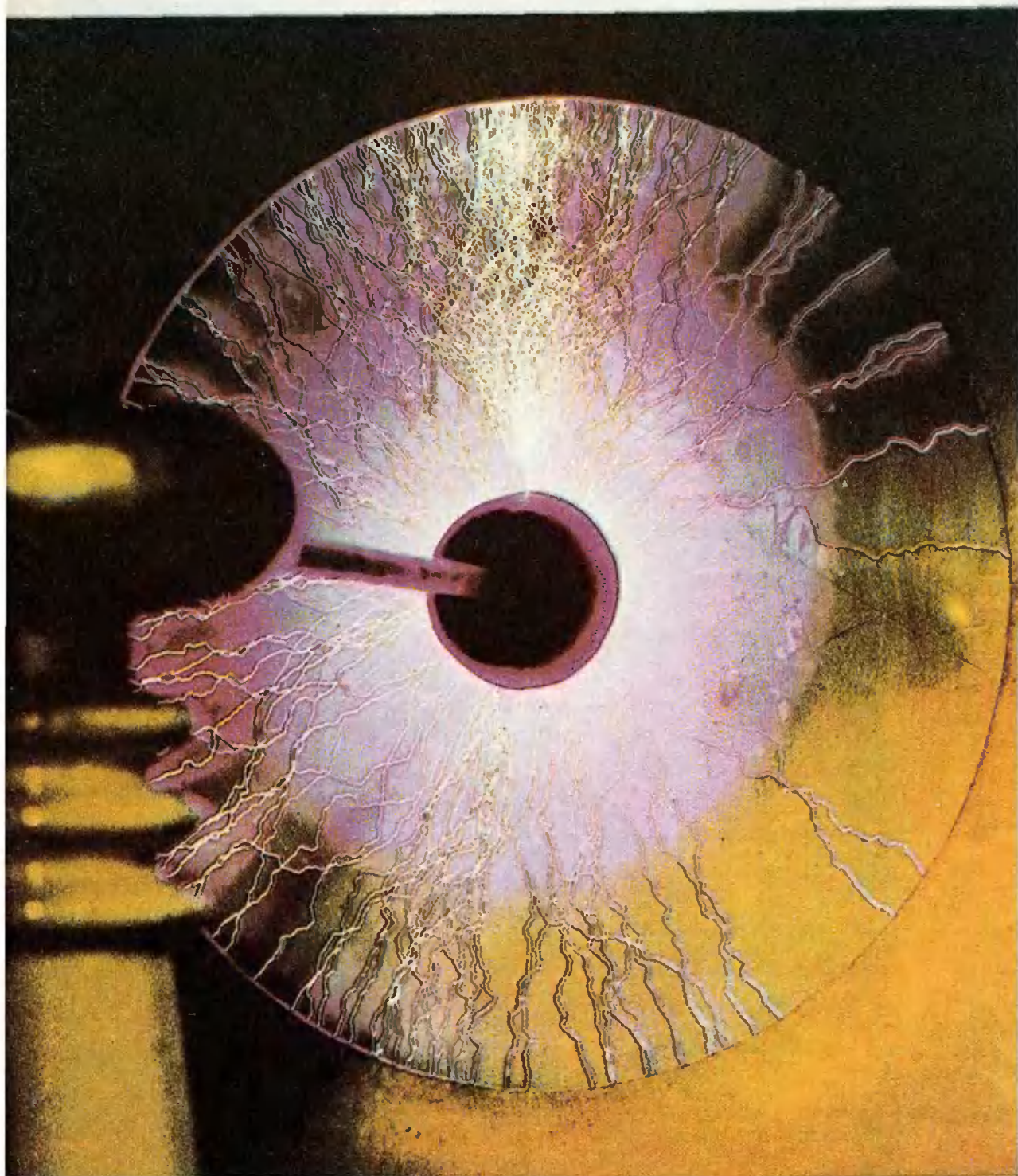
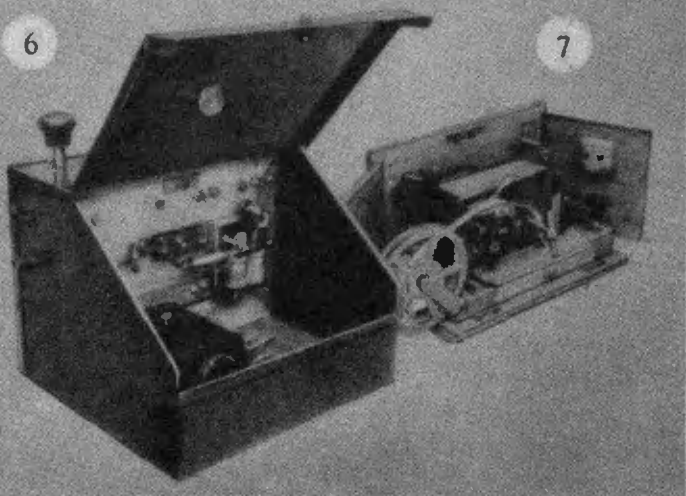
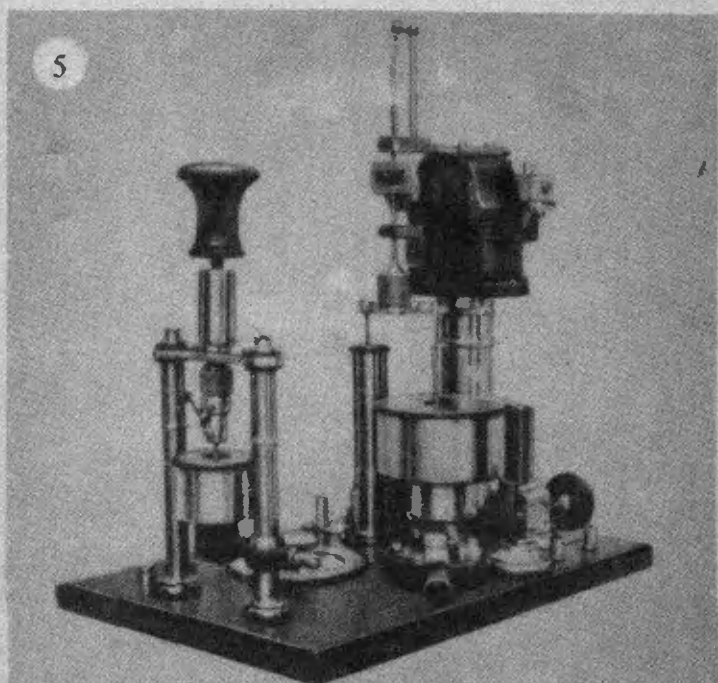
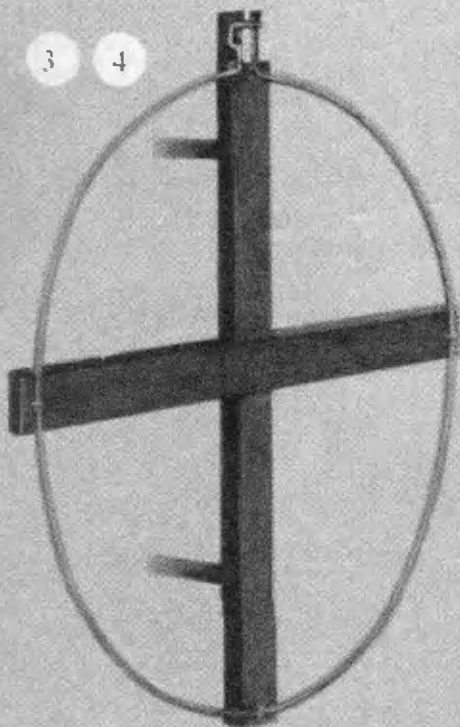
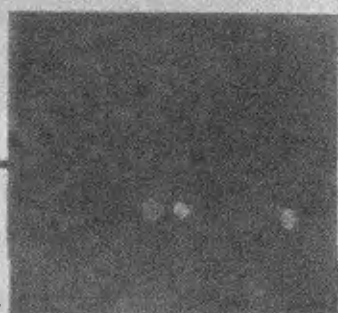
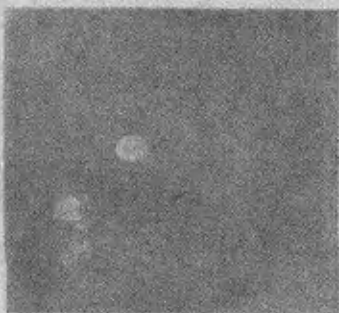
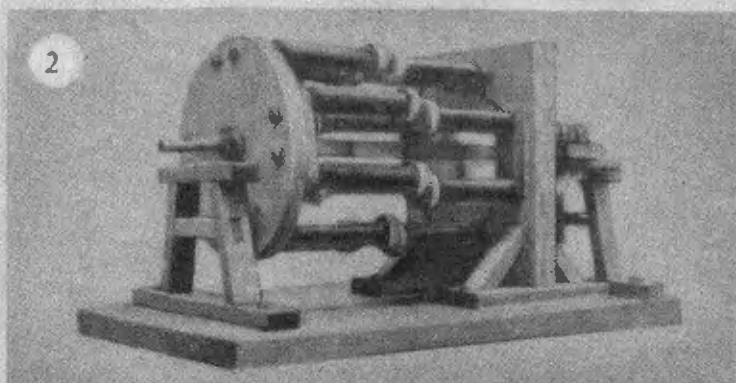
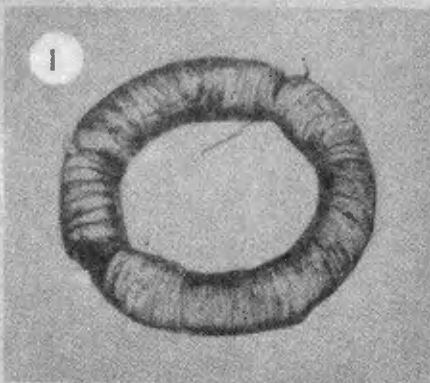


# Квант

**3**  
1983

*Научно-популярный физико-математический журнал  
Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР*





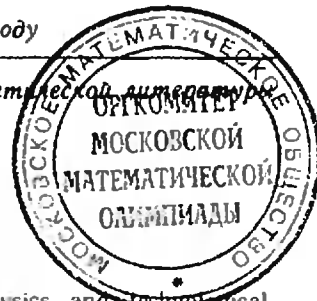
1 — катушка Фарадея;  
2 — электромотор Якоби;  
3, 4 — вибратор и резонатор Герца;

5, 6—7 — передатчик и приемник Попова.

Эти физические приборы можно считать прообразами современных мощных электродвигателей и радиостанций.

Прогресс в технике неразрывно связан с достижениями и открытиями физики.

Об этом читайте в статье И. К. Кикоина.



<b>В НОМЕРЕ:</b>	<b>IN THIS ISSUE:</b>
2 И. К. Кикоин. Физика и научно-технический прогресс	I. K. Kikoin. Physics and technological progress
6 Рудольф Мёссбауэр отвечает на вопросы редакции журнала «Квант»	Rudolph Mössbauer answers Kvant's questions
7 Ю. А. Самарский. Эффект Мёссбауэра (или резонансное ядерное поглощение $\gamma$ -квантов в кристаллах)	Ju. A. Samarski. The Mössbauer effect (or the resonance nuclear absorption of $\gamma$ -quanta in crystals)
16 В. Г. Болтянский. Метод итераций	V. G. Boltyanski. The iteration method
<b>Новости науки</b>	<b>Science news</b>
15 В. А. Бронштэн. Загадочный Плутон	V. A. Bronshten. Mysterious Pluto
<b>Лаборатория «Кванта»</b>	<b>Kvant's lab</b>
22 А. А. Боровой. Первоапрельский калейдоскоп	A. A. Borovoy. April fool's day kaleidoscope
<b>Математический кружок</b>	<b>Mathematics circle</b>
26 М. И. Башмаков. Равномерное движение	M. I. Bashmakov. Uniform motion
<b>Школа в «Кванте»</b>	<b>Kvant's school</b>
31 С. А. Юрский. Проводящая сфера в задачах по электростатике	S. A. Yurski. Conducting spheres in electrostatic problems
<b>«Квант» для младших школьников</b>	<b>Kvant for younger school-children</b>
38 Задачи	Problems
39 С. Л. Табачников. У нас в гостях — математический радиокружок	S. L. Tabachnikov. Our guest — the mathematical radio circle
<b>Задачник «Кванта»</b>	<b>Kvant's problems</b>
42 Победители конкурса «Кванта»	Prizewinners of the Kvant contest
43 Задачи М791—М795; Ф803—Ф807	Problems M791—M795; P803—P807
47 Решения задач М770, М775—М779; Ф788—Ф792	Solutions M770, M775—M779; P788—P792
54 Список читателей, приславших правильные решения	List of readers who have sent correct solutions
<b>Искусство программирования</b>	<b>The art of programming</b>
55 Стандартные приемы программирования. Урок 6	Standart programming methods. Lesson 6
57 Практикум абитуриента	College applicant's section
60 Ответы, указания, решения	Answers, hints, solutions
Наша обложка (25)	Our cover page (25)
Смесь (56)	Miscellaneous (56)
Шахматная страничка	The chess page
Фигуры в безопасности (3-я с. обложки)	Secure pieces (3rd cover page)

## Физика и научно-технический прогресс

Академик И. К. КИКОИН

Физика служит основой почти всей современной техники. Большинство технических наук были в свое время разделами физики. По пальцам можно пересчитать те отрасли техники, которые существовали до зарождения физики как науки. Это, в первую очередь, — строительная техника, которую человечество использовало уже в глубокой древности (вспомним, например, египетские пирамиды); это — металлургия (бронзовый и железный века), судостроение\*), полиграфическая техника (первая печатная машина изобретена в XV веке). Вот основные отрасли техники, которые зародились без заметного влияния физики\*\*). Положение существенно изменилось с появлением таких титанов науки, как Галилей, Ньютон, Ломоносов и другие. Настоящая техническая революция произошла в XIX столетии, когда физики заложили основы современной электротехники и теплотехники. Недаром XIX век назвали веком электричества и пара.

Слово «электричество» произошло от греческого слова «электрон» — янтарь. Древние греки заметили, что янтарь, если его потереть, например, шерстью, притягивает к себе легкие изоляторы. В конце XVI века это явление подробно изучил английский

ученый Гильберт (он и ввел термин «электричество»). Но существенного технического значения электрические явления в то время не имели. Начало электрическому веку положили исследования итальянского физика Вольта. Шутки ради следует сказать, что поводом к исследованиям Вольта послужила лягушка. Дело в том, что итальянский врач Гальвани заметил, что если к ножкам препарированной лягушки приложить циркуль, сделанный из двух разных металлов, то мышцы ее сокращаются. Вольта решил выяснить причину этого явления. В результате он обнаружил, что если два разных металла поместить в раствор кислоты, щелочи или соли, то между металлами (электродами) возникает постоянное электрическое напряжение. На основании этого Вольта сконструировал первый гальванический элемент, который называли Вольтовым столбом, — прообраз современных электрических батарей. Это был первый источник постоянного электрического тока.

Физики получили возможность проводить опыты и изучать свойства электрического тока. В начале XIX века датский физик Эрстед обнаружил, что протекающий по проводнику электрический ток вызывает отклонение магнитной стрелки. Он показал, что если проводник расположить параллельно магнитной стрелке, то при включении тока она повернется на 90°. Так было открыто явление взаимодействия электрического тока с магнитной стрелкой. Тогда же французский физик Ампер показал, что электрический ток действует с некоторой силой не только на магнитную стрелку, но и на другие проводники с током, помещенные на некотором расстоянии от него.

Так впервые была установлена связь между электрическими и магнитными явлениями.

Силы взаимодействия между электрическими токами — это те самые силы, которые приводят в движение миллионы электродвигателей, используемых человеком в самых разных областях техники и в бытовых приборах.

\*) См. книгу Тура Хейердала «Путешествие на „Кон-Тики“».

\*\*\*) Мы не рассматриваем, конечно, ремесла.



*Машинный зал Красноярской ГЭС.*

Один из первых электрических двигателей был создан петербургским академиком Б. С. Якоби.

Явление электромагнетизма послужило основой для создания электромагнитного телеграфа, ставшего впоследствии основным видом связи между городами и странами. Первый электромагнитный телеграф был создан членом-корреспондентом Российской Академии наук П. Л. Шиллингом.

В 1831 году английский физик Фарадей сделал открытие, приведшее к революции в основных областях физики и техники. Речь идет об открытии электромагнитной индукции. Это явление заключается в том, что вокруг изменяющегося со временем магнитного поля возникает замкнутое электрическое поле и соответствующая ему электродвижущая сила, как и само электрическое поле, прямо пропорциональна скорости изменения магнитного поля. До Фарадея физики говорили об электрических и магнитных жидкостях. Понятие о поле, как электрическом, так и магнитном, впервые было введено Фарадеем. Открытие электромагнитной индукции дало возмож-

ность создать генератор электрического тока. По существу, любая современная электрическая станция — это воплощение в грандиозных масштабах лабораторных опытов Фарадея.

Открытие электромагнитной индукции было воспринято всем научным миром как крупная научная сенсация и принесло Фарадею всемирную известность. Существует легенда, связанная с этим. Тогдашний премьер-министр Англии узнал об открытии Фарадея из газет. Чтобы ознакомиться более подробно с сущностью открытия, принесшего его автору всемирную славу, премьер-министр посетил лабораторию Фарадея. Фарадей продемонстрировал ему на самодельных примитивных приборах свои знаменитые опыты (сейчас они демонстрируются на уроках физики в любой средней школе). Посмотрев опыт, премьер-министр воскликнул, обращаясь к Фарадею: «И эти детские игрушки принесли Вам такую славу?!» Легенда утверждает, что на это восклицание последовал следующий ответ Фарадея: «Сэр, я думаю, что из этих игрушек Вы будете извлекать налоги!»

Это только легенда, но в действительности уже три десятилетия спустя вошли в строй первые промышленные электростанции, владельцы которых, вероятно, уплачивали налоги. Электрические генераторы и до сих пор служат основными источниками электроснабжения, без которого трудно себе представить жизнь современного общества. В 70-х годах прошлого столетия великий английский физик Максвелл, которого можно назвать Ньютоном в электричестве, тщательно изучив многочисленные опыты, проведенные Ампером, Фарадеем и другими физиками, сумел обобщить полученные результаты и написать соответствующие им математические уравнения (уравнения Максвелла)\*). Из этих уравнений следовали все закономерности в области электромагнетизма, полученные его предшественниками. Больше того, Максвелл догадался, что наряду с явлением электромагнитной индукции, открытой Фарадеем, должно существовать новое явление, обратное явлению, открытому Фарадеем. Если Фарадей открыл, что изменение магнитного поля вызывает появление электрического поля, то явление, теоретически предсказанное Максвеллом, заключается в том, что изменение электрического поля вызывает появление вокруг него магнитного поля, и напряженность этого магнитного поля так же прямо пропорциональна скорости изменения электрического поля. Это означает, что изменяющееся магнитное поле не может существовать без возникающего вокруг него электрического поля, так же как изменяющееся электрическое поле не может существовать без изменяющегося магнитного поля, возникающего вокруг него. Так появилось представление об электромагнитном поле.

Из уравнений Максвелла следовало, что при сравнительно небольших магнитных полях, даже не очень быстро меняющихся, возникают значительные электрические поля, которые легко наблюдать по вызываемому ими току в замкнутом проводнике. Обнаружить же магнитное по-

ле, возникающее при изменении электрического поля, очень трудно, так как магнитные силы малы по сравнению с электрическими силами. Для этого требуется, чтобы технически максимально достижимое электрическое поле изменялось с огромной быстротой. Так, для обнаружения магнитного поля самыми чувствительными современными приборами требуется, чтобы электрическое поле с напряженностью  $10^6$  В/см уменьшалось до нуля в течение примерно миллиардной доли секунды. Такой эксперимент в лаборатории неосуществим.

Главнейший вывод, который Максвелл сделал из своих уравнений, заключается в том, что электромагнитное поле, периодически меняющееся со временем, должно распространяться в пространстве волнообразно — так, например, как распространяются звуковые волны от колеблющейся струны или другого источника звука. Но скорость распространения электромагнитных волн должна, согласно Максвеллу, равняться скорости распространения света, то есть 300 000 000 м/с, что примерно в миллион раз больше, чем скорость звука в воздухе. Вот это обстоятельство и привело Максвелла к гениальной догадке, что свет представляет собой электромагнитные волны (электромагнитная теория света).

Поначалу большинство физиков считало, что уравнения Максвелла носят чисто математический характер и его идея об электромагнитной природе света не имеет под собой достаточных оснований. Вскоре после появления труда Максвелла знаменитый немецкий физик Гельмгольц поручил молодому сотруднику Герцу экспериментально проверить казавшиеся парадоксальными выводы Максвелла.

В 1888 году Герц опубликовал результаты своих опытов, блестяще подтвердившие выводы Максвелла. Он создал экспериментальную установку, состоящую из конденсатора, к обкладкам которого присоединился высоковольтный генератор, напряжение которого периодически менялось с высокой частотой, то есть время

\* ) Сам Максвелл «Ньютоном электричества» называл Ампера.

изменения высокого напряжения было очень мало. Ему удалось наблюдать распространение в пространстве электромагнитных волн длиной около ста метров. Это вполне соответствовало теории Максвелла. Для сравнения напомним, что длина волны видимого глазом света составляет примерно  $10^{-6}$  м. Таким образом, была доказана возможность передачи электромагнитных колебаний на большие расстояния. По существу, установка Герца была прообразом первой радиостанции. Парадоксально, что сам Герц не понимал практического значения своего открытия, принесшего ему научную славу. Утверждают, что на вопрос журналистов о практическом применении его опытов, Герц ответил, что они имеют чисто научное значение и никакого практического интереса не представляют. Но Герц оказался плохим пророком. В 1895 году 7 мая профессор физики Петербургского университета А. С. Попов впервые продемонстрировал изобретенные им передатчик и радиоприемник и тем доказал возможность беспроволочной связи (так в те времена назвали радиосвязь). Вскоре им же была осуществлена связь по радио между Кронштадтской гаванью и военными кораблями.

Важность работы А. С. Попова по достоинству была оценена мировой общественностью — в 1900 году на Международном электротехническом конгрессе в Париже ему была вручена Золотая медаль и Почетный диплом. Так основополагающая теория Максвелла и фундаментальные работы Герца и Попова положили начало веку радиотехники. Несколько позже те же принципы легли в основу работ итальянца Маркони. Сейчас трудно себе представить жизнь человечества без радиосвязи. Конечно, современные радиостанции и радиоприемники не похожи на передатчик и приемник А. С. Попова. Но физические принципы, лежащие в основе современного радиовещания, остались прежними. В начале нашего века работы по созданию средств радиосвязи осуществлялись в основном в лабораториях физиков. Но в скором времени эти работы

переросли в самостоятельную науку — радиотехнику, и дальнейшее развитие радиовещания, радиосвязи и т. д. привело к созданию во всем мире широко разветвленной радиотехнической промышленности.

1895 год ознаменовался еще одним крупным открытием в физике. Немецкий физик Рентген открыл новое невидимое глазом излучение, которое, тем не менее, засвечивало закрытую черной бумагой фотографическую пластинку. Сам он не знал природы этого излучения и назвал его «Х-лучами».

Открытие Рентгена произвело сенсацию в широких слоях общества, особенно когда появились фотографии внутренних органов живых людей.

В 1913 году было доказано, что это излучение, которое общепринято называть рентгеновскими лучами, представляет собой электромагнитные волны с длиной порядка  $10^{-10}$  м. Общеизвестно огромное практическое значение рентгеновских лучей в технике и особенно в медицине.

Вскоре после работ Рентгена было сделано открытие, которому суждено было произвести техническую революцию уже в нашем, XX веке. \*)

---

\*) Продолжение этой статьи будет напечатано в майском номере нашего журнала.



## Рудольф Мёссбауэр отвечает на вопросы редакции журнала «Квант»

В 1958 году немецкий физик Рудольф Мёссбауэр обнаружил эффект, названный его именем, — явление резонансного поглощения, испускания и рассеяния гамма-квантов ядрами в твердых телах без потери энергии кванта на отдачу ядру. Через три года за эту работу он получил Нобелевскую премию.

Прошло четверть века с момента открытия. На основе эффекта Мёссбауэра разработаны новые методы исследования веществ — мёссбауэровская спектроскопия и мёссбауэрография, которые применяются в различных областях физики, техники, химии, биологии, медицины.

В сентябре 1982 года профессор Мёссбауэр был избран иностранным членом АН СССР. Мы встретились с ним и попросили ответить на наши вопросы.

— Какие, по Вашему мнению, проблемы в физике наиболее актуальны?

— Проблем в физике очень много. Наибольший прогресс следует ожидать в области элементарных частиц. Здесь выделяются вопросы об устойчивости протона, массе нейтрино и существовании монополя Дирака. Конечно, много проблем в астрофизике и космологии. С другой стороны, следует отметить такую важную область, как биофизика. Сейчас, например, начали изучать динамику больших биологических молекул. Наконец, важная проблема, которую я рассматриваю как некий аспект инженерных проблем, — это управляемый термоядерный синтез. Многие открытия делаются случайно, трудно прогнозировать реальные сроки решения отдельных вопросов.

— Как Вы стали физиком?

— В школе мне нравились и математика, и физика; я увлекался также химией. Любил экспериментировать. Очень интересовался электроникой. Вместе с группой товарищей мы делали телефоны, усилители. Именно увлечение электроникой оказало решающее влияние на мой выбор, и я стал физиком.

— Советуете ли Вы молодым людям получать физическое образование, становиться физиками?

— Конечно. Физика изучает фундаментальные явления. Физическое образование позволяет легко переквалифицироваться, если возникнет необходимость перейти в другие области исследований, например, в биологию или химию. Физические закономерности используются везде.

— Каким должно быть современное образование?

— Я считаю, что нет необходимости в прямом смысле изменять систему образования, ее нужно приспособить к нуждам современной науки. В физическом образовании очень важно понимать основополагающие моменты, а не уделять слишком много внимания частностям. Сейчас современная электроника, микрокомпьютеры и ЭВМ вторгаются в жизнь буквально каждого человека. Этот факт следует также учитывать даже на самой начальной стадии образования.

— Какая математика нужна физику?

— Хотя часто физики в своей работе опираются на интуитивные соображения, знание математики необходимо. Чем лучше физик знает математику, тем успешнее он сможет работать. Нужно хорошо владеть практической математикой. Математика — язык физика. Однако следует различать потребности в математике для физика-теоретика и физика-экспериментатора. Существует опасность слишком увлекаться компьютерами. Многие молодые люди настолько полагаются на них, что перестают сами думать.

— Ваши пожелания читателям «Кванта».

— Учиться настойчиво и плодотворно. За годы учебы много усвоить. Изучая математику и физику, не забывать, что это только часть общечеловеческой науки и культуры.



# Эффект Мёссбауэра или резонансное ядерное поглощение

## $\gamma$ -квантов в кристаллах

Кандидат физико-математических наук  
Ю. А. САМАРСКИЙ

### Немного о резонансе

Даже людям, далеким от физики, хорошо знакомы самые разнообразные явления резонанса. Кто не крутил ручку радиоприемника, настраиваясь на нужную волну? Или не слышал дребезжания стекол в оконной раме от проходящего мимо трамвая? Многие, наверное, помнят фольклорную историю о том, как рота солдат, шагая строем по мосту и случайно попав в такт с его собственными колебаниями, рухнула вместе с мостом в реку.

В этих и многих других случаях резонанс — резкое возрастание амплитуды колебаний — возникает при совпадении частоты внешнего воздействия на систему с собственной частотой колебаний этой системы. Если вблизи рояля сыграть на музыкальном инструменте какую-нибудь ноту, рояль откликнется звучанием именно этой ноты: частота звука, издаваемого инструментом (частота внешнего воздействия), совпадает с собственной частотой колебаний соответствующей струны рояля.

Для приемного контура радиоприемника внешнее воздействие — это радиоволны от передающей станции, а собственная частота определяется параметрами контура — сопротивлением, индуктивностью и емкостью, которые мы меняем, вращая ручку настройки.

На примере радиоприема удобно обсудить и еще одну сторону яв-

ления резонанса. Кроме частоты, на которую мы хотим настроить приемник, очень важна точность настройки. У хорошего приемника даже ничтожный поворот ручки резко меняет условия приема. Это означает, что приемный контур обладает острым резонансом. Величина, характеризующая остроту резонанса, называется добротностью  $Q$  и определяется отношением резонансной частоты  $\nu_p$  к ширине  $\Delta\nu$  того интервала частот, в котором удается наблюдать резонансное явление (рисунок 1):

$$Q = \frac{\nu_p}{\Delta\nu}. \quad (1)$$

В современных радиотехнических контурах добротность составляет примерно  $200 \div 300$ .

### Резонанс в атоме

Типичными резонансными системами являются также атомы, молекулы и атомные ядра.

Наука о законах движения микрочастиц — квантовая механика — смогла объяснить многие явления, происходящие в атоме, и, в частности, способность атомов поглощать и испускать фотоны лишь с определенной энергией.

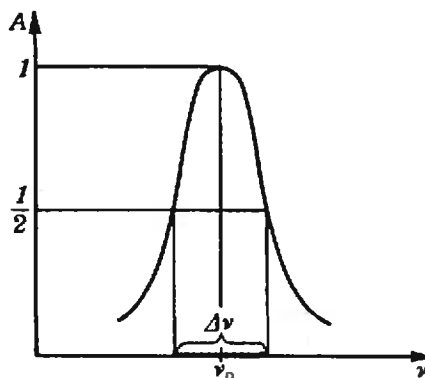


Рис. 1. Типичный вид резонансной кривой. В нашем случае она изображает зависимость амплитуды колебаний  $A$  приемного контура от частоты  $\nu$  передающей станции. Наиболее интенсивные колебания в контуре будут наблюдаться при частоте  $\nu = \nu_p$ . Величина  $\Delta\nu$ , взятая на половине высоты кривой, называется шириной резонансной кривой.

Процесс излучения фотона одиночным свободным атомом впервые был рассмотрен Нильсом Бором.

Бор пришел к выводу, что электрон в атоме может обладать только дискретными значениями энергии  $E_1, E_2, \dots, E_k, \dots, E_n, \dots$ . Каждому такому значению энергии соответствует устойчивое (стационарное) состояние атома, в котором атом не излучает и не поглощает.

Атом может переходить из одного энергетического состояния в другое, или, как говорят, с одного энергетического уровня на другой. Излучение фотона происходит при переходе атома с уровня с большей энергией на уровень с меньшей энергией. Самый низкий энергетический уровень атома называют основным, а остальные — возбужденными. При поглощении фотона атом переходит в возбужденное состояние, занимая уровень с большей энергией. Время жизни  $\tau$  атома в возбужденном состоянии обычно составляет  $10^{-8} - 10^{-7}$  с, после чего он самопроизвольно (спонтанно) переходит на более низкие энергетические уровни, испуская фотоны. Энергия испускаемого (поглощаемого) фотона связана с энергией уровней, между которыми совершается переход, условием Бора:

$$E_n - E_k = h\nu_{nk}, \quad (2)$$

где  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж·с — постоянная Планка, а  $\nu_{nk}$  — частота излучения (мы поместили ее двумя индексами —  $n$  и  $k$ , чтобы подчеркнуть, что процесс излучения связан с двумя значениями энергии атома).

Графически процесс излучения (поглощения) изображают стрелками, соединяющими те два энергетических уровня, при переходе между которыми происходит испускание (поглощение) фотона (рисунок 2;  $E_1$  — основной уровень, остальные — возбужденные). Частоты соответствующих переходов обычно называют спектральными линиями.

Согласно уравнению (2), частота излучения  $\nu_{nk}$  должна быть строго фиксирована, если энергии  $E_n$  и  $E_k$  строго определены. Другими словами, при переходе  $E_n \rightarrow E_k$  должна возникать идеальная монохроматическая, то есть бесконечно узкая,

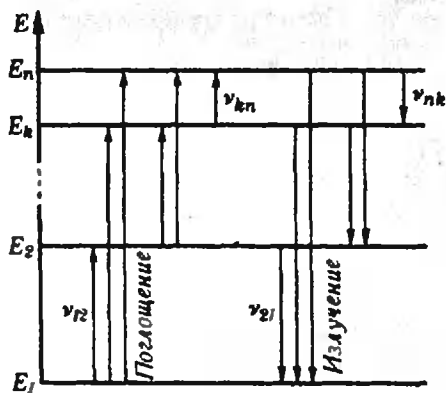


Рис. 2.

спектральная линия. На самом деле все спектральные линии имеют конечную ширину. При точном квантовомеханическом рассмотрении оказывается, что каждый возбужденный энергетический уровень не бесконечно узок, а «размыт», он имеет так называемую естественную ширину  $\Delta E$ , которую обозначают  $\Gamma$ . Естественная ширина уровня  $\Gamma$  и время жизни  $\tau$  атома в данном возбужденном состоянии связаны соотношением

$$\Gamma\tau = \frac{h}{2\pi}. \quad (3)$$

Чем больше время жизни уровня, тем точнее фиксирована его энергия, чем меньше время жизни — тем более он «размыт». Соотношение (3) носит название принципа неопределенности Гейзенберга для энергии.

На рисунке 3, а изображены основной и первый возбужденный энергетические уровни свободного атома (для простоты энергию основного уровня условно принимают за нуль).

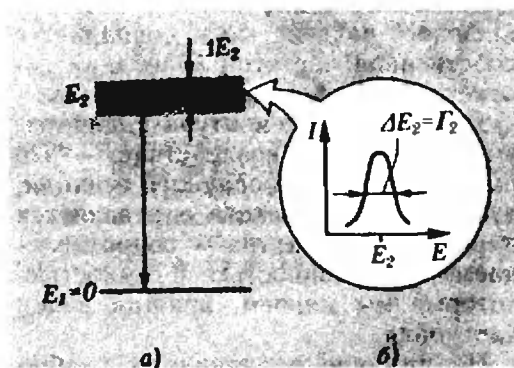


Рис. 3.

