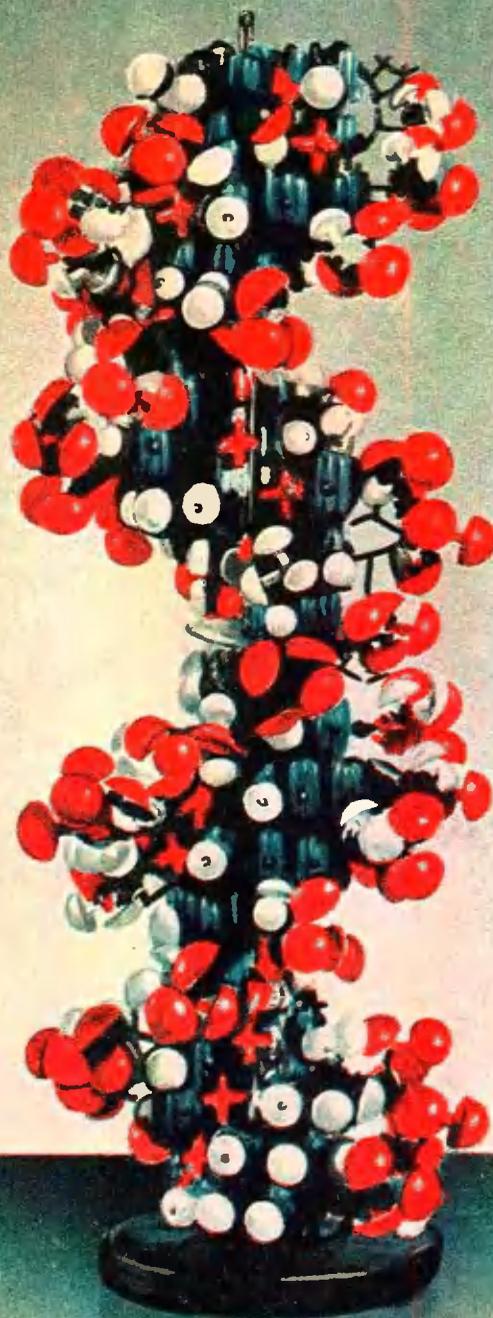
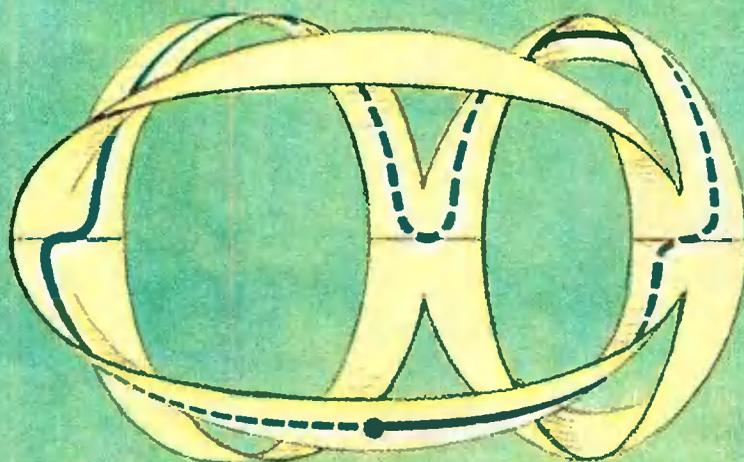
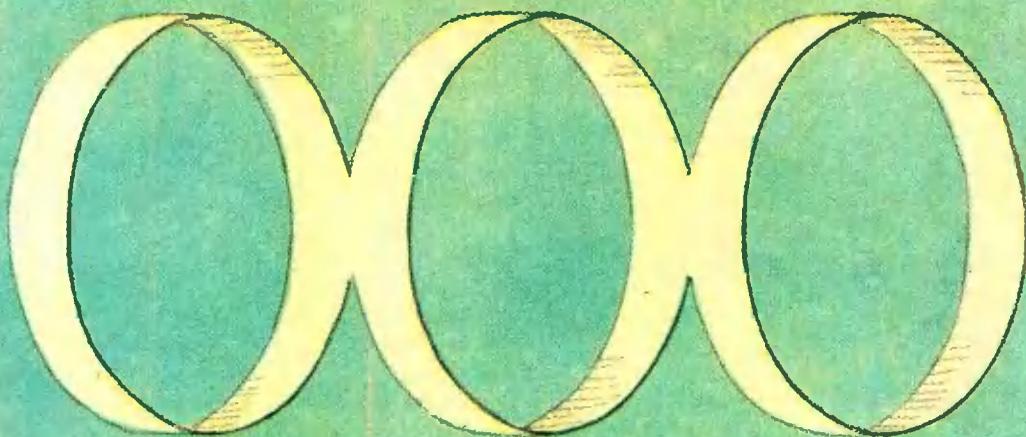


# Квант

**8**  
1982

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ  
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





На среднем рисунке изображена модель односторонней поверхности, отличающейся от общеизвестного (см., например, «Квант», 1978, № 6 и 1979, № 1) листа Мёбиуса. Она получена из трех цилиндрических полосок бумаги, склеенных последовательно друг с другом (см. верхний и средний рисунки). То, что поверхность — односторонняя, видно из среднего рисунка: обход из красной точки по синей линии

возвращает к этой точке с другой стороны листа бумаги, хотя линия не переходит через край. Интересно, что, если поверхность разрезать по трем красным линиям, она разбивается на две зеркально-симметричные части; одна из них показана на нижнем рисунке. Советуем изготовить эти модели и познакомиться с ними (в частности, разрезать их по синим линиям).

*А. Кипенский*



# Квант

**8**  
**1982**

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ  
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО НАУКА · ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ



**В НОМЕРЕ:      IN THIS ISSUE:**

- П. Александров.* Математика и человеческая культура 2 *P. Alexandrov.* Mathematics and human culture
- М. Франк-Каменецкий.* Самая главная молекула 4 *M. Frank-Kamenetski.* The main molecule
- М. Шубин.* Топология и ... рельеф местности 10 *M. Shubin.* Topology and ... the relief of terrains
- К. Кикоин.* Что такое потенциальная яма 16 *K. Kikoin.* What is a potential hole
- В. Дубровский.* Математика волшебного кубика 22 *V. Dubrovski.* Mathematics of the magic cube

**Лаборатория «Кванта»      Kvant's lab**

- В. Майер.* Свет, воздух и вода 28 *V. Mayer.* Light, air and water

**Задачник «Кванта»      Kvant's problems**

- Задачи M756—M760; Ф768—Ф772 30 Problems M756—M760; P768—P772
- Решения задач M721—M730; Ф733—Ф742 34 Solutions M721—M730; P733—P742

**«Квант» для младших школьников      Kvant for younger school children**

Задачи 49 Problems

- Н. Родина.* Архимедова сила и киты 50 *N. Rodina.* Archimedean force and whales

**Практикум абитуриента      College applicant's section**

- М. Маринчук.* Квадратное уравнение в задачах по физике 54 *M. Marinchuk.* Quadratic equations in physical problems
- П. Горнуша.* В чем разница? 59 *P. Gornusha.* What is the difference?
- А. Смоляков.* Почему так? 59 *A. Smoliakov.* Why so?

**Искусство программирования      The art of programming**

- Ю. Первин.* Однажды вечером в семье программиста 60 *Yu. Pervin.* One evening in a programmer's family

**Ответы, указания, решения 63 Answers, hints, solutions**

Наша обложка (21)      Our cover page (21)

Смесь (9, 15, 53)      Miscellaneous (9, 15, 53)

Шахматная страничка      The chess page

Жертва ферзя в партиях чемпиона мира (3-я с. обложки)      Queen sacrifices in the world champion's games (3rd cover page)

На первой странице обложки изображена пространственная модель молекулы ДНК. О том, как было выяснено, что именно ДНК является главной молекулой живой природы, вы можете прочитать в статье М. Франка-Каменецкого

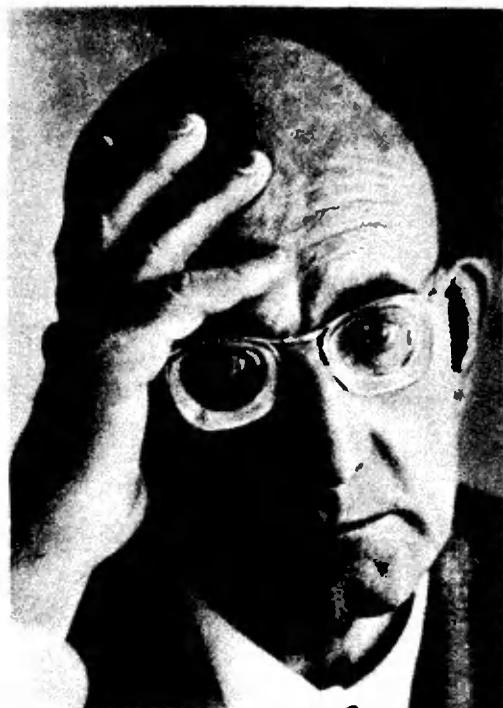
П. Александров

## Математика и человеческая культура

Математика имеет репутацию самой отвлеченной науки. В то же время никто не смеет считать ее бесполезной наукой, наоборот — эта самая нужная наука. И вот получается, казалось бы, противоречивое положение: с одной стороны — самая отвлеченная и оторванная от жизни наука, а с другой стороны — самая нужная наука. Это кажущееся противоречие объясняется тем, что математика имеет два аспекта: теоретический, где она рассуждает о самых общих и далеких от жизни вещах, и прикладной, где она касается самых практически необходимых вещей.

Я всю свою жизнь был представителем теоретической (или, как ее еще называют, чистой) математики и никогда не имел дело с ее приложениями. В то же время я не считаю, что занимался бесполезным делом.

Один из моих учеников, ныне академик, Андрей Николаевич Тихонов начал свою научную деятель-



ность в самой отвлеченной области чистой математики (так называемой абстрактной топологии) и явился одним из создателей теории бикомпактных пространств, обогатив математику одной из самых знаменитых конструкций, известной под названием топологического (или тихоновского) произведения пространств. А в настоящее время Андрей Николаевич занимается вычислительной математикой, то есть тем, что наиболее тесно связано с потребностями практики.

Даже из этого примера вы видите, как трудно и рискованно противопоставлять в математике теорию и практику.

Как же влияет математика на человеческую культуру? Это влияние так же многосторонне, как и сама человеческая культура. Это связано с тем, что человеческая культура представляет собой не только абстрактные знания, не только искусство, не только художественную литературу. В сокровищницу человеческой культуры входит и математика, в частности — прикладная математика. Трудно себе представить культуру нашего времени, в которой не существовало бы разработанной техники математических вычислений. Эта тех-

Академик Павел Сергеевич Александров — Герой Социалистического Труда, лауреат Государственной премии СССР, заведующий кафедрой высшей геометрии и топологии механико-математического факультета МГУ.

ника математических вычислений входит, например, в современную медицину и в языкознание в полном объеме. Как же можно ее не включать в человеческую культуру!

Мне хочется остановиться на следующем вопросе: как математика действует на развитие человеческой личности? Вопрос этот уместен, потому что математика является учебным предметом, которому придается чрезвычайно большое значение на всех ступенях общего образования. И в алгебре, и в геометрии школьники обучаются тому, что я мог бы назвать техникой человеческого мышления. Ну, а можно сказать просто: мышлению. Потому что нигде, может быть, человеческое мышление не выступает с такой силой и с такой яркостью, как в математике. Это во все времена признавалось всеми крупными мыслителями. Недаром Платон на входе в свою Академию, которая должна была объединять все формы человеческой культуры, человеческого творчества, написал: «Пусть не войдет сюда никто, не знающий геометрии». Платон считал, что геометрия — основная ступень на пути к философскому мышлению. Сейчас мы не говорим о геометрии с такой категоричностью. Вероятно, существует много различных путей, вводящих в храм человеческой мысли. Но, что математике несомненно принадлежит одно из важнейших мест в развитии человеческого ума и человеческого творчества, представляется совершенно бесспорным.

Но это лишь одна сторона влияния математики на формирование человеческой личности. Имеется и другая сторона.

Считается, что математические утверждения никогда не были и не

бывают дискуссионными. В этом состоит совершенно особое положение математики в ряду других теоретических наук. Никому не приходит в голову спросить, верна ли такая-то математическая теорема.

Я оговорюсь, что самим-то математикам это приходит в голову, потому что понятие математической истины не так просто и не так однозначно, как мы привыкли это считать, опираясь на школьную математику. Когда мы приходим к высшим главам математики, мы видим, что там тоже все начинает колебаться, и там тоже возникает вопрос о спорности тех или иных истин, кажущихся совершенно бесспорными в других областях человеческого знания. Например, существует закон исключенного третьего: *из утверждений  $A$  и (не  $A$ ) верно одно и только одно: либо утверждение  $A$ , либо его отрицание; ничего третьего не дано*. Так вот в математике и этот, казалось бы основной, устойчивого познания подвергается сомнению. В математике много можно говорить о законе исключенного третьего, и вопрос о применимости этого закона — одна из больших математических проблем.

Так что вы видите: все это гораздо сложнее и, я надеюсь, интереснее, чем кажется с первого взгляда. В математике много бесспорного, много и спорного. Другими словами, математика не является, так сказать, законченной формой человеческого мышления. Это — человеческая мысль, находящаяся еще в стадии исканий, причем исканий, относящихся к самым принципиальным, к самым важным и к самым трудным сторонам мыслительной деятельности.

М. Франк-Каменецкий

## Самая главная молекула

*Потрясающие вещи происходят в биологии. Мне кажется, Джим Уотсон сделал открытие, сравнимое с тем, что сделал Резерфорд в 1911 году*

*Макс Дельбрюк  
(из письма Нильсу Бору от 14 апреля 1953 года)*

Из всего, что нас окружает, наиболее необъяснимой кажется жизнь. Мы привыкли, что она всегда вокруг нас и в нас самих, и потеряли способность удивляться. Но пойдите в лес, взгляните на деревья, траву, цветы, на птиц и муравьев так, будто видите их впервые, и вас охватит чувство беспомощности перед лицом великой тайны жизни. Неужели во всем этом есть нечто общее, нечто такое, что объединяет все живые существа, будь то человек или невидимый глазом микроб? Чем определяется преемственность жизни, ее возрождение вновь и вновь из поколения в поколение? Эти вопросы стары как мир, но только нам, живущим во второй половине XX века, посчастливилось впервые узнать ответы.

Революционные преобразования, произошедшие в физике в первой трети нашего века, оказали глубокое влияние на другие области науки, в первую очередь — на химию и биологию. Одной из главных вех на пути создания новой физики было открытие Резерфордом в 1911 году атомного ядра. Само существование атома Резерфорда находилось в во-

пиющем противоречии с классической теорией. Начался период создания новой физики, известной теперь под названием квантовой механики.

Эта новая теория, разработка которой была начата Планком, Эйнштейном и Бором, нашла свою окончательную и замечательно ясную формулировку в знаменитом уравнении Шредингера. Это уравнение не только позволило физикам решать все «головоломки», которые накопились в области атомных спектров, но, будучи дополнено принципом Паули, поставило на прочный теоретический фундамент всю химию. Наконец-то стал понятен смысл атомного номера в таблице Менделеева, ясен истинный смысл валентности, выяснена природа химической связи.

У физиков появилось ощущение всемогущества. И их взоры обратились к святой святых — к самой жизни. Не поможет ли новая физика разгадать тайну жизни? Или, может быть, наоборот — удастся доказать, что жизнь противоречит квантовой механике, и тогда придется «изобретать» какие-то новые законы. Это было бы особенно интересно.

...В августе 1932 года в Копенгагене проходил Международный конгресс по светотерапии. На одном из заседаний выступил Нильс Бор. Его лекция называлась «Свет и жизнь». В ней Бор поделился своими мыслями о проблеме жизни в связи с последними достижениями квантовой механики. На лекции присутствовал молодой немецкий физик-теоретик, стажер института Бора в Копенгагене Макс Дельбрюк. До сих пор он никогда не интересовался биологией. Он занимался квантовой химией, потом ядерной физикой, но не мог найти себе занятие по вкусу. Лекция Бора все определила: Дельбрюк твердо решил, что отныне он посвятит себя биологии.

Вернувшись в Берлин, Дельбрюк стал искать контактов с биологами. Ему повезло. В это время в Берлине работал известный генетик Николай Владимирович Тимофеев-Ресовский.

Продолжавшиеся всего несколько лет дружба и сотрудничество физика Дельбрюка и генетика Тимофеева-

Ресовского явились тем началом, из которого двадцать лет спустя родилась разгадка тайны наследственности.

Дельбрюк стал собирать у себя дома друзей-физиков и приглашать Тимофеева-Ресовского, который часами обучал их своей науке — генетике. Рассказывая, Тимофеев-Ресовский бегал, по своему обыкновению, из угла в угол, словно тигр в клетке. Он говорил о математически строгих законах Менделя, управляющих наследственностью. О генах и о замечательных работах Моргана, установившего закономерности расположения генов в хромосомах. О плодовой мушке дрозофиле и о мутациях, которые можно вызвать у нее рентгеновским излучением. Этим последним вопросом он как раз занимался вместе с физиком-экспериментатором Циммером.

Дельбрюка крайне заинтересовала их работа. Вообще в генетике было столько созвучного квантовой механике! Ведь квантовая механика принесла в физику дискретность, скачкообразность. Она также заставила серьезно относиться к случайности. И вот оказывается, что биологи тоже обнаружили дискретную неделимую частицу наследственности — ген — которая может случайным образом переходить из одного состояния в другое (этот переход называют мутацией).

Что же такое ген? Как он устроен? Об этом часто спорили на вечерах у Дельбрюка. Тимофеев-Ресовский говорил, что вообще-то этот вопрос мало интересует генетиков. Для них ген — то же, что для физиков — электрон. Ген — элементарная частица наследственности.

— Что вы ответите, если я спрошу, из чего состоит электрон? — сказал однажды Тимофеев-Ресовский. Все рассмеялись.

— Вот так же смеются генетики, когда их спрашивают, из чего состоит ген. Вопрос о том, что такое ген, выходит за рамки генетики, и его бессмысленно адресовать генетикам, — продолжал он. — Вы, физики, должны искать ответ на него.

— И все-таки, — настаивал Дельбрюк, — неужели нет никаких гипотез,

пусть чисто умозрительных?

— Есть, — ответил Тимофеев-Ресовский, немного подумав. — Мой учитель Николай Константинович Кольцов считает, что ген — это полимерная молекула, скорее всего — молекула белка.

— Ну и что это объясняет? — тощий, длинный Дельбрюк прямо-таки кричал на широкоплечего, могучего Тимофеева-Ресовского. — Оттого, что мы назовем ген белком, мы поймем, как гены удваиваются? Ведь главная-то загадка именно в этом! Не ты ли рассказывал нам, как характерная форма губы переходила из поколения в поколение в роду Габсбургов? Какой механизм обеспечивает столь точное копирование генов в течение веков? Разве химия дает нам такие примеры? Во всяком случае, я никогда ничего подобного не слышал. Нет, тут нужна совершенно иная идея. Тут действительно таится загадка. Великая загадка. Возможно, новый закон природы. Сейчас главный вопрос — как к этому предступиться экспериментально.

Великая тайна, скрывавшаяся за коротким словом «ген», не давала покоя Дельбрюку. Как происходит удвоение, или редупликация, генов при делении клеток?

В особенно сильное возбуждение пришел Дельбрюк, когда узнал о существовании бактериофагов. Эти удивительные частицы, которых и живыми-то не назовешь, вне клетки ведут себя просто как большие молекулы — из них даже выращивают кристаллы. Но если такая частица попадает в клетку, то минут через двадцать клеточная оболочка лопается, и из нее вываливается сотня точных копий исходной частицы. «Вот он — ключ к разгадке, — думал Дельбрюк. — Это очень простое явление, гораздо более простое, чем деление целой клетки. Здесь нетрудно будет разобраться. В самом деле, надо посмотреть, как внешние условия будут влиять на воспроизводство вирусных частиц. Надо провести эксперименты при разных температурах, в разных средах, с разными вирусами».

Так физик-теоретик превратился в биолога-экспериментатора. Но мышление — мышление осталось чисто физическим. А главное — цель. Во всем мире не было другого человека, который занимался бы вирусами с единственной целью — узнать, как устроен ген.

... В 1937 году Дельбрюка приглашают работать в США, где он мог бы целиком посвятить себя проблеме редупликации бактериофагов. Он спешит воспользоваться этим предложением, так как жизнь в нацистской Германии становится невыносимой.

В Америке Дельбрюк собрал вокруг себя горстку энтузиастов, развившихся его идеей изучения природы наследственности на бактериофагах. Так возникла «фаговая группа».

Шли годы, и участники фаговой группы все больше и больше узнавали о том, как протекает фаговая инфекция, как процесс воспроизведения фагового потомства зависит от внешних условий и т. д. Было проведено много замечательных исследований, в особенности в области изучения мутаций у бактерий и бактериофагов. Но все это, казалось, даже не приближалось к решению основной проблемы.

Как часто бывает в науке, люди, объединившиеся для решения большой и важной задачи, постепенно занялись скрупулезным изучением частных вопросов, сделались маститами специалистами в своих конкретных областях, но перестали видеть перед собой исходные цели. Так путники видят издали сияющие горные вершины, но затем, приближаясь к ним, попадают в лесистые предгорья, откуда этих вершин не видно. Эти леса изобилуют грибами; ягоды... Если долго бродить по предгорьям, то виденные издали снежные вершины начинают казаться миражем. Может быть, это были лишь облака, похожие на снежные горы? Но даже если это и в самом деле были горы, зачем туда спешить? Ведь здесь, в этих нехоженных лесах, так хорошо. Чтобы люди вновь вспомнили о цели, нужен громкий голос лидера.

И такой голос прозвучал. Это был голос замечательного физика-теоретика, одного из создателей квантовой механики Эрвина Шредингера.

В 1944 году вышла в свет небольшая книга Шредингера под броским заголовком «Что такое жизнь? С точки зрения физика». Тогда она не привлекла почти никакого внимания. Шла война, и большинство тех, кому была адресована книга, с головой ушли в научно-технические проблемы, от решения которых во многом зависел исход борьбы с фашистской Германией.

Но когда война кончилась, появилось много специалистов, особенно среди физиков, которым надо было все начинать сначала, снова искать себе место в мирной науке — вот для них книжка Шредингера оказалась как нельзя кстати.

В своей книге (на русском языке она вышла впервые в 1947 году) Шредингер, прежде всего, дал очень ясное и сжатое изложение основ генетики. Для физиков это была уникальная возможность узнать, причем в блестящем и, главное, доступном изложении их прославленного коллеги, в чем же состоит суть этой загадочно привлекательной науки. Но мало того. Шредингер изложил и блестяще развил идеи Дельбрюка и Тимофеева-Ресовского о связи генетики и квантовой механики. Пока эти идеи выдвигались неизвестными физикам людьми, на них не обращали особого внимания. Но когда об этом заговорил сам Шредингер... По признанию всех, кто в последующие годы штурмовал проблему гена, именно книга Шредингера послужила для них главным толчком. Шредингер был тем, кто как бы крикнул: «Вот они, сияющие вершины, посмотрите, они совсем уже близко. Что же вы мешкаете?»

Из многих, откликнувшихся на призыв Шредингера, двоим посчастливилось первыми увидеть дали, открывавшиеся с самого верха. Это были совсем еще юный воспитанник фаговой группы Джим Уотсон и сотрудник прославленной Кавендишской лаборатории Фрэнсис Крик.

Не будем подробно проследивать их путь к вершине — об этом рассказал сам Уотсон в своей книге «Двойная спираль». Давайте попробуем кратчайшим путем достичь этой вершины, одной из величайших, когда-либо покоренных человеком, и хоть чуть-чуть ощутим те чувства, которые испытали первопроходцы и те, кто шел за ними следом.

Будучи одержим идеей узнать, как устроен ген, и считая, что фаговой группе эта задача не по плечу, Уотсон в 1951 году едет работать в Европу. Вскоре он «осел» в Кавендишской лаборатории, так как встретил там Крика, который был настроен так же по-боевому, как и он сам. Уотсон к тому времени уже был уверен, что ключ к разгадке тайны гена — в выяснении структуры ДНК.

Дело в том, что в том же 1944 году, когда вышла книга Шредингера, в одном из медицинских журналов была опубликована статья трех американских бактериологов во главе с шестидесятилетним Эвери, которая в послевоенные годы привлекла в гораздо большей степени внимание генетиков, химиков и физиков, чем медиков. В этой скрупулезно выполненной работе было абсолютно однозначно доказано, что когда из убитой бактерии некоторые генетические признаки передаются другой, живой бактерии (это явление было к тому времени уже давно известно и называлось трансформацией), то происходит передача только молекул дезоксирибонуклеиновой кислоты (ДНК). Ни белки, ни какие-то другие составляющие убитой клетки в трансформации не участвуют. Собственно, эта работа Эвери теперь считается первым доказательством того, что гены представляют собой именно молекулу ДНК. Так что же, Эвери со своими двумя помощниками, а вовсе не Уотсон и Крик, впервые побывали на вершине?!

Бесспорно, Эвери сделал очень важный шаг в нужном направлении, но до вершины он не добрался. Эйнштейн как-то сказал изумительные по своей глубине слова: «Лишь теория решает, что мы ухитряемся наблюдать». У Эвери не было в запасе ничего такого, что можно было бы

назвать теорией, и он ограничился сухим изложением фактов. Это, однако, не делало проблему менее острой. Генетики оказались перед выбором — либо надо отказаться верить данным Эвери, либо признать, что веществом наследственности является ДНК, а не белок, как принято было считать. Не верить Эвери было трудно — в его работе просто не к чему было придраться. И все-таки генетики ни за что не хотели отказаться от устоявшегося представления о белковой природе гена. Опытам Эвери было дано следующее объяснение: ДНК, конечно, никаких генов не содержит и содержать не может, но она может вызывать генные мутации, то есть изменять гены, которые, как им и положено, состоят из белка. Такое объяснение спасало белковую теорию гена. Правда, действие ДНК оказалось весьма необычным: вызываемые ею мутации повторялись от опыта к опыту. И это, конечно, не могло не заинтересовать генетиков, уже давно искавших способы направленного изменения наследственности. И генетики, и все, кто занимался проблемой химической (или физической) природы наследственности, вынуждены были, наконец, признать, что на ДНК следует обратить серьезное внимание.

Дело в том, что, хотя ДНК была открыта Мишером еще в 1869 году, она оставалась «падчерицей» даже у биохимиков, не говоря уж о генетиках или физиках, занимавшихся биологией. Было общепризнано, что ДНК — это регулярный полимер, состоящий из строго повторяющихся четверок мономерных звеньев (аденинового, гуанинового, тиминового и цитозинового), и эта молекула, скорее всего, выполняет какую-то чисто структурную функцию в хромосомах, но ни в коем случае не связана с хранением и передачей генетической информации. Работа Эвери заставила усомниться в этих взглядах.

Той теорией, которая решила, что же на самом деле ухитрились наблюдать Эвери и его последователи, была модель строения молекулы ДНК, придуманная Уотсоном и Криком в 1953 году.

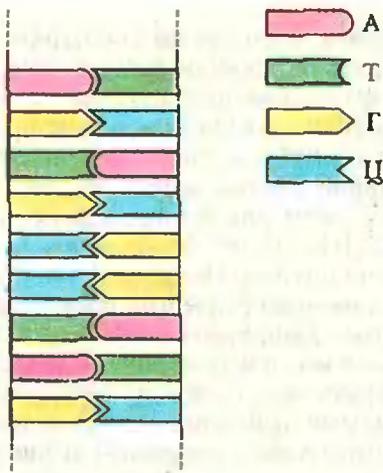


Рис. 1.

Если отбросить детали, то суть модели Уотсона — Крика предельно проста. Молекула ДНК состоит из двух полимерных цепочек. Каждая из цепочек представляет собой некоторую последовательность из звеньев четырех сортов — А (адениновое), Г (гуаниновое), Т (тиминное) и Ц (цитозинное). Последовательность в одной из двух цепей может быть совершенно произвольна. Тогда последовательность в противоположной, или, как говорят, комплементарной цепи однозначно задается с помощью следующего принципа комплементарности (рис. 1):

- против А должно быть Т
- против Т должно быть А
- против Г должно быть Ц
- против Ц должно быть Г

Принцип комплементарности был выведен из известного к тому времени пространственного строения мономерных звеньев ДНК. В этом Уотсон и Крик следовали общему методу построения молекулярных моделей, разработанному Лайнусом Полингом.

Если внутри каждой из взаимно комплементарных полимерных цепочек атомы скреплены очень мощными ковалентными связями, то между цепочками действуют сравнительно слабые связи, подобные тем, которые удерживают молекулы друг возле друга в кристаллах.

Самой замечательной особенностью модели Уотсона — Крика было то, что она с необыкновенным изяществом решала главную проблему — проблему редупликации гена.

Ведь если мы разведем две нити, а потом на каждой нарастим, согласно принципу комплементарности, по новой нити, то мы получим из одной молекулы ДНК две, причем обе будут идентичны исходной (рис. 2).

Можно себе представить, в какое возбуждение пришел Дельбрюк, когда получил от Уотсона письмо, содержащее решение загадки удвоения гена. Он сразу и безоговорочно поверил в модель Уотсона — Крика. Под впечатлением письма Уотсона он и написал те слова, которые мы привели в качестве эпиграфа. Конечно, он тогда испытывал особую благодарность Бору за то, что тот вдохновил его в свое время заняться биологией. Нет, новых законов физики в биологии не обнаружили. Но центральную проблему, проблему физического строения гена, решить удалось.

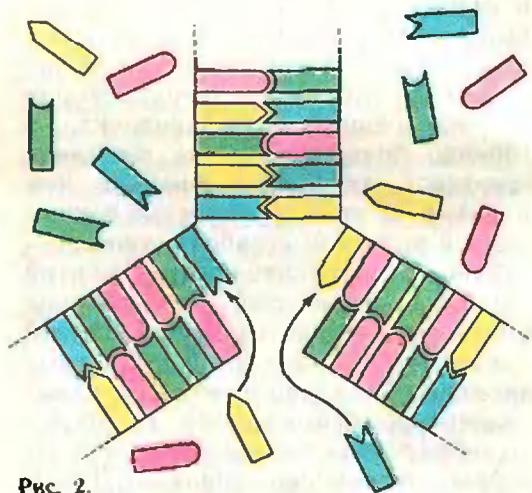


Рис. 2.

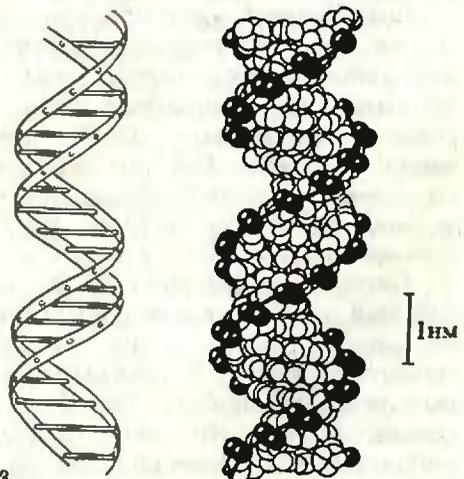


Рис. 3.

Молекула ДНК — не просто «веревочная лестница», как можно подумать, глядя на рисунок 1. Уотсон и Крик, исходя из данных рентгеноструктурного анализа, полученных Морисом Уилкинсом и Розалиндой Франклин, пришли к заключению, что она представляет собой двойную спираль, точнее — винтовую линию (рис. 3). При этом нити ДНК закручены вправо (то есть так же, как нарезка на шурупах и винтах). Полный оборот спираль делает на 10 звеньев. Все эти подробности были важны, потому что позволяли сравнивать модель с физическим экспериментом.

Не только Дельбрюк, очень многие были сразу покорены красотой модели. И хотя некоторые генетики продолжали держаться за белки как за палочку-выручалочку, их единственным аргументом остался такой: не может быть, чтобы такая сложная штука, как жизнь, была в своей основе устроена так просто. Аргумент, прямо скажем, не из сильных.

Так было установлено, что ДНК

является самой главной молекулой живой природы.

Теперь, тридцать лет спустя, можно констатировать, что открытие структуры ДНК, действительно, сыграло в развитии биологии такую же роль, какую для физики сыграло открытие атомного ядра. Подобно тому, как выяснение строения атома привело к рождению новой, квантовой физики, открытие строения ДНК привело к новой, молекулярной биологии.

Эту параллель можно продолжать. Чисто теоретические исследования атома привели к овладению человеком практически неисчерпаемым источником энергии. Аналогично молекулярная биология привела в последние годы к возможности неслыханным образом вмешиваться в самые интимные свойства живой клетки, изменяя направленным образом ее наследственность. Это, безусловно, окажет в будущем не менее радикальное воздействие на жизнь людей, чем овладение энергией атомного ядра.

## Спрашивайте — отвечаем

Уважаемая редакция!

