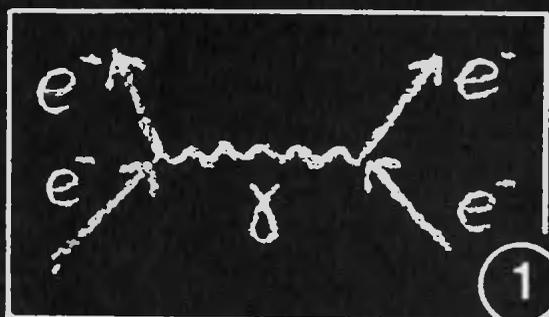


Квант

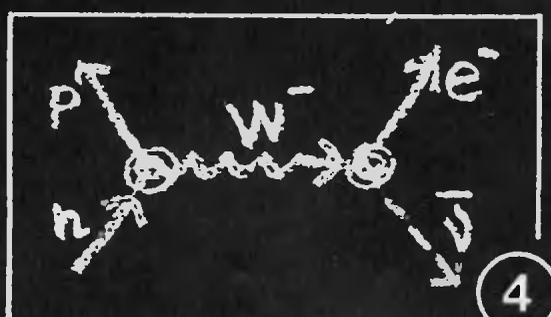
5
1983

*Научно-популярный физико-математический журнал
Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР*

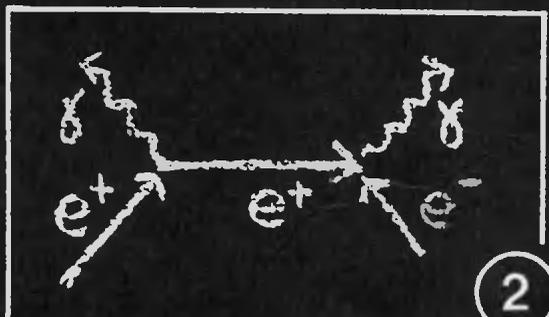




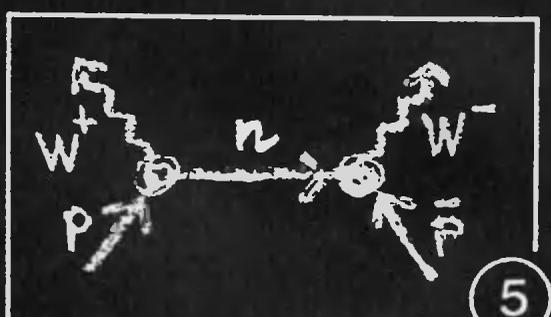
1



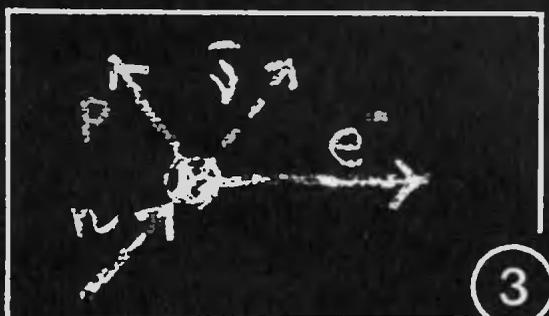
4



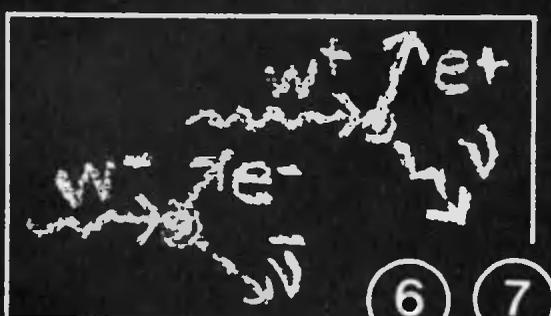
2



5



3



6

7

Для наглядного изображения различных процессов, происходящих в мире элементарных частиц, физики пользуются специальными рисунками, называемыми графами. Выше нарисовано только несколько таких графов.

1. Электрослабое взаимодействие двух электронов. 2. Аннигиляция электрона и позитрона. 3. Бета-распад нейтрона по старой теории. 4. Бета-распад по новой теории — теории электрослабого взаимодействия. 5. Рождение двух W-бозонов при аннигиляции протона и антипротона. (Чаще вместо одного из бозонов рождаются какие-либо другие частицы.) 6—7. Примеры распадов образовавшихся W-бозонов. Об открытии W-бозонов можно прочитать в разделе «Новости науки».

3. Бета-распад нейтрона по старой теории: протон, электрон и антинейтрино рождаются одновременно.

4. Бета-распад по новой теории — теории электрослабого взаимодействия.

5. Рождение двух W-бозонов при аннигиляции протона и антипротона. (Чаще вместо одного из бозонов рождаются какие-либо другие частицы.)

6—7. Примеры распадов образовавшихся W-бозонов. Об открытии W-бозонов можно прочитать в разделе «Новости науки».



В ПОМЕРЕ:		IN THIS ISSUE:	
2	<i>И. К. Кикоин.</i> Физика и научно-технический прогресс	<i>I. K. Kikoin.</i> Physics and technological progress	
9	<i>А. А. Шур.</i> Эти разные радиоволны	<i>A. A. Shur.</i> These varying radiowaves	
16	<i>Ю. В. Нестеренко, Е. М. Никишин.</i> Очерк о цепных дробях	<i>Yu. V. Nesterenko, E. M. Nikishin.</i> Essay on continued fractions	
21	<i>А. В. Митрофанов.</i> Задачи П. Л. Капицы	<i>A. V. Mitrofanov.</i> P. L. Kapitza's problems	
24	<i>А. Н. Зайдель.</i> Обман или заблуждение? (Об одном способе вычисления π .)	<i>A. N. Zaydel.</i> Mystification or error? (On a method for finding π .)	
Лаборатория «Кванта»		Kvant's lab	
29	<i>А. А. Варламов.</i> Из старых опытов	<i>A. A. Varlamov.</i> From old experiments	
Школа в «Кванте»		Kvant's school	
34	<i>Л. П. Баканина.</i> Интерференция волн	<i>L. P. Bakanina.</i> Wave interference	
Новости науки		Science news	
38	Открытие новой частицы	A new particle is discovered	
«Квант» для младших школьников		Kvant for younger school-children	
39	Задачи	Problems	
40	<i>Р. Ш. Дanelия.</i> На пальцах и в уме	<i>R. Sh. Danelia.</i> On one's fingers or in one's head	
Задачник «Кванта»		Kvant's problems	
42	Задачи М801—М805; Ф813—Ф817	Problems M801—M805; P813—P817	
45	Решения задач М786—М790; Ф798, Ф799, Ф801, Ф802	Solutions M786—M790; P798, P799, P801, P802	
Практикум абитуриента		College applicant's section	
59	Ответы, указания, решения	Answers, hints, solutions	
	Рецензии, библиография (23, 28)	Book reviews (23, 28)	
	Наша обложка (20, 52)	Our cover page (20, 52)	
	Смесь (33, 37, 51)	Miscellaneous (33, 37, 51)	
	Шахматная страничка	The chess page	
	Симметрия и асимметрия (3-я с. обложки)	Symmetry and asymmetry (3rd cover page)	

Физика и научно-технический прогресс

Академик И. К. КИКОИН

Первая часть этой статьи, посвященная влиянию физических открытий на развитие техники в XIX веке, была опубликована в 3-м номере нашего журнала.

В 1896 году французский физик Анри Беккерель, узнав об открытии Рентгена, предположил, что источником рентгеновских лучей служат флуоресцирующие вещества*. У Беккереля была целая коллекция таких веществ, среди которых наиболее интенсивно флуоресцировала урановая соль. Он провел ряд экспериментов. В опытах Беккереля флуоресцирующая урановая соль действительно засвечивала фотопластинку, закрытую черной бумагой. Но однажды он случайно оставил не освещенную предварительно урановую соль около фотопластинки. Оказалось, что и в этих условиях, в отсутствие флуоресценции, урановая соль засвечивала защищенную черной бумагой фотопластинку. Беккерель решил, что урановая соль испускает лучи, подобные рентгеновским. Так было открыто явление, получившее название радиоактивности (от латинского слова радиус — луч).

Этим явлением заинтересовались французские физики супруги Мария Склодовская-Кюри и Пьер Кюри.

Они занялись детальным изучением урана и отходов от его фабричного производства и впервые обнаружили, что эти отходы дают излучение, которое по интенсивности намного превосходит излучение самого урана. В результате огромной работы Мария и Пьер Кюри впервые в мире выделили из этих отходов два новых доселе неизвестных элемента — полоний и радий.

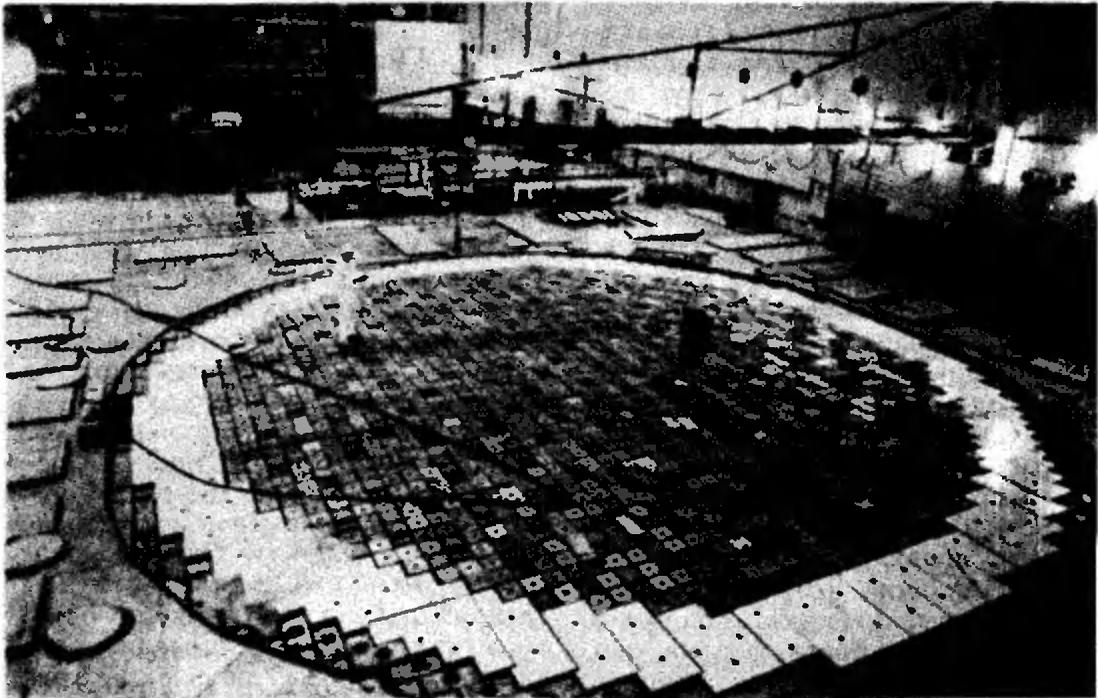
Интенсивность излучения радия (в действительности это был хлорид радия) оказалась в миллион раз выше, чем интенсивность излучения урана. Выяснилось что каждый грамм радия в течение часа излучает около 580 джоулей. Непрерывное излучение химическими элементами энергии было совершенно непонятно и на первый взгляд, казалось, противоречило закону сохранения энергии.

Способность радия испускать, хотя и очень медленно, значительные количества энергии больше всего заинтересовала физиков. Что заставляет радиоактивные вещества испускать лучи? Какова природа этих лучей? Откуда радиоактивные вещества берут энергию, которую они отдают в форме своих таинственных лучей? Такие вопросы волновали физиков. Это была загадка радия. Многие физики ломали голову над ее решением.

Экспериментальные исследования природы излучения радия продолжили Мария и Пьер Кюри. Они поместили радий в магнитное поле (между полюсами электромагнита) и заметили удивительное явление — излучение радия заметно ослабело. Супруги Кюри догадались, что ослабление излучения радия в магнитном поле связано с отклонением в этом поле каких-то заряженных частиц. Эти частицы назвали β -частицами. Теперь известно, что β -частицы — это электроны.

Резерфорд обнаружил, что кроме β -частиц радий испускает еще и положительно заряженные частицы. Они получили название α -частиц. И наконец, часть излучения радия, на которую магнитное поле вовсе не влияет, получила название γ -лучей.

*) Флуоресценция — свечение некоторых веществ, возникающее после облучения их светом. Флуоресценция имеет конечную длительность



Центральный зал четвертого энергоблока Ленинградской атомной электростанции им. В. И. Ленина.

Дальнейшие опыты, описание которых мы здесь опускаем (хотя они весьма поучительны), показали, что положительный заряд α -частиц ровно вдвое больше заряда электрона, а их масса совпадает с массой атома гелия. В целом атом электрически нейтрален. Поэтому легко догадаться, что α -частица — это атом гелия, из которого удалено 2 электрона. Что касается γ -лучей, то, как выяснилось, это электромагнитные волны, длина которых значительно меньше, чем у известных уже рентгеновских лучей.

Резерфорд решил использовать α -частицы в качестве разведчиков атомной структуры. Он вместе с сотрудниками сумел проследить за изменением траектории α -частиц при их прохождении через тонкий слой исследуемого вещества. Надо было брать именно тонкий слой вещества, потому что α -частицы, несмотря на свою большую скорость, составляющую около миллиона метров в секунду, застревают в веществе, если его толщина больше нескольких микрон. При этом Резерфорд получил совершенно неожиданный результат. Оказалось, что вместо рав-

номерного расширения пучка α -частиц при прохождении через вещество некоторая часть α -частиц отклонялась от первоначальной траектории на очень большие углы. Наблюдались даже случаи, когда α -частица отклонялась почти на 180° . Этого не могло бы, конечно, произойти, если бы положительные и отрицательные заряды, из которых состоит нейтральный атом, располагались равномерно внутри атома.

Для объяснения наблюдаемых отклонений α -частиц на большие углы было необходимо предположить, что α -частица очень близко подходит к отклоняющему ее положительному заряду. При этом по закону Кулона на α -частицу действуют достаточно большие силы отталкивания, вызывающие ее отклонение. Оценки показывали, что эти расстояния примерно в 10 тысяч раз меньше размера самого атома. Поэтому Резерфорд предложил такую картину строения атома. Он представил себе атом в виде микроскопической копии Солнечной системы, где «Солнцем» служил положительный заряд, вокруг которого, как планеты, вращались электроны.

Если в Солнечной системе планеты движутся под действием гравитационных ньютоновских сил, то в атоме электроны движутся вокруг положительного заряда под действием электрических, кулоновских сил.

«Солнце» было названо ядром атома, которое имеет положительный заряд, равный сумме зарядов вращающихся вокруг него электронов (чтобы атом оставался электрически нейтральным). Это так называемая планетарная модель атома Резерфорда. Размер ядра при этом не превышает 10-тысячной доли размера самого атома (так же как размер Солнца много меньше размеров всей Солнечной системы). Так на свет появился новый термин, характеризующий атом, — атомное ядро. Открытие ядра положило начало новой отрасли физики, которая теперь называется ядерной физикой.

Исследования рассеяния α -частиц на различных элементах таблицы Менделеева привели к важному открытию: положительный заряд ядра численно равен произведению порядкового номера данного элемента в таблице Менделеева на заряд электрона. Это пролило новый свет на великий закон Менделеева, придав ему глубокий физический смысл. Оказалось, что номер химического элемента в его знаменитой таблице равен числу электронов, вращающихся вокруг ядра. Было выяснено также, что в состав ядра входят положительно заряженные частицы — протоны, заряд которых равен заряду электрона, а масса примерно в 1800 раз больше массы электрона.

Вначале изучением атомного ядра занимались лишь в очень небольшом числе лабораторий мира. Это лаборатория Резерфорда в Кембридже, лаборатория мадам Кюри в Париже и лаборатория Д. В. Скобелцына в Ленинграде. Однако к концу двадцатых — началу тридцатых годов основные свойства самих атомов были хорошо исследованы, и многие физики мира обратили свой взор на атомное ядро.

В 1932 году было сделано одно из крупнейших открытий в ядерной

физике XX века: был открыт нейтрон — электрически нейтральная частица, масса которой приблизительно равна массе протона. Стало ясно, что ядро состоит из протонов и нейтронов.

Действительно, к тому времени было известно, что атомы, имеющие один и тот же номер в таблице Менделеева, могут обладать разными массами. Такие атомы называют изотопами данного элемента. Ядра атомов изотопов содержат таким образом, одинаковое число протонов, но разное число нейтронов.

В 1934 году супруги Ирен и Фредерик Жолио-Кюри сделали не менее важное открытие искусственной радиоактивности. Оно заключалось в том, что легкие элементы (например, бериллий) при облучении α -частицами сами становились радиоактивными, испуская при этом нейтроны.

При облучении тяжелых элементов таких явлений не наблюдалось. Знаменитый итальянский физик Ферми догадался, что у тяжелых элементов слишком велик заряд ядра, и α -частица, имеющая заряд того же знака, не может к нему достаточно близко подойти. На нейтрон, не имеющий заряда, положительный заряд не будет действовать кулоновскими силами. Ферми выполнил целый ряд опытов по облучению различных элементов нейтронами и обнаружил, что практически все элементы после облучения становятся искусственно радиоактивными. После облучения большинство элементов испускало α - и β -частицы, γ -лучи, нейтроны. При испускании α - и β -частиц образовывались новые химические элементы.

Вскоре Ферми опубликовал большую работу, в которой привел результаты своих исследований почти всех элементов таблицы Менделеева, которые после облучения нейтронами становились радиоактивными. При этом он дал практически полную характеристику искусственной радиоактивности каждого элемента. Тем самым открылась новая эра искусственного превращения элементов при соответствующем облучении.

Когда Ферми дошел до последнего (тогда) элемента системы Менделеева — урана, то после облучения нейтронами анализ полученных продуктов был настолько запутан, что Ферми не мог дать надлежащего описания прошедшей ядерной реакции.

Естественно, что после открытия нейтронной искусственной радиоактивности вопросами ядерных реакций занялись многие лаборатории мира, в частности Гана и Штрассмана в Берлине. Аналогичные работы проводились в Ленинградском физико-техническом институте в лаборатории И. В. Курчатова.

Парадоксальность ситуации с ураном состояла в том, что после облучения урановой мишени нейтронами в ней были обнаружены ядра таких элементов, как например барий, масса которых примерно вдвое меньше, чем масса урана. Распутать сложный процесс, который наблюдался Ганом и Штрассманом, помогла их бывшая руководительница Лиза Мейтнер, жившая тогда в Швеции. Подробную теорию этого процесса дал Нильс Бор, разивший идею, высказанную в короткой заметке известного советского физика Я. И. Френкеля.

Не вдаваясь в рассмотрение сложных процессов, происходящих при облучении урана нейтронами, укажем главную особенность этой ядерной реакции: оказалось, что ядро урана расщепляется (делится) на два отдельных осколка. Они так и называются осколками. Это научный термин. Массы и заряды осколков определяют, какие именно изотопы элементов системы Менделеева они собой представляют. Вскоре выяснилось, что расщепляться могут не все изотопы урана, а только изотоп ^{235}U , которого очень мало в природном уране, всего 0,7%.

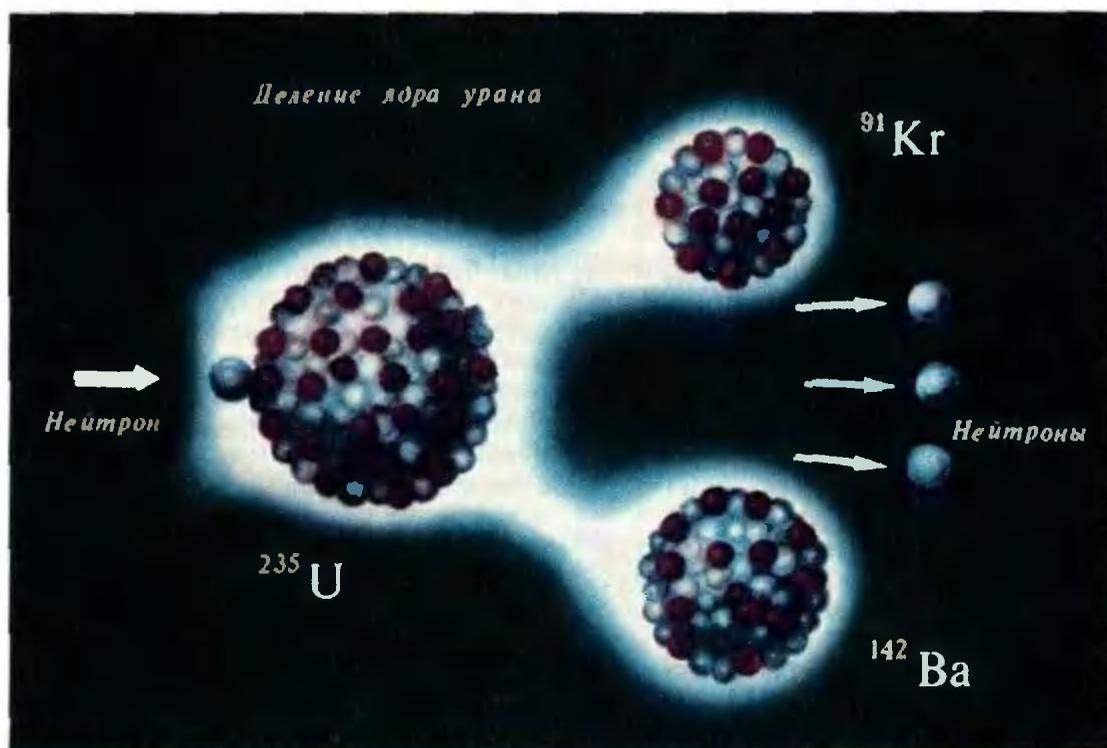
Энергия осколков, образующихся при делении ядра атома ^{235}U , оказалась во много раз больше, чем энергия нейтронов, которыми бомбардировали ядро урана. Такие случаи, когда энергия частиц, испускаемых ядрами, больше энергии облучающих частиц, уже бывали. Но до опытов с ураном было ясно, что только ничтожная часть бом-

бардирующих частиц (порядка миллионной доли) попадает в ядро и приводит к ядерной реакции. Остальные пролетают вдали от ядра и никакого действия не производят. Поэтому ясно, что если даже энергия испускаемых частиц искусственно радиоактивного вещества в сотни раз больше энергии бомбардирующих частиц, суммарная энергия, затрачиваемая на всю эту операцию, в 10 000 раз больше выделяемой энергии. Это и дало основание Резерфорду — основоположнику ядерной физики — утверждать, что атомное ядро не может служить источником энергии.

В случае с ураном все оказалось не так. Опыты показали, что при расщеплении ядра урана попавшим на него нейтроном кроме осколков, образующихся при этом, испускаются еще и нейтроны. При каждом акте взаимодействия ядра и попавшего в него одного нейтрона испускается в среднем больше двух нейтронов. А это значит, что нейтрон, попавший в ядро урана, рождает больше двух новых нейтронов, которые сами по себе ничем не отличаются от попавшего в ядро первичного нейтрона. Они могут, попав в другое ядро урана, снова его расщепить, при этом испустится еще два новых нейтрона, которые учетверяют количество расщепленных ядер, и т. д.

Другими словами, происходит самопроизвольное лавинообразное размножение нейтронов (цепная реакция). Надо только обеспечить условия, при которых образовавшиеся при расщеплении ядра урана нейтроны не вылетали бы из облучаемого куска урана, не успев расщепить новых его ядер.

Для этого нужно иметь достаточно большой объем, а следовательно, и большую массу урана. Такая масса называется критической массой. В этом случае потери нейтронов становятся незначительными, и огромная кинетическая энергия осколков урана передается атомам урана. Уран нагреется до очень высоких температур. Предсказание Резерфорда не подтвердилось. Было доказано, что ядра урана могут стать источником энергии.



Если бы удалось выделить практически в чистом виде ^{235}U , то, обеспечив его критическую массу, можно было бы получить огромное количество энергии. Как показали расчеты, процесс расщепления практически чистого ^{235}U под действием нейтронов происходит очень быстро и носит характер взрыва (такие расчеты провели Я. Б. Зельдович, Ю. Б. Харитон в СССР и ряд зарубежных физиков). Больше того, для этой цели даже не требуется специального источника нейтронов, потому что в атмосфере Земли всегда имеется небольшое количество нейтронов космического происхождения, которое достаточно для возбуждения взрывной реакции, если уран достиг критической массы. Стало ясно, что таким образом можно создать грозное оружие — атомную бомбу.

Многие физики во всем мире занялись детальным исследованием процесса деления ядер урана. Почти в каждом номере физических журналов во всем мире публиковались научные статьи или заметки, выясняющие детали, касающиеся расщепления ядер урана. Но получение чистого ^{235}U в нужных количествах,

порядка десятков килограммов, казалось тогда фантастическим.

Однако вскоре стало ясно, что и естественная смесь изотопов урана может подвергаться цепной ядерной реакции. Для этого надо только как-то снизить энергию нейтронов, вылетающих при делении ядра ^{235}U . К счастью, оказалось, что скорость нейтронов можно регулировать в сторону ее уменьшения очень простым путем. Для этого достаточно пропустить нейтроны через вещество, состоящее из атомов, масса которых мало отличается от массы самих нейтронов. Тогда при столкновении нейтронов с такими атомами они довольно быстро передают часть своей энергии этим атомам, тем самым уменьшая свою скорость до уровня скорости теплового движения атомов.

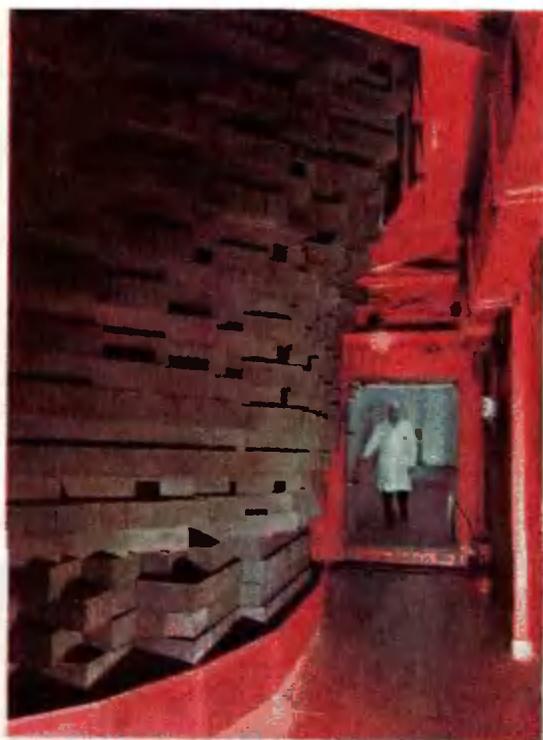
Для замедления нейтронов пригодны вещества, масса атомов которых не слишком велика. Надо только, чтобы эти вещества не поглощали нейтронов, лишив их возможности замедлиться и расщепить соответствующие ядра урана. Свойством мало поглощать нейтроны обладает тяжелая вода, в состав которой вместо двух атомов обыч-

ного водорода входит два атома тяжелого водорода (изотопа водорода — дейтерия — с вдвое большей массой). Поместив блоки с естественным ураном в тяжелую воду, можно замедлить нейтроны и осуществить регулируемую самоподдерживающуюся цепную реакцию деления естественного урана. Это послужило основой создания ядерных реакторов на тепловых нейтронах.

В ядерном реакторе уран размещается в виде отдельных блоков (обычно цилиндрических), между которыми расположен замедлитель — графит или тяжелая вода. Постепенно увеличивая количество таких блоков, можно подойти к критической массе. При этом удается управлять числом нейтронов, выделяющихся при расщеплении ядер урана в блоках, и цепная реакция не переходит во взрывную. В атомной бомбе быстро соединяют две отдельные части урана, масса каждой из которых несколько меньше критической. Ясно, что общая масса соединенных частей быстро становится выше критической. В результате происходит взрыв. Ядерный реактор может служить долгодействующим источником энергии.

При работе ядерных реакторов происходит еще одно важное явление: часть избыточных нейтронов, взаимодействуя с ядрами ^{235}U , приводит к образованию изотопа нового элемента таблицы Менделеева с атомным номером 94 и массой ядра 239. Такого элемента в природе нет, и получают его только искусственно при облучении урана нейтронами. Этот элемент получил название плутония. Плутоний, так же как и ^{235}U , при облучении нейтронами расщепляется (делится) с образованием избыточного количества нейтронов. Его критическая масса в несколько раз меньше, чем у урана, и в этом его существенное преимущество по сравнению с ^{235}U . Плутоний химически отличен от урана, что позволяет выделить его из массы урана и получить в чистом виде химическим путем.

Таким образом, появились новые источники энергии — уран и полу-



Первый советский атомный реактор, построенный в 1946 году (Москва, Институт атомной энергии им. И. В. Курчатова).

чающийся из него плутоний. Чтобы представить себе масштабы энергии, которая выделяется при расщеплении ядер урана, достаточно сказать, что энергия, выделяющаяся при полном расщеплении одного килограмма ^{235}U , равна энергии, выделяющейся при сжигании 3000 тонн угля.

К сожалению, первое техническое использование ядерной энергии пошло не на благо человека, а для чисто военных целей. В 1945 году американцы сбросили на города Хиросиму и Нагасаки две атомные бомбы. В этом не было необходимости, поскольку война с Японией уже была на исходе. Взрыв первой атомной бомбы над Хиросимой был эквивалентен 20 000 тонн обычного взрывчатого вещества (тринитротолуола).

Современные бомбы могут быть значительно мощней. Их мощность принципиально не ограничена. Поэтому использование такого оружия будет иметь катастрофические для всего человечества результаты.

Наша страна была всегда против применения ядерной энергии для военных целей, хотя в 1949 году у нас такое ядерное оружие уже существовало. Советский Союз прилагает максимальные усилия, чтобы избежать мировой ядерной катастрофы, и делает все возможное для использования ядерной энергии только в мирных целях.

СССР первым в мире использовал атомную энергию для блага человека, построив электростанцию, где в качестве горючего использовались не обычные источники энергии, нефть или уголь, а уран. Руководил этими работами академик И. В. Курчатов. Первая атомная электростанция была построена в Обнинске в 1954 году. В течение последних десятилетий атомные станции строились во многих странах мира. Строятся они и в СССР. Одна из самых больших в мире — это Ленинградская атомная станция (ЛИАЭС) мощностью $4 \cdot 10^6$ кВт; сравнимую мощность имеет Воронежская АЭС и ряд других. В XI пятилетке решениями XXVI съезда партии предусмотрен ввод в действие атомных станций общей мощностью свыше $20 \cdot 10^6$ кВт.

В заключение я должен предостеречь читателей от мысли о том, что крупнейшие открытия в физике, приведшие к технической революции в середине нашего столетия, следовали одно за другим, совершая триумфальное шествие. В действительности все происходило не так. На пути к каждому открытию встречались огромные трудности. Для их преодоления потребовалась работа многих выдающихся ученых-физиков.

