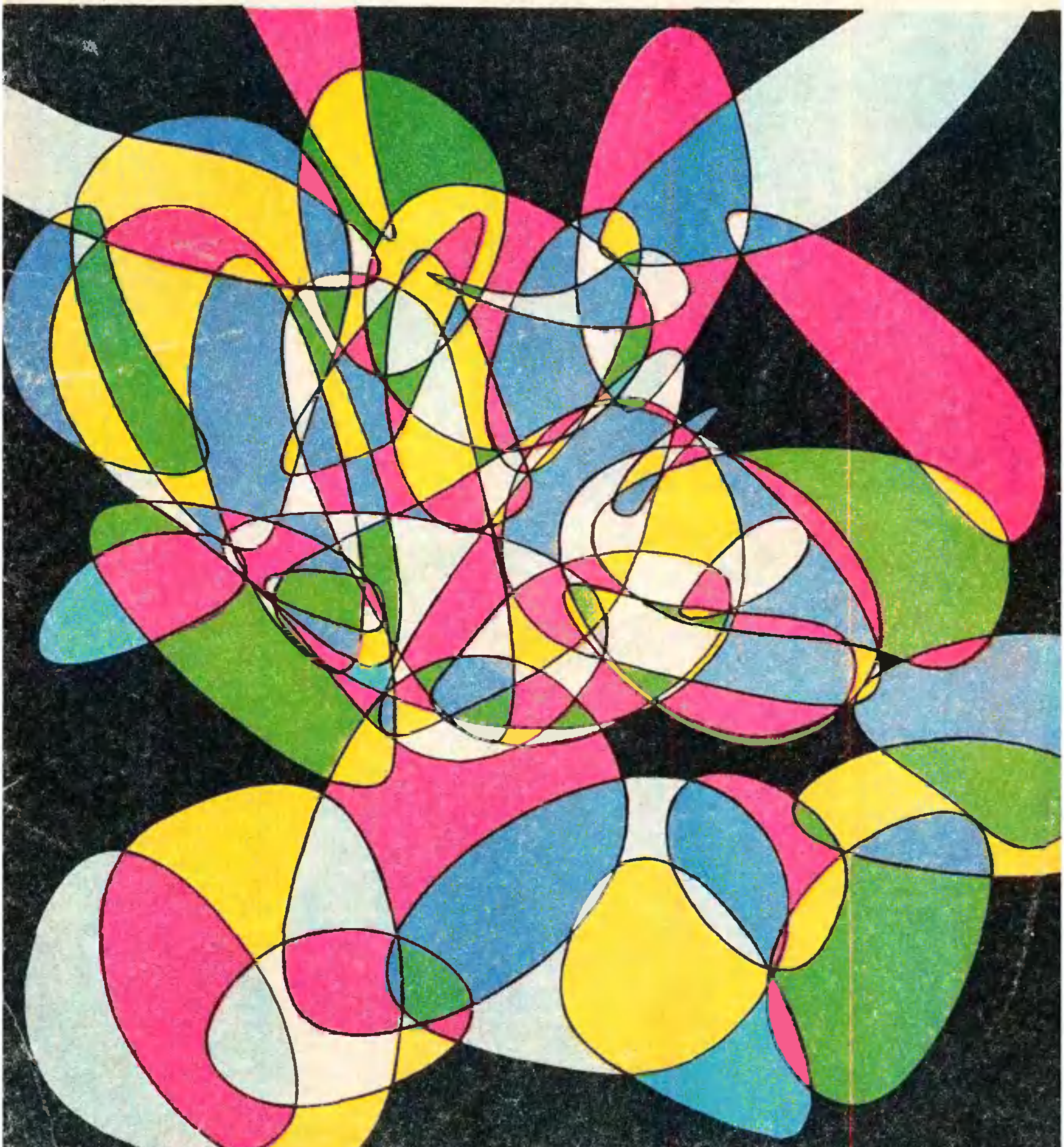
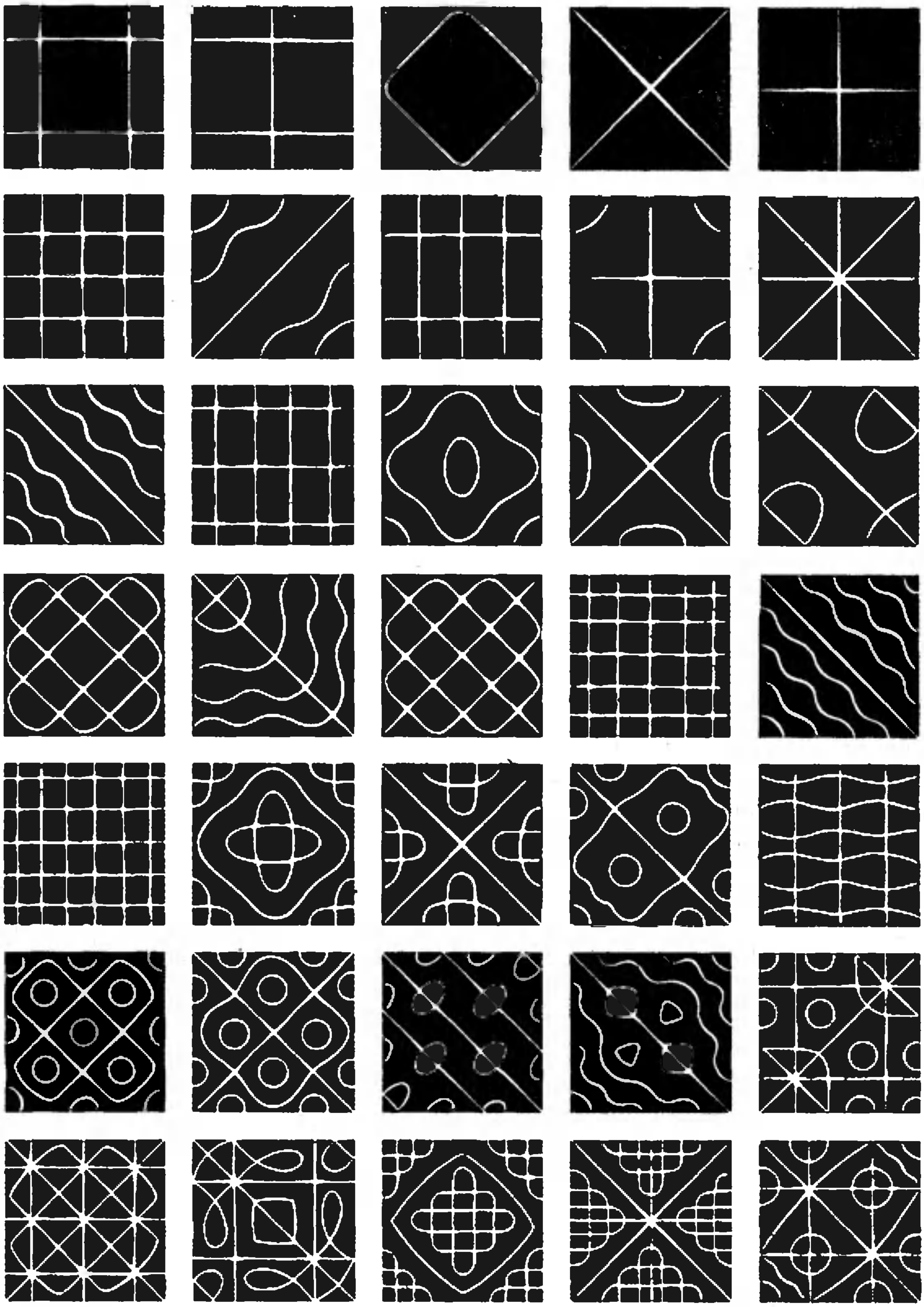
ISSN 0130-2221

Квант

2
1982

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





Оказывается, звуковые колебания стеклянной или металлической пластинки можно не только услышать, но и... увидеть. Это впервые продемонстрировал немецкий ученый Эрнст Хладни в 1787 году.

Если на поверхность пластинки насыпать мелкий песок и возбудить колебания пластинки, то песок перераспределится, собираясь вдоль отдельных линий. Эти линии образуют различные фигуры, которые теперь называют хладниевыми фигурами. Некоторые из них и изображены на приведенном рисунке.

Многие ученые пытались разработать математическую теорию колебаний пластин. Среди них — Симеон Дени Пуассон, о котором рассказывается в этом номере журнала.

Квант 2 1982

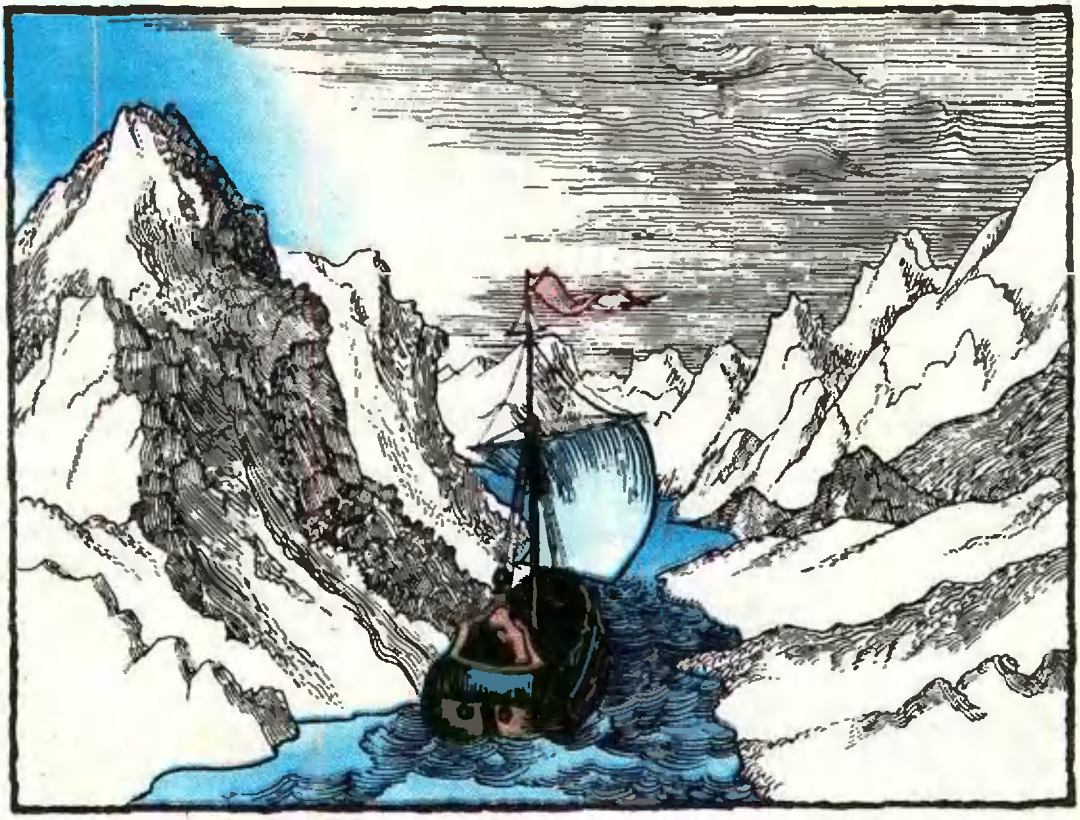
Основан в 1970 году

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ: IN THIS ISSUE:

Рисунок на первой странице обложки нарисован ЭВМ с помощью «случайных чисел». Подробнее см. с. 54



А. Эфрос

Что такое теория протекания

Два ученых мужа кромсают экранную сетку

Не так уж часто в современных научных журналах появляются отчеты об экспериментах, объектом которых является кусок обыкновенной экранной сетки*), купленный с несколько необычной целью в ближайшем магазине скобяных изделий. И хотя статья американских физиков Ватсона и Лиса, появившаяся в журнале «Физикл Ревью» («Физическое обозрение») в 1974 году, была далеко не первой работой в области теории протекания, наш рассказ начнется именно с нее.

Кусок сетки, с которым работали Ватсон и Лис, имел квадратную форму и содержал $137 \times 137 = 18769$ узлов с расстоянием $^1/_4$ дюйма (6,35 мм) между соседними узлами. Ученые припаяли к двум противоположным сторонам квадрата медные электроды и включили сетку в электрическую цепь (рис. 1, *а*), чтобы измерить ее электропроводность (напомним, что электропроводность — величина, обратная сопротивлению). Затем они стали вырезать узлы из этой сетки (рис. 1, *б*) и изучать электропроводность в зависимости от доли вырезанных узлов.

Каждый новый узел, который нужно вырезать, выбирался среди невырезанных ранее узлов случайно. В принципе для этого можно было бы написать координаты каждого узла на отдельной бумажке, положить все бумажки в шапку, хорошенько перемешать и вынимать по одной. Однако при большом количестве узлов такая процедура (как и другие механические способы жеребьевки) крайне неудобна, и потому ученые пользовались случайной по-

*) Прямое назначение экранной сетки состоит в том, чтобы защищать различную радиоаппаратуру от электрических помех.

следовательностью координат, составленной ЭВМ.

Ясно, что по мере увеличения числа вырезанных узлов электропроводность сетки уменьшалась. Более того, если отношение числа невырезанных узлов к полному числу узлов (137^2) обозначить x, то при некотором значении x, которое в дальнейшем мы будем называть пороговым значением и обозначать x_c, электропроводность обращалась в нуль. Это происходило, когда перерезался последний путь, связывающий левый и правый электроды. Определение величины x_c и являлось одной из задач эксперимента Ватсона и Лиса. Они нашли, что $x_c = 0{,}59$.

Естественно возникает вопрос: является ли величина x_c случайной и невоспроизводимой от опыта к опыту, или она вполне определенная?

Казалось бы, повторив эксперимент с другим куском экранной сетки и воспользовавшись другой случайной последовательностью вырезаемых узлов, мы получим иное значение x_c. Этот ответ подсказывает здравый смысл: поскольку на каждом этапе вся конфигурация вырезанных и «уцелевших» узлов во втором эксперименте нисколько не похожа на то, что было в первом, разрыв последнего пути, соединяющего электроды, тоже должен произойти при другом значении x, и соответственно x_c будет иное. Но как сильно будут отличаться друг от друга значения x_c, полученные в разных экспериментах?

Допустим, что мы взяли много кусков экранной сетки, содержащих одно и то же число узлов, и для каждого из них определили значение x_c. Это позволяет нам определить среднее значение величины x_c. Обозначим его $\overline{x_c}\ (N)$ (в знак того, что оно зависит от исходного числа узлов N). Если число кусков было Q, то, очевидно,

$$\overline{x_c}\,(N) = \frac{x_{c1}+x_{c2}+\ldots+x_{cQ}}{Q} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{Q} x_{ci}}{Q}.$$

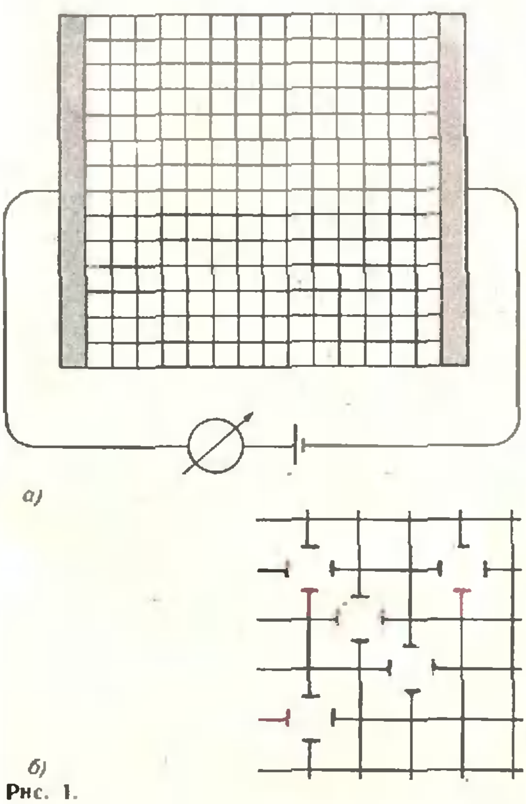
Для того чтобы определить, насколько в среднем отличаются значения x_{ci}, полученные в разных экспериментах, от $\overline{x_c}\ (N)$, сделаем следующее. Найдем сумму выражений вида $(x_{ci}-\overline{x_c}\ (N))^2$ (то есть сумму квадратов отклонений x_{ci} от $\overline{x_c}\ (N)$) и поделим эту сумму на Q. Величина

$$\delta(N) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{Q} (x_{ci}-\overline{x_c}\ (N))^2}{Q}$$

представляет собой среднее значение квадрата отклонения x_{ci} от $\overline{x_c}\ (N)$ при заданном N. Эту величину называют дисперсией. Величина же $\sqrt{\delta(N)}$ и характеризует разброс значений x_{ci}, полученных в серии экспериментов с сетками, содержащими N узлов. (Заметим, что если бы мы стали складывать не квадраты отклонений, а первые степени, то есть выражения вида $x_{ci}-\overline{x_c}\,(N)$, то для среднего значения отклонения мы получили бы нуль, поскольку $x_{ci}-\overline{x_c}(N)$ имеют как положительные, так и отрицательные значения.)

Итак, для того чтобы оценить «степень случайности» величины x_c, надо проследить за поведением величины $\delta(N)$.

Расчеты показывают, что с увеличением числа узлов сетки N величина $\delta(N)$ резко (по степенному закону)



а)

б)

Рис. 1.

уменьшается. Это значит, что для сеток с большим числом узлов результаты отдельных экспериментов будут мало отличаться друг от друга. Более того, при неограниченном увеличении N величина $\overline{x_c}(N)$ стремится к определенному пределу.

Дело в том, что в достаточно большой сетке встречаются всевозможные сочетания целых и вырезанных узлов, так что роль случайности становится малой. Поэтому предельное значение x_c, соответствующее бесконечно большой сетке, является вполне определенной величиной. Именно это предельное значение и называется, на самом деле, порогом протекания. Ради него и ставился эксперимент. А иначе зачем было брать сетку, содержащую почти 19000 узлов? Можно было бы взять сетку 2×2!

Кстати, для сетки 2×2 задача просто решается и без эксперимента. Расчет показывает, что для сетки с четырьмя узлами среднее значение $\overline{x_c}$ (4) порога протекания равно 5/12, что довольно сильно отличается от результата обсуждавшегося выше эксперимента (0,59).

Возможно, у кого-нибудь из вас хватит терпения найти $\overline{x_c}$ (9). Но я думаю, что с $\overline{x_c}$ (16) не справится никто. А ведь это всего лишь сетка 4×4

Точное значение x_c, соответствующее бесконечной сетке, до сих пор неизвестно. Задачу эту решают при больших (но конечных!) значениях N с помощью ЭВМ или с помощью экспериментов, похожих на описанный выше (их техника может быть весьма разнообразной). По изменению $\overline{x_c}$ (N) с изменением N можно оценить, насколько близок полученный результат к искомому предельному значению x_c.

Сопоставление результатов, полученных разными методами, позволяет думать, что с точностью до второго знака после запятой $x_c=0{,}59$, то есть равно тому значению, которое было получено для сетки с $N=137^2$ (хотя заранее совсем не очевидно, что это значение N «достаточно большое»). Разумеется, x_c можно бесконечно уточнять за счет следующих знаков после запятой.

Задача, сформулированная в этом разделе, называется задачей узлов (в знак того, что именно узлы играют роль случайных элементов). К ней сводится целый ряд научных проблем, одну из которых мы рассмотрим в следующем разделе.

Ферромагнетик с примесями

Вероятно, многие из вас знают, как устроены постоянные магниты (такие, например, как сталь), чем объясняются их магнитные свойства. Атомы таких веществ обладают магнитными моментами, так же как контур с током или магнитная стрелка. Согласно представлениям классической физики, магнитный момент контура с током равен произведению силы тока на площадь, ограниченную контуром; вектор магнитного момента перпендикулярен плоскости контура, а его направление определяется правилом буравчика.

Если про частицу или тело говорят, что они обладают магнитным моментом, то это значит, что частица или тело создают вокруг себя магнитное поле, силовые линии которого на расстояниях, больших по сравнению с геометрическими размерами тела, имеют такую же форму, как силовые линии магнитного поля петли с током или стрелки компаса.

Магнитный момент атома частично связан с элементарным электрическим током, возникающим при движении электронов по орбитам (орбитальный магнитный момент). Кроме того, квантовая механика приписывает каждому электрону в атоме собственный магнитный момент, величина которого не зависит от характера движения электрона (его называют спиновым магнитным моментом).

В твердом теле магнитные моменты соседних атомов взаимодействуют друг с другом. В некоторых веществах это взаимодействие таково, что магнитные моменты стремятся ориентироваться параллельно друг другу. Такие вещества называют ферромагнитными.

При низких температурах «желание» магнитных моментов выстроиться параллельно друг другу удовлетворяется, вследствие чего возникает суммарный магнитный момент $M=\mu N$, где N — число атомов в образце, а μ — магнитный момент одного атома. Важно, что магнитный момент, отнесенный к единице объема, не зависит от объема и равен $M=\mu/v_0$, где v_0 — объем, приходящийся на один атом. Величина M называется спонтанной намагниченностью (слово «спонтанная» означает «самопроизвольная», то есть возникающая не под действием внешнего поля, а сама по себе).

Тепловое движение разрушает магнитный порядок, и потому существует критическая температура, называемая температурой Кюри, выше которой спонтанная намагниченность равна нулю. Для железа, например, температура Кюри составляет 770°С. При более высоких температурах железо не может быть ферромагнитным.

Рассмотрим теперь вещество, представляющее твердый раствор (смесь) магнитных и немагнитных (не имеющих магнитного момента) атомов. Это кристалл, в узлах которого располагаются магнитные или немагнитные атомы, причем их расположение оказывается не упорядоченным, а совершенно случайным. Обозначим x относительную концентрацию (долю) магнитных атомов и выясним, при всех ли значениях x существует спонтанная намагниченность, то есть вещество является ферромагнетиком.

Допустим, что взаимодействие между магнитными моментами атомов убывает с расстоянием так быстро, что учитывать нужно лишь взаимодействие ближайших, непосредственных, соседей. Это значит, что если два магнитных атома стоят рядом, то их моменты обязательно параллельны, но если между ними оказался хотя бы один немагнитный атом, то моменты могут быть направлены произвольно: они уже «ничего не знают» друг о друге.

Введем некоторые определения. Будем называть два магнитных атома связанными друг с другом либо если они стоят рядом, либо если они соединены друг с другом цепочкой из стоящих рядом магнитных атомов (рис. 2, *а*). Совокупность связанных атомов принято называть кластером

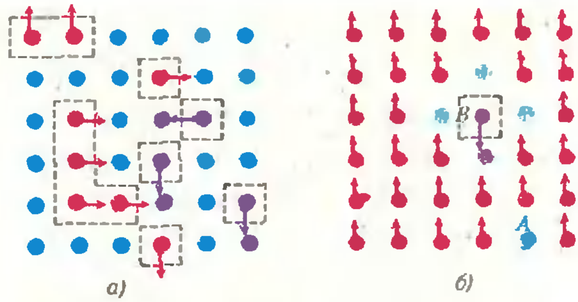


Рис. 2. Магнитные атомы обозначены красными кружочками, немагнитные — синими. Штриховые линии — границы кластеров.

(от английского слова «cluster», что в переводе означает «гроздь», «кисть»).

Предположим, теперь, что магнитных атомов очень мало ($x \ll 1$). Естественно, что при этом они, в основном, располагаются по одиночке. Кластер из двух магнитных атомов представляет собой редкое событие, из трех атомов — еще более редкое и т. д.

Благодаря магнитному взаимодействию магнитные моменты связанных атомов ориентированы в одну сторону. Таким образом, каждый кластер обладает результирующим магнитным моментом, пропорциональным числу атомов в кластере. С другой стороны, мы договорились, что магнитные атомы, не являющиеся ближайшими соседями, не взаимодействуют друг с другом. Поэтому не взаимодействуют друг с другом атомы, принадлежащие разным кластерам. Вследствие этого ориентация магнитных моментов, принадлежащих разным кластерам, оказывается произвольной (см. рис. 2, *а*), так что средний момент всех кластеров равен нулю.

Итак, мы получили, что при малой концентрации магнитных атомов спонтанная намагниченность отсутствует.

Теперь рассмотрим случай, когда почти все атомы — магнитные. Очевидно, что небольшая примесь немагнитных атомов не уничтожает спонтанной намагниченности, а только несколько уменьшает ее. Обсудим этот вопрос на языке кластеров. При $x=1$ все N атомов принадлежат одному кластеру. Если x немного отличается от единицы, то часть атомов выпадает из этого кластера. Это происходит потому, что, во-первых, некоторые атомы замещаются немагнитными (атом A на рисунке 2, *б*), а во-вторых, некоторые магнитные атомы образуют изолированные кластеры со своим направлением магнитного момента (атом B на рисунке 2, *б*). Тем не менее при значениях x, близких к единице, сохраняется единый кластер, пронизывающий всю решетку, сколь бы велика она ни была. Этот кластер принято называть бесконечным кластером.

Разумеется, понятие «бесконечный кластер» (в дальнейшем мы будем для краткости писать б. к.) приобретает строгий смысл лишь для бесконечной системы. Для системы с конечным числом атомов понятие б. к. имеет следующий смысл. Возьмем серию образцов с одним и тем же полным числом атомов N и со случайно расположенными магнитными и немагнитными атомами. Пусть доля магнитных атомов во всех образцах равна x. Выберем в каждом из образцов кластер, в котором число магнитных атомов максимально. Усредним это число по всем образцам серии и обозначим полученное среднее значение числа магнитных атомов в максимальном кластере $N_{\text{к. max}}$. Это число зависит от N, однако при безграничном увеличении N отношение $N_{\text{к. max}}/N$ стремится к определенному пределу:

$$\lim_{N\to\infty} (N_{\text{к. max}}/N) = P(x).$$

При достаточно большом числе атомов N доля атомов, принадлежащих самому большому кластеру, то есть величина $P(x)$, не зависит от N и определяется только относительной концентрацией магнитных атомов x. Если при данном x величина $P(x)$ отлична от нуля, то это означает, что при безграничном увеличении числа атомов в системе число атомов в самом большом кластере безгранично растет. Поэтому и говорят о существовании в системе при данном x бесконечно большого кластера.

Отсутствие б. к. проявляется в том, что при заданном x значение $P(x)$ равно нулю.

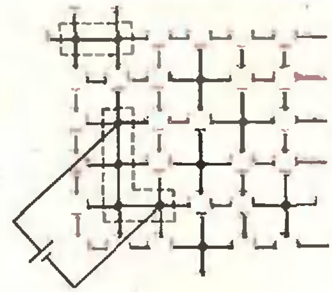


Рис. 3.

Итак, мы получили, что в системе с большим числом атомов при достаточной относительной концентрации магнитных атомов x определенная доля этих атомов принадлежит одному кластеру и имеет определенное направление магнитных моментов. Это означает, что существует спонтанная намагниченность, равная $M \cdot P(x)$.

Если вспомнить, что при малой относительной концентрации x есть только кластеры, состоящие из малого числа атомов (имеющие разные направления магнитых моментов), то мы придем к выводу, что существует критическая относительная концентрация x_c, при которой возникает б. к., причем $0 < x_c < 1$. При этой же концентрации появляется спонтанная намагниченность. А теперь вернемся к задаче об электропроводности. Ее также легко сформулировать на языке кластеров. Нужно только во всех определениях произвести формальную замену

«магнитный атом» $\longrightarrow$ «невырезанный узел»

Кластер из невырезанных узлов обладает тем свойством, что если к любой паре узлов, из которых он состоит, приложить разность потенциалов, то потечет электрический ток (рис. 3). Если $x < x_c$, то в системе есть только кластеры из конечного числа узлов, и потому при увеличении размеров системы ток через боковые электроды рано или поздно обязательно прервется. Если же $x > x_c$, то в очень большой системе на боковых гранях обязательно окажутся узлы, принадлежащие б. к. Этот б. к. и обеспечит отличную от нуля и не зависящую от размеров системы электропроводность $\sigma(x)$.

Задача об электропроводности формулировалась нами для плоской сетки; однако ясно, что ее легко поставить и для куба, к двум противоположным граням которого припаяны электроды. В задаче о ферромагнетике наши рассуждения относились в равной мере и к сетке, и к кубу. Таким образом, с точки зрения критической концентрации x_c задача об электропроводности сетки и задача о примесном ферромагнетике — это одна и та же задача. Ее называют задачей узлов.

В заключение этого раздела еще раз подчеркнем, что основные понятия теории протекания, такие как порог протекания, бесконечный кластер и т. д., приобретают четкий характер лишь в применении к бесконечно большой системе. В любой конечной системе порог протекания «размыт»; при повторении эксперимента результаты воспроизводятся лишь с определенной точностью, само определение порога становится неоднозначным. Например, в эксперименте с проводящей сеткой мы могли бы назвать порогом протекания то значение x, при котором возникает протекание сверху вниз, а не слева направо, или минимальное значение x, при котором существует протекание и сверху вниз, и слева направо. В достаточно большой системе разница между всеми этими определениями стирается, и порог протекания становится вполне определенной величиной.

Заметим, что повышенная чувствительность к размерам системы есть общее свойство всех так называемых критических явлений. Так, температура Кюри, при которой исчезает ферромагнетизм, в конечной системе всегда немного «размазана» по тем же причинам, что и порог протекания. Следует, однако, иметь в виду, что фактически размер системы важен, только если мы пытаемся искусственно моделировать критическое явление (например, с помощью экранной сетки). Реальную же макроскопическую систему практически всегда можно считать бесконечной. Ведь один кубический сантиметр вещества содержит примерно 10^{22} атомов!

Другие решеточные задачи

В предыдущих разделах рассматривалась решеточная задача узлов. Теперь мы объясним, в чем состоит задача связей. Представьте себе, что в эксперименте с экранной сеткой мы не будем трогать узлы, а будем разрезать проволочки (связи), которыми эти узлы соединены (рис. 4). Обозначим через x долю неразрезанных проволочек. Тогда снова можно поставить вопрос о критической доле x_c, при которой прерывается ток в очень большой сетке с металлическими контактами на боках. Эту задачу можно сформулировать и на кластерном языке, считая, что узлы связаны друг с другом, если они соединены цепочкой из неразрезанных проволочек.

Задача узлов и задача связей кажутся очень похожими. Однако они не тождественны. Эти задачи могут быть сформулированы и для решеток более сложных, чем квадратная и кубическая. При этом предполагается, что каждый узел решетки может быть связан со всеми узлами, которые являются его ближайшими соседями. Число ближайших соседей зависит от типа решетки, и потому пороги протекания меняются от решетки к решетке. Но на любой решетке порог протекания в задаче связей не больше порога протекания в задаче узлов.

Задача связей на простой квадратной решетке решается точно; порог протекания $x_c = 1/2$ (он меньше порогового значения $x_c = 0.59$ в задаче узлов на такой же решетке). Точные решения существуют и для некоторых других двумерных (плоских) решеток. Для трехмерных (объемных) решеток пока не найдено ни одного точного решения. Такие трех-

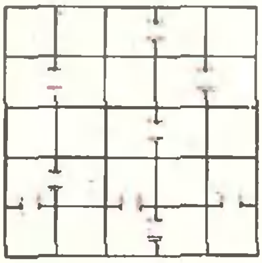


Рис. 4.

Тип решетки		Порог протекания (x_c)	
		для задачи связей	для задачи узлов
двумерная	простая квадратная (рис. 5, *а*)	0,5	0,593±0,002
	треугольная (рис. 5, *б*)	0,3473	0,5
трехмерная	простая кубическая (рис. 5, *в*)	0,247±0,05	0,312±0,02
	объемноцентрированная (рис. 5, *г*)	0,178±0,05	0,248±0,003
	гранецентрированная кубическая (рис. 5, *д*)	0,119±0,002	0,198±0,003

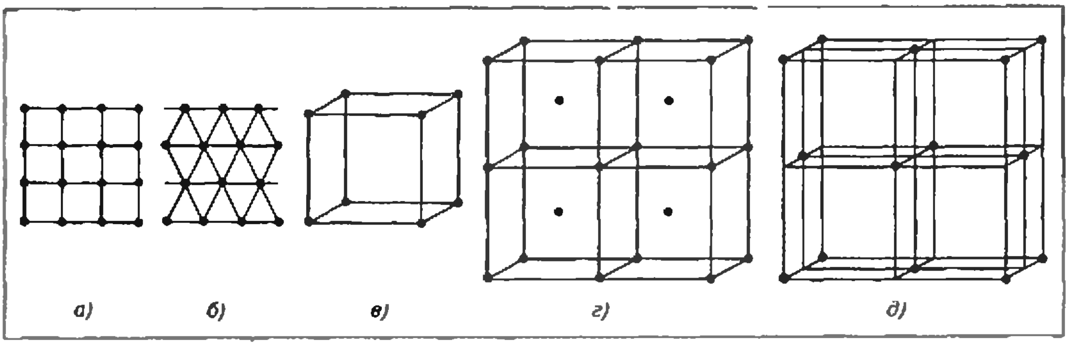


Рис. 5.

