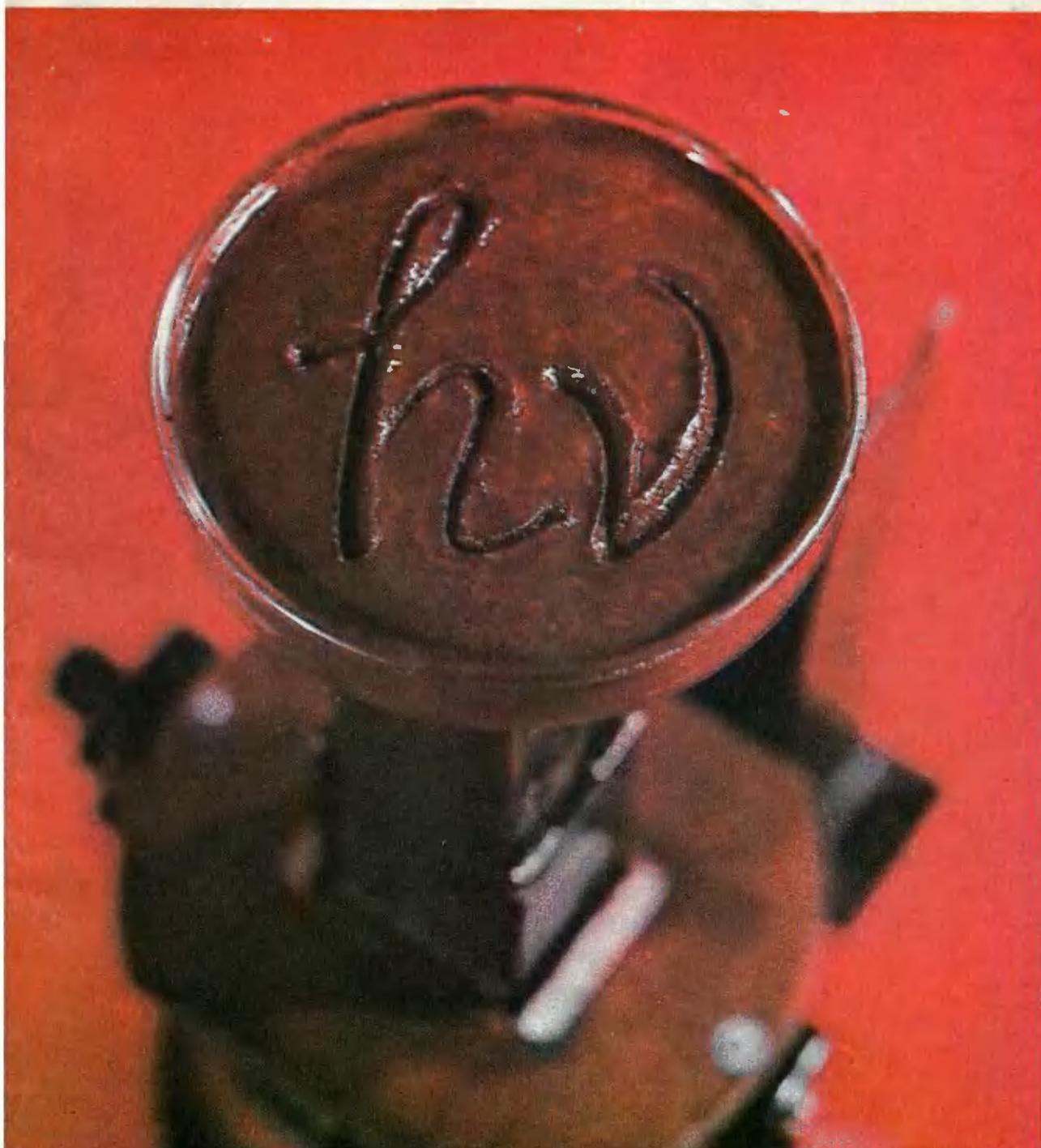
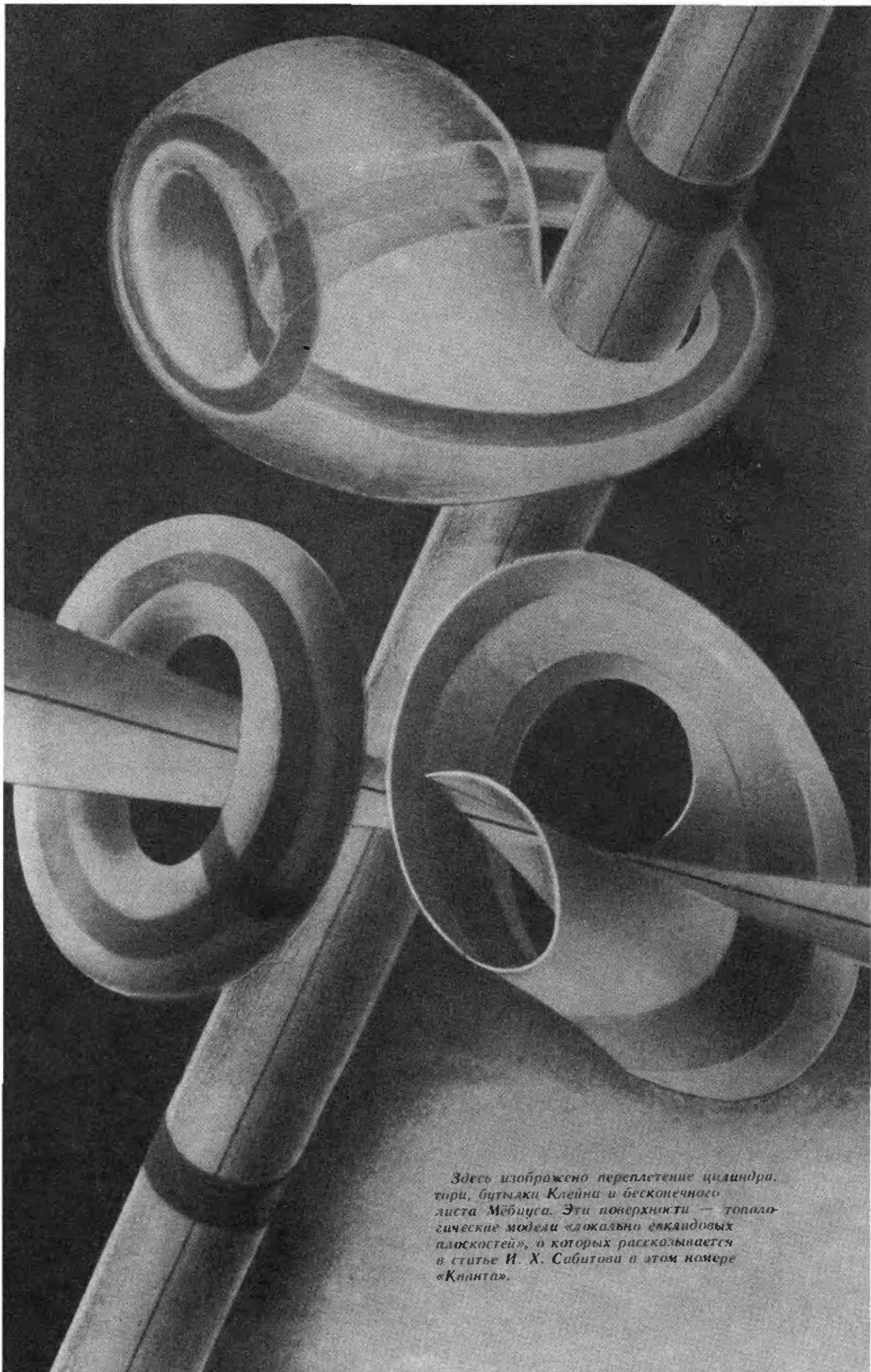


# Квант

**1**  
**1984**

*Научно-популярный физико-математический журнал  
Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР*





Здесь изображено переплетение цилиндра, тора, бутылки Клейни и бесконечного листа Мёбиуса. Эти поверхности — топологические модели «глобально евклидовых плоскостей», о которых рассказывается в статье И. Х. Сабитови в этом номере «Кванта».

Научно-популярный  
физико-математический журнал  
Академии наук СССР  
и Академии педагогических  
наук СССР

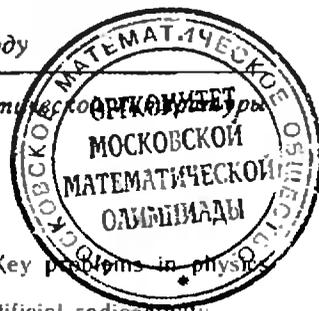
**Квант**  
**№**

**1** 1984

Основан в 1970 году



Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы.



**В НОМЕРЕ:**

- 2 *В. Л. Гинзбург.* О ключевых проблемах физики и астрофизики  
8 *А. А. Боровой.* Искусственная радиоактивность  
14 *И. Х. Сабитов.* Так ли прост евклидов мир?

**IN THIS ISSUE:**

- V. L. Ginzburg.* Key problems in physics and astrophysics  
*A. A. Borovoy.* Artificial radioactivity  
*I. Kh. Sabitov.* Is the Euclidean world so simple?

7	<b>Новости науки</b> Стабилизированный одноатомный водород	<b>Science news</b> Stabilized monoatomic hydrogen
21	<b>Лаборатория «Кванта»</b> <i>И. А. Медков.</i> Удивительная жидкость	<b>Kvant's lab</b> <i>I. A. Medkov.</i> A surprising liquid
24	<b>Математический кружок</b> <i>В. Л. Гуленмахер.</i> Системы линейных уравнений	<b>Mathematics circle</b> <i>V. L. Gulenmacher.</i> Systems of linear equations
30	<b>Геометрическая страничка</b>	<b>Geometric page</b>
32	<b>Школа в «Кванте»</b> Физика 8, 9, 10	<b>Kvant's school</b> Physics 8, 9, 10
39	<b>«Квант» для младших школьников</b> Задачи	<b>Kvant for younger school-children</b> Problems
40	<i>А. П. Савин.</i> В уме и на пальцах	<i>A. P. Savin.</i> In your head and on your fingers
42	<b>Задачник «Кванта»</b> Задачи М841—М845; Ф853—Ф857	<b>Kvant's problems</b> Problems M841—M845; P853—P857
45	Решения задач М826—М830; Ф837—Ф841	Solutions M826—M830; P837—P841
53	<b>Информация</b> Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу	<b>Information</b> Entrance requirements to the All-Union mathematics correspondence school
54	Заочная физико-техническая школа при МИСиС	The MISIS physico-technological correspondence school
54	Новый прием на заочное отделение Малого мехмата	Entrance requirements to the correspondence "Maly mekhmat" school
56	<b>Варианты вступительных экзаменов</b>	<b>College entrance examination</b>
60	Ответы, указания, решения Смесь (13) Шахматная страничка Рентген (3-я с. обложки)	Answers, hints, solutions Miscellaneous (13) The chess page X-raus (3rd cover page)

Фотография на первой странице обложки иллюстрирует свойство ферромагнитной жидкости «заполнить» минимальный на ее поверхности рисунок. Об этой удивительной жидкости можно прочитать в статье И. А. Медкова.

# О ключевых проблемах физики и астрофизики

*Академик В. Л. ГИНЗБУРГ*

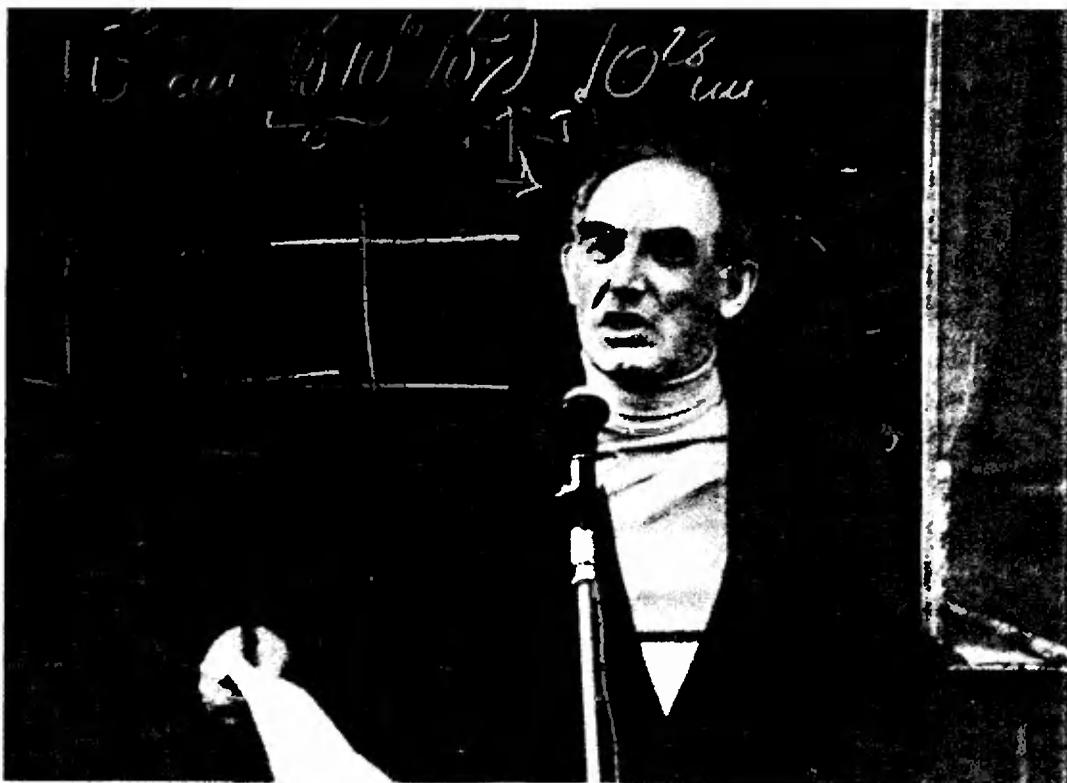
Если уподобить физику зданию, то это — огромное многоэтажное здание с мощным фундаментом, подвальными помещениями и эффектными башенками. Рядом подъездные пути, ведущие на заводы, в клиники, на полигоны. Многие тысячи людей, многочисленные лаборатории, сотни различных установок и приборов, большие библиотеки, сотни журналов... Здание все время достраивается, разрастается. Тысячи проблем и задач, многое взаимосвязано, с трудом отделяется от соседнего и выделяется из общего. С другой стороны, происходит дифференциация и разъединение, люди годами работают рядом, но остаются незнакомыми. Здание начинает напоминать Вавилонскую башню.

В то же время для физики характерно (быть может, правильнее сказать — все еще характерно) глубокое внутреннее единство идей и методов. Разрастание здания лишь ведет к тому, что становится все труднее выявить это единство, проследить и использовать его. Впрочем, на уровне преподавания основ физики, включая теоретическую физику, особых проб-

лем не возникает, они появляются позже, приходят с узкой специализацией. Не раз приходилось сталкиваться с такой картиной: хороший, способный студент или уже научный работник, автор оригинальных статей, имеет весьма узкий кругозор. Скажем, он знаком с глубокими и трудными проблемами квантовой теории поля, но о нейтронных звездах, черных дырах, сегнетоэлектриках, сверхпроводниках, жидком гелии-три ( $^3\text{He}$ ) и многом другом не имеет достаточного представления даже на качественном уровне. Между тем для успеха в работе очень важно видеть широкий горизонт и, во всяком случае, не замыкаться в пределах «своей темы». В целом, известная формулировка «все об одном и кое-что обо всем», пусть и не в буквальном смысле, но все же отражает цель, к которой нужно стремиться.

Конечно, для школьника такая цель — это еще довольно далекое будущее, но я совершенно убежден в том, что начинать можно и нужно уже в школе: не ограничиваться школьной программой и учебниками, знакомиться с широким кругом явлений, с последними научными достижениями и открытиями. Разумеется, речь здесь идет о понимании на качественном уровне, в известном отношении — о поверхностном ознакомлении. Но и это совсем не мало и во многом может облегчить дальнейший путь. Да, наконец, для интересующихся наукой узнавать, чем сегодня «живет и дышит» физика, астрономия, биология, просто очень интересно, не менее увлекательно, чем для любителей соответствующей литературы — читать о путешествиях и приключениях.

Естественно, для решения поставленной задачи нужна научно-популярная литература, доступная школьникам. Вот уже более 50 лет (!) прошло, а я с благодарностью помню, какую роль сыграла для меня в школьные годы книга О. Д. Хвольсона «Физика наших дней». К сожалению, назвать сегодня аналогичную по широте и глубине книгу я не могу, да и физика за это время так разрослась, что,



*Рассказывает Виталий Лазаревич Гинзбург.*

быть может, сегодня нужен уже несколько иной подход к ее популяризации. Об одном из возможных путей я как раз и хочу здесь рассказать.

Среди огромного числа проблем, задач и вопросов, изучением которых заняты физики и астрофизики, некоторые выделены в силу своей большой потенциальной важности для техники, существования каких-то трудно преодолимых препятствий при попытках решения, особой таинственности, глубины и т. п. Поэтому имеет известный смысл составление списка «особенно важных и интересных» или «ключевых» проблем физики и астрофизики. Конечно, такой список не может не носить несколько условный характер, и вообще, здесь необходимы некоторые пояснения и оговорки, о них еще пойдет речь ниже.

Так или иначе, более десяти лет назад я составил подобный список и написал для обзорного журнала «Успехи физических наук» статью «Какие проблемы физики и астрофизики представляются сейчас особенно важными и интересными?» (УФН, том 103, с. 87, 1971 год).

При этом я рассматривал составление списка и комментариев к нему как некоторый педагогический прием, способ расширить кругозор молодых физиков. Но мнения молодежи я не знаю и до сих пор. Зато совершенно неожиданно статья навлекла на меня град упреков со стороны коллег-физиков среднего и старшего поколений. Некоторые из них считают, что вообще нельзя выделять «особенно интересные и важные проблемы», другие обижаются, если в списке таких проблем нет тех, которыми они сами занимаются, и т. д. и т. п. С такой критикой я не согласен и в ответ на нее превратил упомянутую статью в небольшую книжку, переведенную уже на многие языки<sup>\*</sup>). Последнее свидетельствует по крайней мере о том, что обсуждение «ключевых вопросов» вызывает интерес. Недавно я опубликовал статью того же названия, что и в 1971 году, но с подзаголовком «десять лет спустя» (УФН, том 134, с. 469, 1981 год).

<sup>\*</sup>Книжка называется «О физике и астрофизике». Последнее (третье) издание вышло издательством «Наука» в 1980 году.

Ее цель — не попытка соревноваться с Дюма, а желание проследить за развитием физики и астрофизики за десятилетие (1971—1981) на примере некоторого количества ключевых проблем \*).

Но, как говорят англичане, “the proof of the pudding is in the eating” — для того чтобы оценить качества пудинга, нужно его съесть, — и пора, наконец, привести список, о котором идет речь.

### Макрофизика

1. Управляемый термоядерный синтез.
2. Высокотемпературная сверхпроводимость.
3. Новые вещества (проблемы создания металлического водорода и некоторых других «необычных» веществ).
4. Металлическая экситонная (электронно-дырочная) жидкость в полупроводниках. Переходы металл — диэлектрик. Спиновые стекла.
5. Фазовые переходы второго рода и близкие к ним (критические явления).
6. Физика поверхности.
7. Поведение вещества в сверхсильных магнитных полях.
8. Изучение очень больших молекул. Жидкие кристаллы.
9. Разеры, гразеры и лазеры новых типов.
10. Солитоны. Странные аттракторы. Нелинейные явления.
11. Сверхтяжелые элементы (далекие трансураны). «Экзотические» ядра.

### Микрофизика

12. Кварки и глюоны. Квантовая хромодинамика.
13. Единая теория слабого и электромагнитного взаимодействия.  $W$ -,  $Z$ -бозоны. Лептоны.

\* В этой статье, а также в книжке, о которой я упоминал, можно найти довольно много гочисленные ссылки на литературу по всем за трагиваемым вопросам

14. Великое объединение. Распад протона. Масса нейтрино. Суперобъединение.

15. Фундаментальная длина. Взаимодействие частиц при высоких и сверхвысоких энергиях.

16. Нарушение  $CP$ -инвариантности. Нелинейные явления в вакууме, в сверхсильных магнитных и электрических полях. Фазовые переходы в вакууме.

### Астрофизика

17. Экспериментальная проверка и границы применимости общей теории относительности.

18. Гравитационные волны.

19. Космологическая проблема. Связь космологии с физикой высоких энергий.

20. Нейтронные звезды и пульсары. Физика черных дыр.

21. Квазары и ядра галактик. Образование галактик.

22. Происхождение космических лучей и космического гамма- и рентгеновского излучения.

23. Нейтринная астрономия.

Разделение всех этих проблем на макрофизику, микрофизику и астрофизику довольно условно. Выделение 23 тем, а не, скажем, 20 или 30 — тоже условно. Почти полное отсутствие вопросов, связанных с биологией, объясняется не недооценкой важности связей физики с биологией (напротив, я отношусь к биофизике с особым уважением и интересом), а стремлением все же как-то ограничить тематику и, кроме того, совсем недостаточной моей компетентностью в биологии. Наконец, главное: не может и не должно быть речи о том, чтобы заниматься только «ключевыми» проблемами. Последние как-то выделены и привлекают особое внимание в силу отмеченных выше черт. Однако, каким бы разумным образом ни определять понятие «ключевая проблема», вряд ли найдутся даже два физика, которые составят совершенно одинаковые списки таких проблем.

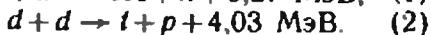
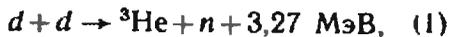
Каждой из перечисленных мною 23 проблем посвящена обширная литература, часто специальные моно-

графию. Но в большинстве случаев рассказать об основах, пояснить на «школьном» уровне, в чем состоит проблема, вполне возможно в небольшой журнальной статье или даже на одной странице.

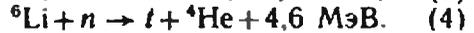
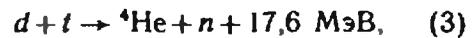
Приведу два примера.

Чтобы понять, в чем состоит проблема управляемого термоядерного синтеза, необходимо, прежде всего, знать, что атомные ядра состоят из протонов ( $p$ ) и нейтронов ( $n$ ). Протон является вместе с тем ядром самого легкого изотопа водорода ( $p \equiv {}^1\text{H}$ ). Но у водорода имеются два более тяжелых изотопа — дейтерий и тритий. Ядра дейтерия ( $d \equiv {}^2\text{H}$ ) и трития ( $t \equiv {}^3\text{H}$ ) — это, соответственно, протон + нейтрон и протон + два нейтрона. Атомные ядра заряжены — заряд ядра с порядковым номером  $Z$  в таблице Менделеева в  $Z$  раз больше заряда протона (дело, очевидно, просто в том, что в таком ядре находится  $Z$  протонов).

Одноименные заряды отталкиваются, и поэтому ядра могут приблизиться друг к другу на малое расстояние, лишь если до столкновения они обладали достаточно большой кинетической энергией. Такой энергией обладают, например, частицы горячей плазмы (плазмой называют ионизированный газ; при достаточно высокой температуре любой газ полностью ионизируется — становится полностью ионизированной плазмой; например, горячая водородная плазма состоит из электронов и ядер соответствующих изотопов водорода). На близких расстояниях между ядрами действуют не только электрические, но и ядерные силы. В результате их действия могут протекать ядерные реакции — превращения одних ядер в другие. Конкретно, при соударении ядер дейтерия идут реакции



Здесь  ${}^3\text{He}$  — ядро легкого изотопа гелия (оно состоит из двух протонов и одного нейтрона), значения 3,27 МэВ и 4,03 МэВ — это энергии, которые выделяются (в форме кинетической энергии продуктов реакции) при соответствующих превращениях. Упомянем также реакции



Первая из них (реакция (3)) сопровождается особенно большим энерговыделением, и поэтому смесь дейтерия с тритием более «калорийна», чем чистый дейтерий. Реакция (4) позволяет регенерировать тритий, который радиоактивен и практически отсутствует в природе.

Реакции (1), (2), (3) и многие им подобные, при которых из более легких элементов получаются (синтезируются) более тяжелые, называются реакциями синтеза. Такие реакции происходят в звездах — именно они являются основным источником энергии в звездах. Сказанное, вероятно, большинству школьников и так известно, но пришлось об этом напомнить, чтобы сформулировать проблему управляемого термоядерного синтеза. Она состоит в том, чтобы использовать реакции (1), (2) или (3), а возможно и некоторые другие, для нужд энергетики.

Над этой задачей работают уже четвертое десятилетие, и сейчас нет сомнений в возможности создания термоядерных реакторов, в которых реакция (3), а затем и реакции (1), (2) будут протекать в таких масштабах, что не только обеспечат энергообеспечение, необходимое для работы самого реактора, но и будут производить энергию для промышленных нужд\*). Существуют проекты и модели термоядерных реакторов разного типа. В реакторах с магнитным удержанием плазмы (токамаки и др.) очень горячая плазма удерживается в замкнутых сосудах (ловушках) магнитным полем. В реакторах инерциального типа крупинка (капелька) из дейтериево-тритиевой смеси очень быстро «обжимается» светом лазеров или пучками заряженных частиц. В результате должен происходить микровзрыв, энергию которого и предполагается использовать.

Недостаток места не позволяет здесь подробнее останавливаться

\* Следует заметить, что при практическом осуществлении термоядерного синтеза возникает много сложных инженерных проблем

на проблеме термоядерного синтеза. Я хотел лишь продемонстрировать, что понять основы вовсе не трудно. То же относится к большинству проблем, упомянутых в нашем списке. Например, легко объяснить, что такое нейтронная звезда. Такая звезда представляет собой как бы гигантское атомное ядро, состоящее в основном из нейтронов, но с примесью одинакового числа протонов и электронов. Плотность вещества в обычных атомных ядрах порядка  $\rho_{\text{я}} = 3 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3 = 3 \cdot 10^{17} \text{ кг/м}^3$ . Средняя плотность вещества в нейтронных звездах, грубо говоря, такого же порядка (сама плотность в данной точке звезды зависит от массы звезды и расстояния до ее центра). Поэтому сразу же легко оценить, что звезда с массой Солнца  $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$ , превратившись в нейтронную звезду, будет иметь радиус

$$r_{\text{н}} \sim \left( \frac{3M_{\odot}}{4\pi\rho_{\text{н}}} \right)^{1/3} \sim 10^4 \text{ м} = 10 \text{ км}$$

(радиус фотосферы — видимой поверхности Солнца —  $r_{\odot} = 7 \cdot 10^8 \text{ м}$ ).

В 1967—68 годах были открыты так называемые пульсары — космические источники периодически повторяющихся импульсов радионизлучения. Оказалось, что пульсары представляют собой быстро вращающиеся и сильно намагниченные нейтронные звезды (например, пульсар PSR 0531, находящийся в знаменитой Крабовидной туманности — остатке взрыва сверхновой звезды в 1054 году, делает 30 оборотов в секунду; магнитное поле на поверхности пульсара в тысячи миллиардов раз сильнее магнитного поля Земли).

Почему и как «обычные» звезды превращаются в нейтронные звезды? Каково строение этих звезд на разных глубинах? Почему они быстро вращаются? На эти и многие подобные вопросы также можно дать качественные ответы. Например, быстрое вращение нейтронных звезд связано с законом сохранения момента количества движения — при сжатии вращающегося тела оно начинает вращаться быстрее (всем известно, как это обстоятельство использу-

ется в балете и при фигурном катании на льду).

Мне хотелось бы, чтобы читатель-школьник (и особенно такой уже почти взрослый человек, каким является 15—17-летний ученик 9 или 10 класса) сделал такие выводы. Во-первых, не нужно думать, что даже самые последние достижения физики, астрофизики и, скажем, биологии недоступны для понимания школьника. Напротив, в большинстве случаев качественное представление о сути дела, о характере открытий можно получить без большой затраты труда. Во-вторых, для человека, любящего науку, узнавать о новых явлениях и эффектах, знакомиться с научными новостями, чувствовать пульс научной мысли — огромное удовольствие, радость. Думаю, что эти чувства вполне сравнимы и сопоставимы с теми, которые посещают людей при «встрече» с произведениями искусства. В-третьих, нужно занимать активную позицию. К сожалению, как в школах, так и в институтах, не везде и не всегда заботятся о приобщении учащихся к научным новостям, достижениям современной науки. Не произойдет это приобщение и при игре на гитаре, и даже в процессе столь интеллектуальной игры как шахматы. (Очень прошу читателей не воспринимать это замечание как совет не играть на музыкальных инструментах или в шахматы. Я хотел лишь подчеркнуть, что это не должно мешать занятиям наукой.) Нужно самому искать ответы, читать научно-популярные книги и журналы. Быть может, приведенный список ключевых проблем физики и астрофизики, при всей его условности и ограниченности, также поможет понять, о чем можно и интересно было бы узнать.



## Стабилизированный одноатомный водород

До сих пор считалось, что существует единственное вещество, в котором квантовые свойства проявляются не только в микроскопических, но и в макроскопических масштабах. Это жидкий гелий при низких температурах. Он не обладает вязкостью (сверхтекучесть) и при нормальном давлении не отвердевает при самом сильном охлаждении, вплоть до абсолютного нуля (при сжатии гелий замерзает).

Недавно сотрудниками Амстердамского университета получено еще одно

квантовое вещество — одноатомный водород. По предсказаниям теории это вещество должно обладать еще более уникальными свойствами — атомарный водород останется газообразным даже при абсолютном нуле температур.

Как известно, водород в обычных условиях представляет собой газ, состоящий из двухатомных молекул  $H_2$ . Энергия взаимодействия атомов в этих молекулах равна  $7,7 \times 10^{-19}$  Дж (4,8 эВ). Чтобы вызвать почти полную диссоциацию водорода на отдельные атомы, необходимо нагревание до температуры, превышающей  $5000^\circ\text{C}$ . Но при охлаждении газа происходит чрезвычайно быстрая рекомбинация молекул, сопровождающаяся выделением большого количества теплоты. Процесс носит взрывной характер.

Физикам из Амстердама удалось найти способ замедлить рекомбинацию и получить стабилизированный при низкой температуре одноатомный водород, живущий длительное время — порядка нескольких часов. С этой целью был применен очень изящный метод, основанный на использовании принципа Паули. Попробуем это пояснить.

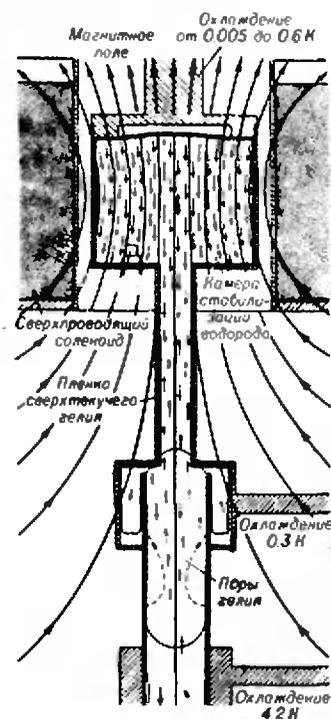
В двухатомной молекуле  $H_2$  оба электрона имеют наибольшую вероятность находиться между двумя атомными ядрами (электростатическое притяжение электронов и ядер как бы «цементирует» молекулу). Согласно принципу Паули, два электрона, входящие в одну физическую систему, не могут одновременно находиться в одном и том же состоянии. В квантовой механике состояние частицы определяется ее

энергией, положением или импульсом и спином. В молекуле водорода, где энергия и импульс у двух электронов одинаковы, спины электронов должны иметь противоположные направления. Другими словами, сближение двух атомов водорода приводит к образованию устойчивой молекулы только в случае антипараллельных электронных спинов. Значит, если создать одноатомный водород, у атомов которого все электронные спины параллельны друг другу, то в таком газе не будет происходить образование молекул  $H_2$ .

Эта простая идея и лежала в основе опытов по стабилизации одноатомного водорода. Однако не следует думать, что реализация этой идеи также была простой. Прежде всего надо было ослабить вредное влияние межатомных столкновений, приводящих к хаотическим поворотам электронных спинов. Поэтому работа проводилась при температурах порядка десятых долей кельвина. Кроме того, надо было устранить прилипание атомов к стенкам экспериментального сосуда, где они рекомбинируют в молекулы. Для этого применялась «смазка» сверхтекучим гелием, который притягивает атомы водорода очень слабо и поэтому может предотвратить их скопление у стенок.

На рисунке изображена центральная часть экспериментальной установки для получения стабилизированного атомарного водорода, созданной в Амстердамском университете. Сначала с помощью электрического разряда двухатомный водород диссоциировал на отдельные атомы.

(Окончание см. на с. 55)



# Искусственная радиоактивность

(к 50-летию со дня открытия)

*Кандидат физико-математических наук  
А. А. БОРОВОЙ*

В конце прошлого века известный шведский инженер-химик, изобретатель динамита и один из богатейших промышленников Альфред Нобель оставил завешание, согласно которому проценты от его капитала в 31 миллион крон идут на выплату премий за выдающиеся работы по физике, химии, физиологии или медицине, по литературе и за активную деятельность по укреплению мира.

Первую премию по физике в 1901 году получил немецкий ученый Вильгельм Конрад Рентген за открытие излучения, которое он назвал «X-лучами», а мы привыкли называть рентгеновскими.

Очень скоро Нобелевская премия по естественным наукам стала общепризнанной международной наградой. Ее вручают 10 декабря. Позднее нобелевские лауреаты выступают с традиционной лекцией в зале Стокгольмского университета.

Комитет, выбирающий лауреатов, считает обязательным, чтобы открытие прошло проверку временем. По тем или иным причинам, для многих ученых она затягивалась на десятилетия.

Однако Джеймс Чедвик, Ирен и Фредерик Жолио-Кюри, выступавшие перед шведскими и иностранными учеными 12 декабря 1935 года не могли пожаловаться на долгое время ожидания.<sup>\*)</sup> Масштаб их открытий был оценен сразу, поскольку они вызвали настоящую революцию в физике.

Первым в тот вечер выступал Чедвик. Известный ученый, долгие годы работавший вместе со своим учителем Эрнестом Резерфордом, рассказывал об открытии нейтрона. Оно было сделано весной 1932 года.

Затем на трибуну по очереди поднимаются супруги Жолио-Кюри. В январе 1934 года французские физики сообщили об открытии ими нового явления — искусственной радиоактивности.

«Впервые стало возможным внешней причиной вызвать радиоактивность некоторых атомных ядер в течение определенного промежутка времени и в отсутствие вызвавшей ее причины».

Теперь они рассказывают об этом открытии, имевшем хотя и непродолжительную, но довольно драматическую предысторию, самым темным образом связанную с обнаружением нейтрона.