Всякой технической революции предшествует революция в самой физике. В прошлом столетии такой революцией было создание так называемой классической электродинамики Максвелла. Ясное понимание законов электромагнетизма открыло путь для широкого применения электричества в технике.

В нашем столетии во главе революции в физике стояли такие гиганты науки, как Альберт Эйнштейн и Нильс Бор. Теория относи-

тельности Эйнштейна привела к коренному изменению представлений о самых основных понятиях естествознания таких, как пространство и время. Нильс Бор заложил основы квантовой механики. Он показал, что движение частиц атомных размеров и меньших не описывается законами Ньютона. Для таких частиц существует свой свод законов, получивший название квантовой механики.

Теория относительности и квантовая механика поначалу представлялись весьма абстрактными, и мало кто понимал их значение. И только с течением времени эти теории получили всеобщее признание и были подтверждены многочисленными экспериментами. Все это привело в конце концов к ясному пониманию законов атомной и ядерной физики и к технической революции, из-за которой наш век стал называться ядерным веком.

Мы остановились здесь лишь на одной области физики, развитой в XX веке, на физике ядра, которая привела к революционному преобразованию современной техники, прежде всего — энергетики. Однако существует много других примеров, свидетельствующих о том, что развитие физической науки в нашем столетии служит основой научно-технического прогресса.

странения и применения радиоволн, интересную историю их освоения. Сегодня мы затронем эту обширную тему, насколько это можно сделать в рамках журнальной статьи.

Сразу надо сказать следующее. При делении радиоволн на диапазоны исходят из качественных особенностей распространения, способов генерирования, излучения и приема радиоволн. Однако при переходе от одного диапазона к другому не всегда наблюдаются существенные изменения; поэтому границы диапазонов условны. Для простоты их определяют «круглыми», легко запоминающимися числами.

Длинные волны (диапазон ДВ) — радиоволны длиной от 10 км до 1 км, что соответствует частотам от 30 кГц до 300 кГц.

Средние волны (диапазон СВ) — от 1000 м до 100 м, соответственно частоты от 300 кГц до 3 МГц.

Короткие волны (диапазон КВ) — от 100 м до 10 м, частоты от 3 МГц до 30 МГц.

Ультракороткие волны (диапазон УКВ) — от 10 м до 1 см, частоты от 30 МГц до 30 000 МГц; диапазон УКВ подразделяется на три поддиапазона: метровые волны (1 ÷ 10 м), дециметровые волны (10 ÷ 100 см) и сантиметровые волны (1 ÷ 10 см).

Длинные волны

Немногим более 50 лет назад, на заре развития современной радиотехники, использовались преимущественно длинные волны. Под влиянием теории дифракции считали, что чем длиннее волна, тем лучше она огибает земной шар (ведь чем больше длина волны, тем большее по размерам препятствие волна способна огибать).

Техника того времени не давала возможности получать колебания более высоких частот. Мощности же, вырабатываемые в диапазоне ДВ, были вполне «приличные». Так, мощность машинных генераторов, созданных В. П. Вологдиным, на частотах 18 ÷ 50 кГц достигала 600 кВт. Машинны Вологодина позволили осуществить радиотелеграфную связь между Москвой и Нью-Йорком (1925 год).

Эти разные радиоволны

Кандидат технических наук А. А. ШУР

Длинные радиоволны, короткие, ультракороткие... Сколько раз мы читали и слышали эти слова. Но мало кто знает, что за ними можно увидеть интересные особенности распро-

На длинных волнах началось массовое радиовещание. В Советском Союзе к регулярным передачам приступили почти одновременно две Московские радиопередающие станции (1924 год). Одна из них, расположенная в Сокольниках, имела небольшую мощность и предназначалась для радиолюбителей Москвы и области. Другая — радиостанция им. Коминтерна — находилась на Шаболовке и значительно превосходила по мощности сокольническую станцию. В радиус ее действия входили центральные районы европейской части страны.

Чтобы охватить вещанием всю огромную территорию России, необходимо было либо создать сверхмощную станцию, либо построить сеть маломощных станций, которые могли бы транслировать Москву и вести собственные программы. Вторым путем оказался более разумным; им пользуются и в настоящее время.

В сети станций некоторые из них, расположенные далеко друг от друга, могут работать на одних и тех же частотах без взаимных помех. Но в большинстве случаев каждой станции выделяется своя полоса частот, иначе говоря — свой частотный канал. И тут стало ясно, что длинноволновый диапазон имеет весьма ограниченное число каналов. Весь диапазон занимает полосу частот 270 кГц. Для передачи одной радиовещательной программы требуется частотный канал шириной 9 кГц^{*)}. Легко подсчитать — в диапазоне ДВ содержится всего $\frac{270}{9} = 30$ радиовещательных каналов.

Другой недостаток длинных волн — слабо выраженная направленность антенн.

Понять качественно, что такое направленность, нетрудно. Приемная антенна улавливает колебания, рас-

пространяющиеся от источника по определенному направлению. Чем большая часть энергии, излучаемой передающей антенной, распространяется в данном направлении, тем лучше — это позволяет снизить мощность передатчика, а на приемной стороне — «отстроиться» от помех. Поэтому важно, чтобы передающая антенна «направляла» излучение, а приемная антенна «вылавливала» излучение, идущее по данному направлению.

Необходимые направленные свойства антенны нетрудно получить, когда размеры антенны превышают длину волны. На длинных волнах это сделать, мягко говоря, затруднительно.

Прием сигналов в диапазоне ДВ нередко сопровождается треском и шорохами. Это — атмосферные и промышленные помехи. Источник атмосферных помех — ближние и дальние грозы.

Средние волны

Наряду с диапазоном ДВ для радиовещания стали использовать средние волны. И здесь очень скоро было замечено, что условия приема радиостанций, работающих в диапазоне СВ, различны в дневные и ночные часы. Днем радиус действия таких станций — сотни километров. Ночью же, особенно зимой, дальность приема существенно больше. Иногда можно «поймать» станции, удаленные на несколько тысяч километров. Была замечена и еще одна особенность приема на СВ: те станции, которые днем принимались устойчиво, ночью часто подвергались замираниям — громкость звука время от времени плавно возрастала и падала.

Когда были обнаружены эти явления, первоначальные представления о том, что радиоволны распространяются только вдоль земной поверхности, были сильно поколеблены. Стало очевидно, что в точку приема могут приходить две волны: одна «земная» — волна, распространяющаяся вдоль земной поверхности, а другая «небесная» — волна, отраженная от ионосферы (рисунок 1).

^{*)} Диапазоны частот звуковых колебаний, возбуждаемых разными источниками, различны. Так, фортепианная музыка — звуковые колебания с частотой от 90 Гц до 9000 Гц, скрипичная музыка — от 260 Гц до 15 000 Гц, человеческий голос — от 100 Гц до 9000 Гц. Без особых требований к качеству звучания частотный канал можно ограничить шириной 9 кГц. Конечно, при этом могут «отрезаться» наиболее высокие или низкие частоты, но общий характер звучания передается достаточно точно.

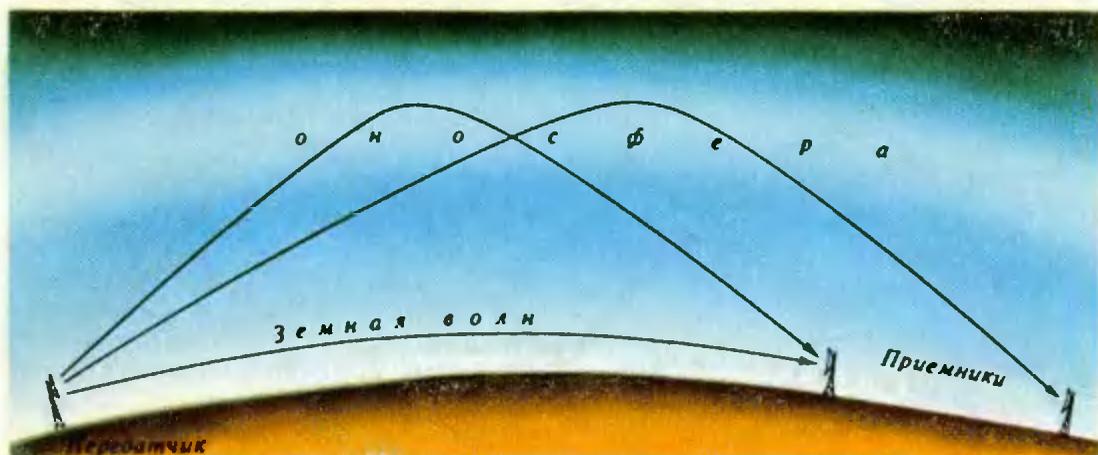


Рис. 1.

Напомним, что ионосфера — это слой ионизированного газа в верхней части атмосферы — на высотах от 60 км до 450 км. Ионизация газа происходит под действием ультрафиолетовых лучей и потока заряженных частиц, испускаемых Солнцем.

Средние волны отражаются от слоя, находящегося на высоте $100 \div 120$ км (этот слой обозначают буквой «Е»). Но отражение возможно только в ночные часы. Днем в атмосфере на высоте $60 \div 80$ км под воздействием солнечного излучения возникает слой, в котором средние волны сильно поглощаются (этот слой обозначают буквой «Д»). Так что в дневные часы на приемную антенну приходит только земная волна. Ночью же в тех местах приема, где происходит интерференция земной и небесной волн, и отмечается замирание сигнала (на рисунке 1 это происходит в ближней к источнику точке приема; до дальней точки земная волна не доходит — она затухает, и в этой точке принимается только отраженная волна). Если фазы волн совпадают, то результирующая напряженность поля возрастает — соответственно возрастает громкость звука. Если же волны компенсируют друг друга — слышимость станции ухудшается. Траектория отраженной волны и степень ее отражения все время изменяются, поэтому характер замираний случаен.

Изучение ионосферы привело к изменению взгляда и на распространение длинных волн. По современ-

ным представлениям, длинные радиоволны распространяются в своеобразном сферическом волноводе. Нижней стенкой волновода является земная поверхность, верхней — ионосфера.

Короткие волны

Коротковолновый диапазон шире диапазона длинных и средних волн в девять раз. Для работы на этих волнах можно создавать направленные антенны; при этом уровень помех меньше. Габариты передатчиков и антенн, работающих на КВ, сравнительно небольшие. Тем не менее короткие волны не сразу получили путевку в жизнь. Согласно теории дифракции, крупные препятствия на пути распространения коротких волн (большие дома, лесные массивы, возвышенности) экранируют передающую антенну. Поэтому считалось, что прием на КВ возможен только в зоне прямой видимости, и эти волны были отданы радиолюбителям для ближних связей и экспериментирования. В предоставленном им диапазоне радиолюбители стали устанавливать невиданные рекорды связи. Так, в январе 1925 года радиолюбитель Ф. А. Лбов при помощи передатчика мощностью 15 Вт передал из Нижнего Новгорода сигналы, которые были приняты в Багдаде, Париже и Лондоне. В 1928 году коротковолновик Е. В. Андреев, совершая поход на учебном парусном судне «Вега» вокруг Европы, поддерживал непрерывную связь с

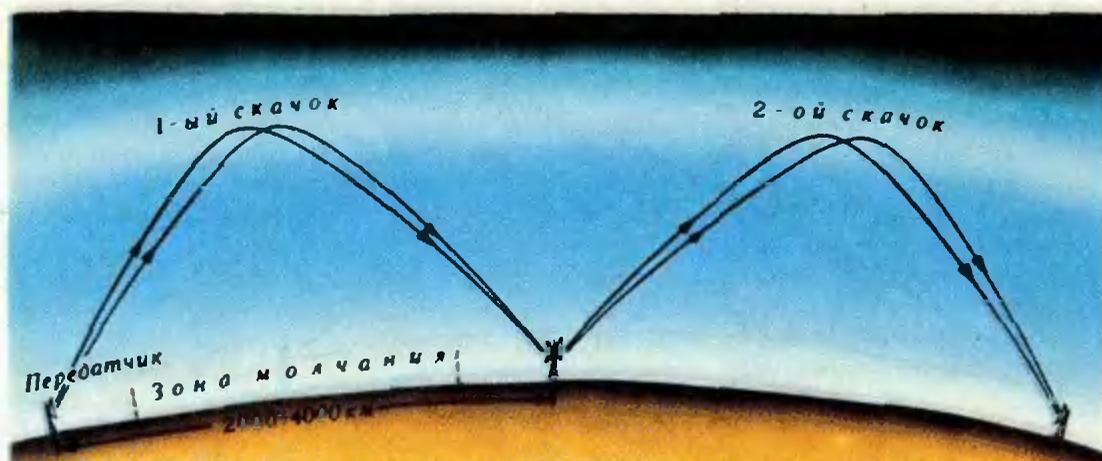


Рис. 2.

радиостанцией Ростовского университета. Станция Андреева имела мощность всего несколько ватт. Естественно, такие факты заставили специалистов переоценить возможности коротких волн и приступить к их систематическому изучению. В Советском Союзе исследованием коротких волн с 1923 года занималась, в частности, известная Нижегородская радиолоборатория им. В. И. Ленина. Как и следовало ожидать, распространение коротких волн на большие расстояния было обусловлено отражением от ионосферы.

Отражение может происходить на высотах 100÷400 км. Нетрудно рассчитать, что максимальная дальность приема при однократном отражении может составлять 2000÷4000 км (рисунок 2). Короткие волны способны отражаться от поверхности Земли и далее снова от ионосферы, поэтому они могут «обежать» весь земной шар и вернуться в точку передачи («кругосветное эхо»). С другой стороны, в некоторой средней части трассы скачка прием сигнала оказывается затрудненным. Этот участок называется «зоной молчания».

В точку приема всегда приходит несколько волн, прошедших различные пути и соответственно имеющих различные фазы. Вследствие их интерференции прием на коротких волнах всегда сопровождается быстрыми замираниями. Для борьбы с замираниями в радиоприемниках предусматривается система автома-

тического регулирования усиления. Принцип ее работы прост: при уменьшении сигнала усиление приемника возрастает, а при возрастании — уменьшается. На коротковолновых линиях связи для борьбы с замираниями применяется так называемый «разнесенный прием». При таком приеме сигнал от одного передатчика принимается на две или три антенны, которые установлены поперек трассы и разнесены друг от друга на расстояние, превышающее несколько длин волн. Сигналы на выходах приемных антенн изменяются несинхронно, и всегда есть возможность выбрать лучший сигнал (этот выбор производится, конечно, автоматически).

Поскольку коротковолновые антенны имеют довольно острую направленность, на одной и той же частоте могут работать без взаимных помех несколько удаленных друг от друга станций, вещающих на разные направления. К настоящему времени диапазон коротких волн использован до отказа. Можно себе представить, сколько сейчас в нем работает радиостанций, если в 1940 году число официально зарегистрированных станций, не считая радиолюбительских и военных, достигало 28 407!

Ультракоткие волны

Систематическое изучение ультракотких волн в Советском Союзе началось в 1926 году под руководством Б. А. Введенского. Однако

широкое их использование началось лишь после Великой Отечественной войны.

Главное преимущество диапазона УКВ — его ширина, почти 30 000 МГц! В этом диапазоне без труда можно передавать сигналы, содержащие широкий спектр (набор) частот, например, радиосигналы телевизионного изображения. Создание остронаправленных антенн в этом диапазоне не вызывает трудностей. Прием сигналов отличается высокой устойчивостью, практически не зависит от времени года и суток, не подвержен влиянию атмосферных и промышленных помех. Но все эти преимущества реализуются, в основном, при наличии прямой видимости между антеннами передатчика и приемника. Если на пути распространения ультракоротких волн имеется препятствие, оно частично экранирует передающую антенну, и напряженность поля принимаемого сигнала существенно уменьшается. Качество приема ухудшается.

Очевидно, что расстояние прямой видимости зависит от высоты антенн (рисунок 3). В реальных условиях вследствие преломления (рефракции) в воздухе волны распространяются по несколько искривленной траектории. (Это позволяет увеличить расстояние прямой видимости на 15÷20%.) Для иллюстрации сказанного приведем пример из практики. В большинстве случаев пере-

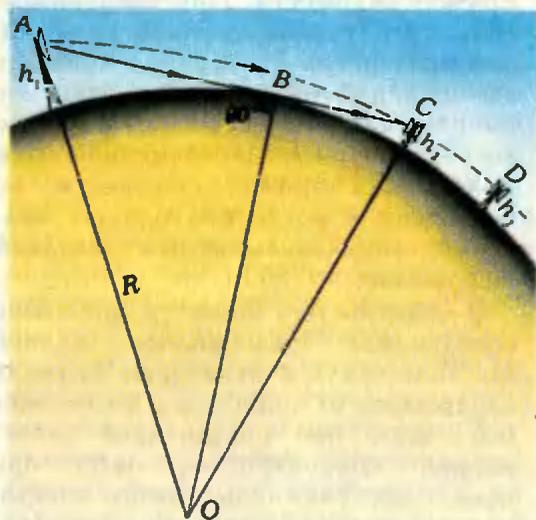


Рис. 3.

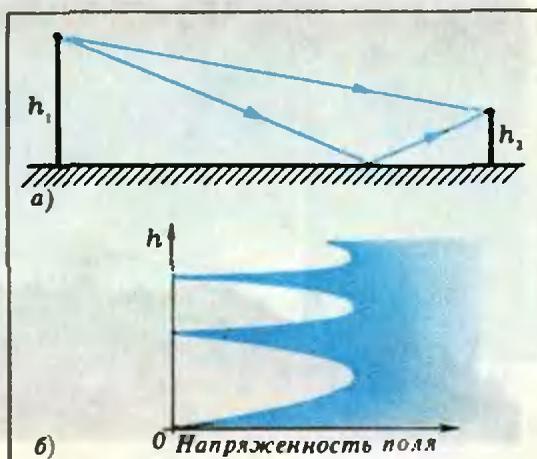


Рис. 4.

дающая антенна телевизионных станций приподнята на 250 м, высота приемных антенн около 10 м. Расчет расстояния прямой видимости удовлетворительно совпадает с результатом экспериментальной проверки на равнинно-холмистой местности. Получается 75÷80 км.

При передаче на ультракоротких волнах в пределах прямой видимости в точку приема приходят две волны. Вторая волна возникает вследствие отражения от земной поверхности (рисунок 4,а). Фазы волн различны. Поэтому при перемещении приемной антенны по высоте наблюдается периодическое возрастание и убывание напряженности поля (рисунок 4,б), образно говоря, — «застывшая» интерференционная структура электромагнитного поля. Максимум напряженности поля отмечается в тех точках приема, где фазы волн совпадают, минимум — при несовпадении фаз. Расчет радиолиний связан, конечно, с оптимальным подбором высоты антенн с учетом профиля местности.

Передача сигналов на очень большие расстояния в диапазоне ультракоротких волн осуществляется с помощью радиорелейных линий. Радиорелейная линия представляет собой цепочку приемно-передающих радиостанций, расположенных таким образом, чтобы между антеннами соседних станций была прямая видимость (рисунок 5). Сигнал, передаваемый с оконечной станции, принимается первой проме-



Рис. 5.

жуточной станцией, где он усиливается и передается на вторую промежуточную станцию, и т. д. до тех пор, пока он не будет принят оконечной станцией на другом конце линии. (Термин «радиорелейная» образован частично от английского слова «relay», что значит «смена», например, смена лошадей, смена в гонках с эстафетой и т. п.) Космическая радиорелейная линия работает по тому же принципу, но одна промежуточная станция находится на борту искусственного спутника Земли. Подача сигнала на спутник и прием его со спутника осуществляются с помощью остронаправленных антенн, которые автоматически следят с Земли за движением спутника. Дальнейшее использование наземных средств для телевизионного вещания (передающих станций, ретрансляторов, радиорелейных линий) становится все более трудным и экономически неэффективным, так как эти средства приходится располагать в удаленных районах с малой плотностью населения. Поэтому все шире используются космическими радиосистемами. К сожалению, передача программы со спутника непосредственно на домашних, индивидуальный телевизор стоит пока дорого. В существующих космических системах телевизионного вещания сигнал от спутника сначала принимается специальным ретранслятором, а от него уже передается на обычные телевизионные приемники. Для космического телевизионного вещания иногда ис-

пользуют стационарный спутник, положение которого относительно Земли неизменно.

Радиорелейные линии позволяют вести одновременно тысячи телефонных разговоров, производить обмен радиовещательными и телевизионными программами между городами и странами. Линии, как правило, работают на сантиметровых волнах. Острая направленность антенн, работающих в этом диапазоне, позволяет пользоваться передатчиками небольшой мощности — порядка нескольких ватт. При высоте антенных опор $50 \div 80$ м средняя длина интервала между антеннами на линии составляет $50 \div 70$ км.

Нельзя не рассказать о естественном распространении ультракоротких волн далеко за пределы прямой видимости. При экспериментальном изучении мешающих сигналов от мощных ультракоротковолновых станций было обнаружено, что напряженность поля сигналов далеко за горизонтом намного меньше, чем в условиях прямой видимости, но в десятки и сотни раз больше значений, предсказываемых теорией дифракции.

В частности, было установлено следующее. Радиоволны длиной $6 \div 10$ м могут в некоторых случаях отражаться от ионосферы. Это может быть либо при повышенной электронной концентрации, либо при появлении так называемого спорадического слоя. Спорадический (нерегулярный) слой появляется на вы-

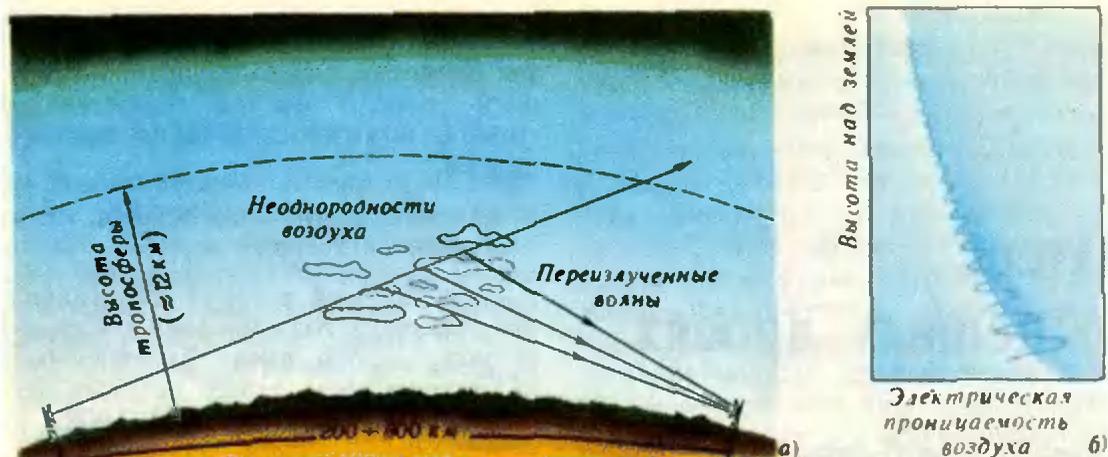


Рис. 6.

соте $90 \div 110$ км. Он представляет собой скопление газа гораздо большей электронной плотности, чем электронная плотность на той же высоте в окружающей среде. Случайный прием телевизионных станций, удаленных от места приема на несколько тысяч километров, объясняется отражением волн от этого слоя. Попытки использования этого явления для регулярного приема телевидения, равно как и борьба с ним как с помехой, не имели успеха.

Изучение сигналов на расстояниях порядка $200 \div 800$ км от передатчика привело к открытию ранее неизвестного явления, которое сейчас называется «дальнее тропосферное распространение УКВ». Такое распространение связано с переизлучением радиоволн в воздушной оболочке Земли, иными словами, — в тропосфере. Переизлучение объясняется неоднородным строением воздуха. Электрическая проницаемость воздуха зависит от влажности, температуры и давления. В воздухе всегда имеются неоднородности — области, в которых эти метеопараметры, а следовательно и электрическая проницаемость, отличаются от параметров окружающего воздуха. Ярким примером неоднородностей, видимых простым глазом, являются облака. Неоднородности воздуха приводят к частичному рассеянию и отражению энергии волны. Схематически это показано на рисунке 6. В правой части рисунка дана случайная зависимость элект-

рической проницаемости воздуха от высоты. Зубчики на зависимости свидетельствуют о наличии неоднородностей. Форма неоднородностей и их взаимное расположение могут быть самыми различными. Наибольшую роль играют слоистые неоднородности. Их протяженность — от сотен метров до нескольких километров. Отраженные от неоднородностей ультракороткие волны могут быть приняты на большом расстоянии от передатчика. Изменчивость неоднородностей во времени приводит к интерференции входящих волн и, как следствие, к быстрым замираниям сигнала. Переизлученная мощность составляет всего $10^{-6} \div 10^{-8}$ часть от мощности передаваемого сигнала.

Описанное явление используется в тропосферных радиорелейных линиях. Такие линии требуют установки мощных передающих устройств и систем разнесенного приема для устранения замираний сигнала. И все же они оказываются целесообразными для радиотелефонной связи в труднодоступных районах. Преимущество тропосферных линий — большая длина интервала между соседними станциями. При использовании дециметровых волн длина интервала получается равной $250 \div 300$ км, но в отдельных случаях может быть и больше. Например, на известной тропосферной радиолинии «Советский Союз — Индия» расстояние между корреспондирующими пунктами около 700 км.

Очерк о цепных дробях

Кандидат физико-математических наук
Ю. В. НЕСТЕРЕНКО,
доктор физико-математических наук
Е. М. НИКИШИН

Известно много примеров, когда научное направление, считавшееся перспективным и важным, не оправдывало возложенных на него надежд; постепенно наблюдался отток от него научных сил, и само направление теряло свою актуальность. Одним из таких направлений в математике является теория цепных (или непрерывных) дробей. До конца прошлого века непрерывные дроби различного сорта весьма часто появлялись в математических работах. В прошлом веке и немного ранее были доказаны важные теоремы о непрерывных дробях. Теплилась надежда, что если удастся понять структуру цепных дробей, можно будет получить новые результаты в теории чисел и математическом анализе. Надежда оправдалась лишь частично, и в дальнейшем математика, особенно в области теории чисел, проложила новые пути так, что задачи теории цепных дробей были отодвинуты в сторону.

Но все равно, как некогда Северный полюс притягивал своих покорителей, простые по постановке, легкие на вид проблемы цепных дробей тянут к себе математиков, заставляют их снова и снова искать закономерности этого странного объекта. Многие важные вопросы современной математики и физики приводят к объектам типа цепных дробей. Поэтому методы исследований, оттачиваемые на них, оказываются полезными в широком круге

проблем. Мы коснемся здесь лишь тех вопросов, которые связаны с теорией чисел, откуда, собственно говоря, и возникла теория цепных дробей.

Календарь, зубчатые колеса и немного истории

Сколько дней в году? Все знают, что в обычном году 365 дней, а в високосном — 366 дней. Високосными объявлены годы, номер которых делится на 4, например, 1904, 1908, ..., 1980, 1984, ..., 1996. Однако годы 1800, 1900, 2100, 2200 не объявляются високосными, а годы 2000, 2400, 2800 будут високосными. Почему?

Механика календаря довольно проста. Земля равномерно вращается вокруг своей оси, делая один оборот за сутки. Один круг обращения Земли вокруг Солнца составляет один год и этот год равен 365,24219878... суток. Конечно, можно сказать, что добавка 0,242... суток мала. Однако с течением времени она накапливается, если положить год равным 365 суток. В древности, когда знание длительности года в сутках было весьма приблизительным, накапливаемая ошибка достигала серьезных размеров. Так в Риме в 46 г. до н. э. отставание составляло 90 дней!

Чтобы установить закономерность чередования обычных и високосных годов в календаре, нужно выбрать длину цикла q (после которого все периодически повторяется) и число p високосных годов в цикле. Запишем величину года в виде $365 + \alpha$, где $\alpha = 0,242...$ Натуральные числа p и q нужно подобрать так, чтобы величина

$$\beta = qa - p$$

была по возможности маленькой, в то время как p и q были бы не очень большими. Собственно говоря, подбору подлежит лишь натуральное q , число же p есть ближайшее к qa целое. Тогда за q лет пройдет $365q + p$ суток. Из равенства $365q + p = q(365 + \alpha) - \beta$ следует, что за это время Земля сделает

$$q - \frac{\beta}{365 + \alpha} \approx q$$

оборотов вокруг Солнца. Ошибка в одни сутки набегит лишь за $\frac{1}{p}$ таких циклов или же $\frac{q}{p}$ лет.

В григорианском календаре, по которому мы живем, в качестве длины цикла взято $q=400$ годам. Из этих лет 303 являются обычными и 97 високосными. Високосными объявляются годы, которые делятся на 4, за исключением тех из них, для которых число сотен тоже делится на 4. Таким образом, средняя длительность года по григорианскому календарю составляет

$$365,242500 \text{ суток,}$$

ошибка в одни сутки набегит примерно за 3300 лет. Эта точность вполне удовлетворительна. Можно было бы достигнуть даже большей точности, взяв $q=128$ и $p=31$, однако устройство календаря 128-летними циклами неудобно для использования.

Для нас важна в данном случае возникающая здесь математическая задача: по данному числу a найти p и q , по возможности небольшие, так чтобы число

$$qa - p$$

было по возможности маленьким.

Аналогичная задача возникает при конструировании зубчатых передач. Для передачи вращения с одного колеса на другое требуется нарезать q зубцов на одном и p на другом так,

чтобы их отношение $\frac{p}{q}$ как можно

лучше приближало заданное заранее число ω (нужное отношение угловых скоростей). Ясно, что из соображений экономии следует подбирать p и q по возможности меньше.

Можно было бы увеличить список примеров, которые приводят нас к задаче наилучшего приближения действительных чисел при помощи рациональных. Например, устройство музыкальной гаммы, применения в вычислительной математике, в теоретических вопросах небесной механики и др.

Цепные дроби как раз и являются инструментом, дающим в некотором смысле наилучшие приближения рациональными числами. Эти дроби для вычислительных целей начали при-

менять очень давно. Уже в 1572 году итальянский математик и инженер Р. Бомбелли (1526? — 1572) использовал их для вычисления $\sqrt{13}$. Позднее англичанин У. Броункер (1620—1684) применил их для уточнения числа π . Х. Гюйгенс (1629—1695), выдающийся физик, астроном, математик (изобретатель маятниковых часов), был первым, кто при использовании цепных дробей указал, в каком смысле они дают наилучшую аппроксимацию действительного числа. Великий Л. Эйлер (1707—1783) дал обоснование ряда положений теории непрерывных дробей и нашел цепную дробь для числа e . Перечислить математиков, внесших свой вклад в эту теорию после работ Эйлера, уже очень трудно из-за их большого числа. Начиная с работ выдающегося русского математика П. Л. Чебышева (1821—1894), активно развивается теория, имеющая дело с функциональными цепными дробями.