мерные задачи решают приближенными методами (вроде описанного в первом разделе) и моделированием на ЭВМ.

Пороговые значения для разных типов решеток приведены в таблице. Точные значения подчеркнуты. Остальные результаты получены приближенными методами. Естественно, приближенные результаты, полученные разными методами, несколько отличаются друг от друга. В таблице приведены результаты, наиболее надежные с точки зрения автора.

Различные применения теории протекания

Теория протекания — очень молодая математическая дисциплина. Ее основные идеи были сформулированы в 1957 году в работе английских математиков Бродбента и Хаммерсли. В этой же работе было дано и название теории. (По-английски она называется «percolation theory». В точном переводе «percolation» означает «просачивание», «фильтрация»; в русской литературе вместо термина «протекание» можно встретить слово «перколяция».)

Несмотря на молодость теории, область ее применений чрезвычайно широка. Мы разобрали в этой статье лишь так называемые решеточные задачи, но они далеко не исчерпывают всей области и играют сравнительно малую роль в приложениях.

Для того чтобы сформулировать еще одну задачу теории протекания, вспомним древнюю легенду о Ноевом ковчеге. В этой легенде говорится, что некогда на Земле произошло грандиозное наводнение. Спаслась от него лишь небольшая группа людей, заранее построивших большой корабль (ковчег). Корабль этот, видимо, курсировал где-то в районе Кавказа, так как первым местом, куда он причалил, когда стала спадать вода, оказалсь вершина горы Арарат... А теперь представим себе, что путешественники решили пересечь Кавказский хребет с юга на север по воде. При каком минимальном уровне воды это путешествие еще будет возможным? Иными словами, до какой высоты должен опуститься уровень воды, чтобы исчез водный путь, пересекающий Кавказский хребет с юга на север? (Разумеется, кораблю разрешается лавировать между выступающими из воды вершинами.)

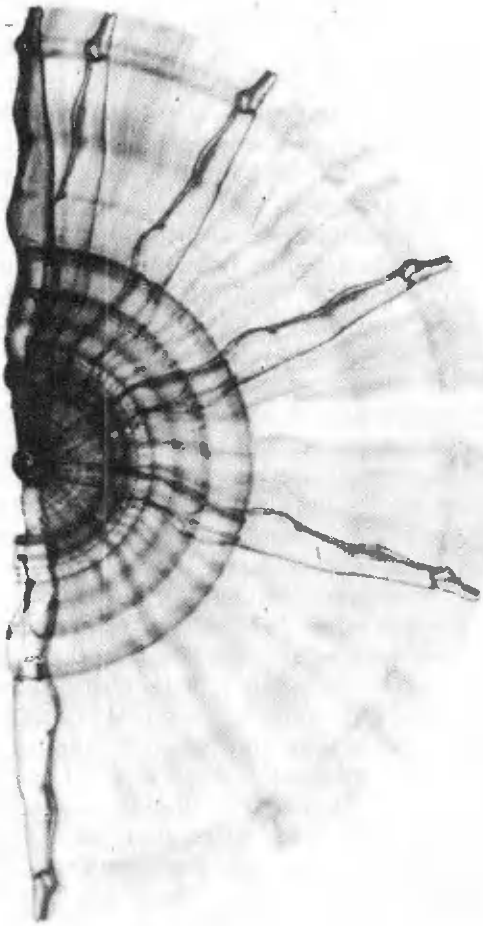
Эта задача (при условии, что горная система имеет достаточно большую протяженность во всех направлениях) также является задачей теории протекания, только сформулированной не на решетке, а в непрерывном пространстве. Искомый уровень воды называется уровнем протекания.

С помощью представлений об уровне протекания описывается, например, переход диэлектрик — металл, происходящий в полупроводниках с примесями при увеличении концентрации электронов. Дело в том, что примеси в полупроводниках расположены случайно и могут быть заряженными. Вследствие этого в некоторых областях преобладает положительный заряд, в некоторых — отрицательный. Добавляемые в систему электроны собираются в областях с положительным зарядом, образуя там нечто вроде озер или капель. Области, где возникают электронные капли, обладают высокой электропроводностью. Однако если концентрация электронов в системе мала, то эти капли не связаны друг с другом. Между ними находятся области с очень низкой электропроводностью, так что результирующая электропроводность полупроводника оказывается ничтожно малой. Положение резко меняется, когда концентрация электронов увеличивается настолько, что электронные капли, расширяясь, начинают соприкасаться друг с другом или соединяться посредством узких электронных каналов. При некоторой критической концентрации появляется возможность пересечь весь полупроводник, двигаясь только по областям, заполненным электронами. Тогда электропроводность резко возрастает. Это явление и называют переходом диэлектрик — металл. Для определения критической концентрации нужно решить задачу теории протекания, аналогичную задаче о водном пути через горную систему.

Можно перечислить самые разнообразные применение теории протекания: проникновения жидкости в пористое тело (каждая пора имеет свой диаметр, и из-за капиллярности жидкость проходит ее лишь при определенном давлении; нужно найти критическое давление, при котором жидкость протекает на очень большое расстояние по системе случайных пор), разрушение горных пород (от старости или от нагрузки образуются микротрещины, которые, сливаясь, раскалывают камень), различные модели перехода металл — диэлектрик, объяснение аномальных свойств переохлажденной воды и т. д.

Попытаемся теперь сформулировать, что общего между всеми этими задачами и что, собственно, является предметом теории протекания. Это сделать довольно сложно. Я бы сказал, что теория протекания занимается связностью очень большого (макроскопического) числа элементов при условии, что связь каждого элемента со своими соседями является величиной случайной, но полученной определенным способом (например, с помощью бросания монетки). Важно, что выработанный с помощью этого способа набор связей должен быть зафиксирован и не может меняться в процессе решения задачи.

Следует еще заметить, что теория протекания занимается не только отысканием пороговых значений, но и (в гораздо большей степени) законами, определяющими поведение различных величин вблизи порога. Если пороговые значения являются специфическими для каждой задачи, то законы, по которым обращаются в нуль такие функции как $P(x)$ в задаче о примесном ферромагнетике или электропроводность в задаче о сетке, оказываются универсальными для всех задач теории протекания. Это, пожалуй, самый интересный круг вопросов теории протекания, но рассказ о нем должен быть длинным, и он выходит за рамки этой статьи.



А. Тоом

Долго ли палке упасть?

От редакции. **Решая реальную физическую задачу, мы обычно выбираем ее идеализированную модель, позволяющую применить математические методы для ее решения. Разумеется, важно суметь правильно осуществить этот выбор. Неожиданные трудности, которые при этом могут возникнуть, обсуждаются в публикуемой ниже статье с точки зрения математика.**

Проделайте *следующий* физический эксперимент. Установите на полу вертикально палку (можно щетку, скалку, линейку и т. п.) и, плавно, без толчка отняв руку, отпустите ее. Палка упадет. Конечно, если палка толстая (например, полено) и нижний конец ее достаточно ровный, то она так и останется стоять, но мы этот случай не рассматриваем. Тонкие палки с заостренным нижним концом, поставленные вертикально на пол, всегда падают, если их ничто не поддерживает, — это экспериментальный факт.

Попытаемся теперь сопоставить этому факту *теоретический расчет*.

Как это постоянно делается при решении физических задач, идеализируем объект рассмотрения: вместо палки рассмотрим *стержень, не имеющий толщины, установленный вертикально на горизонтальной поверхности; стержень находится в поле тяжести, а среда не оказывает сопротивления движению; долго ли он будет падать?*

При некоторой внимательности можно заметить, что нижний конец палки неподвижен лишь в начальной стадии ее падения; позже он едет по полу. В какую сторону он едет — зависит от коэффициента трения палки об пол*). Чтобы не связываться с этими сложностями, предположим, что *нижний конец нашего идеального стержня закреплен в шарнире; трение отсутствует.*

Обозначим через l расстояние от центра масс стержня до его нижнего конца, через m — массу стержня. Рассмотрим момент времени, когда стержень образует с вертикалью угол α, $0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ (рис. 1). К этому моменту центр масс опустится на $l\,(1-\cos\alpha)$. Значит, потенциальная энергия уменьшилась на $mgl\,(1-\cos\alpha)$. Она перешла в кинетическую энергию, которую мы запишем в виде $K=I\frac{\omega^2}{2}$, так как она пропорциональна квадрату угловой скорости ω (здесь I — постоянная**), а ω зависит от α).

Действительно, если массу стержня считать сосредоточенной в его центре масс, то

$$K=\frac{1}{2}\,mv_0^2=\frac{1}{2}\,m\,(l\omega)^2=(ml^2)\,\frac{\omega^2}{2}. \quad (0)$$

Если же стержень считать однородным, то

*) См., например, задачи 196, 197 в задачнике Б. Б. Буховцева *и др.* «*Сборник задач по элементарной физике*» (М., «Наука», 1974).

**) I называется *моментом инерции;* определение этого понятия можно прочитать в предыдущем номере «Кванта» на с. 6, но оно нам не потребуется.

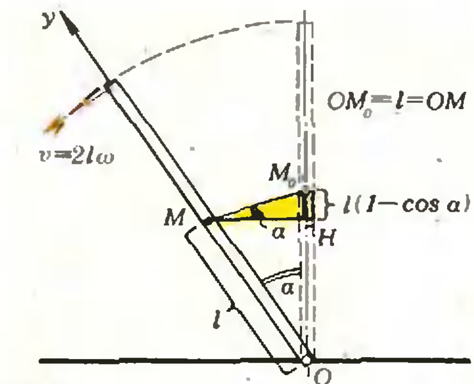


Рис. 1.

$$K=\int_0^{2l}\frac{m(v(y))^2}{2l\cdot 2}dy=\frac{m}{2l}\int_0^{2l}\frac{(\omega y)^2}{2}dy=$$
$$=\left(\frac{4}{3}ml^2\right)\frac{\omega^2}{2}. \quad (00)$$

Приравнивая потерянную потенциальную энергию и приобретенную кинетическую, получим

$$\frac{1}{2}I\omega^2=mgl(1-\cos\alpha),$$

откуда

$$\omega=\sqrt{\frac{2}{I}mgl(1-\cos\alpha)}=$$
$$=2\sqrt{\frac{mgl}{I}}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Угловая скорость ω — это скорость изменения угла α, то есть производная α по времени:

$$\omega=\frac{d\alpha}{dt}.$$

Отсюда (по теореме о производной обратной функции)

$$\frac{dt}{d\alpha}=\frac{1}{\omega}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{I}{mgl}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Проинтегрировав это выражение по α от 0 до $\frac{\pi}{2}$, получим время T, за которое стержень упадет:

$$T=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{I}{mgl}}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}. \quad (1)$$

Имеет ли смысл это выражение? В школе проходят интегралы непрерывных ограниченных функций. Здесь же под знаком интеграла стоит функция, не определенная при $\alpha=0$ и стремящаяся к бесконечности при $\alpha\to 0$. «Криволинейная трапеция», заключенная между осью α, прямыми $\alpha=0$ и $\alpha=\frac{\pi}{2}$ и графиком этой функ-

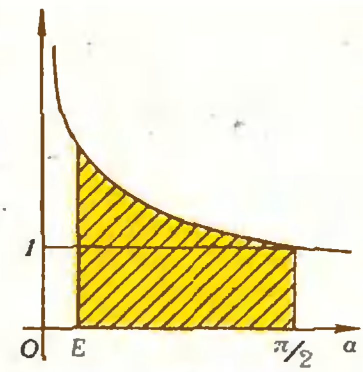


Рис. 2.

ции, бесконечна (рис. 2). Как можно говорить о площади бесконечной фигуры? Оказывается, можно, и при разумном определении эта площадь даже иногда бывает конечной. Интеграл от неограниченной функции такого типа, как (1), называется *несобственным* и по определению полагается равным пределу обычного, «собственного» интеграла при подходящем изменении его границ*). В данном случае

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Интеграл под знаком предела, отвечающий заштрихованной площади на рисунке 2, можно сосчитать точно, но пока нам это даже не нужно. Вспомним, что $\sin\alpha<\alpha$ при $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Поэтому $\sin\frac{\alpha}{2}<\frac{\alpha}{2}$, откуда

$$\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}>2\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\alpha}=2\left(\ln\frac{\pi}{2}-\ln\varepsilon\right).$$

Последнее выражение при $\varepsilon\to 0$ стремится к бесконечности.

Вот те на! У нас получилось, что время падения стержня равно бесконечности! Но в эксперименте-то палка падает — значит, теория противоречит практике?

Конечно, положение не такое уж неясное. Если вначале стержень действительно стоит вертикально, то он

*) См., например, определение несобственного интеграла в задаче 12 параграфа I главы V книги Б. М. Ивлева и др. «Сборник задач по алгебре и началам анализа для 9 и 10 классов». (М., «Просвещение», 1978).

вообще не будет падать, то есть α всегда будет равным нулю. Мы же фактически начали наш расчет с некоторого положительного α.

Поскольку на практике палка все-таки падает, ей и в теории надо сопоставлять стержень, который падает. С физической точки зрения естественно было бы рассмотреть один из следующих двух случаев:

1) вначале стержень вертикален и имеет маленькую, но отличную от нуля угловую скорость;

2) вначале стержень неподвижен и отклонен от вертикали на маленький, но отличный от нуля угол.

Но формулы в этих случаях придется писать заново, и они сложнее, чем те, что уже написаны. Поэтому рассмотрим случай, самый простой с математической точки зрения: стержень падает за время (см. 1))

$$T=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{I}{mgl}}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Физический смысл этого случая состоит в том, что вначале стержень отклонен от вертикали на маленький угол $\varepsilon>0$ и имеет начальную угловую скорость, равную

$$2\sqrt{\frac{mgl}{I}}\sin\frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь никакого парадокса нет, так как написанный интеграл имеет вполне определенную конечную величину.

Его можно даже вычислить точно. По формуле дифференцирования сложной функции вы можете убедиться, что

$$\left(2\ln\operatorname{tg}\frac{x}{4}\right)'=\frac{1}{\sin\frac{x}{2}},$$

откуда

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}=2\left(\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}-\ln\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}\right).$$

Итак, время падения стержня равно

$$T=Q\left(\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}-\ln\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}\right),\quad(2)$$

где $Q=\sqrt{\frac{I}{mgl}}$.

Если вся масса стержня сосредоточена в его центре масс, то (см. (0)) $I=ml^2$ и $Q=\sqrt{\frac{l}{g}}$. Если стержень однороден, то (см. (00))

$$I=\frac{4}{3}ml^2 \text{ и } Q=\sqrt{\frac{4}{3}\frac{l}{g}}.$$

В обоих случаях время падения T не зависит от массы m и пропорционально корню квадратному из l. Этому соответствует тот наблюдаемый факт, что длинные палки падают дольше, чем короткие.

Отметим, что полученный в начале статьи парадокс не всегда замечают. Например, задача 195 упомянутого задачника Б. Б. Буховцева и др. формулируется так: *На легкий стержень насажен массивный шар* (рис. 3). *В каком случае стержень упадет быстрее: если его поставить вертикально на конец A, или на конец B? Стоящий на земле конец стержня не проскальзывает.*

В качестве решения этой задачи выводится формула угловой скорости

$$\omega=2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{g}{R}},$$

где R — расстояние от конца стержня до центра масс шара (эта формула совпадает с нашей при $l=R$, $I=mR^2$), и дальше пишется: «При данном α она тем меньше, чем больше R. Следовательно, стержень упадет скорее, если он поставлен на конец B» (с. 227). Данное рассуждение некорректно, потому что, как мы видели, интеграл написанной выше формулы бесконечен при всяком $R>0$. Есть ли какой-нибудь смысл говорить, что одна бесконечность больше другой бесконечности? Чтобы в каком-то

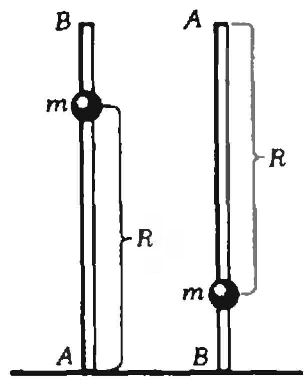


Рис. 3.

смысле решить цитированную задачу, можно, например, рассмотреть стержни, отклоненные вначале от вертикали на какой-то маленький угол, или имеющие какую-то маленькую начальную угловую скорость, или и то и другое — как сделано выше.

Кстати, мы в каком-то смысле решили и задачу № 56 из прекрасного задачника И. Ш. Слободецкого и Л. Г. Асламазова «Задачи по физике» (М., «Наука», 1980): *Почему половую щетку значительно легче удерживать на пальце, чем палку той же длины?*

В решении этой задачи, приводимом в задачнике (с. 77), читателю предлагается самостоятельно рассмотреть, как зависит время падения от длины стержня, причем не упоминается о тех трудностях, с которыми мы пытаемся здесь справиться. Аккуратное решение этой задачи действительно требует рассмотрения времени падения палки, но чтобы это время получилось конечным (а только конечные величины можно сравнивать между собой), надо рассмотреть начальное условие, как-то отличающееся от условия равновесия. Такое рассмотрение придает строгий смысл неформальным рассуждениям типа «чем выше центр масс палки, тем медленнее она наклоняется, и тем легче успеть сместить палец в эту же сторону».

В процессе обсуждения исходной задачи нам пришлось отказаться от наиболее простой ее модели (идеальный стержень на шарнире, стоящий вертикально) и рассмотреть более сложную модель, так как вертикальный идеальный стержень не падает. Однако простейшая модель вполне корректна, если обратить время, иными словами — иметь дело не с падающей, а с поднимающей палкой. Точнее, рассмотрим такую задачу: *один конец горизонтально лежащего идеального стержня длины l закреплен в шарнире, а другому концу придается скорость, направленная вверх и равная $\sqrt{8gl/3}$; как долго будет стержень подниматься?*

Правильный ответ дается интегралом (1): стержень будет подниматься бесконечно долго, стремясь к вертикальному положению, но никогда не достигая его. Так, гимнаст, поворачивающийся в верхнюю стойку на перекладине, чтобы не подниматься к точке равновесия бесконечно долго, должен за счет махового движения придать себе скорость, обеспечивающую движение дальше этой точки, и остановиться в ней за счет трения (зажимая руками перекладину).

Но вот что еще остается неясным в исходной задаче.

Предположим, что мы проделываем несколько экспериментов с одной и той же палкой. Каждый раз мы ее ставим на пол, как нам кажется, вертикально и отпускаем. Палка падает, причем можно убедиться в том, что промежутки времени, затраченные на падение, во всех случаях не сильно отличаются друг от друга. И вот это странно. Ведь каждый раз палка в действительности отклоняется от вертикали на какой-то иной ненулевой угол и имеет какую-то иную ненулевую начальную скорость. Значит, и длительности падения должны быть различными. В некоторых случаях, казалось бы, начальные угол и скорость должны случайно получаться совсем маленькими, и тогда время падения должно быть очень большим, однако этого не наблюдается. В чем же дело?

На этот вопрос нам удастся ответить только неформально. Рассмотрим формулу (2). Она содержит постоянный член $Q \ln \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$ и переменный член $-Q \ln \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}$. При маленьких ε (а нас такие и интересуют) $\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}$ близок к $\frac{\varepsilon}{4}$, и переменный член близок к

$$-Q \ln\frac{\varepsilon}{4} = Q \ln 4 - Q \ln \varepsilon.$$

Так вот дело в том, что величина $-\ln \varepsilon$, хотя и стремится при $\varepsilon \to 0$ к бесконечности, но очень медленно.

Например, уменьшению ε в 10 раз соответствует увеличение $-\ln \varepsilon$ на постоянную величину $\ln 10 \approx 2{,}3$.

(Окончание см. на с. 24)

Б. Геллер, Ю. Брук

Симеон Дени Пуассон

В 1981 году исполнилось двести лет со дня рождения Симеона Дени Пуассона — выдающегося французского ученого, которого мы по праву считаем одним из создателей современной математической физики. Имя Пуассона то и дело встречается в учебниках математического анализа и электромагнетизма, теории вероятностей и акустики, в книгах по квантовой механике и по теории упругости. В истории науки Пуассон стоит теперь в одном ряду с его выдающимися современниками — Лапласом, Лагранжем, Фурье, Коши, Ампером, Гей-Люссаком, Френелем.

Родился Пуассон 21 июня 1781 года. О родителях Пуассона известно немного. Мы знаем, что отец его поначалу был солдатом ганноверских войск, но его военная карьера не удалась. Из-за придирок и притеснений офицеров он бежал из армии и обосновался в маленьком французском городке Питивье. К моменту рождения сына он занимал скромную, но уважаемую должность нотариуса.

Мальчик рос совершенно обычным, ничем не примечательным и никаких особых надежд в раннем детстве не подавал. У родителей даже возникли сомнения по поводу его умственных способностей. Отцу, конечно, очень хотелось, чтобы его сын стал нотариусом, но семейный совет решил, что с этой работой ему не справиться и что лучше быть ему врачом. Решение семейного совета — своего рода закон. Симеона отправили в городок Фонтенебло к дяде Ланфану для обучения достойному, но, в их понимании, простому ремеслу хирурга. Однако овладеть этой профессией оказалось нелегко. Чтобы научиться, например, делать кровопускания (один из основных методов лечения в то время), необходимо было в течение долгих часов упражняться в прокалывании иголкой жилок на капустных листах. Позже Пуассон рассказывал друзьям, что даже самые крупные жилки в последний момент все же ускользали из-под его иголки. В ненавистных упражнениях прошел почти год, дядюшка был доволен племянником, но первая же доверенная ему самостоятельная прививка закончилась смертью пациента. Это событие так потрясло юношу, что он наотрез отказался дальше заниматься медициной и вернулся к родителям в Питивье.

За то время, пока Симеона не было дома, там произошли некоторые изменения. Отец стал «государственным человеком», возглавив городскую общину. Семья переехала в другой дом, более приличествующий новому положению в обществе. В новом доме жизнь стала оживленнее: приходило много людей, из Парижа стали поступать различные журналы, среди них — «Журнал Политехнической школы». Читать его оказалось очень занятным для Симеона, еще занятнее было решать предлагавшиеся в журнале математические задачи. Неожиданно решение задач оказалось делом очень легким для мальчика, который нигде никогда этому не учился; он просто «щелкал» их одну за другой. Надо отдать должное родителям Пуассона. Они быстро переменили мнение об умственных способностях своего сына и отправили его обратно в Фонтенебло, но на этот раз — в школу.

В школе Пуассон учился блестяще. Его дарование и трудолюбие позволили ему сильно «оторваться» от своих сверстников. Когда он выходил к доске, учителя уже знали, что сейчас они услышат много нового и интересного для себя, а ученики часто вообще мало что понимали. Два года спустя семнадцатилетний Симеон был принят в Политехническую школу в Париже.

Здесь уместно рассказать немного о самой Политехнической школе (Ecole Polytechnique), одном из самых старых и необычных учебных заведений Франции. Эта школа была создана в эпоху Великой французской революции по декрету Конвента от 11 марта 1794 года. Первоначально она называлась «Центральная школа общественных работ», а год спустя была переименована в Политехническую школу. Нужно сказать, что революция оказала большое влияние на развитие науки и научно-технического образования в Европе. Одной из основных задач в области образования в эти годы стала задача подготовки инженерных и офицерских кадров. Воспитанники Политехнической школы должны были занимать, в конечном счете, высшие технические государственные должности. Срок обучения в Политехнической школе был сравнительно невелик — всего два года, интенсивность же обучения была очень высокой. Как писал много лет спустя выдающийся математик и историк науки Ф. Клейн, «знания вколачивались в голову до полного овладения предметом». В значительной степени выдающаяся роль Ecole Polytechnique в развитии физико-математического образования связана с прекрасным педагогическим коллективом: среди профессоров школы в первые годы ее существования были известные ученые Монж, Лаплас, Лежандр, Лагранж, Фурье, Карно. По существу, все основные курсы и учебники математического анализа, геометрии и механики, на много лет предопределившие уровень математического образования (и не только во Франции!), были созданы именно профессорами Ecole Polytechnique. Политехническая школа и доныне сохранила свое значение одного из ведущих вузов Франции.

Вернемся, однако, к рассказу о Пуассоне. Лаплас и Лагранж гордились замечательными способностями Симеона Дени и занимались с ним особенно много. Пуассон в совершенстве знал труды многих своих предшественников, особенно подробно изучал он работы Эйлера и Даламбера. Позднее друг и биограф Пуассона, выдающийся физик и тоже воспитанник Политехнической школы Франсуа Араго писал: «Пуассон никогда не имел надобности тратить время и силы на искание того, что уже было найдено». Не случайно поэтому, что уже в двадцать лет Пуассон сделал свои первые математические работы, сразу принесшие ему известность. Было бы, впрочем, неверно думать, что в студенческие годы, да и позже тоже, Пуассону были чужды нематематические интересы. Он был общительным и жизнерадостным человеком, очень любил и часто посещал театр, знал наизусть сочинения Мольера и Корнеля, трагедии Расина.

Дальнейшая жизнь Пуассона также оказалась во многом связанной с Политехнической школой. Здесь Пуассон прошел последовательно всю «иерархическую лестницу». По окончании курса обучения он был оставлен при школе репетитором, а в 1802 году получил должность помощника профессора. В 1806 году ушел из Политехнической школы великий Фурье; его профессорское место занял 25-летний Пуассон. В 1812 году Пуассон был избран академиком Парижской Академии наук; с 1820 года он — член Совета Парижского университета. Ему поручается наблюдение за преподаванием математики во всех колледжах Франции. В Политехнической школе Пуассона назначают экзаменатором по артиллерии и экзаменатором абитуриентов. Должность экзаменатора была в определенном смысле выше обычной профессорской: принимая итоговые экзамены, он подвергал тем самым проверке и то, как усвоены знания воспитанниками Политехнической школы, и то, как и чему их научили профессора.

Все сменяющиеся в те бурные годы правительства Франции с большим вниманием относились к научным заслугам Пуассона. Он получил титул барона, был награжден орденом Почетного легиона (высшая награда во Франции), стал пэром Франции. Получил Пуассон признание и за рубежом: он был членом всех научных обществ и академий Европы и Америки, в том числе — почетным членом Петербургской Академии наук (с 1826 г.).

Пуассон, по словам Араго, «обладал еще одним достоинством, которым часто пренебрегают даже не высоко стоящие в науке: точностью исполнения своих обязанностей». Известно, например, что выпускные экзамены в Политехнической школе ежегодно отнимали у Пуассона четыре недели, в течение которых он должен был экзаменовать по девять часов в день. «Только однажды, — пишет Араго, — из приличия Пуассон отказался экзаменовать своего старшего сына, но воспитанники Политехнической школы, узнав об этом, послали к нему депутацию с объявлением, что они вполне верят его беспристрастию и просят не отказываться от экзамена». Педагогическую работу Пуассон любил, об этом говорит и его известное высказывание: «Жизнь украшается двумя вещами — занятием математикой и ее преподаванием». Лекции Пуассона отличались ясностью и глубиной.

В последние годы жизни (умер Пуассон в Париже весной 1840 года) он поставил перед собой задачу написать фундаментальный курс математической физики. До конца выполнить эту задачу Пуассон, к сожалению, не успел.

О научных трудах Пуассона рассказывать очень непросто. Бóльшая часть его работ (а всего их около 350) относится к математической физике, поэтому подробно обсудить здесь даже основные результаты этих работ мы не сможем. В то же время не упомянуть хотя бы совсем кратко о наиболее известных и важных работах Пуассона просто нельзя. Мы сделаем это ниже и, кроме того, рассмотрим несколько вопросов, смысл которых вполне можно понять на школьном уровне.

Одно из главных понятий в электростатике — это понятие об электрическом потенциале. Потенциал всегда зависит от величины и расположения зарядов в пространстве. Пуассон в 1811 году вывел дифференциальное уравнение, связывающее потенциал с плотностью распределения зарядов. Простейшие задачи в электростатике можно, конечно, решать и не пользуясь уравнением Пуассона. Но для сколько-нибудь сложных задач, когда есть много зарядов и расположены они произвольным образом, рассчитать зависимость потенциала от координат можно только с помощью этого уравнения. Уравнение Пуассона, вместе с результатами Эйлера, Гаусса, Лапласа, Грина и Остроградского, лежит теперь в основе современной теории потенциала — важного раздела математической физики.

Значительны заслуги Пуассона в теоретической механике, в механике сплошных сред, теории теплопроводности, теории упругости. Изучал Пуассон вопросы, связанные с адиабатическим изменением состояния газа, с атмосферным электричеством, с измерением горизонтальной составляющей земного магнитного поля, с природой сил поверхностного натяжения, с распространением волн в глубоком бассейне. Были у Пуассона и «артиллерийские» заслуги. Он подробно исследовал задачу об отклонении снарядов от вертикальной плоскости, проведенной через направление ствола орудия. В астрономии он занимался исследованием устойчивости движения планет Солнечной системы и рассматривал задачи о возмущении планетных орбит и о движении Земли вокруг ее центра тяжести. Ему принадлежит также много результатов в области «чистой» математики, особенно в дифференциальном и интегральном исчислении (интеграл Пуассона, формула суммирования Пуассона и др.), в теории дифференциальных и разностных уравнений.

Нельзя, наконец, не сказать о существенном вкладе Пуассона в теорию вероятностей. Вслед за Лапласом он уделял большое внимание применениям теории вероятностей в... уголовном судопроизводстве. Один из его больших трактатов так и называется «Исследования о вероятности приговоров в уголовных и гражданских делах». Сейчас это может вызвать улыбку читателя, но нельзя забывать о том, что в этой работе решались вполне конкретные и строгие математические задачи.

В работах Пуассона очень часто видно стремление связать формальные математические рассуждения не только с естественными науками, но и с общественно важными вопросами. Таков и его трактат «О преимуществе банкира при игре в тридцать и сорок». Вряд ли нужно осуждать Пуассона за стремление «помочь обогащению банкиров», лучше вспомнить о том, что теория игр, в том числе и азартных, была очень существенной для становления и развития теории вероятностей, а сейчас и сама стала самостоятельным и жизненно необходимым разделом математической науки.

Приведем теперь три конкретных задачи. Решение их получается с помощью часто используемой в вероятностных расчетах формулы, носящей имя Пуассона. Выводить эту формулу мы не будем, но покажем как ею пользоваться.

Первая задача — об опечатках, встречающихся в книгах. Предположим, что существует постоянная вероятность того, что любая буква будет набрана наборщиком неправильно. Эта вероятность приблизительно равна среднему отношению числа ошибок, допускаемых обычно данным наборщиком на одной странице, к полному числу набираемых букв. Предполагается, что само число букв на странице очень велико, а усреднение производится тоже по достаточно большому числу страниц. Пусть условия набора остаются неизменными. Под этим мы понимаем и то, что все страницы в книге «равноценны» в том смысле, что число и расположение типографских знаков на них приблизительно одинаковы. Назовем испытанием сам факт набора каждой буквы. Среднее число испытаний есть просто среднее число букв на одной странице. Результат каждого испытания двузначен: правильно — неправильно. Зададим теперь вопрос: какова вероятность того, что на странице встретится ровно k опечаток? Ответ на этот вопрос дается формулой Пуассона — искомая вероятность приближенно равна

$$p\,(k;\,\lambda)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Число λ в этой формуле — параметр, который в рассматриваемой задаче можно считать «характеристикой» наборщика; оно равно произведению вероятности неправильного набора одной буквы на среднее число испытаний.

«Экспериментальная» проверка результата, вычисленного по формуле Пуассона, может быть, в принципе, произведена таким образом. Мы должны внимательно прочитать набранные данным наборщиком страницы (чем больше, тем лучше!) и отыскать те, на которых встретится k опечаток. Потом число страниц с k опечатками нужно разделить на число прочитанных страниц и сравнить найденное отношение с тем, что получается при том же значении k из написанной выше формулы, которая называется также распределением Пуассона.