Большое сходство с поверхностью Штейнера («Квант», 1980, № 1) имеет поверхность, задаваемая уравнением

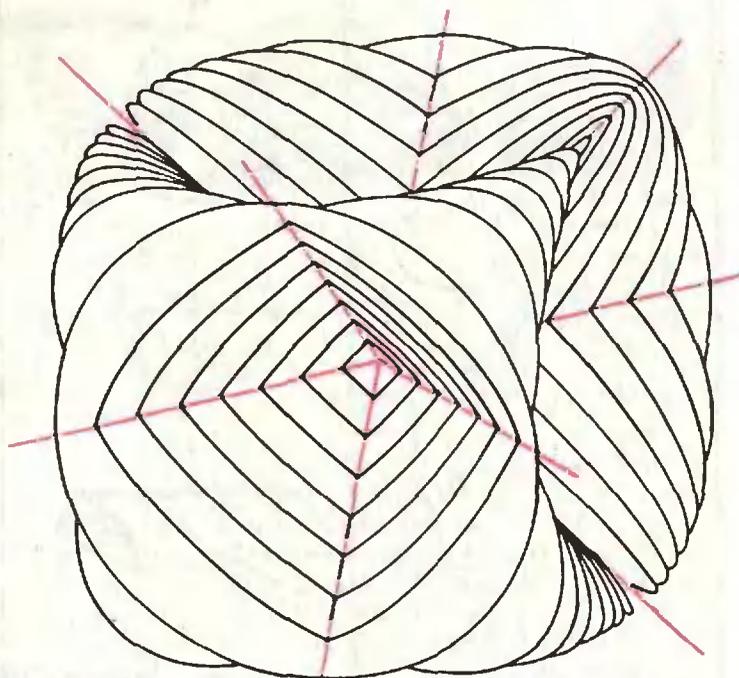
$$R^2(x^4 + y^4 + z^4) - 2R^2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + x^2y^2z^2 = 0.$$

Если поверхность Штейнера вписывается в правильный тетраэдр, то эта поверхность вписывается в куб — касается шести граней куба по шести окружностям. По направлениям координатных осей поверхность имеет шесть углублений в виде конусов, к вершинам (в центре координат) переходящих в четырехгранные пирамиды.

Координаты каждой точки поверхности соответствуют длинам сторон треугольника, вписанного в окружность радиуса  $R$ .

Нельзя ли попросить компьютер нарисовать эту поверхность?

Инженер К. С. Ткаченко.



Редакция обратилась к специалисту в области машинной графики Ю. В. Котову, в свое время составившему программы для изображения поверхности Штейнера и ее видоизменений (см. так-

же «Квант», 1980, № 12). Машинные чертежи, один из которых показан на рисунке (в аксонометрии), подтвердили свойства поверхности, приведенные в письме.

М. Шубин

## Топология и... рельеф местности

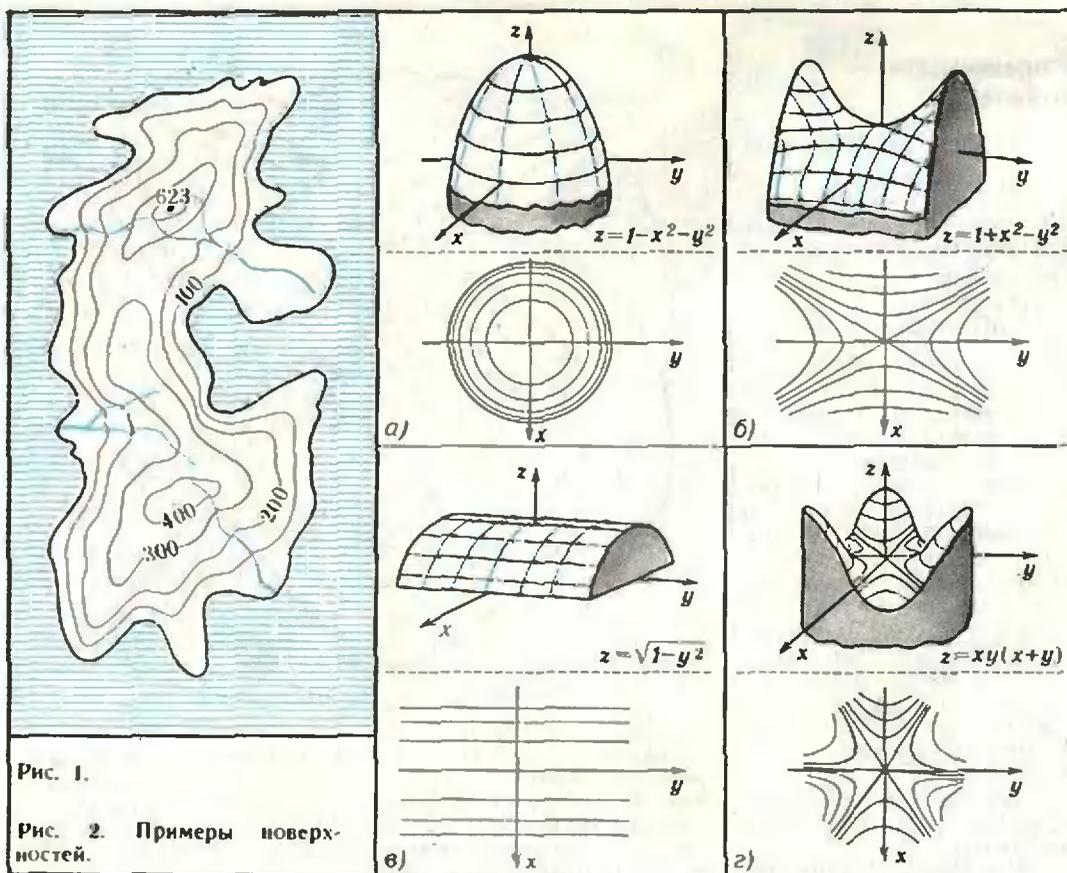
Топология — в отличие от топографии — специально не занимается картами рельефа местности. Эта наука изучает, как принято считать, наиболее глубокие свойства геометрических фигур. Такие свойства (их называют *топологическими*) могут быть одинаковыми и внешне совсем не по-

хожих фигур — М. Гарднер как-то писал, что «топологами принято называть математиков, которые не могут отличить кофейную чашку от бублика». Иногда топологические свойства и величины получаются как комбинации совсем простых геометрических свойств и величин. Именно так обстоит дело в знаменитой теореме Эйлера о многогранниках\*). Сейчас мы познакомимся с еще одним примером такого же рода — одной теоремой из «теории Морса»\*\*). В ней-то рельеф местности и появится.

На географических картах рельеф местности обычно показывают с помощью линий уровня, соединяющих точки, изображающие точки земной поверхности, находящиеся на данной

\*) См., например, главу о топологии в книге Р. Куранга и Г. Роббинса «Что такое математика?» (М., «Просвещение», 1967), а также ниже теорему 2.

\*\*\*) Гарольд Марстон Морс (1892—1977) — замечательный американский математик, создавший теорию, названную впоследствии его именем и представляющую собой один из важных разделов современной топологии.



высоте над уровнем моря (рис. 1). Математической моделью ограниченного участка земной поверхности служит геометрическая поверхность в пространстве, заданная уравнением вида  $z = f(x, y)$ . Несколько примеров поверхностей показано на рисунке 2. На каждой поверхности нарисованы множества точек, лежащие на данной высоте  $z = \text{const}$ , а линии уровня являются проекциями этих множеств на плоскость  $Oxy$ . Таким образом, линия уровня — это множество точек  $(x, y)$ , удовлетворяющих уравнению  $f(x, y) = \text{const}$ , где постоянная в правой части определяет рассматриваемую линию уровня, так что линии уровня как бы нумеруются такими постоянными. На рисунке 2 мы под каждой поверхностью поместили соответствующие семейства линий уровня.

Нас в первую очередь будет интересовать поведение рельефа местности вблизи его характерных точек — вершин, котловин и перевалов, а также вблизи его точек наклона.

**Вершина.** Характерное поведение линий уровня рельефа вблизи вершины показано на рисунке 3. Кажется бы, вершину можно определить просто как самую высокую точку некоторого окружающего ее участка местности. Однако окрестности таких точек могут иметь гораздо более сложное строение, чем на рисунке 3. Например, можно себе представить, что в сколь угодно малой окрестности такой точки имеются какие-то другие точки, обладающие тем же свойством, но расположенные ниже данной (рис. 4). Желая исключить такую ситуацию (и ей подобные), мы назовем точку *вершиной*, если она является самой высокой точкой некоторого окружающего ее участка местности и в ее окрестности линии уровня устроены, как на рисунке 3, то есть все они являются замкнутыми кривыми без самопересечений, охватывающими рассматриваемую точку, причем  $z_0 > z_1 > z_2 > \dots$

**Котловина** (рис. 5) — это «вершина наоборот», то есть точка,

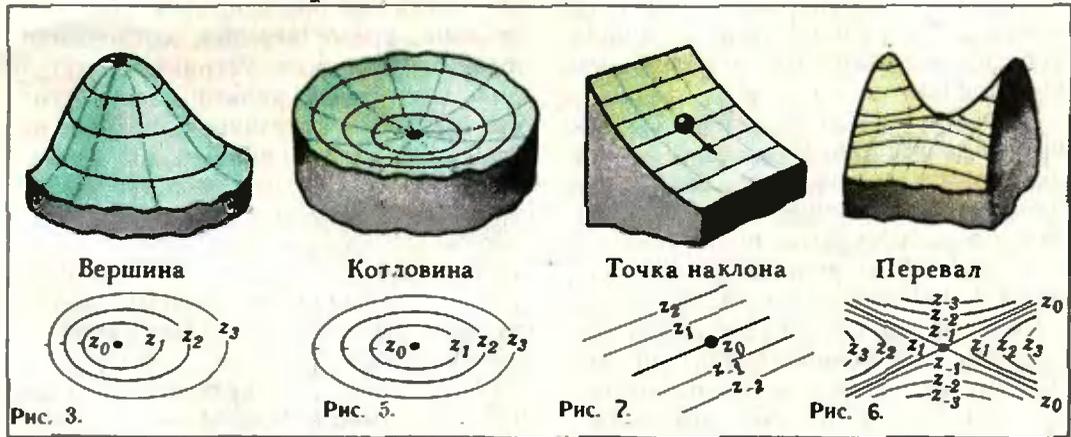


Рис. 3.

Рис. 5.

Рис. 7.

Рис. 6.

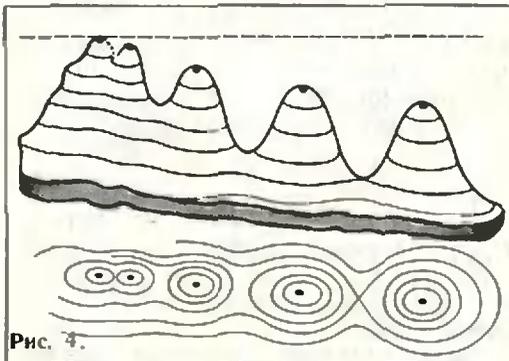
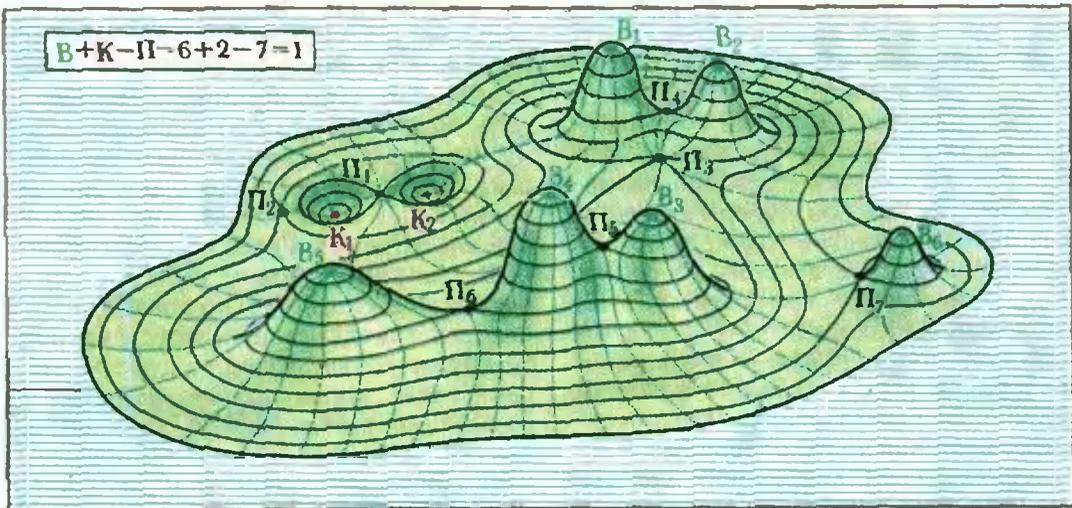


Рис. 4.

которая станет вершиной, если у рассматриваемой функции изменить знак. Таким образом, *котловиной* мы назовем точку, у которой линии уровня устроены так, как показано на рисунке 5, причем  $z_0 < z_1 < z_2 < \dots$

**Перевал.** Перевал можно описать как точку, вблизи которой рельеф устроен как седло (рис. 6). Около перевала линии уровня располагаются так: в точке перевала существуют два таких направления, что, идя по одному из них вперед или



назад, мы будем подниматься, а идя по другому — спускаться. Более того: направления первого типа заполняют два вертикальных угла, а направления второго типа — два других вертикальных угла, так что разделяющие их прямые, задающие эти две пары вертикальных углов, должны касаться линий уровня, проходящих через точку перевала. Итак, мы будем называть *перевалом* точку, в окрестности которой линии уровня устроены в соответствии с только что приведенным описанием.

**Точка наклона** (рис. 7). Говоря образно, точка наклона — это такая точка рельефа, что, если в нее положить шарик, он покатится, тогда как шарик, аккуратно поставленный в точку, являющуюся вершиной, котловиной или перевалом, будет покоиться (хотя в случае вершины или перевала его равновесие будет неустойчивым). Назовем *точкой наклона* такую точку рельефа, что вблизи нее линии уровня устроены, как на рисунке 7, причем  $\dots < z_{-2} < z_{-1} < z_0 < z_1 < z_2 < \dots$

Точнее, семейство линий уровня должно быть таково, что его можно получить из семейства параллельных прямых так называемым *гомеоморфизмом*, то есть взаимно однозначным и непрерывным преобразованием участка карты.

Заметим, что на карте точек наклона, как правило, большинство. Например, все вершины, котловины и перевалы изолированы и окружены точками наклона.

Разумеется, кроме вершин, котловин, перевалов и точек наклона, су-

ществуют и другие типы точек. Например, на географической карте попадаются плато — целые области, высота точек которых постоянна. Постоянная максимальная высота может быть и на целой линии, как, например, на рисунке 2, в. Бывают и более «хитрые» точки, например «обезьяньи седла» (рис. 2, г) и точки скопления вершин (рис. 4). Однако все точки, не являющиеся точками наклона, кроме вершин, котловин и перевалов, можно устранить, чуть-чуть подправив рельеф местности; они при этом исчезают или заменяются на несколько вершин, котловин, перевалов\*). Поэтому, помимо точек наклона, мы будем рассматривать только эти три типа точек.

Теперь мы можем сформулировать нашу основную теорему, являющуюся одной из простейших теорем теории Морса.

**Теорема 1.** Пусть в море дан остров с таким рельефом, что все точки острова суть либо точки наклона, либо вершины, либо котловины, либо перевалы, причем все береговые точки острова являются точками наклона. Пусть  $V$  — число вершин этого рельефа,  $K$  — число котловин,  $\Pi$  — число перевалов. Тогда

$$V + K - \Pi = 1.$$

**Доказательство.** 1) Назовем самую высокую вершину нашего

\*) Этот факт (в более строгой формулировке) является одной из теорем теории Морса; нам он не потребуется.

острова *Эверестом* (если таких вершин несколько на одинаковой высоте, назовем *Эверестом* любую из них), а самую глубокую котловину назовем *Марианской впадиной*. Можно так изменить рельеф острова, не меняя чисел  $B$ ,  $K$ ,  $\Pi$  и не нарушая условий теоремы, чтобы оказались выполненными следующие условия:

а) все вершины имеют одинаковую высоту (равную высоте *Эвереста*);

б) все котловины находятся на уровне моря;

в) все перевалы находятся на разной высоте.

Проще всего удовлетворить условию а) — для этого достаточно «надстроить» все вершины до уровня *Эвереста* (рис. 8).

Заодно выкопаем все котловины до глубины *Марианской впадины* — это нам понадобится для последующего обеспечения условия б). Это условие выполнить не так просто — если пытаться «засыпать» котлови-

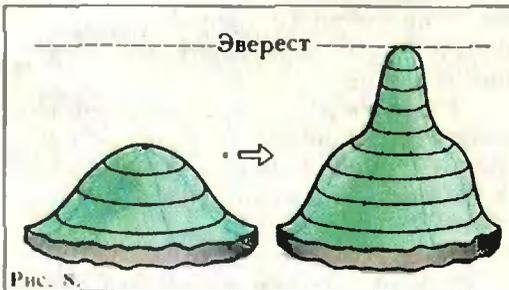


Рис. 8.

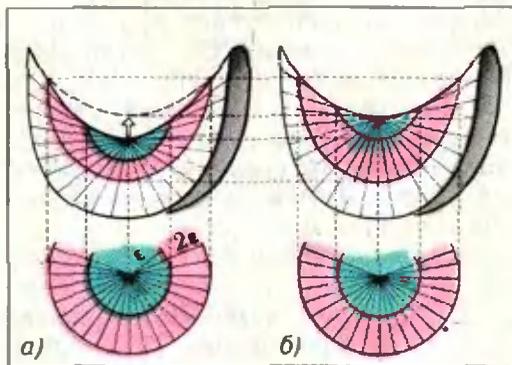


Рис. 9. Поднятие точки перевала: синяя часть поверхности (ее мы считаем жесткой) сдвигается немного вверх, а розовая часть (ее можно себе представить сделанной из тонкой резиновой пленки) слегка вытягивается от неподвижной внешней границы.

ны, можно наткнуться на перевал. Однако есть простой выход: «высушить море». А именно, можно считать, что под водой берега острова круто уходят вниз до глубины, превышающей глубину *Марианской впадины*. Тогда надо просто «высушить» море ровно до этой глубины.

Для обеспечения условия в) надо уметь лишь чуть приподнять или опустить окрестность данного перевала, не задевая других вершин, котловин и перевалов и не создавая новых вершин, котловин и перевалов. Это можно сделать, например, приподняв целиком часть рельефа, находящуюся внутри круга малого радиуса  $\epsilon$  с центром в данной точке перевала (рис. 9, а), не трогая точки, лежащие вне круга радиуса  $2\epsilon$  (с тем же центром), и достраивая рельеф между окрестностями радиусов  $\epsilon$  и  $2\epsilon$  так, как показано на рисунке 9, б.

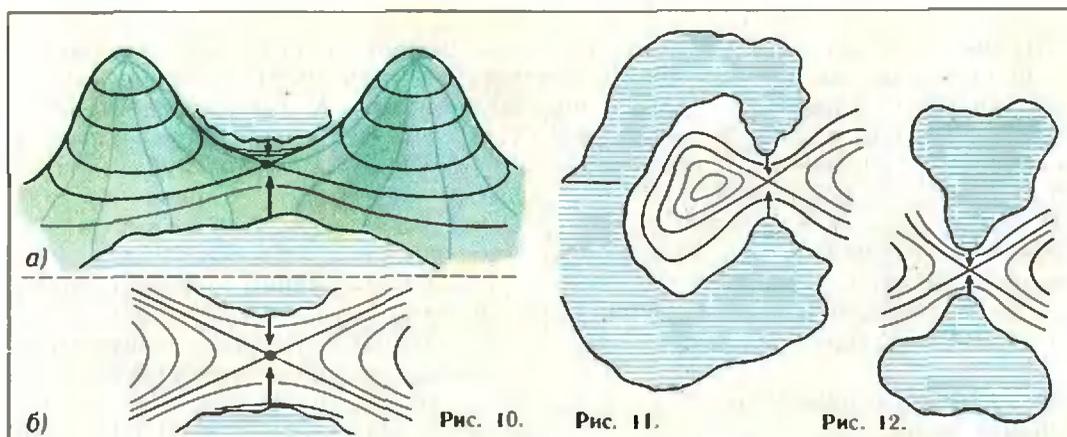
Итак, будем считать, что рельеф нашего острова удовлетворяет условиям а) — в).

2) Теперь устроим «всемирный потоп». Пусть дождь постепенно заливает остров, поднимая равномерно уровень воды всюду (в котловинах и в море) от уровня моря до высоты *Эвереста*. При этом на острове от дождя в котловинах образуются внутренние озера, и он может в дальнейшем делиться на более мелкие острова. Мы будем следить, как по ходу потопа меняется количество озер и островов. Море не будем считать озером.

В начале потопа на донынках котловины образуется  $K$  озер. В конце потопа все озера сливаются с морем, а над водой остаются лишь верхушки всех гор (вот для чего они надстраивались!), так что количество озер и островов задается следующей таблицей:

	Озера	Острова
Начало потопа	$K$	1
Перед полным затоплением	0	$B$

3) Посмотрим, когда меняется число озер и островов в процессе



потопа. Ясно, что если вода залива­ет лишь точки наклона, то изменения этих чисел не происходит. Посмотрим, что будет, когда вода покрывает какой-нибудь перевал (рис. 10). При этом имеются две возможности:

а) сливаются воды одного и того же озера; тогда число озер не меняется, но зато образуется новый остров (рис. 11);

б) сливаются два разных озера (рис. 12); тогда число озер уменьшается на 1, а число островов не меняется.

Итак, при каждом покрытии водой перевала или уменьшится на 1 число озер или увеличится на 1 число островов. Но всего количество озер уменьшается на  $K$ , а количество островов увеличивается на  $B-1$ , так что  $K+(B-1)=P$ , то есть  $B+K-P=1$ , что и требовалось доказать.

**Следствие.** Пусть все точки Земного шара суть либо точки наклона, либо вершины, либо котловины, либо перевалы. Тогда  $B+K-P=2$ .

**Доказательство.** Будем считать, что на дно самой глубокой из котловин иалита вода (этого можно добиться, высушив все моря и океаны и оставив воду лишь на доннышке Марианской впадины). Тогда все остальное можно считать островом, а воду на доннышке этой котловины — морем. Но у всей Земли вершины и перевалов столько же, сколько у этого острова, а котловин на 1 больше. Остается воспользоваться теоремой 1, и следствие доказано.

Примером рельефа, к которому применимо это следствие, может служить всякий многогранник, внутри

которого можно найти такую точку  $O$ , что все перпендикуляры, опущенные из нее на грани, попадают на сами грани (а не на их продолжения). Тогда, если назвать *высотой рельефа* в данной точке многогранника расстояние от нее до точки  $O$ , то основания перпендикуляров, опущенных из  $O$  на грани (и только они), будут котловинами, вершины рельефа будут лежать в вершинах многогранника, а перевалы будут в основаниях перпендикуляров, опущенных из точки  $O$  на ребра (проверьте!). Отсюда следует, что для таких многогранников верна

**Теорема 2** (теорема Эйлера о многогранниках). Пусть  $\Gamma$ ,  $B$  и  $P$  — числа граней, вершин и ребер выпуклого многогранника. Тогда

$$\Gamma + B - P = 2.$$

Как мы увидим ниже, эта теорема на самом деле верна для любого выпуклого многогранника — без сформулированного перед ней дополнительного условия. Она легко выводится из следующей теоремы.

**Теорема 3** (теорема Эйлера о картах). Пусть дана политическая карта острова, ограниченного замкнутой кривой, причем выполнены следующие условия:

а) число стран больше или равно 2;

б) каждая страна ограничена замкнутой кривой без самопересечений;

в) нет стран, лежащих одна внутри другой (типа Монако, Ватикана или Сан-Марино).

Пусть  $C$  — число стран,  $B$  — число вершин (точек стыка границ или

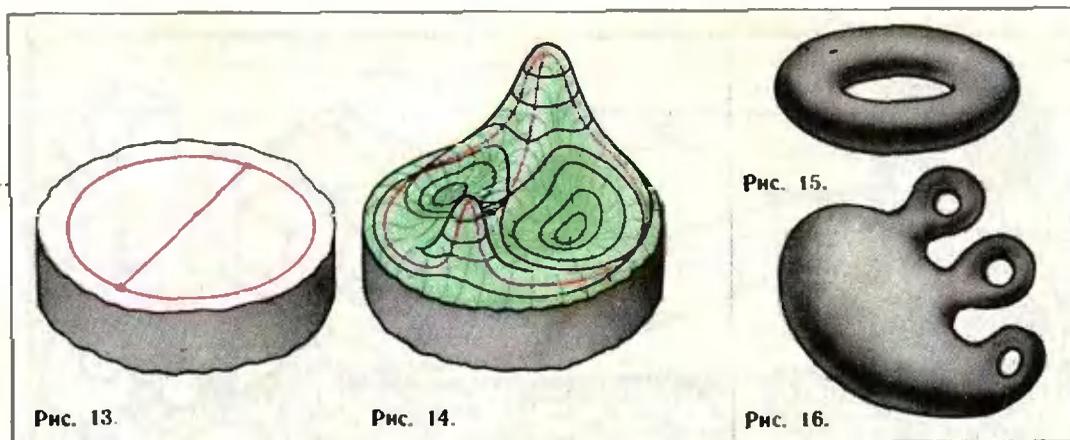


Рис. 13.

Рис. 14.

Рис. 15.

Рис. 16.

границ с линией берега),  $\Gamma$  — число границ (от одной вершины до другой), причем границы с морем тоже считаются. Тогда  $C + B - \Gamma = 1$ .

Пример. На карте, изображенной на рисунке 13,  $C = 2$ ,  $B = 2$ ,  $\Gamma = 3$ .

Доказательство теоремы 3. Достаточно построить на нашем острове такой рельеф, чтобы вершины его находились в точках стыка границ, котловины — ровно по одной в каждой стране, а перевалы — по одному на каждой границе (границы с морем можно чуть сдвинуть внутрь острова). Это можно сделать так: поставить в точках стыка границ сторожевые башни, имеющие форму Эйфелевой башни; на границах построить крепостные стены, снижающиеся к середине каждой границы и полого сходящие вниз в сторону каждой из двух стран, которые разделяет эта граница; наконец, вырыть по котловине в каждой стране, причем склоны котловин должны полого выходить к крепостным стенам. Пример такого рельефа для карты рисунка 13 изображен на рисунке 14. Теперь остается воспользоваться теоремой 1, и теорема 3 доказана.

Следствие. Если на сфере нарисована политическая карта с числом стран не менее 3, удовлетворяющая условиям б) и в) теоремы 3, то для нее

$$C + B - \Gamma = 2.$$

Доказательство. Можно считать одну из стран морем, а все остальное — островом. Тогда применима теорема 3, немедленно приводящая к требуемому результату.

Доказательство теоремы 2 (для любого выпуклого многогранника). Возьмем точку  $O$  внутри рассматриваемого многогранника и проведем какую-нибудь сферу большого радиуса с центром в точке  $O$ . Теперь спроектируем наш многогранник из точки  $O$  на сферу. Тогда мы получим на сфере политическую карту (границы многогранника проектируются в страны, а ребра — в границы), к которой применимо предыдущее следствие.

#### Задачи

1. Сформулировать и доказать аналогичные следствия из теорем 1 и 3 для тора, то есть поверхности баранки или автомобильной шины (рис. 15).

2. То же — для «сферы с  $r$  ручками» (на рис. 16 изображена сфера с тремя ручками).

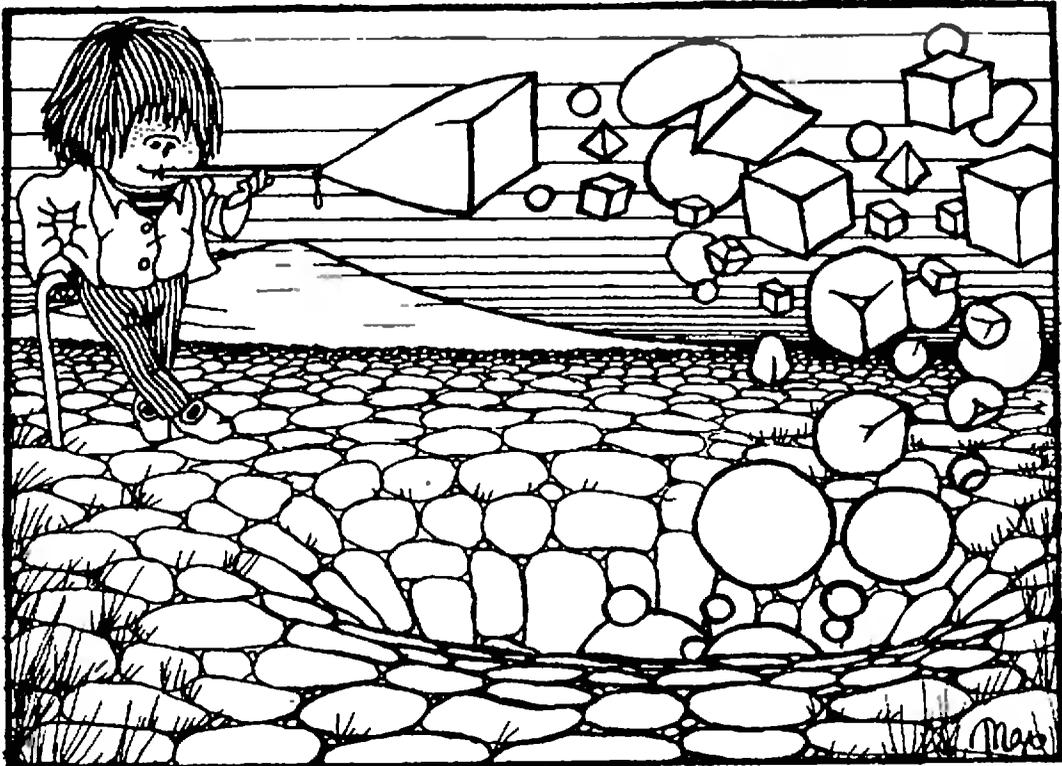
#### Новые книги

Украинское издательство «Вища школа» выпускает в I квартале 1983 года книгу «Математика сегодня» (научно-популярный сборник на русском языке, под редакци-

ей проф. А. Я. Дороговцева). Сборник предназначен для студентов и преподавателей вузов, но, несомненно, будет интересен и полезен школьникам старших классов и учителям средней школы. Он включает статьи, посвященные актуальным направлениям математики, раздел нерешенных проблем, статьи

о студенческих олимпиадах по математике, новые задачи.

Сборник выходит ограниченным тиражом, поэтому рекомендуем своевременно оформить заказ на него. Заказы нужно направлять в магазин «Книга — почтой» по адресу: 252117, Киев, ул. Попудренко, 26.



К. Кикоин

## Что такое потенциальная яма

*Потенциальная яма — это яма, которая еще не вырыта.*

(из научного фольклора)

В физике часто встречается фраза: «Частица (или система) находится в потенциальной яме». Что же такое потенциальная яма и почему любой физический объект в конце концов в ней оказывается? Попробуем в этом разобраться. Удобнее всего это сделать на конкретных примерах. Начнем с самого простого.

### Ящик и шарик

Возьмем ящик с неровным днищем, в котором есть выпуклости и вмятины (лунки), и бросим в него металлический шарик. Покатавшись по днищу, шарик в конце концов остановится на дне одной из лунок. Зададимся вопросом: почему шарик остановился в лунке, причем именно на ее

дне, а не на склоне? Очевидный ответ состоит в следующем. На шарик, находящийся на стенке лунки (или выпуклости), действуют две силы: сила тяжести  $\vec{F}_T$  и сила реакции стенки  $\vec{F}_p$  (рис. 1). Равнодействующая сила  $\vec{F}$  направлена вниз по склону, поэтому шарик, в соответствии со вторым законом Ньютона, приобретает ускорение и скатывается на дно лунки. На дне действие двух сил ( $\vec{F}_T$  и  $\vec{F}'_p$ ) уравнивается, и равнодействующая обращается в нуль, так что здесь шарик будет находиться в положении равновесия.

Рассмотрим ту же самую ситуацию с энергетической точки зрения. У шарика, покоящегося на дне лунки, скорость равна нулю, равна нулю и его кинетическая энергия. Следовательно, вся энергия, которой он обладает, — потенциальная. Попробуем сдвинуть шарик из положения равновесия. Ясно, что на любое перемещение шарика вверх по склону должна быть затрачена работа против силы тяжести. За счет этой работы, произведенной над телом, возрастает его потенциальная энергия. Но если эта энергия ( $E_n$ ) возрастает при любом

перемещении ( $r$ ) относительно положения равновесия, то, значит, в самой равновесной точке ( $r=0$ ) она минимальна (рис. 2).

Теперь проследим за превращением энергии шарика, брошенного на дно ящика. В первый момент он обладал определенной кинетической и потенциальной энергией. При движении вверх и вниз по впадинам и выпуклостям дна происходило взаимное превращение кинетической и потенциальной энергии, но при этом часть энергии терялась на работу против трения. В конце концов общий запас механической энергии стал настолько малым, что шарик не хватило, чтобы выбраться из очередной лунки, и он остановился на ее дне. В этом положении вся оставшаяся у шарика энергия — потенциальная и равная минимальному значению, возможному в этой лунке. Для примера на рисунке 3 показаны два возможных положения равновесия шарика в двух соседних лунках разной глубины. Каждому из равновесных положений отвечает свой минимум энергии, причем  $E_{\text{п min 1}} < E_{\text{п min 2}}$  (для перемещения шарика из положения 1 в положение 2 нужно затратить положительную работу).

Итак, мы пришли к еще одному определению равновесия (точнее — устойчивого равновесия):

*устойчивому равновесному положению тела всегда отвечает минимальное значение его потенциальной энергии.*

Или, как говорят в таком случае, — *в положении устойчивого равновесия тело находится в потенциальной яме.*

Разобранный нами пример прост и нагляден: потенциальная яма для шарика оказывается ямой и в буквальном, житейском смысле. Теперь перейдем к объекту, для которого никакой реальной ямы представить себе нельзя, а потенциальная яма, тем не менее, существует и определяет его равновесное состояние.

