ISSN 0130-2221

Квант

10
1982

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

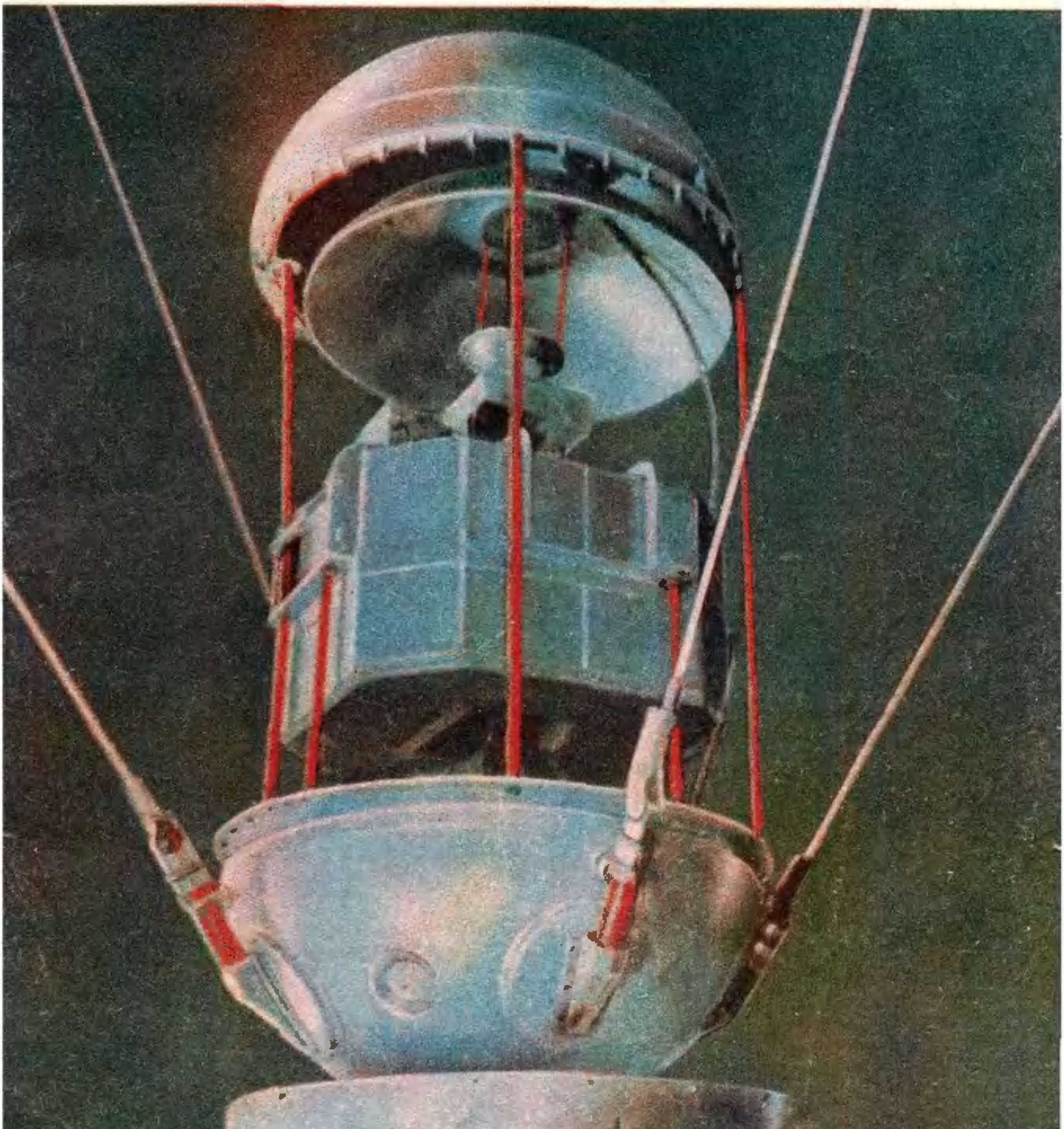


Рис. 1.

Рис. 2.

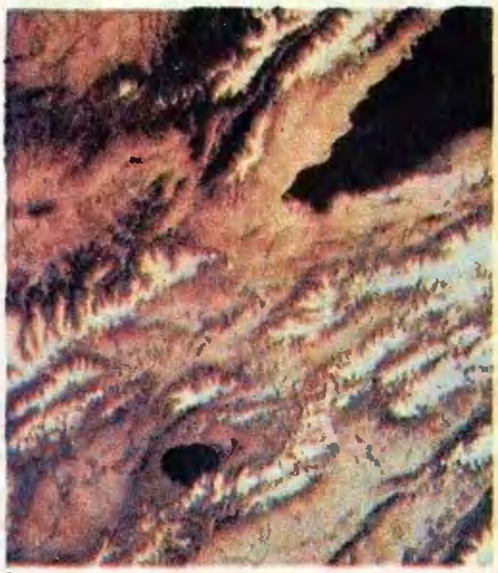


Рис. 3.

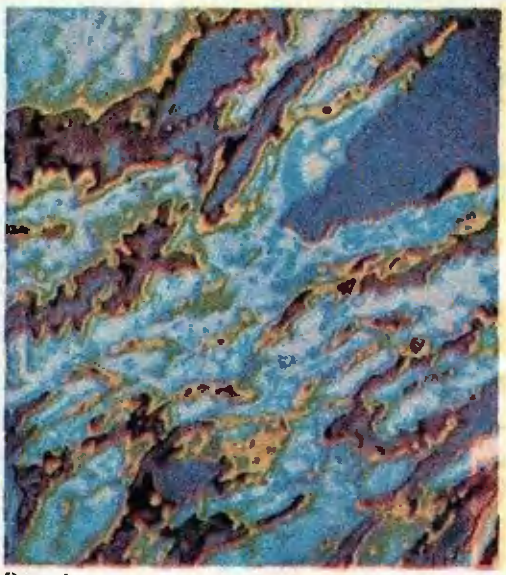


Рис. 4.

Советский Союз последовательно проводит в жизнь обширную программу мирного использования космических исследований. Наши космонавты активно участвуют в решении важных проблем народного хозяйства. Они следят за состоянием посевов, предупреждают о лесных пожарах, помогают геологам искать полезные ископаемые, способствуют созданию точных карт труднодоступных районов.

На приведенных здесь рисунках воспроизведены результаты фотографирования одного и того же горного района земной поверхности, одновременно снятого блоком из четырех синхронно действующих фотоаппаратов. Первый из них получал обычные цветные фотографии (рис. 1). Остальные регистрировали изображение в разных участках длин волн видимого и инфракрасного излучения (500—600 нм, 600—700 нм и 700—840 нм). Полученные при этом черно-белые изображения служили основой для синтеза цветных изображений, приведенных на рисунках 2 и 3. Каждый из них позволяет отчетливо выделить какие-то детали изучаемого рельефа. Например, второй рисунок более четко характеризует растительность, а третий — почвы в горных долинах. Четвертый рисунок также не является фотографией — он получен на основе предыдущих фотографий при помощи специальной обрабатывающей техники. Такие синтезированные изображения позволяют более четко определять границы различных природных образований.

Первоначальные фотографии были получены 27 июня 1975 года летчиками-космонавтами П. Климуком и В. Севастьяновым на долговременной орбитальной станции «Салют-4» с высоты 340 км. Эти материалы предназначаются для комплексного изучения природных условий и ресурсов нашей страны и создания точных карт отдаленных труднодоступных районов.

Квант 10 1982

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ: IN THIS ISSUE:

А. Михайлов

Значение астрономии

Часто недооценивают значение астрономии и ее роль в истории человечества. Считают, что астрономия помогла выработать правила для измерения времени и ориентировки на Земле и открыла много интересного на звездном небе, но все это не так важно по сравнению с тем, что нам дали другие науки, например физика и химия. Лишь в наш космический век важность астрономии стала более очевидной. Однако можно утверждать, что если бы не было астрономии, то и всемирная история была бы другой.

Чтобы обосновать такое утверждение, предположим, что все небо постоянно покрыто густыми облаками, не позволяющими видеть Солнце, Луну, планеты и звездное небо вообще. Тем не менее происходила бы смена дня и ночи, было бы заметно, что ночи периодически бывают более светлыми, что это явление имеет какую-то связь с морскими приливами. Для объяснения всего этого придумали бы хитроумные теории, скорее всего — весьма далекие от действительности.

Благодаря астрономии, более двух тысяч лет назад люди узнали, что Земля — шар. Это следовало из изменения полуденной высоты Солнца и кульминационной высоты звезд при передвижении наблюдателя в меридианном направлении. Это показывала также круглая тень Земли при ее падении на Луну во время лунных затмений. До нас дошла первая удачная попытка определения длины окружности земного шара, предпринятая Эратосфеном в III веке до н. э. При условии невидимости небесных светил всего этого не мог-

Александр Александрович Михайлов — известный советский астроном и гравиметрист, академик АН СССР, Герой Социалистического Труда, в течение почти двадцати лет (1947—1964) — директор Главной астрономической обсерватории в Пулкове.

ло быть, и Земля считалась бы плоской, со всех сторон окруженной океаном.

Может быть, скажут, что выпуклость морской и земной поверхности, заметная при удалении предметов на море и на равнине, является доказательством шарообразности Земли. Но по другим наблюдениям можно сделать вывод о вогнутости Земли: при поднятии на возвышение остается незаметным «на глаз» понижение линии горизонта, а долины вокруг создают впечатление впадины. Так что можно было бы представить, что фигура Земли похожа на опрокинутую чашу, на неровном днище которой находится суша, а загнутые вниз стороны покрыты океаном.

Если бы не было известно о шарообразности Земли, то, по всей вероятности, Америка не была бы открыта, многое было бы иным и, прежде всего,— развитие мореходства. В древнем мире плавали вдоль берегов, углубляться в океан, подвергаясь большой опасности, не было никакой надобности. Морской путь из Европы в богатую сокровищами Индию пролегал вдоль берегов Африки с огибанием ее южной конечности. А мысль о достижении восточных стран Азии движением на запад, вокруг Земли, не могла бы возникнуть, не знай люди, что фигура Земли — «замкнутая».

Но, может быть, все же были какие-то способы обнаружить шарообразность Земли без астрономических наблюдений? Да, такие способы в принципе имелись, но осуществить их было почти невозможно. Это — изменения понижения морского горизонта при поднятии на высоту и сферического избытка в углах больших треугольников на суше.

Понижение горизонта выводится геометрически так, как показано на рисунке. Представим себе, что мы находимся в точке A на высоте h над поверхностью шара радиуса R. Проведем мысленно касательную к шару из точки A в точку B, лежащую на горизонте. Угол BAE (см. рисунок), равный углу α, который составляет эта касательная с плоскостью горизонта, и называется понижением горизонта на высоте h. Как видно из рисунка, $|AB| = d = R\,\mathrm{tg}\,\alpha$, и по теореме Пифагора

$$(R+h)^2 = R^2 + d^2 = R^2 + R^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha.$$

Отсюда, пренебрегая малым членом h^2, находим $\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{2h/R}$, или, поскольку угол α мал и $\mathrm{tg}\,\alpha \approx \alpha$,

$$\alpha = \sqrt{2h/R} \text{ (радиан)}.$$

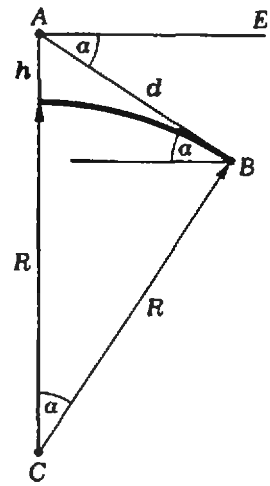
Понятно, что если α оказывается постоянным на данной высоте h в любом месте Земли, то это означает, что $R = \mathrm{const}$, то есть Земля — шар. Таким образом, измеряя α, можно было бы обнаружить шарообразность Земли. Однако...

Приняв в формуле для α $R = 6370$ км и переводя радианную меру угла в градусную (1 рад $= 3437',7$), для Земли получаем

$$\alpha \approx 60',91\sqrt{h}$$

(в это выражение надо подставлять h, измеренное в километрах).

Предположим, что мы находимся на высоте $h = 1$ км над уровнем моря. Тогда наша формула дает понижение горизонта почти в 61' — величину, вполне измеримую даже небольшим теодолитом. Но на деле все не так просто. Свет, проходя через слои воздуха разной плотности, испытывает преломление, и поэтому луч зрения AB оказывается не прямым, он искривляется, обращаясь обычно вогнутостью вниз.



Так что на самом деле теодолит будет измерять не понижение горизонта, а угол, величина которого может на несколько десятков процентов отличаться от α. Такой способ измерения кривизны очень ненадежен и не может дать доказательства шарообразности Земли, тем более, что он применим только на морской поверхности, где горизонт представляется правильной линией и можно уверенно фиксировать высоту.

Другой способ, который, казалось бы, позволял обнаружить шарообразность Земли,— это, как мы уже говорили, измерение сферического избытка в углах треугольников. Сумма углов треугольника, сторонами которого являются дуги больших кругов шара, оказывается больше 180 градусов. Математический расчет показывает, что эта разница — ее и называют сферическим избытком — равна

$$\varepsilon = 206265\, S/R^2 \text{ угловых секунд},$$

где S — площадь треугольника, R — радиус шара. Допустим, что удалось измерить на Земле углы огромного треугольника со сторонами по 100 км (вершинами его, очевидно, могли бы быть только высокие горы). Площадь такого равностороннего треугольника $S = 4330$ км^2 и $\varepsilon = 22''$. Эту величину можно «уловить» хорошим теодолитом, но такие инструменты были созданы для астрономических целей; для гораздо более «грубых» землемерных работ такая точность была не нужна. Таким образом, и этот способ был бы неосуществим.

Итак, можно быть уверенным, что без астрономических наблюдений шарообразность Земли не была бы открыта, и история человечества во многом была бы иной. Без астрономии огромный ущерб понесли бы наука и техника. Главная причина этого — незнание закона всемирного тяготения, открытого Ньютоном в конце XVII века именно благодаря астрономическим наблюдениям. Закон всемирного тяготения пронизывает все точные науки, без него не могли бы развиваться механика, ряд разделов магнетизма и электричества, воздухоплавание, не говоря уже о космонавтике. Не могло бы быть и речи о теории относительности.

Скорость света была впервые измерена Рёмером в 1676 году по наблюдениям спутников Юпитера. Вероятно, она была бы измерена экспериментальным путем и без астрономических наблюдений, но, несомненно, много позже, и это затормозило бы развитие оптики. Химия также была обогащена астрономией: вспомним, что гелий был сначала открыт на Солнце и уже после найден на Земле. Астрономия ставила перед математикой ряд задач, решение которых способствовало развитию этой науки.

Возможно, кто-то скажет: радиоастрономия не боится облачного неба и может развиваться даже при отсутствии видимости небесных объектов. Но ведь радиоастрономия существует всего около пятидесяти лет, а возникла она и развивалась благодаря своему более старому «родственнику», даже «прародителю» — оптической астрономии.

Наша обложка

25 лет тому назад, 4 октября 1957 года в СССР был осуществлен запуск первого искусственного спутника Земли. Героический труд советских ученых, инженеров, рабочих открыл человечеству путь в космос. Началась новая эра в истории науки и техники — эра космических полетов.

На первой странице обложки изображен «Спутник-1», установленный на демонстрационном стенде. «Спутник-1» — первое в мире искусственное небесное тело, выведенное на эллиптическую орбиту в околоземное космическое пространство. Эволюция движения этого спутника под влиянием верхних слоев атмосферы позволила определить ее основные физические характеристики.

К настоящему моменту в СССР запущено более 1400 искусственных спутников.

Б. Гнеденко

Михаил Васильевич Остроградский


OSTROGRADSKY.
Né a Pachenna (Petite Russie).

Михаил Васильевич Остроградский, один из крупнейших представителей отечественной дореволюционной науки, оставил значительный след в прогрессе математики, механики, математического образования и русской технической культуры. Полученные им научные результаты до сих пор широко используются в науке, входят в ее фундамент и излагаются в учебниках.

Родился М. В. Остроградский 24 сентября 1801 года в деревне Пашенная Кобелякского уезда Полтавской губернии. Восьми лет его отдали в Полтавскую гимназию, поместив в имевшийся при ней пансион, называвшийся «домом воспитания бедных дворян». В ту пору надзирателем в этом пансионе был известный украинский поэт И. П. Котляревский.

По обычаю дворян того времени мальчик был записан на государственную службу в канцелярию полтавского гражданского губернатора. Конечно, никаких обязанностей по службе он не нес и «числился в отпуску до окончания наук». Однако даже при таком пребывании на службе продвижение по служебной лестнице шло своим чередом: двенадцатилетним мальчиком Остроградский стал коллежским регистратором. Когда в 1828 году после возвращения из Парижа он добивался разрешения на право жительства в Петербурге, этот чин пригодился ему.

В первый месяц занятий в гимназии М. В. Остроградский был отмечен в ведомостях по способностям «средственным», по прилежанию «прилежным» и по поведению «исправным». В конце же первого года обучения в ведомости стояли такие оценки: поведение — «добронравный», способности — «острый». Однако обучение в гимназии было поставлено крайне плохо и ученики мало что из нее выносили. А. И. Ротмистров, у которого на квартире жили Михаил и его старший брат Осип, в одном из писем их родителям так характеризовал состояние учебных занятий в полтавской гимназии: «...учение по гимназии Полтавской всем ученикам мало пользы приносит, даже кончившие на словах арифметику на деле ее вовсе не знают... Лучше сказать, чему учат их, и сами не ведают». В результате подобных писем отец решил Осипа определить на гражданскую службу, а Михаила отвезти в Петербург и определить на воинскую службу в один из гвардейских полков. Кстати, это решение было исполнением страстного желания самого мальчика. В 1816 г. отец взял мальчиков из гимназии и повез в Петербург, но по дороге под влиянием брата жены, который горячо настаивал на определении племянника в Харьковский университет, круто изменил решение.

В 1816 г. М. Остроградский был зачислен вольнослушателем в Харьковский университет. Первый год ушел на предварительную подготовку. Поскольку Остроградский «на всех экзаменах получил весьма хорошие одобрения», он был переведен в студенты университета. Однако эти успехи еще не были результатом напряженной работы. Просто сказывались незаурядные способности молодого человека. Перелом наступил в связи с переходом на квартиру к университетскому преподавателю математики Андрею Федоровичу Павловскому, который, не будучи творческим математиком, был широко начитан и увлечен своим предметом. Заметив математические способности Остроградского, Павловский сумел пробудить сначала интерес, а затем и страстное увлечение молодого студента наукой. Через два—три месяца Остроградский начал поражать своего учителя успехами: то, на что Павловскому приходилось затрачивать большое время и серьезные усилия, Остроградский усваивал как бы шутя и при этом успевал замечать недостатки изложения, логические ошибки и промахи в доказательствах.

На интересы Остроградского внутри математики значительное влияние оказал ректор Харьковского университета и профессор математики Тимофей Федорович Осиповский (1765—1832). В ту пору его трехтомный курс математики пользовался большим успехом. Сам он блестяще читал курсы математического анализа, механики и астрономии. Его интерес к прикладной математике пробудил у Остроградского желание заниматься наукой именно в этом направлении. Вдобавок заметим, что Осиповский по своим философским установкам был материалистом. Заметим, что в ту пору отстаивать материалистические взгляды было делом большого гражданского мужества. В России господствовали аракчеевские порядки, а цели просвещения, согласно взглядам министра просвещения, состояли «в поддержании постоянного и спасительного согласия... между христианским благочестием, просвещением умов и существованием гражданским».

В период аракчеевской реакции серьезно пострадали многие либеральные профессора. Среди них был и Т. Ф. Осиповский — он был отстранен от ректорского поста и лишен права преподавания. Это сказалось и на Остроградском как на верном ученике своего учителя — в 1820 году было решено лишить его диплома об окончании университета, а также не присуждать ему звания кандидата наук (первое научное звание).

Причиной гонений на Остроградского было заявление профессора философии Дудровича, носящее характер доноса, попечителю учебного округа Карнееву. Вот небольшие выдержки из этого «произведения»:

«Ваше превосходительство! Милостивый государь!

Явная ко мне ненависть г. ректора Харьковского университета Осиповского, питаемая им единственно потому, что я всеми силами стараюсь защищать благие намерения начальства, доходит уже до крайности. За мой отказ экзаменовать студента Остроградского из философии он самым непристойным образом изливал на меня досаду, крича громко и в ярости, в присутствии г.г. профессоров, что я сумасшедший, записался в мистики...

Я уверен, что ваше превосходительство изволите совершенно понимать, каких разумеет г. ректор мистиков... Это — вы, без сомнения, ваше превосходительство, которого он считает верхом сумасшедших мистиков и которого милостью и начальническим благорасположением я пользоваться имею счастье. Это, без сомнения, также и его сиятельство господин министр духовных дел и народного просвещения, которого он публично, в заседании училищного комитета 9-го сего октября, называл невеждою, не читавшим ничего другого, кроме Библии... Сей то рассудок г. ректора является причиною, что ни один почти из обучающихся в Харьковском университете по части математики студентов, коих он глава, почитающий явно все за вздор и сумасшествие, что не подлежит его математическим выкладкам, не ходит ни на богопознание и христианское учение, ни на лекции по части философии...»

В создавшихся условиях Остроградскому не на что было надеяться в Харькове, и он принял решение отправиться для продолжения математического образования в Париж. Осенью 1822 г. Остроградский уже был в Париже и со всей страстью отдался научным занятиям. Выдающиеся французские математики Лаплас, Пуассон, Фурье и Коши оказали сильное влияние на характер математического творчества начинающего ученого. Однако в значительной степени научные вкусы Остроградского и выбор им области научных исследований сложились под влиянием Осиповского.

Впервые имя Остроградского появилось в научной печати в 1825 году, когда в одном из мемуаров Коши, посвященных теории дифференциальных уравнений с частными производными, были сказаны такие слова: «Наконец, один русский молодой человек, Остроградский, одаренный большой проницательностью и весьма сведущий в исчислении бесконечно малых, дал новое доказательство упомянутых мною выше формул». В 1826 г. Остроградский представил в Парижскую Академию наук свою первую самостоятельную работу «Мемуар о распространении волн в цилиндрическом бассейне», которая была рекомендована к печати, но напечатана лишь в 1832 году. Эта проблема была выдвинута Академией на соискание премии в 1816 г., и ей были посвящены исследования таких выдающихся математиков, как Лаплас, Лагранж, Коши и Пуассон. (Премия полностью не была присуждена никому. Часть же премии получили Лаплас и Пуассон.) Те же лица постановили печатать работу Остроградского. Одно это показывает, что результаты Остроградского существенно дополняли ранее полученные результаты.

В связи с этим мемуаром Остроградского рассказывают одну легенду о его парижской жизни. Красочный рассказ об этом содержится в докладной записке академика А. Н. Крылова, относящейся к началу тридцатых годов, в Президиум Академии наук СССР.

«В 1826 г. с Остроградским случилось происшествие, о котором рассказывали старики, его знавшие... С 1821 г. началась война греков за освобождение от турецкого владычества, приведшая к Наваринскому сражению в 1827 г. За все семь лет в Архипелаге, постепенно усиливаясь, развилось такое пиратство, что коммерческое мореплавание стало почти невозможным без военного конвоя — грабили алжирцы, тунисцы, турки, левантийцы, египтяне и греки.

В те времена банковские сношения еще не были развиты и для пересылки денег в Париж отцу Остроградского приходилось, подобно другим, покупать у экспортеров хлеба в Ростове, Херсоне или Одессе вексель на какого-нибудь марсельского купца, который затем поручал своему дебитору или кредитору оплатить этот вексель в Париже».

Далее А. Н. Крылов рассказывает, что в 1826 г. Остроградский по какой-то причине не получил своевременно денег от отца; по жалобе хозяина гостиницы, которому Остроградский задолжал «за харч и постой», он был посажен в долговую тюрьму «Клиши»; здесь он написал свой мемуар и послал его Коши; Коши представил мемуар Академии и выкупил Остроградского из тюрьмы.

Я не думаю, что этот факт имел место в действительности. Вероятно, отец, желая быстрейшего возвращения сына на родину, перестал высылать ему деньги, и молодой ученый, оставшись без средств к существованию, обратился к своим учителям за содействием. Известно, что те рекомендовали Остроградского на должность преподавателя математики в коллеж Генриха IV, куда он и был принят на работу. Когда в конце 1827 г. Остроградский покидал Париж, ему был дан из коллежа похвальный отзыв: «...он полностью оправдал те надежды, которые возлагали на него лица, рекомендовавшие его нам».

В начале 1828 г. Остроградский возвратился в Россию и немедленно попал под надзор полиции. По-видимому, под подозрение попадал каждый, кто возвращался из-за границы. Возможно, оказывала последействие докладная записка профессора Дудровича.

Вскоре после приезда в Петербург Остроградский начал преподавание в одном из старейших специальных учебных заведений России — в Морском кадетском корпусе. С этим учреждением он не порывал самой тесной связи до конца жизни. Через два года Остроградский был приглашен для чтения курса механики в Институт корпуса инженеров путей сообщения, с которым он также был непрерывно связан всю жизнь. Спустя еще два года Остроградский начал преподавать в Главном педагогическом институте, в котором много сделал для повышения уровня математического образования. Ему удалось воспитать не только превосходных специалистов для страны, но и крупных ученых, работавших преимущественно в прикладных областях знания. Среди его непосредственных учеников назову лишь И. А. Вышнеградского — основоположника теории автоматического регулирования и Н. П. Петрова — создателя гидродинамической теории смазки.

По словам лиц, лично знавших Остроградского, он «любил, чтобы к нему собирались в дом способнейшие его ученики и в беседах с ним о вопросах науки черпали многое для своего развития».

Вскоре после возвращения из Франции Остроградский представил Петербургской Академии наук заметки о притяжении сфероидов, об определенных интегралах и о теории теплоты. В третьей заметке была выведена знаменитая «формула Остроградского», преобразующая интеграл по объему в интеграл по поверхности, и задолго до Римана был высказан принцип локализации в теории сходимости тригонометрических рядов. В следующем году Остроградский представил статьи, относящиеся к механике, теории теплоты и теории упругости.

Тогда же он начал чтение публичных лекций по небесной механике. Лекции собирали большое число слушателей и по достоинству были расценены как выдающееся событие в жизни столицы России.

В 1828 г. Остроградский был избран адъюнктом Академии, в 1830 г.— экстраординарным академиком, а спустя год с небольшим — ординарным академиком.

По поручению Академии Остроградский каждый год давал несколько отзывов на различные математические работы. С этим поручением связан печальный эпизод — отрицательные отзывы о двух работах Н. И. Лобачевского («О началах геометрии» и «О сходимости бесконечных рядов»). По-видимому, Остроградский не понял их, потому что они слишком обогнали время и были изложены сложно.

С 1847 г. на Остроградского была возложена обязанность главного наблюдателя за преподаванием математических наук в военно-учебных заведениях. Лучшей кандидатуры найти в ту пору было невозможно, поскольку среди преподавателей и слушателей он пользовался непререкаемым авторитетом, был превосходным организатором и считался первым математиком России. В этой новой должности он должен был не только отвечать за программы и учебные планы, но и проводить инспекцию в губернских кадетских корпусах, проводить совещания преподавателей, руководить составлением учебных пособий, присутствовать на выпускных и приемных экзаменах, следить за пополнением библиотек, руководить комиссией по испытанию кандидатов на преподавательские должности. Сохранилось много отзывов Остроградского на пробные лекции лиц, подвергавшихся экзаменам на должность преподавателя. Он требовал достаточно широкого знания предмета, отчетливых представлений о понятиях, лежащих в основе математики, а также об ее методах. Он не прощал неряшливости изложения и неумения излагать ясно и четко свои мысли.

Но как бы велика ни была занятость Остроградского педагогическими проблемами и организацией математического образования, основные свои силы он отдавал развитию математической науки. На первое место следует поставить его работы в области механики, математической физики и математического анализа.

Им была, в частности, построена общая теория удара (1854 г.) и далеко продвинута разработка общих принципов механики.

В области математической физики им были разработаны методы исследования распространения тепла в жидкости и твердых телах. Эти исследования непосредственно примыкают к работам французских коллег — Фурье, Пуассона и Ляме. В ряде работ шло как бы соревнование между Остроградским и Пуассоном. Некоторые из результатов Остроградского по теории передачи тепла в многогранниках им не были опубликованы, и о них известно только из книги Ляме, в которой был назван их истинный автор. Ряд работ был посвящен вопросам теории упругости и теории магнитных явлений.

Каждая задача математической физики приводила Остроградского к постановке задач анализа. Некоторые из этих задач всерьез опередили свое время, и их решение было получено много лет спустя после смерти их автора.

Остроградский вывел правило преобразования переменных под знаком кратного интеграла, которое теперь излагается во всех учебниках математического анализа, зачастую даже без указания имени автора.

Теория чисел, алгебра и теория вероятностей лежали на периферии научных интересов Остроградского, но и здесь он сделал превосходные работы.

Все его статьи по теории вероятностей связаны с приложениями к теории страхования, организации пенсионных касс, оценке качества массовой продукции. Так, в 1846 г. он опубликовал статью, посвященную выборке шаров из урны без возвращения. Полученный при этом математический результат незначителен и рассуждения совершенно элементарны, но не это является идейной основой работы, а та цель, которую ставил перед собой автор, ради чего он производил выкладки и писал статью. Вот что пишет Остроградский по этому поводу:

«Чтобы понять важность этого вопроса, заметим, что постановка его уместна, когда имеются затруднения при получении большого числа предметов, обладающих некоторыми качествами, и когда нужно затратить некоторое время на каждый предмет для того, чтобы убедиться в наличии этих качеств. Армейские поставщики часто должны делать работу подобного рода. Для них шарами, заключенными в урне, служат получаемые предметы: белые, например,— предметы, обладающие требуемыми условиями для приемки, а черные — те, которые им не удовлетворяют... Таким образом, решение предложенного нами вопроса может служить поставщикам для сокращения, приблизительно до двадцатой части, механической работы, чаще всего очень утомительной, по проверке очень большого числа мешков с мукой или кусков сукна».

Это направление исследований (названное впоследствии статистическими методами приемочного контроля) приобрело в наши дни большое значение в связи с развитием массового производства и резким увеличением приемно-сдаточных операций. Оно находит многочисленные повседневные применения и приносит народному хозяйству огромную экономию материалов, труда и времени, а также средств.

Скончался Остроградский в Полтаве 1 января 1862 года.

Рукописи Остроградского сохранились в очень плохом состоянии. По-видимому, он относился к ним небрежно. Многие записи Остроградский делал на клочках бумаги. В частности, на нескольких клочках бумаги были обнаружены новые алгоритмы для приближения иррациональных чисел.

Общеметодологические взгляды Остроградского можно охарактеризовать как естественнонаучный материализм. Однажды Остроградский заявил: «Я был полным материалистом и атеистом, признавал только то, что можно осязать, вымерять и свесить». В рукописях Остроградского имеется такая запись:

«Порой мы слепо верим в вещи точно не доказанные. Это зависит от склонности нашего организма, от наших чувств. Следует верить только в вещи доказанные, ибо вера, о которой шла речь, меняется с нашим положением, с нашим организмом. Обжорство не является свойством, осужденным божественным законом, так как высшее существо не вмешивается в столь низкие дела, как наш желудок. Это неверно: для бога нет ни малых, ни больших дел. Сказанное нами содержит противоречие. Следует верить лишь в доказанные вещи. Но мы не можем доказать существование высшего существа; таким образом, мы не должны верить в бога».

Конечно, то, что мы только что прочитали, наивно. Но оно показывает, что Остроградский пытался найти и логические мотивы для развенчания религии и идеи существования бога. В этом плане приведенный отрывок представляет интерес.

В заключение добавим, что Остроградский был очень высокий, сильный и полный человек. На экзаменах для него ставили рядом два стула. Он любил украинский язык и высоко ценил поэзию Шевченко. Много его стихотворений знал наизусть. Любил шутку и часто использовал ее на своих лекциях. Студенты любили Остроградского и его лекции, поскольку он стремился донести до них не вычислительные детали, а суть предмета и его связи с другими областями знания.

Исполнилось 75 лет
члену редакционной коллегии
нашего журнала,
известному советскому физику,
лауреату Государственной премии,
действительному члену Академии
педагогических наук СССР
Валентину Александровичу
Фабриканту.
Редакционный совет,
редакционная коллегия
и редакция журнала «Квант»
поздравляют
Валентина Александровича
с днем рождения
и желают ему здоровья,
долгих лет жизни
и новых больших успехов
в его благородной деятельности
ученого и педагога.