Если отложить по оси абсцисс энергию атома, а по оси ординат — вероятность найти атом в состоянии с данной энергией, то получится характерная резонансная кривая (рис. 3,б). Ширина этой кривой на половине высоты и называется естественной шириной линии  $\Gamma$ .

Наличие естественной ширины приводит к тому, что при переходе атома с одного возбужденного уровня на более низкий, в том числе и на основной уровень, существует разброс по энергии и, следовательно, по частоте излучаемых фотонов, который принципиально нельзя уменьшить. Так, для перехода, изображенного на рисунке 3, «размытие» энергии фотонов равно  $\Gamma_2$ , что соответствует разбросу по частоте

$$\Delta\nu_{21} = \Gamma_2/h = 1/2\pi\tau_2,$$

где  $\tau_2$  — время жизни атома в состоянии  $E_2$ . Иными словами, для данного перехода спектральная линия  $\nu_{21} = E_{21}/h$  имеет ширину  $\Delta\nu_{21} = 1/2\pi\tau_2$ .

В основном состоянии атом может находиться бесконечно долго ( $\tau \rightarrow \infty$ ), поэтому (см. (3)) естественная ширина основного уровня  $\Gamma_1 = 0$ .

Для уровней с временем жизни  $\tau \approx 10^{-8}$  с естественная ширина составляет

$$\Gamma = \frac{h}{2\pi\tau} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}}{6,28 \cdot 10^{-8} \text{ с} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \cdot \text{эВ}^{-1}} \approx 6,6 \cdot 10^{-8} \text{ эВ} \approx 10^{-7} \text{ эВ.}^*)$$

Она оказывается существенно меньше энергии перехода (то есть разности энергий между самими уровнями), которая для видимого света — порядка электронвольта.

Итак, если попадающий в атом фотон имеет энергию, равную разности энергий между основным и каким-либо возбужденным уровнем, то атом может поглотить фотон и перейти на данный возбужденный уровень. Через время  $\tau \approx 10^{-8}$  с атом вновь вернется в основное состояние, как правило, испустив такой же фотон. Этот процесс возможен для фотонов только определенной энергии и носит, таким образом, резонансный характер.

Впервые был обнаружен и стал широко известен оптический резонанс, связанный с излучением и поглощением атомами натрия «желтой линии» с длиной волны  $\lambda = 5890 \text{ \AA} = 5890 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ , то есть с частотой  $\nu = c/\lambda = 5,1 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$  ( $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$  — скорость света). Энергия фотонов, соответствующих этому излучению, —  $E = h\nu = 2,1 \text{ эВ}$ . Резонанс был открыт Робертом Вудом в 1904 году.

Интересно, какова добротность этого резонанса? Атомы натрия излучают желтый свет (желтую линию) при переходе с возбужденного уровня, время жизни которого  $\tau \approx 1,5 \cdot 10^{-8} \text{ с}$ . Отсюда естественная ширина уровня —

$$\Gamma = \frac{h}{2\pi\tau} \approx 4,4 \cdot 10^{-8} \text{ эВ},$$

а ширина резонансной линии —

$$\Delta\nu = \frac{\Gamma}{h} = \frac{1}{2\pi\tau} \approx 1,06 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}.$$

Тогда, согласно (1), добротность резонанса равна

$$Q = \frac{\nu}{\Delta\nu} = \frac{E}{\Gamma} \approx 4,8 \cdot 10^7.$$

Мы видим, что оптический резонанс в сотни тысяч раз острее привычного резонанса в радиотехнике. Следует отметить, что добротность такого порядка типична для атомных и молекулярных систем.

А теперь обратимся к ядерному  $\gamma$ -резонансу.

### Резонанс $\gamma$ -квантов

Атомные ядра, как и электроны в атоме, могут находиться в различных дискретных энергетических состояниях, то есть на различных энергетических уровнях. Как и у атома, самый низкий из уровней называется основным, остальные уровни носят название возбужденных. Возбужденные, то есть радиоактивные ядра могут быть получены разными путями: в результате бомбардировки их заряженными или нейтральными частицами, в результате поглощения ядрами фотонов и т. д. Ядра, находящиеся в возбужденных состояниях, могут переходить на более низкие энергетические уровни, в том числе и на

\*) В физике микромира энергию принято выражать в электронвольтах:  $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ .

основной. Такие переходы происходят самопроизвольно. Освобождающаяся энергия уносится фотонами. Эта энергия обычно заключена между несколькими сотнями и несколькими миллионами электронвольт, то есть на много порядков больше энергии видимого света. Так возникает  $\gamma$ -излучение. Наблюдаемый спектр  $\gamma$ -лучей всегда дискретный, что и позволяет говорить о дискретности ядерных уровней. Схема энергетических уровней для ядерных переходов изображается совершенно аналогично схеме переходов в атоме. Как и в атоме, из-за конечного времени жизни возбужденные уровни ядра имеют естественную ширину  $\Gamma$  (см. рисунок 3). Размытость возбужденных уровней ядра приводит к появлению ширины у спектральных линий  $\gamma$ -излучения.

Ядра атомов могут не только испускать, но и поглощать фотоны. Этот процесс возможен лишь для  $\gamma$ -квантов определенных энергий и, следовательно, тоже носит резонансный характер.

Казалось бы, резонансное поглощение  $\gamma$ -лучей должно легко наблюдаться. Для этого достаточно пропустить поток  $\gamma$ -квантов, испущенных радиоактивным источником, через вещество-поглотитель, содержащий те же ядра в невозбужденном (основном) состоянии. Однако это не так. Дело в том, что энергия  $E_\gamma$ , уносимая  $\gamma$ -квантом, оказывается меньше энергии перехода между уровнями, и ее недостаточно для возбуждения ядра-поглотителя. Хотя и небольшая, но заметная доля энергии уносится ядром-источником, которое, согласно закону сохранения импульса, начинает двигаться в сторону, противоположную направлению вылета  $\gamma$ -кванта (как орудие после выстрела).

Проведем некоторые простые оценки для свободного ядра (атома).

Пусть излучающее ядро свободно и первоначально покоится, а испускаемый  $\gamma$ -квант соответствует ядерному переходу с первого возбужденного уровня на основной (рисунок 3). Согласно закону сохранения импульса, после испускания  $\gamma$ -кванта ядро получит импульс отдачи, равный по абсолютной величине импульсу

$\gamma$ -кванта:  $p_\alpha = p_\gamma = E_\gamma/c$ . В результате ядро начнет двигаться со скоростью  $v_\alpha = p_\alpha/m_\alpha$ , унося энергию отдачи  $R$ , равную

$$R = \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} = \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} = \frac{E_\gamma^2}{2m_\alpha c^2}. \quad (4)$$

По закону сохранения энергии,  $E_\gamma + R = E_{21}$ , где  $E_{21}$  — расстояние (разность энергий) между основным и первым возбужденным уровнями ядра. Поскольку всегда  $R \ll E_\gamma$ , в формуле (4)  $E_\gamma$  можно заменить на энергию перехода  $E_{21}$ :

$$R \approx \frac{E_{21}^2}{2m_\alpha c^2}. \quad (5)$$

Оценим величину  $R$ . Рассмотрим в качестве примера ядро изотопа  $^{119}\text{Sn}$ , у которого  $E_{21} = 2,38 \cdot 10^4$  эВ, время жизни возбужденного уровня  $\tau = 1,8 \cdot 10^{-8}$  с, а естественная ширина этого уровня —  $\Gamma_2 = h/2\pi\tau = 3 \cdot 10^{-8}$  эВ. Энергия отдачи в этом случае составляет

$$R \approx \frac{E_{21}^2}{2m_\alpha c^2} \approx \frac{(2,38 \cdot 10^4)^2 (\text{эВ})^2}{2 \cdot 119 \cdot 10^9 \text{эВ}} \approx 2,5 \cdot 10^{-3} \text{эВ.}^*)$$

Энергия, которая расходуется на отдачу ядра, поглощающего  $\gamma$ -квант, оказывается точно такой же. Эта картина показана на рисунке 4: линия испускания смещена на величину  $R$  влево от  $E_2$ , а линия поглощения — на столько же вправо от  $E_2$  (расстояния по оси  $E$  даны условно).

Какое же влияние оказывает сдвиг  $R$  на резонансное поглощение  $\gamma$ -квантов? Сама по себе величина  $R$  не представляет существенного интереса, важно соотношение между  $R$  и шириной  $\Gamma$  резонансной линии. Легко видеть, что резонансное поглощение возможно только в случае, если спектры испускания и поглощения перекрываются, то есть при условии

$$2R \leq \Gamma. \quad (6)$$

А это условие почти никогда не выполняется для  $\gamma$ -переходов в свобод-

\* Напомним, что число, стоящее слева от символа изотопа, представляет собой массу ядра (атома) изотопа, выраженную в атомных единицах массы (а. е. м.). По определению 1 а. е. м. =  $1,66 \cdot 10^{-27}$  кг. Обозначим ее через  $m_0$ . Тогда энергия, соответствующая 1 а. е. м., равна  $m_0 c^2 = 931,5 \text{ МэВ} \approx 10^9 \text{ эВ}$ . Следовательно, для ядра олова  $^{119}\text{Sn}$  энергия, соответствующая  $m_\alpha c^2$ , численно равна  $119 \cdot 10^9 \text{ эВ}$ .

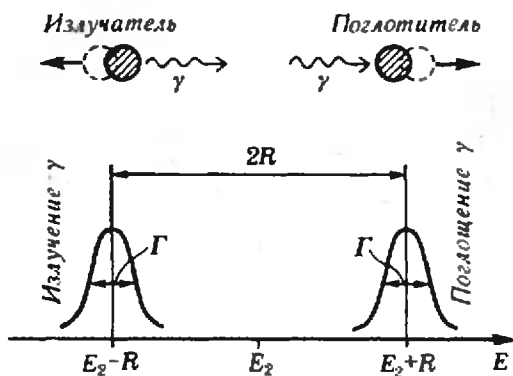


Рис. 4.

ных ядрах, то есть в случаях, когда можно пренебречь энергией связи ядер в веществе. Так, для рассмотренного свободного ядра  $^{119}\text{Sn}$  ширина  $\Gamma$  на пять порядков, то есть в сотню тысяч раз, меньше  $R$ . Понятно, что в этом случае наблюдать резонансное поглощение  $\gamma$ -квантов невозможно.

Почему же тогда энергия отдачи не помешала наблюдению оптического резонанса для желтой линии натрия? Или там отдачи вовсе нет? Отдача, конечно, существует и там, но посмотрим, какова ее величина. Масса атома натрия равна 22 а. е. м., и энергия отдачи равна

$$R = \frac{(h\nu)^2}{2M_{\text{Na}}c^2} = \frac{(2,1)^2 (\text{эВ})^2}{2 \cdot 22 \cdot 10^9 \text{эВ}} \approx 10^{-10} \text{эВ!}$$

Она оказывается ничтожно малой по сравнению с естественной шириной уровня  $\Gamma \approx 4,4 \cdot 10^{-8} \text{эВ}$ .

Как же все-таки наблюдать  $\gamma$ -резонанс? В принципе, можно компенсировать энергетический сдвиг  $2R$  с помощью эффекта Доплера, который состоит в изменении частоты излучения, а значит, энергии фотонов, при движении источника (или поглотителя)\*). Действительно, если движение отдачи разрушает резонанс, то противоположное, компенсирующее отдачу движение должно восстановить его. Но какова при этом должна быть скорость движения?

Рассмотрим случай, когда поглощающее ядро покоится, а излучаю-

щее ядро движется к нему навстречу. Пусть частота излучения неподвижного ядра-источника равна  $\nu_\gamma$ . Тогда при движении этого ядра со скоростью  $v$  частота его излучения изменится, и по отношению к неподвижному ядру-поглотителю будет равна  $\nu = (1 + v/c) \nu_\gamma$ . Соответственно, энергия испускаемых фотонов будет  $E = h\nu = (1 + v/c) h\nu_\gamma = (1 + v/c) E_\gamma$ , где  $E_\gamma = h\nu_\gamma$  — энергия фотонов, которые испускало бы неподвижное ядро-источник.

Итак, при движении ядра-источника «навстречу» энергия испускаемых им фотонов, попадающих на неподвижное ядро-поглотитель, увеличивается на величину

$$\delta E = E - E_\gamma = E_\gamma \frac{v}{c}. \quad (7)$$

Если окажется, что  $\delta E = 2R$ , то должен наблюдаться  $\gamma$ -резонанс. Пользуясь формулой (7), легко рассчитать, при какой скорости  $v$  выполняется это условие:

$$v = c \frac{2R}{E_\gamma}. \quad (8)$$

Так, для ядер  $^{119}\text{Sn}$  эта скорость равна примерно 60 м/с.

Основанные на этой идее опыты на ядрах ртути были проведены в 1953 году П. Муном и А. Сторустом. Они смонтировали источник с возбужденными ядрами ртути на плече центрифуги. Плечо приводилось во вращение, и тогда наблюдался резонанс в покоящемся ртутном поглотителе. Скорость движения, необходимая для компенсации ядерной отдачи в ртути, была порядка скорости звука! Подобные опыты по  $\gamma$ -резонансу имели ограниченное применение, были технически сложны и поэтому проводились крайне редко.

Так продолжалось до 1958 года, когда положение радикально изменилось благодаря открытию молодого немецкого физика Рудольфа Мёссбауэра. Открытие состояло в том, что Мёссбауэр нашел, как избежать затраты части энергии на отдачу ядер и наблюдать  $\gamma$ -резонанс без отдачи. Если опыты Муна и Сторуста показали, как компенсировать отдачу, то опыты Мёссбауэра показали, как ее уничтожить.

\* См. статью Я. Смородинского, А. Уриова «Эффект Доплера» («Квант», 1980, № 8).

Чтобы избавить ружье при выстреле от движения отдачи и тем самым всю энергию заряда передать пуле, надо, очевидно, опереть ружье, связать его с каким-нибудь массивным телом. Но обо что «опереть» ядро, испускающее или поглощающее  $\gamma$ -квант, как сделать его неподвижным? Оказалось, что при определенных условиях ядра можно «закрепить» в решетке кристалла. Именно кристаллическая решетка, в которой ядра прочно «скованы» друг с другом цепями химических связей, и сыграла роль массивного тела, предотвращающего отдачу.

Как же происходит процесс поглощения и испускания  $\gamma$ -квантов ядрами, входящими в состав кристаллической решетки?

Наиболее прост случай, когда энергия отдачи превышает энергию связи ядра в решетке, которая довольно велика — она составляет  $10 \div 30$  эВ. Формула (4) показывает, что такой случай реализуется лишь при больших энергиях  $\gamma$ -квантов ( $E_\gamma > 1$  МэВ). При этом связь ядра становится несущественной, и мы, по существу, имеем дело со свободным ядром.

При испускании  $\gamma$ -квантов с  $E_\gamma < 1$  МэВ энергия отдачи недостаточна для вырывания ядра из кристаллической решетки, а импульс ядра в той или иной форме передается всему кристаллу. Чаще всего энергия отдачи переходит в звуковые колебания решетки. Такой процесс очевиден. В результате отдачи ядро сдвигается со своего места, но не теряет связи с решеткой. Оно отдает свой импульс соседним ядрам, те передают его своим соседям — и в кристаллической решетке возбуждается механическая волна.

Известно, что кристаллическая решетка это квантовая система, которая, подобно атому, не может возбуждаться произвольным образом. «Вследствие квантования собственной энергии кристалла он может поглощать энергию отдачи лишь дискретными порциями. При понижении температуры вероятность возбуждения собственных уровней кристалла уменьшается, поэтому при испускании  $\gamma$ -квантов малой энергии

( $E_\gamma \approx 100$  кэВ) некоторая часть переходов происходит так, что импульс отдачи воспринимает весь кристалл в целом» — писал Р. Мёссбауэр в своей статье. Таким образом, в кристалле возможен случай, когда никакого возбуждения колебаний вообще не происходит! Тогда отдачу испытывает вся решетка как целое. В формулу (5), определяющую энергию отдачи, вместо ядра следует теперь подставлять массу всего кристалла. В результате энергия отдачи понижается на 20 порядков и оказывается много меньше ширины линии  $\Gamma$ . В этом случае  $\gamma$ -резонанс сравнительно легко наблюдается.

Такое упругое, то есть без отдачи, испускание и поглощение  $\gamma$ -квантов в кристаллах и носит название эффекта Мёссбауэра.

Конечно, мы не можем проследить за каждым отдельно взятым атомом или  $\gamma$ -квантом. Все рассмотренные процессы носят случайный характер. Поэтому ясно, что даже при низкой температуре отнюдь не все ядра в кристалле испускают  $\gamma$ -кванты без отдачи, а только некоторая их часть. Чем ниже температура, тем большая доля ядер излучает «резонансные»  $\gamma$ -кванты. В первых опытах Мёссбауэра, где в качестве источника  $\gamma$ -лучей использовался радиоактивный иридий  $^{191}\text{Ir}$ , при температуре жидкого азота  $T \approx 80$  К доля резонансных квантов не превышала нескольких процентов. В настоящее время известны радиоактивные соединения, в излучении которых даже при комнатной температуре доля резонансных квантов составляет почти половину всего излучения. Для проведения  $\gamma$ -резонансных опытов с такими источниками совсем не требуется их охлаждения.

Замечательной особенностью  $\gamma$ -резонанса является его необычайно высокая добротность. Так, для изотопа олова  $^{119}\text{Sn}$  с энергией  $\gamma$ -квантов  $E = 2,38 \cdot 10^4$  эВ и шириной резонансного уровня  $\Gamma = 3 \cdot 10^{-8}$  эВ добротность равна

$$Q = \frac{E}{\Gamma} \approx 0,8 \cdot 10^{12}.$$

Это почти в 20 тысяч раз лучше, чем для оптического резонанса зна-

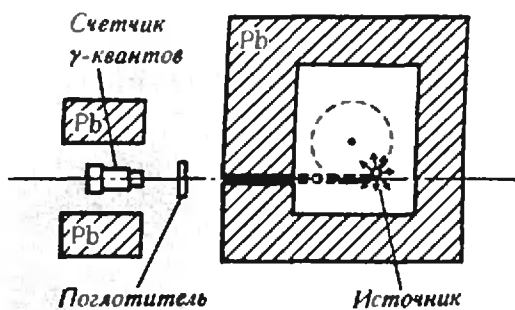


Рис. 5.

менитой желтой линии натрия. Для ядер железа  $^{57}\text{Fe}$  добротность  $\gamma$ -резонанса выше еще в три раза, а для цинка  $^{67}\text{Zn}$  она равна  $2 \cdot 10^{15}$ !

Высокая добротность  $\gamma$ -резонанса превратила его в инструмент измерений исключительной точности. Например, для олова достаточно с помощью эффекта Доплера изменить энергию  $\gamma$ -квантов на одну триллионную часть, чтобы уйти за пределы естественной ширины возбужденного уровня и разрушить резонанс. На этом условии «расстройки» основан метод наблюдения резонансного поглощения  $\gamma$ -квантов, предложенный Мёссбауэром. Рассмотрим его.

Пусть ядра источника и поглотителя находятся в идентичных кристаллах и при одинаковой температуре. Тогда линия испускания полностью перекрывается с линией поглощения, и число  $\gamma$ -квантов, резонансно поглощенных поглотителем, будет максимальным при неподвижных источнике и поглотителе ( $v=0$ ). Если теперь поглотителю (или источнику) сообщить небольшую скорость, то произойдет сдвиг линий испускания и поглощения (его называют доплеровским сдвигом), и резонанс будет нарушаться. Такое разрушение резонанса происходит уже при ничтожных скоростях.

Оценим величину скорости для  $^{119}\text{Sn}$ . Подставляя в формулу (8) вместо  $R$  естественную ширину линии  $\Gamma=3 \cdot 10^{-8}$  эВ, мы найдем, что для нарушения резонанса достаточно перемещать поглотитель или источник со скоростью порядка миллиметра в секунду! (Вместо 60 м/с для получения резонанса на свободных ядрах.) Таким образом, изменяя

энергию  $\gamma$ -квантов с помощью эффекта Доплера можно уходить от резонанса или восстанавливать его.

На рисунке 5 показана схема одной из первых экспериментальных установок Мёссбауэра для наблюдения  $\gamma$ -резонансного поглощения на ядрах иридия  $^{191}\text{Ir}$  с энергией  $\gamma$ -квантов  $E_\gamma=129$  кэВ.

Радиоактивный источник, расположенный за свинцовой защитой, мог равномерно вращаться по окружности в ту или другую сторону\*).  $\gamma$ -кванты, испускаемые источником при его движении на участке траектории, отмеченном на рисунке 5 жирной линией, попадали на неподвижный поглотитель (иридиевую фольгу). За поглотителем устанавливался счетчик  $\gamma$ -квантов. Благодаря специальному устройству счетчик регистрировал  $\gamma$ -кванты, прошедшие через поглотитель, только в то время, когда источник находился на «рабочем» участке траектории. При изменении угловой скорости вращения источник двигался навстречу поглотителю либо от него с различными строго контролируемыми скоростями.

В эксперименте исследовалась зависимость числа  $\gamma$ -квантов, попадающих в счетчик в единицу времени, от скорости движения источника. Для построения графика использовалась не сама скорость счета, а величина «амплитуды» эффекта, выраженная в процентах:

$$\epsilon(v) = \frac{I(v) - I(\infty)}{I(\infty)} \cdot 100\%.$$

где  $I(v)$  — скорость счета квантов, прошедших через поглотитель при некоторой скорости  $v$ ,  $I(\infty)$  — скорость счета квантов при достаточно большой скорости, когда резонансное поглощение отсутствует. Величина  $\epsilon(v)$  является отношением, и, следовательно, не зависит от активности источника.

Движение источника навстречу поглотителю или от него приводило благодаря эффекту Доплера к смещению линии испускания в сторону большей или меньшей энергии. Ре-

\*) Интересно отметить, что в начале исследований по эффекту Мёссбауэра для перемещения источника или поглотителя с малой скоростью физики использовали диск проигрывателя, суппорт станка, диффузор репродуктора и т. п.

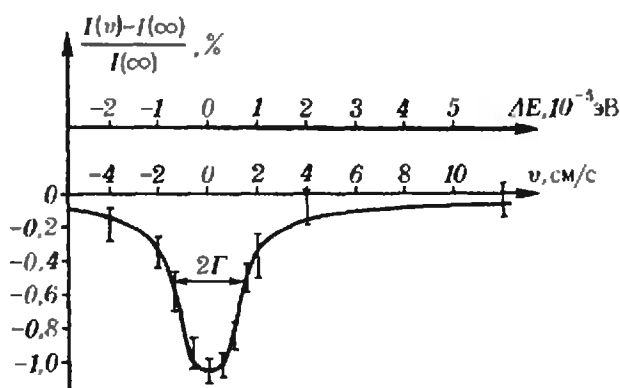


Рис. 6. Минимум скорости счета  $\gamma$ -квантов отвечает, очевидно, максимуму поглощения. В данном опыте источник и поглотитель находились в идентичных кристаллических решетках и потому минимум поглощения приходится на нулевую скорость.

результаты измерений представлены на рисунке 6.

Такая кривая называется мёссбауэровским или  $\gamma$ -резонансным спектром. Измеряемая на опыте ширина резонансной линии представляет собой результат наложения линий источника и поглотителя. При тонком поглотителе и источнике и при отсутствии вибраций ширина линии равна удвоенной естественной ширине  $2\Gamma$ . Измерив эту ширину, можно определить время жизни возбужденного состояния.

Дальнейшие работы показали, что любое внешнее воздействие, изменяющее первоначальную энергию ядер, может быть скомпенсировано при помощи относительного движения. Тогда величина изменения может быть определена по значению относительной скорости, необходимой для восстановления резонанса.

Таким образом, открытие Мёссбауэра дало способ точнейшей регистрации изменений энергии (именно изменений, а не абсолютной величины этой энергии)  $\gamma$ -квантов и легло в основу целой новой области — мёссбауэровской спектроскопии, в развитии которой заметный вклад внесли советские ученые.

В настоящее время эффект Мёссбауэра обнаружен более чем на 40 элементах таблицы Менделеева.

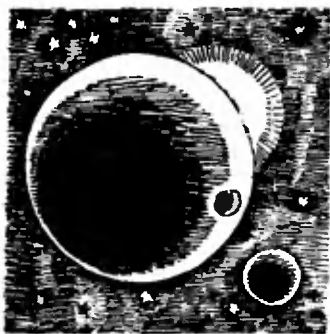
Применения эффекта Мёссбауэра многочисленны и основаны, главным образом, на использовании мёссбауэровских спектров как источников ценной информации об исследуемом объекте. Остановимся кратко на некоторых приложениях.

Еще совсем недавно трудно было представить, что можно заметить изменения энергии ядерного перехода в зависимости от характера химического окружения ядра. Однако оказалось, что при испускании и поглощении  $\gamma$ -квантов ядрами, входящими в состав химических соединений, максимум линии поглощения может наблюдаться при скорости, отличной от нуля. Это объясняется следующим. Энергия ядерного перехода зависит от электростатических сил взаимодействия ядра с окружающими его электронами. Но вклад этого взаимодействия настолько мал, что непосредственно наблюдаться не может. Однако в опытах по изучению эффекта Мёссбауэра положение меняется. В этом случае влияние электростатических сил на энергетические уровни ядра нужно сравнивать не с энергией  $\gamma$ -перехода, а с шириной линии резонансного поглощения. Смещение максимума мёссбауэровского спектра при этом легко замечается. Такие измерения, следовательно, дают информацию о характере химических связей.

Важным и плодотворным оказалось применение эффекта Мёссбауэра в физике твердого тела. Атомные ядра представляют собой маленькие магнитики, которые взаимодействуют с магнитными и электрическими полями окружающих электронов. Такие взаимодействия существенно влияют на мёссбауэровские спектры и потому могут детально изучаться. Именно с помощью эффекта Мёссбауэра впервые удалось измерить внутренние

(Окончание см. на с. 30)





## Загадочный Плутон

Кандидат физико-математических наук  
В. А. БРОНШТЭН

В 1930 году, то есть чуть более пятидесяти лет назад, была открыта девятая, самая удаленная от Солнца планета Солнечной системы — Плутон. Сравнительно быстро астрономы определили элементы орбиты новой планеты — среднее расстояние до Солнца, степень вытянутости (эксцентриситет) орбиты и наклонение к плоскости земной орбиты.

Гораздо труднее оказалось определить физические характеристики Плутона — его размеры, массу, плотность. Длительное время почему-то считалось, что по размерам и массе Плутон практически не отличается от Земли. Такие оценки вошли даже в астрономические справочники. Однако в 1950 году астрономы измерили диаметр диска Плутона и нашли его равным примерно 5000 км (напомним, что диаметр Земли  $\approx 12\,750$  км). Спустя пятнадцать лет, наблюдения закрытия Плутоном слабой звезды показали, что диаметр планеты еще меньше, во всяком случае не превышает 4400 км.

В начале 70-х годов ученые попытались уточнить массу Плутона по возмущениям, создаваемым им в движении соседней планеты — Нептуна. Они получили оценку массы в 0,11 массы Земли. Но сразу стало ясно, что эта оценка завышена, так как при диаметре даже 4400 км она приводила к нереально большому значению средней плотности Плутона

на — около  $15 \text{ г/см}^3$ \*) (из планет Солнечной системы самую большую плотность имеет Земля —  $5,5 \text{ г/см}^3$ ).

Открытие в 1978 году спутника Плутона, названного Хароном, позволило определить массу планеты по периоду обращения и радиусу орбиты ее спутника. Она оказалась равной всего лишь 0,002 массы Земли (то есть в шесть раз меньше массы Луны). Вот почему все попытки определить массу Плутона по возмущениям в движении Нептуна были заранее обречены на неудачу — при такой ничтожной массе Плутон никак не мог влиять на движение своего в 7500 раз более массивного собрата.

Недавно был изобретен новый способ измерения диаметров небесных тел. Это дало возможность определить размеры Плутона с большей точностью, чем прежде. Оказалось, что его диаметр заключен в пределах от 3000 до 3600 км (это примерно в подтора раза меньше диаметра Меркурия, считавшегося самой маленькой планетой Солнечной системы).

Из оценок массы и диаметра следует, что плотность Плутона — от 0,5 до 0,8  $\text{г/см}^3$ . До сих пор планетой с наименьшей плотностью считался Сатурн: его средняя плотность равна 0,7  $\text{г/см}^3$ . Уточнение размеров Плутона покажет, не отберет ли он у Сатурна первенства по самой низкой плотности.

И еще один своеобразный рекорд «установлен» Плутоном. Его спутник Харон лишь в двенадцать раз уступает своей планете по массе. Раньше считалось, что наименьшее отношение массы планеты к массе спутника у системы Земля — Луна, где оно равно 81.

Совсем недавно обнаружилось, что блеск Плутона испытывает колебания и кроме того интенсивно ослабевает, несмотря на приближение планеты к Солнцу (перигелий она пройдет в 1990 году). Пока объяснений этому нет. Возможно, будущие исследования прольют свет и на эту загадку.

\*) В астрономии принято плотности небесных тел выражать в  $\text{г/см}^3$ , а не в единицах СИ. (Прим. ред.)



## Метод итераций

Член-корреспондент АПН СССР  
В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

1

Несколько тысячелетий назад в Древнем Вавилоне был изобретен простой способ приближенного вычисления квадратных корней.

Пусть мы хотим вычислить  $\sqrt{a}$  (где  $a > 0$ ), то есть найти положительный корень уравнения  $x^2 = a$ . Это уравнение равносильно следующему:

$$x = \frac{a}{x}. \quad (1)$$

Предположим теперь, что мы имеем некоторое приближенное значение  $x_0$

числа  $\sqrt{a}$ . Согласно (1),  $x_0$  надо сравнить с числом  $\frac{a}{x_0}$ : ведь если  $x_0$  и  $\frac{a}{x_0}$  совпадают, то  $x_0$  — точное значение  $\sqrt{a}$ . Если, однако,  $x_0 \neq \sqrt{a}$ , то одно из чисел  $x_0, \frac{a}{x_0}$  меньше, а другое больше, чем  $\sqrt{a}$  (поскольку произведение этих чисел равно  $a$ ), то есть  $\sqrt{a}$  лежит между  $x_0$  и  $\frac{a}{x_0}$ . Можно предположить, что среднее арифметическое этих чисел

$$x_1 = \frac{1}{2} \left( x_0 + \frac{a}{x_0} \right)$$

является лучшим приближением числа  $\sqrt{a}$ , чем исходное приближение  $x_0$ .

Это приближение  $x_1$  можно улучшить таким же способом, то есть взять среднее арифметическое чисел  $x_1$  и  $\frac{a}{x_1}$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( x_1 + \frac{a}{x_1} \right),$$

затем можно взять следующее приближение

$$x_3 = \frac{1}{2} \left( x_2 + \frac{a}{x_2} \right)$$

и так далее.

Какова точность вавилонского способа? Для ответа на этот вопрос проведем следующие вычисления:

$$x_n - \sqrt{a} = \frac{1}{2} \left( x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right) - \sqrt{a} =$$

$$= \frac{1}{2} \left( \sqrt{x_{n-1}} - \sqrt{\frac{a}{x_{n-1}}} \right)^2 = \frac{1}{2x_{n-1}} (x_{n-1} - a)^2. \quad (2)$$

Равенство (2) дает возможность выразить ошибку приближения  $x_n$  (то есть число  $|x_n - \sqrt{a}|$ ) через ошибку предыдущего приближения  $x_{n-1}$ .

#### Задачи

1. Докажите, что все приближения числа  $\sqrt{a}$ , найденные по вавилонскому способу, кроме, быть может, начального приближения  $x_0 > 0$ , являются приближениями с избытком.

2. Докажите, что при любом  $x_0 > 0$  последовательность  $(x_n)$  приближений, найденных по вавилонскому способу, стремится к  $\sqrt{a}$ .

3. К какому пределу будет стремиться эта последовательность, если в качестве  $x_0$  взять некоторое отрицательное число?

Чтобы оценить, насколько быстро числа  $x_0, x_1, x_2, \dots$  приближаются к  $\sqrt{a}$ , вычислим  $\sqrt{19}$ , взяв начальное приближение  $x_0 = 4$ . Вооружившись микрокалькулятором\*), наоходим

$$\begin{aligned} x_0 &= 4,0000000; \\ x_1 &= 4,3750000; \\ x_2 &= 4,3589285; \\ x_3 &= 4,3588989; \\ x_4 &= 4,3588989. \end{aligned}$$

Как видим, уже четвертое приближение не отличается (при вычислениях с семью знаками после запятой) от третьего. Естественно принять, что  $\sqrt{19} \approx 4,3588989$ .

Читатель может возразить, что незачем было «огород городить»: имея в руках микрокалькулятор, можно было набрать число 19 и затем, нажав всего одну кнопку  $\sqrt{\square}$ , сразу получить тот же результат  $\sqrt{19} \approx 4,3588989$ . Однако согласитесь, что нас интересовало не столько значение  $\sqrt{19}$ , сколько достоинства вавилонского способа. Они оказались весьма значительными: уже после третьего повторения однотипной операции (или, как говорят, после третьей *итерации*) мы получили значение  $\sqrt{19}$  с семью верными знаками (см. задачу 4).

\* Тем, у кого микрокалькулятора под рукой нет, придется либо считать вручную, либо поверить написанному.

#### Задачи

4. Пусть, применяя вавилонский способ, мы вычисляем последовательные приближения  $x_0 > 0, x_1, x_2, \dots$  числа  $\sqrt{a}$  с  $k$  знаками после запятой, то есть округляем каждый раз  $(k+1)$ -ю цифру. Докажите, что если приближения стабилизируются в точке  $x_n$  (то есть  $x_{n+1} = x_n$  с точностью до  $10^{-k}$ , но  $x_n > x_{n-1} + 10^{-k}$ ), то ошибка приближения  $\sqrt{a} \approx x_n$  меньше  $0,75 \cdot 10^{-k}$ .

