Сколько лет Мэри?

Дедушка упоминает четыре момента времени — назовем их T_1, T_2, T_3 и T_4. За дальнейшими рассуждениями удобно следить по таблице 4. Когда-то (в момент T_1) Мэри была втрое старше Энн (им было тогда $3x$ и x лет соответственно, так что Энн моложе Мэри на $2x$ лет). В момент T_4 Энн станет втрое старше, чем была Мэри в момент T_1; значит,

---

*) Мы воспроизвели с небольшими изменениями доказательство из статьи С. Ащеулова и В. Барышева «Погоня, столкновение, поимка» («Квант», 1979, № 1, с. 24).

	T_1	T_2	T_3	T_4
Мэри	$3x$	$4{,}5x$	$5x$	
Энн	x	$2{,}5x$	$3x$	$9x$

Табл. 4

в момент T_4 Энн будет $9x$ лет. В момент T_2 Мэри была вдвое моложе, чем будет Энн в момент T_4, то есть в момент T_2 Мэри было $4{,}5x$ лет, а Энн (она на $2x$ лет моложе Мэри) было $2{,}5x$ лет. Сейчас (в момент T_3) Мэри вдвое старше, чем была Энн в момент T_2; значит, сейчас Мэри $5x$ лет, а Энн $3x$ лет. Поскольку $5x+3x=42$, $x=5\frac{1}{4}$, $5x=26\frac{1}{4}$. Итак, Мэри 26 лет и 3 месяца.

Великолепная Лу Диллон, альбомы и карандаш

Удивительно, но некоторые говорят, что 2 альбома дороже карандаша на 94 копейки. Сколько же тогда стоит альбом? И сколько карандаш? Задачу, разумеется, решить невозможно: два неизвестных связаны одним линейным уравнением.

Не менее удивительно, что кому-то удалось решить задачу про Лу Диллон, где для определения четырех неизвестных t_i (t_i — времена, которые тратила Лу на следующие друг за другом четверти мили, $i=1, 2, 3, 4$) имеется лишь 3 линейных уравнения.

Шифровка

ИСПРАВЬТЕ СТАРЫЕ ОШИБКИ И ОПЕЧАТКИ И НЕ ДЕЛАЙТЕ НОВЫХ!

Шифр очень простой: сначала пишем полслова, оставляя промежутки между буквами **(И С П Р А)**, а затем заполняем промежутки остальными буквами **(ИВСЬПТРСА)**. Мораль тоже простая: хочется, чтобы Лойда «читали, а не почитали».

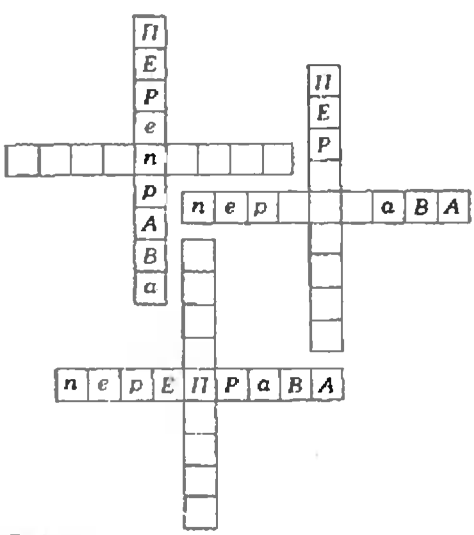


Рис. 5.

Колоколоколокола

Переправа. За манипуляциями с кубиками удобнее следить, если два «П», два «Р», два «Е» и два «А» обозначать по-разному: *Пп, Рр, Ее, Аа* (рис. 5). После «переправы» кубики в каждой из этих четырех пар меняются между собой местами.

Апельсин. *Апельсин* чудесным образом превращается в собаку: в горизонтальном желобе получается слово *спаниель*.

Один остроумный человек, долго мучившийся с этой головоломкой, сказал потом, что «решая ее, он ПАСИНЕЛЬ».