### Мыльный пузырь

Любому ребенку известно, что обыкновенный мыльный пузырь всегда имеет сферическую форму. Почему это так?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, нужно вспомнить о поверхностном натяжении. Мыльный пузырь, с физической точки зрения, — это жидкая пленка, ограничивающая полость, заполненную газом. Если посмотреть на эту пленку в более крупном масштабе, то можно увидеть, что она состоит из двух поверхностных слоев (внешнего и внутреннего) и жидкости, заключенной между ними. Молекулы на поверхности находятся в особых условиях по сравнению с объемными молекулами. Каждая из молекул внутри жидкости пребывает в окружении себе подобных, и результирующая всех сил притяжения равна нулю. На поверхностную молекулу с одной стороны действуют молекулы не жидкости, а газа, имеющего значительно меньшую плотность. Поэтому равнодействующая сил притяжения на поверхности всегда направлена во внутрь, в объем. Следовательно, молекулы, для того чтобы выйти на поверхность, должны совершить работу против

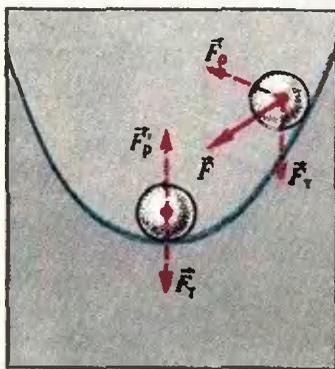


Рис. 1.

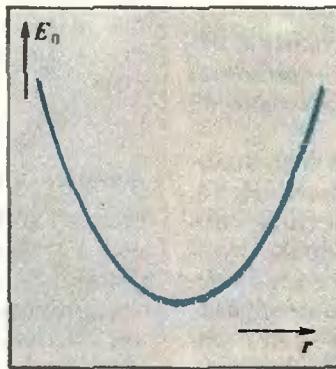


Рис. 2.

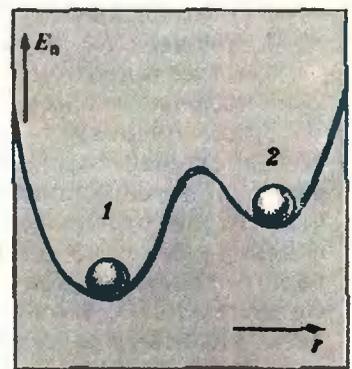


Рис. 3.

этих сил притяжения. А это означает, что молекулы на поверхности жидкости обладают большей энергией, чем внутри. Эту дополнительную потенциальную энергию называют поверхностной энергией. Чем больше площадь поверхности  $S$ , тем больше поверхностная энергия  $E_{\text{пов}}$ :

$$E_{\text{пов}} \sim S, \text{ или } E_{\text{пов}} = \sigma S.$$

Коэффициент пропорциональности  $\sigma$  и есть поверхностное натяжение. Этот коэффициент измеряется отношением работы  $A$ , необходимой для увеличения площади поверхности на  $\Delta S$ , к величине  $\Delta S$ . Для каждой жидкости он свой.

Когда мы надуваем пузырь, размер полости (а значит, и поверхности пленки) увеличивается, но количество жидкости в пленке, естественно, остается постоянным. Ясно, что увеличение поверхности возможно только за счет выхода новых молекул из объема в поверхностный слой, то есть за счет совершения работы и увеличения поверхностной энергии жидкости.

Теперь мы можем ответить на вопрос, почему же мыльный пузырь имеет форму сферы, а не, к примеру, яйца, эллипсоида или многогранника. Дело в том, что сфера обладает замечательным свойством: из всех геометрических фигур, ограничивающих данный объем, она имеет наименьшую поверхность. Поэтому, если мы попытаемся придать пузырю несферическую форму, то мы будем вынуждены увеличить площадь поверхностного слоя, то есть совершить дополнительную работу по выводу молекул на поверхность, а значит — и дополнительно увеличить поверхностную энергию жидкости.

Иными словами,

*сферической форме пузыря отвечает минимум потенциальной энергии пленки, образующей его оболочку.*

Спрашивается, кто же здесь находится в потенциальной яме? Ясно, что это не отдельная частица, поскольку сама природа поверхностного натяжения связана не с отдельными молекулами, а с их взаимодействием. Нельзя даже сказать, что в потенциальной яме находятся молекулы поверхностного слоя, так как при

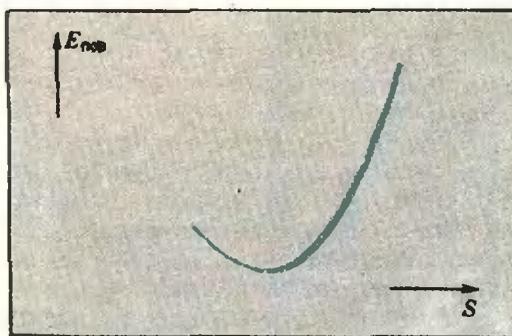


Рис. 4.

изменении радиуса пузыря происходит переход молекул из объема на поверхность или наоборот (да и при постоянных размерах пузыря, благодаря тепловому движению, имеет место непрерывный обмен молекулами между объемом и поверхностью).

Таким образом,

*в потенциальной яме находится вся жидкость, образующая мыльную пленку.*

А ввести понятие потенциальной ямы нам удалось только потому, что существует универсальная характеристика — площадь поверхности пузыря, связанная постоянным коэффициентом с его поверхностной энергией.

Если говорить более строго, то таким способом можно описать только половину потенциальной ямы, отвечающей сферической форме пузыря (рис. 4). Уменьшить площадь можно только сжав пузырь, то есть совершив работу по сжатию газа, находящегося внутри полости. Соответствующее возрастание энергии системы в этом случае показано на рисунке 4 штриховой линией. Так что в действительности в потенциальной яме находится сложная система «поверхностные молекулы жидкости + объемные молекулы жидкости + молекулы газа внутри полости».

## Ионный кристалл

Рассмотрим, наконец, последний пример системы, находящейся в потенциальной яме. Для такой системы вид потенциальной ямы можно установить с помощью точных, но весьма громоздких вычислений, а можно и приближенно, буквально в несколько

строк. Именно так мы и поступим, при этом почти не проиграем в точности, но зато выиграем в простоте и наглядности.

Речь пойдет о ионном кристалле, типичным представителем которого является всем известная поваренная соль NaCl. Как известно, атомы (или ионы) кристаллических тел образуют правильные геометрические решетки. Кристалл поваренной соли имеет простую кубическую решетку, в узлах которой в трехмерном шахматном порядке располагаются положительные ионы натрия  $\text{Na}^+$  и отрицательные ионы хлора  $\text{Cl}^-$  (рис. 5). Каждый ион  $\text{Na}^+$  имеет своими ближайшими соседями шесть ионов  $\text{Cl}^-$ , а каждый ион  $\text{Cl}^-$  — шесть ионов  $\text{Na}^+$ . Расстояние между двумя ближайшими одинаковыми ионами на грани куба называют постоянной решетки (обозначим ее буквой  $a$ ).

Чтобы определить вид потенциальной ямы данного кристалла, надо найти его полную потенциальную энергию, то есть энергию взаимодействия всех ионов кристалла друг с другом. Выделим сначала пару ближайших соседей  $\text{Na}^+$  и  $\text{Cl}^-$  и рассмотрим взаимодействие между ними. Оно складывается из кулоновского притяжения зарядов противоположных знаков и отталкивания (имеющего иную природу), не позволяющего ионам подойти друг к другу слишком близко.

Опишем это взаимодействие с помощью понятия потенциала. Представим себе, что ион натрия находится в поле иона хлора, которое скла-

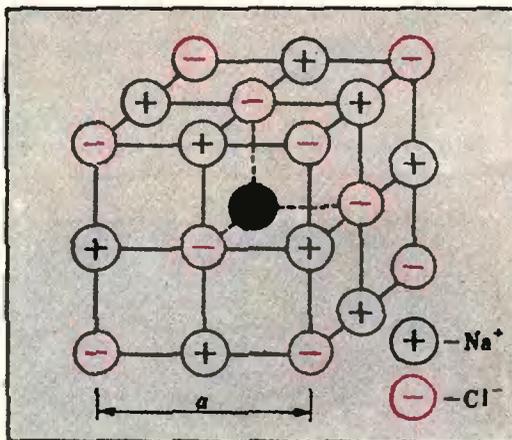


Рис. 5.

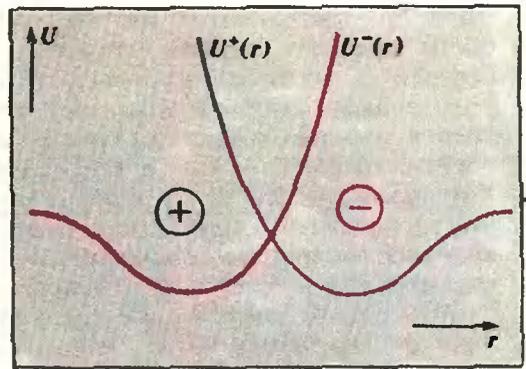


Рис. 6.

дывается из электростатического поля притяжения и поля отталкивания.

В соответствии с законами электростатики, потенциал поля притяжения равен  $-e/r$  (в абсолютной системе единиц). Здесь  $e$  — заряд одновалентного иона, равный заряду электрона, а  $r$  — расстояние между ионами хлора и натрия. Точное выражение потенциала отталкивания, как правило, не известно, но для приближенных расчетов его можно представить в виде быстро убывающей степенной функции  $b/r^n$ , где  $b$  — некоторая постоянная. Показатель степени  $n$  для кристаллов типа NaCl принято считать равным 9.

Итак, положительный ион  $\text{Na}^+$  находится в поле отрицательного иона  $\text{Cl}^-$ , потенциал которого равен

$$U^-(r) = -\frac{e}{r} + \frac{b}{r^n}.$$

Поскольку  $n$  велико, на малых расстояниях  $r$  потенциал отталкивания резко возрастает и становится существенно больше потенциала притяжения. На больших же расстояниях он практически равен нулю, и полный потенциал определяется потенциалом кулоновского притяжения. В результате  $U^-(r)$  имеет вид кривой с минимумом и образует потенциальную яму для иона  $\text{Na}^+$  (рис. 6).

В свою очередь ион натрия создает свое поле, потенциал которого представляет яму для иона  $\text{Cl}^-$ .

Таким образом, два соседних иона, взаимно притягиваясь на больших расстояниях и отталкиваясь на малых, создают потенциальные ямы, в которых и удерживают друг друга в положении равновесия.

В кристалле ситуация, конечно, более сложная. Кроме ближайших соседей с зарядами противоположного знака у любого иона имеются следующие, одноименно заряженные, соседи, за ними — еще и так далее. Хотя размеры кристалла и ограничены, число соседей можно считать бесконечно большим. Действительно, возьмем для примера соль «Экстра» самого мелко помола. Ее кристаллики имеют размеры  $\sim 0,1$  мм, а постоянная решетки  $a \sim 10^{-8}$  см, так что на ребре такого кристаллика умещается  $\sim 10^6$ , на грани —  $10^{12}$ , а в объеме —  $10^{18}$  одинаковых ионов.

Расчет полной энергии взаимодействия столь большого числа ионов, на первый взгляд, представляет собой безумно сложную задачу. Однако с помощью остроумного приема, основанного на фундаментальных физических соображениях, расчет можно выполнить действительно в несколько строк. Подробно об этом будет рассказано в Приложении II в конце статьи, здесь же мы лишь приведем окончательный результат. Оказывается, суммарная энергия взаимодействия всех ионов в кристалле имеет вид

$$W_{\text{кр}}(a) = -\frac{Ae^2}{a} + \frac{B}{a^n},$$

где  $A$  и  $B$  — некоторые постоянные. Графически она представляет собой кривую с минимумом, описывающую потенциальную яму, в которой находится кристалл в целом. Это означает, что в состоянии равновесия постоянная решетки принимает такое значение  $a_0$ , которое соответствует минимуму потенциальной энергии.

Мы рассмотрели три, на первый взгляд, совершенно различных объекта и убедились в том, что для каждого из них потенциальная энергия изображается кривой с минимумом. В общем случае вид потенциальной ямы может быть более сложным, в частности — зависеть не от одного параметра, а от нескольких, но общий принцип всегда один и тот же: *в состоянии устойчивого равновесия любая система имеет минимальную потенциальную энергию, или, другими словами, пребывает на дне потенциальной ямы.*

## Приложение I

Вычислим потенциал  $\varphi_1$ , создаваемый в точке  $I$  с координатой  $r_1$  электрическим зарядом  $+e$ , находящимся в начале координат (рис. 7). Как известно, этот потенциал равен работе электрического поля по перемещению единичного положительного заряда из данной точки в бесконечность.

Поместим в точку  $I$  пробный положительный заряд  $q$ . По закону Кулона на него со стороны заряда  $e$  действует сила  $F = qe/r_1^2$  (в абсолютной системе единиц). Найдем работу  $A_{1-2}$  по перемещению заряда  $q$  из точки  $I$  в ближайшую точку  $2$ . При этом расстояние  $r_2 - r_1$  выберем настолько малым, чтобы на всем участке  $1-2$  силу можно было считать постоянной и равной  $F_1 = qe/r_1^2 = qe/(r_1 r_2)$ . Тогда

$$\begin{aligned} A_{1-2} &= F_1 (r_2 - r_1) = \frac{qe}{r_1 r_2} (r_2 - r_1) = \\ &= qe \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \end{aligned}$$

Аналогично можно вычислить работу  $A_{2-3}$  по перемещению заряда  $q$  из точки  $2$  в ближайшую точку  $3$ :

$$\begin{aligned} A_{2-3} &= F_2 (r_3 - r_2) = \frac{qe}{r_2 r_3} (r_3 - r_2) = \\ &= qe \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right). \end{aligned}$$

Очевидно, что работа поля на участке  $1-3$  равна сумме работ на участках  $1-2$  и  $2-3$ :

$$\begin{aligned} A_{1-3} &= A_{1-2} + A_{2-3} = qe \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \\ &+ qe \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) = qe \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_3} \right). \end{aligned}$$

Продолжая рассуждения, можно убедиться в том, что промежуточные точки никакой роли не играют, и в выражение для работы входят только координаты начальной и конечной точек. Поэтому работа поля по перемещению пробного заряда  $q$  из точки  $I$  в бесконечность ( $1/r_\infty = 0$ ) равна

$$A_1 = qe \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_\infty} \right) = \frac{qe}{r_1}.$$

Тогда окончательно для потенциала в точке  $I$  получаем

$$\varphi_1 = \frac{A_1}{q} = \frac{e}{r_1}.$$

Те, кто знаком с интегрированием, легко могут получить этот результат в одну строчку...

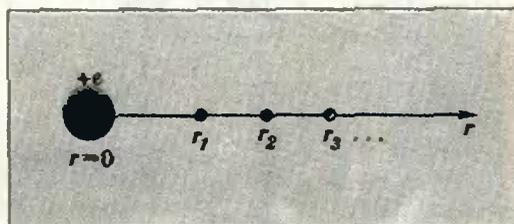


Рис. 7.

## Приложение II

Для того чтобы найти полную потенциальную энергию кристалла, прежде всего вычислим его электростатическую энергию. Рассмотрим ион натрия  $\text{Na}^+$ , расположенный в центре кубической решетки, которая изображена на рисунке 5. Ближайшие его соседи — это 6 ионов хлора  $\text{Cl}^-$ , расположенных на расстоянии  $r = a/2$  от него. Каждый из них создаст потенциал  $-e/r = -2e/a$ . Согласно принципу суперпозиции, потенциал суммы зарядов равен сумме потенциалов этих зарядов; следовательно, ближайшие соседи создают суммарный потенциал, равный  $-12e/a$ . Следующими соседями являются 12 ионов натрия, находящиеся от рассматриваемого иона на расстоянии  $a/\sqrt{2}$ . Их суммарный потенциал равен  $+12\sqrt{2}e/a = +16,97e/a$ . Продолжая эту процедуру, можно найти, что третьи соседи создают потенциал  $-9,24e/a$ , четвертые  $+6e/a$ , ..., девятнадцатые  $-3,08e/a$  и так далее.

Ясно, что суммировать все эти слагаемые бесперспективно. Однако тот факт, что знаки слагаемых чередуются (разноименно заряженные соседи чередуются с одноименно заряженными), наводит на мысль, что эти слагаемые можно как-то перегруппировать, и интересующую нас сумму найти более коротким путем. Такая перегруппировка действительно существует, и основывается она на соображении электронеutrальности.

Давайте сосчитаем суммарный заряд всех ионов куба, изображенного на рисунке 5. При этом будем полагать, что кубу принадлежит только половина каждого иона, расположенного на его грани, четверть каждого иона, расположенного на ребре, и восьмая часть каждого иона, находящегося в вершине. Такое предположение отнюдь не произвольно. Если мы мысленно разобьем весь кристалл на кубики, подобные нашему, то окажется, что ион на грани принадлежит сразу двум кубикам, ион на ребре — четырем, а ион в вершине — восьми кубикам. Так вот, суммарный заряд куба, сосчитанный в соответствии с такой договоренностью, оказывается равным нулю! Иными словами, предложенный способ позволяет разбить кристалл на электронеutrальные ячейки. Кулоновская энергия это-

го нейтрального куба равна

$$-\frac{12}{2} \frac{e^2}{a} + \frac{16,97}{4} \frac{e^2}{a} - \frac{9,24}{8} \frac{e^2}{a} = -2,91 \frac{e^2}{a}.$$

Теперь наростим на каждую грань куба еще по одному слою ионов и снова выделим нейтральную ячейку. Сторона этого куба равна  $2a$ , все ионы первоначального куба принадлежат ему целиком, а вновь включенные ионы — наполовину, на четверть или на одну восьмую, в зависимости от того, где они расположены. Электростатическая энергия такого куба, подсчитанная прежним способом, оказывается равной  $-3,50 e^2/a$ . Если взять электронеutralный куб со стороной  $3a$ , то его энергия будет равна  $-3,49 e^2/a$ . Дальнейшее увеличение объема куба практически уже ничего не изменяет, и в конце концов для его энергии получается величина, приблизительно равная  $-3,495 e^2/a$ .

Та же идея разбиения кристалла на нейтральные ячейки подсказывает еще один способ приближенного вычисления энергии куба. Возьмем ион с зарядом  $+1$  и окружим его сферой радиуса  $a$ , заполненной равномерно распределенным отрицательным зарядом, полная величина которого равна  $-1$ . Если теперь посчитать электростатическую энергию этой нейтральной сферы, то она окажется равной  $-3,6 e^2/a$ , то есть очень близкой к истинному значению.

Так, удачно выбранная модель, основанная на понимании того, что наиболее существенно в данной физической ситуации, позволяет во много раз сократить вычисления.

Энергию отталкивания посчитать гораздо проще. Из-за того что потенциал отталкивания убывает очень быстро, можно предположить, что отталкивание существует только между ближайшими соседями, находящимися друг от друга на расстоянии  $a/2$ . Тогда полная энергия отталкивания есть просто сумма энергий парных взаимодействий между всеми парами частиц, и для нее сразу получается выражение  $+B/a^4$ . Здесь  $B = kb$ , где  $k$  — число пар в ячейке. На это же число  $k$  нужно умножить и вычисленную выше электростатическую энергию одного иона, и в результате для полной энергии куба получается выражение, приведенное в основном тексте статьи.

### Наша обложка

Конечно, единичный куб можно обклеить (без пробелов и налеганий) шестью квадратами со стороной 1. Но можно ли единичный куб так обклеить другими квадратами?

Например:

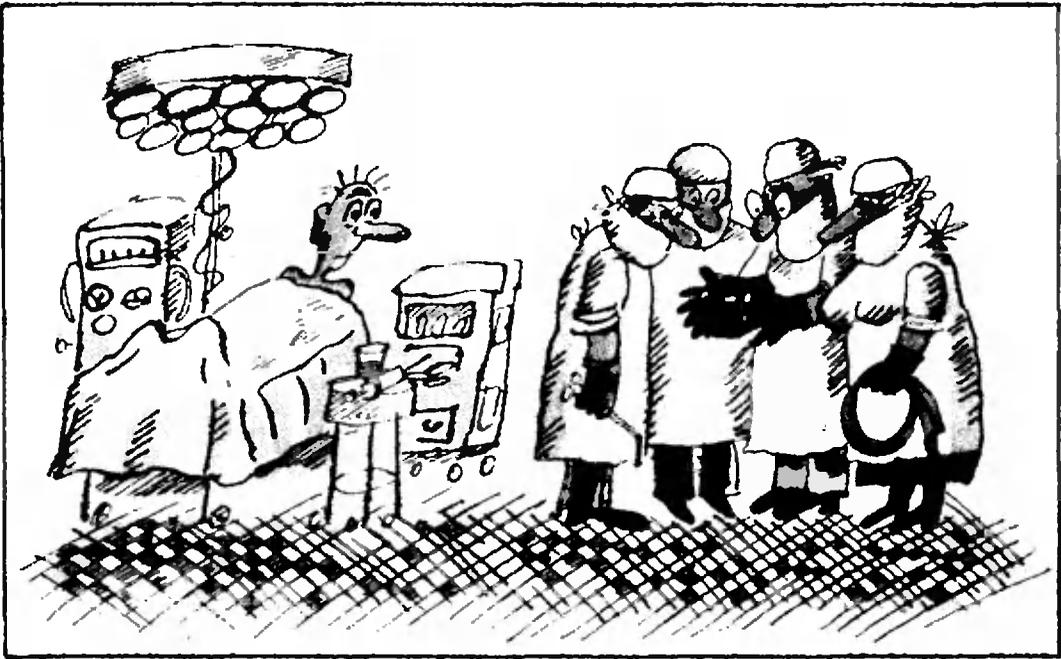
- а) квадратами со стороной  $1/\sqrt{2}$ ?  
 б) квадратами со стороной  $\sqrt{2}$  и квадратами со стороной  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ?

$$\text{в) } \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ и } \frac{3}{2\sqrt{2}}?$$

$$\text{г) } \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ и } \frac{3}{\sqrt{5}}?$$

Сколько нужно квадратов в каждом случае? Как их нужно располагать на кубе? Ответ смотрите на 4 с. обложки.

Ю. Пухначёв



В. Дубровский

## Математика волшебного кубика

«Квант» уже рассказывала подробно о конструкции венгерского «волшебного кубика» и алгоритмах решения этой головоломки\*). Вслед за кубиком на свет появилась целая серия похожих на него игр. Математической теории таких игр и посвящена наша статья. А для любителей практической игры в кубик мы приводим принципиальную схему рекордно короткого алгоритма волшебного кубика, основанную на этой теории.

**Волшебный кубик задает вопросы**

Условимся называть различные варианты сборки волшебного кубика, возникающие при произвольной расстановке 8 угловых маленьких кубиков по вершинам большого куба и 12 средних — по ребрам, его *состояниями*. Центральные кубики во всех состояниях расположены одинаково — так же, как в *нулевом состоянии*, когда каждая грань вол-

шебного кубика окрашена в один цвет. Любой слой из 9 маленьких кубиков, примыкающих к одной грани большого куба, разрешено поворачивать на  $\pm 90^\circ$  или  $180^\circ$ . Такое вращение будем называть *поворотом грани* или просто *ходом*, а любую последовательность ходов — *операцией*. Если состояние  $S_2$  можно получить из состояния  $S_1$  с помощью некоторой операции, то и от  $S_2$  можно перейти к  $S_1$ , изменив направление каждого из поворотов на противоположное и выполняя их в обратном порядке. В этом случае будем говорить, что состояния  $S_1$  и  $S_2$  *связаны*. В частности, состояние, связанное с нулевым (а только в таких состояниях и может пребывать реальный волшебный кубик, если его не разбирать), назовем *законным*.

**Задача 1.** Докажите, что общее число состояний волшебного кубика равно  $N = 8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12}$  ( $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ , читается: *n*-факториал).

Мы постараемся ответить на следующие вопросы: любое ли состояние куба является законным, то есть можно ли, собрав маленькие кубики в произвольном порядке, получить затем нулевое состояние поворотами граней? Если нет, то как узнать, законно ли данное состояние и вообще, связаны ли два данных состояния? Сколько существует законных

\*) «Квант», 1980, № 12, с. 17; 1982, № 3, с. 20 и № 7, с. 22; см. также «Наука и жизнь», 1981, № 3, с. 131 и 1982, № 2, с. 97.

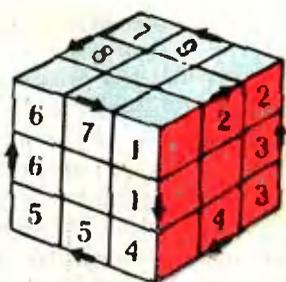


Рис. 1. Нулевое состояние. Скрытый угловой кубик имеет номер 9, скрытые средние — номера 10, 11, 12. На скрытых ребрах стрелки сонаправлены со стрелками на симметричных им относительно центра куба ребрах.

состояний, другими словами — сколько разных раскрасок волшебного кубика можно получить, вращая его грани? Каково максимальное число попарно не связанных состояний? Прежде всего разберемся,

### Как задавать состояния

Чтобы полностью описать состояние волшебного кубика, надо для каждого маленького кубика указать место, которое он занимает, и его ориентацию на этом месте — каждый угловой кубик можно поместить в одно и то же «гнездо» тремя, а средний — двумя способами.

Представим, что волшебный кубик находится в нулевом состоянии. Перенумеруем его вершины и находящиеся в них угловые кубики числами от 1 до 8, а ребра и соответствующие средние кубики — числами от 1 до 12. Кроме того, на каждом ребре большого куба выберем определенное направление (мысленно нарисуем на нем стрелку) и нарисуем стрелку того же направления на соответствующем среднем кубике (рис. 1).

Теперь местонахождение  $i$ -го углового ( $j$ -го среднего) кубика в состоянии  $S$  можно задать номером  $\sigma_S(i)$  ( $\tau_S(j)$ ) той вершины (того ребра), где он находится (здесь  $i=1, \dots, 8$ ,  $j=1, \dots, 12$ ).

Чтобы задать ориентацию угловых кубиков, выделим пару противоположных граней большого куба, например его горизонтальные грани. Для определенности предположим, что верхний центральный кубик —

синий, а нижний — зеленый\*). Каждый угловой кубик имеет либо одну грань синего цвета, либо одну грань зеленого цвета; угол  $\alpha$  ( $\alpha=0^\circ, 120^\circ$  или  $240^\circ$ ), на который следовало бы повернуть этот кубик в его «гнезде» вокруг диагонали большого куба против часовой стрелки\*\*), чтобы эта (синяя либо зеленая) грань стала горизонтальной, будем называть *углом поворота* данного углового кубика в состоянии  $S$  и обозначать  $\alpha_S(i)$ , где  $i$  — номер кубика.

Ориентацию  $j$ -го среднего кубика в состоянии  $S$  зададим углом  $\beta_S(j)$  между нарисованной на нем стрелкой и направлением ребра, на котором он находится ( $\tau_S(j)$ -го ребра). Угол  $\beta_S(j)$  может равняться  $0^\circ$  или  $180^\circ$ ; будем называть его *углом поворота*  $j$ -го среднего кубика в состоянии  $S$ .

### Что общего у связанных состояний

Нам надо выяснить, в каком случае два состояния связаны друг с другом. С этой целью проследим, как изменяются характеристики состояний  $\alpha_S, \beta_S, \sigma_S$  и  $\tau_S$  при поворотах граней. Начнем с углов поворотов. Легко проверить, что

А. Углы поворотов угловых кубиков не изменяются при поворотах четырех вертикальных граней на  $180^\circ$  и при произвольных поворотах горизонтальных граней.

Б. Углы поворотов средних кубиков не изменяются при поворотах двух противоположных (правой и левой на рис. 1) граней на  $180^\circ$  и при произвольных поворотах остальных граней.

В. При повороте любой вертикальной грани на  $\pm 90^\circ$  к углам поворотов  $\alpha_S$  двух кубиков, стоящих в ее противоположных вершинах, добавляется по  $120^\circ$ \*\*\*), а к углам

\*) Между прочим, кубик раскрашивают по-разному. Мы имеем в виду куб, у которого зеленая и синяя грани противоположны.

\*\*) Разумеется, не разрушая волшебный куб, реально повернуть его угловой кубик в своем гнезде нельзя — мы здесь определяем теоретическое понятие.

\*\*\*) Как это принято, углы поворотов мы складываем с точностью до  $360^\circ$ , например  $240^\circ + 240^\circ = 120^\circ$ ,  $180^\circ + 180^\circ = 0^\circ$  и т. д.

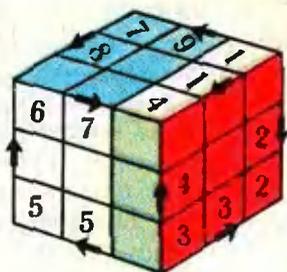


Рис. 2. После поворота правой грани на  $90^\circ$  по часовой стрелке. Здесь  $\tau(1)=2$ ,  $\tau(4)=1$ ,  $\tau(2)=3$ ,  $\alpha(1)=\alpha(3)=120^\circ$ ,  $\alpha(2)=\alpha(4)=240^\circ$ ,  $\beta(1)=\beta(2)=\beta(3)=\beta(4)=180^\circ$ .

поворотов двух ее других угловых кубиков добавляется по  $240^\circ$ .

Г. При повороте правой или левой (рис. 2) грани на  $\pm 90^\circ$  меняются углы поворотов всех четырех средних кубиков этой грани.

Отсюда немедленно вытекает, что суммы углов поворотов всех угловых и всех средних кубиков

$$A(S) = \alpha_S(1) + \alpha_S(2) + \dots + \alpha_S(8),$$

$$B(S) = \beta_S(1) + \beta_S(2) + \dots + \beta_S(12)$$

остаются постоянными при всех поворотах граней. Такие характеристики состояния называются *инвариантами* (от латинского «не изменяющийся»). Значения любого инварианта для двух связанных состояний  $S_1$  и  $S_2$ , очевидно, совпадают. Поэтому равенства  $A(S_1) = A(S_2)$  и  $B(S_1) = B(S_2)$  являются необходимыми условиями связности состояний. Вскоре мы увидим, что, присоединив к ним аналогичное равенство для еще одного инварианта, мы получим и достаточные условия. Но, прежде чем определить этот третий инвариант, нам придется сделать небольшое отступление

## О перестановках

*Перестановкой* конечного множества называется любое отображение этого множества на себя. Таким образом, определенная выше функция  $\sigma_S$ , заданная на множестве  $\{1, \dots, 8\}$ , является перестановкой этого множества, а  $\tau_S$  — перестановка множества  $\{1, \dots, 12\}$ . С любой операцией  $F$  также связаны две перестановки  $\sigma_F$  и  $\tau_F$  этих же множеств: если нулевое состояние  $S_0$  переводится операцией  $F$  в состояние  $S$ ,

то, по определению,  $\sigma_F(i) = \sigma_S(i)$ ,  $\tau_F(j) = \tau_S(j)$ . Другими словами,  $\sigma_F(i)$  и  $\tau_F(j)$  — это номера тех мест (см. рис. 1), которые занимают в результате операции  $F$  угловой кубик, стоявший на  $i$ -м месте, и средний кубик, стоявший на  $j$ -м месте.

Выполнив одну за другой перестановки  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  одного и того же множества, мы снова получим его отображение на себя — перестановку  $\sigma$ . Она называется *композицией*  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ :  $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$ .

**Задача 2.** Пусть операция  $F$  переводит волшебный кубик из состояния  $S$  в состояние  $S'$ . Докажите, что  $\sigma_{S'} = \sigma_S \circ \sigma_F$ ,  $\tau_{S'} = \tau_S \circ \tau_F$ . Докажите также, что  $\sigma_{F_1 \circ F_2} = \sigma_{F_1} \circ \sigma_{F_2}$ ,  $\tau_{F_1 \circ F_2} = \tau_{F_1} \circ \tau_{F_2}$ , где  $F_1 \circ F_2$  — композиция операций  $F_1$  и  $F_2$ .

Пусть  $\sigma$  — произвольная перестановка множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Нарисуем одну под другой две строчки по  $n$  точек. Если при перестановке  $\sigma$  число  $i$  переходит в  $j$ , соединим  $i$ -ю точку верхней строки отрезком с  $j$ -й точкой нижней строки — мы получим *граф перестановки*  $\sigma$  (рис. 3). Обозначим через  $N(\sigma)$  число точек пересечения отрезков графа (точку, в которой пересекается больше двух отрезков, считаем столько раз, сколько пар отрезков ее содержит). Перестановка  $\sigma$  называется *четной* (*нечетной*), если

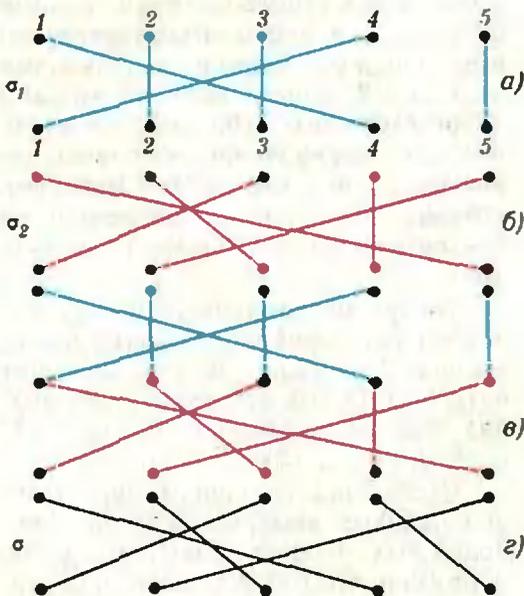


Рис. 3.

