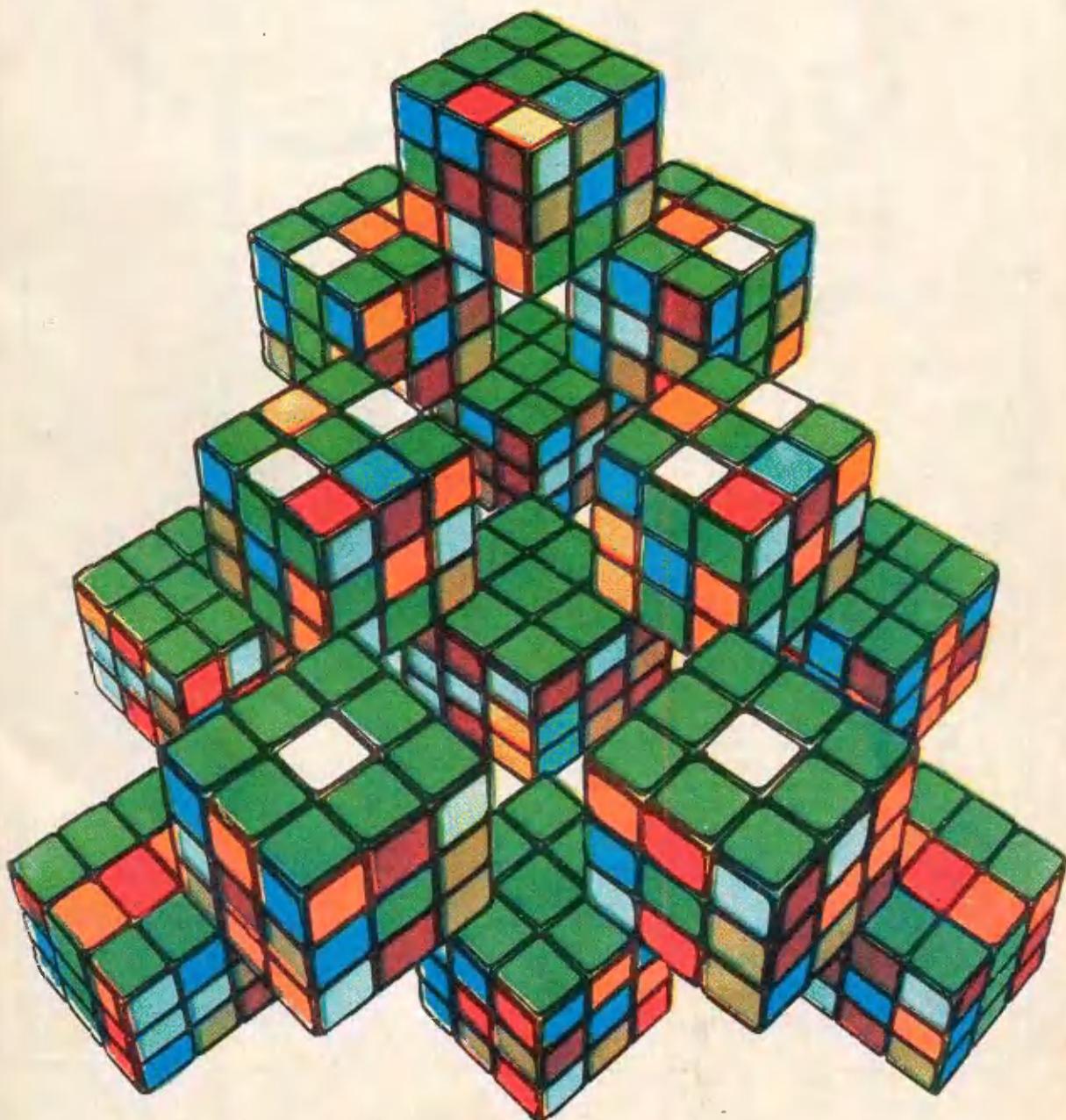
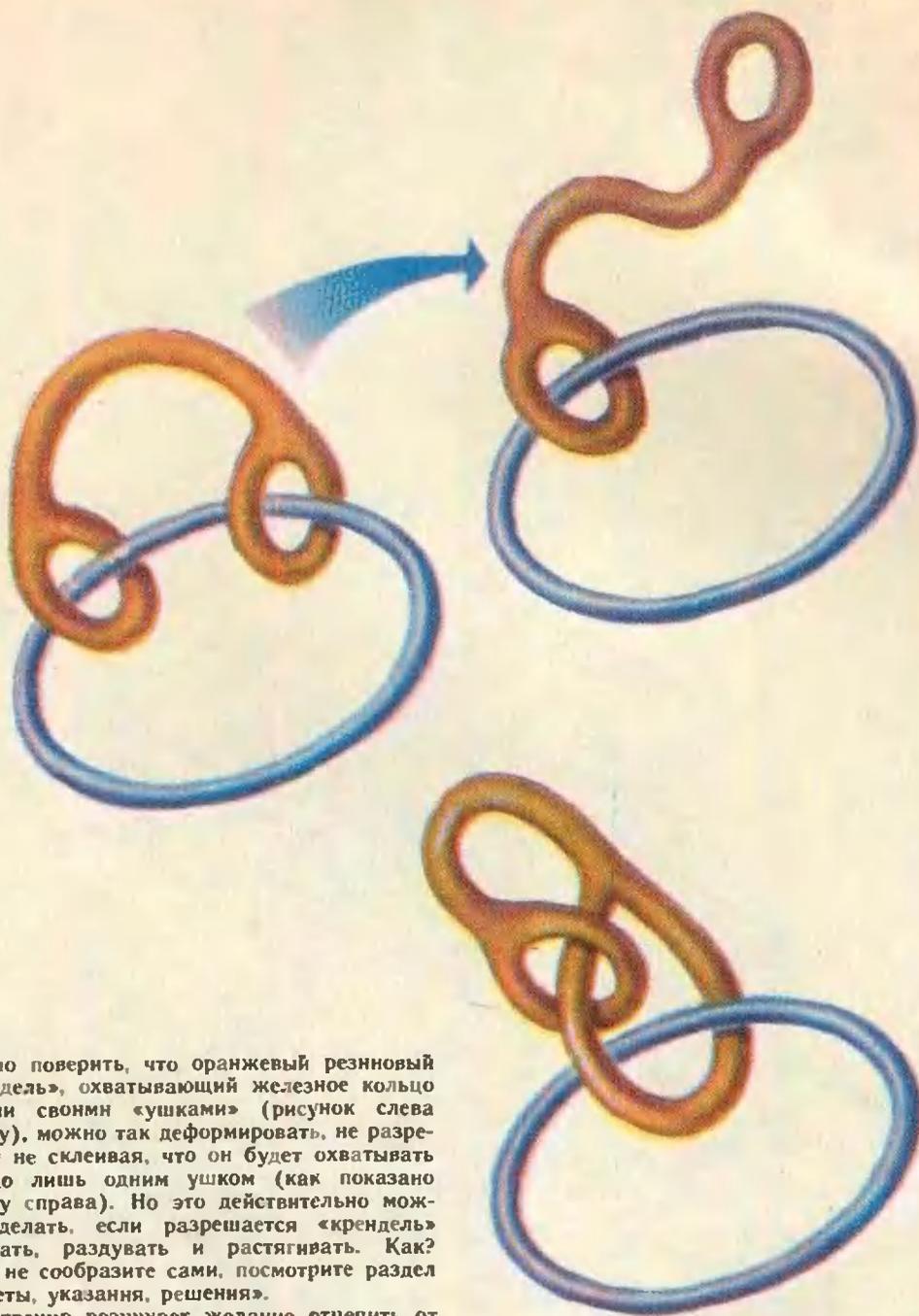


# квант

12  
1981

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ  
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





Трудно поверить, что оранжевый резиновый «крендель», охватывающий железное кольцо обоими своими «ушками» (рисунок слева сверху), можно так деформировать, не разрезая и не склеивая, что он будет охватывать кольцо лишь одним ушком (как показано сверху справа). Но это действительно можно сделать, если разрешается «крендель» сжимать, раздувать и растягивать. Как? Если не сообразите сами, посмотрите раздел «Ответы, указания, решения».

Естественно возникает желание отцепить от кольца и второе ушко — ведь они равноправны! Однако отцепить оба ушка нельзя.

А теперь подумайте, можно ли распутать крендель с одним ушком, зацепленным за другое (рисунок внизу).

А. П.

Главный редактор  
академик Кикоин И. К.

Первый заместитель  
главного редактора  
академик Колмогоров А. Н.

Заместитель  
главного редактора:  
Дониклычева М. Н.  
Лешковцев В. А.  
Соловьев Ю. П.

Редакционная коллегия:

Асламазов Л. Г.  
Башмаков М. И.  
Белонучкин В. Е.  
Болтянский В. Г.  
Боровой А. А.  
Брук Ю. М.  
Вавилов В. В.  
Весильев Н. Б.  
Воронин С. И.  
Гнеденко Б. В.  
Гутвицмахер В. Л.  
Долбильни Н. П.  
Дубровский В. Н.  
Земляков А. Н.  
Зильберман А. Р.  
Климаков А. И.  
Козал С. М.  
Кротов С. С.  
Кудрявцев Л. Д.  
Михайлов А. А.  
Никишин Е. М.  
Новиков С. П.  
Потапов М. К.  
Разумовский В. Г.  
Родина Н. А.  
Розов Н. Х.  
Савин А. П.  
Сморodinский Я. А.  
Соснинский А. Б.  
Урова В. М.  
Фабрикант В. А.

Редакционный совет:

Балаян С. Т.  
Балдин А. М.  
Бухарцев Б. Б.  
Велюков Е. П.  
Ворчино И. Я.  
Воздвиженский Б. В.  
Глушков В. М.  
Дорофеев Г. В.  
Ермолаева Н. А.  
Ершов А. П.  
Зубов В. Г.  
Иванов Ю. Б.  
Канторович Л. В.  
Калица П. Л.  
Кириллин В. А.  
Коткин Г. Л.  
Логунов А. А.  
Мажеев В. В.  
Орлов В. А.  
Кузьмин Р. Н.  
Патришева Н. А.  
Перышкин А. В.  
Сагдеев Р. З.  
Соболев С. Л.  
Стасенко А. Л.  
Сурин И. К.  
Сурнов Е. Л.  
Фаддеев Л. Д.  
Фирсов В. В.  
Яковлев Г. Н.

Новогоднюю елку  
на нашей обложке  
мы составили  
из четырнадцати экземпляров  
кубика Рубика —  
математической головоломки,  
секреты которой  
«Квант» раскроет  
в номере 1982 году

# Квант

Основан в 1970 году

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ  
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



ИЗДАТЕЛЬСТВО НАУКА  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

12  
1981



## В НОМЕРЕ:

Ученые обращаются к молодежи

- 2 *Велихов*. Задача все та же — учиться  
\* \* \*  
4 *А. Черник*. Звездная динамика  
11 *Ю. Демков*. Поворачиваем кубики  
17 *С. Вавилов*. «Теплый свет» и тепловое излучение

## Задачник «Кванта»

- 24 Задачи М716 — М720; Ф728 — Ф732  
26 РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ М676 — М680; Ф688 — Ф691  
34 *Г. Гуревич*. Системы разновесов  
36 Список читателей, приславших правильные решения

## «Квант» для младших школьников

- 37 Задача  
38 *С. Тавридов*. Пентамино на плоскости и в пространстве

## По страницам школьных учебников

- 40 *В. Рыжик*. Геометрический подарок

## Практикум абитуриента

- 42 *В. Белонучкин*. Диаграмма состояния

## Информация

- 46 *Л. Асламазов*. XII Международная физическая олимпиада  
50 *А. Абрамов, В. Мишин*. XXII Международная математическая олимпиада  
54 *В. Сергеев, А. Криворучко, М. Немиченицер*. Математические олимпиады в ПТУ

## Рецензии, библиография

- 55 *И. Зорич*. Что может голография?  
57 Шахматная страничка

- 58 Ответы, указания, решения  
61 Напечатано в 1981 году

## Новости науки (23)

## Смесь (41, 53)

## Шахматный конкурс (3-я с. обложки)

Е. Велихов

## Задача все та же — учиться!



В один из самых критических моментов для судьбы Советского государства, 60 лет тому назад, В. И. Ленин, выступая на III Всероссийском съезде РКСМ, сказал: «...задачи молодежи вообще и союзов коммунистической молодежи и всяких других организаций в частности можно было бы выразить одним словом: задача состоит в том, чтобы учиться». Прошло 60 лет. Возникло и окрепло первое социалистическое государство, образовалось общество развитого социализма в СССР, социализм победил во многих странах. Из семян, посеянных в первые годы Советской власти, выросла советская наука. Она решила ряд исторических задач — от электрификации страны до создания атомной науки и техники, освоения космоса и т. д. Сегодня в СССР работает треть научных работников всего мира.

Развитие научно-технической революции привело к тому, что продукт науки — знания — стали одним из основных национальных богатств.

В СССР созданы не только могучая передовая наука, научные школы, экспериментальная и материальная базы науки, но и одна из самых мощных и эффективных систем образования. И в то же время по-прежнему главная задача молодежи — учиться — остается столь же актуальной, как и 60 лет назад.

Каждое новое поколение советской молодежи встречается с новыми задачами, поставленными развитием общества, — от восстановления народного хозяйства после гражданской войны, строительства первых пятилеток до освоения целины, строительства БАМа, шефства над атомной энергетикой, нефтяными промыслами Тюмени. Не менее титаническая задача стоит и в учебе: каждое новое поколение должно воспринять и переварить все то, что создано предыдущими. В XX веке рост научно-технической информации происходит лавинообразно. Даже преподаватели подчас не успевают быть в курсе современной науки. Однако прогресс нашего общества зависит от успеха этого процесса — учебы.

---

Академик Евгений Павлович Велихов — лауреат Государственной премии, вице-президент Академии наук СССР, председатель Секции физико-технических и математических наук Президиума Академии наук СССР, заместитель директора Института атомной энергии имени И. В. Курчатова.

Статья перепечатывается с сокращениями из сборника «Ленин. Наука. Молодежь», выпущенного в 1980 году издательством «Наука».

Задачи здесь поистине грандиозные, но и резервы далеко не использованы. Как ни странно, но сам процесс мышления и обучения мы знаем еще очень плохо, и поэтому весьма неэффективно используются способности человеческого разума. Преподавание по-прежнему остается искусством, иногда творящим чудеса. По собственному школьному опыту мы знаем, что большинство из нас за 10 лет так и не овладевает иностранным языком, который при необходимости и по соответствующей методике эффективно усваивается за полгода. То же касается и всех других дисциплин. Школьник, изучивший принципы высшей математики в 6—7 классах, выглядит вундеркиндом, хотя это не менее естественно, чем научиться плавать в годовалом возрасте.

Современный спорт заставляет нас обращать много внимания на развитие человека до пределов его физических возможностей. В спорте считается нормальным, что школьники соревнуются за мировое первенство, лыжники достигают Северного полюса. В области же обучения мы значительно более робки. Да и придаем ли мы сравнимое социальное значение соответствующим усилиям человека в интеллектуальной сфере? Только тот, кто когда-либо соприкасался с настоящим педагогом, может представить себе, до какой степени неэффективен рутинный процесс передачи знаний от поколения к поколению, выработанный человечеством. При современной потребности общества в человеческом интеллекте сколько Эйнштейнов, Менделеевых, Толстых мы теряем! Важными факторами успеха в учебе являются стремление, внутренняя потребность и уверенность в себе каждого молодого человека. И, конечно, эти свойства должны стимулироваться прежде всего обществом, в том числе комсомольскими и другими общественными организациями.

Не менее странно и то, что мы искусственно разделяем два процесса — учебу и творчество. На самом деле — это один процесс. Если учеба для человека не является процессом творческим, то она почти бесполезна. И наоборот, только сохраняя способность учиться и удивляться новому, человек сохраняет способность творить независимо от возраста. Опять-таки этот процесс определяется индивидуальными усилиями и потребностями и общественными стимулами, которые формируют их.

Современный мир с его «накатанными дорогами», мелкими ежедневными проблемами и соблазнами способствует замедлению формирования личности. Сам процесс образования, а затем и начало рабочей деятельности иногда также подавляют индивидуальность. Наше общество кровно заинтересовано в том, чтобы каждый молодой человек был яркой индивидуальностью с сильным, самостоятельным, творческим характером, независимо от того, какую профессию он изберет и где он будет трудиться. В промышленности, в сельском хозяйстве, в сфере обслуживания, тем более в науке и технике в социалистическом обществе все больше и больше требуется интеллект — это генеральная линия нашего развития. Формирование такой личности требует ранней закалки и тренировки — умственной и физической.

Важнейшей задачей всего советского общества, в том числе и молодежи, является обеспечение должного научно-технического уровня и прогресса в непрерывном соревновании с капитализмом. У нас есть все основания быть уверенными, что эта задача будет успешно решена.

А. Черник

## Звездная динамика

### МЛЕЧНЫЙ ПУТЬ

Демокрит (V—IV вв. до н. э.) говорил, что Млечный Путь, это белесоватая полоса, протянувшаяся через все небо, есть «соединение света множества звезд». История астрономии знает немало и других предположений о природе Млечного Пути, обсуждавшихся задолго до того, как появилась возможность проверить их астрономическими наблюдениями: споры о Млечном Пути продолжались веками. Решение — в пользу догадки Демокрита — пришло в

1610 году, когда Галилей направил на небо только что созданный им телескоп.

За несколько ночей было сделано тогда множество замечательных астрономических открытий и среди них — открытие звезд Млечного Пути. Как писал Галилей, стали «югоступными глазу» звезды, которые раньше никогда не были видны и число которых по меньшей мере в десять раз больше числа звезд, известных в древие. Это — факт высокого значения, который положил конец спорам о Млечном Пути и выявил его природу для чувства и разума».



Исследования Млечного Пути превратились в одну из главных задач астрономии в XVIII и XIX веках, и теперь мы знаем, что звезды Млечного Пути принадлежат к гигантской звездной системе, содержащей в себе более ста миллиардов звезд, среди которых и ближайшая к нам звезда — Солнце. Общие черты строения и динамики этой системы, называемой Галактикой\*), надежно выяснены лишь в последние 30—40 лет. Вместе с тем стало известно, что во Вселенной имеются и другие системы такого рода — галактики.

Движение звезд в галактиках определяется силами тяготения. Закон взаимного тяготения тел, установленный в исследованиях земного притяжения, в наблюдениях за движениями тел в Солнечной системе, справедлив и в звездных системах, которые в миллионы и миллиарды раз больше Солнечной системы; в этом проявляется универсальный, всемирный характер тяготения.

### Галактика и галактики

В строении Галактики различают два главных структурных элемента — диск и сферическую составляющую. Диск образован молодыми и яркими звездами, у него имеется утолщение в середине, так что он похож на чечевицу или линзу (рис. 1). Диаметр диска составляет примерно 75 тысяч световых лет, его поперечный размер раз в десять меньше; Солнце находится в диске на расстоянии двух третей радиуса от центра. Видимый изнутри диск Галактики и представляется нам полосой Млечного Пути.

Кроме звезд диска в Галактике имеются и другие, менее яркие звезды; они заполняют, сгущаясь к центру, сферический объем с диаметром, близким к диаметру диска. Наиболее плотная центральная часть Галактики — ее ядро (см. рис. 1).

Один из самых впечатляющих астрономических феноменов — спиральный узор галактик (рис. 2). Он образован самыми молодыми, ярчайшими звездами дисковой составляющей. Наша Галактика и другие га-

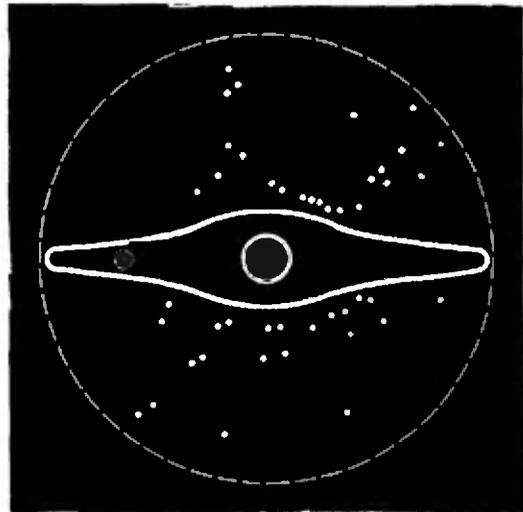


Рис. 1. Галактика в поперечном разрезе. Диск, сферическая составляющая и ядро — три главных элемента ее структуры. Положение Солнца указано символом ☉; так его обозначали еще в древнеегипетских надписях. В сферической составляющей показаны некоторые из шаровых звездных скоплений, ее коллективных членов.

лактики, украшенные этим узором, называются спиральными. В рукавах спиралей находится очень небольшая доля звезд, но зато они ярче всех, и потому в удаленных галактиках бывает чаще всего виден только их спиральный узор. Самая близкая к нам гигантская спиральная галак-



Рис. 2. Схема спиральных рукавов в диске Галактики «анфас». В диске имеется газ, который вращается вместе со звездами; это гигантский вихрь, и в создаваемых им уплотнениях рождаются молодые звезды, которые и обрисовывают спиральный узор.

\*) Что в переводе с новогреческого означает «млечный»

тика — знаменитая туманность Андромеды.

Галактики, лишенные спирального узора, обычно не имеют и дисковой составляющей. Их сферическая составляющая (в действительности она всегда в той или иной степени сплюснута) представляется на астрономических фотографиях эллипсом; поэтому такие галактики называют эллиптическими. Встречаются и вообще бесструктурные на вид образования — неправильные галактики, которые выглядят клочковатыми облаками звезд. Иногда оказывается, что и у них имеется сферическая составляющая, содержащая, как и в других случаях, слабые, неяркие звезды. Наконец, сейчас находят очень концентрированные звездные системы, напоминающие плотные центральные области, ядра спиральных и эллиптических галактик, только они еще плотнее и гораздо массивнее.

### Движение звезд в диске Галактики

Звезды дисковой составляющей Галактики движутся по почти круговым орбитам. Их движение похоже на обращение планет вокруг Солнца, хотя в Галактике нет такого подавляющего по массе центрального тела, как Солнце в Солнечной системе, которое одно создавало бы притяжение всех тел к центру. Ядро нашей Галактики имеет очень небольшую массу и не оно удерживает звезды на их орбитах. Сила притяжения к центру создается в Галактике совместными тяготениями самих звезд.

На звезду, движущуюся по круговой орбите радиуса  $r$ , действует притяжение звезд, находящихся внутри этой орбиты. Силы притяжения, создаваемые внешними звездами, направлены в разные стороны и друг друга уравновешивают\*). Звезды «не замечают» внешних тяготеющих масс, а масса всех внутренних звезд действует так, как если бы вся она была целиком сосредоточена в центре. В соответствии с этим и на основа-

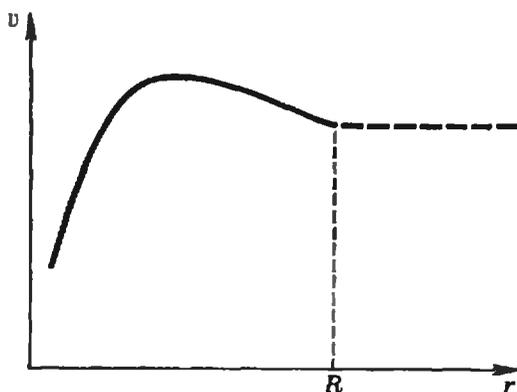


Рис. 3. Кривая вращения — типичная зависимость скорости вращения звезд в диске спиральной галактики от расстояния до центра. К пунктирной линии, уходящей за пределы галактики, мы вернемся позже.

нии закона всемирного тяготения сила притяжения звезды к центру дается формулой

$$F = G \frac{m \cdot M(r)}{r^2}. \quad (1)$$

Здесь  $m$  — масса звезды,  $M(r)$  — полная масса внутри орбиты радиуса  $r$ ,  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 (\text{кг} \cdot \text{с}^2)$  — постоянная тяготения. Сила  $F$  направлена к центру Галактики. При скорости движения звезды  $v$  сила тяготения создает центростремительное ускорение

$$\frac{v^2}{r} = \frac{F}{m}. \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) следует связь между скоростью звезды, радиусом ее орбиты и массой звезды:

$$v^2 = \frac{G \cdot M(r)}{r}. \quad (3)$$

Такая же по виду формула описывает круговые движения планет и обращение спутника вокруг Земли.

Формула (3) позволяет оценить скорости звезд в диске Галактики по известным значениям радиуса орбиты и массы внутри нее. Если радиус орбиты сравним по величине с полным радиусом Галактики, то есть  $r \sim R \sim 10^{20} \text{ м}$ , то под массой  $M(r)$  нужно понимать величину, сравнимую с массой всей Галактики:  $M(r) \sim M \sim 10^{41} \text{ кг}$ . (Масса Галактики находится умножением средней массы звезды  $m \sim 10^{30} \text{ кг}$  на полное число звезд в Галактике  $N \sim 10^{11}$ .) Для этих величин  $r$  и  $M(r)$  находим

\*) Это всегда так, когда в системе имеется сферическая или цилиндрическая симметрия. Доказательство приведено в Приложении I на с. 10

приближенно из соотношения (3)

$$v \approx 3 \cdot 10^5 \text{ м/с} = 300 \text{ км/с.}$$

Согласно данным наблюдений Солнце обращается вокруг центра Галактики со скоростью  $v_{\odot} = 220 \text{ км/с}$ , что довольно близко к полученной нами оценке. (Это — самое быстрое из всех движений, в которых мы участвуем вместе с Землей; скорость обращения Земли вокруг Солнца составляет  $30 \text{ км/с}$ , а линейная скорость собственного вращения Земли —  $0,5 \text{ км/с}$ .)

Движение звезд в диске Галактики происходит согласованно, так что и диск как целое вращается вокруг своего центра. Скорости вращения — разные на разных расстояниях от центра (рис. 3).

### Динамика сферической составляющей

Движение звезд в сферической составляющей Галактики иное, их орбиты не круговые, а сильно вытянутые. Некоторые орбиты весьма близки к прямым линиям, а в принципе возможны и чисто прямолинейные, радиальные орбиты.

Чтобы разобратся в особенностях такого движения, стоит вспомнить сначала один вопрос, который, кажется, любят задавать на вузовских приемных экзаменах: как будет двигаться камень, брошенный в шахту, пробуренную в Земле насквозь через центр? Очевидно, камень будет сначала падать с ускорением к центру вдоль радиуса; затем, миновав центр, начнет замедлять движение; потом на миг остановится и полетит обратно, наращивая скорость; но пролетев центр, он снова начнет замедлять движение, остановится, полетит опять к центру и т. д. Это будет периодическое колебательное движение от одного апоцентра, то есть точки максимального удаления от центра, до другого.

Подобные колебательные движения вокруг центра Галактики и совершают звезды ее сферической составляющей. То обстоятельство, что их орбиты немного отличаются от чисто радиальных, мало что меняет в этой картине. Поведение скорости

радиального движения звезд напоминает классический пример колебательного процесса — качания маятника: его скорость максимальна в среднем положении и обращается в нуль в крайних положениях.

Двигаясь каждая в своей «шахте», звезды испытывают тяготение, различное по силе на разных расстояниях от центра системы (при круговом движении сила притяжения постоянна по величине). Ясно, что в этом случае для количественного анализа движения требуется знать конкретное распределение массы в системе. Но если интересоваться не деталями, а общими динамическими характеристиками сферической составляющей, то для численных оценок достаточно и того, что мы уже выяснили с помощью простых аналогий.

Найдем, например, характерную скорость радиального движения звезд. Из периодичности этого движения следует, что средняя скорость за период равна нулю:  $\bar{v} = 0$ . Средний же квадрат скорости отличен от нуля:  $\overline{v^2} \neq 0$ . Корень квадратный из этой величины — среднеквадратичная скорость — и будет нас интересовать. Оценим ее для звезды, которая при максимальном удалении от центра выходит к границам системы. Следует ожидать, что в таком случае в выражении для среднеквадратичной скорости должны фигурировать величины, характеризующие систему в целом: полная масса галактики  $M$  и ее радиус  $R$ . Должна, конечно, входить и гравитационная постоянная  $G$ , так как движение управляется силами тяготения.

Для нахождения связи между интересующими нас величинами мы воспользуемся методом размерностей\*). Запишем размерности величин  $M$ ,  $R$ ,  $G$ :

$$[M] = \text{кг}, [R] = \text{м}, [G] = \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}.$$

Интересующая нас среднеквадратичная скорость  $\sqrt{\overline{v^2}}$  имеет размерность

$$[\sqrt{\overline{v^2}}] = \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}.$$

\*) Методу размерностей посвящена большая статья в 6 номере «Кванта» за этот год

Из трех величин —  $M$ ,  $R$ ,  $G$  — можно составить единственную (проверьте!) комбинацию, имеющую размерность квадрата скорости:

$$\left[ \frac{GM}{R} \right] = \frac{m^2}{c^2}.$$

Поэтому нужно считать, что

$$\overline{v^2} = a \frac{GM}{R}.$$

Здесь  $a$  — некоторый безразмерный множитель, зависящий от деталей строения системы; как показывает накопленный в теоретической физике опыт оценок такого рода, безразмерный множитель чаще всего не слишком сильно отличается от единицы. Из соотношения (4) следует, что характерная скорость радиальных движений звезд в сферической составляющей Галактики близка к значению в несколько сотен километров в секунду, которое мы находили выше для круговых движений в диске. Эти скорости — одного порядка.

Метод анализа размерностей и оценок по порядку величины незаменим, когда точная теория либо слишком сложна математически, либо невозможна из-за неопределенности или недостатка имеющихся наблюдательных или экспериментальных данных. Формально он как будто прост, но, по существу, предполагает, что сначала достигнуто общее качественное понимание того, что происходит. Точность оценок велика, но, например, для целей астрофизики во многих случаях вполне достаточна.

И на круговых, и на радиальных (или близких к ним) орбитах звезды совершают финитное движение, то есть при своих перемещениях они не выходят за пределы некоторого ограниченного объема: их связывает в звездной системе их общее поле тяготения. Связанное состояние звезд обеспечивает неизменное во времени, стационарное состояние системы в целом.

### Массы галактик

Возможен только один способ определения масс звездных систем — по создаваемой ими силе тяготения. Тяготение проявляется в движениях

звезд, и если удастся измерить их характерные скорости и размер системы, то масса может быть найдена с помощью формул (3) или (4). Первая применима к спиральным галактикам с дисками, а вторая — к сферическим составляющим галактик и к эллиптическим галактикам, которые динамически им подобны. В обоих случаях речь чаще всего идет о приближенной оценке, и потому, опуская в (4) неопределенный множитель, можно написать общую оценочную формулу для массы галактики:

$$M \sim \frac{\overline{v^2} R}{G}. \quad (5)$$

Найденные таким способом массы спиральных галактик лежат в пределах от  $3 \cdot 10^8 M_{\odot}$  до  $3 \cdot 10^{11} M_{\odot}$ , где  $M_{\odot}$  — масса Солнца; диапазон масс эллиптических галактик шире — от  $3 \cdot 10^6 M_{\odot}$  до  $3 \cdot 10^{12} M_{\odot}$ ; массы неправильных галактик сравнительно невелики — от  $10^6 M_{\odot}$  до  $10^9 - 10^{10} M_{\odot}$ .

Многие крупные галактики, и наша Галактика в том числе, обычно имеют по нескольку малых галактик-спутников. Эти спутники обращаются вокруг центральной галактики, и по анализу их движений тоже можно получить динамическую оценку масс крупных галактик. Если центральная галактика целиком лежит внутри орбит ее спутников, а именно такая картина и наблюдается на фотографиях, то силы тяготения, действующие на все спутники, обусловлены одной и той же тяготеющей массой. Применяя в этом случае формулу (3), найдем, что скорость  $v_1$  вращения близкого спутника с радиусом орбиты  $r_1$  больше скорости  $v_2$  более далекого спутника с радиусом орбиты  $r_2$ :

$$\frac{v_1}{v_2} = \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^{1/2}.$$

и скорость убывает с радиусом орбиты по закону

$$v(r) \sim r^{-1/2} \quad (6)$$

(этому закону подчиняются и планеты Солнечной системы).

К удивлению астрономов, в последние годы стали появляться ука-

зания на то, что в семействах спутников нашей Галактики, галактики Андромеды и некоторых других массивных галактик закон (6) не выполняется. В наблюдениях измерялись скорости спутников, находящихся на расстояниях до десяти радиусов центральной галактики, и всякий раз оказывалось, что скорости отнюдь не убывают с радиусом орбиты, а остаются (с известной точностью) постоянными. Это обстоятельство и отражает пунктирная линия на кривой вращения (см. рис. 3).

В поисках объяснения советские астрономы из Тартуской обсерватории и американские астрономы из Принстонского университета предложили обсудить одну далеко идущую возможность. Что если масса галактики на самом деле не ограничивается той, что лежит в пределах видимого на фотографиях объема? Не могут ли, кроме звезд, существовать и какие-то иные тяготеющие массы, распределенные по гораздо большему объему вокруг галактик? Так возникла гипотеза о невидимых, «скрытых» массах галактик.

Предполагается, что эта дополнительная масса образует корону галактики, которая простирается на большие расстояния и достигает самых дальних орбит галактик-спутников. Если так, то спутники движутся не в пустоте, а среди невидимых, «скрытых» масс. Тогда тяготеющая масса, влияющая на движение спутника, складывается из массы видимых звезд галактики и «скрытой» массы, находящейся внутри орбиты спутника. В результате суммарная тяготеющая масса возрастает с ростом радиуса орбиты; из-за этого скорости галактик-спутников и не подчиняются закону (6). Если скорости одинаковы на орбитах разных радиусов, то, как видно из формул (3) и (5), с ростом  $r$  тяготеющая масса должна возрастать по закону

$$M \sim r. \quad (7)$$

Отсюда следует, что полная масса галактики может оказаться во много раз больше массы видимых звезд. Если семейство галактик-спутников, движущихся с одинаковыми скоростями, находится на расстоянии, скажем,  $3R$  от центра галактики, то и

полная масса всей системы в три раза больше массы видимых звезд, то есть видимого тела галактики.