Алгоритм Евклида и разложение числа в цепную дробь

Пусть p , q — два натуральных числа. Производя деление с остатком, найдем

$$p = a_0 q + q_1, \quad 0 < q_1 < q$$

$$q = a_1 q_1 + q_2, \quad 0 < q_2 < q_1,$$

$$q_1 = a_2 q_2 + q_3, \quad 0 < q_3 < q_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$q_{k-2} = a_{k-1} q_{k-1} + q_k, \quad 0 < q_k < q_{k-1},$$

$$q_{k-1} = a_k q_k$$

Указанный набор действий называется *алгоритмом Евклида*. Можно показать, что полученное число q_k будет наибольшим общим делителем чисел p , q . Нам этот факт не потребуется, поэтому доказательство мы опускаем*).

Из полученных равенств следует

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= a_0 + \frac{q_1}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{q_2}{q_1}} = \dots \\ &\dots = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_k}}} \end{aligned}$$

*1) См., например, Квант, 1979, № 3, с. 24.



Л. Эйлер.

К тому же результату приводит и такой процесс. Пусть α — действительное число. Положим

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1}, \quad a_0 \text{ — целое,}$$

где $a_1 > 1$. Если a_1 — не целое, то продолжим процесс дальше. Представим a_1 в виде $a_1 = a_1 + \frac{1}{a_2}$, где a_1 — целое, положительное и $a_2 > 1$. Таким образом,

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}.$$

Если a_2 — не целое, то можно продолжить процесс дальше. Таким образом, на k -м шаге получаем равенство. «Многоэтажная» запись дроби (1) очень громоздка, поэтому в дальнейшем мы будем часто пользоваться следующей более компактной специальной записью:

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{|a_1} + \frac{1}{|a_2} + \dots + \frac{1}{|a_{k-1}} + \frac{1}{|a_k}, \quad (1)$$

где $a_k > 1$.

Нетрудно доказать, что если $\alpha = \frac{p}{q}$ — рациональное число, то для некоторого k число a_k будет целым.

Ясно также, что если при некотором k получится целое a_k , то число α является рациональным. Если же α — иррациональное число, то указанный процесс никогда не оборвется и возникнет бесконечная *цепная* (или *непрерывная*) *дробь*

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{|a_1} + \frac{1}{|a_2} + \dots + \dots + \frac{1}{|a_{k-1}} + \frac{1}{|a_k} + \dots \quad (2)$$

Знак равенства здесь стоит условно, поскольку непонятно, что означает выражение справа. Для того чтобы придать ему смысл, рассмотрим конечные суммы вида

$$\pi_k = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dots + \frac{1}{a_k}},$$

которые называются *подходящими дробями* непрерывной дроби (2). По определению принимают, что *правая часть равенства (2) представляет собой предел подходящих дробей*:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \pi_k$$

Сформулируем теперь в виде набора задач те свойства цепных дробей, которые составляют основу их элементарной теории и, в частности, устанавливают равенство (2).

Основные свойства цепных дробей

1. Пусть $\pi_k = \frac{p_k}{q_k}$ — подходящая дробь цепной дроби (2). Докажите справедливость рекуррентных соотношений:

$$p_0 = a_0, \quad p_1 = a_0 a_1 + 1, \quad \dots$$

$$p_{k+1} = a_{k+1} p_k + p_{k-1}, \quad \dots$$

$$q_0 = 1, \quad q_1 = a_1, \quad \dots$$

$$q_{k+1} = a_{k+1} q_k + q_{k-1}, \quad \dots$$

для $k = 1, 2, 3, \dots$

2. Установите следующие соотношения:

а) $q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n, \quad n \geq 1;$

б) $q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = (-1)^{k-1} a_k, \quad k \geq 2;$

в) $\pi_{n-1} - \pi_n = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}}, \quad n \geq 1;$

г) $\pi_{k-2} - \pi = \frac{(-1)^{k-1} a_k}{q_k q_{k-2}}, \quad k \geq 2.$



П. Л. Чебышев.

3. Покажите, что дроби $\pi_0, \pi_2, \pi_4, \dots$ монотонно возрастают:

$$\pi_0 < \pi_2 < \pi_4 < \pi_6 < \dots,$$

а дроби π_1, π_3, \dots монотонно убывают:

$$\pi_1 > \pi_3 > \pi_5 > \dots$$

4. Пусть числа a_k определены равенством (1). Докажите соотношение:

$$\alpha = \frac{p_{k-1}a_k + p_{k-2}}{q_{k-1}a_k + q_{k-2}}, \quad k \geq 2.$$

5. Докажите неравенство

$$\frac{1}{2q_{n+1}} < |q_n \alpha - p_n| < \frac{1}{q_{n+1}}.$$

6. Докажите, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \pi_k = \alpha.$$

Как видно из задач 1—6, подходящие дроби π_n довольно хорошо приближают число α . Так, из оценок задачи 5 и неравенства $q_{n+1} < q_n$ следует, что если α — иррационально, то неравенство

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}$$

выполняется для всех подходящих дробей $\pi_n = \frac{p_n}{q_n}$ цепной дроби числа α .

2*

Числовые примеры

Цепную дробь (2) числа α иногда обозначают $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_k, \dots]$. Можно доказать, что для каждой последовательности целых чисел a_0, a_1, a_2, \dots ($a_0 \geq 0$ и $a_j \geq 1$ для $j \geq 1$) существует единственное положительное число α такое, что

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots].$$

Если последовательность a_0, a_1, a_2, \dots известна, то последовательность подходящих дробей $\pi_k = \frac{p_k}{q_k}$ удобно вычислять, пользуясь равенствами из задачи 1, заполняя следующую таблицу:

a		a_0	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_n	a_{n+1}	a_{n+2}	...
p	1	a_0	p_1	p_2	...	p_{n-1}	p_n
q	0	1	q_1	q_2	...	q_{n-1}	q_n

Пример 1. Найдём разложение в цепную дробь числа $\sqrt{2}$.

Имеем $a_0 = 1$,

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1, \quad a_1 = 2,$$

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1, \quad a_2 = 2.$$

Ясно, что в последовательности $a_j, j = 1, 2, \dots$, все члены равны $\sqrt{2} + 1$, а в последовательности $a_j, j = 1, 2, \dots$, все члены равны 2. Итак,

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots].$$

Вычислим несколько подходящих дробей для $\sqrt{2}$:

a		1	2	2	2	2	2	2	...
p	1	1	3	7	17	41	99		...
q	0	1	2	5	12	29	70	169	...

Получили последовательность подходящих дробей: $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29},$

$\frac{99}{70}, \dots$

Из задачи 5 следует, что

$$\left| \sqrt{2} - \frac{99}{70} \right| < \frac{1}{70 \cdot 169} < 10^{-4}.$$

Таким образом, рациональная дробь

$\frac{99}{70}$ приближает $\sqrt{2}$ с точностью лучшей, чем 0,0001.

Пример 2. Рассмотрим периодическую цепную дробь

$[2; 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \dots]$.

Коротко ее можно записать так: $[2; \overline{1, 1, 1, 4}]$. Найдем число, которому она соответствует. Если это число обозначить через α , то выполняется равенство (почему?)

$$\alpha = 2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2+\alpha}$$

или, после преобразований,

$$\alpha = \frac{21+8\alpha}{8+3\alpha}$$

Отсюда следует, что $\alpha^2=7$, и, так как $\alpha > 2$, получаем $\alpha = \sqrt{7}$.

Легко видеть, что этим способом можно найти значение любой периодической цепной дроби.

Наилучшие приближения и цепные дроби

Наилучшим приближением к числу α называется дробь $\frac{p}{q}$ ($q > 0$) такая, что

$$|q'\alpha - p'| > |q\alpha - p|$$

для всех $1 < q' < q$ и всех p' . Справедлива

Теорема. *Всякое наилучшее приближение к α есть подходящая дробь к α ; при $k > 1$ верно и обратное, то есть любая подходящая дробь $\frac{p_k}{q_k}$ при $k > 1$ доставляет наилучшее приближение к числу α .*

Доказательство этой теоремы не сложно, и мы предоставляем его читателю. (Если же трудности ока-

жутся непреодолимыми, то можно обратиться к книге С. Ленга «Введение в теорию диофантовых приближений» (М., Мир, 1970)

Эквивалентность чисел

Два числа α и β называются эквивалентными, если

$$\alpha = \frac{a\beta + b}{c\beta + d},$$

где a, b, c, d — целые и $ad - bc = 1$ или -1 .

Обозначим через σ и σ_k (где k — целое) операции, определенные следующим образом:

$$\sigma\alpha = \frac{1}{\alpha}, \quad \sigma_k\alpha = k + \alpha.$$

Ясно, что, применяя σ и σ_k к числу α , мы всегда получаем эквивалентное число. Ясно также, что применение операций вида

$$\sigma\sigma_k\alpha = \frac{1}{\alpha+k}, \quad \sigma_k\sigma\alpha = k + \frac{1}{\alpha} = \frac{k\alpha+1}{\alpha}$$

также дает пример эквивалентных числу α чисел.

Задачи

7. Докажите, что если α и β эквивалентны, то найдутся целые числа k_1, k_2, \dots, k_r такие, что

$$\beta = \sigma_{k_1}\sigma_{k_2}\dots\sigma_{k_r}\alpha.$$

8. Пусть числа α и β имеют одинаковое разложение в цепную дробь, начиная с некоторых номеров k и S , то есть

$$\alpha = r_0 + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_k} + \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots$$

$$\beta = h_0 + \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \dots + \frac{1}{h_S} + \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots$$

Докажите, что тогда числа α и β эквивалентны.

9. Докажите, что если числа α и β эквивалентны, то их цепные дроби имеют вид (3).

(Продолжение в следующем номере)

Наша обложка

Бумажные звездочки, показанные на первой странице обложки, — не просто декоративный сюжет к Первомайскому празднику. Они связаны с математикой, причем с разными ее разделами. С одной стороны — это модели одного из звездчатых многогранников, о которых

уже писалось в «Кванте» (1973, № 5, с. 26), и поэтому они относятся к теории симметрий в пространстве (геометрия, теория групп). С другой стороны, эти звездочки соприкасаются с теорией узлов (см. «Квант», 1975, № 7, с. 6 или 1981, № 3, с. 8) и с так называемой теорией

кос. В теории кос алгебраическими методами изучаются приемы сплетения кос из веревок или полосок, а наши звездочки как раз и сплетены из бумажных полосок. О том, как это делается, мы расскажем в одном из ближайших номеров журнала.

О. М.

Задачи

П. Л. Капицы

Кандидат физико-математических наук
А. В. МИТРОФАНОВ

Некоторые из читателей «Кванта» наверное слышали о «Физических задачах» лауреата Ленинской и Нобелевской премий академика П. Л. Капицы. В полном объеме (153 задачи) они были изданы в 1972 году*). Предназначались эти задачи, в основном, для студентов и аспирантов физтеха — Московского физико-технического института. Сейчас задачи Капицы популярны у молодых физиков. Чем же они примечательны?

Формулировки задач П. Л. Капицы занимательны, непохожи на аналогичный материал из других задачников. В задачах много юмора, шутки. Курьезные эксперименты, примеры из истории физики, забавные физические опыты, принципы действия некоторых игрушек и серьезных технических устройств — часто это тоже темы капицынских задач. Некоторые из них удобнее решать, экспериментируя с простейшими самодельными устройствами, — в этом случае можно легче «отгадывать» решение. В некоторых задачах требуется рассмотреть опыт или явление, на которые обычно мало кто обращает внимание. Во многих задачах не заданы численные значения физических величин; решающий задачу должен сам выбрать

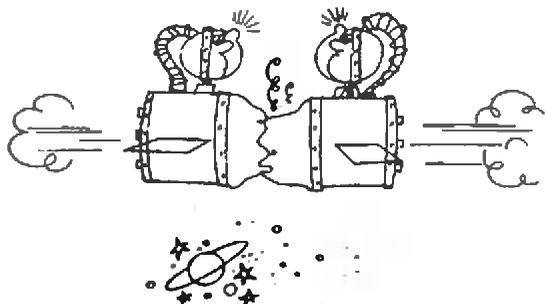
эти значения. Делается это для того, чтобы учащиеся могли конкретно представлять себе масштабы тех физических величин, которыми приходится оперировать (ток, скорость, напряжение, температура и т. п.).

Для достаточно полного решения всех задач требуется хорошая профессиональная подготовка. Но уловить идею решения той или иной задачи, оценить полученный результат, хотя бы по порядку величины, бывает доступно и школьнику.

Пользуясь любезным разрешением академика П. Л. Капицы, мы помещаем в этом номере журнала несколько новых его задач. Одну из них мы попробуем решить здесь же. Соображения о выборе подхода к решению остальных задач, ответы и решения некоторых из них будут опубликованы в одном из следующих номеров «Кванта». Попробуйте решить предложенные задачи самостоятельно*). Не огорчайтесь, если они сразу у вас не получатся. Путь поиска истины никогда еще не был легким. Зато эти поиски помогут вам открыть для себя новый мир Физики. Желаем вам в этом успеха!

Задачи

1. Два спутника летят навстречу друг к другу. Опишите, что произойдет в результате их лобового столкновения.

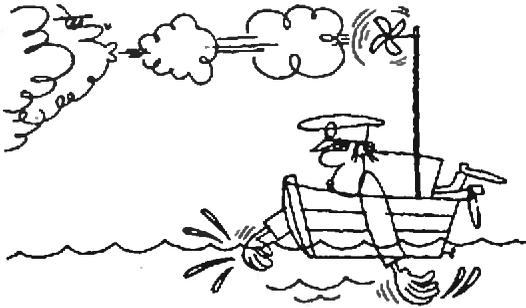


2. На корабле установлен ветродвигатель типа ветряной мельницы,

*1 П. Л. Капица. Физические задачи. М., Знание, 1972. В предисловии к этому сборнику П. Л. Капица рассказывает об истории создания задач.

*2 От редакции. Если вам очень понравится собственное решение какой-нибудь из этих задач — присылайте его в редакцию. Наиболее интересные читательские решения мы опубликуем.

который вращает гребной винт корабля. Рассмотрите возможность движения такого корабля против ветра.



3. В старые добрые времена у сторожей были колотушки (чтобы злоумышленники знали, что сторож не спит). Такая колотушка — это дощечка с рукояткой, к дощечке на веревке подвешен шарик. При каком движении колотушки шарик будет стучать с периодом T ?

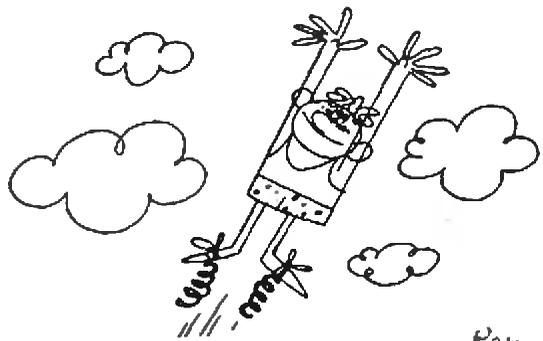


4. С горы высоты $h=1$ км с уклоном в 45° катится без скольжения и разрастается снежная лавина. Определите скорость лавины у подножия горы.



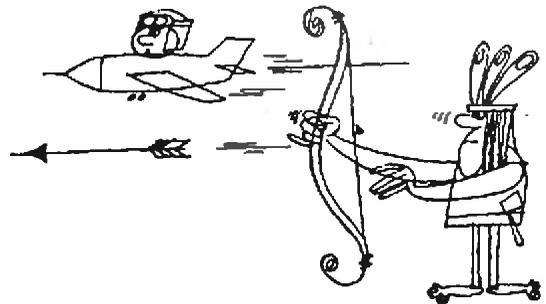
5. Гимнасты, многократно отскакивая от батута, увеличивают высоту прыжков. Батут — это горизонтальная плоскость на пружинных

подвесах. Рассчитайте наиболее эффективную конструкцию пружины батута и выясните, что ограничивает высоту прыжков гимнастов.

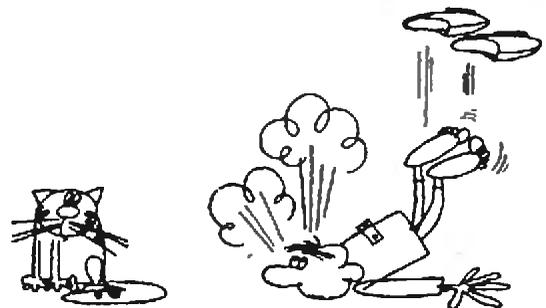


Кан

6. Как влияет на скорость полета стрелы форма лука? Оцените предельную скорость стрелы, выпущенной из современного спортивного лука.



7. Человек мог бы ходить по потолку, как ползает по потолку муха, если бы ноги человека прилипали к потолку. В случае железного по-



толка это можно было бы осуществить с помощью магнитных башмаков. Придумайте и рассчитайте конструкцию таких башмаков.

8. Чем определяется точность фокусировки электронного пучка? Какова точность фокусировки луча в современном телевизоре?



Решение задачи 3

Эту задачу удобнее решать, экспериментируя с моделью колотушки, которую можно изготовить самому из доски с вырезанной рукояткой. К низу доски в центре надо каким-либо удобным способом прикрепить веревку с металлическим шариком на конце. Таким «шариком» может быть гайка (ни при каких условиях шарик не должен соскакивать!). Нетрудно заметить, что существует три наиболее простых способа вос-

производить периодические удары шарика о поверхность доски: 1) подбрасывать шарик вверх горизонтально расположенной доской; 2) наклонной доской ударять шарик, раскачивая его подобно маятнику; 3) держась за рукоятку, опустить доску вниз, отвести руку назад и резко сообщить быстрое движение шариком в вертикальной плоскости, после чего он, описав примерно половину дуги окружности, ударится в доску, которая к этому моменту занимает горизонтальное положение. На опыте проверяется, что именно в последнем случае возникают резкие громкие удары, наподобие тех, которыми отпугивали когда-то злоумышленников.

Период T — время между ударами — складывается из времени t_1 разгона доски, при котором шарику сообщается большая скорость v_0 (отвод руки назад и резкий взмах вперед), времени t_2 , за которое шарик описывает полуокружность с радиусом r , двигаясь в поле силы тяжести с начальной скоростью v_0 , и времени t_3 , за которое шарик, потеряв скорость при ударе о доску, упадет вниз с высоты $2r$.

Рецензии, библиография

Олимпиадные задачи

Недавно вышла из печати книга «Всесоюзные олимпиады по физике»^{*}). В ней собраны задачи, предлагавшиеся школьникам на Всесоюзных олимпиадах (с I по XIV), на I и II Всероссийских олимпиадах Московского физико-технического института и Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

В последние годы издавалось довольно много сборников задач по физике, были

среди них и книги с трудными, «олимпиадными» задачами. Иногда задают вопрос: «А зачем решать так много задач, особенно трудных? Нужно ли это?»

Скажем сразу: решение задач — не самоцель. Это очень удобный (и объективный!) способ проверить, все ли вы понимаете в пройденной теме, умеете ли применять полученные знания. Это способ потренировать свое мышление, ведь многие задачи родились одинаково — как упрощенные (а иногда и вовсе не упрощенные!) вопросы, возникавшие в ходе научных исследований. Это способ сравнить свой уровень с уровнем участников олимпиад по физике. И, наконец, это просто увлекательное занятие.

Ко всем задачам сборника приведены решения. Но эти решения вовсе не единственно возможные. Трудную задачу почти всегда можно решать несколькими способами. Воз-

можно, ваш способ окажется проще, красивее и — не исключено! — просто правильнее. В этих случаях напишите в редакцию нашего журнала — ведь олимпиадные задачи интересуют очень многих.

Основное место в книге отведено задачам обоих типов — теоретического и экспериментального — Всесоюзных олимпиад. Для экспериментальных задач даны краткие указания, как их делать. Большая часть этих задач может быть поставлена в любом школьном физическом кабинете.

Многие задачи сборника «Всесоюзные олимпиады по физике» уже публиковались в различных задачниках, в журнале «Квант». Однако, собранные вместе, они могут принести много пользы — и при занятиях физических кружков, и в самостоятельной работе.

А. Р. Зильберман

^{*}) И. Ш. Слободяцкий, В. А. Орлов. Всесоюзные олимпиады по физике. Пособие для учащихся. (М., «Просвещение», 1982.)

Обман или заблуждение?

(Об одном способе
вычисления π)

Доктор физико-математических наук
А. Н. ЗАЙДЕЛЬ

Как определить экспериментально численное значение π ? Наверное, проще всего взять нитку, измерить с ее помощью длину какой-нибудь окружности известного диаметра и разделить результат на длину диаметра. Оказывается, приближенно найти π можно и с помощью иглы ... и теории вероятностей. Такой способ придумал французский естествоиспытатель Ж. Л. Л. Бюффон (1707—1788)^{*)}. Впоследствии опыт Бюффона не раз повторялся для проверки некоторых выводов теории вероятностей (вернее, их применимости на практике). Не обошлось при этом и без одного курьезного случая, о котором и пойдет у нас речь. Но сначала расскажем, в чем состоит

Опыт Бюффона

Для его осуществления нужно немного: плоская горизонтальная поверхность с нанесенными на ней параллельными равноотстоящими прямыми и игла. Расстояние между прямыми h и длина иглы l должны удовлетворять соотношению $l < h$ (рис. 1). Будем произвольным образом подбрасывать иглу над такой поверхностью, сообщая ей каждый раз небольшое вращение так, чтобы игла свободно падала с высоты

50—60 см, составляя при падении совершенно случайный угол с начерченными прямыми. После каждого броска будем отмечать, пересекла (рис. 1, а) или не пересекла (рис. 1, б) игла одну из параллельных прямых и подсчитывать частоту пересечений, то есть отношение числа m бросаний, при которых пересечение произошло, к их общему числу n . Довольно скоро мы заметим, что при многократном повторении бросаний частота будет меняться все меньше и меньше. Более того, если произвести много длинных серий подбрасываний, обнаружится, что частота пересечений почти во всех сериях будет примерно одной и той же.

Это свойство «устойчивости» частоты (наряду, разумеется, со случайностью, или непредсказуемостью, исхода каждого опыта) характерно для всех экспериментов, изучаемых в теории вероятностей^{*)}. Каждому исходу такого эксперимента сопоставляется некоторое число p , $0 < p < 1$, — вероятность этого исхода, выражающее степень возможности появления данного исхода в результате эксперимента. Вероятность — это как раз и есть то значение, около которого колеблется частота

^{*)} Для ознакомления с началами теории вероятностей можно рекомендовать популярные книжки: Е. С. Вентцель «Теория вероятностей (первые шаги)» (М., Знание, 1977), А. В. Скороход «Вероятность вокруг нас» (Киев, Наукова думка, 1980), А. Н. Колмогоров, И. Г. Журбенко, А. В. Прохоров «Введение в теорию вероятностей» (М., Наука, 1982).

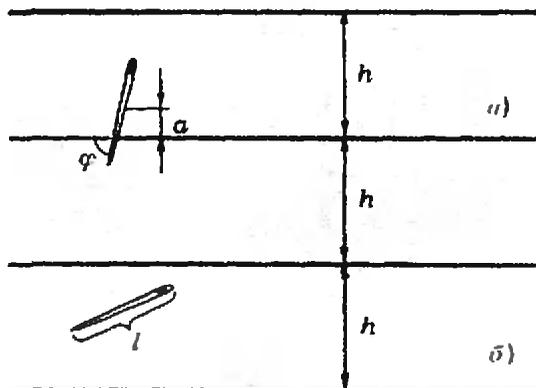


Рис. 1.

^{*)} См. об этом также в заметке А. Виленкина «Число « π » и теория вероятностей» (Квант, 1977, № 5).

осуществления того или иного события в достаточно длинных сериях экспериментов. Поэтому приближенное значение вероятности можно получить эмпирически, вычислив соответствующую частоту. (Точным математическим выражением наблюдаемого в эксперименте стремления частоты к какому-то предельному значению (вероятности) служит так называемый закон больших чисел, доказанный в своей самой простой форме около трехсот лет назад Якобом Бернулли.) С другой стороны, методы теории вероятностей во многих случаях позволяют исходя из условий проведения эксперимента рассчитывать вероятности теоретически.

В конце статьи мы покажем, как решается задача Бюффона о нахождении вероятности p того, что игла пересечет одну из линий. Ответ получается замечательный:

$p = \frac{2}{\pi} \frac{l}{h}$! А поскольку частота пересечений m/n примерно равна этой вероятности, для приближенного вычисления π имеем формулу

$$\pi \approx \frac{2l}{h} \frac{n}{m} \quad (1)$$

Что показали эксперименты

Точность приближения в формуле (1) будет тем выше, чем больше n , и на первый взгляд кажется, что, бросая иглу достаточно много раз, можно получить сколь угодно точное значение π . Попробуйте проделать такой опыт и вы легко убедитесь, что получить этим способом для π значение 3,1 довольно легко. Надежно получить следующий десятичный знак — 4 — уже значительно труднее.

В прошлом веке, когда теория вероятностей зачастую рассматривалась как полужэкспериментальная наука, такие опыты имели большое значение и весьма тщательно ставились многими учеными. Ниже приводится таблица, взятая из курса теории вероятностей Б. В. Гнеденко.

В первой колонке даны фамилии ученых, бросавших иглу, во второй — год проведения опыта, в третьей — число бросаний, из которого было определено π , и в последней — по-

Экспериментатор	Год	Число бросаний	Экспериментальное значение π
Вильф	1850	5000	3,1596
Смит	1855	3204	3,1553
Фокс	1894	1120	3,1419
Лаццарини	1901	3408	3,1415929
Истинное значение π с восемью знаками			3,1415927

лученное в результате опытов значение. В нижней строке таблицы дано значение π с восемью знаками.

Сравним с этим числом экспериментальные значения. Числа в первых двух строках отличаются от π на 0,01—0,02. Число, полученное Фоксом, всего на 0,0003 больше π — это удивительный результат, а вот число Лаццарини лишь на 0,0000002 отличается от истинного значения. Это уже действительно — чудо, а чудеса бывают только в сказках.

Неизбежность ошибок

Постараемся разобраться, что заставляет нас удивляться и, скажем откровенно, не верить в результат последнего опыта. Таких причин несколько. Первая — погрешности измерений. Для того чтобы получить из (1) точное значение π , нам необходимо точно знать величины h и l , вернее, их отношение. Эти данные мы можем получить только в результате измерений. А погрешности измерений внесут свой вклад в погрешность определения π . Оценим эти погрешности. Пусть длина иглы будет 50 мм, такое же расстояние между линиями. Пользуясь обычными измерительными инструментами, например штанген-циркулем или линейкой с нониусом, сравнительно легко измерить обе нужные длины с точностью до 0,1 мм или 0,2%. Мы видим, что для любой из нужных нам длин расстояние 0,1 мм кладет предел точности измерений^{*)}. Одна-

^{*)} В небольшом числе опытов (примерно 0,1—0,2% от общего числа бросаний) расстояние от конца иглы до прямой будет меньше 0,1 мм. В таких случаях глаз не различает, произошло пересечение или нет. Это обстоятельство может внести свою, правда, малую по сравнению с другими погрешность.

ко, применив более совершенные инструменты, можно все длины измерить с погрешностью 0,01 мм. Это уже практический предел — уменьшить погрешность до 0,001 мм в таком опыте исключительно трудно — изменение температуры иглы или поверхности, на которой нанесены линии, на 1—2 градуса уже вызовет изменение размеров на величину около 0,001 мм. Деформация иглы при ударе о поверхность, стирание ее концов, деформация самой поверхности — все эти причины делают проведение опыта на уровне погрешности 0,001 мм нереальным. Поэтому, и не производя более детальных оценок, можно уверенно сказать, что в описанных опытах число λ могло определяться с погрешностью, не меньшей 0,2—0,02%. То есть в опытах с простым измерительным инструментом (с каким они обычно проводятся) можно ожидать значение $\lambda = 3,141 \pm 0,006$. При очень тщательно выполненных опытах можно рассчитывать на результат $\lambda = 3,1416 \pm 0,0006$. А получить для λ из подобных опытов величину с погрешностью в восьмой значащей цифре так же невозможно, как нельзя взвесить спичку на весах, предназначенных для взвешивания железнодорожных вагонов — слишком грубы инструменты.

Разумеется, при любом измерении следует оценить его точность и приводить результат с тем количеством знаков, которое ей соответствует. Если мы получим для какой-то величины A в результате измерений и вычислений значение $A = 2,474329$, а точность измерительного прибора — 1%, то следует писать $A = 2,47$, зачеркнув все последующие цифры, которые отражают только точность нашего вычислительного устройства (современные, даже простейшие микрокалькуляторы всегда дают 6—8 десятичных знаков), а не результат реального опыта. Выписывать в таких случаях все знаки, которые можно сосчитать, — это заведомо пытаться обмануть себя и других, преувеличивая реальную точность опыта.

Однако в большой точности измерений вообще нет необходимости:

вовне достаточно измерять длины с погрешностью в 0,1 мм. Причина в том, что точность определения λ ограничивается совершенно другим, «вероятностным» по природе обстоятельством — невозможностью произвести достаточное число бросаний для того, чтобы приближенное равенство (1) надежно выполнялось с относительной погрешностью, меньшей 0,01. Можно выяснить, с какой скоростью убывает разница $\left| \frac{m}{n} - p \right|$

между частотой данного события в серии из n испытаний и его вероятностью при возрастании числа испытаний. Оказывается, для того чтобы увеличить точность приближенного равенства $\frac{m}{n} \approx p$ в N раз, число испытаний надо увеличивать в N^2 раз, другими словами, погрешность приближенного определения вероятности обратно пропорциональна квадратному корню из числа испытаний. Более точный расчет для опыта Бюффона показывает, что при $h \approx 1$ погрешность α значения λ , которая более или менее надежно не будет превышена при n бросаниях иглы, можно оценить так:

$$\alpha \approx \sqrt{\frac{5}{n}}. \quad (2)$$

Если мы потребуем, чтобы α было не больше 0,02, то из формулы (2) получаем $n \approx 12\,000$. В опытах, приведенных в таблице (кроме опыта Фокса), проводилось от 3000 до 5000 бросаний. В соответствии с (2), α получается при этом несколько больше, то есть примерно 0,025—0,030. Это находится в хорошем согласии с результатами Вольфа и Смита. Примерно такая же погрешность получается при ошибках измерения длин порядка 0,1 мм. Следовательно, нет оснований их измерять точнее, так как погрешности в каждом звене опыта не должны существенно различаться — нет смысла измерять длину иглы с точностью до 0,001%, если погрешность, связанная с ограниченностью числа испытаний, приводит к ошибке конечного результата в 0,2%—0,3%. Выбор числа бросаний в 3000—5000

вполне оправдан. Одно испытание должно занять около 5 с (попробуйте бросать быстрее). При этом 10 000 бросков займут примерно 14 часов, то есть два полных рабочих дня. Если мы захотим получить результат в десять раз более точный, то, в соответствии с «законом $1/\sqrt{n}$ », нужно бросать в 100 раз дольше — 200 дней, а это уже многовато.