число  $N(\sigma)$  чётно (нечётно). Знак перестановки  $\sigma$  определим равенством  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{N(\sigma)}$ ;  $\varepsilon(\sigma)$  равно 1 или  $-1$  в зависимости от того, чётна или нечётна перестановка. Выясним, как зависит чётность композиции  $\sigma_1 \circ \sigma_2$  от чётностей  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Граф композиции строится очень просто (см. рис. 3): совмещаем нижнюю строку графа перестановки  $\sigma_1$  (рис. 3, а) с верхней строкой графа  $\sigma_2$  (рис. 3, б) — получается «промежуточный» граф (рис. 3, в), а затем заменяем каждую ломаную в промежуточном графе на отрезок, соединяющий ее концы (рис. 3, г). Число точек пересечения ломаных в промежуточном графе, очевидно, равно  $N(\sigma_1) + N(\sigma_2)$ . При «распрямлении» ломаных оно может уменьшиться, но его чётность сохранится (докажите это самостоятельно). Таким образом,  $N(\sigma_1 \circ \sigma_2)$  и  $N(\sigma_1) + N(\sigma_2)$  — числа одной чётности; следовательно,

$$\begin{aligned}\varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) &= (-1)^{N(\sigma_1 \circ \sigma_2)} = \\ &= (-1)^{N(\sigma_1) + N(\sigma_2)} = (-1)^{N(\sigma_1)} \times \\ &\quad \times (-1)^{N(\sigma_2)} = \varepsilon(\sigma_1) \circ \varepsilon(\sigma_2).\end{aligned}$$

Другими словами, композиция двух перестановок чётна, если их чётности совпадают, и нечётна в противном случае.

Допустим, что перестановка  $\sigma$  множества из  $n$  элементов оставляет неподвижными  $n - t$  элементов, а остальные  $t$  элементов можно упорядочить так, что первый из них переходит во второй, второй — в третий и, вообще,  $i$ -й — в  $(i+1)$ -й, а  $t$ -й элемент — опять в первый. Тогда перестановка  $\sigma$  называется *циклом длины  $t$*  или  *$t$ -циклом*. Например, перестановки  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  графы которых изображены на рисунках 3, а, б, г, являются циклами длины 2, 4 и 5 соответственно.

**Задача 3.** Докажите, что

- Любая транспозиция (то есть 2-цикл) является нечётной перестановкой.
- Любой  $n$ -цикл является композицией  $n-1$  транспозиций. Его чётность противоположна чётности числа  $n$ .
- Любую перестановку можно представить в виде композиции циклов, причем можно обойтись только транспозициями, а в случае чётных перестановок — 3-циклами.

## Полная система инвариантов волшебного кубика

Назовем *знаком состояния  $S$*  число  $\varepsilon(S) = \varepsilon(\sigma_S) \circ \varepsilon(\tau_S)$ . Оно равно 1 или  $-1$  в зависимости от того, совпадают или нет чётности перестановок  $\sigma_S$  и  $\tau_S$ .

Рассмотрим поворот  $F$  любой грани на  $90^\circ$ . Пусть в результате этого поворота волшебный кубик перешел из состояния  $S$  в состояние  $S'$ . Тогда (задача 2)  $\sigma_{S'} = \sigma_S \circ \sigma_F$ ,  $\tau_{S'} = \tau_S \circ \tau_F$ . Перестановки  $\sigma_F$  и  $\tau_F$  — это 4-циклы, поэтому они нечётны (задача 3, б) и  $\varepsilon(\sigma_F) = \varepsilon(\tau_F) = -1$ . Следовательно,  $\varepsilon(\sigma_{S'}) = \varepsilon(\sigma_S) \times \varepsilon(\sigma_F) = -\varepsilon(\sigma_S)$ ,  $\varepsilon(\tau_{S'}) = \varepsilon(\tau_S) \times \varepsilon(\tau_F) = -\varepsilon(\tau_S)$  и  $\varepsilon(S') = \varepsilon(S)$ . Итак, знак состояния не меняется при поворотах граней. Это и есть третий инвариант.

Докажем, что система инвариантов  $A(S)$ ,  $B(S)$  и  $\varepsilon(S)$  — полная, то есть, что совпадение их значений для двух состояний обеспечивает связанность этих состояний.

Пусть для начала  $A(S) = B(S) = 0^\circ$ ,  $\varepsilon(S) = 1$ . Покажем, что состояние  $S$  связано с нулевым состоянием  $S_0$ . Попробуем воспользоваться алгоритмом из статьи «Алгоритм волшебного кубика» («Квант» № 7 за этот год)\*. Первый его этап всегда можно выполнить беспрепятственно. Второй выполним при условии, что число неправильно повернутых средних кубиков чётно. Так и будет, ибо сумма углов поворота средних кубиков  $B = 0^\circ$ . Третий этап осуществим всегда. После него волшебный кубик переходит в состояние  $S'$ , в котором все средние кубики стоят на своих местах, то есть  $\tau_{S'}$  — тождественная перестановка. Но  $\varepsilon(S') = 1$ ; значит,  $\sigma_{S'}$  — чётная перестановка, а она разлагается в композицию 3-циклов (задача 3, в). Поэтому все угловые кубики мы сумеем расставить по местам. Останется правильно развернуть их. А это можно сделать, пользуясь операциями, указанными в алгоритме, благодаря тому, что сумма углов поворотов  $A = 0^\circ$ .

Пусть далее  $A(S_1) = A(S_2) = \alpha$ ,  $B(S_1) = -B(S_2) = \beta$ ,  $\varepsilon(S_1) = \varepsilon(S_2) = \varepsilon$ . Если  $\alpha = \beta = 0^\circ$ , а  $\varepsilon = 1$ , то оба состояния  $S_1$  и  $S_2$  связаны с нулевым; следовательно, они связаны друг с другом. Наконец, пусть  $S_1$  и  $S_2$  — «незаконные» состояния, например  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\beta = 180^\circ$ ,  $\varepsilon = 1$ . Рассмотрим состояния  $S'_1$  и  $S'_2$ , получающиеся из  $S_1$  и  $S_2$  переворачиванием какого-то одного среднего кубика, скажем синие-белого. Инварианты  $A$  и  $\varepsilon$  при этом, конечно, не меняются, а  $B$  становится равным  $0^\circ$ , поэтому  $S'_1$  и  $S'_2$  связаны. Возьмем волшебный кубик в состоянии  $S_1$  и заклеим синюю

\* Разумеется, можно применить и любой другой алгоритм

грань выбранного среднего кубика белой наклейкой, а белую — синей. Получим состояние  $S_1$ . Переведем его в  $S_2$  и снимем наклейки — получится состояние  $S_2$ ! Следовательно, состояния  $S_1$  и  $S_2$  связаны. Аналогично доказывается, что любые два состояния с одинаковыми инвариантами связаны. Таким образом, каждый из  $3 \times 2 \times 2 = 12$  наборов значений инвариантов  $A$ ,  $B$  и  $\epsilon$  ( $A$  принимает три значения:  $0^\circ$ ,  $120^\circ$  и  $240^\circ$ ,  $B$  — два:  $0^\circ$  и  $180^\circ$ ,  $\epsilon$  — тоже два:  $1$  и  $-1$ ) определяет класс попарно связанных состояний с этим набором инвариантов, причем состояния из разных классов не связаны; один из классов образован законными состояниями.

**Задача 4.** Докажите, что число состояний во всех классах одинаково и равно  $8! \cdot 3^5 \cdot 11! \cdot 2^{12}$ .

**Задача 5.** Докажите, что значения инвариантов  $A$ ,  $B$ ,  $\epsilon$  зависят только от состояния волшебного кубика, но не от выбора пары граней, направлений на ребрах и нумерации вершин и ребер.

### Рекордный алгоритм

В журнале «Сайентифик Америкэн» (1981 г., № 3) описана общая идея рекордно короткого алгоритма волшебного кубика, придуманного английским математиком М. Тистлетуэйтом. Пользуясь этим алгоритмом, можно перейти от любого законного состояния к нулевому не более, чем за 52 хода\*). Алгоритм Тистлетуэйта коренным образом отличается от алгоритмов, которые описаны в упомянутых нами выше статьях. В общих чертах его схема такова.

Введем три ограничения на допустимые повороты граней:

- 1) запрещается поворачивать две противоположные вертикальные грани (допустим, правую и левую на рис. 1) на  $\pm 90^\circ$ ;
- 2) запрещается поворачивать какую бы то ни было вертикальную грань на  $\pm 90^\circ$ ;
- 3) запрещаются все повороты граней на  $\pm 90^\circ$ .

Обозначим через  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$  совокупность всех операций, удовлетворяющих первому, второму, третьему ограничению соответственно (например,  $\Phi_3$  — это всевозможные последовательности поворотов граней на

$180^\circ$ ), а через  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$ ,  $\Sigma_3$  — класс всех состояний, получаемых из нулевого операциями из  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$ . Ясно, что  $\Sigma_1 \supset \Sigma_2 \supset \Sigma_3 \ni S_0$  и что любые два состояния из класса  $\Sigma_k$  связаны друг с другом операцией из  $\Phi_k$ . Весь алгоритм разбивается на четыре этапа. На первом выполняется такая операция  $F$  (без ограничений на ходы), которая переводит исходное состояние  $S$  в какое-нибудь состояние  $S_1 \in \Sigma_1$ . В дальнейшем разрешаются только операции из  $\Phi_1$ . На втором этапе с помощью операции  $F_1 \in \Phi_1$  волшебный кубик переводится в состояние  $S_2 \in \Sigma_2$ , на третьем с помощью операции  $F_2 \in \Phi_2$  — в состояние  $S_3 \in \Sigma_3$ . Наконец, на четвертом этапе, вращая грани только на  $180^\circ$ , мы должны получить из состояния  $S_3$  нулевое состояние  $S_0$ .

Очевидно, попав после очередного этапа в класс  $\Sigma_k$ , мы его уже не покидаем, так что достижения всех предыдущих этапов сохраняются автоматически. Кроме того, вплоть до последнего этапа не нужно «загонять» маленькие кубики на положенные места. Но основное достоинство этой схемы в том, что она гораздо лучше обычных приспособлена к просчету на ЭВМ. Вероятно, это и сыграло решающую роль при «установлении мирового рекорда».

Прежде, чем составлять по этой схеме алгоритм, надо выяснить, что из себя представляют классы состояний  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$ ,  $\Sigma_3$ . Тут-то нам и пригодятся инварианты. С классами  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  разобраться легко. Вспомогательные свойства  $A$  и  $B$  углов поворотов маленьких кубиков, мы видим, что *углы поворотов средних кубиков  $\beta_S(j)$  инвариантны относительно операций из  $\Phi_1$*  (свойство  $B$ ), *углы поворотов угловых кубиков  $\alpha_S(i)$  инвариантны относительно операций из  $\Phi_2$*  (свойство  $A$ ). Легко заметить также, что при операциях из  $\Phi_2$  четыре средних кубика, расположенных в горизонтальном «среднем слое» между верхней и нижней гранями, могут меняться местами только между собой, так что состав этого слоя остается неизменным.

**Задача 6.** Докажите, что величины  $A(S)$ ,  $\epsilon(S)$  и  $\beta_j(S)$  ( $j=1, \dots, 12$ ) образуют полную систему инвариантов относительно операций из  $\Phi_1$ , а  $\alpha_i(S)$ ,  $\alpha_j(S)$  ( $i=1, \dots, 8$ ),  $\beta_j(S)$  ( $j=1, \dots, 12$ ) и состав горизонтального среднего слоя — относительно операций из  $\Phi_2$ .

Столь же просто убедиться, что при операциях из  $\Phi_3$ , кроме инвариантов, перечисленных в задаче 6, сохраняются также составы двух вертикальных средних слоев и составы двух четверок угловых кубиков, образующих правильные тетраэдры (на рис. 1 в одну

\* В том же журнале сообщается, что в действительности всегда достаточно 23 ходов (!), причем уменьшить это число нельзя. Судя по всему, пока столь короткий реальный алгоритм решения кубика не найден.

из них входят угловые кубики 1, 3, 5, 7, а в другую — 2, 4, 6, 8). Но это еще не все! Имеется еще один инвариант относительно набора операций  $\Phi_3$ , описывающий зависимость между перестановками угловых кубиков внутри четверок. Возьмем любые два кубика одной из четверок. Они оба прилежат ровно к одной из граней куба. Если это правая или левая грань, то скажем, что эти кубики занимают 1-ю позицию, если передняя или задняя — то 2-ю, если верхняя или нижняя — то 3-ю. Ясно, что вторая пара кубиков этой четверки всегда занимает ту же позицию, что и первая. Для простоты ограничимся состояниями  $S$ , у которых «состав четверок «правильный» (как в нулевом состоянии). Рассмотрим первую четверку и определим перестановку  $p_S$  множества  $\{1, 2, 3\}$ , полагая  $p_S(i) = j$ , если пара кубиков этой четверки, занимавшая  $i$ -ю позицию в состоянии  $S_0$ , занимает  $j$ -ю позицию в состоянии  $S$ . Аналогично, для второй четверки определим перестановку  $q_S$ . Наш последний инвариант — это перестановка  $\delta_S = p_S \circ q_S^{-1}$ \*). Он может принимать любое из  $3! = 6$  значений.

**Задача 7.** Докажите, что  $\delta_S$  действительно инвариант относительно  $\Phi_3$  и что вместе с инвариантами, перечисленными выше, он образует полную систему для  $\Phi_3$ .

Теперь ясно, что на каждом этапе алгоритма следует стремиться к тому, чтобы значения очередной порции найденных нами инвариантов стали такими же, как для нулевого состояния.

Мы предлагаем читателям самостоятельно разработать алгоритм или его отдельные этапы по указанной схеме и прислать в редакцию свои варианты. Лучшие из них будут опубликованы.

### Понграем в другие игры

Даже неискушенные в математике люди сразу признают в волшебном кубике «родственника» знаменитой головоломки «15» Сэма Лойда, хотя внешне они совершенно не похожи. Сходство заключено в общей структуре этих игр, которую можно описать так: имеется некая система, способная пребывать в различных состояниях, среди которых одно («нулевое») состояние выделено. Задача состоит в том, чтобы перевести произвольное заданное состояние в нулевое, пользуясь определенным набором стандартных преобразований системы (в случае волшеб-

ного кубика — поворотами граней на  $\pm 90^\circ$  или  $180^\circ$ ), которые можно назвать *элементарными операциями* или *ходами*. При этом любой ход *обратим* (то есть, сделав его, мы всегда можем одним ходом вернуться в исходное состояние).

Так же, как и для волшебного кубика, в общем случае определяются понятия операции, связанных состояний, инварианта. Еще одно полезное понятие — *орбита состояний*: так называют множество всех состояний, связанных с данным. В частности, как мы видели, множество состояний волшебного кубика распадается на 12 орбит.

Мы предлагаем читателю ряд задач, посвященных исследованию игр указанного типа. В задачах 8—10 требуется доказать некоторые общие свойства этих игр (приводятся только их формулировки). В задачах 11—16 рассматриваются разные примеры, причем дается только описание игры, а ответить нужно на следующие вопросы: 1) каков полный набор инвариантов данной игры? 2) как перевести одно из двух связанных состояний в другое? 3) каково число орбит и состояний в одной орбите?

### Задачи

8. Будем писать  $S_1 \approx S_2$ , если состояния  $S_1$  и  $S_2$  связаны. Тогда для любых состояний  $S_1, S_2, S_3$  1)  $S_1 \approx S_1$ , 2)  $S_1 \approx S_2 \Rightarrow S_2 \approx S_1$ , 3)  $S_1 \approx S_2, S_2 \approx S_3 \Rightarrow S_1 \approx S_3$ . Другими словами, отношение  $S_1 \approx S_2$  есть отношение эквивалентности.

9. Орбиты любых двух состояний  $S_1$  и  $S_2$  либо совпадают (если  $S_1 \approx S_2$ ), либо не имеют общих элементов.

10. Если всякая операция, переводящая в себя хотя бы одно состояние, переводит в себя и любое другое состояние, то число  $N_0$  состояний во всех орбитах одинаково, а число всех состояний  $N = N_0 \cdot k$ , где  $k$  — число орбит. Проверьте, что указанное свойство операций справедливо для волшебного кубика.

11. Исследуйте игры, отличающиеся от «волшебного кубика» только набором элементарных операций: 1) разрешено вращать только 2 (3, 4 или 5) грани; 2) ход — это поворот пары противоположных граней (одной по, а другой против часовой стрелки) на один и тот же угол; 3) соответственно, обе грани по часовой стрелке.

(Окончание см. на с. 48)

\* ) Здесь  $q_S^{-1}$  обозначает обратное отображение к отображению  $q_S$ .



В. Майер

## Свет, воздух и вода

### Преломление при переходе из воды в воздух

Почти во всех книгах по физике в том месте, где говорится о преломлении света, есть рисунок, на котором изображены вода, точечный источник света внутри нее и лучи, выходящие из источника и преломляющиеся на границе вода — воздух. Например, так, как показано на рисунке 158 из учебника по физике для 10 класса («Физика 10», М., «Просвещение», 1981). Но, конечно же, гораздо интереснее поставить опыт и пронаблюдать само явление, а не рисунок.

Прежде всего изготовьте соответствующий осветитель. Возьмите непрозрачную пластмассовую баночку диаметром 40—50 мм и высотой 20—30 мм. В стенке баночки ножовочным полотном сделайте ряд равноотстоящих друг от друга одинаковых прорезей шириной примерно 1—1,5 мм. Вы получите кожух для осветителя.

В нижней части прямоугольной пластинки (из алюминия или пластмассы) просверлите отверстие по диаметру патрона лампочки для карманного фонаря. Одну поверхность пластинки покрасьте в белый цвет. (Проще всего это сделать, побрызгав поверхность белой нитроэмалью, которая продается в аэрозольной упаковке.) Или просто наклейте на пластинку лист белой бумаги.

К лампочке припаяйте проводники, вставьте ее в отверстие и об-

мажьте патрон лампочки с задней поверхности пластинки пластилином. Эта обмазка будет фиксировать лампочку в пластинке и одновременно изолировать место соединения лампочки с проводниками.

Подсоедините выводы лампочки к батарейке для карманного фонаря. Наденьте на лампочку изготовленный кожух так, чтобы лампочка оказалась на его оси, и прикрепите кожух к пластинке. На белой поверхности пластинки вы должны наблюдать световые пучки, расходящиеся от осветителя и идущие вверх в пределах угла, не превышающего  $\lambda$ . Возможно, вам придется несколько подрегулировать положение кожуха или подправить щели в его стенке. Поэтому кожух удобнее всего закрепить на пластинке пластилином.

Разумеется, если вы захотите сделать более основательный прибор (скажем, для школьного кабинета физики), то придется придумать и осуществить более надежный способ крепления кожуха. Но прежде чем делать это, попробуйте простейший вариант, описанный здесь.

После того как прибор изготовлен, приступайте к опыту. Опустите пластинку с осветителем в сосуд с водой так, чтобы пластинка была расположена вертикально. Лучше всего использовать сосуд с плоской передней стенкой, например — аквариум. Через прозрачную стенку сосуда вы будете наблюдать примерно такой ход световых пучков, который показан на рисунке 1 (здесь 1 — сосуд с водой, 2 — осветитель, 3 — пластинка с белой поверхностью).

Если уж вы сделали прибор и пронаблюдали явление, то проведите и простейшие измерения. Ставя карандашом точки, отметьте на плас-

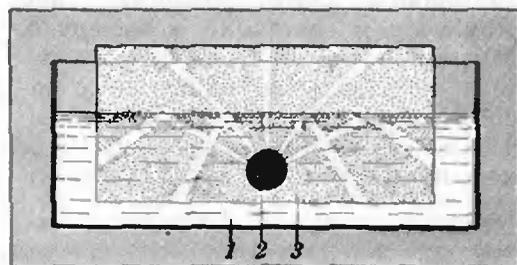


Рис. 1.

тинке положение поверхности воды, местá выхода световых пучков из воды и положение пучков света на некотором расстоянии от поверхности воды.

Выньте пластинку из воды, высушите ее и карандашом по линейке нанесите ход световых пучков от щелей осветителя до границы раздела сред и далее — в воздух. Линией обозначьте границу раздела и в точках падения пучков восстановите к ней перпендикуляры. Измерьте транспортиром различные углы падения и преломления света и на основе этих экспериментальных результатов найдите среднее значение показателя преломления воды.

### Отражение от нагретой воды

В большой сосуд с холодной водой (это может быть стеклянная банка, поставленная на лист белой бумаги, или тазик с белым дном) опустите жестяную банку, например из-под кофе, и каким-либо образом закрепите ее в вертикальном положении (рис. 2). Чем больше будет банка, тем лучше (мы использовали банку диаметром 80 мм и высотой 120 мм, и это, пожалуй, минимальные подходящие для опыта размеры).

Вскипятите воду, быстро вылейте кипяток в банку и посмотрите сверху сквозь воду в большом сосуде вдоль боковой поверхности банки — вы увидите ее блестящей как зеркало.

Опыт получается особенно эффективным, когда поверхность банки — черная. Если вам не удастся найти такую банку, возьмите любую и оберните ее черной бумагой от фотопакета (бумагу можно закрепить, например, липкой лентой). При заполнении банки горячей водой бумага будет ярко блестеть.

Очевидно, что в этом опыте наблюдается полное отражение света. Вопрос в том, почему это происходит.

Может быть, свет отражается от слоя воздуха на поверхности банки? Оказывается, нет. И жель, и бумага хорошо смачиваются водой, так что никакой воздушной пленки не образуется.

В чем же дело? Повторите опыт еще раз. Теперь, прежде чем зали-

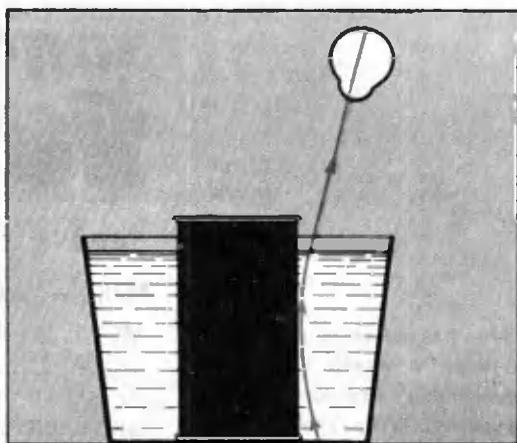


Рис. 2.

вать в банку кипяток, опустите палец в холодную воду вблизи стенки большого сосуда. Налив в банку кипяток, приближайте палец к банке — вы будете ощущать постепенное увеличение температуры воды. Продолжайте наблюдения, и вы убедитесь, что полное отражение света исчезнет тогда, когда вся толща воды в радиальном направлении широкого сосуда прогреется примерно до одной и той же температуры.

Так вот в чем разгадка! Полное отражение в условиях данного опыта происходит потому, что вода во внешнем сосуде прогрета неравномерно. Вблизи банки с кипятком температура воды наибольшая, а плотность — наименьшая. По мере удаления от банки температура воды уменьшается, а плотность — увеличивается. При этом увеличивается и оптическая плотность воды, или, другими словами, растет ее показатель преломления. Свет, идущий от дна сосуда, постепенно переходит из области с большей в область с меньшей оптической плотностью, поэтому и наблюдается его полное отражение.

В отличие от многих опытов с полным отражением, в данном случае нет резкой границы между средами с разными оптическими плотностями, следовательно, нет и отражения света в строгом смысле этого слова. Свет в оптически неоднородной среде с плавным изменением оптической плотности распространяется криволинейно (как показано на рисунке 2), загибаясь в область больших значений показателя преломления.

# Задачник Кванта

## Задачи

M756—M760; Ф768—Ф772

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Задачи этого номера предлагались на заключительном туре Всесоюзной олимпиады школьников. Число в скобках обозначает класс, в котором предлагалась задача. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 октября 1982 года по адресу: 117071, Москва, Ленинский проспект, 15, «Физматлит», «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 8 — 82» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M756, M757» или «Ф768».

Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи.

**M756.** В стране, кроме столицы, больше 100 городов. Столица страны соединена авиалиниями со 100 городами; каждый из остальных городов соединен авиалиниями ровно с 10 городами. Известно, что из любого города можно (быть может, с пересадками) перелететь в любой другой. Докажите, что можно закрыть половину авиалиний, идущих из столицы, так, что возможность попасть из любого города в любой другой сохранится.

**M757.** Из последовательности  $1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots$  нетрудно выделить арифметическую прогрессию длины три:  $1/2, 1/3, 1/6$ . Можно ли из этой последовательности выбрать арифметическую прогрессию  
а) длины 4?  
б) длины 5?  
с) длины  $k$ , где  $k$  — любое натуральное число?

*Г. Гальперин*

**M758\*.** Какое наименьшее количество чисел необходимо вычеркнуть из последовательности  $1, 2, 3, \dots, 1982$ , чтобы ни одно из оставшихся чисел не равнялось произведению двух других оставшихся чисел? (9)

*Л. Курляндчик*

**M759.** Внутри выпуклого четырехугольника, у которого сумма шести попарных расстояний между вершинами (то есть сумма длин всех сторон и диагоналей) равна  $S_1$ , расположен другой, для которого эта сумма равна  $S_2$ .  
а) Может ли величина  $S_2$  быть больше  $S_1$ ?  
б) Докажите, что  $S_2 < 4S_1/3$ .  
с) Докажите, что если внутри произвольного тетраэдра с суммой длин ребер  $S_1$  расположен другой, для которого эта сумма равна  $S_2$ , то  $S_2 < 4S_1/3$ . (10)

*П. Гусятников*

**M760.** С замкнутой ломаной  $A_1A_2\dots A_m$ , где  $m$  нечетно, проделывается такая операция: середины ее звеньев соединяются  $m$  отрезками через одну (середины  $A_1A_2$  — с серединой  $A_3A_4$ ,  $A_2A_3$  — с  $A_4A_5$ , ...,  $A_{m-1}A_m$  — с  $A_1A_2$ ,  $A_mA_1$  — с  $A_2A_3$ ). С полученной ломаной вновь проделывается эта же операция и т. д. Докажите, что

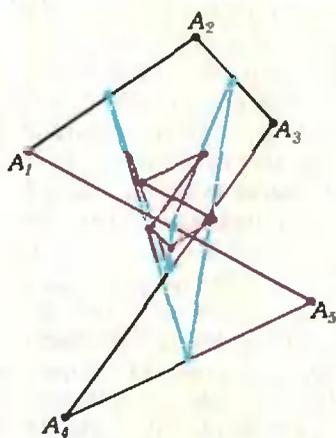


Рис. 1.

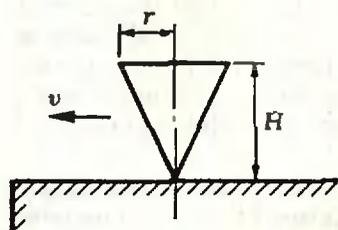


Рис. 2.

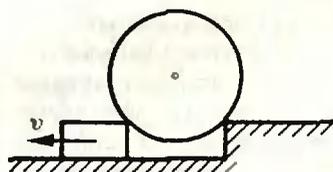


Рис. 3.

из любой  $m$ -звенной ломаной  
 а) при  $m=5$  — через два шага (рис. 1)  
 б) при  $m=7$  — через три шага  
 с)\* при любом нечетном  $m$  — через некоторое (зависящее от  $m$ ) число шагов получится ломаная, подобная (даже гомотетичная) первоначальной. (9)

А. Келарев

**Ф768.** По гладкому столу движется, быстро вращаясь вокруг своей оси, волчок, имеющий форму конуса (рис. 2). При какой скорости  $v$  поступательного движения волчок не ударится о край стола, соскочив с него? Ось волчка остается вертикальной. Размеры волчка указаны на рисунке 2. (8)

А. Зильберман

**Ф769.** Массивный цилиндр радиуса  $R$  опирается на две подставки одинаковой высоты (рис. 3). Одна подставка неподвижна, а другая выезжает из-под цилиндра со скоростью  $v$ . С какой силой давит цилиндр на неподвижную подставку в тот момент, когда расстояние между точками опоры равно  $R\sqrt{2}$ ? Считать, что в начальный момент подставки располагались очень близко друг к другу; трение между цилиндром и подставками отсутствует. (9)

С. Кротов

**Ф770.** В теплоизолированном цилиндре под легким поршнем находится смесь равных количеств воды и льда:  $m_w = m_l = 1$  кг. Давление на поршень медленно увеличивают от начального значения  $p_0 = 10^5$  Па до  $p_1 = 2,5 \cdot 10^6$  Па. Определить, сколько льда при этом растает и какую работу совершит внешняя сила. Известно, что для уменьшения температуры плавления льда на 1 градус нужно довести давление до  $14 \cdot 10^6$  Па.

1) Решите задачу, считая воду и лед несжимаемыми.

2) Оцените поправку, которую дает учет сжимаемости.

Известно, что для уменьшения объема некоторого количества воды на 1% давление нужно поднять до  $20 \cdot 10^6$  Па. Сжимаемость льда примите для оценки равной половине сжимаемости воды.

Удельные теплоемкости воды и льда —  $c_w = 4,2 \cdot 10^3$  Дж/(кг·К),  $c_l = 2,1 \cdot 10^3$  Дж/(кг·К); удельная теплота плавления льда  $\lambda = 3 \cdot 10^5$  Дж/кг, плотность льда  $\rho_l = 0,9\rho_w$ , где  $\rho_w$  — плотность воды. (9)

А. Буздин

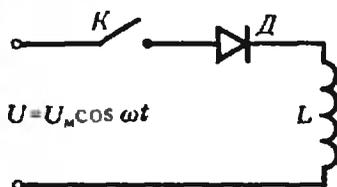


Рис. 4.

**Ф771.** В схеме, приведенной на рисунке 4, диод  $D$  и катушка с индуктивностью  $L$  в момент времени  $t=0$  при помощи ключа  $K$  подключаются к источнику переменного напряжения  $u = U_m \cos \omega t$ . Определить силу тока в катушке как функцию времени; построить график этой функции. Диод и катушку считать идеальными. Внутренним сопротивлением источника пренебречь. (10)

*В. Скороваров*

**Ф772.** Межпланетный корабль совершил мягкую посадку на Луну. Корабль имеет форму диска радиуса  $r=4$  м; его поверхность покрыта черной (неотражающей) краской. Можно ли обнаружить прилунение корабля с помощью самого большого в мире советского телескопа БТА с диаметром объектива  $D=6$  м, если в фокальной плоскости установить фотопластинку и сфотографировать участок поверхности Луны, в котором находится предполагаемое место прилунения?

Принять, что надежно различимая контрастность изображения на фотопластинке (то есть минимальная относительная разница в освещенности светлых и темных частей изображения) равна  $k=0,05$ .

Расстояние от Земли до Луны  $L=4 \cdot 10^5$  км; фотографирование ведется в свете с длиной волны  $\lambda=0,6$  мкм. Оценить, при каком размере букв, выложенных космонавтами на поверхности Луны, их можно прочесть при наблюдении с Земли с помощью телескопа БТА. (10)

*С. Козел*

## Problems

**M756—M760; P768—P772**

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (\*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these

**M756.** There are more than 100 cities in a certain country, not counting the capital. The latter is joined by direct flights to 100 cities; each of the remaining cities is joined by direct flights to exactly 10 cities. It is known that one can fly from any city to any other (eventually, with transfers). Prove that half the airlines flying from the capital can be closed down so that it will still be possible to fly from any city to any other.

**M757.** It is easy to see that the sequence  $1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots$  contains a three-term subsequence which is an arithmetical progression:  $1/2, 1/3, 1/6$ . Is it possible to find another subsequence, which is also an arithmetical progression,

- of length 4?
- of length 5?
- of length  $k$ , where  $k$  is any natural number?

*G. Galperin*

problems are first publications. The problems from this issue were proposed in the final round of the All-Union mathematical and physical olympiad this year. The number in brackets indicates the grade of the students to whom the problem was proposed. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than October 31st, 1982 to the following address: USSR, Moscow, 117071 МОСКВА, ЛЕНИНСКИЙ ПРОСПЕКТ 15, «ФИЗМАТЛИТ», «КВАНТ».

Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well as solutions from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. The list of prize-winners is published in the September issue.

**M758\***. What least amount of numbers is it necessary to cross out from the sequence 1, 2, 3, ..., 1982 so that none of the remaining numbers be the product of two other remaining numbers? (9)

*L. Kuriyandchik*

**M759**. A convex quadrilateral, for which the sum of all six distances between the vertices (i. e. the sum of lengths of the sides and diagonals) is  $S_1$ , contains another one, for which this sum is  $S_2$ .

a) Can  $S_2$  be larger than  $S_1$ ?

b) Prove that  $S_2 < 4S_1/3$ .

c) Prove that if an arbitrary tetrahedron, for which the sum of lengths of the six edges is  $S_1$ , contains another one, for which this sum is  $S_2$ , then  $S_2 < 4S_1/3$  (10)

*P. Gusiatiukov*

**M760**. The following operation is performed on the closed polygonal line  $A_1A_2...A_m$ , where  $m$  is odd: the centres of the segments are joined by  $m$  segments, skipping a centre each time (i. e. the centre of  $A_1A_2$  is joined to that of  $A_3A_4$ , of  $A_2A_3$  to  $A_4A_5$ , ..., of  $A_{m-1}A_m$  to  $A_1A_2$  of  $A_mA_1$  to  $A_2A_3$ ). The same operation is performed on the polygonal line thus obtained, etc. Prove that for any closed polygonal line with  $m$  vertices we get

a) in two steps, when  $m=5$  (see figure Рис. 1),

b) in three steps, when  $m=7$ ,

c)\* in a certain number of steps (depending on  $m$ ), for an arbitrary odd  $m$ ,

a polygonal line which is similar (even homothetic) to the original one. (9)

*A. Kelarev*

**P768**. A top of conical shape, rapidly spinning about its axis, moves on a smooth table (see figure Рис. 2). For what velocity  $v$  of its motion will the top jump off the table without hitting its edge? The axis of the top is vertical; the measurements of the top are shown on the figure. (8).

*A. Zilberman*

**P769**. A massive cylinder of radius  $R$  is placed on two supports of the same height, one of which is fixed, while the other moves out from under the cylinder with velocity  $v$  (see figure Рис. 3). What is the force exerted by the cylinder on the fixed support at the moment when the distance between the supports is  $R\sqrt{2}$ ? Assume that at the initial moment the supports were very close to each other and that there is no friction between the cylinder and the supports. (9)

*S. Krotov*

**P770**. In a thermoisolated cylinder a light piston compresses a mixture of equal amounts of water and ice:  $m_w = m_i = 1$  kg. The pressure on the piston slowly increases from the initial value  $p_0 = 10^5$  Pa to  $p_1 = 2.5 \times 10^6$  Pa. Determine how much ice will melt and find the work carried out by the external force. It is known that in order to decrease the temperature of ice melting by  $1^\circ\text{C}$ , the pressure must be increased to  $14 \times 10^6$  Pa.

