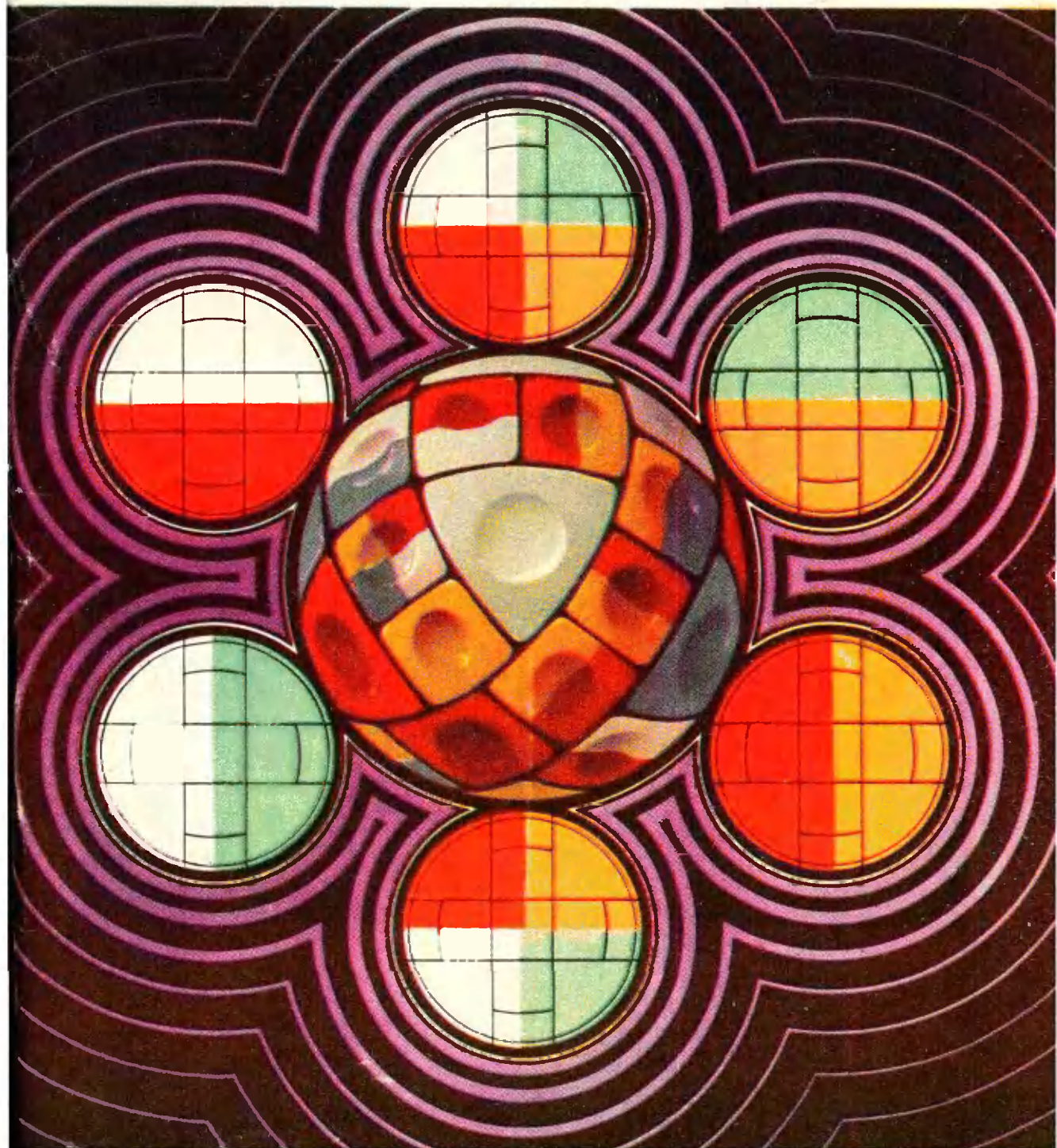
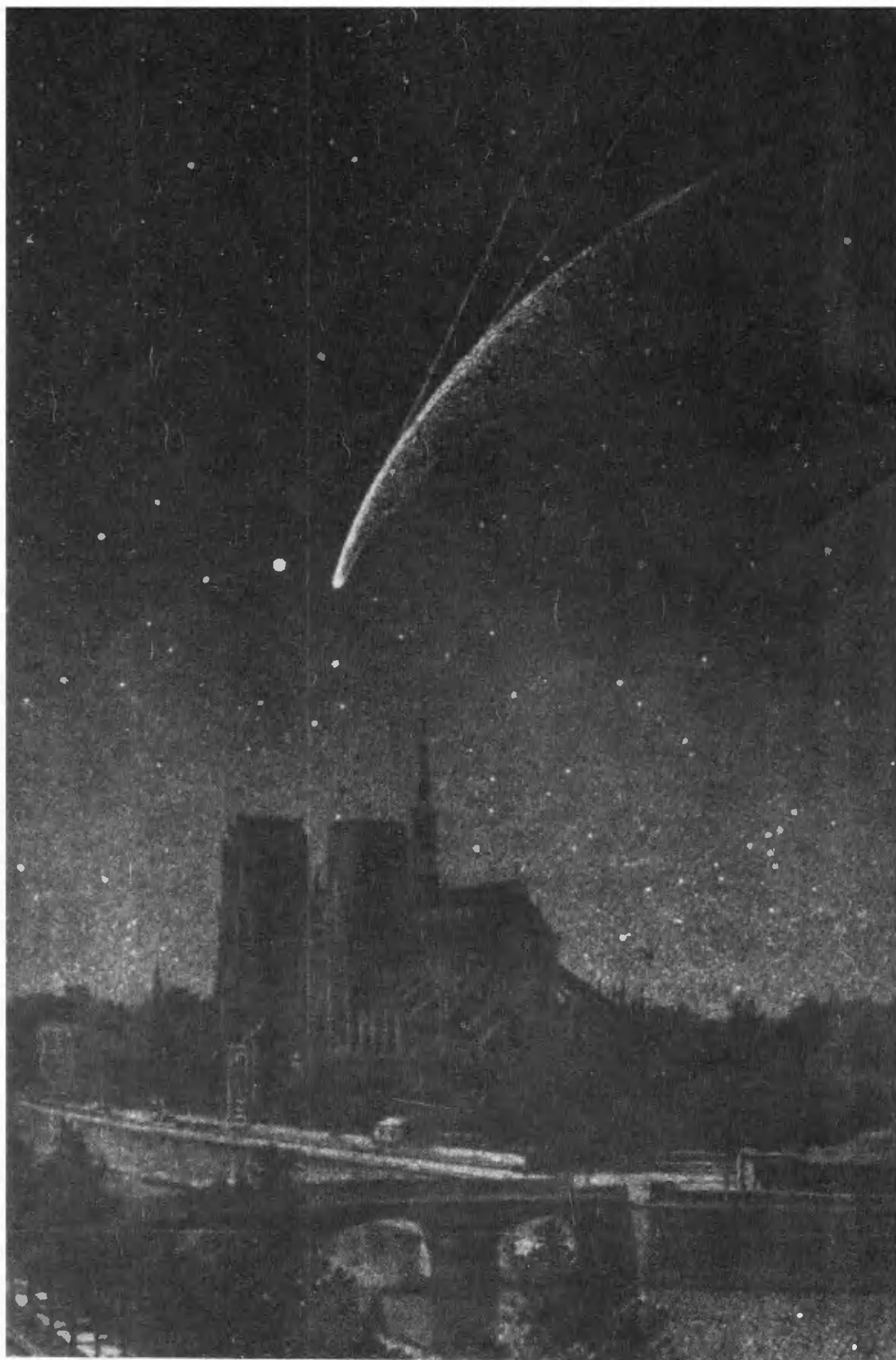


Квант

7
1982

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





Здесь мы воспроизводим литографию с рисунка, сделанного в 1858 году в Париже во время прохождения кометы

Донати (рисунок неизвестного художника). Кометам посвящена статья Л. Марочника в этом номере журнала.



Квант

7

1982

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» · ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ



В НОМЕРЕ: IN THIS ISSUE:

В. Тадеев. Простые, двойные, гармонические 2 *V. Tadeev.* Simple, double, harmonic

Л. Марочник. Кометы 10 *L. Marochnik.* Comets

Г. Меледин, В. Сербо. Конденсация света 19 *G. Meledin, V. Serbo.* Condensation of light
в вещество into matter

В. Дубровский. Алгоритм волшебного кубика 22 *V. Dubrovski.* An algorithm for the magic cube

В. Сурдин. Солнечное затмение 31 июля 26 *V. Surdin.* The solar eclipse of July 31, 1981
1981 года

Математический кружок Mathematics circle

А. Ходулев. Расселение фишек 28 *A. Khodulev.* Resettling chips

Лаборатория «Кванта» Kvant's lab

Л. Микаэлян. Домашние опыты с поляризованным светом 32 *L. Mikaelian.* Experiments in polarized light
at home

Задачник «Кванта» Kvant's problems

Задачи M751—M755; Ф763—Ф763 39 Problems M751—M755; P763—P767

Решения задач M711—M720; Ф723—Ф732 42 Solutions M711—M720; P723—P732

А. Зильберман. Источник с «отрицательным» внутренним сопротивлением 54 *A. Zilberman.* A source with "negative" inner
resistance

«Квант» для младших школьников Kvant for younger school children

А. Савин. Веселая викторина 56 *A. Savin.* An amusing quizz

Практикум абитуриента College applicant's section

Л. Баканина. Законы сохранения при ядерных превращениях 58 *L. Bakanina.* Conservation laws in nuclear
reactions

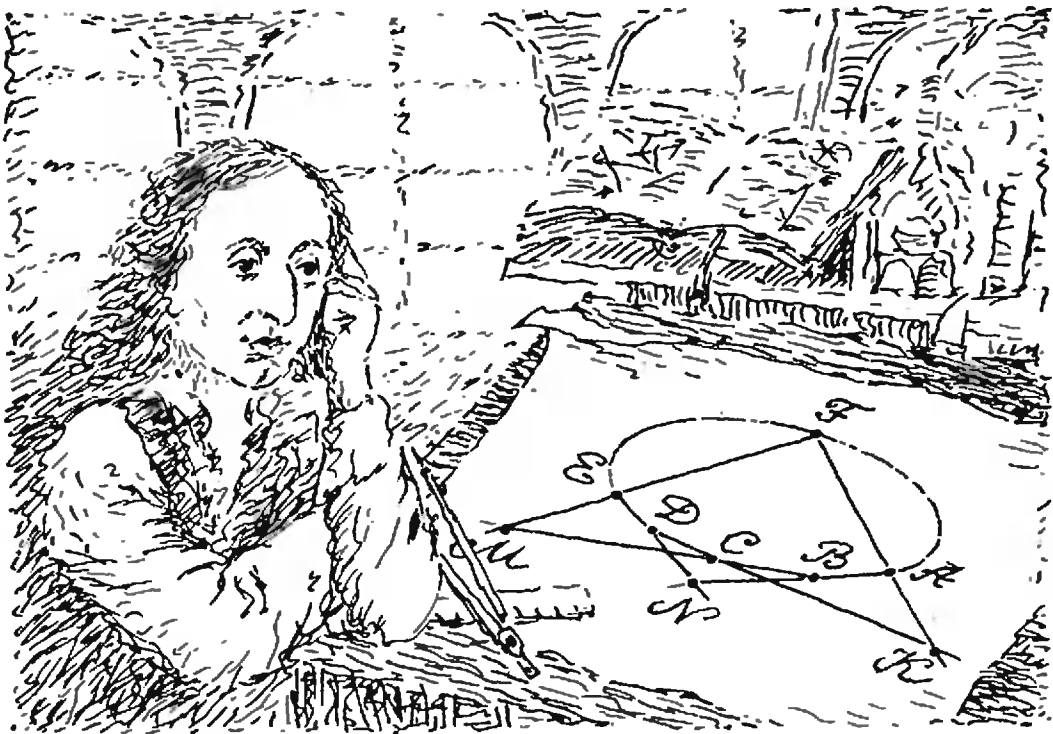
Ответы, указания, решения 62 Answers, hints, solutions

Новости науки (38) Science news (38)

Смесь (25, 60, 61) Miscellaneous (25, 60, 61)

Шахматная страничка The chess page

На пересечении линий (3-я с. обложки) On the intersection of lines (3rd cover page)



В. Тадеев

Простые, двойные, гармонические

Никто теперь точно не знает, как в 1640 году семнадцатилетний Блез Паскаль (о его жизни см. брошюру С. Г. Гиндикина «Рассказы о физиках и математиках» (М., «Наука», 1981)) додумался до теоремы, носящей ныне его имя. Возможно, продолжив зачем-то стороны вписанного в окружность шестиугольника, он просто заметил, что точки пересечения M , N и K оказались на одной прямой (см. заставку). Случайно ли это? Юноша взял другой шестиугольник, но точки M , N и K упорно ложились на одну прямую.

Мы не знаем, какие эмоции возникли в его душе. Известно только, что он довольно быстро придумал доказательство обнаруженного им красивого факта и тут же его обобщил. А затем... затем из теоремы, как из рога изобилия, посы-

пались следствия. Впоследствии теорема Паскаля оказалась одним из важнейших положений нового раздела математики — *проективной геометрии*, нашедшего интересные применения в геодезии и картографии.

В этой статье мы докажем теорему Паскаля для окружности и обсудим некоторые «проективные понятия», позволяющие ее обобщить.

Простые отношения

Пусть на прямой l заданы точки A , B и C (рис. 1). Для коллинеарных векторов \vec{AC} и \vec{CB} существует такое (единственное) число λ , что $\vec{AC} = \lambda \cdot \vec{CB}$. Это число λ называется *простым отношением* точек A , B , C ; обозначается оно через (ABC) . Когда точки B и C совпадают, простое отношение (ABC) не определено. Из определения ясно, что

$$|(ABC)| = \frac{|\vec{AC}|}{|\vec{CB}|}.$$

Точнее, $(ABC) = \frac{|\vec{AC}|}{|\vec{CB}|}$, если точка C

расположена между A и B , и $(ABC) = -\frac{|\vec{AC}|}{|\vec{CB}|}$ в противном случае.

Фиксируем теперь на l точки A и B и исследуем, как изменяется простое отношение (ABC) в зависимости от положения точки C . Для этого поместим начало координат в точку B , а ось абсцисс направим вдоль l от A к B (рис. 2). Если абсциссу точки C обозначить через x и положить $|AB| = a$, то $|\vec{AC}| = a+x$ и $|\vec{CB}| = x$. Легко видеть, что

$$(ABC) = v(x) = -\frac{a+x}{x}. \quad (1)$$

Из графика функции v (рис. 2) видно, что положение точки C на прямой AB однозначно определяется числом (ABC) .

Возьмем на плоскости прямые l , l' и точку P вне их. Произвольной точке A прямой l поставим в соответствие точку $A' = (PA) \cap l'$ прямой l' . Это отображение прямой l в прямую l' , которое естественно назвать *центральным проектированием* (прямой l в прямую l'), в дальнейшем будет играть важную роль.

К сожалению, если $l \parallel l'$, простое отношение точек при центральном проектировании не сохраняется (рис. 3). Однако из него легко строится другое отношение, уже обладающее нужным нам свойством.

Двойные отношения

Пусть на прямой l заданы точки A, B, C и D (рис. 4). Число $\frac{(ABC)}{(ABD)}$ называется *двойным* (или *сложным*, или *ангармоническим*) *отношением* точек A, B, C, D ; обозначается оно через $(ABCD)$. Таким образом,

$$|(ABCD)| = \frac{|\vec{AC}|}{|\vec{CB}|} : \frac{|\vec{AD}|}{|\vec{DB}|}.$$

Когда точки A и D совпадают, $(ABD) = 0$ (см. (1)); в этом случае двойное отношение $(ABCD)$ не определено. Не определено оно, конечно, также при $B=C$. При $B=D$ естественно положить $(ABCD) = 0$.

Фиксируем теперь на l точки A, B и C . Поместим начало координат в точку B и направим ось абсцисс

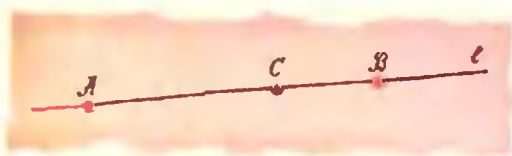


Рис. 1.

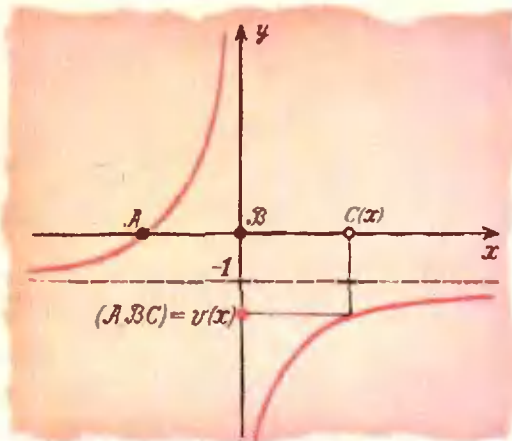


Рис. 2.

вдоль l от A к B . Если абсциссу точки D обозначить через x и положить $|AB| = a$, $(ABC) = k$, то из (1)

$$(ABCD) = w(x) = -\frac{kx}{a+x}.$$

Из графика функции w (нарисуйте его!) видно, что положение точки D однозначно определяется числом $(ABCD)$.

Упражнение 1. Пусть $(ABCD) = w$. Докажите, что

а) $(BADC) = (CDAB) = (DCBA) = w$;

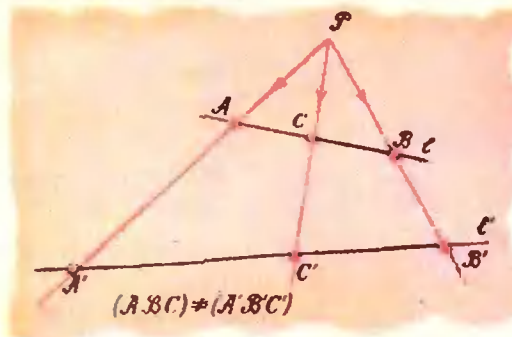


Рис. 3.



Рис. 4.

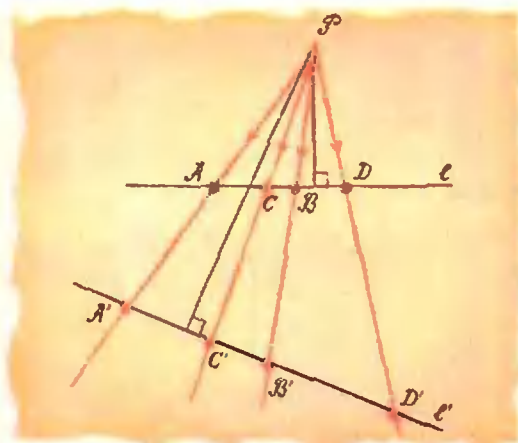


Рис. 5.

$$\text{б) } (BACD) = (ABDC) = (CDBA) = (DCAB) = \frac{1}{w};$$

$$\text{в) } (BDAC) = (DBCA) = (ACBD) = (CADB) = 1-w;$$

$$\text{г) } (DACB) = (ADBC) = (CBDA) = (BCAD) = 1 - \frac{1}{w};$$

$$\text{д) } (DBAC) = (BDCA) = (ACDB) = (CABD) = \frac{1}{1-w};$$

$$\text{е) } (ADCB) = (DABC) = (CBAD) = (BCDA) = -\frac{1}{1-w}.$$

Докажем, что двойное отношение при центральном проектировании сохраняется (рис. 5). Обозначим, соответственно, через h и h' расстояния от P до прямых l и l' . Рассматривая площади, например, треугольников PAC и $PA'C'$, получаем

$$\frac{h \cdot |AC|}{h' \cdot |A'C'|} = \frac{|PA| \cdot |PC|}{|PA'| \cdot |PC'|}.$$

Отсюда

$$|A'C'| = |AC| \cdot \frac{|PA'| \cdot |PC'|}{|PA| \cdot |PC|} \cdot \frac{h}{h'}.$$

Из аналогичных равенств для $|C'B'|$, $|A'D'|$ и $|D'B'|$ получаем

$$\frac{|A'C'|}{|C'B'|} \cdot \frac{|A'D'|}{|D'B'|} = \frac{|AC|}{|CB|} \cdot \frac{|AD|}{|DB|}.$$

Поскольку точки A, B, C, D на l и A', B', C', D' на l' расположены в одинаковом порядке, простые отношения (ABC) и $(A'B'C')$, а также (ABD) и $(A'B'D')$ имеют одинаковые знаки. Значит, $(A'B'C'D') = (ABCD)$.

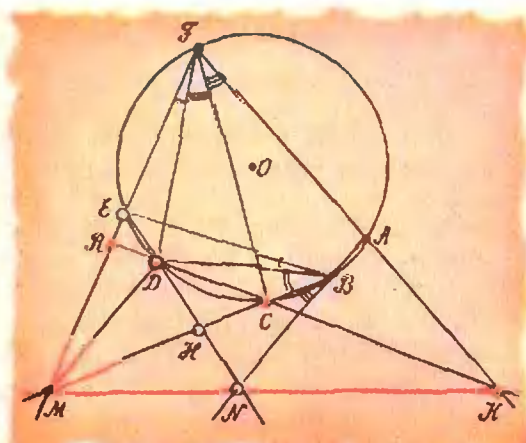


Рис. 6.

Паскалевы тройки

Теперь можно пожинать плоды наших трудов.

Постройте (только аккуратно) вписанный в окружность шестиугольник $ABCDEF$ и продлите пары сторон FE и BC , ED и AB , DC и FA до пересечения в точках M, N, K соответственно*). Если вы проделаете эти построения достаточно точно, вы увидите, что точки M, N, K лежат на одной прямой (рис. 6). Эту тройку точек называют *паскалевой тройкой*, утверждение об их коллинеарности — *теоремой Паскаля*.

Кстати, сколько вам лет? Семнадцать? Если вы внимательно прочитали предыдущие

* О случае, когда хотя бы одна пара прямых не пересекается, будет сказано ниже.



Рис. 7.

страницы, вы находитесь на равных с Паскалем, только что сделали свое наблюдение. Не хотите ли посмотреть, сколько времени вам потребуется, чтобы самостоятельно найти доказательство теоремы Паскаля?

Докажем эту теорему. Рассмотрим две четверки прямых: FE, FD, FC, FA и BE, BD, BH, BN . Они конгруэнтны, так как углы между соответствующими прямыми равны (например, $\angle EFD = \angle EBD$, ибо они опираются на общую дугу DE). Значит, по доказанному в предыдущем разделе $(RDCK) = (EDHN)$ (здесь $R = (FE) \cap (CD)$, $H = (BC) \cap (ED)$). Обозначим точку пересечения прямых MK и EH через N' . Тогда $(EDHN') = (RDCK)$. Следовательно, $(EDHN) = (EDHN')$, откуда N' совпадает с N .

Упражнения

2. Выбирая всевозможными способами пары прямых, соединяющих вершины вписанного в окружность шестиугольника $ABCDEF$, убедитесь, что имеется 60 паскалевых троек.

3°. Исследуйте взаимное расположение 60 прямых, на которых лежат эти тройки.

4. Сформулируйте и докажите теорему Паскаля для вписанного в окружность пятиугольника (Указание. Рассмотрите его как шестиугольник с совпавшими вершинами E и F , а касательную в точке E как предельное положение секущей EF), четырехугольника и треугольника.

5. Постройте одной линейкой касательную к данной окружности из данной точки.

* * *

Чтобы из теоремы Паскаля получить следствия, о которых говорилось в начале статьи, придется сперва немного потрудиться. Мы изучим два важных типа преобразований плоскости — параллельное проектирование и центральное проектирование. Эти преобразования лежат в основе проективной геометрии.

Вы знаете, что перемещения плоскости оставляют неизменными расстояния между точками; поэтому они сохраняют размеры и форму фигур. При подобиях сохраняются лишь отношения расстояний — фигуры могут изменяться в размере, но сохраняют свою форму. Хуже обстоит дело с параллельным и центральным проектированием — они искажают и форму фигур. Например, при параллельном проектирова-

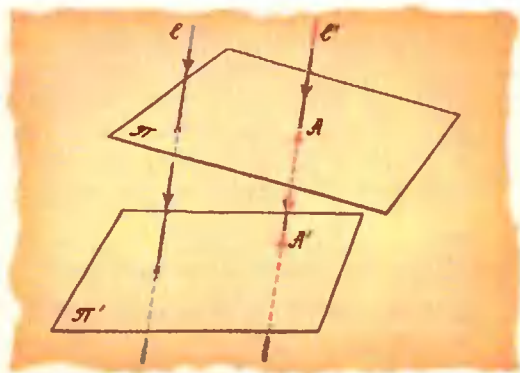


Рис. 8.

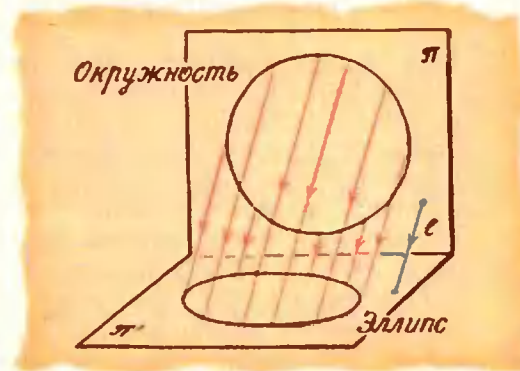


Рис. 9.

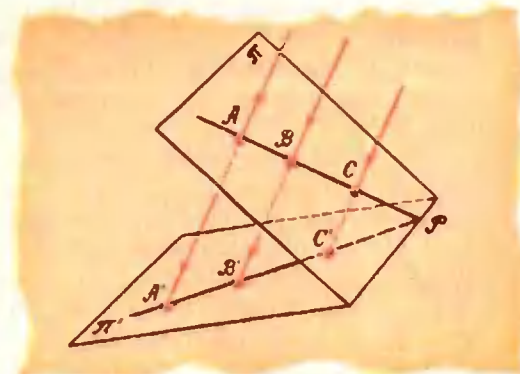


Рис. 10.

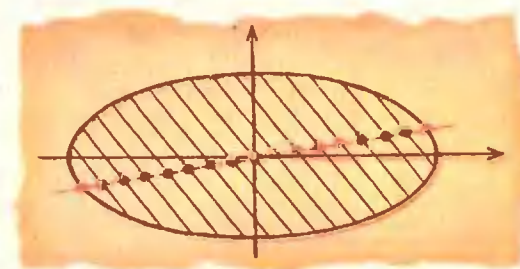


Рис. 11.

нии окружность может перейти в эллипс, а при центральном — даже в пару пересекающихся прямых! Что же они тогда сохраняют? Как раз об этом и пойдет речь — ответ на этот вопрос составляет основное содержание проективной геометрии.

Параллельное проектирование

Около поверхности Земли лучи Солнца с достаточной точностью являются параллельными. Поэтому возникновение на ровной поверхности тени от плоского предмета является иллюстрацией параллельного проектирования (рис. 7).

А математическое определение здесь такое: пусть даны плоскости π и π' (параллельные или пересекающиеся) и прямая l , пересекающая обе плоскости; каждой точке $A \in \pi$ поставим в соответствие точку $A' \in \pi'$ пересечения прямой l' , проходящей через A параллельно l , с плоскостью π' (рис. 8); полученное отображение плоскости π на π' называется *параллельным проектированием* (π на π' вдоль прямой l).

Очевидно, параллельное проектирование является взаимно однозначным отображением плоскости π на плоскость π' , переводящим параллельные прямые в параллельные, пересекающиеся — в пересекающиеся.

Параллельное проектирование не только меняет размеры фигур, но и искажает их форму. Так, при параллельном проектировании окружность может «сплющиваться» в эллипс (рис. 9)*). Меняются, таким образом, не только расстояния, но и их отношения.

Однако *простое отношение трех точек при параллельном проектировании сохраняется*. Действительно, когда плоскости π и π' пересекаются (рис. 10), это сразу следует из подобия треугольников $РАА'$, $РВВ'$ и $РСС'$; случай, когда π и π' параллельны, еще проще — разберите его самостоятельно.

Этот простой, но важный факт имеет много интересных следствий.

*) Кстати, это одно из возможных определений эллипса — кривая, получающаяся параллельным проектированием окружности.

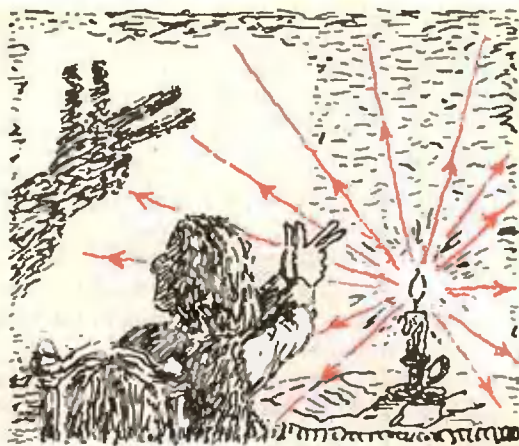


Рис. 12.

Например, при параллельном проектировании середина отрезка переходит в середину отрезка, медиана треугольника — в медиану. (А вот биссектриса не обязательно перейдет в биссектрису; то же самое можно сказать и о высоте треугольника.)

Упражнения.

6. Покажите, что эллипс имеет единственный центр симметрии.

7. Покажите, что середины хорд эллипса, параллельных данному направлению, лежат на одной прямой, проходящей через его центр (рис. 11).

Центральное проектирование

Свет, испускаемый лампой, — конечно, не такой яркий, как солнечный. В пределах освещенности лампы ее лучи нельзя считать параллельными — лампу поэтому чаще представляют как точечный источник, лучи которого расходятся во всех направ-

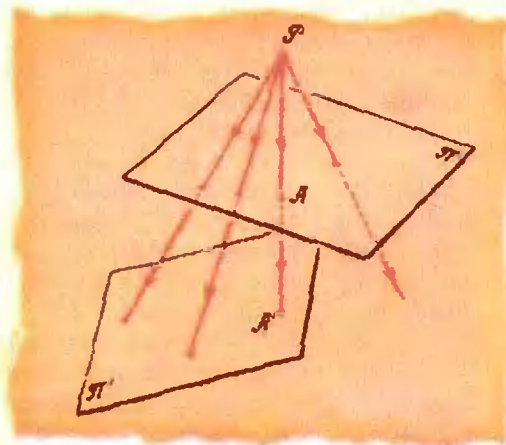


Рис. 13.

лениях. Возникновение на экране тени от плоского предмета моделирует центральное проектирование (рис. 12).

Математическое определение здесь следующее: пусть даны плоскости π и π' (параллельные или пересекающиеся) и точка P вне этих плоскостей; каждой точке $A \in \pi$ поставим в соответствие точку $A' \in \pi'$ пересечения прямой PA с плоскостью π' (рис. 13); полученное отображение плоскости π в плоскость π' называется *центральным проектированием* (плоскости π в плоскость π' из центра P).

К сожалению, если плоскости π и π' не параллельны, центральное проектирование не является ни отображением в себя плоскости π , ни отображением на всю плоскость π' . В самом деле, если через P провести плоскость π_1 , параллельную π' , то точки прямой $l = \pi_1 \cap \pi$ при центральном проектировании из P никуда не отображаются (рис. 14, а). Аналогично, если через P провести плоскость π_2 , параллельную π , то в точки прямой $l' = \pi_2 \cap \pi'$ при центральном проектировании из P никакие точки плоскости π не переходят (рис. 14, а).