5. Сколько итераций нужно сделать, чтобы, проводя вычисления по вавилонскому способу с  $k$  знаками после запятой, получить число  $\sqrt{a}$  с  $k$  верными знаками после запятой?

Чтобы показать читателю превосходство человеческого интеллекта над любой машиной (в частности, над микрокалькулятором, который лишь выполняет волю человека, является его помощником), мы проведем вычисления с пятнадцатью знаками после запятой. С этой целью примем найденное приближение числа  $\sqrt{19}$  за новое исходное приближение  $x_0$  (то есть положим  $x_0 = 4,3588989$ ) и вычислим по вавилонскому способу следующее приближение  $x_1 = \frac{1}{2} \left( x_0 + \frac{19}{x_0} \right)$ . Положим

$$\frac{19}{x_0} = x_0 + h, \text{ то есть}$$

$$19 = (x_0)^2 + x_0 h. \quad (3)$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} (x_0)^2 &= (4,3588989)^2 = \\ &= (4,358 + 8,989 \cdot 10^{-4})^2 = \\ &= 4,358^2 + 2 \cdot 4,358 \cdot 8,989 \cdot 10^{-4} + \\ &\quad + 8,989^2 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

Так как наш микрокалькулятор точно вычисляет произведение двух четырехзначных чисел, мы сможем слагаемые в правой части посчитать точно. Теперь, подписав одну под другой три получившиеся десятичные дроби

$$\begin{array}{r} 18,992164 \\ 0,0078348124 \\ 0,00000080802121 \end{array}$$

мы можем (вручную, что совсем несложно) найти их сумму. Получаем

$$(x_0)^2 = 19 - 37,957879 \cdot 10^{-8}$$

и потому, подставляя в (3), имеем

$$4,3588989h = 37,957879 \cdot 10^{-8},$$

откуда (с помощью микрокалькуля-

тора) находим

$$h = 8,7081347 \cdot 10^{-8} = 0,000000087081347.$$

Наконец (опять вручную), получаем окончательно

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} \left( x_0 + \frac{19}{x_0} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (x_0 + (x_0 + h)) = x_0 + \frac{1}{2} h = \\ &= 4,358898943540673. \end{aligned}$$

Интересно, сколько же верных знаков в полученном приближении числа  $\sqrt{19}$ ? Так как приближение  $x_0 = 4,3588989$  числа  $\sqrt{19}$  имеет ошибку, меньшую  $0,75 \cdot 10^{-7}$  (см. задачу 4), согласно формуле (2) ошибка следующего приближения меньше  $\frac{1}{2x_0} (0,75 \cdot 10^{-7})^2 \approx 0,6 \times 10^{-15}$ . Таким образом, все выписанные 15 знаков числа  $\sqrt{19}$  — верные:

$$\sqrt{19} = 4,358898943540673...$$

Вычислите теперь с пятнадцатью знаками после запятой  $\sqrt{2}$ .

## II

Формула, с помощью которой вычислялись последовательные приближения числа  $\sqrt{a}$  по вавилонскому способу, может быть записана следующим образом:

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad (4)$$

где

$$f(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right). \quad (5)$$

Легко видеть также, что уравнение (1), которое приближенно решалось этим способом, переписывается с помощью функции (5) в виде

$$f(x) = x. \quad (6)$$

На рисунке 1 (соответствующем случаю  $a=2$ ,  $x_0=0,4$ ) дана геометрическая интерпретация итерационной последовательности  $x_0, x_1, x_2, \dots$ . Кроме биссектрисы первого координатного угла (она обозначена через  $\Delta$ ) и графика  $\Gamma$  функции (5) на рисунке показана итерационная ломаная, которая строится следующим образом. На графике  $\Gamma$  берется точка  $A_0$  с абсциссой  $x_0$  и из точки  $A_0$  проводится

горизонтальный отрезок  $A_0B_1$ , второй конец которого лежит на биссектрисе  $\Delta$ . Из точки  $B_1$  проводится вертикальный отрезок  $B_1A_1$ , второй конец которого лежит на графике  $\Gamma$ . Затем снова проводится горизонтальный отрезок  $A_1B_2$ , оканчивающийся на биссектрисе, и вертикальный отрезок  $B_2A_2$ , оканчивающийся на графике  $\Gamma$ , и т. д. Легко видеть, что абсциссы точек  $A_0, A_1, A_2, \dots$  как раз образуют итерационную последовательность  $x_0, x_1, x_2, \dots$ . Рисунок наглядно показывает, что последовательность точек  $A_0, A_1, A_2, \dots$  сходится к точке  $A^*$ , в которой график  $\Gamma$  пересекает биссектрису  $\Delta$ , то есть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ , где  $x^*$  — абсцисса точки  $A^*$ . Так как  $A \in \Gamma \cap \Delta$ ,  $f(x^*) = x^*$ , то есть  $x^*$  — корень уравнения (6).

А что если попробовать применить все это не к конкретной функции (5), связанной с вавилонским способом вычисления корней, а к произвольной функции  $f$ ? Иначе говоря, рассмотрим уравнение вида (6), выберем «начальное приближение»  $x_0$  и построим итерационную последовательность  $x_0, x_1, x_2, \dots$  по формуле (4).

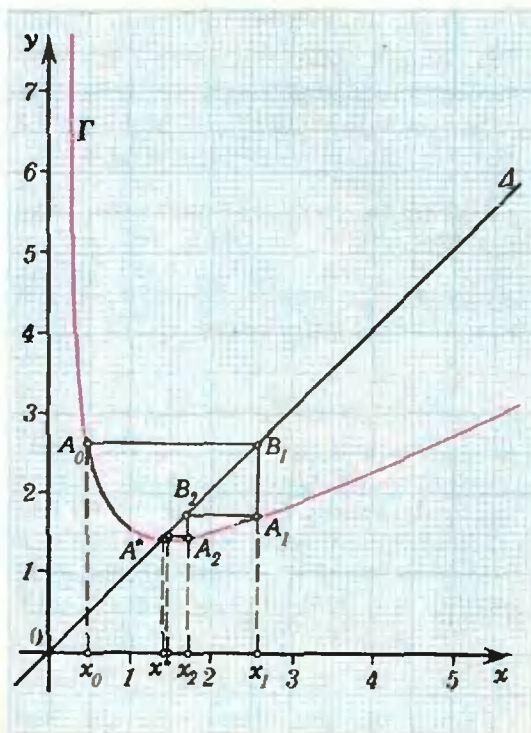


Рис. 1.

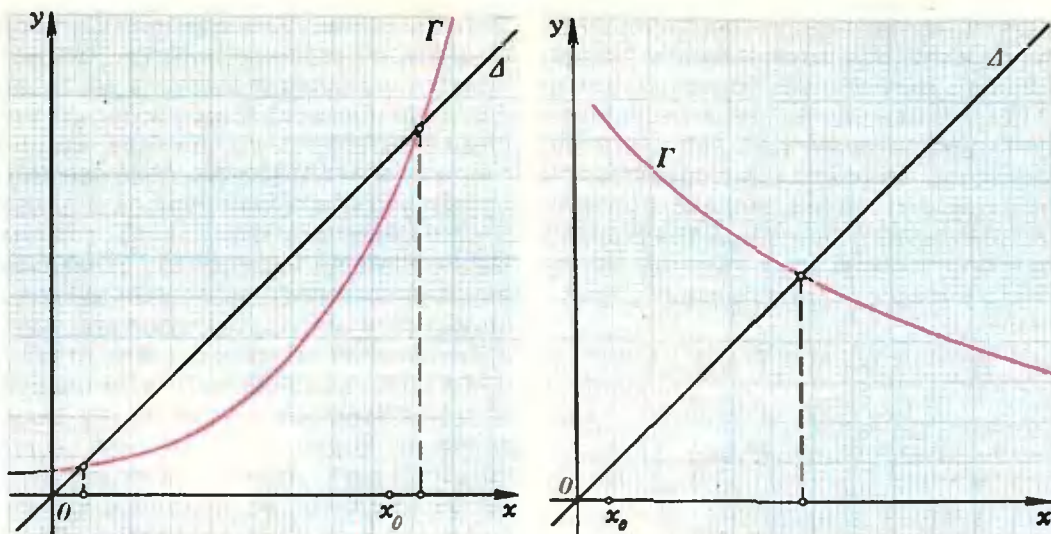


Рис. 2.

Не окажется ли, что и в общем случае эта последовательность имеет предел  $x^*$ , являющийся корнем уравнения (6)? Если бы это было так, то число  $x_n$  (то есть  $n$ -ю итерацию) мы могли бы считать приближенным значением искомого корня  $x^*$ . Такой способ приближенного решения уравнения (6) называется *методом итераций*.

#### Задачи

6. Постройте итерационную ломаную для функции (5), приняв за начальное приближение  $x_0$  отрицательное число.

7. Постройте итерационные ломаные для функций, графики которых показаны на рисунке 2.

8. Пусть функция  $f$  возрастает и непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , причем  $f(a) > a$ ,  $f(b) < b$ . Постройте итерационную ломаную, взяв за начальное приближение  $x_0 = a$ . Докажите, что точки  $x_0, x_1, x_2, \dots$  образуют возрастающую последовательность, расположенную на отрезке  $[a; b]$ ; поэтому (по теореме Вейерштрасса) последовательность  $(x_n)$  имеет предел  $x^*$ . Докажите, что  $x^*$  является корнем уравнения (6). (Таким образом, в этом случае метод итераций является обоснованным.) Докажите также, что  $f(x) > x$  при  $a < x < x^*$  (и потому  $x^*$  — наименьший корень уравнения (6) на отрезке  $[a; b]$ ).

9. При условиях задачи 8 постройте итерационную ломаную, приняв за начальное приближение  $x_0 = b$ . Обязательно ли корень  $x^{**}$  уравнения (6), найденный в этом случае, совпадает с корнем  $x^*$ , о котором говорится в задаче 8?

10. Пусть функция  $f$  дифференцируема на  $[0; +\infty[$ , существует такое  $c > 0$ , что  $f'(x) < 0$  при  $0 < x < c$  и  $0 < f'(x) < 1$  при  $x > c$ , причем  $f(c) > c$  и существует такое число  $b > c$ , что  $f(b) < b$ . (Проверьте, что функция (5) удовлетворяет этим условиям.) Докажите, что уравнение (6) имеет единственный положи-

тельный корень  $x^*$  и что, приняв за  $x_0$  произвольное положительное число, мы получим итерационную последовательность  $x_0, x_1, x_2, \dots$ , сходящуюся к этому корню. Докажите также, что последовательность  $x_1, x_2, \dots$  монотонна.

11. Постройте итерационную последовательность (и изобразите соответствующую итерационную ломаную) а) для функции

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ при } x_0 = 2; \text{ б) для функции } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{25}{6}x + 3 \text{ при } x_0 = 3.$$

12. Для функции  $f(x) = x^2 + 3x - 3$  постройте итерационные ломаные, взяв а)  $x_0 = 1$ ; б)  $x_0 = 0,99$ ; в)  $x_0 = 1,01$ .

13. Постройте итерационные ломаные а) для функции  $f(x) = 2x - 1$  при  $x_0 = 1,125$ ; б) для функции  $f(x) = -1,5x + 6$  при  $x_0 = 2,5$ .

### III

Задачи 11–13 показывают, что метод итераций применим не для всякого уравнения вида (6). Однако имеется достаточно широкий класс функций, для которых этот метод является обоснованным (см. задачи 8, 10).

Практически процесс решения уравнения (6) по методу итераций (если он применим) оканчивается тогда, когда следующее приближение  $x_{n+1} = f(x_n)$  не отличается (с требуемой степенью точности) от предыдущего приближения  $x_n$ . Например, если мы ведем вычисления с тремя знаками после запятой, то итерационный процесс считается завершенным, если числа  $x_n$  и  $x_{n+1}$  (у каждого из которых выписываются только по три знака после запятой) совпадают. Полученное значение  $x_n = x_{n+1}$  и счи-

тается приближением искомого корня  $x^*$ . Обратите внимание: мы заканчиваем вычисления не потому, что уверены в хорошей точности найденного приближения  $x_n$ , а лишь в связи с тем, что (в рамках нашей точности вычислений) итерационный процесс больше ничего уже не может дать:  $x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = \dots$

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\sqrt{0,175x^2 - 0,00875x + 0,00011} + 0,58166x + 0,0105 = x. \quad (7)$$

Легко проверить, что функция  $f$ , стоящая в левой части этого уравнения, возрастает и непрерывна на отрезке  $[0; 10^5]$ , причем  $f(0) > 0$ ,  $f(10^5) \approx 99\,999 < 10^5$ . Следовательно, в силу результата задачи 8, метод итераций применить можно.

Будем проводить вычисления с точностью до 0,001, то есть будем сохранять у каждого значения  $x_1, x_2, \dots$  три цифры после запятой (округляя четвертую цифру). С помощью микрокалькулятора легко находим (при  $x_0 = 0$ ):

$$\begin{aligned} x_0 &= 0,000; \\ x_1 &= 0,021; \\ x_2 &= 0,025; \\ x_3 &= 0,026; \\ x_4 &= 0,027; \\ x_5 &= 0,027. \end{aligned}$$

Итерационный процесс завершился: в пределах принятой точности вычислений мы получили  $x^* \approx 0,027$ .

Чтобы выяснить, насколько хорошим является найденное приближение, посмотрим, что дает итерационный процесс при вычислениях с точностью до 0,0001; при этом в качестве  $x_0$  примем уже найденное в предыдущей серии вычислений значение 0,027. Мы находим (каждый раз округляя пятую цифру после запятой):

$$\begin{aligned} x_0 &= 0,0270; \\ x_1 &= 0,0274; \\ x_2 &= 0,0277; \\ x_3 &= 0,0280; \\ x_8 &= 0,0292. \end{aligned}$$

Последовательные приближения медленно, но неуклонно возрастают. Если у читателя хватит терпения сде-

лать еще несколько десятков (!) итераций, он, наконец, найдет установившееся значение (то есть доберется до приближения, на котором итерационный процесс останавливается):  $x^* \approx 0,1053$ . Ничего похожего на предыдущее приближение!

Если бы мы вздумали проводить вычисления с семью знаками после запятой (с помощью микрокалькулятора), то в результате проведения нескольких тысяч итераций мы бы остановились на значении  $x^* \approx 4,1890502$ . А «истину» (то есть значение корня  $x^*$  уравнения (7)) читатель легко найдет, если перенесет второе и третье слагаемое из левой части в правую, возведет в квадрат и решит получившееся квадратное уравнение:  $x^* = 4,1984362\dots$  (второй корень квадратного уравнения является посторонним для уравнения (7)). Как видите, даже микрокалькулятор при применении метода итераций к уравнению (7) дает только одну верную цифру после запятой!

Этот пример (конечно, специально подобранный) показывает, что при применении метода итераций нужно не «вслепую» останавливаться на том или ином приближении, а иметь точные средства оценки той ошибки, которую мы при этом допускаем. Увы, современная вычислительная математика далеко не всегда прибегает к оценке точности установившихся значений (особенно, при решении практических задач). Происходит это, прежде всего, потому, что «как правило» такие оценки не нужны, поскольку (при применении итерационных процессов к решению алгебраических, дифференциальных, операторных и других уравнений) установившиеся значения обычно бывают хорошими приближениями. Но где гарантия, что в данной конкретной задаче не встретятся «неприятности», подобные тем, о которых шла речь в рассмотренном выше примере? Такие гарантии может дать только математически обоснованная оценка совершаемой ошибки. Однако во многих задачах оценка ошибки затруднительна и требует порой более сложных вычислений (и даже теоретических исследований), чем само нахождение после-

довательных приближений — в этом состоит другая причина того, что при решении практических задач вычислители ограничиваются нахождением установившихся значений с помощью ЭВМ, производящих вычисления с достаточно большим числом знаков. Трудно сказать, что лучше: тратить дорогое машинное время на проверку точности решения каждой задачи или решать большее количество практических задач, получая «как правило» хорошую точность решения...

#### Задачи

14. Примените метод итераций к уравнению (6), где  $f(x) = 0,9999x + 0,0004$ . Докажите, что если итерационный процесс решения, проводимый с четырьмя знаками после запятой, останавливается в точке  $x_n$ , то ошибка приближения  $x^* \approx x_n$  примерно равна единице, то есть сомнительны не только знаки после запятой, но и целая часть приближения  $x_n$ . (Эти соображения и использованы при построении примера 1; в этом примере  $0,9999 < f'(x) < 1$  при  $x > 0,12$ .)

15. Пусть функция  $f$  удовлетворяет условиям  $f(a) > a$ ,  $f(b) < b$  и  $|f'(x)| < q < 1$  при  $x \in [a; b]$ . Тогда уравнение (6) имеет на отрезке  $[a; b]$  единственный корень  $x^*$ . Докажите, что при решении уравнения (6) методом итераций

$$|x_{n+1} - x_n| \leq |x_1 - x_0| \cdot q^n$$

$$|x^* - x_n| \leq |x_1 - x_0| \cdot \frac{q^n}{1 - q}$$

16. Примените эти оценки к функции (5).

17. Решите методом итераций уравнение  $0,6095 + 0,274 \sin x = x$  (пользуясь микрокалькулятором). После скольких итераций процесс останавливается? Сколько верных знаков имеет полученное приближение?

18. Решите методом итераций уравнение  $\sqrt{1+x} = x$ , взяв  $x_0 = 0$ . Сравните полученный результат с корнем, получаемым при «обычном» решении этого иррационального уравнения. Докажите, что  $n$ -е приближение имеет вид

$$x_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots + \sqrt{1}}}} \quad (n \text{ единиц}).$$

#### IV

В задачах 8, 10 и 15 указаны условия, при выполнении которых метод итераций заведомо приводит к цели. А как быть, если эти условия не выполнены?

Пусть рассматривается уравнение  $g(x) = 0$ , где  $g(a) < 0$ ,  $g(b) > 0$ , функция  $g$  имеет на отрезке  $[a; b]$  непрерывную производную и  $g'(x) > 0$  при  $x \in [a; b]$ . Таким образом, функция  $g$  возрастает на отрезке  $[a; b]$ , и уравнение  $g(x) = 0$  имеет

на этом отрезке единственный корень  $x^*$ . Чтобы сделать применимым метод итераций, обозначим через  $p_1$  и  $p_2$  такие положительные числа, что  $p_1 < g'(x) < p_2$  на отрезке  $[a; b]$ . Заменяем теперь уравнение  $g(x) = 0$  равносильным ему уравнением  $x + a \cdot g(x) = x$ , где  $a$  подберем так, чтобы функция

$$f(x) = x + a \cdot g(x)$$

удовлетворяла условиям задачи 15. (Проверьте, что это будет, например, при  $a = -\frac{2}{p_1 + p_2}$ ,  $q = \frac{p_2 - p_1}{p_2 + p_1}$ .) Таким образом, мы заменили уравнение  $g(x) = 0$  на равносильное уравнение  $f(x) = x$ , к которому метод итераций уже применим.

Если  $g'(x) < 0$  при  $x \in [a; b]$  применим тот же прием. (В этом случае  $p_1$  и  $p_2$  отрицательны и  $a = -\frac{2}{p_1 + p_2} > 0$ .)

Пример 2. Решим методом итераций уравнение

$$x^2 - x = \cos x.$$

При  $0 < x < 1$  левая часть неположительна, а правая положительна; поэтому на отрезке  $[0; 1]$  корней нет. Переписав уравнение в виде

$$x^2 - x - \cos x = 0,$$

замечаем, что функция  $g$ , стоящая в левой части, имеет производную  $g'(x) = 2x - 1 + \sin x$ , которая при  $x > 1$  положительна, то есть  $g$  возрастает на  $[1; +\infty[$ . Поскольку  $g(1) < 0$  и  $g(2) > 0$ , на луче  $[1; +\infty[$  имеется ровно один корень рассматриваемого уравнения, причем он расположен на отрезке  $[1, 2]$ . С помощью микрокалькулятора находим  $g(1) = -0,54\dots$ ;  $g(1,1) = -0,34\dots$ ;  $g(1,2) = -0,12\dots$ ;  $g(1,3) = 0,12\dots$ . Таким образом, искомый корень  $x^*$  расположен на отрезке  $[1,2; 1,3]$ . Функция  $g'$  возрастает на  $[1; +\infty[$  (поскольку ее производная  $g''(x) = 2 + \cos x$  положительна). Следовательно,  $p_1 < g'(x) < p_2$  на отрезке  $[1,2; 1,3]$ , где  $p_1 = g'(1,2) \approx 2,332$ ,  $p_2 = g'(1,3) \approx 2,564$ . Таким образом,  $a = -\frac{2}{p_1 + p_2} \approx -0,401$ . Взяв для простоты  $a = -0,4$ , получаем уравнение (Окончание см. на с. 37)



## Первоапрельский калейдоскоп

А. А. БОРОВОЙ

Приближается первое апреля — день веселых розыгрышей, мистификаций и маленьких обманов. Лаборатории «Кванта» тоже захотелось приобщиться к этому празднику. Довольно долго мы раздумывали над тем, как деликатнее обмануть читателя, и, наконец, решили действовать по рецепту: чтобы тебе не поверили, надо говорить чистую правду. Поэтому, если наш рассказ покажется вам по меньшей мере странным, не полнитесь и проверьте сказанное на опыте, прежде чем кричать: «С первым апреля! Никому не верю!».

### Знакомый всем сифон

Это незатейливое приспособление для перекачивания жидкости из одного сосуда в другой известно с незапамятных времен. Различные конструкции сифонов изобретал еще Герон Александрийский, живший две тысячи лет тому назад.

Как же устроен простейший сифон? Представьте, что вам надо перелить жидкость из одного сосуда в другой, расположенный ниже первого (рис. 1). По каким-то причинам наклонять сосуд и лить жидкость через край неудобно. В таком случае берется гибкая трубка и опускается одним концом в верхний сосуд, другим — в нижний. Это и есть сифон (не случайно слово «сифон» в переводе с греческого означает «трубка», «насос»). Чтобы он начал дей-

ствовать, его необходимо предварительно заполнить жидкостью. Для этого чаще всего используют простой (но не всегда приятный) способ: опустив в жидкость один конец трубки, ртом отсасывают из нее воздух, зажимают другой конец и быстро погружают его во второй сосуд.

Таким образом, для работы сифона надо:

- хотя бы один сосуд;
- предварительно наполненную жидкостью трубку, у которой «выливное» колено опущено ниже уровня жидкости в сосуде;
- атмосферное давление.

Хотите верить, хотите нет, но почти все, что перечислено, на самом деле вовсе не обязательно.

Начнем с атмосферного давления. Действительно ли оно нужно для работы сифона? «Совершенно необходимо, — утверждают многие, — ведь оно подпирает жидкость, не дает ей разорваться внутри трубки на перегибе». В своем роде это утверждение — первоапрельская шутка. Если поместить сифон под колокол воздушного насоса, он будет работать и без атмосферного давления, лишь бы только жидкость не вскипела и пузырьки не перекрыли сечение трубки. Столб жидкости не разрывается из-за сил молекулярного сцепления.

Теперь о предварительном наполнении трубки жидкостью. Некоторые трубки заполнять не приходится — они это делают сами.

Изготовьте трубку, изображенную на рисунке 2. Лучшее всего из стекла

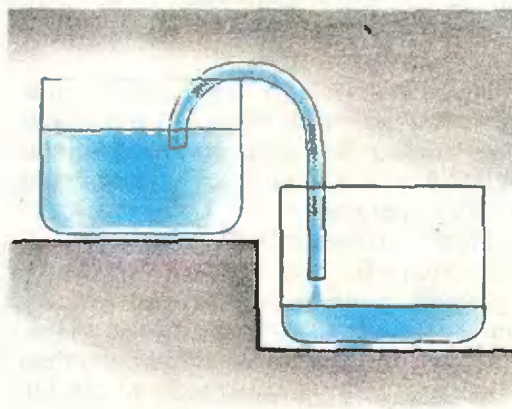


Рис. 1.



(правда это трудно), но можно и из жести. Закройте узкий конец пальцем, а широкий опустите в верхний сосуд и резко отпустите палец. Сифон начнет переливать воду. Почему так получилось, понять совсем нетрудно. Попробуйте это сделать сами.

Существует и другой тип «само-наполняющихся» трубок — фитили. Если сосуды соединить вместо трубки фитилем, жидкость, хотя и медленно, будет перетекать по нему. Здесь вступают «в игру» капиллярные явления.

Остается сказать, что и сама трубка требуется не всегда. Так, в книге Дж. Уокера «Физический фейерверк» можно прочитать про «самоперетекающие» жидкости: «Некоторые жидкости, например жидкий полиэтилен, могут сами вытекать из сосуда, если только дать толчок действию такого «сифона», вылив часть жидкости...». Поскольку нет никакой уверенности в том, что у вас дома хранится жидкий полиэтилен, советуем испытать другие жидкости. Возможно, вам удастся добиться нужного эффекта.

Заметим еще, что существует одна поистине замечательная жидкость, которая может вытекать из сосуда, сама поднимаясь по его стенкам. Это жидкий гелий, точнее — гелий II. Так называют эту жидкость при температуре ниже 2,17 К, когда у нее появляются совершенно удивительные свойства. И прежде всего — сверхтекучесть, то есть полное отсутствие вязкости\*). Вот что пишут об этом явлении Л. Д. Ландау и А. И. Китайгородский в книге «Физика для всех»:

«... Гелий II способен сам «вылезать» из стакана или пробирки, куда он налит.

На рисунке 3 показана схема проведения этого опыта. Пробирку с гелием II помещают в дьюаре над гелиевой ванной. «Ни с того ни с сего» гелий поднимается по стенке пробирки в виде тончайшей совершенно незаметной пленки и перетекает через край; с доньшка пробирки капают капли.

\*Вязкость жидкости обусловлена трением, возникающим между соседними слоями жидкости при их относительном движении.

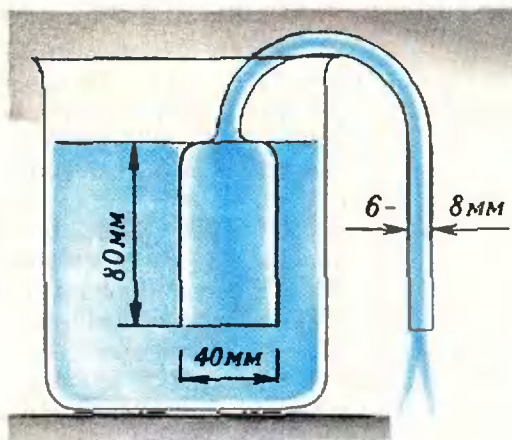


Рис. 2.

Надо вспомнить, что благодаря капиллярным силам ... молекулы всякой жидкости, смачивающей стенку сосуда, взбираются вверх по этой стенке и образуют на ней тончайшую пленку, ширина которой по порядку величины равна одной миллионной доле сантиметра. Эта пленочка незаметна для глаза, да и вообще ничем себя не проявляет для обычной вязкой жидкости.

Картина совершенно меняется, если мы имеем дело с лишенным вязкости гелием... Через борт стакана или пробирки поверхностная пленка образует сифон, по которому гелий переливается через край сосуда.»

Понять поведение жидкого гелия можно только с точки зрения квантовой механики.

Вот видите, сколько неожиданностей таит в себе обычный сифон.

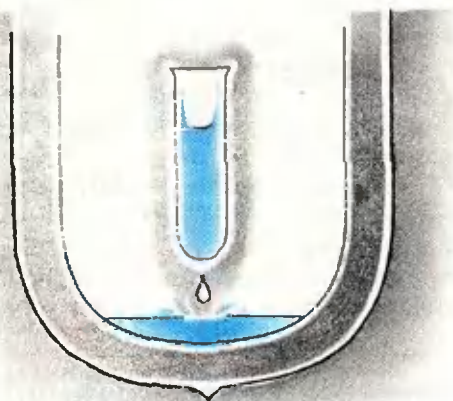


Рис. 3.

### Оптические иллюзии

«Если на клетке слона прочтешь надпись «буйвол», не верь глазам своим», — так советовал действительный статский советник, директор Пробринной Палатки Козьма Петрович Прутков.

Мудрый человек был не совсем прав. В основном, глазам своим можно и должно верить, поскольку наибольшее количество информации об окружающем мире человек получает именно с помощью зрения. Правда, иногда эта информация представляется совершенно неправдоподобной, а иногда и вовсе оказывается неверной.

Сделаем совсем простой опыт. Сдвинем большой и указательный пальцы так, чтобы между ними образовалась щель, и посмотрим сквозь нее на свет лампы. Когда щель станет совсем узкой, в центре появится черная полоска. Что это — обман зрения?

Чуть-чуть усложним опыт. Для этого разгладим кусочек алюминиевой фольги (например, обертку от шоколадной конфеты) и сделаем в ней бритвой разрез длиной 4—5 см. Если теперь посмотреть одним глазом через этот разрез на свет матовой лампочки, в центре тоже можно увидеть черную полоску. Кроме нее будут видны и более слабые боковые темные полосы.

Опыты действительно очень простые, а объяснить их далеко не просто. Принято считать, что происхождение темных полос связано с дифракцией света — огибанием волнами препятствий. (Возможно, однако, что немалую роль играет здесь и физиологический эффект.)

Но когда же глаза действительно обманывают нас? Почему это происходит? Какие цели при этом преследует природа?\*)

Сразу скажем, что обманы следует отнести не за счет оптической системы глаза, а за счет того, что нервная система, мозг человека «подправляют», «домысливают» мно-

гие образы. Так из плоского рисунка возникает объемный конус (рис. 4) или на границе черного и белого появляются контрастные полосы, которые как бы пытаются сделать более резкими переходы освещенности.

Чтобы наблюдать эти полосы (называемые полосами Маха), сделаем следующий опыт. Диск из белого картона с нанесенным на нем черной тушью рисунком (рис. 5) приведем в быстрое вращение. Естественно ожидать увидеть в центре белый круг, затем серый и, наконец, черный с относительно плавными переходами освещенности. Однако в действительности картина представляется несколько иной: центральный белый круг опоясывает узкое яркое светлое кольцо, а на границе темного кольца видна черная полоса максимальной густоты. Это и есть полосы Маха.

В некоторых случаях их появление очень полезно. Например, они дают нам возможность читать, четко воспринимая отдельные буквы. Белизна бумаги рядом с буквами кажется ярче, а границы букв — чернее, чем это есть в действительности.

Раз уж речь зашла о вращающихся дисках и связанных с ними оптических обманах, нельзя не вспомнить еще один диск — так называемый диск Бенхэма. С его помощью можно получать красный, голубой и зеленый цвета при смешивании только белого и черного цветов. Про этот эффект часто пишут в различных популярных изданиях (см., например, журнал «Наука и жизнь»: 1970, № 11 или 1971, № 10), поскольку его очень легко наблюдать.

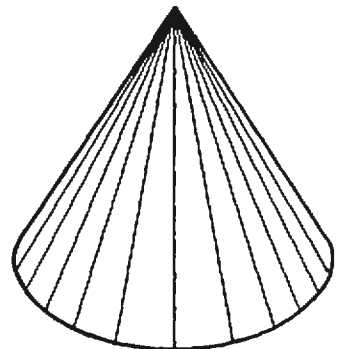


Рис. 4.

\*) Тем, кто всерьез заинтересуется этими и аналогичными вопросами, связанными с физикой зрения, советуем прочитать книгу С. И. В а в и л о в а «Глаз и Солнце». Совсем недавно появилось последнее издание этой замечательной книги.

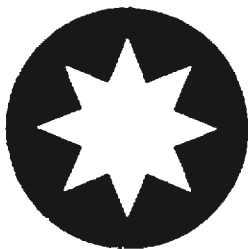


Рис. 5.



Рис. 6.

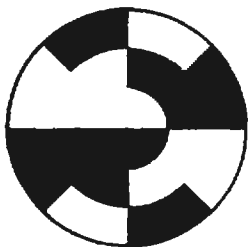


Рис. 7.

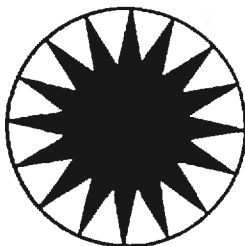


Рис. 8.

Из белого картона или плотной белой бумаги вырежем диск радиусом 3—4 см, раскрасим его черной тушью так, как показано на рисунке 6 и приведем во вращение со скоростью от 50 до 200 оборотов в минуту. Можно вращать его вручную, проткнув в центре спицей, или используя какие-либо домашние приспособления, например дрель. Однако лучше всего закрепить

диск на оси микромотора для электрических моделей и изменять скорость вращения с помощью реостата.

Теперь ярко осветим диск лампой и некоторое время будем внимательно вглядываться в него. Тогда вдоль обода диска можно увидеть красные линии, а около его центра — синие. Изменим направление вращения и увидим, что изменился и порядок цветов: снаружи будут синие круги, у центра — красные.

Варианты окраски диска возможны самые разные, например, такие, как показано на рисунках 7 и 8. Скорость вращения диска тоже можно менять по своему усмотрению.

В некоторых экспериментах диск освещался светом определенной длины волны (например, натриевой лампой) — красные, синие и зеленые цветовые круги не пропадали.

Как же объяснить этот опыт? Предлагались различные гипотезы, многие из них оказались несостоятельными. Сейчас можно прочесть следующее объяснение: чередование белого и черного цветов перед глазами рождает нервные импульсы, которые поступают в мозг; определенная частота этих импульсов и вызывает ощущение определенного цвета.

## Наша обложка

### Электрический разряд в лаборатории

Фотография, воспроизведенная на первой странице обложки, сделана в учебной лаборатории кафедры техники высоких напряжений Московского ордена Ленина и ордена Октябрьской Революции энергетического институ-

та, одного из ведущих технических вузов страны.

На фотографии изображена часть лабораторной установки, с помощью которой отрабатываются методы защиты высоковольтного оборудования. В частности, на ней исследуется зависимость напряжения, вызывающего ту или иную форму газового разряда, от емкости разрядного промежутка.