М. Левинштейн

Эффект Ганна

Около двадцати лет назад, в начале шестидесятых годов, английский физик Джон Ганн решил исследовать вольтамперные характеристики сравнительно новых тогда полупроводников — арсенида галлия и фосфида индия — в сильных электрических полях. Неожиданно Ганн обнаружил удивительное явление: когда напряжение, приложенное к образцу, превышало определенное значение, ток в полупроводнике *при постоянном напряжении* начинал периодически меняться со временем. Это было поразительно и совершенно непонятно.

Опытный экспериментатор, известный специалист в области физики полупроводников, Ганн не мог подыскать никакого объяснения этому эффекту. Он описал результаты своих наблюдений в 1963 году в короткой заметке, которая сразу привлекла внимание десятков физиков и инженеров во всем мире. Физикам представлялось интересным объяснить это удивительное явление. Инженеры сразу поняли, что открытие Ганна означает появление нового полупроводникового генератора, который может работать в области сверхвысоких частот. Такие генераторы были очень нужны во многих областях радиоэлектроники, в том числе — в радиолокации и системах связи.

Десятки специалистов размышляли над природой открытого Ганном явления. Однако прошел год, пока его удалось объяснить.

Попытаемся и мы разобраться в природе эффекта Ганна.

Представим себе, что мы, как в свое время Ганн, задались целью изучить вольтамперную характеристику (то есть зависимость тока от напряжения) какого-нибудь полупроводника, например германия (Ge), кремния (Si) или арсенида галлия (GaAs).

Пусть в нашем распоряжении имеется массивный монокристалл, представляющий собой полупроводник n-типа (в нем основные носители заряда — электроны) с удельным сопротивлением ϱ. Сначала вырежем из этого монокристалла образец правильной формы, удобнее всего — прямоугольный параллелепипед. (Дело это непростое, так как полупроводники довольно трудно поддаются механической обработке, и нам придется воспользоваться инструментом, режущая кромка которого содержит сверхтвердые материалы — корунд, эльбор или алмаз.) Теперь прикоснемся к боковым граням образца измерительными концами тестера (прибора для измерения сопротивлений). Естественно ожидать, что сопротивление изготовленного нами образца будет равно

$$R_0 = \varrho\frac{l}{S} = \frac{l}{\sigma S} = \frac{l}{\sigma h d},$$

где $\sigma = 1/\varrho$ — удельная проводимость полупроводника, а l, h, d — геометрические размеры образца (рис. 1). Однако значение сопротивления, которое зарегистрирует прибор, окажется в миллионы раз бо́льшим, чем величина, предсказываемая этой формулой. Дело в том, что в местах соприкосновения металлических концов тестера с полупроводником возникает тонкий приповерхностный заряженный слой — так называемый

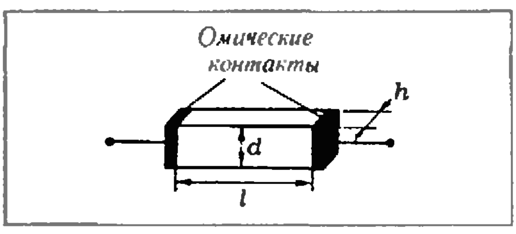
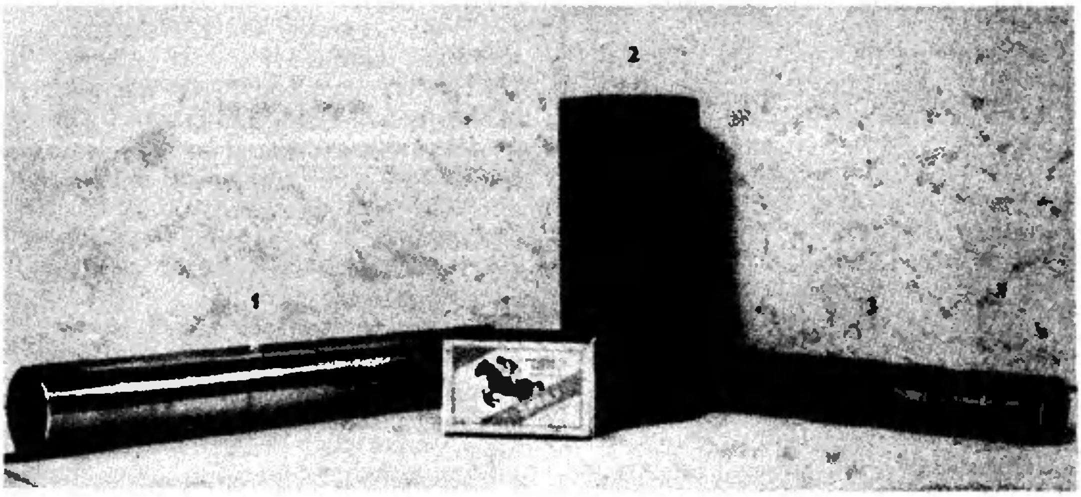


Рис. 1. Образец с контактами.



Новые полупроводниковые материалы получают обычно в виде крошечных монокристаллов размером в доли миллиметра. Однако такие хорошо изученные и широко применяемые полупроводники, как Ge (1), Si (2), GaAs (3), современная технология позволяет получать в виде монокристаллов объемом в десятки и сотни кубических сантиметров.

барьер металл — полупроводник, и прибор будет измерять сопротивление барьера, а не сопротивление образца.

Чтобы обойти эту трудность, боковые грани образца необходимо снабдить «омическими контактами», в которых барьеры отсутствуют. Как правило, такие контакты получают, вплавляя в боковые грани определенные металлы (индий, олово) или сплавы (германий — золото, германий — серебро). Изготовить хороший «омический контакт» нелегко. Приходится подбирать материал контакта, температуру и режим вплавления, атмосферу, в которой следует производить вплавление (часто это бывает атмосфера водорода или инертного газа), определенным образом подготавливать поверхность боковых граней.

Но вот все трудности позади, и тестер, подключенный к боковым граням образца, показывает, что сопротивление равно расчетному значению R_0. Теперь можно приступить к измерению вольтамперной характеристики.

Пока напряжение U, приложенное к образцу, не велико, ток, как и следует ожидать, пропорционален напряжению — выполняется закон Ома $I=U/R_0$. Однако при бóльших напряжениях ток начинает расти значительно быстрее, чем этого требует закон Ома (кривая I на рисунке 2). В этом нет ничего удивительного: когда ток и напряжение велики, образец разогревается джоулевым теплом. Как известно, полупроводники тем, в частности, и отличаются от металлов, что с ростом температуры их проводимость увеличивается, то есть удельное сопротивление уменьшается. При нагревании полупроводника все больше электронов разрывают свои связи с атомами кристаллической решетки и становятся свободными. Увеличивается концентрация свободных электронов — падает удельное сопротивление материала и уменьшается сопротивление образца. Значит, при том же напряжении на образце ток становится больше. Увеличение тока влечет за собой еще больший разогрев образца, еще большее увеличение концентрации электронов, и т. д. Вот почему так резко возрастает ток, когда разогрев образца джоулевым теплом становится заметным.

(Решив задачу 1, помещенную в конце статьи, можно найти, при каких напряжениях и токах вольтамперная характеристика начнет отличаться от омической за счет нагрева образца протекающим током.)

Интересно оценить, какова скорость упорядоченного перемещения электронов вдоль поля (дрейфовая скорость электронов) в условиях, когда джоулев разогрев начинает вызывать резкое увеличение тока в образце с ростом напряжения. Движение электронов в полупроводнике подобно движению тела в вязкой жидкости: внешняя сила определяет установившуюся скорость движения. Поэтому дрейфовая скорость электронов $v_д$ пропорциональна напряженности электрического поля —

$$v_д = \mu E = \mu \frac{U}{l}. \qquad (*)$$

Коэффициент пропорциональности μ называют *подвижностью*. Как видно из формулы (*), подвижность численно равна дрейфовой скорости при напряженности поля, равной единице. Если размерность v — м/с, а размерность E — В/м, то размерность μ — $м^2/(В \cdot с)$. Диапазон значений подвижности электронов у различных полупроводников очень широк: от $\sim 10^{-5}$ $м^2/(В \cdot с)$ до $\sim 10^2$ $м^2/(В \cdot с)$. При комнатной температуре для Ge $\mu \approx 0{,}5$ $м^2/(В \cdot с)$, для Si — 0,1 $м^2/(В \cdot с)$, для GaAs — 0,8 $м^2/(В \cdot с)$. Как показывают расчеты (см. задачу 1), значение напряженности поля, при котором влияние джоулева разогрева начинает искажать вид вольтамперной характеристики, не превышает $\sim 10^4$ В/м. При этом значения дрейфовой скорости электронов — не больше 10^3—10^4 м/с.

Важно подчеркнуть, что когда вследствие джоулева разогрева полупроводника ток начинает резко увеличиваться с ростом напряжения, величина подвижности не меняется. Ток возрастает за счет того, что разогрев вызывает появление «дополнительных» электронов.

Итак, джоулев разогрев искажает форму вольтамперной характеристики полупроводника в области высоких напряжений, и его необходимо устранить. Это можно сделать, прикладывая к образцу напряжение в виде коротких импульсов. В соответствии с законом Джоуля — Ленца, количество тепла, выделяющегося в образце, пропорционально времени прохождения тока, а следовательно, длительности импульса. Если использовать короткие импульсы напряжения и прикладывать их к образцу редко, так чтобы в промежутке между импульсами выделившееся в образце тепло успело полностью рассеяться, можно достичь очень сильных электрических полей, не нагревая образец (задача 2).

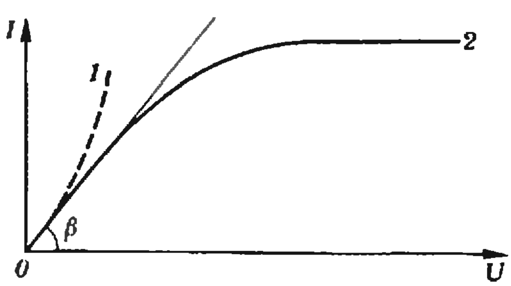


Рис. 2. Качественный вид вольтамперной характеристики для Ge и Si на постоянном токе (кривая *1*) и в импульсном режиме (кривая *2*); $tg\beta = 1/R$.

Теперь для изучения вольтамперных характеристик потребуются приборы более сложные, чем вольтметр и амперметр. Необходимы генератор, вырабатывающий импульсы напряжения, и осциллограф, чтобы наблюдать импульсы тока и напряжения. Запасемся этими приборами и продолжим наши исследования.

Влияние разогрева устранено, вольтамперная характеристика вновь стала линейной и остается омической до гораздо бóльших значений напряжения, чем на постоянном токе. Однако по мере роста напряжения вновь наблюдается отклонение от закона Ома. Для Ge и Si с увеличением напряжения ток растет медленнее, чем по линейному закону. При очень больших напряжениях ток практически перестает зависеть от напряжения — насыщается (кривая *2* на рисунке 2).

Проводя эксперименты с образцами различной длины l, можно заметить, что отклонение от закона Ома и насыщение всегда наступают при одних и тех же значениях напряженности электрического поля $E = U/l$.

Первое, что приходит в голову при попытке объяснить это явление, — предположить, что по какой-то причине с ростом поля E начинает убывать концентрация n электронов в образце. Однако это не так. Контрольные эксперименты показывают, что в чистых Ge и Si концентрация электронов при тех полях, в которых наблюдается насыщение тока, от поля не зависит. Поскольку сила тока

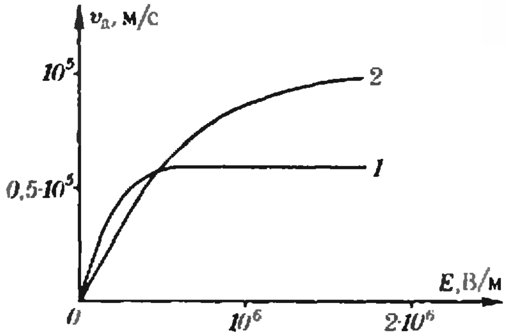


Рис. 3. Зависимость дрейфовой скорости электронов $v_д$ от напряженности электрического поля E для Ge (кривая 1) и Si (кривая 2).

равна $I = env_д hd$, насыщение тока при неизменной концентрации электронов означает, что *в Ge и Si дрейфовая скорость электронов в сильных электрических полях от напряженности поля не зависит.*

На первый взгляд такая ситуация кажется очень странной. Электрическое поле, ускоряющее электроны, растет, а скорость направленного движения электронов не меняется. Вспомним, однако, что дрейфовая скорость электронов определяется двумя процессами: ускорением электронов полем и их торможением в результате столкновений с атомами кристаллической решетки. Величина подвижности как раз и определяется процессами столкновения электронов с кристаллической решеткой. Так вот оказывается, что при больших полях эффективность этих процессов повышается, и подвижность электронов в Ge и Si с ростом поля уменьшается. В очень сильных полях подвижность падает обратно пропорционально напряженности поля. При этом (см. формулу (*)) дрейфовая скорость электронов перестает зависеть от напряженности поля E — насыщается (рис. 3).

Насыщение дрейфовой скорости электронов в Ge и Si в сильных электрических полях было открыто задолго до того, как Ганн приступил к своим исследованиям. То обстоятельство, что свойства электронов в сильных полях могут очень заметно отличаться от свойств электронов в слабых электрических полях, также было хорошо известно. Но эффект, который Ганн наблюдал в образцах арсенида галлия (GaAs) и фосфида индия (InP), был просто поразителен.

Судите сами. К образцу прикладывались импульсы напряжения (рис. 4, *а*). Пока амплитуды импульсов были меньше некоторой пороговой величины $U_п$ (этот случай показан на рисунке 4, *а* пунктиром), все было понятно. Ток через образец нарастал, пока нарастало напряжение, оставался постоянным, когда напряжение не менялось, и уменьшался, когда напряжение спадало (пунктирная кривая на рисунке 4, *б*). Меняя амплитуду импульса напряжения и измеряя амплитуду соответствующего этому напряжению тока, можно было построить вольтамперную характеристику образца. Она приблизительно соответствовала закону Ома.

Но стоило напряжению превысить значение $U_п$ (сплошная кривая на рисунке 4, *а*), как ток *при постоянном напряжении* начинал периодически изменяться со временем (этот случай показан на рисунке 4, *б* сплошной кривой). Проделав измерения на образцах различной длины l, Ганн установил, что пороговое напряжение пропорционально длине

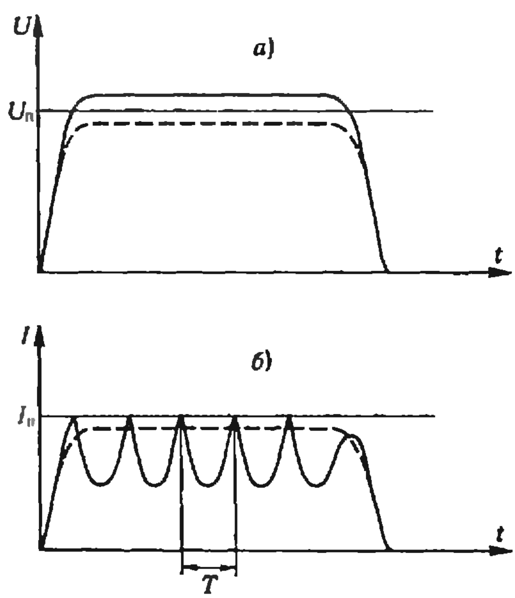


Рис. 4. Зависимость от времени напряжения на образце (*а*) и тока через образец (*б*) в экспериментах Ганна. Пунктиром показан случай, когда $U < U_п$, сплошными кривыми — когда $U > U_п$.

образцов: $U_п = E_п l$, где $E_п$ — приблизительно одинаковое для всех образцов значение напряженности поля. Для GaAs величина $E_п$ составляла примерно $3{,}2 \cdot 10^5$ В/м. Период колебаний тока был также пропорционален длине образца и равнялся приблизительно $T \approx 2l/v_п$, где $v_п \approx \mu E_п$.

Пытаясь понять, что происходит в образце, когда возникают колебания, Ганн проделал замечательное по уровню экспериментального мастерства исследование открытого им эффекта. Он установил, что, когда напряжение на образце превышает пороговое значение $U_п$, характер протекания тока и распределение напряженности электрического поля в образце совершенно меняются. При $U < U_п$ ток в образце представляет собой поток электронов, текущих от того контакта образца, к которому приложен «минус» источника напряжения (от катода), к контакту, к которому приложен «плюс» (к аноду); электрическое поле распределено вдоль образца однородно (пунктирная кривая на рисунке 5). В этих условиях вольтамперная характеристика образца соответствует закону Ома. Но как только напряжение, подаваемое на образец, достигает порогового значения $U_п$, характер распределения поля вдоль образца резко меняется. В образце у катода возникает узкая область очень сильного поля — «домен»*). Хотя ширина этой области невелика, но поле в ней настолько сильное, что на домене падает значительная часть приложенного к образцу напряжения (рис. 5). Домен движется от катода к аноду со скоростью, приблизительно равной $v_п/2$. Достигнув анодного контакта, домен разрушается. Немедленно после этого у катода зарождается новый домен, и все повторяется сначала.

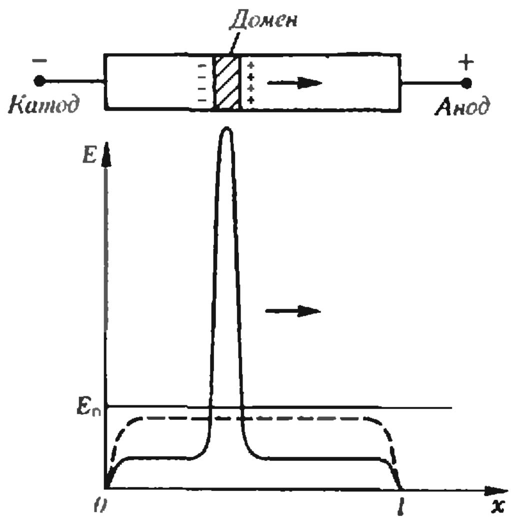


Рис. 5. Распределение электрического поля в образце при $U < U_п$ (пунктирная кривая) и при $U \geqslant U_п$ (сплошная кривая). Стрелка указывает направление распространения домена от катода к аноду. В верхней части рисунка схематически показано движение домена по образцу.

Легко понять, как связано периодическое движение домена по образцу с колебаниями тока, которые Ганн наблюдал в своих первых экспериментах.

Пусть к образцу приложили напряжение, равное $U_п$. В образце возник домен, и значительная часть напряжения упала на домене. Но это значит, что на долю остальной части образца, где домена нет, приходится теперь меньшее напряжение; следовательно, поле вне домена упало (сравните пунктирную и сплошную кривые на рисунке 5). Упало и значение скорости электронов, пропорциональное полю, а следовательно, и ток, текущий через образец.

Пока домен движется вдоль образца, ток не меняется. Когда домен, достигнув анода, начинает разрушаться, падение напряжения на нем уменьшается. При этом поле в остальной части образца растет, и, следовательно, растет ток. Но как только поле в образце в районе катода станет равным пороговому значению $E_п$, в образце начнет формироваться новый домен, и ток снова начнет уменьшаться. Пока напряжение, приложенное к образцу, превышает пороговое значение $U_п$, этот процесс периодически повторяется (см. рис. 4, *б*).

*) Слово «домен» происходит от латинского слова dominicus (хозяйский, господский). В средние века «доменом» называлось личное владение крупного феодала. В физике слово «домен» используется для обозначения области, свойства которой резко отличаются от свойств окружающего ее материала. Существуют ферромагнитные, сегнетоэлектрические домены, домены сильного и слабого поля. На рисунке 5 показан *домен сильного поля*.

Замечательные эксперименты Ганна позволили «увидеть», *что* происходит в образце, когда в нем возникают колебания тока. Однако они не отвечали на вопрос, *почему* в образце образуется домен, в чем физическая причина образования домена.

На этот вопрос в 1964 году сумел ответить американский физик Герберт Кремер. Он напомнил, что незадолго до открытия Ганна на основании теоретических расчетов было показано, что в арсениде галлия, фосфиде индия и некоторых других полупроводниках зависимость дрейфовой скорости электронов от напряженности поля должна иметь такой вид, как на рисунке 6. В определенном диапазоне значений напряженности поля E, начинающемся со значения $E_п$, дрейфовая скорость электронов падает с увеличением напряженности поля. Исходя из формулы (*), мы должны заключить, что в этом диапазоне значений E подвижность μ электронов уменьшается с увеличением E так резко, что дрейфовая скорость уменьшается, хотя напряженность электрического поля растет.

Как же связаны эффекты, которые наблюдал Ганн, с таким видом зависимости скорости электронов от поля?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим сначала очень простую задачу.

Пусть к образцу приложено напряжение $U_1 < U_п$. При этом поле вдоль образца распределено однородно и равно $E_1 = U_1/l$. Дрейфовая скорость электронов v_1 равна $v_1 = \mu E_1$ (см. рис. 6), и ток представляет собой поток электронов, текущих со скоростью v_1 от катода к аноду. Предположим теперь, что где-то в образце случайно образовался небольшой участок, в котором напряженность поля чуть-чуть больше, чем значение E_1. За счет хаотического характера движения электронов в кристалле маленькие отклонения поля от среднего значения E_1 (флуктуации поля) возникают непрерывно, и наша задача — проследить за тем, что произойдет с такой флуктуацией, когда она возникнет.

Если на каком-то участке образца поле стало несколько больше, чем в остальном образце, то это значит, что на границах этого участка скопились электрические заряды: отрицательный со стороны катода и положительный со стороны анода (см. рис. 5). Иными словами, слева от выделенного участка образовался небольшой избыток электронов, а справа — небольшой «дефицит» электронов. Складываясь с полем внешнего источника, поля этих «объемных» избыточных зарядов усиливают поле внутри выделенного участка.

Что произойдет с такой флуктуацией поля дальше?

Поскольку мы рассматриваем случай, когда $E_1 < E_п$, скорость электронов пропорциональна полю. Следовательно, электроны внутри флуктуации движутся быстрее, чем электроны в остальной части образца. Это значит, что флуктуация будет «убегать» от избыточных электронов слева и «догонять» тот участок справа, где электронов не хватает. В результате флуктуация поля рассосется.

А теперь посмотрим, что произойдет с флуктуацией, когда напряженность E_2 поля в образце несколько больше, чем пороговое значение $E_п$ (см. рис. 6). Будем по-прежнему считать, что вначале поле распределено вдоль образца однородно; за счет флуктуации зарядов возникают объемные заряды; в результате в малом участке образца поле оказывается бо́льшим, чем во всем остальном образце. *Но теперь большему полю со-*

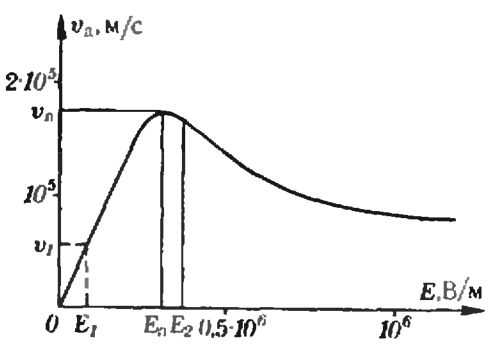


Рис. 6. Зависимость дрейфовой скорости электронов $v_д$ для GaAs от напряженности электрического поля E. Аналогичная зависимость характерна и для многих других полупроводников (InP, GaInSb, InGaAsP и др.).

ответствует меньшая дрейфовая скорость (см. рис. 6)! Значит, флуктуация движется медленнее, чем электроны слева и справа от нее. В результате слева к уже имеющимся в избытке электронам притекут, догоняя флуктуацию, новые электроны. Справа, где наблюдался «дефицит» электронов, их станет еще меньше: электроны «убегут» от флуктуации. Таким образом, объемный заряд станет больше, и увеличится поле внутри флуктуации. Но увеличению поля при $E > E_п$ соответствует уменьшение дрейфовой скорости. В результате флуктуация станет двигаться еще медленнее, еще больше электронов накопится слева от флуктуации и еще меньше их станет справа, поле внутри флуктуации станет еще больше, и т. д.

Итак, в условиях, когда дрейфовая скорость электронов уменьшается с ростом поля, однородное распределение поля неустойчиво по отношению к малой флуктуации поля: раз возникнув, такая флуктуация начинает неудержимо нарастать.

Когда прекратится рост объемного заряда на границах флуктуации и, следовательно, рост флуктуации? Для этого, очевидно, необходимо, чтобы скорость электронов внутри флуктуации сравнялась со скоростью электронов вне ее.

Пока избыточное поле внутри флуктуации мало́, на ней падает маленькое напряжение, и ее присутствие в образце практически не сказывается на скорости электронов вне флуктуации. Однако по мере нарастания поля внутри флуктуации, на ней начинает падать все большее и большее напряжение. При этом напряжение на остальной части образца становится меньше (ведь полное напряжение, приложенное к образцу, постоянно). Поле вне «флуктуации» падает. Слово «флуктуация» взято в кавычки, поскольку как-то неудобно называть флуктуацией — словом, обозначающим небольшое случайное отклонение, — такое образование, которое поглощает заметную долю приложенного к образцу напряжения. Такая сильно выросшая флуктуация и есть домен. Вне домена скорость электронов падает с уменьшением поля, т. к. поле вне домена всегда меньше, чем $E_п$. Таким образом, по мере роста домена скорость электронов вне домена уменьшается. В конце концов скорости электронов внутри и вне домена сравняются и рост домена прекратится. По образцу от катода к аноду будет «бежать» неизменный по форме (стабильный) участок сильного поля — домен.

Эти домены и наблюдал Ганн в своих экспериментах. Максимальное поле в домене E_{max} может быть очень большим. При среднем поле на образце $E_п = U_п/l = 3{,}2$ кВ/см величина E_{max} может составлять $20 \div 300$ кВ/см.

За годы, прошедшие со времени открытия Ганном эффекта возникновения колебаний тока в GaAs и InP, в научных журналах опубликовано более 2,5 тысяч работ, посвященных исследованию эффекта Ганна и различных связанных с ним физических явлений.

Эффект Ганна наблюдался к настоящему времени более чем в двадцати полупроводниковых соединениях: антимониде индия (InSb), антимониде мышьяка (AsSb), в германии, подвергнутом сжатию, в кремнии, охлажденном до низких температур, в тройных полупроводниковых соединениях GaAlAs, InGaSb, InAsP, в четверном соединении InGaAsP и многих других полупроводниках.

Основное применение ганновских диодов (так принято называть образцы, в которых наблюдается эффект Ганна) — генераторы сверхвысокой частоты.

Когда отраженный от цели импульс радиолокатора возвращается к антенне радарной установки, его необходимо усилить. Схема чувствительного современного усилителя обязательно включает в себя сравнительно маломощный, но очень стабильный и малошумящий генератор (гетеродин). Ганновские диоды успешно работают в качестве гетеродинов во многих современных радиолокаторах.

Каждый год в мире в результате автомобильных катастроф гибнут сотни тысяч людей. Одна из основных причин аварий — превышение дозволенной скорости. В городе за соблюдением предельной скорости следят патрульные машины ГАИ, снабженные специальными радиолокаторами, автоматически фиксирующими превышение скорости. Передатчиками в таких не очень мощных радиолокаторах служат диоды Ганна. В Швеции разработана специальная дорожная система «ложный полицейский», использующая ганновские диоды. Вдоль шоссе расставлены тысячи небольших металлических будок так, чтобы от каждой будки была видна следующая. В одной из нескольких десятков будок установлен автоматический радиолокатор. Если в пределах видимости локатора машина превысит дозволенную скорость, по сигналу локатора сработает фотокамера и зафиксирует номер автомобиля. Затем водителю будет вручено требование уплатить штраф на круглую сумму. (В какой именно будке установлен локатор, водитель не знает — локатор переносится с места на место дорожной полицией. Поэтому он вынужден соблюдать дозволенную скорость на всем пути.)

С каждым годом все более широкое распространение получает телевизионное вещание через искусственные спутники Земли. Для того чтобы телевизионный сигнал с Земли достиг спутника, этот сигнал преобразовывают, повышая частоту сигнала в десятки и сотни раз. Такой же сверхвысокочастотный (СВЧ) сигнал транслируется со спутника, принимается наземными трансляционными станциями, снова преобразуется в обычный телевизионный сигнал и в таком виде передается на антенны наших телевизоров.

Расчеты показывают, что гораздо удобнее и выгоднее принимать телевизионные передачи со спутников прямо на антенны индивидуальных телевизоров, а преобразование СВЧ сигнала в обычный телевизионный осуществлять с помощью небольшой приставки в каждом телевизоре. Идеальный элемент для такого преобразователя — диод Ганна.

Так что, быть может, не далек день, когда диод Ганна появится практически в каждом доме.

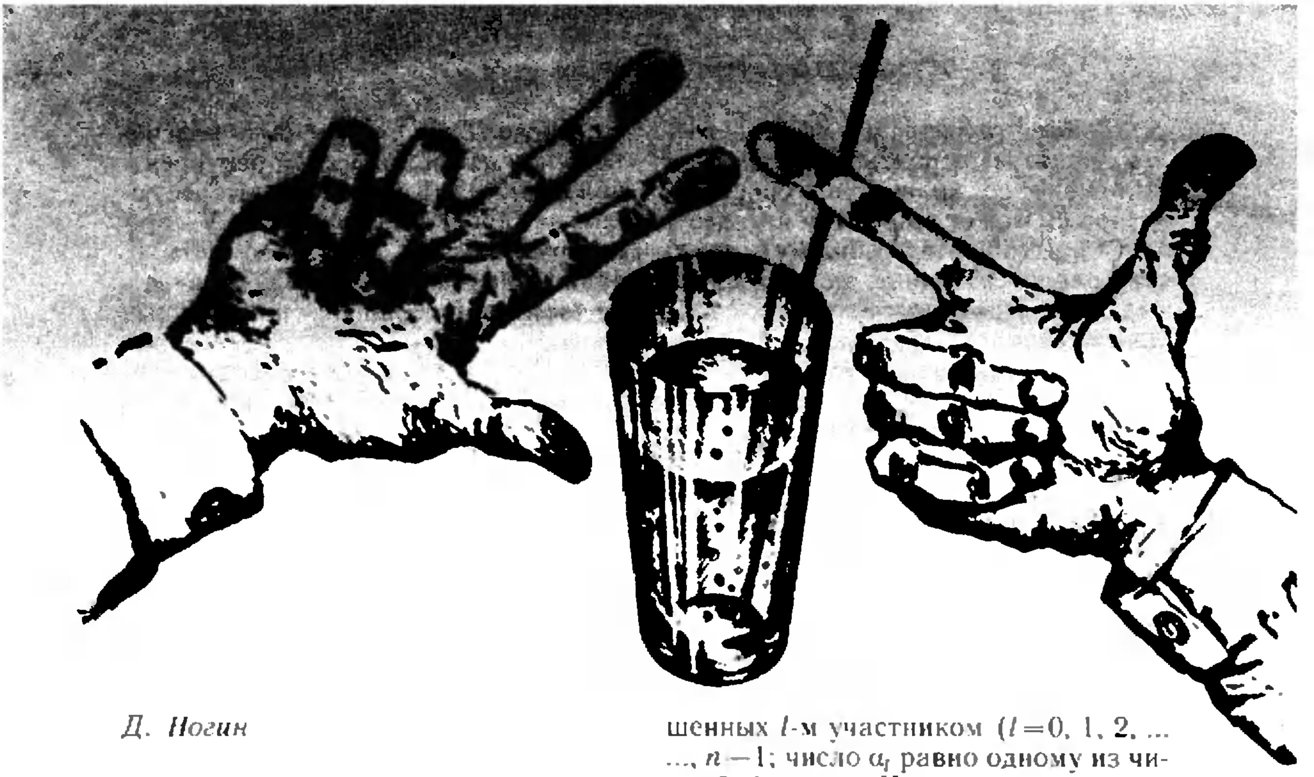
Задачи

1. Образец, показанный на рисунке 1, подключен к источнику постоянного напряжения. Охлаждение образца осуществляется за счет отвода тепла через боковые грани площадью $S=l\times d$; за единицу времени через каждую грань отводится тепло $Q=\alpha S\cdot\Delta T$, где ΔT — разность температур между нагретым образцом и окружающей средой, α — постоянный коэффициент теплоотдачи. При относительном перегреве образца на $\Delta T=5$ град становятся заметны отклонения от закона Ома. Приняв $\alpha=10^2$ Вт/(м$^2\cdot$град), размеры образца равными $l=5\cdot10^{-3}$ м, $d=10^{-3}$ м, $h=10^{-4}$ м и считая, что удельное сопротивление его ϱ лежит в пределах $10^{-4}\div10^{1}$ Ом$\cdot$м (типичные значения для полупроводников), определите, при каком значении напряженности поля в образце и при какой плотности тока станут заметными отклонения от закона Ома.