При возрастании массы по закону (7) плотность вещества в галактике убывает от центра наружу как  $r^{-2}$  (мы покажем это в Приложении II). На достаточном удалении от центра плотность падает быстрее и сходит на нет.

\* \* \*

Гипотеза «скрытой» массы объясняет динамику галактик-спутников, но ставит вместе с тем новые трудные вопросы. Прежде всего, что представляет собой эта масса? Ответ не известен. Предполагают, что она может складываться из масс малых и очень слабых по блеску звезд. Если так, то звезд в Галактике гораздо больше, чем можно увидеть даже в самый лучший телескоп.

Но это — не единственная возможность. В последнее время астрономы и физики внимательно обсуждают идею, согласно которой «скрытая» масса представляет собой газ элементарных частиц — нейтрино. Эти частицы известны в физике уже почти полвека, но до сих пор не ясно, имеют они массу покоя (подобно протону, электрону и другим частицам) или их масса покоя равна нулю (как у фотона). При наличии массы покоя, хотя бы и гораздо меньшей, чем у электрона (легчайшей из частиц, относительно которой точно известно, что она имеет массу покоя), нейтрино действительно могли бы создавать вокруг массивных галактик протяженные облака, невидимые, но тяготеющие.

В недавних экспериментах московских физиков, проведенных не с космическими, а с лабораторными нейтрино, возникающими при радиоактивном распаде, были обнаружены признаки того, что нейтрино, возможно, на самом деле имеют массу покоя. Сообщается, что она приблизительно в десятки тысяч раз меньше массы покоя электрона. Это предварительный результат, но если он подтвердится, то нужно будет считать, что и космические нейтрино имеют массу покоя. Тогда идея нейтринной «скрытой» массы получит надежное физическое обоснование.

А пока что, как и много веков назад, высказываются все новые догадки, идеи, гипотезы — споры о природе галактик продолжаются....

### Приложение I

Докажем, что силы притяжения, действующие на звезду со стороны «внешних» звезд, уравновешивают друг друга, если внешнее распределение сферически симметрично.

Рассмотрим сначала гравитационное действие тонкого сферического слоя радиуса  $r$  и толщины  $l \ll r$  на область внутри этого слоя (рис. 4). Для этого подсчитаем сумму сил, действующих со стороны отдельных элементов слоя на массу  $m$ , помещенную в произвольной точке  $A$ . Выделим пару элементов, «вырезаемых» в слое двуполостным конусом с вершиной в точке  $A$  (см. рис. 4). Конус считаем очень узким, так что  $\alpha \ll \pi$ . Образованные таким сечением элементы слоя можно приближенно считать плоскими дисками, пренебрегая кривизной их поверхности. В этом приближении диаметры дисков равны

$$d_1 = r_1 \alpha, \quad d_2 = r_2 \alpha,$$

где  $r_1, r_2$  — расстояния дисков от точки  $A$ .

Со стороны диска 1 на массу  $m$  в точке  $A$  действует сила  $\vec{F}_1$ , со стороны диска 2 — сила  $\vec{F}_2$ .

Ввиду малости размеров диска ( $d_1 \ll r_1, d_2 \ll r_2$ ) силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  можно определить, считая, что вся масса каждого из дисков сосредоточена в точке, находящейся, соответственно, на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от точки  $A$ . Тогда

$$|\vec{F}_1| = \frac{Gm_1 m}{r_1^2}, \quad |\vec{F}_2| = \frac{Gm_2 m}{r_2^2},$$

где  $m_1, m_2$  — массы дисков. Чтобы найти  $m_1$  и  $m_2$ , учтем, что диски имеют столь малую толщину, что изменением плотности  $\rho$  внутри них можно пренебречь, так что эти массы равны

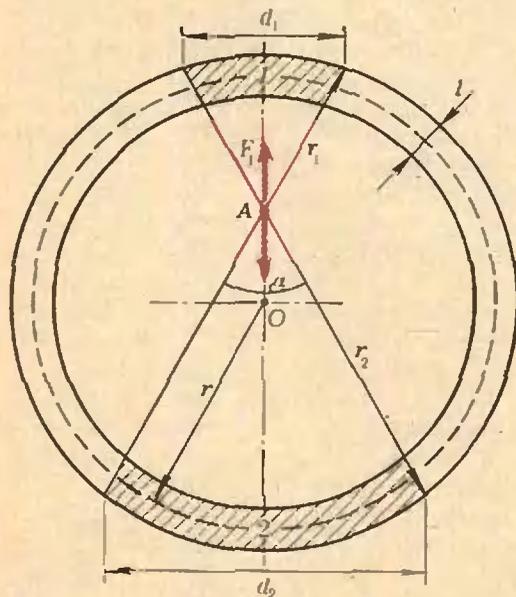


Рис. 4.

$$m_1 = \rho \pi \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 l = \rho \pi \left(\frac{r_1 \alpha}{2}\right)^2 l,$$

$$m_2 = \rho \pi \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 l = \rho \pi \left(\frac{r_2 \alpha}{2}\right)^2 l.$$

Подставляя теперь массы  $m_1$  и  $m_2$  в выражения для  $|\vec{F}_1|$  и  $|\vec{F}_2|$ , находим:

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = G \rho \pi \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 m l.$$

Таким образом, по величине силы  $F_1$  и  $F_2$  равны, а будучи противоположно направленными, они взаимно уравновешиваются.

Очевидно, что весь сферический слой можно разбить на подобные пары элементов; при этом сила, создаваемая каждой парой в точке  $A$ , равна нулю, так что и общее гравитационное воздействие всего слоя в этой точке отсутствует.

Далее, переходя от отдельного слоя ко всему внешнему распределению тяготеющих масс, можно это распределение мысленно разбить на тонкие сферические слои, и так как, согласно доказанному выше, каждый такой слой не создает гравитационной силы во внутренней точке  $A$ , то и вся их совокупность никак не влияет ни на произвольно выбранную точку  $A$ , ни на всю внутреннюю область вообще.

В качестве интересного упражнения можно предложить провести аналогичное доказательство для случая цилиндрической симметрии в распределении внешних масс.

### Приложение II

Докажем, что если полная масса  $M$  заключена внутри сферы радиуса  $r$ , возрастает пропорционально  $r$ , то плотность  $\rho(r)$  (сферически симметричная) распределена по закону  $\rho \sim r^{-2}$ .

Выделим тонкий сферический слой толщины  $l$  с внешним радиусом  $r$ . Масса такого слоя равна  $\Delta M = M(r) - M(r-l) = Kr - K(r-l) = Kl$ , где  $K$  — коэффициент пропорциональности. Объем такого слоя равен  $\Delta V = \frac{4}{3} \pi r^3 - \frac{4}{3} \pi (r-l)^3 = \frac{4}{3} \pi (3r^2 l - 3r l^2 + l^3)$  (объем сферы радиуса  $r$  равен  $\frac{4}{3} \pi r^3$ ). Средняя плотность в слое равна

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{\Delta M}{\Delta V} = \frac{3Kl}{4\pi(3r^2 l - 3r l^2 + l^3)}.$$

Плотность  $\rho(r)$  на расстоянии  $r$  от центра сферы равна  $\lim_{l \rightarrow 0} \rho_{\text{ср}}$ , то есть

$$\rho(r) = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{3Kl}{4\pi(3r^2 l - 3r l^2 + l^3)} = \frac{K}{4\pi r^2} \sim r^{-2},$$

что и требовалось доказать.

Ю. Демков

## Поворачиваем кубики

Нет, в этой статье не обсуждается «венгерский шарнирный кубик» (см. «Квант», 1980, № 12, с. 17) — головоломка, родившаяся в руках венгерского архитектора Эрнё Рубика и вызвавшая ажиотаж во всем мире, особенно в ВНР и США, где ее выпускают в миллионах экземпляров. К этой трудной и интересной игре «Квант» скоро вернется, а здесь речь пойдет о значительно более простой головоломке, которую каждый может смастерить за несколько минут и для которой можно построить несложную и законченную математическую теорию.

Возьмем 8 кубиков и сложим из них куб вдвое большего размера<sup>\*</sup>). Раскрасим три пары противоположных граней этого куба, соответственно, в белый и желтый, красный и оранжевый, зеленый и синий цвета. Тогда у каждого из маленьких кубиков три грани окажутся раскрашенными в разные цвета. Возьмем теперь куб в руки и повернем на  $180^\circ$  слой из четырех прилегающих друг к другу кубиков относительно четырех остальных (по часовой или против часовой стрелки, не важно, — результат от этого не зависит). Очевидно, что это можно сделать тремя разными способами. Назовем эти три поворота *элементарными операциями* или *ходами*. Повторяя эти ходы в разном порядке несколько раз, мы будем получать разные распределе-

ния цветов по граням куба. Назовем каждое такое распределение цветов *состоянием* куба, причем все распределения, отличающиеся поворотом куба как целого, будем считать одним и тем же состоянием. Назовем *нулевым* то состояние, при котором каждая грань большого куба раскрашена одним цветом.

Возникают следующие вопросы. Сколько имеется различных состояний, получающихся из нулевого некоторой последовательностью ходов? Каково наименьшее число ходов, переводящих данное произвольное состояние в нулевое? Каково минимальное число ходов, переводящих два данных состояния друг в друга?

### Изображение состояний и запись ходов

Чтобы ответить на эти вопросы, научимся сначала описывать состояние куба и введем специальную запись для ходов. Сперва зафиксируем положение куба в пространстве, считая, что один из маленьких кубиков остается неподвижным при всех преобразованиях, например тот, три внешние грани которого окрашены в белый, оранжевый и зеленый цвета.

На рисунке 1 изображение куба и 12-ти обращенных к нам граней малых кубиков дополнено изображением 9-ти задних граней, как бы отраженных в круглом вогнутом зеркале. Три грани заднего малого кубика, остающиеся неподвижными, на рисунке не изображены.

Обозначим поворот передних четырех кубиков на  $180^\circ$  вокруг оси  $x$  буквой  $X$ , поворот четырех правых кубиков —  $Y$  и поворот четырех верхних кубиков —  $Z$  (рис. 2). При всех этих ходах задний малый кубик будет оставаться неподвижным, так что выполняя ходы  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , мы никогда не повернем куб как целое. Состояния, которые получаются из нулевого применением операций  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , изображены на рис. 1, где они помечены номерами 2—4.

### Композиция ходов и соотношения

Композицию (последовательное выполнение) ходов мы будем называть

<sup>\*</sup> Чтобы это осуществить на самом деле, нужно внутренние грани кубиков покрыть тонким слоем пластилина — они склеятся при сборке, а потом легко будут расщепляться и сдвигаться.

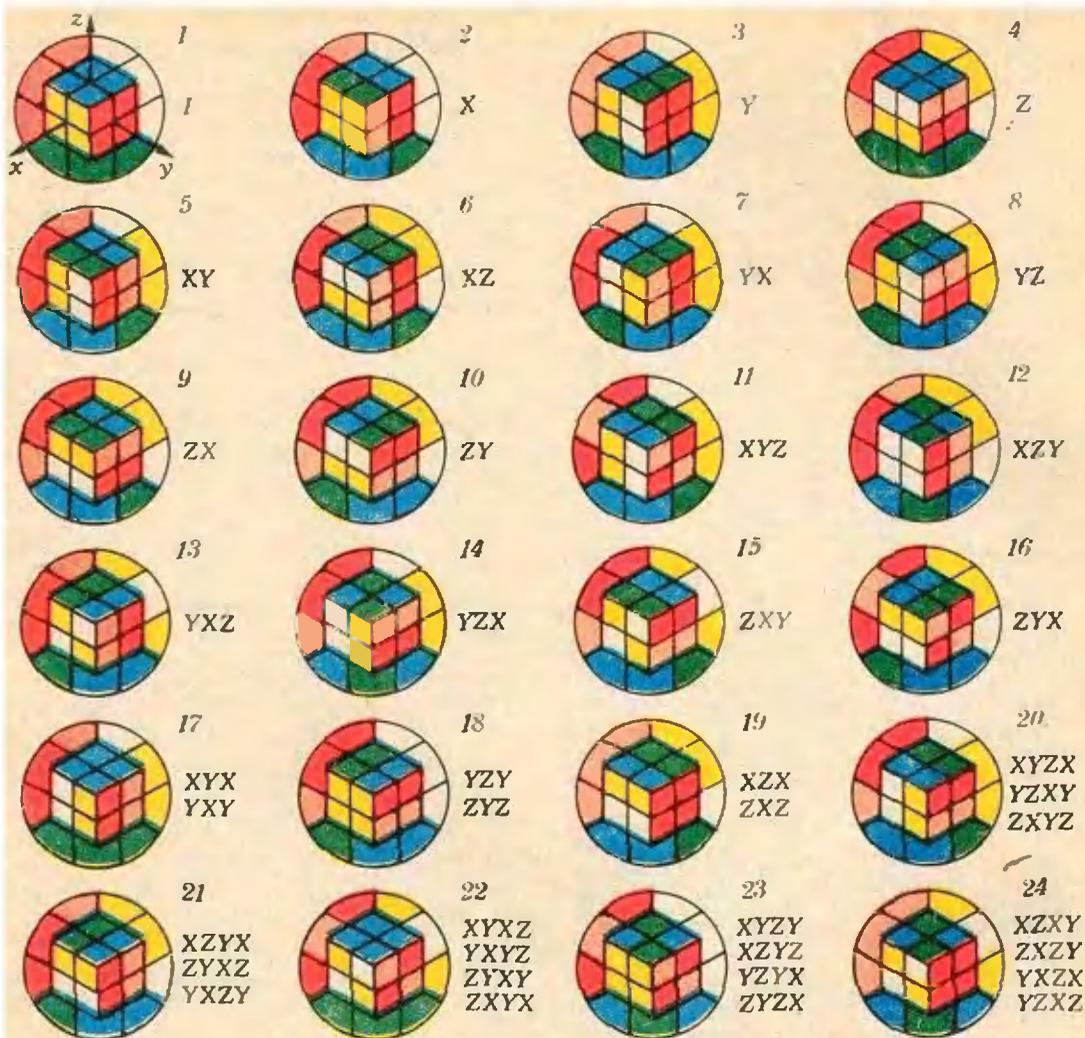


Рис. 1.

также *умножением*: произведение ходов будем записывать слева направо. Например,  $YZX$  — это последовательное выполнение ходов  $Y, Z, X$ ;  $X^3 = XXX$  — это выполнение трех ходов  $X$ . Два произведения ходов мы будем считать *равными*, если они на каждое состояние куба действуют одинаково.

Умножение ходов, конечно, не коммутативно; например, все шесть «парных» произведений не равны (номера 5—10 на рисунке 1).

Обозначим  $I$  «гождественный» ход, оставляющий куб не изменившимся. Очевидно,

$$X^2 = Y^2 = Z^2 = I. \quad (*)$$

Легко проверить, что все «парные» произведения, повторенные три раза, не меняют состояния куба:

$$(XY)^3 = (YZ)^3 = (ZX)^3 = (YX)^3 = \\ = (ZY)^3 = (XZ)^3 = I. \quad (**)$$

Кроме того,

$$(XYZY)^2 = (XZYZ)^2 = (YXZX)^2 = \\ = (YZXZ)^2 = (ZXYX)^2 = \\ = (ZYXY)^2 = I \quad (***)$$

Из равенств (\*), (\*\*), (\*\*\*) легко получить (уже не обращаясь к кубу!) много новых равенств. Например (проверьте!),  $XYX = YXY$  (см. также задачу 1 на с. 16).

Итак, мы получили три группы равенств, согласно которым все три хода  $X, Y, Z$  являются «корнями квадратными из единицы» (\*), а все шесть парных ходов — «корнями кубическими из единицы» (\*\*), а еще шесть комбинаций ходов специального вида ( $XYZY, YZXY, \dots$ ) тоже яв-



Имея перед глазами пронумерованный граф состояний, легко ответить на поставленные в начале статьи вопросы. Имеется всего 24 состояния (и 24 класса равных между собой последовательностей ходов). Из них 3 состояния получаются из нулевого состояния одним ходом, 6 — двумя ходами, 9 — тремя ходами и 5 — четырьмя ходами. Вообще, чтобы найти минимальную цепочку ходов, соединяющую данные два состояния, достаточно найти две вершины на графе с соответствующими номерами и соединить их кратчайшей ломаной, которая укажет нужные ходы, причем число этих ходов всегда  $\leq 4$ .

### Фундаментальные области

В последней фразе внимательный читатель должен был заметить неточность: необходимо брать не любые «две вершины с соответствующими номерами», а такие, которые расположены «по соседству», иначе может появиться лишний путь типа (\*\*\*)).

В этой связи удобно «раскроить» наш граф на ячейки, внутри которых нет совпадающих вершин и которые содержат все 24 состояния. На рисунке 3 показаны три способа для осуществления такого раскроя: на красные шестиугольники, на синие ромбы и на зеленые «прямоугольники с ломаными сторонами».

В математике такие ячейки часто называют *фундаментальными областями*. Проверьте, что после необходимых отождествлений граничных точек каждая из указанных ячеек действительно содержит 24 различных вершин — состояний.

### Пространственный граф состояний

Не побоявшись пословицы «лучшее — враг хорошего», попробуем получить еще более точную модель состояний нашего куба, отталкиваясь от фундаментальных областей. Для этого придется выйти в трехмерное пространство.

Выделим сперва фундаментальную область, изображенную зелеными линиями на рисунке 3 и выпрямим горизонтальные ломаные линии. Тогда фундаментальная область превра-

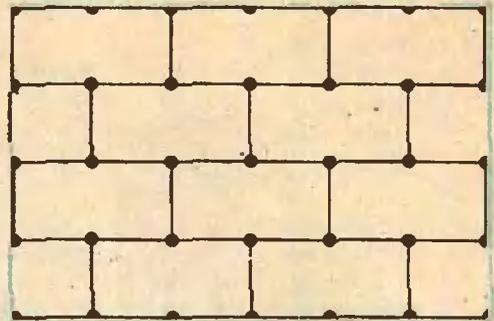


Рис. 4.

тится в прямоугольник, а сетка путей представится в виде регулярной кирпичной кладки из десяти «кирпичей» и четырех «полукирпичей» (рис. 4). Склеивая верхнюю и нижнюю стороны прямоугольника, получим трубку. Далее, скрутим эту трубку на пол-оборота и, изогнув ее, склеим торцы. Получим изображенную на рисунке 5 поверхность, называемую *тором*. Она покрыта сеткой из 12 шестиугольников с 24 вершинами и 36 ребрами. Если на каждую вершину мы запишем ее номер (пользуясь пронумерованным рисунком 3), то полученный граф на торе дает полное описание нишей головоломки. Действительно, каждой из 24 вершин на торе отвечает ровно одно из 24 состояний нашего куба, и от состояния к состоянию можно перейти за один ход тогда и только тогда, когда соответствующие вершины на торе соединены (черным) ребром (см. рис. 5).

Геометрическая задача. Покажите, что отождествление границы других фундаментальных областей (см. рис. 3; красные шестиугольники и синие ромбы) по указанным выше правилам тоже дает тор с нарисованным на нем графом. Сравните этот граф с предыдущим.

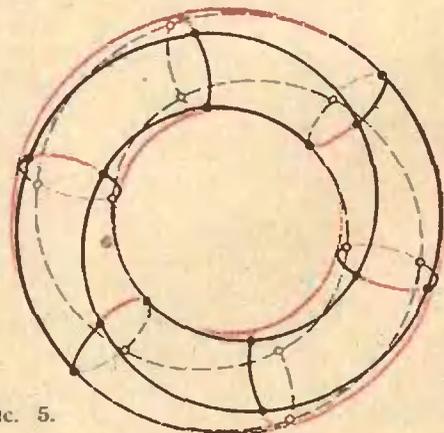


Рис. 5.

## Группы преобразований

Увлечшись неожиданно возникшей здесь геометрией, нам не следует упускать из виду алгебраическую природу наших исследований, связанных с важным понятием группы преобразований. Непустая совокупность  $G$  преобразований некоторого множества\*) называется *группой преобразований*, если

1° композиция любых двух преобразований из  $G$  также является преобразованием из  $G$ :

$$f, g \in G \Rightarrow f \circ g \in G;$$

2° преобразование, обратное к любому преобразованию из  $G$ , также содержится в  $G$ :

$$f \in G \Rightarrow f^{-1} \in G.$$

Из свойств 1° и 2° сразу следует, что тождественное преобразование  $I$  всегда содержится в  $G$  (ибо  $f^{-1} \circ f = I$ ).

Легко видеть, что для нашей игры совокупность всех преобразований (то есть последовательностей ходов) куба является группой преобразований множества всех его состояний. Действительно, свойство 1° очевидно, свойство же 2° следует из того, что любой ход обратен сам к себе (см. (\*)), а преобразование, обратное к любой последовательности ходов, является той же последовательностью, только выписанной в обратном порядке (проверьте!).

В качестве других примеров групп преобразований назовем семейство всех перемещений плоскости и совокупность всех взаимно-однозначных преобразований конечного множества (из  $n$  элементов) на себя. Последняя группа называется *группой подстановок\** (из  $n$  элементов) и обозначается  $S_n$ . (Проверьте для нее свойства 1° и 2° и покажите, что в  $S_n$  имеется  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$  элементов).

С алгебраической точки зрения не существенно, какова природа преобразуемых элементов, а важна алгебраическая структура самих преоб-

разований, то есть то, как устроена операция умножения  $\circ$  (композиция) в совокупности  $G$ . Алгебраисты считают две группы преобразований  $G$  и  $H$  одинаковыми, если они *изоморфны*; это значит, что существует взаимно однозначное отображение  $\alpha: G \rightarrow H$  группы  $G$  и  $H$ , сохраняющее операцию композиции, то есть удовлетворяющее свойству

$$g, g' \in G \Rightarrow \alpha(g \circ g') = \alpha(g) \circ \alpha(g').$$

Например, совокупность всех перемещений плоскости, переводящей в себя некоторый фиксированный равносторонний треугольник, является группой (почему?) и эта группа изоморфна группе подстановок множества из трех элементов  $S_3$  (проверьте!).

Подробнее о группах преобразования и о важном понятии (абстрактной) *группы* можно прочесть в книге П. С. Александрова «Введение в теорию групп» (Библиотечка «Квант», вып. 7, М., 1980).

## Алгебраическая модель игры

Мы покажем, что *группа преобразований нашего куба изоморфна группе  $S_4$  перестановок четырех элементов*. Для этого занумеруем вершины куба (или, что то же, маленькие кубики) цифрами от 1 до 8, как показано на рисунке 2. Легко видеть, что вершины 1—4 и 5—8 являются вершинами тетраэдров, вписанных в куб, причем при всех наших преобразованиях вершины 1—4 и 5—7 переходят друг в друга (а вершина 8 остается на месте). Таким образом, наши преобразования осуществляют перестановку вершин 1—4 и двадцати четырьмя преобразованиями куба взаимно однозначно сопоставляются  $4! = 24$  перестановки четырех вершин. Трём ходам  $X, Y, Z$  соответствуют перестановки двух вершин: ходу  $X$  — вершин 1, 2, ходу  $Y$  — 1, 3 и ходу  $Z$  — 1, 4. Таким образом, мы связали нашу исходную задачу с довольно простой задачей о представлении всех элементов группы перестановок четырех элементов в виде произведений трех базисных парных перестановок одного выделенного элемента с тремя остальными и показали, что

\*) Преобразованием множества называется его взаимно однозначное отображение на себя

\* \*) или *перестановок*

все остальные элементы группы можно построить в виде произведений не более чем четырех базисных элементов.

Наряду с геометрической, мы получили алгебраическую модель нашей игры.

**Алгебраические задачи.** 1. Покажите, что группа преобразований нашего куба однозначно описывается *основными соотношениями* (\*), (\*\*), (\*\*\*) . Это значит, что любое верное соотношение между ходами  $X, Y, Z$  может быть получено из основных *вставками* и *сокращениями*. (Вставкой называется операция над соотношениями, при которой в любое место уже полученного соотношения вставляется одна из левых частей основных соотношений например

$$X Y X Y = I \Rightarrow X Y (Z Z) X Y = I,$$

а сокращение — это операция, обратная к вставке, например:

$$Z X Y (Z Z) Y X Z = I \Rightarrow Z X Y Y X Z = I.$$

2. Покажите, что соотношения (\*), (\*\*) однозначно описывает группу тех перемещений плоскости, которые совмещают шестиугольную сетку саму с собой. (Указание. Ходу  $X$  отвечает симметрия плоскости относительно серединного перпендикуляра отрезка  $X$  — см. рис. 3).

### Только ли игра?

Отметим в заключение, что в природе имеются объекты, обладающие свойствами, похожими на свойства нашего куба. Это так называемые *молекулы с внутренними вращениями*. Простейшей такой молекулой является молекула этана  $C H_3 - C H_3$ , в которой один метильный радикал может поворачиваться относительно другого (рис. 6). Свойства симметрии таких молекул, описываемые группами преобразований, оставляющих молекулу неизменными, в настоящее время интенсивно изучаются. И хотя пока неизвестна молекула, обладающая как раз такой симметрией внутренних вращений, как рассмотренный нами куб, но не исключено, что она может быть найдена. Существует молекула «кубош», состоящая из восьми атомов углерода и восьми атомов водорода (рис. 7), похожая на рассмотренную здесь модель; но, по-видимому, свободного вращения одной грани относительно параллельной грани не происходит.

Отметим также, что двойная периодическая структура, которая видна на рисунке 3, встречается в реаль-

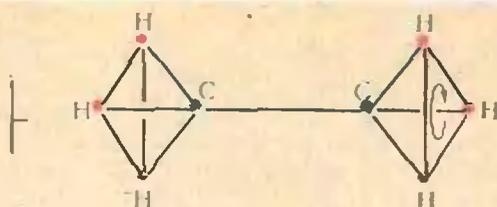


Рис. 4.

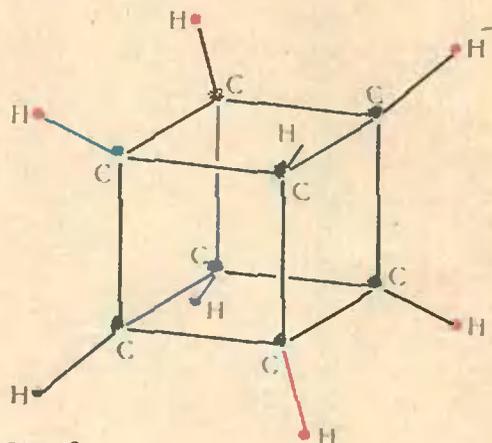


Рис. 6.

ных физических кристаллах. В этом случае мелкие шестиугольные ячейки соответствуют элементарным ячейкам кристалла, состоящим из атомов, в то время как большие ячейки связаны с более тонкими свойствами кристалла — ориентацией спинов атомов, размещением различных изотопов и т. д.

Отсюда видно, что исследованные группы симметрии такого типа может оказаться интересным и с физической точки зрения.

### Поправка

В программу на с. 56 «Кванта», 1981, № 9 вкралось несколько опечаток, из которых укажем отсутствие метки I перед пятым оператором и пропуск знаков продолжения и записи оператора DATA. На с. 55 вместо CALL STR следует читать CALL STP.

В этом году исполнилось девяносто лет со дня рождения академика Сергея Ивановича Вавилова (12.3.1891—25.1.1951) — выдающегося советского физика и организатора науки, президента Академии наук СССР, директора Физического института имени П. Н. Лебедева АН СССР. С. И. Вавилов внес очень крупный вклад в развитие физической оптики, прежде всего — в изучение природы люминесценции. Вместе со своим учеником Павлом Алексеевичем Черенковым (впоследствии академиком) С. И. Вавилов открыл знаменитый эффект «сверхсветового электрона», получивший позднее имя авторов открытия. С. И. Вавилов был активным пропагандистом естественно-научных знаний, автором нескольких превосходных научно-популярных книг. Мы помещаем здесь главу из его книги «О «теплом» и «холодном» свете», изданной в 1949 году. Текст дается с небольшими редакционными изменениями.



С. Вавилов

## «Теплый свет» и тепловое излучение

*«Надо подумать о беззвездном свете  
гниющих деревьев и светящихся червей.  
Затем надо написать, что свет и тепло  
не всегда взаимно связаны и потому  
различествуют».*

М. В. Ломоносов

*«Удивительная это вещь — свеча».*  
М. Фарадей. «История свечи»

Хорошо известно, что источнику света, до сего времени остающемуся господствующим, — электрической лампе накаливания — предшествовали многие тысячи лет развития и совершенствования. И все же с принципиальной стороны лампа накаливания мало отличается от первобытного костра. На обоих концах многотысячелетней эволюционной лестницы мы находим накаленное твердое тело в качестве излучателя. Внача-

ле — это частицы твердого угля в пламени, в конце — накаленный металл вольфрам. Различие заключается в температуре и в других важных и существенных, но не принципиальных подробностях.

Разберем сначала привычные источники «теплого света». Вспыхивает спичка, давая на короткое время желтоватое пламя и свет. Температура пламени очень высокая, выше  $1500^{\circ}\text{C}$ . При этом, если следить за горением спички более внимательно, вначале (по крайней мере, в некоторых сортах спичек) ясно заметно своеобразное резкое желтое свечение, такое же, как при введении в бесцветное газовое пламя поваренной соли. Когда пламя устанавливается, часть его, около ствола спички, имеет слабую голубую окраску. Однако основная часть пламени светится привычным для нас желто-оранжевым, «теплым» светом, зависящим от накаливания пылинки сажи, находящихся в пламени. В стеариновой свече мы встречаемся с той же картиной — желто-оранжевым пламенем и слабо светящейся синей частью у фитиля; и здесь свет исходит, главным образом, от частиц угля, сосредоточенных в пламени и накаленных

до температуры выше  $1500^{\circ}\text{C}$ . Мало чем в этом отношении отличаются керосиновая лампа и даже электрическая лампа накаливания. В первых моделях ламп Лодыгина и Эдиссона светилась угольная нить, накаливаемая током. В угольной лампе температура накала примерно на  $100\text{—}200$  градусов выше, чем в свечах и кострах. В современных вольфрамовых лампах накал доводится приблизительно до  $2700^{\circ}\text{C}$ . По качеству излучаемого света эти лампы все же ближе к костру, чем к Солнцу. Температура Солнца близка к  $6000^{\circ}\text{C}$ ; до сих пор ни одно накаленное тело в практически приемлемых условиях не удалось довести до такого накала. Препятствием служит плавление металлов и их испарение. Вольфрам в этом отношении подходит больше всего (температура плавления  $3380^{\circ}\text{C}$  и малая испаряемость).

Даже при поверхностном наблюдении бросаются в глаза некоторые общие черты у самых разнообразных теплых источников света — спички, свечи, лампы накаливания, Солнца. Одна из таких особенностей состоит в следующем. Источник при одной и той же температуре светит тем ярче, чем темнее, чернее светящееся тело. Например, при одной и той же температуре прозрачное кварцевое стекло почти не светит, а кусок черного угля излучает весьма сильно. Чернота, так же как и белизна, конечно, не может возрастать безгранично; для нее существует предел, когда весь свет, какого угодно цвета, падающий на тело, без остатка в нем поглощается. Тело с такими свойствами называют «абсолютно черным телом». Осуществить такое тело с большим приближением к требуемым условиям не очень трудно. Всем хорошо известно, что если в яркий солнечный день, когда кругом все светится и блестит, посмотреть издали через открытое окно или дверь вглубь закрытого помещения, то внутренние части кажутся угольно-черными, несмотря на то, что комнаты могут быть побелены или оклеены светлыми обоями. Происходит это потому, что лучи света, проникнув внутрь комнаты через окно, неизбежно там поглощаются вследствие многих рас-

сеяний и отражений и наружу не выходят.

Отсюда становится понятным, как построить абсолютно черное тело: его можно изготовить из любого материала — угля, железа, белого фарфора и пр., если устроить некоторое замкнутое пространство с маленьким отверстием.

Абсолютно черное тело можно нагреть до высокой температуры, например, до накаливания, и поддерживать нагрев постоянным. Внутри полости тела со стенок будет излучаться свет, который должен вновь поглощаться на стенках. Наше тело — абсолютно черное, поэтому поглощение у него, по условию, максимальное, то есть полное. Но в то же время мы приняли меры к тому, чтобы температура тела была постоянной, поэтому максимальное поглощение должно возмещаться максимальным излучением, иначе температурное равновесие нарушится, тело нагреется.

Таким образом, мы приходим к выводу, что не только поглощение, но и излучение абсолютно черного тела должно быть максимальным. Вместе с тем, из этого же рассуждения следует, что излучение, поскольку оно максимальное, так же как и поглощение, не может зависеть от материала, из которого сделано тело. Заключение это имеет огромное теоретическое значение. В нем и кроется причина большого сходства самых разнообразных тепловых источников света. Костер, спичка, Солнце, лампочка накаливания по своим свойствам — достаточно «черные», они близки к абсолютно черному телу. Разница в значительной мере сводится к тому, что температура Солнца равна примерно  $6000^{\circ}\text{C}$ , а спички — около  $1500^{\circ}\text{C}$ . Если температура низкая, тело не может светиться за счет нагревания заметным видимым светом, оно будет излучать, главным образом, невидимые инфракрасные лучи с длинными волнами. При повышении нагрева тело начинает испускать темно-красный цвет. При дальнейшем возрастании температуры излучение становится оранжевым, желтым и, наконец, белым. С качественной стороны это одинаково справедливо как для абсолютно черного

тела, так и, например, для лампы накаливания.