На переднем плане виден электрод в форме полушария. За ним находится стеклянная пластина, еще дальше — ме-

таллическая заземленная плоскость. Между электродом и плоскостью создают высокое напряжение. Возникающий электрический разряд развивается по поверхности стекла, проходя последовательно разные стадии (сначала коронный, затем искровой и, наконец, дуговой разряд). На фотографии запечатлен процесс перехода коронного разряда в искровой.



## Равномерное движение

М. И. БАШМАКОВ

Мы здесь рассматриваем *прямолинейное равномерное движение*, то есть движение по фиксированной прямой с постоянной скоростью. Выбрав направление на этой прямой, можно записать уравнение движения в виде

$$s = vt, \quad (1)$$

где  $t$  — время движения,  $s$  и  $v$  — проекции векторов перемещения и скорости на выбранную ось. Тогда  $s$  и  $v$  могут принимать как положительные, так и отрицательные значения.

### Средняя скорость

Формулу (1) часто записывают в виде  $v = s/t$ . Соотношение  $v = s/t$  имеет смысл и для неравномерного движения (движения с переменной скоростью), но в этом случае  $v$  является по определению *средней скоростью* движения.

В качестве разминки, постарайтесь, не составляя уравнений, ответить на следующие вопросы:

1. Одна машина шла первую половину пути со скоростью 30 км/час, а вторую — со скоростью 50 км/ч. Вторая машина шла весь путь со скоростью 40 км/ч. Какая из машин затратила на всю дорогу меньше времени?

2. Одна машина первую половину времени движения шла со скоростью 30 км/ч, а вторую — со скоростью 50 км/ч. Вторая машина двигалась столько же времени, сколько и пер-

вая, причем ее скорость была все время 40 км/ч. Какая из машин прошла большее расстояние?

(Ответы указаны в подписи к рисунку 1).

Возможные ошибки при ответах на вопросы о равномерном движении связаны с тем, что мы иногда путаем характер зависимости между двумя из величин  $s$ ,  $v$  и  $t$  при фиксированной третьей.

При фиксированном перемещении зависимость между временем и скоростью — обратно пропорциональная. При этом, если перемещение  $2s > 0$  состоит из двух одинаковых участков  $s$ , которые проходятся с постоянными (но разными) скоростями, первый за время  $t_1$ , второй за время  $t_2$ , то средняя скорость  $v = 2s / (t_1 + t_2)$  меньше среднего арифметического скоростей на каждом из участков, равного

$$\frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{s}{t_1} + \frac{s}{t_2} \right) = \frac{s(t_1 + t_2)}{2t_1 t_2}.$$

(Действительно, разность

$$\frac{s(t_1 + t_2)}{2t_1 t_2} - \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{s(t_1 - t_2)^2}{2t_1 t_2 (t_1 + t_2)}$$

очевидно, положительна, то есть  $v < \frac{v_1 + v_2}{2}$ ).

Так, в задаче 1 средняя скорость первой машины меньше, чем  $(30 + 50)/2$  км/час = 40 км/ч, значит вторая машина (шедшая со скоростью 40 км/ч) приедет быстрее.

При фиксированном времени движения зависимость между перемещением и скоростью — прямо пропорциональная. Поэтому если в течение двух одинаковых отрезков времени  $t$  происходит равномерное движение с разными скоростями  $v_1$  и  $v_2$ , то средняя скорость  $v$  на всем пути будет равна среднему арифметическому скоростей на отдельных участках. (Действительно,

$$v = \frac{s_1 + s_2}{2t} = \frac{1}{2} \left( \frac{s_1}{t} + \frac{s_2}{t} \right) = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Так, в задаче 2 средняя скорость первой машины равна скорости второй  $((50 + 30)/2 = 40)$  и поэтому они за одинаковое время совершают одинаковое перемещение.

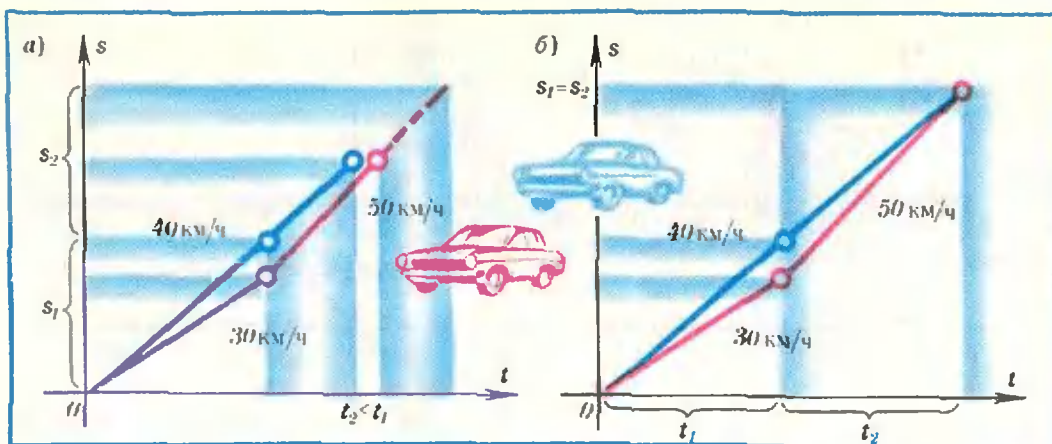


Рис. 1. а) При  $s_1 = s_2$  вторая машина затратила меньше времени.

б) При  $t_1 = t_2$  обе машины прошли одинаковое расстояние.

Полезно изображать движение графически, рассматривая перемещение как функцию от времени:  $s = s(t)$ . Для первых двух задач это сделано на рисунке 1, а, б.

В заключении этого раздела самостоятельно решите следующую задачу:

3. Пусть  $s_i$ ,  $t_i$  — положительные числа ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Докажите, что дробь

$$\frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{t_1 + t_2 + \dots + t_n}$$

лежит между наименьшей и наибольшей из дробей

$$\frac{s_1}{t_1}, \frac{s_2}{t_2}, \dots, \frac{s_n}{t_n}.$$

Сформулируйте результат в терминах средних скоростей.

### Относительное движение

К совсем простым задачам, часто неверно решаемым, относится задача

4. Когда катер затрачивает на движение туда и обратно на данное расстояние меньше времени — при движении по реке (с постоянной скоростью течения) или в стоячей воде?

Кажется очевидным, что время будет одинаковым — ведь при движении по реке туда и обратно скорость течения в одну сторону прибавляется к скорости катера, а в другую — вычитается, так что изменения в скорости компенсируют друг друга. Однако это не так. На самом деле катер обернется быстрее в стоячей воде!

Графики движения катера показаны на рисунке 2.

Даже если вы правильно угадали ответ, очень советуем аккуратно обо-

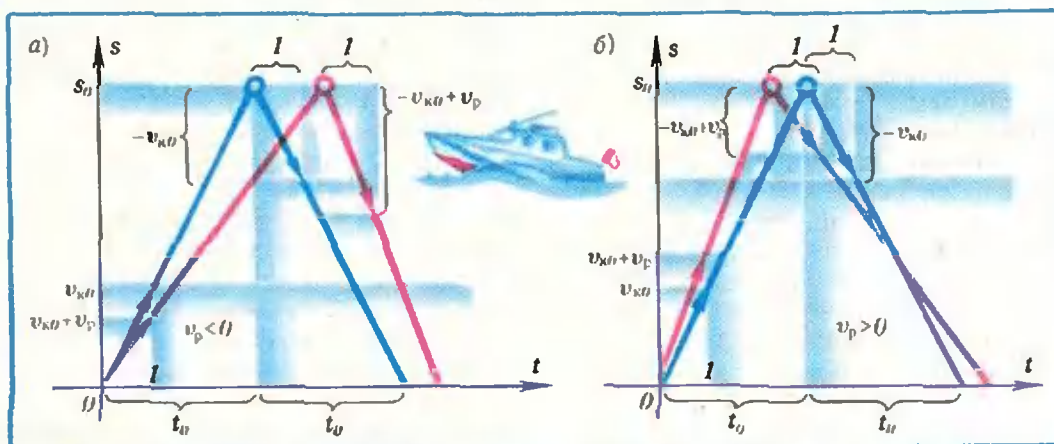


Рис. 2. а) Катер сначала идет против течения.

б) Катер сначала идет по течению.

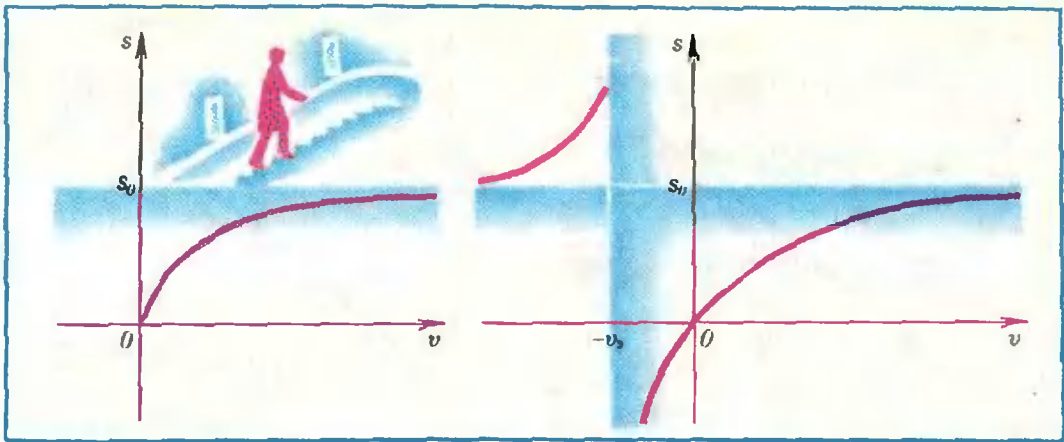


Рис. 3.

Рис. 4.

снова его; кроме формулы (1), вам потребуется обычная формула сложения скоростей:

$$v_k = v_{k0} + v_p,$$

утверждающая, что скорость  $v_k$  катера в реке равна сумме его скорости в стоячей воде  $v_{k0}$  и скорости реки  $v_p$ .

В задаче с катером мы столкнулись с наложением двух равномерных движений — движения катера и движения воды в реке. С такой ситуацией связано много интересных и неожиданных задач. Попробуйте без вычислений решить такую задачу:

5. По движущемуся вверх эскалатору в направлении движения идет человек и считает пройденные ступени. Скорость человека относительно неподвижного эскалатора равна  $v$ . Как выглядит график зависимости числа  $s$  пройденных им ступеней от скорости  $v$ ?

Прежде чем рисовать график, ответьте для себя на вопрос: возрастает или убывает функция с ростом скорости  $v$ ? Грубый эскиз графика изображен на рисунке 3.

Давайте изучим ситуацию более подробно. Обозначим общее число ступеней (неподвижного) эскалатора через  $s_0$ , скорость движения эскалатора через  $v_0$ , скорость подъема человека через  $v$ , число ступеней, пройденных человеком, через  $s$ . Эти величины связаны соотношением

$$\frac{s}{v} = \frac{s_0 - s}{v_0}$$

(мы приравнивали время подъема человека и время подъема эскалатора).

Отсюда находим

$$s = \frac{s_0 v}{v + v_0} = \frac{s_0 + s_0 v_0 - s_0 v_0}{v + v_0} = s_0 - \frac{s_0 v_0}{v + v_0}.$$

Начертим график функции

$$s = s_0 - \frac{s_0 v_0}{v + v_0}, \quad (2)$$

считая, что  $v$  может принимать любые (в том числе и отрицательные) значения. График изображен на рисунке 4.

Глядя на график (и вспоминая условия задачи), ответьте на следующие вопросы:

а) Что происходит с  $s$  при неограниченно возрастающем  $v$ ?

б) Какой смысл имеют отрицательные значения  $v$ ?

в) Как можно объяснить, что  $s$  неограниченно возрастает, если  $v$  приближается к  $(-v_0)$ ? Представьте себе, что вы встали на первую ступеньку движущегося вверх эскалатора и начали спускаться вниз с той же скоростью, что и сам эскалатор. Далеко ли вы уйдете? А сколько ступеней вы можете пройти?

г) Как изменится график функции (2), если одновременно заменить  $v$  на  $kv$  и  $v_0$  на  $kv_0$ ?

Ответ на последний вопрос — график не изменяется — означает, что число пройденных ступенек зависит только от отношения скоростей человека и эскалатора.

В заключении этого раздела предлагаем еще две задачи.

6. Человек, поднимаясь по эскалатору, насчитал 100 ступеней, а двигаясь с вдвое большей скоростью,

насчитал 120 ступеней. Сколько ступеней на неподвижном эскалаторе?

7. Человека, идущего вдоль трамвайных путей, каждые 7 минут обгоняет трамвай, а каждые 5 минут трамвай проходит навстречу. Как часто ходят трамваи?

### Кусочно-линейное движение

Простота формулы  $s = vt$  обусловлена тем, что за начало отсчета выбрана точка на прямой, в которой находится движущееся тело в момент времени  $t = 0$ . Если сдвинуть начало отсчета на  $s_0$  (влево или вправо, в зависимости от знака), уравнение равномерного движения примет вид

$$s = s_0 + vt. \quad (3)$$

На графике (рис. 5) движение изображается прямой (пересекающей ось  $s$  в точке  $s_0$ ) наклон которой зависит от скорости  $v$ . Положительный наклон (острый угол) соответствует положительным скоростям (то есть движению в положительном направлении оси  $s$ ), отрицательный — движению в обратном направлении.

Формула (3) полезна в тех случаях, когда мы на едином графике изображаем *кусочно-линейное* движение, то есть движение, которое является равномерным (но с разными скоростями) на соседних отрезках времени. На графике такое движение изображается в виде ломанной линии, каждое звено которой задается функцией вида (3) на соответствующем отрезке времени (рис. 6, а). Если же изобразить скорость такого движения как функцию времени  $v = v(t)$ , то получим *кусочно-постоянную* (ступенчатую) функцию (рис. 6, б). Связь между графиками кусочно-постоянной функции скорости и кусочно-линейной функции пути хорошо видна на рисунке 6.

Мы теперь воспользуемся этими соображениями, чтобы решить более трудную (олимпиадную) задачу, на первый взгляд не имеющую отношения к равномерному движению.

8. По кругу выписано 10 чисел, сумма которых равна нулю. Мы начинаем с одного из них, например,  $a_1$ , и последовательно складываем их по кругу (скажем, по часовой стрелке).

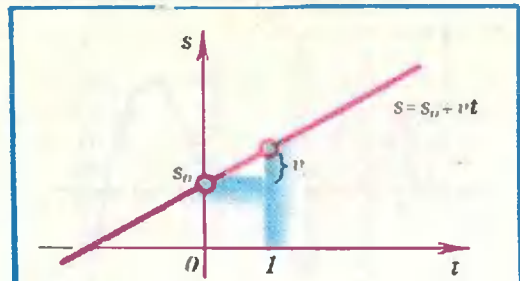


Рис. 5.

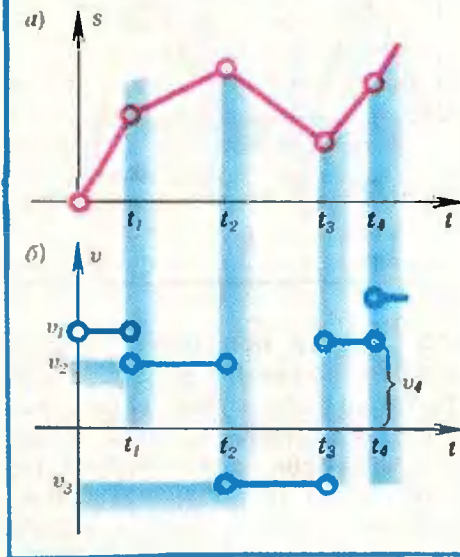


Рис. 6.

Получим суммы  $a_1$ ,  $a_1 + a_2$ ,  $a_1 + a_2 + a_3$ , ...,  $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 0$ . Докажите, что можно так выбрать начальное число, что все эти суммы будут неотрицательны.

Для решения представим себе, что  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$  — скорости движения на десяти равных отрезках времени, которые примем за единицу.

Считая, что в начальный момент путь равен нулю, получим, что путь  $s$  через единицу времени будет равен  $a_1$ , через две единицы —  $a_1 + a_2$ , и т. д. График такой функции изобразится ломаной, начинающейся и кончающейся на оси  $t$ , так как по условию  $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 0$  (рис. 7, а). Можно считать, что движение повторяется периодически — через десять единиц времени скорость снова равна  $a_1$  и т. д. График движения представится в виде периодически повторяющейся 10-звенной ломаной (рис. 7, а). Начало отсчета в другой точке означает

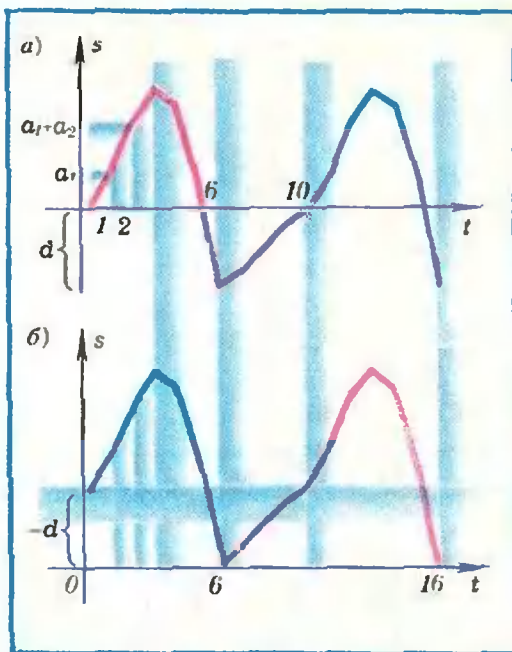


Рис. 7.

перенос начала координат в одну из вершин ломаной. Что означает неотрицательность сумм? Она означает, что все вершины ломаной лежат выше оси времени (или на ней). Сначала мы выбрали начальную точку произвольно (рис. 7, а). Теперь ясно, что если перенести начало координат в вершину ломаной, для которой значение наименьшее, и начать

отсчет от этой точки, то последовательные суммы будут неотрицательны (рис. 7, б).

9. На кольцевой дороге расположено 10 пунктов, в каждом из которых шофер может получить 20 литров бензина. На все кольцо ему нужно все 200 литров. Доказать, что он может так выбрать начальный пункт движения, что забирая по пути бензин, он сможет проехать все кольцо. Ограничений на объем бензобака нет.

10\*. Несколько человек наблюдало за неравномерно ползущей улиткой. Каждый наблюдатель следил за улиткой одну минуту и отметил, что средняя скорость улитки на наблюдаемом участке равна 1 см/мин. Улитка ползла 6 минут и при этом в каждый момент времени за ней кто-нибудь наблюдал. Какое наименьшее и какое наибольшее расстояние могла проползти улитка?

Указание. Легко сообразить, что если улитка ползет равномерно, то за 6 минут она проползет 6 см. Попробуйте сначала заставить двигаться улитку и так организовать наблюдение за ней, чтобы она проползла при соблюдении условий задачи больше 6 см и меньше 6 см. «Сдвинувшись» с 6 см, вам проще будет получить правильный ответ.

## Эффект Мёссбауэра

(Начало см. на с. 7)

магнитные и электрические поля во многих соединениях. Это позволило глубже понять механизм таких взаимодействий и сделать еще один шаг в познании внутренней структуры твердого тела.

В заключение рассмотрим еще одно интересное применение эффекта Мёссбауэра. Оказывается, при движении фотонов против сил тяготения происходит уменьшение их энергии и, следовательно, частоты света (увеличение длины волны), то есть наблюдается так называемое «красное» смещение спектра. При движении фотонов «по полю» должно наблюдаться «фиолетовое» смещение. Ис-

пользование эффекта Мёссбауэра позволило осуществить чрезвычайно тонкий красивый опыт по определению изменения энергии  $\gamma$ -фотонов при их движении в гравитационном поле.

В опыте Р. Паунда и Г. Ребки источник и поглотитель — железо  $^{57}\text{Fe}$  — располагались в башне на высоте  $H=22,6$  м друг от друга: источник наверху, а поглотитель с детектором у основания башни. Затем их меняли местами. Как показывает расчет, который мы здесь опускаем, в этом случае относительное изменение частоты квантов  $\approx 2,5 \times 10^{-15}$ . Эффект Мёссбауэра позволил заметить даже такое небольшое изменение частоты.

Можно с уверенностью сказать, что среди последних научных открытий эффект Мёссбауэра — одно из наиболее плодотворных.



## Проводящая сфера в задачах по электростатике

С. А. ЮРСКАЯ

Сферическая поверхность — одна из самых простых в геометрии. Ближкую к ней поверхность в природе имеют многие тела: Солнце и Земля, капли дождя и ягоды рябины, и даже электроны в нашем воображении рисуются маленькими шариками.

Тела сферической формы — частые гости и в задачах по электростатике. Нередко это связано с тем, что сферическая симметрия позволяет значительно упростить многие математические вычисления без ущерба для физического содержания.

Прежде чем приступить к разбору конкретных задач, обсудим некоторые общие вопросы электростатики.

В изолированной системе тел, какие бы изменения в ней не происходили, алгебраическая сумма положительных и отрицательных зарядов остается постоянной.

Электрические взаимодействия можно описать количественно. В простейшем случае двух точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , находящихся в вакууме на расстоянии  $r$  друг от друга, сила взаимодействия между ними определяется законом Кулона

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

где  $k$  — численный коэффициент, зависящий от выбора системы единиц. В СИ его записывают в виде  $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$  (здесь  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная). Неточечные заряды, конечно, тоже действуют друг на друга, но их сила взаимодействия

уже не определяется приведенной формулой. В таком случае заряженные тела следует мысленно разбить на точечные заряды, найти силу взаимодействия для каждой пары зарядов, а затем все полученные значения сложить.

Как известно, электрические заряды взаимодействуют через электрическое поле, которое они создают. Для количественного описания этого поля служат силовая и энергетическая характеристики: напряженность поля и его потенциал. Напряженность  $\vec{E}$  поля в данной точке равна силе, действующей на единичный положительный заряд, помещенный в эту точку, а потенциал  $\phi$  данной точки равен работе, совершаемой полем по перемещению единичного положительного заряда из этой точки в бесконечность, или, что то же самое — работе внешних сил по перемещению единичного положительного заряда из бесконечности в данную точку. Под «бесконечностью» понимают область пространства, настолько удаленную от всех электрических зарядов, что поле в ней отсутствует.

Из приведенного определения потенциала ясно, что практическое значение имеет только разность потенциалов между рассматриваемыми точками, а не абсолютное значение потенциалов точек. Поэтому начало отсчета потенциала можно выбирать произвольно. Как правило, за нуль принимают потенциал точки на бесконечности или потенциал любой точки, соединенной проводником с Землей (то есть заземленной точки). В связи с этим поговорим немного о заземлении тел.

Земля представляет собой проводящее тело огромных размеров. Она обладает значительным отрицательным электрическим зарядом. Равный ему положительный объемный заряд содержится в атмосфере, в слое высотой порядка десятков километров. У поверхности Земли напряженность поля  $\approx 130$  В/м. Считая Землю проводящим шаром и зная напряженность поля у поверхности, можно оценить величину заряда Земли:

$Q_3 \approx 6 \cdot 10^6$  Кл и ее потенциал:  $\varphi_3 \approx \approx 8 \cdot 10^8$  В. Термин «тело заземлено» означает, что оно соединено проводником с Землей. При таком соединении заряд и потенциал Земли практически не меняются, хотя какой-то заряд может перейти с тела на Землю или наоборот. Поскольку Земля по сравнению с любым земным телом простирается до бесконечности и потенциал ее постоянен, условились этот потенциал принимать за нуль. Таким образом, заземлить проводник означает сообщить ему нулевой потенциал.

Для поля точечного заряда модуль напряженности

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

и потенциал

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Все опытные факты говорят о том, что электрические поля обладают замечательным свойством: электрическое поле системы источников является суммой полей отдельных источников. Другими словами, поле каждого фиксированного заряда не зависит от присутствия других зарядов. Чтобы найти результирующую напряженность в некоторой точке, достаточно векторно сложить напряженности полей, созданных в этой точке отдельными зарядами. Для нахождения суммарного потенциала достаточно в данной точке взять алгебраическую сумму потенциалов полей, созданных каждым зарядом в отдельности, при этом точка нулевого потенциала должна быть, конечно, общей для всех зарядов. Такой принцип нахождения результирующего поля называется принципом суперпозиции.

Электрическое поле часто изображают графически либо с помощью линий напряженности (силовых линий), либо с помощью эквипотенциальных поверхностей. Силовые линии всегда перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям, поэтому, зная одну картину, можно легко получить другую.

Под словом «проводник» обычно понимают проводящее, то есть содер-

жащее свободные заряды, тело любых размеров и формы, чаще всего металлическое. Внутри проводника, помещенного в электрическое поле, напряженность поля всегда равна нулю, а все точки проводника имеют один и тот же потенциал. Отсутствие поля в проводнике вовсе не означает, что внешнее поле в него не проникает. Совсем наоборот, благодаря проникновению поля в проводник, на его поверхности появляются заряды, поле которых внутри проводника компенсирует внешнее поле. Таким образом, свободные заряды в проводнике могут располагаться только на его поверхности.

Для характеристики способности проводников накапливать электрические заряды вводится специальная физическая величина — электроемкость. Большой электроемкостью обладает конденсатор — система двух проводников (разделенных тонким слоем диэлектрика), заряженных равными по модулю, но разноименными зарядами. Емкостью конденсатора  $C$  называют отношение заряда  $q$  одного из проводников к разности потенциалов  $\Delta\varphi$  между ними:  $C = q/(\Delta\varphi)$ . Она зависит от размеров, формы и взаимного расположения проводников, а также от электрических свойств диэлектрика.

А теперь обратимся к решению конкретных задач.

**Задача 1.** *Металлическая тонкостенная сфера радиуса  $R$  равномерно заряжена с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Покажите, что напряженность поля в любой точке внутри сферы равна нулю. Найдите зависимость напряженности и потенциала от расстояния  $r$  (от центра сферы) внутри и вне сферы. Постройте соответствующие графики.*

Вначале покажем, что напряженность поля внутри сферы равна нулю. Для этого возьмем произвольную точку  $A$  и построим два симметричных конуса с одинаковыми малыми углами при вершине, как показано на рисунке 1. На поверхности сферы конусы вырезают малые сферические участки  $S_1$  и  $S_2$ , которые можно считать плоскими. Конусы подобны друг другу, так как углы при вершине равны. Из подобия следует, что пло-

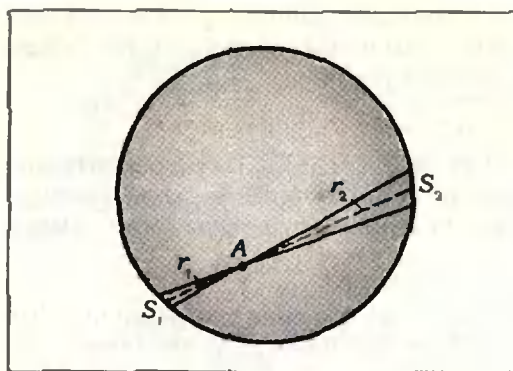


Рис. 1.

щадки оснований относятся как квадраты высот. Эти высоты будем считать равными расстояниям  $r_1$  и  $r_2$  от точки  $A$  до площадок  $S_1$  и  $S_2$  соответственно. Таким образом,

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}, \text{ или } \frac{S_1}{r_1^2} = \frac{S_2}{r_2^2}.$$

Заряды площадок  $S_1$  и  $S_2$  равны  $q_1 = \sigma S_1$  и  $q_2 = \sigma S_2$ . Считая эти заряды точечными, найдем напряженность  $E$ , создаваемую ими в точке  $A$ :

$$E = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} - \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{S_1}{r_1^2} - \frac{S_2}{r_2^2} \right) = 0.$$

Очевидно, что на такие пары участков можно разбить всю сферическую поверхность. Следовательно, напряженность поля в точке  $A$ , создаваемая всей сферой, равна нулю. Это справедливо и для любой другой точки внутри сферы.

Обратимся теперь ко второй части задачи. Выделим на поверхности сферы малый участок  $LM$  такой, что его можно считать плоским (рис. 2). Напряженность поля вблизи него можно представить как суперпозицию двух полей: поля  $E_1$ , создаваемого самим участком по обе стороны от заряженной поверхности, и поля  $E_2$ , создаваемого зарядами всей

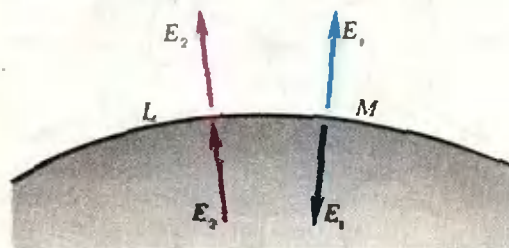


Рис. 2.

остальной части сферы. Так как участок плоский, для него справедлива формула для напряженности поля равномерно заряженной плоскости:  $E_1 = \sigma / (2\epsilon_0)$ . Выше мы показали, что напряженность поля внутри сферы равна нулю. Это означает, что напряженности  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  внутри сферы противоположны по направлению и равны по модулю:  $\vec{E}_1 = -\vec{E}_2$ ,  $E_1 = E_2$ . Вне сферы у ее поверхности поля  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  одинаковы по направлению, так что суммарное поле

$$E = E_1 + E_2 = 2E_1 = \sigma / \epsilon_0.$$

Если заряд сферы равен  $q$ , то  $\sigma = q / (4\pi R^2)$ . Тогда формула для напряженности поля у поверхности сферы имеет вид

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2},$$

то есть совпадает с формулой напряженности поля точечного заряда  $q$ , помещенного в центр сферы. Везде далее вне сферы поле равномерно заряженной сферы совпадает с полем точечного заряда, расположенного в центре сферы.

Итак: внутри сферы поля нет, то есть при  $r < R$   $E = 0$ ; вне сферы, то есть при  $r > R$ , напряженность изменяется по закону  $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ; на поверхности сферы, когда  $r = R$ , электрическое поле испытывает скачок  $\Delta E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ . Зависимость  $E = E(r)$  показана на рисунке 3, а.

Рассмотрим изменение потенциала  $\varphi$  в зависимости от расстояния  $r$ . Вне сферы (при  $r > R$ ) потенциал такой же, как у точечного заряда, помещенного в центре сферы:  $\varphi = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ . При  $r = R$  потенциал достигает значения  $\varphi = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$  и затем остается постоянным при всех  $r < R$ .

Кое-кто удивится: «Как же так? Поле внутри сферы равно нулю, а потенциал нулю не равен?». Это можно легко понять, если вспомнить определение потенциала. Перемещая единичный положительный заряд из бесконечности до поверхности сферы, мы совершаем определенную работу, при перемещении же заряда внутри

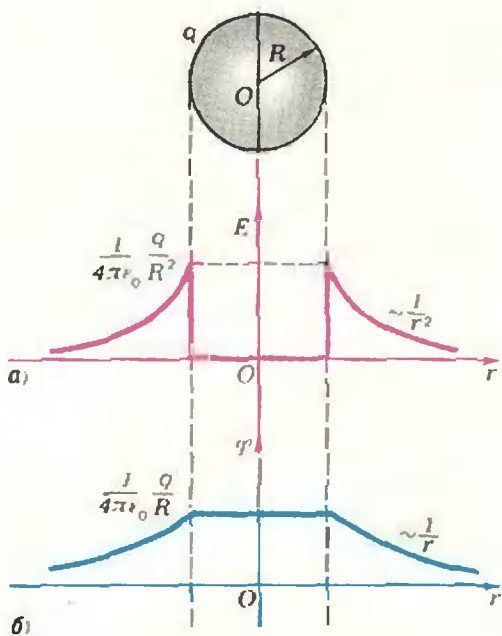


Рис. 3.

сферы, где поля нет, работа не совершается, то есть к уже совершенной работе ничего не добавляется. Это и означает, что для любой точки внутри сферы потенциал такой же, как на ее поверхности. Зависимость  $\varphi = \varphi(r)$  показана на рисунке 3, б.

**Задача 2.** Точечный заряд  $+q$  помещен в центр незаряженной проводящей сферы, внутренний радиус которой  $a$ , а внешний  $b$ . Где и какие заряды при этом возникают? Изобразите картину линий напряженности и потенциала электрического поля от расстояния  $r$  до центра сферы.

Изобразите также картину линий напряженности внутри и вне сферы при смещении заряда  $+q$  в произвольную точку внутри сферы.

При внесении заряда  $+q$  на внутренней и внешней поверхностях сферы индуцируются заряды. Пусть они равны  $q_1$  и  $q_2$  соответственно. Известно, что силовые линии электростатического поля (линии напряженности) всегда начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных. Поскольку поля в проводящей толще стенок сферы нет, то нет там и силовых линий. Внутри сферы силовые линии начинаются на точечном заряде  $q$  и оканчиваются на наведенных зарядах  $q_1$

внутренней поверхности. Отсюда следует, что полный заряд внутри сферы равен нулю:

$$q + q_1 = 0, \text{ и } q_1 = -q.$$

В свою очередь, из электронейтральности проводящей сферы для заряда на ее внешней поверхности имеем

$$q_2 = -q_1 = q.$$

В силу симметрии индуцированные заряды распределены по обеим поверхностям сферы равномерно. Картина силовых линий имеет вид, приведенный на рисунке 4.