2. Полупроводниковый образец (такой же, как в задаче 1) подключен к источнику импульсного напряжения. Отклонения от закона Ома наблюдаются при том же, что и в задаче 1, относительном перегреве образца $\Delta T=5$ град. Какой длительности импульсы надо использовать, чтобы достичь полей напряженности $E\sim2\cdot10^6$ В/м без отклонений от закона Ома? Теплоемкость образца (в расчете на единицу объема) принять равной $c=1{,}5\times$ $\times10^6$ Дж/(м$^3\cdot$град). Считать, что за время импульса образец не успевает охладиться.

3. Современная полупроводниковая технология позволяет получать образцы из GaAs длиной $l=10^{-6}$ м. С какой частотой колеблется ток в таком образце в условиях эффекта Ганна? Подвижность электронов в GaAs $\mu=$ $=0{,}7$ м^2/(В$\cdot$с), $E_п=3{,}2\cdot10^5$ В/м. (Сравните длину волны этих колебаний с длиной волны, на которой транслируются радиопередачи.)

Лабиринт



Д. Ногин

Кто пойдет за лимонадом?

В жаркий летний день собрались n человек и решили, что кто-то из них должен сходить за лимонадом. Как часто делается в таких случаях, они встали в круг и стали «бросать на пальцах». При такой жеребьевке каждый по сигналу показывает какое ему вздумается число пальцев (при одном варианте «бросания» — на одной руке, при другом — на двух), после чего число пальцев суммируется и отсчитывается (начиная с нуля) с заранее выбранного человека в заранее выбранном направлении. Тот, на ком счет кончается, и бежит за лимонадом.

Казалось бы, шансы оказаться выбранным у всех участников одинаковы. Но так ли это?

Пусть максимальное число выбрасываемых пальцев равно m; через α_l обозначим число пальцев, выброшенных l-м участником ($l=0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1$; число α_l равно одному из чисел $0, 1, \ldots, m$). Число m обычно равно 5 (при «бросании» на одной руке) или 10 (при «бросании» на двух руках), но в принципе может быть любым заранее выбранным — вместо «выбрасывания пальцев» можно договориться писать числа на бумаге.

Посмотрим, что будет при $n=2$, $m=10$. Очевидно, $\alpha_0+\alpha_1=0$ в единственном случае — когда $\alpha_0=0$ и $\alpha_1=0$. Вообще, если $i\leqslant 10$, то α_0+ $+\alpha_1=i$ в следующих $i+1$ случаях:

$$\begin{aligned} &\alpha_0=0,\ \alpha_1=i\\ &\alpha_0=1,\ \alpha_1=i-1\\ &\ldots\ldots\ldots\\ &\alpha_0=i,\ \alpha_1=0. \end{aligned}$$

Каждому варианту (α_0, α_1) можно сопоставить вариант $(10-\alpha_0,$ $10-\alpha_1)$. Поэтому число вариантов, когда $\alpha_0+\alpha_1=10+k$, совпадает с числом вариантов, когда $\alpha_0+\alpha_1=$ $=10-k$.

Счет кончается на участнике с номером 0, если общее число выброшенных пальцев четно, то есть $\alpha_0+\alpha_1\in$ $\in\{0, 2, 4, \ldots, 20\}$. Таких вариантов $1+3+5+7+9+11+9+7+5+3+$ $+1=61$. Вариантов с нечетным числом выброшенных пальцев $2+4+$ $+6+8+10+10+8+6+4+2 = 60$. Каждый из рассмотренных 121 вариантов равновозможен. Поэтому у участника с номером 0 шансов быть выбранным больше, чем у участника с номером 1.

Эта заметка основана на докладе, который в ноябре 1981 г. десятиклассник Митя Ногин (с. ш. № 91 г. Москвы) сделал на XIII празднике юных математиков в Батуми («Квант», 1982, № 4).

Чтобы уточнить эту оценку, введем понятие вероятности события. Отношение p количества способов, которыми может произойти интересующее нас событие, к общему количеству равновозможных вариантов называется *вероятностью* этого события. Очевидно, $0 \leqslant p \leqslant 1$.

В нашем случае $(n=2,\ m=10)$ обозначим через p_0 вероятность события, состоящего в том, что за лимонадом пошел нулевой участник, а через p_1 — что пошел первый. Тогда $p_0 = \frac{61}{121} \approx 0{,}504$, $p_1 = \frac{60}{121} \approx 0{,}496$.

Нетрудно посчитать, что в случае «бросания» на одной руке при $n=2$ и $n=3$ шансы игроков быть выбранными одинаковы и равны соответственно $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$, а при $n=4$ $p_0=0{,}248$, $p_1=p_3=0{,}25$, $p_2=0{,}252$. С ростом n перебор вариантов все более усложняется. Он проведен нами с помощью ЭВМ до $n=100$, исходя из следующих соображений.

Обозначим через $\Pi_m^n(N)$ количество представлений числа N в виде суммы n целых неотрицательных слагаемых, каждое из которых не превосходит числа m (при этом представления, различающиеся порядком слагаемых, считаются различными!). Обозначим также через Π_i количество способов «бросания пальцев», при которых выбор падает на i-го участника, через Π — общее количество вариантов «бросания пальцев», через p_i — вероятность выбора i-го участника. Таким образом, $p_i = \frac{\Pi_i}{\Pi}$.

Числа Π_i и Π легко выражаются через $\Pi_m^n(N)$. Поскольку максимально возможное число «выкинутых пальцев» равно mn,

$$\Pi = \sum_{k=0}^{mn} \Pi_m^n(k).$$

Так как выбор падает на i-го участника, если число «выкинутых пальцев» имеет вид $i+kn$, причем, очевидно, $k \leqslant m$ (заметим, что при $N > mn$ $\Pi_m^n(N)=0$),

$$\Pi_i = \sum_{k=0}^{m} \Pi_m^n(i+kn). \qquad (1)$$

Число $\Pi_m^n(N)$ может быть подсчитано при помощи простой рекуррентной формулы. Количество интересующих нас представлений числа N, при которых первое слагаемое есть 0, равно, очевидно, $\Pi_m^{n-1}(N)$; количество таких представлений, при которых первое слагаемое есть 1, равно $\Pi_m^{n-1}(N-1)$; при которых первое слагаемое есть 2 — $\Pi_m^{n-1}(N-2)$; и т. д. Поскольку первое слагаемое принимает одно из значений 0, 1, 2, ..., m,

$$\Pi_m^n(N) = \Pi_m^{n-1}(N) + \Pi_m^{n-1}(N-1) + \ldots$$
$$\ldots + \Pi_m^{n-1}(N-m) = \sum_{k=0}^{m} \Pi_m^{n-1}(N-k) \quad (2)$$

(в этой сумме некоторые слагаемые могут равняться 0: если N — «маленькое», то, начиная с некоторого k, может быть $N-k<0$ — тогда $\Pi_m^{n-1}(N-k)=0$; кроме того, если N — «большое», то, вплоть до некоторого k, может быть $N-k>m\,(n-1)$ — тогда тоже $\Pi_m^{n-1}(N-k)=0$).

Вычислив $\Pi_m^2(k)$ при всех $0 \leqslant k < N$, мы затем с помощью (2) найдем $\Pi_m^3(N)$ и т. д.

Соотношение (2) позволяет также доказать, что *при $n=m+1$ шансы всех участников равны*. Действительно,

$$\Pi_i = \sum_{k=0}^{m} \Pi_m^n(i+kn) =$$
$$= \sum_{k=0}^{m} [\Pi_m^{n-1}(i+kn) +$$
$$+ \Pi_m^{n-1}(i+kn-1) + \ldots$$
$$\ldots + \Pi_m^{n-1}(i+kn-m)] =$$
$$= \sum_{k=0}^{m} \{\Pi_m^m(i+km+k) +$$
$$+ \Pi_m^m(i+km+k-1) + \ldots$$
$$\ldots + \Pi_m^m(i+km+k-m)\}.$$

«Фигурная скобка» при каждом k имеет вид

$$\Pi_m^m(a) + \Pi_m^m(a-1) + \Pi_m^m(a-2) + \ldots$$

Оказывается, «фигурные скобки» при соседних k «стыкуются»: первое слагаемое в «фигурной скобке» с $k=t$ равно $\Pi_m^m(i+tm+t)$, последнее сла-

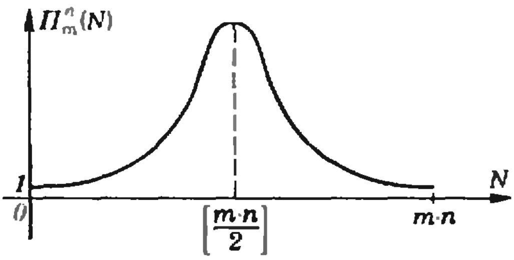
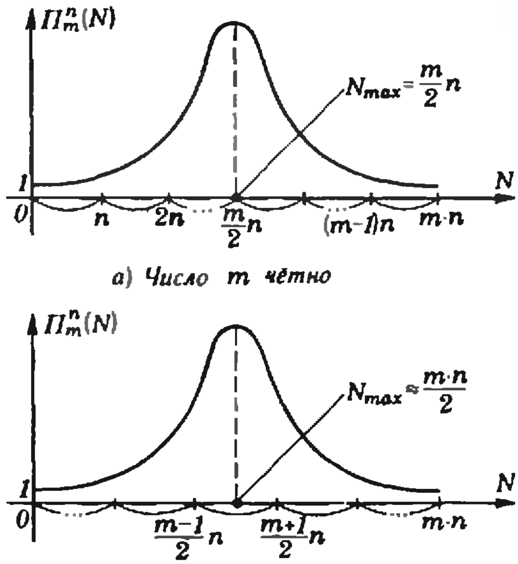


Рис. 1.



а) Число m чётно

б) Число m нечётно

Рис. 2.

гаемое в «фигурной скобке» с $k = t+1$ равно $\Pi_m^m(i+tm+t+1)$. Значит,

$$\Pi_i = \Pi_m^m(i+m^2+m) + \Pi_m^m(i+m^2+m-1) + \ldots + \Pi_m^m(i-m).$$

Поскольку, с одной стороны, при $t > mn$ и при $t < 0$ $\Pi_m^n(t) = 0$ и, с другой стороны, $i \leqslant n-1 = m$, мы получаем

$$\Pi_i = \Pi_m^m(m^2) + \Pi_m^m(m^2-1) + \ldots + \Pi_m^m(0) = \sum_{k=0}^{m^2} \Pi_m^m(k),$$

то есть Π_i не зависит от i.

Однако для других значений n и m *«бросание на пальцах» может оказаться очень несправедливым.* Например, вычисленные на ЭВМ для $n=100$, $m=5$ значения p_0 и p_{50} таковы: $p_0 = 0{,}063\%$, $p_{50} = 2{,}332\%$, то есть одно больше другого почти в сорок (!) раз (при средней вероятности быть выбранным, равной $\frac{100\%}{n} = 1\%$).

Нетрудно понять, что число $\Pi_m^n(N)$ при $N=0$ равно 1, затем с увеличением N оно растет, при $N = \left[\frac{mn}{2}\right]$ достигает максимума, потом резко убывает и при $N = mn$ вновь становится равным 1. Эта зависимость изображена на рисунке 1.

Таким образом, основной вклад в сумму Π_i (см. (1)) вносит слагаемое, для которого $N = i + kn$ ближе всего к $\left[\frac{mn}{2}\right]$.

Если m четно, то $\frac{mn}{2}$ — целое число и $\left[\frac{mn}{2}\right] = \frac{mn}{2}$. Значит, максимум функции $\Pi_m^n(N)$ достигается при $\frac{m}{2}\cdot n$ и счет, ведущийся по кругу, составленному n участниками, завершается на игроке с номером 0 (см. рис. 2, *а*).

Если же m нечетно, максимум $\Pi_m^n(N)$ достигается при $N = \frac{m-1}{2}n + \left[\frac{n}{2}\right]$, а максимум Π_i приходится на $i = \left[\frac{n}{2}\right]$, то есть на игрока*), стоящего напротив нулевого (рис. 2, *б*). В частности, при $m=5$ с наибольшей вероятностью за лимонадом побежит игрок, стоящий напротив того, с которого начинается счет; при $m=10$ — игрок, с которого начинается счет. Эта разница шансов тем больше, чем больше n и чем меньше m.

Для обычного класса средней школы ($n \sim 40$) при «выбрасывании пальцев» одной руки ($m=5$) встать напротив начинающего выгоднее (в несколько раз), чем быть им. Однако хотелось бы верить, что овладевшие теорией не будут использовать ее в корыстных целях, а расскажут о ней своим одноклассникам.

*) Если n нечетно, то напротив нулевого игрока стоят два игрока ($i=(n-1)/2$ и $i=(n+1)/2$) и максимум Π_i приходится на каждого из них.

А. Варламов

Сто лет назад

У многих журналов есть рубрика «О чем писал наш журнал сто лет назад», из которой читатель узнает об интересных или курьезных, с современной точки зрения, фактах, имевших место в те времена. Нашему журналу до векового юбилея еще далеко, так что нам такую рубрику заводить пока рано. Впрочем, попытаемся представить, о чем мог бы писать журнал, аналогичный нашему, сто лет тому назад.

Тогда еще не были открыты явления сверхпроводимости и сверхтекучести, никто даже не подозревал о возможности создания лазеров и термоядерных реакторов, спутников и космических ракет. Поэтому на первый взгляд кажется, что любознательным гимназистам, интересующимся физикой, читать было не о чем. Однако читали и небезуспешно — выросло поколение замечательных физиков, создавших сложную современную физическую науку.

Недавно автору этих строк в руки попала ветхая книга Б. Доната «Физика в играх для юношества», изданная в конце XIX века. В те времена изучение физики носило более «опытный», наглядный и занимательный характер.

Ниже приводится описание нескольких забавных экспериментов, взятых из указанной книги.

Фонтан, бьющий по приказанию

Устройство такого фонтана показано на рисунке 1. Бутыль A (вместимостью около одного литра) с двумя горлышками (верхним и боковым) установлена на подставку B, рядом с которой находится резервуар C для сбора воды. Оба горлышка закрыты резиновыми пробками с вставленными в них изогнутыми трубками a и $в$. Трубка $в$ служит для основного стока фонтана, а трубка a, конец которой немного не доходит до дна резервуара, играет роль своеобразного замка.

Если трубка a открыта, воздух поступает в бутыль, и вода свободно вытекает из нее через трубку $в$, увеличивая количество воды в резервуаре. Как только уровень воды достигает отверстия трубки a, доступ воздуха в бутыль прекращается, и вода перестает течь из трубки $в$ — фонтан иссяк!

Для того чтобы он заработал вновь, необходимо открыть отверстие в трубке a. Для этой цели служит трубка c в дне резервуара. Если ее диаметр меньше диаметра трубки $в$, во время работы фонтана приток воды в резервуар превышает ее расход, и в некоторый момент отверстие трубки a закроется — фонтан тут же «умолкнет». Когда же количество воды убавится настолько, что конец трубки a откроется, фонтан заработает снова.

Скрыв от посторонних глаз внутреннее устройство фонтана (например, оклеив бутыль древесной корой), этот опыт можно показывать в качестве фокуса. Только нужно поменять местами причину и следствие. Пусть не фонтан то бьет, то «молчит», а вы, глядя на

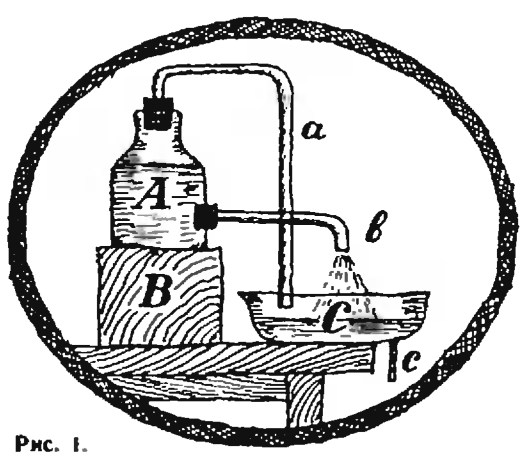


Рис. 1.

конец трубки a, в соответствующие моменты ему приказываете: «Фонтан, бей! Фонтан, остановись!».

Говорящая фигурка

Этот опыт основан на волновых свойствах звука, и для него вам понадобятся два вогнутых сферических зеркала с радиусом кривизны порядка одного метра.

Так как эти зеркала должны отражать звук, а не свет, то в особом блеске их поверхности надобности нет. Достаточно, чтобы размеры шероховатостей и неровностей были значительно меньше длины звуковой волны. Характерные длины волн человеческой речи составляют от десятков сантиметров до нескольких метров, так что неровности зеркальной поверхности не должны превышать 1—2 сантиметров. (Проведите аналогичный анализ для световых волн и получите численную оценку допустимых шероховатостей оптических зеркал.)

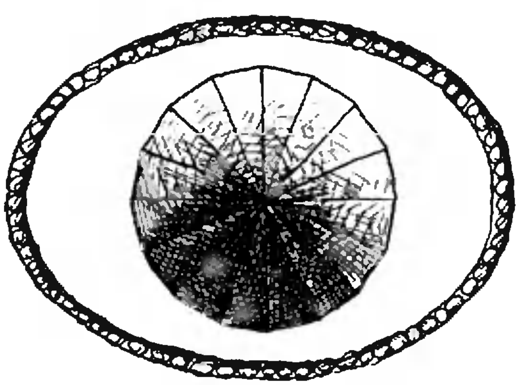


Рис. 2.

Такое зеркало нетрудно изготовить самостоятельно. Возьмите кусок картона, разрежьте его на одинаковые остроугольные равнобедренные треугольники (чем их будет больше, тем лучше), соберите из них пирамидальную поверхность и соседние боковые стороны треугольников сшейте (рис. 2). Чем длиннее треугольники вы возьмете, тем шире у вас получится зеркало. Для опыта вполне подойдут треугольники с длиной боковой стороны 30—40 см.

Сшитый картон намочите, чтобы он размяк и от этого растягивался, и при помощи большого плоского блюда придайте ему требуемую форму. Затем окончательно разровняйте зеркало по лекалу, которое тоже можно сделать самостоятельно. На куске картона длиной около 70 см и шириной 30 см начертите дугу окружности радиуса 1 м так,

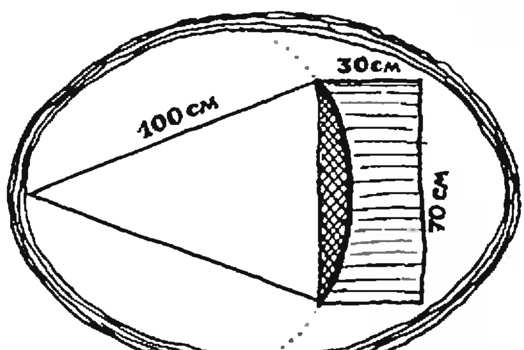


Рис. 3.

чтобы захватить ею всю длину картонного листа (рис. 3). Теперь аккуратно вырежьте полученную часть круга — лекало готово. Вставьте лекало в зеркало и добейтесь того, чтобы оно свободно вращалось внутри зеркала, не задевая за неровности. Сделав это, поставьте зеркало в тень сушиться.

Для нашего опыта понадобятся два, по возможности одинаковых, зеркала. Повесьте их на стены в двух комнатах одно напротив другого так, чтобы между зеркалами находилась дверь. (Расстояние от стены до стены может достигать десяти метров.) Зеркала обязательно должны висеть строго напротив друг друга. Чтобы проверить это, в фокусе одного зеркала (он нахо-

дится на расстоянии, равном половине радиуса, от вершины зеркала) поместите часы. Их ход должен быть слышен громче всего в фокусе второго зеркала.

Теперь, когда система настроена, в фокусе одного зеркала поставьте куклу или какую-нибудь фигурку и объявите собравшимся друзьям, что она умеет отвечать на самые разные вопросы, которые ей будут шептать на ухо. Второе зеркало от зрителей нужно как-то скрыть, например занавесить дверь простыней или ярко осветить комнату с фигуркой и оставить затемненной вторую комнату.

Разумеется, один вы с этим опытом не справитесь — у фокуса дальнего зеркала должен находиться ваш надежный помощник. Здесь он услышит все, что будут говорить фигурке на ухо, и сможет отвечать на задаваемые вопросы. А в соседней комнате эти ответы будут восприниматься исходящими от самой фигурки. Объяснить это нетрудно. Если источник звука находится в фокусе одного зеркала, то, отразившись от него, волны будут распространяться вдоль оси обоих зеркал, и после отражения от второго зеркала они соберутся в его фокусе.

Еще лучше, если у помощника будет рупор, через который можно слушать вопросы и давать ответы. Кроме того, что рупор усиливает звуки, он сильно искажает голоса, а это, безусловно, еще усилит эффект опыта.

Поющий бокал

Оказывается, из тонкостенного стеклянного бокала можно извлекать различные музыкальные звуки, причем весьма своеобразным способом. Впрочем, судите сами.

Вымойте руки горячей водой, чтобы удалить с пальцев жировые вещества. Обмокните палец в воду и аккуратно водите им по краю бокала, постоянно смачивая палец водой. Сначала бокал будет издавать неприятный скрипящий звук, но затем, когда края хорошо оботрутся, звуки станут мелодичнее. Меняя силу нажима пальца, вы сможете менять и тон извлекаемого из бокала звука. Кроме того, высота тона зависит еще от размеров бокала, толщины его стенок и количества содержимого в нем.

Заметим, что не любой бокал способен издавать приятные поющие звуки, поэтому поиск подходящего бокала может оказаться долгим и хлопотливым. Лучше всего поют (а не скрипят) очень тонкие бокалы, имеющие форму параболоида вращения, на длинной и тонкой ножке. Тон звучания можно менять, подливая в бокал воду — чем больше в бокале будет воды, тем ниже он будет звучать.

(И еще одно замечание к наблюдению. Когда уровень воды поднимется до середины бокала, на ее поверхности появятся волны, возникающие из-за сотрясения стенок бокала. Сильнее всего волнение будет в том месте, где в данный момент находится ваш палец.)

Интересно, что на основе описанного явления знаменитый американский ученый Бенджамин Франклин (открывший, в частности, атмосферное электричество) создал весьма оригинальный музыкальный инструмент. Целый ряд хорошо отшлифованных стеклянных чашек, просверленных в середине, на одинаковых расстояниях друг от друга прикреплялись к одной общей оси. Под ящиком, в котором находилась эта система, была приделана педаль (как у швейной машины), приводящая ось во вращение. От простого прикосновения мокрых пальцев к вращающимся чашкам окружающие звуки усиливались до фортиссимо или падали до шепота.

Сейчас трудно представить себе этот удивительный музыкальный инструмент, но люди, слышавшие его, уверяли, будто бы гармония его звуков потрясающим образом действовала как на самого исполнителя, так и на слушателей. В 1763 году свой образец этого инструмента Франклин подарил англичанке мисс Дэвис. В течение нескольких лет она демонстрировала его во многих странах Европы, а затем этот удивительный инструмент бесследно исчез.

Зеркало, которое не путает правой и левой сторон

Возьмите два обычных зеркала без рам, составьте их краями под прямым углом друг к другу зеркальной стороной вовнутрь и посмотрите прямо в угол вдоль его биссектрисы. Вы увидите свое изображение. Затем закройте один глаз, например правый,— ваше изображение закроет тоже правый глаз; поднимите левую руку — в зеркале окажется поднятой также левая рука. Почему?

Это понять нетрудно. Изображение своей левой половины в левом зеркале непосредственно вы видеть не можете, так как (следуя закону отражения) отраженные от него лучи идут не к вам, а в противоположную сторону и на своем пути встречают второе, правое зеркало. В нем-то и получается окончательное изображение вашей левой половины, которое вы увидите, так как правое зеркало расположено соответствующим для этого образом. Другими словами, одно зеркало незаметно «передает» изображение другому, в результате происходит не одно отражение, а два, так что левая половина естественно переходит снова в левую, а правая — в правую.

Теперь попробуйте плавно увеличивать угол раствора зеркал. Вначале пропадет середина лица с носом, потом останутся только одни уши, а при некотором угле изображение лица исчезнет вовсе, но при угле, близком к 180°, появится обычное изображение лица в плоском зеркале. Если опыт проводить в обратном порядке, то все будет происходить наоборот: сначала лицо начнет расплываться в ширину, нос распухнет, рот вытянется в длину, потом на переносице появится третий глаз и ... тому подобное.

Чтобы понять, почему так ведет себя изображение, попробуйте нарисовать ход лучей в такой зеркальной системе для различных углов между зеркалами.

Задачник Кванта

Задачи

М766 — М770; Ф778 — Ф782

М766. Докажите, что сумма квадратов трех последовательных целых чисел не может быть кубом натурального числа.

Ю. Ионин

М767. а) Прямая l делит площадь выпуклого многоугольника пополам. Докажите, что отношение, в котором эта прямая делит проекцию многоугольника на перпендикулярную к ней прямую, не превосходит $1+\sqrt{2}$ (рис. 1, *а*).
б) Каждая из трех прямых делит площадь данной фигуры пополам. Докажите, что площадь части фигуры, заключенной в треугольнике между тремя прямыми, не превосходит 1/4 всей площади фигуры (рис. 1, *б*).

В. Прасолов

М768*. Сумма n чисел, каждое из которых не превосходит по модулю 1, равна s. Докажите, что из них можно выбрать несколько чисел так, что сумма выбранных чисел будет отличаться от $s/3$ не более чем на $1/3$.

В. Гринберг

М769*. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке L, их продолжения пересекают описанную окружность треугольника в точках A_1, B_1, C_1 (рис. 2). Пусть R — радиус описанной, r — радиус вписанной окружности треугольника ABC. Докажите равенства

$$\text{а) } \frac{|LA_1|\cdot|LC_1|}{|LB|}=R; \quad \text{б) } \frac{|LA|\cdot|LC|}{|LB_1|}=r;$$

$$\text{в) } \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\frac{2r}{R}.$$

Р. Мазов

М770*. В основании треугольной пирамиды $PABC$ лежит правильный треугольник ABC. Докажите, что если углы PAB, PBC, PCA конгруэнтны, то пирамида $PABC$ — правильная.

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задач мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 декабря 1982 года по адресу: 117071, Москва, Ленинский проспект, 15, «Физматлит», «Квант». В графе «Кому» напишите «Задачник «Кванта» № 10 — 82» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М766, М767» или «Ф778». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

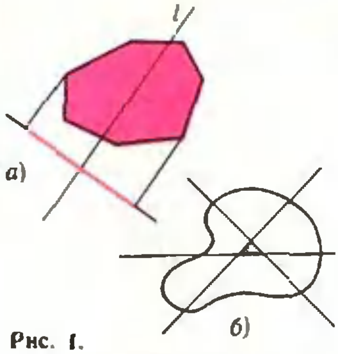


Рис. 1.

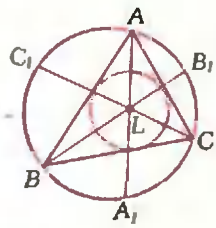


Рис. 2.

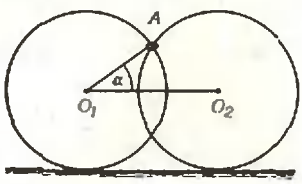


Рис. 3.

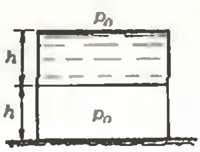


Рис. 4.

Ф778. Колечко массы m, свободно скрепляющее два тонких обруча массы M, начинает соскальзывать вниз; обручи при этом разъезжаются в разные стороны по шероховатой горизонтальной поверхности. Определить ускорение колечка в начальный момент времени, если угол AO_1O_2 (рис. 3) равен α. Трение между колечком и обручами отсутствует.

С. Кротов

Ф779. Квадрат, состоящий из двух половинок, отношение масс которых равно двум, находится на шероховатой поверхности. Под каким углом α к границе раздела половинок необходимо тянуть веревку в горизонтальной плоскости, чтобы квадрат двигался поступательно? Точка приложения силы лежит в точке пересечения стороны квадрата и границы раздела.

Э. Алиев

Ф780. Цилиндрический сосуд высотой $2h$, поровну разделенный перегородкой, содержит в верхней части воду (ее плотность ρ), в нижней — воздух при атмосферном давлении p_0 (рис. 4). В перегородке открывается небольшое отверстие, так что вода начинает протекать в нижнюю часть сосуда. Какой толщины будет слой воды в нижней части сосуда, когда воздух начнет проходить из отверстия вверх? Температура постоянна. Ускорение силы тяжести равно g.

В. Бородин

Ф781. Между двумя незаряженными металлическими концентрическими сферами радиусов a и b находится точечный заряд q на расстоянии c от центра сфер. Какой заряд протечет по тонкому проводнику, если им замкнуть сферы?

В. Комов

Ф782. Конденсатор зарядили до напряжения $U_0 = 100$ В и подключили к нему резистор. При этом за некоторый интервал времени выделилась в виде тепла энергия $W_1 = 1$ Дж, а еще за такой же интервал — энергия $W_2 = 0{,}3$ Дж. Определить емкость конденсатора.

А. Зильберман

Problems

M766 — M770; P778 — P782

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requi-

M766. Prove that the sum of squares of three consecutive integers cannot be the cube of a naturel number.

Yu. Ionin

M767. a) The straight line l splits a convex polygon into two parts of egal area; the parts are projected perpendicularly on a line orthogonal to l. Prove that the quotient of lengths res no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than December 31st 1982 to the following address: USSR, Moscow, 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Физматлит», «КВАНТ». Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well solutions of problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us in two copies (including the solution) in an envelope inscribed "NEW PROBLEM IN PHYSICS (MATHEMATICS)".

of the projections is no greater that $1+\sqrt{2}$ (see figure Рис. 1, *a*, p. 27).

b) Each of three lines splits a given plane figure into two parts of equal area. Prove that the area of the parts of the figure in the triangle formed by the lines is no greater that 1/4 of that of the entire figure (see Рис. 1, *б*).

V. Prasolov

M768*. The sum of n numbers of absolute value no greater than 1 is s. Prove that some of these numbers may be chosen so that the sum of the chosen numbers will differ from $s/3$ by no more that 1/3.

V. Grinberg

M769*. The bissectors of triangle ABC intersect at the point L, their prolongations intersect the circumscribed circle at the points A_1, B_1, C_1 (see figure Рис. 2), R is the radius of the circumscribed circle, r of the inscribed one. Prove that

$$\text{a)}\ \frac{|LA_1|\cdot|LC_1|}{|LB|}=R;\quad \text{b)}\ \frac{|LA|\cdot|LC|}{|LB_1|}=r;$$

$$\text{c)}\ \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\frac{2r}{R}.$$

R. Mazov

M770*. The base of the triangular pyramid $PABC$ is the equilateral triangle ABC. Prove that the pyramid will be regular if the angles PAB, PBC, PCA are congruent.

P778. A small ring of mass m freely links two thin hoops of mass M begin to slide down while the hoops roll apart on a rough horizontal surface. Find the acceleration of the ring at the initial moment of time, if the angle AO_1O_2 egnals α (see figure Рис. 3). There is no friction between the ring and the hoops.

S. Krotov

P779. A square, consisting of two rectangular halves whose masses have the quotient 2, is placed on a rough surfase. A rope in the horizontal plane, applied to the point where the separating line of the halves intersects the side of the sjuare, is pulled so that the sjuare moves rectilinearly what is the angle α between the separating line and the string.

F. Aliev

P780. A cylindrical receptacle of height $2h$, separated into two equal halves by a horizontal partition, contains water (of density ρ) in the top half and air (under atmospheric pressure p_0) in the bottom one (see figure Рис. 4). A small hole in the partition is opened, so that water begins to flow into the bottom half of the receptacle. How thick will the layer of water in the bottom be when the air will start moving upward through the hole? The temperature is constant. The acceleration of gravity is g.

V. Borodin

P781. A point charge q is placed between two uncharged metallic concentric spheres of radii a and b at the distance c from the centre of the spheres. What charge will flow through a thin conductor connecting the spheres?

V. Komov

P782. A capacitor is charged to $U_0=100\ V$ and connected to a resistance. After a certain interval of time, the energy $W_1=1\ J$ is produced (in the form of heat), then in the following (equal) interval only $W_2=0.3\ J$ is produced. Find the capacity of the condensator.

A. Zilberman

Решения задач

М739 — М745; Ф748 — Ф757

М739. *Докажите, что при любом значении x, для которого левая часть имеет смысл, выполнены равенства*

$$\left[\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\operatorname{tg}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\right]:\left[\operatorname{tg} x\times\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\times\operatorname{tg}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\right]=-3;$$

$$\left[\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{n}\right)+\ldots+\operatorname{tg}\left(x+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right]:\left[\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\times\ldots\times\operatorname{tg}\left(x+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right]=c_n$$

где n — нечетное число, $n>0$, c_n — константа (зависящая от n).