А вот для того, чтобы получить результат Лаццарини, погрешность которого составляет всего 0,0000002, нужно бросать иглу около 4 000 000 лет! (Разумеется, при соответствующей абсолютно нереальной точности измерения всех длин.) Так что, начав свой опыт в 1901 году и бросая до сегодняшнего дня, Лаццарини был бы так же далек от опубликованного им результата, как и в день начала опыта.

Укажем еще один источник погрешностей в опытах такого рода. Для того чтобы вероятность пересечения действительно равнялась теоретическому значению $p=2l/\pi h$, все положения упавшей иглы относительно линий на поверхности должны быть совершенно равноправны, то есть ни одно из них не должно встречаться чаще других (более точную формулировку этого требования мы приведем при вычислении p). Есть все основания полагать, что в реальном эксперименте добиться этого трудно.

В связи со всем сказанным следует отметить, что число знаков, приведенных в таблице, неоправданно велико. Следовало оставить в первых двух строках четвертой колонки 3,16, а в третьей — 3,14.

И все-таки: обман или заблуждение?

Как же все-таки объяснить полученный Лаццарини результат? Трудно предположить попытку сознательного обмана. Когда Лаццарини занимался бросанием иглы, закон больших чисел был хорошо известен и те расчеты, которые здесь приведены, мог проделать любой математик. Вероятно, никто из ученых никогда серьезно этот результат и не воспринимал, хотя его неодно-

кратно публиковали. Приступая к опытам, Лаццарини должен был знать заранее, чего от них можно было ожидать. И, даже получив в результате арифметических упражнений приведенное им число, он не должен был публиковать такой фантастический результат, не подтвердив его повторной серией опытов. Мне кажется, что ему очень хотелось получить то, чего до него никто получить не сумел. Такое слишком сильное желание иногда увлекает исследователя и заставляет принимать желаемое за реальность.

Можно, конечно, предположить, что, бросая иглу, он после каждого испытания вычислял π и прекратил опыты после 3408 бросков именно потому, что как раз после такого числа испытаний он случайно получил приведенное им число. Разумеется, даже из 10 000 бросаний получить хотя бы один раз значение с точностью до $2 \cdot 10^{-7}$ очень мало вероятно (вероятность этого примерно равна 10^{-5}), но все же событие с такой вероятностью могло произойти. Если дело было действительно так, то Лаццарини не обманывал других, но обманул самого себя. К сожалению, и такое в науке случается.

Будем удовлетворены тем, что, хотя результат опыта Лаццарини не подтвердил правильность выводов теории вероятностей (а скорее даже вступил с ними в противоречие, если уж воспринимать его всерьез), он послужил нам еще одним поводом для обсуждения того, как осторожно нужно относиться к получаемым в опыте результатам и их статистической обработке.

Решение задачи Бюффона

Нам остается объяснить, как вычисляется вероятность пересечения иглы и одной из параллельных прямых в опыте Бюффона. Обозначим расстояние от центра иглы до ближайшей прямой через a ($0 \leq a \leq h/2$), а угол между иглой и прямой — через φ ($0 \leq \varphi \leq \pi/2$). Тогда, как ясно из рисунка 1, а, условие пересечения иглы и прямой можно

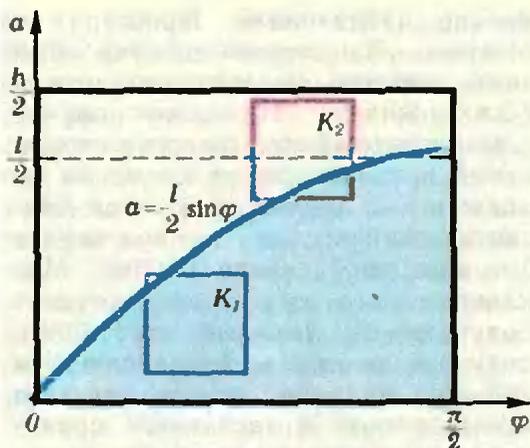


Рис. 2.

записать в виде

$$a < \frac{l}{2} \sin \varphi.$$

Каждому возможному результату нашего эксперимента отвечает точка на плоскости с координатами $(a; \varphi)$, лежащая внутри прямоугольника, ограниченного координатными осями и прямыми $a = \frac{h}{2}$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (рис. 2). Точки прямоугольника, лежащие под кривой $a = \frac{l}{2} \sin \varphi$, соответствуют случаям пересечения иглы с прямой: точки, лежащие выше этой кривой — случаям, когда пересечение не имеет места. Теперь задачу можно сформулировать так: *в прямоугольнике $\{0 < \varphi < \pi/2; 0 < a < h/2\}$ наугад выбирается точка; какова вероятность того, что эта точка окажется под синусоидой $a = (l/2) \sin \varphi$?*

Слово «наугад» заменяет здесь требование равноправности*) всех положений упавшей иглы. Его строгий смысл можно объяснить по-разному. Проще всего сказать, что вероятность попадания выбранной точки в любой квадрат $\{\varphi_1 < \varphi < \varphi_2; a_1 < a < a_2\}$ ($\varphi_2 - \varphi_1 = a_2 - a_1 = d$) с данной стороны не зависит от положения этого квадрата внутри прямоугольника (хотя, разумеется, зависит от длины d его стороны). Например, вероятности того, что точка окажется внутри квадратов K_1 или K_2 на рисунке 2, одинаковы. Отсюда нетрудно вывести, что вероятность попадания внутрь любой фигуры, лежащей в нашем прямоугольнике, пропорциональна ее площади, и, следовательно, равна отношению этой площади к площади всего прямоугольника.

В частности, площадь криволинейной трапеции, ограниченной рассматриваемой синусоидой, равна

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{\pi/2} \frac{l}{2} \sin \varphi d\varphi = \\ &= \frac{l}{2} \left((-\cos \frac{\pi}{2}) - (-\cos 0) \right) = \\ &= \frac{l}{2}. \end{aligned}$$

А так как площадь S прямоугольника равна $lh/4$, для искомой вероятности получаем значение

$$p = \frac{S_1}{S} = \frac{2l}{\pi h}.$$

*) Мы предпочитаем не говорить о «равновероятности», потому что вероятность того, что игла займет какое-то точно фиксированное положение попросту равна нулю.

Рецензии, библиография

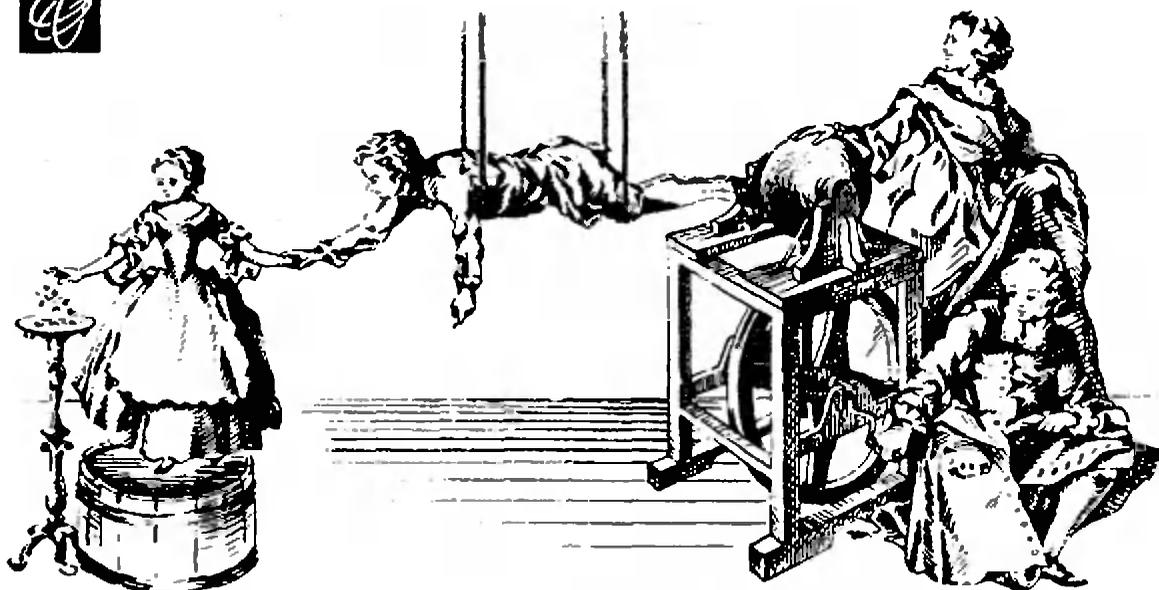
Новые книги

В 1984 году издательство «Наука» предлагает выпустить в серии Библиотечка «Квант» следующие книги (цена каждой книги 40 к.):

1. В. Б. Брагинский, А. Г. Полнарев. Удивительная гравитация.
2. Г. С. Воронов. Штурм термоядерной крепости.
3. В. И. Гольданский, Р. П. Кузьмин. Эффект Мёссбауэра.

4. В. Н. Дубровский, Я. А. Смородицкий, Е. Л. Сурков. Релятивистский мир.
5. В. А. Займовский, Т. Л. Колупаева. Необычные свойства обычных металлов.
6. Занимательно о физике и математике. (Составители С. С. Кротов, А. П. Савин.)
7. М. Е. Левиштейн, Г. С. Симин. Знакомство с полупроводниками.
8. А. П. Пурмаль, Е. М. Слободенская, С. О. Травин. Как превращаются вещества.
9. С. С. Хилькевич. Физика вокруг нас.
10. А. Д. Черин. Звезды и физика.

Мы советуем всем заинтересованным читателям оформить заказы на эти книги в книжных магазинах или в отделах «Книга — почтой».



Из старых опытов

Кандидат физико-математических наук
А. А. ВАРЛАМОВ

Полгода назад мы опубликовали первую статью о занимательных опытах, которые проводили любознательные юноши в прошлом веке.) Сегодня мы продолжаем эту тему и предлагаем вниманию читателей рассказ о нескольких забавных опытах по электричеству.*

В начале XIX столетия Распорядительный совет Королевского института Великобритании в целях просвещения юношества в области естественных наук учредил специальный курс научных чтений. (Заметим, что естественные предметы в английской школе в то время не преподавались вовсе.) По своей организации это было нечто вроде воскресной школы, которую, как вы помните, прилежно посещал Том Сойер. Однако вместо «плюгавого директора с молитвенником и скучными проповедями» на кафедре Королевского института всходили и выступали перед юными лю-

бзнительными слушателями выдающиеся ученые того времени Майкл Фарадей, Джон Тиндаль и другие.

Некоторые из прочитанных курсов были записаны и затем опубликованы. Так всемирную известность получила серия лекций под названием «Химическая история свечи», прочитанная Фарадеем в 1860 году и впервые опубликованная в 1861 году. С тех пор эта книга многократно переиздавалась на разных языках, в том числе и на русском. Очередное издание вышло совсем недавно в Библиотечке «Квант»*).

Не менее замечательна и книга Тиндаля «Уроки по электричеству». О некоторых опытах из этой книги вы сегодня узнаете.

Учение об электричестве стало развиваться значительно позже механики. Так, на протяжении почти двух тысячелетий познания человечества в этой области ограничивались лишь тем фактом, что янтарь может притягивать к себе легкие предметы. И только в XVII веке были открыты первые закономерности, описывающие электрические явления.

Причину такого застоя Тиндаль видел в пренебрежении опытами. Именно искусство проводить опыты,

*) А. Варламов. Сто лет назад. «Квант», 1982, № 10.

*) М. Фарадей «История свечи», М., «Наука», серия «Библиотечка «Квант», 1980.

то есть умение вызывать явления, проявляющие и проясняющие сущность физических законов, дает «возможность беседовать с Природой, задавая ей вопросы и получая ответы на них».

Первые три из предлагаемых ниже опытов (именно они и взяты из лекций Тиндаля) не требуют никакого специального оборудования и основаны на простейшем явлении электризации трением. Для проведения последних опытов необходима так называемая электрофорная машина. Можно сделать ее самостоятельно (по предлагаемому описанию) или воспользоваться готовой, имеющейся в школьном физическом кабинете.

«Покорные» мыльные пузыри

Известно, что диэлектрики обладают замечательным свойством — электризацией при трении. Так, если палочку из сургуча (или подходящей пластмассы) потереть шелковым лоскутком, она зарядится и начнет притягивать клочки бумаги и другие мелкие предметы. При этом чем легче эти предметы, тем с большего расстояния они притягиваются.

Эффективный опыт, основанный на описанном явлении, может быть проведен с мыльными пузырями. Чтобы получить прочный и большой (величиной с крупный апельсин) мыльный пузырь, необходимо два условия — хорошая мыльная вода и подходящая трубочка. Для приготовления мыльного раствора лучше всего использовать зеленое мыло (например, «Русский лес») и разводить его мягкой (кипяченой или дождевой) водой. При этом мыло не следует разводить слишком жидко — в этом случае пузыри получаются слабыми. Для придания пузырям еще большей прочности в раствор можно добавить немного глицерина. Трубочку лучше всего выбрать стеклянную, не слишком тонкую, с немного расширенным и закругленным концом; этот кончик необходимо предварительно натереть мылом. Следите, чтобы в трубочку не попадала слюна, иначе пузыри быстро лопаются.

Для проведения опыта возьмите приготовленную палочку из сургуча и натрите ее шелком. Затем выдуйте

пузырь и вы увидите, что ваша палочка приобрела над ним волшебную силу: пузырь, как на привязи, неотступно следует за ней. Почему?

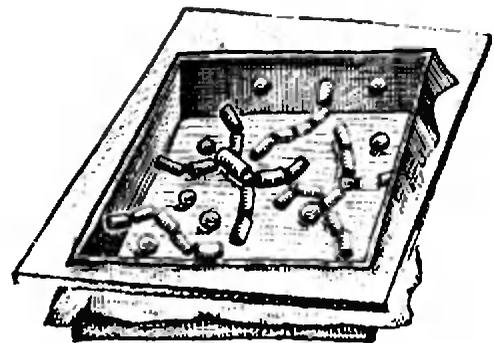
Опыт можно разнообразить и украсить, например, сделав два мыльных пузыря один в другом. Оказывается, пузырь не лопается, если к нему прикоснуться или даже проткнуть его стеклянной трубкой, смоченной в мыльной воде. Аккуратно введите трубку с мыльным раствором в мыльный пузырь средних размеров и внутри него выдуйте второй пузырь, который упадет на дно наружного. Слабым толчком трубки внутренний пузырь можно вытолкнуть наружу, и тогда он повиснет, как гондола у аэростата.

Забавные человечки

Возьмите деревянную или картонную коробку высотой 3—4 см и оклейте ее со всех сторон фольгой от шоколада или чая. Внутрь коробки положите легкие шарики, змейки и фигурки человечков, изготовленные из сердцевинки бузины. Эти фигурки легко сделать, соединив кусочки бузины с помощью иголки с ниткой так, чтобы они свободно шевелили руками и ногами. Закройте коробку сверху обыкновенным стеклом, и прибор готов к демонстрации.

Когда зрители собрались, потрите стекло кусочком шелка или кожи. При этом на стекле появятся электрические заряды, а поскольку поверхность коробки благодаря фольге является проводящей, они распределятся по ней.

Заряжаясь одновременно с дном коробки, фигурки постепенно начинают



«оживать» — поднимают руки и ноги, подпрыгивают и, наконец, прилипают к стеклу.

Как только вы прекратите электризовать стекло трением, заряд начнет стекать с коробки, и фигурки станут падать на дно, но еще довольно долго будут подергивать руками и ногами, пока из них не уйдет жизнь, дарованная им электричеством.

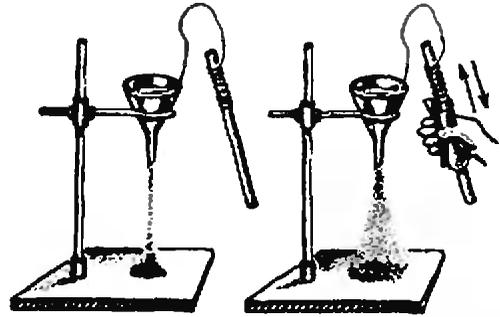
Оригинальные фонтаны

Устройте простейший фонтан с помощью резервуара с водой, поставленного на возвышение (скажем, на шкаф), и обыкновенного сифона, сделанного из резиновой трубки. Укрепите конец трубки так, чтобы струя воды била не вертикально вверх, а несколько под углом, достигая высоты сантиметров пятьдесят. После достижения максимальной высоты, струя обычно рассыпается на сноп брызг. Если же вы поднесете к ней заранее наэлектризованную палочку, сноп брызг тут же послушно стянется в спокойную струю. Попробуйте объяснить, почему.

Этот опыт эффектно показывать в темноте, осветив снизу лишь струю воды.

А теперь опишем красивый опыт, демонстрирующий противоположное действие электрических зарядов.

Закрепите неподвижно воронку и воткните в нее проволоку. Другой конец проволоки обмотайте вокруг нагретой стеклянной трубки. Насыпьте в воронку металлические опилки — они будут высыпаться из нее ровной сплошной струей. Но стоит вам потереть трубку кусочком кожи или шелка, как картина резко изме-



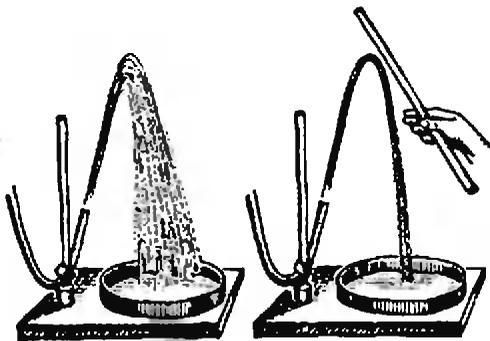
нится. Заряды, возникшие на трубке в результате трения, передадутся по проволоке металлическим опилкам, они приобретут одноименные заряды и разлетятся, образуя своеобразный фонтан.

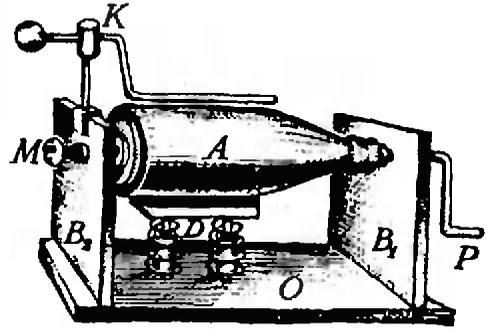
Как сделать электрофорную машину

Если вы хотите выйти за рамки опытов с наэлектризованной палочкой, необходимо научиться сообщать телам гораздо большие заряды. Например, с помощью предлагаемой машины.

Первая электрическая машина была сконструирована бургомистром Магдебурга, военным инженером Отто фон Герике в 1660 году. Герике известен прежде всего своими опытами по обнаружению атмосферного давления, которые вошли в историю физики под названием «опыты с магдебургскими полушариями» (о них упоминается в учебнике физики для 6—7 классов).

Электрическая машина Герике представляла собой шар из серы величиной с детскую головку, насаженный на железную ось с рукояткой и укрепленный на деревянной подставке. С этим шаром можно было проводить различные опыты. Например, вращая шар с помощью рукоятки и натирая его прямо сухой рукой, Герике наблюдал возникновение маленьких искр вокруг шара — шар светился в темноте. Сняв шар с подставки и перемещаясь с ним по комнате, ему удавалось заставить легкие тела, например перышко, плавать в воздухе. В процессе опытов Герике заметил важное обстоятельство: лег-





кие тела сначала притягиваются наэлектризованным шаром, но после прикосновения к нему тут же отталкиваются (подумайте, почему?) и держатся от него на некотором расстоянии, пока не коснутся других предметов, после чего они снова могут притягиваться к шару. В дальнейшем серный шар был заменен стеклянным цилиндром, а затем — более удобным стеклянным диском. Эти машины давали столь сильные искры, что они были способны воспламенить эфир.

Во всех последующих образцах электрофорных машин, позволяющих получать еще большие электрические заряды, присутствует характерный и для современных машин дополнительный элемент — кондуктор, то есть собиратель зарядов.

Опишем устройство одной из простейших машин, которую несложно изготовить самостоятельно. Она состоит из двух главных элементов — уединенного цилиндра, электризующегося трением, и кондуктора.

Цилиндр *A* сделан из простой бутылки. Вместе с пробкой в горлышко входит коленчатая ручка *P*, с помощью которой цилиндр приводится во вращение. Стойки *B₁* и *B₂*, приклеенные к основанию *O* машины, вырезаны из фанеры, их высота 10—12 см. В верхней части стоек на одинаковой высоте просверливаются отверстия для оси вращения. К дну бутылки приклеивается кусочек дерева, в который упирается пропущенный сквозь стойку винт *M*. Он служит левым концом оси вращения и одновременно прижимает бутылку к противоположной стойке. Чтобы винт не врезался в деревяшку, под него луч-

ше подложить металлическую пластинку с углублением в центре.

Трущая щетка представляет собой оклеенную кожей дощечку *D* шириной 4—5 см, которая прижимается к бутылке с помощью двух тугих пружин. Щетка крепится к основанию следующим образом: в основание вклеиваются две короткие достаточно широкие тонкостенные трубки, а в щетку вклеиваются трубки меньшего диаметра, свободно входящие в нижние.

Кондуктор *K* состоит из металлического прута толщиной 4—6 мм и металлического шарика, прикрепленного к левому концу прута. К пруту приклеивается медная насадка, с помощью которой кондуктор закрепляется в трубке, вклеенной в верхушку левой стойки. Места соединения прута с шариком и медной насадкой должны быть хорошо зачищены.

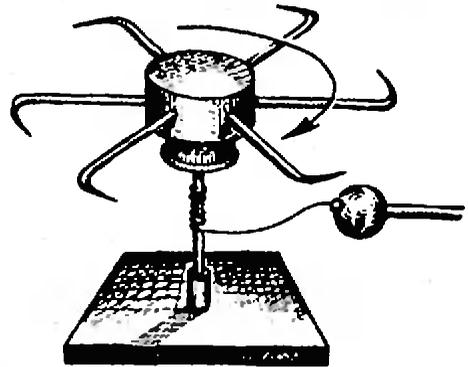
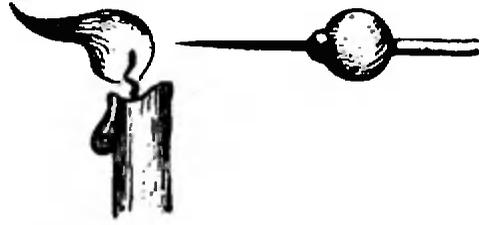
Электрический ветер и электрическое сегнерово колесо

С помощью изготовленной вами электрофорной машины можно провести множество интересных опытов. Один из самых простых — это создание так называемого электрического ветра. Прикрепите с помощью пластилина к шару кондуктора булавку так, чтобы ее головка обязательно касалась кондуктора, а сама булавка была расположена горизонтально. Если теперь вы одной рукой будете крутить ручку машины, а другую подставите к острию, то почувствуете дуновение ветра. Этот ветер может быть настолько силен, что его порывы задуют пламя свечи.

Такое, на первый взгляд загадочное, явление объясняется электрическими свойствами острия. Так как заряды одного знака отталкиваются, они, стекая с кондуктора, стремятся отойти от него как можно дальше и в большом количестве скапливаются на конце острия. Эти заряды притягивают заряды противоположного знака из воздуха, которые «сидят» на различных частичках, взвешенных в воздухе. Прикоснувшись к острию, частички тут же перезаряжаются и, обретя заряд того же знака, что и на кондукторе, улетают прочь от острия. Поток этих частиц и создает ощущаемый ветер.

Описанное свойство острия можно использовать для устройства электрического аналога известного с древности сегнерова колеса (вращающегося с помощью реактивной силы вытекающей из его сопел воды). Возьмите пробку, выдолбите ее середину так, чтобы туда вошел металлический наперсток. Снаружи воткните, расположив их симметрично, несколько металлических стержней, загнутых в виде крючков. Теперь установите это «колесо» на металлической вертикальной оси, подсоединенной к кондуктору электрофорной машины. При вращении ручки машины на остриях скапливаются заряды и, как в предыдущем опыте, от них пойдут потоки перезарядившихся частичек. Эти потоки приводят «колесо» во вращение.

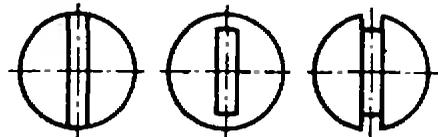
На этом же свойстве основано действие громоотвода. Его изобретатель Бенджамин Франклин чрезвычайно остроумно продемонстрировал принцип действия громоотвода следующим образом. Известно, что грозовые облака всегда очень неровные, отдельные их участки находятся на разных расстояниях от земли, некоторые из них проходят иногда совсем низко над землей. Франклин полагал, что такие спускающиеся «звенья» грозовой тучи являются ступенями, облегчающими молнии выбор пути. Для демонстрации этого он подвесил к кондуктору электрофорной машины несколько клочков рыхлой бумаги, прикрепив их друг к другу. При поступлении на них заряда клочки вытягивались к земле. Поднося к



нижнему из клочков острие иглы, Франклин заставлял его подняться к предыдущему и проделывал это до тех пор, пока вся бумага не вращалась к кондуктору, как если бы он не был заряжен.

Попробуйте и вы проделать и объяснить этот опыт.

Задача



На рисунке изображены головки трех винтов (вид сверху). Одна из этих головок имеет цилиндрическую форму, другая — форму усеченного конуса, третья — полушара. Какая — какую?

Интерференция ВОЛН

Кандидат физико-математических наук
Л. П. БАКАНИНА

Интерференция волн — большой и важный раздел физики. Исследование этого явления сыграло большую роль в развитии оптики, так как обнаружение интерференции света служит убедительным доказательством его волновой природы.

При наложении волн действует принцип суперпозиции — результирующее колебание представляет собой сумму колебаний, вызванных каждой волной в отдельности. Однако интерференционная картина возникает только тогда, когда складываемые колебания (а значит, и вызывающие их волны) когерентны, то есть они имеют одинаковые частоты и постоянную во времени разность фаз. Что же представляет собой эта картина?

Пусть вдоль некоторого направления распространяется плоская синусоидальная волна. В точке, находящейся на расстоянии d , она вызовет колебания, происходящие по закону*

$$a = A \cos \omega \left(t - \frac{d}{v} \right) = \\ = A \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{T} \frac{d}{v} \right) =$$

$$= A \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} d \right).$$

Здесь a — значение колеблющейся величины в момент времени t , A — амплитуда, ω — циклическая частота, $T = 2\pi/\omega$ — период колебаний, v — скорость волны (для электромагнитных волн v равно скорости света c).

При сложении двух когерентных волн одинаковой амплитуды получаем

$$a = a_1 + a_2 = A \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} d_1 \right) + \\ + A \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} d_2 \right) = \\ = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} \frac{(d_2 - d_1)}{2} \times \\ \times \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \frac{(d_1 + d_2)}{2} \right).$$

Амплитуда результирующего колебания равна

$$A_{\text{рез}} = 2A \left| \cos \frac{2\pi}{\lambda} \frac{(d_2 - d_1)}{2} \right| = \\ = 2A \left| \cos \frac{\Delta\varphi}{2} \right|,$$

где $\Delta\varphi = 2\pi(d_2 - d_1)/\lambda$ — разность фаз складываемых колебаний. В зависимости от разности фаз $\Delta\varphi$, а значит и от разности хода $(d_2 - d_1)$ волн, результирующая амплитуда может меняться от $A_{\text{рез max}} = 2A$ (когда фазы совпадают) до $A_{\text{рез min}} = 0$ (когда фазы сдвинуты на π).

Глаз (или фотоприемник) воспринимает не амплитуду колебаний, а их интенсивность I , то есть энергию, падающую в единицу времени на единицу площади. Интенсивность, как и энергия колебаний, пропорциональна квадрату амплитуды, поэтому

$$I_{\text{рез}} \sim A_{\text{рез}}^2 \sim 4A^2 \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2}.$$

Следовательно, есть точки, где суммарная интенсивность больше суммы интенсивностей налагающихся волн ($I_{\text{рез max}} \sim 4A^2$), и точки, где волны как бы уничтожают друг друга

Статья предназначена для школьников десятитого класса.

* См., например, статью Л. Асламазова и И. Киконина «Что такое волна?» («Квант», 1982, № 6). (Прим. ред.)

($I_{\text{рез. min}}=0$). Такое перераспределение энергии в пространстве и является характерным признаком интерференции.

Явление интерференции легко демонстрируется для волн на воде или для радиоволн. В оптике наблюдать интерференционную картину нелегко, так как обычные источники света (не лазеры) испускают колебания с быстро и случайно изменяющейся фазой и, следовательно, некогерентные. Однако если свет от одного источника разделить на два пучка и затем наложить эти лучки друг на друга, то можно получить достаточно четкую интерференционную картину*).

Заметим, что для правильного описания явления интерференции ошибка при определении разности фаз колебаний должна быть существенно меньше π (иначе будет невозможно отличить максимум от минимума). При этом ошибка в измерении разности хода волн должна быть много меньше длины волны λ (для световых волн эта ошибка должна быть много меньше 0,1 мкм).

Теперь разберем несколько конкретных задач. Почти все они взяты из билетов письменного экзамена по физике в Московский физико-технический институт.

Задача 1. Плоская электромагнитная волна частоты ν , сформированная рупорной антенной, падает перпендикулярно на плоский отражающий экран. Определите амплитуду отраженной волны, если измеритель напряженности электрического поля при перемещении между экраном и рупором зафиксировал максимальную амплитуду поля A_1 и минимальную A_2 . Определите также расстояние между двумя соседними максимумами поля.

В пространстве между рупором и отражающим экраном происходит наложение падающей и отраженной волн. В точках максимума фазы колебаний, вызванных этими волнами, совпадают, и, следовательно,

результатирующее колебание происходит с амплитудой

$$A_1 = A_{\text{пад}} + A_{\text{отр}}$$

В точках минимума падающая и отраженная волны находятся в противофазе, и суммарная амплитуда колебаний равна

$$A_2 = A_{\text{пад}} - A_{\text{отр}}$$

Из этих двух равенств находим

$$A_{\text{отр}} = (A_1 - A_2) / 2.$$

Пусть колебания в точке с координатой x , вызванные падающей волной, описываются выражением

$$\begin{aligned} a_{\text{пад}} &= A_{\text{пад}} \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) = \\ &= A_{\text{пад}} \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \right). \end{aligned}$$

Если расстояние от рупора до экрана равно l , то отраженная волна проходит до данной точки расстояние $2l - x$, и колебания, вызванные отраженной волной, имеют вид

$$\begin{aligned} a_{\text{отр}} &= A_{\text{отр}} \cos \omega \left(t - \frac{2l - x}{c} \right) = \\ &= A_{\text{отр}} \cos \left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{4\pi l}{\lambda} \right). \end{aligned}$$

(На самом деле при отражении волны фаза колебаний может измениться на противоположную, но на дальнейшие наши рассуждения это повлиять не может.)