Колоколоколокола. Что же касается *колокола* и *кола*, то ловушка была в том, что просветы между словами можно вставить двумя способами. Правильный выбор фразы и желоба такой: сначала поставьте *колокол* около *кола* (правая вертикаль), потом положите *кол* около *колокола* (горизонталь) и, наконец, поставьте *кол* около *колокола* (левая вертикаль).

Числовые ребусы

(см. «Квант» № 9, с. 49)

1. а) окружность = 6871956432, г = 0;
   б) окружность = 1834071596, г = 2.

2. I.

```
 23604 | 162
 162   | 162
  940
  910
   304
   304
```

II.

```
40146Y9Y | 325
325      | 13012X
 984
 973
  116Y
  1098
    939
    64X
    2XYY
    2802
     2Y9
```

III.

```
816230 | 9X6
74X6   | 9X6
 8783
 8290
  4Y30
  4Y30
```

IV.

```
315201 | 615
3086   | 615
  880
  615
  2671
  2671
```

«Шахматный конкурс»

(см. «Квант» № 9)

I (Карпов — Корчной, матч претендентов, 1974 г.). Белые эффектно заканчивают поединок. **24.e5!** (перерезая пятую горизонталь) **24...С:d5** (после 24...de 25 К:f6+ ef 26. Kh5 мат неизбежен) **25.ef ef 26.Ф:h7+Kpf8 27.Фh8+. Черные сдались** (27...Кре7 28. К:d5+ Ф:d5 29.Лe1+).

2 (Карпов — Чом, 1977 г.). У черных лишняя фигура, к тому же под боем белая ладья. Однако после **1.Kf5!** венгерскому шахматисту пришлось немедленно сложить оружие; грозит 2.Лh7+ и 3.Фg7×; к мату приводит и 1...К:d7 2.Фh2+ Kpg8 3.Фg3+ и 4.Фg7×.

3 (Карпов — Остос, 1980 г.). **43. Kf8+! Kpg8** (коня бить нельзя из-за мата) **44.К:е6 Фс8 45.К:g7! Черные сдались.** Это была первая победа советских шахматистов на Шахматной олимпиаде на Мальте.

4 (Карпов — Рашковский, 1973 г.). Здесь эффектно выигрывает 23.С:f5!, и слона нечем брать: 23...С:f5 24.Л:b7 с выигрышем ферзя, или 23...gf 24. Лg3+ Kpf8 25. Фh8+ Kpe7 26.Лe1+. (Однако в партии белые сыграли 23.Kf3 и реализовали свой перевес только через ...30 ходов. Красивый комбинационный удар остался за кулисами.)

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 10)

1. ДВА×ШЕСТЬ меньше, а ДВАДЦАТЬ больше, чем ДВА×100 000.

2. а) Н е л ь з я. Если бы это можно было сделать, то сумма всех десяти сумм не превосходила бы 130, но сумма всех цифр равна 45, а в нашу «сумму сумм» каждая цифра входит три раза. б) Н е л ь з я. Действительно, цифры 9 и 6, 9 и 7, 9 и 8 не могут быть в одной тройке. Поэтому среди ближайших четырех соседей девятки (двух — с одной, и двух — с другой стороны) нет цифр 6, 7, 8. Значит, сре-

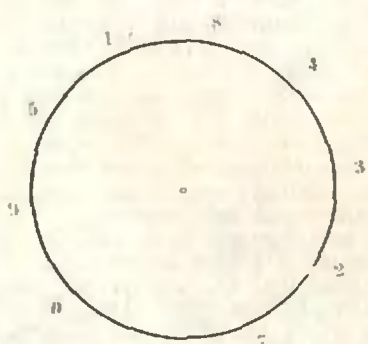


Рис. 6.

ди них есть 4 или 5 (поскольку цифры 8, 7, 6, 5, 4 не могут идти подряд), так что среди них есть также 0 или 1. Но тогда невозможно расставить цифры 8, 6 и 7 (убедитесь в этом!).

в) М о ж н о (см. рисунок 6).