в) Найдите c_n для каждого нечетного n.

а) Положим $\operatorname{tg} x=z$, $\operatorname{tg}(\pi/3)=\sqrt{3}=t$, тогда $\operatorname{tg}(2\pi/3)=-t$. Используя формулу тангенса суммы, получим (при $zt\neq\pm1$)

$$\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\operatorname{tg}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)}{\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)}=\frac{z+\frac{z+t}{1-zt}+\frac{z-t}{1+zt}}{z\cdot\frac{z+t}{1-zt}\cdot\frac{z-t}{1+zt}}=$$

$$=\frac{z(1-z^2t^2)+2z+2zt^2}{z(z^2-t^2)}=\frac{-3z^3+9z}{z^3-3z}=-3.$$

б) Используя формулы приведения $\operatorname{tg}(x+\pi)=-\operatorname{tg}(\pi-x)=\operatorname{tg} x$ и нечетность n, нетрудно проверить, что и числитель, и знаменатель дроби

$$f(x)=\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{n}\right)+\ldots+\operatorname{tg}\left(x+\frac{n-1}{n}\pi\right)}{\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}\left(x+\frac{n-1}{n}\pi\right)}=c_n$$

обращаются в 0 в одних и тех же точках промежутка $[0;\pi[$: $0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\pi$ (и теряют смысл — «обращаются в бесконечность» — также в одних и тех же точках $\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \ldots, \frac{2n-1}{2n}\pi$, которые мы в дальнейшем исключаем из рассмотрения). Положим $\operatorname{tg} x=z$, $\operatorname{tg}\pi k/n=t_k$ ($k=0, 1, \ldots, n-1$). Числитель и знаменатель дроби $f(x)$ можно, заменив $\operatorname{tg}(x+\pi k/n)$ на $(z+t_k)/(1-zt_k)$, представить в виде отношений многочленов от z:

$$z+\frac{z+t_1}{1-zt_1}+\ldots+\frac{z+t_{n-1}}{1-zt_{n-1}}=\frac{S_1(z)}{R(z)},$$

$$z\cdot\frac{z+t_1}{1-zt_1}\cdot\ldots\cdot\frac{z+t_{n-1}}{1-zt_{n-1}}=\frac{S_2(z)}{R(z)},$$

где $R(z)=(1-zt_1)\ldots(1-zt_{n-1})$, а оба многочлена $S_1(z)$ и $S_2(z)$ имеют степень n и одни и те же корни $t_0=0$, t_1, t_2, …, t_{n-1}. Тот факт, что дробь $f(x)$, то есть $S_1(z)/S_2(z)$, есть константа, сразу вытекает из следующей леммы:

Лемма. *Если многочлен $az^n+bz^{n-1}+\ldots+d=p(z)$ степени n имеет n различных корней $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$, то он тождественно равен $a(z-z_0)(z-z_1)\ldots(z-z_{n-1})$.*

Доказательство леммы можно провести индукцией по степени n многочлена $p(z)$. Для $n=1$ оно очевидно: $az+b=a(z-z_0)$, где $z_0=-b/a$. Пусть $p(z)$ — многочлен степени $n+1$ со старшим коэффициентом a и корнями $z_0, z_1, \ldots, z_n$. Тогда $p(z)=p(z)-p(z_n)=az^n+bz^{n-1}+\ldots+d-(az_n^n+bz_n^{n-1}+\ldots+d)=a(z^n-z_n^n)+b(z^{n-1}-z_n^{n-1})+\ldots=(z-z_n)q(z)$, где $q(z)$ — некоторый многочлен степени n со старшим коэффициентом a и корнями $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$. По предположению индукции $p(z)=(z-z_n)\cdot a(z-z_0)(z-z_1)\cdot\ldots\cdot(z-z_{n-1})=a(z-z_0)(z-z_1)\ldots(z-z_n)$, то есть утверждение леммы справедливо и для многочлена степени $n+1$. (В доказательстве использовалось тождество

$$z^k-a^k=(z-a)(z^{k-1}+z^{k-2}a+\ldots+za^{k-2}+a^{k-1}),$$

из которого видно, что z^k-a^k делится на $z-a$.)

в) Найти константу c_n для любого (нечетного) n значительно труднее. Ответ: $c_n=(-1)^{\frac{n-1}{2}}n$, то есть $c_3=-3$, $c_5=5$, $c_7=-7$ и т. д. Во всех решениях, которые мы упомянем ниже, используются соображения, связанные с корнями многочленов.

Константа c_n может быть получена как отношение старших коэффициентов многочленов $S_1(z)$ и $S_2(z)$. У первого старший коэффициент равен $t_1t_2...t_{n-1}$, у второго 1, поэтому $c_n=t_1t_2...t_{n-1}$. Найти знак произведения $t_1t_2...t_{n-1}$ нетрудно: среди тангенсов $t_k=\operatorname{tg}\pi k/n$ ровно $(n-1)/2$ отрицательных (причем $t_{n-k}=-t_k$). Ряд читателей заметили, что произведение $|t_1t_2...t_{n-1}|$ можно выразить как отношение $Q_n'(0)/P_{n-1}(0)$, где $Q_n(x)$ и $P_{n-1}(x)$ — многочлены Чебышева, определяемые условиями $Q_n(2\cos\varphi)=2\cos n\varphi$, $P_{n-1}(2\cos\varphi)=\dfrac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}$ (см. статью Н. Васильева и А. Зелевинского в «Кванте», 1982, № 4, с. 17)*). Приведем похожее, но более прямое рассуждение.

Заметим, что $\operatorname{tg}nx$ обращается в 0 в точках $0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, ..., \frac{n-1}{n}\pi$ и может быть выражен как отношение $s_n(z)/r_n(z)$ двух многочленов от $\operatorname{tg}x=z$; по индукции, опираясь на формулу

$$\frac{r_{n+2}(z)}{s_{n+2}(z)}=\operatorname{tg}(n+2)x=$$
$$=\frac{\operatorname{tg}nx+\operatorname{tg}2x}{1-\operatorname{tg}nx\cdot\operatorname{tg}2x}=\frac{(1-z^2)s_n(z)+2zr_n(z)}{(1-z^2)r_n(z)-2zs_n(z)},$$

можно определить старшие и младшие члены этих многочленов:

$$\frac{s_3(z)}{r_3(z)}=\frac{-z^3+3z}{-3z^2+1},\ \frac{s_5(z)}{r_5(z)}=\frac{z^5-10z^3+5z}{5z^4-10z^2+1},...$$
$$...,\frac{s_n(z)}{r_n(z)}=\frac{e_nz^n+d_nz^{n-2}+...+nz}{e_nnz^{n-1}+...+1},\ \text{где } e_n=(-1)^{\frac{n-1}{2}}.\quad (1)$$

При этом многочлен $s_n(z)$ должен иметь n корней $t_0=0, t_1, ..., t_{n-1}$ и потому по лемме равен

$$s_n=e_nz(z-t_1)...(z-t_{n-1})=e_nz^n+...+e_nt_1...t_{n-1}z.\quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), получаем, что $t_1t_2...t_{n-1}=e_nn$.

Приведем еще один способ отыскания c_n. Подставим в тождество $f(x)=c_n$ значение $x=\pi/4n$. Используя формулы приведения $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=1/\operatorname{tg}x$, нетрудно показать, что произведение тангенсов углов $\frac{\pi}{4n}, \frac{5\pi}{4n}, ..., \frac{(4n-3)\pi}{4n}$, стоящее в знаменателе, равно $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$. Найти сумму в числителе можно, опираясь на тот факт, что для всех этих углов $\operatorname{tg}nx=1$, и используя формулу (1) (по существу, именно отысканию этой суммы была посвящена задача М100 — см. «Квант», 1972, № 4). Эта сумма равна n.

В заключение отметим, что наши рассуждения позволяют доказать целый ряд замечательных тождеств, показанных на полях (убедитесь в справедливости этих тождеств; одно из них встречалось в задаче М135 — «Квант», 1972, № 12; ряд соотношений между тригонометрическими функциями подобного рода и интересных следствий из них разобран в книге А. М. Яглома и И. М. Яглома «Неэлементарные задачи в элементарном изложении» (М., ГТТИ, 1954), задачи 130—145).

В. Алексеев, А. Егоров

$$\prod_{k=1}^{2m}\operatorname{tg}\frac{k\pi}{2m+1}=(-1)^m(2m+1);$$

$$\prod_{k=1}^{m}\operatorname{ctg}^2\frac{k\pi}{2m+1}=\frac{1}{2m+1};$$

$$\prod_{k=1}^{m}\cos\frac{k\pi}{2m+1}=\frac{1}{2^m};$$

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}};$$

$$\prod_{k=1}^{m}\cos^2\frac{(2k-1)\pi}{4m}=\frac{1}{2^{2m}};$$

$$\sum_{k=1}^{m}\operatorname{ctg}^2\frac{k\pi}{2m+1}=\frac{m(2m-1)}{3};$$

$$\sum_{k=0}^{m-1}\operatorname{ctg}\frac{(4k+1)\pi}{4m}=m;$$

$$\sum_{k=0}^{2m-1}\operatorname{tg}\left(x+\frac{k\pi}{2m}\right)=-\frac{2m}{\operatorname{tg}2mx};$$

$$\sum_{k=0}^{2m}\operatorname{tg}\left(x+\frac{k\pi}{2m+1}\right)=(2m+1)\cdot\operatorname{tg}(2m+1)x;$$

$$\prod_{k=0}^{2m}\operatorname{tg}\left(x+\frac{k\pi}{2m+1}\right)=(-1)^m\cdot\operatorname{tg}(2m+1)x;$$

$$\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(x+\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{1}{2^{n-1}}\sin nx.$$

◆

М740. *Сережа насыпал в цилиндрическую кастрюлю немного пшена и спросил соседку тетю Люду: «Сколько нужно налить воды, чтобы получилась вкусная каша?» — «Это очень просто, — отвеча-*

а), б). Будем считать, что пшено заполняет какую-то часть кастрюли без пустот, наподобие жидкости.

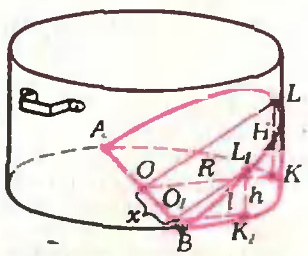
Пусть радиус цилиндрической кастрюли R, а пшена насыпано столько, что оно поднялось до высоты H

*) Более того, $Q_n'(x)=nP_{n-1}(x)=|t_1...t_{n-1}|\cdot P_{n-1}(x)$ при всех x.

ла соседка. — Наклони кастрюлю — вот так; постучи, чтобы крупа пересыпалась и закрыла ровно половину дна. Теперь заметь точку на стенке кастрюли, ближайшую к краю, до которой поднялась крупа — и зажми ее пальцем! До этого уровня и надо налить воду». — «Так ведь пшена можно насыпать побольше и поменьше, да и кастрюли бывают разные — широкие и узкие», — усомнился Сережа. — «Все равно, мой способ годится в любом случае!» — гордо ответила тетя Люда.

а) Докажите, что тетя Люда права: отношение объемов воды и пшена по ее рецепту всегда получится одинаковым.

б) Чему равно это отношение?



(см. рисунок). Вычислим объем, занятый пшеном. Для этого воспользуемся формулой $V=\int\limits_a^b S(x)\,dx$, где V — объем некоторого тела, проектирующегося на отрезок $[a, b]$ оси Ox, а $S(x)$ — площадь сечения этого тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox и пересекающей ее в точке с координатой x. Пусть O — центр основания цилиндра; ось Ox направим по диаметру AB (см. рисунок). Плоскость, перпендикулярная этой оси, пересекает тело, заполненное пшеном, по треугольнику $O_1L_1K_1$. Так как $\triangle O_1L_1K_1 \sim \triangle OLK$ (см. рисунок), $\frac{l}{R}=\frac{h}{H}$. Поэтому $S(x)=\frac{1}{2}lh=\frac{1}{2}\frac{H}{R}l^2$, а так как $l^2=R^2-x^2$, $S(x)=\frac{1}{2}\frac{H}{R}(R^2-x^2)$. Следовательно, объем пшена равен $V=2\int\limits_0^R\frac{1}{2}\frac{H}{R}(R^2-x^2)\,dx=\frac{H}{R}\int\limits_0^R(R^2-x^2)\,dx=\frac{2}{3}HR^2$. Поскольку общий объем воды и пшена равен πR^2H, отношение объемов воды и пшена равно $\left(\pi-\frac{2}{3}\right):\frac{2}{3}=\frac{3\pi}{2}-1\approx 3{,}7$ и не зависит от количества пшена и размеров кастрюли*).

Другое решение пункта а) легко получить из следующей общей теоремы: *при растяжениях (сжатиях) вдоль оси объемы всех тел умножаются на один и тот же коэффициент, равный коэффициенту растяжения (сжатия).* Попробуйте доказать эту теорему.

В. Семенова

М741. *а) Найдите хотя бы одно натуральное число, которое делится на 30 и имеет ровно 30 различных делителей (включая 1 и само это число).*
б) Укажите все такие числа.

◆

а) Ответ: $2^4\cdot3^2\cdot5=720$. Очевидно, это число делится на 30; в пункте б) будет показано, что оно имеет ровно 30 делителей.

б) Ответ: $2\cdot3^2\cdot5^4$, $2\cdot3^4\cdot5^2$, $2^2\cdot3\cdot5^4$, $2^2\cdot3^4\cdot5$, $2^4\cdot3\cdot5^2$, $2^4\cdot3^2\cdot5$.

Количество делителей $d(n)$ натурального числа n легко найти, разложив n на простые множители. Действительно, пусть $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1<p_2<\ldots<p_k$ — простые числа, а α_i — натуральные ($i=1, 2, \ldots, k$). Тогда любой делитель числа n имеет вид $p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\ldots p_k^{\beta_k}$, где $0\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_i$. Следовательно, всего различных делителей столько же, сколько существует упорядоченных наборов $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$ при $0\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_i$, то есть

$$d(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1).$$

В нашем случае $d(n)=30=2\cdot3\cdot5$. Поэтому в выражении для n должно быть не больше трех сомножителей. А так как к тому же число n должно делиться на 30, его разложение на простые множители должно иметь вид $n=2^{\alpha_1}\cdot3^{\alpha_2}\cdot5^{\alpha_3}$, причем $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)=30$. Последнему соотношению удовлетворяют тройки чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=(1, 2, 4)$, $(1, 4, 2)$, $(2, 1, 4)$ $(2, 4, 1)$, $(4, 1, 2)$, $(4, 2, 1)$, и только они.

М. Левин

---

*) Разумеется, в нашем решении не учитывалось, что крупинки не полностью заполняют отведенный им объем, между ними остаются просветы, — у нас крупа считалась «жидкостью». (Для одинаковых жестких шариков эти просветы составляют не менее $1-\frac{\pi}{3\sqrt{2}}\approx 36\%$ объема при так называемых «решетчатых» упаковках. До сих пор неизвестно, можно ли расположить шарики плотнее, если отказаться от условия «решетчатости»; см., например, книгу Д. Гильберта, С. Кон-Фоссена «Наглядная геометрия» (М., «Наука», 1981), § 7.)

М742. *На а) окружности, б) сфере радиуса 1 расположены n точек. Докажите, что сумма квадратов попарных расстояний между ними не больше n^2.*

а), б) Пусть O — центр данной окружности (сферы), $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — данные точки, $\vec{x}_i=\overrightarrow{OX_i}$ ($i=1, 2, \ldots, n$), s — сумма квадратов попарных расстояний между точками. Тогда, поскольку $|X_iX_j|^2=(\vec{x}_j-\vec{x}_i)^2$,

$$
\begin{aligned}
2s = {} & (\vec{x}_1-\vec{x}_1)^2+(\vec{x}_1-\vec{x}_2)^2+\ldots+(\vec{x}_1-\vec{x}_n)^2+\\
& +(\vec{x}_2-\vec{x}_1)^2+(\vec{x}_2-\vec{x}_2)^2+\ldots+(\vec{x}_2-\vec{x}_n)^2+\ldots+\\
& +(\vec{x}_n-\vec{x}_1)^2+(\vec{x}_n-\vec{x}_2)^2+\ldots+(\vec{x}_n-\vec{x}_n)^2=\\
& =2n(\vec{x}_1^2+\vec{x}_2^2+\ldots+\vec{x}_n^2)-\\
& -2[(\vec{x}_1\vec{x}_1+\vec{x}_1\vec{x}_2+\ldots+\vec{x}_1\vec{x}_n)+(\vec{x}_2\vec{x}_1+\vec{x}_2\vec{x}_2+\ldots\\
& \ldots+\vec{x}_2\vec{x}_n)+\ldots+(\vec{x}_n\vec{x}_1+\vec{x}_n\vec{x}_2+\ldots+\vec{x}_n\vec{x}_n)]=\\
& =2n(\vec{x}_1^2+\vec{x}_2^2+\ldots+\vec{x}_n^2)-2\vec{x}\cdot\vec{x},
\end{aligned}
$$

где $\vec{x}=\vec{x}_1+\vec{x}_2+\ldots+\vec{x}_n$. Поэтому $s=n^2-|\vec{x}|^2\leqslant n^2$, причем равенство достигается в том и только в том случае, когда $\vec{x}_1+\vec{x}_2+\ldots+\vec{x}_n=\vec{0}$.

Полученная нами формула для суммы квадратов попарных расстояний между точками X_i является очень частным случаем формулы Лагранжа для так называемого «момента инерции» системы точечных масс. Подробнее о моменте инерции, формуле Лагранжа и их применении в геометрии можно прочитать в статьях М. Балка и Н. Григорьева «Механика помогает геометрии» («Квант», 1973, № 11) и З. Скопеца «Расстояние между центроидами двух систем точек» («Квант», 1975, № 3).

В. Прасолов

М743. *В стране N городов. а) Между любыми двумя городами имеется прямое сообщение самолетом или пароходом. Докажите, что, пользуясь лишь каким-то одним видом транспорта, из любого города можно попасть в любой другой (быть может, с пересадками). б) Между любыми двумя городами имеется прямое сообщение самолетом, поездом или пароходом. Докажите, что можно выбрать не менее N/2 городов и один из трех видов транспорта так, что, пользуясь им одним, из любого выбранного города можно попасть в любой другой выбранный город. в) Приведите пример, доказывающий, что в утверждении б) заменить число N/2 большим вообще говоря, нельзя.*

а) Утверждение легко доказывается индукцией по N. Для двух городов оно очевидно. Докажем его для $N+1$ города, предполагая, что оно справедливо для N городов.

Пусть $Г$ — один из $N+1$ городов, тогда оставшиеся N городов по предположению индукции соединены одним видом транспорта, например водным. Если хотя бы один из этих N городов имеет пароходное сообщение с городом $Г$, то все ясно. В противном случае любой из этих городов связан самолетом с городом $Г$, а значит, и с любым другим из них (с пересадкой в $Г$).

б) Переформулируем задачу так:

Даны N точек, каждые две из которых соединены красным, синим или черным отрезками. Будем говорить, что какие-то из этих точек образуют *красную* (*синюю* или *черную*) *связку*, если их можно обойти, двигаясь только по красным (синим или черным) отрезкам. Надо доказать, что можно выбрать связку, содержащую не менее $N/2$ точек.

Пусть A — связка с наибольшим числом точек; для определенности будем считать, что она красная. Пусть B — наибольшая по числу точек не красная связка (например, синяя). Разобьем данные N точек на 4 непересекающихся множества: A_0 — точки, входящие в A, но не входящие в B; B_0 — точки, входящие в B, но не в A; $C=A\cap B$ — точки, входящие и в A, и в B; D — точки, не входящие ни в A, ни в B (см. рис. 1).

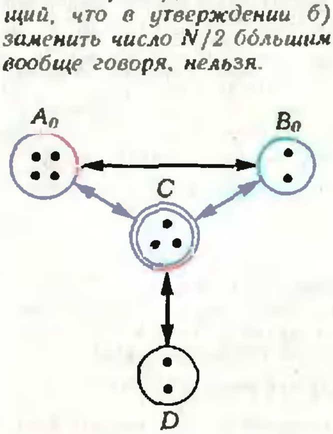


Рис. 1.

Предположим, что число точек в A меньше $N/2$, тогда и в связке B меньше $N/2$ точек; следовательно, множество D не пусто. Заметим теперь, что любой отрезок, соединяющий точку из A_0 с точкой из B_0 или точку из C с точкой из D, является черным (в противном случае одна из связок A или B не была бы максимальной). Отсюда вытекает, что множество C не пусто (иначе $A_0\cup B_0=A\cup B$ — черная связка, содержащая больше точек, чем A), а также, что $C\cup D$ — черная связка. Поскольку число точек в связках $A=A_0\cup C$ и $B=B_0\cup C$ не меньше, чем в связке $C\cup D$, множества A_0 и B_0 не пусты. Таким образом, все данные N точек разбиваются на две связки — $A_0\cup B_0$ и $C\cup D$. Одна из них должна содержать не менее $N/2$ точек, а это противоречит тому, что число точек в максимальной связке A меньше $N/2$.

Полученное противоречие доказывает утверждение б).

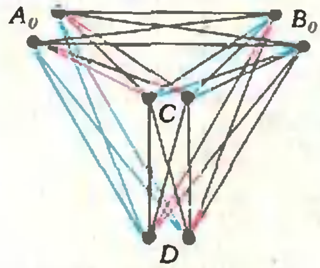


Рис. 2.

в) Построим пример множества из $N=4k$ точек с соединяющими их отрезками трех цветов, в котором число точек в максимальной связке равно в точности $N/2$. (Для $N=4k+r$ при $r=1, 2, 3$ построение аналогично, но максимальный размер связки будет равен $[N/2]+1$, причем можно доказать, что в этих случаях связка такого размера найдется в с е г д а.)

Разделим все точки на 4 группы A_0, B_0, C и D по k точек в каждой. Соединим черными отрезками все точки множества A_0 со всеми точками B_0 и все точки C со всеми точками D. Аналогично соединим точки множеств A_0 и C, B_0 и D красными отрезками, A_0 и D, B_0 и C — синими (на рисунке 2 изображен случай $k=2$). Внутри каждой из четырех групп отрезки можно провести произвольно — любые две точки любого из множеств A_0, B_0, C и D уже соединены ломаными каждого из трех цветов.

Легко видеть, что при такой раскраске отрезков любые две из четырех групп образуют связку с максимальным числом точек, равным $2k=N/2$.

Л. Курляндчик

◆

М744* . *В треугольник ABC вписан подобный ему треугольник $A_1B_1C_1$ (вершины $\hat{A}_1$, $\hat{B}_1$, $\hat{C}_1$ углов, равных по величине $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, лежат соответственно на отрезках BC, CA и AB). Пусть A_0, B_0, C_0 — точки пересечения прямых BB_1 и CC_1, AA_1 и CC_1, BB_1 и AA_1. Докажите, что шесть окружностей, описанных около треугольников ABC_0, BCA_0, ACB_0, $A_1B_1C_0$, $A_1C_1B_0$, $B_1C_1A_0$, пересекаются в одной точке.*

Наиболее естественное решение задачи основано на том, что все 6 рассматриваемых окружностей проходят через неподвижную точку преобразования подобия, переводящего $\triangle ABC$ в подобный ему $\triangle A_1B_1C_1$. Для нас важно, что существует лишь *единственное* такое преобразование. (В самом деле, предположим, что имеются два преобразования подобия, Π и Π_1, которые переводят $\triangle ABC$ в $\triangle A_1B_1C_1$. Тогда преобразование подобия $F=\Pi_1^{-1}\circ\Pi$ оставляют точки A, B и C на месте (например, $F(A)=$ $=\Pi_1^{-1}(\Pi(A))=\Pi_1^{-1}(A_1)=A$). Отсюда вытекает, что F — перемещение и, более того, тождественное преобразование. Следовательно, преобразование Π_1^{-1} является обратным к Π, то есть $\Pi=\Pi_1$.)

Разобьем теперь рассматриваемые окружности на три пары: ABC_0 и $A_1B_1C_0$, BCA_0 и $B_1C_1A_0$, CAB_0 и $C_1A_1B_0$. Возьмем любую из этих пар, например окружности S и S_1, описанные около треугольников ABC_0 и $A_1B_1C_0$. Они имеют общую точку C_0; пусть O — вторая их общая точка (см. рис. 1; если они касаются, положим $O=C_0$). Мы покажем, что существует преобразование подобия, оставляющее на месте точку O, и только ее, и переводящее $\triangle ABC$ в $\triangle A_1B_1C_1$. Поскольку пару окружностей S и S_1 можно заменить на любую из двух других пар, и при этом должно получаться одно и то же преобразование подобия, все три пары окружностей должны иметь общую точку, что нам и требуется.

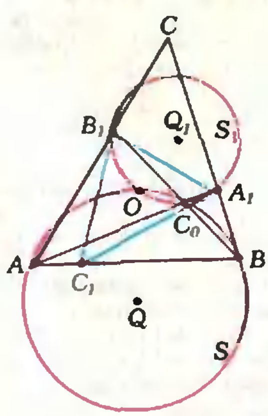


Рис. 1.

Итак, пусть пока $O\neq C_0$; обозначим центры окружностей S и S_1 через Q и Q_1. Выполняя последовательно поворот R_O^φ вокруг точки O на угол $\varphi=\widehat{QOQ_1}$ в соответствующем направлении (на рисунках — против часовой стрелки) и гомотетию H_O^k с центром O и коэффициентом $k=|OQ_1|:|OQ|$, мы получим преобразование подобия $\Pi=H_O^k\circ R_O^\varphi$, переводящее точку Q в Q_1. При этом точка O (и только она) остается на месте, а окружность S переходит в окружность с центром Q_1, проходящую через точку O: $\Pi(S)=S_1$. Докажем, что Π и есть нужное нам преобразование, то есть $\Pi(\triangle ABC)=\triangle A_1B_1C_1$.

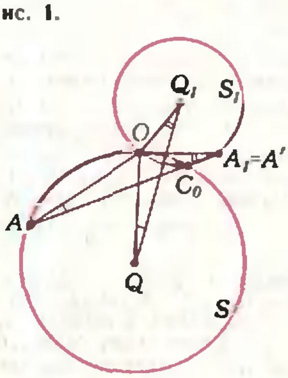


Рис. 2.

Заметим, что точки A и A_1 находятся по разные стороны от прямой OC_0, и потому лежат на «внешних» дугах OC_0 окружностей S и S_1 (рис. 2). Следовательно, угол OAC_0 равен по величине половине центрального угла OQC_0, то есть $\widehat{OAA_1}=\widehat{OQQ_1}$, и, аналогично, $\widehat{OA_1A}=\widehat{OQ_1Q}$. Таким образом, $\triangle OAA_1 \sim \triangle OQQ_1$. С другой стороны, $\triangle OQQ_1 \sim \triangle OAA'$, где $A'=\Pi(A)$, поскольку, по определению преобразования Π, $\widehat{AOA'}=\varphi=\widehat{QOQ_1}$ и $|OA'|:|OA|=$ $=k=|OQ_1|:|OQ|$. Итак, треугольники OAA_1 и OAA' подобны и имеют общую сторону OA, поэтому точки A_1 и A' либо совпадают, либо симметричны относительно (OA), а так как обе они лежат на окружности S_1, $A_1=A'=\Pi(A)$.

Аналогично доказывается, что $B_1 = \Pi(B)$. Наконец, пусть $C' = \Pi(C)$. Как и выше, из подобия треугольников $A_1B_1C' = \Pi(\triangle ABC)$, ABC и $A_1B_1C_1$ вытекает, что точки C_1 и C' либо совпадают, либо симметричны относительно (A_1B_1). Но точки C и O лежат по одну сторону от (AB), поэтому их образы C' и O должны лежать по одну сторону от (A_1B_1), и, следовательно, $\Pi(C) = C_1$*).

Если окружности S и S_1 касаются, то, как легко видеть, в качестве преобразования Π следует взять гомотетию с центром $O = C_0$. В этом случае треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ гомотетичны, что возможно лишь тогда, когда A_1, B_1 и C_1 — середины сторон треугольника ABC, а $A_0 = B_0 = C_0$ — точка пересечения его медиан.

Д. Изаак, В. Дубровский

◆

М745. *а) Задана последовательность чисел (d_n) таких, что $|d_n| \leq 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Докажите, что можно выбрать последовательность (s_n) из чисел $+1$ и -1 так, что для всех n*

$$|d_1s_1 + d_2s_2 + \ldots + d_ns_n| \leq 1.$$

б) Задана последовательность троек чисел (a_n, b_n, c_n) таких, что $|a_n| \leq 1$, $|b_n| \leq 1$, $|c_n| \leq 1$ и $a_n + b_n + c_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. По ней строится новая последовательность троек (x_n, y_n, z_n), в которой $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, а каждая тройка (x_n, y_n, z_n) при $n \geq 1$ получается из предыдущей $(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ прибавлением к x_{n-1} одного из чисел a_n, b_n, c_n по нашему выбору, к y_{n-1} — другого, к z_{n-1} — третьего. Можем ли мы всегда добиться того, что все числа x_n, y_n, z_n будут по абсолютной величине не больше 1 или, хотя бы, ограничены некоторой константой?

в) Выясните аналогичные вопросы для последовательностей четверок чисел.

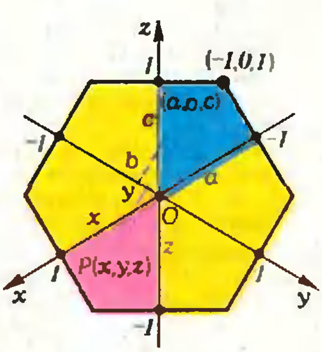


Рис. 1.

а) Положим $u_n = s_1d_1 + \ldots + s_nd_n$. Числа s_1, s_2, ... можно выбирать по очереди следующим образом: s_1 — произвольно; пусть s_1, s_2, ..., s_n уже выбраны так, что $|u_k| \leq 1$ для всех $k = 1, \ldots, n$, тогда s_{n+1} берется равным -1, если числа u_n и d_{n+1} имеют одинаковые знаки, и $+1$, если разные. Совершенно очевидное соображение, которым мы здесь пользуемся, пригодится и в дальнейшем, поэтому сформулируем его в виде леммы:

Лемма. *Если два числа имеют разные знаки и каждое по модулю не превосходит M, то их сумма по модулю не больше M.*

Эта лемма применяется к числам u_n и $s_{n+1}d_{n+1}$ (в данном случае $M = 1$).

б) Будем называть тройку чисел *нормальной*, если их сумма равна 0 и каждое не превосходит по модулю 1. Докажем, что можно по очереди «складывать» тройки (a_n, b_n, c_n), переставляя в них числа так, что тройка (x_n, y_n, z_n) будет нормальной при любом n. Для этого достаточно заметить, что если тройки (x, y, z) и (a, b, c) нормальны, причем $x \geq y \geq z$ и $a \leq b \leq c$, то тройка $(x+a, y+b, z+c)$ также нормальна. В самом деле, поскольку $ax \leq 0$ и $cz \leq 0$, для сумм крайних чисел неравенства $|a+x| \leq 1$ и $|c+z| \leq 1$ выполнены по лемме (при $M = 1$), а средние числа по модулю не больше $1/2$ (если $x \leq y \leq z$, то $x + 2y \leq x + y + z = 0$, поэтому $y \leq -x/2 \leq 1/2$; аналогично доказывается, что $y \geq -1/2$ и что $|b| \leq 1/2$).

Задача б) имеет красивую геометрическую интерпретацию. Между тройками чисел с суммой 0 и точками плоскости можно установить соответствие с помощью «системы координат» на плоскости, состоящей из трех осей Ox, Oy и Oz, составляющих друг с другом углы величины 120°; при этом каждой точке P отвечают координаты x, y и z ее проекций на эти оси (см. рис. 1). Поскольку сумма единичных векторов $\overline{e_x}$, $\overline{e_y}$ и $\overline{e_z}$ равна 0, $x + y + z = \overrightarrow{OP} \cdot \overline{e_x} + \overrightarrow{OP} \cdot \overline{e_y} + \overrightarrow{OP} \cdot \overline{e_z} = \overrightarrow{OP}\,(\overline{e_x} + \overline{e_y} + \overline{e_z} = 0)$. Условия $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ и $|z| \leq 1$ задают три полосы ширины 2, перпендикулярные осям; их пересечение и есть шестиугольник, показанный на рисунке 1.