Пусть два соседних максимума наблюдаются в точках с координатами x_1 и x_2 . Разности фаз колебаний, возбуждаемых падающей и отраженной волнами в этих точках, равны соответственно

$$(\Delta\varphi)_1 = \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x_1 \right) -$$

$$- \left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} x_1 - \frac{4\pi}{\lambda} l \right) = - \frac{4\pi}{\lambda} x_1 + \frac{4\pi}{\lambda} l$$

и

$$(\Delta\varphi)_2 = - \frac{4\pi}{\lambda} x_2 + \frac{4\pi}{\lambda} l.$$

В двух соседних максимумах фазы результирующих колебаний должны

* *) О том, как можно наблюдать интерференцию света от обычных источников, подробно рассказано в статье Н. Берюлевой «Интерференция света» («Квант», 1981, № 6). (Прим. ред.)

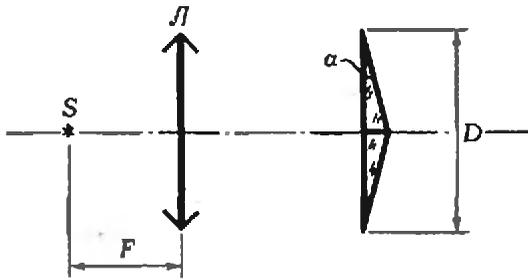


Рис. 1.

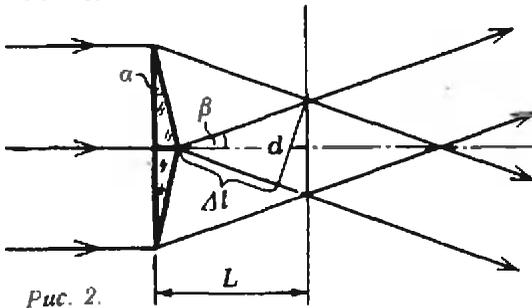


Рис. 2.

отличаться на 2π ; следовательно,

$$\Delta\varphi = (\Delta\varphi)_1 - (\Delta\varphi)_2 = 2\pi,$$

или

$$\frac{4\pi}{\lambda} (x_2 - x_1) = 2\pi.$$

Отсюда получаем

$$x_2 - x_1 = \frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2\nu}.$$

Задача 2. Точечный источник света S расположен в фокусе линзы L , за которой находится бипризма с преломляющим углом $\alpha = 0,01$ рад и шириной $D = 6$ см (рис. 1). На каком расстоянии L от бипризмы можно наблюдать наибольшее число интерференционных полос? Сколько полос можно увидеть на экране? Чему равна ширина полос? Коэффициент преломления стекла бипризмы $n = 1,5$, длина волны света $\lambda = 0,5$ мкм.

Поскольку источник света находится в фокусе линзы, на бипризму падает параллельный пучок, идущий вдоль оптической оси системы (рис. 2). Из бипризмы выходят два параллельных световых пучка, наклоненных к оси под углом β , который можно найти из закона преломления $\sin \alpha / \sin \beta = n$. Так как углы малы,

$$\beta \approx \sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n} \approx \frac{\alpha}{n}.$$

Очевидно, что наибольшая ширина интерференционной картины будет в том месте, где самая большая площадь пересечения интерферирующих пучков. Из рисунка 2 видно, что это будет на расстоянии

$$L \approx \frac{D}{4 \operatorname{tg} \beta} \approx \frac{D}{4\beta} \approx \frac{Dn}{4\alpha} \approx 112,5 \text{ см.}$$

При этом ширина всей интерференционной картины равна $b = D/2 = 3$ см.

Каждый из пересекающихся пучков имеет ширину $d = (D/2) \cos \beta \approx D/2$. Волновые поверхности пучков образуют между собой угол, равный 2β ; следовательно, максимальная разность хода пучков равна

$$\Delta l = d \operatorname{tg} 2\beta \approx d \cdot 2\beta.$$

Разность хода, соответствующая двум соседним максимумам (или минимумам), равна длине волны λ . Таким образом, число интерференционных полос, образующихся на экране, равно

$$N = \frac{\Delta l}{\lambda} \approx \frac{2d\beta}{\lambda} \approx \frac{D\alpha}{n\lambda} \approx 800,$$

а ширина одной полосы —

$$b_0 = \frac{b}{N} \approx \frac{D/2}{D\alpha/(n\lambda)} \approx \frac{n\lambda}{2\alpha} \approx 37,5 \text{ мкм.}$$

Задача 3. Приемник радиосигналов, следящий за появлением спутника Земли из-за горизонта, расположен на берегу озера на высоте $H = 3$ м над поверхностью воды. По мере поднятия спутника над горизонтом наблюдаются периодические изменения интенсивности принимаемого сигнала. Определите частоту радиосигнала спутника, если максимумы интенсивности наблюдались, в частности, при углах возвышения спутника над горизонтом $\alpha_1 = 3^\circ$ и $\alpha_2 = 6^\circ$. Поверхность озера можно считать идеально отражающим зеркалом.

В приемник попадают лучи, идущие непосредственно от спутника и отразившиеся от поверхности озера. На рисунке 3 это лучи 1 и 2 соответственно. Разность хода между ними

$$\Delta l = |AC| - |AB| = \frac{H}{\sin \alpha} - \frac{H}{\sin \alpha} \cos 2\alpha$$

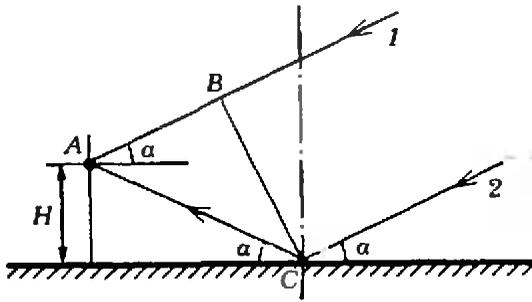


Рис. 3.

(BC — волновая поверхность, перпендикулярная обоим лучам). Рассматриваемые в задаче углы малы, так что $\sin \alpha \approx \alpha$ и $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$, откуда получаем

$$\Delta l = \frac{H(1 - \cos 2\alpha)}{\sin \alpha} \approx 2H\alpha.$$

Максимум интенсивности принимаемого сигнала наблюдается, если разность хода интерферирующих лучей равна целому числу длин волн:

$$2H\alpha_1 = k\lambda \text{ и } 2H\alpha_2 = (k+1)\lambda.$$

Отсюда длина волны равна

$$\lambda = 2H(\alpha_2 - \alpha_1),$$

а частота радиосигнала —

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2H(\alpha_2 - \alpha_1)} \approx 10^9 \text{ Гц.}$$

Разложение на различные множители

В разложении натурального числа на простые множители, вообще говоря, сомножители повторяются: $4 = 2^2$, $12 = 2^2 \cdot 3$ и т. п.

Обозначим через V такое множество натуральных чисел, что каждое не входящее в V натуральное число $n > 1$ можно — и притом единственным образом! — представить в виде произведения различных чисел из V .

1. Постройте такое множество V ; докажите, что оно определено однозначно. а) Какой вид имеют разложения на простые множители чисел из V ? Обозначим через b_n n -й по величине

элемент множества V . Легко видеть, что $b_1 = 2$, $b_2 = 3$, $b_3 = 4$, $b_4 = 5$, $b_5 = 7$, $b_6 = 9$. б) Докажите, что $b_n < 2^{n-1}$ при $n > 2$.

2. Рассмотрим представление натуральных чисел в виде произведения чисел из V (для чисел $b \in V$ будем считать такими представлениями равенства $b = b$). Например, $2 = 2$, $10 = 2 \cdot 5$, $12 = 3 \cdot 4$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, $90 = 2 \cdot 5 \cdot 9$, $120 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$. Для $b \in V$ обозначим через $v_b(n)$ количество чисел, не превосходящих n , в упомянутое представление которых входит сомножителем b . Например, $v_2(2) = v_2(3) = v_2(4) = v_2(5) = 1$, $v_2(6) = v_2(7) = 2$, $v_2(8) = v_2(9) = 3$, $v_2(10) = 4$. Докажите, что для каждого

$$b \in V \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_b(n)}{n} = \frac{1}{b+1};$$

б) есть бесконечно много таких n , что $\frac{v_b(n)}{n} = \frac{1}{b+1}$.

Упражнения

1. Антенна в виде рупора излучает плоскую электромагнитную волну частоты $\nu = 9,4 \cdot 10^9$ Гц в направлении, перпендикулярном отражающему экрану. Измеритель напряженности электрического поля при перемещении между рупором и экраном фиксирует результат интерференции прямой и отраженной волн. Определите минимальную толщину диэлектрической пластины, которую следует установить вплотную к экрану, чтобы измеритель стал показывать минимальную напряженность электрического поля, если до установки пластины он находился в месте с максимальной напряженностью. Показатель преломления пластины $n = 1,4$, поглощением в пластине и отражением от ее поверхности можно пренебречь.

2. Коротковолновый передатчик работает на частоте $\nu = 30$ МГц. Приемник находится на расстоянии $L = 2000$ км от него. Радиоволны достигают приемника, отражаясь от ионосферных слоев, расположенных на высотах $h_1 = 100$ км и $h_2 = 300$ км. Найдите, по какому закону будет изменяться интенсивность радиосигнала, если приемник перемещать вдоль прямой, соединяющей его с передатчиком. Перемещение мало по сравнению с L .

3. Радионизлучение от звезды, расположенной в плоскости экватора, принимается с помощью двух антенн, расположенных на экваторе на расстоянии $L = 200$ м друг от друга. Сигналы с антенн подаются по кабелям одинаковой длины на приемник. Найдите закон изменения амплитуды напряжения на входном контуре приемника вследствие вращения Земли. Прием ведется на длине волны $\lambda = 1$ м. За время наблюдения звезда мало отклоняется от зенита.

3. Положим $m < n$, если каждый множитель из вышеупомянутого представления числа m входит и в представление числа n . Например, $2 < 2$, $2 < 10$, $30 < 120$, но не $30 < 90$. Положим также $1 < n$ для всех n . Сколько существует таких m , что $m < n$, если n раскладывается в произведение k чисел из V ? Назовем число n гармоничным, если оно равно сумме всех $m < n$ таких, что $m < n$. Например, числа 6 и 90 гармоничны: $6 = 2 \cdot 3 = 1 + 2 + 3$, $90 = 2 \cdot 5 \cdot 9 = 1 + 2 + 5 + 9 + 10 + 18 + 45$. а) Найдите еще несколько гармоничных чисел (автору неизвестно, конечно ли их множество). б) Докажите, что любое гармоничное число четно. в) Найдите все числа, являющиеся одновременно гармоничными и совершенными.

В. С. Шведков



Открытие новой частицы

Январь 1983 года отмечен крупным событием в истории физики. В Женеве, в Европейской организации ядерных исследований (ЦЕРН) объявлено об открытии новой частицы — W -бозона. Частица родилась при столкновении протона и антипротона, разогнанных до энергии 270 ГэВ ($1 \text{ ГэВ} = 10^3 \text{ МэВ} = 10^9 \text{ эВ}$) каждый.

Явление это — чрезвычайно редкое. За два месяца работы установки зарегистрировано лишь шесть случаев рождения W -бозона (еще о двух случаях сообщила другая группа физиков).

Открытие новой частицы ожидалось с большим нетерпением. И неслучайно: ее существование было теоретически предсказано еще несколько лет назад. Дело в том, что бозоны — «главные действующие лица» теории электрослабого взаимодействия, единой теории электромагнитных и слабых процессов (ее авторы С. Вайнберг, Ш. Глэшоу и А. Салам получили Нобелевскую премию 1979 года). Они связаны с полем слабого взаимодействия — взаимодействия, которое проявляется, например, при бета-распаде ядер. Эти частицы суть кванты слабого поля, аналогично тому, как фотоны представляют собой кванты электромагнитного поля.

Семейство слабых квантов состоит из трех частиц: W^+ , W^- и Z^0 ; первые две — заряженные, последняя — нейтральная. С их помощью осуществляются многие превращения в мире элементарных частиц.

Когда о новых частицах зашла речь, никто ни в одном опыте их не видел, и это очень огорчало ученых. Однако теория предсказала не только сам факт их существования, но и их массу: 78 ГэВ для W^+ и W^- и 89 ГэВ для Z^0 (напомним, что в физике элементарных частиц массу принято выражать не в единицах массы, а в единицах энергии).

Два года длилась подготовка к опытам, и, наконец, первые бозоны были зарегистрированы приборами. Опыты (их руководителем был итальянский физик Руббиа) проводились со встречными пучками протонов и антипротонов, при столкновениях которых наряду с другими частицами должны были родиться и W -бозоны:

$$p + \bar{p} \rightarrow W + \text{что угодно.}$$

«Поймали», конечно, не сам бозон, а зафиксировали его последующий распад (вот почему более полное название новой частицы — промежуточный бозон). Например, родившийся положительный W -бозон распадается на позитрон и нейтрино:

$$W^+ \rightarrow e^+ + \nu.$$

Удивительно, что опытные оценки массы W -бозона — $(81 \pm 5) \text{ ГэВ}$ — оказались очень близкими к теоретическим (добавка $\pm 5 \text{ ГэВ}$ — это оценка точности эксперимента; действительное значение лежит в пределах от 76 до 86 ГэВ). Это дает возможность считать проведенные опыты весьма правдоподобными.

Можно сказать, что теперь теория электромагнитного и слабого взаимодействия получила экспериментальное обоснование. Хотя, конечно же, работа предстоит еще немалая — надо накопить побольше случаев рождения W -бозонов, уточнить их свойства и, наконец, надо «поймать» и нейтральный бозон тоже.

Я. С.

Задачи

1. За книгу заплатили рубль, и осталось заплатить еще столько, сколько осталось бы заплатить, если бы за нее заплатили столько, сколько осталось заплатить.

Сколько стоит книга?

2. Расставьте в кружочках на рисунке числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 так, чтобы суммы пяти троек чисел, расположенных по «отрезкам», были равны между собой.

3. На какое наибольшее число делится произведение любых трех последовательных четных чисел?

4. Двое играют в «крестики-нолики» на доске 3×3 по измененным правилам: каждый на своем ходу может поставить как «крестик», так и «нолик». Выигрывает тот, после хода которого образуются три подряд стоящих одинаковых значка (по вертикали, горизонтали или диагонали — как в обычных «крестиках-ноликах»). Кто выигрывает в эту игру — начинающий или второй игрок? И как?

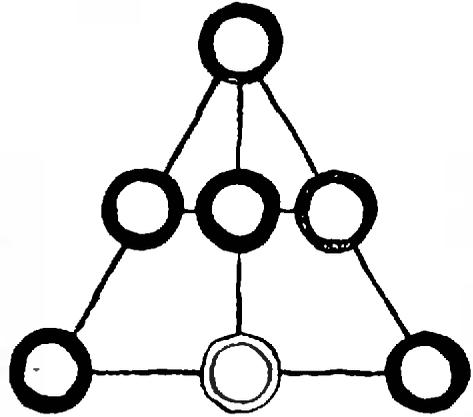
5. В солнечный день я ехал на машине по мокрой дороге с дядей Сережей, опытным водителем. Комочки грязи, летящие из-под колес впереди идущих машин, попадали на лобовое стекло. Когда машина остановилась по красному сигналу светофора, я спросил:

— Дядя Сережа, можно я быстренько вытру стекло мокрой тряпкой?

— Ни в коем случае, — ответил дядя Сережа, — иначе придется это делать постоянно!

Объясните, в чем тут дело.

Эти задачи нам предложили
Н. К. Антонович, М. А. Мнацаканян,
А. П. Савин, Л. Фельдман, С. С. Кротов





На пальцах и в уме

Р. Ш. ДАНЕЛИЯ

В детстве для сложения чисел мы все пользовались вычислительной машиной, устроенной самой природой — десятью пальцами. Оказывается, этим же «прибором» можно пользоваться и при умножении чисел. Покажем, как «на пальцах» перемножить любые два числа от 6 до 10 включительно. Для этого пронумеруем пальцы рук: мизинец — 6, безымянный — 7, средний — 8, указательный — 9, большой — 10. Допустим, надо найти произведение 7×8 . Для этого на левой руке согнем пальцы 6, 7, на правой — 6, 7, 8, затем количество согнутых пальцев обеих рук

умножим на десять и прибавим произведение количества распрямленных пальцев правой руки на количество распрямленных пальцев левой: $5 \cdot 10 + 2 \cdot 3 = 56$.

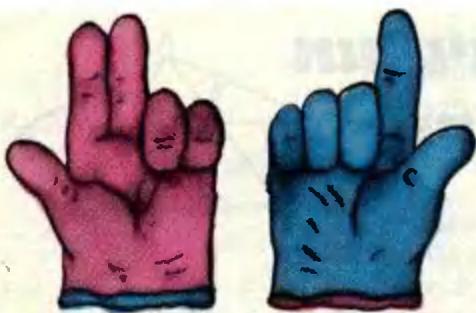
Поупражнявшись немного или научив этому нехитрому искусству младшего брата, еще плохо знающего таблицу умножения, вы заодно можете проверить, что этот способ умножения всегда дает правильный результат. Почему?

Искомое число — это произведение ab , где $6 < a < 10$, $6 < b < 10$. Ясно, что на левой руке согнуто $a-5$ пальцев, а на правой $b-5$. Таким образом, количество распрямленных пальцев равно $a+b-10$. На левой руке разогнуто $10-a$, на правой $10-b$ пальцев. Их произведение равно $(10-a)(10-b)$.

Согласно высказанному, надо найти сумму:

$$(a+b-10) \cdot 10 + (10-a)(10-b).$$

Раскрыв скобки, мы убедимся, что сумма действительно равна $a \cdot b$, то есть



$$a \cdot b = (a + b - 10) \cdot 10 + (10 - a)(10 - b). \quad (1)$$

Таким образом, используемый нами метод умножения на пальцах обоснован.

* * *

Поглядев внимательно на тождество (1), легко понять, что вместо числа 10 можно поставить любое число m , то есть

$$ab = (a + b - m)m + (m - a)(m - b). \quad (2)$$

Проверьте это! С помощью этого тождества можно быстро найти произведение двух таких чисел, у которых одно и то же число десятков, сотен, ...

Рассмотрим примеры.

1. Вычислим произведение $16 \cdot 17$. В тождестве (2) возьмем $m = 20$. Тогда

$$16 \cdot 17 = (33 - 20) \cdot 20 + 4 \cdot 3 = 272.$$

2. Найдем произведение $42 \cdot 44$. Возьмем $m = 50$. Тогда

$$42 \cdot 44 = (86 - 50) \cdot 50 + 8 \cdot 6 = 1848.$$

Конечно, для m можно брать и другие значения. Например, будет неплохо, если мы в качестве m возьмем 40.

В этом случае мы имеем

$$42 \cdot 44 = (86 - 40) \cdot 40 + 2 \cdot 4 = 1848.$$

3. Чтобы найти произведение $121 \cdot 103$, в тождестве (2) возьмем $m = 100$. Тогда

$$121 \cdot 103 = (224 - 100) \cdot 100 + 21 \cdot 3 = 12463.$$

* * *

Возможно, вы знаете правило возведения в квадрат двузначных чи-

сел, оканчивающихся на 5. Для того чтобы найти $(10x + 5)^2$, достаточно цифру x умножить на число, следующее за ним, и к полученному произведению прибавить 25. Например,

$$35^2 = 3 \cdot 4 \cdot 10 + 25 = 145.$$

Это правило является следствием равенства

$$(10x + 5)^2 = 10x(x + 1) + 25, \quad (3)$$

которое, в свою очередь, — частный случай тождества (2).

* * *

Наконец, рассмотрим случай, когда $a = 10x + y$, $b = 10x + z$. Тогда мы имеем

$$(10x + y)(10x + z) = x(10x + y + z)10 + yz.$$

Если $y + z = 10$, мы получим тождество, подобное тождеству (3):

$$(10x + y)(10x + z) = 100x(x + 1) + yz. \quad (4)$$

На основе этого можно сформулировать следующее правило: чтобы найти произведение двух чисел, число десятков которых одно и то же, а сумма единиц равна 10, необходимо число десятков умножить на последующее число и к полученному числу приписать произведение единиц (если одно однозначное, перед ним приписывается 0). Например:

- $48 \cdot 42$; $4 \cdot 5 = 20$, $8 \cdot 2 = 16$; $48 \cdot 42 = 2016$;
- $99 \cdot 91$; $9 \cdot 10 = 90$, $9 \cdot 1 = 09$; $99 \cdot 91 = 9009$;
- $102 \cdot 108$; $10 \cdot 11 = 110$, $2 \cdot 8 = 16$; $102 \cdot 108 = 11016$.

* * *

Поупражнявшись в этих приемах умножения, вы научитесь быстро умножать в уме многие числа. А если вы придумаете другие приемы, сокращающие умножение, — напишите нам.



задачник Кванта

Задачи

M801 — M805; Ф813 — Ф817

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 июля 1983 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32Д, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 5 — 83» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M801, M802» или «Ф813». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

M801*. Докажите, что для любого натурального n выполнено равенство

$$\begin{aligned} \lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor + \lfloor \sqrt[4]{n} \rfloor + \dots + \lfloor \sqrt[n]{n} \rfloor = \\ = \lfloor \log_2 n \rfloor + \lfloor \log_3 n \rfloor + \lfloor \log_4 n \rfloor + \dots + \lfloor \log_n n \rfloor \end{aligned}$$

($\lfloor x \rfloor$ означает целую часть числа x).

В. В. Кисиль

M802. На сторонах AB и BC треугольника ABC как на гипотенузах построены вне его прямоугольные треугольники APB и BQC с одинаковыми углами величины β при их общей вершине B (см. рис. 1). Найдите углы треугольника PQK , где K — середина стороны AC .

Л. И. Куницов

M803. Сумма двух рациональных чисел x и y — натуральное число, сумма обратных к ним чисел $1/x$ и $1/y$ — тоже натуральное число. Какими могут быть x и y ?

Р. А. Мазов, А. П. Савин

M804. Точка O — середина оси прямого кругового цилиндра, A и B — диаметрально противоположные точки окружности нижнего основания цилиндра, C — некоторая точка окружности верхнего основания, не лежащая в плоскости OAB . Докажите, что сумма двугранных углов трехгранного угла $OABC$ (с вершиной O) равна 2π .

И. К. Жук

M805*. а) На сторонах BC , CA , AB треугольника ABC выбраны соответственно точки A_1 , B_1 , C_1 так, что отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что $S_{A_1B_1C_1} \leq S_{ABC}/4$.

б) На гранях BCD , CDA , BDA , ABC тетраэдра $ABCD$ выбраны соответственно точки A_1 , B_1 ,

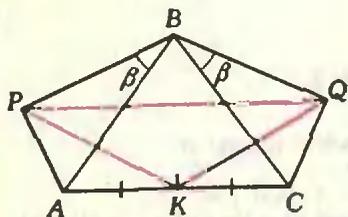


Рис. 1.

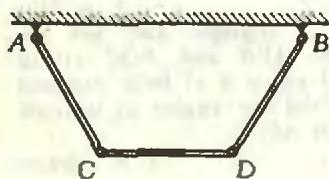


Рис. 2.

$t, ^\circ\text{C}$	$\sigma, \frac{\text{мН}}{\text{м}}$
0	76
20	73
50	67
90	60

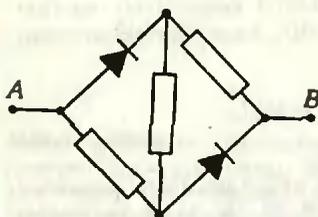


Рис. 3.

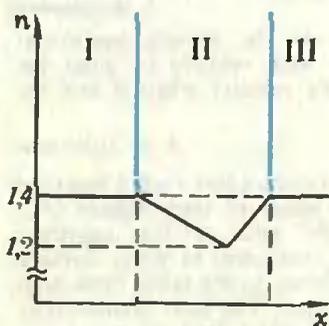


Рис. 4.

C_1, D_1 так, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что $V_{A,B,C,D_1} < V_{ABCD}/27$.

Р. П. Ушаков

Ф813. Три невесомых шарнирно связанных стержня длины a каждый закреплены шарнирно в точках A и B , лежащих на одной горизонтали (рис. 2); $|AB| = 2a$. К шарниру C подвесили груз массы m . При какой минимальной силе, приложенной к шарниру D , средний стержень будет сохранять горизонтальное положение?

С. К. Строков

Ф814. На гладкой горизонтальной поверхности тележки лежит шар радиуса R . Тележка начинает двигаться со скоростью v_0 . Найти горизонтальную проекцию скорости шара в момент его удара об пол.

А. Р. Зильберман

Ф815. Нижний конец капилляра радиуса $r = 0.2$ мм и длины $l = 8$ см погружают в воду, температура которой постоянна и равна 0°C . Температура верхнего конца капилляра $t_0 = 100^\circ\text{C}$. Температурная зависимость коэффициента поверхностного натяжения $\sigma(t)$ воды приведена в таблице. На какую высоту поднимется вода в капилляре? Теплопроводность капилляра намного превосходит теплопроводность воды в нем; теплообменом с окружающим воздухом можно пренебречь.

А. И. Биздин

Ф816. В схеме, приведенной на рисунке 3, сопротивления резисторов одинаковы и равны $R = 60$ Ом, диоды идеальные. Батарейку, дающую напряжение $U = 12$ В, подключают к точкам A и B на время $t_1 = 1$ с. Затем, поменяв полюса местами, подключают батарейку к схеме на время $t_2 = 5$ с. Найти выделившееся в схеме количество теплоты.

Л. П. Бакамина

Ф817. На рисунке 4 показана зависимость показателя преломления n от координаты. Узкий монохроматический пучок света падает на границу раздела сред I и II. При каких углах падения свет проникает в среду III?

В. В. Можжев

Problems

M801—M805; P813—P817

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than July 31st 1983 to the following address: USSR, Moscow, 103 006, Москва, К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант». Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well as solutions from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

M801*. Prove that for any positive integer n

$$[\sqrt{n}] + [\sqrt[3]{n}] + [\sqrt[4]{n}] + \dots + [\sqrt[n]{n}] = [\log_2 n] + [\log_3 n] + [\log_4 n] + \dots + [\log_n n]$$

(here $[x]$ denotes the integer part of x).

V. V. Kisil

M802. The sides AB and BC of triangle ABC are the hypotenuses of right triangles APB and BQC (lying outside of ABC) with congruent angle β at their common vertex B (see figure Рис. 1). Find the angles of triangle PQK , where K is the midpoint of AC .

L. P. Kuptsov

M803. The sum of two rational numbers x and y is a positive integer, and so is the sum of their inverses $1/x$ and $1/y$. What can be said about x and y ?

R. A. Mazov, A. P. Savin

M804. The midpoint of the axis (perpendicular to the base) of a cylinder is O ; A and B are diametrically opposed points on the bottom circle, C is some point of the top circle, not contained in the plane OAB . Prove that the sum of the three angles between planes OAB , OBC , OCA of the pyramid $OABC$ (with vertex O) equals 2π .

I. K. Luk

M805*. a) The points A_1, B_1, C_1 are chosen on sides BC, CA, AB of triangle ABC respectively so that the line segments AA_1, BB_1, CC_1 have a single common point. Prove that for the areas of triangles we have

$$S_{A_1B_1C_1} < S_{ABC}/4.$$

b) The points A_1, B_1, C_1, D_1 are chosen on the faces BCD, CDA, BDA, ABC of the tetrahedron $ABCD$ respectively so that the line segments AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 have a single common point. Prove that

$$V_{A_1B_1C_1D_1} < V_{ABCD}/27.$$

R. P. Ushakov

P813. Three weightless rods each of length a are connected by hinges to the points A and B on the same horizontal level (see figure Рис. 2); $|AB| = 2a$. A weight of mass m is applied to the hinge C . For what minimal force applied to the hinge D will the middle rod remain horizontal?

S. K. Strokou

P814. A ball of radius R lies on the smooth horizontal surface of a cart which moves with velocity v_0 . Find the horizontal projection of the ball's velocity when it hits the floor.

A. R. Zilberman

P815. The lower end of a capillary of radius $r = 0.2$ mm and length $l = 8$ cm is immersed in water of temperature 0°C . The temperature of the upper end of the capillary is 100°C . The dependence of the coefficient of water surface tension σ (l) on temperature is shown in the table. How high up the capillary will the water rise? The heat conductivity of the capillary is much greater than that of the water in it; the heat exchange with the surrounding air is negligible.

A. I. Buzdin

P816. In the circuit shown on figure Рис. 3, the resistances are both $R = 60$ Ohm, the diodes are ideal. A battery yielding

the tension $U=12\text{ V}$ is connected to the points A and B for time $t_1=1$ sec. Then the battery (with poles inverted) is connected to the circuit for time $t_2=5$ sec. Find the amount of heat irradiated by the circuit.

L. P. Bakanina

P817. Figure Рис. 4 shows the dependence of the refraction index n on the coordinate. A thin monochromatic beam of light falls on the boundary between the media I and II. For what angles of incidence does the beam penetrate into the medium III?

V. V. Mojaev

Решения задач

M786—M790; Ф798, Ф799, Ф801, Ф802

M786. Докажите, что для любых натуральных n и k (больших 1) число n^k можно представить в виде суммы n последовательных нечетных чисел. (Например, $4^3=13+15+17+19$; $7^2=1+3+5+7+9+11+13$; $3^4=25+27+29$.)

Искомые n чисел образуют арифметическую прогрессию с разностью 2. Пусть a — первое из них, тогда их сумма равна $a + (a+2) + \dots + (a+2n-2) = n(a+n-1) = n^k$. Отсюда находим: $a = n^{k-1} - n + 1$. Это число нечетно при любых целых n и k , $k > 1$, поскольку n^{k-1} и n — числа одной четности. Поэтому $a = n^{k-1} - n + 1$, $n^{k-1} - n + 3, \dots, n^{k-1} + n - 1$ — искомые числа.

Замечание. Найденное нами представление числа n^k можно использовать для вывода формулы суммы кубов первых n натуральных чисел. Имеем: $1^3=1$, $2^3=3+5$, $3^3=7+9+11$, ..., $(n-1)^3=(n-1)^2-(n-1)+1+\dots+(n-1)^2+n-2$, $n^3=(n^2-n+1)+\dots+((n-1)^2+n)+\dots$, следовательно, $1^3+2^3+\dots+n^3=1+3+5+7+\dots+(n^2+n-1)$. Число слагаемых в последней сумме равно $1+2+\dots+n = n(n+1)/2$ и по формуле для суммы арифметической прогрессии $1^3+2^3+\dots+n^3 = \frac{n^2+n}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{2}$.

А. Н. Козаченко



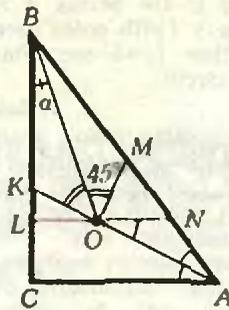
M787. Найдите отношение сторон прямоугольного треугольника, если известно, что одна половина гипотенузы (от вершины до середины гипотенузы) видна из центра вписанной окружности под прямым углом.