Посмотрим, что делается при центральном проектировании с прямыми плоскости π . Как уже было сказано, прямая l (и любая ее точка) ни во что не переходит. Любая прямая плоскости π , параллельная l , переходит в прямую плоскости π' , параллельную l' (рис. 14, б). Прямая плоскости π , пересекающая l , без точки пересечения — «проколотая прямая» — переходит в «проколотую прямую» плоскости π' — в прямую без точки ее пересечения с l' (рис. 14, в). (В дальнейшем, чтобы не загромождать формулировки оговорками, мы в подобных ситуациях будем допускать вольность речи и говорить коротко, что прямая переходит в прямую.)

Заметим далее, что пересекающиеся прямые, если точка их пересечения не лежит на выделенной прямой l , переходят в пересекающиеся прямые (рис. 14, г), в противном случае они переходят в параллельные (рис. 14, д).

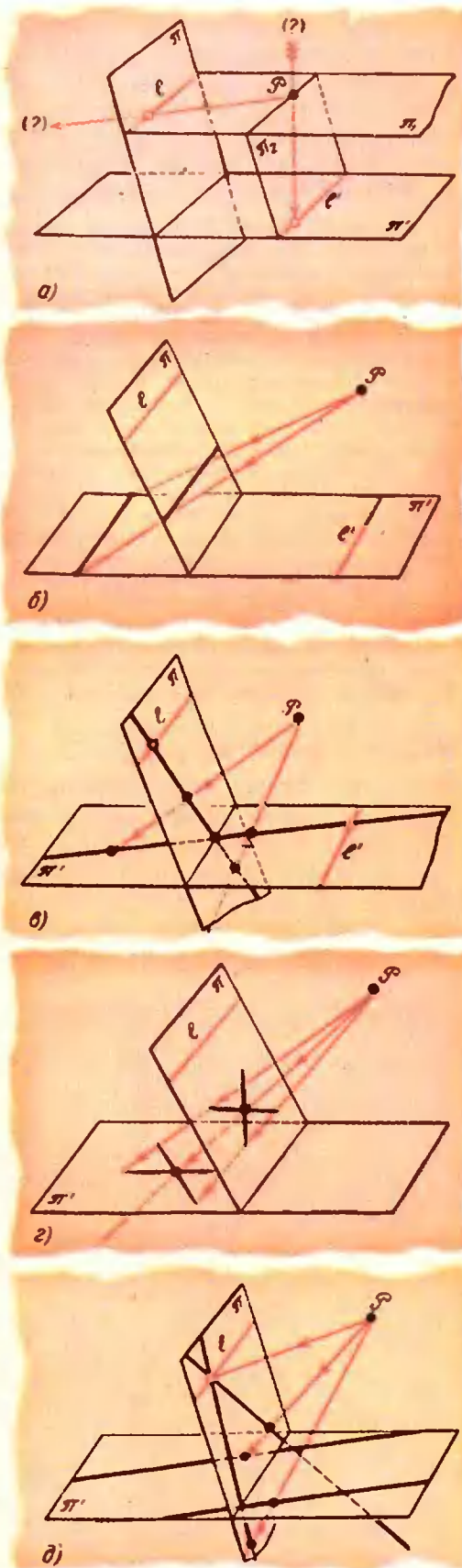


Рис. 14.

Таким образом, можно сказать, что при центральном проектировании в основном прямые переходят в прямые, притом пересекающиеся — в пересекающиеся. Слова «в основном» означают «кроме исключенной и оговорки, указанных выше».

Оговорка об исключительных случаях в формулировках о проектировании можно избежать, если считать, что «параллельные прямые пересекаются в бесконечно удаленной точке» и что «все бесконечно удаленные точки данной плоскости лежат на одной (бесконечно удаленной) прямой». Более того, словам в кавычках можно придать точный математический смысл: тогда, присоединяя к нашей обычной (евклидовой) плоскости ее «бесконечно удаленные точки», мы получим так называемую «проективную плоскость».

На проективной плоскости теорема Паскаля выполняется без оговорок: даже в случае правильного шестиугольника противоположные (параллельные) прямые «пересекаются в трех бесконечно удаленных точках, которые все лежат на одной (бесконечно удаленной!) прямой».

Однако мы здесь не будем заниматься этим странным математическим объектом. К этой теме «Квант» вскоре вернется.

Конические сечения

Посмотрим теперь на примере окружности, в какой мере центральное проектирование искажает форму фигур. Рассмотрим окружность S , лежащую на плоскости π , и точку P над этой плоскостью (рис. 15). Во что перейдет окружность S

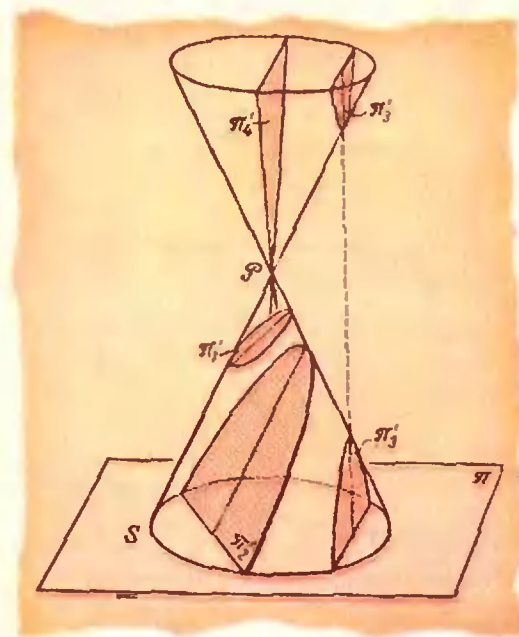


Рис. 15.

при центральном проектировании из точки P , зависит, разумеется, от расположения плоскости π' , на которую мы проектируем. На рисунке показаны четыре случая (плоскости $\pi'_1, \pi'_2, \pi'_3, \pi'_4$); при этом получаются, соответственно, эллипс, парабола, гипербола и пара пересекающихся прямых. На рисунке хорошо видно, что совокупность проектирующих прямых образует конус; поэтому перечисленные кривые называют *коническими сечениями*.

Если центральное проектирование так сильно искажает форму фигур, то что же оно все-таки сохраняет? Мы знаем, что оно переводит прямые в прямые, то есть сохраняет *коллинеарность* точек (здесь только нужно помнить об оговорках, сделанных выше!). Кроме того, оно сохраняет *двойное отношение* четырех точек — это мы фактически доказали раньше. Оказывается, этих двух фактов достаточно, чтобы получить много глубоких геометрических теорем, в частности — следствия из теоремы Паскаля.

Упражнения

8. Сформулируйте и докажите теорему Паскаля для шестиугольника, вписанного в эллипс, параболу и гиперболу.

9. Докажите, что эллипс, парабола и гипербола однозначно определяются пятью точками.

10. Укажите способ построения одной линейкой по пяти точкам эллипса других его точек.

11. Постройте одной линейкой касательную к данному эллипсу из данной точки. То же — для параболы и гиперболы.

Гармонические четверки

Еще древнегреческие математики называли коллинеарную четверку точек A, B, C, D *гармонической*, если $(ABCD) = -1$.

Приведем пример. Возьмем произвольный треугольник NAB и проведем биссектрису NC «внутреннего» угла ANB и биссектрису ND «внешнего» угла KNB (рис. 16). Как известно («Геометрия 6—8», задача §14), $\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|NA|}{|NB|}$. Это утверждение можно записать и так:

$$(ABC) = \frac{|NA|}{|NB|}.$$

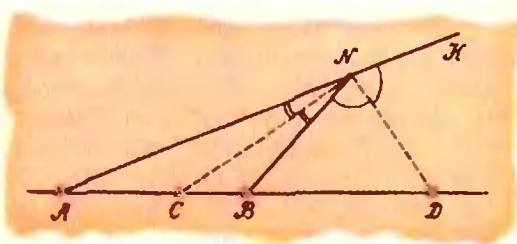


Рис. 16.

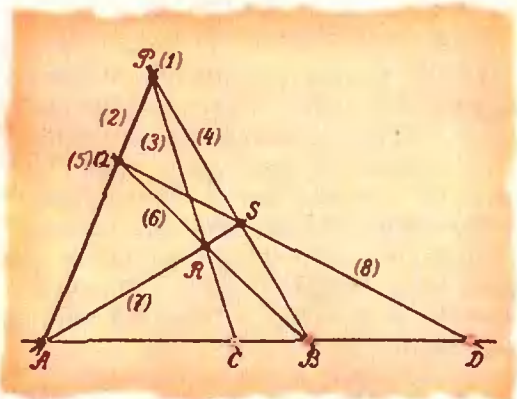


Рис. 17.

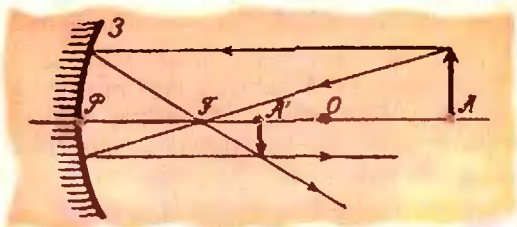


Рис. 18.

Легко доказать также, что

$$(ABD) = - \frac{[NA]}{[NB]}.$$

(Указание. Рассмотрите отношение площадей треугольников NAD и NBD , взяв за основания сначала $[NA]$ и $[NB]$, а потом — $[AD]$ и $[BD]$.) Следовательно, $(ABCD) = -1$, то есть четверка точек A, B, C, D является гармонической.

Этот факт позволяет с помощью циркуля и линейки по точкам A, B и C построить «четвертую гармоническую» точку D .

Упражнение 12. Укажите способ построения такой точки с помощью одной линейки. Указание. См. рис. 17. Точки P и Q на этапах 1 и 5 выбираются произвольно.

Гармонические четверки встречаются в оптике. Рассмотрим ход лучей в вогнутом зеркале Z (рис. 18).

Пусть A — точка на оптической оси, A' — ее изображение, F — фокус зеркала, а O — его центр ($|PF| = |FO|$). Тогда четверка точек P, O, A', A является гармонической. Докажите это самостоятельно, воспользовавшись формулой

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

известной из курса физики.

Древнегреческие ученые, кроме арифметической ($a-b=c-d$) и геометрической ($\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$), рассматривали еще гармоническую пропорцию: $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d}$ (этому равенству удовлетворяют координаты a, b, c, d гармонической четверки точек A, B, C, D). В случае, когда $b=c$ (в этом случае пропорции называют непрерывными), получаются среднее арифметическое $b = \frac{a+d}{2}$, среднее геометрическое $b = \sqrt{ad}$ и среднее гармоническое $b = \frac{2ad}{a+d}$.

По преданию, еще Пифагор, занимаясь математической теорией музыки, установил, что длины струн, дающих при одинаковом натяжении ноты *до*, *ми*, *соля* (составляющие мажорное трезвучие), пропорциональны числам $1, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}$. Но $\frac{4}{5}$ является средним гармоническим чисел 1 и $\frac{2}{3}$. Отсюда пришло в математику понятие гармонии.

Л. Марочник

Кометы

Почти четверть века назад человечество было потрясено известием о запуске искусственного спутника Земли. Во всем мире радиоприемники были настроены на волну его передатчика. Простенькие радиосигналы первого спутника «бип-бип-бип» возвестили о начале космической эры в истории человечества.

Нынешние десятиклассники, не говоря уже о более «молодой поросли», родились в эпоху космических полетов. Все постепенно становится привычным. И сейчас даже полеты кораблей к другим планетам Солнечной системы — Венере, Марсу, Сатурну — наверное, меньше поражают воображение, чем некогда — запуск первого спутника, полет Юрия Гагарина, высадка аме-

риканских астронавтов на Луне. Тем не менее, и нынешнее поколение ожидают кое-какие «сюрпризы», граничащие с научной фантастикой. Один из ближайших поражающих воображение космических экспериментов — экспедиции к комете Галлея, которые будут осуществлены в 1985—86 годах, когда эта комета в очередной раз вернется из «окраин» Солнечной системы и приблизится к Солнцу.

Такого рода эксперименты имеют, по крайней мере, два важнейших аспекта: психологический и научный. Почему психологический? Дело в том, что кометы всегда поражали воображение людей. Слово «комета» в переводе с греческого означает «волосатая звезда». И в древние времена, и в средние века кометы изображали чаще всего как отрубленные головы с развевающимися волосами. Человек всегда искал на звездном небе аналогии с известными ему, понятными образами; отсюда — названия многих созвездий: Большая Медведица, Близнецы, Весы и т. п. В этом смысле кометы не были исключением. Однако, если звездное небо даже искусному наблюдателю виделось практически неизменным из ночи в ночь, то появление яркой «волосатой звезды», довольно быстро, иногда в течение всего нескольких дней, исчезающей с небосвода, было событием выдающимся и ужасающим.

Вид яркой кометы — зрелище впечатляющее. По своему блеску она



Комета Галлея, сфотографированная 13 мая 1910 года (внизу слева — Венера).

может быть как Венера, например, и даже как Луна в полнолунии. Хвост такой кометы простирается на полнеба. Посмотрите на фотографию кометы Галлея, сделанную во время ее прошлого прохождения через перигей в 1910 году. Эффектно, не правда ли? Во всяком случае, можно понять, почему кометы во все времена у многих народов считались вестниками несчастий, дурными знаменьями, «гласом божьим» или, лучше сказать, «дьявольским». История человечества изобилует войнами, эпидемиями, дворцовыми переворотами и убийствами особ королевского происхождения, так что почти всегда появлению кометы «сопутствовало» какое-нибудь трагическое событие.

В 44 году до нашей эры смерть Юлия Цезаря совпала с появлением на небе яркой кометы (об этом известно из трудов римских историков), поэтому в средние века и даже позднее при европейских дворах существовало мнение, что появление яркой кометы может предвещать смерть особ царствующего дома. Яркая комета 1664 года очень напугала французского короля Людовика XIV, знакомого нам по роману Дюма «Виконт де Бражелон», а португальский король того времени Альфонс VI, опасаясь, что комета явилась за ним, стрелял в нее из аркебузы.

Любопытно, что «китайская точка зрения» на кометы радикально отличалась от «европейской». По мнению древних китайцев, кометы были курьерами, разносящими по «звездным провинциям» волю императора. Планеты были правителями провинций, а звезды — местными властями. Кометы, перемещаясь из провинции в провинцию, переносили правительственные депеши.

Впрочем, не следует думать, что в давние времена начисто отсутствовало научное изучение комет. Уже в древних китайских хрониках отражен фундаментальный научный факт, лежащий в основе современных представлений о физике комет, заключающийся в том, что хвосты комет всегда направлены в сторону, противоположную Солнцу. Об этом было известно также римскому философу и писателю Луцию Сенеке. До

XVII века в науке господствовали взгляды Аристотеля — признанного авторитета во всех вопросах естествознания. Аристотель полагал, что кометы находятся вне ведения астрономов, так как, по его мнению, это явление (комета) возникает в земной атмосфере: земные пары, поднимаясь вверх, загораются, соприкасаясь со «сферой огня», и хвост кометы — это пламя, которое гонит ветер. Однако уже в 1577 году искуснейший наблюдатель того времени Тихо Браге неопровержимо доказал ошибочность взглядов Аристотеля. Если бы комета находилась в пределах земной атмосферы, то есть сравнительно недалеко от Земли, то, наблюдая ее одновременно из двух различных точек земной поверхности, Тихо Браге и его ученики видели бы ее рядом с различными звездами. Но этого не произошло — комета в обоих пунктах проектировалась на одну и ту же точку звездного неба, а это означало, что угол «наблюдатель № 1 — комета — наблюдатель № 2» (так называемый параллакс) весьма мал, то есть комета находится очень далеко от Земли, и уж во всяком случае за пределами земной атмосферы. С тех пор изучение комет окончательно перешло в ведение астрономов.

После того как Галилей первым навел на небо построенный им телескоп, в астрономии появилась новая профессия — «ловцы комет». Дело в том, что слабая комета имеет вид маленького туманного пятнышка на небе. Но отнюдь не любое туманное пятнышко — это комета. Теперь мы знаем, что так выглядит целый ряд астрономических объектов: планетарные и диффузные туманности, шаровые и рассеянные скопления, галактики. Когда комета еще далеко от Солнца, она тоже почти не перемещается по небу от ночи к ночи, поэтому ее трудно отличить от этих «статичных» пятнышек. Наблюдатель должен быть достаточно искусным. Французский астроном Шарль Мессье (1730–1817) впервые в истории астрономии составил каталог таких туманностей (более ста объектов) именно для того, чтобы не путать их с кометами. Это и сейчас один из самых известных,

можно сказать, «насто́льный» каталог астрономов. Объекты каталога Мессье обозначают буквой М. Объект М1 — это знаменитая Крабовидная туманность, в центре которой, как мы теперь знаем, находится нейтронная звезда. Именно эту туманность Мессье принял сначала за новую комету и именно во избежание дальнейших ошибок составил свой знаменитый каталог. «Ирония судьбы» заключается в том, что по прошествии каких-нибудь 200—250 лет причины и следствия, так сказать, поменялись местами. Теперь мы знаем, что кометы — это, скорее всего, обитательницы всего лишь нашей Солнечной системы, в которой они, по-видимому, возникли. Солнце — вполне заурядная звезда нашей Галактики (в ней приблизительно 10^{11} звезд). Таких галактик, как наша, великое множество. Обычно они образуют скопления (число галактик в скоплениях исчисляется сотнями и даже тысячами). Таких скоплений мы видим сегодня около двадцати. И если во времена Мессье галактики и туманности были лишь досадными помехами на пути «вылавливания комет», то теперь именно объекты каталога Мессье (и других подобных каталогов) являются важнейшим предметом исследования, так как именно они позволяют судить о структуре и эволюции Вселенной, видимые сегодня размеры которой исчисляются миллиардами световых лет (1 световой год $\approx 10^{18}$ см).

Казалось бы, на фоне таких грандиозных проблем могут ли когонибудь всерьез волновать такие частности, как Солнечная система (ее размеры вряд ли превышают сотни астрономических единиц, а 1 астрономическая единица $\approx 1,5 \cdot 10^{-5}$ световых лет), Солнце и совсем «частная частность» — кометы? Оказывается, могут. Дело в том, что вопрос о происхождении Солнечной системы тесно связан с проблемой происхождения жизни на Земле и вообще во Вселенной, с проблемой существования внеземных цивилизаций. Проблемы эти не менее фундаментальны, чем проблемы эволюции Вселенной. Для их решения нужно

знать начальные условия, при которых образовалась Солнечная система. И оказывается, именно кометы могут дать об этом необходимую информацию.

По современным представлениям все тела Солнечной системы (и, в частности, кометы) возникли в едином процессе эволюции досолнечного газопылевого облака. Единой, общепринятой точки зрения о том, как это произошло, в настоящее время не существует. Это связано с большой неопределенностью в начальных условиях возникновения и последующей эволюции досолнечного облака. Считается, например, что возникновение планетных систем вокруг звезд — явление заурядное, и в этом плане наша звезда — Солнце — не есть нечто исключительное. (Подробнее освещение этого вопроса можно найти в прекрасной книге И. С. Шкловского «Вселенная, жизнь, разум».) Однако в самое последнее время возникли сомнения в заурядности условий, в которых находится Солнечная система в нашей Галактике. Связано это с местоположением Солнца в Галактике.

Наша Галактика относится к спиральным. Согласно современным представлениям, спиральные рукава галактик представляют собой волны уплотнения. Галактика вращается. При этом угловая скорость Ω зависит от расстояния R до ее центра, то есть $\Omega = \Omega(R)$. А волны уплотнения вращаются с постоянной угловой скоростью Ω_* . Существует, очевидно, такая окружность радиуса R_* в диске галактики, угловая скорость вращения по которой совпадает с угловой скоростью волн уплотнения (то есть выполняется равенство $\Omega(R_*) = \Omega_*$). Такую окружность называют коротационной. В каждой галактике (в том числе и в нашей) есть только одна коротационная окружность.

Оказывается, Солнце в нашей Галактике находится почти на коротационной окружности, и положение Солнечной системы в этом смысле исключительно. Вполне возможно, что из-за этой исключительности условия, в которых возникла Солнечная система, не являются заурядными. Не исключено, что это имеет

значение и для проблемы происхождения жизни. Вследствие того, что Солнце вращается почти синхронно со спиральным узором Галактики, мы только один раз за время существования Солнечной системы успели пересечь спиральный рукав — место, крайне опасное для всего живого, так как именно в спиральных рукавах вспыхивают сверхновые звезды, которые дают настолько мощные потоки электромагнитного излучения, что это может оказаться губительным для жизни. Например, по мнению И. С. Шкловского, именно вследствие вспышки близкой сверхновой звезды произошло массовое вымирание динозавров на Земле.

Уже из приведенного примера ясно, насколько важно знать начальные условия, при которых формировалась Солнечная система, насколько они были заурядны или незаурядны в Галактике, каков был химический состав досолнечного облака, физические условия в нем и т. п. Информацию об этих начальных условиях, во всяком случае о химическом составе и физических условиях, могут дать кометы. Массы комет очень малы по сравнению с массами планет Солнечной системы (по-видимому, они порядка $10^{-5} \div 10^{-12}$ массы Земли). Это означает, что мала их собственная гравитация. Поэтому кометы почти не эволюционировали с эпохи своего рождения до «сегодняшнего дня». Другими словами, физические условия в кометах, их химический состав остались такими же (или почти такими же), как в первичной газопылевой туманности, из которой образовались Солнце и планеты. Эволюция затронула большие тела — само Солнце, планеты, но почти не коснулась малых — комет, метеоритов.

Более того, одна из современных гипотез вообще связывает происхождение жизни в Галактике с кометами. Она принадлежит известному американскому физiku Дайсону. Его идея заключается в том, что жизнь сконцентрирована на поверхности Земли, в биосфере. Если считать, что жизнь всегда может возникнуть лишь в поверхностных слоях холодных небесных тел, то тогда кометы в Галак-

тике — наиболее подходящее для этого место. Дело в том, что, хотя массы комет намного меньше масс планет в Солнечной системе (или, соответственно, в Галактике, если феномен нашей Солнечной системы — явление не уникальное), однако число их велико ($\approx 10^{15}$), так что суммарная площадь поверхности всех кометных ядер намного больше суммарной площади поверхности всех планет. Химический состав комет, определенный путем спектрального анализа, показывает, что в них есть органические молекулы, которые при определенных условиях способны к самоорганизации, то есть возможно образование из них сложных органических молекул, которые могут послужить основой для возникновения простейших микроорганизмов.

Существует, например, небезосновательная гипотеза, принадлежащая английским ученым Хойлу и Викрамасингху, что некогда Земля была «заражена» органической материей, возникшей в кометах, и что жизнь на Земле возникла вследствие эволюции этой органики. Здесь, конечно, есть свои «за» и «против». Например, И. С. Шкловский высказывает сомнения в справедливости такой гипотезы: так как кометы движутся по сильно вытянутым орбитам вокруг Солнца, в них в огромных пределах меняется температура; из-за малой массы комет в них почти нет силы тяжести; то есть условия в кометах резко отличаются от земных. С другой стороны, совсем недавно появились и некоторые аргументы «за». В упавшем в Мексике метеорите Алленде был обнаружен избыток устойчивого изотопа магния ^{26}Mg (избыток по сравнению с его средним содержанием в Солнечной системе). Исследования показали, что этот избыток является следствием распада радиоактивного изотопа ^{26}Al (устойчивый изотоп — это ^{27}Al). Его период полураспада $T = 0,72 \cdot 10^6$ лет. Откуда взялся в досолнечной туманности радиоактивный ^{26}Al ? Это — вопрос. Ясно, однако, что он должен был в нее попасть приблизительно за миллион лет до того как начали затвердевать метеориты. Сейчас его появление связывают с вероятным

взрывом близкой сверхновой*). Если, однако, в досолнечной туманности присутствовал ^{26}Al , то он был и в том материале, из которого возникли кометы. А это значит, что простейшие органические молекулы, входящие в состав кометных ядер, находились под облучением распадающегося вследствие своей естественной радиоактивности изотопа ^{26}Al . Лабораторные опыты показывают, что при облучении такие молекулы способны к самоорганизации, к образованию аминокислот и оснований нуклеиновых кислот, а отсюда совсем недалеко до возникновения жизни.

Эти идеи не беспорядны, быть может — даже сомнительны. Для их проверки, для ответа на множество интереснейших вопросов необходимы прямые эксперименты в космосе и, конкретно, «рандеву» с кометами, непосредственное «прощупывание» их.

Что представляют собой кометы согласно современным научным взглядам? Массы комет малы. Как я уже упоминал, они, вероятно, заключены в пределах $10^{15} \div 10^{22}$ г (масса Земли $\approx 6 \cdot 10^{27}$ г). В гравитационном поле колоссальной массы Солнца ($\approx 2 \cdot 10^{33}$ г) они движутся согласно закону всемирного тяготения, по орбитам, представляющим собой конические сечения, то есть, кривые, получающиеся при пересечении конуса плоскостью. Это — окружность, эллипс, парабола, гипербола. В фокусе орбит находится Солнце. Гравитационное поле больших планет (Юпитера и Сатурна) возмущает их орбиты, изменяет их, так что комета, движущаяся, например, по эллиптической траектории, может перейти на гиперболическую или параболическую. Кометы, имеющие эллиптические орбиты (возникновение в таких условиях окружности крайне маловероятно), периодически возвращаются к Солнцу. Такие кометы называют периодическими. Их немного — несколько более семидесяти.

*) При взрывах сверхновых температура повышается настолько, что в их веществе начинается термоядерный синтез химических элементов и, в частности, радиоактивного алюминия. Образовавшиеся в результате такого синтеза продукты, разлетаясь при взрыве, могли «загрязнить» собой близлежащее досолнечное облако.

Самым большим периодом обладает комета Борелли, которая проходит через перигелий раз в 493 года. Самым коротким периодом обладает комета Энке — 3,3 года. (Обычно кометы носят имена своих первооткрывателей.) Всего сейчас известно свыше пятисот кометных орбит. Можно было бы думать, что раз большинство комет движется по незамкнутым траекториям, они рождаются за пределами Солнечной системы, где-то в Галактике. Однако это не так. Исследования показали, что в действительности первичными орбитами всех комет были эллипсы, большинство которых постепенно превратилось в гиперболы и параболы под влиянием притяжения Юпитера и Сатурна. Это означает, что кометы возникли в пределах Солнечной системы. Сейчас наиболее популярна точка зрения голландского астронома Яна Оорта, согласно которой на границе Солнечной системы, приблизительно на расстоянии 15000 а. е. от Солнца, существует облако комет (так называемое облако Оорта) — «резервуар», из которого под влиянием тяготения ближайших звезд время от времени вырывается какая-либо из комет и устремляется к Солнцу. Ее мы и фиксируем как очередную комету. Раньше существовала красивая гипотеза, согласно которой кометное облако возникло из ледяных остатков десятой планеты Солнечной системы — Фэтона, некогда существовавшей между орбитами Марса и Юпитера и погибшей вследствие взрыва. Позднее такое объяснение стало казаться далеко не бесспорным. Кометы могли возникнуть и как побочный продукт при формировании планет, и вследствие других процессов в досолнечном газопылевом облаке. Важно, однако, что они возникли, по всей вероятности, в Солнечной системе, мало эволюционировали и, следовательно, несут информацию о начальных условиях.

Что представляют собой кометы с физической точки зрения? Практически вся масса кометы сосредоточена в ее ядре. Ядро, по-видимому, представляет собой твердую смесь камней, льдов различных химических

соединений (метана, аммиака, воды и пр.), мелких частиц и т. п. Размеры ядер, вероятно, заключены в пределах от нескольких километров до десятков километров. По мере приближения к перигелию кометные ядра «обрастают» атмосферами, состоящими из различных молекул и пылинок. Атмосферы появляются вследствие прогрева ядра солнечными лучами — при прогреве испаряются льды, при испарении освобождаются и мелкие частицы. Размеры атмосферы вблизи перигелия очень велики. Например, у кометы Галлея в 1910 году голова (т. е. ядро + атмосфера) имела диаметр свыше 100 000 км. Из головы типичной кометы обычно выходит один или несколько хвостов, которые всегда направлены в сторону, противоположную Солнцу.

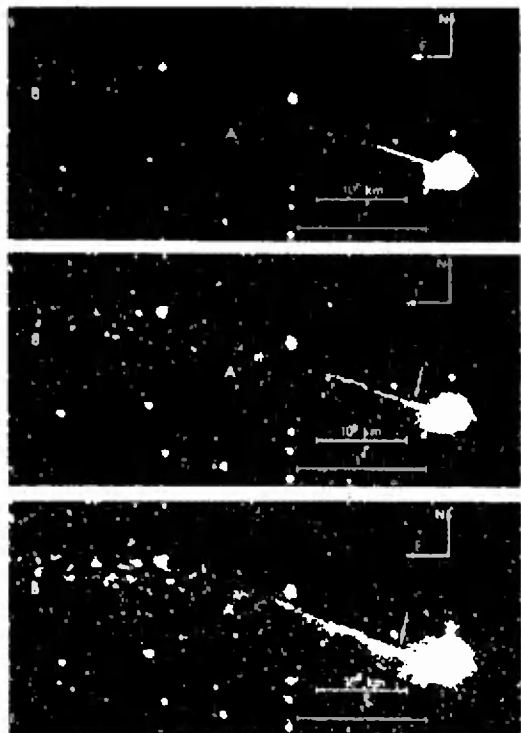
Химический состав кометных атмосфер (голов и хвостов) определяют по их спектрам. Чаще всего в головах комет наблюдаются молекулярный углерод (C_2), циан (CN), трехатомный углерод (C_3) и другие молекулы. Хвосты комет по своему составу делятся на три типа. Хвосты I типа состоят из плазмы — ионизированных молекул N_2^+ , CO^+ и электронов — с концентрацией $n \approx 10 \div 100$ частиц/см³. Спектры хвостов II и III типов непрерывные. Хвосты III типа — пылевые, хвосты II типа, по-видимому, смешанные — газопылевые.

Нейтральные молекулы и пылинки в атмосферах комет движутся под действием двух противоположно направленных сил: силы гравитационного притяжения к Солнцу и отталкивающей от него силы давления солнечного света*). (Сила притяжения к ядру кометы пренебрежимо мала по сравнению с этими силами.)

Тот факт, что хвосты комет направлены в сторону, противоположную Солнцу, означает, что отталкивание от Солнца преобладает над притяжением. Ускорения частиц в хвостах принято измерять в долях

ускорения солнечного притяжения g_0 на данном расстоянии. В хвостах II и III типа ускорения частиц оказываются $\sim (1 \div 20)g_0$, в хвостах I типа — порядка $(100 \div 1000)g_0$. Может ли лучевое давление обеспечить такие ускорения пылинок и молекул? Пылинок — да. С молекулами дело обстоит сложнее. Математический расчет показал, что максимально возможное ускорение, которое под действием лучевого давления может получить молекула, равно $56g_0$. Этого достаточно, чтобы объяснить поведение хвостов второго типа. Но не первого.

Высокие ускорения в хвостах I типа, их причудливая, струйная, быстро меняющаяся структура объ-



Фотографии кометы Бредфилда, сделанные в 1979 году в Сокоро (Нью-Мехико). Между первой (верхней) экспозицией и последней — временной интервал в 27,5 минут. За это время хвост кометы, который имел колоссальную длину 1,5 млн км, успел быстро переориентироваться, вращаясь как целое. На фотографиях приведен масштаб (линейный и угловой).

В кометных хвостах плазменного типа часто наблюдаются колебательные и спиралевидные движения. Вращение хвоста как целого, наблюдавшееся у кометы Бредфилда, — явление крайне редкое. Причины его пока недостаточно ясны.

*) Эффект давления света (или лучевого давления) был доказан экспериментально выдающимся русским физиком П. Н. Лебедевым.



Комета Мркоса (1957 год). Вверху виден узкий газовый хвост I типа, внизу — широкий пылевой хвост II типа.