Теперь можно пояснить наше решение. Перестановке двух чисел в тройке, то есть двух координат, отвечает симметрия шестиугольника относительно одной из осей Ox, Oy, Oz, а двум «противоположно упорядоченным» тройкам (x, y, z), $x \geq y \geq z$, и (a, b, c), $a \leq b \leq c$ — два вектора, лежащие в противоположных — красном и голубом — четырехугольниках (см. рис. 1). Их сумма всегда лежит внутри шестиугольника, поэтому, если переводить симметриями

*) Установить совпадение точек A' и A_1, C' и C_1 можно было бы, опираясь на то наглядно очевидное соображение, что *направления обхода вершин* треугольников OAA' и OAA_1, а также треугольников $A_1B_1C_1$ и A_1B_1C', должны быть одинаковы. Однако провести такое рассуждение строго, без ссылки на чертеж, и даже всего лишь аккуратно определить «направление обхода» довольно сложно.

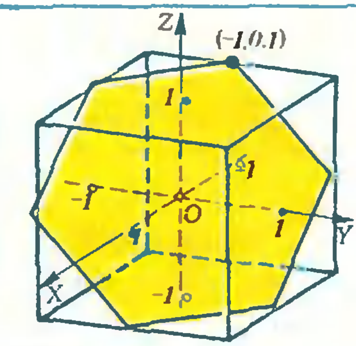
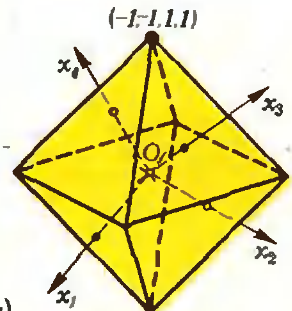
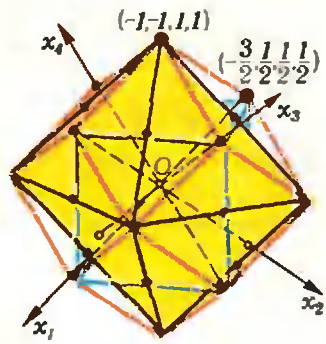


Рис. 2.



а)



б)

Рис. 3. Пересечение трехмерной «гиперплоскости» $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ с четырехмерным кубом $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \| x_i| < 1, i=1,2,3,4\}$ — октаэдр (рис. *а*), а с множеством точек $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \| x_i - x_j| < 2, 1 < i < j < 4\}$ — многогранник, ограниченный 12 ромбами (рис. *б*), описанный вокруг этого октаэдра, так что ребра октаэдра служат длинными диагоналями ромбов; при этом короткие диагонали ромбов образуют каркас куба. Другими словами, вершины этого 12-гранника — это вершины куба и еще 6 точек, симметричных центру куба относительно его граней, а плоскости граней 12-гранника делят пополам внешние двугранные углы при ребрах октаэдра (а также и при ребрах куба).

вектор (a_n, b_n, c_n) в четырехугольник, противоположный тому, где лежит вектор $(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$, прежде чем их складывать, то мы всегда сумеем остаться внутри шестиугольника.

Заметим еще, что при надлежащем выборе системы координат $OXYZ$ в пространстве, этот же шестиугольник будет сечением куба $\{|X| \leqslant 1, |Y| \leqslant 1, |Z| \leqslant 1\}$ плоскостью $X+Y+Z=0$ (см. рис. 2). При этом координаты любой точки плоскости шестиугольника в системах $Oxyz$ и $OXYZ$ будут совпадать.

в) Здесь уже нельзя утверждать, что все числа будут по модулю не больше 1, как показывает пример двух четверок (1; 1; —1; —1) и (1/3; 1/3; 1/3; —1): среди их попарных сумм непременно встретится число $4/3=1+1/3$. Однако при операции сложения «переставленных» четверок можно получить числа, не превосходящие некоторой постоянной; чтобы это доказать, удобно заменить условие, что числа не превосходят по модулю 1, другим, которое бы сохранялось при такой операции. Вот одно из таких условий:

(*) *все числа четверки попарно отличаются друг от друга не более чем на 2* (то есть разность наибольшего и наименьшего не больше 2). Докажем, что если две четверки чисел $x_1 > x_2 > x_3 > x_4$ и $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ удовлетворяют этому условию, то четверка $(x_1+a_1, x_2+a_2, x_3+a_3, x_4+a_4)$ ему также удовлетворяет. Пусть $1 < j < k < 4$. Тогда разность $(x_j+a_j)-(x_k+a_k)=(x_j-x_k)+(a_j-a_k)$ по модулю не превосходит 2, поскольку числа x_j-x_k и a_j-a_k имеют разные знаки и не превосходят по модулю 2 (лемма из пункта а) при $M=2$). Итак, мы доказали, что можно складывать четверки чисел (каждый раз, быть может, переставляя их) так, чтобы сохранялось условие (*). Осталось заметить, что в четверке чисел с суммой 0, удовлетворяющей этому условию, наибольшее по модулю число не превосходит 3/2; в самом деле, пусть, например, $x_1 > 3/2$, тогда $x_k > x_1 - 2 > -\frac{1}{2}$ при $k=2, 3, 4$ и $x_1+x_2+x_3+x_4 > \frac{3}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$; аналогично доказывается, что числа x_i не могут быть меньше $-3/2$.

Для m-ок чисел при $m > 5$ дело обстоит так же, как для четверок: m-ки, полученные из данной последовательности наборов из m чисел, по модулю не больших 1, подходящими перестановками чисел в наборах и сложением, будут удовлетворять условию (*); при этом, если сумма каждого набора равна 0, то все числа по модулю не будут превосходить $2-2/m$.

На рисунке 3 показана геометрическая интерпретация задачи в). Вместо трех осей на плоскости, идущих из центра правильного треугольника к его вершинам, надо взять 4 оси в пространстве, направленные к вершинам правильного тетраэдра из его центра. Поскольку сумма единичных векторов этих осей равна 0, каждой точке пространства отвечает четверка чисел с нулевой суммой, составленная из координат проекций этой точки на оси Ox_1, Ox_2, Ox_3, Ox_4. Условие $|x_i| < 1$ выделяет в пространстве слой толщины 2, заключенный между плоскостями, перпендикулярными оси Ox_i; пересечение четырех таких слоев есть октаэдр (рис. 3, *а*). Условие (*) задает в пространстве «ромбододекаэдр» — 12-гранник, все грани которого — ромбы (рис. 3, *б*)*).

Попробуйте дать геометрическую интерпретацию решению задачи в).

Н. Васильев

*) Этот многогранник замечателен тем, что его одинаковыми экземплярами можно без просветов замостить все пространство (см., например, книгу Г. Штейнгауза «Математический калейдоскоп» (М., «Наука», 1981, с. 95). Любопытно, что центры ячеек такого замощения служат одновременно центрами шаров, образующих наиболее плотную решетчатую упаковку, о которой говорилось в сноске к решению задачи М740.

Ф748. *По винтообразному желобу с прямоугольным профилем, вырезанному на внутренней поверхности бесконечного длинного полого цилиндра, скользит маленький кубик (рис. 1). Радиус основания цилиндра равен R, шаг винта — h, коэффициент трения скольжения — μ. Найти установившуюся скорость движения кубика. (Размер кубика и глубина желоба много меньше R.)*

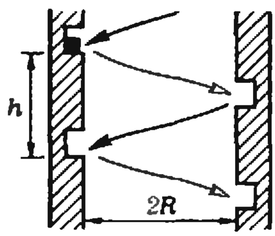


Рис. 1.

Для решения задачи удобно «развернуть» цилиндр. Траектория кубика на развертке — прямая, наклоненная под углом α к горизонту (рис. 2).

Кубик движется с установившейся скоростью, когда сумма проекций сил, действующих на кубик, на направление наклонной прямой равна нулю. Запишем это условие:

$$mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - \mu\frac{mv_\perp^2}{R} = 0. \qquad (*)$$

Здесь $mg\sin\alpha$ — проекция силы тяжести, $\mu mg\cos\alpha$ — проекция силы трения о «дно» желоба, $\mu\frac{mv_\perp^2}{R}$ — проекция силы трения о боковую стенку желоба (эта сила равна μN, где N — сила нормальной реакции со стороны боковой

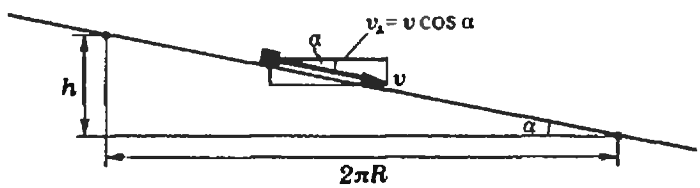


Рис. 2.

стенки, сообщающая кубику центростремительное ускорение $\frac{v_\perp^2}{R} = \frac{v^2\cos^2\alpha}{R}$, то есть $N = \frac{mv^2\cos^2\alpha}{R}$). Из выражения (*), учитывая, что $\sin\alpha = \frac{2\pi R}{\sqrt{4\pi^2R^2+h^2}}$ и $\cos\alpha = \frac{2\pi R}{\sqrt{4\pi^2R^2+h^2}}$, находим установившуюся скорость движения кубика:

$$v = \sqrt{Rg\sqrt{1+\left(\frac{h}{2\pi R}\right)^2}\left(\frac{h}{2\pi R\mu} - 1\right)}.$$

(Из полученного выражения видно, что кубик будет двигаться по желобу при условии $\mu < \frac{h}{2\pi R}$.)

Р. Энфиаджян

◆

Ф749. *Массивный диск вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью Ω. На него сверху опускают диск радиуса r массы m, ось которого направлена строго вертикально (рис. 1). Расстояние между осями дисков равно d (d>r). Коэффициент трения между поверхностями дисков равен μ. Определить установившуюся угловую скорость малого диска. Какой момент сил необходимо приложить к оси большого диска, чтобы скорость его вращения оставалась неизменной? Трение в осях отсутствует.*

Посмотрим, как будет двигаться малый диск сразу после соприкосновения с большим.

Выберем два одинаковых небольших участка малого диска, расположенных на одном диаметре симметрично относительно центра диска. На рисунке 2 точки A_1 и A_2 — центры масс таких участков. В момент касания дисков (когда малый диск еще покоится) скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ тех точек большого диска, которые соприкасаются с точками A_1 и A_2 малого диска, направлены так, как показано на рисунке 2 ($|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = \Omega|OA_1| = \Omega|OA_2|$). Понятно, что вдоль векторов $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ будут направлены в момент касания силы трения $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, действующие со стороны большого диска на участки A_1 и A_2 малого диска ($|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$). Поскольку плечо силы $\vec{F}_1$ относительно оси малого диска (l_1 на рисунке 2) меньше плеча силы $\vec{F}_2$ (l_2 на рисунке 2), суммарный момент пары сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ будет закручивать малый диск в направлении вращения большого диска.

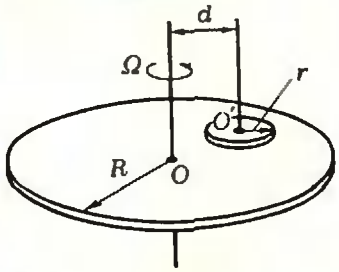


Рис. 1.

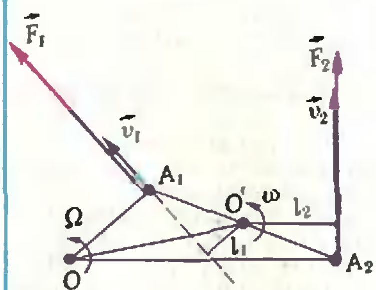


Рис. 2.

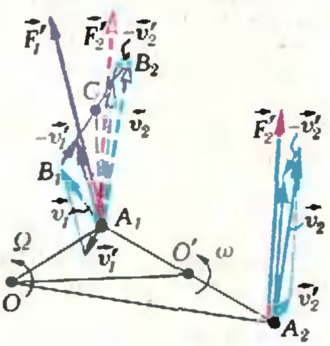


Рис. 3.

Рассмотрев аналогичные пары участков малого диска, мы придем к выводу, что сразу после касания малый диск начнет закручиваться в направлении вращения большого диска.

Пусть в некоторый момент времени угловая скорость малого диска стала равной ω. Скорости участков A_1 и A_2 будут равны соответственно $\vec{v}_1'$ и $\vec{v}_2'$ и $|\vec{v}_1'|=|\vec{v}_2'|=\omega r$, где $r=|O'A_1|=|O'A_2|$ (рис. 3). Силы трения $\vec{F}_1'$ и $\vec{F}_2'$, действующие на эти участки, будут направлены вдоль векторов $(\vec{v}_1-\vec{v}_1')$ (относительная скорость точки большого диска, касающейся точки A_1) и $(\vec{v}_2-\vec{v}_2')$ (относительная скорость точки большого диска, касающейся точки A_2). Понятно, что момент пары сил $\vec{F}_1'$ и $\vec{F}_2'$ будет раскручивать малый диск (то есть угловая скорость диска будет меняться), если $|\vec{v}'|=|\vec{v}_2'|<\frac{B_1B_2}{2}=\Omega r$ (см. рисунок 3; для удобства сравнения векторы, «относящиеся» к точке A_2, перенесены в точку A_1).

Таким образом, пока $\omega<\Omega$, имеется отличный от нуля момент сил трения, раскручивающий малый диск. При $\omega=\Omega$ относительные скорости участков A_1 и A_2 направлены перпендикулярно отрезку OO' (вдоль отрезка A_1C на рисунке 3), и момент сил трения относительно оси малого диска равен нулю. Следовательно, и в дальнейшем малый диск будет вращаться с установившейся угловой скоростью Ω.

При $\omega=\Omega$ все силы трения, действующие на различные одинаковые участки малого диска, будут равны по абсолютной величине и направлены одинаково — перпендикулярно отрезку OO'. Согласно III закону Ньютона, результирующая всех сил трения, действующих на большой диск, будет приложена к точке большого диска, касающейся центра O' малого диска, и равна μmg. Чтобы компенсировать тормозящий момент этой силы, к оси большого диска надо приложить момент сил

$$M=\mu mga.$$

С. Кротов

Ф750*. *При изменении напряжения на элементе Э ток через него меняется так, как показано на рисунке 1. Как будет меняться со временем напряжение на элементе Э, если его включить в схему, приведенную на рисунке 2 (параметры схемы указаны на рисунке)? Какого минимального сопротивления резистор можно подключить параллельно элементу Э, чтобы напряжение на элементе не оставалось постоянным?*

Редакция приносит извинения за неточный рисунок, приведенный в условии задачи в «Кванте» № 4 этого года (рис. 4 на с. 26).

◆

Рассмотрим поведение схемы с момента включения. В момент включения ток через катушку и элемент Э равен нулю; при этом напряжение на элементе также равно нулю, и все напряжение батареи приложено к катушке. Ток через катушку (и через элемент) начинает нарастать. Когда он достигает значения $I_1=5$ мА, происходит скачок напряжения на элементе — при фиксированном токе 5 мА (ток через катушку не может меняться скачком) напряжение на нем мгновенно увеличивается до $U_1=0{,}8$ В (см. рис. 1). При этом напряжение на катушке меняет знак ($U_1>\mathcal{E}$) и, следовательно, ток начинает убывать. Аналогично, когда ток уменьшится до значения $I_2=0{,}5$ мА, вновь произойдет скачок напряжения на элементе — оно уменьшится практически до $U_2\approx 0$, и все начинается сначала.

Рассчитаем приблизительно время τ_1 нарастания тока от $I_0=0$ до $I_1=5$ мА и время τ_2 убывания тока от $I_1=5$ мА до $I_2=0{,}5$ мА. Поскольку напряжение на элементе при увеличении тока от 0 до I_1 меняется мало, будем считать, что среднее напряжение на катушке за время τ_1 равно

$$U_{к1}\approx 0{,}2-0{,}1/2=0{,}15\ \text{В}.$$

Точно так же среднее напряжение на катушке за время τ_2 будем считать равным

$$U_{к2}\approx \frac{0{,}8+0{,}6}{2}-0{,}2=0{,}5\ \text{В}.$$

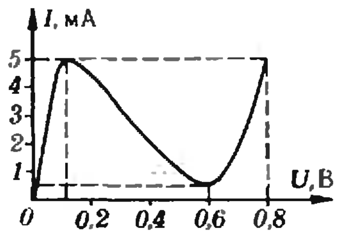


Рис. 1.

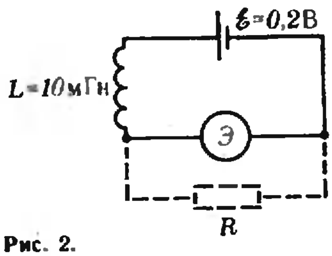


Рис. 2.

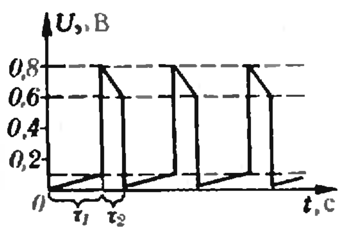


Рис. 3.

При нарастании тока

$$LI' = U_{к1}, \quad I' = \frac{\Delta I}{\tau_1} = \frac{I_1 - I_0}{\tau_1} = \frac{I_1}{\tau_1}.$$

Отсюда находим τ_1:

$$\tau_1 = \frac{LI_1}{U_{к1}} = \frac{10\cdot 10^{-3}\cdot 5\cdot 10^{-3}}{15\cdot 10^{-2}} \approx 0{,}33\cdot 10^{-3}\ \text{с}.$$

При убывании тока

$$LI' = U_{к2}, \quad |I'| = \frac{|I_2 - I_1|}{\tau_2},$$

откуда

$$\tau_2 = \frac{L(I_1 - I_2)}{U_{к2}} = \frac{10\cdot 10^{-3}\cdot 4{,}5\cdot 10^{-3}}{5\cdot 10^{-1}} = 9\cdot 10^{-5}\ \text{с}.$$

График изменения напряжения на элементе Э со временем приведен на рисунке 3.

Подключим параллельно элементу резистор. Для того чтобы напряжение на элементе не оставалось постоянным (то есть чтобы существовали колебания), необходимо, чтобы на «суммарной» вольтамперной характеристике (элемент + резистор) присутствовал хоть малый участок, на котором напряжение падает с ростом тока (строго говоря — в точке $U = \mathcal{E}$). Построив характеристику для резистора ($I = U/R$) и «суммарную» характеристику (проделайте это самостоятельно), найдем минимальное сопротивление, при котором напряжение на элементе не останется постоянным: $R_{min} \approx 100$ Ом.

(Отметим, что такую зависимость $I(U)$, как на рисунке 1, имеет широко распространенный прибор — туннельный диод. Схема на рисунке 2 — обычная схема генератора импульсов на туннельном диоде.)

З. Рафаилов

◆

Ф751. *На очень шероховатый цилиндр радиуса r, расположенный горизонтально, надет тонкий обруч радиуса R (рис. 1). Найти период колебаний обруча в вертикальной плоскости.*

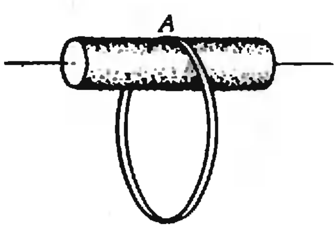


Рис. 1.

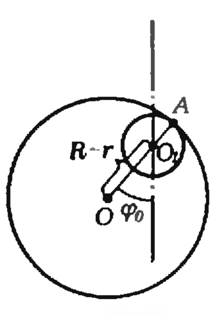


Рис. 2.

Пусть обруч отклонен от положения равновесия так, что радиус-вектор точки A — той точки, в которой в положении равновесия обруч касался цилиндра (рис. 2), — составляет с вертикалью малый угол φ_0. Энергия, которой обладает обруч в момент максимального отклонения, равна

$$E_0 = Mg(R-r)(1-\cos\varphi_0),$$

где M — масса обруча. Если обруч отпустить, он начнет совершать колебания. При этом в любой момент времени полная энергия обруча будет равна E_0.

Если угол отклонения радиус-вектора OA от вертикали равен φ, то потенциальная энергия обруча равна $E_п = Mg(R-r)(1-\cos\varphi)$, а его кинетическая энергия равна $E_к = 2\cdot\frac{M}{2}((R-r)\varphi')^2$ (мы учли, что кинетическая энергия обруча, скорость центра которого равна $(R-r)\varphi'$, где φ' — скорость изменения угла φ, складывается из энергии движения центра обруча и равной ей (поскольку отсутствует проскальзывание) энергии вращения вокруг центра). Таким образом, полная энергия обруча равна

$$E = E_п + E_к = Mg(R-r)(1-\cos\varphi) + M((R-r)\varphi')^2.$$

Согласно закону сохранения энергии $E = E_0$, то есть

$$Mg(R-r)(1-\cos\varphi) + M((R-r)\varphi')^2 = Mg(R-r)(1-\cos\varphi_0).$$

Приравняем производные левой и правой частей этого равенства:

$$g(R-r)\sin\varphi\cdot\varphi' + 2(R-r)^2\varphi'\varphi'' = 0,$$

или, поскольку угол φ мал и $\sin\varphi \approx \varphi$,

$$\varphi'' = -\frac{g}{2(R-r)}\varphi.$$

Это выражение описывает гармонические колебания, частота которых равна $\omega=\sqrt{g/2(R-r)}$.

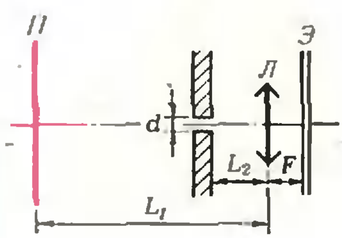
Таким образом, период колебаний обруча равен

$$T=2\pi\sqrt{\frac{2(R-r)}{g}}.$$

К. Сергеев

◆

Ф752. *На расстоянии $L_1=5$ м от тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=10$ см расположена равномерно освещенная вертикальная плоскость П. Между линзой и плоскостью на расстоянии $L_2=1$ м от линзы расположена вертикально непрозрачная пластинка толщины $l=5$ см, в которой проделано отверстие диаметра $d=1$ см (центр отверстия находится на главной оптической оси линзы). Как будет выглядеть пятно на экране Э, помещенном в фокальной плоскости линзы справа от нее? (Внутренние стенки отверстия не отражают свет.)*



Необычная «диафрагма», не прилегающая к линзе вплотную, существенно влияет на изображение — оно оказывается неравномерно освещенным пятном. Размер яркой области в центре пятна определяется двумя факторами: диаметром совершенно не закрытой зоны стены (плоскости П) — он равен диаметру d отверстия — и тем, что экран расположен не в плоскости резкого изображения — эта плоскость находится от линзы на расстоянии

$$f=\frac{L_1F}{L_1-F}=\frac{500\cdot 10}{500-10}\approx 10{,}2\text{ см}.$$

Без учета второго фактора (изображение — в фокальной плоскости) размер пятна

$$d_1=d\frac{F}{L_1}=1\cdot\frac{10}{500}=0{,}02\text{ см}=0{,}2\text{ мм}.$$

За счет второго фактора изображение «размазывается», степень «размазывания» зависит от диаметра линзы D. Примем для оценки $D=2$ см. Тогда изображение точки стены на экране в фокальной плоскости вместо точки будет кругом с диаметром

$$d_2=D\frac{F'-F}{F'}=2\frac{10{,}2-10}{10}=0{,}04\text{ см}=0{,}4\text{ мм}.$$

Таким образом, диаметр яркого пятна в центре изображения будет примерно 0,6 мм.

Если бы линза была большого диаметра, то полный размер пятна определялся бы расстоянием от оси линзы до тех точек стены, которые еще видны через диафрагму. Ясно, что входное и выходное отверстия диафрагмы полностью перекрывают лучи от точек стены, удаленных от оси на расстояния, бо́льшие чем

$$r\approx(L_1-L_2)\frac{d}{l}=(500-100)\frac{1}{5}=80\text{ см}.$$

Тогда пятно имело бы диаметр

$$d_3\approx 2r\frac{F}{L_1}=2\cdot 80\cdot\frac{10}{500}=3{,}2\text{ см},$$

и его освещенность спадала бы от максимума в центральном круге до нуля к краям (чем дальше от оси, тем бо́льшая часть светового потока перекрывается диафрагмой, да и угол падения лучей увеличивается).

Для того чтобы сказанное было справедливо, нужно иметь линзу с диаметром $D'\approx 2r\cdot\frac{L_2}{L_1-L_2}=40$ см. Так как реально линза имеет существенно меньший диаметр, размер большого пятна определяется диаметром линзы и размером входного отверстия диафрагмы. На линзу попадают лучи от тех точек стены, которые лежат внутри круга радиуса $r_1\approx\frac{L_1-L_2}{L_2}\left(\frac{D}{2}+\frac{d}{2}\right)$. Для $D=2$ см $r_1\approx 6$ см, и максимальный диаметр пятна на экране —

$$d_4=2r_1\frac{F}{L_1}\approx 2\cdot 6\cdot\frac{10}{500}\approx 0{,}24\text{ см}=2{,}4\text{ мм}.$$

А. Зильберман

◆

Ф753. *На рисунке 1 приведена зависимость напряжения источника питания от тока на-*

Наклон прямой вольтамперной характеристики определяется внутренним сопротивлением источника. Данный источник питания как бы состоит из двух источников с разными *грузки. Найти максимальную мощность, которую можно получить в нагрузке. При каком сопротивлении нагрузки она достигается? Для чего может понадобиться такой источник питания, и как практически осуществить такую зависимость $U(I)$?*

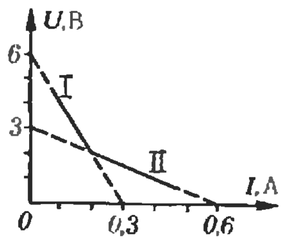


Рис. 1.

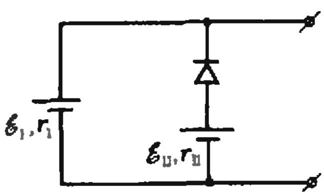


Рис. 2

ЭДС и внутренними сопротивлениями, которые «работают» только в определенных диапазонах значений U и I. Из графика определяем:

на участке I — $\mathscr{E}_{\rm I} = U_{\rm I}(0) = 6$ В,

$$r_{\rm I} = \frac{6\ \text{В}}{0{,}3\ \text{А}} = 20\ \text{Ом};$$

на участке II — $\mathscr{E}_{\rm II} = U_{\rm II}(0) = 3$ В,

$$r_{\rm II} = \frac{3\ \text{В}}{0{,}6\ \text{А}} = 5\ \text{Ом}.$$

Мощность, выделяющаяся на нагрузке с сопротивлением R, равна

$$W_R = I^2R = \frac{\mathscr{E}^2 R}{(R+r)^2}.$$

Из условия $W'_R = 0$ найдем, при каком R W_R максимально:

$$W'_R = \frac{\mathscr{E}^2}{(R+r)^2} - \frac{2\mathscr{E}^2 R}{(R+r)^3} = 0, \text{ или } 1 - \frac{2R}{R+r} = 0,$$

откуда получаем $R = r$.

Итак, на участках I и II максимальные мощности выделяются на нагрузках, сопротивления которых равны, соответственно,

$$R_{\rm I} = r_{\rm I} = 20\ \text{Ом}, \quad R_{\rm II} = r_{\rm II} = 5\ \text{Ом}.$$

Соответственно токи в цепи должны быть равны

$$I_{\rm I} = \frac{\mathscr{E}_{\rm I}}{R_{\rm I} + r_{\rm I}} = 0{,}15\ \text{А}, \quad I_{\rm II} = \frac{\mathscr{E}_{\rm II}}{R_{\rm II} + r_{\rm II}} = 0{,}3\ \text{А}.$$

Обе рабочие точки попадают на соответствующие участки, и, следовательно, на каждом из них действительно обеспечивается максимальная мощность в нагрузке.

Соответствующие максимальные значения мощности равны

$$W_{\rm I} = I_{\rm I}^2 R_{\rm I} = 0{,}45\ \text{Вт}, \quad W_{\rm II} = I_{\rm II}^2 R_{\rm II} = 0{,}45\ \text{Вт}.$$

На рисунке 2 приведена простая схема, обеспечивающая зависимость $U(I)$ в цепи такую, как на рисунке 1 (диод считаем идеальным). Интересно отметить, что при значительных изменениях величины нагрузочного сопротивления мощность в нагрузке почти не изменяется. Это может оказаться очень удобным для калориметрических опытов. Подумайте сами, какова должна быть кривая зависимости U от I, чтобы мощность нагрузки вообще не зависела от величины $R_{\rm н}$.

А. Зильберман

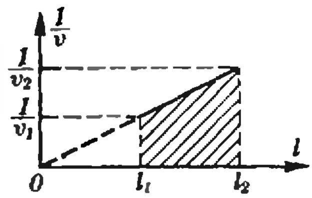
◆

Ф754. *Муравей бежит от муравейника по прямой так, что скорость его обратно пропорциональна расстоянию до центра муравейника. В тот момент, когда муравей находится в точке A на расстоянии $l_1 = 1$ м от центра муравейника, его скорость равна $v_1 = 2$ см/с. За какое время муравей добежит от точки A до точки B, которая находится на расстоянии $l_2 = 2$ м от центра муравейника?*

Скорость муравья меняется со временем не по линейному закону. Поэтому средняя скорость на разных участках пути различна, и пользоваться для решения известными формулами для средней скорости мы не можем.

Разобьем путь муравья от точки A до точки B на малые участки, проходимые за одинаковые промежутки времени Δt. Тогда $\Delta t = \dfrac{\Delta l}{v_{\rm ср}(\Delta l)}$, где $v_{\rm ср}(\Delta l)$ — средняя скорость на данном отрезке Δl. Эта формула подсказывает идею решения задачи: нарисуем график зависимости величины $\dfrac{1}{v_{\rm ср}(\Delta l)}$ от l на пути от точки A до точки B. Этот график — отрезок прямой (см. рисунок). Заштрихованная на рисунке площадь под этим отрезком численно равна искомому времени. Вычислим ее:

$$S = \frac{1/v_1 + 1/v_2}{2}(l_2 - l_1) = \left(\frac{1}{2v_1} + \frac{1}{2v_1}\frac{l_2}{l_1}\right)(l_2 - l_1) = \frac{l_2^2 - l_1^2}{2v_1 l_1}$$



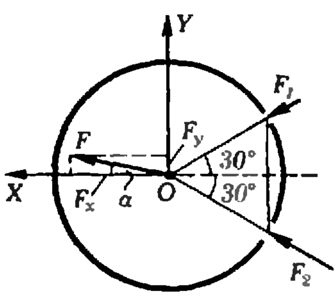
(так как $\frac{1}{v_2}=\frac{1}{v_1}\frac{l_2}{l_1}$).
Таким образом, муравей добежит от точки A до точки B за время

$$T=\frac{4-1}{2\cdot 2\cdot 10^{-2}\cdot 1}=75\ \text{с}.$$

С. Кротов

◆

Ф755. *Спутник представляет собой легкую жесткую сферу радиуса $R=1$ м и массы $M=1$ кг, наполненную воздухом при давлении $p=10^{-3}$ атм и температуре $T=300$ K. Одновременно в стенке сферы открываются два клапана, расположенные друг от друга на расстоянии, равном радиусу сферы. Площади клапанов $S_1=10^{-4}$ см^2 и $S_2=2\cdot 10^{-4}$ см^2. Найти величину отклонения спутника от прежней траектории за время $\tau=100$ с.*



До открытия клапанов давление внутри сферы равнялось p. Оно являлось результатом упругого отражения молекул от стенки, причем каждая молекула сообщала стенке импульс $2mv_{\perp}$, где $v_{\perp}$ — абсолютная величина перпендикулярной стенке проекции скорости молекулы. После открытия клапана каждая молекула переносит через «поверхность» отверстия только импульс $mv_{\perp}$. Следовательно, на сферу будут действовать силы $F_1=\frac{p}{2}S_1$ и $F_2=\frac{p}{2}S_2=pS_1$, направленные по радиусам. Спроектировав эти силы на оси OX и OY, найдем проекции F_x и F_y равнодействующей этих сил (см. рисунок):

$$F_x=F_1\cos 30^\circ+F_2\cos 30^\circ=\frac{3}{2}pS_1\cos 30^\circ,$$

$$F_y=-F_1\sin 30^\circ+F_2\sin 30^\circ=\frac{1}{2}pS_1\sin 30^\circ.$$

Таким образом, результирующая сила, действующая на сферу, равна по абсолютной величине

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}=\sqrt{\frac{7}{4}}\,pS_1$$

и направлена под углом α к оси OX таким, что

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{F_y}{F_x}=\frac{\operatorname{tg}30^\circ}{3}.$$

Действие этой силы приведет к равноускоренному движению сферы, которое легко рассчитать, если за рассматриваемое время τ масса воздуха внутри сферы и давление изменяются несущественно. Оценим изменение массы.