Вторая задача такова. Пусть нас интересует вероятность того, что в коллективе, состоящем из 1982 человек, ровно k человек родились в тот же день, что и Пуассон. Решается эта задача так. Можно утверждать, что произвольно выбранный из коллектива человек родился в один день с Пуассоном с вероятностью $\approx 1/365$, тогда параметр $\lambda = \frac{1}{365} \cdot 1982 \approx 5{,}43$ (число людей в коллективе есть в этом случае число испытаний). Теперь вы сами можете вычислить вероятность $p(k; \lambda)$ того, что k человек родились в интересующий нас день. Для этого достаточно подставить в формулу Пуассона $k = 0, 1, 2, 3, ...$

Третья задача относится к физике. Известно, что процесс радиоактивного распада радия заключается в превращении ядра атома радия в ядро атома радона с испусканием альфа-частицы. Распад каждого отдельного ядра Ra происходит независимо от состояния других ядер, и вероятность такого распада в единицу времени есть величина постоянная. Обозначим эту вероятность буквой p_0. Если в образце всего N ядер Ra, то среднее число альфа-частиц, испускаемых в единицу времени, есть $\lambda = Np_0$. Для определения λ нам, казалось бы, нужно знать два числа — N и p_0. Однако в классическом опыте Резерфорда, Чедвика и Эллиса эти числа вовсе не потребовались экспериментаторам. Целью этого эксперимента был поиск закономерности, определяющей вероятность испускания радиоактивным образцом определенного числа альфа-частиц в единицу времени.

Излучаемые альфа-частицы попадали в счетчик. Наблюдения велись в течение $n = 2608$ промежутков времени, длительность каждого из них равнялась 7,5 с. Специально подсчитывалось число n_k промежутков, за каждый из которых в счетчик попадало ровно k частиц. Полное число частиц за все время опыта равнялось $\sum kn_k = 10094$. Если разделить теперь эту сумму на n, то получится среднее число альфа-частиц, испускаемых за 7,5 с. Можно считать условной единицей времени 7,5 с, тогда число $\frac{\sum kn_k}{n} = 3{,}87$ и есть параметр λ в распределении Пуассона. Вычисленные с помощью формулы Пуассона числа $p(k; \lambda) = p(k; 3{,}87)$ естественно сравнить теперь с числами $\frac{n_k}{n}$, полученными из опыта. Мы приводим здесь соответствующую таблицу из обсуждаемой нами работы. График на рисунке 1 построен по этой таблице. Красные точки обозначают числа $np(k; 3{,}87)$, синие соответствуют n_k. Кривая, проведенная через красные точки, дает наглядное представление о характере распределения Пуассона. Важной особенностью этого графика является наличие максимума. Из таблицы и графика видно, что альфа-распад хорошо описывается формулой Пуассона.

Таблица

k	n_k	$np(k; 3{,}87)$
0	57	54,399
1	203	210,523
2	383	407,361
3	525	525,496
4	532	508,418
5	408	393,515
6	273	253,817
7	139	140,325
8	45	67,882
9	27	29,189
$k \geq 10$	16	17,075
Итого	2608	2608,000

С самого раннего детства Пуассон был связан с физикой колебаний. Связан, как ни удивительно это звучит, в буквальном смысле слова. Дело в том, что нянька маленького Симеона Дени, по-видимому, не отличалась особым прилежанием. Чтобы иметь с малышом поменьше хлопот, она обвязывала младенца вокруг пояса широким полотенцем и подвешивала его к большой горизон-

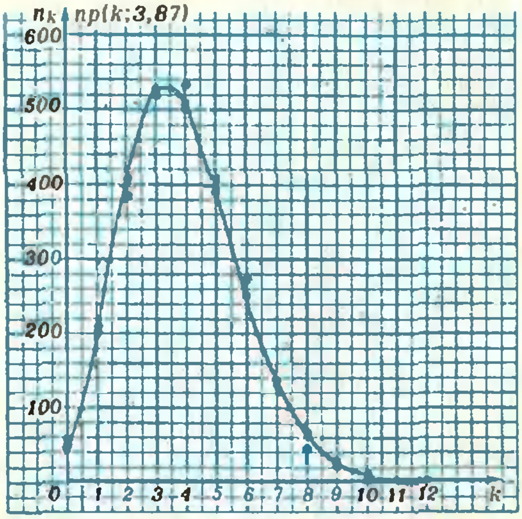


Рис. 1.

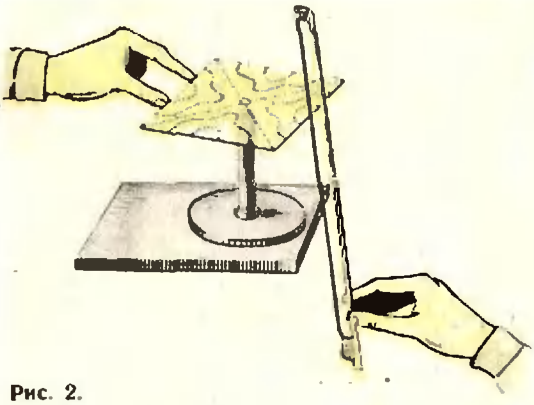


Рис. 2.

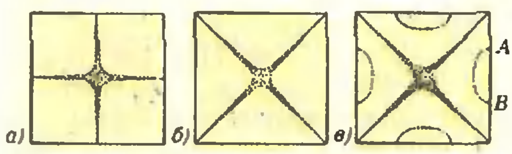


Рис. 3.

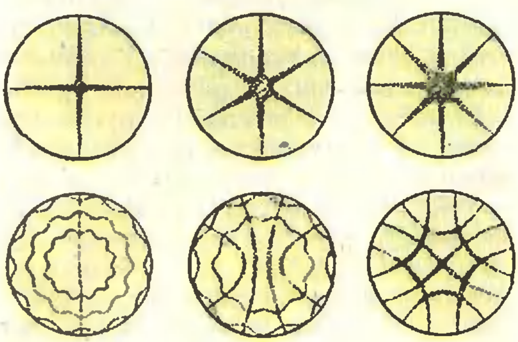


Рис. 4.

тальной балке. Так, качаясь в виде своеобразного маятника, маленький мальчик проводил много часов. Будучи взрослым, Пуассон шутил, говоря, что сам бог велел ему заниматься теорией колебаний.

Одна из решенных им в этой области задач касалась вычисления частот колебаний небольших металлических или стеклянных пластин, жестко закрепленных в одной точке. Опыты с такими пластинами проделывались немецким физиком Эрнстом Хладни, и первая информация о них относится к 1787 году. В 1809 году Хладни продемонстрировал эти опыты членам Французского Национального института (Академии наук). Все смотрели на них с изумлением, не сразу понял их смысл даже Лаплас.

Сами опыты заключались в следующем. На рисунке 2 показана закрепленная в центре пластинка, на которую сверху насыпался мелкий песок. Если слегка коснуться пластинки в той или иной точке рукой и одновременно возбудить колебания пластинки, проведя поперек нее смычком, то песок перераспределится, собираясь вдоль так называемых узловых линий. Простые картинки узловых линий на квадратной пластинке показаны на рисунке 3. В случае а) рука касалась пластинки в точке посередине одной из сторон квадрата; в случае б) — в одном из ее углов; в случае в) — в точках A и B. Характерно, что излучаемый пластинкой звук во втором случае выше, чем в первом, а в третьем — выше, чем во втором.

Не обязательно, конечно, проделывать опыты с квадратными пластинками; годятся для этой цели прямоугольные или круглые. На рисунке 4 приведены примеры песочных фигур, полученных самим Хладни на круглых пластинках (схема опыта та же самая). Наблюдаемые фигуры называются хладниевыми; они могут иметь и более сложную, но всегда достаточно симметричную конфигурацию.

По-видимому, нетрудно понять, что эти фигуры — двумерный аналог узлов и пучностей в одномерной стоячей волне. Точки, находящиеся на узловых линиях, покоятся. (Заметьте еще, что узловые линии обязательно проходят через те точки, в которых мы касаемся пластинки пальцами.) И, наверное, теперь вам уже стало ясно, что колебания, при которых получаются хладниевы фигуры, — поперечные по отношению к плоскости пластинки.

Заслуга Пуассона при объяснении хладниевых фигур состоит в том, что он установил связь частоты колебаний с числом узловых линий. Для частного случая, когда пластинка квадратная и хладниевы фигуры тоже образуют квадраты (такого типа, как на рисунке 3, a), квадрат частоты колебаний ω^2 пропорционален сумме $((m+1)^2+(n+1)^2)$, где m и n — числа взаимно перпендикулярных узловых линий, которыми разделяется пластинка.

В заключение рассмотрим еще один вопрос — о связи продольных и поперечных деформаций. Вспомним сначала закон Гука, с помощью которого можно рассчитать изменение длины образца под действием силы, растягивающей или сжимающей его. Если обозначить буквой ε относительное изменение длины стержня, а буквой σ — возникающее в нем напряжение, то для малых деформаций $\sigma = E\varepsilon$. Величина E называется модулем Юнга и определяется внутренней структурой материала стержня.

Другой важной характеристикой упругих свойств материала является коэффициент Пуассона, связывающий относительные изменения поперечных и продольных размеров деформируемого образца. В том, что одновременно с изменением продольных размеров меняются и поперечные, легко убедиться, если рассмотреть, например, деформацию резинового шнура или даже обыкновенного ластика. Возникает вопрос: насколько отличаются относительные деформации в разных направлениях, если к образцу приложена какая-то сила? Этот вопрос и был исследован Пуассоном. Рассмотрим цилиндрический стержень длины l и радиуса r. Представим себе, что вдоль оси стержня действует растягивающая сила. При этом в нем возникают напряжение σ_l и относительная деформация $\varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l} > 0$. Поперечные размеры стержня тоже изменяются — радиус цилиндра уменьшается на Δr. Радиальная относительная деформация $\varepsilon_r = \frac{\Delta r}{r}$ имеет знак, противоположный знаку ε_l. Коэффициент Пуассона есть $k = \left|\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_l}\right|$.

Проанализируем, в каких пределах может изменяться k. Сначала предположим, что объем деформируемого тела не изменяется, и запишем выражающее этот факт соотношение:

$$\pi(r+\Delta r)^2(l+\Delta l) = \pi r^2 l.$$

Раскрыв скобки и пренебрегая произведениями малых величин Δr и Δl, получим

$$r\Delta l + 2l\Delta r = 0,$$

или, другими словами,

$$\varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l} = -2\frac{\Delta r}{r} = -2\varepsilon_r.$$

Коэффициент Пуассона в этом случае равен $1/2$. На самом деле объем тела при растяжении увеличивается, и мы должны написать неравенство

$$(r+\Delta r)^2(l+\Delta l) > r^2 l.$$

Из этого неравенства вытекает, что $k < 1/2$. (Такое же неравенство справедливо и для тел нецилиндрической формы.) С другой стороны, по самому своему определению коэффициент Пуассона — число неотрицательное. Итак,

$$0 < k \leqslant 1/2.$$

Близкий к нулю коэффициент Пуассона имеет пробковое дерево: при растяжении (или сжатии) куска пробки поперечные размеры меняются мало (если, конечно, деформации не слишком большие!). Именно поэтому для закупоривания бутылок используют цилиндрические пробки из пробкового дерева. С другой стороны, цилиндрические резиновые пробки использовать для той же цели плохо — коэффициент Пуассона для резины близок к $1/2$, а, значит, поперечные размеры при продольном усилии меняются довольно существенно. Если заталкивать резиновую пробку в горлышко бутылки, она может просто застрять. Чтобы эту трудность обойти, резиновые пробки обычно изготовляют конической формы. Полезно отметить, наконец, что для материалов, чаще всего использующихся в технике — металлов, камня, бетона, значения коэффициента Пуассона заключены обычно между $1/4$ и $1/3$.

С. Шишков

Водоворот

На страницах «Кванта» уже не раз рассказывалось о вихревом движении. Достаточно упомянуть такие статьи, как «Вихревые кольца» Р. Вуда (1970, № 12), «Основы теории вихрей» Н. Е. Жуковского (1971, № 4), «Вихри, которые делают погоду» Л. Алексеевой (1977, № 8), «Модели смерча» В. Майера (1979, № 9), «О вихревых кольцах» С. Шабанова и В. Шубина (1979, № 11). Круг явлений, связанных с вихревым движением, исключительно многообразен, и нет никакой возможности осветить его полностью в рамках одной статьи. В перечисленных статьях особое внимание уделялось вихрям в воздухе — циклонам, смерчам, вихревым кольцам. В настоящей статье речь пойдет об одном из видов вихревого движения в воде — о водовороте.

О циклонах и...карусели

На детских площадках часто можно увидеть карусель — свободно вращающуюся горизонтальную платформу диаметром метра в четыре и с радиальными перилами. Игра на этой карусели требует определенной ловкости. Участники своими силами приводят платформу в быстрое вращение и запрыгивают на нее по краям. Затем по команде все устремляются к центру платформы, перебирая с усилием руками по перилам. При этом карусель начинает вращаться все быстрее и быстрее, и замешкавшийся участник уже практически не может последовать за остальными — от него требуются большие усилия, чтобы удержаться на своем месте.

Увеличение угловой скорости вращения можно объяснить по-разному. Читатель, знакомый с законом сохранения момента импульса, сразу поймет, в чем дело. Тот, кто умеет описывать движение в неинерциальной системе отсчета, может объяснить происходящее на языке сил инерции. Но качественное объяснение доступно каждому читателю. На краю платформы линейная (касательная) скорость ее точек и находящегося там участника игры большая. Чем ближе к центру — тем меньше эта скорость, так что, переходя от края к центру, участник, чтобы не упасть, должен уменьшать свою скорость. Достигается это за счет взаимодействия с платформой. Понятно, какое это взаимодействие — трение. Но возникающая сила трения, действуя на платформу, сообщает ей дополнительное ускорение, увеличивающее линейные скорости всех ее точек, — и угловая скорость вращения растет.

Оказывается, между детской игрой на карусели и такими явлениями природы, как возникновение атмосферных циклонов, образование воронки в стоке, существует некоторая аналогия. Поэтому мы будем, наблюдая движение воды в банке, говорить о карусели и делать выводы о поведении циклонов и водоворотов на море.

Наблюдение водоворота

Вихри и водовороты всегда привлекали внимание. В 30-х годах замечательный популяризатор физики Я. И. Перельман обратился к молодежи с призывом исследовать возникновение водоворотов при вытекании воды из ванны и, в частности, направление вращения этих водоворотов. Юные естествоиспытатели, последовавшие призыву, провели огромное количество наблюдений.

Надо заметить, однако, что ванна как «экспериментальное оборудование» обладает рядом недостатков.

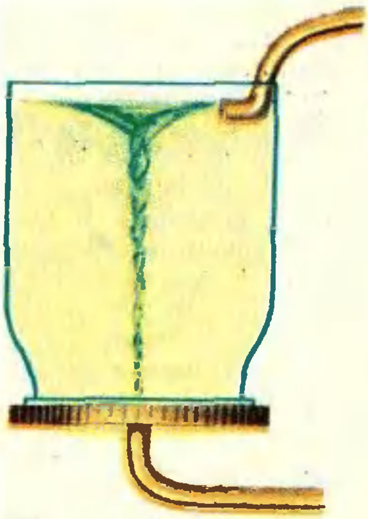


Рис. 1.

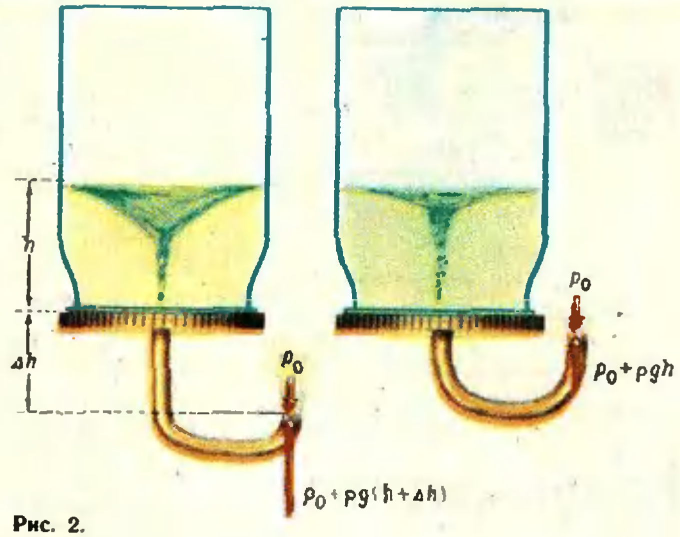


Рис. 2.

Например, она «мало» симметрична, наполнение ее каждый раз занимает много времени. Воронка образуется не сразу после начала вытекания воды, и почти совершенно невозможно управлять условиями опыта. В этом отношении более удобна цилиндрическая «малолитражная» установка из подручного материала, например такая, как на рисунке 1. Сосуд — перевернутая стеклянная банка с отрезанным дном; дно сосуда (бывшее горло) плотно закрыто (например, полиэтиленовой крышкой). В отверстие в центре дна вставлен сливной шланг; открывать и перекрывать слив можно с помощью зажима. Наливной шланг следует закрепить на внутренней стенке так, чтобы вода из него вытекала горизонтально и не вдоль радиуса сосуда; тогда при наполнении сосуда с самого начала будет возникать вращение воды.

Налейте в установку воду через наливной шланг и откройте слив. Через некоторое время станет заметен прогиб свободной поверхности воды, и, наконец, появится воронка.

Это явление отличается от детской игры на карусели лишь тем, что роль участников игры выполняют частицы жидкости; толкает их к центру перепад давления между периферией (атмосферное + гидростатическое давление) и отверстием в дне (атмосферное давление).

В равномерно вращающемся ведерке свободная поверхность воды также прогибается, но при этом все частицы жидкости (и на поверхности) вращаются с одной и той же угловой скоростью. А в воронке, которую мы только что наблюдали, угловая скорость возрастает по мере приближения к центру вращения.

Удобно исследовать установившийся водоворот; для получения такого водоворота надо при открытом сливе все время компенсировать расход воды, непрерывно добавляя воду из наливного шланга.

Водоворот можно наблюдать не только при вытекании воды, но и при наполнении сосуда (при закрытом сливе). Если в центр вращающейся жидкости (напомним, что наливной шланг крепится так, чтобы при наполнении сосуда вода вращалась) направить сильную тонкую струю, то возникает водоворот — так называемая «вторичная» воронка. Подумайте, чем отличаются условия в такой воронке от условий в водовороте, образующемся при сливе.

О расходе жидкости

Наладьте установку так, чтобы образовался установившийся водоворот. Опустите в такой водоворот вертикально кусок плотной бумаги так, чтобы он перегородил течение вращающейся воды, но не препятствовал вытеканию воды через слив. И вы увидите, что уровень воды быстро понизился на 1—2 см. Связано это с тем, что при наличии вихря расход жидкости уменьшается. В этом легко убедиться. Опустите наливной шланг так, чтобы вода втекала в сосуд вертикально. Тогда при том же напоре уровень воды будет понижаться.

Понятно, какой аналог этого явления можно продемонстрировать на детской карусели: при затрате одинаковых усилий участники игры добираются до центра вращающейся платформы гораздо медленнее, чем по неподвижной платформе.

Между водоворотом и расходом жидкости существует и обратная связь — от расхода зависит форма свободной поверхности жидкости в водовороте.

Наполните сосуд водой (при закрытом сливе) и отключите наливной шланг. Теперь откройте слив. Когда начнет формироваться воронка, поднимите свободный конец шланга, из которого вытекает вода. При этом нетрудно заметить, что прогиб свободной поверхности уменьшается с увеличением высоты конца шланга.

Поднимая конец шланга, мы уменьшаем перепад давления на выходе (рис. 2); в связи с этим уменьшается скорость истечения воды, ее расход. Почему же сглаживается воронка? Чтобы понять это, обратимся к карусели. Что произойдет, если участники игры будут передвигаться к центру вращающейся карусели очень медленно? Ясно, что из-за трения платформа остановится прежде, чем кто-нибудь доберется до центра. Сглаживание воронки происходит из-за наличия трения между слоями жидкости, дном и стенками сосуда. Чем медленнее убывает вода из сосуда, тем больше времени у сил трения на сглаживание воронки.

Осторожно — водоворот!

На речных и морских пляжах часто встречаются плакаты, разъясняющие правила поведения при купании. Имеются среди них и рекомендации на тот случай, если вдруг попадете в водоворот. Заключаются они в следующем: наберите в легкие побольше воздуха и пытайтесь удержаться на поверхности. Ценность этого совета не стоит определять, заплывая в настоящий водоворот. Некоторые сведения можно извлечь из наблюдения безопасного водоворота в банке.

С самого начала ясно, что наибольшую опасность представляет не вращение воды, а течение, засасывающее под воду. Водовороты бывают разных размеров. Исследуем сначала те из них, размеры которых сравнимы с размерами пловца. Для такого случая тело пловца, набравшего воздух, можно моделировать деревянным поплавком. Поместите поплавок на поверхность воды. Где бы он ни оказался, его неумолимо затягивает к центру, где он вращается очень быстро, но под воду все же не уходит. Однако стоит лишь слегка погрузить его грубже, как он попадает в плен мощного вертикального течения.

Рис. 3.

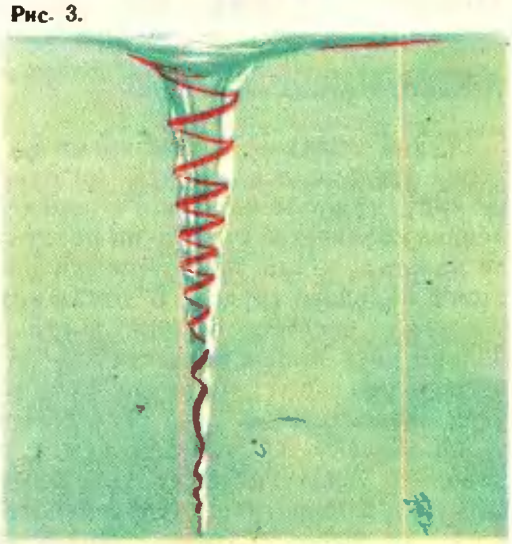


Рис. 4.

Иначе обстоит дело с большими водоворотами. Пловца теперь можно моделировать частицами краски, которые не могут перекрыть канал воронки, а двигаются по ее поверхности. Как показывают траектории движения частиц краски на фотографиях (рисунки 3 и 4 сделаны с таких фотографий), спастись из большого водоворота — задача более сложная. Один из вариантов решения этой задачи описан в известном рассказе Эдгара По «Низвержение в Мальстрем».

Таким образом, хотя пловец и не сможет покинуть водоворот самостоятельно, рекомендация содержит долю истины: попав в водоворот, не стоит тратить силы на попытки выбраться; гораздо полезнее успокоиться, набрать в легкие воздух и звать на помощь! (Но самое лучшее — «не лезть в воду, не зная броду»!)

«Усы» водоворота

Еще одно интересное явление, наблюдающееся в водовороте, — «усы». К сожалению, автору не удалось получить хорошей фотографии с «усами». Но вы увидите их отчетливо, если понаблюдаете за водоворотом в стоке ванны. Они несомненно привлекут ваше внимание своим неожиданным поведением. Первоначально «усы» воспринимаются как установившиеся линии тока. По мере вытекания воды они начинают вращаться, как бы наматываясь на невидимую ось водоворота. А в последний момент вы обнаружите, что вращение воды происходит вовсе не в сторону «наматывания усов».

Как появляются эти «усы»? В чем причина их обманчивого поведения?

Возможно, «усы» — застывшие капиллярно-гравитационные волны на пов.рхности воронки, подобные «гармошке» на струйке с преградой (об этой «гармошке» говорилось в статье С. Соскина «Капиллярные волны в струе» в 10-м номере «Кванта» за 1976 год). Если внести конец проволоки в воронку, то он возбуждает на поверхности 1—3 характерных «уса».

А может быть, все-таки существует какая-нибудь аналогия между «усами» водоворота и ...рукавами спиральных галактик? Ведь нередко природа поражает единством несоизмеримых по масштабам явлений.

На сегодняшний день вопрос об «усах» остается открытым. Может быть, Вы, читатель, выскажете свое мнение по этому вопросу?

Долго ли палке упасть?

(Окончание; начало см. на с. 10)

Таким образом, чтобы время падения увеличилось, скажем, на одну секунду, надо уменьшить ε в определенное количество раз. Но на практике каждый новый знак точности дается с большим трудом. В домашних условиях вообще трудно достичь больше двух знаков точности для любого физического параметра, будь то угол, скорость и т. п. Поэтому и время у нас получается колеблющемся в довольно узких пределах. Подобные ситуации в теоретической физике нередки; в таких случаях говорят о *логарифмической расходимости*.

Задачи

Во всех предложенных задачах к полу шарнирно прикреплен легкий стержень длины l с маленьким тяжелым шариком массы m на конце.

1. Покажите, что время T, определяемое формулой (2), удовлетворяет оценкам

$$c_1-c_2 \ln \varepsilon < T < c_3-c_4 \ln \varepsilon,$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 не зависят от ε, $c_2>0$, $c_4>0$.

2. В начальный момент стержень вертикален, и шарику придана начальная скорость v в горизонтальном направлении. Выведите формулу времени падения стержня, содержащую интеграл. Собственный ли это интеграл (то есть ограничена ли подынтегральная функция на промежутке интегрирования)? К чему он стремится при $v\to 0$? Оцените время падения сверху и снизу выражениями вида const — const · ln v, где знаки const означают различные константы.

3. В начальный момент стержень неподвижен и образует с вертикалью угол β. Выведите формулу времени падения стержня, содержащую интеграл. Собственный ли это интеграл? Конечен ли он? К чему он стремится при $\beta\to 0$? Оцените время падения сверху и снизу выражениями вида const — const · ln β.

Задачник Кванта

Задачи

M726—M730; Ф738—Ф742

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 30 апреля 1982 года по адресу: 117071, Москва, B-71, Ленинский проспект, 15, «Физматлит», «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 2 — 82» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M726, M727» или «Ф738». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Квант», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

M726. Точка внутри правильного $2n$-угольника соединена с вершинами. Возникшие $2n$ треугольников раскрашены попеременно в голубой и красный цвет. Докажите, что сумма площадей голубых треугольников равна сумме площадей красных а) для $n=4$, б) для $n=3$, в) для произвольного натурального n.

В. Прасолов

M727. Докажите неравенство

$$a^2+b^2+c^2+2abc<2,$$

где a, b, c — длины сторон треугольника периметра 2.

И. Жаров

M728. Пусть A, B, C — вершины параллелепипеда, соседние с его вершиной P, а Q — вершина, противоположная P. Докажите, что а) расстояние от точек A, B, C до прямой PQ могут служить длинами сторон некоторого треугольника; б) площадь S этого треугольника, объем V параллелепипеда и длина d его диагонали PQ связаны соотношением $V=2dS$.

И. Шарыгин

M729. Найдите натуральное число, обладающее таким свойством: если записать рядом его квадрат и его куб, а затем переставить написанные цифры в обратном порядке, получится шестая степень этого числа.

Н. Васильев

M730*. Последовательность (a_n) определяется условиями

$$a_1=0,\ a_{2n+1}=a_{2n}=n-a_n.$$

(Например, $a_{10}=5-a_5=5-a_4=5-(2-a_2)=$ $=3+(1-a_1)=4$.)

а) Выпишите первые 20 членов последовательности и найдите a_{1982}.

б) Докажите, что каждое натуральное число входит в последовательность 2 или 4 раза. Сколько раз встретится в ней число 2^k (при каждом $k=1, 2, 3, \ldots$)?

в) Докажите, что разность a_n-a_{n-1} равна 1, если в разложение числа n на простые множители число 2 входит в нечетной степени, и 0 — в противном случае.

г) Докажите, что $a_n = n/3$ для бесконечного множества значений n.

д) Найдется ли n такое, что разность $|a_n - n/3|$ больше 1982?

е) Докажите, что $\lim a_n/n = 1/3$.

В. Шевелев

Ф738. Частицы движутся гуськом с постоянными скоростями. Скорости частиц равномерно возрастают от значения v_1 в голове колонны до значения v_2 в хвосте колонны. В некоторый момент частицы занимают отрезок длины l_0 и при этом на единицу длины приходится n_0 частиц. Сколько частиц спустя время t будет приходиться на единицу длины в хвосте колонны? в голове колонны?

И. Воробьев

Ф739. В цилиндрический сосуд высоты H с площадью основания S из горизонтально расположенной трубы ежесекундно вливается масса воды M. В основании сосуда имеется небольшое отверстие. На поверхности воды в сосуде лежит тонкая легкая губка (рис. 1). С некоторого момента высота уровня воды в сосуде становится постоянной и равной h_0. Определить, с какой скоростью вытекает при этом вода из отверстия.

И. Омелян

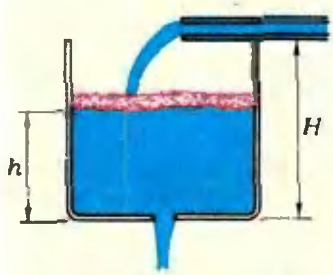


Рис. 1.

Ф740. В сосуде находится смесь газов — гелия и кислорода. При температуре $t = -2°$ С и давлении $p = 0{,}9$ атм плотность этой смеси $\rho = 0{,}44$ кг/м^3. Каким станет давление в сосуде, если из него удалить половину молекул кислорода?

Ф741. В сеть переменного тока с напряжением 220 В и частотой 50 Гц подключены последовательно два конденсатора с емкостью 1 мкФ каждый. Параллельно одному из конденсаторов включен резистор с сопротивлением $R = 100$ кОм (рис. 2). Найти тепловую мощность.

А. Зильберман

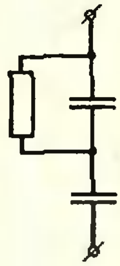


Рис. 2.

Ф742. Стеклянный сосуд прямоугольного сечения установлен между двумя собирающими линзами с фокусными расстояниями F перпендикулярно оптической оси линз (рис. 3). Точечный источник света S расположен в фокальной плоскости линзы $Л_1$. Когда сосуд пустой, изображение источника наблюдается на экране $Э$, расположенном в фокальной плоскости линзы $Л_2$. Сосуд заполняют прозрачной жидкостью, показатель преломления которой меняется с высотой по закону $n(y) = n_0 + \alpha y$. Толщина слоя жидкости равна L. На сколько сместится по вертикали изображение источника на экране? Изменение показателя преломления с глубиной сосуда считать малым в пределах диаметра светового пучка.

В. Можаев

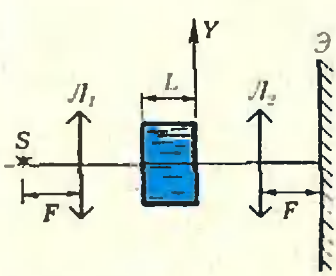


Рис. 3.

Problems M726—M730; P738—P742

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications.

The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than April 30th to the following address: USSR, Moscow, 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Физматлит», «КВАНТ». Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well as solutions of problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. The list of prizewinners is published in the September issue.

If you have an original problem to propose for publication, please send it to us in two copies (including the solution) in an envelope inscribed "NEW PROBLEM IN PHYSICS (MATHEMATICS)".

M726. A point inside a regular polygon is joined to its $2n$ vertices, forming $2n$ triangles alternatively painted blue and red. Prove that the total area of the blue triangles equals that of the red if a) $n=4$; b) $n=3$; c) n is arbitrary.

V. Prasolov

M727. Prove the inequality

$$a^2+b^2+c^2+2abc<2$$

when a, b, c are the sides of a triangle of perimeter 2.

I. Jarov

M728. Suppose A, B, C are the three neighbouring vertices of the vertex P of a parallelepipedon, while Q is the opposite vertex. Prove that a) the distances from the points A, B, C to the line PQ can serve as the sides of a triangle b) the area S of this triangle, the volume V of the parallelepipedon and the length d of its diagonal PQ satisfy the relation $V=2Sd$.

I. Sharygin

M729. Find a natural number with the foll o wing property: if its square and cube are written in succession and the digits rewritten in reverse order, then the sixth power of the number is obtained.

N. Vasiliev

M730*. The sequence (a_n) is defined by the relations

$$a_1=0,\ a_{2n+1}=a_{2n}=n-a_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

$$(\text{e. g. } a_{10}=5-a_5=5-a_4=5-(2-a_2)=3+(1-a_1)=4).$$

a) Write out the first 200 terms of the sequence and compute a_{1982}.
b) Prove that each natural number appears in the sequence either twice or four times. How many times will each of the numbers 2^k $(k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ occur?
c) Prove that the difference a_n-a_{n-1} equals 1 if the factor 2 appears to an odd power in the decomposition of n into prime factors and 0 in the converse case.
d) Prove that $a_n=n/3$ for an infinite set of values of n.
e) Is there an n such that the difference $|a_n-n/3|$ exceeds 1982?
f) Prove that $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/n=1/3$.