Для нахождения напряженности и потенциала поля, создаваемого всей системой зарядов, применим принцип суперпозиции. Поле вне сферы совпадает с суммарным полем точечных зарядов  $q$ ,  $q_1$  и  $q_2$ , помещенных в центр сферы. Так как наведенные заряды равны по величине и противоположны по знаку:  $q_1 = -q_2$ , суммарное поле создается только точечным зарядом  $q$ :

$$\text{при } r > b \quad E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

В толще сферы поле отсутствует, напряженность равна нулю, а потенциал одинаков во всех точках и равен потенциалу на внешней поверхности сферы:

$$\text{при } a < r < b \quad E = 0, \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b}.$$

Внутри сферы поле также совпадает с полем только точечного заряда  $q$  (поскольку заряды  $q_1$  и  $q_2$  внутри

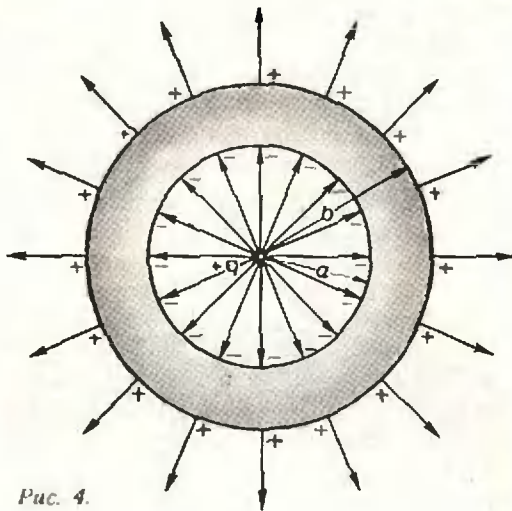


Рис. 4.

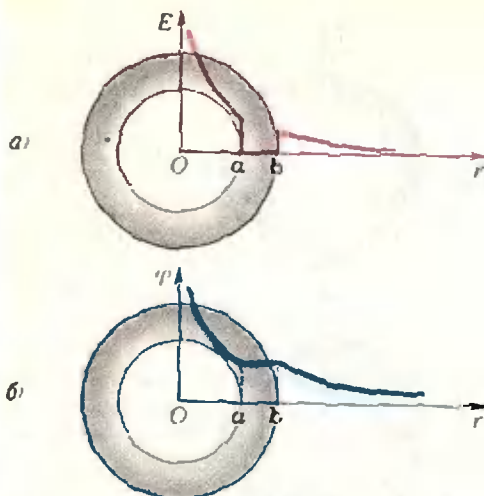


Рис. 5.

сферы поля не создают; см. задачу 1):

$$\text{при } r < a \quad E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Графики зависимостей  $E = E(r)$  и  $\varphi = \varphi(r)$  показаны на рисунках 5, а и б.

Рассмотрим теперь последний вопрос задачи. При смещении заряда  $+q$  из центра сферы в какую-то другую точку величина индуцированных зарядов, очевидно, останется прежней, но изменится плотность распределения зарядов на внутренней поверхности. Отрицательные заряды перераспределятся так, чтобы поле в толще стенок оставалось равным нулю. Плотность этих зарядов будет больше в том месте внутренней поверхности, которое расположено ближе к заряду  $+q$ . В этой же области внутри сферы будет больше и густота силовых линий. Поскольку сфера представляет собой поверхность равного потенциала, силовые линии искривляются так, чтобы подойти к эквипотенциальной поверхности под прямым углом. Заряды на внешней поверхности никакого отношения к полю внутри сферы не имеют; там их суммарный вклад равен нулю. «Внешние» заряды по-прежнему распределены равномерно. Таким образом, поле вне сферы остается без изменений; оно не зависит от расположения заряда  $+q$  внутри сферы. Картина силовых линий в этом случае изображена на рисунке 6.

Задача 3. Две концентрические металлические сферы радиусов  $R_1$  и

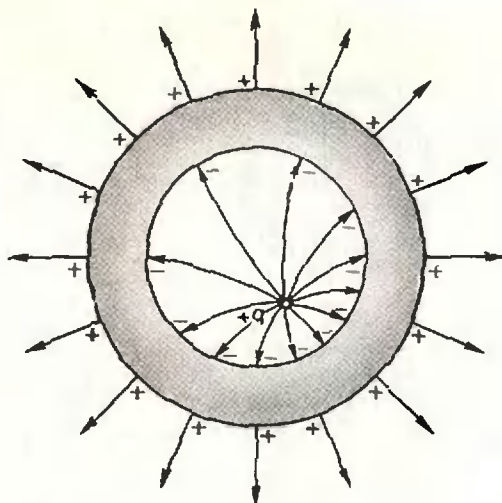


Рис. 6.

$R_2$  имеют заряды  $q_1$  и  $q_2$ . Нарисуйте графики зависимости напряженности и потенциала от расстояния  $r$  до центра системы.

Рассмотрите случай сферического конденсатора ( $q_1 = -q_2$ ) и найдите его емкость.

Пусть  $q_1 > q_2$ . Тогда

$$\text{при } 0 < r < R_1 \quad \begin{cases} E = 0, \\ \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{R_2} \right); \end{cases}$$

$$\text{при } R_1 < r < R_2 \quad \begin{cases} E = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \\ \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{R_2} \right); \end{cases}$$

$$\text{при } r > R_2 \quad \begin{cases} E = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \\ \varphi = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r}. \end{cases}$$

Соответствующие графики показаны на рисунках 7, а и б.

Сферический конденсатор имеет заряды обкладок, равные по величине и противоположные по знаку:  $q_1 = -q_2$ . Поэтому напряженность и потенциал во внешней области обращаются в нуль, а между обкладками (при  $R_1 < r < R_2$ ) имеют вид

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Зависимости  $E = E(r)$  и  $\varphi = \varphi(r)$  для этого случая представлены на рисунках 8, а и б. Для определения емкости сферического конденсатора найдем разность потенциалов на его об-

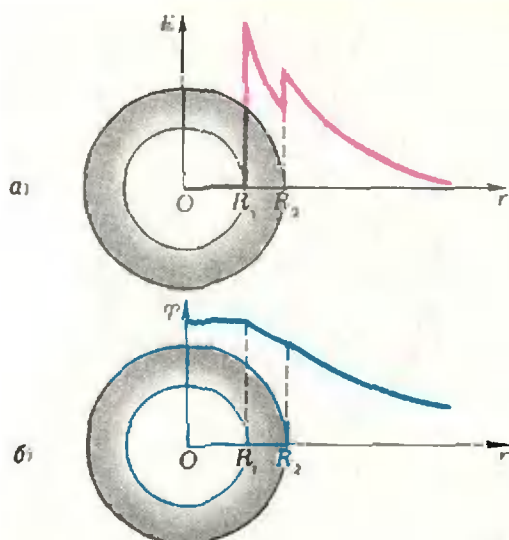


Рис. 7.

кладках. Так как потенциал внешней сферы равен нулю, разность потенциалов

$$\Delta\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Отсюда емкость конденсатора

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

**Задача 4.** Незаряженный металлический шар радиуса  $r$  окружат concentric сферической проводящей оболочкой радиуса  $R$  с потенциалом  $\varphi$ . Чему станет равен потенциал оболочки, если шар заземлить (рис. 9)?

До заземления потенциал оболочки  $\varphi$  создается некоторым зарядом  $q$ :  $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$ . Поскольку шар не заряжен, он имеет тот же самый потенциал. После заземления потенциал шара обратился в нуль. Это означает, что на нем появился ка-

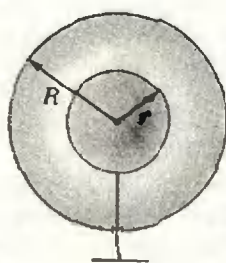


Рис. 9.

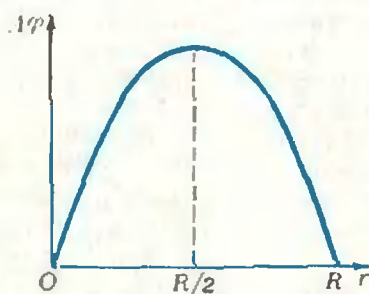


Рис. 10.

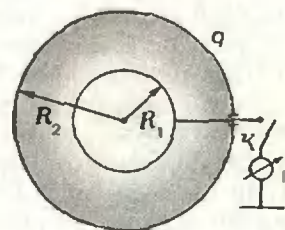


Рис. 11.

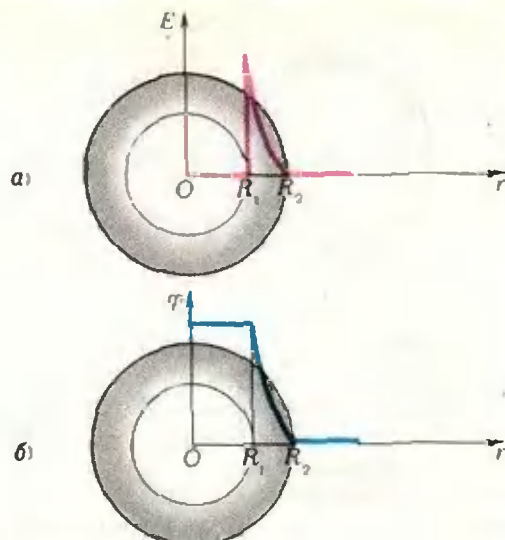


Рис. 8.

кой-то заряд. Его величину  $q'$  найдем из условия, что суммарный потенциал, создаваемый зарядами  $q$  и  $q'$ , на поверхности шара равен нулю:

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r} = 0, \text{ и } q' = -\frac{r}{R} q.$$

Теперь легко найти новый потенциал оболочки, который создается теми же зарядами  $q$  и  $q'$ :

$$\varphi' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q(R-r)}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{R-r}{R} \varphi.$$

**Задача 5.** Пробой в воздухе наступает в электрическом поле с напряженностью  $E_{\text{к}} = 3 \cdot 10^4 \text{ В/см}$ . Имеется сферический конденсатор с воздушным зазором, наружная обкладка которого имеет радиус  $R = 4 \text{ см}$ , а радиус внутренней обкладки подбирается таким, чтобы конденсатор не пробивался при возможно большем значении разности потенциалов. Определите эту максимальную разность потенциалов.

Для сферического конденсатора разность потенциалов между его обкладками равна

$$\Delta\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right).$$

Если радиус  $R$  внешней обкладки фиксирован, то  $\Delta\varphi$  зависит как от радиуса  $r$  внутренней обкладки, так и от заряда  $q$  конденсатора. В свою очередь, заряд, который еще можно поместить на конденсатор, не допуская его пробоя, определяется как напряженностью  $E_m$  поля пробоя, так и радиусом  $r$ :  $E_m = q / (4\pi\epsilon_0 r^2)$ . Отсюда заряд  $q = 4\pi\epsilon_0 E_m r^2$  и разность потенциалов между обкладками

$$\Delta\varphi = E_m r - \frac{E_m}{R} r^2.$$

Соответствующий график приведен на рисунке 10. Из графика видно, что максимальное значение разности потенциалов достигается при  $r = R/2$ :

$$\Delta\varphi_m = \frac{E_m R}{4} = 3 \cdot 10^4 \text{ В.}$$

## Метод итераций

(Начало см. на с. 16)

$$x - 0,4g(x) = x, \text{ то есть} \\ -0,4x^2 + 1,4x + 0,4 \cos x = x.$$

Обозначая левую часть через  $f(x)$  и принимая  $x_0 = 1,2$ , находим по формуле (4) последовательные приближения:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1,2000000; \\ x_1 &= 1,2489431; \\ x_2 &= 1,2511068; \\ x_3 &= 1,2511509; \\ x_4 &= 1,2511518; \\ x_5 &= 1,2511518. \end{aligned}$$

Итак,  $x^* \approx 1,2511518$ . Чтобы оценить точность приближения, заметим, что, согласно задаче 15, мы имеем (считая  $x_4$  начальным приближением и полагая  $n = 1$ )

$$|x^* - x_5| \leq |x_5 - x_4| \cdot \frac{q}{1-q}.$$

## Упражнения

1. Заряд  $q$  находится на расстоянии  $r$  от центра заземленной проводящей сферы радиуса  $R$  ( $r > R$ ). Определите величину индуцированного на сфере заряда.

2. На расстоянии  $d$  от поверхности медного незаряженного шарика радиуса  $R$  поместили заряд  $q$ . Чему равен потенциал шарика?

3. Две концентрические тонкостенные стальные сферы имеют радиусы  $R_1$  и  $R_2$  (рис. 11). Внешняя сфера несет заряд  $q$ . Внутренняя сфера не заряжена. Какой заряд протечет через гальванометр  $G$ , если замкнуть ключ  $K$ ?

4. В центре металлической тонкостенной сферы радиуса  $R$ , несущей заряд  $-2q$ , помещают заряд  $+q$ . Найдите напряженность поля и потенциал на произвольном расстоянии  $r$  от центра сферы. Нарисуйте графики зависимости  $E = E(r)$  и  $\varphi = \varphi(r)$ .

5. Металлический шар заряжается от электростатической машины при помощи пластины, которая после каждого соприкосновения с шаром снова заряжается от машины до заряда  $Q$ . Определите максимальный заряд шара, если  $q$  — его заряд после первого касания.

6. Два небольших проводящих шара радиуса  $r$  расположены на расстоянии  $R$  друг от друга ( $R \gg r$ ). Шары поочередно на некоторое время заземляют. Определите заряд, оставшийся на шаре, который был заземлен вторым, если первоначально потенциалы шаров равны  $\varphi$ .

Так как  $q = \frac{p_2 - p_1}{p_2 + p_1} \approx 0,0407$ ,  $\frac{q}{1-q} \approx 0,05$ ; кроме того,  $|x_5 - x_4| < 10^{-7}$ , поскольку у  $x_4$  и  $x_5$  совпадают 7 знаков после запятой. Таким образом,  $|x^* - x_5| < 0,05 \cdot 10^{-7} = 0,5 \cdot 10^{-8}$ , и поэтому все найденные знаки корня  $x^*$  — верные.

Проверьте самостоятельно, что на промежутке  $] -\infty; 0 ]$  рассматриваемое уравнение тоже имеет один корень  $x^{**} \approx -0,5500093$ .

### Задачи

19. Докажите, что если числа  $g(a)$  и  $g(b)$  имеют разные знаки и производная  $g'$  сохраняет один и тот же знак на отрезке  $[a; b]$ , причем  $p_1 < |g'(x)| < p_2 < 2p_1$ , то при решении уравнения  $g(x) = 0$  указанным методом с помощью микрокалькулятора ошибка установленного приближения меньше  $0,5 \cdot 10^{-7}$ .

20. Докажите, что квадратное уравнение  $x^2 - px - q = 0$  можно при  $p > 0$ ,  $q > 0$  решать методом итераций, записав это уравнение в равносильном виде (6), где  $f(x) = \pm \sqrt{px + q}$  (знак «плюс» соответствует одному корню, знак «минус» — другому). Решите этим способом уравнение  $x^2 - 5x - 7 = 0$ .

21. Решите кубические уравнения а)  $2x^3 - 3x^2 - 12x + 5 = 0$ , б)  $2x^3 - 3x^2 - 12x - 11 = 0$ . Укажите промежутки возрастания и убывания, и значение левой части в этих точках.



## Задачи

1. Лёня и Коля пошли в гости к Боре, но забыли номер его квартиры. Коля помнил, что если прибавить к этому номеру 10, то получится точный куб, а Лёня помнил, что если вычесть из номера квартиры число 10, то получится точный квадрат. В какой квартире живет Боря?

2. Маше нужны были для шитья нитки № 20. У нее не было таких ниток, но были нитки № 40 и № 10. Что ей делать? (Номер нитки определяется как отношение длины нитки в метрах к ее массе в граммах, то есть он численно равен длине в метрах 1 грамма ниток.)

3. Надутый воздухом воздушный шарик взвесили на весах. Потом надули его еще сильнее и вновь взвесили. Одинаковы ли будут показания весов?

4. Какое число нужно поставить вместо знака «?» в последовательность 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20, 22, 24, 31, 100, ?, 10 000?

5. Вершина  $A$  треугольника  $ABC$  соединена отрезком с точкой  $M$  на противоположной стороне треугольника. Вершина  $B$  соединена с точкой  $K$  на противоположной вершине  $B$  стороне треугольника. Могут ли отрезки  $AM$  и  $BK$  пересекаясь делиться пополам?



Эти задачи нам предложили  
 И. Б. Васильев, А. Н. Виленкин,  
 С. В. Казаков, Л. З. Карелин, А. П. Савин





## У нас в гостях — математический радиокружок

С. Л. ТАБАЧНИКОВ

*Сегодня в гостях у «Кванта» профессор Сигма и его постоянные помощники: мальчик Альфа и девочка Бета. Они участники радиопередачи «Математический радиокружок Сигма». Занятия этого необычного радиокружка происходят раз в месяц в одну из сред в 16—00 по первой всесоюзной радиопрограмме. А сейчас профессор Сигма, Альфа и Бета знакомят читателей «Кванта» с темой одного из занятий своего математического радиокружка.*

**Сигма.** Мы начнем с задачи из «Кванта для младших школьников» (№ 1 за 1981 г.): В Советском Союзе население составляет 260 млн. человек. Казалось бы, на карте СССР с масштабом 1:1 000 000 (в одном сантиметре 10 километров) может поместиться в миллион раз меньше людей, чем на всей территории страны, то есть может поместить-

ся 260 человек. Однако, из опыта известно, что и пяти десяткам человек это будет нелегко сделать. Почему?

**Альфа.** Да я эту задачу сразу решил! Ведь люди живут в многоэтажных домах, значит на единицу земной поверхности приходится не один, а несколько человек.

**Бета.** А по-моему, Альфа, ты не прав. Возьмем, например, такое густо населенное здание, как здание школы. Первого сентября все, кто находятся в этом здании, выходят во двор на линейку, посвященную началу учебного года. Также и жители других домов могут разместиться во дворах и на улицах — им даже не будет тесно. А еще остаются степи, пустыни, тундра!

**Сигма.** Бета права. Тебе, Альфа, придется поискать другое объяснение. А пока попробуй сравнить площади квадратов со сторонами 2 и 1.

**Альфа.** Ну как же — площадь первого будет в четыре раза больше, чем площадь второго. И вообще, при уменьшении размеров любой фигуры в  $N$  раз, ее площадь уменьшается в  $N^2$  раз. Не зря площадь измеряется в квадратных единицах!

**Бета.** Теперь все ясно! Человек занимает на Земле определенную часть площади. При изображении на карте с масштабом 1:1 000 000 площади всех фигур уменьшаются в  $(1\,000\,000)^2$  раз, то есть, в  $10^{12}$  раз. Именно на это число, а не на миллион и нужно разделить население страны. При этом получится около одной четырехтысячной части человека и никакой парадокс не возникает.

**Сигма.** Очень хорошо, ребята, вы во всем разобрались. Мне остается лишь добавить, что при решении задачи вы воспользовались так называемыми *соображениями подобия*. Тема нашего занятия как раз — соображения подобия.

А теперь решим еще одну задачу. В два одинаковых заполненных водой ведра засыпают дробь: в первое ведро крупную, а во второе мелкую. В каждое ведро насыпают столько дробин, сколько помещается. Из какого ведра выльется больше воды?

**Альфа.** Ну конечно, из второго, в него насыпают мелкую дробь!

**Бета.** Ну и что?

**Альфа.** Раз дробь мелкая, то и промежутки между отдельными дробинками будут маленькими. Поэтому мелкая дробь уляжется плотнее.

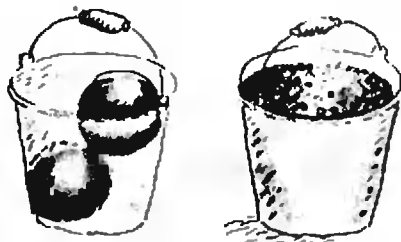
**Бета.** Хотя промежутки между крупными дробинками и большие, зато самих промежутков будет меньше. Так что еще не известно, какая дробь уляжется плотнее: мелкая или крупная.

**Сигма.** Действительно, надо выяснить, какая дробь уляжется плотнее: мелкая или крупная. Давайте для простоты предположим, что отношение диаметров дробинок равно двум. Теперь посмотрим на ведро с мелкой дробью в бинокль с двухкратным увеличением. Что мы увидим?

**Альфа.** Мы увидим ведро, заполненное крупной дробью. При двухкратном увеличении и объем ведра, и объем каждой дробинки увеличится в 8 раз ( $8=2^3$ ), а их отношение останется неизменным. Значит плотность мелкой и крупной дробин будет одинаковой.

**Бета.** Получается, что из ведер вытечет одинаковое количество воды. Вот никогда бы не подумала!

**Сигма.** Тем не менее, это правильный ответ. И получить его нам помогли соображения подобия. Хочу только внести небольшое уточнение: наш ответ верен, если размеры дробинок намного меньше размеров ведра. Если же дробинки крупные (или ведро совсем маленькое), то наши рассуждения теряют силу.



Причина в том, что мы пренебрегли нарушением правильного расположения дробинок вблизи стенок ведра. А если дробинки большие, то влиянием стенок ведра пренебречь уже нельзя.

**Бета.** Профессор Сигма, а какие еще задачи можно решать с помощью соображений подобия?

**Сигма.** Соображения подобия оказались очень полезными в биологии. А впервые их применил к изучению строения животных великий итальянский ученый XVI века Галилео Галилей. Галилея занимал вопрос, как могло бы выглядеть очень крупное сухопутное животное, например гигантская собака. В одной из книг Галилея можно даже найти рисунки костей такой воображаемой собаки.

**Альфа.** А о чем здесь думать? Увеличить скелет обычной собаки раз в 10 и все!

**Сигма.** Нет, все не так просто. Прочность костей пропорциональна площади их поперечного сечения. При увеличении размеров в 10 раз эта площадь увеличится в 100 ( $=10^2$ ) раз. Значит, кости гигантской собаки смогут выдержать стократную нагрузку. Но в том то и дело, что нагрузка возрастет не в 100, а в 1000 раз. Ведь нагрузка пропорциональна массе животного, то есть его объему. Объем же увеличится в 1000 ( $=10^3$ ) раза. Вот и получается,

что гигантская собака не сможет выдержать собственный вес.

**Бета.** Но ведь живут же на Земле очень крупные животные: слоны, носороги...

**Сигма.** Да, но ноги у них относительно толще, чем у мелких животных. А вот киты и вовсе не смогли бы жить на суше\*).

**Альфа.** Я читаю сейчас «Путешествие Гулливера». Гулливер попадает в страну лилипутов, которые в 12 раз меньше него, и в страну великанов, которые больше него тоже в 12 раз. Что же, Дж. Свифт не учел того, что было известно уже Галилею?

**Сигма.** Автор «Путешествия Гулливера» старался пользоваться образами подобия. Например, описывая обед Гулливера или пошив его костюма. В других местах, однако, Свифт не обошелся без ошибок — как в истории с яблоком, попавшем в Гулливера в стране великанов.

**Бета.** А я это все знаю — прочитала в «Кванте» в статье «Из книг Я. И. Перельмана»\*\*).

**Альфа.** Профессор Сигма, а почему муравьи могут переносить тяжести, во много раз больше собственного веса, а человек не может?

**Сигма.** Известно, что сила мышц определяется только площадью их поперечного сечения и не зависит от их длины. Площадь же пропорциональна квадрату линейных размеров, а вес — кубу. Значит, на единицу веса у муравья приходится большая сила, чем у человека, и, тем более, чем у слона. Этим же соотношением между площадью и объемом объясняется то, что муравьи не могли бы быть теплокровными.

**Бета.** Почему?

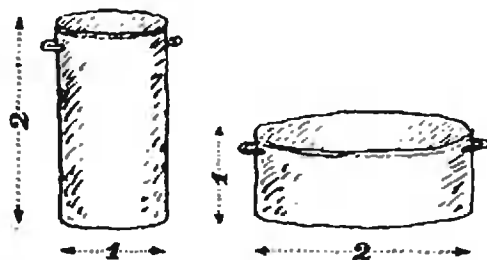
**Сигма.** Количество тепла, вырабатываемого в организме, пропорционально объему тела. А вот количество тепла, излучаемого в окружающее пространство, пропорционально площади поверхности — ведь теплообмен происходит через кожу. Как мы видели, на единицу объема у маленьких животных приходится большая площадь поверхности, чем

у крупных. Поэтому маленьким животным труднее бороться с холодом\*).

**Бета.** Теперь понятно, почему у маленьких синиц перья длиннее ширины тела, а у больших ворон — короче. Синицам нужна шуба теплее — ведь они намного меньше.

**Сигма.** А теперь задачи для самостоятельного решения.

1. В какую кастрюлю можно налить больше воды?



2. После семи стирок кусок мыла уменьшился вдвое, то есть вдвое уменьшились его длина, ширина и высота. На сколько еще стирок его хватит?

3. Килограмм какой картошки быстрее чистить и почему: мелкой или крупной?

4. Великан и лилипут устроили соревнование: кто больше подтянется на перекладине. Кто выиграет и почему?

5. Гигантские динозавры предпочитали проводить время, стоя в неглубоких водоемах. Почему?

6. Животным пустыни приходится иногда долго не пить. Какое животное может не пить дольше — крупное или мелкое?

7. Почему человек ест 3 раза в день, а, например, хомячки жуют почти постоянно?

И, наконец, два вопроса посложнее:

8. Как зависит от размеров животного высота его прыжка?

(Ответ: практически, не зависит.)

9. Объясните подробно, почему для мелких дробинok нарушение их правильного расположения вдоль стенок мало влияет на отношение объемов дробинok и ведра.

\*) См. статью Н. Родиной «Архимедова сила и киты», «Квант», 1982, № 8.

\*\* ) «Квант», 1982, № 11.

\*) Соответствующий расчет можно посмотреть в «Кванте», 1981, № 4, с. 11.

# Победители конкурса «Кванта»

Ежегодно наш журнал проводит конкурс среди школьников по решению задач из Задачника «Кванта». В соответствии с решением оргкомитета Всесоюзной олимпиады школьников победители этого конкурса получают право участвовать сразу в четвертом (республиканском) туре Всесоюзной олимпиады.

Ниже публикуется список победителей конкурса «Кванта» 1982 года, получивших право участвовать в республиканских олимпиадах 1983 года. Все они награждаются также книгами серии «Библиотечка «Квант» с автографами авторов.

## Математика

В. АЛИВЕРДИЕВ — Баку, шк.-инт. № 1, 10 кл.  
 В. АРАБИДЗЕ — Тбилиси, ФМШ им. В. М. Комарова, 10 кл.  
 А. БЕРЕНШТЕЙН — Москва, с. ш. № 1140, 10 кл.  
 А. БИРГЕР — Иваново, с. ш. № 6, 8 кл.  
 В. БУЛАВАС — Паневежис, с. ш. им. Ю. Бальчикониса, 11 кл.  
 Г. ВИННЕР — Свердловск, с. ш. № 9, 10 кл.  
 А. ВИНОГРАДОВ — ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.  
 М. ГАРАЕВ — Физули, с. ш. № 2, 9 кл.  
 М. ГОРБУНОВ — Минск, с. ш. № 19, 10 кл.  
 А. ДЕЙНЕКА — Винница, с. ш. № 32, 10 кл.  
 А. ДОБРИН — Киев, с. ш. № 45, 10 кл.  
 О. ЕРОШКИН — Днепропетровск, с. ш. № 15, 10 кл.  
 М. ЗАПЛЕТНИ — Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.  
 К. ЗЫКОВ — Москва, с. ш. № 57, 10 кл.  
 А. ИВЧЕНКО — Могилев-Подольский, с. ш. № 1, 9 кл.  
 Ю. КАКУЛОВ — Цалка, с. ш. № 3, 10 кл.  
 А. КАРПОВИЧ — Киев, с. ш. № 39, 10 кл.  
 Д. КОРШУНОВ — Новосибирск, с. ш. № 25, 10 кл.  
 К. КОХАСЬ — Ленинград, с. ш. № 239, 10 кл.  
 Р. МИСЯВИЧЮС — дер. Повнлауская Лит. ССР, Науяместская с. ш., 10 кл.  
 Ф. НАЗАРОВ — Ленинград, с. ш. № 239, 9 кл.  
 Л. ОРИДРОГА — Донецк, с. ш. № 64, 9 кл.  
 А. РОДИОНОВ — Москва, с. ш. № 444, 10 кл.  
 Л. РУДЫЙ — Кировск, с. ш. № 6, 10 кл.  
 В. САДОВСКИЙ — Ташкент, с. ш. № 71, 10 кл.  
 А. СВЕРИДОВ — ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.  
 С. СТРУКОВ — Воронеж, с. ш. № 85, 9 кл.  
 С. ТИПЦОВ — ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.  
 В. ХРЫЧИКОВ — Севастополь, с. ш. № 24, 9 кл.  
 У. ЭММУС — п. Ныцим ЭССР, Нюсская с. ш., 11 кл.  
 С. ЮРОВСКИЙ — ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.

## Физика

Э. БАГДАСАРЯН — Баку, с. ш. № 46, 9 кл.  
 Г. БАРАНОВ — Донецк, с. ш. № 17, 10 кл.  
 А. ДУНАЕВСКИЙ — Киев, с. ш. № 39, 10 кл.  
 М. ДЬЯЧКОВ — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 10 кл.  
 С. ЕФИМОВ — Баку, с. ш. № 91, 10 кл.  
 Р. ЖЯМАЙТИС — Вильнюс, с. ш. № 9, 11 кл.  
 Ю. ЗВЕГИНЦЕВ — Харьков, с. ш. № 116, 10 кл.  
 М. ЗИМАНОВ — Алма-Ата, РФМШ, 9 кл.  
 И. КАЛИНОВСКИЙ — Киев, с. ш. № 145, 8 кл.  
 Е. КАНЦЫПЕР — Таллин, с. ш. № 15, 10 кл.  
 С. КАСТЕЛЛИ — Болград, с. ш. № 1, 10 кл.  
 А. КОРЧАГИН — Красноармейск, с. ш. № 2, 10 кл.  
 Г. ЛАНДСБЕРГ — п. Протвино Московской обл., с. ш. № 1, 10 кл.  
 О. ЛОПИН — Фрунзе, с. ш. № 61, 10 кл.  
 Д. МАКАРОВ — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 9 кл.  
 К. МАКАРЧУК — Киев, с. ш. № 145, 8 кл.  
 А. МАЛАЙ — Каушаны, с. ш. № 4, 10 кл.  
 В. МОРОЗ — Минск, с. ш. № 16, 10 кл.  
 С. МУСАЕВ — Баку, с. ш. № 91, 10 кл.  
 М. ПУСТИЛЬНИК — Свердловск, с. ш. № 9, 10 кл.  
 М. РОЗЕНБЕРГ — Ленинград, с. ш. № 30, 10 кл.  
 В. РОМАШИН — Донецк, с. ш. № 17, 10 кл.  
 А. РЫЛЯКОВ — Саратов, с. ш. № 13, 10 кл.  
 Ф. СЕРЖЕНКО — Запорожье, с. ш. № 28, 10 кл.  
 М. СКОРИК — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.  
 В. ФЕЛЬДМАН — Саратов, с. ш. № 13, 10 кл.  
 И. ШОЯХЕТ — Ташкент, с. ш. № 71, 10 кл.

# Задачник «Кванта»

## Задачи

М791—М795; Ф803—Ф807

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 мая 1983 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 3 — 83» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М791, М792» или «Ф803». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

**М791.** Пете подарили микрокалькулятор, на котором можно выполнять следующие операции: по любым данным числам  $x$  и  $y$  вычислить  $x+y$ ,  $x-y$ ,  $x+1$  и  $1/x$  (при  $x \neq 0$ ). Петя утверждает, что с помощью своего микрокалькулятора он может:

- а) возвести любое число в квадрат, проделав не более шести операций;  
б)\* перемножить любые два числа, проделав не более двадцати операций.

Как он это делает?

С. Б. Гашков

**М792.** Решите в натуральных числах уравнения

а)  $3^x + 1 = 2^y$ ; б)  $3^x - 1 = 2^y$

в)\* Найдите все натуральные  $n$ , при которых оба числа  $\frac{1}{n}$  и  $\frac{1}{n+1}$  выражаются конечными десятичными дробями.

г)\* Докажите, что при любом простом  $p > 3$  и натуральном  $m > 1$  ни одно из чисел  $p^m + 1$  и  $p^m - 1$  не может быть степенью двойки.

С. Н. Бычков, В. В. Прасолов, Л. Д. Куляндчик

**М793.\*** Из вершины  $P$  тетраэдра  $PABC$  проводятся три отрезка  $PA'$ ,  $PB'$ ,  $PC'$ , перпендикулярные граням  $PBC$ ,  $PCA$ ,  $PAB$  и равные по длине площадям этих граней соответственно (направления отрезков выбираются так, что точки  $A'$  и  $A$ ,  $B'$  и  $B$ ,  $C'$  и  $C$  лежат по разные стороны от плоскостей соответствующих граней  $PBC$ ,  $PCA$ ,  $PAB$  (рис. 1)). Докажите, что

а) Повторив это же построение для тетраэдра  $PA'B'C'$  (и его вершины  $P$ ), мы получим тетраэдр, гомотетичный исходному тетраэдру  $PABC$  с коэффициентом  $3V/4$ , где  $V$  равно объему тетраэдра  $PABC$ .

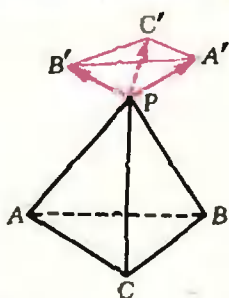


Рис. 1.

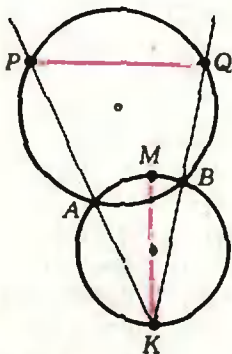


Рис. 2.

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sigma(n)$	1	3	4	7	6	12	8	15	13	18

Рис. 3.

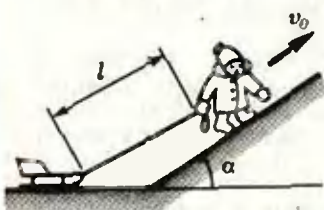


Рис. 4.

б) Вектор  $\vec{PA}' + \vec{PB}' + \vec{PC}'$  перпендикулярен плоскости  $ABC$ .