Число молекул, пролетающих за единицу времени через единичную площадку поверхности сферы, по порядку величины равно $\frac{1}{6}n\bar{v}$ (размерность — м$^{-2}$ с$^{-1}$), где n — число молекул в единице объема, $\bar{v}$ — средняя скорость теплового движения молекул. За время τ через два отверстия с общей площадью $3S_1$ вытечет масса

$$\Delta m\sim m\cdot\frac{1}{6}n\bar{v}\cdot 3S_1\tau=\frac{1}{2}\varrho\bar{v}S_1\tau,$$

где $\varrho\approx 10^{-3}$ кг/м^3, $\bar{v}\approx 500$ м/с. Подставляя числовые данные, находим $\Delta m\sim\frac{5}{2}\cdot 10^{-7}$ кг. Начальная же масса воздуха равна $m_0=\frac{4}{3}\pi R^3\varrho\approx 4\cdot 10^{-3}$ кг. Таким образом, $\Delta m\ll m_0$.

Считая массу воздуха и давление постоянными, найдем проекции ускорения и перемещения сферы на оси OX и OY:

$$a_x=\frac{F_x}{M+m_0}\approx\frac{F_x}{M},\quad a_y=\frac{F_y}{M+m_0}\approx\frac{F_y}{M},$$

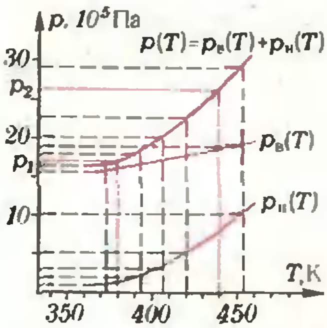
$$x=\frac{a_x\tau^2}{2}\approx\frac{F_x}{2M}\tau^2=\frac{3}{4M}pS_1\cos 30^\circ\tau^2=\frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot 10^{-2}\ \text{м},$$

$$y=\frac{a_y\tau^2}{2}\approx\frac{F_y}{2M}\tau^2=\frac{1}{4M}pS_1\sin 30^\circ\tau^2=\frac{1}{8}\cdot 10^{-2}\ \text{м}.$$

А. Стасенко

Ф756. *Баллон объема $V=2$ л содержит $m=2$ г водорода и немного воды. Давление в сосуде равно $p_1=17$ атм. Сосуд нагревают так, что давление в нем увеличивается до $p_2=26$ атм. Сколько воды при этом испарится? Чему равны начальная и конечная температуры?*

Указание. Воспользуйтесь таблицей зависимости давления насыщенных паров воды от температуры.



Задачу проще всего решать графически.

Полное давление $p(T)$ в сосуде складывается из давления насыщенных паров воды $p_н(T)$ и давления водорода $p_в(T)$. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона,

$$p_в(T)=\frac{m_в}{\mu_в V}RT=\frac{2\cdot10^{-3}}{2\cdot10^{-3}\cdot2\cdot10^{-3}}\cdot8{,}3\cdot T=4{,}15\cdot10^3\cdot T\ \text{Па}.$$

Вычислив $p_в(T)$ при двух значениях T — например:

$$T=373\ \text{К} — p_в\approx15{,}5\cdot10^5\ \text{Па},$$
$$T=453\ \text{К} — p_в\approx18{,}8\cdot10^5\ \text{Па},$$

— построим график $p_в(T)$ (см. рисунок). Пользуясь указанной в условии задачи таблицей, строим график $p_н(T)$. «Складывая» графики $p_в(T)$ и $p_н(T)$, строим график зависимости давления в сосуде от температуры. Из полученного графика $p(T)$ (см. рисунок) находим начальную и конечную температуры в сосуде:

$$p_1=17\cdot10^5\ \text{Па} — T_1\approx380\ \text{К},$$
$$p_2=26\cdot10^5\ \text{Па} — T_2\approx440\ \text{К}.$$

Найдем массу испарившейся воды. Считая пары воды идеальным газом, определим начальное $p_{н1}$ и конечное $p_{н2}$ давление паров воды в сосуде. Для этого воспользуемся полученными графиками. При $T_1=380$ К давление водорода равно $p_{в1}\approx15{,}5\cdot10^5$ Па и

$$p_{н1}=p_1-p_{в1}\approx1{,}5\cdot10^5\ \text{Па}.$$

При $T_2=440$ К $p_{в2}\approx18\cdot10^5$ Па и

$$p_{н2}=p_2-p_{в2}\approx8\cdot10^5\ \text{Па}.$$

Запишем уравнения состояния для паров воды при $p_{н1}$, T_1 и $p_{н2}$, T_2:

$$p_{н1}V=\frac{m_{п1}}{\mu_п}RT_1,\quad p_{н2}V=\frac{m_{п2}}{\mu_п}RT_2,$$

где $m_{п1}$, $m_{п2}$ — начальная и конечная массы паров в сосуде. Отсюда находим массу испарившейся воды:

$$\Delta m_н=m_{п2}-m_{п1}=\frac{\mu_п V}{R}\left(\frac{p_{н2}}{T_2}-\frac{p_{н1}}{T_1}\right)=$$
$$=\frac{18\cdot10^{-3}\cdot2\cdot10^{-3}}{8{,}3}\left(\frac{8}{440}-\frac{1{,}5}{380}\right)\cdot10^5\approx6\cdot10^{-3}\ \text{кг}.$$

А. Буздин

◆

Ф757. *Для получения одинаковых по размеру капель воды используется капиллярная трубка, соединенная с большим резервуаром, наполненным водой. Жидкость вытекает из капилляра при медленном перемещении поршня в резервуаре. Снаружи на свободном конце капилляра укреплен пьезоэлемент, присоединенный к звуковому генератору и передающий колебания струе воды. При достаточно большой амплитуде колебаний струя разбивается на совершенно одинаковые капли. Найти радиус капель, если диаметр трубки $d=0{,}2$ мм, скорость вытекающей жидкости $v=2$ м/с, частота звуковых колебаний $\nu=1000$ Гц.*

При воздействии механических (звуковых) колебаний форма вытекающей из капилляра струи будет слегка гофрированной, как это и показано на рисунке. Такой же она будет и при отсутствии пьезоэлемента — в этом случае поверхность струи «возмущает» край капилляра. Под действием ультразвука колебания конца капилляра «возмущают» струю, конечно, сильнее. Поэтому она будет «рваться» раньше, чем при отсутствии пьезоэлемента. Но в любом случае амплитуду гофрировки можно считать малой по сравнению с радиусом струи. Так что в приводимых ниже вычислениях мы будем приближенно считать форму струи цилиндрической. Радиус же струи примем равным радиусу капилляра.

Естественно считать, что объем капли определяется количеством жидкости, вытекающей из капилляра за один период звуковых колебаний:

$$\frac{\pi d^2}{4}vT=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Учитывая, что $T=1/\nu$, находим:

$$R^3=\frac{3}{16}\frac{vd^2}{\nu},\quad R=\sqrt[3]{\frac{3}{16}\frac{vd^2}{\nu}}.$$

Подставляя заданные в условии задачи числовые значения v, d и ν, получаем:

$$R = 2{,}47 \cdot 10^{-4}\ \text{м}.$$

Ю. Чернышев

Новые книги

В этом номере мы публикуем краткие аннотации на книги по математике и физике, доступные и интересные нашим читателям, выпускаемые в 1983 году издательством «Наука». Большинство книжных магазинов, распространяющих литературу данной тематики, а также отделы «Книга — почтой», до конца 1982 года принимают без ограничений предварительные заказы (открытки) на эти книги. Мы просим всех заинтересованных читателей оформить такие заказы. Это поможет издательству точнее планировать тиражи издаваемых книг. В скобках мы указываем квартал, в котором предполагается выход книги в свет.

Математика

1. А. Дальма. *Эварист Галуа — революционер и математик* (перевод с французского). Издание 2-е (I кв.). Цена 35 к.

Эта книга о замечательном французском математике Эваристе Галуа, погибшем на дуэли в возрасте 20 лет.

Свою первую работу Галуа опубликовал, еще будучи воспитанником лицея, последние свои работы приводил в порядок накануне роковой дуэли. Эти работы привели к подлинному перевороту в математике — редкий пример научной судьбы, выпавшей юноше, не достигшему 21 года.

Большое место в книге автор уделяет описанию революционной борьбы Галуа и его напряженной научной работы. «Эта книга,— пишет автор,— дань уважения, которую мы приносим Галуа за все то, что он успел сделать в математике и политике».

2. Л. С. Понтрягин. *Математический анализ для школьников.* Издание 2-е (I кв.). Цена 10 к.

Эта брошюра предназначена для первоначального ознакомления с математическим анализом и содержит материал, охватывающий все разделы математического анализа, изучаемые в средней школе.

Изложение материала построено не формально: автор не стремится к полной строгости изложения, но опирается на наглядность и здравый смысл, что очень важно при первоначальном знакомстве с предметом. Так, понятие производной вводится исходя из интуитивного представления о пределах, понятие интеграла определяется в книге как площадь криволинейной трапеции и т. д.

«Популярные лекции по математике»

1. П. П. Коровкин. *Неравенства.* Издание 5-е (II кв.). Цена 15 к.

В брошюре приведено большое количество разнообразных неравенств, в том числе знаменитое неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, неравенства Бернулли и Юнга и многие другие.

Большое внимание уделено решению задач на максимум и минимум с применением неравенств, изучаемых в книге.

2. Н. Н. Воробьев. *Числа Фибоначчи.* Издание 5-е (I кв.). Цена 20 к.

Брошюра посвящена подробному изучению свойств последовательности натуральных чисел 1, 2, 3, 5, 8, 13,... (каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих). Эти числа часто возникают в самых разных задачах анализа, алгебры, комбинаторики. В брошюре подробно изучены свойства делимости чисел Фибоначчи.

В последнем параграфе увлекательно рассказывается о том, как числа Фибоначчи «работают» в теории поиска оптимальных решений.

(Окончание см. на с. 57)

Задачи

1. В детском саду воспитательница кладет перед ребенком лист бумаги, на котором нарисовано несколько кружочков.

— Сколько здесь кружочков? — спрашивает она.

— Семь,— отвечает ребенок.

— Правильно! — говорит воспитательница. Затем она кладет этот лист перед другим ребенком и задает тот же вопрос.

— Пять,— отвечает ребенок.

— Правильно! — вновь говорит воспитательница.

Сколько же кружочков нарисовано на бумаге?

2. От чашки с чаем на стену отражается солнечный зайчик. Какой формы тень появится на зайчике, если мы станем сверху приближать к центру поверхности чая чайную ложку?

3. Два пятизначных числа составляют так, чтобы каждая цифра вошла по одному разу в какое-нибудь из этих чисел. Например, 46781 и 50239. Для какой пары таких чисел произведение их будет наименьшим, а для какой — наибольшим?

4. Арбуз разделили тремя разрезами ножа на 7 частей, а когда его съели, то на столе оказалось 8 корок. Второй арбуз разделили четырьмя разрезами ножа на 10 частей. Когда съели его, то на столе от него осталось 12 корок. Третий арбуз разделили четырьмя разрезами ножа на 15 частей. Как разреза́ли арбузы и сколько корок осталось от последнего?

Эти зада́чи нам предложили *А. Калинин, Г. Коткин, В. Произволов, А. Савин.*

А. Бендукидзе

Треугольник Паскаля

Возьмите лист бумаги и начертите на нем квадратную таблицу в 100 клеток (десять строк и столько же столбцов). При выборе размеров таблицы учтите, что в ее клетки вам придется вписывать числа, некоторые из которых будут трехзначными.

Ну как, готово?

Отлично! Начните заполнять таблицу.

В клетки первого столбца напишите число 1, а в клетки первой строки, кроме, конечно, самой левой, в которой уже стоит единица, — число 0. Остальные клетки таблицы заполняйте по очереди, двигаясь слева направо и сверху вниз, по *закону перехода*, показанному на рисунке 1. Так, во вторую клетку второй строки нужно написать 1 ($1+0=1$), а во вторую клетку третьей строки — 2 ($1+1=2$) и т. д. Для контроля приведем четвертую и девятую строки — если вы не ошиблись, такие же строки получились и у вас:

1 3 3 1 0 0 0 0 0 0
1 8 28 56 70 56 28 8 1 0

Посмотрите теперь внимательно на полученную таблицу. Ее нулевые элементы образуют треугольник, две стороны которого (вертикальная и косая) состоят из единиц, а третья (горизонтальная) имеет вид

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

(Разумеется, построение можно продолжить и дальше или оборвать, не доходя до десятой строчки.)

Полученный треугольник называется *треугольником Паскаля*, в честь великого французского ученого Блеза Паскаля (1623—1662), который придумал и исследовал его. Чем этот треугольник замечателен? А это мы сейчас и увидим.

Посчитаем подмножества

Рассмотрим множество M_4, состоящее из четырех разных мячей — теннисного, волейбольного, футбольного и баскетбольного (рис. 2). Найдем все его подмножества (включая пустое $\varnothing$ и все множество M_4), группи-

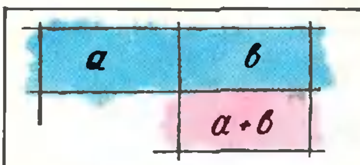


Рис. 1.

Рис. 2.

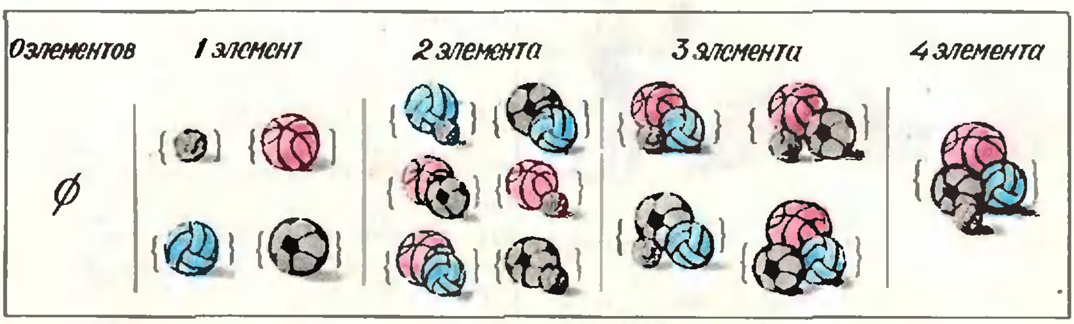


Рис. 3.

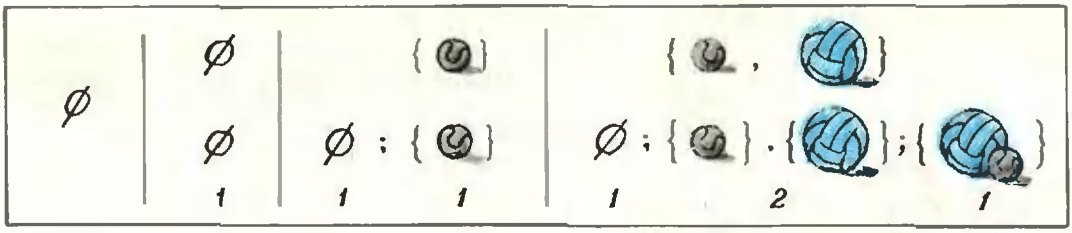


Рис. 4.

руя их по числу элементов (рис. 3), и выпишем в строчку, сколько подмножеств получилось в каждой группе:

1 4 6 4 1

Знакомая строчка? Да, получилась пятая строчка треугольника Паскаля. Это не случайно. Если бы мы взяли множество M_3 из трех элементов, мы получили бы таким образом 1 3 3 1 — четвертую строчку треугольника Паскаля. Вообще, *если взять множество M_n из n элементов и составить строчку из числа его 0-элементных подмножеств, числа 1-элементных, числа 2-элементных, ..., числа $(n-1)$-элементных и числа n-элементных подмножеств, получится $(n+1)$-я строчка треугольника Паскаля.*

Проверим это еще для $n=0$, 1, 2. Действительно, все в порядке (рис. 4).

Чтобы доказать это в общем случае, достаточно проверить, что каждая строчка получается из предыдущей по такому же закону перехода, как треугольник Паскаля. А это действительно так.

Например, посмотрим, как получается число 2-элементных подмножеств M_4. Для этого на время спрячем в карман теннисный мяч — получим множество M_3. В нем уже есть три 2-элементных подмножества:

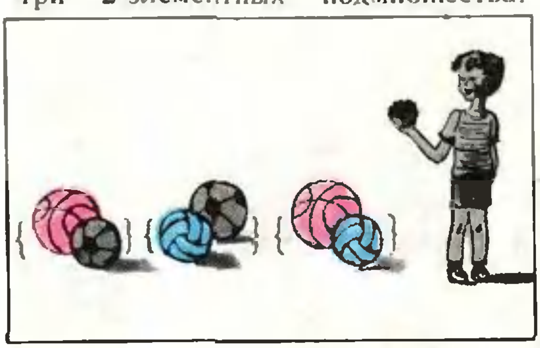


Рис. 5.

Чтобы получить остальные, нужно вынуть из кармана теннисный мяч и добавить его к трем 1-элементным подмножествам M_3:

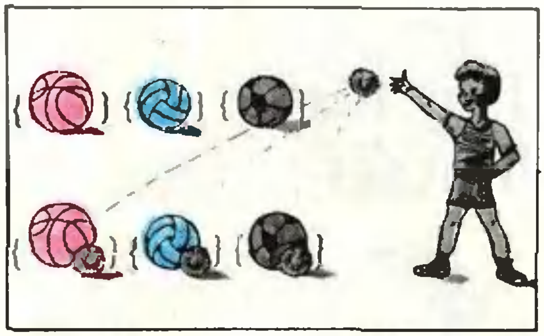


Рис. 6.

Получим $3+3=6$, как и полагается по закону перехода. Ясно, что это рассуждение общее, его можно провести для нахождения закона перехода к числу k-элементных подмножеств множества из n элементов для любых $k \leqslant n$.

Теперь, чтобы установить число подмножеств, скажем, из пяти элементов в множестве, скажем, из восьми элементов, нет необходимости производить сложные перечисления. Готовый ответ (70) написан на пятом месте девятой строки треугольника Паскаля.

Но треугольник Паскаля полезен не только для этого.

Раскроем скобки

Последовательно раскрывая скобки и приводя подобные члены, нетрудно найти, что

$$(1+x)^2 = 1+2x+1x$$
$$(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+1x^3$$
$$(1+x)^4 = 1+4x+6x^2+4x^3+1x^4$$

Найти $(1+x)^5$ таким способом уже сложнее, а $(1+x)^8$ не захочет сосчитать самый трудолюбивый из вас. А впрочем, нужно ли считать? Не заготовлен ли ответ в соответствующей строчке треугольника Паскаля?

В начале строчки коэффициентов

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

совпадают с начальными строчками треугольника Паскаля. Чтобы доказать, что так будет и дальше, вновь достаточно найти действующий здесь закон перехода. Но, например,

$$(1+x)^5=(1+x)(1+x)^4=$$
$$=(1+x)(1+4x+6x^2+4x^3+1x^4);$$

коэффициент, скажем, при x^3 получается (при раскрытии последних скобок) как сумма коэффициентов при x^2 и x^3 из предыдущей строчки — получим $10=6+4$, как в треугольнике Паскаля. Ясно, что и это рассуждение — общее.

Мы установили, что *последовательность коэффициентов при возрастающих степенях x в раскрытии двучлена $(1+x)^n$ совпадает с $(n+1)$-й строчкой треугольника Паскаля.*

Вновь треугольник Паскаля экономит нам время: взглянув на него, мы без вычислений сразу можем написать

$$(a+b)^9=a^9+9a^8b+36a^7b^2+$$
$$+84a^6b^3+126a^5b^4+126a^4b^5+$$
$$+84a^3b^6+36a^2b^7+9ab^8+b^9.$$

Свойства треугольника Паскаля

Отбросив нули, нашу таблицу можно переписать в более симметричной, треугольной форме:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

Отметим два свойства этой таблицы:

1) *Каждая строка симметрична относительно своей середины.*

2) *Сумма чисел n-й строчки в два раза больше суммы чисел предыдущей и равна 2^n.*

Эти свойства не трудно доказать, исходя из закона перехода. Но каждое из них можно доказать еще двумя другими способами — через число подмножеств и через коэффициенты двучлена. Проведите эти доказательства самостоятельно.

Подробнее о треугольнике Паскаля можно прочитать в брошюре В. А. Успенского «Треугольник Паскаля» («Популярные лекции по математике», выпуск 43, М., «Наука», 1978).

Задачи

1. Из пункта A по сети дорог идет группа из 2^7 человек. На каждом перекрестке, начиная с A, пришедшие туда люди делятся пополам — половина идет по направлению l, половина — по направлению m. Сколько человек придет в пункты $B, C, D, \ldots, I$ соответственно?

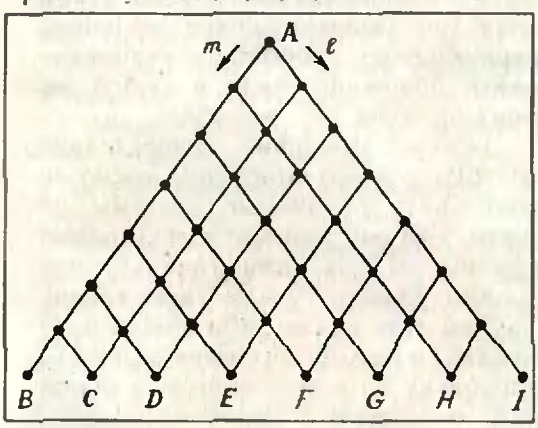


Рис. 7.

2. Сколько существует а) двузначных б) трехзначных чисел, цифры которых идут в убывающем порядке?

3. *Треугольным числом* называется число целых точек в треугольниках такого вида, как на рисунке 8. Как найти треугольные числа в треугольнике Паскаля?

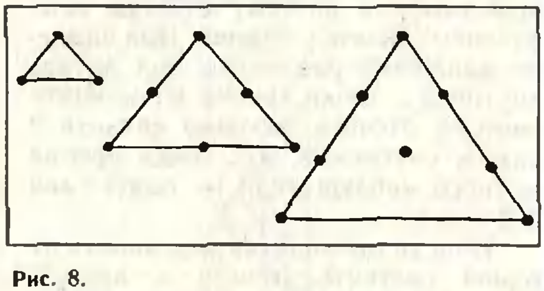


Рис. 8.

4. Представьте в виде суммы одночленов а) $(a-b)^6$; б) $(x-2y)^5$.

В. Данилин

Кинематика. Относительность движения

Раздел механики, в котором движения описываются без исследования причин, их вызывающих, называется кинематикой. Основная задача кинематики заключается в том, чтобы, зная три кинематические величины: перемещение, скорость и ускорение, найти положение тела в любой момент времени.

Всякое движение относительно, поэтому для его описания можно использовать различные системы отсчета. Все они кинематически равноправны, то есть принципиально позволяют решить ту или иную задачу. Трудно дать какие-либо общие рекомендации по выбору системы отсчета, поскольку он определяется, в основном, конкретными условиями данной задачи. В большинстве случаев следует выбирать ту систему, которая наиболее естественна и в которой решение задачи имеет наиболее простой вид. Например, при рассмотрении движения искусственного спутника Земли с точки зрения земного наблюдателя систему отсчета естественно связать с Землей. При анализе движений различных тел внутри спутника с точки зрения космонавта систему отсчета разумно связать с самим спутником, а с точки зрения земного наблюдателя — опять-таки с Землей.

Иногда приходится переходить от одной системы отсчета к другой. В разных системах описания движения могут выглядеть по-разному: могут различаться траектории движения, перемещения, скорости и ускорения тела. Однако при заданных связях между различными системами отсчета описания одного и того же движения всегда можно связать друг с другом.

А теперь поясним сказанное на конкретных задачах. Большинство из них предлагалось на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт.

Задача 1. *Два снаряда выпущены горизонтально вперед один вслед за другим с интервалом времени τ со скоростью u из орудия, находящегося на самолете, который летит горизонтально со скоростью v. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите: 1) уравнение траектории первого снаряда относительно земли; 2) уравнение траектории первого снаряда относительно самолета; 3) как изменяется положение первого снаряда относительно второго (после обоих выстрелов).*

В данном случае выбор системы отсчета фактически определен условием задачи.

Направим оси координат следующим образом: ось X — горизонтально, параллельно курсу самолета, ось Y — вертикально вниз. Начало же системы координат каждый раз будем указывать отдельно.

1) Поместим начало координат в точку, в которой находился самолет в момент вылета первого снаряда (разумеется, и самолет, и снаряд считаются материальными точками). Относительно этой неподвижной системы отсчета начальная (горизонтальная) скорость снаряда равна сумме скоростей снаряда относительно самолета и самого самолета, то есть $u+v$.

Тогда горизонтальная и вертикальная координаты снаряда в любой момент времени t таковы:

$$x=(u+v)\,t,\quad y=\frac{gt^2}{2}\,.$$

Выражая t из первого равенства и подставляя во второе, получим уравнение траектории снаряда относительно земли:

$$y=\frac{gx^2}{2\,(u+v)^2}\,.$$

Это безусловно знакомое всем уравнение параболы. Заметим, что уравнение траектории второго снаряда относительно земли будет точно таким же.

2) В этом случае начало системы отсчета надо связать с самолетом. Относительно него начальная скорость снаряда равна u, поэтому горизонтальная координата снаряда будет изменяться по закону $x=ut$. Вертикальная же координата по-прежнему будет иметь вид $y=gt^2/2$. Сделав аналогичные первому случаю преобразования, получим уравнение траектории снаряда относительно движущегося самолета:

$$y=\frac{gx^2}{2u^2}.$$

Очевидно, что и здесь траектория движения снаряда — парабола.

3) Для того чтобы описать движение первого снаряда относительно второго, воспользуемся той же системой отсчета, что и для первого случая, то есть поместим начало координат в ту точку, где находился самолет в момент первого выстрела.

Запишем уравнения для координат x_1 и y_1 первого снаряда и для соответствующих проекций v_{1x} и v_{1y} его скорости:

$$x_1=(u+v)\,t,\ y_1=\frac{gt^2}{2},$$
$$v_{1x}=u+v,\ v_{1y}=gt.$$

Здесь время t отсчитывается от момента первого выстрела, но по смыслу задачи оно не меньше интервала τ между выстрелами, то есть $t\geqslant\tau$.

Аналогичные уравнения для второго снаряда будут иметь вид

$$x_2=v\tau+(u+v)(t-\tau),\ y_2=\frac{g(t-\tau)^2}{2},$$
$$v_{2x}=u+v,\quad v_{2y}=g(t-\tau).$$

Если наблюдатель связан со вторым снарядом, то относительно него координаты (или проекции скорости) первого снаряда равны разности соответствующих координат (или соответствующих проекций скоростей) первого и второго снарядов в неподвижной системе отсчета:

$$x_{1\,\text{отн}}=x_1-x_2=$$
$$=(u+v)\,t-v\tau-(u+v)(t-\tau)=u\tau,$$

$$y_{1\,\text{отн}}=y_1-y_2=\frac{gt^2}{2}-\frac{g(t-\tau)^2}{2}=$$
$$=g\tau t-\frac{g\tau^2}{2},$$

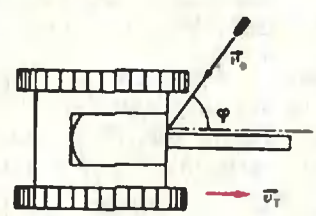
$$v_{1\,\text{отн}\,x}=v_{1x}-v_{2x}=$$
$$=(u+v)-(u+v)=0,$$
$$v_{1\,\text{отн}\,y}=v_{1y}-v_{2y}=gt-g(t-\tau)=g\tau.$$

Итак, после обоих выстрелов снаряды по горизонтали движутся с одинаковыми скоростями, так что расстояние между ними не изменяется и остается равным $x_{1\,\text{отн}}=u\tau$. По вертикали же первый снаряд движется относительно второго с постоянной скоростью $v_{1\,\text{отн}\,y}=g\tau$, поэтому расстояние между снарядами с течением времени изменяется по закону $y_{1\,\text{отн}}=g\tau t-g\tau^2/2$.

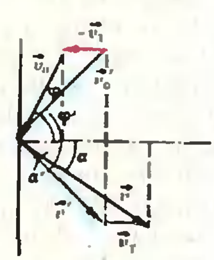
Задача 2. *В лобовой щит танка, движущегося со скоростью $v_т=54$ км/ч, ударяется пуля, летящая со скоростью $v_0=1800$ км/ч под углом $\varphi=60°$ к направлению движения танка, и упруго отскакивает от него (рис. 1, а). С какой скоростью $\vec{v}$ полетит отскочившая пуля?*

Задачу удобно сначала решить в системе отсчета, связанной с танком, а затем перейти в неподвижную систему отсчета.

Относительно танка скорость пули до удара равна $\vec{v}_0'=\vec{v}_0-\vec{v}_т$ (рис. 1, б). После упругого удара модуль скорости пули $\vec{v}'$ остается прежним ($v'=v_0'$), а угол «отражения» α' будет равен углу «падения» φ'.



а)



б)

Рис. 1.

В неподвижной системе отсчета пуля после удара будет двигаться со скоростью

$$\vec{v}=\vec{v}'+\vec{v}_\tau.$$

Модуль и направление этой скорости найдем из рисунка 1, *б*:

$$v=((v_0\cos\varphi+2v_\tau)^2+(v_0\sin\varphi)^2)^{1/2}\approx 1862\text{ км/ч},$$

$$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{v_0\sin\varphi}{v_0\cos\varphi+2v_\tau}\approx 57^\circ.$$

Задача 3. *Горизонтальный диск вращается вокруг своей оси, делая $n=5$ об/мин. Человек идет вдоль радиуса диска с постоянной скоростью $u=1{,}5$ м/с относительно диска. Как меняется модуль скорости человека относительно земли в зависимости от расстояния r от оси диска? Чему равен модуль этой скорости на расстоянии $R=3$ м от оси диска?*

В любой точке диска скорость $\vec{v}$ человека относительно земли равна векторной сумме двух скоростей (рис. 2, *а*): скорости $\vec{u}$ движения человека по диску, направленной вдоль его радиуса, и линейной скорости $\vec{V}$ точки диска, в которой находится человек, направленной перпендикулярно радиусу, то есть

$$\vec{v}=\vec{u}+\vec{V}.$$

Поскольку модуль V линейной скорости связан с угловой скоростью ω, а значит, и с частотой n вращения диска: $V=\omega r=2\pi n r$, то модуль скорости человека относительно земли равен

$$v=\sqrt{u^2+V^2}=\sqrt{u^2+4\pi^2n^2r^2}.$$

Графически зависимость v от r представлена на рисунке 2, *б*.

На расстоянии R от оси диска модуль искомой скорости равен

$$v_R=\sqrt{u^2+4\pi^2n^2R^2}\approx 2{,}2\text{ м/с}.$$

Задача 4. *Колесо радиуса R движется по земле поступательно со скоростью $\vec{v}_0$ и вращается с угловой скоростью ω (рис. 3). Найдите тангенциальную и нормальную проекции ускорения некоторой точки A на ободе колеса в неподвижной системе отсчета, связанной с землей.*

Напомним, что тангенциальная (касательная) проекция a_τ ускорения $\vec{a}$ — это проекция на направление

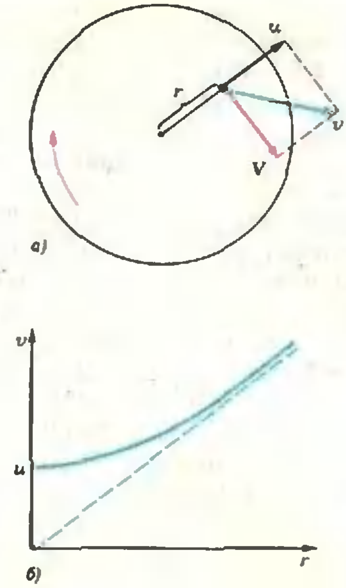


Рис. 2.

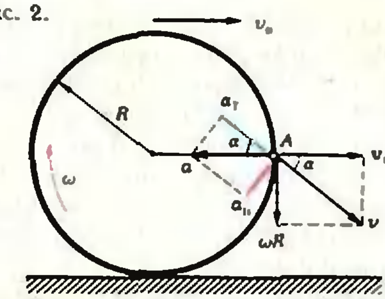


Рис. 3.

касательной к траектории, то есть на направление скорости; a_τ отвечает за изменение модуля скорости. Нормальная проекция $a_н$ — это проекция ускорения $\vec{a}$ на направление, перпендикулярное (нормальное) к касательной, то есть перпендикулярное к скорости; $a_н$ отвечает за изменение направления скорости.

Сначала рассмотрим движение точки A в системе отсчета, связанной с колесом. Здесь эта точка равномерно вращается по окружности радиуса R, так что скорость изменяется только по направлению. Ускорение точки направлено по радиусу к центру колеса и равно по модулю $a=\omega^2R$ (это ускорение называют также центростремительным).