V. Shevelev

P738. Particles are moving one after the other with constant velocities. At the initial moment of time the length of the column of particles is l_0, there are n_0 particles in a unit of length of the column and the velocities increase uniformly from the value v_1 at the head of the column to the value v_2 at the end of it. How many particles will there be after time t in a unit of length at the head of the column? at its end?

I. Vorobiev

P739. Water is poured in through a horizontal pipe (M units of mass flow in per second) into a cylindrical receptacle of height H and base area S. In the base of the receptacle there is a small hole. A light thin sponge covers on the water's surface (see figure Рис. 1). At a certain moment of time the water level becomes constant and equal to h_0. Determine the speed with which the water then pours out of the hole.

I. Omelian

P740. A receptacle contains a mixture of gases — helium and oxygen. At temperature $t=-2°$C and pressure $p=0.9$ atm, the mixture's density is $\rho=0.44$ kg/m^3. What will the pressure in the receptacle be, if half the oxygen molecules are removed?

P741. An alternating current circuit of frequency 50 Hz and voltage 220 V includes two consecutive condensers of capacity 1 mcF each. A resistor of fesistance $R=100$ kOhm is installed parallel to one of the condensers (see figure Рис. 2). Find the heating power.

A. Zilberman

P742. A glass receptacle of rectangular section is placed between two convergent lenses of focal distances F, perpendicularly to the lenses' optical axis (see figure Рис. 3, p. 26). A point light source S is located in the focal plane of the lens $Л_1$. When the receptacle is empty, the image of the source may be observed on the screen $Э$ located in the focal plane of the lens $Л_2$. The receptacle is filled with a transparent liquid whose refraction index varies with height in accordance to the rule $n(y)=n_0+\alpha y$. The thickness of the layer of water is L. What will the vertical displacement of the image on the screen be? The change of the refraction index within the diameter of the light beam may be assumed negligible.

V. Mojaev

Решения задач

М686 — М690; Ф698 — Ф702

М686. *Для любого ли числа $x>1$ верно равенство*

$$\left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right]=\left[\sqrt{\sqrt{x}}\right]?$$

(Здесь через $[y]$ обозначена целая часть числа y.)

Ответ: для любого.

Пусть a — натуральное число, для которого $a^4\leqslant x<(a+1)^4$. Тогда $a^2\leqslant\sqrt{x}<(a+1)^2$. Отсюда, с одной стороны, $a\leqslant\sqrt{\sqrt{x}}<a+1$, $\left[\sqrt{\sqrt{x}}\right]=a$. С другой стороны, $a^2\leqslant[\sqrt{x}]<(a+1)^2$, $a\leqslant\sqrt{[\sqrt{x}]}<a+1$, $\left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right]=a$.

Г. Гальперин

◆

М687. *а) В девятиугольной пирамиде все 9 боковых ребер и все 27 диагоналей основания окрашены: некоторые — в красный цвет, остальные — в синий. Докажите, что существуют три вершины пирамиды, служащие вершинами треугольника, все стороны которого окрашены в одинаковый цвет.*
б) Верно ли аналогичное утверждение для восьмиугольной пирамиды?

а) Среди девяти боковых ребер пирамиды найдутся пять окрашенных в какой-то один цвет (например, в красный). Пусть A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 — концы этих ребер, занумерованные подряд. Одна из сторон пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$ является диагональю основания (пусть, для определенности, это A_1A_2). Рассмотрим треугольник $A_1A_2A_4$; его стороны — диагонали основания. Если он одноцветный, то все доказано. Если нет, то одна из его сторон (диагоналей основания) — красная, и поэтому будет одноцветным треугольник, образованный этой диагональю и боковыми ребрами, соединяющими ее концы с вершиной пирамиды.

б) Ответ: неверно. Пример получается, если четыре идущих подряд ребра окрашены в красный цвет, а остальные четыре ребра — в синий, причем концы красных ребер соединены синими диагоналями, концы синих — красными. (Сообразите, как нужно раскрасить остальные диагонали.)

Н. Ненов

◆

М688. *Даны натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такие, что $a_k\leqslant k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ и сумма $a_1+a_2+\ldots+a_n$ четна. Докажите, что одно из выражений $a_1\pm a_2\pm a_3\pm\ldots\pm a_n$ равно нулю.*

Докажем что утверждение индукцией по n.

Для $n=2$ оно очевидно, так как единственный возможный набор $a_1=a_2=1$.

Пусть для набора меньше чем из $n+1$ чисел, оно доказано; докажем его для $n+1$ чисел.

Возьмем произвольный набор $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ из $n+1$ чисел, удовлетворяющий условию. Если $a_n=a_{n+1}$, то сумма $a_1+\ldots+a_{n-1}$ четна; учитывая предположение индукции, заключаем, что одна из сумм $a_1\pm a_2\pm\ldots\pm a_{n-1}+a_n-a_{n+1}$ равна нулю. Если же $a_n\neq a_{n+1}$, заменим данный набор набором $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, |a_n-a_{n+1}|$ из n чисел. Для нового набора выполнены все условия: число $|a_n-a_{n+1}|$ имеет ту же четность, что и a_n+a_{n+1}, поэтому сумма новых n чисел по-прежнему четна; из $a_n\neq a_{n+1}$, $1\leqslant a_n\leqslant n$ и $1\leqslant a_{n+1}\leqslant n+1$ вытекает $1\leqslant|a_n-a_{n+1}|\leqslant n$. По предположению индукции одна из сумм $a_1\pm a_2\pm a_3\pm\ldots\pm|a_n-a_{n+1}|$ равна нулю. Остается «раскрыть модуль». В любом случае $|a_n-a_{n+1}|=\pm(a_n-a_{n+1})$, и мы получаем, что одно из выражений $a_1\pm a_2\pm a_3\pm\ldots\pm a_n\pm a_{n+1}$ равно нулю (при этом в нашем решении перед a_{n+1} и a_n всегда стоят разные знаки).

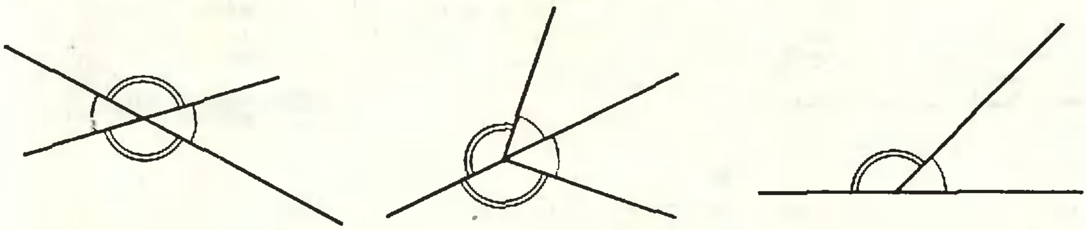
С. Ненашев

◆

М689. *Докажите, что из одинаковых плиток, имеющих форму равнобедренных трапеций с основаниями 3 см, 1 см и высотой 1 см, нельзя составить прямоугольник.*

Предположим, что прямоугольник удалось составить из n трапеций. Отметим точки, в которые попадают вершины трапеций, в том числе — четыре вершины прямоугольника.

У каждой трапеции два острых угла (по 45°) и два тупых (по 135°), так что у всех n трапеций вместе одинаковое число острых и тупых углов — по $2n$.



С другой стороны, ясно, что в каждой из отмеченных точек расположено не меньше острых углов, чем тупых (если там есть о д и н тупой угол, то есть по крайней мере один острый, а если — д в а тупых, то — и два острых — см. рисунок); при этом в вершинах прямоугольника могут оказаться только острые углы трапеций. Таким образом, острых углов больше, чем тупых (по крайней мере, на 8).

Полученное противоречие доказывает невозможность составления прямоугольника из трапеций.

Н. Васильев

◆

М690. а) *Внутри выпуклого многоугольника площади S_1 и периметра P_1 расположен выпуклый многоугольник площади S_2 и периметра P_2. Докажите неравенства*

$$2\frac{S_1}{P_1}>\frac{S_2}{P_2}.$$

б) *Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для выпуклых многогранников.*

а) Заметим сначала, что для треугольников справедливо более сильное утверждение: $\frac{S_1}{P_1}>\frac{S_2}{P_2}$. Это почти очевидно, так как $\frac{2S_1}{P_1}$ и $\frac{2S_2}{P_2}$ — радиусы кругов, вписанных в эти треугольники.

Для доказательства общего утверждения воспользуемся двумя фактами, которые мы докажем ниже:

1) *во всякий выпуклый многоугольник площади S и периметра P можно поместить круг радиуса $R>\frac{S}{P}$*;

2) *для любого круга, содержащегося в данном многоугольнике, $R<\frac{2S}{P}$.*

Из 1) и 2) сразу следует утверждение а): поместим во внутренний многоугольник круг радиуса $R>\frac{S_2}{P_2}$; поскольку $R<\frac{2S_1}{P_1}$, получаем требуемое.

Д о к а ж е м 1). Построим на каждой стороне (выпуклого) многоугольника прямоугольник с высотой $h=\frac{S}{P}$ (рис. 1; S — площадь, P — периметр многоугольника). Эти прямоугольники перекрываются; они могут даже «вылезать» за пределы многоугольника. Поскольку суммарная площадь прямоугольников равна S, площадь покрытой ими части многоугольника меньше S. Поэтому найдется непокрытая точка, удаленная от всех сторон на расстояние $R>h$.

Д о к а ж е м 2). Пусть O — центр круга радиуса R, содержащегося в многоугольнике (рис. 2). Поскольку длины высот треугольников с вершиной O, основаниями которых служат стороны многоугольника, не меньше R, получаем

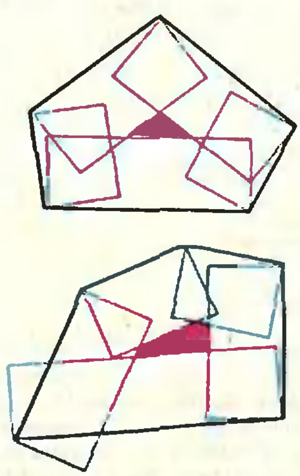


Рис. 1.

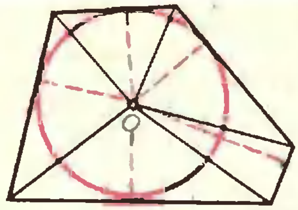


Рис. 2.

Рис. 3.

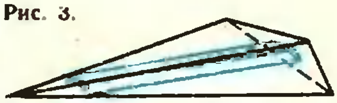


Рис. 4.

$S > \frac{1}{2}PR$. Поэтому $R < \frac{2S}{P}$. (Заметим, что если для какого-то круга, содержащегося в многоугольнике, $R = \frac{2S}{P}$, то этот круг в п и с а н в многоугольник — докажите это!).

В пространственном случае (см. б)) можно доказать, что если *выпуклый многогранник объема* V_1 *и площади поверхности* S_1 *содержит выпуклый многогранник объема* V_2 и площади поверхности S_2, *то* $3\frac{V_1}{S_1} > \frac{V_2}{S_2}$.

Доказательство получается заменой слов: *периметр — площадь поверхности, площадь — объем, круг — шар, треугольник — пирамида, прямоугольник — призма.* Заметим, что константы 2 (для плоского случая) и 3 (для пространственного) нельзя заменить меньшими. Примеры, подтверждающие это, показаны на рисунках 3 и 4 (узкий прямоугольник внутри узкого длинного треугольника и узкая призма внутри узкой высокой пирамиды).

А. Келарев

◆

Ф698. *На некотором производстве детали перемещают с помощью двух транспортеров, ленты которых движутся во взаимно перпендикулярных направлениях с одинаковыми по абсолютной величине скоростями* v_0 *(рис. 1). При этом деталь, въезжая на транспортер II, останавливается на середине ленты. Скорость транспортера II увеличили в n раз. Как надо изменить скорость транспортера I, чтобы детали по-прежнему останавливались на середине ленты транспортера II? Размерами деталей пренебречь; считать, что переход на транспортер II происходит без удара.*

Рассмотрим движение детали в системе отсчета, связанной с лентой транспортера *II* (в этой системе лента транспортера *II* неподвижна).

Скорость детали, попадающей на транспортер *II*, равна $u = v_0\sqrt{2}$ и направлена под углом $\alpha = 45°$ к стороне ленты. Остановка детали происходит в результате действия силы трения $F = \mu mg$ (m — масса детали). Условие остановки

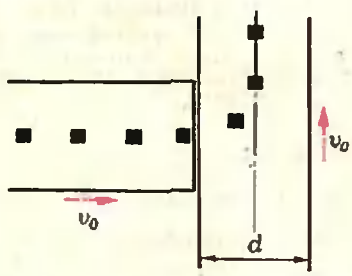


Рис. 1.

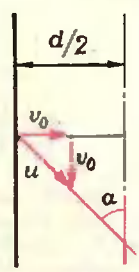


Рис. 2.

на середине ленты (рис. 2) —

$$\frac{d}{2\sin\alpha}\mu mg = \frac{mu^2}{2} = mv_0^2. \qquad (1)$$

Если лента транспортера *II* движется со скоростью nv_0, то скорость детали, попадающей на транспортер, равна $u_1 = \sqrt{v_x^2 + n^2v_0^2}$, где v_x — скорость, с которой движется лента транспортера *I*. Угол, который составляет вектор $\vec{u}_1$ со стороной ленты транспортера, равен $\alpha_1 = \arcsin\frac{v_x}{\sqrt{v_x^2+n^2v_0^2}}$. Условие остановки детали на середине ленты —

$$\frac{d}{2\sin\alpha_1}\mu mg = \frac{mu_1^2}{2} = \frac{m}{2}(v_x^2 + n^2v_0^2). \qquad (2)$$

Решая совместно (1) и (2), находим:

$$v_x = v_0\sqrt{\sqrt{\frac{n^4}{4}+2} - \frac{n^2}{2}}.$$

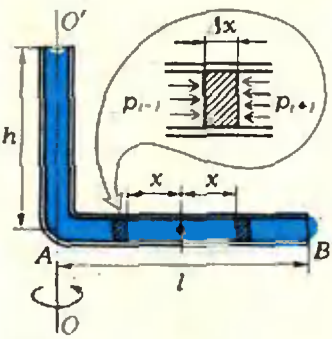
А. Омельянчук

◆

Ф699. *Изогнутый капилляр радиуса r, полностью заполненный жидкостью, вращается вокруг вертикальной оси OO′. При какой угловой*

При вращении капилляра мениск в вертикальном колене становится вогнутым, а в горизонтальном — выпуклым. Предельные формы менисков (когда вода еще не выливается) — полусферы. В этот момент давление в точке B (см. рисунок) равно $p_B = 2\sigma/r$, а в точке A — $p_A = \rho gh - 2\sigma/r$.

скорости вращения жидкость начнет выливаться из капилляра? Плотность жидкости ρ, поверхностное натяжение σ, жидкость полностью смачивает капилляр; размеры капилляра указаны на рисунке.



Пусть ω — предельная угловая скорость вращения капилляра. Разобьем мысленно горизонтальное колено на N отрезков малой длины $\Delta x = l/N$ ($\Delta x \ll l$). Рассмотрим два малых элемента массы воды $\Delta m = \pi r^2 \rho \cdot \Delta x$, находящихся на расстояниях x от середины колена (см. рисунок). Запишем уравнения движения этих элементов:

$$\Delta m \cdot \omega^2 \left(\frac{l}{2} - x\right) = (p_{i+1} - p_{i-1})\pi r^2,$$

$$\Delta m \cdot \omega^2 \left(\frac{l}{2} + x\right) = (p_{q+1} - p_{q-1})\pi r^2,$$

где p_{i-1} (p_{q-1}) и p_{i+1} (p_{q+1}) — давление на эти элементы соответственно слева и справа. Число таких пар, очевидно, равно $N/2$. Просуммировав все аналогичные уравнения, получим

$$\frac{N}{2} \cdot \Delta m \cdot \omega^2 l = (p_B - p_A)\pi r^2 \Rightarrow \frac{\rho\omega^2 l^2}{2} = \frac{4\sigma}{r} - \rho g h.$$

Отсюда находим ω:

$$\omega = \sqrt{\frac{8\sigma/r - 2\rho g h}{\rho l^2}}.$$

А. Буздин

Ф701.*) *На рисунке 1 показано распределение температуры вдоль тонкого однородного теплоизолированного стержня в некоторый момент времени. Как будет меняться распределение температуры в дальнейшем? Какое распределение установится через достаточно долгое время?*

◆

Процесс перераспределения температуры заканчивается выравниванием температуры по всей длине стержня. Поскольку стержень теплоизолирован, его внутренняя энергия останется неизменной. Нетрудно понять, что площадь под кривой распределения температур на любом промежуточном этапе будет оставаться постоянной. Следовательно, температуру $t_у$ стержня, которая установится через достаточно долгое время (рис. 2), можно определить из условия

$$t_у \cdot 90 = 2(200 \cdot 30) + 100 \cdot 30.$$

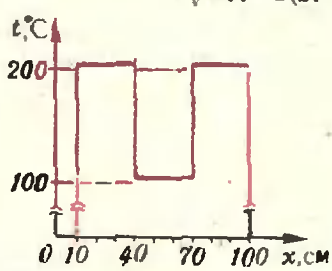


Рис. 1.

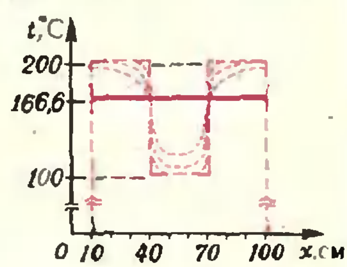


Рис. 2.

Отсюда находим

$$t_у = 166{,}6\,°C.$$

В начале процесса выравнивания температуры наиболее заметные изменения будут на границах между областями с наибольшим различием температур. В средней части стержня (40÷70 см на рисунке 2) температура будет повышаться, приближаясь к 166,6°С, а в боковых частях (10÷40 см и 70÷100 см на рисунке) — понижаться, приближаясь к этой температуре.

О. Савченко

*) Решение задачи Ф700 — в заметке С. Кротова «От теореме единственности в электростатике» (с. 32).

Ф702. *Две системы, каждая из которых состоит из двух одинаковых масс m, связанных пружинкой жесткости k, движутся по гладкой горизонтальной поверхности на-*

◆

Через время $t_1 = L/2v_0$ произойдет столкновение масс I и I'. Поскольку соударение абсолютно упругое, сразу после удара скорость каждой из этих масс останется прежней по абсолютной величине, но поменяет направление на противоположное, а скорости масс II и II' не изменятся (рис. 2). Следовательно, сразу после соударения в каждой системе *встречу друг другу с одинаковыми по величине скоростями v_0. В некоторый момент времени расстояние между системами равно L (рис. 1). Определить время, через которое расстояние между теми же массами снова будет равно L. Столкновение систем считать абсолютно упругим.*

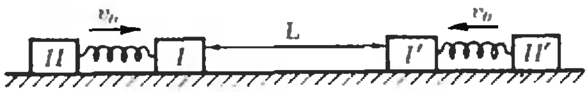


Рис. 1.

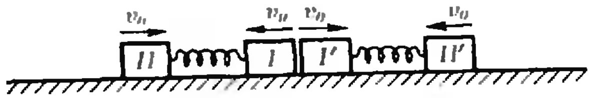


Рис. 2.

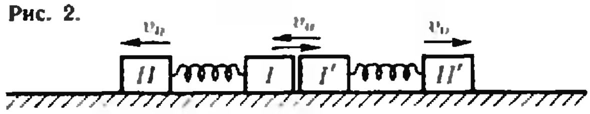


Рис. 3.

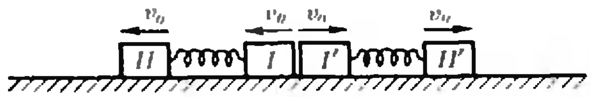


Рис. 4.

начнутся гармонические колебания. Взаимные колебания двух одинаковых масс, связанных пружинкой с жесткостью k, эквивалентны колебаниям каждой массы на пружинке в два раза меньшей длины, то есть имеющей жесткость $2k$. Период колебаний в каждой системе будет равен $T=2\pi\sqrt{m/2k}$. Через время $t_2=T/2=\pi\sqrt{m/2k}$ массы окажутся вновь в положении равновесия. При этом скорости масс I и I' будут равны v_0 и направлены навстречу друг другу, а скорости масс II и II' будут иметь противоположные направления (рис. 3). Произойдет упругое столкновение масс I и I'. Сразу после столкновения массы в каждой системе будут иметь равные по величине v_0 и одинаково направленные скорости (рис. 4). С этого момента системы начнут удаляться друг от друга. Через время $t_3=L/2v_0$ расстояние между массами I и I' будет равно L.

Итак, время, через которое взаимное расположение систем будет вновь таким, как на рисунке 1, равно

$$t=t_1+t_2+t_3=\frac{L}{v_0}+2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

В. Можаев

С. Кротов

О теореме единственности в электростатике

Напомним некоторые условия, которые выполняются при равновесном распределении зарядов в проводнике. Наличие практически неограниченного числа свободных носителей тока (электронов) приводит к тому, что электрическое поле в толще проводника отсутствует (иначе не прекратилось бы перетекание зарядов внутри проводника). Проводник, таким образом, образует область постоянного значения потенциала. Линии электрического поля всегда перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям, в частности — внешней поверхности проводника. Еще одним фактом, справедливым для проводников любой формы, является то, что весь сообщенный проводнику заряд располагается на его поверхности (в противном случае внутри проводника существовало бы поле).

Теперь рассмотрим проводник, которому сообщили положительный заряд Q. Уместно поставить вопрос: *единственным ли образом весь этот заряд сможет растечься по поверхности проводника?* Ответ на этот вопрос составляет содержание так называемой теоремы единственности в электростатике, обсуждению которой и посвящена данная заметка.

Предположим, что заряд Q может растечься по проводнику двумя способами, то есть существуют два различных распределения заряда Q на поверхности проводника. Будем обозначать эти распределения P_1 и P_2. Очевидно, что если этому же проводнику (незаряженному) сообщить отрицательный заряд $-Q$, то среди его равновесных распределений по поверхности проводника будут распределения P_1' и P_2', которые отличаются от P_1 и P_2 лишь тем, что знаки соответствующих зарядов в данном месте поверхности изменены на противоположные. Действительно, силами взаимодействия в конфигурации P_1 (P_2) являются силы взаимного отталкивания зарядов, «сидящих» на поверхности. Изменение знаков всех зарядов оставляет эти силы неизменными, поэтому каждый элементарный поверхностный заряд будет в равновесии; при этом электрическое поле в каждой точке пространства вне проводника лишь изменит направление на противоположное. Таким образом, конфигурация P_1' (P_2') также будет равновесной.

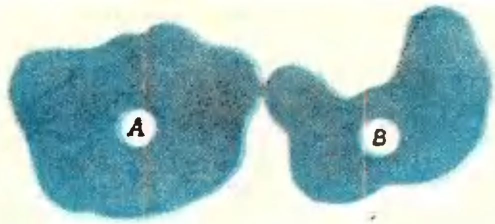
Рассмотрим далее такую ситуацию. Сообщенный проводнику заряд Q принял распределение P_1. «Заморозив» это распределение, поместим на проводник заряд $-Q$ так, чтобы он принял распределение P_2'. Если теперь суммарный заряд проводника (равный нулю) предоставить самому себе, то, согласно принципу суперпозиции, система будет находиться в равновесии и никакого перетекания заряда по поверхности проводника не произойдет. Итак, общий заряд проводника оказался равным нулю; при этом на поверхности проводника обязательно найдутся разноименно заряженные области: A_1, заряженная положительно, и B_1, заряженная отрицательно. Рассмотрим силовую линию, выходящую из области A_1. Поскольку проводник уединенный, то эта силовая линия либо кончается на нем, либо уходит на бесконечность. В первом случае точки начала и конца силовой линии (принадлежащие проводнику) должны иметь разные потенциалы (почему?), чего не может быть. Остается второй случай. Аналогично, рассмотрев одну из силовых линий, приходящих к проводнику в области B_1, мы придем к выводу, что она пришла из бесконечности. Мы считаем, что бесконечность имеет фиксированный потенциал; но тогда потенциал области A_1 выше потенциала бесконечности, а потенциал бесконечности выше потенциала области B_1, то есть различные области проводника имеют разные потенциалы. Но это противоречит условию равновесия зарядов на поверхности проводника.

Итак, предположение о возможности двух различных равновесных распределений заряда было неверным. *Заряд на проводнике может распределиться единственным образом.* Если в конкретной задаче нам удалось у г а д а т ь равновесное расположение зарядов, то это и будет ответ.

Рассмотрим в свете сказанного решение задачи Ф700. Напомним ее условие:

Ф700. *Имеются два проводника A и B произвольной формы. Первоначально на проводнике A имеется заряд Q, а проводник B не заряжен. Проводники приводят в соприкосновение (см. рисунок), и на проводник B перетекает заряд q. Соприкасающимся проводникам сообщают дополнительно некоторый заряд q_x, и в результате на проводнике A оказывается заряд q. Определить заряд q_x.*

Два соприкасающихся проводника A и B представляют собой уединенный проводник $(A+B)$. Заряд, сообщенный этому проводнику, равен Q. Рассмотрим малый элемент Δs поверхности проводника, на котором в результате равновесного распределения заряда Q по поверхности проводника $(A+B)$ установилась плотность заряда σ. Если бы проводнику $(A+B)$ (незаряженному) сообщили заряд Q', то установившаяся плотность заряда σ' на Δs удовлетворяла бы следующему соотношению:



$$\frac{\sigma'}{\sigma}=\frac{Q'}{Q}.$$

Действительно, сила, действующая на заряженный элемент Δs поверхности проводника $(A+B)$ со стороны других заряженных областей поверхности, определяется как сумма сил взаимодействия данного элемента поверхности со всеми остальными. Поскольку пространственное расположение проводников осталось неизменным (это важный момент), взаимные расстояния между элементарными зарядами (зарядами отдельных элементов поверхности $(A+B)$) также остались неизменными, а изменились лишь величины самих взаимодействующих зарядов. Поэтому каждая из сил попарного взаимодействия элементарных зарядов изменилась в одно и то же число раз — в $(Q'/Q)^2$ раз. Таким образом, каждая элементарная область поверхности по-прежнему будет находиться в равновесии.

Из приведенных рассуждений следует, что, какой бы заряд ни сообщался контактирующим проводникам A и B (проводнику $(A+B)$), отношение заряда q_A, распределяющемуся на проводнике A, к заряду q_B, распределяющемуся на проводнике B, остается неизменным (разумеется, при неизменном взаимном расположении контактирующих проводников).

Первоначально, когда на проводнике $(A+B)$ распределен заряд Q,

$$\frac{q_A}{q_B}=\frac{Q-q}{q}. \qquad (1)$$

При сообщении проводнику $(A+B)$ дополнительного заряда q_x

$$\frac{q_A}{q_B}=\frac{q}{Q+q_x-q}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) находим q_x:

$$q_x=Q\frac{2q-Q}{Q-q}.$$

Задачи республиканских олимпиад

Накануне математических олимпиад, которые будут проходить в большинстве союзных республик в дни весенних каникул, мы предлагаем нашим читателям познакомиться с некоторыми задачами, предлагавшимися на республиканских олимпиадах в прошлом году.

1. Некоторые клетки бесконечного листа клетчатой бумаги окрашены в белый цвет, остальные — в красный. Назовем клетку особенной, если ее цвет отличен от цвета хотя бы одной из восьми окружающих ее клеток. Докажите, что всегда найдется хотя бы 9 особенных клеток.

2. Докажите, что для любых чисел p и q суммарная длина отрезков оси Ox, на которых выполняется неравенство

$$|x^2+px+q|<2,$$

не превосходит 4.

3. Всюду определенная функция f при любых x и y удовлетворяет соотношению $f(xy)=f(x)\cdot f(y)-f(x+y)+1$, причем $f(1)=2$. Найдите:

а) $f(m)$ для произвольного целого m;

б) $f\left(\frac{m}{n}\right)$ для произвольного рационального числа $\frac{m}{n}$.

4. На прямой даны точки A, B и C, причем B лежит между A и C. На отрезках AB, BC и AC, как на диаметрах, построены полуокружности, лежащие по одну сторону от этой прямой. Перпендикуляр к (AC), проведенный через точку B, пересекает большую полуокружность в точке D.

а) Докажите, что общая касательная двух меньших полуокружностей, отличная от (BD), параллельна касательной к большей полуокружности, проведенной через точку D.

б) Докажите, что точки B, D и точки касания меньших полуокружностей с их общей касательной являются вершинами прямоугольника.

5*. Учитель написал на доске многочлен степени 3. Один из учеников прибавил к этому многочлену его производную, либо вычел ее — по своему желанию. Полученный многочлен он написал на листке бумаги и передал его другому ученику. Тот ученик проделал с новым многочленом — опять-таки, по своему усмотрению, — одну из указанных выше двух операций (прибавление или вычитание производной) и листок с результатом передал следующему ученику, и так далее.

Через некоторое время у одного из учеников получился тот же самый многочлен, который был написан учителем на доске. Докажите, что хотя бы один из учеников ошибся.

6. По трем веткам дерева — по трем некомпланарным лучам с общим началом O — ползут три жука, A, B и C. В каждый момент времени расстояния от жуков до точки O удовлетворяют соотношениям

$$\frac{1}{|OB|}-\frac{1}{|OA|}=1,$$

$$\frac{1}{|OC|}-\frac{1}{|OB|}=1.$$

Докажите, что существует прямая l такая, что плоскость (ABC) в любой момент времени проходит через l.

7. На двух одинаковых бумажных кругах художник нарисовал двух совершенно одинаковых драконов. На одном рисунке глаз дракона совпал с центром круга, а на втором не совпал. Докажите, что второй круг можно разрезать на части так, что из них можно сложить тот же круг с тем же драконом, у которого глаз находится в центре круга.

8. Внутри данного угла расположены две точки A и B. Постройте параллелограмм, у которого две противоположные вершины совпадают с A и B, а две другие лежат на сторонах данного угла.

9. Найти длину стороны наименьшего квадрата, в котором можно поместить без наложений три круга радиусов 1, $\sqrt{2}$, 2.

10. Докажите, что множество чисел 1,2,3,...,1413, 1414 можно разбить на группы так, чтобы сумма чисел в каждой группе равнялась 1981.

11. По трем параллельным дорожкам с постоянными скоростями бегут спортсмены A, B, C. В некоторый момент времени площадь треугольника ABC равнялась 2 м², а через 5 секунд стала равной 3 м². Как изменится эта площадь еще через 5 секунд?

12. Доказать, что для произвольных n различных натуральных чисел a_1, a_2, ..., a_n выполняется неравенство

$$\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{a_1+a_2+\ldots+a_n}\geqslant\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{1+2+\ldots+n}.$$

13. Докажите, что если для всех $x\in]-1;1[$ выполняется неравенство

$$|a_1\sin b_1x+a_2\sin b_2x+\ldots+a_n\sin b_nx|<|\sin x|,$$

то

$$|a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n|<1.$$

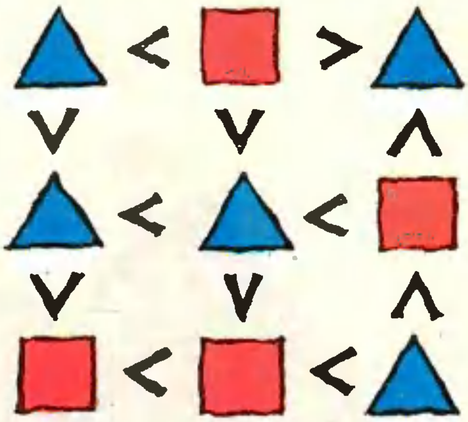
14. Существует ли многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $P(19)=P(81)=1981$, а $P(1981)$ равняется 19 или 81?

15. Докажите, что если выражение

$$2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}$$

привести к общему знаменателю, то его числитель будет делиться на 13.