Нужно, однако, сделать одно важное замечание. Полос тело с небольшим отверстием полностью поглощает всякие лучи, любого цвета, с любыми длинами волн. Но существуют тела (конечно, не имеющие вида полости), полностью поглощающие только лучи определенного цвета, с определенной длиной волны. Такие тела можно назвать также абсолютно черными, но только в отношении некоторых длин волн. Рассмотрим, например, спиртовое пламя или газовое пламя в кислороде. Они почти бесцветны, хотя и имеют высокую температуру. Внесем в такое пламя немного обыкновенной столовой соли. Пламя приобретает резкую желтую окраску, такую же, какую имеют, как уже говорилось, некоторые спички в самом начале горения. В среднем пламя при этом остается прозрачным; вместе с тем оно начинает очень сильно поглощать свет в узкой области световых волн, в желтой части спектра; здесь оно становится абсолютно черным. Именно поэтому оно и светится.

Для большего пояснения этого существенного обстоятельства рассмотрим еще один интересный опыт. Химические элементы, называемые редкими землями, такие как неодим, празеодим, самарий и т. д., при введении их в стекло или кварц дают в спектре очень тонкие сильные полосы поглощения. Можно приготовить тонкую палочку или нитку из стекла или кварца с несколькими редкими землями. Если накалить такую палочку и посмотреть на нее в спектроскоп, то окажется, что светится только несколько тонких линий, как раз отвечающих поглощению редких земель; остальные части спектра — темные, так как само стекло или кварц в видимой части света не поглощают и потому при накаливании не светятся. Описанная стеклянная палочка стала «черной» только в отдельных узких спектральных областях.

Сказанное позволяет теперь объяснить ранее упоминавшиеся особенности горения спички и свечи. Ярко-желтая вспышка в начальной стадии горения у некоторых сортов спичек объясняется присутствием в головке

спички ничтожного количества натрия, быстро, впрочем, выгорающего. Причина слабого синего свечения у ствола спички и фитиля свечи может быть объяснена тем, что в этих частях пламени еще не образовалась сажа. Здесь газ, обладающий некоторым поглощением в синей части спектра, светится свойственным ему тепловым излучением синего цвета. Как только начинает выделяться сажа, это слабое свечение перекрывается тепловым излучением накаленной сажи.

Таким образом, привычный оранжево-белый «тепловой тон» свечения костров и ламп накаливания — вовсе не обязательный признак того, что перед нами тепловой источник света. Тепловой источник может давать свет, сосредоточенный в отдельных линиях и полосах вовсе не «теплого», например синего, тона, и тем не менее оставаться тепловым.

Понятие о тепловом равновесном излучении было введено выше из рассмотрения абсолютно черного тела. В окружающем нас мире много, однако, тел, заведомо не абсолютно черных даже в узкой области спектра. Все тела (если не придавать им искусственно формы полости с малым отверстием) в какой-то мере отражают, рассеивают и пропускают часть падающего на них света и поэтому не могут быть абсолютно черными. Такие тела всегда, однако, можно нагреть и поддерживать их температуру постоянной. Наше собственное тело, как известно, нагрето и имеет в нормальных условиях довольно постоянную температуру. Должно, следовательно, существовать равновесие между излучением и поглощением света. Обозначим буквой  $a$  долю падающего света, которая поглощается рассматриваемым телом. Обозначим через  $E_0$  энергию излучения абсолютно черного тела при той же температуре, которую имеет рассматриваемое тело, а через  $E$  — энергию, излучаемую в действительности телом. Тогда из условия равновесия между излучением и поглощением для рассматриваемого тела должно обязательно следовать

$$E = aE_0. \quad (*)$$

так как поглощаемая энергия равна  $aE_0$ ; в этом важном законе необходимо помнить, что все входящие в него величины ( $a$ ,  $E$  и  $E_0$ ) относятся к определенной длине волны света  $\lambda$  и к определенной температуре  $T$ . Иными словами, написанный закон можно выразить так: отношение тепловой излучательной способности любого тела к его поглотительной способности (для данных  $\lambda$  и  $T$ ) равно излучательной способности абсолютно черного тела (для тех же  $\lambda$  и  $T$ ).

Исходя, таким образом, из самых общих представлений о телах (именно — предполагая, что они в той или иной степени могут поглощать свет и находиться при этом при постоянной температуре), мы приходим к выводу, что любое тело — твердое, жидкое, газообразное — обязательно должно испускать тепловое излучение, если только оно находится в тепловом равновесии при температуре выше абсолютного нуля. В зависимости от степени нагрева этот свет будет видимым или невидимым.

Как уже указывалось выше, можно легко доказать, что не может существовать тела, излучение которого превышало бы излучение абсолютно черного тела при той же температуре. В этом смысле абсолютно черное тело — лучший, самый совершенный тепловой излучатель, и Фарадей в приведенных в начале главы словах имел основание удивляться обычной свече, свойства которой довольно близки к свойствам абсолютно черного тела, не говоря уже о ее практических преимуществах.

Такое «совершенство» абсолютно черного тела и близких к нему свечей и ламп накаливания, впрочем, очень относительно и условно. Дело в том, что все «тепловые излучатели» крайне неэкономичны в обычном техническом смысле слова; они превращают в видимый свет только ничтожную часть потребляемой ими энергии. Для абсолютно черного тела, находящегося при  $2000^\circ\text{C}$ , всего лишь 0,3% энергии переходит в видимый свет; при температуре в  $3000^\circ\text{C}$  коэффициент полезного действия поднимается до 3%. Выгоднее всего абсолютно черное тело должно рабо-

тать около  $6000^\circ\text{C}$ , то есть при температуре Солнца. Причина этого, на первый взгляд удивительного совпадения состоит в том, что человеческий глаз биологически, в процессе развития, приспособился к солнечному свету, и поэтому свет от теплового излучателя с солнечной температурой наиболее экономичен. Однако экономичность даже этого самого выгодного абсолютно черного тела не велика; коэффициент полезного светового действия составляет приблизительно 13%, то есть 87% всей потребляемой источником энергий для глаза бесполезны. Для наиболее экономичных современных ламп накаливания мощностью 100 вт коэффициент полезного светового действия составляет всего 2—3%.

Естественно возникает вопрос: почему нельзя превратить всю энергию, сообщаемую абсолютно черному телу, или, во всяком случае, значительную ее часть в видимый свет? Что ставит этому границы?

Ответ на этот вопрос физикам удалось получить не легко; для этого пришлось произвести, в сущности, целую революцию в науке, потребовалось отказаться от многого общепринятого, считавшегося непреложной истиной.

Если абсолютно черное тело остается постоянно при одной и той же температуре и в то же время излучает свет, то, следовательно, вся непрерывно подводимая к телу энергия превращается в излучение. Только ничтожная доля этого излучения видима, остальная часть сосредоточена, главным образом, в области невидимых инфракрасных лучей с меньшими частотами световых колебаний (с большими длинами волн), чем у видимого света. Подводимая энергия, превращаясь в свет, распределяется между различными волнами, создавая непрерывный спектр теплового излучения. Процесс происходит подобно превращению механической или электрической энергии в тепло. При этом молекулы вещества приходят в поступательные, колебательные и вращательные движения с разнообразными скоростями, распределяясь по непрерывному закону. Такое рас-

пределение осуществляется посредством беспорядочных столкновений молекул друг с другом. Число молекул в данном объеме конечно, и, применяя обычные правила статистического расчета, можно определить наиболее вероятную среднюю энергию молекул и закон распределения энергии по молекулам.

До конца XIX века общепринятым в науке было мнение, что свет есть волновое движение среды, заполняющей пространство. Но если свет действительно таков, то, в отличие от частиц вещества, число которых в ограниченном объеме конечно, должно существовать бесконечное число возможностей распределения световой энергии по световым волнам при условии равновесия в тепловом излучении.

В самом деле, поскольку излучение абсолютно черного для всех волн тела не может зависеть от природы вещества, из которого изготовлено тело, в спектре его не может быть никаких характерных линий или полос, должны присутствовать все частоты колебаний, от очень малых до очень больших в непрерывном чередовании. При этом, с точки зрения старой, классической волновой теории света, все частоты равноправны и не имеют никаких преимуществ одна перед другой. А это значит, что на каждый бесконечно малый участок частот в спектре в среднем должна в условиях равновесия приходиться одна и та же бесконечно малая доля энергии.

Ясно, с другой стороны, что, по мере того как мы будем переходить от малых частот к большим, принципиально к бесконечно большим, мы будем встречать все большее число бесконечно малых участков частот, на каждый из которых приходится одна и та же бесконечно малая доля энергии излучения. Иными словами, с точки зрения классического волнового учения о свете в условиях теплового равновесия, энергия излучения обязательно должна непрерывно расти при передвижении по спектру от красной к фиолетовой части. Этот вывод, между тем, самым решительным образом расходится с опытом. В действительности во всех тепловых

источниках, начиная с абсолютно черного тела, имеется максимум излучения, который в случае температур ниже  $4000^\circ\text{C}$  находится в инфракрасной области спектра и только при дальнейшем нагревании передвигается постепенно в видимую (желтую, зеленую и т. д.) часть. В фиолетовой области, вопреки теоретическому выводу, энергия при привычных для нас температурах не возрастает, а, наоборот, резко падает. Такое противоречие опыта самым общим представлением о веществе и свете было справедливо названо физиками в свое время «фиолетовой катастрофой»; оно действительно обозначало необходимость полного отказа от многих установившихся воззрений, намечало целый переворот в естествознании.

На опыте получалось, что энергия распределяется по световым частотам примерно так же, как тепловая энергия распределяется по молекулам, то есть имеется отчетливый максимум. Единственно возможное объяснение опыта (до известной степени подсказываемое аналогией с молекулами) состояло в следующем. Вопреки всем прежним воззрениям и несмотря на несомненный волновой характер распространения света в пространстве, приходится принять, что его энергия сосредоточена в некоторых центрах, что свет поглощается и излучается молекулами только в виде целых порций энергии, названных квантами. Величина энергии кванта не постоянна; она пропорциональна частоте световых колебаний  $\nu$ . Коэффициент пропорциональности  $h$  всегда один и тот же; он составляет весьма малую, но точно известную теперь величину, равную  $6,62 \times 10^{-27}$  эрг · с.

Энергия кванта  $h\nu$  совершенно ничтожна для радиоволн, где поэтому прерывное строение излучения практически не заметно; но квант приобретает все более ощутимые значения при переходе через видимый свет к лучам Рентгена. Здесь «зернистость» световой энергии проявляется вполне ясно и резко.

Почти за полвека после открытия квантов энергии были найдены бесчисленные другие доказательства их

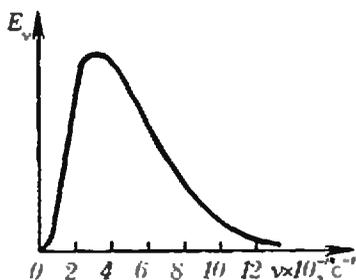


Рис. 1.

существования. В настоящее время это твердо установленная истина.

Представление о квантах световой энергии вполне объяснило свойства теплового излучения и дало возможность рассчитывать спектр излучения абсолютно черного излучателя для любых температур. На рисунке 1 изображено вычисленное таким образом распределение энергии в спектре теплового излучения абсолютно черного тела для солнечной температуры  $6000^{\circ}\text{C}$ . Максимум изображенной кривой соответствует длине вол-

ны  $0,483\text{ мк}$ , то есть сине-зеленой области спектра.

На рисунке 2 в сжатом логарифмическом виде представлено распределение энергии в спектре абсолютно черного тела для громадного интервала температур, начиная от абсолютного нуля до  $50\,000\text{ К}$ . По оси абсцисс отложены логарифмы длин волн в сантиметрах, по ординатам — логарифмы величины, пропорциональной интенсивности излучения. Действительные длины волны указаны на нижней шкале в микронах. При таком изображении максимумы спектра излучения располагаются на прямой линии, как отмечено пунктиром на рисунке. Из этого рисунка сразу видно, например, что при температуре человеческого тела (около  $310\text{ К}$ ) максимум излучения абсолютно черного тела соответствует длине волны около  $10\text{ мк}$  в далекой невидимой инфракрасной части спектра. Максимум свечения при привычных для нас температурах тепловых ис-

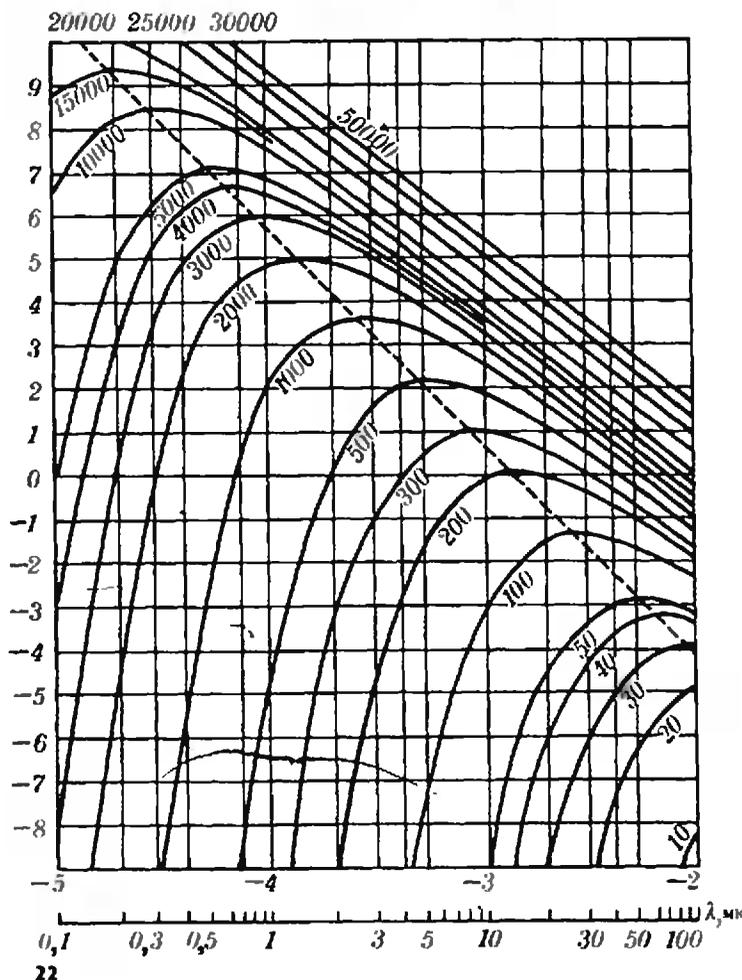


Рис. 2. По оси абсцисс отложены значения  $\lg \lambda$  ( $[\lambda] = \text{см}$ ), по оси ординат — значения  $\lg 2I_{\lambda}$  ( $[I] = \text{Вт/см}^2$ ).  $I$  — интенсивность излучения, то есть мощность излучения, приходящаяся на единицу объема абсолютно черного тела.

Каждая кривая соответствует определенной температуре черного тела (числа у кривых — значения  $T$ , К).

точников (около 3000 К) отвечает примерно 1 мк, то есть также находится в невидимой инфракрасной области спектра.

Легко понять на основании закона (\*), что для излучателей не черных, то есть не полностью поглощающих падающий на них свет, спектральные кривые излучения расположатся ниже.

Только после того как удалось установить квантовый характер излучения и поглощения света, стал возможным ответ на первый вопрос, поставленный выше, — о причине малости коэффициента полезного светового действия тепловых излучателей. До открытия квантов это оставалось, в сущности, неразрешимой задачей.

Теперь мы знаем, что при тепловом равновесии абсолютно черного тела средняя тепловая энергия его молекул, участвующая в тепловом обмене, и средняя энергия световых квантов, находящихся в энергетиче-

ском равновесии с молекулами, должны быть теми же самыми, иначе равновесие было бы нарушено.

При этом надо иметь в виду, что энергия по спектру распределяется по обе стороны от указанного среднего значения. Как видно из рисунков 1 и 2, даже при самых выгодных условиях, при температуре, близкой к 6000°C, когда максимум теплового излучения совпадает с максимумом спектральной чувствительности человеческого глаза, основная часть энергии излучения приходится по обе стороны от максимума, то есть в условиях меньшей или полностью отсутствующей видимости. В этом и кроется причина очень малой экономичности тепловых излучателей. В условиях теплового равновесия между излучением и телом нет возможности сосредоточить всю энергию на световых квантах, наиболее выгодных для глаза.

#### Новости науки

## Отрицательный ион позитрония

Давно известно, что позитрон и электрон могут образовать связанную систему, похожую на атом водорода, в которой роль ядра (протона) играет позитрон. Такая система называется позитронием.

На самом деле сравнение позитрония с атомом водорода не совсем точно. В атоме водорода протон значительно тяжелее электрона (в 1836 раз), и потому с большой точностью можно считать, что движется только электрон, а протон стоит на месте. Про позитроний так говорить нельзя: массы позитрона и электрона одинаковы. Позитроний лучше представлять как систему двух зарядов, которые обращаются вокруг общего центра масс, находясь на одинаковом расстоянии от него. Таким образом, позитроний выглядит как вращающийся электрический диполь. Расстояние между электроном и позитроном может либо оставаться постоянным, либо изменяться. В первом случае орбиты час-

тиц являются круговыми, во втором — эллиптическими.

Конечно, описывать движение электрона и позитрона так, как описывают движение планет, незаконно. Позитроний — система квантовая, и описание его с помощью орбит передает лишь грубые (но зато главные) черты этой системы.

Хотя позитроний в целом — система нейтральная (его заряд равен нулю), это не означает, что он не окружен электрическим полем. Поля не было бы, если бы оба заряда располагались в одном месте. В позитронии же заряды находятся на расстоянии примерно  $0,2 \cdot 10^{-8}$  см друг от друга, а потому поле, создаваемое позитроном, не уничтожается полностью полем, которое создается электроном. В результате позитроний может притянуть к себе еще один заряд — электрона или позитрона, и образовать связанную систему, состоящую из трех частиц.

Такую систему, которая состоит из двух электронов и одного позитрона, удалось создать в конце 1980 года американскому физика Миллсу. Ее назвали отрицательным

ионом позитрония. Обозначают этот ион  $Ps^-$ .

В опытах Миллса пучок позитронов проходил в вакууме через тонкую ( $4 \cdot 10^{-7}$  см) пленку углерода; при этом позитроны захватывали электроны и образовывали позитроний и  $Ps^-$ . На  $10^4$  позитронов, проходящих через пленку, возникало около 3  $Ps^-$ .

Заметим, что  $Ps^-$  — система слабо связанная: когда позитроний присоединяет к себе электрон, выделяется энергия, равная 0,3266 эВ. Для сравнения скажем, что, для того чтобы «разорвать» позитроний, надо затратить энергию 6,5 эВ.  $Ps^-$  распадается с излучением двух гамма-квантов со средним временем жизни 0,5 нс.

Очевидно, должен существовать и положительный ион позитрония  $Ps^+$ , аналог иона молекулы водорода, содержащего два протона и один электрон. Однако его получить значительно труднее.

В открытии отрицательного иона позитрония нет ничего неожиданного, но оно демонстрирует новые возможности физического эксперимента наших дней.

Я. Смородинский

# Задачник «Кванта»

## Задачи

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Задачи по математике этого номера предлагались на XXII Международной олимпиаде школьников, проходившей в Соединенных Штатах Америки. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 февраля 1982 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 12—81» и номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М716, М717» или «Ф728». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи.

М716—М720; Ф728—Ф732

**М716.** Из точки  $P$  внутри данного треугольника  $ABC$  опускаются перпендикуляры  $PA_1$ ,  $PB_1$ ,  $PC_1$  на прямые  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ . Для каких точек  $P$  внутри  $\triangle ABC$  величина

$$\frac{|BC|}{|PA_1|} + \frac{|CA|}{|PB_1|} + \frac{|AB|}{|PC_1|}$$

принимает наименьшее значение?

**М717.** Даны натуральные числа  $n$  и  $r$ ,  $1 \leq r \leq n$ . Рассмотрим всевозможные подмножества множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ , состоящие из  $r$  чисел, и в каждом выберем наименьшее число. Докажите, что среднее арифметическое всех выбранных чисел равно  $(n+1)/(r+1)$ . (Например, при  $n=3$ ,  $r=2$  получаем три подмножества  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 3\}$ ,  $\{2, 3\}$  и среднее арифметическое равно  $(1+1+2)/3 = 4/3$ ).

**М718.** Найдите наибольшее значение выражения  $m^2 + n^2$  для всевозможных пар  $(m; n)$  натуральных чисел, таких что  $1 \leq m \leq 1981$ ,  $1 \leq n \leq 1981$  и  $|n^2 - mn - m^2| = 1$

**М719.** а) Для каких  $n \geq 3$  существует множество из  $n$  последовательных натуральных чисел, обладающих следующим свойством: наибольшее из этих  $n$  чисел является делителем наименьшего общего кратного остальных  $n-1$  чисел?

б) При каких  $n \geq 3$  существует единственное множество из  $n$  последовательных чисел, обладающее указанным свойством?

**М720.** Про функцию  $f$ , определенную на множестве всех пар неотрицательных целых чисел  $(x; y)$ , известно следующее:

1°.  $f(0, y) = y + 1$ ,

2°.  $f(x+1, 0) = f(x, 1)$ ,

3°.  $f(x+1, y+1) = f(x, f(x+1, y))$

для каждой пары  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ . Найдите значение  $f(4, 1981)$ .

**Ф728.** Три маленьких шарика с одинаковыми массами — красный, синий и зеленый, закреплены невесомым каркасом в вершинах равностороннего треугольника со стороной  $l$ . Система положена на гладкую горизонтальную поверхность и приведена во вращение с периодом  $T$  вокруг центра масс.

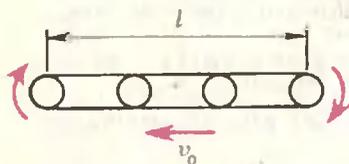


Рис. 1.

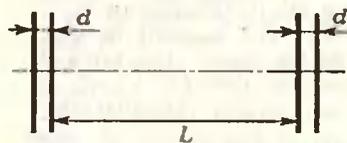


Рис. 2.

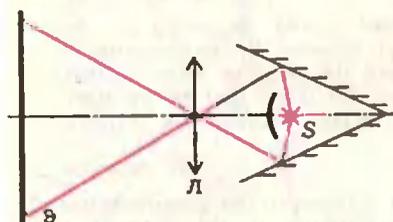


Рис. 3.

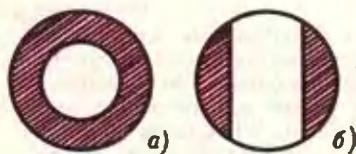


Рис. 4.

В некоторый момент красный шарик отрывается от каркаса. На каком расстоянии от синего шарика он окажется спустя время  $T$ ?

*В. Григорьев*

**Ф729.** Лента транспортера длины  $l$  движется со скоростью  $v_0$  (рис. 1). С какой скоростью нужно толкнуть кубик массы  $m$  против движения транспортера для того, чтобы количество тепла, выделившегося за счет работы силы трения между кубиком и лентой транспортера, было максимальным? Чему равно это максимальное количество тепла, если коэффициент трения равен  $\mu$  и выполняется условие  $v_0^2 < 2\mu/g$ ?

*Т. Мякишев*

**Ф730.** Два плоских конденсатора расположены так, как показано на рисунке 2. Расстояние  $L$  между конденсаторами много больше размеров их обкладок и расстояния  $d$  между обкладками. Заряд одного конденсатора  $q_1$ , заряд другого  $q_2$ . С какой силой притягиваются эти конденсаторы?

*В. Петерсон*

**Ф731.** Две одинаковые частицы с зарядами  $q$  и массами  $m$  вылетают одновременно из одной точки в направлении, перпендикулярном силовым линиям однородного магнитного поля с индукцией  $\vec{B}$ . Выразить расстояние между частицами как функцию времени, если начальные скорости частиц направлены одинаково и равны  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ .

*В. Алешкевич*

**Ф732.** Точечный предмет  $S$  находится на оси полого конуса с зеркальной внутренней поверхностью (рис. 3). С помощью линзы  $L$  на экране  $\mathcal{E}$  получают изображение предмета, создаваемое лучами, однократно отраженными от зеркальной поверхности конуса (прямые лучи от предмета на линзу не попадают). Что произойдет с изображением, если линзу закрыть диафрагмой такой, как а) на рисунке 4, а? б) на рисунке 4, б?

*Д. Белов*

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (\*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it

### PROBLEMS M716—M720; P728—P732

**M716** Perpendiculars  $PA_1$ ,  $PB_1$ ,  $PC_1$  to the lines  $BC$ ,  $CA$  and  $AB$  are constructed from an inner point  $P$  of triangle  $ABC$ . For what points  $P$  inside the triangle does the expression

$$\frac{|BC|}{|PA_1|} + \frac{|CA|}{|PB_1|} + \frac{|AB|}{|PC_1|}$$

assume its least value?

**M717** For the given natural numbers  $n$  and  $r$ ,  $1 < r < n$ , consider all the subsets of the set  $\{1, 2, \dots, n\}$  consisting of  $r$  numbers and choose the smallest number in each. Show that the arithmetical mean of the chosen numbers equals  $(n+1)/(r+1)$ . (E. g., for  $n=3$ ,  $r=2$ , we have three subsets  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 3\}$ ,  $\{2, 3\}$  and the mean is  $(1+1+2)/3=4/3$ ).

to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. In particular, problems M716, M720 were proposed at the XXII International Mathematics Olympiad (which was held last summer in the USA). The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than February 15th to the following address: USSR, Moscow, 113035 МОСКВА, Б. ОРДЫНКА 21/16, «КВАНТ». Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well as solutions of problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words «KVANT'S PROBLEMS» and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. The list of prizewinners is published in the September issue.

If you have an original problem to propose for publication, please send it to us in two copies (including the solution) in an envelope inscribed «NEW PROBLEM IN PHYSICS (MATHEMATICS)».

**M718** Find the greatest value of the expression  $m^2 + n^2$  for all pairs  $(m, n)$  of natural numbers satisfying  $1 < m < 1981$ ,  $1 < n < 1981$  and  $|n^2 - mn - m^2| = 1$ .

**M719** a) For what  $n \geq 3$  does there exist a set of  $n$  successive natural numbers, the largest of which divides the least common multiple of the other  $n-1$  numbers?

b) For what  $n \geq 3$  does there exist a unique set of  $n$  successive numbers with the above property?

**M720** The function  $f$ , defined for all pairs of non-negative integers  $(x, y)$ , satisfies

$$1^\circ f(0, y) = y + 1,$$

$$2^\circ f(x+1, 0) = f(x, 1),$$

$$3^\circ f(x+1, y+1) = f(x, f(x+1, y))$$

for all  $x \geq 0, y \geq 0$ . Compute  $f(4, 1981)$ .

**P728** Three small marbles of equal mass — blue, red and green — are fixed at the vertices of an equilateral triangle of side  $l$  by a weightless frame. This system is placed on a smooth horizontal plane and rotated about its center of mass so that it spins with period  $T$ . At some moment of time the red marble is disconnected from the frame. How far will the red marble be from the blue one after time  $T$ ?

V. Grigoriev

**P729** A conveyor belt of length  $l$  moves with velocity  $v_0$  (see the figure Рис. 1, p 25). With what velocity must a cube of mass  $m$  be pushed against the direction of motion of the belt in order to ensure maximum heat production by friction? What is the value of this maximum if the friction coefficient is  $\mu$  and the relation  $v_0^2 < 2l\mu g$  holds?

G. Myakishev

**P730** Two plane condensators are placed as shown on the figure Рис. 2, p 25). The distance  $L$  between the condensators is much greater than the size of and the distance between their plates. The charge of one condensator is  $q_1$ , that of the other is  $q_2$ . What is the force of attraction between the condensators?

V. Peterson

**P731** Two particles of mass  $m$  and charge  $q$  fly out simultaneously from the same point, perpendicularly to the lines of a magnetic field of constant induction  $\vec{B}$ . Express the distance between the particles as a function of time if the initial velocities  $\vec{v}_1$  and  $\vec{v}_2$  have the same direction.

V. Aleshkevich

**P732** An object  $S$  is placed inside a hollow cone whose inner surface is a (curved) mirror (see the figure Рис. 3, p 25). By using the lens  $M$ , an image of the object is obtained on the screen  $\tilde{S}$  from rays once reflected by the mirror surface of the cone (the direct rays do not reach the lens). What happens to the image if the lens is covered by a diaphragm as in a) the picture Рис. 4, a? b) the picture Рис. 4, б?

D. Belou

## Решения задач

### M676—M680; Ф688—Ф691

**M676.** Докажите, что для любого натурального  $n$  сумма цифр числа  $1981^n$  не меньше 19.

Обозначим сумму цифр числа  $A$  через  $S(A)$ . Числа  $A$  и  $S(A)$  имеют одинаковый остаток при делении на 9. Поэтому число  $S(1981^n)$  при делении на 9 дает в остатке 1, то есть является одним из чисел 1, 10, 19, 28,...

Поскольку число  $1981^n$  кончается на 1 и не равно 1,  $S(1981^n) \neq 1$ .

Предположим, что  $S(1981^n) = 10$ . Поскольку  $1981^n$  кончается на 1,  $S(1981^n - 1) = 9$ . Значит сумма  $S_1$  его цифр,

Решение задачи M676 содержится в заметке «Система развесов» на с. 34.

стоящих на нечетных местах заключена между 0 и 9; аналогично для суммы  $S_2$  его цифр, стоящих на четных местах. Поскольку  $1981^n - 1$  делится на 11,  $S_1$  и  $S_2$  имеют одинаковый остаток при делении на 11. (Здесь мы используем известный признак делимости на 11: чтобы число  $A$  делилось на 11, необходимо и достаточно, чтобы разность между суммами цифр, стоящих на четных и на нечетных местах, делилась на 11. Его нетрудно доказать, используя тот факт, что  $100^{2m} - 1$  при любом  $m$  делится на  $100^2 - 1 = 99$  и, стало быть, на 11.) Но  $0 < S_1 < 9$  и  $0 < S_2 < 9$ . Значит  $S_1 = S_2$  — противоречие с  $S_1 + S_2 = 9$ .

Следовательно,  $S(1981^n) > 19$ .

А. Савкин

**М677.** Внутри остроугольного треугольника  $ABC$  выбрана точка  $M$ , являющаяся

а) точкой пересечения медиан;

б) точкой пересечения биссектрис;

в) точкой пересечения высот.

Докажите, что если радиусы окружностей, вписанных в треугольники  $AMB$ ,  $BMC$ ,  $AMC$ , равны, то треугольник  $ABC$  — правильный.

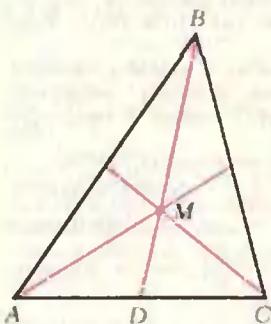


Рис. 1.

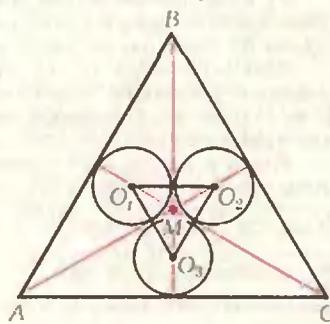


Рис. 2.

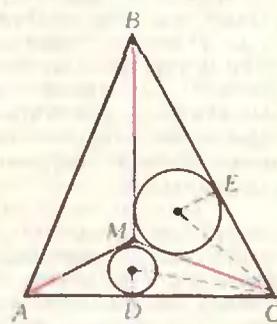


Рис. 3.

Из этого следует, что все три окружности попарно касаются, и их центры  $O_1$ ,  $O_2$  и  $O_3$  образуют правильный треугольник, стороны которого перпендикулярны биссектрисам данного треугольника  $ABC$ . Поэтому, например,  $\widehat{BMC} = \frac{\pi + \hat{A}}{2} = \frac{2\pi}{3}$ , то есть  $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$ . Аналогично доказывается, что  $B = C = \frac{\pi}{3}$ .

в) Как и в задаче а), предположим, что треугольник  $ABC$  — неправильный; пусть, например,  $|BC| > |AC|$ . Обозначим через  $D$  и  $E$  точки касания окружностей, вписанных в треугольники  $AMC$  и  $BMC$  соответственно, со сторонами  $AC$  и  $BC$  (рис. 3). Поскольку радиусы этих окружностей равны и  $\widehat{CAM} = \widehat{CBM}$ ,  $|AD| = |BE|$ . Значит,  $|CD| < |CE|$ .

С другой стороны, при нашем предположении  $B < \hat{A}$ , так что  $\widehat{MCA} = \frac{\pi}{2} - \hat{A} < \frac{\pi}{2} - \hat{B} = \widehat{BCM}$ . Поэтому  $|CD| > |CE|$  — противоречие.

А. Егоров

**М678.** 2т-значное число называется справедливым, если его четные разряды содержат столько же четных цифр, сколько и нечетные.

Заметим вначале, что если мы в любое место  $(2t-2)$ -значного справедливого числа добавим две идущие подряд цифры одинаковой четности или добавим по цифре одинаковой четности в его начало и в конец, то получающееся при этом  $2t$ -значное число останется справедливым.

Докажите, что в любом  $(2m+1)$ -значном числе можно вычеркнуть одну из цифр так, чтобы полученное  $2m$ -значное число было справедливым.

Теперь докажем требуемое утверждение индукцией по  $m$ . При  $m=1$  оно верно, поскольку в трехзначном числе всегда можно вычеркнуть цифру так, чтобы две оставшиеся были одинаковой четности. Предположим, что утверждение задачи верно для некоторого  $m$ , и докажем, что оно верно для  $m+1$ .

В любом  $(2m+3)$ -значном числе всегда найдутся две цифры одинаковой четности, стоящие либо рядом, либо одна — в начале, а другая — в конце числа. Вычеркнув на время две эти цифры, получим  $(2m+1)$ -значное число, в котором, по предположению индукции, можно вычеркнуть одну цифру так, что получившееся  $2m$ -значное число будет справедливым. Восстановив в нем две вычеркнутые ранее цифры одинаковой четности, получим согласно сделанному замечанию справедливое  $(2m+2)$ -значное число.