в) Из точки  $O$ , взятой внутри тетраэдра  $ABCD$ , опускаются перпендикуляры на плоскости его граней. На этих перпендикулярах от точки  $O$  откладываются отрезки, равные по длине площадям соответствующих граней, и концы этих отрезков принимаются за вершины нового тетраэдра  $A'B'C'D'$ . (Разумеется, с точностью до параллельного переноса, этот тетраэдр не зависит от выбора точки  $O$ .) Докажите, что повторив это построение для тетраэдра  $A'B'C'D'$ , мы получим тетраэдр, гомотетичный исходному с коэффициентом  $3V$ , где  $V$  — объем исходного тетраэдра  $ABCD$ . (Если  $3V=1$ , то последний тетраэдр получается из исходного параллельным переносом.)

В. И. Дубровский

**M794.** Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Через точку  $K$  первой окружности проводятся прямые  $KA$  и  $KB$ , пересекающие вторую окружность в точках  $P$  и  $Q$  (рис. 2). Докажите, что хорда  $PQ$  второй окружности перпендикулярна диаметру  $KM$  первой окружности.

Алла Ивченко, ученица 9 класса школы № 1 г. Могилева-Подольского

**M795.** Обозначим через  $\sigma(n)$  сумму всех делителей натурального числа  $n$  (рис. 3). Докажите, что существует бесконечно много  $n$  таких, что а)  $\sigma(n) > 2n$ ; б)  $\sigma(n) > 3n$ . Докажите, что для любого  $n$  в)  $\sigma(n) < n(\log_2 n + 2)$ ; г)  $\sigma(n) < n(\ln n - 1)$ .

В. Ф. Лев

**Ф803.** Человек поднимается в гору с углом подъема  $\alpha$  с постоянной скоростью  $v_0$  и тянет за собой на легкой веревке длины  $l$  сани массы  $m$ , находящиеся на горизонтальном участке (рис. 4). Найти натяжение веревки в тот момент, когда она составляет угол  $\alpha$  с горизонтальной поверхностью. Силой трения саней о поверхность дороги пренебречь.

В. И. Чивилёв

**Ф804.** Две одинаковые звезды  $A$  и  $B$  вращаются под действием взаимного притяжения на неизменном расстоянии  $R$  друг от друга. На некотором неизвестном расстоянии  $x$  от звезд в плоскости их орбит движется легкая планета  $C$ , причем  $|AC| = |BC| = x$ , а треугольник  $ABC$  сохраняет свои размеры. Найти расстояние  $x$ .

Г. Л. Коткин

**Ф805.** Через плоский конденсатор, заполненный диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и удельным сопротивлением  $\rho$ , течет переменный ток  $i(t) = I_0 \cos \omega t$ . Определить ам-

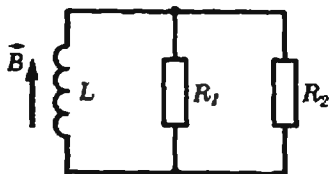


Рис. 5.

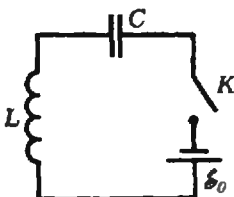


Рис. 6.

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (\*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than May 31st 1983 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well as solutions from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: „KVANT'S PROBLEMS" and

плитуду напряжения на конденсаторе. Расстояние между пластинами  $d$ , площадь каждой пластины  $S$ .

*В. В. Можаяев*

**Ф806.** В схеме, показанной на рисунке 5, сразу после выключения внешнего магнитного поля, в котором находилась катушка с индуктивностью  $L$ , через резистор с сопротивлением  $R_1$  течет ток  $I$ . Пренебрегая омическим сопротивлением катушки, определить, какое количество тепла выделяется на резисторе с сопротивлением  $R_1$  и на резисторе с сопротивлением  $R_2$ . Магнитное поле было направлено перпендикулярно плоскости витков катушки индуктивности.

*В. В. Можаяев*

**Ф807.** Последовательно с катушкой индуктивности  $L$  и конденсатором емкости  $C$  через ключ  $K$  подключили батарею с постоянной ЭДС  $\mathcal{E}_0$  (рис. 6). В начальный момент времени ключ  $K$  разомкнут, конденсатор не заряжен. Определить максимальную величину тока в цепи после замыкания ключа. Омическим сопротивлением в цепи пренебречь.

## Problems

### M791—M795; P803—P807

**M791.** On his birthday Pete was given a microcalculator which carries out the following operations: for any numbers  $x$  and  $y$  it computes  $x+y$ ,  $x-y$ ,  $x+1$  and  $1/x$  (when  $x \neq 0$ ). Pete says he uses his calculator to:

- compute the square of any number in 6 operations or less;
  - multiply any two numbers in 20 operations or less.
- How does he do it?

*S. B. Gashkov*

**M792.** Find the positive integer solutions of the equations a)  $3^x+1=2^y$ ; b)  $3^x-1=2^y$ ; c)\* Find all positive integers  $n$  for which both fractions  $1/n$  and  $1/(n+1)$  have finite decimal expansions. d)\* Prove that for any prime  $p > 3$  and any integer  $m > 1$  neither of the numbers  $p^m+1$  and  $p^m-1$  is a power of 2.

*S. N. Bychkov, V. V. Prasolov,  
L. D. Kurlyandchik*

**M793.\*** Three line segments  $PA'$ ,  $PB'$ ,  $PC'$  are constructed perpendicularly to the faces  $PBC$ ,  $PCA$ ,  $PAC$  of the tetrahedron  $PABC$ ; the lengths of the segments are numerically equal to the areas of these faces and the points  $A'$  and  $A$ ,  $B'$  and  $B$ ,  $C'$  and  $C$  lie on opposite sides of the planes containing these faces (see figure Рис. 1). Prove that  
a) Repeating this construction for the tetrahedron  $PA'B'C'$  (from vertex  $P$ ), we obtain a tetrahedron homothetic to  $PABC$  with coefficient  $3V/4$ , where  $V$  is the volume of  $PABC$ .

the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEMS IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

b) The vector  $\vec{PA}' + \vec{PB}' + \vec{PC}'$  is perpendicular to the plane  $ABC$

c) Perpendiculars to the faces of the tetrahedron  $ABCD$  are constructed from a point  $O$  inside it. Segments of length numerically equal to the area of the corresponding face are measured off from  $O$  on these perpendiculars. The extremities of these segments form a new tetrahedron  $A'B'C'D'$ . (Of course, up to parallel translation, this tetrahedron does not depend on the choice of  $O$ ). Prove that a repetition of this construction for  $A'B'C'D'$  yields a tetrahedron homothetic to the given one with coefficient  $3V$ , where  $V$  is the volume of  $ABCD$ . (If  $3V=1$ , the last tetrahedron can be obtained from the first by parallel translation.)

*V. N. Dubrovski*

**M794.** Two circles intersect at the points  $A$  and  $B$ . The lines  $KA$  and  $KB$ , passing through the point  $K$  of the first circle intersect the second at the point  $P$  and  $Q$  (see figure Pnc. 2). Prove that  $PQ$  is perpendicular to the diameter  $KM$  of the first circle.

*Alla Ivchenko*  
(9th form, School № 1, Mogilev-Podolski)

**M795.** Denote by  $\sigma(n)$  the sum of all divisors of the natural number  $n$  (figure Pnc. 3). Prove that there exist infinitely many  $n$  such that

a)  $\sigma(n) > 2n$ ; b)  $\sigma(n) > 3n$ . Prove that for any  $n$ ;

c)  $\sigma(n) < n(\log_2 n + 2)$ ; d)  $\sigma(n) < n(\ln n + 1)$ .\*

*V. F. Lev*

**P803.** A man moves up an incline of angle  $\alpha$  with constant velocity  $v_0$ , pulling a sled of mass  $m$  by means of a light rope of length  $l$ , the sled still being on a horizontal stretch of the road (see figure Pnc. 4). Find the tension in the rope when its angle with the horizon becomes equal to  $\alpha$ . The friction of the sled on the road is negligible.

*V. I. Chiviliev*

**P804.** Two identical stars  $A$  and  $B$  rotate at a constant distance  $R$  from each other as the result of gravitational interaction. A light planet  $C$  moves in the plane of their orbits so that  $|AC| = |BC| = x$  and the size and shape of triangle  $ABC$  remains unchanged. Find the distance  $x$ .

*G. L. Kotkin*

**P805.** An alternating current  $I(t) = I_0 \cos \omega t$  flows through a flat capacitor filled by a dielectric of dielectric permeability  $\epsilon$  and specific resistance  $\rho$ . Determine the voltage amplitude on the capacitor. The distance between the plates is  $d$ , the area of each plate is  $S$ .

*V. V. Mojaev.*

**P806.** A current  $I$  flows through the resistor  $R_1$  in the circuit shown on figure Pnc. 5 immediately after the external magnetic field acting on the inductive coil of inductivity  $L$  is turned off. Neglecting the ohmic resistance of the coil, determine the quantity of heat emitted by the resistor  $R_1$  and by the resistor  $R_2$ . The magnetic field was directed perpendicularly to the planes of the loops of the coil.

*V. V. Mojaev*

**P807.** A capacitor of capacity  $C$  and an induction coil of inductivity  $L$  are connected in series through a switch  $K$  to a battery of constant electromotive force  $\mathcal{E}$  (see figure Pnc. 6). At the initial moment the switch is turned off and the capacitor is uncharged. Determine the maximal value of the current in the circuit after the switch is turned on. The ohmic resistance of the circuit is negligible.

\* Here  $\ln$  denotes natural logarithms.



## Решения задач

**M770, M775—M779; Ф788—Ф792**

**M770\***. В основании треугольной пирамиды  $ABCP$  лежит правильный треугольник  $ABC$ . Докажите, что если углы  $PAB, PBC, PCA$  конгруэнтны, то пирамида  $PABC$  — правильная.

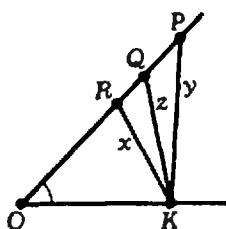


Рис. 1.

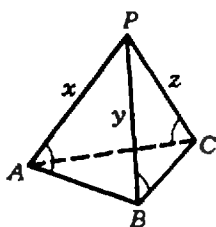


Рис. 2.

**M775.** При каких натуральных  $n > 3$  существуют различные натуральные числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$  такие, что  $1 < a_k < n+1$  для любого  $k=1, 2, \dots, n$  и все  $n$  чисел  $|a_1 - a_2|, |a_2 - a_3|, \dots, |a_{n-1} - a_n|, |a_n - a_1|$  различны?

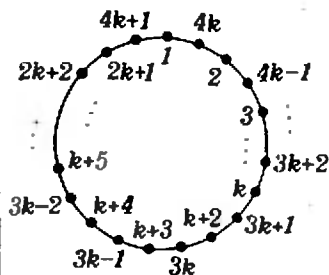


Рис. 1.

Первое решение. Можно считать, что длина стороны основания равна 1. Пусть  $x > y > z$  — длины ребер  $PA, PB$  и  $PC$ . Ясно, что  $x+y > x+z > y+z > 1$ .

По теореме косинусов (см. рис. 1)

$$x^2 + 1 = y^2 + ax,$$

$$y^2 + 1 = z^2 + ay,$$

$$z^2 + 1 = x^2 + az,$$

где  $a = 2\cos\alpha$  ( $0 < a < 2$ ). Отсюда следует, что

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = y^2 - z^2 + a(x - y), \\ y^2 - z^2 = z^2 - x^2 + a(y - z), \\ z^2 - x^2 = x^2 - y^2 + a(z - x). \end{cases}$$

$$(x + y - a)(x - y) = (y - z)(y + z),$$

$$(y + z - a)(y - z) = (z - x)(z + x),$$

$$(z + x - a)(z - x) = (x - y)(x + y).$$

Легко видеть, что если какие-либо два из чисел  $x, y, z$  равны, то равны и все три числа.

Предположим, что  $x \neq y, y \neq z, x \neq z$ . Перемножив уравнения последней системы, получим после сокращений

$$(x + y - a)(y + z - a)(z + x - a) = (y + z)(z + x)(x + y).$$

Поскольку правая часть (\*) положительна, должна быть положительна и левая часть. При этом, если все три сомножителя положительны, то равенство (\*) невозможно.

Следовательно,  $y + z - a < 0; y + z - a < 0$ , а  $x + y - a > 0$ . Кроме того,  $(x + z) + (y + z) > 2 > 2a$ . Поэтому  $(y + z - a) \times (x + z - a) = (y + z)(x + z) - (x + z + y + z)a + a^2 = (x + z) \times (y + z) + a(a - (x + z + y + z)) < (x + z)(y + z) + a(a - 2) < < (x + z)(y + z)$ .

Поэтому левая часть произведения (\*) меньше правой. Противоречие.

Второе решение. Построим на плоскости угол  $\alpha$ . На одной из его сторон отложим отрезок  $|OK| = 1$ , а на другой — отложим отрезки  $OP = x, |OQ| = y, |OR| = z$ . Получившиеся треугольники конгруэнтны граням пирамиды, причем  $|PK| = y, |QK| = z, |RK| = x$ . Из треугольника  $RQK$  получаем  $x = |RK| < |QR| + |QK| = y - z + z = y$ , то есть  $x < y$  — противоречие!

С. А. Валерианов

Ответ: при  $n = 4k$  или  $n = 4k - 1, k \in \mathbb{N}$ . Рассмотрим сумму  $S = |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_n - a_1|$ . По условию все  $n$  составляющих ее слагаемых различны и заключены между числами 1 и  $n$ , следовательно  $S = 1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$ . С другой стороны, если заменить модули разностей чисел  $a_i$  в этой сумме на сами разности с соответствующими знаками и привести подобные, каждое из чисел  $a_1, \dots, a_n$  будет входить в сумму с коэффициентом 2,  $-2$  или 0 (так как любое из них содержится ровно в двух модулях). Следовательно,  $S$  — четное число. Но, поскольку  $n$  и  $n+1$  — числа разной четности, число  $n(n+1)/2$  будет четным тогда и только тогда, когда  $n$  или  $n+1$  делится на 4, то есть  $n = 4k$  или  $n = 4k - 1, k \in \mathbb{N}$ .

В обоих случаях нужный набор чисел может быть указан: см. рис. 1 для  $n = 4k$  и рис. 2 для  $n = 4k - 1$ . Для удобства на обоих рисунках числа  $a_i$  расположены по окружности; на рисунке 1  $a_1 = 4k + 1, a_2 = 1, a_3 = 4k, \dots, a_n = 2k + 1$  (не используется  $k + 1$ ), на рисунке 2  $a_1 = 4k, a_2 = 1, a_3 = 4k - 1, \dots, a_n = 2k$  (не используется  $3k$ ). Заметим, что на обоих рисунках при движении по часовой стрелке начиная от  $a_1$ , числа, записанные внутри окружностей,

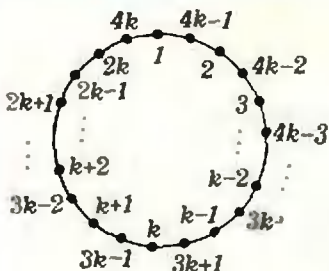
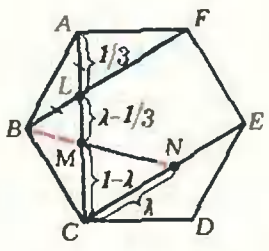


Рис. 2.

**M776.** На диагоналях AC и CE правильного шестиугольника ABCDEF взяты точки M и N соответственно, такие, что

$$\frac{|AM|}{|AC|} = \frac{|CN|}{|CE|} = \lambda.$$

Известно, что точки B, M и N лежат на одной прямой. Найдите  $\lambda$ .



**M777.** Дано уравнение  $x^3 - 3xy^2 + y^3 = p$ . Докажите, что

- а) если натуральное  $p$  таково, что данное уравнение имеет целочисленное решение, то оно имеет по меньшей мере три целочисленных решения;
- б) при  $p = 2891$  это уравнение не имеет целочисленных решений.

возрастают, а записанные снаружи — убывают, причем «внутренние» числа меньше «внешних». Отсюда легко вывести, что указанные наборы удовлетворяют условиям задачи.

А. В. Анджан

♦  
 Ответ:  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Пусть  $L$  — точка пересечения диагоналей AC и BF (см. рисунок). Диагонали BF и CE параллельны, поэтому треугольники BLM и NCM подобны; следовательно,

$$\frac{|BL|}{|NC|} = \frac{|LM|}{|CM|}.$$

Выразим длины отрезков в этом равенстве через  $\lambda$ , считая длину диагонали AC равной 1.

Из подобия треугольников ABL и CFL следует, что  $|BL| : |LF| = |AB| : |CF| = 1 : 2$ . Следовательно,  $|BL| = 1/3$ , так как  $|BF| = |AC| = 1$ . Аналогично,  $|AL| = 1/3$ . Ясно, что  $|CN| = |AM| = \lambda$ ,  $|CM| = 1 - \lambda$ , а  $|LM| = |AM| - |AL| = \lambda - 1/3$ . Таким образом,

$$\frac{1/3}{\lambda} = \frac{\lambda - 1/3}{1 - \lambda},$$

то есть  $\lambda^2 = 1/3$  и  $\lambda = 1/\sqrt{3}$ .

А. П. Савик

♦  
 а) Обозначим левую часть уравнения через  $P(x, y)$ . Ее можно переписать так:

$$P(x, y) - x^3 - 3xy^2 + y^3 = (y-x)^3 + 3(y-x)x^2 - x^3 = -y^3 + 3y(x-y)^2 + (x-y)^3.$$

Следовательно,  $P(x, y) = P(y-x, -x) = P(-y, x-y)$ . Поэтому, если пара целых чисел  $(x, y)$  является решением нашего уравнения, то ему удовлетворяют также еще две пары —  $(y-x, -x)$  и  $(-y, x-y)$ . Все эти три пары различны, ибо в противном случае  $x = y = 0$ , что невозможно при  $p \neq 0$ .

б) Чтобы убедиться, что уравнение  $x^3 - 3xy^2 + y^3 = 2891$  не имеет целочисленных решений, достаточно доказать, что левая часть ни при каких целых  $x$  и  $y$  не дает при делении на 9 в остатке 2, поскольку  $2891 = 9 \cdot 321 + 2$ . Для доказательства воспользуемся таблицей, в которой для всевозможных остатков от деления числа  $a$  на 9 приведены остатки для чисел  $3a$  и  $a^3$ .

$a$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$3a$	0	3	6	0	3	6	0	3	6
$a^3$	0	1	8	0	1	8	0	1	8

Из второй и третьей строк таблицы видно, что остаток 2 в левой части может получиться тогда, и только тогда, когда остатки от деления  $x^3$ ,  $3xy^2$  и  $y^3$  на 9 соответственно

равны 1, 0, 1; 0, 6, 8 или 8, 6, 0. В первом случае  $3xy^2$  делится на 9, поэтому  $x$  или  $y$  делится на 3 и не может давать при делении на 9 остаток 1. Во втором и третьем, соответственно,  $x$  или  $y$  делится на 3, поэтому  $3xy^2$  делится на 9 без остатка, а не дает остаток 6, как нам требуется.

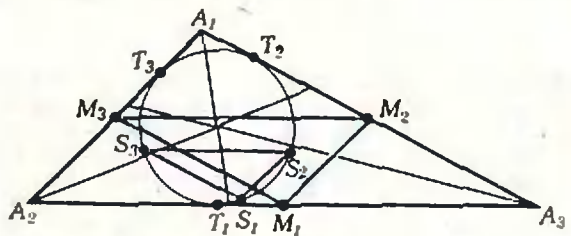
А. П. Савин



**M778\***. Дан неравносторонний треугольник  $A_1A_2A_3$ . Пусть  $a_i$  — его сторона, лежащая против вершины  $A_i$  ( $i=1, 2, 3$ ),  $M_i$  — середина стороны  $a_i$ ,  $T_i$  — точка касания стороны с окружностью, вписанной в данный треугольник, и  $S_i$  — точка, симметричная  $T_i$  относительно биссектрисы угла  $A_i$  треугольника. Докажите, что прямые  $M_1S_1$ ,  $M_2S_2$  и  $M_3S_3$  имеют общую точку.

Стороны треугольника  $M_1M_2M_3$  соответственно параллельны сторонам треугольника  $A_1A_2A_3$ . Мы докажем, что и стороны треугольника  $S_1S_2S_3$  параллельны сторонам  $A_1A_2A_3$ . Отсюда вытекает, что  $\Delta S_1S_2S_3$  гомотетичен  $\Delta M_1M_2M_3$  или переводится в него параллельным переносом. Второй случай отпадает, ибо окружность, описанная около треугольника  $M_1M_2M_3$ , больше описанной окружности треугольника  $S_1S_2S_3$ . Следовательно, прямые, соединяющие соответственные вершины треугольников  $S_1S_2S_3$  и  $M_1M_2M_3$ , должны пересечься в одной точке — центре гомотетии.

Покажем, например, что прямые  $S_1S_2$  и  $A_1A_2$  параллельны (см. рисунок). При симметрии относительно биссектрисы угла  $A_1$  точка  $S_1$  перейдет в  $T_1$ , а  $T_3$  — в  $T_2$ .



поэтому дуги  $S_1T_3$  и  $T_1T_2$  вписанной окружности треугольника  $A_1A_2A_3$  равны. Аналогично, при симметрии относительно биссектрисы угла  $A_2$  дуга  $T_1T_2$  перейдет в дугу  $T_3S_2$ . Следовательно, дуги  $S_1T_3$  и  $T_3S_2$  равны, и поэтому точки  $S_1$  и  $S_2$  находятся на одинаковом расстоянии от прямой  $A_1A_2$ , то есть  $S_1S_2 \parallel A_1A_2$ . Аналогично доказывается, что и две другие стороны треугольника  $S_1S_2S_3$  параллельны соответствующим сторонам треугольника  $A_1A_2A_3$ .

А. П. Савин



**M779\***. Рассматриваются последовательности  $\{x_n\}$  положительных чисел, удовлетворяющие условию

$$1 = x_0 > x_1 > x_2 > \dots > x_n > \dots$$

а) Докажите, что для любой такой последовательности  $\{x_n\}$  существует  $n$ , при котором

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} > 3,999.$$

б) Найдите такую последовательность  $\{x_n\}$ , удовлетворяющую указанному условию, для которой при любом  $n$

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4.$$

а) Легко видеть, что справедливо следующее неравенство:  $\frac{x_k^2 - 1}{x_k} \geq 4(x_{k-1} - x_k)$ . Действительно, умножив обе его части на (положительное) число  $x_k$  и перенеся все члены влево, получаем очевидное соотношение:  $x_k^2 - 1 - 4x_{k-1}x_k + 4x_k^2 = (x_{k-1} - 2x_k)^2 \geq 0$ .

Сложив доказанные неравенства для всех  $k$  от 1 до  $n$ , мы получим, что

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq 4(x_0 - x_n) = 4(1 - x_n) \quad (*)$$

Если последовательность  $\{x_n\}$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , то, как следует из (\*), доказываемое неравенство выполняется при всех достаточно больших  $n$ .

Если же последовательность не стремится к нулю, то по теореме Вейерштрасса о существовании предела у ограниченной снизу монотонно убывающей последовательности  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a > 0$ . Но тогда предел последовательности  $x_{n-1}^2/x_n$

также равен  $a$ , так как предел отношения равен отношению пределов числителя и знаменателя, если эти пределы существуют и предел знаменателя не равен нулю. Начиная с некоторого номера  $N$  отношение  $x_{n-1}^2/x_n$  будет отличаться от  $a$  меньше, чем на  $a/2$ , и следовательно, само

будет больше, чем  $a/2$ . Поэтому в левой части доказываемого неравенства можно набрать столько слагаемых, что сумма станет больше 4 (и вообще, любого заданного числа).

б) Ответ: искомая последовательность  $\{x_n\}$  — это геометрическая прогрессия со знаменателем  $1/2$ :  $x_n = 1/2^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Для этой последовательности сумма в левой части равна

$$2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} = 4 - \frac{1}{2^{n-2}} < 4.$$

Замечание. Последовательность из пункта б) единственна. Действительно, как мы видели в решении пункта а), она должна обязательно стремиться к 0. Если она не совпадает с геометрической прогрессией  $\{1/2^n\}$ , то  $x_{k-1} \neq 2x_k$  хотя бы при одном  $k$ , поэтому величина  $\delta = \frac{x_{k-1}^2}{x_k} - 4(x_{k-1} - x_k) = \frac{(x_{k-1} - 2x_k)^2}{x_k}$  положительна. Но разность между левой и правой частями неравенства (\*) при  $n \geq k$  не меньше  $\delta$ . Следовательно, при достаточно большом  $n$  его левая часть будет больше 4.

А. П. Савин

Ф788. Длинная гладкая труба радиуса  $R$  наклонена под углом  $\alpha$  к горизонту (рис. 1). Из точки  $A$  по внутренней поверхности трубы пускают вверх небольшое тело. Вектор начальной скорости тела составляет угол  $\varphi$  с прямой  $AB$  (см. рис. 1). При какой минимальной начальной скорости тело будет двигаться не отрываясь от поверхности трубы?

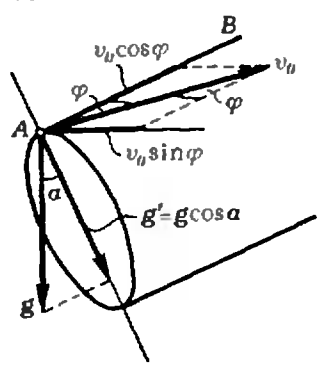


Рис. 1.

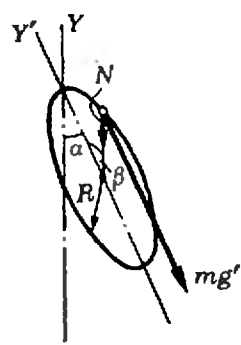


Рис. 2.

Сложное движение тела внутри трубы в любой момент времени можно представить как суперпозицию двух независимых движений — движения вдоль оси трубы и движения по окружности в плоскости, перпендикулярной оси трубы (см. рис. 1). Отрыв тела от поверхности трубы скажется только на втором движении — тело не будет двигаться по окружности. Поэтому мы рассмотрим только это движение.

На тело, движущееся по окружности, действует сила  $N$  нормальной реакции со стороны стенок трубы (вектор  $\vec{N}$  лежит в плоскости, перпендикулярной оси трубы) и «сила тяжести»  $mg' = mg \cos \alpha$ . Напишем условие движения тела по окружности:

$$mg' \cos \beta + N = \frac{mv^2}{R}, \tag{1}$$

где  $\beta$  — угол, который составляет радиус-вектор той точки окружности, в которой в данный момент находится тело, с вертикалью  $Y'$  (рис. 2). Чтобы тело не отрывалось от трубы, должно выполняться условие

$$N = m \frac{v^2}{R} - mg' \cos \beta \geq 0 \Rightarrow v^2 \geq mg'R \cos \beta. \tag{*}$$

Связь между скоростью  $v$ , с которой в данный момент движется тело по окружности, и начальной скоростью  $v_0$  найдем, воспользовавшись законом сохранения энергии: при любом значении угла  $\beta$  должно выполняться соотношение

$$m \frac{v^2}{2} + mg'R \cos \beta = m \frac{(v_0 \sin \varphi)^2}{2} + mg'R.$$

Отсюда

$$v^2 = v_0^2 \sin^2 \varphi + 2g'R \cos \beta - 2g'R.$$

Подставив это выражение в (\*), найдем, при каких значениях  $v_0$  тело не оторвется от трубы:

$$v_0^2 \geq 3 \frac{g'R}{\sin^2 \varphi} \cos \beta - 2 \frac{g'R}{\sin^2 \varphi}.$$

Поскольку это условие должно выполняться при любом значении  $\beta \in [0, 2\pi]$ , окончательно имеем:

$$v_0^2 \geq \frac{Rg'}{\sin^2 \varphi} = \frac{Rg \cos \alpha}{\sin^2 \varphi}.$$

С. С. Кротов

**Ф789.** Выточенную на токарном станке фигуру с плоским основанием поставили на дно сосуда и начали наливать в сосуд воду. На рисунке 1 приведен график зависимости силы  $F$ , с которой фигура давит на дно, от высоты  $H$  уровня воды в сосуде (вода под фигуру не подтекает). Определите по графику площадь основания фигуры, ее объем и плотность материала, из которого она сделана. Нарисуйте (приблизленно) эту фигуру. На какой высоте площадь горизонтального сечения фигуры равна площади ее основания?

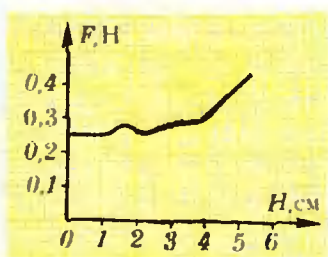


Рис. 1.

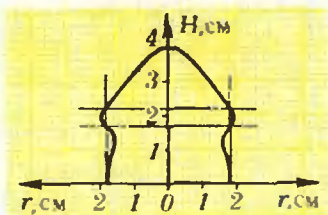


Рис. 2.

**Ф790.** Брусок массы  $m$  прикреплен с помощью пружины жесткости  $k$  к стене. На расстоянии  $d$  от бруска лежит второй брусок такой же массы. Какую минимальную скорость нужно сообщить правому бруску (см. рисунок), чтобы после соударения брусков левый брусок вернулся в исходное положение? Коэффициент трения брусков о поверхность не зависит от ско-

Пусть при высоте  $H$  уровня воды в сосуде объем погруженной в воду части фигуры равен  $V$ . Сила, действующая на фигуру со стороны воды, равна

$$F = \rho_n g H - \rho_n g H S_0,$$

где  $S_0$  — площадь основания фигуры. Запишем условие равновесия фигуры:

$$F'(H) - Mg + \rho_n g V - \rho_n g H S_0 = 0,$$

где  $M$  — масса фигуры,  $F'(H)$  — абсолютное значение силы нормальной реакции со стороны дна сосуда при данном уровне воды в сосуде. Согласно III закону Ньютона,  $F'(H) = F(H)$ ; следовательно,

$$F(H) = Mg - \rho_n g V + \rho_n g H S_0.$$

Ясно, что после того как фигура будет полностью покрыта водой, график станет линейным. По этому участку графика определим  $S_0$  (выберем точки  $H_1 = 4$  см и  $H_2 = 5$  см):

$$S_0 = \frac{1}{\rho_n g} \cdot \frac{\Delta F}{\Delta H} = \frac{1}{10^3 \cdot 9,8} \cdot \frac{0,1}{0,01} \text{ м}^2 \approx 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Теперь можно определить объем фигуры:

$$V_0 = \frac{Mg - F(H) + \rho_n g H S_0}{\rho_n g} = \frac{F(0) - F(H) + \rho_n g H S_0}{\rho_n g}$$

(мы учли, что при  $H=0$   $F(0) = Mg$ ). Взяв точку, лежащую на линейном участке графика, — например, точку, соответствующую  $H_2 = 5$  см, — найдем:

$$V_0 \approx \frac{0,25 - 0,4 + 10^3 \cdot 9,8 \cdot 0,05 \cdot 10^{-3}}{10^3 \cdot 9,8} \text{ м}^3 \approx 3,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3.$$

Плотность материала, из которого сделана фигура, равна

$$\rho = \frac{M}{V_0} = \frac{F(0)}{g V_0} \approx 7 \cdot 10^2 \text{ кг/м}^3.$$

Для исследования формы фигуры найдем малое приращение силы  $\Delta F$ , обусловленное малым приращением высоты  $\Delta H$  уровня воды:

$$\Delta F = -\rho_n g \cdot \Delta V + \rho_n g S_0 \cdot \Delta H = \rho_n g (S_0 - S(H)) \Delta H$$

(мы учли, что малое приращение объема равно  $\Delta V = -S(H) \cdot \Delta H$ ). Отсюда видно, что там, где  $F$  растет с ростом  $H$  ( $\Delta F > 0$ ),  $S(H) < S_0$ ; и наоборот, при  $\Delta F < 0$   $S(H) > S_0$ . В точках кривой, которые соответствуют площадям сечения, равным  $S_0$ ,  $\Delta F = 0$ , то есть в этих точках касательная к кривой горизонтальна. Это условие выполняется в точках  $H_3 \approx 1,7$  см и  $H_4 \approx 2,2$  см и около основания фигуры. (Читатели, знакомые с дифференцированием, могут произвести более подробный анализ формы фигуры, взяв первую и вторую производные функции  $F(H)$ .)

На рисунке 2 изображена (приблизненно) эта фигура.  
 Д. В. Белов

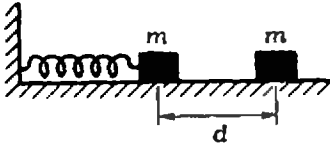
Пусть искомая минимальная скорость равна  $v$ . Тогда, согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{mv^2}{2} = \mu mgd + 2\mu mgx, \tag{1}$$

то есть вся начальная энергия системы, равная кинетической энергии правого кубика, переходит в конечном итоге в тепло — она расходуется на преодоление силы трения на пути  $(d+2x)$ , где  $x$  — максимальное сжатие пружины. В тот момент, когда оба кубика неподвижны, а пружина максимально сжата,

$$\frac{mv^2}{2} = \mu mgd + \frac{kx^2}{2} + \mu mgx. \tag{2}$$

рости и равен  $\mu$ ; соударение брусков считать абсолютно упругим.



**Ф791.** В цилиндрическом сосуде под поршнем находится 1 моль идеального одноатомного газа. Масса поршня равна  $M$ , площадь —  $S$ . Какое количество теплоты надо подводить к газу в единицу времени, чтобы поршень двигался равномерно вверх со скоростью  $v$ ? Атмосферное давление равно  $p_0$ . Трение между поршнем и стенками сосуда отсутствует.

Из уравнений (1) и (2) находим максимальное сжатие пружины:

$$x = 2\mu g \frac{m}{k}.$$

Подставив найденное значение  $x$  в (1), находим минимальную скорость  $v$ :

$$v = \mu g \sqrt{2} \sqrt{\frac{d}{\mu g} + \frac{4m}{k}}.$$

В. К. Петерсон

На поршень в любой момент времени действуют сила тяжести  $Mg$ , сила  $p_0S$  атмосферного давления и сила  $pS$  давления газа. Согласно II закону Ньютона при равномерном движении поршня

$$pS = Mg + p_0S.$$

Следовательно, давление газа в цилиндре постоянно.