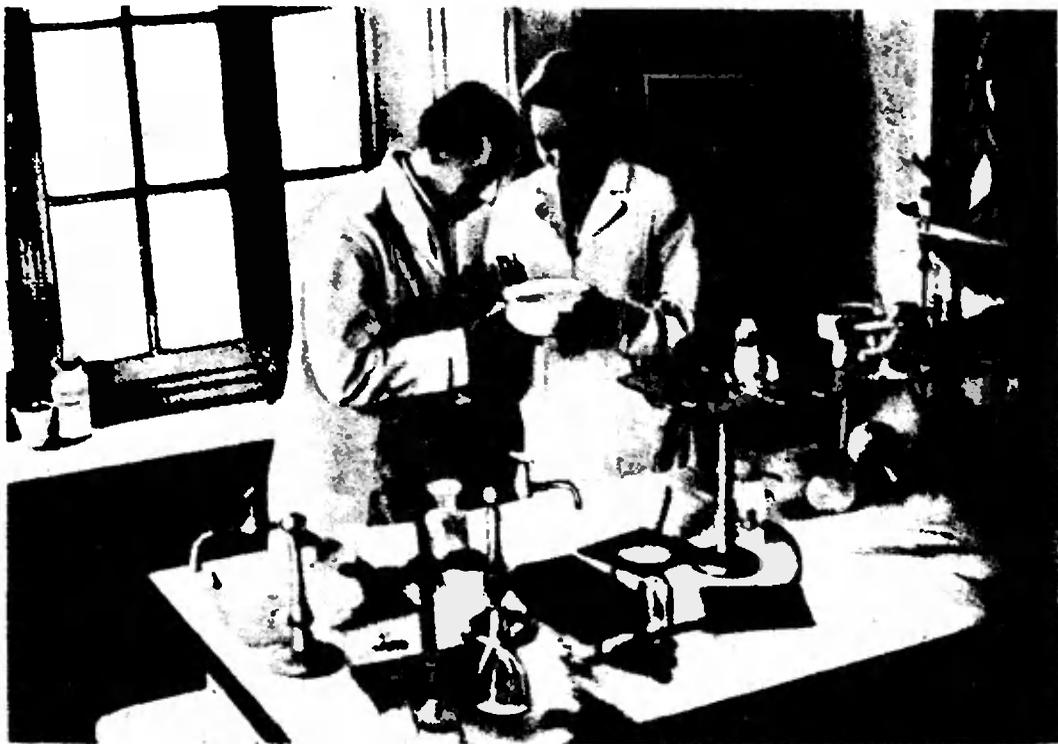
## Ирен и Фредерик Жолио-Кюри

«Для нас является великой честью и радостью, что Шведская Академия наук присудила нам премию... после того, как она удостоила Нобелевской премии Пьера и Марию Кюри в 1903 году и Марию Кюри в 1911 году за открытие радиоэлементов»,

— так начала свое выступление Ирен Кюри.

...А за десять лет до этого двадцатипятилетний инженер Фредерик Жолио впервые появился в Институте радия, возглавляемом Марией Кюри. Он пришел договориться о месте лаборанта, на которое его

\*) Чедвик получил премию по физике «За открытие нейтрона». Ирен и Фредерик Жолио-Кюри — премию по химии «За открытие искусственной радиоактивности и синтез новых радиоактивных элементов».



*Ирен и Фредерик Жолио-Кюри в лаборатории.*

рекомендовал профессор Ланжевен. Формальности были сведены к нулю: «Вы можете начать работать с завтрашнего дня?» — спросила его маленькая седая женщина с живыми глазами.

На первых порах молодому исследователю пришлось достаточно трудно, поскольку он имел самые поверхностные представления о радиоактивности. А все вокруг только ей и занимались, и особенно успешно дочь Марии Кюри — Ирен, защищавшая в это время докторскую диссертацию.

Однако Фредерик удивительно быстро освоил и теорию, и эксперимент. «Мальчик — настоящий фейерверк», — говорила о нем Мария Кюри. Процесс приобщения к радиоактивности привел к тому, что через год в мэрии четвертого округа Парижа был зарегистрирован брак Ирен Кюри и Фредерика Жолио.

Что связывало этих людей в течение тридцати лет их счастливой и трудной жизни?

«Ирен... казалась прямой противоположностью Фредерику; она была настолько же спокойна и невозмутима, насколько он — вспыльчив и экспансивен... При спорах она не шла ни

на малейшую уступку. С безжалостной прямолинейностью Ирен выдвигала свои положения, прямо бросая их в лицо собеседнику, даже если он занимал высокое общественное положение. Напротив, Фредерик Жолио, никогда не уступая по существу, умело использовал свои способности, чтобы психологически подготовить собеседника к принятию своей точки зрения» (П. Бикар\*)).

Очевидно, для них как нельзя лучше подходила любимая фраза Нильса Бора: «Противоположности — это не противоречия, а дополнения!»

В 1930 году Фредерик защитил докторскую диссертацию, и супруги Жолио-Кюри продолжили свои работы по изучению радиоактивности. Они хотели сделать мощный источник излучения, для того чтобы бомбардировать  $\alpha$ -частицами различные вещества. Изготовление такого источника было не простым и далеко не безопасным делом. Пройдут годы, и радиоактивный полоний самым страшным образом напомнит о себе.

\* П. Бикар — профессор физики. Друг Жолио-Кюри.

Но пока молодые физики стали обладателями десяти миллиардов  $\alpha$ -распадов в секунду.

В том же 1930 году в лаборатории появились пока еще никем не известные нейтроны.

## Нейтрон

Нобелевская лекция продолжается:

«В течение последних лет были открыты разного рода искусственные превращения: одни вызываются  $\alpha$ -лучами... другие нейтронами, то есть нейтральными частицами с массой 1, о которых говорил профессор Чедвик».

...Физики уже довольно долго — с 1896 года — занимались исследованиями естественной радиоактивности. Радий, торий, полоний, ... — всего около 30 веществ — испускали  $\alpha$ -частицы (ядра гелия),  $\beta$ -частицы (электроны) и  $\gamma$ -лучи (электромагнитное излучение). В 1919 году Резерфорд быстрыми  $\alpha$ -частицами расщепил ядро и обнаружил, что в состав ядер входят протоны — ядра водорода.

В 1930 году немецкие физики В. Боте и Г. Беккер, бомбардируя  $\alpha$ -частицами мишени из легких элементов, обнаружили излучение необычайной проникающей способности. Они назвали его «бериллиевые лучи» (поскольку лучше всего эксперимент шел с бериллием) и решили, что это  $\gamma$ -лучи с огромной энергией. Около года их работа не привлекала внимания, пока ею не заинтересовались Жолио-Кюри. Они провели красивые опыты — ставили на пути бериллиевых лучей вещества, содержащие водород (например, парафин), — и обнаружили, что загадочные частицы выбивают из мишеней ядра водорода — протоны. Исследователи измерили скорость этих протонов и по ней оценили энергию бериллиевых лучей, считая, что это  $\gamma$ -кванты. Получилась огромная величина.

11 января 1932 года работа была доложена во Французской Академии наук. Жолио-Кюри продолжили опы-

ты, все еще считая, что имеют дело с  $\gamma$ -лучами. Возможно, что им понадобилось бы совсем немного времени, еще несколько недель, чтобы отбросить эту гипотезу и найти правильное решение. Но тут их опередили.

Чедвик, уже 12 лет безуспешно искавший нейтрон (существование которого предсказал его учитель Резерфорд), сразу понял, с какими частицами имели дело французские физики. Его лабораторное оборудование было наготове, и понадобился всего месяц для доказательства того, что бериллиевые лучи — поток тяжелых нейтральных частиц — нейтронов. Ядерную реакцию взаимодействия  $\alpha$ -частиц с бериллием надо было записать так:



Можно представить себе разочарование французских физиков, которые так близко от финиша уступили победу.

## Позитрон

Из Нобелевской лекции:

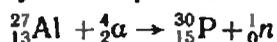
«Мы наблюдали, что алюминий и бор испускают при облучении не только протоны и нейтроны, но также и положительные электроны».

Мы наблюдали...

Пришло время кратко рассказать о приборах, а точнее, об одном, самом любимом приборе Фредерико Жолио-Кюри — камере Вильсона, с помощью которой велись эти наблюдения. В этой камере капельки жидкости, образующиеся вдоль траектории заряженной частицы, делают ее след видимым и дают возможность сфотографировать его. Большинство приборов в лаборатории Жолио-Кюри было сделано руками самих экспериментаторов или, во всяком случае, ими сконструировано. И камера Вильсона была большой и весьма усовершенствованной, так что след частицы мог быть растянут почти в 80 раз по сравнению с обычным вариантом прибора. Кроме того, камера была помещена в магнитное поле, и следы положительных частиц в ней отклонялись в одну сторону, а отрицательных — в другую. По кривизне

траектории можно было судить и об импульсе частицы.

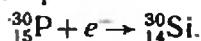
...Жолио-Кюри продолжали работу, облучая  $\alpha$ -частицами бор, фтор, натрий, и вскоре доказали, что в этих реакциях также появляются нейтроны (иногда и протоны). Тут они столкнулись с трудностями, которые и стали прологом к открытию. Трудности состояли в том, что при испускании нейтрона, например, алюминия, в результате реакции



должны образовываться ядра фосфора-30, которого никто в природе не встречал, тогда как ядра кремния-30 —  ${}_{14}^{30}\text{Si}$  — спокойно существовали.

Наверное, при облучении все же появляется кремний, — решили исследователи, и стали изобретать механизм, при котором ядро фосфора-30 с зарядом +15 могло бы потерять единицу заряда, не меняя массы.

Сначала предположили, что оно захватывает во время реакции один из атомных электронов и превращается в ядро кремния:



Если бы все знать наперед! Ведь переход  ${}_{15}^{30}\text{P} \rightarrow {}_{14}^{30}\text{Si}$  мог быть осуществлен и при испускании положительного электрона — позитрона. Более того, на фотографиях в камере Вильсона французские физики давно замечали следы, выходящие из мишени, по всем признакам электронные, но только поворачивающие в магнитном поле в сторону, соответствующую заряду  $e^+$ . Они объясняли их электронами, летящими назад — к мишени.

«Нильс Бор заинтересовался этими снимками, но мы сделали ошибку, не уделив должного внимания этим следам».

Прошло еще несколько месяцев, прежде чем в космических лучах Андерсон открыл существование позитрона. Все вроде бы встало на свои места, и Жолио-Кюри могли теперь записать реакцию взаимодействия ядер алюминия с  $\alpha$ -частицами в виде



Второй раз они были так близки к обнаружению новой частицы и второй раз опоздали!

## Искусственная радиоактивность

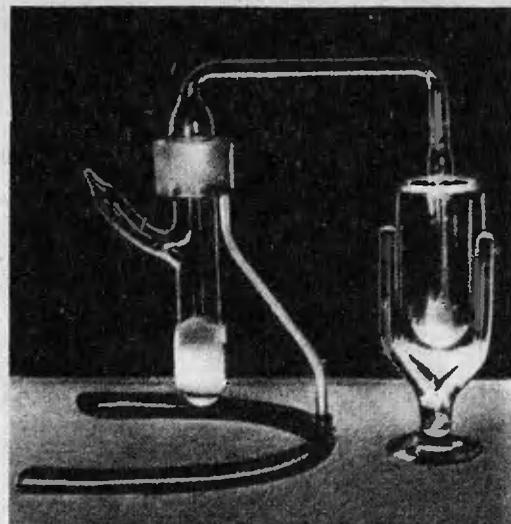
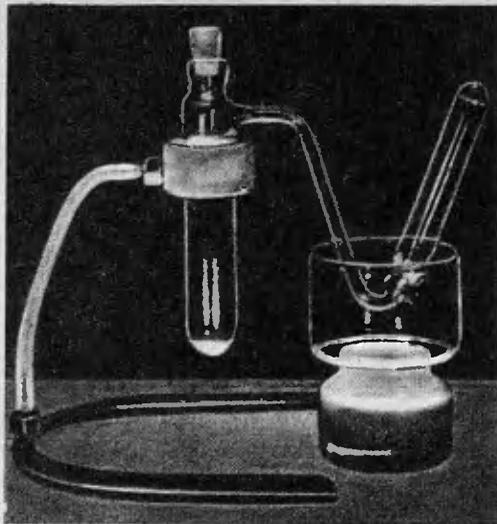
Теперь следует то, что можно было бы назвать формулой открытия:

«Имеются два процесса, различно протекающие во времени. Сначала происходит захват  $\alpha$ -частицы, и мгновенное испускание нейтрона с образованием... фосфора-30... Затем этот неустойчивый, то есть новый радиоактивный элемент... распадается по экспоненциальному закону с временем полураспада в три минуты и образует кремний».

Но до этого объяснения оставались еще месяцы упорного труда. Осенью 1933 года на Сольвеевском конгрессе в присутствии крупнейших физиков супруги Жолио-Кюри рассказали о своих опытах, при которых под действием  $\alpha$ -лучей из ядер алюминия, фтора, натрия вылетали нейтроны и позитроны. «Большинство из присутствующих на конгрессе физиков не поверило в правильность наших опытов. После заседания мы были очень огорчены, но в этот момент Нильс Бор отвел нас в сторону... и сказал, что придает большое значение полученным результатам. Вслед за этим и Паули поддержал нас своим одобрением» (Ф. Ж-К).

Вернувшись с конгресса в Париж, Жолио-Кюри снова приступают к работе. И наконец пришел тот день, а точнее январский вечер 1934 года, когда это произошло. Неизвестно, насколько можно доверять легенде, которая бытует среди физиков, но согласно ей это произошло так. Ирен и Фредерик спешили закончить свои опыты, поскольку в тот вечер были приглашены в гости, спешили, и в результате кто-то из них опрокинул ампулу с полонием. Альфа-частицы перестали попадать на алюминиевую фольгу, а счетчик продолжал считать позитроны, правда, все медленнее и медленнее.

Дальше легенда уже подтверждается воспоминаниями П. Бикара: «Все стало ясным... При условии, что пощелкивание счетчиков вызвано новым излучением, а не поломкой самих приборов. Этот вопрос Жолио задал себе в 6 часов вечера. Но они уже не могли отказаться от приглашения в гости. К счастью, в лабора-



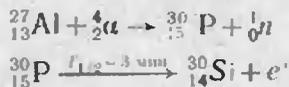
Приборы, с помощью которых Жюлио-Кюри удалось выделить радиоактивные элементы.

тории работал молодой немецкий физик В. Гентнер, специалист по счетчикам. Жюлио... попросил его проверить правильность их действия...

На следующее утро Фредерик и Ирен нашли на своем столе записку Гентнера, в которой он уверял, что счетчик в полном порядке».

Итак, когда унесли источник  $\alpha$ -частиц, алюминиевая фольга продолжала излучать позитроны! Они испускались еще некоторое время, при этом число их уменьшалось вдвое каждые три минуты, строго следуя закону радиоактивного распада, который открыл Резерфорд для естественных радиоактивных изотопов.

Реакция взаимодействия  $\alpha$ -частиц с алюминием представилась теперь с совершенно новой стороны —



— и впервые были произнесены слова «искусственная радиоактивность».

...На трибуну поднимается Фредерик Жюлио-Кюри и продолжает рассказ Ирен:

«Получив истолкование первых результатов при помощи выводов чисто физического характера, мы поставили своей целью подкрепить наши гипотезы с помощью... химических доказательств реальности вызванных превращений».

Физики на время превратились в химиков, чтобы выделить образовав-

шийся фосфор из алюминия. Сделать это было нелегко: ведь период полураспада фосфора мал — всего около трех минут. Кроме того, выделить несколько радиоактивных атомов вообще невозможно. Однако можно сначала подмешать к ним весомое количество неактивного фосфора-31, обладающего абсолютно теми же химическими свойствами, а затем проводить извлечение. Атомы фосфора-30 будут всюду следовать за своими стабильными «братьями» — атомами фосфора-31.

Облученную алюминиевую фольгу и кусочек красного фосфора помещали в пробирку с соляной кислотой. Из пробирки выделялся водород вместе с фосфористым водородом, которые и собирались в другую пробирку. Вся операция проделывалась за считанные минуты. Потом пробирка с газами подносилась к счетчику, и он начинал считать позитроны. Вот теперь можно было праздновать победу!

### Открытие завоевывает мир

«Число известных в настоящее время искусственно полученных радиоизотопов уже превосходит число естественных радиоэлементов, которые находятся в земной коре»,

— говорил Ф. Жюлио-Кюри.

Это было похоже на фейерверк: в начале 1934 года — три искусственных радиоизотопа, к концу — уже около пятидесяти. Их получали облучением элементов  $\alpha$ -частицами, протонами и дейтронами на только что созданных ускорителях. В Италии группа Энрико Ферми использовала незаряженные снаряды — нейтроны, которые легко проникали в ядро. Уже начиналось применение искусственных радиоизотопов в химии, в медицине. Со временем к этому списку добавились биология, энергетика, металлургия, пищевая промышленность, криминалистика, сельское хозяйство и т. д., и т. п. Искусственных радиоактивных изотопов известно более тысячи (а стабильных изотопов — около 300), и число их «специальностей» перевалило за сотню.

Как случилось, что искусственную радиоактивность обнаружили именно Ирен и Фредерик Жолио-Кюри? Какие качества физиков-экспериментаторов позволили им совершить это открытие?

О двух главных качествах написал Б. Понтекорво\*): могучей научной фантазии и способности признавать даже самый, казалось бы, невероятный и странный факт. Можно добавить к этому и третье — научное предвидение.

\* )Б. Понтекорво — советский физик, академик. Несколько лет работал в лаборатории Жолио-Кюри.

Снова вернемся к декабрьскому вечеру 1935 года, заснеженному Стокгольму и Нобелевской лекции, последней слова которой произносит Фредерик Жолио-Кюри, держа в руках несколько листов бумаги.

«Если мы охватим взором прогресс науки, который происходит все более и более нарастающими темпами, мы получим право думать, что исследователи, которые создают или разрушают элементы по своему желанию, сумеют добиться превращений, имеющих характер взрыва, добиться настоящих цепных реакций.

ЕСЛИ МЫ СМОЖЕМ ОСУЩЕСТВИТЬ ПОДОБНЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ, ТО УДАСЯ ВЫСВОБОДИТЬ ОГРОМНОЕ КОЛИЧЕСТВО ЭНЕРГИИ, КОТОРУЮ МОЖНО БУДЕТ ИСПОЛЬЗОВАТЬ».

И дальше звучат его слова об ответственности ученых перед человечеством.

Еще не было видно никаких практических путей высвобождения ядерной энергии, и подавляющее большинство ученых даже не задумывалось об этом. А между тем оставалось семь лет до создания первого ядерного реактора,

десять — до атомных взрывов над Хиросимой и Нагасаки,

четырнадцать — до испытания водородной бомбы,

девятнадцать — до пуска первой атомной электростанции.

## Катастрофа на экваторе

В Москве сейчас зима, в Австралии — лето. А какое время года в столице Экватора, городе Кито, расположенном на экваторе? На этот вопрос жители этого города отвечают шуткой: «Если солнечно, то лето, если дождь — зима». А если ответить серьезно?

Высота кульминации Солнца день ото дня меняется. У нас, в северном

полушарии, день низшей кульминации Солнца наступает 22 декабря («зимнее солнцестояние»). В южном полушарии, как известно, этот день — 22 июня («летнее солнцестояние»). А теперь представим себе, что мы двинемся к экватору: дата низшей кульминации остается неизменной. Но стоит перешагнуть через экватор — и эта величина меняется скачком, на целых 6 месяцев. Сделаем шаг назад — скачок на 6 месяцев обратно! Как объяснить этот парадокс?

На самом деле ничего удивительного здесь нет. Просто не все физические ве-

личины изменяются непрерывно — иногда бывают разрывы, скачки. Математическую теорию «неплавных» изменений называют теорией особенностей или (с легкой руки французского математика Р. Тома) теорией катастроф.

В описанном случае на экваторе происходит простейшая «катастрофа»: сколь угодно малое изменение одной величины (географической широты) приводит к значительному скачкообразному изменению другой (даты низшей кульминации)

(Окончание см на с. 23)

## Так ли прост евклидов мир?

Кандидат физико-математических наук  
И. Х. САБИТОВ

Геометрию, изучаемую в школе, называют *евклидовой* в честь древнегреческого ученого Евклида, сумевшего систематизировать эту науку на основе аксиоматического метода. Среди аксиом геометрии, предложенных Евклидом, наибольшую известность снискала пятая — *аксиома параллельных*. Эта аксиома (или «пятый постулат», как ее назвал Евклид в своих «Началах»), в сущности, утверждает, что *через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести единственную прямую, параллельную данной*. Правда, в «Началах» Евклид формулировал это утверждение в другой (но эквивалентной) форме: «Если прямая пересекает две прямые и образует внутренние односторонние углы в сумме меньше двух прямых, то при неограниченном продолжении этих двух прямых они пересекутся с той стороны, где углы меньше двух прямых».

Но геометрия Евклида — не единственная логически возможная

геометрия: существуют еще *неевклидовы геометрии*, в которых аксиома параллельных предстает совсем в другом облике. Аксиома — *через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести по крайней мере две прямые, параллельные данной*, — приводит к геометрии, носящей имя нашего великого соотечественника Н. И. Лобачевского<sup>\*)</sup>, а аксиома — *через точку, не лежащую на данной прямой, нельзя провести ни одной прямой, параллельной данной* — приводит к римановой (или эллиптической) геометрии (рис. 1).

Какая из этих трех логически мыслимых геометрий — Евклида, Лобачевского или Римана — имеет место в нашем реальном физическом мире?

На этот вопрос ответить сразу не так-то просто — совсем не ясно, как экспериментально проверить аксиому параллельных. Ведь «неограниченно продолжать» прямую можно только в теории, на практике же даже самым мощным астрономическим приборам доступна лишь ограниченная часть Вселенной. Более того, как видно из рисунка 2, в ограниченной области имеется много прямых, лежащих на данной плоскости, проходящих через данную точку, но не пересекающих данную прямую в пределах доступной нам области (даже если евклидов пятый постулат на самом деле и верен).

<sup>\*)</sup> О поучительной и драматической истории открытия неевклидовой геометрии, в которой, кроме Лобачевского, участвовали К. Ф. Гаусс и Я. Больяи, можно прочитать в статье академика А. Д. Александрова («Квант», 1982, №№ 11, 12).



Рис. 1. В геометриях Евклида, Лобачевского и Римана — разные аксиомы параллельных.



Рис. 2. В ограниченной части пространства непосредственно не видно, какая из аксиом параллельных имеет место.

Так как же осуществить экспериментальную проверку аксиомы параллельных?

### Сумма углов треугольника — пробный камень геометрии мира?

Оказывается, это, в принципе, возможно. Дело в том, что аксиома Евклида о параллельных прямых равносильна утверждению, что сумма углов произвольного треугольника равна  $180^\circ$ \*, а в геометрии Лобачевского получается, что эта сумма меньше  $180^\circ$ . Поэтому Гаусс, используя геодезические измерения, решил вычислить сумму углов в треугольнике, образованном тремя высокими вершинами (Броккен, Хохенгаген и Инзельберг) в горном массиве Гарц, отстоящими друг от друга приблизительно на 100 км. Лобачевский выбрал для своих вычислений космические масштабы — он измерил сумму углов треугольника, вершинами которого были Земля, Солнце и самая яркая звезда северного полушария Сириус. Но в обоих экспериментах полученные отклонения от  $180^\circ$  были в пределах допустимой ошибки измерений, поэтому никакого вывода о геометрии реального мира они не дали.

Однако представим себе, что кому-нибудь наблюдателю удалось с безукоризненной точностью установить, что сумма углов некоторого треугольника равна  $180^\circ$ . Значит ли это, что наша геометрия — евклидова?

Ответ утвердительный, если мы считаем верной теорему Лежандра. Эта теорема, разумеется, доказывается с использованием других аксиом Евклида. Но выполняются ли остальные аксиомы в реальном мире? Например, почему можно быть уверенным в том, что две прямые, пересекающиеся на лежащем перед нами листе бумаги, больше нигде в реальном пространстве не пересекутся,

\*) Более того, французский математик А. Лежандр доказал, что аксиома параллельных следует из существования хотя бы одного треугольника с суммой углов  $180^\circ$  (см. доказательство в книге *Энциклопедия элементарной математики*, М.: «Наука», 1966, т. V, с. 394).

как бы далеко мы их ни продолжали? Давайте поэтому относиться ко всем аксиомам Евклида с одинаковой требовательностью — ни про одну аксиому не будем заранее предполагать, что если она доступна проверке в ограниченной области, то она справедлива и во всем пространстве.

Тогда мы придем к такому вопросу: предположим, что всюду в реальном пространстве все аксиомы евклидовой геометрии выполнены «в малом», то есть в пределах досягаемости для наших измерительных приборов (где бы ни находился наблюдатель); верно ли тогда, что реальное пространство является евклидовым «в целом» (то есть все евклидово трехмерное пространство является правильной моделью всего физического пространства)? Этот важный (в сущности, космогонический) вопрос допускает чисто математическую формулировку, которая и будет интересовать нас здесь.

### Постановка задачи

Пусть в окрестности каждой точки пространства (скажем, в некотором шаре с центром в этой точке) выполнены все положения евклидовой геометрии. (Разумеется, сформулированные так, чтобы они имели смысл в пределах шара; например, аксиома параллельных должна быть заменена на утверждение «Сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ » и т. п.) Что тогда можно сказать о геометрии всего пространства?

Пространство со свойством евклидовости в окрестности каждой точки называется *локально евклидовым*.

Математически более точно определение локально евклидова пространства следующее. Два множества  $A$  и  $A'$ , в каждом из которых определено расстояние между любой парой точек, называются *изометричными* (от греческих слов «изос» — одинаковый, равный и «метрон» — мера, длина), если между их точками можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее расстояния (это значит, что расстояние  $|ab|$  равно  $|a'b'|$  для любых точек  $a, b \in A$ , если  $a', b'$  — соответствующие точки из  $A'$ ). Так вот, пространство называется *локально евклидовым*, если в нем определено расстояние между любыми двумя его точками и если каждая его точка имеет окрестность, изометричную некоторому шару обыкновенного евклидова пространства.

В данной статье мы не имеем возможности заниматься локально евклидовыми пространствами трех измерений, а ограничимся рассмотрением локально евклидовых пространств только двух измерений. Мы будем их называть *локально евклидовыми плоскостями*. Нашу задачу можно сформулировать так: как устроены локально евклидовы плоскости в целом?

### Цилиндр и его развертка

Разумеется, простейший пример локально евклидовой плоскости — это сама евклидова плоскость. На ней мы останавливаться не будем — тут все ясно, — а начнем со следующего по простоте примера — *бесконечной цилиндрической поверхности* (или, кратко, — *цилиндра*). На рисунке 3 она представлена как множество всех точек на горизонтальных прямых (образующих), проходящих через всевозможные точки единичной окружности  $C_0$  (направляющей), расположенной в вертикальной плоскости  $\alpha$ .

Но пока у нас нет «геометрии» на цилиндре. Нам нужно определить расстояние между точками, выяснить, что понимать под «прямой» на цилиндре, и т. д. Чтобы это сделать, разрежем наш цилиндр  $\mathcal{C}$  по одной из образующих и развернем его на координатную плоскость  $Oxy$  в виде бесконечной полосы  $\mathcal{P}$ , точки  $(x; y)$  которой удовлетворяют неравенству  $0 \leq y < 2\pi$  (рис. 4). Мы будем считать, что плоская полоса  $\mathcal{P}$  со «склеенными краями» (то есть полоса, у которой все пары точек  $(b; 0)$ ,

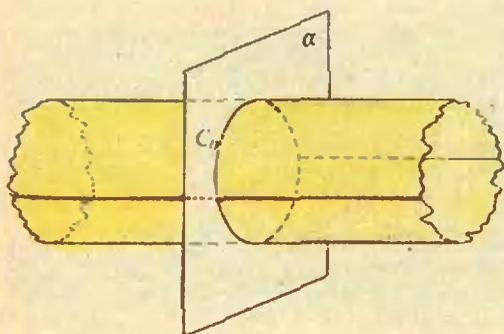


Рис. 3. Бесконечный цилиндр.

$(b; 2\pi)$  считаются совпадающими) и задает «геометрию» на цилиндре. Как говорят математики, мы отождествляем пары точек вида  $(b; 0)$  и  $(b; 2\pi)$  для всех  $b$  и рассматриваем геометрию на полосе  $\mathcal{P}$ , учитывая это отождествление.

Проверим локальную евклидовость такой геометрии на цилиндре. Для этого возьмем произвольную точку  $A(x; y) \in \mathcal{P}$ . Если точка  $A = A_1$  не лежит на краях полосы (см. рис. 4), то все очевидно: возьмем круг радиуса  $r$ , меньшего, чем расстояние от  $A$  до ближайшего края; этот круг целиком лежит в полосе  $\mathcal{P}$  и, разумеется, представляет собой обычный евклидов круг. Если же точка  $A = A_2$  лежит на краю полосы (см. рис. 4), то ее координаты имеют вид  $(b; 0) \equiv (b; 2\pi)$  и круговой окрестностью служит, например, объединение двух (склеенных!) полукругов единичного радиуса с центрами в точках  $(b; 0)$  и  $(b; 2\pi)$ , а так как эти полукруги склеиваются по диаметрам  $MN \equiv M'N'$ , после склейки получается обычный единичный евклидов круг.

На цилиндре  $\mathcal{C}$ , как на поверхности в пространстве, естественно задать расстояние между точками как длину кратчайшей линии, идущей по  $\mathcal{C}$  и соединяющей эти точки. На основании этого на цилиндре тоже можно развить некоторую геометрию. Вдумчивый читатель спросит: будет ли эта геометрия совпадать с геометрией на полосе  $\mathcal{P}$  с отождествленными краями? Оказывается, что будет. Однако обоснование этого факта (относящегося к так называемой *дифференциальной геометрии*) выходит за рамки нашей статьи.

### Геометрия на цилиндре

Мы установили, что локально (в малом) геометрия цилиндра —

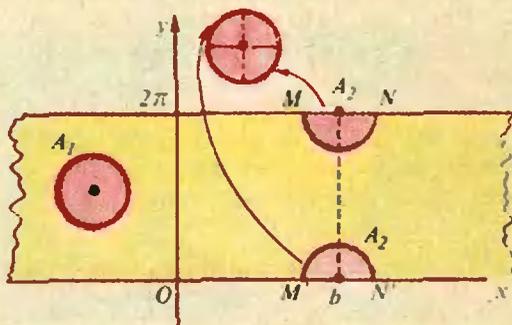


Рис. 4. Цилиндр (полоса со склеенными сторонами) — локально-евклидов.

евклидова. А как выглядит геометрия на цилиндре (то есть, на полосе  $\Pi$  с отождествленными краями) в целом? Как устроено «расстояние» на цилиндре? Какие на нем «прямые»? Какие аксиомы на нем выполняются?

Прежде чем ответить на эти вопросы, разберем один несколько необычный пример. Пусть в некоторой местности проходят две параллельные дороги, вдоль которых довольно часто расположены дорожные станции; из каждой станции идет одна линия телефонной связи — в симметричную станцию на другой дороге. Во внутренних пунктах местности телефонной связи нет, и сообщения передаются, скажем, бегунами. Примем за расстояние между двумя пунктами время, требующееся для передачи какого-либо сообщения. Тогда ясно, что для скорейшей передачи сообщения из пункта  $A$  в пункт  $B$  иногда гонцу лучше бежать не прямо из  $A$  в сторону  $B$ , а в противоположную сторону, к ближайшей телефонной станции.

Такого же рода необычное расстояние имеет место на нашей полосе со склеенными краями. Действительно, рассмотрим точки  $A, B, C$  в полосе  $\Pi$ . Для точек  $A$  и  $B$  (чья координаты  $y_A$  и  $y_B$  отличаются меньше, чем на половину ширины полосы —  $\pi$ ) расстояние обычное, то есть — длина отрезка  $AB$ . А вот для  $A$  и  $C$  (для которых  $|y_A - y_C| > \pi$ ) расстояние равно  $|AK'| + |KC|$ , где  $A'$  получается из  $A$  сдвигом вверх на вектор  $\vec{AA}'$  длины  $2\pi$ ,  $K$  — точка пересечения отрезка  $CA'$  с краем полосы и  $\vec{KK'} = -\vec{AA}'$  (рис. 5). На

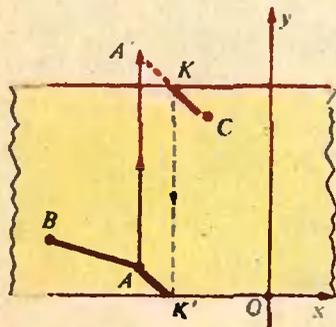


Рис. 5. Кратчайшее расстояние между точками  $A$  и  $C$  равно  $|AK'| + |KC|$ .

языке «телефонного» примера выгоднее гонца послать из  $C$  в точку  $K$ , передать сообщение мгновенно по телефону в  $K'$  и доставить его в  $A$  со вторым гонцом по отрезку  $K'A$ .

Задача 1. Докажите, что расстояние от точки  $A(x_A; y_A)$  до точки  $B(x_B; y_B)$  на полосе  $\Pi$  со склеенными краями задается формулой

$$|AB| = \begin{cases} \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} & \text{если } |y_A - y_B| \leq \pi, \\ \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (2\pi - |y_A - y_B|)^2} & \text{если } |y_A - y_B| > \pi. \end{cases}$$

«Прямые», как и расстояния, в нашей геометрии необычны — они бывают трех типов (рис. 6, а). Во-первых, прямой будет любая обычная прямая, параллельная краям полосы. Во-вторых, «прямой» будет любой отрезок (со склеенными концами), соединяющий края и перпендикулярный им. И в-третьих, «прямой» будет совокупность периодически повторяющихся параллельных косых отрезков — таких, как на рисунке 6, а. На цилиндре в пространстве эти три типа прямых представляют собой, соответственно, образующие цилиндра, окружности, параллельные направляющей, и винтовые линии (рис. 6, б).

Что касается аксиом, заметим прежде всего, что аксиома параллельных выполняется «в целом» (на всей поверхности)!

Задача 2. Найдите (единственные) «прямые», параллельные «прямым»  $KL, MN$  и  $ST$ , проходящие через точку  $A$  на рисунках 6, а и б.