А. Сидоренко

**M679.** а) На плоскости расположены четыре круга так, что первый касается второго в точке  $A$ , второй — третьего в точке  $B$ , третий — четвертого в точке  $C$  и четвертый — первого в точке  $D$ . Докажите, что через четыре названные точки можно провести окружность или прямую.

б) В пространстве расположены четыре шара так, что первый касается второго в точке  $A$ , второй — третьего в точке  $B$ , третий — четвертого в точке  $C$  и четвертый — первого в точке  $D$ . Докажите, что через четыре названные точки можно провести окружность или прямую.

в) В пространстве расположены четыре шара так, что каждый касается трех других. Докажите, что шесть точек касания принадлежат одной сфере или одной плоскости.

а) Прежде всего ясно, что если какие-то три из точек  $A, B, C, D$  лежат на одной прямой, то и четвертая точка лежит на той же прямой (рис. 1).

Пусть все четыре круга касаются внешним образом (рис. 2) и пусть  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$  — отрезки общих касательных.

Из  $\widehat{A_1AD} = \widehat{D_1DA}$ ,  $\widehat{D_1DC} = \widehat{C_1CD}$ ,  $\widehat{B_1BC} = \widehat{C_1CB}$  и  $\widehat{A_1AB} = \widehat{B_1BA}$  следует  $\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{D}$ ; значит, около четырехугольника  $ABCD$  можно описать окружность.

В случае, когда не все четыре круга касаются внешним образом (рис. 3), рассуждения аналогичны.

б) Если центры шаров лежат в одной плоскости, то и все точки касания лежат в этой плоскости, так что в этом случае задача б) сводится к задаче а).

Если же центры  $O_1, O_2, O_3, O_4$  — не в одной плоскости, проведем плоскость через три точки касания, например,  $A, B, C$  (рис. 4), и докажем, что четвертая точка  $D$  принадлежит этой плоскости.

Пусть  $h_1, h_2, h_3, h_4$  — расстояния от точек  $O_1, O_2, O_3, O_4$  до плоскости  $(ABC)$ , а  $R_1, R_2, R_3, R_4$  — радиусы шаров. Ясно, что  $\frac{h_1}{h_2} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{h_2}{h_3} = \frac{R_2}{R_3} \cdot \frac{h_3}{h_4} = \frac{R_3}{R_4}$  (см. рис. 4). Перемножая эти отношения, получаем  $\frac{h_1}{h_4} = \frac{R_1}{R_4} = \frac{|O_1D|}{|O_4D|}$ , что и означает принадлежность точки  $D$  плоскости  $(ABC)$ .

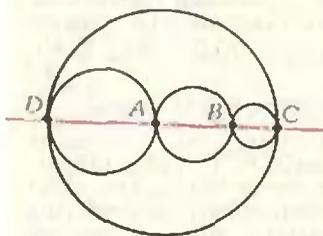


Рис. 1.

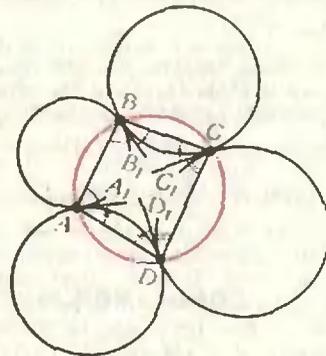


Рис. 2.

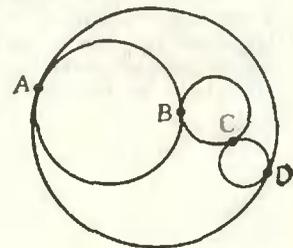


Рис. 3.

Таким образом, плоскость  $ABC$  пересекает шары по четырем кругам, касающимся, соответственно, друг друга в точках  $A, B, C, D$  так, как сказано в пункте а). Из этого следует утверждение задачи б).

в) Пусть  $A$  — точка касания первого и второго,  $B$  — первого и третьего,  $C$  — первого и четвертого,  $D$  — второго и третьего,  $E$  — второго и четвертого,  $F$  — третьего и четвертого шаров.

По доказанному в пункте б) точки  $A, C, E, D$  лежат на одной окружности или прямой. Точки  $A, E, F$  и  $B$  обладают тем же свойством.

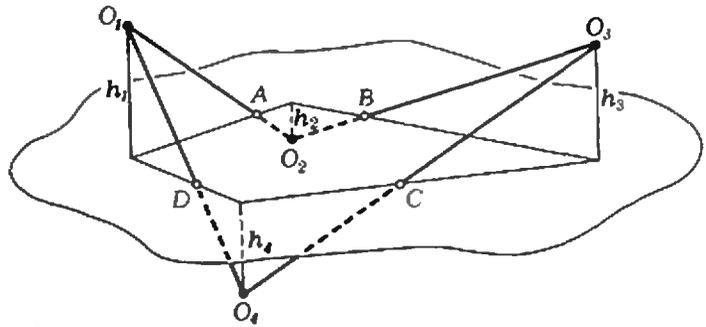


Рис. 4.

У этих двух четверок точек есть две общие точки: \$A\$ и \$F\$. Поэтому если одна из четверок лежит на прямой, все шесть точек лежат в одной плоскости.

Если же эти четверки лежат на двух окружностях, находящихся в разных плоскостях и имеющих общую хорду \$AF\$, то через эти окружности можно провести сферу; центром этой сферы является точка пересечения перпендикуляров к плоскостям этих окружностей, проведенных через центры окружностей (эти перпендикуляры лежат в плоскости, проходящей через центры окружностей и середину их общей хорды \$AF\$).

В. Произволов

**М680.** Два связиста играют в такую игру. Имеется \$n\$ телефонных узлов, и связисты по очереди соединяют кабелями два из них по своему выбору.

Выигрывает тот, после хода которого с любого узла можно будет дозвониться до любого другого (может быть, через несколько промежуточных).

а) Выясните, кто выигрывает при \$n=4, 5, 6, 7, 8\$ — начинающий или его партнер?

б) Каков ответ при произвольном \$n\$?

Рассмотрите также два видоизмененных варианта игры:

в) Пусть игрок, связавший все узлы, проигрывает. Ответьте на вопросы а) и б) для этой новой игры.

г) Пусть вначале все узлы попарно соединены кабелями, а связисты убирают по очереди по одному соединению. Игрок, нарушивший связь в схеме, проигрывает. Вопрос тот же, что и в пунктах а) и б).

а) При \$n=4, 7, 8\$ выигрывает первый игрок, при \$n=5, 6\$ — второй; это будет следовать из решения общей задачи б).

б) Будем называть группу узлов *связной*, если любые два входящие в нее узла соединены (может быть, через несколько других узлов). Связную группу узлов будем называть *компонентой*, если ни один из входящих в нее узлов не соединен ни с одним из узлов, в ней не содержащихся. Ясно, что любой граф (система как-то соединенных узлов) состоит из одной или нескольких компонент.

При любой игре противников настанет момент, когда множество всех узлов окажется разбитым на три компоненты \$A\_1, A\_2, A\_3\$. Пусть \$a\_1, a\_2, a\_3\$ — количества узлов в этих компонентах. Ясно, что проигрывает тот из игроков, кому придется первым соединить какие-то две из этих компонент. Критическая ситуация возникает, когда все возможные соединения внутри компонент \$A\_1, A\_2, A\_3\$ будут осуществлены.

Ясно, что с начала партии до наступления такого момента будет сделано

$$N = \frac{a_1(a_1-1)}{2} + \frac{a_2(a_2-1)}{2} + \frac{a_3(a_3-1)}{2} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - n}{2}$$

ходов. Если число \$N\$ окажется четным, то первый игрок проигрывает, если же нечетным — то выигрывает. Четность числа \$N\$, очевидно, определяется остатком, который дает число \$a\_1^2 + a\_2^2 + a\_3^2 - n\$ при делении на 4. Так как остаток от деления на 4 числа \$a\_1^2 + a\_2^2 + a\_3^2\$ равен количеству нечетных чисел среди чисел \$a\_1, a\_2, a\_3\$ (убедитесь в этом), первый игрок должен добиваться того, чтобы количество нечетных чисел среди \$a\_1, a\_2, a\_3\$ не совпадало с остатком от деления \$n\$ на 4. Второй же, наоборот, должен стремиться к их совпадению.

В дальнейшем компоненты с четным числом узлов мы будем называть *четными*, а с нечетным числом узлов — *нечетными*.

Рассмотрим отдельно четыре случая: \$n=4k, n=4k+1, n=4k+2, n=4k+3\$.

1°. \$n=4k\$. Первый игрок добивается победы, играя следующим образом. Пока компонент более трех, он играет так, чтобы после каждого его хода получалось не более одной четной компоненты: если в какой-то момент возникают две четные компоненты, он тут же объединяет одну из них с нечетной. В момент появления трех компонент (независимо от того, после чьего хода это произойдет) две компоненты будут

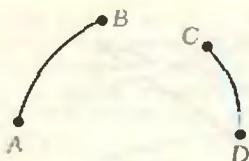


Рис. 1.

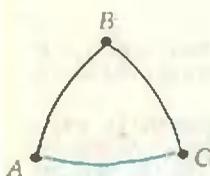


Рис. 2.

нечетными, а одна четной. Число  $N$  при этом нечетно — первый игрок выигрывает.

2°.  $n = 4k + 1$ . В этом случае выигрывает второй игрок, поскольку он может играть так, чтобы после каждого его хода было не менее двух четных компонент (убедитесь в этом). При этом среди чисел  $a_1, a_2, a_3$  два непременно будут четными, а одно — нечетным (независимо от того, чей ход приведет к образованию трех компонент).

3°.  $n = 4k + 2$ . И в этом случае выигрывает второй игрок, применяя стратегию первого игрока в случае  $n = 4k$ , так как при  $n = 4k + 2$  среди чисел  $a_1, a_2, a_3$  будут два нечетных.

4°.  $n = 4k + 3$ . Этот случай наиболее интересен.

При  $n = 3$ , очевидно, выигрывает второй игрок.

Докажем, что при  $n > 3$  выигрывает первый игрок.

Если первый игрок своим первым ходом соединяет какие-то два узла  $A$  и  $B$ , а второй игрок — два других узла  $C$  и  $D$  (рис. 1), то первый игрок выигрывает, применяя стратегию второго игрока для случая  $n = 4k + 1$ . Если же второй игрок соединяет узел  $A$  с третьим узлом  $C$ , то вторым ходом первый игрок замыкает треугольник, соединяя узлы  $C$  и  $B$  (рис. 2). Второй игрок при этом любым ответным ходом создает четную компоненту. После этого первый игрок добивается того, чтобы после каждого его хода было не менее двух четных компонент. Среди чисел  $a_1, a_2, a_3$ , как и в случае  $n = 4k + 1$ , будут два четных, что в данном случае обеспечивает победу первому игроку.

в) Этот пункт аналогичен предыдущему. При любой игре противников настанет момент, когда множество узлов разобьется на две компоненты  $A_1$  и  $A_2$  по  $a_1$  и  $a_2$  узлов. Прогрывает тот из игроков, кому придется соединить компоненты  $A_1$  и  $A_2$ . Рассуждая так же, как и раньше, получим, что до наступления критического момента будет сделано

$$N = \frac{a_1^2 + a_2^2 - n}{2} \text{ ходов.}$$

Вновь рассмотрим те же четыре случая.

1°.  $n = 4k$ . Второй игрок выигрывает, добиваясь того, чтобы после каждого его хода было две четные компоненты (при этом  $N$  — четно).

2°.  $n = 4k + 1$ . Выигрывает второй игрок, так как, независимо от хода игры, одно из чисел  $a_1$  или  $a_2$  будет нечетным, а  $N$  — четным.

3°.  $n = 4k + 2$ . Первый игрок при  $k > 1$  добивается победы так же, как в случае 4° пункта б): ему достаточно следить за тем, чтобы после каждого его хода, кроме, может быть, второго, было не менее двух четных компонент, чего он и добивается (см. рисунки 1, 2).

4°.  $n = 4k + 3$ . Выигрывает первый игрок, независимо от хода игры (докажите!).

г) Назовем связанную группу узлов  $B_1, B_2, \dots, B_n$  циклом, если узел  $B_1$  соединен с узлом  $B_2$ , узел  $B_2$  — с узлом  $B_3$ , ..., а узел  $B_n$  соединен с узлом  $B_1$ . Ясно, что если в связанной системе узлов есть циклы, то игрок, делающий очередной ход, не проигрывает: он может разорвать любое из соединений в любом цикле — система останется связанной.

Таким образом, выигрывает тот из игроков, после чьего хода в системе не остается циклов. Докажем, что в связанной системе из  $n$  узлов, не содержащей циклов (такая система в теории графов называется *деревом*), имеется ровно  $n - 1$  соединение. Для этого зафиксируем какой-нибудь узел  $B$  и заметим, что существует единственный путь, ведущий из  $B$  в любой другой узел. Вдоль всех путей, выходящих из  $B$ , расставим стрелки, показывающие направление от  $B$ . В каждый из узлов, кроме  $B$ , входит ровно одна стрелка и, значит, общее число стрелок равно  $n - 1$ .

Таким образом, дерево образуется после

$$N = \frac{n(n-1)}{2} = (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

ходов. Следовательно, при  $n = 4k$  и  $n = 4k + 3$  выигрывает первый игрок ( $N$  — нечетно), а при  $n = 4k + 1$  и  $n = 4k + 2$  — второй ( $N$  — четно).

А. Разборов

**Ф688.** Тонкий обруч массы  $M$  и радиуса  $R$  жестко закреплен при помощи легких спиц на легкой тонкой оси, проходящей через центр обруча так, что плоскость обруча составляет с осью угол  $\alpha$  (рис. 1). Определить, какую работу необходимо совершить, чтобы раскрутить ось до угловой скорости  $\omega$ .

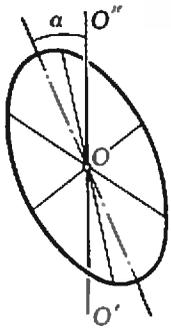


Рис. 1.

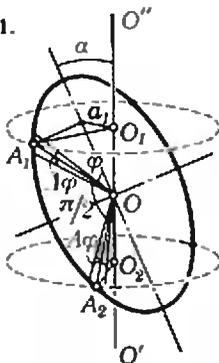


Рис. 2.  $|O_1A_1|^2 = |OA_1|^2 - |OO_1|^2$ ;  $|OA_1|^2 = R^2$ .  
 $|OO_1|^2 = |Oa_1|^2 \cos^2 \alpha = R^2 (\cos^2 \varphi) (\cos^2 \alpha) = \frac{R^2}{2} \times \cos^2 \alpha$  (так как  $\varphi = \pi/4$ ).  
 Таким образом,  
 $|O_1A_1|^2 = R^2 - \frac{R^2}{2} \cos^2 \alpha = \frac{R^2}{2} (1 + \sin^2 \alpha)$ .

**Ф689.** На гладком горизонтальном столе лежит пачка бумаги, в которой 500 листов. Сотый лист (считая снизу) больше других. Этот лист осторожно тянут в горизонтальном направлении. Какое максимальное ускорение можно сообщить пачке, чтобы она при этом двигалась не распадаясь? Каково максимальное ускорение, с которым может двигаться центр масс пачки? С каким ускорением должен двигаться при этом сотый лист? Коэффициент трения о бумагу  $\mu = 0,2$ .

Пойдем кинетическую энергию обруча, вращающегося с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси  $O'O''$  в таком положении, как указано в условии.

Линейные скорости различных точек обруча различны; соответственно, различны вклады, даваемые отдельными участками обруча в общую кинетическую энергию. Найдем кинетическую энергию пары малых участков  $A_1$  и  $A_2$  обруча, расположенных так, что  $\widehat{A_1OA_2} = \pi/2$  (рис. 2). Размер каждого участка равен  $R \cdot \Delta\varphi$ , масса —  $m = \frac{M}{2\pi R} R \cdot \Delta\varphi = \frac{M}{2\pi} \cdot \Delta\varphi$  (размер  $R \cdot \Delta\varphi$  настолько мал, что различием в радиусах окружностей, по которым вращаются разные точки участков, можно пренебречь). Линейные скорости участков  $A_1$  и  $A_2$  равны, соответственно,

$$v_1 = \omega |O_1A_1|, \quad v_2 = \omega |O_2A_2|,$$

где  $|O_1A_1|$ ,  $|O_2A_2|$  — радиусы окружностей, по которым вращаются участки  $A_1$  и  $A_2$  вокруг оси  $O'O''$ . Как видно из рисунка 2,

$$|O_1A_1| = \sqrt{|OA_1|^2 - |OO_1|^2} = R \sqrt{1 - \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \varphi},$$

$$|O_2A_2| = \sqrt{|OA_2|^2 - |OO_2|^2} = R \sqrt{1 - \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \varphi}.$$

Таким образом, кинетическая энергия пары участков  $A_1$  и  $A_2$  равна

$$E_n = \frac{1}{2} m (v_1^2 + v_2^2) = \frac{M}{4\pi} \cdot \Delta\varphi \cdot \omega^2 R^2 (1 + \sin^2 \alpha).$$

Рассмотрев любую пару участков, радиус-векторы которых образуют угол  $\pi/2$ , мы получим такое же выражение для их кинетической энергии. Число таких пар, очевидно, равно  $\pi/\Delta\varphi$ . Следовательно, общая энергия вращающегося обруча равна

$$E = \frac{\pi}{\Delta\varphi} E_n = \frac{M}{4} \omega^2 R^2 (1 + \sin^2 \alpha).$$

Согласно закону сохранения энергии работа, которую надо совершить, чтобы раскрутить обруч до угловой скорости  $\omega$ , равна

$$A = \frac{M}{4} \omega^2 R^2 (1 + \sin^2 \alpha).$$

Для частного случая  $\alpha = \pi/2$  (обруч вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси)

$$E_r = \frac{M}{2} \omega^2 R^2.$$

Для  $\alpha = 0$  (обруч вращается вокруг вертикального диаметра)

$$E_n = \frac{M}{4} \omega^2 R^2 = E_r/2.$$

С. Кротов

◆ Любой лист в верхней части пачки под действием сил трения может получить ускорение

$$a_1 < \mu g.$$

Это значит, что друг относительно друга эти листы проскальзывать не будут, а при ускорении большого листа  $a > \mu g$  возникнет проскальзывание всей верхней части пачки относительно большого листа.

В нижней части пачки проскальзывание возникает только в месте контакта с большим листом, потому что чем ниже лист, тем больше сила, прижимающая листы друг к другу. Ускорение листов нижней части пачки

$$a_2 < \frac{\mu Mg}{m} = 4\mu g$$

( $M$  — масса верхней части пачки,  $m = M/4$  — масса нижней части).

Ясно, что для получения максимального ускорения пачки при условии, что она не распадается, большой лист нужно

тянуть с ускорением

$$a = a_1 = 2 \text{ м/с}^2.$$

Таким и окажется ускорение пачки.

Чтобы получить максимальное ускорение центра масс пачки (без учета большого листа!), нужно сделать так, чтобы проскальзывали обе части. При этом общая внешняя сила  $F = f_{\text{тр}1} + f_{\text{тр}2} = 2\mu Mg$ ; ускорение центра масс

$$a = \frac{F}{M+m} = \frac{2\mu Mg}{M+m} = 2 \frac{\mu g}{1 + \frac{m}{M}} = 1,6\mu g = 3,2 \text{ м/с}^2.$$

Тянуть большой лист нужно с ускорением  $a > a_{2\text{max}} = 8 \text{ м/с}^2$ .

3. Рафаилов



**Ф690.** Между точками *A* и *B* на поверхности Луны, расположенными на угловом расстоянии  $90^\circ$ , прорыт прямолинейный канал (рис. 1), заполненный воздухом при нормальной температуре. Давление воздуха в середине канала  $p_C = 10^5 \text{ Па}$ . Найдите давление воздуха в канале у поверхности Луны. Луну считать однородным шаром с диаметром  $D = 3480 \text{ км}$ . Ускорение  $g_{\text{л}}$  свободного падения на поверхности Луны в шесть раз меньше земного.

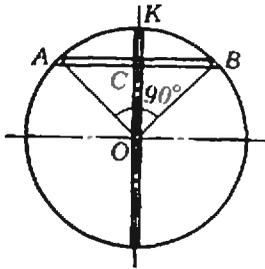


Рис. 1.

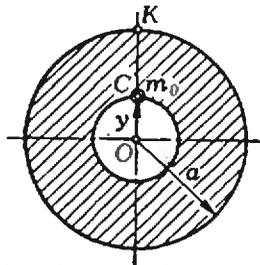


Рис. 2.

Давление воздуха  $p_C$  в середине канала равно давлению в вертикальной радиальной шахте на расстоянии  $a/\sqrt{2}$  от центра Луны ( $a = D/2$  — радиус Луны), а искомое давление равно давлению  $p_K$  на поверхности этой шахты. Поэтому необходимо установить, как изменяется давление по мере продвижения в глубь шахты.

Рассмотрим столбик воздуха малой высоты  $\Delta y$ , находящийся на расстоянии  $y$  от центра Луны, и запишем условие его равновесия:

$$\rho g \Delta y = -\Delta p, \quad (*)$$

где  $\rho$  — плотность воздуха,  $g$  — ускорение свободного падения на данной глубине,  $\Delta p$  — разность давлений на высотах  $y + \Delta y$  и  $y$ .

Плотность воздуха найдем из уравнения Менделеева — Клапейрона:

$$\rho V = \frac{m}{\mu} RT, \text{ и } \rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu}{RT} p.$$

где  $p$  — давление воздуха на выбранной глубине.

Теперь выясним, как меняется ускорение свободного падения по мере «углубления» в Луну. Выделим внутри Луны — шара радиуса  $a$  — шар радиуса  $y < a$  (рис. 2). Если на поверхность этого меньшего шара поместить материальную точку массы  $m_0$ , то реально она будет притягиваться только меньшим шаром. Суммарное действие гравитационных сил между нашей материальной точкой и всеми частицами в заштрихованной области (см. рис. 2) равно нулю. Тогда ускорение  $g$  в точке *C* (с координатой  $y$ ) определяется формулой

$$G \frac{m_0 m_y}{y^2} = m_0 g,$$

а ускорение  $g_{\text{л}}$  в точке *K* — формулой

$$G \frac{m_0 M}{a^2} = m_0 g_{\text{л}},$$

где  $m_y$  и  $M$  — массы меньшего и большего шаров соответственно. Разделив формулы почленно друг на друга и учтя, что массы шаров пропорциональны их объемам (а значит, и кубам их радиусов), получим:

$$g = g_{\text{л}} \frac{y}{a}.$$

Подставим полученные выражения для  $\rho$  и  $g$  в уравнение (\*):

$$\frac{\mu p}{RT} \frac{g_{\text{л}} y}{a} \Delta y = -\Delta p.$$

или

$$\frac{\Delta p}{p} = - \frac{\mu g_{\text{л}}}{RT a} y \Delta y.$$

Если конечные приращения  $\Delta p$  и  $\Delta y$  заменить бесконечно малыми  $dp$  и  $dy$ , получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dp}{p} = - \frac{\mu g_{\text{л}}}{RT a} y dy.$$

Решение этого уравнения находится интегрированием:

$$\frac{p_K}{p_C} \frac{dp}{p} = \frac{y_K}{y_C} - \frac{\mu g_{\text{л}}}{RTa} y dy.$$

или

$$\ln p_K - \ln p_C = - \frac{\mu g_{\text{л}}}{RTa} \left( \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right).$$

Отсюда

$$\ln \frac{p_C}{p_K} = \frac{\mu g_{\text{л}} a}{4RT} \approx 9.1,$$

или

$$\lg \frac{p_C}{p_K} \approx 0.43 \ln \frac{p_C}{p_K} \approx 3.9.$$

По таблицам десятичных антилогарифмов находим отношение давлений:

$$\frac{p_C}{p_K} \approx 8000;$$

следовательно, давление воздуха в канале у поверхности Луны приблизительно в 8000 раз меньше давления в центре канала:

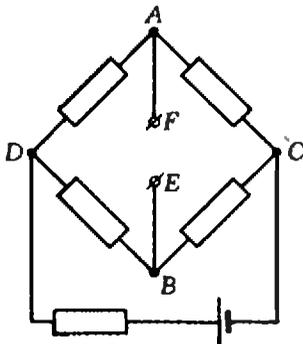
$$p_A = p_B = p_K \approx \frac{p_C}{8000} \approx 12.5 \text{ Па}.$$

Полученный нами ответ показывает, что в принципе возможно существование внутри Луны полостей, заполненных газом.

А. Стасенко



**Ф691.** Между точками E и F схемы, изображенной на рисунке, включают сначала идеальный вольтметр, а затем амперметр. Их показания равны соответственно  $U_0$  и  $I_0$ . Какой ток будет течь через резистор с сопротивлением  $R$ , включенный между точками E и F?



Включим (мысленно) между точками A и F два идеальных (без внутреннего сопротивления) источника тока с ЭДС, равными  $-U_0$  и  $U_0$ . Такое включение ничего не изменит. В этом случае зависимость между током, идущим через включенное сопротивление  $R$ , и ЭДС источников должна быть линейной, то есть

$$I_R = \alpha \mathcal{E} - \beta U_0 + \beta U_0, \tag{1}$$

где  $\mathcal{E}$  — ЭДС источника, содержащегося в схеме, а коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  зависят от всех сопротивлений схемы.

Если между точками A и F включить лишь один идеальный источник с ЭДС равной  $-U_0$ , то разность потенциалов между точками A и B станет равной нулю, то есть ток через сопротивление  $R$  идти не будет. Значит, два первых члена уравнения (1) компенсируют друг друга, и

$$I_R = \beta U_0. \tag{2}$$

Коэффициент  $\beta$  легко определить, так как формула (2) относится к случаю, когда в схему включен лишь один идеальный источник. Источник, входящий в схему, заменяется при этом сопротивлением, равным внутреннему сопротивлению этого источника, которое в задаче полагается равным нулю. Таким образом,

$$I_R = \frac{U_0}{R + R_{\text{эф}}}, \tag{3}$$

где  $R_{\text{эф}}$  — сопротивление между точками A и B при отключенном сопротивлении  $R$ . Формула (3) справедлива и для случая  $R=0$ , что соответствует включению амперметра; при этом

$$I_0 = \frac{U_0}{R_{\text{эф}}},$$

откуда находим

$$R_{\text{эф}} = \frac{U_0}{I_0}.$$

Следовательно, искомый ток равен

$$I_R = \frac{U_0 I_0}{R I_0 + U_0}.$$

В. Петерсон

Г. Гуревич

# Системы разновесов

## Проблема Эрдеша

Системой разновесов называется совокупность натуральных чисел, из которой нельзя извлечь два различных набора с одинаковой суммой (например, числа 1, 3, 7, 20 образуют систему разновесов, а числа 1, 2, 3, 4, 5, 8 не образуют:  $2+3+4=8+1$ ).

В 1956 году известный венгерский математик П. Эрдеш сформулировал следующую общую проблему: *Найти наименьшее натуральное число  $m(k)$  такое, чтобы из натуральных чисел, не превосходящих  $m(k)$ , можно было выделить систему разновесов из  $k$  чисел.*

Другая, в известном смысле обратная проблеме Эрдеша задача состоит в нахождении наибольшего количества  $l(N)$  разновесов среди чисел, не превосходящих данного натурального  $N$ .

Несмотря на большой интерес, вызванный поставленными задачами у специалистов по теории чисел, теории кодирования и комбинаторному анализу, полностью они до сих пор не решены. Получены лишь некоторые оценки чисел  $m(k)$  и  $l(N)$ , причем вопрос точности этих оценок остается открытым.

В задаче М675 («Квант», 1981, № 3) мы предложили нашим читателям получить некоторые оценки, относящиеся к проблеме Эрдеша, для конкретных  $k$  и  $N$ . Именно, мы предложили доказать, что из чисел, меньших 1000, можно выделить систему разновесов а) из 10 чисел; б) из 11 чисел; в) 14 чисел из них выбрать нельзя; г) если числа образуют систему разновесов, то сумма их обратных величин не превосходит  $5/2$ . И, наконец, мы предложили д) из чисел, меньших 700, выбрать систему разновесов, состоящую из 11 чисел.

## Оценки сверху

Некоторые грубые оценки сверху числа  $m(k)$  можно получить из очень простых соображений.

В самом деле,  $k$  чисел 1, 2, ...,  $2^{k-1}$  образуют систему разновесов при любом натуральном  $k$ .

Упражнение 1. Докажите это.

Поэтому, очевидно,  $m(k) < 2^{k-1}$ . В частности, из чисел 1, 2, ..., 1000 выделяется система разновесов из 10 чисел 1, 2, ...,  $2^9=512$ . Это дает решение пункта а) задачи М675.

Легко строится система разновесов из 11 чисел, не больших 1000.

В самом деле,  $k$  чисел 3,  $3 \cdot 2$ ,  $3 \cdot 2^2$ , ...,  $3 \cdot 2^{k-1}$  также образуют систему разнове-

сов. Добавим к ним два числа  $3 \cdot 2^{k-1}-1$  и  $3 \cdot 2^{k-1}+1$  и докажем, что получающиеся числа также образуют систему разновесов.

Если какой-то набор из этих чисел содержит оба добавленных числа (тогда набор из оставшихся чисел их не содержит), то его сумма не меньше, чем  $3 \cdot 2^k$ , и, следовательно, больше суммы всех остальных чисел.

Если же какой-нибудь набор содержит одно добавленное число, то любой набор, его не содержащий, будет иметь сумму, дающую при делении на 3 остаток, отличный от остатка при делении на 3 суммы исходного набора.

При  $k=9$  получаем систему разновесов 3, 6, 12, ..., 767, 768, 769 из 11 чисел (это дает решение пункта б)).

Итак,  $m(11) < 769$ . Вообще же нами полученная оценка  $m(k) < 3 \cdot 2^{k-2} + 1$ .

## Оценка снизу

Попробуем теперь оценить число  $m(k)$  снизу. Пусть  $a_1 < a_2 < \dots < a_k$  — система разновесов из  $k$  чисел ( $k > 1$ ).

Очевидно, что  $ka_k - 1 > a_1 + a_2 + \dots + a_k$ . Поскольку любые два набора из данных чисел имеют разные суммы, а общее число наборов из  $k$  чисел равно  $2^k - 1$ , получаем неравенство  $a_1 + a_2 + \dots + a_k > 2^k - 1$ .

Упражнение 2. Убедитесь в этом.

Поэтому  $ka_k > 2^k$ , то есть  $a_k > \frac{2^k}{k}$ . В частности, для  $k=14$  получим  $a_{14} > \frac{2^{14}}{14} > 1000$ .

Это дает решение пункта в).

Итак,  $m(k) > \frac{2^k}{k}$ .

Теперь мы можем оценить сумму  $\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_k}$ . Поскольку любая подсистема системы разновесов сама является системой разновесов, неравенство  $a_i > \frac{2^i}{i}$  справедливо при любом  $i$ , большем 1. Отсюда

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} < 1 + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{k}{2^k}.$$

Вычислим сумму  $S(k) = \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{k}{2^k}$ . Заметим, что  $2S(k) = 1 + \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{k}{2^{k-1}}$  и поэтому

$$S(k) = 2S(k) - S(k) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} - \frac{k}{2^k} = \frac{3}{2} - \frac{k+2}{2^k} < \frac{3}{2}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} < \frac{5}{2}.$$

— утверждение пункта г) также доказано.

Сравнительно недавно (1977 год) американские математики Ф. Хансон, Дж. Стил и Ф. Стенджер доказали более сильное неравенство:

$$\frac{1}{a_1^s} + \frac{1}{a_2^s} + \dots + \frac{1}{a_k^s} < \frac{2^s}{2^s - 1}$$

для любого  $s > 0$ . В частности, при  $s=1$  по-

лучаем

$$\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_k} < 2.$$

**Некоторые наблюдения**

Числа 1, 2, 4, ..., 512, как мы видели, образуют систему из 10 равновесов. Посмотрим, нельзя ли, пользуясь этой системой, получить систему равновесов из 11 чисел, меньших 1000.

Рассмотрим 11 чисел: 999—0, 999—1, ..., 999—512. Докажем, что это — система равновесов.

Будем в дальнейшем называть *длиной* набора количество чисел в этом наборе.

Прежде всего ясно, что два набора одинаковой длины имеют разные суммы (мы вычитаем из 999 ноль и числа, дающие систему равновесов).

Докажем теперь, что более длинный набор имеет большую сумму.

В самом деле, сумма шести самых маленьких чисел системы:  $(999-512) + (999-256) + \dots + (999-16)$  — больше суммы пяти самых больших из этих чисел:  $999 + (999-1) + (999-2) + (999-4) + (999-8)$ .

Пусть теперь  $a_1, a_2, \dots, a_m$  и  $b_1, b_2, \dots, b_l$  — два набора из наших чисел, причем  $m > l$ . Если  $m > 6$ , то  $a_1 + \dots + a_m$ , очевидно, больше  $b_1 + \dots + b_l$ . Если же  $m \leq 6$ , то  $a_1 + \dots + a_m$  не меньше суммы  $m$  из *меньших* чисел нашей системы, которая в свою очередь больше суммы  $l$  ( $l < m$ ) самых *больших* чисел системы (убедитесь в этом!); последняя же сумма, конечно, не меньше  $b_1 + \dots + b_l$ .

Итак, мы построили еще одну систему равновесов из 11 чисел, меньших 1000.

Проанализируем проведенное доказательство.

Прежде всего заметим, что вместо числа 999 мы могли бы взять любое число  $a$ , для которого  $a + (a-1) + (a-2) + (a-4) + (a-8) < (a-16) + \dots + (a-512)$ , то есть любое  $a > 512 + \dots + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 993$ .

Кроме того, мы воспользовались тем, что суммы наборов одинаковой длины различны.

Попробуем обобщить наши наблюдения. Возьмем  $k$  натуральных чисел  $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ , для которых суммы любых двух наборов одинаковой длины различны.