Ответ: $a:b:c=4:3:5$, где a и b — длины катетов, а c — длина гипотенузы данного треугольника. Этот ответ нетрудно получить, составив и решив тригонометрическое уравнение: например, можно воспользоваться тем, что в треугольнике AOB , где O — центр вписанной окружности (см. рисунок), медиана OM делит угол AOB , равный

135° ($\widehat{AOB} = 180^\circ - \frac{1}{2}(\widehat{CAB} + \widehat{CBA})$), на части, равные $\widehat{AOM} = 90^\circ$ и $\widehat{BOM} = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ$. Однако, как правило, при таком «хорошем» ответе можно найти и «хорошее» решение*). Существует оно и у этой задачи.

Проведем прямую через точку O и середину N отрезка AM . Поскольку треугольник AOM прямоугольный, $|ON| = |NA|$, следовательно, $\widehat{NOA} = \widehat{NAO} = \widehat{CAO}$ (AO — биссектриса угла CAB). Поэтому прямая ON параллельна CA и $|CL|:|LB| = |AN|:(|NM| + |MB|) = 1:3$ ($|MB| = |MA| = 2|AN|$). Но $|LC| = |LO|$, поскольку O — центр вписанной окружности прямоугольного треугольника и отрезок OL перпендикулярен катету BC . Отсюда $\text{tg } \alpha = 1/3$, где $\alpha = \widehat{OBC} = \widehat{B}/2$, и $|AC|:|AB| = \text{tg } \widehat{B} = 2 \text{tg } \alpha / (1 - \text{tg}^2 \alpha) = 3/4$.

*) Примеры таких «хороших» решений приводились, скажем, в статье Я. Н. Сукольника и П. И. Горнштейна «Простой ответ в «сложной» задаче» («Квант», 1976, № 2).

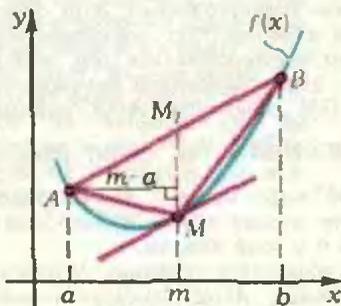


Еще одно геометрическое решение нам сообщил десятиклассник М. Дьячков (пос. Черноголовка Московской обл.). Пусть K — точка пересечения биссектрисы угла A со стороной BC (см. рисунок). Как мы заметили выше, $\angle BOM = 45^\circ$, следовательно $\angle BOK = 90^\circ - 45^\circ = \angle BOM$. Отсюда вытекает, что треугольники $\triangle BOM$ и $\triangle BOK$ и, в частности, их стороны BM и BK конгруэнтны. По известной теореме о биссектрисе $|CK| : |KB| = |CA| : |CB|$, то есть $(a - \frac{c}{2}) : \frac{c}{2} = b : c$ или $2a - c = b$. С другой стороны, по теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$. Из этих двух уравнений легко вывести ответ.

В. И. Дубровский

М788. а) На графике $y = x^2$ отмечены точки $A(a; a^2)$ и $B(b; b^2)$. Найдите между ними точку $M(t; t^2)$, для которой сумма площадей двух сегментов, ограниченных графиком и отрезками AM и BM , наименьшая.

б) На графике дифференцируемой функции $y = f(x)$ отмечены точки A и B . Известно, что график и отрезок AB ограничивают выпуклую фигуру. Пусть M — точка графика, расположенная между A и B , для которой сумма площадей двух сегментов, ограниченных графиком и отрезками AM и BM , наименьшая. Докажите, что касательная к графику в точке M параллельна хорде AB .



М789. а) 10 точек, делящие окружность на 10 равных дуг, попарно соединены 5 хордами. Обязательно ли среди них найдутся две хорды одинаковой длины?

б)* 100 точек, делящие окружность на 100 равных дуг.

Приведем сначала решение для общего случая (пункт б), а затем применим результат к функции $f(x) = x^2$ (пункт а).

Поскольку по условию сегмент AB , ограниченный отрезком AB и графиком $y = f(x)$, — это выпуклая фигура, его площадь равна сумме площадей треугольника ABM и сегментов AM и MB (см. рисунок). Следовательно, если сумма площадей сегментов AM и MB минимальна, площадь треугольника ABM максимальна. Разобьем этот треугольник на два — AM_1M и BM_1M — прямой MM_1 , параллельной оси ординат. Пусть a, b и t — абсциссы точек A, B и M , причем, для определенности, $a < b$. Тогда

$$S_{ABM} = S_{AM_1M} + S_{BM_1M} = \frac{1}{2} (t - a) \cdot |MM_1| + \frac{1}{2} (b - t) \cdot |MM_1| = \frac{1}{2} (b - a) \cdot |MM_1|,$$

поэтому наибольшее значение площади треугольника ABM достигается, когда максимальна длина отрезка MM_1 . Обозначим через $l(x) = kx + c$ линейную функцию, графиком которой служит прямая AB , тогда $|MM_1| = l(t) - f(t)$. (Мы считаем, что хорда AB расположена над графиком — см. рисунок; в противном случае $|MM_1| = f(t) - l(t)$.) По теореме Ферма (см. Алгебра и анализ 9-10, п. 26), в точке максимума функции $g(x) = l(x) - f(x)$ ее производная равна нулю, то есть $g'(t) = l'(t) - f'(t) = 0$ и $l'(t) = f'(t) = k$. Но $l'(t)$ и k — это угловые коэффициенты касательной к графику $y = f(x)$ в точке M и прямой AB , а из равенства угловых коэффициентов вытекает параллельность соответствующих прямых.

В частности, если $f(x) = x^2$, угловый коэффициент прямой AB равен $(b^2 - a^2) / (b - a) = a + b$, а производная функции $f(x)$ в точке t равна $2t$. Фигура, ограниченная параболой и ее хордой, как легко видеть, является выпуклой. Поэтому абсцисса точки M , для которой сумма площадей сегментов AM и MB максимальна, удовлетворяет условию $2t = a + b$, то есть точка M имеет координаты $(\frac{a+b}{2}; (\frac{a+b}{2})^2)$.

Е. Д. Москаленский, Ю. В. Чиняев

а) Ответ: необязательно. На рисунке 1 показано такое соединение 10 точек 5 хордами, при котором все они имеют различные длины.

б) Пусть $2n$ точек, разбивающих окружность на $2n$ равных дуг, попарно соединены n хордами. Выведем необходимое условие того, что все эти хорды имеют разные длины и проверим, что число $n = 50$ этому условию не удовлетворяет.

попарно соединены 50 хордами. Докажите, что среди них обязательно найдутся две хорды одинаковой длины.

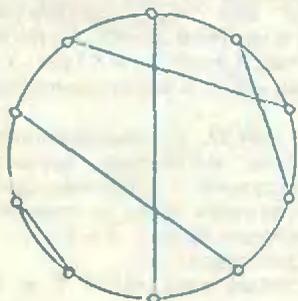


Рис. 1.

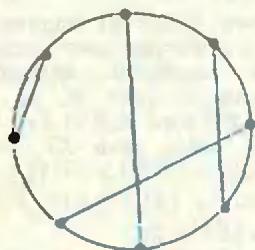


Рис. 2.

Занумеруем проведенные хорды числами 1, ..., n. Примем длину дуги между двумя соседними точками за 1, тогда длина l_i меньшей из дуг, соединяющей концы i -й хорды — натуральное число, не большее n — длины полуокружности. Если длины всех хорд различны, то и числа l_1, \dots, l_n различны, поэтому среди них встречаются по разу все числа от 1 до n . Назовем i -ю хорду четной, если l_i — четное число, и нечетной в противном случае. Количество четных хорд обозначим через k . Оно, очевидно, равно количеству четных чисел, не больших n . Покажем, что k — обязательно четное число, $k=2m$, то есть $n=4m$ или $n=4m+1$.

С этой целью окрасим данные точки поочередно в красный и черный цвет (рис. 2). Ясно, что любая из k четных хорд соединяет точки одного цвета, а любая из $n-k$ нечетных — точки разных цветов. Поэтому ровно $n-k$ из n красных точек служат концами нечетных хорд, а остальные k должны быть попарно соединены между собой (четными) хордами. Значит, k — четное число.

Итак, при $n=4m+2$ (в частности, при $n=50$) и при $n=4m+3$ требуемого соединения не существует. Рисунки 1 и 2 показывают, что при $n=4m$ и $n=4m+1$ оно может существовать (на рисунках $m=1$); но можно ли построить соединения с попарно различными хордами для любого числа такого вида, мы не знаем, хотя предполагаем, что это так.

В. В. Произволов

M790. а) Про числовую функцию f известно, что если $|x-y|=1$, то $|f(x)-f(y)|=1$. Верно ли, что при любых x и y будет выполнено равенство

$$|f(x)-f(y)|=|x-y|?$$

Пусть про отображение F плоскости в себя известно, что любые две точки X, Y , находящиеся на расстоянии 1, оно переводит в две точки $F(X), F(Y)$, также находящиеся на расстоянии 1:

$q(X, Y)=1 \Rightarrow q(F(X), F(Y))=1$;
тогда для любых двух точек X, Y плоскости

$$q(X, Y)=q(F(X), F(Y)),$$

то есть отображение F сохраняет расстояние. Докажите следующие утверждения, из которых вытекает эта теорема: для любых X, Y

- б) $q(F(X), F(Y)) < q(X, Y)+1$;
- в)* $q(X, Y) = \sqrt{3} \Rightarrow q(F(X), F(Y)) = \sqrt{3}$;
- г)* $q(F(X), F(Y)) < q(X, Y)$;
- д)* $q(F(X), F(Y)) \geq q(X, Y)$.

(Вы можете, конечно, предложить и другой план доказательства теоремы.)

◆
Ответ в задаче а): неверно. Опровергающим примером может служить функция $f_1(x) = [x]$ (целая часть x ; рис. 1) или $f_2(x) = x - 2[x/2]$ (рис. 2). Вообще, единственное требование, которому должна удовлетворять функция f , состоит в том, чтобы для последовательности значений $f(a+n), n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, при каждом $a, 0 < a < 1$, выполнялось условие $|f(a+n+1) - f(a+n)| = 1$, причем при разных a эти последовательности можно задавать совершенно независимо.

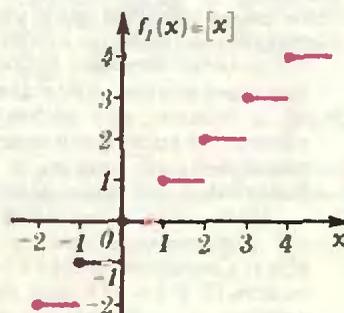


Рис. 1

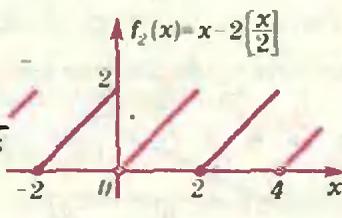


Рис. 2.

Докажем теперь теорему об отображении плоскости, следуя плану б)–д). Для краткости вместо $F(X)$ мы всюду будем писать X' , а расстояние между точками X и Y будем, как обычно, обозначать $|XY|$.

Будем говорить, что отображение F сохраняет расстояние $r > 0$, если для любых двух точек X и Y , находящихся на расстоянии $|XY|=r$, $|X'Y'|=r$, и что F сохраняет некоторую фигуру Φ , если для любых точек X и Y этой фигуры $|XY|=|X'Y'|$ (то есть при отображении Φ перемещается как жесткая фигура). В дальнейшем мы покажем, что рассматриваемое в задаче отображение (сохраняющее расстояние 1) сохраняет сколько угодно малые расстояния $r > 0$, а пока предположим, что F сохраняет расстояние $r > 0$ и изучим некоторые свойства такого отображения.

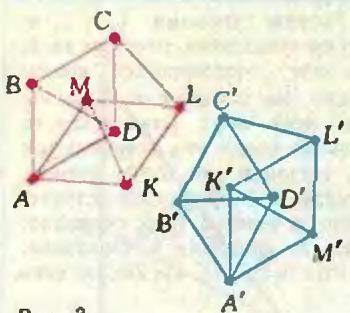


Рис. 3.

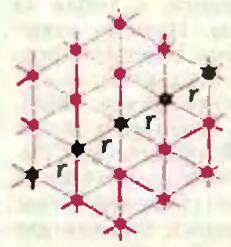


Рис. 4.

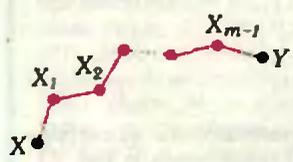


Рис. 5.а.

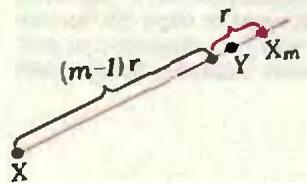


Рис. 5.

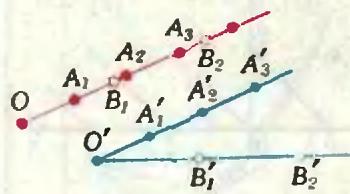


Рис. 6.

Очевидно, что F сохраняет тройку вершин любого правильного треугольника со стороной r . Докажем, что F сохраняет также и четверку вершин любого ромба $ABCD$ со стороной r и диагональю $|BD|=r$ (отсюда вытекает в): $|A'C'|=|AC|=\sqrt{3}$ при $r=1$). Достаточно доказать, что $C' \neq A'$. Для этого рассмотрим вместе с ромбом $ABCD$ равный ему ромб $AKLM$, такой что $|CL|=r$ (рис. 3). Если $C'=A'$, то $|C'L'|$ равно 0 или $\sqrt{3}r$, а это невозможно, ибо $|C'L'|=|CL|=r$.

Итак, F сохраняет четверку $ABCD$, а следовательно, «треугольную решетку», то есть множество вершин правильных треугольников со стороной r , покрывающих плоскость, и ее подмножество — цепочку точек на прямой, отстоящих друг от друга на расстояние mr , $m=1, 2, \dots$ (рис. 4). Поэтому F сохраняет расстояние mr .

Докажем теперь, что для любых точек X и Y

$$|XY|-2r < |X'Y'| < |XY|+r \quad (*)$$

(второе неравенство при $r=1$ — это пункт б) задачи). Пусть $(m-1)r < |XY| < mr$, где m — натуральное число. Тогда точки X и Y можно соединить ломаной $XX_1X_2 \dots X_{m-1}Y$ из m звеньев длины r (рис. 5, а) и $|X'Y'| < |X'X_1'| + |X_1X_2'| + \dots + |X_{m-1}Y'| = mr < |XY|+r$. С другой стороны, если X_m — такая точка луча XY , что $|XX_m|=mr$ (рис. 5, б), то $|X_mY| < r$ и $|X'Y'| > |X'X'_m| - |X'_mY'|$. Но $|X'X'_m|=|XX_m|=mr$, в $|X'_mY'| < |X_mY|+r < 2r$, поэтому $|X'Y'| > mr-2r > |XY|-2r$.

Наконец, докажем, что если F сохраняет расстояние 1, то можно указать и сколь угодно малое расстояние r , сохраняющееся при этом отображении. Отсюда, пользуясь неравенствами (*), мы выведем утверждения г) и д).

Рассмотрим луч l с началом O и две последовательности его точек (A_m) и (B_n) : $|OA_m|=m$, $|OB_n|=n\sqrt{3}$, $m, n=1, 2, \dots$. Отображение F , сохраняющее расстояние 1, сохраняет, как мы знаем, каждую из этих последовательностей. Более того, оно сохраняет и их объединение, то есть лучи $O'A'_m$ и $O'B'_n$ совпадают. (В противном случае (рис. 6) можно найти столь большое n , что $|A'_mB'_n| > 2$ при всех m . В то же время $|A_mB_n| < 1$ при некотором m , а тогда в силу (*) $|A'_mB'_n| < 2$.) Отсюда следует, что отображение F сохраняет расстояние $r=|m-n\sqrt{3}|$ при всех целых m, n . Остается применить следующую важную лемму: среди чисел $|m-n\sqrt{3}|$ можно найти число, меньшее любого положительного ϵ . (Аналогичное утверждение верно для множества чисел $|m-n\alpha|$, где m, n — целые, при любом иррациональном α .) Для доказательства достаточно заметить, что число $(2-\sqrt{3})^N$ имеет вид $a_N-b_N\sqrt{3}$, где a_N и b_N — целые, а при достаточно большом N это число меньше ϵ .

Итак, если F сохраняет расстояние 1, то неравенства (*) выполняются при сколь угодно малом положительном r . Следовательно, $|XY| < |X'Y'| < |XY|$ (пункты г) и д)), то есть $|X'Y'|=|XY|$ для любых двух точек X и Y . Другими словами, F — это просто перемещение плоскости.

Оставляем читателям в качестве задачи доказательство аналогичной теоремы в пространстве. (Заметим, что здесь нужны новые идеи, поскольку одними правильными тетраэдрами замостить пространство нельзя! Попробуйте доказать, что если отображение F пространства в себя сохраняет расстояние r , то оно сохраняет не только правильный тетраэдр и составленную из двух тетраэдров «бипирамиду», но и правильный октаэдр с ребром r .)

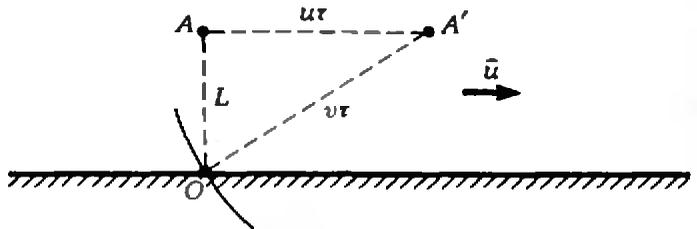
А. Тышка, Н. Б. Васильев

Ф798. В реку, скорость течения которой везде равна u , из точки O на берегу бросают камень перпендикулярно бе-

В системе отсчета, связанной с водой (то есть движущейся со скоростью u относительно берега в направлении течения реки), фронт волны, распространяющейся по воде из точки падения камня, представляет собой в любой момент

регу. Скорость поверхностных волн в воде равна v . Через какое время после падения камня волна придет в точку O , если камень упал на расстоянии L от берега?

времени t окружность радиуса $R=vt$ ($t=0$ в момент падения камня). Относительно берега центр этой окружности — точка A на рисунке — движется со скоростью \vec{u} . К моменту времени τ , когда волна придет в точку O , точка A переместится в точку A' , пройдя путь $|AA'|=u\tau$.



Время τ найдем из условия (см. рисунок)

$$L^2 + (u\tau)^2 = (v\tau)^2.$$

Отсюда

$$\tau = \frac{L}{\sqrt{v^2 - u^2}}.$$

П. И. Зубков



Φ799. Высота вертикального водяного фонтана от уровня выходной трубы насоса равна H . Во сколько раз следует изменить мощность насоса, чтобы полная высота фонтана осталась прежней после подсоединения к выходной трубе насоса вертикальной трубы такого же диаметра с высотой $h < H$?

Масса воды, проходящей за единицу времени через сечение выходной трубы насоса, равна $m=qvs$, где q — плотность воды, v — скорость течения воды в выходной трубе насоса, s — площадь сечения трубы. Мощность насоса равна энергии, «уносимой» водой за единицу времени, то есть равна $N=mv^2/2$. Для того чтобы вода в фонтане поднималась на высоту H , ее скорость на выходе из трубы должна быть равна $v=\sqrt{2gH}$.

Следовательно, мощность насоса должна быть равной

$$N = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} qs(2gH)^{3/2}.$$

Аналогичное выражение для мощности получим в том случае, когда к выходной трубе насоса подсоединена дополнительная труба высоты h . Скорость воды «на выходе» в этом случае должна быть $v'=\sqrt{2g(H-h)}$, а мощность —

$$N' = \frac{1}{2} qs(2g(H-h))^{3/2}.$$

Таким образом, чтобы полная высота фонтана осталась прежней, мощность насоса надо уменьшить в

$$k = \frac{N'}{N} = \left(1 - \frac{h}{H}\right)^{3/2}.$$

П. И. Зубков



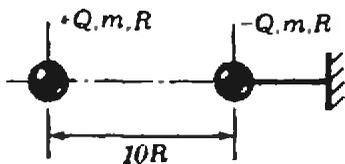
Φ801. В исходном состоянии центры двух шаров с массами m и радиусами R разнесены на расстояние $10R$. На одном из них равномерно распределен заряд $+Q$, на втором — $-Q$. Первый шар привязан к удаленной стенке ниткой, которая выдерживает на разрыв натяжение T . Второй шар в некоторый момент

Максимальная сила электростатического притяжения между шарами равна $F_{\max} = k \frac{Q^2}{4R^2}$. Если $T < F_{\max}$ то нить

оборвется до момента столкновения шаров. Если $T > F_{\max}$ то привязанный шар до столкновения будет находиться в состоянии покоя. Рассмотрим сначала случай $T < F_{\max}$.

Пусть в момент обрыва нити расстояние между центрами шаров равно x . В этот момент сила кулоновского взаимодействия шаров равна по модулю силе натяжения нити T :

отпускают. Найти скорость шаров после соудирения, если удар абсолютно неупругий. Заряды не перераспределяются.



$$k \frac{Q^2}{x^2} = T. \tag{1}$$

С этого момента система из двух шаров становится замкнутой, и полный импульс системы остается неизменным.

Пусть v — скорость левого шара в момент обрыва нити, а u — скорость шаров после столкновения. Тогда

$$mv = 2mu. \tag{2}$$

Скорость v находится из закона сохранения энергии:

$$-k \frac{Q^2}{10R} = -k \frac{Q^2}{x} + m \frac{v^2}{2}. \tag{3}$$

Решая совместно уравнения (1) — (3), находим u :

$$u = \sqrt{k \frac{Q^2}{2m} \left(\frac{1}{Q} \sqrt{\frac{T}{k}} - \frac{1}{10R} \right)}.$$

Если $T > F_{\max}$, то в предыдущих рассуждениях следует сразу принять $x = 2R$. Тогда

$$u = \sqrt{\frac{0,2kQ^2}{mR}}.$$

Г. В. Федотович

Ф802. Закрытый с торцов теплоизолированный цилиндр массы m перегороден неподвижным поршнем массы M . С обеих сторон от поршня находится по одному молю идеального газа, внутренняя энергия которого равна $U = cT$. Коротким ударом цилиндру сообщают скорость \vec{v} , направленную вдоль его оси. На сколько изменится температура газа после затухания колебаний поршня? Трения между поршнем и цилиндром нет.

Пусть u — скорость, с которой движется цилиндр и поршень после того, как колебания поршня затухли. Согласно закону сохранения импульса

$$mv = (M + m) u \Rightarrow u = \frac{m}{M + m} v.$$

Уменьшение кинетической энергии системы —

$$\Delta K = m \frac{v^2}{2} - (M + m) \frac{u^2}{2} = \frac{Mm}{M + m} \frac{v^2}{2}$$

— обусловлено переходом части ΔK этой энергии в тепло и равно увеличению внутренней энергии газа в цилиндре (теплоемкость цилиндра и поршня считаем пренебрежимо малыми по сравнению с теплоемкостью газа). Поскольку поршень, как и вначале, оказался в равновесии, оба моля газа (справа и слева от поршня) вновь имеют одинаковые объем, давление и температуру. Таким образом, изменение внутренней энергии газа равно

$$\Delta U = 2c \cdot \Delta T = \frac{Mm}{M + m} \frac{v^2}{2}.$$

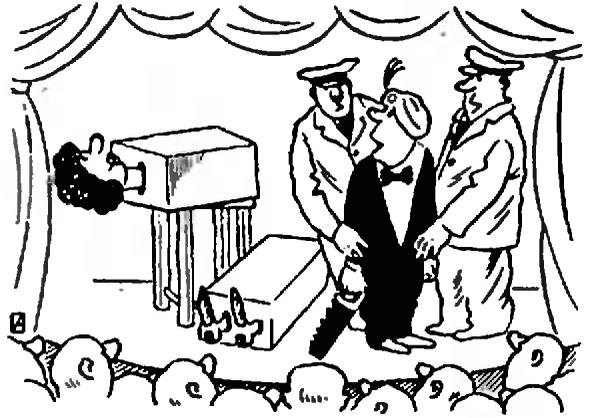
Отсюда находим изменение температуры газа:

$$\Delta T = \frac{Mm}{M + m} \frac{v^2}{4c}.$$

Г. В. Меледин



Там, где кончаются сомнения, кончается наука.

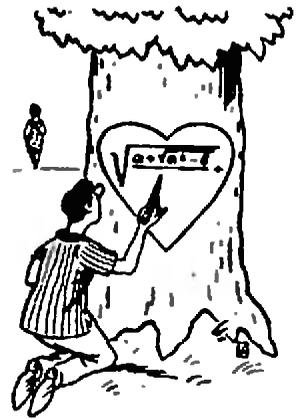


Только очень глупые люди не понимают шуток

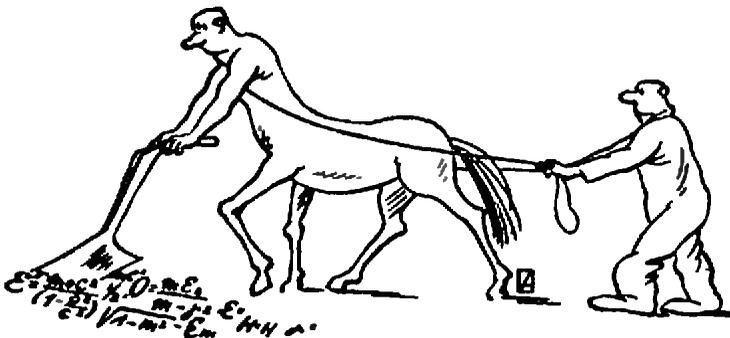
КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

Афоризмы академика П. Л. Капицы

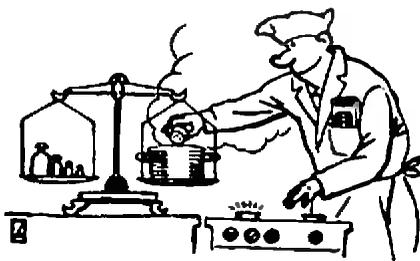
с рисунками художника А. А. Орехова



На словах только в любви объясняются, а о делах следует писать.



Хорошую работу чужими руками не сделаешь.



Только кухарка прибавляет соли на глаз, а физики должны все рассчитывать.



Дело не в размере. Атомное ядро еще мельче, а страсти вокруг него еще больше.

Топология автомобильной развязки

Четыре точки на границе круга или квадрата (например, вершины квадрата) нельзя попарно соединить непересекающимися линиями (путями), проведенными внутри фигуры. В этом нетрудно убедиться, взяв в руки карандаш и бумагу, хотя для строгого доказательства необходимы познания из области топологии. Если же заменить квадрат на такой кусок поверхности с фигурным вырезом и «мостиком», как на рисунке 1, задача легко решается.

Подобные топологически сложные поверхности представляют не только умозрительный интерес — они полезны в практике проектирования и строительства автомагистралей, железнодорожных путей, сети городских улиц и т. п. Глядя на рисунок 1, читатель наверняка узнал современную автомобильную развязку «клеверный лист». На первый взгляд, возможность попарно соединить непересекающимися путями четыре пункта означает, что можно организовать беспрепятственное движение автомобильных потоков.

Однако, присмотревшись внимательнее, можно заметить, что схема, приведенная на рисунке 1, недостаточно точна. На самом деле, движение транспорта — двухстороннее, и встречные потоки также не должны пересекаться, поэтому количество пунктов и путей следует удвоить. Как показано на рисунке 2, каждый из пунктов «отправления» A, B, B', Γ следует соединить ориентированным путем с каждым из пунктов «прибытия» A', B', B'', Γ' . И на поверхности «клеверного листа» сделать это без пересечений, как ни странно, не удастся.

Красными кружочками на рисунке помечены точки пересечения потоков транспорта. Правда, эти пересечения происходят в местах, где потоки попутны (например, автомобиль, движущийся из пункта A в пункт B' , на мосту должен перестроиться, так как его путь пересекает путь автомобилиста, следующего

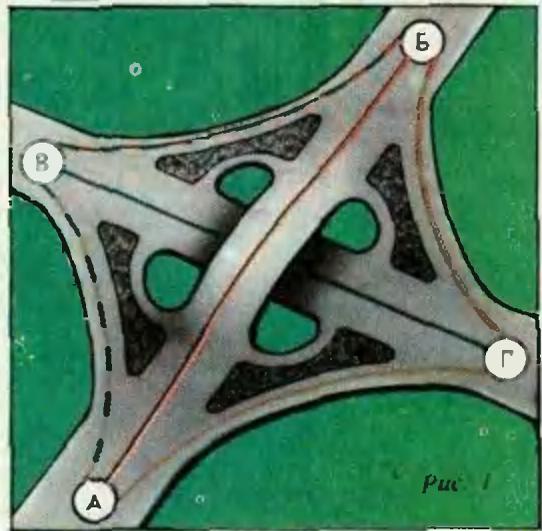


Рис. 1

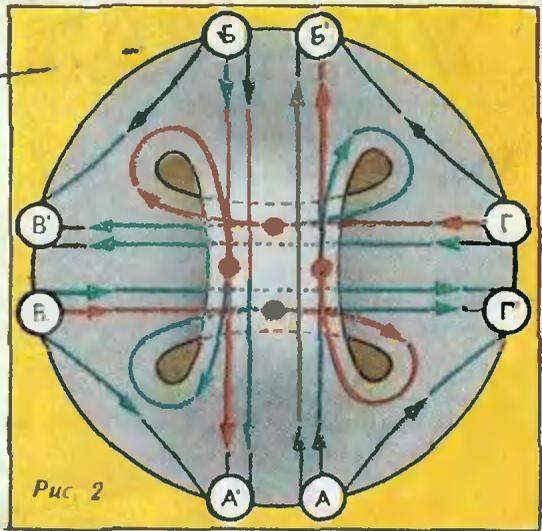


Рис. 2

из пункта B в пункт B'), но при интенсивном движении и такие перестроения нежелательны.

Как быть? Может быть, можно иначе направить потоки транспорта по такой развязке? Нет, устранить таким путем пересечения нельзя — это теорема, которую умеют доказывать топологи.

Но те же топологические соображения подсказывают нам и выход из создавшейся ситуации: надо усложнить «топологическое строение» развязки. Одно из решений, позволяющее беспрепятственно направить все транспортные потоки, показано на четвертой странице нашей обложки. Здесь в средней части поверхности образована еще одна конструкция с фигурным вырезом, которая соединяет поверхность «моста» с расположенной внизу поперечной дорогой.

Возможно, показанное решение не удовлетворит конструкторов автомагистралей. Но в практике современного строительства есть примеры топологически весьма сложных узлов и развязок.

Ю. В. Котов



Ниже публикуются материалы вступительных экзаменов в вузы в 1982 году.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(математико-механический факультет и факультет прикладной математики — процессов управления)

1. При каких a система уравнений

$$\begin{cases} y = \sin(a + \pi x) + \sin(a - \pi x) \\ 3 \sin a = \frac{1}{1+y^2} \left(\frac{3}{2} + x + \frac{1}{2x^2} \right) \end{cases}$$

имеет единственное решение в области $x \in \left[1; \frac{3}{2} \right], y \in] - \infty; 0]$?