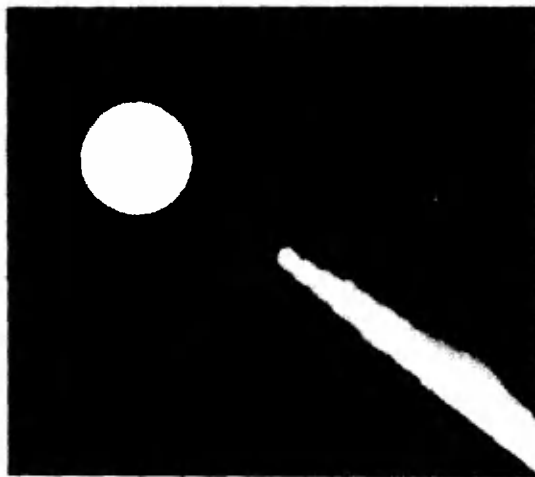
ясняются не лучевым давлением, а электромагнитными силами.

Межпланетное пространство, в котором движутся кометы, заполнено так называемым солнечным ветром, то есть непрерывно истекающей из Солнца плазмой — протонами и электронами, уносящими с собой (вследствие своей высокой электропроводности) часть солнечного магнитного поля. Высокие ускорения и струйная структура хвостов I типа обусловлены взаимодействием ионов N_2^+ , CO^+ и электронов, из которых они состоят, с солнечным ветром.

Не говоря уже о до сих пор нерешенных фундаментальных проблемах, таких как происхождение Солнечной системы, жизни в ней и т. п., на которые могут пролить свет кометные исследования, даже в самой физике явлений, наблюдаемых в кометах, очень много неясного. Список таких непонятных явлений велик, и мы приводить его здесь не будем.

Таким образом, экспедиции к кометам, помимо захватывающего психологического аспекта, имеют и огромное научное значение. Они нужны всем тем, кто интересуется физикой многих непонятных явлений, наблюдаемых в кометах, и тем, кто интере-

суется фундаментальными проблемами происхождения нашей Солнечной системы и систем, подобных ей в нашей Галактике, проблемами происхождения жизни на Земле и вообще во Вселенной. Вопрос о том, какие экспедиции и к каким кометам планировались и планируются в последние годы, — это, безусловно, предмет отдельного рассказа. Здесь я коротко останавлиюсь на ближайших из них — экспедициях к комете Галлея. Эта комета — периодическая. В хрониках зарегистрировано



Неизвестная комета, направляющаяся к Солнцу (1979 год).

29 ее возвращений к Солнцу; в 1986 году будет тридцатое.

Комета Галлея — одна из самых знаменитых в истории человечества. В музее Байе во Франции хранится гобелен XI века, на котором изображены норманны, пораженные видом кометы Галлея в 1066 году. Явление кометы было истолковано как дурное предзнаменование королю Гарольду, погибшему затем в битве при Гастингсе. В 1456 году та же комета Галлея считалась проявлением гнева божьего. Незадолго до ее появления турки захватили Константинополь, превратили христианские церкви в мечети, вырезали почти все христианское население. Появление кометы, по мнению «просвещенных лиц» того времени, предвещало новые беды и, в частности, не исключалось, что это «знамение» говорит об угрозе христианству в Европе. Комета 1456 года была, как писали историки того времени, «ужасной»: ее хвост напоминал бушующее пламя и занимал почти треть звездного неба. Опасаясь за судьбы христианства, римский папа Каликст III призывал в ежедневных молитвах проклинать и эту комету, и турок.

Современник Ньютона Эдмунд Галлей, именем которого названа комета, на основе своих математических расчетов вычислил впервые ее орбиту и период обращения и предсказал появление кометы в 1758 году. Появление кометы Галлея должно было подтвердить закон всемирного тяготения, в правильности которого тогда еще сомневались. Комета не появилась. Знаменитый французский математик А. Клеро понимал, что отсутствие кометы, скорее всего, связано с возмущениями ее орбиты большими планетами. Однако нужны были титанические вычисления, чтобы предсказать дату появления кометы до ее обнаружения на небе. С помощью астронома Ж. Лаланда и математика Гортензии Лепот Клеро успел вовремя закончить вычисления и очень точно предсказать дату появления кометы Галлея. Закон всемирного тяготения Ньютона был блестяще подтвержден. (Вывезенный из Индии французским астрономом Лежантилем дотолде не-

виданный в Европе цветок был назван в честь мадам Лепот гортензией.)

Вернемся теперь к проектам экспедиции к комете Галлея.

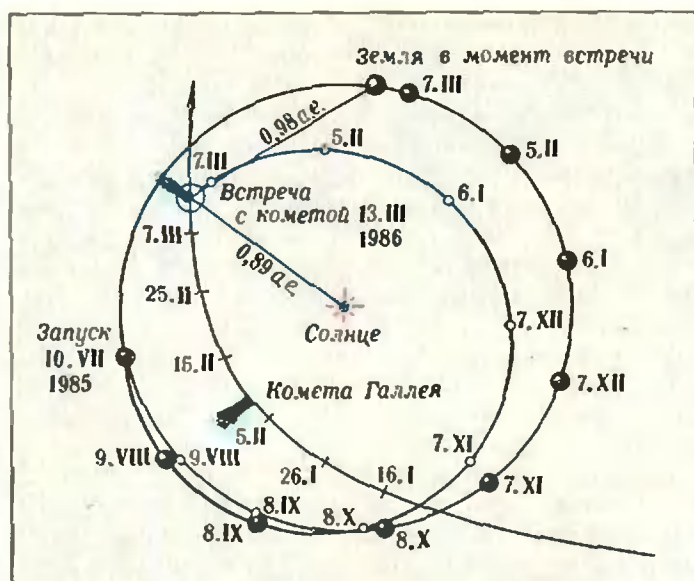
Первоначально проект экспедиции разрабатывался совместно американским и европейским космическими агентствами НАСА и ЕСА. Старт предполагался в 1985 году. Рассчитано было все — от траектории запускаемого автомата до веса (с точностью до граммов) научной аппаратуры. Вот идея этого эксперимента.

После ухода автомата за пределы земного тяготения включается небольшой двигатель, который переводит аппарат на спиралевидную траекторию, раскручивающуюся вокруг Солнца. На втором витке спирали аппарат должен пролететь мимо кометы Галлея на расстоянии в 130 000 км. В этот момент с основного аппарата должен стартовать маленький субавтомат (весом около 100 кг) и направиться к комете. По расчетам он должен пролететь всего в нескольких сотнях километров от ядра. Основной автомат делает еще один виток по спирали и в 1988 году встречается с другой периодической кометой — Темпель-2. «Подстроившись» в хвост этой кометы, автомат, медленно подтягиваясь, добирается почти до ядра, летя внутри кометной атмосферы.

Стоимость этого проекта для НАСА составляла 250 млн. долларов, и американцы от него отказались.

Европейцы получили финансирование на часть проекта: встречу только с кометой Галлея. Этот проект стоит 100—150 млн. долларов и носит условное название «Джотто». (Итальянский художник Джотто в XIV веке дал первую научную зарисовку кометы Галлея.)

Орбита кометы Галлея лежит в плоскости, пересекающей плоскость эклиптики под углом $\alpha = 162^\circ$. В 1910 году прохождение кометы было оптимально удобным для наблюдений, так как вблизи перигелия комета находилась как раз на линии Солнце — комета — Земля (и Земля даже прошла через гигантский ионизированный хвост кометы). В сле-



дующее прохождение кометы ситуация для наблюдений будет неблагоприятной. Комета вблизи перигелия будет находиться как бы за Солнцем, и ее можно будет наблюдать в короткие промежутки времени на рассвете и после захода Солнца. Кроме того, комета Галлея, в отличие от большинства комет, имеет так называемое обратное движение — она летит по своей орбите в сторону, противоположную обращению Земли вокруг Солнца. Это очень осложняет эксперимент «Джотто», так как автомат и комета будут подлетать друг к другу как бы на встречных курсах с относительной скоростью 75 км/с, поэтому время пролета вблизи ядра кометы будет очень мало, оно исчисляется секундами. За это время нужно успеть осуществить огромную научную программу: попытаться сфотографировать ядро, установить химический и изотопный состав кометной атмосферы, степень ионизации, величину магнитного поля и т. д.

Приведенная выше схема полета корабля для встречи с кометой Галлея заимствована из опубликованного ЕСА проекта. Внешний круг — это орбита Земли, в центре круга — Солнце. Запуск планируется 10 июля 1985 года. Автомат летит по спирали вокруг Солнца и встречается комету 13 марта 1986 года после прохождения ею перигелия. На рисунке отмечены положения Земли,

автомата и кометы в конкретные даты.

Параллельно с «Джотто» в СССР будет осуществлена своя экспедиция к комете Галлея. Ее проект очень остроумен. Автором его является академик Р. З. Сагдеев, директор Института космических исследований АН СССР. Суть проекта в том, чтобы автоматы, которые предполагается послать к Венере в 1984 году, использовать для встречи с кометой Галлея. Дело в том, что, в отличие от Земли, Венера будет расположена весьма удачно по отношению к комете вблизи ее перигелия. Поэтому небольшого маневра в поле тяготения Венеры будет достаточно, чтобы направить автоматы, выполнившие свои исследовательские задачи вблизи этой планеты, к комете Галлея. Такой проект практически не требует дополнительных денежных затрат.

Если экспедиции к комете Галлея пройдут удачно, то исключительность этой кометы в истории человечества станет неоспоримой.

Г. Меледин, В. Сербо

Конденсация света в вещество

Мыслимо ли превращение света в вещество? Если да, то как это можно сделать?

В этой статье мы хотим рассказать об основных физических принципах, связанных с реализацией удивительной идеи превращения (конденсации) света в вещество с помощью встречных фотон-фотонных пучков. Но прежде — немного об ускорителях на встречных пучках.

Получать новые частицы, а также исследовать строение и взаимодействие уже открытых частиц можно с помощью ускорителей. Чем больше скорость налетающей частицы-снаряда относительно частицы-мишени, тем больше подробностей можно узнать. Еще до сравнительно недавнего времени использовались неподвижные мишени, которые облучались разогнанными в ускорителе частицами. Потом возникла идея: раз существенно относительно движение налетающей частицы и мишени, то почему бы не воспользоваться движущейся мишенью и двигать ее навстречу ускоренному пучку частиц? Такой подвижной мишенью может стать другой ускоренный пучок, движущийся навстречу первому. Так появились ускорители на встречных пучках.

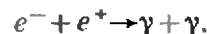
Первыми были ускорители с встречными электрон-электронными и электрон-позитронными пучками. Затем был построен ускоритель с про-

тон-протонными пучками. Недавно начал работать ускоритель, в котором сталкиваются протонные и антипротонные пучки. Планируется создание электрон-протонных ускорителей. Вы, возможно, слышали об этом.

Но вот о взаимодействии встречных фотон-фотонных пучков вряд ли кто из вас слышал. А между тем уже был проведен ряд интересных экспериментов, в которых изучалось рождение электронов, позитронов и других, более массивных, частиц на встречных фотон-фотонных пучках. Как это удалось сделать, рассказать очень не просто. Однако попробуем.

Пожалуй, самое замечательное свойство частиц и античастиц — их способность к взаимному уничтожению (аннигиляции) и превращению в другие частицы или кванты излучения. Так, для электрона e^- античастицей является позитрон e^+ ; при столкновении e^- и e^+ может произойти их аннигиляция и рождение каких-то новых частиц.

На встречных электрон-позитронных пучках хорошо изучена реакция аннигиляции типа

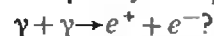


в результате которой образуются два гамма-кванта, то есть два кванта электромагнитного излучения высокой частоты. Энергия этих γ -квантов во много раз превосходит энергию квантов видимого света.

Упражнение 1. Выбрав соответствующую систему отсчета, покажите, что при аннигиляции электрон-позитронной пары не может родиться только один фотон.

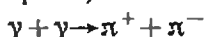
Упражнение 2. Найдите энергию одного из двух фотонов, полученных в результате взаимного уничтожения электрона и позитрона, и сравните ее с энергией фотона, соответствующего зеленому свету с длиной волны $\lambda = 5,5 \cdot 10^{-7}$ м.

Здесь естественно возникает целый ряд вопросов. Прежде всего — не должна ли наблюдаться обратная реакция превращения гамма-квантов соответствующей энергии в электрон-позитронную пару:



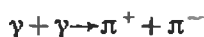
Почему бы при столкновении одного пучка электромагнитного излучения с другим не рождался и более тяжелым частицам, скажем, пи-мезо-

нам π^+ и π^- (π -мезоны — это короткоживущие ядерные частицы с массой, примерно в 300 раз большей массы электрона):



или протонам и антипротонам? Или, еще шире — не должно ли происходить превращение света (гамма-квантов) в вещество и антивещество (в атомы и антиатомы, молекулы и антимолекулы)? Конечно, до получения антимолекул на встречных фотон-фотонных пучках пока еще слишком далеко, а вот возможность подробно изучить реакцию рождения пары пи-мезонов вызвала большой интерес физиков.

Как же практически можно осуществить превращение (или конденсацию) света в вещество? Заметим, прежде всего, что такое превращение кажется противоречащим хорошо установленному факту: световые волны проходят друг через друга без взаимодействия (принцип суперпозиции электромагнитных волн). Оказывается, принцип суперпозиции выполняется не всегда, для сильных электромагнитных полей он нарушается — после прохождения друг через друга световые пучки изменяются. Теперь возникает новая проблема: для наблюдения реакции типа



нужно столкнуть друг с другом два плотных пучка γ -квантов. К сожалению, плотные пучки фотонов в настоящее время можно получить только от лазеров, но γ -лазеры еще не изобретены. Обычные же лазеры излучают фотоны слишком малых для наших целей энергий. Как же решить эту проблему?

Оказалось, что существует очень красивый обходной путь, с помощью

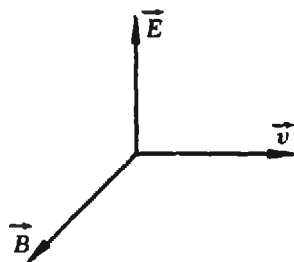


Рис. 1.

которого можно уже сегодня наблюдать превращение света в вещество: использовать встречные электрон-позитронные пучки для получения необходимых γ -пучков. Постараемся объяснить суть этой идеи.

Как известно, γ -пучок можно представить либо как поток фотонов высокой энергии, либо как электромагнитную волну большой частоты. У такой волны напряженность \vec{E} электрического поля и индукция \vec{B} магнитного поля перпендикулярны друг другу и скорости \vec{v} движения волны (рис. 1). Но как раз почти такими же свойствами обладает электромагнитное поле релятивистского электрона (и позитрона), то есть электрона, движущегося со скоростью, близкой к скорости света c . Поясним, почему это так. Для этого рассмотрим электрическое поле... движущегося конденсатора. Да, именно конденсатора, потому что с помощью этого простого примера будет легко связать хорошо известное поле неподвижного электрона с полем движущегося электрона.

Итак, рассмотрим электрическое поле плоского конденсатора в двух инерциальных системах отсчета: в системе K , в которой конденсатор движется, и в системе K' , где он покоится. Пусть сначала скорость конденсатора \vec{v} параллельна его пластинам (рис. 2, а). Обозначим через q заряд конденсатора, а через S' — площадь пластины конденсатора в системе K' . Тогда электрическое поле \vec{E}' , перпендикулярное вектору \vec{v} , равно $E' = E'_1 = q/(\epsilon_0 S')$. При переходе в систему K заряд, конечно же, остается прежним, а площадь пластины S изменится. Из специальной теории относительности известно, что поперечные, по отношению к направ-

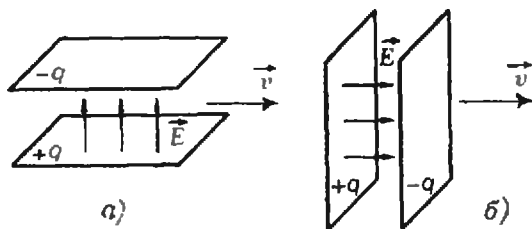


Рис. 2.

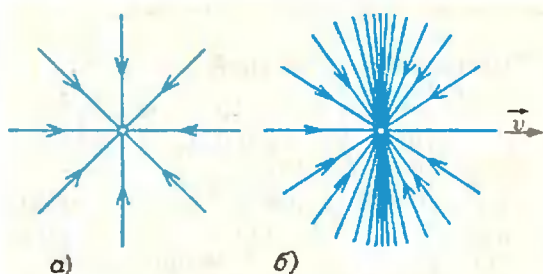


Рис. 3.

лению вектора \vec{v} , размеры движущихся тел не изменяются, а продольные сокращаются в $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ раз. Значит, в нашем случае площадь пластины $S = \sqrt{1-v^2/c^2} S'$ и электрическое поле

$$E_{\perp} = \frac{E'_{\perp}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{q/(e_0 S')}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Аналогично, для случая, когда скорость конденсатора перпендикулярна его пластинам (рис. 2, б), размеры пластин не изменяются, и электрическое поле, параллельное вектору \vec{v} , остается одним и тем же в обеих системах отсчета:

$$E_{\parallel} = E'_{\parallel} = q/(e_0 S').$$

Формулы, полученные для частного случая плоского конденсатора, справедливы для любого электростатического (в системе K') поля. Применим их к релятивистскому электрону. В системе K' , где электрон покоится, его поле \vec{E}' имеет хорошо известный вид — оно сферически симметрично (рис. 3, а). В системе K , в которой электрон движется со скоростью \vec{v} , создаваемое им поле уже не симметрично — в перпендикулярном к вектору \vec{v} направлении оно сильнее (рис. 3, б). Чем больше скорость v , тем больше отношение E_{\perp}/E_{\parallel} , и электрическое поле электрона становится все более поперечным.

Наконец, вокруг движущегося электрона (так же, как и вокруг провода с током) возникает поперечное магнитное поле \vec{B} , линии индукции которого имеют вид окружностей с центрами на линии движения электрона.

Таким образом, в поле движущегося электрона векторы \vec{E} и \vec{B} перпендикулярны друг другу и направлению \vec{v} движения электрона.

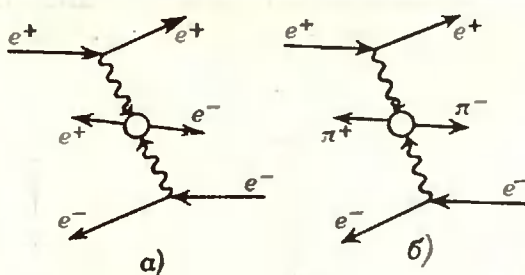


Рис. 4.

Другими словами, это поле — почти такое же, как и у электромагнитной волны. Поэтому электромагнитное поле релятивистской заряженной частицы можно рассматривать как поток фотонов, сопровождающих эту частицу.

Упражнение 3. Найдите электрическое поле, создаваемое релятивистской заряженной частицей, на расстоянии a от нее по направлению скорости и на расстоянии b в перпендикулярном направлении. Скорость частицы \vec{v} , заряд q .

Именно эти фотоны, сопровождающие летящие навстречу друг другу электроны и позитроны (во встречных электрон-позитронных пучках), и можно использовать как встречные фотон-фотонные пучки с высокими энергиями. В свою очередь, эти фотоны, провзаимодействовав, могут превратиться в другие частицы: e^+ и e^- , π^+ и π^- и т. п.

Впервые рождение новой пары электрон-позитрон через промежуточные столкновения гамма-пучков (рис. 4, а) наблюдалось в 1971 году в Институте ядерной физики Сибирского отделения АН СССР, а позднее (и на других ускорителях) — в Италии и США.

Реакции с рождением пи-мезонов (рис. 4, б) исследуются, начиная с 1979 года, на самых больших ускорителях в ФРГ и США.

Недавно в Новосибирске начались эксперименты на новом ускорителе на встречных электрон-позитронных пучках ВЭПП-4. В программу экспериментов входит также детальное изучение процессов превращения (конденсации) электромагнитного излучения в другие частицы.

В. Дубровский

Алгоритм волшебного кубика

Непросто справиться с «венгерским волшебным кубиком» — самой популярной головоломкой XX века. Поэтому нетерпеливые люди, потеряв надежду на успех, зачастую прекращают свое знакомство с ним разламывая его на кусочки. Говорят, что после появления «кубика» в Японии даже понизилась производительность труда, а в США эту игрушку сейчас продают в комплекте с пластмассовым топориком: не сумел решить — ломай!

«Квант» относится к кубику Рубика более спокойно и серьезно, о чем свидетельствует публикуемая ниже статья.

В этой статье мы рассказываем, как решить волшебный кубик — знаменитую головоломку Э. Рубика*). Строго говоря, алгоритма решения (то есть набора точных правил для приведения раскраски всех граней из произвольной к одноцветной) мы здесь не приводим — такой алгоритм уже был опубликован в «Кванте» (1980, № 12, с. 17). Вместо этого мы даем большой список полезных комбинаций, указывая для каждой способ выполнения (последовательность поворотов) и результат (какие маленькие кубики переставляются и как). Из различных комбинаций, приводящих к одному и тому же результату, мы старались выбрать самую короткую. В конце статьи мы показываем, что волшебный кубик можно привести в начальное состояние (с одноцветными гранями) за 79 поворотов или меньше.

*) Если у вас нет экземпляра кубика, вы можете его сконструировать, пользуясь указаниями статьи М. Евграфова в «Кванте» 1982, № 3.

Обозначение операций

Обозначим каждую грань волшебного кубика: Φ (фасад), T (тыл), B (верх), H (низ), P (правая), L (левая) (см. рис.). Поворот грани X на $n \cdot 90^\circ$ по часовой стрелке будем обозначать через X^n , например повороты правой грани на 90° , 180° , 270° записываются, как P , P^2 , $P^{-1} = P^3$. Таким образом каждой операции (цепочке поворотов граней) отвечает «слово» из букв Φ , T , B , H , P , L со степенями*), читаемое и выполняемое слева направо.

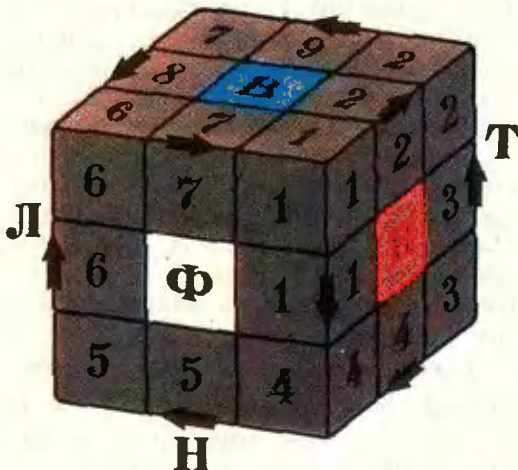
Обозначение результата операции

Мы будем записывать в единой формуле как передвижение маленьких кубиков, так и изменение их ориентации в пространстве.

Для записи передвижений маленьких кубиков перенумеруем угловые кубики и соответствующие вершины числами от 1 до 8, средние (и соответствующие ребра) — числами от 1 до 12 (см. рисунок; записи всех рассматриваемых в статье операций относятся к нумерации, показанной на этом рисунке).

Допустим, что в результате операции F первый угловой кубик перешел на место i_1 -го, i_1 -й — на место i_2 -го и т. д. Каждый раз в этой цепочке будет появляться новый номер и неизбежно наступит момент, когда

*) Забавный способ запоминания таких «слов» приводится в статье «Венгерский кубик» в журнале «Наука и жизнь», № 3 за 1981 г. (с. 131).



кубик с номером i_{n_1} вернется на место первого (почему?). Кубики $1, i_1, \dots, i_{n_1}$ образуют в операции F цикл, обозначаемый $(i_1 \dots i_{n_1})$. Если еще не все угловые кубики вошли в этот цикл ($n_1 < 7$), то берем любой из оставшихся (пусть его номер i_{n_1+1}) и повторяем тот же процесс — возникнет второй цикл $(i_{n_1+1} \dots i_{n_2})$. В конце концов запись угловых кубиков окажется разложенной на *независимые* (то есть не имеющие общих элементов) циклы: $(i_1 \dots i_{n_1}) \cdot (i_{n_1+1} \dots i_{n_2}) \dots$

Аналогично обстоит дело со средними кубиками. Соответствующие циклы мы будем записывать в квадратных скобках; так, запись $[2\ 7\ 6]$ означает, что второй средний кубик перешел в седьмой, седьмой — в шестой, шестой — во второй.

Пусть в результате некоторой операции i -й средний кубик занял место j -го. Он может расположиться на этом месте двумя способами. Если направление стрелки, привязанной к его ребру (см. рис. 1), окажется противоположным направлению стрелки j -го кубика, то в соответствующем цикле после номера i поставим знак минус. Отсутствие знака означает, что направления стрелок совпали. Так, запись $[2^{-}7^{+}6^{-}]$ (или $[2^{-}7\ 6^{-}]$, «плюсики» мы обычно опускаем для средних кубиков) означает, что второй средний кубик перешел в седьмой с противоположными стрелками, седьмой в шестой с совпадающими стрелками, шестой во второй с противоположными стрелками. Запись $[2^{-}]$ означает, что второй средний кубик остался на месте, но повернулся на 180° .

Угловой кубик может расположиться на новом месте тремя способами. Соответственно в записи цикла после номера этого кубика будем ставить знак $+$, знак $-$ или ничего не писать. Знак не пишется, если горизонтальная грань данного углового кубика и после выполнения операции остается горизонтальной. В противном случае, чтобы привести эту грань на новом месте в горизонтальное положение, нам пришлось бы повернуть кубик вокруг диагонали на 120° . Если поворот должен производиться против часовой стрелки, ставим $+$, если по часовой стрелке —

ставим $-$. Скажем, записи (5^+) , (5) , (5^-) означают, что пятый кубик остается на месте, но поворачивается на 120° , 0° , 240° по часовой стрелке соответственно.

Пояснения к таблице (см. с. 24)

Записывая операцию, мы будем сначала писать последовательность поворотов (слово из букв Φ, T, B, H, P, L со степенями), затем знак \sim , а потом результат, записанный в виде циклов со знаками. Освоить эту систему записи вам помогут примеры; проверьте, что $P \sim (1^+2^-3^+4^-) [1234]$, $B^- \sim (1276) [2^-9^-8^-7^-]$, $\Phi^2 \sim (15) (46) [16] [57]$, $P\Phi \sim (1^+2^-3^-5^-6^+) (4^+) [1234567]$, $P^2\Phi^2 \sim (135) (264) [136] [24] [57]$.

В таблице приводятся 47 операций, найденных при игре в кубик, иногда методом проб и ошибок, но большей частью с помощью довольно интересных алгебраических рассуждений, которые недостаток места не позволяет воспроизвести здесь. Операции S_{15} и S_{19} заимствованы из «Венгерского среднешкольного журнала», S_{18} — из упомянутой выше статьи в «Науке и жизни».

Схема алгоритма

Первый этап: сборка «столбика» $2 \times 2 \times 3$. Назовем «столбиком» совокупность всех маленьких кубиков, не лежащих в двух смежных гранях большого куба, для определенности — Φ и P . Для правильной расстановки всех кубиков в «столбике» особых хитростей не требуется. Приведем, например, операции, при которых 1-й средний кубик переходит на 8-е место и в одном случае сохраняет, а в другом меняет свой угол поворота, причем все кубики «столбика», кроме, конечно, 8-го, остаются нетронутыми: $A_1 = PTV^2T^{-1}$, $A_2 = \Phi^{-1}TVT^{-1}$. Этот этап удается выполнить примерно за 25 ходов.