1) Solve the problem, assuming that water and ice are incontractible.

2) Estimate the correction needed to take contractibility into account. It is known that in order to decrease the volume of a certain amount of water by 1% pressure must be increased to  $20 \times 10^6$  Pa. Assume in your estimate that the contractibility of ice is half that of water. The specific heat capacities of water and ice are

$$c_w = 4.2 \times 10^3 \text{ J / (kg} \cdot \text{K)}, \quad c_i = 2.1 \times 10^3 \text{ J / (kg} \cdot \text{K)}$$

the specific heat of ice melting is  $\lambda = 3 \times 10^5$  J/kg, the density of ice  $\rho_i = 0.9 \rho_w$ , where  $\rho_w$  is the density of water (9).

*A. Buzdin*

**P771**. In the circuit shown on figure Рис. 4, the diode and the solenoid of inductivity  $L$  are connected by means of the

key  $K$  at the moment  $t=0$  to a source of alternating tension  $u=U_m \cos \omega t$ . Determine the current in the solenoid as a function of time. Construct the graph of this function. The diode and the solenoid are assumed ideal, the inner resistance of the source may be neglected. (10).

V. Skorouarov

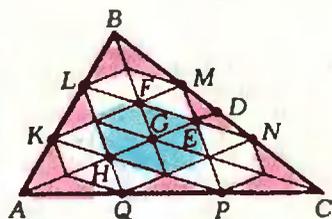
P772. An interplanetary space-ship made a soft landing on the Moon. The ship has the form of a disk of radius  $r=4$  m, its surface is covered by black (non-reflecting) paint. Can the landing on the Moon be observed from the largest telescope in the world, the Soviet telescope BTA with object lens diameter  $D=6$  m, if a photographic plate is placed in the focal plane to take a picture of the area of the Moon where the landing is to take place. Assume that clearly noticeable contrast of the image on the photo (i. e. the minimal relative difference of the dark and light parts of the image) is  $k=0,05$ . The distance from Earth to Moon is  $L=4 \times 10^5$  km; the picture is taken in light with wavelength  $\lambda=0,6$  mkm. Estimate the size of letters arranged by astronauts on the moon surface that can be read from the Earth using the BTA telescope. (10)

S. Kozel

## Решения задач

M721—M730; Ф733—Ф742

M721. Каждая сторона треугольника поделена на 3 равные части. Точки деления служат вершинами двух треугольников, пересечение которых — шестиугольник. Найдите площадь этого шестиугольника, если площадь данного треугольника равна  $S$ .



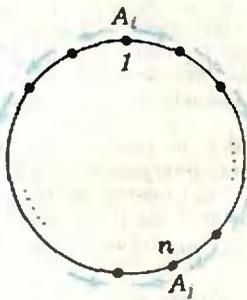
M722. В точках  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , расположенных по окружности, расставляются в некотором порядке числа  $1, 2, \dots, n$ . а) Докажите, что сумма  $n$  модулей разностей соседних чисел не меньше  $2n-2$ . б) Для какого количества расстановок эта сумма равна  $2n-2$ ?

Ответ:  $\frac{2}{9} S$ . Покажем, что данный треугольник можно разбить на 27 равновеликих треугольников, 6 из которых составляют рассматриваемый в задаче шестиугольник. Пусть  $K, L, M, N, P, Q$  — точки, делящие стороны треугольника  $ABC$ , как указано в условии (см. рисунок). Заметим, что отрезки  $KM$  и  $QN, QL$  и  $PM, KP$  и  $LN$  параллельны соответствующим медианам данного треугольника. Например, отрезок  $KM$  параллелен медиане  $AD$ , потому что  $\frac{|BK|}{|BA|} = \frac{|BM|}{|BD|} = \frac{2}{3}$  и, следовательно, треугольники  $BKM$  и  $BAD$  гомотетичны. Проводя из точек деления остальные отрезки, параллельные медианам, а также сами медианы, мы получим нужное разбиение.\* В самом деле, шестиугольник разбивается на 6 конгруэнтных треугольников (на рисунке — голубые), еще 12 треугольников (белые) конгруэнтны им, а остальные 9 (красные) им равновелики. (Скажем, площади треугольников  $MEN$  и  $MFE$  равны, потому что их стороны  $EN$  и  $EF$  конгруэнтны, а высоты, опущенные на эти стороны из вершины  $M$ , совпадают.) Таким образом, площадь шестиугольника равна  $6 \cdot \frac{S}{6+12+9} = \frac{2}{9} S$ .

A. Егоров

Пусть числа  $1$  и  $n$  стоят в точках  $A_i$  и  $A_j$  соответственно. Будем вычислять разности соседних чисел, пользуясь рисунком: число, стоящее в начале каждой стрелки, вычитается из числа, стоящего в ее конце.

\* Чтобы решение стало безупречным, надо еще доказать, что построенные нами отрезки, действительно, пересекаются по три, как показано на рисунке. Пусть, например,  $H$  — точка пересечения  $[KP]$  и  $[LQ]$ . Тогда треугольники  $LHP$  и  $BQC$  гомотетичны с центром  $A$ , следовательно,  $H \in [AD]$  ( $G$  — точка пересечения медиан). Аналогично точка  $E$  пересечения  $[LN]$  и  $[MP]$  лежит на  $AD$ , потому что треугольники  $MEN$  и  $BQC$  гомотетичны с центром  $D$ , и т. д.



**M723\***. Существует ли бесконечное множество натуральных чисел такое, что ни одно из чисел этого множества и никакая сумма нескольких из них не является степенью натурального числа ( $a^k$ , где  $k > 2$ )?

а) Очевидно, сумма разностей соседних чисел, стоящих на каждой из двух дуг с концами  $A_i$  и  $A_j$ , равна  $n-1$ . Поскольку сумма модулей нескольких чисел не меньше модуля суммы этих чисел, сумма модулей всех разностей не меньше  $2|n-1| = 2n-2$ . Заметим, что равенство возможно лишь в случае, когда все разности положительны.  
 б) Ответ: для  $n \cdot 2^{n-2}$  расстановок. Пусть сумма модулей разностей соседних чисел равна  $2n-2$ . Мы уже видели, что для этого необходимо и достаточно, чтобы все разности были положительны. Иначе говоря, на каждой из дуг от  $A_i$  до  $A_j$  числа должны возрастать в направлении, указанном на рисунке стрелками, от 1 до  $n$ . Любая такая расстановка полностью определяется заданием точки  $A_i$ , в которую ставят единицу, и набора чисел, стоящих на левой дуге между 1 и  $n$  (остальные числа однозначно расставляются на правой дуге). Точку  $A_i$  можно выбрать  $n$  способами. Набор чисел на левой дуге — это произвольное подмножество (возможно, пустое) множества  $\{2, 3, \dots, n-1\}$  из  $n-2$  элементов. Его можно выбрать  $2^{n-2}$  способами. Поэтому общее число расстановок, удовлетворяющих условию задачи, равно  $n \cdot 2^{n-2}$ .

А. Разборов

Первое решение. Приведем сначала чисто «олимпиадное» решение задачи, принадлежащее С. Конягину: требуемой последовательностью является последовательность  $2, 2^23, 2^23^25, 2^23^25^27, \dots, 2^{2^2} \dots p_{n-1}^2 p_n, \dots$ , где  $p_n$  —  $n$ -е простое число. Никакая сумма чисел, составленная из членов этой последовательности, не является степенью натурального числа, так как любая из таких сумм делится на  $p_k$ , где  $k$  — наименьший из номеров членов последовательности, входящих в эту сумму, и не делится на  $p_k^2$ .

Второе решение. Додумать до примера из первого решения довольно трудно. Поэтому мы покажем, как можно доказать существование последовательности с требуемыми свойствами, не выписывая самой последовательности («чистая» теорема существования).

В этом решении мы будем пользоваться понятием плотности множества.

**Определение.** Пусть  $A \subset \mathbb{N}$  и  $v_n(A)$  — число элементов множества  $A$ , не превосходящих данного числа  $n \in \mathbb{N}$ . Если существует предел последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n(A)}{n} = d(A),$$

то число  $d(A)$  называется *плотностью* множества  $A$ .

Например, плотность арифметической прогрессии  $A = \{a + dn | n \in \mathbb{N}\}$  равна  $\frac{1}{d}$ , а геометрической —  $A = \{bq^n | n \in \mathbb{N}\}$  равна 0. Равна нулю и плотность любого конечного множества.

Легко доказать, что плотность объединения нескольких множеств нулевой плотности также равна нулю и что плотность множества  $A \pm c$ , полученного из множества  $A$  нулевой плотности сдвигом на  $\pm c$  ( $A \pm c = \{a \pm c | a \in A\}$ ), равна нулю.

Докажем теперь следующее утверждение.

**Лемма.** Если  $d(A) = 0$ , то существует такое бесконечное множество  $B$ , что никакая сумма попарно различных чисел из  $B$  не принадлежит  $A$  и  $B \cap A = \emptyset$ .

**Доказательство.** Будем строить множество  $B$  по индукции. Так как  $d(A) = 0$ , существует натуральное число  $b_1 \notin A$ . Это и будет первый элемент множества  $B$ . Пусть выбраны  $k$  элементов множества  $B$ :  $b_1, b_2, \dots, b_k$ . Обозначим через  $r_1, r_2, \dots, r_s$  всевозможные суммы, образованные из этих чисел, и рассмотрим множества  $A_i = A - r_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ). Каждое из них имеет нулевую плотность, и поэтому их объединение  $V = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_s$  также имеет нулевую плотность. Следовательно, существует натуральное число  $b_{k+1}$ , не принадлежащее множествам  $V$  и  $A$ .

Ясно, что никакая из сумм чисел  $b_1, b_2, \dots, b_{k+1}$  не принадлежит множеству  $A$ . Существование множества  $B$  доказано.

В силу леммы для утвердительного ответа на вопрос задачи достаточно доказать, что множество  $S = \{a^k \mid a > 1, k > 2\}$  всевозможных степеней степеней натуральных чисел имеет нулевую плотность.

Оценим количество  $v_n(S)$  степеней, не превосходящих числа  $n$ . Если  $a^k < n$ , то  $a < \sqrt[k]{n}$ . Поэтому натуральных чисел,  $k$ -я степень которых не превосходит  $n$ , имеется не более, чем  $[\sqrt[k]{n}]$ , где  $[x]$  — целая часть числа  $x$ . В частности, при  $k > m = [\log_2 n]$  существует только одно такое число — единица. Следовательно,

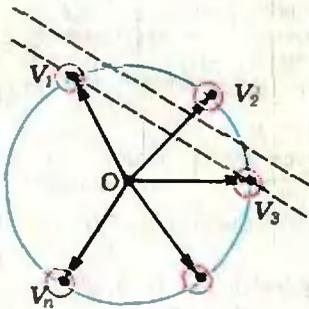
$$v_n(S) < \frac{[\sqrt{n}] + [\sqrt[3]{n}] + \dots + [\sqrt[m]{n}]}{n} < \frac{\sqrt{n} \log_2 n}{n} = \frac{\log_2 n}{\sqrt{n}}$$

Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получим

$$d(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(S) < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 n}{\sqrt{n}} = 0.$$

Л. Гурвиц

**M724.** По плоскости ползут несколько черепах, скорости которых равны по величине, но различны по направлению. Докажите, что, как бы черепахи ни были расположены вначале, через некоторое время они будут находиться в вершинах выпуклого многоугольника.



Пусть в начальный момент черепахи находились в точках  $A_1, \dots, A_n$ , расположенных в круге радиуса  $R$  с центром в точке  $O$ . Отложим от точки  $O$  векторы скоростей черепах  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ . Ясно, что концы  $V_1, \dots, V_n$  этих векторов являются вершинами некоторого выпуклого  $n$ -угольника, вписанного в окружность радиуса  $v$ , равного величине скорости любой черепахи. Построим круги радиуса  $\varepsilon$  с центрами в точках  $V_1, \dots, V_n$ . При достаточно малом  $\varepsilon$  любой многоугольник  $B_1 B_2 \dots B_n$ , вершины которого принадлежат этим кругам, очевидно, тоже будет выпуклым. (В качестве  $\varepsilon$  можно взять, например, половину наименьшего из расстояний от точек  $V_i$  до прямых, соединяющих соседние с  $V_i$  вершины, — см. рисунок.)

Пусть через время  $T$  черепахи оказались в точках  $A'_1, \dots, A'_n$ , и пусть при гомотетии с центром  $O$  и коэффициентом  $\frac{1}{T}$  эти точки переходят в точки  $B_1, \dots, B_n$ . Дока-

жем, что при достаточно большом  $T$  точки  $B_1, \dots, B_n$  попадают в построенные нами круги, то есть, что  $|V_i B_i| < \varepsilon$  при  $i = 1, \dots, n$ . Вектор  $\vec{OA}'_i$ , на который переместилась  $i$ -я черепаха за время  $T$ , равен  $T\vec{v}_i$ . Поэтому  $\vec{OA}'_i = \vec{OA}_i + T\vec{v}_i$ , а  $\vec{OB}_i = \frac{1}{T}\vec{OA}'_i = \vec{v}_i + \frac{1}{T}\vec{OA}_i = \vec{OV}_i + \frac{1}{T}\vec{OA}_i$ . Следовательно,  $|V_i B_i| = \frac{1}{T}|OA_i| \leq R/T$ . Значит,

при  $T > \frac{R}{\varepsilon}$  точки  $B_i$  попадут в круги радиуса  $\varepsilon$  с центрами  $V_1, \dots, V_n$ , многоугольник  $B_1 \dots B_n$  будет выпуклым, а потому и точки  $A'_1, \dots, A'_n$ , в которых оказались черепахи через время  $T$ , служат вершинами выпуклого многоугольника.

В. Прасолов

**M725.\*** Положим  $r_n = \cos^n \frac{\pi}{7} + \cos^n \frac{3\pi}{7} + \cos^n \frac{5\pi}{7}$ . Найдите а)  $r_1$  и  $r_2$ , б)  $r_3$  и  $r_4$ , в) Докажите, что  $r_n$  — рациональное число при любом  $n$ .

Пусть  $c_k = \cos \frac{\pi k}{7}$  при  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ . Заметим, что  $c_k$  — проекция на ось  $Ox$  единичного вектора  $\vec{e}_k$ , образующего угол  $\frac{\pi k}{7}$  с лучом  $x > 0, y = 0$  (см. рисунок). Легко убедиться в том, что  $c_{7+m} = c_{7-m} = -c_m$ .

а) Нетрудно доказать, что

$$\vec{e}_1 + \vec{e}_3 + \vec{e}_5 + \vec{e}_7 + \vec{e}_{-5} + \vec{e}_{-3} + \vec{e}_{-1} = 0 \quad (1)$$

(одно из доказательств: при повороте на угол  $\frac{2\pi}{7}$  эта

система векторов переходит в себя; при этом сумма не меняется и, следовательно, равна 0).

Из (1) сразу следует, что  $c_7 + 2c_1 + 2c_3 + 2c_5 = 0$ , то есть

$$r_1 = c_1 + c_3 + c_5 = -\frac{1}{2}c_7 = \frac{1}{2}.$$

Пользуясь известной формулой  $2\cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$ , получим  $2c_1^2 = 1 + c_2$ ,  $2c_3^2 = 1 + c_6$ ,  $2c_5^2 = 1 + c_{10}$ , а так как  $c_2 = -c_6$ ,  $c_6 = -c_1$ ,  $c_{10} = -c_3$ , находим

$$r_3 = c_1^2 + c_3^2 + c_5^2 = \frac{1}{2}(3 - c_1 - c_3 - c_5) = \frac{5}{4}.$$

б), в) Докажем, что  $c_1, c_3, c_5$  — корни многочлена третьей степени с рациональными коэффициентами. Рассмотрим многочлен

$$p(x) = (x - c_1)(x - c_3)(x - c_5) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3,$$

корни которого —  $c_1, c_3$  и  $c_5$ . Выразим коэффициенты этого многочлена через его корни. Раскрывая скобки, получим

$$a_1 = -(c_1 + c_3 + c_5) = -r_1 = -\frac{1}{2};$$

$$a_2 = c_1c_2 + c_3c_5 + c_5c_1 = \frac{1}{2}((c_1 + c_3 + c_5)^2 -$$

$$-c_1^2 - c_3^2 - c_5^2) = \frac{r_1^2 - r_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{5}{4}\right) = -\frac{1}{2};$$

$$a_3 = -c_1c_3c_5 = -c_1c_2c_4 = -\cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} =$$

$$= -\frac{\sin \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} =$$

$$= -\frac{\sin \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} =$$

$$= -\frac{\sin \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7}}{4 \sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{\sin \frac{8\pi}{7}}{8 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{8}.$$

Итак, для каждого  $j=1, 3, 5$  выполнено равенство

$$c_j^2 - \frac{1}{2}c_j^4 - \frac{1}{2}c_j + \frac{1}{8} = 0.$$

Значит, для любого  $n \geq 2$

$$c_j^{n+1} = \frac{1}{2}c_j^n + \frac{1}{2}c_j^{n-1} - \frac{1}{8}c_j^{n-2}.$$

Сложив три таких равенства (при  $j=1, 3, 5$ ), получим для  $r_n = c_1^n + c_3^n + c_5^n$  рекуррентную формулу

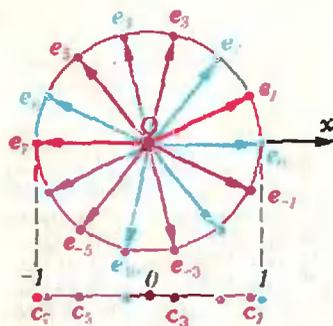
$$r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{2}r_{n-1} - \frac{1}{8}r_{n-2},$$

позволяющую вычислить  $r_{n+1}$ , если известны  $r_n, r_{n-1}, r_{n-2}$ .

Поскольку, в силу а),  $r_1 = \frac{1}{2}$ ,  $r_2 = \frac{5}{4}$ , а  $r_0 = 3$ , находим

$$r_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \cdot 3 = \frac{1}{2},$$

$$r_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{16}.$$



**M726.** Точка внутри правильного  $2n$ -угольника соединена с вершинами. Возникшие  $2n$  треугольников раскрашены попеременно в голубой и красный цвет. Докажите, что сумма площадей голубых треугольников равна сумме площадей красных а) для  $n=4$ , б) для  $n=3$ , в) для произвольного натурального  $n$ .

Ясно, что числа  $r_n$  при каждом  $n$  рациональны. (Подробнее о примененной в решении идее см. статью «Рассмотрим разность», «Квант», 1981, № 4.)

*Н. Васильев*

◆ Так как в правильном многоугольнике длины всех сторон равны, достаточно доказать, что сумма длин высот красных треугольников равна сумме длин высот голубых треугольников (см. рисунки).

Если  $n$  четно, то к противоположным сторонам  $2n$ -угольника примыкают треугольники одного цвета, поэтому сумма длин высот таких треугольников равна расстоянию между этими сторонами (рис. 1). Разбивая треугольники на пары, прилегающие к противоположным сторонам, сразу получаем утверждение задачи.

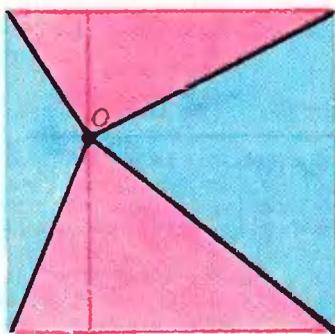


Рис. 1.

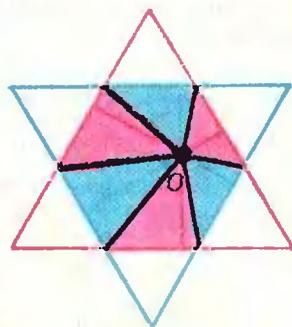


Рис. 2.

При нечетном  $n$ , продолжив «красные» стороны  $2n$ -угольника, получим правильный  $n$ -угольник (рис. 2). Построенный таким же образом голубой  $n$ -угольник конгруентен красному. Площадь голубого  $n$ -угольника равна сумме длин высот голубых треугольников, умноженной на половину длины его стороны. То же верно и для красного  $n$ -угольника. Отсюда вытекают равенство сумм длин высот голубых и красных треугольников и вместе с этим утверждение задачи.

*В. Прасолов*

**M727.** Докажите неравенство  $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$ , где  $a, b, c$  — длины сторон треугольника периметра 2.

◆ Если  $a, b$  и  $c$  — длины сторон треугольника периметра 2, то  $a < 1, b < 1, c < 1$  (в противном случае одна из сторон треугольника будет больше суммы двух других). Поэтому  $(1-a)(1-b)(1-c) > 0$ . Раскрывая скобки и преобразуя левую часть, получим

$$\begin{aligned} 1 - (a+b+c) + ab + bc + ac - abc &= \\ = -1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + ab + bc + ac - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - abc &= \\ = -1 + \frac{(a+b+c)^2}{2} - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - abc &= \\ = 1 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - abc > 0, \end{aligned}$$

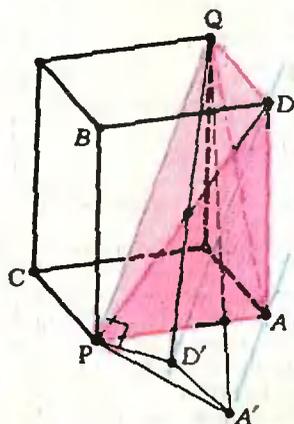
а это и значит, что  $a^2 + b^2 + c^2 < 2(1-abc)$ .

*А. Егоров*

**M728.** Пусть  $A, B, C$  — вершины параллелепипеда, соседние с его вершиной  $P$ , а  $Q$  — вершина, противоположная  $P$ . Докажите, что а) расстояния

◆ Плоскости  $PQA, PQB$  и  $PQC$  разрезают параллелепипед на 6 долек — тетраэдров. (Один из них — тетраэдр  $PQAD$  — выделен на рисунке красным цветом.) Мы докажем, что объем каждой «дольки» равен  $\frac{1}{3} dS$ .

от точек  $A, B, C$  до прямой  $PQ$  могут служить длинами сторон некоторого треугольника; б) площадь  $S$  этого треугольника, объем  $V$  параллелепипеда и длина  $d$  его диагонали  $PQ$  связаны соотношением  $V=2dS$ .



Рассмотрим, например, тетраэдр  $PQAD$ . Его объем не изменится, если сдвинуть вершину  $A$  по прямой  $AA'$ , параллельной диагонали  $PQ$ . В самом деле, вершины  $P, Q$  и  $D$  при этом остаются неподвижными, а расстояние от вершины  $A$  до плоскости  $PQD$  не меняется. Ясно, что и при перемещении точки  $D$  вдоль прямой  $DD'$ , параллельной  $(PQ)$ , объем тетраэдра сохранится. Сдвинем теперь вершины  $A$  и  $D$  в точки  $A'$  и  $D'$  так, чтобы плоскость  $PA'D'$  стала перпендикулярной диагонали  $PQ$  (см. рисунок).

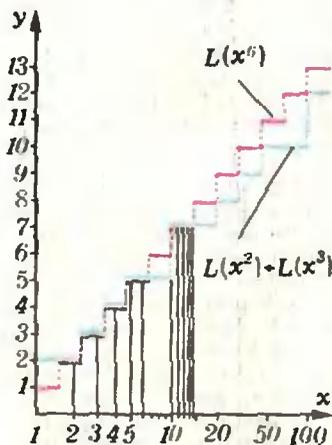
а) Поскольку отрезок  $A'P$  перпендикулярен к прямой  $PQ$ , его длина равна расстоянию от точки  $A'$  до этой прямой, то есть расстоянию от точки  $A$  до  $(PQ)$ . Точно так же, длина отрезка  $D'A'$  равна расстоянию от точки  $D$  до прямой  $AA'$ . При параллельном переносе  $\vec{DB}=\vec{AA'}$  точка  $D$  переходит в  $B$ , а прямая  $AA'$  — в  $(PQ)$ , поэтому  $|D'A'|$  — это расстояние от точки  $B$  до  $(PQ)$ . Аналогично доказывается, что  $|PD'|$  — это расстояние от точки  $C$  до  $(PQ)$ . Таким образом, длины сторон треугольника  $PA'D'$  равны расстояниям от точек  $A, B, C$  до прямой  $(PQ)$ . По условию его площадь равна  $S$ .

б) Как мы видели, объем тетраэдра  $PQAD$  равен объему тетраэдра  $PQA'D'$ . Площадь основания  $PA'D'$  этого тетраэдра равна  $S$ , а высота равна длине  $d$  ребра  $PQ$ , так как оно перпендикулярно основанию. Таким образом,

$$V_{PQAD} = \frac{1}{3} dS, \text{ а объем параллелепипеда } V = 6 \cdot \frac{1}{3} dS = 2dS.$$

В. Дубровский

**M729.** Найдите натуральное число, обладающее таким свойством: если записать рядом его квадрат и его куб, а затем переставить написанные цифры в обратном порядке, получится шестая степень этого числа.



Графическое решение уравнения  $L(x^6) = L(x^2) + L(x^3)$ . Масштаб на оси  $x$  — логарифмический. Корни уравнения выделены.

◆ Ответ (подсказываемый номером задачи): искомое число равно 3; для него  $3^2=9, 3^3=27, 3^6=729$ .

Догадаться до ответа нетрудно, но надо еще доказать, что других таких чисел нет. В нашем доказательстве, как во многих задачах про целые числа, используются оценки числа по величине (в данном случае — оцифика числа цифр) и соображения делимости.

Обозначим через  $L(x)$  количество цифр натурального числа  $x: L(x)=k+1$ , если  $10^k < x < 10^{k+1}$ . Для искомого числа должно выполняться равенство

$$L(a^6) = L(a^3) + L(a^2) \tag{1}$$

(см. рисунок). Чтобы выяснить, для каких  $a$  оно верно, удобно разбить натуральный ряд на отрезки

$$10^{\frac{m}{6}} < a < 10^{\frac{m+1}{6}}, \text{ где } 10^m < a^6 < 10^{m+1} \tag{2}$$

( $m=0, 1, 2, \dots$ ). Для чисел  $a$  на отрезке (2) величина  $L(a^6) = m+1$ , а также  $L(a^3)$  и  $L(a^2)$  принимают постоянные значения:

$$L(a^3) = \left[ \frac{m}{2} \right] + 1,$$

так как  $10^{\left[ \frac{m}{2} \right]} < 10^{\frac{m}{2}} < a^3 < 10^{\frac{m}{2} + \frac{1}{2}} < 10^{\left[ \frac{m}{2} \right] + 1}$ ;

$$L(a^2) = \left[ \frac{m}{3} \right] + 1,$$

так как  $10^{\left[ \frac{m}{3} \right]} < 10^{\frac{m}{3}} < a^2 < 10^{\frac{m}{3} + \frac{1}{3}} < 10^{\left[ \frac{m}{3} \right] + 1}$

(здесь  $[y]$  означает целую часть числа  $y$ ). Равенство (1) для таких  $a$  принимает вид

$$m = \left[ \frac{m}{3} \right] + \left[ \frac{m}{2} \right] + 1, \text{ или}$$

$$\frac{m}{6} + \left( \frac{m}{3} - \left[ \frac{m}{3} \right] \right) + \left( \frac{m}{2} - \left[ \frac{m}{2} \right] \right) = 1.$$

Последнее преобразование позволяет записать равенство совсем коротко, используя обозначение  $\{y\} = y - [y]$  для «дробной части» числа  $y$ :  $m/6 - \{m/3\} + \{m/2\} = 1$ . Величина  $\{m/2\}$  принимает только два значения: 0 и  $1/2$ , а  $\{m/3\}$  — только три: 0,  $1/3$  и  $2/3$ . Значения  $m$ , отвечающие шести возможным вариантам, представлены в таблице:

$\left\{\frac{m}{2}\right\}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$\left\{\frac{m}{3}\right\}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	
$m$	6	4	2	3	1	—	$(m < 0)$

При  $m = 1, 2, 3, 4$  получаем  $10^{\frac{1}{6}} < a < 10^{\frac{5}{6}}$ , то есть  $2 < a < 6$  ( $10^{\frac{1}{6}} \approx 1,4678$ , а  $10^{\frac{5}{6}} \approx 6,8731$ ). При  $m = 6$  получаем, что «подозрительные» числа лежат в интервале  $10 < a < 10^{\frac{7}{6}} \approx 14,678$ , то есть  $10 < a < 14$ .

Все «подозрительные» числа можно перебрать и получить ответ. Однако перебор можно еще сократить, воспользовавшись тем, что число и сумма его цифр дают одинаковые остатки при делении на 3. Если  $a$  не делится на 3, то есть  $a = 3k \pm 1$ , то  $a^2$  дает при делении на 3 остаток 1,  $a^3$  — либо 1, либо  $-1$ , а  $a^6$  — только 1. В любом случае сумма первых двух остатков не равна третьему, поэтому из цифр чисел  $a^2$  и  $a^3$  нельзя составить число  $a^6$ .

Осталось перебрать «подозрительные» числа, кратные трем: 3, 6, 12.

Н Васильев

**M730\***. Последовательность  $(a_n)$  определяется условиями

$$a_1 = 0, a_{2n+1} = a_{2n} = n - a_n.$$

(Например,  $a_{10} = 5 - a_5 = 5 - a_2 = 5 - (2 - a_1) = 3 + (1 - a_1) = 4$ .)

а) Выпишите первые 20 членов последовательности и найдите  $a_{1982}$ .

б) Докажите, что каждое натуральное число входит в последовательность 2 или 4 раза. Сколько раз встретится в ней число  $2^k$  (при каждом  $k = 1, 2, 3, \dots$ )?

в) Докажите, что разность  $a_n - a_{n-1}$  равна 1, если в разложение числа  $n$  на простые множители число 2 входит в нечетной степени, и 0 — в противном случае.

г) Докажите, что  $a_n = n/3$  для бесконечного множества значений  $n$ .

д) Найдется ли  $n$  такое, что разность  $|a_n - n/3|$  больше 1982?

е) Докажите, что  $\lim a_n/n = 1/3$ .



а) Ответ:  $a_1 = 0, a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 1, a_6 = a_7 = 2, a_8 = a_9 = 3, a_{10} = a_{11} = a_{12} = a_{13} = 4, a_{14} = a_{15} = a_{16} = a_{17} = 5, a_{18} = a_{19} = a_{20} = -a_{21} = 6; a_{1982} = 661$ .

Например,  $a_{1982} = 991 - a_{991} = 991 - a_{990} = 991 - (495 - a_{495}) = 496 + a_{494} = 496 + 247 - a_{247} = 743 - a_{246} = -743 - 123 + a_{123} = 620 + a_{122} = 620 + 61 - a_{61} = 681 - a_{60} = -681 - 30 + a_{30} = 651 + 15 - a_{15} = 661$ .

в) (Утверждение б) будет доказано позже.) Пусть  $n = 2^k s$ , где  $s$  — нечетное число. Назовем число  $n$  числом первого рода, если  $k$  нечетно, в противном случае будем называть его числом второго рода. Надо доказать, что разность  $a_n - a_{n-1}$  равна 1, если  $n$  — число первого рода, и 0 — если второго. Доказательство проведем индукцией по показателю  $k$ , с которым 2 входит в разложение числа  $n$  на простые множители. При  $k = 0$  (то есть при нечетном  $n$ ) утверждение очевидно. Предположим, что оно справедливо при  $k = l - 1$ , где  $l > 1$ , и  $n = 2^l s$ . Легко видеть, что  $a_n - a_{n-1} = 1 - (a_{2^{l-1}s} - a_{2^{l-1}s-1})$ . Если  $n$  — число первого рода ( $l$  нечетно), то  $2^{l-1}s$  — число второго рода, разность в скобках равна 0 по предположению индукции и, следовательно,  $a_n - a_{n-1} = 1$ . Если же  $n$  — число второго рода, то разность в скобках равна 1 и  $a_n - a_{n-1} = 0$ .

б), г) Согласно пункту в), каждый член  $a_n$  нашей последовательности, начиная с  $a_2$ , либо равен предыдущему (если  $n$  — число второго рода), либо больше предыдущего на единицу (если  $n$  — число первого рода). Поэтому номер  $n$  первого члена последовательности, равного данному натуральному числу  $a$ , всегда является числом первого рода. После члена  $a_n$  число  $a$  повторяется до тех пор, пока среди номеров, следующих за  $n$ , не появится снова число первого рода. Поскольку  $n$  четно,  $a_{n+1} = a_n = a$ . Если  $n + 2$  — число первого рода, то последовательность  $a_n$  принимает значение  $a$  ровно 2 раза. Если же  $n + 2$  — число второго рода, то оно делится на 4, следовательно,  $n + 4$  — число первого рода. В этом случае число  $a$  повторяется 4 раза

( $a_{n+3} = a_{n+2} = a_{n+1} = a_n = a$ ). Из сказанного также вытекает, что числа  $a_n$  последовательно пробегают весь натуральный ряд.

Выведем теперь явную формулу для  $a_n$ . В сумме  $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_2 - a_1)$  все слагаемые равны 0 или 1, причем единиц ровно столько, сколько чисел первого рода, не превосходящих  $n$ . Поэтому  $a_n$  равно количеству чисел первого рода, не превосходящих  $n$ . Легко показать, что

$$a_n = \left[ \frac{n}{2} \right] - \left[ \frac{n}{4} \right] + \left[ \frac{n}{8} \right] - \dots \quad (1)$$

(число ненулевых слагаемых здесь конечно, ибо  $n < 2^m$  при некотором  $m$ ). Для доказательства формулы (1) заметим, что  $\left[ \frac{n}{2} \right], \left[ \frac{n}{4} \right], \left[ \frac{n}{8} \right], \dots$  — это количества чисел, не превосходящих  $n$  и делящихся на 2, 4, 8, ... Поэтому разность  $\left[ \frac{n}{2} \right] - \left[ \frac{n}{4} \right]$  равна количеству чисел от 1 до  $n$ , которые делятся на 2 и не делятся на 4,  $\left[ \frac{n}{8} \right] - \left[ \frac{n}{16} \right]$  — это количество чисел от 1 до  $n$ , делящихся на 8, но не делящихся на 16, и т. д.