Но теперь уже нарушаются другие аксиомы Евклида. Даже такая: *Через две точки проходит только одна прямая*. Например, красная

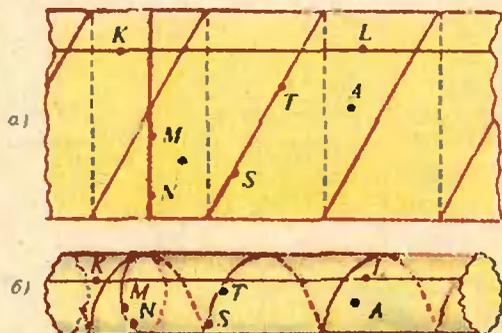


Рис. 6. Три типа «прямых» на цилиндре: винтовая линия  $ST$ , прямая  $KL$ , окружность  $MN$ .

(винтовая) «прямая» пересекается с черной (образующей)... бесконечное число раз (см. рис. 6)!

**Задача 3.** Опишите те пары точек на цилиндре, через которые проходит только одна прямая.

Этим курьезы цилиндрической геометрии не исчерпываются. Читатель заметил, наверное, что «прямые» на цилиндре, параллельные направляющей, ограничены: максимальное расстояние между точками на такой прямой... равно  $\pi$ .

**Задача 4.** Приведите примеры, показывающие, что отрезок «прямой» не всегда является кратчайшим путем между своими концевыми точками, наклонная иногда короче перпендикуляра, теорема Пифагора верна не всегда. Исследуйте, как выглядит «окружность» (то есть множество точек, равноудаленных от данной точки) при увеличении ее радиуса.

Таким образом, локальная выполнимость всех аксиом евклидовой геометрии, и даже выполнимость «в целом» аксиомы о параллельных, не гарантирует, что мир, в котором разворачивается такая геометрия, обязательно будет неограниченной плоскостью. Возможно и строение такого мира в виде бесконечного цилиндра, а также, как мы сейчас увидим, в виде других геометрических образований.

### Плоский тор

Пусть на плоскости  $Oxy$  дан прямоугольник  $T$  с вершинами  $A, B, C, D$  (рис. 7). отождествим сторону  $AB$  со стороной  $CD$  так, что  $A$  отождествляется с  $D$ , а  $B$  — с  $C$ ; далее отождествим сторону  $BC$  — со стороной  $AD$  так, что  $B$  совпадает

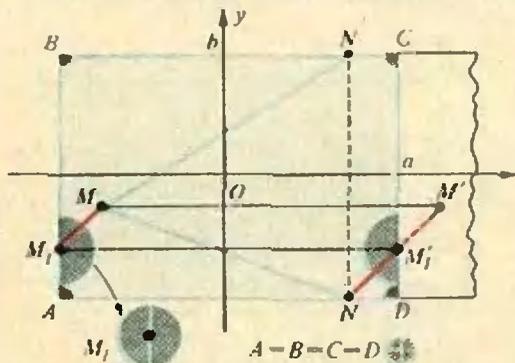


Рис. 7. Плоский тор — склеенный прямоугольник. Кратчайшее расстояние между точками  $M$  и  $N$  равно  $|MM_1| + |M_1N|$ .

с  $A$ , а  $C$  — с  $D$  (при таком отождествлении окажется, что все вершины прямоугольника  $T$  сливаются в одну точку). Определим «расстояние» между двумя точками прямоугольника как длину кратчайшего пути между этими точками, учитывая при этом указанное выше соглашение об отождествлении.

Например, вычислим «расстояние» между точками  $M(-\frac{3}{4}a; \frac{1}{4}b)$

и  $N(\frac{3}{4}a; b)$  (см. рис. 7). Прежде всего замечаем, что отрезок  $MN'$ ,

где  $N'(\frac{3}{4}a; -b)$ , короче отрезка  $MN$ ; следовательно, кратчайший путь от  $M$  к  $N$  надо искать среди путей, соединяющих  $M$  с  $N'$  (так как  $N'$  и  $N$  — это одна и та же точка по условию отождествления). Правая окрестность стороны  $AD$  — это одновременно правая окрестность стороны  $BC$ ; поэтому, «приставив» полоску  $a \leq x < 2a, -b \leq y \leq b$  к стороне  $BC$  (см. рис. 7), видим, что всякий другой путь из  $M$  в  $N'$ , в том числе отрезок  $MN'$ , длиннее, чем отрезок  $M'N'$ . Значит, самый короткий путь из  $M$  в  $N$  — это объединение отрезков  $MM_1$  и  $M_1N'$  и «расстояние» между  $M$  и  $N$  равно  $\sqrt{(a/2)^2 + (3b/4)^2}$ .

**Задача 5.** а) Укажите примеры пар точек прямоугольника  $T$ , «расстояние» между которыми равно  $\sqrt{a^2 + b^2}$ ; б) покажите, что «расстояние» между любыми двумя точками не больше, чем  $\sqrt{a^2 + b^2}$ ; в) покажите, что для любой данной точки найдется единственная точка, отстоящая от данной на расстояние  $\sqrt{a^2 + b^2}$ .

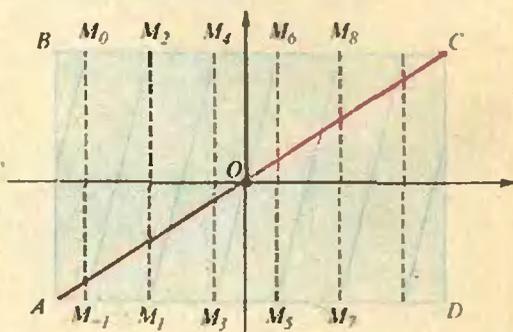


Рис. 8. Две «прямые» (красная и синяя) на торе.

Прямоугольник  $T$  с отождествленными парами противоположных сторон и указанным выше правилом вычисления «расстояний» называется *плоским тором*.

«Прямые» на плоском торе определяются как и в плоскости  $\Pi$  — модели цилиндра. На рисунке 8 изображены две «прямые»: красная замкнутая «прямая»  $AC$  состоит из одного евклидова отрезка, синяя «прямая» состоит из многих отрезков —  $\dots M_{-1} (= M_0) M_2 (= M_1) M_4 (= M_3) \dots$  — и она, возможно, замкнется при дальнейшем ее продолжении.

**Задача 6.** Докажите, что «прямая» на плоском торе будет замкнутой в том и только в том случае, когда число  $(a \operatorname{tg} \alpha) / b$  является рациональным, где  $\operatorname{tg} \alpha$  — угловой коэффициент (относительно оси  $Ox$ ) отрезков в  $T$ , составляющих эту прямую.

Мы утверждаем, что построением таким образом геометрия на плоском торе — локально евклидова. Действительно, каждая внутренняя точка прямоугольника  $T$  имеет малую окрестность, где все введенные для плоского тора объекты и правила измерения — те же самые, что и в евклидовой геометрии. Для точки  $M_1$  на границе доказательство усматривается из рисунка 7. Для вершины это видно из того же рисунка: все окрестности отождествляемых четырех вершин «снеслись» в одно место с учетом закона отождествления, и геометрия вокруг вершины тоже оказалась геометрией евклидова круга!

Итак, плоский тор представляет собой еще один пример локально

евклидова мира. На нем, как и на цилиндре, пятый постулат справедлив «в целом», однако строение тора «в целом» отличается и от обычной плоскости, и от цилиндра.

**Задача 7.** Докажите, что на плоском торе нет сколь угодно больших расстояний, хотя есть сколь угодно длинные прямые. Исследуйте форму «окружности» на плоском торе при увеличении ее радиуса.

Есть еще одно важное отличие плоского тора от цилиндра: плоский тор нельзя с сохранением длин кривых представить в трехмерном пространстве в виде поверхности, на которой пары отождествляемых сторон —  $AB$  и  $CD$ ,  $BC$  и  $AD$  — были бы действительно склеены вместе, как это происходит с краями полосы  $\Pi$  при свертывании ее в цилиндр. Но это отличие уже называют *внешним*, так как оно проявляется лишь при попытке связать геометрию полосы  $\Pi$  и прямоугольника  $T$  с геометрией некоторой поверхности во внешнем по отношению к ним пространстве. Если прямоугольник  $T$  считать сделанным из резины и допускать растяжения, то из него можно склеить тор: более подробно об этом см. статью А. Землякова («Квант», 1979, № 9, с. 2).

### Бесконечный лист Мёбиуса

Снова рассмотрим бесконечную полосу  $\Pi$ :  $a \leq y \leq b$ ,  $-\infty < x < +\infty$ , но на этот раз проведем отождествление краев полосы  $\Pi$  по следующему закону: точка  $(x; a)$  отождествляется с точкой  $(-x; b)$  (то есть прямая  $y=b$  сначала отражается зеркально относительно оси  $Oy$  и лишь затем отождествляется с прямой  $y=a$ ). Определения «расстояния» и «прямых» аналогичны случаям цилиндра и плоского тора. Полученная при этом локально евклидова плоскость называется *бесконечным листом Мё-*

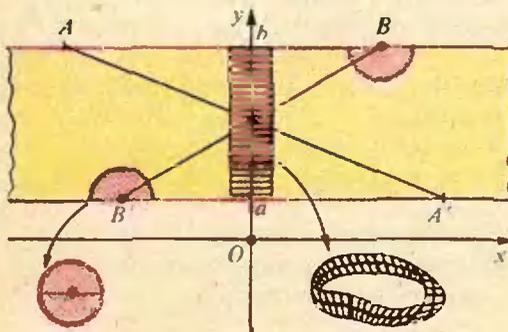


Рис. 9. Бесконечный лист Мёбиуса.

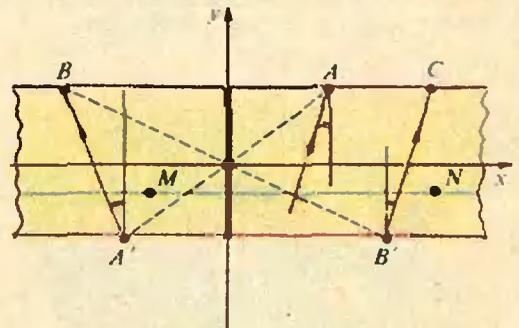


Рис. 10. Прямые на бесконечном листе Мёбиуса: черная (вертикальная), синяя ( $MN$ ), красная ( $A'B$ ).

*биуса* (обычный лист Мёбиуса является частью бесконечного, получаемый склейкой вертикальной полосы (рис. 9). На рисунке 10 нарисованы три «прямые»: черного цвета — замкнутая, синего цвета — параллельная краю полосы  $P$ , красного цвета — наклонная, состоящая из бесконечного числа евклидовых отрезков. На примере точки  $B$  (см. рис. 9) показано, как закон отождествления порождает евклидову геометрию вблизи точки края полосы  $P$ .

**Задача 8.** Исследуйте геометрию на бесконечном листе Мёбиуса. Покажите, что каждая наклонная прямая пересекает себя бесконечное число раз. Верен ли пятый постулат «в целом»? Как выглядят окружности?

### Плоская бутылка Клейна

Обратимся снова к прямоугольнику на рисунке 7. Введем следующее правило отождествления: сторону  $AD$  отождествляем с  $BC$  с сохранением порядка следования точек, то есть точка  $(-a, y) \in AD$  отождествляется с точкой  $(a, y) \in BC$ , а сторону  $AB$  отождествим со стороной  $CD$  с изменением порядка следования точек, то есть точка  $(x, -b) \in AB$  отождествляется с точкой  $(-x, b) \in CD$ ; в частности, все вершины будут считаться за одну точку. «Прямые» и правила измерения «расстояний» введем как и выше. Можно проверить, что снова в окрестности каждой точки геометрия получается евклидова (проведите эту проверку для окрестности вершины прямоугольника). Эта модель локально евклидовой геометрии называется *плоским односторонним тором* или *плоской бутылкой Клейна*.

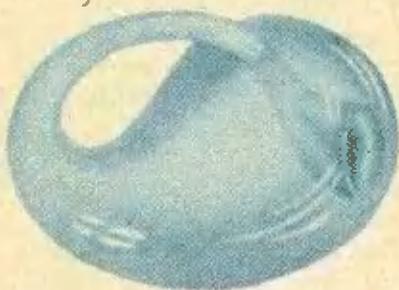


Рис. 11. Модель бутылки Клейна (с самопересечением).

**Задача 9.** Исследуйте геометрию на плоской бутылке Клейна.

Так же, как плоский тор, плоскую бутылку Клейна нельзя поместить в трехмерное пространство, не искажая расстояния на ней. Более того, ее можно поместить в пространство только с самопересечениями, даже если разрешать растяжения и сжатия (без разрывов). Модель бутылки Клейна с самопересечением показана на рисунке 11.

### Заключение

Итак, принцип одинаковости требовательности ко всем аксиомам несомненно себя оправдал: мы обнаружили, что евклидова геометрия плоскости жива не единой аксиомой о параллельных, но что и другие аксиомы существенным образом определяют ее облик. Более того, оказалось, что даже евклидовость в окрестности каждой точки и выполнение пятого постулата всюду не приводят еще к евклидовости в целом (пример: цилиндр и плоский тор). Значит, если даже во всех отдельно исследованных частях пространства геометрия окажется евклидовой, то в целом строение такого мира вовсе не обязательно будет столь простым, как двумерная плоскость или трехмерное пространство.

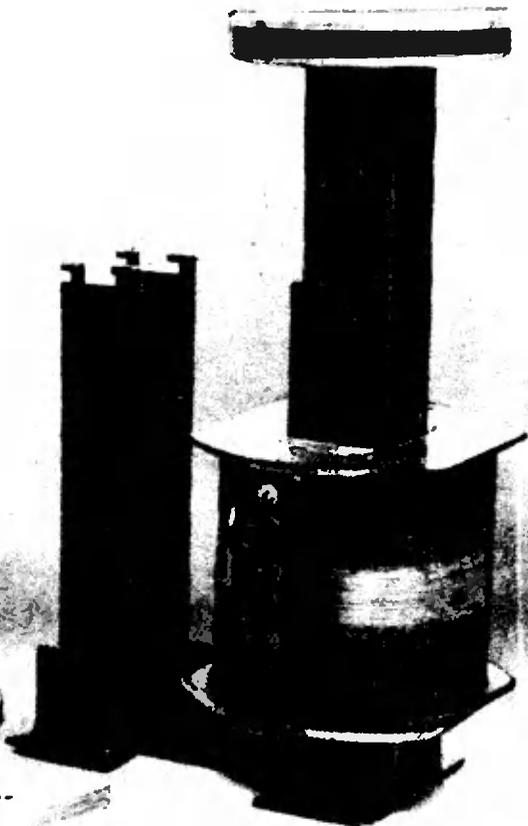
В курсах высшей геометрии доказывается, что кроме перечисленных пяти примеров — плоскость, цилиндр, плоский тор, бесконечный лист Мёбиуса и плоская бутылка Клейна — других полных локально евклидовых «миров» нет. (*Полнота*, грубо говоря, означает, что можно неограниченно продолжить каждую «прямую», хотя бы и по самой себе.)

Что касается локально евклидовых пространств трех измерений, то их существует 18 типов. Из них мы упомянем лишь один пример: это слой пространства между двумя параллельными плоскостями, которые считаются отождествленными по точкам, симметричным относительно средней плоскости в слое.



## Удивительная жидкость

И. А. МЕДКОВ



В этой статье будет рассказано о некоторых свойствах необычного вещества — ферромагнитной жидкости — и о простых экспериментах с ней.

Если с твердыми магнитами человечество знакомо с древнейших времен, то ферромагнитные жидкости, то есть коллоидные растворы твердых ферромагнетиков, были получены лишь в 60-х годах нашего века. Сейчас эти новые вещества уже достаточно изучены и даже находят некоторое практическое применение.

Давайте и мы «познакомимся» с ферромагнитной жидкостью и ее свойствами.

### Как приготовить ферромагнитную жидкость

Прежде всего вам понадобятся kastоровое масло (его можно купить в аптеке) и гидрат окиси железа  $\text{Fe}_2\text{O}_3 \cdot n\text{H}_2\text{O}$  (он есть в школьном кабинете химии).

Автор этой статьи Илья Медков — ученик 10 класса 204-й московской школы.

В фарфоровую ступку налейте 10–15 г масла и смешайте его с измельченным ферромагнетиком до образования жидкости, похожей на густую сметану. Приготовленную смесь растирайте в ступке в течение 10–15 минут.

То, что у вас получилось, не есть настоящий коллоидный раствор, так как частицы неоднородны и их размеры гораздо больше, чем  $10^{-6}$ – $10^{-9}$  м. (Для получения действительно коллоидных растворов необходимы сложные аппараты, например вибромельница для измельчения частиц и центрифуга для последующего разделения их по размерам.) Однако для изучения характерных свойств ферромагнитных жидкостей данная смесь вполне подойдет.

В наших опытах в качестве источника магнитного поля мы использовали школьный демонстрационный электромагнит с обмоткой из 2400 витков. Питался он от сети переменного тока с напряжением 220 В через диодный мост (годятся любые диоды с максимальным током, боль-

шим 0,5 А). Самое важное — выбор магнитопровода (сердечника электромагнита). Чтобы получить достаточно однородное магнитное поле, площадь сечения магнитопровода должна быть не меньше 8—10 см<sup>2</sup>. Его можно изготовить самим, набрав из тонких, хорошо изолированных друг от друга пластин, или можно воспользоваться съемным сердечником школьного демонстрационного трансформатора.

Приготовив ферромагнитную жидкость и собрав электромагнит, можете приступить к экспериментам.

### Опыты и наблюдения

1. Поместите 30—40 г жидкости в мелкую чашку (обязательно из немагнитного материала!), поставьте чашку на торец магнитопровода и включите поле. Вы будете наблюдать поднятие жидкости в центре (в наших опытах оно составляло около 5 мм). Если смесь недостаточно хорошо перемешана или слишком велико содержание ферромагнитного порошка, получится «еж», такой, как на рисунке 1.

2. Тщательно перемешайте жидкость после предыдущего опыта. Если у вас получился «еж», приготовьте новую порцию смеси, с большим содержанием масла. Снова поставьте чашку на торец магнитопровода, возьмите палочку из немагнитного материала и при включенном магнитном поле нарисуйте ею какой-нибудь узор на поверхности жидкости (рис. 2,а). Подождите несколько секунд и выключите поле. Поверхность жидкости разгладится, и на ней будет еле виден контур нанесенного вами рисунка (рис. 2,б). Затем повторно включите поле — рисунок появится снова (рис. 2,в). Опыт можно проделать несколько раз, включая и выключая магнитное поле.

На рисунке 2 изображены фотографии, полученные нами во время опыта. Одно и то же изображение нам удавалось «восстанавливать» 5—6 раз, при этом четкость рисунка практически не уменьшалась (хотя интервалы между включениями поля достигали 20 и более минут).

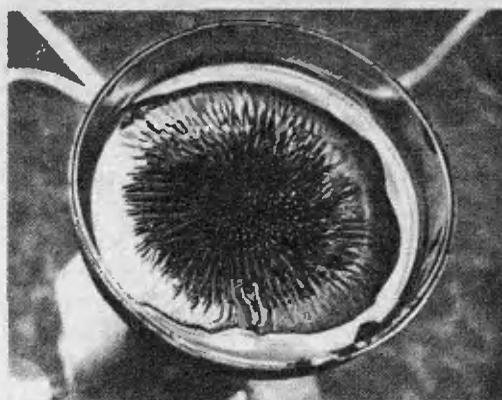


Рис. 1

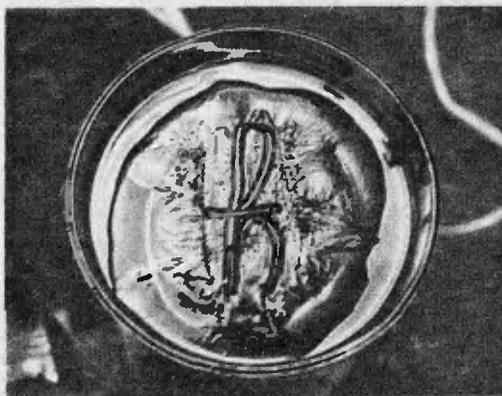


Рис. 2, а

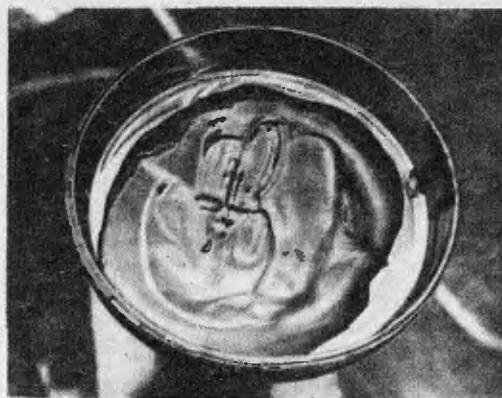


Рис. 2, б.

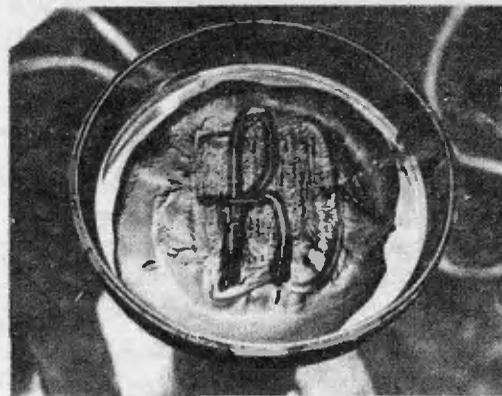


Рис. 2, в.

3. Для этого опыта вам понадобится очень сильное магнитное поле. Можно воспользоваться тем же электромагнитом, но на торец магнитопровода поставить конус. Возле острия конуса магнитное поле будет наиболее сильным. Если капнуть на острие капельку жидкости и затем включить поле, жидкость мгновенно изменит цвет, став оранжевой или ярко-красной (в зависимости от ее состава).

Эксперименты закончены. Теперь подумаем, почему и как происходят эти удивительные явления.

В первом опыте мы видели, что жидкость поднимается в центре сечения магнитопровода. Этот эффект известен под названием магнитоэлектрического и заключается в увеличении давления жидкости в области сильного поля.

Способность «запоминать» свойственна многим магнитным материалам. Так и магнитная жидкость, однажды приняв форму, при которой ее энергия минимальна, снова «вспоминает» свое состояние при включении поля.

Другие опыты и наблюдения попытайтесь объяснить сами.

### Возможное практическое применение

Придумано много остроумных конструкций, использующих ферромагнитные жидкости. Вот некоторые из них.

В высококачественных громкоговорителях в зазор между катушкой

электромагнита и его сердечником можно залить магнитную жидкость. Это позволит значительно улучшить характеристики динамиков.

На основе этой удивительной жидкости можно создать специальный насос. Он представляет собой трубку из гибкого материала, помещенную вместе с электромагнитом в камеру с жидкостью. При включении электромагнита жидкость пульсирует, возникает деформация эластичной трубки, и находящееся в ней вещество перекачивается в нужном направлении. Это несколько напоминает работу пищевода человека, отсюда и название: перистальтический насос. Такой насос можно использовать, например, для подачи топлива на космических кораблях.

Ферромагнитные жидкости можно применять также в магнитоэлектрических уплотнителях подшипников турбин, в качестве теплоносителя в тепловых машинах и т. д.

### Заключение

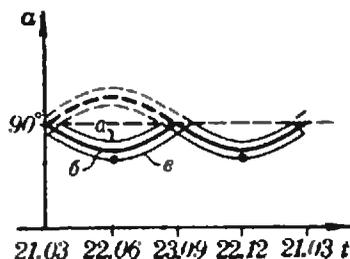
Эксперименты с ферромагнитными жидкостями очень интересны. Если вам понравились наши опыты, вы сможете продолжить их или придумать новые. Так, в популярных книгах по химии можно найти рецепт приготовления пирофорного железа. Это настолько мелкий порошок, что он самопроизвольно загорается на воздухе (поэтому будьте с ним осторожны!). Ферромагнитные жидкости, содержащие пирофорное железо, обладают очень интересными свойствами.

## Катастрофа на экваторе

(Начало см. на с. 13)

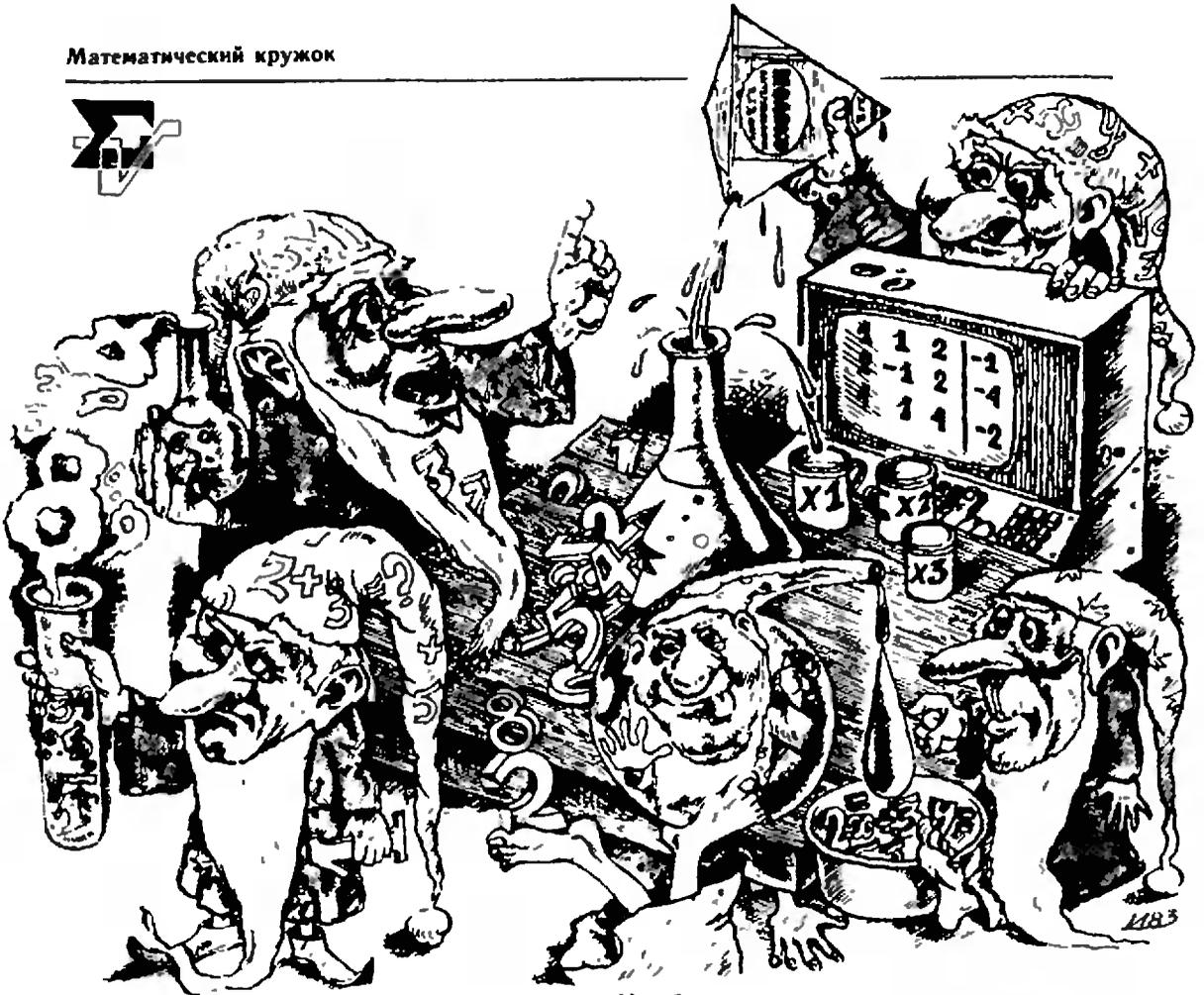
Три графика на рисунке, выражающие высоту кульминации Солнца как функцию времени (даты) для трех точек около экватора, объясняют, в чем дело. Все три функции близки друг к другу и имеют два минимума (22 июня и 22 декабря).

ря), но лишь для одной из них (линия  $\beta$  — точка на экваторе) значения функции в этих точках одинаковы; для точки в южном полушарии



(линия  $\beta$ ) наименьшее значение достигается в первом минимуме (22 июня), для точки в северном (линия  $\alpha$ ) — во втором (22 декабря). Пунктирные линии показывают, что все три графика получены из обычных синусоидальных кривых отражением относительно прямой  $\alpha=90^\circ$  той их части, которая лежит выше этой прямой (ведь по определению Солнце не может подняться выше точки зенита, для которой  $\alpha=90^\circ$ ).

Н. Н. Михайленко



## Системы линейных уравнений

Кандидат физико-математических наук  
В. Л. ГУТЕНМАХЕР

Системы линейных уравнений часто встречаются в разных приложениях математики (например, к физике, химии, экономике). В статье рассказывается о простейших способах решения таких систем и об универсальном способе — методе Гаусса.

### Исключение переменной

Понять метод лучше всего на примере. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 7x + 5y = 1. \end{cases}$$

Чтобы ее решить, исключим с помощью первого уравнения переменную  $x$  из второго уравнения. Подготовим для этого оба уравнения так, чтобы коэффициенты при  $x$  у них были одинаковы. Умножая первое уравнения на 7, а второе на 2, получаем

$$\begin{cases} 14x + 21y = 35 \\ 14x + 10y = 2. \end{cases}$$

Теперь оставим первое уравнение нетронутым, а второе заменим на разность между первым и вторым уравнениями:

$$\begin{cases} 14x + 21y = 35 \\ 11y = 33. \end{cases}$$

Придадим теперь первому уравнению его первоначальный вид, а второе разделим на 11:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ y = 3. \end{cases}$$

Подставляя значение  $y = 3$  в первое уравнение, находим

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 3. \end{cases}$$

Ответ получен, система уравнений имеет единственное решение — пару чисел  $(-2; 3)$ .

**Задачи**

1. Методом исключения переменной решите систему

$$\text{а) } \begin{cases} 2x+3y=4 \\ 3x-2y=5 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{3}{4}x - \frac{5}{6}y = 1 \\ \frac{5}{6}x - \frac{3}{4}y = 2 \end{cases}$$

2. Две точки движутся по числовой оси со скоростями  $u = -12$  км/ч и  $v = 12$  м/с. Вначале их абсциссы были  $a = 3$  км и  $b = -500$  м. Где и когда они встретятся?

### Замена переменных

Одним из основных приемов алгебры является замена одних переменных другими. Этот прием позволяет сводить задачи к более простым. Пусть, например, нам нужно решить систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 5 \\ \frac{7}{x} + \frac{5}{y} = 1 \end{cases}$$

Полагая  $u = \frac{1}{x}$ ,  $v = \frac{1}{y}$ , мы получаем линейную систему с новыми переменными  $u, v$ :

$$\begin{cases} 2u+3v=5 \\ 7u+5v=1 \end{cases}$$

Решая ее, находим  $u = -2$ ,  $v = 3$ . Возвратимся теперь к старым переменным:

$\frac{1}{x} = -2$ ,  $\frac{1}{y} = 3$ , откуда

$$x = -\frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{3}.$$

**Задача 3.** Методом замены переменных решите систему

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{1}{2x+3y-5} + \frac{7}{5x-8y+12} = 1 \\ \frac{4}{2x+3y-5} - \frac{14}{5x-8y+12} = 1 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x^2 + xy = 5 \\ 3x^2 + 5xy = 23 \end{cases}$$

$$\text{в) } \frac{xy}{3x+2y} = \frac{1}{5}, \quad \frac{xy}{5x+7y} = 1$$

### Геометрический смысл линейного уравнения

Чтобы найти уравнение прямой  $y = kx + b$ , проходящей через точки с координатами  $(1; 2)$  и  $(3; 1)$ , подставим в уравнение  $y = kx + b$  вместо  $x$  и  $y$  координаты данных точек. Мы получим систему

$$\begin{cases} 2 = k + b \\ 1 = 3k + b \end{cases}$$

Решая ее, находим  $k = -\frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{5}{2}$ .

Таким образом, искомое уравнение  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ .

Но может случиться и так, что соответствующая система уравнений не имеет решений. Пусть, например, данные точки имеют координаты  $(1; 2)$  и  $(1; 3)$ . Подставляя эти значения в уравнение  $y = kx + b$ , получаем систему

$$\begin{cases} 2 = k + b \\ 3 = k + b \end{cases}$$

не имеющую решений (ведь из уравнений системы следует  $2 = 3$ ). На первый взгляд, это немного удивительно — ведь через две точки всегда проходит прямая. Оказывается, уравнение прямой, проходящей через точки  $(1; 2)$  и  $(1; 3)$ , не записывается в виде  $y = kx + b$  — ее уравнение  $x = 1$ .

Таким образом, мы выяснили причину недоразумения — задача была неудачно сформулирована: в условии предполагалось, что уравнение прямой на координатной плоскости всегда имеет вид  $y = kx + b$ , однако для прямых, параллельных оси ординат, это не так. В связи с этим обстоятельством уравнение произвольной прямой записывают в виде  $ax + by = c$ . Такой вид позволяет охватить уже все прямые на координатной плоскости. Например, если положить  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = 1$ ,  $c = \frac{5}{2}$ , получится уравнение первой найденной нами прямой, а если взять  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 1$  — уравнение второй прямой.

Рассмотрим теперь систему

$$\begin{cases} x + \sqrt{2}y = \sqrt{3} \\ \sqrt{2}x + 2y = \sqrt{6} \end{cases}$$

Решить ее — это на геометрическом языке значит найти общие точки прямых, заданных уравнениями  $x + \sqrt{2}y = \sqrt{3}$ ,  $\sqrt{2}x + 2y = \sqrt{6}$ . Решим эту систему методом исключения переменной: умножим первое уравнение на  $\sqrt{2}$  и вычтем из второго:

$$\begin{cases} \sqrt{2}x + 2y = \sqrt{6} \\ \sqrt{2}x + 2y = \sqrt{6} \end{cases} \begin{cases} \sqrt{2}x + 2y = \sqrt{6} \\ 0 = 0. \end{cases}$$

В результате осталось только одно уравнение. Это означает, что система имеет бесконечное число решений и прямые совпадают. В процессе решения мы обнаружили, что второе уравнение — это первое, умноженное на  $\sqrt{2}$ , что сразу можно было не заметить.

В разобранных задачах мы столкнулись со всеми возможными ситуациями: система имеет единственное решение, не имеет решений, имеет бесконечное число решений. Так же обстоит дело и в общем случае. Система  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными, как правило, имеет единственное решение. Но когда одно из ее уравнений является «линейной комбинацией» остальных уравнений или противоречит им, она имеет бесконечное число решений или их вообще нет.

Задачи

4. Найдите уравнение прямой, проходящей через точки а) (1; 5) и (2; 3); б) (6; 1) и (6; 5)

5. При каких  $k$  и  $b$  прямые  $y - kx = 2$  и  $2y - 6x = b$  а) совпадают? б) не пересекаются?