Второй этап: разворачивание средних кубиков в гранях Φ и P . Легко показать, что при любой последовательности поворотов число средних кубиков, у которых направления стрелок не совпадают с «правильным» (показанным на рисунке), всегда

Таблица полезных операций

| Название, описание и результат операции | Число ходов |
|--|-------------|
| 1) Перестановки средних кубиков: | |
| а) 3-циклы | |
| $C_1 = \Phi^{-1} P^{-1} \Phi P \sim [125] \cdot (1+2) (45^-)$ | 4 |
| $C_2 = \Phi^2 P^{-1} \Phi^2 P \sim [126] \cdot (1+2^- 5^- 64^+)$ | 4 |
| $C_3 = \Phi P^{-1} \Phi^{-1} P \sim [127] \cdot (1^- 4^-) (2^+ 6^+)$ | 4 |
| $C_4 = \Phi^2 P^2 \Phi^2 P^2 \sim [136] \cdot (135) (264)$ | 4 |
| $C_5 = P^{-1} \Phi^{-1} P^{-1} \Phi P^2 \sim [235] \cdot (1^+ 5^+) (2^- 3^-)$ | 5 |
| $C_6 = P^{-1} \Phi^2 P^{-1} \Phi^2 P^2 \sim [236] \cdot (1^+ 2^- 35^+ 6^-)$ | 5 |
| $C_7 = P^{-1} \Phi P^{-1} \Phi^{-1} P^2 \sim [237] \cdot (1^+ 2) (3^- 6)$ | 5 |
| $C_8 = P^{-1} \Phi^{-1} P^2 \Phi P^{-1} \sim [245] \cdot (1243^- 5^+)$ | 5 |
| $C_9 = P^{-1} \Phi^2 P^2 \Phi^2 P^{-1} \sim [246] \cdot (13^+ 6^-) (24^- 5^+)$ | 5 |
| $C_{10} = \Phi^{-1} P^{-1} \Phi P^{-1} \Phi^{-1} P^2 \Phi \sim [123] \cdot (1^- 3) (2^- 4^-)$ | 7 |
| б) 2-циклы | |
| $C_{11} = P^{-1} \Phi^{-1} P^{-1} \Phi P^{-1} \Phi^{-1} P^2 \Phi \sim [14] (12^+ 34^-)$ | 8 |
| $C_{12} = PNT P^2 T^{-1} P^2 N^{-1} \sim [12] [3^-] [4^-] (24^+ 3) (1^+ 5^+)$ | 7 |
| в) поворот средних кубиков | |
| $C_{13} = V \Phi^{-1} V^{-1} \Phi P^{-1} \Phi P \Phi^{-1} \sim [1^-] [2^-] (1^- 2^-) (46^-)$ | 8 |
| г) перестановки средних кубиков, не сдвигающие угловых | |
| $C_{14} = P^2 N V^{-1} \Phi^2 V N^{-1} \sim [136]$ | 6 |
| $C_{15} = V P T L \Phi V^{-1} \Phi^{-1} L^{-1} T^{-1} P^{-1} \sim [1^- 2^- 7]$ | 10 |
| $C_{16} = P V N^{-1} \Phi^{-1} N V^{-1} \sim [1^- 6^- 24^- 3]$ | 6 |
| $C_{17} = (P^2 \Phi^2)^3 \sim [24] [57]$ | 6 |
| $C_{18} = P^2 \Phi^2 P^2 \Phi^2 \cdot P V^{-1} P^2 V \Phi \cdot P V \Phi^2 V^{-1} \Phi \sim [2^-] [7^-]$ | 14 |
| $C_{19} = P^{-1} V P T L \Phi V^{-1} P V^{-1} P^{-1} \Phi^{-1} L^{-1} T^{-1} V \sim [2^-] [7^-]$ | 14 |
| 2) Перестановки угловых кубиков, не сдвигающие средних | |
| а) 3-циклы | |
| $Y_1 = V L V^{-1} \cdot P^{-1} \cdot V L^{-1} V^{-1} \cdot P \sim (1^+ 2^+ 6^+)$ | 8 |
| $Y_2 = L^{-1} T L \cdot \Phi^{-1} \cdot L^{-1} T^{-1} L \cdot \Phi \sim (12^- 6^+)$ | 8 |
| $Y_3 = \Phi^2 P^2 \Phi \cdot L \cdot \Phi^{-1} P^2 \Phi \cdot L^{-1} \Phi \sim (126)$ | 9 |
| $Y_4 = L^2 T^2 L^{-1} \cdot \Phi^2 \cdot L T^2 L^{-1} \cdot \Phi^2 L^{-1} \sim (1^+ 26^-)$ | 9 |
| $Y_5 = P V^2 P \cdot N \cdot P^{-1} V^2 P \cdot N^{-1} P^2 \sim (12^+ 6^-)$ | 9 |
| $Y_6 = L^{-1} T V^2 T^{-1} L T L^{-1} V^2 L T^{-1} \sim (1^- 2^- 6^-)$ | 10 |
| $Y_7 = P^{-1} T^2 P \cdot \Phi \cdot P^{-1} T^2 P \cdot \Phi^{-1} \sim (1^+ 7^+ 4^-)$ | 8 |
| $Y_8 = \Phi N \Phi^{-1} \cdot V^2 \cdot \Phi N^{-1} \Phi^{-1} \cdot V^2 \sim (17^+ 4^-)$ | 8 |
| $Y_9 = \Phi^{-1} \cdot P T^{-1} L^{-1} \cdot \Phi \cdot P T P^{-1} \sim (1^- 74^+)$ | 8 |
| $Y_{10} = N^2 L^{-1} N^{-1} P^2 N L N^{-1} P^2 N^{-1} \sim (1^- 7^+ 4)$ | 9 |
| $Y_{11} = T^{-1} N T^{-1} P^2 T N^{-1} T^{-1} N P^2 N^{-1} T^2 \sim (174)$ | 11 |
| $Y_{12} = P^2 N^{-1} L N P^2 N^{-1} L^{-1} N \sim (2^+ 4^- 6)$ | 8 |
| $Y_{13} = V^{-1} Y_6 V \sim (2^+ 4^+ 6^+)$ | 10 |
| $Y_{14} = V^{-1} Y_{10} V \sim (246)$ | 11 |
| б) разворачивание угловых кубиков | |
| $Y_{15} = (P \Phi^{-1} N^2 \Phi P^{-1} V^2)^2 \sim (2^-) (6^+)$ | 12 |
| $Y_{16} = P^{-1} Y_{15} P \sim (6^+) (3^-)$ | 14 |
| $Y_{17} = P Y_{15} P^{-1} \sim (1^-) (6^+)$ | 14 |
| $Y_{18} = Y_9^{-1} \cdot Y_8 = P T^{-1} P^{-1} \Phi^{-1} P T P^{-1} \Phi^2 N \Phi^{-1} V^2 \Phi N^{-1} \Phi^{-1} V^2 \sim (1^+) (4^+) (7^+)$ | 15 |
| $Y_{19} = P^{-1} Y_{16} P \sim (1^+) (2^+) (7^+)$ | 15 |
| $Y_{20} = F Y_{16} F^{-1} \sim (1^+) (3^+) (7^+)$, здесь $F = \Phi N^{-1} \Phi^{-1} V^2$ | 15 |
| $Y_{21} = (C_{13})^2 = (V \Phi^{-1} V^{-1} \Phi P^{-1} \Phi P \Phi^{-1})^2 \sim (1^+) (2^+) (4^-) (6^-)$ | 16 |
| $Y_{22} = (C_3 C_2)^2 = (\Phi P^{-1} \Phi^{-1} P \Phi^2 P^{-1} \Phi^2 P)^2 \sim (1^-) (2^+) (4^+) (5^+) (6^+)$ | 16 |
| в) 3-циклы с разворачиванием | |
| $Y_{19} = L^{-1} T V^2 T^{-1} L N^2 T L^{-1} V^2 L T^{-1} N^2 \sim (1^- 2^- 7^-) (3^-) (5^+)$ | 12 |
| $Y_{20} = (C_{12})^2 = (P N T P^2 T^{-1} P^2 N^{-1})^2 \sim (2^+ 34^+) (1^-) (5^-)$ | 14 |
| г) пары 2-циклов | |
| $Y_{21} = (C_1)^3 = (\Phi^{-1} P^{-1} \Phi P)^3 \sim (1^- 2^+) (4^- 5^+)$ | 12 |
| $Y_{22} = (C_3)^3 = (\Phi P^{-1} \Phi^{-1} P)^3 \sim (14) (26)$ | 12 |
| $Y_{23} = C_{17} P^{-1} = (\Phi^2 P^2)^3 \Phi^2 P (\Phi^2 P^2)^2 \Phi^2 P \sim (13) (24)$ | 12 |
| $Y_{24} = (C_{11})^2 = (P^{-1} \Phi^{-1} P^{-1} \Phi P^{-1} \Phi^{-1} P^2 \Phi)^2 \sim (1^+ 3^-) (2^+ 4^-)$ | 16 |

четно. Поэтому после первого этапа в гранях Φ и P может находиться 2, 4 или 6 таких кубиков. Операция $A_3 = N P^4 N^{-1}$ ($n=1, 2, 3$) «исправляет стрелки» у двух кубиков — 5-го

и n -го, а операция $A_4 = N V^{-1} P V N^{-1}$ — у четырех (1-, 3-, 5- и 7-го), при этом все кубики «столбика» остаются на местах. Применяя операции типа A_3 и A_4 , мы добиваемся того, что стрел-

ки всех средних кубиков будут направлены правильно. Для этого нужно не более 8 ходов.

Третий этап: расстановка средних кубиков. На этом этапе будут поворачиваться только грани Φ и Π , поэтому «столбик» и правильные направления стрелок средних кубиков автоматически сохраняются. Можно доказать (это легко сделает каждый, кто знаком с понятием перестановки), что необходимое для этого передвижение 7 средних кубиков записывается в виде композиции не более трех циклов длины 3 и, возможно еще одного поворота; следовательно, 7 средних кубиков граней Φ и Π можно правильно расставить, используя не более трех операций типа $C_1—C_{10}$. Более подробный анализ показывает, что этот этап требует не более 14 ходов.

Четвертый этап: расстановка и разворачивание угловых кубиков. Нам осталось расставить и правильно развернуть 6 угловых кубиков граней Φ и Π . Как выше, можно установить, что необходимое передвижение 6 угловых кубиков записывается в виде композиции не более трех циклов длины 3, поэтому для правильной расстановки 6 угловых кубиков нам потребуется не более трех операций типа $Y_1—Y_{14}$. После этого можно, применяя операции $Y_{15}—Y_{18}$, пра-

вильно повернуть все кубики. Действительно, повернув два кубика с помощью Y_{16} , мы всегда можем уменьшить число неправильно развернутых кубиков на 1 или 2, пока оно больше двух. Когда же останется два таких кубика, они окажутся повернуты в противоположные стороны, и их правильный разворот достигается снова с помощью Y_{16} , Y'_{16} или Y''_{16} . Гораздо рациональнее, пользуясь нашим богатым запасом 3-циклов угловых кубиков, расставлять и разворачивать их одновременно: среди операций, осуществляющих перестановку данных трех кубиков, всегда можно выбрать одну так, чтобы два из них повернулись на нужные нам углы. Не вдаваясь в детали, отметим, что для 4-го этапа хватает 32 ходов и это число наверняка может быть уменьшено.

Итак, общее число ходов в предлагаемом алгоритме теоретически не превосходит 79, но на практике оно оказывается меньше — около 70.

В одном из следующих номеров журнала мы глубже познакомимся с математикой волшебного кубика. Это позволит нам полностью обосновать приведенный выше алгоритм и рассказать о рекордно коротком (по имеющимся данным) алгоритме — на 52 хода.

Игра, задача или спорт?

Эти соревнования очень напоминали состязания штангистов — разминочный зал, помост, за которым — огромное табло, участники, собирающиеся с силами (или с мыслями?) перед подходом к снаряду, судьи, аплодисменты зрителей... Только вместо штанги на помосте был установлен небольшой столик с сенсорным электронным фиксатором времени, табло показывало не килограммы, а секунды, вместо грома железа раздавалось тихое поскрипывание, да и «спортсмены» не отличались могучим телосложением тяжелоатлетов. Здесь,

в Будапеште, 5—6 июня проходил первый чемпионат мира по «волшебному кубику Рубика». На него съехались чемпионы 19 стран трех континентов — в основном, школьники и студенты-математики.

Соревнования проходили так: очередной участник на глазах зрителей наугад вытаскивал из чемоданчика, наполненного заранее «запутанными» кубиками, один, изучал его в течение 15 секунд, еще несколько секунд мог, как гимнаст, прокручивать в уме начало комбинации, а затем уже демонстрировал совершенство своего алгоритма и, конечно, ловкость пальцев. Было проведено три серии попыток; в зачет шло лучшее время. За наблюдением правил следил жюри, возглавляемое самим изобретателем

головоломки — профессором Э. Рубиком.

Результаты, показанные «гроссмейстерами кубика», поразительны. Даже худшее время лишь немногим превышает 55 секунд. (Для сравнения скажем, что нетренированный, но уже знакомый с кубиком человек, пользуясь записью алгоритма, тратит на сборку около двух часов.) Не обошлось и без казусов: чемпион Финляндии в одной из попыток так спешил, что один за другим сломал два кубика. А первое место занял шестнадцатилетний американец Мин Тай, его время — 22,95 секунды!

Так что же такое «волшебный кубик» — игра, математическая задача или... новый вид спорта?

В. Н.



В. Сурдин

Солнечное затмение 31 июля 1981 года

Среди редких астрономических явлений самое впечатляющее — солнечное затмение. Уверен, что с таким утверждением согласятся тысячи очевидцев полного солнечного затмения, которое 31 июля 1981 года наблюдалось на территории СССР. В этот день лунная тень пробежала по Земле путь в 8250 км, из них около 7100 км — по суше; столь длинная полоса затмения на материке бывает редко. Замечательно, что на всем своем пути лунная тень двигалась по территории нашей страны: от побережья Грузии через Северный Кавказ, Казахстан и Южную Сибирь до восточных границ Советского Союза. Далее тень Луны двигалась по поверхности Тихого океана и закончила свой маршрут у Гавайских островов. Весь этот длинный путь лунная тень проделала всего за 2,9 часа, а в каждой отдельной точке на поверхности Земли продолжительность полного затмения не превышала 129 секунд. Впрочем, автору этой заметки, вместе с группой астрономов и геофизиков, посчастливилось наблюдать солнечную корону в течение 155 секунд с борта самолета Як-40, летящего вслед за лунной тенью.

Диаметр лунной тени на поверх-

ности Земли не превосходит 270 км. Во время затмения 31 июля максимальный размер тени был 108 км. По счастливой случайности лунная тень прошла по многим участкам Байкало-Амурской магистрали. В столицу БАМа — Тынду съехались многие любители астрономии и профессиональные астрономы и геофизики, чтобы наблюдать затмение. Но утром 31 июля погода в Тинде была плохая: облачность начиналась почти у самой земли и тянулась до высоты 7 км. Все напряженно ждали полудня, когда должно было начаться затмение. Предчувствия были самые нехорошие. Казалось, что не оправдается даже наша надежда на самолет: по метеоусловиям ему не давали взлет. Незадолго до начала затмения туман у земли рассеялся и, после отчаянных уговоров диспетчера, нам разрешили взлет. Солнечную корону мы увидели и сфотографировали на высоте 7770 м на фоне почти черного неба.

Как выяснилось после посадки, в Тинде затмение началось при сплошной облачности, но буквально за несколько минут до момента полного затмения облака быстро рассеялись, и солнечная корона появилась на почти чистом небе. За свое терпение наблюдатели были вознаграждены изумительной картиной яркого жемчужного ореола, возникшего всего на 2 минуты вокруг дисков Луны и Солнца, встретившихся на короткое время, чтобы снова надолго разойтись в своем сложном небесном хороводе.

Возможно, у читателя возникнет вопрос: стоит ли это редкое природное явление того, чтобы множество занятых людей отправлялись в далекие, порой необжитые места и в этих необжитых местах устраивали почти настоящие астрономические обсерватории со сложными дорогими приборами, и все это ради нескольких минут любования солнечной короной? Да и любования ли? Оказывается, многие астрономы, не раз ездившие на затмения, так никогда и не видели корону Солнца, хотя погода была отличная. Все время, от первой до последней секунды

затмения, ученые проводили у своих приборов, боясь даже на мгновение оторваться, чтобы посмотреть на корону.

Ответ на этот вопрос несомненен: стоит. Дело в том, что в короткие минуты затмения астрономы успевают получить ценнейший наблюдательный материал о структуре и физических условиях в верхних слоях солнечной атмосферы. В обычное время такие исследования провести нельзя: мешает яркий свет солнечного диска. Поэтому солнечные затмения еще долго останутся желанным событием для астрономов и всех любителей науки о небе.

В заключение предлагаем вам решить несколько задач, связанных с солнечными и лунными затмениями. В таблице, помещенной ниже, приведены данные о планетах и их спутниках. Некоторые из этих данных понадобятся вам при решении задач.

Задачи

1. Почему полные солнечные затмения чаще бывают летом, а не зимой?

2. Почему самые продолжительные солнечные затмения наблюдаются в тропических странах?

3. Бывают ли солнечные затмения на Марсе? на Юпитере?

4. Бывают ли на указанных планетах затмения спутников («лунные» затмения)?

5. Можно ли на самолете догнать лунную тень, движущуюся по поверхности Земли?



Перед наблюдением полного солнечного затмения 1927 года в Швеции (слева направо): С. К. Всехсвятский, В. Г. Фесенков, Г. С. Ландсберг и А. А. Михайлов.

6. Можно ли наблюдать солнечное затмение с борта орбитальной станции «Салют»? Оцените продолжительность затмения.

7. Можно ли в момент полного лунного затмения увидеть из одной точки земной поверхности и Луну и Солнце?

8. Когда угловой диаметр Луны больше: когда она находится вблизи зенита или у горизонта?

9. Можно ли наблюдать солнечное затмение на Северном полюсе?

| Планета | Экваториальный радиус (км) | Среднее расстояние от Солнца (млн. км) | Некоторые спутники | Радиус спутника (км) | Среднее расстояние от планеты (тыс. км) | Период обращения (дни) |
|---------|----------------------------|--|--------------------|----------------------|---|------------------------|
| Земля | 6378 | 149,6 | Луна | 1738 | 384,4 | 27,3 |
| Марс | 3398 | 227,9 | Фобос | ~10 | 9,38 | 0,32 |
| | | | Деймос | ~6 | 23,5 | 1,26 |
| Юпитер | 71 900 | 778,3 | Ио | 1816 | 421,6 | 1,78 |
| | | | Европа | 1563 | 670,9 | 3,55 |
| | | | Ганимед | 2638 | 1070 | 7,16 |
| | | | Каллисто | 2410 | 1880 | 16,69 |



А. Ходулев

Расселение фишек

От редакции

Эта заметка посвящена следующей задаче М. Концевича (из № 11 за 1981 г.), признанной читателями одной из лучших среди опубликованных в «Задачнике Кванта» в прошлом году:

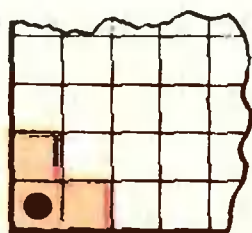
M715. *Прямой угол разбит на клетки. На некоторых клетках стоят фишки, причем расположение фишек можно преобразовывать так: если для некоторой фишки соседняя сверху и соседняя справа клетки свободны, то в эти клетки ставится по фишке, а старая фишка убирается. Вначале в угловую клетку ставится одна фишка. Можно ли несколькими указанными преобразованиями освободить от фишек уголки из а) трех, б) шести, в) десяти клеток, показанные на рисунках 1, а, б, в?*

Эта задача нам также очень понравилась — мы нашли в ней многие черты, которые были бы рады встретить в новых материалах, присылаемых в журнал: наглядная

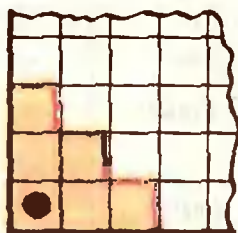
формулировка, побуждающая проделать эксперимент и затем построить общую теорию; характерный для современной дискретной и прикладной математики объект исследования (решетка, заполненная единицами и нулями, локальные правила перехода); естественное появление в решении целого букета важных математических понятий и конструкций (инвариант, бесконечная сумма, вложение задачи в некоторое ее «расширение», конечный алгоритм и т. п.). Очень советуем тем, кто не решал задачу M715, подумать над ней хотя бы час, прежде чем читать статью («главный» рисунок 8 мы нарочно отправили в конец статьи). Остальным, уже испытавшим это удовольствие, мы предлагаем доказать не доказанные факты из второй части статьи, где излагается небольшая теория, позволяющая исследовать разрешимость «игры Концевича» в самом общем случае.

Решение задачи M715. Инвариант

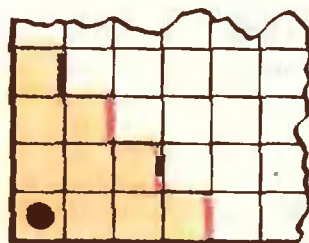
Для поисков нужной последовательности ходов удобно воспользоваться шашками и обычной шахматной доской. Поставив шашку в левый нижний угол и немного поэкспериментировав, легко найти решение задачи а). В этой задаче можно освободить розовую область, например, так, как показано на рисунке 2 — за 4 хода (1,1), (2,1), (2,2), (1,2). (Запись хода указывает координаты клетки, с которой снимается фишка при выполнении хода. Например, ход (2,1) означает, что фишка снимается с поля (2,1), а на поля (2,2) и (3,1) ставятся новые фишки).



а)



б)



в)

Рис. 1.

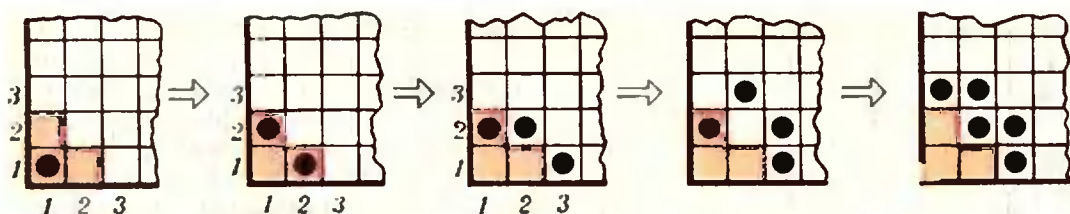


Рис. 2.

Найти решение задач б) и в) экспериментальным путем не удастся. Мы докажем, что освободить соответствующие области невозможно. Начнем с более простой задачи в).

Многие читатели рассуждали примерно так. Когда мы уберем фишку (1,1), появятся две новых (1,2), (2,1) — на полях (i, j) с $i+j=3$. Их нам рано или поздно тоже придется убрать — при этом на следующей диагонали $i+j=4$ появятся уже $2 \cdot 2=4$ «потомка»; их «расселение» (ведь эту диагональ тоже надо освободить!) даст 8 фишек на диагонали $i+j=5$ и в задаче в) — целых 16 фишек на диагонали $i+j=6$. Из этих 16 на месте могут остаться лишь 5, остальные 11 дадут 22 новых потомка на диагонали $i+j=7$, из которых $22-16=6$ вновь нуждаются в расселении и т. д., — фишкам явно не хватает жизненного пространства!

Упражнение. Попробуйте превратить эти соображения в строгое решение задачи в).

Кое-что из этих рассуждений (а именно, множество необходимых ходов, рассматриваемых без учета порядка их выполнения) еще пригодится нам ниже. Но мы сначала приведем более глубокое по идее и изящное решение задачи в), которое — с небольшим ухищрением — проходит и для б).

При доказательстве невозможности какого-либо перехода очень полезно бывает найти инвариант. *Инвариантом* называется некоторая величина, зависящая от состояния исследуемой системы и не меняющаяся при любом допустимом преобразовании. Если окажется, что конечное состояние (к которому мы стремимся) обладает значением инварианта, отличным от исходного, то перевести одно из них в другое невозможно. Замечательный пример применения инвариантов для доказательства невозможности перехода см. в статье О. Виро «Раскрашенные узлы» («Квант», 1981, № 3)*).

В нашей задаче инвариант должен зависеть от расположения

фишек на плоскости. Попробуем найти инвариант s в виде суммы нескольких слагаемых — «весов» клеток, занятых фишками; при этом каждой клетке нужно приписать положительное число — *вес* так, чтобы эта сумма s действительно оказалась инвариантом, то есть не менялась при любом ходе.

Простейший способ — взять вес клетки (i, j) , занятой фишкой, равным $w_{ij}=1/2^{i+j-2}$ (рис. 8, с. 55). Легко убедиться, что при таком выборе весов w_{ij} их сумма s по всем занятым клеткам — инвариант: при очередном расселении вес каждой фишки уменьшается вдвое, но вместо одной появляются две фишки. В начальной позиции (фишка в клетке (1,1)) $s_{\text{нач}}=1$. Чтобы оценить s в конечной позиции (когда нужные 10 или 6 клеток свободны), заметим, что сумма вообще всех чисел w_{ij} ($i, j=1, 2, \dots$) конечна! Действительно, сумма чисел в первом горизонтальном ряду равна $w_{11}+w_{12}+\dots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots=2$. Во втором ряду сумма в два раза меньше, в третьем еще в два раза меньше и т. д. Сумму чисел по всей четверти плоскости находим, складывая суммы отдельных горизонтальных рядов $2+1+\frac{1}{2}+\dots=4$. Будем

обозначать сумму чисел w_{ij} по некоторому множеству клеток X через $s(X)$. Обозначим через B и \bar{B} множества, которые надо освободить в задачах в) и б) соответственно, через K — всю четверть плоскости. Мы получили, что $s(K)=4$. В окончательной позиции все фишки должны принадлежать множеству $K \setminus B$ (так обозначается *дополнение* B до K); поэтому $s_{\text{кон}} < s(K \setminus B)$ (строго меньше, поскольку в окончательной позиции конечное число фишек и они

* См. также «Квант», 1976, № 2, с. 32; 1976, № 12, с. 19; 1979, № 3, с. 26.

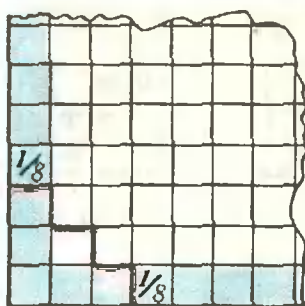


Рис. 3.

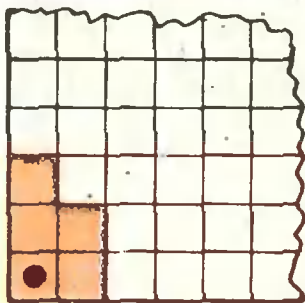


Рис. 4.

не могут заполнить все множество $K \setminus B$). Но

$$s(K \setminus B) = s(K) - s(B) = 4 - \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8}\right) = \frac{3}{4}$$

Итак, $s_{\text{нач}} = 1$, $s_{\text{кон}} < \frac{3}{4}$, а должно быть $s_{\text{кон}} = s_{\text{нач}}$ если мы действуем по правилам! Полученное противоречие доказывает, что освободить область B нельзя.

Для B аналогичный подсчет показывает, что $s_{\text{кон}} < s(K \setminus B) = 1 \frac{1}{4}$. Эта оценка еще не дает противоречия. Но ее можно улучшить, заметив, что в первом горизонтальном и первом вертикальном ряду (обоз-

начим оба этих ряда вместе через L — см. рис. 3, где L выделено голубым цветом) всегда будет находиться лишь по одной фишке, каждая из которых внесет в сумму $s_{\text{кон}}$ вклад, не превышающий $1/8$ (поскольку они должны находиться за пределами B). Сумма чисел для остальных фишек должна быть меньше, чем $s(K \setminus B \setminus L) = 3/4$. Поэтому $s_{\text{кон}} < s(K \setminus B \setminus L) + 2 \cdot \frac{1}{8} = 1$, а это уже противоречит тому, что $s_{\text{нач}} = 1$.

Задачи а), б), в) решены, однако интересно научиться исследовать любую аналогичную задачу. Можно ли, например, освободить область Γ , показанную на рисунке 4? Здесь $s(K \setminus \Gamma) = 1 \frac{1}{2}$ и даже с учетом единственности фишек в первом горизонтальном и вертикальном рядах

можно получить лишь $s_{\text{кон}} < 1 \frac{1}{8}$.

Вместе с тем освободить эту область не удастся.

Мы будем исследовать теперь задачи такого типа: *вначале фишки заполняют множество H ; нужно несколькими ходами освободить множество F* (здесь H и F — любые конечные множества клеток из K). Будем называть её *задачей освобождения* (H, F).

Обобщенные позиции и ходы

Прежде всего, удобно избавиться от запрещения делать ход от клетки (i, j) , когда она свободна или когда клетки $(i, j+1)$, $(i+1, j)$ заняты (данное в условии задачи правило

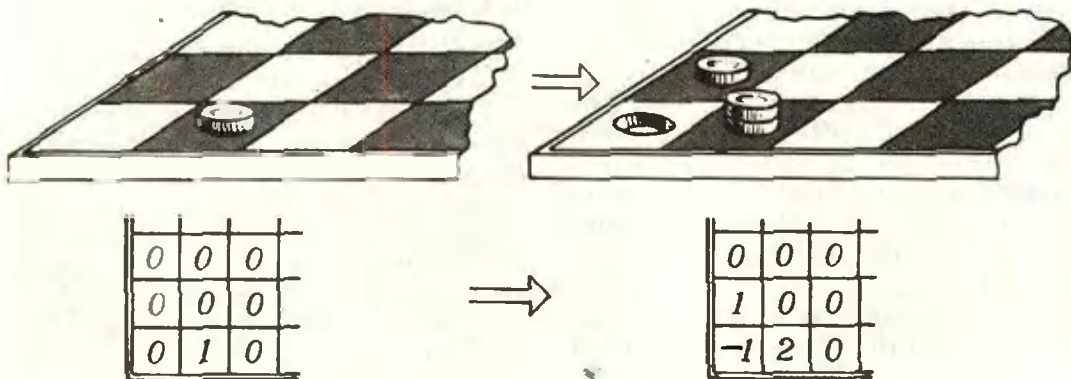


Рис. 5.

мешает менять порядок ходов, что очень стесняет). Но тогда придется сильно обобщить и понятие позиции. Будем теперь считать, что в клетке (i, j) может находиться любое целое число A_{ij} фишек — не только положительное, но и отрицательное, причем для каждой позиции A лишь для конечного множества клеток число A_{ij} отлично от 0. **Ход (обобщенный)** в такой позиции — одновременная замена

$$A_{ij} \rightarrow A_{ij} - 1, A_{i+1,j} \rightarrow A_{i+1,j} + 1, \\ A_{ij+1} \rightarrow A_{ij+1} + 1.$$

Прежние позиции (в которых $A_{ij}=1$ или $A_{ij}=0$) и ходы будем называть **нормальными**.

На рисунке 5 показан ход, в результате которого из нормальной позиции получается ненормальная. В нижней части рисунка 5 та же позиция показана в новой, числовой записи.

Результат выполнения хода из клетки (i, j) состоит в вычитании единицы из A_{ij} и прибавлении единицы к $A_{i+1,j}$ и $A_{i,j+1}$; результат нескольких таких вычитаний и прибавлений, очевидно, не зависит от порядка их выполнения.

Имеет место следующий замечательный факт, позволяющий применять обобщенные ходы для решения интересующей нас задачи: *если одна нормальная позиция P может быть переведена в другую нормальную позицию Q последовательностью произвольных (возможно, ненормальных) ходов $\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$, то P может быть переведена в Q и некоторой последовательностью нормальных ходов, полученной перестановкой ходов данной последовательности.* (Докажите это!)

Далее вместо задачи освобождения (H, F) мы будем рассматривать следующую «задачу нормализации»: *задана позиция A , в которой все*

$A_{ij} \geq 0$, причем некоторые $A_{ij} > 1$; *нужно несколькими ходами привести ее к нормальной.* Чтобы свести первую задачу ко второй, образуем позицию $A_{ij} = H_{ij} + F_{ij}$ (обозначим ее $A = H + F$), другими словами, к фишкам H добавим еще по фишке повсюду в F — тогда в $F \cap H$ будет стоять по две фишки. Оказывается, что *задача освобождения (H, F) эквивалентна задаче нормализации $H + F$.* (Докажите это!)

Решение «задачи г)» (рис. 4)

Добавляя по одной фишке в клетках области G , получаем задачу нормализации, изображенную на рисунке 6.

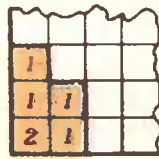


Рис. 6.

Рекомендуем вам проделывать дальнейшие ходы на шахматной доске. Подойдут обычные шашки — «минус-шашки» не понадобятся. Глядя на позицию, мы видим, что на клетке $(1,1)$ стоят две фишки. Одна из них должна быть убрана; это можно сделать только ходом $(1,1)$. Значит, ход $(1,1)$ должен присутствовать в любом решении, то есть это — **необходимый** ход. Можно считать, что он делается первым. Сделаем его. Получим позицию, изображенную на второй картинке на рисунке 7. Дальнейшие (необходимые) ходы показаны на этом же рисунке. В результате их выполнения исходная позиция возникла вновь (только сдвинутая на одну клетку вверх и на одну клетку вправо). Отсюда следует, что исходная задача г) неразрешима (продумайте это!).

Общий алгоритм

Пользуясь обобщенными ходами и нормализацией, мы сумели разо-

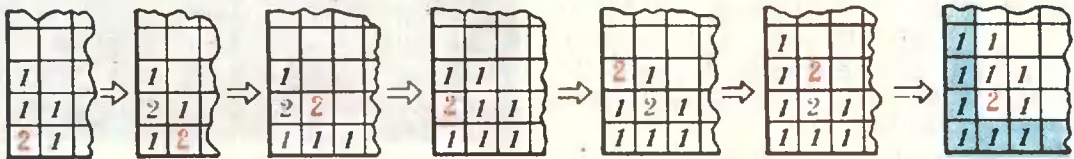


Рис. 7.

(Окончание см. на с. 55.)



Л. Микаэлян

Домашние опыты с поляризованным светом

Вместо введения

Эксперименты, описанные в этой статье, по своему характеру совсем не похожи на те, что обычно делаются в школе (или даже в институте). Там на опыте либо проверяют правильность каких-нибудь соотношений, вытекающих из уже известных законов, либо, измерив часть величин, входящих в эти соотношения, вычисляют другие. Например, из закона Гука и второго закона Ньютона следует, что период колебаний груза на пружине равен $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Можно независимым способом измерить массу груза m и упругость пружины k , вычислить период T и сравнить его с измеренным на опыте значением. Можно также измерить период и массу груза и вычислить упругость пружины.

Такие эксперименты очень нужны и постоянно ведутся не только в учебных, но и в научных лабораториях. Однако для науки не менее важны эксперименты с другим подходом к проблеме. Допустим, вы натолкнулись на какой-то неизвестный эффект, и он возбудил ваше любопытство. Вы начинаете исследовать, от каких факторов и условий этот эффект зависит. Причем речь не идет о проверке каких-либо законов, потому что проверять пока нечего. Законы еще неизвестны и, возможно, будут установлены не скоро. Но вы вносите свой вклад в развитие науки: будущая теория должна

будет объяснить ваши результаты. И этим не исчерпывается значение таких исследований. Еще до появления полной теории может быть сделан ряд важных заключений. Кроме того, обнаруженный эффект может даже найти практические применения. Вспомним хотя бы о магнитной стрелке, которая служила путешественникам задолго до того, как была понята природа магнетизма.

Что нас заинтересовало?

Яркий луч солнечного света падает на стеклянную пластинку и... не отражается. Мы видим освещенные пылинки на поверхности стекла, но зайчика на стене нет. Когда в лучи, идущие к стеклу, мы ввели кусочек бесцветной слюды, отражение появилось, а поле зрения окрасилось всеми цветами радуги. Они переливались, переходя друг в друга при повороте или покачивании слюды. В наших опытах мы сделали эти и еще несколько открытий. Мы — это я и два восьмиклассника.