2. Решите уравнение

$$2(\sin 3x + \cos x) = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin 2x + \cos 2x)^2.$$

3. Решите неравенство

$$\cos x + \sqrt{2 + \cos x} < 0.$$

4. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ с единичными сторонами середины P, Q сторон AB, CD и S, T сторон BC, DE соединены отрезками PQ и ST . Пусть M и N — середины отрезков PQ и ST . Найдите длину отрезка MN .

5. Дан куб $ABCA'B'C'D'$ с ребрами длины a . На ребре AA' взята точка E так, что $|AE| = \frac{1}{4}a$. Найдите объем пирамиды, у которой вершина совпадает с точкой A' , а основанием служит сечение, проходящее через точки D, E и середину ребра BB' .

Вариант 2

(физический факультет)

1. Стрелок из лука стоит на берегу над отвесным обрывом, высота которого равна H . Вектор начальной скорости стрелы составляет угол α с горизонтом и по величине равен v . Через какое время T после начала полета

стрела окажется на высоте h над водой? Размерами стрелы и ростом стрелка пренебречь.

2. При каком x функция

$$f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{4 + x}}}} + \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{4 - x}}}}$$

принимает наибольшее значение?

3. Укажите отрицательные корни уравнения

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} = 0,$$

удовлетворяющие неравенству $x^3 + 5x^2 - 3x - 3 > 0$.

4. Вычислите величину $\lg 37^\circ 30'$.

5. В правильной четырехугольной пирамиде стороны основания равны a , боковое ребро образует с плоскостью основания угол α . В эту пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины лежат на апофемах пирамиды, а основание принадлежит основанию пирамиды. Найдите объем куба.

Вариант 3

(химический факультет)

1. Смешав по 2 см³ трех веществ, получили 16 г смеси. Известно, что 4 г второго вещества занимают объем на 0,5 см³ больший, чем 4 г третьего вещества. Найдите плотность третьего вещества, если известно, что масса второго вещества в смеси вдвое больше массы первого.

2. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна h . Какую наименьшую длину может иметь медиана, делящая пополам больший катет?

3. Решите уравнение

$$8 \sin^2 x + \sin 2x = 5.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3^x - 2^{y^2} = 77 \\ \frac{x}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 7. \end{cases}$$

5. Решите уравнение

$$13^{\frac{x}{3} + 1} + 13^{\frac{x}{3}} + 13^{\frac{x}{3} - 1} + \dots = 15^{2x+1} + 15^{2x} + 15^{2x-1} + \dots$$

Вариант 4

(экономический факультет и факультет психологов)

1. Три свечи имеют одинаковую длину, но разную толщину. Первая свеча была зажжена на один час раньше других, зажженных одновременно. В некоторый момент горения первая и вторая свечи стали одинаковой длины, а через два часа после этого одинаковой длины стали первая и третья. За сколько часов сгорит первая свеча, если вторая сгорит за 8 часов, а третья — за 12 часов? Предполагается, что скорости сгорания свечей не зависят от продолжительности горения.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{|xy|} (x^2 - y^2) = 1 \\ \log_{|xy|} (x - y) = 0. \end{cases}$$

3. Выразите величину $\lg 640$ через величину $a = \lg 62,5$.

4. Найдите количество корней уравнения $3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x - 10 = 0$

на промежутке $[0; 3]$.

5. Наименьший из углов прямоугольного треугольника равен α . Через середину меньшего катета и середину гипотенузы проведи круг, касательный к гипотенузе. Найдите отношение площадей круга и треугольника.

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Вариант 1

1. Клин, наклонная поверхность которого образует угол α с горизонтом, может перемещаться поступательно по горизонтальной поверхности (рис. 1). С какой силой F следует тянуть за нить в горизонтальном направлении, чтобы брусок перемещался вверх по клину? С какими ускорениями будут двигаться при этом брусок и клин? Масса клина M , масса бруска m . Трением, массой нити и массой блока пренебречь.

2. Нагревается или охлаждается газ, расширяющийся по закону $pV^2 = \text{const}$?

3. Собрана электрическая схема, показанная на рисунке 2. Как изменится показание вольтметра, если ключ K разомкнуть? Сопротивление вольтметра считать бесконечно большим.

4. На пути плоской монохроматической волны поставлен экран, в точке A которого помещен индикатор, регистрирующий энергию излучения, приносимую в единицу времени на единицу площади экрана. Во сколько раз изменится показание прибора, если перед экраном на расстоянии L от него поместить собирающую линзу так, чтобы точка A лежала на ее главной оптической оси (рис. 3)? Постройте графики зависимости искомой величины от L при фиксированном фокусном расстоянии линзы F и от F при фиксированном L . Потери энергии в линзе пренебречь.

5. Теоретический вопрос. Трансформатор. Передача и распределение электроэнергии.

Вариант 2

1. Шар массы m налетает со скоростью v на неподвижный шар массы M по линии,

соединяющей их центры. После удара модуль скорости первого шара становится вдвое меньше по сравнению с первоначальным. Найдите отношение суммарной кинетической энергии обоих шаров после удара к первоначальной кинетической энергии налетающего шара.

2. Один моль одноатомного идеального газа изохорически охлаждается так, что его давление уменьшается в n раз. Затем газ изобарически расширяется так, что его объем возрастает в n раз. Определите число n , если известно, что сообщенное газу при этих переходах суммарное количество теплоты в два раза меньше его первоначальной внутренней энергии.

3. Собрана электрическая схема, изображенная на рисунке 4. Как изменится показание амперметра, если ключ K замкнуть, то есть соединить накоротко точки A и B ?

4. Лучи от Солнца падают на небольшое плоское зеркало прямоугольной формы и после отражения попадают на экран, куда не падают прямые солнечные лучи. Какую форму имеет освещенное пятно на экране?

5. Теоретический вопрос. Понятие о волновых и квантовых свойствах света.

Задачи устного экзамена

Математико-механический факультет, факультет прикладной математики — процессов управления, химический и геологический факультеты

1. По деревянным сходящим, образующим угол α с горизонтом, втаскивают за веревку ящик. Чему равен коэффициент трения ящика о сходящи, если наименьшее усилие, необходимое для этого, получается, когда веревка образует угол β с вертикалью?

2. На тело массы m в течение времени t действует постоянная сила F , направленная горизонтально. Коэффициент трения тела о горизонтальную поверхность, на которой оно лежит, равен μ . Какой путь пройдет тело до остановки?

3. Две звезды с массами m_1 и m_2 движутся так, что расстояние между их центрами остается неизменным. Определите характер движения звезд (траекторию, скорость, ускорение), пренебрегая их взаимодействием с другими небесными телами.

4. Воздух массой $m = 2\text{ кг}$ находится в цилиндре, закрытом подвижным поршнем. Какая работа будет совершена при изобарном нагревании воздуха на $\Delta T = 100\text{ К}$?

5. Один моль водорода нагревается при постоянном давлении. Какое количество теплоты необходимо сообщить водороду, чтобы его объем удвоился? Какая работа будет при этом совершена газом?

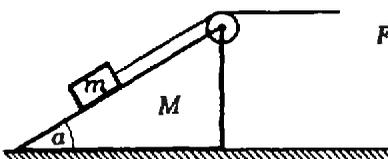


Рис. 1

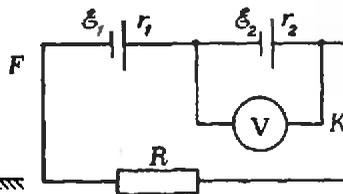


Рис. 2.

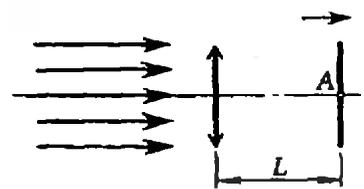


Рис. 3.

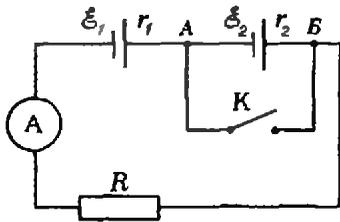


Рис. 4.

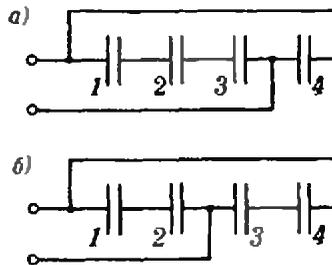


Рис. 5.

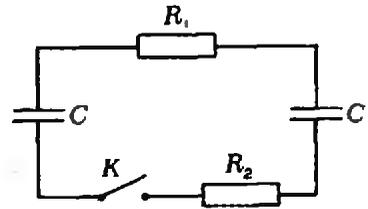


Рис. 6.

6. Батарея из четырех различных конденсаторов включена один раз по схеме а), другой раз по схеме б) (рис. 5). При каком условии емкости этих батарей будут одинаковыми?

7. Определите количество теплоты, выделившееся на каждом резисторе после замыкания ключа К (рис. 6). Вначале один конденсатор заряжен до напряжения U , другой не заряжен.

8. Какой шунт нужно присоединить к гальванометру со шкалой на 100 делений, ценой деления $I_0 = 1$ мкА и сопротивлением $R = 180$ Ом, чтобы им можно было измерять токи до $I = 1$ мА?

9. С подводной лодки в погруженном состоянии определили скорость самолета, пролетающего над лодкой. Во сколько раз кажущаяся скорость самолета отличается от истинной?

10. Во сколько раз нужно изменить время экспозиции, если расстояние фотографической бумаги от источника света увеличивается втрое?

Публикацию подготовили
Ю. Н. Бибиков, А. С. Кондратьев

Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

Математика

Письменный экзамен

Вариант I

1. Сумма первого и четвертого членов геометрической прогрессии относится к сумме второго и третьего членов как 13:4. Найдите прогрессию, если третий ее член равен 32.

2. Решите уравнение

$$1 - \cos x = \operatorname{tg} x - \sin x.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{2^x}{5^x - 1} + 3 = \frac{5^x}{2^x - 1}.$$

4. Найдите область определения функции $f(x) = \sqrt{x} \cdot \log_2(x+2)$.

5. В конус с основанием радиуса R и осевым сечением, являющимся равнобедренным прямоугольным треугольником, вписана пра-

вильная четырехугольная призма наибольшего объема так, что одно ее боковое ребро лежит на диаметре основания, вершины противоположного ребра лежат на боковой поверхности конуса, а остальные вершины равноудалены от основания конуса. Найдите объем призмы.

Вариант 2

1. Трактор выехал от станции к деревне на 30 мин раньше грузовика. Когда грузовик, обогнав трактор, прибыл в деревню, трактору осталось ехать до деревни 3 км. Найдите скорости трактора и грузовика, если известно, что скорость грузовика на 20 км/ч больше скорости трактора, а расстояние от станции до деревни равно 12 км.

2. Решите уравнение

$$\cos 6x + \sin^2 x = \cos^2 x.$$

3. Решите уравнение

$$\log_4 \frac{32}{18 - 4^{2x}} = 2x.$$

4. Решите неравенство

$$16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{x(x+2)} > \frac{1}{256} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}.$$

5. В правильной тетраэдр вписана правильная треугольная призма наибольшего объема так, что два боковых ребра призмы параллельны одному из ребер тетраэдра и равноудалены от него, а все вершины призмы лежат на гранях тетраэдра. Найдите отношение объемов призмы и тетраэдра.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Мяч, брошенный со скоростью $v_0 = 10$ м/с под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту, ударяется о вертикальную стену, находящуюся на расстоянии $s = 3$ м от места бросания. Определите модуль и направление скорости мяча (v и угол β) после удара. Удар считать абсолютно упругим, а углы падения и отражения — равными. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

2. Тело массой $m = 2$ кг соскальзывает с горки высотой $H = 4,5$ м по наклонной поверхности, плавно переходящей в цилиндрическую поверхность радиусом $R = 2$ м (рис. 1). Определите силу давления тела на цилиндрическую поверхность в верхней ее точке В, если работа сил трения при движении тела до этой точки равна $A = 40$ Дж. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

3. Определите изменение внутренней энергии $z = 0,5$ моля газа при нагревании

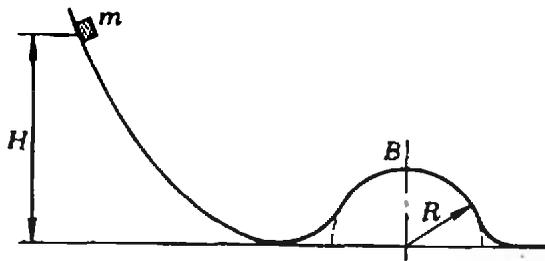


Рис. 1.

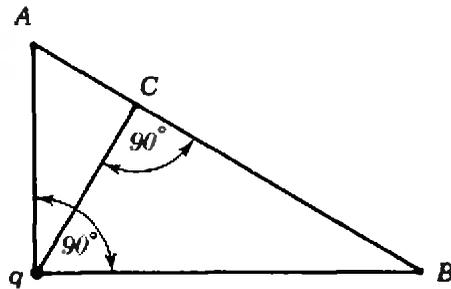


Рис. 2.

его при постоянном давлении от температуры $t_1=27^\circ\text{C}$ до температуры $t_2=47^\circ\text{C}$, если газу было сообщено количество теплоты $Q=290$ Дж. Универсальная газовая постоянная $R=8,3$ Дж/(моль \cdot К).

4. Чтобы принять ванну, необходимо нагреть $V=200$ л воды от температуры $t_1=7^\circ\text{C}$ до температуры $t_2=47^\circ\text{C}$. Если такое количество теплоты сообщить идеальной тепловой машине, работающей при температуре нагревателя t_2 и холодильника t_1 , то с помощью этой машины можно поднять груз массой $m=4,2 \cdot 10^4$ кг на высоту $H=10$ м. Определите по этим данным удельную теплоемкость воды. Плотность воды $\rho=10^3$ кг/м³. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с².

5. Определите суммарный заряд электронов, содержащихся во всех молекулах водорода, который занимает объем $V=1$ см³ при температуре $t=27^\circ\text{C}$ и давлении $p=10^2$ Па. Число Авогадро $N_A=6 \cdot 10^{23}$ 1/моль, элементарный заряд $e=1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, универсальная газовая постоянная $R=8,3$ Дж/(моль \cdot К).

6. Напряженность электрического поля, созданного точечным зарядом q , в точках A и B (рис. 2) равна соответственно $E_A=2 \cdot 10^2$ В/м и $E_B=10^2$ В/м. Определите напряженность электрического поля в точке C.

7. В пространство, где одновременно действуют горизонтальное и вертикальные однородные электрические поля с напряженностью $E_x=4 \cdot 10^2$ В/м и $E_y=3 \cdot 10^2$ В/м, вдоль направления силовой линии результирующего электрического поля влетает электрон, скорость которого на пути $L=2,7$ мм изменяется в два раза. Определите скорость электрона в конце пути. Масса электрона $m=9 \cdot 10^{-31}$ кг, элементарный заряд $e=1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

8. Источник постоянного тока с внутренним сопротивлением $r=1$ Ом замкнут в первом

случае на резистор сопротивлением R , во втором случае — на 4 таких же резистора, соединенных параллельно. Определите величину сопротивления R , если мощность, выделяемая в нагрузке, в первом и втором случаях одна и та же.

9. Луч света, идущий от источника света, находящегося на дне сосуда с жидкостью, падает на поверхность жидкости под предельным углом полного отражения. Можно ли будет увидеть источник, если на поверхность жидкости поместить стеклянную пластину? Абсолютный показатель преломления у стекла больше, чем у жидкости.

10. При взаимодействии ядер алюминия $^{27}_{13}\text{Al}$ с X-частицами образуются ядра изотопа магния $^{27}_{12}\text{Mg}$ и Y-частицы. При взаимодействии же Y-частиц с ядрами алюминия $^{27}_{13}\text{Al}$ образуются ядра изотопа магния $^{24}_{12}\text{Mg}$ и Z-частицы. Какие широко известные частицы X, Y, Z участвуют в этих ядерных реакциях?

Публикацию подготовили
Н. А. Гладков, В. Ф. Панов

Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Докажите тождество

$$\frac{\cos^2(\alpha-\beta) - \cos^2(\alpha+\beta)}{4 \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

2. Решите уравнение

$$4^{x + \frac{1}{2}} + 31 \cdot 2^{x-1} = 4.$$

3. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом α и гипотенузой a . Все двугранные углы при основании равны φ . Найдите боковую поверхность пирамиды.

4. Сумма первых n членов последовательности вычисляется по формуле $S_n = 4 - 4 \cdot 2^{-n}$. Докажите, что последовательность является геометрической прогрессией и найдите ее пятый член.

5. Где возрастает функция $y = \frac{(x-7)(5-x)}{x+3}$?

Вариант 2

1. Докажите тождество

$$\sin \alpha - \sin(\alpha + \beta) + \sin \beta = 4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2}$$

2. Решите уравнение

$$|3x - 2| + x = 11.$$

3. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар, радиус которого равен r . Найдите объем пирамиды, если боковая грань составляет с плоскостью основания угол φ .

4. Сумма первых n членов последовательности вычисляется по формуле $S_n = \frac{2n^2 + n}{2}$.

Докажите, что последовательность является арифметической прогрессией и найдите ее двадцатый член.

5. Найдите точки экстремума функции $y = 4x \cdot e^x - 4e^x - x^2 + 2$.

Задачи устного экзамена

1. Вычислите $\operatorname{tg} 510^\circ$.

2. При каких значениях числа x числа $\frac{1}{x+2}$, $\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{x-1}$ являются первыми тремя членами арифметической прогрессии? Найдите пятидесятый член этой прогрессии.

3. Решите уравнение

а) $x^4 - 15x^2 - 16 = 0$;

б) $x + \sqrt{4x - 3} = 6$;

в) $3 \cos 2x + 8 \sin^2 x = 7 \sin x$.

4. При каких значениях a уравнение

$$ax^2 - (4a + 1)x + 5a + 2 = 0$$

имеет единственный корень?

5. Постройте график функции

а) $y = \log_2(4^x)$;

б) $y = ||\operatorname{lg} x - 1||$;

в) $y = 2 \sin \left| x - \frac{\pi}{4} \right|$.

6. Является ли функция

$$y = \frac{1}{5}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + 5x - \frac{1}{15}$$

возрастающей?

7. Найдите точки экстремума функции

$$y = 2x\sqrt{x} + 3x - 12\sqrt{x} + 1.$$

8. Являются ли точки $A(1; 2; 4)$, $B(2; 4; 3)$, $C(3; 3; 2)$, $D(4; 5; 1)$ вершинами параллелограмма?

Физика

Задачи устного экзамена

1. Во сколько раз период обращения искусственного спутника, совершающего движение по круговой орбите на высоте h от поверхности Земли (радиус Земли R_3), превышает период обращения спутника на околоземной орбите ($h=0$)?

Примечание. Учесть, что Земля ведет себя так, как если бы вся ее масса была сосредоточена в центре.

2. Сферические сосуды объемов $V_1 = 200 \text{ см}^3$ и $V_2 = 100 \text{ см}^3$, наполненные кислородом при температуре $t = 27^\circ\text{C}$ под давлением $p_0 =$

$= 760 \text{ мм рт. ст.}$, соединены трубкой, внутри которой находится теплоизолированная пористая перегородка, обеспечивающая одинаковость давлений в сосудах. Затем первый сосуд нагревается до температуры $t_1 = 100^\circ\text{C}$, а второй — охлаждается до $t_2 = 0^\circ\text{C}$. Пренебрегая тепловым расширением сосудов, определите установившееся в системе давление.

3. Три резистора, обладающие сопротивлениями $R_1 = 2 \text{ Ом}$, $R_2 = 6 \text{ Ом}$ и $R_3 = 1,5 \text{ Ом}$, соединены по типу «звезды» и включены в цепь постоянного электрического тока, создаваемого батареей с напряжением $U = 6 \text{ В}$. Пренебрегая сопротивлением подводящих проводов, найдите силу полного тока, протекающего через батарею, и силы токов в каждом резисторе. Какие еще параметры цепи можно определить?

4. Водолаз ростом $a = 1,5 \text{ м}$, стоящий на горизонтальном дне водоема, видит отраженную от поверхности воды часть дна, расположенную от него на расстоянии большем $s = 15 \text{ м}$. На какой глубине находится водолаз, если показатель преломления воды $n = 1,33$?

Публикацию подготовили
В. А. Винокуров, С. И. Мешков, А. А. Симонов

Московский институт стали и сплавов

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$9^{x-1} = 8 \cdot 3^{x-2} + 1.$$

2. Решите неравенство

$$1 - \operatorname{lg} x > \operatorname{lg}(x - 3).$$

3. Решите уравнение

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = 4 \cos 2x.$$

4. Треугольник ABC вращается вокруг оси, лежащей в плоскости треугольника и проходящей через вершину A параллельно биссектрисе угла ABC . Найдите объем и площадь полной поверхности тела вращения, если $|AB| = 3$, $|AC| = 5$, $|BC| = 6$.

5. В замкнутую фигуру, ограниченную графиком функции $y = 27 - 6x - x^2$ и осью абсцисс, вписан прямоугольник наибольшей площади так, что две вершины прямоугольника лежат на графике функции, а две другие — на оси абсцисс. Найдите координаты вершин и площадь прямоугольника.

Вариант 2

(примерный вариант на предстоящих экзаменах в 1983 г.)

1. Вычислите без таблиц

$$\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} : ((\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})).$$

2. Решите уравнение

$$2x + \sqrt{3x - 2} = 3.$$

3. Найдите число целых решений неравенства

$$5 + \frac{17}{x-2} < \frac{2}{x+3}.$$

4. Решите уравнение

$$\log_3 x + \log_3(x-4) = 1.$$

5. В равнобедренной трапеции даны длины оснований 21 и 9 длина и высоты 8. Найдите радиус описанной окружности.

6. Найдите сумму квадратов наибольшего и наименьшего значений функции $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ на отрезке $[-2; 2]$.

7. Определите число решений уравнения $(1 + \cos x) \operatorname{ctg} x = \sin 2x$.

на промежутке $\left] -\frac{3}{2}\pi; \frac{\pi}{3} \right]$.

8. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найдите сумму первых 11 членов этой прогрессии.

9. Найдите $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, если $f(x) = \sqrt{2} \sin^3 x$.

10. В треугольной пирамиде $ABCD$ грани ABC и BCD — правильные треугольники. Угол между этими гранями равен φ . При каком значении φ боковая поверхность пирамиды будет наибольшей? В ответе напишите не φ , а $\frac{1}{\cos \varphi}$.

Физика

В 1982 году вступительные экзамены по физике в МИСиС проводились в письменной форме. Каждому абитуриенту предлагался отдельный вариант, содержащий десять задач по различным разделам физики. Результаты работ обрабатывались на ЭВМ.

Вариант

1. Материальная точка движется прямолинейно из точки A в точку B . Первую половину пути точка двигалась со скоростью $v_1 = 20$ м/с, а вторую половину — со скоростью $v_2 = 30$ м/с. Определите среднюю скорость v движения точки на участке AB .

2. Два бруска с массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг соответственно находятся на горизонтальной поверхности и связаны между собой невесомой и нерастяжимой нитью, способной выдержать максимальное разрывное усилие $F = 5$ Н. Определите максимальную силу F_n , с которой можно тянуть за брусок массы m_2 вдоль прямой, являющейся продолжением нити, что эта нить не оборвалась. (Трение между брусками и поверхностью отсутствует.)

3. Небольшое плоское тело начинает двигаться вверх по наклонной плоскости с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с. Определите расстояние l , которое пройдет тело по наклонной плоскости до полной остановки, если угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30^\circ$, а коэффициент трения между телом и поверхностью наклонной плоскости $\mu = 0,6$.

4. В узкой стеклянной трубке, один конец которой запаян, находится воздух, запертый столбиком ртути длиной $l = 20$ см. Когда трубка стоит вертикально открытым концом

вверх, то объем воздуха под столбиком ртути равен $V_1 = 1,5$ см³. Какой объем V_2 займет запертый воздух при горизонтальном положении трубки, если атмосферное давление $p_a = 750$ мм рт. ст., а температура воздуха постоянна?

5. Свинцовая пуля, летящая со скоростью $v = 300$ м/с, ударяется о стальную плиту и останавливается. На сколько градусов Δt увеличилась при этом температура пули, если $\alpha = 40\%$ ее кинетической энергии пошло в момент удара на нагревание пули и окружающего воздуха?

6. Два точечных заряда $q_1 = 3,2 \cdot 10^{-10}$ Кл и $q_2 = 8 \cdot 10^{-12}$ Кл находятся в вакууме на расстоянии $r_1 = 72$ см. Какую работу A надо совершить, чтобы сблизить их до расстояния $r_2 = 32$ см?

7. Плоский воздушный конденсатор, имеющий расстояние между обкладками $d_1 = 1$ см, зарядили до разности потенциалов $U_1 = 100$ В, а затем отключили от сети. Определите разность потенциалов U_2 между обкладками конденсатора, если их раздвинули до расстояния $d_2 = 2$ см.

8. Нагреватель электрического чайника состоит из двух спиралей одинакового сопротивления. При параллельном соединении спиралей и включении их в сеть вода в чайнике закипает через $t_1 = 3$ мин. Через какое время t_2 закипит вода, имеющая ту же массу и такую же начальную температуру, если спирали нагревателя соединить последовательно и включить в ту же сеть?

9. На горизонтальное дно резервуара опирается вертикальный стержень длиной $l = 2$ м, полностью покрытый водой с показателем преломления $n_w = 1,33$. Определите длину тени x от стержня на дне резервуара, если на поверхность воды падают лучи Солнца под углом $\alpha = 30^\circ$.

10. Поверхность калия облучается потоком монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0,331 \cdot 10^{-6}$ м. Определите скорость v электронов, вырываемых с поверхности калия, если работа выхода электрона $A_w = 2,2$ эВ.

Публикацию подготовили
Б. Г. Разумейко, А. Г. Токаев



Интерференция волн

1. $d_{\min} = \frac{c}{4\nu(n-1)} = 2 \text{ см.}$

2. $I \sim \cos^2\left(\frac{2\pi}{l} \Delta L\right)$, где $l = \frac{cL^2}{2\nu(h_2-h_1)} \times$

$\times \frac{1}{(2h_0+h_1+h_2)} = 180 \text{ м}$ — расстояние, на котором фаза колебаний изменяется на 2π (расстояние h_0 можно найти из рисунка 1:

$h_0 = R_3(1 - \cos \alpha) \approx \frac{R_3 u^2}{2} \approx$

$\approx \frac{R_3}{2} \left(\frac{L}{2R_3}\right)^2 \approx 80 \text{ км.}$

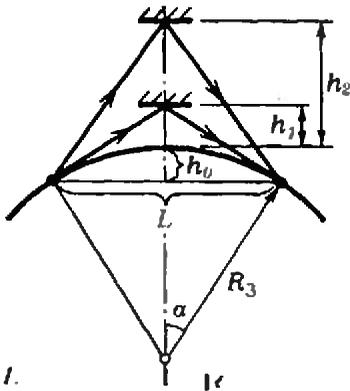


Рис. 1.

3. $U \sim \cos \frac{\pi L \sin \omega t}{\lambda} \sim \cos \frac{\pi L \omega t}{\lambda} \sim \cos \frac{2\pi}{T} t$,

где $T = \frac{2\lambda}{L\omega} \approx 2.3 \text{ мин}$ (ω — угловая скорость вращения Земли).

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Математика

Вариант 1

1. $a \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5}{6}\pi + 2\pi k\right]$ ($k \in \mathbb{Z}$). Ре-

шение. Данная система равносильна системе

$$\begin{cases} y = 2 \sin a \cdot \cos \pi x \\ (4 \sin^2 a \cdot \cos^2 \pi x + 1) \sin a = \end{cases} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} + x + \frac{1}{2x^2} \right).$$

Поскольку $\cos \pi x < 0$ при $x \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$,

система (1) имеет в рассматриваемой области единственное решение тогда и только тогда, когда $\sin a > 0$ и второе уравнение системы имеет единственное решение на промежутке

$\left[1; \frac{3}{2}\right]$. При возрастании x от 1 до $\frac{3}{2}$ функция, стоящая в левой части этого уравнения, убывает от $\sin a + 4 \sin^3 a$ до $\sin a$, а функция, стоящая в его правой части, возрастает от 1 до $1 \frac{2}{27}$. Поэтому исследуемое

уравнение имеет на $\left[1; \frac{3}{2}\right]$ единственное решение тогда и только тогда, когда $4 \sin^3 a + \sin a \geq 1$ (рис. 2). Функция $4z^3 + z - 1$

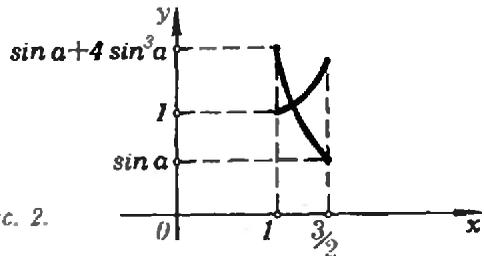


Рис. 2.

возрастает на R и обращается в 0 при $z = \frac{1}{2}$.

Следовательно, $4 \sin^3 a + \sin a \geq 1 \Leftrightarrow \sin a > \frac{1}{2}$.

2. $x_1 = 2\pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi l$ ($k, l \in \mathbb{Z}$).

3. $x = \pi + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$). Указание. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2 + \cos x \leq \cos^2 x \\ \cos x < 0. \end{cases}$$

4. $\frac{1}{4}$. Указание. $\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM}$. Выразите \vec{AN} и \vec{AM} через \vec{AB} , \vec{BC} , \vec{CD} и \vec{DE} .

5. $\frac{1}{4} a^3$. Указание. Пусть F — середина ребра BB' , S — четвертая вершина сечения. Пирамида $A'DEFS$ является объединением двух пирамид одинакового объема с вершиной S — пирамиды $SA'ED$ и пирамиды $SA'EF$.

Вариант 2

1. $T = \frac{1}{g} (v \sin a + \sqrt{v^2 \sin^2 a - 2g(h-H)})$

при $h < H$, $T = 0$ при $h = H$ и $a < 0$, $T =$

$= \frac{1}{g} (v \sin a \pm v \sin a)$ при $h = H$ и $a > 0$, $T =$

$= \frac{1}{g} (v \sin a \pm \sqrt{v^2 \sin^2 a - 2g(h-H)})$ при

$H < h < H + \frac{1}{2g} v^2 \sin^2 a$ и $a > 0$; $T = \frac{1}{g} v \sin a$

при $h = H + \frac{1}{2g} v^2 \sin^2 a$ и $a > 0$; при $h > H$,

$a < 0$ и при $h > H + \frac{1}{2g} v^2 \sin^2 a$, $a > 0$ решений нет. Указание. В системе координат, показанной на рисунке 3, стрела в момент t будет

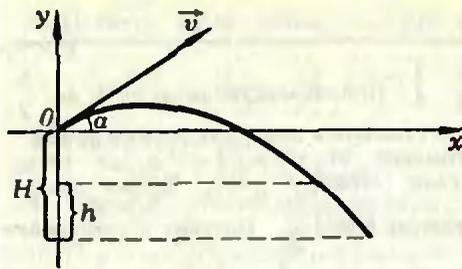


Рис. 3.