Теперь, если  $k$  — *четно* ( $k = 2l$ ), выберем число  $a$  так, чтобы выполнялось неравенство

$$(a - a_{2l}) + \dots + (a - a_l) > (a - a_{l-1}) + \dots + (a - a_1) + a,$$

а если  $k$  *нечетно* ( $k = 2l + 1$ ) — то неравенство

$$(a - a_{2l+1}) + \dots + (a - a_{l+1}) > (a - a_{l-1}) + \dots + (a - a_1) + a.$$

Так построенные числа  $a, a - a_1, \dots, a - a_k$  образуют систему равновесов длины  $k + 1$ .

**Упражнение**

3. Докажите это утверждение.

4. Докажите, что из двух наборов одинаковой длины, состоящих из различных чисел построенной системы, большую сумму имеет набор, содержащий наибольшее из выбранных чисел.

**Улучшенная система равновесов**

Пользуясь описанным способом, мы можем строить системы равновесов любой длины  $k$ .

Построим сначала последовательность чисел  $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$ , удовлетворяющую

таким соотношениям:

$$a_1 = 0, a_2 = 1,$$

$$a_{2n+1} = (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n}) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + 1,$$

$$a_{2n+2} = (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n+1}) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + 1$$

при  $n \geq 1$ .

Выпишем первые одиннадцать членов этой последовательности: 0, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 46, 88, 172, 337.

Положим  $a = (a_{11} + a_{10} + \dots + a_6) - (a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1) + 1 = 667$ .

По доказанному ранее мы получаем систему равновесов из 11 чисел: 667, 667—1, 667—2, ..., 667—337. Все эти числа меньше 700. Это дает решение пункта д) задачи

Упражнение 5. Докажите, что  $m(6) = 21$ .

**Система Конвея — Гая**

Из всех систем равновесов, известных в настоящее время, на роль «рекордсмена» претендует система, построенная американскими математиками Конвеем и Гаем. В частности, для равновесов из 11 чисел у них самое большое число равно 594.

Построение, предложенное Конвеем и Гаем, состоит в следующем (см. таблицу):

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$x_n$	0	1	2	2	3	3	4	4	4	4	5	5	
$y_n$	0	0	0	1	1	2	3	3	4	5	6	6	7
$z_n$	0	1	2	4	7	13	24	44	81	161	309	594	1161

В первой строке таблицы записаны 0 и натуральные числа: во второй строке — последовательность  $(x_n)$ , в которой всякое число  $k > 0$  встречается ровно  $k$  раз; в третьей строке — последовательность  $(y_n)$ , полученная вычитанием чисел второй строки из чисел первой строки ( $y_n = n - x_n$ ). Последовательность  $(z_n)$  задается рекуррентно:  $z_0 = 0, z_1 = 1, z_{n+1} = 2z_n - z_{y_n}$ . (Например, чтобы вычислить  $z_7$ , надо взять  $z_6 = 24$ , умножить его на 2 и вычесть  $z_3 = 4$ , поскольку  $y_6 = 3$ .) Последовательность  $(z_n)$  записана в последней строке таблицы.

Упражнение 6. Докажите, что  $x_n = (\sqrt{2n})$ , где через  $(x)$  обозначено ближайшее к  $x$  целое число.

Конвей и Гай высказали гипотезу, что при любом  $n > 0$  числа  $a_0 = z_n - z_0, a_1 = z_n - z_1, \dots, a_{n-1} = z_n - z_{n-1}$  образуют систему равновесов, и проверили ее для всех  $n \leq 40$ . (При  $n = 11$  получается следующая система равновесов: 594, 593, 592, 590, 587, 581, 570, 550, 510, 473, 285, как мы видим, наибольшее число здесь равно 594.)

В 1974 году индийский математик Х. Гупта доказал справедливость гипотезы Конвея — Гая и тем самым получил оценку для числа  $m(k)$ :  $m(k) \leq z_k$ . Совсем недавно советский математик В. Д. Яковлев независимо получил другое доказательство.

Очень интересно было бы для кого-нибудь  $n$  найти пример системы равновесов из  $n$  чисел, в которой самое большое число было бы меньше  $z_n$ . Тем самым было бы показано, что процедура получения систем равновесов Конвея — Гая все-таки не наилучшая.

## Список читателей, приславших правильные решения

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М661 — М675 и Ф678 — Ф691 [жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач].

### Математика

Большинство читателей, приславших свои решения, успешно справились с задачами М661, М662, М663, М671, М672. Остальные задачи решили: Э. Абасов (Сумгаит) 67; А. Абдуллаев (с. Каранпах Аз.ССР) 66, 67; В. Александров (Саратов) 66; М. Алексеев (Москва) 73; В. Арабидзе (Тбилиси) 73; М. Арасланов (Заворожье) 66, 75; С. Асеев (Николаев) 66, 68; Р. Ахмедов (с. Хосрех Даг. АССР) 73; Э. Ахмедов (Баку) 67; А. Ашурбеков (с. Пилич Даг. АССР) 67; Я. Балалий (Донецк) 66—69; В. Барabanов (Севастополь) 66; Ю. Баркаган (Пенза) 66; А. Белоус (Винница) 66; Ю. Беспалов (Шостка) 65, 66, 69, 73; И. Бинус (Пенза) 66; В. Будовский (Харьков) 66; В. Валуев (Тула) 73; И. Василенко (Целиноград) 67; В. Вермуд (Душанбе) 67; И. Гайонич (Киев) 66; Г. Гарегин (Ереван) 67; О. Гарифуллин (Пенза) 66; А. Гасанов (с. Б. Колатан Аз. ССР) 66, 69; В. Гешкенбейн (Москва) 65; Г. Головин (Славянск) 66, 69; Б. Гольдфарб (Москва) 67; А. Гордиенко (Димитров) 66—68, 73; А. Гохберг (Донецк) 66—69, 73; А. Грижедовская (Ставрополь) 69; О. Гринив (Киев) 65, 66, 68, 73, 74; Н. Гришко (Киев) 65—69; Е. Гутник (Киев) 66—69; Д. Демин (Винница) 66, 67; О. Добродрадных (Белорезк) 66; О. Дранко (Киев) 73, 74; А. Дубицкас (Таурате) 64, 68, 73—75; М. Елисеев (п. Нововоронежский Воронежской обл.) 73; О. Емченко (Белорезк) 66; О. Ерошкин (Днепропетровский) 65—68, 73; И. Жуков (Ленинград) 65, 66, 73, 75; Б. Зальцман (Хабаровск) 65; М. Заславский (Харьков) 66, 73; И. Зябрев (Кролевец) 66, 68, 69; В. Ивлев (Джезказган) 68; И. Итенберг (Ленинград) 68, 73; А. Казмерчук (Киев) 73, 74; Ю. Какудов (п. Цалка ГССР) 67, 69; Д. Калужный (Одесса) 66—69; Д. Камунтавичус (Вильнюс) 65, 73; А. Карпович (Киев) 68, 73; А. Кац (Ташкит) 67, 68, 73; В. Квариани (Кутаиси) 67; А. Кернерман (Киев) 73; В. Кисиль (Одесса) 65, 66, 73, 74; С. Козряк (Киев) 66—69; Г. Козлов (Апрелевка) 69; В. Козловский (д. Н. Двор Гродненской обл.) 66; С. Комков (Москва) 69; А. Корнилов (Ростов-на-Дону) 65, 68, 75; Д. Короткин (Ленинград) 65, 73, 74; Д. Коршунов (Новосибирск) 73; И. Кудряшов (Ленинград) 66, 67; И. Ланджев (Бургаз, НРБ) 67, 69; Л. Лейцин (Чернигов) 66, 69, 73, 74; М. Манцев (Ставрополь) 67; О. Марцинковский (Одесса) 66; С. Махмедов (Баку) 66, 67; В. Михайлов (Опочка) 66; А. Михалева (Ветка) 73; Д. Мустафин (Ош) 66; А. Наумов (Харьков) 66; Ю. Николаевский (Харьков)

65, 67, 73; А. Никонов (Кировград) 65—67, 69; О. Никонов (Москва) 73; М. Овецкий (Донецк) 66—69, 73, 74; О. Огурцова (Ленинград) 66; Р. Оруджев (Баку) 66, 69; С. Палий (Одесса) 67; Г. Перельман (Ленинград) 65, 66, 68, 69, 73—75; А. Попов (п. Нововоронежский Воронежской обл.) 67; В. Поляков (Николаев) 66; К. Пулатов (Ташкент) 67; С. Путинцев (Невинномыск) 66—69, 73—75; А. Разин (с. Нивны Львовской обл.) 66; А. Родионов (Москва) 66, 73; Н. Розенвайн (Киев) 66, 68; В. Романюк (с. Куснище Волынской обл.) 66; А. Савкин (Ленинград) 66, 67, 69; Р. Самборский (Тернополь) 73; А. Семенов (Саратов) 65; А. Сикса (Киев) 66—68, 73; С. Сирош (Котовск) 66, 67; Н. Смолин (п. Туровец Вологодской обл.) 66, 67; Т. Сокова (Белорезк) 74; А. Сохет (Харьков) 66, 67, 73; С. Стариков (Гомель) 67; Э. Степанян (Баку) 66, 67; И. Титаренко (Винница) 66; А. Топорова (Душанбе) 73; О. Третьяков (Омск) 66; Г. Трунов (Москва) 73; Е. Тюрин (Вильнюс) 66, 67, 69; Р. Угриновский (Хмельницк) 66, 67, 69; Т. Утепов (Алма-Ата) 73; Н. Федин (Омск) 67, 69; В. Финоменов (Москва) 69, 73; Д. Фомир (Ленинград) 65—68, 73; В. Хенкин (Симферополь) 69; С. Хиришан (Киев) 66, 67; А. Хохлов (Москва) 66, 69, 73; С. Цветков (Ленинград) 66; П. Цветков (Подольск) 66, 67, 69, 74; Р. Цоуф (Прага, ЧССР) 73, 75; О. Чалых (Витебск) 66—69, 73; Н. Черникова (Ленинград) 67; Г. Чхеидзе (Тбилиси) 73; В. Шабулик (п. Хохольский Воронежской обл.) 69; В. Шевчишин (Львов) 65; А. Шигарев (Сибай) 68; Л. Эпремидзе (Тбилиси) 66, 67, 69; Ф. Эфендиев (Баку) 66, 73, 74; С. Юровский (Мытищи) 66; Ю. Юрьев (Пинскль) 66, 73.

### Физика

Почти все читатели, приславшие свои решения, справились с задачами Ф678 и Ф683. Остальные задачи решили: И. Алексеев (Москва) 84, 85, 87—91; Э. Алиев (Баку) 86, 88, 91; Э. Али-Заде (Баку) 89; Т. Аракелян (Ереван) 81; М. Арамян (Ереван) 87; Д. Асмус (Челябинск) 81, 86, 88, 91; А. Астахов (Железнодорожный Московской обл.) 91; О. Ахремов (Вильнюс) 81, 85, 87, 89; А. Бабаев (Баку) 81, 91; Э. Багдасарян (Баку) 91; Я. Балалий (Донецк) 80—82, 86—88, 90; Ю. Байкин (п. Актюбинский Тат. АССР) 82; Ю. Бобрышев (Ворошиловград) 85; С. Бочко (Братск) 88; Б. Вейцман (Одесса) 80—85, 87, 88—91; Ю. Воеводов (Гомель) 82; К. Григорюшин (Звпорожье) 79—81, 86, 87, 89, 91; Д. Григорьев (Москва) 81, 82, 85—87; И. Гурович (Одесса) 87, 91; М. Догадов (Арзамас) 81; И. Доценко (Москва) 84—87, 89—91; В. Евстратов (Ленинград) 81, 84, 87—90; С. Егоров (Ленинград) 79, 81, 84; М. Жаконис (Каунас) 88, 90; Г. Кадышев (Москва) 88, 89; Е. Касперский (Долгопрудный) 89; А. Колежук (Киев) 80, 81, 88; В. Комов (Александров) 88—91; Л. Костадинов (Плевен, НРБ) 86, 87; А. Кубышкин (Киев) 80, 81, 84, 88, 91; Л. Кудрявцев (Нефтекамск) 81; А. Кузнецов (с. Шурский Ярославской обл.) 88, 89; А. Кузьменко (Киев) 88, 89; А. Лагунин (Киев) 80, 81, 88, 90; И. Ломако (Минск) 81;

(Окончание см. на с. 45)

### Задачи

1. В равенствах

$$a:b=c, c+d=e, e-f=g, \\ g \cdot h=10i+j$$

расставьте вместо букв 10 цифр 0, 1, ..., 9 так, чтобы получились верные равенства.

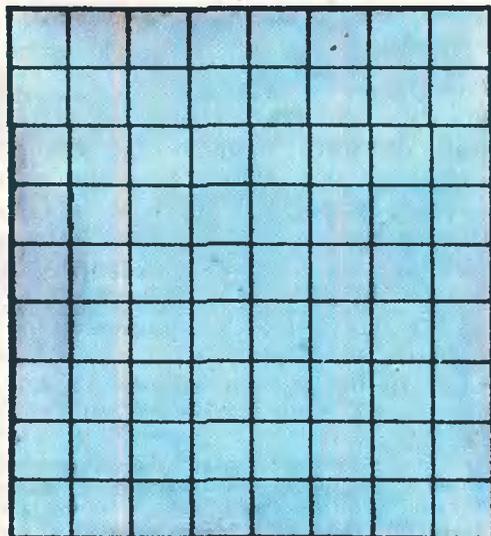
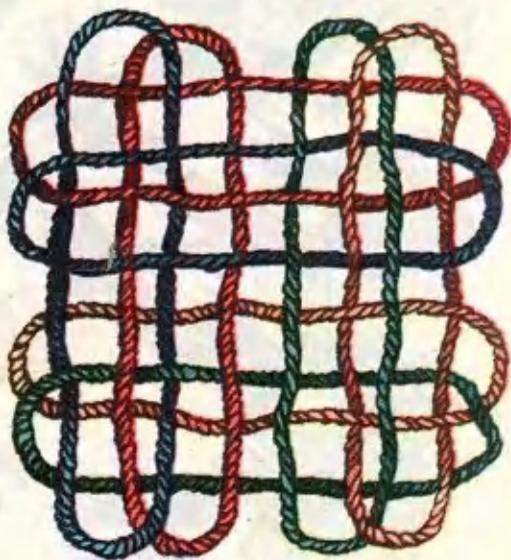
2. В коврике, сплетенном из разноцветных веревок (см. рисунок), есть веревочное кольцо, при разрезании которого коврик распадается на три части так, что две из этих частей состоят из одинакового числа веревок, а третья — всего из одной веревки. Укажите это кольцо.

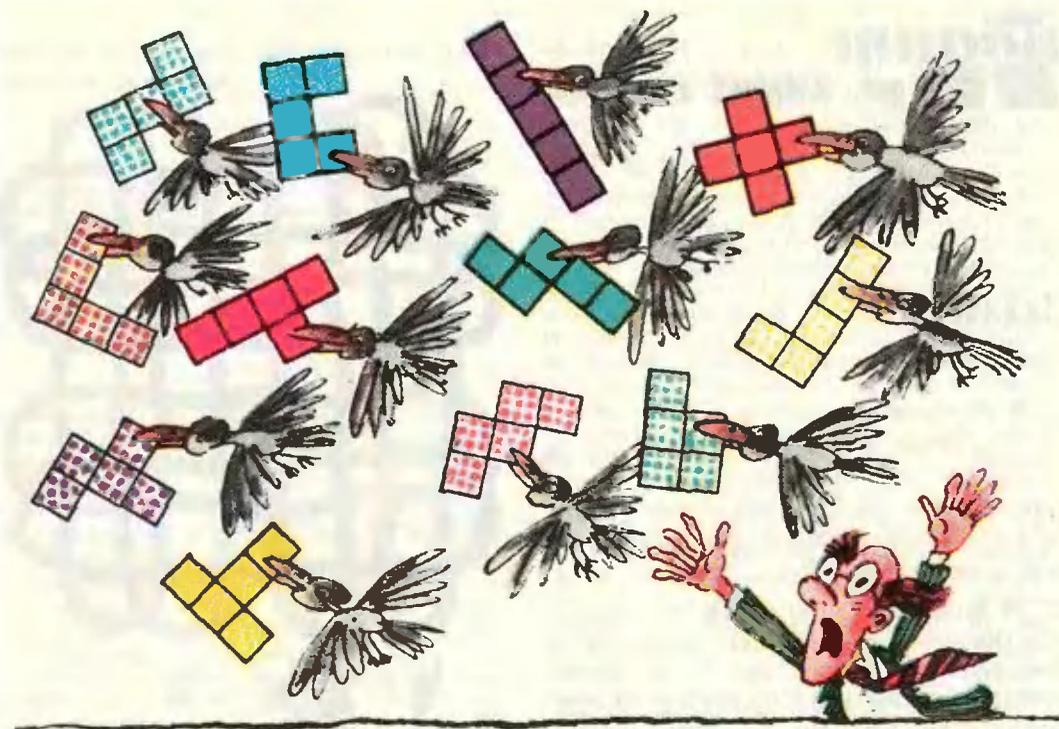
3. Докажите, что в любом выпуклом семиугольнике есть две диагонали, угол между которыми меньше  $13^\circ$ .

4. Толя предложил Ире разрезать «клетчатый» прямоугольник размером  $8 \times 9$  (см. рисунок) по линиям сетки на прямоугольные полоски  $1 \times 6$ . Сможет ли Ира это сделать?

5. В первой строчке записаны три целых числа:  $a, b, c$ . Во второй строчке под ними записаны три разности:  $a-b, b-c, c-a$ . Числа в третьей строчке образованы из чисел второй строчки по тому же закону и т. д. Покажите, что ни в одной из строчек ниже седьмой не может встретиться число 279.

Эти задачи нам предложили  
Ф. Бартеков, А. Калинин, А. Савин,  
А. Швецов.





С. Тавридов

## Пентамино на плоскости и в пространстве

Пентамино — это фигурка, являющаяся многоугольником, составленным из пяти одинаковых квадратов<sup>\*)</sup>; полный набор пентамино изображен на рисунке перед заглавием. Разумеется, во всех задачах, о которых пойдет речь ниже, пентамино можно перевортывать.

Из пентамино получаются прекрасные головоломки. Так, из двенадцати пентамино можно сложить прямоугольники  $4 \times 15$ ,  $5 \times 12$ ,  $6 \times 10$ ,

<sup>\*)</sup> Такие многоугольники, составленные не только из пяти, но и из одного, двух, трех, четырех, шести и т. д. квадратов, ввел в математико-игровой обиход американский математик С. В. Голдман. Он предложил для них общее название — *полимино*. О них можно прочесть в его книге «Полимино» (М., «Мир», 1975). См. также «Квант», 1977, № 2, 3 с. обложки и 1979, № 11, с. 22.

причем последний — 2389 принципиально различными способами (два решения, получающиеся одно из другого поворотом или отражением, считаются одинаковыми); конечно, эти 2389 решений помогла найти ЭВМ. А вот прямоугольник  $3 \times 20$  из двенадцати пентамино можно сложить только двумя различными способами; найдите их. А два прямоугольника  $5 \times 6$  можно сложить так, что получится либо прямоугольник  $5 \times 12$ , либо  $6 \times 10$  (проверьте!).

Обычную шахматную доску с четырьмя незакрытыми клетками также можно многими способами составить из пентамино. Такая «неполная» доска выглядит довольно изящно (три варианта сборки показаны на рисунке 1).

А вот фигуру, изображенную на рисунке 2, нельзя сложить из пентамино: с краев она ограничена 22 квадратами, а если посчитать, сколько квадратов каждого пентамино может находиться на краю этой фигуры, то в сумме для всех пентамино получится 21. Нельзя из пентамино сложить и фигуры, изображенные на рисунке 3, однако краткого и изящного доказательства этого факта пока не найдено.

Представьте теперь, что пентамино можно изгибать по сторонам квадратов. Тогда, используя все пентамино, можно оклеить поверхность фигуры, изображенной на рисунке 4. Разумеется, придется напрячь воображение, проявить изобретательность. Можно сначала построить развертку фигуры и заполнить ее пентамино. Но более удачным нам представляется следующий способ.

Посмотрим на рисунок 4. В поле нашего зрения находятся передние, верхние и правые квадратики поверхности нашей фигуры. Уберем эти квадратики и изобразим оставшуюся часть поверхности, то есть задние, нижние и левые квадратики (рис. 5). Теперь, обозначив каждое пентамино своим символом, запишем на каждом пяти квадратах поверхности соответствующий данному пентамино символ.

Одно из возможных оклеиваний фигуры рисунка 4 показано на рисунке 6.

«Гибкими» пентамино можно оклеить большое число многогранников с поверхностью из 60 квадратиков. Попробуйте придумать такие многогранники. Как ни странно, среди них нет ни одного прямоугольного параллелепипеда. Ждем ваших предложений — лучшие из них мы опубликуем.

Как только что было сказано, один параллелепипед нельзя оклеить всеми пентамино. А вот два одинаковых параллелепипеда  $1 \times 3 \times 3$  (на поверхности каждого из них по 30 квадратиков) так оклеить можно. Можно оклеить и шесть параллелепипедов  $1 \times 1 \times 2$ . Сделайте это! Попробуйте перечислить все возможные наборы параллелепипедов (не обязательно одинаковых), оклеиваемых комплектом пентамино. (Разумеется, число квадратов на поверхности каждого такого параллелепипеда должно быть кратно пяти.)

Наконец, оклейте набором пентамино два одинаковых «крестообразных» многогранника, изображенных на рисунке 7.

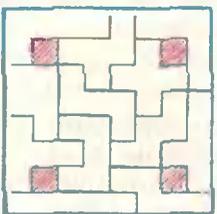
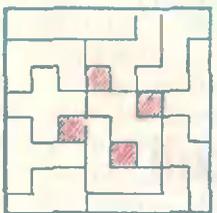
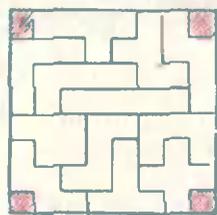


Рис. 1.



Рис. 2.

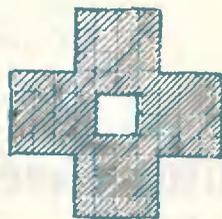


Рис. 3.

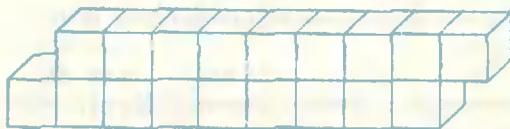


Рис. 4.

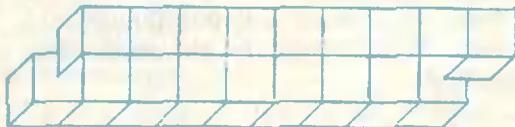


Рис. 5.

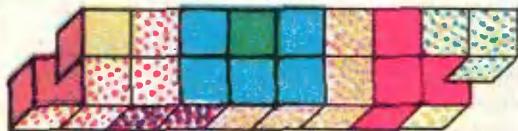
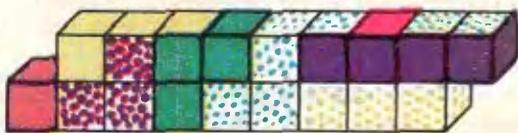


Рис. 6.

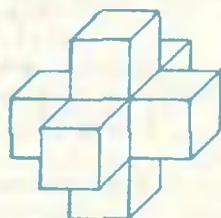
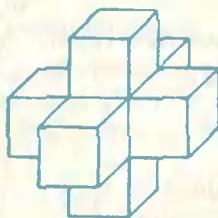


Рис. 7.

В. Рыжик

## Геометрический подарок

Федя и Вася не мучились вопросом: «А что подарить друг другу на день рождения?» Каждый из них дарил другому придуманную им задачку или теорему — что-нибудь из математики. Близился Васиин день рождения.

— А помнишь ли ты, — как бы невзначай спросил Федя у Васи, — как проводить перпендикуляр из точки на плоскость?

Вася стал водить карандашом по бумаге. Минут пять водил, а потом вздохнул:

— Нет, не помню.

— Не ты один, — посочувствовал Федя.

(Попробуй и ты, читатель, быстро и правильно сделать это построение.)

— Ну, тогда посмотри, что я придумал, — продолжал Федя. — Берем плоскость  $\alpha$  и точку  $A$  вне ее. На плоскости  $\alpha$  проводим прямую  $a$  — любую. Из точки  $A$  проводим перпендикуляр  $AB$  к прямой  $a$ . В плоскости  $\alpha$  проводим прямую  $BC$ , перпендикулярную прямой  $a$ . Из точки  $A$  проводим перпендикуляр  $AD$  на прямую  $BC$  (см. рисунок). Все.

— Что «все»? — удивился Вася.

— Вообще все. Перпендикуляр из точки  $A$  на плоскость  $\alpha$  построен.

— А доказательство? — спросил Вася.

— Пожалуйста. Проведем через точку  $D$  любую прямую, пересекающую прямую  $a$ ; точку пересечения назовем  $K$ . Проведем еще отрезок

$AK$ . Из прямоугольных треугольников  $ADB$  и  $ABK$  получаем

$$\begin{aligned} |AK|^2 &= |AB|^2 + |BK|^2 = \\ &= |AD|^2 + |BD|^2 + |BK|^2. \end{aligned}$$

Из прямоугольного треугольника  $KBD$  —

$$|BD|^2 + |BK|^2 = |KD|^2.$$

Значит,  $|AK|^2 = |AD|^2 + |KD|^2$ . Но тогда угол  $D$  в треугольнике  $ADK$  — прямой, то есть  $(AD) \perp (DK)$ . Прямая  $AD$  перпендикулярна двум пересекающимся прямым в плоскости  $\alpha$  —  $BC$  и  $KD$ ; по признаку перпендикулярности прямой и плоскости она перпендикулярна плоскости  $\alpha$ . Ну, как?

— Мне нравится, — сказал Вася. — Главное, я его уже запомнил, это построение. Один перпендикуляр, второй и третий. — Он помахал в воздухе пальцем, изображая перпендикуляры.

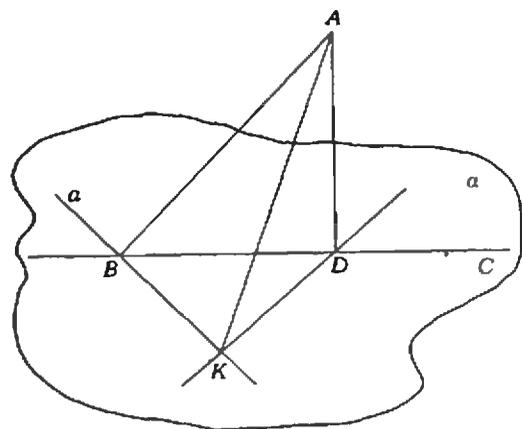
— И доказательство ясное, — продолжал он. — Из трех прямоугольных треугольников можно вывести, что и четвертый треугольник — тоже прямоугольный.

— Ты прав, — подтвердил Федя. — Между прочим, из этих же треугольников можно усмотреть доказательство теоремы о трех перпендикулярах. Вот тебе конверт: в нем записано и построение, и доказательство.

Тут его голос принял слегка торжественный оттенок.

— Этот конверт — мой подарок к твоему дню рождения. Между прочим, там есть еще над чем подумать.

Через несколько дней Вася пришел к Феде.



— Я подумал-подумал и вот что получилось, — сказал он. В твоём доказательстве использован признак перпендикулярности прямой и плоскости. Но можно обойтись и без него.

— То есть как? — удивился Федя.

— А вот как. Прямая  $AD$  перпендикулярна всем прямым на плоскости  $\alpha$ , проходящим через точку  $D$  и пересекающим прямую  $a$ . Осталось доказать, что она перпендикулярна прямой, проходящей через точку  $D$  и параллельной прямой  $a$  — и все.

— А как ты это сделаешь, без признака-то? — спросил Федя.

— Ну, это ты сам попробуй. Я использовал, так сказать, идею «непрерывности»: отрезок  $AD$  короче любого другого отрезка  $AХ$ , где  $Х$  — точка на прямой, проходящей через  $D$  и пересекающей прямую  $a$ . Такую прямую можно взять «сколь угодно близко» от прямой  $b$ , проходящей через

$D$  и параллельной прямой  $a$ . Отсюда можно будет получить, что отрезок  $AD$  короче любого другого отрезка  $AУ$ , где  $У$  — точка на прямой  $b$ . Но тогда  $AD$  будет перпендикуляром к прямой  $b$ . Понял?

— Понять-то понял, да что-то мне не нравится, — пробурчал Федя. — Подозрительно все же, что ты обошелся без признака перпендикулярности... — И ушел.

На следующий день Федя радостно сообщил, что в Васином рассуждении есть ошибка, и без признака перпендикулярности, видимо, не обойтись. Разговор у них получился очень интересным.

Попробуйте и вы:

1. Доказать теорему о трех перпендикулярах, используя теорему Пифагора.

2. Доказать перпендикулярность прямой  $AD$  и прямой  $b$ , проходящей через точку  $D$  и параллельной  $a$ , используя идею «непрерывности».

3. Найти ошибку в рассуждениях Васи.

## В пересечении — одна точка

Сейчас мы на простом алгебраическом уравнении проиллюстрируем один нестандартный прием решения уравнений. Вот это уравнение:

$$\sqrt{\frac{x-1}{2}} - \sqrt{\frac{3-x}{2}} = \frac{x^2+9}{6x}$$

Возможно, вы легко придумаете этот «прием» сами. Поэтому, прежде чем читать наше решение, попробуйте это уравнение решить самостоятельно.

**Решение.** Данное уравнение таково, что области значений функций  $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2}} - \sqrt{\frac{3-x}{2}}$ , стоящей в его левой части, и функции  $g(x) = \frac{x^2+9}{6x}$ , стоящей в его правой части, пересекаются по одной точке.

В самом деле,  $[f(x)]^2 = -1 - \sqrt{(x-1)(3-x)}$ , откуда

$[f(x)]^2 < 1, |f(x)| < 1$ . С другой стороны, при  $x > 0$  (поскольку область определения функции  $f$  есть отрезок  $[1; 3]$ , функция  $g$  при  $x < 0$  нас не интересует)

$$g(x) = \frac{x^2+9}{6x} = \frac{x}{6} + \frac{3}{2x} >$$

$> 2 \cdot \sqrt{\frac{x}{6} \cdot \frac{3}{2x}} = 1$  (мы воспользовались здесь легко доказываемым неравенством: при  $a > 0, b > 0$   $a + b > 2\sqrt{ab}$ ). Таким образом,  $f(x) < 1$ , а  $g(x) > 1$ . Поэтому рассматриваемое уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x-1}{2}} - \sqrt{\frac{3-x}{2}} = 1, \\ \frac{x^2+9}{6x} = 1. \end{cases}$$

Единственный корень  $x=2$  уравнения  $\frac{x^2+9}{6x} = 1$  является корнем и первого уравнения этой системы.

**Упражнения**  
Решите уравнения

$$1. \sqrt{\frac{2 \cos x}{3}} + \sqrt{\frac{2-2 \cos x}{3}} =$$

$$= \frac{2}{3} \sin x + \frac{1}{2 \sin x}.$$

$$2. \sqrt{1-\sin x} + \sqrt{\sin x} = 2 \cos x - \cos^2 x.$$

В. Хлобыстов

## Снова о пифагоровых тройках

Пусть число  $2n+1$  является полным квадратом:  $2n+1 = m^2$ . Тогда  $(n+1)^2 = n^2 + m^2$ . Это равенство дает еще один способ (см., например «Квант», 1979, № 4, с. 40 или 1981, № 4, с. 39) отыскивать некоторые пифагоровы тройки — такие тройки натуральных чисел  $(a; b; c)$ , что  $a^2 + b^2 = c^2$ .

Из него вытекает также, что существует бесконечно много прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами, у которых гипотенуза на единицу длиннее одного из катетов.

А. Юрашев



В. Белонучкин

## Диаграмма состояния

Как известно, любое вещество в зависимости от внешних условий может находиться в твердом, жидком или газообразном состоянии.

Если давление мало, а температура велика, вещество обычно существует в виде газа. При низкой температуре и высоком давлении все вещества превращаются в твердые тела. При каких-то промежуточных значениях параметров существует жидкость. Схематически это изображено на рисунке 1. Осталось провести границы между областями различных состояний — и мы получим так называемую диаграмму состояния вещества в  $p-T$  координатах. Припомним несколько известных фактов, которые помогут нам в этом деле.

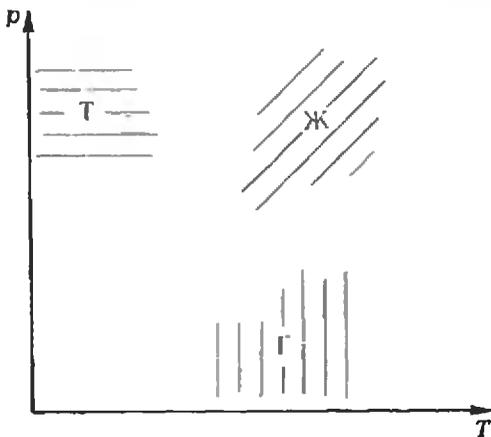


Рис. 1.

1) Давление насыщенных паров растет с ростом температуры; соответственно, температура кипения повышается с ростом давления. Значит, граница жидкость — газ (Ж — Г) идет слева — снизу вправо — вверх.

2) Температура плавления слабо зависит от давления — граница твердое состояние — жидкость (Т — Ж) идет почти вертикально.

3) Существует особая точка — критическая ( $T_{кр}$ ,  $p_{кр}$ ). При приближении к ней по границе Ж — Г свойства жидкости и газа (в первую очередь — плотности) отличаются все меньше и меньше; в критической точке отличия исчезают. Граница Ж — Г в этой точке кончается.

4) Для всех веществ (исключение — гелий) имеется тройная точка — такая совокупность параметров ( $T_{тр}$ ,  $p_{тр}$ ), при которой сосуществуют все три фазы (жидкая, твердая и газообразная). Если  $T < T_{тр}$ ,  $p < p_{тр}$ , то жидкое состояние невозможно, возможны только твердое и газообразное состояния. Следовательно, существует граница твердое состояние — газ (Т — Г). А так как при низких температурах, далеких от критической ( $T \ll T_{кр}$ ), различие между жидким и твердым состояниями гораздо меньше, чем между ними и газом, поведение границы Т — Г похоже на поведение границы Ж — Г.