6. При каких  $a$  система

$$\begin{cases} 2x + (9a^2 - 2)y = 3a \\ x + y = 1 \end{cases}$$

не имеет решений?

7. Докажите, что система

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

тогда и только тогда имеет единственное решение, когда  $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ . (Число  $a_1b_2 - a_2b_1$  называется *определителем* системы.)

### Ошибки при округлении

При решении задач на ЭВМ могут возникнуть удивительные ситуации. Классической иллюстрацией этого является решение системы

$$\begin{cases} x + \sqrt{2}y = \sqrt{3} \\ \sqrt{2}x + 2y = \sqrt{6}. \end{cases} \quad (1)$$

Эта система, как мы уже убедились, имеет бесконечное число решений. Однако, если решать ее на ЭВМ, она будет иметь... единственное решение! Это происходит потому, что ЭВМ не умеет оперировать с числами вида  $\sqrt{2}$ , — они заменяются в ней на десятичные (или двоичные) приближения.

Если, например, числа  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{6}$  заменить на их десятичные приближения с одной цифрой после запятой:  $\sqrt{2} \approx 1,4$ ;  $\sqrt{3} \approx 1,7$ ;  $\sqrt{6} \approx 2,4$ , система примет вид

$$\begin{cases} x + 1,4y = 1,7 \\ 1,4x + 2y = 2,4. \end{cases} \quad (2)$$

Решив ее, мы получим одно решение:  $x = 1$ ;  $y = 0,5$ .

Если же оставить четыре знака после запятой, получается система

$$\begin{cases} x + 1,4142y = 1,7320 \\ 1,4142x + 2y = 2,4494 \end{cases} \quad (3)$$

имеющая тоже одно (но совсем другое) решение:  $x = 0,3178$ ;  $y = 1$ .

Интересно, что, какими бы десятичными приближениями мы ни заменяли число  $\sqrt{2}$ , всегда будет получаться единственное решение.

Докажем это. Заменяя в системе (1)  $\sqrt{2}$  буквой  $a$ , получим

$$\begin{cases} x + ay = \sqrt{3} \\ ax + 2y = \sqrt{6} \end{cases}$$

Покажем, что при  $a^2 \neq 2$  система имеет единственное решение. Если  $a = 0$ , это очевидно. Пусть теперь  $a \neq 0$ . Умножая первое уравнение на  $a$  и вычитая из него второе, приводим систему к виду

$$\begin{cases} x + ay = \sqrt{3} \\ (a^2 - 2)y = a\sqrt{3} - \sqrt{6}. \end{cases}$$

Так как  $a^2 \neq 2$ ,  $y$  принимает единственное значение  $\frac{a\sqrt{3} - \sqrt{6}}{a^2 - 2}$ . Подставляя его в первое

уравнение, находим единственное значение  $x$ . Таким образом, если в качестве  $a$  взять не само число  $\sqrt{2}$ , а его какое-нибудь приближение, то  $a^2 \neq 2$  — значит, система обладает единственным решением.

Остается напомнить («Алгебра 7», п. 28), что само число  $\sqrt{2}$  не представляется в виде конечной десятичной дроби (и даже в виде любой дроби  $\frac{p}{q}$ , где  $p$  и  $q$  целые числа).

Из-за этого мы и получили парадокс, связанный с решением системы (1) на ЭВМ.

Обратим внимание на то, что даже в случае, когда все коэффициенты данной системы — конечные десятичные дроби, при их округлении решение системы может сильно измениться. Так, система (2) получается округлением коэффициентов системы (3), и при этом их решения совсем разные. В системах с большим числом переменных ошибки, возникающие при округлении, тем более могут приводить к существенным изменениям решений.

Оценить ошибку и указать процедуру решения, гарантирующую наименьшую погрешность, — важная и далеко не простая задача. В начале прошлого века ее начал изучать великий математик Гаусс, а существенные дальнейшие продвижения в этом направлении были сделаны только в последние десятилетия. В связи с основополагающим вкладом Гаусса в эту область его именем назван простой и универсальный метод исключения переменных.

## Метод Гаусса

Последовательное исключение переменных — наиболее удобный способ решения систем линейных

уравнений на ЭВМ. Продемонстрируем его на примере системы трех уравнений с тремя переменными

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

Первый шаг состоит в том, что с помощью первого уравнения переменная  $x_1$  исключается из остальных уравнений: первое уравнение оставляем неизменным; из второго уравнения вычитаем удвоенное первое; из третьего уравнения вычитаем учетверенное первое; получаем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ -3x_2 - 2x_3 = -2 \\ -3x_2 - 4x_3 = 2. \end{cases}$$

Второй шаг состоит в том, что с помощью нового второго уравнения переменная  $x_2$  исключается из третьего уравнения: первые два уравнения оставляем неизменными; из третьего уравнения вычитаем второе; получаем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ -3x_2 - 2x_3 = -2 \\ -2x_3 = 4. \end{cases}$$

Теперь из последнего уравнения находим  $x_3 = -2$ . Подставляя это значение в предыдущее уравнение, находим  $x_2 = 2$ . Подставляя  $x_2 = 2$  и  $x_3 = -2$  в первое уравнение, находим  $x_1 = 1$ . Итак, у нас готов ответ:  $(1; 2; -2)$ .

Аналогичным образом можно решать любые системы линейных уравнений. Грубо говоря, метод Гаусса заключается в следующем:

С помощью первого уравнения переменная  $x_1$  исключается из остальных уравнений. Затем с помощью нового второго уравнения переменная  $x_2$  исключается из всех следующих уравнений. Потом с помощью нового третьего уравнения исключается переменная  $x_3$ . И так далее, пока мы не получим в последнем уравнении значение последней переменной. После этого находим переменные в обратном порядке, подставляя их известные значения в уравнения.

Мы видим, что это — почти готовая программа для ЭВМ. Но, чтобы

этот метод срабатывал, нужно, чтобы на  $k$ -м шаге новое  $k$ -е уравнение содержало  $k$ -ю переменную (ведь с его помощью нам нужно исключить эту переменную из остальных уравнений). Если оказывается, что это не так, приходится переставлять (перенумеровывать) уравнения или переменные.

Может случиться также, что с некоторого места последние уравнения превратятся в числовые равенства вида  $0=b$ . Если хотя бы одно из этих равенств неверно ( $b \neq 0$ ), то система не имеет решений. Если же все эти равенства верны, то система имеет бесконечное число решений. (Все такие ситуации предусмотрены в реально используемых программах для ЭВМ.)

Отметим, что в ЭВМ вводятся не уравнения, а таблицы коэффициентов — так называемые *матрицы* системы. Например, системе, которую мы только что решали, сопоставляется матрица

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array} \right).$$

Два шага метода Гаусса, которые мы сделали при решении, можно изобразить так:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Кстати сказать, когда системы с тремя и большим числом переменных решаешь вручную, а не на ЭВМ, то тоже удобнее действовать с матрицами — меньше шансов ошибиться.

**Задача 8.** Решите систему, предлагавшуюся семиклассникам на 2-м туре XV Московской олимпиады:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 6x_5 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 8x_5 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 5 \end{cases}$$

**Разные задачи**

**9.** Математик вышел гулять — сначала он пошел по ровной дороге, затем поднялся в гору, повернул назад и пришел домой той же

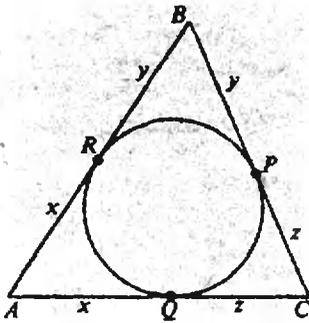


Рис. 1.

дорогой. Он знал, что гулял всего 5 ч, что его скорость по ровной дороге равна 4 км/ч, в гору — 3 км/ч и при спуске с горы — 6 км/ч. Сев за стол и составив одно уравнение с двумя переменными:  $x$  — пройденное в оба конца расстояние и  $y$  — длина наклонного участка, математик с удивлением обнаружил, что может найти  $x$ . Найдите  $x$ .

10. За круглым столом сидят 4 гнома. Перед каждым стоит кружка с молоком. Один из гномов переливает  $\frac{1}{4}$  своего молока соседу справа. Затем сосед справа делает то же самое. Затем то же самое делает следующий сосед справа и, наконец, четвертый гном  $\frac{1}{4}$  оказавшегося у него молока наливает первому. Во всех кружках вместе молока 2 л. Сколько молока было первоначально в кружках, если

а) в конце у всех гномов оказалось молока поровну?

б) в конце у всех гномов оказалось молока столько, сколько было вначале?

11. Определите числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  так, чтобы функция  $y = ax^2 + bx + c$  имела таблицу значений

$x$	0	1	2
$y$	1	2	2

Решение. Подставляя последовательно данные значения  $x$  и  $y$  в формулу  $y = ax^2 + bx + c$ , получаем  $1 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c$ ,  $2 = a \cdot 1 + b \cdot 1 + c$ ,  $2 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$ . Решив эту систему уравнений, находим  $c = 1$ ,

$a = -\frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{3}{2}$ . Следовательно,

функция имеет вид

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 1.$$

12. Определите числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  так, чтобы функция  $y = a + b(x-1) + c(x-1)(x-2)$  имела таблицу значений

$x$	0	1	2
$y$	1	2	2

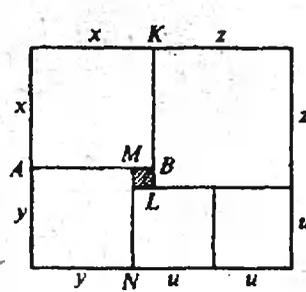


Рис. 2.

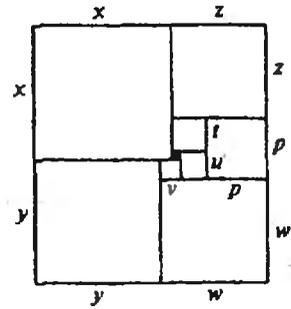


Рис. 3.

13. Определите числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  так, чтобы равенство

$$(x-1)^2(ax+b) + (x^2+x-1)(cx+d) = 1$$

выполнялось при всех значениях  $x$ .

Решение. Если равенство выполняется при всех значениях  $x$ , то оно выполняется, в частности, при  $x=1$ , при  $x=0$ , при  $x=-1$  и при  $x=2$ . Подставляя их последовательно в это равенство получаем  $c+d=1$ ,  $b-d=1$ ,  $-4a+4b+c-d=1$ ,  $2a+b+10c+5d=1$ . Решив эту систему уравнений относительно  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , находим  $a=3$ ,  $b=5$ ,  $c=-3$ ,  $d=4$ . Подставляя их в исходное равенство и раскрывая скобки, проверяем, что оно верно при всех значениях  $x$ .

Замечание. Мы подставили только четыре значения  $x$ , так как этого достаточно, чтобы определить четыре неизвестных. С другой стороны, последний шаг решения (проверка) тоже обязателен (рассмотрите равенство  $(x-1)^2(ax+b) + (x^2+x-1)cx = 1$  в точках  $x=1$ ,  $x=0$ ,  $x=-1$ ).

14. Определите числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  так, чтобы равенство

$$(x^2-3x+2)a + (3x-1)(bx+c) = 1$$

выполнялось при всех значениях  $x$ .

15. В треугольнике  $ABC$  вписанная окружность касается сторон  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  в точках  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  (рис. 1). Найдите \*)  $AQ=AR=x$ ,  $BR=BP=y$  и  $CP=CQ=z$ , если  $BC=a$ ,  $CA=b$ ,  $AB=c$ . (Замечание.  $AQ=AR$ ,  $BR=BP$  и  $CP=CQ$ , так как касательные к окружности из одной точки равны.)

Решение. Из рисунка 1 получается система

\*) Поскольку данная статья в первую очередь рассчитана на семиклассников, здесь и дальше используются обозначения из учебного пособия А. В. Погорелова «Геометрия 6–10».

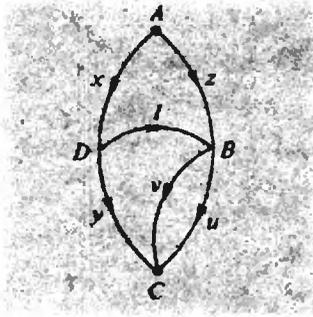


Рис. 4.

$x + y = c, y + z = a, z + x = b.$

Она, конечно, легко решается любым из вышеуказанных способов, но красивее и проще поступить иначе. Сложим все три уравнения. Получаем  $2x + 2y + 2z = a + b + c$ , откуда  $x + y + z = \frac{a+b+c}{2}$ . Вычитая из этого уравнения каждое из уравнений системы, находим  $x = \frac{b+c-a}{2}, y = \frac{a+c-b}{2}, z = \frac{a+b-c}{2}$ .

16. На основании  $AB$  равнобедренного треугольника  $ABC$  взята точка  $E$ . В треугольники  $ACE$  и  $ECB$  вписаны окружности, которые касаются отрезка  $CE$  в точках  $K$  и  $N$  соответственно. Найдите длину отрезка  $KN$ , если  $AE = a, EB = b$ .

17. (Предлагалась восьмиклассникам на XIII Украинской олимпиаде в 1983 г.) Прямоугольник разбит на квадраты так, как показано на рисунке 2. Известно, что сторона заштрихованного квадрата равна 1. Найдите стороны остальных квадратов.

Решение. Обозначим искомые стороны через  $x, y, z, u$  (см. рис. 2). Тогда  $MN = y = u + 1, AB = x = u + 1, KL = z = x + 1$ . Подставляя  $y = u + 1$  во второе соотношение, находим  $x = u + 2$ . Подставляя  $x = u + 2$  в третье соотношение, находим  $z = u + 3$ . Теперь запишем равенство противоположных сторон данного прямоугольника:  $x + z = y + 2u$ ; подставив сюда  $x, y$  и  $z$ , получаем  $(u + 2) + (u + 3) = (u + 1) + 2u$ , откуда  $u = 4$ . Теперь находим  $x = 6, y = 5, z = 7$ .

18. Прямоугольник разбит на квадраты так, как показано на рисунке 3. Известно, что сторона заштрихованного квадрата равна 2. Найдите стороны остальных квадратов.

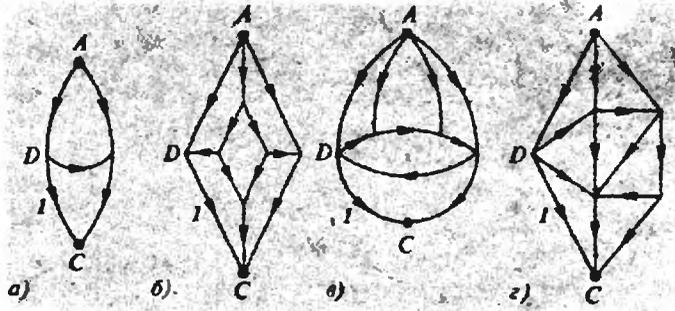


Рис. 5.

В двух следующих задачах речь идет о разветвленных электрических цепях, составленных из проводников единичного сопротивления. Каждая цепь подключена к источнику в двух точках (полюсах). Токи подчиняются правилам Кирхгофа, которые для рассматриваемых цепей можно сформулировать так:

1) Сумма токов, входящих в любой узел, равна сумме токов, выходящих из него (полюс узлом не считается).

2) В любом замкнутом контуре сумма токов, идущих по часовой стрелке, равна сумме токов, идущих против часовой стрелки\*).

19. На рисунке 4 изображена электрическая цепь с полюсами  $A, C$  и узлами  $B, D$ . Найдите токи во всех проводниках этой цепи, если известно, что ток в проводнике  $DB$  равен 1. (Стрелками обозначены направления токов.)

20. На рисунке 5 изображены электрические цепи с полюсами  $A$  и  $C$ . Найдите токи в их проводниках, если известно, что в каждой цепи ток в проводнике  $CD$  равен 1. Некоторые токи у вас получатся нулевыми и отрицательными, что это означает?

21. Двое играют в такую игру: в системе

$$\begin{cases} *x + *y = * \\ *x + *y = * \end{cases}$$

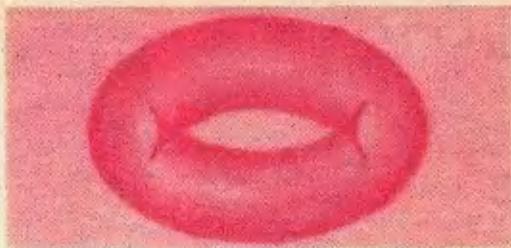
они поочередно вместо какой-нибудь звездочки ставят какое-нибудь число; первый хочет, чтобы полученная в конце система имела решение, а второй хочет, чтобы система решений не имела. Кто выиграет при правильной игре? А кто выиграет, если, наоборот, первый хочет, чтобы полученная система не имела решений, а второй — чтобы имела?

22. (Предлагалась в восьмом и десятом классах на XIII Всесоюзной олимпиаде и вошла в задачник «Кванта» под номером М578; решение см. в разделе «Ответы, указания, решения».) Решите систему ( $a$  и  $b$  — данные числа)

$$\frac{x - y\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = a, \quad \frac{y - x\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = b.$$

\*1) Правильнее сказать, что одинаковы суммы падений напряжения, но, поскольку все проводники имеют единичные сопротивления, можно говорить и о токах.

Под редакцией Д. Б. Фукса



## Видимые контуры

На верхнем рисунке воспроизведена фотография тора (поверхности пузырька или спасательного круга), сделанного из толстого стекла. Мы видим на этой «фотографии» темную линию замысловатой формы: она имеет две точки самопересечения и четыре точки возврата — так называются точки, в которых линия скачком меняет свое направление на  $180^\circ$ , образуя нечто вроде острого клюва. Что изображает эта линия, почему на ней присутствуют точки самопересечения и точки возврата и как выглядит отвечающая ей линия на самой поверхности? Чтобы ответить на эти вопросы, переведем их на привычный геометрический язык.

Луч света, вовсе не пересекающий поверхность или пересекающий ее под большим углом, не теряет или почти не теряет своей интенсивности. В то же время, луч, близкий к касательной к поверхности<sup>2)</sup>, проходит через значительную толщю стекла (рис. 1) и соответствующее место на фотографии или на экране будет более темным. Таким образом, наши проблемы имеют следующую геометрическую переформулировку.

Лежащий в пространстве тор пронизывается пучком параллельных прямых (лучей света). Оставим в этом пучке только те прямые, которые касаются тора, и отметим на каждой из этих прямых точку касания и точку пересечения с заранее фиксированной плоскостью — «экраном». Отмеченные точки составят линии на торе и на экране. Мы хотим разобраться в устройстве этих линий.

Оказывается, что если угол наклона прямых к плоскости осевой окружности тора не слишком велик, то линии будут выглядеть как показано на рисунке 2, в частности линия на торе не будет иметь никаких «кобелостей» — ни точек самопересечения, ни точек возврата). Чтобы в этом убедиться, проведем через наши лучи вертикальные (параллельные оси вращения тора) плоскости. Эти плоскости будут пересекать тор по линиям, которые мы будем дальше называть сечениями. Изменение сечения при плавном движении вертикальной плоскости изображено на первой «кинограмме» (рис. 3). В каждой из наших вертикальных плоскостей лучи составляют семейство параллельных прямых. Мы отбираем те из них, которые касаются сечений, и отмечаем точки касания синим карандашом, а точки пересечения касательных с прямой — следом нашего экрана — красным карандашом (см. кинограмму). Вертикальным плоскостям, составляющим нашу кинограмму, отвечают параллельные прямые на экране. Нарисуем их и отметим на них найденные красные точки (см. рис. 3). Получившаяся картина позволяет проследить ход почти всей линии на экране, несением остаются два отмеченных на рисунке места. В оставшихся двух местах (достаточно рассмотреть одно из них, поскольку они симметричны) мы применим метод «замедленной кино съемки», причем ограничимся лишь центральной частью кадра.

<sup>2)</sup> Касательная к поверхности есть, по определению, прямая, касающаяся некоторой линии, лежащей на этой поверхности.

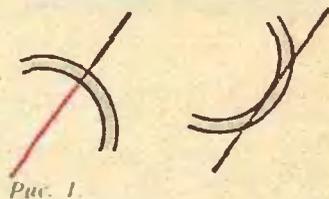


Рис. 1.

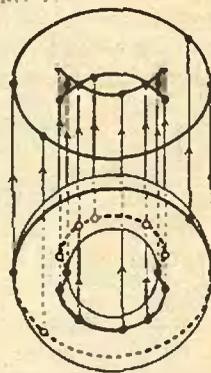


Рис. 2.

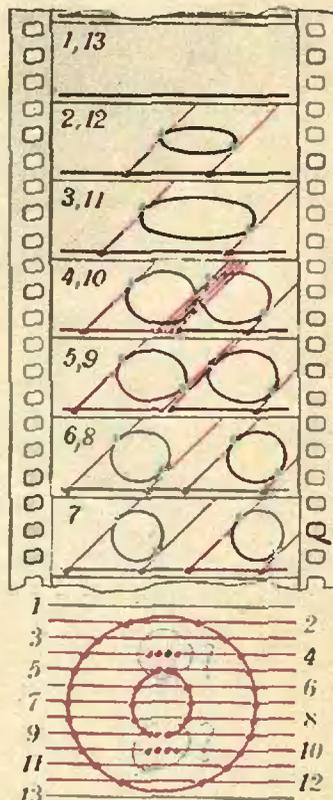


Рис. 3.

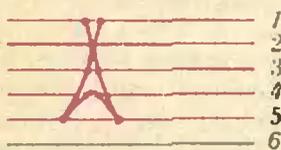
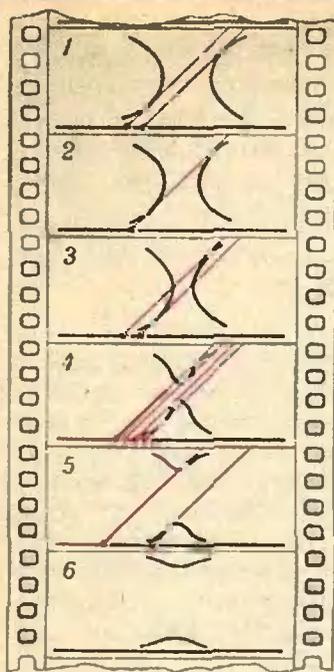


Рис. 1.



Рис. 5.

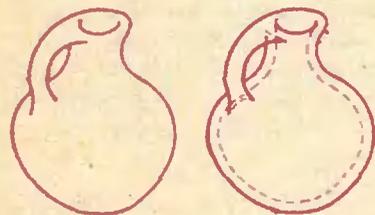


Рис. 6.

Задание к следующему выпуску геометрических страничек составляет задача М823 из Задачника «Кванта» (см. «Квант», 1983, № 9).

На рисунке 4 изображена получающаяся кинограмма, а под ней показаны соответствующие части красной и синей линий (синюю линию мы проектируем на вертикальную плоскость, она от этого существенно не меняется). На нашей кинограмме мы видим, что две касательные сначала движутся друг к другу и проходят друг сквозь друга. В этот момент (кадр № 2) на красной линии получается точка самопересечения, а на синей — нет (соответствующая касательная касается тора в двух точках! — впрочем, это происходит только если касательная достаточно полого). Затем в некоторый момент (в момент слияния двух кусков сечения в один — см. кадры №№ 9 и 10 первой кинограммы) в центре кадра возникают две новые касательные, которые быстро расходятся. Затем скорость, с которой они расходятся, уменьшается, но все равно они догоняют две старые касательные (кадр № 5 второй кинограммы). И тут же все касательные исчезают.

Последний момент мы рассмотрим еще внимательнее. Для этого на третьей кинограмме мы применим еще большее замедление, еще большее увеличение и — еще один киотрюк — заставим время двигаться вспять. На попадающих в поле зрения кусках сечения имеется точка перегиба, причем касательная к сечению в точке перегиба с течением времени поворачивается против часовой стрелки. Пока она остается положе направления наших лучей, рассматриваемая часть кривой вообще не имеет касательных, параллельных лучам. Затем такая касательная появляется, причем в момент своего появления это — касательная в точке перегиба. Сразу после появления она раздваивается, причем точки касания двух касательных расходятся очень быстро, а сами касательные расходятся очень медленно (см. кинограмму на рисунке 5). Поэтому две ветви красной линии, прилегающие к основанию касательной в точке перегиба, очень близки друг к другу — мы имеем точку возврата; соответствующие же ветви синей линии расходятся в разные стороны, то есть синяя линия является вблизи рассматриваемой точки обыкновенной гладкой кривой.

Можно заметить, что в точках, отвечающих точке возврата красной линии, касательная к синей линии имеет направление наших лучей. Уже одного этого достаточно, чтобы убедиться в существовании у красной линии точек возврата. Действительно, красная линия получается в результате проектирования синей линии вдоль лучей. При проектировании же пространственной кривой на плоскость в направлении касательной к этой кривой в некоторой точке на проекции получается точка возврата. Чтобы это увидеть, возьмите изогнутую проволоку и посмотрите на нее одним глазом так, чтобы касательная в некоторой точке проволоки проходила через центр вашего зрачка. Вы увидите точку возврата.

В заключение заметим, что наша конструкция «красной и синей линии» применима не только к поверхности тора, но к любой поверхности, пронизываемой параллельными прямыми. При этом красная линия может иметь точки пересечения и возврата, а синяя линия, как правило, их не имеет.

Заметим, что художник, изображающий объемный предмет при помощи линий, изображает в действительности часть нашей красной линии, отвечающей поверхности предмета — часть, состоящую из оснований тех касательных, которые не пересекают предмета между точкой касания и экраном. Эта часть красной линии образует «видимый контур» предмета, такой, как на сосуде на рисунке 6 (сирова к видимому контуру пунктиром пририсовали невидимые части красной линии — это не принято делать на рисунках, но принято делать на чертежах).

Впрочем, точки возврата на видимом контуре никогда не появятся: по крайней мере, одна из двух ветвей красной линии, входящих в точку возврата, будет невидима.



## Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Вращение Земли и ускорение свободного падения» предназначена восьмиклассникам, заметка «Два вида электричества» — девятиклассникам и «Принцип Ферма» — десятиклассникам.

Материалы подготовил И. К. Бедкин.

### Вращение Земли и ускорение свободного падения

В учебнике «Физика 8» на странице 104 сказано: «Вращение Земли приводит к тому, что ускорение свободного падения, измеренное относительно какого-либо тела на поверхности Земли, на разных широтах различно». Выясним причины этого различия.

Относительность движения состоит, как известно, в том, что движение одного и того же тела, но относительно разных систем отсчета, движущихся друг относительно друга, выглядит по-разному. Различны траектории движения, скорости, ускорения.

Если одна из систем отсчета движется относительно другой с постоянной скоростью (без ускорения), то скорость  $\vec{v}$  тела относительно одной из систем отсчета, условно принятой за неподвижную, равна  $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ , где  $\vec{v}_1$  — скорость тела относительно подвижной системы и  $\vec{v}_2$  — скорость подвижной системы относительно неподвижной. Ускорение тела относительно обеих систем в таком случае одно и то же (оно, как говорят, абсолютно).

Иное дело, если одна из систем отсчета движется относительно другой с ускорением. Тогда не только скорость, но и ускорение тоже отно-

сительно: ускорение  $\vec{a}$  тела относительно неподвижной системы отсчета равно сумме ускорений  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$ , где  $\vec{a}_1$  — ускорение тела относительно подвижной системы и  $\vec{a}_2$  — ускорение подвижной системы относительно неподвижной, то есть

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2. \quad (1)$$

Одним из примеров именно такого случая служит свободное падение тел на Землю. Поскольку Земля вращается вокруг своей оси, система отсчета, связанная с любой точкой на ее поверхности, движется с ускорением. Поэтому ускорение падающего тела относительно неподвижной системы должно равняться сумме ускорения тела относительно подвижной системы и ускорения подвижной системы относительно неподвижной.

Неподвижная система отсчета может быть связана с каким-нибудь неземным телом, например с Солнцем. Но можно поступить и проще, не покидая Землю. Ведь и на поверхности Земли есть точки, не участвующие в ее вращении. Это — полюсы Земли, через которые проходит ось вращения. Следовательно, чтобы найти значение ускорения падающего тела относительно неподвижной системы отсчета, нужно измерить ускорение свободного падения на земном полюсе. Для этого на полюсе можно установить линейку с делениями (рис. 1) и, например, с помощью стробоскопического метода, измерить ускорение падающего вдоль линейки тела. Линейка и связанная с ней система координат и будут для нас неподвижной системой отсчета. Так как свободное

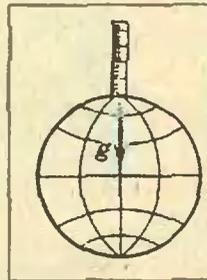


Рис. 1.

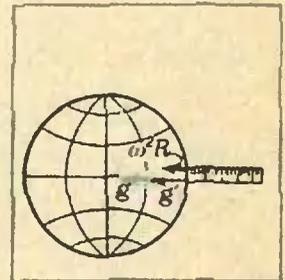


Рис. 2.

падение — движение прямолинейное, достаточно одной координатной оси, которую естественно направить вдоль линейки, то есть вдоль оси вращения Земли.

Результат такого измерения легко предсказать. Согласно второму закону Ньютона и закону всемирного тяготения,

$$mg = G \frac{mM}{R^2},$$

где  $m$  — масса тела,  $g$  — ускорение падающего тела,  $G$  — гравитационная постоянная,  $M$  — масса Земли и  $R$  — ее радиус. Отсюда можно найти значение ускорения падающего тела относительно неподвижной системы отсчета:

$$g = G \frac{M}{R^2}.$$

Его мы и получим, если выполним описанный опыт.

Такой же опыт можно провести в любом другом месте на Земле. Для этого надо опять установить вертикальную линейку и с ней связать систему отсчета. Но теперь это будет система отсчета, движущаяся с ускорением относительно неподвижной системы.

Расположим, например, линейку на экваторе (рис. 2). Здесь наша система отсчета (линейка) движется вместе с Землей по окружности экватора с центростремительным ускорением, равным  $\omega^2 R$ , где  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли и  $R$  — ее радиус. Направлено это ускорение к центру Земли, как и ускорение  $g$ , сообщаемое телу силой притяжения\*). Измеренное на экваторе ускорение  $g'$  будет несколько иным по сравнению с ускорением на полюсе. Согласно формуле (1), мы можем написать\*\*)

$$g = g' + \omega^2 R. \quad (2)$$

Эта формула и указывает на то, что ускорение падающего тела относительно неподвижной системы отсчета

( $g$ ) равно сумме ускорений тела относительно подвижной системы ( $g'$ ) и подвижной системы относительно неподвижной ( $\omega^2 R$ ). Из формулы (2) видно, что ускорение  $g'$  свободного падения тела на экваторе не равно значению ускорения  $g$ , измеренному на полюсе. Оно меньше  $g$  на величину  $\omega^2 R$ :

$$g' = g - \omega^2 R.$$

На сколько же численно отличается значение  $g'$  от  $g$ ? Чтобы это узнать, нужно, очевидно, вычислить значение величины  $\omega^2 R$ . Угловую скорость  $\omega$  вращения Земли можно найти, зная период вращения Земли  $T = 24 \text{ ч} = 86400 \text{ с}$ :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}.$$

Радиус Земли на экваторе  $R = 6378 \text{ км} \approx 6,38 \cdot 10^6 \text{ м}$ . Значит,  $\omega^2 R \approx (7,3 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 6,38 \cdot 10^6 \text{ м/с}^2 \approx 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2$ .

На столько и отличается измеренное ускорение свободного падения на экваторе от того ускорения, которое наблюдалось бы, если бы Земля не совершала суточного вращения и система отсчета, связанная с ней, не двигалась бы ускоренно.

В большинстве случаев этим небольшим различием в значениях ускорения свободного падения пренебрегают. Но обнаружить его можно сравнительно просто. Так, например, часы с маятником (период колебаний маятника зависит от ускорения свободного падения) на экваторе отстают от таких же часов на полюсе приблизительно на 3 минуты за сутки.

Заметим в заключение, что различие в значениях ускорения свободного падения не означает, что и сила притяжения тела к Земле различна в разных местах на Земле. Эта сила определяется законом всемирного тяготения

$$F = G \frac{mM}{R^2},$$

и на нее вращение Земли не оказывает никакого влияния.

Иначе обстоит дело с величиной, называемой весом тела. Вес тела — это сила, с которой тело вследствие

\*) Мы пренебрегли различием в силе притяжения на экваторе и на полюсе, вызванным нестрогой сферичностью Земли.

\*\*) Мы здесь не пользуемся векторными обозначениями, так как все три ускорения направлены вдоль координатной оси и их модули равны проекциям на эту ось.

притяжения к Земле действует на опору или подвес. Если опора или подвес покоятся относительно Земли или движутся относительно нее без ускорения, то вес численно равен силе тяжести. Но весы, при помощи которых измеряется вес тела, в любом месте Земли, кроме ее полюсов, движутся с ускорением. Поэтому везде, кроме полюсов, вес тела не равен силе тяжести. Наименьшим вес тела будет на экваторе. Впрочем, значения веса на экваторе и на полюсе различаются так же мало, как и значения ускорения свободного падения.

## Два вида электричества

(Из истории физики)

В прошлом году исполнилось 250 лет с того времени, когда впервые стало известно о существовании двух видов электричества. В 1733 году французский физик Шарль Франсуа Дюфе (1698—1739) опубликовал во французском и в английском журналах статьи, в которых описал результаты своих опытов по электризации различных тел.

**Стекло и смолы.** Из многочисленных и остроумно поставленных экспериментов Дюфе сделал вывод, что существуют два вида электричества. Одно электричество возникает при натирании кóпала (ископаемой смолы), янтаря (тоже ископаемой смолы), воска, шелка и многих других веществ. Другое появляется при натирании стекла, горного хрусталя, драгоценных камней, шерсти и др. Поэтому Дюфе назвал первое из них смоляным, а второе стеклянным электричеством. Тело, обладающее любым из двух видов электричества, притягивает к себе легкие тела (именно это свойство еще с античных времен обозначалось словом «электричество»). Различие же состоит, как выяснил Дюфе, в том, что тела, заряженные одним и тем же электричеством (стеклянным или смоляным), отталкивают друг друга, но если одно тело за-

ряжено стеклянным, а другое смоляным электричеством, то они взаимно притягиваются.

Так были установлены фундаментальные для науки об электричестве факты: существование двух видов электричества и существование электрических сил притяжения и отталкивания. Естественно возник вопрос о том, как же появляется у наэлектризованных тел то или иное электричество. В то время об этом можно было только строить догадки.