Пусть в единицу времени к газу подводит количество теплоты  $q$ . Тогда, согласно закону сохранения энергии,

$$q \cdot \Delta t = \frac{3}{2} R \frac{m}{\mu} \Delta T + p \cdot \Delta V.$$

Здесь  $\frac{3}{2} R \frac{m}{\mu} \Delta T$  — изменение внутренней энергии газа,  $p \cdot \Delta V$  — работа, совершаемая газом ( $\Delta V = Sv \cdot \Delta t$  — изменение объема  $\Delta V$  газа за время  $\Delta t$ ). Из уравнения Менделеева — Кляпейрона следует, что

$$p \cdot \Delta V = \frac{m}{\mu} R \cdot \Delta T.$$

Таким образом

$$q \cdot \Delta t = \frac{3}{2} p \cdot \Delta V + p \cdot \Delta V = \frac{5}{2} p \cdot \Delta V = \frac{5}{2} p S v \cdot \Delta t.$$

Отсюда

$$q = \frac{5}{2} p S v = \frac{5}{2} (Mg + p_0S) v.$$

Д. В. Подлесный

**Ф792\*.** Между Москвой и Ленинградом протянута двухпроводная телефонная линия. Сопротивление одного метра проволоки равно  $r = 0,05$  Ом. Из-за несовершенства изоляции сопротивление между проводами составляет  $R = 10^7$  Ом на каждый метр линии. К концам линии в Москве подключают источник с напряжением  $U = 100$  В. Что покажет вольтметр, если его подключить а) к концам линии в Ленинграде? б) в середине линии?

Примем расстояние между Москвой и Ленинградом равным  $6 \cdot 10^5$  м. Разобьем линию на множество звеньев; каждое звено представим в виде эквивалентной схемы из трех резисторов (рис. 1). Если одно звено соответствует

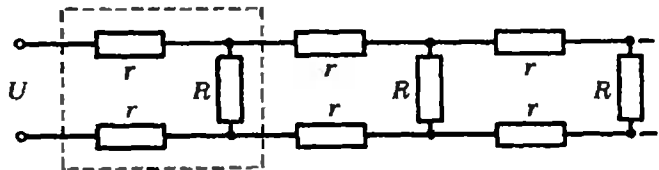


Рис. 1.

1 м длины линии, то последовательные резисторы имеют сопротивление  $r = 0,05$  Ом, а параллельный —  $R = 10^7$  Ом. Ясно, что два резистора, подключенные последовательно, можно заменить одним, сопротивление которого равно  $2r = 0,1$  Ом.

Число звеньев такой цепочки очень велико. Будем считать эту цепочку бесконечной, а потом — получив решение — обсудим правомерность этого приближения.

Найдем вначале сопротивление  $R_{общ}$  такой цепи. Для этого добавим еще одно звено впереди цепочки и потре-

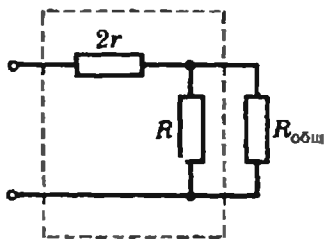


Рис. 2.

буем, чтобы полное сопротивление такой удлиненной цепи (рис. 2) опять составило  $R_{общ}$ :

$$\frac{R \cdot R_{общ}}{R + R_{общ}} + 2r = R_{общ}.$$

Отсюда находим  $R_{общ}$ :

$$R_{общ} = r + \sqrt{r^2 + 2rR} = 0,05 + \sqrt{(0,05)^2 + 10^6} \approx 10^3 \text{ Ом.}$$

Если ко входным зажимам схемы на рисунке 2 подключить напряжение  $U$ , то после этого добавочного звена напряжение уменьшится на величину

$$\Delta U = 2rI = 2r \frac{U}{R_{общ}}.$$

Это означает, что после одной ячейки напряжение станет меньше в  $k = \frac{U}{U - \Delta U} = \frac{1}{1 - 2r/R_{общ}} \approx 1,0001$  раз, и каждая следующая ячейка уменьшает напряжение во столько же раз. Значит, после  $n$  ячеек напряжение на оставшейся части цепи будет равным

$$U_n = \frac{U}{k^n}.$$

При нашем разбиении число ячеек равно  $N = \frac{6 \cdot 10^5 \text{ м}}{1 \text{ м}} = 6 \cdot 10^5$ ; значит напряжение на конце линии составит

$$U_N = \frac{U}{k^N} = \frac{100}{(1 + 0,0001)^{6 \cdot 10^5}} \text{ В.}$$

Преобразуем выражение, стоящее в знаменателе:

$$(1 + 0,0001)^{6 \cdot 10^5} = [(1 + 0,0001)^{10000}]^{60} \approx e^{60} \approx 1,14 \cdot 10^{26}$$

(выражение в квадратных скобках — это приближенное значение числа  $e \approx 2,718$  — основания натуральных логарифмов).

Итак, напряжение на конце линии составляет

$$U_N \approx \frac{100}{1,14 \cdot 10^{26}} \text{ В} \approx 10^{-24} \text{ В.}$$

Такую величину просто невозможно измерить, вольтметр покажет 0.

Напряжение посредине линии —

$$U_{N/2} = \frac{100}{e^{30}} \text{ В} \approx 10^{-11} \text{ В.}$$

Что изменится, если взять ячейку «длиной» не 1 м, а 1 см или 1 км (или 100 км)? В нашем случае «умельчение» ячеек, конечно, допустимо, но явно не имеет смысла; а вот увеличивать их размеры нужно осторожно — на длине линии 10 км (10 000 ячеек по 1 м) напряжение падает в  $e$  раз, и ясно, что «длина» ячейки должна быть, во всяком случае, во много раз меньше, чем 10 км.

Считая цепь бесконечной, мы как бы добавили к концу ее еще очень много ячеек. Ясно, что расчет  $R_{общ}$  был вполне корректным (напряжение на конце цепи во много раз меньше входного, и при подключении дополнительных резисторов  $R_{общ}$  практически не меняется). А вот величину напряжения на выходе мы оценили не очень точно. Подумайте сами, каким должно быть сопротивление вольтметра, чтобы наш способ решения давал точный результат.

З. А. Рафилов

## Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М736—М750, М756, М757 и Ф763—Ф767, справились с задачами М736, М737, М740, М741, М750, М757. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач. (Сведения о решивших задачи М751—М755, М758—М760, предлагавшиеся на XVI Всесоюзной олимпиаде школьников, публиковаться не будут.)

### Математика

Л. Байрак (Белгород) 39; В. Барабанов (Киев) 56; А. Белоус (Винница) 39, 42, 56; А. Беренштейн (Москва) 43, 45; А. Биргер (Иваново) 43, 44, 48, 49, 56; И. Богуславский (Москва) 45, 49, 56; В. Булава (Паневежис) 42, 45, 56; М. Верховодов (Киев) 42; Г. Виннер (Свердловск) 42, 45, 56; А. Виноградов (Москва) 44, 56; М. Гаджибабаев (Махачкала) 44; М. Гараев (Физули) 56; М. Горбунов (Минск) 39; М. Гохман (Киев) 56; А. Дейнека (Винница) 38, 39, 42, 43, 45, 56; В. Долотин (Курск) 48; О. Ершикин (Днепропетровск) 38, 42, 43; К. Зыков (Москва) 38, 43, 48, 49, 56; А. Ивченко (Могилев-Подольский) 42; М. Яотов (София, НРБ) 39; С. Каганович (Киев) 56; Ю. Какулов (п. Цалка ГССР) 44; Д. Каледин (Москва) 48, 56; А. Карпович (Киев) 42—44, 56; Н. Кащенко (Киев) 39, 45; Л. Клименок (Москва) 56; Е. Ковальчук (Киев) 56; М. Козан (Донецк) 45, 56; Л. Корогодский (Черкассы) 56; Д. Коршунов (Новосибирск) 43, 56; К. Кохась (Ленинград) 42, 43, 45, 56; Ю. Кочетков (с. Поповцы Винницкой обл.) 42, 56; М. Лев (Свердловск) 42; А. Маркович (Белград, СФРЮ) 38, 42; Р. Мислявичюс (д. Повилаускай Лит. ССР) 56; А. Молотков (Ленинград) 56; Ф. Низиров (Ленинград) 56; А. Никольцев (Севастополь) 42, 45; В. Новиков (Коммунарск) 56; А. Поляк (Киев) 56; К. Порайко (Винница) 42, 56; С. Портнов (Ленинград) 42; А. Родионов (Москва) 42; Л. Рудый (Кировск Мурманской обл.) 42; В. Сабатат (Киев) 56; В. Садковский (Ташкент) 56; Г. Самадашвили (Тбилиси) 56; А. Свиридов (Москва) 42, 56; Е. Слободянюк (Киев) 56; С. Степанов (с. Премышль Калужской обл.) 56; С. Струков (Воронеж) 39, 42; М. Титаренко (Винница) 42; Н. Титаренко (Винница) 39, 56; Н. Федин (Омск) 44; Б. Фридман (Москва) 43; В. Хрычиков (Севастополь) 42, 45; С. Цонев (София, НРБ) 56; С. Чернышев (Александров) 43; Р. Шпилевский (Киев) 56; Л. Эрдеш (Будапешт, ВНР) 42, 45, 56; П. Этингоф (Киев) 43, 49, 56; С. Юровский (Мытищи) 42, 44, 56.

### Физика

А. Абанов (Красноярск) 63—65; А. Бабаян (Москва) 64; Э. Багдасарян (Баку) 63, 65; В. Барабанов (Киев) 63—65; Г. Баранов (Донецк) 63—67; Ю. Бриль (Днепропетровск) 63—65, 67; В. Булава (Паневежис) 63, 65, 67; В. Васильев (Таганрог) 64, 67; Д. Владимиров (Новолукомль) 64; И. Гайович (Киев) 63, 64, 67; О. Голинский (Тамбов) 63; Ю. Гордиенко (Винница) 63; М. Гостев (Липецк) 64, 65; Г. Данелиа (Тбилиси) 64; Л. Доросинский (п. Черноголовка Московской обл.) 64—67; А. Дунаевский (Киев) 63—67; М. Дьячков (п. Черноголовка Московской обл.) 63—66; Е. Ефимов (Баку) 64—67; В. Житомирский (Харьков) 63—65, 67; Н. Жонов (Москва) 63, 64; Р. Жямйтис (Вильнюс) 63—67; Д. Зайцев (Горький) 63—65, 67; В. Зарецкий (Брест) 63, 64; Ю. Звезгинцев (Харьков) 64, 65, 67; Д. Каледин (Москва) 63, 66, 67; И. Калиновский (Киев) 63, 64, 66; А. Карнаухов (Ижевск) 64, 65, 67; С. Кастелли (Болград) 63—67; Ю. Квишарь (Харьков) 63, 64; В. Кидысюк (Рязань) 63—65, 67; В. Кожов (Александров) 63—66; К. Кондратец (Киев) 65, 67; А. Корчагин (Красноармейск Московской обл.) 63—67; А. Крапивин (Киев) 63; В. Криман (Винница) 63—67; В. Кузьмин (Брест) 63—65, 67; Д. Куцлов (Москва) 63, 64, 66; Н. Кухаркин (Москва) 64, 65; Г. Ландсберг (п. Протвино Московской обл.) 63, 64, 67; И. Лишиц (Винница) 64, 65, 67; С. Лиханский (Херсон) 64; О. Лопин (Фрунзе) 65, 66; С. Люлькович (Брест) 64, 67; Д. Макаров (п. Черноголовка Московской обл.) 63, 64; К. Макаруч (Киев) 63—67; А. Максимов (Новосибирск) 63—65; А. Малый (Каушаны) 63, 67; Л. Маркович (Брест) 63—65; С. Марук (Фрунзе) 64—66; И. Медков (Москва) 63, 64, 67; С. Мусаев (Баку) 63; Д. Набишев (Фергана) 63; Д. Набутовский (Новосибирск) 63, 64, 67; А. Носков (Москва) 63, 64; А. Огнев (Новосибирск) 63, 65, 66; С. Орлов (Зеленоград) 63—65; А. Охалкин (Чита) 65; С. Панасевич (Брест) 63, 64; В. Пекар (Киев) 63; И. Пильников (Тамбов) 63, 64; О. Пузырко (Пярну) 63, 64; Ю. Родионов (Новосибирск) 64; Н. Розенвайн (Киев) 65; С. Розыскнов (Керчь) 65, 67; В. Ромашин (Донецк) 63—66; В. Рыбенков (Махачкала) 63, 64, 66; А. Рыльников (Саратов) 63—65, 67; Г. Самадашвили (Тбилиси) 63, 64; Ф. Серженко (Запорожье) 64, 65, 67; С. Симанов (Долгопрудный) 63, 65; М. Скорик (Киев) 63, 65, 66; А. Сурков (Ленинград) 67; И. Тихоненко (совх. Новоомский Омской обл.) 64, 65, 67; О. Фитьянов (Курск) 63—67; Н. Федин (Омск) 64—67; В. Фельдман (Саратов) 63—66; Л. Фельдман (Саратов) 64; С. Цонев (София, НРБ) 64, 67; Ю. Чаплыгин (Валуйки) 63—67; С. Чеканов (Саратов) 63—67; О. Чернышев (Тольятти) 64; В. Щедров (Великие Луки) 63, 67; М. Шнайдер (Винница) 64, 67; И. Шойхет (Ташкент) 64; А. Шугай (Запорожье) 63—65, 67; Ю. Щербатов (Запорожье) 64, 67; И. Эрхарт (Биловец, ЧССР) 63, 64.





## Стандартные приемы программирования

### Урок 6. Настройка программы по параметрам

Рассмотрите следующую программу:

```
program primer (input, output);
var a: array [1..100] of real;
    i: integer; s: real;
begin for i:=1 to 100 read(a[i]);
      s:=0;
      for i:=1 to 100 do s:=s+a[i];
      s:=s/100; writeln(s);
```

Продолжение программы

1. Что делает эта часть программы?
2. Правильна ли она? Изящна ли она?
3. Не видите ли вы каких-нибудь дефектов в этой программе?
4. Как надо изменить программу, чтобы она обрабатывала массив в 115 элементов?

\* \* \*

Представьте себе такой диалог между пассажирами самолета и стюардессой:

— Стюардесса! Почему не летим? Чего ждем?

— Видите ли, наш самолет рассчитан на 100 мест, а пришло только 98 пассажиров. Конструкция самолета такова, что он не может взлететь с пустыми креслами, так что придется подождать пока не придут опоздавшие или кто-нибудь не захочет полететь нашим рейсом.

— А что, если посадить в кресла манекены? Тогда взлетим?

— Да, конечно.

— Скажите, — вмешивается второй пассажир, — а если просто отвинтить пустые кресла? — Можно и так, — отвечает стюардесса и пассажиры бросаются отвинчивать кресла или искать манекены.

Разумеется, такой диалог нелеп, и встречаться с такой ситуацией в Аэрофлоте не приходится. Но взгляните на приведенную программу: может она «взлететь» с 98 элементами массива «на борту»? Нет!! Но почему? Ведь в алгоритме нет ничего, что требовало бы именно 100 элементов (как, скажем, операция деления требует именно двух чисел: делимого и делителя). По поводу подобных программ часто приходится иметь с начинающими программистами беседы типа:

— А что Вы будете делать, если понадобится обработать не 100, а 98 элементов?

— Сменю «100» на «98» здесь, здесь и здесь. (То есть демонтирую кресла).

— Что ж, Вы будете изменять половину операторов программы? А кроме того Вы забыли изменить ее еще и вот здесь. И где гарантия, что больше нигде не надо менять?

— Ну... тогда добавлю к исходным данным пустую перфокарту: с нее введутся нули и все будет в порядке. (Посажу в кресла манекены).

— А если элементы надо не складывать, а множить?

— Тогда введу единицы.

— А если надо и складывать, и множить?

— ??!

Итак, мы частично ответили на вопросы 2 и 3. Программа, конечно, правильна с формальной точки зрения, но изящной ее вряд ли можно назвать, так как она имеет крупный дефект: без видимой причины программа жестко привязана к размеру обрабатываемого массива.

На оставшиеся вопросы однозначно ответить трудно. Можно сказать, что программа считает среднее арифметическое, тогда для обработки массива в 115 элементов надо заметить «100» на «115» в *четыре*х местах; но можно сказать, что она вычисляет сумму и делит ее на 100 (переводя, например, результат из процентов в обычные дроби), тогда замены надо производить только в *трех* местах. Здесь видны сразу три дефекта: во-первых, нет комментариев, поясняющих работу программы, во-вторых, «безмолвные» числовые константы разбросаны по всей программе и неясно, случайно ли совпадают некоторые из них, и в-третьих, привязка программы к размеру массива выполнена во многих местах и для изменения размеров необходимо вносить множество поправок.

Введем в нашу программу незначительные изменения:

```
program primer (input, output);
const n:=100; m:=100; {n — размер массива}
var a: array [1..n] of real
    i: integer; s: real;
begin for i:=1 to n do read(a[i]);
      s:=0;
      for i:=1 to n do s:=s+a[i];
      s:=s/m; writeln(s);
```

Продолжение программы

Теперь и без комментария стало ясно, что программа вычисляет не среднее арифметическое.

Для изменения размеров массива надо изменить одну строчку (независимо от размера программы), причем искать ее долго не надо: она находится в начале программы.

Таким образом наша программа стала легко настраиваемой: надо сменить блок настройки, вынесенный в начало программы и имеющий небольшие размеры, не зависящие от величины программы. Блок настройки содержит значения всех параметров программы. Такой прием настройки программы называется статической настройкой: программа настраивается в процессе ввода в ЭВМ (точнее, при транс-

ляции), однако «взлететь» с неполным набором «пассажиров» еще не может.

В некоторых языках программирования (алгол, ПЛ/1, например) есть возможность отводить нужное количество памяти динамически: сначала вычисляем  $N$ , затем выполняем инструкцию «отвести  $N$  элементов памяти». Но в любом языке, по-видимому, самым быстрым способом динамической настройки программы (то есть настройки в процессе выполнения) на необходимые размеры массивов является прием, который можно назвать работа с неполным массивом.

При работе с неполным массивом все массивы описываются с запасом, а используется только необходимая часть массива.

Описание и ввод в этом случае выглядят следующим образом (остальная часть программы опущена):

```
const k: = 100; m: = 100 {k — макс. число элем.}
var a: array [1..k] of real;
    i, n: integer; s: real;
begin readln(n);
      for i:=1 to n do read(a[i]);
```

или

```
begin n:=0; while NOT (eof(input)) do
      begin n:=n+1; read(a[n]) end;
```

В первом варианте программист перед началом массива исходных данных подкладывает перфокарту с количеством нужных ему в этот раз элементов, во втором — после массива подкладывает перфокарту «конец файла». Оставшаяся часть программы не изменяется:

все циклы выполняются с изменением параметра от 1 до  $n$ .

Какой брать запас? В каждой конкретной задаче это обычно известно: пассажиров в ТУ-134 не более 72, студентов в группе — не более 30 и т. д. Если нужны многомерные массивы, то поступаем аналогично: описываем, скажем, двумерную матрицу с запасом по каждому измерению и используем ее «северозападный» угол.

Наконец, если запаса не хватает, то применим статическую настройку. Это напоминает обычный радиоприемник: в пределах диапазона подстраиваем поворотом ручки, для смежных диапазонов используем переключатель.

#### Контрольное задание\*

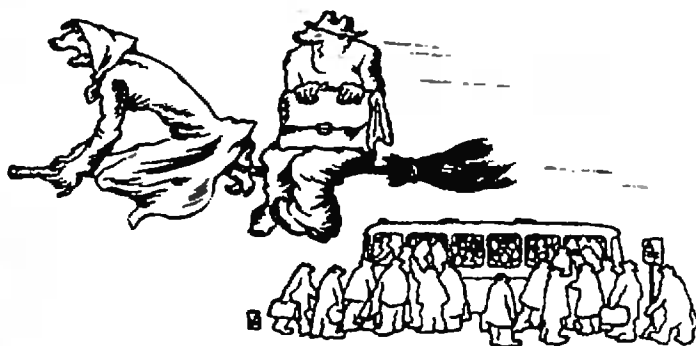
6.1. Ввести и распечатать значения элементов «неполной» матрицы  $A$  размера  $n \times m$ , считая, что ее элементы занимают левый верхний угол данной матрицы  $A'$  размера  $n' \times m'$ , где  $n' > n$ ,  $m' > m$ . Размеры  $n$  и  $m$  вводятся перед вводом матрицы  $A$ . Значения каждой строки матрицы должны, во-первых, вводиться с новой строки и, во-вторых, печататься с новой строки.

*Л. Ф. Штернберг*

\* Это последнее задание цикла «Стандартные приемы программирования».

## КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

«Летать быстрее и дальше»  
«Извлечение корня»



*Рисунки А. А. Орехови*



Ниже публикуются материалы вступительных экзаменов в вузы в 1982 году.

## Московский инженерно-физический институт

### Математика

#### Письменный экзамен

#### Вариант 1

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{\frac{x}{4x^2+5}} < \frac{1}{2x+1}$$

2. Города  $A$  и  $B$  расположены на прямой шоссе. Из города  $A$  в город  $B$  одновременно вышли два пешехода, а из города  $B$  в город  $A$  в тот же момент времени выехал велосипедист. Проехав  $k$ -ю часть пути от  $B$  до  $A$ , велосипедист встретил первого пешехода.

Затем, проехав  $\frac{2}{3}$  всего пути, велосипедист

встретил второго пешехода. На каком расстоянии от них в момент их встречи находился первый пешеход? Скорости пешеходов и велосипедиста постоянны,  $|AB| = S$ .

3. Основанием пирамиды  $SABCD$  служит прямоугольник  $ABCD$ , длина диагонали  $AC$  которого равна  $d$ , а  $\widehat{CAD} = \varphi$ . Плоскости противоположных боковых граней  $ASB$  и  $CSD$  составляют с плоскостью основания пирамиды углы величиной  $\alpha$  и  $2\alpha$  соответственно. Определите объем пирамиды, если известно, что  $|AS| = |BS|$ .

4. Найдите критические точки функции  $f(x) = 3\sin x + 4\cos x + 4 + (1-a)x + \sqrt{a^2 - 7a + 6}$ .

#### Вариант 2

1. Найдите  $f'(x)$  и критические точки функции

$$f(x) = \cos \sqrt{x} + \sqrt{3} (\sin \sqrt{x} + \sqrt{2}).$$

2. Сумма цифр двузначного натурального числа  $A$  равна 14. Если к этому числу прибавить 46, получится число, произведение цифр которого равно 6. Найдите число  $A$ .

3. Решите неравенство

$$2 \log_4 (x-a+1) + \log_{\frac{1}{2}} (x-3-2a) > 2.$$

4. В прямой треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  ( $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ ),  $|AB_1| = d$  и  $\widehat{AB_1B} = \alpha$ . На прямой, являющейся пересечени-

ем плоскости  $ABC$  и плоскости симметрии призмы, содержащей прямую  $BB_1$ , взята точка  $O$ , которая удалена на одинаковое расстояние от точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Через точку  $O$  параллельно прямой  $A_1C_1$  проведена плоскость, пересекающая отрезок  $BB_1$  в точке  $D$ , причем  $|B_1D| : |DB| = 1:2$ . Определите площадь сечения призмы этой плоскостью, если известно, что  $\widehat{ABC} = \beta$ .

### Физика

#### Задачи устного экзамена

1. На концах невесомого стержня длиной  $2l$ , который может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его середину, укреплены два груза с массами  $m_1 = 0,6$  кг и  $m_2 = 2m_1$ . В первоначальном положении стержень располагался горизонтально, а затем был отпущен без начальной скорости. Найдите силу, с которой первый груз действует на стержень в тот момент, когда стержень оказывается в вертикальном положении.

2. Гладкая горка массы  $M$  находится на гладком горизонтальном полу. На горку положили и отпустили без толчка шайбу массой  $m$ . Отношение масс  $\mu = m/M = 0,6$ . Указанные на рисунке 1 размеры:  $H = 1,3$  м и  $h = 0,5$  м. Каким будет расстояние от шайбы до горки в момент падения шайбы на пол?

3. Два тела прикреплены к концам нерастяжимой нити, перекинутой через легкий блок (рис. 2). Первое лежит на шероховатой поверхности, второе висит на нити. Если телам сообщить некоторую скорость, толкнув второе

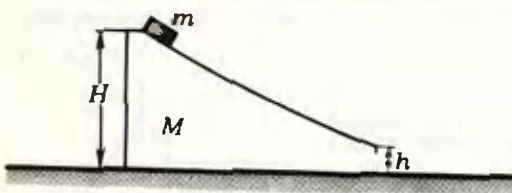


Рис. 1.



Рис. 2.

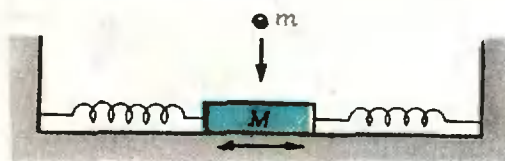


Рис. 3.

тело вниз, то оно опустится на расстояние  $h_1 = 20$  см. Если же сообщить телам ту же скорость, толкнув первое тело влево, то второе тело поднимется на высоту  $h_2 = 10$  см. Определите коэффициент трения между первым телом и поверхностью, если отношение масс тел  $m_1/m_2 = 5$ .

4. Брусок массой  $M = 1$  кг совершает гармонические колебания на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 3). В момент прохождения бруском положения равновесия на него вертикально падает кусок пластилина массы  $m = 0,21$  кг и прилипает к нему. Во сколько раз изменится амплитуда колебаний бруска?

5. В цилиндре под поршнем массы  $M = 20$  кг находится  $m = 1$  г гелия при температуре  $T = 400$  К (рис. 4). Удлинение пружины  $A$  составляет  $x = 20$  см, а энергия ее деформации  $E = 60$  Дж. Определите высоту поршня над дном цилиндра. Давлением газа вне цилиндра пренебречь.

6. Два одинаковых заряженных шарика, масса и заряд каждого из которых равны  $m = 10$  г и  $q = 5 \cdot 10^{-7}$  Кл, соединены двумя изолирующими нитями длины  $l = 10$  см и  $2l$  (рис. 5). Систему удерживают за середину длинной нити, а затем точку подвеса  $O$  начинают поднимать вверх с ускорением  $\vec{a}$ , равным по модулю ускорению свободного падения  $g$ . Определите натяжение короткой нити, соединяющей шарики, во время их подъема.

7. В однородном электрическом поле, вектор напряженности которого направлен вертикально вниз и по модулю равен  $E = 10$  кВ/м, находится заряженный шарик  $A$ , подвешенный на тонкой изолирующей нити длиной  $l = 1$  м к точке  $O$  (рис. 6). Заряд шарика  $q = 10^{-6}$  Кл, масса  $m = 10$  г. Шарик сообщил начальную скорость  $\vec{v}_0$  ( $v_0 = 1$  м/с) в направлении, перпендикулярном вектору  $\vec{E}$ . Найдите натяжение

нити в момент достижения шариком крайнего положения.

8. Альфа-частица влетает по нормали в область поперечного однородного магнитного поля с индукцией  $B = 0,1$  Тл (рис. 7). Размер области  $h = 0,1$  м. Найдите скорость частицы, если после прохождения магнитного поля она отклонилась на угол  $\varphi = 30^\circ$  от первоначального направления. Отношение заряда к массе  $\alpha$ -частицы  $q/m = 0,5 \cdot 10^8$  Кл/кг.

9. На горизонтальных проводящих стержнях лежит металлическая перемычка массы  $m = 50$  г (рис. 8). Коэффициент трения между стержнями и перемычкой  $\mu = 0,15$ . Стержни замкнуты на резистор с сопротивлением  $R = 5$  Ом. Система находится в магнитном поле, индукция которого направлена вверх, а ее модуль меняется по закону  $B = At$ , где  $A = 5$  Тл/с. Определите момент времени, в который перемычка начнет двигаться по стержню. Геометрические размеры:  $l = 1$  м,  $h = 0,3$  м. Сопротивлением перемычки и подводящих стержней пренебречь.

10. Система состоит из трубы длиной  $h$ , тонкой линзы  $L$  и небольшой муфты  $A$  массой  $m = 2$  кг, соединенной с линзой пружинкой жесткости  $k = 500$  Н/м (рис. 9). Отношение фокусного расстояния линзы к длине трубки  $F/b = 0,4$ , длина недеформированной пружинки  $b/2$ . Систему вращают в горизонтальной плоскости вокруг точки  $O$  с угловой скоростью  $\omega$ , при которой изображение муфты оказывается в точке  $O$ . Найдите  $\omega$ .

Публикацию подготовили  
Д. Ф. Калинин, А. И. Руденко,  
Н. В. Шолохов

## Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина

### Математика

#### Письменный экзамен

На выполнение работы было предоставлено 3 часа.

#### Вариант 1

1. Пусть  $0 < a < b < 1$ . Упростите выражение  $1 - (\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} b) \cdot \log_b a$  и определите его знак.

2. Решите уравнение

$$\cos 2x + 2 \sin x \cdot \sin 2x = 2 \cos x.$$

3. Для функции  $f(x) = \lg \left( \frac{2-x^2}{\sqrt{4x+5}} - 1 \right)$

найдите область определения и точки экстремума.

4. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник со стороной 1. Основание  $K$  высоты пирамиды лежит на расстоянии  $\sqrt{\frac{4}{3}}$  от центра  $O$  этого треугольника, причем

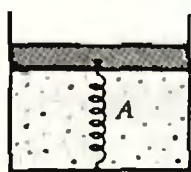


Рис. 4.

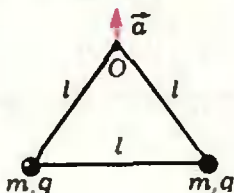


Рис. 5.

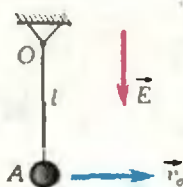


Рис. 6.

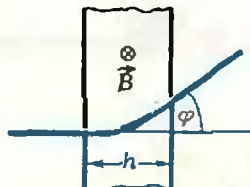


Рис. 7.

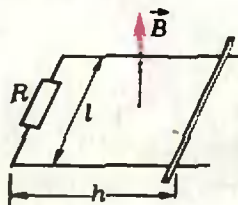


Рис. 8.

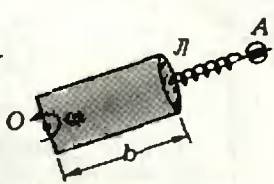


Рис. 9.

луч  $OK$  проходит через середину одной из его сторон. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду, если ее высота равна  $\sqrt{\frac{4}{3}}$ .

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\log_3(x^2-1) = 1 + \log_3(x+1).$$

2. Решите уравнение

$$4-3x = \sqrt{(x-1)(2-x)}.$$

3. Для всякого  $x \in \mathbb{R}$  значение функции  $f(x)$  определяется как наибольшее значение функции  $g(y) = 1 - x^2 + 4xy^3 - y^4$  на промежутке  $[-1; 0]$ , то есть

$$f(x) = \max_{y \in [-1; 0]} (1 - x^2 + 4xy^3 - y^4).$$

Покажите, что на промежутке  $[3; 8]$  функция  $f$  является многочленом. Найдите этот многочлен. Найдите также  $f'(-1)$ .

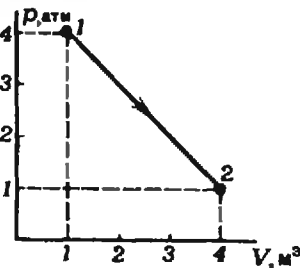
4. Квадрат  $ABCD$ , сторона которого равна 1, служит основанием пирамиды с вершиной в точке  $S$ . Двугранные углы, образуемые гранями  $ASB$ ,  $BSC$ ,  $CSD$  и  $DSA$  с основанием, относятся как числа 1, 2, 7, 2. Найдите боковую поверхность пирамиды.

## Физика

Задачи устного экзамена

Физико-механический и радиофизический факультеты

1. Для процесса с идеальным одноатомным газом, изображенного на рисунке и представляющего линейную зависимость давления от объема, найдите: а) работу, совершенную газом при расширении от состояния 1 до со-



стояния 2; б) изменение внутренней энергии; в) количество теплоты, полученное газом.

2. Внутри шара, равномерно заряженного по объему с постоянной плотностью  $\rho = 9 \times 10^{-6}$  Кл/м<sup>3</sup> и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 1$ , имеется сферическая полость, в которой заряды отсутствуют. Центр полости смещен относительно центра шара на расстояние  $a = 25$  мм. Найдите модуль и направление напряженности поля внутри полости, если известно, что напряженность равномерно заряженного шара (при  $r < R$ ) описывается форму-

лой  $\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0\epsilon} \vec{r}$ , где  $\vec{r}$  — вектор, направленный по радиусу от центра и равный по модулю расстоянию от центра шара.  $R$  — радиус шара. Электрическая постоянная  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$  Ф/м.

3. Частица с удельным зарядом  $q/m = 10^{-5}$  Кл/кг движется прямолинейно под действием электрического поля напряженности  $E = 200(1-2x)$  В/м, где  $x$  — расстояние от точки, в которой частица первоначально покоилась. Найдите: а) расстояние, пройденное частицей до точки, где она остановилась; б) ускорение частицы в этой точке.

4. По медному проводу течет ток плотности  $j = 1,0$  А/м<sup>2</sup>. Считая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон, оцените, какой путь пройдет электрон, переместившись на расстоянии  $d = 10$  мм. Плотность меди  $\rho = 8,9 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, молярная масса  $\mu = 64$  кг/кмоль.

5. Из точки  $A$ , лежащей на оси прямого соленоида, вылетает электрон со скоростью  $v = 5 \cdot 10^7$  м/с под углом  $\alpha = 30^\circ$  к оси. Индукция магнитного поля  $B = 31,4$  мТл. Найдите расстояние от оси до точки попадания электрона на экран, расположенный перпендикулярно к оси на расстоянии  $l = 10$  см от точки  $A$ .