Вычислим  $a_n$  по формуле (1) для  $n = 3 \cdot 2^k$ . Если  $k$  нечетно, то

$$\begin{aligned} a_{3 \cdot 2^k} &= \frac{3 \cdot 2^k}{2} - \frac{3 \cdot 2^k}{4} + \dots + \frac{3 \cdot 2^k}{2^k} - \left[ \frac{3}{2} \right] = \\ &= 3(2^{k-1} - 2^{k-2} + \dots + 1) - 1 = 3 \frac{2^k + 1}{3} - 1 = 2^k. \end{aligned}$$

Заметим, что в этом случае  $n$  и  $n+2 = 2(3 \cdot 2^{k-1} + 1)$  — числа первого рода. Следовательно, при нечетном  $k$  число  $2^k$  встречается в нашей последовательности 2 раза. Пусть  $k$  — четное число. Тогда снова

$$a_{3 \cdot 2^k} = \frac{3 \cdot 2^k}{2} - \frac{3 \cdot 2^k}{4} + \dots + \left[ \frac{3}{2} \right] = 3 \frac{2^k - 1}{3} + 1 = 2^k.$$

Но теперь  $3 \cdot 2^k$  — число второго рода. Поэтому число  $2^k$  при четном  $k$  повторяется среди чисел  $a_n$  четыре раза. Попутно мы доказали утверждение г), так как  $a_n = n/3$  при всех  $n = 3 \cdot 2^k$ .

д) От в е т: да. Допустим, что  $n$  делится на 4. Тогда по формуле (1)

$$a_n = \frac{n}{2} - \frac{n}{4} + \left[ \frac{n}{8} \right] - \left[ \frac{n}{16} \right] + \dots = \frac{n}{4} + a_{\frac{n}{4}}. \quad (2)$$

Рассмотрим последовательность  $a_{n_m}$ , где  $n_m = \frac{4^m - 1}{3}$  при  $m = 1, 2, \dots$  ( $n_m$  — целое нечетное число при любом  $m$ ). Заметим, что  $\frac{n_m - 1}{4} = \frac{4^m - 4}{3 \cdot 4} = \frac{4^{m-1} - 1}{3} = n_{m-1}$ . Поэтому по формуле (2) для  $n = n_m - 1$

$$a_{n_m} = a_{n_m - 1} = n_{m-1} + a_{n_{m-1}}.$$

Следовательно,

$$a_{n_m} = n_{m-1} + n_{m-2} + \dots + n_1 + a_1 = \frac{n_m}{3} - \frac{m}{3}.$$

При  $m = 6000$  получим  $\left\lfloor a_{n_m} - \frac{n_m}{3} \right\rfloor = 2000 > 1982$ .

е) Заметим, что в формуле (1) число слагаемых, отличных от нуля, равно  $v = \lfloor \log_2 n \rfloor$ . Поэтому

$$\left| a_n - \left( \frac{n}{2} - \frac{n}{4} + \frac{n}{8} - \dots + (-1)^{v+1} \frac{n}{2^v} \right) \right| < v,$$

так как, снимая знаки целой части, мы допускаем в каждом слагаемом ошибку, меньшую 1. В скобках стоит сумма геометрической прогрессии. Вычисляя ее, получим

$$\left| a_n - \frac{n \left( 1 - \left( -\frac{1}{2} \right)^n \right)}{3} \right| < \log_2 n$$

или

$$\left| \frac{a_n}{n} - \frac{1}{3} + \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^n} \right| < \frac{\log_2 n}{n}$$

А так как  $\frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^n} \rightarrow 0$  и  $\frac{\log_2 n}{n} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ,  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{1}{3}$ .

В. Шевелев

**Ф733.** На «полуцилиндре» с радиусом основания  $R$  лежит гантелька длины  $l$  (рис. 1). Найти период малых колебаний гантельки.

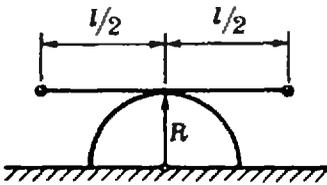


Рис. 1.

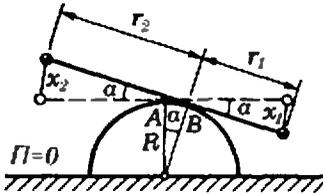


Рис. 2.

Пусть гантелька повернута на малый угол  $\alpha$  относительно положения равновесия (рис 2), точка  $B$  — точка касания стержня с полуцилиндром;  $\angle OVB = \alpha$  (поверхность полуцилиндра шероховатая, и гантелька не проскальзывает). Возникающие при этом моменты сил стремятся вернуть гантельку в положение равновесия. Поскольку угол  $\alpha$  мал, можно считать, что шарики гантельки будут двигаться по дугам окружностей радиусов

$$r_1 \approx \frac{l}{2} - |AB| = \frac{l}{2} - R\alpha, \quad r_2 = \frac{l}{2} + R\alpha.$$

Скорости шариков будут равны, соответственно.

$$v_1 = x_1' = (r_1 \alpha)' = \alpha' \left( \frac{l}{2} - 2R\alpha \right),$$

$$v_2 = x_2' = (r_2 \alpha)' = \alpha' \left( \frac{l}{2} + 2R\alpha \right).$$

Полная энергия гантельки остается постоянной и равной ее потенциальной энергии  $\Pi_0$  в момент максимального отклонения от положения равновесия. Когда гантелька отклонена на угол  $\alpha$  от положения равновесия, ее энергия равна

$$\begin{aligned} \Pi_1 + K &= mg(R + x_2) + mg(R - x_1) + \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = \\ &= m \frac{l^2 (\alpha')^2}{4} + 2mgR \left( 1 + \frac{\alpha^2}{2} \right) = \Pi_0 \end{aligned}$$

( $m$  — масса каждого шарика; стержень считаем невесомым; вычисляя  $v_1^2$  и  $v_2^2$  мы пренебрегли членами порядка  $\alpha^2 (\alpha')^2$ ). Продифференцируем полученное равенство:

$$\frac{ml^2 \alpha' \alpha''}{2} + 2mgR \alpha \alpha' = 0,$$

откуда

$$\alpha'' = - \frac{4gR}{l^2} \alpha.$$

Полученное уравнение является уравнением гармонических колебаний с частотой  $\omega = \sqrt{4gR/l^2}$ . Следовательно, период малых колебаний гантельки равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi l \sqrt{\frac{1}{gR}}.$$

А. Фролов

**Ф734.** Веревка, прикрепленная одним концом к боковой поверхности цилиндра у его основания радиуса  $r$ , обмотана вокруг цилиндра  $k$  раз

Сила натяжения веревки, действующая на груз, направлена перпендикулярно скорости груза. Следовательно, абсолютная величина скорости груза остается постоянной и равной  $v$ .

Рассмотрим движение в тот момент, когда веревка

( $k$  — целое число). К свободному концу веревки привязан груз. Грузу сообщают скорость  $v$ , направленную вдоль радиуса цилиндра (рис. 1). За какое время вся веревка снова наматается на цилиндр? Цилиндр закреплен на гладкой поверхности.

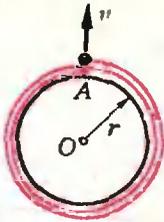


Рис. 1.

полностью смоталась с цилиндра и груз находится в точке  $C$  (рис. 2). За малый промежуток времени  $\Delta t$  груз переместится в точку  $C'$ . Поскольку  $\Delta t$  мало, угол  $\alpha$ , на который повернется вся веревка, мал и

$$\alpha = \frac{v \cdot \Delta t}{l} = \frac{\Delta l}{r} \Rightarrow rv \cdot \Delta t = l \cdot \Delta \alpha = \Delta \left( \frac{l^2}{2} \right).$$

Из последнего равенства находим время, в течение которого вся веревка длины  $l$  наматается на цилиндр:

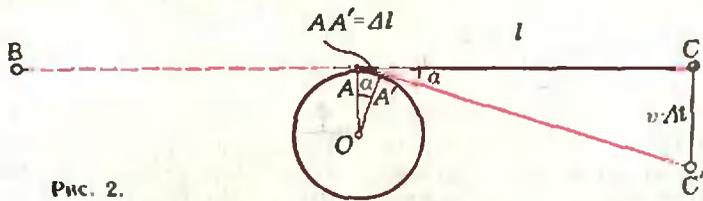


Рис. 2.

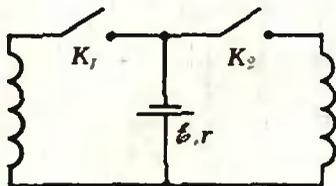
$t = \frac{l^2}{2rv}$ . За такое же время веревка сматывается с цилиндра, и груз оказывается в точке  $B$  (см. рис. 2). Время, за которое груз перемещается из точки  $B$  в точку  $C$ , равно  $\tau = pl/v$ .

Таким образом, полное время, за которое веревка длины  $l = 2\pi rk$  сматается с цилиндра и вновь наматается на него, равно

$$T = 2t + \tau = \frac{4\pi^2 k^2 r}{v} + \frac{2\pi^2 r k}{v} = \frac{2\pi^2 k r}{v} (2k + 1).$$

Б. Мукушев

♦735. Две одинаковые катушки индуктивности подключены через ключи  $K_1$  и  $K_2$  к источнику с постоянной ЭДС  $\varepsilon$  и внутренним сопротивлением  $r$  (см. рисунок). В начальный момент времени оба ключа разомкнуты. Затем замыкают сначала ключ  $K_1$ , а потом ключ  $K_2$ . Определить величину тока, протекающего через ключ  $K_1$  в момент замыкания ключа  $K_2$ , если известно, что после замыкания ключа  $K_2$  установившийся ток через ключ  $K_1$  в два раза больше установившегося тока через ключ  $K_2$ . Активными сопротивлениями катушек пренебречь.



После замыкания ключа  $K_1$  ток через катушку 1 (см. рисунок) будет нарастать. Пусть в тот момент, когда замыкают ключ  $K_2$ , величина этого тока равна  $I_0$ . После замыкания ключа  $K_2$  напряжения на концах катушек будут равны. Пренебрегая активными сопротивлениями катушек, можно записать это условие в виде

$$L \frac{dI_1}{dt} = L \frac{dI_2}{dt},$$

где  $L$  — индуктивность катушек, а  $I_1$  и  $I_2$  — токи в катушках 1 и 2 соответственно в некоторый произвольный момент времени после замыкания ключа  $K_2$ . Это же условие можно записать в другом виде:

$$\frac{d(I_1 - I_2)}{dt} = 0, \quad \text{или} \quad I_1 - I_2 = \text{const.}$$

то есть разность между абсолютными значениями токов в катушках в любой момент времени (при обоих замкнутых ключах) остается постоянной. Найдем эту разность  $I_1 - I_2$  исходя из начальных условий, то есть в момент подключения ключа  $K_2$ . В этот момент  $I_1 = I_0$ , а  $I_2 = 0$ ; следовательно,

$$I_1 - I_2 = I_0.$$

В установившемся режиме через катушки будут течь постоянные токи; обозначим их  $I_{\text{уст.1}}$  и  $I_{\text{уст.2}}$ . Разность потенциалов на концах катушек, а следовательно, и на концах батареи будет равна нулю. Если через батарею в это время течет ток  $I_0$ , то

$$\varepsilon - I_0 r = 0.$$

Следовательно, в установившемся режиме ток, протекающий через батарею, будет равен  $I_0 = \varepsilon/r$ . Из условия сохранения заряда можно записать

$$I_{\text{уст.1}} + I_{\text{уст.2}} = I_0 = \varepsilon/r. \quad (1)$$

Условие сохранения разности абсолютных значений токов

через катушки выполняется и для установившихся токов; поэтому

$$I_{уст.1} - I_{уст.2} = I_0 \quad (2)$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), получаем

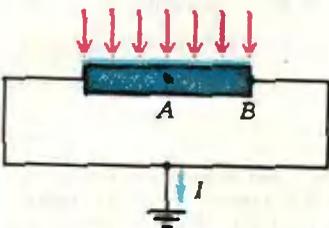
$$I_{уст.1} = \frac{I_0 + \mathcal{E}/r}{2}, \quad I_{уст.2} = \frac{\mathcal{E}/r - I_0}{2}$$

Используя заданное соотношение для установившихся токов —  $I_{уст.1}/I_{уст.2} = 2$  — найдем  $I_0$ :

$$I_0 = \mathcal{E}/3r.$$

В. Можжев

**Ф736.** На однородный стержень, оба конца которого заземлены, падает пучок электронов, причем на каждый сантиметр длины стержня попадает одно и то же число электронов в секунду. Сопротивление стержня  $R$ . Ток на участке заземления равен  $I$ . Найти разность потенциалов между серединой стержня  $A$  и его концом  $B$  (см. рисунок).



**Ф737.** Параллельный пучок света рассеивается, проходя пластинку  $P$ . Для любого луча, проходящего пластинку, максимальный угол отклонения от первоначального направления равен  $\alpha$ . Каков наименьший радиус светлого пятна, которое можно получить, поставив за пластинкой собирающую линзу  $L$  с фокусным расстоянием  $F$  (рис. 1)?

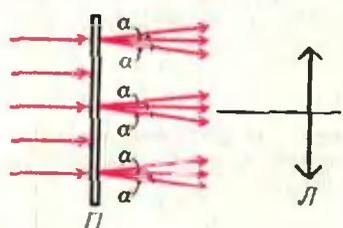


Рис. 1.

Поскольку стержень однородный, ток по нему растекается симметрично относительно точки  $A$ . Поэтому в точке  $A$  ток равен нулю, то есть  $I_A = 0$ .

Разобьем мысленно участок  $AB$  стержня на  $N$  одинаковых частей. Пусть в конце первого (от точки  $A$ ) участка ток равен  $I_1$ . Тогда в конце  $k$ -го участка ток равен  $I_k = kI_1$ ; в конце  $N$ -го участка, то есть в точке  $B$ , ток равен  $I_N = NI_1$ . В то же время ток  $I_N$  равен половине тока  $I$  на участке заземления, то есть  $NI_1 = I/2$ . Отсюда  $I_1 = I/2N$ .

Сопротивление каждого из участков равно  $R/2N$ , а падение напряжения на  $k$ -м участке равно

$$U_k = I_k R/2N = kI_1 R/2N = kIR/4N^2.$$

Разность потенциалов между точками  $A$  и  $B$  равна сумме падений напряжения на всех  $N$  участках. Следовательно,

$$U_{AB} = \sum_{k=1}^N U_k = \frac{IR}{4N^2} \sum_{k=1}^N k = \frac{IR}{8} \frac{N+1}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{IR}{8}.$$

И. Ликанский

Найдем границу освещенной области за линзой. Ее характер зависит от размера линзы (радиуса апертуры), от радиус светового пучка и от расстояния между пластиной и линзой. Пусть эти параметры равны соответственно  $r$ ,  $R$  и  $s$ .

При  $r > R + s \operatorname{tg} \alpha$  все рассеянные пластинкой лучи попадают на линзу (рис. 2). За линзой границу освещенной области образуют лучи  $1'$  и  $4'$  (результат преломления лучей  $1$  и  $4$ , определяющих границу падающего на линзу рассеянного пучка). Точки излома границы ниже оси обозначим  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Точка  $A$  находится в плоскости линзы на расстоянии  $R + s \operatorname{tg} \alpha$  от оси. Точка  $B$  — точка пересечения лучей  $1'$  и  $3'$  — находится в фокальной плоскости, так как лучи  $1$  и  $3$ , падающие на линзу, параллельны. Расстояние от точки  $B$  до оси равно  $F \operatorname{tg} \alpha$ . Точка  $C$  — точка пересечения лучей  $3'$  и  $4'$  — лежит в плоскости четкого изображения рассеивающей пластинки, так как здесь собираются вышедшие из одной точки пластинки лучи. Таким образом, точка  $C$  — изображение точки, находящейся

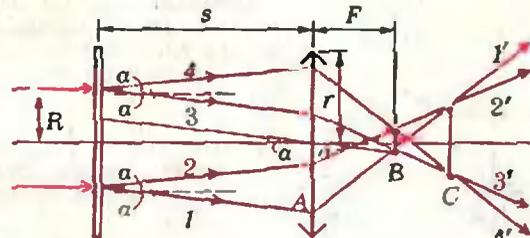


Рис. 2.  $r > R + s \operatorname{tg} \alpha$

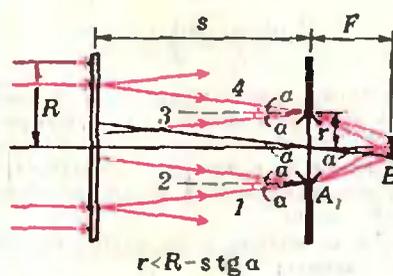


Рис. 3.

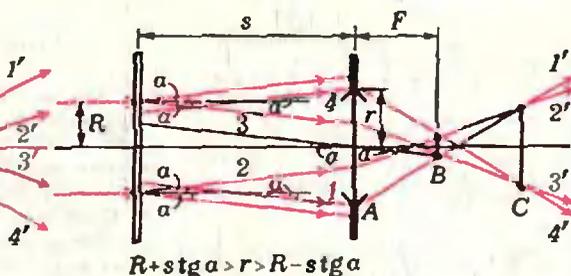


Рис. 4.

на расстоянии  $R$  от оси и на расстоянии  $s$  от плоскости линзы. Поэтому расстояние от  $C$  до оси равно  $RF/(s-F)$  (рассчитайте это сами).

Наименьшее пятно лежит в плоскости наиболее близкого к оси излома; поэтому его радиус равен минимальному из расстояний  $R + s \operatorname{tg} \alpha$ ,  $F \operatorname{tg} \alpha$  и  $RF/(s-F)$ . Соответственно, экран должен располагаться или вплотную к линзе, или в фокальной плоскости, или в плоскости четкого изображения пластинки. Отметим, что при  $s < F$  лучи  $3'$  и  $4'$  за линзой не пересекаются (изображение пластинки мнимое) и остаются лишь изломы  $A$  и  $B$ .

При  $r < R - s \operatorname{tg} \alpha$  границу освещенной области за линзой образуют «пределные» лучи, проходящие через края линзы (рис. 3). Изломы границы находятся в плоскости линзы на расстоянии  $r$  от оси (точка  $A_1$ ) и в фокальной плоскости, как и раньше, на расстоянии  $F \operatorname{tg} \alpha$  (точка  $B_1$ ). Больше изломов нет. Минимальное из значений  $r$  и  $F \operatorname{tg} \alpha$  дает радиус наименьшего пятна.

Наконец, в промежуточном случае  $R + s \operatorname{tg} \alpha > r > R - s \operatorname{tg} \alpha$  (рис. 4) изломы границы лежат в плоскости линзы, в фокальной плоскости и в плоскости четкого изображения пластинки на расстояниях  $r$ ,  $F \operatorname{tg} \alpha$  и  $RF/(s-F)$  соответственно.

При достаточно малом  $\alpha$  во всех этих случаях наименьшее пятно получится в фокальной плоскости, причем радиус этого пятна  $F \operatorname{tg} \alpha$  не зависит ни от радиуса первоначального пучка, ни от диаметра линзы. Интересно, что подобное сжатие пучка вблизи фокальной плоскости — его называют кроссовер — используется в электронном осциллографе для формирования узкого концентрированного электронного пучка.

И. Воробьев

**Ф738.** Частицы движутся гуськом с постоянными скоростями. Скорости частиц равномерно возрастают от значения  $v_1$  в голове колонны до значения  $v_2$  в хвосте колонны. В некоторый момент частицы занимают отрезок длины  $l_0$  и при этом на единицу длины приходится  $n_0$  частиц. Сколько частиц спустя время  $t$  будет приходится на единицу длины в хвосте колонны? в голове колонны?

Пусть частицы занимают отрезок длины  $l_0$  в момент времени 0. За время  $t$  частица в голове колонны совершит перемещение  $v_1 t$ , а частица в хвосте колонны —  $v_2 t$  (рис. 1). Задние частицы движутся быстрее и нагоняют частицы в начале колонны. Расстояние между самой первой и последней частицей сократится за время  $t$  на  $(v_2 - v_1)t$  и станет равным

$$l = l_0 - (v_2 - v_1)t.$$

Сокращение длины отрезка, занимаемого всеми частицами, определяется разностью скоростей частиц в конце и в начале этого отрезка. Это же справедливо для промежутка между любыми двумя частицами колонны.

Пусть в начальный момент времени какие-то две частицы находятся на расстоянии  $\Delta x_0$ . Тогда разность их скоростей равна

$$\Delta v = \frac{(v_2 - v_1)}{l_0} \Delta x_0$$

(так как скорости частиц равномерно возрастают к хвосту колонны). Расстояние между частицами за время  $t$  сократится на  $\Delta v t$  и станет равным

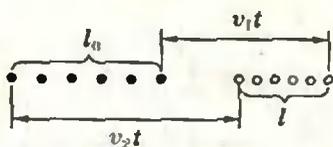


Рис. 1.

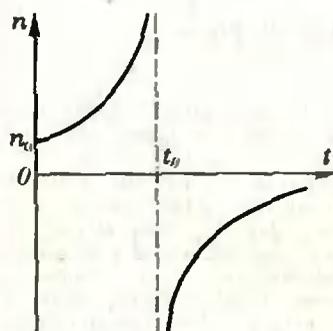
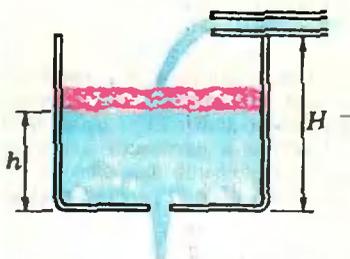


Рис. 2.

**Ф739.** В цилиндрический сосуд высоты  $H$  с площадью основания  $S$  из горизонтально расположенной трубы ежесекундно вливается масса воды  $M$ . В основании сосуда имеется небольшое отверстие. На поверхности воды в сосуде лежит тонкая легкая губка. С некоторого момента высота уровня воды в сосуде становится постоянной и равной  $h_0$ . Определить, с какой скоростью вытекает при этом вода из отверстия.



**Ф740.** В сосуде находится смесь газов — гелия и кислорода. При температуре  $t = -2^\circ\text{C}$  и давлении  $p = 0,9$  атм плотность этой смеси  $\rho = 0,44$  кг/м<sup>3</sup>. Каким станет давление в сосуде, если из него удалить половину молекул кислорода?

$$\Delta x = \Delta x_0 - \Delta v \cdot t = \left(1 - \frac{(v_2 - v_1)t}{l_0}\right) \Delta x_0.$$

Как видим, расстояния между любыми двумя частицами сокращаются с течением времени в одно и то же число раз; поэтому частицы остаются распределенными вдоль колонны равномерно. Иначе говоря, число  $n$  частиц, приходящихся на единицу длины колонны, одинаково в любом ее месте, как было и в начальный момент.

Чтобы найти  $n$ , поделим полное число частиц  $n_0 l_0$  на длину колонны в момент времени  $t$ :

$$n = \frac{n_0 l_0}{l_0 - (v_2 - v_1)t} = \frac{n_0}{1 - \frac{(v_2 - v_1)t}{l_0}}.$$

На рисунке 2 приведена зависимость  $n(t)$ . При приближении времени к моменту  $t_0 = l_0 / (v_2 - v_1)$  концентрация  $n$  частиц неограниченно возрастает и при  $t > t_0$  меняет знак, уменьшаясь в дальнейшем по абсолютному значению. Такое поведение  $n(t)$  нетрудно понять: к моменту времени  $t_0$  все частицы соберутся в одну точку — это и соответствует бесконечной концентрации; после этого, когда задние частицы обгонят передние, изменится порядок следования частиц — об этом и говорит изменение знака  $n$ .

И. Воробьев



В установившемся режиме силы, действующие на губку, уравновешены. Со стороны падающей воды на губку действует сила

$$F = \frac{M \cdot \Delta t \cdot \sqrt{2g(H-h_0)}}{\Delta t} = M \sqrt{2g(H-h_0)}.$$

Эта сила за время  $\Delta t$  совершает работу

$$\Delta A = F \cdot \Delta x = F \frac{\Delta V}{S} = F \frac{M \cdot \Delta t}{\rho S}.$$

Согласно закону сохранения энергии

$$\Delta A + \Delta \Pi = \Delta K,$$

или

$$\Delta A + M \cdot \Delta t \cdot g \cdot h_0 = M \cdot \Delta t \cdot \frac{v_1^2 - v^2}{2},$$

где  $v$  — скорость падающей на губку воды,  $v_1$  — скорость вытекающей из отверстия воды. Так как отверстие мало,  $v^2 \ll v_1^2$ . Окончательно получаем

$$\frac{F}{\rho S} + gh_0 = \frac{1}{2} v_1^2,$$

откуда

$$v_1 = \sqrt{2gh_0 + \frac{2M}{\rho S} \sqrt{2g(H-h_0)}}.$$

И. Омелян



Пусть в 1 м<sup>3</sup> смеси находится  $v_1$  молей гелия и  $v_2$  молей кислорода. Тогда полное число молей в объеме  $V = 1$  м<sup>3</sup> равно

$$v = v_1 + v_2 = \frac{pV}{RT} = \frac{0,9 \cdot 10^5 \cdot 1}{8,3 \cdot 271} \approx 40 \text{ моль}.$$

Масса смеси в этом объеме равна

$$m = m_1 + m_2 = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 = \rho V = 0,44 \text{ кг}.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = 40, \\ 4 \cdot 10^{-3} v_1 + 32 \cdot 10^{-3} v_2 = 0.44, \end{cases}$$

находим  $v_1$  и  $v_2$ :

$$v_1 = 30 \text{ моль}, \quad v_2 = 10 \text{ моль}.$$

Если удалить из сосуда половину молекул кислорода, то полное число молей станет равным  $v' = 35$  моль. Давление  $p'$  в сосуде при этом условии найдем из соотношения  $p/p' = v/v'$ :

$$p' = p \frac{v'}{v} = 0.9 \cdot 10^5 \cdot \frac{35}{40} \approx 0.79 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

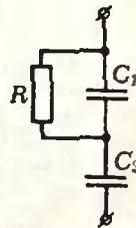
А. Зильберман

**Ф741.** В сеть переменного тока с напряжением 220 В и частотой 50 Гц подключены последовательно два конденсатора с емкостью 1 мкФ каждый. Параллельно одному из конденсаторов включен резистор с сопротивлением  $R = 100$  кОм (см. рисунок). Найти тепловую мощность.

Емкостное сопротивление на данной частоте  $f = 50$  Гц равно

$$Z_C = \frac{1}{2\pi f C} \approx 3 \cdot 10^5 \text{ Ом}.$$

Поскольку сопротивление резистора  $R = 10^5$  Ом, то есть



$R \gg Z_C$ , можно считать, что  $U_R \approx U/2 = 110$  В ( $U$  — напряжение сети). Таким образом, тепловая мощность равна

$$P = U_R^2/R = 0.12 \text{ Вт}.$$

А. Зильберман

**Ф742.** Стекланный сосуд прямоугольного сечения установлен между двумя собирающими линзами с фокусными расстояниями  $F$  перпендикулярно оптической оси линз (рис. 1). Точечный источник света  $S$  расположен в фокальной плоскости линзы  $L_1$ . Когда сосуд пустой, изображение источника наблюдается на экране  $\mathcal{E}$ , расположенном в фокальной плоскости линзы  $L_2$ . Сосуд заполняют прозрачной жидкостью, показав-

От точечного источника света  $S$  распространяется сферическая волна, то есть фронт волны (поверхность постоянной фазы) имеет вид сферы с центром в точке  $S$ . После прохождения линзы  $L_1$  фронт становится плоским (поскольку точка  $S$  находится в фокусе линзы  $L_1$ ). Плоскость фронта параллельна плоскости, в которой лежит линза, и боковым стенкам сосуда. Если бы сосуд был пустой, то после прохождения сосуда волновой фронт по-прежнему был бы параллелен стенкам сосуда. На линзу  $L_2$  падал бы пучок лучей, параллельных главной оси линзы, и изображение источника  $S$  находилось бы в правом фокусе линзы.

Когда сосуд заполнен жидкостью с меняющимся (по высоте) показателем преломления, ориентация волнового фронта в пространстве после прохождения сосуда меняется. Для нахождения фронта в этом случае воспользуемся

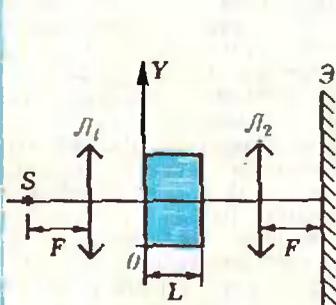


Рис. 1.

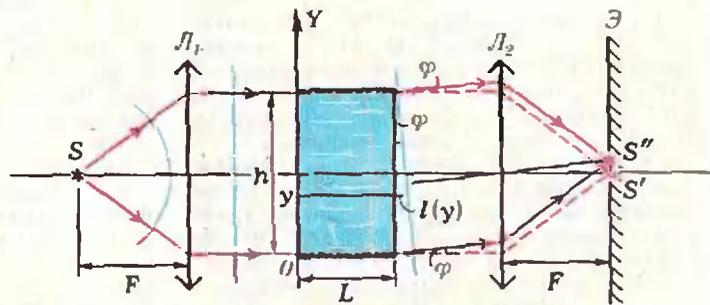


Рис. 2.

тель преломления которой меняется с высотой по закону  $n(y) = n_0 + ay$ . Толщина слоя жидкости равна  $L$ . На сколько сместится по вертикали изображение источника на экране? Изменение показателя преломления с глубиной сосуда считать малым в пределах диаметра светового пучка.

принципом Гюйгенса — Френеля. Согласно этому принципу фронт после прохождения светом сосуда будет представлять собой огибающую вторичных волн, источники которых лежат на левой боковой стенке сосуда.

Найдем положение фронта в тот момент времени, когда вторичные волны от источников, лежащих на левой стенке сосуда на высоте  $h$  от его дна (рис. 2), достигнут правой стенки сосуда. Время  $t$ , за которое эти волны пройдут расстояние  $L$ , равно

$$t = \frac{L}{c/n(h)} = L \frac{n_0 + ah}{c},$$

где  $c$  — скорость света в вакууме,  $n(h) = n_0 + ah$  — показатель преломления в жидкости на высоте  $y = h$ . То же расстояние  $L$  волны, распространяющиеся от источников, лежащих на левой стенке сосуда на высоте  $y < h$ , пройдут за время

$$t_1 = L \frac{n_0 + ay}{c} < t$$

(мы считаем, что  $a > 0$ ). Следовательно, за время  $t$  эти волны распространятся вправо от сосуда на расстояние

$$l(y) = (t - t_1)c = La(h - y).$$

Величина  $l(y)$  является линейной функцией  $y$ . Следовательно, после прохождения светом сосуда огибающая вторичных волн, то есть волновой фронт, будет представлять собой плоскость, наклоненную к боковой стенке сосуда под углом таким, что (см. рис. 2)

$$\operatorname{tg} \varphi = l(y)/(h - y) = La.$$

Таким образом, на линзу  $L_2$  будет падать пучок параллельных лучей, наклоненных под углом  $\varphi$  к оптической оси линзы. Изображение источника  $S$  будет получаться в фокальной плоскости линзы  $L_2$  на расстоянии

$$\delta = F \cdot \operatorname{tg} \varphi = FLa$$

от оси линзы. При  $a < 0$  изображение будет на столько же смещено вниз от оси.

В. Можжев

## Математика волшебного кубика

(Начало см. на с. 22)

12. «Перекрашенный кубик». Элементарные операции прежние, но 1) на каждом центральном кубике нарисована стрелка, регистрирующая его повороты; 2) куб покрашен в три цвета так, что цвета противоположных граней в нулевом состоянии одинаковы.

13. «Волшебный параллелепипед  $n \times m \times k$ ». Описание этой игры должно быть ясным из названия. Разумеется, неквадратные грани можно поворачивать только на  $180^\circ$ , и вращаются не только грани, но и внутренние слои. Даже среди 9 вариантов, отвечающих  $n, m, k \leq 3$ , имеются отнюдь не тривиальные. Вариант  $3 \times 3 \times 2$  выпускается в Венгрии под

названием «Домино». Недавно в Венгрии стал выпускаться кубик  $4 \times 4 \times 4$  под замечательным названием «Месь Рубика»!

14. «Волшебный кубик  $3 \times 3 \times 3$ ». (Для тех, кто немного знаком с четырехмерной геометрией.)

15. «Волшебный многогранник». В вершинах и в серединах ребер произвольного многогранника располагаются шарики разных цветов (число цветов равно общему числу вершин и ребер многогранника). За один ход разрешается циклически переставить все шарики одной грани. Состояние здесь полностью описывается перестановками  $\sigma_S$  и  $\tau_S$ .

16. «Волшебный тетраэдр». Нулевое состояние — правильный тетраэдр, каждая грань которого окрашена в один из четырех цветов. При «поворотах граней» перемещается 4 угловых и 6 реберных «элементов», форму которых уточнять не будем. Важно, что здесь, кроме перестановок, надо учитывать и их ориентацию. Другие варианты получаются с октаэдром, додекаэдром и икосаэдром.