**Флюид Франклина.** Одна такая догадка была высказана в 1750 году американским физиком (а также известным государственным и общественным деятелем, одним из руководителей борьбы американских колоний за независимость) Бенджамин Франклином (1706—1790).

По Франклину в каждом теле содержится особое электрическое вещество (флюид, как тогда говорили), что-то вроде электрической жидкости. Частицы этой электрической жидкости отталкиваются друг от друга, но сильно притягиваются частицами тела, так что всякое тело действует на электрическую жидкость подобно губке, втягивающей в себя воду (частицы электрической жидкости меньше частиц самого тела, иначе они не могли бы проникать внутрь тела). Но присутствие электрической жидкости в теле не делает его наэлектризованным, если она содержится в теле в некотором, так сказать, нормальном количестве. При натирании же одного тела другим часть электрической жидкости перетекает из одного тела в другое, вот тогда-то оба тела и становятся наэлектризованными. То тело, в которое электрическая жидкость перетекает и в котором поэтому создается ее избыток по сравнению с нормальным количеством, становится обладателем стеклянного электричества. Второе тело, в котором электрической жидкости меньше нормального количества, заряжается смоляным электричеством. Однако Франклин дал этим двум видам электричества другие названия. Стеклянное электричество (им обладают тела с избытком электрической жидкости) Франклин назвал положи-

тельным, а смоляное (которым обладают тела с недостатком электрического флюида) — отрицательным. Эти названия, как известно, сохранились до наших дней, впрочем, как и другие термины, введенные в науку об электричестве Франклином: заряд, разряд, конденсатор, батарея, проводник и т. д.

Такое довольно странное толкование дал Франклин известным в его время электрическим явлениям. Странное потому, что оно не могло объяснить самый важный из известных тогда фактов — притяжение легких предметов к наэлектризованным телам.

**Электричество и ...чулки.** Другое объяснение было предложено в 1759 году англичанином Робертом Симмером. Поводом для этого послужили довольно занятные наблюдения, проведенные им.

Симмер имел обыкновение носить две пары чулок: черные шерстяные для тепла и белые шелковые для красоты. Снимая с ноги сразу оба чулка и выдергивая один из другого, Симмер видел, как оба чулка раздуваются, воспроизводят форму ноги и притягиваются друг к другу. Однако чулки одного цвета, как черные, так и белые, друг от друга отталкиваются. Если держать в одной руке два белых, а в другой два черных чулка, то при сближении рук взаимное отталкивание чулок одного цвета и притяжение разноцветных приводит к забавной возне между ними, чулки противоположных цветов как бы набрасываются друг на друга и сплетаются в один причудливый клубок.

Эти наблюдения и привели Симмера к заключению, что в каждом теле имеется не одна, а две электрические жидкости — положительная и отрицательная, содержащиеся в теле в одинаковых количествах. При натирании двух тел какая-то из них может перейти из одного тела в другое, тогда в одном теле окажется избыток одной из жидкостей, а в другом — ее недостаток. Оба тела станут наэлектризованными противоположными по знаку электричествами (зарядами).

**Электрический конфликт.** Так появились два представления об электричестве. Долгое время, почти полтора столетия, ни одна из них не получала всеобщего признания.

Когда в конце XVIII — начале XIX вв. появилась возможность получать и изучать постоянный электрический ток, возник спор о том, что именно «течет» в цепи, содержащей источник тока и проводники. Были сомнения и в том, одинаковы ли электричество, которое получают при натирании тел, и то, что течет в электрической цепи. Последнее получило даже специальное название — гальваническое электричество. Но все же многие считали, что в проводниках электрической цепи текут одновременно два симмеровских электричества, и называли электрический ток... электрическим конфликтом, поскольку эти электричества текут в противоположных направлениях. Так, например, когда в 1820 году Х. Эрстед издал брошюру, в которой описывалось открытое им действие тока на магнитную стрелку, он назвал ее так: «Опыты, относящиеся к действию электрического конфликта на магнитную стрелку». Тогда читателям было понятно это странное для нас название, и брошюра имела успех ввиду фундаментальной важности сделанного открытия.

**Прав был Симмер.** Окончательное разрешение старый спор двух теорий — Франклина и Симмера — получил лишь в конце XIX — начале XX вв.

Теперь мы знаем, что победителем в споре надо признать Симмера. «Электрические жидкости Симмера» — это отрицательно заряженные электроны и положительно заряженные протоны, которые в строго одинаковом числе содержатся в каждом нейтральном теле, в каждом атоме любого вещества.

Но кое-что оказалось верным и в теории Франклина: при натирании тел переходить с одного тела на другое может только один «флюид» — отрицательно заряженные электроны. Однако тело, на которое они переходят, становится отрицательно заряженным, в то время как Франклин считал его заряженным положитель-

по. Это связано с тем, что Франклин смел нужным назвать положительным стеклянне электричество Дюфе. Отсюда, от этого выбора, сделанного Франклином, следует и то, что электрону мы приписываем отрицательный знак заряда, и то, что за направление электрического тока принимается направление движения положительных зарядов, хотя в металлических проводниках фактически движутся отрицательно заряженные частицы. В электролитах и газах электрический ток — это встречное движение и положительных, и отрицательных частиц. Но теперь никто это не считает электрическим конфликтом.

## Принцип Ферма

Основу геометрической оптики, которая оперирует понятием «световой луч», составляют три закона — законы прямолинейного распространения, отражения и преломления света. В давние времена, когда были сформулированы эти законы, вопрос о природе света еще не стоял, и за понятием «луч» не скрывалось ничего физически реального.

В 20-х годах XIX в. было выяснено, что свет — это волна. Луч света стал просто прямой, перпендикулярной волновой поверхности и указывающей направление распространения световой волны. На основе волновых представлений можно легко получить законы отражения и преломления света. Так это и сделано в учебнике «Физика 10» (§§ 37 и 65). Однако в конце XIX — начале XX вв. стало ясно, что свет обладает не только волновыми, но и корпускулярными свойствами тоже. С точки зрения корпускулярной (квантовой) природы свет представляет собой поток элементарных световых частиц — фотонов. В однородной среде луч можно считать траекторией движения фотонов.

Но интересно, что задолго до этого был сформулирован удивительный принцип, из которого прямо следуют все основные законы распростране-

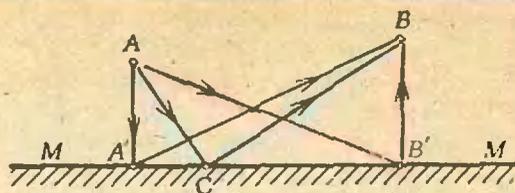


Рис. 1.

ния света. Принцип этот, найденный французским математиком Пьером Ферма (1601—1665) около 1660 года, гласит: *из всех возможных путей между двумя точками свет проходит по тому, по которому время прохождения наименьшее.*

Из принципа Ферма (так его обычно называют) следует, что в однородной среде (в такой среде скорость света всюду одинакова) свет должен распространяться прямолинейно: прямая — кратчайшее расстояние между двумя точками, следовательно, и время распространения — наименьшее.

Покажем теперь, что закон отражения света — тоже прямое следствие принципа Ферма.

**Закон отражения света.** Пусть  $MM$  — плоское зеркало. В точке  $A$  находится источник света, и нас интересует, по какому пути свет, отразившись от зеркала, приходит из точки  $A$  в точку  $B$  (рис. 1). На рисунке 1 показаны некоторые из возможных путей —  $AA'B$ ,  $ACB$ ,  $AB'B$ . Таких «маршрутов» для света можно изобразить бесчисленное множество. Они различны по длине, так что на их прохождение требуется различное время. Оно зависит от того, в какую точку зеркала упадет луч и, отразившись, направится в  $B$ .

Из простых геометрических соображений легко выяснить, куда именно должен упасть луч, чтобы время его прохождения по «маршруту» точка  $A$  — зеркало — точка  $B$  было наименьшим. На рисунке 2 представлен один из возможных путей —  $ACB$ . Опустим из точки  $B$  перпендикуляр на зеркало  $MM$  и продолжим его по другую сторону зеркала до точки  $B'$ , отстоящую от зеркала на расстоянии  $|OB'| = |OB|$ . Проведем линию  $CB'$ . Получившиеся треугольники  $COB$  и  $COB'$  равны друг другу, так как они прямоугольные, сторона  $OC$  у них общая

и  $|OB| = |OB'|$ . Следовательно,  $|CB| = |CB'|$ , откуда следует, что длина пути луча  $ACB$  равна сумме длин от  $A$  до точки  $C$  падения луча на зеркало и от этой точки до точки  $B$ . Ясно, что эта сумма будет наименьшей, если точка  $C$  будет лежать на прямой, соединяющей точки  $A$  и  $B'$  (рис. 3). Тогда и сумма длин  $|AC|$  и  $|CB|$ , то есть длина всего пути света, будет наименьшей. Наименьшим будет и время прохождения светом этого пути.

Из рисунка 3 видно, что  $\widehat{BCO} = \widehat{B'CO}$  (треугольник  $BCB'$  равнобедренный, поэтому  $CO$  — биссектриса угла при вершине), а  $\widehat{B'CO} = \widehat{ACM}$  (как вертикальные). Это значит, что углы наклона падающего и отраженного лучей к зеркалу равны друг другу. В этом и состоит закон отражения света. Принято, однако, отсчитывать углы не от плоскости зеркала, а от нормали к ней в точке падения. Но ясно, что если равны углы  $i$  и  $i'$ , то равны и углы  $\alpha$  и  $\gamma$ . Закон отражения обычно записывается в виде

$$\alpha = \gamma.$$

Закон этот, как мы видим, — следствие того, что свет как бы «выбирает» путь, который проходится за наименьшее время. Нетрудно видеть, что из принципа Ферма следует и утверждение, что луч падающий, луч отраженный и нормаль к зеркалу в точке падения лежат в одной плоскости. Если бы это было не так, то путь был бы длиннее и требовал бы большего времени.

Отметим еще одну важную особенность, связанную с отражением света от зеркала. Если в точке  $A$  (см. рис. 3) находится источник света, а в точке  $B$  — глаз, то глаз

воспримет свет так, как будто бы источник света находится не в  $A$ , а в  $A'$ , а зеркала вовсе нет. Если зеркало убрать, а источник перенести из  $A$  в  $A'$ , то глаз не заметит такой замены.

**Закон преломления света.** Из принципа Ферма можно получить и закон преломления света (точнее — световых лучей). Здесь речь идет о переходе света из одной среды (среда  $I$  на рисунке 4) в другую (среда  $II$ ) через границу раздела между ними. Различие сред состоит в том, что в них различны скорости распространения света.

Мы рассмотрим случай, когда среда  $I$  — это вакуум, в котором скорость света равна  $c$ , а вторая среда — какое-то прозрачное вещество (например, стекло, вода и т. д.), в котором скорость света  $v$  меньше, чем  $c$ :  $c > v$ .

Между точками  $A$  в среде  $I$  и  $B$  в среде  $II$  также мыслимы бесчисленное множество путей, но, согласно принципу Ферма, свет «выбирает» тот из них, для прохождения которого нужно наименьшее время. Ясно, например, что путь  $AA'B$  не есть такой путь, потому что здесь свет проходит короткое (кратчайшее) расстояние в среде с большой скоростью и большое расстояние в среде с малой скоростью. Быть может, выгоднее путь  $AB'B$ ? Здесь свет в среде с малой скоростью проходит минимальную часть пути, а наибольшая часть приходится на среду с большой скоростью. Но есть ли именно этот путь самый выгодный в смысле экономии времени? Может быть, выгоднее несколько удлинить путь в среде  $II$  с тем, чтобы сократить путь в среде  $I$ ? Словом, нужно найти, в какой точке свету

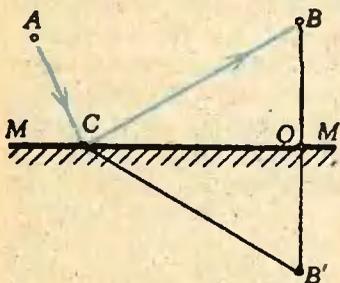


Рис. 2.

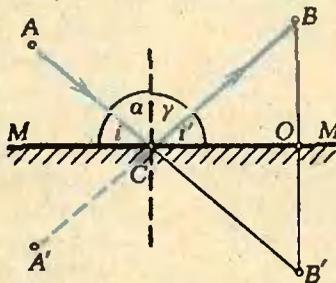


Рис. 3.

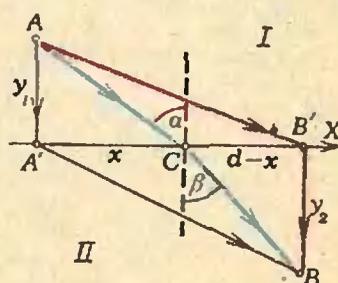


Рис. 4.

(лучу) нужно пересечь границу раздела двух сред, чтобы время прохождения от  $A$  к  $B$  было наименьшим. Ясно, что эта точка лежит где-то между  $A'$  и  $B'$  (включая, возможно, и самую точку  $B'$ ).

Обозначим расстояние между  $A'$  и  $B'$  через  $d$ . Если нужная нам точка  $C$  пересечения границы раздела находится на расстоянии  $x$  от  $A'$ , то от  $B'$  она отстоит на расстоянии  $d-x$  (см. рис. 4). Путь  $AC$ , проходимый светом в среде  $I$ , равен  $\sqrt{y_1^2 + x^2}$ , а время прохождения этого пути

$$t_1 = \frac{\sqrt{y_1^2 + x^2}}{c}.$$

Путь  $CB$ , проходимый светом в среде  $II$ , равен  $\sqrt{y_2^2 + (d-x)^2}$ , а время, нужное для прохождения этого пути,

$$t_2 = \frac{\sqrt{y_2^2 + (d-x)^2}}{v}.$$

Общее время  $t$  определяется равенством

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{y_1^2 + x^2}}{c} + \frac{\sqrt{y_2^2 + (d-x)^2}}{v}. \quad (1)$$

Время  $t$  зависит только от  $x$  — координаты точки падения луча, так как величины  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $c$ ,  $v$  и  $d$  — постоянные, то есть одинаковые при всех значениях  $x$ . Вот нам и нужно найти, при каком значении  $x$  время  $t$  будет наименьшим. Средствами обычной алгебры эту задачу решить нельзя. Чтобы ее решить, нужно воспользоваться тем, что при том значении  $x$ , при котором  $t$  минимально, производная функции, стоящей в правой части уравнения (1), равна нулю.\* Это приводит нас к такому условию для  $x$ :

$$\frac{x}{c\sqrt{y_1^2 + x^2}} = \frac{d-x}{v\sqrt{y_2^2 + (d-x)^2}}. \quad (2)$$

Из рисунка 4 видно, что

$$\frac{x}{\sqrt{y_1^2 + x^2}} = \sin \widehat{A'AC} = \sin \alpha;$$

$$\frac{d-x}{\sqrt{y_2^2 + (d-x)^2}} = \sin \widehat{CBB'} = \sin \beta,$$

где  $\alpha$  — угол между падающим лучом и нормалью к границе раздела в точке падения (угол падения) и  $\beta$  — угол между этой нормалью и преломленным лучом (угол преломления). Условие (2) принимает поэтому вид:

$$\frac{\sin \alpha}{c} = \frac{\sin \beta}{v}, \quad \text{или} \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c}{v}.$$

В этом и заключается закон преломления для нашего случая: отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно отношению скоростей распространения света в вакууме и в среде, которая с ним граничит. Отношение  $c/v$  — величина постоянная, характерная для данной среды. Она называется показателем преломления вещества и обозначается буквой  $n$ , так что

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n.$$

В общем случае, когда свет переходит из произвольной среды, в которой скорость света равна  $v_1$ , в среду со скоростью света в ней  $v_2$ , закон преломления имеет вид

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21},$$

где  $n_{21}$  — относительный показатель преломления сред 2 и 1.

Принцип Ферма справедлив, конечно, не только для тех простейших примеров отражения и преломления света, которые мы здесь рассмотрели. С помощью этого принципа можно понять и точно рассчитать ход лучей и в призме, и в линзе и в любой самой сложной системе призм, линз, зеркал.

\* Производная функции  $t=t(x)$  равна нулю еще в двух случаях — когда функция проходит через максимум и когда вообще не зависит от  $x$  (то есть функция стационарна). Здесь нас интересует только случай минимума. Однако действительный путь света может быть и минимальным, и максимальным, и стационарным (равным всем остальным возможным путям). Стационарный и максимальный пути наблюдаются, например, при отражении света от изогнутых поверхностей. Таким образом, принципу Ферма можно дать более общую формулировку, чем это было сделано самим Ферма

**Задачи**

1. Саша обратил внимание на номер автомашины, подъехавшей к его дому. Интересно! Если прибавить к первому числу цифры второго:  $85+8+7$ , то получится 100, и если прибавить ко второму числу цифры первого:  $87+8+5$ , то тоже получится 100. А сколько всего таких номеров?

2. Поставьте в примере на умножение вместо звездочек недостающие цифры.

3. Расставьте числа от 1 до 12 в кружки так, чтобы суммы чисел на каждой из шести прямых, на каждой из трех окружностей и в вершинах каждого из трех ромбов были одинаковыми.

4. У Вадика было орехов в 3 раза меньше, чем у Кости. Если Вадика дать еще столько же орехов, взяв их у Кости, то у обоих будет поровну. Сколько орехов было у Кости?

5. «— Огонь в полумиле от нас, и ветер несет его в нашу сторону со страшной быстротой...

— Что там огонь!... По-вашему, это огонь?... Ну, молодцы, за работу... Беритесь-ка за эту низкую, вялую траву и выдергивайте ее вон...

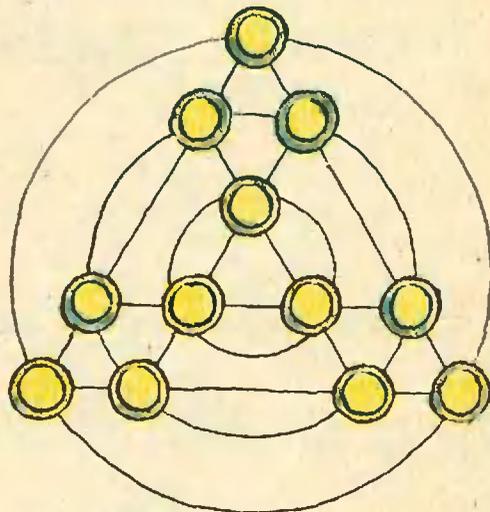
Старик прошел в противоположный край... и, выбрав пук самых сухих стеблей, положил их на полку своего ружья. Они мгновенно вспыхнули от искры...

— Теперь, — сказал старик, — вы увидите, как огонь дерется с огнем!»

Так в романе Ф. Купера «Прерия» описывается один из способов борьбы со степным пожаром — поджигание степи с противоположной стороны. Попробуйте объяснить, в чем секрет этого способа.

Эти задачи нам предложили Ю. А. Аленков, С. И. Олехник, А. В. Сигрианский, А. В. Токарев, А. М. Чарных.

$$\begin{array}{r}
 5**4 \\
 \times 5**7 \\
 \hline
 40*** \\
 1*4** \\
 17*** \\
 2***0 \\
 \hline
 *0***5*1*
 \end{array}$$





## В уме и на пальцах

(обзор писем)

Кандидат физико-математических наук  
А. П. САВИН

В статье Р. Ш. Данелия «На пальцах и в уме», опубликованной в пятом номере «Кванта» за прошлый год, рассказывалось об умножении однозначных чисел с помощью пальцев и о быстром умножении в уме некоторых двузначных чисел (в частности, о возведении в квадрат двузначных чисел, оканчивающихся на 5). Статья заканчивалась словами: «Если вы придумаете другие приемы, сокращающие умножение, — напишите нам!»

Наши читатели живо откликнулись на этот призыв. Учительница математики из Донецка Ф. И. Венникова пишет:

«1. Чтобы возвести в квадрат число пятого десятка (41, 42, ..., 49), надо к числу единиц прибавить число 15, а затем к полученной сумме приписать квадрат дополнения числа единиц до 10 (если этот квадрат —

однозначное число, перед ним приписывается 0).

Например:

$$43^2 = (15 + 3)100 + 7^2 = 1849,$$

$$48^2 = (15 + 8)100 + 2^2 = 2304.$$

2. Еще проще возвести в квадрат число шестого десятка (51, 52, ..., 59). Для этого надо к числу единиц прибавить 25 и к этой сумме приписать квадрат числа единиц.

Например:

$$54^2 = (25 + 4)100 + 4^2 = 2916,$$

$$57^2 = (25 + 7)100 + 7^2 = 3249.$$

Доказательства:

$$\begin{aligned} 1. (40 + a)^2 &= 1600 + 80a + a^2 = \\ &= 1500 + 100 + 100a - \\ &- 20a + a^2 = \\ &= (1500 + 100a) + \\ &+ (100 - 20a + a^2) = \\ &= (15 + a)100 + \\ &+ (10 - a)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. (50 + a)^2 &= 2500 + 100a + a^2 = \\ &= (25 + a)100 + a^2. \end{aligned}$$

\* \* \*

Учитель из Харькова В. В. Хазанов предлагает следующий способ умножения двузначных чисел, оканчивающихся на 5: расположить числа в порядке возрастания, число десятков меньшего умножить на уве-

личное на 1 число десятков большего, добавить к этому числу целую часть половины разности десятков, а к полученному числу приписать либо 25, если эта разность четна, либо 75, если она нечетна. Хотя приведенная нами словесная формулировка звучит сложно, предлагаемый способ очень прост, как видно из следующих примеров:

$$35 \cdot 75 = (3 \cdot 8 + \frac{7-3}{2}) 100 + 25 = 2625,$$

$$25 \cdot 55 = (2 \cdot 6 + [\frac{5-2}{2}]) 100 + 75 = 1375^*)$$

Доказательство того, что это правило справедливо, мы оставляем читателю в качестве упражнения.

\* \* \*

Манана Вансовская, ученица десятого класса Набакевской средней школы Самтредского района Грузинской ССР, предлагает способ возведения в квадрат трехзначных чисел, оканчивающихся на 25:

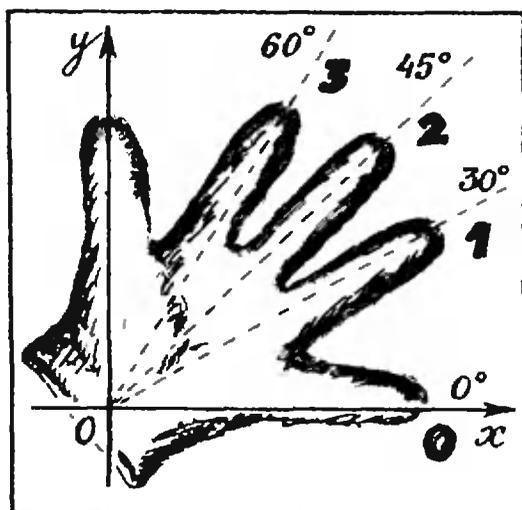
«Для получения квадрата трехзначного числа, которое оканчивается на 25, пишем в конце 625, затем число сотен умножаем на 5, у полученного числа последнюю цифру пишем впереди числа 625, а первую цифру запоминаем. Потом число сотен данного числа возводим в квадрат и прибавляем ту цифру, которую только что запомнили, полученный результат пишем впереди написанных нами чисел.»

Например, при возведении 325 в квадрат, находим  $3 \cdot 5 = 15$ , пред числом 625 пишем 5 и запоминаем 1:

$$(325)^2 = 10\,000(3^2 + 1) + 1000 \cdot 5 + 625 = 105\,625.$$

Манана приводит также похожий прием для возведения в квадрат четырехзначных чисел, оканчивающихся на 125. А мы предлагаем нашим читателям обосновать изложенный Мананой способ возведения в квадрат трехзначного числа, оканчивающегося на 25, а также самостоятельно придумать ее «похожий прием» для четырехзначных чисел.

\*) Квадратные скобки обозначают целую часть числа



\* \* \*

Любопытный способ использования пальцев руки для запоминания значений и знаков синуса и косинуса основных углов предложил семиклассник Миша Перваков из школы № 2 г. Егорьевска Московской области:

«Посмотрим на ладонь левой руки и пронумеруем пальцы так: мизинец — 0, безымянный — 1, средний — 2, указательный — 3, большой — 4. При широко расставленных пальцах они примерно соответствуют «основным» углам первого квадранта:  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$  (рис. 1). Синусы этих углов будут равны половине квадратного корня из присвоенного пальцу номера.»

Например,

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{\text{номер среднего пальца}} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

Значение косинуса находится аналогично, только пальцы нужно пронумеровать в обратном порядке: большой — 0, ..., мизинец — 4

Эти значения можно свести в легко запоминающуюся таблицу, которую прислал в редакцию учитель Л. Ф. Белов (г. Дубовка Волгоградской области)

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin \alpha$	$\sqrt{0}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{4}/2$
$\cos \alpha$	$\sqrt{4}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{0}/2$

# Задачник Кванта

Наш журнал ежегодно проводит конкурс на лучшее решение задач из «Задачника «Кванта». Итоги этого конкурса подводятся в декабре. Победители — школьники, приславшие наиболее интересные и полные решения. — получают право участвовать в республиканских турах Всесоюзной физико-математической олимпиады школьников.

## Задачи

М841—М845; Ф853—Ф857

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 марта 1984 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 1—84» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М841, М842» или «Ф853». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

**М841.** Докажите, что произведение длин отрезков, на которые гипотенуза прямоугольного треугольника делится точкой касания вписанной в него окружности, равно площади этого треугольника.

**М842.** а) Докажите, что если  $\alpha + \beta + \gamma = 0$ , то

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = -4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

б) Величины  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  и  $\hat{C}$  углов треугольника удовлетворяют условию

$$\frac{\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C}}{\cos \hat{A} + \cos \hat{B} + \cos \hat{C}} = \sqrt{3}.$$

Докажите, что хотя бы один из них равен  $60^\circ$ .

*Л. Д. Курляндчик*

**М843.** В вершинах треугольника  $ABC$  восстановлены перпендикуляры  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  к его плоскости по одну сторону от неё, равные по длине соответствующим высотам треугольника. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из точки пересечения плоскостей  $ABC_1$ ,  $B_1CA_1$  и  $C_1AB_1$  на плоскость  $ABC$ , попадает в центр вписанной в треугольник  $ABC$  окружности и равен по длине ее радиусу.

*А. А. Ягубьянц*

**М844.** а) Докажите, что любое натуральное число  $a$  можно единственным образом представить в виде

$$a = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + \dots + a_n \cdot n!, \quad (1)$$

где  $a_k$  — целые числа,  $0 < a_k < k$ ,  $a_n \neq 0$ . (По определению,  $k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$ ,  $1! = 1$ .)

б) \* Докажите, что любое рациональное число  $r$ ,  $0 < r < 1$ , можно единственным образом представить в виде

$$r = \frac{b_1}{2!} + \frac{b_2}{3!} + \dots + \frac{b_n}{(n+1)!}, \quad (2)$$

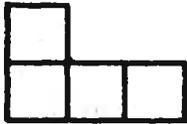


Рис. 1.

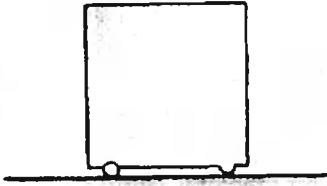


Рис. 2.

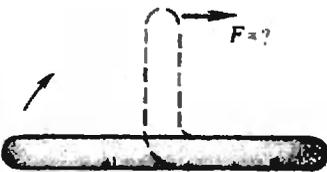


Рис. 3.

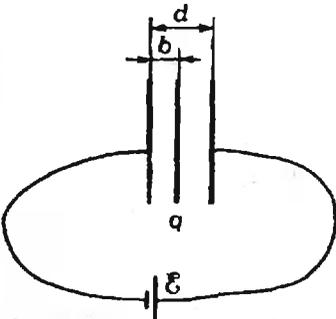


Рис. 4.

где  $b_k$  — целые числа,  $0 \leq b_k \leq k$ ,  $b_n \neq 0$ .

в) Представьте в виде (1) число  $a = 1984$  и в виде (2) число  $r = 19/84$ .

*В. Е. Колосов*

**М845\***. Для каких  $n$  из  $n$  уголков, состоящих из четырех клеток  $1 \times 1$ , и некоторого числа прямоугольников  $4 \times 1$  (рис. 1) можно составить центрально-симметричную фигуру (многоугольник на клетчатой бумаге)?

*В. Г. Белов*

**Ф853.** Левые опоры контейнера, в отличие от правых, сделаны на роликах (рис. 2), обеспечивающих пренебрежимо малое трение (размеры опор малы). Чтобы сдвинуть контейнер влево, к центру его правой стенки перпендикулярно ей надо приложить силу  $F_1$ . Чтобы сдвинуть контейнер вправо, к центру его левой стенки перпендикулярно ей надо приложить силу  $F_2$ . Определить массу контейнера, считая его однородным кубом.

*И. И. Воробьев*

**Ф854.** Оценить среднее усилие, которое надо прилагать к краю надувного матраца, чтобы согнуть его посередине под прямым углом (рис. 3). Матрац не имеет поперечных перегородок. Необходимые для решения величины и их достаточно реальные числовые значения задайте сами и получите численный результат.

*Е. И. Пальчиков*

**Ф855.** В плоский конденсатор, присоединенный к полюсам батареи с ЭДС  $\mathcal{E}$ , полностью вдвинута параллельно его пластинам заряженная пластина на расстоянии  $b$  от одной из пластин конденсатора (рис. 4). Найти силу, действующую на вдвинутую пластину, если ее заряд равен  $q$ . Силой тяжести пренебречь. Площадь пластин конденсатора равна  $S$ , расстояние между ними —  $d$ .

*В. П. Бородин, А. П. Ершов*

**Ф856.** Через нагревательную спираль с постоянным сопротивлением пропускают постоянный ток. На сколько процентов изменится среднее количество тепла, выделяющегося в спирали за секунду, если через нее пропускать одновременно еще и переменный (синусоидальный) ток, амплитудное значение которого составляет 10% от величины постоянного тока?

*В. Г. Дудников*

**Ф857.** На блестящей банке имеется плоская вмятина, от которой отражается на экран пучок света. В банку наливают охлажденную жидкость. Отраженный сигнал заметно ослабляется. Объясните явление.

*В. Г. Дудников*

## Problems

M841—M845; P853—P857

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (\*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than March 31 st, 1984, to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write **NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS)**.

M841. Prove that the product of lengths of the two segments into which the hypotenuse of a right triangle is divided by the point where the incircle touches it is equal to the triangle's area.

M842. a) Prove that  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  implies

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = -4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$$

b) The angles  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  of a triangle satisfy

$$\frac{\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C}}{\cos \hat{A} + \cos \hat{B} + \cos \hat{C}} = \sqrt{3}.$$

Prove that at least one of them is  $60^\circ$ .

L. D. Kurliandchik

M843. Perpendicular segments  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  to the plane of triangle  $ABC$  of lengths equal to the corresponding altitudes of the triangle are drawn in the same direction. Prove that the segment constructed perpendicularly to the plane  $ABC$  from the intersection point of the planes  $ABC_1$ ,  $BCA_1$ ,  $CAB_1$  meets the plane  $ABC$  at the centre of the incircle of triangle  $ABC$  and equals the incircle's radius in length.

A. A. Yagubians

M844. a) Prove that any natural number  $a$  can be uniquely represented in the form

$$a = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + \dots + a_n \cdot n! \quad (1)$$

where the  $a_k$  are integers,  $0 < a_k < k$ ,  $a_n \neq 0$ . (By definition,  $k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$ ,  $1! = 1$ .)

b) \* Prove that any rational number  $r$ ,  $0 < r < 1$ , can be uniquely represented in the form

$$r = \frac{b_1}{2!} + \frac{b_2}{3!} + \dots + \frac{b_n}{(n+1)!} \quad (2)$$

where the  $b_k$  are integers,  $0 < b_k < k$ ,  $b_n \neq 0$ .

c) Represent the number  $a = 1984$  in the form (1) and the number  $r = 19/84$  in the form (2).

V. E. Kolosov

M845\*. For what  $n$  is it possible to put together a centrally symmetric figure (a polygon on square-lined paper) using  $n$  "corners" (consisting of four 1 by 1 squares) and a certain amount of 4 by 1 rectangles (see figure Puc. 1).

V. G. Belov

P853. A container stands on small supports, the ones on the left side (unlike the ones on the right) having little wheels ensuring negligible friction (see figure Puc. 2). To move the container to the left, one must apply a force  $F_1$  to the centre of the container's right wall. To move it to the right, a force of  $F_2$  at the centre of the left wall is required. Determine the container's mass, assuming it to be a homogeneous cube.

I. I. Vorobiev

P854. Estimate the mean force which must be applied to the edge of a blow-up mattress in order to fold it at a right angle in the middle (figure Puc. 3). The mattress has no lateral stitches. Choose the necessary physical parameters

and supply them with reasonable numerical values yourself and obtain a numerical answer.

*E. I. Palchikov*

**P855.** A charged plate is introduced all the way between the plates of a flat capacitor parallel to them at a distance  $b$  from one of the plates (see figure Рис. 4). The capacitor is connected to the poles of a battery of EMF  $\mathcal{E}$ . Find the force acting on the charged plate if its charge is  $q$ . The weight of the plate is negligible. The area of the plates is  $S$ , the distance between them is  $d$ .

*V. P. Borodin, A. P. Ershov*

**P856.** Direct current circulates through a heating spiral of constant resistance. What will be the percentage change in the mean amount of heat emitted by the spiral per second if an alternative (sinusoidal) current, whose amplitude is 10% of the direct current's value, is also sent through the spiral?

*V. G. Dudnikov*

**P857.** A shiny can has a dent which reflects light on a screen. A cooled liquid is poured into the can. The reflected signal noticeably weakens. Explain this phenomenon.

*V. G. Dudnikov*

## Решения задач

### M826—M830; Ф837—Ф841

**M826.** На доске написали три числа. Затем одно из них стерли и вместо него написали сумму двух других чисел, уменьшенную на единицу. Эту операцию повторили несколько раз и в результате получили числа 17, 1967, 1983. Могли ли первоначально быть написаны числа а) 2, 2, 2; б) 3, 3, 3?

Ответ: а) нет, б) да. Заметим сначала, что если исходными числами были 2, 2, 2 или 3, 3, 3, или вообще любые числа, большие 1, то и все последующие числа будут больше 1, причем наибольшее число в каждой новой тройке всегда на 1 меньше суммы двух других. Это соображение позволяет по последней тройке чисел восстановить все предыдущие, кроме самой первой.