Скажем сразу, что стекла для опытов мы брали самые обыкновенные, а вот свет был «приготовлен» особым способом. Впрочем, расскажем обо всем по порядку.

Почти все необходимое для экспериментов мы нашли дома. Исключе-



Смятая целлофановая обертка, сфотографированная в поляризованном свете. Фото И. Борисевича и А. Щуки.

ние составили пластинки слюды (размерами несколько сантиметров при толщине 0,2—0,3 мм) и стекла (очень удобны отмытые от эмульсии фотопластинки 9×12 см). Мы не использовали каких-либо глубоких знаний о природе света, кроме одного: что свет — это волны. Какие именно волны — продольные или поперечные, мы узнали из анализа полученных результатов.

Исчезновение отраженного света

Отложив «эффект слюды» на потом, мы занялись эффектом исчезновения отражения и приступили к его методическому изучению.

Первый раз мы заметили это явление, рассматривая изображения ярких предметов за окном после двух отражений. Первое происходило в оконном стекле, второе — в стеклянной пластинке, которую один из нас держал в руках. Меняя положение стекол и следя глазами за изображением предмета (например, светлого облака невысоко над горизонтом), мы обнаружили, что при некотором положении изображения как бы меркнет, сильно теряя свою яркость. Геометрия хода лучей для этого случая показана на рисунке 1. Она нам будет часто встречаться, и для краткости будем называть ее геометрией № 1. Заметьте, что плоскости первого и второго отражений взаимно перпендикулярны (плоскостью отражения будем называть плоскость, в которой лежат падающий и отраженный лучи и перпендикуляр к поверхности стекла), а углы падения лучей на оба стекла (они отсчитываются от перпендикуляра к поверхности стекла) на глаз близки к 60° .

Понимая, что яркость изображения определяется количеством света, отраженного от первого и второго стекол, мы задались вопросом: при каком из двух отражений — первом или втором — падает коэффициент отражения света? Рассматривая предметы, однократно отраженные в стекле, мы убедились в том, что ни при каком угле падения лучей их отражение не обнаруживает минимума. Напротив, с ростом угла паде-

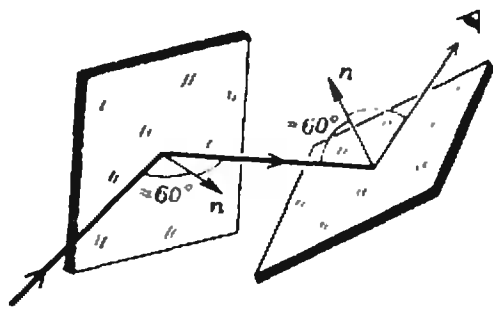


Рис. 1. Геометрия № 1. Плоскости первого и второго отражений взаимно перпендикулярны. От второго стекла свет практически не отражается.

ния яркость изображения непрерывно возрастает. Так мы определили, что доля отраженного света уменьшается во втором стекле, если на него падают лучи, отраженные первым стеклом в геометрии № 1. В этом и состоял наш секрет особого «приготовления» света.

Затем мы продолжили эксперименты.

От чего и как зависит эффект?

Прежде всего мы сменили источник света и повторили опыт в геометрии № 1. Мы взяли лампу накаливания (мощностью 60 Вт) и поставили ее так, что, когда сидишь на стуле, нить находится несколько выше колена. Первое отражение происходило в стекле от книжной полки, которое мы поставили вертикально, а второе — от стеклянной пластинки, которую сидевший на стуле держал в руках перед собой на уровне нити лампы. Следя глазами за отражением нити, довольно быстро удалось найти положение, при котором нить меркнет почти полностью. Ослабление отражения достигало на глаз по крайней мере нескольких десятков раз*). Мы повторили опыт еще с одним источником света — свечой — и убедились, что от источника эффект не зависит.

Потом мы провели опыты с другими отражателями. В качестве первого, кроме стекла, использовались лакированная дверца шкафа и по-

*) В дальнейшем, ради краткости, будем говорить не о сильном уменьшении отражения, а о его исчезновении.

верхность воды. В последнем случае необходимо было, конечно, чтобы плоскость первого отражения была вертикальной, а второго — горизонтальной. В роли второго отражателя использовалось оргстекло (ученическая линейка). Все шло хорошо. Когда же мы попытались воспроизвести эффект с обыкновенным зеркалом, у нас ничего не вышло: ни на месте первого, ни на месте второго отражателя зеркало не давало затемнения. Ничего не получилось и с металлической поверхностью (мы брали никелированную крышку от металлической коробки).

Далее мы стали более внимательно исследовать влияние геометрии эксперимента. Мы снова вернулись к лампе как источнику света и стеклянным отражателям. Оказалось, что уже малые (на глаз $5-7^\circ$) отклонения от оптимального угла падения на любое из зеркал в геометрии № 1 довольно сильно увеличивают количество отраженного света. Если же изменить геометрию так, чтобы плоскости первого и второго отражений стали параллельными друг другу (рис. 2), то ни при каких углах падения исчезновение света не наблюдалось. Это расположение будем называть в дальнейшем геометрией № 2.

Важные выводы о природе света

Нужно сказать сразу, что мы не смогли понять, почему отражение исчезает только при определенных углах падения света. Но из того факта, что эффект зависит от угла между плоскостями отражений, нам удалось сделать некоторые выводы.

Переход от геометрии № 2 к геометрии № 1 можно, очевидно, себе представить так: из своего начального положения второй отражатель (и глаз вместе с ним) перемещаются таким образом, что плоскость второго отражения становится перпендикулярной плоскости первого, а углы падения остаются неизменными. При достижении конечного положения (геометрия № 1) отражение исчезает. В то же время физически очевидно, что отражение есть следствие взаимодействия света с ве-

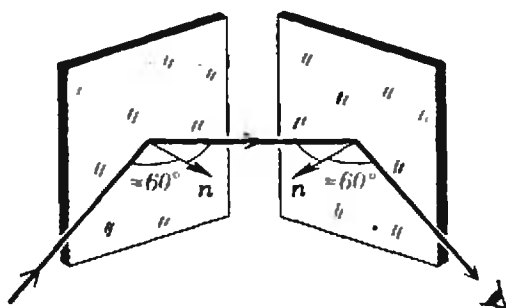


Рис. 2. Геометрия № 2. Плоскости отражений параллельны. Отражение от второго стекла есть.

ществом, и количество отраженного света не может непосредственно зависеть от относительного положения каких бы то ни было плоскостей. Как же второй отражатель «узнает» о положении первой плоскости — параллельная она или перпендикулярная?

Единственная возможность состоит в том, что сам свет приносит эту информацию. Другими словами, плоскость, в которой происходит отражение, «метит» световую волну, определяя в ней некоторое внутреннее направление. А коэффициент отражения, стало быть, зависит сразу от двух углов: угла падения луча и угла между этим внутренним направлением, присущим самой волне, и плоскостью второго отражения.

Из всего этого мы сделали вывод, что свет относится к типу поперечных волн. Рассуждали мы следующим образом. Любая волна характеризуется направлением своего распространения. Если наблюдать волну в каком-либо фиксированном месте, то там будут происходить колебания. В продольной волне, например в звуковой, направления, вдоль которых происходят эти колебания, совпадают с направлением распространения. Поэтому продольная волна характеризуется всего одним направлением. В поперечных волнах, например в волнах, бегущих по веревке, направление колебаний перпендикулярно скорости волны. А раз световая волна характеризуется двумя направлениями, то, стало быть, она поперечна. Важно подчеркнуть, что мы не пытаемся объяснить исчезнове-

ние отражения. Напротив, отталкиваясь от этого экспериментального факта, мы приходим к выводу о поперечности световых волн. (Замечательно, что нам даже не пришлось думать о том, что именно «колеблется» в свете, хотя мы знали, конечно, что свет — это электромагнитная волна.)

Что же происходит при двойном отражении света?

Картина двойного отражения представилась нам в следующем виде. Свет, падающий на первый отражатель, посылается огромным числом различных участков светящегося тела. Колебания в этих световых «посылках» перпендикулярны к направлению их распространения, но в остальном их направления случайны и в среднем равновероятны (рис. 3). Каждое такое колебание можно разложить на два: одно происходит в плоскости падения, другое — перпендикулярно к ней (рис. 4). Если угол падения оптимален, то отразится только одно из них. (Какое именно, осталось невыясненным, поэтому направления, показанные на рисунке 4, приняты произвольно.) В таком случае говорят, что отраженный свет выстроен или поляризован. Исход второго отражения зависит от ориентации направления колебаний и плоскости падения: в геометрии № 2 отражение есть, а в геометрии № 1 его нет.

Если же отойти от оптимального угла падения на первый отражатель, то в отраженном свете будут представлены оба направления колебаний, но в неодинаковой степени, и свет будет поляризован не полностью, а частично. Вот почему при отклонении от геометрии № 1 полного

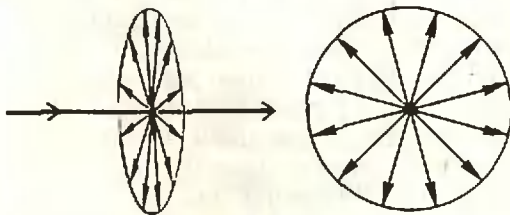


Рис. 3. В естественном свете все направления колебаний равновероятны.

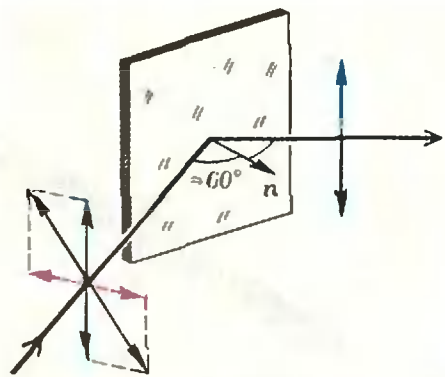


Рис. 4. Стекло отражает только одну составляющую колебаний — перпендикулярную плоскости падения. Отраженный свет поляризован.

исчезновения отраженного света не происходит.

Оказывается, прошедший свет тоже поляризован

Имея картину явления, мы стали на ее основе высказывать различные предсказания и проверять их на опыте. Вот один из них. Свет от лампы падает под оптимальным углом на несколько стеклянных пластинок, сложенных в стопу, а затем — еще на одно стекло, называемое анализатором (рис. 5). Если наша картина правильна, то, очевидно, прошедший свет тоже будет поляризован, но в направлении, перпендикулярном поляризации отраженного света. В отличие от отраженного, поляризация прошедшего света не будет полной, но чем больше пластинок в стопе, тем больше будет поляризация: ведь от каждой из них частично отражается и «отсеивается» свет одной поляризации. И действительно, мы наблюдали, что в геометрии, приведенной на рисунке 5, свет от стекла-анализатора отражается хуже, чем в случае, когда плоскость второго отражения перпендикулярна плоскости падения (эта геометрия на рисунке не показана).

Этот же, по существу, опыт можно поставить немного по-другому. Используя полностью поляризованный (то есть отраженный под нужным углом) свет, мы проверили, что прозрачность стопе пластинок сильно зависит от ориентации направлений поляризации и плоскости падения.

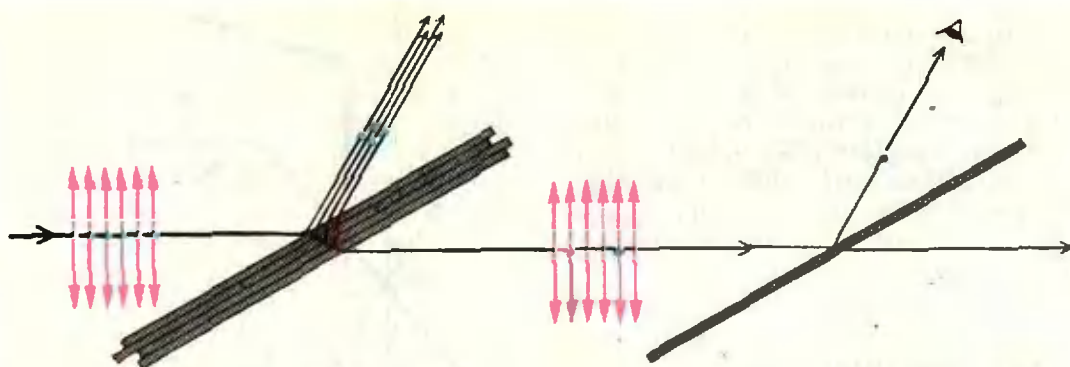
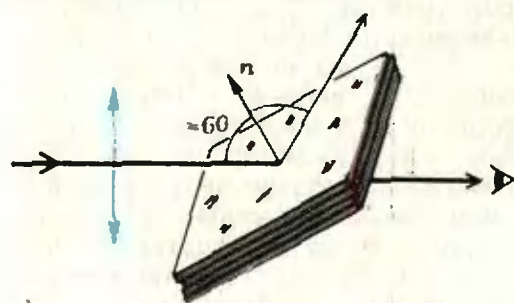


Рис. 5. Неполяризованный свет падает на стопу стеклянных пластин. В проходящем свете преобладают колебания, лежащие в плоскости падения. Такой свет плохо отражается от второго стекла.

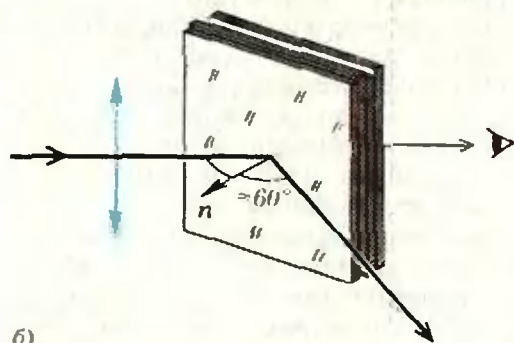
В случае, показанном на рисунке 6, а, десять стекол почти не уменьшают яркости света, а в случае, как на рисунке 6, б, — уменьшают ее приблизительно вдвое.

Возникновение и исчезновение разноцветной окраски слюды

Опыты со слюдой мы начали с того, что повторили их в геометрии № 1, при этом источником света служила лампа. Настроив систему на возможно более глубокий минимум отражения, мы ввели пластинку слюды



а)



б)

Рис. 6. Поляризованный свет падает на стопу стеклянных пластин. В случае а) — отражение слабое и прозрачность высока; в случае б) — отражение сильное, прозрачность плохая.

в лучи, идущие от одного отражателя к другому, так, что поляризованный свет был перпендикулярен ее поверхности. Это привело к окрашиванию слюды в различные цвета, правда цветовая гамма была беднее, чем в опыте с дневным светом. Мы наблюдали, как при поворачивании слюды вокруг оси, совпадающей с лучами света, цвета периодически сменяли друг друга.

Если же смотреть на поляризованный свет, прошедший сквозь слюду непосредственно, то есть минуя второе отражение, то никаких цветов не видно. При перемещении слюды в область между лампой и первым отражателем также не было никакой окраски.

Кроме слюды мы испробовали другие прозрачные материалы. Оказалось, что стекло и оргстекло не дают никакого эффекта, а вот целлофановая пленка от пачки сигарет дала аналогичный эффект. При поворотах пленки отражение периодически усиливалось и уменьшалось (это происходило несколько раз за один полный поворот), но цветовой окраски в этом случае почти не было.

Наконец, мы взяли гораздо более тонкую слюду, отщепив слой от более толстой пластинки. Слюда довольно легко расслаивается, и после небольшой тренировки нам удалось это сделать. Отщепленный слой был совершенно прозрачным, и, по-видимому, заметно тоньше 0,1 мм. Если попытаться держать его за уголок горизонтально, то он прогибается под собственной тяжестью. Действие тонкого слоя слюды оказалось похожим

на действие целлофана: при вращении слюды яркость изображения нити лампы (после второго отражения) периодически менялась, но окраски не было.

Какие можно сделать выводы из наблюдаемого «эффекта слюды»?

1. В геометрии № 1 на второй отражатель падает свет, поляризованный так, что отражения не происходит. При введении слюды отражение появляется. Значит, в прошедшей через нее световой волне появляются колебания другого направления. Другими словами, слюда меняет состояние поляризации света.

2. Слюда по-разному действует на свет различных длин волн (различных цветов), но проявляется это в не очень тонких слоях.

Используя указанные свойства слюды, мы смогли сильно увеличить чувствительность обнаружения частичной поляризации света. Даже при небольшой степени поляризации введение слюды в падающие на стекло-анализатор лучи дает в отраженном свете характерную окраску, меняющуюся с поворотом слюды. Благодаря высокой цветовой чувствительности глаза, при таком способе обнаружения поляризации не нужно заботиться о том, чтобы точно подыскать соответствующее положение плоскости падения, что, конечно же, упрощает наблюдения.

С помощью этого «усовершенствования» мы, например, установили, что освещенные сбоку облака посылают частично поляризованные лучи (рис. 7). Мы наблюдали и поляризацию голубого безоблачного неба. Эффект в этом случае не особенно велик и проявляется лучше всего, если стоять к Солнцу боком, так, что-

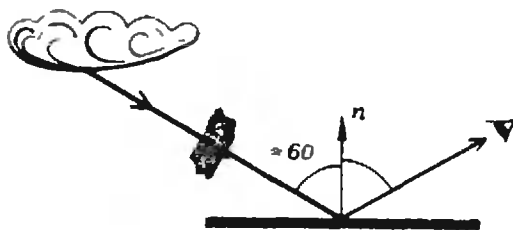


Рис. 7. Кусочек слюды или целлофана увеличивает чувствительность обнаружения поляризации.

бы лучи, рассеянные атмосферой, приходили приблизительно перпендикулярно к линии, соединяющей Солнце и стекло.

3. Думая об «эффекте слюды», мы заключили, что этот эффект как-то связан с тем, что взаимодействие слюды со светом зависит от направления. Точнее: слюда имеет различные свойства в различных направлениях, и поэтому результат прохождения света через нее зависит от того, как ориентированы колебания в световой волне относительно этих направлений. Ведь при поворотах пластинки относительно оси светового пучка меняется только ориентация кристаллических осей слюды по отношению к направлению колебаний. Стекло, так же как и оргстекло, видимо, никаких особых направлений не имеет, то есть их свойства одинаковы для всех направлений.

Дальше в понимании этих вопросов мы продвинуться не смогли, но правильность общей идеи мы сумели подтвердить на опыте. Для этого мы искусственно нарушили внутреннюю симметрию оргстекла с помощью механических напряжений. В геометрии № 1 в лучи, падающие на второе стекло, мы поместили полоску из оргстекла размерами $2 \times 20 \times 200$ мм. Оказалось, что если изгибать и скручивать полоску, то местами появляется характерное затемнение поля зрения, которое пропадает при снятии напряжений. Тогда мы решили «заморозить» напряжения. Утюгом мы слегка размягчили небольшой участок средней части полоски, приложили растягивающее усилие и, не снимая его, быстро охладили полоску под струей воды. Напряженное оргстекло стало вести себя подобно целлофановой пленке.

Заметим, что наши исследования велись по классической схеме: наблюдение — опытное исследование — гипотеза — эксперимент. Фактически мы повторили путь, пройденный наукой. Поляризацию света при отражении открыл французский физик Малюс в 1808 году, через три года он и французский ученый Био обнаружили поляризацию прошедшего

света, а в 1815 году английский физик Брюстер нашел условие, при котором отраженный свет оказывается поляризованным полностью. Много лет спустя русский физик Столетов для усиления эффекта поляризации использовал стопу плоскопараллельных пластин.

Когда мы закончили все эксперименты, перед нами оказалось больше вопросов, чем было в самом начале. Вот некоторые из них:

— Почему естественный свет при отражении поляризуется?

— Почему облака и небо посылают поляризованный свет?

— Что именно происходит с поляризованным светом в материалах, подобных слюде?

— Можно ли использовать поляризованный свет для количественного изучения внутренних напряжений в прозрачном теле или для изучения структуры кристаллов?

— Можно ли добиться «эффекта слюды» другими — не механическими — воздействиями на вещество?

— Нельзя ли использовать слюду для количественного изучения спектрального состава света?

Словом, как это и должно быть, проведенные с помощью двух стекол и кусочков слюды опыты открывают широкий простор для размышлений и новых исследований.

Новости науки

Астрономия и древняя летопись

Трудно, наверное, считать новостью то, что наблюдалось 2000 лет назад; однако, именно такая новость стала известной лишь недавно. Впрочем, когда астроном впервые обнаруживает новую галактику, он с полным правом говорит об открытии, хотя галактика существовала задолго до этого примечательного для науки события.

Открытие, о котором пойдет речь, было сделано на страницах древней китайской хроники Ши цзи («Исторических записок»)*. Ее написал в 95 году до нашей эры Сыма Цянь. В Ши цзи собраны сведения об истории, сельском хозяйстве, науке Китая. Есть там и описание астрономических наблюдений, в частности — указываются цвета некоторых звезд. Действительно, если внимательно смотреть на звезды и сравнивать их друг с другом, то можно увидеть, что они различаются по цвету.

В Ши цзи написано, что цвет Сириуса (α Большого Пса) — белый, Антареса (α Скорпиона) — красный, Бетельгейзе (α Ориона) —

* Частично «Исторические записки» переведены на русский язык.



Сыма Цянь (гравюра на дереве).

желтый и Беллатрикса (γ Ориона) — голубой. Все эти звезды принадлежат к числу самых ярких, и их можно увидеть на нашем северном небе. Как оказалось, цвет трех звезд указан правильно (зрение у астрономов было острым!), недоумение вызывает лишь цвет Бетельгейзе.

Сейчас хорошо известно, что это — переменная звезда, а именно — красный сверхгигант, и что цвет ее — не желтый, а красный. Но, по видимому, древние звездочеты не ошиблись и здесь.

Но современным представлениям в данное время Бетельгейзе находится в стадии быстрого расширения.

За 2000 лет ее радиус почти удвоился, и теперь он приблизительно в 300–400 раз превышает радиус Солнца. Расширяясь, звезда охлаждается; и если сейчас температура ее поверхности около 3000 градусов, то во времена, когда писалась Ши цзи, она должна была быть на 1000–2000 градусов больше. Соответственно, и цвет ее должен был быть более желтым.

Таким образом в древней летописи нашлось зримое подтверждение эволюции звезды, явления, которое, казалось бы, лежит за пределами возможности человеческих наблюдений. Оно лишь раз доказывает, что любое следствие теоретических построений когда-нибудь да подвергнется опытной проверке.

Недавно в старых китайских книгах было обнаружено еще одно интересное свидетельство древних ученых. Летом 365 года до нашей эры Джан Де увидел вблизи Юпитера яркую точку. Может быть, это был один из спутников Юпитера, например — Ганимед или Каллисто? По крайней мере, именно так объясняют это место истории.

Конечно, интерпретация древних авторов не всегда убедительна. Кто знает, не ошиблись ли они.

Я. С.

задачник Кванта

Задачи

М751—М755; Ф763—Ф767

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Задачи этого номера предлагались на заключительном туре Всесоюзной олимпиады школьников. Число в скобках обозначает класс, в котором предлагалась задача. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 30 сентября 1982 года по адресу: 117071, Москва, Ленинский проспект, 15, «Физматлит», «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 7 — 82» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М751, М752» или «Ф763».

Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи.

М751. На окружности отмечены $3k$ точек, разделяющих ее на $3k$ дуг, из которых k дуг имеют длину 1, еще k дуг — длину 2, и остальные k дуг — длину 3. Докажите, что среди отмеченных точек найдутся две диаметрально противоположные. (9)

В. Произволов

М752. Квадратная таблица $n \times n$ клеток заполнена целыми числами. При этом в клетках, имеющих общую сторону, записаны числа, отличающиеся одно от другого не больше, чем на 1. Докажите, что хотя бы одно число встречается в таблице:

- а) не менее, чем $[n/2]$ раз ($[a]$ — целая часть a);
б) не менее, чем n раз. (8)

А Берзиньш

М753. Числа a, b, c лежат на интервале $]0, \pi/2[$ и удовлетворяют равенствам:

$$\begin{aligned}\cos a &= a, \\ \sin \cos b &= b, \\ \cos \sin c &= c.\end{aligned}$$

Расположите эти числа в порядке возрастания. (10)

С Гессен

М754. а) Существуют ли многочлены $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ от переменных x, y, z такие, что выполнено тождество

$$(x-y+1)^3 P + (y-z-1)^3 Q + (z-2x+1)^3 R = 1?$$

б) Тот же вопрос для тождества

$$(x-y+1)^3 P + (y-z-1)^3 Q + (z-x+1)^3 R = 1. \quad (10)$$

П Гусятников, Ю Нестеренко

М755. Внутри тетраэдра выбрана точка M . Докажите, что хотя бы одно ребро тетраэдра видно из точки M под углом, косинус которого не больше, чем $-1/3$. (9)

С Гашков

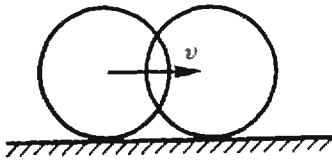


Рис. 1.

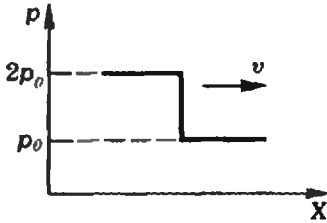


Рис. 2.

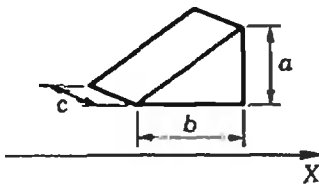


Рис. 3.

Ф763. На горизонтальной поверхности стоит обруч радиуса R . Мимо него движется со скоростью v такой же обруч (рис. 1). Найти зависимость скорости верхней точки «пересечения» обручей от расстояния между их центрами. Обручи тонкие; второй обруч «проезжает» вплотную к первому. (9)

С Кротов

Ф764. Ударная волна представляет собой область повышенного давления, распространяющуюся с большой скоростью в направлении оси X (рис. 2); в момент прихода волны давление резко повышается от значения p_0 до $2p_0$. На пути распространения волны стоит клин, размеры клина указаны на рисунке 3, масса клина равна m . Какую скорость приобретет клин сразу после прохождения через него фронта ударной волны? Считать, что приобретаемая клином скорость много меньше скорости распространения волны; трение пренебрежимо мало. (8)

А. Буздин

Ф765. В настоящее время мощность всех источников энергии на Земле, используемых человечеством, составляет $\Delta P = 10^{13}$ Вт, а мощность солнечной энергии, поступающей на Землю, — $P_0 = 10^{17}$ Вт. К какому перегреву ΔT поверхности Земли приводят земные источники энергии? Какова максимально допустимая величина ΔP_{max} , если предельный перегрев из экологических соображений не должен превышать величины $\Delta T_{\text{max}} = 0,1$ К? Известно, что энергия, излучаемая в единицу времени нагретым телом, увеличивается в 16 раз при увеличении абсолютной температуры тела в 2 раза. (10)

С. Козел

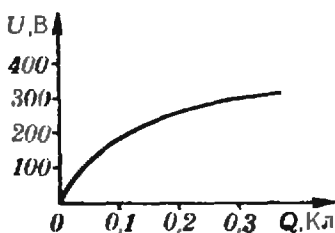


Рис. 4.

Ф766. Для лампы-вспышки применили нелинейный конденсатор (он заполнен диэлектриком, у которого диэлектрическая проницаемость зависит от напряженности поля). График зависимости напряжения U от заряда Q конденсатора приведен на рисунке 4. Конденсатор заряжают от батареи с $U_0 = 300$ В через резистор с сопротивлением $R = 10$ кОм. Найти максимальную энергию вспышки. Оценить максимальное число вспышек за 1 минуту. Считать, что при вспышке конденсатор полностью разряжается. Минимальное начальное напряжение вспышки $U_1 = 250$ В. (9)

А. Зильберман

Ф767. В одном из проектов получения электроэнергии предлагалось использовать морские течения и магнитное поле Земли. Проект заключается в следующем.

В море погружают две горизонтальные металлические пластины, расположенные одна над другой на расстоянии $l=100$ м; площадь каждой пластины $S=1$ км². Морская вода, удельное сопротивление которой равно $\rho=0,25$ Ом·м, протекает между пластинами с запада на восток со скоростью $v=1$ м/с. Магнитное поле Земли в данном месте однородно, направлено с юга на север; индукция поля равна $B=10^{-4}$ Тл. Определить максимальную электрическую мощность, которая может выделиться на нагрузке, подсоединенной к пластинам. (10)

A. Илларионов

Problems

M751—M755; P763—P767

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The problems from this issue were proposed in the final round of the All-Union mathematical and physical olympiad this year. The number in brackets indicates the grade of the students to whom the problem was proposed. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than September 30th, 1982 to the following address: USSR, Moscow, 117071 МОСКВА, ЛЕНИНСКИЙ ПРОСПЕКТ 15, «ФИЗМАТ-ЛИТ», «КВАНТ».

Please send us the solutions

M751. A circle is divided into $3k$ arcs by $3k$ points; k arcs are of length 1, k others of length 2 and the remaining k are of length 3. Prove that at least two of the points are diametrically opposed. (9)

V. Proizvolov

M752. Integers are the entries in the $n \times n$ cells of a square table. Integers in cells with a common side differ by no more than 1. Prove that at least one number appears in the table

- a) no less than $[n/2]$ times ($[a]$ is the integer part of a);
b) no less than n times. (8)

A. Berzinsk

M753. The numbers a, b, c in the interval $]0, \pi/2[$ satisfy the relations:

$$\cos a = a, \quad \sin \cos b = b, \quad \cos \sin c = c.$$

Write these numbers in increasing order. (10)

S. Gessen

M754. a) Do there exist polynomials

$$P=P(x, y, z), \quad Q=Q(x, y, z), \quad R=R(x, y, z)$$

in the variables x, y, z satisfying the identity

$$(x-y+1)^3P + (y-z-1)^3Q + (z-2x+1)^3R = 1?$$

b) Same question for the identity

$$(x-y+1)^3P + (y-z-1)^3Q + (z-x+1)R = 1. \quad (10)$$

P. Gusyatnikov, Yu. Nesterenko

M755. The point M is chosen arbitrarily inside a tetrahedron. Prove that at least one edge of the tetrahedron is seen from the point M under an angle whose cosine is no greater than $-1/3$. (9)

S. Gashkov

P763. A hoop of radius R stands on a horizontal surface. An identical hoop rolls past it with velocity v (see figure Рис. 1). Find the dependence of the upper "intersection point" of the hoops on the distance between their centres. The hoops are thin; the second hoop rolls past the first, almost touching it. (9)

S. Krotov

of physics and mathematics problems, as well as solutions from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. The list of prizewinners is published in the September issue.

P764. A shock wave is a high pressure region which propagates with high velocity in the direction of the X axis (see figure Рис. 2, p. 40); when the wave reaches any given point the pressure there jumps from the value p_0 to $2p_0$. A wedge stands in the way of the wave; the measurements of the wedge are shown on the figure Рис. 3, its mass is m . What velocity will the wedge acquire immediately after the wave front goes past it? It may be assumed that the propagation velocity of the wave front is much greater than that acquired by the wedge; friction is negligible. (8).