Квант для младших школьников



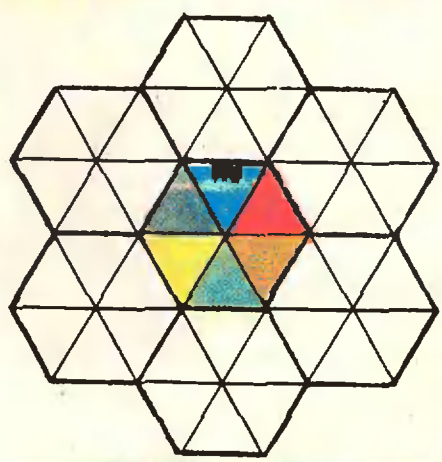
Задачи

1. В треугольники и квадраты, изображенные на рисунке, впишите первые девять натуральных чисел, причем в треугольники — нечетные числа, в квадраты — четные числа так, чтобы все двенадцать соотношений «больше-меньше» были верными.

2. Можно ли из двенадцати одинаковых брусков с квадратным сечением сделать каркас куба?

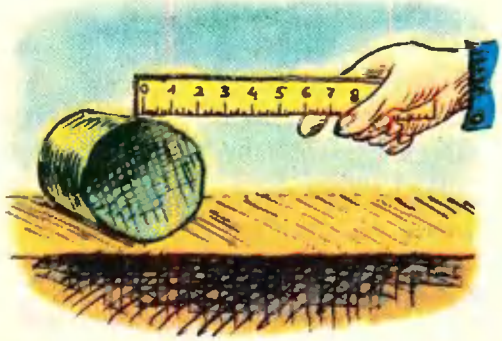
3. При стрельбе по мишени спортсмен несколько раз попал в десятку, столько же раз выбил по 8 очков и несколько раз попал в пятерку. Всего он набрал 99 очков. Сколько выстрелов сделал спортсмен?

4. На доске написано несколько ненулевых чисел, каждое из которых равно полусумме остальных. Сколько чисел написано?



5. Из семи правильных шестиугольников один раскрашен шестью красками (см. рисунок). Раскрасьте остальные шестиугольники теми же красками так, чтобы в «цветке», изображенном на рисунке, все треугольные участки, граничащие по сторонам шестиугольников, были окрашены одинаково.

6. Двигая горизонтальную линейку, положенную ребром на цилиндр, мы перекатываем (без проскальзывания) цилиндр по столу (см. рисунок). В начальный момент нулевое деление линейки находилось над точкой касания цилиндра и стола. Где будет нулевое деление линейки после того, как цилиндр прокатится на 5 см?



Эти задачи нам предложили
Н. Авилов, С. Дворянинов, Л. Купцов, А. Савин, А. Халамайзер, А. Швецов.

Ф. Бартенев, А. Савин

Метод перебора

Рассказывают, что однажды племянник Шерлока Холмса Джек обратился к своему знаменитому дяде с просьбой помочь в решении следующей задачи*): *Купили несколько одинаковых книг и одинаковых альбомов. За книги заплатили 10 руб. 56 коп. Сколько купили книг, если цена одной книги более чем на 1 рубль превосходит цену альбома, а книг купили на 6 больше, чем альбомов?*

Прочтя условия, знаменитый сыщик прошел от стола к окну, затем вернулся к столу, постоял около него, уставившись в потолок, и, наконец, сказал: «Книг было куплено 8 штук».

«Как вы это установили?» — в один голос воскликнули Джек и присутствовавший при этом мистер Уотсон.

«О, это было совсем просто! — ответил Шерлок Холмс, усаживаясь в кресло.— Посмотрев на слова «книг купили на 6 больше, чем альбомов», я тут же понял, что книг купили не меньше 7. Из того, что «цена одной книги более чем на 1 рубль превосходит цену альбома», я сделал вывод, что каждая книга стоит больше 1 рубля, а поскольку за них заплачено 10 руб. 56 коп., книг купили не больше 10. Таким образом, все числа, большие 10, и все числа, меньшие 7, оказались вне подозрений. Проверив каждое из чисел 7, 8, 9, 10, я установил, что искомое число может быть только 8: остальные не делят 1056».

Метод перебора, которым воспользовался здесь Шерлок Холмс, видимо, является древнейшим из методов решения задач. Долгое время его относили к методам «второго сорта», «переборные» решения считались некрасивыми. Однако в последние годы метод перебора применяется все чаще и чаще в задачах, где искомая величина принимает только целочисленные значения.

*) В такой формулировке задача в действительности давалась на приемных экзаменах по математике на физическом факультете МГУ (1968 г.).

Перебор ведет ЭВМ

Известно много серьезных задач, которые математики не могут решать иначе, чем методом перебора. Правда, при этом перебор производит электронная вычислительная машина, а математик лишь инструктирует ее, как этот перебор нужно сделать. Известный американский математик С. Голомб пишет по этому поводу*): «В отличие от человека машина, решая задачи, производит однообразные вычисления, которые кажутся нам столь скучными, с невообразимой быстротой. Но вместе с тем она не заметит способа упростить или улучшить решение, если этот способ не будет заранее учтен программистом, составляющим детальные инструкции для работы ЭВМ».

Тем не менее в последние годы рост быстродействия и объема памяти компьютеров, их большая доступность и дешевизна позволяют все чаще использовать их для решения переборных задач. Так, знаменитая «задача о четырех красках» (*Всякую ли географическую карту можно раскрасить четырьмя красками так, чтобы страны одинакового цвета не имели общих участков границы?*) была решена — очень хитрым перебором — лишь при помощи ЭВМ. Недавно одна из наиболее известных задач о полимино из книги С. Голомба тоже была решена методом перебора с участием компьютера.

Турист укладывает рюкзак

К числу задач, решаемых методом перебора, относится так называемая «задача об укладке рюкзака»: *Уложить в рюкзак предметы из заданного набора так, чтобы их суммарная масса была наибольшей (и суммарный объем не превосходил объема рюкзака).*

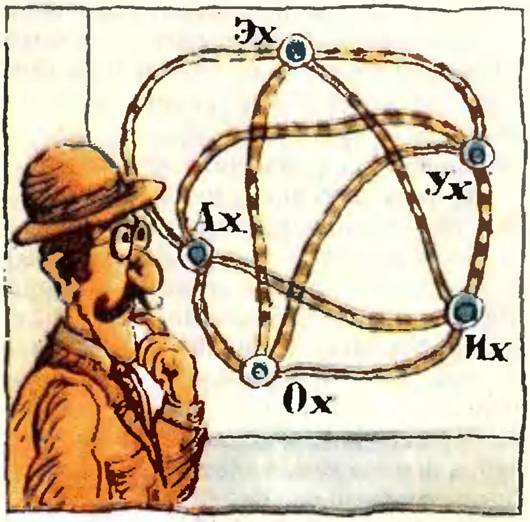
В такой постановке задача выглядит игрушечной, но замените «рюкзак» на «отсек в трюме теплохода» и вы поймете, что эта задача имеет существенное народнохозяйственное значение.

Упражнение 1. Решите задачу об укладке рюкзака для рюкзака объемом 100 дм^3 и предметов, указанных в таблице.

Предмет	Вес	Объем
Палатка	20	60
Спальн. мешок	5	55
Одеяло	8	32
Радиоприемник	2	20
Кулек с едой	10	8
Мяч	0,5	10
Топор	3	2

Коммивояжер отправляется в путь

Другой широко известной задачей, решаемой перебором вариантов, является «задача коммивояжера»*): *Как объехать несколько городов, между каждыми двумя из которых имеется железнодорожное сообщение, затратив как можно меньше времени, если задан город, в котором начинается и кончается путь?*



Уже для 5 городов количество вариантов равно 24, для 6 городов их 120, для семи — 720, для десяти — 362880. Чтобы избежать полного перебора, математики придумали различные ухищрения**). Делается это не зря — решение подобной задачи необходимо для нахождения наилучшего маршрута для фургона, развозящего журналы и газеты по киоскам, автобуса, под-

*) С. В. Голомб. «Полимино» (М., «Мир», 1975).

*) Коммивояжер — путешествующий представитель торговой фирмы.

**) См., например, «Квант», 1978, № 6, с. 11.

бирающего сельских жителей на работу, и т. п.

Упражнение 2. На рисунке показана карта местности, на которой расположены 5 городов: Ах, Ох, Эх, Ух и Их, а в таблице указаны расстояния между ними по железной дороге. Найдите кратчайший путь коммивояжера, который должен выехать из города Ух, объехать остальные города и вернуться в Ух.

	Ах	Их	Ох	Ух	Эх
Ах	0	60	40	50	20
Их	60	0	30	35	45
Ох	40	30	0	55	50
Ух	50	35	55	0	20
Эх	20	45	50	20	0

Сократим перебор

Для решения подобных задач были созданы сложные методы, сокращающие перебор вариантов. Они составляют новую математическую науку, которая носит название «целочисленное программирование».

Некоторое представление о возможностях сокращения перебора может дать решение такой задачи: *Известно, что* $\sqrt[3]{****3}$ *есть натуральное число. Найдите его.*

Первое, что приходит в голову, — это перебирать пятизначные числа, оканчивающиеся на 3, и смотреть, нет ли среди них точных кубов: 10003, 10013, 10023,... Но когда еще мы доберемся до 99993, да и как узнать, является данное число кубом или нет?

Лучше будем возводить число в куб и посмотрим, какие из них будут пятизначными и оканчивающимися на 3. Получим $1^3=1$, $2^3=8$, $3^3=27$, $4^3=64$, $5^3=125$, $6^3=216$, $7^3=343$, $8^3=512$, $9^3=729$, $10^3=1000$.

Так дело тоже не пойдет. Зачем нам нужны кубы маленьких чисел? Посмотрим, чему равно наименьшее число x, куб которого является пятизначным числом. Оно не меньше чем $\sqrt[3]{10000}=10\sqrt[3]{10}$, но $\sqrt[3]{10}$ больше 2, так как $2^3=8$; поэтому x больше 20. Оценим искомое число сверху, то есть посмотрим, какого числа оно не может превышать. Такое число, очевидно, равно $\sqrt[3]{100\,000}=10\sqrt[3]{100}$. Но $\sqrt[3]{100}$ меньше 5, так как $5^3=125$. Значит, нужно перебирать числа от 21 до 49.

Посмотрим, не поможет ли нам сократить перебор то, что число под радикалом оканчивается на 3. Изучим выписанные нами кубы первых десяти натуральных чисел. Из них на 3 оканчивается лишь 7. Если теперь немножко подумать, то нетрудно сообразить, что куб натурального числа будет оканчиваться на 3 в том и только в том случае, если само число оканчивается на 7.

Теперь нам осталось для перебора лишь три числа: 27, 37 и 47. $27^3=19683$, $37^3=50653$, $47^3=103823$, но последнее число уже шестизначное, поэтому остаются лишь числа 27 и 37.

Упражнения

3. В составлении 40 задач (для школьников) приняло участие 30 студентов (пединститута) со всех пяти курсов. Любые два однокурсника придумали одинаковое число задач. Любые студенты разных курсов придумали разное число задач. Сколько студентов придумало по одной задаче?

4. Сколькими нулями может оканчиваться число 9^n+1?

5. В буфете продавались пирожки по 5 коп., бублики по 6 коп., булки по 7 коп., слойки по 8 коп., и коржики по 10 коп. Группа ребят купила на рубль 14 изделий разных видов. Если взять по одному представителю каждого купленного вида, то их суммарная цена будет равна 21 коп. Сколько и каких изделий было куплено, если дополнительно известно, что никаких изделий не было куплено больше шести и никаких изделий не было куплено поровну?

6. Найдите два целых положительных числа, разность между квадратами которых равна 455.

7. Студент за 5 лет учебы сдал 31 экзамен. В каждом следующем году он сдавал экзаменов больше, чем в предыдущем. На пятом курсе экзаменов было втрое больше, чем на первом. Сколько экзаменов было на четвертом курсе?

В. Скороваров

Переменный электрический ток

Переменный ток широко используется в промышленности (на заводах и фабриках) и в обычной осветительной сети.

Известно, что для постоянного тока выполняется закон Ома — сила тока в однородном участке цепи прямо пропорциональна приложенному напряжению. В цепях переменного тока сила тока также зависит от напряжения источника, но уже по более сложному закону, поскольку и напряжение и ток с течением времени изменяются. Закон изменения напряжения может быть сколь угодно сложным, но наибольшее распространение и практическое применение получили источники, напряжение которых изменяется по гармоническому закону. Например, по такому:

$$u=U_м \cos \omega t,$$

где $U_м$ — амплитуда напряжения, ω — циклическая частота, $\omega t=\varphi$ — фаза колебаний. Заметим, что в нашей стране на всей ее территории принята частота $\nu=\omega/2\pi=50$ Гц.

Электрическая цепь переменного тока состоит из источника тока и различных элементов таких, как лампы накаливания, электронагревательные приборы, конденсаторы, катушки, электродвигатели, трансформаторы.

Основной задачей изучения переменного тока является расчет электрических цепей, то есть определение силы тока при заданном напряжении источника тока и заданных параметрах элементов цепи.

В общем случае ток в цепи, как и напряжение источника, изменяется со временем по гармоническому закону

$$i=I_м \cos(\omega t+\varphi).$$

Амплитуда тока $I_м$ и сдвиг фаз φ между током и напряжением зависят от параметров данной цепи.

Рассмотрим сначала простейшие электрические цепи, состоящие из источника и одного элемента — активного сопротивления, конденсатора или катушки. При подключении к источнику активного сопротивления в цепи возникает переменный ток, амплитуда которого равна амплитуде напряжения, деленной на активное сопротивление: $I_{Rм}=U_м/R$, а фаза совпадает с фазой напряжения. В цепи с конденсатором ток по фазе опережает напряжение на $\pi/2$, а амплитуда тока $I_{Cм}=U_м\omega C$, где C — емкость конденсатора. Ток, возникающий в катушке с индуктивностью L, отстает по фазе от напряжения на $\pi/2$, а его амплитуда $I_{Lм}=U_м/(\omega L)$.

Расчет электрических цепей удобно вести с помощью векторных диаграмм токов и напряжений. Построим векторные диаграммы для рассмотренных простейших случаев (рис. 1). Начнем с известного вектора напряжения $\vec{U}_м$ и расположим его горизонтально. Поскольку ток через активное сопротивление совпадает по фазе с напряжением, вектор тока $\vec{I}_{Rм}$ направим так же, как и вектор $\vec{U}_м$. Ток в цепи с конденсатором опережает напряжение по фазе на четверть периода; следовательно, вектор тока $\vec{I}_{Cм}$ следует направить вертикально вверх. Наконец, ток в катушке отстает от напряжения на

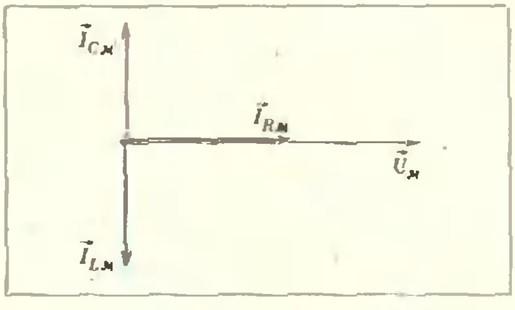


Рис. 1.

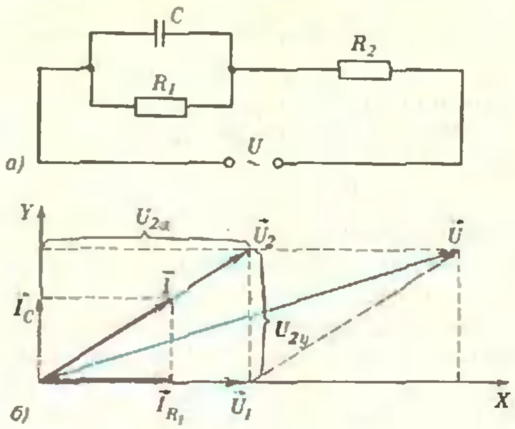


Рис. 2.

$\pi/2$, поэтому вектор тока $\vec{I}_{Lm}$ должен быть направлен вертикально вниз.

Заметим, что все соотношения, полученные для амплитуд токов и напряжений, справедливы и для их действующих значений. Векторные диаграммы можно также строить, используя действующие значения токов и напряжений.

Теперь разберем такую задачу:

З а д а ч а 1. *Определите силу тока в цепи, изображенной на рисунке 2, а. Параметры элементов цепи и напряжение источника питания считайте заданными.*

Сначала рассмотрим участок цепи, содержащий параллельно соединенные резистор сопротивлением R_1 и конденсатор емкостью C. Построим для него векторную диаграмму, считая напряжение $\vec{U}_1$ на этом участке известным (рис. 2, *б*). Получим, что ток в цепи равен сумме токов через первый резистор и конденсатор:

$$\vec{I}=\vec{I}_{R1}+\vec{I}_C.$$

Амплитуда этого тока равна

$$I=\sqrt{I_{R1}^2+I_C^2}=\sqrt{\left(\frac{U_1}{R_1}\right)^2+(U_1\omega C)^2}=$$

$$=U_1\sqrt{\frac{1}{R_1^2}+(\omega C)^2}. \qquad (1)$$

Такой же ток протекает и через резистор сопротивлением R_2, поэтому напряжение на нем равно

$$U_2=IR_2.$$

Очевидно, что векторная сумма $\vec{U}_1$ и $\vec{U}_2$ равна напряжению $\vec{U}$ на зажимах источника:

$$\vec{U}_1+\vec{U}_2=\vec{U}.$$

Спроектируем вектор $\vec{U}_2$ на оси координат X и Y и найдем

$$U_{2x}=U_1\frac{R_1}{R_2},\quad U_{2y}=U_1R_1\omega C.$$

Из векторной диаграммы видно, что

$$U^2=(U_1+U_{2x})^2+U_{2y}^2,$$

или

$$U=U_1\sqrt{\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)^2+(R_1\omega C)^2}. \qquad (2)$$

Окончательно из равенств (1) и (2) получим

$$I=U\sqrt{\frac{1+(R_2\omega C)^2}{(R_1+R_2)^2+(R_1R_2\omega C)^2}}.$$

* * *

Большое практическое значение имеет мощность, выделяющаяся в электрических цепях. В случае постоянного тока для любого участка цепи мощность определяется произведением напряжения на силу тока. Мощность переменного тока зависит от действующих значений тока и напряжения, а также от сдвига фаз между током и напряжением на этом участке:

$$P=UI\cos\varphi,$$

где $\cos\varphi$ — коэффициент мощности.

Как известно, для того чтобы получить максимальную мощность от источника постоянного тока, к нему нужно подключить нагрузку, сопротивление которой равно внутреннему сопротивлению источника. Источник переменного тока тоже обладает внутренним сопротивлением, причем оно носит не только активный, но и индуктивный характер. Интересно знать, какую же нагрузку нужно подключить, чтобы получить максимальную активную мощность в цепи переменного тока. Ответ на этот вопрос дает следующая задача:

З а д а ч а 2. *Какими должны быть параметры нагрузки для того, чтобы мощность, потребляемая нагрузкой, была максимальной? Активное сопротивление источника R, его индуктивность L.*

Поскольку мощность, выделяемая на нагрузке, зависит от сдвига фаз между током и напряжением, естественно предположить, что последовательно с активным сопротивлением нагрузки должен быть включен конденсатор (чтобы скомпенсировать сдвиг фаз, создаваемый индуктивностью источника).

Обозначим через $\mathscr{E}$ электродвижущую силу источника, через $R_н$ — активное сопротивление нагрузки и через C — емкость конденсатора. Тогда в цепи будет течь ток

$$I=\frac{\mathscr{E}}{\sqrt{(R_н+R)^2+(\omega L-1/\omega C)^2}},$$

и на нагрузке будет выделяться активная мощность

$$P=U_нI\cos\varphi=I^2R_н=$$
$$=\frac{\mathscr{E}^2R_н}{(R_н+R)^2+(\omega L-1/\omega C)^2}.$$

Очевидно, что при любом значении $R_н$ мощность будет наибольшей, если выполняется равенство

$$\omega L-\frac{1}{\omega C}=0.$$

Значит, емкость конденсатора должна быть равна

$$C=\frac{1}{\omega^2L}.$$

При этом мощность равна

$$P=\frac{\mathscr{E}^2R_н}{(R_н+R)^2}.$$

Чтобы найти максимум мощности в зависимости от сопротивления $R_н$, приравняем к нулю производную от P по $R_н$:

$$P'(R_н)=\frac{\mathscr{E}^2((R_н+R)^2-2R_н(R_н+R))}{(R_н+R)^4}=0.$$

Отсюда

$$R_н=R, \quad \text{и} \quad P_{max}=\frac{\mathscr{E}^2}{4R}.$$

Заметим, что мы получили точно такие же соотношения, что и для постоянного тока.

* * *

Особое место в цепях переменного тока занимает трансформатор. Это — устройство, которое передает электрическую энергию из одной цепи в другую и при этом преобразовывает величины токов и напряжений. Отсюда и происходит название «трансформатор», то есть «преобразователь». Принцип действия трансформатора основан на явлении электромагнитной индукции, так что он может работать только на переменном токе.

Трансформатор состоит из замкнутого ферромагнитного сердечника, на который намотаны две (иногда и больше) катушки из медной проволоки. Катушки часто называют обмотками трансформатора. Одна из них, первичная, подключается к источнику, другая, вторичная, — к нагрузке. (Впрочем, такое разделение обмоток является условным, потому что в зависимости от режима работы подключение может быть и противоположным.) Катушки могут быть намотаны на сердечник двояко: в одну сторону или в разные стороны. В зависимости от этого напряжения на обмотках будут изменяться в одинаковых или в противоположных фазах. Для определенности условились различать начало и конец обмотки и считать, что в любой момент времени напряжения между началом и концом каждой обмотки имеют одинаковую полярность. На рисунках и чертежах начало обмотки обычно отмечают звездочкой.

Расчет электрической цепи с реальным трансформатором представляет большие трудности. Для упрощения рассмотрим так называемый идеальный трансформатор. (Заметим, что результаты расчетов идеального и реального трансформаторов практически совпадают.) Во-первых, будем считать, что обмотки не имеют активного сопротивления, поэтому падения напряжения в них равны нулю, и выполняется равенство

$$\frac{U_1}{U_2}=\frac{\mathscr{E}_1}{\mathscr{E}_2}=\frac{n_1}{n_2}=K.$$

Здесь U_1 и U_2 — напряжения, $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ — ЭДС индукции, n_1 и n_2 — число витков в первичной и вторичной обмотках соответственно; $K=n_1/n_2$ — коэффициент трансформации. Во-вторых, не будем учитывать потерь энергии на выделение тепла не только в обмотках, но и в сердечнике трансформатора. А это означает, что мощность, которая поступает в первичную обмотку, равна мощности, которая уходит из вторичной обмотки в нагрузку, или, другими словами, сумма поступающей и уходящей мощностей равна нулю:

$$U_1I_1+U_2I_2=0,$$

где I_1 и I_2 — токи в первичной и вторичной обмотках соответственно.

Из двух равенств получаем

$$I_1 n_1 + I_2 n_2 = 0.$$

Важность этой простой формулы поясняет следующая задача:

Задача 3. *Трансформатор, имеющий число витков в первичной обмотке n_1, а во вторичной n_2, подключен к источнику переменного тока с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением $R_в$. Нагрузка с сопротивлением $R_н$ подключена так, как показано на рисунке 3. Определите напряжение на нагрузке.*

Обозначим через U_1 и U_2, I_1 и I_2 действующие значения напряжений и токов в первичной и вторичной обмотках соответственно, а через I_0 — действующее значение тока в источнике. Пусть в некоторый момент времени токи направлены так, как изображено на рисунке 3. Тогда

$$I_0 R_в = \mathcal{E} - U_1,\quad I_2 R_н = U_1 - U_2,$$
$$I_0 = I_1 + I_2,\quad \frac{U_1}{U_2} = \frac{n_1}{n_2},\quad I_1 n_1 + I_2 n_2 = 0.$$

Первые три равенства ничем не отличаются от аналогичных равенств для цепей постоянного тока и записаны с учетом правила знаков для ЭДС, токов и падений напряжения. Знаки напряжений на обмотках выбираются в зависимости от положения начала и конца обмотки. Условились напряжение считать положительным, если при обходе соответствующего контура сначала встречается конец обмотки. Так, если контуры первичной и вторичной цепей данного трансформатора обходить, например, по часовой стрелке, то напряжения U_1 в первом и U_2 во втором уравнениях действительно должны быть записаны со знаком «минус». В четвертом уравнении знаки U_1 и U_2 берутся всегда положительными. Знаки токов в обмотках в пятом уравнении выбираются так: ток считается положительным, если он направлен от начала обмотки к ее концу, и отрицательным — в противоположном случае.

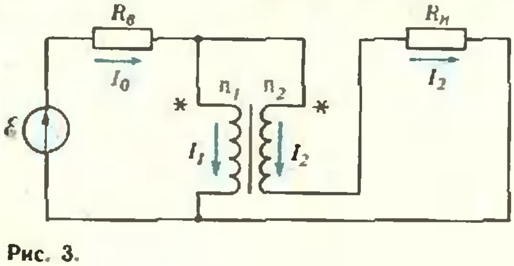


Рис. 3.

Объединив все пять уравнений в систему и решив ее, найдем ток I_2, а значит, и напряжение на нагрузке:

$$U_н = I_2 R_н = \mathcal{E}\,\frac{R_н n_1 (n_1 - n_2)}{(n_1 - n_2)^2 R_в + R_н n_1^2}.$$

Упражнения

1. Определите силу тока в цепи, показанной на рисунке 4. Напряжение источника питания и параметры элементов цепи считайте заданными.

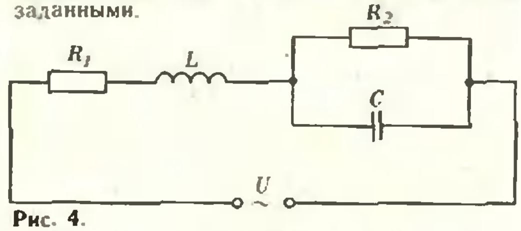


Рис. 4.

2. Цепь, состоящая из двух одинаковых резисторов сопротивлением R, катушки индуктивностью L и конденсатора емкостью C, подключена, как показано на рисунке 5, к генератору синусоидального тока переменной частоты. Найдите соотношения между параметрами элементов цепи, при которых цепь будет вести себя как резистор, имеющий только активное сопротивление, на любой частоте.

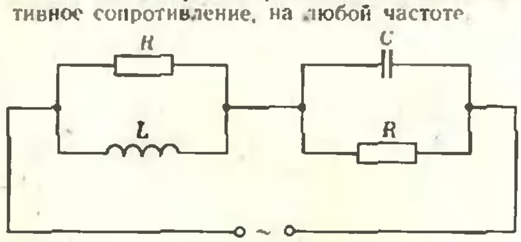


Рис. 5.

3. При передаче электрической энергии на большие расстояния индуктивность линии снижает передаваемые мощности. Считая, что генератор электростанции создает ЭДС $\mathcal{E}$, линия передачи имеет индуктивность L, а напряжение на приемной системе должно быть U, определите максимальную активную мощность, которую можно передать в этом случае.

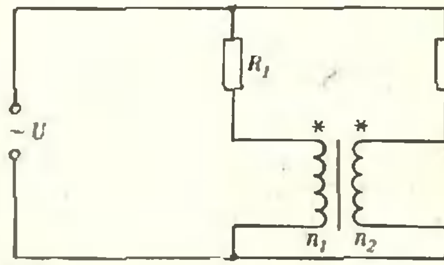


Рис. 6.

4. Трансформатор, имеющий число витков в первичной обмотке n_1, а во вторичной n_2, и два резистора с сопротивлениями R_1 и R_2 подключены к источнику переменного тока с напряжением U так, как показано на рисунке 6. Определите напряжения на обмотках трансформатора и токи через резисторы.

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2=(x-a)y \\ y^2-xy=9ax. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$(6x-5)|\ln(2x+2{,}3)|=8\ln(2x+2{,}3).$$

3. Решите уравнение

$$\frac{3\cos 5x-2(\cos 6x+\cos 4x)}{3\sin 5x-2(\sin 6x+\sin 4x)}=\lg 17x.$$

4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $(AA_1\|BB_1\|CC_1\|DD_1)$ с ребром длины a точка K — середина ребра AB, точка L — середина ребра DD_1. Найдите стороны треугольника A_1KL и определите, в каком отношении делит объем куба плоскость, проходящая через вершины этого треугольника.

5. Изобразите на плоскости множество точек $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} 2y>x^2 \\ y<-2x^2+3x. \end{cases}$$

Докажите, что для всякой такой точки $(x; y)$ выполняется неравенство $x^2+y^2<2$.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$9^{\lg(x-a)-\lg 2}=3^{\lg(x-1)}.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{2\cos^2 x+4\sin(x+1)}=\sqrt{4\sin x\cdot\cos 1-\sin 2x}.$$

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=(3x^2-7x+7)e^x$$

на отрезке $\left[0; \frac{2}{3}\right]$.

4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $(AA_1\|BB_1\|CC_1\|DD_1)$ последовательно соединены середины ребер AA_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1C, CD, DA и AA_1. Докажите, что полученная фигура есть правильный шестиугольник и определите его площадь по ребру куба a.

5. Для каких чисел из множества $A=\{1, 2, 3\}$ неравенство

$$2\sin x\cdot\cos y\cdot\sin z-\cos x\cdot\sin y\cdot\cos z<a$$

выполняется для всех значений x, y, z?

Физика

Задачи устного экзамена

1. Два груза одинаковой массы $M=400$ г связаны невесомой нитью, перекинутой через блок массой $m=100$ г, и находятся на одинаковом расстоянии от блока (рис. 1). На один из грузов кладут перегрузок массой m. С какой скоростью v будет двигаться обод блока, когда расстояние между грузами будет $h=1$ м, если на каждый из грузов массой M действует одинаковая средняя сила сопротивления $F_c=0{,}17$ Н? Считать, что масса блока сосредоточена в его ободе. Силами сопротивления, действующими на блок, нить и перегрузок, пренебречь. Проскальзывание между блоком и нитью отсутствует.•

2. Стержень длиной l и массой m одним концом упирается в вертикальную стену, а другой его конец удерживается с помощью нити, длина которой равна длине стержня (рис. 2). При каких углах α стержень будет находиться в равновесии, если коэффициент трения между стержнем и стеной $\mu=0{,}3$?

3. В двух половинах цилиндра, разделенных поршнем, находятся одинаковые массы M азота при одинаковой температуре. Затем масса азота в одной из половин цилиндра увеличивается на m. На каком расстоянии d от первоначального положения будет находиться поршень после установления равновесия, если температура газа осталась неизменной? Объем каждой половины цилиндра $V=1$ л, сечение цилиндра $S=100$ см², а $m=2M$.

4. Сферическая дождевая капля радиусом $R=2$ мм падает на землю с постоянной скоростью v. На сколько повысится температура капли за время $\tau=10$ с, если все выделяющееся при движении количество теплоты идет на ее нагревание, а сила сопротивления воздуха описывается выражением $F_c=0{,}24\pi R^2v^2$ (в единицах СИ)?

5. Три точечных одноименных и одинаковых по модулю свободных электрических заряда Q находятся в вершинах равностороннего треугольника. Где нужно поместить заряд q, чтобы система из четырех зарядов находилась в равновесии? Определите модуль и знак заряда q. Будет ли равновесие устойчивым?

6. Три воздушных конденсатора емкостью $C_0=1$ мкФ каждый соединены последовательно. Конденсаторы заряжены и отключены от источника. Заряд этой батареи $Q_0=10^{-4}$ Кл. Затем пространство между обкладками одного из конденсаторов полностью заполняют ди-

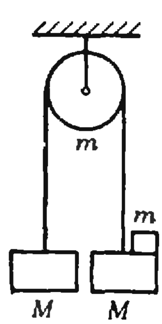


Рис. 1.

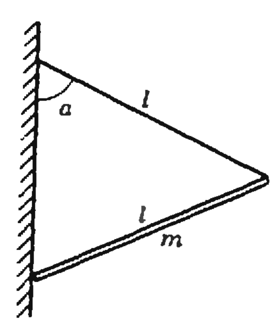


Рис. 2.

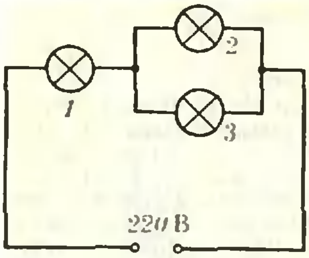


Рис. 3.

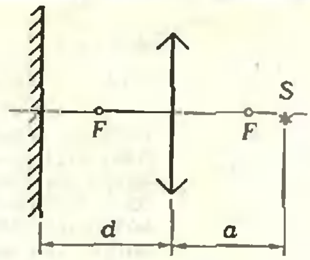


Рис. 4.