Действительно, пусть в тройке  $a, b, c$  для определенности  $a < b < c$ . Тогда  $c = a + b - 1$  и предыдущая тройка имеет вид  $a, b, x$ . Наибольшим числом в ней можно считать  $b$  (если  $x > b$ , то  $x = a + b - 1 = c$ ). Следовательно, тройка  $a, b, c$  при  $a < b < c$  получается из тройки  $a, b, b - a + 1$ .

Пользуясь этим правилом, восстановим все записи на доске, начиная с конца:

(17, 1967, 1983) ← (17, 1967, 1951) ← (17, 1935, 1951) ←  
← ... ← (17, 15, 31) ← (17, 15, 3) ← (13, 15, 3) ← ... ← (5,  
7, 3) ← (5, 3, 3).

По ианему правилу тройке 5, 3, 3 должна бы предшествовать тройка 1, 3, 3, содержащая 1, что невозможно. Поэтому 5, 3, 3 — тройка, полученная на первом шаге. (Очевидно, что остальные тройки на первом шаге возникнуть не могут.) Ясно, что тройка 5, 3, 3 может получиться из 3, 3, 3 и не может из 2, 2, 2.

*А. Бервиш*



**M827.** Известно, что четыре синих треугольника на рисунке 1 равновелики.

а) Докажите, что три красных четырехугольника на этом рисунке также равновелики.

Нам понадобится следующая часто применяемая лемма. Пусть  $P$  — точка на стороне  $KL$  треугольника  $KLM$ . Тогда отношение площадей треугольников  $MKP$  и  $MPL$  равно

$$S_{MKP} : S_{MPL} = |KP| : |PL|.$$

(Для доказательства достаточно заметить, что тре-

б) Найдите площадь одного четырехугольника, если площадь одного синего треугольника равна 1.

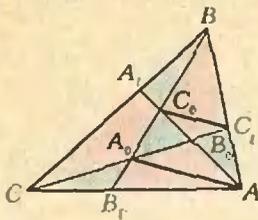


Рис. 1.

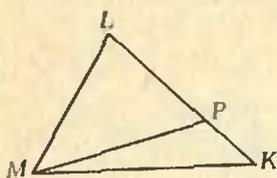


Рис. 2.

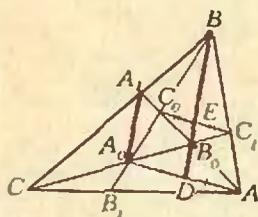


Рис. 3.

углы  $\angle MKP$  и  $\angle MPL$  имеют общую высоту, проведенную из вершины  $M$  (рис. 2).

а) Введем обозначения, как на рисунке 1. Заметим, что треугольники  $AA_0C_0$  и  $AA_0C_1$  равновелики (каждый из них составлен из треугольника  $AA_0B_0$  и одного из синих треугольников). Эти треугольники имеют общее основание  $AA_0$ , поэтому их вершины  $C_0$  и  $C_1$  равноудалены от прямой  $AA_0$ , то есть прямые  $AA_0$  и  $C_1C_0$  параллельны. Аналогично,  $BB_0 \parallel A_1A_0$  и  $CC_0 \parallel B_1B_0$ . Рассмотрим трапецию  $AA_0C_0C_1$  (рис. 3). Ее диагонали пересекаются в точке  $B_0$ , а продолжения боковых сторон — в точке  $B$ . Эти точки лежат на прямой, соединяющей середины  $D$  и  $E$  ее оснований  $AA_0$  и  $C_1C_0$ . (Действительно,  $B_0$  — центр гомотетии треугольников  $B_0AA_0$  и  $B_0C_0C_1$ , а  $B$  — центр гомотетии треугольников  $BAA_0$  и  $BC_1C_0$ .) А поскольку эта прямая параллельна  $A_1A_0$ , точка  $B_0$  — середина отрезка  $A_1A$ . По лемме отсюда вытекает, что  $S_{AB_0C} = S_{B_0A_1C}$ . Следовательно (см. рис. 1), площади четырехугольников  $AB_0A_0B_1$  и  $CA_0C_0A_1$  равны. Аналогично доказывается, что и третий красный четырехугольник  $BC_0B_0C_1$  имеет такую же площадь.

Подумайте, останется ли верным утверждение этого пункта задачи, если потребовать равенства площадей только трех угловых синих треугольников.

б) Ответ: площадь красного четырехугольника  $s = 1 + \sqrt{5}$ . Чтобы составить уравнение для нахождения искомой площади  $s$ , выразим двумя способами отношение  $|BC_1| : |C_1A|$  с помощью леммы:

$$\begin{aligned} |BC_1| : |C_1A| &= S_{BVC_1} : S_{CC_1A} = (2s + 2) : (s + 2) = \\ &= S_{B_0VC_1} : S_{B_0C_1A} = (s/2) : 1. \end{aligned}$$

(Пояснения здесь требуют только равенство  $S_{B_0VC_1} = s/2$ . Как было показано выше, точка  $F$  — середина  $C_0C_1$  (рис. 3). Отсюда, опять-таки пользуясь леммой, легко вывести, что треугольники  $B_0VC_1$  и  $B_0C_1A$  равновелики. А вместе они составляют четырехугольник  $BC_0B_0C_1$  площади  $s$ ). Итак,  $s$  удовлетворяет уравнению

$$s^2 - 2s - 4 = 0,$$

откуда  $s = 1 + \sqrt{5}$ .

Б. И. Чиник, В. И. Дубровский

М828\*. Можно ли в клетках бесконечного листа клетчатой бумаги расставить целые числа так, чтобы суммы чисел в каждом прямоугольнике размера  $4 \times 6$  клеток, стороны которого идут по линиям сетки, равнялась а) 10; б) 1?

♦ Ответ: а), б) можно. В обоих случаях искомую расстановку можно получить, комбинируя две более простые расстановки.

а) Поставим единицы на параллельных диагоналях сетки, удаленных друг от друга на 4 клетки (по горизонтали или вертикали), в остальные клетки поставим нули (рис. 1, а). Тогда сумма чисел в каждом прямоугольнике  $4 \times 6$  будет равна 6. Это первая расстановка. Вторая устроена так же, но в ней расстояния между диагоналями с единицами — 6 клеток (рис. 1, б); для нее сумма чисел в любом прямоугольнике  $4 \times 6$  равна 4. Теперь наложим одну расстановку на другую и сложим числа, попавшие в одну клетку; очевидно, для итоговой расстановки рассматриваемая сумма чисел всегда равна 10.

б) Возьмем те же расстановки, что и в пункте а), но на диагоналях вместо сплошных единиц поставим поочередно единицы и нули (рис. 2). Сумма чисел в любом прямоугольнике  $4 \times 6$  будет теперь в одном случае равна 3 (рис. 2, а), а в другом — 2 (рис. 2, б). Накладывая одну расстановку на другую и вычитая из каждого числа первой расстановки попавшее в ту же клетку число второй, получим требуемую расстановку.

Предлагаем читателям, используя те же идеи, доказать такое общее утверждение: в клетках бесконечной плоской решетки можно так расставить целые числа, что сумма чисел в любом прямоугольнике данных размеров принимает одна и та же заданное значение. То же верно для



Рис. 1, а.

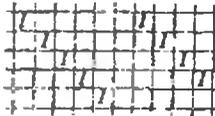


Рис. 1, б.

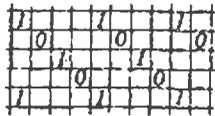


Рис. 2, а.

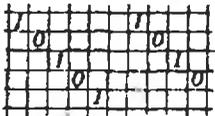


Рис. 2, б.

пространственной решетки и параллелепипедов. Подумайте, останется ли верным это утверждение, если ограничиться только неотрицательными числами.

Н. Ю. Нецагаев, А. Л. Смирнов

**М829.** Докажите, что среди любых  $2m+1$  различных целых чисел, по модулю не превосходящих  $2m-1$ , найдутся три числа, сумма которых равна 0.

Докажем утверждение задачи индукцией по  $m$ .

При  $m=1$  оно очевидно (единственная тройка чисел, удовлетворяющая условию, — это 0, 1 и  $-1$ ).

Предположим, что оно доказано для  $2m-1$  чисел и рассмотрим любое множество  $A$  из  $2m+1$  чисел, по модулю не превосходящих  $2m-1$ . Если в нем найдется  $2m-1$  чисел, по модулю не превосходящих  $2m-3$ , то утверждение следует из предположения индукции. В противном случае в множестве  $A$  есть хотя бы три из чисел  $\pm(2m-2)$  и  $\pm(2m-1)$ . Сменив при необходимости знаки у всех чисел из  $A$ , можно добиться, чтобы это были числа  $2m-1, 2m-2$ , а также  $-2m+1$  (1-й случай) или  $-2m+2$  (2-й случай).

1-й случай. Разобьем все числа от 1 до  $2m-2$  на пары, дающие в сумме  $2m-1$ :  $(1, 2m-2), (2, 2m-4), \dots, (m-1, m)$ , а числа от 0 до  $-2m+1$  — на пары, дающие в сумме  $-2m+1$ :  $(0, -2m+1), \dots, (-m+1, -m)$ . Получится  $2m-1$  пар, содержащих все  $2m$  чисел множества  $A$ , кроме  $2m-1$ . Поэтому хотя бы одна пара входит в множество  $A$  и составляющие ее числа в сумме с  $-2m+1$  или с  $2m-1$  дадут 0.

2-й случай. Рассмотрим теперь  $m-2$  пары  $(1, 2m-3), (2, 2m-4), \dots, (m-2, m)$  с суммой чисел  $2m-2$  и  $m$  пар  $(0, -2m+1), \dots, (-m+1, -m)$  с суммой чисел  $-2m+1$ . Эти  $2m-2$  пары содержат все числа множества  $A$ , кроме  $2m-1, 2m-2$  и  $m-1$ , то есть  $2m-1$  чисел из  $A$ . Следовательно, одна из них опять входит в множество  $A$  и дает нулевую сумму с  $-2m+2$  или  $2m-1$ .

Н. В. Карташов

**М830.** Школьник упражняется в решении квадратных уравнений. Выписав какое-то уравнение  $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ , он решает его и, убедившись, что оно имеет два корня, составляет второе уравнение  $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ , в котором  $p_2$  — это меньший, а  $q_2$  — больший корень первого уравнения. По второму уравнению он составляет третье, если это возможно, и т. д.

а) Докажите, что это упражнение не может продолжаться бесконечно долго.

б) Найдите наибольшую длину конечной последовательности квадратных трехчленов, удовлетворяющих указанному условию.

а) Решение основано на изучении знаков коэффициентов уравнений. Пусть  $f_n(x) = x^2 + p_nx + q_n = 0$  — е уравнение в рассматриваемой последовательности. Докажем, такое утверждение:

если  $n \geq 3$  и уравнение  $f_n(x) = 0$  не последнее, то числа  $p_n$  и  $q_n$  либо оба положительны, либо оба отрицательны.

Пользуясь теоремой Виета, выразим коэффициенты квадратного трехчлена  $f_{n-1}(x)$  через  $p_n$  и  $q_n$ .

$$p_{n-1} = -(p_n + q_n), \quad q_{n-1} = p_n q_n \tag{1}$$

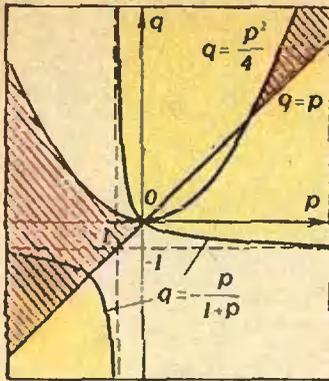
По условию  $p_n < q_n$  и  $p_{n-1} < q_{n-1}$ , то есть  $-(p_n + q_n) < p_n q_n$  или  $q_n > -p_n(1 + q_n)$ . Присоединяя к этим неравенствам условие положительности дискриминанта трехчлена  $f_n x$ , получим систему

$$q_n > p_n \tag{2}$$

$$q_n > -p_n(1 + q_n) \tag{3}$$

$$4q_n < p_n^2 \tag{3}$$

которая решена графически на полях. Из графика сразу следует наше утверждение. (Впрочем, его нетрудно доказать и алгебраически: случай  $p_n > 0 > q_n$  невозможен ( $q_n > p_n$ ); если же  $p_n < 0 < q_n$ , то из (2) и (3) получим, что  $q_n > p_n^2(1 + q_n)^2 > 4q_n(1 + q_n)^2$  или  $4q_n^2 + 7q_n + 4q_n < 0$ , что также невозможно при  $q_n > 0$ ).



Желтым цветом выделено множество точек плоскости  $(p, q)$ , координаты которых удовлетворяют неравенству  $q > -p(1+q)$ ; красной штриховкой — решения системы неравенств  $q > p$  и  $4q < p^2$ . В желтых областях с красной штриховкой лежат точки, координаты  $(p, q)$  которых могут служить коэффициентами уравнения, не являющегося ни первым, ни вторым, ни последним в рассматриваемой последовательности.

**Ф837.** Для измерения скоростей частиц используется лазерный анеометр, в котором движущиеся частицы освещаются двумя пересекающимися лазерными когерентными пучками света (рисунк 1). Отраженный частицами свет улавливается фотозлементом  $\Phi$  и преобразуется в электрический сигнал. Частицы движутся по перпендикуляру к биссектрисе угла  $\alpha = 60^\circ$  между пучками. С какой скоростью двигалась частица, если при длине волны лазерного излучения  $\lambda = 0,63$  мкм был зарегистрирован периодический сигнал частотой  $\nu = 320$  кГц?

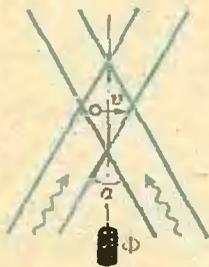


Рис. 1.

Теперь допустим, что число уравнений в последовательности не меньше пяти. Если уравнение  $f_5(x) = 0$  не последнее, то из доказанного утверждения и соотношений (1) вытекает, что возможны только два случая: либо  $0 < p_5 < q_5$  и тогда  $p_4 < 0 < q_4$ , либо  $p_5 < q_5 < 0$  и тогда  $0 < p_4 < q_4$ , а  $p_3 < 0 < q_3$ . И то, и другое противоречит нашему утверждению. Следовательно, рассматриваемая последовательность уравнений всегда обрывается, причем не позднее пятого шага.

б) Ответ: наибольшая длина последовательности квадратных трехчленов равна 5.

Из решения задачи а) видно, что составить больше пяти уравнений по указанному закону нельзя. Следующий пример показывает, что последовательность длины 5 существует (она выписана с конца — в том порядке, в котором ее удобнее строить по формулам (1)):  $f_5(x) = -x^2 - \frac{1}{2}x + 4$ ,  $f_4(x) = x^2 - \frac{7}{2}x - 2$ ,  $f_3(x) = x^2 + \frac{11}{2}x + 7$ .

$$f_2(x) = x^2 - \frac{25}{2}x + \frac{77}{2}, \quad f_1(x) = x^2 - 26x - \frac{1925}{4}$$

М. В. Сапир

Поскольку лазерные пучки когерентны, в области их пересечения они будут интерферировать.

Выберем систему координат  $XOY$  так, как это показано на рисунке 2, и для произвольной точки  $a$  с координатами  $x$  и  $y$  найдем разность фаз  $\Delta\varphi$  для двух плоских волн, соответствующих нашим пучкам и приходящих в эту точку. Пусть фаза первой волны в точке с координатами  $x=0$  и  $y=0$  равна  $\varphi_0$ , то есть  $\varphi_1(0, 0) = \varphi_0$ . Фронт этой волны изображен на рисунке 2 прямой  $N_{10}$ , проходящей через точку  $(0; 0)$ ; фронт этой же волны, проходящий через точку  $(x; y)$ , изображен прямой  $N_1$ . Очевидно, что разность хода  $\Delta_1$  для лучей, соответствующих этой волне, приходящих в точки  $(0; 0)$  и  $(x; y)$ , равна расстоянию между прямыми  $N_{10}$  и  $N_1$ , то есть равна длине отрезка  $OB$ . Из простых геометрических соображений находим длину этого отрезка  $\Delta_1$ :

$$\Delta_1 = |OB| = x \sin \frac{\alpha}{2} + y \cos \frac{\alpha}{2}$$

Следовательно, фаза волны в точке  $(x; y)$  равна

$$\varphi_1(x, y) = \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda} (x \sin \frac{\alpha}{2} + y \cos \frac{\alpha}{2}),$$

где  $\lambda$  — длина волны.

Совершенно аналогично положим фазу волны, соответствующей второму пучку, в точке с координатами  $(d; 0)$  равной  $\psi_0$ , то есть  $\varphi_2(d, 0) = \psi_0$  (здесь  $d$  — расстояние между точками  $O$  и  $O'$ ). На рисунке 2 фронт второй волны, проходящий через точку  $(d; 0)$ , изображен прямой  $N_{20}$ , а фронт этой волны, проходящий через точку  $(x; y)$ , изображен прямой  $N_2$ . Разность хода  $\Delta_2$  равна длине отрезка  $O'C$ , то есть равна

$$\Delta_2 = |O'C| = (d-x) \sin \frac{\alpha}{2} + y \cos \frac{\alpha}{2}$$

Следовательно, фаза второй волны в точке  $(x, y)$  равна

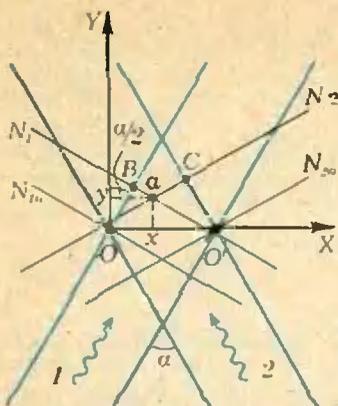


Рис. 2.

$$\varphi_2(x, y) = \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda} \left( (d-x) \sin \frac{\alpha}{2} + y \cos \frac{\alpha}{2} \right).$$

Разность фаз  $\Delta\varphi(x, y)$  между волнами двух пучков в точке  $(x, y)$  равна

$$\Delta\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y) = \varphi_0 - \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda} \left( 2x \sin \frac{\alpha}{2} - d \sin \frac{\alpha}{2} \right).$$

Как видно из полученного выражения для  $\Delta\varphi(x, y)$ , сдвиг по фазе между волнами двух пучков света зависит только от координаты  $x$ . Пусть амплитуды волн обоих пучков равны друг другу и равны  $A$ . Распределение интенсивности света в области пересечения пучков будет иметь вид

$$I(x) = 2A^2(1 + \cos \Delta\varphi) = 2A^2 \left( 1 + \cos \left( \varphi_0 - \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda} \left( 2x \sin \frac{\alpha}{2} - d \sin \frac{\alpha}{2} \right) \right) \right).$$

Эта периодическая функция имеет период  $\Delta x$  вдоль оси  $X$ , который находится из условия

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2 \cdot \Delta x \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = 2\pi \Rightarrow \Delta x = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Если размер частицы меньше  $\Delta x$  и частица движется равномерно со скоростью  $v$  вдоль оси  $X$ , то интенсивность света, отраженного от частицы и улавливаемого фотоэлементом, будет периодически меняться со временем с периодом  $T = \Delta x/v$  или с частотой  $\nu = v/\Delta x$ . Подставляя найденное выражение для  $\Delta x$ , из последнего равенства находим скорость частицы:

$$v = \frac{\lambda \nu}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{0,63 \times 10^{-6} \cdot 320 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,5} \text{ м/с} \approx 0,2 \text{ м/с}.$$

В. В. Можая

**Ф838.** В 1844 году выдающийся математик и астроном Бессель обнаружил, что собственное (не связанное с движением земного наблюдателя) движение Сириуса происходит примерно по синусоиде (рис. 1). Максимальное угловое отклонение от прямолинейного пути  $\alpha = 2,3''$ , период  $T = 50$  лет. Бессель предположил (через 18 лет это было подтверждено прямыми наблюдениями), что искривление пути Сириуса вызывается наличием спутника — более слабой звезды. Найдите отношение массы  $m$  спутника (Сириуса В) к массе  $M_c$  Сириуса, если масса основной звезды (Сириуса А)  $M = 2,3M_c$ . Известно, что радиус земной орбиты виден с Сириуса под углом  $\beta = 0,376''$ . Считать, что орбиты звезд круговые, а плоскости

Из условия задачи ясно, что  $\alpha$  — угловой размер радиуса орбиты Сириуса А при наблюдении с Земли. Учитывая малость углов  $\alpha$  и  $\beta$ , можем записать соотношение между радиусами орбит Сириуса А ( $R$ ) и Земли ( $R_0$ ) (см. рисунок 2):

$$\frac{R}{R_0} = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (1)$$

Компоненты системы Сириуса обращаются вокруг общего центра масс. Радиус  $r$  орбиты Сириуса В равен

$$r = \frac{M}{m} R. \quad (2)$$

Расстояние между компонентами, таким образом, равно  $R+r$ .

Запишем уравнения движения (II закон Ньютона) для Сириуса А и для Земли (масса Земли  $m_0$ , земной год  $T_0$ ):

$$M \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 R = G \frac{Mm}{(R+r)^2}. \quad (3)$$

$$m_0 \left( \frac{2\pi}{T_0} \right)^2 R_0 = G \frac{M_c m_0}{R_0^2}. \quad (4)$$

Поделим уравнение (3) на уравнение (4):

орбит перпендикулярна направлению от Солнечной системы к Сириусу.

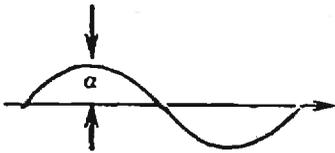


Рис. 1.

$$\left(\frac{T_0}{T}\right)^2 \frac{R}{R_0} = \frac{m}{M_C} \frac{R_0^2}{(R+r)^2} \quad (5)$$

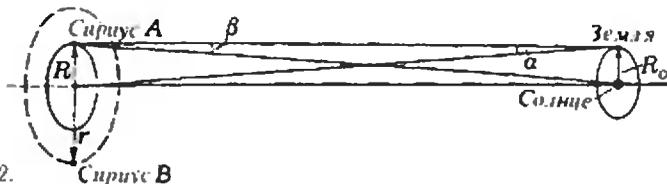


Рис. 2.

Удобно ввести безразмерные величины  $\mu = \frac{m}{M_C}$ ,  $\tau = \frac{T}{T_0}$ ,

$\varrho = \frac{R}{R_0}$ . Тогда уравнение (5) с учетом соотношения (2) преобразуется к виду

$$\frac{(\mu + M/M_C)^2}{\mu^3} = \frac{\tau^2}{\varrho^3}.$$

Но  $M/M_C = 2.3$ ,  $\varrho = \alpha/\beta \approx 6.1$  (соотношение (1)), а  $\tau = 50$ . Следовательно,

$$\frac{(\mu + 2.3)^2}{\mu^3} = \frac{\tau^2}{(\alpha/\beta)^3} \approx 11.$$

Подбором находим:

$$\mu = m/M_C \approx 1.$$

В. Е. Белонучкин

Ф839. Если шестигранный карандаш положить на наклонную плоскость, составляющую угол  $\alpha$  с горизонтальной поверхностью, перпендикулярно ее образующей (линии пересечения плоскости с горизонтальной поверхностью), карандаш будет покоиться. Если его положить параллельно образующей, он будет скатываться вниз. При каких углах  $\varphi$  между осью карандаша и образующей наклонной плоскости (рис. 1) карандаш будет находиться в равновесии?

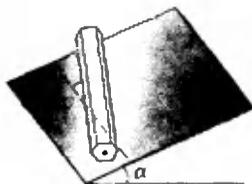


Рис. 1.

Из условия задачи следует, что коэффициент трения скольжения  $\mu$  карандаша по наклонной плоскости удовлетворяет условию  $\mu \geq \operatorname{tg} \alpha$ . Действительно, карандаш, положенный перпендикулярно образующей, находится в равновесии, а это означает, что  $mg \sin \alpha = F_{\text{тр}}$ , где  $mg$  — сила тяжести,  $F_{\text{тр}}$  — сила трения. Но  $F_{\text{тр}} < \mu mg \cos \alpha$ . Следовательно,  $mg \sin \alpha < \mu mg \cos \alpha$ , откуда  $\mu \geq \operatorname{tg} \alpha$ .

Это означает, что ни при каких значениях угла  $\varphi$  скольжения карандаша по наклонной плоскости не будет.

Скатывание карандаша может начаться при таком угле  $\varphi_0$ , когда вектор силы тяжести «выйдет» за пределы участка соприкосновения карандаша и наклонной плоскости (на рисунке 2 этот участок заштрихован). Для нахождения этого угла спроектируем на наклонную плоскость центр масс карандаша — точка А на рисунке 2 — и отметим точку пересечения вертикали, проходящей через центр масс, с наклонной плоскостью — точка В. Очевидно, при различной ориентации карандаша, если его центр масс остается на месте, точки А и В будут неподвижны, причем, если сторона шестигугольного поперечного сечения карандаша равна  $2a$ , то  $|AB| = 2a \sin \alpha$ .

Пока точка В лежит в заштрихованной области, карандаш не будет перекатываться. Запишем условие начала скатывания:

$$\frac{|AD|}{\cos \varphi_0} = |AB_0|, \quad \text{или} \quad \frac{a}{\cos \varphi_0} = a\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha.$$

Отсюда

$$\varphi_0 = \arccos \frac{1}{\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}.$$

Таким образом, если угол  $\varphi$  удовлетворяет условию

$$\arccos \frac{1}{\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

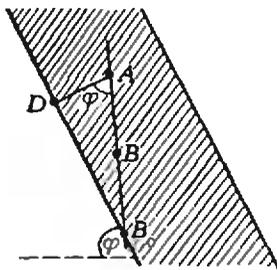


Рис. 2.

**Ф840.** В горизонтально расположенной плотной коробке размером  $10 \times 10$  см беспорядочно лежат  $N=1000$  маленьких стальных шариков массы  $m=0,5$  мг каждый. Коробку начинают двигать со скоростью  $v_0=10$  м/с перпендикулярно одной из боковых стенок. Считая удары шариков о стенки коробки и друг о друга абсолютно упругими, определить: а) какие импульсы передадут шарикам каждой из боковых стенок за первые 10 секунд; б) какие импульсы получают стенки за следующие 10 секунд после того, как коробку резко затормозили.

карандаш находится в равновесии. Очевидно, выражение для угла  $\varphi_0$  имеет смысл при условии  $\operatorname{tg} \alpha > \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Тот факт, что карандаш, положенный параллельно образующей скатывается, означает, что  $\operatorname{tg} \alpha > \frac{1}{\sqrt{3}}$  (покажите это самостоятельно).

С. С. Кротон



Когда коробка начнет двигаться и ударять шарики, они приобретут скорость  $2\vec{v}_0$ , и через время  $\tau_1 = a/v_0$  ( $a$  — сторона коробки) все шарики начнут двигаться (это время на самом деле несколько меньше, так как некоторые шарики могут из-за взаимных столкновений начать движение раньше, чем до них дойдет стенка). После множества соударений шариков друг с другом и со стенками скорости шариков будут иметь самые произвольные направления.

Дальнейшее удобнее рассматривать в системе отсчета, связанной с коробкой. В этой системе средняя скорость шарика (вектор) равна нулю, а так как скорость коробки по условию не меняется, то и суммарная энергия шариков остается постоянной, и в среднем каждый шарик будет иметь энергию  $mv_0^2/2$ . Это все очень похоже на поведение молекул газа, влетающих через малое отверстие в пустой сосуд и имеющих вначале одинаково направленные скорости, а через некоторое время уже движущихся совершенно хаотически.

Остается выяснить: достаточно ли большое время задано в условии задачи (10 секунд), чтобы движение шариков стало хаотическим. Для этого найдем приближенно среднее время между соударениями шариков. Будем считать, что за это время  $\tau_{\text{ср}}$  шарик диаметра  $d$  двигался по прямой со скоростью  $v_0$ . Тогда он «заметает» площадь

$$S = 2dv_0\tau_{\text{ср}},$$

в которую (в среднем) попадает центр только одного шарика из хаотически расположенных остальных. На эти остальные шарики приходится площадь  $a^2$  ( $a$  — сторона коробки). Значит, условие единственности столкновения за время  $\tau_{\text{ср}}$  выглядит так:

$$\frac{a^2}{N-1} = 2dv_0\tau_{\text{ср}} \Rightarrow \tau_{\text{ср}} = \frac{a^2}{2dv_0(N-1)}.$$

Диаметр шарика найдем, зная его массу и плотность стали:

$$d = \sqrt[3]{\frac{6m}{\pi\rho}} \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,5 \text{ мм}.$$

Итак, среднее время между соударениями равно  $\sim 1 \cdot 10^{-3}$  с. Ясно, что с учетом времени  $\tau_1 = a/v_0 = 10^{-2}$  с время «хаотизации» не превышает 0,015–0,020 с, то есть составляет малую часть заданного интервала 10 с. Поэтому можно приближенно считать, что шарики все время движутся хаотически. Тогда число ударов о каждую из стенок одинаково. Для подсчета ударов существенно движение шарика перпендикулярно интересующей нас стенке. Обозначим скорость шарика в этом направлении  $v_x$ . Число ударов за малое время  $\Delta t$  равно

$$\Delta n = \frac{v_x \cdot \Delta t \cdot a}{a^2} \cdot \frac{1}{2} N = \frac{v_x N}{2a} \cdot \Delta t.$$

Значит, за время  $T=10$  с число ударов равно

$$n = \frac{\Delta n}{\Delta t} T = \frac{v \cdot NT}{2a}$$

При каждом ударе стенка получает импульс  $p = 2mv$ , и полный импульс, получаемый стенками за время  $T$  —

$$P = pn = 2mv_x n = \frac{mv_x NT}{a}$$

Учитывая, что  $v_0^2 = v_x^2 + v_y^2$  и, в среднем,  $v_x^2 = v_y^2$ , получаем:

$$P = \frac{mv_0^2 NT}{2a} = \frac{0,5 \cdot 10^{-9} \cdot 10^2 \cdot 10^3 \cdot 10}{2 \cdot 0,1} \text{ кг} \cdot \text{м/с} = 2,5 \text{ кг} \cdot \text{м/с}. \quad (*)$$

Суммарная энергия шариков складывается из энергии их поступательного движения с коробкой и энергии хаотического движения относительно коробки:

$$W = N \frac{mv_0^2}{2} + N \frac{mv_0^2}{2} = Nmv_0^2.$$

После остановки коробки эта энергия измениться не может. Следовательно, среднее значение квадрата скорости хаотического движения шариков после остановки коробки станет равным  $2v_0^2$ , и за следующие 10 секунд стенки получат импульс  $2P = 5 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$  каждая.

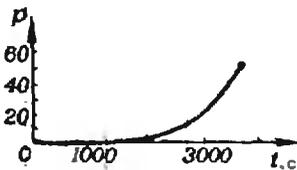
Все это очень похоже на поведение обычного идеального газа, только шарики летают в плоскости и имеют каждый по две степени свободы, а не по три, как молекулы газа. Поэтому коэффициент в формуле (\*) отличается от привычного.

Подумайте, что будет с импульсами, получаемыми стенками, если еще раз привести коробку в движение, а потом остановить.

А. Р. Зильберман



**Ф841.** Спускаемый аппарат космического корабля приближается к поверхности некоторой планеты с постоянной скоростью, передавая на борт корабля данные о наружном давлении. График зависимости давления  $p$  (в условных единицах) от времени  $t$  приведен на рисунке. Опустившись на поверхность планеты, аппарат измерил и передал на борт данные о температуре и ускорении свободного падения:  $T = 700 \text{ К}$ ,  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Определить скорость спуска аппарата, если известно, что атмосфера планеты состоит из углекислого газа ( $\text{CO}_2$ ). Определить также температуру на высоте  $h = 15 \text{ км}$  над поверхностью планеты.



Определим сначала скорость спускаемого аппарата.

Заметим, что изменение давления  $\Delta p$  с изменением высоты  $\Delta h$  связано соотношением

$$\Delta p = \rho g \cdot \Delta h, \quad (1)$$

где  $\rho$  — плотность газа, которая, вообще говоря, с высотой меняется. Из закона Менделеева — Клапейрона следует, что

$$p = \frac{\rho}{\mu} RT \Rightarrow \rho = \frac{p\mu}{RT}$$

(здесь  $T$  — температура именно в той точке, где мы интересуемся изменением давления). Подставляя это выражение для  $\rho$  и учитывая, что  $\Delta h = v \cdot \Delta t$  ( $v$  — скорость спуска аппарата), можем записать уравнение (1) в виде

$$\frac{(\Delta p / \Delta t)}{p} = \frac{\mu g v}{RT}. \quad (2)$$

Зная отношение  $\Delta p / \Delta t$ , то есть тангенс угла наклона касательной в конечной точке графика, с помощью (2) найдем скорость  $v$ . (Отметим, что, поскольку в левой части (2) стоит отношение  $\Delta p / p$ , нам безразличен масштаб графика по оси  $p$ .)

Находя из графика  $(\Delta p / \Delta t) / p$  и подставляя  $\mu = 44 \text{ г/моль}$ , получаем:

$$v = \frac{\Delta p}{p \cdot \Delta t} \frac{RT}{\mu g} = \frac{8,3 \cdot 7 \cdot 10^2}{10 \cdot 44 \cdot 10^{-3} \cdot 1150} \text{ м/с} \approx 11,5 \text{ м/с}.$$

Перейдем теперь к решению второй части задачи. Поскольку аппарат спускался со скоростью  $11,5 \text{ м/с}$ , на высоте  $15 \text{ км}$  над поверхностью планеты он был за  $1300$  секунд до посадки. На графике зависимости  $p(t)$  этому соответствует время  $t = 2350 \text{ с}$ . Определив значение  $(\Delta p / \Delta t) / p$  для этой точки графика, из соотношения (2) найдем температуру  $T_h$  на высоте  $15 \text{ км}$ :

$$T_h = \left( \frac{p \cdot \Delta t}{\Delta p} \right) \frac{g \mu v}{R} \approx 430 \text{ К}.$$

А. И. Буздин



## Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу

Во Всесоюзную заочную математическую школу Академии педагогических наук СССР при МГУ им. М. В. Ломоносова (ВЗМШ) принимаются учащиеся седьмых классов и учащиеся ПТУ, за исключением проживающих в Москве и Ленинграде.

Для поступления в школу нужно выполнить первое задание.

**Задание 1.** Изучить статью «Системы линейных уравнений» в этом номере журнала (см. с. 24) и решить следующие задачи из этой статьи: основные задачи — №№ 1—6, 8, 9, 12, 14, 16, 18, дополнительные задачи — №№ 7, 10, 20, 21.