Теперь перейдем в неподвижную систему, связанную с землей. Полное ускорение точки A останется прежним и по модулю, и по направлению, так как при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой ускорение не меняется. С точки зрения неподвижного наблюдателя траектория точки A — уже не окружность, а более сложная кривая (циклоида), вдоль которой точка движется неравномерно.

Рассмотрим точку A в некоторый момент времени (см. рис. 3). Ее скорость $\vec{v}$ равна по модулю $v = \sqrt{v_0^2+\omega^2R^2}$ и направлена по касательной к траектории, а полное ускорение $\vec{a}$ равно по модулю $a=\omega^2R$ и направлено по радиусу к центру колеса. Найдем тангенциальную и нормальную проекции этого ускорения:

$$a_\tau = a\cos\alpha = a\frac{v_0}{v} = \frac{\omega^2Rv_0}{\sqrt{v_0^2+\omega^2R^2}},$$

$$a_n = a\sin\alpha = a\frac{\omega R}{v} = \frac{\omega^3R^2}{\sqrt{v_0^2+\omega^2R^2}}.$$

Задача 5*. *Тяжелый диск радиуса R скатывается на двух нерастяжимых нитях, намотанных на него (рис. 4). Концы нитей закреплены. Нити при движении диска постоянно натянуты. В некоторый момент угловая скорость диска равна ω, а угол между нитями α. Какова в этот момент скорость центра диска?*

Выберем две системы отсчета: неподвижную, связанную, например, с землей, и подвижную, связанную с центром диска. Таким образом, задача сводится к тому, чтобы найти скорость подвижной системы отсчета относительно неподвижной.

Пусть в данный момент нити касаются диска в точках A и B. В подвижной системе отсчета (связанной с центром диска) скорости $\vec{u}_A$ и $\vec{u}_B$ этих точек равны по модулю ωR и направлены вдоль нитей. В системе, связанной с землей, скорости $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ могут быть направлены только перпендикулярно нитям, так как нити все время натянуты.

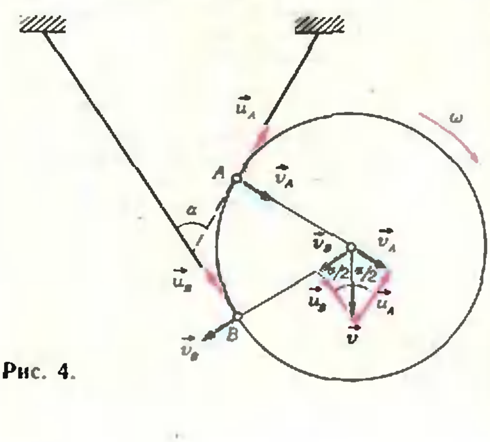


Рис. 4.

Обозначим скорость центра диска (скорость подвижной системы отсчета), направленную вертикально вниз, через $\vec{v}$. Тогда

$$\vec{v}_A = \vec{u}_A + \vec{v} \text{ и } \vec{v}_B = \vec{u}_B + \vec{v}.$$

Как видно из рисунка, при сложении соответствующих векторов получаются равные прямоугольные треугольники, из которых

$$v = \frac{u_A}{\cos\alpha/2} = \frac{\omega R}{\cos\alpha/2}.$$

Упражнения

1. Изогнутая трубка длины $L=1$ м вращается вокруг вертикальной оси OO' с угловой скоростью $\omega=0{,}1$ рад/с (рис. 5). Открытый конец трубки направлен вертикально вниз, и из него вытекает вода практически без начальной скорости относительно трубки. На расстоянии $H=10$ м ниже отверстия расположена горизонтальная плоскость. Найдите радиус окружности, которую опишет след струи воды на этой плоскости.

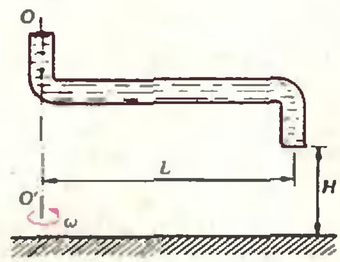


Рис. 5.

2. Гладкий диск радиуса R, плоскость которого горизонтальна, вращается вокруг своей оси. От поверхности диска отрывается небольшое тело, которое без трения скользит по диску. На каком расстоянии от оси оторвалось тело, если за время, пока оно соскользнуло с диска, диск сделал полный оборот?

3. Искусственный спутник Земли запущен с экватора и вращается по круговой орбите в плоскости экватора в направлении вращения Земли. Найдите отношение радиуса орбиты спутника к радиусу Земли, при котором спутник периодически проходит над точкой запуска ровно через двое суток.

4. Как показали радиолокационные измерения, Венера вращается вокруг своей оси в направлении, противоположном ее орбитальному движению. Период осевого вращения Венеры (относительно звезд) $T_1=243$ земных суток. Определите продолжительность солнечных суток на Венере, то есть время T между двумя последовательными прохождениями Солнца через один и тот же меридиан на этой планете (время от полудня до полудня). Венера обращается вокруг Солнца с периодом $T_2=225$ земных суток.

5. Тяжелый шар радиуса R лежит на горизонтальной плоскости, а в верхней точке шара покоится малое тело. По шару наносят удар, и он начинает двигаться со скоростью v. На какую высоту подпрыгнет тело после упругого отскока от плоскости? Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

Стандартные приемы программирования

(Фразеология программирования)

Сегодня мы публикуем первый урок одногодичного цикла «Стандартные приемы программирования». Этот цикл рассчитан на школьников, знакомых с основами программирования и желающих углубить свои знания. Вместе с выпускниками Заочной школы программирования, работавшей в «Кванте» с сентября 1979 по апрель 1982 года, контрольные задания могут выполнять и новые участники. Занятия ведет преподаватель Куйбышевского авиационного института Л. Штернберг.

К каждому уроку предлагаются подготовительные задачи, которые нужно решить самостоятельно. В уроке обсуждаются возможные варианты решений, а затем даются контрольные задания, решения которых должны быть присланы на проверку. Все примеры программ написаны на языке Паскаль; на нем же должны выполняться контрольные задания. Прочитать об этом языке можно в журнале «Квант» (№ 10—11 за 1981 г. и № 1—4 за 1982 г.).

Школьники, показавшие лучшие результаты по итогам одногодичного цикла, будут приглашены на VII Всесоюзную летнюю школу юных программистов в 1983 году.

При отсылке выполненных заданий первого урока укажите

— Фамилию, имя и отчество,

— Школу и класс,

— Изучали ли ранее программирование и где,

— Полный почтовый адрес.

В работу вложите конверт с наклеенной маркой и своим адресом для отправки проверенной работы.

Школьники, проживающие в прибалтийских республиках, в Архангельской, Вологодской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской и Псковской областях, в Карельской и Коми АССР, направляют свои работы по адресу: 190000, Ленинград, ул. Герцена, 67, ЛИАП, кафедра ЭВМ, Северо-западный филиал Заочной школы программирования.

Школьники, проживающие в Кировской, Оренбургской, Пермской, Свердловской и Челябинской областях, в Башкирской и Удмуртской АССР, пишут по адресу: 620219, Свердловск, ул. К. Либкнехта, 9, Пединститут, кафедра вычислительной математики и программирования, Уральский филиал Заочной школы программирования.

Школьники из Астраханской, Волгоградской, Горьковской, Саратовской и Ульяновской областей, Марийской, Мордовской, Татарской и Чувашской АССР направляют свои работы по адресу: 420008, Казань, ул. Ленина, 18, Университет, факультет вычислительной математики и кибернетики, Поволжский филиал Заочной школы программирования.

Школьники, проживающие в Белгородской, Брянской, Владимирской, Воронежской, Ивановской, Калининской, Костромской, Курской, Куйбышевской, Липецкой, Орловской, Пензенской, Рязанской, Смоленской, Тамбовской, Тульской и Ярославской областях, пишут по адресу: 443462 ГСП, Куйбышев, Молодогвардейская, 151, Куйбышевский авиационный институт, кафедра прикладной математики, Центральный филиал Заочной школы программирования.

Школьники, проживающие в Казахской ССР и республиках Средней Азии, направляют свои работы по адресу: 642000, Северо-Казахстанская область, г. Петропавловск, ул. Пушкина, 86, Пединститут, кафедра алгебры и геометрии, Казахстанский филиал Заочной школы программирования.

Жители остальной территории СССР и зарубежные читатели направляют работы по прежнему адресу: 630090, Новосибирск, пр. ак. Лаврентьева, 6, ВЦ СОАН СССР, отдел информатики, Заочная школа программирования.

Урок 1. Счет по рекуррентным формулам

Что нужно для того, чтобы говорить на каком-то языке? Нужно знать определенное количество *слов* и уметь правильно строить *фразы*, то есть знать *грамматику* языка — вот, вроде бы и все. Но нет: еще надо знать *фразеологию* — то есть *когда какие обороты речи надо применять.*

Как поздороваться с человеком? Англичане, например, считают, что лучше всего для этого подходит фраза «Хау ду ю ду?», но если вы на русском языке поздороваетесь дословным переводом этой фразы («Как Ваши дела?»), то вас, по-видимому, сочтут невежливым (в русском языке этот вопрос можно задать после приветствия, но не в качестве приветствия) или начнут подробно отвечать по существу вопроса, что на самом деле вам не требовалось. Как видим, незнание фразеологии может привести к неприятностям: вас могут не понять или понять неправильно.

Что же такое *фразеология программирования?* Программирование — это тоже своеобразный разговор, только не с человеком, а с ЭВМ, причем идет он на специальных языках — языках программирования. С грамматикой некоторых языков (Рапиры, Паскаля) вы уже, наверное, знакомы, ну а какие обороты в каких случаях надо применять? Вот на этот вопрос, а заодно и на вопрос, как понимает ЭВМ неправильные обороты, мы и попытаемся дать ответ.

Подготовительные задачи к уроку 1

1. Дано число x. Вычислить приближенное значение $\sqrt{x}$ с точностью ε с помощью метода последовательных приближений:

$$y_0=\frac{x}{2},\ y_i=\frac{1}{2}\left(y_{i-1}+\frac{x}{y_{i-1}}\right),\ i>1$$

Вычисления вести до тех пор, пока не станет $|y_i-y_{i-1}|<\varepsilon$.

2. Напечатать значения первых N чисел Фибоначчи*), определяемых по формулам: $f_0=1,\ f_1=1,\ f_i=f_{i-1}+f_{i-2},\ i>2$.

3. Дан массив коэффициентов a_i, $i=0, ..., n$, и значение x. Вычислить значение многочлена

$y=\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ применяя формулу:

$$y=(...((a_n x+a_{n-1})x+a_{n-2})x+...+a_1)x+a_0$$

(Этот очень эффективный прием вычисления многочленов называется *схемой Горнера:* в нем n сложений, n умножений и ни одного (!) возведения в степень.)

4. Дано x. Вычислить приближенное значение $\sin x$ с точностью ε, пользуясь формулой

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (1)$$

Считать известным, что точность ε будет достигнута, когда

$$\left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right|<\varepsilon.$$

В задачах 1, 2 не использовать массивы. В задаче 4 не использовать возведение в степень.

После решения задач внимательно сравните условия и решения всех задач, и попробуйте ответить на вопросы:

1) что общего в условиях этих задач?

2) что общего в их решениях?

Сравните ваши решения с приведенными на с. 54. Задача 3, наверное, трудностей не вызвала. Если в задачах 1, 2, 4 ваши решения построены на тех же идеях, что и решения а), то вы сделали все правильно, а если на идеях решений б), то вы ошиблись. Конечно, и программы б) будут работать и дадут в большинстве случаев нужный вам результат, и все же любой опытный программист скажет, что они не годятся. Почему?

Для ответа на этот вопрос давайте посмотрим, что общего в условиях и решениях задач. Вы заметили, наверное, и запреты пользоваться определенными операциями и переприсваивания значений (обведены рамочкой). Но самым главным является то, что **очередные значения вычисляются через предыдущие** (см. подчеркнутые части программ). В математике зависимость новых значений от старых называется *рекуррентной*, а число старых значений, от которых зависит очередное значение, называется *порядком* рекуррентной формулы.

Таким образом, в задачах 1 и 2 мы и м е л и рекуррентные формулы соответственно 1-го и 2-го порядка, а в задачах 3 и 4 мы с в е л и нерекуррентную запись многочлена и формулы (1) к рекуррентной:

$$y=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \ \Rightarrow\ y_0=a_n,\ y_i=y_{i-1}x+a_{n-i};$$

$$y=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}\ \Rightarrow\ y_0=0,$$

$$z_0=x;\ y_i=y_{i-1}+z_{i-1};\ z_i=\frac{-z_{i-1}x^2}{2i(2i+1)}.$$

Теперь взглянем на решения б) и зададим себе вопрос: если бы вы вручную считали по формуле (1), то разве стали бы вы возводить каждый раз x в степень или считать факториал сначала? Вряд ли. А зачем использовать массивы в задачах 1, 2? Ведь вам не нужно хранить промежуточные значения. А в задаче 1 и вообще неясно, сколько этих промежуточных значений будет и какой объем памяти под них надо отвести. Кроме того, оказывается, что для ЭВМ операция индексирования — это очень трудоемкая операция: более трудоемкая, чем, например, умножение (вообще «точка зрения» ЭВМ на трудоемкость отдельных операций совсем не совпадает с человеческой). Теперь нам стали ясны запреты в условиях задач: мы запретили зря расходовать память и использовать трудоемкие операции. Современные ЭВМ имеют огромную память и колоссальную скорость, и все же есть очень много задач, для которых скорости и памяти не хватает. Поэтому программист должен уметь бережно расходовать ресурсы ЭВМ и, следовательно, решения б) нельзя признать пригодными.

Откуда же появляются такие ошибки? Дело в том, что программист часто переводит алгоритм с языка математики на язык программирования. Эти языки похожи, но правила «разговора» на них различны. Поэтому «подстрочный» перевод с языка математики на язык программирования может дать совсем неправильный результат, также как дословный перевод русского приветствия «Добрый день!» на английский — «Kind day!» — ошибочен: для англичанина это не приветствие, а бессмыслица.

Возвращаясь к нашим задачам, отметим разницу в «правилах разговора» на языке математики и языке программирования. *Математики используют индексацию для различения значений переменных как «в пространстве», так и «во времени», программисты — только для различения в пространстве.* В рекуррентных формулах индексы характеризуют время (номер шага) появления очередного значения, поэтому при программировании они не нужны: новые значения просто засылаются на старое место.

*) Об этих замечательных числах можно прочитать в «Кванте» 1979, № 5, с. 53 или в брошюре Н. Н. В о р о б ь е в а «Числа Фибоначчи» (М., «Наука», 1978), но для решения задачи это не требуется).

Решения подготовительных задач к уроку 1

(Описания и ввод-вывод опущены, приведены только тела программ)

(а)	(б)*
Задача 1 (Квадратный корень)	

*y*1: = *x*/2;
repeat *y*0: = *y*1;
  *y*1: = 0.5 * (*y*0 + *x*/*y*0)
until *abs*(*y*0 − *y*1) < *eps*;
	y[0]: = *x*/2; *i*: = 0;
	repeat *i*: = *i* + 1;
	  y[*i*]: = 0.5 * (*y*[*i*−1] + *x*/*y*[*i*−1])
	until *abs*(*y*[*i*] − *y*[*i*−1]) < *eps*;

Задача 2 (Числа Фибоначчи)	

*f*2: = 1; *f*1: = 1;
for *i*: = 3 **to** *n* **do**
begin *f*: = *f*2 + *f*1; *writeln*(*f*);
  *f*2: = *f*1; *f*1: = *f*
end;
	f[∅]: = 1; *f*[1]: = 1;
	for *i*: = 3 **to** *n* **do**
	begin *f*[*i*]: = *f*[*i*−1] + *f*[*i*−2];
	  writeln(*f*[*i*])
	end;

Задача 3 (Схема Горнера)	

y: = *a*[*n*];
for *i*: = *n*−1 **downto** 0 **do**
  y: = *y* * *x* + *a*[*i*];	

Задача 4 (Вычисление синуса)	

s: = 0; *элем*: = *x*; *k*: = 1;
while *abs*(*элем*) > *eps* **do**
begin *s*: = *s* + *элем*; *k*: = *k* + 2;
  элем: = −*элем* * *x* * *x*/(*k* * (*k*−1))
end;
	s: = 0; *элем*: = *x*; *k*: = 0;
	while *abs*(*элем*) > *eps* **do**
	begin *s*: = *s* + *элем*; *k*: = *k* + 1;
	  факт: = 1;
	  for *j*: = 2 **to** 2 * *k* + 1 **do** *факт* = *факт* * *j*;
	  элем: = *cmen*(−1,*k*) * *cmen*(*x*,2 * *k* + 1)/*факт*
	{функция *cmen*(*a*, *n*) дает значение a^n}
	end;

Таким образом:

При счете по рекуррентной формуле *k*-го порядка достаточно иметь *k*+1 дополнительный элемент памяти для хранения последних *k* значений и очередного значения.

В рекуррентных формулах 1-го порядка, если не надо сравнивать соседние значения, можно обойтись вообще одним элементом (см. задачу 3).

Программы, реализующие рекуррентные соотношения, включают в себя следующие фрагменты:

— начальные присваивания (в решениях — это первые строчки)

— основной цикл счета по формулам,

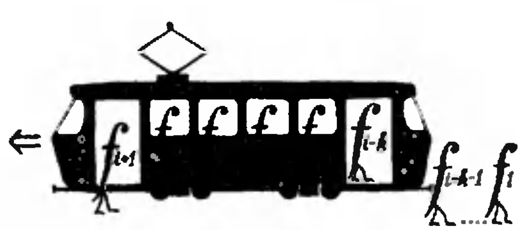
— в теле цикла: вычисление очередного значения, использование этого значения и переприсваивание.

Эти элементы имеются обязательно, хотя выглядеть могут по-разному. Начальные присваивания могут выполняться по сложному алгоритму. Основной цикл может быть с заранее известным (как в задачах 2, 3) или заранее неизвестным числом повторений (как в задачах 1, 4). В формулах 1-го порядка переприсваивание может быть совмещено с вычислением очередного значения. Очередное значение может использоваться в дальнейших расчетах (как значение *элем* в задаче 4), просто печататься (задача 2) или не использоваться вообще для чего-либо иного, кроме получения следующего значения.

В заключение рассмотрим задачу с рекуррентной формулой *k*-го порядка: *напечатать первые N значений, определяемых рекуррентными формулами:*

$$f_i=1,\quad i<k;\qquad f_{i+1}=(f_{i-k+1}+f_{i-k+2}+\dots+f_{i-1})f_i,\quad i>k$$

Для решения нам понадобится массив в *k*+1 элемент для размещения последних *k* значений и нового значения. Обратите внимание: этот массив работает как трамвай: очередное значение «входит» в него через переднюю дверь (а не в заднюю, как мы привыкли), «проезжает» *остановок, продвигаясь назад,*



а затем «выходит».

```
for j: =1 to k do f[j]:=1;                          } 1
for i: =k+1 to n do
begin s: =0;                                        ⎫
   for j: =1 to k-1 do s: =s+f[j];    ⎫3            ⎪
   f[k+1]:=s*f[k];                    ⎭             ⎬ 2
   writeln (f[k+1]);                  } 4           ⎪
   for j:=1 to k do f[j]:=f[j+1];     } 5           ⎭
end;
```

Здесь: 1 — начальное присваивание, 2 — основной цикл, 3 — вычисление очередного значения, 4 — использование значения, 5 — переприсваивание.

(Переменная s введена для повышения скорости программы: вместо s везде можно было использовать $f[k+1]$, но напомним, что индексация — это очень трудоемкая для ЭВМ операция.)

Контрольное задание

1.1. Дано x. Вычислить приближенное значение e^x по формуле

$$e^x \approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}.$$

Вычисления вести пока очередное слагаемое не станет меньше ε.

1.2. Вычислить значения k-ой строчки треугольника Паскаля (см. статью А. Бендукидзе в этом номере). Результат должен быть записан в массив длины k; двумерные массивы и вспомогательные массивы не использовать.

Программы должны быть оформлены полностью (не только тело программы) и высланы в течение двух недель после получения журнала. Длины и типы массивов выбирайте произвольно.

Подготовительные задачи к уроку 2*)

1. Найти в данном массиве первый элемент (считая слева направо), имеющий заданное значение.

2. Найти в данном массиве последний элемент, имеющий заданное значение (массив просматривается от начала к концу, а не наоборот).

3. Найти в данном массиве m-й элемент, имеющий заданное значение.

Во всех задачах нужно получить индекс нужного элемента, если он в массиве есть, и ноль, если его нет.

Вопросы: Что общего в условиях и в решениях задач? Почему задачу 2 имеет смысл решать как самостоятельную задачу, а не искать первый с конца элемент?

Л. Штернберг

*) Решения этих задач присылать не нужно!

«Квант» улыбается

Вокруг ЭВМ

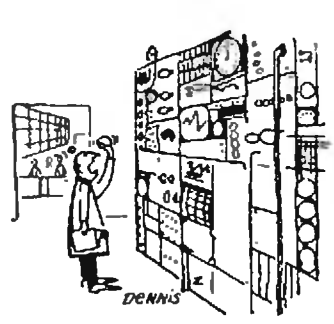
Сначала человек заставил машину работать за себя, а теперь хочет, чтобы она за него и думала.

Э. Погосянц

Может быть, в этом дело?

Она слишком много знала!

Хватит! У меня перерыв на обед.



Еще раз ошибешься — заменю человеком!

Путешествие в мир случайных событий

В окружающем нас мире постоянно приходится иметь дело с событиями, которые нельзя предсказать заранее. Такие события называются *случайными*. На первый взгляд кажется, что в мире случайных событий царит настоящий хаос и что эти события нельзя изучать точными математическими методами. Однако это мнение ошибочно. В математике имеется раздел — *теория вероятностей*, изучающий закономерности, присущие случайным явлениям. Теории вероятностей посвящена книга известного советского математика чл.-корр. АН УССР А. В. Скорохода «Вероятность вокруг нас» (Киев, «Наукова думка», 1980).

Редакция получила две рецензии на эту книгу. Мы решили опубликовать как первую рецензию, имеющую общий характер, так и вторую, где акцент ставится на обсуждении доступности книги школьникам.

* * *

Современная теория вероятностей использует сложный математический аппарат, но ее основные идеи и методы можно объяснить используя лишь школьную математику. Это сделано в рецензируемой книге.

Книга состоит из трех разделов: «Случайные события», «Случайные величины», «Случайные процессы». При переходе от одного раздела к другому понятие случайности все более усложняется.

В первом разделе рассказывается о случайных событиях, их вероятностях, о теоретико-множественной аксиоматике теории вероятностей, предложенной А. Н. Колмогоровым.

Во втором разделе рассматриваются случайные величины, их числовые характеристики, рассказывается о важнейших закономерностях теории вероятностей — законе больших чисел и центральной предельной теореме.

В третьем разделе рассказывается о важнейшем понятии теории вероятностей — понятии случайного процесса. Это понятие пришло в теорию вероятностей во второй четверти нашего столетия. Его формирование протекало под влиянием физики, биологии, техники. *Случайными процессами* называют случайные величины, изменяющиеся во времени. В настоящее время теория случайных процессов является одним из наиболее увлекательных разделов теории вероятностей.

Для иллюстрации основных понятий в книге рассматривается большое число примеров из биологии (законы наследственности, модели эпидемий), физики (ядерные реакции, энергетические переходы в атомах, броуновское движение), радиотехники (случайные электромагнитные колебания, фильтрация случайных сигналов и шумов), теории массового обслуживания и теории надежности.

Книга написана живо и интересно. По характеру изложения и содержанию она доступна настойчивому старшекласснику, интересующемуся математикой, физикой, возможностями применения математики в биологии и медицине. Основное требование автора к математической подготовке читателя книги — знакомство с понятиями производной и интеграла.

М. Ядренко

* * *

Рецензируемая книга написана автором ряда монографий и учебников, широко используемых специалистами и студентами университета. Хотя она отнесена к разделу научно-популярной литературы, следует иметь в виду, что по объему понятий она близка университетским курсам теории вероятностей и полное усвоение ее материала даст неплохое вероятностное образование. Для первоначального знакомства с предметом можно обратиться к рекомендованной автором книге Б. В. Гнеденко и А. Я. Хинчина «Элементарное введение в теорию вероятностей» (М., «Наука», 1976).

Мы остановимся лишь на первом разделе рецензируемой книги. Он начинается попыткой разъяснить аксиоматический подход к построению теории вероятностей. Без предварительного знакомства с достаточным числом комбинаторных вероятностных задач материал этот труден для усвоения. Поэтому можно посоветовать после беглого просмотра §§ 1 — 2 перейти к чтению §§ 3—6, возвращаясь по мере необходимости за справками к первым двум параграфам. Более широкий набор примеров и задач, а также более детальное изложение рассматриваемых в §§ 1 — 6 понятий можно найти в первых двух главах рассматриваемой автором книги В. Феллера «Введение в теорию вероятностей и ее приложения», т. 1 (М., «Мир», 1952).

В §§ 7—9 вводится и изучается схема независимых испытаний, выводятся закон Пуассона для редких событий, закон больших чисел и нормальная аппроксимация Муавра — Лапласа, рассматриваются условные вероятности и формула Байеса.

Из сказанного видно, что рецензируемая книга будет полезной широкому кругу читателей, уже знакомых с элементами теории вероятностей и желающих получить представление о ее современном состоянии.

М. Козлов

Эйнштейн — изобретатель

Однажды Эйнштейн пожаловался Нернсту, что патентное ведомство сочло конструкцию придуманного им вместе со Сциллардом холодильника известной. «Когда мне это говорят о теории относительности,— произнес Эйнштейн несколько удрученно,— я еще могу понять, но холодильник...»

Этим эпизодом из книги В. Я. Френкеля и Б. Е. Явелова «Эйнштейн — изобретатель» (М., «Наука», 1981) можно начать рецензию на нее — эпизод вызывает то же чувство, что и вся книга в целом: удивление. И то же желание, которое испытываешь, начав знакомиться с книгой: узнать — что же дальше?

Имя Альберта Эйнштейна, одного из самых замечательных из когда-либо живших ученых, великого физика нашего века, знакомо всем без исключения. Даже очень далекие от науки люди знают, что Эйнштейн был творцом теории относительности, хотя о самой теории у них могут быть лишь смутные представления. Те, кто интересуются физикой и физиками, имеют возможность узнать о масштабе физического гения Эйнштейна и о его необыкновенно привлекательной личности из многочисленных книг и статей, посвященных жизни и деятельности ученого.

Но можно смело утверждать, что практически никто не слышал об Эйнштейне — изобретателе холодильника (и не одного, а нескольких типов); об Эйнштейне — изобретателе фотокамеры, использовавшейся на съемках в Голливуде; об Эйнштейне — изобретателе магнитострикционного громкоговорителя; магнитогидродинамических насосов для перекачки жидких металлов; индукционной гидродинамической подвески, которая в наши дни широко используется в металлургии; об Эйнштейне, разработавшем метод определения размеров пор в медицинских фильтрах. Об Эйнштейне — экспериментаторе, выдвигавшем оригинальные идеи экспериментов.

Узнать об этом было неоткуда. Книга В. Я. Френкеля и Б. Е. Явелова — первый рассказ об этой стороне жизни и творчества Альберта Эйнштейна.

Изобретения и эксперименты, о которых идет речь в книге, интересны сами по себе. Многие из них получили дальнейшее равитие, сыграли и по сей день играют важную роль и в научных исследованиях, и в технике. Но еще интереснее — узнать о том, как работал над этими изобретениями Эйнштейн, как в этой работе раскрывались замечательные человеческие качества ученого.

Эйнштейн никогда не изобретал в одиночку. Совместная работа была для него одной из форм общения с людьми, близкими ему по культурным и духовным интересам. Поэтому книга «Эйнштейн — изобретатель» — это и книга о друзьях ученого.

Прочесть эту книгу и интересно, и полезно.

М. Левинштейн

Новые книги

(Начало см. на с. 43)

3. А. Г. Курош. *Алгебраические уравнения произвольных степеней.* Издание 3-е (I кв.). Цена 10 к.

В основу брошюры положена лекция, прочитанная автором, известным математиком, для участников Московской математической олимпиады. В книжке идет речь об алгебраических уравнениях произвольных степеней, основной теореме алгебры, о методах решения некоторых алгебраических уравнений, о разрешимости уравнений в радикалах. Как правило, результаты приводятся без доказательства, но иллюстрируются интересными примерами.

Библиотечка «Квант»

1. Е. Я. Гик *Шахматы и математика* (I кв.). Цена 40 к.

Автор книги — математик и шахматист, ведущий шахматную страничку нашего журнала. В популярной форме он рассказывает о разнообразных связях между математикой и шахматами.

В книге обсуждаются увлекательные задачи и головоломки о разрезании доски, о маршрутах и силе фигур, о расстановках на шахматной доске и взаимной силе фигур.

Интересны разделы, посвященные шахматным успехам ЭВМ, коэффициентам Эло, математике шахматных турниров, необычной геометрии шахматной доски.

2. В. М. Тихомиров. *Рассказы о максимумах и минимумах* (IV кв.). Цена 40 к.

В книге рассказывается о задачах на максимум и минимум, привлекавших внимание ученых еще в глубокой древности. Сначала автор рассматривает классические задачи, которые решали Евклид, Архимед, Аполлоний, Ферма, Кеплер, Ньютон, Лейбниц.

Далее рассказывается о глубоких связях экстремальных задач с проблемами естествознания, экономики, космической техники и современных методах решения таких задач.

3. И. Ф. Шарыгин. *Задачи по геометрии: Стереометрия* (III кв.). Цена 40 к.

В книге содержится около 350 задач по стереометрии.

В первом разделе помещены задачи, имеющие вычислительный характер. Здесь же содержатся некоторые теоремы стереометрии, непосредственно примыкающие к школьному курсу.

Второй раздел содержит геометрические неравенства, задачи на геометрические места точек, элементы сферической геометрии и т. п.

А. Егоров

150 лет тому назад

9 (21) октября 1832 года в Петербурге, в частном доме на Царицином лугу (Ленинград, Марсово поле, дом № 7) состоялась первая публичная демонстрация работы электромагнитного телеграфа. Замечательное изобретение, положившее начало современной телеграфной связи, представлял собравшимся его автор — Павел Львович Шиллинг (1786—1837). Это был необычайно ярко и многосторонне одаренный человек, один из пионеров электротехники и ученый-востоковед с международной репутацией, дипломат и талантливый изобретатель, храбрый офицер и путешественник.

Телеграфный аппарат Шиллинга состоял из передатчика и приемного устройства. Для передачи букв и цифр использовалась клавиатура из черных и белых клавишей. Приемник представлял собой несколько магнитных стрелок, подвешенных на шелковых нитях и находящихся внутри горизонтальных проволочных спиралей. При нажатии какой-либо клавиши передатчика в соответствующую спираль приемника поступал электрический ток того или иного направления, и магнитная стрелка соответственно поворачивалась в ту или иную сторону. Для удобства наблюдения за поворотами стрелки на каждой нити был укреплен небольшой вертикальный диск, выкрашенный с одной стороны в черный цвет, а с другой — в белый.

Во многом успех Шиллинга был связан еще и с тем, что для своего телеграфа он разработал специальный, и очень удачный для того времени, код — для передачи любой буквы или цифры было достаточно одновременно нажать не более трех одноцветных клавиш.

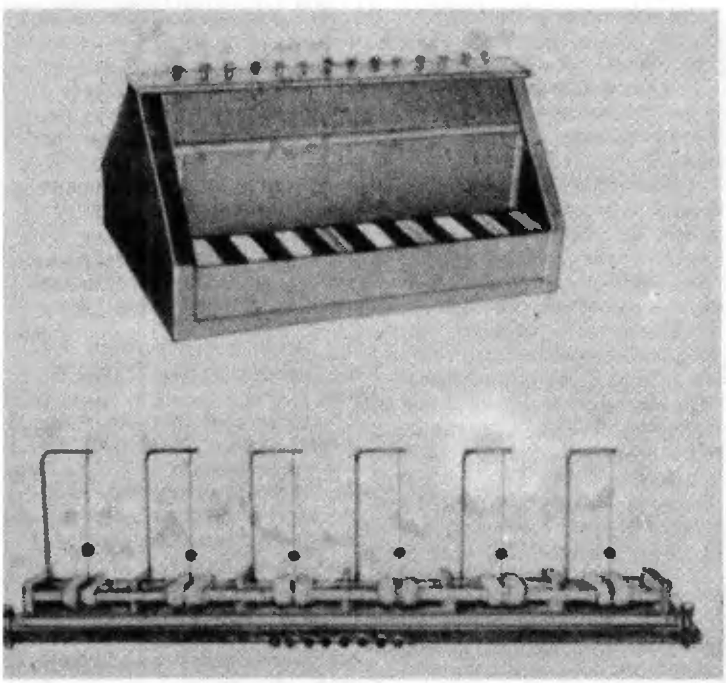
Дружеский шарж на П. Л. Шиллинга, сделанный А. С. Пушкиным накануне отъезда ученого с экспедицией в Восточную Сибирь.