A. Buzdin

P765. At the present time, the power of all energy sources on Earth used by man is $\Delta P = 10^{13}$ W, while the power of solar energy reaching the Earth's surface is $P_0 = 10^{17}$ W. What is the value of overheating ΔT due to energy sources of terrestrial origin? What is the maximal admissible value ΔP_{\max} if, from ecological considerations, overheating must not exceed $\Delta T_{\max} = 0,1^\circ\text{C}$? It is known that the amount of energy radiated by a heated body increases 16 fold when the absolute temperature of the body doubles. (10)

S. Kozel

P766. A non-linear capacitor, filled with a dielectric whose dielectric permeability depends on field tension, is used in a flash lamp. The dependence of the voltage U on the charge Q in the capacitor is plotted on figure Рис. 4, p. 40. The capacitor is charged from a battery with $U_0 = 300$ V through a resistance $R = 10$ kOhm. Find the maximal energy of the flash. Estimate the maximal number of flashes per minute. It may be assumed that the capacitor is entirely discharged during the flash. The minimal initial voltage for the flash is $U_1 = 250$ V. (9)

A. Zilberman

P767. One of the existing projects to obtain electric energy is based on sea currents and the Earth's magnetic field. The project is the following:

Two metal plates are immersed horizontally into the sea, one above the other, at the distance $l = 100$ m; the area of each plate is $S = 1$ km². Sea water, whose resistance is $\rho = 0,25$ Ohm/m, flows between the plates from West to East with velocity $v = 1$ m/s. The Earth's magnetic field there is assumed uniform, directed South-North, its induction is $B = 10^{-4}$ T.

Find the maximal electric power which may be generated on a load connected to the plates. (10).

A. Sheronov

Решения задач

M711—M720; Ф723—Ф732

M711. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность с центром O , взаимно перпендикулярны. Докажите, что ломаная AOC делит четырехугольник на две части равной площади.

Соединим вершины B и D четырехугольника с центром O и продолжим радиус CO до пересечения с окружностью в точке G (рис. 1). Поскольку $(AC) \perp (BD)$, $\angle ACD + \angle BDC = 90^\circ$, так что $\angle DA + \angle BC = 180^\circ$. Отсюда вытекает, что дуги DG и AB конгруэнтны и, следовательно, угол AOB в два раза больше угла DCO . Из этого несложным вычислением получаем равенство площадей треугольников AOB и COD .

Равенство площадей треугольников AOD и BOC доказывается аналогично.

Поскольку ломаная AOC делит наш четырехугольник на части, составленные из пар треугольников AOB , BOC и AOD , COD , получаем утверждение задачи.

В. Варваркин

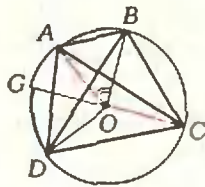


Рис. 1.

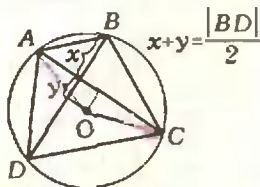


Рис. 2

M712. Докажите, что любое положительное число можно представить в виде суммы девяти чисел, десятичные записи которых содержат только цифры 0 и 7.

$$\pi = 3,14159265\dots$$

```

1,11111111...
1,01011111...
1,01011011...
0,01011011...
0,00011011...
0,00001010...
0,00001000...
0,00001000...
0,00001000...

```

$$3,14159265\dots$$

M713. M — множество точек на плоскости. Точка O плоскости называется «почти центром симметрии» множества M , если из M можно выбросить одну точку такую, что для оставшегося множества O является центром симметрии в обычном смысле. Сколько «почти центров симметрии» может иметь конечное множество?

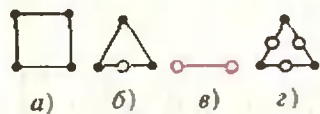


Рис. 1.



Рис. 2

От редакции. Это решение по существу приводит к наблюдению, которому была посвящена задача M648: в таком четырехугольнике (вписанном в окружность, со взаимно перпендикулярными диагоналями) длина стороны вдвое больше расстояния от центра окружности до середины противоположной стороны. Есть и значительно более короткие решения, найденные читателями. Например: перпендикуляры, опущенные из центра O на диагонали AC и BD , попадают в их середины (рис. 2), а потому каждая из частей, на которые ломаная AOC делит наш четырехугольник, имеет площадь $\frac{|AC| \cdot |BD|}{4}$.



Заметим, что любое положительное число можно представить в виде суммы девяти чисел, содержащих в своей десятичной записи только цифры 0 и 1 (на полях в таком виде представлено число $\pi = 3,14159265\dots$). Пусть теперь $a > 0$ — данное число. Представляя $\frac{a}{7}$ в виде суммы девяти чисел, содержащих в своей десятичной записи только цифры 0 и 1, и учитывая, что $a = 7 \cdot \left(\frac{a}{7}\right)$, получим нужное представление числа a .

Задача M712 очевидным образом обобщается: любое положительное число можно представить в виде суммы $q-1$ чисел, q -ичная запись которых содержит только цифры 0 и k ($k < q$).

Э. Туркевич



Конечное множество точек на плоскости может иметь 0, 1, 2, 3 «почти центров симметрии» (см. рисунок 1, а) — 2) соответственно). Покажем, что больше трех «почти центров симметрии» конечное множество M на плоскости иметь не может.

Прежде всего заметим, что множество M имеет конечное число «почти центров симметрии», поскольку ими могут быть только середины отрезков, соединяющих точки множества M . Выберем теперь такую прямую, при проекции на которую точки множества M и его «почти центры симметрии» не сливаются. Поскольку при проекции на прямую центр симметрии множества точек переходит снова в центр симметрии, достаточно доказать наше утверждение для конечного множества точек, лежащих на одной прямой.

Рассмотрим множество точек на прямой с координатами $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Если мы выбросим первую точку, то центром симметрии оставшегося множества может быть только точка с координатой $(x_2 + x_n)/2$; если выбросим последнюю — то только точка с координатой $(x_1 + x_{n-1})/2$; наконец, если мы выбросим какую-нибудь не крайнюю точку, то центром симметрии оставшегося множества может быть только точка с координатой $(x_1 + x_n)/2$ (см. рис. 2; на рисунке 2, г мы выбросили среднюю точку — центр симметрии оставшегося множества попадает в нее). Значит, конечное множество точек на прямой, а тем самым и любое конечное множество точек на плоскости, не может иметь больше трех «почти центров симметрии».

В. Прасолов

М714. *N* друзей одновременно узнали *N* новостей, причем каждый узнал одну новость. Они стали звонить друг другу и обмениваться новостями. Каждый разговор длился один час. За один разговор можно передать сколько угодно новостей. Какое минимальное количество часов необходимо, чтобы все узнали все новости? Рассмотрите три случая: а) *N*=64, б) *N*=55, в) *N*=100.

| <i>N</i> | <i>T(N)</i> |
|----------|-------------|
| 2 | 1 |
| 3 | 3 |
| 4 | 2 |
| 5 | 4 |
| 6 | 3 |
| 7 | 4 |
| 8 | 3 |
| 9 | 5 |
| 10 | 4 |
| ... | ... |

Обозначим через *T(N)* минимальное число часов, за которое *N* друзей смогут обменяться новостями. Любопытно, что функция *T = T(N)* не монотонна. Это можно обнаружить, найдя значения *T(N)* для небольших *N* — они приведены в таблице на полях; рядом, на рисунке 1, показан способ, который позволяет для *N*=4, 5, 6 и 8 узнать все новости за *T(N)* часов. Разумеется, чтобы решить задачу, мы должны не только указать способ обменяться новостями за *T(N)* часов, но и доказать, что за меньшее число часов этого сделать нельзя — получить для *T(N)* оценку снизу. С нее мы и начнем.

Рассмотрим произвольную новость. После первого часа ее знают не больше двух друзей, после второго часа — не больше четырех друзей, ..., после *k*-го часа — не больше 2^k друзей. Поэтому, если после *T* часов все *N* друзей знают все новости, то $2^T \geq N$ и $T \geq \log_2 N$. Так как *T* — целое число, то $T \geq \lceil \log_2 N \rceil$. (Здесь через $\lceil a \rceil$ обозначается наименьшее целое число, которое не меньше, чем *a*. Такое обозначение сейчас применяется все чаще, особенно специалистами по прикладной и вычислительной математике; при этом для обычной целой части — «округления вниз» — вместо обозначения $\lfloor a \rfloor$ используют обозначение $\lfloor a \rfloor$.)

Если *N* — нечетное число, то придется один из *N* друзей — обозначим его через *A*, — который в первый час не участвует в разговорах. Применяя вышеприведенные рассуждения к той новости *a*, которую вначале знает только *A*, мы получим, что для обмена всеми новостями необходимо не менее $1 + \lceil \log_2 N \rceil$ часов.

Покажем, что найденная оценка снизу

$$T(N) = \begin{cases} \lceil \log_2 N \rceil, & \text{если } N \text{ четно,} \\ \lceil \log_2 N \rceil + 1, & \text{если } N \text{ нечетно} \end{cases}$$

достижима, то есть покажем, что можно так организовать обмен новостями, что после *T(N)* часов все друзья будут знать все новости. Разберем три случая.

1°. Проще всего предьявить способ обмена новостями за *k* часов для $N=2^k$.

Сопоставим каждому другу набор из *k* чисел 0 и 1 («двоичный номер»); различных таких наборов от (0,0,...,0) до (1,1,...,1) как раз 2^k . Пусть в *t*-м часу разговаривают друг с другом пары друзей, номера которых отличаются лишь в одном *t*-м месте. Тогда, если номера двух друзей отличаются в t_1, t_2, \dots, t_s местах ($1 < t_1 < t_2 < \dots < t_s < k$), то в результате разговоров в t_1 -м, t_2 -м, ..., t_s -м часу они будут знать новости друг друга. (Этот способ для $N=4$ и $N=8$ проиллюстрирован рисунком 1.)

Другой способ, пригодный для любого четного *N*, описан ниже в пункте 3°.

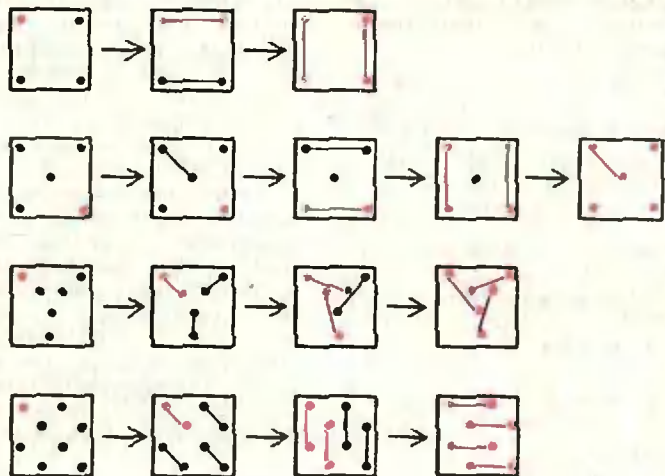


Рис. 1. На этих рисунках (для $N=4, 5, 6$ и 8 друзей) изображен один из оптимальных способов обмена новостями. Распространение одной из новостей показано красным цветом.

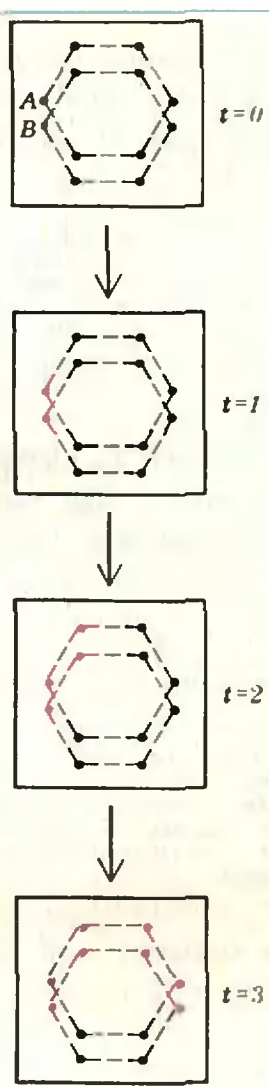


Рис. 2. Способ обмена новостями для четного $N=12$ (верхний шестугольник сначала поворачивается на угол 60° , затем — на угол $2 \cdot 60^\circ$ и $4 \cdot 60^\circ$).

M716* Из точки M внутри данного треугольника ABC опускаются перпендикуляры MA_1, MB_1, MC_1 на прямые BC, CA и AB . Для таких точек M внутри $\triangle ABC$ величина $\frac{|BC|}{|MA_1|} + \frac{|CA|}{|MB_1|} + \frac{|AB|}{|MC_1|}$ принимает наименьшее значение?

*) Решение задачи M715 — в заметке А. Ходулева «Расделение фишек» (с. 28).

2°. Пусть $2^{k-1} < N < 2^k$, N — нечетное число. Тогда $\lceil \log_2 N \rceil = k$, $N = 2^{k-1} + r$, где $0 < r < 2^{k-1}$. Покажем, как за $k+1$ часов все друзья могут узнать все новости. Разделим N друзей на две группы: первую, состоящую из 2^{k-1} друзей, и вторую, состоящую из r друзей. В течение первого часа каждый друг из второй группы разговаривает с некоторым другом из первой группы. В последующие $k-1$ часов 2^{k-1} друзей первой группы обмениваются между собой новостями так, как это описано в пункте 1°; в результате каждый из них узнает все новости. Наконец, в последний час каждый друг из второй группы снова разговаривает с некоторым другом из первой группы, в результате чего все друзья из второй группы тоже узнают все новости.

3°. Пусть $2^{k-1} < N < 2^k$, $N = 2m$ — четное число. Тогда $\lceil \log_2 N \rceil = k$ и $2^{k-2} < m < 2^{k-1}$. Покажем, как за k часов все друзья могут узнать все новости.

Рассмотрим два правильных m -угольника, помещенных прямо друг над другом (см. рисунок 2, где $m=6$). Будем считать, что каждая вершина — это один из друзей (разные вершины — разные друзья). Двух друзей в некоторый момент времени t будем называть *соседними*, если изображающие их в этот момент вершины наших m -угольников находятся прямо одна над другой (например, как при $t=0$ вершины A и B на рисунке 2). Пусть a — какая-нибудь из новостей. (Вершины, изображающие друзей, знающих в момент времени t новость a , будем окрашивать.) Пусть в первый час между собой разговаривают все пары соседних в момент времени $t=0$ друзей (см. рисунок 2 при $t=1$). В дальнейшем перед началом t -го часа ($t=2, 3, \dots, k$) мы будем поворачивать по часовой стрелке

верхний m -угольник на угол $2^{t-1} \cdot \frac{180^\circ}{m}$ и считать, что

t -ый час разговаривают все пары друзей, оказывающихся к этому моменту соседними (на рисунке 2 изображено распространение новости a после первого, второго и третьего часа). Результатом таких разговоров будет то, что после t -го часа 2^{t-1} вершины каждого из наших m -угольников окажутся окрашенными. Поскольку $m < 2^{k-1}$, после k часов будут окрашены все их вершины. Таким образом, после k часов все N друзей будут знать любую новость a .

Наше утверждение полностью доказано.

Итак, ответы на пункты а), б), в) нашей задачи: соответственно, $T(64) = 6$ часов, $T(55) = 7$ часов и $T(100) = 7$ часов.

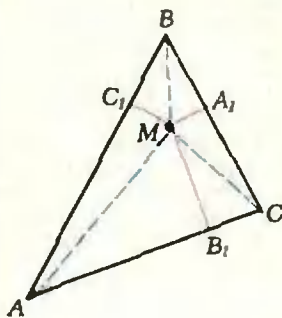
А. Анджан



Пусть $|BC| = a, |CA| = b, |AB| = c, |MA_1| = x, |MB_1| = y, |MC_1| = z$. Заметим, что величина $ax + by + cz$ постоянна: для любой точки M внутри данного треугольника она равна $2S$ — удвоенной его площади (см. рисунок*). Оценим произведение интересующей нас величины $f = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$ на эту постоянную:

$$f \cdot 2S = \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \right) (ax + by + cz) = a^2 + b^2 + c^2 + ab \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + bc \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + ac \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) > a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = P^2,$$

*) Часто бывает полезен тот факт, что соответствие между точками внутри треугольника и тройками положительных чисел $(x; y; z)$ такими, что $ax + by + cz = 2S$, взаимно однозначно.



М717. Даны натуральные числа n и r , $1 < r < n$. Рассмотрим всевозможные подмножества множества $\{1, 2, \dots, n\}$, состоящие из r чисел, и в каждом выберем наименьшее число. Докажите, что среднее арифметическое всех выбранных чисел равно $\frac{n+1}{r+1}$. (Например, при $n=3, r=2$ получаем три подмножества $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ и среднее арифметическое равно $(1+1+2)/3=4/3$.)

| | | | | | | | | |
|---|---|----|----|----|----|----|---|---|
| 1 | | | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | | | | | | |
| 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | |
| 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | |
| 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 |

Рис. 1. Треугольник Паскаля.

где $P=a+b+c$. Мы трижды воспользовались очевидным неравенством $\frac{u}{v} + \frac{v}{u} > 2$, которое превращается в равенство при $u=v$. Таким образом, мы доказали, что неравенство

$$f = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} > \frac{P^2}{2S}$$

верно для любых x, y, z (таких, что $ax+by+cz=2S$) и обращается в равенство при $x=y=z$, так что минимум выражения f достигается в центре окружности, вписанной в наш треугольник: именно в этой точке $x=y=z = \frac{2S}{P}$.

Н. Васильев

Прежде всего заметим, что у множества $\{1, 2, \dots, n\}$ имеется $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ подмножеств, состоящих из r чисел. Мы приведем два свойства чисел C_n^k *, которые понадобятся нам для решения нашей задачи:

- 1°. $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.
- 2°. $C_n^k + C_{n-1}^k + \dots + C_k^k = C_{n+1}^{k+1}$.

Будем называть подмножества множества $\{1, 2, \dots, n\}$, состоящие из r чисел, r -подмножествами. Легко сообразить, что наименьшими элементами r -подмножеств множества $\{1, 2, \dots, n\}$ могут быть только числа $1, 2, \dots, (n-r+1)$. При этом число k является наименьшим сразу для C_{n-k}^{r-1} таких подмножеств (в самом деле, каждое r -подмножество, для которого число k является наименьшим элементом, содержит наряду с k и $r-1$ элемент из множества $\{k+1, k+2, \dots, n\}$, состоящего из $n-k$ элементов). Поэтому сумма всех выбранных чисел равна

$$S = 1 \cdot C_{n-1}^{r-1} + 2 \cdot C_{n-2}^{r-1} + \dots + (n-r+1) C_{r-1}^{r-1}, \quad (*)$$

и нужно показать, что среднее арифметическое $\frac{S}{C_n^r}$ (всего имеется C_n^r r -подмножеств) равно $(n+1)/(r+1)$, или что $S = C_n^r \cdot (n+1)/(r+1) = C_{n+1}^{r+1}$.

Воспользовавшись тем, что $C_{n-1}^{r-1} = C_n^r - C_{n-1}^r$ (см. 1°), преобразуем сумму S следующим образом:

$$\begin{aligned} S &= 1 \cdot C_{n-1}^{r-1} + 2 \cdot C_{n-2}^{r-1} + \dots + (n-r+1) C_{r-1}^{r-1} = \\ &= 1 \cdot (C_n^r - C_{n-1}^r) + 2 \cdot (C_{n-1}^r - C_{n-2}^r) + \dots + (n-r) (C_{r+1}^r - \\ &\quad - C_r^r) + (n-r+1) C_r^r = C_n^r + C_{n-1}^r + \dots + C_r^r. \end{aligned}$$

Учитывая свойство 2°, получаем $S = C_{n+1}^{r+1}$, что и требовалось.

Эту задачу можно решить и по индукции, рассмотрев множество $\{1, 2, \dots, n+1\}$ и заметив, что

$$S(n+1, r) = S(n, r) + S(n, r-1) \quad (**)$$

(см. рис. 2); здесь через $S(m, k)$ обозначена сумма наименьших чисел k -подмножеств множества $\{1, 2, \dots, m\}$. Предположив доказанными равенства

$$S(n, r) = C_{n+1}^{r+1}, \quad S(n, r-1) = C_{n+1}^r$$

для r - и $(r-1)$ -подмножеств множества $\{1, 2, \dots, n\}$ (базис индукции содержится в условии задачи), получим, учитывая (***) и свойство 1°,

$$S(n+1, r) = C_{n+1}^{r+1} + C_{n+1}^r = C_{n+2}^{r+1},$$

что и требуется.

*) Более подробно с числами C_n^k — биномиальными коэффициентами — можно познакомиться, прочитав статью Н. Васильева, А. Зелевинского «Многочлены Чебышева и рекуррентные соотношения» («Квант», 1982, № 1) или брошюру В. А. Успенского «Треугольник Паскаля» (Популярные лекции по математике, выпуск 43, М., «Наука», 1978); несколько первых строк этого треугольника изображены на рисунке 1.

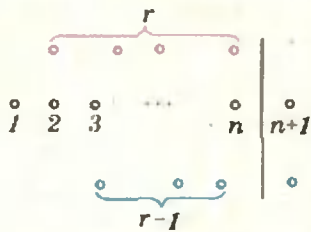


Рис. 2. $S(n+1, r) = S(n, r) + S(n, r-1)$, поскольку число $n+1$ либо не входит в r -подмножество множества $\{1, 2, \dots, n+1\}$ (этому соответствует слагаемое $S(n, r)$), либо входит в него (тогда получается слагаемое $S(n, r-1)$).

М718. Найдите наибольшее значение выражения $n^2 + m^2$ для всевозможных пар $(n; m)$ натуральных чисел таких, что $1 < m < 1981$, $1 < n < 1981$ и $|n^2 - mn - m^2| = 1$.

Интересующие нас точки $(n; m)$ лежат на одной из гипербол $x^2 - xy - y^2 = 1$, $x^2 - xy - y^2 = -1$. Преобразование плоскости, переводящее точку $(x; y)$ в точку $(y; x-y)$, можно представлять себе как композицию трех преобразований: (1) растяжение от прямой l_1 параллельно l_2 в $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ раз; (2) сжатие к прямой l_2 параллельно l_1 тоже в $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ раз; (3) симметрия относительно прямой l_1 ($A \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow B$). Очевидно, это преобразование переводит красную гиперболу в синюю и наоборот.

Интересно, что сумма наибольших чисел в r -подмножествах множества $\{1, 2, \dots, n\}$ равна

$$n \cdot C_{n-1}^{r-1} + (n-1) C_{n-2}^{r-1} + \dots + r \cdot C_{r-1}^{r-1}, \quad (***)$$

так что сумма средних арифметических наибольших и наименьших чисел этих подмножеств равна (см. (*), (***) и 2°) $n+1$. Отсюда получаем, что среднее арифметическое наибольших чисел в выбранных подмножествах равно $r \cdot (n+1)/(r+1)$. Оказывается, вообще для любого j , $j < r < n$, верно следующее утверждение: среднее арифметическое j -х по величине чисел r -подмножеств множества $\{1, 2, \dots, n\}$ равно $j \cdot (n+1)/(r+1)$. Докажите его самостоятельно.

И. Каумова

Заметим прежде всего, что если пара $(n; m)$ натуральных чисел такова, что

$$(n^2 - mn - m^2)^2 = 1, \quad (*)$$

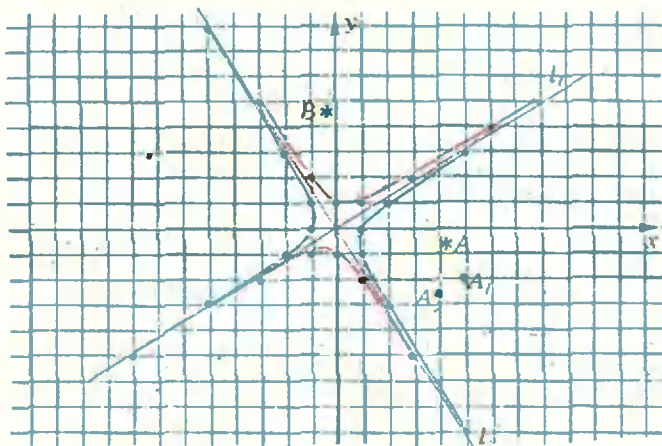
то $n > m$, причем $n = m$ лишь в случае $n = m = 1$. Кроме того, если пара $(n_0; m_0)$ удовлетворяет условию (*), и $n_0 > m_0$, то пара $(m_0; n_0 - m_0)$ также ему удовлетворяет (проверьте это!). Положив $m_0 = n_1$, $n_0 - m_0 = m_1$, получим $n_1 > m_1$; если при этом $n_1 > m_1$, то и пара $(n_2; m_2)$, где $n_2 = m_1$, $m_2 = n_1 - m_1$, также удовлетворяет условию (*). Продолжая этот процесс образования новых пар, удовлетворяющих условию (*) (см. рисунок), мы через конечное число шагов получим пару $(1; 1)$. В самом деле, вторые элементы построенных пар меньше первых их элементов, а последовательность первых элементов построенных пар убывает: $n_i > m_i = n_{i-1}$. Образование же новой пары из пары $(n'; m')$ невозможно лишь в случае $n' = m'$:

тогда $n' - m'$ — не натуральное число. Отсюда вытекает, что последней образованной парой будет пара $(1; 1)$.

Теперь заметим, что если пара $(n'; m')$ получена из пары $(n; m)$ указанным преобразованием, то

$$n = m' + n', \quad m = n'. \quad (**)$$

Это означает, что вся последовательность пар, удовлетворяющих свойству (*), получается единственным образом из пары $(1; 1)$ — с помощью преобразования (**). При этом последовательности и первых, и вторых элементов построенных таким образом пар возрастают. Вспомнив об ограничениях $1 < n < 1981$, $1 < m < 1981$, получим, что наибольшим значение выражения $n^2 + m^2$ будет для такой пары $(n; m)$ натуральных чисел, у которой $n < 1981$,



а $m+n > 1981$. Последовательно выписывая пары, получающиеся из (1; 1) преобразованием (**):

(1; 1), (2; 1), (3; 2), (5; 3), (8; 5), (13; 8), ..., находим интересующую нас пару (1597; 987), так что ответ в нашей задаче — число $1597^2 + 987^2$.

Попутно мы получили следующий замечательный факт: все пары натуральных чисел $(n; m)$, для которых $|n^2 - mn - m^2| = 1$ и $n > m$, имеют вид $(f_{i+1}; f_i)$, где f_i и f_{i+1} — соседние члены последовательности Фибоначчи. Попробуйте сформулировать его на «геометрическом» языке целых точек гипербол, изображенных на нашем рисунке.

А. Абрамов, И. Клумова

M719. а) Для каких $n > 3$ существует множество из n последовательных натуральных чисел, обладающее следующим свойством: наибольшее из этих чисел является делителем наименьшего общего кратного остальных $n-1$ чисел?

б) При каких $n > 3$ существует единственное множество из n последовательных натуральных чисел, обладающее указанным свойством?

Любое натуральное n при некотором k удовлетворяет неравенствам $2^k < n < 2^{k+1}$. Тогда $2^k < n < 3 \cdot 2^k < 5 \cdot 2^k$.

Рассмотрим множество

$$A = \{3 \cdot 2^k, 3 \cdot 2^k - 1, \dots, 3 \cdot 2^k - n + 1\}$$

из n последовательных натуральных чисел. Поскольку $n-1 > 2^k$, среди $n-1$ последовательных натуральных чисел от $3 \cdot 2^k - n + 1$ до $3 \cdot 2^k - 1$ найдется хотя бы одно, делящееся на 2^k . При $n > 4$ хотя бы одно из них делится на 3. Поэтому число $3 \cdot 2^k$ является делителем наименьшего общего кратного остальных $n-1$ чисел множества A для любого $n > 4$.

При $n > 6$ легко строится пример еще одного множества, обладающего указанным свойством:

$$B = \{5 \cdot 2^k, 5 \cdot 2^k - 1, \dots, 5 \cdot 2^k - n + 1\}$$

(проверьте это!). Таким образом, при $n > 6$ существует по крайней мере два множества A и B , обладающих указанным свойством. Остается рассмотреть случаи $n=3, 4$ и 5 .

При $n=5$ также имеется два нужных множества: $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ и $\{8, 9, 10, 11, 12\}$.

Докажем, что при $n=4$ существует единственное множество, обладающее указанным свойством. В самом деле, пусть множество $\{m, m+1, m+2, m+3\}$ обладает нужным свойством. Поскольку $m+3$ является делителем НОК $(m, m+1, m+2)$, число $m(m+1)(m+2)$ делится на $m+3$. Но $m(m+1)(m+2) = (m+3)(m^2+2) - 6$; значит, 6 должно делиться на $m+3$, откуда $m=3$, и мы получаем единственный пример множества из четырех последовательных натуральных чисел, обладающего указанным свойством: $\{3, 4, 5, 6\}$.

Наконец, при $n=3$ таких множеств $\{m, m+1, m+2\}$ нет: НОК $(m, m+1) = m(m+1)$ (m и $m+1$ взаимно просты), но $m(m+1)$ не делится на $m+2$, поскольку $(m-1)(m+2) < m(m+1) < m(m+2)$.

А. Абрамов

M720. Про функцию f , определенную на множестве всех пар неотрицательных целых чисел $(x; y)$, известно следующее:

1°. $f(0, y) = y + 1$,

2°. $f(x+1, 0) = f(x, 1)$,

3°. $f(x+1, y+1) = f(x, f(x+1, y))$

для каждой пары $x > 0, y > 0$.
Найдите значение $f(4, 1981)$.

Легко видеть, что $f(1, 0) = f(0, 1) = 2$. Применяя соотношение 3°, находим

$$f(1, y) = f(0, f(1, y-1)) = f(1, y-1) + 1,$$

откуда следует, что

$$f(1, y) = f(1, 0) + y = y + 2.$$

Аналогично получаем, что

$$f(2, y) = 2y + 3.$$

Посмотрим, чему равно $f(3, y)$. Имеем

$$f(3, 0) = f(2, 1) = 5;$$

$$f(3, y) = f(2, f(3, y-1)) = 2f(3, y-1) + 3,$$

так что

$$f(3, 1) = 13, f(3, 2) = 29, f(3, 3) = 61, f(3, 4) = 125, \dots$$

Можно заметить, что $f(3, y) = 2y + 3 - 3$ (докажите это, например, с помощью индукции).

Теперь мы можем выразить $f(4, y)$:

$$f(4, y) = f(3, f(4, y-1)) = 2f(4, y-1) + 3 - 3,$$

причем $f(4, 0) = f(3, 1) = 2^1 - 3 = 13$.

Чтобы, как и выше, «угадать» формулу для $f(4, y)$, найдем $f(4, 1)$ и $f(4, 2)$. Имеем

$$f(4, 1) = 2f(4, 0) + 3 - 3 = 2^{16} - 3 = 2^{2^{2^2}} - 3;$$

$$f(4, 2) = 2f(4, 1) + 3 - 3 = 2^{2^{2^{2^2}}} - 3.$$

Теперь совсем легко доказать, что

$(y+3)$ «двойки»

$$f(4, y) = 2^{2^{2^{\dots^2}}} - 3,$$

поэтому

1984 «двойки»

$$f(4, 1981) = 2^{2^{2^{\dots^2}}} - 3.$$

А. Абрамов

Ф723. Спортсмены бегут с одинаковыми скоростями в колонной длины l_0 . Навстречу бежит тренер со скоростью u ($u < v$). Спортсмен, поравнявшийся с тренером, бежит назад с той же скоростью v . Какова будет длина колонны, когда все спортсмены развернутся?

Время, в течение которого все спортсмены, начиная с первого и кончая последним в колонне, повстречаются с тренером, равно

$$t = l_0 / (v + u).$$

В тот момент, когда последний спортсмен поравняется с тренером, первый будет находиться от него на расстоянии

$$l = (v - u)t = l_0 \frac{(v - u)}{(v + u)}.$$

Такова и будет длина колонны, когда все спортсмены развернутся.

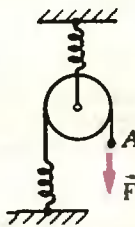
(Объясните теперь, почему при отражении света от зеркала, движущегося навстречу источнику, сокращается длина волны света:

$$\lambda = \lambda_0 \frac{c - u}{c + u},$$

где c — скорость света, u — скорость зеркала.)