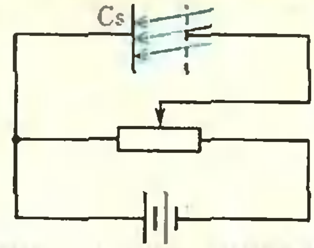


Рис. 5.

электриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=2$. Найдите энергию, запасенную в электрическом поле этих конденсаторов, и напряжение на зажимах батареи после заполнения диэлектриком.

7. Три лампочки мощностью $P_1=50$ Вт, $P_2=25$ Вт и $P_3=50$ Вт, рассчитанные на напряжение 110 В каждая, соединены, как показано на рисунке 3, и включены в сеть напряжением 220 В. Определите мощность, выделяемую в каждой лампочке.

8. Рамка площадью $S=20$ см², имеющая $n=1000$ витков, вращается с частотой $f=50$ Гц в однородном магнитном поле с индукцией $B=0{,}1$ Тл вокруг оси, лежащей в плоскости рамки и перпендикулярной линиям магнитной индукции. Какова максимальная ЭДС, индуцируемая в рамке?

9. Точечный источник света S (рис. 4) расположен на расстоянии $a=3/2F$ справа от собирающей линзы на ее главной оптической оси (F — фокусное расстояние линзы). Слева от линзы на расстоянии $d=7/4F$ расположено плоское зеркало, причем главная оптическая ось линзы перпендикулярна его плоскости. Определите расстояние x между действительным и мнимым изображениями источника.

10. Измерения зависимости напряжения отсечки фототока (то есть напряжения, при котором фототок обращается в нуль) от длины волны света, освещаемого исследуемый материал, производятся по схеме, показанной на рисунке 5. При исследовании цезия были получены следующие результаты: при освещении светом с длиной волны $\lambda_1=0{,}4$ мкм напряжение отсечки составляло $U_1=1{,}19$ В, при $\lambda_2=0{,}5$ мкм — $U_2=0{,}57$ В. Определите красную границу фотоэффекта для цезия и величину постоянной Планка по результатам опыта. Заряд электрона $e=4{,}8\cdot10^{-10}$ ед. заряда СГСЭ.

Публикацию подготовили Г. Ефашкин, В. Тонян

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$y=\frac{1}{9}x^2 \text{ и } y=-\frac{1}{3}x+2.$$

2. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{7}{2}\pi-x\right)-8\sin^2(x-9\pi)=1.$$

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. $A(2; -1; 1)$, $B(1; 3; 4)$, $D(6; 0; 1)$, $A_1(2; 0; 0)$. Найдите длину диагонали AC_1.

4. Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC. Боковая грань SAB перпендикулярна основанию, а две другие наклонены к основанию под углом α. Найдите угол между плоскостью основания и боковым ребром SC.

5. Одна тракторная бригада должна была вспахать 240 га, а другая на 35% больше, чем первая. Вспахивая ежедневно на 3 га меньше второй бригады, первая все же закончила работу на 2 дня раньше, чем вторая бригада. Сколько гектаров вспахивала каждая бригада ежедневно?

Вариант 2

1. Исследуйте функцию

$$y=\frac{1}{3}x^3-x$$

и постройте ее график.

2. Решите неравенство

$$2^{x^2-20x}<\frac{1}{2}.$$

3. Решите уравнение

$$\sin 4x=\cos^4x-\sin^4x.$$

4. Докажите, что треугольник с вершинами $A(6; -4; 2)$, $B(3; 2; 3)$, $C(3; -5; -1)$ — прямоугольный.

5. Высота конуса составляет с образующей угол α. Через вершину конуса проведена плоскость под углом β к плоскости основания. Найдите площадь сечения, если высота конуса равна h.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Камень, брошенный вертикально вверх, упал обратно через $t=2$ с. Определите путь и перемещение камня за $t'=1$ с и за $t=2$ с. Какова средняя скорость камня на всем пути?

2. Шарик, привязанный к нити длиной $l=30$ см, равномерно вращается в вертикальной плоскости. Когда шарик проходит нижнее положение, нить обрывается, и через $t=1$ с шарик падает на землю на расстоянии $d=9{,}3$ м от оси вращения (по горизонтали). Какова частота вращения шарика на нити?

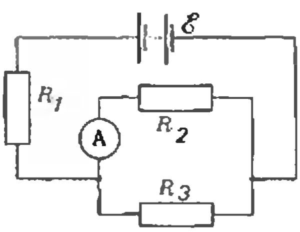
Почему нить оборвалась именно в нижнем положении?

3. С одной и той же высоты h на землю упали два тела одинаковой массы. Удар первого тела был абсолютно неупругим, а второе тело после удара поднялось на высоту $0{,}2\ h$. При каком ударе выделилось большее количество теплоты? Во сколько раз?

4. В закрытом сосуде объемом $V=10^{-1}$ м^3 находится некоторое количество воды. При температуре $t=30$ °C вода занимает объем $V_в=10^{-3}$ м^3. Каким стало бы давление в сосуде, если бы силы притяжения между молекулами внезапно исчезли?

5. В цилиндре, закрытом невесомым подвижным поршнем, находится $V=1$ м^3 воздуха при нормальных условиях. Какую работу совершит воздух при его нагревании на $\Delta t=1$ °C?

6. Сколько керосина было израсходовано в примусе, КПД которого $\eta=32\%$, для того чтобы $V=4$ л воды нагреть от $t_1=10$ °C до $t_2=100$ °C и $k=3\%$ воды обратить в пар? Теплота сгорания керосина $q=4{,}6\cdot10^4$ кДж/кг, удельная теплоемкость воды $c=4{,}2$ кДж/(кг · К), удельная теплота парообразования воды $\lambda=2{,}26\cdot10^3$ кДж/кг.



7. Батарея аккумуляторов с ЭДС $\mathscr{E}=2{,}8$ В включена в цепь, как показано на рисунке. Здесь $R_1=1{,}8$ Ом, $R_2=2$ Ом, $R_3=3$ Ом и амперметр показывает $I=0{,}48$ А. Определите внутреннее сопротивление батареи. Сопротивлением амперметра можно пренебречь.

8. Сколько ламп накаливания мощностью $P=200$ Вт каждая, рассчитанных на напряжение $U=127$ В, можно установить в помещении, если напряжение на зажимах генератора поддерживается равным $U_0=133$ В, а проводка от генератора до помещения выполнена алюминиевым проводом общей длиной $l=150$ м и сечением $S=15$ мм^2? Какова общая потребляемая мощность? Удельное сопротивление алюминия $\rho=2{,}9\cdot10^{-8}$ Ом · м.

9. На двух столбах на одной и той же высоте $h=3$ м от земли висят два фонаря. Сила света одного из них $I_1=200$ кд. Какова должна быть сила света другого фонаря, чтобы при расстоянии между столбами $l=8$ м освещенность земли посередине между ними была не менее $E=15$ лк?

10. Определите оптическую силу линзы, если известно, что изображение предмета, помещенного перед ней на расстоянии $d=50$ см, мнимое и уменьшенное в 3 раза. Какая это линза?

Публикацию подготовили
С. Филонович, М. Чернецов

Московский энергетический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростив выражение, найдите предел

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{3x^2-4x+1}{1-x}+\frac{\sqrt{x}-x}{(\sqrt{x})^{-1}-1}\right)^{-2}.$$

2. Найдите область определения функции

$$f(x)=\sqrt[6]{4^x+8^{\frac{2}{3}(x-2)}-52-2^{2(x-1)}}.$$

3. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$f(x)=1+3x^2-x^3$$

на отрезке $[-1;3]$ и постройте график функции на указанном отрезке.

4. Найдите все корни уравнения

$$\cos^4 x-\sin^4 x=\sin 4x,$$

лежащие в интервале $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

5. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной призмы, если площадь основания призмы равна S и диагональ призмы образует с боковым ребром призмы угол α.

Вариант 2.

1. Упростив выражение для $f(x)$, найдите $f'(x)$, если

$$f(x)=\left(\frac{x^5+x^4\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4x^9}}{\sqrt{1-2x^3+x^6}-1}-2^{\log_4(x^3-1)^2-\log_2(x-\sqrt[3]{2})}\right)^{-1}.$$

2. Решите уравнение

$$(3-\lg x)^2\cdot(3+\lg x)^2=(4-\lg^2 x)^2-7\lg^2 x+50.$$

3. Число 10 представьте в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма половины квадрата первого слагаемого и куба второго была наименьшей.

4. Найдите все корни уравнения

$$\cos x\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin x\cdot\operatorname{tg} x=\cos x+\sin x,$$

удовлетворяющие неравенству $\sqrt{x-5}+\log_\pi 2>0$.

5. В трапеции $ABCD$ углы при большем основании $[AD]$ равны α и β, длина отрезка, соединяющего вершину A с серединой боковой стороны $[CD]$, равна m. Найдите скалярное произведение $\vec{BA}\cdot\vec{CD}$, если $|AC|=|AD|$.

Физика

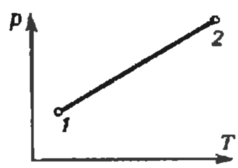
В зависимости от избранного факультета абитуриенты сдавали экзамены по физике либо письменно, либо устно.

Письменный экзамен

Вариант

1. Электромагнитная индукция. Поток магнитной индукции. Электродвижущая сила индукции. Правило Ленца.

2. В результате процесса, изображенного на рисунке в координатах давление p — абсолютная температура T, идеальный газ перешел из состояния *1* в состояние *2*. В каком из этих состояний газ занимал больший объем?



3. Изображение миллиметрового деления шкалы, расположенной перед тонкой линзой на расстоянии $d=6{,}0$ см, имеет на экране длину $L=1{,}9$ см. Определите фокусное расстояние F линзы.

4. Электрон при ускоренном движении в электростатическом поле пролетает точки *1* и *2*, имея скорость, равную $v_1=10^6$ м/с и $v_2=3\cdot10^6$ м/с соответственно. Определите разность потенциалов $\Delta\varphi_{12}$ между точками *1* и *2*. Отношение заряда электрона к его массе $e/m=1{,}76\cdot10^{11}$ Кл/кг.

5. Человек, стоящий на абсолютно гладкой поверхности льда, бросает камень в горизонтальном направлении с высоты $H=1{,}8$ м. Камень падает на лед на расстоянии $s=9$ м от места бросания. Определите работу A, которую совершает человек при бросании камня. Масса человека $M=60$ кг, масса камня $m=3$ кг.

Задачи устного экзамена

1. Груз массой $m=5$ кг находится на наклонной плоскости, образующей угол $\alpha=30°$ с горизонтом. К грузу приложена сила $\vec{F}$, направленная вдоль наклонной плоскости. Коэффициент трения груза о плоскость $\mu=0{,}2$. Определите модуль F приложенной силы, если груз перемещается равномерно вниз по плоскости.

2. При нормальных физических условиях ($p_0=10^5$ Па, $T_0=273$ К) плотность воздуха $\varrho_0=1{,}3$ кг/м^3. На некоторой высоте давление воздуха $p=10^4$ Па, а температура $T=220$ К. Определите плотность воздуха ϱ на этой высоте.

3. Первичная обмотка силового трансформатора для накала радиолампы имеет $n_1=2200$ витков и включена в сеть с напряжением $U_1=220$ В. Какое количество витков n_2 должна иметь вторичная обмотка, если ее активное сопротивление $r=0{,}5$ Ом, а напряжение накала лампы $U_н=3{,}5$ В при силе тока накала $I=1$ А?

Публикацию подготовили
В. Прохоренко, В. Чудов

Красноярский институт цветных металлов им. М. И. Калинина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=0$, $y=8x-x^2$.

2. Найдите экстремумы функции $y=x^3(8-x)$.

3. Решите неравенство

$$\log_2\frac{3-2x}{1-x}>1.$$

4. Решите уравнение

$$1-\cos 2x=2\sin x.$$

5. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, боковая грань наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем пирамиды.

Вариант 2

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=5-x^2$, $y=1$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=18x^2+8x^3-3x^4$ на отрезке $[0;\ 4]$.

3. Решите неравенство

$$\left(\frac14\right)^{x^2-x}<\frac1{16}.$$

4. Решите уравнение

$$\sin^3x-\cos^3x=0.$$

5. Боковая поверхность цилиндра, будучи развернута, представляет собой прямоугольник, в котором диагональ равна d и составляет угол φ с основанием. Определите объем цилиндра.

Задачи устного экзамена

1. Вычислите $\left(0{,}1224:1{,}2-\frac25\right)\cdot0{,}6-0{,}6$.

2. Определите сумму всех четных чисел от 12 до 82 включительно.

3. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{12}{5}$ и $\pi<\alpha<\frac32\pi$.

4. Что больше: $\sin 2$ или $\cos 3$?

5. Определите площадь прямоугольника, диагональ которого равна 24 дм и составляет с основанием угол 60°.

6. Решите уравнение

а) $(0{,}25)^{2-x}=\dfrac{1}{2^{x+3}}$;

б) $\cos x+\sin x=0$.

7. Решите неравенство

$$\log_{\frac13}(x-1)-\log_{\frac13}(2x-3)<0.$$

8. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{1-9n^2}$.

9. Найдите производную функции $y=(2x^3-5)\cdot\operatorname{tg}x$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. С башни высотой $h=25$ м горизонтально брошен камень со скоростью $v_0=15$ м/с. Найдите: а) сколько времени камень будет в движении? б) на каком расстоянии от основания башни он упадет на землю? в) с какой скоростью он упадет?

2. На легкий шкив радиусом $R=10$ см намотана нить, к концу которой прикреплен груз. Груз начинает опускаться с ускорением $a=2$ см/с^2. Чему будет равна угловая скорость шкива в тот момент, когда груз опустится на $h=100$ см?

3. В цилиндре дизельного двигателя в начале такта сжатия температура воздуха была $T_1=310$ К. Найдите температуру воздуха в конце такта сжатия, если его объем уменьшился в $a=12$ раз, а давление возросло в $b=36$ раз.

4. Найдите расход бензина автомобиля «Запорожец» на пути $s=1$ км при скорости $v=60$ км/ч. Мощность мотора $N=17$ кВт, КПД мотора $\eta=30\%$. Теплота сгорания топлива $q=45\cdot10^6$ Дж/кг.

5. По представлениям Бора электрон в атоме водорода движется вокруг ядра по круговой орбите. Вычислите скорость движения электрона, если радиус орбиты $r=0{,}5\cdot10^{-8}$ см. Масса электрона $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг, его заряд $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

6. Вольтметр, подключенный к источнику с ЭДС $\mathcal{E}=120$ В и внутренним сопротивлением $r=50$ Ом, показывает $U=118$ В. Каково внутреннее сопротивление вольтметра?

7. Два проводника с одинаковыми сопротивлениями R, соединенные сначала параллельно, а потом последовательно, подключаются к сети с напряжением U. В каком случае от сети потребляется бóльшая мощность?

8. Сколько витков никелиновой проволоки надо навить на фарфоровый цилиндр диаметром $d_1=1{,}5$ см, чтобы изготовить кипятильник, в котором за $\tau=10$ мин закипает $V=1{,}2$ л воды, взятой при температуре $t=10°$С? КПД установки $\eta=60\%$; диаметр проволоки $d_2=0{,}2$ мм; напряжение сети $U=100$ В. Удельная теплоемкость воды $c=4{,}2$ кДж/(кг·К); удельное сопротивление никелина $\rho=0{,}42\cdot10^{-6}$ Ом·м.

9. Сколько электрической энергии надо израсходовать, чтобы при электролизе раствора азотнокислого серебра выделилось $m=500$ мг серебра? Напряжение на электродах $U=4$В. Электрохимический эквивалент серебра $k=1{,}08\cdot10^{-6}$ кг/Кл.

10. Луч света падает на плоскопараллельную пластинку с коэффициентом преломления $n=1{,}5$ под углом $\alpha=60°$. Какова толщина пластинки, если при выходе из нее луч смещается на $a=2$ см?

Публикацию подготовили
А. Клубова, Н. Козлова

Две «школьные» задачи в жизни

О вырезании бруса наибольшей прочности

Еще сравнительно недавно в качестве строительных конструкций широко использовались деревянные брусья прямоугольного сечения (колонны в деревянных домах, опоры в междуэтажных перекрытиях, стойки в деревянных мостах). Они нередко используются и в наше время, особенно в сельском строительстве.

Установлено, что чем больше площадь сечения бруса, нагружаемого центрально (то есть по центру тяжести сечения), тем он прочнее.

Следовательно, при вырезании из круглого бревна прямоугольного бруса, используемого как стойка, наибольшая прочность достигается тогда, когда площадь сечения наибольшая (заметим, что при этом одновременно достигается наименьшее количество отходов!).

Таким образом, инженерная задача о наибольшей прочности прямоугольного бруса, вырезаемого из круглого бревна, сводится к математической задаче из школьного учебника: *из всех прямоугольников, вписанных в данную окружность, найдите прямоугольник наибольшей площади* («Алгебра 9—10», задача 429).

Легко показать (проделайте расчет), что таким прямоугольником является к в а д р а т.

Отметим в заключение, что сортамент любого лесопильного завода включает брусья квадратного сечения, которые используются строителями в качестве стоек.

Об изготовлении расширительного сосуда с наименьшей затратой материала.

Системы центрального отопления, обслуживающие небольшое число объектов, имеют в наивысших точках (на чердаке одного из домов) так называемые *расширительные сосуды* — емкости, в которые поступают излишки воды при нагревании.

Эти емкости часто имеют форму цилиндров со съемной крышкой (для периодической очистки сосуда) и изготовляются из листовой стали — сравнительно дорогостоящего материала. Поэтому важное значение приобретает следующая практическая задача: при заданной емкости расширительного сосуда найти такие размеры его, чтобы на его изготовление было израсходовано наименьшее количество листовой стали (расход материала на швы не учитывается, а толщина стенок, дна и крышки считается одинаковой) Эта задача сводится к математической задаче из школьного учебника: *из всех цилиндров заданного объема найдите цилиндр с наименьшей полной поверхностью* («Алгебра 9—10», задача 420).

Легко показать (проделайте расчет), что осевым сечением искомого цилиндра является к в а д р а т.

Если учесть, что в масштабе нашего государства расширительные сосуды изготовляются в огромном количестве, то становится очевидным, что отступление от оптимальных размеров при их изготовлении неизбежно приводит к чувствительным избыточным расходам листовой стали, а следовательно, к значительным убыткам.

Я. Жак

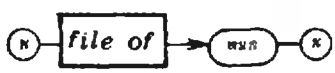
Заочная школа программирования

Урок 18: Файлы

Что такое файл?

Файл — это некоторый набор элементов одного и того же типа, число которых заранее не определено.

Тип файла описывается следующей синтаксической диаграммой:



тип есть общий тип элементов файла. Будем называть его *базовым*. Имеется стандартный (то есть существующий для любой программы и не подлежащий описанию в ней) тип файла с именем *text*. Его базовым типом является тип *char*. Файлы типа *text* называются *текстовыми файлами*.

Элементы файла считаются расположенными последовательно, то есть так же, как элементы вектора. Отличается же файл от вектора, во-первых, тем, что размеры его могут меняться, а, во-вторых, тем, что способ обращения к его элементам совсем другой: невозможно обратиться к произвольному элементу файла; элементы его просматриваются только подряд, от начала к концу, при этом каждый раз доступен только один элемент. С каждым файлом *f* связана переменная, которая обозначается $f\uparrow$; ее тип совпадает с базовым типом файла. Она называется *буфером* этого файла или *буферной переменной*. В буфере может размещаться только один элемент файла; значение этого элемента и служит значением буфера. Буфер — это как бы окошко, через которое можно просматривать файл, выбирая элементы по одному.

Если файл просмотрен до конца (или если он вообще пуст) то будем считать его *оконченным*. Если файл окончен, то значение его буфера не определено.

Процедуры работы с файлами

Проверить, окончен ли файл *f*, можно вызовом стандартной логической функции

eof(f)

Она вырабатывает значение *true*, если *f* окончен, и *false* — в противном случае*).

Пусть необходимо просмотреть файл *f*. Для этого надо прежде всего вызвать стандартную процедуру

reset(f)

(«reset» означает «возвратить»). В результате ее выполнения значением буфера $f\uparrow$ станет первый элемент файла (если файл не пуст).

Перейти от одного элемента файла к следующему можно с помощью вызова стандартной процедуры

get(f)

(«*get*» означает «взять»). После его выполнения в $f\uparrow$ будет значение этого следующего элемента, если он есть. (Если же следующего элемента нет, то файл станет оконченным.) К уже оконченному файлу применять процедуру *get* нельзя.

Рассмотрим пример. Пусть *f1* и *f2* — файлы с базовым типом *real*, а *ровно* и *b* — переменные типа *boolean*. Переменной *равно* нужно присвоить значение *true*, если содержимое *f1* и *f2* одинаково (то есть эти файлы имеют одинаковую длину, быть может нулевую, а их соответственные элементы попарно равны), и *false* в противном случае.

*) *eof* — сокращение английских слов end of file (конец файла).

Эту задачу можно выполнить следующим образом:

```
reset(f1); reset(f2); b:=true;
while b AND NOT eof(f1)
      AND NOT eof(f2)
 do begin b:=f1↑=f2↑;
   get(f1); get(f2)
    end;
if b then равно:=eof(f1)ANDeof(f2)
   else равно:=false;
```

Если оба файла пустые, то тело цикла не выполнится ни разу и *равно* получит значение *true*. Пока очередные элементы файла попарно совпадают, *b* получает в теле цикла значение *true* и оператор цикла продолжает работу. Цикл прекратится, если очередные элементы не совпадут или хоть один из файлов будет окончен. В первом случае *b* по выходе из цикла имеет значение *false* и последний оператор присвоит это же значение переменной *равно*. Если же по выходе из цикла *b* имеет значение *true*, то это значит, что один из файлов полностью совпадает с начальным фрагментом другого файла. В этом случае последний оператор проверяет, не окончился ли одновременно и второй файл. Если да, то *равно* получает значение *true*, а если другой файл еще не окончен, то *false*.

Пусть теперь известно, что файл *f1* содержит не менее 10 элементов, и требуется первые 10 из них перенести в массив *m*, тип которого есть **array** [*1..10*] **of** *real*. Это можно сделать следующим образом (*i* — переменная типа *integer*):

```
reset(f1);
for i:=1 to 10 do
begin m[i]:=f1↑;get(f1) end;
```

Последовательность операторов

$$v:=f\uparrow;\ get(f) \qquad (1)$$

где *v* — переменная, а *f* — файл, встречается довольно часто. Поэтому в Паскале существует стандартная процедура *read* такая, что вызов

read(f,v)

равносилен паре операторов (1). Теперь наш пример можно переписать короче:

```
      reset(f1);
fori:=   to 10 do read(f1, m[i]);
```

Итак, мы научились читать из файла. Посмотрим теперь, как его заполнять. Существует стандартная процедура *rewrite* (переписать) такая, что после вызова

rewrite(f)

файл *f* становится пустым и готовым к заполнению. Чтобы пополнить файл значением некоторого выражения *E*, надо выполнить присваивание *f*↑:=*E*, а затем — вызов стандартной процедуры *put(f)* («put» означает «поместить»). Этот вызов присоединит к концу файла значение *f*↑; файл, таким образом, удлинится на один элемент. Процедуру *put* можно применять, только если файл окончен, и после ее вызова он продолжает оставаться оконченным: нельзя записывать новые элементы в середину файла. Пара операторов

f↑:=*E*; *put(f)*

равносильна оператору

write(f, E)

где *write* — стандартная процедура.

Например, заполнить файл *fi*, базовый тип которого — *integer*, целыми числами от 1 до 100, можно так:

```
rewrite(fi);
for i:=1 to 100 do write(fi, i)
```

З а д а н и е 18.1. *Из двух текстовых файлов x и y сделайте один файл z так, чтобы в нем размещались сначала все элементы файла x, а затем — файла y.*

Особенностью текстовых файлов является то, что с помощью процедуры *write* в них можно заносить значения не только базового типа *char*, но и других простых типов, а с помощью процедуры *read* из них можно осуществлять засылку в переменные любого простого типа. Если, например, файл *ft* — текстовой, то *write(ft, 51)* автоматически преобразует число 51 в последовательность символов «5» и «1» и занесет их в файл *ft*. Если, с другой стороны, известно, что очередные элементы в файле *ft* — цифры, перед которыми могут стоять пробелы, то можно применить вызов *read(ft, i)*, где *i* — переменная типа *integer*. Этот вызов, пропустив все предшествующие первой цифре пробелы, воспримет по порядку все цифры, пока не будет обнаружен следующий за ними пробел, преобразует их в число (например, последовательность цифр «5» и «1» в число 51) и присвоит это число переменной *i*.

З а д а н и е 18.2. *Известно, что в текстовом файле f записаны вещественные числа, разделенные пробелами. Признаком конца этой последовательности служит число* 0. *Вычисли-*

те и напечатайте сумму чисел этой последовательности.

Файлы и ввод-вывод

Легко заметить, что работа с файлами очень похожа на механизм ввода и вывода. Мы сейчас покажем, какая между ними связь.

Вызов процедуры

write (x)

с параметром простого типа осуществляет выдачу значения *x* на печатающее устройство (см. урок 15). Считается, что с печатающим устройством связан стандартный текстовой файл *output*. Выдача на печать есть не что иное, как пополнение этого файла, а *write (x)* — это сокращенная запись для

write (output, x)

С читающим устройством в свою очередь связан стандартный текстовый файл *input*, а

read (x)

есть сокращение для

read (input, x)

Файл *input* нельзя пополнять и к нему нельзя применять процедуру *reset*. (Эта процедура как бы уже проработала к началу выполнения программы). Точно так же к файлу *output* неприменимы чтение и процедура *rewrite*. Эти два файла не нужно описывать в программе (на то они и стандартные), но, как известно из урока 15, их обязательно надо перечислить в заголовке программы.

Если задача требует, чтобы какая-либо информация хранилась во внешней памяти, то для этой информации нужны дополнительные внешние файлы. Их надо описать наряду со всеми остальными переменными программы и перечислить в заголовке наряду с *input* и *output*. Если же имя файла в заголовке отсутствует, то этот файл служит лишь для обмена информацией внутри программы.

З а д а н и е 18.3. *На читающее устройство подан некоторый текст. Надо его поместить в текстовой файл f, вставляя после каждого символа «*» символ « / ».*

Пример на использование внешних файлов

На прошлом уроке мы рассматривали примеры, в которых речь шла об описании и обработке сведений о различных странах мира. Эти примеры — простая иллюстрация серьезных задач, имеющих дело с информацией очень большого объема. Ясно, что такого рода информация не возникает с началом выполнения программы и не исчезает в конце ее. Наоборот, она должна храниться очень долго, может быть годами: время от времени она подвергается изменениям и в любой момент из нее могут быть извлечены нужные данные. Хранится такая информация во внешней памяти ЭВМ (на дисках и лентах), а чтение и исправление ее осуществляют специальные программы, исполняемые, когда в этом есть потребность.

Каждая такая программа рассматривает эту информацию как содержимое некоторого внешнего файла. Пусть в нашем случае это будет файл с именем *архив*. Элементы этого файла — записи типа *страна*. С файлом должна работать некоторая программа *обработка*. Ее заголовок имеет вид

program *обработка (input, output, архив);*

раздел описания переменных в ней будет содержать описание

архив: **file of**
страна;

На прошлом уроке каждая запись, относящаяся к тому или иному государству, была значением отдельной переменной, имя которой совпадало с названием соответствующего государства. Ясно, что на практике неудобно описывать и иметь в программе полторы сотни переменных. Поэтому теперь мы откажемся от переменных *австралия, ..., япония*. Название же страны будем хранить в самой записи, предусмотрев в ней еще одно поле типа **array** [*1..60*] **of** *char* (и полагая, что шестидесяти букв и пробелов достаточно для названия любой страны мира).

Описание типа *страна* будет теперь таким:

страна = **record**
название: **array** [*1..60*] **of** *char;*

площадь, население: real;
устройство: boolean;
вступление: дата;
образование: вузы **end**;

Допустим, надо узнать, какая из стран самая обширная. Опишем для этого переменные

название: **array** [*1..60*] **of** *char;*
площадь: real; i : integer;

и выполним следующие операторы:

```
площадь:=0.0; reset (архив);
while NOT eof (архив) do
  begin if архив↑. площадь>площадь
      then begin
             площадь:=архив↑. площадь
             название:=архив↑. название
           end;
      get (архив)
  end;
writeln (название, площадь);
```

Задание 18.4. *Напечатайте названия всех стран, население которых превышает 10 млн. человек.*

Добавление к уроку 18 *А. Рар*

Сортировки по текстовым ключам. Слияния

Сортировкой называют действие, которое упорядочивает совокупность данных по значениям некоторого признака. Таким образом, элементы упорядочиваемой совокупности являются по определенню сложными, многокомпонентными объектами — данными структурных типов; как правило, признак — это только одна из компонент сортируемых элементов. В обширной литературе по методам сортировки те признаки, по значениям которых оценивается упорядоченность сортируемой совокупности, чаще называют *ключами*. Сортировки становятся возможными, когда на совокупности значений ключей установлено отношение порядка.

Наиболее распространенными объектами, к которым применяются сортировки, являются совокупности данных одинаковых типов. Различают две разновидности таких совокупностей: *массивы* — совокупности данных с известным, фиксированным количеством элементов и *файлы*, размеры которых, вообще говоря, неизвестны и могут изменяться в ходе выполнения программы. Соответственно, упорядочение массивов осуществляется, как правило, *внутренними* сортировками, применяемыми только к данным, расположенным в оперативной памяти ЭВМ, а для файлов чаще всего приходится пользоваться *внешними* сортировками, которые могут оперировать с данными, располагающимися на внешних запоминающих устройствах — магнитных лентах, дисках, перфокартах.

С проблемой упорядоченности информации приходится встречаться постоянно. В ведомости заработной платы ее элементы-строки могут быть упорядочены в порядке возрастания табельных номеров сотрудников. Здесь ключ — это *табельный номер*, отношение порядка — возрастание натуральных чисел. Итоговый протокол велосипедной гонки часто упорядочивают по результатам, показанным участниками соревнований. Здесь ключ — действительное*) число *результат.*

Список школьников одного класса тоже чаще всего упорядочивается. Здесь ключи *фамилия* являются текстами. Обычно тексты упорядочиваются как слова в словаре — по алфавиту, в порядке, который называют *лексикографическим:* если фиксирован порядок букв в алфавите, то из двух значений ключей *к1* и *к2* предшествующим считается тó, у которого *к1[1]⊣к2[1]* в алфавитном порядке (первая буква первого текста предшествует первой букве второго текста), а при равенстве *к1[1]=к2[1]* — то, у которого *к1[2]⊣к2[2]* и т. д. Так, *'слог'⊣'слон'*, как в словаре.

Относительный порядок двух букв или двух слов можно, таким образом, установить и даже обозначить: значок«⊣» означает «предшествует». Однако для практических целей — определения и установления лексикографического упорядочения текстов в программе, написанной, например, на Паскале — было бы полезнее иметь дело не с отношением «⊣»,

*) Важно помнить, что в программировании и в математике действительные числа определяются по-разному. В машине представимы только числа с ограниченным числом цифр. Таким образом, «действительные» числа, как их понимают программисты, это подмножество рациональных чисел.

которое непосредственно для текстов в Паскале не может быть реализовано, а с привычным отношением «<», хорошо знакомым по операциям над числами. С этой целью в памяти машины хранится константа *алфавит*, имеющая тип **array** [*1..64*] **of** *char*. Ее значение

' *абвг...я+—...!* ' (1)

С помощью этой константы каждой букве алфавита (и, более широко, каждому символу) ставится в соответствие натуральное число, представляющее собой номер символа в тексте (1). Таким образом, пробелу ставится в соответствие число 1, букве *а* — число 2,..., букве *я* — число 34. Самому «старшему» символу — восклицательному знаку *!* — поставлен в соответствие номер 64. Обратите внимание, что пробел предшествует всем символам алфавита.

Теперь сравнения двух символов легко реализовать, сравнив соответствующие им числа, при наличии такой функции *число*:

```
function число(x:char):integer;
  var i:integer;
  begin
    i:=1;
    while i<=64 do
      if x=алфавит[i]
        then begin число:=i;
        i:=65 end;
        else i:=i+1
  end
```

с помощью которой, например, упоминавшееся условие *к1[2]→к2[2]* можно свести к условию

число(к1[2])<число(к2[2]) (2)

Функция *число* понадобилась только потому, что для нас оказывалась существенной упорядоченность по алфавиту (1). Если бы мы удовлетворились стандартным алфавитом Паскаля, в котором перечисляются сначала латинские буквы от *a* до *z*, затем не совпадающие с ними по начертанию русские буквы, затем цифры и прочие символы, то тогда для целей преобразования литеры *x* в число, равное номеру этой литеры в стандартном алфавите, можно было бы воспользоваться стандартной функцией Паскаля *ord(x)*.