Приборы первых телеграфов Шиллинга собраны и хранятся в Политехническом музее в Москве.

Имя Шиллинга связано не только с изобретением электромагнитного телеграфа. Ему принадлежит также идея первого практического применения электричества: в 1812 году Шиллинг изобрел способ дистанционного подрыва подводных мин при помощи электрического тока. Шиллинг первым стал изготовлять и использовать подземные и подводные изолированные электрические кабели. Много занимался он и совершенствованием техники литографии.

Павел Львович Шиллинг был весьма колоритной личностью: небольшого роста, необыкновенной тучности, очень добродушный, остроумный и неутомимый рассказчик. У него была масса знакомых, и среди них — король математики Гаусс и великий поэт Пушкин.

О недолгой, но очень плодотворной жизни Шиллинга интересно и увлекательно написано в книге А. В. Яроцкого «Павел Львович Шиллинг», вышедшей в научно-биографической серии издательства АН СССР в 1963 году.



Передатчик и приемник телеграфа Шиллинга.

Б. Явелов

Всероссийская олимпиада школьников

По традиции в дни весенних школьных каникул проходил заключительный этап VIII Всероссийской олимпиады школьников по математике и физике.

Всероссийская олимпиада проводится в четыре этапа: первый этап — школьные олимпиады, второй — районные (городские), третий — республиканские (АССР), краевые и областные, четвертый — зональные олимпиады.

В этом году заключительный, четвертый этап проходил одновременно в четырех городах РСФСР: в Костроме, Ставрополе, Ульяновске и Чите. В нем принимали участие команды автономных республик, краев и областей, составленные из победителей третьего этапа. Кроме того, в зональных олимпиадах участвовали победители предыдущей Всероссийской олимпиады, получившие дипломы I и II степени, и победители конкурса журнала «Квант». В этом этапе учвствовали также команды физико-математических школ-интернатов при Ленинградском, Московском и Новосибирском университетах.

Конкурсное задание четвертого этапа по математике состояло из пяти задач, на решение которых отводилось четыре часа. Наибольшие затруднения у участников олимпиады вызвали задачи по геометрии, комбинаторике и математическому анализу.

Задание четвертого этапа по физике включало четыре задачи теоретического тура и две — экспериментального. На решение теоретических задач отводилось четыре часа, а экспериментальных — три. Наиболее трудной из теоретических задач оказалась четвертая задача для десятиклассников. С экспериментальными задачами успешно справились все участники.

По решению жюри победители Всероссийской олимпиады были награждены дипломами, памятными призами и ценными подарками. Министерство просвещения РСФСР наградило грамотами учителей, подготовивших победителей олимпиады.

Ниже приводятся задачи по математике и физике заключительного этапа и фамилии призеров VIII Всероссийской олимпиады школьников.

Математика

8 класс

1. В треугольнике ABC проведена биссектриса $[AK]$. Известно, что центры окружностей — вписанной в треугольник ABK и описанной около треугольника ABC — совпадают. Найдите углы треугольника ABC.

2. В мастерской имеется пять различных станков. Обучение одного рабочего работе на одном станке стоит 1000 рублей. С какими наименьшими затратами можно обучить 8 рабочих так, чтобы при отсутствии любых трех из них все станки могли быть одновременно использованы в работе? Каждый рабочий может одновременно работать только на одном станке.

3. В некотором королевстве имеется шесть городов. Министерство транспорта получило от короля приказ установить между каждыми двумя городами один из трех видов сообщения: железнодорожный, шоссейный или воздушный. При этом король потребовал, чтобы никакие три города не были связаны одним и тем же видом сообщения и чтобы для любого разбиения шести городов на три пары не все виды сообщения в парах были различны. Сможет ли министерство транспорта выполнить приказ короля?

4. Какое наибольшее число точек можно выбрать на отрезке $[0; 1]$ так, чтобы на любом отрезке $[a; b]$, содержащемся в отрезке $[0; 1]$, лежало не более $1+100(b-a)^2$ выбранных точек?

5. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон $[AB]$, $[BC]$ и $[AC]$ в точках M, N и P соответственно. Известно, что $\vec{AN}+\vec{BP}+\vec{CM}=\vec{0}$. Докажите, что треугольник ABC правильный.

9 класс

1. См. задачу 2 для 8-го класса.

2. Решите в натуральных числах систему уравнений

$$\begin{cases} x^3-y^3-z^3=3xyz \\ x^2=2(y+z) \end{cases}$$

3. В остроугольном треугольнике ABC высоты пересекаются в точке H. Обозначим $|AB|=c, |BC|=a, |CA|=b, |AH|=x, |BH|=y, |CH|=z$. Докажите равенство $abc=ayz+xbz+xyc$.

4. Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[0; 1]$, такова, что $f(0)=f(1)=0$ и для любых $a, b \in [0; 1]$ выполнено неравенство

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<f(a)+f(b).$$

Докажите, что уравнение $f(x)=0$ имеет бесконечно много решений. Выясните, существует ли функция, удовлетворяющая указанным условиям и не равная тождественно нулю.

5. В футбольном турнире участвовало n команд высшей лиги и $2n$ команд первой лиги. Каждая команда сыграла ровно одну игру с каждой другой командой. Отношение числа побед, одержанных командами высшей лиги, к числу побед, одержанных командами первой лиги, равно 7/5. Найдите n, если известно, что ничьих в турнире не было.

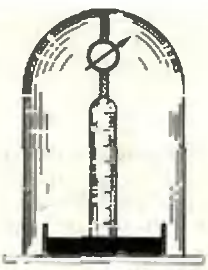


Рис. 1.

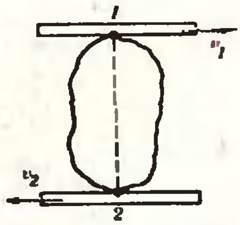


Рис. 2.

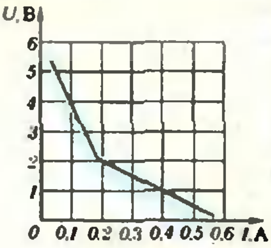


Рис. 3.

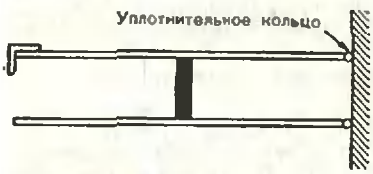


Рис. 4.

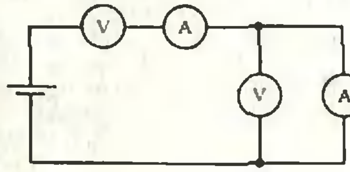


Рис. 5.

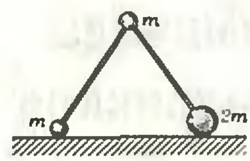


Рис. 6.

10 класс

1. Докажите, что для любых значений α, β, γ хотя бы одно из чисел $\sin\alpha\cos\beta$, $\sin\beta\cos\gamma$, $\sin\gamma\cos\alpha$ не больше 1/2.

2. См. задачу 3 для 9-го класса.

3. См. задачу 4 для 9-го класса.

4. См. задачу 5 для 9-го класса.

5. При каких натуральных $n>3$ существуют различные натуральные числа a_1, a_2, ..., a_n такие, что $1<a_k<n+1$ для любого $k=1, 2, \ldots, n$ и все n модулей $|a_1-a_2|$, $|a_2-a_3|$, ..., $|a_{n-1}-a_n|$, $|a_n-a_1|$ различны?

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. Под колоколом воздушного насоса находится ртутный барометр — стеклянная трубка с делениями, погруженная открытым концом в широкий сосуд со ртутью (рис. 1). Закрытым концом трубка подвешена к динамометру. Показания F динамометра можно наблюдать через стекло колокола. Когда воздух из-под колокола был полностью откачан, разность h уровней ртути в трубке и в сосуде равнялась нулю, а динамометр показывал силу F_0. Из-за очень медленного просачивания воздуха под колокол разность уровней постепенно изменялась. Нарисуйте и объясните график зависимости F от h.

2. На столе стоит высокая стеклянная тонкостенная трубка радиусом $R=3$ см. В трубку вложен плоский пакет из тонкого полиэтилена длиной $l=30$ см и шириной $d=10$ см. Пакет доверху заполнили водой. Удержится ли пакет с водой в трубке, если трубку осторожно поднять? Коэффициент трения полиэтилена по стеклу $\mu=0{,}3$.

3. Две одинаковые высокие теплонепроницаемые трубки заполнены до высоты $h=25$ см. Первая — льдом, полученным при замораживании воды в той же трубке, вторая — водой при температуре $t_в=10°C$. Воду выливают на лед и сразу же отмечают уровень. После установления теплового равновесия оказалось, что он повысился на $\Delta h=0{,}5$ см. Какова была начальная температура льда? Плотность льда $\rho_л=900$ кг/м^3. Удельная теплота плавления льда $\lambda=340$ кДж/кг, удельная теплоемкость льда $c_л=2100$ Дж/(кг·К).

4. Жесткая болванка зажата между двумя направляющими (рис. 2). Направляющие движутся горизонтально: верхняя — вправо со скоростью v_1, нижняя — влево со скоростью v_2. Точки касания 1 и 2 в данный момент лежат на вертикальной прямой. Укажите множество точек болванки, имеющих в данный момент времени скорости v_1 и v_2 (по абсолютной величине).

9 класс

1. Из шланга почти вертикально бьет струя с расходом воды $Q=1{,}5\cdot10^{-3}$ м^3/с. Какова площадь S поперечного сечения струи на высоте $h=2$ м над концом шланга, если при выходе из шланга площадь $S_0=1{,}5$ см^2?

2. Висевшая на высоте H сосулька массой M подтаяла и начала падать. Когда она оказалась на высоте $H/2$, в нее попал снежок массой m, который мгновенно прилип к ней. В момент попадания в сосульку снежок двигался горизонтально со скоростью v_0. Найдите скорость, с которой сосулька упадет на землю.

3. В баллоне объемом $V=2$ л находится 1 моль водорода и немного воды. Вначале давление в баллоне составляет $p_н=17$ атм. Затем баллон нагревают, и давление в нем увеличивается до $p_к=26$ атм. Найдите начальную и конечную температуры, а также количество испарившейся воды. Значения давления насыщенных паров воды при нескольких температурах приведены в следующей таблице:

p, 10^5 Па	1	2	3	5	8	10
t, °C	100	120	133	152	170	180

Примечание. Для выполнения задания необходимо использовать данный лист миллиметровой бумаги.

4. Зависимость напряжения источника питания от тока нагрузки приведена на рисун-

ке 3. Найдите максимальную мощность, которую источник может отдать в нагрузку. Каким должно быть сопротивление нагрузки, чтобы мощность была максимальной?

10 класс

1. Математический маятник, в котором нить заменена жестким невесомым стержнем, совершает свободные колебания малой амплитуды. На сколько процентов, самое большее, можно изменить период колебаний, если превратить математический маятник в разновидность физического, закрепив в определенной точке стержня груз той же массы, что и на конце?

2. Трубка длиной $l=1$ м и радиусом $r=0{,}08$ м имеет массу $m_1=4$ кг. В трубке находится поршень массой $m_2=10$ кг. На одном конце трубки имеется уплотнительное кольцо, не пропускающее воздух, а на другом — фиксатор, способный удерживать поршень в крайнем положении. Когда поршень находился посередине трубки, ее плотно прижали уплотнительным кольцом к ровной вертикальной стене (рис. 4). После этого поршень передвинули к противоположному концу трубки и закрепили фиксатором, а трубку отпустили. Удержится ли трубка на стене? Коэффициент трения уплотнительного кольца о стену $\mu=0{,}5$, атмосферное давление $p_0=10^5$ Па.

3. Из батарейки, двух одинаковых вольтметров и двух одинаковых миллиамперметров собрана схема (рис. 5). Соединенные параллельно приборы показывают $U_1=0{,}26$ В и $I_1=0{,}75$ мА. Второй миллиамперметр показывает $I_2=1$ мА. Определите напряжение на клеммах батарейки и сопротивления приборов.

4. Два жестких невесомых стержня длиной l каждый скреплены концами в шарнире массой m. На концах стержней укреплены шарики, массы которых m и $2m$. Конструкция поставлена на стол вертикально шарниром вверх и начинает разъезжаться от малого толчка так, что стержни все время остаются в вертикальной плоскости (рис. 6). Трения нет. 1) Найдите скорость шарнира перед ударом о стол. 2) Найдите скорость шарика массой $2m$ в тот момент, когда угол между стержнями равен 90°.

Экспериментальный тур

8 класс

1. Определите коэффициент трения подставки (тела) о поверхность стола.

Оборудование: штатив с лапкой, подставка от универсального штатива (или кусок металла произвольной формы массой около 2 кг), суровая нить, деревянная линейка, динамометр.

2. Определите плотность неизвестной жидкости.

Оборудование: мензурка, пробка или шарик для настольного тенниса, пластилин, сосуд с водой, сосуд с неизвестной жидкостью, нить.

9 класс

1. Определите неизвестное сопротивление.

Оборудование: источник тока ВС-4-12, штатив с двумя лапками, электромагнит школьный демонстрационный, реостат школьный (6 Ом, 2 А) — 2 шт., нить, гайка железная, соединительные провода — 6 шт., неизвестное сопротивление, деревянная линейка.

2. Определите работу, необходимую для надувания воздушного шарика.

Оборудование: воздушный шарик, манометр U-образный, тройник стеклянный, сантиметр, резиновая трубка, миллиметровая бумага.

Указание. Перед измерениями следует 2—3 раза надуть и сдуть шарик.

10 класс

1. Постройте и объясните график зависимости глубины резкости от диаметра диафрагмы при фиксированном расстоянии между лампой и линзой.

Оборудование: линза школьная, экран белый, подставка с лампочкой напряжением 2,5—6,3 В, источник тока (2,5—6,3 В), линейка ученическая, бумага черная, ножницы, бумага миллиметровая.

Указание. Под глубиной резкости подразумевается разность между максимальным и минимальным расстояниями между линзой и экраном, при которых изображение еще остается резким.

2. Определите, во сколько раз потери тепла в калориметре с кожухом меньше, чем в калориметре без кожуха.

Оборудование: калориметр школьный, термометр, реостат (6 Ом, 2 А) — 2 шт., источник тока ВС-4-12, провода соединительные — 8 шт., амперметр школьный (2 А), сосуд с водой (200 мл), нагревательная спираль на колодке.

О. Овчинников, С. Резниченко, Г. Яковлев

Призеры Всероссийской олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили:
Абакумов Е. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Астерлин А. (Новосибирск, с. ш. № 121),
Весник Р. (Петрозаводск, с. ш. № 18),
Губарев А. (Фатеж, с. ш. № 1),
Матвеев О. (Свердловск, с. ш. № 79);

по 9 классам —
Биллиг Ю. (Калинин, с. ш. № 6),
Итенберг И. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Князев А. (Красноярск, с. ш. № 101),
Кудинов О. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Кузнецов Д. (Горький, с. ш. № 36),
Орлов Д. (Владимир, с. ш. № 8),
Шкляренко Д. (Брянск, с. ш. № 46),
Юровский С. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ);

по 10 классам —
Антонов В. (Обнинск, с. ш. № 6),
Доброрадных О. (Белорецк, с. ш. № 14),

Корсуков А. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Николаев И. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Слуцкий Б. (Новосибирск, с. ш. № 130),
Фрегер В. (Вольск, с. ш. № 12),
Чалых О. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ).

Дипломы II степени

по 8 классам получили:

Бураго А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Дулов Н. (Киров, с. ш. № 59),
Масляков И. (Иваново, с. ш. № 22),
Пронин О. (Владивосток, с. ш. № 23),
Трусов И. (Орел, с. ш. № 1);

по 9 классам —

Бердюгин А. (Ангарск, с. ш. № 10),
Викторов В. (Рязань, с. ш. № 45),
Виноградов А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Гаврилов С. (Шадринск, с. ш. № 4),
Карпенко Н. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Садэтов С. (Ростов-на-Дону, с. ш. № 14),
Шугин И. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ);

по 10 классам —

Галкин И. (Горький, с. ш. № 36),
Горбунов С. (Петрозаводск, с. ш. № 30),
Елисеев М. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Мазуров О. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Мамий Д. (Майкоп, с. ш. № 22),
Поутанек Ю. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Соколов А. (Ангарск, с. ш. № 19).

Дипломы III степени

по 8 классам получили:

Кабанов А. (Ногинск, с. ш. № 6),
Кумыков М. (Нальчик, с. ш. № 5),
Просёлков Д. (Омск, с. ш. № 69),
Шимкунас Э. (Казань, с. ш. № 131);

по 9 классам —

Аверин А. (Челябинск, с. ш. № 127),
Галынис И. (Чита, с. ш. № 5),
Домашов О. (Воронеж, с. ш. № 58),
Микарченко И. (Ломоносовский р-н Ленинградской обл., Гостилицкая с. ш.);

по 10 классам—

Жуков А. (Барнаул, с. ш. № 42),
Зиганшин И. (Димитровград, с. ш. № 5),
Логунов И. (Саратов, с. ш. № 13),
Соловьев С. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили:

Вахрушев Я. (Архангельск, с. ш. № 49),
Писарев А. (Невинномысск, с. ш. № 11),
Плюснин К. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Хомяков Н. (Улан-Удэ, с. ш. № 35),
Ярунин Н. (Павлово, с. ш. № 1);

по 9 классам —

Банков В. (Алексин, с. ш. № 1),
Гребнев И. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Ершов М. (Ярославль, с. ш. № 33),
Малышев В. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Мокеев И. (Ангарск, с. ш. № 10),
Рыбенков В. (Махачкала, с. ш. № 13),
Симаков С. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Сыскин В. (Новосибирск, с. ш. № 130),
Хлухенький К. (Чебоксары, с. ш. № 27);

по 10 классам —

Арбузов В. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Бибиков П. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Бочко С. (Братск, с. ш. № 18),
Иващенко Л. (Тольятти, с. ш. № 26),
Пироженко А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Сюньков С. (Саратов, с. ш. № 13),
Щепеткин А. (Калининград, с. ш. № 32).

Дипломы II степени

по 8 классам получили:

Абаков А. (Красноярск, с. ш. № 170),
Епифанов С. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Курников И. (Гатчина, с. ш. № 1),
Молчанов С. (Саратов, с. ш. № 13),
Паршин Н. (Пенза, с. ш. № 6);

по 9 классам —

Буриченко А. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Лазутин Ф. (Апатиты, с. ш. № 2),
Малиновский А. (Павлово, с. ш. № 1),
Марихин В. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Савров М. (Азов, с. ш. № 13),
Чернышов Н. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Шмелев Е. (Мирный, с. ш. № 19);

по 10 классам —

Альтфедер И. (Нальчик, с. ш. № 9),
Амихмин С. (Казань, с. ш. № 131),
Баталов С. (Арзамас, с. ш. № 2),
Еремеев С. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Ксенофонтов Л. (Верхневилюйск, с. ш. № 2),
Малышев В. (Волгоград, с. ш. № 131),
Склокин А. (Апатиты, с. ш. № 1),
Султанов А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Шмаков И. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ).

Дипломы III степени

по 8 классам получили:

Балагура В. (Волгоград, с. ш. № 92),
Ершов А. (Златоуст, с. ш. № 25),
Молодцов В. (Рыбинск, с. ш. № 21),
Огнев А. (Ленинск-Кузнецкий, с. ш. № 2);

по 9 классам —

Дьячков М. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Катаргин А. (Салават, с. ш. № 6),
Корчагин А. (Красноармейск с. ш. № 2),
Фатьянов О. (Курск, с. ш. № 6),
Щенков А. (Чита, с. ш. № 1);

по 10 классам —

Алискендаров З. (Махачкала, с. ш. № 16),
Дьячкин В. (Ярославль, с. ш. № 33),
Качаев И. (Красноярск, с. ш. № 10),
Кирюшин И. (Горький, с. ш. № 36).

Эффект Ганна

1. $E=\left(\frac{2a}{h}\varrho\Delta T\right)^{1/2}$; $j=\left(\frac{2a}{h}\cdot\frac{\Delta T}{\varrho}\right)^{1/2}$;

$\left.\begin{array}{l} E\approx 30\ \text{В/м} \\ j=3\cdot 10^5\ \text{А/м}^2 \end{array}\right\}$ при $\varrho=10^{-4}$ Ом·м,

$\left.\begin{array}{l} E=10^4\ \text{В/м} \\ j=10^3\ \text{А/м}^2 \end{array}\right\}$ при $\varrho=10$ Ом·м.

2. $t=\frac{\varrho\cdot c\cdot\Delta T}{E^2}$;

$t\approx 2\cdot 10^{-10}$ с при $\varrho=10^{-4}$ Ом·м,
$t\approx 2\cdot 10^{-5}$ с при $\varrho=10$ Ом·м.

3. $f=\frac{\mu E_п}{2l}\approx 1{,}1\cdot 10^{11}$ Гц.

Треугольник Паскаля

1. Число людей, пришедших в пункты B, C, D, ..., I, равно соответствующему числу в восьмой строчке треугольника Паскаля.
2. а) 45. Искомых чисел столько, сколько 2-элементных подмножеств в множестве $\{0, 1, 2, ..., 9\}$; б) 120 (число 3-элементных подмножеств в множестве $\{0, 1, 2, ..., 9\}$).
3. Треугольные числа располагаются на той прямой, параллельной боковой стороне треугольника Паскаля, которая начинается с чисел 1, 3, 6, 10.
4. а) $a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4-$ $-6ab^5+b^6$;
б) $x^5-10x^4y+40x^3y^2-80x^2y^3+80xy^4-32y^5$.

Кинематика. Относительность движения

1. $R=\sqrt{L^2(1+2\omega^2H/g)}\approx 1{,}01$ м.
2. $r=\frac{R}{\sqrt{4\pi^2+1}}\approx 0{,}16\,R$.
3. $\frac{R_c}{R_3}=\left(\frac{gT_3^2}{\pi^2R_3}\right)^{1/3}\approx 11$

или $\frac{R_c}{R_3}=\left(\frac{gT_3^2}{9\pi^2R_3}\right)^{1/3}\approx 5$.

4. $T=\frac{T_1T_2}{T_1+T_2}\approx 117$ суток.
5. $H=\frac{50}{27}R+\frac{5}{18}\frac{v^2}{g}-\frac{1}{9}\frac{v^4}{g^2R}-\frac{1}{54}\frac{v^6}{g^3R^2}$;

при $v>\sqrt{gR}$ тело свободно падает вниз и подпрыгивает на высоту $2R$.

Всероссийская олимпиада школьников

Математика

8 класс

3. Сможет.
4. 11 точек.

9 класс

2. $x=2$, $y=1$, $z=1$.
3. Указание. $S_{ABC}=S_{ABH}+S_{BCH}+S_{CAH}$; площадь треугольника можно выразить через произведение его сторон и радиус описанной окружности.
5. $n=3$. Указание. Если x — число побед команд высшей лиги над командами первой лиги, то $8x=17n^2-3n$. С другой стороны, $x<2n^2$.

10 класс

1. Если утверждение неверно, то произведение рассматриваемых величин меньше 1/8. Отсюда легко получить противоречие, пользуясь формулой для синуса удвоенного аргумента.

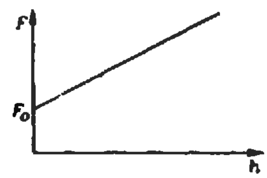
Решения остальных задач будут напечатаны в Задачнике «Кванта».

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. См. рисунок.



2. Пакет с водой в трубке удержится.
3. $t_л=-\frac{\lambda}{c_л}\frac{\Delta h}{h}\frac{\varrho_в}{\varrho_в-\varrho_л}-\frac{c_в}{c_л}\frac{\varrho_в}{\varrho_л}t_в\approx$ ≈ -54°C (здесь $\varrho_в=10^3$ кг/м^3 — плотность, $c_в=4200$ Дж/(кг·К) — удельная теплоемкость воды).
4. См. решение задачи Ф758 из Задачника «Кванта».

9 класс

1. $S=Q\,(Q^2/S_0^2-2gh)^{-1/2}\approx 1{,}9$ см^2.
2. $v=\sqrt{gH\,(2M^2+2Mm+m^2)+m^2v_0^2}/(M+m)$.
3. См. решение задачи Ф756 из Задачника «Кванта».
4. См. решение задачи Ф753 из Задачника «Кванта».

10 класс

1. Период колебаний маятника можно уменьшить не более чем на 9%.
2. Трубка на стене не удержится.
3. См. решение задачи Ф761 из Задачника «Кванта».
4. 1) $v=\sqrt{2gl}$; 2) $v_2=\sqrt{3/10gl\,(1-1/\sqrt{2})}$.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 9)

1. Так как делимое в 6 раз больше делителя, частное равно 6. Так как делитель в 6 раз больше частного, делитель равен 36. Значит,

делимое равно 6 · 36 = 216.

2. а) Можно; б) тоже можно!

3. Таким треугольником является прямоугольный треугольник с углами 30° и 60°.

4. Пусть стрелка сдвинута на x кг. Тогда $(2+x)+(3+x)=6+x$, откуда $x=1$; значит, один портфель весит 4 кг, а другой — 3 кг.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 7)

Задание 13 (Нейман — Хаазе, 1968 г.). **1. Ле7!!** У белых уже нет коня и двух пешек, в завершение они отдают и ладью. Идея перекрытия. Ладью нельзя взять ни ладьей — 2. Ф:f8×, ни слоном — 2. Ф:h7×. После **1...Фb7+ 2. Се4 Ф:е4+ 3. Лg:е4 С:е7 4. Л:е7** черные сдались.

Задание 14 (Кобленц — Моисеев, Рига, 1955 г.). Черные выигрывают. Сразу они не могут превратить пешку в ферзя из-за вскрытого шаха — Лf6+ и Л:f2. Последовало **1...f5+!!**, и на любой ход следует **2...f1Ф. Белые сдались.** Идея комбинации в том, что после 2. Кр:f5 или 2. gf линия f перекрыта.

Номер оформили:
Л. Денисенко, М. Дубах, Н. Кузьмина, С. Лухин, Э. Назаров

Заведующая редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Н. Румянцева

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант», тел. 250-31-73

Сдано в набор 18.8.82 Подписано в печать 29.9.82
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 7,05 Т-18929
Цена 40 коп. Заказ 2080 Тираж 175 049 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

ЕЩЕ РАЗ О ЖЕРТВЕ ФЕРЗЯ

Комбинации, в которых жертвуется ферзь, привлекательны и вызывают повышенный интерес у любителей шахмат. Поэтому на наших «страничках» мы постоянно пополняем коллекцию пожертвованных гроссмейстерами ферзей. Случаются и курьезные случаи. Следующая партия была сыграна в чемпионате страны 1981 г. во Фрунзе (высшая лига) между двумя львовскими гроссмейстерами.

А. Михальчишин — О. Романишин

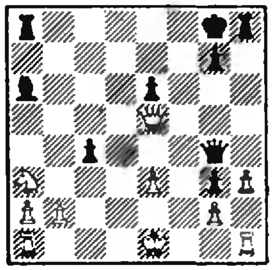
Защита Грюнфельда

1. d4 Кf6 2. c4 g6 3. Кf3 Сg7 4. Кc3 d5 5. cd К:d5 6. e4 К:c3 7. bc c5 8. Се3. Теории известны и другие продолжения — 8. h3, 8. Се2, 8. Лb1, но сделанный ход тоже сразу не проигрывает. **8...Фа5 9. Фd2 Кc6 10. Лb1 cd 11. cd 0—0 12. d5??? Сc3. Белые сдались.**

Если бы Грюнфельд мог увидеть эту позицию, он был бы счастлив от такой безукоризненной реализации его дебютной идеи — от фианкетированного слона g7 больше потребовать просто невозможно!

Михальчишин быстро ушел со сцены. А у Романишина был растерянный вид. Он сам еще до конца не осознал, что нанес очень обидное поражение своему другу и тренеру. «А что я мог сделать? — оправдывался он. — Бить на d2 и «сгореть»?» Как видите, гроссмейстеры тоже люди...

Чемпионат страны во Фрунзе прошел на редкость увлекательно, и не только благодаря описанному случаю. Средний возраст участников был меньше, чем во всех прошедших чемпионатах, что сказалось и на шахматном содержании турнира — почти во всех партиях жертвовались пешки и фигуры, и на его окончательных итогах — чемпионами стали юные Г. Каспаров и Л. Псахис, опередившие своих преследователей на два с половиной очка!

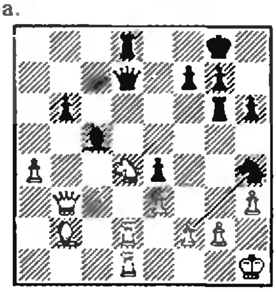


Е. Свешников — В. Цешковский

(Фрунзе, 1981 г.)

После отступления ферзя — 22...Фg6 белые сыграли бы 23. 0—0! (король и ладья еще не двигались с места) с решающим перевесом. Неожиданно последовало **22...c3!** Теперь взятие ферзя приводит к редчайшей матовой конструкции с двумя черными пешками-эполетами, симметрично охраняющими неприятельского короля — 23. hg Л:h1×. Белые не взяли ферзя, но через три хода — **23. Кb5 cb 24. Ф:b2 Фg5 25. a4 С:b5** — все равно сдались, а зрители были лишены удовольствия наблюдать «оригинальный номер».

Гарри Каспаров много жертвовал в этом турнире, но с ферзем не расставался ни разу. Приведем один эпизод из партии юного чемпиона страны, сыгранной им на студенческом первенстве мира.



Ж. Сунье — Г. Каспаров

(Граце, 1981 г.)

Черный конь только что прыгнул с f5 на h4, и король белых почувствовал себя неуютно. Не проходит 38. Кf3 из-за 38...ef 39. Л:d7 fg+ 40. Крg1 Кf3×, плохо и 38. Кf5 Ф:f5 39. Л:d8+ Крh7, и белые беспомощны. Сунье попробовал **38. Кe6**, на что последовало **38...Ф:d2 39. Л:d2 Л:d2.** Ферзь отдан за две ладьи, и жертвой это, конечно, не назовешь, хотя в ряде вариантов, в том числе встретившемся в партии, черные «подбрасывали» партнеру еще кое-какие фигуры... **40. Кf4 Лg5 41. Крg1 Кf3+ 42. Крf1.** При анализе отложенной позиции Каспаров обнаружил такой фантастический финал — 42. Крh1 С:e3! 43. fe Лd:g2! 44. К:g2 Лg3!! У читателя уже не должно быть претензий к соотношению сил на доске — обилие фигур не спасает белых от мата ладьей на h3 или g1. Впрочем, и в самой партии черные подлили масла в огонь...

42... С:e3 43. fe (43. Кe2 Кh2+ 44. Крe1 Л:g2 45. Ф:e3 Кf3+ с выигрышем) **43... Лd:g2!** Грозит вилка на d2. **44. Фc3 Лh2 45. Кe2 Крh7** (избегая вечного шаха после 45... Лgg2 46. Фc8+ Крh7 47. Фf5+) **46. Фc8 Лh1+ 47. Крf2 Кd2! Белые сдались.**

Конкурсные задания

19. Как получить эту позицию после четырех ходов белых и черных?

20. Может ли получиться на доске эта позиция после четырех ходов белых и черных?

Срок отправки решений — 25 декабря 1982 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 19, 20»).

Цена 40 коп.
Индекс 70465

Юбилей знаменательного события

Исполнилось 25 лет с момента запуска первого искусственного спутника Земли, открывшего человечеству дорогу в космос. Сконструированный и запущенный под руководством выдающегося советского ученого академика С. П. Королева спутник убедительно продемонстрировал всему миру высокий уровень развития советской науки.

За прошедшую четверть века проделана огромная работа в области изучения космического пространства, Луны, планет Солнечной системы. Результаты космических исследований широко используются при решении многих важных задач народного хозяйства.

Наша страна вносит огромный вклад в развитие международного сотрудничества в космосе. На советской космической станции «Салют-6» успешно работали космонавты социалистических стран, входящих в Совет экономической взаимопомощи. В исследованиях, проводимых на станции «Салют-7», участвовал первый французский космонавт. СССР активно сотрудничает в осуществлении космических программ с Индией, Швецией и рядом других государств.

Запуск первого искусственного спутника Земли ознаменовал рождение космической филателии. Сейчас она насчитывает тысячи марок, посвященных героям космоса и разнообразным космическим сюжетам. Продолжают выходить и марки с изображением первого спутника. Некоторые из них мы воспроизводим в нашей подборке.

В. Рудов