И. Воробьев

Ф724. На сколько переместится конец перекинутой через подвижный блок нити (точка А на рисунке), если к нему приложить силу F ? Жесткости пружин одинаковы и равны k . Пружины, нить и блок считать невесомыми.



Пусть нижняя пружина под действием силы F растянулась на величину $x = F/k$. На верхнюю пружину в положении равновесия действует сила, равная $2F$. Под действием этой силы пружина растянута на величину $x_1 = 2F/k = 2x$.

Таким образом, в результате действия силы F блок опустится на расстояние $2x$, нить слева укоротится на x и, следовательно, точка А опустится на расстояние $l = 5x = 5F/k$.

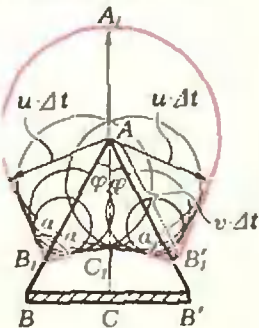
Г. Меледин

Ф725. Из взрывчатого вещества нужно изготовить тонкостенную коническую оболочку так, чтобы при взрыве, начинающемся с вершины конуса и «сползающем» вниз, продукты взрыва ударялись о горизонтальную плиту, на

Пусть взрыв начинается в точке А (см. рисунок) в момент времени t_0 . Построим границу той области, в которой окажутся продукты взрыва к моменту времени $t_0 + \Delta t$.

За время Δt во взрыв будут вовлечены те точки конуса, которые лежат на расстоянии $v \cdot \Delta t$ от точки А. Каждая из этих точек в тот момент, когда до нее дойдет взрыв, становится источником, из которого разлетаются продукты взрыва. Через любой промежуток времени Δt ,

которой стоит конус, одновременно. Скорость детонации (скорость вовлечения во взрыв новых участков взрывчатого вещества) равна u , а скорость разлета продуктов взрыва v . Каким должен быть угол φ между осью конуса и его образующей?



$|AA_1| = u \cdot \Delta t$; $|AB_1| = v \cdot \Delta t$;
 $\sin \alpha = u/v$.

Ф726. В длинной горизонтально расположенной теплоизолированной трубе между двумя поршнями массы m каждый находится 1 моль идеального одноатомного газа при температуре T_0 . Вне поршней — вакуум. В начальный момент скорости поршней направлены в одну сторону и равны v и $3v$. До какой максимальной температуры нагреется газ? Поршни тепло не проводят. Универсальная газовая постоянная равна R .

Ф728.*) Три маленьких шарика с одинаковыми массами — красный, синий и зеленый — закреплены невесомым каркасом в вершинах равностороннего треугольника со стороной l . Система положена на гладкую горизонтальную поверхность и приведена во вращение с периодом T вокруг центра масс. В некоторый момент красный шарик отрывается от каркаса.

*1 Решение задачи Ф727 — в заметке А. Зильбермана «Источник с «отрицательным» внутренним сопротивлением» (с. 54).

после взрыва в данной точке продукты взрыва окажутся внутри области, представляющей собой сферу радиуса $u \cdot \Delta t$, с центром в данной точке. Поверхность, огибающая все такие сферы, и будет границей той области пространства, в которой окажутся продукты взрыва к данному моменту времени.

На рисунке показано сечение этой области плоскостью, проходящей через ось конуса. Угол α , который образует участок B_1C_1 границы с образующей конуса, определяется условием $\sin \alpha = u/v$.

Тот факт, что продукты взрыва одновременно ударяются о плиту, на которой стоит конус, означает, что к тому моменту времени $t_0 + \Delta t$, когда взрыв доходит до точки B , участок B_1C_1 границы совпадает с отрезком BB' . С учетом симметрии, это означает, что «внутренняя» коническая часть границы становится плоской горизонтальной поверхностью. Для выполнения этого условия угол, который составляет образующая конуса с его осью, должен быть равен $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$; следовательно,

$\cos \varphi = u/v$.

И. Воробьев

Поскольку система изолированная, ее полная энергия остается неизменной.

Центр масс системы движется со скоростью $2v$. В системе отсчета, связанной с центром масс, поршни в начальный момент движутся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями v , и полная энергия системы равна сумме кинетических энергий поршней и внутренней энергии газа:

$E = 2 \frac{mv^2}{2} + \frac{3}{2} RT_0$.

Максимальной температура газа будет в тот момент, когда скорости поршней (в системе центра масс) будут равны нулю. Энергия системы в этот момент равна

$E = \frac{3}{2} RT_{max} = 2 \frac{mv^2}{2} + \frac{3}{2} RT_0$.

Отсюда находим T_{max} :

$T_{max} = T_0 + \frac{2}{3} \frac{mv^2}{R}$

В. Бородин

При вращении системы вокруг центра масс (точка O на рисунке) каждый шарик движется по окружности радиуса $r = l/\sqrt{3}$. Линейная скорость каждого шарика равна

$v = 2\pi r/T = 2\pi l/T\sqrt{3}$.

Пусть в момент отрыва красного шарика положение системы было таким, как на рисунке. За время T красный шарик переместится на расстояние

$s_1 = vT = 2\pi l/\sqrt{3}$.

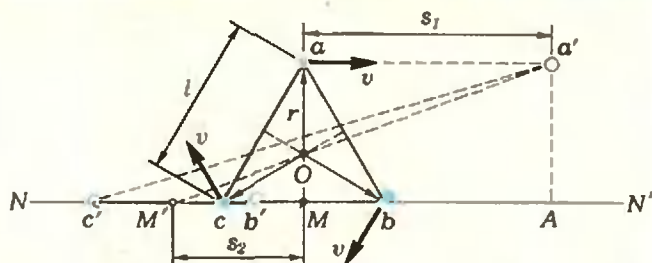
За это время центр масс синего и зеленого шариков (точка M) переместится вдоль направления NN' на расстояние

$s_2 = \pi l/\sqrt{3}$

(поскольку центр масс системы остается неподвижным).

После отрыва красного шарика синий и зеленый шарик будут вращаться вокруг их центра масс; период вращения их будет равен T (покажите!). Следовательно, за время T , совершив полный оборот вокруг точки M , стержень,

На каком расстоянии от синего шарика он окажется спустя время T ?



соединяющий синий и зеленый шарик, будет лежать на прямой NN' .

Таким образом, через время T после отрыва красного шарика шарик будет находиться в точках a' , b' , c' . Расстояние между красным и синим шариками найдем из треугольника $c'a'A$:

$$|c'a'| = \sqrt{|a'A|^2 + |Ac'|^2} = l \sqrt{1 + \pi \sqrt{3}(1 + \pi \sqrt{3})}.$$

В. Григорьев

Ф729. Лента транспортера длины l движется со скоростью v_0 . С какой скоростью нужно толкнуть кубик массы m против движения транспортера для того, чтобы количество тепла, выделившегося за счет работы силы трения между кубиком и лентой транспортера, было максимальным? Чему равно это максимальное количество тепла, если коэффициент трения равен μ и выполняется условие $v_0 < 2\mu g$?

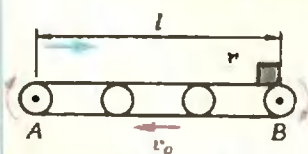


Рис. 1.

Количество выделившегося тепла будет максимальным при условии, что кубик пройдет максимальное расстояние относительно транспортера. Для этого необходимо, чтобы у ролика A скорость кубика относительно земли стала равной нулю. Начальная скорость (относительно земли), которую при этом должен иметь кубик, определяется условиями

$$-v + at = 0, \quad t = vt - \frac{at^2}{2},$$

где $a = \mu g$ — ускорение, сообщаемое кубiku силой трения. Отсюда

$$v = \sqrt{2\mu g l};$$

время движения кубика по ленте транспортера до ролика A —

$$t = \sqrt{2l/\mu g}.$$

До остановки кубик пройдет по ленте путь

$$s_1 = l + v_0 t = l + v_0 \sqrt{2l/\mu g}.$$

Далее кубик начнет двигаться равноускоренно вправо. Время, через которое прекратится проскальзывание, равно $\tau = v_0/a = v_0/\mu g$. За это время относительно земли кубик переместится на расстояние

$$s = a\tau^2/2 = v_0^2/2\mu g.$$

Так как по условию задачи $v_0 < \sqrt{2\mu g l}$, то за время τ кубик не соскользнет с транспортера, то есть $s < l$.

Путь, который за это время кубик пройдет относительно ленты транспортера, равен

$$s_2 = \left| \frac{v_0^2}{2a} - v_0 \tau \right| = \frac{v_0^2}{2\mu g}.$$

Полный путь кубика относительно ленты равен

$$S = s_1 + s_2 = l + v_0 \sqrt{\frac{2l}{\mu g}} + \frac{v_0^2}{2\mu g}.$$

Количество теплоты, выделившееся за счет работы силы трения, равно

$$Q = \mu mg S - \frac{m}{2} (v_0 + \sqrt{2l\mu g})^2.$$

Г. Мякишев

Приведем еще одно решение этой задачи. Его прислал читатель Б. Хвостов.

Рассмотрим движение в системе координат, скорость которой относительно земли равна v_0 и направлена в ту же сторону, что и скорость верхней части ленты транспортера

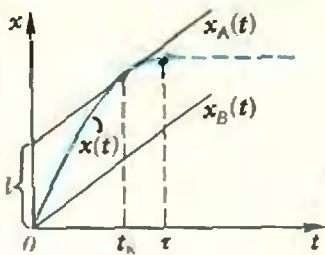


Рис. 2

(то есть от точки A к точке B на рисунке 1). Пусть в момент начала движения кубика ($t_0=0$) точка B совпадает с началом координат.

На рисунке 2 приведены графики движения точек A и B (неподвижных относительно земли) вдоль оси X , направленной влево (от точки B к точке A). График движения кубика будет представлять собой параболу

$$x(t) = (v + v_0)t - \mu g \frac{t^2}{2},$$

где v — начальная скорость кубика, μg — ускорение, сообщаемое кубику силой трения (время t меняется от $t_0=0$ до некоторого момента τ , соответствующего остановке кубика относительно ленты транспортера).

Максимальное количество тепла выделится при условии, что за время τ торможения кубика путь, пройденный им, будет максимально возможным и при этом кубик не слетит с ленты транспортера. Следовательно, график движения кубика — параболы, касающаяся в некоторый момент t_k прямой $x_A(t)$; вершина параболы лежит выше прямой $x_B(t)$, то есть $x(\tau) > x_B(\tau)$.

Условия касания —

$$l + v_0 t_k = (v + v_0) t_k - \mu g \frac{t_k^2}{2},$$

$$v_0 = v + v_0 - \mu g t_k,$$

откуда $v = \sqrt{2\mu g l}$. Путь торможения равен

$$s_\tau = \frac{(v + v_0)^2}{2\mu g} = \frac{(\sqrt{2\mu g l} + v_0)^2}{2\mu g}.$$

время торможения —

$$\tau = \frac{v + v_0}{\mu g} = \frac{\sqrt{2\mu g l} + v_0}{\mu g}.$$

За это время точка B пройдет путь

$$s_B = \frac{v_0(\sqrt{2\mu g l} + v_0)}{\mu g}.$$

По условию задачи $v_0 < \sqrt{2\mu g l}$; следовательно $s_B < s_\tau$, то есть $x(\tau) > x_B(\tau)$.

Максимальное количество тепла найдем из закона сохранения энергии:

$$Q_{\max} = \frac{m(v + v_0)^2}{2} = \frac{m}{2} (\sqrt{2\mu g l} + v_0)^2.$$

Ф730. Два плоских конденсатора расположены так, как показано на рисунке. Расстояние L между конденсаторами много больше размеров их обкладок и расстояния d между обкладками. Заряд одного конденсатора q_1 , заряд другого q_2 . С какой силой притягиваются эти конденсаторы?



Напряженность поля, создаваемого конденсатором с зарядом q_1 в точках, лежащих вблизи оси O_1O_2 на расстоянии x от этого конденсатора, равна

$$E_x = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+d)^2} \right) \approx \frac{q_1 d}{2\pi\epsilon_0 x^3},$$

(x много больше линейных размеров пластин конденсатора).

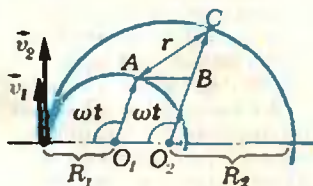
Следовательно, сила, действующая на конденсатор с зарядом q_2 , равна

$$F = q_2(E_L - E_{L+d}) = \frac{q_1 q_2 d}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{L^3} - \frac{1}{(L+d)^3} \right) \approx \frac{3q_1 q_2 d^2}{2\pi\epsilon_0 L^4}.$$

(Рассмотрите самостоятельно случай, когда соседние пластины конденсаторов имеют заряды разных знаков.)

В. Петерсон

Ф731. Две одинаковые частицы с зарядами q и массами m вылетают одновременно из одной точки в направлении, перпендикулярном силовым линиям однородного магнитного поля с индукцией B . Выразить расстояние между частицами как функцию времени, если начальные скорости частиц направлены одинаково и равны v_1 и v_2 .



В магнитном поле частицы движутся по окружностям (см. рисунок), радиусы которых равны, соответственно,

$$R_1 = \frac{mv_1}{qB}, R_2 = \frac{mv_2}{qB}. \quad (1)$$

Угловые скорости частиц одинаковы и равны

$$\omega = \frac{v_1}{R_1} = \frac{v_2}{R_2} = \frac{qB}{m}. \quad (2)$$

Пусть через время t (от начала движения в магнитном поле) одна частица находится в точке A , а другая — в точке C (см. рисунок). Расстояние $r(t)$ между ними в этот момент времени можно определить из треугольника ABC . Этот треугольник — равнобедренный: $|AB| = |BC| = R_2 - R_1$; $\angle ABC = \omega t$. Следовательно,

$$r(t) = 2|AB| \sin \frac{\omega t}{2} = 2(R_2 - R_1) \sin \frac{\omega t}{2}.$$

Подставляя значения R_1, R_2, ω из (1) и (2), находим:

$$r(t) = \frac{2m}{qB} (v_2 - v_1) \sin \left(\frac{qBt}{2m} \right).$$

(Мы считаем пренебрежимо слабым электростатическое взаимодействие частиц. Именно такая ситуация наблюдается в камере Вильсона.)

В. Алешкевич

Ф732. Точечный предмет S , находится на оси полого конуса с зеркальной внутренней поверхностью (рис. 1). С помощью линзы L на экране $Э$ получают изображение предмета, создаваемое лучами, однократно отраженными от зеркальной поверхности конуса (прямые лучи от предмета на линзу не попадают). Что произойдет с изображением, если линзу закрыть диафрагмой такой, как a) на рисунке 2, a' б) на рисунке 2, б)?

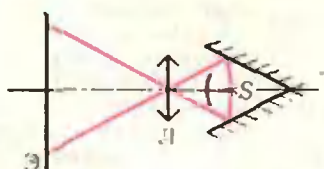


Рис. 1.

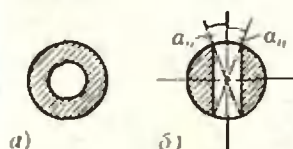


Рис. 2.

Лучи, однократно отраженные от поверхности конуса, распространяются так, как если бы они шли от совокупности точечных мнимых источников, расположенных по окружности; каждый такой источник симметричен источнику S относительно соответствующей образующей конуса. Изображением этих источников на экране будет кольцо (рис. 3). Существенно, что пучок лучей, попадающий от каждого мнимого источника на линзу, плоский: он проходит не через всю поверхность линзы, а пересекает линзу вдоль соответствующего диаметра (например, от источника S' лучи распространяются в вертикальной плоскости). Поэтому степень ослабления такого пучка диафрагмой зависит от формы и ориентации диафрагмы.

Симметричная диафрагма, изображенная на рисунке 2, а, очевидно, в равной мере ослабит пучки, идущие от всех мнимых источников. В этом случае освещенность кольца на экране уменьшится равномерно. Диафрагма, изображенная на рисунке 2, б, пропустит целиком пучки, плоскости которых образуют с вертикальной плоскостью углы $\alpha < \alpha_0$. Следовательно, освещенность соответствующих (то есть верхней и нижней) частей кольца на экране останется прежней. Прочие же пучки будут частично срезаться диафрагмой, причем тем сильнее, чем ближе плоскость пучка к горизонтальной плоскости. Поэтому

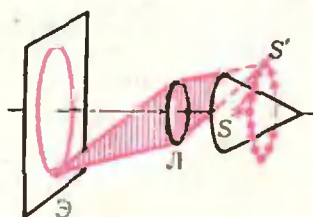


Рис. 3.

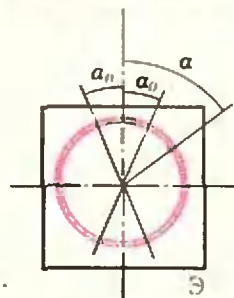


Рис. 4.

на боковых участках кольца по мере изменения угла α от $\alpha = \alpha_0$ до $\alpha = \pi/2$ освещенность будет уменьшаться. Изображение будет таким, как на рисунке 4, где уменьшение освещенности схематически отображено уменьшением густоты штриховки. Очевидно, изображение симметрично относительно вертикальной и горизонтальной осей.

Д. Белов

А. Зильбертин

Источник с «отрицательным» внутренним сопротивлением

Многие интересные вопросы возникают в связи со свойствами источников, у которых зависимость напряжения от тока отличается от обычной зависимости $U = \mathcal{E} - rI$ (\mathcal{E} — ЭДС, r — внутреннее сопротивление источника). Некоторые из этих вопросов мы разберем на примере задачи Ф727.

Ф727. Зависимость напряжения от тока для некоторого источника электрической энергии показана на рисунке 1. Постройте график зависимости напряжения на нагрузке, на которую замкнут источник, от сопротивления нагрузки.

Подключим к источнику резистор с сопротивлением R . Напряжение на нем связано с током простым соотношением — $U_n = RI$. На том же рисунке, где изображена зависимость $U(I)$ напряжения источника от тока через него, нарисуем прямую $U_n = RI$. Точка пересечения графика $U(I)$ и прямой $U_n = RI$ даст нам искомые ток и напряжение. Для обычного источника, у которого на напряжение на зажимах тем меньше, чем больше ток, никаких проблем больше не возникает — точка пересечения одна и результат определяется однозначно.

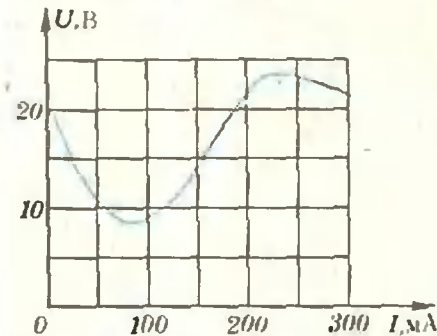


Рис. 1.

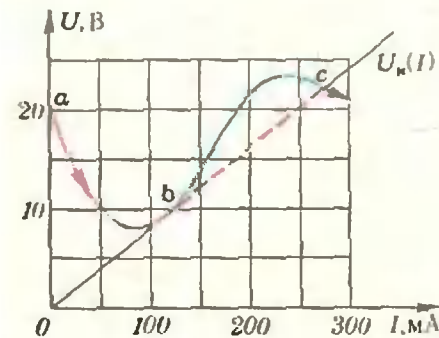


Рис. 2.

А вот для необычного источника, у которого на некотором участке напряжение растет с ростом тока, есть область значений R , при которых точек пересечения целых три. Понятно, что ток не может иметь одновременно три значения; значит, с этой областью нужно разбираться отдельно — удобный графический способ нахождения тока в цепи тут явно не подходит.

Подключим к источнику сначала резистор с очень большим сопротивлением, а затем будем постепенно сопротивление уменьшать. Первоначальный ток в цепи будет очень малым, и при уменьшении сопротивления он будет возрастать. На рисунке 2 такому режиму соответствует участок ab , на котором значения U и $I(U)$ меняются от $U_a = 20$ В, $I_a = 0$ до $U_b \approx 10$ В, $I_b \approx 120$ мА. Каждая точка этого участка соответствует устойчивому состоянию (малые изменения тока в цепи приводят к изменениям напряжения, которые стремятся компенсировать изменения тока; это характерно для всех «нормальных» цепей). При дальнейшем уменьшении R режим меняется скачком — от U_b , I_b до $U_c \approx 22$ В, $I_c \approx 260$ мА, а затем — снова «устойчивый» режим (справа от точки c по кривой $U(I)$).

Если мы начнем с малых сопротивлений резистора, то при увеличении R мы дойдем до точки d (рис. 3), затем — скачок от $U_d \approx 23$ В, $I_d \approx 210$ мА до $U_e \approx 8$ В, $I_e \approx 80$ мА и снова по кривой $U(I)$ до точки a .

А что если взять резистор, сопротивление которого лежит в области $80 \text{ Ом} < R < 100 \text{ Ом}$ (значению $R \approx 80 \text{ Ом}$ соответствуют точки b и c на рисунке 2, значению $R \approx 100 \text{ Ом}$ — точки e и d на рисунке 3), и подключить его к источнику? Каковы будут напряжение и ток в цепи? Чтобы ответить на этот вопрос, надо знать такие параметры цепи, как индуктивность проводов, емкость между выводами резистора. Если, например, индуктивность проводов большая (длинные провода), а емкость между выводами маленькая, то в момент подключения резистора к источнику ток будет малым (влияние индуктивности), а затем будет нарастать — режим в цепи будет устанавливаться в соответствии с рисунком 2. Если велика емкость между подключаемыми к источнику проводами, а индуктивность проводов маленькая, то в первый момент ток будет большим и станет уменьшаться (по мере зарядки емкости) — случай, соответствующий рисунку 3.

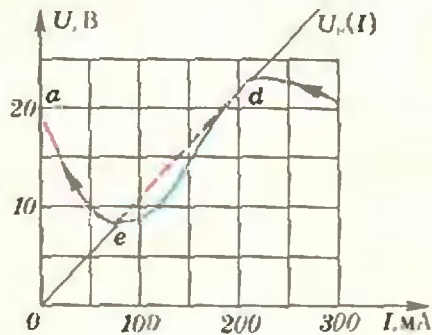


Рис. 3.

(Интересно отметить, что, используя подобные источники, можно получить незатухающие колебания в цепи. Правда, для этого нужен второй источник.)

У обычного источника, напряжение на котором падает с ростом потребляемого тока, можно определить величину внутреннего сопротивления — по отношению изменений напряжения на выходе к изменениям тока:

$$r = -\frac{\Delta U}{\Delta I}. \text{ В нашем случае на некотором}$$

участке — на участке bd зависимости $U(I)$ — внутреннее сопротивление источника получается отрицательным. При этом участок bd настолько крут, что даже полное сопротивление цепи ($r+R$) оказывается отрицательным. Отсюда и неустойчивость «средней» точки, и другие «странности» (в том числе — возможность получения незатухающих колебаний: «отрицательное» сопротивление может компенсировать потери в колебательной системе; естественно, все это происходит без нарушения закона сохранения энергии — за счет энергии источника).

Как же удастся получить всю кривую зависимости $U(I)$, если как при уменьшении, так и при увеличении сопротивления

нагрузки из кривой «выпадает» участок bd ? При помощи маленькой хитрости: возьмем второй источник, его «минус» подключим к «плюсу» нашего источника, а нагрузку R включим между оставшимися выводами. Это позволит нам при той же величине тока подобрать резистор с большим чем R сопротивлением так, чтобы полное сопротивление в цепи было всюду положительным. (На графике такая прямая уже не выходит из начала координат и пересекает кривую $U(I)$ только в одной точке.)

Зависимость, подобная приведенной в условии задачи Ф727, — вовсе не редкость. Она может возникнуть, например, при попытке сделать стабилизатор напряжения, у которого выходное напряжение не меняется при изменении тока нагрузки. Чаще всего этого достигают путем компенсации уменьшения напряжения (компенсационный стабилизатор). Стоит только немного ошибиться — сразу в какой-то области наступит перекомпенсация, и напряжение начнет увеличиваться с ростом потребляемого тока. (Радиолюбители знают, что стабилизаторы часто склонны к самовозбуждению; причины этого явления мы выше обсудили.)

Расселение фишек

(Начало см. на с. 28)

браться с задачей г). Оказывается, эти понятия достаточны, чтобы разобраться с задачей Концевича для любого множества G . Более того, существует алгоритм (вполне пригодный для программирования на ЭВМ), позволяющий за конечное число шагов решить задачу Концевича для G — либо установить ее неразрешимость, либо указать последовательность нормальных ходов, освобождающих G . Этот алгоритм основан на следующих соображениях.

Сведем задачу нормализации с начальной позицией A . Затем проведем горизонтальную и вертикальную прямые, ограничивающие заданную позицию A сверху и справа; получим прямоугольник $m \times n$, содержащий все фишки позиции, — так называемый *прямоугольник задачи* ($A_{ij} \geq 0$, причем $A_{ij} = 0$ при $i > m$ или $j > n$). Отодвинув прямые на две клетки вправо и вверх, получим *расширенный прямоугольник Π* задачи $(m+2) \times (n+2)$. Наш

алгоритм состоит в следующем. *Имея позицию, построить расширенный прямоугольник Π и выполнять необходимые ходы (в любом порядке — скажем, по горизонталям, в 1-й клетке, затем во 2-й и т. д.).*

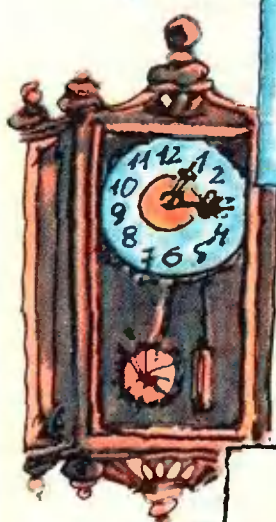
| | | | | | | |
|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|---|
| 6 | | | | | | |
| 5 | $\frac{1}{16}$ | | | | | |
| 4 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | | | | |
| 3 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | | | |
| 2 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | | |
| 1 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

Рис. 8.

Если понадобится поставить фишку за пределы Π , то задача неразрешима. Иначе, выполнив все необходимые ходы, мы получим ее решение (не выходящее за пределы Π !).

Недостаток места не позволяет нам привести доказательство сформулированного факта. Возможно, читатели сумеют доказать его. А учащимся Заочной школы программирования мы рекомендуем написать программу, решающую задачу Концевича в общем случае.

А. Савин ВЕСЁЛАЯ



606



$$1+2+3=1\cdot 2\cdot 3$$



В этом номере мы предлагаем дюжину шуточных и занимательных задач, для решения которых не нужно ни карандаша, ни бумаги. Эти задачи можно использовать на викторинах, КВНах и других веселых соревнованиях.

1. На листе бумаги написано число 606. Какое действие нужно совершить, чтобы увеличить его в 1,5 раза?

2. Какой знак нужно поставить между цифрами 5 и 6, чтобы получилось число большее пяти, но меньшее шести?

3. Часы с боем делают 3 удара за 4 секунды. За сколько секунд они сделают 9 ударов?

4. Сумма тройки чисел 1, 2 и 3 равна их произведению. Существуют ли еще такие тройки целых чисел?

5. У меня в кармане две монеты на общую сумму 5 копеек, причем одна из монет не трехкопеечная. Может ли такое быть?

6. На рисунке изображена мишень. Куда нужно попасть и сколько сделать выстрелов, чтобы выбить ровно 100 очков?

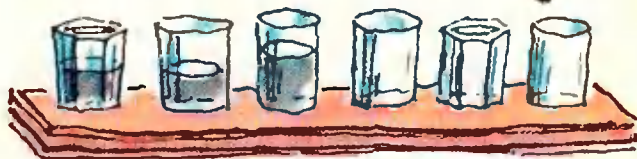
7. Останкинская телебашня высотой 530 метров весит 30 000 тонн. Сколько будет весить точная копия этой башни высотой 53 см?

8. У меня в трех коробках лежали гвозди, винты и гайки. На каждой коробке было написано что в ней лежит. Однажды мой младший брат пересыпал содержимое коробок так, что надпись на каждой коробке перестала соответствовать ее содержанию. Хорошо еще, что он не перепутал их между собой: гвозди остались лежать отдельно от гаек и винтов и т. д. Можно ли, открыв одну из коробок, определить, что лежит в каждой из коробок?

9. Найдите наименьшее натуральное число, которое после умножения на 2 становится квадратом, а после умножения на 3 — кубом целого числа.

ВИКТОРИНА

10. На полочке подряд стоят шесть стаканов, как на рисунке: три с водой и три пустых. Как достичь расстановки, при которой пустые и полные стаканы чередуются, если при каждом ходе разрешается брать в руки лишь один стакан?



11. Найдите два числа, сумма, произведение и частное которых равны между собой.

12. На табуретке — коврик, на коврике — стакан с водой. Как убрать коврик, оставив стакан на табуретке, не трогая стакан?



* * *

Предлагаем также несколько игр, которые тоже можно использовать в соревнованиях, например в конкурсах капитанов в математическом КВН. В каждой из них существует выигрышная стратегия для одного из игроков: начинающего или второго. Попробуйте определить, кто выигрывает при правильной игре, и найдите выигрышную стратегию.

1. Имеется две кучки камней. Двое играющих делают поочередно следующие ходы: забирают одну из кучек, а вторую делят на две части. Если играющий при своем ходе не сможет разделить кучку (так как в ней остался лишь один камень), то он проигрывает.

2. В землю вбивается несколько колышков. Двое по очереди связывают бечевками пары колышков. Выигравшим считается игрок, при ходе которого образовалась замкнутая ломаная, составленная из бечевки. (Не разрешается соединять бечевкой два ранее уже соединенных колышка.)

3. Двое по очереди обрывают лепестки у ромашки, причем за один раз можно оборвать либо один лепесток, либо два соседних лепестка. Выигрывает тот, кто делает последний ход.





Л. Баканина

Законы сохранения при ядерных превращениях

Процессы, происходящие в ядрах при их взаимодействиях, весьма сложны и изучены далеко не полностью. Однако, если из опыта известно, какие продукты получаются в результате ядерной реакции, то их скорости (а значит, и кинетические энергии) можно рассчитать с помощью законов сохранения энергии и импульса.

Закон сохранения импульса выполняется при всех ядерных реакциях: всегда суммарный импульс образовавшихся частиц равен начальному импульсу системы.

При использовании закона сохранения энергии нужно иметь в виду, что одни ядерные реакции идут с выделением, а другие — с поглощением энергии. Это связано с тем, что суммарная масса системы до взаимодействия может быть как больше, так и меньше суммарной массы образовавшихся продуктов. Существует, как говорят, дефект масс Δm , который и определяет энергию ΔE , выделяемую или поглощаемую в процессе реакции. Согласно формуле Эйнштейна,

$$\Delta E = \Delta mc^2,$$

где c — скорость света.

При этом следует помнить, что дефект масс всегда много меньше массы ядер как до, так и после реакции. Поэтому учитывать его нужно лишь в тех случаях, когда требуется определить энергию реакции ΔE . Если же она задана или в данной задаче определять ее

не требуется, можно (и нужно) пользоваться округленными значениями масс ядер.

Рассмотрим несколько конкретных задач.

Задача 1. Радон — это альфа-радиоактивный газ с атомной массой $A = 222$. Какую долю полной энергии, освобождаемой при распаде радона, уносит α -частица (рис. 1)?

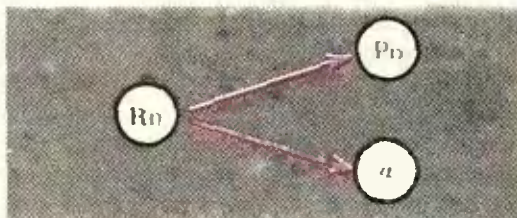


Рис. 1.