### Задачи

1. Костя и Вадик после кино подсчитали оставшиеся у них деньги. Оказалось, что у Кости их в два раза больше, чем у Вадика. Вадик подумал и сказал: «Если бы у нас с тобой было денег в два раза больше, мы купили бы по 4 пряника и выпили по стакану «чистой» газированной воды по одной копейке за стакан». Более практичный Костя ответил: «Нечего мечтать! Давай купим по 3 конфеты и у нас еще останется на 3 стакана «чистой» газировки». Так они и сделали. Сколько денег оставалось у каждого мальчика, если разница в стоимости конфеты и пряника составляет 2 копейки?

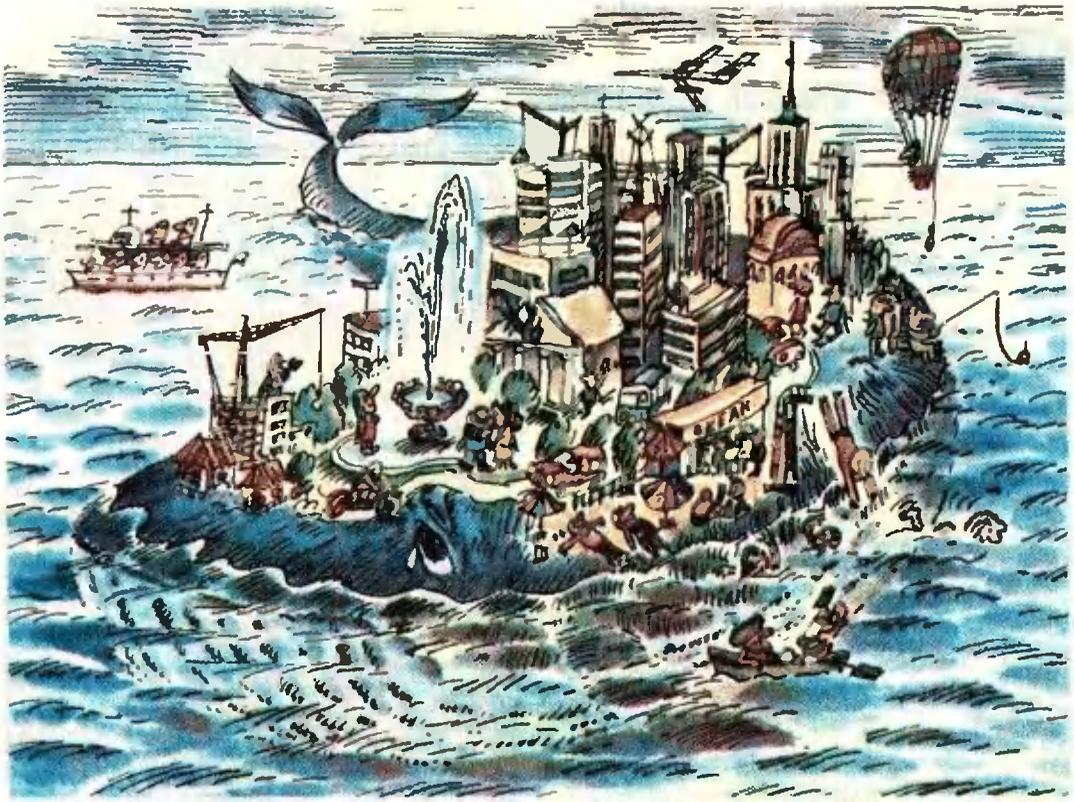
2. Окна в вагонах метро имеют форму, изображенную на рисунке. Закругления верхних углов рамы и стекла обычно делают в виде дуги окружности. Окно приоткрыли, сдвинув стекло на 10 см. Высота подвижной части окна равна 25 см. Чему равна площадь открытой части окна?

3. В стеклянный сосуд, имеющий форму куба, нужно налить воды на  $\frac{1}{3}$  его объема. Как это сделать, не имея никаких измерительных инструментов?

4. В очереди в школьный буфет стоят Юра, Миша, Володя, Саша и Олег. Юра стоит раньше Миши, но после Олега, Володя и Олег не стоят рядом, а Саша не находится рядом ни с Олегом, ни с Юрой, ни с Володей. В каком порядке стоят ребята?

Эти задачи нам предложили Ф. Бартеев, М. Мамикон, Д. Мукушев (ученик 8 класса Аркатской средней школы Абайского района Семипалатинской области). А. Сигрианский





Н. Родина

## Архимедова сила и киты

На суше гусь производит впечатлительное малоподвижной, неуклюжей птицы. «На красных лапках гусь тяжелый...» — так писал А. С. Пушкин, применяя очень выразительное слово «тяжелый» для характеристики птицы. Но вот гусь вошел в воду и поплыл... Теперь мы видим уже легкую, грациозную птицу, движущуюся быстро и свободно. Даже дуновения ветра достаточно, чтобы изменить скорость ее движения. Отчего такая перемена?

Особенности поведения тел в воде связаны с малым трением и наличием выталкивающей — архимедовой — силы.

Положите на стол пробку или пластмассовую крышечку от банки и подуйте на нее сбоку. Она не сдвинется с места. Поместите пробку

на поверхность воды — от дуновения она легко начнет двигаться. Вы убедитесь, что сила трения в воде намного меньше силы трения между твердыми телами.

А плавает пробка на поверхности воды потому, что равны друг другу две действующие на нее в противоположных направлениях силы: сила тяжести и архимедова сила.

В совершенстве приспособлено для жизни в воде тело самого большого животного на Земле — кита. Наиболее крупные представители отряда китообразных — голубые киты. Масса голубого кита достигает 130 тонн, но он способен развивать в воде скорость до 20 узлов (узел — скорость, равная одной морской миле в час, а так как морская миля равна 1,852 км, то узел — это скорость, равная 1,852 км/ч). Для сравнения укажем, что моторная лодка МКМ может развивать скорость до 30 км/ч, то есть около 16 узлов.

Кит кашалот, имеющий массу около 60 тонн, выскакивая из воды, поднимается над ее поверхностью на несколько метров.

Многое в поведении морских жи-

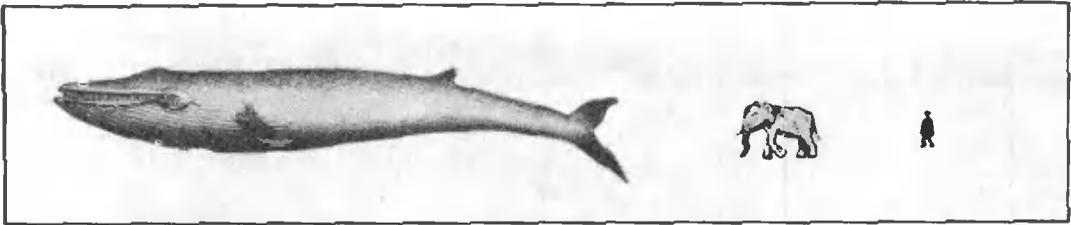


Рис. 1.

вотных мы с вами можем объяснить на основании законов и понятий физики. Но сначала ознакомимся с некоторыми данными о китах. Знаменитый исследователь морских глубин французский ученый Жак-Ив Кусто (это он изобрел акваланг) в своей книге «Могучий властелин морей» пишет: «Трудно описать ощущения человека, который впервые встречается в воде с китом... Прежде всего вас ошеломляют размеры кита. Они превосходят все, что человек привык видеть в мире животных, превосходят все, что он себе представлял».

Рисунок 1 дает представление о том, во сколько раз размеры голубого кита больше, чем размеры слона и человека. Длина этого кита достигает 33 м, он почти на 10 м длиннее пассажирского вагона! (Недаром в русских сказках упоминается «чудо-юдо рыба-кит», у которого «на спине село стоит».)

О массе китов мы уже говорили. Самый большой из добытых китов имел массу 150 000 кг, а самое большое наземное животное — слон — имеет массу от 3000 до 6000 кг (как язык некоторых китов!). Рассчитано, что если бы слон имел в два раза большую массу, то ему пупы были бы ноги вдвое толще, а они и так имеют площадь по 4 дм<sup>2</sup> каждая. (Подумайте и объясните, почему были бы необходимы такие ноги наземному животному.)

Тело плавает в воде, если действующие на него архимедова сила и сила тяжести равны между собой. Давайте рассчитаем архимедову силу, действующую на кита, и сравним ее с силой тяжести.

Архимедова сила равна весу жидкости, вытесненной погруженным в нее телом, то есть

$$F_A = g \rho_{ж} V,$$

где  $g \approx 10$  Н/кг,  $\rho_{ж}$  — плотность жидкости,  $V$  — объем тела. Как нам

вычислить объем кита? Сделаем это так: будем считать, что тело кита имеет форму цилиндра. Тогда объем равен  $V = \pi d^2 h / 4$ , где  $d$  — диаметр цилиндра,  $h$  — его высота. В нашем случае высота  $h$  — это длина кита. Чему равен диаметр нашего кита-цилиндра? Будем считать, что это средний диаметр тела кита. А средний диаметр оценим с помощью рисунка 1. Для этого измерим на рисунке диаметр кита в нескольких, например в десяти, разных местах: у головы, у хвоста, у середины. Среднее арифметическое этих измерений и примем за диаметр кита-цилиндра. Но только учтем, что рисунок 1 сделан в определенном масштабе: на рисунке длина кита  $\sim 7,5$  см, а на самом деле его длина — 30 м, так что масштаб рисунка равен 1:400.

Проделайте дальше все расчеты, и вы убедитесь, что архимедова сила, которая поддерживает кита в воде, исчисляется миллионами ньютонов. (Разумеется, вычисления ваши очень приближены, и нельзя сказать точно, сколько именно ньютонов; но то, что это число между одним и десятью миллионами, — точно.) Понятно, что такая сила удерживает в равновесии тело с массой в сотни тонн, а именно такую массу и имеет голубой кит. Кит в воде невесом, ведь сила тяжести, действующая на него, тоже исчисляется миллионами ньютонов (для вычисления силы тяжести нужно 9,8 Н/кг умножить на массу кита).

Конечно, кит не сможет находиться на суше. Известны случаи, когда киты по неизвестным пока до конца причинам выбрасываются на берег океана. Громадная сила тяжести (свыше миллиона ньютонов) прижимает животное к земле. Скелет кита не приспособлен к тому, чтобы выдерживать эту тяжесть; даже дышать кит не может, так как для вдоха



Рис. 2.

он должен расширить легкие, приподнять мышцы, окружающие грудную клетку, а в воздухе эти мышцы весят несколько десятков тысяч ньютонов.

Жак-Ив Кусто пишет: «...на суше перед гигантами вставали неразрешимые проблемы... дыхание требовало огромных усилий... на суше скелет кита не выдерживает веса мышц и жирового слоя, между тем как в плотной водной среде он отлично служит киту».

Во время экспедиции Кусто и его товарищи пытались спасти попавшего на мель китенка, масса которого была «всею» две тонны. Чтобы поднять его на борт судна, пришлось применить специальный гамак, так как даже новорожденный китенок может «слопаться» под действием собственной силы тяжести, если под ним нет равномерной опоры.

На рисунке 2 вы видите фотографию спящего в воде кита. Он не полностью погружен в воду. Значит, действующая на него выталкивающая сила должна быть меньше, чем в случае полного погружения (ведь эта сила равна весу жидкости, вытесненной китом). А сила тяжести осталась прежней. Казалось бы, равновесие должно нарушиться. Но кит спокойно спит на воде, он не тонет. Следовательно, выталкивающая сила и сила тяжести по-прежнему

равны друг другу. Как объяснить это кажущееся противоречие?

Теперь самое время рассказать о том, как кит дышит и как всплывает.

Хвост кита имеет горизонтальные лопасти и развивает мощность до 500 лошадиных сил (одна лошадиная сила — это единица мощности, равная примерно 736 Вт). Для сравнения скажем, что эта мощность только в два раза меньше мощности двигателя самолета АН-2 и в семь раз больше мощности двигателя трактора ДТ-75. Когда аквалангиста задевает корпусом плывущий кит, то «впечатление такое, словно толкнул мчащийся паровоз».

Могучим движением хвоста кит направляет свое тело в глубину океана — ныряет. Глубина погружения равна нескольким десяткам метров, а каналот достигает глубины в 1000—1200 метров. На такой глубине давление воды велико (рассчитайте его сами, учитывая, что плотность морской воды равна  $1030 \text{ кг/м}^3$ ). Легкие кита под этим давлением сжимаются до так называемого остаточного объема. У человека на глубине 60 м, где давление в четыре раза больше атмосферного, объем легких уменьшается в четыре раза — от 6 л на поверхности до 1,5 л; следовательно, для легких человека на глубине 60 м остаточный объем равен 1,5 л. От сжатия легких объем тела кита уменьшается, а с ним

уменьшается и выталкивающая сила.

По мере того как кит выплывает из глубины на поверхность воды, архимедова сила немного увеличивается (почему?). Вынырнув на поверхность, кит вдыхает воздух, объем его тела увеличивается; значит, увеличивается и выталкивающая сила. Сила тяжести уравновешивается такой же выталкивающей силой, какая действовала на кита, плавающего внутри жидкости, но теперь уже для создания такой же выталкивающей силы киту не нужно полностью погружаться в воду — ведь его объем стал больше. Итак, при вдыхании воздуха объем тела кита увеличивается настолько, что ему уже не нужно полностью погружаться в воду, чтобы вес вытесненной им воды равнялся силе тяжести, действующей на кита.

В связи с этим подумайте над такой задачей. Известно, что киты заплывают иногда в сильно опресненные лагуны у побережья Чукотского полуострова. Предположим, что в пресную воду заплыл кит, изображенный на фотографии (рис. 2). Что изменилось бы в расположении кита в этом случае, если считать, что все данные, кроме состава воды, не меняются?

И в заключение нашего рассказа — несколько вопросов.

Если массу кита разделить на его объем, то мы получим среднюю плотность его тела. Можно ли утверждать, что, где бы ни плавал кит — в глубине океана, в его средних слоях или на поверхности, средняя плотность тела кита всегда равна плотности воды? За счет чего изменяется средняя плотность?

Для наблюдений и съемок китов использовали воздушный шар, наполняемый горячим воздухом при помощи газовой горелки. Почему такой шар — монгольфьер — поднимается в воздух?

По мере подъема шара пламя горелки регулировали, и оказалось, что шар может быть уравновешен в воздухе так, что в безветренную погоду он будет сколь угодно долго висеть над одной точкой моря. Что можно в этом случае сказать о соотношении между массой вытесненного шаром воздуха и массой самого шара вместе с наблюдателем?

Попробуйте объяснить такое явление, наблюдавшееся Кусто: «...вода впереди пузырилась, словно газированная. Это стая рыбешек то уходила вглубь, то снова поднималась к поверхности и выпускала воздух из плавательных пузырей». Зачем рыбешки выпускают воздух из плавательных пузырей и когда именно они это делают: уходя вглубь или поднимаясь к поверхности?

«Квант» улыбается

## Словарь студента

Среди слов студенческого лексикона немало иностранных по происхождению. В каком языке проживали и что значили их прародители?

Большинство таких слов оказались «римлянами». Вот буквальные переводы их предков:

*Абитуриент* — тот, кто должен уйти.

*Аспирант* — помогающий.

*Аудитория* — выслушивание.

*Декан* — десятник.

*Интуиция* — внимательное разглядывание.

*Конспект* — обзор.

*Курс* — бег.

*Студент* — усердно работающий.

*Семинар* — рассадник.

*Сессия* — сидение.

*Факультет* — возможность.

*Экзамен* — взвешивание.

Слово *стипендия*, как пользующееся большой любовью студентов, заслуживает особого внимания. Так, стипендиум был введен впервые Римской республикой в 406-м году до н. э. и представлял собой уплату жалования солдатам во время походов. Надо думать, что римские воины тоже относились к нему с большой любовью, так как до этого вынуждены были ходить в походы «за свой счет».

Несколько слов имеют более древнее, а именно греческое происхождение. Это, в первую очередь, *диплом* — «лист, сложенный вдвое», и *кафедра*, которая

в те далекие времена была всего только стулом.

И, наконец, довольно молодое слово польского происхождения: *шпаргалки* — «иснужные, исписанные бумаги». Вот это уже совсем непонятно. Ведь попадись такая бумажка на «взвешивании» в нужный момент, она может заметно облегчить жизнь и приблизить получение «листа, сложенного вдвое».

Примечание. Каждый мало-мальски грамотный человек легко поймет, пользуясь этим словарем, что

*Деканат* — десятиничная.

*Первокурсник* — первоходимец.

*Заведующий кафедрой* — завхоз.

Читателям предлагается продолжить этот список. (Из газеты МФТИ «3и науку»)



М. Маринчук

## Квадратное уравнение в задачах по физике

Нередко при решении задачи для искомой величины получается квадратное уравнение. Как известно, такое уравнение имеет два корня, поэтому возникает необходимость проведения дополнительного анализа с тем, чтобы выяснить, какой именно корень отвечает на поставленный в задаче вопрос.

Физические задачи довольно разнообразны как по тематике, так и по степени трудности, вот почему единых приемов проведения такого дополнительного анализа не существует. В одних случаях, например, может оказаться, что один из корней лишен физического смысла, в других — что оба корня являются решением данной задачи, а в третьих — что оба корня имеют физический смысл, но на поставленный в задаче вопрос отвечает лишь одно значение.

Проиллюстрируем вышесказанное конкретными задачами из разных разделов физики. Вначале рассмотрим задачи, в которых оба корня квадратного уравнения для искомой величины, в принципе, дают ответ на поставленный вопрос. Однако некоторое видоизменение вопроса приводит к тому, что лишь один из корней оказывается подходящим.

**Задача 1.** *Маленький шарик брошен вертикально вверх с начальной скоростью  $v_0 = 10$  м/с. Через какое время его высота над точкой бросания будет равна  $h = 3,2$  м? Ускорение свободного падения принять равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>, сопротивлением воздуха пренебречь.*

Выберем начало координат в точке бросания шарика и направим координатную ось  $Ox$  вертикально вверх. Тогда координата  $x$  шарика в произвольный момент времени  $t$  равна  $x = v_0 t - gt^2 / 2$ . Подставив  $x = h$ , получаем квадратное уравнение для нахождения искомого времени:

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}, \text{ или } t^2 - 2 \frac{v_0}{g} t + \frac{2h}{g} = 0.$$

Корни этого уравнения равны

$$t_{1,2} = \frac{v_0}{g} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{2gh}{v_0^2}} \right).$$

В условиях задачи  $t_1 = 1,6$  с и  $t_2 = 0,4$  с.

Очевидно, оба полученных корня удовлетворяют поставленному в задаче вопросу, так как на высоте  $h$  шарик побывает дважды: спустя время  $t_2$  при движении вверх и спустя время  $t_1$  при движении вниз. Если ввести дополнительное условие, например на величину промежутка времени (наименьший или наибольший) или на направление движения (вверх или вниз), то решение задачи станет единственным.

**Задача 2.** *От источника тока с ЭДС  $\mathcal{E} = 500$  В необходимо передать энергию на расстояние  $l = 2,5$  км. Потребляемая мощность равна  $P = 10$  кВт. Найдите потери мощности в линии электропередачи, если диаметр медных подводных проводов  $d = 1,5$  см, а удельное сопротивление меди  $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$  Ом  $\cdot$  м. Внутренним сопротивлением источника тока пренебречь.*

Обозначим силу тока в цепи через  $I$ , а сопротивление подводных проводов через  $R$  и приравняем мощность  $P_{\text{и}}$  источника тока сумме передаваемой  $P$  и потерянной  $P_{\text{п}}$  мощностей:

$$P_{\text{и}} = P + P_{\text{п}}, \text{ или } I \mathcal{E} = P + I^2 R.$$

Относительно силы тока  $I$  это уравнение — квадратное. Его корни равны

$$I_{1,2} = \frac{\mathcal{E}}{2R} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4RP}{\mathcal{E}^2}} \right).$$

Сопротивление подводных проводов

$$R = \rho \frac{2l}{S} = \frac{8\rho l}{\pi d^2} = 0,48 \text{ Ом.}$$

Тогда для силы тока получаем два значения:

$$I_1 = 1021 \text{ А и } I_2 = 21 \text{ А,}$$

а для потерь мощности  $P_n = I^2 R$  —

$$P_{n1} \approx 500,4 \text{ кВт и } P_{n2} \approx 211,7 \text{ Вт.}$$

Оба результата отвечают поставленному в задаче вопросу. Они соответствуют двум разным значениям сопротивления нагрузки ( $R_n$ ), при которых потребляемая мощность ( $P = I^2 R_n$ ) одна и та же. В первом случае сопротивление нагрузки мало, ток велик, а потому велики и потери мощности. Во втором случае сопротивление нагрузки велико, ток в цепи, а следовательно, и потери мощности малы. Другими словами, коэффициент полезного действия (КПД) во втором случае больше, чем в первом.

Наложение дополнительного условия на величину потерь (или силы тока, или КПД) приведет к тому, что только один корень будет ответом на вопрос задачи.

**Задача 3.** Расстояние между двумя лампами силой света  $I_1$  и  $I_2$  равно  $L$ . На каком расстоянии от первой лампы следует поместить перпендикулярно к прямой, проходящей через лампы, лист бумаги, чтобы его освещенность со стороны первой лампы была в  $n$  раз больше, чем со стороны второй? Лампы считать точечными источниками света.

Пусть лист бумаги находится между лампами на расстоянии  $x$  от первой и на расстоянии  $L-x$  от второй (рис. 1). Тогда освещенности листа бумаги равны соответственно

$$E_1 = \frac{I_1}{x^2} \text{ и } E_2 = \frac{I_2}{(L-x)^2}.$$

С учетом условия задачи  $E_1 = nE_2$  после некоторых преобразований для искомого расстояния  $x$  получаем квадратное уравнение

$$(I_1 - nI_2)x^2 - 2I_1Lx + I_1L^2 = 0.$$

Заметим, что, если  $I_1 = nI_2$ , получаем  $x = L/2$ , то есть лист бумаги находится посередине между лампами. В таком случае, естественно, лам-

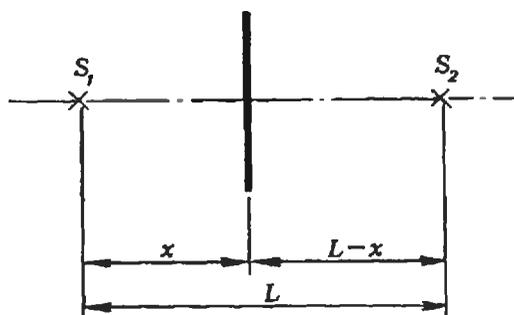


Рис. 1.

па, сила света которой в  $n$  раз больше, создает во столько же раз большую освещенность.

При  $I_1 \neq nI_2$  уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{L}{1 + \sqrt{nI_2/I_1}} \text{ и } x_2 = \frac{L}{1 - \sqrt{nI_2/I_1}}.$$

Первый корень  $x_1 < L$ , что соответствует нашему предположению — лист бумаги находится между лампами, которые освещают его с разных сторон. Второй же корень  $x_2 > L$  при  $nI_2 < I_1$  и  $x_2 < 0$  при  $nI_2 > I_1$ . Это означает, что лист бумаги находится вне отрезка, соединяющего лампы, которые освещают его с одной и той же стороны. В первом случае ( $x_2 > L$ ) лист находится правее лампы S<sub>2</sub>, а во втором случае ( $x_2 < 0$ ) — левее лампы S<sub>1</sub>.

Таким образом, оба корня ( $x_1$  и  $x_2$ ) квадратного уравнения являются решениями задачи. Однако если дополнительно оговорить, что лист бумаги освещается, например, с разных сторон (или с одной и той же стороны), то это приведет к тому, что корень  $x_2$  (или  $x_1$ ) перестанет удовлетворять требованиям задачи, и решение будет единственным.

\* \*  
\*

Теперь рассмотрим задачи, в которых оба корня не лишены физического смысла, однако только один из них соответствует поставленному вопросу.

**Задача 4.** Велосипедист, двигаясь равномерно со скоростью  $v_1 = 4$  м/с по прямолинейному участку пути, проезжает мост. Спустя время  $t = 3$  мин этот же мост проезжает мотоциклист. Он имеет скорость  $v_2 = 19$  м/с, но сразу после моста

начинает тормозить, так что его дальнейшее движение — равнозамедленное с ускорением, равным по модулю  $a = 0,15 \text{ м/с}^2$ . Через какое время после начала торможения и на каком расстоянии от моста мотоциклист догонит велосипедиста?

Выберем начало координат в конце моста и направим ось  $Ox$  по движению мотоциклиста и велосипедиста. Время  $t$  до встречи начнем измерять с момента прохождения мотоциклистом конца моста. Тогда для координат велосипедиста и мотоциклиста имеем, соответственно,

$$x_1 = v_1(\tau + t) \text{ и } x_2 = v_2 t - \frac{at^2}{2}.$$

Приравнивая координаты  $x_1 = x_2$ , получаем для времени  $t$  квадратное уравнение

$$t^2 - \frac{2(v_2 - v_1)}{a} t + \frac{2v_1\tau}{a} = 0,$$

корни которого равны

$$t_{1,2} = \frac{v_2 - v_1}{a} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{2v_1 a \tau}{(v_2 - v_1)^2}} \right).$$

Подставив конкретные значения, найдем

$$t_1 = 120 \text{ с и } t_2 = 80 \text{ с}.$$

Какое же значение соответствует условию задачи? Для ответа на этот вопрос определим скорости мотоциклиста  $v'_2$  и  $v''_2$  в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ :

$$v'_2 = v_2 - at_1 = 1 \text{ м/с} \\ \text{и } v''_2 = v_2 - at_2 = 7 \text{ м/с}.$$

Заметим, что  $v'_2$  меньше скорости  $v_1$  велосипедиста, а  $v''_2$  больше этой скорости.

Очевидно, условию задачи соответствует только второе значение времени встречи  $t_2 = 80 \text{ с}$  — в этот момент догоняющий мотоциклист должен иметь скорость большую, чем скорость догоняемого велосипедиста. При этом расстояние от конца моста до места встречи равно

$$L = v_1(\tau + t_2) = 1040 \text{ м}.$$

Однако первый корень тоже имеет определенный физический смысл. Вначале скорость  $v_2$  больше скорости  $v_1$ , в момент времени  $t_2 = 80 \text{ с}$

мотоциклист догоняет велосипедиста и затем обгоняет его. С течением времени скорость мотоциклиста уменьшается, в некоторый момент ( $t = 100 \text{ с}$ ) она становится равной скорости велосипедиста, затем продолжает уменьшаться дальше, и в момент времени  $t_1 = 120 \text{ с}$  велосипедист догоняет мотоциклиста.

Ясно, что корень  $t_1$  тоже мог бы стать решением задачи, если бы в ней требовалось найти просто время встречи, а не время, через которое мотоциклист догонит велосипедиста.

**Задача 5.** Тело массой  $m$  находится на высоте  $H$  над поверхностью стола. Под ним на столе в вертикальном положении закреплена недеформированная пружина длиной  $l_0$  и с коэффициентом жесткости  $k$ . Найдите максимальную деформацию пружины при свободном падении тела на нее.

При падении тела на пружину его потенциальная энергия в поле тяжести Земли частично переходит в потенциальную энергию сжатой пружины (кинетическая энергия и в начальном, и в конечном положениях равна нулю). Отсчитывая потенциальную энергию тяготения от поверхности стола, для энергии поднятого над столом тела получим

$$E_1 = mgH.$$

Если максимальная деформация пружины равна  $x_m$ , то в этом случае потенциальная энергия тяготения равна  $mg(l_0 - x_m)$ , а потенциальная энергия сжатой пружины равна  $kx_m^2/2$ . Следовательно, в момент максимальной деформации пружины энергия системы равна

$$E_2 = mg(l_0 - x_m) + \frac{kx_m^2}{2}.$$

Из закона сохранения механической энергии  $E_1 = E_2$  следует уравнение

$$mgH = mg(l_0 - x_m) + \frac{kx_m^2}{2},$$

или

$$x_m^2 - \frac{2mg}{k} x_m - \frac{2mg(H - l_0)}{k} = 0,$$

корни которого

$$x_{1,2} = \frac{mg}{k} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{2k(H-l_0)}{mg}} \right).$$

Ответом на поставленный в задаче вопрос является первый, положительный корень

$$x_{m1} = \frac{mg}{k} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2k(H-l_0)}{mg}} \right).$$

Второй корень является отрицательным, однако и он не лишен физического смысла, который можно легко установить. Представим себе, что, как только тело касается пружины, оно прилипает к ней, и возникают колебания. После достижения максимальной величины деформация сжатия уменьшается, а затем переходит в деформацию растяжения. Ее максимальное значение и выражается отрицательным корнем, то есть оно равно

$$|x_{m2}| = \frac{mg}{k} \left| 1 - \sqrt{1 + \frac{2k(H-l_0)}{mg}} \right|.$$

\* \* \*

В заключение обсудим задачи, в которых один из корней не имеет физического смысла.

**Задача 6.** Вдоль главной оптической оси собирающей линзы расположен тонкий стержень длины  $l=15$  см так, что расстояние между линзой и ближайшим к ней концом стержня превышает ее фокусное расстояние. При этом изображении концов стержня в линзе находятся на расстояниях  $f_1=36$  см и  $f_2=60$  см от нее. Найдите фокусное расстояние линзы.

Построим изображение  $A'B'$  стержня  $AB$  в линзе (рис. 2). Из рисунка 2 видно, что изображение ближнего к линзе конца стержня (точки  $B$ ) находится дальше от линзы, чем изображение дальнего конца стержня (точки  $A$ ). В задаче даны расстояния  $f_1 = |OA'|$  и  $f_2 = |OB'|$ ; следовательно,  $d_1 = |OA|$ ,  $d_2 = |OB|$ , а длина стержня  $l = d_1 - d_2$ .

Из формулы линзы  $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$  имеем  $d = \frac{fF}{f-F}$ .

Тогда

$$l = d_1 - d_2 = \frac{f_1 F}{f_1 - F} - \frac{f_2 F}{f_2 - F}.$$

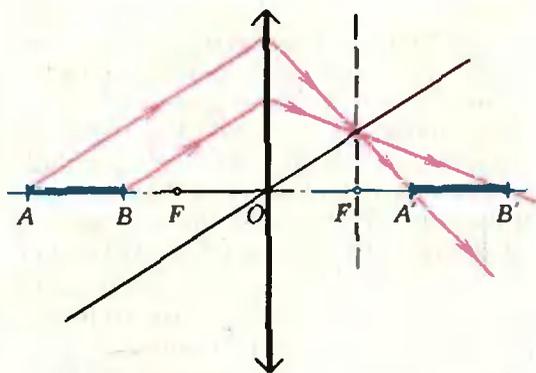


Рис. 2.

Это и есть уравнение для определения искомого фокусного расстояния  $F$ . Приведем его к стандартному виду квадратного уравнения:

$$(f_2 - f_1 - l) F^2 + l(f_1 + f_2) F - lf_1 f_2 = 0$$

и найдем корни:

$$F_{1,2} = \frac{-l(f_1 + f_2) \pm \sqrt{l(f_2 - f_1)(4f_1 f_2 + l f_2 - l f_1)}}{2(f_2 - f_1 - l)}$$

Подставив числовые значения и выполнив соответствующие вычисления, получим  $F_1 = 20$  см и  $F_2 = -180$  см. Второй корень — отрицательный — не имеет физического смысла, так как фокусное расстояние собирающей линзы положительно. Таким образом, искомого фокусного расстояние линзы  $F = 20$  см.

**Задача 7.** Однородный деревянный стержень может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. Под стержнем расположили сосуд с водой так, что стержень оказался частично погруженным в воду (рис. 3). Какая часть стержня находится в воде, если плотность дерева  $\rho_1 = 0,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, а плотность воды  $\rho_2 = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>?

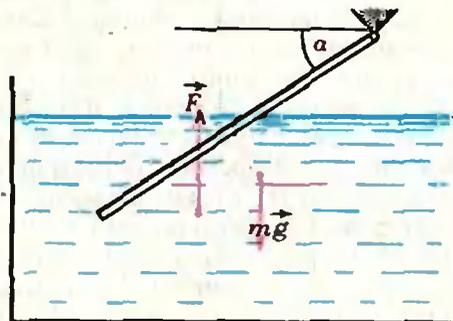


Рис. 3.

Условием равновесия тела с неподвижной осью вращения является равенство нулю алгебраической суммы моментов сил, действующих на это тело. Относительно оси вращения моменты создают две силы: сила тяжести  $m\vec{g}$ , приложенная к центру тяжести стержня, и сила Архимеда  $\vec{F}_A$ , приложенная к центру тяжести погруженной в воду части стержня.

Обозначим через  $l$  длину стержня, через  $S$  — площадь его поперечного сечения, через  $x$  — часть длины стержня, погруженную в воду. Тогда сила тяжести стержня  $mg = \rho_1 l S g$ , а сила Архимеда  $F_A = \rho_2 x l S g$ . Плечи этих сил равны  $l/2 \cos \alpha$  и  $l(1-x/2) \cos \alpha$  соответственно.

Условие равновесия стержня относительно оси вращения имеет вид

$$mg \frac{l}{2} \cos \alpha - F_A l \left(1 - \frac{x}{2}\right) \cos \alpha = 0.$$

После подстановки выражений для сил и некоторых преобразований для искомой величины  $x$  получим квадратное уравнение

$$x^2 - 2x + \frac{\rho_1}{\rho_2} = 0.$$

Корни этого уравнения равны

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}},$$

или

$$x_1 = 1,45 \text{ и } x_2 = 0,55.$$

Очевидно, что доля длины стержня не может превышать единицы, поэтому первый корень лишен физического смысла.

Таким образом, в воде находится 0,55 длины стержня.