Используя отношения вида (2), можно определить относительный порядок любых двух текстов. Например, для *'слог'* и *'слон'* можно выполнить серии проверок

для первых букв	*число('с')=число('с')*
для вторых букв	*число('л')=число('л')*
для третьих букв	*число('о')=число('о')*

но для четвертых букв имеет место

число('г')<число('н')

откуда и следует, что *'слог'→'слон'*.

Такие серии проверок можно выполнять для любых двух заданных текстов с помощью функции *сравнение (x1, x2)*. Эта функция вырабатывает логическое значение *true*, если *x1→x2* или если тексты *x1* и *x2* совпадают. Если же *x2→x1*, то вырабатываемое этой функцией значение есть *false*. Тогда, если в программе важно установить истинность условия *x1→x2*, то можно пользоваться реализуемым в Паскале условием сравнения *(x1, x2)=true*. Если предварительно описан тип **type** *массив*=

packed array [*1..20*] **of** *char*

то функция *сравнение* описывается так:

```
function сравнение(x1,x2:массив):boolean;
  var номер:integer
  begin
    номер:=0
    while номер<=20 do
      begin
        номер:=номер+1;                          (3)
        if число(x1[номер])<>
          число(x2[номер])
        then
          begin
            if число(x1[номер])<
              число(x2[номер])
            then сравнение:=true
            else сравнение:=false
            номер:=21
          end
          else if номер>20
            then сравнение:=true

      end
  end;
```

В том виде, как описана функция *сравнение* здесь, она работает с двадцатилитерными словами-массивами *x1* и *x2*. Длина слова выбрана такой, чтобы сделать возможным использование этой функции для сравнения фамилий: это один из наиболее часто используемых ключей во многих применениях сортировок. Ограничение в 20 литер всегда при желании можно заменить более сильным или, наоборот, более слабым ограничением. Конечно, длины сравниваемых текстов чаще всего оказываются меньше 20. Чтобы воспользоваться описанием (3), надо перед обращением к процедуре *сравнение* выполнить простую предварительную процедуру, которая пересылает каждое из сравниваемых слов-массивов в массив, составленный из 20 пробелов. Именно результат этой процедуры, описать которую читателю, по-видимому, не составит труда, и служит фактическим параметром при обращении к функции *сравнение (x1, x2)*. Впрочем, такая предварительная процедура будет не нужна, если обязать программиста, работающего с функцией *сравнение*, записывать значения ключей так, чтобы они занимали ровно 20 литер, из которых последние представляют в большинстве случаев пробелы. И еще одно замечание, касающееся описания функции *сравнение*: массивы-параметры этой функции имеют тип **packed array** (упакованный массив), а не тип **array**. Тип **packed array** используется для массивов, когда в одном машинном слове можно разместить не один элемент массива, а несколько, то есть упаковать их. Такой тип часто применяют при описании текстов-массивов, составленных из литер.

Итак, сортировки оказываются возможными и в тех случаях, когда ключи принимают текстовые значения.

Выбирая метод сортировки, важно использовать любые имеющиеся сведения об организации или упорядоченности совокупностей данных, подлежащих сортировке. В этом отношении наиболее характерным является *метод слияния*. Его применяют для упорядочения совокупности элементов, получающейся путем объединения двух или более совокупностей, уже упорядоченных по одному и тому же ключу. Такие ситуации встречаются весьма часто. Например, из упорядоченных «по алфавиту» (то есть в лексикографическом порядке) списков всех десятых классов школы надо составить общий список выпускников с сохранением лексикографического порядка. Рассмотрим программу слияния двух таких списков-файлов *ф1* и *ф2*

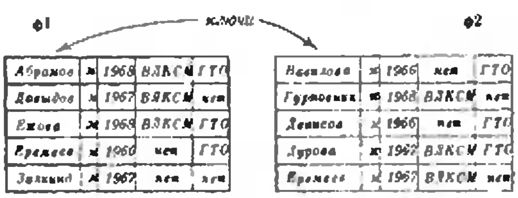


Рис. 1.

(рис. 1). Речь идет, следовательно, о внешней сортировке. Впрочем, метод слияния и используется почти исключительно во внешних сортировках. Читатель может, разобравшись с методом слияния, выполнить в качестве самостоятельного упражнения программу слияния для внутренних сортировок — для упорядочения массивов, а не файлов.

Метод требует места в памяти для еще одного файла *ф*, в котором будет помещаться результат. Можно двигаться по файлам *ф1* и *ф2*, последовательно читая их элементы. При этом на каждом шаге значения ключей в последних прочитанных элементах файлов *ф1* и *ф2* (в их буферных переменных) сравниваются, и по результату сравнения младший элемент попадает в конец файла-результата. Обратите внимание на важную деталь: перемещаясь по файлам *ф1* и *ф2*, можно добраться до конца одного из файлов тогда, когда другой еще не окончен. В этом случае следует без лишних сравнений переписать весь «хвост» непрочитанного полностью файла в результат.

Процедура, которая проверяет окончание файла *ф1* перед переходом к чтению очередной его записи, названа *запись1*. Она же при необходимости переписывает в результат «хвост» файла, не требующего дальнейших сравнений. (Аналогичная процедура для файла *ф2* полностью симметрична — описание процедуры *запись2* получается заменой единицы во всех именах процедуры *запись1* на двойку и наоборот.)

```
procedure запись1;
  begin
   get(ф1);
   if eof(ф1)
    then
     begin
      while NOT(eof(ф2)) do
       begin write(ф,ф2↑); get(ф2) end
      конец:=true
     end
  end;
```

Для того чтобы освободить программу от непринципиальных (и небольших) усложнений, предполагается, что в элементах обоих сливаемых файлов ключ стоит на первом месте. В программе, включающей процедуру *слияние*, должны присутствовать описания

```
type файл=file of запись
      запись=record
         ключ: массив;
         контекст: array [1..60] of char
             end;
```

(тип *массив* описан выше, перед (3)). Тогда процедура *слияние* имеет вид

```
procedure слияние(var ф1,ф2,ф:файл);
  var конец:boolean
  begin
   конец:false; rewrite(f); reset(ф1);
   reset(ф2);
   while NOT (конец) do
    if ф1↑. ключ=ф2↑. ключ                    (4)
     then
      begin
       write(ф,ф1↑); write(ф,ф2↑);
       запись 1; запись 2
      end
     else
     if сравнение(ф1↑ ключ, ф2↑. ключ)
      then
```

```
        begin write(ф.ф1↑); запись 1 end
     else
        begin write(ф.ф2↑); запись 2 end
  end;
```

В программе (4) во избежание повторений опущены описания используемых в ней процедур *запись1*, *запись2* и функций *число* и *сравнение*. Слово **var**, стоящее перед именами параметров-файлов в описании процедуры, означает, что их значения могут изменяться в ходе выполнения процедуры так, что прежние значения при этом не сохраняются. О таком использовании параметров «Квант» будет еще рассказывать подробнее.

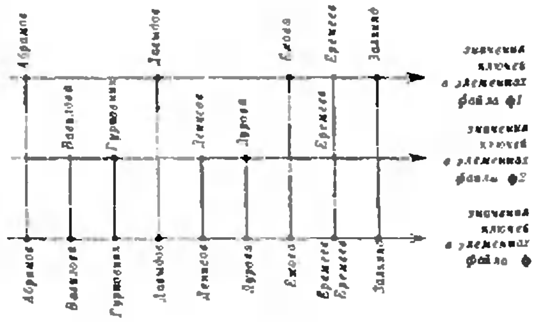


Рис. 2.

Для файлов, показанных на рис. 1, процесс и результат слияния схематически изображены на рисунке 2.

Для слияния файлов потребовалось ровно n сравнений ключей (n — число элементов упорядоченного результирующего файла). Такая оценка алгоритма слияния с точки зрения быстродействия считается очень хорошей. Это оказалось возможным в силу того, что мы воспользовались информацией об упорядоченности исходных файлов. Конечно, слияние — очень частный (хотя и весьма важный в практике) вид сортировок. С общими методами сортировок читателям предстоит знакомство в одном из ближайших номеров «Кванта».

Ю. Первин

Наша обложка

Фантазии ЭВМ

Рисунок на первой странице обложки получен с помощью ЭВМ следующим образом. Каждая замкнутая кривая строится специальной программой по пяти опорным точкам (своим — для каждой кривой). Первая опорная точка выбирается в заданном квадрате случайно. Последующие точки расположены — каждая — на случайном расстоянии от предыдущей (расстояния берутся в интервале от 0 до 30 мм); первая хорда (отрезок, соединяющий первую и вторую опорные точки) имеет произвольное направление; последующие хорды образуют углы с предыдущими хордами, выбираемые наугад в интервале от 0 до $\pi/2$. В известном смысле наугад присваивается и цвет каждому пятну (подумайте, как выбирается цвет при пересечении фигур).

В итоге полученные пятна имеют случайные размеры, расположение, форму и раскраску. Но как же ЭВМ может действовать случайно? Разве машина не выполняет вполне определенные инструкции программиста?

Оказывается, в современную ЭВМ можно заложить программу, называемую *генератором случайных чисел*. Эта программа выдает списки чисел, не подчиняющиеся никаким простым закономерностям (скажем, последовательные знаки десятичной записи числа sin 67°). Оперируя по определенным инструкциям с этими числами, ЭВМ становится «художником», чьи цветные рисунки заранее не может предугадать даже математик, написавший программу для нее.

Ю. Котов

Советуем купить!

«Алгебра и начала анализа», под ред. Г. Н. Яковлева (М., «Наука», 1981); часть I — ц. 70 к., часть II — ц. 70 к.

Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. «Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов» (М., «Наука», 1980), ц. 3 р. 90 к.

Жданов Л. С., Жданов Г. Л. «Физика для средних специальных учебных заведений» (М., «Наука», 1981), ц. 1 р. 30 к.

Камке Д., Кремер К. «Физические основы единиц измерения», пер. с немецкого (М., «Мир», 1980), ц. 80 к.

Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г. «Справочник по элементарной физике» (М., «Наука», 1980), ц. 75 к.

Лурье М. В., Александров Б. И. «Задачи на составление уравнений» (М., «Наука», 1980), ц. 15 к.

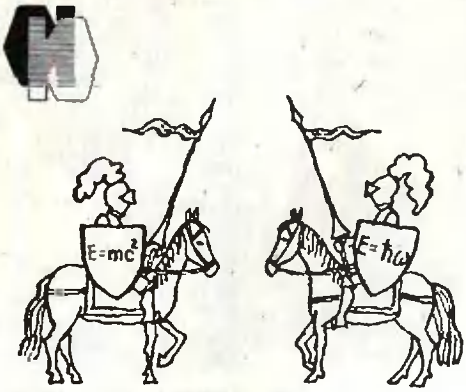
Потапов М. К. и др. «Алгебра и анализ элементарных функций» (М., «Наука», 1980), ц. 1 р. 40 к.

Фейнман Р. и др. «Фейнмановские лекции по физике»; т. 7 «Физика сплошных сред» (М., «Мир», 1977), ц. 1 р. 42 к.

Фейнман Р. и др. «Фейнмановские лекции по физике»; тт. 8,9 «Квантовая механика» (М., «Мир», 1978), ц. 2 р. 40 к.

Фрид Э. Элементарное введение в абстрактную алгебру», пер. с венгерского (М., «Мир», 1979), ц. 1 р. 50 к.

Заказы направляйте по адресу: 103050, Москва, К-50, ул. Медведева, д. 2, Отдел «Книга — почтой» магазина № 8 «Техника» Москниги.



III Московский турнир юных физиков

...Что значит — знать?
Вот в чем все затрудненья!
И. Гете. «Фауст»

С 23 января по 26 апреля 1981 года в Москве проводился ставший уже традиционным Турнир юных физиков (см. «Квант», 1980, № 8). В этом году он был организован физическим факультетом МГУ; председатель оргкомитета Турнира — заведующий кафедрой атомной физики и электронных явлений, вице-президент АН СССР академик Е. П. Велихов. В Турнире приняли участие старшеклассники девятнадцати школ Москвы и Московской области.

Первый тур Турнира — заочный коллективный конкурс — начался 23 января и закончился 10 марта. Всем школам-участницам были разосланы списки из 17 задач, решать которые могли все желающие. Предложенные задачи были посвящены, в основном, экспериментальному или теоретическому исследованию реальных физических явлений. Каждая такая задача — это проблема, решение которой представляет собою научное исследование. При формулировке условий задач авторы стремились кратко изложить лишь суть проблемы, предоставляя ребятам возможность самим конкретизировать задачу, сделать разумные допущения и упрощения, что, безусловно, требует проявления физической интуиции, умения подходить к проблеме с разных сторон.

Ниже мы приводим условия некоторых задач заочного конкурса с краткими комментариями к ним.

Задача «Свеча». *Свеча, сгорая, светит и греет. Измерить теплоту сгорания парафиновой свечи.*

Простота формулировки задачи и возможность проявить свои экспериментальные способности вызвали живой интерес будущих физиков, и почти все школы прислали решение этой задачи. Наиболее интересной была признана работа И. Алексеева и Д. Свириды (с. ш. № 179) *).

Задача «Колебания». *Большая нагруженная пробирка плавает в воде в вертикальном положении и может совершать колебания вверх — вниз (рис. 1). Рассчитайте период колебаний пробирки и измерьте его. Объясните расхождение между теорией и экспериментом.*

Теоретический расчет периода колебаний пробирки с учетом вязкости воды и ее движения достаточно сложен. Период оказывается существенно зависящим от соотношения площадей поперечного сечения пробирки и свободной поверхности воды в сосуде; необходим также учет процесса волнообразования. Наиболее разумные теоретические оценки наряду с хорошими экспериментальными измерениями привели в своей работе десятиклассники В. Гребенник и С. Шавырин (с. ш. № 179).

Задача «Мешалка». *Для приготовления бетона необходимо перемешать песок с цементом и другими компонентами. Практически, как правило, это делают в цилиндрических барабанах. Как долго и с какой скоростью необходимо вращать барабан (рис. 2) для получения однородной смеси? Придумайте и рассмотрите упрощающие модели процесса.*

Эта задача представляет еще не решенную на сегодняшний день серьезную физико-техническую проблему. Наиболее интересные соображения высказали в своих работах десятиклассники И. Кудрявцев (с. ш. № 2) и А. Поляков (с. ш. № 91).

Задача «Центробежный маятник». *Стержень длины r раскручивается до*

*) Эта работа будет опубликована в нашем журнале в Лаборатории «Кванта».

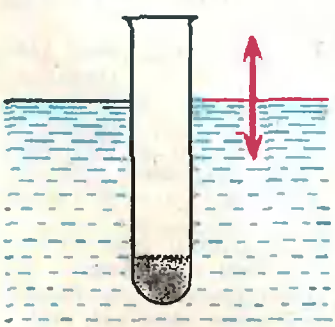


Рис. 1.

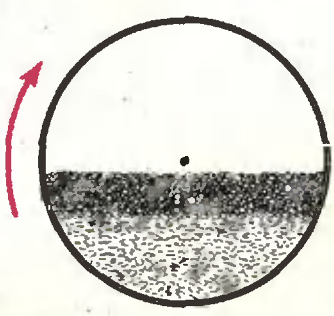


Рис. 2.

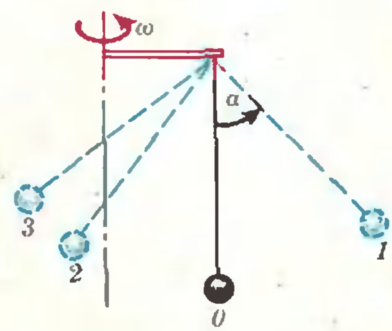


Рис. 3.

Участники финала размышляют над экспериментальными задачами физбоя.

Награды победителям вручает академик Е. П. Велихов.

Фото В. Александрова

угловой скорости ω в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через один из концов стержня. К другому концу стержня на нити длины l прикреплен тяжелый шарик (рис. 3). Найти «положения равновесия» шарика и исследовать их устойчивость. Рассмотреть случаи медленного и быстрого раскручивания.

Уравнение, определяющее положения равновесия маятника,

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 (k+\sin\alpha),$$

где α — угол отклонения нити от вертикали, $k = r/l$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Решение этого уравнения легче всего найти графически. При достаточно большой длине нити возможны три положения равновесия. Вопрос об их устойчивости лучше сначала разрешить экспериментально, а потом отыскать теоретические обоснования. Устойчивыми оказываются положения *1* и *3*; при медленном раскручивании всегда устанавливается положение *1*, при быстром раскручивании чаще всего устанавливается положение *3*. При больших угловых скоростях $\omega \gg \omega_0$ положение *3* становится неустойчивым.

Задача «Шариковая ручка». *Реально ли переписать одной шариковой ручкой (35 к.) роман А. Дюма «Граф Монте-Кристо»? Или, более строго, какой длины линию можно провести обычной шариковой ручкой на обычной бумаге?*

Оказывается, обычной шариковой ручкой можно провести линию длиною 1 км (не советуем проверять это прямым экспериментом). В ходе работы над этой задачей интересный статистический анализ текста романа «Граф Монте-Кристо» провели члены команды школы № 1 из подмосковного города Фрязино. Они обнаружили, что в романе 1,75 миллиона букв, 64 тысячи запятых, 26 тысяч тире, 44 тысячи точек и 5 тысяч вопросительных и восклицательных знаков. По их оценке длина такого текста, написанного средним почерком, составляет 23 километра.

В оргкомитет Турнира поступило более двухсот решений задач заочного конкурса и почти половина из них — коллективные. Первые три места на заочном конкурсе получили школы №№ 179, 91 и 151. Особо отметим дебютантов Турнира — школы №№ 842 и 315, которые заняли в заочном туре 6 и 7 места.

По результатам первого тура Турнира 13 школ были допущены к участию во втором туре — отборочных физбоях. Каждая школа была представлена командой численностью не более 15 человек.

26 марта 11 команд встретились в четырех подгруппах (в четырех школах Москвы) в четвертьфинальных физбоях, которые проводились по задачам заочного тура по системе «докладчик—оппонент—рецензент»*). По результатам четвертьфинальных физбоев в полуфинал Турнира вышли команды школ №№ 7, 18, 57, 91, 842. Право участия в полуфинале получили еще команда школы № 2 — как обладатель переходящего приза Турнира — и команда школы № 179 — как победитель коллективного заочного конкурса.

9 апреля в трех подгруппах прошли полуфинальные физбои. Они проводились по дополнительному списку задач, который ребята получили за 10 дней до полуфинала. Ниже мы приводим условия наиболее интересных задач из этого списка.

Задача «Автобус». *Известно, что в автобусе «трясет» на заднем сидении больше, чем на переднем. Почему?*

Задача «Зрительная труба». *Если смотреть в зрительную трубу сквозь оконное стекло, то изображение будет нечетким, даже если стекло чисто вымыто. Почему?*

Команды школ №№ 57, 91 и 179 одержали победу в полуфинале и вышли в финал Турнира.

Состязания второго тура прошли в острой, увлекательной форме. Ребята много спорили, отстаивая свое мнение, продемонстрировали хорошие знания физики и приобрели богатый опыт коллективного творчества. Очень хорошо организовали проведение физбоев ребята тех школ, в которых проходили состязания подгрупп; особо следует отметить команду школы № 47, в которой к физбою была даже подготовлена художественная самодеятельность.

Мы полагаем, что проведение физбоев между отдельными школами или классами возможно и полезно и вне рамок общего Турнира.

Третий тур Турнира — финал — был проведен 26 апреля на физическом факультете МГУ.

С вступительным словом перед ребятами выступил заместитель председателя оргкомитета Турнира профессор физического факультета Ю. М. Лоскутов. Он рассказал ребятам о физическом факультете МГУ и об основных направлениях научных исследований, проводимых учеными факультета. Затем председатель жюри Турнира профессор физического факультета, лауреат Ломоносовской премии по физике В. Л. Бонч-Бруевич представил жюри Турнира, и команды школ №№ 57, 91 и 179 приступили к выполнению заданий финального физбоя.

Всем участникам были продемонстрированы четыре опыта из различных областей физики. Команды должны были дать объяснения физических явлений, наблюдаемых в опытах. На это отводился час. Кроме того, всем командам были предложены четыре задачи, на решение которых отводилось 30 минут. Приводим условия этих задач.

Задача «Спектр Солнца». *Почему спектр Солнца сплошной?*

Задача «μ Солнца». *Для солнечного вещества справедливо уравнение состояния $p=\frac{\varrho}{\mu}RT$. Каково значение μ для солнечного вещества? Состав Солнца: водород — 73%, гелий — 25%, тяжелые элементы — 2%.*

Задача «Межзвездная среда». *Как характеризовать состояние вещества в межзвездном пространстве — вакуум или газ? Могут ли в межзвездной среде распространяться звуковые волны?*

Задача «Фотоэлемент». *Как согласовать классическую формулу для плотности тока $j=env$ с режимом насыщения фотоэлемента?*

Финальный физбой был проведен по системе докладчик—оппонент—рецензент и каждая команда дважды выступала в роли докладчика. В ходе физбоя был проведен конкурс капитанов — за короткое время им нужно было ответить на 8 вопросов. Жюри присудило победу капитану команды школы № 57 Д. Григорьеву. Болельщики тоже получили задание — им предлагалось придумать подписи к картинкам, представленным командам-финалистам, и очки за удачные подписи по желанию болельщика присуждались одной из команд. Симпатии болельщиков склонились в пользу команды школы № 179.

После подведения итогов физбоя состоялось закрытие Турнира. Председатель оргкомитета академик Е. П. Велихов вручил переходящий приз Турнира юных физиков и почетную грамоту за победу в III Московском турнире юных физиков команде школы № 179 (капитан А. Панфилов). Почетные грамоты были вручены команде школы № 91 (капитан А. Поляков) — за второе место, команде школы № 57 (капитан Д. Григорьев) — за третье место, команде школы № 842 (капитан В. Елисеев) — как лучшему дебютанту Турнира, Д. Григорьеву — победителю конкурса капитанов, Д. Свириде — за лучшую экспериментальную руботу. Еще 17 школьников жюри отметило грамотами за активное участие в Турнире и за лучшие решения отдельных задач.

Е. Юносов

*) О системе «докладчик — оппонент — рецензент» рассказано в информации о II Турнире юных физиков в 8-м номере «Кванта» за 1980 год.

Пособие по математике для поступающих в вузы

Так называется книга, которую в этом году большим тиражом выпустило издательство «Наука».

При подготовке к вступительным экзаменам перед абитуриентом возникает нелегкая задача: нужно повторить 103 пункта программы для поступающих в вузы и прорешать еще большее количество задач. Можно было бы снова просмотреть все школьные учебники от 5-го до 10-го классов и вспомнить решения содержащихся в них задач. Однако, на наш взгляд, такой путь по многим причинам (в том числе, и чисто психологическим) является далеко не самым лучшим. Гораздо эффективнее и естественнее другой путь — использовать при подготовке какое-либо пособие для поступающих. Рецензируемое пособие несомненно дает школьнику прекрасную возможность пойти по этому второму пути.

Книга состоит из 17 глав. Каждая глава содержит теоретический материал и задачи. Изложение теории сопровождается разбором упражнений и задач различной степени трудности.

Задачи разбиты на два раздела: задачи раздела I даны с решениями, раздела II — только с ответами. Учащийся может попытаться решить задачи раздела I самостоятельно. Если это не удается, можно изучить приведенное в книге решение, а затем на аналогичных задачах раздела II проконтролировать свою способность решать задачи данного типа. Книга содержит более 2000 упражнений и задач. Конечно, это не означает, что для успешной подготовки к экзаменам все их необходимо прорешать.

Помимо стандартных задач различной трудности в книге разбираются и такие, в которых решающий должен продемонстрировать элементарные логические навыки. Приведем два примера.

З а д а ч а 1. *Даны две точки A (0; 9), B (3; 6) и система неравенств*

$$\begin{cases} 2x-y+a<0, \\ 6x+3y+5a>0. \end{cases}$$

При каких значениях параметра a решением системы будут координаты

*а) **х о т я б ы о д н о й** точки отрезка AB?*

*б) **к а ж д о й** точки отрезка AB?*

З а д а ч а 2. *Ученики десятого «В» класса хвастались тем, что они выше ростом учеников десятого «А». На вопрос учителя математики «Что, собственно, означает, что вы выше ростом?» ученики десятого «В» дали следующие ответы:*

*1. **Л ю б о й** из нас выше **л ю б о г о** из них.*

*2. **С а м ы й в ы с о к и й** из нас выше **с а м о г о в ы с о к о г о** из них.*

*3. Для **л ю б о г о** ученика нашего класса **н а й д е т с я** ученик класса «А» меньшего роста.*

*4. **К а ж д ы й** ученик класса «А» ниже **х о т я б ы о д н о г о** ученика нашего класса.*

*5. **С р е д н и й р о с т** учеников нашего класса больше **с р е д н е г о р о с т а** учеников класса «А».*

Есть ли среди этих ответов равносильные? Если есть, то какие?

Известно, что обучение проходит тем успешнее, чем больший интерес проявляет учащийся к изучаемому предмету. Следующие две задачи показывают, что авторы стремились включить в книгу материал, который был бы занимательным для школьника.

З а д а ч а 3. *«Вернувшись домой, Мегрэ позвонил на набережную Орфевр.*

— Говорит Мегрэ. Есть новости?

— Да, шеф. Поступили сообщения от инспекторов. Торранс установил, что если Франсуа был пьян, то либо Этьен — убийца, либо Франсуа лжет. Жуссье считает, что или Этьен — убийца, или Франсуа не был пьян и убийство произошло после полуночи. Инспектор Люка просил передать Вам, что если убийство произошло после полуночи, то либо Этьен — убийца, либо Франсуа лжет. Затем звонила...

— Все. Спасибо. Этого достаточно.— Комиссар положил трубку. Он знал, что трезвый Франсуа никогда не лжет. Теперь он знал все».

Какой вывод сделал комиссар Мегрэ?

З а д а ч а 4. *Известно, что крокодил имеет не более 68 зубов. Доказать, что среди 16^{17} крокодилов может не оказаться двух крокодилов с одним и тем же набором зубов.*

Но, конечно, таких задач в книге немного. Большинство задач — это обычные задачи, многие из которых предлагались на приемных экзаменах в вузы. В конце книги авторы поместили некоторые варианты письменных вступительных экзаменов, которые предлагались в вузах Москвы, Ленинграда, Новосибирска, Киева и других городов.

Помимо основных в книге освещаются и такие темы, не входящие в школьную программу, как «Комбинаторика» и «Комплексные числа». Их изучение будет способствовать дальнейшему успешному обучению в вузах.

В книге отражен опыт работы Заочной физико-технической школы (ЗФТШ), которую хорошо знают многие учащиеся и учителя нашей страны. Задания этой школы уже помогли поступить в ведущие вузы нескольким поколениям школьников. Материалы ЗФТШ прошли длительную проверку при обучении учащихся 8—10 классов.

Не только выпускники школ, но и учителя, преподаватели техникумов и профтехучилищ, руководители математических кружков, студенты педагогических вузов найдут в книге материал, который удобно иметь под рукой.

«Пособие по математике», написанное А. Д. **К у т а с о в ы м**, Т. С. **П и г о л к и н о й**, В. И. **Ч е х л о в ы м** и Т. Х. **Я к о в л е в о й** под редакцией профессора Г. Н. **Я к о в л е в а**, несомненно станет настольной книгой для всех, кто изучает или преподает школьную математику.

В. Гутенмахер

Долго ли палке упасть?

1. В рассматриваемом промежутке
$$\frac{\varepsilon}{4} < \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Поэтому
$$Q\left[\ln \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} - \ln\frac{\varepsilon}{2}\right] \leqslant T \leqslant Q\left[\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} - \ln\frac{\varepsilon}{4}\right],$$
откуда следуют требуемые оценки.

2. Время падения
$$T = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{v^2}{2gl}+2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

Этот интеграл собственный, максимум подынтегральной функции достигается при $\alpha=0$. При $v\to0$ этот интеграл стремится к бесконечности, что видно из следующих преобразований, где $\frac{v^2}{2gl}$ обозначено через ε:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\sqrt{\varepsilon+2\sin^2\frac{\alpha}{2}}} \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\sqrt\varepsilon+\sqrt2\sin\frac\alpha2} \geqslant$$
$$\geqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\sqrt\varepsilon+\frac{\sqrt2}{2}\alpha} = \sqrt2\ln\left(\frac{\sqrt2}{2}\alpha+\sqrt\varepsilon\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$=\sqrt2\left[\ln\left(\frac{\pi}{2\sqrt2}+\sqrt\varepsilon\right)-\ln\sqrt\varepsilon\right] =$$
$$=\sqrt2\ln\frac{\pi}{2\sqrt2}-\frac{\sqrt2}{2}\ln\varepsilon.$$

Попутно мы получили логарифмическую оценку снизу для времени падения. Аналогичная оценка сверху может быть получена из следующих соображений:
$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon+2\sin^2\frac\alpha2}} \leqslant \min\left\{\frac{1}{\sqrt\varepsilon};\ \frac{1}{\sqrt2\,\alpha}\right\}.$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\min\left\{\frac1{\sqrt\varepsilon};\ \frac1{\sqrt2\,\alpha}\right\}d\alpha =$$
$$=\int_0^{\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}}\frac{d\alpha}{\sqrt\varepsilon}+\frac1{\sqrt2}\int_{\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\alpha} =$$
$$=\frac1{\sqrt2}+\frac1{\sqrt2}\left(\ln\frac\pi2-\ln\sqrt{\frac\varepsilon2}\right)=$$
$$=\left(\frac1{\sqrt2}+\frac1{\sqrt2}\ln\frac\pi2+\ln\sqrt2\right)-\frac12\ln\varepsilon.$$

3. Время падения
$$T=\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_\beta^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\sqrt{\cos\beta-\cos\alpha}}.$$

Этот интеграл несобственный, так как подынтегральная функция стремится к бесконечности при $\alpha\to\beta$. Но он конечен, что видно из следующих оценок:
$$\cos\beta-\cos\alpha = 2\sin\frac{\alpha+\beta}2\sin\frac{\alpha-\beta}2 \geqslant 2\cdot\frac{\alpha+\beta}4\cdot\frac{\alpha-\beta}4=\frac18(\alpha^2-\beta^2).$$
$$\int_\beta^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\sqrt{\cos\beta-\cos\alpha}}\leqslant\sqrt8\int_\beta^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}.$$

По формуле дифференцирования сложной функции
$$[\ln(x+\sqrt{x^2-\beta^2})]' = \frac1{\sqrt{x^2-\beta^2}}.$$
Поэтому
$$\int_\beta^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}} = \ln\left(\frac\pi2+\sqrt{\frac{\pi^2}4-\beta^2}\right)-\ln\beta \leqslant \ln\pi-\ln\beta.$$

Итак, мы получили обещанную оценку сверху. Аналогичная оценка снизу может быть получена следующим образом:
$$\sqrt{\cos\beta-\cos\alpha}=\sqrt{2\sin\frac{\alpha+\beta}2\sin\frac{\alpha-\beta}2}<\sqrt{\frac12(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}<\frac{\alpha}{\sqrt2}<\alpha.$$
Поэтому
$$\int_\beta^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\sqrt{\cos\beta-\cos\alpha}}\geqslant\int_\beta^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}\alpha=\ln\frac\pi2-\ln\beta.$$

Метод перебора

1. Турист должен взять палатку, еду и одеяло.
2. Маршрут коммивояжера: Ух — Эх — Ах — — Ох — Их — Ух
3. 26 человек.
4. Только одним нулем.
5. 3 бублика, 6 булок и 6 слоек.
6. 24 и 11, 48 и 43, 36 и 29, 228 и 227.
7. 8 экзаменов.

Переменный электрический ток

1. $I=U\sqrt{\frac{1+(\omega CR_2)^2}{(R_1+R_2-\omega^2LCR_2)^2+(\omega CR_1R_2+\omega L)^2}}.$

Указание. Воспользуйтесь векторной диа-

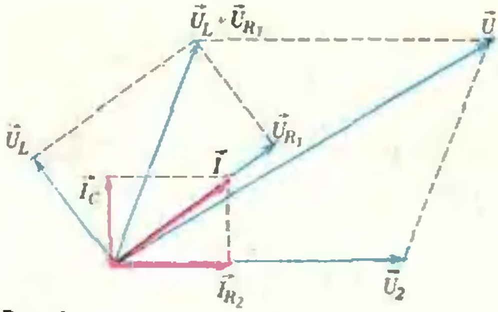


Рис. 1.