3. М о ж н о. Нужно последовательно ходить на свободный кружочек с кружочков с номерами 5, 7, 6, 4, 2, 5, 4, 8, 6, 9, 7, 5, 3, 6, 11, 10, 7, 5, 4, 1, 6, 11, 8, 4, 6.

4. М о ж н о. Одно из возможных решений: 10 → 2; 12 → 10; 14 → 6; 2 → 10; 16 → 14; 8 → 6; 5 → 7; 13 → 5; 14 → 6; 3 → 11; 5 → 7; 11 → 3; 4 → 2; 1 → 3.

5. Такого числа нет, поскольку 528 делится на 11.

Задачи наших читателей
(см. «Квант» № 10, с. 50)

1. $|BC| = |\vec{a}|\tau^2/2$.

2. Воздух над батареей действительно теплее, чем над подоконником. Однако этот воздух не нагревает, а скорее охлаждает стакан с закипающей водой, поскольку температура воздуха ближе к комнатной, нежели к температуре кипения воды. Теплый воздух (около батареи) движется быстрее, чем холодный (около подоконника), и отнимает у горячего стакана больше тепла (получается вынужденное охлаждение теплым воздухом).

3. $m = N/(gc)$ (здесь g — ускорение свободного падения, c — скорость света).

Двадцатое — лишнее
(см. «Квант» № 10, 2 с. обложки)

См. рисунок 7. Лишнее число — 10.

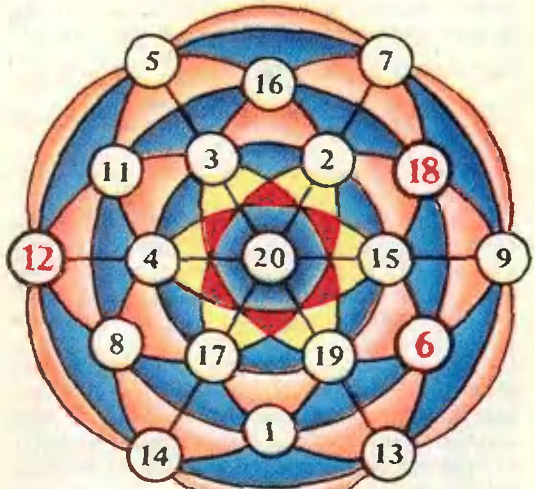


Рис. 7.

Номер подготовили:
А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шихакович

Номер оформили:
Г. Красиков, Н. Кузьмина, Э. Назаров, А. Пономарева, А. Прокофьев

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Н. Дорохова

113035, Москва, Б. Ордынка 21/16, «Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 22.9.81
Подписано в печать 29.10.81
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 7,28 Т-27744
Цена 30 коп. Заказ 2289
Тираж 232 544 экз.

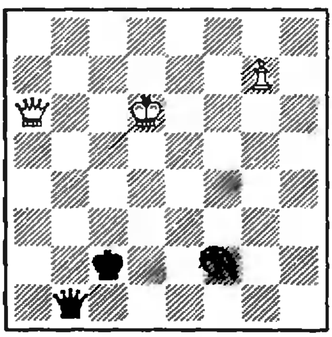
Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

ШАХМАТНЫЙ КОНКУРС

ЭВМ И ШАХМАТНЫЙ КОДЕКС

Когда математики (создатели «Каиссы») научили ЭВМ исследовать эндшпиль, они проанализировали некоторые известные позиции. И вот что при этом выяснилось.

Одним из самых сложных окончаний является «ферзь с коневой пешкой против ферзя». Машина исследовала позиции с белой пешкой на седьмой горизонтали и теперь про каждую из них может точно сказать, выигрывают в ней белые или нет, и если выигрывают, то за сколько ходов. Вот одна из двух позиций, заслуживающих особого внимания.