## Общетехнические факультеты

1. Частица движется в плоскости  $XOY$

с постоянным ускорением  $\vec{a}$  ( $a = 10$  м/с<sup>2</sup>), направление которого противоположно положительному направлению оси  $OY$ . Уравнение траектории частицы имеет вид  $y = kx - bx^2$ , где  $k = 3$  и  $b = 2$  м<sup>-1</sup>. Найдите скорость частицы в начале координат.

2. Некоторая масса молекулярного водорода занимает объем  $V_1 = 1$  м<sup>3</sup> при температуре  $T_1 = 250$  К и давлении  $p_1 = 2$  атм. Какое давление будет иметь та же масса водорода при температуре  $T_2 = 5000$  К в объеме  $V_2 = 10$  м<sup>3</sup>, если при столь высокой температуре молекулы водорода полностью диссоциируют на атомы?

3. Плоский конденсатор заполнен диэлектриком и на его пластины подана некоторая разность потенциалов. Его энергия равна  $W = 2 \cdot 10^{-5}$  Дж. После того как конденсатор отключили от источника напряжения, диэлектрик из конденсатора вынули. Работа, которую при этом надо было совершить против сил электрического поля, равна  $A = 7 \cdot 10^{-5}$  Дж. Найдите диэлектрическую проницаемость диэлектрика.

4. Через сколько времени от начала движения точка, совершающая гармоническое колебание, сместится от положения равновесия на половину амплитуды? Период колебаний  $T = 24$  с, начальная фаза равна нулю.

5. Точечный источник света и его изображения, подученные путем однократного отражения света от двух плоских зеркал, образуют треугольник с углом  $\alpha$  у источника. Определите угол между зеркалами.

Публикацию подготовили

Б. П. Попов, С. П. Преображенский,  
В. Н. Романов



**Проводящая сфера  
в задачах по электростатике**

1.  $Q = -qR/r$ . Указание. Поскольку сфера заземлена, потенциал сферы и всех точек внутри нее равен нулю. Этот потенциал создается зарядом  $q$  и наведенным на сфере зарядом  $Q$ , который распределен по ее поверхности неравномерно. Рассмотрим центр сферы, поскольку для него не важно, как конкретно распределен наведенный заряд. Его потенциал равен

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = 0.$$

Отсюда и найдем заряд  $Q$ .

2.  $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (R+d)}$ . Указание. Шарик не заряжен, поэтому потенциал всех его точек один и тот же. Он складывается из потенциала поля заряда  $q$  и потенциала поля наведенных на шаре зарядов  $+Q$  и  $-Q$ . Очевидно, что в центре шарика поле наведенных зарядов равно нулю, так что искомый потенциал равен потенциалу поля точечного заряда  $q$ .

3. Через гальванометр протечет заряд

$$Q = -qR_1/R_2.$$

4. При  $R > r > 0$

$$\begin{cases} E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \\ \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{2}{R} \right). \end{cases}$$

При  $r > R$

$$\begin{cases} E = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \\ \varphi = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \end{cases}$$

Соответствующие графики приведены на рисунке 1.

5.  $q_1 = q \frac{Q}{Q-q}$ .

6.  $q_2 = 4\pi\epsilon_0 \varphi r^3 / R^2$ .

Московский инженерно-физический институт

Математика

Вариант 1

1.  $]-1; \log_2 6]$ .

2.  $\frac{2k-3}{3} S$  при  $\frac{3}{2} < k < \frac{5}{2}$ ,  $\frac{2}{3} S$  при  $k > \frac{5}{2}$ .

Указание. По условию задачи скорость первого пешехода больше скорости второго пешехода; отсюда следует  $k > \frac{3}{2}$ . Первый пешеход может достигнуть города  $B$  позже (или в момент) встречи велосипедиста со вторым пешеходом, а может — и раньше.

3.  $\frac{1}{3} d^3 \frac{\sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}$ , если

проекция вершины  $S$  на плоскость основания принадлежит ему;  $\frac{1}{3} d^3 \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin 2\alpha$  в противном случае. Замечание. Решение не изменится, если  $|AS| \neq |BS|$ .

4.  $x = -\arccos \frac{4}{5} + (-1)^k \arcsin \frac{1-a}{5} +$

$+ \pi k (k \in \mathbb{Z})$ , при  $a \in [-4; 1] \cup \{6\}$ , для остальных  $a$  функция  $f$  не имеет критических точек (в частности, если  $a \in ]1; 6[$ , функция не определена ни при каком  $x \in \mathbb{R}$ ).

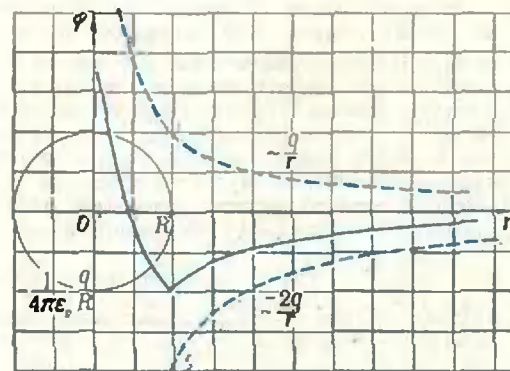
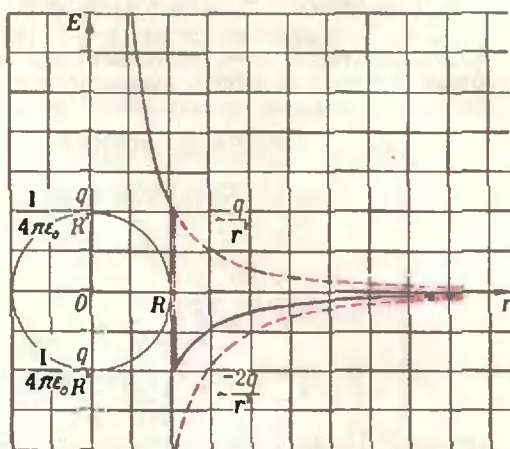


Рис. 1.

Вариант 2

- $x = \pi^2 \left(k + \frac{1}{3}\right)^2$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ).
- 77 и 86. Указание. Если  $A=10a+b$ , то  $5 < b < 9$ .
- $|2a+3; \frac{1}{3}(7a+13)|$  при  $a > -4$ .  $\emptyset$  при  $a < -4$ . Указание. Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \log_2 \frac{x-a+1}{x-3-2a} > 2 \\ x-3-2a > 0. \end{cases}$$

$$4. \frac{d^2 \sin^2 \alpha \cdot \sin \frac{\beta}{2}}{12 \cos^3 \frac{\beta}{2}} \sqrt{9+16 \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \frac{\beta}{2}} \text{ при}$$

$$\beta < \frac{\pi}{2}, \frac{1}{6} d^2 \sin^2 \alpha \cdot \sin \beta \sqrt{9+16 \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \frac{\beta}{2}}$$

при  $\beta > \frac{\pi}{2}$ . Указание. Поскольку у призмы есть плоскость симметрии, содержащая  $(BB_1)$ ,  $|BA| = |BC|$ .

#### Физика

1. Запишем второй закон Ньютона для первого груза в момент прохождения стержнем вертикального положения:

$$m_1(v^2/l) = m_1 g - N.$$

Здесь  $v$  — скорость груза,  $m_1 g$  — сила тяжести,  $N$  — сила, с которой стержень действует на груз (по модулю она равна силе  $F$  действия груза на стержень). Для нахождения скорости  $v$  используем закон сохранения энергии для системы из двух грузов, соединенных невесомым стержнем:

$$(m_2 - m_1)gl = (m_1 + m_2)(v^2/2).$$

Из полученных уравнений находим искомую силу  $F$ :

$$F = N = m_1 g (3m_1 - m_2) / (m_1 + m_2) = (1/3)m_1 g \approx 2 \text{ Н.}$$

2. Запишем законы сохранения энергии и импульса для системы горка — шайба:

$$mg(H-h) = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2},$$

$$mv - MV = 0.$$

Отсюда найдем относительную скорость движения шайбы и горки:

$$v_{\text{отн}} = v - V = \sqrt{2g(H-h)(1+n)}.$$

Время падения шайбы с высоты  $h$  равно  $t = \sqrt{2h/g}$ , а расстояние между шайбой и горкой —

$$l = v_{\text{отн}} t = 2\sqrt{(H-h)h(1+n)} = 1,6 \text{ м.}$$

3. В случае, когда второе тело толкают вниз, начальная энергия системы складывается из кинетической энергии двух тел  $(m_1 + m_2)(v^2/2)$  и потенциальной энергии второго тела  $m_2 gh_1$ , а конечная энергия системы равна нулю. Когда же первое тело толкают влево и в результате второе тело поднимается, начальная энергия системы равна только кинетической энергии  $(m_1 + m_2)(v^2/2)$ , а конечная —

потенциальной энергии второго тела  $m_2 gh_2$ . Изменение энергии в обоих случаях равно работе силы трения  $\mu m_1 g$ :

$$0 - ((m_1 + m_2)(v^2/2) + m_2 gh_1) = -\mu m_1 gh_1,$$

$$m_2 gh_2 - (m_1 + m_2)(v^2/2) = -\mu m_1 gh_2.$$

Откуда находим коэффициент трения

$$\mu = (m_2/m_1)(h_1 + h_2)/(h_1 - h_2) = 0,6.$$

4.  $x_{m2}/x_{m1} = (M/(M+m))^{1/2} \approx 0,9$ .

5. Условие равновесия поршня

$$Mg + kx = pS$$

и уравнение газового состояния для тела

$$p(hS) = (m/\mu)RT.$$

с учетом того, что энергия деформации пружины равна  $E = kx^2/2$ , позволяют найти высоту поршня над дном цилиндра:

$$h = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{Mg + 2E/x} \approx 1,04 \text{ м.}$$

6. На каждый шарик действуют четыре силы: сила тяжести  $m\vec{g}$ , направленная вертикально вниз, электростатическая сила  $\vec{F}$  отталкивания со стороны другого шарика, равная по модулю  $F = q^2/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ , а также силы натяжения  $\vec{F}'_n$  короткой нити и  $\vec{F}''_n$  длинной нити, направленные вдоль нитей от шарика. Согласно второму закону Ньютона,

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F} + \vec{F}'_n + \vec{F}''_n,$$

или, в проекциях на вертикальную и горизонтальную оси,

$$ma = F'_n \sin 60^\circ - mg$$

и

$$0 = F_n + F''_n \cos 60^\circ - q^2/(4\pi\epsilon_0 r^2).$$

Отсюда, учитывая, что  $a = g$ , находим силу натяжения короткой нити

$$F'_n = q^2/(4\pi\epsilon_0 r^2) - 2mg \operatorname{ctg} 60^\circ \approx 0,1 \text{ Н.}$$

7. В крайнем положении скорость шарика, а значит, и центростремительное ускорение равны нулю. Следовательно, проекции всех сил, действующих на шарик, на направленные нити должны быть уравновешены:

$$F''_n = (mg + qE) \cos \alpha = 0.$$

Для нахождения угла  $\alpha$  наибольшего отклонения нити от вертикали воспользуемся законом сохранения энергии

$$mv_0^2/2 = (mg + qE)l(1 - \cos \alpha),$$

откуда

$$\cos \alpha = 1 - mv_0^2/(2(mg + qE)l).$$

Тогда для натяжения нити получаем

$$F''_n = mg + qE - mv_0^2/(2l) = 0,105 \text{ Н.}$$

8. На альфа-частицу со стороны магнитного поля действует сила Лоренца  $F = qvB$ , которая сообщает частице центростремительное ускорение  $v^2/R$ :

$$m(v^2/R) = qvB.$$

Радиус  $R$  окружности, по которой движется частица, связан с размером области поля  $h$  соотношением  $R = h/\sin \varphi$ . Таким образом, скорость частицы

$$v = (q/m)(Bh/\sin \varphi) = 10^6 \text{ м/с.}$$

9. Переключатель начнет двигаться по стержню в тот момент времени  $t$ , когда магнитная сила станет равной по модулю силе трения:

$$IB = \mu mg.$$

Ток, текущий по перемычке, связан с возникающей электродвижущей силой индукции законом Ома:

$$I = \mathcal{E}_w / R = \dot{\Phi} A / R.$$

Отсюда найдем

$$I = \mu mg R / (h l^2 A^2) = 0.05 \text{ с.}$$

10. Согласно формуле линзы,

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}.$$

Длину пружины  $l$  найдем из второго закона Ньютона для муфты:

$$m\omega^2(l+b) = k(l-l_0).$$

Из этих двух уравнений получаем

$$\omega = ((3F/b-1)k/(2m))^{1/2} = 5 \text{ с}^{-1}.$$

Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина

**Математика**

Вариант 1

1.  $-\log_a b < 0$ .

2.  $x_1 = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} l (k, l \in \mathbb{Z})$ .

3.  $] -\frac{5}{4}; -1 [ \cup ] -1; 1 - \sqrt{2} [$ ,  $x = -\frac{2}{3}$  —

точка минимума. Указание.  $x^4 - 4x^2 - 4x - 1 = (x+1)^2(x^2 - 2x - 1)$ .

4.  $\frac{\sqrt{3}}{9}$ . Указание.  $V = \frac{1}{3} S r$ , где  $V$  — объем пирамиды,  $S$  — площадь ее полной поверхности,  $r$  — искомый радиус.

Вариант 2

1. {4}.

2.  $\left\{ \frac{6}{5} \right\}$ .

3.  $f(x) = 1 - x^2$  на  $]0; +\infty[$ ,  $f'(-1) = -2$ . Указание. Рассмотрите три случая в зависимости от того, лежит ли единственная точка экстремума (точка максимума)  $y_0 = 3x$  функции  $g(y)$  на  $[-1; 0]$ , на  $]-\infty; -1[$  или на  $]0; +\infty[$ .

4.  $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Указание. Обозначим через  $K$  и  $L$  середины, соответственно, сторон  $AB$  и  $CD$ , через  $O$  — основание высоты пирамиды, через  $M$  — основание высоты треугольника  $ASD$ , проведенной из  $S$ . Тогда  $(KSL)$  — плоскость симметрии пирамиды и  $O \in (KL)$ ,  $\widehat{SKL} = \alpha$ ,  $\widehat{SLK} = 7\alpha$ ,  $\widehat{SMO} = 2\alpha$ . Выразите  $|SO|$  двумя способами — из  $\triangle SMO$  и из  $\triangle SOL$ ; из полученного уравнения найдите  $\alpha$ . Обратите внимание на то, что заранее неизвестно, находится ли  $O$  внутри пирамиды.

**Физика**

Физико-механический и радиофизический факультеты

1. а)  $A = (p_1 - p_2)(V_2 - V_1)/2 = 450$  кДж; б)  $\Delta U = 3(p_2 V_2 - p_1 V_1) = 0$ ; в)  $Q = A + \Delta U = A = 450$  кДж.

2.  $\vec{E} = \frac{q}{3\epsilon_0 a} \vec{a}$  (рис. 2);  $E = \frac{qa}{3\epsilon_0} \approx 85$  В/м.

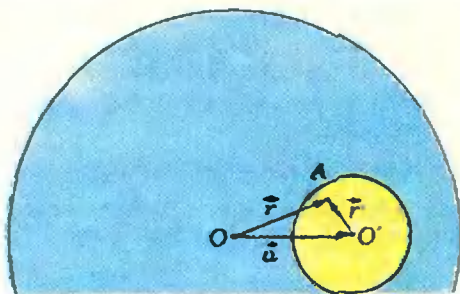


Рис. 2.

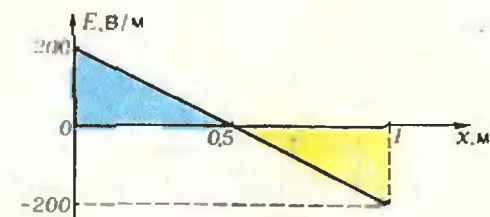


Рис. 3.

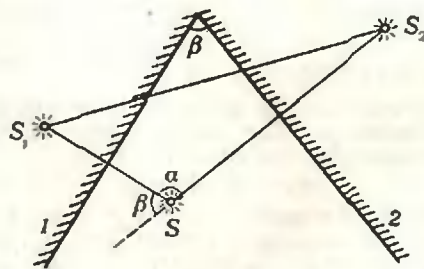


Рис. 4.

Указание. В произвольной точке  $A$  внутри полости электрическое поле является суперпозицией двух полей: поля  $\vec{E} = \frac{q}{3\epsilon_0 e} \vec{r}$ , распределенного с плотностью  $q$  по всему шару, и поля  $\vec{E} = \frac{-q}{3\epsilon_0 e} \vec{r}'$ , распределенного с плотностью  $-q$  по сферической полости.

3.  $x = 1$  м;  $a_x = E_x q / m = -2 \cdot 10^{-3}$  м/с<sup>2</sup>. Указание. До расстояния 0,5 м от начала координат частица двигалась в ускоряющем поле, а затем, до расстояния 1 м, — в тормозящем поле (рис. 3).

4.  $l = \sqrt{\frac{3kT}{m} \frac{deN_A q}{j\mu}} \approx 1,5 \cdot 10^7$  м, где  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К — постоянная Больцмана,  $T \approx 300$  К — комнатная температура,  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг — масса электрона,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл — его заряд,  $N_A = 6,02 \times 10^{23}$  моль<sup>-1</sup> — число Авогадро. Указание. Для оценки можно считать, что средняя скорость теплового движения электронов (которая на несколько порядков больше средней скорости направленного движения электронов в электрическом поле) равна средней квадратической скорости теплового движения

молекул идеального газа, то есть  $\sqrt{\frac{3kT}{m}}$ .

5. Двигаясь по винтовой линии, электрон сделает два полных витка и попадет как раз в центр экрана.



## Общетехнические факультеты

- $v_n = \sqrt{(1+k^2)a/(2b)} = 5 \text{ м/с.}$
- $p_2 = 2p_1 \frac{V_1 T_2}{V_2 T_1} = 8 \text{ атм.}$
- $v = 1 + A/W = 4.5.$
- $t = T/12 = 2\text{с.}$  Указание. Точка колеблется по закону  $x = x_m \sin \frac{2\pi}{T} t.$
- $\beta = \pi - \alpha$  (рис. 4).

## Задачи с устного экзамена МФТИ

(см. «Квант» № 2)

- Нет, оно делится на 9.
- Предположим, что  $(x, y)$  — целочисленное решение уравнения. Заметим, что число 1982 четное, но на 4 не делится. Для того чтобы  $x^2 - y^2$  делилось на 2, числа  $x$  и  $y$  должны иметь одинаковую четность. Но тогда  $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$  делится на 4.
- Полусумма  $\frac{p_1 + p_2}{2} = n$  — целое число, лежащее между числами  $p_1$  и  $p_2$ , которые по условию являются последовательными нечетными простыми. Поэтому число  $n$  должно быть четным.
- Если бы число  $n+1$  было составным, то оно делилось бы на некоторое число  $k \neq 1$ , меньшее  $n$ . Но тогда и число  $m = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n + 1$  должно делиться на  $k$ , что невозможно, так как на  $k$  делится  $m-1 = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ , а значит,  $m$  при делении на  $k$  дает остаток 1.
- Из условия следует, что оба числа  $2^n - 1$  и  $2^n + 1$  больше трех. Покажем, что одно из них обязательно делится на 3, поэтому является составным. Действительно, одно из трех последовательных чисел  $2^n - 1, 2^n, 2^n + 1$  делится на 3, причем  $2^n$  этим свойством не обладает.
- Не может, так как при делении числа  $k^2$ , где  $k \in \mathbb{N}$ , на 3, в остатке получится либо 0, либо 1. Действительно, число  $k$  может быть записано в следующем виде:  $k = 3m + r$ , где  $r$  — остаток при делении  $k$  на 3. Если  $r = 0$ , то  $k^2$  делится на 3. Если  $r = 1$ , то  $k^2 = 9m^2 + 6m + 1 = 3l + 1, l \in \mathbb{N}$ . Аналогично проверяется, что если  $r = 2$ , то  $k^2 = 3q + 1, q \in \mathbb{N}$ .
- Разобьем указанную сумму на два слагаемых:  $6n^2 - 3n + 3$  и  $n^3 - n$ . Первое слагаемое делится на 3, а второе  $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$  также делится на 3 (как произведение трех последовательных целых чисел).
- Запишем число  $p$  в виде  $p = 12q + r$ , где  $r$  — остаток от деления  $p$  на 12. Если  $p$  — простое число, большее 3, то  $r$  не может быть четным и не может делиться на 3 (в противном случае само число  $p$  было бы четным или делилось бы на 3). Таким образом, остаток  $r$  может принимать только значения 1, 5, 7, 11. Следовательно, любое простое число, большее 3, может быть отнесено к одному из двух множеств: множеству  $A$  чисел, дающих при делении на 12 остаток 1 или 11, или множеству  $B$  — с остатком 5 или 7. Из трех простых чисел, больших 3, по крайней мере два принадлежат к одному из множеств  $A$  или  $B$ . Если остатки при делении на 12 этих двух чисел одинаковы, то их разность делится на 12. Если их остатки

различны, то сумма этих остатков равна 1+11 или 5+7, то есть равна 12, поэтому сумма чисел делится на 12.

9. Это число делится на  $111 = 3 \cdot 37$ .

10. Возводя члены исходного неравенства в квадрат, получаем  $1982^2 < n < 1983^2$ . Искомое количество натуральных чисел  $n$  равно

$$1983^2 - 1982^2 - 1 = (1983 + 1982) - 1 = 3964.$$

11. Представим исходное выражение в виде  $\frac{2m + 3m^2 + m^3}{6}$  и покажем, что числитель этой

доби делится на 6 при любом целом  $m$ . Сначала докажем, что он делится на 2, для чего достаточно рассмотреть сумму  $3m^2 + m^3 = m^2(3+m)$  и заметить, что если  $m$  четное, то на 2 делится  $m^2$ , если  $m$  — нечетное, то четным является  $3+m$ . Покажем теперь, что сумма  $2m + 3m^2 + m^3$  всегда делится на 3. Для этого достаточно показать, что на 3 делится сумма  $m^3 + 2m = m(m^2 + 2)$ . Это утверждение верно, если  $m$  делится на 3. Если  $m$  на 3 не делится, то число  $m^2$  при делении на 3 дает остаток 1 (действительно, если  $m = 3k$ , то  $m$  делится на 3, если  $m = 3k + 1$ , то  $m^2 = 9m^2 + 6m + 1 = 3l + 1, l \in \mathbb{N}$ , если же  $m = 3k + 2$ , то аналогично  $m^2 = 3q + 1, q \in \mathbb{N}$ ). Поскольку  $m^2$  дает остаток 1 при делении на 3,  $m^2 + 2$  кратно 3.

12. Пусть  $A$  и  $B$  — соответственно, искомое число и число, получаемое при умножении  $A$  на 9. Первая цифра числа  $A$ , очевидно, равна 1, и поэтому 9 — последняя цифра этого числа. Обозначим буквами  $x, y, z$ , соответственно, вторую, третью и четвертую цифры числа  $A$  и запишем результат умножения:

$$\begin{array}{r} 1xyz9 \\ \times \quad 9 \\ \hline 9zyx1 \end{array}$$

Цифра  $x$  не может быть больше единицы, так как в противном случае число  $B$  было бы шестизначным. Если  $x = 1$ , то в записи числа  $B$  вторая цифра  $z = 9$ . Заменяя  $z$  на 9 в записи числа  $A$ , в результате умножения получаем  $x = 9$ . Итак, цифра  $x$  может быть только нулем, то есть

$$\begin{array}{r} 10yz9 \\ \times \quad 9 \\ \hline 9zy01 \end{array}$$

Так как четвертая цифра числа  $B$  равна нулю, то число  $9z$  должно оканчиваться двойкой, и поэтому  $z = 8$ . Отсюда следует, что  $y \neq 0$  и поскольку число  $B$  делится на 9, сумма его цифр делится на 9, и, значит,  $y = 9, A = 10989$ .

13. Найдем такое целое неотрицательное  $n_1$ , что  $2^{n_1} < A < 2^{n_1+1}$ ; пусть  $A_1 = A - 2^{n_1}$ . Если  $A_1 \neq 0$ , найдем целое неотрицательное  $n_2$  такое, что  $2^{n_2} < A_1 < 2^{n_2+1}$ . Обозначим  $A_2 = A_1 - 2^{n_2}$ . Заметим, что  $A_1 < 2^{n_1}$  и поэтому  $n_2 < n_1$ . Рассуждая аналогично, за конечное число  $k$  шагов (не более чем за  $n_1 + 1$ ) получим  $A_{n_k} = 0$ . Отсюда

$$A = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \dots + 2^{n_k}.$$

14. Может. Например, положим  $a = \sqrt{2}, b = \log_2 9$ ; тогда  $a^b = 3$ . Докажем, что  $\log_2 9$  — иррациональное число. Пусть это не так, тогда существуют такие натуральные  $m$  и  $n$ , что

$\log_2 9 = \frac{m}{n}$ , откуда  $9^n = 2^m$ . Последнее равенство невозможно, так как его части разной четности. Следовательно,  $\log_2 9$  — иррациональное.

**Второе решение.** Рассмотрим число  $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ . Если оно рационально, то искомый пример построен. Если оно иррационально, то положим  $a = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ ,  $b = \sqrt{2}$  и тогда  $a^b = 2$ . (На самом же деле  $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$  — иррационально, но доказательство этого факта очень сложно, и для решения задачи не требуется).

#### Квант для младших школьников

(см. «Квант» № 2)

1. После разрезания каждой фигурки по оси симметрии мы получаем последовательность чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6 в записи, рекомендуемой Министерством связи СССР для написания индексов адресатов.
2. Искомые цифры — 5 и 2.
3. Вертушка начнет вращаться, поскольку скорости различных слоев воды меняются, увеличиваясь от 0 (на дне, из-за трения воды о дно) до максимума на поверхности.

4. Зашифрован следующий вопрос: «Сколько граней у шестигранного карандаша?» Ответ — 8 граней, поскольку он является шестигранной призмой (верхняя и нижняя грань тоже учитываются!)

#### Шахматная страничка

(см. «Квант», 1982, № 12)

**Задание 23** (М. Бейт). Последним ходом черные могли сыграть только d7 — d5 или f7 — f5. Если предположить, что ход сделан пешкой d, то это означало бы, что белопольный слон черных на e8 взят какой-нибудь белой фигурой. Но нетрудно выяснить, что белые пешки могли расположиться данным образом лишь в том случае, если они съели шесть черных фигур. Противоречие. Итак, черные только что сыграли f7 — f5, и решает 1. g1 (из проходе) и 2. f7 ×.

**Задание 24** (А. Хильдебранд). 1.d4 Кр:e3 2.d5 Крe4 3.d6 Крd5 4.d7 Крc5 5.d8К! Крd6 6.К:b7+ и 7.К:a5 с выигрышем. Не проходит 1.e4? Кр:d2 2.e5 Крd3 3.e6 Крe4 4.e7 Крf5! 5.e8К (5.e8Ф,Л — пат, превращение в слона тоже ничего не дает) 5...Крe6! 6.Кс7+ Крd6 7.Кe8+ Крe6 8.К:g7+ Крf7 или 7.Ка6 ба 8.ба Крc7 с ничьей.

Главный редактор — академик И. К. Киконн

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Михайлов, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Каница, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаяев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, А. В. Перышкин, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

#### Номер оформили:

М. К. Гуров, М. Б. Дубах, А. И. Кланманов,  
Э. В. Назаров, М. П. Сядоров, И. Е. Смирнова,  
Е. К. Темчурина; фото — А. Н. Виленкин,  
В. И. Родионов (АНН), В. П. Шевченко

Главный художник Э. А. Смирнов

Заведующая редакцией Л. В. Чернова  
Художественные редакторы Т. М. Макарова,  
Е. В. Морозова  
Корректор Е. В. Сидоркина

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,  
тел. 250-33-54

Дизайн и набор 17.01.83. Подписано в печать 14.02.83.  
Печать офсетная.

Бумага 70 × 108 1/16, Физ. печ. л. 4.  
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 6,65. Т-05956  
Цена 40 коп. Заказ 47. Тираж 171596 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени  
Чеховский полиграфический комбинат  
ВО «Союзполиграфпром»  
Государственного комитета СССР  
по делам издательства, полиграфии  
и книжной торговли  
г. Чехов Московской области

## Шахматная страничка



Консультирует — чемпионы мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастера спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

## ФИГУРЫ В БЕЗОПАСНОСТИ

Одна из самых популярных комбинаторных задач на шахматной доске заключается в расстановке на ней наибольшего числа тех или иных фигур, не угрожающих друг другу, а также подсчете числа указанных расстановок. Обе эти задачи ставятся не только для обычной доски  $8 \times 8$ , но и для любой квадратной доски размером  $n \times n$ . Решения некоторых из этих задач хорошо известны, другие очень сложны и до сих пор не решены.

**Ферзи.** На обычной доске можно расставить 8 ферзей так, чтобы они не угрожали друг другу. Число расстановок — 92, из них 12 — основных (об этом рассказывалось в «Кванте», 1983, № 1).

Очевидно, на доске  $n \times n$  больше  $n$  ферзей, не угрожающих друг другу, расставить невозможно. Оказывается, что для всех  $n$ , кроме  $n=2$  и  $n=3$ , максимальное число ферзей, находящихся в безопасности, равно  $n$  (на доске  $2 \times 2$  — один ферзь, на доске  $3 \times 3$  — два ферзя). Доказательство этого факта не очень простое, его можно найти в различных книгах по занимательной математике. Числа соответствующих решений известны только для  $n < 14$ , причем при их нахождении использовалась ЭВМ.

**Ладьи.** Максимальное число не угрожающих друг другу ладей также равно  $n$ , а число расстановок равно  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ .

**Слоны.** Максимальное число слонов, не угрожающих друг другу на доске  $n \times n$ , равно  $2n-2$  ( $n > 1$ ). Слонов можно расположить вдоль всей первой горизонтали и на последней, исключая углы

Всего существует  $2^n$  расстановок.

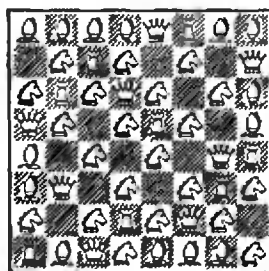
**Кони.** Очевидно, расставляя на обычной доске 32 коня на одних белых или одних черных полях, мы получим две расстановки, не угрожающих друг другу коней. Убедимся, что большего числа коней, обладающих этим свойством, расставить невозможно, и что имеется всего два варианта. Пусть кони требуемым образом расставлены на доске. Воспользуемся тем, что на доске  $8 \times 8$  существует замкнутый маршрут коня по всей доске. Поскольку в этом маршруте после каждого поля с конем из нашей расстановки обязательно должно следовать свободное поле, конями не может быть занято более половины доски! Если же ровно половина доски заполнена конями, то эти 32 коня должны следовать в выбранном маршруте через одного, т. е. располагаться на полях одного цвета.

Аналогично доказывается, что при четных  $n$  на доске можно расставить максимум  $n^2/2$  коней, не угрожающих друг другу, а при нечетных  $n$  —  $(n^2+1)/2$  коней. В первом случае возможны две одноцветные расстановки, а во втором — только одна (кони стоят на полях того цвета, которого на доске больше).

**Короли.** Представим число  $n$  в виде  $n=2k$  или, соответственно,  $n=2k-1$ . Можно доказать, что на доске  $n \times n$  уместится  $k^2$  королей, не угрожающих друг другу, т. е. не стоящих рядом. На обычной доске 16 королей ( $k=4$ ) расставляются требуемым образом 287571 способом. Королей можно поставить, например, на все одноцветные поля четных или нечетных горизонталей. Общая формула для числа расстановок на доске  $n \times n$  неизвестна.

**Пешки.** Опять представим число  $n$  в виде  $n=2k$  или  $n=2k-1$ . Тогда на доске  $n \times n$  можно расставить  $nk$  пешек, ни одна из которых не нападает на другую. Пешками можно заполнить горизонтали (через одну) или вертикали (через одну), но могут быть и другие расстановки. Число допустимых расстановок попробуйте найти сами (хотя бы на доске  $8 \times 8$ ).

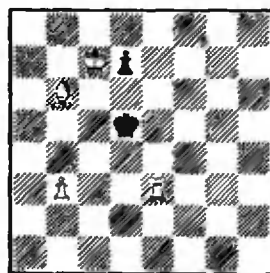
Уникальной является следующая расстановка фигур, созданная Г. Дьюдени



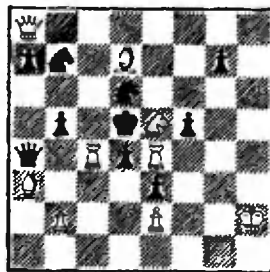
На доске одновременно уместится максимальное число не угрожающих друг другу ферзей, ладей и слонов. Еще на доске поместился 21 конь (они не нападают друг на друга), а на свободных черных полях доски можно поставить также 8 королей, которые не будут нападать друг на друга.

## Конкурсные задания

В мартовском номере журнала по традиции предлагаем две задачи, составленные женщинами — шахматными композиторами Любопытню, что авторы обеих позиций придумали их, когда учились в школе.



5. (К. Сагателян, 1957 г.). Мат в 3 хода.



6. (Л. Вышинская, 1964 г.). Мат в 2 хода.

Срок отправки решений — 25 мая 1983 года (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 5, 6»)

Цена 40 коп.

Индекс 70465

*Этот сложный узор был нарисован графопостроителем ЭВМ БЭСМ-6 в августе 1982 г. во время VII Всесоюзной летней школы юных программистов в Новосибирском Академгородке. Правда, графопостроитель рисовал черными чернилами на белой бумаге, а мы вос-*

*производим узор на зеленом фоне. Любопытно, что не только программа для выполнения этого рисунка, но и вся система предписаний (Графическая система «Шпага-5»), позволяющая «рисовать на ЭВМ», созданы школьниками в Новосибирске.*