Итак, вид диаграммы состояния должен быть примерно таким, как на

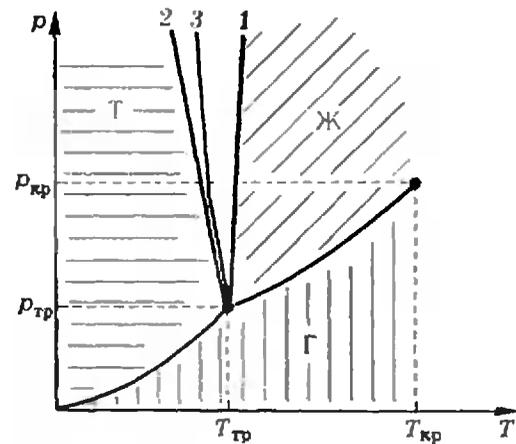


Рис. 2.

рисунке 2. Обратите внимание: граница Т — Ж проведена в трех вариантах. Обычный вариант — 1 — температура плавления растет с ростом давления. Но для некоторых веществ, например, висмута, отдельных сортов чугуна,  $T_{пл}$  с ростом давления падает — вариант 2. Для воды  $T_{пл}$  падает до давлений порядка  $2 \cdot 10^8$  Па (2000 атм), а затем начинает расти — вариант 3.

Качественно зависимость температуры фазового перехода (так называют переход вещества из одного состояния — твердого, жидкого или газообразного — в другое) от давления можно понять, опираясь на один из наиболее общих законов природы — принцип Ле Шателье — Брауна\*). Несколько упрощенно его можно сформулировать следующим образом:

*Всякое внешнее воздействие вызывает в системе изменения, уменьшающие эффект этого воздействия.*

Так, если насыщенные пары находятся в равновесии с жидкостью, при уменьшении объема, занимаемого системой, давление паров начнет повышаться. Плотность жидкости больше плотности паров. Если часть паров сконденсируется, плотность, а значит, и давление остающихся паров, уменьшится. Эффект внешнего воздействия частично (а если температура поддерживается постоянной, то и полностью) скомпенсируется. Следовательно, немедленно начнется этот компенсирующий процесс — конденсация паров. Чтобы воспрепятствовать конденсации, то есть чтобы все-таки повысить давление паров, очевидно, надо повысить температуру системы. Таким образом, опираясь (кроме принципа Ле Шателье — Брауна) только на тот факт, что плотность жидкости больше плотности пара, мы пришли к выводу, что более высокому давлению насыщенных паров отвечает более высокая температура.

Чаще всего нас интересует переход жидкость — газ; им мы в основном и будем заниматься.

Обсудим некоторые особенности поведения насыщенного пара. Заметим, в частности, что плотность и давление (иногда несколько старомодно называемое упругостью) насыщенных паров не связаны прямой пропорциональностью.

**Задача 1. Приготовление пищи в кастрюле-скороварке идет при температуре  $t_1 = 120^\circ\text{C}$ . При такой температуре давление насыщенных водяных паров  $p_1 = 2$  атм. Во сколько раз плотность пара при этом выше, чем**

**над поверхностью кипящей воды в открытой кастрюле?**

В открытой кастрюле вода кипит под давлением  $p_0 = 1$  атм при температуре  $t_0 = 100^\circ\text{C}$ . Из уравнения Менделеева — Клапейрона  $pV = \frac{m}{\mu} RT$  получим выражение для плотности:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu p}{RT}.$$

Для отношения плотностей имеем

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{p_1}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T_1} = \frac{2 \cdot 373}{1 \cdot 393} \approx 1,9.$$

Результат понятен: давление должно подняться в 2 раза, но немного выросла температура, значит (это ясно и из формулы  $p = nkT$ ) плотность увеличилась меньше, чем вдвое.

Диаграмму состояния мы строили для случая, когда система состоит только из того вещества, состояние которого мы анализируем. Как влияет на состояние наличие посторонних веществ? Чтобы разобраться в этом, решим следующую задачу.

**Задача 2. В сосуд объема  $V = 22,4$  литра при нормальном давлении воздуха и температуре  $t_0 = 0^\circ\text{C}$  налили 18 г воды. Затем сосуд закрыли герметичной крышкой и нагрели до температуры  $t_1 = 100^\circ\text{C}$ . Определить давление в сосуде.**

К сожалению, нередко можно услышать от школьников два разных, но одинаково неправильных ответа.

1) В сосуде давление воздуха  $p_0 = 1$  атм, да при нагревании до температуры  $T_1$  оно возрастет до величины  $p_1 = p_0 \frac{T_1}{T_0} = 1 \cdot \frac{373}{273} \approx 1,3$  атм. Это больше давления насыщенных паров воды при  $100^\circ\text{C}$ ; значит, вода испаряться не будет, и общее давление в сосуде будет равно  $p = p_1 = 1,3$  атм.

2)  $100^\circ\text{C}$  — температура кипения воды. Значит, вся вода в сосуде испарится; давление образовавшегося пара (в количестве 1 моль — ведь воды было 18 г) нетрудно рассчитать (при  $T_0 = 273$  К 1 моль в объеме 22,4 л создает давление  $p_0 = 1$  атм, а при  $T_1 = 373$  К давление пара будет  $p_{p1} \approx 1,3$  атм); давление воздуха в сосуде возрастет при нагревании до  $p_{a1} \approx 1,3$  атм; общее давление станет равным  $p_1 = p_{p1} + p_{a1} \approx 2,6$  атм.

\*) Текст, набранный мелким шрифтом, заметно выходит за рамки школьного курса.

Авторы первого ответа забывают, что жидкость должна находиться в равновесии со своим паром; это означает, что при  $t_1 = 100^\circ\text{C}$  вода будет испаряться, пока давление ее паров не достигнет 1 атм.

Неправилён, понятно, и второй ответ, так как давление паров воды при  $100^\circ\text{C}$  не может подняться выше 1 атм.

Итак, в сосуде давление воздуха будет  $p_{\text{в1}} \approx 1,3$  атм, давление водяных паров —  $p_{\text{п1}} = 1$  атм (мы убедились, что масса воды достаточна для создания такого давления), и суммарное давление в сосуде будет всего  $p_1 = p_{\text{п1}} + p_{\text{в1}} = 2,3$  атм.

Кстати, кипеть вода при этом не будет. Ведь кипение — это процесс парообразования не только на поверхности жидкости, но и во всем ее объеме. Если температура такова, что соответствующее ей давление насыщенных паров равно суммарному внешнему давлению, то образующиеся внутри жидкости пузырьки пара не схлопываются внешним давлением; дальнейшее испарение внутрь пузырьков увеличивает их объем, пузырьки всплывают, на поверхности лопаются — жидкость кипит.

Подчеркнем еще раз: испарение происходит всегда, когда *давление паров над поверхностью жидкости меньше давления насыщенных паров* при данной температуре; кипение происходит лишь в том случае, когда *суммарное давление* (и внутри жидкости) не превосходит давления насыщенных паров при данной температуре.

Между прочим, на Земле полно воды; а относительная влажность, равная 100%, то есть насыщение воздуха парами воды, встречается редко. Почему при избытке воды не вся атмосфера насыщена водяными парами? Может быть, достаточное количество воды просто не успело испариться? Давайте оценим скорость испарения воды.

**Задача 3.\*) Оцените количе-**

\* Аналогичная задача есть в сборнике «Задачи по физике» И. Слободецкого и Д. Асламазова, вышедшем в серии «Библиотечка «Квант» (задача № 75).

Задачи, которые используются в статье, — из репертуара приемных экзаменов в МФТИ.

*ство воды, испаряющейся при комнатной температуре с единицы поверхности в открытом стакане (а также в реке, в ручейке, в океане). Давление насыщенных паров воды при температуре  $T = 300\text{ K}$  равно  $p_{\text{н}} = 3,5$  кПа.*

Когда вода находится в равновесии со своим насыщенным паром, то она, строго говоря, испаряется. Более того, скорость испарения не зависит от того, есть ли над поверхностью воды пар. Она определяется только тем, какое количество молекул воды имеет скорость, достаточную, чтобы покинуть жидкость (и подходящее направление скорости). Просто точно такое же количество молекул пара попадает в жидкость — скорость испарения равна скорости конденсации, существует *динамическое равновесие*. А подсчитать количество конденсирующегося пара не так уж трудно.

Число молекул пара, попадающих за единицу времени (1 с) на единичную площадку (1 м<sup>2</sup>) поверхности воды, равно

$$z = \frac{n|v_x|}{2} \approx \frac{p_{\text{н}}}{2kT} \sqrt{\frac{RT}{M}} \left( \frac{1}{\text{м}^2\text{с}} \right)$$

(так как расчет приближенный, мы не учитываем различия между *средним* по модулю значением  $v_x$  ( $|v_x|$ ) и *средним* квадратичным значением  $v_x$  ( $\sqrt{v_x^2}$ ). Масса же пара, конденсирующегося на единице площади поверхности за единицу времени, равна, очевидно,

$$m = z \frac{M}{N_A} = \frac{p_{\text{н}}}{2} \sqrt{\frac{M}{RT}} \left( \frac{\text{кг}}{\text{м}^2\text{с}} \right)$$

( $N_A$  — число Авогадро).

Как мы договорились, такая масса воды испаряется независимо от влажности воздуха, то есть независимо от содержания водяных паров в воздухе (что характеризуется значением  $n$ ). Если восполнение испаряющейся воды не происходит (влажность очень маленькая), то именно такое количество воды испарится, уйдет с единицы поверхности за секунду. Рассчитаем понижение уровня воды за секунду:

$$h = \frac{p_{\text{н}}}{2\rho} \sqrt{\frac{M}{RT}} = \frac{3,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3} \sqrt{\frac{18 \cdot 10^{-3}}{8,3 \cdot 300}} \approx \approx 4,7 \cdot 10^{-3} \text{ м/с} = 4,7 \text{ мм/с.}$$

На первый взгляд ничего страшного в этом результате нет. Но вспомним, что средняя глубина океанов около 4 км; значит, время их полного испарения порядка  $10^6$  с, а это немногим более 10 суток!

В чем же дело? Почему океаны существуют?

Есть несколько обстоятельств, мешающих их исчезновению.

Начнем с менее важных. Во-первых, относительная влажность не равна нулю. Но если даже мы примем ее равной 90%, это лишь на порядок понизит скорость испарения. Во-вторых, не все молекулы пара, ударяющиеся о поверхность воды, остаются в жидкости — некоторые отскакивают, отражаются. Следовательно, мы завысили скорость конденсации, а значит, и равную ей скорость испарения. Пусть «прилипает» десятая часть молекул (число, близкое к реальному, но уже заниженное). Накинем еще порядок. Мы продлили жизнь океанов до 100 дней, до 1001 дня. Для Шехерезады (и мировой литературы) это эпоха, но для океана с его миллиардолетней историей три года — миг.

Но вернемся к нашему стакану. Даже с введенной нами поправкой в 100 раз вода из полного стакана должна испариться полностью меньше, чем за полчаса. Цифра явно нереальная. В действительности над поверхностью воды быстро образуется слой насыщенных паров, точнее — слой воздуха с относительной влаж-

ностью 100%. И только до образования этого слоя уровень воды понижается со скоростью 4,7 мм/с. Как только слой образовался, скорость конденсации становится почти равной скорости испарения, и дальнейшее понижение уровня воды определяется весьма медленным процессом диффузии паров от поверхности жидкости в окружающее пространство.

Впрочем, в судьбе океанов главную роль играют не эти факторы, замедляющие испарение; океанам хватило бы времени для полного испарения. Дело в том, что мы рассматривали равновесные или почти равновесные (квазиравновесные) системы. А земная атмосфера — система существенно неравновесная. Теплый влажный воздух поднимается в холодные слои атмосферы, там вода конденсируется, а на пути к поверхности Земли капли не успевают испариться. Океанские воды пополняются, круговорот воды в природе продолжается.

#### Упражнения

1. Твердый галлий плавает в своем расплаве. Как зависит температура плавления галлия от давления?
2. Что вы можете сказать о свойствах льда при давлениях выше 2000 атм?
3. Как известно, при жарке пищи кипит находящаяся в ней вода, а не масло, на котором жарится еда. Давление насыщенных паров масла при  $100^\circ\text{C}$  равно  $p_m = 1$  мм рт. ст., молярная масса масла  $M_m = 80 \cdot 10^{-3}$  кг/моль. Во сколько раз отличаются плотности паров воды и масла под крышкой сковороды?
4. Какое максимальное количество воды может полностью испариться в условиях задачи 2 на с. 43?

#### Список читателей, приславших правительственные решения

(Начало см. на с. 36)

А. Маков (Братск) 88, 89; А. Мильман (Одесса) 88—91; В. Михайлов (Опочка) 80, 81, 84, 85, 87—91; П. Морозов (Тула) 89, 91; К. Немченко (Донецк) 87; С. Нестеренко (Красноярск) 80, 81; К. Панкратов (Куйбышев) 85; С. Пашенко (Киев) 85, 86; В. Пенетгов (Киев) 88, 89—91; В. Петроградский (Пермь) 87—89; А. Пироженко (Мытищи) 81—89; О. Плотникова (Волгоград) 81; В. Погорелов (Узловая) 88, 89; М. Половинченко (Киев) 88, 89; А. Поталов (Чайковский) 88; А. Радиоков (п. Никольское Ленинградской обл.) 80, 81; Н. Розенвайн (Киев) 80, 81, 86—88; Ю. Самохин (Москва) 81; Д. Сви-

рида (Москва) 84—91; Ю. Сикюков (ст. Селезни Тамбовской обл.) 81, 86, 89; С. Стрелецкий (Львов) 79; Ю. Галденко (Сумы) 81, 84, 86; А. Терещенко (с. Нерудсталь Днепропетровской обл.) 82, 86—89; И. Тихоненко (совх. Новоомский Омской обл.) 81, 91; А. Тищенко (Днепропетровск) 80, 82, 89—91; О. Третьяков (Омск) 85; В. Ухов (д. Морозовка Ленинградской обл.) 79, 81; Н. Федин (Омск) 81, 82, 85, 88—91; Н. Фесун (Золотоножский р-н Черкасской обл.) 88—90; С. Фокин (Верхний Уфалей) 87; А. Хельвас (Киев) 81, 84, 87; А. Ходарик (п. Нововоронежский Воронежской обл.) 86, 87; М. Шепетько (Давид-Городок) 81; С. Шамаков (Саратов) 88, 90; А. Шрамков (п. Волоковка Белгородской обл.) 89; А. Шугай (Запорожье) 80, 88, 90; Ю. Щедрин (Брянск) 88, 89; В. Ярош (Ленинград) 88, 91; А. Яроцук (Новосибирск) 90.



*Л. Асламазов*

## XII Международная физическая олимпиада

С 1 по 10 июля этого года в Народной Республике Болгарии, в городе Варне, проходила XII Международная физическая олимпиада школьников. Эта олимпиада была рекордной по числу участников: 14 стран прислали свои команды. Это Болгария, Венгрия, Вьетнам, ГДР, Италия, Польша, Румыния, СССР, Финляндия, Франция, ФРГ, Чехословакия, Швеция и Югославия.

Команду СССР представляли призеры Всесоюзной олимпиады по физике:

*Александр Гутин* — выпускник средней школы № 2 г. Клинцы,

*Владислав Дервянко* — выпускник средней школы № 145 г. Киева,

*Андрей Мушинский* — выпускник средней школы № 23 г. Минска,

*Илья Солодовников* — выпускник средней школы № 179 г. Москвы, *Игорь Шубенин* — выпускник средней школы № 52 г. Риги.

Руководителями нашей команды были заведующий лабораторией Научно-исследовательского института содержания и методов обучения Академии педагогических наук СССР О. Ф. Кабардин и инспектор Министерства просвещения СССР М. В. Грабиленков.

Как обычно, рабочее жюри состояло из хозяев — болгарских физиков. Оно осуществляло отбор и проверку задач. Результаты утверждались Международной комиссией, в которую вошли представители всех стран-участниц.

Председателем Международной комиссии был избран известный болгарский ученый профессор А. Раев.

Большое внимание олимпиаде уделили Министерство просвещения НРБ, Димитровский комсомол, Городской совет Варны. Олимпиада была организована прекрасно. Все участники жили в новом благоустроенном здании Института усовершенствования учителей на берегу Черного моря. В аудиториях и лабораториях Института прошли также теоретический и экспериментальный туры. Участники олимпиады побывали

Советская, болгарская и вьетнамская делегации у Памятника советско-болгарской дружбы.

*Фото Христо Минчева*

на знаменитых курортах Золотые пески, Солнечный берег и Альбена, совершили поездки в Ботанический сад города Балчика и в старинный город Несебыр. Перед гостями выступили лучшие самодеятельные коллективы болгарских школьников, известные своей высокой музыкальной культурой. В течение всего времени олимпиады работал интерклуб, в котором ребята могли встретиться, рассказать о своих странах, обменяться впечатлениями об олимпиаде и просто потанцевать.

Как обычно, соревнования олимпиады проводились в два тура: сначала участники решали теоретические задачи, а затем — выполняли экспериментальную задачу. Приведем их условия:

### Теоретические задачи

1. Пробирка массой  $M$  находится в вакууме. Перегородка массой  $m$  с пренебрежимо малой толщиной разделяет объем пробирки на две равные части. В закрытой части пробирки содержится  $n$  молей идеального одноатомного газа с молярной массой  $\mu$  при температуре  $T$ . Перегородка освобождается и, двигаясь без трения, вылетает из пробирки. Затем вытекает и газ. Какова будет конечная скорость пробирки, если в момент начала движения перегородки она была неподвижна? Универсальная газовая постоянная  $R$  известна.

Импульсом газа до вылета перегородки, а также теплообменом между газом, с одной стороны, и пробиркой и перегородкой, с другой, можно пренебречь. Земное притяжение не учитывается.

2. Электрическая лампа сопротивлением  $R_0 = 2$  Ом при номинальном напряжении  $U_0 = 4,5$  В питается током от аккумулятора с ЭДС  $\mathcal{E} = 6$  В, внутренним сопротивлением которого можно пренебречь.

а) Пусть номинальное напряжение подается на лампу через реостат с движком, включенным как потенциометр. Каково должно быть сопротивление реостата и на какой максимальный ток он должен быть рассчитан, чтобы КПД системы был не меньше  $\eta_0 = 0,6$ ?

б) Каков максимально возможный КПД цепи лампа — аккумулятор при номинальном напряжении на лампе и каким образом их надо соединить через подходящий реостат, чтобы достичь максимального КПД?

3. Приемник радиоволн радиоастрономической обсерватории расположен на берегу моря на высоте  $h = 2$  м над уровнем моря. При восходе над горизонтом радиозвезды, излучающей электромагнитные волны длиной  $\lambda = 21$  см, приемник регистрирует чередующиеся максимумы и минимумы. Известно, что приемник регистрирует только те электромагнитные волны, у которых электрический вектор  $\vec{E}$  колеблется параллельно водной поверхно-

сти. Интенсивность регистрируемого сигнала пропорциональна  $E^2$ .

а) Определите высоты звезды над горизонтом, измеренные в углах по небесной сфере, при которых регистрируются максимумы и минимумы (в общем виде).

б) Будет ли интенсивность сигнала в приемнике возрастать или уменьшаться непосредственно после восхода радиозвезды? Объясните, почему.

в) Найдите отношение интенсивностей сигналов в первом максимуме и следующем за ним минимуме.

При отражении электромагнитной волны от воды отношение амплитуд электрического поля отраженной ( $E_{\text{отр}}$ ) и падающей ( $E_{\text{пад}}$ ) волн описывается законом

$$\frac{E_{\text{отр}}}{E_{\text{пад}}} = \frac{n - \cos \varphi}{n + \cos \varphi},$$

где  $n$  — показатель преломления, а  $\varphi$  — угол падения электромагнитной волны. Для границы воздух — вода при  $\lambda = 21$  см величина  $n = 9$ .

г) Будет ли возрастать или уменьшаться отношение интенсивностей сигналов, принимаемых в соседних максимумах и минимумах, с восхождением звезды над горизонтом?

При решении задачи морскую поверхность считать гладкой.

### Экспериментальная задача

Имеется в распоряжении упругий резиновый шнур, вертикально подвешенный на нитативе. Начальная длина шнура 150 мм, а масса чашки весов 5 г. Помимо этого даны набор грузов массой от 10 до 100 г, секундомер, измерительная линейка, лекало и миллиметровая бумага. Ускорение свободного падения принять равным  $10 \text{ м/с}^2$ . Массой шнура можно пренебречь.

а) Нагрузите резиновый шнур последовательно грузами массой от 15 до 105 г. Запишите в таблицу и изобразите графически в подходящем масштабе экспериментально полученную зависимость удлинения  $\Delta l$  шнура от модуля силы натяжения  $F$ .

б) Используя результаты измерений, проведенных в пункте а), вычислите и составьте таблицу значений объема шнура при нагрузках от 35 до 95 г. Вычисления выполните последовательно для каждых двух соседних значений нагрузок из указанного интервала. Напишите формулы, которыми вы пользовались при вычислениях. Выразите аналитически ваше предположение о зависимости объема от нагрузки.

Примите значение модуля Юнга постоянным и равным  $E = 2 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ . При обсуждении результатов следует иметь в виду, что для указанных нагрузок закон Гука для резины имеет приблизительный характер, поэтому отклонения от него могут доходить до 10%.

в) Определите объем резинового шнура, используя секундомер и положив на чашку весов груз массой 60 г. Укажите использованные формулы.

Очень хорошо была организована проверка работ. Сразу же после окончания тура все работы копировались, и копии раздавались руководителям команд. Кроме того, руково-

дитель каждой команды получал официальные решения задач, предлагавшиеся жюри, и нормативы оценок решений в баллах. Поэтому руководители вместе с ребятами сами могли проверить все работы и убедиться в правильности оценок жюри.

Отбор победителей проводился по следующему принципу. Сначала выявлялся победитель — участник, получивший максимальное число очков. Им оказался советский школьник А. Гутин, набравший 47 очков из 50 возможных. Первый приз, кроме абсолютного победителя, был также присужден участникам, набравшим не менее 90% очков от лучшего результата. Таких оказалось шестеро: А. Уиренбах (ФРГ), В. Тудосе (Румыния), И. Солодовников (СССР), М. Лен (ФРГ), В. Деревянко (СССР) и В. Лерц (Польша). Второй приз завоевали участники, набравшие не менее 80% очков от лучшего результата; среди них — советский школьник А. Мушинский. Третий приз получили школьники, набравшие не менее 65% очков от лучшего показателя; в их числе — член нашей сборной И. Шубенин. И, наконец, поощрительными грамотами были награждены все те участники, которые набрали не менее 50% очков от лучшего результата. Кроме того, были вручены специальные призы за лучшие решения теоретических задач: от Академии наук НРБ — С. Мюллеру (ФРГ), от журнала «Физика» — А. Гутину (СССР), от Общества физиков — А. Клумперу (ФРГ). Специальный приз за лучшее решение экспериментальной задачи получил советский участник А. Мушинский.

Во время олимпиады в одном из залов Международного Дома ученых имени Фредерика Жолио-Кюри состоялась беседа за круглым столом на тему «Роль физических олимпиад в развитии интересов и творческих способностей молодежи». В беседе приняли участие представители всех стран, присутствующих на олимпиаде, а также — представитель ЮНЕСКО доктор Самади.

Д-р Самади рассказал о работе, проводимой ЮНЕСКО в связи с проблемами преподавания естественных



наук, в частности, — на школьном уровне. Большинство участников в своих выступлениях говорили об организации и целях национальных соревнований школьников в представляемых ими странах. Наиболее важными целями олимпиад во всех странах являются повышение интереса учащихся к физике и технике, развитие творческих способностей и выявление наиболее одаренных школьников. Дополнительная цель международного соревнования — установление дружеских связей между школьниками разных стран. Было внесено предложение с помощью ЮНЕСКО организовать международный обмен делегациями школьников и учителей, принимающих участие в соревнованиях.

Многие выступавшие касались типов задач, предлагавшихся на олимпиадах. Подчеркивалось, что решения задач должны требовать углубленного и творческого понимания физики и что необходимо приблизить содержание задач к современной физике. В то же время отмечалось, что отбор задач на международные соревнования затруднен ввиду различий в учебных программах разных стран.

С большим интересом были выслушаны доклады советских участни-



Идет экспериментальный тур.

Во время заседания Международной комиссии олимпиады. Выступает председатель комиссии А. Раев.

Приветствие А. Раева читателям нашего журнала.

*Вся редакция «Кванта»  
желает успехов и добрых успехов*

ков О. Ф. Кабардина и Г. С. Тарасюк. Предложенный Г. С. Тарасюк способ оценки трудности олимпиадных задач был сразу же использован жюри олимпиады, и расчет показал, что коэффициент трудности задач этой олимпиады находится в пределах нормы.

Участники беседы за круглым столом говорили также о важной роли физико-математических журналов для школьников. Профессор Кунфалви, один из основателей Международных физических олимпиад, подробно рассказал о венгерском физико-математическом журнале для школьников. Он подчеркнул, что в таких журналах обязательно нужно публиковать трудные задачи, которые школьники могли бы решать дома, так как не всякий творческий человек способен быстро решать задачи и побеждать на олимпиадах. В выступлении болгарской участницы П. Бозаровой говорилось о роли журнала «Квант» для подготовки к олимпиадам и развития творческих способностей болгарских школьни-

ков. Об истории создания «Кванта» и опыте его работы со школьниками в СССР рассказал Л. Г. Асламазов. Представитель Югославии Д. Гружик сообщил об издаваемом в его стране журнале для школьников «Юный физик».

На заключительном заседании Международной комиссии был принят план проведения следующих Международных физических олимпиад. XIII Олимпиаду намечено провести в конце июня 1982 года в ФРГ, XIV — в Румынии в 1983 году, XV — в Швеции в 1984 году, XVI — в ГДР в 1985 году. Было высказано предложение привлечь к проведению олимпиад такие международные организации, как Европейское физическое общество, Международный союз чистой и прикладной физики, ЮНЕСКО.

В заключение от имени всей советской делегации хочется поблагодарить болгарский оргкомитет олимпиады за теплый, дружественный прием, который мы ощущали буквально на каждом шагу.



*А. Абрамов, В. Мишин*

## XXII Международная математическая олимпиада

XXII Олимпиада собрала рекордное число стран-участниц — 27. Это Австралия (8)\*, Австрия (8), Бельгия (8), Болгария (8), Бразилия (8), Великобритания (8), Венгрия (4), Венесуэла (8), Греция (8), Израиль (6), Канада (8), Колумбия (8), Куба (8), Люксембург (1), Мексика (5), Нидерланды (8), Польша (8), Румыния (4), СССР (6), США (8), Тунис (2), Финляндия (8), Франция (8), ФРГ (8), Швеция (8), Чехословакия (5), Югославия (8).

Впервые олимпиада проходила не на европейском континенте: в этом году участники встретились в Соединенных Штатах Америки.

Членами команды СССР стали выпускники десятого класса, победители и призеры Всесоюзных математических олимпиад последних лет *Валерий Алексеев, Михаил Гринчук,*

Команда СССР: слева направо — Ю. Екишев, Ю. Чеханов, В. И. Мишин (педагогический руководитель), В. Алексеев, А. М. Абрамов (научный руководитель), А. Чанышев, А. Аралкин, М. Гринчук.

*Айрат Чанышев* (все из ФМШ № 18 при МГУ), *Андрей Аралкин* (Новокузнецк, с. ш. № 11), *Юрий Екишев* (Сыктывкар, с. ш. № 1) и *Юрий Чеханов* (Москва, с. ш. № 91).

Как и ранее, месячный тренировочный сбор нашей команды проходил в поселке Черноголовка Московской области на базе экспериментальной школы АПН СССР. На сборах, потребовавших от участников довольно интенсивной работы, решались олимпиадные задачи, в том числе и задачи, предлагавшиеся на международных олимпиадах. Многие из преподавателей, работавших на сборах, раньше сами участвовали в международных олимпиадах (И. Захаревич, Б. Ивлев, С. Конягин, В. Ляшко, А. Разборов). Большое внимание уделялось спорту — футбол, плавание, баскетбол, настольный теннис и даже прыжки в воду с пятиметровой вышки (для самых смелых) помогали поддерживать хорошую физическую форму членов команды; это оказалось очень важным: в США стояла тридцатиградусная жара при стопроцентной влажности.

Поэтические и музыкальные вечера, проводившиеся руководителем сборов А. Н. Земляковым, стали су-

\* В скобках указано количество участников в команде.

щественной частью культурной программы.

Советская команда вылетела в США 7 июля. Рабочее расписание олимпиады было таким:

7—8 июля — сбор команд в Рутгерском университете (г. Нью-Брун-свик в окрестностях Нью-Йорка).

9—12 июля — подготовительная работа международного жюри: отбор задач олимпиады, оценка задач в баллах, согласование переводов с английского на другие языки.

Работа жюри проходила в колледже Мэри Вашингтон во Фредериксберге (под Вашингтоном). В это время школьники и педагогические руководители команд оставались в Рутгерском университете, а 12 июля переехали в Джорджтаунский университет (Вашингтон).

13—14 июля — решение задач олимпиады.

В каждый из этих дней предлагалось по три задачи, на решение которых отводилось по 4,5 часа (первые 30 минут — для предварительного знакомства с текстами; в течение этого времени участники могли обращаться в жюри с вопросами по формулировкам). За полное решение каждой задачи давалось 7 баллов.

15—17 июля — проверка работ руководителями команд; координация оценок.

Предварительные оценки, выставленные руководителями, уточнялись при обсуждении работ с координационной комиссией; по каждой задаче в эту комиссию входило три американских математика. Руководители команды СССР (так же, как и руководители команд других стран, представивших задачи, отобранные для олимпиады) координировали работы американских школьников по задаче, предложенной СССР.

18 июля — заключительное заседание жюри.

Было решено приурочить первые премии участникам, набравшим 41 или 42 балла. Вторые премии присуждались за результат от 34 до 40 баллов; наконец, третьи премии получили учащиеся, набравшие от 26 до 33 баллов. Специальный приз «за лучшее решение» жюри решило не присуждать.

21 июля советская команда вылетела на Родину.

Пять задач олимпиады опубликованы в Задачнике «Кванта» этого номера (см. с. 24). Задача M716 предложена Великобританией, M717 — ФРГ, M718 — Нидерландами, M719 — Бельгией, M720 — Финляндией\*). Приведем формулировку шестой задачи, предложенной СССР: *Через точку  $O$ , лежащую внутри данного треугольника, проведены три окружности равных радиусов, каждая из которых лежит внутри треугольника и касается двух его сторон. Докажите, что точка  $O$ , центр окружности, описанной около треугольника, и центр окружности, вписанной в него, лежат на одной прямой.*

Отбор задач для олимпиады осуществляется так: оргкомитет олимпиады (президент олимпиады — профессор Р. Андерсон, председатель оргкомитета — доктор А. Уилкоккс) из задач, присланных представителями стран-участниц, отобрал 19 задач. Международное жюри (председатель — профессор С. Грейцер, председатель комиссии по отбору задач — профессор Д. Барлас) из этих задач выбрало 6 задач для олимпиады. При этом жюри стремилось удовлетворить следующие требования: 1) задачи должны отражать различные разделы математики, 2) в числе олимпиадных задач должны быть простые, средней трудности и сложные. Если первое требование было выполнено, то про второе этого сказать нельзя. И дело, по-видимому, не только в том, что, как это часто бывает, предварительная оценка трудности задачи может оказаться довольно далекой от истинной, которая становится известной только при подведении итогов олимпиады. Основная причина того, что, как это признали многие участники олимпиады (и руководители, и школьники), задачи оказались слишком простыми, состоит, на наш взгляд, в следующем.

Эти задачи требовали для своего решения идей, в олимпиадной практике хорошо известных. Учитывая

\*) Задачи M716 — M718 предлагались в первый день, остальные — во второй



Группа участников олимпиады у памятника Эйнштейну в Вашингтоне.

же, что во многих странах, не участвовавших в олимпиадах, в настоящее время подготовка находится на хорошем уровне (и, конечно же, известные задачи давно разобраны), становится понятным, почему необычайно велико число участников, получивших награды (36 первых премий, причем 26 участников набрали 42 балла из 42; 37 вторых и 30 третьих премий).

Все шесть советских участников — в числе призеров: *В. Алексеев*, *М. Гринчук* и *Ю. Чеканов*, показавшие абсолютный результат, получили золотые медали; *Ю. Екишев* и *А. Чанышев* — серебряные; *А. Аралкин* награжден бронзовой медалью. Всем призерам олимпиады вручены памятные подарки.

Команда СССР, показавшая хороший результат (230 баллов), выступала в неполном составе и, естественно, не могла участвовать в споре за неофициальное командное первенство. Наилучшие результаты показали команды США (314 баллов), ФРГ (312 баллов), Великобритании (301 балл), Австрии (290 баллов) и Болгарии (287 баллов). Очень хорошо выступили команды Венгрии и

Чехословакии. Ну, а абсолютным победителем олимпиады стала команда Люксембурга, не потерявшая ни одного очка: ее единственный участник набрал 42 балла из 42!

В целом команда СССР выступила удачно: все наши участники получили от 78 до 100 процентов от возможного количества баллов; по каждой задаче ребята набирали от 86 до 100 процентов баллов. Все же, учитывая возросшую конкуренцию, хочется пожелать будущим участникам международных олимпиад тщательнее готовиться к соревнованиям — работать нужно быстро, но точно — на олимпиаде мелочей нет! Наши «потерянные» 22 балла — результат излишней нервозности участников и обидных ошибок при оформлении уже найденных решений.