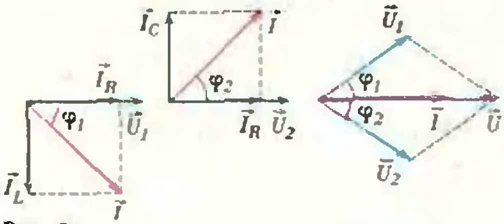


Рис. 2.

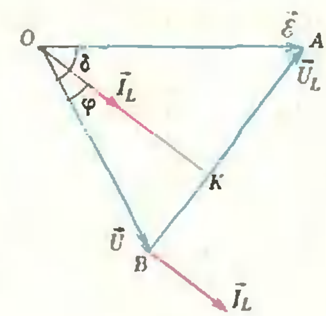


Рис. 3.

граммой токов и напряжений, приведенной на рисунке 1.

2. $R=\sqrt{L/C}$ Указание. См. рисунок 2, на котором изображены векторные диаграммы токов и напряжений для первого и второго участков цепи, а также для всей цепи. При любой частоте ток в цепи будет совпадать по фазе с приложенным напряжением, если углы φ_1 и φ_2 равны.

3. $P_{max}=\dfrac{\mathscr{E}U}{\omega L}$. Указание. На рисунке 3 изображена векторная диаграмма токов и напряжений для линии электропередачи. Здесь $\vec{OA}=\vec{\mathscr{E}}$ — ЭДС генератора; $\vec{OB}=\vec U$ — напряжение на приемной системе; δ — сдвиг фаз между ними; $\vec{BA}=\vec U_L=\vec{\mathscr{E}}-\vec U$ — напряжение на линии передачи; $\vec I_L$ — ток в линии, отстающий от $\vec U_L$ на $\pi/2$. Удобно перенести вектор $\vec I_L$ в точку O и рассмотреть треугольник AOB. Его площадь, с одной стороны, равна $S=\frac{1}{2}U\mathscr{E}\sin\delta$, а с другой — $S=\frac{1}{2}|\vec{AB}|\times$ $\times|OK|=\frac{1}{2}U_LU\cos\varphi$. Сравнивая эти два выражения, получим, что активная мощность, равная

$$P=UI_L\cos\varphi=\frac{UU_L}{\omega L}\cos\varphi,$$

максимальной будет в том случае, если $\delta=\pi/2$, и $\sin\delta=1$.

4. $U_1=U\dfrac{n_1(n_1R_2+n_2R_1)}{n_1^2R_2+n_2^2R_1}$;

$U_2=U\dfrac{n_2(n_1R_2+n_2R_1)}{n_1^2R_2+n_2^2R_1}$;

$I_1=\dfrac{Un_2(n_2-n_1)}{n_1^2R_2+n_2^2R_1}$;

$I_2=\dfrac{Un_1(n_1-n_2)}{n_1^2R_2+n_2^2R_1}$.

Указание. Для данной схемы справедливы такие равенства:

$$I_1R_1=U-U_1,$$
$$I_2R_2=U-U_2,$$
$$\frac{U_1}{U_2}=\frac{n_1}{n_2},$$
$$I_1n_1+I_2n_2=0.$$

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Вариант I

1. $\{(c;c)\}$ $(c\in\mathbf{R})$ при $a=0$, $\left\{\left(\frac{3}{2}a;\ \frac{9}{2}a\right),\ \left(\frac{3}{4}a;\ -\frac{9}{4}a\right)\right\}$ при $a\neq0$. Указание. При $a\neq0$ в любом решении $x\neq a$; выразите y из первого уравнения.

2. $\left\{\frac{13}{6},\ -\frac{13}{20}\right\}$.

3. $x=\frac{\pi}{44}+\frac{\pi}{22}k$ $(k\in Z)$. Решение. Данное уравнение равносильно каждому из уравнений

$$\frac{3\cos 5x-2\cdot2\cos 5x\cdot\cos x}{3\sin 5x-2\cdot2\sin 5x\cdot\cos x}=\operatorname{tg}17x,$$

$$\frac{\cos 5x(3-4\cos x)}{\sin 5x(3-4\cos x)}=\operatorname{tg}17x, \qquad (1)$$

Уравнение

$$\frac{\cos 5x}{\sin 5x}=\operatorname{tg}17x \qquad (2)$$

равносильно уравнениям

$$\frac{\cos 5x}{\sin 5x}=\frac{\sin 17x}{\cos 17x}$$
$$\frac{\cos 22x}{\sin 5x\cdot\cos 17x}=0$$

и, следовательно, системе

$$\begin{cases}\cos 22x=0\\ \sin 5x\neq0\\ \cos 17x\neq0.\end{cases} \qquad (3)$$

Если $\cos 22x=0$, то $\sin 5x\neq0$. В противном случае для некоторых k, $l\in Z$ $2(22l-k)=5$, что невозможно. Аналогично доказывается, что если $\cos 22x=0$, то $\cos 17x\neq0$. Значит, система (3) равносильна уравнению $\cos 22x=0$.

Уравнения (1) и (2) также равносильны, так как если $3-4\cos x=0$, то $\cos 22x\neq0$. Допустим противное: $\cos 22x=0$. Из $3-4\cos x=0$ следует $x=\pm\alpha+2\pi k$, где $\alpha=\arccos\frac{3}{4}$. Из $\frac{\sqrt2}{2}<\frac{3}{4}<\frac{\sqrt3}{2}$ следует $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{4}$, $\frac{11}{3}\pi<22\alpha<\frac{11}{2}\pi$. Из $\cos 22x=0$ следует

$\cos 22\alpha=0$. Значит, $22\alpha=\frac{9}{2}\pi$, $\alpha=\frac{9}{44}\pi$. Тогда $\cos\frac{9}{22}\pi=\frac{1}{8}$, $\cos\frac{9}{11}\pi=-\frac{31}{32}$, $\cos\frac{2}{11}\pi=\frac{31}{32}$. С другой стороны, поскольку $\frac{2}{11}\pi>\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{2}{11}\pi<\frac{\sqrt{3}}{2}$. Противоречие.

4. $|A_1K|=|A_1L|=\frac{\sqrt{5}}{2}a$, $|KL|=\frac{\sqrt{6}}{2}a$; 7:41.

Указание. Продолжите (A_1L) до пересечения с (AD). Объем отсекаемой части куба равен разности объемов двух пирамид.

5. Указание. Поскольку с увеличением y сумма x^2+y^2 возрастает, свое наибольшее значение на данном множестве она принимает в точке, расположенной на «верхней» параболе.

Вариант 2

1. $\varnothing$ при $a<0$, $\{2\}$ при $a=0$, $\{a+2-2\sqrt{a}, a+2+2\sqrt{a}\}$ при $0<a<1$, $\{a+2+2\sqrt{a}\}$ при $a\geqslant 1$. Указание. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}(x-a)^2=4(x-1)\\ x-a>0.\end{cases}$$

2. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$. Решение. Уравнение

$$2\cos^2 x+4\sin(x+1)=4\sin x\cdot\cos 1-\sin 2x \quad (1)$$

является выводным из данного уравнения. Уравнение (1) равносильно уравнениям

$$2\cos^2 x+4\sin x\cdot\cos 1+4\cos x\cdot\sin 1=4\sin x\cdot\cos 1-2\sin x\cdot\cos x$$

$$\cos x(\sin x+\cos x+2\sin 1)=0. \quad (2)$$

Поскольку $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\geqslant-\sqrt{2}$ и $\sin 1>\sin\frac{\pi}{4}>\frac{\sqrt{2}}{2}$, уравнение (2) равносильно уравнению $\cos x=0$. Значит, данное уравнение равносильно системам

$$\begin{cases}\sqrt{2\cos^2 x+4\sin(x+1)}=\\ =\sqrt{4\sin x\cdot\cos 1-\sin 2x}\\ \cos x=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{4\sin x\cdot\cos 1}=\sqrt{4\sin x\cdot\cos 1}\\ \cos x=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos x=0.\\ \sin x\geqslant 0.\end{cases}$$

3. $\max\limits_{[0;\frac{2}{3}]} f(x)=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{11}{3}\sqrt[3]{e^2}$, $\min\limits_{[0;\frac{2}{3}]} f(x)=f\left(\frac{1}{3}\right)=5\sqrt[3]{e}$. Указание. Неравенство $\frac{11}{3}\sqrt[3]{e^2}>7$ равносильно неравенству $e^2>\left(\frac{21}{11}\right)^3$; $e>2{,}7$.

4. $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$. Указание. Введите естественную систему координат и составьте уравнение плоскости, проходящей через три середины; поскольку эта плоскость не проходит через начало координат, ее уравнение можно искать в виде $ax+by+cz+1=0$.

5. $\{2,3\}$. Решение. При $x=z=\frac{\pi}{2}$, $y=0$ левая часть неравенства равна 2; поэтому $a=1$ не является решением. Рассмотрим теперь векторы

$$\vec{a}=(2\sin x\cdot\cos y;\ \cos x\cdot\sin y),$$
$$\vec{b}=(\sin z;\ -\cos z).$$

С одной стороны, левая часть неравенства равна $\vec{a}\cdot\vec{b}$. С другой стороны,

$$|\vec{a}|^2=4\sin^2 x\cdot\cos^2 y+\cos^2 x\cdot\sin^2 y\leqslant$$
$$\leqslant 4\sin^2 x+\cos^2 x=3\sin^2 x+1\leqslant 4$$
$$|\vec{a}|\leqslant 2$$
$$|\vec{b}|=1$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}\leqslant 2.$$

Значит, числа 2 и 3 являются решениями. Впрочем, с $a=3$ можно справиться и проще:

$$2\sin x\cdot\cos y\cdot\sin z-\cos x\cdot\sin y\cdot\cos z\leqslant$$
$$\leqslant|2\sin x\cdot\cos y\cdot\sin z|+$$
$$+|\cos x\cdot\sin y\cdot\cos z|\leqslant 2+1=3.$$

Физика

1. $v=\sqrt{\frac{(mg-2F_c)h}{2(M+m)}}\approx 0{,}8$ м/с.

2. $\alpha\geqslant\operatorname{arctg}(3/\mu)=\operatorname{arctg}10\approx 84°$.

3. $d=\frac{m}{2M+m}\frac{V}{S}=\frac{V}{2S}=5$ см.

4. $\Delta t=\frac{g\tau}{0{,}3c}\sqrt{\frac{\varrho gR}{2}}\approx 0{,}25$°C (здесь $c=4{,}2$ кДж/(кг · К) — удельная теплоемкость и $\varrho=10^3$ кг/м^3 — плотность воды).

5. $q=-Q/3$; этот заряд нужно поместить в центре треугольника; равновесие неустойчиво.

6. $W=\frac{1+2\varepsilon}{\varepsilon}\frac{Q_0^2}{2C_0}=1{,}25\cdot 10^{-2}$ Дж;

$$U=\frac{1+2\varepsilon}{\varepsilon}\frac{Q_0}{C_0}=250 \text{ В}.$$

7. $P_1'=\frac{4P_1(P_2+P_3)^2}{(P_1+P_2+P_3)^2}=72$ Вт;

$$P_2'=\frac{4P_1^2P_2}{(P_1+P_2+P_3)^2}=16 \text{ Вт};$$

$$P_3'=\frac{4P_1^2P_3}{(P_1+P_2+P_3)^2}=32 \text{ Вт}.$$

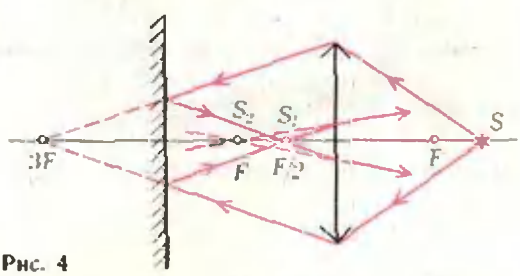


Рис. 4

8. $\mathscr{E}_м=2\pi f nSB\approx 62{,}8$ В.

9. $x=F/2$. Указание. См. рис. 4, на котором S_1 — действительное изображение источника, а S_2 — мнимое изображение.

10. $h=\frac{e}{c}\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}(U_1-U_2)\approx$

$\approx 6{,}61\cdot 10^{-34}$ Дж · с;

$\lambda_{кр}=\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 U_1-\lambda_2 U_2}(U_1-U_2)\approx 0{,}65$ мкм.

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Вариант 1

1. 13,5.

2. $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k\ (k\in Z)$.

3. 7.

4. $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$.

5. 15 га и 18 га или 24 га и 27 га.

Вариант 2

2. $[10-\sqrt{99};\ 10+\sqrt{99}]$.

3. $x_1=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,\ x_2=(-1)^l\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}l\ (k, l\in Z)$.

5. $\frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta}}{\sin\beta}h^2$.

Физика

1. $l'=s'=gt'^2/2\approx 5$ м; $l=2l'\approx 10$ м; $s=0$; $v_{ср}=l/t=5$ м/с.

2. $n=\frac{d}{2\pi lt}\approx 4{,}9\ с^{-1}$; в нижнем положении натяжение нити наибольшее.

3. $\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{mgh}{0{,}8mgh}=1{,}25$.

4. $p=\frac{\varrho RTV_в}{\mu V}\approx 1{,}39$ МПа. Указание. При исчезновении сил притяжения между молекулами вода превратилась бы в идеальный газ.

5. $A=\frac{pV\Delta T}{T}\approx 3{,}7\cdot 10^2$ Дж (здесь $p=10^5$ Па, $\Delta T=1$ К и $T=273$ К).

6. $m=\frac{\varrho V(c(t_2-t_1)+\lambda k/100\%)}{q\eta/100\%}\approx 0{,}12$ кг (здесь $\varrho=10^3$ кг/м^3 — плотность воды).

7. $r=\frac{\mathcal{E}}{I}\frac{R_3}{R_2+R_3}-R_1-\frac{R_2R_3}{R_2+R_3}=0{,}5$ Ом.

8. $n=\frac{(U_0-U)US}{P\varrho l}=13$; $P_0=\frac{nU_0P}{U}\approx 2{,}7$ кВт

9. $I_2\geqslant\frac{E(h^2+l^2/4)^{3/2}}{h}-I_1=425$ кд.

10. $D=-\frac{2}{d}=-4$ дптр; линза — рассеивающая.

Московский энергетический институт

Математика

Вариант 1

1. 1.

2. $[3;\ +\infty[$.

3. $\min\limits_{[-1,3]}f(x)=1$, $\max\limits_{[-1,3]}f(x)=5$.

4. $\left\{\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}\right\}$.

5. $4\sqrt{2}\cdot S\cdot\operatorname{ctg}\alpha$.

Вариант 2

1. При $x>\sqrt[3]{2}$ $f'(x)=1$.

2. $\{10^{-\sqrt{5}},\ 10^{\sqrt{5}}\}$.

3. $\frac{5}{3}+\frac{25}{3}$.

4. $x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k\ (k=2, 3, 4, \ldots)$.

5. $-\frac{4m^2\cdot\cos^2\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$.

Физика

Письменный экзамен

Вариант

2. $V_2>V_1$.

3. $F=\frac{dL/l}{L/l+1}=5{,}7$ см, где $l=1$ мм.

4. $\Delta\varphi_{12}=\varphi_1-\varphi_2=\frac{v_1^2-v_2^2}{2e/m}\approx -22{,}7$ В.

5. $A=\frac{ms^2g}{4H}\left(\frac{m}{M}+1\right)\approx 347$ Дж.

Задачи устного экзамена

1. $F=mg(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)\approx 16$ Н.

2. $\varrho=\varrho_0\frac{p}{p_0}\frac{T_0}{T}\approx 0{,}16$ кг/м^3.

3. $n_2=n_1\frac{Ir+U_н}{U_1}=40$.

Красноярский институт цветных металлов им. М. И. Калинина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $85\frac{1}{3}$.

2. Единственная точка экстремума — точка максимума $x=6$; $y(6)=432$.

3. $]-\infty;\ 1[$.

4. $x_1=\pi k,\ x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi l\ (k,\ l\in Z)$.

5. $\frac{a^3}{24}$.

Вариант 2

1. $10\frac{2}{3}$.

2. $\max\limits_{[0,4]}f(x)=f(3)=135$, $\min\limits_{[0,4]}f(x)=f(0)=0$.

3. $]-\infty;\ -1[\cup]2;\ +\infty[$.

4. $x=\frac{\pi}{4}+\pi k\ (k\in Z)$.

5. $\frac{1}{4\pi}d^3\cdot\sin\varphi\cdot\cos^2\varphi$.

Задачи устного экзамена

1. $-0{,}7788$. 2. 1692. 3. $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$, $\cos\alpha=$

$=-\frac{5}{13}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{5}{12}$. 4. $\sin 2$. 5. $144\sqrt{3}\,g$м^2.

6. а) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$; б) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$.

7. $\left]\frac{3}{2};2\right[$. 8. $-\frac{1}{9}$.

Физика

1. а) $t=\sqrt{2h/g}\approx 2{,}3$ с; б) $s=v_0\sqrt{2h/g}\approx$ $\approx 34{,}5$ м; в) $v=\sqrt{v_0^2+2gh}\approx 26{,}7$ м/с, при этом вектор $\vec{v}$ составляет с горизонтом угол $\alpha=\arccos(v_0/v)\approx 56°$.
2. $\omega=\sqrt{2ah}/R=2$ с$^{-1}$.
3. $T_2=T_1b/a=930$ K.
4. $m=\frac{Ns}{\eta qv}\approx 0{,}08$ кг (здесь $\eta=0{,}3$).
5. $v=\sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mr}}\approx 2{,}25\cdot 10^6$ м/с (здесь $\varepsilon_0=8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная).
6. $R_в=r\frac{U}{\mathscr{E}-U}=2950$ Ом.
7. При параллельном соединении проводников потребляется в 4 раза бо́льшая мощность, чем при последовательном соединении.
8. $n=\frac{U^2d_2^2\eta\tau}{4\varrho DcVd_1(t_к-t)}\approx 13$ (здесь $D=10^3$ кг/м^3 — плотность воды, $t_к=100°$ С — температура кипения воды).
9. $W=mU/k\approx 1{,}85\cdot 10^3$ Дж.
10. $d=a\frac{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}{(\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}-\cos\alpha)\sin\alpha}\approx 3{,}9$ см.

Две головоломки

(см. «Квант» № 1)

1. Из первого вычитания находим $S=1$ и $A=0$. Поэтому первая и пятая цифры частного — девятки (см. также пятое вычитание). Обозначив остальные цифры частного через a, b, c, d, e и g, получим уравнение

$$\overline{10PIENTI}:\overline{107}=\overline{9abc9,deg}$$

или

$$\overline{10PIENTI000}:\overline{107}=\overline{9abc9deg}.$$

Здесь делитель и частное нулями не оканчиваются, а их произведение

$$\overline{107}\cdot\overline{9abc9deg}=\overline{10PIENTI000}$$

делится на $1000=2^3\cdot 5^3$. Значит, одно из этих чисел — нечетное, но делится на 125, а другое не делится на 5, но делится на 8. Очевидно, на 8 должно делиться $\overline{I07}$, откуда $T=4$. Таким образом, $\overline{9abc9deg}$ делится на 125; стало быть, оно оканчивается либо на 125, либо на 375, либо на 625, либо на 875. Последовательно рассматривая эти возможности, находим, что $\overline{deg}=875$, так что $I=7$, $P=2$. Замечая, что делимое делится без остатка на 13, находим E и N: $E=9$, $N=3$. Окончательно: 10279347:104=98839, 875.

2. Из того, что пятое десятизначное число равно $CECCA^2$, следует $C>3$. Тогда $E>5$. Первая цифра у третьего числа равна 2; так как $E>5$, R может быть только четверкой. Тогда $N\in\{1, 5, 6\}$ (см. первое число). Возводя последовательно в квадрат 441, 445 и 446, находим, что $N=6$. Наконец, учитывая, что сумма цифр числа $CHARLESTON$ равна 45, то есть что оно делится на 9, получаем, что число $EERRN$ делится на 3. Значит, $E\in\{5, 8\}$. Испытав эти две возможности, находим, что $CHARLESTON=3074258916$. Чему равны остальные числа, ясно из рисунка 5.

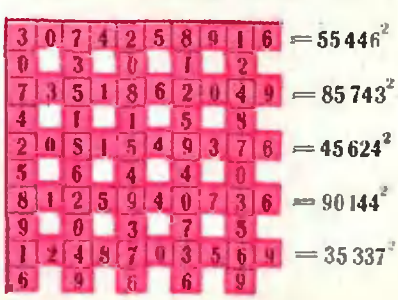


Рис. 5.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 1)

1. $A=5$, $Б=3$, $B=4$, $Г=6$, $Д=2$, $E=1$. Как расположены косточки, показано на рисунке 6.
2. В 1968 году.
3. Так будет в любом невисокосном году, поскольку $365=7\cdot 52+1$.
4. Если вы думаете, что нужно переложить по крайней мере одну спичку, то вы ошибаетесь: спички перекладывать вообще не нужно! Нужно просто посмотреть на это равенство «с другой стороны».
5. В промежутке от «первого» до «восемнадцатого» желтого света 9 раз горел красный свет и 8 раз — зеленый. Если желтый свет горит x с, то $18x+9\cdot 4+8\cdot 6x=1020$, откуда $x=10$ с.

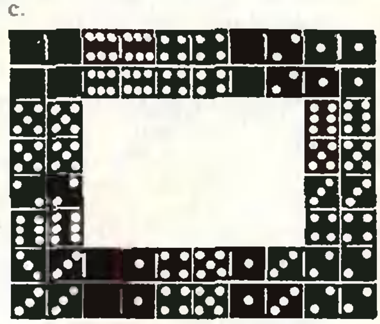


Рис. 6.

А вы как думаете?

(см. «Квант» № 1)

Знакомый, конечно, ошибся: неравенство

$$\underbrace{(R\circ R\circ\ldots\circ R)}_{n}(a)\neq\underbrace{(F\circ F\circ\ldots\circ F)}_{n}(a)$$

(при некотором n) никак не противоречит равенству

$$R(a)=F(a)$$

Искомых фигур существует сколько угодно: например, точка, две точки, отрезок, окружность, эллипс, круг (найдите для каждой из этих фигур соответствующие R и F; например, для круга с центром O можно взять $R=R_p^a$, где $p\neq 0$, $a\neq 0$ и $F=O'O$, где $O'=R_p^a(O)$). Попробуйте описать все такие фигуры.

Шахматный конкурс
(см. «Квант», 1981, № 12)
1 (Р. Рети, 1928 г.). **1.Крf2!** Единственный ход, к ничьей ведет 1. Кр:g2? Крe4 2. Крf2 e1Ф+! 3. Кр:e1 Крd3 и т. д. **1...Крe4 2.Кр:e2 Крd4 3.Лg1 Крe4 4.Лe1! Крe5** (4...Крf4 или d4 5.Крf2 или d2) **5. Крe3! Крe6 6. Лg1 Крe5 7.Крd2 Крe4 8.Л:g2** и все кончено.
2 (Н. Копаев, 1949 г.). План белых заключается в переводе ладьи на e1, где она будет контролировать поле превращения черной пешки и создаст угрозу Крe7. Из двух маршрутов ладьи на поле e1 (h5—e5—e1 и h5—h1—e1) решает только первый. **1.Лe5! a2 2.Лe1 Лe2** (другие ответы проигрывают быстрее) **3.Лg1! Лg2 4.Л:g2! a1Ф 5.Крg8 Фf1 6.Лb2+ Крa6 7.f8Ф Фc4+ 8.Фf7 Фg4+ 9.Крf8 Фc8+ 10.Крg7** с выигрышем, так как следующий шах приводит к размену ферзей.

Четвертая страница обложки
(см. «Квант», 1981, № 12)
См. рис. 7.

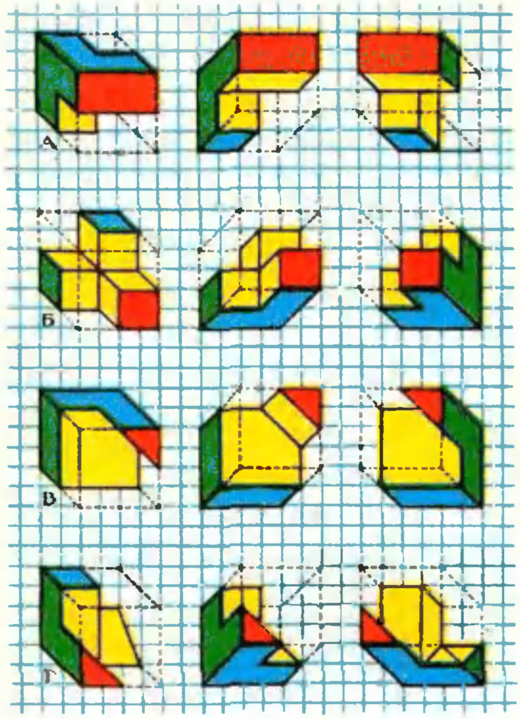


Рис. 7.

Номер подготовили:
А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
Л. Денисенко, М. Дубах, Г. Красиков, Н. Кузьмина, С. Лухин, Э. Назаров, А. Прокофьев, И. Смирнова

Заведующая редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор О. Кривенко

117071, Москва, Ленинский проспект, 15.
«Физматлит», «Квант», тел. 232-49-25
Сдано в набор 16.12.81. Подписано в печать 27.1.82.
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4.
Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 7,08 Т-00332
Цена 40 коп. Заказ 3132 Тираж 179 849 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

МАШИНА УГАДЫВАЕТ СЧЕТ

Перед началом 30-го, юбилейного матча на первенство мира по шахматам во всех прогнозах единодушно предсказывалась победа А. Карпова. Но счет точнее всех указал компьютер — 6:2. Однако в матчах на первенство мира легкой борьбы не бывает, и поэтому перед сражением в Мерано Карпов провел фундаментальную подготовку со своими тренерами, международными гроссмейстерами И. Зайцевым и Ю. Балашовым. Уже первая партия матча показала, что чемпион мира — в прекрасной спортивной форме.

В. Корчной — А. Карпов
Ферзевый гамбит

1. c4 e6 2. Kc3 d5 3. d4 Ce7 4. Kf3 Kf6 5. Cg5 h6 6. Ch4 0–0 7. e3 b6 8. Лc1 Cb7 9. Ce2. Так же начиналась первая партия матча в Багио. Тогда после 9...dc 10. C:c4 Kbd7 11. 0—0 c5 12. dc K:c5 шансы сторон уравнялись и вскоре последовало соглашение на ничью. На этот раз Карпов избегает быстрых упрощений. **9...Kbd7 10. cd ed 11. 0—0 c5 12. dc bc 13. Фc2 Лc8 14. Лfd1 Фb6 15. Фb1.** Белые уже испытывают затруднения. **15...Лfd8 16. Лc2 Фe6 17. Cg3 Kh5 18. Лcd2 K:g3 19. hg Kf6 20. Фc2 g6 21. Фa4 a6 22. Cd3 Kpg7 23. Cb1 Фb6.** Перемещения белого ферзя и слона не производят впечатления, а ход пешкой приводит белых к катастрофе. **24. a3 d4!!** Эффектный прорыв, рассекающий доску пополам. На одной ее части — одинокий король, на другой — заблудившийся ферзь. **25. Ke2.** Равносильно капитуляции, в случае 25. ed черным еще предстояло найти несколько

сильных ходов. **25...de 26. fe c4 27. Ked4 Фc7 28. Kh4 Фe5 29. Kph1 Kpg8 30. Kdf3 Ф:g3 31. Л:d8+ C:d8 32. Фb4 Ce4! 33. C:e4 K:e4 34. Лd4 Kf2+35. Kpg1 Kd3 36. Фb7 Лb8 37. Фd7 Cc7 38.Kph1 Л:b2 39.Л:d3 cd 40.Ф:d3 Фd6 41.Фe4 Фd1+ 42.Kg1 Фd6 43.Khf3 Лb5. Белые сдались.**

После 14-й партии счет стал 5:2 в пользу чемпиона мира и чувствовалось, что дело идет к концу. Число журналистов, аккредитованных на матче, еще более возросло. Карпов не заставил их долго ждать развязки. 18-я партия оказалась последней.

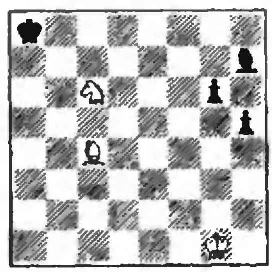
А. Карпов — В. Корчной
Испанская партия

1. e4 e5 2. Kf3 Kc6 3. Cb5 a6 4. Ca4 Kf6 5. 0—0 K:e4 6. d4 b5 7. Cb3 d5 8. de Ce6 9. Kbd2 Kc5 10. c3 d4 11. C:e6 K:e6 12. cd Kc:d4. В теории хорошо известно продолжение 13. K:d4 Ф:d4. Оно встретилось еще в 1914 году в партии Капабланка — Ласкер. Карпов применил здесь сразу две сокрушительные новинки. В 14-й партии последовало 13. Ke4! Претендент продумал 78 минут и после 13...Ce7 14. Ce3 K:f3+ 15.Ф:f3 0—0 16. Лfd1 Фe8 17.Kf6+! C:f6 18. ef Фc8 19. fg Лd8 20. h4 белые уверенно довели встречу до победы. В следующей «черной» партии Корчной сыграл сильнее — 14...Kf5 и спас пол-очка. И вот 18-я партия. **13. a4!!** Ответ последовал только через 50 минут, но найти достойной защиты черные не смогли. **13...Ce7 14. K:d4 K:d4 15. Ke4 Ke6 16. Ce3 0—0 17. f4 Ф:d1 18. Лf:d1 Лfb8 19. Лd7 Cf8 20. f5 Kd8 21. a5 Kc6 22. e6! fe 23. f6 Ke5 24. Л:c7 Лc8 25. Лac1 Л:c7 26. Л:c7 Лd8 27. h3 h6 28. Лa7 Kc4 29. Cb6!** Перед решающими действиями белые сгоняют ладью с активной позиции — после 29...Лd1+ 30. Kpf2 Лb1 31. f7+ Kph7 32. Лa8 теряется фигура. **29...Лb8 30. Cc5 C:c5 31. K:c5 gf 32. b4 Лd8 33. Л:a6 Kpf7 34. Лa7+ Kpg6 35. Лd7 Лe8 36. a6 Лa8 37. Лb7 Kpb5 38. Л:b5 Kpe5 39. Лb7 Kpd5 40. Лf7 f5 41. Лf6.**

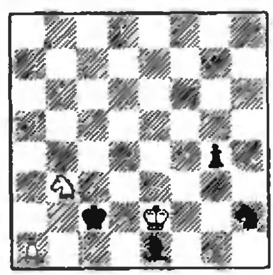
Историческая позиция — она завершила 30-й матч на первенство мира. Черные партию отложили, но потом сдали ее без доигрывания. Анатолий Карпов в третий раз взошел на шахматный Олимп!

Конкурсные задания

Скоро в свет выходит сборник «Этюды глазами гроссмейстеров». Следующие два этюда отобраны и прокомментированы для сборника А. Карповым.



3. Ан. Кузнецов, 1964 г. Белые начинают и выигрывают.



4. М. Либуркин, 1932 г. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 апреля 1982 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 3, 4»).

Цена 40 коп.
Индекс 70465

На этой странице обложки вы видите четыре машинных орнамента, созданных учащимися 4-го класса школы-интерната № 32 гор. Москвы Таней Власовой, Таней Дебрянской и Людой Барабановой с помощью системы машинной графики «Алграф».

Рисунки кодировались на упрощенном языке, позволяющем различным способом задавать геометрические элементы, преобразования координат и т. д.

Авторы рисунков немного раньше срока освоили координатные системы, отрицательные числа, операции параллельного переноса и поворота. На экскурсиях в вычислительный центр они потренировались в подготовке перфокарт с заданиями, наблюдали за работой построителя. Тут кому-то из ребят в голову пришла идея заставить построитель чертить на стекле. Это делается в два этапа: сначала линии контура автоматически наносятся черной тушью, затем части изображения вручную закрашиваются масляной краской разных цветов. Рисунок смотрится «с обратной стороны» и получается блестящим и красивым.

Ю. Котов