находиться в точке с координатами $(vt \cdot \cos \alpha; vt \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2)$. Искомое время T есть неотрицательный корень уравнения $vt \cdot \sin \alpha - \frac{T}{2}gT^2 = h - H$.

2. 0. Указание. f' — нечетная функция.

3. $x = \frac{2\pi}{7}k$ ($k = -1, -2, -3, -4, -5, -6$).

4. $\frac{4 - \sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{-1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$. Указа-

ние. $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$.

5. $\frac{a^3 \operatorname{tg}^3 \alpha}{(1 + \operatorname{tg} \alpha)^3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}$. Указание. Достаточно нарисовать сечение пирамиды плоскостью SOK (S — вершина пирамиды, O — основание ее высоты, K — середина одной из сторон основания).

Вариант 3.

1. $4 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

2. $\frac{3}{2}h$.

3. $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k, x_2 = -\operatorname{arctg} \frac{5}{3} + \pi l$ ($k, l \in \mathbb{Z}$).

4. $\{(4; \sqrt{2}), (4; -\sqrt{2})\}$.

5. $\left\{ \log_{\sqrt[13]{13}} \frac{1350}{1183} \right\}$.

Вариант 4

1. 16 ч.

2. $\left\{ \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \right), \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \right\}$.

3. $\frac{11 - 3a}{2}$.

4. 1. Указание. Постройте график.

5. $\frac{\pi}{8} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin^3 \alpha}$.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. На рисунке 4 показаны силы, действующие на брусок (красным цветом) и на клин (синим цветом). Обозначив проекции ускорения бруска \vec{a}_0 на горизонтальное и вертикаль-

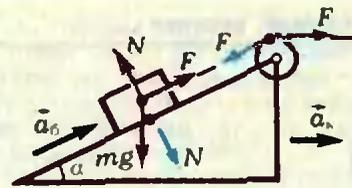


Рис. 4.

ное направления через a_x и a_y , а проекцию ускорения клина \vec{a}_k на горизонтальное направление через a , получим

$$\begin{aligned} F \cos \alpha - N \sin \alpha &= ma_x, \\ F \sin \alpha + N \cos \alpha - mg &= ma_y, \\ F - F \cos \alpha + N \sin \alpha &= Ma. \end{aligned}$$

При этом

$$a_y = (a_x - a) \operatorname{tg} \alpha.$$

Решая совместно систему четырех уравнений, найдем

$$a = \frac{F(1 - \cos \alpha) + mg \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha},$$

$$a_x = \frac{F(m \sin^2 \alpha + M \cos \alpha) - Mmg \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{m(M + m \sin^2 \alpha)},$$

$$\begin{aligned} a_y &= \\ &= \frac{F \cos \alpha (M + m(1 - \cos \alpha)) - mg(M + m) \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{m(M + m \sin^2 \alpha)} \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

Для того чтобы брусок перемещался по наклонной поверхности клина вверх, нужно выполнение следующих условий:

$$a_x > a, N > 0.$$

Отсюда, используя предыдущие соотношения, приходим к неравенству

$$\frac{m(M + m) \sin \alpha}{M + m(1 - \cos \alpha)} g < F < \frac{M \cos \alpha}{(1 - \cos \alpha) \sin \alpha} g.$$

Нетрудно убедиться в том, что полученные выражения дают правильные значения в предельных случаях: а) $M \rightarrow \infty$, б) $\alpha \rightarrow 0$ и в) $\alpha \rightarrow \pi/2$, когда задача становится тривиальной и ответ может быть написан непосредственно.

2. Однозначного ответа дать нельзя, так как данных задачи для этого недостаточно.

а) Если предположить, что газ идеальный и масса его не меняется, то температура газа должна уменьшаться. Это непосредственно следует из уравнения состояния и заданного закона расширения газа.

б) Если газ идеальный, но масса его меняется, то возможны варианты. Подставляя $p = \text{const}/V^2$ в уравнение состояния $pV = mRT/\mu$, получим

$$\frac{mVRT}{\mu} = \text{const}.$$

Отсюда видно, что T зависит от величины mV . Если mV растет, то T убывает и наоборот. Если же mV остается постоянной, то и температура не меняется.

в) Если газ не является идеальным, то при постоянной массе он может нагреваться.

Действительно, пусть уравнение состояния одного моля газа имеет вид $p(V-b) = RT$, где b — некоторая постоянная, связанная с собственными размерами молекул газа. Тогда подстановка $p = RT/(V-b)$ в закон расширения газа дает

$$\frac{RTV^2}{V-b} = \text{const.}$$

откуда следует, что температура газа будет расти, если $V^2/(V-b)$ при расширении убывает. Нетрудно показать, что так будет при $V < 2b$ (отметим, что V всегда больше b).

3. Вольтметр, подключенный к зажимам второго источника, показывает напряжение

$$U_2 = \mathcal{E}_2 - Ir_2, \text{ где } I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2 + R}.$$

Если ток I в цепи меньше тока короткого замыкания второго элемента $I_2 = \mathcal{E}_2/r_2$, то $U_2 > 0$ и при размыкании ключа вольтметр покажет ЭДС второго элемента \mathcal{E}_2 . Если $I > I_2$, то $U_2 < 0$. Это значит, что при размыкании ключа вольтметр даст отброс в противоположную сторону. При этом прибор с нулем посередине шкалы покажет напряжение, равное $-\mathcal{E}_2$. Если при замкнутом ключе вольтметр показывал нуль (в этом случае $I = I_2$), то при размыкании ключа вольтметр с нулем посередине шкалы покажет \mathcal{E}_2 , только даст отбросы в разных направлениях.

4. В приближениях геометрической оптики искомая величина

$$\alpha = \frac{F^2}{(L-F)^2},$$

независимо от того, какой из величин F и L больше. Графики зависимости $\alpha = \alpha(L)$ и $\alpha = \alpha(F)$ имеют вид, показанный на рисунке 5.

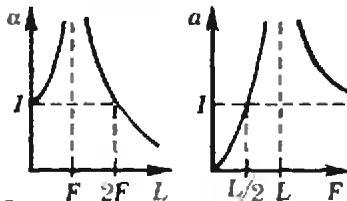


Рис. 5.

В действительности линза фокусирует параллельные лучи не в точку, а дает так называемое дифракционное пятно. Поэтому, если размеры индикатора меньше размеров дифракционного пятна на экране при $L \rightarrow F$, то разрывов на графиках не будет. Если же размеры индикатора больше размеров дифракционного пятна, то для ответа на вопрос необходимо знать, как работает индикатор в случае, когда освещена только часть его поверхности.

Вариант 2

1. а) Рассмотрим случай, когда после удара налетающий шар продолжает двигаться в том же направлении, что и до удара. По закону сохранения импульса имеем $mv = mv/2 + MV$, и поскольку скорость шара массы M после удара $V > v/2$, то $m > M$. Очевидно, что при $m = M$ удар абсолютно неупругий и после удара шары движутся

вместе со скоростью $v/2$. Отношение кинетической энергии после удара к первоначальной равно

$$\alpha = \frac{m(v/2)^2/2 + MV^2/2}{mv^2/2} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{m}{M} \right).$$

Максимальное значение $\alpha = 1$ достигается при абсолютно упругом ударе, откуда получаем, что $m < 3M$. Минимальному значению α соответствует рассмотренный выше абсолютно неупругий удар, при котором $\alpha = 1/4$. Итак, рассмотренный случай возможен, когда $M < m < 3M$; при этом $1/2 < \alpha < 1$.

б) Пусть после удара шар массы m движется в противоположном направлении. Тогда $mv = -mv/2 + MV$, откуда $V = 3mv/(2M)$ и

$$\alpha = \frac{1}{4} \left(1 + 9 \frac{m}{M} \right).$$

Очевидно, что $m > 0$, поэтому $\alpha > 1/4$. При $m = M/3$ (абсолютно упругий удар) $\alpha = 1$. Итак, $1/4 < \alpha < 1$ при $0 < m < M/3$.

2. Ответ: $n = 4$. Указание. Из условия задачи вытекает, что температура газа в конечном состоянии такая же, как и в начальном. Следовательно, такой же остается и внутренняя энергия газа, а все подведенное количество теплоты идет на совершение работы по расширению газа.

3. Качественно понятно, что показания амперметра могут и увеличиться, и уменьшиться. Например, при $\mathcal{E}_2 \approx 0$ ток в цепи возрастет, так как при замыкании ключа просто закорачивается часть цепи. При $\mathcal{E}_1 \approx 0$ ток в цепи после замыкания ключа практически обращается в нуль.

Теперь получим аккуратное решение. До замыкания ключа ток в цепи равен

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2 + R},$$

а после замыкания —

$$I' = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1 + R}.$$

Пусть ток I меньше тока короткого замыкания второго элемента $I_2 = \mathcal{E}_2/r_2$:

$$\frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2 + R} < \frac{\mathcal{E}_2}{r_2}.$$

Тогда нетрудно показать, что

$$\frac{\mathcal{E}_2}{r_2} > \frac{\mathcal{E}_1}{r_1 + R}, \text{ или } \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2 + R} > \frac{\mathcal{E}_1}{r_1 + R},$$

то есть ток в цепи после замыкания ключа уменьшится. При обратном неравенстве, когда $I > I_2$, ток в цепи увеличится. Если же выполняется равенство $I = I_2$, ток в цепи не изменится.

4. Зеркало играет двойную роль. Во-первых, оно ограничивает пучок солнечных лучей, образующих пятно на экране (подобно диафрагме), а во-вторых, изменяет их направление. Для выяснения вопроса о форме освещенного пятна изменение направления лучей при их отражении несущественно. Поэтому достаточно рассмотреть ограничение пучка отверстием такой же формы и размеров, как и зеркало.

Решение задачи основывается на факте, что свет от источника дает изображение источника, если экран далеко от отверстия.

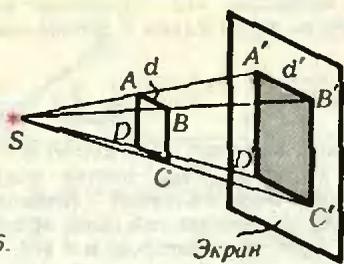


Рис. 6.

и дает изображение отверстия, если экран близко. Рассмотрим подробно оба случая. а) Пусть экран расположен близко к отверстию. В первом приближении Солнце можно считать точечным источником S (рис. 6). Освещенное пятно на экране — это центральная проекция отверстия на плоскость экрана. Центр проекции S расположен очень далеко, поэтому все лучи практически параллельны, а форма и размер освещенного пятна совпадают с формой и размерами отверстия. При наклоне нормали к плоскости экрана на угол β (относительно направления на Солнце) размер пятна в соответствующем направлении увеличивается: $d' = d / \cos \beta$. При наклоне нормали к плоскости отверстия на угол γ размер пятна уменьшается: $d' = d \cos \gamma$. В общем случае $d' = d \cos \gamma / \cos \beta$. Из-за конечности углового диаметра Солнца ($\alpha \approx 0,01$) границы тени от краев отверстия будут размыты. Ширина полутени (рис. 7) $d'' = \alpha L$. Поэтому сказанное выше справедливо при условии $\alpha L \ll d$.

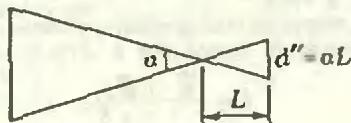


Рис. 7.

Подставляя $\alpha = 0,01$, получаем $L \ll 100d$. Если размер зеркала $d \sim 10$ см, то $L \ll 10$ м. Итак, этот случай реализуется, если расстояние до экрана от зеркала $L \ll 10$ м. б) Пусть экран находится далеко от отверстия. Тогда отверстие в первом приближении можно считать точечным, его форма роли не играет. Освещенное пятно на экране — это изображение Солнца в так называемой камере-обскуре. Оно представляет собой сечение кругового конуса солнечных лучей с вершиной в отверстии и углом α при вершине, равным угловому диаметру Солнца. Если экран перпендикулярен к оси конуса лучей, то пятно представляет собой круг диаметра $d' = \alpha L$. При наклоне экрана на угол β этот круг превращается в эллипс с большой осью $d'' = d' / \cos \beta = \alpha L / \cos \beta$. С увеличением размеров отверстия освещенность пятна возрастает, но одновременно края его становятся более размытыми. Это размытие порядка диаметра отверстия d . Поэтому этот случай реализуется, когда $d \ll \alpha L$, то есть $L \gg 100d$. Для зеркала с $d \sim 10$ см $L \gg 10$ м.

Задачи устного экзамена

1. $\mu = \text{ctg}(\alpha + \beta)$, $\alpha + \beta < \pi/2$.

2. $s = \frac{F(F - \mu mg)}{2\mu m^2 g}$, $F > \mu mg$.

62

3. Звезды движутся по окружностям с общим центром в центре масс системы; центр масс может перемещаться с постоянной скоростью. Если расстояние между звездами l , то радиусы окружностей

$$r_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}, \quad r_2 = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}.$$

Период обращения

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l^3}{G(m_1 + m_2)}}$$

одинаков у обеих звезд. Скорости движения по окружностям

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T}, \quad v_2 = \frac{2\pi r_2}{T};$$

ускорения —

$$a_1 = \frac{v_1^2}{r_1}, \quad a_2 = \frac{v_2^2}{r_2}.$$

4. $A = m/\mu R \Delta T$.

5. $Q = C_p T = (C_V + R)T$, $A = RT$, где T — первоначальная температура газа.

6. $C_4 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$; возможны еще физически интересные случаи: $C_3 = 0$ и $C_3 \rightarrow \infty$.

7. $Q_1 = \frac{CU^2}{4} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$; $Q_2 = \frac{CU^2}{4} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$.

8. $R_{ш} = 20$ Ом.

9. При небольшой глубине погружения кажущаяся скорость в n раз меньше истинной (n — показатель преломления воды).

10. Увеличить в 9 раз.

Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

Математика

Вариант 1

1. $a_1 = 2$, $q = 4$ или $a_1 = 512$, $q = \frac{1}{4}$.

2. $x_1 = 2\pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi l$ ($k, l \in \mathbb{Z}$).

3. $\{1\}$.

4. $]-2; -1] \cup]0; +\infty[$.

5. $\frac{4}{27} R^3$. Указание. Выразите объем призмы через $x = |SN|$ (обозначения см. на рис. 8).

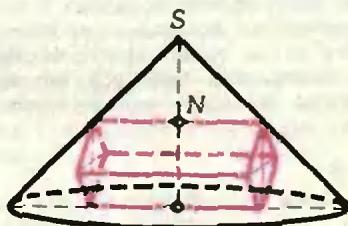


Рис. 8.

Вариант 2

1. 10 км/ч, 30 км/ч.

2. $x = \frac{\pi}{4} k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

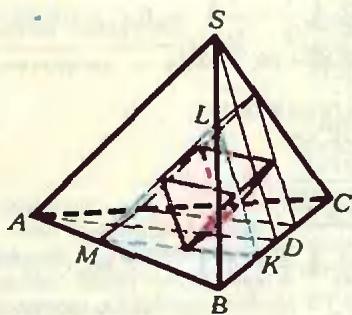


Рис. 9.

3. $\left\{1, \frac{1}{4}\right\}$.

4. $]-3; 2[$.

5. $\frac{20\sqrt{6}-48}{9}$. Указание. Докажите, что

любая такая призма симметрична относительно плоскости SAD (D — середина того ребра тетраэдра $SABC$, которому параллельны боковые ребра призмы; обозначения см. на рис. 9), что плоскости ее основания параллельны плоскости SAD и что сечение тетраэдра плоскостью основания призмы есть равнобедренный треугольник (на рисунке 9 один из этих треугольников выделен синим цветом). Пусть a — ребро тетраэдра, b — сторона основания призмы, h — ее высота, $x = |LM|$. Из $\triangle LKM$ выразите b и $|MK|$ через x .

Из $\triangle MKB$ найдите $|BK| = \frac{x}{2}$. Отсюда $h = a - x$.

Физика

1. $v = v_0 \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \left(1 - \frac{2gs}{v_0^2 \sin 2\alpha}\right)^2} \approx$

$\approx 7.6 \text{ м/с}; \beta = \arctg \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{gs}{v_0^2 \cos^2 \alpha}\right) \approx 22^\circ$.

2. $F = (3 - 2H/R)mg + 2A/R = 10 \text{ Н}$.

3. $\Delta U = Q - zR(T_2 - T_1) = 207 \text{ Дж}$.

4. $c = \frac{mgHT_1}{qV(T_2 - T_1)^2} = 4.2 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$.

5. $q = -2eN_A qV/(RT) \approx 7.7 \cdot 10^{-3} \text{ Кл}$.

6. $E_C = E_A + E_B \approx 3 \cdot 10^2 \text{ В/м}$.

7. $v = \sqrt{2eL/(3m)} (E_1^2 + E_2^2)^{1/4} = 4 \cdot 10^5 \text{ м/с}$.

8. $R = 2r = 2 \text{ Ом}$.

9. Источник увидеть нельзя.

10. Это нейтрон, протон и альфа-частица.

Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского

Математика*Письменный экзамен*

Вариант 1

2. $\{-2\}$.

3. $\frac{\sin 2\alpha}{4 \cos \varphi} c^2$.

4. $\frac{1}{8}$.

5. На промежутках $[-3 - 4\sqrt{5}; -3[$ и $] -3; -3 + 4\sqrt{5}[$.

Вариант 2

2. $\left\{-\frac{9}{2}, \frac{13}{4}\right\}$.

3. $\frac{4}{3} r^3 \operatorname{ctg}^3 \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \varphi$.

4. $39 \frac{1}{2}$.

5. $x = -\ln 2$ — точка максимума, $x = 0$ — точка минимума.*Задачи устного экзамена*

1. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. 2. $x = -5$. $a_{50} = \frac{15}{4}$. 3. а) $\{-4, 4\}$;

б) $\{3\}$; в) $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k (k \in \mathbb{Z})$. 4. $\{-\frac{1}{2}$;

0, $\frac{1}{2}\}$. 5. а) Указание. $y = 2x$; б) Указа-

ние. Постройте последовательно графики функций $\lg x$, $\lg|x|$, $\lg|x-1|$, $|\lg|x-1||$;в) Постройте последовательно графики функций $\sin x$, $\sin|x|$, $\sin|x - \frac{\pi}{4}|$, $2 \sin|x - \frac{\pi}{4}|$.6. Да. 7. $x = 1$ — точка минимума. 8. $ABDC$ (именно в таком порядке) — параллелограмм.**Физика**

1. $T_H/T_0 = (1 + h/R_3)^{3/2}$.

2. $\rho = \rho_0 \frac{V_1 + V_2}{T} \left(\frac{V_1}{T_1} + \frac{V_2}{T_2}\right)^{-1} \approx 842 \text{ мм рт.ст.}$

3. $I = I_3 = \frac{2A}{R_3 + R_1 R_2 / (R_1 + R_2)} \approx 2 \text{ А}$;

$I_1 = \frac{IR_2}{R_1 + R_2} = 1.5 \text{ А}; I_2 = I - I_1 = 0.5 \text{ А}; U_1 = U_2 = I_1 R_1 = I_2 R_2 = 3 \text{ В}; U_3 = IR_3 = 3 \text{ В}$.

4. $h = (s\sqrt{n^2 - 1} + a)/2 \approx 7.3 \text{ м}$.

Московский институт стали и сплавов

Математика

Вариант 1

1. $\{2\}$.

2. $\{3; 5\}$.

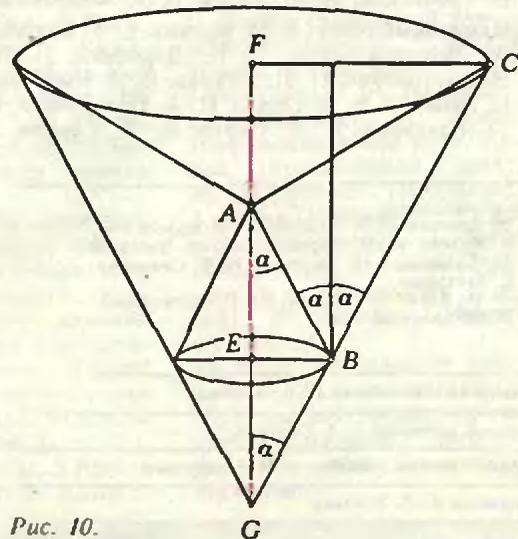


Рис. 10.

$$3. x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, \quad x_2 = (-1)^l \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}l \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

$$4. V = \frac{32\sqrt{7}}{3} \pi, \quad S = 42\sqrt{2} \pi. \text{ Указание.}$$

$V = V_{GFC} - 2V_{AEB} - V_{AFC}, \quad S = S_{GFC} - S_{AFC}$ (обозначения см. на рис. 10).

$$5. (-3 + 2\sqrt{3}; 0), (-3 + 2\sqrt{3}; 24), (-3 - 2\sqrt{3}; 0), (-3 - 2\sqrt{3}; 24); 96\sqrt{3}. \text{ Указание. Выразите площадь прямоугольника через } t = |ED|, \text{ где } E \text{ — середина его нижнего основания } CD.$$

Вариант 2

$$1. 1. \text{ Указание. } 5 - 2\sqrt{6} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2.$$

$$2. \{1\}. 3. 4. 4. \{5\}. 5. 10\frac{5}{8}. \text{ Указание.}$$

Окружность, описанная около трапеции $ABCD$, описана также около $\triangle ACD$. См. также задачу 1193 из «Геометрии 6—8». 6. 592. 7. 3. 8. 44.

$$9. \frac{3}{2}. 10. -3.$$

Физика

$$1. v = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = 24 \text{ м/с.}$$

$$2. F_x = F(1 + m_2/m_1) = 15 \text{ Н.}$$

$$3. l = \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)} = 5 \text{ м.}$$

$$4. V_2 = V_1 \left(1 + \frac{qgl}{\rho_a}\right) = V_1 \left(1 + \frac{l}{H_a}\right) = 1,9 \text{ см}^3$$

(здесь $H_a = 750 \text{ мм}$).

$$5. \Delta t = \frac{v^2(1 - \alpha/100\%)}{2c} = 214,3 \text{ К (здесь } c = 126 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)} \text{ — удельная теплоемкость свинца).}$$

$$6. A = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = 0,4 \cdot 10^{-10} \text{ Дж}$$

(здесь $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ — электрическая постоянная).

$$7. U_2 = U_1 d_2/d_1 = 200 \text{ В.}$$

$$8. t_2 = 4t_1 = 12 \text{ мин.}$$

$$9. x = l \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n_0^2 - \sin^2 \alpha}} = 0,81 \text{ м.}$$

$$10. v = \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{hc}{\lambda} - A_0\right)} = 7,38 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

(здесь $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ — масса электрона, $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ — постоянная Планка, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ — скорость света).

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 2)

Решения обеих задач носят геометрический характер.

Задание 3. 1. d7 Лd1 2. a7 Сb1 + 3. Kph6 Ce4 4. Kg6 + Kpg8 5. Ke7 + Kpf7 6. Kd5! Л:d5 (ладья перекрыла дорогу слону) 7. a8Ф+ и т. д.; 6... С:d5 (слон перекрыл дорогу ладье) 7. d8Ф+ и т. д.

Задание 4. 1. Kf7 + Kph7 2. e7 Лd1 + 3. Kph2 Лe1 4. Kg5 + Kpg6 5. c7 Cf5 6. Ке6, и одна из черных фигур, забирая коня на e6, перекрывает дорогу другой. 1... Kpg6 2. c7 Лc5 3. Ке5 + Kpf5 4. e7 Са4 5. Кс6. Теперь то же перекрытие осуществляется на с6.

Если белая фигура занимает поле, на котором пересекаются линии действия двух черных фигур, и любое взятие белой фигуры приводит черных к катастрофе, то в шахматной композиции это называется «темой Новотного». Таким образом, оба этюда иллюстрируют собой тему Новотного.

Главный редактор — академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучев, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Михайлов, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потанов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаяев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, А. В. Перишкин, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер оформила:

Ю. М. Аратовский, М. Б. Дубак, С. В. Красовский, А. К. Малкин, Ю. П. Мартыненко, Э. В. Назаров, М. П. Сидоров, Э. А. Смирнов, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина
Фото: Н. Адымович (ТАСС), Ю. П. Митрофанов, В. И. Оболинский

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Главный художник Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор А. Л. Ипатова

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 17.3.83. Подписано в печать 15.4.83.

Печать офсетная

Бумага 70×100 1/16. Физ. печ. л. 4

Усл. печ. л. 5,6 3/4-изд. л. 6,66 Т-08355

Цена 40 коп. Заказ 666 Тираж 172626 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательства, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Шахматная страничка



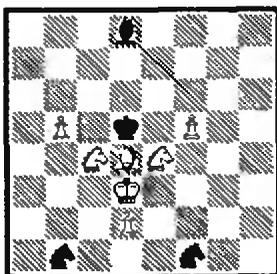
Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

СИММЕТРИЯ
И АСИММЕТРИЯ

Сегодня мы расскажем об одной геометрической идее, на которой основан ряд задач и этюдов.

Р. Бланкетти, 1925 г. Белые: Кра1, Лс3, Сс1; черные: Крh8, Лf6. Выигрыш.

После 1.Сb2! все фигуры выстраиваются на большой диагонали, и в зависимости от того, куда двинется ладья черных, получаются два изящных симметричных варианта: 1...Лf8 (1...Лf7 2.Лh3++ Крг8 3.Лh8×) 2.Лс7+ Крг8 3.Лg7+ Крh8 4.Кра2! (но не 4.Крb1 Лf1+ 5.Кра2 Ла1+ 6.Крb3 Ла3+ 7.Крс2 Лс3+ 8.Сс3 пат), и белые выигрывают ладью. Ответ 1...Лh6 приводит к тому же финалу.



В. Паули, 1920 г. Мат в 4 хода.

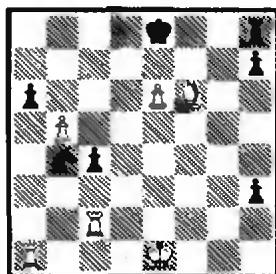
На первый взгляд позиция совершенно симметрична, а потому и решения должны быть симметричны. Но шахматная геометрия такова, что ось симметрии позиции (вертикаль d) не совпадает с осью симметрии доски (граница вертикалей d и e). В данной задаче решает 1. Сg7! Са5 (с7) 2. Сf8 Сd8 3. Сd6!, и мат следующим ходом. Если на первом ходу трогается с места черный конь b1, то на это следует 2.Кс3+ Крс5 3.Сf8+ и 4.Сс:e7×. Интересно, что ход 1.Са7, симметричный рассмотренному, не годится —

черный слон пользуется вертикалью h: 1...Ch4! 2.Сb8 Cf2! 3.Сd6 Cd4! и мат нет.

Т. Доусон, 1924 г. Белые: Кре8, Ке6, п.e7; черные: Кре2, п.п.d3, f3. Выигрыш.

В распоряжении белых два логичных продолжения — 1.Кd4+ или 1.Кf4+. Вертикаль a, нарушающая симметрию, как будто не играет никакой роли. Но, оказываясь, к победе ведет лишь 1.Кd4+! Кре3 2.К:f3 Кр:f3 3.Крf8! d2 4.e8Ф d1Ф 5.Фh5+ (если черные не ставят ферзя, то окончание «ферзь против центральной пешки» легко выиграно), а 1.Кf4+ приводит к ничьей — 1...Кре3 2.К:d3 Кр:d3 3.Крd8 f2 4.e8Ф Крd2! Разница в том, что эндшпиль «ферзь против слоновой пешки» уже ничейный: 5.Фd5 Кре1 6.Фb1+ Кре2 7.Фe4+ Крf1 8.Крс7 Крг1 9.Фg4+ Крh1 10.Фf3+ Крг1 11.Фg3+ Крh1! 12.Ф:f2 пат.

Очевидно, зеркальное отражение позиции относительно оси симметрии доски позволяет получить другую, симметричную позицию. Существует ход, который не сохраняется при зеркальном отражении — рокировка.

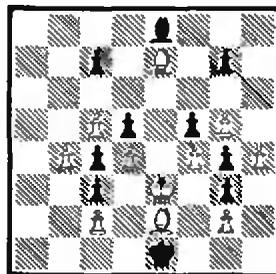


В. Паули, 1911 г. Мат в 3 хода.

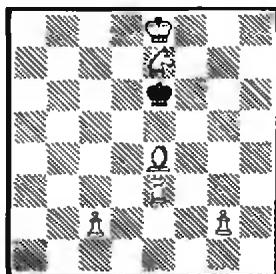
Решает только 1. 0—0—0! Кd3+ 2.Л:d3 cd 3.Лс8× (другие варианты: 1...Ка2+ 2.Л:a2, 1...Кd5 2.Л:d5, 1...Кс6 2.bc и всюду 3.Лd8×). Не ведет к цели 1.Л:a6 (с надеждой на 1...К:a6 2.Лd2 и 3.Лd8×) из-за ответа 1...0—0!

Поставьте на доске зеркальную позицию с той же задачей — мат в 3 хода, и вы увидите, что зеркальное решение не годится — длинная рокировка теперь невозможна. Здесь решает 1.Л:h6! Фокус в том, что рокировки лишились не только белые, но и черные. 1...К:h6 (1...k:f2+ 2. Кре2, 1...Кe3+ 2.Крc1 и 3.Лh8×) 2.Ле2! и 3.Ле8×.

Конкурсные задания



9. Мат в 4 хода.



10. Мат в 5 ходов.

Срок отправки решений — 25 июля 1983 года (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 9, 10).

Победителями конкурса признаны: Г. Бедный (Бердичев), В. Беляев (Куйбышев), С. Бондаренко (Камениско-Шахтинский), М. Германов (Курганская обл.), А. Дьяченко (Московская обл.), И. Кваша (Ростовская обл.), В. Колпаков (Николаевская обл.), Д. Красиков (Ростов-на-Дону), М. Креймер (Житомир), И. Купалов (Москва), З. Курганов (Чирчик), Г. Леонов (Курган), В. Макаренко (Черновцы), Н. Малли (Баку), В. Москаленко (Ворошиловград), Н. Пархоменко (Винница), А. Попов (Воронежская обл.), В. Попов (Красноярский край), В. Прудников (Подольск), А. Рябов (Куйбышев), А. Скороход (Чернигов), И. Тетко (Кодыма), А. Харченко (Мурманск), А. Чилингарян (Ереван), В. Шумада (Ивано-Франковск).

Редакция поздравляет победителей. Все они награждаются шахматно-математической литературой с автографами ведущих шахматную страничку.



Цена 40 коп.

Индекс 70465

Слева на черно-белой фотографии показана современная «клеверная» развязка двух автодорог. Однако при такой развязке некоторые пути следования транспортных потоков пересекаются. Более сложная развязка, нарисованная нашим художником, обеспечивает беспрепятственное движение. Подробнее об этом рассказано в заметке Ю. В. Котова в разделе «Наши обложка».