**Задача 8.** *Стеклянная трубка длины  $L = 125$  см расположена вертикально запаянным концом вниз. Доходящий до открытого верхнего края трубки столбик ртути высотой  $h$  отделяет находящийся в ней воздух от атмосферы. Трубку осторожно переворачивают открытым концом вниз, при этом часть ртути выливается. Найдите высоту оставшегося в трубке столбика ртути, если атмосферное давление  $p_a = 75$  см рт. ст. Решите задачу при а)  $h = 60$  см; б)  $h = 40$  см.*

Применим закон Бойля — Мариотта к столбику воздуха, заключен-

ного в трубке:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2.$$

В исходном состоянии его давление складывается из атмосферного давления и давления столбика ртути высотой  $h$ :

$$p_1 = p_a + \rho g h, \text{ или } p_1 = \rho g (H + h),$$

где  $\rho$  — плотность ртути,  $H$  — высота ртутного столба, создающего давление, равное атмосферному. Объем, занимаемый воздухом в этом случае, равен  $V_1 = (L - h) S$ , где  $S$  — площадь поперечного сечения трубки.

Обозначим через  $x$  высоту столбика ртути, оставшейся в трубке после переворачивания. Тогда

$$p_2 = p_a - \rho g x = \rho g (H - x) \\ \text{и } V_2 = (L - x) S.$$

Подставив соответствующие значения давлений и объемов в выражение закона Бойля — Мариотта, получим уравнение для нахождения искомой величины  $x$ :

$$\rho g (H + h) (L - h) S = \\ = \rho g (H - x) (L - x) S,$$

или

$$x^2 - (H + L)x + h(H + h - L) = 0.$$

Корни этого уравнения равны

$$x_{1,2} = \frac{H + L}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4h(H + h - L)}{(H + L)^2}}\right).$$

Выполним числовые расчеты для предусмотренных в задаче двух случаев.

а) При  $h = 60$  см получаем  $x_1 \approx 197$  см и  $x_2 \approx 3$  см. Очевидно, что первый корень не удовлетворяет условиям задачи — высота оставшегося в трубке столбика ртути не может превышать его первоначальную высоту (не говоря уже о том, что она не может превышать длину всей трубки). Второй корень отвечает поставленному в задаче вопросу, то есть высота оставшегося в трубке столбика ртути равна приблизительно 3 см.

б) При  $h = 40$  см корни принимают значения  $x_1 = 202$  см и  $x_2 = -2$  см. Первый корень не удовлетворяет условиям задачи по тем же причинам, что и в предыдущем случае. Второй корень также не подходит, так как высота столбика ртути не

может быть отрицательной. Таким образом, при  $h=40$  см задача не имеет решения. Физически это означает, что предусмотренная в задаче ситуация фактически не реализуется — ртуть вытекает из трубки не частично, а полностью. При этом воздух, первоначально находившийся в трубке, занимает объем, превышающий объем самой трубки.

#### Упражнения

1. Вертолет поднимается вертикально вверх равномерно со скоростью  $v_0$ . В момент, когда его высота над землей равнялась  $H$ , из него был свободно отпущен груз. Через какое время после этого груз достиг земли? Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. К потолку на пружине подвешено находящееся на подставке тело. В начальный момент времени пружина не деформирована. Подставка начинает двигаться вниз с постоянным ускорением  $a < g$ . Найдите время, через которое тело оторвется от подставки, а также максимальное растяжение пружины. Масса тела  $m$ , коэффициент жесткости пружины  $k$ .

3. Узкую цилиндрическую трубку длины  $L=90$  см, открытую с обоих концов, погружают вертикально в сосуд со ртутью так, что ртуть занимает третью часть длины трубки. Затем верхний конец трубки закрывают и вынимают ее полностью из сосуда со ртутью. Найдите высоту оставшегося в трубке столба ртути, если атмосферное давление  $p_a=10^5$  Па.

4. Точечные положительные электрические заряды  $+q$  и  $+2q$  находятся на расстоянии  $L$  друг от друга. В каком месте прямой, проходящей через эти заряды, следует поместить отрицательный электрический заряд, чтобы он находился в равновесии?

5. Найдите силу тока в цепи, содержащей источник тока с ЭДС  $\mathcal{E}=4$  В и внутренним сопротивлением  $r=1$  Ом, если развиваемая во внешней цепи мощность  $P=3$  Вт.

6. Расстояние между предметом и его изображением в рассеивающей линзе  $L=32$  см. Найдите расстояние между предметом и линзой, если фокусное расстояние линзы  $F=-10$  см.

#### Советуем купить

Имеются в продаже и высылаются надлежащим платежом (без задатка) следующие книги издательства «Наука»:

«Алгебра и начала анализа» (пособие для техникумов под редакцией Г. И. Яковлева), ч. 1 (1981, изд. 2-е, перераб. и доп.) — цена 70 к., ч. 2 (1981; изд. 2-е, испр. и доп.) — цена 70 к.  
Каганов М. И., Цукерник В. М. «Природа магнетизма» (1982) — цена 30 к.

Мочалов Л. П. «Головоломки» (1980) — цена 20 к.

Поталов М. К., Александров В. В. «Алгебра и анализ элементарных функций» (1980) — цена 1 р. 40 к

Заказы направляйте по адресу: 103031, Москва, Петровка, 15, магазин № 8 Москниги, отдел «Книга — почтой».

## В чем разница?

**Задача 1.** В прямоугольный треугольник с гипотенузой  $l$  вписан равнобедренный треугольник так, что его основание параллельно гипотенузе, а вершина, противолежащая основанию, лежит на гипотенузе (рис. 1). При какой длине основания вписанного треугольника его площадь будет наибольшей?

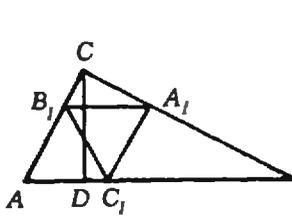


Рис. 1.

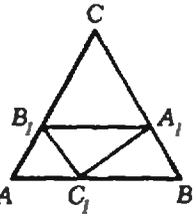


Рис. 2.

**Задача 2.** В правильный треугольник со стороной  $l$  вписан прямоугольный треугольник так, что его гипотенуза параллельна той стороне правильного треугольника, на которой лежит вершина прямого угла (рис. 2). При какой длине гипотенузы вписанного треугольника его площадь будет наибольшей?

Обозначим  $|A_1B_1|$  (см. рис. 1, 2) через  $x$ . Тогда площадь треугольника  $A_1B_1C_1$  равна  $\frac{|CD|}{2l} x(l-x)$  в задаче 1 и  $\frac{\sqrt{3}}{4} x(l-x)$  в задаче 2 (проверьте!).

Единственная точка экстремума функции  $y=kx(l-x)$  — точка максимума —  $x=\frac{l}{2}$ .

Тем не менее, в задаче 1 ответ — при  $\frac{l}{2}$ , а в задаче 2 — другой ответ. Какой? В чем разница между этими задачами?

И Горкуша

## Почему так?

Известно, что за площадь сферы принимается производная функции  $V(R)$  по  $R$  («Геометрия 9—10», § 69):

$$S = \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \right)' = 4\pi R^2.$$

Аналогичное определение можно дать и площади боковой поверхности цилиндра:

$$S = (\pi R^2 H)' = 2\pi R H.$$

Однако, если аналогичное определение дать площади боковой поверхности конуса, получится неверный результат:

$$\left( \frac{1}{3} \pi R^2 H \right)' = \frac{2}{3} \pi R H \neq \pi R l.$$

$\left( \frac{2}{3} H \right)$  совсем не обязательно равно  $l$ .

Почему так?

А. Смоляков



Ю. Первик

## Однажды вечером в семье программиста

У программиста Ферстова четверо детей — Надя, Тимур, Егор и Дина. Все они увлекаются программированием. В тот вечер, о котором идет речь, папа заглянул в комнату к детям.

— Хотите разобрать эту программу по программированию?

— Эту программу по программированию? — хором переспросили ребята. — А разве такие бывают?

— Конечно, бывают. Это небольшие программы, которые содержат какие-нибудь хитрости. Решение этой задачи состоит в составлении программы по заданной теме, либо в поиске тщательно замаскированной ошибки, либо в проверке действий уже готовой программы. Вот такой именно эту я и хочу вам предложить. В программе

```
переменные  $i$ : цел;
массив  $m[1:2]$ : цел;
 $i \leftarrow 1$ ;  $m[1] \leftarrow 4$ ;  $m[2] \leftarrow 5$ ;
пшик( $m[i]$ );
```

вы видите обращение к процедуре *пшик*, которая имеет такое описание

```
процедура пшик( $x$ :цел);
 $m[i] \leftarrow m[i] + 1$ ;
 $i \leftarrow i + 1$ ;
 $x \leftarrow x - 1$ 
конец;
```

Определите, пожалуйста, какие значения получают  $m[1]$  и  $m[2]$  в результате работы этой программы.

— И это все?

— Все.

— Но это же так просто...

Отец не успел ответить. Зазвонил телефон.

— Ферстов слушает!

На другом конце провода кто-то торопился рассказать о последних событиях в лаборатории Ферстова. Его лицо стало серьезным.

— Хорошо. Сейчас буду. Разберемся.

— Ребята, — сказал он детям, — срочно бегу в ВЦ. В моем трансляторе ошибка. Разушу, исправлю и тут же вернусь. А вы пока помозгуйте над программой.

И дети не успели даже задать ему свои вопросы, как Ферстов уже бежал вниз по лестнице, застегивая на ходу куртку. Ребята принялись обсуждать задание.

— Что это за язык странный какой? — сказала Надя. — На Паскале не похоже: все ключевые слова — русские. И не Рапира — смотрите, какие забавные стрелки.

— Нечего удивляться, — ответил рассудительный Егор. — Языки разные бывают. Тут хоть и необычные символы, но зато все понятно: стрелка справа налево — это такое присваивание, как в Паскале, только по-другому обозначенное; двоеточие между целыми в квадратных скобках разделяет границы изменения индекса в массиве. Так что давайте-ка сразу за дело.

Каждый вооружился карандашом и бумагой и на некоторое время воцарилась деловая тишина.

— Готово! — первым закричал Тимур. —  $m[1]$  равно 3, а  $m[2]$  равно 5.

— Ничего подобного, — возразила старшая сестра Надя, — обе величины, и  $m[1]$ , и  $m[2]$  — равны пятёрке.

— Вы оба неправы, — сказал Егор. — Ответ такой:  $m[1] = 4$ ,  $m[2] = 5$ .

Самая младшая, Дина, немного робея перед авторитетом старшей сестры и братьев, тихо проговорила:

— А у меня получилось  $m[1] = 5$ ,  $m[2] = 4$ .

К счастью, папа, действительно, вернулся быстро. Дети сразу же окружили его, наперебой предлагая свои решения.

— Давайте по порядку, — предложил отец. — Ну-ка, старшая, начинай!

И Надя, которая всегда стремится отыскать самое простое решение задачи, подробно описала способ передачи параметра по значению, которым она воспользовалась:

— К моменту обращения к процедуре *пшик* интересующие нас значения получены простыми присваиваниями:  $m[1] = 4$ ,  $m[2] = 5$ . Еще одно изменение одного из этих значений происходит при выполнении первого оператора процедуры. В начале выполнения процедуры  $i = 1$ . Поэтому  $m[1]$  увеличивается на единицу, и, значит, в конце программы оба значения оказываются равными  $m[1] = m[2] = 5$ .

Правда,  $m[i]$  употребляется еще и в качестве фактического параметра процедуры *пшик*. Я вычислила значение фактического параметра:  $i = 1$  и, следовательно,  $m[1] = 4$ . Поэтому обращение имеет вид *пшик*(4); при этом совершенно неважно, каким путем получена эта четверка: она определяет значение параметра  $x$  и не изменяет ни  $m[1]$ , ни  $m[2]$ . Обе последних величины — это глобальные переменные. Благодаря оператору

$$x \leftarrow x - 1;$$

процедура вырабатывает в качестве результата значение  $3 = 4 - 1$ . Но при передаче параметра по значению этот результат оказывается несущественным для нашей задачи — определения  $m[1]$  и  $m[2]$ .

— Теперь, Тимур, твоя очередь.

— Я считаю, что если уже есть процедура, вырабатывающая результат, то надо в ответе, то есть при вычислении  $m[1]$  и  $m[2]$ , воспользоваться этим результатом. А это значит, что параметр процедуры  $m[i]$  должен использоваться как на входе, так и на выходе процедуры *пшик*. Поэтому здесь при обращении к процедуре следует применить способ передачи параметра как значения результата.

Вот как рассуждал дальше Тимур:

На входе процедуры фактический параметр  $m[1]$  равен, как говорила Надя, четырем. Далее, после выполнения первого оператора процедуры *пшик*, величина  $m[1]$  получает значение 5, но... хитрость этой программы состоит в том, что третий оператор процедуры

$$x \leftarrow x - 1,$$

работает с тем же значением параметра  $x$ , которое было при входе в процедуру, то есть со значением  $m[1] = 4$ ; таким образом, последний оператор процедуры *пшик* выполняется в виде

$$m[1] \leftarrow m[1] - 1;$$

при исходном  $m[1] = 4$  (не взирая на действие первого оператора процедуры *пшик*). Ведь фактический параметр в этом случае означает, кроме всего прочего, величину, которой присваивается результат процедуры.

Следовательно,  $m[1] = 3$ . Ну, а против  $m[2] = 5$ , конечно, нет никаких возражений.

— Егор, у тебя ведь другой результат. Что ты скажешь?

— Ты предупредил нас, папа, о хитрости в этой программе. А самый «хитрый» способ передачи параметров, на мой взгляд, — это передача по адресу. Вот я и воспользовался им.

Рассуждения Егора были такими:

При этом способе в вызываемую процедуру из вызывающей программы передается не значение фактического параметра, а его адрес в памяти. В нашем примере это адрес величины  $m[1]$ . Поэтому в последнем операторе процедуры *пшик* слева и справа от стрелки присваивания будет фигурировать величина  $m[1]$ , значение которой к моменту входа в процедуру установилось  $m[1] = 4$ , а после выполнения первого оператора процедуры стало равным пяти. Таким образом, последний оператор восстанавливает положение

$$m[1] \leftarrow m[1] - 1;$$

так что в конце концов  $m[1] = 4$ .

— А как думала ты, Диночка?

— Я знаю, папа, что твой любимый способ передачи параметров — это передача по написанию. Вот я и выбрала его, чтобы тебе понравилась...

— Спасибо, — успел смущенно ответить папа на это неожиданное признание. А Дина продолжала. Вот ее рассуждения:

При передаче по написанию каждое вхождение имени формального параметра в вызываемой процедуре текстуально заменяется именем фактического параметра. В нашем случае всюду в процедуре на месте  $x$  будет во время выполнения

программы стоять  $m[i]$ . К моменту выполнения последнего оператора процедуры *пшик*  $i=2$ , и, следовательно, последний оператор процедуры будет выполнен так:

$$m[2] \leftarrow m[2] - 1.$$

А так как  $m[2]$  было установлено в начале  $m[2]=5$ , то после завершения процедуры и всей программы  $m[2]=4$ .

С  $m[1]$  совсем просто: будучи установленной в начале программы  $m[1]=4$ , эта величина увеличивается на 1 действием первого оператора процедуры *пшик*.

Объяснения закончились, и дети молча переглянулись: «Кого-то из них папа похвалит!».

— Молодцы, ребята! Вы хорошо справились с заданием. Правы вы все. Дело в том, что вы ничего не знали о языке, на котором была написана программа, а значит, и о способе передачи параметров, допускаемом в этом языке. Кстати, такого языка и не существует в действительности: я его придумал специально для нашего упражнения. А в каждом из реально существующих языков всегда определен один или несколько разрешенных способов передачи параметров. Так, в хорошо знакомой вам Рапире параметры из вызывающей программы в вызываемую процедуру могут быть переданы только по значению. А в языке Алгол-60 наряду с этим способом употребляется еще и способ по написанию (иногда его называют также передачей по имени). Более того, передача по написанию считается в Алголе наиболее естественным способом общения процедур, так что передача по написанию предполагается у передаваемых параметров «по умолчанию». А в тех случаях, в которых надо воспользоваться передачей по значению, перед именами передаваемых параметров при их описаниях в вызываемой процедуре Алгола-60 обязательно записывают ключевое слово *value* (значение).

В таком языке, как Алгол-W, существует в числе нескольких допустимых и тот способ, который применил Тимур, — способ передачи значения-результата. Параметры, передаваемые в процедуру таким спосо-

бом, отмечаются в ее заголовке ключевым словом *value-result* (значение-результат). В Фортране, например, разрешен способ передачи параметров по адресу (или иногда его еще называют передачей по ссылке).

В Паскале параметры передаются чаще всего по значению (что «по умолчанию» никак специально не отмечаются), а тогда, когда используется передача по ссылке — передача параметра-переменной, перед именами соответствующих параметров необходимо писать в заголовке описания процедуры слово *var*. Прочитайте об этом в уроке 20 Заочной школы программирования. А если вам захочется узнать поподробнее о различных способах передачи параметров, то я вам посоветую, например, книгу Т. Пратта «Языки программирования: разработка и реализация», выпущенную в издательстве «Мир» в 1979 году. Вы найдете ее на полке над моим письменным столом.

Должен вам сказать, что многообразие полученных вами результатов объясняется не только различными способами передачи параметров. Тогда, когда параметр является простой переменной (а не индексированной, как в нашем примере), все способы дадут одинаковый результат. И только сложные структуры данных передаются различными способами по-разному.

Давайте подведем итог. Прежде чем программировать обращение к процедурам, надо очень хорошо знать, какие способы передачи параметров разрешены в выбранном языке (а быть может, даже выбор языка определить, исходя из желательного для вас способа передачи); надо знать также правила оформления соответствующего способа передачи в языке. Ясно?

— Ясно, — ответила за всех Надя. Остальные согласно кивнули.

А Егор сказал совсем уж порадовавшие отца слова:

— Знаете что: я вам тоже придумаю этюд по программированию. Про рекурсивную процедуру!

— Молодец, давай. Только новый этюд — это на завтра. Сегодня уже поздно.

## Ответы, указания, решения



### Квадратное уравнение в задачах по физике

1.  $t = \frac{v_0}{g} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2gH}{v_0^2}} \right)$ ; второй корень, отрицательный, не отвечает поставленному в задаче вопросу.

2.  $t = \sqrt{\frac{2m}{k} \left( \frac{g}{a} - 1 \right)}$ ;

$x_{\max} = \frac{m}{k} (g + \sqrt{a(2g-a)})$ .

3.  $h = 14,1$  см; второй корень —  $h' = 151,9$  см — лишен физического смысла.

4.  $d = L(\sqrt{2}-1) \approx 0,41L$ ; второй корень —  $d' = -L(\sqrt{2}+1)$  — не соответствует условию задачи.

5.  $I_{1,2} = \frac{\mathcal{E}}{2r} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4rP}{\mathcal{E}^2}} \right)$ ;  $I_1 = 3A$ ;  $I_2 = 1A$ ;

оба корня удовлетворяют условию задачи (два значения тока соответствуют двум разным сопротивлениям внешней цепи, при которых выделяется одна и та же мощность).

6.  $d = \frac{L}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4F}{L}} \right) = 40$  см; второй корень — отрицательный — не соответствует условию задачи.

### Солнечное затмение 31 июля 1981 года

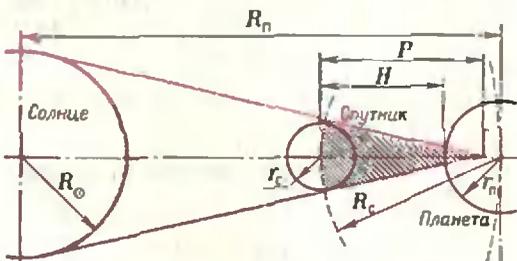
(см. «Квант» № 7)

1. Вследствие небольшой эллиптичности земной орбиты расстояние Земли от Солнца в течение года изменяется: Земля дальше от Солнца в период лета в северном полушарии и ближе к нему в зимний период. Поэтому угловой размер Солнца летом чуть меньше, чем зимой. А поскольку расстояние Луны от Земли, а значит, и ее угловой размер также испытывают колебания, летом Луна чаще может полностью закрывать солнечный диск, чем зимой.

2. Во время затмения лунная тень движется по поверхности Земли приблизительно с запада на восток со скоростью около 1 км/с (грубо говоря, это — скорость движения Луны по орбите). В ту же сторону, на восток, но с меньшей скоростью вращается вокруг своей оси Земля. Скорость вращения земной поверхности изменяется от максимального значения около 0,5 км/с на экваторе до 0 на полюсах. Поэтому наблюдатель в районе экватора дольше других может находиться в лунной тени, так как он «отстаёт» от нее с наименьшей скоростью. Вторая, менее важная, причина состоит в том, что размер лунной тени на экваторе чуть больше, чем в полярных областях (ведь наблюдатель на экваторе чуть ближе к Луне, чем на полюсе).

3. Солнечное затмение может наблюдаться, если длина  $P$  тени от спутника больше, чем расстояние  $H$  от спутника до поверхности планеты (см. рис.):  $P > H$ . Последняя величина

просто связана с радиусом орбиты спутника ( $R_c$ ) и экваториальным радиусом планеты ( $r_p$ ):  $H = R_c - r_p$ . А длину тени спутника легко найти, зная его радиус ( $r_c$ ), расстояние планеты от Солнца ( $R_n$ ) и радиус Солнца ( $R_\odot$ ):  $P = r_c R_n / R_\odot$ . Воспользовавшись данными, приведенными в статье в таблице (см. с. 27 в «Кванте» № 7), находим, что



на Юпитере происходят полные солнечные затмения всеми его перечисленными в таблице спутниками, а на Марсе вообще не бывает солнечных затмений.

4. Решается так же, как предыдущая задача, только роль спутника теперь играет сама планета. Затмения спутников на Марсе и Юпитере бывают.

5. Если самолет летит со скоростью около 1 км/с, то он сможет «догнать» лунную тень. Такие самолеты существуют, и с их помощью астрономы уже наблюдали полные солнечные затмения, продолжавшиеся на борту самолета целый час!

6. При благоприятных обстоятельствах можно наблюдать солнечное затмение с борта орбитальной станции «Салют» или другого ИСЗ. Но продолжительность полного затмения будет не велика: так как скорость спутника около 8 км/с, а диаметр тени не превышает 270 км, затмение будет длиться менее  $270/8 \approx 34$  с.

7. Можно, если наблюдатель на Земле расположен так, что Луна и Солнце находятся для него вблизи горизонта. Дело в том, что, во-первых, в момент полного лунного затмения Луна может отклоняться от линии «Солнце — Земля — Луна» на  $0,5^\circ$  (это — разность между угловым радиусом земной тени и радиусом Луны) и, во-вторых, искривление световых лучей в земной атмосфере — рефракция — позволяет нам «заглянуть под горизонт» также примерно на  $0,5^\circ$ .

8. Угловой диаметр Луны больше, когда она находится вблизи зенита, так как в этом случае наблюдатель ближе к ней на длину радиуса Земли.

9. Можно, поскольку Луна, как и Солнце, движется не в плоскости земного экватора и бывает видна над Северным полюсом сравнительно высоко над горизонтом.

### Веселая викторина

(см. «Квант» № 7)

Ответы и указания к задачам

1. Перевернуть лист на  $180^\circ$ .

2. Занятую.

3. За 16. Время между двумя ударами равно

2 секундам. При 9 ударах будет 8 промежутков.

4. Да. Например:  $-1$ ,  $-2$ ,  $-3$ , а также  $a$ ,  $0$ ,  $-a$ , для любого целого  $a$ .

5. Конечно, может: 2 и 3 копейки (та монета, которая не трехкопеечная, — достоинством 2 копейки).

6. 6 выстрелов: 4 раза в 17 и 2 раза в 16. 7. 30 г.

8. Да. Открыв, скажем, коробку, на которой написано «гвозди», и обнаружив там, скажем, винты, мы определим, что в коробке с надписью «винты» лежат гайки, а там, где написано «гайки», лежат гвозди.

9. 72.

10. Достаточно перелить воду из второго стакана в пятый.

11. 0,5 и  $-1$ .

12. Закручивая коврик, постепенно сдвиньте с него стакан.

### Выигрышные стратегии к играм

1. Начинаящий проигрывает, если в каждой кучке лежит по нечетному количеству камней. Если хотя бы в одной из кучек лежит четное количество камней, то он забирает вторую кучку, а первую делит на две части так, чтобы в них было по нечетному количеству камней. Тогда второй игрок вынужден забрать одну из кучек, а при делении второй вновь возникнет одна кучка с четным количеством камней. Тогда, забрав вторую кучку, первый снова сможет разделить на две части ту кучку, в которой четное количество камней.

2. Если один из колышков соединен уже с двумя другими, то делающий очередной ход выигрывает, соединив эти два колышка. Поэтому игра будет продолжаться до тех пор,

пока можно соединять между собой «свободные» колышки. Таких пар свободных колышков  $n/2$ , если  $n$  четно, и  $(n-1)/2$ , если  $n$  нечетно. Если таких пар четное число, то выигрывает второй, а если нечетное, то первый. Поэтому второй выигрывает, если количество колышков имеет при делении на 4 остаток 0 или 1, и проигрывает, если этот остаток равен 2 или 3. 3. Выигрывает второй. После хода первого он обрывает один или два лепестка так, чтобы остальные лепестки разбились на две части, в каждой из которых было бы одинаковое количество лепестков, а затем после каждого хода первого он делает ход, симметричный ему на второй половине ромашки.

### Шахматная страничка

(см. «Квант» № 5)

**Задание 9.** На первый взгляд достаточно поставить белую пешку на b7 и пойти b8ФX. Но, оказывается, получающееся расположение белых пешек невозможно — съев все 15 черных фигур, белые пешки сместятся на 15 полей влево, а надо — на 16. Выполнить задание можно, только добавив черную пешку на поле c2 и тогда ...c1ФX.

**Задание 10. а)** На левой половине доски напрашивается 1. Kb1X. Но здесь ретропат черных (ход b3—b2 невозможен из-за нелегального шаха слоню a1). Значит, очередь хода за черными, и мат дает их пешка, превращаясь в коня: 1...b1KX!

**б)** Аналогичная картина. Черные в ретропате и очередь хода за ними — 1...Cg7X!

Главный редактор — академик И. К. Кикин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтынский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбили, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, А. И. Климанов, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Михайлов, Е. М. Никишкин, С. П. Новиков, М. К. Поталов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, В. Г. Зубов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаяев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, А. В. Перышкин, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурич, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

#### Номер подготовили:

А. Виленкин, А. Егоров, И. Каумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

#### Номер оформили:

М. Дубах, Г. Красников, Н. Кузьмина, С. Лухин, И. Максимов, Э. Назаров, И. Смирнов

Заведующая редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Т. Вайсберг

117071, Москва, Ленинский проспект, 15,  
«Физматлит», «Квант», тел. 234-08-21  
Сдано в набор 18.6.82 Подписано в печать 28.7.82  
Печать офсетная  
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4  
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 6,63 Т-11166  
Тираж 175 280 экз. Цена 40 коп. Заказ 1589

Орден Трудового Красного Знамени  
Челябинский полиграфический комбинат  
ВО «Союзполиграфпром» Государственного  
комитета СССР по делам издательств,  
полиграфии и книжной торговли  
г. Чехов Московской области

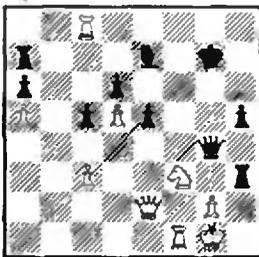
Шахматная страничка



Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

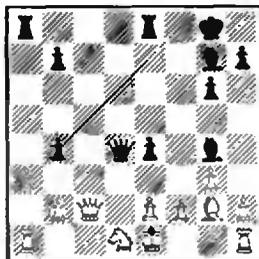
**ЖЕРТВА ФЕРЗЯ В ПАРТИЯХ ЧЕМПИОНА МИРА**

На нашей шахматной страничке мы часто встречались с комбинациями, в которых жертвовался ферзь — в расказах о чемпионах мира, в специальных материалах. Жертва ферзя всегда действует на наше воображение, независимо от того, восстанавливается ли материальное равенство немедленно, или операция носит затяжной, позиционный характер.



А. Карпов — С. Жолдош (Будапешт, 1973 г.)

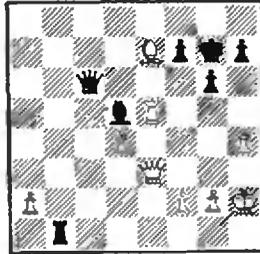
31. К:e5! Ф:e2 32. Лf7+ Крh6 33. Лh8+ Кpg5 34. Лg8+ Крh4 35. Кg6+ Кpg5 36. К:e7+ Крh4 37. Кf5X.



С. Таган — А. Карпов (Лас-Пальмас, 1977 г.)

Кажется, что положение белых достаточно надежно. Однако чемпион мира ставит под бой ферзя, и ситуация резко меняется. 23...Фd3! 24. ed. Допускает изящное развитие атаки, лучше было 24. Фd2. 24...ed+ 25. Кpd2 Ле2+! Видимо, белые не ожидали такого поворота собы-

тий. 26. Кр:d3 Лd8+ 27. Крс4. Все дело в том, что после 27. Cd5 Л:d5+ 28. Крс4 Л:c2+ 29. Кр:d5 Cf3+ черные остаются с лишней фигурой. 27...Л:c2+ 28. Кр:b4 Лcd2! 29. f3 Cf8+ 30. Кра5 Cd7! Белые сдались. Эта партия была признана лучшей в 1977 году.



А. Карпов — А. Майлс (Амстердам, 1981 г.)

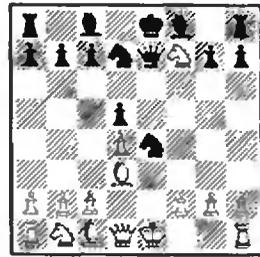
Белые только что увели короля из-под шаха и теперь с затаенным дыханием ожидали f7—f6. Почему, в самом деле, черным не заняться ладьей, тем более, что ей куда отступить? Увы, романтическую комбинацию 29...f6 30. Фh6+!! Кр:h6 31. Cf8X осуществить не пришлось. Майлс двинул вперед другую пешку — 29...h6, и реализация перевеса приняла слэнком прозаический характер. 30. f3. Вновь не годится 30...f6, хотя на этот раз решает всего лишь жертва слона — 31. Cf8+! Кр:f8 32. Ф:h6+ Крf7 33. Фh7+ Крf8 34. Фе7+ Крг8 35. Фd8+, и черный слон покидает доску, а масса белых пешек остается. А если черные не берут слона, то они погибают от жертвы ладьи: 31...Крf7 32. Ф:h6 fe 33. Фg7+ Крe8 34. Фе7+ Крf5 35. Фе5X.

Партия продолжалась еще десять ходов: 30...С:a2 31. Сс5 Лb8 32. d5 Фb6 33. Лh5 Кpg8 34. Cd4 Фd6+ 35. Се5 Ле8 36. Ф:h6 Ф:e5+ 37. Л:e5 Л:e5 38. d6 Се6 39. Фd2 Cd7 40. Фd4 Ле6 41. Фа7. Черные сдались.

В следующей забавной партии жертву ферзя против будущего чемпиона мира осуществил его будущий тренер И. Зайцев.

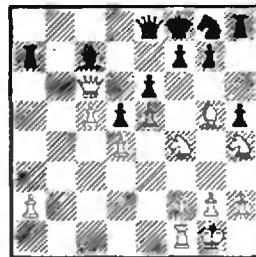
И. Зайцев — А. Карпов (Ленинград, 1966 г.)  
Русская партия

1. e4 e5 2. Кf3 Кf6 3. d4 К:e4 4. Cd3 d5 5. К:e5 Кd7 6. К:f7! Фе7. В случае 6...Кр:f7 7. Фh5+ черный король отправлялся в центр доски. Теперь же черные полагали, что после 7. Ке5 К:e5 8. de Фе5 они получат прекрасную позицию. Ответный ход партнера трудно было ожидать.

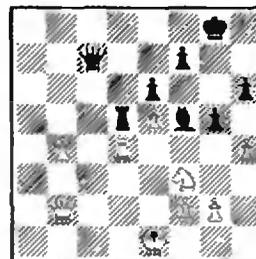


7. К:h8!? Любопытно, что через 15 лет было обнаружено, что белые могут не жертвовать ферзя, а сыграть 7. Фе2!, получая перевес. 7...Кс3+ 8. Кpd2 К:d1 9. Ле1 К:f2. Жертва ферзя самая настоящая, поскольку отгрызывать его нельзя — 10. Л:e7+ С:e7 11. С:h7 Сg5+, и черные берут верх. 10. С:h7. Белые, как ни в чем не бывало, играют без ферзя. 10...Кe4+ 11. Л:e4! de 12. Сg6+. Вот, оказывается, что придумал Зайцев. Скучная ничья, которой часто заканчивается русская партия, его не устроила, и он решил, что немного веселья не помешает. 12...Кpd8 13. Кf7+ Крe8 14. Кd6+ +. Двойной шах на службе у вечного шаха. 14...Кpd8 15. Кf7+. Ничья.

Конкурсные задания



15. Как бы вы сыграли на месте белых?



16. Выигрывают ли черные при помощи такой жертвы ферзя: 1...g4 2. Л:d5 gf 3. Лс5 Ф:c5! 4. bc fg?

Срок отправки решений — 25 октября 1982 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 15, 16»).

На этом рисунке показаны решения четырех задач Ю. Пухлячева, сформулированных в этом номере под заголовком «Объем куба квадратами». Сверху показан красный куб, обклеенный двенадцатью квадратами со стороной  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ; справа — оранжево-голубой куб, обклеенный двумя квадратами со сторо-

ной  $\sqrt{2}$  и четырьмя — со стороной  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; снизу — бело-зеленый куб ( $16 - \frac{1}{2\sqrt{2}}$  и  $2 - \frac{3}{2\sqrt{2}}$ ); слева — желто-фиолетовый ( $12 - \frac{1}{\sqrt{5}}$  и  $2 - \frac{3}{\sqrt{5}}$ ).