Ход черных. Белые выигрывают

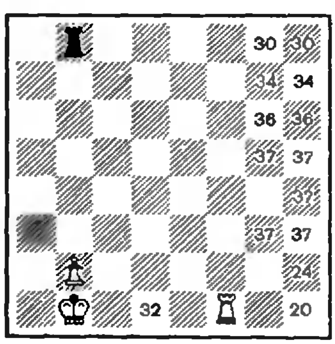
У белых здесь действительно выигрыш, но... в шахматном кодексе есть следующее правило: партия заканчивается вничью, если обеими сторонами сделано по 50 ходов, в течение которых ни одна фигура не была взята и ни одна пешка не сделала хода. К этому пункту в последнем издании кодекса имеется следующее толкование: «Для позиций «король и два коня против короля и пешки» число в 50 ходов увеличивается до 75 ходов. Оно может быть увеличено для других конкретных позиций только при условии, что это число и эти позиции будут точно указаны в положении о турнире или матче».

В приведенной позиции при наилучшей игре обеих сторон 58 ходов идет маневрирование и лишь на 59-м — взятие или превращение пешки.

Итак, позиции, обнаруженные ЭВМ, показывают, что число в 50 ходов должно быть увеличено в кодексе и для эндшпиля «король, ферзь и пешка против короля и ферзя». Можно сказать, что это первый случай в истории, когда ЭВМ вмешивается в шахматный кодекс! (Эндшпиль «король и два коня против короля и пешки» был исследован много лет назад и без помощи ЭВМ).

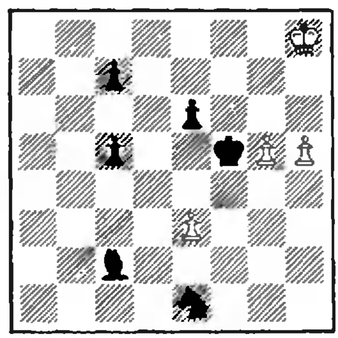
На практике значительно чаще ферзевых окончаний встречаются ладейные. Один из распространенных видов таких окончаний — «ладья с пешкой против ладьи» — также было поручено исследовать ЭВМ. Затратив 60 часов машинного времени, она блестяще справилась со своей задачей и теперь может оценить любую позицию такого типа, независимо от положения пешки. При этом машина установила много любопытных фактов. Например, она обнаружила позицию, которая выигрывается не ранее 60-го хода: белые — Крс3, Лс4, nb2; черные — Кре4, Л dl (ход черных). Кстати говоря, пешку здесь удается сдвинуть с места только на 32-м ходу после длительного и сложного маневрирования.

Для быстрой оценки возникающих эндшпильных позиций полезно иметь схему ничейной и выигрышной зон расположения какой-нибудь одной фигуры при фиксированном расположении остальных фигур. Здесь также помогает ЭВМ.

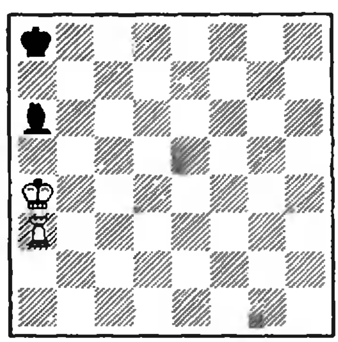


В этой «позиции» ход черных (черный король — может стоять на любом доступном ему поле доски). При одних положениях короля черных белые выигрывают, при других — нет. Результаты анализа, проведенного ЭВМ, показаны прямо на рисунке. Если на поле для короля нет числа, то позиция ничейная; если же на этом поле записано число *n*, то белые выигрывают в *n* ходов. Мы видим, что если черный король отрезан по линии "f", то единственным спасительным полем для него является g4 (не считая полей, на которых король просто берет белую ладью).

Сегодняшние конкурсные задания позволят вам посоревноваться с ЭВМ. Это настоящие шахматные эндшпили, которые машина успешно проанализировала.



1. Белые начинают и выигрывают.



2. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 31 декабря 1981 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс № 11-81»).

Цена 30 коп.

Индекс 70465

XV **Всесоюзная олимпиада школьников по математике**
(Алма-Ата, апрель 1981 г.).

Куратор 8-го класса А. М. Слинько проводит разбор задач со школьниками.

Чье решение лучше?

Может быть, «Квант» поможет?