Решения задач должны быть выполнены на русском языке в ученической тетради в клетку. Задачи должны идти в том порядке, в котором они даны в статье, сначала — условие, затем — решение. На обложку тетради надо наклеить листок бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу:

Область  
Фамилия, имя  
Год рождения  
Класс и школа  
Фамилия, и. о. учителя математики  
Местр работы и должность родителей

*Московская  
Иванов Петр  
1970  
7 класс «Б», с. ш. № 2  
Никаноров Владимир Алексеевич  
Отец — шофер автобазы № 1.  
мать — медсестра  
123456, г. Клин, ул. Строителей, д. 1, кв. 1.*

Полный почтовый адрес

Срок отправки задания 1 — не позднее 5 мая 1984 г. (по почтовому штемпелю)

Для того чтобы задание было зачтено, нужно решить фальшую часть основных задач. Если Вы успешно выполните это задание, то начиная с сентября 1984 г. Вы будете получать все дальнейшие задания. Предполагается, что часть заданий будет даваться по журналу «Квант» (журнал «Квант» распространяется только по подписке, причем подписка принимается во всех отделениях связи с любого месяца).

Первое задание нужно выслать по адресу: «119899, Москва, МГУ, ВЗМШ. На прием» или по адресу соответствующего филиала. Филиалы ВЗМШ при университетах имеются в городах Воронеж, Гомель, Донецк, Душанбе, Иваново, Ижевск, Казань, Краснодар, Красноярск, Куйбышев, Махачкала, Одесса, Ростов-на-Дону, Свердловск, Чебоксары, Челябинск, Черновцы, Элиста, Ярославль; филиалы при педагогических институтах — в городах Абакан, Бирск, Благовещенск, Брянск, Витебск, Киров, Ленинабад, Луцк, Магадан, Орел, Павлодар, Славянск, Смоленск, Тернополь, Ульяновск, Уральск, Целиноград, Череповец, Чита, Южно-Сахалинск; работают также филиал в г. Дубна при Объединенном институте ядерных исследований и отделение при Московском институте стали и сплавов.

Учащиеся, проживающие на Северо-западе РСФСР (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской и Псковской обл., Карельской АССР), в прибалтийских союзных республиках и в Белоруссии (кроме Витебской и Гомельской обл.), должны присылать задания по адресу: «193130, Ленинград, 8-я Советская ул., 3, ЗМШ. На прием».

Школьники, не успевшие или не сумевшие поступить в ВЗМШ, имеют возможность заниматься в группах «Коллективный ученик ВЗМШ». Каждая такая группа — это школьный математический кружок, работающий под руководством своего учителя по программе ВЗМШ. Прием в эти группы проводится по 20 сентября 1984 г. на два потока: для тех, кто с сентября 1984 г. начнет учиться в 8 классе, и для тех, кто начнет учиться в 9 классе.

В группы «Коллективный ученик» — прием без конкурса. Для организации группы достаточно заявления учителя математики, руководящего кружком, с указанием списка учащихся. Заявление должно быть заверено директором школы и печатью. Работа руководителей групп «Коллективный ученик ВЗМШ» может оплачиваться школами по представлению ВЗМШ как факультативные занятия. Заявления следует направлять в адрес ВЗМШ.

## Заочная физико-техническая школа при МИСиС

Филiaal Всесоюзной заочной математической школы — Заочная физико-техническая школа при Московском ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени институте стали и сплавов — объявляет набор учащихся в восьмые и девятые классы на 1984/85 учебный год.

Цель работы школы — оказание помощи учащимся в углубленном изучении программного материала средней школы по физике и математике.

Программа обучения по математике полностью соответствует курсу ВЗМШ. Курс физики разработан преподавателями кафедры общей физики и кафедры теоретической физики Московского института стали и сплавов и соответствует уровню требований на вступительных экзаменах в вузы, прежде всего — в МИСиС.

Работа школы организована следующим образом. Четыре-пять раз в год учащимся рассылаются контрольные задания по физике и математике вместе с краткими сведениями по теории и примерами решения задач. Присланные учащимися контрольные работы проверяются и вместе с оценками и комментариями отправляются учащимся. В качестве годового задания учащимся десятых классов посылаются материалы вступительных экзаменов в МИСиС за прошлые годы.

Занятия в ЗФТШ (МИСиСа) начнутся с 1 октября 1984 года. Для зачисления в школу необходимо прислать заявление с указанием фамилии, имени, отчества, полного домашнего адреса, профессии и занимаемой должности родителей, а также приложить справку из школы с указанием класса и годовых оценок по физике и математике. Заявление и справку нужно выслать *не позднее 1 марта* по адресу: 117049, Москва, Ленинский проспект, 4, МИСиС, ЗФТШ.

О первом задании по математике написано в статье «Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу» (см. с. 53).

## Новый прием на заочное отделение Малого мехмата

Малый механико-математический факультет — математическая школа при механико-математическом факультете МГУ — объявляет прием на заочное отделение учащихся седьмых классов общеобразовательных школ европейской части РСФСР и Белоруссии (за исключением школьников Москвы и Ленинграда).

Зачисление на Малый механико-математический факультет (сокращенно МММФ) производится по результатам решения задач вступительной работы, публикуемой ниже.

Основной задачей Малого мехмата является приобщение к математике, углубление знаний в рамках школьной программы, а также расширение математического кругозора учащихся средних школ.

Занятия начнутся с 1 сентября 1984 года. Обучение на Малом мехмате бесплатное. Срок обучения три года. Учащиеся заочного отделения, особо успешно окончившие 8 и 9 классы, рекомендуются для поступления в физико-математическую школу-интернат № 18 при МГУ. Учащиеся, успешно выполнившие все задания, получают удостоверение об окончании МММФ.

Преподавателями на заочном отделении МММФ работают студенты и аспиранты механико-математического факультета. Разработку тематических брошюр осуществляет методический Совет МММФ, состоящий из профессоров и преподавателей механико-математического факультета.

Желающие поступить на Малый мехмат должны не позднее 15 апреля 1984 года выслать в адрес МММФ решения по возможности большего числа задач вступительной работы. Работа должна быть выполнена в школьной тетради в клетку. На обложку тетради необходимо наклеить тетрадный лист бумаги со следующими данными:

- |   |  |
|---|--|
| 1. Республика, край, область                  | <i>РСФСР. Московская обл.</i>  |
| 2. Фамилия и имя учащегося                    | <i>Осипов Андрей</i>   |
| 3. Школа и класс (полное название)            | <i>Раменская средняя школа № 27, класс 7 «В»</i>                           |
| 4. Фамилия, имя и отчество учителя математики | <i>Бабенко Валентина Ивановна</i>  |
| 5. Полный домашний адрес                      | <i>140191, г. Раменское Московской обл., ул. Космонавтов, д. 3, кв. 36</i> |

## 6. Сведения о родителях:

Отец — фамилия, имя и отчество, где и кем

работает

Мать — фамилия, имя и отчество, где и кем

работает

## 7. Результаты проверки

Осипов Иван Матвеевич, слесарь завода МЭЗ  
Осипова Зинаида Андреевна, лаборант завода МЭЗ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

В работу вложить листок бумаги  $14 \times 6$  см, на котором написать полный домашний адрес и фамилию учащегося, и прислать по адресу: 119899, Москва, МГУ, Малый мехмат

## Примечания

1. Для школьников 7—10 классов Москвы и ближнего Подмосковья работает вечернее отделение МММФ. Справки по телефону 139-39-43.

2. Школьники Казахстана и Молдавии присылают вступительные работы в филиалы МММФ МГУ, действующие при математическом факультете Казахского государственного университета и при факультете математики и кибернетики Кишиневского государственного университета. Их адреса: 480012, г. Алма-Ата, ул. Кирова-Масанчи, 47/39, Каз. ГУ, математический факультет, филиал МММФ МГУ; 277003, г. Кишинев, ул. Садовая, 60, КГУ, факультет математики и кибернетики, филиал МММФ МГУ.

## Задачи вступительной контрольной работы на Малый механико-математический факультет в 1984 году

1. В городе планируется построить метрополитен с 20 станциями так, чтобы от каждой из них можно было проехать до любой другой (возможно, с пересадками). Какое наименьшее количество линий надо для этого проложить, если линией называть участок пути с односторонним движением между двумя станциями?

2. У трех мальчиков имеются медные монеты на одинаковую сумму. У первого из них все монеты трехкопеечные и однокопеечные, причем однокопеечные не более двух (или совсем нет). У второго все монеты пятикопеечные и однокопеечные, причем однокопеечных не более четырех (или совсем нет). У третьего все монеты двухкопеечные и однокопеечные, причем однокопеечных одна или две. Доказать, что пятикопеечных и трехкопеечных монет вместе не меньше, чем двухкопеечных.

3. В зрительном зале клуба 320 мест, расположенных одинаковыми рядами. После того как число мест в каждом ряду увеличили на 4 и добавили еще один ряд, в зрительном

зале стало 420 мест. Сколько стало рядов в зрительном зале?

4. На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  выбраны точки  $K$  и  $L$  так, что периметры треугольников  $ABL$ ,  $ALC$ ,  $AKC$  и  $BKC$  равны. Доказать, что треугольник  $ABC$  равнобедренный.

5. Доказать, что диагональ не может делить трапецию на два конгруэнтных треугольника.

6. Какое наибольшее количество острых углов может иметь выпуклый 100-угольник?

7. При каких значениях  $p$  оба корня квадратного уравнения

$$x^2 + 2(p+1)x + 9p - 5 = 0$$

отрицательны?

8. В автобусной кассе имеется 1001 билет. Все билеты занумерованы подряд идущими шестизначными числами. Доказать, что среди них найдется «счастливый» билет, то есть такой, у которого сумма первых трех цифр равна сумме последних трех цифр.

9. Число 19 представить в виде разности кубов натуральных чисел. Показать, что такое представление единственно.

10. По кругу расположены 13 различных чисел. Доказать, что из них всегда можно выбрать три следующих друг за другом числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  так, что  $ab > bc$ .

## Стабилизированный одноатомный водород

(Начало см. на с. 7)

Затем при помощи сильного неоднородного магнитного поля, создаваемого соленоидом со сверхпроводящей обмоткой, атомы с параллельными электронными спинами собирались в специальной ловушке.

Измерения показали, что концентрация атомов

достигала  $10^{23} \text{ м}^{-3}$  и оставалась на этом уровне в течение двух-трех часов. В дальнейшем авторы надеются повысить концентрацию, чтобы можно было наблюдать макроскопические свойства одноатомного водорода.

В. Ф.

Ниже публикуются материалы вступительных экзаменов в вузы в 1983 году.

## МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

### Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Найдите область определения функции

$$f(x) = \log_2 \sin x + \sqrt{9x - 2x^2 - 4}.$$

2. На координатной плоскости дана точка  $M(2; 4)$ . Рассматриваются треугольники, у которых две вершины симметричны относительно оси  $Oy$  и лежат на дуге параболы  $y = 3x^2$ , выделяемой условием  $-1 < x < 1$ , а точка  $M$  является серединой одной из сторон. Среди этих треугольников выбран тот, который имеет наибольшую площадь. Найдите эту площадь.

3. В равнобедренной трапеции  $ABCD$  углы при основании  $AD$  равны  $30^\circ$ , диагональ  $AC$  является биссектрисой угла  $BAD$ . Биссектриса угла  $BCD$  пересекает основание  $AD$  в точке  $M$ , а отрезок  $BM$  пересекает диагональ  $AC$  в точке  $N$ . Найдите площадь треугольника  $ANM$ , если площадь трапеции  $ABCD$  равна  $(2 + \sqrt{3}) \text{ см}^2$ .

4. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 5 \sin x \cdot \sin y + \frac{5}{2} \cos x \cdot \cos y = 2 \\ \cos x \cdot \sin y - 2 \sin x \cdot \cos y = \frac{6}{5}. \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям  $0 < x < \pi$ ,  $0 < y < \pi$ .

5. На ребре  $SB$  пирамиды  $SABC$  выбраны точки  $D$  и  $E$  так, что  $|SD| = |DE| = 1$ ,  $|BE| = 2$ . Сечения пирамиды плоскостями, перпендикулярными ребру  $SB$  и проходящими через точки  $D$  и  $E$ , имеют площади 5 и 16 соответственно, причем первое из этих сечений — треугольник, одна из вершин которого делит ребро  $SA$  в отношении 2:1, считая от вершины  $S$ . Найдите объем пирамиды.

Вариант 2

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{x-2} < 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2^x.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{5}{4} - \sin^2 x} + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos x + \frac{1}{2}.$$

3. Из вершины  $B$  тупого угла ромба  $ABCD$  проведены высоты  $BM$  и  $BN$ . В четырехугольнике  $BMDN$  вписана окружность радиуса 1 см. Найдите сторону ромба, если  $\angle ABC = 2 \arctg 2$ .

4. В основании прямой призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  лежит ромб  $ABCD$  с углом  $\angle A = 60^\circ$ , все ребра призмы имеют длину  $a$ . Точка  $K$  является ортогональной проекцией точки  $B_1$  на плоскость  $DA_1C_1$ , а точка  $L$  — ортогональной проекцией точки  $K$  на плоскость  $DD_1C_1C$ . Найдите объем пирамиды  $DCLK$ .

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2z^2 - xz + 5xy^2 = 0 \\ xz - z^2 + 3x^2y = 9x^2y^3 \\ z^2 - 2x^2 - 5y^2z = 18x^2y. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Решите уравнение

$$\log_2(x-2) + \log_2(8-x) = 1 + 2 \log_4\left(x - \frac{9}{2}\right).$$

2. Решите неравенство

$$2 - 3x < \sqrt{4 + 9x - 9x^2}.$$

3. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}\left(\frac{6}{25} \pi \cdot \cos^2 2x\right) = \operatorname{tg}(2\pi \cdot \cos^2 x).$$

4. В остроугольном треугольнике  $ABC$  высота  $AD$ , медиана  $BE$  и биссектриса  $CF$  пересекаются в точке  $O$ . Найдите  $\angle C$ , если  $|OE| = 2|OC|$ .

5. Сторона основания правильной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  имеет длину  $a$ , а боковое ребро — длину  $\frac{9}{8}a$ . Точка  $E$  — середина ребра  $AB$ , а точка  $M$  лежит на отрезке  $EC$  и  $|EM| = \frac{1}{4}|EC|$ . Вторая призма симметрична призме  $ABCA_1B_1C_1$  относительно прямой  $MC_1$ . Найдите объем общей части этих призм.

### Физика

Письменный экзамен

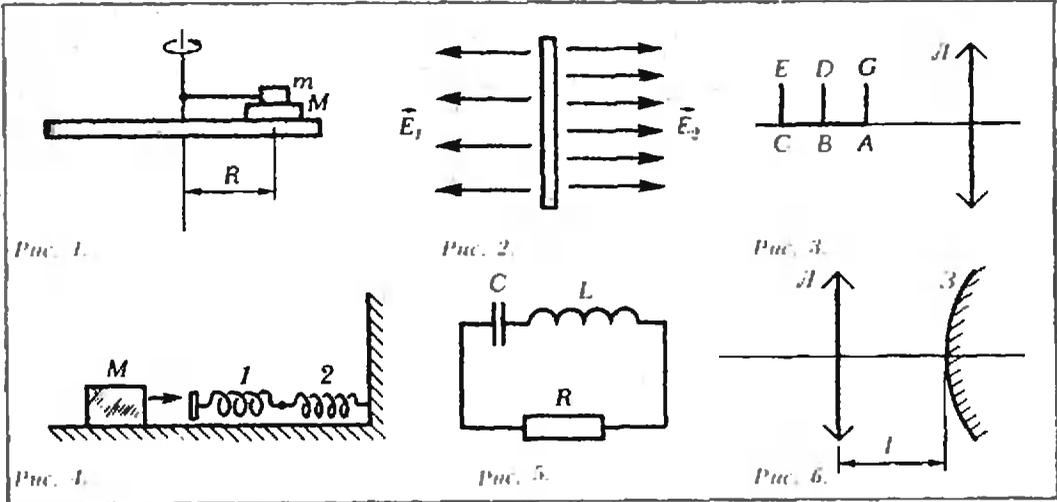
Вариант 1

1. Диск может вращаться вокруг вертикальной оси, перпендикулярной его плоскости (рис. 1). На диске на расстоянии  $R$  от оси лежит небольшой брусок массы  $M$ . На горизонтальной поверхности бруска находится шайба массы  $m$ , прикрепленная к оси нитью. Диск вместе с бруском и шайбой очень медленно увеличивает свою угловую скорость. Коэффициент трения скольжения между шайбой и бруском  $\mu$ . Считая трение между бруском и диском пренебрежимо малым, определите, при какой угловой скорости  $\omega$  брусок начнет выскальзывать из-под шайбы.

2. Во время профилактического ремонта дно лодки-плоскодонки оклеили слоем пластика толщиной  $d = 3$  см. После этого высота надводной части лодки уменьшилась на величину  $h = 1,8$  см. Определите плотность пластика  $\rho$ .

3. Напряженность однородного электрического поля слева от бесконечной заряженной плоской пластины равна  $E_1$ , а справа  $E_2$  (рис. 2). Определите силу  $f$ , действующую на единицу площади пластины со стороны электрического поля.

4. С помощью тонкой линзы получено изображение трезубца  $ABCEGD$ , у которого  $|AB| = |BC|$  (рис. 3). Основание трезубца



АС лежит на главной оптической оси линзы. Отрезок АВ изображается с увеличением  $\beta_1=6$ , а отрезок ВС — с увеличением  $\beta_2=3$ . Определите, с каким увеличением  $\Gamma_0$  изображается отрезок BD.

**Вариант 2**

1. Тело массы  $M$  налетает на две последовательно соединенные пружины жесткости  $k_1$  и  $k_2$  (рис. 4). Максимальная энергия деформации пружины 2 оказалась равной  $E$ . Определите начальную скорость тела  $v$ .

2. При нагревании серебряного проводника сечения  $S=5 \cdot 10^{-2} \text{ мм}^2$  его сопротивление возросло на  $\Delta R=1,5 \cdot 10^{-2} \text{ Ом}$ , а внутренняя энергия увеличилась на  $\Delta U=1,6 \text{ Дж}$ . Найдите температурный коэффициент сопротивления серебра  $\alpha$ . Плотность серебра  $\rho=10,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , удельная теплоемкость  $c=235 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ , удельная проводимость  $\sigma=0,62 \cdot 10^8 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$ .

3. В колебательном LCR-контуре (рис. 5) сопротивление невелико, так что колебания в нем затухают слабо. Для получения незатухающих колебаний поступают следующим образом: дважды за период в моменты, когда заряд конденсатора максимален, его пластины быстро раздвигают от расстояния  $d_1$  до расстояния  $d_2$ , а в моменты, когда заряд равен нулю, их быстро сдвигают до прежнего расстояния (так называемый параметрический резонанс). При каком относительном изменении расстояния между обкладками  $\Delta d/d$  колебания в контуре затухать не будут?

4. За положительной линзой  $L$  с фокусным расстоянием  $F=24 \text{ см}$  на расстоянии  $l=4 \text{ см}$  расположено выпуклое сферическое зеркало  $Z$ . Эта система линза+зеркало отражает лучи, параллельные оптической оси линзы, точно в обратном направлении. Определите радиус кривизны зеркала  $R$  (рис. 6).

Публикацию подготовили  
С. П. Коновалов, А. В. Шелагин

## Московский институт электронного машиностроения

Математика  
Письменный экзамен

**Вариант 1**

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ (x+z)(y+z)=15 \\ (y-1)(x+z)=4 \end{cases}$$

2. При повороте координатной плоскости на угол  $\alpha$  с центром в точке  $M$  точка  $A(1; 2)$  переходит в  $A_1(6; 5)$ , а  $B(1; 4)$  в  $B_1(4; 5)$ . Найдите образ точки  $C(1; 3)$ . Найдите образ еще одной точки (по Вашему выбору). Найдите величину угла  $\alpha$  и координаты точки  $M$ .

3. Какие из графиков функций  $y=2x^2-x$ ,  $y=x^3+6x^2-5$ ,  $y=3x^2+2x$ ,  $y=\cos x$ ,  $y=\frac{1}{2^{x-1}-1}$  имеют центр симметрии?

4. При каких значениях  $a$  наименьшее значение функции

$$y=x^2+(a+4)x+2a+3$$

на отрезке  $[0; 2]$  равно  $-4$ ?

5. При каких значениях  $a, b, c$  равенство

$$a \cdot \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + b \cdot \sin 2\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + c \cdot \sin(x + \pi) = 0$$

выполняется при  $x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right\}$ ? При каких значениях  $a, b, c$  это равенство выполняется для всех  $x \in \left[\frac{1}{8}; \frac{1}{3}\right]$ ?

**Вариант 2**

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-3y=-5 \\ \frac{x}{3y} - \frac{2y}{x} = -\frac{23}{6} \end{cases}$$

2. Точки  $A(1; 1)$  и  $B(5; 1)$  являются вершинами острых углов равнобедренного прямо-

углового треугольника  $ABC$ , имеющего общие точки с осью  $Ox$ . Треугольник  $A_1B_1C_1$  является образом треугольника  $ABC$  при его симметрии относительно оси  $Ox$ . Найдите площадь общей части этих треугольников и укажите все перемещения, при которых треугольник  $A_1B_1C_1$  переходит в треугольник  $ABC$ .

3. Решите уравнение

$$\sqrt{1-\sqrt{3}} \cos x + \sqrt{10} \sin x = 0.$$

4. Какие из следующих функций являются и какие не являются периодическими:

$$y = 3 - 2x^2, \quad y = -2x^3 - 3x + 2, \quad y = 2 + 3 \operatorname{ctg} \frac{x}{3}.$$

$$y = 2 \cos \frac{3x}{2} - 3 \sin 2x, \quad y = \cos x^2, \quad y = \cos^2 x?$$

Для периодических функций укажите их наименьший положительный период.

5. При каких значениях  $a, b, c, d$  равенство

$$a \cdot \cos 2x = b \cdot \cos^2 x + c \cdot \cos x + d$$

является тождеством?

**Физика**

*Задачи устного экзамена*

1. Два груза, массы которых  $m_1 = 0,3$  кг и  $m_2 = 0,5$  кг, связаны невесомой и нерастяжимой нитью, перекинутой через блок массой  $m = 0,2$  кг (рис. 1). Считая, что масса блока сосредоточена в его ободе, и пренебрегая сопротивлением движению, определите силы натяжения нити по обе стороны от блока. Проскальзывание между блоком и нитью отсутствует.

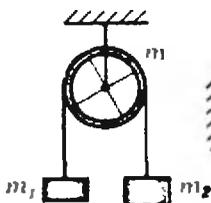


Рис. 1.

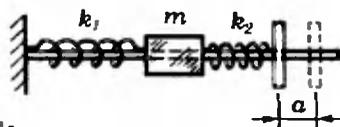


Рис. 2.

2. Груз массой  $m = 0,25$  кг прикреплен к двум невесомым пружинам с жесткостями  $k_1 = 150$  Н/м и  $k_2 = 250$  Н/м (рис. 2). Первоначально пружины находятся в ненапряженном состоянии. Затем в некоторый момент времени правый конец пружины с жесткостью  $k_2$  очень быстро сдвигают влево на расстояние  $a = 0,04$  м и удерживают его в этом положении. Определите скорость, с которой груз проходит положение равновесия, и амплитуду колебаний груза.

3. Газ совершает круговой процесс, изображенный на рисунке 3. Какая работа может быть совершена за один цикл при таком процессе, если наименьшая температура газа

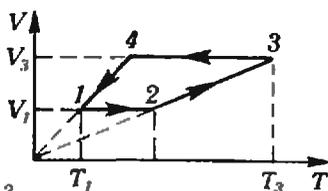


Рис. 3.

$t_1 = 0^\circ\text{C}$ , а наибольшая  $t_3 = 127^\circ\text{C}$ ? Объем газа при температуре  $t_1$  равен  $V_1 = 5$  л, при  $t_3 - V_3 = 6$  л, а при нормальных условиях данное количество газа занимает объем  $V_0 = 10$  л.

4. В закрытый сосуд объемом  $V = 10$  л помещают несколько капель воды общей массой  $m = 0,258$  г. Затем начинают увеличивать температуру сосуда, причем настолько медленно, что все время поддерживается равновесие между паром и жидкостью. При температуре  $t = 27^\circ\text{C}$  вода полностью испарилась. Определите давление насыщенных паров воды при этой температуре.

5. В сосуде имеются некоторое количество воды и такое же количество льда ( $m_w = m_l$ ) в состоянии теплового равновесия. Через сосуд пропускают водяной пар при температуре  $t_n = 100^\circ\text{C}$ . Пренебрегая теплоемкостью сосуда и потерями тепла на нагревание окружающего воздуха, найдите установившуюся температуру воды в сосуде, если масса пропущенного пара равна первоначальной массе воды. Удельная теплота плавления льда  $\lambda = 3,3 \cdot 10^5$  Дж/кг, а удельная теплота парообразования воды  $r = 2,3 \times 10^6$  Дж/кг. Атмосферное давление нормальное.

6. Найдите напряжения на конденсаторах, емкости которых  $C_1 = 2$  мкФ и  $C_2 = 3$  мкФ, если ЭДС источников  $\mathcal{E}_1 = 3$  В и  $\mathcal{E}_2 = 8$  В (рис. 4).

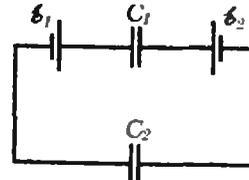


Рис. 4.

7. Две проводящие сферы, радиусы которых  $r_1 = 1$  см и  $r_2 = 0,5$  см, соединены через изолирующие прокладки пружинной с жесткостью  $k = 100$  Н/м и длиной  $l_0 = 9,9$  см. Одной из сфер сообщают заряд  $q$ , а затем сферы соединяют тонким гибким проводом. При этом расстояние между сферами становится равным  $l = 10,5$  см. Найдите заряд  $q$ , если до его сообщения сила натяжения пружины была равна нулю.

8. При электролизе раствора медного купороса на катоде за некоторое время выделилось  $m = 2$  г меди при токе  $I = 0,25$  А. Расстояние между прямоугольными электродами было равно  $l = 30$  см, площадь каждого электрода  $S = 50$  см<sup>2</sup>. Найдите изменение расхода электроэнергии, требуемой для получения того же количества меди при том же токе через ванну, если расстояние между электродами увеличилось вдвое, а глубина погружения электродов увеличилась в четыре раза. Удельное сопротивление раствора  $\rho = 0,33$  Ом · м, электрохимический эквивалент меди  $k = 3,3 \cdot 10^{-7}$  кг/К.

9. Точечный источник света расположен на расстоянии  $d = F$  справа от рассеивающей линзы на ее главной оптической оси ( $F$  — фокусное расстояние линзы). Слева от линзы на расстоянии  $l = 2F$  находится плоское зеркало, перпендикулярное главной оптической оси линзы. Сколько изображений источника формирует данная оптическая система? Являются ли эти изображения действительными?

вительными или мнимыми? Определите расстояние от этих изображений до линзы.

★ 10. При лобовом столкновении атома водорода, двигавшегося со скоростью  $v_0 = 7 \cdot 10^4$  м/с, с покоящимся атомом водорода был испущен световой квант с длиной волны  $\lambda = 1220$  Å. Пренебрегая импульсом кванта, определите скорости атомов после столкновения (атомы движутся вдоль одной прямой). Масса атома водорода  $m = 1,67 \times 10^{-27}$  кг, постоянная Планка  $h = 6,62 \times 10^{-34}$  Дж · с.

Публикацию подготовили  
Г. В. Ефашкин, В. А. Тонян

## Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

### Математика

#### Письменный экзамен

#### Вариант I

(математический факультет)

#### 1. Вычислите

$$\left(1 \frac{11}{18} + 1 \frac{19}{24}\right) \cdot \frac{16}{49} \\ 37 \frac{1}{3} : 3,5 - 3 \frac{5}{6}$$

#### 2. Решите неравенство

$$(6,25)^{x+8} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{x^2+1} < 1.$$

#### 3. Решите уравнение

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = 1.$$

4. Около шара описан конус, высота которого вдвое больше диаметра шара. Найдите отношение площадей полной поверхности конуса и поверхности шара.

5. В равнобедренном треугольнике длина основания равна 30 см, длины высоты, проведенной к основанию, — 20 см. Определите длину высоты, проведенной к боковой стороне.

#### Вариант 2

(физический факультет)

1. Исследуйте функцию  $y = x^3 - 12x$  и постройте ее график.

#### 2. Решите уравнение

$$\log_2(5-x) + 2 \log_2 \sqrt{3-x} = 0.$$

3. Дан треугольник ABC: A (-1; 4), B (5; 1), C (2; -2). Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный, найдите длину медианы AD.

#### 4. Решите уравнение

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x}.$$

5. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, основание которого равно  $a$  и угол при основании  $\beta$ . Определите объем призмы, если ее боковая поверхность равна сумме площадей ее оснований.

### Вариант 3

(географический факультет)

#### 1. Решите уравнение

$$(\sin x - \cos x)^2 + \lg x = 2 \sin^2 x.$$

#### 2. Решите уравнение

$$2 \lg(x+2) = 2 \lg 3.$$

3. Найдите объем правильного тетраэдра, если длина его ребра равна  $a$ .

4. Бригада рабочих должна была изготовить 8000 одинаковых деталей в определенный срок. Фактически эта работа была окончена на 8 дней раньше срока, так как бригада изготовляла ежедневно на 50 деталей больше, чем это было намечено по плану. В какой срок должна быть окончена работа?

### Физика

#### Задачи устного экзамена

1. Поезд длиной  $l = 120$  м движется по мосту равномерно со скоростью  $v = 18$  км/ч. За какое время поезд пройдет мост, если длина моста  $L = 480$  м?

2. Свободно падающее тело в последнюю секунду своего движения проходит половину всего пути. Определите время падения и высоту, с которой тело падало без начальной скорости.

3. Тело, брошенное вертикально вверх, вернулось в точку бросания через  $t = 10$  с. Какова начальная скорость тела? На какую максимальную высоту оно поднималось?

4. Два груза с массами  $m_1 = 9$  кг и  $m_2 = 11$  кг висят на концах нити, переброшенной через легкий блок. С каким ускорением движутся грузы? Каково натяжение нити?

5. Сани массой  $m = 60$  кг спускаются с горы длиной  $l = 100$  м и высотой  $h = 10$  м, преодолевая силу сопротивления  $F_c = 20$  Н. Какой будет скорость саней в конце горы?

6. На какой угол надо отклонить нить с подвешенным к ней грузом, чтобы при прохождении положения равновесия натяжение нити было в 2 раза больше веса груза?

7. В запаянной с одного конца узкой стеклянной трубке, расположенной горизонтально, находится воздушный столбик длиной  $l = 50$  см, запертый столбиком ртути длиной  $h = 19$  см. Как изменится длина воздушного столбика, если трубку поставить вертикально открытым концом вверх? Атмосферное давление  $p_a = 760$  мм рт. ст.

8. Аккумулятор с ЭДС  $\mathcal{E} = 10$  В и внутренним сопротивлением  $r = 1$  Ом замкнут на резистор и выделяет в нем мощность  $P = 9$  Вт. Определите разность потенциалов на клеммах аккумулятора.

9. Под каким углом следует направить луч на поверхность стекла, показатель преломления которого  $n = 1,54$ , чтобы угол преломления получился равным  $\beta = 30^\circ$ ?

10. С помощью фотоаппарата «Зенит», дающего снимки размером  $24 \times 36$  см, фотографируют Останкинскую телевизионную башню, высота которой приблизительно равна  $H = 530$  м. На каком наименьшем расстоянии следует встать фотографу, чтобы вся башня уместилась на снимке? Фокусное расстояние объектива фотоаппарата  $F = 5$  см.

Публикацию подготовили  
В. С. Копылов, О. Ю. Овчинников,  
О. С. Редкозубова



Системы линейных уравнений

$$22. \quad x = \frac{a + b\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{1 - a^2 + b^2}}, \quad y = \frac{b + a\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{1 - a^2 + b^2}}. \quad \text{Решение.}$$

Положив  $\sqrt{x^2 - y^2} = v$ , перепишем данную систему в виде

$$\begin{cases} x - yv = a\sqrt{1 - v^2} \\ -xv + y = b\sqrt{1 - v^2} \end{cases} \quad (1)$$

Решив сейчас линейную систему относительно  $x, y$ , получим

$$\begin{cases} x = \frac{a + bv}{\sqrt{1 - v^2}} \\ y = \frac{b + av}{\sqrt{1 - v^2}} \end{cases}$$

Возведя уравнения системы (1) в квадрат и вычтя второе уравнение из первого, найдем, учитывая  $v \neq 1, v = \sqrt{a^2 - b^2}$ , откуда и следует ответ. Поскольку мы воспользовались следствием из уравнений системы, надо бы сделать проверку; вместо этого можно заметить, что формулы в ответе — такие же, как в данной системе, если заменить  $x$  на  $a$  и  $-y$  на  $b$ ; поэтому ее уравнения следуют из формул ответа.

Московский физико-технический институт

Математика

Вариант 1

1.  $\left[ \frac{1}{2}; \pi \right]$ .

2.  $3\frac{5}{9}$ . Указание. Пусть точки

$A(-x, 3x^2)$  и  $B(x, 3x^2)$ , где  $0 < x < 1$ , — вершины рассматриваемых треугольников. Третья вершина  $C$  определена неоднозначно, поскольку точка  $M$  может быть серединой как  $[AC]$ , так и  $[BC]$ , но в обоих случаях площадь треугольника подучается одна и та же.

3.  $\frac{3}{2}(\sqrt{3}-1) \text{ см}^2$ . Указание. Воспользовавшись подобием треугольников  $ANM$  и  $BCN$ , найдите в  $\triangle ANM$  высоту, опущенную из вершины  $N$ .

4.  $\left\{ \left( \arccos \frac{4}{5}; \arccos \left( -\frac{5}{13} \right) \right); \arccos \left( -\frac{4}{5}; \pi \right) \right\}$  Указание. Решите (линейную!) систему относительно  $\sin y$  и  $\cos y$ , затем примените тождество  $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ .

Проще, однако, умножить первое уравнение системы на 2, второе — на 5, возвести их в квадрат и сложить.  
5. 30. Решение. Обозначим через  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  плоскости сечений, проведенных через точки  $D$  и  $E$ . Пусть  $M = [SA] \cap \alpha_1, N = (SC) \cap \alpha_1, F = (AB) \cap \alpha_2, T = (SA) \cap \alpha_2$ . Так как по условию первое сечение является треугольником,  $N \in [SC]$  (рис. 1). Из треугольника  $ASB$  видно,

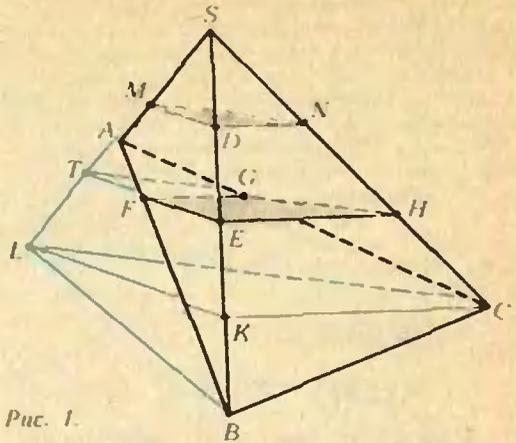


Рис. 1.