Энергия ΔE , освобождаемая при распаде (из-за дефекта масс), выделяется в виде кинетической энергии продуктов реакции: α -частицы ($A_\alpha = 4$) и остаточного ядра ($A_n = 218$). Так как дефект масс существенно меньше массы исходного ядра, выделяемая энергия мала по сравнению с энергией покоя ядер, и для кинетической энергии можно пользоваться нерелятивистской (классической) формулой. Следовательно,

$$\Delta E = \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} + \frac{m_n v_n^2}{2}.$$

Кроме того, должен выполняться закон сохранения импульса:

$$m_\alpha v_\alpha - m_n v_n = 0.$$

Мы считаем, что до распада ядро радона покоилось или, во всяком случае, его кинетическая энергия была много меньше энергии реакции ΔE , поэтому суммарный импульс полагаем равным нулю.

Доля полной энергии, которую уносит α -частица, равна

$$\begin{aligned} \frac{E_\alpha}{\Delta E} &= \frac{E_\alpha}{E_\alpha + E_n} = \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{m_n (m_\alpha / m_n)^2 v_\alpha^2 + m_\alpha v_\alpha^2} = \\ &= \frac{m_n}{m_\alpha + m_n} = \frac{A_n}{A} \approx 0,98. \end{aligned}$$

Итак, α -частица уносит 98% освобождаемой при распаде энергии.

Задача 2. При захвате нейтрона ядром ${}^6\text{Li}$ происходит ядерная реакция ${}^6\text{Li} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^3\text{T} + {}^4\text{He}$ (рис. 2),

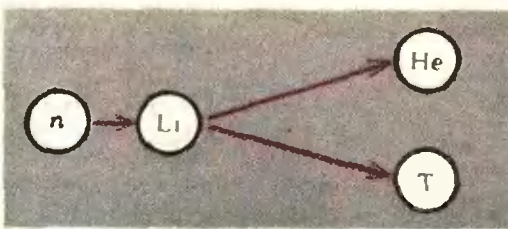


Рис. 2

в которой выделяется энергия $\Delta E = 4,8$ МэВ. Найдите распределение энергии между продуктами реакции (ядром трития и α -частицей), считая кинетическую энергию исходных частиц пренебрежимо малой.

Задача, в сущности, аналогична предыдущей. Запишем законы сохранения энергии и импульса:

$$\frac{m_T v_T^2}{2} + \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} = \Delta E,$$

$$m_T v_T = m_\alpha v_\alpha = 0.$$

Отсюда, утя, что атомные массы трития и α -частицы равны $A_T=3$ и $A_\alpha=4$ соответственно, находим

$$E_T = \frac{m_T v_T^2}{2} = \frac{m_\alpha}{m_T + m_\alpha} \Delta E = \frac{4}{7} \Delta E \approx 2,74 \text{ МэВ},$$

$$E_\alpha = \Delta E - E_T = \frac{3}{7} \Delta E \approx 2,06 \text{ МэВ}.$$

Задача 3. Реакцию синтеза дейтерия и трития ${}^2\text{D} + {}^3\text{T} \rightarrow {}^1\text{n} + {}^4\text{He}$ (рис. 3) изучают, направляя ускоренные до энергии $E_D = 2$ МэВ ионы дейтерия на тритиевую мишень. Де-

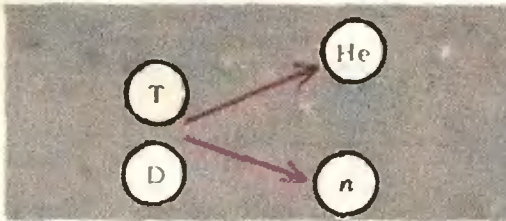


Рис. 3.

тектор регистрирует нейтроны, вылетающие перпендикулярно к направлению пучка дейтронов. Определите энергию регистрируемых нейтронов, если в реакции выделяется энергия $\Delta E = 17,6$ МэВ.

В данном случае начальный импульс системы отличен от нуля, и, кроме того, нейтрон и α -частица летят по разным направлениям.

Значит, импульсы частиц нужно складывать как векторы, и закон сохранения импульса надо записать в векторной форме:

$$\vec{P}_D = \vec{P}_n + \vec{P}_\alpha.$$

Так как $\vec{P}_n \perp \vec{P}_D$ (рис. 4), по теореме

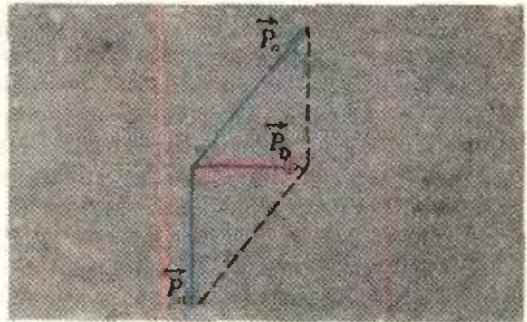


Рис. 4.

Пифагора

$$P_\alpha^2 = P_D^2 + P_n^2.$$

По закону сохранения энергии

$$E_n + E_\alpha = E_D + \Delta E,$$

или

$$\frac{p_n^2}{2m_n} + \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} = E_D + \Delta E.$$

Из этих уравнений находим

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m_n} = \frac{m_\alpha}{m_n + m_\alpha} \left(\Delta E + \frac{m_\alpha - m_D}{m_\alpha} E_D \right) \approx 14,9 \text{ МэВ}.$$

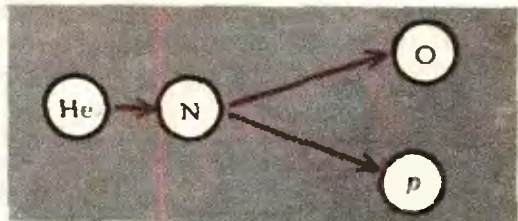


Рис. 5.

Задача 4. Ядерная реакция ${}^{14}\text{N} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^{17}\text{O} + {}^1\text{p}$ (рис. 5) может идти, если налетающие на неподвижные ядра азота α -частицы имеют энергию, превышающую пороговую энергию $E_n = 14,5$ МэВ. На сколько больше пороговой, чтобы кинетическая энергия образующихся при реакции протонов была равна нулю?

В отличие от предыдущих задач, где ядерные превращения сопровождались выделением энергии, в этой задаче реакция идет с поглощением энергии (то есть суммарная масса ядер после реакции больше, чем до реакции). При этом пороговая энергия E_n не может быть равна поглощаемой энергии ΔE , так как импульс системы до реакции не равен нулю, а значит, и после реакции система имеет отличные от нуля импульс и кинетическую энергию. Минимальная кинетическая энергия, которой после реакции должна обладать система, равна кинетической энергии, связанной с движением ее центра масс. Ведь скорость центра масс не может измениться, так как во время реакции действуют лишь внутренние силы, в сумме компенсирующие друг друга. Следовательно, минимальная энергия налетающей частицы, при которой реакция может идти, то есть пороговая энергия E_n , равна сумме энергии ΔE , поглощаемой во время реакции, и кинетической энергии центра масс системы:

$$E_n = \Delta E + \frac{MV^2}{2},$$

где $M = m_K + m_\alpha$, а $V = \frac{m_\alpha v_\alpha}{M}$. Отсюда находим

$$\Delta E = \frac{M - m_\alpha}{M} E_n = \frac{14}{18} E_n.$$

После того как энергия реакции ΔE найдена, задача решается аналогично предыдущим. По законам сохранения энергии и импульса (учтя, что энергия и скорость протона

равны нулю) получаем

$$E_\alpha = \Delta E + \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2},$$

$$m_\alpha v_\alpha = m_0 v_0.$$

Из этих уравнений находим энергию E_α налетающей α -частицы:

$$E_\alpha = \frac{m_0}{m_0 - m_\alpha} \Delta E = \frac{17}{13} \Delta E = \frac{119}{117} E_n.$$

Эта энергия больше пороговой на величину

$$E_\alpha - E_n = \frac{2}{117} E_n = 25 \text{ кэВ}.$$

Упражнения

1. В результате взаимодействия ядер дейтерия и трития образуется ядро гелия и нейтрон: ${}^2\text{D} + {}^3\text{T} \rightarrow {}^4\text{He} + n$. При этом выделяется значительная энергия. Какую часть ее уносит с собой нейтрон? Кинетической энергией дейтерия и трития до реакции, по сравнению с выделившейся энергией, можно пренебречь.

2. При слиянии дейтрона с ядром лития происходит ядерная реакция ${}^6\text{Li} + {}^2\text{D} \rightarrow {}^7\text{Be} + n$, в которой выделяется энергия $\Delta E = 3,37$ МэВ. Считая кинетическую энергию исходных частиц пренебрежимо малой, найти распределение энергии между продуктами реакции.

3. Альфа-частица, имеющая скорость $v_\alpha = 1000$ м/с, налетает на атом углерода, который двигался до соударения в том же направлении, но со скоростью вдвое меньшей. С какой скоростью перемещается центр масс соударяющихся атомов?

4. В ядерной реакции ${}^7\text{Li} + p \rightarrow {}^7\text{Be} + n$ протоны налетают на покоящиеся ядра лития. Если энергия налетающих протонов равна $E_p = 1,92$ МэВ, нейтроны, образующиеся в реакции, покоятся. На сколько можно уменьшить энергию налетающих протонов, чтобы реакция вообще могла идти?

Задачи

наших читателей

Расположим все натуральные числа в таблицу из 9 столбцов

| | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
| | | | | | | | | |

Возьмем любое число из таблицы, возведем его в квадрат, сложим цифры квадрата, сумму снова возведем в квадрат и сложим цифры квадрата и т. д. Докажите, что последовательность результатов этих операций с некоторого момента становится периодической, причем вид этой периодической последовательности

один и тот же для всех чисел одного столбца. Точнее, в 1-м и 8-м столбцах появляется последовательность 1, 1, 1, ..., в 3-м, 6-м и 9-м — 9, 81, 9, 81, ..., в остальных — 13, 169, 16, 256, 13, 169, ... (на четных местах стоят квадраты, на нечетных — суммы их цифр).

О. Рогинский, Н. Рогинский

«Квант» улыбается

«Сатердэй Ивинг Ньюс»,
4 июля 1666 года.

«Прокшествия. Сегодня в Королевский госпиталь доставлен некто Ньютон с явными признаками сотрясения мозга. Большой бредит яблоком и каким-то иолем, покрытым гравитацией. Применяются меры интенсивного лечения».

Заместителю Старшего спикера Британского Королевского общества по административно-хозяйственной работе Анатолию Бердсу.

Глубокоуважаемый сэр! Сим имею известить Вас на предмет недопустимого поведения сотрудника Агрономического отдела БКО Ньютона И., занимающегося гравитацией поля. Для покупки гравия ему было выдано 10 фунтов стерлингов наличными. Однако Ньютон И. преступно разбазарил оную сумму, из коей 1 ф. ст. был уплачен за право входа в Королевскую теплицу, 4 фунта — за чашку кофе, а 5 — за вчерашний номер «Таймс». После этого Ньютон И. улегся на газоне под Королевской яблоней, где, занимаясь чтением газеты, и распил упомянутую чашку кофе. В этот отрезок времени он также исприровал падение себе на голову яблока, хотя оно являлось неприкосновенной частной собственностью, после чего с телесными повреждениями головы был доставлен в Королевский госпиталь.

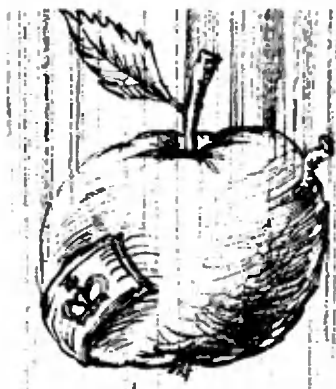
В результате гравитация поля не произведена, а Ее Величества агрономический план не выполнен.

Руководствуясь вышеизложенным, прошу Вас, если Ньютон И., не дай Бог, останется жив, применить к нему меры предосторожности.

Преданный Вам Огастеус Р. Финк, писарь, 5 июля 1666 года.

Журнал «Лайф энд сайенс», 7 июля 1666 года. Из статьи И. Ньютона.

«...Исходя из формул (115-1) и (115-2), а также учитывая систему уравнений



Яблоко со всех сторон



(158—4—77), после десяти страниц тривиальных вычислений приходим к очевидному математическому выводу — все массы тяготеют.

Пока что мой основной результат (211—7) представляется лишь чисто арифметическим курьезом, не имеющим широкого применения в натуральном хозяйстве».

Молодежная аристократическая газета «Лондонс Дэнди», 10 июля 1666 года.

«Наш спец. корр. сэр Джон Арчибалд взял интервью у молодого лондонского ученого И. Ньютона.

Под сенью развесистой яблони как-то само собой думается о судьбах науки, о той неумолимости, с которой время приближает нас к будущему.

— Скажи, Исаак, — говорю я, набравшись духу, — а как это пришло?

— Я много трудился, — скромно отвечает молодой мудрец, огненными глазами пронзая нежную зеленую кожуру пролетающих мимо плодов и видя недостижимые горизонты науки завтрашнего дня.

— А чем ты занят сейчас? — спрашиваю я, замирая от любопытства.

— Пишу новую книгу «Бином меня», — отвечает он мечтательно.

И я ухожу, сопровождаемый теплыми напутственными словами моего нового друга, уверенный, что будущее Британской науки в надежных руках».

Журнал «Сайентист», 10 августа 1666 года. Из статьи Президента Парижской Академии мессира Ж. де ла Гунно.

«...Конечно, гипотеза Ньютона представляется непосвященному избыточно интересной, тем более что сходные идеи высказывались ранее нашим великим соотечественником Декартом. Однако славные времена Аристотеля, Птолемея, Коперника и других гениальных одиночек, к сожалению, давно миновали. Сейчас наука стала сложным, ответственным делом, доступным лишь крупным квалифицированным коллективам.» (Из газеты МФТИ «За науку»)

**Конденсация света в вещество**

1. Выберем систему отсчета, связанную с центром масс пары электрон-позитрон. В этой системе суммарный импульс равен нулю. Согласно закону сохранения импульса, такой же импульс должен был бы быть и у одного родившегося фотона, что невозможно.

2. По закону сохранения энергии энергия двух γ -квантов равна энергии покоя пары электрон-позитрон:

$$2h\nu_\gamma = 2m_e c^2,$$

или

$$E_\gamma = h\nu_\gamma = m_e c^2 \approx 0,51 \text{ МэВ}.$$

Энергия кванта видимого зеленого света

$$E = h\nu = hc/\lambda \approx 2,3 \text{ эВ}.$$

Таким образом,

$$E_\gamma/E \approx 2,2 \cdot 10^5.$$

3. Воспользуемся формулами для преобразования полей ($E_{\parallel} = E'_{\parallel}$, $E_{\perp} = \gamma_0 E'_{\perp}$, где $\gamma_0 = 1/\sqrt{1-v^2/c^2} > 1$) и учтем, что при переходе из системы K' в систему K продольные расстояния сокращаются (в γ_0 раз), а поперечные остаются без изменения. Тогда для поперечного поля в системе K получим

$$E_{\perp}(b) = \frac{E'_{\perp}(b)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b^2 \sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma_0 E_{кул},$$

— поперечное поле E_{\perp} движущейся релятивистской частицы усиливается по сравнению с кулоновским полем $E_{кул} = q/(4\pi\epsilon_0 b^2)$ в γ_0 раз.

Для продольного поля в той же системе можно записать

$$E_{\parallel}(a) = E'_{\parallel} \left(\frac{a}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = \frac{q(1-v^2/c^2)}{4\pi\epsilon_0 a^2} = E_{кул}/\gamma_0^2$$

— продольное поле движущейся частицы ослабляется по сравнению с кулоновским в γ_0^2 раз.

Законы сохранения при ядерных превращениях

$$1. \frac{E_n}{\Delta E} = \frac{m_{He} c^2}{m_{He} + m_n} \approx 0,8.$$

$$2. E_n = \Delta E \frac{m_{Be}}{m_{Be} + m_n} \approx 2,95 \text{ МэВ};$$

$$E_{Be} = \Delta E - E_n \approx 0,42 \text{ МэВ}.$$

$$3. v = v_a \frac{m_a + m_C/2}{m_a + m_C} = 625 \text{ м/с}.$$

$$4. E_p - F_p = E_p \left(\frac{m_p}{m_{Be}} \right)^2 \approx 39 \text{ кэВ}.$$

Что такое волна?

(см. «Квант» № 6)

$$2. \Delta t = T/2; \Delta \varphi = \lambda.$$

3. Для оценки будем считать, что соударение шариков происходит в течение промежутка времени τ , за который волна деформации (звуковая волна) пройдет расстояние, равное диаметру шарика:

$$\tau \sim d/v \sim d\sqrt{Q/E} \sim 10^{-6} \text{ с}.$$

4. При резкой остановке ротора возникает волна деформации, которая распространяется по бетонному полу и достигает катушки с исследуемым образцом. Для того чтобы эта волна не мешала исследованию, она должна дойти до образца к тому моменту, когда опыт уже закончится. (Поскольку возникающее электромагнитное поле распространяется со скоростью света, которая существенно больше скорости распространения волны деформации, можно считать, что магнитное поле создается в образце мгновенно.) Следовательно, минимальное расстояние между генератором и катушкой с образцом равно $l = v\Delta t \approx 50 \text{ м}$ (здесь $v \approx 5000 \text{ м/с}$ — скорость звука в бетоне).

5. Обозначим через k жесткость каждой пружинки, через M — массу атома кислорода и через m — массу атома углерода ($m/M = 12/16$). В случае а) атомы кислорода колеблются синхронно около неподвижного атома углерода. Поэтому их частота

$$\omega_a = \sqrt{k/M}.$$

При колебаниях типа б) на атом углерода действуют две силы, одинаковые по модулю и направленные в одну и ту же сторону. Если шарик — атом углерода — разбить на две равные части, то они будут колебаться одинаково, то есть в любой момент будут иметь одинаковые ускорения, скорости и координаты. Таким образом, задача сводится к определению частоты колебаний соединенных пружиной шариков массой M и $m/2$. Такая система совершает колебания около неподвижного центра масс. Он находится на расстоянии

$$l' = \frac{m}{m+2M} l \text{ от шарика массой } M$$

(l — длина пружинки в недеформированном состоянии), поэтому можно считать, что атом кислорода (шарик массой M) скреплен с центром масс пружиной длиной l' . Жесткость части пружинки больше жесткости целой пружинки:

$$k' = kl/l' = k(m+2M)/m,$$

поэтому частота колебаний шарика массой M на пружинке жесткостью k' равна

$$\omega_b = \sqrt{\frac{k'}{M}} = \sqrt{\frac{k(m+2M)}{mM}}.$$

Тогда окончательно отношение частот равно

$$\frac{\omega_b}{\omega_a} = \sqrt{\frac{m}{m+2M}} = \sqrt{\frac{3}{11}}.$$

Кантование кубика

(см. «Квант» № 6)

1. См. рис. 1.

2. Кубик можно перевести из первого положения во второе двукратным кантованием так, чтобы правая и левая боковые грани

остались в своих плоскостях. Единственной невидимой гранью будет левая. Только она может содержать четверку.

3. Возможный обход показан на рисунке 2.

4. Так как «крутые» повороты типа $MNPQ$ запрещены условием задачи, наш кубик может обойти углы сетки только по ломаным вида ABC (рис. 3). Но четыре таких поворота в сетке 5×5 можно выполнить только при движении по замкнутой ломаной, которая не может содержать центрального квадрата сетки. Задача решения не имеет.

5. Может (рис. 3).

6. Решение задачи для сетки 5×5 представлено на рисунке 4.

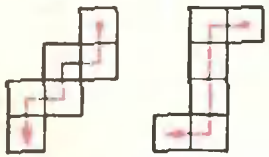


Рис. 1.

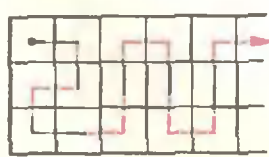


Рис. 2.

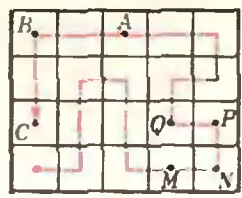


Рис. 3.

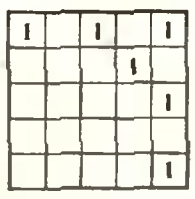


Рис. 4.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 6)

1. $\overline{ab} - \overline{ba} = 9(a-b) = 3^2 \cdot (a-b)$.
Поскольку a и b — цифры и $b \neq 0$, эта разность будет точным квадратом тогда и только тогда, когда $a-b=1$ или $a-b=4$. Мы получаем следующие двузначные числа, обладающие нуж-

ным свойством:

- 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98
и
51, 62, 73, 84, 95

— всего 13 чисел.

Трехзначных же чисел, обладающих аналогичным свойством, нет: $\overline{abc} - \overline{cba} = 3^2 \cdot 11 \cdot (a-c)$; по $a-c \neq 11$, поскольку a и c — цифры. (Другое объяснение заключается в том, что 33^2 уже больше тысячи.)

$$\begin{array}{r} 2. \quad 340170 \quad | \quad 345 \\ - 3105 \quad | \quad 986 \\ \hline 2967 \quad | \\ - 2760 \quad | \\ \hline 2070 \quad | \\ - 2070 \quad | \\ \hline 0 \quad | \end{array} \quad \begin{array}{r} 385024 \quad | \quad 376 \\ - 376 \quad | \quad 1024 \\ \hline 902 \quad | \\ - 752 \quad | \\ \hline 1504 \quad | \\ - 1504 \quad | \\ \hline 0 \quad | \end{array}$$

3. Ответ: Иван Иванович — лысый (см. рис. 5).



Рис. 5.

Обозначим число волос у Таши, Наташи, Цети, Васи и Ивана Ивановича через T, H, Π, B и $ИИ$. Тогда

$$\begin{aligned} (T+H) - (\Pi+B) &= 40, \\ (T+\Pi) - (H+B) &= 20, \\ ИИ + T + 3\Pi &= B + 3H. \end{aligned}$$

Таким образом,
 $ИИ = B + 3H - T - 3\Pi = (H+T) - (\Pi+B) - 2[(T+\Pi) - (H+B)] = 40 - 2 \cdot 20 = 0$.

4. Ответ: девять котят (см. рис. 6).

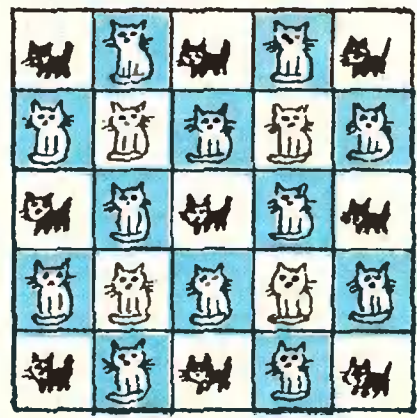


Рис. 6.

Если в центральной клетке квадрата сидит котенок, то в восьми соседних с ней клетках должны сидеть кошки. Легко убедиться, что в оставшихся клетках можно расположить не более восьми котят.

Если же в центральной клетке сидит кошка, а в одной из соседних с ней клеток сидит котенок, то его должны окружать восемь кошек. Нетрудно убедиться, что в этом случае в оставшихся клетках можно разместить не более семи котят.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 4)

Задание 3 (С. Жигнс, 1930 г.). 1. **Kpf3**. Король направляется к слабой пешке h7, попутно посматривая на поле e6. 1...**Krc7**

2. **Kpg4! Kpd7**. Черные срывают планы неприятельского короля забрать пешку h7 (3. **Krh5 Krc6 4. Krh6 Krf5** с простым выигрышем). 3. **Kpf5!** Белые меняют свой план и не пускают черного короля на поле e6. 3...**Krc8** (3...**Krd8 4. Krc6 Krc8 5. d4!** приводит к основному варианту) 4. **Krc6 Krf8 5. d3!** (Выигрыш темпа, проигрывает немедленное 5. **d4**) 5...**Krc8 6. d4 Krf8 7. d5 Krc8 8. g6! hg. Пат.** **Задание 4** (У. Венолайнен, 1968 г.). Кажется, что спасения нет. Однако король и слон белых совершают чудо. 1. **Kpf3 Kpd2** (1...e2 2. **Cc3+ Kpd1 3. Kp:g3 e1Ф 4. C:e1 Kp:e1 5. Kpg4; 1...Kpf1 2. Kp:g3 e2 3. Cc3 e1Ф 4. C:e1 Kp:e1 5. Kpg4** с ничьей в обоих случаях) 2. **Cf8!** Парадоксальный ход. 2...**g4+** 3. **Kpg2! e2 4. C:e7 Krc3 5. Cd8!** (нельзя 5. **Cd6?** из-за 5...e1Л! 6. **Kp:g3** Леб с выигрышем, но не 5...e1Ф? 6. **Cb4+ Kp:b4 пат**) 5...**Krb4 6. Cc7!** (6. **Cb6?** e1Л!) 6...e1Ф (теперь и превращение в ладью приводит к ничьей — 6...e1Л 7. **Kp:g3 Лg1+** 8. **Krh4** и 9. **Cg3**) 7. **Ca5+ Krc5. Пат.**

Главный редактор — академик И. К. Киоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилли, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, А. И. Климанов, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Михайлов, Е. М. Никншин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, И. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, В. Г. Зубов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаяев, В. А. Орлов, Н. А. Патриксева, А. В. Перышкин, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасеико, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:

А. Виленин, А. Егоров, И. Клуцкая, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тимофеева, Ю. Шиханович

Номер оформили:

М. Дубах, М. Златковский, Г. Красиков, П. Кузьмина, С. Лукин, Э. Назаров, И. Смирнова

Заведующая редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова, Е. Морозова

Корректоры Е. Сидоркина, В. Сорокина

117071, Москва, Ленинский проспект, 15,
«Физматлит», «Квант», тел 234-08-21
Сдано в набор 19.05.82. Подписано в печать 21.06.82.
Печать офсетная
Бумага 70x108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 6,73 Т-13514.
Тираж 175 032 экз. Цена 40 коп. Заказ 1198.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВУ «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательства, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

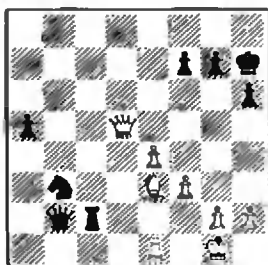


Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастера спорта СССР по шахматам, кандидата технических наук Е. Гнк.

НА ПЕРЕСЕЧЕНИИ ЛИНИЙ

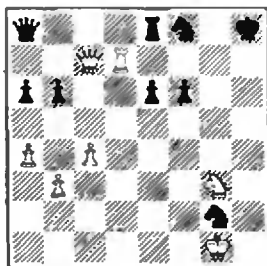
Сегодня мы рассмотрим несколько практических примеров использования геометрических мотивов на шахматной доске.

Двойной удар (вилка) — старинный мотив, знакомый каждому любителю шахмат, — также содержит геометрический элемент.



Ф. Олафссон — А. Карпов (XXIV Шахматная олимпиада, 1980 г.)

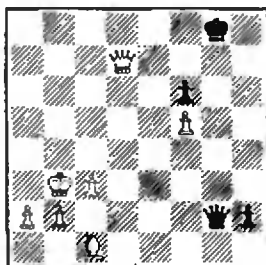
34. Ф:f7. Белые в цейтноте неосторожно берут пешку. Правильно было 34. Cf2, и на 34...Л:f2 следует 35. Фf5+ с вечным шахом. 34...Л:g2+ 35. Kpf1 Лg6 36. Лe2 (36. Cf2 Kd2+) 36...Фb1+ 37. Лe1. Все идет к повторению ходов, но неожиданно в ход вступает геометрия. 37...Фa2! Замакированный двойной удар. По горизонтали грозит 38...Фg2×, а по диагонали на 38. Лe2 решает 38...Kd2+ и 39...Ф:f7. Олафссон счел геометрическую теорему доказанной и сдался.



А. Карпов — И. Чом (Бад—Лаутерберг, 1977 г.)

У черных лишняя конь и пешка, исприятельская ладья под боем — дела, судя по всему, не так плохи. Однако бороться с конями геометрии трудно. 50. Kf5! Черные сдались. Здесь ферзь опять действует сразу по двум линиям, и черные беспомощны. После 50...K:d7 белый ферзь движется по освободившейся диагонали — 51. Фh2+! (этот шах решает и в случае 50...ef) 51...Kpg8 52. Фg3+ Kpf7 53. Фg7×. Если же угроза по диагонали b8—h2 прерывается — 50...Фb8, то ферзь проявляет себя по седьмой горизонтали: 51. Лh7+! K:h7 52. Фg7×.

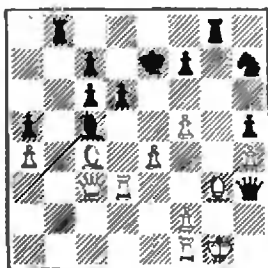
Теперь приведем три ярких примера на темы перекрытия, связки и отвлечения.



В. Симагни — Д. Бронштейн (Москва, 1947 г.)

Сейчас на доске появится второй черный ферзь, и белым, как будто, придется ограничиться вечным шахом.

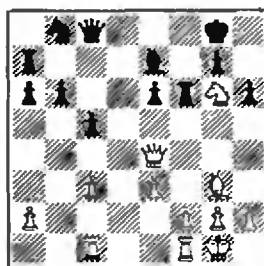
1. Cg5! Вот так перекрытие! Слона нельзя брать ни пешкой — 1...f6 с матом, ни ферзем — 1...Ф:g5 2. Фe8+, 3. Фe7+ и 4. Ф:h2 с решающим материальным перевесом. После 1...h1Ф 2. Фe8+ Kpg7 3. Фg6+ Kpf8 4. Ф:f6+ Kpg8 5. Фd8+ Kpg7 6. Фe7+ Kpg8 7. Фe8+ черные сдались, ввиду неизбежного мата — 7...Kpg7 (7...Kph7 8. Фg6+ Kph8 9. Cf6×) 8. f6+ Kph7 9. Фf7+ Kph8 10. Фg7×.



Гендель — Сушкевич, 1956 г. 1...Л:g3+! 2. Л:g3 Лg8!!

Двойная связка! Белая ладья g3 связана сразу и по вертикали (нет хода 3. Л:h3), и по горизонтали (после 3. Л:g8 теряется ферзь). В. то же время грозит Л:g3+. Белые сдались.

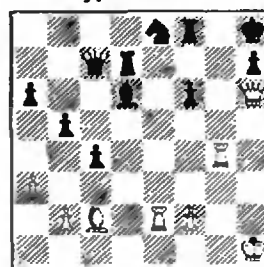
Длинные и неожиданные ходы ферзя всегда производят впечатление. Безусловно немалую роль здесь играет геометрический элемент — эффектное перемещение фигуры в пространстве. И чем длиннее путь, который проходит ферзь, тем сильнее эстетическое воздействие на зрителя.



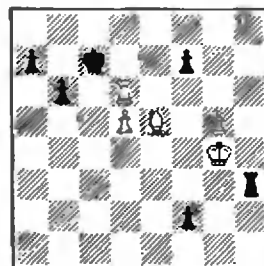
Панчик — Шураде, 1978 г.

1. Фа8!! Прекрасное воплощение темы отвлечения. Партия сразу кончилась, потому что черные остаются без фигуры — как после 1...Л:a8 2. К:e7+ и 3. К:c8, так и после 1...Лb7 2. К:e7+ Л:e7 3. Ф:b8.

Конкурсные задания



13. Белые начинают и выигрывают.



14. Ход черных. В чью пользу позиция?

Срок отправки решений — 25 сентября 1982 года (с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 13, 14»).

На рисунках даны три проекции моделей, сделанных из куска толстой проволоки. Эти модели не имеют накладывающихся (двойных) участков и узлов. По заданным проекциям постройте наглядные изображения фигур (все эти фигуры вписываются в куб). Справа приведен пример решения задачи.