Заканчивая обсуждение итогов, вернемся к вопросу об «истинной сложности». Поскольку все задачи оценивались одинаково (7 баллов), мы приведем некоторые цифры, дающие представление о степени трудности задач для участников. 185 участников из возможных 1295 баллов по каждой задаче общими усилиями набрали 695 баллов по первой за-

даче, 934 — по второй, 504 — по третьей, 821 — по четвертой (это — первые четыре задачи Задачника «Кванта»), 958 — по пятой (это — задача СССР) и 1025 — за решение шестой задачи (задача М720).

Международная математическая олимпиада — это не только задачи и медали. Оргкомитет олимпиады, проведший большую работу и справедливо заслуживший признательность участников олимпиады, предусмотрел обширную культурную программу. Ребята совершили ряд экскурсий (по Нью-Йорку и Вашингтону), посетили Национальный музей аэронавтики и космического прост-

ранства, Вашингтонскую национальную галерею, были в Капитолии, присутствовали на театральных постановках.

Олимпиада — это множество интересных встреч и бесед. Правда, словарный запас участника, позволяющий говорить на других языках, во многих случаях был, мягко говоря, ограничен; однако стремление понять друг друга было столь велико, что языковые проблемы при общении отступали на задний план. Каждый участник получил за эти две недели массу интересных впечатлений, приобрел много новых друзей в самых разных концах мира.

## Развертки куба

С развертками куба, то есть с плоскими фигурами (образованными целыми гранями куба), из которых можно составить поверхность куба, все вы, вероятно, встречались. Однако мало кто знает, что число различных таких разверток равно одиннадцати. На рисунке 1 изображен сам куб, а на рисунках 2—4 — все его развертки. На гранях куба написаны числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6.

На рисунке 1 мы видим только три первых числа, а как расположены на кубе остальные числа, можно понять из рисунка 2, где эти числа изображены на одной из разверток куба. Если мы возьмем другую развертку (рис. 3), то там числа расположены совсем в другом порядке; кроме того, они оказываются повернутыми. Попробуйте теперь на девяти развертках, изображенных на рисунке 4, нарисовать 5 чисел (одно число уже нарисовано) так, чтобы это соответствовало нашему кубу.

А. П.

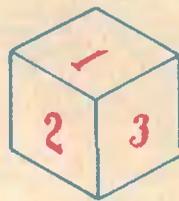


Рис. 1.

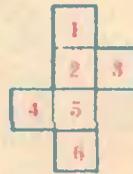


Рис. 2.



Рис. 3.

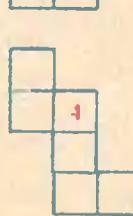
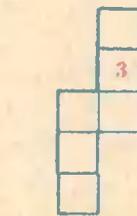
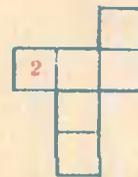
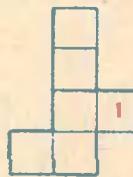
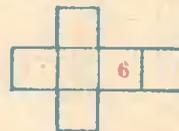
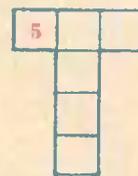
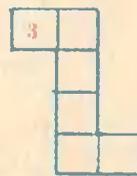


Рис. 4.

## Математические олимпиады в ПТУ

Задачу, стоящую сейчас перед системой профтехобразования, можно сформулировать так: в ПТУ все должно быть как в школе, но лучше. Именно поэтому в последние годы все чаще юноши и девушки из профессионально-технических училищ занимаются в кружках НОУ, выступают на олимпиадах, в конкурсах рефератов.

Омское областное управление профтехобразования проводит предметные олимпиады уже ряд лет. Лучшее всего получались олимпиады по физике; конкурсы по другим предметам охватывали сравнительно мало учащихся, особой популярностью не пользовались.

С другой стороны, студенты омских вузов, члены лаборатории форм и методов комсомольской работы при ОК ВЛКСМ уже накопили солидный опыт организации различных математических олимпиад для школьников (см. «Квант», 1979, № 12 и 1980, № 8). Было у них и желание расширить сферу своих действий. Поэтому оказалось закономерным, что в 1980 году методический кабинет управления профтехобразования области и члены лаборатории решили провести экспериментальную командную олимпиаду ПТУ области по математике.

Конечно, были сомнения. Справятся ли участники с заданием? Будут ли командные олимпиады интересны учащимся ПТУ? Узнать это можно было только из эксперимента.

В марте 1980 года олимпиада прошла, а ее результаты понравились и участникам, и организаторам. Конечно, первые призы не смогли бы рассчитывать на выигрыш кубка традиционной олимпиады школ города, но места в первой двадцатке они бы заняли. А самое главное — в олимпиаде приняли участие 160 человек из 30 училищ; сама подготовка к олимпиаде прошла в ПТУ очень живо, активно. Надо было продолжать эксперимент, превращать его в традицию. Поэтому в следующем году студентами под руководством преподавателей педагогического и политехнического институтов были проведены уже шесть предметных командных олимпиад — по математике, химии, черчению, английскому и немецкому языкам, обществоведению. В них приняли участие около 800 юношей и девушек из профтехучилищ.

Особенность всех этих олимпиад — ярко выраженный прикладной характер предлагаемых заданий. В дни олимпиад студенты и преподаватели вузов читали научно-популярные лекции, рассказывали об интересных задачах. А разбор заданий каждой олимпиады проводился дважды — отдельно для участников олимпиады и отдельно для их учителей.

Отношение к олимпиадам видно и из такого факта: ряд училищ выставил на олимпиаду по 3—5 команд, а призеров разделяли деся-

тые доли очка. Наиболее успешно в олимпиадах выступают команды ПТУ №№ 23, 15, 69.

Для многих ребят участие в олимпиаде стало путевкой в кружки НОУ при омских вузах. В кружках им, как правило, подбирались работы, где нужно было применять математику к избранной специальности: составлять номограммы, рассчитывать оптимальную нагрузку станков и т. п. Так, наибольший интерес на традиционной конференции НОУ вызвал доклад В. Шемя и В. Ждана из ПТУ № 46. Ребята обобщили задачу о бригаде, предложенную на олимпиаде, после чего решили ее несколькими способами.

Опробованы и новые задумки лаборатории. В том же ПТУ № 46 прошла дискуссия «Математика и современный рабочий», подготовленная членами лаборатории. Две команды из учащихся одной группы отстаивали свои (противоположные) мнения, используя для доказательства и прочитанные книги, и примеры из производственной жизни, и ответы опрошенных ими рабочих, мастеров, инженеров.

Математика нужна будущему рабочему — вот вывод дискуссии. И этим в Омске закладывается новая традиция — система кружков НОУ в профтехобразовании.

Приведем теперь отдельные задачи математических олимпиад ПТУ.

1. На какой линии располагаются центры окружностей, вписанных во всевозможные треугольники с общей стороной  $AB$ ?

2. У четырех людей, родившихся в разные годы XX века, суммы цифр возрастов одинаковы, а сумма всех четырех возрастов — точный куб. Сколько лет старшему из этих людей?

3. Общее сопротивление двух проводников, соединенных параллельно, равно  $a$  Ом, а их же, соединенных последовательно, —  $b$  Ом. Можно ли из этих данных найти сопротивление каждого проводника?

4. В технике существуют три типа температурных шкал: Цельсия, Фаренгейта и Реомюра ( $^{\circ}\text{C}$ ,  $^{\circ}\text{F}$ ,  $^{\circ}\text{R}$ ). Температура образования льда принимается равной  $0^{\circ}\text{C}$ ,  $32^{\circ}\text{F}$  и  $0^{\circ}\text{R}$ . Интервал от этой точки до точки кипения воды разбивается на 100 (Цельсий), 180 (Фаренгейт) и 80 (Реомюр) частей, которые и называются градусами Цельсия, Фаренгейта и Реомюра соответственно.

Пусть одна и та же температура характеризуется  $x^{\circ}\text{C}$ ,  $y^{\circ}\text{F}$ ,  $z^{\circ}\text{R}$ . Выведите формулы:  $y=f(x)$ ,  $z=\varphi(x)$ ,  $z=\Psi(x)$ .

5. В некотором эксперименте находились значения функции  $y(x)$ . Известно, что она должна быть линейной:  $y=kx$ , но из-за ошибок эксперимента точки  $M_1(x_1; y_1)$ ,  $M_2(x_2; y_2)$ , ...,  $M_n(x_n; y_n)$  на координатной плоскости  $xOy$  не укладываются на одну прямую.

а) Принято угловой коэффициент  $k$  подбирать таким образом, чтобы

$$S(k) = \sum_{i=1}^n (y_i - kx_i)^2$$

была наименьшим. Выведите формулу для нахождения  $k$ .

б) Предложите другие способы нахождения  $k$  и выведите соответствующие формулы.

(Окончание см. на с. 56)



## Что может голография?

Нынешние школьники, от первоклассников до выпускников, родились и живут в эпоху спутников и космических полетов, цветных телевизоров и портативных магнитофонов, лазеров и сверхзвуковых самолетов — все это является теперь привычным и естественным. А ведь каких-нибудь три десятилетия назад, в эпоху детства их родителей, не цветной, а черно-белый телевизор считался чудом техники, к его обладателю стекались соседи и друзья, чтобы насладиться невиданным зрелищем.

В свое время наумленные и восторг, настоящее потрясение во всем мире произвели запуск первого советского искусственного спутника Земли, первый орбитальный полет Юрия Гагарина. А сейчас, спустя 20—25 лет (мизерный период в масштабах истории и не столь уж много в жизни человека!) мы спокойно воспринимаем чуть ли не ежедневные сообщения о запуске очередных спутников, привыкли к многомесячным будням космонавтов на орбитальных станциях (хотя, разумеется, и беспокоимся за них), не удивляемся тому, что человек ступил на поверхность Луны, что космические аппараты исследуют Марс, Венеру, Юпитер, пронизывают кольца Сатурна...

А жаль, что привыкшем, перестаем удивляться, воспринимаем как само собой разумеющееся. Ведь, если задуматься, это — поразительные, фантастические достижения человеческого разума, человеческой деятельности. Чудеса, ставшие реальностью. Нет сомнений — подобные чудеса ожидают нас и в дальнейшем. Многие из тех, кто читает сейчас этот номер «Кванта», возможно, сами будут причастны к их сотворению. И очень важно, даже

участвуя в открытии новых явлений, в создании новых машин, приборов, устройств, не утратить способности удивляться, восхищаться, поражаться.

Одно из таких «чудес» — тема книги молодого английского физика М. Уиньона «Знакомство с голографией» (М., «Мир», 1980). Я не случайно начал разговор об этой книге с, казалось бы, посторонних рассуждений, хотя проще было бы, что называется, взять быка за рога, с ходу приступить к изложению существа проблемы или к пересказу содержания книги. Дело в том, что сама книга, как справедливо отмечает редактор русского издания доктор физико-математических наук А. И. Ларкин, написана человеком романтическим и увлеченным, причем увлеченным не только внешними проявлениями и широтой применения голографии, но и физическим изяществом метода.

Впрочем, трудно оставаться равнодушным, занимаясь голографией или однажды соприкоснувшись с ней. Помню, когда мне довелось впервые увидеть голограмму — скульптуру из «Эрмитажа», объемную, совсем реальную, которую можно было обойти и осмотреть со всех сторон и очень хотелось потрогать, я был так же зачарован, как, вероятно, неискушенные зрители на заре кинематографа, тогда еще называвшегося иллюзионом.

Так что же такое голография? Автор определяет ее так: «Вероятно, голографию проще всего охарактеризовать как объемную фотографию с использованием лазера». И тут же делает оговорку: «Это не вполне удовлетворительное определение, ибо существует немало других видов трехмерной фотографии, однако в нем отражены многие существенные моменты: голография — это технический метод, позволяющий производить «запись» внешнего вида объекта; она создает трехмерное изображение, которое выглядит столь же материальным, как и реальный объект; использованные лазеры имеют решающее значение для ее развития».

Прежде чем изложить физические принципы, на ко-

торых базируется голография, автор знакомит читателя с волновой теорией света, с такими понятиями, как длина волны, амплитуда, фаза, волновой фронт, с явлением интерференции. Особое внимание уделяется чрезвычайно важной для голографии характеристике — когерентности излучения — и подчеркивается, что высокую степень когерентности, без которой невозможно производить голографирование, обеспечивает только лазер. Этим вопросам посвящена первая глава книги.

Любопытно, что голография была теоретически («на кончике пера») открыта, предсказана еще в 1948 году, но лишь спустя 23 года, в 1971 году ее «изобретатель» Деннис Габор был удостоен Нобелевской премии. Столь запоздалое международное признание объясняется тем, что только в 1960 году, после создания первого лазера, появилась возможность реализовать идеи Габора, убедившись в их практической ценности.

Поэтому неудивительно, что целые две главы — вторая и третья — в общем-то небольшой и лаконично написанной книги Уиньона отведены лазерам. Если в первой главе речь шла об одной стороне «двуликого Януса» — света, а именно о его волновой природе, то здесь свет рассматривается как поток квантов. Рассказывается о том, как «работает» лазер, о различных типах лазеров, их применении в медицине, технике, астрономии, связи, метрологии, упомянуто о перспективах использования лазеров для создания тяги в будущих ракетных двигателях.

Четвертая глава — «Принципы голографии» — основная и, пожалуй, наиболее сложная в книге. Здесь автор вновь обращается к волновым свойствам света и рассказывает о явлении дифракции, поскольку простейшая голограмма — это не что иное, как дифракционная решетка, и действует подобно ей, преобразуя волновой фронт падающего на нее света. Только обычную дифракционную решетку получают нанесением тончайшие штрихи, а голограмма

образуется в результате интерференции двух когерентных лучей, один из которых попадает на пластинку непосредственно от предмета (опорный пучок), второй — предварительно отразившись от какого-то объекта и, следовательно, изменив свой волновой фронт (предметный пучок). На светочувствительной поверхности пластинки как бы застывает интерференционная картина-изображение — создается дифракционная решетка. Если теперь вновь осветить пластинку светом той же длины волны, то, взаимодействуя с голограммой, он даст пространственное изображение записанного на голограмме объекта. Это — простое, примитивное объяснение принципа голографии. Существуют разные, достаточно сложные способы получения и воспроизведения голографических изображений. Среди них — плоские пропускные голограммы, при помощи которых можно видеть изображение как бы через окошко; цилиндрические голограммы, позволяющие рассматривать объект со всех сторон; двойные голограммы, дающие сразу два изображения предмета: мнимое (или точное) и действительное (сопряженное), причем последнее «плавает» в пространстве перед голограммой и будто «вывернуто низнанку».

Важный шаг в области голографии сделал в 1962 году советский физик Ю. Н. Денисюк. Созданные им объемные отражательные голограммы позволяют восстанавливать записанное изображение при освещении их не когерентным (лазерным) лучом, а обычным белым светом. Очень

интересны так называемые фазовые голограммы, в которых для хранения записи вместо фотопластинки используются другие материалы, например термопластичная прозрачная пластмасса (термопласт). Этот материал обладает способностью слегка нагреваться и изменять толщину в соответствующих местах интерференционной картины, «застывая» в таком состоянии. Если затем осветить такую решетку пучком света, то появляется голографическое изображение. Термопласты имеют то преимущество, что позволяют организовать массовое производство голограмм.

В двух следующих главах книги — пятой и шестой — описаны возможные области приложения голографии в науке, технике, образительном искусстве, зрелищных мероприятиях, рекламном деле и т. д. Среди них, например, такие: голографическая «память» ЭВМ, обладающая колоссальной емкостью и быстродействием; регистрация быстропротекающих или, наоборот, чрезвычайно медленных процессов; неразрушающие испытания материалов и конструкций; распознавание образов, что, в частности, нужно для обучения ЭВМ чтению рукописных текстов; объемные театральные декорации, мгновенно сменяемые простым нажатием кнопки или вовсе автоматически, по программе; демонстрация музейных экспонатов на расстоянии...

Для получения голограмм можно использовать не только видимый свет и вообще не только электромагнитное излучение, но и

любые другие, обладающие необходимой когерентностью волны, скажем, звуковые или ультразвуковые. На этом принципе базируется акустическая голография, активно развивающаяся в последние годы. Хотя, как отмечает автор, это — самостоятельная область исследований, в книге ей все же отведен один из параграфов.

Глава седьмая посвящена перспективам развития голографии, о которых кратко говорилось выше.

Наконец, восьмая глава книги — «Делайте голограммы сами» — содержит конкретные рекомендации тем, кто пожелает изготовить голограмму в домашней или школьной лаборатории. Делать голограммы, утверждает М. Уиньон, просто и увлекательно, причем для этого достаточно технических навыков и мастерства фотографа-любителя. В этой главе изложены требования к помещению, в котором осуществляется голографирование, к лазеру, оптической системе, фотопластинкам и пленкам. Описана последовательность операций при получении различных голограмм. Акцентируется внимание на мерах предосторожности при работе с лазером.

Можно с уверенностью сказать, что книга М. Уиньона не оставит равнодушными своих читателей: она не просто знакомит с одним из замечательных достижений современной физики, но и позволяет непосредственно приобрести к этому методу, задуматься над будущим голографии.

*И. Зорич*

## Математические олимпиады в ПТУ

(Начало см. на с. 54)

6. Кубическая парабола  $y = x^3 + px + q$  касается оси  $Ox$ . Как связаны параметры  $p$  и  $q$ ?

7. На станции технического обслуживания находятся  $n$  баллонов одинакового объема, заполненные газом под давлениями  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , причем  $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ . Баллоны можно соединить друг с другом, при этом давление в них становится одинаковым и равным среднему арифметическому давлений газа в баллонах до соединения. Баллоны можно разъединять и вновь соединять в любом желаемом порядке и количестве.

Придумайте процедуру, в результате которой в первом баллоне газ окажется под максимально возможным давлением. Чему оно равно?

8. Бригаде из 10 человек поручено изготовить и смонтировать 50 деталей, причем один рабочий может изготовить деталь за 15 минут, а смонтировать ее за 10.

а) Распределите рабочих на «слесарей» и «монтажников» так, чтобы выполнить задание за кратчайший срок.

б) Допустив, что в бригаде собрались «универсалы», придумайте, как им работать, чтобы еще более сократить время выполнения задания.

*В. Сергеев, А. Криворучко,  
М. Немиченцер*



Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

## КАПАБЛАНКА ИГРАЕТ ЭНДШПИЛЬ

Эндшпиль — очень тонкая стадия шахматной партии. Хорошо известно, что класс игры шахматиста определяется, в первую очередь, мастерством владения эндшпилем. В то же время ограниченность материала позволяет сформулировать четкие, можно сказать, математические принципы игры в эндшпиле и даже, как рассказывалось в прошлом номере журнала, провести анализ эндшпиля на ЭВМ.

Среди выдающихся шахматистов прошлого лучшим специалистом эндшпиля признан третий чемпион мира Х. Р. Капабланка.

Гроссмейстер оставил потомкам не только блестящие образцы разыгрывания окончаний, но и, что не менее важно, свои теоретические исследования в этой области. Следующие девять правил игры в эндшпиле Капабланка сформулировал в «Последних шахматных лекциях» (книге, вышедшей после смерти великого кубинского шахматиста).

1. Время имеет в эндшпиле исключительно большое значение. Судьба партии часто решается жертвой, дающей возможность провести пешку в ферзи, или тем обстоятельством, что ваша пешка проходит в ферзи на один ход раньше неприятельской.

2. Два слона сильнее двух коней.

3. Слон, вообще говоря, сильнее коня.

4. Ладья и слон, вообще говоря, сильнее ладьи и коня.

5. Ферзь и конь сильнее ферзя и слона.

6. Пешки сильнее, когда они стоят рядом.

7. Если у противника есть слон, наиболее правильная политика обычно состоит

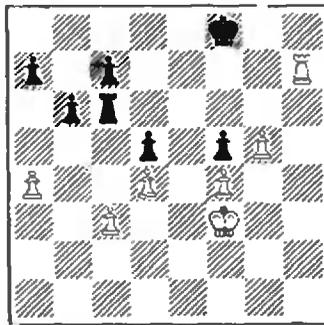
в том, чтобы ставить пешки на поля того цвета, по которым ходит слон. Имея слона, нужно ставить пешки на поля противоположного цвета, не обращая внимания на наличие слона у противника.

8. Король, являясь в дебюте и миттельшпиле только объектом защиты, в эндшпиле часто становится атакующей фигурой. Агрессивный король часто приносит победу своей армии.

9. В эндшпиле без ферзей, с малым количеством фигур, король должен идти в центр доски. В пешечных эндшпилях этому правилу нужно следовать безоговорочно.

Конечно, эти правила не следует воспринимать как абсолютный закон, но использование их, по мнению Капабланки, должно резко улучшить игру в эндшпиле.

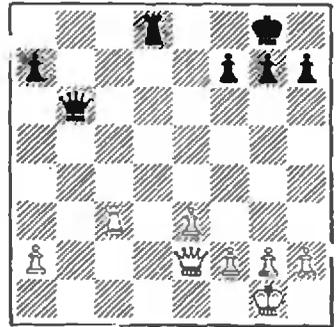
Приведем только несколько практических примеров игры Капабланки в эндшпиле.



Капабланка — Тартаковер (Нью-Йорк, 1924 г.)

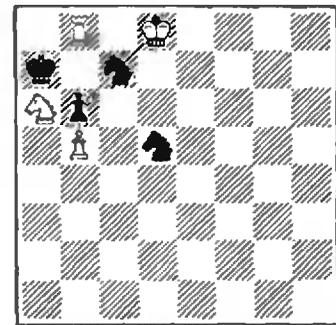
Кажется, что черные выигрывают пешку и им нечего опасаться. 35. Крg3!! Иллюстрация восьмого правила игры в эндшпиле. Активизация белого короля решает судьбу партии. 35...Л:c3 + 36. Крh4 Лf3 37. g6 Л:f4 + 38. Крg5 Лe4 39. Крf6. Черных губит собственная пешка f5, из-за которой они не могут согнать белого короля с его грозной позиции. 39...Крg8 40. Лg7 + Крh8 41. Л:c7 Лe8 42. Кр:f5 Лe4 43. Крf6 Лf4 + 44. Крe5 Лg4 45. g7 + Крg8 46. Л:a7 Лg1 47. Кр:d5 Лc1 48. Крd6 Лc2 49. d5 Лc1 50. Лc7 Лa1 51. Крc6 Л:a4 52. d6. Черные сдались.

Следующие два примера демонстрируют тактическое решение эндшпильных позиций.



Берштейн — Капабланка (Москва, 1914 г.)

Возможно, белые ожидали 29...Фb1 + 30. Фf1 Ф:a2 и проходимую пешку «a» вряд ли удастся реализовать. 29...Фb2! Уникальный ход, после которого белые немедленно сдались. Присмотритесь к позиции и вы обнаружите, что выигрывающая идея носит чисто геометрический характер.



Капабланка — Ласкер (Берлин, 1914 г.)

Знаменитая концовка партии из блитц-матча, в котором Капабланка победил со счетом 6,5:3,5. Последовало 1. К:c7 К:c7 2. Лa8 + !! (единственный ход, который ведет к победе) 2...К:a8 (2...Кр:a8 3. Кр:c7 Кра7 4. Крc6 и т. д.) 3. Крc8! Черные сдались, после 3...Кс7 4. Кр:c7 у них безнадежный нешечный эндшпиль.

21 ноября 1981 года после победы в 30-м матче на первенство мира по шахматам со счетом 6:2 Анатолий Карпов был в третий раз провозглашен чемпионом мира по шахматам. Журнал «Квант» от имени всех своих читателей и любителей шахмат поздравляет Анатолия Карпова с великолепной победой.

Ответы, указания, решения



**Геометрический подарок**

1. Пусть  $(AD) \perp a$  и  $(BD) \perp a$ . Из прямоугольного треугольника  $ADK$

$$|AK|^2 = |AD|^2 + |DK|^2$$

Из прямоугольного треугольника  $ADB$

$$|AD|^2 = |AB|^2 - |BD|^2$$

Из прямоугольного треугольника  $BDK$

$$|DK|^2 = |BD|^2 + |BK|^2$$

Подставив эти выражения в первое равенство, получим

$$|AK|^2 = |AB|^2 + |BK|^2$$

Значит,  $\angle ABK = 90^\circ$ , то есть  $(AB) \perp (BK)$ .

Аналогично доказывается вторая часть теоремы о трех перпендикулярах.

2. Пусть на прямой  $b$  ( $b \parallel a$ ) нашлась такая точка  $Y$ , что  $|AD| > |AY|$

Возьмем на плоскости  $\alpha$  вне прямой  $b$  такую точку  $X$ , что

$$|XY| < |AD| - |AY|$$

В силу неравенства треугольника  $|AX| < |AY| + |XY|$ , и по выбору точки  $X$   $|AX| < |AY| + |AD| - |AY| = |AD|$ . Но точка  $X$  лежит на прямой, проходящей через точку  $D$  и пересекающей прямую  $a$ , поэтому  $|AD| < |AX|$ . Полученное противоречие доказывает нужную нам перпендикулярность.

3. При произвольном выборе прямой  $a$  на плоскости  $\alpha$  может оказаться, что точки  $B$  и  $D$  совпадают. Тогда прямая  $AD$  перпендикулярна двум перпендикулярным прямым плоскости  $\alpha$ :  $a$  и  $BC$ . Для доказательства перпендикулярности ее к плоскости  $\alpha$  и понадобится признак перпендикулярности прямой и плоскости.

**Диаграмма состояния**

1. Из принципа Ле Шателье — Брауна следует, что температура плавления галлия с ростом давления падает

Нетрудно догадаться, что твердый висмут, твердый чугун плавают в своих расплавах. Общеизвестно, что лед плавает в воде, и температура плавления льда при умеренных давлениях с ростом давления падает.

2. Так как при высоких давлениях температура плавления льда с ростом давления растет, можно сделать вывод, что в этих условиях лед плотнее воды. И действительно, при давлении 2115 атм кристаллическая структура льда меняется, и он оказывается плотнее находящейся в равновесии с ним воды.

3. Отношение плотностей насыщенных паров воды  $\rho_0$  и масла  $\rho_m$  равно

$$\frac{\rho_0}{\rho_m} = \frac{M_0 \rho_0}{M_m \rho_m} = \frac{18 \cdot 10^{-3} \cdot 760}{80 \cdot 10^{-3} \cdot 1} \approx 170$$

( $\rho_0 = 760$  мм рт. ст.  $= 10^5$  Па — давление насыщенных паров воды при  $100^\circ\text{C}$ ).

4. В условиях задачи 2 ( $T = 373$  К,  $V = 22.4$  л) 1 моль водяного пара создавал бы давление  $p = \frac{373}{273}$  атм. Но давление насыщенных

паров воды при  $T = 373$  К равно  $p_n = 1$  атм. Такое давление (в условиях задачи) создает  $\nu = \frac{273}{373}$  моль пара. Испарение будет продолжаться до тех пор, пока не образуются эти  $\nu$  молей пара, то есть испарится  $m = \nu M_0 = \approx 13$  г воды.

**XII Международная физическая олимпиада**

**Теоретические задачи**

1. Для нахождения скорости пробирки  $u_1$  в момент вылета перегородки (до истечения газа) воспользуемся законами сохранения импульса и энергии:

$$\begin{aligned} (n\mu + M)u_1 &= m\omega^*, \\ \frac{(n\mu + M)u_1^2}{2} + \frac{m\omega^2}{2} &= \frac{3}{2} nR(T - T_k), \end{aligned}$$

где  $\omega$  — скорость перегородки в момент ее вылета из пробирки.  $T_k$  — температура газа в тот же момент, правая часть второго уравнения — изменение внутренней энергии газа. Конечная температура газа  $T_k$  находится из уравнения адиабаты\*\*)

$$TV^{\chi-1} = T_k V_k^{\chi-1}$$

Здесь  $V_k = 2V$ , а  $\chi = 5/3$  (для одноатомного газа), поэтому  $T_k = 2^{-2/3} T$ . Тогда из первых двух уравнений получаем

$$u_1 = \left( \frac{3(2^{2/3} - 1)}{2^{2/3}} \frac{m n R T}{(n\mu + M)(m + M + n\mu)} \right)^{1/2}$$

Найдем теперь скорость пробирки  $u_2$ , которую она приобретает вследствие вытекания газа. В системе отсчета, движущейся со скоростью  $u_1$ , каждый атом при упругом ударе о дно пробирки передает ей импульс\*\*\*)

$$p = 2 \frac{\mu}{N_A} (v^2/3)^{1/2}$$

где  $N_A$  — число Авогадро,  $\mu/N_A$  — масса одного атома,  $v^2$  — средний квадрат скорости атомов ( $v^2 = 3RT/\mu$ ). Так как в среднем о дно пробирки ударяется половина всех атомов, полный импульс, полученный пробиркой, равен

$$P = \frac{n N_A}{2} p = n(\mu R T_k)^{1/2} \dots\dots),$$

а ее скорость

$$u_2 = \frac{P}{M} = 2^{-1/3} \frac{n}{M} (\mu R T)^{1/2}$$

Конечная скорость пробирки

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 = \\ &= \left( \frac{3(2^{2/3} - 1)}{2^{2/3}} \frac{n m R T}{(n\mu + M)(n\mu + m + M)} \right)^{1/2} + \\ &+ 2^{-1/3} \frac{n}{M} (\mu R T)^{1/2} \end{aligned}$$

\*) По условию, в неподвижной системе отсчета импульс газа до вылета перегородки равен нулю

\*\*\*) Уравнение адиабаты не входит в программу нашей школы

\*\*\*\*) Предполагается, что тепловая скорость атомов велика по сравнению со скоростью пробирки

\*\*\*\*\*) Точное решение дает, что  $P = \frac{35}{16\sqrt{\chi}} \times n(\mu R T_k)^{1/2}$

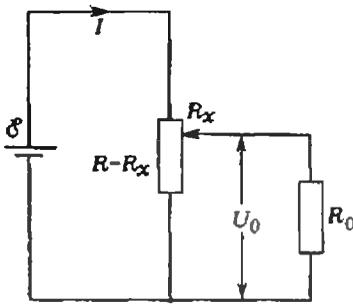


Рис. 1.

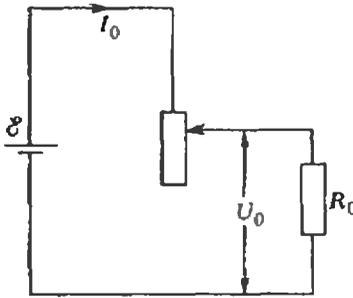


Рис. 2.

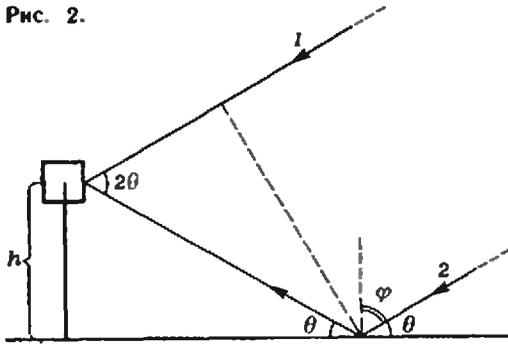


Рис. 3.

2. Используя схему, показанную на рисунке 1, составим уравнения:

$$I = \frac{U_0}{R_0} + \frac{U_0}{R - R_x} \quad (1)$$

$$E = IR_x + U_0 \quad (2)$$

$$\eta = \frac{W_{\text{полез}}}{W_{\text{источ}}} = \frac{U_0^2}{R_0 E I} \quad (3)$$

Для полного тока  $I$  из (3) получаем

$$I = \frac{U_0^2}{E R_0 \eta} \quad (4)$$

следовательно, максимальное значение тока будет при минимальном значении КПД:

$$I_{\text{max}} = \frac{U_0^2}{E R_0 \eta_0} \approx 2,8 \text{ A.}$$

Подставляя выражение (4) в (1) и (2), найдем полное сопротивление резиста:

$$R = R_0 \frac{\eta E^2}{U_0} \frac{1 + \eta(1 - E/U_0)}{U_0 - \eta E} \quad (5)$$

Вычисляя производную функции  $R(\eta)$ , легко убедиться, что она положительна; следовательно,  $R(\eta)$  — возрастающая функция, и минимальное значение сопротивления  $R$  получается при подстановке в формулу (5) мини-

мального значения КПД ( $\eta_0 = 0,6$ ). Таким образом,

$$R > R_{\text{min}} \approx 8,5 \text{ Ом.}$$

Из формулы (3) видно, что максимальное значение КПД достигается при минимальном полном токе  $I$  (все остальные параметры в этой формуле фиксированы). Это получается при таком соединении, когда весь ток  $I$  проходит через нагрузку:  $I = I_0 = U_0/R_0$  (рис. 2). Тогда,

$$\eta_{\text{max}} = \frac{U_0}{E} = 0,75.$$

3. Регистрируемый сигнал определяется интерференцией двух лучей: прямого луча 1 и луча 2, отраженного от морской поверхности (рис. 3). Разность хода этих лучей  $\Delta$  определяется формулой

$$\Delta = \left(\frac{\lambda}{2}\right) + \left(\frac{h}{\sin \theta}\right) - \left(\frac{h}{\sin \theta}\right) \cos 2\theta = \left(\frac{\lambda}{2}\right) + 2h \sin \theta$$

(слагаемое  $\lambda/2$  добавилось потому, что луч 2 отражается от оптически более плотной среды; при этом фаза колебаний изменяется на противоположную). Максимумам соответствует разность хода, равная целому числу длин волн  $k\lambda$ , откуда

$$\sin \theta_{k \text{ max}} = \left(k - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\lambda}{2h}\right), \quad k = 1, 2, \dots,$$

а минимумам — разность хода, равная нечетному числу полуwave ( $2k + 1$ ) $\lambda/2$ , откуда

$$\sin \theta_{k \text{ min}} = \frac{k\lambda}{2h}; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Непосредственно при восходе звезды  $\theta = 0$ , и выполняется условие минимума. Поэтому вначале интенсивность принимаемого сигнала будет возрастать.