что  $FE \parallel [AB]$ , поскольку  $|SD| = |DE|$ , а  $|SM| = 2|MA|$ . Проведя через точку  $A$  прямую, параллельную  $(MD)$ , при помощи подобных треугольников найдем  $|FE| = \frac{6}{5}|MD|$ . Если бы плоскость  $\alpha_2$  пересекла отрезок  $BC$  в некоторой точке  $P$ , то вторым сечением был бы  $\triangle FEP$ , в котором  $|EP| < 2|DN|$  (действительно, если  $(EP) \cap (SC) = Q$ , то  $|EP| < |EQ|$ , а  $|EQ| = 2|DN|$ , так как  $|SD| = |DE|$ ); из  $\widehat{MDN} = \widehat{FEP}$  тогда вытекало бы

$$S_{FEP} = \frac{|FE| \cdot |EP|}{|MD| \cdot |DN|} \cdot S_{MDN} < \frac{6}{5} \cdot 2 \cdot 5 = 12,$$

что противоречит условию задачи. Следовательно, плоскость  $\alpha_2$  пересекает отрезок  $SC$  и второе сечение будет четырехугольником  $EFGH$ , где  $G = [AC] \cap \alpha_2, H = [SC] \cap \alpha_2$ . Коэффициент подобия треугольников  $ETH$  и  $DMN$  равен 2, поэтому  $S_{ETG} = S_{ETH} - S_{EFGH} = 4$ .

Из  $|FT| = \frac{4}{5}|DM|, \widehat{FTG} = \widehat{DMN}$ , следовательно,

$$\frac{|TG|}{|MN|} = \frac{S_{ETG}}{S_{DMA}} \cdot \frac{|DM|}{|FT|} = 1; \text{ значит,}$$

$$|TG| = |GH| \cdot |MN|.$$

Если  $O$  — середина  $[NH]$ , то  $[AO] \parallel [GH], |AO| = \frac{3}{2}|GH|$  и из подобия  $\triangle AOC \sim \triangle GHC$  следует  $|CH| = 2|HO|$ , то есть точки  $N$  и  $H$  делят  $[SC]$  на три равные части. Поэтому, если мы проведем через точку  $C$  плоскость  $\alpha_3 \parallel \alpha_1$  и положим  $K = [SB] \cap \alpha_3$  и  $L = (SA) \cap \alpha_3$ , то  $|SA| = |AL|$ . Отсюда следует, что точки  $S$  и  $L$  равноудалены от плоскости  $ABC$  и  $V_{SABC} = V_{LABC}$ . Значит,

$$V_{SABC} = \frac{1}{2}V_{SLBC} = \frac{1}{2}V_{SKLC} + \frac{1}{2}V_{BKLC} =$$

$$= \frac{1}{6}|BS| \cdot S_{KLC} = 30, \text{ так как } (BS) \perp (CKL),$$

$$\text{а } S_{KLC} = 9S_{DMN} = 45. \text{ З а м е ч а н и е.}$$

Задача сознательно переопределена составителями для облегчения решения: условие «первое из этих сечений — треугольник» вытекает из остальных условий.

В а р и а н т 2

1.  $\left[ \frac{1}{2}; +\infty \right]$ .

2.  $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k (k \in \mathbb{Z})$ .

3.  $\frac{15}{4}$  см. Указание. Если  $O$  — центр окружности, а  $K$  — точка касания окружности с прямой  $DM$ , то  $|KM|=1$ .

4.  $\frac{3\sqrt{3}}{50} a^3$ . Указание. Если  $O$  — середина отрезка  $B_1D_1$ , то точка  $K$  является проекцией точки  $B_1$  на прямую  $DO$ .

5.  $\left\{ (0; y; 0), \text{ где } y \text{ — любое, } \left(-\frac{1}{2}; -1; 1\right) \right\}$ .

Указание. Заметим, что при  $x \neq 0$ , разделив все уравнения на  $x^2$ , мы сможем через переменные  $y$  и  $t = \frac{z}{x}$  выразить все слагаемые, за исключением двух — одного в первом и одного в третьем уравнениях. Сначала рассмотрим случай  $x=0$ . Затем при  $x \neq 0$  сложите первое уравнение системы, умноженное на  $\frac{z}{x^2}$ , с третьим уравнением системы, умноженным на  $\frac{1}{x^2}$ ; после сокращения на 2 получится  $t^3 - 1 = 9y$ . К этому уравнению прибавьте второе уравнение системы, умноженное на  $\frac{3}{x^2}$ ; получится  $(t-1)^3 = 27y^3$ .

Вариант 3.

1.  $\{7\}$ .

2.  $\left] 0; \frac{4}{3} \right]$ .

3.  $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, x_2 = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{5}{6}\right) + \pi l (k, l \in \mathbb{Z})$ . Указание. Уравнение  $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta$  равносильно системе

$$\begin{cases} \sin(\alpha - \beta) = 0 \\ \cos \alpha \neq 0 \\ \cos \beta \neq 0. \end{cases}$$

Не забудьте, что  $|\cos \gamma| \leq 1$ .

4.  $\arccos \frac{1}{7}$ . Указание. Выразив  $|CO|$  и  $|CE|$  через  $|DC|$  и  $\angle C$ , примените к треугольнику  $COE$  теорему косинусов. З а м е ч а н и е. Задача сознательно переопределена составителями для облегчения решения: условие « $\triangle ABC$  — остроугольный» вытекает из остальных условий.

5.  $\frac{5\sqrt{3}}{48} a^3$ . Решение. Проведем через  $M$

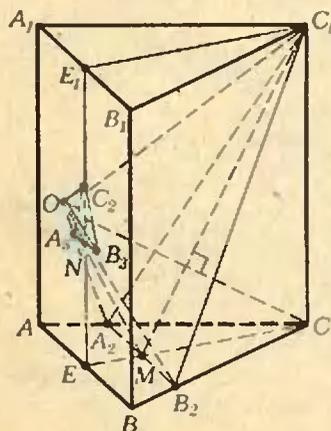


Рис. 2.

прямую, параллельную  $(AB)$ ; обозначим через  $A_2$  и  $B_2$  точки ее пересечения с ребрами  $AC$  и  $BC$  (рис. 2). Тогда  $(C_1CE) \perp (C_1A_2B_2)$ ,  $(MC_1) = (C_1CE) \cap (C_1A_2B_2)$  и симметрия относительно прямой  $MC_1$  есть композиция симметрий относительно плоскостей  $C_1CE$  и  $C_1A_2B_2$ . Но  $(C_1CE)$  — плоскость симметрии призмы  $ABCA_1B_1C_1$ ; следовательно, общая часть призм будет симметрична относительно  $(C_1A_2B_2)$ . Поэтому достаточно взять точку  $O$ , симметричную  $C$  относительно  $(MC_1)$ , и найти удвоенный объем общей части пирамиды  $OA_2B_2C_1$  и призмы  $ABCA_1B_1C_1$ . Пусть  $E_1$  — середина  $[A_1B_1]$ ,  $N = (OM) \cap [EE_1]$ ; из

$$\operatorname{tg} \widehat{C_1MC} = \frac{9}{8} a; \quad \frac{3\sqrt{3}}{8} a = \sqrt{3} \text{ и } \widehat{C_1MO} = \widehat{C_1MC}$$

следует  $\widehat{OME} = 60^\circ$ ; отсюда  $|MN| = \frac{1}{2} |EC|$ ,

а так как  $|MO| = |MC| = \frac{3}{4} |EC|$ ,  $O$  расположена вне призмы  $ABCA_1B_1C_1$ . Пусть  $[OC_1] \cap [EE_1] = C_2$ . Тогда  $\widehat{E_1C_1C_2} = 90^\circ - 2\widehat{MC_1C} = 30^\circ$ ,

$$|C_1C_2| = a \text{ и } |OC_2| = \frac{a}{8}.$$

Положим  $A_3 = [OA_2] \cap [AA_1B_1B_1]$ ,  $B_3 = [OB_2] \cap [AA_1B_1B_1]$ . Если из пирамиды  $OA_2B_2C_1$  удалить пирамиду  $OA_3B_3C_2$ , останется общая часть призм  $ABCA_1B_1C_1$  и пирамиды  $OA_2B_2C_1$ . Учитывая,

$$\text{что } (C_1O) \perp (OA_2B_2), \text{ а } |A_3B_3| = \frac{1}{3} |A_2B_2| = \frac{a}{4},$$

вычислим объемы этих пирамид:

$$\begin{aligned} V_{OA_2B_2C_1} &= \frac{1}{3} |OC_1| S_{OA_2B_2} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{8} a \cdot \left(\frac{3a}{4}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{OA_3B_3C_2} &= \frac{1}{3} |OC_2| S_{OA_3B_3} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{8} \cdot \left(\frac{a}{4}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Отсюда находим объем общей части призм

$$V = 2(V_{OA_2B_2C_1} - V_{OA_3B_3C_2}) = \frac{5\sqrt{3}}{48} a^3.$$

**Физика**

Вариант 1

1. В системе отсчета, связанной с неподвижным наблюдателем (в инерциальной системе отсчета), на брусок действует единственная сила — сила трения со стороны шайбы. Брусок не будет выскальзывать из-под шайбы, а будет вращаться вокруг оси вместе с диском, пока выполняется условие (второй закон Ньютона)

$$M\omega^2 R < \mu mg.$$

Отсюда находим предельное значение угловой скорости:

$$\omega = \sqrt{\mu mg / (MR)}.$$

2. Запишем условие плавания лодки в начальном состоянии, до ремонта:

$$mg = \rho_v l S g,$$

где  $m$  — масса лодки,  $\rho_v$  — плотность воды,  $l$  — глубина погруженной части лодки,  $S$  — площадь дна. После наклеивания пластика снаружи условие плавания примет вид

$$mg + qdSg = q_n(l+d+h)Sg.$$

Из полученных уравнений находим плотность  $q$  пластика:

$$q = q_n(d+h)/d = 1.6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Если наклеить пластик на дно *внутри* лодки, то условие равновесия будет таким:

$$mg + qdSg = q_n(l+h)Sg,$$

и

$$q = q_n h/d = 0.6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

3. Пусть напряженность внешнего однородного поля равна  $E_0$  и силовые линии этого поля направлены слева направо (см. рис. 2 в статье). Тогда, используя принцип суперпозиции электрических полей, можем записать

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - E_0, \quad E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + E_0.$$

где  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда пластины и  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная. Отсюда находим

$$\sigma = \epsilon_0(E_1 + E_2), \quad E_0 = (E_2 - E_1)/2.$$

Сила, действующая на единицу площади пластины,

$$f = \sigma E_0 = \epsilon_0(E_2^2 - E_1^2)/2.$$

4. Поскольку в задаче речь идет и о продольном увеличении  $\beta$ , и о поперечном увеличении  $\Gamma$ , прежде всего установим связь между ними. Рассмотрим отрезки  $AG$ ,  $AB$  и  $BD$  (см. рис. 3 в статье). Обозначим расстояния точек  $B$  и  $A$  до линзы через  $d_0$  и  $d_1$ , а их изображений — через  $f_0$  и  $f_1$  соответственно. Из формулы линзы имеем

$$\frac{1}{d_0} + \frac{1}{f_0} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}, \quad \text{или} \quad \frac{d_1 - d_0}{d_0 d_1} = \frac{f_0 - f_1}{f_0 f_1}.$$

откуда

$$\beta_1 = \frac{f_1 - f_0}{d_0 - d_1} = \frac{f_0}{d_0} \frac{f_1}{f_1} = \Gamma_0 \Gamma_1.$$

Аналогично для отрезков  $BD$ ,  $BC$  и  $CE$  найдем

$$\beta_2 = \Gamma_0 \Gamma_2,$$

а для отрезка  $AC$  —

$$\beta = \frac{\beta_1 |AB| + \beta_2 |BC|}{|AB| + |BC|} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} = \Gamma_1 \Gamma_2.$$

Таким образом, получаем

$$\frac{\beta_1 + \beta_2}{2} = \frac{\beta_1}{\Gamma_0} \frac{\beta_2}{\Gamma_0}, \quad \text{и} \quad \Gamma_0 = \sqrt{\frac{2\beta_1\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}} = 2.$$

В а р и а н т 2

$$1. v = \sqrt{2E(k_1 + k_2)} / (Mk_1).$$

$$2. \alpha = qS^2 \sigma \Delta R / \Delta U = 3.6 \cdot 10^{-8} \text{ К}^{-1}.$$

3. Поскольку пластины конденсатора раздвигают быстро, заряды на них не изменяются, и контуру передается энергия

$$\Delta E_{\pm} = \frac{q_m^2}{2C_1} - \frac{q_m^2}{2C_2} = \frac{q_m^2}{2C} \frac{\Delta d}{d}.$$

За полпериода в контуре теряется (выделяется в виде тепла) энергия

$$\Delta E_{-} = Q = \frac{I_m^2 R}{2} \frac{T}{2} = \frac{\omega_0^2 q_m^2 R}{2} \frac{\pi}{\omega_0}.$$

Колебания затухать не будут, если  $\Delta E_{+} > \Delta E_{-}$ . Отсюда получаем

$$\frac{\Delta d}{d} > \pi \omega_0 R C = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

$$4. R = F - l = 20 \text{ см.}$$

Московский институт электроного машиностроения

М а т е м а т и к а

В а р и а н т 1

1.  $\{(1; 2; 3), (1; 5; 0), (3; 2; 1), (3; 5; -2)\}$ . У к а з а н и е. Выразите из первого уравнения  $y+z$  и подставьте во второе уравнение, затем выразите  $x+z$  и подставьте в третье.

2.  $M(2; 6)$ ; точка  $M$  переходит к точке  $M_1 = M$ , середина  $C(1; 3)$  отрезка  $AB$  переходит в середину  $C_1(5; 5)$  отрезка  $A_1B_1$ ;  $\alpha = 90^\circ$ . У к а з а н и е. Координаты точки  $M$  являются решением системы

$$\begin{cases} |MA|^2 = |MA_1|^2 \\ |MB|^2 = |MB_1|^2 \end{cases}$$

Их можно найти также как координаты пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам  $AA_1$  и  $BB_1$ ;  $[AB] \perp [A_1B_1]$ .

3. Функция  $y = 2x^3 - x$  — нечетная; следовательно, ее график имеет центр симметрии (начало координат). График функции  $y = \cos x$  конгруэнтен графику нечетной функции  $y = \sin x$ ; следовательно, он имеет центр симметрии. График функции  $y = 3x^2 + 2x$  конгруэнтен графику функции  $y = 3x^2$  (докажите!), не имеющему центра симметрии; следовательно, он не имеет центра симметрии. Чтобы график некоторой функции  $f$  имел центр симметрии  $M(a; b)$ , необходимо и достаточно, чтобы для любого  $x$ , для которого  $a+x \in D_f$ , выполнялось  $a-x \in D_f$  и (рис. 3).

$$f(a+x) + f(a-x) = 2b. \quad (1)$$

Из равенства (1) для функции  $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 5$  при  $x=0$  и при  $x=a$  получаем систему с решениями  $a_1=0$ ,  $b_1=-5$  и  $a_2=-2$ ,  $b_2=11$ ; при  $a_2$ ,  $b_2$  равенство (1) является тождеством; следовательно, график функции  $y = -x^3 + 6x^2 - 5$  имеет центр симметрии. Если точка  $M(a; b)$  является центром симметрии графика функции  $f$  и  $x \notin D_f$ ,  $x \neq a$ , то  $2a-x \notin D_f$ ,  $2a-x \neq a$ . Поскольку для функции

$$f(x) = \frac{1}{2^{x-1} - 1},$$

$D_f$  не содержит одной точки  $x=1$ , абсцисса центра симметрии, если он существует, равна 1; подставив в равенство (1) для этой функции  $a=1$ , получаем, что оно является тождеством при  $b = -\frac{1}{2}$ ; следовательно,

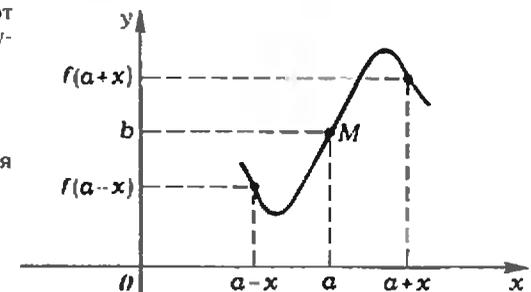


Рис. 3.

график этой функции имеет центр симметрии.

4.  $a = -3\frac{1}{2}$ . Указание. Пусть  $x_0$  — абсцисса вершины параболы. Рассмотрите три случая:  $x_0 < 0$ ,  $0 < x_0 < 2$ ,  $x_0 > 2$ .

б. Ответ на оба вопроса:  $a = b = c = 0$ . Указание. Выразите левую часть через  $\sin x$  и  $\cos x$ ; трехчлен  $at^2 + \beta t + \gamma$  имеет больше двух корней только при  $a = \beta = \gamma = 0$ .

В а р и а н т 2

1.  $\left\{ (1; 2), \left(-4; \frac{1}{3}\right) \right\}$ .

2. 2;  $S_{Ox}$ ,  $Z(3, 0)$ . Указание. При рассматриваемых перемещениях  $[A_1 B_1]$  переходит в  $[AB]$ . Если  $P_1$  — произвольная точка и  $P$  — её образ, то в случае, когда  $A_1$  переходит в  $B$ , а  $B_1$  — в  $A$ , получим

$$\begin{cases} |P_1 A_1| = |PB| \\ |P_1 B_1| = |PA|. \end{cases}$$

Выведите отсюда, что рассматриваемое перемещение есть  $Z(3, 0)$ . Другой случай рассматривается аналогично.

3.  $x = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

4. Периодические:  $y = 2 + 3 \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$  (наименьший положительный период —  $3\pi$ ),  $y = 2 \cos \frac{3x}{2} - 3 \sin 2x$  ( $4\pi$ ),  $y = \cos^2 x$  ( $\pi$ ), остальные — не периодические. Указание. Функция непрерывна в каждой точке  $a \in \mathbb{R}$  и не ограниченная на  $\mathbb{R}$ , не является периодической. Производная периодической функции — периодическая.

5. При любом  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b = 2a$ ,  $c = 0$ ,  $d = -a$ . Указание. Трехчлен  $at^2 + \beta t + \gamma$  имеет больше двух корней только при  $a = \beta = \gamma = 0$ .

Физика

1.  $T_1 = \frac{(2m_2 + m)m_1 g}{m_1 + m_2 + m} = 3,6 \text{ Н};$

$T_2 = \frac{(2m_1 + m)m_2 g}{m_1 + m_2 + m} = 4 \text{ Н.}$

Указание. Запишите основное уравнение движения для каждого груза и для блока.

2.  $v_m = \frac{k_2 a}{\sqrt{m(k_1 + k_2)}} = 1 \text{ м/с};$   $x_m = \frac{k_2 a}{k_1 + k_2} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 2,5 \text{ см.}$  Указание. Воспользуйтесь законом сохранения энергии, имея в виду, что в начальный момент системе сообщили запас энергии  $E = k_2 a^2 / 2$ .

3.  $A = (p_2 - p_1)(V_3 - V_1) = \frac{p_0 V_0}{T_0} \left( \frac{T_3}{V_3} - \frac{T_1}{V_1} \right) \times (V_3 - V_1) \approx 45 \text{ Дж}$  (здесь  $p_0 = 10^5 \text{ Па}$  и  $T_0 = 273 \text{ К}$  — давление и температура при нормальных условиях). Указание. Изобразите данный процесс в координатах  $p, V$ , где работа газа численно равна площади фигуры под соответствующим графиком.

4.  $p = \frac{m RT}{M V} \approx 3573 \text{ Па} \approx 27 \text{ мм рт. ст.}$

5.  $t = 100^\circ \text{С.}$

6.  $U_1 = \frac{(C_2 - C_1)C_2}{C_1 + C_2} = 3 \text{ В};$

$$U_2 = \frac{(C_2 - C_1)C_1}{C_1 + C_2} = 2 \text{ В.}$$

7.  $q = \left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right) (l + r_1 + r_2) \times$

$$\times \sqrt{4\pi\epsilon_0 k (l - l_0) \frac{r_1}{r_2}} \approx 2,1 \cdot 10^{-6} \text{ Кл.}$$

8. Расход энергии уменьшится на  $\Delta W = \frac{m l q l}{2kS} \approx 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.}$

9. Система формирует три мнимых изображения: одно находится справа от линзы на расстоянии  $f_1 = F/2$ , второе — слева от линзы на расстоянии  $f_2 = 9F/2$ , третье — тоже слева на расстоянии  $f_3 = 9F/11$ .

10. Запишем законы сохранения импульса и энергии:

$$\begin{aligned} m v_0 &= m v_1 + m v_2, \\ \frac{m v_0^2}{2} &= \frac{m v_1^2}{2} + \frac{m v_2^2}{2} + \frac{hc}{\lambda}. \end{aligned}$$

Отсюда найдем

$$v_1 = \frac{v_0}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4hc}{m v_0^2 \lambda}} \right) \approx 2 \cdot 10^4 \text{ м/с;}$$

$$v_2 = \frac{v_0}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4hc}{m v_0^2 \lambda}} \right) \approx 5 \cdot 10^4 \text{ м/с.}$$

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

В а р и а н т 1

1.  $\frac{20}{123}$ .

2.  $]-\infty; -3] \cup [5; +\infty[$ .

3.  $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $x_2 = \pm \frac{\pi}{6} + \pi l$  ( $k, l \in \mathbb{Z}$ )

4. 2.

5. 24 см.

В а р и а н т 2

2.  $\{4 - \sqrt{2}\}$ .

3. 4,  $5\sqrt{2}$ .

4.  $x = [1 + (-1)^k] \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

5.  $\frac{\alpha^2 \cdot \sin \beta}{8 \cos \beta (1 + \cos \beta)}$ .

В а р и а н т 3

1.  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

2.  $\{1\}$ .

3.  $\frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$ .

4. За 40 дней.

Физика

1.  $t = (L + l) / v = 120 \text{ с} = 2 \text{ мин.}$

2.  $t = (2 + \sqrt{2}) \tau \approx 3,4 \text{ с}$  (здесь  $\tau = 1 \text{ с}$ );  $h = g t^2 / 2 \approx 57,8 \text{ м.}$

3.  $v_0 = g t / 2 = 50 \text{ м/с}$ ;  $h = g t^2 / 8 \approx 125 \text{ м.}$

4.  $a = g(m_2 - m_1) / (m_1 + m_2) = 1 \text{ м/с}^2$ ;  $T = m_1(g + a) = 99 \text{ Н.}$

5.  $v = \sqrt{2(gh - F_c l/m)} \approx 11,5$  м/с.  
 6.  $\alpha = \arccos \cos^2 \beta = 60^\circ$ .  
 7. Длина воздушного столбика уменьшится на  $\Delta l = lh/(H+h) = 10$  см (здесь  $H=760$  мм).  
 8.  $U_{1,2} = \frac{\mathcal{E}}{2} \pm \sqrt{\frac{\mathcal{E}^2}{4} - Pr}$ ;  $U_1 = 9$  В;  $U_2 = 1$  В.  
 9.  $\alpha = \arcsin(n \sin \beta) \approx 50,3^\circ$ .  
 10.  $d = F(1 + H/h) \approx 74$  м (здесь  $h=36$  см).

#### Геометрический кроссворд (см. «Квант», 1983, № 10)

##### По горизонтали

5. Сторона. 6. Отрезок. 8. Круг. 9. Долгота.  
 10. Точка. 13. Архимед. 14. Аксиома.  
 17. Медиана. 18. Логарифм. 19. Частное.  
 20. Синусоида. 23. Прямоугольник. 24. График.

##### По вертикали

1. Конус. 2. Катет. 3. Лобачевский. 4. Хорда.  
 5. Секущая. 7. Квадрат. 11. Гипербола.  
 12. Биссектриса. 15. Перпендикуляр. 16. Многоугольник. 19. Час. 21. Угол. 22. Длина.

#### Шахматная страничка

(см. «Квант», 1983, № 9, 10)

**Задание 17** (Ортуэста—Санц). Черные эффектно выигрывают: 1...Л:b2!! 2. К:b2 c3! 3. Л:b6 (3. Кd3 c4+ 4. Л:b6 cd) 3...c4!! 4. Лb4 a5!!

5. Ка4 (5. Лb5 c2; 5. Л:c4 cb) 5...ab. Знаменитая шахматная комбинация.

**Задание 18** (Смыслов—Россетто). Экс-чемпион мира выигрывает при помощи пешечного прорыва подобного тому, с которым мы ознакомились в предыдущем примере: 1. cb! Лe1+! 2. Л:e1 Ф:b5 3. ba Фc6 4. Лb1! Крh7 5. Лb8, и пешка проходит в ферзи. Черные сдались.

**Задание 19** (В. Помогалов, 1973 г.). 1. Кра7 Сс8 2. Крb8! Се6 3. с8Ф С:c8 4. Крс7!! Белые не забывают об уроках Рети, после 4. Кр:c8 Крg6 5. Крд7 Кр:f6 им не на что рассчитывать. 4...Крg6 5. Кр:d6! Кр:f6 6. Крс5 с ничьей (поле превращения пешки «а» — черное, а слон белополюсный).

**Задание 20** (А. Ринк, 1922 г.). Маневр Рети встречается и в этюдах на выигрыш, где им пытаются пользоваться (увы, безуспешно) слабая сторона. Данный этюд является классическим на эту тему. 1. a4 Крb3! 2. a5 Крс3! Черный король перемещается в духе Рети — направляясь к своей пешке и приглядываясь к чужой. Если 2...Крс4, то 3. a6 Крд3 4. a7 f2 5. a8Ф f1Ф 6. Фa6+ 3. Крg1! Замысел противника удается разрушить. Не годится ни 3. a6? Крд2!, ни 3. Крg3? Крд4! 3...Крд4 4. a6 Крс3 5. Крf1, и белые побеждают. То, что сейчас произошло на доске, называется «анти-Рети»!

Главный редактор — академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. И. Колмогоров

Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, П. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутеимахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родня, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосниский, В. М. Урогов, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Ё. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаяев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурия, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

#### Повер оформления

М. А. Гусева, М. Б. Дубин, Н. С. Кудрявца,  
 Э. В. Назаров, И. А. Смирнов, Н. Г. Смирнова,  
 Е. К. Тенчурова

Фото: А. А. Кулешовы, В. И. Шевченко

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Главный художник Э. А. Смирнов

Удобжественный редактор Т. М. Макарова

Литректур Т. С. Вайсберг

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1.  
 «Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 23.11.83  
 Подписано к печати 22.12.83  
 Печать офсетная  
 Бумага 70x108 Г/16 Усл.кр.от. 23,8  
 Усл.печ.л. 5,60 Уч.изд.л. 7,10 Т-22275  
 Цена 40 коп. Заказ 3117 Тираж 175020 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени  
 Чеховский полиграфический комбинат  
 ВО «Союзполиграфпром»  
 Государственного комитета СССР  
 по делам издательства, полиграфии  
 и книжной торговли  
 г. Чехов, Московская область

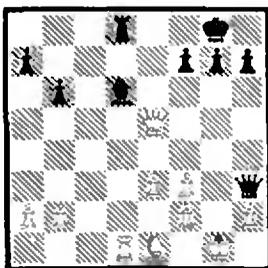
## Шахматная страничка



Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

## РЕНТГЕН

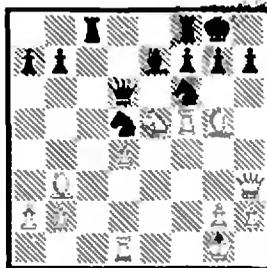
В «Кванте» № 11 за 1983 г. мы рассмотрели несколько примеров на тему связки. Этот комбинационный прием очень часто встречается в партиях. А сегодня на очереди другой прием, который называют сквозным действием фигур или, иначе, рентгеном.



Шанди — Погач  
(Венгрия, 1963 г.)

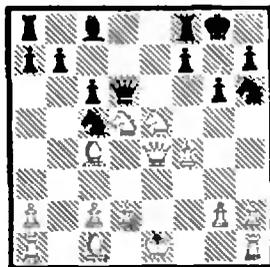
Пока что слышны мотивы связки — нельзя 1...С:e5, а после 1...f6 2.Фd5+ Крf8 у черных много угроз, но их губит связка — 3.Cb4! Сильный ход 1...Фd7, после 2.Фd4 Фe8 3.f4 Сe7! уже белые гибнут из-за связки, однако 3.Ф:d6 Л:d6 4.Л:d6 должно привести к ничьей. Но такой результат черных не устраивает. После 1...Ф:h2+!! противнику приходится сдаваться. Первое впечатление таково, что на доске произошло какое-то недоразумение, ведь между черным ферзем на h2 и слоном d6 находится белый ферзь, то есть черный ферзь не защищен. Но в этом и заключается идея рентгена — лучи, испускаемые слоном, проходят сквозь белого ферзя, и он как будто не существует для слона. После 2.Ф:h2 С:h2+ 3.Кр:h2 Л:d1 у черных решающий материальный перевес.

Пункт f7 нередко оказывается уязвимым местом в лагере черных, и комбинация на рентген позволяет объяснить эту слабость. Вот классический пример на эту тему.



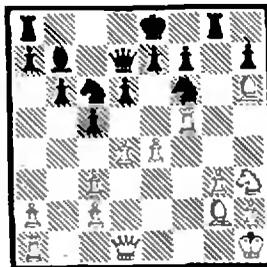
Ботвинник — Видмар  
(Ноттингем, 1936 г.)

Белые слон и ладья воздействуют на поле f7 сквозь коней. 1. К:f7! Л:f7 (1...Кр:f7 2.С:d5+ с выигрышем) 2.С:f6 С:f6 (2...К:f6 3.Л:f6! 4.Ф:c8+) 3.Л:d5 Фс6 4.Лd6!! Только теперь направленность слона на пешку f7 стала видимой, 4...Лс5? сейчас проигрывало ввиду ответа 4...С:d4+! 4...Фe8 5.Лd7. Черные сдались.



Зелевинский — Равинский  
(Москва, 1962 г.)

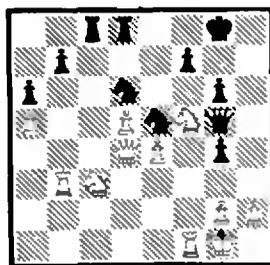
Белыми играл известный физик-теоретик и к тому же мастер спорта СССР по шахматам. Ферзь белых под боем, но физик установил рентгеновский аппарат на с4 и не обращает внимания на своего ферзя. 1.К:f7! К:f7 (1...К:e4 2. К:d6 К:d6 3.Кe7+ Kpg7 4.Cb2+) 2.Кe7+ Kpg7 3.Cb2+ Крh6 4.Фe3! Ка4 5.f5+ г5 6.Фh3×.



Черкасов — Хохлов  
(Киев, 1969 г.)

Слон b7 взял на прицел неприятельского слона g2, конь с6 и пешка e4 ему не помеха. 1...К:e4! 2.С:e4 К:d4!! 3.Лf4 (3. С:b7 Ф:b7+) 3...Кf5

(3...Ф:h3 4.С:b7 Лb8 5.Лh4) 4.Фf3 К:g3+. Белые сдались.

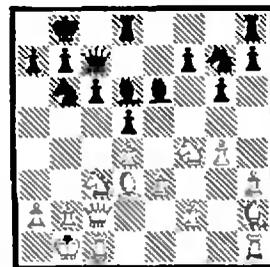


Сабо — Дола  
(Румыния, 1969 г.)

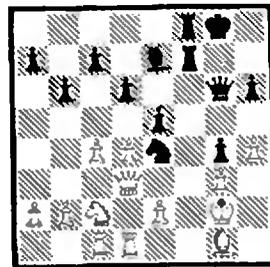
Ферзь g5 устремил свой взгляд на белого короля. Попадающиеся по дороге пешки не в счет. 1...Кf3+! 2.gf К:f5 3.Фf2 (3.ef gf+ 4.Kpf2 Фg2+) 3...g3! 4.Фe1 (4.hg К:g3 5.Фg2 Фe3+ 6.Лf2 Л:c3 с угрозой 7...Кe2+) 4...gh++ 5.Крf2 (5.Кр:h2 Кpg7 и Лh8+) 5...Фg3+ 6.Кре2 Кd4+. Белые сдались.

В этом номере начинается наш очередной шахматный конкурс. Победители его, как и прежде, будут награждены шахматно-математической литературой с автографами ведущих шахматную страничку.

## Конкурсные задания



1. Белые начинают и выигрывают.



2. Черные начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 марта 1984 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант» с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 1, 2».

## КРОССВОРД

По горизонтали. 5. Простой механизм. 6. Кристалл, разновидность углерода. 9. Передающая телевизионная трубка. 11. Синусоидальная составляющая периодического колебания сложной формы с частотой более высокой, чем основной тон. 12. Радиоактивный химический элемент. 13. Устройство для излучения и приема электромагнитных волн. 15. Наборная машина. 16. Переключательное устройство. 17. Вещество, состоящее из макромолекул. 20. Расширение трубы. 23. Приспособление для измерения площадей на планах, картах. 24. Один из первых русских летчиков. 25. Научное сочинение. 27. Топливо. 29. Город, в котором была построена первая в мире атомная электростанция. 30. Оптическая система, в которой устранена хроматическая aberrация. 31. Инертный газ. 32. Древнегреческий ученый.

По вертикали. 1. Электроизмерительный прибор. 2. Квант электромагнитного поля. 3. Физическая величина. 4. Образование полостей в жидкости в результате локального понижения давления. 7. Немецкий физик и инженер, создавший первую промышленную установку для ожижения воздуха. 8. Каучук с большой примесью серы. 10. Человек, прокладывающий новые пути в какой-либо сфере деятельности. 13. Прибор, устройство. 14. Существенное, неотъемлемое свойство объекта. 18. Мера длины в астрономии. 19. Газообразная оболочка Земли. 21. Великий русский ученый, основатель Московского университета. 22. Защитное вооружение из металлических пластин. 26. Отрицательный электрод. 28. Созвездие Южного полушария. 29. Простейшее приспособление для определения направления вертикали.

Составил Г. Н. Плотников