Складывая в максимумах амплитуды интерферирующих волн и учитывая закон изменения амплитуды при отражении, заданный в условии, для результирующего поля  $E_{k \text{ max}}$  получаем

$$E_{k \text{ max}} = E_{\text{пад}} \frac{2n}{n + \sin \theta_{k \text{ max}}}$$

Для минимумов результирующая волна имеет амплитуду, равную разности амплитуд падающей и отраженной волн:

$$E_{k \text{ min}} = E_{\text{пад}} \frac{2 \sin \theta_{k \text{ min}}}{n + \sin \theta_{k \text{ min}}}$$

Отношение интенсивностей в соседних максимумах и минимумах равно

$$p_k = \frac{4n^2 h^2}{k^2 \lambda^2} \left(\frac{n + (k\lambda/2h)}{n + (k-1/2)(\lambda/2h)}\right)^2$$

При  $k = 1$  имеем  $p_1 \approx 30\,000$ . С ростом  $k$  (по мере восхождения звезды над горизонтом) величина  $p_k$  убывает.

**Экспериментальная задача**

Объем шнура оказывается не зависящим от нагрузки.

**«Квант» для младших школьников**

1.  $a = 6, b = 3, c = 2, d = 7, e = 9, f = 1, g = 8, h = 5, i = 4, j = 0$ .

2. Нужно разрезать любое желтое кольцо. Тогда коврик распадается на желтое кольцо и два зацепления, которые математики называют *кольцами Борромео* (см. «Квант», 1980, № 7 и 1981, № 9).

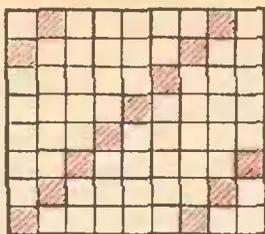


Рис. 4.

3. Количество диагоналей выпуклого семиугольника равно 14 (докажите!). Если какие-то две диагонали параллельны, то угол между ними  $(\alpha)^\circ$ , что меньше  $13^\circ$ . Пусть теперь не так.

Выберем на плоскости некоторую точку  $O$  и проведем через нее 14 прямых, параллельных диагоналям семиугольника. Эти прямые разобьют плоскость на 28 углов, в сумме составляющих  $360^\circ$ . Предположим, что каждый из этих углов не меньше, чем  $13^\circ$ , тогда их сумма

будет не меньше  $28 \cdot 13^\circ = 364^\circ$ , а на самом деле она равна  $360^\circ$ . Противоречие!

4. Не сможет. Допустим противное. Заштрихуем некоторые квадраты сетки (см. рисунок 4). При вырезании любой прямоугольной полоски  $1 \times 6$  в нее попадет одна и только одна заштрихованная клетка. Из большого прямоугольника должно получиться 12 прямоугольных полосок  $1 \times 6$ . Но эти полоски будут содержать 12 заштрихованных клеток, а таких клеток 13. Противоречие.

5. В восьмой строчке будут записаны числа  $27(b-a)$ ,  $27(c-b)$ ,  $27(a-c)$ . Следовательно, числа восьмой строчки и все последующие числа должны делиться на 27. Число же 279 на 27 не делится.

#### Вторая страница обложки

Одно ушко можно снять так, как показано на рисунке 5. К виду 8 можно привести и «заузленную» фигуру, помещенную на обложке справа снизу; это объясняется в «Кванте», 1981, № 3 на с. 14.

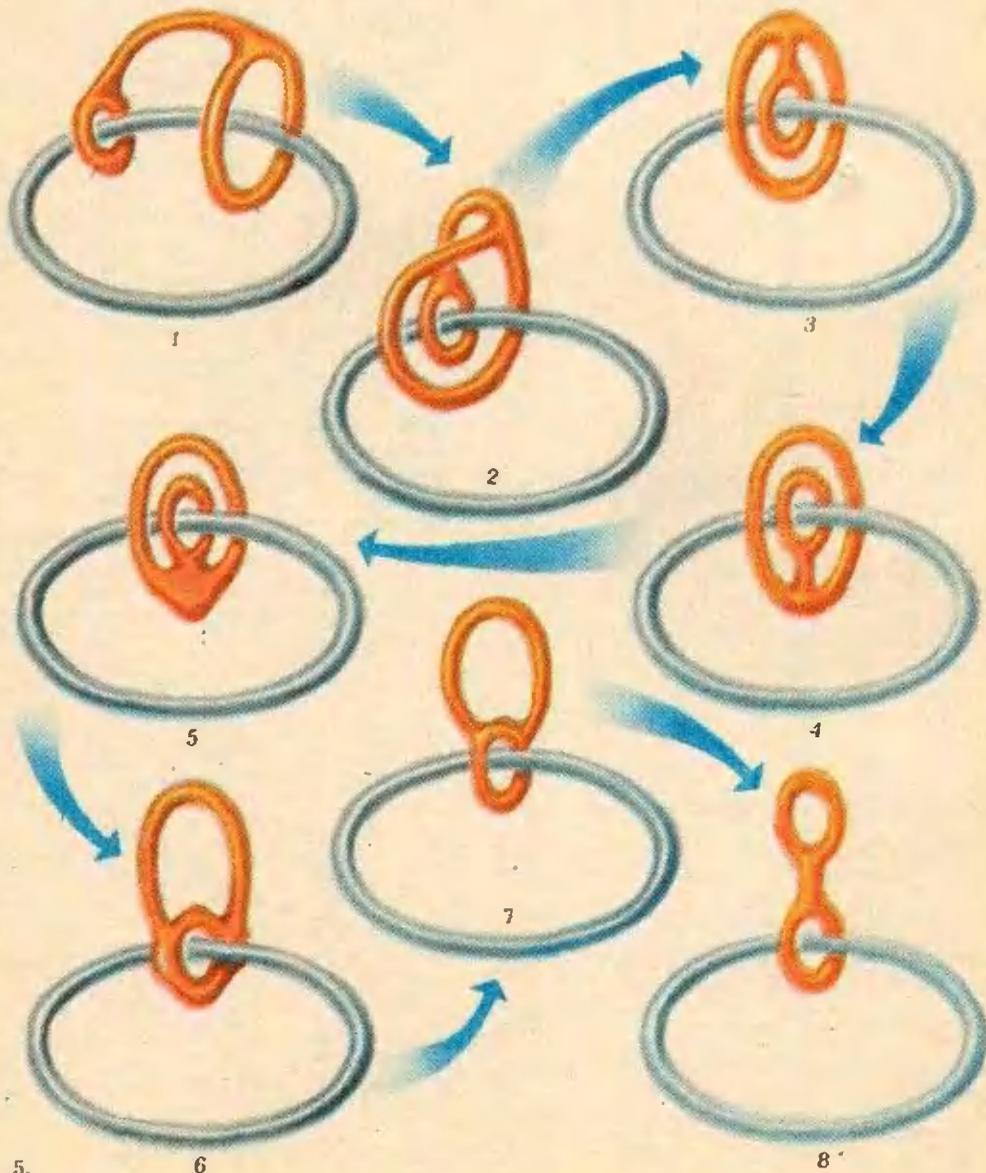


Рис. 5.

**Развертки куба**

(см. с. 53)

См. рисунок 6.

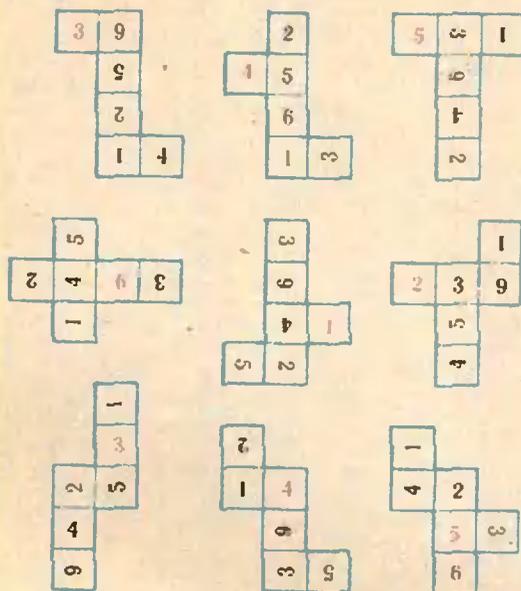


Рис. 6.

**Почти простые числа**

(см. «Квант» № 9, с. 16)

Для решения упражнений 1–6 воспользуйтесь следующими разложениями:

$$\begin{aligned}
 (n^2 - n - 1)(n - 1); & \quad n^3 - n = (n - 1)n(n + 1); \\
 n^5 - n = (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1); & \quad n^7 - n = (n - 1)n(n + 1)(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1); \\
 n^{13} - n = (n - 1)n(n + 1)(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1) \times & \\
 \times (n^2 + 1)(n^4 - n^2 + 1); & \quad n^{17} - n = (n - 1)n \times \\
 \times (n + 1)(n^2 + 1)(n^4 + 1)(n^8 + 1); & \quad n^{19} - n = \\
 = (n - 1)n(n + 1)(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)(n^6 + & \\
 + n^3 + 1)(n^6 - n^3 + 1). &
 \end{aligned}$$

Для решения первой части упражнения 5 воспользуйтесь тем, что квадрат любого целого числа  $n \geq 1$ , не делящегося на 11, имеет вид  $11k + c$ , где  $c = 1, 3, 4, 5$  или  $-2$ , а для всех этих значений  $c$  число  $c^5$  при делении на 11 дает в остатке 1.

7.  $56786730 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 61$ ; проверьте делимость на каждый из этих сомножителей.

8. б)  $2^{2047} - 2$  делится на  $2047 = 2^{11} - 1$ ; а)  $2^{161038} - 2$  делится на 2, 73, 1103, притом  $161038 = 2 \cdot 73 \cdot 1103$ ; делимость на 1103 вытекает из того, что  $2^{161037} - 1$  делится на  $2^{29} - 1 = 1103 \cdot 486737$ .

9. а) и г) — не существует; б) и в) — существует.

10. а) нет; б) да, ибо  $2047 = 23 \cdot 89$ .

11. В противном случае оба числа  $2^{2n-1} - 1$ ,  $2^{n-1} - 1$  делились бы на  $n$ , что невозможно.

12. Да, например 341.

**Шахматный конкурс**

(см. «Квант» № 10)

1. 1. Kpg2 Kpe1 2. Kgl e2 3. Kh3 e3 4. Kpg1 e4 5. Kf4 e5 6. Kg2x.

2. 1. Cf1! Jb2 2. Фb5+!! J1:b5 3. Jc2+ Jc4 4. J1:e4x; 1...Jc4+ 2. Ф:e4 Kpe6

3. Jf7! J1:d5+ 4. Ф:d5x; 3...Jа5 4. Jc7x.

3. 1. Ka6! Kp:b7 2. Фb1+ Kp:a6 3. Фb5x; 2...Kpc8 3. Фb8x; 1...Kpd8 2. Ф:e4 и 3. Jb8x;

4. 1. 0-0-0! a8K 2. Cb7! Kb6x.

**«Квант» для младших школьников**

(см. «Квант» № 11)

1. Не может. В самом деле, всего получается  $2n+2$  сумм, которые могут принимать только  $2n+1$  разных значений:  $n, -n+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, n-1, n$ .

2. 120 треугольников.

3. 366 оборотов.

4.  $y = \alpha - \beta = 50^\circ, z = \gamma - y = 30^\circ, x = \beta - z = 30^\circ$ .

5. Пусть  $n = 10a + b = kab$ . Тогда  $b = la \Rightarrow 10a + la = kla^2 \Rightarrow 10 + l = kla$ , то есть 10 делится на  $l$ ; значит,  $l \in \{1, 2, 5\}$ ;

1)  $l = 1 \Rightarrow 11 = ka, k = 11, a = 1, b = 1, n = 11$ .

2)  $l = 2 \Rightarrow 12 = 2ka, 6 = ka$ .

а)  $k = 1, a = 6, b = 12$  — не может быть;

б)  $k = 2, a = 3, b = 6, n = 36$ ;

в)  $k = 3, a = 2, b = 4, n = 24$ ;

г)  $k = 6, a = 1, b = 2, n = 12$ .

3)  $l = 5 \Rightarrow 15 = 5ka \Rightarrow 3 = ka$ .

а)  $k = 1, a = 3, b = 15$  — не может быть;

б)  $k = 3, a = 1, b = 5, n = 15$ .

Ответ:  $n = 11, 12, 15, 24, 36$ .

6. Фотоленка реагирует на красный свет так же, как на темноту, то есть «не различает» красного от черного. Поэтому красный череп на белом флаге получится черным (на позитиве), а череп на черном флаге на снимке виден не будет.

**Напечатано в 1981 г.**

К нашим читателям	1	2
Навстречу XXVI съезду КПСС	2	2
Подвиг Гагарина бессмертен	4	2
Международные космические экипажи	4	6
С новым учебным годом!	9	2

**Ученые обращаются к молодежи**

Александров А. Речь на XVIII съезде Всесоюзного Ленинского Коммунистического Союза Молодежи	1	3
---	---	---

Амбарцумян В. Во имя расцвета науки нашей Родины	6	2
Велихов Е. Задача все та же — учиться!	12	2
Капица П. Профессор и студент	11	2
Лаурентьев М. Приглашение в науку	5	2
Марчук Г. Слово к научной молодежи	8	2
Прохоров А. О становлении молодого ученого	4	3
Седов Л. Будьте готовы к новым условиям жизни людей	7	2
Семенов Н. Смелее, не отступайте перед трудностями!	9	4
Соболев С. На школьной парте будь исследователем	3	2

<i>Франк И.</i> Путь в науку	2	4	<i>Майер В., Мамаева Е.</i> Псевдолинза Роберта Вуда	2	18
<i>Эмануэль Н.</i> Думать и искать	10	2	<i>Ростовцев Н.</i> Сделать опыт Юнга? Это не так сложно	3	16
<b>Статьи по математике</b>					
<i>Бабичев А.</i> Об одной задаче Колмогорова	5	14	<b>Математический кружок</b>		
<i>Битман А., Гук Е.</i> ЭВМ за шахматной доской	1	11	<i>Апресян М.</i> Бесконечные суммы н... прямоугольник	2	20
<i>Болянский В.</i> Топология графов	6	5	<i>Вагутен Н.</i> Формула площади	4	17
<i>Болянский В.</i> Плоские графы	7	11	<i>Васильев Н., Маликов Т.</i> Рассмотрим разность	6	27
<i>Вертгейм Б.</i> Игры с квадратными функциями	11	6	<i>Евстигнеев В.</i> Графы и программы	3	18
<i>Виро О.</i> Раскрашенные узлы	3	8	<i>Курляндчик Л.</i> Приближение к экстремуму	1	21
<i>Демков Ю.</i> Поворачиваем кубики	12	11	<i>Переяславский В.</i> Игра «Определитель»	10	27
<i>Козм Д.</i> Метрика коня	10	13	<i>Сефибеков С.</i> О площади многоугольника	4	20
<i>Крейн М., Нудельман А.</i> Замечательные пределы, порождаемые классическими средними	9	13	<i>Шарыгин И., Ягубьянц А.</i> Окружность девяти точек и прямая Эйлера	8	34
<i>Раухман А.</i> Группоиды	2	14	<i>Яглом И.</i> Почти простые числа	9	16
<i>Фукс Д.</i> О раскрытии скобок, об Эйлере, Гауссе, Макдональде и об упущенных возможностях	8	12	<b>Искусство программирования</b>		
<i>Яглом И.</i> Соединим две точки отрезком	4	12	<i>Заочная школа программирования</i>		
<i>Амеба ...</i> в пиджаке	3	14	Урок 12	1	53
<b>Статьи по физике</b>					
<i>Асламазов Л.</i> Что такое СКВИД?	10	5	Урок 13	2	54
<i>Ашкинази Л.</i> Как получают сильные постоянные магнитные поля	1	6	Урок 14	3	57
<i>Боровицкий Л.</i> Почему не лежит Ваньке-Встаньке?	7	17	Урок 15	10	51
<i>Брук Ю., Стасенко А.</i> Метод размерностей помогает решать задачи	6	11	Урок 16	11	40
<i>Вавилов С.</i> «Теплый свет» и тепловое излучение	12	17	Конкурс работ по программированию	1	52
<i>Варламов А.</i> О снежках, орехах, пузрычках н... жидком гелии	3	4	Конкурс машинных рисунков	9	55
<i>Гиндикин С.</i> Медичейские звезды	8	21	<i>Бабаян Б.</i> Многопроцессорный вычислительный комплекс «Эльбрус»	8	54
<i>Иоффе А.</i> Полупроводниковые термоэлементы и холодильники	2	6	<i>Звенигородский Г., Кузнецов Е.</i> Что такое мини-ЭВМ?	5	53
<i>Кавендиш Г.</i> Экспериментальное определение закона электрической силы	10	22	<i>Первин Ю.</i> Зачем и как детей учат программированию?	1	49
<i>Капица П.</i> Научная деятельность Бенджамин Франклина	7	4	<i>Первин Ю.</i> Трехадресные, одноадресные и ... безадресные машины	4	51
<i>Ланге В., Ланге Т.</i> Об удельной мощности человека и Солнца (или почему у комара «холодная кровь»)	4	9	<i>Рар А.</i> Какие бывают языки программирования	9	50
<i>Михайлов А.</i> О солнечных затмениях вообще и конкретно о затмении 31 июля 1981 года	6	20	<i>Салтовский А.</i> ЕС ЭВМ — семейство универсальных вычислительных машин	7	51
<i>Пикин С.</i> Жидкие кристаллы	8	5	<b>«Квант» для младших школьников</b>		
<i>Пикин С.</i> Снова о жидких кристаллах	9	6	Задачи	1—12	
<i>Сморodinский Я.</i> Джеймс Клерк Максвелл	11	11			
<i>Филонович С.</i> Генри Кавендиш	10	17	<i>Бартенев Ф., Никольская И.</i> О пользе нелепостей	3	38
<i>Чернин А.</i> Звездная динамика	12	4	<i>Гальперин Г.</i> Бильярд	4	34
<i>Эдельман В.</i> Металлы	5	5	<i>Гервер М.</i> Как сделать из мухи слона?	7	36
<b>Лаборатория «Кванта»</b>					
<i>Боровой А., Климов Ю.</i> Маятник Максвелла	11	18	<i>Дворянников С.</i> Узоры и... арифметика	1	34
<i>Боровой А., Херувимов А.</i> Колебания и маятники	8	30	<i>Калинин А.</i> Эта удивительная вязь колец	9	32
<i>Григорьев Г.</i> Телевизор — стробоскоп	5	17	<i>Касаткин В.</i> Пригодны ли счеты?	2	34
<i>Канаев П.</i> Несколько опытов с пустотелым прозрачным шариком	6	25	<i>Рубинов Р.</i> По следам теоремы Пифагора	11	32
<i>Колмаков А., Смирнов Р.</i> Необычные свойства обычной струны	1	19	<i>Савин А.</i> Циркулем и линейкой	5	34
			<i>Тавридов С.</i> Пентамино на плоскости и в пространстве	12	38
			<i>Топадзе Г.</i> В волшебном мире чисел	6	44
			<i>Юфанова И.</i> Интервью с бароном Мюнхаузеном	10	42
			<b>Задачник «Кванта»</b>		
			Задачи М661 — М720; Ф673 — Ф732	1—12	
			Решения задач М545, М604, М611 — М624, М626 — М680; Ф618 — Ф691	1—12	

* * *					
<i>Васильев Н.</i> К центру тяжести	3	33	Киевский государственный педагогический институт им. А. М. Горького	6	52
<i>Гальперин В., Гальперин Г.</i> Освещение плоскости прожекторами	11	28	Красноярский государственный университет	5	48
<i>Гуревич Г.</i> Системы равновесия	12	34	Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена	6	53
* * *					
<i>Зильберман А.</i> Модели, которые мы выбираем	8	47	Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина	6	56
<i>Кротов С.</i> Математический маятник в неинерциальной системе отсчета	7	32	Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова	5	49
* * *					
Фамилии решивших	3, 6, 9,	12	Московский автомеханический институт	7	45
Победители конкурса «Кванта»	3	23	Московский архитектурный институт	6	57
Премии «Кванта»	9	30	Московский гидромелиоративный институт	7	46
<b>По страницам школьных учебников</b>			Московский инженерно-физический институт	1	46
<i>Гельфанд М., Берман В.</i> Десять задач на применение производной	1	37	Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии	7	47
<i>Гордин Р.</i> Что такое степень?	2	36	Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина	6	53
<i>Кучеров В.</i> Геометрические аналогии	10	44	Московский институт стали и сплавов	7	47
<i>Перевалов Г.</i> Можно и без производной	9	36	Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова	3	51
<i>Рыжик В.</i> Задача как задача	4	38	Московский физико-технический институт	2	48
<i>Рыжик В.</i> Геометрический подарок	12	40	Московский институт электронного машиностроения	7	49
* * *					
<i>Овчинников О.</i> Что же покажет динамометр?	3	43	Московский энергетический институт	7	49
<b>Практикум абитуриента</b>			Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола	4	48
<i>Габович И.</i> вспомогательные отрезки и углы	9	46	Одесский государственный педагогический институт им. К. Д. Ушинского (физико-математический факультет)	6	54
<i>Егоров А.</i> Показательные уравнения	1	40	Уральский государственный университет им. А. М. Горького	5	52
<i>Егоров А.</i> Логарифмические уравнения	2	40			
<i>Кордемский Б.</i> Семнадцать задач на смекалку	7	44			
<i>Розов Н.</i> Читатели советуют	4	43			
<i>Суконник Я., Горнштейн П.</i> Можно решить проще!	5	42			
* * *					
<i>Бакакина Л.</i> Задачи о спутниках	1	43	<b>Рецензии, библиография</b>	2	35
	4	37	Письмо в редакцию	8	58
<i>Белонучкин В.</i> Диаграмма состояния	12	42	<i>Аринштейн А.</i> Мир глазами инженера	9	57
<i>Берюлева Н.</i> Интерференция света	6	45	<i>Гервер М.</i> Веселая мозаика Сэма Лойда	11	60
<i>Буздин А., Тугушев В.</i> Закон сохранения энергии для тепловых процессов	2	44	<i>Зорич И.</i> История одного заблуждения	9	61
<i>Данилин В.</i> Электронизмерительные приборы	7	39	<i>Зорич И.</i> Что может голография?	12	55
<i>Ерицпыхов Б.</i> Построение изображений наклонных предметов	5	37	<i>Левитан Е.</i> Книга о прошлом и будущем Вселенной	2	58
<i>Коршунов С.</i> Закон Дальтона	11	36	<i>Лешковцев В.</i> Путешествие в мир кристаллов	1	60
<i>Можжев В.</i> Колебания	3	46	<i>Лишевский В.</i> Ученый и революционер	2	57
<i>Нахшин В.</i> Уравнения думают за нас	9	42	<i>Фалин Г.</i> Алгебра без чисел	8	59
<i>Ростовцев Н.</i> Приближенные вычисления при решении задач по физике	4	40	* * *		
<i>Шеронов А.</i> Криволинейное движение	10	47	Новые книги	11	56
<b>Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1980 году</b>			<b>Информация</b>		
Азербайджанский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина	6	51	<i>Курляндчик Л.</i> Математические соревнования в ФМШ при ЛГУ	7	56
Волгоградский политехнический институт	6	55	<i>Николаев А., Тягт В.</i> Турнир имени М. В. Ломоносова	8	51
Воронежский государственный университет им. Ленинского комсомола	6	50	* * *		
Горьковский государственный университет им. Н. И. Лобачевского	5	47	<i>Гороховик В., Рабинович О., Фисенко Т.</i> 10-летие летней ФМШ в Белоруссии	7	54
			<i>Комаров В.</i> Отдых и занятия наукой	3	60
			<i>Ломакин Ю., Горбунова В.</i> «Математика» — 10 лет	8	49

* * *	
Орлов В. VII Всероссийский слет юных рационализаторов и конструкторов	4 55
Яковлев А. С углубленным изучением	5 58

* * *	
Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу	1 56
Новый прием на малый мехмат	1 59
Заочная физико-техническая школа	1 57
Заочная физическая школа	5 56
Вечерняя физическая школа	7 57
О приеме на биологическое отделение ВЗМШ	2 59

* * *	
Малый интеркосмос	4 8
К конкурсу «Малый интеркосмос»	5 30

<b>Олимпиады</b>	
Международные математические соревнования	6 59
XXII Международная математическая олимпиада	12 50
XII Международная физическая олимпиада	12 46
<i>XV Всесоюзная олимпиада</i>	
Олимпиада по математике	11 44
Олимпиада по физике	11 50
Призеры олимпиады	11 54

* * *	
Всероссийская олимпиада	10 58
Московская городская олимпиада по физике	5 57
Математические олимпиады в ПТУ	12 54

<b>Наша обложка</b>	
Гамаюнов В. Полуконтакты ... и драпировка потолков	1 18
Гамаюнов В. Модели звездчатых многогранников	2 39
Кривошеев Е. Магическая спираль	1 18
Котов Ю.	5 16
Двойственность	9 41

<b>Новости науки</b>	
Буздин А. Органический сверхпроводник	10 31
Сморodinский Я. Отрицательный нон возитрония	12 23
Распадается ли протон?	6 19
Нейтрон → антинейтрон?	9 40

Спрашивайте — отвечаем	7 58
------------------------	------

<b>Физики о физиках</b>	
Малов Н. Задача Дирака	9 40

<b>Уголок коллекционера</b>	
	2 13
	7 10
	7 64

Шахматная страничка	—6, 8—12
---------------------	----------

Шахматный конкурс	—5, 8—12
-------------------	----------

Анкета	11 39
--------	-------

<b>Смесь</b>	
Александров Н., Смирнов П. В чем дело?	6 10
Зурабишвили З. Еще раз о пифагоровых тройках	4 39
Искендеров А. Геометрические доказательства теорем о средних	2 17
Сапич В., Чванов В. Задача для исследования	10 50
Селищев С. Сила Архимеда и диффузия в жидкостях	5 13
Чванов В. Играют полифигуры	2 32
Хлобыстов В. В пересечении — одна точка	12 41
Хлобыстов В.	7 34
Юрашев А. Снова о пифагоровых тройках	12 41
Рассказывает «Фотон»	2 53
Легкое решение трудной проблемы	5 16
Как экзаменуют по физике в МФТИ	5 41
Говорят студенты	11 39
Развертки куба	12 53

---

**Номер подготовили:**  
А. Вилеккин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова,  
А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

---

**Номер оформили:**  
Л. Денисенко, М. Дубах, Г. Красников,  
Н. Кузьмина, С. Лухин, Э. Назаров,  
А. Прокофьев, И. Смирнова

---

**Зав. редакцией** Л. Чернова

---

**Художественный редактор** Т. Макарова

---

**Корректор** А. Ипотова

---

113035, Москва, Б. Ордынка, 21/16,  
«Квант», тел. 231-83-62  
Сдано в набор 23.10.81.  
Подписано в печать 8.12.81  
Печать офсетная  
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4  
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 7,04 Т-30803  
Цена 30 коп. Заказ 2553  
Тираж 232 535 экз.

---

Чеховский полиграфический комбинат  
Союзполиграфпром  
Государственного комитета СССР  
по делам издательств, полиграфии  
и книжной торговли  
г. Чехов Московской области

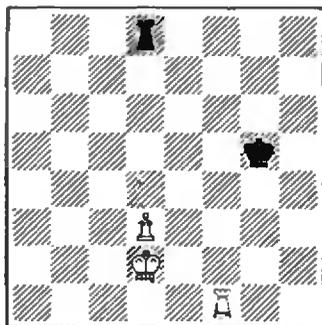
# ШАХМАТНЫЙ КОНКУРС

## АЛГЕБРА ЛАДЕЙНОГО ЭНДШПИЛЯ

Математические идеи применимы при анализе многих типов эндшпилей.

Так, в пешечных окончаниях есть правила треугольника, квадрата и даже целая теория соответственных полей (см. «Квант», 1980, №№ 10, 11). Здесь мы рассмотрим окончания «ладья с пешкой против ладьи».

На следующей диаграмме у белых лишняя пешка, но выиграть они не могут.



Для оценки таких положений, в которых король черных отрезан от белой пешки, а ладья атакует пешку «с фронта», существует следующее простое арифметическое правило.

**Правило пяти.** Если номер горизонтали, которую занимает белая пешка, и количество вертикалей, отделяющих от нее короля черных, дают в сумме число, меньшее или равное пяти, то позиция ничейна; если же это число больше пяти, то белые выигрывают.

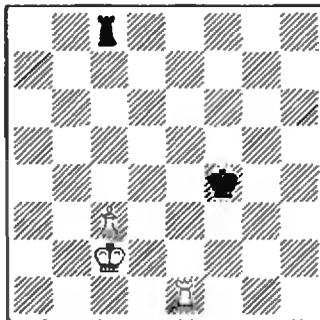
По этому правилу приведенная позиция ничейна. Действительно, пешка стоит на третьей горизонтали, а король отрезан на две вертикали,  $3+2=5$ . Игра может проходить так: 1.Кр3 Лс8+ 2.Крб4 Лд8 3.Крс4 Лс8+ 4.Крб5 Лд8 5.Лд1 Крf6 6.д4 (6.Крб6 Крe5) 6...Крe7 7.Крс6 Лс8+ и черный король успевает занять место перед пешкой.

Если на той же диаграмме сдвинуть белую пешку и короля на одну горизонталь вверх (Кр d3, п. d4), то белые уже выигрывают ( $4+2=6 > 5$ ): 1.Крс4 Лс8+ 2.Крб5

Лд8 3.Крс5 Лс8+ 4.Крб6 Лд8 5.Лд1 Крf6 6.Крс7 Лд5 7.Крс6 Лд8 8.д5 и пешка беспрепятственно следует до последней горизонтали.

Если на исходной диаграмме черного короля и белую ладью сдвинуть на одну вертикаль вправо, то вновь белые выигрывают ( $3+3=6 > 5$ ). Решает 1.Крс3 Лс8+ 2.Крd4 Лд8+ 3.Крe4 Лс8+ 4.Крf5 Лf8+ 5.Крe6 Лд8 6.Лд1 Лд4 7.Крe5 Лд8 8.д4 и т. д.

В наших позициях пешка белых была центральной. Однако правило пяти применимо и в случае слоновой или коневой пешки.



В этой позиции по правилу пяти должна быть ничья. Она достигается путем 1.Крб3 Лb8+ 2.Кра4 Лс8 3.Крб4 Лb8+ 4.Кра5 Лс8 5.Лс1 Крe3 6.с4 Крд2 или 1.Лe6 Крf5 2.Лb6 Крe5 3.Крб3 Крд5. Результат не изменится при смещении последней позиции на одну вертикаль как вправо, так и влево.

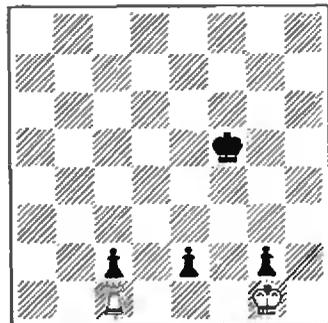
Но шахматные законы все-таки не математические теоремы, и поэтому даже самые надежные правила имеют исключения. Это замечание относится и к правилу пяти. Переставим на первой диаграмме черного короля с g5 на g7.

Интересующая нас сумма опять равна пяти, однако такое перемещение короля уже губительно для черных. Любопытно, что ряд крупнейших теоретиков ладейного эндшпиля, в том числе экс-чемпион мира В. Смыслов, считали эту позицию ничейной. Однако потом был найден четкий путь к выигрышу.

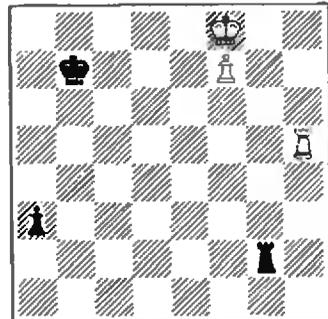
1. Крс3 Лс8+ 2.Крб4 Лд8 3.Крс4 Лс8+ 4.Крб5 Лд8 5.Лf3! Как и раньше, белая ладья защищает пешку,

однако на этот раз черный король остается отрезанным от основного места событий. Он должен потратить три хода, чтобы напасть на ладью, а за это время белый король успевает прорваться на территорию противника. 5...Крg6 6.Крс5 Лс8+ 7.Крд6 Лд8+ 8.Крe6! Крg5 (8...Крg7 9.Крe7 Лд5 10.Лg3+ Крh6 11.Крe6 Лд8 12.Крe5 Лс8+ 13.Крf6 и т. д.) 9.Лf5+! Крg6 (после 9...Крg4 10.Лд5 Лс8+ 11.Крд7 Лс8 12.д4 Крf4 13.Лh5 Крg4 14.Лe5 белая пешка неудержимо мчится вперед) 10.Лд5 Лс8+ 11.Крд7 Лс8 12.д4 Крf6 13.Лс5 Лa7+ 14.Крд6 Лa6+ 15.Лс6 Лa8 16.д5 Крf7 (16...Лa7 17.Лс1 Лa6+ 18.Крс7 Крe5 19.д6 с простым выигрышем) 17.Крд7 Лa7+ 18.Лс7 Лa5 19.д6 Лa8 20.Лс8 Лa7+ 21.Крс6 Лa6+ 22.Крс7 Лa7+ 23.Крб6 Лd7 24.Крс6 и пешку не удержать.

В качестве последних конкурсных заданий этого года предлагаются два этюда.



1. Белые начинают и выигрывают.



2. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решения — 31 января 1982 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс № 12—81»)

Противоположные грани куба, сделанного из желтого, легкокоржующегося материала, окрашены в синий, зеленый и красный цвет. В верхнем ряду куб показан в четырех ракурсах. На первом рисунке второго ряда куб показан после того, как из него вырезали целый кусок. На других рисунках второго

ряда показано, как этот разрезанный куб будет выглядеть в остальных ракурсах.

Мы предлагаем вам проверить свое пространственное воображение: на клетчатой бумаге нарисуйте и раскрасьте остальные двенадцать ракурсов четырех разрезанных кубов А, Б, В, Г, изображенных в нижнем ряду.

*В. Канев*

